Pré-vestibular Matemática

SISTEMA DE ENSINO
POLIEDRO

Autoria: Umberto César Chacon Malanga.

Diretor executivo: Nicolau Arbex Sarkis.
Gerência editorial: João Carlos Puglisi.
Coordenação de edição técnica: Marília L. dos Santos G. Ribeiro.
Edição técnica: Equipe de editores técnicos da Editora Poliedro.
Coordenação de produção editorial: Lívia Scherrer dos Santos.
Analista de produção editorial: Claudia Moreno Fernandes.
Coordenação de edição: Michelle Silva da Mata e Vivian Plascak Jorge.
Edição: Equipes de edição da Editora Poliedro.
Coordenação de revisão: Mariana Castelo Queiroz.
Revisão: Equipe de revisão da Editora Poliedro.
Coordenação de arte: Antonio Domingues e Kleber S. Portela.
Diagramação: Equipe de arte da Editora Poliedro.
Ilustrações: Equipes de ilustração e de arte da Editora Poliedro.
Coordenação de licenciamento: Ana Rute A. M. Perugini.
Licenciamento: Equipe de licenciamento da Editora Poliedro.
Projeto gráfico: Alexandre Moreira Lemes e Kleber S. Portela.
Projeto gráfico da capa: Bruno Torres e Varão Monteiro Junior.
Coordenador de PCP: Anderson Flávio Correia.
Impressão e acabamento: nywgraf Editora Gráfica Ltda.

Créditos: capa e frontispício Mircea BEZERGHEANU/Shutterstock **5** Evan Bench/ Flickr **69** Leonardo da Vinci/Web Gallery of Art • © Krysquek | Dreamstime.com **129** David B. Gleason/Wikimedia Commons • Frans Hals/Wikipedia • David B. Gleason/ Wikimedia Commons **contracapa** Martina Vaculikova/Shutterstock.

SISTEMA DE ENSINO
POLIEDRO

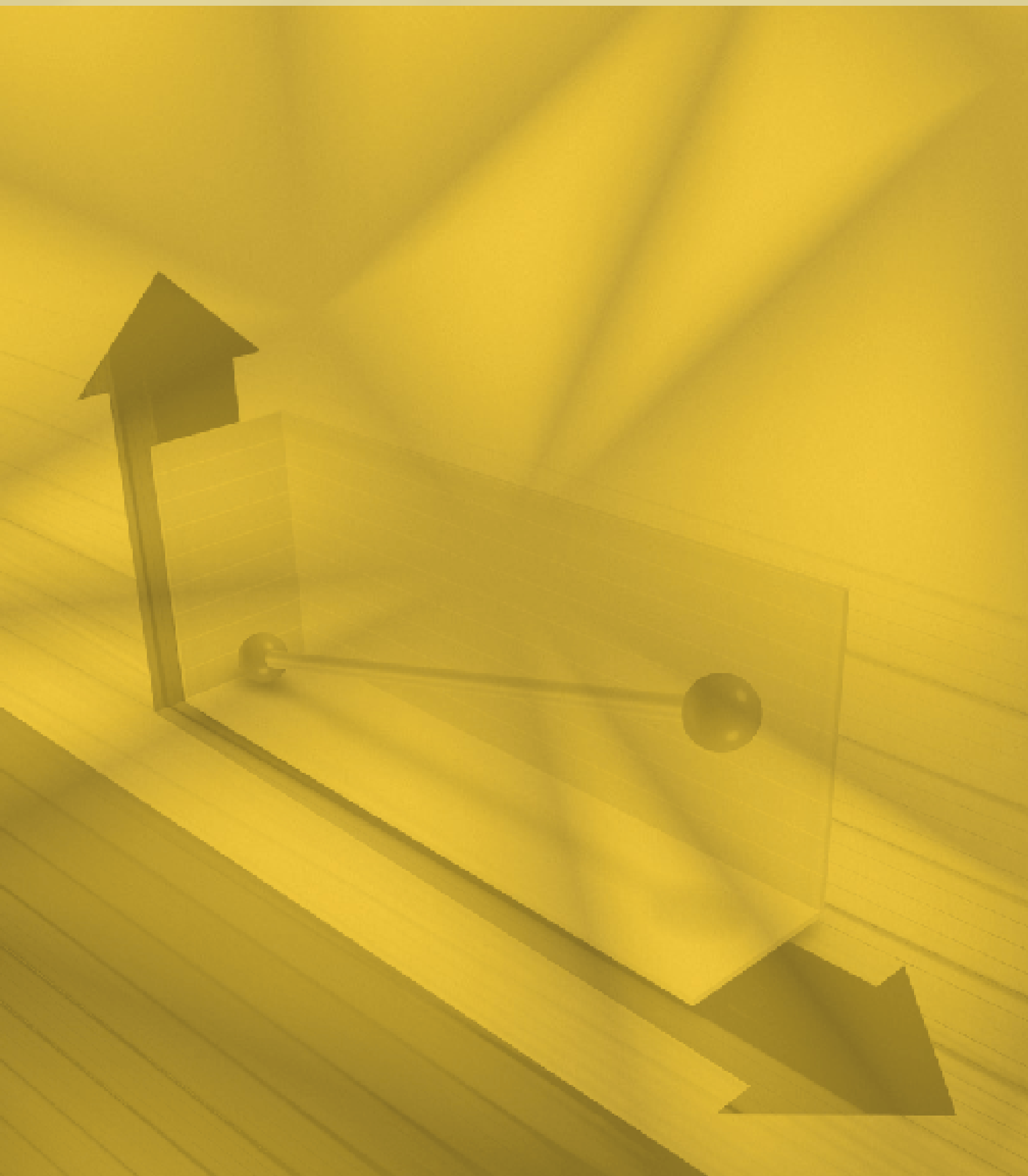
São José dos Campos – SP
ISBN: 978-85-7901-070-5
Telefax: (12) 3924-1616
editora@sistemapoliedro.com.br
www.sistemapoliedro.com.br

SUMÁRIO

Frente 1

Frente 2

Frente 3



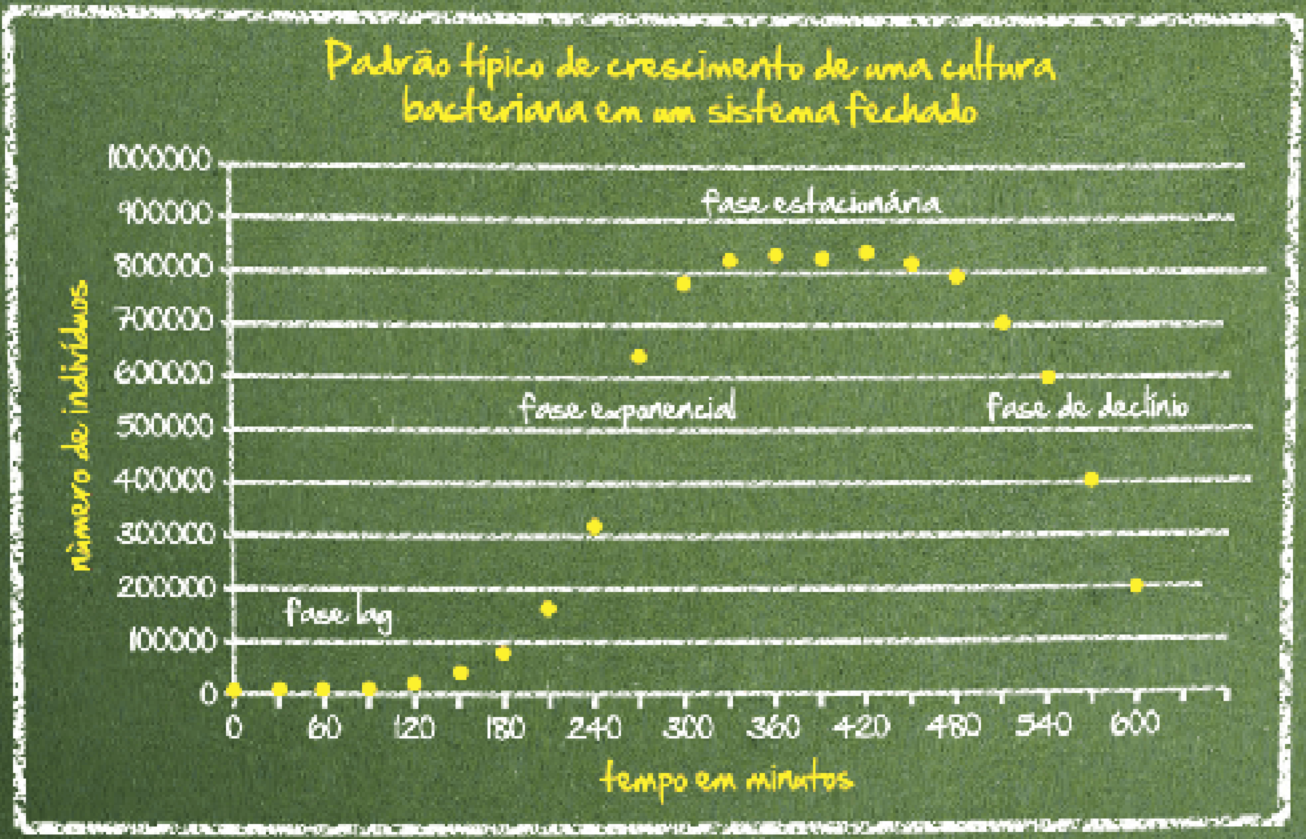
Frente 1

5

FRENTE 1

Funções logarítmicas

RON KLOBERDANZ | DREAMSTIME.COM



Logaritmos são ferramentas matemáticas muito úteis para a simplificação de contas e com diversas aplicações práticas. Um de seus principais usos é na microbiologia, para caracterização do crescimento de bactérias.

Sob condições ótimas de crescimento, muitas espécies bacterianas apresentam um tempo de geração médio de 20 minutos em uma das fases de seu crescimento. Neste caso, em uma cultura real, cada célula da população se divide em algum momento dentro do tempo de geração de 20 minutos, ou seja, 1/20 das células da população se divide a cada minuto. Essa taxa de crescimento é determinada da seguinte maneira:

$$g = \frac{\log N - \log N_0}{\log 2}$$

Se em um inóculo de 10^3 células (No) cresce exponencialmente até $1 \cdot 10^9$(N) células em 13,3 horas, podemos calcular a taxa de crescimento em 1,5 gerações/h. Isso nos permite determinar o crescimento da fase log e exponencial de uma bactéria, além de determinar a eficiência de antibióticos em testes.

Conceito de logaritmo

No capítulo 4 do livro 1, estudamos as equações e inequações exponenciais quando era possível reduzir facilmente as potências à mesma base. Observe: $2^x = 256 \therefore 2^x = 2^8$, logo $x = 8$.

E quando não for possível reduzir à mesma base?

Por exemplo:

$2^x = 5$, sabemos que $2 < x < 3$, pois $2^2 < 5 < 2^3$.

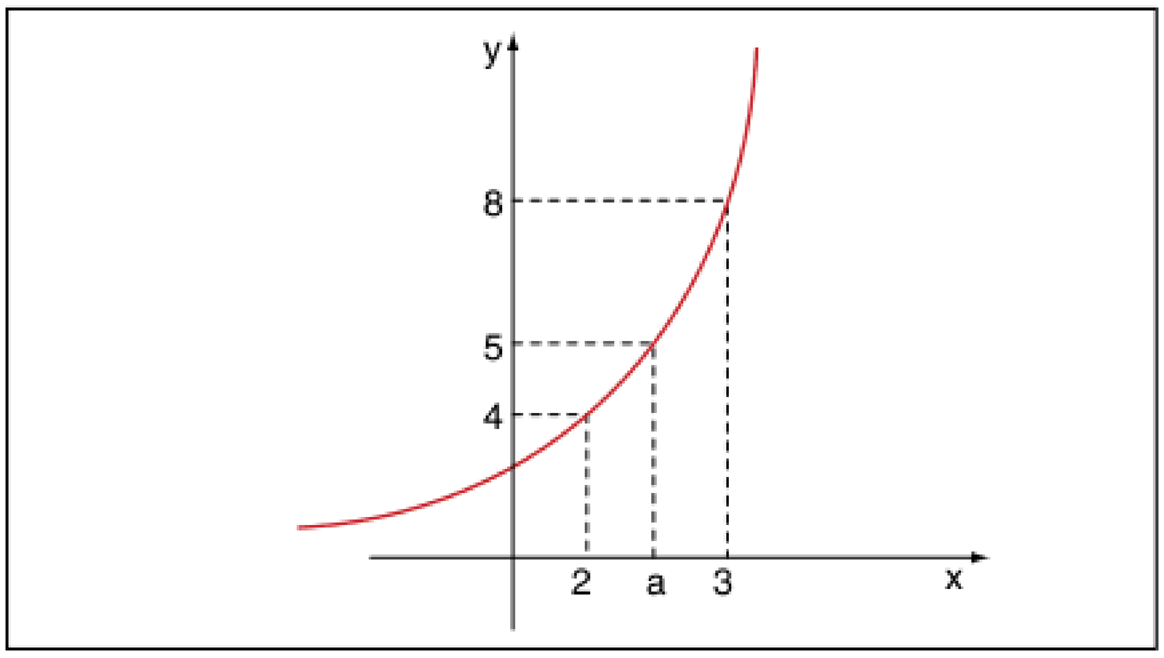


Fig. 1 Gráfico da função $y = 2^x$.

Então, x é um número real a, que na base 2 dá 5, ou seja, $2^a = 5$.

Vamos chamar esse número **a** de **logaritmo**.

Percebemos que tecnicamente o logaritmo é um expoente.

Definição de logaritmo

Seja a e $b \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$, chamamos logaritmo de **b** na base **a** o expoente que se deve dar à base **a**, de modo que o resultado obtido seja igual a **b**. Simbolicamente:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

a: base do logaritmo

b: logaritmando ou antilogaritmo

x: logaritmo

Exemplo 1

- $\log_3 27 = 3$, pois $3^3 = 27$
- $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$
- $\log_{10} \dfrac{1}{100} = -2$, pois $10^{-2} = \dfrac{1}{100}$
- $\log_{0,5} 64 = -6$, pois $(0,5)^{-6} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

Esses exemplos são quase que feitos mentalmente, basta ter o conceito de que logaritmo é um expoente. Mas se o exercício tiver uma "aparência estranha", basta aplicar a definição. Observe o exemplo 2 a seguir.

Exemplo 2

$\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt[3]{32} = x$ pela definição temos $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt[3]{32}$, o problema torna-se uma equação exponencial:

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2.\sqrt[3]{2^5} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2.2^{\frac{5}{3}} \therefore 2^{\frac{x}{2}} = 2^{1+\frac{5}{3}} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{8}{3}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{8}{3}$$

Portanto, o logaritmo vale $\dfrac{16}{3}$.

ATENÇÃO!

O logaritmando também é chamado de antilogaritmo. Observe: $\log_3 9 = 2 \Rightarrow 9$ é o antilogaritmo. Podemos também escrever que $\text{antilog}_3 2 = 3^2 = 9$.

Resultados importantes da definição

Considerando b e $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$, observe:

P1 $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

P2 $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

P3 $a^{\log_a b} = b$, para justificar essa propriedade, observe: $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, mas $x = \log_a b$, substituindo, temos $a^{\log_a b} = b$.

Observe os exemplos:

Exemplo 3

- $27^{\log_3 2} = (3^3)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^3 = 2^3 = 8$
- $25^{1 + \log_5 2} = 25.25^{\log_5 2} = 25.5^{2.\log_5 2} =$

  $25.\left(5^{\log_5 2}\right)^2 = (25).(2^2) = 25.4 = 100$
- $\text{antilog}_2{}^{(\log_2 3)} = 2^{\log_2 3} = 3$

Propriedade dos logaritmos

Observe agora as principais propriedades dos logaritmos, que facilitaram muito os cálculos laboriosos dos astrônomos.

P1 Logaritmo do produto

Se $a > 0$ e $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0 \Rightarrow$

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Demonstração:

$\log_a (bc) = x$, $\log_a b = y$ e $\log_a c = z$

$a^x = bc$, $a^y = b$ e $c = a^z$ então:

$a^x = a^y a^z \therefore a^x = a^{y+z} \Rightarrow x = y + z$.

P2 Logaritmo do quociente

Se $a > 0$ e $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0 \Rightarrow$

$\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Demonstração:

$\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = x$, $\log_a b = y$ e $\log_a c = z$

$a^x = \dfrac{b}{c}$, $a^y = b$ e $a^z = c$; então:

$a^x = \dfrac{a^y}{a^z} \therefore a^x = a^{y-z} \Rightarrow x = y - z$

Observação: $\log_a \left(\dfrac{1}{b}\right) = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b$

Por definição: $\text{colog}_a b = -\log_a b$

$\text{colog}_a b$ *lê-se: cologaritmo de b na base a.*

P3 Logaritmo da potência

Se $a > 0$ e $a \neq 1$; $b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$

Demonstração:

$\log_a b^\alpha = x$ e $\log_a b = y$ então:

$b^\alpha = a^x$ e $b = a^y$

Substituindo, temos:

$(a^y)^\alpha = a^x \therefore a^{y\alpha} = a^x \Rightarrow x = \alpha y$

ATENÇÃO!

Não se esqueça! $2^{\log_2 3} = 3$

Faça uma revisão das propriedades de potenciação:

$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}$ e $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Cuidado! $\log_5(-3)^2 \neq 2 \cdot \log_5(-3)$

Assim: $\log_5 x^2 = 2\log_5|x|$

$\log_c(a + b) \neq \log_c a + \log_c b$

$\log_c(a - b) \neq \log_c a - \log_c b$

Devemos primeiramente calcular $a + b$ e $a - b$ para depois aplicar o logaritmo.

Quando omitimos a base do logaritmo, admitimos que é base dez, $\log x = \log_{10} x$.

Observe os exemplos de simplificações de expressões logarítmicas:

Exemplo 4

- $\log \dfrac{a^2 b}{c} = \log(a^2 b) - \log c \Rightarrow \log a^2 + \log b - \log c$

  $\Rightarrow 2 \log a + \log b - \log c$

- $\log \dfrac{\sqrt{a}b}{c^2} = \log \sqrt{a}b - \log c^2$

  $\Rightarrow \log \sqrt{a} + \log b - 2 \log c$

  $\Rightarrow \log(a)^{\frac{1}{2}} + \log b - 2 \log c$

  $\Rightarrow \dfrac{1}{2} . \log a + \log b - 2 \log c$

- $\log \sqrt{\dfrac{\sqrt{a}b}{c}} = \log\left(\dfrac{\sqrt{a}b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log \dfrac{\sqrt{a}b}{c} =$

  $= \dfrac{1}{2}\left[\log \sqrt{a}b - \log c\right] =$

  $= \dfrac{1}{2}\left[\log \sqrt{a} + \log b - \log c\right] =$

  $= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\log a + \log b - \log c\right] =$

  $= \dfrac{1}{4}\log a + \dfrac{1}{2}\log b - \dfrac{1}{2}\log c$

P4 Mudança de base

Se tivermos um logaritmo da base a e queremos mandá-lo para a base c, onde $a > 0$ e $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0$ e $c \neq 1 \Rightarrow$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, temos pela definição: $b = a^x$, $b = c^y$ e $a = c^z$; então: $a^x = c^y \therefore (c^z)^x = c^y \therefore$

$c^{xz} = c^y \Rightarrow xz = y \therefore x = \dfrac{y}{z}$.

P5 Trocando base e logaritmando

Se $0 < a$; $b \neq 1 \Rightarrow \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Demonstração:

Na propriedade 4, troque c por b, observe:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} \therefore \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

P6 Potência da base

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}^*$ e $b > 0 \Rightarrow \log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$

Demonstração:

$$\log_{a^\alpha} b = \underbrace{\frac{1}{\log_b a^\alpha}}_{P5} = \underbrace{\frac{1}{\alpha . \log_b a}}_{P3} = \frac{1}{\alpha} . \underbrace{\frac{1}{\log_b a}}_{P5} = \frac{1}{\alpha}\log_a b$$

Observe os exemplos de aplicação das propriedades:

Exemplo 5

- $\log_{\frac{1}{125}} 5 = \log_{(5)^{-3}} 5 = -\dfrac{1}{3} . \log_5 5 = -\dfrac{1}{3}$
- $\log_5 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}$ (mudança de base 5 para base 2)
- $\log_{\sqrt{27}} \sqrt{3} = \log_{\sqrt{3^3}} (3)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_{3^{\frac{3}{2}}} 3$

  $\dfrac{1}{2} . \dfrac{2}{3}\log_3 3 = \dfrac{1}{3}$

P7 Logaritmos e progressões

Considere a progressão geométrica (PG) $(x; y; z)$ cujos termos são positivos. Os logaritmos desses termos na base a formam uma progressão aritmética (PA). Simbolicamente, temos: PG $(x; y; z) \leftrightarrow$ PA $(\log_a x; \log_a y; \log_a z)$.

Demonstração:

Como $(x; y; z)$ formam uma PG, temos que:

$y^2 = x . z \rightarrow \log_a y^2 = \log_a x . z$

$\therefore 2\log_a y = \log_a x + \log_a z$

$\therefore \log_a y = \dfrac{\log_a x + \log_a z}{2}$, ou seja, $(\log_a x; \log_a y; \log_a z)$ formam uma PA.

P8 Propriedade especial

Chamamos de propriedade especial, pois é pouco conhecida e fornece um resultado interessante.

Considere a, b e c $\in \mathbb{R}_+^*$ com $c \neq 1$, temos que $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Demonstração:

Fazendo $\log_c b = x$ e $\log_c a = y$, temos que $b = c^x$ e $a = c^y$.

$a^{\log_c b} = a^x = (c^y)^x = c^{xy}$

$b^{\log_c a} = b^y = (c^x)^y = c^{xy}$

Portanto, $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Função logarítmica

Definição

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos a função logarítmica como:

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R};\ f(x) = \log_a x$

ATENÇÃO!

As funções f e g são inversas se fog = gof = I, onde I é a função identidade [I(x) = x].

As funções f e f^{-1} são simétricas em relação às bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Se (0; 1) $\in a^x$ então (1; 0) $\in \log_a{}^x$, pois a^x e $\log_a{}^x$ são funções inversas entre si.

O domínio de uma função são todos os valores de x que satisfazem a condição de existência da função.

Propriedades

P1 As funções exponenciais e as logarítmicas são inversas entre si.

Se $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$, então:

$fog(x) = f(g(x)) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x$

$gof(x) = g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x$

Observe que ambas as composições fornecem a função identidade, logo, $g^{-1}(x) = f(x)$.

P2 O gráfico de $\log_a x$ e a^x são simétricos em relação a y = x (bissetrizes dos quadrantes ímpares).

Sabemos do capítulo 4 que a função exponencial foi dividida em duas partes, a > 1 função crescente e 0 < a < 1 função decrescente. Pelos gráficos das exponenciais e a propriedade 2, podemos obter os gráficos logarítmicos. Observe:

a) a > 1

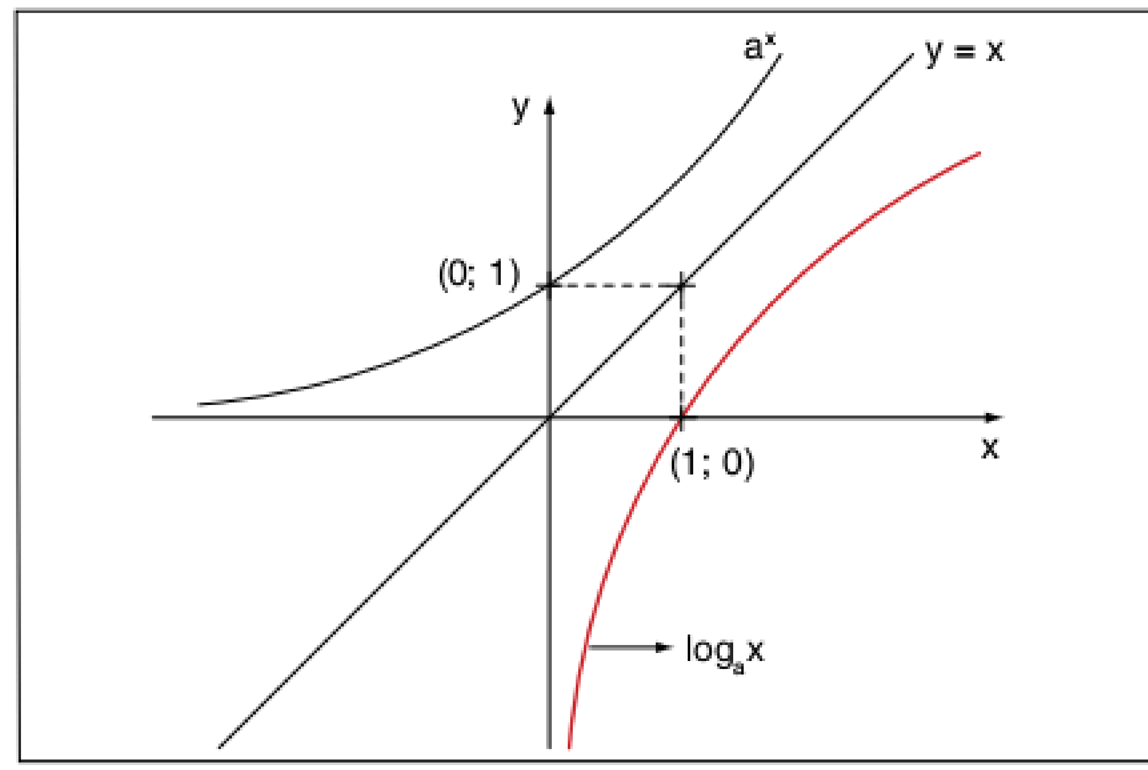


Fig. 2 Com base > 1, a função logarítmica é crescente.

b) 0 < a < 1

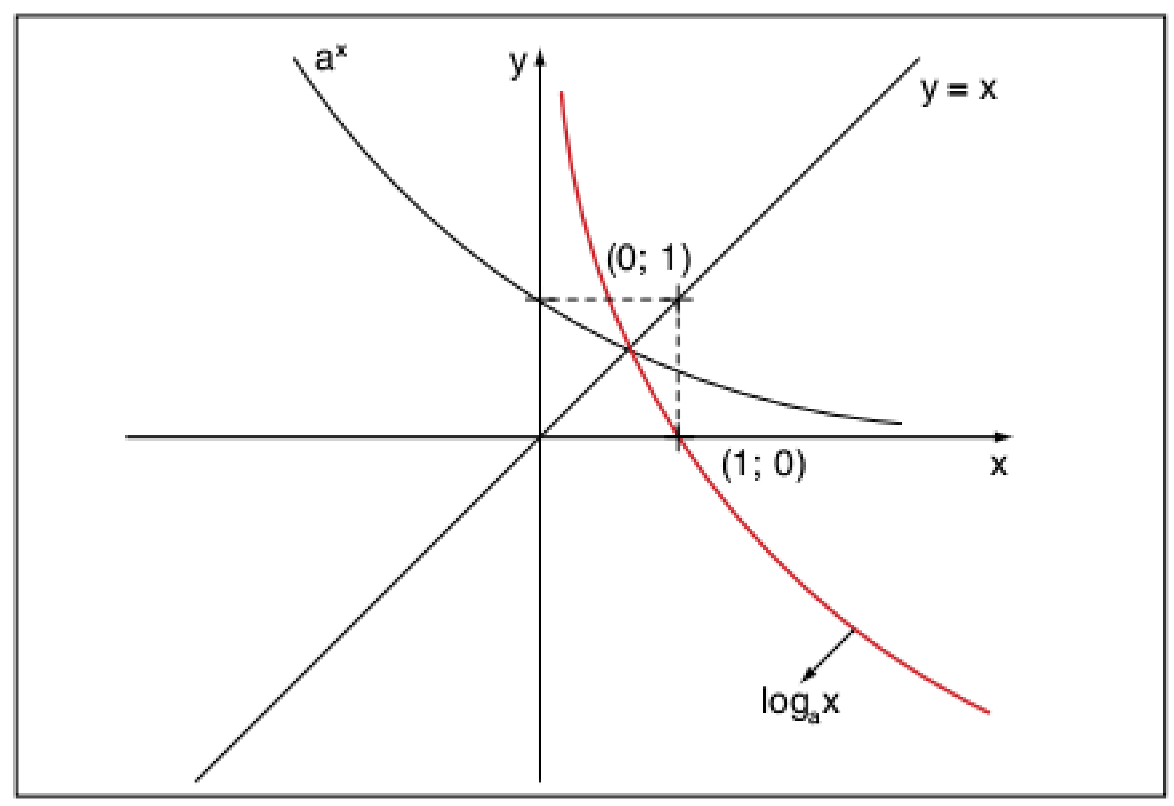


Fig. 3 Com 0 < base < 1, a função logarítmica é decrescente.

P3 As funções logarítmicas f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_a x$; a > 0 e $a \neq 1$ são funções injetoras.

Essa propriedade explica tecnicamente que $f(x_1) = (x_2) \to x_1 = x_2$.

Na prática, temos que $\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \to x_1 = x_2 > 0$, ou seja, logaritmos de mesma base, podemos igualar os logaritmandos.

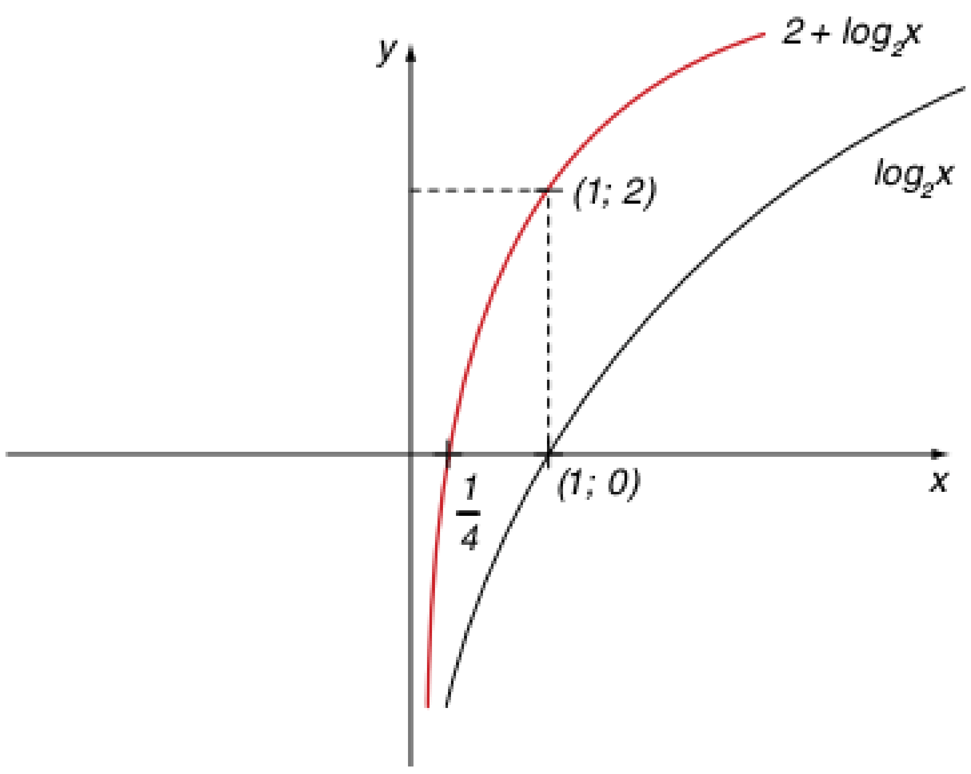
Observe os exemplos a seguir de como construir os gráficos da função logarítmica.

Exercícios resolvidos

1 Construa o gráfico da função: $f(x) = 2 + \log_2 x$.

Resolução:

Nessa função, vamos construir primeiramente $\log_2 x$ e depois "subir" o gráfico inteiro em duas unidades.



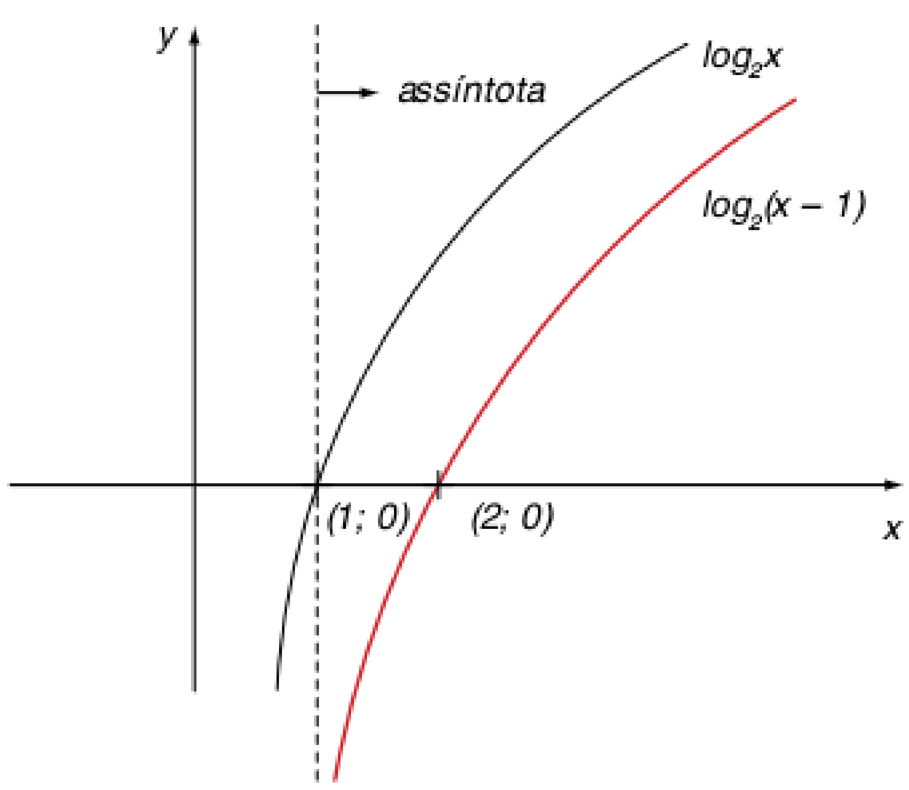
Para encontrar a raiz da função, ou seja, o valor de x quando y = 0, basta resolvermos a equação:

$2 + \log_2 x = 0 \therefore \log_2 x = -2 \therefore x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

2 Construa o gráfico da função: $f(x) = \log_2(x - 1)$.

Resolução:

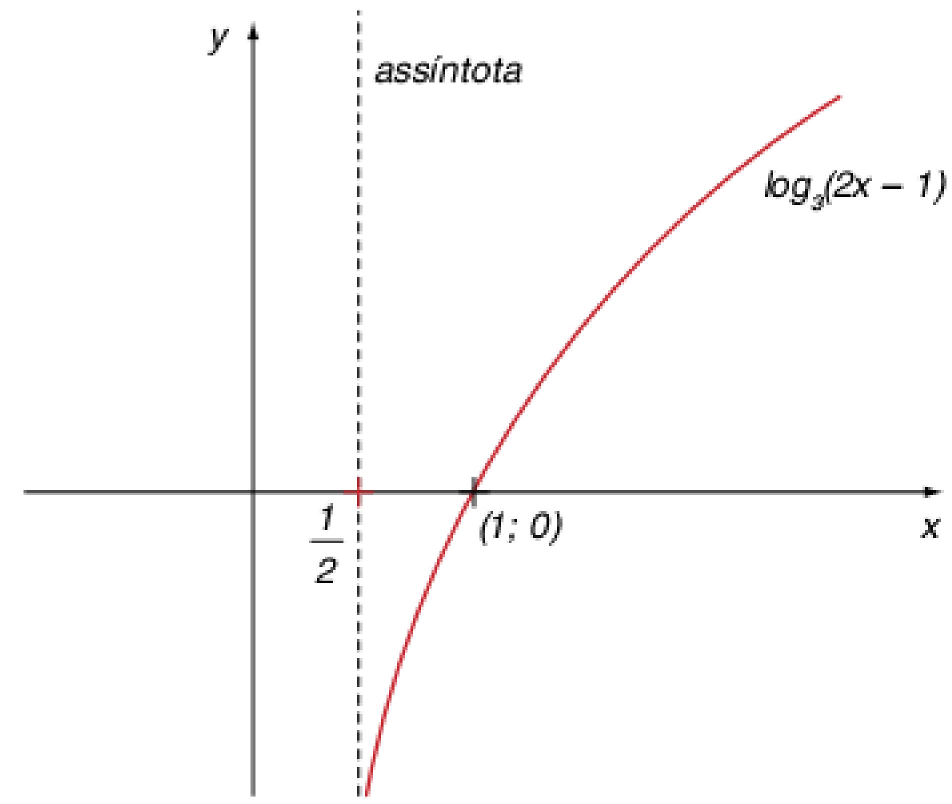
O domínio da função é $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
A raiz da função é $\log_2(x - 1) = 0$
$x - 1 = 2^0 \therefore x - 1 = 1 \therefore x = 2$
O gráfico da função vai ser deslocado no sentido positivo do eixo x.



3 Construa o gráfico da função: $f(x) = \log_3 (2x - 1)$.

Resolução:

O domínio da função é $2x - 1 > 0 \therefore x > \frac{1}{2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
A raiz da função é $\log_3 (2x - 1) = 0$
$2x - 1 = 3^0 \therefore 2x - 1 = 1 \therefore x = 1$

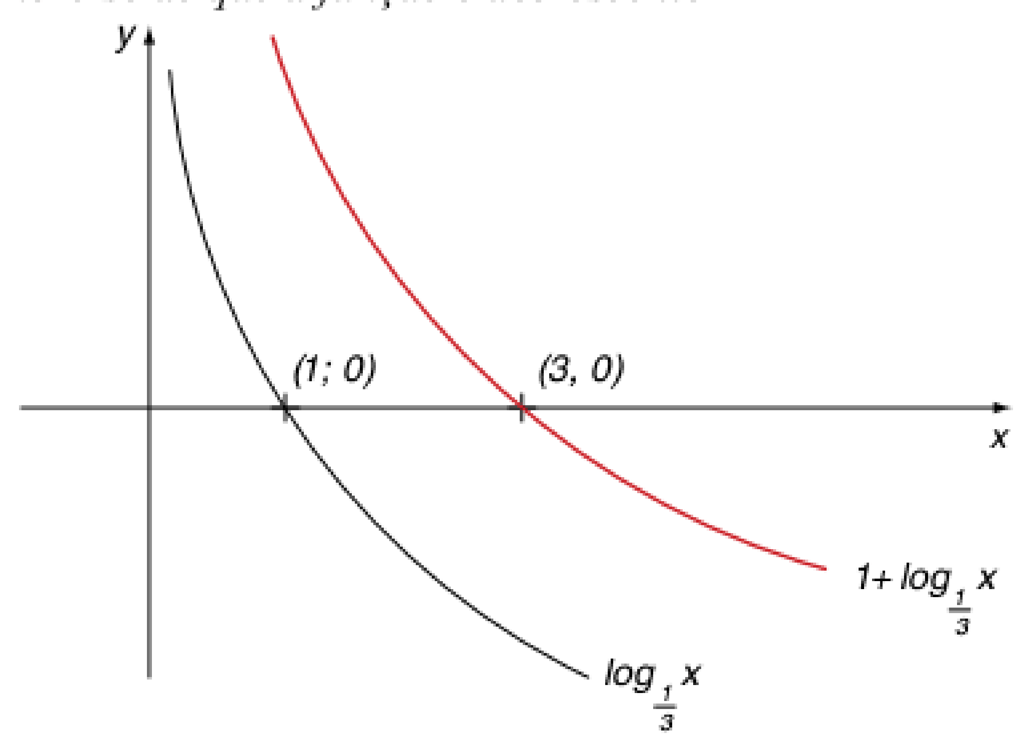


4 Construa o gráfico da função: $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{3}} x$.

Resolução:

O gráfico da função $\log_{\frac{1}{3}} x$ vai "subir" 1 unidade.

Lembre-se de que a função é decrescente.



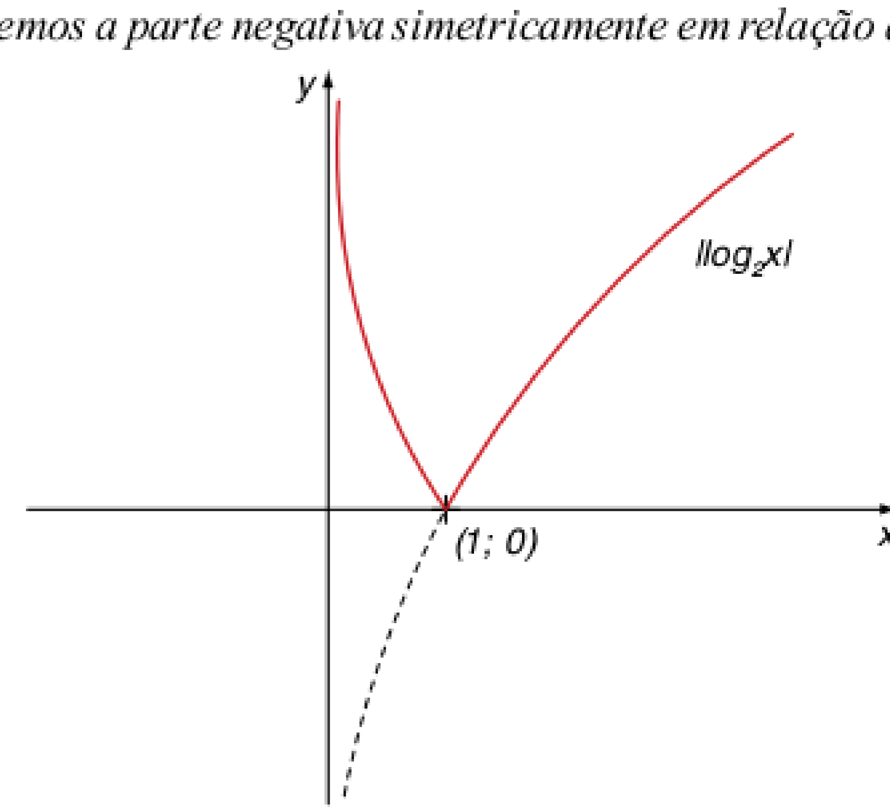
A raiz da função é:

$$\log_{\frac{1}{3}} x + 1 = 0 \therefore \log_{\frac{1}{3}} x = -1 \therefore x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

5 Construa o gráfico da função: $f(x) = |\log_2 x|$.

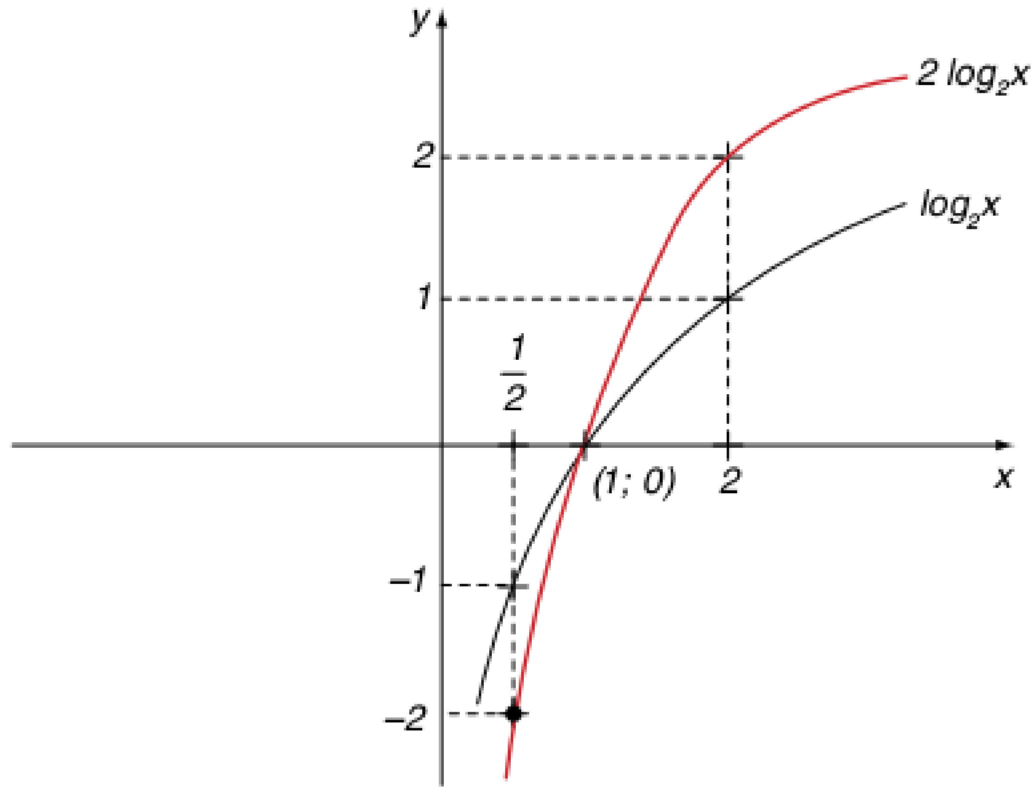
Resolução:

Construímos o gráfico da função interna do módulo, e depois rebatemos a parte negativa simetricamente em relação ao eixo x.



6 Construa o gráfico da função: $f(x) = 2\log_2 x$.

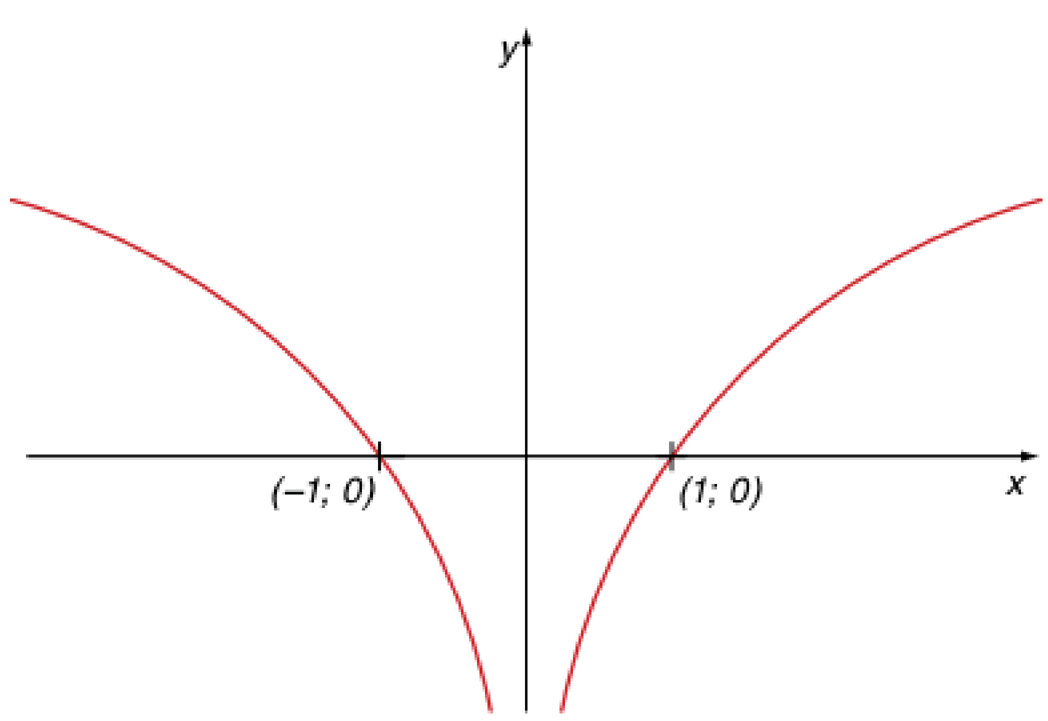
Resolução:
Para compreender esse gráfico, vamos compará-lo com o gráfico básico $\log_2 x$. Observe:



Você deve comparar o valor do y para o mesmo x nos dois gráficos para ter ideia de suas posições. No gráfico anterior, comparamos o y para x = 2 e depois para $x = \frac{1}{2}$.

7 Construção do gráfico da função: $f(x) = \log_2 x^2$.

Resolução:
Cuidado! Sabemos que $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, então o gráfico será igual ao anterior?
Não será, observe os domínios das duas funções:
Função $2\log_2 x$: logaritmando deve ser positivo, $x > 0$.
Função $\log_2 x^2$: $x^2 > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^*$.
Na primeira função, não podemos calcular seu valor para $x = -2$, já na segunda é possível, pois $\log_2(-2)^2 = \log_2 4 = 2$. Além de toda essa análise, $\log_2 x^2$ é uma função par, pois $\log_2(-x)^2 = \log_2 x^2$. O gráfico da função ficará igual a:



ATENÇÃO!

$f(x) = \log_a x$, as condições de existência da função logarítmica são:

$$\begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

- Quando resolver uma equação logarítmica, verifique se a solução satisfaz as condições de existência.
- Uma função é par se, e somente se, para qualquer x do domínio temos $f(x) = f(-x)$. O gráfico da função é simétrico em relação ao eixo y.
  Cuidado! $\log_b a^\alpha \neq (\log_b a)^\alpha$
  Para simplificar a notação, escrevemos $(\log_3 5)^2$ como $\log_3{}^2 5$.

8 Obtenha o domínio da função: $f(x) = \log_3(2x - 1)$.

Resolução:

$$\exists \log_3(2x-1) \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{1}{2}\right\}$$

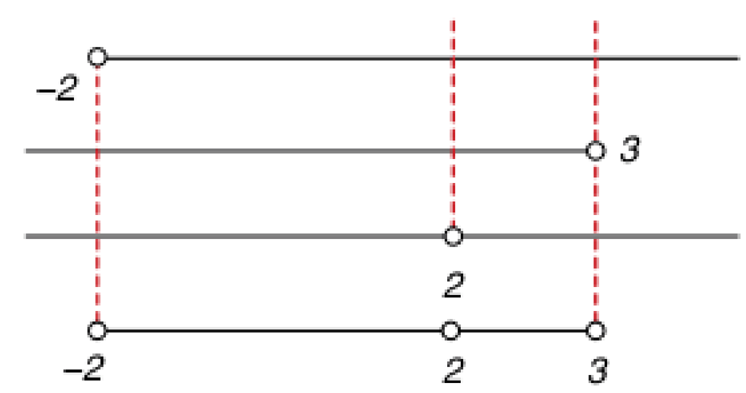
9 Obtenha o domínio da função: $f(x) = \log_{(3-x)}(x + 2)$.

Resolução:

$$\exists \log_{(3-x)}(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{logo: } \begin{cases} x > -2 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Fazendo a interseção desses conjuntos, temos:



$D = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$

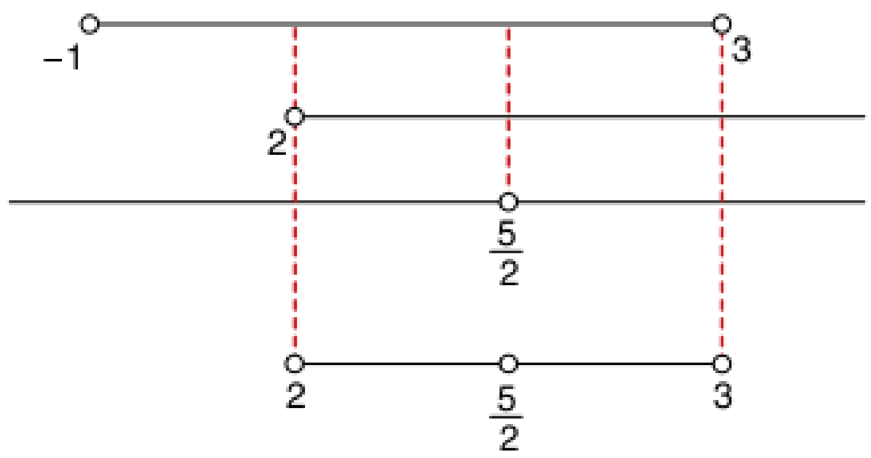
10 Obtenha o domínio da função: $f(x) = \log_{(2x-4)}(3 + 2x - x^2)$.

Resolução:

$$\exists \log_{(2x-4)}(3 + 2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3 + 2x - x^2 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \\ 2x - 4 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x > 2 \\ x \neq 5/2 \end{cases}$$

Fazendo a interseção desses conjuntos, temos:



$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3 \ e \ x \neq \frac{5}{2}\right\}$$

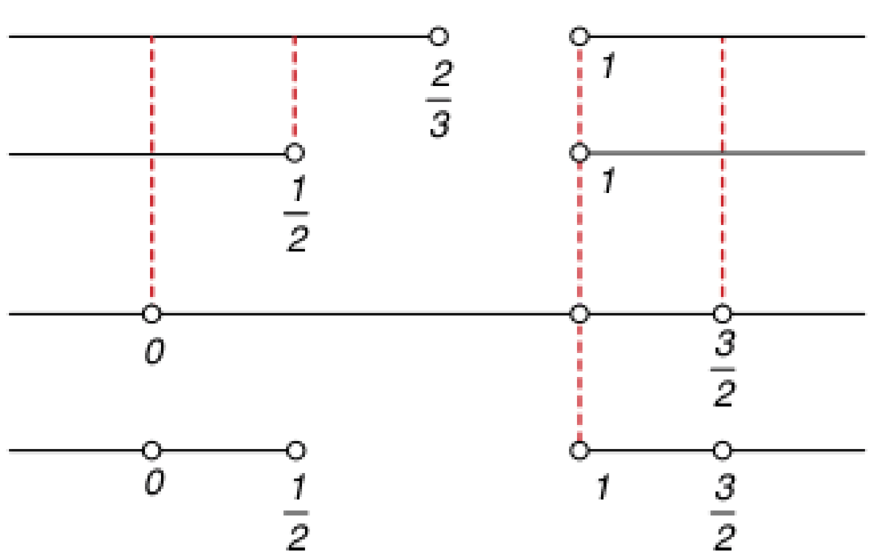
11 Obtenha o domínio da função:
$f(x) = \log_{(2x^2 - 3x + 1)}(3x^2 - 5x + 2)$ é:

Resolução:

$$\exists \log_{(2x^2 - 3x + 1)}(3x^2 - 5x + 2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ ou } x < \frac{2}{3} \\ x > 1 \text{ ou } x < \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Fazendo a interseção desses conjuntos, temos:



$$D =]-\infty; 0[\cup]0; \frac{1}{2}[\cup]1; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

Generalização do gráfico da função $f(x) = \log_c(ax + b)$

Observe os exemplos de construção dos seguintes gráficos:

Exemplo 6

- $f(x) = \log_2(3x - 5)$

a) Condição de existência: $3x - 5 > 0 \therefore x > \frac{5}{3}$

ATENÇÃO!

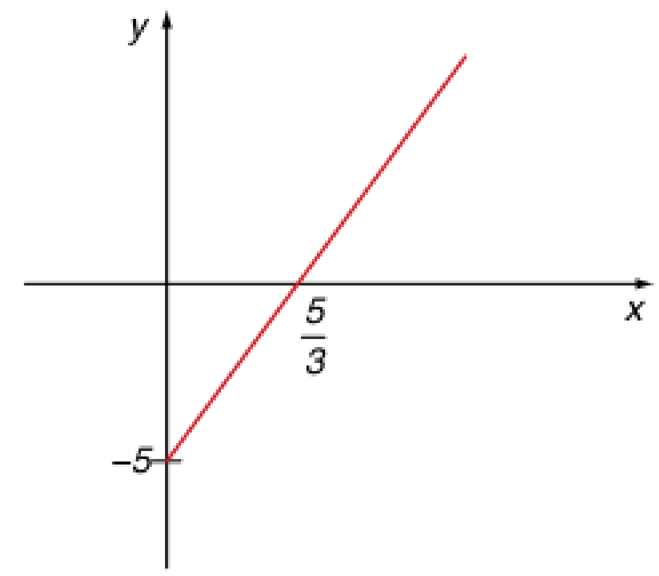
Vamos utilizar C.E. como abreviação de condição de existência.

b) Equação da assíntota: $3x - 5 = 0 \therefore x = \frac{5}{3}$

c) Raiz da função:
$\log_2(3x - 5) = 0 \therefore 3x - 5 = 2^0 \therefore 3x = 6 \therefore x = 2$
A função "corta" o eixo x no ponto (2; 0).

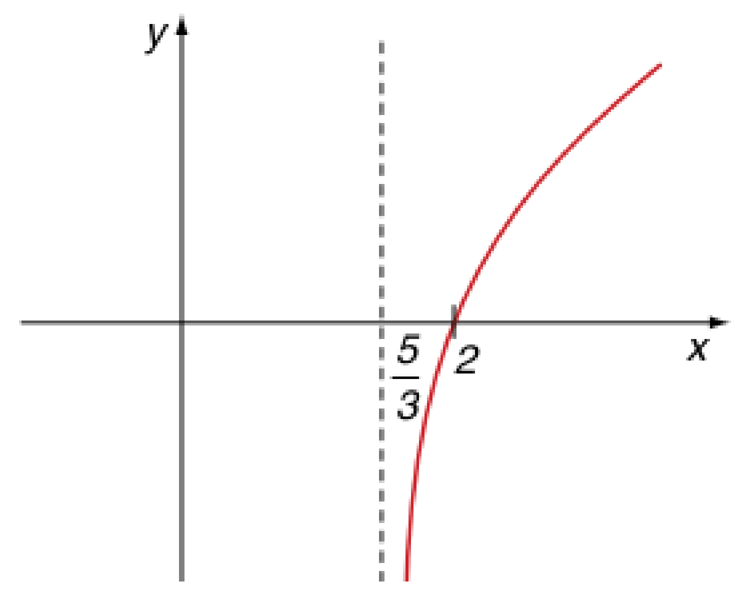
d) Eixo y:
Pontos do eixo y possuem abscissa zero, como o domínio da função é $x > \frac{5}{3}$, não há cruzamento com o eixo y.

e) Gráfico do logaritmando:



A função $y = 3x - 5$ é crescente, como a função logarítmica possui base 2, a função principal também é crescente.

f) Esboço do gráfico:



Exemplo 7

- $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-2x + 3)$

a) Condição de existência: $-2x + 3 > 0 \therefore x < \frac{3}{2}$

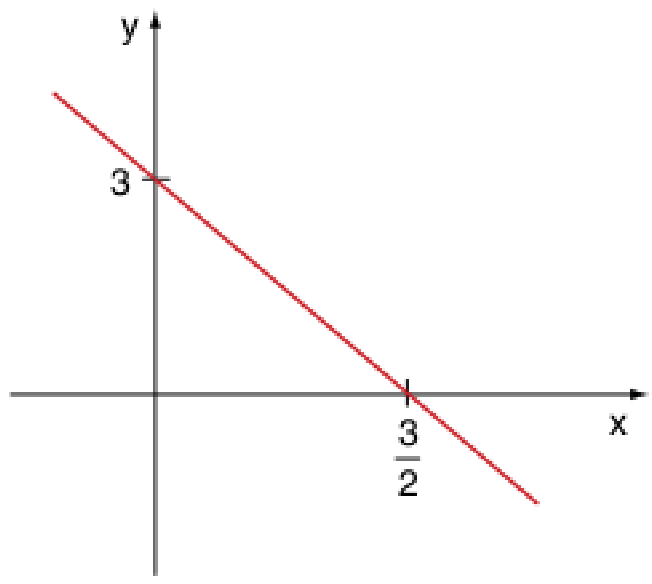
b) Equação da assíntota: $-2x + 3 = 0 \therefore x = \frac{3}{2}$

c) Raiz da função:
$\log_{\frac{1}{3}}(-2x + 3) = 0 \therefore -2x + 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$
$\therefore -2x = -2 \therefore x = 1$

A função "corta" o eixo x no ponto (1; 0).

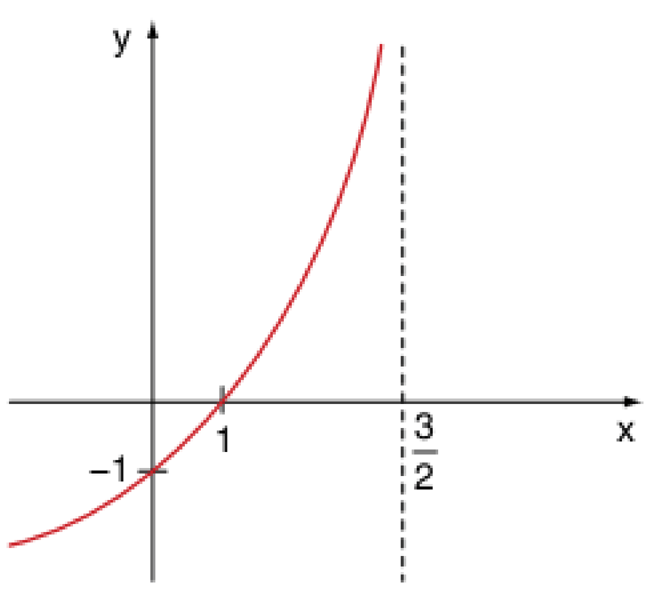
d) Eixo y:
Para x = 0, temos o ponto de cruzamento do gráfico no eixo das ordenadas (0; 3).

e) Gráfico do logaritmando:



A função $y = -2x + 3$ é decrescente, a função logarítmica tem base $\frac{1}{3}$, assim a função principal é crescente.

f) Esboço do gráfico:



Conclusões e observações

Podemos citar as partes principais da construção do gráfico $\log_c (ax + b)$:

I. Condição de existência: $ax + b > 0 \therefore x > -\frac{b}{a}$; $a \neq 0$

II. Equação da assíntota: $ax + b = 0 \therefore x = \frac{-b}{a}$

III. Raiz da equação:
$\log_c(ax + b) = 0 \therefore ax + b = c^0 \therefore x = \frac{1-b}{a}$

IV. Eixo y: caso $x = 0$ e pertença ao domínio da função, o gráfico $\log_c (ax + b)$ "corta" o eixo y no ponto $(0; \log_c b)$.

V. Função do logaritmando: seja $f(x) = \log_c(ax + b)$ e $g(x) = ax + b$, temos então $f(x) = \log_c g(x)$. Para obter uma ideia do gráfico de $f(x)$, analise:

1) $g(x)$ crescente ($a > 0$ e $c > 1$) $\rightarrow$ $f(x)$ é crescente
2) $g(x)$ decrescente ($a < 0$ e $c > 1$) $\rightarrow$ $f(x)$ é decrescente
3) $g(x)$ crescente ($a > 0$ e $0 < c < 1$) $\rightarrow$ $f(x)$ é decrescente
4) $g(x)$ decrescente ($a < 0$ e $0 < c < 1$) $\rightarrow$ $f(x)$ é crescente

Para melhor entendimento, observe a demonstração do item 4:

$$x_1 > x_2 \xrightarrow[\text{g é decrescente}]{} g(x_1) < g(x_2) \xrightarrow[0 < c < 1]{} \log_c g(x_1) > \log_c g(x_2)$$

$\therefore \log_c(g(x))$ é crescente.

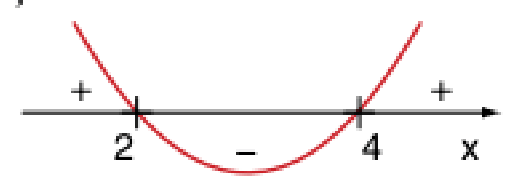
Generalização do gráfico da função $f(x) = \log_d(ax^2 + bx + c)$

Observe os exemplos de construção desses gráficos, seguindo as ideias obtidas na teoria do gráfico $f(x) = \log_c (ax + b)$.

Exemplo 8

- $f(x) = \log_2(x^2 - 6x + 8)$

a) Condição de existência: $x^2 - 6x + 8 > 0$



$x > 4$ ou $x < 2$

b) Equações das assíntotas: $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

c) Raízes da equação:
$\log_2(x^2 - 6x + 8) = 0 \therefore (x^2 - 6x + 8) = 2^0 \therefore x^2 - 6x + 7 = 0$

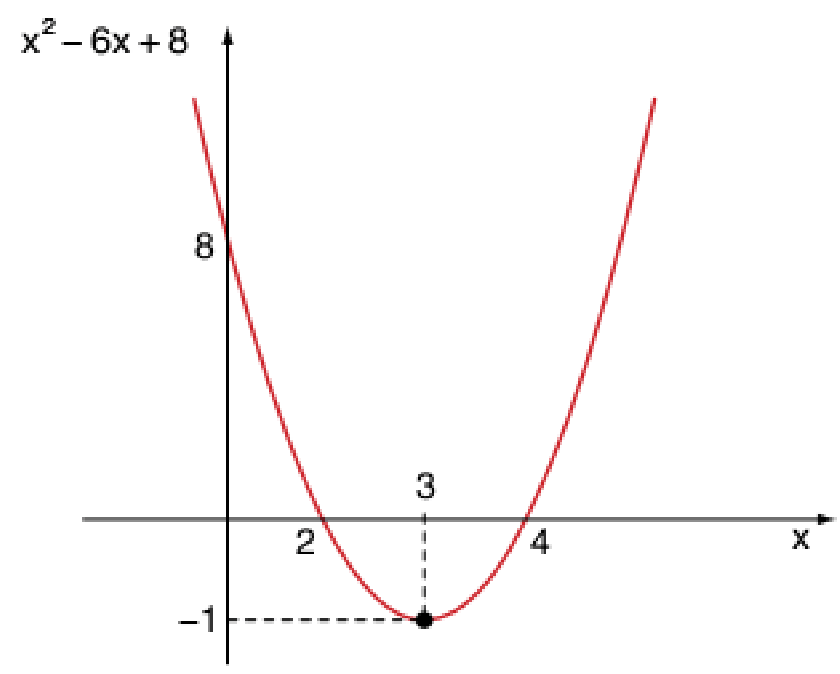
$x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = 3 + \sqrt{2}$

$x_2 = 3 - \sqrt{2}$

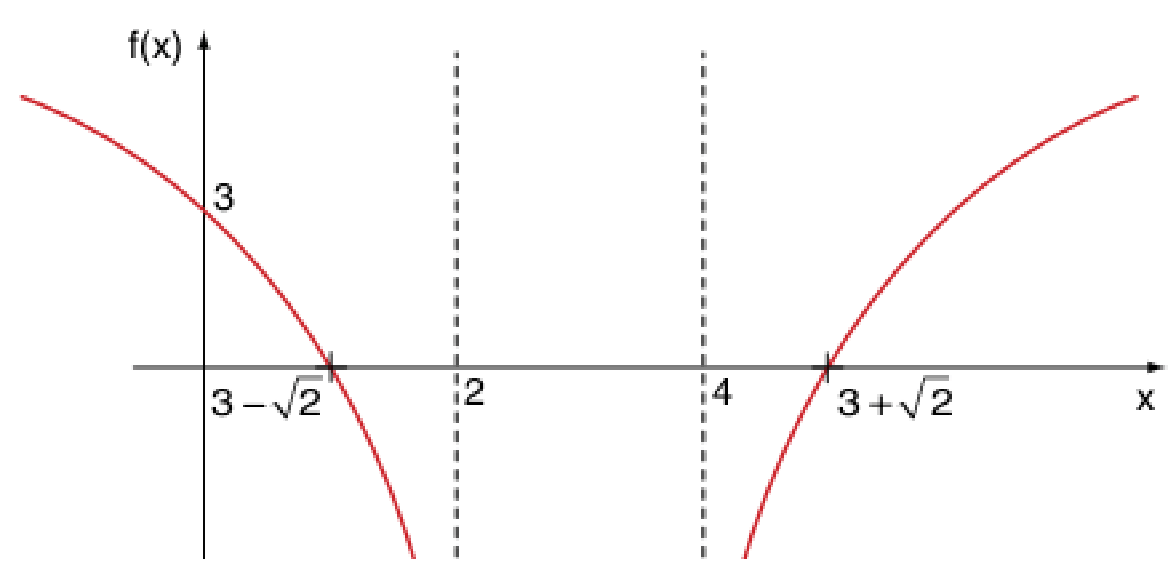
d) Eixo y:
Para $x = 0$, temos $y = \log_2(0^2 - 6 \cdot 0 + 8) = \log_2 8 = 3 \rightarrow (0; 3)$.

e) Função do logaritmando:
Analisando os intervalos em que $x^2 - 6x + 8$ é crescente ou decrescente e observando a base do logaritmo, no caso $2 > 1$, podemos esboçar a função $f(x)$.



$x = 3 \rightarrow y = -1$
$x > 3 \rightarrow$ crescente
$x < 3 \rightarrow$ decrescente

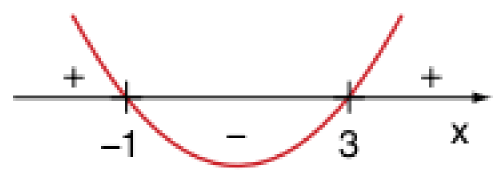
f) Esboço do gráfico:
Esse item é a junção dos demais itens, mas com um cuidado especial para o item e, pois ele indica se $f(x)$ é crescente ou decrescente.



Exemplo 9

- $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x - 3)$

a) Condição de existência: $x^2 - 2x - 3 > 0$



$x > 3$ ou $x < -1$

b) Equações das assíntotas: $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1$ ou $x = 3$

c) Raízes da equação:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x - 3) = 0 \therefore x^2 - 2x - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \therefore x^2 - 2x - 4 = 0$$

$x_1 = 1 + \sqrt{5}$ ou $x_2 = 1 - \sqrt{5}$

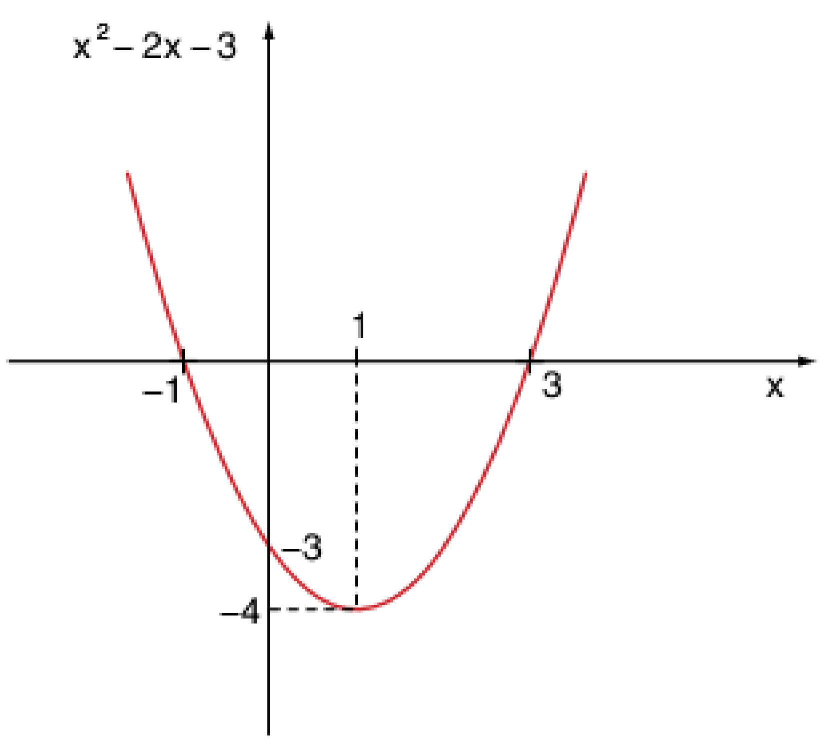
d) Eixo y:

Para $x = 0$, temos $y = \log_{\frac{1}{3}}(0^2 - 2.0 - 3) =$

$\log_{\frac{1}{3}}(-3) \rightarrow$ não existe.

A função não corta o eixo y.

e) Função do logaritmando:

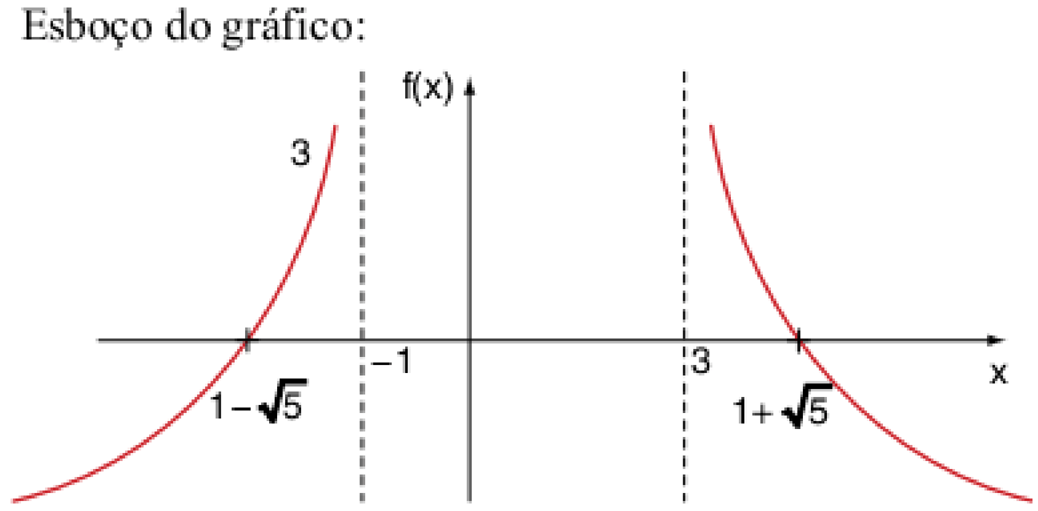


$x = 1 \rightarrow y = -4$

$x > 1 \rightarrow$ crescente

$x < 1 \rightarrow$ decrescente

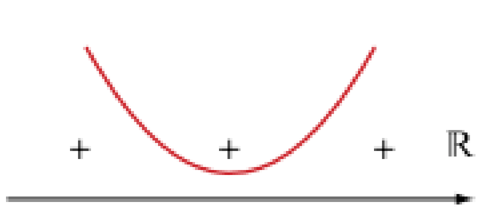
f) Esboço do gráfico:



Exemplo 10

- $f(x) = \log_2(x^2 + x + 5)$

a) Condição de existência: $x^2 + x + 5 > 0$



b) Equações das assíntotas:

$x^2 + x + 5 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \rightarrow$ não possui assíntotas

c) Raízes da equação:

$\log_2(x^2 + x + 5) = 0 \therefore$

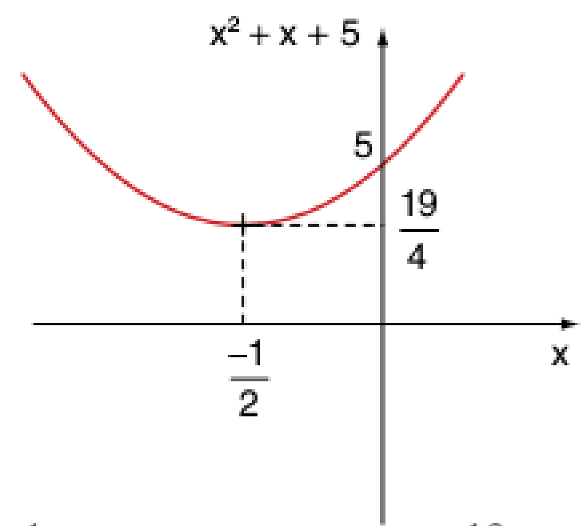
$x^2 + x + 5 = 2^0 \therefore x^2 + x + 4 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

d) Eixo y:

Para $x = 0$, temos: $y = \log_2(0^2 + 0 + 5) = \log_2 5$

Assim, o cruzamento do gráfico no eixo y ocorre no ponto $(0; \log_2 5)$.

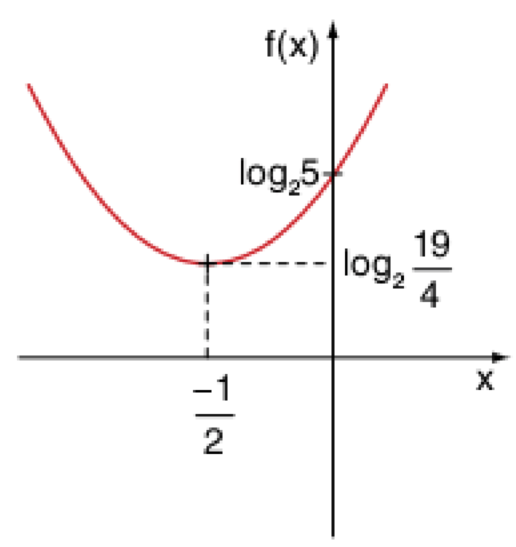
e) Função do logaritmando:



Para $x = -\frac{1}{2}$, temos $x^2 + x + 5 = \frac{19}{4}$; na função logarítmica, temos $\log_2 \frac{19}{4}$, o ponto de mínimo da função é $\left(-\frac{1}{2};\ \log_2 \frac{19}{4}\right)$.

$x > -\frac{1}{2} \rightarrow$ crescente e $x < -\frac{1}{2} \rightarrow$ decrescente

f) Esboço do gráfico:



Conclusões e observações

Podemos citar as partes principais da construção do gráfico $\log_d(ax^2 + bx + c)$:

I. A condição de existência: $ax^2 + bx + c > 0$

II. Equação da assíntota:

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \Delta > 0: \text{ 2 assíntotas} \\ \Delta = 0: \text{ 1 assíntota} \\ \Delta < 0: \text{ nenhuma assíntota} \end{cases}$$

III. Raiz da equação: $\log_d(ax^2 + bx + c) = 0 \therefore ax^2 + bx + c = d^0 \therefore ax^2 + bx + (c - 1) = 0$

IV. Eixo y: para $x = 0$, temos o ponto $(0; \log_d c)$.

V. Função do logaritmando: como o logaritmando é uma função do 2º grau, devemos analisar em torno da abscissa do vértice $\left(x_v = \frac{-b}{2a}\right)$ se a parábola está crescendo ou decrescendo para podermos esboçar o gráfico.

Equações logarítmicas

Quando iniciamos o capítulo, deparamo-nos com a seguinte equação de bases diferentes: $2^x = 5$. Com o conceito de logaritmo podemos dar o valor de x, ou seja, $x = \log_2 5$. Veja outro exemplo:

$$5^{3x-1} = 4 \therefore \frac{5^{3x}}{5} = 4 \therefore 5^{3x} = 20$$

$$\Rightarrow (5^3)^x = 20 \therefore (125)^x = 20 \Rightarrow x = \log_{125} 20$$

Poderíamos dividir as equações em vários tipos, mas vamos resolver muitos exemplos e apresentar de forma natural as ideias.

Exercícios resolvidos

12 Qual o valor de x nas expressões:

a) $5^{\sqrt{x}} = 2$

Resolução:

$\sqrt{x} = \log_5 2 \therefore x = (\log_5 2)^2 \therefore S = \left\{(\log_5 2)^2\right\}$

b) $5^{x-1} = 3^{4-2x}$

Resolução:

$\frac{5^x}{5} = \frac{3^4}{3^{2x}} \therefore \frac{5^x}{5} = \frac{81}{(3^2)^x} \therefore 5^x . (9)^x = 5 . 81 \therefore$

$(45)^x = 405 \therefore x = \log_{45} 405 \therefore S = \{\log_{45} 405\}$

c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

Resolução:

Fazendo $2^x = y$, a equação reduz-se a uma função do 2º grau: $(2^x)^2 - 5 \cdot (2^x) + 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$ raízes 2 e 3. Assim, se $y = 2 \therefore 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ e se $y = 3 \therefore 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$

$S = \{1; \log_2 3\}$

d) $\log_x(2x + 3) = 2$

Resolução:

Nesse tipo de equação, basta aplicarmos a definição de logaritmo: $x^2 = 2x + 3 \therefore x^2 - 2x - 3 = 0$

raízes: 3 e –1, mas cuidado!

Vamos verificar as condições de existência da função: $\log_x(2x + 3)$

$$\exists \log_x(2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Condição de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$, logo –1 não convém.

$S = \{3\}$.

e) $\log_4(3x + 2) = \log_4(2x + 5)$

Resolução:

Como a base dos logaritmos é a mesma, podemos fazer: $3x + 2 = 2x + 5 \therefore x = 3$, que satisfaz a condição de existência.

No caso de equações logarítmicas, não é necessário encontrar a condição de existência propriamente dita, basta substituir a raiz 3 e perceber que não infringe as condições, como é o caso do exemplo! Assim: $S = \{3\}$

f) $\log_4^2 x - 2.\log_4 x - 3 = 0$

Resolução:

Observe que fazendo a substituição $\log_4 x = y$, temos $y^2 - 2y - 3 = 0$ raízes: –1 e 3.

Assim: se $y = -1 \therefore \log_4 x = -1 \therefore x = \frac{1}{4}$; se $y = 3 \therefore \log_4 x = 3 \therefore$

$\therefore x = 4^3 = 64$

$S = \left\{\frac{1}{4}; 64\right\}$

g) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{1}{1 + \log x} = 1$

Resolução:

Se fizermos $\log x = a$ $(x > 0)$, teremos a equação fracionária:

$\frac{1}{5-a} + \frac{1}{1+a} = 1$ *cuja condição de existência é $a \neq 5$ e $a \neq -1$.*

$$\frac{1 + a + 5 - a}{(5-a).(1+a)} = \frac{(5-a).(1+a)}{(5-a).(1+a)} \therefore$$

$$6 = 5 + 5a - a - a^2 \therefore a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.1.1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow (2 + \sqrt{3})$ ou $(2 - \sqrt{3})$

Voltando à variável x, temos:

Se $a = 2 + \sqrt{3} \therefore \log x = 2 + \sqrt{3} \therefore x = 10^{2+\sqrt{3}}$

Se $a = 2 - \sqrt{3} \therefore \log x = 2 - \sqrt{3} \therefore x = 10^{2-\sqrt{3}}$

Assim: $S = \left\{10^{2\pm\sqrt{3}}\right\}$

13 Determine a solução da equação logarítmica:

$$x \cdot (\log_5 3^x + \log_5 21) + \log_5 \left(\frac{3}{7}\right)^x = 0$$

Resolução:

A aparência da questão pode assustar, mas vamos aplicar as propriedades para simplificá-la.

$$x.[x.\log_5 3 + \log_5 .3.7] + x.\log_5 \left(\frac{3}{7}\right) = 0$$

$(\log_5 3)x^2 + (\log_5 3 + \log_5 7)x + x(\log_5 3 - \log_5 7) = 0$ $(\log_5 3)x^2 + 2 \cdot (\log_5 3)x = 0.$

Dividindo a equação por $\log_5 3$, temos: $x^2 + 2x = 0 \therefore x(x + 2) = 0$ raízes 0 e –2.

$S = \{-2; 0\}$

Inequações logarítmicas

A técnica para resolver inequações é a mesma das equações. A única diferença é que temos de analisar a base, em virtude do problema de a função ser crescente e decrescente, e também obter a condição de existência para a solução final.

Base > 1 função estritamente crescente

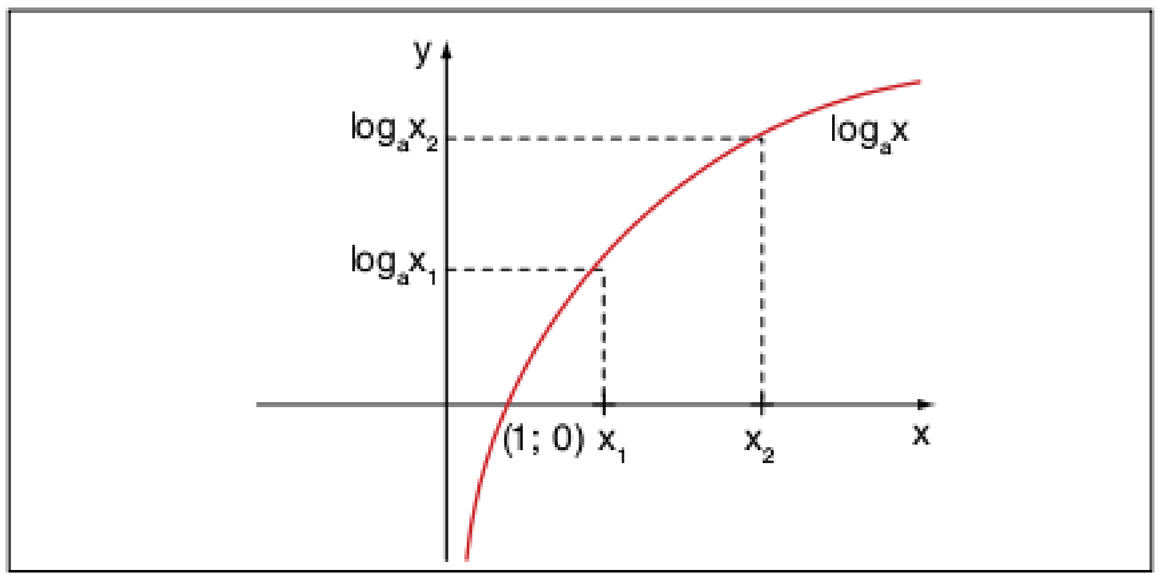


Fig. 4 Base > 1, função crescente.

Conclusão

Pelo gráfico, temos: $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$.

0 < Base < 1 função estritamente decrescente

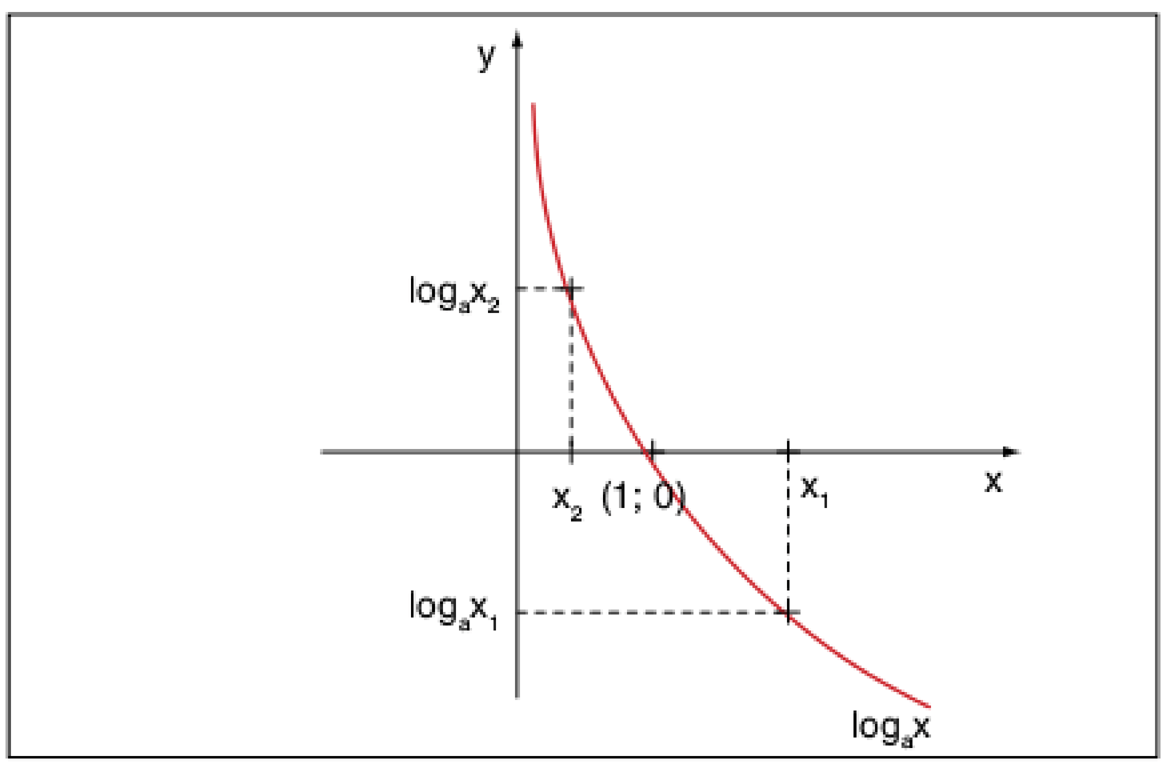


Fig. 5 0 < Base < 1, função decrescente.

Conclusão

Pelo gráfico, temos: $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 < x_1$

Vamos agora aplicar esses dois resultados:

Exercício resolvido

14 Encontre os valores possíveis de x para as expressões:

a) $3^x > 5$.

b) $3^{2-3x} < \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 6$

d) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 > 0$

e) $\log_3(3x + 1) < 2$

f) $\log_{0,2}(x^2 + 1) < \log_{0,2}(2x - 5)$

g) $\log_3(3x + 4) - \log_3(2x - 1) > 1$

h) $\log_x(2x - 1) \leq 2$

Resoluções:

a) *Lembre-se! Se* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$*, então* $f(x) = g(x) > 0$*. Não é possível reduzir à mesma base, vamos então recorrer aos logaritmos. Escolhendo a base 3 (maior do que 1), não há inversão da desigualdade, portanto:*

$3^x > 5 \therefore \log_3 3^x > \log_3 5 \therefore x \cdot \log_3 3 > \log_3 5 \therefore x > \log_3 5 \therefore$

$S =]\log_3 5; +\infty[$

b) $\log_3 3^{2-3x} < \log_3^{\frac{1}{4}} \therefore (2 - 3x) < \log_3 2^{-2}$

$2 - 3x < -2\log_3 2 \therefore -3x < -2 - 2\log_3 2$

$x > \frac{2}{3}(1 + \log_3 2) \therefore S = \left]\frac{2}{3}(1 + \log_3 2); +\infty\right[$

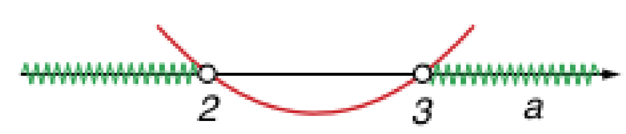
c) *Vamos escolher a base* $\frac{1}{3}$ *e, ao aplicarmos, a desigualdade vai inverter:*

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \log_{\frac{1}{3}} 6 \therefore x \geq \log_{3^{-1}} 6 \therefore$

$x \geq -\log_3 6 \therefore S =]-\log_3 6; +\infty[$

d) *Fazendo* $3^x = a$*, temos:*

$(3^x)^2 - 5 \cdot (3^x) + 6 > 0 \therefore a^2 - 5a + 6 > 0$*, raízes: 2 e 3.*



a > 3 ou a < 2 substituindo o valor de a, temos:

$3^x > 3$ *ou* $3^x < 2 \therefore x > 1$ *ou* $x < \log_3 2$

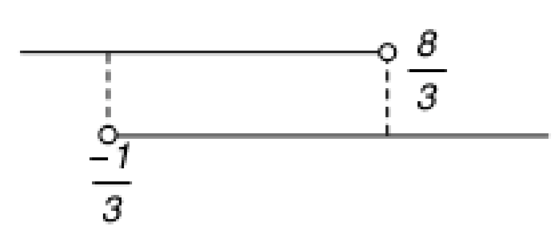
$S =]1; +\infty[\cup]-\infty; \log_3 2[$.

e) *Como a base é maior do que 1, aplicamos a definição e mantemos o sentido da desigualdade:*

$\log_3(3x + 1) < 2 \therefore 3x + 1 < 3^2 \therefore 3x < 8 \therefore x < \frac{8}{3}$

Condição de existência: $3x + 1 > 0 \therefore x > -\frac{1}{3}$

Fazendo a interseção, temos a solução final:

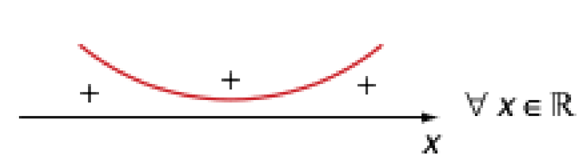


$S = \left]-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right[$

f) *Invertendo a desigualdade para os logaritmandos, temos:*

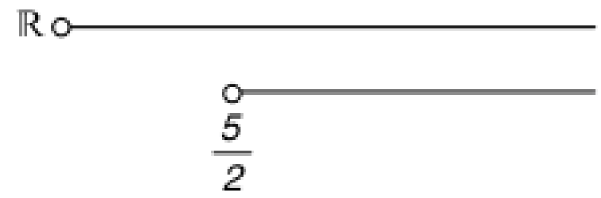
$x^2 + 1 > 2x - 5 \therefore x^2 - 2x + 6 > 0$

Mas $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 4 - 24 < 0$*, temos:*



Não esquecendo as condições de existência:

$$\begin{cases} x^2+1>0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x-5>0 \rightarrow x>\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

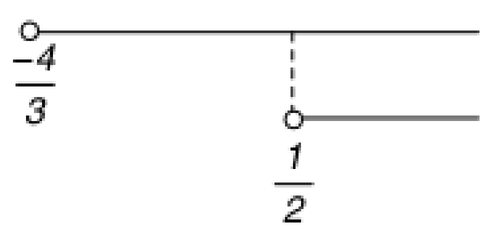


$$S = \left]\frac{5}{2};\ +\infty\right[$$

g) *Antes de aplicarmos alguma propriedade na inequação, vamos obter as condições de existência.*

$$\begin{cases} 3x+4>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x>-\dfrac{4}{3} \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Fazendo a interseção, temos:



$$C.E.\ x>\frac{1}{2}$$

$$\log_3\left(\frac{3x+4}{2x-1}\right)>1 \therefore \frac{3x+4}{2x-1}>3$$

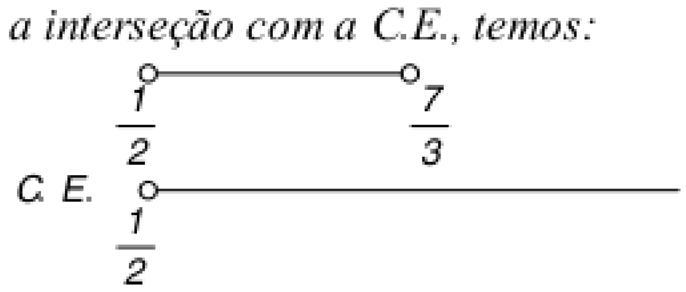
$$\frac{3x+4}{2x-1}-3>0 \therefore \frac{3x+4-6x+3}{2x-1}>0$$

$$-\frac{3x+7}{2x-1}>0$$

Resolvendo a inequação quociente pelo varal, temos:

$$\frac{1}{2}<x<\frac{7}{3}$$

Fazendo a interseção com a C.E., temos:



$$S = \left]\frac{1}{2};\ \frac{7}{3}\right[$$

h) *Temos uma situação nova neste exemplo, não sabemos a natureza da base. Vamos obter as condições de existência:*

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$$C.E.\ x>\frac{1}{2}\ e\ x\neq 1$$

Temos duas análises a fazer:

1ª hipótese: $\frac{1}{2}<x<1$ *(função decrescente)*

$\log_x(2x-1)\leq 2 \therefore 2x-1\geq x^2 \therefore x^2-2x+1\leq 0 \therefore$

$(x-1)^2\leq 0 \therefore x=1$

Que não satisfaz a hipótese, portanto para esta primeira condição: $S_1=\varnothing$.

2ª hipótese: $x>1$ *(função crescente)*

$\log_x(2x-1)\leq 2 \therefore 2x-1\leq x^2 \therefore x^2-2x+1\geq 0 \therefore$

$(x-1)^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Fazendo a interseção com a hipótese, temos:

$S_2=]1;+\infty[$

$S_{final}=S_1\cup S_2=]1;+\infty[$

Logaritmos decimais

Conceito

Vamos analisar a seguinte propriedade dos números reais positivos:

Qualquer que seja $x\in\mathbb{R}_+^*$, x está entre duas potências de 10 com expoentes inteiros e consecutivos. Observe os exemplos:

Exemplo 11

- $x=3 \Rightarrow 10^0<3<10^1$
- $x=57{,}2 \Rightarrow 10^1<57{,}2<10^2$
- $x=0{,}12 \Rightarrow 10^{-1}<0{,}12<10^0$
- $x=893 \Rightarrow 10^2<893<10^3$

Característica e mantissa dos logaritmos decimais

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists C\in Z$ tal que $10^C\leq x<10^{C+1}\Rightarrow$

$\log 10^C\leq \log x<\log 10^{C+1}$

$C\leq \log_x<C+1$, com esse resultado, podemos afirmar que: $\log x=C+m;\ C\in Z$ e $0\leq m<1$

C: característica m: mantissa

Cálculo da característica (parte inteira de um número)

Existem duas regras para o cálculo da característica de um logaritmo decimal, observe:

Regra 1

Se $x>1$, a característica de $\log x$ é igual ao número de algarismos de sua parte inteira, menos 1.

Demonstração:

$x>1$, e x possui n algarismos na sua parte inteira, então temos: $10^{n-1}\leq x<10^n \therefore$

$\log 10^{n-1}\leq \log x<\log 10^n\Rightarrow$

$(n-1)\leq \log x<n$, isto é, a característica de $\log x$ é $n-1$. (c.q.d.)

Exemplo 12

1. log 5,1 ⇒ C = 0
2. log 115 ⇒ C = 2
3. log 3492,6 ⇒ C = 3

Regra 2

Se $0 < x < 1$, a característica de logx é o oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo.

Demonstração:

$0 < x < 1$ e x possui n algarismos zeros precedendo o primeiro significativo, então:

$10^{-n} \leq x < 10^{-n+1} \therefore \log 10^{-n} \leq \log x < \log 10^{-n+1} \therefore$ $-n \leq \log x < -n + 1$, isto é, a característica de logx é $-n$. (c.q.d.)

Exemplo 13

a) log 0,3 ⇒ C = –1
b) log 0,002 ⇒ C = –3
c) log 0,0301 ⇒ C = –2

Propriedade da mantissa

A mantissa é um número irracional que vai ser tabelado. É sempre compreendido entre 0 e 1, podendo ser igual a 0 mas não igual a 1. A palavra mantissa significa contrapeso. A sua propriedade fundamental é:

A mantissa de logx não se altera se multiplicarmos x por 10^{α}; $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Isso, na prática, significa que se movimentarmos a vírgula (esquerda ou direita) do número x, a mantissa não se altera.

Demonstração:

Seja $x > 0$ e $\log x = C + m$. Fazendo $\log x \cdot 10^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$), temos: $\log x \cdot 10^{\alpha} = \log x + \log 10^{\alpha} = \log x + \alpha = (C + m) + \alpha = (C + \alpha) + m$. Observe que $(C + \alpha)$ é a nova característica do número $\log x \cdot 10^{\alpha}$ e m continua sendo a mantissa. (c.q.d.)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Tab. 1 Mantissa.

Exemplos de aplicação:

Exercícios resolvidos

15 Calcule

a) log32,4

Resolução:

A característica é 1 e a mantissa de 32,4 é a mesma de que 324. Pela tabela, temos 0,5105.
Assim, log32,4 = 1 + 0,5105 = 1,5105.

b) log0,0031

Resolução:

A característica é –3 e a mantissa de 0,0031 é a mesma de que 310. Pela tabela, temos 0,4914.
Assim, log0,0031 = –3 + 0,4914 = $\bar{3}$,4914 que usualmente é chamada de forma mista ou preparada, que serve para indicar explicitamente a característica e a mantissa. Se fizermos as contas –3 + 0,4914, temos –2,5086.

16 Calcule o valor aproximado de $\sqrt[5]{7}$.

Resolução:

Fazendo $x = \sqrt[5]{7} \therefore \log x = \log(7)^{1/5}$
logx = 0,16902 é um número cuja característica é zero e a mantissa é 0,1690.
Se C = 0 → parte inteira 1 algarismo.
Se m = 0,1690, pela tabela é o nº 145.
Portanto $\sqrt[5]{7} \cong 1{,}45$.

17 Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{(1,2)^6 \cdot (1,73)^4}$.

Resolução:

Fazendo:

$x = \sqrt[3]{(1,2)^6 \cdot (1,73)^4} \therefore \log x = \frac{1}{3}[\log(1,2)^6 + \log(1,73)^4] \therefore \log x = \frac{1}{3}[6\log(1,2) + 4\log(1,73)]$

Separadamente, temos:

$\log 1,2 = 0 + 0,0792 = 0,0792$
$\log 1,73 = 0 + 0,2380 = 0,2380$

Assim:

$\log x = \frac{1}{3}[6(0,0792) + 4(0,2380)] \therefore$

$\log x = 0,4757 \begin{cases} C = 0 \\ m = 0,4757 \end{cases}$

Para essa mantissa na tabela, temos aproximadamente o nº 299. Logo x = 2,99.

18 Quantos algarismos tem o número 3^{50}?

Resolução:

Fazendo $x = 3^{50} \therefore \log x = \log 3^{50}$
$\log x = 50 \cdot \log 3 = 50 \cdot (0,4771) = 23,855 \Rightarrow 23 + 0,855$, *temos que a característica vale 23 ⇒ o número 3^{50} possui 24 algarismos.*

Interpolação linear

Para o cálculo de um logaritmo que não consta na tabela fornecida, podemos utilizar um método chamado interpolação linear. Esse processo consiste em supor que entre dois logaritmos conhecidos o gráfico de y = log x é uma reta. Obviamente isso não é verdade, mas o erro obtido será bem menor que aproximarmos de imediato o resultado. Observe o gráfico y = log x.

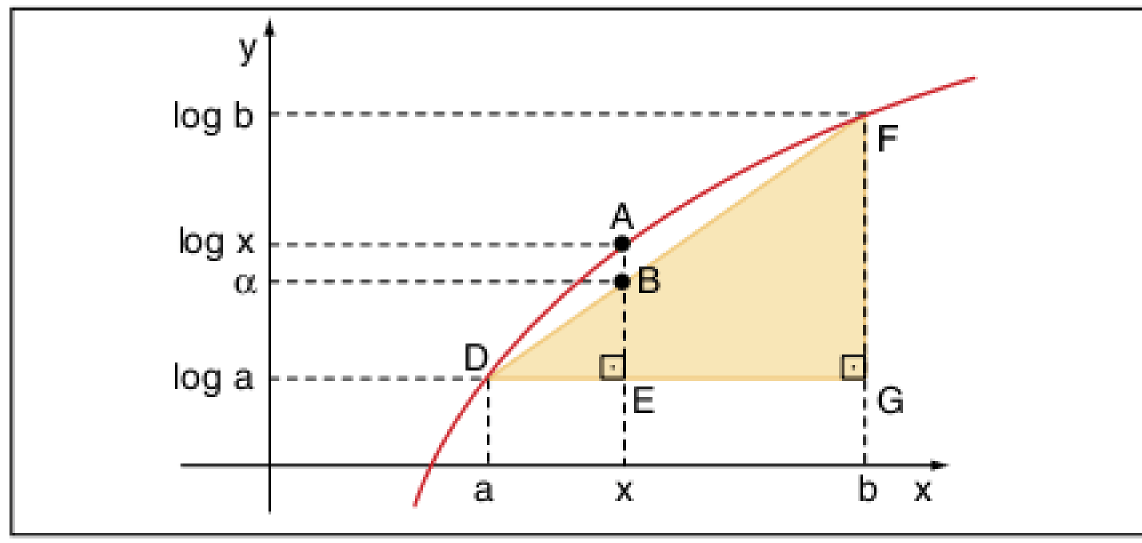


Fig. 6 Interpolação linear.

Na figura 6, podemos observar melhor a aproximação, A é o ponto exato e B, a aproximação. Pela semelhança dos triângulos retângulos BDE e FDG, temos:

$$\frac{\alpha - \log a}{\log b - \log a} = \frac{x - a}{b - a} \to \alpha = \log a + (x - a) \cdot \frac{\log b - \log a}{b - a}$$

O número α é a aproximação de log x, assim:

$$\log x \approx \log a + (x - a) \cdot \frac{\log b - \log a}{b - a}$$

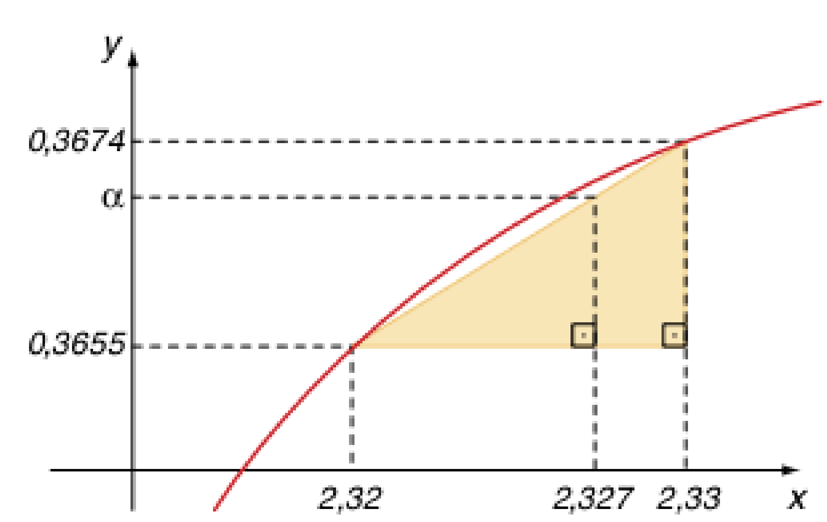
Observe o exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

19 Calcule o valor aproximado de log 2,327.

Resolução:

Pela tabela 1, podemos calcular o log 2,32 e log 2,33, assim:
log 2,32 = 0 + 0,3655 = 0,3655
log 2,33 = 0 + 0,3674 = 0,3674



$$\frac{\alpha - 0,3655}{0,3674 - 0,3655} = \frac{2,327 - 2,32}{2,33 - 2,32} \therefore$$

$$\alpha = 0,3655 + (0,3674 - 0,3655) \cdot \frac{(0,007)}{0,01}$$

α = 0,3668, que é o valor aproximado de log 2,327.

Revisando

1 Calcule os seguintes logaritmos utilizando a definição.

a) $\log_9 3\sqrt{3}$

b) $9^{1+\log_3 2}$

c) $\log_8\left(\log_2 16\right)$

d) $\log_4\left(\log_2\left(\log_3 81\right)\right)$

2 Dado $\log_6 2 = a$, calcule $\log_{24} 72$ em função de a.

3 Dados $\log_{100} 3 = \alpha$ e $\log_{100} 2 = \beta$, calcule $\log_5 6$ em função de α e β.

4 Esboçar o gráfico da função f: $A \to \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_2(5x + 2)$, determinando o domínio A.

5 Esboçar o gráfico da função f: $A \to \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_2(-5x + 2)$, determinando o domínio A.

6 Resolva a equação:
$\log(x - 1) + \log(x + 1) = 3 \log 2 + \log(x - 2)$.

7 Resolva as equações logarítmicas a seguir.

a) $\log(x-2) - \frac{1}{2}.\log(3x-6) = \log 2$

b) $\frac{1}{2}.(\log x + \log 2) + \log\left(\sqrt{2x} + 1\right) = \log 6$

8 Resolva as inequações a seguir.

a) $\log x + \log(x+1) < \log(5-6x) - \log 2$

b) $4 - \log x \geq 3\sqrt{\log x}$

Exercícios propostos

Definição de logaritmos

1 UFRGS Dada a expressão $S = \log 0{,}001 + \log 100$, o valor de S é:

(a) –3
(b) –2
(c) –1
(d) 0
(e) 1

2 Fuvest Sabendo-se que $5^n = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

(a) $\frac{2}{n}$
(b) $2n$
(c) $2 + n^2$
(d) $2 + 2$
(e) $\frac{(2+2n)}{n}$

3 Puccamp Se $\left(2\sqrt{2}\right)^x = 64$, o valor do logaritmo a seguir é: $\log_{\frac{1}{8}} x$

(a) –1
(b) $\frac{-5}{6}$
(c) $\frac{-2}{3}$
(d) $\frac{5}{6}$
(e) $\frac{2}{3}$

4 FEI O valor numérico da expressão $1 - \frac{(\log 0{,}0001)^2}{4 + \log 10.000}$, onde log representa o logaritmo na base 10, é:

(a) 2
(b) 1
(c) 0
(d) –1
(e) –2

5 Puccamp Sabe-se que $16^x = 9$ e $\log_3 2 = y$. Nessas condições, é verdade que:

(a) $x = 2y$
(b) $y = 2x$
(c) $xy = \frac{1}{2}$
(d) $x - y = 2$
(e) $x + y = 4$

6 Unicamp Calcule o valor da expressão a seguir, onde n é um número inteiro, $n \geq 2$. Ao fazer o cálculo, você verá que esse valor é um número que não depende de n.

$$\log_n\left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right)$$

7 Mackenzie Se $\log_y 5 = 2x$, $0 < y \neq 1$, então $\frac{\left(y^{3x} + y^{-3x}\right)}{\left(y^x + y^{-x}\right)}$ é igual a:

(a) $\frac{121}{25}$
(b) $\frac{21}{125}$
(c) $\frac{1}{25}$
(d) $\frac{21}{5}$
(e) $\frac{121}{5}$

8 O menor valor natural de n para o qual se tem $\frac{2.4.6.8.\ldots.2n}{1.2.3.\ldots.n} > \sqrt{\log 10^{100}}$ é:

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 10
(e) 100

Propriedades operatórias dos logaritmos

9 Cesgranrio O valor de $\log_x\left(x\sqrt{x}\right)$ é:

(a) $\frac{3}{4}$
(b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$
(d) $\frac{3}{2}$
(e) $\frac{5}{4}$

10 Vunesp Sejam x e y números reais, com $x > y$. Se $\log_3(x - y) = m$ e $(x + y) = 9$, determine:

a) o valor de $\log_3(x + y)$;
b) $\log_3(x^2 - y^2)$, em função de m.

11 Cesgranrio Se $\log\sqrt{(a)} = 1{,}236$, então o valor de $\log\sqrt[3]{(a)}$ é:

(a) 0,236
(b) 0,824
(c) 1,354
(d) 1,854
(e) 2,236

12 Cesgranrio Se $\log_{10} 123 = 2{,}09$, o valor de $\log_{10} 1{,}23$ é:

(a) 0,0209
(b) 0,09
(c) 0,209
(d) 1,09
(e) 1,209

13 FEI Considere $a > 1$ e a expressão adiante: $x = \log_{a^2} a + \log_a a^2$. Então o valor de x é:

(a) 2
(b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{5}{2}$
(d) $\frac{2}{5}$
(e) 1

14 FEI Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, escrevendo $\log\frac{32}{27}$ em função de a e b, obtemos:

(a) $2a + b$
(b) $2a - b$
(c) $2ab$
(d) $\frac{2a}{b}$
(e) $5a - 3b$

15 Fuvest Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale:

(a) a^3
(b) $5a - 1$
(c) $\frac{2a}{3}$
(d) $1 + \frac{a}{3}$
(e) $1 - \frac{a}{3}$

16 UEL Admitindo-se que $\log_5 2 = 0{,}43$ e $\log_5 3 = 0{,}68$, obtém-se para $\log_5 12$ o valor:

(a) 1,6843
(b) 1,68
(c) 1,54
(d) 1,11
(e) 0,2924

17 **UEL** Se $\log_3 7 = a$ e $\log_5 3 = b$, então $\log_5 7$ é igual a:
(a) $a + b$
(b) $a - b$
(c) $\frac{a}{b}$
(d) $a.b$
(e) a^b

18 Temos a seguir três afirmativas envolvendo operações com números reais.
I. Para $x \neq 0$, $\frac{3^x}{6^x} = \frac{1}{2}$.
II. Se $\log 60 = 1{,}78$ e $\log 4 = 0{,}60$, então $\log 15 = 1{,}18$.
III. A fração $\frac{0{,}222...}{0{,}055...}$ é exatamente igual a 4.
O número de afirmativas verdadeiras é:
(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

19 **Fatec** Se $\log 2 = 0{,}3$, então o valor do quociente $\frac{\log_5 32}{\log_4 5}$ é igual a:
(a) $\frac{30}{7}$
(b) $\frac{7}{30}$
(c) $\frac{49}{90}$
(d) $\frac{90}{49}$
(e) $\frac{9}{49}$

20 **Unaerp** Se $\log_2 b - \log_2 a = 5$, o quociente $\frac{b}{a}$, vale:
(a) 10
(b) 32
(c) 25
(d) 64
(e) 128

21 **UFSC** Se os números reais positivos a e b são tais que $\begin{cases} a - b = 48 \\ \log_2 a - \log_2 b = 2 \end{cases}$, calcule o valor de a + b.

22 **UFMG** Seja $y = 4^{\log_2 7} + \log_2(8^7)$. Nesse caso, o valor de y é:
(a) 35
(b) 56
(c) 49
(d) 70
(e) 90

23 **UFC** Sendo a e b números reais positivos tais que: $\log_{\sqrt{3}} a = 224$ e $\log_{\sqrt{3}} b = 218$. Calcule o valor de $\frac{a}{b}$.

24 **Vunesp** Sejam x e y números reais positivos.
Se $\log(xy) = 14$ e $\log(x^2/y) = 10$, em que os logaritmos são considerados numa mesma base, calcule, ainda nessa base:
a) log x e log y;
b) $\log\left(\sqrt{xy}\right)$.

25 **Cesgranrio** Sendo a e b as raízes da equação $x^2 + 100x - 10 = 0$, calcule o valor de $\log_{10}\left[\left(\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{b}\right)\right]$.

26 **UFV** Sabendo-se que $\log_x 5 + \log_y 4 = 1$ e $\log_x y = 2$, o valor de x + y é:
(a) 120
(b) 119
(c) 100
(d) 110
(e) 115

27 **FEI** Se $A = \log_2 x$ e $B = \log_2 \frac{x}{2}$ então A – B é igual a:
(a) 1
(b) 2
(c) –1
(d) –2
(e) 0

28 **Mackenzie** O valor de $\log_x (\log_3 2 \,.\, \log_4 3)$, sendo $x = \sqrt{2}$, é:
(a) 2
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{-1}{2}$
(d) –2
(e) $\frac{3}{2}$

29 **Mackenzie** Se a e b são os ângulos agudos de um triângulo retângulo, então $\log_2(\text{tg}a) + \log_2(\text{tg}b)$ vale:
(a) 0
(b) 1
(c) tg a
(d) sen a
(e) cos a

30 **Mackenzie** Considere a função $f(x) = x^{\frac{2}{\log x}}$, onde $0 < x \neq 1$, então $\log\left[f\left(\sqrt{3}\right)\right]$ é igual a:
(a) 3
(b) 2
(c) 100
(d) $\sqrt{3}$
(e) $10\sqrt{3}$

31 **Mackenzie** Se $\log_i 6 = m$ e $\log_i 3 = p$, $0 < i \neq 1$, então o logaritmo de $\frac{i}{2}$ na base i é igual a:
(a) 6m – 3p
(b) m – p – 3
(c) p – m + 1
(d) m – p + 1
(e) p – m + 6

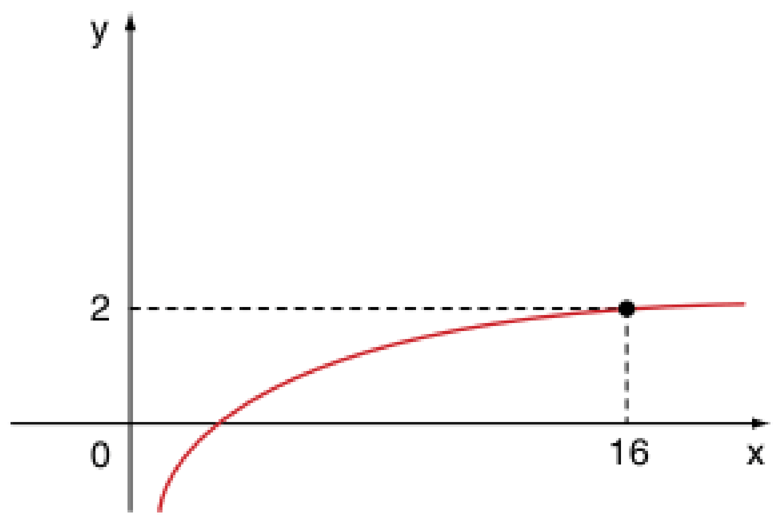
32 **Mackenzie** Supondo $\log 3980 = 3{,}6$, então, dentre as alternativas a seguir, a melhor aproximação inteira de $\frac{10^{2{,}6}}{3{,}98}$ é:
(a) 100
(b) 120
(c) 140
(d) 160
(e) 180

33 **Mackenzie** Em $\log_y 1000 = 2 \log_x 10$ e $0 < y \neq 1$, x vale:
(a) $\sqrt[3]{y}$
(b) $\sqrt{y}$
(c) $\sqrt[3]{y^2}$
(d) y^2
(e) y^3

Gráficos da função logarítmica e condições de existência

34 **Unirio** Na solução do sistema a seguir, o valor de x é:
$\begin{cases} \log(x+1) - \log y = 3 \,.\, \log 2 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$
(a) 15
(b) 13
(c) 8
(d) 5
(e) 2

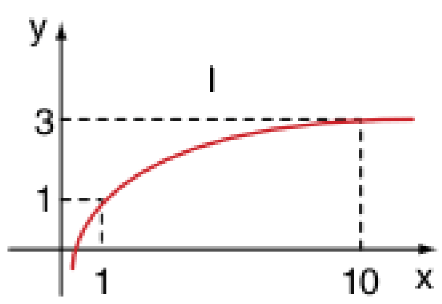
35 **UFMG** Observe a figura a seguir.

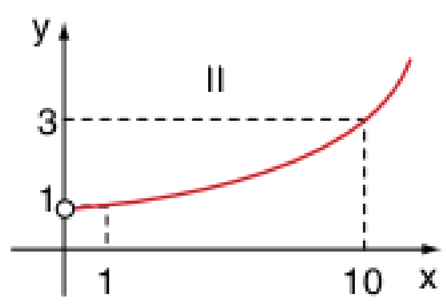


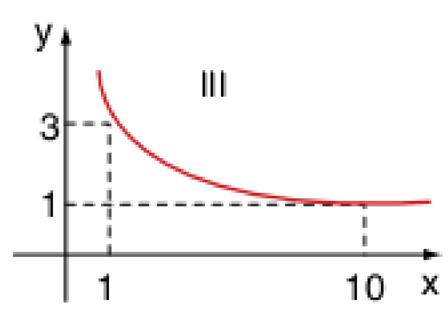
Nessa figura, está representado o gráfico de $f(x) = \log_n x$.
O valor de f(128) é:

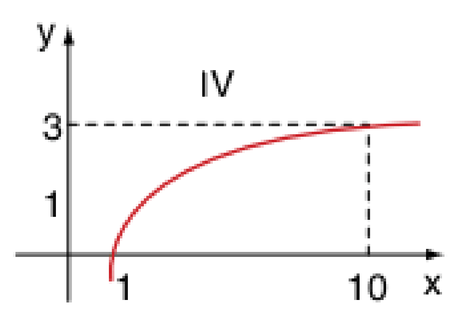
(a) $\frac{5}{2}$ (b) 3 (c) $\frac{7}{2}$ (d) 7

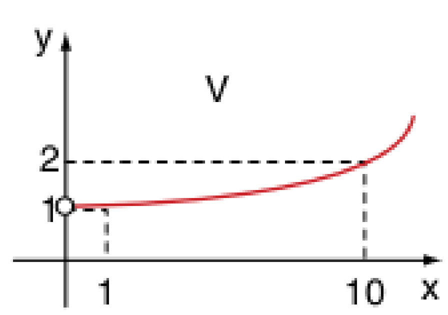
36 **UFRGS** A expressão gráfica da função $y = \log(10x^2)$, $x > 0$, é dada por:





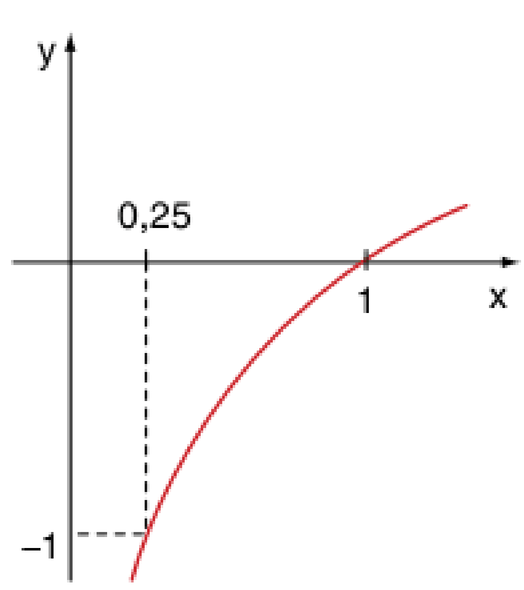






(a) I
(b) II
(c) III
(d) IV
(e) V

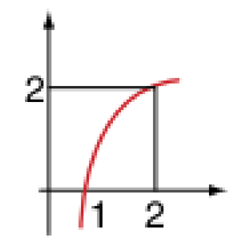
37 **Fuvest** A figura a seguir mostra o gráfico da função logaritmo na base b.

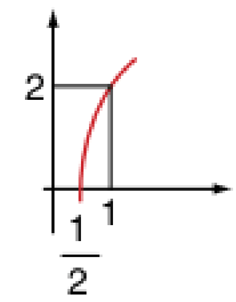


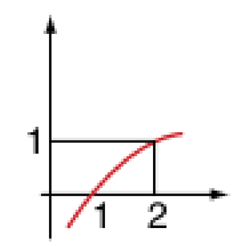
O valor de b é:

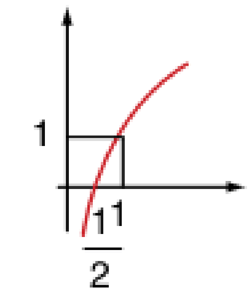
(a) $\frac{1}{4}$
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 10

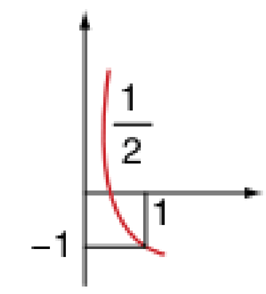
38 **Fuvest** Qual das figuras a seguir é um esboço do gráfico da função $f(x) = \log_2 2x$?

(a)


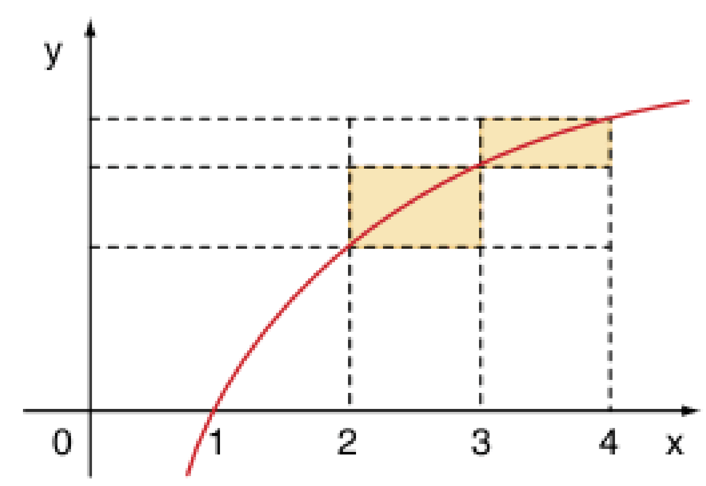
(b)


(c)


(d)


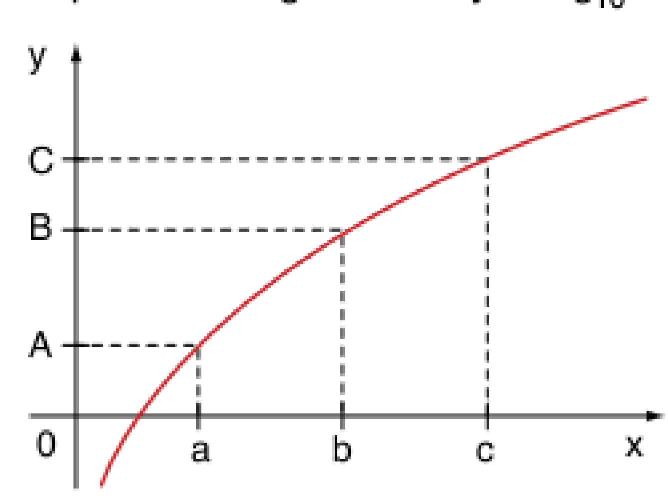
(e)


39 **Fuvest** A curva da figura que se segue representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$, para $x > 0$. Assim sendo, a área da região hachurada, formada pelos dois retângulos, é:



(a) log2
(b) log3
(c) log4
(d) log5
(e) log6

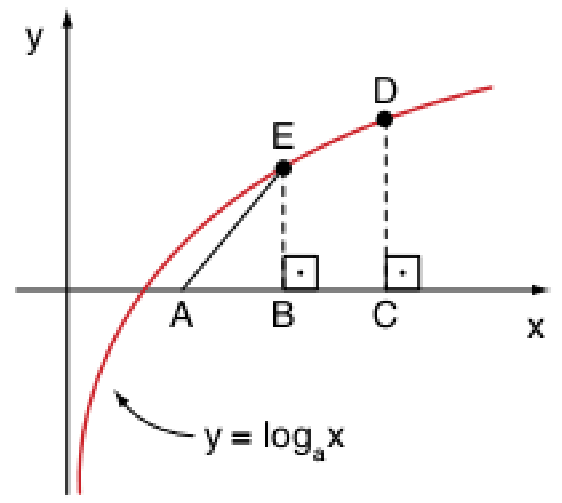
40 A figura representa o gráfico de $y = \log_{10} x$.



Sabe-se que 0A = BC. Então, pode-se afirmar que:

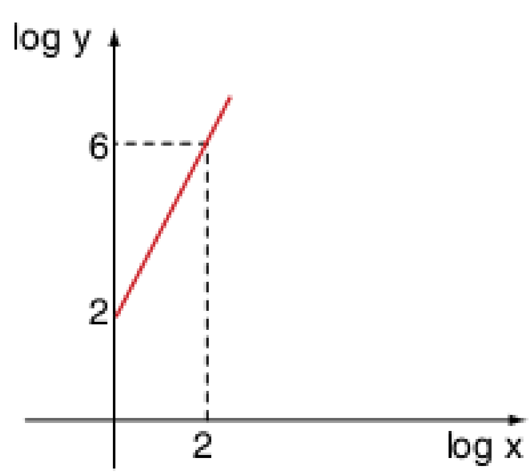
(a) $\log_a b = c$
(b) $a + b = c$
(c) $a^c = b$
(d) $ab = c$
(e) $10^a + 10^b = 10^c$

41 Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$; com $a > 1$ (figura a seguir). Suponha que B = (x ; 0), C = (x + 1 ; 0) e A = (x – 1 ; 0). Então o valor de x para o qual a área do trapézio BCDE é o triplo da área do ΔABE é:



(a) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(b) $1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
(c) $\dfrac{1}{2}+\sqrt{5}$
(d) $1+\sqrt{5}$
(e) $\dfrac{1}{2}-\sqrt{5}$

42 UFRJ Sejam x e y duas quantidades. O gráfico a seguir expressa a variação de log y em função de log x, onde log é o logaritmo na base decimal.



Determine uma relação entre x e y que não envolva a função logaritmo.

43 Unitau O domínio da função $y = \log_x(2x-1)$ é:

(a) $x > \dfrac{1}{2}$
(b) $x > 0$
(c) $x < \dfrac{1}{2}$ e $x \neq 1$
(d) $x > \dfrac{1}{2}$ e $x \neq 1$
(e) $x \neq \dfrac{1}{2}$

44 Puccamp O mais amplo domínio real da função dada por $f(x) = \log_{x-2}(8-2^x)$ é o intervalo:

(a)]2, 3[
(b)]3, + ∞[
(c)]2, + ∞[
(d)]– ∞, 3[
(e)]– ∞, 2[

45 FGV O mais amplo domínio real da função dada por $f(x) = \sqrt{\log_3(2x-1)}$ é:

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{1}{2}\right\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
(c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{2} < x < 1\right\}$
(d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{1}{2}\right\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

46 FEI A função $f(x) = \log(50 - 5x - x^2)$ é definida para:

(a) $x > 10$
(b) $-10 < x < 5$
(c) $-5 < x < 10$
(d) $x < -5$
(e) $5 < x < 10$

Equações logarítmicas

47 Cesgranrio Se $\log_{10}(2x-5) = 0$, então x vale:

(a) 5
(b) 4
(c) 3
(d) $\dfrac{7}{3}$
(e) $\dfrac{5}{2}$

48 Fuvest O número real x que satisfaz a equação $\log_2(12-2^x) = 2x$ é:

(a) $\log_2 5$
(b) $\log_2\sqrt{3}$
(c) 2
(d) $\log_2\sqrt{5}$
(e) $\log_2 3$

49 UEL Os números reais que satisfazem à equação $\log_2(x^2-7x) = 3$ pertencem ao intervalo:

(a)]0, + ∞[
(b) [0, 7]
(c)]7, 8]
(d) [–1, 8]
(e) [–1, 0]

50 Fatec Supondo-se que $\log_{10}2 = 0{,}30$, a solução da equação $10^{2x-3} = 25$, universo $U = \mathbb{R}$, é igual a:

(a) 2
(b) 2,1
(c) 2,2
(d) 2,35
(e) 2,47

51 UEL Se $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = -6{,}25$, então x é igual a:

(a) 8
(b) 6
(c) $\dfrac{1}{4}$
(d) $\dfrac{1}{6}$
(e) $\dfrac{1}{8}$

52 UEL A equação $2 - \log x = \log(3x-5)$:

(a) admite uma única solução real.
(b) admite duas soluções reais positivas.
(c) não admite soluções reais positivas.
(d) admite duas soluções reais de sinais contrários.
(e) não admite soluções reais.

53 Resolva as equações logarítmicas a seguir:

a) $\log_4(4x^2+13x+2) = \log_4(2x+5)$
b) $\log_{\frac{1}{2}}(3+5x) = 0$
c) $\log_3(\log_2 x) = 1$
d) $\log^3 x = 4\log x$
e) $\log_x(4-3x) = 2$

54 UFV Resolva a equação: $\dfrac{100^{\log x}-1}{10^{\log x}} = \dfrac{3}{2}$

55 Fuvest O número $x > 1$ tal que $\log_x 2 = \log_4 x$ é:

(a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
(b) $2^{\sqrt{2}}$
(c) $\sqrt{2}$
(d) $2\sqrt{2}$
(e) $4^{\sqrt{2}}$

56 **Fuvest** O conjunto das raízes da equação $\log_{10}(x^2) = (\log_{10}x)^2$ é:

(a) {1}
(b) {1, 100}
(c) {10, 100}
(d) {1, 10}
(e) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$

Inequações logarítmicas

57 O sistema $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^x < 2 \\ 0 < \log(x+2) < 1 \end{cases}$ se verifica, para todo x pertencente a:

(a) $\left]\frac{-1}{2}; 0\right[$
(b) $\left]\frac{-1}{2}; 1\right[$
(c)]–1; 1[
(d)]–2; 0[
(e)]–2; 2[

58 Seja $f(x) = \log_3(3x + 4) - \log_3(2x - 1)$. Os valores de x, para os quais f está definida e satisfaz f(x)>1, são:

(a) $x < \frac{7}{3}$
(b) $x > \frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$
(d) $x > -\frac{4}{3}$
(e) $-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}$

59 Se $x \in \mathbb{R}$ tal que x > 2 e $\log_2(x - 2) - \log_4 x = 1$, determine o valor de x.

60 O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$ é o intervalo:

(a) $\left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[$
(b) $\left]\frac{7}{4}; +\infty\right[$
(c) $\left]-\frac{5}{2}; 0\right[$
(d) $\left]\frac{1}{3}; \frac{7}{4}\right[$
(e) $\left]0; \frac{1}{3}\right[$

61 **PUC-Rio** Resolva as inequações logarítmicas a seguir:

a) $5^x > 3^x + 3^{x+1}$
b) $2.9^x + 3^{x+2} + 4 > 0$
c) $\log_2(2x^2 - 5) \le \log_2 3$
d) $2 < \log_2(3x + 1) < 4$
e) $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

62 O conjunto de todos os x para os quais $x \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < 0$ é:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
(d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 2\right\}$
(e) Ø

63 A solução da inequação logx – colog(x + 1) > log12 é:

(a) x > 3
(b) x > 0
(c) x > –1
(d) x > 3 ou x > –4
(e) Ø

64 **PUC-SP** Dados log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, um número real x é solução da inequação $16^{10x^2} < 12$ se, somente se:

(a) $x > -3$ e $x \neq 0{,}3$
(b) $x < -0{,}3$ ou $x > 0{,}3$
(c) $x < -3$ ou $x > 3$
(d) $-3 < x < 3$
(e) $-0{,}3 < x < 0{,}3$

TEXTOS COMPLEMENTARES

Relacionando logaritmos e sequências

Observe a seguinte tabela:

q^{-n}	...	q^{-2}	q^{-1}	1	q	q^2	...	q^n
–nr	...	–2r	–r	0	r	2r	...	nr

Na primeira linha, temos uma progressão geométrica de razão q > 0 e q ≠ 1.

Na segunda linha, temos um progressão aritmética de razão r; $r \in \mathbb{Q}^*$.

Por definição, cada termo da progressão aritmética (PA) é o *logaritmo* do termo correspondente da progressão geométrica (PG), assim $0 = \log_x 1$, $r = \log_x q$ e $nr = \log_x q^n$ a base desse *sistema de logaritmos* é x. Calculando x, temos: $nr = n\log_x q \therefore r = \log_x q \therefore x^r = q \therefore x = q^{\frac{1}{r}}$.

Exemplo:

$$\begin{cases} \ldots; \frac{1}{25}; \frac{1}{5}; 1; 5; 25; \ldots \\ \ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots \end{cases} \text{base } 5$$

Exercício resolvido

1 Determinar o logaritmo de $3125\sqrt{5}$ no sistema de logaritmo definido pelas progressões:

$$\begin{cases} \ldots,\ 1;\ \sqrt{5};\ 5;\ \ldots \\ \ldots,\ 0;\ 2;\ 4;\ \ldots \end{cases}$$

Resolução:

Vamos determinar a base desse sistema de logaritmos:
PA possui razão 2 e a PG razão $\sqrt{5}$.

Os termos da PA são os logaritmos dos termos da PG na base que iremos determinar.

$2 = \log_b \sqrt{5} \therefore b^2 = \sqrt{5} \therefore b = \sqrt[4]{5}$

Assim:

$$\log_{\sqrt[4]{5}} 3125\sqrt{5} = \log_{5^{\frac{1}{4}}} 5^5 \,.\, 5^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 4 \,.\, \log_5 5^{\frac{11}{2}} = 4 \,.\, \frac{11}{2} \,.\, \log 5^5 = 22$$

Um pouco da história dos logaritmos

Os logaritmos foram criados para facilitar cálculos aritméticos laboriosos. Mesmo com o advento da calculadora eletrônica, a sua importância não diminuiu.

No século XVI, com o desenvolvimento da astrononima e da navegação, a importância de realizar cálculos aritiméticos aumentou. Para resolver esse problema, dois personagens, de maneiras independentes, criaram teorias resultantes. Jost Bürgi (1552-1632), relojoeiro suíço, e John Napier (1550-1617), um nobre escocês, publicaram suas teorias em 1620 e 1614, respectivamente.

O trabalho de mais destaque foi o de Napier, que o batizou de maneira pouco modesta de *Mirifi logarithmorum canomis descriptio* ou Descrição da maravilhosa lei dos logaritmos.

Modestamente, muitos fenômenos da natureza podem ser explicados por meio dos logarítimos. Como exemplo disso, leia atentamente o texto a seguir.

Escala de Richter

A escala de Richter quantifica a magnitude sísmica de um terremoto.

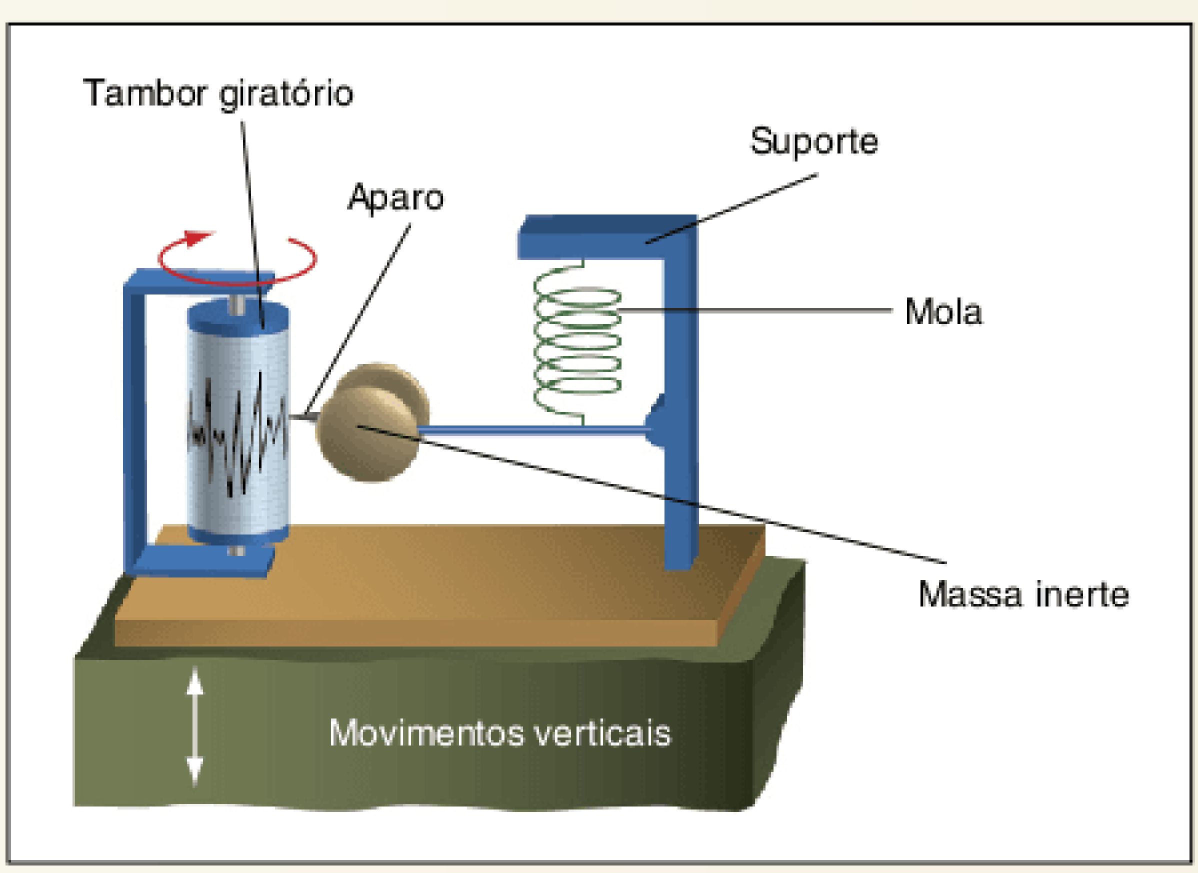
Essa escala foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutemberg, ambos pesquisadores do California Institute of Technology (Caltetch), que estudavam os tremores de terra do sul da Califórnia (EUA).

O princípio da escala tem como resultado a fórmula: $M = \log A - \log A_0$, M: magnitude do terremoto, A: amplitude máxima medida pelo sismógrafo e A_0: amplitude de referência.

Observe que matematicamente um sismo de grau 6 tem uma amplitude 10 vezes maior que um de grau 5, e liberta cerca de 31 vezes mais energia.

Para calcular a energia liberada por um terremoto, utilizamos a seguinte fórmula:

$M = \frac{2}{3} \,.\, \log\left(\frac{10 \,.\, E}{E_0}\right)$, M: magnitude do terremoto, E: energia liberada e E_0: energia de referência.



Exemplo básico do funcionamento de um sismógrafo.

Descrição	Magnitude	Efeitos	Frequência
Micro	< 2,0	Microtremor de terra, não se sente.	~8.000 por dia
Muito pequeno	2,0-2,9	Geralmente não se sente, mas é detectado e registrado.	~1.000 por dia
Pequeno	3,0-3,9	Frequentemente sentido, mas raramente causa danos.	~49.000 por ano
Ligeiro	4,0-4,9	Tremor notório de objetos no interior de habitações, ruídos de choque entre objetos. Danos importantes pouco comuns.	~6.200 por ano
Moderado	5,0-5,9	Pode causar danos maiores em edifícios malconcebidos em zonas restritas. Provoca danos ligeiros nos edifícios bem-construídos.	800 por ano
Forte	6,0-6,9	Pode ser destruidor em zonas num raio de até 180 km em áreas habitadas.	120 por ano
Grande	7,0-7,9	Pode provocar danos graves em zonas mais vastas.	18 por ano
Importante	8,0-8,9	Pode causar danos sérios em zonas num raio de centenas de quilômetros.	1 por ano
Excepcional	9,0-9,9	Devasta zonas num raio de milhares de quilômetros.	1 a cada 20 anos
Extremo	10,0	Nunca registrado.	Desconhecido

Tabela de classificação dos sismos.

O terremoto mais intenso já registrado atingiu 9,5 graus e ocorreu em 22 de maio de 1960 no sul do Chile. Nessa tragédia, 3.000 pessoas faleceram e mais de 2 milhões ficaram feridas. O Chile é suscetível a grandes terremotos porque está cortado pela divisão de duas placas tectônicas, a placa Nazca e a placa Sul-americana.

RESUMINDO

A função logarítmica é dada por $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_a x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$.
Podemos escrever $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ por definição.
As principais propriedades operatórias dos logarítimos decorrentes da sua definição são:

a) $a^{\log_a^b} = b$

b) $\log b_a + \log c_a = \log_a(bc)$

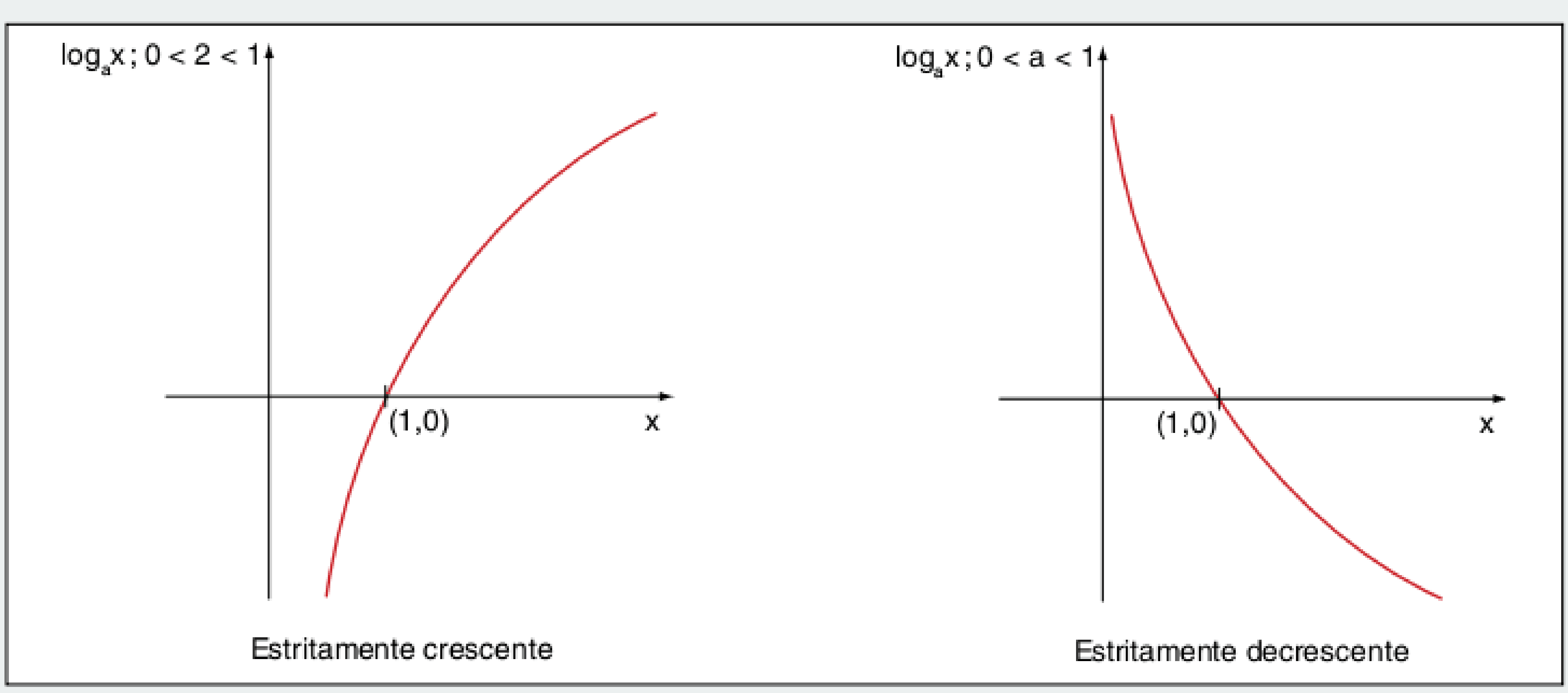
c) $\log b_a - \log c_a = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

d) $\log_c b^a = a \log_c b$

e) $\log b_{a^\alpha} = \frac{1}{\alpha} . \log_a b$

f) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

A função logarítmica $f(x) = \log x$ é injetora e monotômica.
Observe os dois casos básicos:



QUER SABER MAIS?

SITE

- Funções logarítmicas – logaritmo natural
  <http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/flogaritmica.htm>.

Exercícios complementares

Logaritmos

1 **IME** Considerando log2 = a e log3 = b, encontre, em função de a e b, o logaritmo do número $\sqrt[5]{(11,25)}$ no sistema de base 15.

2 **Fuvest** Considere as equações:

I. $\log(x + y) = \log x + \log y$

II. $x + y = xy$

a) As equações I e II têm as mesmas soluções? Justifique.

b) Esboce o gráfico da curva formada pela solução de I.

3 **Fuvest** Sejam x e y números reais positivos. A igualdade $\log(x + y) = \log x + \log y$ é verdadeira se, e somente se:

(a) $x = y = 2$

(b) $x = \frac{5}{3}$ e $y = \frac{5}{2}$

(c) $x = y$

(d) $x \cdot y = 1$

(e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

4 **Unicamp** Resolva o sistema: $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$

5 **Mackenzie** Se $x^2 + 8x + 8\log_2 k$ é um trinômio quadrado perfeito, então k vale:

(a) 6 (b) 24 (c) 120 (d) 720 (e) 2

6 **Mackenzie** Se $x^2 + 4x + 2\log_7 k^2$ é um trinômio quadrado perfeito, então o logaritmo de k na base 7k vale:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) –2 (d) $-\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{7}$

7 **ITA** Dada a função quadrática

$f(x) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) + x \cdot \ln(6) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$, temos que:

(a) a equação f(x) = 0 não possui raízes reais.

(b) a equação f(x) = 0 possui raízes reais distintas e o gráfico de f possui concavidade para cima.

(c) a equação f(x) = 0 possui raízes reais iguais e o gráfico de f possui concavidade para baixo.

(d) o valor máximo de f é $\frac{\ln 2 . \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

(e) o valor máximo de f é $2\,\frac{\ln 2 . \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

8 Resolva o sistema: $\begin{cases} \log_x y + 18 . \log_y x = 9 \\ x . y = 128 \end{cases}$

9 Considere a equação $a^{2x} + a^x - 6 = 0$, com $a > 1$. Uma das afirmações a seguir, relativamente à equação proposta, está correta. Assinale-a.

(a) $a^x = 2$ e $a^x = -3$

(b) $x = \log_a 2$

(c) $x = \log_a 2$ e $x = -3$

(d) $x = 2$ e $x = \log_a 3$

(e) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

10 Dada a equação $x^2 - 2x + \log N = 0$, para que ela tenha duas raízes de sinais contrários, é preciso que:

(a) $N = 1$ (b) $1 < N < 2$ (c) $2 < N < 3$ (d) $0 < N < 1$ (e) $3 < N < 4$

11 Simplificar as expressões:

a) $\log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}}$

b) $-\log_8 \log_4 \log_2 16$

c) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

d) $\sqrt{\log_b a + \log_a b + 2} . \log_{ab} a . \sqrt{\log_a^3 b}$

12 Se $\log_{ab}^{a} = n$ e a e $b \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $ab \neq 1$, calcule $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ em função de n.

13 Calcule $\log_2 360$ se $\log_3 20 = a$ e $\log_3 15 = b$.

14 Para cada n > 0, demonstre que: $-\log_n\left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right] = 3$

15 Para cada x > 1, demonstre que:

$$\log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\right) = 2\log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

16 **PUC-Rio** Sabendo-se que $\log_{10} 3 \simeq 0,47712$, podemos afirmar que o número de algarismos de 9^{25} é:

(a) 21 (b) 22 (c) 23 (d) 24 (e) 25

17 O número de algarismos da potência 50^{50} é:
Dado: $\log 2 = 0{,}301$
(a) 2.500
(b) 85
(c) 100
(d) 250
(e) 50

18 Pressionando a tecla $\boxed{\log}$ de uma calculadora, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Digita-se inicialmente o número 88888888 (oito oitos). Quantas vezes a tecla $\boxed{\log}$ precisa ser pressionada para que apareça mensagem de erro?
(a) 2
(b) 4
(c) 6
(d) 8
(e) 10

19 **Mackenzie** A partir dos valores de A e B adiante, podemos concluir que:
$A = 3^{\log_7 5}$ e $B = 5^{\log_7 3}$
(a) $A = \dfrac{B}{3}$
(b) $A = B$
(c) $B = \dfrac{A}{3}$
(d) $\dfrac{A}{3} = \dfrac{B}{5}$
(e) $\dfrac{A}{5} = \dfrac{B}{3}$

20 **Mackenzie** Se f de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = \log_2 x$, então a igualdade $f^{-1}(x + 1) - f^{-1}(x) = 2$ se verifica para x igual a:
(a) $\dfrac{1}{2}$
(b) $\dfrac{1}{4}$
(c) $\sqrt{2}$
(d) 1
(e) 2

21 **Mackenzie** Se $f(x + 2) = 12 \cdot 2^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então a solução real da equação $f(x) - \log_2 |x| = 0$ pertence ao:
(a) $[-3, -2]$
(b) $[-2, -1]$
(c) $[-1, 0]$
(d) $[0, 1]$
(e) $[1, 2]$

22 Simplifique a expressão $0{,}2\left(2 \,.\, a^{\log_2 b} + 3b^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{a}}\right)$.

Equações e inequações logarítmicas

23 **ITA** Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação $\log_{\frac{1}{4}}(x+1) = \log_4(x-1)$, então:
(a) S é um conjunto unitário e $S \subset]2, +\infty[$.
(b) S é um conjunto unitário e $S \subset]1, 2[$.
(c) S possui dois elementos distintos $S \subset]-2, 2[$.
(d) S possui dois elementos distintos $S \subset]1, +\infty[$.
(e) S é o conjunto vazio.

24 Seja a função f dada por:
$f(x) = (\log_3 5).\left(\log_5 8^{x-1}\right) + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$.
Determine todos os valores de x que tornam f não negativa.

25 Determinando-se a condição sobre **t** para que a equação $4^x - (\ln t + 3) \cdot 2^x - \ln t = 0$ admita duas raízes reais e distintas, obtemos:
(a) $e^{-3} \le t \le 1$
(b) $t \ge 0$
(c) $e^{-1} < t < 1$
(d) $3 < t < e^2$
(e) n.d.a.

26 Sendo $a > 1$, a solução da inequação $\log(\log_a x) \le 0$ é:
(a) $x \ge \dfrac{1}{a}$
(b) $1 < x \le \dfrac{1}{a}$
(c) $x \ge 1$
(d) $x \ge a$
(e) n.d.a.

27 Resolva a equação $\log_x(x + 1) = \log_{(x+1)} x$; $x \in \mathbb{R}$.

28 **ITA** Calcule sen x sabendo que $(\ln \operatorname{sen} x)^2 - \ln \operatorname{sen} x - 6 = 0$.

29 **ITA** A inequação: $4x \log_5(x+3) \ge (x^2+3)\log_{\frac{1}{5}}(x+3)$ é satisfeita para todo $x \in S$. Então:
(a) $S =]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$
(b) $S =]-\infty, -3[\cup [-1, +\infty[$
(c) $S =]-3, -1]$
(d) $S =]-2, +\infty]$
(e) $S =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

30 Qual o valor de $y \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$?
(a) $\dfrac{1}{2}$
(b) $\dfrac{1}{3}$
(c) 3
(d) $\dfrac{1}{8}$
(e) 7

31 **Ufes** Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $4^x + 6^x = 9^x$.

32 **ITA** Resolva a inequação: $\log_x[(1 - x) \cdot x] < \log_x[(1 + x) \cdot x^2]$.

33 Resolva a inequação $\log_x[\log_2(4x - 6)] \le 1$.

34 Os valores de x que satisfazem a equação $\log_x(ax + b) = 2$ são 2 e 3.
Nessas condições, os respectivos valores de a e b são:
(a) 4 e –4
(b) 1 e –3
(c) –3 e 1
(d) 5 e –6
(e) –5 e 6

35 **UEL** A solução real da equação $-1 = \log_5\left[\dfrac{2x}{(x+1)}\right]$ é:
(a) $\dfrac{1}{9}$
(b) $\dfrac{-1}{5}$
(c) –1
(d) –5
(e) –9

36 Resolva a inequação: $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_4\left(x^2 - 5\right)\right] > 0$.

6

FRENTE 1

Função modular

O conceito de valor absoluto de um número real é utilizado para medir a distância entre dois números reais quaisquer. Se a e b são dois números reais, a distância entre eles é o valor absoluto da sua diferença. Geometricamente, se a e b são as coordenadas de dois pontos de uma reta, a comprimento do segmento $\overline{ab}$ é a distância entre eles. Além da determinação da distância entre pontos, o conceito de valor absoluto é aplicado quando estamos interessados na magnitude de um número real, independentemente do seu sinal.

Conceitos básicos

Definição de módulo

O módulo ou valor absoluto de um número real x é indicado por |x| e possui os seguintes valores:

$$\begin{cases} |x| = x \text{ se } x \geq 0 \\ \text{ou} \\ |x| = -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Ou seja:

- o módulo de um número real não negativo é o próprio número.
- o módulo de um número real negativo é o oposto do número.

Observe: $|-3| = 3$; $|0| = 0$; $|7| = 7$ e $\left|\sqrt{2} - 2\right| = -\sqrt{2} + 2$

Conceito geométrico

Além da definição clássica e formal do módulo de um número real, o conceito geométrico nos auxiliará na compreensão de algumas inequações modulares.

O módulo de um número real representa a distância do ponto (número) até a origem da reta real. Observe os exemplos:

- $|3| = 3$
- $|-5| = 5$

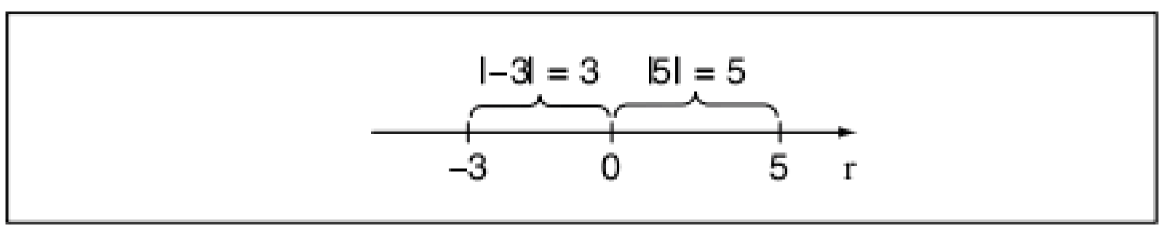


Fig. 1 Conceito geométrico de módulo.

ATENÇÃO!

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e um número real, ou seja, cada ponto da reta representa um único número, e cada número representa um único ponto.

Aplicação do conceito de módulo

A definição de módulo de um número real refere-se a |x|, e isso causa confusões na resolução de exercícios. Para que não ocorra isso, vamos analisar os seguintes exercícios.

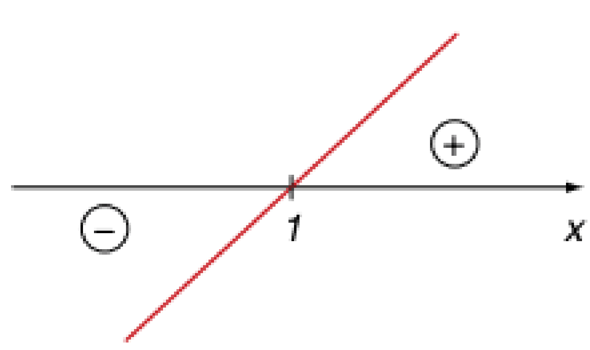
Exercícios resolvidos

1 Calcule $|x - 1|$.

Resolução:

Faça a análise de sinal da função interna ao módulo.

$f(x) = x - 1$



Observe que: $f(x) \geq 0$ *para* $x \geq 1$ *e* $f(x) < 0$ *para* $x < 1$.

Assim:

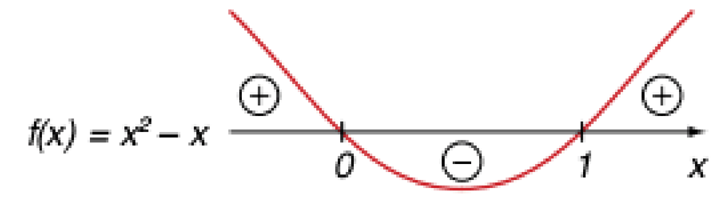
$|x - 1| = x - 1$ *para* $x \geq 1$ *e*

$|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ *para* $x < 1$

2 Calcule $|x^2 - x|$.

Resolução:

Faça a análise do sinal da função interna ao módulo.



Observe que:

$f(x) \geq 0$ *para* $x \geq 1$ *ou* $x \leq 0$ *e* $f(x) < 0$ *para* $0 < x < 1$.

Assim:

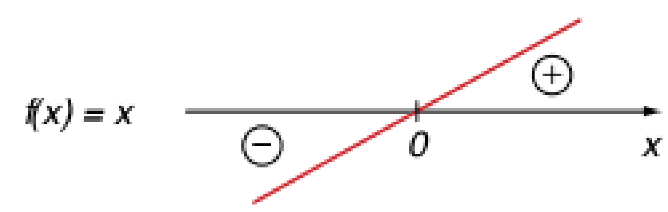
$|x^2 - x| = x^2 - x$ *para* $x \geq 1$ *ou* $x \leq 0$ *e*

$|x^2 - x| = -(x^2 - x) = -x^2 + x$ *para* $0 < x < 1$

3 Calcule $x \cdot |x|$.

Resolução:

Faça a análise do sinal da função que está dentro do módulo:



Observe que:

$f(x) \geq 0$ *para* $x \geq 0$ *e* $f(x) < 0$ *para* $x < 0$

Assim:

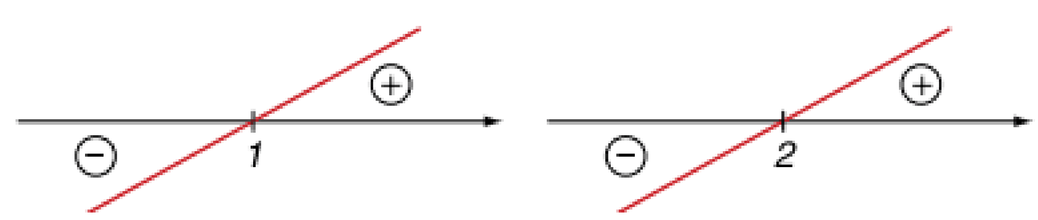
$x \cdot |x| = x \cdot x = x^2$ *para* $x \geq 0$

$x \cdot |x| = x \cdot (-x) = -x^2$ *para* $x < 0$

4 Calcule $|x - 1| + |x - 2|$.

Resolução:

Análise das funções $f(x) = x - 1$ *e* $g(x) = x - 2$.



Observe o quadro de sinais.

$\lvert x - 1\rvert$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\lvert x - 2\rvert$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$
$\lvert x - 1\rvert + \lvert x - 2\rvert$	$-2x + 3$	1	$2x - 3$
		1	2

$$\textit{Assim: } |x - 1| + |x - 2| = \begin{cases} 2x - 3; & x \geq 2 \\ 1; & 1 \leq x < 2 \\ -2x - 3; & x < 1 \end{cases}$$

Propriedades do módulo

P1 $|x| \geq 0;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

P2 $|x| \geq x;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

P3 $\sqrt{x^2} = |x|$

P4 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

P5 $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|};\ y \neq 0$

P6 $|x| + |y| \geq |x + y|$

Demonstrações:

P1 Pela definição de módulo, a propriedade é óbvia. O módulo sempre é um número positivo ou nulo.

P2 Observe os exemplos, não é uma demonstração:

$|-3| = 3 \rightarrow |-3| \geq -3$ ou $|3| = 3 \rightarrow |3| \geq 3$.

P3 $|x| = x$ ou $-x$, logo $|x|^2 = x^2 = (-x)^2 \therefore |x|^2 = x^2$ logo $|x| = \sqrt{x^2}$.

P4 $|x \cdot y| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$

P5 $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \dfrac{|x|}{|y|};\ y \neq 0$

P6 Demonstração por redução ao absurdo (negação da tese).

$|x| + |y| < |x + y| \therefore (|x| + |y|)^2 < (|x + y|)^2 \therefore$

$\therefore |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 < (x + y)^2 \therefore$

$\therefore x^2 + 2|x \cdot y| + y^2 < x^2 + 2xy + y^2 \therefore 2|xy| < 2xy \therefore$

$\therefore |xy| < xy$, absurdo, pela P_2, logo $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Construção de gráficos

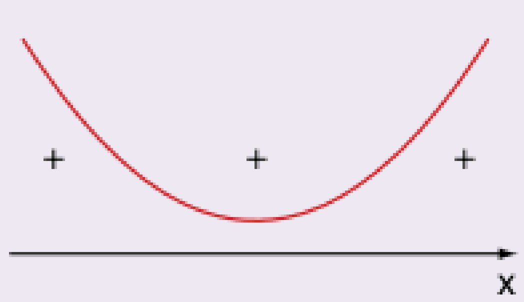
A construção de qualquer gráfico pode ser feita pela definição de módulo, dividindo o gráfico em vários intervalos ou por meio de transformações geométricas, como podem ser observados nos exercícios resolvidos.

ATENÇÃO!

- Para discutir o $|f(x)|$, devemos fazer uma análise de sinal da função $f(x)$.

- Lembre-se!

Considere a função com $a \neq 0$, $y = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$ e $\Delta < 0$, $y > 0;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

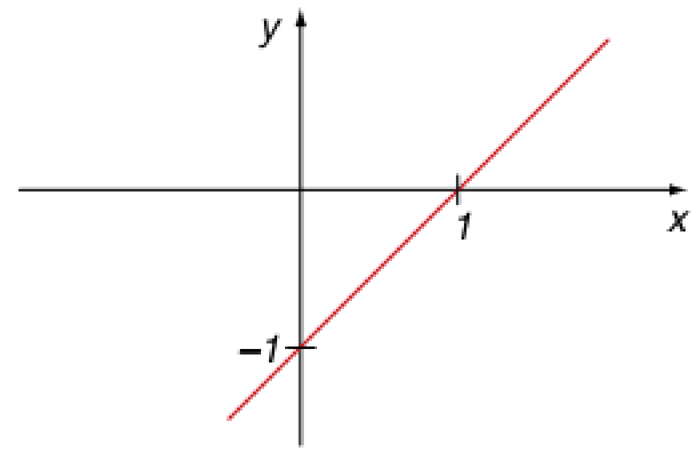


Exercícios resolvidos

5 Calcule $f(x) = |x - 1|$.

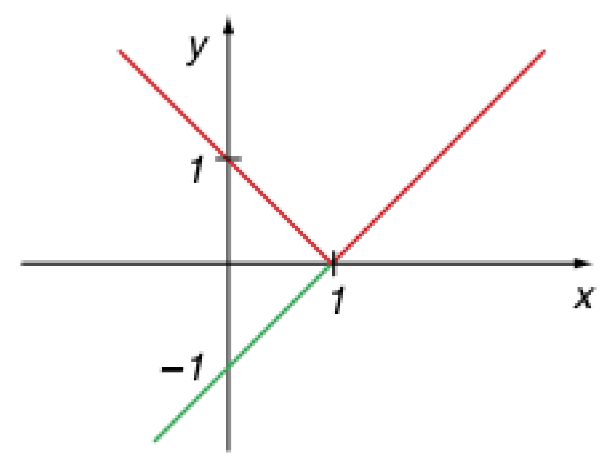
Resolução:

Construa a função que está dentro do módulo. Trata-se da função do 1º grau $x - 1$.



Pela propriedade P_1, não podemos ter valores negativos para $|x - 1|$, então todo o gráfico com base em $x < 1$ tem que ser multiplicado por -1. Isso equivale a rebater essa parte do gráfico simetricamente em relação ao eixo x.

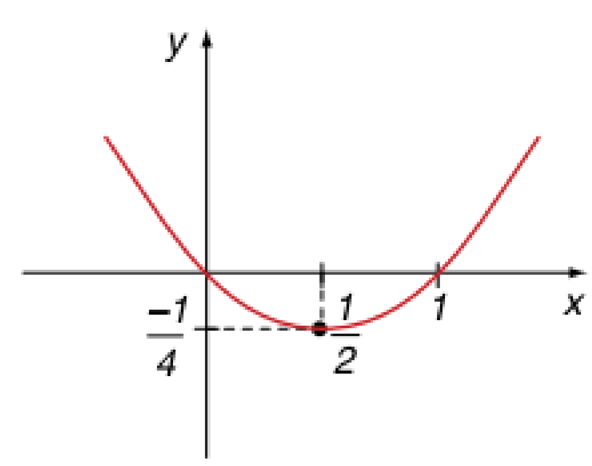
Observe:



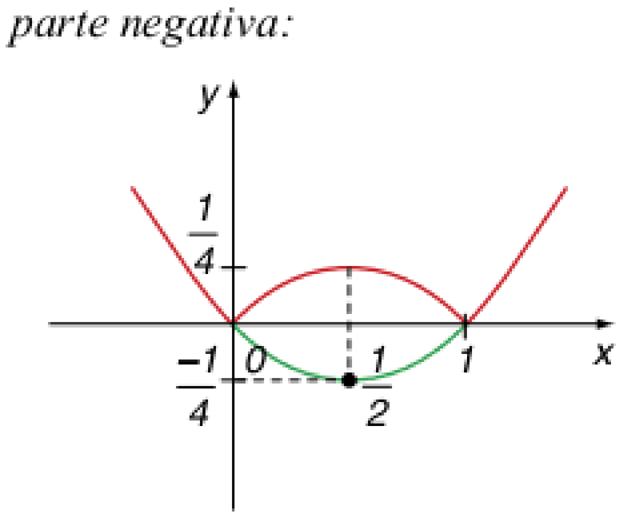
6 Calcule $f(x) = |x^2 - x|$.

Resolução:

Utilizando o mesmo raciocínio do exercício resolvido 1, temos:



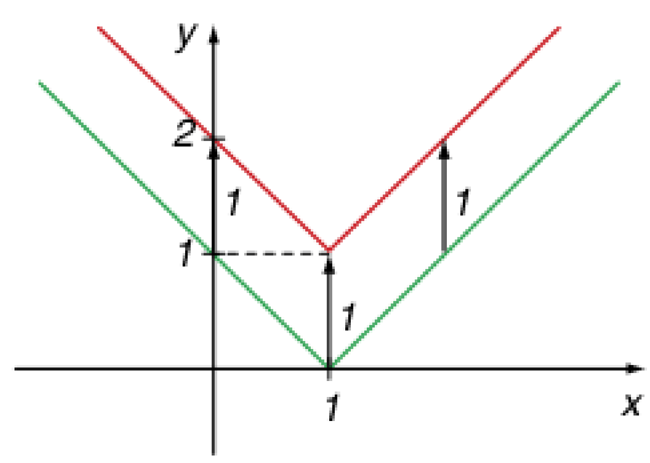
Rebatendo a parte negativa:



7 Calcule f(x) = |x – 1| + 1.

Resolução:

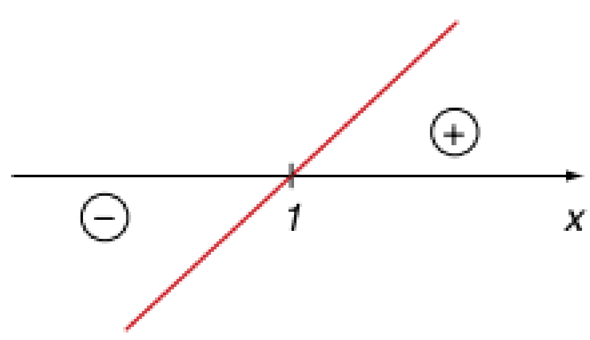
Repare que este exercício está relacionado com o exercício 1. Foi adicionada uma constante no gráfico de |x – 1|, ou seja, todos os valores de y sofreram o acréscimo de 1, observe a translação do gráfico:



8 Calcule f(x) = |x – 1| + x.

Resolução:

A parte do gráfico |x – 1| pode ser feita geometricamente, mas a translação no eixo y não é possível, pois estamos adicionando uma variável x. O gráfico deve ser feito pela definição de módulo.

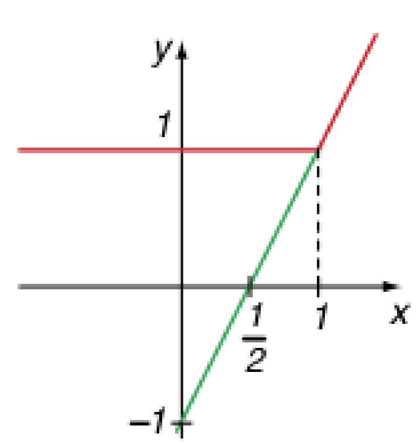


Análise de sinal da função x – 1: $y \geq 0$ para $x \geq 1$ e $y < 0$ para $x < 1$.

A análise total de f(x): $f(x) = \begin{cases} x-1+x; & x \geq 1 \\ -(x-1)+x; & x<1 \end{cases}$ *logo,*

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1; & x \geq 1 \\ 1; & x < 1 \end{cases}$$

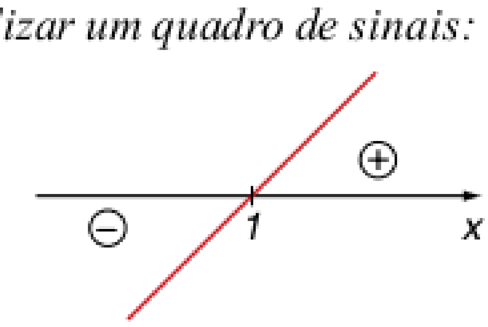
Portanto, temos:

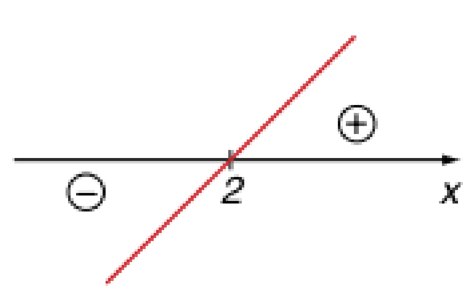


9 Calcule f(x) = |x – 1| + |x – 2|.

Resolução:

O gráfico tem de ser feito pela definição de módulo e, possuindo mais de uma função para a análise, como é o caso, devemos utilizar um quadro de sinais:





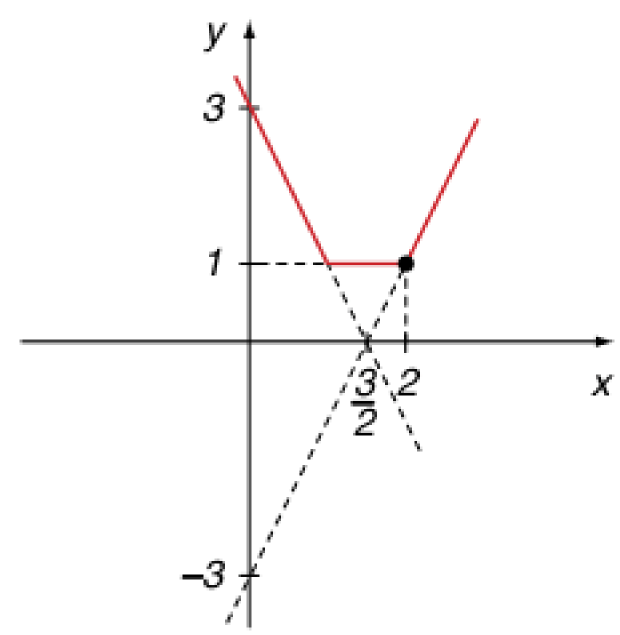
Quadro de sinais:

|x – 1|	–x + 1	x – 1	x – 1
|x – 2|	–x + 2	–x + 2	x – 2
|x – 1| + |x – 2|	–2x + 3	1	2x – 3

1 2

Portanto: $f(x) = \begin{cases} 2x-3; & x \geq 2 \\ 1; & 1 \leq x < 2 \\ -2x+3; & x < 1 \end{cases}$

Observe o gráfico:



Equações modulares

A partir do momento em que o aluno compreender e treinar a construção de gráficos geometricamente e pela definição, resolver equações será um processo natural.

Exercícios resolvidos

10 Calcule |2x – 1| = 4.

Resolução:

Temos duas opções para uma equação do tipo |x| = k, ou x = k ou x = –k, pois |k| = |–k| = k, assim:

$$2x - 1 = 4 \text{ ou } 2x - 1 = -4 \therefore x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{-3}{2} \therefore S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$$

11 Calcule $|x|^2 - |x| - 6 = 0$.

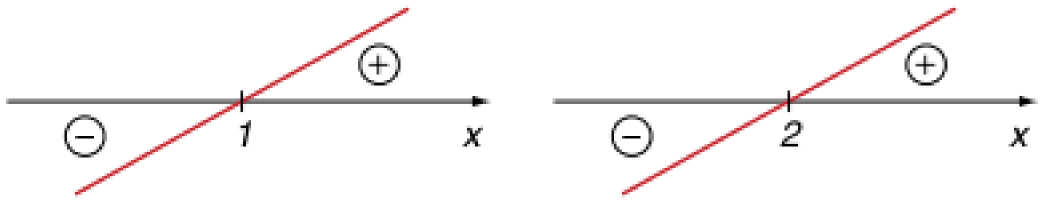
Resolução:

A equação modular apresentada é redutível ao 2º grau, observe: fazendo |x| = t, obtemos: $t^2 - t - 6 = 0 \therefore (t-3)\cdot(t+2) = 0$, *logo t = 3 ou t = –2. Voltando para a variável original, temos:* $|x| = 3 \therefore |x| = \pm 3$ *ou* $|x| = -2$ *(impossível) logo:* $S = \{\pm 3\}$.

12 Calcule |x – 1| + |x – 2| = 4.

Resolução:

Seguindo o mesmo procedimento dos gráficos, construiremos um quadro de sinais.



$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert$	$-2x+3$	1	$2x-3$

1 2

Obtivemos os valores possíveis de: $|x-1|+|x-2|$, *observe:*

para $x \geq 2$	$2x-3=4$	$\therefore x=\frac{7}{2}$
para $1 \leq x < 2$	$1=4$	absurdo
para $x < 1$	$-2x+3=4$	$\therefore x=\frac{-1}{2}$

Analisando as respostas, a 1ª e a 3ª satisfazem as suas respectivas condições de contorno, a 2ª é um absurdo.

$$S=\left\{\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right\}$$

Inequações modulares

Vamos seguir o mesmo procedimento das equações modulares e dos gráficos, mas o conceito geométrico é muito útil. Observe os dois exercícios a seguir.

Exercícios resolvidos

13 Calcule $|x| \geq 3$.

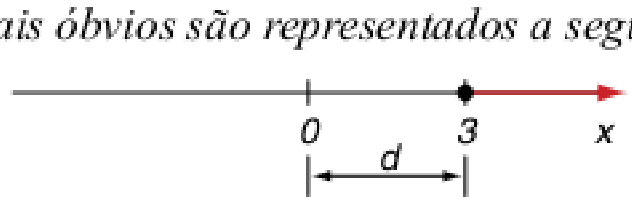
Resolução:

Como foi apresentado no início do capítulo, o módulo de um número real representa a distância do número na reta real até a origem.

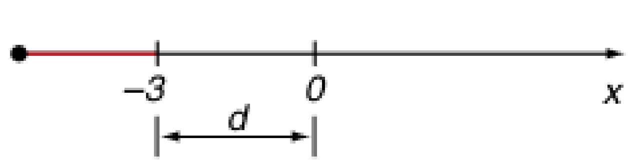
$|x|$ *representa a distância do número x até a origem.*

Com a inequação anterior, queremos os valores de x cujas distâncias até a origem são maiores ou iguais a 3.

Os valores mais óbvios são representados a seguir.



Mas não podemos esquecer que distâncias maiores ou iguais a 3 podemos ter no "lado esquerdo", nos números negativos, observe:



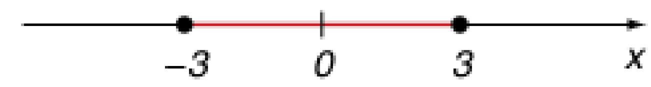
Solução final:

$S=\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3 \text{ ou } x \leq -3\}$ ou $S=\,]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$.

14 Calcule $|x| \leq 3$.

Resolução:

Na inequação apresentada, queremos os valores de x cuja distância até a origem é menor ou igual a 3. Comparando com o exercício resolvido 2, os valores de x estão de – 3 a 3, observe:



Solução final:

$S=\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 3\}$ ou $S=[-3; 3]$.

Para $k > 0$, temos:

$|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k$ ou $x \leq -k$

$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$

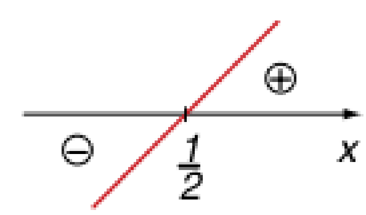
Analise agora outros exercícios em que necessitamos utilizar a definição de módulo.

Exercícios resolvidos

15 Calcule $|2x-1| > x$.

Resolução:

Analisando a função dentro do módulo, temos:



Assim:

Se $x \geq \frac{1}{2}$, *temos* $2x-1 > x \therefore x > 1$

Se $x < \frac{1}{2}$, *temos* $-2x+1 > x \therefore -3x > -1 \therefore x < \frac{1}{3}$

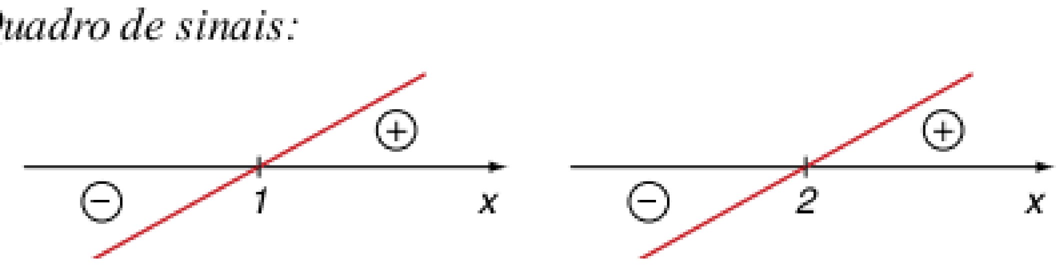
As 1ª e 2ª soluções satisfazem as condições de contorno, assim a solução final é:

$S=\{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ ou } x < \frac{1}{3}\}$ ou $S=\,]1; -\infty[\,\cup\,]-\infty; \frac{1}{3}[$

16 Calcule $|x-1|+|x-2| \geq 3$.

Resolução:

Quadro de sinais:



$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert$	$-2x+3$	1	$2x-3$

1 2

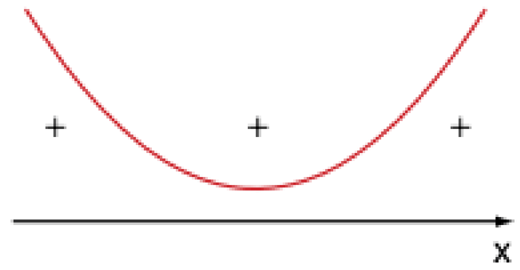
Resolveremos agora três inequações simples em três intervalos diferentes:

Se $x \geq 2$	$2x - 3 \geq 3$	$\therefore 2x \geq 6$	$\therefore x \geq 3$
Se $1 \leq x < 2$	$1 \geq 3$	absurdo!	
Se $x < 1$	$-2x + 3 \geq 3$	$\therefore -2x \geq 0$	$\therefore x \leq 0$

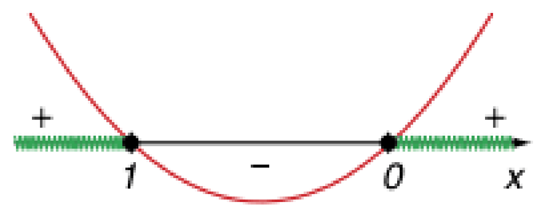
Solução final:
$S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3 \text{ ou } x \leq 0\}$ ou $S = [3; +\infty[\cup]-\infty;$

17 Calcule $|x^2 + x + 1| \geq 1$.

Resolução:
Analisando a função interna do módulo, trata-se de uma função do 2º grau cujo $\Delta < 0$, observe a análise do sinal:



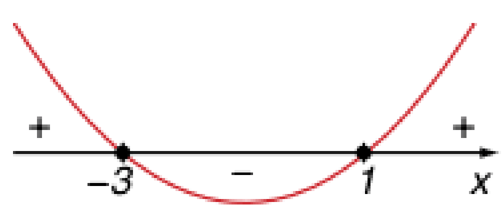
A função sempre é positiva, então o sinal de módulo é desnecessário: $x^2 + x + 1 \geq 1 \therefore x^2 + x \geq 0$



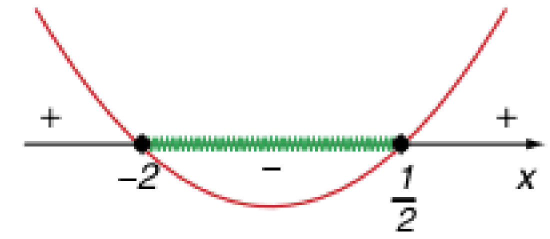
Solução final:
$S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ ou } x \leq -1\}$ ou $S = [0; +\infty[\cup]-\infty; -1]$

18 Calcule $x^2 + x + 1 \leq |x^2 + 2x - 3|$.

Resolução:
A inequação vai ser dividida em três intervalos. Temos a função $x^2 + 2x - 3$ "dentro" do módulo, cujo esboço do gráfico é:

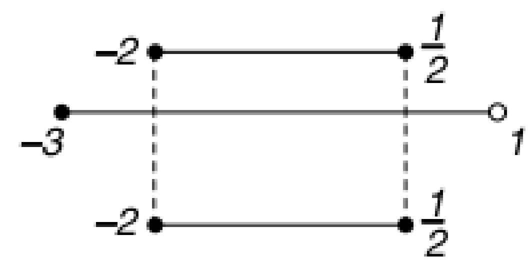


- *Para $x \geq 1$, temos:*
  $x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x - 3 \therefore -x \leq -4 \therefore x \geq 4$
  Fazendo a interseção com a condição de contorno, temos:
  $S_1 = [4; +\infty[$
- *Para $-3 \leq x < 1$, temos:*
  $x^2 + x + 1 \leq -x^2 - 2x + 3 \therefore 2x^2 + 3x - 2 \leq 0$



Temos então: $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Fazendo a interseção com a condição de contorno, temos:



Assim: $S_2 = \left[-2; \frac{1}{2}\right]$

- *Para $x < -3$, temos:*
  $x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x - 3 \therefore -x \leq -4 \therefore x \geq 4$
  Fazendo a interseção com a condição de contorno, temos:
  $S_3 = \varnothing$
  A solução final é dada por: $S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$S_{final} = \left[-2; \frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty[$

ATENÇÃO

A equação $|x - 1| = -3$ não possui solução, pois de acordo com a propriedade P_1 o módulo é um número real não negativo.
O símbolo $\Leftrightarrow$ siginifica se, e somente se. Na prática, isso nos permite concluir o seguinte: $A \Leftrightarrow B$. O resultado A implica o B, e o B implica o A.

Revisando

1 Calcule o valor de $|x^2 - 6x + 8|$.

2 Calcule o valor de $|x| + |x - 1|$.

3 Construa o esboço do gráfico da função: $f(x) = x^2 - |x|$.

4 Construa o esboço do gráfico da função: $f(x) = |x| - |x - 1|$.

5 Resolva as seguintes equações modulares.

a) $|5 - |x|| = 3$
b) $|x - 1| = 2x$
c) $|x + 2| = 2|x - 2|$

6 Resolver as equações modulares a seguir.

a) $|x - 3| < 7$
b) $|x + 2| + x \leq 5$
c) $|x - 3| \leq |1 - x|$

Exercícios propostos

Definição de módulo

1 Determine:

a) $|-3|$
b) $|\pi - \sqrt{5}|$
c) $|x^2 + 1|$
d) $|1 - \sqrt{2}|$

2 **PUC** O valor de $|2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}|$ é:

(a) $5 - 2\sqrt{5}$
(b) $5 + 2\sqrt{5}$
(c) 5
(d) $1 + 2\sqrt{5}$
(e) 1

3 Se x e $y \in \mathbb{R}$ e $|x + y - 17| + |x - y - 5| = 0$, então $x + 2y$ é igual a:

(a) 21
(b) 22
(c) 23
(d) 24
(e) 25

4 Para quaisquer reais não nulos a, b e c o conjunto dos valores que o número $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$, pode assumir é igual a:

(a) {0}
(b) {–4; –2; 2; 4}
(c) {–4; 0; 4}
(d) {–4; –2; 0; 2; 4}
(e) {–2; 0; 2}

5 Se $x \in [1; 2]$, então $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$ é igual a:

(a) 4
(b) 2
(c) 1
(d) 0
(e) –2

Propriedades básicas do módulo

6 **UEL** Quaisquer que sejam os números reais x e y:

(a) se $|x| < |y|$, então $x < y$.
(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
(c) $|x + y| = |x| + |y|$.
(d) $|-|x|| = -x$.
(e) se $x < 0$, então $|x| < x$.

7 **Unirio** Sejam a e b números reais tais que $a^2 < b^2$, então, pode-se concluir que:

(a) $a < b$
(b) $|a| < |b|$
(c) $\frac{-a^2}{c^2} < \frac{-b^2}{c^2}$, se $c \neq 0$
(d) $b < a$.
(e) $b^2c^2 < a^2c^2$, se $c \neq 0$

8 **UFF** Dados p, q $\in \mathbb{R}$ tais que $|p| \le q$, considere as afirmativas:

I. $q \in \mathbb{R}_+$
II. $-q \le p \le q$
III. $p \le |q|$
IV. $|p| \le |q|$

São verdadeiras:
(a) somente a I e II.
(b) somente a I e a III.
(c) somente a II e a III.
(d) somente a I, a II e a III.
(e) todas as afirmativas.

9 Assinale o item que contém a implicação verdadeira.
(a) $x > y \Rightarrow |x| > |y|$
(b) $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$
(c) $x > y \Rightarrow x - y > y - x$
(d) $x > y \Rightarrow a^x > a^y$, em que $a > 0$ e $a \ne 1$.
(e) $|x + y| = |x| + |y| \Rightarrow$ x e y possuem sinais opostos.

10 **PUC** a e b são números reais e $x = \left[(a-b)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Sobre o número x, é correto afirmar:
(a) $x = \begin{cases} a - b, \text{ se } a \ge b \\ b - a, \text{ se } a < b \end{cases}$
(b) $x = \begin{cases} a - b, \text{ se } a \le b \\ b - a, \text{ se } a < b \end{cases}$
(c) $x = |a| - |b|$
(d) $x = a - b$
(e) $x = \sqrt[2]{[|a - b|]}$

11 Para quais valores reais de x, $x \ne 0$, $\dfrac{|x - |x||}{x}$ é um número inteiro?
(a) Somente para $x < 0$.
(b) Somente para $x > 0$.
(c) Somente se x for par.
(d) Para todo x real, $x \ne 0$.
(e) Para nenhum x real.

12 Se $x < 0$, então $x - \sqrt{(x-1)^2}$ é igual a:
(a) 1
(b) $1 - 2x$
(c) $-2x - 1$
(d) $1 + 2x$
(e) $2x - 1$

13 **UFMT** Julgue, quanto a (V) ou (F), os itens.
- [ ] Sendo a e b números reais, então $\sqrt{(a^2 + b^2)} = a + b$.
- [ ] Se x é um número real, $-1 < x \le 1$, então $\dfrac{|x+1|}{|x+2| - 3} = -1$.
- [ ] Se p é um número real não nulo, então a equação $2px^2 - 2(p-1)x - 1 = 0$, tem duas raízes reais diferentes, qualquer que seja o valor de p.

14 **UFRJ** Considere uma quantidade $Q > 0$ e seja M um valor aproximado de Q, obtido através de uma certa medição.
O erro relativo E desta medição é definido por: $E = \dfrac{|Q - M|}{Q}$.
Considere ainda um instrumento com uma precisão de medida tal que o erro relativo de cada medição é de, no máximo, 0,02.
Suponha que uma certa quantidade Q foi medida pelo instrumento e o valor $M = 5{,}2$ foi obtido.
Determine o menor valor possível de Q.

Equações modulares

15 Resolva a equação $|x - 5| = 3$.

16 Resolva a equação $|2x - 1| = x - 1$.

17 **Vunesp** Resolver a equação $x^2 - 3|x| + 2 = 0$, tomando como universo o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

18 **Uece** Se $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{2}\right) - 2$ então as raízes irracionais da equação $|f(x) - 6| = 8$ são:
(a) $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$
(b) $3\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$
(c) $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$
(d) $5\sqrt{2}$ e $-5\sqrt{2}$

19 **Uece** Seja $W = \{x \in \mathbb{R};\ |3x + 1| = |x - 2|\}$, a soma dos elementos de W é:
(a) $-\dfrac{5}{4}$
(b) $-\dfrac{3}{4}$
(c) $\dfrac{1}{4}$
(d) $\dfrac{7}{4}$

20 **UFMG** Considere a equação $(x^2 - 14x + 38)^2 = 11^2$.
O número de raízes reais distintas dessa equação é:
(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

21 Seja p o produto das soluções reais da equação $||x+1| - 2| = 2$, então p é tal que:
(a) $p < -4$.
(b) $-2 < p < 0$.
(c) $4 < p < 16$.
(d) $0 < p < 4$.
(e) $p > 16$.

22 **FGV** O conjunto-solução da equação $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 1 + x$ é:
(a) Ø
(b) $\mathbb{R}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -1\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -1\}$
(e) $\{0\}$

23 **UFRJ** Durante o ano de 1997, uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função
$L(x) = 50\,(|x - 100| + |x - 200|)$, em que $x = 1, 2, \ldots, 365$ corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais.
Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de R$ 10.000,00.

Inequações modulares

24 A solução da inequação $|3x - 4| \geq 2$ é:

(a) $x \leq \frac{2}{3}$ ou $x \geq 2$

(b) $x \geq 2$

(c) $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

(d) $\frac{-13}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$

25 **Fuvest** Seja $f(x) = |2x^2 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Determinar os valores de x para os quais $f(x) < 1$.

26 **Unitau** Se x é uma solução de $|2x - 1| < 5 - x$, então:

(a) $5 < x < 7$

(b) $2 < x < 7$

(c) $-5 < x < 7$

(d) $-4 < x < 7$

(e) $-4 < x < 2$

27 **PUC** Considere os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 1| < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 3\}$.

O número de elementos do conjunto $A \cap B$ é:

(a) 2
(b) 4
(c) 8
(d) 9
(e) 11

28 **FEI** Se $\left|1-\left[\frac{(x-1)}{2}\right]\right| \leq 4$; $x \in \mathbb{R}$, então:

(a) $x \geq 15$
(b) $-5 \leq x \leq 11$
(c) $x \leq -10$
(d) $12 < x \leq 20$
(e) $-7 \leq x < 6$

29 **Unitau** O domínio da função $f(x)=\sqrt{\left[\frac{(1-|x-1|)}{2}\right]}$ é:

(a) $0 \leq x \leq 2$
(b) $x \geq 2$
(c) $x \leq 0$
(d) $x < 0$
(e) $x > 0$

30 Adicionando-se os valores inteiros de x que satisfazem simultaneamente as desigualdades $|x - 1| \leq 2$ e $|2x - 1| \geq 1$, obtemos:

(a) 6
(b) 3
(c) 4
(d) 5
(e) 8

31 Resolva a inequação: $|x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 2x - 3|$

Gráficos

32 **UFSC** Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |2x + 5|$.

01 f é injetora.

02 O valor mínimo assumido por f é zero.

04 O gráfico de f intercepta o eixo y no ponto de coordenadas (0, 5).

08 O gráfico de f é uma reta.

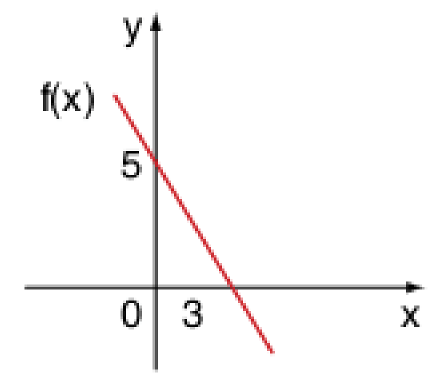
16 f é uma função par.

Soma = ____

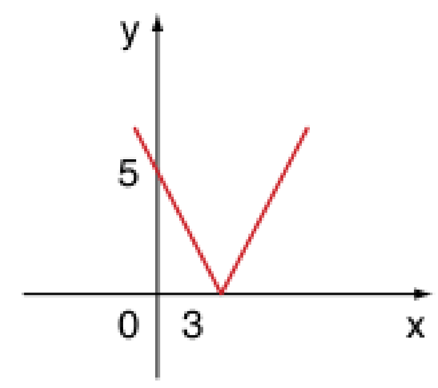
33 **Unirio** Sejam as funções: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $y = |x|$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = x^2 - 2x - 8$.

Faça um esboço gráfico da função fog.

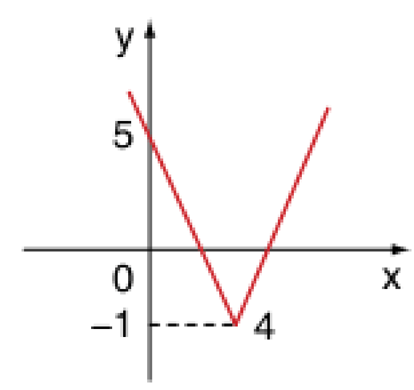
34 **Cesgranrio** No gráfico a seguir, está representada a função do 1º grau f(x). O gráfico que melhor representa $g(x) = |f(x)| - 1$ é:



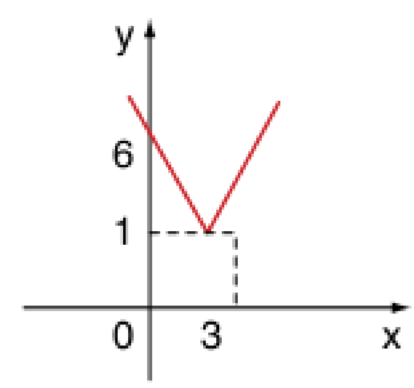
(a)



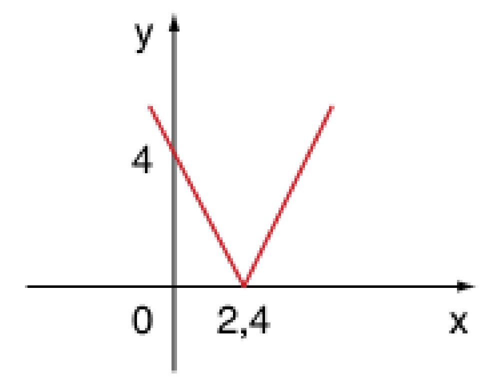
(b)



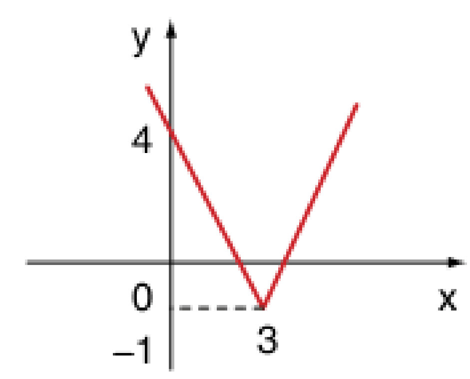
(c)



(d)



(e)

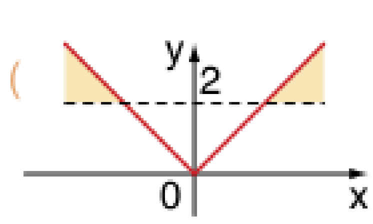


35 **Unirio** Determine os pontos de interseção dos gráficos das funções reais definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = -x^2 + x + 8$ pelo método algébrico.

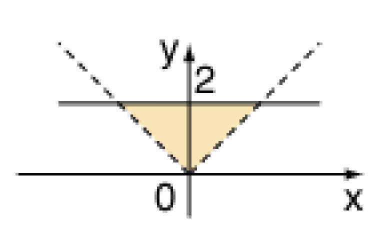
36 **UFF** Considere o sistema: $\begin{cases} y > |x| \\ y \leq 2 \end{cases}$

A região do plano que melhor representa a solução do sistema é:

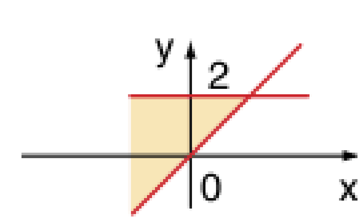
(a) (



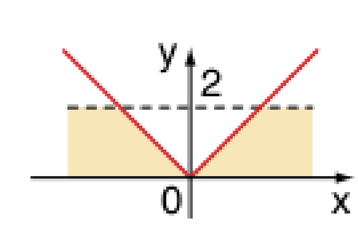
(b)



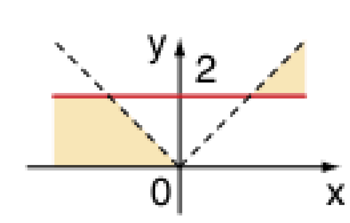
(c)



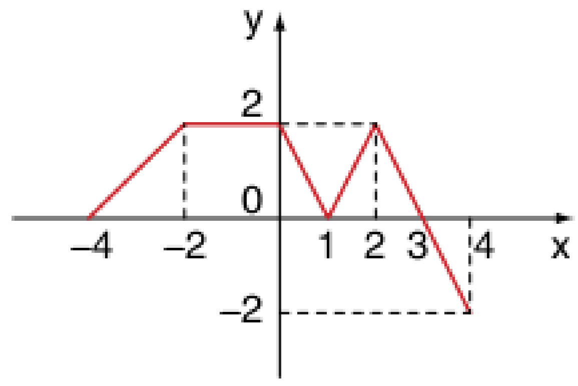
(d)



(e)



37 UFPE Na figura a seguir, temos o gráfico de uma função f(x) definida no intervalo fechado [–4, 4].



Com respeito à função g(x) = f(|x|), é incorreto afirmar que:

(a) o ponto (–4, –2) pertence ao gráfico de g.
(b) o gráfico de g é simétrico com relação ao eixo 0 y das ordenadas.
(c) g(x) se anula para x igual a –3, –1, 1 e 3.
(d) g(–x) = g(x) para todo x no intervalo [–4, 4].
(e) g(x) ≥ 0 para todo x no intervalo [–4, 4].

38 UFRGS Para $-1 < x < \frac{1}{2}$, o gráfico da função y = |x + 1| + |2x – 1| coincide com o gráfico da função y = ax + b. Os valores de a e b são, respectivamente:

(a) –1 e –1
(b) 2 e –1
(c) –1 e 2
(d) $\frac{1}{2}$ e –1
(e) $-\frac{1}{2}$ e 1

39 Cesgranrio O conjunto-imagem da função $f(x) = |x^2 - 4x + 8| + 1$ é o intervalo:

(a) [5, + ∞[
(b) [4, + ∞[
(c) [3, + ∞[
(d) [1, + ∞[
(e) [0, + ∞[

40 FGV Relativamente à função f, de ℝ em ℝ, dada por f(x) = |x| + |x – 1|, é correto afirmar que:

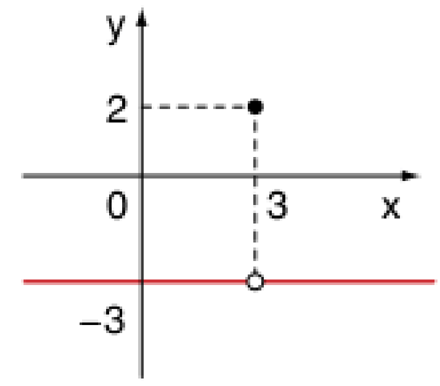
(a) o gráfico de f é a reunião de duas semirretas.
(b) o conjunto imagem de f é o intervalo [1, + ∞[.
(c) é crescente para todo x ∈ ℝ.
(d) f é decrescente para todo x ∈ ℝ e x ≥ 0.
(e) o valor mínimo de f é 0.

41 Vunesp Sejam a e b dois números reais positivos tais a < b e a + b = 4. Se o gráfico da função y = |x – a| + |x – b| coincide com a função y = 2 no intervalo a ≤ x ≤ b, calcule os valores de a e b.

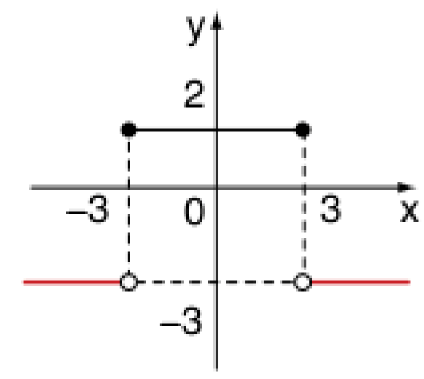
42 Mackenzie Dada a função real definida a seguir, então a melhor representação gráfica de y = f (| x |) é:

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x = 3 \\ -3, \text{ se } x \neq 3 \end{cases}$$

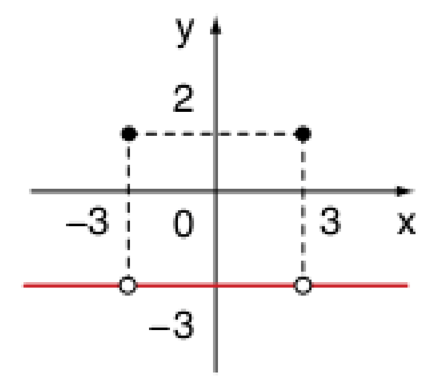
(a)



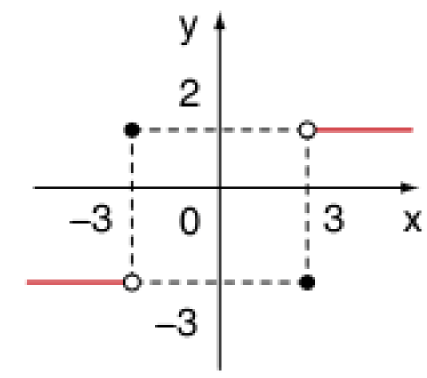
(b)



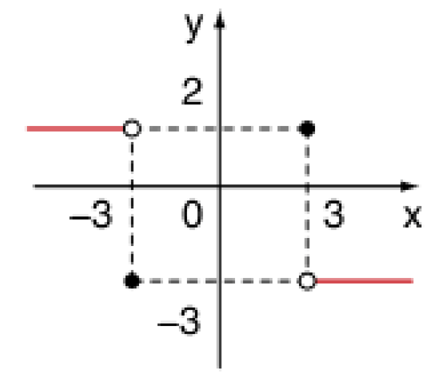
(c)



(d)



(e)



43 Mackenzie Se y = x – 2 + | x – 2| x | |, x ∈ ℝ, então o menor valor que y pode assumir é:

(a) –2
(b) –1
(c) 0
(d) 1
(e) 2

44 Mackenzie Se f: ℝ → A e g: ℝ → B são funções reais e sobrejetoras tais que $|1 - f(x)| - 3 \leq 0$ e $g(x) = 3 + \frac{f(x)}{2}$, então A ∩ B é o:

(a) [–2, 0]
(b) [0, 2]
(c) [2, 4]
(d) [1, 3]
(e) [3, 5]

45 Mackenzie Analisando graficamente as funções (I), (II), (III) e (IV) a seguir.

I. $f(x) = x + \frac{(2|x|)}{x}$ de ℝ* em ℝ.

II. $g(x) = 3x - x^3$ de $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ em [–2, 2]

Obs.: g (–1) é mínimo.

III. $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ de ℝ em $ℝ^*_+$.

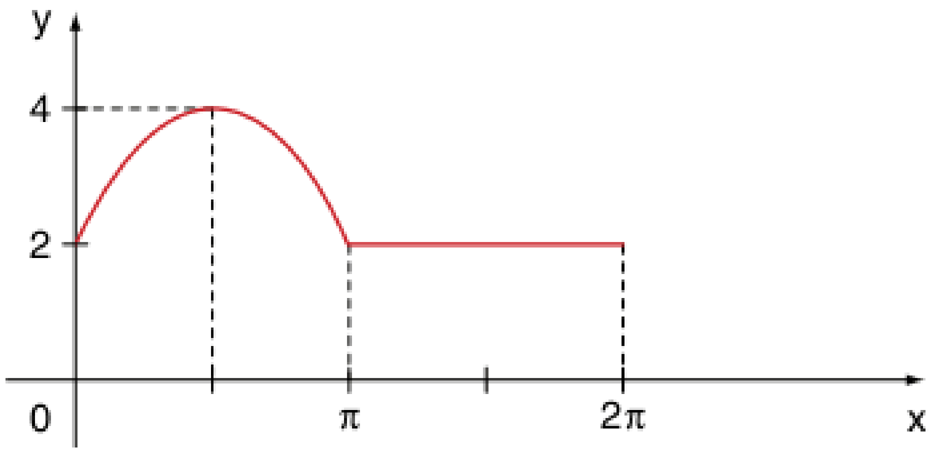
IV. t(x) = 3, de ℝ em {3}.

O número de soluções reais da equação h(x) = f(x) é:

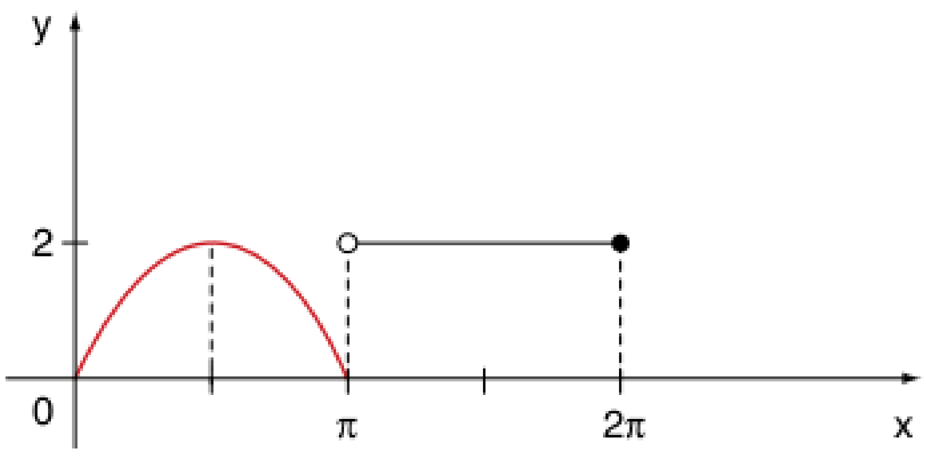
(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

46 **Mackenzie** O gráfico que melhor representa a função $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $y = 2 + \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$ é:

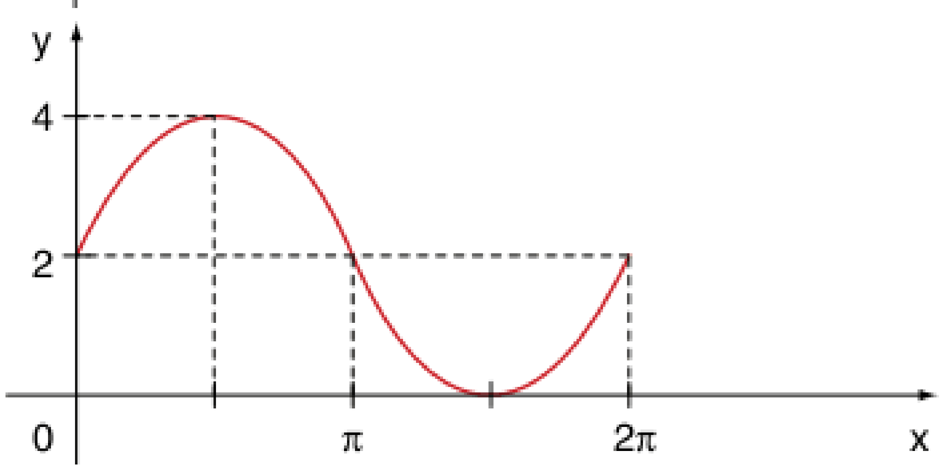
(a)



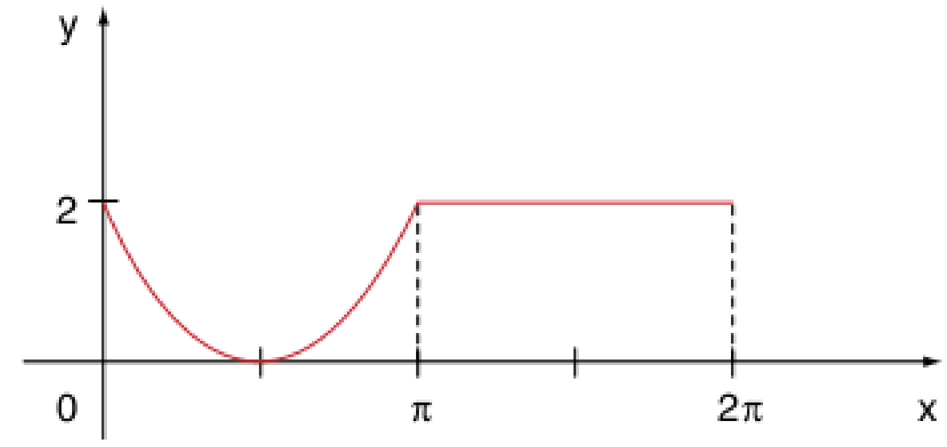
(b)



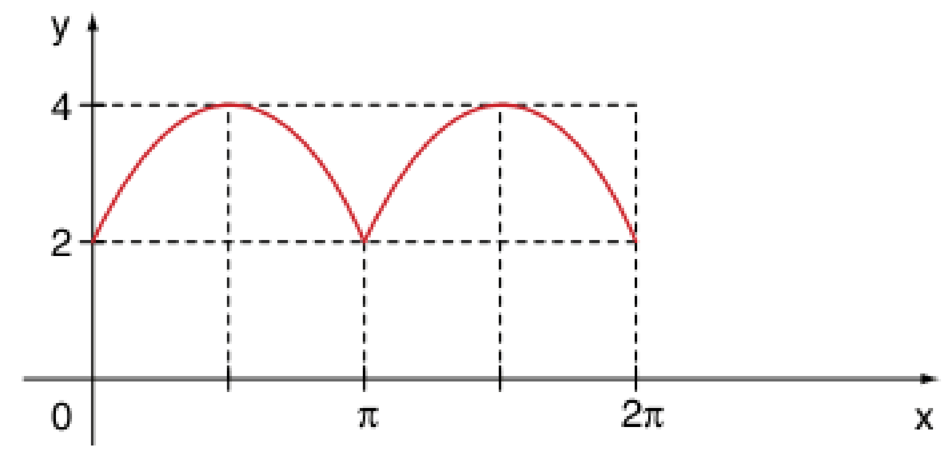
(c)



(d)



(e)



47 **Fuvest** O conjunto dos pontos (x; y) do plano cartesiano que satisfazem $t^2 - t - 6 = 0$, onde $t = |x - y|$, consiste em:

(a) uma reta.

(b) duas retas.

(c) quatro retas.

(d) uma parábola.

(e) duas parábolas.

TEXTO COMPLEMENTAR

A equação do quadrado

Utilizando a definição e os conceitos de módulo, podemos obter a equação de um quadrado no plano cartesiano.

Vamos analisar a expressão $|x| + |y| = 2$

I. No primeiro quadrante, temos $x > 0$ e $y > 0$, resultando em uma equação $x + y = 2 \therefore y = -x + 2$.

II. No segundo quadrante, temos $x < 0$ e $y > 0$, resultando em uma equação $-x + y = 2 \therefore y = x + 2$.

III. No terceiro quadrante, temos $x < 0$ e $y < 0$, resultando em uma equação $-x - y = 2 \therefore y = -x - 2$.

IV. No quarto quadrante, temos $x > 0$ e $y < 0$, resultando em uma equação $x - y = 2 \therefore y = x - 2$.

Podemos construir as quatro retas, cada uma no seu quadrante:

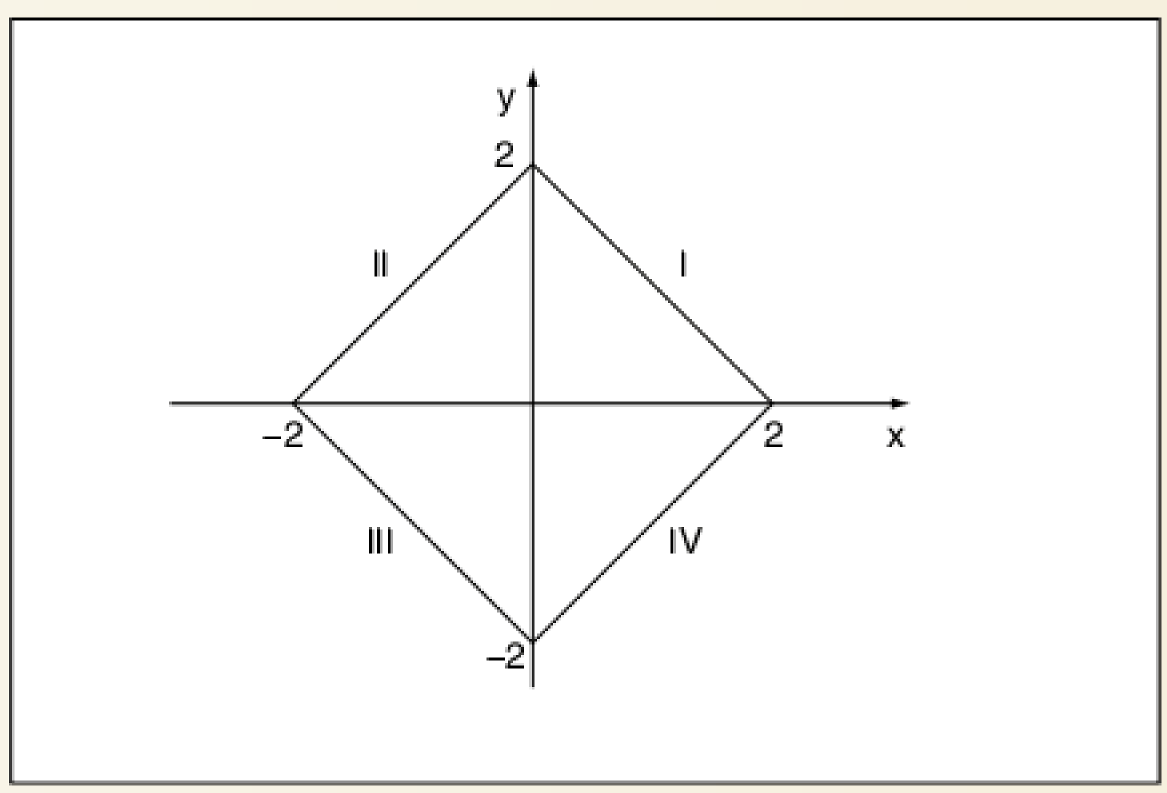


Gráfico da expressão $|x| + |y| = 2$.

Temos como resultado (observe a figura anterior) um quadrado com centro na origem do sistema e diagonais paralelas aos eixos coordenados. O lado do quadrado mede $2\sqrt{2}$.

Generalizando: $|x| + |y| = a$; $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, centro (0; 0) e lado $a\sqrt{2}$.

Gráfico:

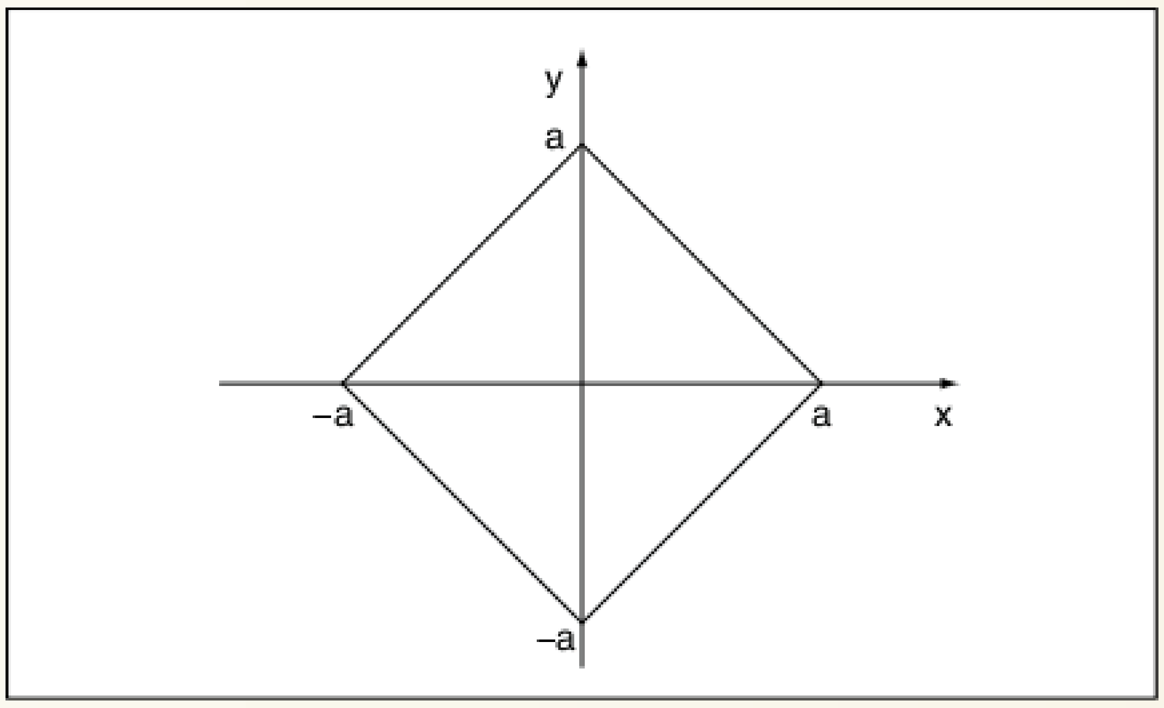


Gráfico da expressão |x| + |y| = a.

Vamos deslocar o centro do quadrado da origem para um ponto qualquer. Observe a equação:

$$|x - 2| + |y - 3| = 2$$

Por meio de uma translação de eixos, temos:

$$X = x - 2 \text{ e } Y = y - 3$$

A origem do novo sistema é no ponto (2; 3) do sistema inicial.

Generalizando: $|x - a| + |y - b| = c$; $c \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, é a equação de um quadrado com centro (a; b) e lado $c\sqrt{2}$.

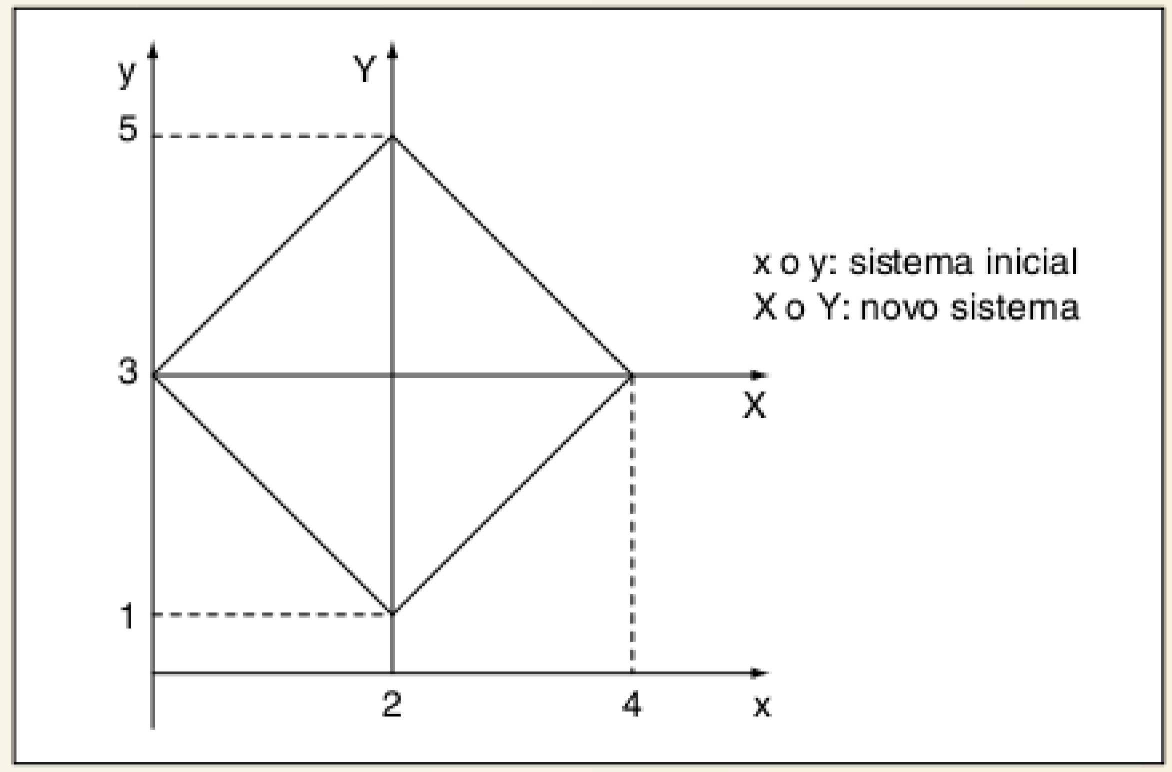


Gráfico da expressão |x – 2| + |y – 3| = 2.

RESUMINDO

A função modular é definida algebricamente por uma dupla sentença:

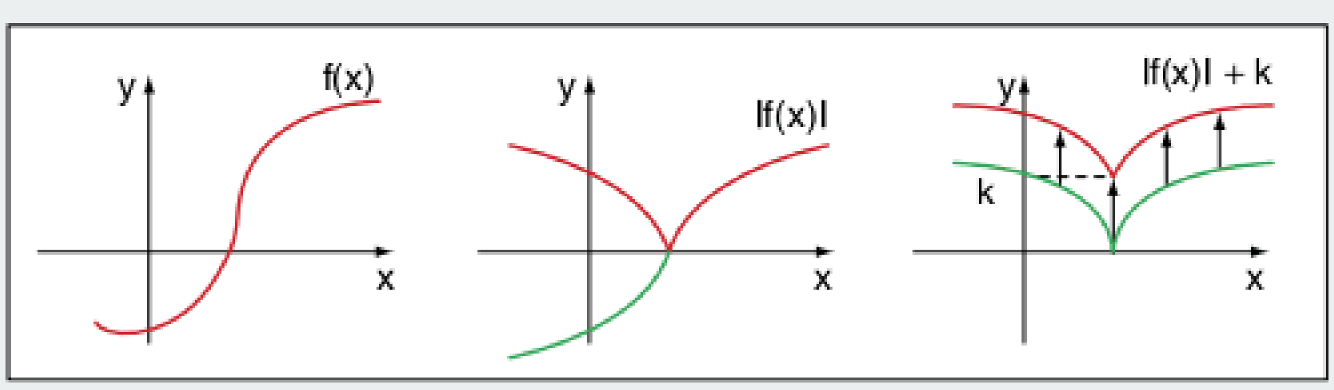
$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

Reforçe os conhecimentos da análise de sinal dos capítulos 2 e 3, principalmente o capítulo 3 sobre funções do 2º grau.

Estudar a função modular não é simplesmente "decorar" a definição, é fazer a análise do sinal da função interna ao módulo. Assim, generalizando:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x); & f(x) \geq 0 \\ -f(x); & f(x) < 0 \end{cases}$$

A construção dos gráficos é uma parte importante do capítulo, e um dos pontos interessantes é a construção geométrica do gráfico $y = |f(x)| + k$. Observe:



QUER SABER MAIS?

SITE

- Módulo de um vetor
  <http://pt.scribd.com/doc/89402396/aula-ga-vetor-p2-2s-07>.

Exercícios complementares

Equações ou inequações modulares

1 **Fuvest** Quaisquer que sejam os números reais a, b e c, podemos afirmar que a equação $ax^2 + b|x| + c = 0$:
(a) tem, no máximo, duas raízes reais distintas.
(b) tem, no máximo, quatro raízes reais distintas.
(c) tem pelo menos uma raiz real.
(d) não possui raízes reais.
(e) tem sempre raízes distintas.

2 Resolver as equações e inequações a seguir.
a) $|3x+2| = |x-1|$
b) $|x^2+x-5| = |4x-1|$
c) $|3x-2| = 3x-2$
d) $|x^2-x-4| >$
e) $|x-1| \leq 3x-7$
f) $|x^2-4| < 3x$
g) $|x+2| + |2x-3| < 10$

3 Determine a soma das raízes da equação $|2 - |1-|x||| = 1$.

4 Resolva a equação $|x| + |x-1| = 1$.

5 A soma dos inteiros que satisfazem a desigualdade $|x-7| > |x+2| + |x-2|$ é:
(a) 14
(b) 0
(c) –2
(d) –15
(e) –18

6 Considere as funções reais f e g, tais que:
I. $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, tem apenas uma raiz real, seu gráfico tem por eixo de simetria a reta $x = 1$ e passa pela ponta $(2;1)$.
II. $g(x) = mx + n$ e $g(f(x)) = -x^2 + 2x$
Analise as afirmações demonstrando-as:
a) $g^{-1}(x) = g(x)$
b) A equação $f(|x|) = 0$ tem 4 raízes distintas
c) O conjunto-solução da inequação $f(x) - |g(x)| \geq 0$ é $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$
d) A função $r(x) = f(g(x))$ é crescente para $x \leq 0$

7 **Fatec** A igualdade $-|-x| = -(-x)$ é verdadeira para todos os elementos do conjunto:
(a) $\mathbb{R}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

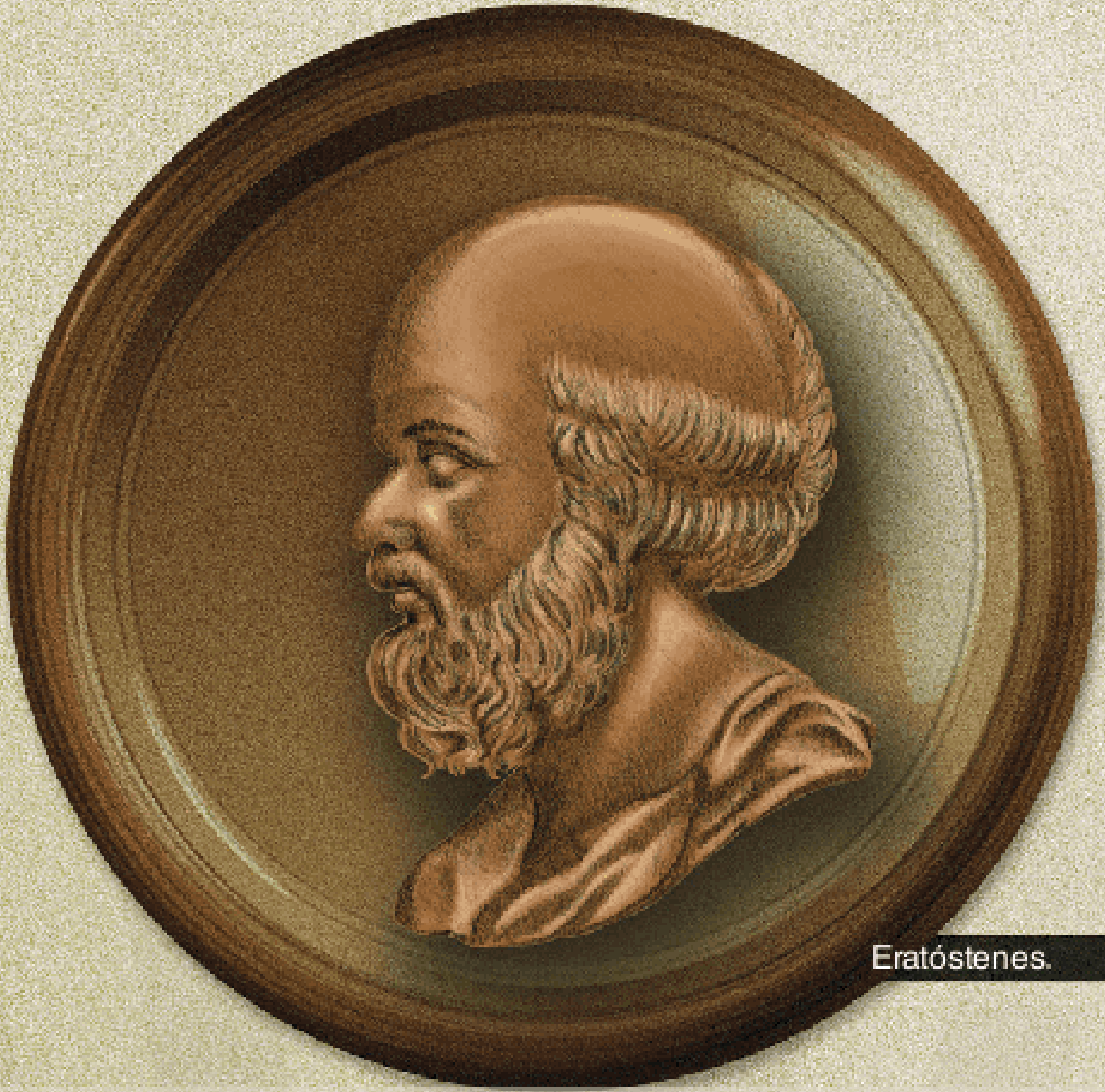
8 **ITA** Sobre a equação na variável real x, $|\,||x-1|-3|-2| = 0$, podemos afirmar que:
(a) ela não admite solução real.
(b) a soma de todas as suas soluções é 6.
(c) ela admite apenas soluções positivas.
(d) a soma de todas as soluções é 4.
(e) ela admite apenas duas soluções reais.

9 **UFJF** Sobre os elementos do conjunto-solução da equação $|x^2| - 4|x| - 5 = 0$, podemos dizer que:
(a) são um número natural e um número inteiro.
(b) são números naturais.
(c) o único elemento é um número natural.
(d) um deles é um número racional, o outro é um número irracional.
(e) não existem, isto é, o conjunto-solução é vazio.

10 **UFPI** A soma das raízes da equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$ é:
(a) 0
(b) –2
(c) –4
(d) 6
(e) 2

11 **UFV** Se x e y são números reais quaisquer, então é correto afirmar que:
(a) se $x^2 < y^2$, então $x < y$.
(b) se $x < y$, então $x^2 < y^2$.
(c) se $x^2 - y^2 = 0$, então $|x| = |y|$.
(d) $\sqrt{(x^2 + y^2)} = x + y$.
(e) $-x < 0$.

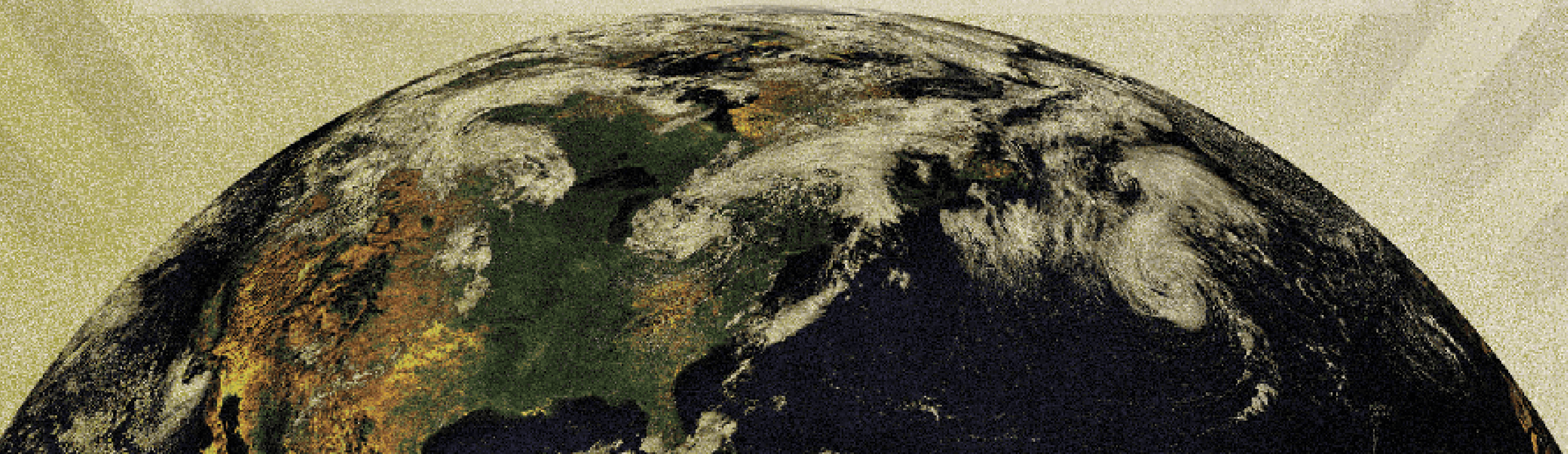
Trigonometria – conceitos básicos



Eratóstenes.

Trigonometria trata das relações entre os lados e os ângulos de triângulos, sendo dividida em ramos como a trigonometria plana e a esférica. Ela começou com as civilizações babilônica e egípcia e desenvolveu-se na Antiguidade graças aos gregos e indianos e um dos mais famosos exemplos de sua utilização foi a medição do raio da Terra por Eratóstenes. A partir do século VIII d.C., astrônomos islâmicos aperfeiçoaram as descobertas gregas e indianas, notadamente em relação às funções trigonométricas.

A trigonometria moderna começou com o trabalho de matemáticos no Ocidente a partir do século XV. A trigonometria começou como uma Matemática eminentemente prática, para determinar distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Também serviu à navegação, à agrimensura e à astronomia. Ao lidar com a determinação de pontos e distâncias em três dimensões, a trigonometria esférica ampliou sua aplicação à Física, à Química e a quase todos os ramos da Engenharia, em especial no estudo de fenômenos periódicos como a vibração do som e o fluxo de corrente alternada.



Medidas de arcos

No capítulo 2 de geometria vimos duas unidades de medidas de ângulos: o grau (°) e o grado (gr). Vamos agora introduzir o conceito de arco.

Observe a figura 1.

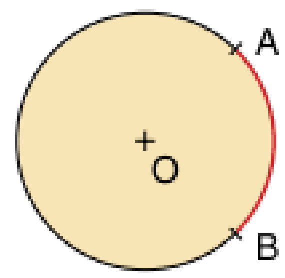


Fig. 1 Arco $\overset{\frown}{AB}$.

Considere dois pontos sobre a circunferência e divida a circunferência em duas partes denominadas arcos. Simbolicamente: $\overset{\frown}{AB}$.

Mas essa nomenclatura cria uma ambiguidade. Temos dois arcos $\overset{\frown}{AB}$, um maior e outro menor. A solução é marcar outro ponto para diferenciar os arcos, observe:

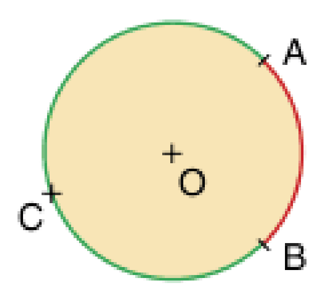
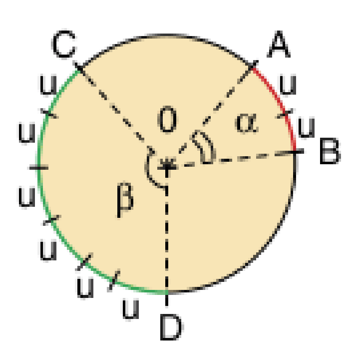


Fig. 2 Notação de arcos.

Na figura 2 observe os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{ACB}$. Agora compare o tamanho de dois arcos, na figura 3.



Arcos

$\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$

med $(\overset{\frown}{CD})$ med $\overset{\frown}{AB}$

med $(\overset{\frown}{CD}) = 6u$

med $(\overset{\frown}{AB}) = 2u$

Fig. 3 Medida de arcos.

Definimos o arco unitário u como sendo a nossa unidade de medida, vamos ver quantas vezes o arco u "cabe" dentro dos arcos dados $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{AB}$.

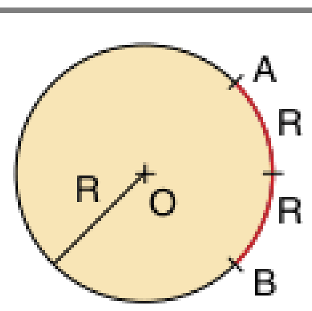
Radiano

O radiano (simbolicamente rad) é um arco unitário criado para ser a unidade básica dos arcos, juntamente com o grau.

Assim:

1 u = raio da circunferência que contém o arco.

Observe:



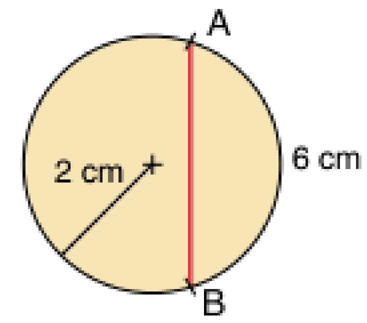
med $(\overset{\frown}{AB}) = 2R$

Resumindo:

$(\overset{\frown}{AB}) = 2$ rad

Fig. 4 A unidade radiano.

Se "retificarmos" o arco $\overset{\frown}{AB}$, obtemos um segmento $\overline{AB}$ cuja medida é 2R. Reforce a ideia com o exemplo a seguir.



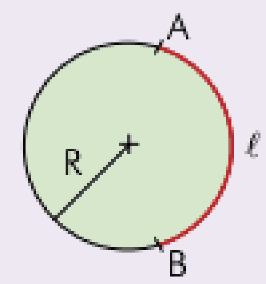
AB = 6 cm e R = 2 cm

med $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{AB}{R} = \frac{6}{2} = 3$ rad

Fig. 5 Exemplo da unidade radiano.

ATENÇÃO!

Para medir um arco $\overset{\frown}{AB}$ em radianos, divida a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo raio da circunferência.



med $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\ell}{R}$

Circunferência e círculo são conjuntos diferentes. Circunferência é só a linha e círculo é a linha e os pontos internos.
Medir uma grandeza significativa é comparar suas dimensões com uma outra definida como padrão (unidade).
A etimologia da palavra trigonometria vem do grego *tri* (três) *gonos* (ângulos) *metros* (medida).

Relacionando o grau e o radiano

Sabemos da geometria plana que o comprimento de uma circunferência de raio R é: $C = 2\pi R$; assim, a circunferência toda mede:

$$\text{Circunferência} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad, ou seja:}$$

$$2\pi \text{ rad} \equiv 360°$$

Observe, a seguir, os exercícios de transformações de unidades.

Exercícios resolvidos

1 Transforme 135° em radianos.

Resolução:

$$\begin{array}{l} 360° \text{ — } 2\pi \\ 135° \text{ — } x \end{array} \therefore 360x = (135) \cdot (2\pi)$$

$$\Rightarrow x = \frac{270\pi}{360} = \frac{3\pi}{4} rad$$

2 Transforme $\frac{7\pi}{5}$ rad em graus.

Resolução:

$$\begin{matrix} 360^\circ & — & 2\pi \\ x & — & \frac{7\pi}{5} \end{matrix} \therefore 2\pi x = (360).\left(\frac{7\pi}{5}\right)$$

$x = 252°$

3 Calcule quantos graus tem 1 rad.

Resolução:

$$\begin{matrix} 360^\circ & — & 2\pi \\ x & — & 1 \end{matrix} \therefore 2\pi\, x = 360 \therefore$$

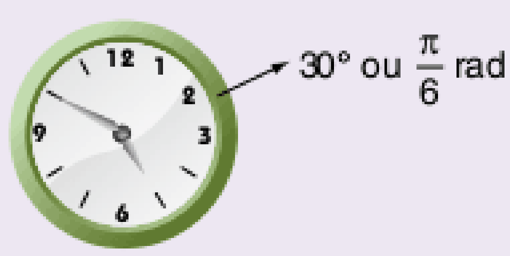
$$x = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}1416} = 57{,}295^\circ$$

(o que equivale a 57°17'44")

ATENÇÃO!

Vamos relembrar os problemas dos ângulos dos ponteiros de um relógio.

Ponteiro pequeno
30° _____ 60 min
Ponteiro grande
360° _____ 60 min



4 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 12 h e 50 min.

ângulo = 60° + x

Resolução:

- *Marcamos a 1ª hora inteira antes (no caso 12 h).*
- *Marcamos o horário desejado.*
- *O ponteiro pequeno percorre um ângulo x.*
- *O ângulo desejado mede 60° + x.*
- *Cálculo do x:*

  30° _____ 60 min
  x _____ 50 min
  $60x = 30 \cdot 50 \therefore x = 25°$
- *Ângulo* $= 60° + 25° = 85°$

Ciclo trigonométrico

Considere uma circunferência de raio 1 centrada na origem de um sistema cartesiano. Na figura 6, o ciclo trigonométrico foi dividido em quatro regiões chamadas quadrantes.

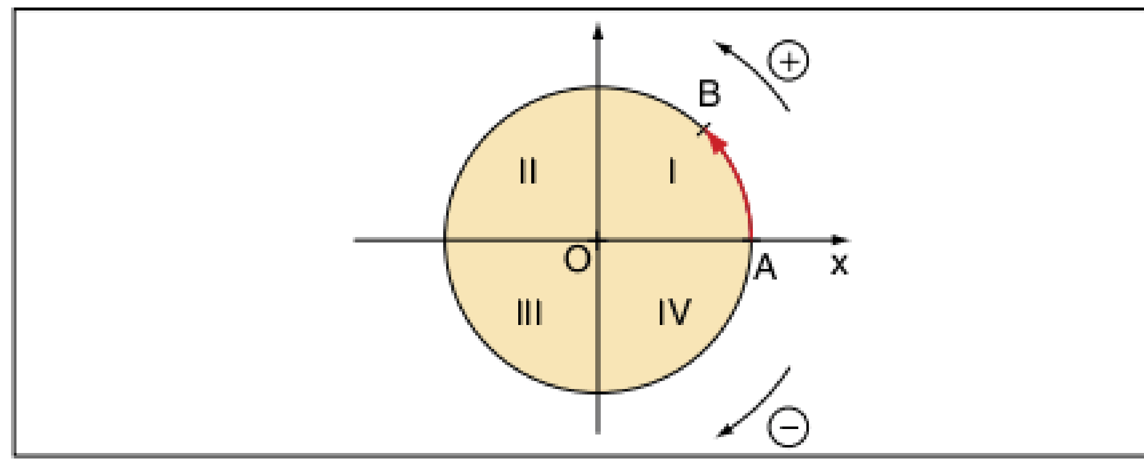


Fig. 6 Ciclo trigonométrico.

O comprimento dessa circunferência vale 2π, (sendo R = 1).

Vamos marcar um ponto B na circunferência e adotar o ponto A como sendo a origem de todos os arcos. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ será associada a um número real, o arco também terá um sentido, indicado na figura 7.

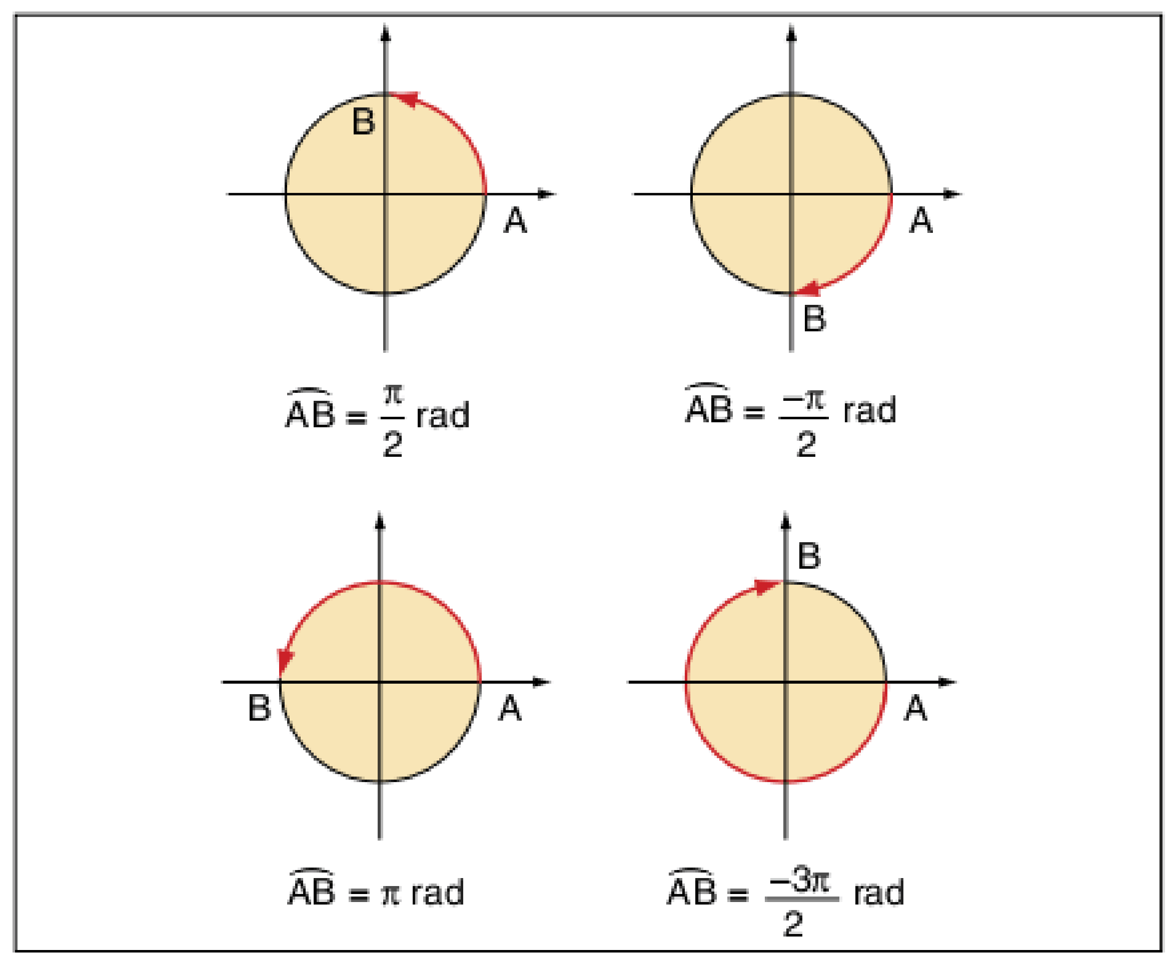


Fig. 7 Representação dos arcos orientados.

No ciclo trigonométrico, temos a liberdade de dar quantas voltas quisermos, tanto no sentido horário quanto no anti-horário. Essa possibilidade permite o seguinte:

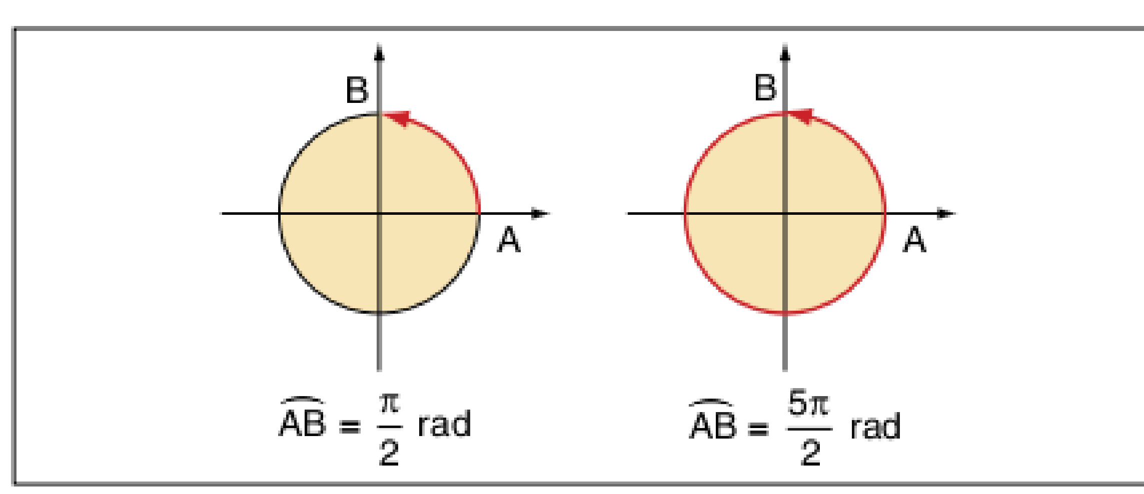


Fig. 8 Arcos com as mesmas extremidades.

Os dois arcos terminam no ponto B, mas o primeiro é menor do que o segundo, e a diferença entre eles é de 2π (uma volta).

Essa ideia sugere que um único ponto B sob a circunferência trigonométrica pode representar infinitos arcos trigonométricos, basta alterarmos o número de voltas e o sentido. Observe a figura 9.

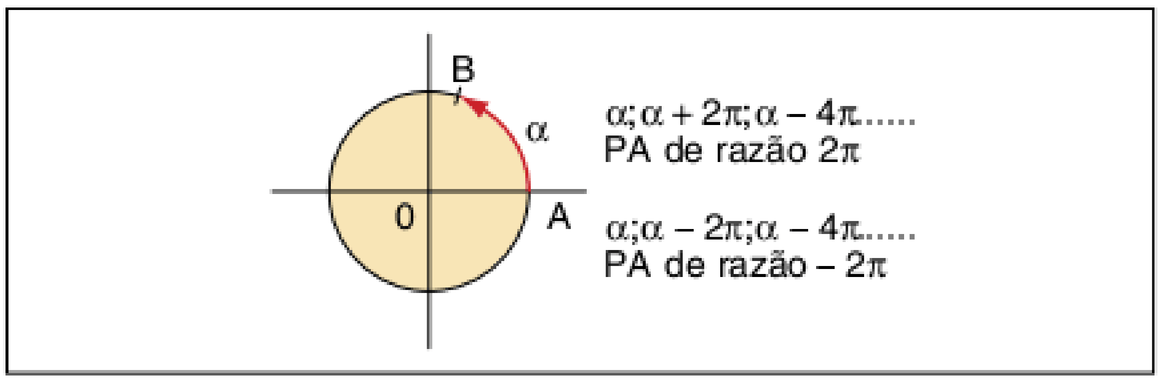


Fig. 9 Arcos côngruos.

Os arcos representados na figura 9 possuem extremidade em B, mas número de voltas e sentidos diversos.

Esses arcos são chamados de **arcos côngruos**. Eles possuem as mesmas **propriedades trigonométricas**. Podem, algebricamente, ser representados pelo conjunto:

$\overset{\frown}{AB} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \overset{\frown}{AB} = \alpha + 2K\pi;\ K \in \mathbb{Z}\}$

$|K|$: representar o número de voltas.

$K > 0$: voltas no sentido anti-horário.

$K < 0$: voltas no sentido horário.

Na divisão de números inteiros: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} R & q \end{array}$, temos

$D = d \cdot q + R$ e $0 \leq R < d$

Vamos denominar "família" de arcos todos os arcos que possuem a mesma extremidade.

Dois arcos são chamados de semicôngruos quando possuem extremidades no mesmo diâmetro.

Exercícios resolvidos

5 Represente no ciclo trigonométrico os arcos:

a) 13π

b) $572°$

c) $\dfrac{7\pi}{3}$

d) -17π

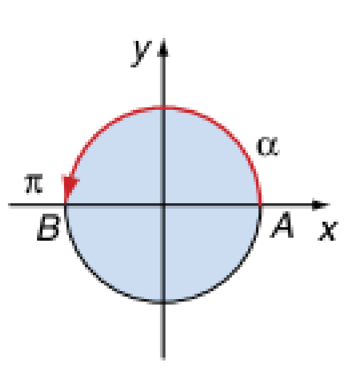
Resolução:

a) *Obviamente esse arco deu mais de uma volta, mas quantas?*

Faça a divisão: $\begin{array}{l|l} 13\pi & 2\pi \\ \cline{2-2} \pi & 6 \end{array}$

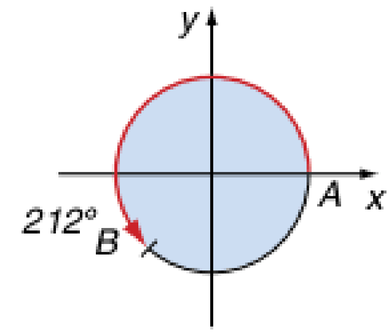
Temos 6 voltas no sentido anti-horário e mais π radianos?

$13\pi = \pi + 6(2\pi)$



13π e π são arcos côngruos.

b) $\begin{array}{l|l} 572° & 360° \\ \cline{2-2} 212° & 1 \end{array} \Rightarrow 572° = 212° + 1(360°)$

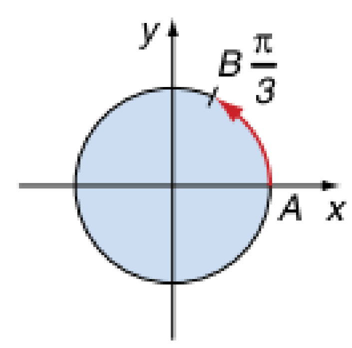


c) *Vamos utilizar o seguinte artifício neste exemplo:*

$$\begin{array}{l|l} \dfrac{7\pi}{3} & \dfrac{6\pi}{3} \\ \cline{2-2} \dfrac{\pi}{3} & 1 \end{array}$$

Transformamos 2π em $\dfrac{6\pi}{3}$ para facilitar a divisão:

$\dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 1(2\pi)$



d) *Vamos fazer a divisão desprezando, a princípio, o sinal.*

$\begin{array}{l|l} 17\pi & 2\pi \\ \cline{2-2} \pi & 8 \end{array} \Rightarrow 17\pi = \pi + 8\ (2\pi)$

Ajustando os sinais, temos:

$-17\pi = -\pi + (-8)2\pi$

6 Represente no ciclo trigonométrico as "famílias" de arcos representadas por:

a) $\left\{\overset{\frown}{AB} \in \mathbb{R} \mid \overset{\frown}{AB} = \pi + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{\overset{\frown}{AB} \in \mathbb{R} \mid \overset{\frown}{AB} = K\dfrac{\pi}{2};\ K \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\overset{\frown}{AB} \in \mathbb{R} \mid \overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{6} + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

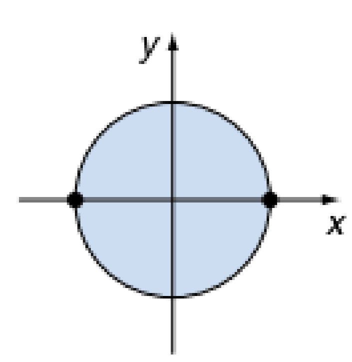
a) $\overset{\frown}{AB} = \pi + K\pi = 0 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \pi$

$K = 1 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 2\pi$

$K = 2 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 3\pi$ *(repetição)*

$K = -1 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 0$ *(repetição)*

para todos os demais $K \in \mathbb{Z}$, teremos as mesmas extremidades, logo:



b) $\overset{\frown}{AB} = K\dfrac{\pi}{2}$

$K = 0 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 0$

$K = 1 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{2}$

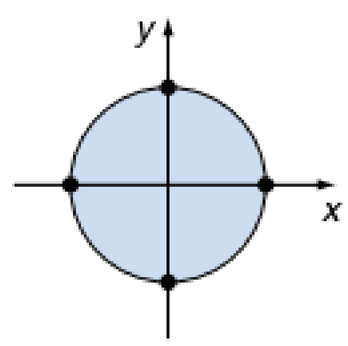
$K = 2 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \pi$

$K = 3 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \dfrac{3\pi}{2}$

$K = 4 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 4\pi$ *(repetição)*

$K = -1 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \dfrac{-\pi}{2}$ *(repetição)*

para todos os demais $K \in \mathbb{Z}$, teremos somente arcos côngruos, logo:



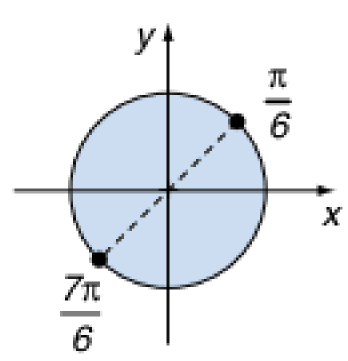
c) $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{6} + K\pi$

$K = 0 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{6}$

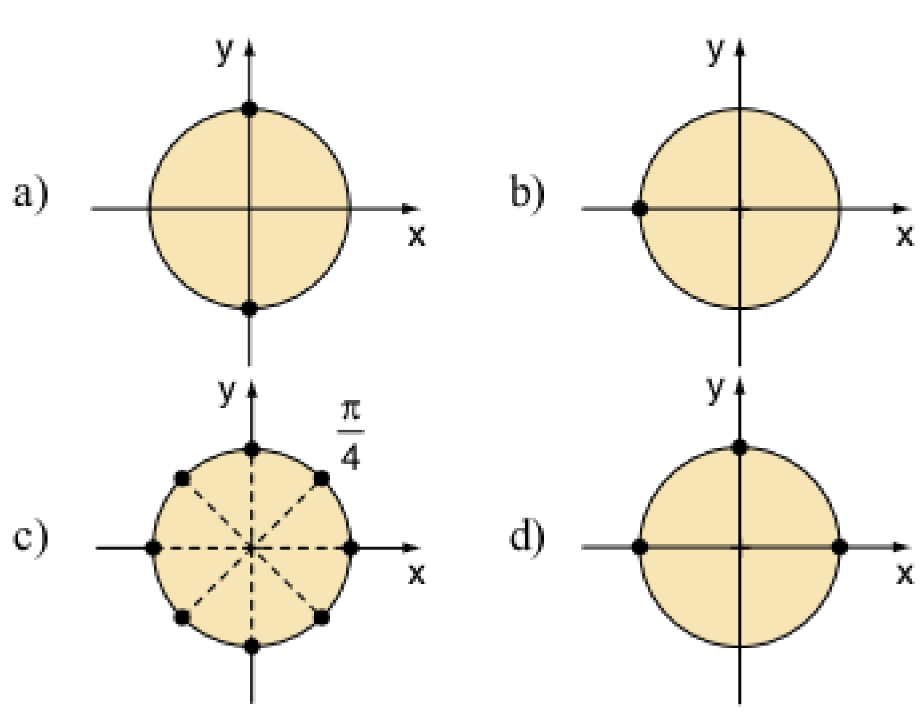
$K = 1 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{7\pi}{6}$

$K = 2 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6}$ *(repetição)*

Assim:



7 Determine a equação da família dos arcos dada a sua representação no ciclo trigonométrico.



Resolução:

a) *Os dois pontos dividem a circunferência em arcos iguais, isso indica que eles fazem parte da mesma família.*
Os dois arcos medem π rad.
Para montar a equação da família, escolha qualquer arco côngruo e some Kπ. Observe:

$\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{2} + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$, mas também poderia ser:

$\overset{\frown}{AB} = \dfrac{3\pi}{2} + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$ *ou* $\overset{\frown}{AB} = -\dfrac{\pi}{2} + K\pi;$

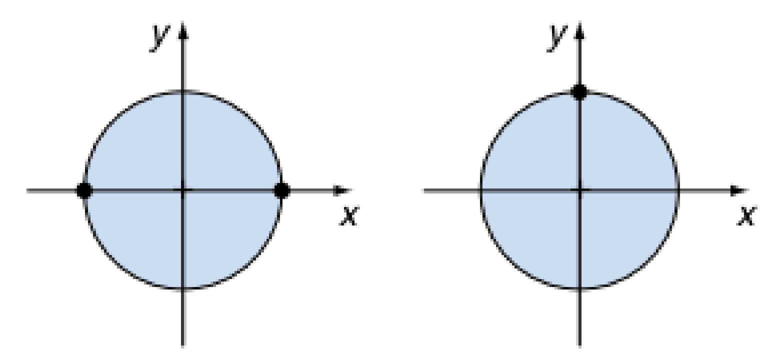
$K \in \mathbb{Z}$, dentre outras infinitas representações.

b) $\overset{\frown}{AB} = \pi + 2K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$

c) $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{K\pi}{4};\ K \in \mathbb{Z}$

(As extremidades dos arcos são vértices de um octógono regular).

d) *Neste exemplo, os três pontos não dividem a circunferência em três partes iguais, logo não pertencem à mesma família. Vamos dividir o problema.*



$\overset{\frown}{AB} = K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$ *ou* $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{2} + 2K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$

Primeira determinação positiva

Também pode ser chamado de menor determinação positiva o arco côngruo de uma família que possui a menor medida positiva ou nula.

Exercício resolvido

8 Calcule a primeira determinação positiva:

- 1.000º

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 1.000^o & 360^o \\ 280^o & 2 \end{array} \Rightarrow 1.000^o = 280^o + (2).360^o$$

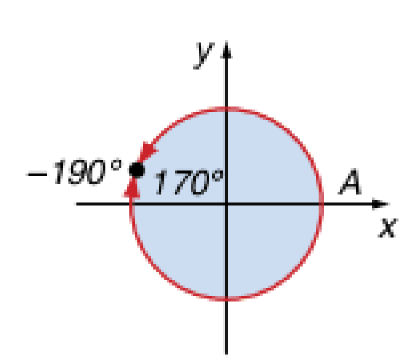
280º é a determinação positiva.

- –2.350º

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 2.350^o & 360^o \\ -2.160^o & 6 \\ \hline 190^o & \end{array} \Rightarrow -2350^o = (-190^o) + (-6).360^o$$

É claro que –190° não pode ser a primeira determinação positiva. Observe:



170° é côngruo de – 190°, logo 170° é a primeira determinação positiva.

Revisando

1 Transforme as medidas de graus para radianos na tabela abaixo.

0°		210°	
30°		225°	
45°		240°	
60°		270°	
90°		300°	
120°		315°	
135°		330°	
150°		360°	
180°		540°	

2 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 16 h e 40 min.

3 Calcule a primeira determinação positiva dos arcos:

a) 1.730°

b) –1.000°

c) $\frac{23\pi}{4}$ rad

Exercícios propostos

Conversão de medidas

1 Converter em graus as seguintes medidas em radianos:

a) $\frac{5\pi}{3}$
b) $\frac{\pi}{8}$
c) $\frac{4\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{20}$
e) 4π

2 Converter em radianos as seguintes medidas dadas em graus:

a) 450°
b) 225°
c) 210°
d) 330°
e) 252°

3 Assinale a alternativa falsa:

(a) $330° = \frac{11\pi}{6}$ rad
(b) π rad = 180°
(c) 1 rad = 57° 17' 44"
(d) $15° = \frac{\pi}{11}$ rad
(e) 50 gr = $\frac{\pi}{2}$ rad

Definição de radiano

4 Sobre uma circunferência de raio 1,6 cm marca-se um arco de comprimento 6,4 cm. Calcular a medida do arco, em radianos.

5 Sobre uma circunferência de raio 10 cm marca-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ tal que a corda $\overline{AB}$ mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.

6 **Fuvest** Um arco de circunferência mede 300°, o seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

(a) 157
(b) 284
(c) 382
(d) 628
(e) 764

7 Tomando para π a aproximação 3,14, se um arco de circunferência mede 1,57 cm e seu diâmetro 8 cm, então o ângulo correspondente a esse arco mede:

(a) 22° 5'
(b) 22° 30'
(c) 11° 25'
(d) 11° 15'
(e) 39° 25'

8 **Fuvest** Considere um arco AB de 110° numa circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco A'B' de 60° numa circunferência de raio 5 cm.
Dividindo-se o comprimento do arco AB pelo do arco A'B' (ambos medidos em cm), obtém-se:

(a) $\frac{11}{6}$
(b) 2
(c) $\frac{11}{3}$
(d) $\frac{22}{3}$
(e) 11

9 **Fuvest** O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então α é igual a:

(a) $\frac{\pi}{3}$
(b) 2
(c) 1
(d) $\frac{2\pi}{3}$
(e) $\frac{\pi}{2}$

10 Em um círculo, um ângulo central intercepta um arco de 0,1 m, e o raio mede 20 cm. Quantos radianos mede tal ângulo?

11 **Fuvest (Adapt.)** Considere um arco AB de 120° em uma circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco A'B' de 60° em uma circunferência de raio 10 cm.

Dividindo-se o comprimento do arco AB pelo do arco A'B' (ambos medidos em cm), obtém-se:

(a) $\frac{11}{6}$
(b) 2
(c) $\frac{11}{3}$
(d) $\frac{22}{3}$
(e) 11

12 **Fuvest (Adapt.)** O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um triângulo equilátero de lado R. Então, α é igual a:

(a) $\frac{\pi}{3}$
(b) 2
(c) 1
(d) $\frac{2\pi}{3}$
(e) $\frac{\pi}{2}$

13 Se o ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 centímetros, o número que melhor aproxima a distância em centímetros percorrida por sua extremidade em 20 minutos é: (considere $\pi = 3{,}14$)

(a) 37,7 cm
(b) 25,1 cm
(c) 20 cm
(d) 12 cm
(e) 3,14 cm

Arcos orientados

14 Represente os arcos no ciclo trigonométrico, indicando o quadrante em que se encontra sua extremidade.

a) $-\frac{\pi}{3}$ rad
b) 135°
c) $\frac{\pi}{12}$ rad
d) –240°
e) $\frac{5\pi}{3}$ rad
f) $-\frac{2\pi}{3}$ rad

15 Quais dos seguintes pares de arcos são côngruos?

(a) 65° e 1.145°
(b) $\frac{2\pi}{3}$ rad e $\frac{16\pi}{3}$ rad
(c) $-\frac{19\pi}{4}$ rad e $\frac{37\pi}{4}$ rad
(d) $\frac{6\pi}{8}$ rad e $\frac{18\pi}{8}$ rad

16 **UFGO** O conjunto de todos os valores de x, para que o ângulo $\frac{x}{x^2+1}\pi$ radianos pertença ao 1° quadrante, é representado por qual intervalo?

Primeira determinação positiva

17 Encontre a primeira determinação positiva dos seguintes arcos:

a) 2.390°
b) 5.450°
c) $\frac{26}{3}\pi$ rad
d) – 60°
e) $-\frac{17}{3}\pi$ rad

18 Os arcos positivos, menores que $\frac{50\pi}{9}$ rad, que são côngruos de –18° são:

(a) 342° e 720°
(b) 302° e 702°
(c) $\frac{19\pi}{10}$ e $\frac{39\pi}{10}$
(d) $\frac{17\pi}{10}$ e $\frac{37\pi}{10}$

19 **UFPA** Qual a menor determinação positiva de um arco de 1.000°?

(a) 270°
(b) 280°
(c) 290°
(d) 300°
(e) 310°

20 O menor arco positivo côngruo de $\frac{284\pi}{9}$ rad é:

(a) $\frac{5\pi}{9}$ rad
(b) $\frac{5\pi}{9}$ rad
(c) $\frac{15\pi}{9}$ rad
(d) $\frac{14\pi}{9}$ rad
(e) n.d.a.

21 Quais são os arcos positivos menores que 1.000°, côngruos de –95°?

Representação dos arcos

22 Determine a expressão geral de x, sabendo que: $\frac{\pi}{4} - 3x$ e $2x + \frac{\pi}{2}$ são côngruos.

23 Calcule x, sabendo que os arcos 6x + 36° e 3x – 24° são semicôngruos.

24 Sendo m e n números inteiros, provar a igualdade entre as famílias:

a) $(4n+1)\,.\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$
b) $n\,.\,120° + 60° = m\,.\,240° \pm 60°$

Ângulos dos ponteiros de um relógio

25 **FGV** É uma hora da tarde; o ponteiro dos minutos coincidirá com o ponteiro das horas, pela primeira vez, aproximadamente, às:

(a) 13h5min23s
(b) 13h5min25s
(c) 13h5min27s
(d) 13h5min29s
(e) 13h5min31s

26 Dois relógios foram acertados simultaneamente. O relógio A adianta 40 segundos por dia e o relógio B atrasa 80 segundos por dia. Qual a hora certa quando A marca 9h15 e B marca 9h09?

(a) 9h10min.
(b) 9h11min.
(c) 9h12min.
(d) 9h13min.
(e) 9h14min.

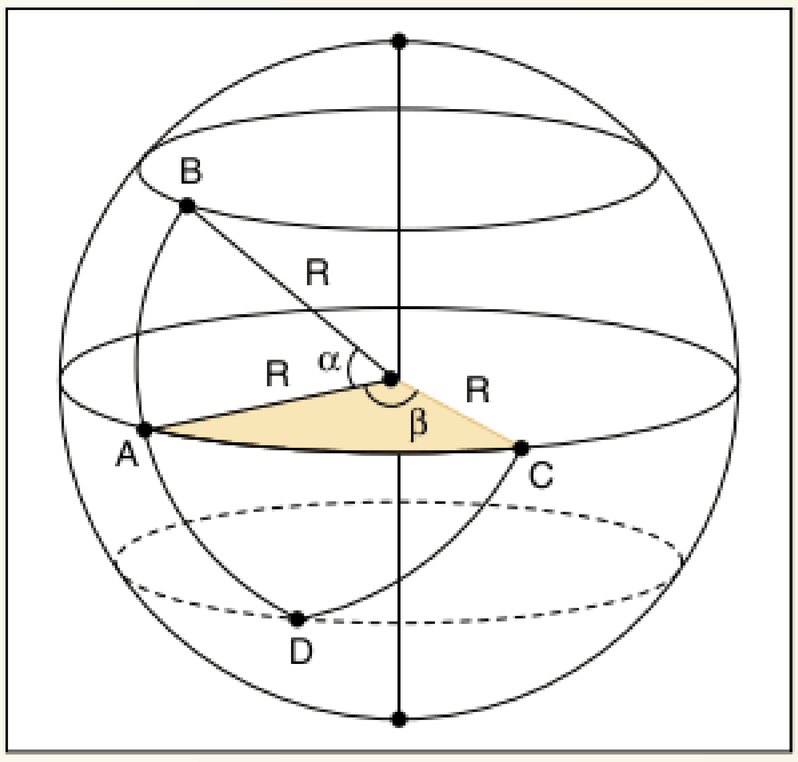
27 **Fuvest** O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

(a) 27°
(b) 30°
(c) 36°
(d) 42°
(e) 72°

TEXTOS COMPLEMENTARES

Trigonometria esférica

Para determinarmos a posição de um ponto, basta o cruzamento de duas linhas. Essa ideia geral pode ser aplicada na superfície de uma esfera. Observe a figura a seguir.



Trigonometria esférica.

Toda seção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano passa pelo centro da esfera, o círculo é máximo. Nesse caso, temos o chamado plano do equador.

Cálculos paralelos ao plano do equador determinam infinitos pontos sobre sua circunferência.

A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ em graus é a chamada latitude do ponto B (α é a latitude). Mas a distância entre os pontos AB é dada por $AB = \alpha R$ (α em radianos).

A medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ em graus é a chamada longitude do ponto C (β é a longitude). A medida de $AC = \beta R$ (β em radianos).

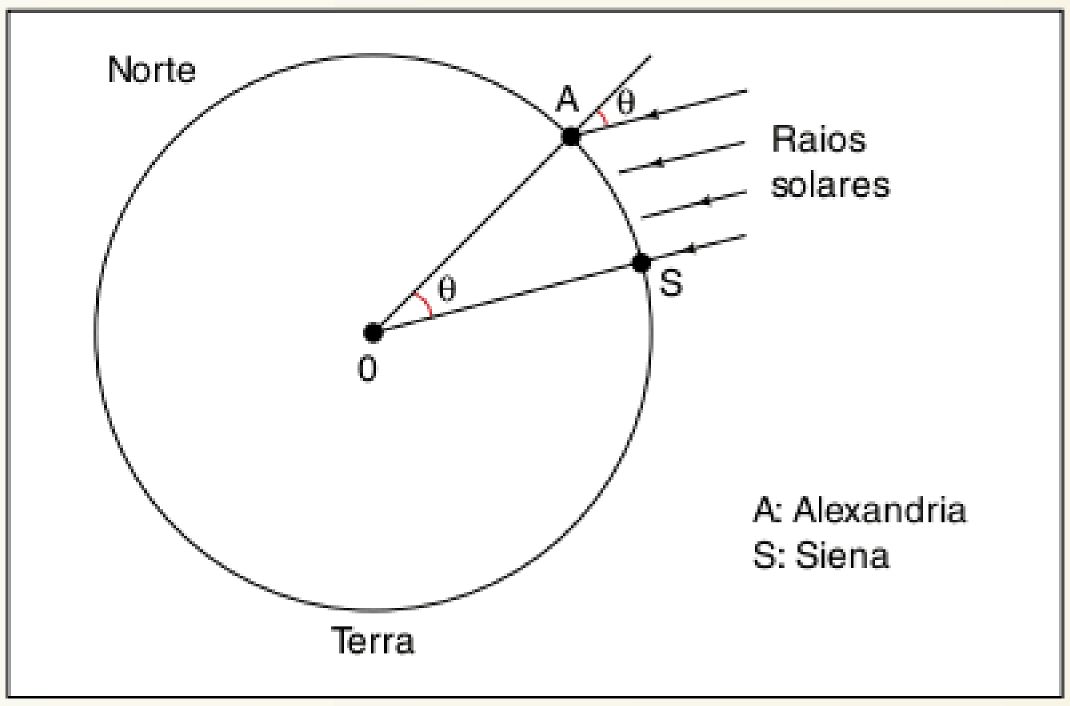
Temos então um sistema de coordenadas sobre a superfície da esfera feita de arcos com as suas respectivas medidas em graus (α; β).

Observando a figura, os pontos A, D e C, sobre a superfície da esfera e seus máximos, determinam um "triângulo esférico".

Eratóstenes e o cálculo do raio da Terra

Eratóstenes (284-192 a.C.) foi bibliotecário-chefe do museu de Alexandria e, por volta de 240 a.C., efetuou uma medição famosa da circunferência máxima da Terra. Por meio de observações de alguns fatos diários, notou que, ao meio-dia do solstício de verão, uma vareta na vertical não projetava nenhuma sombra, e que a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos. Essas observações foram feitas na cidade de Siena, ao passo que em Alexandria (que ele acreditava estar no mesmo mediano de Siena) os raios do Sol inclinavam-se de $\frac{1}{50}$ de um círculo completo em relação à vertical. A distância de Siena e Alexandria é de cerca de 800 km.

Com essas informações, Eratóstenes imaginou o seguinte:



Como os raios solares são praticamente paralelos, temos que:

$A\hat{O}S = \theta = \frac{1}{50}$. círculo

$= 7{,}2° = \frac{7{,}2\pi}{180}$ radianos

Assim,

$$\theta \text{ (em radianos)} = \frac{\overset{\frown}{AS}}{R} \therefore \frac{7{,}2\pi}{180} = \frac{800\text{km}}{R} \therefore R \approx 6.366 \text{ km}$$

Sabemos que o valor atual e muito mais preciso para o raio da Terra é de cerca de 6.378 km; portanto, um resultado excelente, tendo em vista a simplicidade do cálculo.

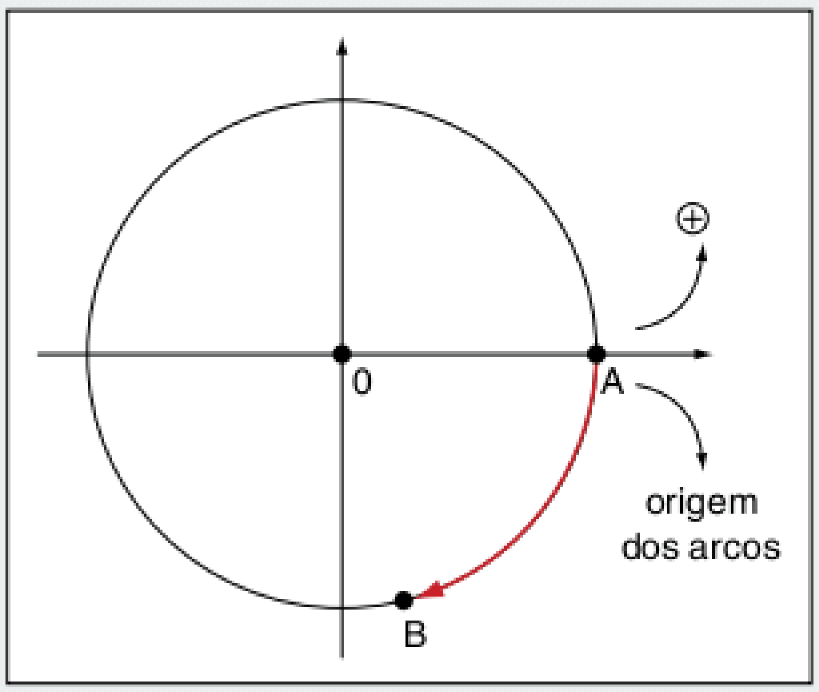
Atividade

1 Calcule o comprimento da circunferência que um plano paralelo ao equador determina sobre a Terra, sabendo que o plano possui latitude de 15° e o raio da Terra é de aproximadamente 6.378 km.

RESUMINDO

- Um dos conceitos básicos da trigonometria é a diferença entre arco geométrico e arco trigonométrico. No arco geométrico, bastam os pontos da circunferência e calcular sua medida. Para caracterizarmos o arco trigonométrico, utilizamos o ciclo trigonométrico, em que os arcos terão uma orientação e suas medidas podem ultrapassar 360° (2π radianos) e também podem ser negativas.

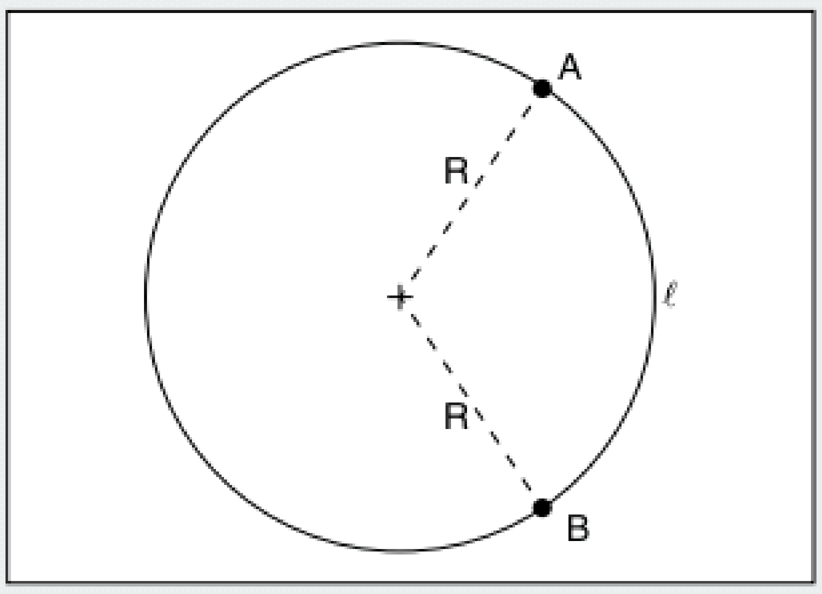
  Por exemplo:



$\overset{\frown}{AB} = 60°$ (arco geométrico)

$\overset{\frown}{AB} = 60°$ (arco trigonométrico)

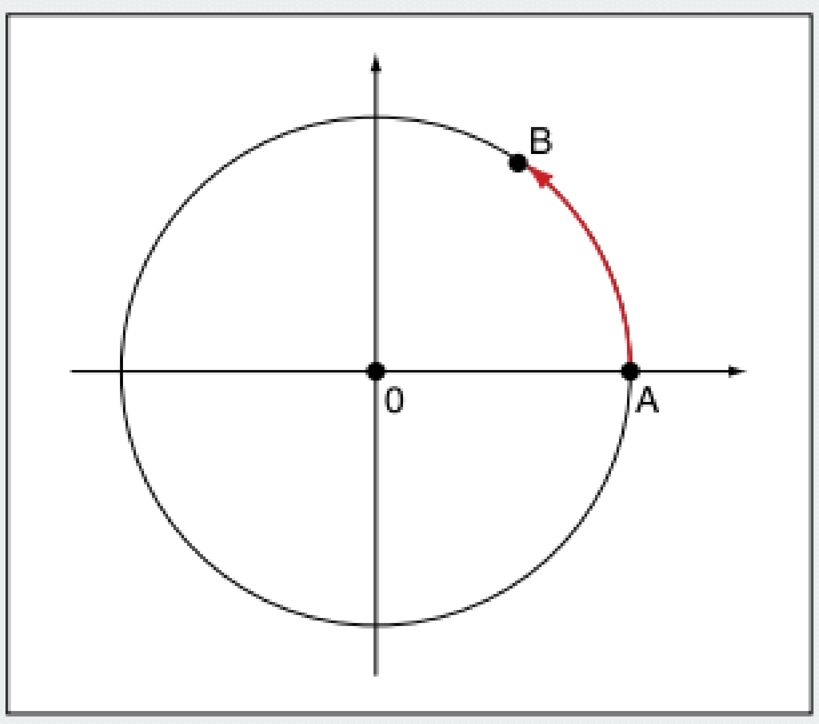
Unidade de medida básica: Radiano



Medida de $\overset{\frown}{AB}$ em radianos $= \dfrac{\ell}{R}$

Arcos côngruos

São arcos que possuem as mesmas extremidades no ciclo trigonométrico.



Observe todas as medidas côngrues do arco $\overset{\frown}{AB}$.

$(\ldots;\ \alpha - 6\pi;\ \alpha - 4\pi;\ \alpha - 2\pi;\ \alpha;\ \alpha + 2\pi;\ \alpha + 4\pi;\ \alpha + 6\pi)$

Genericamente: $\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2k\pi; K \in \geq$

$\alpha > 0$ é a primeira determinação positiva de $\overset{\frown}{AB}$.

QUER SABER MAIS?

SITE

- Uma breve história da trigonometria
  <www.mat.ufrgs.br/~portosil/trigapl.html>.

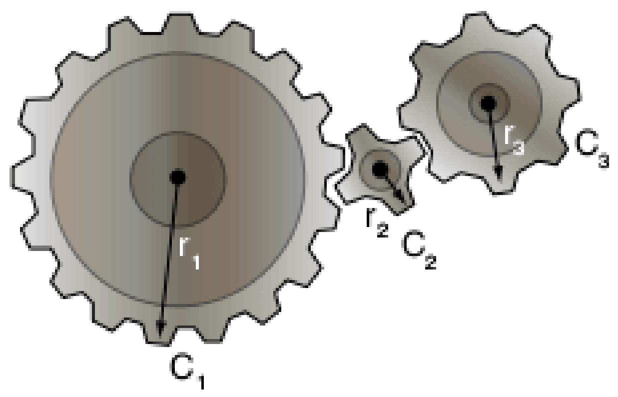
Exercícios complementares

Problemas gerais

1 **Fuvest** Quais os arcos côngruos de $\frac{25\pi}{4}$ compreendidos entre -3π e π?

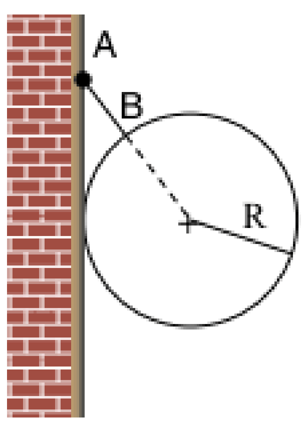
2 Determine os arcos positivos, menores que 2.000°, côngruos de $-95°$?

3 **UFPE** Três coroas circulares dentadas C_1, C_2 e C_3 de raios $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 2$ cm e $r_3 = 5$ cm, respectivamente, estão perfeitamente acopladas como na figura a seguir. Girando-se a coroa C_1 de um ângulo de 41° no sentido horário, quantos graus girará a coroa C_3?



4 Em que quadrantes estão as extremidades dos arcos $K.\pi + (-1)^K.\frac{\pi}{3}$ sendo $K \in \mathbb{Z}$?

5 A esfera representada na figura a seguir tem raio igual a R e está presa no ponto A e encostada na parede. A corda $\overline{AB}$ mede R. Determine o valor do ângulo entre a corda e a parede (em radianos).



6 Provar que os arcos da família $(-1)^K \cdot \alpha + K\pi$; $K \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in 1°$ quadrante, são representados no ciclo trigonométrico por pontos simétricos em relação ao eixo y.

7 A diferença dos inversos das medidas de um arco em graus e em grados é igual ao quociente de sua medida em radianos por 2π. Determinar a medida desse arco em graus.

8 Demonstrar que os arcos compreendidos nas expressões: $\pm 30° + k \cdot 120°$ e $30° + 60° \cdot h$, k e h $\in \mathbb{Z}$ são os mesmos.

9 Calcule x em cada arco, sabendo que:

a) $20° + 3x$ e x são complementares;

b) $2x - \frac{\pi}{3}$ e $3x + \frac{\pi}{2}$ são complementares;

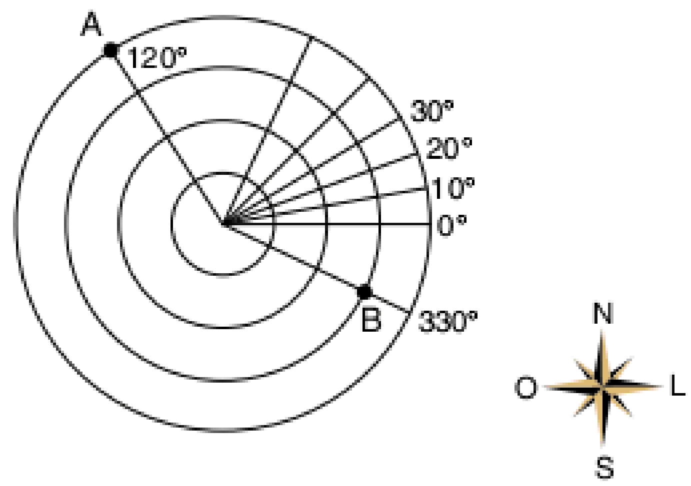
c) x e $2\pi - x$ são suplementares.

10 Em um círculo, um ângulo central de 60° intercepta um arco de 2π cm de comprimento. Calcular o raio desse círculo.

11 O ângulo sob o qual se vê a Lua é aproximadamente 32' e a distância da Lua à Terra é de aproximadamente 60 raios terrestres (raio da Terra 6.000 km). Calcule o diâmetro da Lua.

12 Quantos radianos percorre o ponteiro das horas de um relógio de 1 h e 5 min até 2 h e 45 min?

13 O radar é um aparelho que usa o princípio da reflexão de ondas para determinar a posição de um objeto que se encontra distante ou encoberto por nevoeiro ou nuvem. A posição do objeto é indicada na forma de um ponto luminoso que aparece na tela do radar, que apresenta ângulos e círculos concêntricos, cujo centro representa a posição do radar, conforme ilustra a figura a seguir.



Considere que os pontos A e B da figura sejam navios detectados pelo radar, o navio A está a 40 km do radar e o navio B, a 30 km. Com base nessas informações e desconsiderando as dimensões dos navios, julgue os itens que se seguem.

- ☐ A distância entre os navios A e B é maior que 69 km.
- ☐ Se, a partir das posições detectadas pelo radar, os navios A e B começarem a se movimentar no mesmo instante, em linha reta, com velocidades contantes iguais, o navio A para o leste e o navio B para o norte, então eles se chocarão.
- ☐ A partir da posição detectada pelo radar, caso B se movimente sobre um circulo de raio igual a 30 km, no sentido anti-horário, com velocidade constante de 40 km/h, então em 10 min, o navio B percorrerá um arco correspondente a $(40/\pi)°$.

14 Se o ponteiro menor de um relógio percorre um arco de $\frac{\pi}{12}$ rad, o ponteiro maior percorre um arco de:

(a) $\frac{\pi}{6}$ rad
(b) $\frac{\pi}{4}$ rad
(c) $\frac{\pi}{3}$ rad
(d) $\frac{\pi}{2}$ rad
(e) π rad

15 Determinar o horário, após as 4 horas, em que pela primeira vez os ponteiros de um relógio formam $\frac{\pi}{3}$ rad.

Funções trigonométricas básicas – seno e cosseno

8

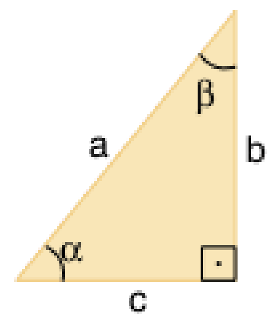
FRENTE 1

EVAN BENCH/FLICKR

Hiparco (séc. II a.C.) foi um dos fundadores da trigonometria e inventor do astrolábio, instrumento naval antigo utilizado para medir a altura dos astros e determinar a posição deles no céu.

Seno e cosseno no triângulo retângulo

O capítulo de triângulo retângulo, em geometria plana, apresenta as definições de seno e cosseno como sendo razões entre lados do triângulo retângulo, observe:



$\alpha + \beta = 90^\circ$

$\text{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$

Fig. 1 Triângulo retângulo.

Mas existe uma grande limitação da trigonometria do triângulo retângulo, o valor do ângulo α é tal que $0 < \alpha < 90°$. Essa limitação não condiz com o conceito de arco apresentado no capítulo 7. No ciclo trigonométrico, podemos variar o K (número de voltas) indeterminadamente.

Precisamos então complementar o conceito de seno e cosseno para **funções trigonométricas seno** e **cosseno**.

Função seno

Definição

Considere o ciclo trigonométrico com origem dos arcos em A e, $x \in \mathbb{R}$, a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ em radianos.

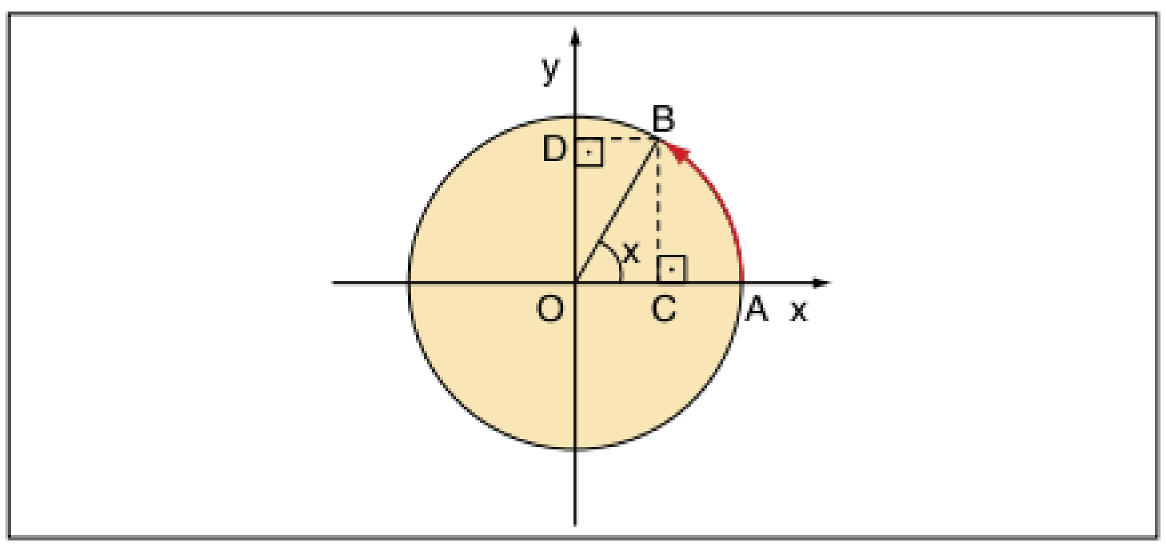


Fig. 2 Seno.

O ângulo $A\hat{O}B = x$ é chamado ângulo central, e possui medida igual ao arco $\overset{\frown}{AB}$. Logo $\overset{\frown}{AB} = x$. No ΔBOC, retângulo em C, podemos aplicar $\text{sen}x = \dfrac{BC}{OB}$, como $BC = OD$ e $OB = 1$, concluímos que o seno do arco de medida x é o segmento OD, projeção da extremidade B do arco no eixo y. Observe a construção geométrica do senx:

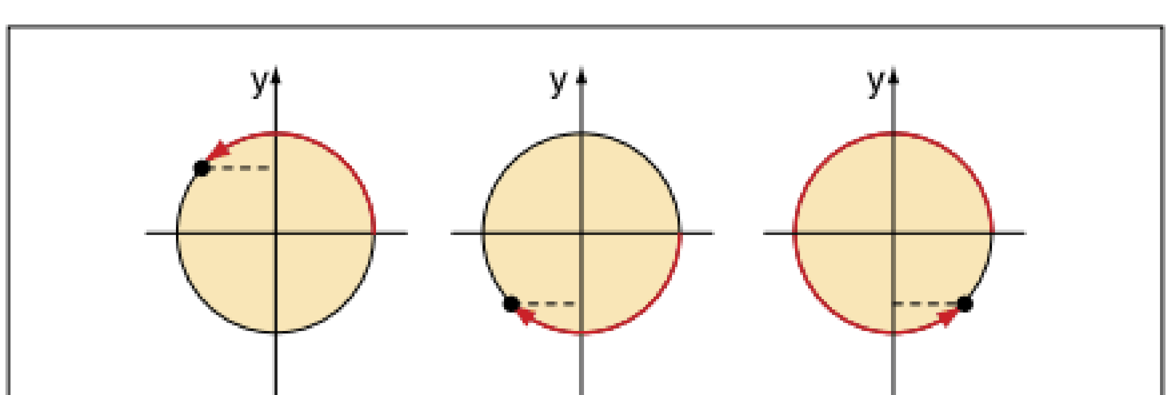
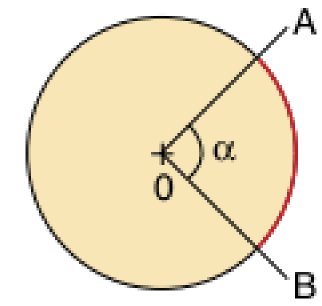


Fig. 3 Construção geométrica do seno.

O eixo y é conhecido como eixo dos senos. α é o ângulo central, $\alpha = (\overset{\frown}{AB})$



ATENÇÃO!

Para obtermos o seno de um arco de medida x, projetamos a extremidade do arco no eixo y, o segmento formado até a origem é o senx.

Concluímos então que, para cada arco $x \in \mathbb{R}$, teremos uma única projeção no eixo y. Assim temos a função seno.

Domínio da função seno

O domínio da função seno é o conjunto $\mathbb{R}$.

Imagem da função seno

Como o raio do ciclo trigonométrico vale 1, observe a figura 4.

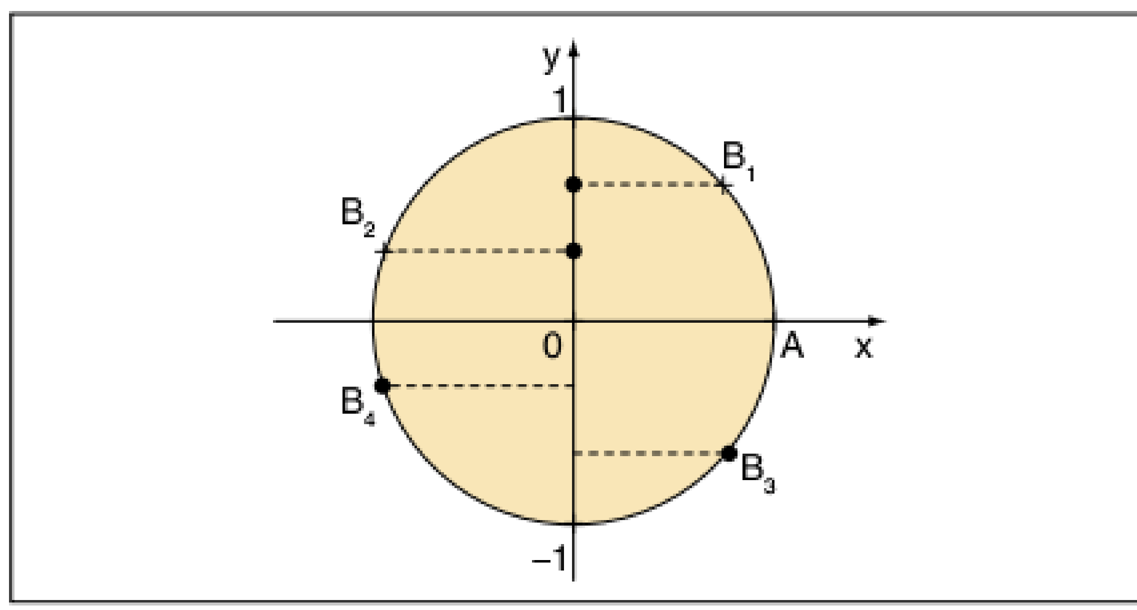


Fig. 4 Imagem da função seno.

Qualquer que seja a extremidade do arco (B_1, B_2, B_3, B_4...), a projeção vai estar no eixo y, tal que $-1 \leq y \leq 1$.

ATENÇÃO!

Para $\forall x \in \mathbb{R}$, temos: $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$.

Sinais da função seno

Pela construção geométrica do seno de um arco x, observe o quadro de sinais da função seno.

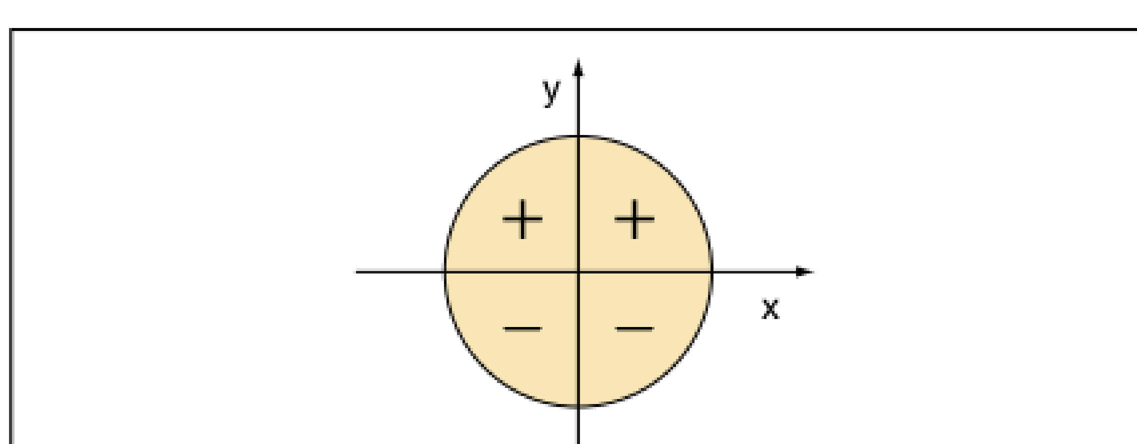


Fig. 5 Quadro de sinais.

Arcos côngruos

Sabemos que os arcos x e $x + K \cdot 2\pi$, $K \in \mathbb{Z}$ possuem a mesma extremidade no ciclo trigonométrico, logo a projeção será a mesma e o valor do seno também.

ATENÇÃO!

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $\text{sen}x = \text{sen}(x + 2K\pi)$; $K \in \mathbb{Z}$.

Observe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

1 sen1.470º = sen30º

Resolução:

Pois:

$$\begin{array}{r|l} 1.470^\circ & 360^\circ \\ -1.440^\circ & 4 \\ \hline 30^\circ & \end{array} \Rightarrow 1.470^\circ = 30^\circ + 4(360^\circ)$$

30º é a 1ª determinação positiva e côngruo de 1.470º.

2 sen(–1.100º) = sen(–20º) = sen340º

Resolução:

Pois:

$$\begin{array}{r|l} 1.100^\circ & 360^\circ \\ -1.080^\circ & 3 \\ \hline 20^\circ & \end{array} \Rightarrow -1.100^\circ = -20^\circ + (-3) \cdot (360^\circ)$$

–20º é côngruo de –1.100º e a 1ª determinação positiva é 340º.

Período da função

Uma função é dita periódica quando encontrarmos um número $P > 0$, tal que, dando acréscimos iguais a P no valor de x, a imagem da função não se altera.

Percebemos que essa função é periódica quando $P = 2\pi$, pois esse valor equivale a uma volta no ciclo trigonométrico.

ATENÇÃO!

O período da função seno é 2π, pois
$\text{sen}x = \text{sen}(x + 2\pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Se existe $P \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\forall x$, $f(x) = f(x + P)$, então P é o período da função f. A função seno é uma função periódica.

Gráfico da função f(x) = senx

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}x$, $Im_f = [-1;1]$ e $P = 2\pi$ são as principais características da função seno. Observe a figura 6, na qual temos o ciclo trigonométrico acoplado a um sistema de coordenadas.

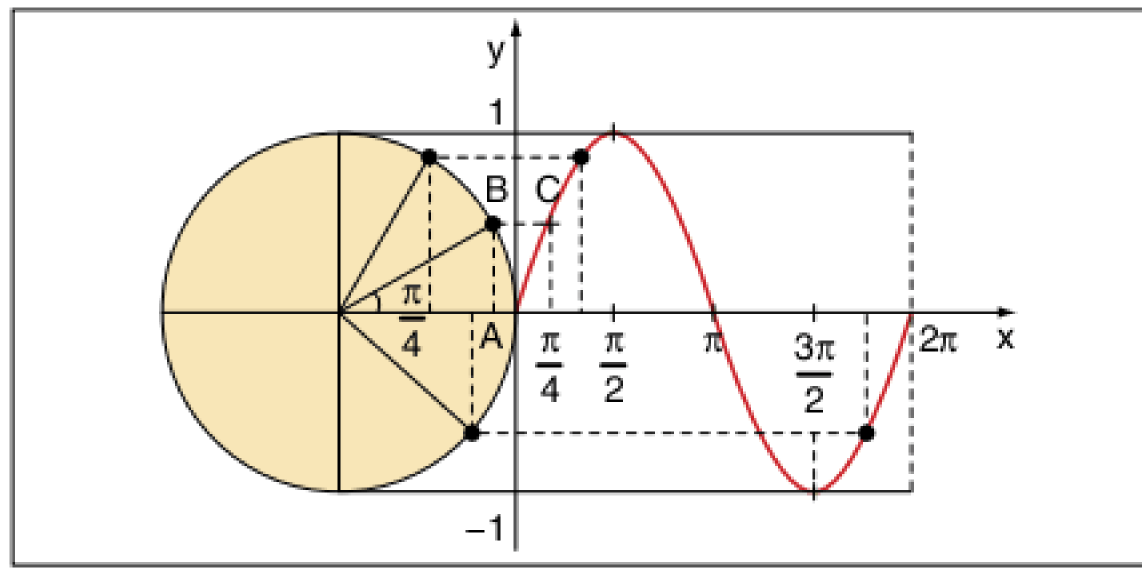


Fig. 6 Gráfico da função seno.

Fazendo o ponto B percorrer o ciclo trigonométrico, $\overset{\frown}{AB}$ é um arco e $\overline{AB}$ é o seu seno, e C é a ordenada do gráfico. Na figura 6, temos um exemplo para $x = \frac{\pi}{4}$. Repetindo esse procedimento indefinidas vezes, teremos o gráfico de senx, a **senoide**.

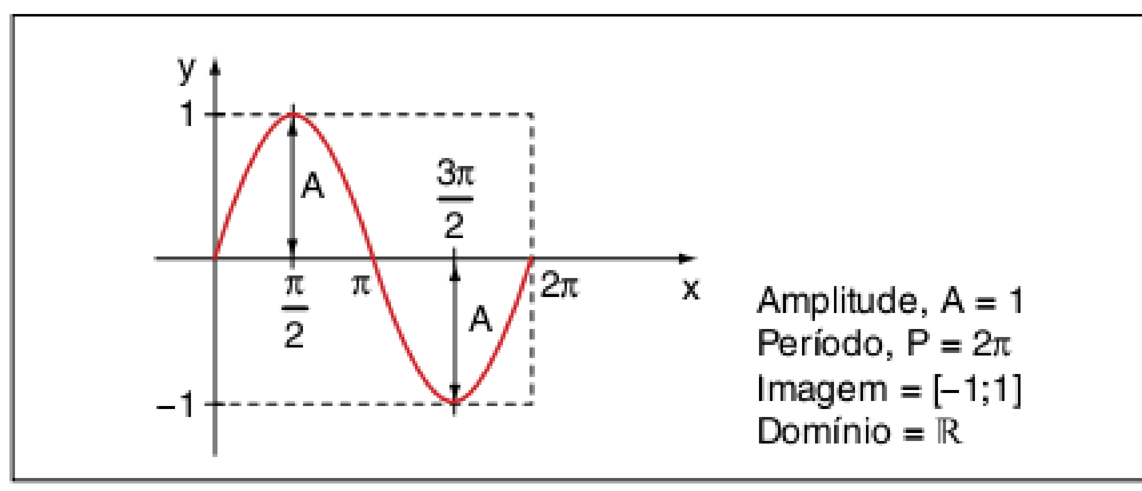


Fig. 7 Senoide.

Na figura 7, temos o gráfico básico da função f(x) = senx. Como a função seno é periódica, para representá-la, basta construir o gráfico do seu período.

Mas não se esqueça de que esse desenho se repete de 2π em 2π para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Arcos simétricos

Vamos incentivar o aluno a não decorar certos procedimentos. A intenção é fazer o aluno a raciocinar na fonte da teoria, ou seja, no ciclo trigonométrico e na definição do seno.

Você, com certeza, já vem utilizando na Física e na geometria plana os valores notáveis do seno. Refresque a memória com a tabela seguinte.

arco	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1

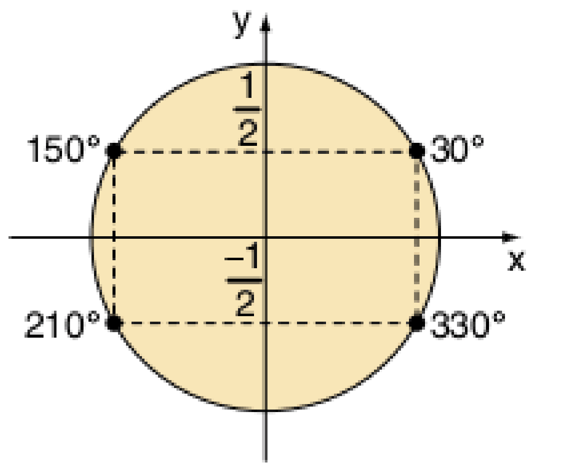
Tab. 1 Principais valores notáveis do seno.

Com essa tabela, podemos calcular o seno de outros arcos também.

Observe o exercício a seguir.

Exercício resolvido

3 Vamos encontrar os valores dos ângulos simétricos a $x = 30^o$ para o seno.



Resolução:

Pela figura anterior, podemos concluir que:

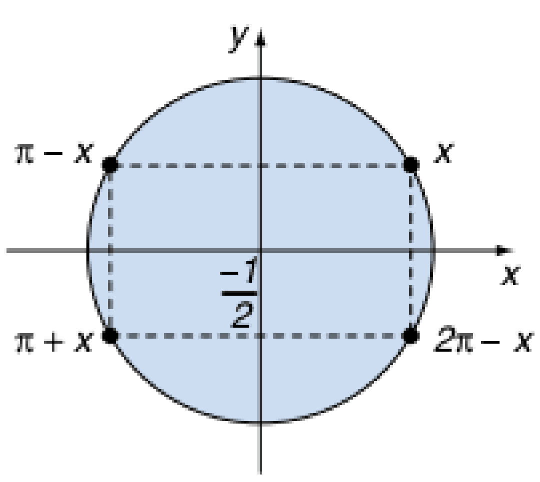
$$sen150^o = sen30^o = \frac{1}{2}$$

$$sen210^o = -\,sen30^o = -\frac{1}{2}$$

$$sen330^o = -\,sen30^o = -\frac{1}{2}$$

Essa análise geométrica do arco 30º pode ser chamada de redução ao 1º quadrante.

Vamos generalizá-la para um arco x. Observe a figura a seguir.



(x em radianos)

$sen(\pi - x) = senx$

$sen(\pi + x) = -senx$

$sen(2\pi - x) = -senx$

Análise do gráfico f(x) = a + b · sen(cx + d)

A construção de gráficos dessa modalidade é o ponto alto do nosso curso de trigonometria.

Vamos analisar o efeito de cada parâmetro separadamente, com exemplos numéricos, e depois generalizar o efeito do parâmetro.

No final, vamos integrar todos os parâmetros na mesma função.

Parâmetro a

A análise inicia com o gráfico básico f(x) = senx.

Para construir o gráfico g(x) = 1 + senx, todas as ordenadas de f(x) vão "subir" 1 unidade, observe:

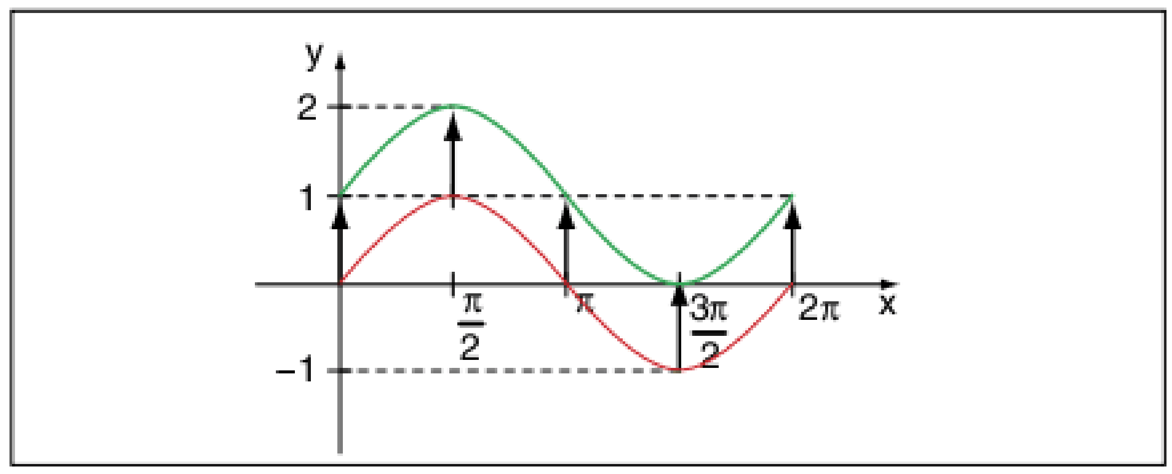


Fig. 8 Gráfico g(x) = 1 + senx.

ATENÇÃO!

O parâmetro a desloca o gráfico no eixo y alternando a imagem da função.

Na figura 8, a projeção do gráfico no eixo y nos dará a imagem da nova função, assim: $Im_g = [0, 2]$.

Parâmetro b

Por exemplo, queremos construir o gráfico g(x) = 2senx. Pelo gráfico da função f(x) = senx, vamos multiplicar o valor de todas as ordenadas por 2, observe:

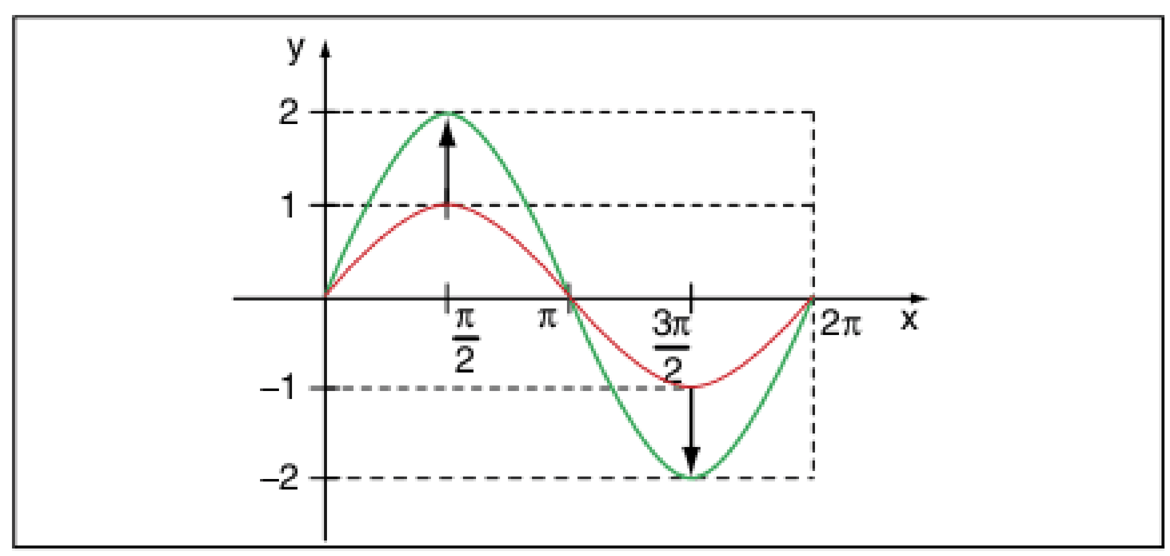


Fig. 9 Gráfico g(x) = 2senx.

O conjunto imagem da função foi alterado e também sua amplitude. Assim: $Im_g = [-2;2]$ e $A = 2$.

ATENÇÃO!

O parâmetro b modifica a amplitude do gráfico.

Ainda no parâmetro b, vamos fazer uma análise para b < 0, por exemplo $g(x) = -\frac{1}{2}senx$.

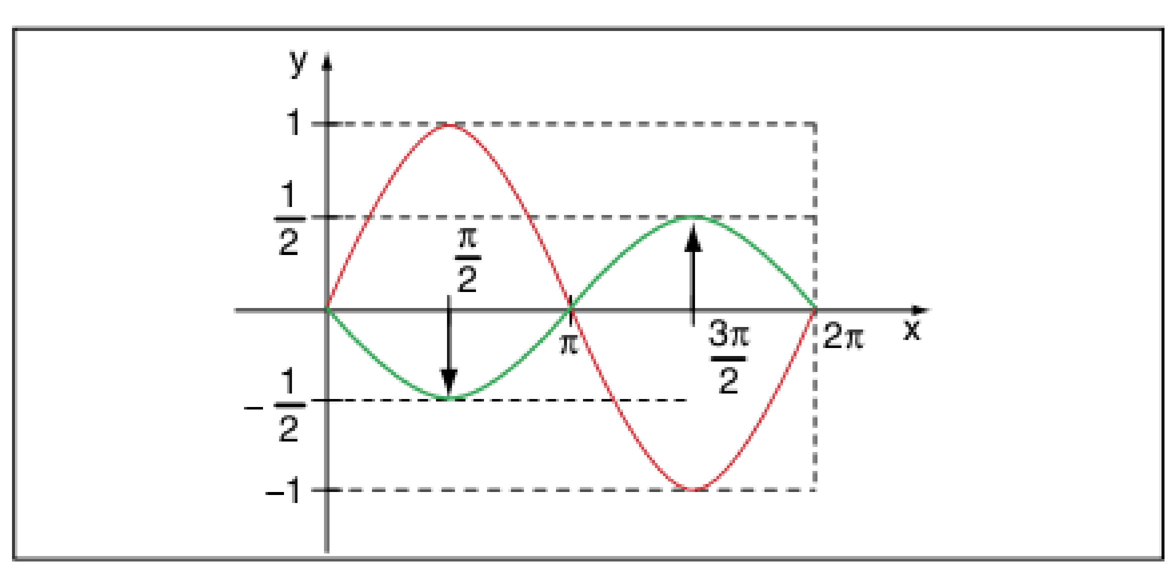


Fig. 10 Gráfico $g(x) = -\frac{1}{2}senx$.

Observe que ocorreu uma inversão do gráfico (devido ao –) e uma redução da amplitude $\left(\text{devido ao } \frac{1}{2}\right)$.

Parâmetro c

Vamos analisar as funções f(x) = senx e g(x) = sen2x, observe as tabelas:

x	senx
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	–1
2π	0
período 2π	

Tab. 2 Período da função senx.

x	sen2x
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	–1
π	0
período π	

Tab. 3 Período da função sen2x.

Observe que na função g(x) = sen2x o novo período é π. Percebemos que o parâmetro c afeta o período da função. Observe os resultados na figura do exercício resolvido 4.

ATENÇÃO!

O novo período da função $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ é dado por $P = \frac{2\pi}{|c|}$.

Para construir um novo gráfico, devemos nos basear no gráfico f(x) = senx. O procedimento para construir o gráfico da função cosseno é o mesmo da função seno. O |b| fornece a amplitude da função.

Demonstração:

Se P > 0 e f(x) = f(x + P), $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, então o menor valor positivo de P é o período da função f.

Utilizando essa definição, temos:

$f(x) = a + b \cdot sen[cx + d]$

$f(x + P) = a + b \cdot sen[c(x + P) + d]$

fazendo f(x) = f(x + P), temos:

$a + b \cdot sen[cx + d] = a + b \cdot sen[c(x + P) + d]$

$\Rightarrow sen[cx + d] = sen[cx + cP + d]$

Se os senos são iguais, os arcos podem ser côngruos, então:

$cx + cP + d = (cx + d) + 2K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$

$cP = 2K\pi \therefore P = \frac{2K\pi}{c}$, como p é o menor valor positivo, fazemos K = 1 e |c|.

Conclusão: $P = \frac{2\pi}{|c|}$ (c.q.d.)

Observe agora mais alguns exercícios resolvidos.

Exercícios resolvidos

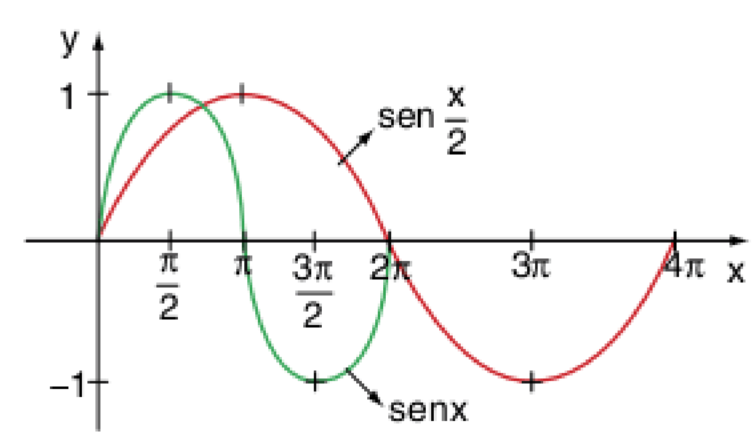
4 Construa o gráfico $g(x) = sen\frac{x}{2}$.

Resolução:

Sugerimos que a construção do gráfico seja feita calculando o período da função e marcando no eixo x.

Novo período $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

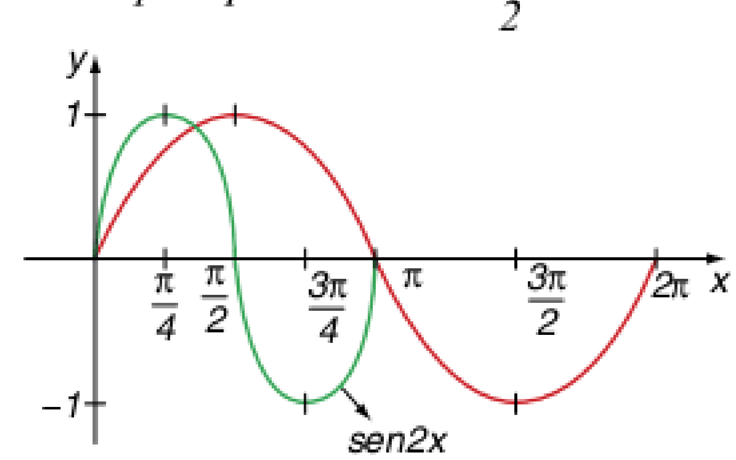
Observe a figura:



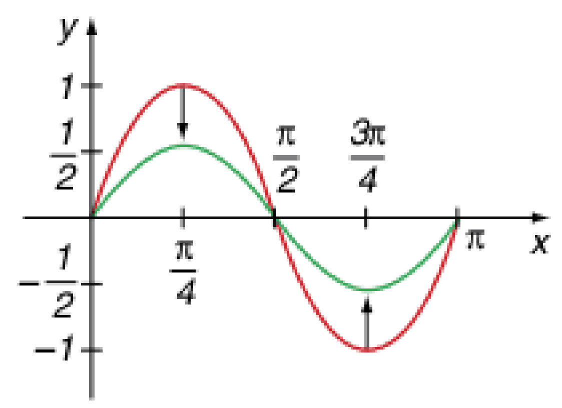
5 Construa o gráfico $g(x) = 1 + \frac{1}{2}sen(2x)$.

Resolução:

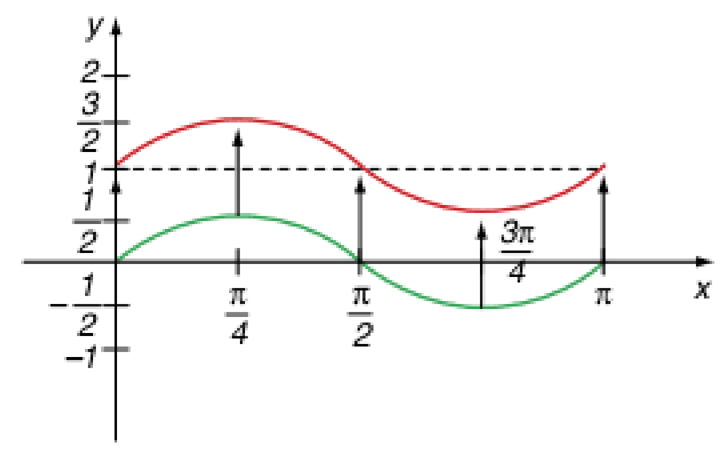
Os parâmetros alteram a função senx de forma independente, sugerimos iniciar pelo período: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$.



Vamos agora alterar a amplitude:



Vamos deslocar o gráfico na direção do eixo y:



Parâmetro d

Vamos analisar os gráficos f(t) = sent e g(x) = sen$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Fazendo $t = x - \frac{\pi}{2} \therefore x = t + \frac{\pi}{2}$

t	sent
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	–1
2π	0

Tab. 4 Translação do gráfico sen$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ em função de x.

$x = t + \frac{\pi}{2}$	sen$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	–1
$\frac{5\pi}{2}$	0

Tab. 5 Translação do gráfico sen$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ em função de x.

Observe a comparação entre as tabelas e perceba o acréscimo de $\frac{\pi}{2}$ nas abscissas do novo gráfico sen$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

A figura 11 compara os dois gráficos.

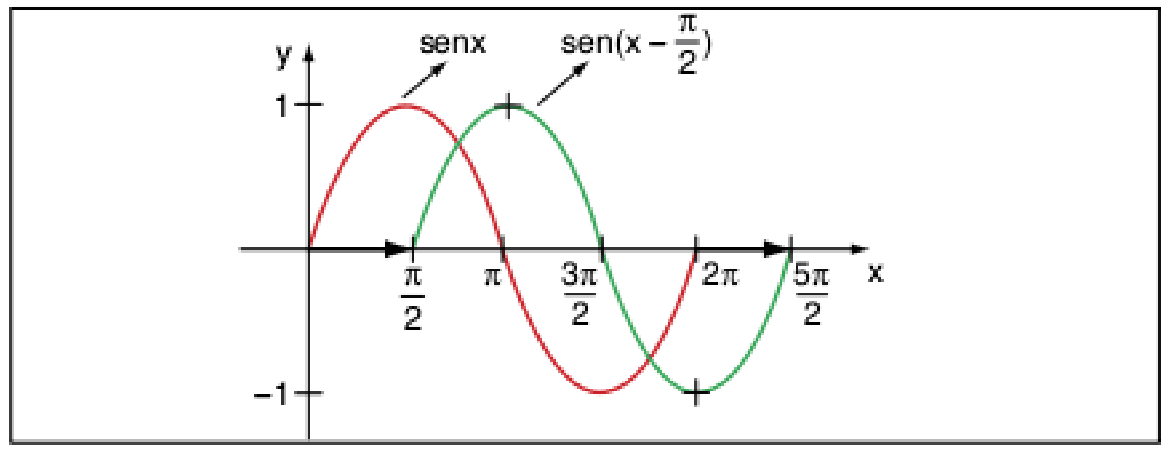


Fig. 11 Gráfico g(x) = sen$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

ATENÇÃO!

O parâmetro d provoca o deslocamento do gráfico no eixo das abscissas.
Cuidado! O gráfico não se desloca de ±d sempre! Observe os exemplos.
Regra prática!
Seja: f(x) = sen(cx + d). Faça cx + d = 0 $\therefore x = -\frac{d}{c}$.
As abscissas são acrescidas de $-\frac{d}{c}$.

No exemplo 1, o gráfico f(x) = sen$\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ é a composição de h(x) = $2x - \frac{\pi}{2}$ e g(x) = senx.

Observe: g(h(x)) = sen(h(x)) = sen$\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercícios resolvidos

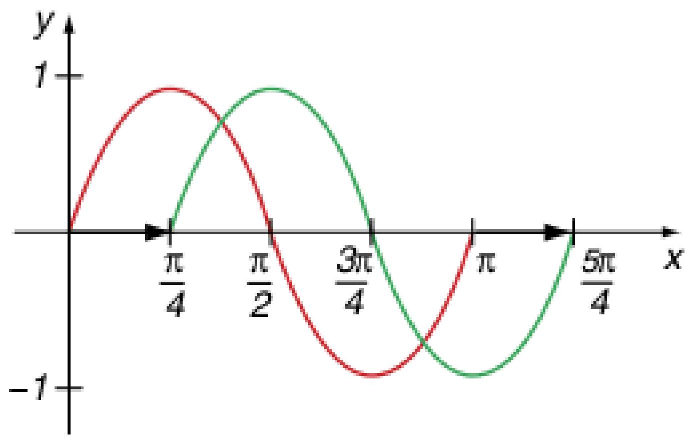
6 Construa o gráfico da função: f(x) = sen$\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Resolução:
Período da função: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$

t	*sent*
0	*0*
$\frac{\pi}{2}$	*1*
π	*0*
$\frac{3\pi}{2}$	*−1*
2π	*0*

$x = t + \frac{\pi}{2}$	$x = t + \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	*0*
$\frac{\pi}{2}$	*1*
$\frac{3\pi}{4}$	*0*
π	*−1*
$\frac{5\pi}{4}$	*0*

O gráfico "começa" em $x = \frac{\pi}{4}$ *e as outras abscissas são acrescidas de* $\frac{\pi}{4}$.

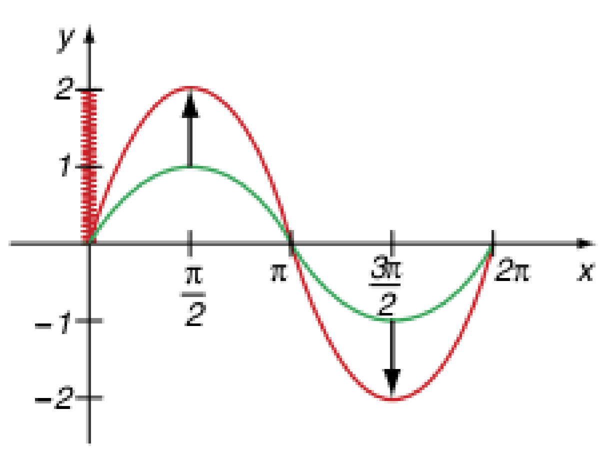


7 Construa o gráfico da função: $f(x) = -1 + 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

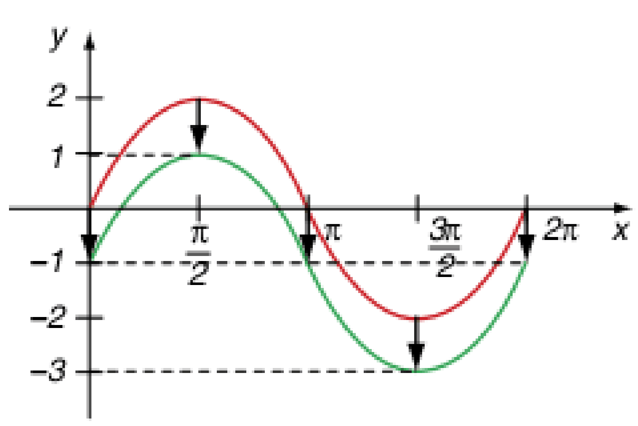
Resolução:
Temos agora um exemplo completo:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \quad \rightarrow P = 2\pi \\ d = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

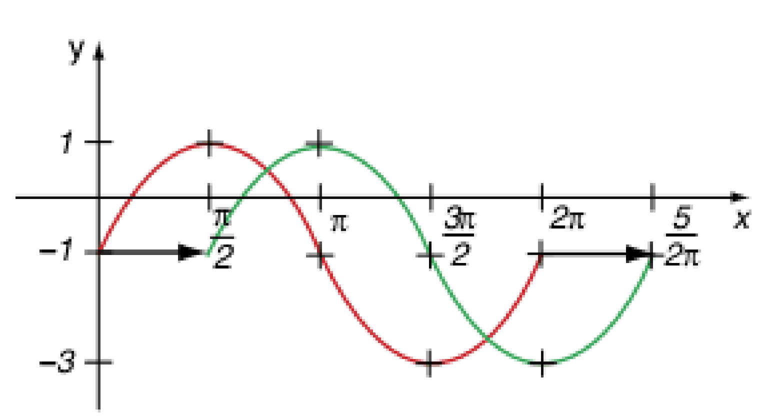
Vamos alterar a amplitude do gráfico:



Vamos deslocar o gráfico no eixo y:



Deslocando agora o gráfico no eixo x, acrescentando $\frac{\pi}{2}$ *para as abscissas, temos:*



ATENÇÃO!

modifica a amplitude do gráfico — deslocamento no eixo x

$$f(x) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \text{sen}(\mathbf{c}x + \mathbf{d})$$

deslocamento no eixo y — modifica o período

Função cosseno

Você deve ter percebido a riqueza de detalhes no estudo da função seno. O mesmo raciocínio vai ser utilizado para o estudo da função cosseno.

Definição

Considere o ciclo trigonométrico com origem dos arcos em A e, $x \in \mathbb{R}$, a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ em radianos.

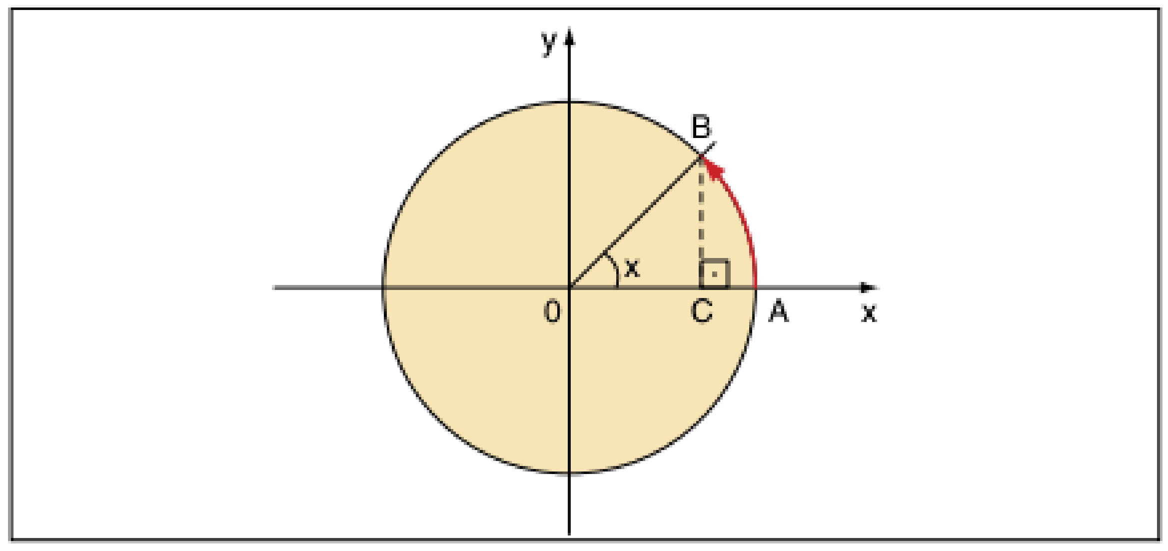


Fig. 12 Cosseno.

No ΔBOC, retângulo em C, podemos aplicar $\cos x = \frac{OC}{OB}$, como OB = 1, temos que cosx = OC, concluímos que o cosseno do arco de medida x é a medida do segmento OC, projeção da extremidade B do arco no eixo x. Observe a construção geométrica do cosx:

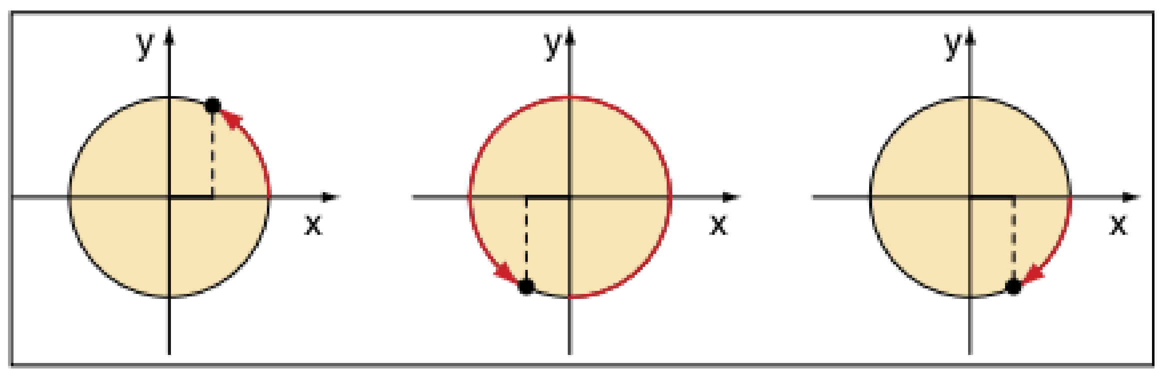
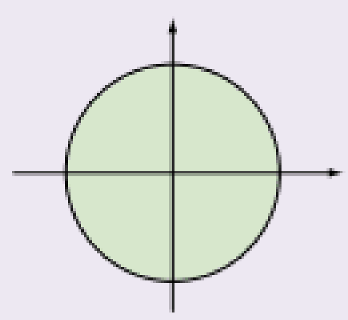


Fig. 13 Construção geométrica do cosseno.

ATENÇÃO!

Para obtermos o cosseno de um arco de medida x, projetamos a extremidade do arco no eixo x, o segmento formado até a origem é o cosx.
O eixo x é conhecido como eixo dos cossenos.



Concluindo então que, para cada arco $x \in \mathbb{R}$, teremos uma única projeção no eixo x. Assim temos a *função cosseno*.

Domínio da função cosseno

O domínio da função cosseno é o conjunto $\mathbb{R}$.

Imagem da função cosseno

O conjunto imagem da função cosseno é o mesmo da função seno. A projeção da extremidade do arco vai estar no eixo x no intervalo $[-1;1]$.

ATENÇÃO!

Para $\forall x \in \mathbb{R}$, temos: $-1 \leq \cos x \leq 1$

Sinais da função cosseno

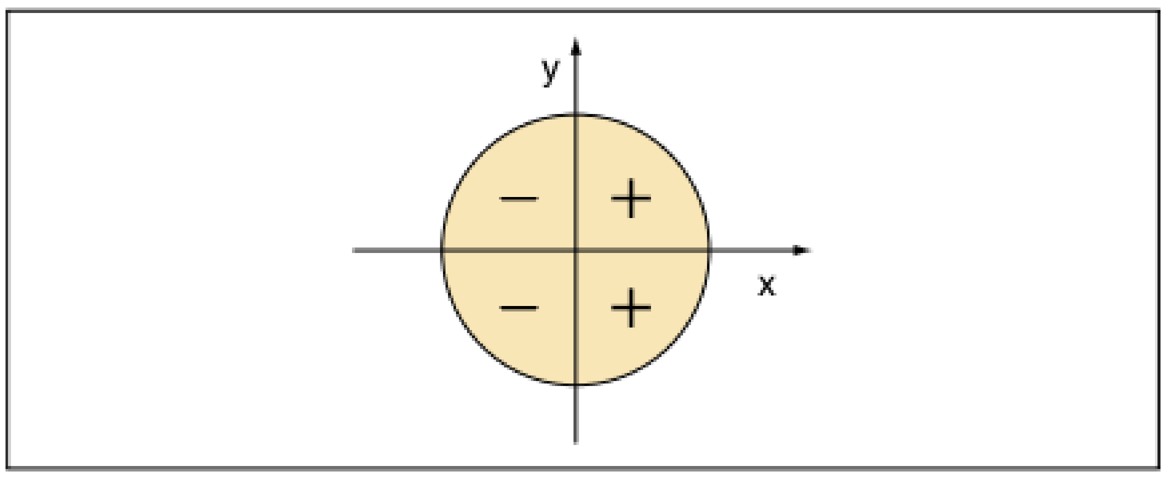


Fig. 14 Quadro de sinais.

Arcos côngruos

Os arcos x e $x + K \cdot 2\pi$; $K \in \mathbb{Z}$ possuem a mesma extremidade, portanto o cosseno é o mesmo.

ATENÇÃO!

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos(x + 2K\pi)$; $K \in \mathbb{Z}$.

Período da função cosseno

A função cosseno é periódica.

ATENÇÃO!

O período da função cosseno é 2π, pois $\cos x = \cos(x + 2\pi)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gráfico da função f(x) = cosx

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$, $Im_f = [-1;1]$ e $P = 2\pi$ são as principais características da função cosseno.

A figura 15 é o seu gráfico.

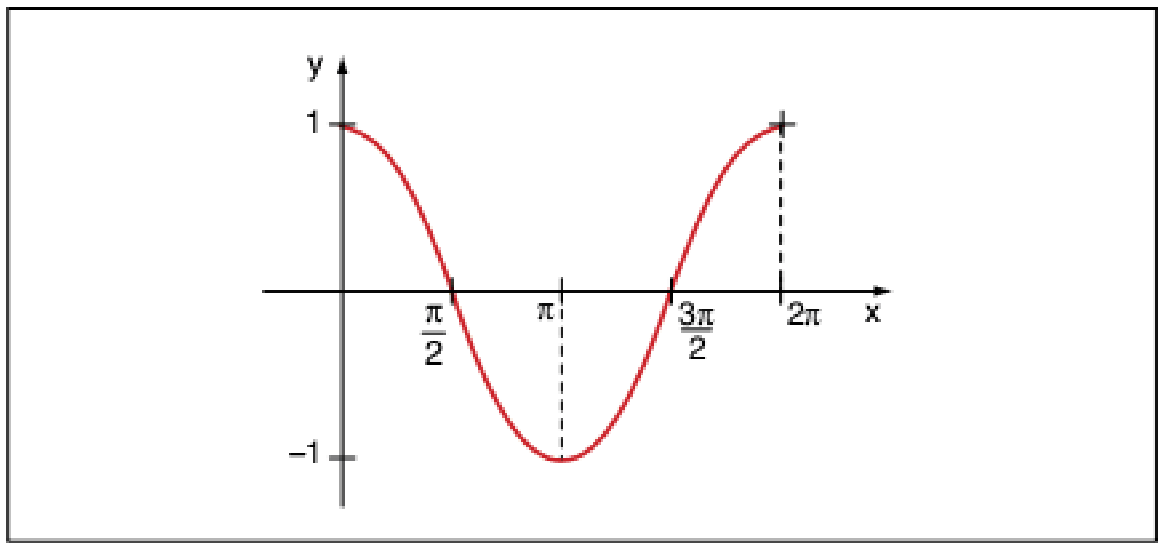


Fig. 15 Gráfico da função cosseno.

O gráfico da função cosseno é a cossenoide.

Arcos simétricos

A tabela 6 contém os valores notáveis que devemos memorizar:

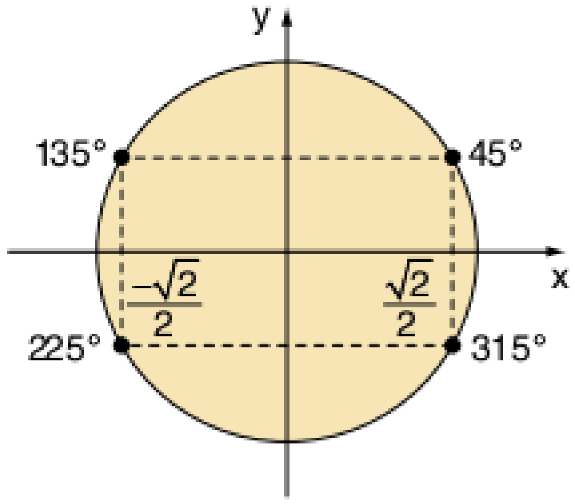
arco	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0

Tab. 6 Principais valores notáveis cosseno.

Vamos novamente exemplificar a simetria dos arcos, veja os exercícios resolvidos 8 e 9.

Exercícios resolvidos

8 Vamos encontrar os valores dos ângulos simétricos para $x = 45°$ para o cosseno.



Resolução:

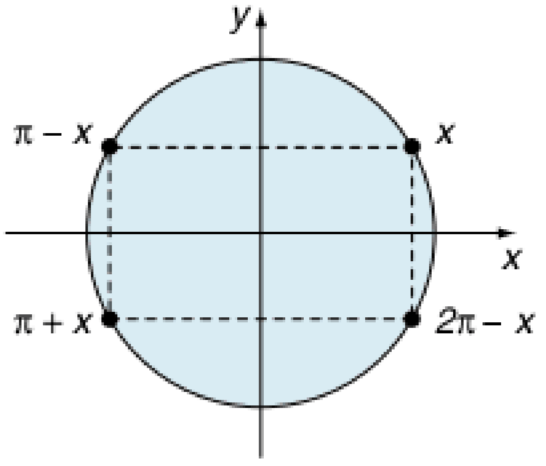
Pela figura, podemos concluir:

$\cos 135° = -\cos 45°$

$\cos 225° = -\cos 45°$

$\cos 315° = \cos 45°$

Vamos generalizar essa redução ao 1º quadrante:

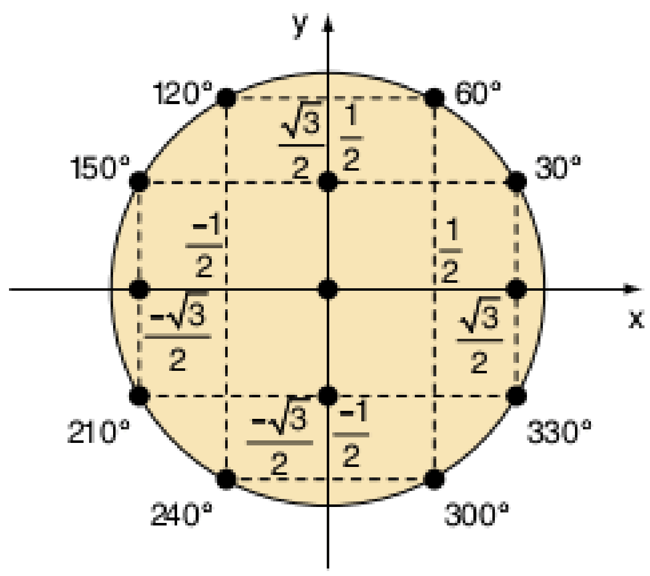


$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\cos(2\pi - x) = \cos x$

9 Vamos agora reposicionar o retângulo formado pelos 4 arcos do exemplo anterior. Observe o novo exemplo para x = 30º.



Resolução:

Pela figura, percebemos que:

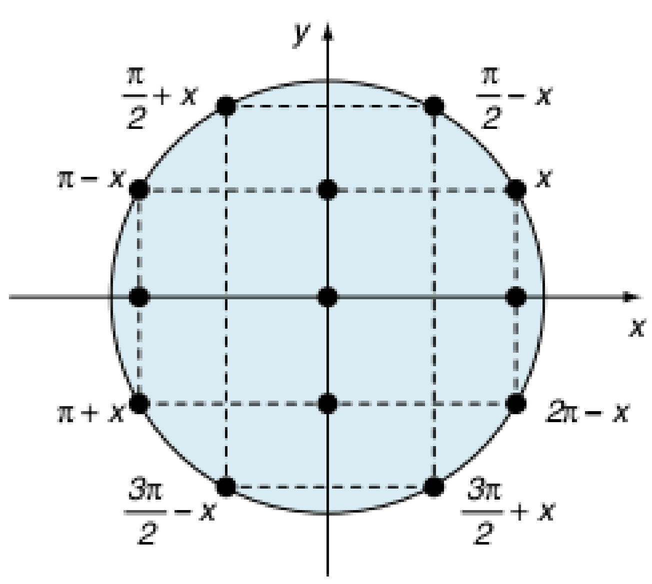
cos60º = sen30º

cos120º = –sen30º

cos240º = –sen30º

cos300º = sen30º

Vamos generalizar esta ideia para um arco x do 1º quadrante:



Análise do gráfico f(x) = a + b · cos(cx + d)

A análise é idêntica à função seno, com uma única alteração, é claro: o gráfico básico do cosseno é diferente do seno.

Observe os exercícios a seguir.

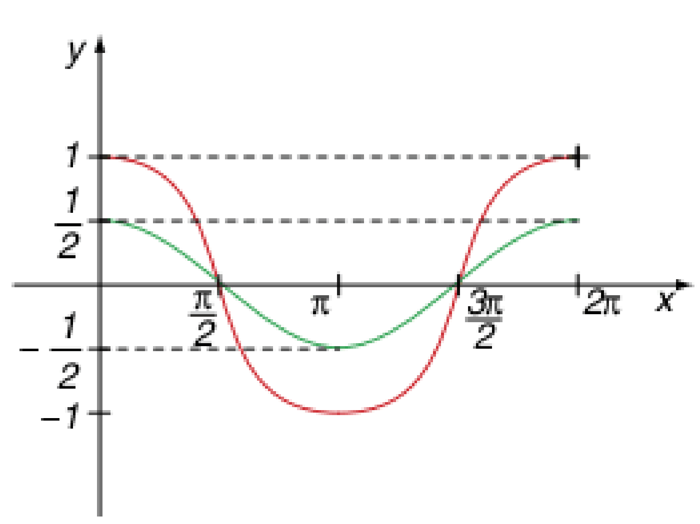
Exercícios resolvidos

10 Construa o gráfico da função:

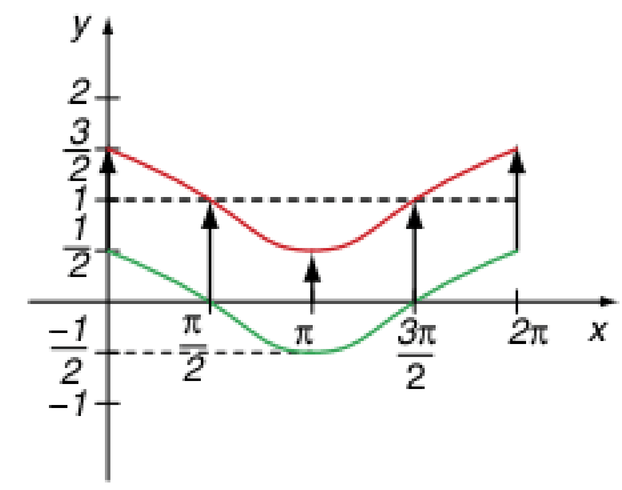
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x$$

Resolução:

Alteração na amplitude:



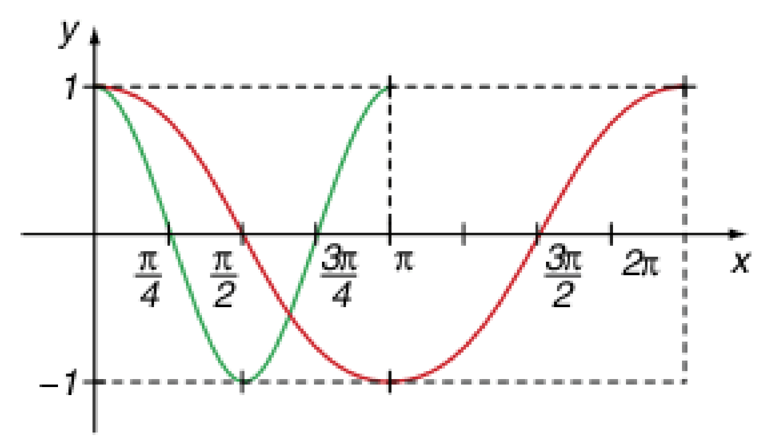
Deslocamento no eixo y:



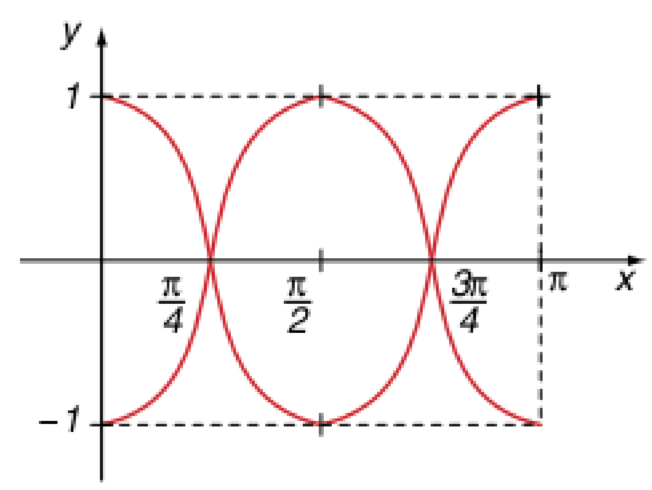
11 Construa o gráfico da função: f(x) = 1 – cos2x.

Resolução:

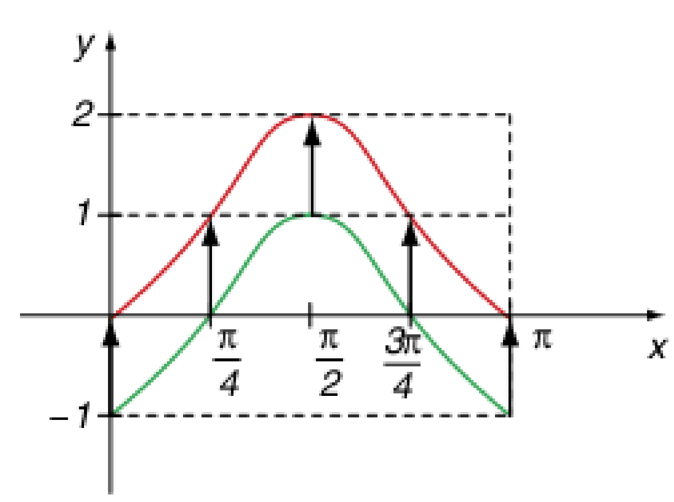
Alteração no período: $P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$



Inversão do gráfico:



Deslocando o gráfico no eixo y:



Relação fundamental da trigonometria (RFT)

Na verdade, existem várias relações fundamentais, mas até o momento conhecemos as funções senx e cosx e nos limitaremos a elas. Observe o ciclo trigonométrico a seguir, no qual vamos indicar o seno e o cosseno do arco x.

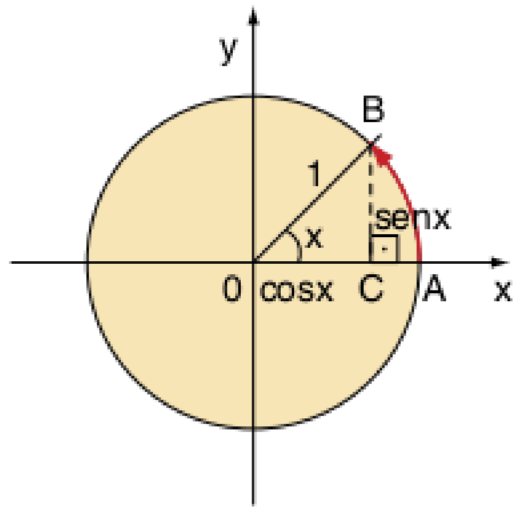


Fig. 16 Relação fundamental da trigonometria.

O ΔBOC é retângulo e seus catetos são as funções trigonométricas, então:

Pelo Teorema de Pitágoras

$(1)^2 = (\text{sen}x)^2 + (\cos x)^2$, simplificando a notação:

$$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

ATENÇÃO!

Cuidado!

$\text{sen}^2x = (\text{sen}x)^2 \quad \text{sen}^2x \neq \text{sen}x^2$

Exercícios resolvidos

12 Calcule o cosx sabendo que $\text{sen}x = \frac{1}{3}$ e $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Resolução:

Pela RFT, temos que: $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$, *logo,*

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2x = 1 \therefore \cos^2x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$, *como x pertence ao 2º quadrante,* $\cos x < 0$,

portanto, $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

13 Simplifique a expressão: $\text{sen}^4x - \cos^4x$.

Resolução:

Fatorando a expressão, temos:

$\text{sen}^4x - \cos^4x = (\text{sen}^2x - \cos^2x).(\underbrace{\text{sen}^2x + \cos^2x}_{1}) =$

$= \text{sen}^2x - \cos^2x = (1 - \cos^2x) - \cos^2x = 1 - 2\cos^2x$

Revisando

1 Determine o intervalo de variação da equação $E(x) = -2 + 3\text{sen}x$ para $x \in \mathbb{R}$.

2 Calcule o valor de sen(2.550º).

3 Construir o esboço do gráfico $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 1 + 2\text{sen}(2x - \pi)$.

4 Construir o esboço do gráfico $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = -1 + 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

5 Considere $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ e $\operatorname{sen}x = \frac{1}{3}$. Calcule o valor de cosx.

6 Faça o esboço do gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que: $f(x) = \operatorname{sen}^4x + \cos^4x + 2\operatorname{sen}^2x \cdot \cos^2x$.

Exercícios propostos

Conjunto-imagens de funções

1 **PUC** Determine todos os valores de x, de modo que a expressão $\operatorname{sen}\theta = \frac{2x-1}{3}$ exista.

(a) $[-1; 1[$
(b) $]-1; 0]$
(c) $[-1; 2]$
(d) $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$
(e) $\left[-1; \frac{1}{3}\right[$

2 **PUC** O conjunto-imagem da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2\operatorname{sen}x - 3$, é o intervalo:

(a) $[-1; 1]$
(b) $[-5; 5]$
(c) $[-5; 1]$
(d) $[-1; 5]$
(e) $[-5; -1]$

3 **PUC** Se $x \in \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$ e $\operatorname{sen}x = 3n - 1$, então "n" varia no intervalo:

(a) $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$
(b) $]-1; 1[$
(c) $]-1; 0[$
(d) $]0; 1[$
(e) $\left]0; \frac{1}{3}\right[$

4 **Fuvest** O menor valor de $\frac{1}{3-\cos x}$, com x real é:

(a) $\frac{1}{6}$
(b) $\frac{1}{4}$
(c) $\frac{1}{2}$
(d) 1
(e) 3

5 Ache os valores do parâmetro m para que a igualdade $\operatorname{sen}x = m + 1$ seja possível.

(a) $m \leq 0$
(b) $m \geq -2$
(c) $-2 \leq m \leq 0$
(d) $0 \leq m \leq 2$
(e) n.d.a.

Noção geométrica do seno e cosseno no ciclo trigonométrico

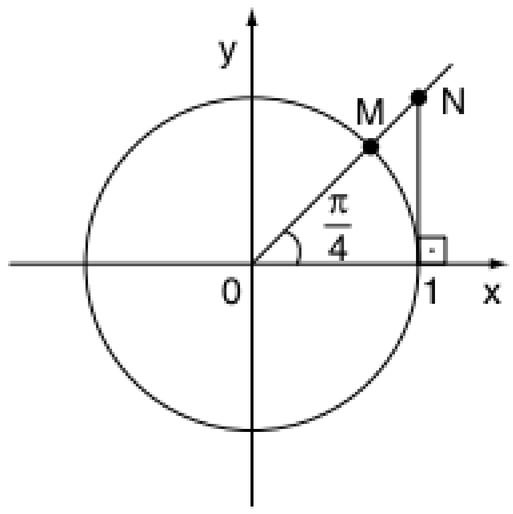
6 **Ueba** Se a medida α de um arco é 8 radianos, então:

(a) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$
(b) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$
(c) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$
(d) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$
(e) $\operatorname{sen}\alpha = 0$ e $\cos\alpha = 0$

7 Sen1.200° é igual a:

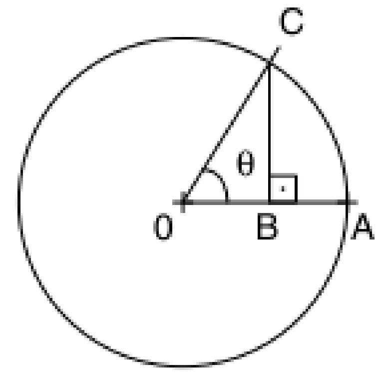
(a) cos60º
(b) –sen60º
(c) cos30º
(d) –sen30º
(e) cos45º

8 Na figura seguinte, calcule o valor do segmento $\overline{MN}$.



(a) $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$
(b) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) $-\sqrt{2} + 1$
(d) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
(e) $\sqrt{2} - 1$

9 **PUC** Na figura a seguir o raio OA = 6. O segmento $\overline{OB}$ vale 3 e o segmento $\overline{CB} \perp \overline{OA}$. Determine o ângulo θ em radianos.



10 **UEL** Dos números a seguir, o mais próximo de sen5 é:

(a) 1
(b) $\frac{1}{2}$
(c) 0
(d) $-\frac{1}{2}$
(e) –1

11 Na figura seguinte, temos o ciclo trigonométrico e $\overline{TB}$ tem medida igual a b. Calcule a área do triângulo destacado.

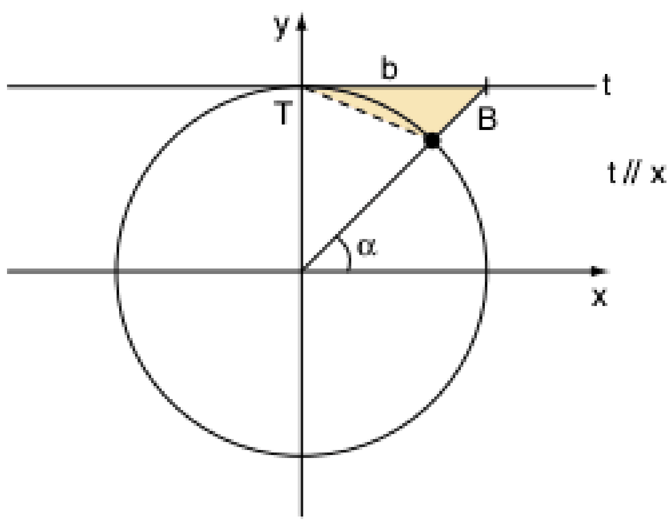
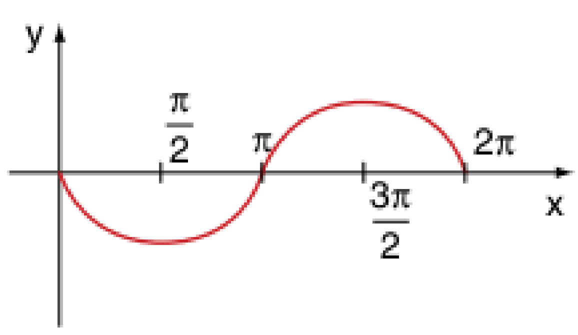


Gráfico da função seno e cosseno

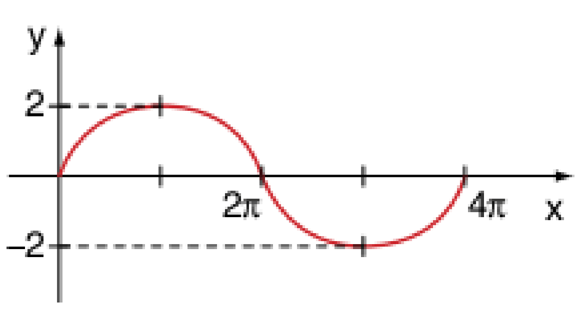
12 Sabe-se que h é o menor número positivo para o qual o gráfico de y = sen(x – h) é:



Então $\cos\frac{2h}{3}$ é igual a:

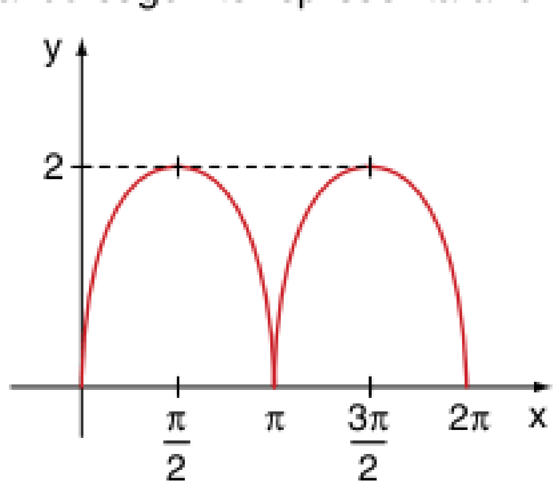
(a) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
(b) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
(c) $-\frac{1}{2}$
(d) $\frac{1}{2}$
(e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13 **Fuvest** A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:



(a) senx
(b) $2\text{sen}\frac{x}{2}$
(c) 2senx
(d) 2sen2x
(e) sen2x

14 **FGV** O gráfico seguinte representa a função:



(a) y = sen2x
(b) y = 2senx
(c) y = |sen2x|
(d) y = |2senx|
(e) y = 2sen|x|

15 **PUC** O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g dadas por: f(x) = –|cosx| e $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ com $-\pi < x < \pi$, é:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) maior que 3

16 **PUC** Esboce o gráfico da função f:[0; 2π] → ℝ definida por f(x) = 2 + senx + |senx|.

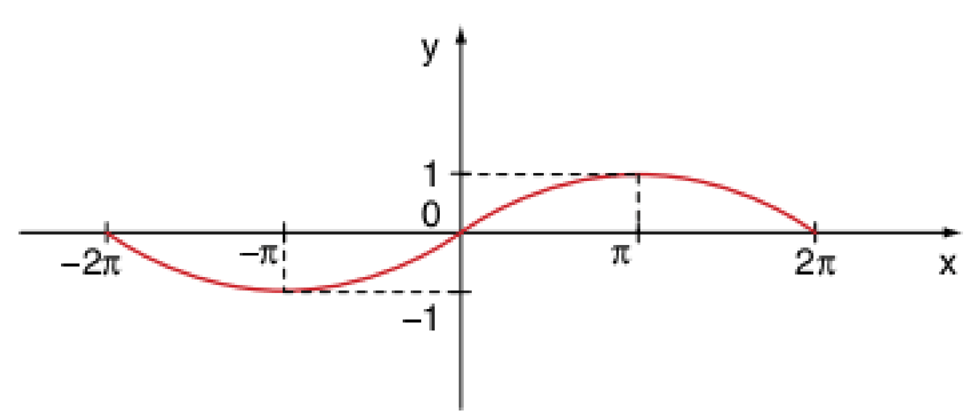
17 Faça o esboço do gráfico correspondente à função $f(x) = 1 - 2.\cos\frac{x}{2}$, para $0 \le x \le 2\pi$.

18 Qual o valor de $\cos\frac{29\pi}{4}$ rad?

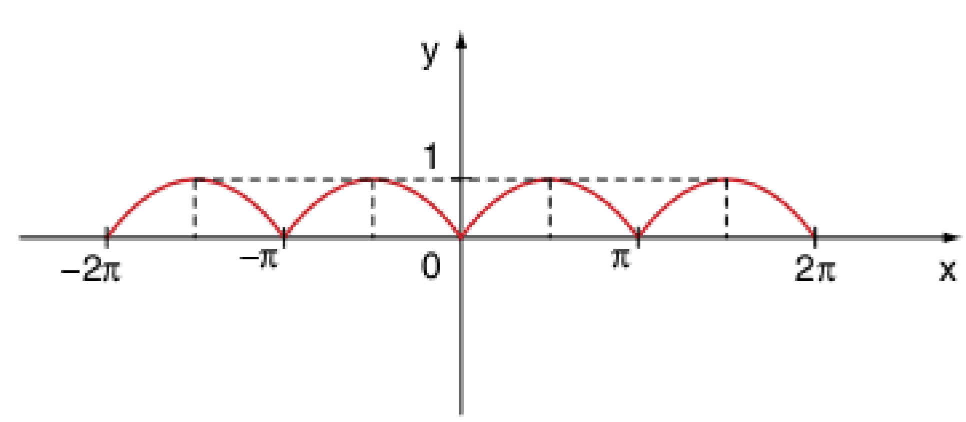
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(c) $-\frac{1}{2}$
(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(e) n.d.a.

19 **FEI** O gráfico da função y = f(x) = sen|x| no intervalo [– 2π, 2π] é:

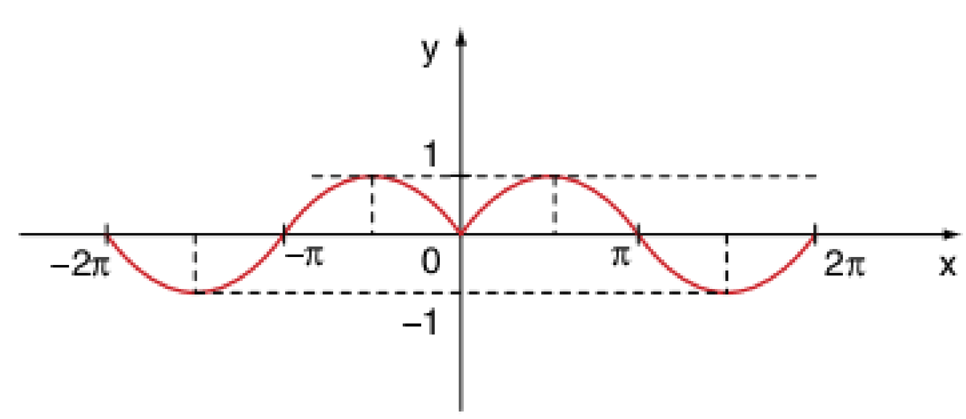
(a)

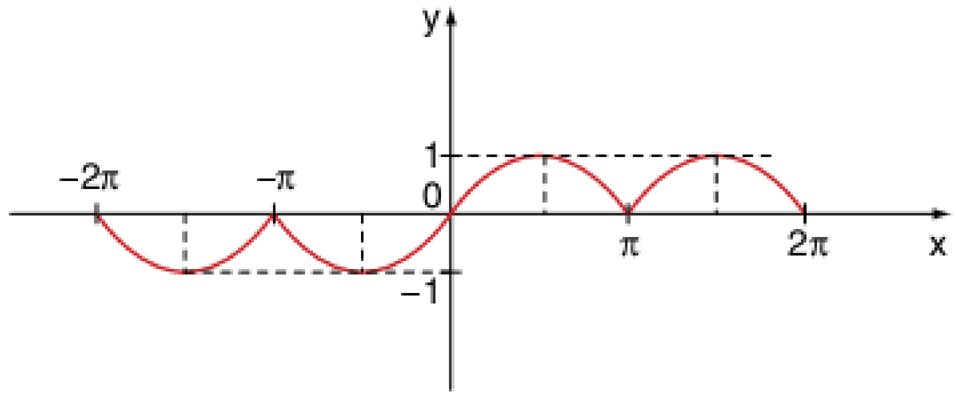


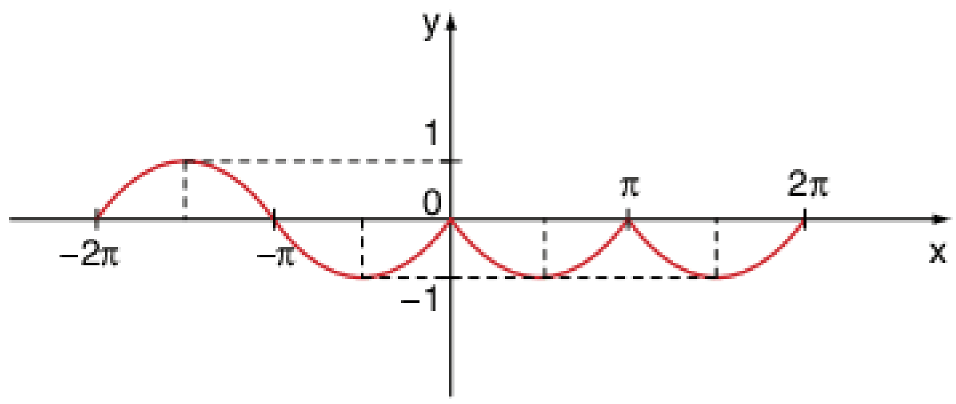
(b)



(c)



(d) 

(e) 

20 **Mackenzie** O período da função dada por $y = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ é:

(a) π
(b) 2π
(c) $\frac{\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{2}$
(e) $\frac{\pi}{8}$

Relação fundamental da trigonometria

21 Simplifique a expressão $\frac{\cos^2\theta}{1 - \text{sen}\theta}$, com $\text{sen}\theta \neq 1$.

22 **PUC** Se $a > 0$, a expressão $\sqrt{a^2\cos\alpha.\cos^2\beta + a^2\cos\alpha.\text{sen}^2\beta}$ é igual a:

(a) $a^2\cos\alpha$
(b) $a\cos\alpha$
(c) $a\sqrt{\cos\alpha}$
(d) $a\sqrt{\text{sen}\alpha}$
(e) $a\,\text{sen}^2\alpha$

23 **Mackenzie** As raízes da equação $2x^2 - px - 1 = 0$ são $\text{sen}\theta$ e $\cos\theta$, sendo $\theta \in \mathbb{R}$. O valor de p é:

(a) zero
(b) 2
(c) 4
(d) 5
(e) n.d.a.

24 **FGV** Se $\text{sen}a = \frac{24}{25}$ e $a \in 2°$ quadrante, determine o valor de $\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$.

(a) $\frac{3}{4}$
(b) $\frac{3}{5}$
(c) $\frac{5}{4}$
(d) $\frac{4}{3}$
(e) $\frac{1}{2}$

25 Achar os valores de x que verifiquem, simultaneamente, as igualdades:

$\cos a = \frac{6x + 2}{5}$ e $\text{sen}a = \frac{3x + 2}{5}$

(a) 3 e $\frac{1}{3}$
(b) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{17}{15}$
(c) $\frac{1}{3}$ e $\frac{-17}{15}$
(d) -3 e $\frac{1}{3}$
(e) n.d.a.

26 **Mackenzie** Para qualquer valor real de x, $(\text{sen}x + \cos x)^2 + (\text{sen}x - \cos x)^2$ é igual a:

(a) -1
(b) 0
(c) 1
(d) 2
(e) $2\text{sen}2x$

27 Calculando o valor da expressão:

$E = \text{sen}^4x + \cos^4x + 2\text{sen}^2x \,.\, \cos^2x$, encontramos:

(a) 1
(b) sen^2x
(c) $\cos^2x$
(d) $\text{sen}x \,.\, \cos x$
(e) zero.

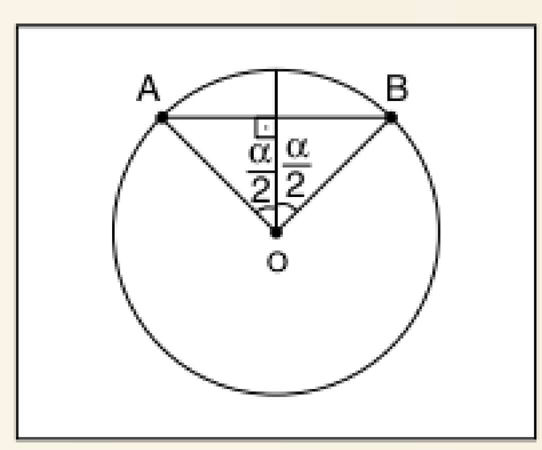
TEXTOS COMPLEMENTARES

Origens da trigonometria

A origem da trigonometria é incerta, mas podemos afirmar que o seu desenvolvimento foi influenciado por causa dos problemas de Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta de V a.C., com os egípcios e os babilônios. A palavra trigonometria é de origem grega e significa medidas do triângulo. O astrônomo grego Hiparco de Niceia (180-125 a.C.) é considerado o fundador da trigonometria. Foi ele quem introduziu as medidas sexagesimais em Astronomia e elaborou a primeira tabela trigonométrica. Para Hiparco, a trigonometria era uma ferramenta para fazer medições, prever eclipses, fazer calendários e muitas outras coisas.

Hiparco tinha construído uma tabela de cordas, precursora das modernas tabelas trigonométricas.

A construção das tabelas de cordas era feita da seguinte maneira:



Media-se a corda $\overline{AB}$ de uma unidade u, tal que $u = \frac{\text{raio}}{60}$.

Assim, utilizava-se o símbolo crd α para representar o comprimento da corda do ângulo central α.

Da figura, podemos perceber que uma tabela de cordas é uma tabela dos senos dos ângulos.

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2OA} = \frac{\text{cdr } \alpha}{\text{diâmetro}}$$

Hiparco e o raio da Lua

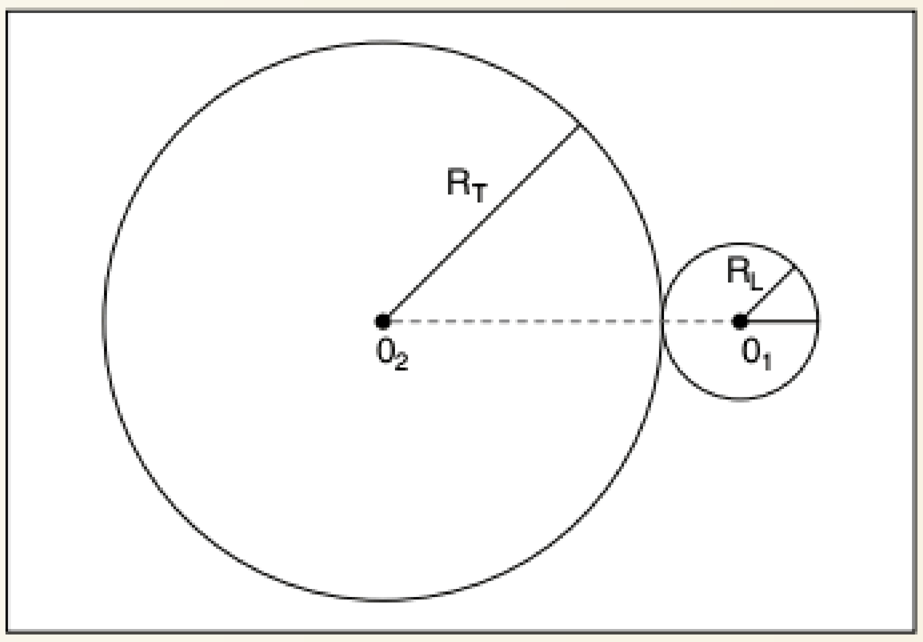
Hiparco, considerado o inventor da trigonometria, foi também o criador do astrolábio, um instrumento naval antigo utilizado para medir a altura dos astros acima do horizonte e determinar a posição deles no céu.

Hiparco adotava para raio da Terra o valor obtido por Eratóstenes, ou seja, aproximadamente 6.366 km.

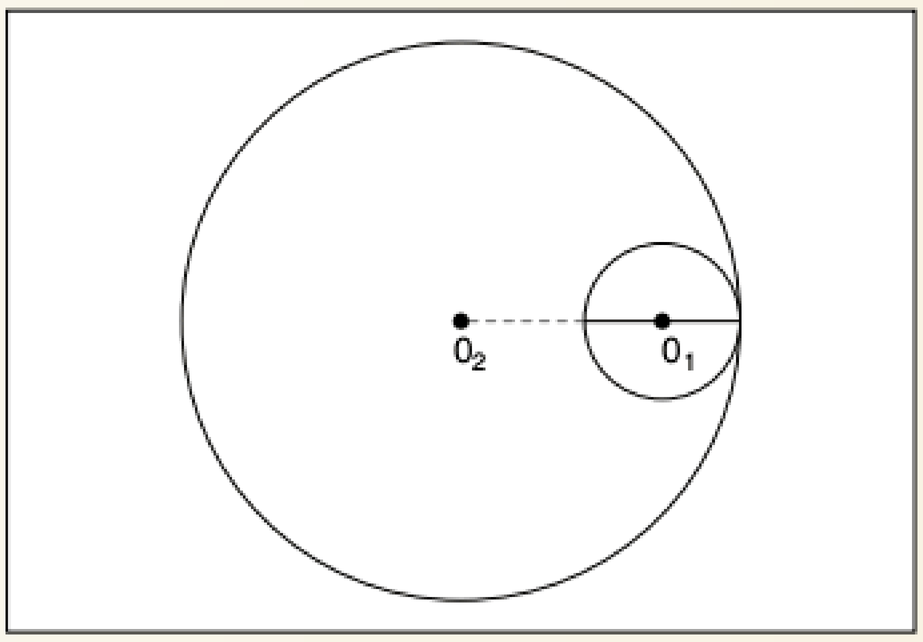
O seu grande interesse pela astronomia fez com que observasse vários eclipses lunares e desse uma especial atenção aos eclipses totais e de grande duração.

Hiparco concluiu que a Lua demora cerca de 1 hora para ocultar-se e mantém-se oculta cerca de 1h40.

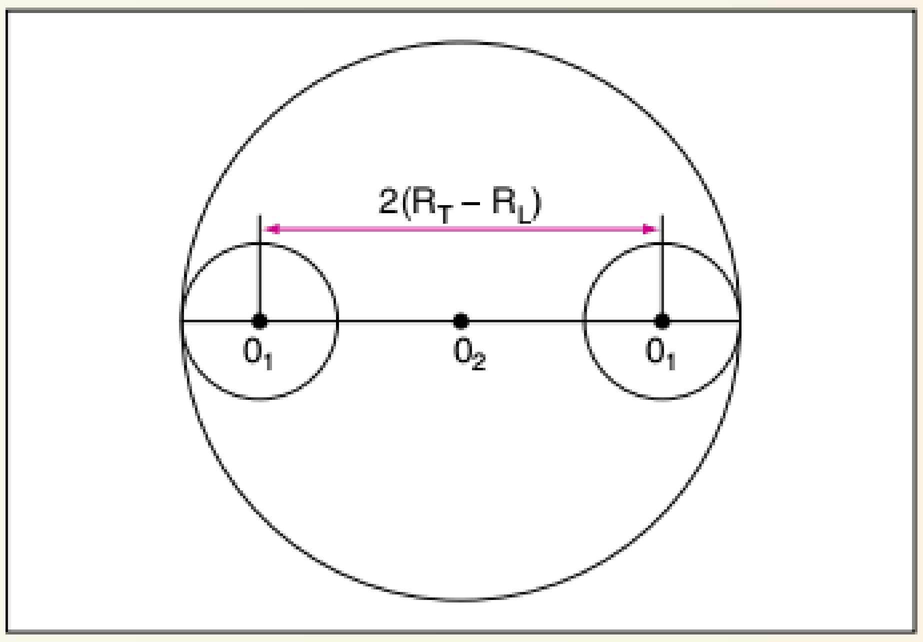
Com base nestas informações, observe as figuras:



Início do eclipse lunar. R_T: raio da Terra, R_L: raio da Lua



Após 1 hora, a Lua estava totalmente oculta. Observe que o centro da Lua 0_1 percorre a distância de $2R_L$.



A Lua mantém-se oculta durante 1h e 40 min. E o centro 0_1 da Lua percorre a distância de $2(R_T - R_L)$.

Considerando a velocidade da ponta 0_1 constante, temos:

$$\frac{2R_L}{1h} = \frac{2R_T - 2R_L}{1{,}67h} \therefore 3{,}34R_L = 2R_T - 2R_L \therefore 5{,}34R_L = 2R_T$$

$$R_L = \frac{R_T}{2{,}67}$$

Com o resultado de Eratóstenes, temos então raio da Lua = 2.384 km.

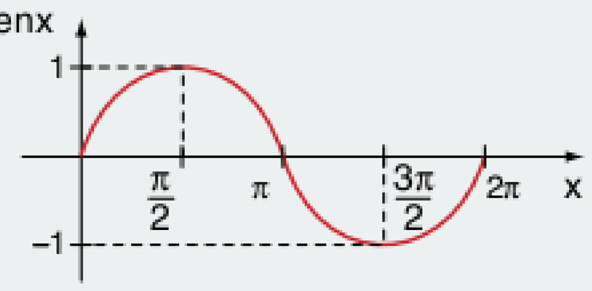
Sabemos hoje que o raio da Lua é cerca de 1.737 km. O raciocínio de Hiparco é brilhante, mas neste método faltou-lhe precisão para calcular a duração dos eclipses.

RESUMINDO

As funções básicas da trigonometria são:
f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e f(x) = senx (função seno)
g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e g(x) = cosx (função cosseno)

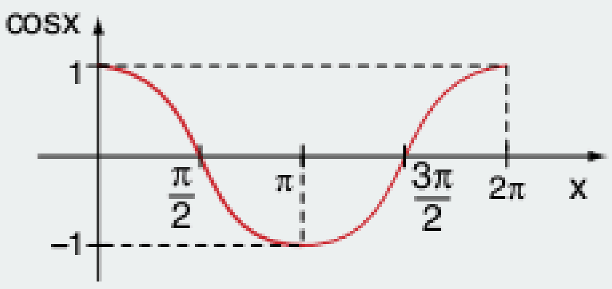
A relação fundamental da trigonometria (RFT) relaciona as duas funções tal que $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Propriedades básicas das funções:

a)



$-1 \le \text{senx} \le 1$
Período: 2π
Amplitude: 1
Domínio: $\mathbb{R}$
Função ímpar (sen(–x) = – senx)

b)



$-1 \le \cos x \le 1$
Período: 2π
Amplitude: 1
Domínio: $\mathbb{R}$
Função par (cos(–x) = cosx)

QUER SABER MAIS?

SITE

- Trigonometria – história e funções
<http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/trigonometricas/ftrigonometricas.htm>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 Sendo $x = \frac{\pi}{2}$, calcule o valor da expressão $\frac{\text{senx} + \cos x}{\text{senx}}$.

(a) 0
(b) $\frac{1}{2}$
(c) 1
(d) 2
(e) ∞

2 Determine o período e a imagem da função real f definida por f(x) = 3sen2x.

3 Classifique as funções senx e cosx quanto a sua paridade.

4 **PUC** Sendo θ um ângulo agudo, então $\frac{5\pi}{2} - \theta$ pertence a qual quadrante?

(a) 1º
(b) 2º
(c) 3º
(d) 4º
(e) n.d.a.

5 A função $f(x) = \cos \frac{\pi x}{8}$ é periódica de período:

(a) 16
(b) 8π
(c) $\frac{\pi}{2}$
(d) $\frac{\pi}{4}$
(e) 2π

6 **FGV** Encontre o conjunto solução da equação na variável x: $x^2 - (\cos^2\alpha)x - \text{sen}^2\alpha = 0$.

7 **Vunesp** A expressão: $1 - 2\cdot\text{sen}^2x + \text{sen}^4x + \text{sen}^2x\cdot\cos^2x$ é equivalente a:
(a) $\cos^4x$
(b) $2\cos^2x$
(c) $\cos^3x$
(d) $\cos^4x + 1$
(e) $\cos^2x$

8 **Fuvest** Ache m de modo que o sistema:

$\begin{cases} \cos x + m\,.\,\text{sen}x = 0 \\ \cos x - m\,.\,\text{sen}x = 1 \end{cases}$ na incógnita x, tenha solução.

9 **Fuvest** Qual dos números é o maior? Justifique.
a) sen(830º) ou sen(1.195º)
b) cos(–535º) ou cos(190º)

10 Classifique as funções f(x) = xsenx e g(x) = xcosx quanto à paridade.

11 Escreva em ordem crescente: cos32º; cos205º e cos353º.

12 Escreva em ordem descrescente: sen108º; sen10º; sen173º.

13 Demonstrar que a expressão:
$y(x) = \text{sen}^6x + \cos^6x - 2\text{sen}^4x - \cos^4x + \text{sen}^2x$ é nula qualquer que seja o arco x.

14 Simplificar a expressão considerando cosa > 0:

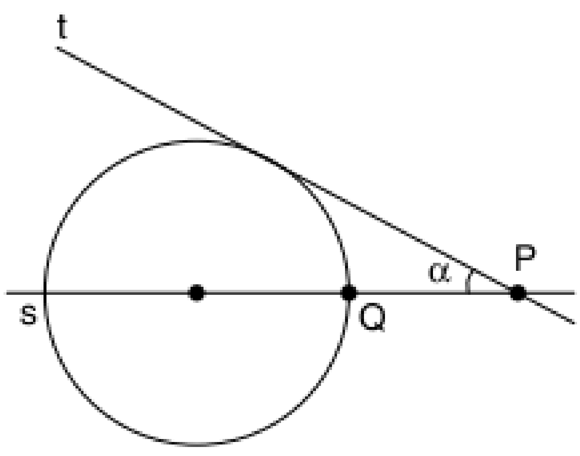
$$\frac{\cos a}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+\text{sen}^2a}{\cos a}}\left[\sqrt{\frac{\cos^3a}{1\ +\ \text{sen}^2a}}+\sqrt{\frac{1+\text{sen}^2a}{\cos a}}\right]$$

15 Seja a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} + \text{sen}x;\ x \neq 0 \\ 0;\ x = 0 \end{cases}$$

Esboce o gráfico.

16 Na figura a seguir, a reta s passa pelo ponto P e pelo centro da circunferência de raio R, interceptando-a no ponto Q, entre P e o centro. Além disso, a reta t passa por P, é tangente à circunferência e forma um ângulo α com a reta s. Se PQ = 2R, então, cosα vale:



(a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$
(b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
(e) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

17 Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peças. Sabe-se que o custo de produção C(x) e o valor de venda V(x) são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções:

$$C(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \text{ e } V(x) = 3\sqrt{2}\,.\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{12}\right);\ 0 \leq x \leq 6.$$

O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é:
(a) 500
(b) 750
(c) 1.000
(d) 2.000
(e) 3.000

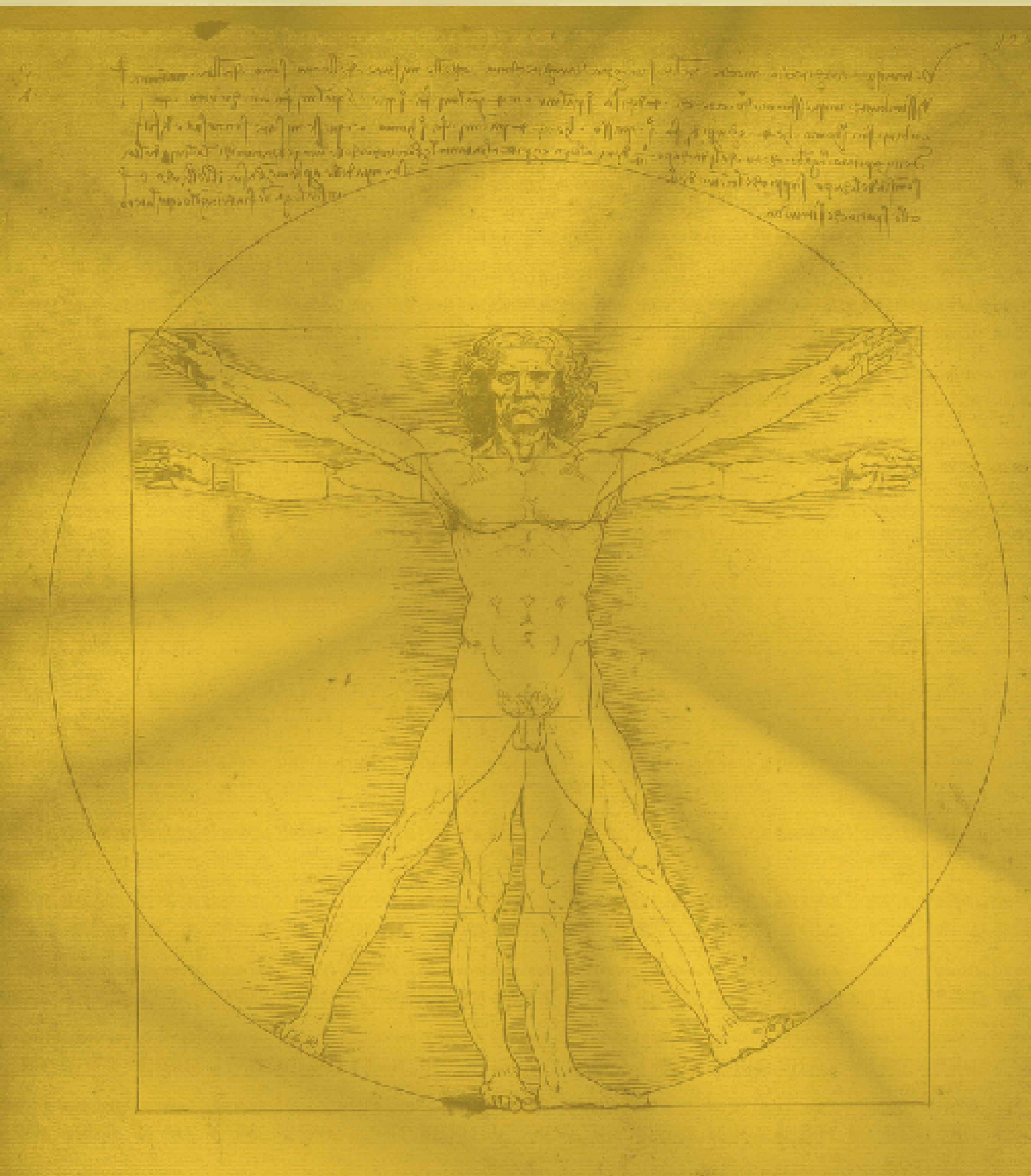
18 No hemocentro de um certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, neste hospital, no ano de 2006, este número, de janeiro (t = 0) a dezembro (t = 11) seja dado, aproximadamente, pela expressão $S(t) = \lambda - \cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right]$ com λ uma constante positiva, S(t) em milhares e t em meses, $0 \leq t \leq 11$. Determine:
a) a constante λ, sabendo que no mês de fevereiro houve 2 mil doações de sangue.
b) em quais meses houve 3 mil doações de sangue.

19 Dadas as curvas $y = x^2$ e y = cosx, assinalar dentre as afirmações a seguir a verdadeira.
(a) Elas não interceptam-se.
(b) Elas interceptam-se em uma infinidade de pontos.
(c) Elas interceptam-se em dois pontos.
(d) Elas interceptam-se em um único ponto.
(e) Elas interceptam-se em três pontos.

20 Faça o esboço do gráfico correspondente à função $f(x) = 1 + \cos(x + \pi)$, para $-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

21 Foram feitos os gráficos das funções:
$f(x) = \text{sen}4x$ e $g(x) = \frac{x}{100}$, para x no intervalo [0; 2π]. O número de pontos comuns aos dois gráficos é:
(a) 16
(b) 8
(c) 4
(d) 2
(e) 1

Frente 2

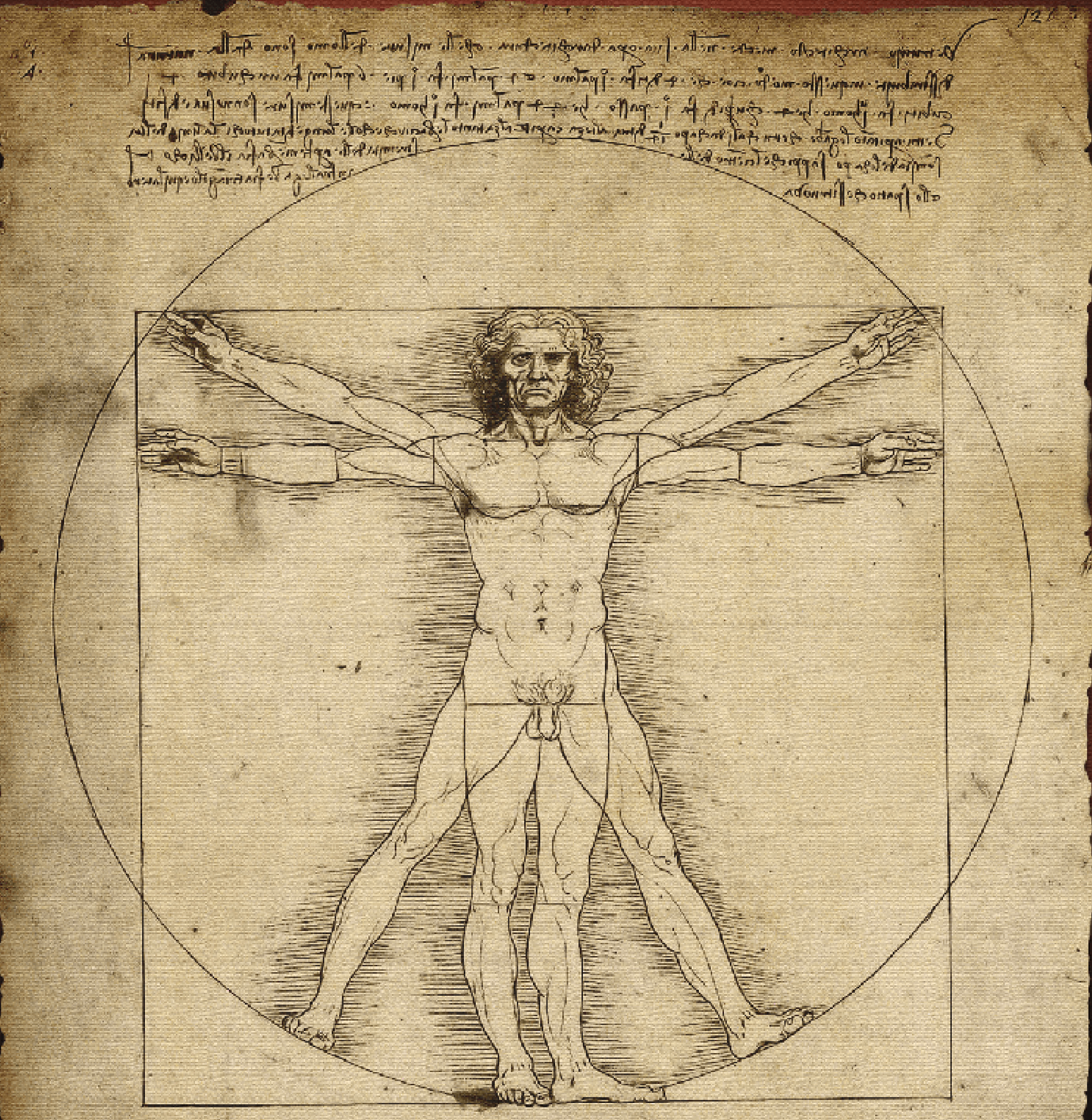


6

FRENTE 2

Razões, proporções e regra de três

LEONARDO DA VINCI/LUC VIATOUR/WIKIPEDIA



Razão ou proporção é a divisão entre dois números, e o resultado reflete uma relação entre eles. Existem diversas aplicações para esse tipo de relação, e uma das mais famosas dessas aplicações é o homem vitruviano. Ele é um conceito apresentado no Tratado De Architectura, escrito pelo arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio. Esse conceito leva em consideração a razão áurea para apresentar o homem como modelo clássico ideal de beleza, com proporções perfeitas.

Segundo Vitruvius, o corpo humano, com os braços e as pernas estendidos, se ajustava perfeitamente ao círculo e ao quadrado. Muitos artistas da Renascença tentaram traçar o ideal de Vitruvius, e esse feito foi atingido por Leonardo da Vinci, em 1487. Esse desenho é um dos mais famosos de seu legado.

Proporções

A divisão entre dois números também é chamada de razão.

Temos $\frac{a}{b}$ ou a : b, com a = numerador e b = denominador.

Proporção é a igualdade entre duas ou mais razões.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou a : b = c : d

a e d: extremos

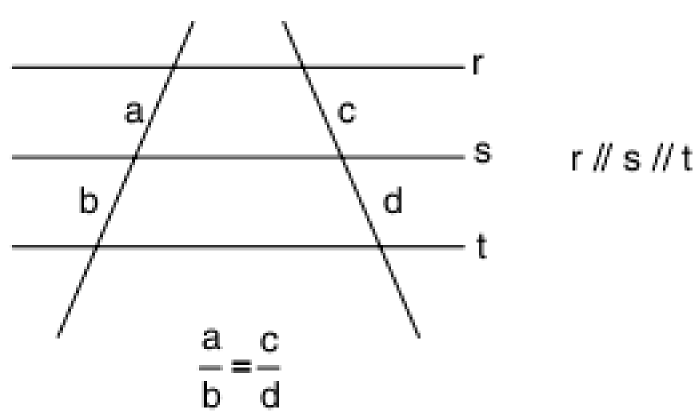
b e c: meios

Propriedade

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Assim:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Podemos fazer uma analogia das proporções com o teorema de Tales, observe:



Outras propriedades nas proporções podem ajudar-nos, observe:

P1 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

Demonstração:

$ad = bc \therefore ad + bd = bc + bd \therefore$

$d(a+b) = b(c+d) \therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

P2 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Demonstração:

$\frac{a}{b} = k \therefore a = kb$ e $\frac{c}{d} = k \therefore c = kd$. Vamos substituir na expressão $\frac{a+c}{b+d}$, assim: $\frac{kb+kd}{b+d} = \frac{k(b+d)}{(b+d)} = k$, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

P3 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ac}{bc} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

Demonstração:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ e $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = kk = k^2$ e $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = k^2$

e $\frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = k^2$

Observe alguns exemplos de aplicação a seguir:

Exercícios resolvidos

1 Calcule x e y na proporção $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ sabendo que x + y = 50.

Resolução:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{2+3} \therefore \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{50}{5} \therefore x = 20 \text{ e } y = 30$$

2 Calcule x e y na proporção $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ sabendo que 3x + 2y = 34.

Resolução:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{3x}{9} = \frac{2y}{8} = \frac{3x+2y}{9+8} = \frac{34}{17} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{3} = 2 \therefore x = 6 \text{ e } \frac{y}{4} = 2 \therefore y = 8$$

3 Calcule x e y na proporção $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ sabendo que xy = 96.

Resolução:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{xy}{2.3} = \frac{96}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = 16 \therefore x^2 = 4.16 \Rightarrow x = 8$$

$$\therefore y^2 = 9.16 \Rightarrow y = 12$$

4 Calcule x, y e z na proporção $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, sabendo que 5x + 3y – 2z = 18.

Resolução:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{5x+3y-2z}{5.2+3.3-2.5} = \frac{18}{9} = 2$$

Repete-se a "ideia" no denominador.

Assim:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = 2 \Rightarrow x = 4,\ y = 6 \text{ e } z = 10.$$

Grandezas proporcionais

Sejam $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ uma coleção de número $\mathbb{R}^*$. Vamos analisar duas hipóteses:

1. $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ... = \frac{x_n}{y_n} = k$, dizemos que essas coleções de números, que representam as variações de duas grandezas físicas, químicas ou de qualquer outra natureza, são **diretamente proporcionais**. Teremos, se representarmos com um gráfico, a reta a seguir.

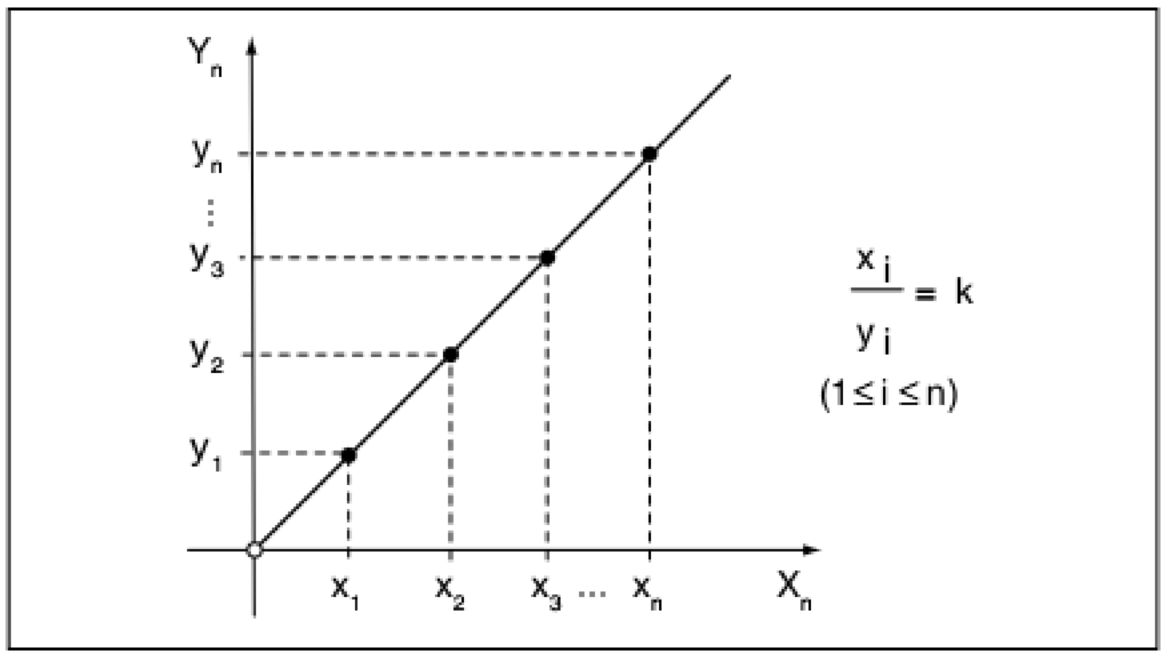


Fig. 1 Grandezas diretamente proporcionais.

A proporcionalidade tem aplicações práticas que surgiram nas antigas regras de sociedade. Analise o texto a seguir:

Um grupo de 4 sócios montou um comércio. O sócio A entrou com R\$ 5.000,00, o B com R\$ 2.500,00, o C com R\$ 7.500,00 e o D com R\$ 10.000,00. Após um tempo, o negócio deu um lucro de R\$ 40.000,00. Como deve ser dividido esse lucro da forma mais justa?

O mais justo seria dividir o lucro em partes diretamente proporcionais ao capital inicial investido, ou seja, recebe mais aquele que investiu mais, e recebe menos aquele que investiu menos. Representando por a, b, c e d os lucros dos sócios A, B, C e D, temos:

$$\frac{a}{5.000} = \frac{b}{2.500} = \frac{c}{7.500} = \frac{d}{10.000} \text{ e } a + b + c + d = 40.000.$$

Assim:

$$\frac{a}{5.000} = \frac{b}{2.500} = \frac{c}{7.500} = \frac{d}{10.000} = \frac{a+b+c+d}{25.000} = 1,6$$

Assim:

a = R\$ 8.000,00, b = R\$ 4.000,00, c = R\$ 12.000,00 e d = R\$ 16.000,00.

2 $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = ... = x_n \cdot y_n = k$, dizemos que essas coleções de números representam duas grandezas **inversamente proporcionais**. Teremos como gráfico a hipérbole equilátera.

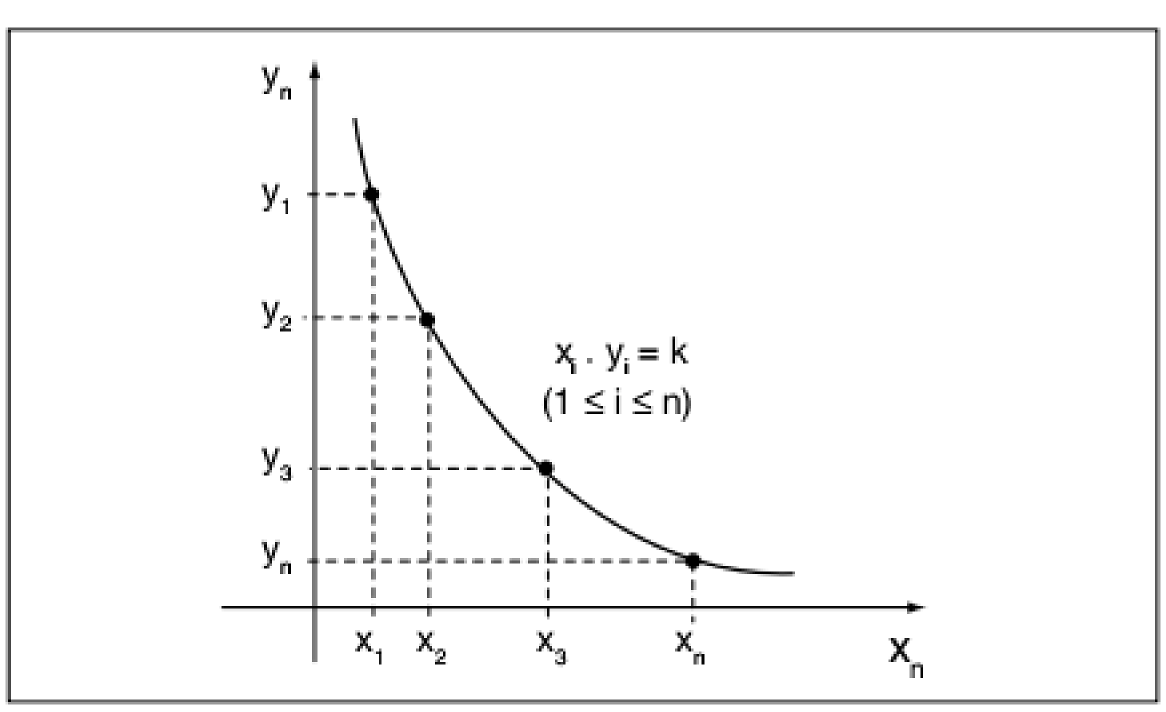


Fig. 2 Grandezas inversamente proporcionais.

Analise o seguinte texto: Devemos dividir uma coleção de 107 figurinhas entre 5 crianças com 3, 4, 8, 10 e 12 anos. Para não termos nenhum problema com as crianças menores e sabendo que as crianças maiores não gostam tanto de figurinhas, como deve ser feita a divisão?

Temos um problema de ordem prática e não queremos decepcionar as crianças menores. Como as crianças maiores não se importam de receber menos figurinhas, iremos dividi-las em partes inversamente proporcionais às suas idades, assim a criança com menos idade recebe mais figurinhas e a criança com mais idade recebe menos figurinhas. Matematicamente, temos:

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as quantidades de figurinhas recebidas pelas crianças com 3, 4, 8, 10 e 12 anos, temos:

$3x_1 = 4x_2 = 8x_3 = 10x_4 = 12x_5 = k$ e

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 107$

Assim:

$$x_1 = \frac{k}{3};\ x_2 = \frac{k}{4};\ x_3 = \frac{k}{8};\ x_4 = \frac{k}{10} \text{ e } x_5 = \frac{k}{12};$$

fazendo a soma, temos:

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{8} + \frac{k}{10} + \frac{k}{12} = 107 \therefore \frac{107}{120}k = 107 \Rightarrow k = 120$$

Obtemos então: $x_1 = 40$; $x_2 = 30$; $x_3 = 15$; $x_4 = 12$ e $x_5 = 10$

Observação: *Nas grandezas diretamente proporcionais, a razão é constante. As grandezas inversamente proporcionais possuem o produto constante.*

Teorema

Se as grandezas X e Y são inversamente proporcionais, ou seja, $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = ... = x_n \cdot y_n$, então a grandeza X é diretamente proporcional ao inverso da grandeza Y.

Demonstração:

Como $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = ... = x_n \cdot y_n$, podemos reescrever:

$$\frac{x_1}{\left(\frac{1}{y_1}\right)} = \frac{x_2}{\left(\frac{1}{y_2}\right)} = ... = \frac{x_n}{\left(\frac{1}{y_n}\right)},$$ ou seja, a grandeza X é diretamente proporcional ao inverso da grandeza Y.

Regra de três (simples ou composta)

São processos utilizados para a resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Quando envolvem 2 grandezas, são chamadas de regra de três simples; utilizando 3 ou mais grandezas, são chamadas de regra de três compostas. Observe os exemplos.

Exercícios resolvidos

5 Um automóvel gasta 3 h para percorrer um percurso a 80 km/h. Quanto tempo levaria para fazer o mesmo percurso a 50 km/h?

Resolução:

As grandezas envolvidas são: velocidade (v) e tempo (t).

Sabemos que quanto maior a velocidade, menor o tempo gasto, assim: vt = k, as grandezas são inversamente proporcionais.
Na 1ª situação, temos: $v_1 = 80$ *e* $t_1 = 3$; *na 2ª situação, temos* $v_2 = 50$ *e* $t_2 = ?$
$v_1t_1 = v_2t_2 \therefore 80 \,.\, 3 = 50t_2 \therefore t_2 = 4{,}8\ h$

6 Um operário trabalhou 8 horas por dia durante 12 dias e ganhou R$ 1.000,00. Quanto teria recebido se tivesse trabalhado 10 h por dia durante 15 dias?

Resolução:
Trata-se de um problema de regra de três composta, pois envolve as grandezas: horas de trabalho diário (h); dias de trabalho (d) e remuneração (r).
Vamos montar a equação que relaciona as grandezas envolvidas:
Relação entre h e r: h e r são diretamente proporcionais $\Rightarrow \frac{h}{r} = k_1$.
Relação entre h e d: h e d são inversamente proporcionais $\Rightarrow hd = k_2$

Assim: $\frac{hd}{r} = k \Rightarrow \frac{h_1d_1}{r_1} = \frac{h_2d_2}{r_2} \therefore$

$$\frac{8\,.\,12}{1.000} = k \Rightarrow \frac{8\,.\,12}{1.000} = \frac{10\,.\,15}{r_2} \therefore r_2 = 1.562{,}50$$

Teria recebido R$ 1.562,50.

7 Três pedreiros constroem 150 metros de muro com 3 metros de altura, em 5 dias, trabalhando 10 horas por dia. Determinar quantos dias serão necessários para que 5 pedreiros construam 240 metros de muro, com 1,5 metro de altura, trabalhando 8 horas por dia?

Resolução:
Vamos identificar as grandezas:
- *comprimento do muro (c);*
- *altura do muro (a);*
- *dias de trabalho (d);*
- *horas de trabalho diário (h);*
- *número de pedreiros (n).*

Analisando a relação entre as grandezas duas a duas, como se as outras fossem fixas, observe:

a) *n e c: Quanto* ***mais*** *pedreiros,* ***maior*** *será o comprimento do muro* $\Rightarrow \frac{n}{c} = k_1$.

b) *n e a: Quanto* ***mais*** *pedreiros tivermos na obra,* ***maior*** *será a altura do muro* $\Rightarrow \frac{n}{a} = k_2$.

c) *n e d: Quanto* ***mais*** *pedreiros tivermos,* ***menos*** *dias de trabalho serão necessários* $\Rightarrow nd = k_3$.

d) *n e h: Quanto* ***mais*** *pedreiros dispusermos na obra,* ***menos*** *horas de trabalho serão necessárias* $\Rightarrow nh = k_4$.

Vamos relacionar todas as grandezas em uma única equação:

$$\frac{ndh}{ca} = k \Rightarrow \frac{n_1\,.\,d_1\,.\,h_1}{c_1\,.\,a_1} = \frac{n_2\,.\,d_2\,.\,h_2}{c_2\,.\,a_2} \therefore$$

$$\frac{3\,.\,5\,.\,10}{150\,.\,3} = \frac{d_2\,.\,5\,.\,8}{240\,.\,1{,}5} \therefore d_2 = 3 \text{ dias.}$$

Médias

Considere uma coleção de números $\mathbb{R}_+^*$ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Vamos definir os seguintes números M_A, M_G, M_H e M_Q chamados respectivamente de média aritmética, média geométrica, média harmônica e média quadrática.

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$M_G = \sqrt[n]{x_1\,.\,x_2\,.\,x_3\,.\,...\,.\,x_n}$$

$$M_H = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n}\right)}$$

$$M_Q = \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Exercícios resolvidos

8 Coloque em ordem crescente a média aritmética, geométrica e a harmônica dos números 6 e 12.

Resolução:

$$M_A = \frac{6+12}{2} = 9;\ M_G = \sqrt{6\,.\,12} = 6\sqrt{2} \text{ e}$$

$$M_H = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{2}\right)} = 8, \text{ assim:}$$

$$9 > 6\sqrt{2} > 8 \Rightarrow M_A > M_G > M_H$$

9 Em uma empresa com 200 funcionários, 45% são mulheres e a média de suas idades é 34 anos. A média de idade dos homens é 40 anos. Determine a média de idade dos funcionários da empresa.

Resolução:
Número de mulheres = 45% . 200 = 90, logo o número de homens é 110.
Seja A a soma das idades das mulheres, assim:

$$34 = \frac{A}{90} \therefore A = 34\,.\,90 = 3.060 \text{ anos.}$$

Seja B a soma das idades dos homens, assim:

$$\frac{B}{110} = 40 \therefore B = (110).40 = 4.400 \text{ anos.}$$

A média na empresa será:

$$\frac{A+B}{200} = \frac{3.060 + 4.400}{200}, \text{ média} = 37{,}3 \text{ anos.}$$

10 Em uma faculdade, a média para a aprovação de uma matéria é 5,0. O professor que ministra essa matéria aplicou duas provas e percebeu que a maioria dos alunos que tiraram 10,0 não fez a 2ª prova. O professor queria evitar essas ausências e resolveu alterar o processo de avaliação. Dê uma sugestão para o professor.

Resolução:

Geralmente, é utilizada a média aritmética para o cálculo das notas.

Caso um aluno tirasse 10, ele poderia ignorar a 2ª prova, pois $\frac{10+0}{2} = 5$.

Podemos sugerir a utilização da média geométrica, pois média $= \sqrt{P_1 . P_2}$, *em que* P_1 *e* P_2 *são as notas das avaliações. A média será zero, pois* $\sqrt{10.0} = 0$. *Para obter a média 5, o aluno que tirou 10 deverá comparecer para a 2ª prova e tirar a seguinte nota:*

$$\sqrt{10 . P_2} = 5 \therefore 10P_2 = 25 \therefore P_2 = 2{,}5$$

11 Um móvel percorre um trajeto Δs em duas partes. Na 1ª parte com velocidade média v_1 e o trecho restante com velocidade média v_2. Determine a velocidade média do trecho total.

Resolução:

No 1º trecho, temos $v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}$ *e no 2º trecho (restante), temos:*

$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$, *assim:*

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \therefore v_m = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\frac{\Delta s_1}{v_1} + \frac{\Delta s_2}{v_2}}$$

Considerando os trechos iguais, $\Delta s_1 = \Delta s_2$, *analise o resultado para a velocidade média do trecho total:*

$$v_m = \frac{\Delta s + \Delta s}{\frac{\Delta s}{v_1} + \frac{\Delta s}{v_2}} = \frac{2\Delta s}{\Delta s\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} \therefore v_m = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2}\right)}$$

A velocidade média do trecho total é a média harmônica das velocidades.

Teorema

Considerando x e y $\in \mathbb{R}_+^*$, temos a seguinte ordem de desigualdade para as médias:

$M_A \geq M_G \geq M_H$, a igualdade ocorre para x = y.

Demonstração:

Como x e y $\in \mathbb{R}_+^*$, podemos escrever:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \therefore x - 2\sqrt{x}.\sqrt{y} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \therefore \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Vamos utilizar esse resultado para demonstrar que a média geométrica é maior ou igual a harmônica. Assim:

Como $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, fazendo $a = \frac{1}{x}$ e $b = \frac{1}{y}$, temos:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} \geq \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} \therefore \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \Rightarrow$$

$$\sqrt{xy} \geq \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}\right)}$$

Exercício resolvido

12 Prove que um número real positivo mais o seu recíproco é sempre maior ou igual a 2.

Resolução:

Sejam x e $\frac{1}{x}$ *o número e o seu recíproco. Podemos utilizar a desigualdade das médias:*

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x.\frac{1}{x}} \therefore \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1 \therefore x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Problemas das torneiras

Vamos chamar de "problemas das torneiras" a uma galeria de problemas que envolvem uma razão $\frac{A}{B}$ que pode representar a produtividade de um pedreiro (trabalho pelo tempo) e a vazão de uma torneira (volume pelo tempo).

Problema clássico

Uma torneira enche um tanque em duas horas e outra torneira enche o mesmo tanque em três horas. Determine o tempo gasto para as duas torneiras juntas completarem o tanque todo.

Resolução:

Determine a vazão de cada torneira, $v_1 = \dfrac{volume}{tempo}$

$\therefore v_1 = \dfrac{V}{2}$ *e* $v_2 = \dfrac{V}{3}$. *Quando juntamos as torneiras, criamos uma torneira imaginária com vazão* $v_1 + v_2$, *assim:* $\dfrac{V}{2} + \dfrac{V}{3}$ *é a nova vazão.*

Como (vazão) · (tempo) = (volume) ⇒

$$\left(\frac{V}{2} + \frac{V}{3}\right).\ t = V \therefore \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).\ t = 1 \therefore \left(\frac{3+2}{6}\right).\ t = 1$$

$$t = \frac{6}{5} = 1{,}2\ h$$

Exercícios resolvidos

13 Uma torneira enche um tanque em 4 horas. Outra o enche em 6 horas, e um ralo o esvazia em 12 horas. Abrindo as duas torneiras e o ralo simultaneamente e estando o tanque inicialmente vazio, determine em quanto tempo o tanque ficará cheio.

Resolução:

Vamos inicialmente determinar a vazão dos elementos dados:

1^a *torneira:* $v_1 = \dfrac{V}{4}$;

2^a *torneira:* $v_1 = \dfrac{V}{6}$ *e o ralo* $v_3 = \dfrac{V}{12}$.

Juntando os elementos, temos:

$$\frac{V}{4} + \frac{V}{6} - \frac{V}{12}\ (vazão)\ .\ (tempo) = volume \Rightarrow$$

$$\left(\frac{V}{4} + \frac{V}{6} - \frac{V}{12}\right).\ t = V\ \therefore\ t = 3\ horas.$$

14 Um operário já tinha executado um terço de um trabalho em 6 dias. Foi contratado um segundo operário para auxiliá-lo, e, juntos, concluíram o serviço em mais 4 dias de trabalho. Determine em quantos dias o segundo operário executaria sozinho o serviço todo.

Resolução:

Da mesma maneira que o problema das torneiras se utiliza da vazão, vamos utilizar a razão produtividade, assim:

1^o *operário:* $P_1 = \dfrac{\frac{T}{3}}{6} = \dfrac{T}{18}$ *(significa que o* 1^o *operário executaria o trabalho todo em 18 dias)*

2^o *operário:* $P_2 = \dfrac{T}{x}$

Operários juntos: $\dfrac{T}{18} + \dfrac{T}{x}$ *(produtividade)*

Os operários juntos terminariam $\dfrac{2}{3}$ *do serviço em 4 dias, assim:*

$$\left(\frac{T}{18} + \frac{T}{x}\right).\ 4 = \frac{2}{3}T \Rightarrow x = 9$$

O 2^o *operário executaria o serviço todo em 9 dias.*

Revisando

1 Na igualdade de razões $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{3}$, sabe-se que $2x - y + 3z = 36$. Determine o valor de $x + y + z$.

2 Divida R$ 3.800,00 em partes inversamente proporcionais a 1, 3 e 4. Determine a menor parte.

3 Em uma repartição pública, um grupo de 6 funcionários é capaz de despachar 120 processos em 8 horas de trabalho. Com a falta de um funcionário, qual é o número de horas necessárias para que esse grupo despache 50 processos?

4 A média aritmética das idades de um grupo de professores e inspetores é 40. Se a média das idades dos professores é 35 e a média das idades dos inspetores é 50, qual é a razão entre o número de professores e o número de inspetores?

Exercícios propostos

Divisões em partes proporcionais e manipulações de proporções

1 Dividir 60 em partes diretamente proporcionais a 3, 4 e 5.

2 Dividir 45 em partes inversamente proporcionais a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

3 Dividir um lucro de R$ 48.000,00 de uma sociedade entre seus três sócios, sabendo que eles trabalharam 2, 3 e 7 meses, respectivamente.

4 Se $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$ e $3x - 2y = 70$, calcule x e y.

5 Se $\frac{a}{0,8} = \frac{b}{0,5} = \frac{c}{d}$; $a + b = 13$ e $d - c = 1$, calcule c e d.

6 **Mackenzie** Dividindo 70 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 5, determine a soma entre a menor e a maior parte.

7 **FEI** Dividir 46 em duas partes inteiras tais que:

a) sejam inversamente proporcionais a 1 e 1,3.

b) divididas por dois números inteiros consecutivos, dão o mesmo quociente 4 e o mesmo resto 1.

8 **Faap** Dividir um segmento de medida 144 em quatro partes, tais que somando 5 à primeira parte, subtraindo 5 da segunda, multiplicando a terceira por 5 e dividindo a quarta por 5, as medidas resultantes em todas as partes sejam iguais.

9 Determinar as medidas dos ângulos internos de um quadrilátero que são diretamente proporcionais a 1, 2, 3 e 4.

10 Uma grandeza x é diretamente proporcional às grandezas P e T e inversamente proporcional ao quadrado da grandeza W. Se aumentarmos P de 60% do seu valor, para que a grandeza x não se altere, o que devemos fazer com W?

11 Na constituição de uma empresa comercial, Daniela e Luiza entraram com os capitais de R$ 60.000,00 e R$ 90.000,00, respectivamente. Após 9 meses, admitiram Rafael na sociedade, com o capital de R$ 120.000,00. Se ao fim dos primeiros 12 meses a empresa apresentar um lucro de R$ 13.200,00, qual a parte de Rafael no lucro?

12 As sequências (x; y; z) e (3; 9; 15) são formadas por grandezas diretamente proporcionais e $xyz = 960$. Calcule $x + y + z$.

13 As grandezas $x^2 + 1$ e $y^2 + 1$ são inversamente proporcionais. Se $y = 20$ quando $x = 2$, para $y = -2$, determine o valor de $x > 0$.

14 Se as grandezas A e B são representadas numericamente, por números naturais positivos, tais que a relação matemática entre elas é $A.B^{-1} = 4$, coloque (V) verdadeiro ou (F) falso para as afirmações a seguir.

- [ ] IAI é diretamente proporcional a B, porque se aumentando o valor de B, o de A também aumenta.
- [ ] IAI é inversamente proporcional a B, porque o produto de A pelo inverso de B é constante.
- [ ] IAI não é diretamente proporcional a B.
- [ ] IAI não é inversamente proporcional a B.

15 O número de gansos de uma criação cresce de maneira tal que a diferença entre as populações nos anos n + 2 e n é diretamente proporcional à população no ano n + 1. Se as populações nos anos 2003; 2004 e 2006 eram 39; 60 e 123, respectivamente, então a população em 2005 era igual a:

(a) 81
(b) 84
(c) 87
(d) 90
(e) 102

Médias

16 A média aritmética ponderada de vários números aos quais se atribuem determinados pesos é igual à soma dos produtos desses números pelos pesos correspondentes, dividida pela soma dos pesos. Determine a média aritmética ponderada dos números 7, 8 e 9 cujos pesos respectivos são 1, 2 e 3.

17 Calcule a média aritmética entre x, y e z se $x + 6y + z = 120$ e $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$.

18 **Unicamp** A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é de 35 anos e a dos homens é de 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo, no grupo?

19 **PUC** Uma escola tem 18 professores. Um deles se aposenta e é substituído por um professor de 22 anos. Com isso a média das idades dos professores diminuiu 2 anos. Qual é a idade do professor que se aposentou?

20 Em uma sequência de nove números a média aritmética dos cinco primeiros é igual a 7 e a média aritmética dos 5 últimos é igual a 10. Sabendo que a média aritmética de todos os nove números é igual a 9, então o quinto número é:

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

21 A soma da média geométrica com a média aritmética de dois inteiros é 200. Determine a soma das raízes quadradas desses números.

22 O número a é a média aritmética de três números e b é a média aritmética de seus quadrados. Determine a média aritmética dos produtos dois a dois dos três números dados.

23 Sejam X, Y e Z conjuntos de pessoas, disjuntos dois a dois. As médias das idades das pessoas nos conjuntos X, Y, Z, $X \cup Y$, $X \cup Z$, $Y \cup Z$ são dadas a seguir:

Conjunto	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Z$	$Y \cup Z$
Média das idades das pessoas	37	23	41	29	39,5	33

Determine a média das idades das pessoas no conjunto $X \cup Y \cup Z$.

Problemas envolvendo regra de três

24 Sabe-se que 4 máquinas, operando 4 horas por dia, durante 4 dias, produzem 4 toneladas de certo produto. Quantas toneladas do mesmo produto seriam produzidos por 6 máquinas daquele tipo, operando 6 horas por dia, durante 6 dias?

(a) 6
(b) 8
(c) 10,5
(d) 13,5
(e) 15

25 24 operários fazem $\frac{2}{5}$ de determinado serviço em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. Em quantos dias a obra estará terminada, sabendo-se que foram dispensados 4 operários e o regime de trabalho diminuído de uma hora por dia?

26 Se 5 máquinas funcionando 16 horas por dia levam 3 dias para produzir 360 peças, então 4 máquinas iguais às primeiras devem funcionar quantas horas por dia para produzir 432 peças em 4 dias?

27 Uma estrada vai ser construída em 36 dias, utilizando 21 operários. Decorridos 24 dias, constatou-se que se tinham construídas apenas 60% da obra. Nessas condições, o número de novos operários que devem ser contratados para terminar a obra na data fixada será de:

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8
(e) 9

28 Duas torneiras enchem um tanque em 4 horas. Uma delas, sozinha, enchê-lo-ia em 7 horas. Em quantos minutos a outra, sozinha, encheria o tanque?

29 Uma torneira enche um tanque em 12 h e outra em 18 h. Em quanto tempo as duas juntas encherão o tanque?

30 **Unicamp** Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante x minutos, ao fim desse tempo fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em x + 3 minutos. Calcule o tempo gasto para encher o tanque.

31 Duas torneiras são abertas juntas, a primeira enchendo um tanque em 5 horas, a segunda enchendo outro tanque de igual volume em 4 horas. No fim de quanto tempo, a partir do momento em que as torneiras são abertas, o volume que falta para encher o segundo tanque é $\frac{1}{4}$ do volume que falta para encher o primeiro tanque?

32 Uma torneira A jorra x litros de água por hora e outra torneira B jorra 3x litros por hora. Uma torneira C jorra por 4 horas a mesma quantidade de água que A e B juntas. Se a torneira A enche um reservatório em um tempo t, determine em quanto tempo a torneira C e B enchem juntas o mesmo reservatório.

33 **FCC** Duas torneiras abertas ao mesmo tempo enchem uma piscina em 6 horas. Separadamente, uma delas demora 5 horas a mais do que a outra. Chamando de x o tempo em horas em que enche a piscina a torneira de maior vazão, tem-se:

(a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=6$
(b) $x+(x+5)=6$
(c) $\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}+5\right)=\frac{1}{6}$
(d) $\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{6}$
(e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

TEXTO COMPLEMENTAR

Desigualdade das médias

Demonstramos neste texto a desigualdade das médias para o caso particular com dois termos, assim:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y} \text{ com } x; y \in \mathbb{R}_+^*$$

Utilizando um caso especial de fatoração, iremos demonstrar a desigualdade para o caso particular com três termos.

Observe a expressão: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ e sua fatoração:

$$\underbrace{a^3+b^3+3a^2b+3ab^2}_{\text{cubo perfeito}}+c^3-3abc-3ab^2-3a^2b=$$

$$=\underbrace{(a+b)^3+c^3}_{\text{soma de cubos}}-3ab(a+b+c)=$$

$$= (a + b + c) \,.\, [(a + b)^2 - (a + b) \,.\, c + c^2] - 3ab(a + b + c) =$$

$$= (a + b + c) \,.\, (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a + b + c) =$$

$$= (a + b + c) \,.\, (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) =$$

$$= (a + b + c) \,.\, (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Obtemos:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \,.\, (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$, considerando a, b e $c \in \mathbb{R}_+^*$ temos:

$$\frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{2} =$$

$$= \frac{(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2)}{2} \geq 0,$$

pois trata-se de uma soma de quadrados.

Podemos escrever $a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc \geq 0 \;\therefore$ $\therefore \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc$, com essa desigualdade por meio da substituição: $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ e $c = \sqrt[3]{z}$, temos:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{z}\right)^3}{3} \geq \sqrt[3]{x} \,.\, \sqrt[3]{y} \,.\, \sqrt[3]{z} \;\therefore$$

$$\therefore \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \,(M_A \geq M_G)$$

Utilizando a desigualdade com os números $\dfrac{1}{x}; \dfrac{1}{y}$ e $\dfrac{1}{z}$:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x} \,.\, \frac{1}{y} \,.\, \frac{1}{z}} \;\therefore\; \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \;\therefore$$

$$\therefore \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz}$$

$$\sqrt[3]{xyz} \geq \frac{1}{\left(\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3}\right)} (M_G \geq M_H)$$

Conclusão:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{1}{\left(\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3}\right)}$$

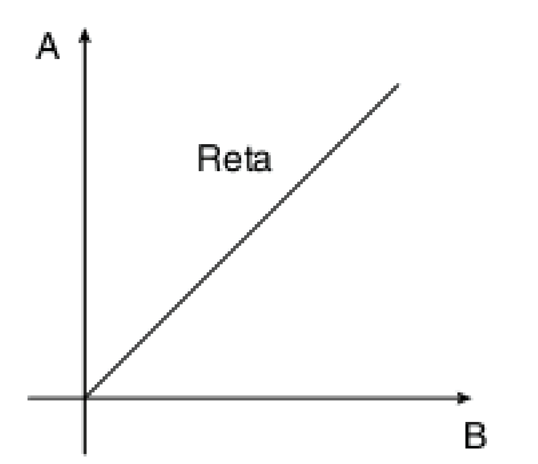
RESUMINDO

A igualdade entre razões é uma proporção. Existem muitas propriedades envolvendo proporções.

As grandezas podem ser diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

A	B
1	2
2	4
3	6
5	10

$$\frac{A}{B} = \text{constante}$$



Diretamente proporcionais

Propriedades importantes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

Para dois termos, temos:

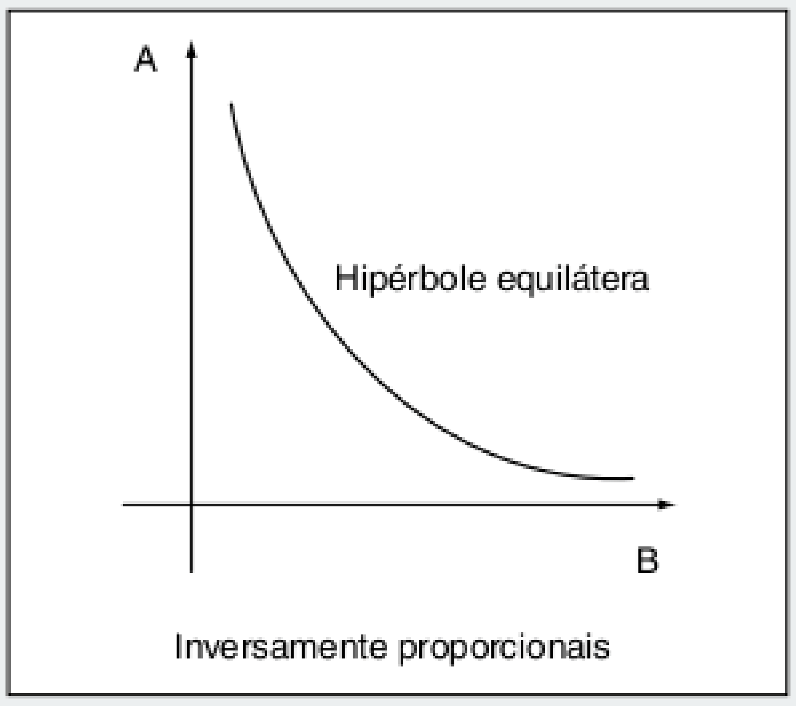
$$M_A = \frac{x + y}{2} \qquad M_G = \sqrt{xy} \qquad M_H = \frac{2xy}{x + y}$$

Relacionando as três médias, temos:

$$M_G^2 = M_A \,.\, M_H$$

A	B
1	12
2	6
3	4
6	2

$$AB = \text{constante}$$



Médias importantes

$$\text{Média aritmética} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\text{Média geométrica} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

$$\text{Média harmônica} = \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}\right)^{-1}$$

QUER SABER MAIS?

SITE

- Grandezas físicas – gráficos, proporções e variações proporcionais <http://plato.if.usp.br/~fap0151d/data/texto1.pdf>.

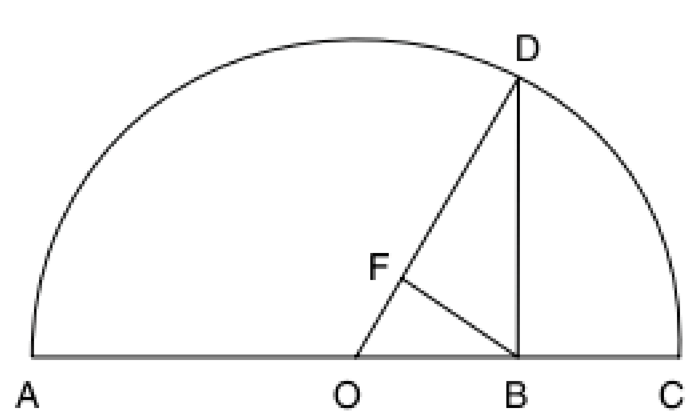
Exercícios complementares

Problemas gerais

1 José fez $\frac{5}{9}$ de um trabalho em 10 dias. No restante do trabalho, recebeu ajuda de Antônio e, assim, terminaram em 3 dias. Em quantos dias Antônio, trabalhando só, poderia fazer o trabalho?

2 Dois operários fazem, juntos, um trabalho em 12 dias. Um deles sozinho faz esse trabalho em 20 dias. Em quantos dias o outro fará, também só, o mesmo trabalho?

3 Na figura a seguir, O é o centro da semicircunferência, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ e $\overline{BF} \perp \overline{OD}$.



Prove que DO, DB e DF são, respectivamente, as médias aritmética, geométrica e harmônica de AB e BC.

4 **Fuvest** Um comerciante deseja realizar uma grande liquidação anunciando x% de desconto em todos os produtos. Para evitar prejuízo, o comerciante remarca os produtos antes da liquidação.

a) De que porcentagem p devem ser aumentados os produtos para que, depois do desconto, o comerciante receba o valor inicial das mercadorias?

b) O que acontece com a porcentagem p quando o valor do desconto da liquidação se aproxima de 100%?

5 Um trecho de rodovia com 300 m de comprimento por 10 m de largura foi asfaltado em 4 dias, por 4 máquinas que trabalham 6 horas por dia. Quantas horas por dia devem ser empregadas se utilizarmos 6 máquinas iguais às mencionadas para asfaltarem, em 8 dias, 900 m da mesma rodovia, com sua largura aumentada para 12 m?

6 **Fuvest** Responda:

a) Em fevereiro de 1986, a Fuvest realizou um “pequeno vestibular”, cuja taxa de inscrição foi de R$ 100,00. Como a inflação acabou em fevereiro, essa mesma taxa foi cobrada em setembro, para o vestibular de 1987. Qual deveria ter sido a taxa do vestibular de 1987 se a taxa de inflação tivesse sido de 10% ao mês? Observe que de fevereiro a setembro transcorreram 7 meses. Despreze os centavos.

b) A tarifa dos ônibus da cidade de São Paulo teve um "realinhamento", aumentando de R$ 1,50 para R$ 3,50. Qual deverá ser o valor da taxa do vestibular Fuvest-1988 se o aumento percentual for igual ao da passagem de ônibus? Despreze os centavos.

7 **Fuvest** Responda:

a) Se os preços aumentam 10% ao mês, qual a porcentagem de aumento em um trimestre?
b) Supondo a inflação constante, qual deve ser a taxa trimestral de inflação para que a taxa anual seja 100%?

8 **Fuvest** Antônio constrói 20 cadeiras em 3 dias com 4 horas de trabalho por dia. Severino constrói 15 cadeiras do mesmo tipo em 8 dias com 2 horas de trabalho por dia. Trabalhando juntos, no ritmo de 6 horas por dia, produzirão 250 cadeiras em:

(a) 15 dias.
(b) 16 dias.
(c) 18 dias.
(d) 20 dias.
(e) 24 dias.

9 **PUC-Rio** Em uma cela, há uma passagem secreta que conduz a um porão de onde partem três túneis. O primeiro túnel dá acesso à liberdade em 1 hora; o segundo, em 3 horas; o terceiro leva ao ponto de partida, em 6 horas. Determine o tempo, em média, que os prisioneiros descobrem os túneis e tentam escapar da prisão.

10 João é 50% mais eficiente que Pedro. Se Pedro executa uma tarefa em 12 horas, em quanto tempo essa mesma tarefa deverá ser executada por João?

(a) 4 h
(b) 8 h
(c) 9 h
(d) 10 h
(e) n.d.a.

11 Henrique leva exatamente 20 minutos para ir de sua casa até a escola. Certa vez, durante o caminho, percebeu que esquecera em casa o seu lanche. Ele sabia que se continuasse a andar, chegaria 8 minutos antes do sinal, mas se voltasse para pegar o lanche, no mesmo passo, chegaria atrasado 10 minutos. Que fração do caminho já tinha percorrido nesse ponto?

12 Uma liga metálica de 100 kg é constituída de 20% de ouro e 5% de prata. Quantos quilogramas de ouro e de prata devem ser adicionados a essa liga para se obter uma outra, cuja constituição seja 30% de ouro e 10% de prata?

13 Hélio e Marcos foram encarregados de um obra em um prazo de 12 dias. No fim do 4º dia de trabalho, Marcos adoeceu e Hélio chamou seu sobrinho Ney para ajudá-lo. Os dois concluíram o serviço em 8 dias. Se Ney possui a metade da produtividade de Hélio, então em quantos dias Marcos faria o trabalho sozinho?

(a) 36
(b) 30
(c) 24
(d) 20
(e) 18

14 Sejam a, b e c números reais não nulos. Sabendo que $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

15 Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela a seguir.

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

16 Supondo que x e y são inversamente proporcionais e positivos, de quanto decresce y se aumentarmos x de p%?

(a) p%
(b) $\frac{p}{1+p}\%$
(c) $\frac{100}{p}\%$
(d) $\frac{p}{100+p}\%$
(e) $\frac{100p}{100+p}\%$

17 Em um problema de regra de três composta, entre as variáveis X, Y e Z, sabe-se que, quando o valor de Y aumenta, o de X também aumenta; mas, quando Z aumenta, o valor de X diminui, e que para X = 1 e Y = 2, o valor de Z = 4. Determine o valor de X, para Y = 18 e Z = 3.

18 Marco escreveu um número em cada um dos cinco quadradinhos da figura a seguir, porém apagou o segundo, o terceiro e o quinto número. Sabendo que cada número, exceto o primeiro e o último, é igual a média aritmética de seus vizinhos, determine o número que ocupa o quinto quadradinho.

1			100	

Noções básicas de estatística

7

FRENTE 2

Na antiguidade, operações de contagem populacional eram utilizadas para obtenção de informações sobre os habitantes, riquezas e poderio militar dos povos, sendo essas as primeiras aplicações conhecidas da estatística, que é um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que, entre outros tópicos, envolve o planejamento do experimento a ser realizado, a coleta qualificada dos dados, a inferência, o processamento, a análise e a disseminação das informações. Atualmente, os dados estatísticos são obtidos, classificados e armazenados em meio magnético e disponibilizados em diversos sistemas de informação acessíveis a pesquisadores, cidadãos e organizações da sociedade que, por sua vez, podem utilizá-los para o desenvolvimento de suas atividades.

O que é Estatística

Estatística é o ramo da Matemática que está interessado nos métodos científicos para obtenção, organização, resumo, apresentação, análise de dados e também conclusões que podem ser utilizadas para a tomada de decisões.

População e amostra

Imagine uma fábrica de parafusos com uma grande quantidade de unidades produzidas por dia. É impossível ou inviável observar todo o grupo de parafusos para retirar os defeituosos.

O cálculo ou a retirada dos parafusos defeituosos não são feitos no grupo todo, denominado população ou universo; para isso, examina-se uma pequena parte chamada amostra.

Quando a amostra é representativa, as conclusões sobre a população são de grande importância.

Distribuições de frequência

Considere uma população de 100 alunos de uma escola e suas alturas de acordo com a tabela 1.

Altura(m)	Número de estudantes
1,51 — 1,58	5
1,59 — 1,66	18
1,67 — 1,74	42
1,75 — 1,82	27
1,83 — 1,90	8

Tab. 1 Altura dos estudantes.

Após a coleta de dados, estes são distribuídos em classes ou categorias e determina-se o número de indivíduos pertencentes a cada classe; este número é chamado frequência de classe.

Histograma e polígonos de frequência

São duas maneiras gráficas de representar as distribuições de frequência.

a) Histograma

Consiste em um conjunto de retângulos que possuem as bases sobre um eixo horizontal (eixo x) com centro no ponto médio, as larguras iguais às amplitudes dos intervalos das classes e as áreas proporcionais às frequências das classes.

Vamos montar o histograma da distribuição de frequência da tabela 1.

As classes da população de alunos possuem amplitude de 7 cm (por exemplo: 1,74 – 1,67).

Ponto médio de uma classe é a média aritmética dos valores no intervalo de cada classe.

Por exemplo: $\frac{1,67+1,74}{2}=1,705=1,71.$

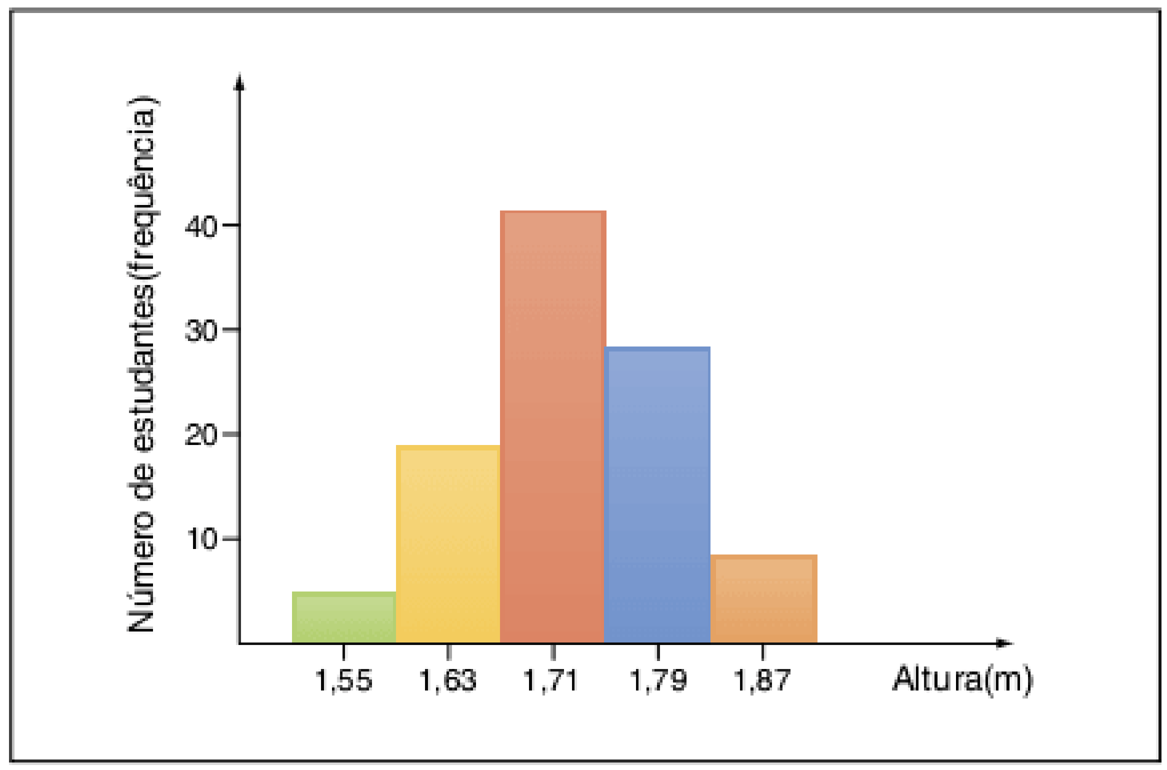


Fig. 1 Histograma da tabela 1.

b) Polígono de frequência

É um gráfico de linha em que as frequências são locadas sobre perpendiculares levantadas nos pontos médios. Pode-se também obtê-lo ligando-se os pontos médios dos topos dos retângulos de um histograma.

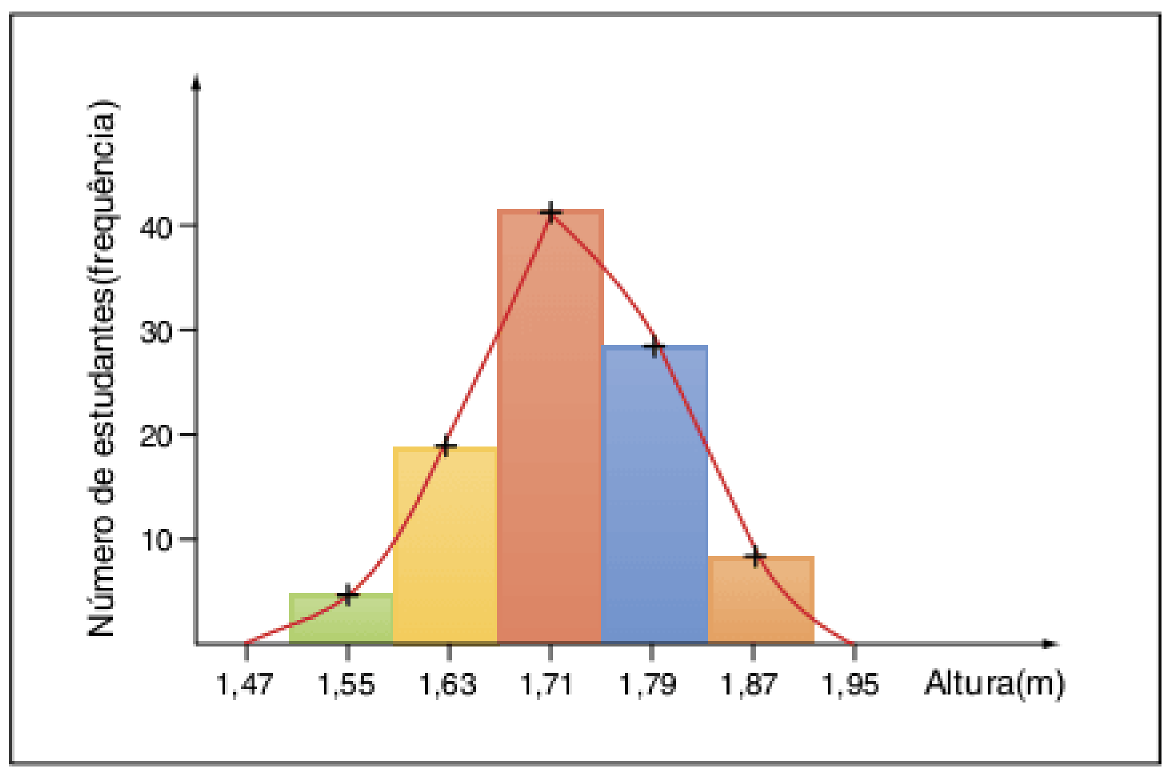


Fig. 2 Polígono de frequência da tabela 1.

Distribuições de frequência relativa

A frequência relativa de uma classe é a porcentagem do número de elementos dessa classe com o total de elementos do universo.

Por exemplo, a frequência relativa da classe 1,59 – 1,66 é 18/100 = 18%.

A soma das frequências relativas de todas as classes é, logicamente, igual a 1% ou 100%.

Distribuições de frequência acumulada

A frequência total de todos os valores inferiores ao limite superior de um dado intervalo de classe é denominada **frequência acumulada**.

Por exemplo, a frequência acumulada até o intervalo de classe 1,67 – 1,74 é 5 + 18 + 42 = 65.

Exercício resolvido

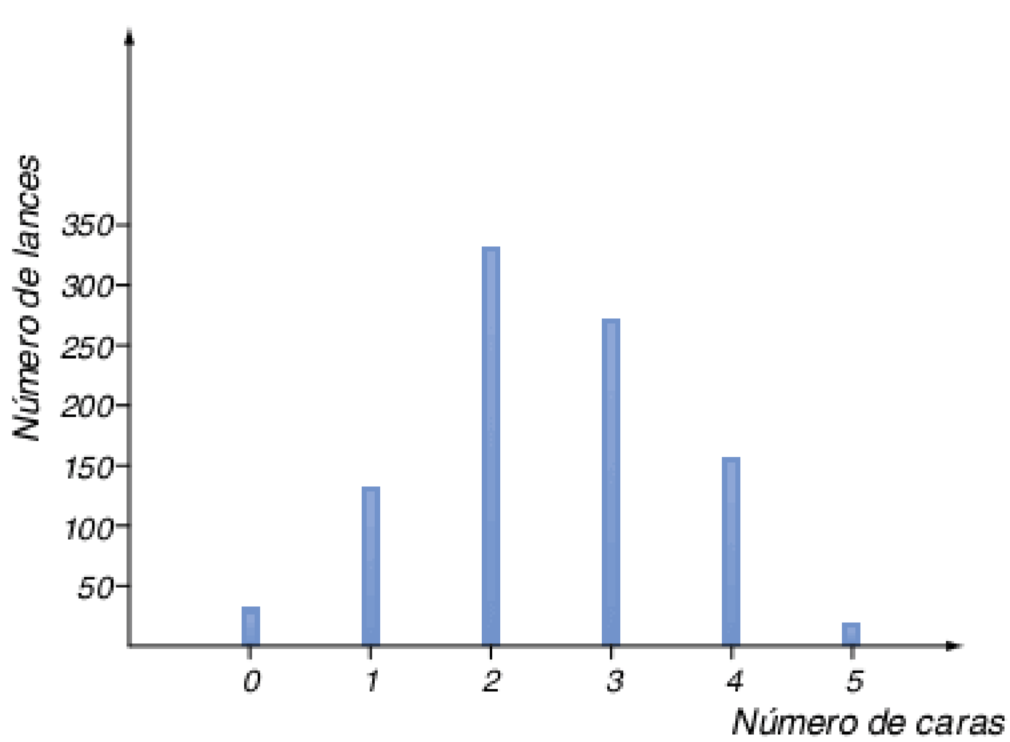
1 Cinco moedas foram lançadas 1.000 vezes e, em cada lance, foi anotado o número de caras. Os números de lances nos quais podemos obter 0, 1, 2, 3, 4 e 5 caras estão indicados na tabela a seguir.

Número de caras	Frequência
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25

a) Represente graficamente os dados.
b) Construa uma tabela que apresente as percentagens dos lances que resultaram em números de caras menores do que 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
c) Represente graficamente os dados da tabela referida em b.

Resolução:

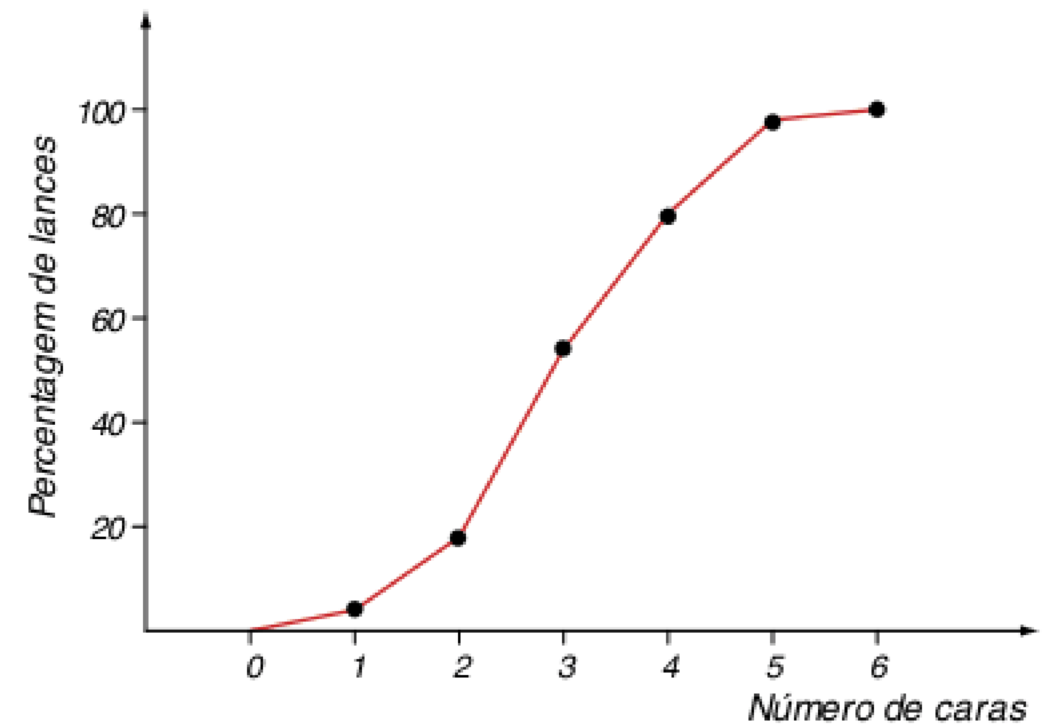
a) O gráfico mais adequado para representar o número de caras, que é um número inteiro, seria um gráfico em bastão. Observe:



b)

Número de caras(x)	*Número de lances (frequência acumulada)*	*Número percentual de lances(frequência acumulada percentual)*
$x \leq 0$	0	0%
$x \leq 1$	38	3,8%
$x \leq 2$	182	18,2%
$x \leq 3$	524	52,4%
$x \leq 4$	811	81,1%
$x \leq 5$	975	97,5%
$x \leq 6$	1.000	100%

c)



Média, Mediana e Moda

Notação de somatório

O símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ é utilizado para representar a soma de todos os x_i, desde 1 até n. Assim:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} + x_n$$

Exemplo 1

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + ... + x_n y_n$$

Exemplo 2

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = ax_1 + ax_2 + ... + ax_{n-1} + ax_n =$$

$$= a(x_1 + x_2 + ... + x_n) = a \,.\, \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Propriedade:

$$\sum_{i=1}^{n} a \,.\, x_i = a \,.\, \sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ a é uma constante.}$$

Exemplo 3

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i + cz_i) =$$

$$= ax_1 + by_1 + cz_1 + ax_2 + by_2 + cz_2 + ... +$$

$$+ ax_n + by_n + cz_n =$$

$$= (ax_1 + ax_2 + ... + ax_n) + (by_1 + by_2 + ... + by_n) +$$

$$+ (cz_1 + cz_2 + ... + cz_n) =$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i + c \,.\, \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Propriedade:

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i + cz_i) = a.\sum_{i=1}^{n}x_i + b.\sum_{i=1}^{n}y_i + c.\sum_{i=1}^{n}z_i,$$ a, b e c são constantes.

Médias

A média é um valor representativo de um conjunto de dados. Como esses valores representativos tendem a se localizar em um ponto central do conjunto de dados, as medidas são também denominadas medidas da tendência central.

As principais médias utilizadas são: média aritmética, mediana, moda, média geométrica e a média harmônica.

a) Média aritmética

Por definição, a média aritmética de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ é:

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exemplo 4

A média aritmética dos números 4; 6; 5 e 2 é:

$$M_a = \frac{4+6+5+2}{n} = \frac{17}{4} = 4{,}25$$

Se os números $x_1, x_2, x_3 \dots; x_k$ ocorrem $f_1, f_2, f_3 \dots f_k$ vezes (frequências), a média aritmética será:

$$M_a = \frac{x_1.f_1 + x_2.f_2 + x_3.f_3 + \dots + x_k.f_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

Exemplo 5

Se os números, 4; 3; 5 e 2 ocorrem com frequências de 1; 2; 4 e 3, respectivamente, a média aritmética é:

$$M_a = \frac{4.1+3.2+5.4+2.3}{1+2+4+3} = \frac{4+6+20+6}{10} =$$

$$= \frac{36}{10} = 3{,}6$$

b) Média aritmética ponderada

Em certas condições e problemas, os números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ são associados a certos fatores de ponderação ou pesos $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ que dependem do significado ou da importância atribuída aos números. Assim:

$$M_{ap} = \frac{x_1.p_1 + x_2.p_2 + x_3.p_3 + \dots + x_k.p_k}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k}$$

Exemplo 6

Um vestibular é feito em três fases com pesos 1; 2 e 3, respectivamente. Um estudante teve as notas 6; 6 e 4 nestas fases. Qual foi o seu desempenho médio?

$$M_{ap} = \frac{6.1+6.2+3.4}{1+2+3} = \frac{6+12+12}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Propriedade da média aritmética

A soma algébrica dos "desvios" de um conjunto de números em relação à média aritmética é zero.

Exemplo 7

Os desvios dos números 8; 7; 5 e 4 em relação à sua média aritmética 6 são: 8 – 6; 7 – 6; 5 – 6 e 4 – 6, ou seja, 2; 1; –1 e –2, com soma algébrica 2 + 1 – 1 – 2 = zero.

c) Mediana

A mediana de um conjunto de números, colocados em ordem de grandeza, é o valor médio ou a média aritmética dos dois valores centrais.

Exemplo 8

O conjunto de números 3; 4; 4; (5); 7; 8 e 9 tem mediana 5.

Exemplo 9

O conjunto de números 3; 4; 4; 6; 7; 8; 9 e 10 tem mediana $\frac{6+7}{2} = 6{,}5$.

Moda

A moda de um conjunto de números é o valor que ocorre com a maior frequência, isto é, o valor mais comum. A moda pode não existir e, mesmo que exista, pode não ser única.

Exemplo 10

O conjunto 2; 2; 5; 7; 8; 8; 8; 10 e 11 tem moda 8.

Exemplo 11

O conjunto 2; 3; 4; 5; 6; 7 e 8 não tem moda.

Exemplo 12

O conjunto 2; 3; 3; 4; 4; 7; 8 e 9 tem moda 3 e 4 e é denominado bimodal.

Uma distribuição que tem apenas uma única moda é denominada unimodal.

d) Média geométrica

A média geométrica de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ é:

$$M_g = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3 \dots x_n}$$

Exemplo 13

A média geométrica dos números 2; 4 e 8 é:

$$M_g = \sqrt[3]{2.4.8} = \sqrt[3]{64} = 4$$

e) Média harmônica

A média harmônica de um conjunto de n números x_1, x_2, x_3 … x_n é o inverso da média aritmética dos inversos desses números.

$$M_h = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}\right)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_1}}$$

Observe os exemplos gerais de ideias apresentadas até este ponto da matéria.

Exercícios resolvidos

2 Se $\sum_{i=1}^{6} x_i = -4$ e $\sum_{i=1}^{6} x^2{}_i = 10$, calcule:

a) $\sum_{i=1}^{6}(2x_i + 3)$

b) $\sum_{i=1}^{6}x_i(x_i - 1)$

c) $\sum_{i=1}^{6}(x_i - 5)^2$

Resolução:

a) $\sum_{i=1}^{6}(2x_i+3) = \sum_{i=1}^{6}2x_i + \sum_{i=1}^{6}.3 =$

$= 2.\sum_{i=1}^{6}x_i + 6.3 = 2.(-4)+18 = 10$

b) $= \sum_{i=1}^{6}x_i(x_i - 1) = \sum_{i=1}^{6}(x_i)^2 - x_1 =$

$= \sum_{i=1}^{6}x^2{}_i - \sum_{i=1}^{6}x_i = 10 - (-4) = 14$

c) $\sum_{i=1}^{6}(x_i - 5)^2 = \sum_{i=1}^{6}(x^2{}_i - 10x_i + 25) =$

$= \sum_{i=1}^{6}x^2{}_i - 10.\sum_{i=1}^{6}x_i + \sum_{i=1}^{6}25 =$

$= 10 - 10(-4) + 6 \cdot 25 = 10 + 40 + 150 = 200$

3 Os salários mensais de quatro executivos são: R$ 15.000,00, R$ 18.000,00, R$ 19.500,00 e R$ 90.000,00. Determine a média aritmética dos salários e comente esse resultado.

Resolução:

$M_a = \frac{15.000+18.000+19.500+90.000}{4} =$

$= \frac{142.500}{4} = 35.625$

O valor R$ 35.625,00 é um valor grosseiro do salário médio dos executivos. Uma grande desvantagem da média é que ela é fortemente alterada pelos valores extremos, que em nosso caso seria o salário de R$ 90.000,00.

4 Com os dados do exercício 3, obtenha a mediana dos salários dos executivos e comente o resultado.

Resolução:

15.000; 18.000; 19.500 e 90.000 possui mediana

$\frac{18.000+19.500}{2} = 18.750,00$

O valor de R$ 18.750,00 está mais próximo da realidade dos salários, pois a mediana não é afetada por um valor extremo.

5 Um homem viaja de A para B à velocidade média de 30 km/h e volta de B para A, pelo mesmo caminho, à velocidade média de 60 km/h. Determine a velocidade média para a viagem completa.

Resolução:

Suponha a distância de A para B como x, assim:

$30 = \frac{x}{\Delta t_1} \therefore \Delta t_1 = \frac{x}{30}$ *é o tempo gasto no 1º percurso.*

$60 = \frac{x}{\Delta t_2} \therefore \Delta t_2 = \frac{x}{60}$ *é o tempo gasto no 2º percurso.*

A velocidade média no percurso total é de:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2x}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{2x}{\frac{x}{30}+\frac{x}{60}} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{30}+\frac{1}{60}}{2}\right)} = 40\ km/h$$

Observe que esse resultado representa a média harmônica das velocidades.

Medidas de dispersão

O grau pelo qual os dados numéricos tendem a dispersar-se em torno de um valor médio chama-se **variação** ou **dispersão dos dados**. Vamos estudar algumas medidas da variação, sendo as mais comuns a **amplitude total**, o **desvio médio** e o **desvio padrão**.

A amplitude total

A amplitude total de um conjunto de números é a diferença entre o mais alto e o mais baixo do conjunto.

Exemplo 14

A amplitude total do conjunto 2; 3; 3; 6; 8; 10; 11 e 12 é $12 - 2 = 10$.

O desvio médio

O desvio médio de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3 \ldots;$ x_n com média aritmética é definido por:

$$\text{desvio médio} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

Exercício resolvido

6 Determine o desvio médio do conjunto de números 2; 3; 6; 8 e 11.

Resolução:

$$\overline{x} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Desvio médio =

$$= \frac{|2-6|+|3-6|+|6-6|+|8-6|+|11-6|}{5} =$$

$$= \frac{4+3+0+2+5}{5} = \frac{14}{5} = 2,8$$

O desvio padrão

O desvio padrão representado por s é definido por:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Variância

A variância de um conjunto de dados é definida como o quadrado do desvio padrão, sendo então representada por s^2.

Propriedade do desvio padrão

Considere o gráfico que representa a distribuição de frequência de um acontecimento, por exemplo a distribuição de pontos obtidos por estudantes em um vestibular.

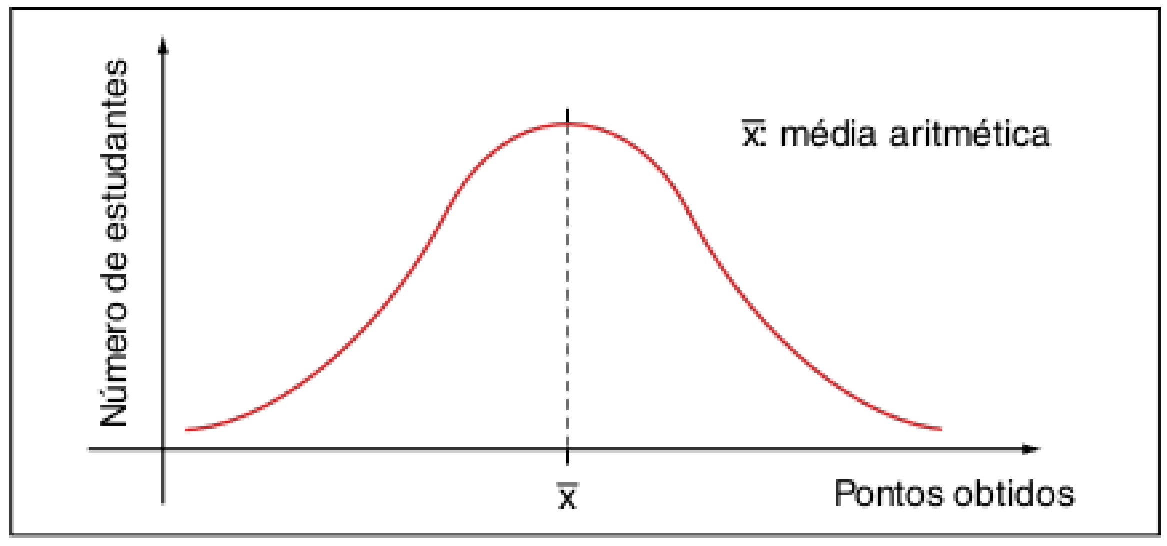
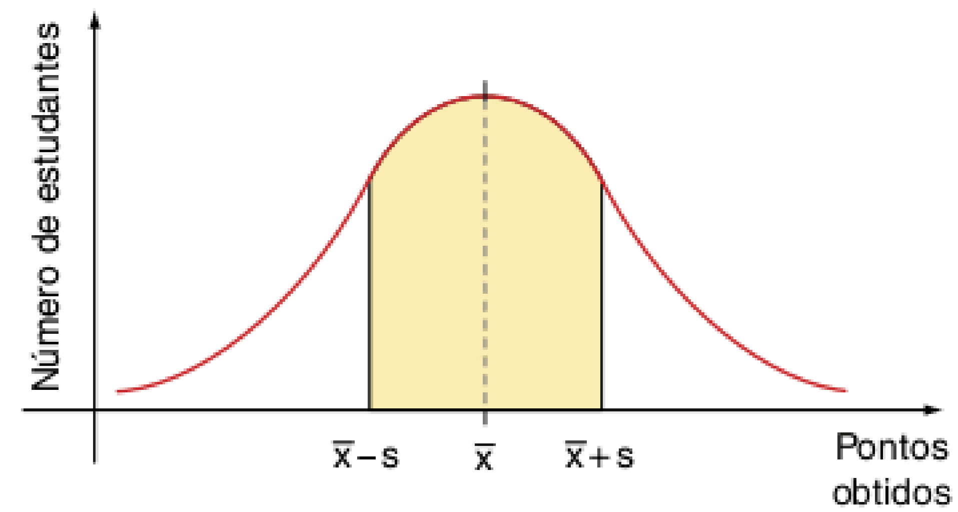


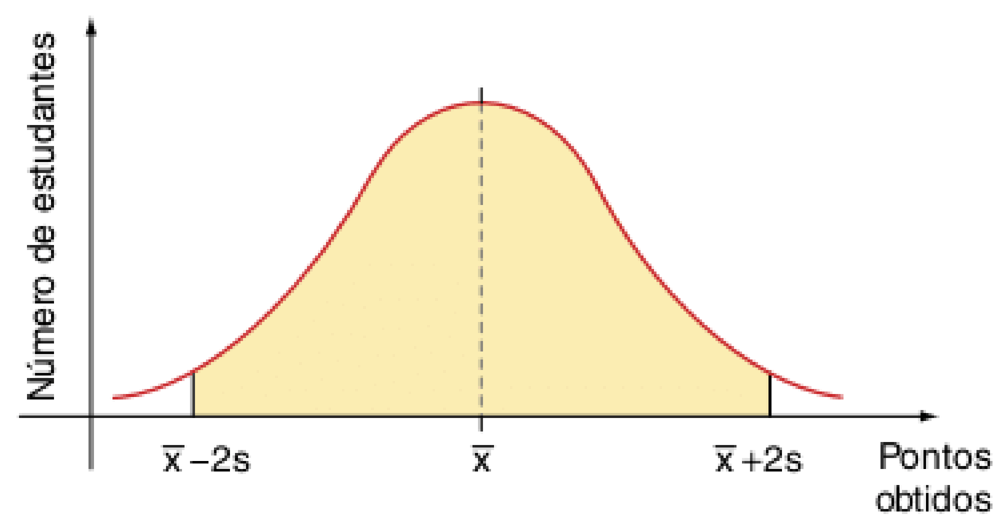
Fig. 3 Gráfico da distribuição de frequência.

Seja s o desvio padrão dos pontos obtidos, podemos obter do gráfico as seguintes porcentagens:

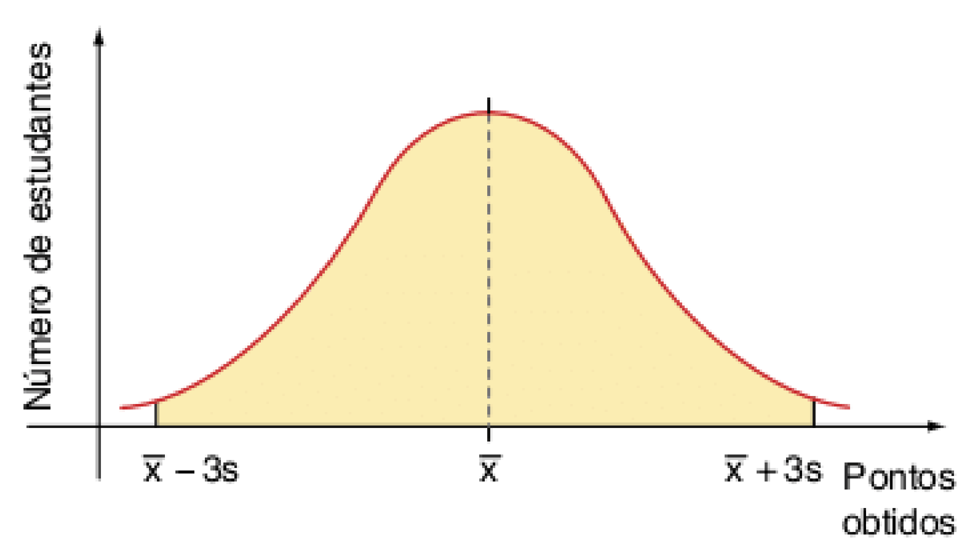
a) 68,27% das notas estão incluídas entre $\overline{x} - s$ e $\overline{x} + s$.



b) 95,45% das notas estão incluídas entre $\overline{x} - 2s$ e $\overline{x} + 2s$.



c) 99,73% das notas estão incluídas entre $\overline{x} - 3s$ e $\overline{x} + 3s$.



Este capítulo tem como objetivo capacitar os alunos a resolver questões que envolvam a análise de dados estatísticos, médias, taxas de variações, interpretações de gráficos e a formação de conclusões.

Observe atentamente a sequência de exemplos que apareceram nas provas do Enem.

Exercícios resolvidos

7 **Enem 1998** Um estudo sobre o problema do desemprego na Grande São Paulo, no período 1985-1996, realizado pelo SEADE-DIEESE, apresentou o seguinte gráfico sobre taxa de desemprego.

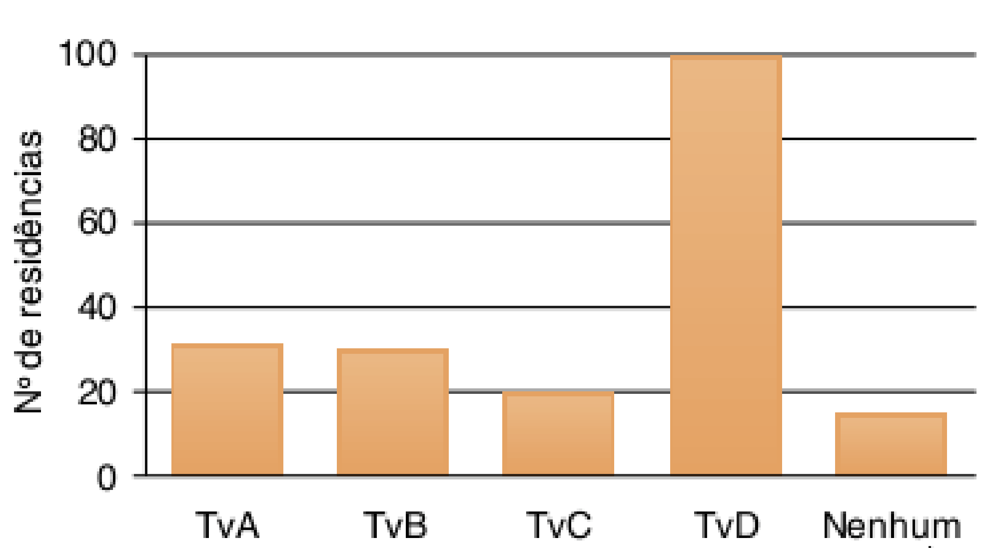
Fonte: SEP, Convênio SEADE-DIEESE.

Pela análise do gráfico, é correto afirmar que, no período considerado:

(a) a maior taxa de desemprego foi de 14%.
(b) a taxa de desemprego no ano de 1995 foi a menor do período.
(c) a partir de 1992, a taxa de desemprego foi decrescente.
(d) no período 1985-1996, a taxa de desemprego esteve entre 8% e 16%.
(e) a taxa de desemprego foi crescente no período compreendido entre 1988 e 1991.

Resolução:
A partir da análise do gráfico, percebemos que a taxa de desemprego oscilou entre 8,0% e 16,0% no período total da pesquisa.
Alternativa D

8 **Enem 1998** Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20 h e 21h, durante uma determinada noite.
Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras:



O número de residências atingidas nessa pesquisa foi aproximadamente de:

(a) 100 (b) 135 (c) 150 (d) 200 (e) 220

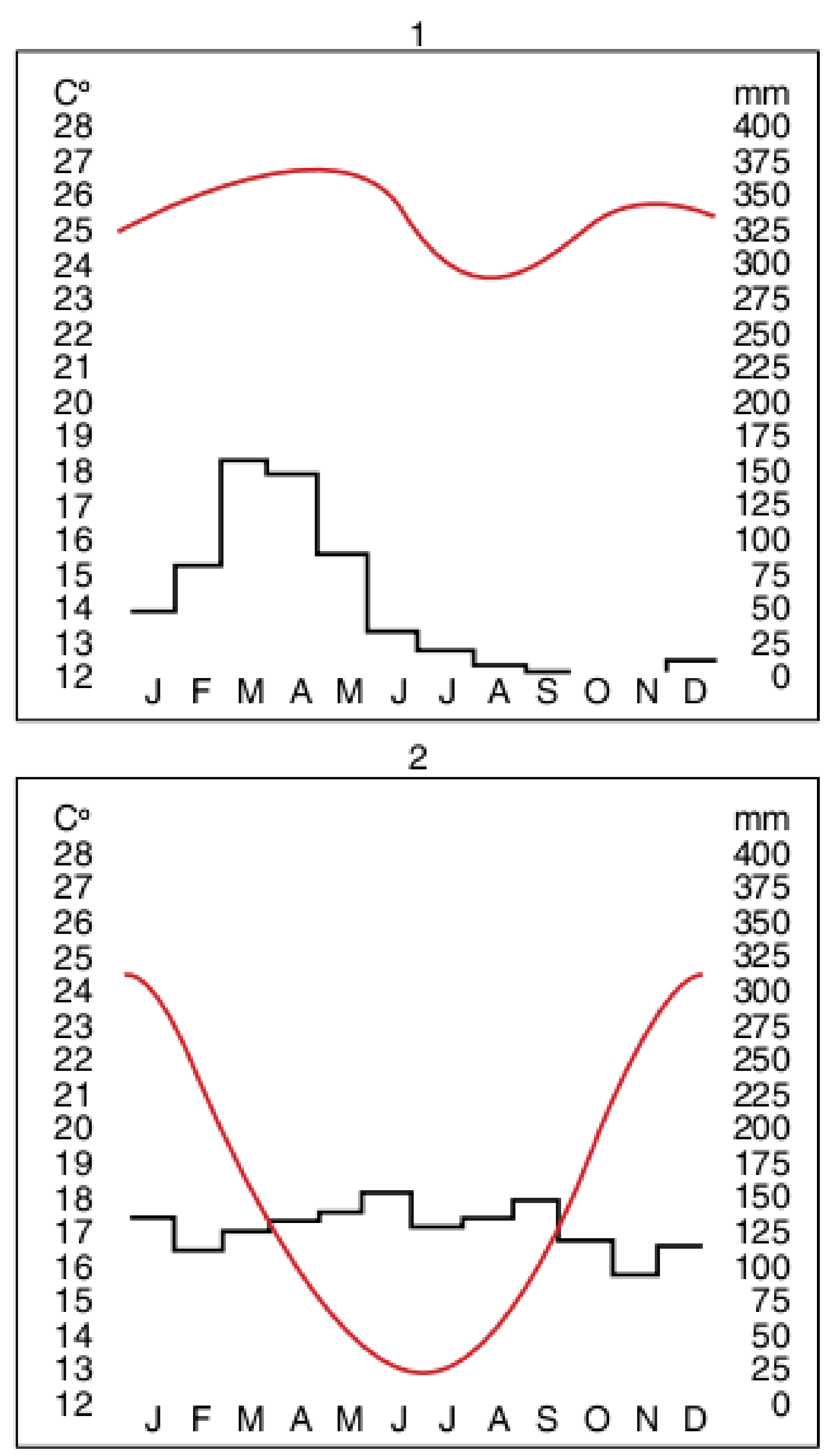
Resolução:
Observando o gráfico, percebemos, aproximadamente, TvA e TvB: 30 residências, TvC: 20 residências, TvD: 100 residências e nenhum canal: 20 residências. Total aproximado: 200 residências.
Alternativa D

A percentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TvB é, aproximadamente, igual a:

(a) 15% (b) 20% (c) 22% (d) 27% (e) 30%

Resolução:
Na TvB, cerca de 30 residências em um total de 200 residências.
Assim, percentualmente, temos $\frac{30}{200} = 15\%$.
Alternativa A

9 **Enem 1998** As figuras abaixo representam a variação anual de temperatura e a quantidade de chuvas mensais em dado lugar, sendo chamados de climogramas. Neste tipo de gráfico, as temperaturas são representadas pelas linhas, e as chuvas pelas colunas.



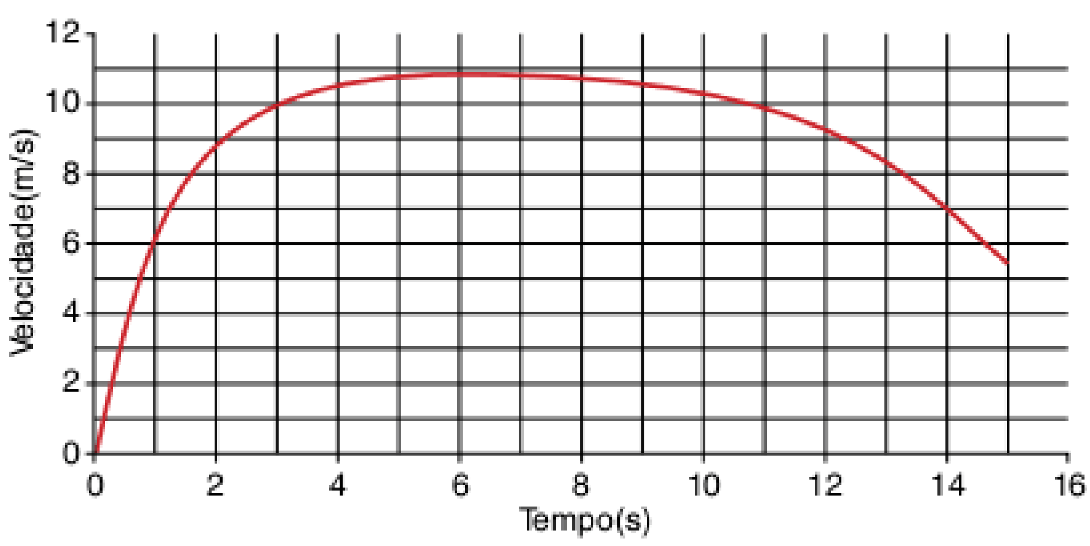
Leia e analise.
A distribuição das chuvas no decorrer do ano, conforme mostrado nos gráficos, é um parâmetro importante na caracterização de um clima.

A esse respeito, podemos dizer que a afirmativa:

(a) está errada, pois o que importa é o total pluviométrico anual.
(b) está certa, pois, juntamente com o total pluviométrico anual, são importantes variáveis na definição das condições de umidade.
(c) está errada, pois a distribuição das chuvas não tem nenhuma relação com a temperatura.
(d) está certa, pois é o que vai definir as estações climáticas.
(e) está certa, pois este é o parâmetro que define o clima de uma dada área.

Resolução:
Essa afirmação está certa, pois a quantidade de chuvas, de acordo com os gráficos, define se é um período quente e úmido, como os meses de março e abril no gráfico 1, ou frio e úmido, como junho e julho no gráfico 2.
Alternativa B

10 **Enem 1998 (Adapt.)** Em uma prova de 100 m rasos, o desempenho típico de um corredor padrão é representado pelo gráfico a seguir.

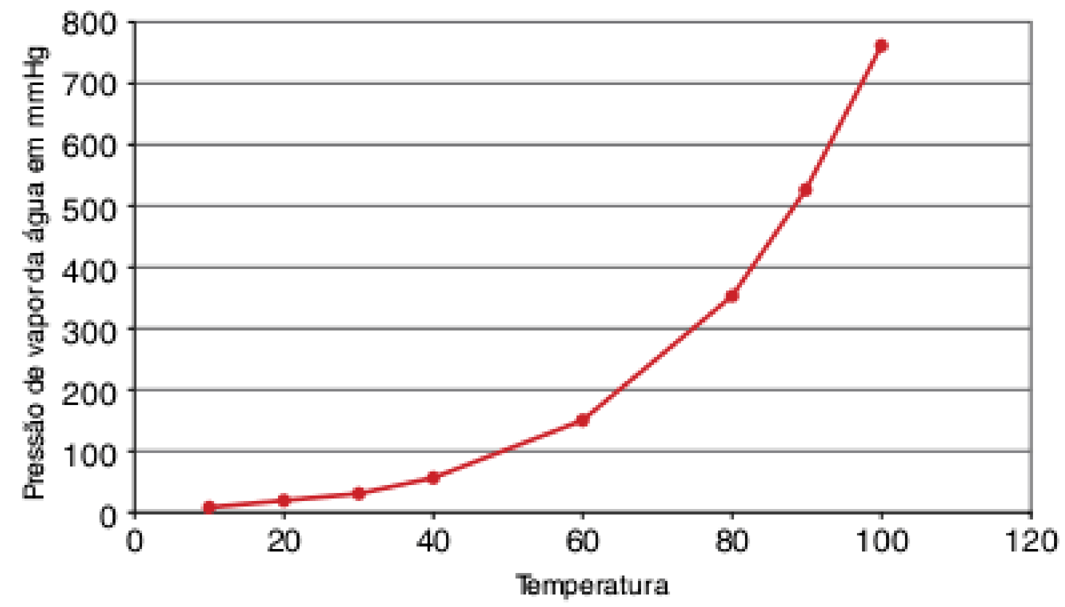


De acordo com o gráfico, em qual intervalo de tempo a velocidade do corredor é aproximadamente constante, e também em qual intervalo a aceleração é máxima?

Resolução:
Entre 5 s e 8 s, a velocidade é de cerca de 11 m · s^{-1}.
Entre 0 s e 1 s, a taxa de variação da velocidade (aceleração) é máxima, cerca de 6 m · s^{-2}.

11 **Enem 1998** A tabela a seguir registra a pressão atmosférica em diferentes altitudes, e o gráfico relaciona a pressão de vapor da água em função da temperatura.

Altitude(km)	Pressão atmosférica (mmHg)
0	760
1	600
2	480
4	300
6	170
8	120
10	100



Um líquido, num frasco aberto, entra em ebulição a partir do momento em que a sua pressão de vapor se iguala à pressão atmosférica. Assinale a opção correta, considerando a tabela, o gráfico e os dados apresentados, sobre as seguintes cidades:

Natal (RN)	nível do mar
Campos do Jordão (SP)	altitude 1.628 m
Pico da Neblina (RR)	altitude 3.014 m

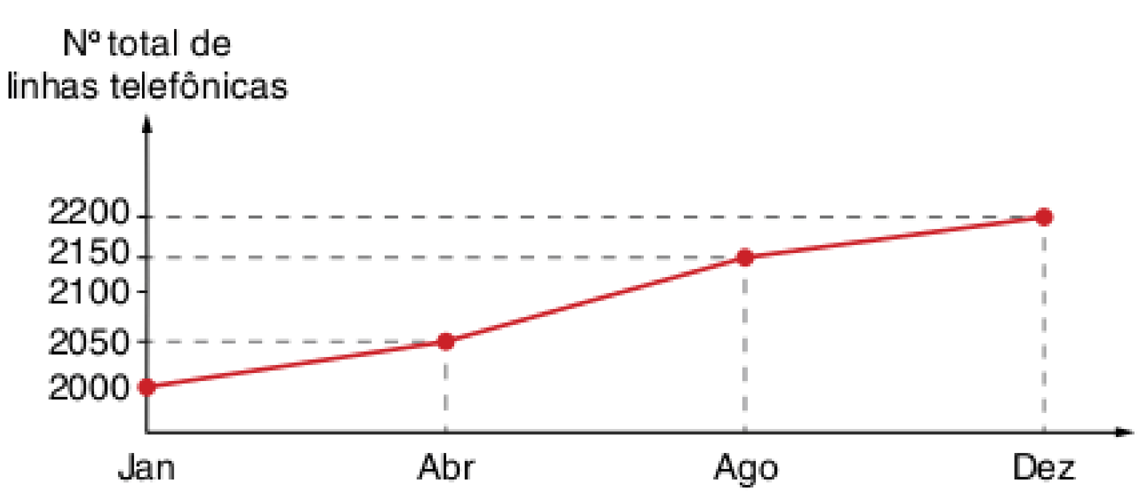
A temperatura de ebulição será:

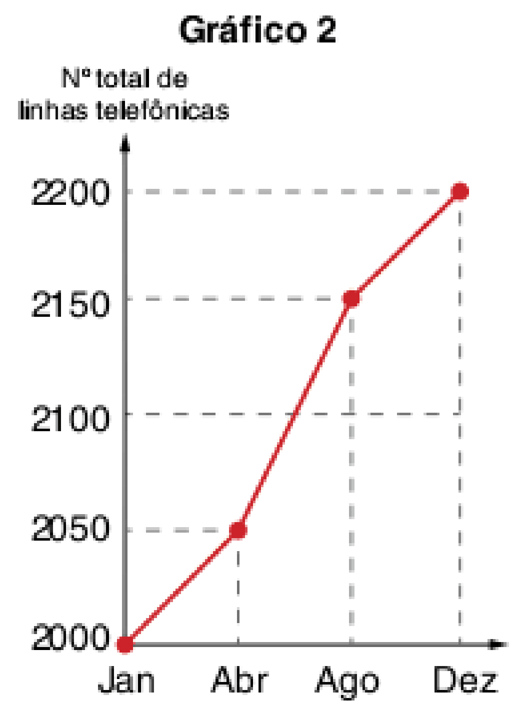
(a) maior em Campos do Jordão.
(b) menor em Natal.
(c) menor no Pico da Neblina.
(d) igual em Campos do Jordão e Natal.
(e) não dependerá da altitude.

Resolução:
Os dados da tabela indicam que a pressão atmosférica diminui com o aumento da altitude.
Comparando a tabela e o gráfico da pressão de vapor da água, observamos que quanto maior a altitude menor será a temperatura de ebulição da água.
A menor temperatura de ebulição ocorrerá no Pico da Neblina, e a maior ao nível do mar em Natal.
Alternativa C

12 **Enem 1999** Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, abaixo representado. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.

Gráfico 1





Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

(a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.
(b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.
(c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.
(d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.
(e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

Resolução:
Os gráficos representam situações idênticas, apesar de escalas diferentes.
Alternativa D

13 **Enem 1999** Muitas usinas hidroelétricas estão situadas em barragens. As características de algumas das grandes represas e usinas brasileiras estão apresentadas no quadro abaixo.

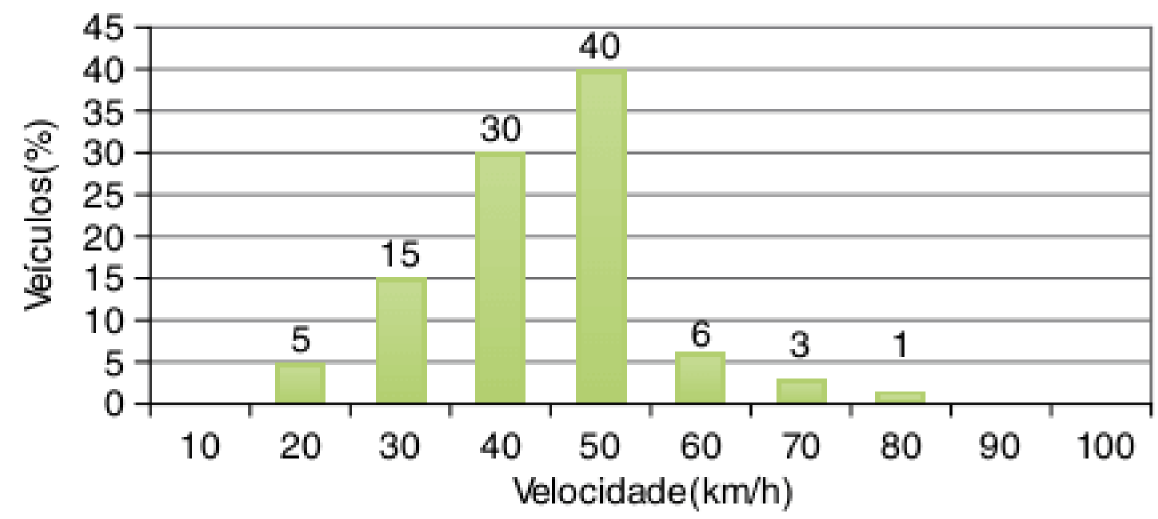
Usina	Área alagada (km^2)	Potência (MW)	Sistema hidrográfico
Tucuruí	2.430	4.240	Rio Tocantins
Sobradinho	4.214	1.050	Rio São Francisco
Itaipu	1.350	12.600	Rio Paraná
Ilha Solteira	1.077	3.230	Rio Paraná
Furnas	1.450	1.312	Rio Grande

A razão entre a área da região alagada por uma represa e a potência produzida pela usina nela instalada é uma das formas de estimar a relação entre o dano e o benefício trazidos por um projeto hidroelétrico. A partir dos dados apresentados no quadro, o projeto que mais onerou o ambiente em termos de área alagada por potência foi:

(a) Tucuruí.
(b) Furnas.
(c) Itaipu.
(d) Ilha Solteira.
(e) Sobradinho.

Resolução:
A maior relação dano-benefício ocorreu na Usina de Sobradinho, pois foram necessários alagar 4.214/1.050 ≈ 4 km² de área para produzir 1 megawatt de energia.
Alternativa E

14 **Enem 1999** Um sistema de radar é programado para registrar automaticamente a velocidade de todos os veículos trafegando por uma avenida, onde passam em média 300 veículos por hora, sendo 55 km/h a máxima velocidade permitida. Um levantamento estatístico dos registros do radar permitiu a elaboração da distribuição percentual de veículos de acordo com sua velocidade aproximada.



A velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é de:

(a) 35 km/h
(b) 44 km/h
(c) 55 km/h
(d) 76 km/h
(e) 85 km/h

Resolução:
Observe a tabela a seguir que indica o número de veículos e suas respectivas velocidades.

Nº de veículos	*15*	*45*	*90*	*120*	*18*	*9*	*3*
Velocidade	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*

Velocidade média:

$$\frac{15.20 + 45.30 + 90.40 + 120.50 + 18.60 + 9.70 + 3.80}{300}$$

Velocidade média: 44 km/h
Alternativa B

15 **Enem 2009** A tabela mostra alguns dados da emissão de dióxido de carbono de uma fábrica, em função do número de toneladas produzidas.

Produção (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes de milhão – ppm)
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03
1,7	3,25
1,8	3,48
1,9	3,73
2,0	4,00

Cadernos do Gestar II, Matemática TP3. Disponível em: <www.mec.gov.br>. Acesso em: 14 jul. 2009.

Os dados na tabela indicam que a taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono (em ppm) e a produção (em toneladas) é:

(a) inferior a 0,18.
(b) superior a 0,18 e inferior a 0,50.
(c) superior a 0,50 e inferior a 1,50.
(d) superior a 1,50 e inferior a 2,80.
(e) superior a 2,80.

Resolução:
Da tabela, observamos que:
1,1 a 1,2 toneladas, temos o acréscimo de:
0,16 ppm/0,1 ton = 1,6 ppm/ton
1,4 a 2,0 toneladas, temos a oscilação de 1,9 a 2,7 ppm/ton
Sem efetuar o cálculo completo, esta taxa média de variação está no intervalo]1,6; 2,7[.
Alternativa D

16 **Enem 2000** O Brasil, em 1997, com cerca de $160 \cdot 10^6$ habitantes, apresentou um consumo de energia da ordem de 250.000 TEP (tonelada equivalente de petróleo), proveniente de diversas fontes primárias.
O grupo com renda familiar de mais de vinte salários mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza cerca de 10% da energia total consumida no país.
O grupo com renda familiar de até três salários mínimos representa 50% da população e consome 30% do total de energia.
Com base nessas informações, pode-se concluir que o consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de renda superior é x vezes maior do que para um indivíduo do grupo de renda inferior. O valor aproximado de x é:

(a) 2,1.
(b) 3,3.
(c) 6,3.
(d) 10,5.
(e) 12,7.

Resolução:
- *Renda maior que 20 salários mínimos: 5%P, sendo P = 160 milhões de habitantes.*
- *Consumo 10% · 250.000 TEP = 25.000 TEP*
- *Renda de até 3 salários mínimos: 50%P e consumo de 30% · 250.000 TEP = 75.000 TEP*
- *Cálculo dos consumos médios:*
- *Renda superior:* $\dfrac{250.000}{0,05P}$
- *Renda inferior:* $\dfrac{75.000}{0,05P}$
- *Assim:* $\dfrac{250.000}{0,05P} = x \cdot \dfrac{75.000}{0,05P} \ldots\ x \simeq 3,3$

Alternativa B

Revisando

1 Em uma empresa, a quantidade de empregados do sexo masculino supera em 100 a quantidade de empregados do sexo feminino. A média dos salários dos homens é igual a R$ 2.000,00 e a das mulheres, R$ 1.800,00. Se a média dos salários de todos os empregados é igual a R$ 1.920,00, determine a quantidade de empregados nesta empresa.

2 Um avião tem lugares para 150 passageiros. Em um determinado voo, 60% dos lugares do avião eram ocupados por homens, viajavam 45 mulheres e o restante dos lugares eram ocupados por crianças.
a) Quantas crianças viajavam no avião?
b) Faça uma tabela de frequências.
c) Represente os dados por um diagrama circular.

3 Em uma prova de Matemática valendo 5 pontos, os alunos que realizaram este teste obtiveram: 4 alunos nota 2; 3 alunos nota 5; 9 alunos nota 4 e os 9 restantes nota 3.
Determine a média aritmética, mediana e a moda das notas desses alunos.

Exercícios propostos

Médias

1 As notas das provas de um candidato em um concurso foram: 8,4; 9,1; 7,2; 6,8; 8,7 e 7,2.
A nota média, a nota mediana e a nota modal desse aluno, são, respectivamente:

(a) 7,9; 7,8; 7,2
(b) 7,2; 7,8; 7,9
(c) 7,8; 7,8; 7,9
(d) 7,2; 7,9; 7,8
(e) 7,8; 7,9; 7,2

2 **Fuvest** Num determinado país, a população feminina representa 51% da população total. Sabendo-se que a idade média (média aritmética das idades) da população feminina é de 38 anos e a da masculina é de 36 anos. Qual a idade média da população?

(a) 37,02 anos
(b) 37,00 anos
(c) 37,20 anos
(d) 36,60 anos
(e) 37,05 anos

3 O Departamento de Comércio Exterior do Banco Central possui 30 funcionários com a seguinte distribuição salarial em reais.

N° de funcionários	Salário (em R$)
10	2.000,00
12	3.600,00
5	4.000,00
3	6.000,00

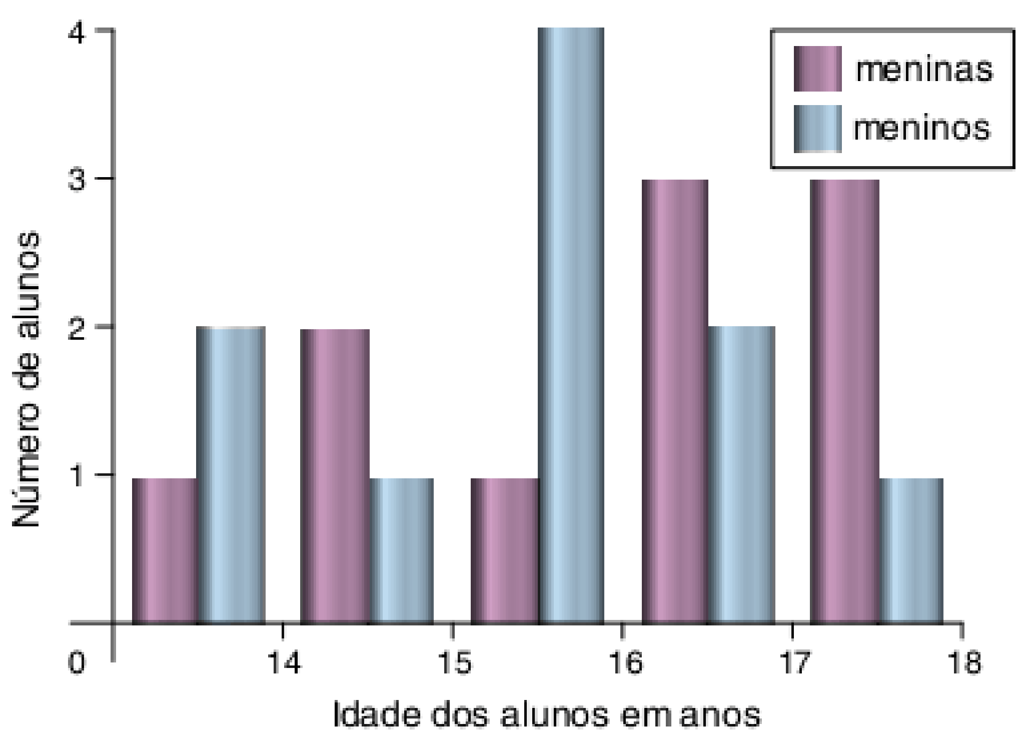
Quantos funcionários que recebem R$ 3.600,00 devem ser demitidos para que a mediana desta distribuição de salários seja de R$ 2.800,00?

(a) 8
(b) 11
(c) 9
(d) 10
(e) 7

4 Determinar a média aritmética, a mediana e a moda do conjunto de números (7; 4; 10; 9; 15; 12; 7; 9; 7), respectivamente.

Interpretações de gráficos

5 **UFSCar** Num curso de iniciação à informática, a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo, é dada pelo gráfico seguinte.

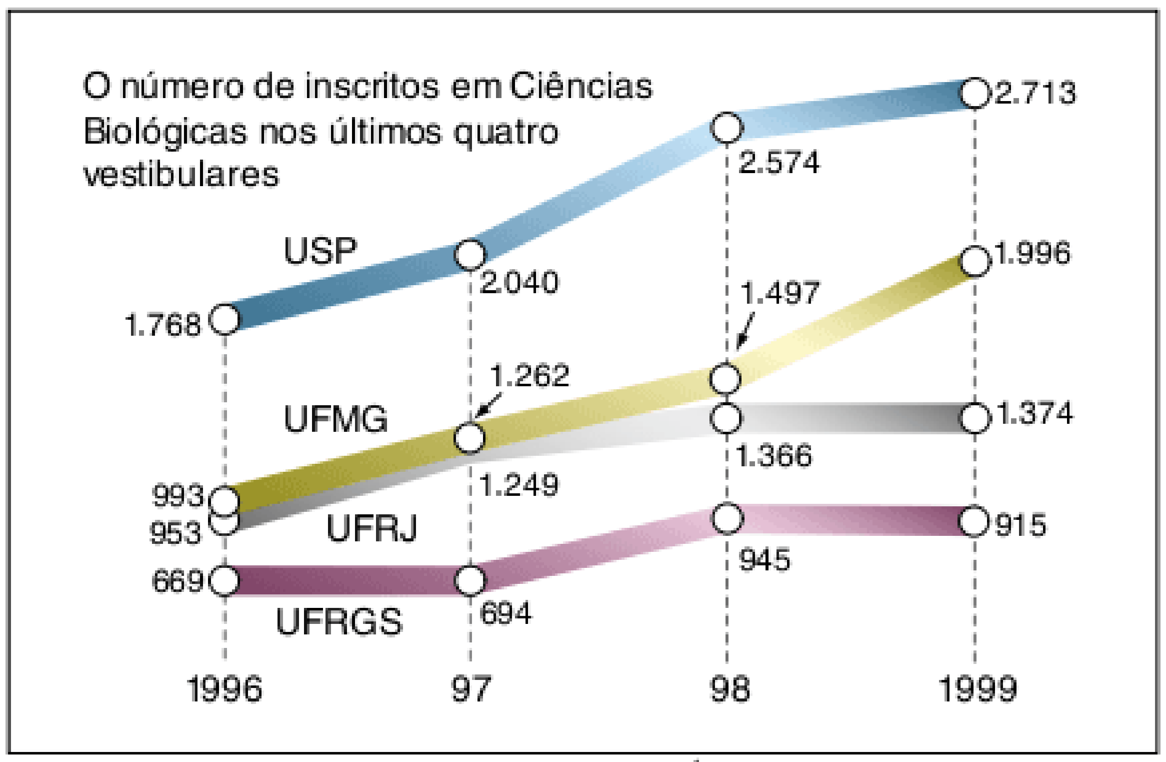


Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que:

(a) o número de meninas com, no máximo, 16 anos é maior que o número de meninos nesse mesmo intervalo de idades.
(b) o número total de alunos é 19.
(c) a média de idade das meninas é 15 anos.
(d) o número de meninos é igual ao número de meninas.
(e) o número de meninos com idade maior que 15 anos é maior que o número de meninas nesse mesmo intervalo de idades.

6 **UnB** Um novo "boom" desponta nas estatísticas dos últimos vestibulares. Desde o surgimento de Dolly, a polêmica ovelha clonada a partir da célula de um animal adulto, a carreira de ciências biológicas recebe cada vez mais candidatos e esta área firma-se como a ciência do próximo milênio.

O gráfico a seguir ilustra o número de inscritos nos últimos quatro vestibulares que disputaram as vagas oferecidas pela Universidade de São Paulo (USP) e pelas universidades federais do Rio de Janeiro (UFRJ), de Minas Gerais (UFMG) e do Rio Grande do Sul (UFRGS).



Época, 26 abr. 1999. (Adapt.).

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

☐ De 1997 a 1998, o crescimento percentual do número de inscritos na USP foi maior que o da UFRGS.

☐ Todos os segmentos de reta apresentados no gráfico têm inclinação positiva.

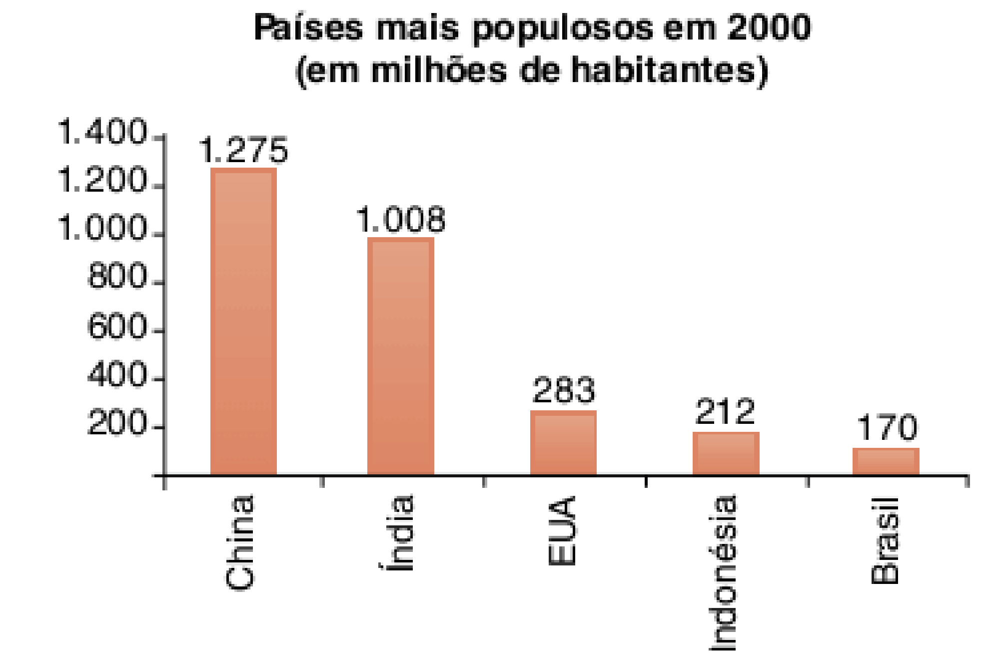
☐ Durante todo período analisado, a UFMG foi a universidade que apresentou o maior crescimento percentual, mas não o maior crescimento absoluto.

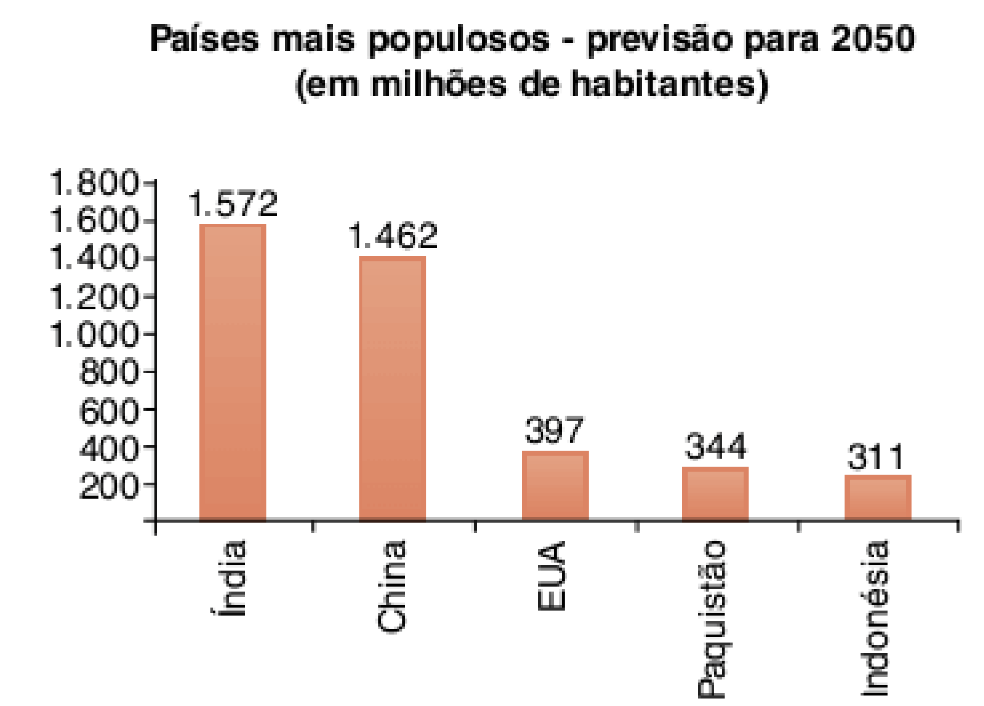
☐ Os crescimentos percentuais anuais na UFRJ diminuíram a cada ano.

☐ Considerando, para cada universidade representada no gráfico, a série numérica formada pelos números de inscritos em Ciências Biológicas nos últimos quatro vestibulares, a série da USP é a que apresenta a maior mediana, tendo desvio padrão maior que o da UFRJ.

Texto para as questões **7** e **8**.

Nos últimos anos, ocorreu redução gradativa da taxa de crescimento populacional em quase todos os continentes. A seguir, são apresentados dados relativos aos países mais populosos em 2000 e também as projeções para 2050.





Disponível em: <www.ibge.gov.br>.

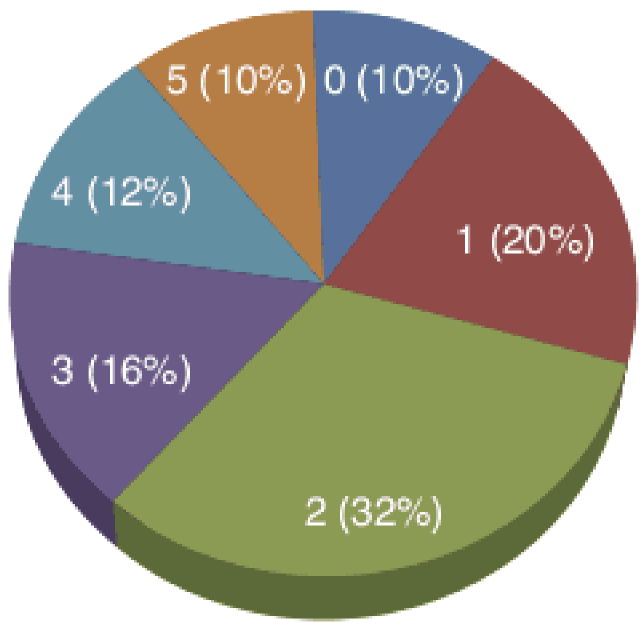
7 **Enem 2006** Com base nas informações acima, é correto afirmar que, no período de 2000 a 2050:

(a) a taxa de crescimento populacional da China será negativa.
(b) a população do Brasil duplicará.
(c) a taxa de crescimento da população da Indonésia será menor que a dos EUA.
(d) a população do Paquistão crescerá mais de 100%.
(e) a China será o país com a maior taxa de crescimento populacional do mundo.

8 **Enem 2006** Com base nas informações dos gráficos mostrados, suponha que, no período 2050-2100, a taxa de crescimento populacional da Índia seja a mesma projetada para o período 2000-2050. Sendo assim, no início do século XXII, a população da Índia, em bilhões de habitantes, será:

(a) inferior a 2,0.
(b) superior a 2,0 e inferior a 2,1.
(c) superior a 2,1 e inferior a 2,2.
(d) superior a 2,2 e inferior a 2,3.
(e) superior a 2,3.

9 O gráfico a seguir, em forma de *pizza*, representa as notas obtidas em uma questão pelos 32.000 candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão.



Pergunta-se:

a) Quantos candidatos tiveram nota 3?

b) É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi ≤ 2? Justifique sua resposta.

TEXTO COMPLEMENTAR

O salário médio dos professores de Matemática

Neste texto complementar, utilizaremos os conceitos apresentados no capítulo por meio de um exemplo.

Considere os salários de 10 professores calculados na unidade de salários mínimos.

A = {1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 7; 15 e 25}.

A média aritmética é dada por $\overline{x} = \dfrac{1+2+2+3+3+3+4+7+15+25}{10} = \dfrac{65}{10} = 6{,}5$

Esse valor expressa um centro de gravidade da sequência, mas certamente nos informa muito pouco sobre como a sequência é formada, pois percebemos que 7 dos 10 professores ganham bem menos que a média de 6,5 salários mínimos.

Poderíamos calcular a mediana dos valores que é $\dfrac{3+3}{2} = 3$ salários mínimos, resultado mais condizente com a realidade dos fatos, pois 60% dos professores ganham 3 salários mínimos ou menos.

Vamos obter agora o desvio padrão, que é um número que tenta expressar a dispersão dos valores em torno da média. Assim:

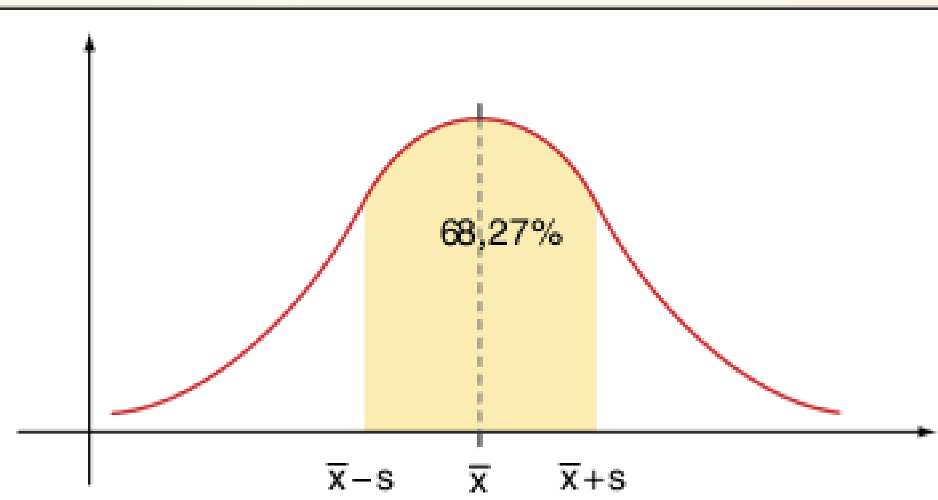
$$s = \text{desvio padrão} = \sqrt{\frac{|6{,}5-1|^2 + 2|6{,}5-2|^2 + 3.|6{,}5-3|^2 + |6{,}5-4|^2 + |6{,}5-7|^2 + |6{,}5-15|^2 + |6{,}5-25|^2}{10}} \approx 7{,}3$$

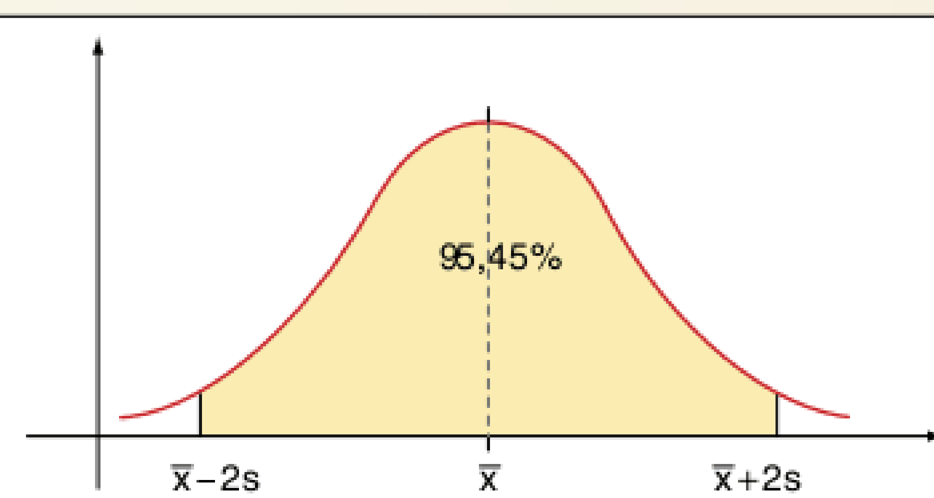
Considere que, no intervalo $(\overline{x}-s;\ \overline{x}+s) = (6{,}5-7{,}3;\ 6{,}5+7{,}3) = (-0{,}8;\ 13{,}8)$, temos por volta de 80% dos professores.

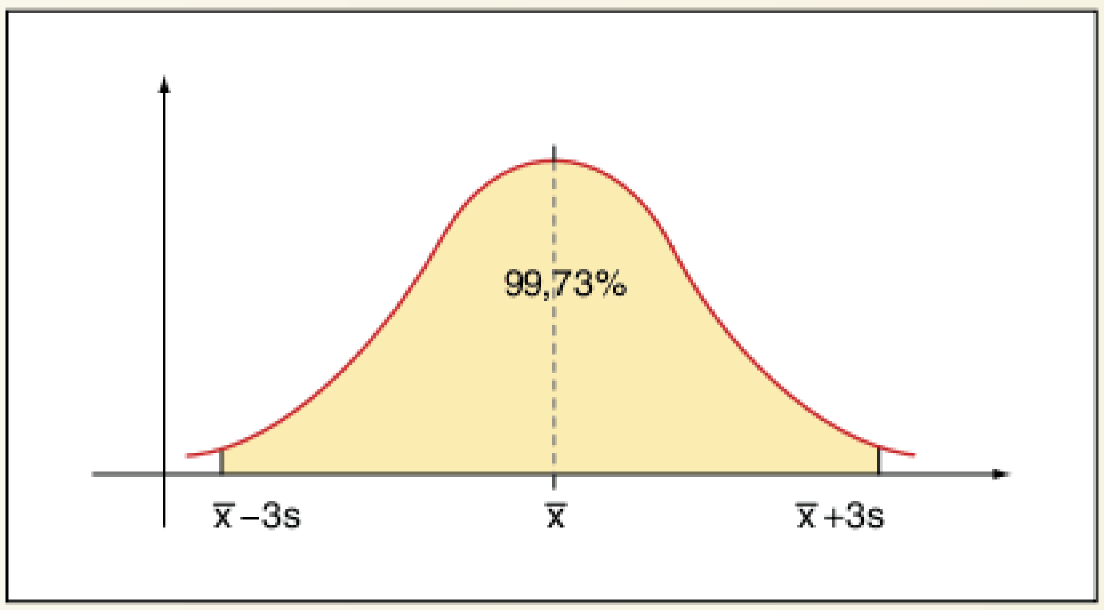
No intervalo $(\overline{x}-2s;\ \overline{x}+2s) = (6{,}5-14{,}6;\ 6{,}5+14{,}3) = (-8{,}1;\ 20{,}8)$, temos por volta de 90% dos professores.

No intervalo $(\overline{x}-3s;\ \overline{x}+3s) = (6{,}5-21{,}9;\ 6{,}5+21{,}9) = (-15{,}4;\ 28{,}4)$, temos 100% dos professores.

Como foi apresentado na teoria, os valores para uma população mais representativa e moderadamente desviada seriam:





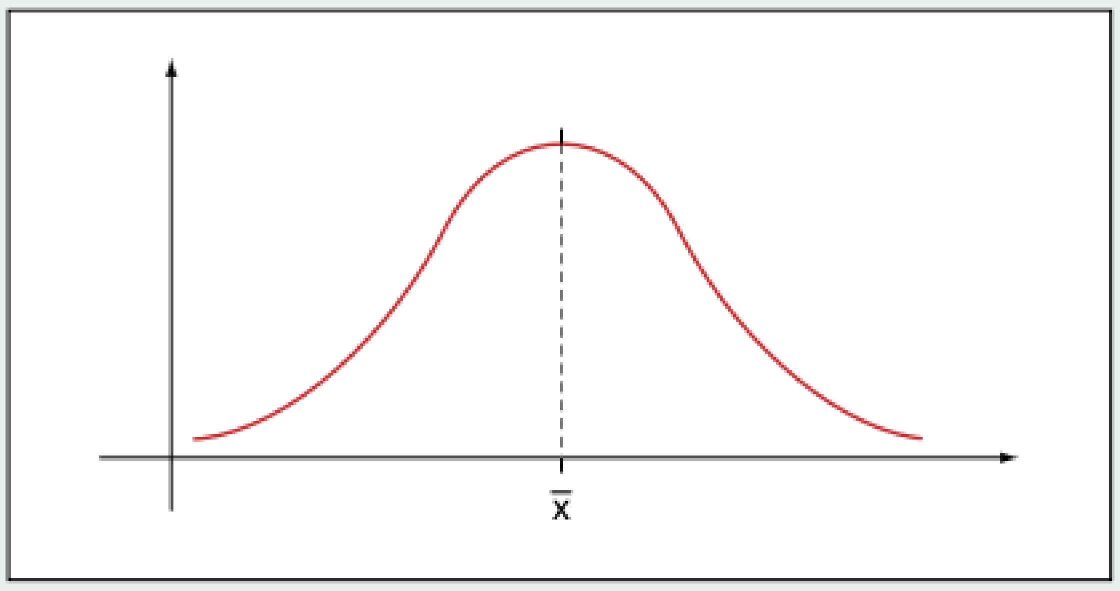


O desvio padrão indica a concentração dos dados em torno da média. Quando os jornais afirmam que a distribuição de renda dos trabalhadores brasileiros é injusta, no fundo, afirmam que o desvio padrão é grande.

RESUMINDO

A estatística descritiva resume ou descreve as características importantes de um subconjunto de uma população.
A inferência estatística generaliza as características de uma população a partir da utilização de dados amostrais.
Para entendermos melhor as características de um conjunto, podemos analisar:

a) Valores representativos do conjunto: média, mediana e moda.
b) Uma medida de dispersão: desvio padrão.
c) A natureza ou a forma da distribuição dos dados: distribuição em forma de sino.



QUER SABER MAIS?

SITE

- Análise de variância – Anova
  <www.est.ufpr.br/ce003/material/cap7.pdf>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 **Fuvest** A distribuição dos salários de uma empresa é dada na tabela a seguir.

Salário (em R$)	N° de funcionários
500.000,00	10
1.000.000,00	5
1.500.000,00	1
2.000.000,00	10
5.000.000,00	4
10.500.000,00	1
Total	31

a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa?

b) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salários de R$ 2.000.000,00 cada. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior?

2 **Unicamp** Para um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, a média aritmética de X é definida por: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$

e a variância de X é definida por:

$$v = \frac{1}{4}[(x_1 - \bar{x})^2 + ... + (x_4 - \bar{x})^2]$$

Dado o conjunto $X = \{2, 5, 8, 9\}$:

a) calcular a média aritmética de X.

b) calcular a variância de X.

c) quais elementos de X pertencem ao intervalo [(média aritmética de x) $-$ ($\sqrt{V}$); (média aritmética de x) $+$ ($\sqrt{V}$)]?

3 **FGV** Em um conjunto de 100 observações numéricas, podemos afirmar que:

(a) a média aritmética é maior que a mediana.
(b) a mediana é maior que a moda.
(c) 50% dos valores estão acima da média aritmética.
(d) 50% dos valores estão abaixo da mediana.
(e) 25% dos valores estão entre a moda e a mediana.

4 **UnB** A tabela a seguir apresenta o levantamento das quantidades de peças defeituosas para cada lote de 100 unidades fabricadas em uma linha de produção de autopeças, durante um período de 30 dias úteis.

Dia	N° de peças defeituosas	Dia	N° de peças defeituosas	Dia	N° de peças defeituosas
1	6	11	1	21	2
2	4	12	5	22	6
3	3	13	4	23	3
4	4	14	1	24	5
5	2	15	3	25	2
6	4	16	7	26	1
7	3	17	5	27	3
8	5	18	6	28	2
9	1	19	4	29	5
10	2	20	3	30	7

Considerando S a série numérica de distribuição de frequências de peças defeituosas por lote de 100 unidades, julgue os itens abaixo.

☐ A moda da série S é 5.

☐ Durante o período de levantamento desses dados, o percentual de peças defeituosas ficou, em média, abaixo de 3,7%.

☐ Os dados obtidos nos 10 primeiros dias do levantamento geram uma série numérica de distribuição de frequências com a mesma mediana da série S.

5 **Unirio** Um dado foi lançado 50 vezes. A tabela a seguir mostra os seis resultados possíveis e as suas respectivas frequências de ocorrências.

Resultado	1	2	3	4	5	6
Frequência	7	9	8	7	9	10

A frequência de aparecimento de um resultado ímpar foi de:

(a) $\frac{2}{5}$
(b) $\frac{11}{25}$
(c) $\frac{12}{25}$
(d) $\frac{1}{2}$
(e) $\frac{13}{25}$

6 Dados: $\sum_{i=1}^{4} x_i = 7, \sum_{i=1}^{4} y_i = -3$ e $\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 5$, determinar:

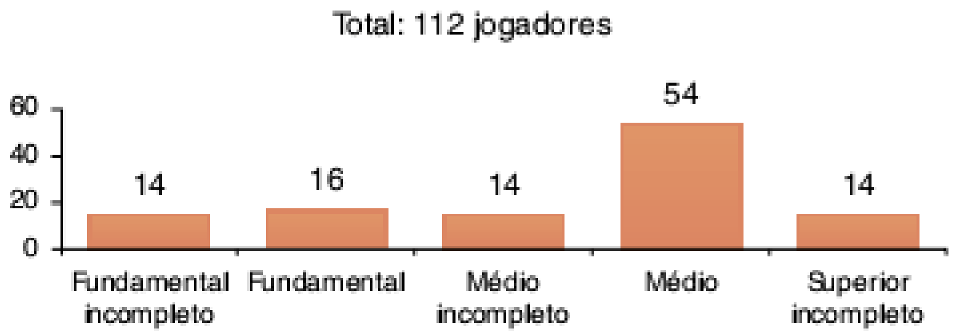
a) $\sum_{i=1}^{4} (2x_i + 5y_i)$

b) $\sum_{i=1}^{4} (x_i - 3)(2y_i + 1)$

7 Trabalho: Lançar 4 moedas cinquenta vezes e registrar o número de caras em cada lance. Construir uma distribuição de frequência que mostre o número de lances em que aparecem 0, 1, 2, 3 e 4 caras. Construir uma distribuição percentual e comparar com os resultados previstos pelas leis da probabilidade 6,25%; 25%; 37,5%; 25% e 6,25%.

8 Os salários-hora de 5 consultores são: R$ 126,00, R$ 198,00, R$ 164,00, R$ 460,00 e R$ 188,00. Determinar a mediana e a média aritmética dos valores.

9 **Enem 2005** A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa abaixo, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro.



O Globo, 24 jul. 2005.

De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de aproximadamente:

(a) 14%
(b) 48%
(c) 54%
(d) 60%
(e) 68%

10 Em uma pesquisa realizada com 300 famílias, levantaram-se as seguintes informações.

Número de filhos	0	1	2	3	4	5	6
Proporção de famílias	17%	20%	24%	15%	10%	10%	4%

Determine, com base nessas afirmações, a média e a mediana do número de filhos.

11 **Fuvest** Sabe-se que a média aritmética de 5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O maior valor que um desses inteiros pode assumir é:

(a) 16
(b) 20
(c) 50
(d) 70
(e) 100

12 Em uma classe com vinte alunos, as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que oito alunos foram reprovados. A média aritmética das notas desses oito alunos foi 65, enquanto a média dos aprovados foi 77.
Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido malformulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais para todos os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados 68,8.

a) Calcule a média aritmética das notas da classe toda antes da atribuição dos cinco pontos extras.
b) Com a atribuição dos cinco pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram a nota para a aprovação?

13 **Enem 2007** As figuras apresentam dados referentes aos consumos de energia elétrica e de água relativos a cinco máquinas industriais de lavar roupa comercializadas no Brasil.
A máquina ideal, quanto a rendimento econômico e ambiental, é aquela que gasta, simultaneamente, menos energia e água.

Figura I

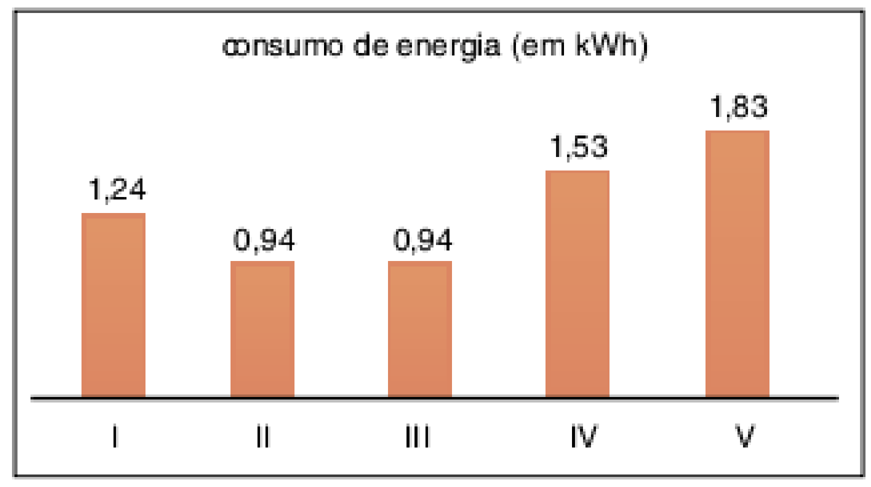
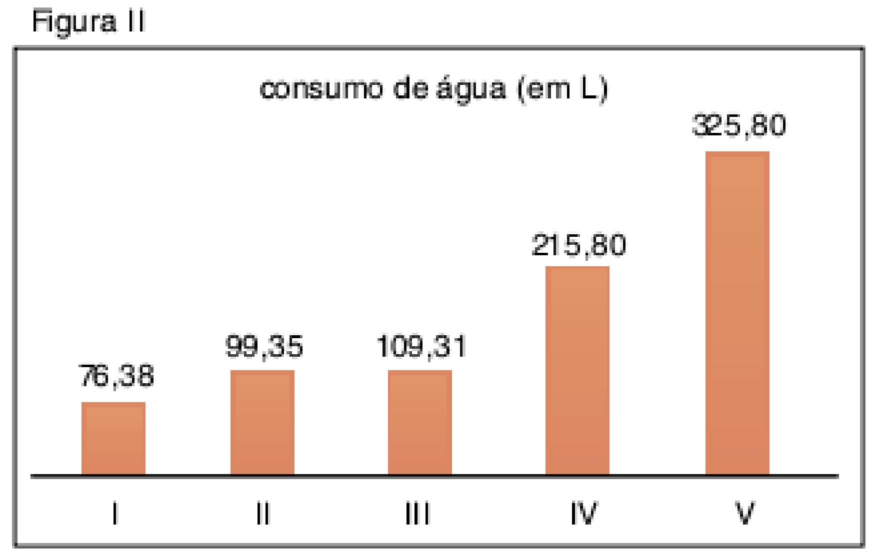


Figura II

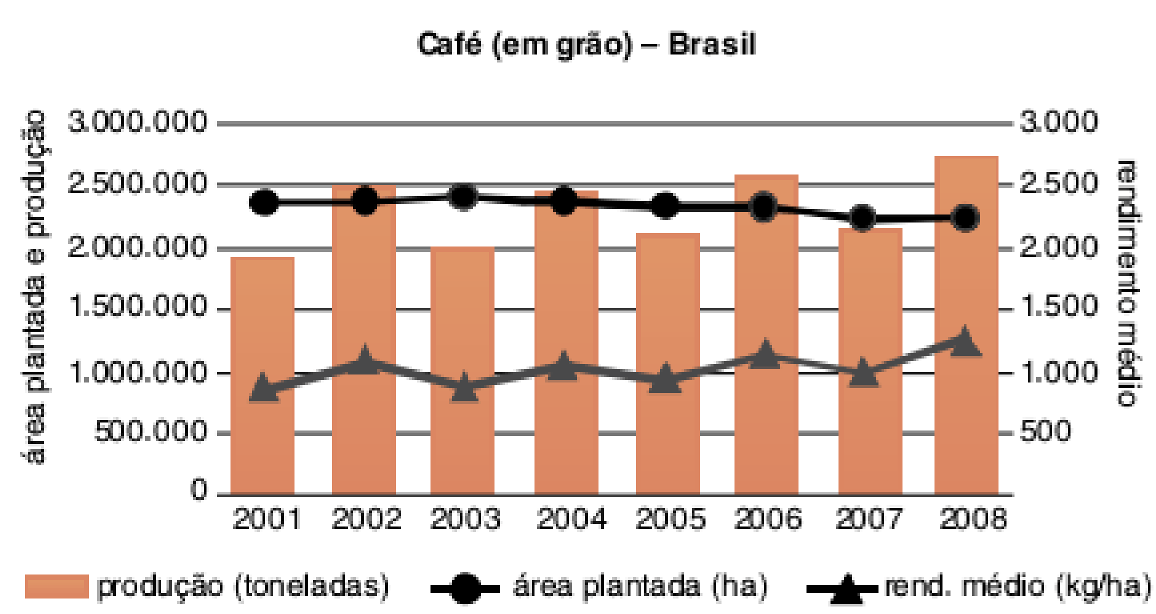


Associação Brasileira de Defesa do Consumidor. (Adapt.).

Com base nessas informações, conclui-se que, no conjunto pesquisado:

(a) quanto mais uma máquina de lavar roupa economiza água, mais ela consome energia elétrica.
(b) a quantidade de energia elétrica consumida por uma máquina de lavar roupa é inversamente proporcional à quantidade de água consumida por ela.
(c) a máquina I é ideal, de acordo com a definição apresentada.
(d) a máquina que menos consome energia elétrica não é a que consome menos água.
(e) a máquina que mais consome energia elétrica não é a que consome mais água.

14 **Enem 2008** No gráfico a seguir, estão especificados a produção brasileira de café, em toneladas; a área plantada, em hectares (ha); e o rendimento médio do plantio, em kg/ha, no período de 2001 a 2008.



Fonte: IBGE.

Se a tendência de rendimento observada no gráfico, no período de 2001 a 2008, for mantida nos próximos anos, então o rendimento médio do plantio do café, em 2012, será aproximadamente de:

(a) 500 kg/ha.
(b) 750 kg/ha.
(c) 850 kg/ha.
(d) 950 kg/ha.
(e) 1.250 kg/ha.

Sequências: Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

8

FRENTE 2

O calendário egípcio

Para melhor determinar a época de plantio e garantir melhor rendimento das plantações, os egípcios tiveram que observar o período em que ocorria a enchente do rio, que era essencial para o desenvolvimento das plantações na região árida onde viviam.

Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sirius se levantava a leste, um pouco antes do sol. Eles notaram que isso acontecia a cada 365 dias e, a partir disso, criaram um calendário solar com base nesse ciclo, com períodos específicos para semear, para o crescimento da plantação e para a colheita.

Ou seja, a partir do dia X + 365, o rio voltaria a subir, completando um ciclo de plantação, e esse período de 365 dias constituiu um ano.

Conceito de sequência

Na teoria dos conjuntos, a representação dos elementos de um conjunto, como A = {2, 3, 5, 7, 11}, não se importa com a "ordem" em que eles estariam: {2, 3, 5, 7, 11} = {7, 11, 2, 5, 3}.

Já no conceito de par ordenado, deve ser respeitada uma ordem, ou seja, $(2; 3) \neq (3; 2)$.

Neste capítulo, vamos estudar conjuntos (sequências) nos quais em cada posição existe um único elemento.

Com essa lei, podemos definir que sequência é uma função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que relaciona cada número natural com um único real, por meio de uma lei ou aleatoriamente.

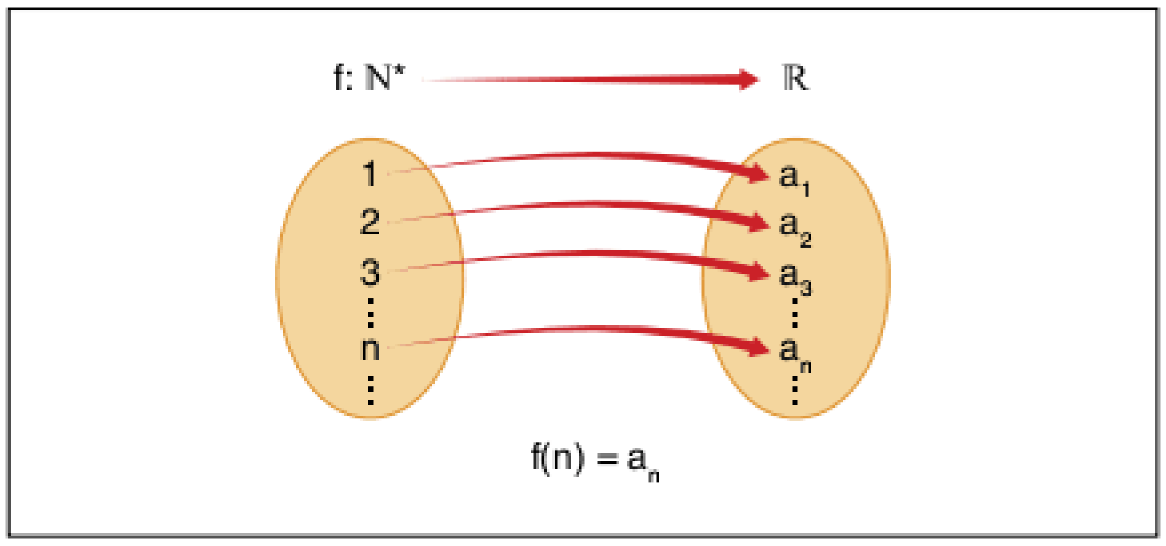


Fig. 1 Conceito de sequência.

Na figura 1, temos a representação de uma sequência genérica f, que também pode ser representada por pares ordenados: $f = \{(1; a_1), (2; a_2), (3; a_3) ..., (n, a_n) ...\}$ ou simplesmente pelas suas imagens: $f = (a_1; a_2; a_3; ..., a_n; ...)$

Exemplo 1

$A = (2;3;11;\sqrt{2})$ é uma sequência finita em que $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 11$ e $a_4 = \sqrt{2}$.

Representações de uma sequência

Podemos dizer que existem pelo menos cinco maneiras de representar uma sequência e para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$. Temos, então, $f\colon A \to B$.

Método da listagem

Método que consiste em enumerar os elementos da sequência, geralmente por eles serem de natureza aleatória.

Imagine um guarda de trânsito contando o número de automóveis que passam por um cruzamento a cada minuto.

O resultado da contagem nos cinco primeiros minutos poderia ser:

Número de automóveis = (12; 18; 4; 31; 43)

Fizemos a listagem dos resultados da sequência que aparentemente não possuem relações entre eles.

Método do termo geral

Os elementos da sequência podem ser apresentados por uma lei, por exemplo, $a_n = 3n + 1$; $n \in \mathbb{N}^*$. Assim:

$$a_1 = 3.1 + 1 = 4$$
$$a_2 = 3.2 + 1 = 7$$
$$a_3 = 3.3 + 1 = 10$$
$$\vdots$$
$$a_{P+1} = 3(P+1) + 1 = 3P + 4$$

Método da Lei de Recorrência

Uma sequência é apresentada na forma da Lei de Recorrência se tivermos o 1º termo (a_1) e uma lei que, para calcular um termo, temos de "recorrer" a outro.

Exemplo 2

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1; n \geq 2 \end{cases}$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2a_1 + 1 = 5$$
$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2.5 + 1 = 11$$
$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2.11 + 1 = 23$$
$$\vdots$$

Exercício resolvido

1 Fibonacci, um grande matemático italiano do século XIII, propôs o cálculo do número de coelhos que descenderão (durante um ano) de um par de coelhos adultos.

No problema, admite-se que cada par de coelhos adultos gera um par de coelhos por mês e que um coelho atinge a maturidade (para se reproduzir) após um mês.

Resolução:

Podemos escrever o número de pares de coelhos assim:

$a_1 = 1$ $a_2 = 1$ $a_3 = 2$ $a_4 = 3$ $a_5 = 5$ $a_6 = 8$ $a_7 = 13$ . . .	*Lei da recorrência* $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; n \geq 3 \end{cases}$ *Números de Fibonacci*

Começamos com 1 par de coelhos adultos. No final do 1º mês, eles geraram um par de coelhos, não maduros, por isso $a_2 = 1$. Somente no final do 2º mês (ou início do 3º) é que esse par de coelhos vai gerar outro par de coelhos, por isso $a_3 = 2$.

No quadro anterior, temos os resultados do problema de Fibonacci: uma sequência numérica determinada pela Lei de Recorrência.

Método do somatório

É uma maneira mais sofisticada de representar os números de uma sequência.

Vamos representar a “soma dos n primeiros termos da sequência”. Observe, a seguir, a ideia aplicada.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Exemplo 3

Seja uma sequência definida pelo somatório $Sn = n^2+1;\ n \geq 1$.

$$S_1 = (1)^2 + 1 = 2 = a_1$$
$$S_2 = (2)^2 + 1 = 5 = a_1 + a_2 \Rightarrow a_2 = 3$$
$$S_3 = (3)^2 + 1 = 10 = a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow a_3 = 5$$
$$S_4 = (4)^2 + 1 = 17 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \Rightarrow a_4 = 7$$

Formamos, assim, o início da listagem dessa sequência: (2; 3; 5; 7...)

Nesse mesmo exemplo, queremos o termo a_{100}!

Seria impraticável fazer o cálculo até n = 100. Existe, entretanto, uma maneira interessante. Observe:

$$S_{100} = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}}_{S_{99}} + a_{100}$$
$$\Rightarrow S_{100} = S_{99} + a_{100}$$
$$a_{100} = S_{100} - S_{99} \therefore a_{100} = (100)^2 + 1 - (99)^2 - 1$$
$$\therefore a_{100} = 199$$

Exercícios resolvidos

2 Seja uma sequência definida pelo somatório $S_n = n^2 + n;\ n \geq 1$. Obtenha o termo geral dessa sequência.

Resolução:

Vamos utilizar a ideia do exercício resolvido 1, observe:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$$
$$\Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n \quad \therefore \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n = (n^2 + n) - \left[(n-1)^2 + (n-1)\right]$$
$$a_n = n^2 + n - (n^2 - 2n + 1 + n - 1) = 2n$$
$$a_n = 2n$$

3 Considere a sequência definida pelo termo geral $a_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$. Calcule o valor da soma $S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{99} + a_{100}$.

Resolução:

Esse problema é muito tradicional nos vestibulares e deve ser bem analisado e mentalizada a ideia.

Observe que $a_n = \dfrac{1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Esse fato nos ajuda muito no cálculo da soma dos termos.

Assim:

$$S_{100} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = 1 - \frac{1}{101} = \frac{101-1}{101} = \frac{100}{101}$$

Método do produtório

Esse método de representação é semelhante ao somatório.

Vamos representar o “produto dos n primeiros termos da sequência”.

Observe a seguir a ideia aplicada:

$$P_1 = a_1$$
$$P_2 = a_1 \cdot a_2$$
$$P_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$$
$$P_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$$
$$\vdots$$
$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_n$$

Exercício resolvido

4 Dada a sequência definida pelo produtório: $P_n = n^3;\ n \geq 1$, faça a listagem dos termos iniciais, calcule o termo da posição 1.000 e depois o termo geral.

Resolução:

$$P_1 = (1)^3 = a_1 \Rightarrow a_1 = 1$$
$$P_2 = (2)^3 = 8 = a_1 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = 8$$
$$P_3 = (3)^3 = 27 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{27}{8}$$
$$P_4 = (4)^3 = 64 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \Rightarrow a_4 = \frac{64}{27}$$

Assim: $\left(1; 8; \dfrac{27}{8}; \dfrac{64}{27} \ldots\right)$

Para calcular $a_{1.000}$, temos:

$$P_{1.000} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{999} \cdot a_{1.000} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_{1.000} = P_{999} \cdot a_{1.000} \Rightarrow a_{1.000} = \frac{(1.000)^3}{(999)^3} = \left(\frac{1.000}{999}\right)^3$$

Para obtermos o termo geral, observe:

$$P_n = P_{n-1} \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \therefore a_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^3 ; n > 1.$$

Progressão aritmética (PA)

Vamos agora estudar uma sequência numérica, ou seja, aquela função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, na qual existe uma lei de formação entre seus termos.

Uma sequência é definida como **progressão aritmética** (PA) quando cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior mais uma constante que denominamos de r (razão da PA). Assim:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r \qquad \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r; n \geq 2 \end{cases}$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r \qquad \textit{Lei de Recorrência}$$

Observe que para obtermos a razão de uma PA, basta subtrairmos termos consecutivos da recorrência:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = r$$

Classificação de uma PA

Quanto ao número de termos, as PAs podem ser:

$$\text{Limitadas}: (1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11) \begin{cases} r = 2 \\ n = 6 \end{cases}$$

$$\text{Ilimitadas}: (-3;\ 0;\ 3;\ 6;\ 9;\ldots) \begin{cases} r = 3 \\ n = \infty \end{cases}$$

Quanto ao crescimento dos seus termos, as PAs podem ser:

Estacionárias: $r = 0$

Crescentes: $r > 0$

Decrescentes: $r < 0$

Termo geral da PA

Observe as $(n - 1)$ equações que vamos escrever conforme a definição da PA:

$$\begin{array}{l} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ a_5 = a_4 + r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_{n-1} + r \\ \hline a_n = a_1 + \underbrace{r + r + \ldots + r}_{(n-1)\text{ termos}} \end{array} + \quad \text{Somando todas as equações e cancelando os termos}$$

Assim, chegamos à fórmula do termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1).\ r;\ n \geq 1$$

Exercícios resolvidos

5 Dada uma PA em que $a_1 = 5$ e $r = 2$, determine o termo da 30ª posição.

Resolução:

Vamos inicialmente obter a fórmula do termo geral:

$a_n = 5 + (n - 1).\ 2 \ \therefore\ a_n = 5 + 2n - 2$

$\therefore a_n = 2n + 3$, *assim* $a_{30} = 2(30) + 3 = 63$

6 Obter a razão da PA, em que o 1º termo é -8 e o vigésimo é 30.

Resolução:

Pelo termo geral, temos:

$a_{20} = a_1 + (20 - 1)r$

$30 = -8 + 19r \therefore 38 = 19r \therefore r = 2$

7 Qual é a PA em que o 6º termo é 7 e o 10º termo é 15?

Resolução:

Pela fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, *temos:*

$a_6 = a_1 + 5r$ e $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 5r = 7 \\ a_1 + 9r = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow 9r - 5r = 15 - 7 \therefore 4r = 8 \therefore r = 2$

$a_1 + 5.\ 2 = 7 \therefore a_1 = -3$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, *temos:*

$a_6 = a_1 + 5r$ e $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 5r = 7 \\ a_1 + 9r = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow 9r - 5r = 15 - 7 \therefore 4r = 8 \therefore r = 2$

$a_1 + 5.\ 2 = 7 \therefore a_1 = -3$

Logo: PA $(-3; -1; 1; 3; 5 \ldots)$

8 Determine quantos múltiplos de 6 existem entre 10 e 1.000.

Resolução:

Existem muitos exercícios baseados nessa ideia. Os naturais múltiplos de 6 são termos da PA em que $a_1 = 0$ *e* $r = 6$*, observe:* $(0; 6; 12; 18; 24 \ldots)$.

Para calcular o número de múltiplos de 6 do intervalo dado, precisamos obter a posição do último múltiplo de 6 menor do que 1.000. Então:

$$\begin{array}{r|l} 1.000 & 6 \\ \hline 4 & 166 \end{array} \Rightarrow 1.000 = 4 + 6(166)$$

Essa expressão indica que 1.000 é um múltiplo de 6 mais 4. Logo, (1.000 – 4) = 996 é o último múltiplo de 6, e 12 é o primeiro múltiplo.

$$\begin{cases} r = 6 \\ a_1 = 12 \\ a_n = 996 \end{cases} \Rightarrow \textit{O valor de n indicará o número de múltiplos de 6.}$$

$996 = 12 + (n - 1)6 \ \therefore\ 996 = 12 + 6n - 6 \ \therefore$
$6n = 990 \therefore n = 165$

Há 165 múltiplos de 6.

9 Determinar x de modo que $(x;\ 3x + 1;\ 4x + 5)$ seja uma PA.

Resolução:

Temos PA $(a_1;\ a_2;\ a_3)$*, então devemos ter*

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 =$ *razão* $(3x + 1) - (x) = (4x + 5) - (3x + 1)$

$\therefore 2x + 1 = x + 4$.

$x = 3$. *Substituindo na expressão para confirmarmos, temos:* $(3; 10; 17) \ldots r = 7$

Interpolação aritmética

Interpolar, inserir ou intercalar **n meios aritméticos** entre dois números α e β é obter uma PA finita em que α é o 1º termo e β o termo de ordem n + 2. Observe o esquema a seguir.

$$\overbrace{\alpha\ \underbrace{\text{―――――――――}}_{n\ \text{termos}}\ \beta}^{n+2\ \text{termos}}$$

Aplicando o termo geral, temos:

$$a_{n+2} = a_1 + [(n+2)-1]r$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha + (n+1)r \Rightarrow r = \frac{\beta - \alpha}{n+1}$$

Atenção!

A razão da PA formada pela interpolação de n meios entre α e β é: $r = \dfrac{\beta - \alpha}{n+1}$

Exercícios resolvidos

10 Inserir 6 meios aritméticos entre 2 e 23.

$$\overbrace{2\ \underbrace{\text{- - - - - - - - - - - - - -}}_{6\ \text{termos}}\ 23}$$

Resolução:

O termo 23 ocupa a 8ª posição, assim 23 = 2 + (8 – 1) r ∴
∴ 21 = 7r ∴ r = 3
A sequência é: (2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23).

11 Quantos meios aritméticos devem ser interpolados entre 12 e 34 para que a razão da interpolação seja $\frac{1}{2}$?

Resolução:

$$12\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{k\ \textit{meios aritméticos}}\ 34$$

$$34 = 12 + [(k+2)-1]\frac{1}{2} \therefore 22 = (k+1)\frac{1}{2}$$

$$44 = k + 1 \therefore = 43$$

Propriedade da média aritmética

(a; b; c) são termos consecutivos de uma PA se, e somente se, $b = \dfrac{a+c}{2}$.

Demonstração:

Se PA (a;b;c) $\Rightarrow b = \dfrac{a+c}{2}$

Pela definição de PA, b – a = c – b = r, então:

$2b = a + c \therefore b = \dfrac{a+c}{2}$

Se $b = \dfrac{a+c}{2} \Rightarrow$ PA (a;b;c)

$b = \dfrac{a+c}{2} \therefore 2b = a + c \therefore b + b = a + c$

b – a = c – b = constante, logo, formam uma PA.

Exercício resolvido

12 Sabendo-se que a sequência (1 – 3x; x – 2; 2x + 1) é uma PA, determine o valor de x.

Resolução:

Utilizando a propriedade, temos:

$$(x-2) = \frac{(1-3x)+(2x+1)}{2}$$

$$\therefore 2x - 4 = 2 - x \ \therefore\ 3x = 6 \therefore x = 2$$

Notações especiais

Algumas notações podem facilitar a resolução de problemas. Observe a tabela a seguir.

Nº de termos	Representação dos termos
3	x – r; x; x + r
4	x –3a; x – a; x + a; x + 3a r = 2a
5	x – 2r; x – r; x; x + r; x + 2r
6	x – 5a; x – 3a; x – a; x + a; x + 3a; x + 5a
7	x – 3r; x – 2r; x – r; x; x + r; x + 2r; x + 3r

Tab. 1 Representação dos termos de uma PA.

Quando n é ímpar, fixamos o termo central e, de maneira simétrica, vamos acrescentando e depois diminuindo r.

Quando n é par, não existe termo central, utilizamos o artifício r = 2a.

Exercício resolvido

13 A soma de quatro termos consecutivos de uma PA é –6, o produto do primeiro deles pelo quarto é –54. Determinar esses termos.

Resolução:

Utilizando as notações especiais, temos:

x – 3a; x – a; x + a; x + 3a ⇒ r = 2a

Assim:

$(x - 3a) + (x - a) + (x + a) + (x + 3a) = -6$

$4x = -6 \ \therefore\ x = -\dfrac{3}{2}$

$(x-3a).(x+3a) = -54 \therefore x^2 - 9a^2 = -54$

$x^2 + 54 = 9a^2 \therefore \dfrac{9}{4} + 54 = 9a^2 \therefore \dfrac{1}{4} + 6 = a^2$

$a^2 = \dfrac{25}{4} \Rightarrow a = \pm\dfrac{5}{2}$

Obtemos assim: (– 9; – 4; 1; 6) ou (6; 1; – 4; – 9).

Propriedade dos termos equidistantes dos extremos

Considere a sequência finita:

$(a_1; a_2; \ldots a_p; \ldots; a_q; \ldots; a_{n-1}; a_n)$

Os termos a_p e a_q são ditos equidistantes dos extremos se a quantidade de termos que anteceder a_p for igual à quantidade de termos que sucede a_q.

Assim, se a_p e a_q são equidistantes, $p - 1 = n - q \Rightarrow p + q = n + 1$.

Vamos comparar a_p e a_q:

$$\begin{array}{l} a_p = a_1 + (p-1)r \\ a_q = a_1 + (q-1)r \quad + \\ \hline a_p + a_q = 2a_1 + (p+q-2)r \end{array}$$

Mas:

$p + q = n + 1 \Rightarrow a_p + a_q = 2a_1 + (n - 1)$

$r_p + q = n + 1 \Rightarrow a_p + a_q = 2a_1 + (n - 1)\ r$

$$a_p + a_q = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1).\,r}_{a_n} \therefore a_p + a_q = a_1 + a_n$$

ATENÇÃO!

A soma de dois termos equidistantes de uma PA é constante, e a soma dos índices dos termos é n + 1.

Exemplo 4

Para fixar melhor o conceito, observe a seguinte PA.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
–2	1	4	7	10	13	16	19	22	25

$a_1 + a_{10} = -2 + 25 = 23$

$a_2 + a_9 = 1 + 22 = 23$

$a_3 + a_8 = 4 + 19 = 23$

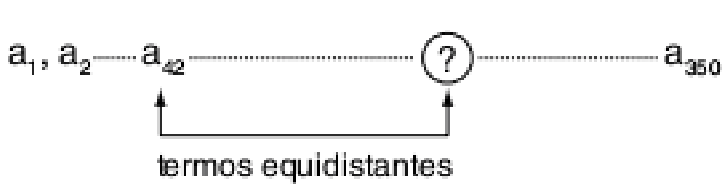
$a_4 + a_7 = 7 + 16 = 23$

$a_5 + a_6 = 10 + 13 = 23$

Observe que a soma desses termos é constante e vale 23, e a soma de seus índices é n + 1 = 10 + 1 = 11.

Exemplo 5

A propriedade dos índices mostra-se mais útil quando a PA possui muitos termos, observe:



Seja q o índice do termo equidistante de a_{42}.

$n = 350 \Rightarrow 42 + q = 350 + 1 \therefore q = 309$

Portanto, a_{42} e a_{309} são equidistantes e
$a_{42} + a_{309} = a_1 + a_{350}$

Soma dos n primeiros termos de uma PA

Vamos nos basear na propriedade:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = S_n \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1 = S_n \end{cases} \\ \hline (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots\ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = 2S_n \end{array}$$

Como nós invertemos os termos da PA, colocamos termos equidistantes juntos, formando n pares todos iguais a $(a_1 + a_n)$. Assim:

$$n(a_1 + a_n) = 2S_n \therefore S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exercícios resolvidos

14 Calcule a soma de todos os números naturais de 1 a 100, sem a aplicação direta da fórmula, como fez o pequeno Gauss aos 9 anos.

Resolução:

$$\begin{array}{l} S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 98 + 99 + 100 \\ S_{100} = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{100} = \underbrace{(101) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (101)}_{100\ termos} \end{array}$$

$2S_{100} = (100)(101) \Rightarrow S_{100} = 5.050$

15 Calcule a soma dos 30 termos iniciais da PA (1; 7; 13...).

Resolução:

Pela fórmula, temos:

$S_{30} = (a_1 + a_{30})\dfrac{30}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1)r \therefore a_n = 1 + (n-1)6$

Assim:

$a_{30} = 1 + (30 - 1)6 = 175$ e $S_{30} = (1 + 175) \cdot (15) = 2.640$

16 Qual é a soma dos 120 primeiros números pares positivos?

Resolução:

A PA é (2; 4; 6 ...), precisamos encontrar o termo da posição 120, $a_{120} = 2 + (120 - 1)$
$2 = 240$

Assim: $S_{120} = (2 + 240)\dfrac{120}{2} = 14.520$

17 Qual é a soma dos múltiplos de 11 compreendidos entre 100 e 10.000?

Resolução:

A PA é (110; 121; 132....), precisamos encontrar o último múltiplo menor do que 10.000.

$$\begin{array}{l|l} 10.000 & 11 \\ \hline \ \ 100 & 909 \\ \ \ \ \ 1 & \end{array} \Rightarrow 10.000 = 11(909) + 1$$

Assim 10.000 – 1 = 9.999 é o último múltiplo.
Mas qual a sua posição?
$9.999 = 110 + (n - 1)11 \therefore n = 900$

Assim: $S = \dfrac{(110 + 9.999)(900)}{2} \therefore S = 4.549.050$

Progressão geométrica (PG)

Uma sequência é definida como progressão geométrica (PG) quando cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante que denominamos de q (razão da PG).

Assim:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned} \qquad \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q;\ n \geq 2 \end{cases}$$

Lei de Recorrência

Observe que para obtermos a razão de uma PG, basta dividirmos termos consecutivos da sequência:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Classificação da PG

Quanto ao número de termos, as progressões geométricas podem ser:

$$\text{Limitadas: } (2; 4; 8; 16; 32) \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \\ n = 5 \end{cases}$$

$$\text{Ilimitadas: } \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots\right) \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = \frac{1}{2} \\ n = \infty \end{cases}$$

Quanto à convergência:

Convergentes: $\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27} \ldots\right) q = \frac{1}{3}$ ou também $\left(-2; -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \ldots\right) q = \frac{1}{2}$, quando os termos tendem a zero.

Divergentes: (2; 6; 18; 54; ...) q = 3 ou também
(– 2; – 4;– 8; – 16) q = 2, quando os termos tendem a $+\infty$ ou $-\infty$.

Quanto ao crescimento de seus termos, as PGs podem ser:

- Crescentes:
  $\left.\begin{aligned} a_1 > 0 \text{ e } q > 1 \\ a_1 < 0 \text{ e } 0 < q < 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

- Constantes ou estacionárias:
  $\left.\begin{aligned} q = 1 \\ \text{ou} \\ a_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1} = a_n$

- Decrescentes:
  $\left.\begin{aligned} a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1 \\ a_1 < 0 \text{ e } q > 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

- Alternantes:
  $a_1 \neq 0 \text{ e } q < 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n < 0$

- Singulares:
  $a_1 \neq 0 \text{ e } q = 0 \Rightarrow a_n = 0; \forall n > 1$

Fórmula do termo geral da PG

Observe as (n – 1) equações que vamos escrever conforme a definição da PG:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ a_5 &= a_4 \cdot q \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \\ \hline a_n &= a_1 \cdot \underbrace{(q \cdot q \ldots q)}_{n-1 \text{ termos}} \end{aligned} \qquad \times \quad \begin{aligned} &\text{Multiplicando todas} \\ &\text{as equações e cancelando} \\ &\text{os termos} \end{aligned}$$

Assim, chegamos à fórmula do termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1};\ n \geq 1$$

Exercícios resolvidos

18 Obtenha o 10º e o 16º termo da PG (1; 2; 4; 8...).

Resolução:
Percebemos que $a_1 = 1$ *e* $q = 2$, *assim:*

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2^9 = 512$

$a_{16} = 1 \cdot (2)^{15} = 32.768$

19 Em uma PG de razão positiva, temos $a_5 = 10$ e $a_7 = 16$. Calcule o 6º termo dessa PG.

Resolução:

$\left.\begin{aligned} a_5 = 10 = a_1 \cdot q^4 \\ a_7 = 16 = a_1 \cdot q^6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ *dividindo as equações*

$$\frac{16}{10} = \frac{q^6}{q^4} \therefore \frac{8}{5} = q^2 \Rightarrow q = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Queremos $a_6 = a_5 \cdot q = 10\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right) = 4\sqrt{10}$

20 Calcule o valor de x, tal que (x – 3; x + 1; 2x + 3) formam uma PG.

Resolução:
Temos PG $(a_1; a_2; a_3)$ *então:* $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = q$, *assim:*

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+3}{x+1} \Rightarrow (x+1)^2 = (2x+3) \cdot (x-3)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 6x + 3x - 9$$

$$\therefore x^2 - 5x - 10 = 0 \therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$$

21 São dados três números em PA crescente cuja soma é 18. Se multiplicarmos o 1º por 2 e o 2º por 3 e o 3º por 6, os produtos formarão uma PG. Determinar esses números:

Resolução:

PA $(x - r; x; x + r)$, mas $(x - r) + x + (x + r) = 18 \therefore x = 6$
PA $(6 - r; 6; 6 + r)$, que se transformará em uma PG $(12 - 2r; 18; 36 + 6r)$.

$$\Rightarrow \frac{18}{12-2r} = \frac{36+6r}{18} \therefore \frac{9}{6-r} = \frac{6+r}{3} \therefore 27 = 36 - r^2$$

$r^2 = 9 \therefore r = \pm 3$. Como a PA é crescente ($r > 0$), assim os números são (3; 6; 9).

Interpolação geométrica

Interpolar, inserir ou intercalar n meios geométricos entre dois números α e β é obter uma PG finita em que α é o 1º termo e β o termo de ordem $n + 2$.

Observe o esquema a seguir:

$$\overbrace{\alpha\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n\ \text{termos}}\ \beta}^{n+2\ \text{termos}}$$

Aplicando o termo geral, temos:

$$a_{n+2} = a_1 \,.\, q^{(n+2)-1} \therefore \beta = \alpha \,.\, q^{n+1}$$

$$q^{n+1} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \Rightarrow q = \sqrt[n+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

ATENÇÃO!

A razão da PG formada pela interpolação de n meios entre α e β é: $q = \sqrt[n+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$.

Exercícios resolvidos

22 Interpolar entre os números 1 e 10 nove meios geométricos. Calcule a razão da PG.

Resolução:

$$\overbrace{1\ \underbrace{-----------}_{9\ \text{termos}}\ 10}$$

O termo 10 ocupa a 11ª posição, assim:

$$10 = (1).\, q^{11-1} \therefore 10 = q^{10} \therefore q = \sqrt[10]{10}$$

23 Interpole três meios geométricos entre 4 e 324.

Resolução:

$$4\ \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{3\ \text{termos}}\ 324$$

$$324 = 4q^{5-1} \therefore 81 = q^4 \therefore q = \pm 3$$

$q = 3 \quad (4; 12; 36; 108; 324)$

$q = -3 \; (4; -12; 36; -108; 324)$

Propriedade da média geométrica

(a; b; c) são termos consecutivos de uma progressão geométrica se, e somente se, $b^2 = ac$.

Demonstração:

Se PG (a; b; c) $\Rightarrow b^2 = ac$.

Pela definição de PG, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$, então: $b^2 = ac$.

Se $b^2 = ac \Rightarrow bb = ac \therefore \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow$ constante, logo, formam uma PG.

Exercícios resolvidos

24 Que número devemos subtrair de 3, 5 e 11 para que os resultados fiquem em PG?

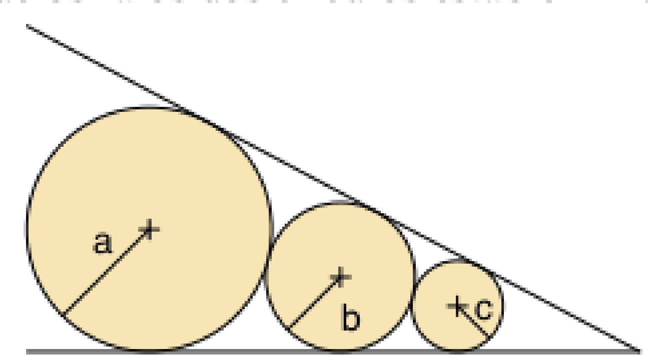
Resolução:

$$PG(3 - x; 5 - x; 11 - x) \Rightarrow (5 - x)^2 = (3 - x).(11 - x)$$

$$25 - 10x + x^2 = 33 - 3x - 11x + x^2 \therefore 4x = 8 \therefore x = 2$$

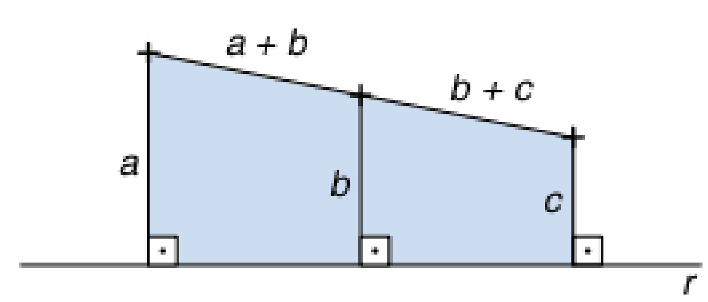
Assim: $(1; 3; 9) \Rightarrow q = 3$.

25 Considere a figura a seguir.
Demonstre que os raios dos círculos estão em PG.

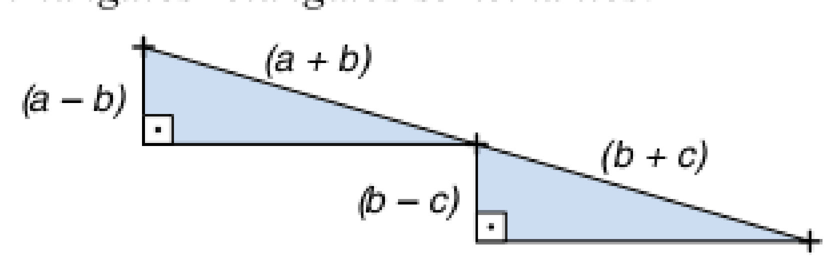


Resolução:

Vamos unir os centros e marcar os pontos de tangência:



Traçando retas paralelas à r pelos centros dos círculos, obtemos dois triângulos retângulos semelhantes:



$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a+b}{b+c} \therefore (a-b)(b+c) = (a+b)(b-c)$$

$$ab + ac - b^2 - bc = ab - ac + b^2 - bc \therefore 2ac = 2b^2$$

$$b^2 = ac \Rightarrow (c; b; a) \text{ formam uma PG.}$$

Notações especiais

Para reduzir os cálculos em alguns problemas, podemos utilizar as seguintes notações da tabela 2.

Nº de termos	Representação dos termos
3	$\frac{x}{q};x;xq$
4	$\frac{x}{a^3};\frac{x}{a};xa;xa^3 \quad q=a^2$
5	$\frac{x}{q^2};\frac{x}{q};x;xq;xq^2$
6	$\frac{x}{a^5};\frac{x}{a^3};\frac{x}{a};xa;xa^3;xa^5$
7	$\frac{x}{q^3};\frac{x}{q^2};\frac{x}{q};x;xq;xq^2;xq^3$

Tab. 2 Representação dos termos de uma PG.

Quando n é impar, fixamos o termo central e, de maneira simétrica, vamos multiplicando e dividindo os termos por q.

Quando n é par, não existe termo central, utilizamos o artifício $q = a^2$.

Exercícios resolvidos

26 Obter a PG de 4 elementos em que a soma dos dois primeiros é 12 e a soma dos dois últimos é 300.

Resolução:

Vale salientar que as notações especiais são interessantes para facilitar o problema quando temos o produto dos termos, pois:

$$\frac{x}{q}.x.xq = x^3$$

$$\frac{x}{a^3}.\frac{x}{a}.xa.xa^3 = x^4$$

Observe que ficamos com uma única incógnita!

No exemplo dado não temos o produto dos termos. Então vamos utilizar uma notação simples:

$$PG\ (x;\ xq;\ xq^2;\ xq^3)$$

$$\begin{cases} x + xq = 12 \\ xq^2 + xq^3 = 300 \end{cases} \quad \text{dividindo as equações, temos:}$$

$$\frac{x(1+q)}{xq^2(1+q)} = \frac{12}{300} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1}{25} \therefore q = \pm 5$$

Vamos considerar q = 5, (q = – 5) vai inverter a ordem dos termos.

$x\ (1 + 5) = 12 \ \therefore x = 2$

Assim: $(2;\ 10;\ 50;\ 250)$.

27 Determinar cinco números racionais em PG sabendo que sua soma é $\frac{112}{3}$ e seu produto 243.

Resolução:

Como foi explicado no exercício anterior, vamos agora utilizar a notação especial:

$$PG\left(\frac{x}{q^2};\frac{x}{q};x;xq;xq^2\right)$$

$$\frac{x}{q^2}.\frac{x}{q}x.\ xq.\ xq^2 = 243 \therefore x^5 = 243 \therefore x = 3$$

$$Assim: \left(\frac{3}{q^2};\ \frac{3}{q};\ 3;\ 3q;\ 3q^2\right) \text{é a PG}$$

$$\frac{3}{q^2} + \frac{3}{q} + 3 + 3q + 3q^2 = \frac{112}{3} \therefore \left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + \left(q + \frac{1}{q}\right) = \frac{112}{9}$$

Vamos utilizar um novo artifício para facilitar o problema:

$$fazendo\ q + \frac{1}{q} = \alpha \Rightarrow q^2 + 2q.\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} = \alpha \Rightarrow \left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) = \alpha^2 - 2$$

A equação é redutível ao 2º grau!

$$(\alpha^2 - 2) + \alpha = \frac{112}{9} \therefore \alpha^2 + \alpha - \left(2 + \frac{112}{9}\right) = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - \frac{130}{9} = 0 \therefore 9\alpha^2 + 9\alpha - 130 = 0$$

$$raízes: \frac{10}{3}\ e\ \frac{-39}{9}$$

Voltando para a variável original:

$$q + \frac{1}{q} = \frac{10}{3} \therefore 3q^2 - 10q + 3 = 0 \text{ raízes } 3 \text{ e } \frac{1}{3}$$

$$q + \frac{1}{q} = -\frac{39}{9} \rightarrow \text{raízes não convém!}$$

$$Assim \begin{cases} x = 3 \\ q = 3 \end{cases} \left(\frac{1}{3};\ 1;\ 3;\ 9;\ 27\right) \text{e se} \begin{cases} x = 3 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \left(27;\ 9;\ 3;\ 1;\ \frac{1}{3}\right)$$

28 Determine três números em PG, sabendo que o produto vale 27 e a soma $\frac{21}{2}$.

Resolução:

$$\text{Notação especial} \Rightarrow \left(\frac{x}{q};\ x;\ xq\right)$$

$$\frac{x}{q}.\ x.\ xq = 27 \therefore x^3 = 27 \therefore x = 3$$

$$\frac{3}{q} + 3 + 3q = \frac{21}{2} \therefore \frac{3}{q} + 3q = \frac{15}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{q} + q = \frac{5}{2} \therefore 2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$raízes:\ 2\ e\ \frac{1}{2} \Rightarrow q = 2\ ou\ q = \frac{1}{2}$$

$$se\ q = 2 ...... \left(\frac{3}{2};\ 3;\ 6\right)$$

$$se\ q = \frac{1}{2} ...... \left(6;\ 3;\ \frac{3}{2}\right)$$

>> No exercício 27, resolvemos uma equação chamada recíproca! Se achou complicado, vá para o exercício resolvido 28, porque a ideia é a mesma!

Propriedade dos termos equidistantes dos extremos

Como foi visto na PA, os termos a_k e a_l são equidistantes dos extremos, se a quantidade de termos que antecede a_k é igual à quantidade de termos que sucedem a_l. Assim:

$$(a_1 \ldots\ldots a_k \ldots\ldots a_\ell \ldots\ldots a_n)$$

$$k-1 = n-\ell \therefore k+\ell = n+1$$

Vamos comparar a_k e a_l:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$
$$a_\ell = a_1 \cdot q^{\ell-1} \quad \times$$
$$a_k \cdot a_\ell = a_1^2 \cdot q^{(k-1)+(\ell-1)} \Rightarrow$$
$$a_k \cdot a_\ell = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{(k+\ell)-2} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n+1-2}$$
$$\therefore a_k \cdot a_\ell = \underbrace{a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n} \Rightarrow a_k \cdot a_\ell = a_1 \cdot a_n$$

ATENÇÃO!

O produto de dois termos equidistantes dos extremos de uma PG é constante, e a soma dos índices dos termos é n + 1.

Exercício resolvido

29 Para fixar bem a propriedade, observe a tabela a seguir.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Resolução:

$$a_1 \cdot a_9 = 8 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$
$$a_2 \cdot a_8 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$
$$a_3 \cdot a_7 = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$
$$a_4 \cdot a_6 = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$a_5 \cdot a_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (a_5 \text{ é equidistante dele mesmo})$$

Observe que o produto dos termos equidistantes é constante e vale $\frac{1}{4}$, e a soma de seus índices é n + 1 = 9 + 1 = 10.

Soma dos n primeiros termos de uma PG

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$$

Multiplicando a equação (I) por q, em ambos os membros, temos:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots\ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$
$$\therefore q \cdot S_n = a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + a_{n+1} \quad \text{(II)}$$

Fazendo (I) – (II), temos:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_{n+1} \therefore S_n(1-q) = a_1 - a_1 \cdot q^n$$
$$S_n(1-q) = a_1 \cdot (1-q^n) \therefore$$
$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q} \text{ ou } S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n-1)}{q-1}$$

Exercícios resolvidos

30 Calcular a soma dos 10 termos iniciais da PG (1; 2; 4; 8...).

Resolução:

$$S_{20} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{1(2^{10}-1)}{2-1} = 1.023$$

31 Quantos termos da PG (1; 3; 9; 27...) devem ser somados para que a soma dê 3.280?

Resolução:

$$S_n = 1 \cdot \frac{(3^n-1)}{3-1} \therefore 3.280 = \frac{3^n-1}{2} \therefore 3^n = 6.561 \therefore 3^n = 3^8 \therefore n = 8$$

32 Os extremos de uma progressão geométrica crescente são 1 e 243.
Se a soma dos termos dessa progressão é 364, determine a razão e o número de termos da PG.

Resolução:

(1; ....; 243)

$$a_n = 1 \cdot q^{n-1} \therefore q^{n-1} = 243 \therefore q^n = 243q$$
$$S_n = a_1 \frac{(q^n-1)}{q-1} \therefore 364 = \frac{q^n-1}{q-1}$$
$$\Rightarrow 364 = \frac{243q-1}{q-1} \therefore 364q - 364 = 243q - 1$$
$$\therefore 121q = 363 \therefore q = 3$$

Substituindo na equação:

$$q^n = 243q \therefore (3)^n = (243) \cdot 3$$
$$3^n = 729 \Rightarrow n = 6$$

Limite da soma dos termos de uma PG infinita

Observe a sequência infinita:

(2; 6; 18; 54...), os termos vão aumentando e a sequência vai *divergindo*. Não conseguimos calcular o limite dessa soma.

No caso da sequência $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8} \ldots\right)$, os termos vão diminuindo e a sequência vai **convergindo** a zero. Nesse caso, conseguimos calcular o limite dessa soma.

Sabemos que $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$

Fazemos $n \to \infty$ e $(q)^\infty \to 0$ se $-1 < q < 1$

Então: $S_\infty = \dfrac{a_1 \cdot \left[1-(q)^\infty\right]}{1-q} \therefore S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$

Exercícios resolvidos

33 Calcule o limite da soma em cada sequência a seguir.

a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...$

b) $2 + 4 + 8 + 16 + ...$

Resolução:

Na 1ª sequência, temos $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

Na 2ª sequência, temos $S_\infty = \frac{2}{1-2} = -2$

Esse resultado é um absurdo!
Não podemos aplicar a fórmula para uma sequência divergente!

34 Calcule x na equação seguinte:

$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+......=100$

Resolução:

$x.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....\right)=100$

$\therefore x.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=100 \therefore x.(2)=100 \therefore x=50$

35 Calcule a fração geratriz da dízima periódica 0,2222...

Resolução:

Observe que 0,2222... = 0,2 + 0,02 + 0,002 + ...
Trata-se de uma PG infinita, assim:

$$S=\frac{0,2}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{10}}=\frac{2}{9}$$

Produto dos n primeiros termos de uma PG

Sabemos que em uma PG o produto dos termos equidistantes é constante, então:

$$P_n = a_1 . a_2 . a_3 . .... . a_{n-2} . a_{n-1} . a_n \quad (I)$$
$$P_n = a_n . a_{n-1} . a_{n-2} . .... . a_3 . a_2 . a_1 \quad (II)$$

Na equação II, invertemos a ordem dos termos, e os correspondentes estão na equação I. Fazendo (I) · (II), temos:

$$(P_n)^2 = \underbrace{(a_1 . a_n)(a_2 . a_{n-1}) ..... (a_{n-1} . a_2)(a_n . a_1)}_{\text{n grupos}}$$

$$(P_n)^2 = (a_1 . a_n)n \text{ ou } |P_n| = \sqrt{(a_1 . a_n)^n}$$

Podemos continuar os cálculos:

$$(P_n)^2 = a_1{}^n . a_n{}^n \therefore (P_n)^2 = a_1{}^n (a_1 . q^{n-1})^n$$

$$\therefore (P_n)^2 = a_1{}^{2n} . q^{n(n-1)} \Rightarrow P_n = a_1{}^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Exercícios resolvidos

36 Calcule o produto dos 10 primeiros termos da PG (1; 2; 4; 8...).

Resolução:

$P_{10} = (1)^{10} . (2)^{\frac{10(10-1)}{2}} = 2^{45}$

37 Em uma PG, o 1º termo é 1, e o 6º termo é 32. Calcule o produto dos seis primeiros termos dessa progressão.

Resolução:

$a_1 = 1$ *e* $a_6 = 32 \therefore a_6 = a_1 . q^5 \therefore 32 = q^5 \therefore q = 2$

Assim: $P_6 = (1)^6 . 2^{\frac{6(6-1)}{2}} = 2^{15} = 32.768$

38 Para encerrarmos este capítulo, observe este belo problema. Considere a sequência (2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; ...), que são os múltiplos de 3 ou 2. Qual o termo da posição 149?

Resolução:

Observe a sequência:
(2; 3; 4; ***6****; 8; 9; 10;* ***12****; 14; 15; 16;* ***18****; 20; 21; 22;* ***24****; ...)*
(6; 12; 18; 24; 30; ...) é a sequência formada pelos múltiplos de 2 e 3, que são os múltiplos de 6.
Na sequência inicial, os múltiplos de 6 aparecem a cada quatro termos (período igual a 4).
Para saber quantos múltiplos de 6 "cabem dentro" de 149, efetuamos a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 149 & 4 \\ \hline 29 & 37 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 149 = 37 . 4 + 1$$

Temos 37 múltiplos de 6. Como os múltiplos de 6 formam uma PA de $a_1 = 6$ *e* $r = 6$*, temos*

$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 6 \therefore a_n = 6n$

O 37º múltiplo de 6 é 6 · 37 = 282
Mas na divisão efetuada, temos resto 1, assim o 149º termo vem logo após 282, ou seja, 284.

Revisando

1 Considerando uma sequência de termo geral $a_n = \frac{1}{n^2 + n}$, calcule o valor de sua somatória S_n geral para todo n natural não nulo.

2 Quantos números inteiros existem de 1 até 10.000, que não sejam divisíveis nem por 5 e nem por 7?

3 A soma de três números em PG é 19. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma PA. Calcule-os.

4 Os lados de um triângulo retângulo formam uma PG crescente. Determine a razão dessa progressão.

5 No triângulo equilátero de lado a, constrói-se outro triângulo equilátero nos pontos médios de seus lados. Esse processo é feito indefinidamente gerando infinitos outros triângulos equiláteros. Determine o limite da soma dos perímetros desses triângulos.

Exercícios propostos

Definição de PA e o termo geral

1 Se 11x e (13x + 1) são os dois primeiros termos de uma PA de razão R = 5, calcule:

a) o valor de x.
b) o décimo termo.

2 **UFBA** Sabendo que a sequência (1 – 3x; x – 2; 2x + 1) é uma PA, determinar o valor de x.

(a) 2
(b) 0
(c) 3
(d) 4
(e) 6

3 Dada a PA (–17; –11, –5; 1, ...), pedem-se:

a) o termo da posição 56.
b) o n-ésimo termo, em função de n.

4 Na PA (4; x; 10; y), calcule x e y.

5 Em uma PA, sabe-se que $a_{10} = 10$ e $a_{12} = 22$. O décimo terceiro termo é:

(a) 34
(b) 24
(c) 28
(d) 30
(e) 44

6 Em uma PA de quatro termos, a soma de seus termos é 42. Sabendo-se que o 1º termo é 3, calcule a razão.

(a) 8
(b) 3
(c) 15
(d) 5
(e) 10

7 Sendo o terceiro termo de uma PA igual a 21 e o oitavo termo igual a 6, o seu vigésimo termo será:

(a) 10
(b) –10
(c) 30
(d) –30
(e) –15

8 Determine o centésimo número ímpar, e depois, em função de n, o n-ésimo termo.

9 Determine três números em uma PA, crescente, sabendo que sua soma é 21 e o produto 231.

10 Em uma PA a razão é 4, o 1º termo é igual ao número de termos e a soma dos termos é 133. Forme a progressão.

11 O número –593 e o –125 pertencem à progressão aritmética (123; 115; ...)?

12 Quantos múltiplos de 7 existem entre 100 e 2.000?

13 **Fuvest** Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros termos são: $1 - a$; $-a$; $\sqrt{11-a}$. O quarto termo dessa PA é:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

14 As medidas dos lados de um triângulo retângulo estão em PA de razão 2. Calcule as medidas dos lados do triângulo.

15 **UFRGS** Sendo a; b e c uma PA, a sequência $a + k$, $b + k$, $c + k \in \mathbb{R}$ pode também ser uma PA? Justifique.

16 **UFRJ** Determine cinco números em PA, conhecendo sua soma 20 e seu produto 3.024.

17 Mostrar que se a, b e c estão em PA, então a^2bc, ab^2c e abc^2 também são.

18 Obtenha x de modo que $(x^2; (x + 1)^2; (x + 3)^2)$ seja uma PA.

19 Interpolar 6 meios aritméticos entre 10 e 45 nessa ordem.

Soma dos termos de uma PA

20 Calcule a soma dos 30 primeiros termos da PA (3; 8; 13; 18; ...).

21 **FGV** Quantos termos devemos tomar na PA (–7; –3; ...) a fim de que a soma valha 2.840?

(a) 40
(b) 39
(c) 43
(d) 41
(e) 42

22 **UFG** Resolva a equação:
$(x - 1) + (2x - 3) + (3x - 5) + ... + (50x - 99) = 25$

23 Calcule x na equação: $1 + 4 + 7 + ... + x = 117$.

24 **FMABC-SP** Em uma PA, onde $S_2 = 10$ e $S_4 = 28$, o 1° termo é x^2 e a razão é x. Ache o valor de x.

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{-5}{2}$ (e) 2

25 Em um baile, há α rapazes e β moças. Um rapaz dança com 5 moças, um segundo rapaz dança com 6 moças e assim sucessivamente.
O último rapaz dança com todas as moças. Têm-se então:

(a) $\alpha = \frac{\beta}{5}$ (b) $\alpha = \beta - 5$ (c) $\alpha = \beta - 4$ (d) $\alpha = \beta$ (e) n.d.a.

26 De 100 a 1.000, quantos são os múltiplos de 2 ou 3?

27 **FGV** Um automóvel percorre no 1° dia de viagem uma certa distância x; no 2° dia percorre uma distância 2x; no 3° dia 3x, e assim por diante. Ao final de 20 dias, percorreu uma distância de 6.300 km. A distância percorrida no primeiro dia foi de:

(a) 15 km (b) 30 km (c) 20 km (d) 25 km (e) 35 km

28 **Fuvest** Determine a soma das frações irredutíveis, positivas, menores do que 10, de denominador 4.

(a) 200 (b) 100 (c) 80 (d) 120 (e) 220

29 **Cesesp** Dois andarilhos iniciam juntos uma caminhada. Um deles caminha uniformemente 10 km por dia, e o outro caminha 8 km no 1° dia e acelera o passo de modo que caminhe mais $\frac{1}{2}$ km a cada dia que se segue. Assinale a alternativa correspondente ao número de dias caminhados para que o segundo andarilho alcance o primeiro.

(a) 10 (b) 9 (c) 3 (d) 5 (e) 21

30 **FGV** O terceiro termo de uma progressão aritmética é 11 e a razão é 4. A soma dos 20 primeiros termos é:

(a) 790 (b) 800 (c) 810 (d) 820 (e) 830

31 **FGV** A soma dos 50 primeiros termos da PA, na qual $a_6 + a_{45} = 160$, é:

(a) 3.480 (b) 4.000 (c) 4.200 (d) 4.320 (e) 4.500

32 Considere a PA (–73; –69; ...). Determine o número mínimo de termos que devemos somar para que a soma seja positiva.

33 Achar a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais.

34 Dois móveis partem ao mesmo tempo de A e de B, e andam no mesmo sentido sobre a reta AB, A perseguindo B. O 1° percorre 1 m no 1° minuto, 3 m no 2°, 5 m no 3°, e assim por diante, de modo que sua velocidade cresce em PA. O 2° percorre 3 m no 1° minuto, 4 m no 2° , 5 m no 3° e assim por diante. Sabendo que a distância AB é de 75 m, calcular depois de quanto tempo o móvel A alcança o móvel B.

Problemas gerais envolvendo PA

35 **Fuvest** Os números inteiros positivos são dispostos em "quadrados" da seguinte maneira:

1	2	3	10	11	12	19	..	..		
4	5	6	13	14	15	..	..	..		...
7	8	9	16	17	18	..	..	..		

O número 500 encontra-se em um desses "quadrados". Determine em qual quadrado está, linha e coluna.

36 Interpolando-se m termos, $m \in \mathbb{N}$ e m > 1, entre os números 1 e m^2, obtém-se uma PA de razão igual a:

(a) $\sqrt{m+1}$
(b) $m + 2$
(c) $m - 1$
(d) $\dfrac{m^2+1}{m-2}$
(e) $\dfrac{m^2+1}{m-2}$

37 Calcular o 1° termo e a razão de uma PA cuja soma dos n primeiros termos é $n^2 + 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

38 Demonstre que se os números a, b e c estão em PA nessa ordem, também estarão em PA, nesta ordem, os números $b^2 + bc + c^2$; $c^2 + ac + a^2$; $a^2 + ab + b^2$.

39 **UFPR** Seja f uma função tal que f(1) = 2 e f(x + 1) = f(x) – 1. Então f(100) é igual a:

(a) – 99
(b) – 97
(c) 96
(d) 98
(e) 100

40 Qual é o 1° termo negativo da PA (271; 268; ...)?

41 Se a soma dos 6 primeiros termos de uma PA é 21 e o sétimo termo é o triplo da soma do terceiro com o quarto termo, então o primeiro termo dessa progressão é:

(a) –7
(b) –8
(c) –9
(d) –10
(e) –11

42 Se a soma dos n primeiros termos de uma PA é dada pela fórmula $S_n = \dfrac{3n^2+n}{2}$, então a soma do quarto com o sexto termo dessa PA é:

(a) 25
(b) 28
(c) 31
(d) 34
(e) 36

43 Quantos são os termos comuns às PAs {2; 5; 8; ...; 332} e {7; 12; 17; ...; 157}?

44 Se a sequência $(x_1; x_2; x_3; ...; x_n)$ é uma PA de termos positivos, prove que:

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}}+\sqrt{x_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_n}}$$

45 Podem os números $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ pertencer a uma mesma progressão aritmética?

46 Um jardineiro quer dispor triangularmente as 1.830 árvores de um parque em filas, de sorte que a primeira fila tenha uma árvore, a segunda duas, a terceira 3 etc. Quantas filas terá a disposição?

47 Determine a condição para que as raízes da equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$ formem uma PA. *Observação*: a equação dada é chamada de biquadrada.

48 Em uma PA com (2n + 1) termos, a soma dos n primeiros é igual a 50 e a soma dos n últimos é 140. Sabendo-se que a razão dessa progressão é um inteiro entre 2 e 13, então seu último termo será igual a:

(a) 34
(b) 40
(c) 42
(d) 48
(e) 56

Definição de PG e o termo geral

49 Escreva para a sequência a seguir sua lei de recorrência.

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{243}\right)$$

50 **Udesc** Se o primeiro termo vale 2 e a razão é 3, então os termos gerais da progressão aritmética e da progressão geométrica correspondentes são:

(a) $2 + 3n$ e $2 . \dfrac{3^n}{3}$
(b) $2 + 3n$ e $\dfrac{3^{n-1}}{2}$
(c) $3n - 1$ e $2 . 3^n$
(d) $3 + 2n$ e $3 . 2^n$
(e) $3n - 1$ e $\left(\dfrac{2}{3}\right) . 3^n$

51 **Cesgranrio** Um artigo custa hoje R$ 100,00 e seu preço é aumentado, mensalmente, em 12% sobre o preço anterior. Se fizermos uma tabela do preço desse artigo mês a mês, obteremos uma progressão:

(a) aritmética de razão 12.
(b) aritmética de razão 0,12.
(c) geométrica de razão 12.
(d) geométrica de razão 1,12.
(e) geométrica de razão 0,12.

52 **Cesgranrio** A população de certa cidade é, hoje, igual a P_0 e cresce 2% ao ano. A população dessa cidade daqui a n anos será:

(a) $P_0\left(1+\dfrac{n}{50}\right)$
(b) $P_0\left(1+\dfrac{n-1}{50}\right)$
(c) $P_0+\left(1+\dfrac{n-1}{50}\right)$
(d) $P_0 . 1,02^{n-1}$
(e) $P_0 . 1,02^n$

53 **FEI** Em relação à sequência:
log(1), log(5), log(25), ... log (5^{n-1}) é correto afirmar:

(a) todos os seus termos são maiores que zero.
(b) é uma progressão geométrica crescente.
(c) é uma progressão geométrica decrescente.
(d) é uma progressão aritmética crescente.
(e) é uma progressão aritmética decrescente.

54 **Mackenzie** Numa progressão geométrica de termos positivos, cada termo é igual à soma dos dois termos seguintes. Então a razão da progressão vale:

(a) $\sqrt{5}$
(b) $-1+\sqrt{5}$
(c) $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$
(d) $\sqrt{\frac{5}{2}}$
(e) $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

55 **Mackenzie** A sequência de números reais (loga, logb, logc) é uma progressão aritmética. Então é sempre verdadeiro que:

(a) (a, b, c) é uma progressão aritmética.
(b) $a > b > c$.
(c) (a, b, c) não é uma progressão aritmética nem geométrica.
(d) (a, b, c) é uma progressão geométrica.
(e) $a = b = c$.

56 **Mackenzie** Na sequência geométrica (x^2, x, logx), de razão q, x é um número real e positivo. Então, logq vale:

(a) 1
(b) – 1
(c) – 2
(d) 2
(e) $\frac{1}{2}$

57 **PUC-SP** O terceiro e o sétimo termos de uma progressão geométrica valem, respectivamente, 10 e 18. O quinto termo dessa progressão é:

(a) 14
(b) $\sqrt{30}$
(c) $2\sqrt{7}$
(d) $6\sqrt{5}$
(e) 30

58 **UEL** A sequência $(2x + 5, x + 1, \frac{x}{2}, ...)$, com $x \in \mathbb{R}$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo dessa sequência é:

(a) 2
(b) 3^{-10}
(c) 3
(d) 3^{10}
(e) 3^{12}

59 **UFRGS** A sequência (x, xy, 2x), $x \neq 0$ é uma progressão geométrica. Então, necessariamente:

(a) x é um número irracional.
(b) x é um número racional.
(c) y é um número irracional.
(d) y é um número racional.
(e) x/y é um número irracional.

60 **Vunesp** Considere as sequências (a_n) e (b_n) definidas por $a_{n+1} = 2^n$ e $b_{n+1} = 3_n$, $n \geq 0$. Então, o valor de $a_{11} \cdot b_6$ é:

(a) $2^{11} \cdot 3^6$
(b) $(12)^5$
(c) 5^{15}
(d) 6^{15}
(e) 6^{30}

61 **Uece** Seja (b_1, b_2, b_3, b_4) uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. Se $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 20$, então b_4 é igual a:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{5}{2}$
(d) $\frac{7}{2}$

62 **PUC-PR** Se $\log_3 a$, $\log_3 b$ e $\log_3 5$ formam uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$, então, conclui-se que a sequência (a, b, 5):

(a) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{4}$.
(b) tem $a = \frac{5}{3}$.
(c) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.
(d) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.
(e) tem $a = 4$.

63 Resolva a equação $ax^2 + bx + c = 0$, sabendo que a, b e c é uma PG, cuja soma dos termos é –31 e o produto 216.

64 Divida o número 7 em três partes formando uma PG, tal que o 3º termo exceda o 1º de 3 unidades.

65 Calcule a sabendo que $7 - a$; $(\sqrt{23 - a})$; $2 + a$ é PG.

66 A razão da PG cujos termos satisfazem as relações: $a_1 + a_3 + a_5 = 5$ e $a_2 + a_4 + a_6 = 10$ é:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) 1
(c) $\frac{3}{2}$
(d) 2
(e) 3

67 Determine três números em PG conhecendo sua soma 19 e a soma de seus quadrados 133.

68 Os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo estão em PA de razão 10. Determine os raios dos círculos inscrito (r) e circunscrito (R) ao triângulo.

69 **Unirio** O número que deve ser subtraído de 1, de $\frac{11}{8}$ e de $\frac{31}{16}$ para que os resultados formem uma PG, nessa mesma ordem, é:

(a) 2
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{4}$
(d) $\frac{1}{8}$
(e) $\frac{1}{16}$

PA e PG

70 **PUC-SP** Sabe-se que a sequência $\left(\frac{1}{3}, a, 27\right)$, na qual $a > 0$, é uma progressão geométrica e a sequência (x, y, z), na qual $x + y + z = 15$, é uma progressão aritmética. Se as duas progressões têm razões iguais, então:

(a) $x = -4$
(b) $y = 6$
(c) $z = 12$
(d) $x = 2y$
(e) $y = 3x$

71 **FGV** Os números x, y, z formam, nesta ordem, uma PA de soma 15. Por outro lado, os números x, y + 1 e z + 5 formam, nesta ordem, uma PG de soma 21. Sendo $0 \leq x \leq 10$, o valor de 3z é:

(a) 36
(b) 9
(c) – 6
(d) 48
(e) 21

72 Em uma PG de três termos, o primeiro termo, a razão, o último termo e a soma dos termos formam, nessa ordem, uma PA. Calcule os termos da PG.

73 Se a sequência de inteiros positivos (2; x; y) é uma PG e (x + 1; y; 11) uma PA, então o valor de x + y é:

(a) 11
(b) 12
(c) 13
(d) 14
(e) 15

74 Seja (x; y; z; w) uma progressão aritmética crescente cuja soma é 10 e (a; b; c; d) uma progressão geométrica com a + b = 1 e c + d = 9. Se ambas as sequências têm a mesma razão, então o produto yw é:

(a) – 8
(b) – 2
(c) 7
(d) 9
(e) 11

75 **Fuvest** Uma PA e uma PG têm, ambas, o 1° termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são positivos e coincidentes. Sabe-se ainda que o 2° termo da PA excede o 2° termo da PG em 2. Então, o 3° termo das progressões é:

(a) 10
(b) 12
(c) 14
(d) 16
(e) 18

76 **Fuvest** Três números positivos, cuja soma é 30, estão em progressão aritmética. Somando-se, respectivamente, 4, – 4 e – 9 aos primeiro, segundo e terceiro termos dessa progressão aritmética, obtemos três números em progressão geométrica. Então, um dos termos da progressão aritmética é:

(a) 9
(b) 11
(c) 12
(d) 13
(e) 15

77 Os números a, b e c (a, b, c $\neq$ 0) formam uma PA. Calcule-os, sabendo que se aumentarmos a de 1 ou aumentarmos c de 2, eles passam a constituir uma PG.

Soma dos termos de uma PG

78 **ITA** Seja (a_1, a_2, a_3, ...) uma progressão geométrica infinita de razão a_1, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos dessa progressão geométrica é:

(a) $\frac{8}{27}$
(b) $\frac{20}{27}$
(c) $\frac{26}{27}$
(d) $\frac{30}{27}$
(e) $\frac{38}{27}$

79 **Unitau** A soma dos termos da sequência $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{9};\frac{4}{27};...\right)$ é:

(a) $15 \cdot 10^{-1}$
(b) $-3 \cdot 10^{-1}$
(c) $15 \cdot 10^{-2}$
(d) $5 \cdot 10^{-1}$
(e) $\frac{3}{5}$

80 **UEL** A dízima periódica 0,303030... pode ser escrita na forma 0,30 + 0,0030 + 0,000030 + ... e sua fração geratriz pode ser determinada pela expressão:

(a) $\dfrac{\left(\frac{3}{100}\right)}{\left(1-\frac{1}{10}\right)}$
(b) $\dfrac{\left(\frac{3}{100}\right)}{\left(1-\frac{1}{100}\right)}$
(c) $\dfrac{\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(1-\frac{1}{100}\right)}$
(d) $\dfrac{\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(1-\frac{1}{10}\right)}$
(e) $\dfrac{3}{\left(1-\frac{1}{100}\right)}$

81 **UEL** Os divisores positivos do número 3^{10} são 3^0, 3^1, 3^2 etc. A soma de todos esses divisores é:

(a) $\frac{(3^{11}-1)}{2}$
(b) $\frac{(3^{10}-1)}{2}$
(c) $\frac{(3^{9}-1)}{2}$
(d) 3^{10}
(e) $3^{10}-1$

82 **Mackenzie** Para n inteiro positivo, quanto vale a soma:
$(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...+(10^n-1)$

83 Uma bola é lançada verticalmente ao solo de uma altura h. Cada vez que ela bate no solo, ela sobe a metade da altura que caiu. Calcule o comprimento total percorrido pela bola em sua trajetória até atingir o repouso.

84 Calcule a soma da série: $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+...$

85 A soma dos termos de ordem ímpar de uma PG infinita é 81, e a soma dos termos de ordem par é 27. O 1° termo da progressão é:

(a) 9
(b) 18
(c) 54
(d) 72
(e) 81

86 **Mackenzie** Sendo $S = 1 + 2x + 3x^2 + ...$ $(0 < x < 1)$, pode-se afirmar que:

(a) $S=\frac{1}{(1-x)^2}$
(b) $S=\frac{x}{(1-x)^2}$
(c) $S=\frac{2}{(2-x)^2}$
(d) $S=\frac{1}{(2-x)^2}$
(e) $S=\frac{x}{(2-x)^2}$

87 Calcule o valor da soma de n parcelas
$1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...1}_{n\text{ “uns”}}$.

88 **UEL** O valor da soma infinita $\frac{3}{4}-\frac{4}{9}+\frac{9}{16}-\frac{8}{27}+\frac{27}{64}-\frac{16}{81}+...$ é:

(a) $\frac{2}{3}$
(b) $\frac{5}{6}$
(c) $\frac{7}{6}$
(d) $\frac{5}{3}$
(e) $\frac{7}{3}$

89 Sabendo que a soma dos n primeiros termos da PG {a_1, a_2, ...}, de razão q, é S. Calcule a soma dos n primeiros termos da sequência $\left\{\frac{1}{a_1};\ \frac{1}{a_2};\ \frac{1}{a_3};...\right\}$.

90 Seja $S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, n número natural diferente de zero. O menor número n, tal que $S_n > 0,99$, é:

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8
(e) 9

91 Sabendo-se que o limite da soma $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \ldots$ é 100, determine o valor de x:

(a) 25
(b) 10
(c) 1
(d) 50
(e) 2

92 A soma $S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} + \ldots$ é:

(a) 2
(b) $\frac{2}{3}$
(c) 4
(d) $\frac{4}{3}$
(e) $\frac{8}{3}$

TEXTO COMPLEMENTAR

Álgebra Geométrica

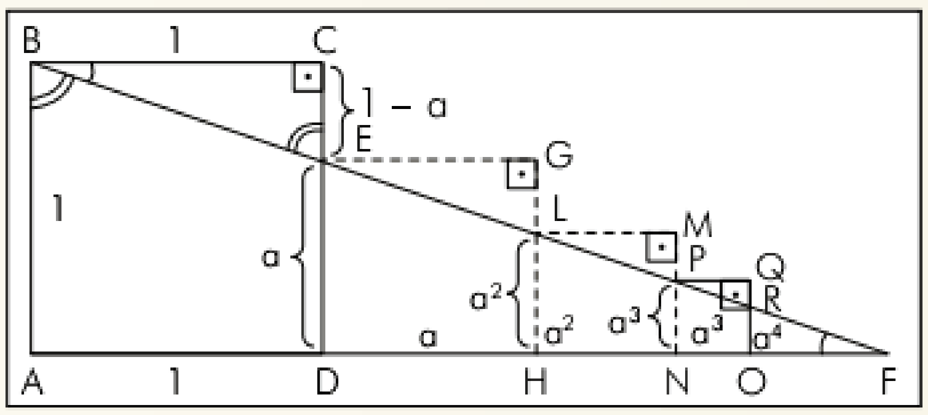
No capítulo 1 da Frente 3 mostramos métodos tradicionais para as demonstrações dos teoremas. Para complementar e relacionar os assuntos, observe a demonstração da soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) convergente.

Considere a PG infinita convergente

$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots$ em que $a < 1$.

Sabemos que $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, assim $S_\infty = \frac{1}{1-a}$.

Observe o quadrado ABCD de lado 1 e o segmento DE = a.



Soma dos termos de uma PG.

Prolongando $\overline{BE}$, encontramos F na reta $\overleftrightarrow{AD}$. Construímos um novo quadrado EDHG de lado a e LH = a^2. Os trapézios ABED e DELH são semelhantes.

Esse processo vai-se repetindo até o ponto F, ou seja, $AF = 1 + a + a^2 + \ldots$

Os triângulos BCE e FAB são semelhantes, então:

$$\frac{AF}{1} = \frac{1}{1-a} \therefore AF = \frac{1}{1-a}$$

mas $AF = 1 + a + a^2 + \ldots$, logo:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots = \frac{1}{1-a}$$

Calculamos assim geometricamente a soma dos termos da PG.

RESUMINDO

PA	PG
PA(a; b; c) ⇔ $b = \frac{a+c}{2}$	PG (a; b; c) ⇔ $b^2 = a \cdot c$
$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots\ldots$	$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots\ldots$
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$	$a_n = a_1 \cdot q_1^{n-1}$
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$

QUER SABER MAIS?

SITES

- Sequências de Fibonacci
  <www.sbfisica.org.br/fne/Vol5/Num2/v5n1a02.pdf>.
- Malthus e as progressões
  <www.ciencialivre.pro.br/11922/143581.html>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 Qual é a razão de uma PG de 3 termos, na qual a soma dos termos é 14 e o produto 64?

2 Prove que, se (x, y, z) é uma PG, então $(x + y + z)\cdot(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$

3 Os senos dos ângulos de um triângulo estão em PG. Nessas condições:
(a) o triângulo é necessariamente equilátero.
(b) o triângulo é necessariamente retângulo.
(c) o triângulo é necessariamente acutângulo.
(d) o triângulo é necessariamente obtusângulo.
(e) os lados do triângulo estão em PG.

4 Se (senx; sen2x; cosx) é uma progressão geométrica estritamente crescente, com $0 < x < 2\pi$, então o valor de x é:
(a) $\frac{\pi}{12}$
(b) $\frac{\pi}{10}$
(c) $\frac{\pi}{8}$
(d) $\frac{\pi}{6}$
(e) $\frac{2\pi}{3}$

5 **Fuvest** A sequência a_n é uma PA estritamente crescente, de termos positivos. Determine a natureza da sequência $b_n = 3a^n$; $n \geq 1$.

6 Seja (a_n) uma PG de 1º termo $a_1 = 1$ e razão q^2, $q \in Z$ e $q > 1$. Seja (b_n) uma PG cuja razão é q. Sabe-se que $a_{11} = b_{17}$. Nesse caso:
a) determine b_1 em função de q.
b) existe algum valor de n para o qual $a_n = b_n$?
c) que condição n e m devem satisfazer para que $a_n = b_m$?

7 **ITA** Determine o conjunto de todos os valores reais q tal que q > 1, para os quais a_1, a_2 e a_3 formam, nessa ordem, uma PG de razão q e representam as medidas dos lados de um triângulo.

8 Em uma PA com um número ímpar de termos, a soma dos termos de ordem ímpar é A e a soma dos termos de ordem par é B. Determine o número de termos da sequência.

9 Os comprimentos dos lados de um triângulo são três números consecutivos. Determine-os sabendo que o número que mede sua área é o dobro do número que mede seu perímetro.

10 Se $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ é uma PA de termos não nulos, mostre que: $\frac{1}{a_1 . a_2} + \frac{1}{a_2 . a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} . a_n} = \frac{n-1}{a_1 . a_n}$

11 Considere uma progressão geométrica, na qual o primeiro termo é a; a > 1, a razão é q, q > 1, e o produto dos seus termos é c. Se $\log_a b = 4$, $\log_q b = 2$ e $\log_c b = 0{,}01$, quantos termos tem esta progressão geométrica?
(a) 12
(b) 14
(c) 16
(d) 18
(e) 20

12 **ITA** Considere as seguintes afirmações sobre a expressão: $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8 \left(4^k . \sqrt{2}\right)$:
I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita.
II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão $\frac{2}{3}$.
III. $S = 3.451$.
IV. $S \leq 3.434 + \log_8 \sqrt{2}$.
Então pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas:
(a) I e III.
(b) II e III.
(c) II e IV.
(d) II.
(e) III.

13 Seja (a, b, c, d, e) uma progressão geométrica de razão a, com a > 0 e a ≠ 1. Se a soma de seus termos é igual a 13a + 12 e x é um número real positivo diferente de 1 tal que:

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x} + \frac{1}{\log_e x} = \frac{5}{2}$$

Calcule x.

14 Determine cinco números inteiros de uma PG, sabendo que a soma dos termos de ordem ímpar é 42 e a dos de ordem par, 20.

15 Demonstre que, sendo
$\lim_{n \to \infty} \left(1 + a + a^2 + \ldots. + a^n\right) = A \ (a < 1)$ e $\lim_{n \to \infty} \left(1 + b + b^2 + \ldots.. b^n\right) = B \ (b < 1)$, teremos

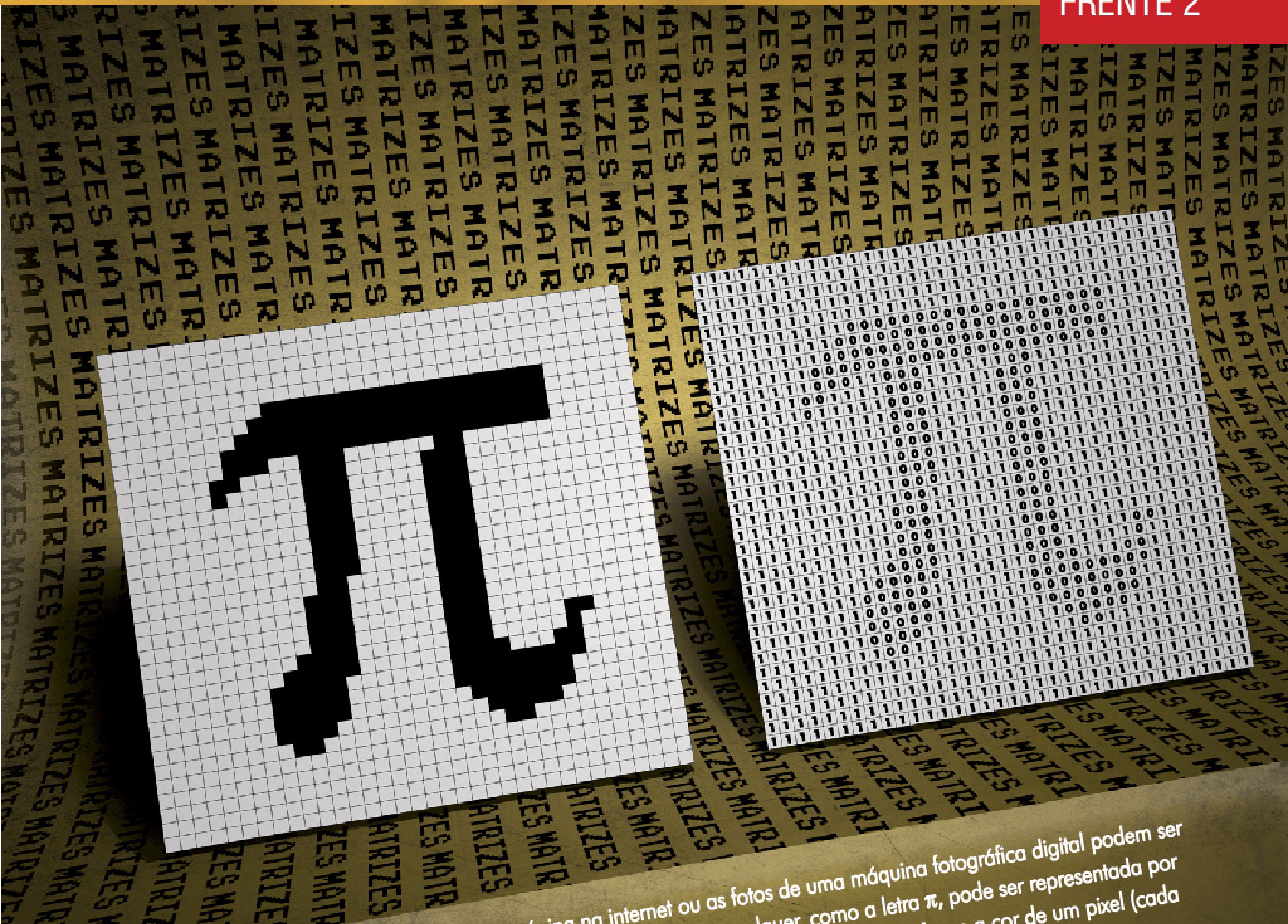
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + ab + a^2b^2 + a^3b^3 + \ldots + a^nb^n\right) = \frac{A.B}{A + B - 1}$$

16 Sendo x e y positivos, ache o limite das seguintes expressões:
a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}$
b) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\ldots}}}}$

FRENTE 2

9

Matrizes



As imagens em uma página na internet ou as fotos de uma máquina fotográfica digital podem ser representadas usando-se matrizes. Uma imagem qualquer, como a letra π, pode ser representada por uma matriz 35 × 35 cujos elementos são os números 0 e 1, que especificam a cor de um pixel (cada quadrado representa um pixel). O número 0 indica a cor preta e o número 1, indica a cor branca. Imagens digitais que usam apenas duas cores (em geral, preta e branca) são denominadas imagens binárias (ou imagens booleanas).

Imagens em tons de cinza também podem ser representadas por matrizes. Cada elemento da matriz determina a intensidade do pixel correspondente. Por conveniência, a maioria dos arquivos digitais atuais usa o número 0 para indicar a cor preta (ausência de intensidade) e o número 255 para indicar a cor branca (intensidade máxima), totalizando 256 tons de cinza diferentes. O mesmo vale para imagens coloridas, que são representadas por três matrizes, no sistema RGB (red, green and blue).

Conceito

Estamos iniciando um estudo preparatório para resolução dos sistemas lineares.

A teoria das matrizes e a teoria dos determinantes são pré-requisitos para resolução e discussão de um sistema linear.

Observe um sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} ax + by = P \\ cx + dy = Q \end{cases}$$

Quais são os elementos importantes nesse sistema?

É claro que são os números a, b, c e d (coeficientes), x e y (incógnitas) e finalmente P e Q (termos independentes).

Nesse exemplo, temos um sistema "pequeno e simples", mas aumentando o número de incógnitas o problema começa a complicar.

Para facilitar a notação dos sistemas, foram criadas as matrizes, que nada mais são do que um conjunto de números colocados em uma tabela. Observe como ficaria o sistema anterior com a nova notação das matrizes:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

Vamos formalizar essa nova notação.

Definição

Chama-se **matriz** um conjunto de números dispostos em uma tabela e distribuídos em m linhas e n colunas ($m; n \in \mathbb{N}^*$). Simbolicamente, temos:

A_{mxn}: A é uma matriz que possui m linhas e n colunas.

a_{ij}: é um elemento genérico da matriz A, que está na linha i e coluna j. Lembrando que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1

- *matriz 2 x 3* $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$
- *matriz 2 x 2* $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$
- *matriz 1 x 5* $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
- *matriz 4 x 1* $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Classificação das matrizes

Algumas matrizes possuem nomes especiais, principalmente em virtude do seu formato.

Matriz linha

É toda matriz da forma A_{1xn}, ou seja, possui uma única linha.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz coluna

É toda matriz da forma B_{mx1}, ou seja, possui uma única coluna.

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada

É toda matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas. Simbolicamente, temos:

A_{nxn}: matriz quadrada de ordem n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Na matriz quadrada, temos elementos especiais:

- **Diagonal principal:** são os elementos da matriz quadrada cujos índices são iguais.

$$D_p = \{a_{ij} / i = j\} = \{a_{11};\ a_{22};\ a_{33};\ a_{44} \ldots a_{nn}\}$$

- **Diagonal secundária**: são os elementos de uma matriz quadrada cujos índices têm soma igual a n + 1.

$$D_s = \{a_{ij} / i + j = n + 1\} = \{a_{1n};\ a_{2n-1} \ldots a_{n1}\}$$

Exemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ *é uma matriz quadrada de ordem 3.*

A diagonal principal é {6; 2; 3}, e a diagonal secundária é {0; 2; 4}.

Matriz nula

É toda matriz que possui os elementos iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

É toda matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais são todos zero. Observe os exemplos e a notação especial:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lei de formação de uma matriz

Podemos definir os elementos de uma matriz por meio de uma lei que relaciona seus índices.

Exercícios resolvidos

1 Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$, tal que $a_{ij} = ij$.

Resolução:

"Isso quer dizer que temos uma matriz A com elementos a_{ij} dispostos em 2 linhas e 3 colunas, onde o valor de cada elemento é o produto de suas coordenadas".

Para formar a matriz, temos: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

utilizando a regra, temos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

2 Construa a matriz $B = (b_{ij})_{2x2}$, tal que $\begin{cases} b_{ij} = i + j;\ \text{se } i = j \\ b_{ij} = 2i + j;\ \text{se } i \neq j \end{cases}$

Resolução:

Montando a matriz, temos: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Igualdade entre matrizes

Duas matrizes serão iguais quando elas tiverem o mesmo formato (número de linhas e colunas) e apresentarem todos os elementos correspondentes iguais (elementos com os índices iguais). Assim:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Operações entre matrizes

Adição e subtração

Para somar ou subtrair matrizes iguais, basta somar ou subtrair os elementos correspondentes entre as matrizes.

Exercícios resolvidos

Dados para os exemplos 3 e 4 a seguir.
Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3 Encontre o valor da matriz X, sabendo que:

$$X = A + B + C$$

Resolução:

$$X = \begin{bmatrix} 2+6-2 & 1+2+1 & 0+5+0 \\ 4-1+0 & 2+0+1 & 5+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

4 Encontre o valor da matriz Y, sabendo que:

$$Y = A - B + C$$

Resolução:

$$Y = \begin{bmatrix} 2-6-2 & 1-2+1 & 0-5+0 \\ 4-(-1)+0 & 2-0+1 & 5-0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Produto de um número por matriz

Multiplicar uma matriz por um número significa obter uma nova matriz com todos os elementos da matriz anterior multiplicados por esse número. Simbolicamente, podemos escrever:

Seja $k \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$. Se kA, então, para todo i e j, temos que $b_{ij} = ka_{ij}$.

Exemplo 3

$$2\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

$$3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + 2I_2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2I_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Produto de matrizes

O aluno não pode esquecer que toda a teoria das matrizes foi motivada para um fim: o de resolver sistemas lineares. Vamos voltar ao sistema:

$\begin{cases} ax + by = P \\ cx + dy = Q \end{cases}$ e a notação matricial:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

mas P = ax + by e Q = cx + dy, então:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}}_{B}$$

Observe que temos o produto:
$AX = B$ ou $A_{2x2} \cdot X_{2x1} = B_{2x1}$

Vamos esquematizar o produto:

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para efetuar o produto, o número de colunas da 1ª matriz deve ser igual ao número de linhas da 2ª matriz.

Exemplo 5

Considere o novo produto: C = AB

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A_{2x3} e B_{3x3} podem ser multiplicadas, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Assim:

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\mathbf{C}_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} = 2.0 + 1.1 + 0.-1 = 1$

(linha 1 da matriz A multiplicada pelos respectivos elementos da coluna 1 da matriz B)

$\mathbf{C}_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} = 2.2 + 1.1 + 3.0 = 5$

$\mathbf{C}_{13} = a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} = 2.2 + 1.(-4) + 0.5 = 0$

$\mathbf{C}_{21} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} = 1.0 + (-1).1 + 3.(-1) = -4$

$\mathbf{C}_{22} = a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} = 1.2 + (-1).1 + (3).3 = 10$

$\mathbf{C}_{23} = a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{33} = 1.2 + (-1).(-4) + 3.5 = 21$

A matriz produto C_{2x3} está montada:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -4 & 10 & 21 \end{bmatrix}$$

ATENÇÃO!

Para multiplicarmos as matrizes A_{mxn} e B_{pxq}, devemos ter n = p. A matriz produto A·B é a matriz C_{mxq}.

Exemplo 6

- A_{3x2} e B_{2x5}

$$\underbrace{A_{3x2} \cdot B_{2x5}}_{\text{existe o produto}} = C_{3x5}$$

- A_{6x2} e B_{3x2}

$$\underbrace{A_{6x2} \cdot B_{3x2}}_{\text{não existe o produto}} = ?$$

ATENÇÃO!

$$\underbrace{A_{mxn} \cdot B_{pxq}}_{\exists AB \text{ se } n = p} = C_{mxq}$$

Mais exemplos de produto de matrizes.

Exemplo 7

- *Efetuar os produtos:*

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} =$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & -6 & 8 \\ 19 & -14 & 13 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} . & \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Exemplo 8

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule A^3.

Vamos calcular A^2, e depois multiplicar por A.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}^{A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A^3}$$

Dos exemplos que vimos, podemos tirar uma conclusão importante: se existe a matriz AB, não concluímos que existe a matriz BA, ou seja, o produto entre matrizes não é comutativo!

Observe os exemplos a seguir da não comutatividade do produto entre matrizes.

Exemplo 9

Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Vamos fazer inicialmente AB.

$$\underbrace{A_{2x2} \cdot B_{2x3}}_{\exists AB} = C_{2x3}$$

Calculando o produto:

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . & \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}}_{AB} \end{matrix}$$

Vamos calcular agora BA. Primeiramente, analisando a condição de existência do produto, temos:

$$\underbrace{B_{2x3} \cdot A_{2x2}}_{\nexists BA} = \text{não há produto!}$$

É claro que nesse exemplo $AB \neq BA$, já que BA nem existe!

Exemplo 10

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Nesse exemplo, diferentemente do 1°, existe AB e BA, pois ambas as matrizes são quadradas de ordem 2, assim:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}}_{AB} \end{array}$$

Invertendo-se a ordem, temos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}}_{BA} \end{array}$$

Portanto: $AB \neq BA$.

Agora que já sabemos verificar a existência do produto entre matrizes e calculá-lo, vamos sofisticar o produto, apresentando-o na forma de somatório.

Considere $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{jk})_{nxp}$ e $AB = C$, tal que $C = (c_{ik})_{mxp}$ onde

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}$ $\therefore$

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \text{ para } \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p \end{cases}$$

Para finalizar o item de produto de matrizes, estude atentamente o exercício a seguir como exemplo.

Exercício resolvido

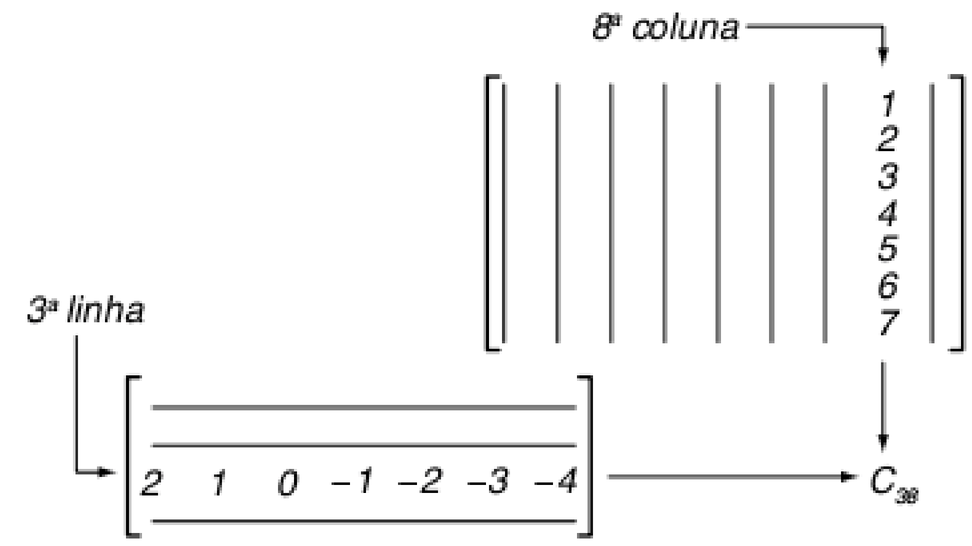
5 **Fuvest** Considere as matrizes:
$A = (a_{ij})_{4x7}$, tal que $a_{ij} = i - j$;
$B = (b_{ij})_{7x9}$, tal que $b_{ij} = i$ e $C = AB$.
Calcule os elementos C_{63} e C_{38}.

Resolução:
Percebemos que a Fuvest definiu matrizes grandes para assustar o candidato e até para forçar alguns a fazer esse produto, o que é impraticável!

Vamos descobrir o formato da matriz C:

$$\underbrace{A_{4x7} \cdot B_{7x9}}_{\exists AB} = C_{4x9}$$

O elemento C_{63} pedido não existe pois a matriz C tem somente 4 linhas!
Já o elemento C_{38} existe. Para calculá-lo, precisamos da 3ª linha de A com a 8ª coluna de B, assim:



$C_{38} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + (-3) \cdot 6 + (-4) \cdot 7 = -56$

Propriedades da multiplicação de matrizes

As principais propriedades da multiplicação de matrizes são:

P1 Associativa:
Considere as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{pxq}, assim:
$ABC = A(BC) = (AB)C$

P2 Distributiva:
Considere as matrizes A_{mxn}, B_{mxn} e C_{nxp}
$(A + B)C = AC + BC$

P3 Não comutativa:
$AB \neq BA$

Exercícios resolvidos

6 Efetue:
- $(A + B)^2$

Resolução:
Como não sabemos se as matrizes comutam (AB = BA), vamos efetuar:
$(A + B)(A + B) = (A + B)A + (A + B)B = A^2 + BA + AB + B^2$

- $(A + B)(A - B)$

Resolução:
$(A + B)(A - B) = (A + B)A - (A + B)B = A^2 + BA - AB - B^2$

7 Encontre todas as matrizes que comutam com $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Seja B a matriz que comuta com A(AB = BA), representada por

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2x+z & 2y+w \\ x & y \end{bmatrix}}_{AB} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2x+y & x \\ 2z+w & z \end{bmatrix}}_{BA} \end{array}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} 2x+y = 2x+z \therefore y = z \\ x = 2z+w \\ 2y+w = x \\ y = z \end{cases}$$

Fazendo $y = z = \alpha$ *e* $w = \beta$, *temos* $x = 2\alpha + \beta \Rightarrow \alpha$ *matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha+\beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \forall \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R}.$$

A matriz identidade (I_n)

A matriz identidade, como sabemos, é uma matriz quadrada na qual os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais todos iguais a zero.

A importância da matriz identidade é que ela funciona como **elemento neutro** da multiplicação, ou seja, qualquer que seja a matriz quadrada A de ordem n, temos que: $A \,.\, I_n = I_n \,.\, A = A$.

Vamos verificar o fato com um exemplo.

Exemplo 11

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \end{array}$$

ATENÇÃO!

A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação, ou seja, $\forall A$, temos que $A \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot A = A$.

Sabemos que $AB \neq BA$, mas existem casos em que duas matrizes comutam, por exemplo, A_n e I_n.

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ é a representação de uma soma que vai do 1º ao n-ésimo termo, ou seja, $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$.

Matriz transposta

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, denominamos matriz transposta de A a matriz A^t, tal que $A^t = (a^t_{ji})_{n \times m}$ e $a^t_{ji} = a_{ij}$.

Isso significa que, para obtermos a transposta de uma matriz, basta transformar a linha em coluna, ou vice-versa.

Exemplo 12

Encontrar a transposta de A:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ao obtermos a transposta de uma matriz quadrada, os elementos da diagonal principal não mudam.

Propriedades da matriz transposta

P1 $(A^t)^t = A$

P2 $(A + B)^t = A^t + B^t$

P3 $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

P4 $k \in \mathbb{R}; (kA)^t = k \cdot A^t$

Demonstração da P_3:

Seja $AB = C = (c_{ik})_{m \times p}$

$(AB)^t = C^t = (c^t_{ki})_{p \times m}$

$$c^t_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b^t_{kj} \,.\, a^t_{ji} = B^t \,.\, A^t$$

Matriz simétrica

Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = A$.

Dessa definição, podemos tirar a seguinte conclusão:

Sendo $A = (a_{ij})_{nxm} \Rightarrow A^t = (a^t_{jk})_{nxm}$ como $A = A^t \Rightarrow (a_{ij}) = (a^t_{ji})$; $i, j \in \{1; 2; 3; ...; n\}$.

Tudo isso quer dizer que os elementos simétricos em relação à diagonal principal são iguais.

As matrizes seguintes são simétricas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz antissimétrica

Chama-se matriz antissimétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = -A$.

Dessa definição, podemos tirar a seguinte conclusão:

Sendo $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^t = (a^t_{ji})$ e $-A = -(a_{ij})$, temos que $a^t_{ji} = -a_{ij}$.

Tudo isso quer dizer que os elementos dispostos simetricamente da diagonal principal são opostos, e também que a diagonal principal só é formada por zeros, pois o zero é o único número que é igual ao seu simétrico.

As matrizes seguintes são antissimétricas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos dar uma pausa na teoria e analisar atentamente os exemplos a seguir.

Exemplo 13

Determine a matriz incógnita:

$$3X^t + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^t$$

$$3X^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3X^t = \begin{bmatrix} 4-2 & -1-4 \\ 2-5 & 5-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X^t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Podemos agora "aplicar a transposta" dos dois lados.

$$(X^t)^t = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^t \therefore X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 14

Provar que se A e B são matrizes simétricas, então (A + B) também é simétrica.

Vamos calcular $(A + B)^t$.

$$(A + B)^t = A^t + B^t = (A + B) \quad (c.q.d.)$$

A e B são simétricos

Provamos que $(A + B)^t = (A + B)$.

Exemplo 15

Se $A = (a_{ij})_{2x2}$, tal que $a_{ij} = 2i - j$, calcule $A - A^t$.

assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1-1 & 2.1-2 \\ 2.2-1 & 2.2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 16

Calcule x para que o produto das matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *seja uma matriz simétrica.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2+x \\ 3 & -3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2+x \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Para uma matriz ser simétrica, os elementos opostos da diagonal principal têm de ser iguais, assim:

$$2 + x = 3 \therefore x = 1.$$

Matriz inversa

Quando perguntamos qual é o inverso de 2, respondemos $\frac{1}{2}$, não é?

Pois $2.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.2 = 1$, e 1 é o elemento neutro da multiplicação. Seguindo exatamente essa mesma ideia, o que seria a matriz inversa de A?

Seria aquela matriz B, tal que AB = B A = elemento neutro.

Sabemos que o elemento neutro do produto de matrizes é a identidade (I), observe também que A e B comutam. Vamos chamar B de matriz inversa de A e representá-la por A^{-1}.

Compreendendo a comparação (poderíamos estender a comparação com a função inversa também), podemos definir formalmente:

"Dada uma matriz inversível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1}, tal que $A . A^{-1} = A^{-1} . A = I_n$."

ATENÇÃO!

Qual o inverso de zero? Não existe, isso pressupõe que possam existir matrizes não inversíveis.
Uma matriz que admite inversa é chamada de inversível ou não singular.

Exercícios resolvidos

8 Determine a matriz inversa de A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, *tal que* $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x+3z & 2y+3w \\ x+4z & y+4w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+3z & 2y+3w \\ x+4z & y+4w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+3z=1 \\ x+4z=0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2y+3w=0 \\ y+4w=1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$z = -\frac{1}{5} \qquad w = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} \qquad y = -\frac{3}{5}$$

Assim: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

9 Determine a matriz inversa de A = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ *a matriz inversa de A, então:*

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x+6z & 2y+6w \\ x+3z & y+3w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+6z & 2y+6w \\ x+3z & y+3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+6z=1 \\ x+3z=0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2y+6w=0 \\ y+3w=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3z=1/2 \\ x+3z=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} y+3w=0 \\ y+3w=1 \end{cases}$$

Absurdo! *não existem x e z* — *Absurdo!* *não existem y e w*

Logo, não existe A^{-1}, *e a matriz A não é inversível.*

Exemplo 17

Nas equações matriciais a seguir, isolar x, admitindo que as matrizes A e B são inversíveis.

a) $AX = B \Rightarrow A^{-1} \,.\, AX = A^{-1} B \therefore I_n \,.\, X = A^{-1} B \therefore X = A^{-1} \,.\, B$

b) $ABX = I_n \Rightarrow (AB)^{-1} \,.\, (AB)X = (AB)^{-1} \,.\, I_n \therefore X = (AB)^{-1}$

c) $(AX)^t = B \Rightarrow [(AX)^t]^t = B^t \therefore AX = B^t \therefore A^{-1} \,.\, AX = A^{-1} \,.\, B^t \therefore I_n \,.\, X = A^{-1} \,.\, B^t \therefore X = A^{-1} \,.\, B^t$

d) $(B + X)^t = A \Rightarrow [(B + X)^t]^t = A^t \therefore B + X = A^t \therefore X = A^t - B.$

Se A e B são matrizes inversíveis de ordem n, então $(AB)^{-1} = B^{-1} \,.\, A^{-1}$.

Demonstração:

Chamado $B^{-1}A^{-1} = C$, *vamos provar que C é a matriz inversa de AB, ou seja,* $C(AB) = (AB)C = I_n$

$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} \,.\, IB = B^{-1}B = I_n$

$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI \,.\, A^{-1} = A \,.\, A^{-1} = I_n$ *(c.q.d.)*

ATENÇÃO!

Observe a simetria das propriedades $(AB)^t = B^tA^t$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstre como exercício que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ e também generalize para várias matrizes.

Exercício resolvido

10 Determine o elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa de A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Utilizando a definição de inversa, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & x \\ a_{21} & a_{22} & y \\ a_{31} & a_{32} & z \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_3}$$

Queremos determinar y, para isso, iremos montar um sistema:

$$\begin{bmatrix} * & * & x \\ * & * & y \\ * & * & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+2y+z=0 \\ 3y+2z=1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} -4x-8y-12z=0 \\ 4x+2y+z=0 \\ 3y+2z=1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} -6y-11z=0 \\ 3y+2z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} 12y-22z=0 \\ 33y+22z=11 \end{cases} +$$

$$21y = 11 \therefore y = \frac{11}{21}$$

Revisando

1 Construa a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{3x3}$, tal que $\begin{cases} a_{ij} = i^j;\ \text{se } i = j \\ a_{ij} = i + j;\ \text{se } i \neq j \end{cases}$

2 Dadas as matrizes $P = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & x \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $R = \begin{bmatrix} 19 \\ 6 \end{bmatrix}$, calcule x, tal que PQ – R é a matriz nula.

3 Determine a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercícios propostos

Operações entre matrizes

1 **FEI** Se as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ estão assim definidas:

$\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$ $\begin{cases} b_{ij} = 1 \text{ se } i + j = 4 \\ b_{ij} = 0 \text{ se } i + j \neq 4 \end{cases}$

onde $1 \leq i, j \leq 3$, então a matriz A + B é:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2 **UFV** Dada a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, determine:

a) A^2
b) $A \,.\, A^t$
c) $2A + 3A^t$

3 **Puccamp** Os números reais x, y e z que satisfazem a equação matricial mostrada a seguir são tais que sua soma é igual a:

$$\begin{bmatrix} x-1 & y+2 \\ z & x+y+z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) –3
(b) –2
(c) –1
(d) 2
(e) 3

4 **FGV** Observe que:

Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, então A . B é matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 26 \\ 7 & 31 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 5 & 21 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 5 & 21 \end{bmatrix}$

5 **Vunesp** Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz 2x2 real definida por $a_{ij} = 1$ se $i \leq j$ e $a_{ij} = -1$ se $i > j$. Calcule A^2.

6 **Unirio** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A adição da transposta de A com o produto de B por C é:

(a) impossível de se efetuar, pois não existe o produto de B por C.
(b) impossível de se efetuar, pois as matrizes são todas de tipos diferentes.
(c) impossível de se efetuar, pois não existe a soma da transposta de A com o produto de B por C.
(d) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 2x3.
(e) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 3x2.

7 **UFRGS** A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante: A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P_1, P_2, P_3 desse restaurante. A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2, P_3 é:

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{array} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{array}$$

(a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

8 **UEL** Considere as matrizes M e M^2 representadas a seguir.

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ e } M^2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Conclui-se que o número real a pode ser:

(a) $2\sqrt{3}$
(b) $2\sqrt{2}$
(c) 2
(d) $-\sqrt{2}$
(e) $-\sqrt{3}$

9 **UEL** Sobre as sentenças:

I. o produto de matrizes $A_{3x2} \cdot B_{2x1}$ é uma matriz 3x1.
II. o produto de matrizes $A_{5x4} \cdot B_{5x2}$ é uma matriz 4x2.
III. o produto de matrizes $A_{2x3} \cdot B_{3x2}$ é uma matriz quadrada 2x2.

é verdade que:

(a) somente I é falsa.
(b) somente II é falsa.
(c) somente III é falsa.
(d) somente I e III são falsas.
(e) todas são falsas.

10 **Uece** Sejam as matrizes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

considere a operação entre estas matrizes:

$$M_2 \cdot M_1 - M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Nessas condições, p + q é igual a:

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8

11 **Mackenzie** Sejam as matrizes a seguir:

$$\begin{cases} A = (a_{ij})_{4\times3}, \, a_{ij} = i^j \\ B = (b_{ij})_{3\times4}, \, b_{ij} = j^i \end{cases}$$

Se C = A . B, então c_{22} vale:

(a) 3
(b) 14
(c) 39
(d) 84
(e) 258

12 **UEL** Sejam as matrizes A e B, respectivamente, 3x4 e pxq. Se a matriz A . B é 3x5, então é verdade que:

(a) p = 5 e q = 5.
(b) p = 4 e q = 5.
(c) p = 3 e q = 5.
(d) p = 3 e q = 4.
(e) p = 3 e q = 3.

13 Dadas as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, calcule a matriz x tal que:

$5x - 3A = 2B + 7x - (A + B)$.

14 Se $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$, então:

(a) $x = 5$ e $y = -7$
(b) $x = -7$ e $y = -5$
(c) $x = -5$ e $y = -7$
(d) $x = -7$ e $y = 5$
(e) $x = 7$ e $y = -5$

Determinação da matriz inversa

15 **Vunesp** Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz real 2x2 definida por $a_{ij} = 1$ se $i \leq j$ e $a_{ij} = -1$ se $i > j$. Calcule A^{-1}.

16 **Unirio** Dada a matriz:

$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, determine o valor de $A^{-1} + A^t - I_2$.

17 **Mackenzie** Dada a matriz M, mostrada na figura adiante:

$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & k \\ -k & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, se $M^{-1} = M^t$, então K pode ser:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(b) $-\frac{1}{4}$
(c) $\frac{1}{4}$
(d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(e) $\frac{1}{2}$

18 **FEI** Considere as matrizes A e B.

$A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2b & -2b \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Se a inversa da matriz A é a matriz B, então:

(a) $a = 0$ ou $b = 0$
(b) $ab = 1$
(c) $ab = \frac{1}{2}$
(d) $a = 0$ e $b = 0$
(e) $a + b = \frac{1}{2}$

19 **ITA** Seja a matriz: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que $a = 2^{(1+\log_2 5)}$, $b = 2^{\log_2 8}$, $c = \log_{\sqrt{3}} 81$ e $d = \log_{\sqrt{3}} 27$.

Determine uma matriz real, quadrada B, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2.

20 O elemento a_{23} da matriz inversa de:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, é:

(a) -1
(b) $-\frac{1}{3}$
(c) 0
(d) $\frac{2}{3}$
(e) 2

Matrizes simétricas e propriedades operatórias gerais

21 Demonstre as afirmações seguintes relativas à matriz A_n:

a) Se A é simétrica, então AA^t é simétrica.
b) Se A é simétrica, então $A + A^t$ também é simétrica.
c) Se A é simétrica, então $(A^t + A^2)$ é simétrica.
d) Se A é simétrica, então $A - A^t$ é antissimétrica.
e) Toda matriz quadrada é a soma de uma matriz simétrica e uma antissimétrica.
f) Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, mostre que a sua inversa, se existir, é: $A^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - bc}$

22 Sendo A e B matrizes inversíveis de mesma ordem e X uma matriz, tal que $(XA)^t = B$, então:

(a) $X = A^{-1} \cdot B^t$
(b) $X = B^t \cdot A^{-1}$
(c) $X = (BA)^t$
(d) $X = (AB)^t$
(e) n.d.a.

23 **FGV** A, B e C são matrizes quadradas de ordem 3 e 0 é a matriz nula de ordem 3. Assinale a afirmação falsa.

(a) $(A + B)C = AC + BC$
(b) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$
(c) $(A + C)I = A + C$
(d) $(BC)^t = C^tB^t$
(e) $AC = CA = I \Rightarrow C = A^{-1}$

TEXTO COMPLEMENTAR

Característica de uma matriz

A característica de uma matriz A_{mxn} é o número de linhas não nulas após o escalonamento da matriz A. (Para mais detalhes sobre o escalonamento, leia o capítulo 6).

Atividades

1 Determine a característica da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

2 Determine a característica da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

3 Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a\left(\frac{1}{a}\right) & -\log_a a \\ \log_a 1 & \log_{10} 1 \end{bmatrix}$$

Para que a característica de A seja máxima, o valor de a deve ser tal que:

(a) $a \neq 10$ e $a \neq \frac{1}{3}$

(b) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq \frac{1}{3}$

(c) $a \neq 5$ e $a \neq 10$

(d) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$

(e) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$

RESUMINDO

O capítulo das matrizes é básico para o estudo dos determinantes e sistemas lineares. As matrizes são conjuntos cujos elementos estão dispostos em uma tabela. Fiquem atentos à definição dos produtos entre matrizes.

O produto A_{mxn} por B_{pxq} existe somente se $n = p$, e o resultado é a matriz C_{mxq}. O produto entre matrizes não é comutativo, ou seja, $AB \neq BA$.

- **Matriz inversa:**

$AB = BA = I$

Então B é a matriz inversa de A, simbolicamente, $B = A^{-1}$.

- **Principais propriedades:**

$(AB)^t = B^t \cdot A^t$ $\quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad (A + B)^t = A^t + B^t$

Matriz identidade	Matriz simétrica	Matriz antissimétrica
$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A^t = A$	$A^t = -A$

QUER SABER MAIS?

SITE

- Matrizes e imagens digitais
  <www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix-br.html>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 **Uece** Sejam as matrizes:

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & q \\ n & \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Se $M \cdot M^t = P$, sendo M^t a matriz transposta de M, então $n^2 + nq$ é igual a:

(a) 6
(b) 9
(c) 12
(d) 18

2 **UEL** A soma de todos os elementos da inversa da matriz M mostrada a seguir é igual a:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) –2
(b) –1
(c) 0
(d) 1
(e) 2

3 **Vunesp** Se A, B e C forem matrizes quadradas quaisquer de ordem n, assinale a única alternativa verdadeira.

(a) AB = BA.
(b) Se AB = AC, então B = C.
(c) Se $A^2 = O_n$ (matriz nula), então $A = O_n$.
(d) (AB)C = A(BC).
(e) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

4 **FEI** Dadas as matrizes A e B, a matriz de x de 2ª ordem que é solução da equação matricial Ax + B = 0, onde 0 representa a matriz nula de ordem 2 é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
(e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

5 Calcular todas as matrizes X, quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = I_2$.

6 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, uma matriz coluna $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tal que AX = 3X, é:

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
(e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

7 **ITA** Sejam M e B matrizes quadradas de ordem n tais que $M - M^{-1} = B$. Sabendo que $M^t = M^{-1}$ podemos afirmar que:

(a) B^2 é a matriz nula.
(b) $B^2 = -2I$.
(c) B é simétrica.
(d) B é antissimétrica.
(e) n.d.a.

8 **FGV** Seja A uma "matriz diagonal" de ordem 2; isto é, A é do tipo: $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, onde x e y são números quaisquer.

Nestas condições, o número de matrizes que satisfazem a equação matricial: $A^2 - A = 0$ é:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

9 **Vunesp** Determine os valores de x, y e z na igualdade a seguir, envolvendo matrizes reais 2x2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 0 \\ x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z-4 & 0 \\ y-z & 0 \end{bmatrix}$$

10 O produto A · B das matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ é uma matriz:

(a) simétrica.
(b) antissimétrica.
(c) não inversível.
(d) nula.
(e) identidade.

11 Se $B = (b_{ij})_{2x2}$ é a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então o elemento b_{12} é igual a:

(a) $\frac{2}{3}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $-\frac{1}{3}$
(d) $-\frac{2}{3}$
(e) -1

12 Dada a equação matricial $X^2 - 2X = 0$, onde X é uma matriz quadrada, n x n, não singular. Podemos afirmar que essa equação:

(a) tem uma infinidade de soluções.
(b) não tem solução.
(c) tem duas soluções distintas.
(d) tem uma única solução.
(e) admite a solução $X = \begin{pmatrix} 2.....2 \\ .... \\ 2.....2 \end{pmatrix}$.

13 **UFBA** Sendo as matrizes:

$M = (m_{ij})_{2.3}, N = (n_{ij})_{a.b}, P = (P_{ij})_{c.4}$ e $Q = (q_{ij})_{d.e}$,

é possível determinar: M + N, NP e P – Q, se:

(a) $b - a = c - d$
(b) $a = b = c = d = e - 1$
(c) $b = a + 1, c = d = e = 4$
(d) $ab = 6, a + 1 = b = c = d = e - 1$
(e) $b = c = d = \frac{a+c}{2}$.

14 **FGV** Seja A uma matriz quadrada de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Se $A^2 = I$, podemos afirmar que:

(a) $A^3 = A$
(b) $A^{10} = A$
(c) $A^{15} = I$
(d) $A^{85} = I$
(e) A não admite inversa.

15 **Fuvest** Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

determine a e b de modo que $AB = I_2$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

16 Se $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, então: $A^n = \begin{bmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{bmatrix}$.

Com base no resultado anterior, provar que:

$$\sum_{i=0}^{n} A^i = \begin{bmatrix} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}}{1-y} \end{bmatrix}$$

17 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \text{sen } X & 2 \\ \log_3^{10} & 2\text{sen} X \end{pmatrix}$ onde x é real. Determine as condições para que ela seja inversível.

18 Sejam A e B matrizes reais 3x3. Se tr(A) derrota a soma dos elementos da diagonal principal de A, considere as afirmações.

I. $tr(A^t) = tr(A)$;
II. Se A é inversível, então $tr(A) \neq 0$;
III. $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstre a veracidade das afirmações.

19 Sendo x um número real positivo, considere as matrizes:

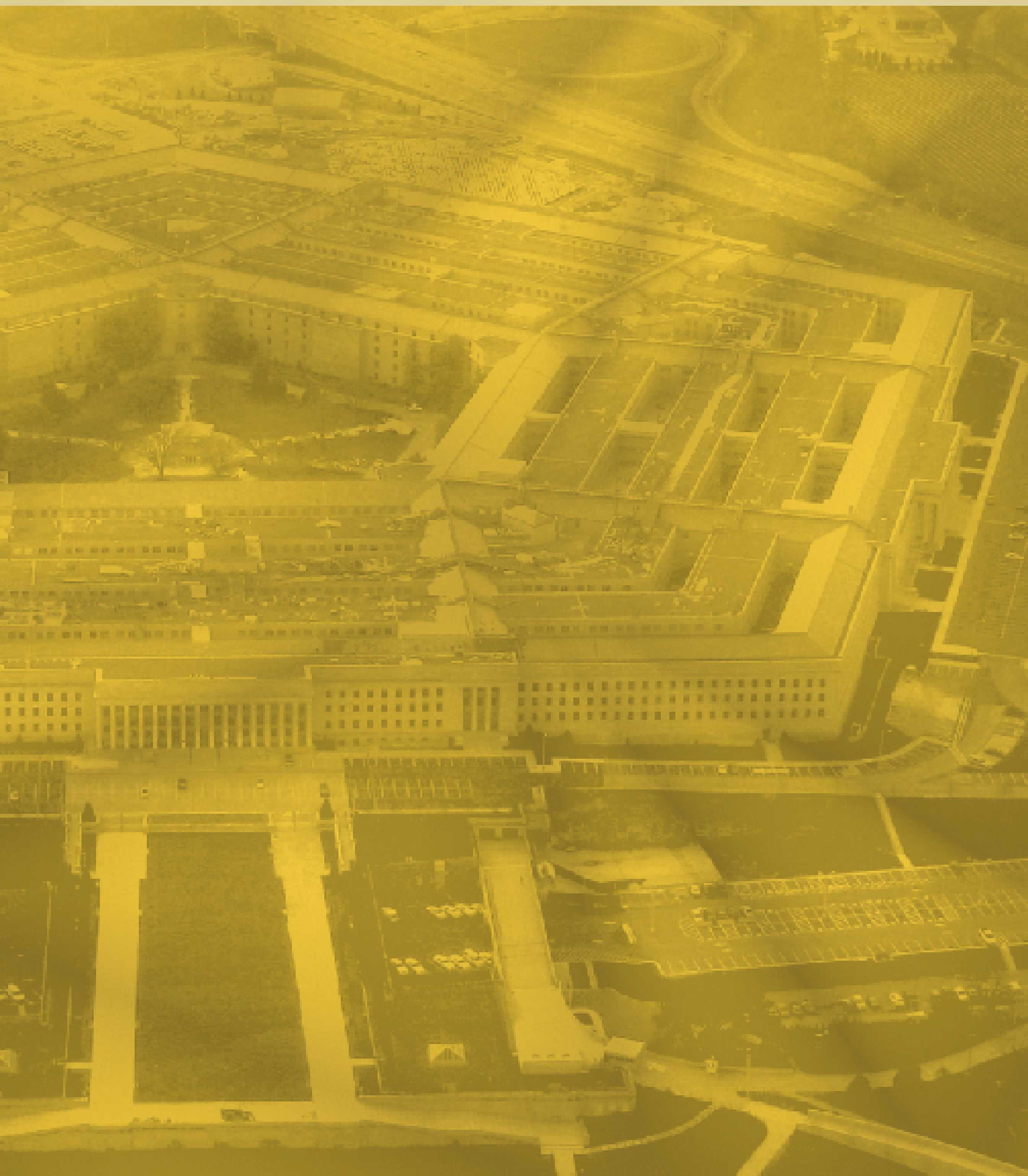
$$A \begin{pmatrix} \log_{\frac{1}{3}} x & \log_{\frac{1}{3}} x^2 & 1 \\ 0 & -\log_3 x & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & \log_{\frac{1}{3}} x^2 \\ 1 & 0 \\ -3\log_{\frac{1}{3}} x & -4 \end{pmatrix}$$

Determine a soma de todos os valores de x para os quais $(AB) = (AB)^t$.

20 Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 e considere as definições:

I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^t$.
II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0, \forall i; j = 1; 2;...; n$, com $i \neq j$.

Determine todas as matrizes quadradas A de ordem 2 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.



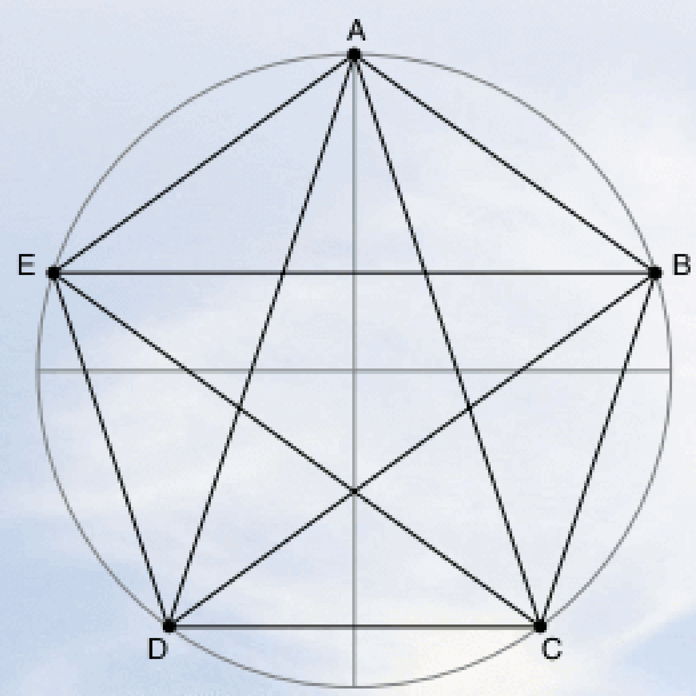
Frente 3

7

FRENTE 3

Polígonos convexos

DAVID B. GLEASON/FLICKR



O polígono regular mais famoso

Pitágoras de Samos fundou em Crotona (Itália) um grupo de caráter científico, ético e político. Esse grupo ganhou muitos adeptos e formou-se mais tarde a chamada escola Pitagórica. O pentagrama transformou-se no símbolo desta linha filosófica.

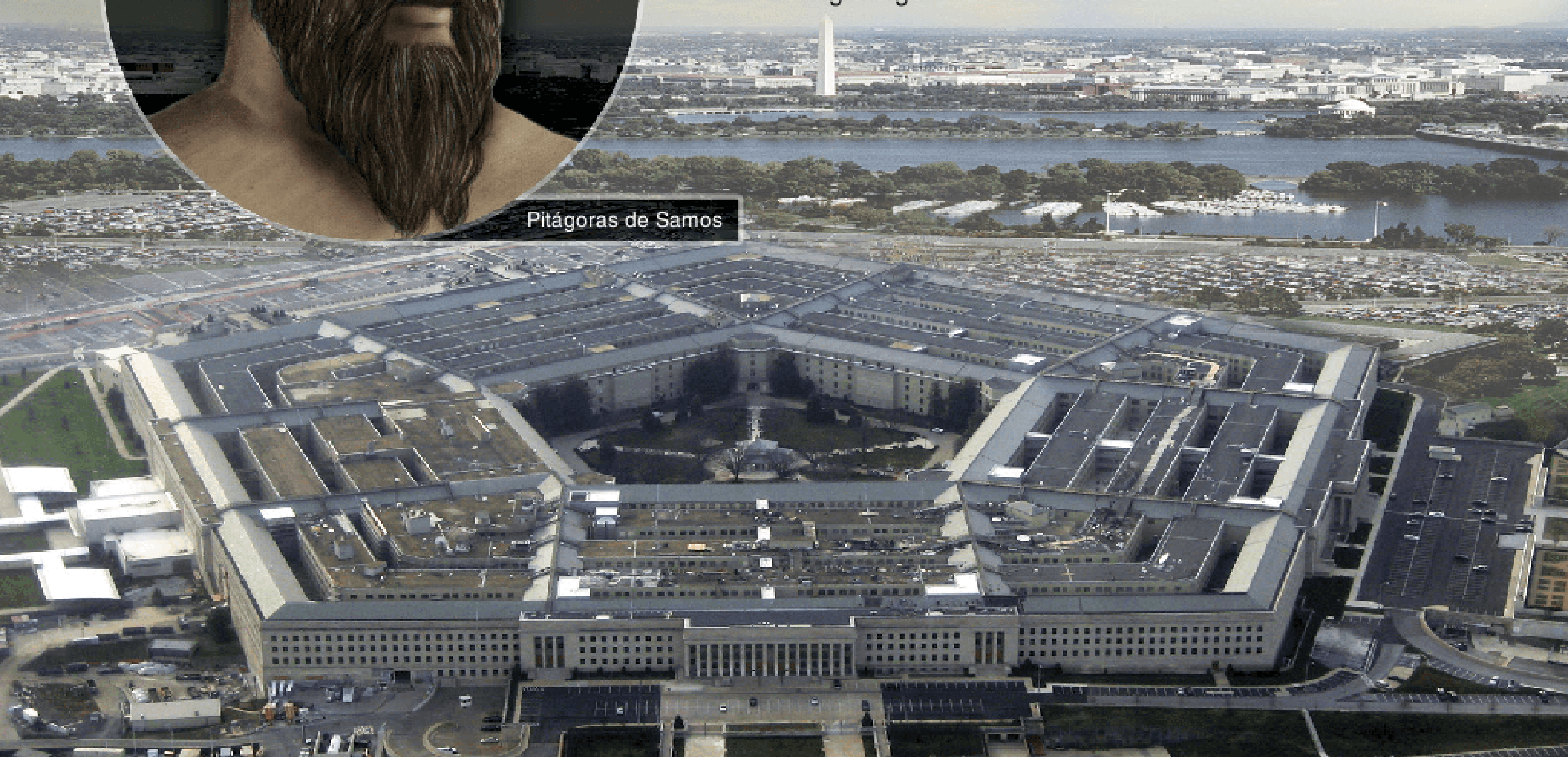
Para obtermos o pentagrama, basta construirmos o pentágono regular ABCDE e traçar as suas diagonais.

Uma das construções mais famosas do mundo, o Pentágono é sede do Departamento de Defesa e do Estado-maior norte-americanos. Foi inaugurado em 15 de janeiro de 1943 no estado da Virgínia.

Ele tem o formato de um pentágono regular e é o maior edifício de escritórios do mundo reservado à inteligência estratégica e espionagem.

Toda essa imponência foi ofuscada pelo atentado de 11 de setembro de 2001, quando um Boeing 757 atingiu algumas alas da sua estrutura.


Pitágoras de Samos



Definição e classificação dos polígonos

Vamos iniciar nossos estudos com polígonos com a chamada **linha poligonal**. Considere uma sequência de segmentos consecutivos conforme a figura 1.

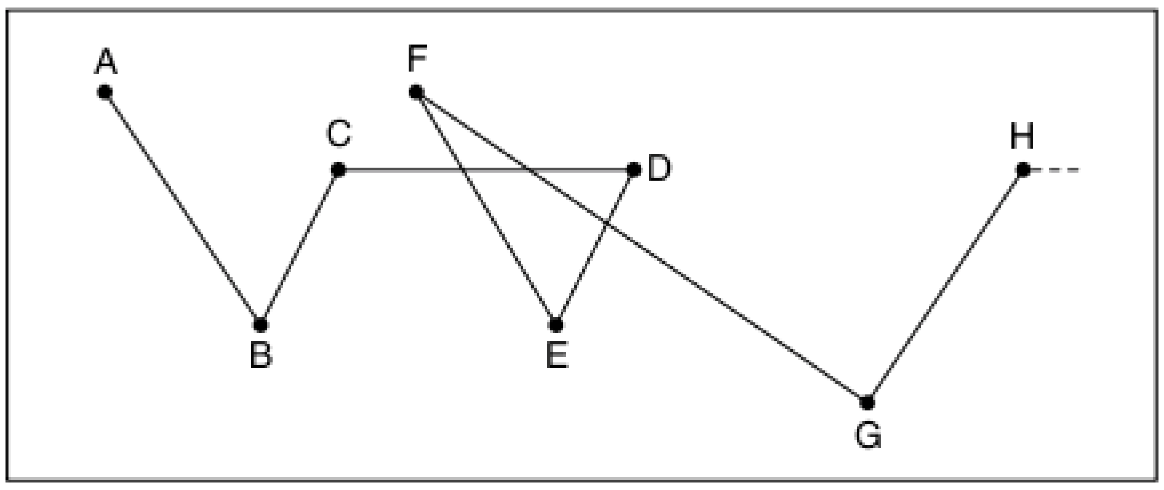


Fig. 1 Linha poligonal aberta.

A linha poligonal é aberta, pois o segmento inicial com a extremidade A está "livre". Se fizermos coincidir a última extremidade com o ponto inicial A, teremos agora uma linha poligonal fechada ou simplesmente **polígono**.

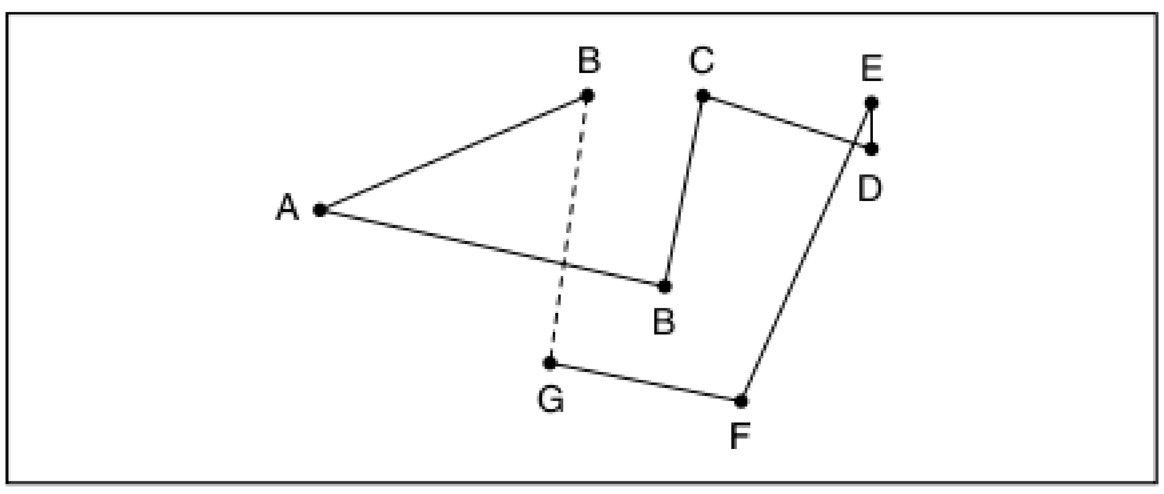


Fig. 2 Polígono entrelaçado.

A figura estranha 2 é um polígono entrelaçado, pois os segmentos (seus lados) interceptam outros (por exemplo $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$) de maneira aleatória.

Caso o entrelaçado seja regular, teremos o polígono estrelado. Observe a figura 3.

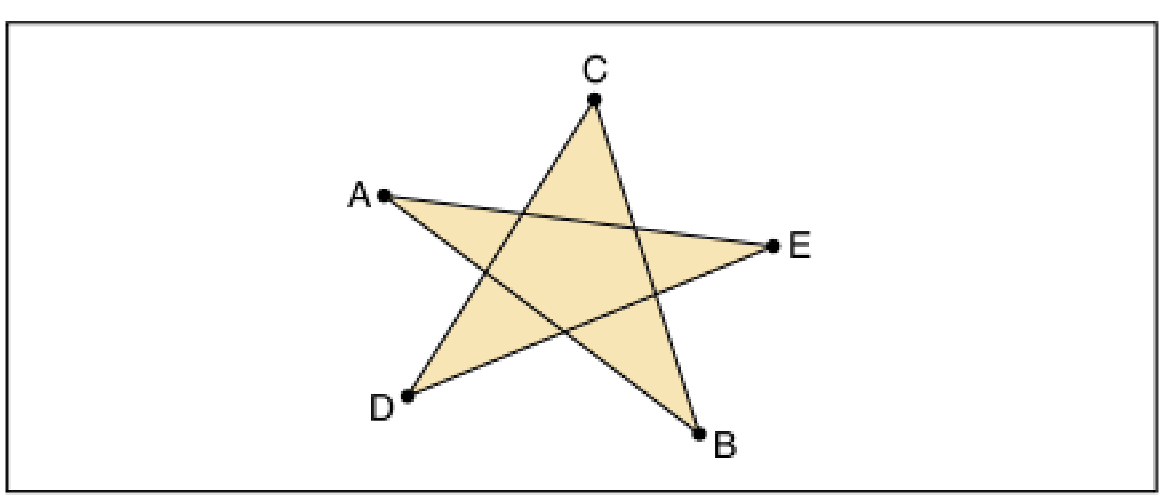


Fig. 3 Polígono estrelado.

Para os polígonos não entrelaçados, podemos dividi-los em dois grandes grupos: **convexos** e **côncavos**. Observe a figura 4.

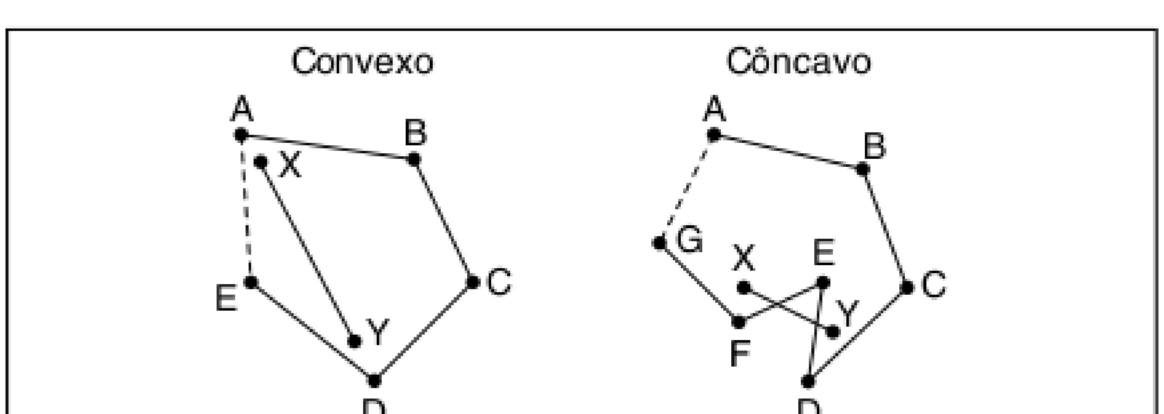


Fig. 4 Polígonos convexo e côncavo.

Para classificar os polígonos em convexos e côncavos, considere dois pontos X e Y quaisquer pertencentes ao interior do polígono, se:

$\forall\ \overline{XY} \subset \text{polígono} \Leftrightarrow \text{convexo;}$

$\exists\ \overline{XY} \not\subset \text{polígono} \Leftrightarrow \text{côncavo.}$

Elementos básicos do polígono convexo

Considere o polígono convexo qualquer ABCDE...

A, B, C, D, E ... vértices

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ... lados

$\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ ... diagonais

$\hat{a}_n$ ... ângulo interno

$\hat{A}_n$ ... ângulo externo

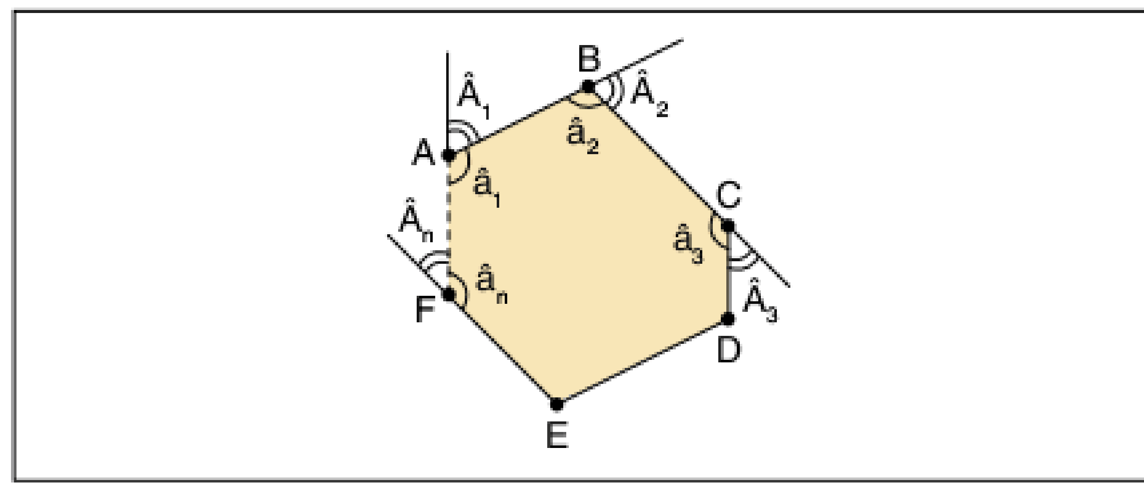


Fig. 5 Elementos básicos.

ATENÇÃO!

Para um mesmo vértice n, temos $\hat{a}_n + \hat{A}_n = 180°$, ou seja, são ângulos adjacentes suplementares.

Se um polígono possui n vértices, então ele possui n lados.

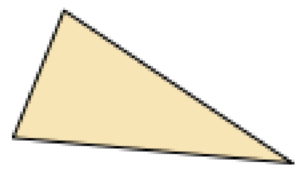
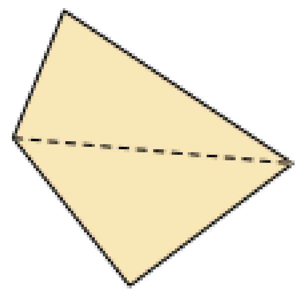
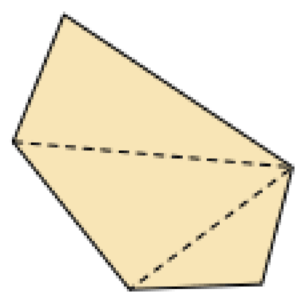
Podemos classificar os polígonos em função do seu número de lados; observe a tabela 1 a seguir com alguns exemplos.

Número de lados	Denominação
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octodecágono
19	Eneadecágono
20	Icoságono

Tab. 1 Nomenclatura de polígonos.

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer

Vamos fazer uma indução vulgar para obtermos uma fórmula para o S_i.

Número de lados	Soma dos ângulos internos
3	 1 triângulo $S_i = 1 \cdot 180^o$
4	 2 triângulos $S_i = 2 \cdot 180^o$
5	 3 triângulos $S_i = 3 \cdot 180^o$
⋮	⋮
n	(n – 2) triângulos $S_i = 180^o\,(n-2)$

Tab. 2 Soma dos ângulos internos.

Pela observação dos números, induzimos vulgarmente que um polígono convexo de n lados possui (n – 2) triângulos encaixados no seu interior. Como em cada triângulo a soma dos ângulos internos é 180º, temos $S_i = 180^o\,(n-2)$.

Vamos demonstrar o resultado pelo PIF.

1ª parte: para n = 3, o polígono é um triângulo, então temos: $S_i = 180^o(3-2) = 180^o$ (correto).

2ª parte: Se $S_i = 180^o(k-2)$ para um polígono de k lados, então deveremos ter $S_i = 180^o\,[(k+1)-2]$ para um polígono de k + 1 lados.

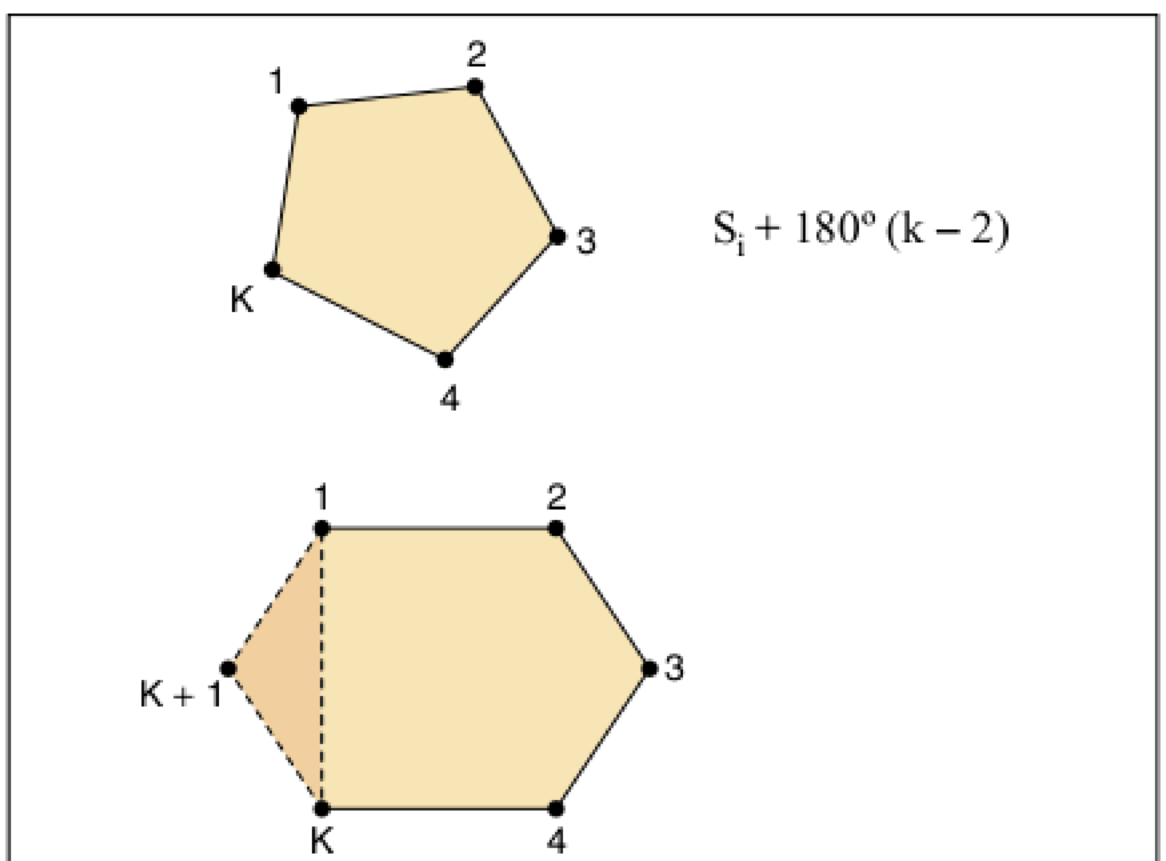


Fig. 6 Demonstração.

Ao adicionarmos 1 vértice no polígono de k lados, adicionamos 1 lado e 1 triângulo interno.

$S_i' = S_i + 180^o = 180^o\,(k-2) + 180^o = 180^o\,[(k-2)+1] =$
$= 180^o\,[(k+1)-2]$ (c.q.d.)

ATENÇÃO!

Indução vulgar é a generalização de uma propriedade através de alguns casos particulares. As induções vulgares podem ser corrigidas pelo princípio da indução finita (PIF). S_i é a soma dos ângulos internos do polígono convexo ($S_i = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \ldots + \hat{a}_n$).

Exercício resolvido

1 Calcule a soma dos ângulos internos de um decágono convexo.

Resolução:

Sabemos que n = 10, assim temos:

$S_i = 180^o\,(10-2) = 180^o \cdot 8 = 1.440^o$

Soma dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer

Lembrando que em um polígono, o número de lados é igual ao número de vértices, e, é claro, igual também ao número de ângulos internos e externos; observe as equações e a figura 7 a seguir.

$\hat{a}_1 + \hat{A}_1 = 180^o$

$\hat{a}_2 + \hat{A}_2 = 180^o$

$\hat{a}_3 + \hat{A}_3 = 180^o$

....

$\hat{a}_n + \hat{A}_n = 180^o$

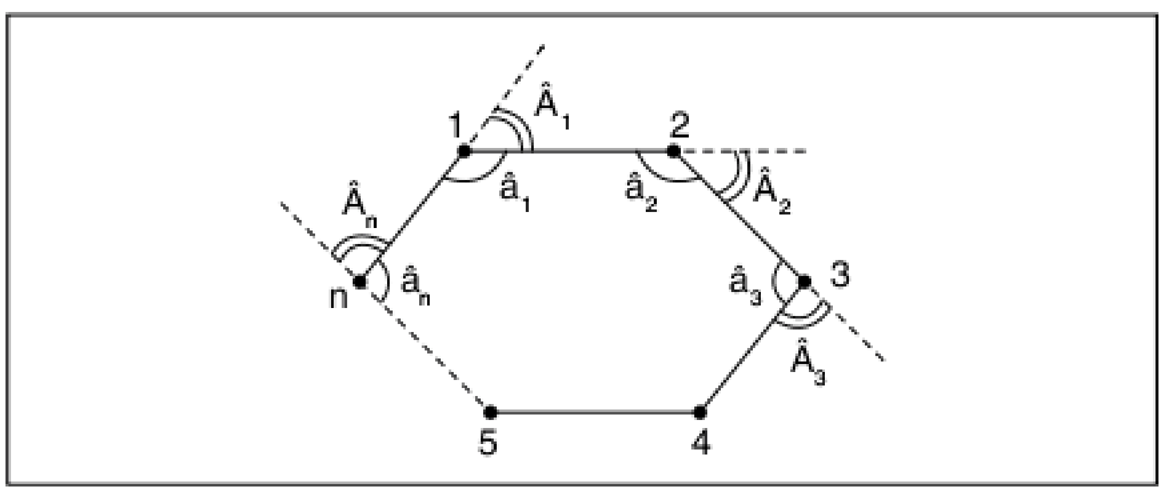


Fig. 7 Soma dos ângulos externos.

Somamos todos os membros das n equações, temos o seguinte resultado:

$$(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \ldots + \hat{a}_n) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_n) = \underbrace{180^o + \ldots + 180^o}_{\text{n termos}}$$

Que representa $S_i + S_e = 180^o\,n$

Mas como $S_i = 180^o\,(n-2)$

$\Rightarrow 180^o\,(n-2) + S_e = 180^o\,n$

$\Rightarrow 180^o\,n - 360^o + S_e = 180^o\,n$

$\Rightarrow S_e = 360^o$

ATENÇÃO!

- Em um polígono convexo qualquer de n lados, S_e é constante e vale 360°.
- Polígono convexo qualquer de n lados:
  S_i = 180° (n – 2)
  S_e = 360°
- S_e é a soma dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer ($S_e = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + ... + \hat{A}_n$).

Polígonos regulares

Um polígono convexo é definido como regular se ele for **equilátero** (lados iguais) e também **equiângulo** (ângulos iguais).

Observe o diagrama de Venn.

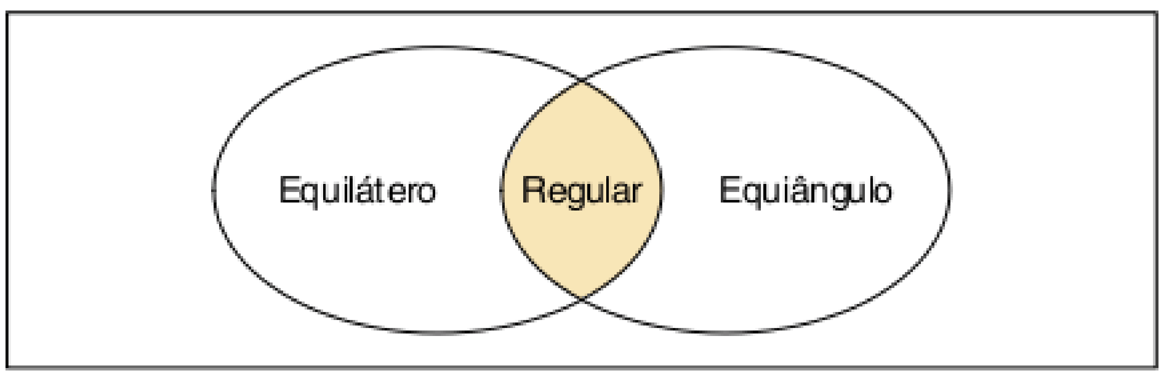


Fig. 8 Classificação dos polígonos convexos.

Vamos construir um polígono equiângulo. Seja ABC um triângulo equilátero. Traçar paralelas aos lados do triângulo, obtendo assim um hexágono equiângulo.

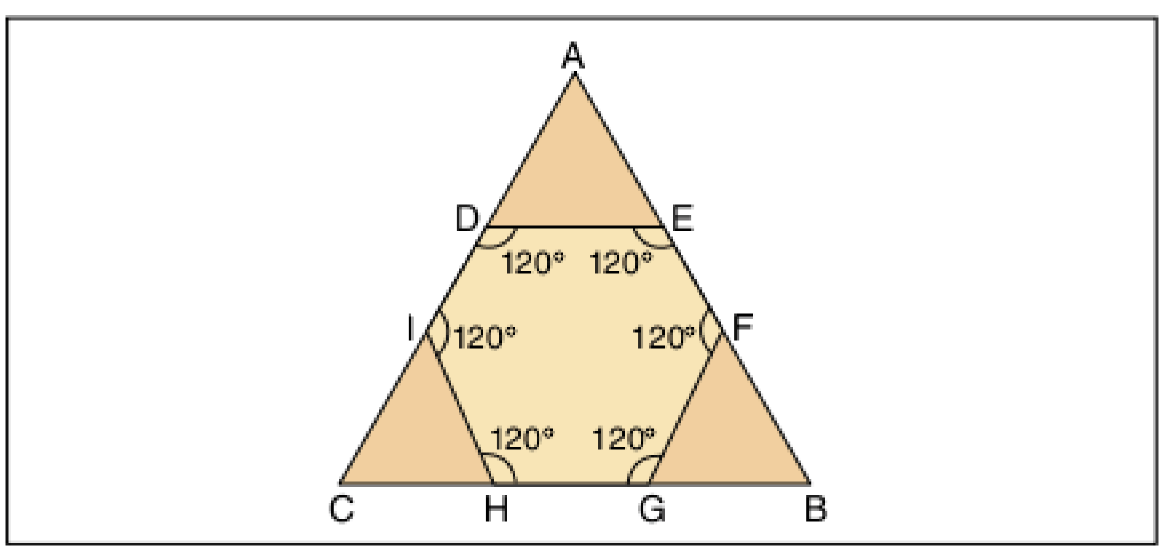


Fig. 9 Hexágono equiângulo.

Os ΔADE, ΔCIH e ΔBGF são equiláteros, por isso todos os ângulos do hexágono DEFGHI valem 120º.

Podemos também construir um hexágono equilátero, mas não equiângulo. Observe a figura 10.

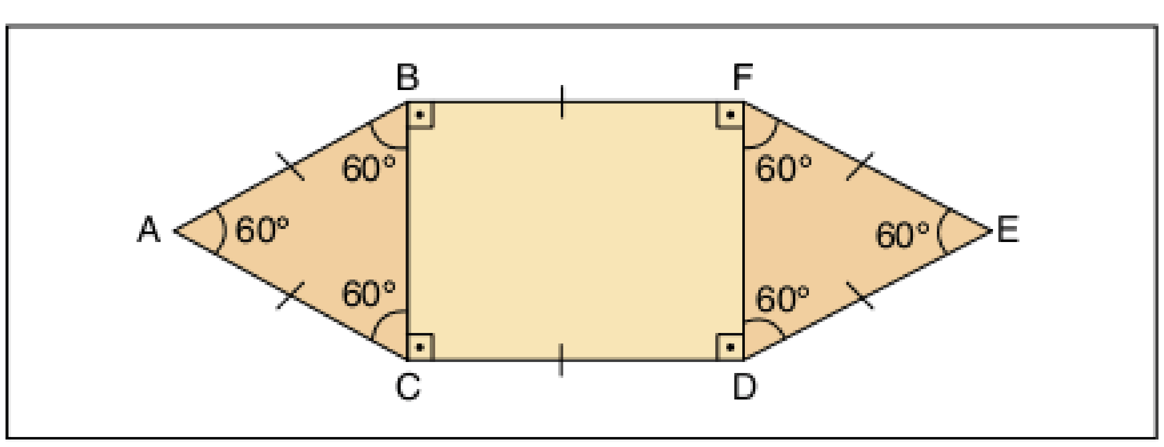


Fig. 10 Hexágono equilátero.

Temos dois triângulos equiláteros ΔABC e ΔDEF colocados no quadrado BCDF. Os seis lados são iguais, e os ângulos internos valem: 60º, 60º, 150º, 150º, 150º e 150º.

O polígono regular é aquele em que os lados são iguais e os ângulos internos iguais (consequentemente os externos). Para designá-los, acrescentemos a palavra regular. Observe o hexágono regular.

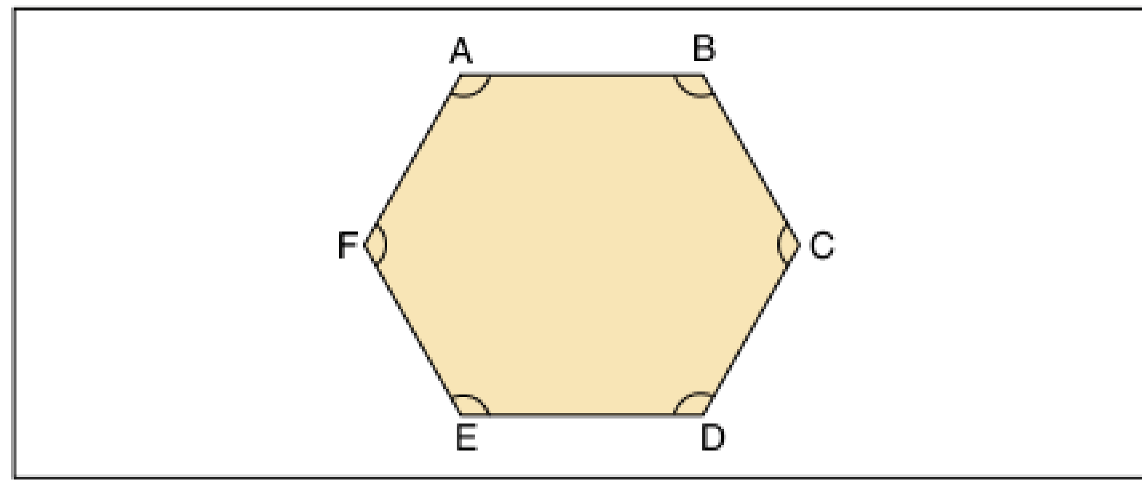


Fig. 11 Hexágono regular.

Os polígonos regulares possuem os ângulos internos iguais; podemos escrever que $S_i = n \cdot a_i$ e $S_e = n \cdot a_e$. Substituindo os valores obtidos para S_i e S_e, obtemos para um polígono regular de n lados:

$$a_i = \frac{180^o(n-2)}{n} \qquad a_e = \frac{360^o}{n}$$

Exercícios resolvidos

2 Calcule o ângulo interno do decágono regular.

Resolução:

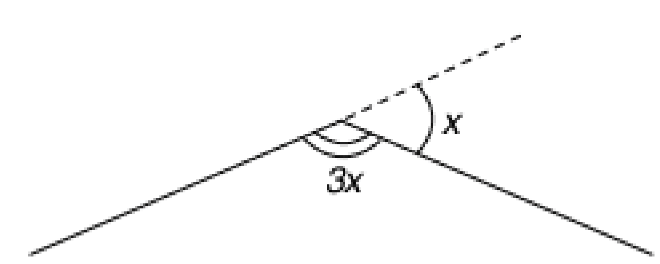
Temos então um polígono regular com n = 10, assim:

$$a_i = \frac{180^o(10-2)}{10} = 144^o.$$

3 Determine o polígono regular cujo ângulo interno é igual a três vezes o ângulo externo.

Resolução:

Em um mesmo vértice do polígono, o ângulo interno e externo são adjacentes e suplementares.



$3x + x = 180° \therefore 4x = 180° \therefore x = 45°$

$a_i = 3(45°) = 135°$ *e* $a_e = 45°$

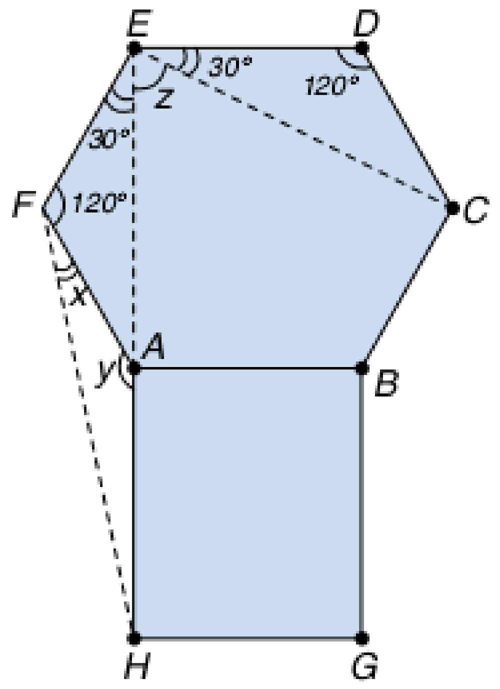
Como $a_e = \dfrac{360°}{n} \therefore 45° = \dfrac{360°}{n} \therefore 45n = 360$

$\therefore$ *n = 8, ou seja, trata-se do octógono regular.*

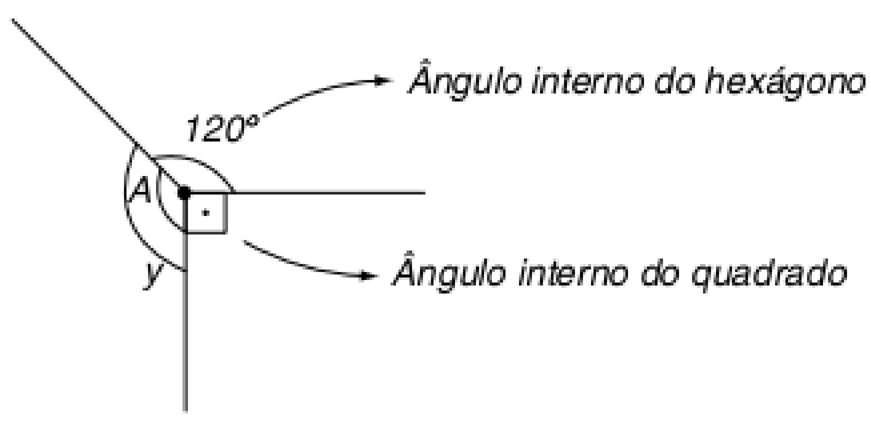
4 Considere um hexágono regular ABCDEF e um quadrado externo ABGH. Calcule os ângulos $A\hat{F}H$, $F\hat{A}H$ e $A\hat{E}C$.

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos o desenho abaixo.



Como o quadrado foi construído no lado do hexágono, temos $AF = AH \Rightarrow AFAH$ é isósceles. No vértice A, temos:

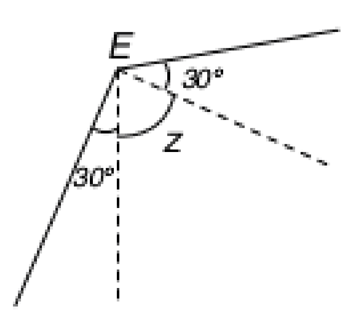


$y + 120^o + 90^o = 360^o \therefore y = 150^o$ *no* ΔAFH

temos: $x + 150^o + x = 180^o \therefore x = 15^o$

$\Delta EFA \approx \Delta EDC$ *(LAL), os triângulos são isósceles.*

No vértice E, temos:



$30^o + z + 30° = 120^o \Rightarrow z = 60^o$

Cálculo do número de diagonais de um polígono convexo

Considere um polígono convexo de n lados:

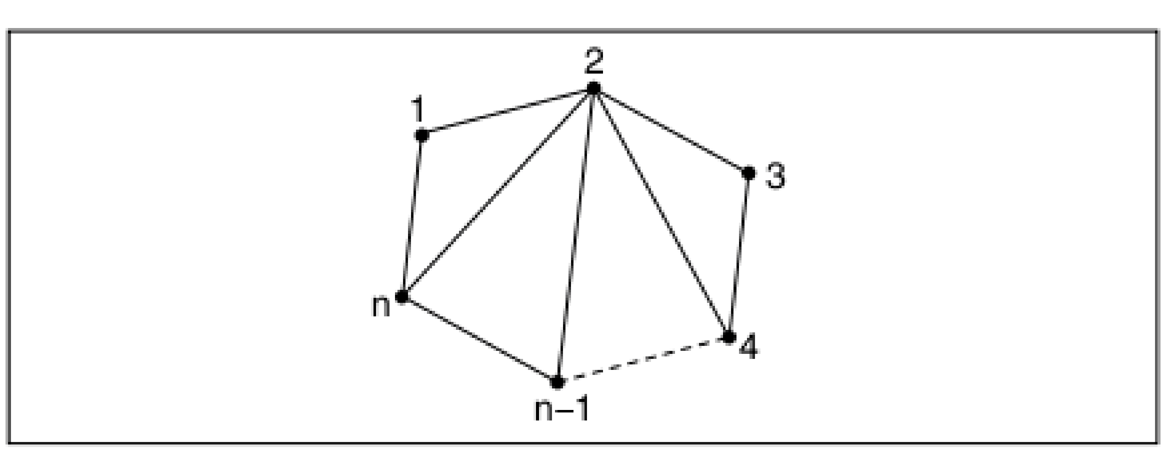


Fig. 12 Cálculo do número de diagonais.

Para traçarmos, por exemplo, as diagonais do vértice 2, não utilizamos os vértices adjacentes, no caso 1 e 3.

Unimos o vértice 2 com outros (n – 3) vértices; desse modo, de cada vértice, teremos (n – 3) diagonais no total de n vértices, serão n(n – 3), mas como cada diagonal tem extremidade em dois vértices, a contagem considerou cada diagonal duas vezes, assim: $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$

ATENÇÃO!

Em um polígono convexo de n lados, de cada vértice partem (n – 3) diagonais, perfazendo um total de $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Exercícios resolvidos

5 Determine o polígono cujo número de lados é igual ao número de diagonais.

Resolução:

$$d = n \therefore \frac{n(n-3)}{2} = n \therefore \frac{n-3}{2} \Rightarrow n = 5 \text{ (pentágono)}$$

6 Dê o número de lados de um polígono que possui 44 diagonais.

Resolução:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = 44 \therefore n^2 - 3n = 88$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n - 88 = 0 \therefore (n-11)(n+8) = 0$$

$$\Rightarrow n = -8 \text{ (não convém) e } n = 11 \text{ (undecágono)}$$

7 Em um polígono regular, o ângulo interno excede o externo de 108º, calcule o número de diagonais distintas do polígono.

Resolução:

$$\hat{a}_i = \hat{a}_e + 108°, \text{ mas } \hat{a}_i + \hat{a}_e = 180°$$

$$\Rightarrow \hat{a}_e + 108° + \hat{a}_e = 180° \therefore 2\hat{a}_e = 72°$$

$$\Rightarrow \hat{a}_e = 36° \Rightarrow \hat{a}_e = \frac{360°}{n}$$

$$\Rightarrow 36° = \frac{360°}{n} \Rightarrow 36n = 360 \therefore n = 10 \text{ (decágono)}$$

$$\Rightarrow d = \frac{10(10-3)}{2} = 35 \text{ diagonais.}$$

8 Se aumentarmos de 3 o número de lados de um polígono e de 21 o número de suas diagonais, determine o número de diagonais do polígono.

Resolução:

Sejam d e n os valores iniciais, tal que $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Para outra situação, temos n + 3 e d + 21, assim:

$$d + 21 = \frac{(n+3)[(n+3)-3]}{2}$$

$$\Rightarrow 2d + 42 = (n + 3) \cdot n \Rightarrow 2d + 42 = (n + 3)n$$

$$\Rightarrow 2 . \frac{n(n-3)}{2} + 42 = n(n + 3) \Rightarrow n^2 - 3n + 42 = n^2 + 3n$$

$$\Rightarrow 6n = 42 \therefore n = 7 \text{ (heptágono)}$$

$$d = \frac{7(7-3)}{2} = 14 \text{ diagonais.}$$

9 O número de lados de dois polígonos é dado por (x – 1) e por (x + 1). Sabendo-se que o número total de suas diagonais é 55, determine o número que expressa a diferença entre elas.

Resolução:

$$d_1 = \frac{(x-1)[(x-1)-3]}{2} = \frac{(x-1)(x-4)}{2}$$

$$d_2 = \frac{(x+1)[(x+1)-3]}{2} = \frac{(x+1)(x-2)}{2}$$

$$d_1 + d_2 = 55 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{2} + \frac{(x+1)(x-2)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow (x^2 - 5x + 4) + (x^2 - x - 2) = 110$$

$$2x^2 - 6x - 108 = 0$$

$$x^2 - 3x - 54 = 0 \therefore (x - 9)(x + 6) = 0$$

$$x = 9$$

Polígonos: 8 e 10 lados.

$$d_8 = \frac{8(8-3)}{2} = 20 \text{ e } d_{10} = \frac{10(10-3)}{2} = 35$$

$$d_{10} - d_8 = 15$$

Cálculo do número de diagonais que passam pelo centro de um polígono

Vamos considerar um polígono regular; podemos construí-lo inscrito a uma circunferência.

Dividindo a circunferência em n arcos iguais, temos um polígono regular de n lados.

Onde:
$\hat{a}_c$ = ângulo central
O = centro do polígono e centro da circunferência

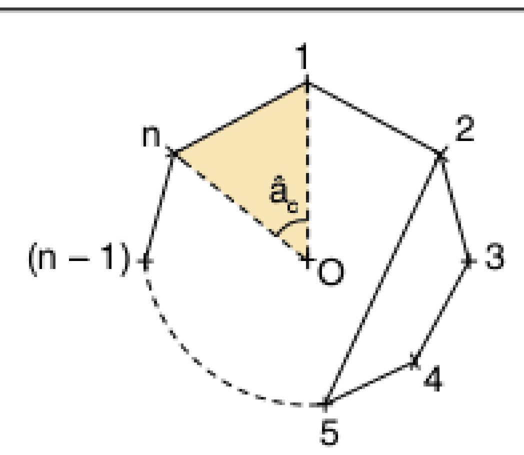


Fig. 13 Polígono regular.

No polígono regular, temos o chamado ângulo central do vértice dos triângulos isósceles formadores do polígono. Queremos avaliar o número de diagonais do polígono regular que passam pelo seu centro O, que nada mais é do que o diâmetro da circunferência.

O diâmetro funciona como um eixo de simetria do polígono, e esta vai ocorrer quando o seu número de lados for par. Se o número de lados for ímpar, nunca ocorrerá simetria.

ATENÇÃO!

Em um polígono regular de n lados, se n for:
- par: o polígono possui diagonais que passam pelo centro;
- ímpar: o polígono não possui nenhuma diagonal que passa pelo centro.

Vamos avaliar agora a quantidade de diagonais que passam pelo centro.

Como a diagonal é o diâmetro que une dois vértices opostos, o número de diâmetros será $\frac{n}{2}$, que é o total do número de diagonais que passam pelo centro.

Podemos resumir os resultados no polígono regular na tabela 3 a seguir.

Número de lados	Passam pelo centro	Não passam pelo centro	Total de diagonais
2k (par)	$\frac{n}{2}$	$^*\frac{n(n-4)}{2}$	$\frac{n(n-3)}{2}$
2k + 1 (ímpar)	0	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{n(n-3)}{2}$

Tab. 3 Resultados no polígono regular.

$$^* \frac{n(n-3)}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-3)-n}{2} = \frac{n(n-4)}{2}$$

Exercício resolvido

10 Um polígono regular possui 2n lados. Determine o número de diagonais que não passam pelo centro.

Resolução:

Como o polígono é regular e seu número de lados é 2n (número par), então ele possui diagonais que passam pelo centro. Assim:

$$d = \frac{2n(2n-3)}{2} - \frac{2n}{2} = n(2n-3) - n$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 3n - n = 2n^2 - 4n = 2n(n-2)$$

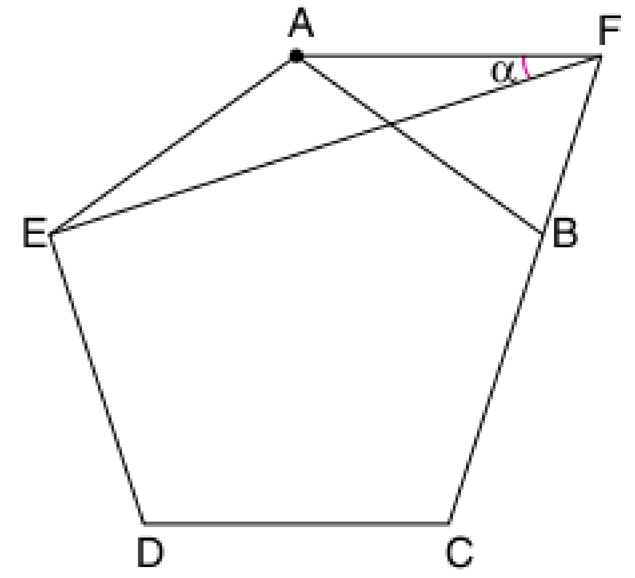
Revisando

1 Determine o número de lados de um polígono regular convexo, cujo ângulo interno é o quíntuplo do externo.

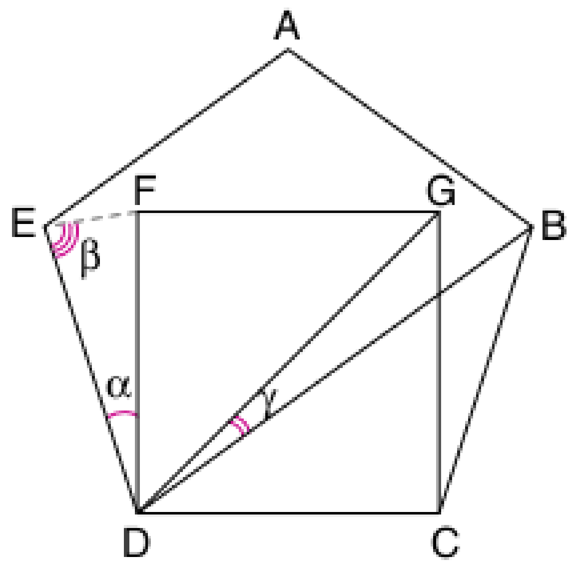
2 As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 24°. Determine o número de diagonais desse polígono.

3 Dados dois polígonos com n e n + 6 lados, respectivamente, calcule n, sabendo que um dos polígonos possui 39 diagonais a mais que o outro.

4 ABCDE é um pentágono regular, e $\overline{BF}$ é o prolongamento do lado $\overline{BC}$. Se AF = AE, calcule o valor do ângulo α.



5 ABCDE é um pentágono regular e CDFG é um quadrado. Calcule o valor dos ângulos assinalados α, β e γ na figura abaixo.



Exercícios propostos

Ângulos de um polígono regular

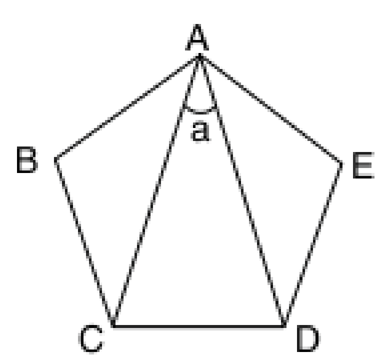
1 **Faap** A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de R$ 0,25 é:

(a) 60° (b) 45° (c) 36° (d) 83° (e) 51°

2 **USF** O polígono regular cujo ângulo interno mede o triplo do ângulo externo é o:

(a) pentágono.
(b) hexágono.
(c) octógono.
(d) decágono.
(e) dodecágono.

3 **Fuvest** Na figura adiante, ABCDE é um pentágono regular.



A medida, em graus, do ângulo a é:

(a) 32° (b) 34° (c) 36° (d) 38° (e) 40°

4 Em um polígono regular ABCD..., as mediatrizes dos lados AB e BC formam um ângulo de 9°. Determine o número de lados do polígono.

5 **FEI** $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são dois lados consecutivos de um polígono regular. Se $A\hat{B}C = 3 . A\hat{C}B$, achar o número de lados do polígono.

6 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são 4 lados consecutivos de um icoságono regular. Os prolongamentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ cortam-se em I. Calcule $B\hat{I}D$.

Número de diagonais dos polígonos regulares

7 **Unitau** O polígono regular convexo em que o n° de lados é igual ao número de diagonais é o:

(a) dodecágono.
(b) pentágono.
(c) decágono.
(d) hexágono.
(e) heptágono.

8 **FEI** O ângulo interno de um polígono regular em que o número de diagonais excede de 3 o número de lados é:

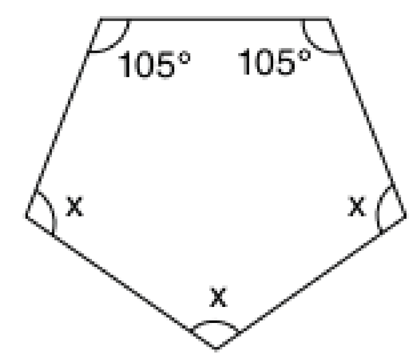
(a) 60º (b) 72º (c) 108º (d) 150º (e) 120º

9 A razão entre o número de diagonais de dois polígonos regulares é $\frac{5}{26}$. Um deles possui o dobro do número de lados do outro. Determine os polígonos.

10 A razão entre os gêneros de dois polígonos é $\frac{2}{3}$ e a razão entre o número de diagonais é $\frac{1}{3}$. Determine os polígonos.

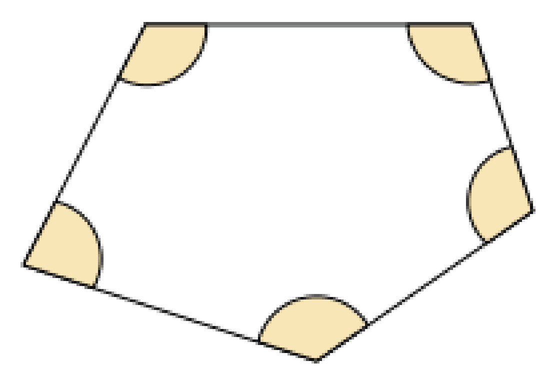
Polígonos não regulares

11 Determine x:



12 Qual é o polígono convexo em que a soma dos ângulos internos é 1.080°?

13 **Mackenzie** As medidas dos ângulos assinalados na figura a seguir formam uma progressão aritmética.



Então, necessariamente, um deles sempre mede:

(a) 108°
(b) 104°
(c) 100°
(d) 86°
(e) 72°

14 **Fuvest** Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130° cada um e os demais ângulos internos medem 128° cada um. O número de lados do polígono é:

(a) 6
(b) 7
(c) 13
(d) 16
(e) 17

15 Em um polígono, a soma dos ângulos internos adicionada à soma dos ângulos externos é igual a 1.440°. Determine o número de diagonais do polígono.

16 A soma dos ângulos externos de um pentágono e de 4 dos seus ângulos internos é igual a 850°. Calcule o 5° ângulo do pentágono.

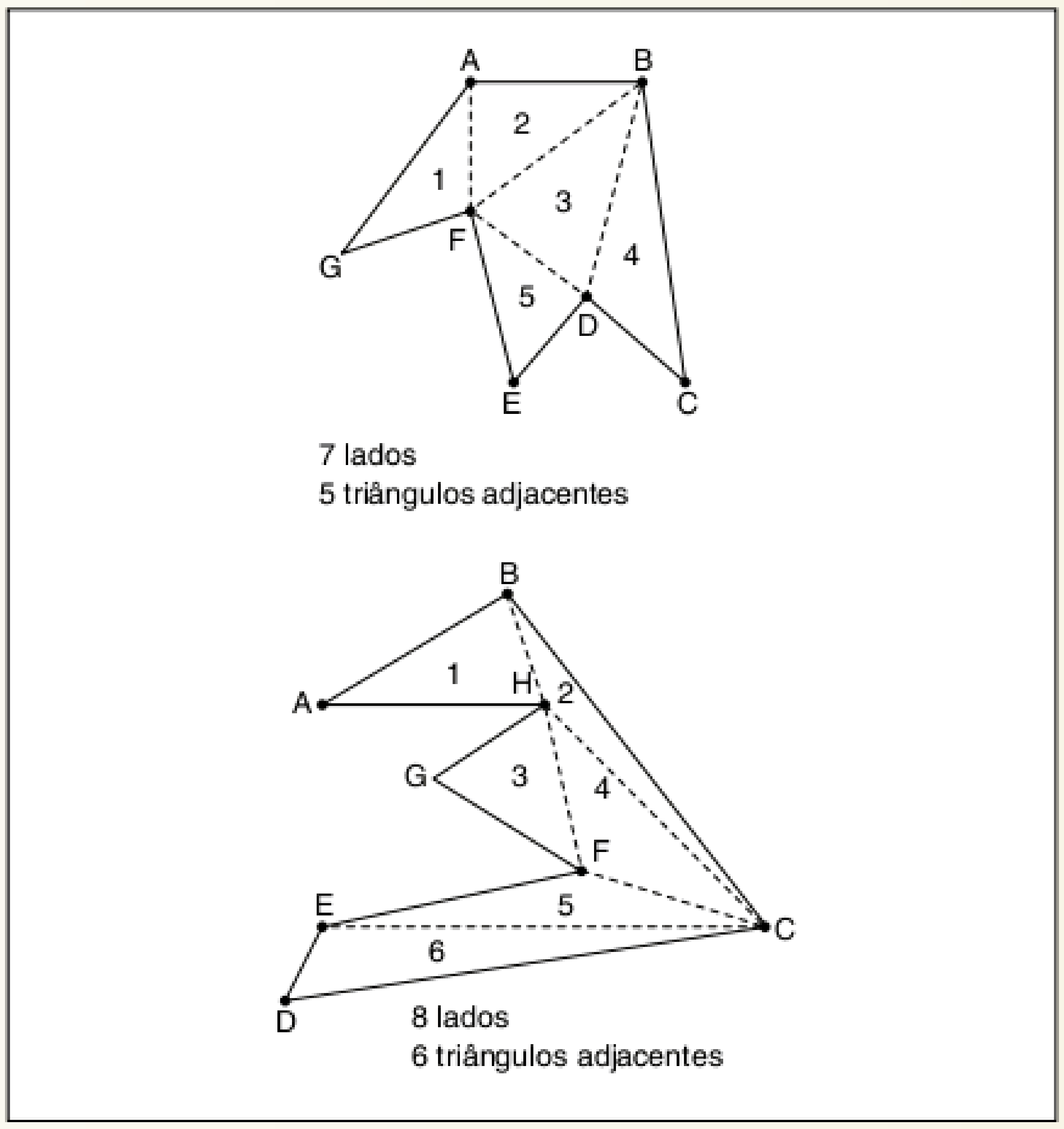
TEXTOS COMPLEMENTARES

O que fazemos com os polígonos côncavos?

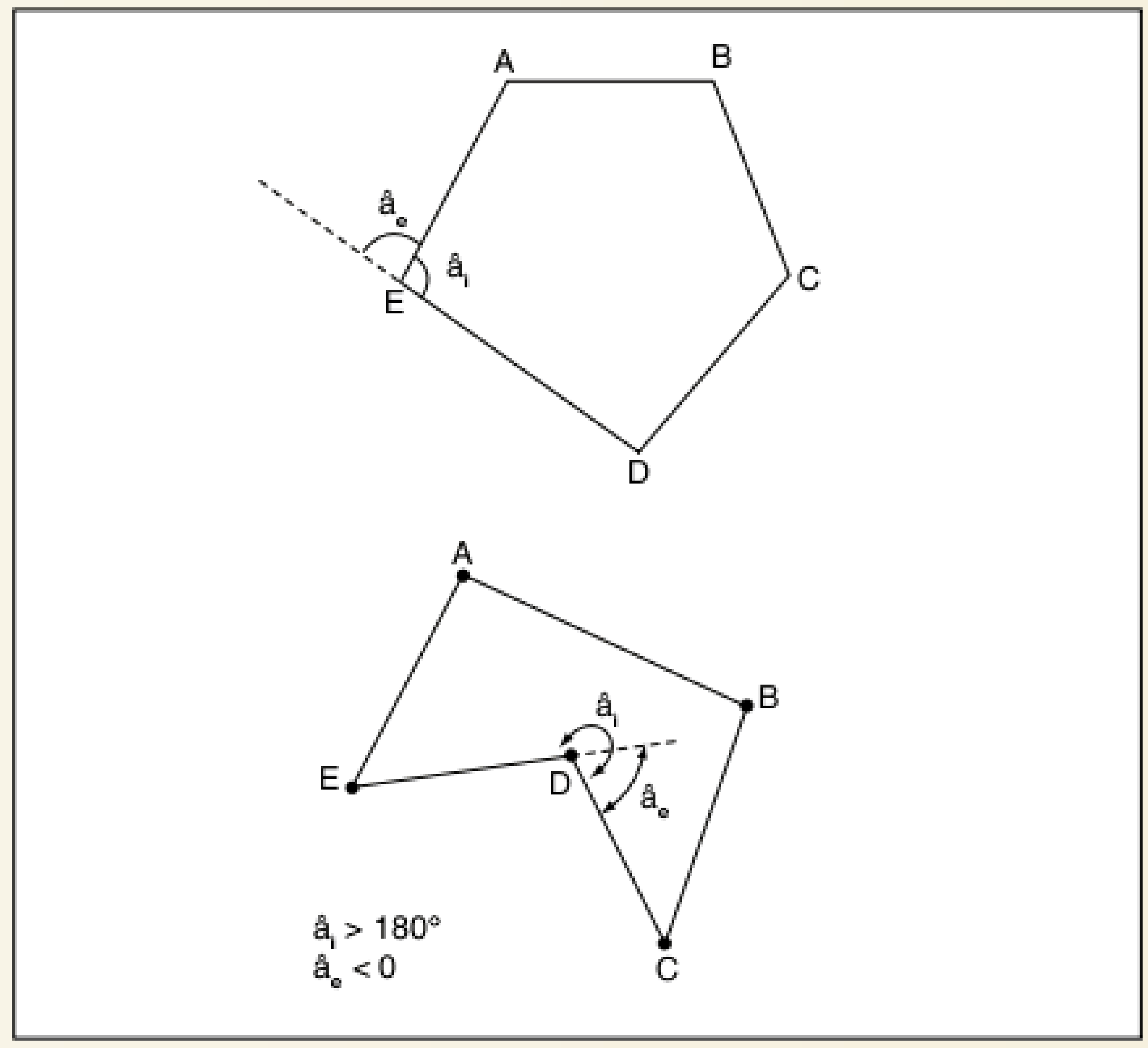
Muitos livros e apostilas que tratam do assunto dizem que as fórmulas apresentadas valem somente para os polígonos convexos e praticamente desconversam o que acontece com os polígonos côncavos.

O mais interessante é que em um polígono côncavo a soma dos ângulos internos também é $180°.(n - 2)$ e a soma dos ângulos externos também vale 360° (mas com alguns ajustes).

Observe que um polígono côncavo de n lados também pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos adjacentes. Analise os exemplos.



Assim, a soma dos ângulos internos também vale $180° (n - 2)$. Vamos analisar agora os ângulos externos dos polígonos.



No polígono convexo, os ângulos internos são "salientes" e todos menores que 180°. No vértice E, temos $\hat{a}_i + \hat{a}_e = 180°$.

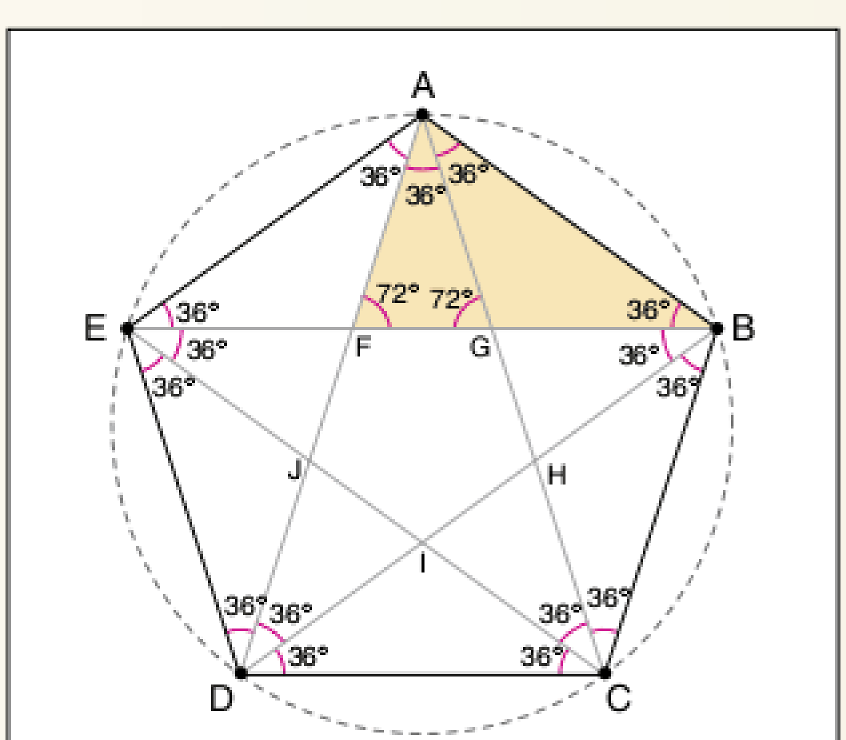
No polígono côncavo, alguns ângulos internos são "reentrantes", e estes são maiores do que 180°.

Para que $\hat{a}_i + \hat{a}_e = 180°$, vamos considerar $\hat{a}_e < 0$. Observe os ângulos no vértice D.

Com a definição do ângulo externo negativo, a soma dos ângulos externos de um polígono côncavo também vale 360°.

Pentágono regular

Devido às suas diversas peculiaridades, o pentágono regular é um polígono muito explorado nos vestibulares. Vamos observar algumas propriedades:



a) é o único polígono que o número de lados coincide com o número de diagonais:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$d = n \therefore \frac{n(n-3)}{2} = n \therefore \frac{n-3}{2} = 1 \therefore n = 5$$

b) as diagonais dividem os ângulos internos em partes iguais.

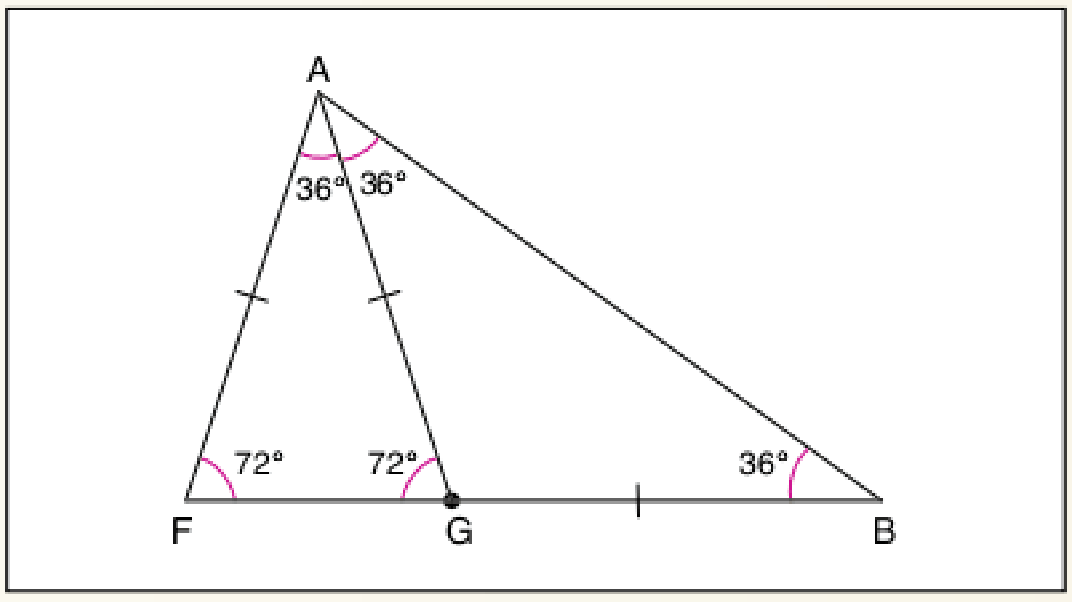
Como o seu ângulo interno é igual a: $\hat{a}_i = \dfrac{180°(5-2)}{5} = 108°$

e existem vários triângulos isósceles congruentes ao ΔABE (108°; 36°; e 36°), as diagonais dividem os ângulos internos em 3 ângulos de 36°.

c) as diagonais formam um novo pentágono regular semelhante ao inicial.

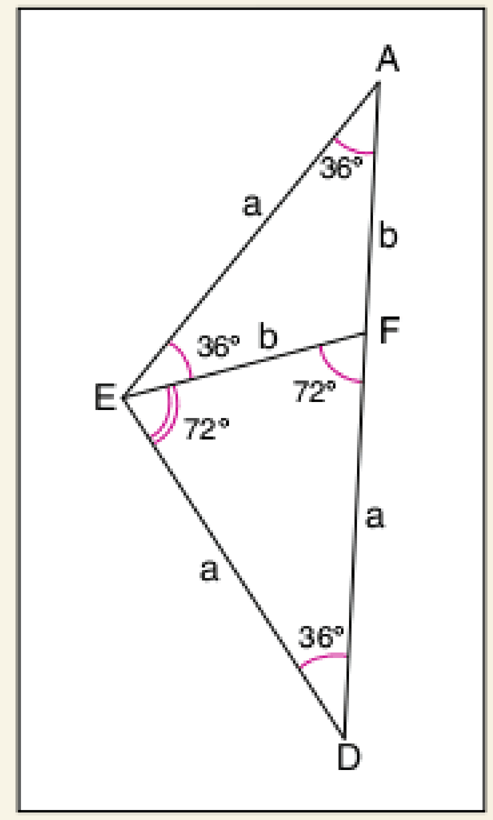
O pentágono FGHIJ é semelhante ao pentágono ABCDE.

d) o pentágono regular é formado por 5 triângulos isósceles congruentes especiais, chamados de triângulos de ouro. Observe o ΔAFB.



ΔAFG, ΔAGB e ΔAFB são isósceles.
$\Delta FAG \sim \Delta ABF$

e) o cruzamento de duas diagonais forma segmentos que estão na razão áurea.



$\Delta AEF \sim \Delta ADE$

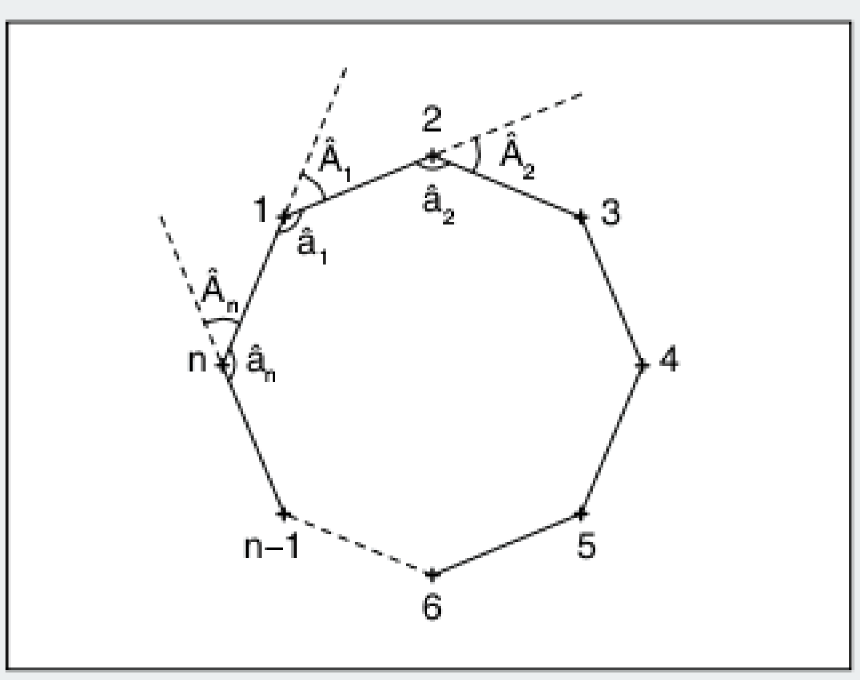
$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} \therefore a^2 = ab + b^2 \therefore 0 = b^2 + ab - a^2$$

$$b = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} \therefore b = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} \therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

b é o segmento áureo de a.

RESUMINDO

Os principais elementos de um polígono convexo são:



- $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \ldots \hat{a}_n$: ângulos internos;
- $\hat{A}_1, \hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n$: ângulos externos;
- diagonais.

$$S_i = 180° \,(n-2)\,, \quad S_e = 360° \quad \text{e} \quad d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Para polígonos regulares:

$$a_i = \frac{180°(n-2)}{n} \quad \text{e} \quad a_e = \frac{360°}{n}$$

QUER SABER MAIS?

SITE

- Pavimentação com polígonos regulares
<www.uff.br/cdme/ppr/ppr-html/ppr-br.html>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 **ITA** Considere as afirmações sobre polígonos convexos.

I. Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II. Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III. Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

(a) Todas as afirmações são verdadeiras.
(b) Apenas I e III são verdadeiras.
(c) Apenas I é verdadeira.
(d) Apenas III é verdadeira.
(e) Apenas II e III são verdadeiras.

2 Um polígono possui, a partir de um de seus vértices, tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Determine o polígono e o total de suas diagonais.

3 Determine o total de polígonos cujo número de lados n é expresso por dois algarismos iguais e que seu número d de diagonais é tal que d > 26 n.

(a) 4
(b) 5
(c) 6
(d) 7
(e) 8

4 Se aumentarmos de 3 o número de lados de um polígono e de 21 o número de suas diagonais, então o número de diagonais do novo polígono será igual a:

(a) 5
(b) 9
(c) 35
(d) 20
(e) 27

5 O número de lados de dois polígonos é dado por $(x - 1)$ e $(x + 1)$. Sabendo-se que o número total de diagonais é 55, indique o número que expressa a diferença entre elas.

(a) 5
(b) 6
(c) 11
(d) 15
(e) 17

6 Determine o número de diagonais de um polígono convexo sabendo que de um dos seus vértices partem 12 diagonais.

7 Determine o ângulo interno de um polígono regular ABCDE..., sabendo que as bissetrizes $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo que vale $\frac{2}{9}$ do seu ângulo interno.

8 Três polígonos possuem o número de lados expressos por números inteiros consecutivos, sabendo que o número total de diagonais dos três polígonos é igual a 43. Determine o polígono com menor número de lados.

9 **ITA** A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2.160º. Então, o número de diagonais desse polígono que não passava pelo centro da circunferência que o circunscreve é:

(a) 50
(b) 60
(c) 70
(d) 80
(e) 90

10 **ITA** O comprimento da diagonal do pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:

(a) $x^2 + x - 2 = 0$
(b) $x^2 - x - 2 = 0$
(c) $x^2 - 2x + 1 = 0$
(d) $x^2 + x - 1 = 0$
(e) $x^2 - x - 1 = 0$

11 A medida sexagesimal do menor ângulo de um polígono convexo é 139º e as medidas sexagesimais dos outros ângulos formam com a do primeiro, tomadas na ordem crescente, uma progressão aritmética cuja razão é 2º. Calcular o número de lados do polígono.

12 Demonstrar que um polígono convexo não pode ter mais de três ângulos internos agudos.

13 Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes de um polígono equiângulo.

14 Três polígonos regulares com número de lados m, n e p "preenchem o plano" em um mesmo vértice. Demonstre que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ é constante.

15 Descrever um processo geométrico que nos possibilite construir um hexágono e depois um pentágono que sejam apenas equiângulos.

8

FRENTE 3

Quadriláteros notáveis

Relação de inclusão entre os quadriláteros notáveis

A geometria que estudamos atualmente teve sua origem, aproximadamente, há 300 a.C. A grande obra geométrica da Antiguidade, como já sabemos, são os 13 livros de *Os elementos*, de Euclides. Na definição 19 do livro I, Euclides define uma "figura quadrilátera" como sendo aquela contida por quatro linhas. Na definição 22 do mesmo livro, ele define alguns quadriláteros notáveis como: quadrado, oblongo, rombo e romboide.

A conceituação utilizada atualmente deve-se ao matemático francês Jacques Saloman Hadamard (1865-1963). Em 1898, Hadamard resumiu os quadriláteros notáveis através de um diagrama de Venn, muito conhecido.

Classificação e elementos básicos dos quadriláteros

Neste capítulo, vamos estudar somente os polígonos com 4 lados, que podemos dividir em 2 grupos.

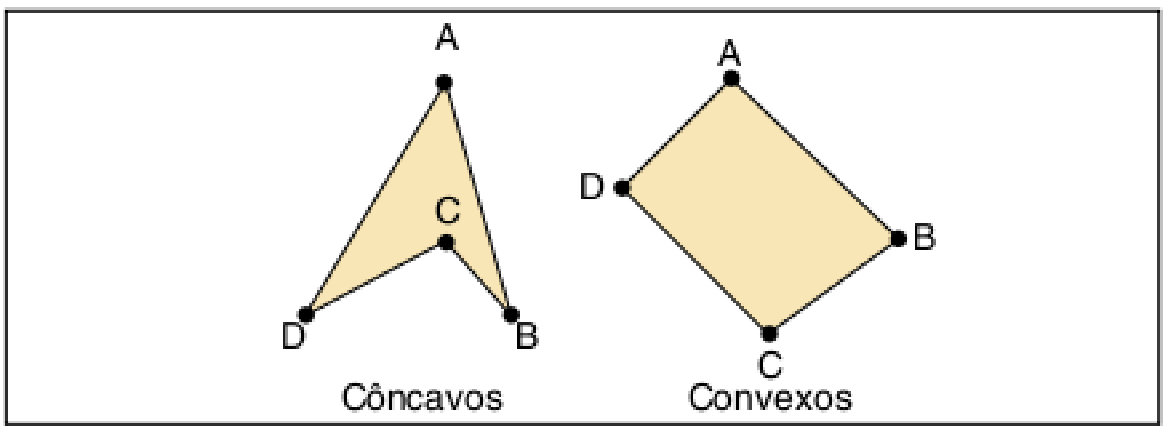


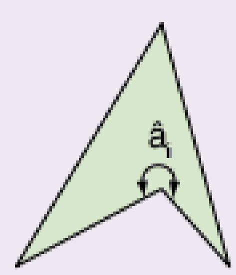
Fig. 1 Tipos de quadriláteros.

Ambos os quadriláteros da figura 1 possuem $S_i = 360°$, 2 diagonais e $S_e = 360°$.

Daremos ênfase aos quadriláteros convexos. Algumas propriedades desses quadriláteros serão estendidas aos côncavos.

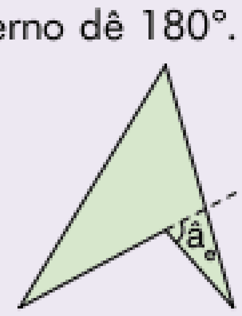
ATENÇÃO!

No quadrilátero côncavo, temos ângulos internos maiores do que 180°.



$\hat{a}_i > 180°$

Poderíamos considerar o ângulo externo negativo, a fim de que a soma com o interno dê 180°.



$\hat{a}_e < 0°$

Trapézio

Definição: trapézio é o quadrilátero notável que possui 2 lados paralelos chamados de bases.

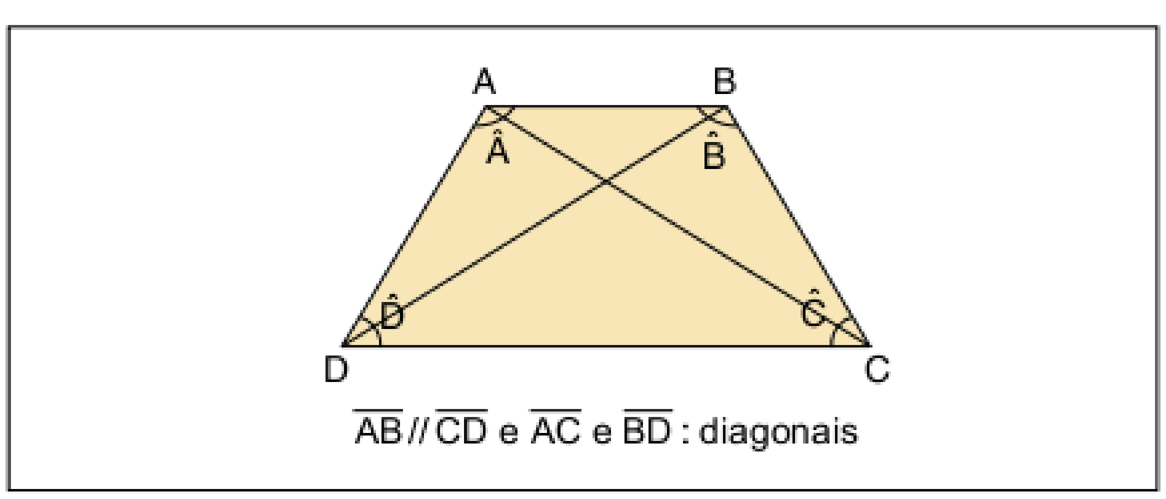


Fig. 2 Trapézio.

Classificação dos trapézios

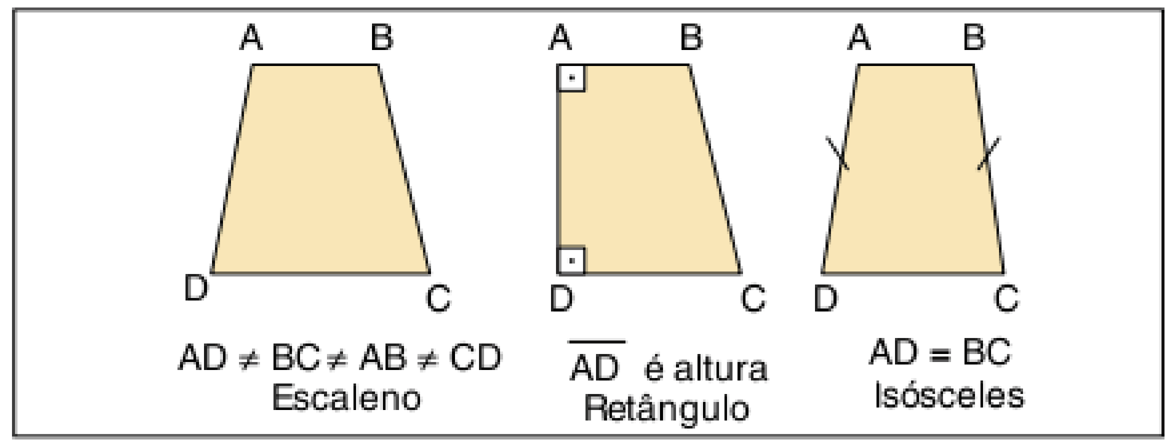


Fig. 3 Classificação dos trapézios.

Propriedades dos trapézios

P1 Na figura 2, como $\overline{AB} // \overline{CD}$, temos retas paralelas e as transversais $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, assim os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são colaterais internos, portanto: $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

P2 Em um trapézio qualquer, as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são perpendiculares.

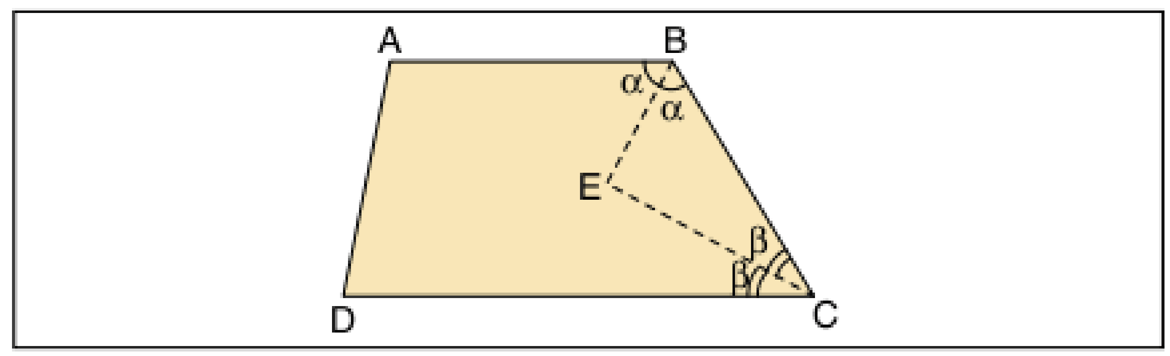


Fig. 4 Demonstração.

$\overline{BE}$ e $\overline{CE}$ são bissetrizes.

Como $\hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° \therefore$

$\alpha + \beta = 90°$, mas α e β são ângulos internos do ΔBCE, então $B\hat{E}C = 90°$.

Observe a figura 5.

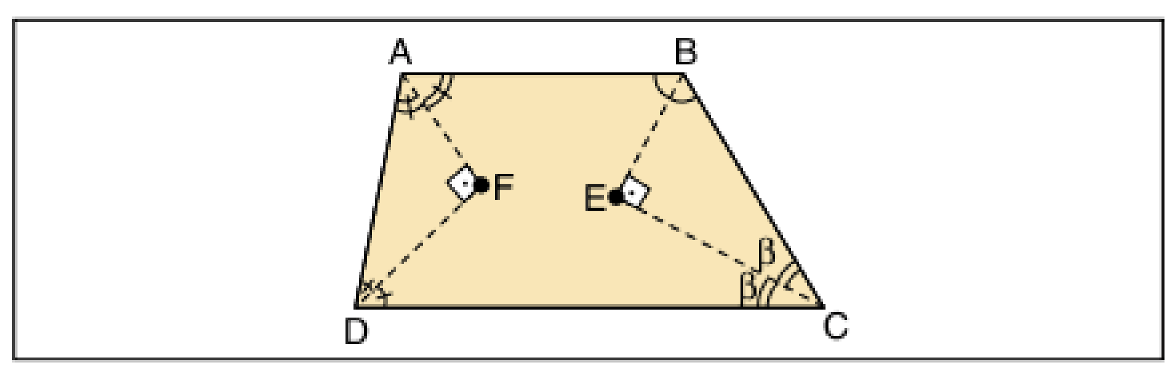


Fig. 5 Propriedades das bissetrizes.

ABCD é um trapézio qualquer.

$\overline{BE} \perp \overline{CE}$ e $\overline{AF} \perp \overline{DF}$

P3 Em um trapézio isósceles, os ângulos da base são iguais e as diagonais são congruentes.

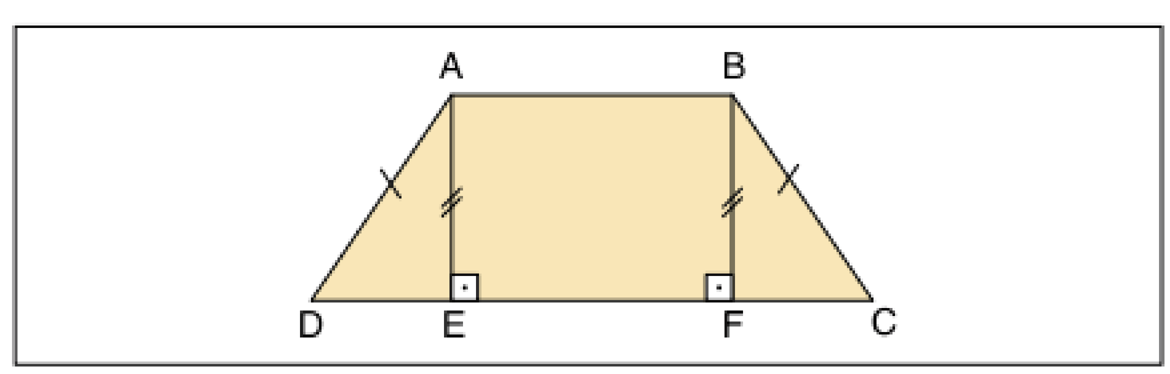


Fig. 6 Demonstração.

Como $\overline{AB} // \overline{CD} \Rightarrow AE = BF$

Os $\Delta DEA \approx \Delta CFB$ (caso especial) $\Rightarrow \hat{D} = \hat{C}$

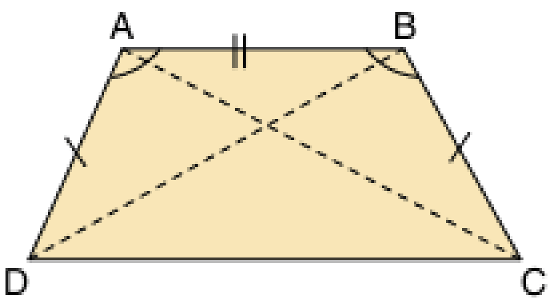
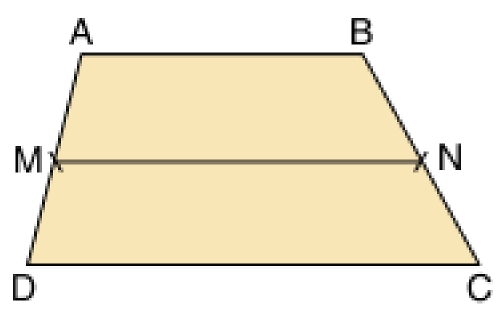


Fig. 7 $\Delta ABD \approx \Delta ABC$ (LAL) $\Rightarrow AC = BD$.

P4 Base média do trapézio

Observe a figura 8, tal que $AM = MD$ e $BN = NC$, o segmento $\overline{MN}$ é a base média do trapézio e vale a média aritmética das bases e é paralela às bases.



$AM = MD$ e $BN = NC$

Fig. 8 Base média do trapézio.

$\overline{MN} // \overline{AB} // \overline{CD}$, temos: $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$

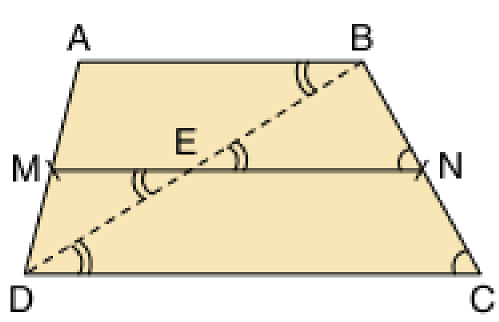


Fig. 9 Demonstração.

O $\Delta DME \sim \Delta DAB$ (razão $\frac{1}{2}$) $\Rightarrow ME = \dfrac{AB}{2}$

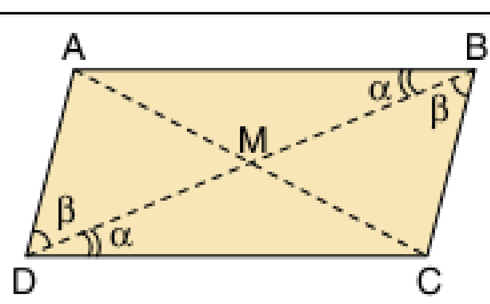
e o $\Delta BNE \sim \Delta BCD$ (razão $\frac{1}{2}$) $\Rightarrow NE = \dfrac{DC}{2}$

Assim:

$$ME + NE = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} \Rightarrow MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Paralelogramo

Definição: um quadrilátero convexo é um paralelogramo quando possui os lados opostos paralelos.



$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$

Fig. 10 Paralelogramo.

O paralelogramo é um trapézio. Todas as propriedades básicas do trapézio também servem para o paralelogramo.

Lembre-se da regra do paralelogramo de adição e subtração de vetores.

Propriedade dos paralelogramos

P1 Os lados opostos de um paralelogramo são iguais.

Demonstração:

Na figura 10, temos $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (LAL) $\Rightarrow AD = BC$ e $AB = CD$.

P2 Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Demonstração:

Observando a figura 10, torna-se óbvio.

P3 As diagonais de um paralelogramo cruzam-se no ponto médio.

Demonstração:

Da figura 10, podemos retirar a figura 11.

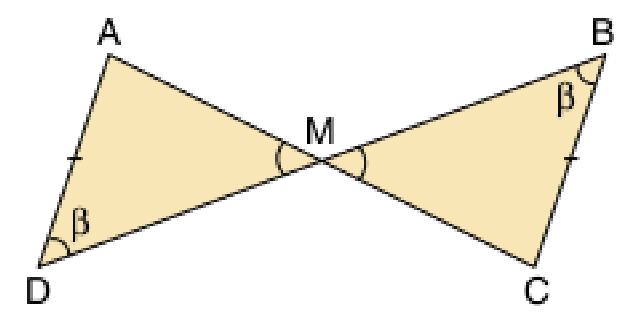
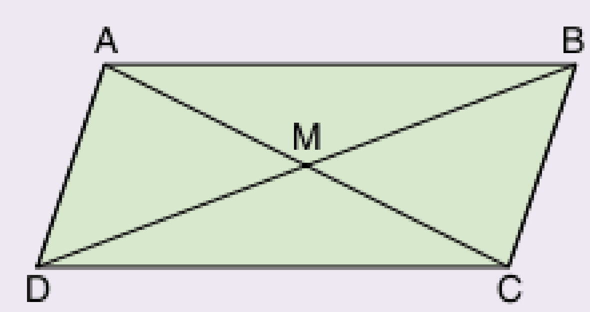


Fig. 11 ΔAMD e ΔCMB, provenientes do paralelogramo ABCD.

Pela figura 11, podemos ver que $\Delta AMD \approx \Delta CMB$ (LAA_0) $\Rightarrow MD = MB$ e $AM = MC$.

ATENÇÃO!

Em um paralelogramo ABCD:



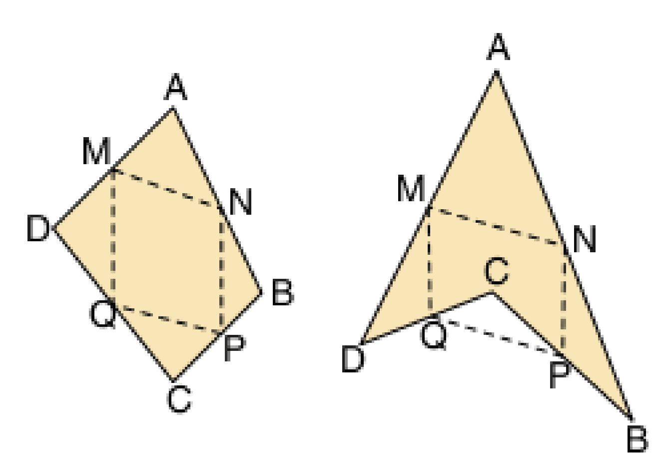
temos: $AD = BC$ e $AB = CD$

$\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$

$AM = MC$ e $BM = MD$

Propriedade interessante!

Em um quadrilátero qualquer, côncavo ou convexo, a união dos pontos médios dos lados sempre forma um paralelogramo cujo perímetro é a soma das diagonais do polígono inicial. Observe as figuras 12 e 13.



MNPQ é um paralelogramo

Fig. 12 Propriedade dos quadriláteros.

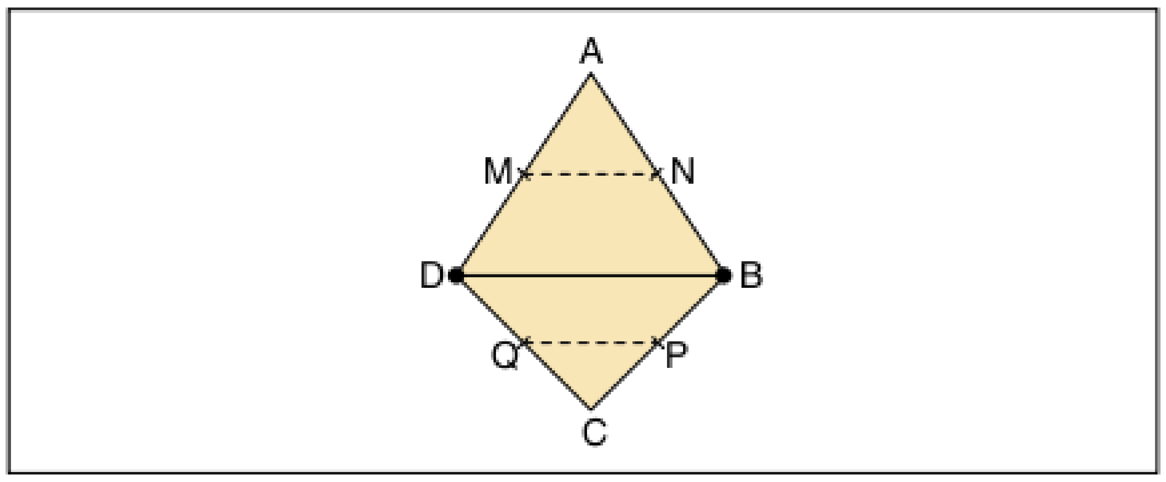


Fig. 13 Demonstração.

$\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são bases médias ΔABD e $\Delta CBD \Rightarrow \overline{MN} // \overline{DB} // \overline{QP}$ e $MN + PQ = BD$.

Mesmo procedimento para os lados MQ e NP, obtendo também $\overline{MQ} // \overline{AC} // \overline{NP}$ e $MQ + NP = AC$.

Assim: $MN + QP + MQ + NP = AC + BD$

Para o quadrilátero convexo, temos:

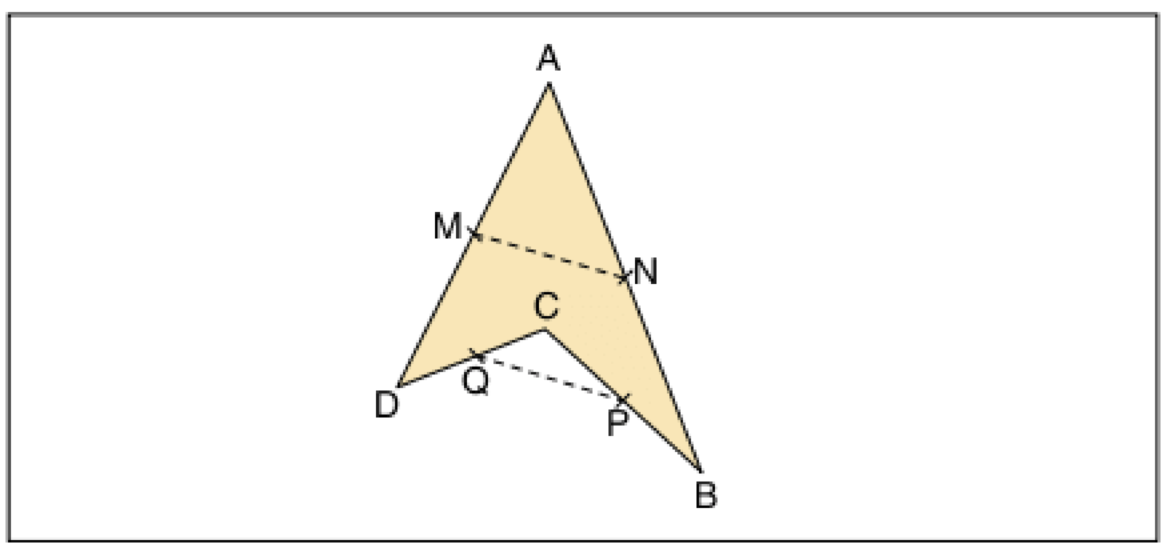


Fig. 14 Extrapolação da propriedade para uma quadrilátero côncavo.

$\overline{QP}$ e $\overline{MN}$ são bases médias dos triângulos ΔCDB e $\Delta ADB \Rightarrow \overline{QP} // \overline{MN} // \overline{BD}$ e $MN + PQ = BD$.

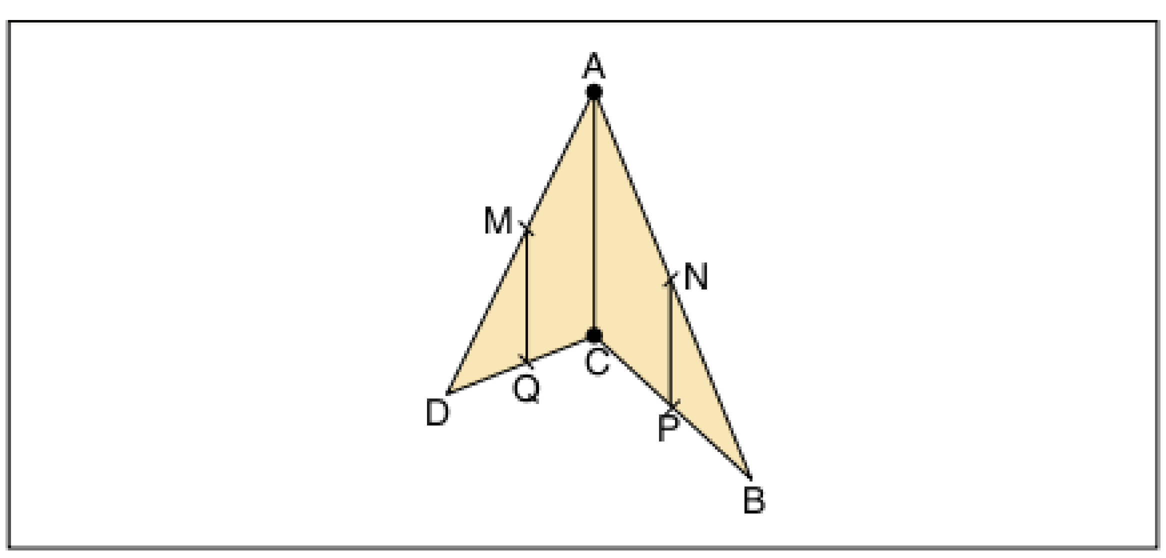
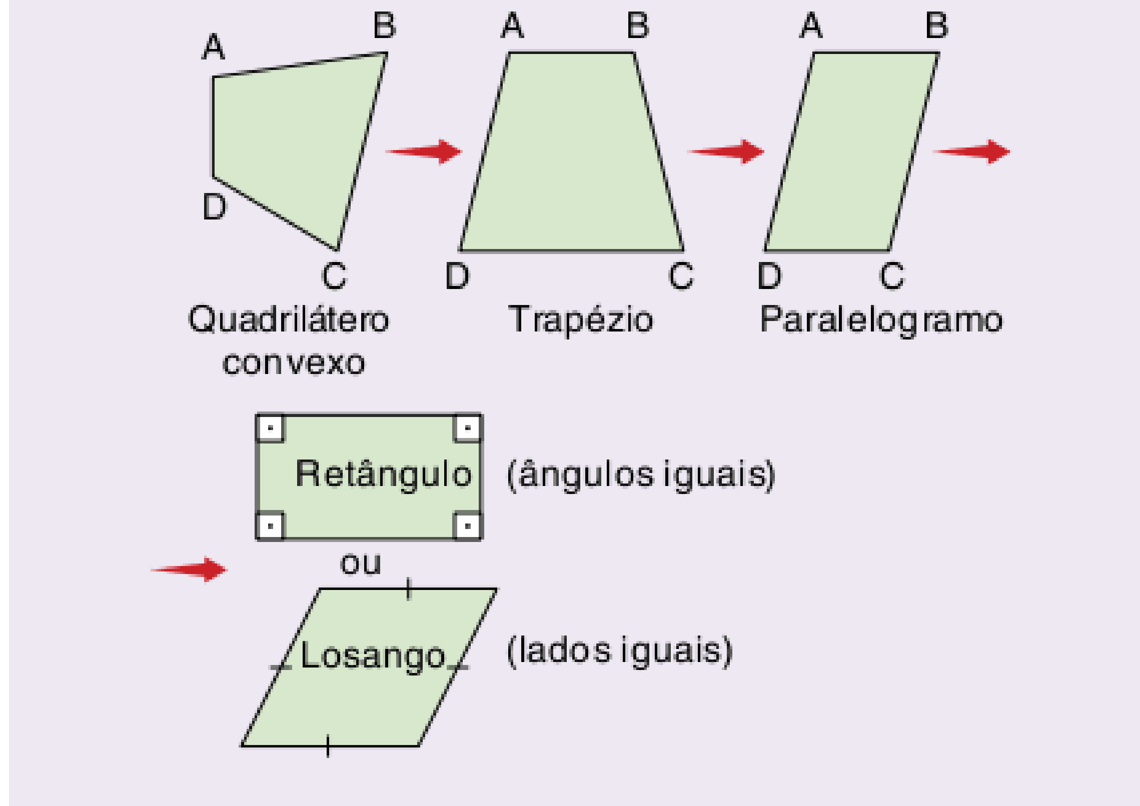


Fig. 15 Continuação da extrapolação da propriedade para um quadrilátero côncavo.

$\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ são bases médias dos triângulos ΔDAC e $\Delta BAC \Rightarrow \overline{MQ} // \overline{AC} // \overline{NP}$ e $MQ + NP = AC$.

Assim, $MN + PQ + MQ + NP = BD + AC$.

ATENÇÃO!



No quadro anterior, percebemos que, após a definição de paralelogramo, podemos definir dois outros quadriláteros notáveis.

Retângulo

Definição: retângulo é o paralelogramo que possui ângulos iguais.

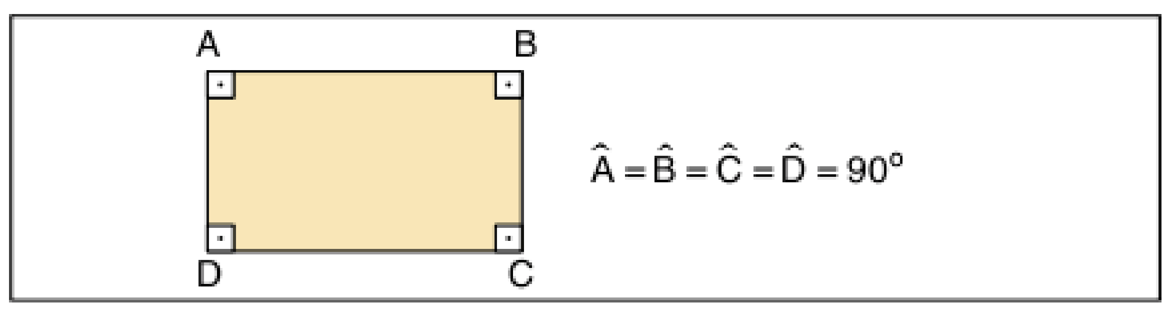


Fig. 16 Retângulo.

Propriedades do retângulo

P1 Lados opostos congruentes, pois é um paralelogramo.

P2 Diagonais que se cruzam no ponto médio, pois é um paralelogramo.

P3 Diagonais congruentes.

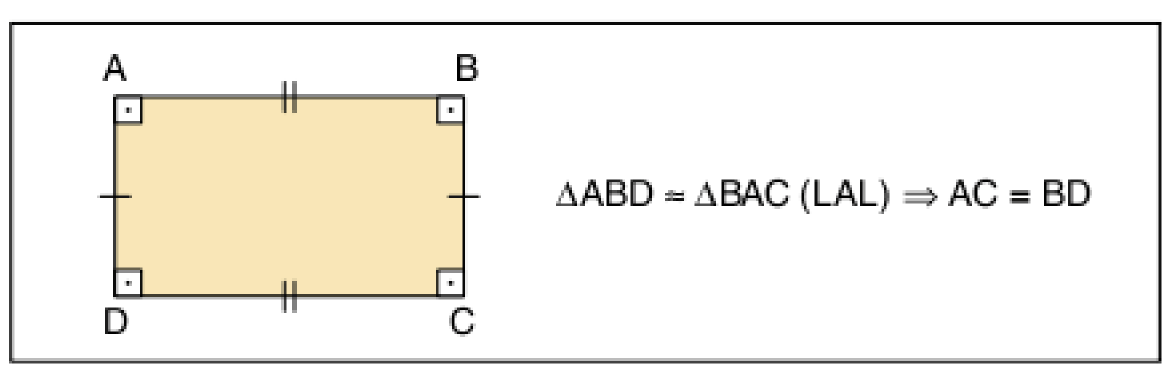


Fig. 17 Demonstração.

Losango ou rombo

Definição: losango é o paralelogramo que possui os lados iguais. Observe a figura 18.

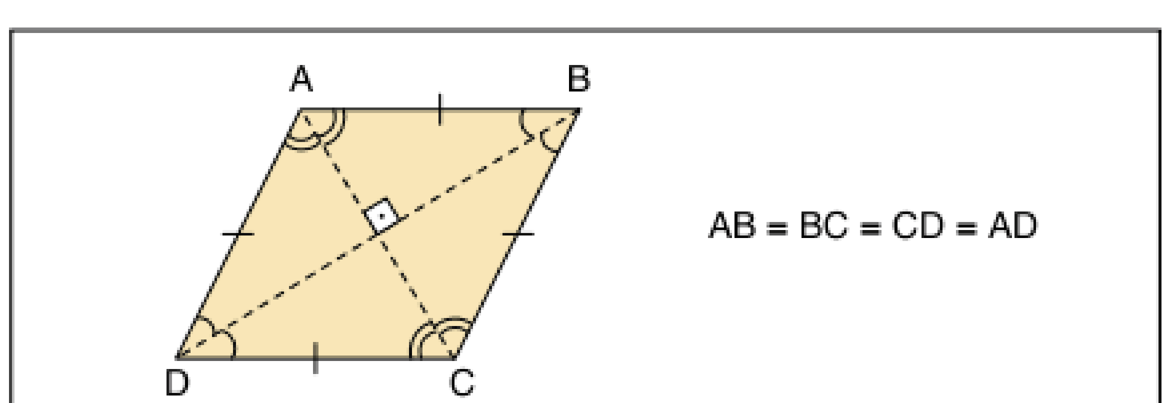


Fig. 18 Losango.

Propriedades do losango

P1 Ângulos opostos iguais, pois o losango é paralelogramo.
P2 As diagonais cruzam-se no ponto médio, pois é paralelogramo.
P3 As diagonais são bissetrizes.

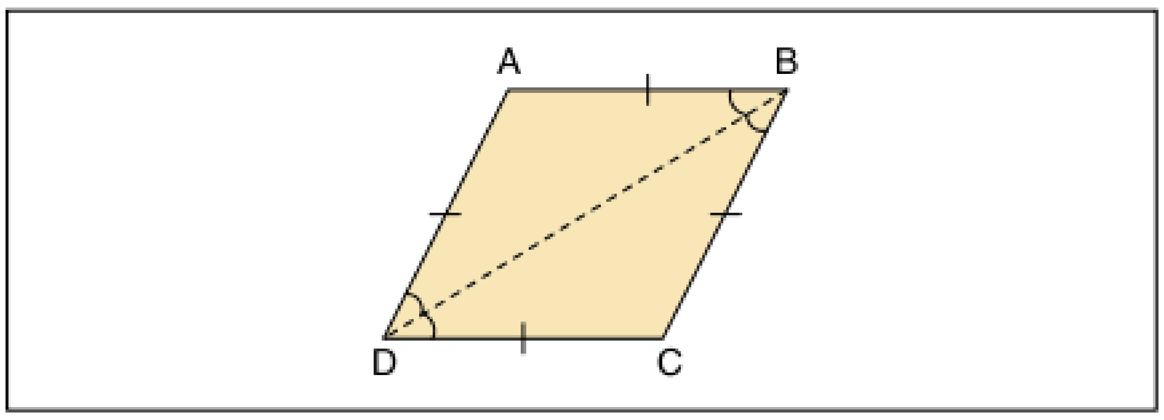


Fig. 19 Demonstração.

O ΔBCD é isósceles e $B\hat{D}C = A\hat{B}D$ (alternos internos)
P4 As diagonais são perpendiculares.

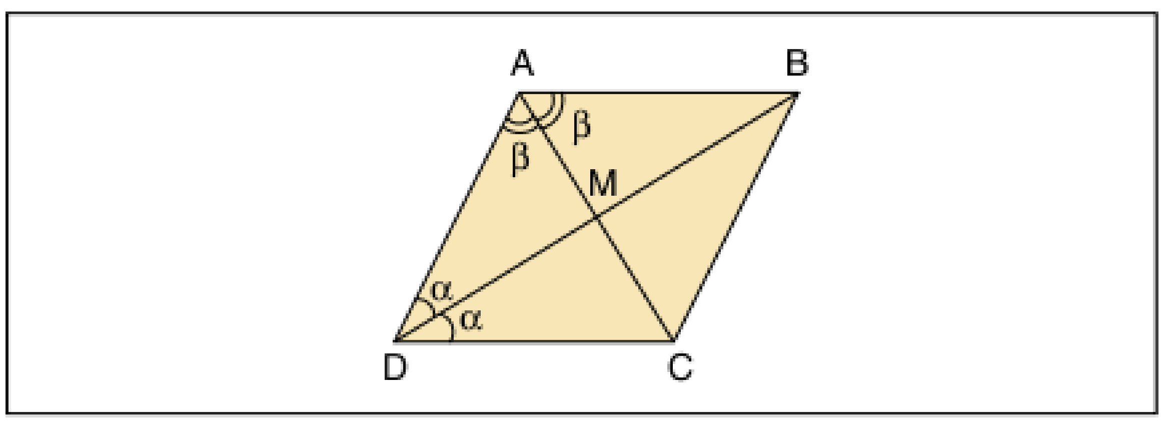
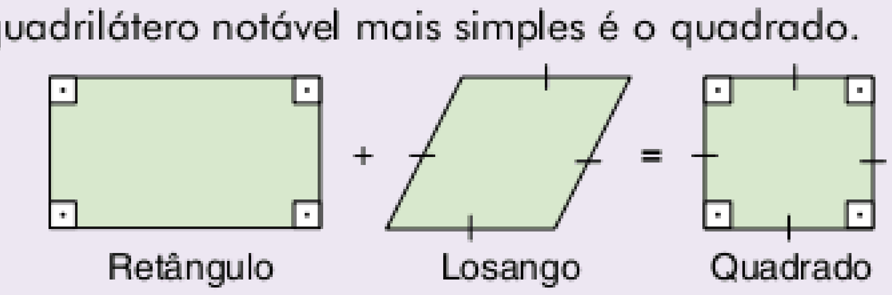


Fig. 20 Demonstração.

$\hat{A} + \hat{D} = 180^o \Rightarrow 2\beta + 2\alpha = 180° \therefore \alpha + \beta = 90°$ α e β são ângulos internos do ΔAMD e $A\hat{M}D = 90^o$.

ATENÇÃO!

O quadrilátero notável mais simples é o quadrado.



Quadrado

Definição: o quadrado é o quadrilátero que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Propriedade dos quadrados

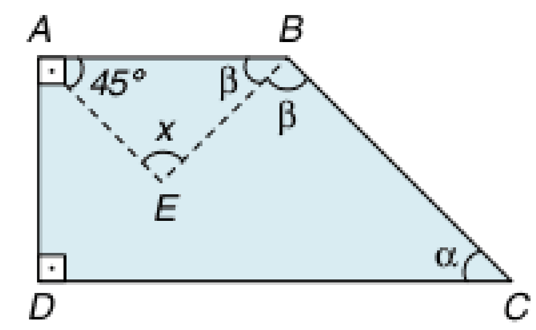
P1 Todos os lados iguais, pois é losango.
P2 Todos os ângulos iguais, pois é retângulo.
P3 Diagonais bissetrizes, pois é losango.
P4 Diagonais cruzam-se no ponto médio, pois é paralelogramo.
P5 Diagonais perpendiculares, pois é losango.

Observe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

1 A diferença entre o maior e o menor ângulo de um trapézio retângulo é 18°. Qual o valor do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos de sua base menor?

Resolução:

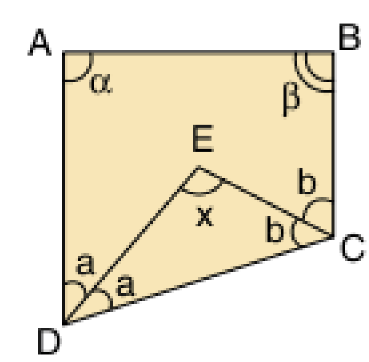


$$\begin{cases} 2\beta + \alpha = 180^o \\ 2\beta - \alpha = 18^o \end{cases} +$$

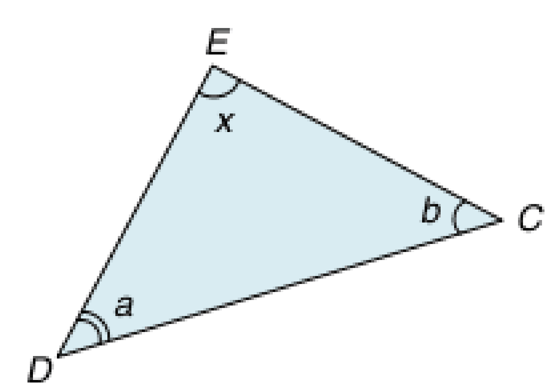
$$4\beta = 198^o \Rightarrow \beta = \frac{198^o}{4} = 49^o30'$$

No ΔABE, *temos* $45° + x + \beta = 180°$
$\Rightarrow 45° + 49°30' + x = 180° \Rightarrow x = 85°30'$.

2 Calcule o valor de x na figura, sabendo-se que $\alpha + \beta = 190°$ e $\overline{DE}$ e $\overline{CE}$ são bissetrizes.

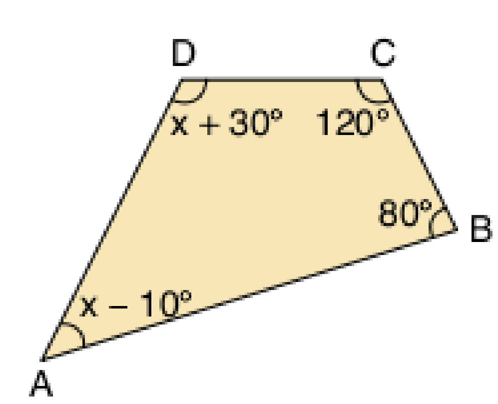


Resolução:



No quadrilátero ABCD, temos:
$\alpha + \beta + 2a + 2b = 360° \Rightarrow 190° + 2(a + b) = 360° \Rightarrow 2(a + b) = $
$= 170° \Rightarrow a + b = 85°$.
No ΔDEC, $x + (a + b) = 180° \therefore x + 85° = 180° \Rightarrow x = 95°$

3 Determinar a medida do menor ângulo interno do quadrilátero abaixo:



Resolução:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$

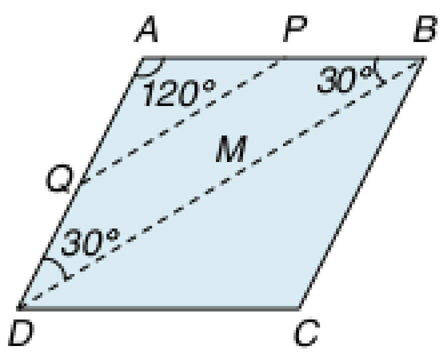
$\therefore (x + 30°) + (120°) + (80°) + (x - 10°) = 360°$

$\therefore 2x + 220° = 360° \therefore 2x = 140° \therefore x = 70°$

O menor ângulo é $\hat{A} = x - 10° = 70° - 10° = 60°$

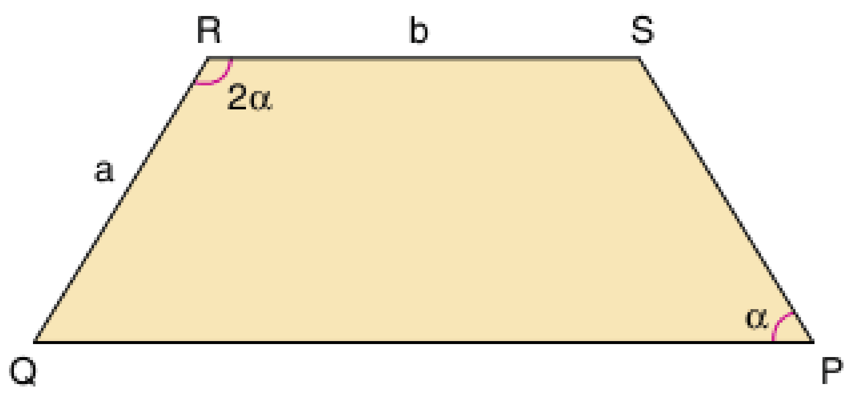
4 Em um losango ABCD, o ângulo A mede 120°. Os pontos médios de AB e AD são, respectivamente, P e Q. Calcular os ângulos internos do ΔPAQ.

Resolução:

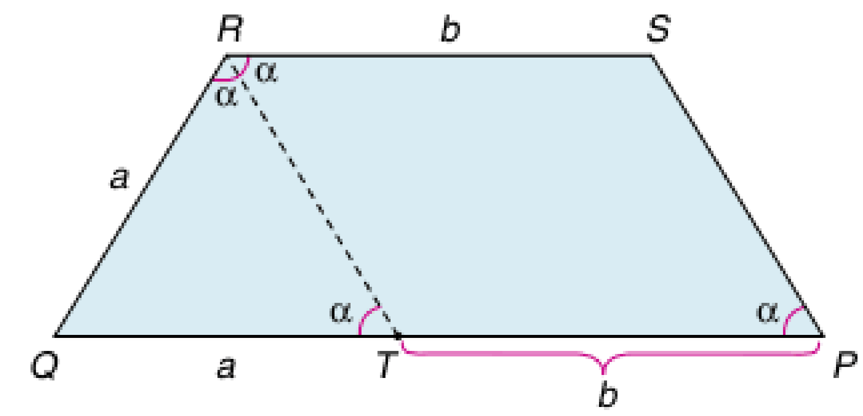


ΔAPQ ~ ΔABD. Assim, os ângulos do ΔAPQ são: 120°; 30° e 30°.

5 No trapézio PQRS da figura, a medida do ângulo $Q\hat{R}S$ é o dobro da medida de $Q\hat{P}S$. QR mede a e RS mede b. Calcule a medida de PQ.



Resolução:



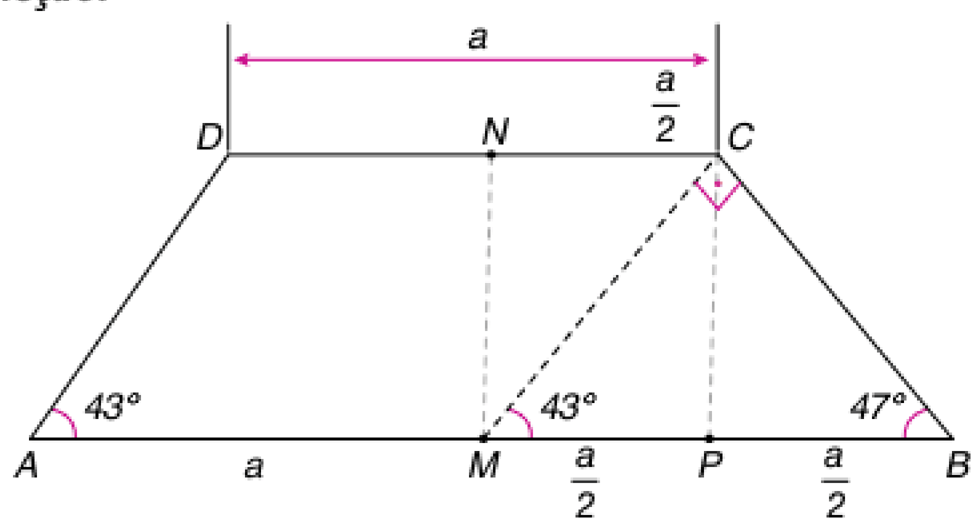
$\overline{TR} \,//\, \overline{PS} \rightarrow$ *RSPT é um paralelogramo* $\rightarrow PT = RS = b$

ΔQRT é isósceles $\rightarrow QT = RQ = a$

$PQ = a + b$

6 O trapézio ABCD tem as duas bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medindo 2a e a, respectivamente. Se $D\hat{A}B = 43°$ e $A\hat{B}C = 47°$, determine a distância entre os pontos médios das duas bases.

Resolução:

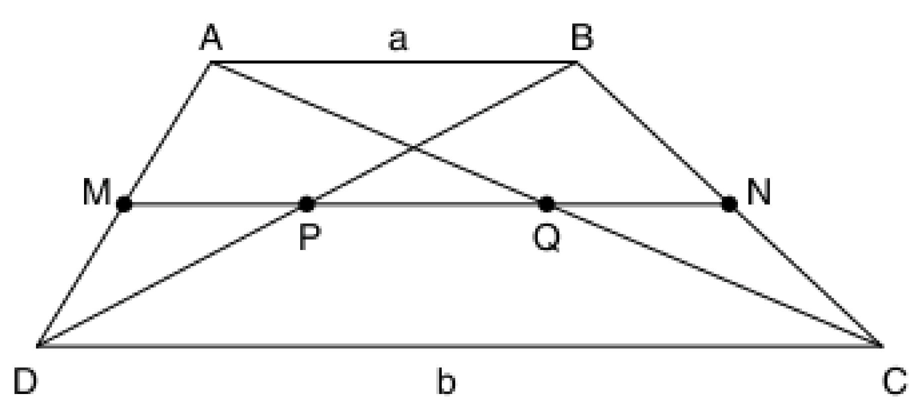


DCMA é um paralelogramo

$DN = NC = MP = PB = \frac{a}{2} \rightarrow$ *NCPM é um paralelogramo* $\overline{CP}$ *é mediana relativa à hipotenusa do ΔBCM.* $MN = PC = \frac{a}{2}$

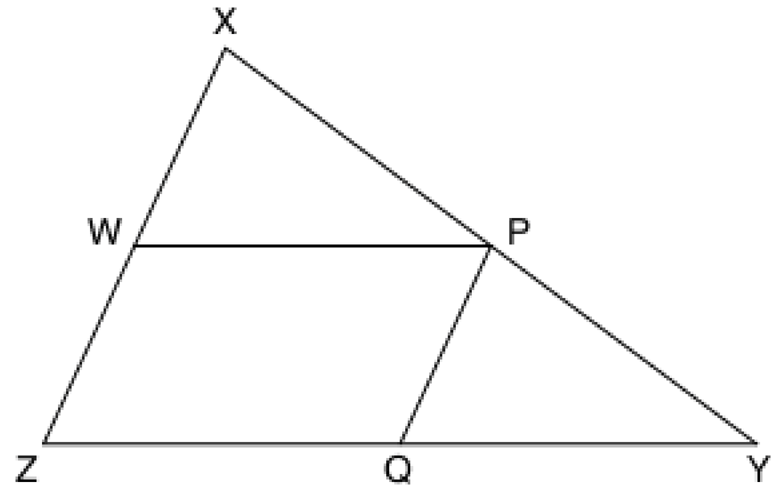
Revisando

1 No trapézio ABCD da figura, temos AB = a e CD = b. Sejam M e N os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ interceptam a base média $\overline{MN}$ nos pontos P e Q. Determine as medidas dos segmentos: $\overline{MP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QN}$.

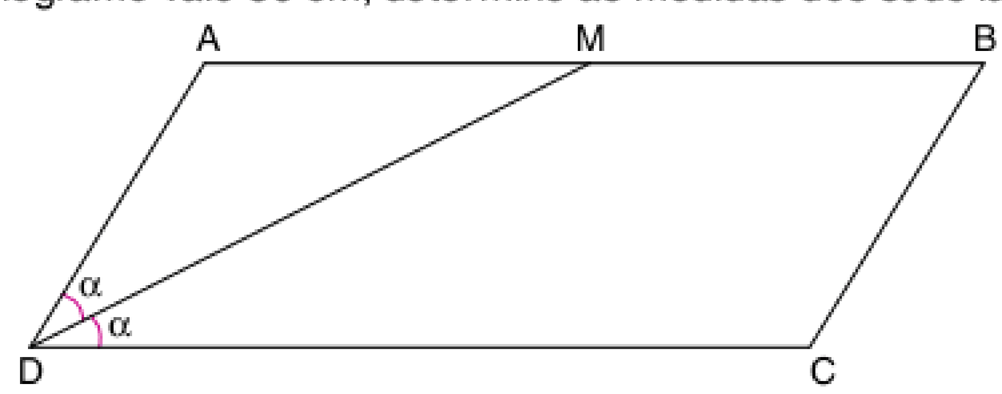


2 Em um trapézio isósceles ABCD, a base menor $\overline{AB}$ é congruente aos lados não paralelos. Prove que as diagonais são bissetrizes dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ do trapézio.

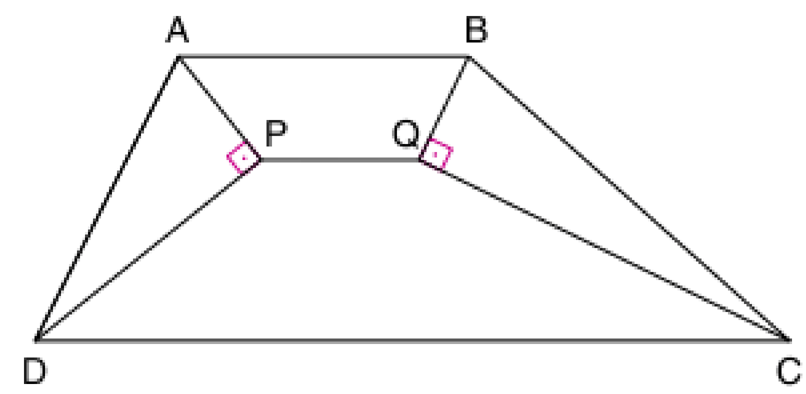
3 Na figura a seguir, o ΔXYZ possui lados $XZ = a$ e $ZY = b$. WPQZ é um losango. Determine a medida do lado desse losango em função de a e b.



4 No paralelogramo da figura, temos em M o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{DM}$ a bissetriz do ângulo $A\hat{D}C$. Se o perímetro do paralelogramo vale 36 cm, determine as medidas dos seus lados.



5 No trapézio da figura, temos $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$. As bissetrizes dos ângulos A, B, C e D foram traçadas e formaram os triângulos retângulos APD e BQC. Determine a medida de $\overline{PQ}$.



Exercícios propostos

Definições dos quadriláteros notáveis

1 Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F).

a) ☐ Todo retângulo é paralelogramo.

b) ☐ Todo paralelogramo é retângulo.

c) ☐ Todo quadrado é retângulo.

d) ☐ Todo retângulo é quadrado.

e) ☐ Todo paralelogramo é losango.

f) ☐ Todo quadrado é losango.

g) ☐ Todo retângulo que tem dois lados congruentes é quadrado.

h) ☐ Todo paralelogramo que tem dois lados adjacentes congruentes é losango.

i) ☐ Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes então ele é um retângulo.

j) ☐ Se dois ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

k) ☐ Se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

l) ☐ Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

m) ☐ Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.

n) ☐ As diagonais de um losango são congruentes.

o) ☐ As diagonais de um retângulo são perpendiculares.

p) ☐ As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos.

q) ☐ As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.

r) ☐ As diagonais de um quadrado são bissetrizes de seus ângulos e são perpendiculares.

s) ☐ Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes de seus ângulos, então ele é um losango.

t) ☐ Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos dele.

u) ☐ Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então ele é um quadrado.

v) ☐ Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes e congruentes, então ele é um quadrado.

x) ☐ Se uma diagonal de um quadrilátero é bissetriz dos dois ângulos, então ela é perpendicular a outra diagonal.

2 **ITA** Dadas as afirmações:

I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.

II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e cruzam-se em seu ponto médio, então esse paralelogramo é um losango.

Podemos garantir que:

(a) todas são verdadeiras.
(b) apenas I e II são verdadeiras.
(c) apenas II e III são verdadeiras.
(d) apenas II é verdadeira.
(e) apenas III é verdadeira.

3 **Vunesp** Considere as seguintes proposições:

– todo quadrado é um losango;
– todo quadrado é um retângulo;
– todo retângulo é um paralelogramo;
– todo triângulo equilátero é isósceles.

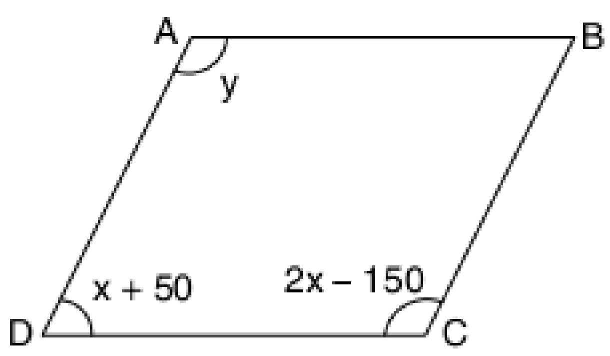
Pode-se afirmar que:

(a) só uma é verdadeira.
(b) todas são verdadeiras.
(c) só uma é falsa.
(d) duas são verdadeiras e duas são falsas.
(e) todas são falsas.

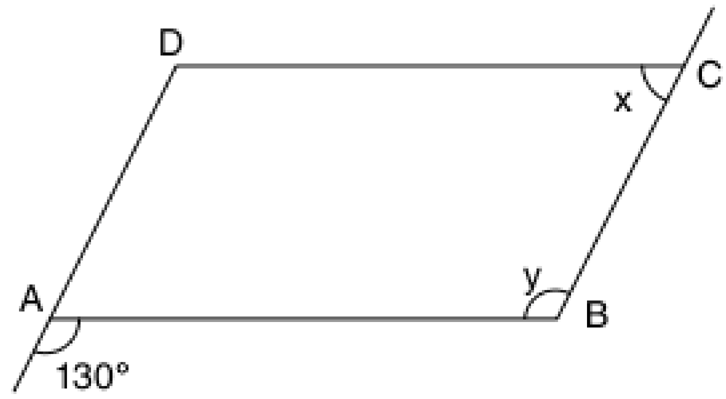
Paralelogramos

4 A razão entre dois lados de um paralelogramo é $\frac{2}{3}$. Se o perímetro desse paralelogramo é 150 m, determine a medida dos lados.

5 No paralelogramo a seguir, calcule y.



6 Sabendo que ABCD é um paralelogramo, calcule x e y.



7 **PUC-Rio** ABCD é um paralelogramo, M é o ponto médio do lado CD, e T é o ponto de intersecção de AM com BD. O valor da razão DT/BD é:

(a) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{5}$ (e) $\frac{2}{7}$

(b) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

8 Em um paralelogramo de perímetro 30 cm, $\hat{A} = 120°$, a bissetriz do ângulo $\hat{D}$ passa pelo ponto médio M do lado AB. Calcule os lados do paralelogramo e os ângulos do ΔCMD.

Trapézios

9 **Unicamp** Um trapézio retângulo é um quadrilátero convexo plano que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo α e um ângulo obtuso β. Suponha que, em um tal trapézio, a medida de β seja igual a cinco vezes a medida de α.

a) Calcule a medida de α, em graus.
b) Mostre que o ângulo formado pelas bissetrizes de α e β é reto.

10 A base média de um trapézio vale 20 cm e a base maior é $\frac{3}{2}$ da base menor. Determine as bases.

11 Em um trapézio retângulo em que o ângulo agudo mede 45°, demonstre que a altura é igual a diferença entre as bases.

12 Em um trapézio retângulo, a bissetriz de um ângulo reto forma com a bissetriz de um ângulo agudo do trapézio um ângulo de 110°. Determine o maior ângulo do trapézio.

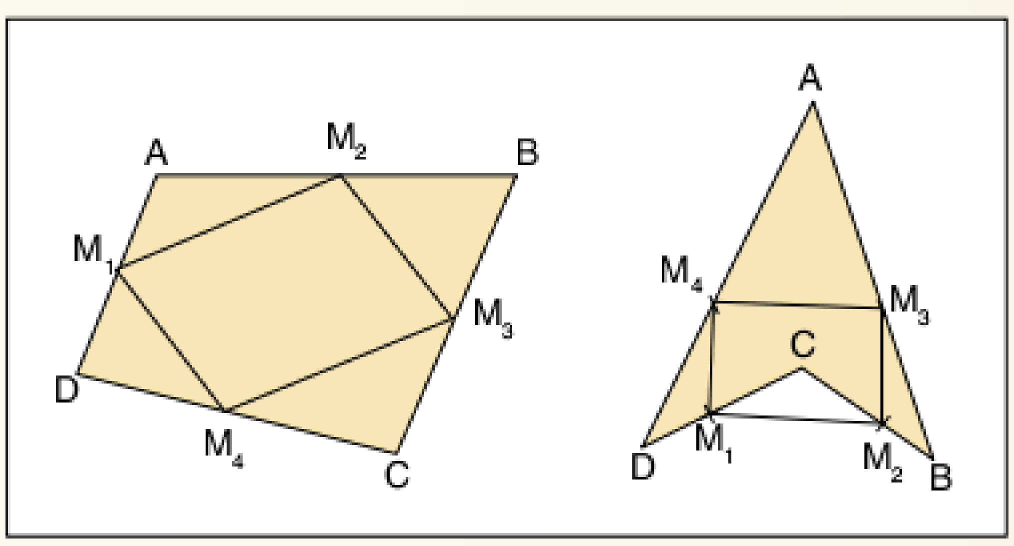
13 Um trapézio ABCD de base maior AB = 10 cm é tal que $\hat{A} = \hat{B} = 60°$, sendo a diagonal $\overline{AC}$ perpendicular ao lado $\overline{CB}$. Determine o perímetro do trapézio.

TEXTO COMPLEMENTAR

Unindo os pontos médios de um quadrilátero qualquer

Sabemos que em um quadrilátero qualquer (convexo ou côncavo), unindo os pontos médios dos lados, sempre teremos um paralelogramo.

Observe as figuras:



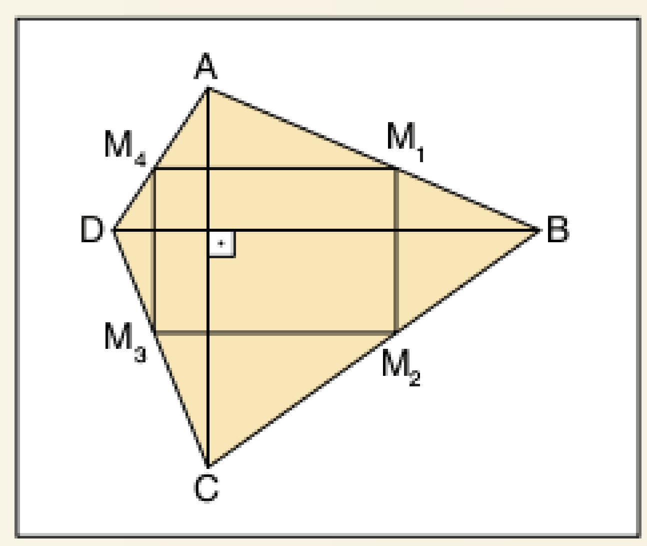
$M_1M_2M_3M_4$ é um paralelogramo.

Queremos transformar esse paralelogramo em quadriláteros mais particulares.

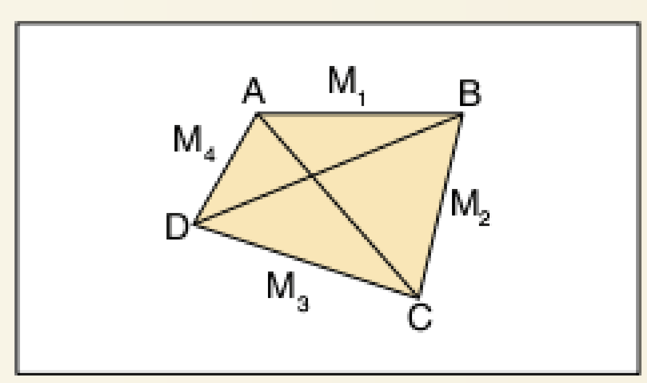
Perguntamos:

Qual é a condição que devemos impor ao quadrilátero ABCD para que $M_1M_2M_3M_4$ seja:

a) retângulo? O quadrilátero já é paralelogramo, basta um ângulo reto entre os lados para transformar-se em um retângulo.

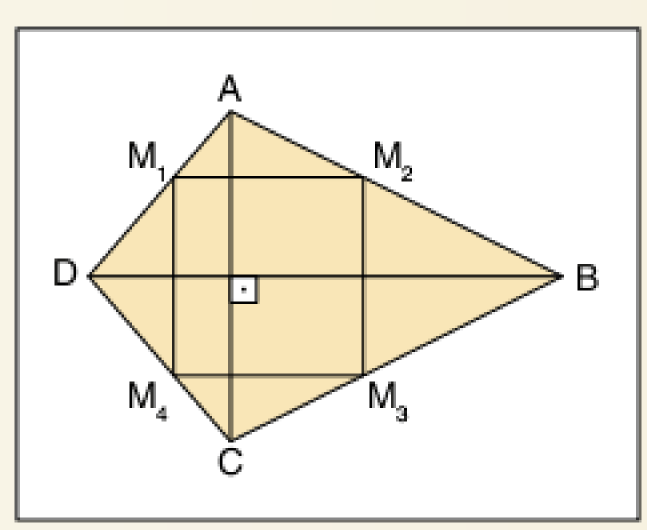


b) losango? O quadrilátero ABCD precisa ter diagonais iguais.



Diagonais iguais ⇒ losango

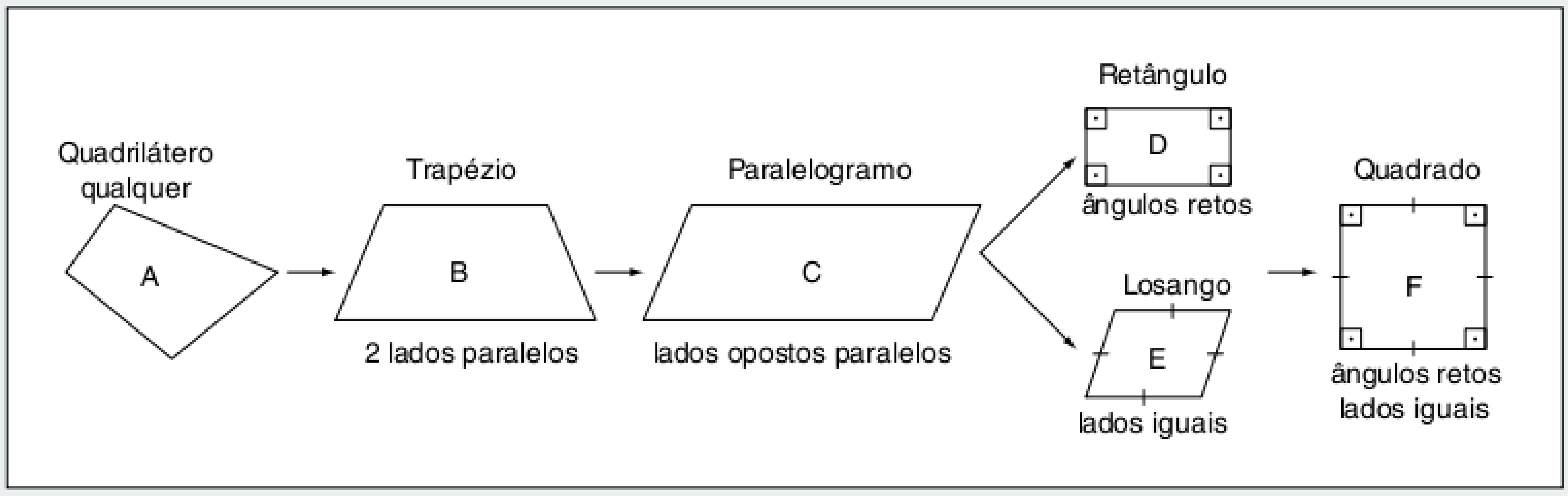
c) quadrado? O quadrilátero ABCD precisa ter as qualidades dos itens a e b. Diagonais iguais e perpendiculares ⇒ quadrado.



RESUMINDO

Em um quadrilátero convexo qualquer, temos duas diagonais e $S_i = S_e = 360°$.

Os quadriláteros notáveis possuem particularidades a cada definição. Observe a sequência a seguir que mostra o refinamento das particularidades até chegarmos no quadrilátero mais simples que é o quadrado.



Pela teoria dos conjuntos, podemos escrever:

$D \cap E = F$ $\qquad$ $D, E \subset C$ $\qquad$ $C, B \subset A$

QUER SABER MAIS?

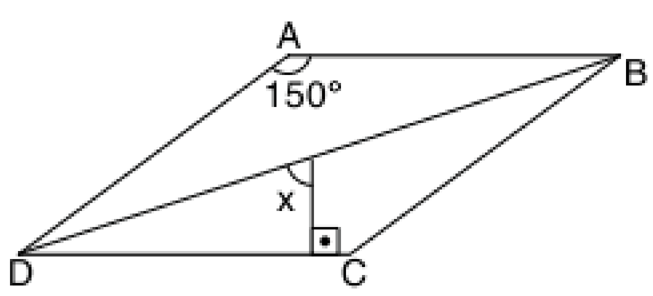
SITE

- Classificação de quadriláteros
  <www.uff.br/cdme/jcq/jcq-html/jcq-br.html>.

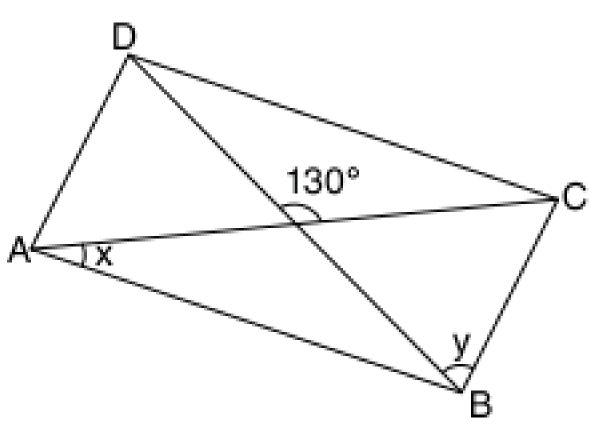
Exercícios complementares

Problemas gerais

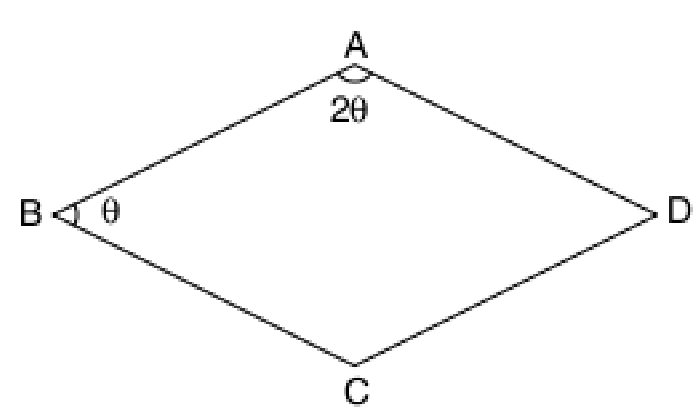
1 No losango, calcule x.



2 Sendo ABCD um retângulo, calcule x e y.



3 **Puccamp** Na figura a seguir, tem-se representado o losango ABCD, cuja diagonal menor mede 4 cm.



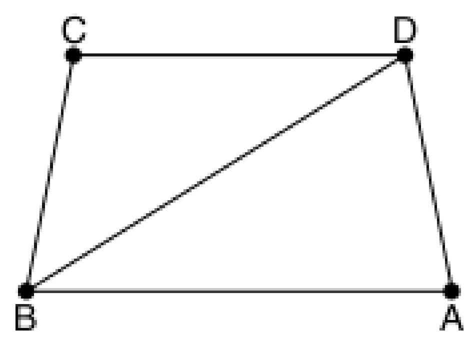
A medida do lado desse losango, em centímetros, é:

(a) $6\sqrt{3}$
(b) 6
(c) $4\sqrt{3}$
(d) 4
(e) $2\sqrt{3}$

4 Em um losango, a medida do ângulo obtuso é igual ao triplo da medida do ângulo agudo. Calcule as medidas dos ângulos desse losango.

5 A medida de cada ângulo obtuso de um losango é expressa por $2x + 5°$ e a medida de cada ângulo agudo, por $x + 40°$. Determine as medidas dos 4 ângulos internos desse losango.

6 No trapézio da figura, $AD = DC = CB$ e $BD = BA$. Calcule o ângulo $\hat{A}$.



7 Um trapézio ABCD de bases AB e CD é tal que $\hat{A} = \hat{B} = 60°$, $AD = 8$ cm e $DC = 7$ cm. Determine a base média do trapézio.

8 Calcule o perímetro de um trapézio isósceles cujas bases medem 12 e 8 cm, sabendo que as diagonais são bissetrizes dos ângulos adjacentes à base maior.

9 **UFMG** Sejam ABCD um quadrado, ABP um triângulo equilátero interior e BCQ um triângulo equilátero exterior. Calcule o ângulo $D\hat{P}Q$.

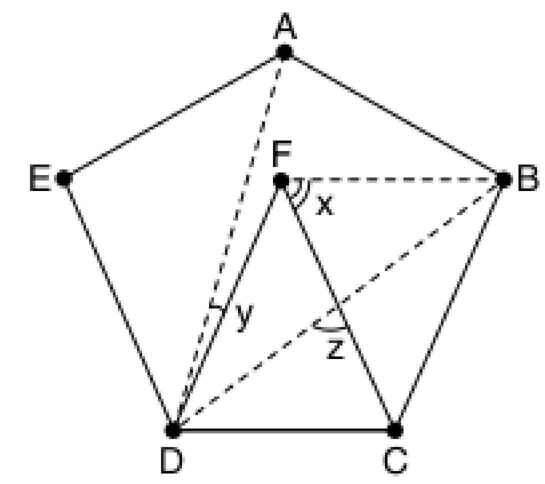
10 ABCD é um quadrado e CMN é uma reta que intercepta a diagonal $\overline{BD}$ em M e o lado $\overline{AB}$ em N. Se $C\hat{M}D = 80°$, calcule $A\hat{N}C$.

11 ABCD é um losango no qual $\hat{B} = 108°$ e CAPQ é um outro losango cujo vértice P está no prolongamento de AB. Achar os ângulos formados por AQ e BC.

12 ABCD é um retângulo cujas diagonais se cortam em O e AOM é um triângulo equilátero construído no semiplano dos determinados por $\overline{AC}$ que contém B. Se $A\hat{C}D = 25°$, calcule os ângulos do ΔABM.

13 ABCDE é um pentágono regular e EDCM é um paralelogramo interno ao pentágono. Calcular os ângulos do triângulo AME.

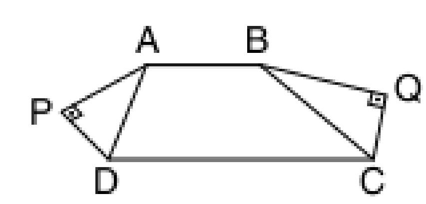
14 Na figura abaixo, ABCDE é um pentágono regular e DCF é um triângulo equilátero. Calcule os ângulos x, y e z.



15 Considere um trapézio qualquer de bases a e b ($b > a$). Determine os segmentos formados pelas diagonais na base média do trapézio.

16 A diferença entre a medida de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é 40°. Calcular a medida dos ângulos internos desse paralelogramo.

17 Na figura, temos que ABCD é um trapézio e $\overline{AP}$, $\overline{PD}$, $\overline{QB}$ e $\overline{QC}$ são bissetrizes dos ângulos externos do trapézio. Qual é a medida $\overline{PQ}$?

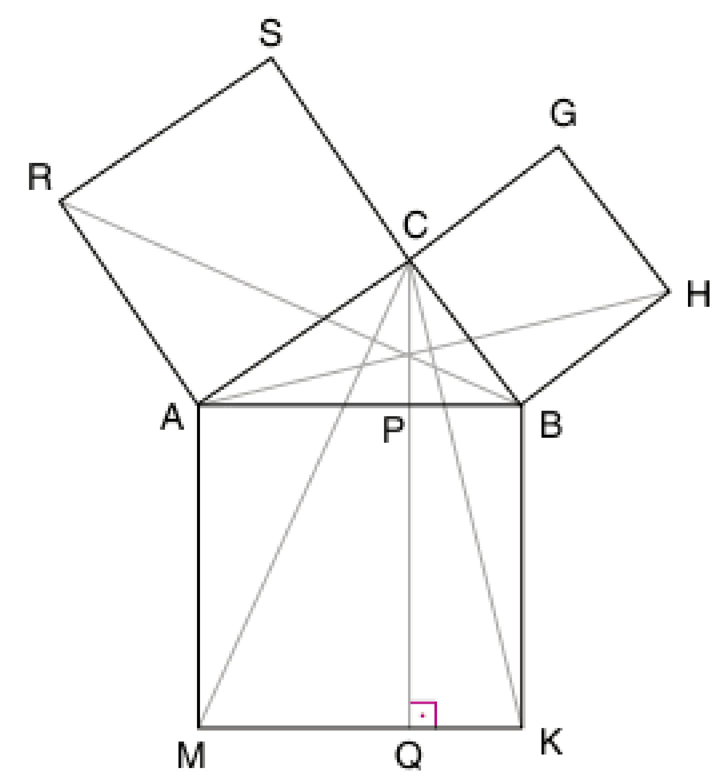


18 No trapézio ABCD, de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ ($AB > CD$), e lados não paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, a bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$ intercepta o prolongamento do lado $\overline{DC}$ no ponto P de maneira que $2P\hat{B}C + A\hat{B}C = 180°$.
Se $AD = 37$ e $BC = 26$, calcule a medida da base $\overline{CD}$.

9

FRENTE 3

Triângulo retângulo



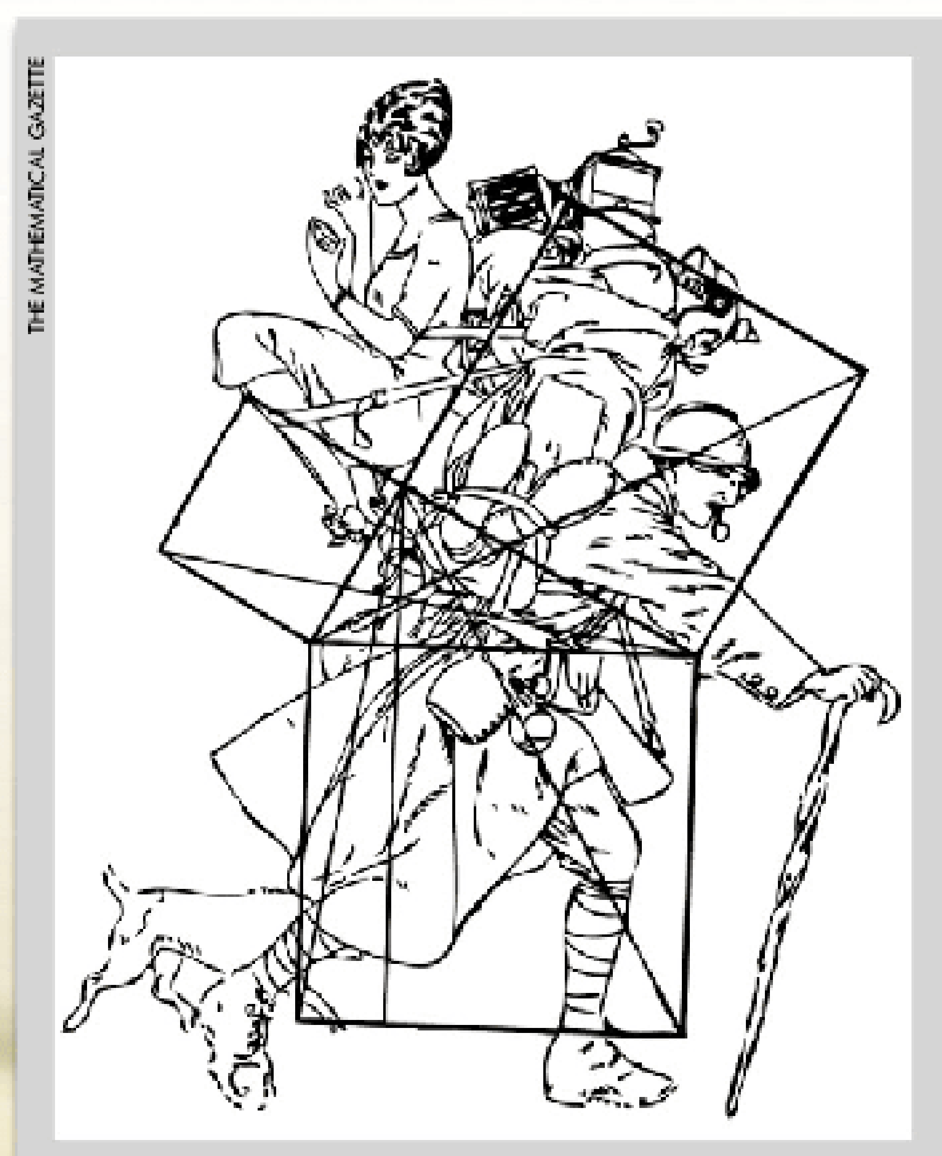
A "cadeira de noiva"

Na figura ao lado, temos o desenho de um triângulo retângulo ABC e quadrados construídos sobre os seus lados. Esta figura foi utilizada por Euclides para demonstrar o Teorema de Pitágoras. Os antigos gregos conheciam o resultado na seguinte forma:

"A área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos."

Essa figura ficou conhecida como cauda de pavão ou moinho de vento.

Um jornalista brincalhão adaptou a figura de Euclides no corpo de um soldado, mostrando-o carregando sua noiva, cachorro e todos os seus pertences para a guerra. Esse desenho foi publicado no *The mathematical gazette*, grande jornal inglês de publicações matemáticas, em uma edição do início do século XX.



Relações métricas no triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo em A, temos a seguinte nomenclatura para os lados do triângulo e outros elementos.

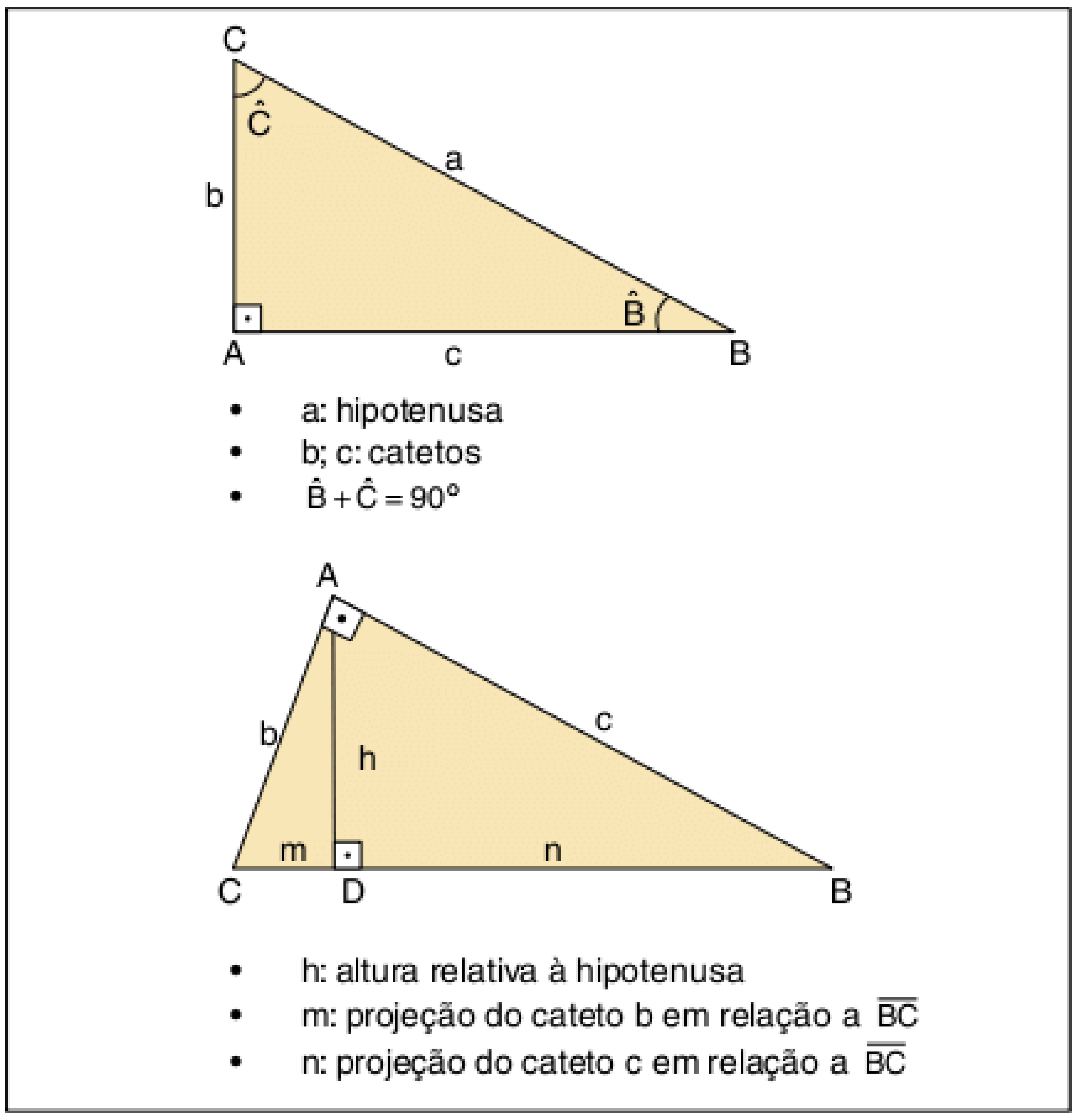


Fig. 1 Elementos no triângulo retângulo.

Vamos agora relacionar os elementos de um triângulo retângulo através de semelhanças de triângulos que podemos obter após a sua decomposição.

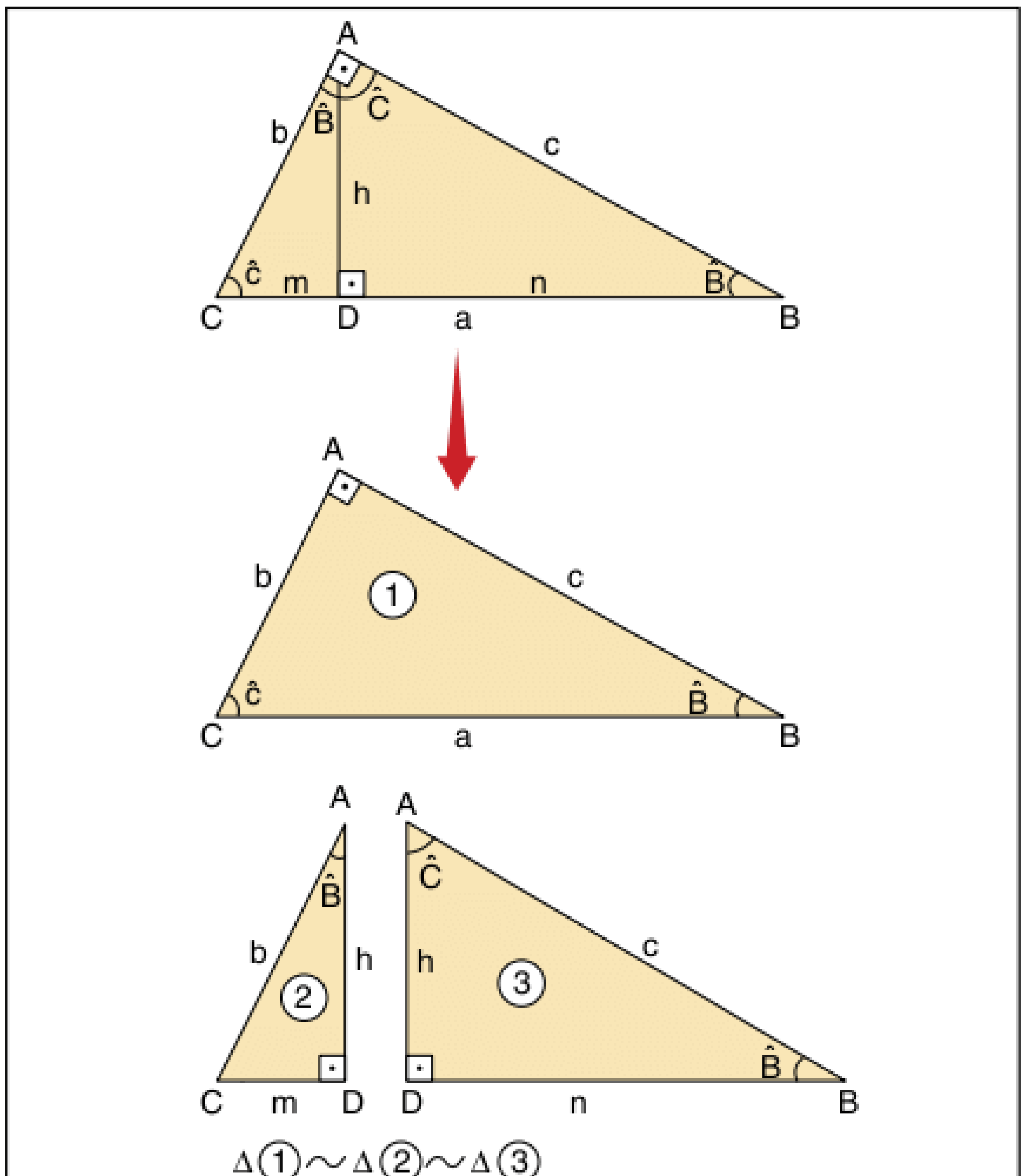


Fig. 2 Triângulos semelhantes.

$$\Delta② \sim \Delta③ \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \therefore h^2 = mn$$

$$\Delta① \sim \Delta② \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \therefore b^2 = ma$$

$$\Delta① \sim \Delta③ \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \therefore c^2 = na$$

$$\Delta① \sim \Delta③ \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \therefore ah = bc$$

Teorema de Pitágoras

Através das relações $b^2 = ma$ e $c^2 = na$ deduzidas, podemos obter o famoso Teorema de Pitágoras.

Somando as equações, temos:

$b^2 + c^2 = ma + na \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n)$ $\Rightarrow b^2 + c^2 = aa \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

Em um triângulo retângulo de catetos **b** e **c** e altura **h** relativa à hipotenusa, temos a seguinte relação métrica menos famosa: $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$

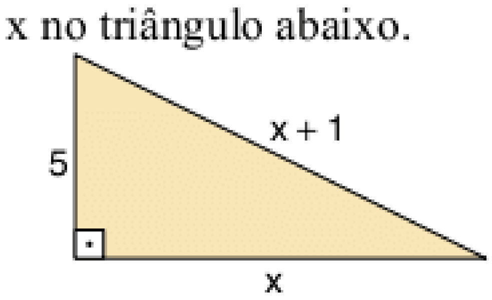
Demonstração:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2} = \frac{a^2}{b^2c^2} = \left(\frac{a}{bc}\right)^2, \text{ como } ah = bc$$

$$\therefore \frac{a}{bc} = \frac{1}{h}; \text{ assim, } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Exercícios resolvidos

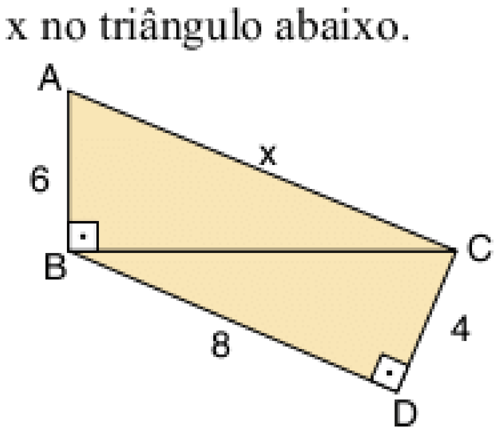
1 Determine x no triângulo abaixo.



Resolução:

$(x + 1)^2 = x^2 + (5)^2 \therefore x^2 + 2x + 1 = x^2 + 25 \therefore$ $\therefore 2x = 24 \therefore x = 12$

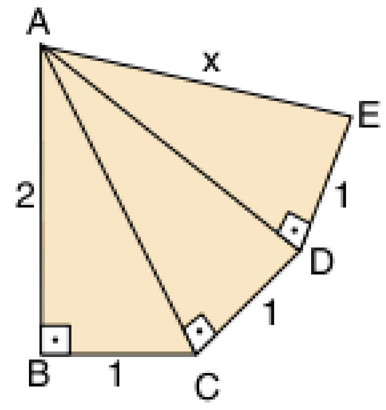
2 Determine x no triângulo abaixo.



Resolução:

No ΔBCD, temos: $BC^2 = 4^2 + 8^2$
No ΔABC, temos: $x^2 = 6^2 + BC^2$
Assim, $x^2 = 6^2 + (4^2 + 8^2) \therefore x^2 = 36 + 16 + 64$
$x = 2\sqrt{29}$

3 Calcule x na figura abaixo.



Resolução:

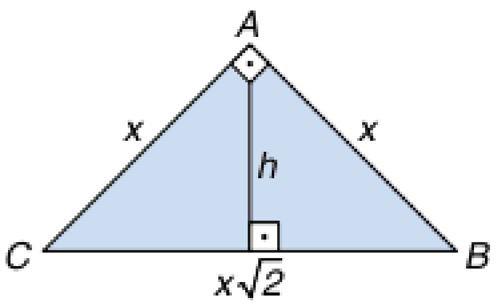
$AC^2 = 2^2 + 1^2 \therefore AC^2 = 5$

$AD^2 = 1^2 + AC^2 \therefore AD^2 = 1 + 5 = 6$

$x^2 = 1^2 + AD^2 \therefore x^2 = 1 + 6 \therefore x = \sqrt{7}$

4 O perímetro de um triângulo retângulo isósceles é 2p. Calcule a altura relativa à hipotenusa.

Resolução:



$BC^2 = x^2 + x^2 \therefore BC^2 = 2x^2 \therefore BC = x\sqrt{2}$

Sabemos que:

$$hx\sqrt{2} = xx \therefore h = \frac{x}{\sqrt{2}} \therefore h = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$Mas,\ x\sqrt{2} + x + x = 2p \therefore x\left(2+\sqrt{2}\right) = 2p$$

$$x = \frac{2p}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{2p\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} \therefore x = p\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$Assim,\ h = p\left(2-\sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{p}{2} \cdot \left(2\sqrt{2}-2\right)$$

$$h = p\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Triângulos pitagóricos

São triângulos cujos lados são números inteiros da forma:

$a = x^2 + y^2 \qquad b = x^2 - y^2 \qquad c = 2xy$

Verificando o Teorema de Pitágoras, temos:

$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 \therefore x^4 + 2x^2y^2 + y^4 =$
$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ (confere).

Observe a tabela 1.

Naturais		Catetos		Hipotenusa
x	y	$x^2 - y^2$	2xy	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
...	...	...	...	...

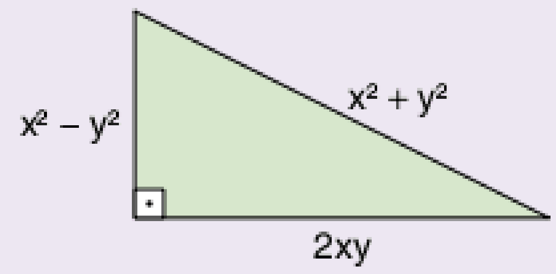
Tab. 1 Triângulos pitagóricos.

As ternas da tabela são pitagóricas, e seus múltiplos também, observe:

(3; 4; 5), (6; 8; 10), (9; 12; 15) ...

ATENÇÃO!

Triângulos pitagóricos são da forma: (x; $y \in \mathbb{N}$)



Aplicações do Teorema de Pitágoras

Diagonal do quadrado

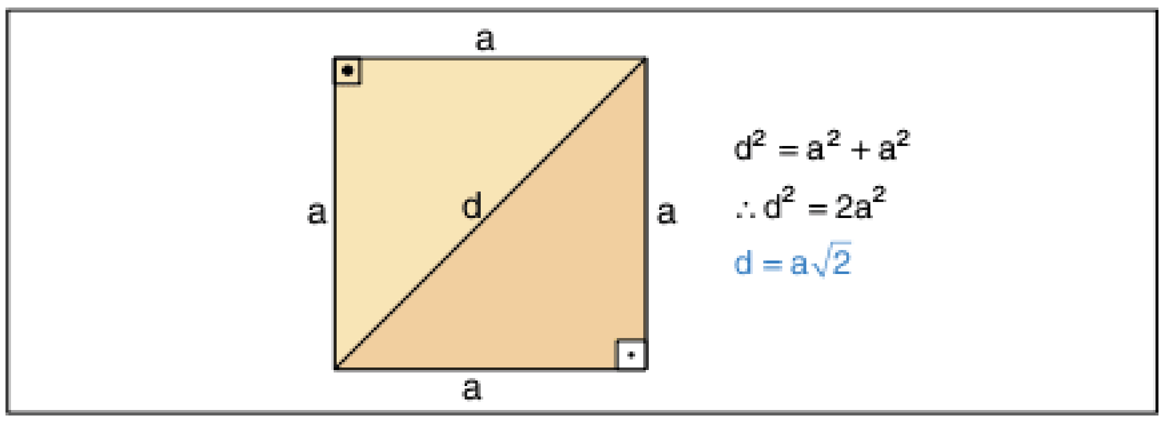


Fig. 3 Diagonal do quadrado.

Altura do triângulo equilátero

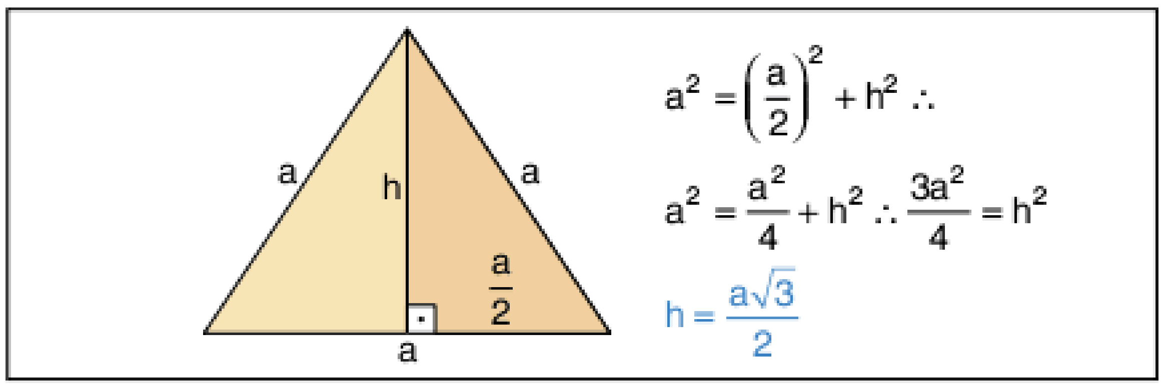


Fig. 4 Altura do triângulo equilátero.

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

As relações trigonométricas envolvem os lados do triângulo retângulo e os seus ângulos. Observe as definições abaixo.

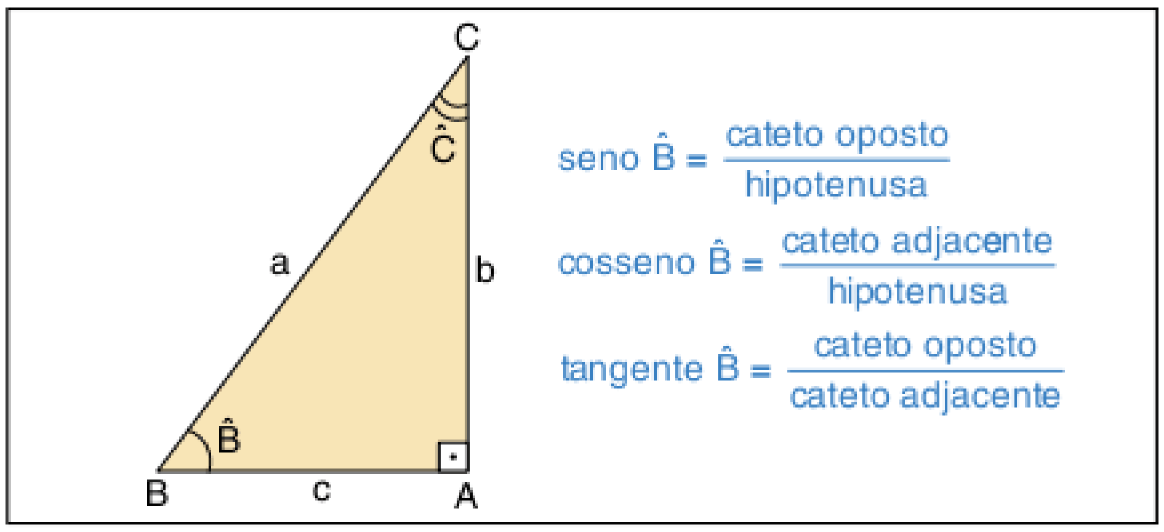


Fig. 5 Relações trigonométricas.

Simplificando as definições da figura 5, temos:

$$\text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a};\ \cos\hat{B} = \frac{c}{a};\ \text{tg}\hat{B} = \frac{b}{c}$$

Com essas três definições, temos 4 consequências importantes:

1. **Ângulos complementares**
Da figura 5, temos:

$$\text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \text{ e } \cos\hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{sen}\hat{B} = \cos\hat{C} \Rightarrow \text{sen}x = \cos(90^\circ - x)$$

2. **Tangente**

Calculando a razão $\dfrac{\text{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \dfrac{b}{c} = \text{tg}\hat{B}$

$\text{tg}\hat{B} = \dfrac{\text{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}};\ \cos\hat{B} \neq 0$

3. **Relação fundamental da trigonometria**
Do Teorema de Pitágoras, temos:

$$b^2 + c^2 = a^2 \ \therefore\ \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \ \therefore\ \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$

4. **Valores notáveis (30º, 45º e 60º)**
Considere o triângulo equilátero ABC a seguir e a sua altura:

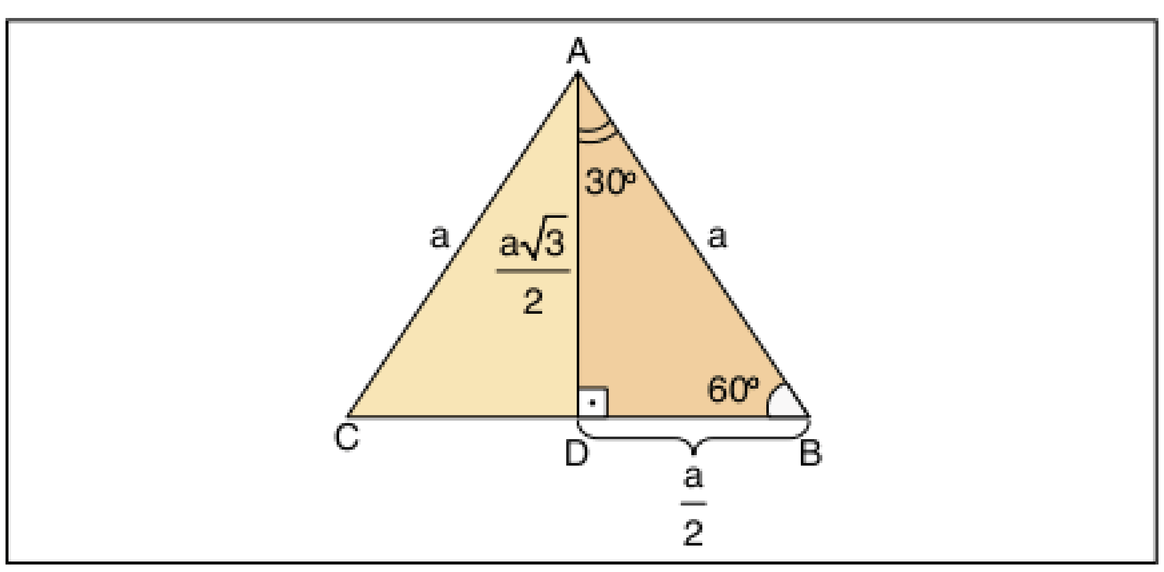


Fig. 6 Triângulo ABC.

Pela definição das funções, temos:

- $\text{sen}30^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos30^\circ = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg}30^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{sen}60^\circ = \cos30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60^\circ = \text{sen}30^\circ = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg}60^\circ = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

No quadrado ABCD a seguir e sua diagonal, temos:

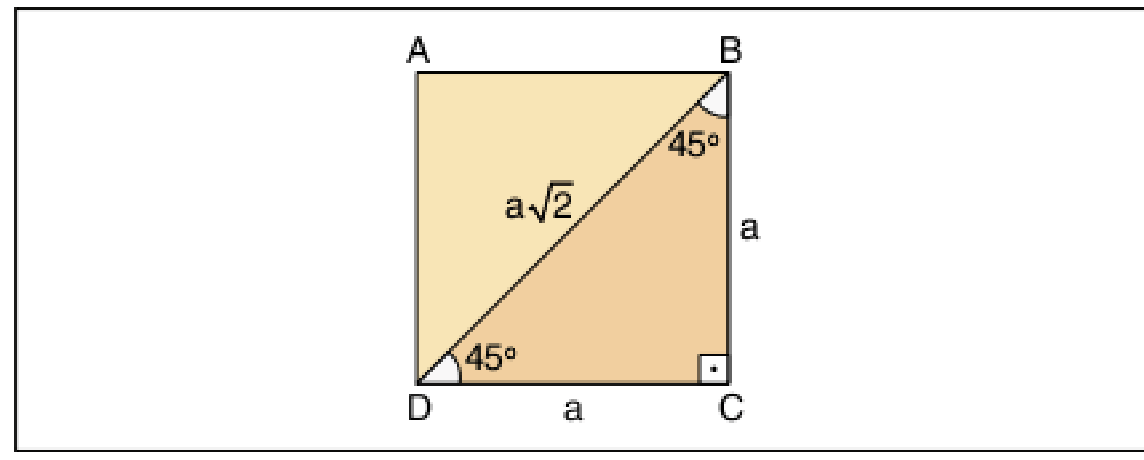


Fig. 7 Quadrado ABCD.

- $\text{sen}45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg}45^\circ = \dfrac{a}{a} = 1$

ATENÇÃO!

Ângulo	sen	cos	tg
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Vamos mostrar agora, um artifício geométrico para calcular as relações trigonométricas dos ângulos de 15º e 22º 30'.

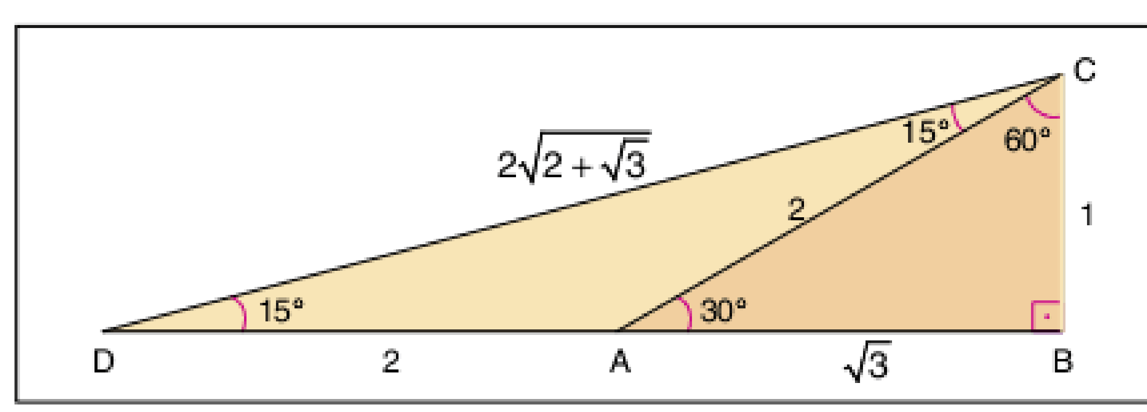


Fig. 8 Relações trigonométricas para 15°.

Construímos o triângulo ABC retângulo de lados 1; 2 e $\sqrt{3}$. Marcamos AD = AC e obtemos o triângulo isósceles

$ADC.\ A\hat{D}C = A\hat{C}D = 15^o$

$(DC)^2 = 1^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2 \therefore DC = 2.\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Assim:

$$sen15^o = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};$$

$$cos15^o = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$e\ tg15^o = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

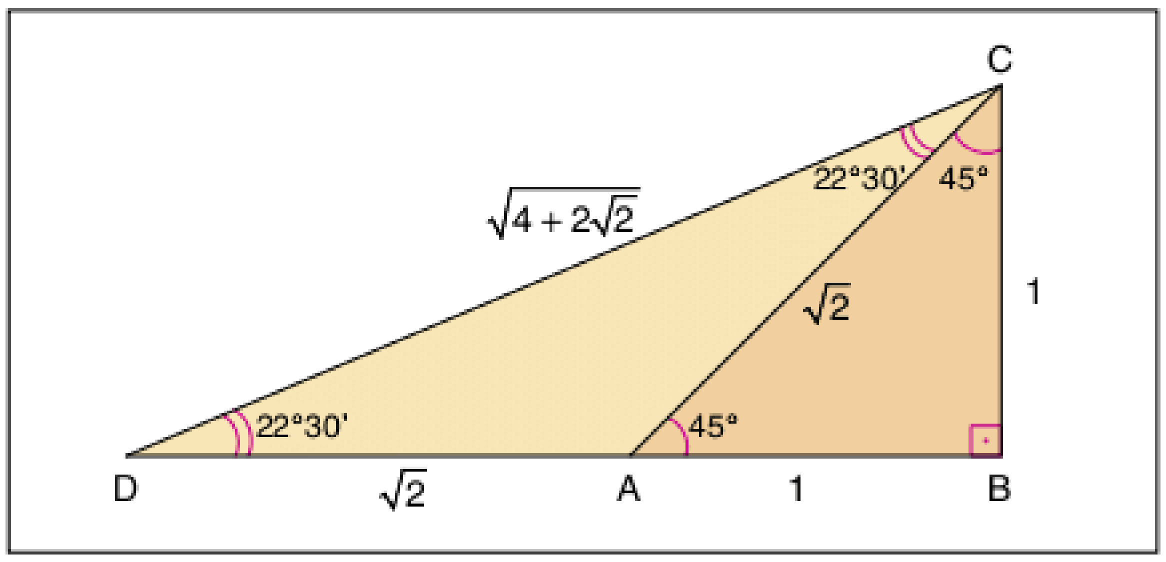


Fig. 9 Relações trigonométricas para 22° 30'.

Construímos o triângulo retângulo ABC de lados 1; 1 e $\sqrt{2}$. Marcamos AD = AC e obtemos o triângulo isósceles

$ADC.\ A\hat{D}C = A\hat{C}D = 22^o30'$

$(DC)^2 = 1^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 \therefore DC = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Assim:

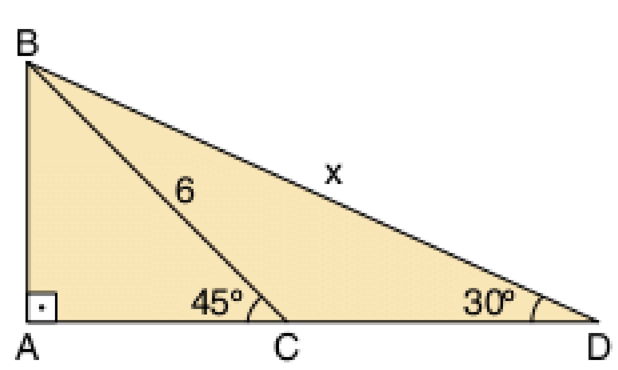
$$sen22^o30' = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$$cos\,22^o\,30' = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$e\ tg\,22^o\,30' = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

Exercícios resolvidos

5 Calcule x na figura a seguir.



Resolução:

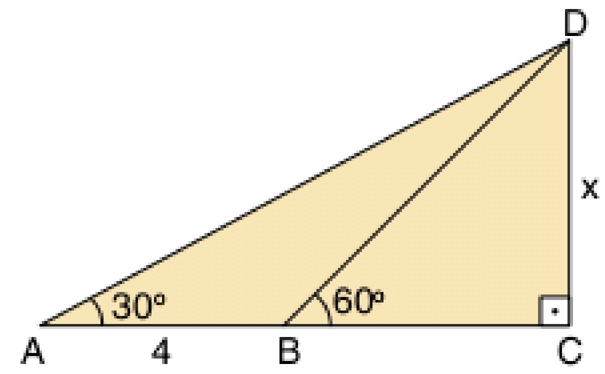
No ΔABC:

$$sen45^o = \frac{AB}{6} \therefore AB = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

No ΔABD:

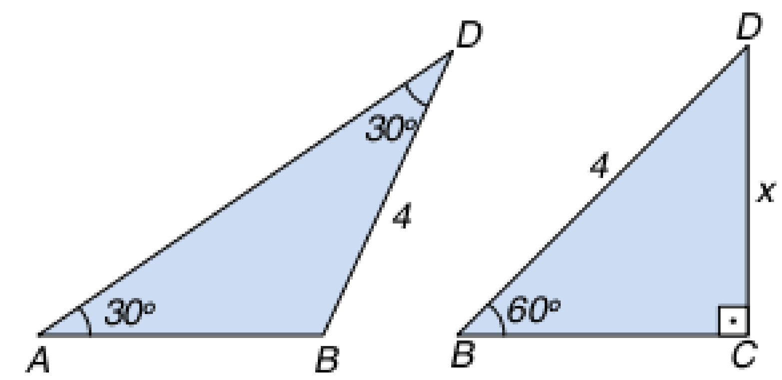
$$sen30^o = \frac{AB}{x} \therefore \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{x} \therefore x = 6\sqrt{2}$$

6 Determine x na figura abaixo.



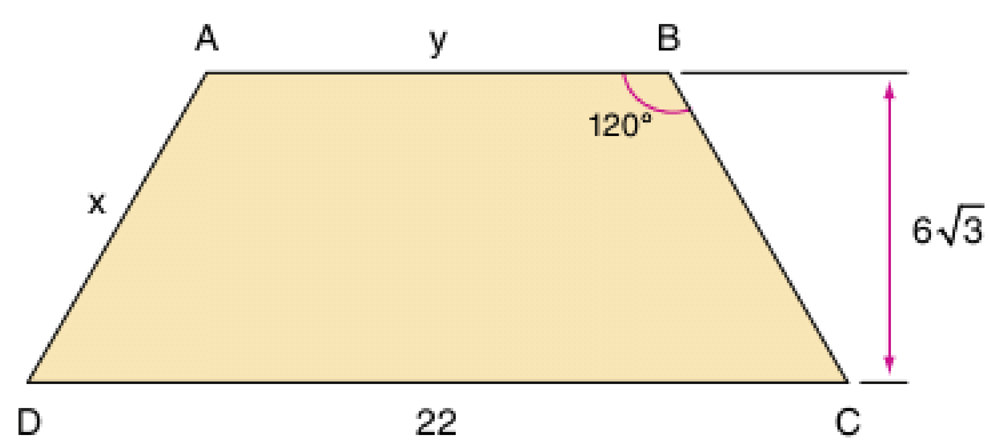
Resolução:

O ΔABD é isósceles, pois $D\hat{B}C$ é ângulo externo:

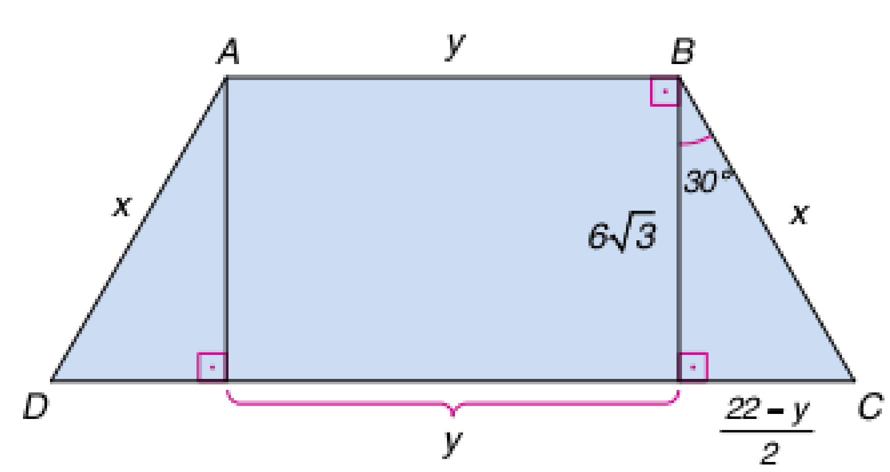


$$sen\ 60^o = \frac{x}{4} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4} \therefore x = 2\sqrt{3}$$

7 No trapézio isósceles ABCD, calcular x e y.



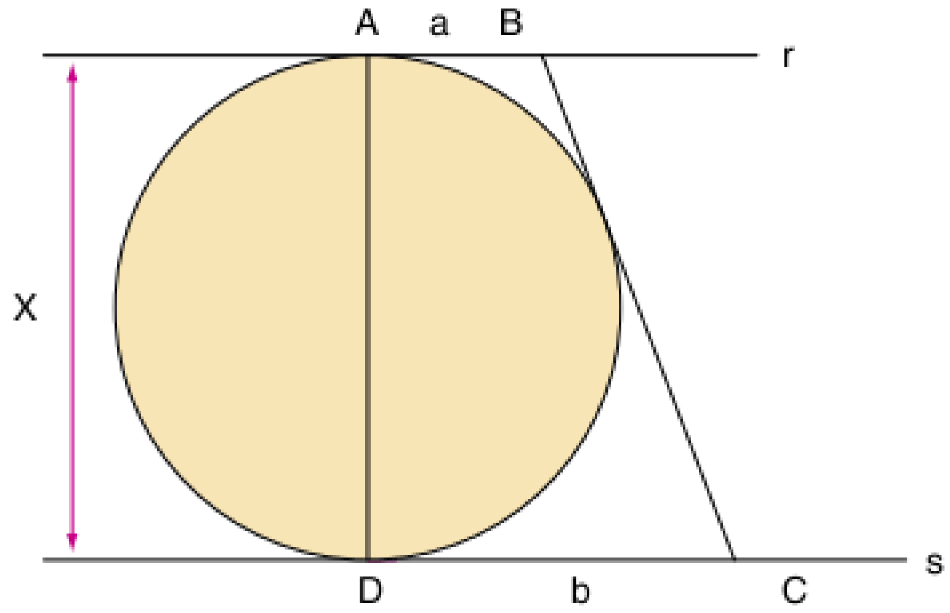
Resolução:



$$tg30^o = \frac{22-y}{2.\,6\sqrt{3}} \therefore \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{22-y}{12\sqrt{3}} \therefore y = 10$$

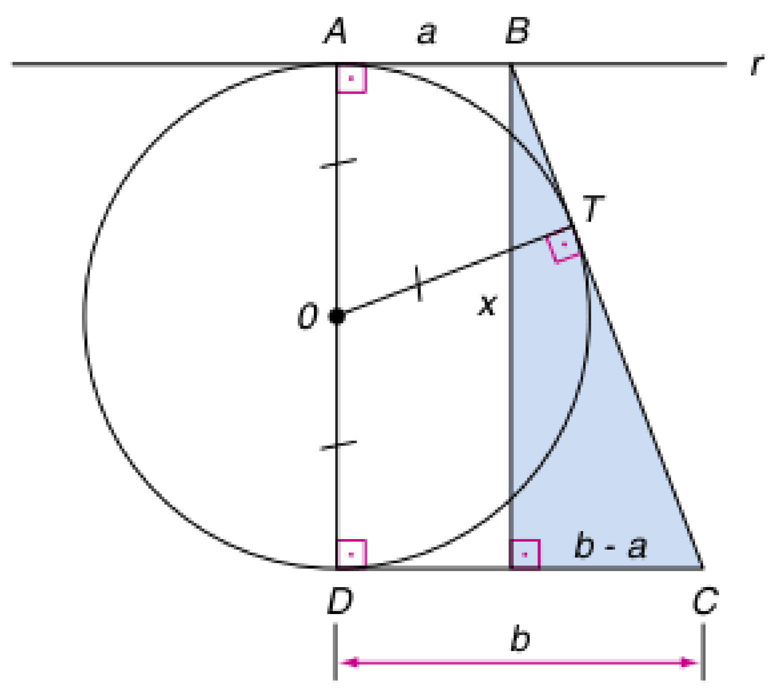
$$cos30^o = \frac{6\sqrt{3}}{x} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{x} \therefore x = 12$$

8 Determine o valor de x na figura abaixo.



r//s e $\overline{BC}$ é tangente

Resolução:



$AB = BT$ e $DC = CT$

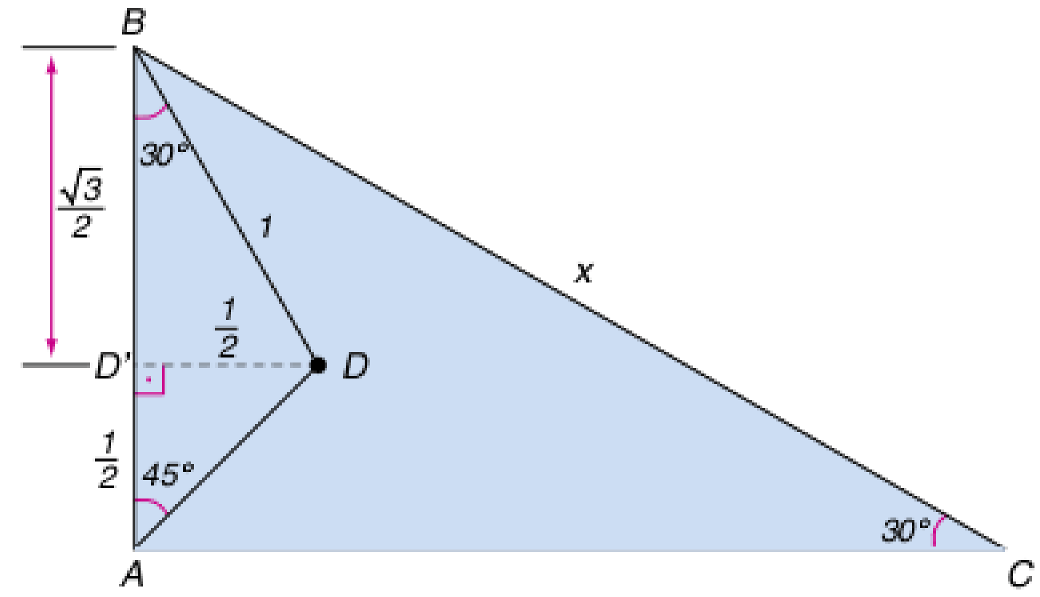
$(a+b)^2 = (b-a)^2 + x^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2 + x^2$

$x^2 = 4ab \therefore x = 2\sqrt{ab}$

9 Em um triângulo ABC, retângulo em Â, temos $\hat{B} = 60^o$. As bissetrizes desses ângulos se encontram em um ponto D. Se o segmento de reta $\overline{BC}$ mede 1 cm, determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

Resolução:



$cos\,30^o = \frac{BD'}{1} \therefore BD' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen 30^o = \frac{DD'}{1} \therefore DD' = \frac{1}{2}$

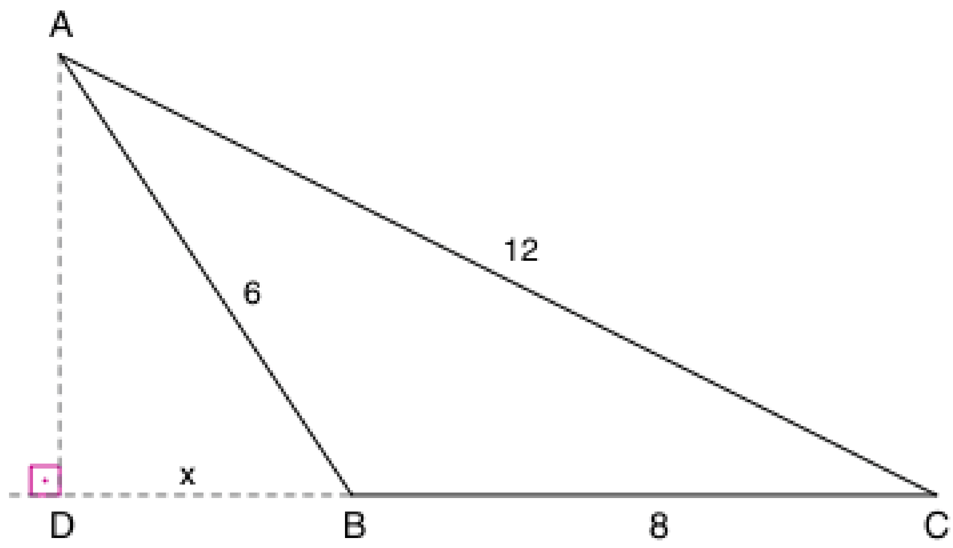
$D'A = D'D = \frac{1}{2} \rightarrow BA = \frac{\sqrt{3}+1}{2x}$

$\Delta ABC \;\; sen\,30^o = \frac{\sqrt{3}+1}{2x} \therefore \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2x}$

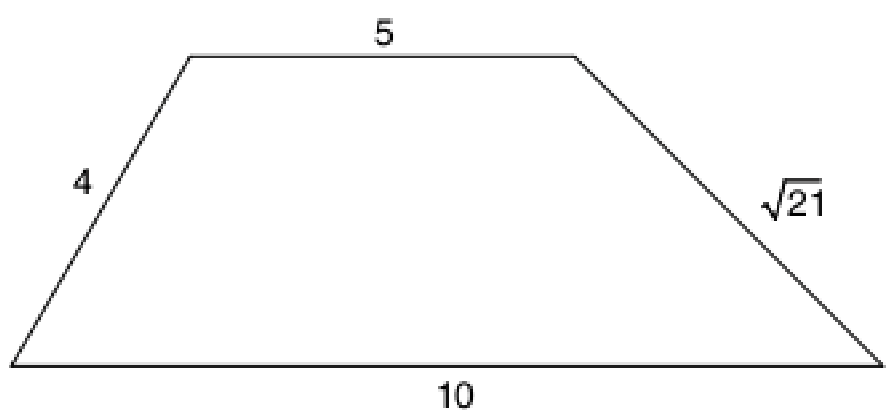
$\therefore x = \left(\sqrt{3}+1\right) cm$

Revisando

1 Determine o valor de x na figura abaixo.



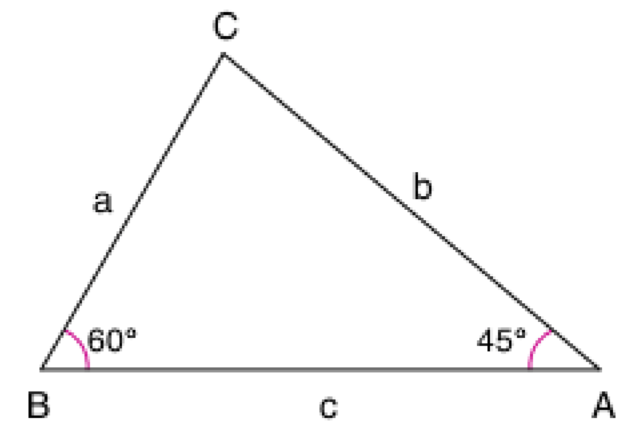
2 Determine a altura do trapézio da figura a seguir.



3 Calcular o raio do círculo inscrito no triângulo isósceles cujos lados são AB = AC = 5 e BC = 6.

4 Calcular o raio do circulo circunscrito a um triângulo isósceles no qual a base e a altura correspondente têm o mesmo comprimento, 8 cm.

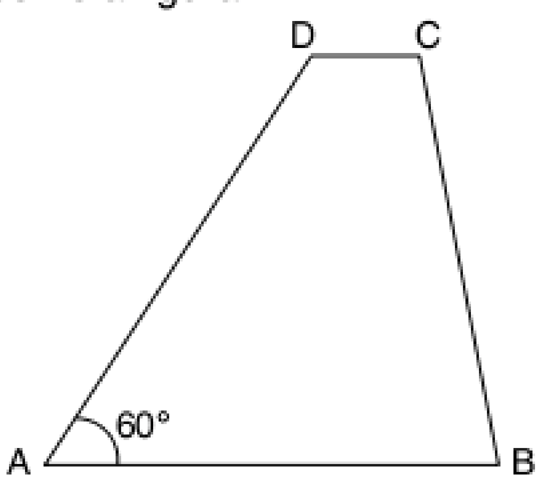
5 ABC é um triângulo no qual o ângulo $\hat{A}$ = 45º e o ângulo $\hat{B}$ = 60º. Demonstrar a relação: $2c = a\left(1+\sqrt{3}\right)$.



Exercícios propostos

Relações trigonométricas do triângulo retângulo

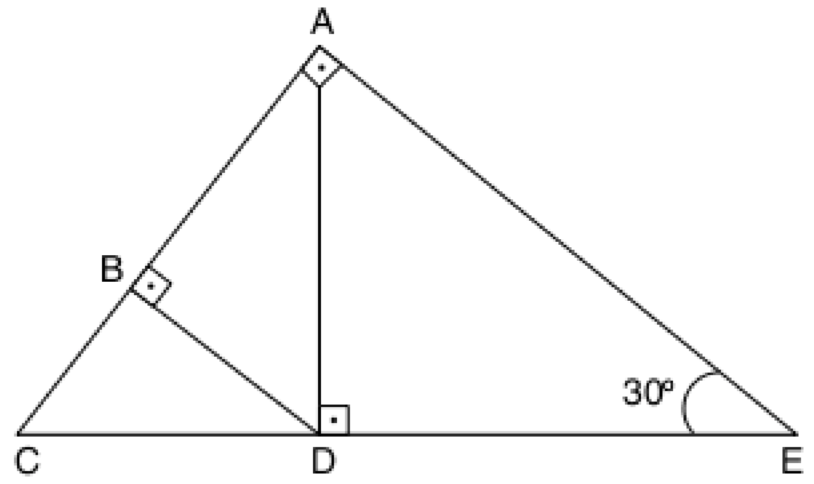
1 **UFMG** Observe a figura.



Nessa figura, o trapézio ABCD tem altura $2\sqrt{3}$ e bases AB = 4 e DC = 1. A medida do lado BC é:

(a) $\sqrt{(15)}$
(b) $\sqrt{(14)}$
(c) 4
(d) $\sqrt{(13)}$

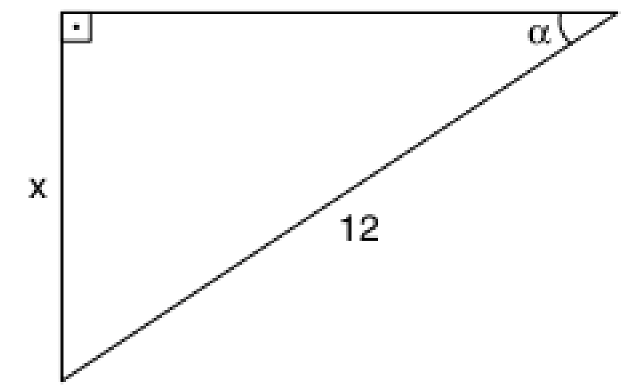
2 **UFMG** Observe a figura.



Se a medida de CE é 80, o comprimento de BC é:

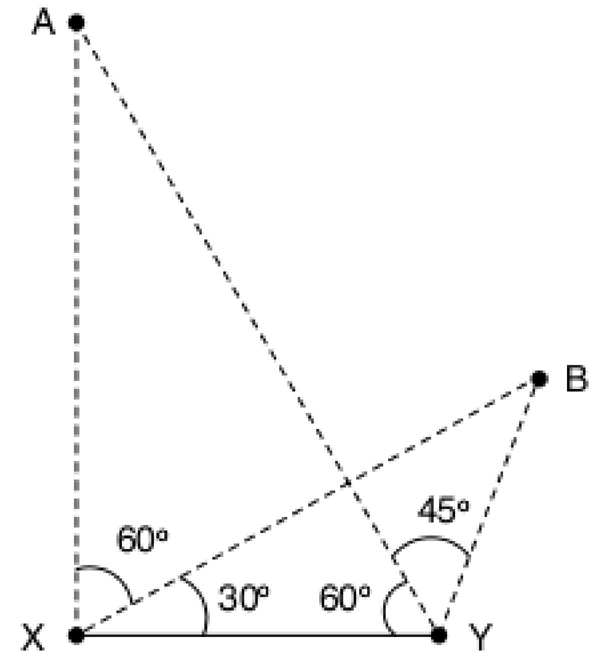
(a) 20
(b) 10
(c) 8
(d) 5

3 Na figura a seguir, o seno do ângulo α é $\frac{2}{3}$. Então, o valor de x é:



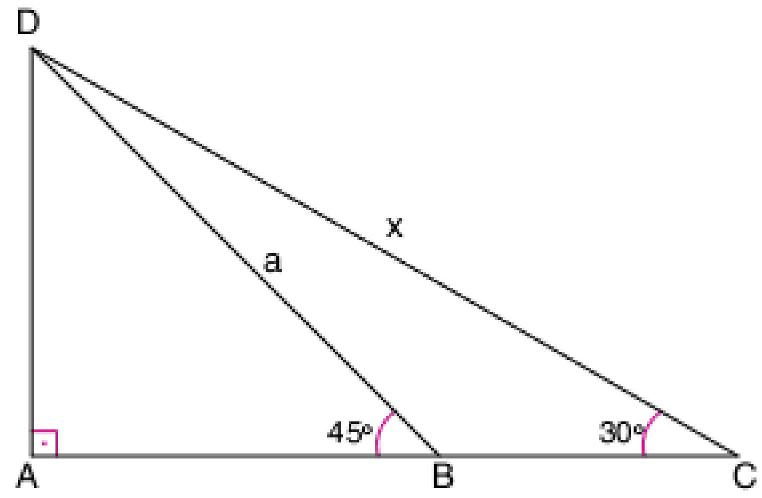
(a) 6
(b) 8
(c) 9
(d) 7
(e) 10

4 **Fatec** Na figura a seguir, os ângulos assinalados têm as medidas indicadas. Se XY = 5 m, então a medida de AB, em metros, é igual a:

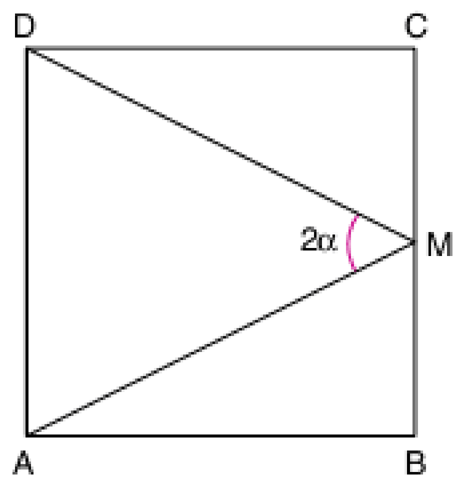


(a) $\frac{\left(5\sqrt{5}\right)}{2}$
(b) $\frac{\left(5\sqrt{10}\right)}{2}$
(c) $\frac{\left(5\sqrt{10}\right)}{4}$
(d) $5\sqrt{5}$
(e) 5

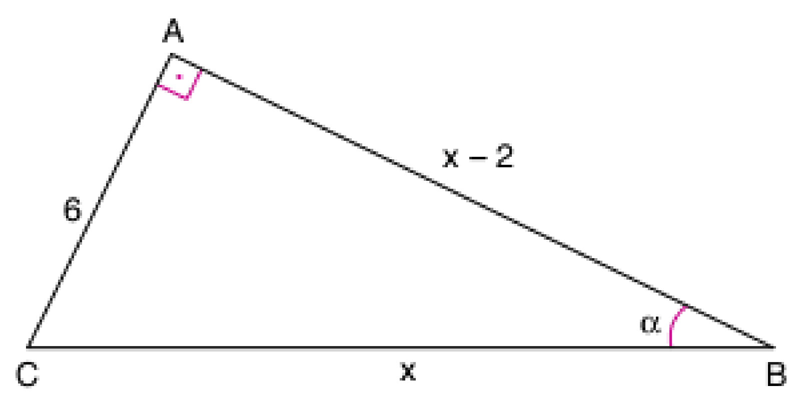
5 Calcule o valor de x.



6 Na figura a seguir, ABCD é um quadrado e M é o ponto médio de $\overline{BC}$. Calcule o valor de sen α.



7 Determine o valor de sen α na figura a seguir.



8 Um observador vê um edifício, construído em terreno plano sob um ângulo de 60º. Se ele se afastar do edifício mais 30 m passará a vê-lo sob um ângulo de 45º. Calcule a altura do edifício.

Relações métricas do triângulo retângulo

9 **Cesgranrio** Os catetos b e c de um triângulo retângulo ABC medem 6 e 8, respectivamente. A menor altura desse triângulo mede:

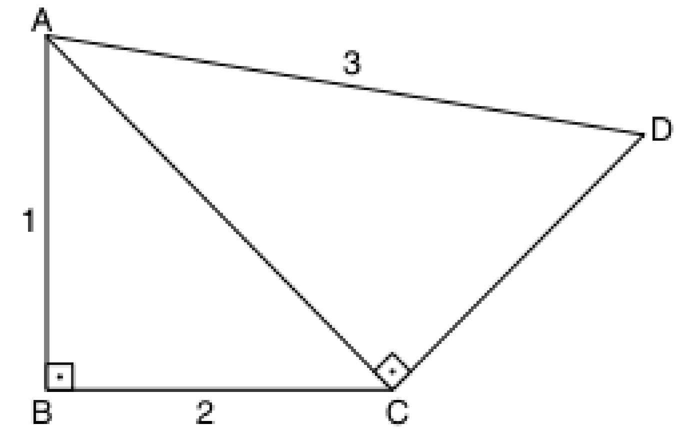
(a) 4,0
(b) 4,5
(c) 4,6
(d) 4,8
(e) 5,0

10 **Vunesp** A área de um triângulo retângulo é 12 dm^2. Se um dos catetos é $\frac{2}{3}$ do outro, calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

11 **Cesgranrio** As rodas de uma bicicleta, de modelo antigo, têm diâmetros de 110 cm e de 30 cm e seus centros distam 202 cm. A distância entre os pontos de contato das rodas com o chão é igual a:

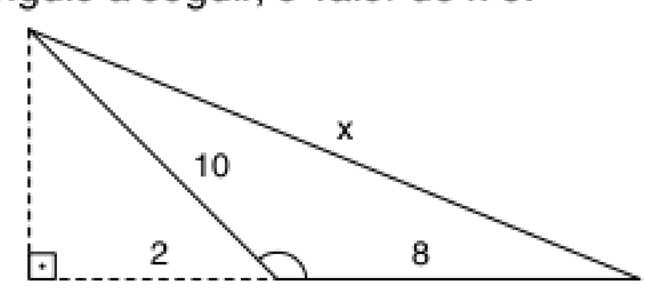
(a) 198 cm
(b) 184 cm
(c) 172 cm
(d) 160 cm
(e) 145 cm

12 Se nos triângulos retângulos da figura $m(\overline{AB}) = 1$, $m(\overline{BC}) = 2$ e $m(\overline{AD}) = 3$, então $\overline{CD}$ mede:



(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

13 No triângulo a seguir, o valor de x é:

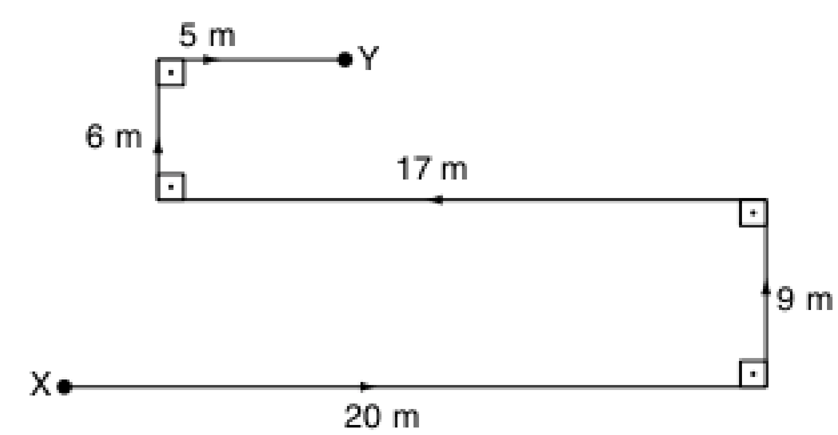


(a) 14
(b) 16
(c) 18
(d) 20
(e) 22

14 **UFRGS** As medidas dos três lados de um triângulo retângulo são números em progressão aritmética. Qual o valor da área do triângulo, sabendo-se que o menor lado mede 6?

(a) $12\sqrt{2}$
(b) 18
(c) $20\sqrt{2}$
(d) 24
(e) 30

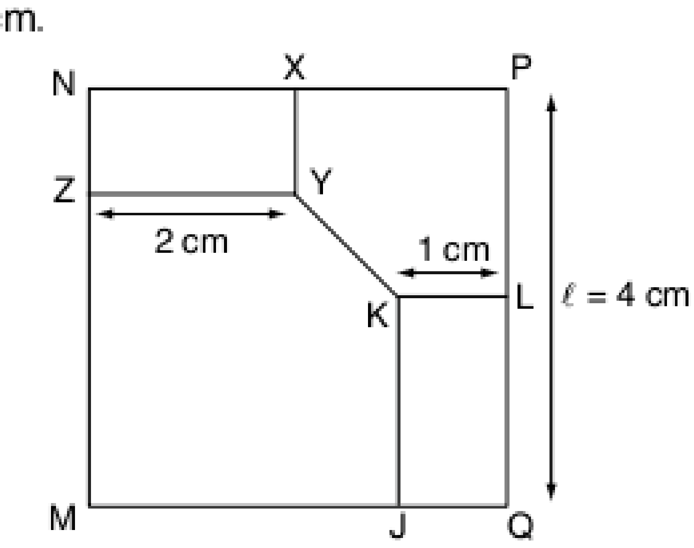
15 **PUC-SP** A figura a seguir mostra a trajetória percorrida por uma pessoa para ir do ponto X ao ponto Y, caminhando em um terreno plano e sem obstáculos.



Se ela tivesse usado o caminho mais curto para ir de X a Y, teria percorrido:

(a) 15 m
(b) 16 m
(c) 17 m
(d) 18 m
(e) 19 m

16 **UFF** A figura a seguir representa o quadrado MNPQ de lado $\ell = 4$ cm.



Sabendo que os retângulos NXYZ e JKLQ são congruentes, o valor da medida do segmento YK é:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

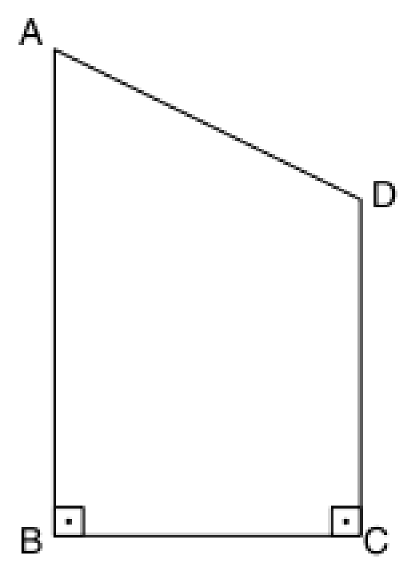
(b) $2\sqrt{3}$ cm

(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

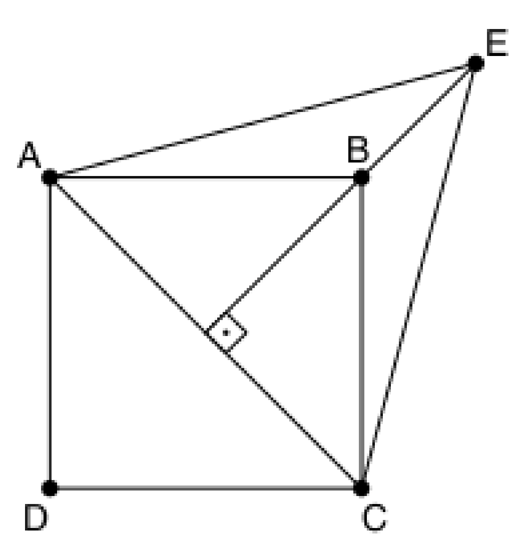
(d) $\sqrt{2}$ cm

(e) $2\sqrt{2}$ cm

17 **UFC** Considere a figura a seguir, na qual os segmentos de reta AB e CD são perpendiculares ao segmento de reta BC. Se $\overline{AB} = 19$ cm, $\overline{BC} = 12$ cm e $\overline{CD} = 14$ cm, determine a medida, em centímetros, do segmento de reta AD.

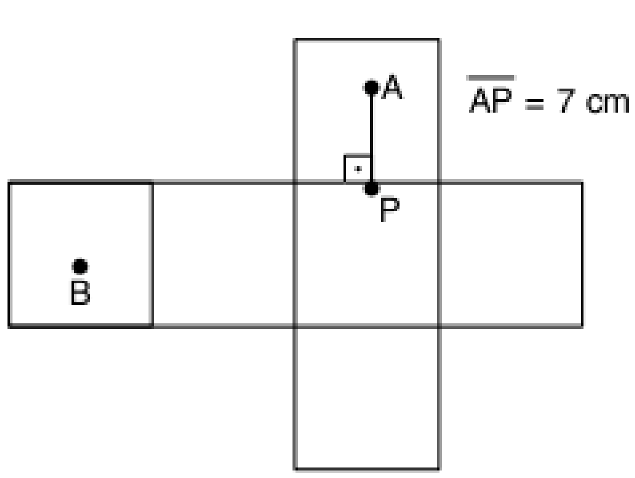


18 **UFRJ** Na figura, o triângulo AEC é equilátero e ABCD é um quadrado de lado 2 cm.



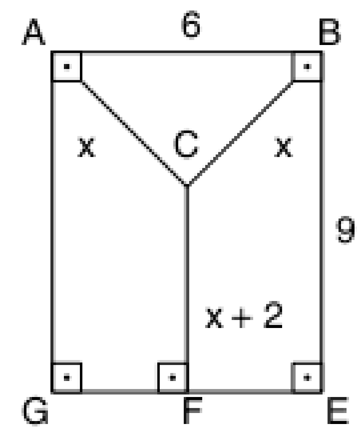
Calcule a distância BE.

19 **UFPE** A figura a seguir ilustra a planificação da superfície de um cubo com arestas medindo 10 cm. O ponto B é o centro de uma de suas faces e o ponto A está em outra face distando das arestas de 3 cm, 5 cm, 5 cm e 7 cm.

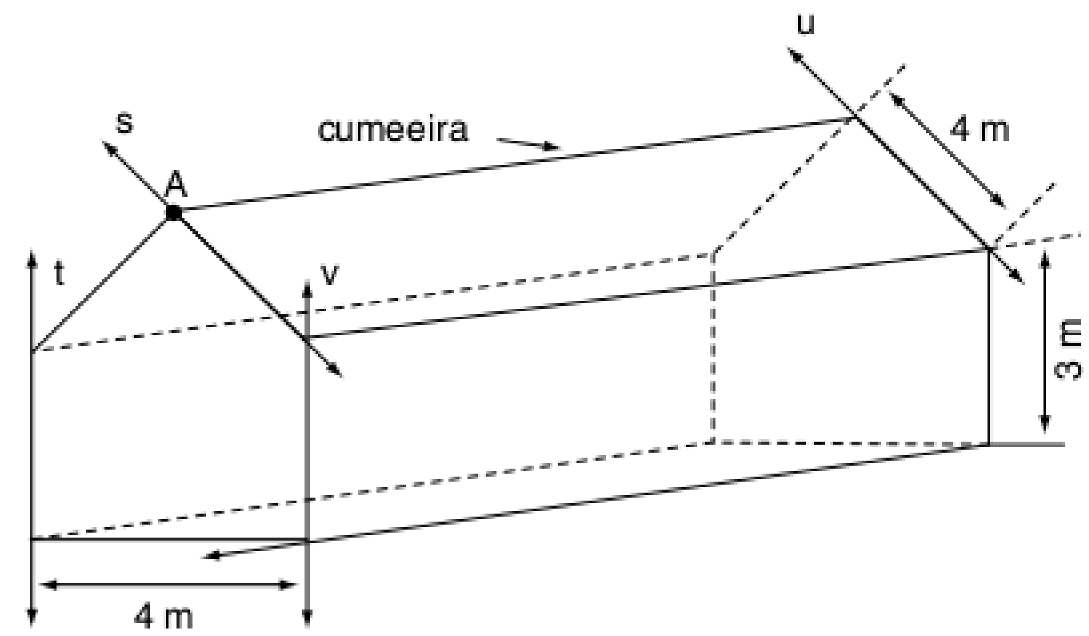


Seja C a curva de menor comprimento ligando A e B e totalmente contida nas faces do cubo. Qual o comprimento, em cm, de C?

20 **Unirio** Na figura a seguir, determine o perímetro do triângulo ABC.



21 **Faap** O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede.



A altura da cumeeira desse gráfico (em metros) é:

(a) 3

(b) $3+\sqrt{8}$

(c) $3+2\sqrt{3}$

(d) $3+\sqrt{2}$

(e) $3+4\sqrt{2}$

22 **Fuvest** Num triângulo retângulo ABC, seja D um ponto da hipotenusa $\overline{AC}$ tal que os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}D$ tenham a mesma medida. Então, o valor de $\frac{AD}{DC}$ é:

(a) $\sqrt{2}$

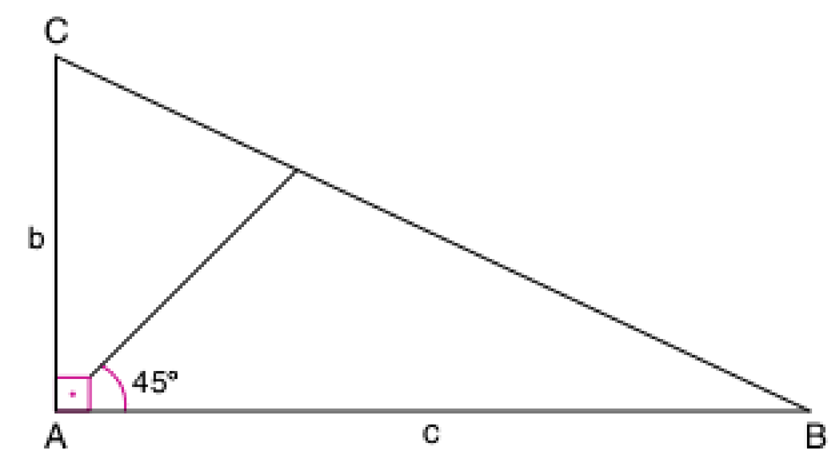
(b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) 2

(d) $\frac{1}{2}$

(e) 1

23 Na figura a seguir, determine a bissetriz interna relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos b e c.



24 Calcule o lado e a altura do losango cujas diagonais medem 12 cm e 16 cm.

25 Calcular a mediana $\overline{CM}$ de um triângulo retângulo ABC, sabendo que a hipotenusa BC = 8 cm e o cateto AC = 3 cm.

TEXTO COMPLEMENTAR

Desigualdade das médias

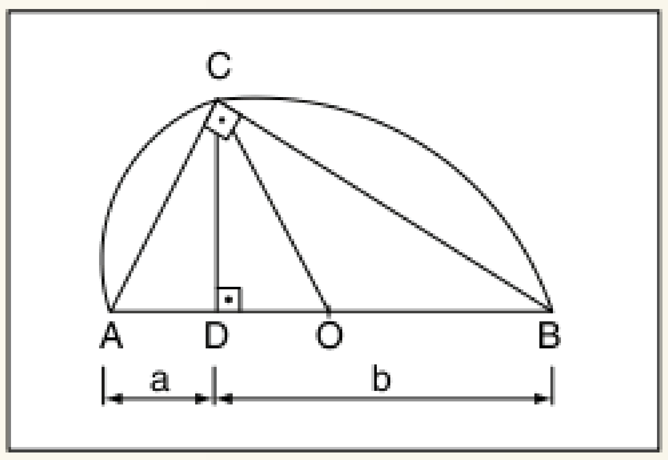
Considere $a; b \in \mathbb{R}_+$ e definimos a média aritmética: $M_A = \frac{a+b}{2}$, média geométrica: $M_G = \sqrt{ab}$ e a média harmônica: $M_H = \frac{2ab}{a+b}$

Vamos demonstrar a desigualdade entre as médias através de um método geométrico.

$\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência.

$AD = a$ e $DB = b$

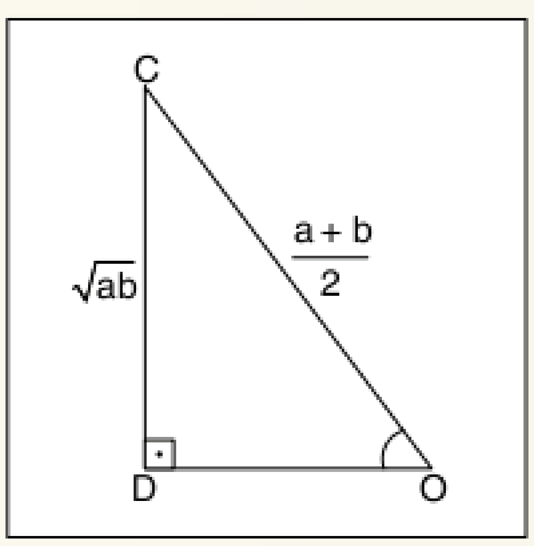
$$OC \text{ é o raio e } OC = \frac{A}{B} \therefore OC = \frac{a+b}{2}$$



O ΔACB é retângulo em C; $\overline{CD}$ é altura relativa e $CD^2 = ab$.

Logo, $CD = \sqrt{ab}$

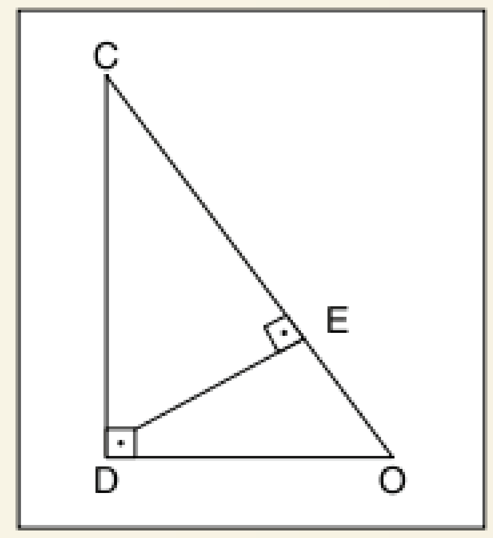
No ΔCDO, temos:



A hipotenusa é maior que o cateto. Assim:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

Traçando a altura relativa à hipotenusa, temos:



Podemos utilizar a relação métrica $CD^2 = (CE)(OC)$; substituindo os valores, temos:

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = (CE).\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow ab = (CE)\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\therefore CE = \frac{2ab}{a+b}$$

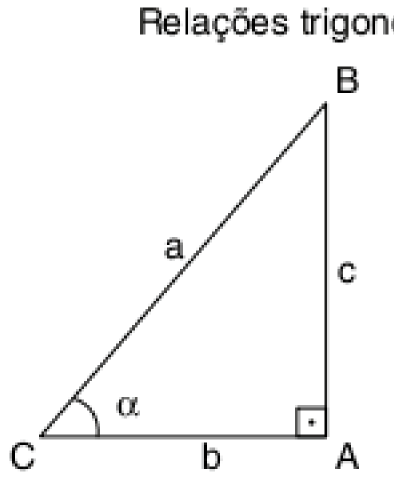
No ΔCDE, temos $CD > CE \therefore \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

Assim, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (a igualdade ocorre quando $a = b$).

RESUMINDO

Em um triângulo retângulo, temos dois caminhos mostrados:

Relações trigonométricas

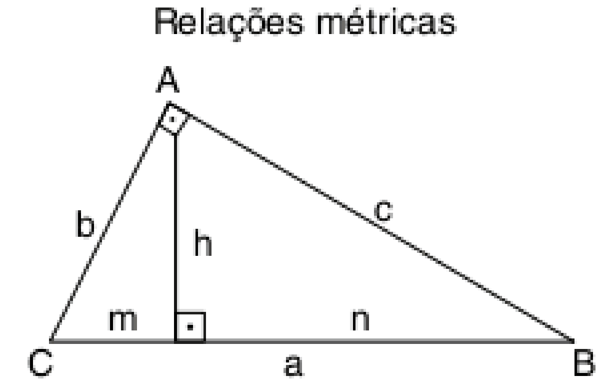


$\text{sen}\alpha = \frac{c}{a}$

$\cos\alpha = \frac{b}{a}$

$\text{tg}\alpha = \frac{c}{b}$

Relações métricas



$a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = ma$

$c^2 = na$

$ah = bc$

$h^2 = mn$

QUER SABER MAIS?

SITES

- Teorema de Pitágoras
  <www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/teopitagoras.html>.
- A árvore de Pitágoras
  <www.dm.ufscar.br/hp/hp0/hp0.html>.

Exercícios complementares

1 **Mackenzie** A folha de papel retangular na figura I é dobrada como mostra a figura II.

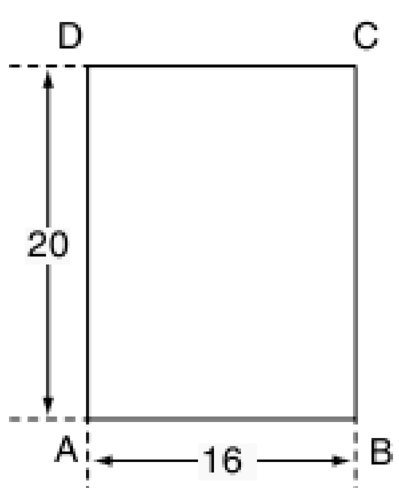


Figura I

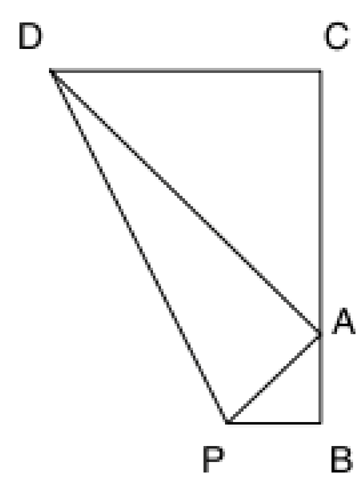
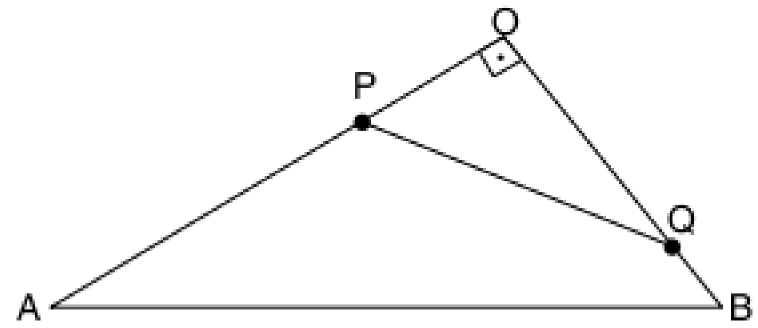


Figura II

Então, o segmento DP mede:

(a) $12\sqrt{5}$
(b) $10\sqrt{5}$
(c) $8\sqrt{5}$
(d) 21
(e) 20

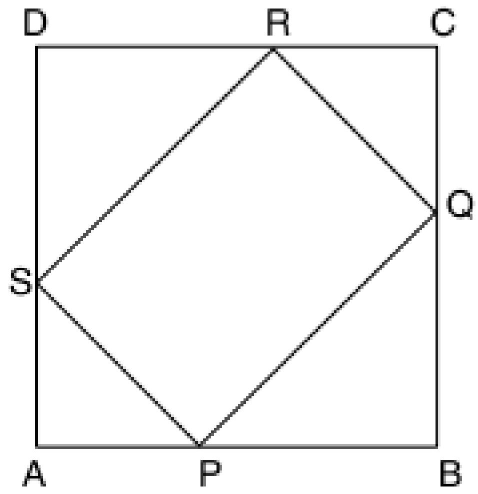
2 **Fuvest** Em um triângulo retângulo OAB, retângulo em O, com OA = a e OB = b, são dados os pontos P em OA e Q em OB de tal maneira que AP = PQ = QB = x.



Nessas condições, o valor de x é:

(a) $\sqrt{(ab)} - a - b$
(b) $a + b - \sqrt{(2ab)}$
(c) $\sqrt{(a^2 + b^2)}$
(d) $a + b + \sqrt{(2ab)}$
(e) $\sqrt{(ab)} + a + b$

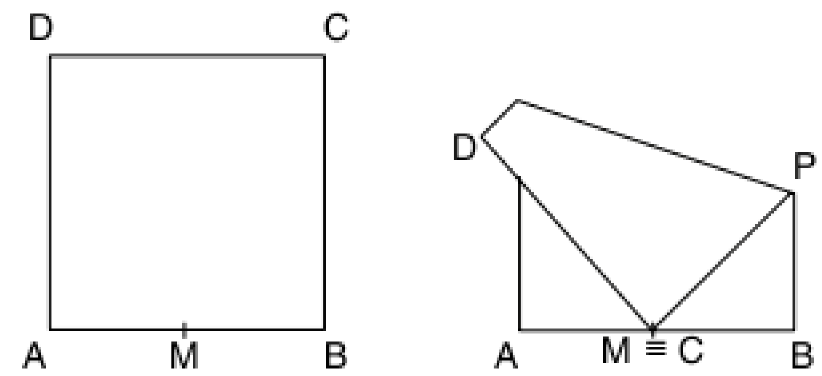
3 **UFMG** Observe a figura.



Nessa figura, ABCD representa um quadrado de lado 11 e AP = AS = CR = CQ. O perímetro do quadrilátero PQRS é:

(a) $11\sqrt{3}$
(b) $22\sqrt{3}$
(c) $11\sqrt{2}$
(d) $22\sqrt{2}$

4 **Cesgranrio** Uma folha quadrada de papel ABCD é dobrada de modo que o vértice C coincide com o ponto M médio de AB.



Se o lado de ABCD é 1, o comprimento BP é:

(a) 0,300
(b) 0,325
(c) 0,375
(d) 0,450
(e) 0,500

5 **ITA** Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, atinge-a a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:

(a) $H = \frac{2hd^2}{(d^2 - h^2)}$

(b) $H = \frac{2hd^2}{(d^2 + h)}$

(c) $H = \frac{2hd^2}{(d^2 - h)}$

(d) $H = \frac{2hd^2}{(d^2 + h^2)}$

(e) $H = \frac{hd^2}{(d^2 + h)}$

6 Os três lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. Determinar a razão da progressão.

7 M é um ponto interno a um ângulo de 60º e cujas distâncias aos lados desse ângulo são a e b. Determinar a distância do ponto M ao vértice do ângulo.

8 P é um ponto interno a um retângulo ABCD que dista 3 cm do vértice A, 5 cm do vértice C e 4 cm do vértice D. Calcular a distância do ponto P ao vértice B.

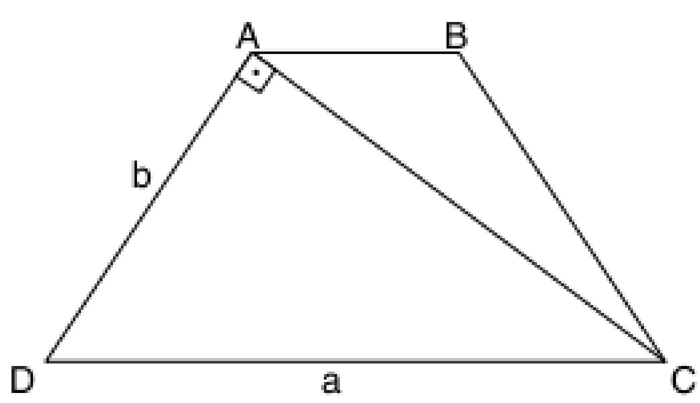
9 Calcular o lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC, cujas medianas $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ se cortam em ângulo reto, sabendo que AC = b e BC = a.

10 As raízes da equação de 2º grau

$$2x^2 + 2(K - 3)X - 3K(5K - 6) = 0$$

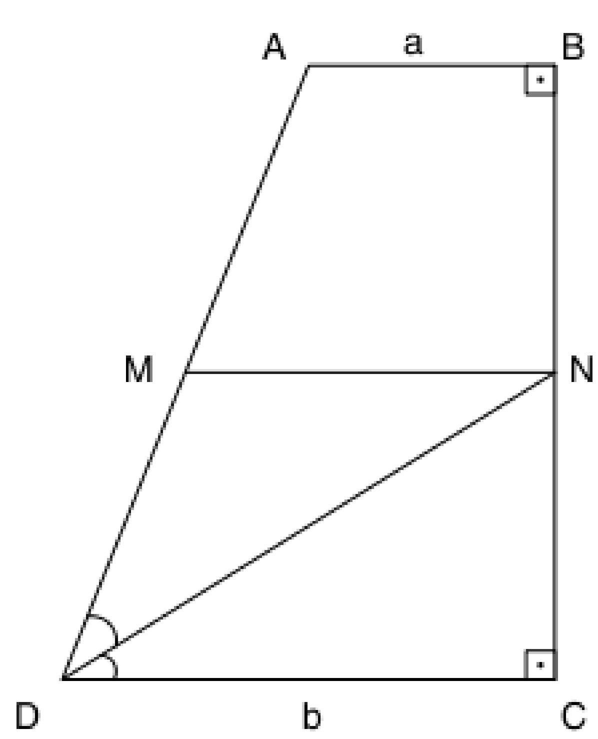
representam as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Determinar o parâmetro K de modo que a hipotenusa do mesmo triângulo seja igual a 5.

11 No trapézio ABCD da figura, a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado $\overline{AD}$. Sendo CD = a e AD = b, calcular a altura do trapézio.



12 ABCD é um quadrado cujo lado mede 15 m e P é um ponto externo a esse quadrado que dista 9 m do vértice C e 12 m do vértice B. A reta $\overline{AP}$ intercepta o lado $\overline{BC}$ em E. Calcular o segmento AE.

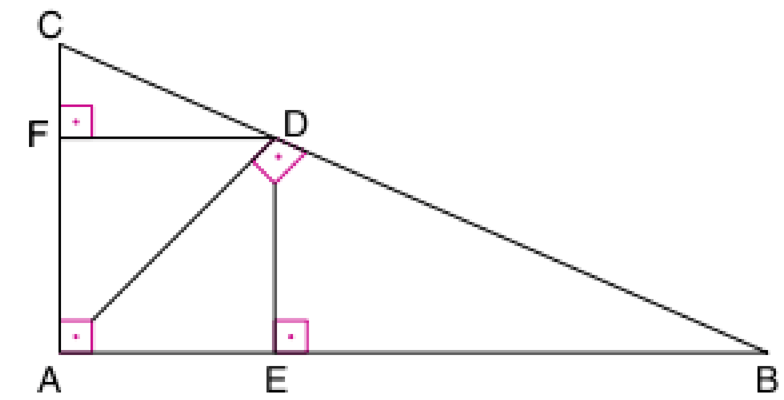
13 Na figura, temos o trapézio retângulo ABCD e MA = MD e $\overline{MN} // \overline{AB}$. Calcule a altura do trapézio em função de a e b, sabendo-se que $\overline{ND}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{D}C$.



14 Em um triângulo retângulo ABC, a razão entre a altura e a mediana relativas à hipotenusa $\overline{BC}$ é igual a $\frac{40}{41}$. Calcular a razão entre os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

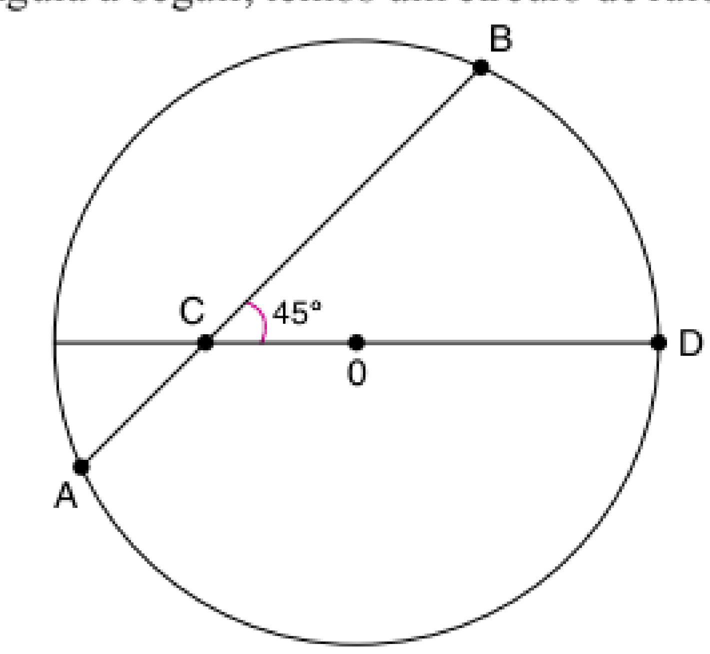
15 Sabendo que a, b e h são respectivamente as medidas dos catetos da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, demonstrar que são sempre reais as raízes da equação de 2º grau $\frac{2}{a}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{b} = 0$.

16 Na figura a seguir, temos AD = h, BE = p, BC = a e CF = q.



Demonstrar que $p^2 + q^2 + 3h^2 = a^2$.

17 Na figura a seguir, temos um círculo de raio R.



Demonstrar que $(AC)^2 + (BC)^2 = 2R^2$.

18 Os três lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. Demonstre que as razões possíveis são: $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ ou $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

19 Determinar a medida do 3º lado de um triângulo conhecendo as medidas a e b dos outros dois lados, e sabendo que as medianas correspondentes a esses lados se cruzam formando ângulo reto.

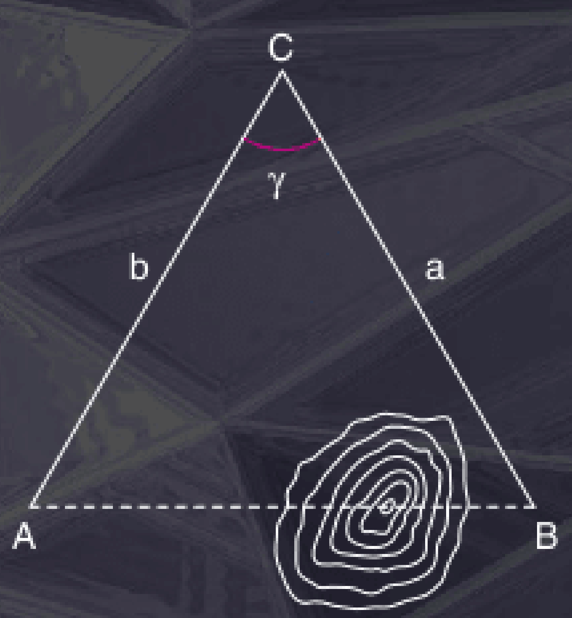
Observação: *Em alguns exercícios, você pode precisar das fórmulas:* $tg(2A) = \frac{2\,tg\,A}{1 - tg^2 A}$; $sen(A + B) = senA\cos B + senB\cos A$; $sen(A - B) = senA\cos B - senB\cos A$

10

FRENTE 3

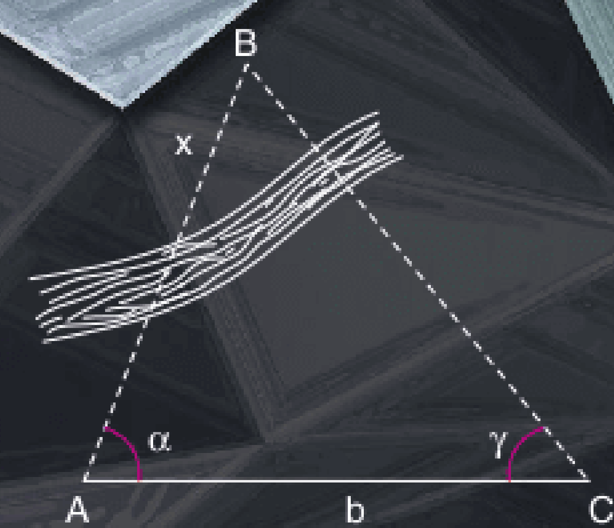
Triângulos quaisquer

A trigonometria tem como objetivo "resolver" um triângulo, ou seja, obter as medidas básicas como os lados, os ângulos e a área. A topografia tem como base a resolução de um triângulo. Observe as possíveis situações nas quais precisamos resolver um triângulo:



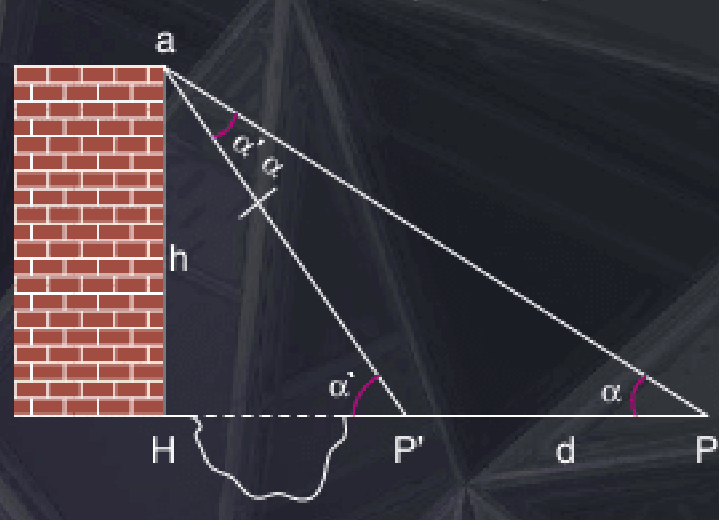
A e B são dois pontos não visíveis de um terreno, mas acessíveis a um terceiro ponto C. Podemos calcular AB sabendo-se a, b e γ.

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$$



B é um ponto não acessível, mas visível. Podemos calcular AB sabendo α, γ e b.

$$AB = \frac{b\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)}$$



Cálculo da altura de uma torre visível, mas não acessível devido a uma depressão entre H e P'.

$$h = \frac{d\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha)}$$

Resolução de triângulos quaisquer

Resolver um triângulo qualquer significa calcular seus lados e ângulos incógnitos. Com o Teorema de Pitágoras seria muito difícil e trabalhoso.

Para estes casos, temos dois teoremas importantíssimos que facilitarão os cálculos.

Teorema dos cossenos

Considere o triângulo ABC qualquer da figura 1, e $\overline{AD}$ é sua altura.

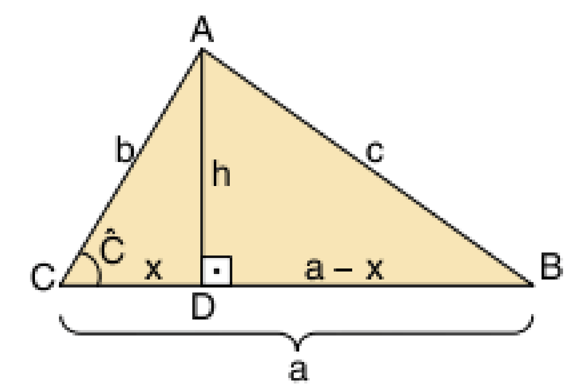


Fig. 1 Teorema dos cossenos.

$\Delta ACD\ b^2 = h^2 + x^2$ (Teorema de Pitágoras)
$\Delta ABD\ c^2 = h^2 + (a - x)^2$ (Teorema de Pitágoras)
$c^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2 \therefore c^2 = (h^2 + x^2) + a^2 - 2ax$
$c^2 = b^2 + a^2 - 2ax \qquad$ (i)

$\Delta ACD\ \cos\hat{C} = \dfrac{x}{b} \therefore x = b\cos\hat{C}$ substituindo em (i), temos:

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

No ΔABC, podemos aplicar o teorema dos cossenos em qualquer lado:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

Soma de vetores

Nos deparamos na Física com o seguinte resultado: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ e $\left|\vec{R}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$.

Percebemos grande semelhança com o teorema dos cossenos, a menos do sinal + do termo $+2F_1F_2\cos\alpha$.

Será que temos dois teoremas? Um para a Física e outro para a Matemática?

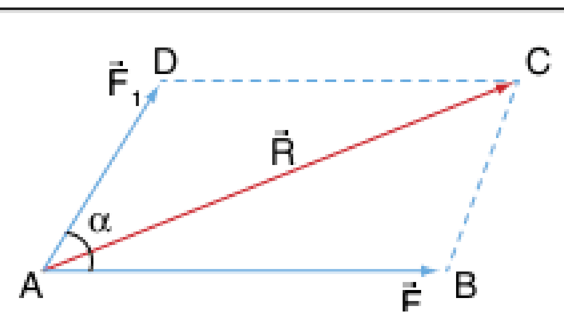


Fig. 2 Regra do paralelogramo.

Pela regra do paralelogramo, a diagonal $\overline{AC}$ é o vetor resultante.

O ângulo entre $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ é α e, no vértice D, temos o ângulo $\pi - \alpha$. Pelo teorema dos cossenos no ΔACD, temos:

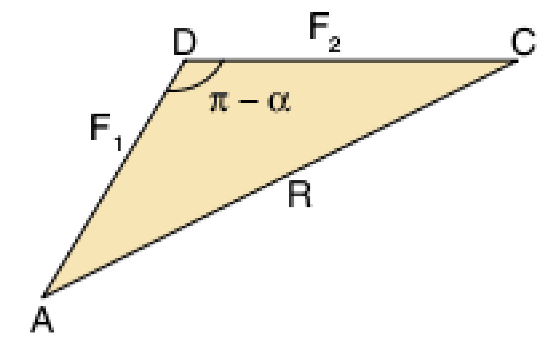


Fig. 3 Teorema dos cossenos no ΔACD.

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2.F_1.F_2.\cos(\pi - \alpha)$$
$$\Rightarrow R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2.F_1F_2.(-\cos\alpha)$$
$$\Rightarrow R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2.F_1F_2.\cos\alpha$$

No cálculo do vetor resultante, utilizamos o ângulo $(\pi - \alpha)$ para o cálculo do $\cos(\pi - \alpha)$ que equivale a $-\cos\alpha$.

Desigualdade triangular

Sabemos desde o capítulo 3 que, para existir um triângulo, qualquer lado é menor que a soma e maior que a diferença dos outros dois lados.

Podemos ratificar esse resultado através do teorema dos cossenos.

Na figura 1, sabemos que:

$$-1 < \cos\hat{C} < 1 \left(\text{pois } 0 < \hat{C} < 180^\circ\right)$$

$$\text{e } \cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ assim:}$$

$$-1 < \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 1 \therefore -2ab < a^2 + b^2 - c^2 < 2ab$$
$$\Rightarrow -a^2 - b^2 - 2ab < -c^2 < -a^2 - b^2 + 2ab$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 > c^2 > a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 > c^2 > (a-b)^2 \therefore a + b > c > |a - b|$$

Natureza dos triângulos

Através das medidas dos três lados de um triângulo, podemos concluir se ele é retângulo, acutângulo ou obtusângulo.

Considere o ΔABC e **a** a medida de seu maior lado. Sabemos que o maior lado está oposto ao maior ângulo, e este é determinante para a classificação do triângulo. Observe a figura 4.

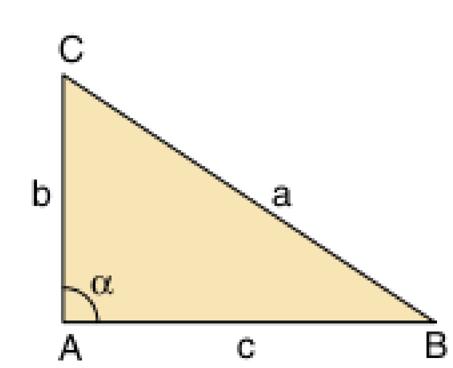


Fig. 4 Triângulo ABC.

Assim:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \therefore \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

1º caso

$\alpha = 90^\circ$

$$\cos 90^\circ = 0 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

2º caso

$0 < \alpha < 90^\circ$

$$\cos\alpha > 0 \therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0 \therefore a^2 < b^2 + c^2$$

3º caso

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$$\cos\alpha < 0 \therefore \frac{b^2+c^2-a}{2bc} < 0 \therefore a^2 > b^2 + c^2$$

Conclusão:

Seja **a** a medida do maior lado de um triângulo

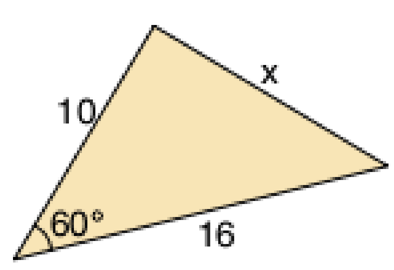
$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo retângulo

$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo obtusângulo

$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triangulo acutângulo

Exercícios resolvidos

1 Calcule x no triângulo a seguir.



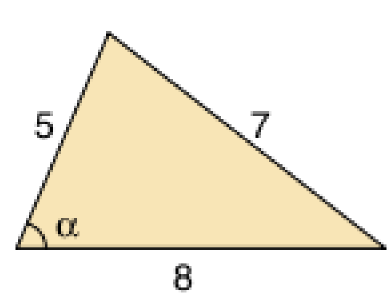
Resolução:

$x^2 = (10)^2 + (16)^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16\cos 60^\circ$

$x^2 = 100 + 256 - 320 \cdot \frac{1}{2} = 356 - 160$

$x^2 = 196 \Rightarrow x = 14$

2 Calcule o ângulo α no triângulo a seguir.



Resolução:

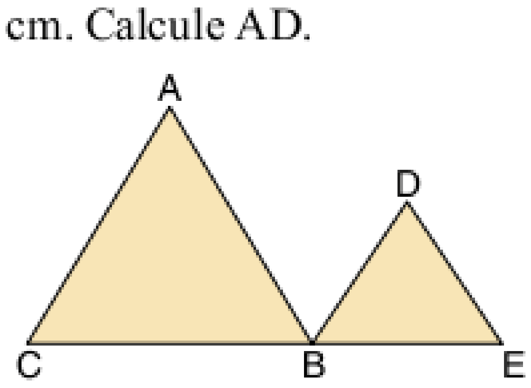
$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8\cos\alpha$

$\therefore 49 = 25 + 64 - 80\cos\alpha$

$\therefore 49 = 89 - 80\cos\alpha \therefore 80\cos\alpha = 40$

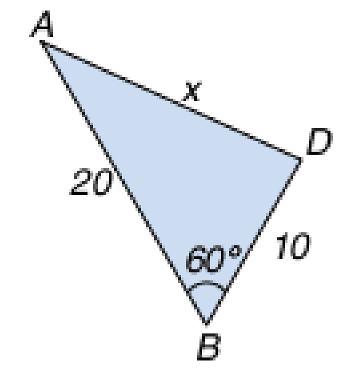
$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

3 Na figura abaixo, ABC e BDE são triângulos equiláteros de lados 20 e 10 cm. Calcule AD.



Resolução:

No ΔADB, temos:



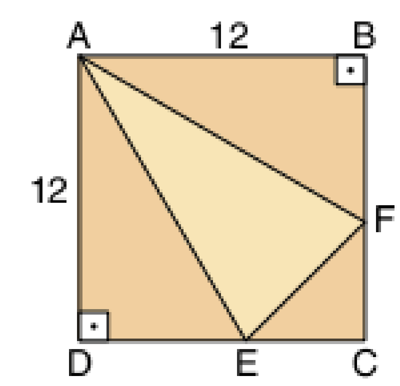
$x^2 = (10)^2 + (20)^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20\cos 60^\circ$

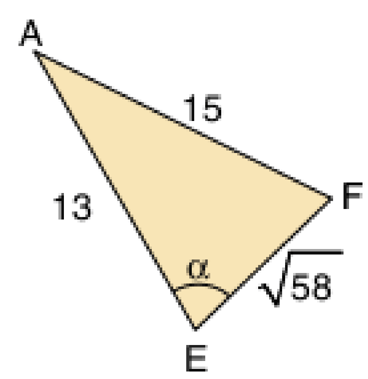
$\Rightarrow x^2 = 100 + 400 - 2 \cdot 10 \cdot 20\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow x^2 = 500 - 200 \therefore x^2 = 300$

$\therefore x = 10\sqrt{3}$ cm

4 No quadrado ABCD de lado 12, temos AE = 13 e CF = 3. O ângulo AÊF é agudo, reto ou obtuso? Justifique.





Resolução:

No ΔAED:

$AE^2 = 12^2 + DE^2$

$\Rightarrow 169 = 144 + DE^2 \Rightarrow DE = 5 \Rightarrow EC = 7$

No $\Delta CEF \Rightarrow EF^2 = 7^2 + 3^2 \therefore EF^2 = 58$

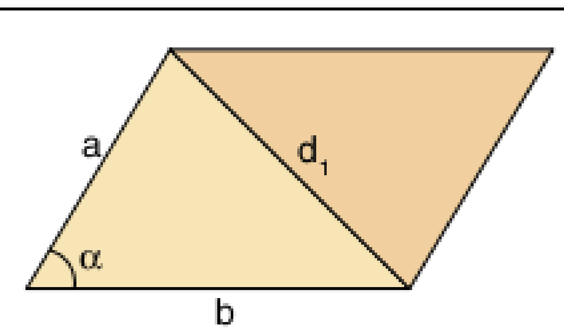
No $\Delta ABF \Rightarrow AF^2 = 12^2 + 9^2 \therefore AF^2 = 225$

Verificando a natureza do ΔAFE, temos:

$(15)^2 < (13)^2 + \left(\sqrt{58}\right)^2 \Rightarrow \Delta$ acutângulo

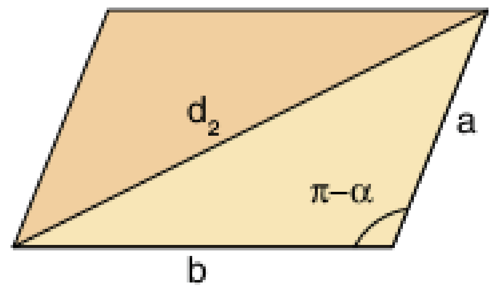
Teorema importante

Em um paralelogramo de lados **a** e **b** e diagonais d_1 e d_2, temos: $d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$.



$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \qquad (I)$$

Fig. 5 Demonstração.



$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha)$$
$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \qquad \text{(II)}$$

Fig. 6 Demonstração.

Somando (I) e (II), temos:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) - 2ab\cos\alpha + 2ab\cos\alpha$$
$$\Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Teorema dos senos

Vamos considerar o triângulo ABC qualquer da figura 7, inscrito em uma circunferência de raio R.

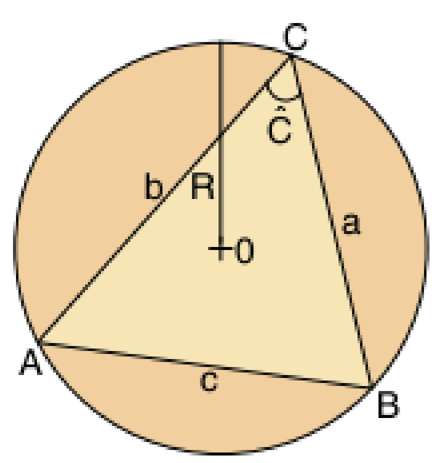


Fig. 7 Triângulo inscrito ABC.

Forçando o lado $\overline{AC}$ passar pelo centro do círculo, ganharemos um triângulo retângulo e não modificamos o ângulo $\hat{C}$.

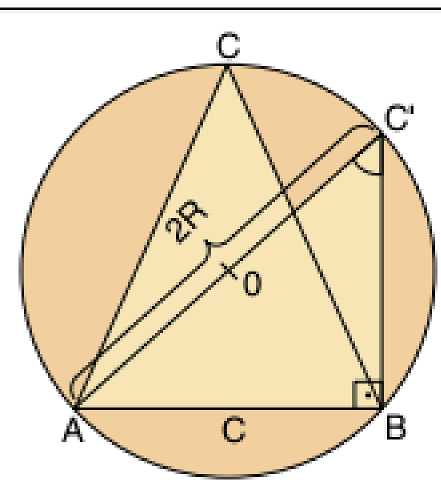


Fig. 8 Demonstração do teorema dos senos.

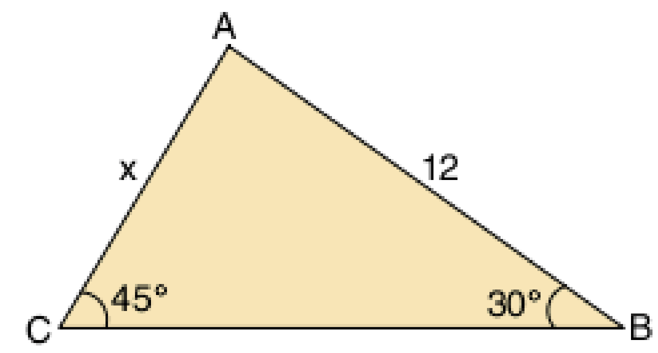
No ΔABC, temos $\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{c}{2R} \Rightarrow \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$

No ΔABC inscrito em uma circunferência de raio R, podemos aplicar o teorema dos senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Exercícios resolvidos

5 Calcule x no triângulo seguinte.

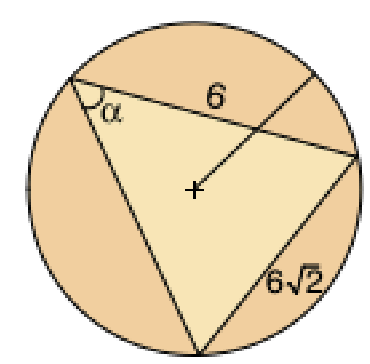


Resolução:

Pelo teorema dos senos: $\dfrac{x}{sen30^o} = \dfrac{12}{sen45^o}$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \therefore x = \frac{12}{\sqrt{2}} \therefore x = 6\sqrt{2}$$

6 Calcule o valor do ângulo α na figura a seguir.



Resolução:

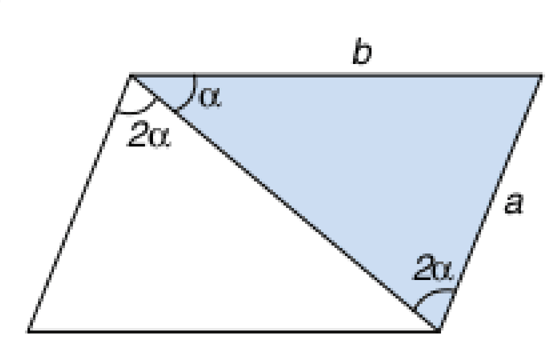
Pelo teorema dos senos: $\dfrac{6\sqrt{2}}{sen\alpha} = 2.6$

$$\frac{6\sqrt{2}}{12} = sen\alpha \therefore sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^o$$

7 A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um α e outro 2α. A razão entre o lado menor e o maior do paralelogramo é?

Resolução:

Pelo enunciado, temos:



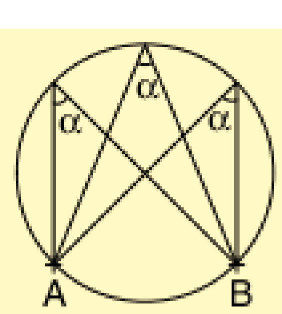
Como $2\alpha > \alpha \Rightarrow b > a$ *(desigualdade triangular)*

Pelo teorema dos senos:

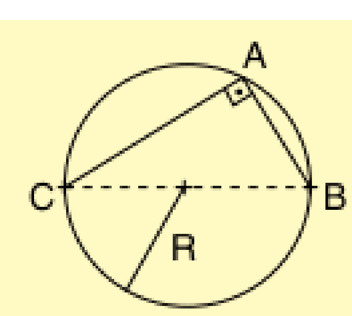
$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\,2\alpha} \therefore \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{2sen\alpha\cos\alpha} \therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{2\cos\alpha}$$

Lembrete:
Ângulo inscrito em uma circunferência

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$



Triângulo retângulo
BC = 2R



Cálculo das cevianas notáveis de um triângulo

No capítulo 3, vimos a definição de cevianas. Trata-se de segmentos que unem um vértice a um ponto do lado oposto do triângulo.

Vamos agora calcular suas dimensões:

Altura

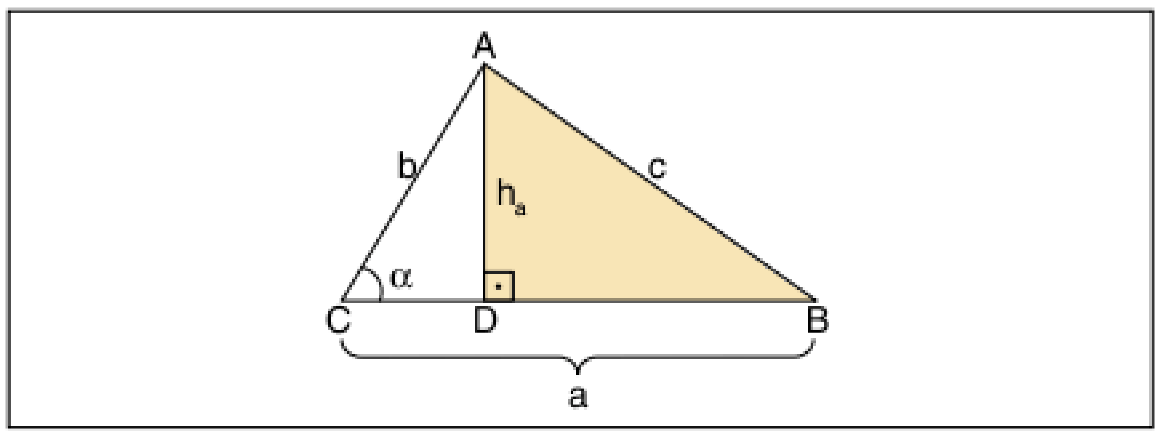


Fig. 9 Altura de um triângulo (h_a).

No ΔACD, temos $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h_a}{b} \therefore h_a = b\operatorname{sen}\alpha$.

Vamos calcular então o valor de $\operatorname{sen}\alpha$.

Pelo teorema dos cossenos, podemos inicialmente calcular $\cos\alpha$, assim:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Pela RFT, temos: $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, assim:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} \Rightarrow$$

diferença de quadrados

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} \therefore$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\cdot\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\right)}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}{4a^2b^2}} \therefore$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{(a+b-c)(a+b+c)(c+a-b)(c-a+b)}}{2ab}$$

fazendo $a + b + c = 2p$, temos:

$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c$

$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b$

$-a + b + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a$

Assim:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{(2p-2c)(2p)(2p-2b)(2p-2a)}}{2ab}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2ab}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{ab}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Substituindo na equação inicial, temos:

$$h_a = b\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow h_a = b.\frac{2}{ab}.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2}{a}.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

As alturas de um triângulo qualquer, em função dos lados, são:

$$h_a = \frac{2}{a}.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ceviana qualquer – relação de Stewart

A relação de Stewart é uma fórmula que pode ser empregada para calcular qualquer ceviana.

É um teorema auxiliar derivado do teorema dos cossenos. Observe a figura 10.

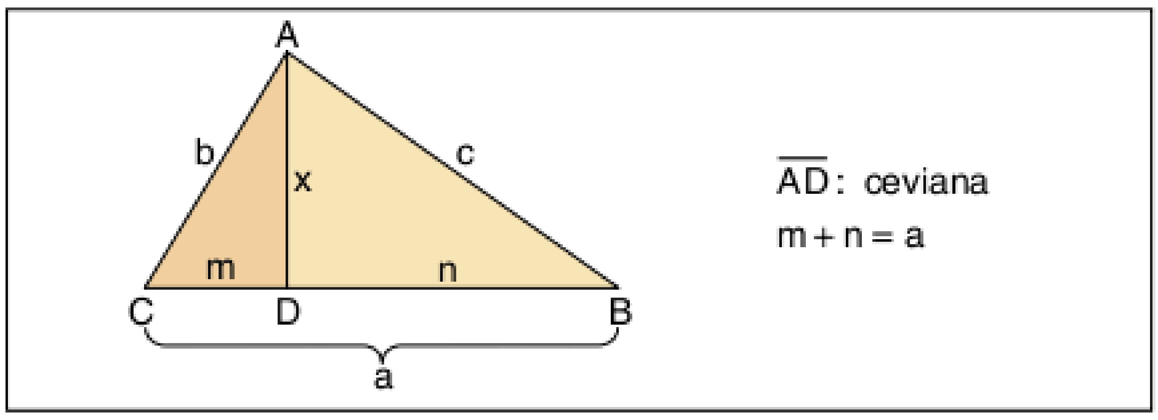


Fig. 10 Triângulo ABC.

No ΔACD, temos:

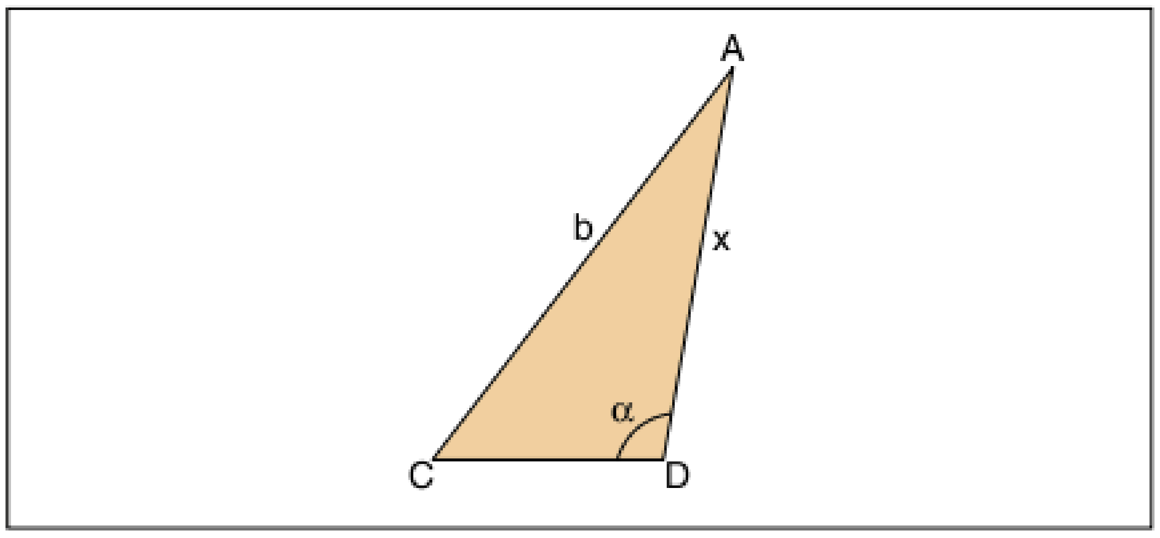


Fig. 11 Triângulo ADC, proveniente do triângulo ABC.

Pelo teorema dos cossenos:

$b^2 = m^2 + x^2 - 2mx\cos\alpha$ (I)

No ΔADB, temos:

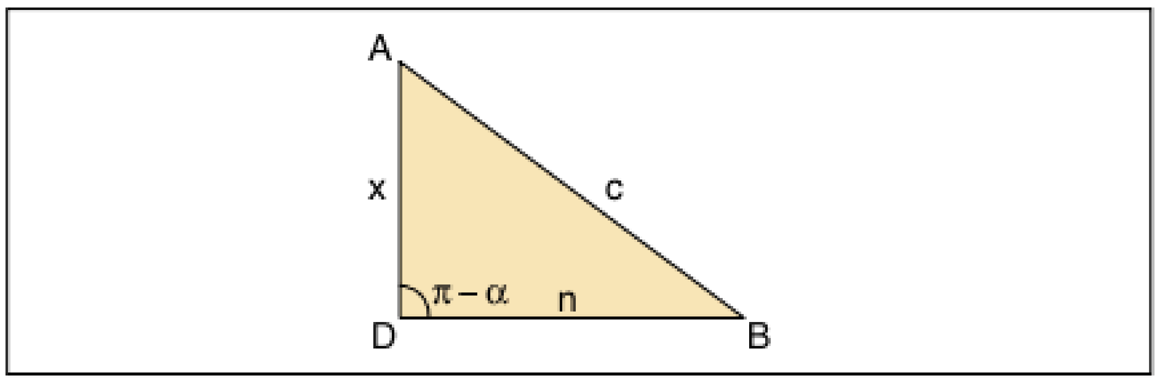


Fig. 12 Triângulo ADB, proveniente do triângulo ABC.

Pelo teorema dos cossenos:

$c^2 = n^2 + x^2 - 2xn\cos(\pi - \alpha)$ (II)

Observando as equações (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} b^2 = m^2 + x^2 - 2mx\cos\alpha \quad \text{(I)} \\ c^2 = n^2 + x^2 + 2nx\cos\alpha \quad \text{(II)} \end{cases}$$

ATENÇÃO!

Lembre-se $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Multiplicando (I) por n e (II) por m, temos:

$$\begin{cases} nb^2 = nm^2 + nx^2 - 2mnx\cos\alpha \\ mc^2 = mm^2 + mx^2 + 2mnx\cos\alpha \end{cases} +$$

$$mc^2 + nb^2 = mn^2 + nm^2 + x^2(m+n)$$

$$mc^2 + nb^2 = mn(m+n) + x^2(m+n) \Rightarrow$$

$$mc^2 + nb^2 = mna + x^2a \therefore$$

$$mc^2 + nb^2 - x^2a = mna \quad \div (mna)$$

$$\frac{mc^2}{mna} + \frac{nb^2}{mna} - \frac{x^2a}{mna} = 1$$

$$\therefore \frac{c^2}{na} + \frac{b^2}{ma} - \frac{x^2}{mn} = 1$$

Mediana

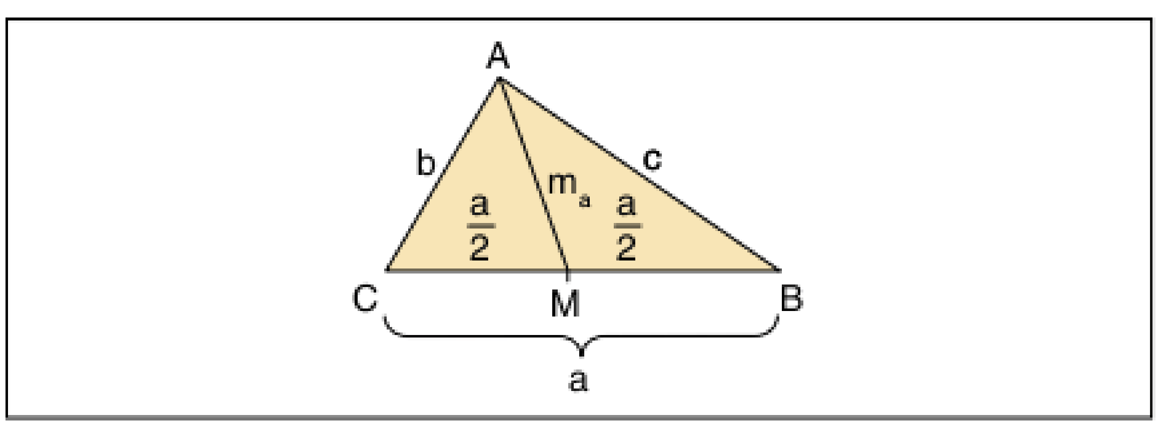


Fig. 13 Mediana de um trângulo (m_a).

Pela relação de Stewart, temos:

$$\frac{b^2}{\frac{a}{2}\cdot a} + \frac{c^2}{\frac{a}{2}\cdot a} - \frac{m_a^2}{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}} = 1 \therefore \frac{2b^2}{a^2} + \frac{2c^2}{a^2} - \frac{4m_a^2}{a^2} = 1$$

$$2b^2 + 2c^2 - 4m_a^2 = a^2 \therefore \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4} = m_a^2 \therefore$$

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}}{2}$$

Em um triângulo ABC qualquer, as medianas são:

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}}{2}$$

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2+c^2) - b^2}}{2}$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}}{2}$$

Bissetrizes internas

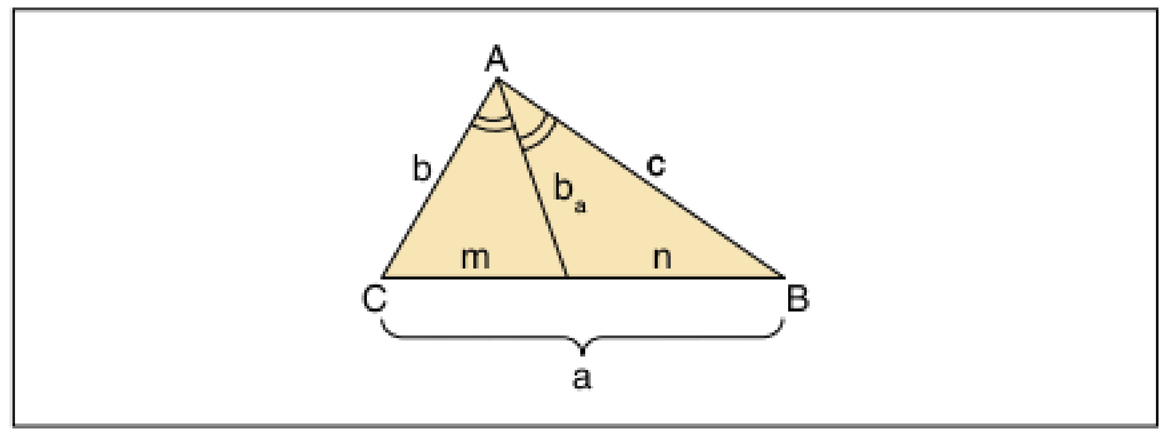


Fig. 14 Bissetriz interna de um triângulo (b_a).

Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n} \therefore \frac{b}{c} = \frac{m}{n} \therefore \frac{b+c}{b} = \frac{m+n}{m}$$

$$\frac{b+c}{b} = \frac{a}{m} \therefore m = \frac{ab}{b+c} \text{ e } n = \frac{ac}{b+c}$$

Pela relação de Stewart, temos:

$$\frac{b^2}{ma} + \frac{c^2}{na} - \frac{b_a^2}{mn} = 1 \therefore$$

$$\frac{b^2}{\frac{ab}{b+c}\cdot a} + \frac{c^2}{\frac{ac}{b+c}\cdot a} - \frac{b_a^2}{\left(\frac{ab}{b+c}\right)\cdot\left(\frac{ab}{b+c}\right)} = 1$$

$$\frac{b^2(b+c)}{a^2b} + \frac{c^2(b+c)}{a^2c} - \frac{b_a^2(b+c)^2}{a^2bc} = 1$$

$$\frac{b(b+c)}{a2} + \frac{c(b+c)}{a2} - 1 = \frac{b_a^2(b+c)^2}{a^2bc}$$

$$\frac{b^2 + bc + bc + c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b_a^2(b+c)^2}{a^2bc}$$

$$bc[b^2 + 2bc + c^2 - a^2] = b_a^2(b+c)^2$$

$$\frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2} = b_a^2$$

$$\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = b_a^2$$

Fazendo $a + b + c = 2p$ e

$-a + b + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a$

$$b_a^2 = \frac{bc(2p)(2p-2a)}{(b+c)^2}$$

$$\therefore b_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

Em um triângulo ABC qualquer, as bissetrizes internas medem:

$$b_a = \frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$b_b = \frac{2}{a+c}\cdot\sqrt{acp(p-b)}$$

$$b_c = \frac{2}{a+b}\cdot\sqrt{abp(p-c)}$$

Bissetrizes externas

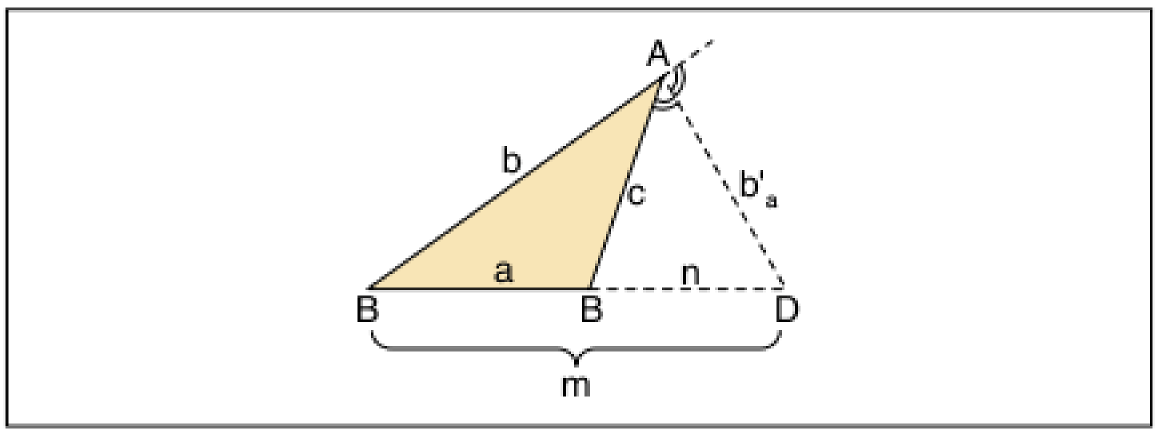


Fig. 15 Bissetriz externa de um triângulo (b'_a).

Pelo teorema da bissetriz externa, temos:

$$\frac{b}{c}=\frac{m}{n}\therefore\frac{b-c}{b}=\frac{m-n}{m}\Rightarrow\frac{b-c}{b}=\frac{a}{m}\therefore m=\frac{ab}{b-c}$$

$$\frac{b}{c}=\frac{ab}{(b-c)n}\therefore n=\frac{ac}{b-c}$$

Aplicando a relação de Stewart, no ΔADC, temos:

$$\frac{b^2}{am}+\frac{b'^2_a}{nm}-\frac{c^2}{an}=1$$

$$\Rightarrow\frac{b^2(b-c)}{aab}+\frac{b'^2_a(b-c)^2}{a^2bc}-\frac{c^2(b-c)}{aac}=1$$

$$\frac{b(b-c)}{a^2}+\frac{(b-c)^2b'^2_a}{a^2bc}-\frac{c(b-c)}{a^2}=1$$

$$b^2c(b-c)+(b-c)^2.b'^2_a-bc^2(b-c)=a^2bc$$

$$(b-c)\left(b^2c-bc^2\right)+(b-c)^2.b'^2_a=a^2bc$$

$$bc(b-c)^2+(b-c)^2.b'^2_a=a^2bc$$

$$(b-c)^2.b'^2_a=a^2bc-bc(b-c)^2$$

$$(b-c)^2.b'^2_a=bc\left[a^2-(b-c)^2\right]$$

$$(b-c)^2.b'^2_a=bc(a+b-c).(a-b+c)$$

$$(b-c)^2.b'^2_a=bc(2p-2c)(2p-2b)$$

$$b'^2_a=\frac{2}{|b-c|}.\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Em um triângulo ABC qualquer, as bissetrizes externas medem:

$$b'_a=\frac{2}{|b-c|}.\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$b'_b=\frac{2}{|a-c|}.\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

$$b'_c=\frac{2}{|a-b|}.\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

No caso de um triângulo isósceles, a bissetriz externa relativa aos lados iguais são paralelas à base, como mostrado na figura 16.

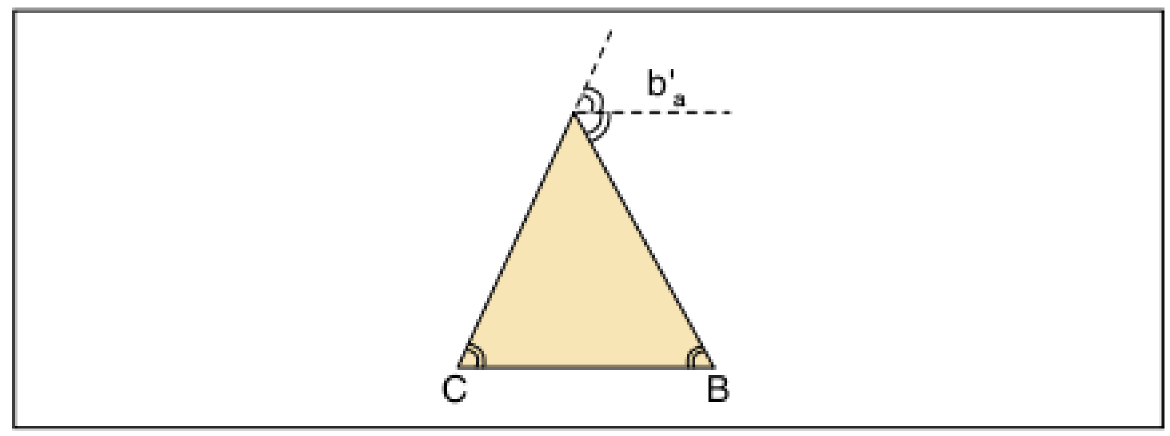
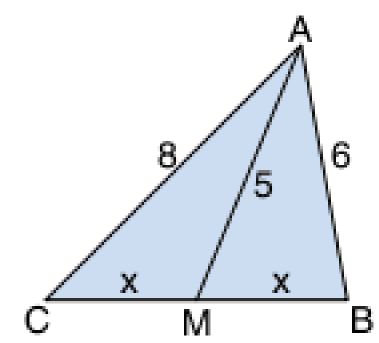


Fig. 16 Bissetriz externa no triângulo isósceles.

Exercícios resolvidos

8 Em um triângulo ABC, o lado AB = 6 m, o lado AC = 8 m e a sua mediana AM = 5 m. Calcular o lado BC.

Resolução:



Pela relação de Stewart, temos:

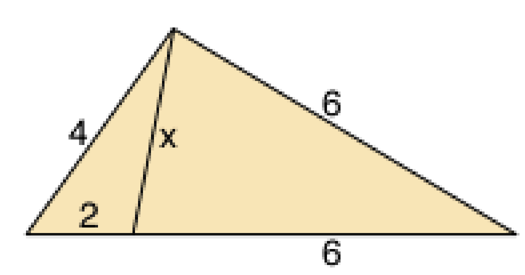
$$\frac{8^2}{x.2x}+\frac{6^2}{x.2x}-\frac{5^2}{x.x}=1$$

$$\Rightarrow\frac{64}{2x^2}+\frac{36}{2x^2}-\frac{25}{x^2}=1\therefore\frac{100}{2x^2}-\frac{25}{x^2}=1$$

$$\frac{50}{x^2}-\frac{25}{x^2}=1\therefore\frac{25}{x^2}=1\therefore x=5\ m$$

logo, BC = 10 m.

9 Determine o valor de x no triângulo a seguir.



Resolução:

Pela relação de Stewart, temos:

$$\frac{4^2}{2.8}+\frac{6^2}{6.8}-\frac{x^2}{2.6}=1$$

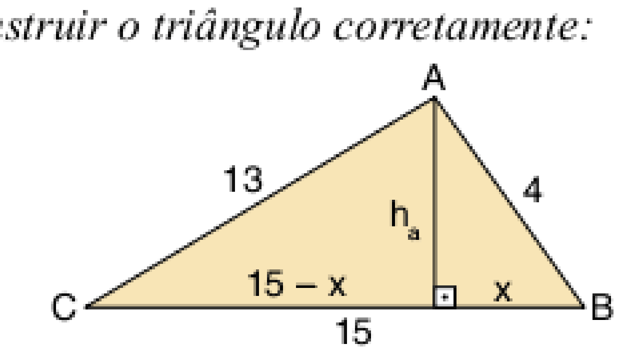
$$\Rightarrow\frac{16}{16}+\frac{3}{4}-\frac{x^2}{12}=1\therefore\frac{x^2}{12}=\frac{3}{4}\therefore x^2=9$$

$x = 3$

10 Os lados de um triângulo medem 4 m, 13 m e 15 m. Calcular a altura relativa ao maior lado.

Resolução:

Vamos inicialmente verificar a natureza do triângulo.
Pelo enunciado, temos:
$(15)^2 > (13)^2 + (4)^2 \Rightarrow 225 > 169 + 16 \Rightarrow$ *triângulo obtusângulo*
Podemos construir o triângulo corretamente:



$$\begin{cases}(h_a)^2+(x)^2=(4)^2\\(h_a)^2+(15-x)^2=(13)^2\end{cases}$$

Subtraindo as equações:

$x^2-(15-x)^2=16-169$

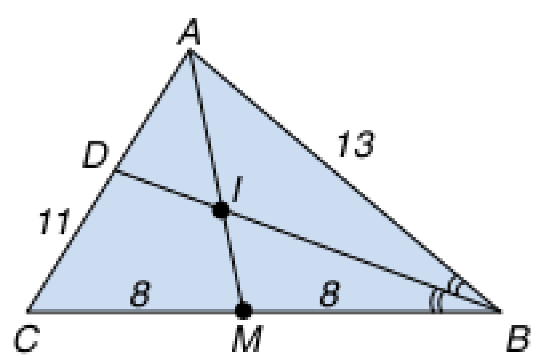
$x^2-(225-30x+x^2)=-153$

$\therefore\ 30x=72 \qquad x=2{,}4\ m$

$(4)^2=(2{,}4)^2+(h_a)^2\ \therefore\ h_a=3{,}2\ m$

11 Os lados de um triângulo são: AB = 13 m, AC = 11 m e BC = 16 m. A mediana AM e a bissetriz interna BD cortam-se em I. Calcular IM.

Resolução:

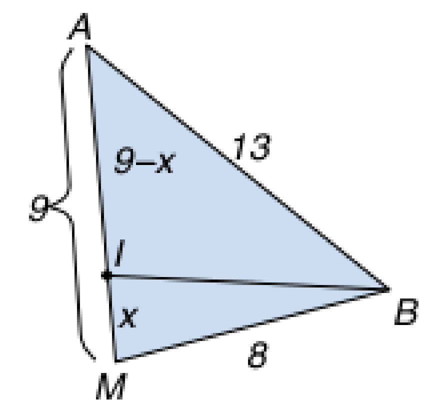


Vamos calcular a mediana AM pela relação de Stewart:

$$\frac{11^2}{8.16}+\frac{13^2}{8.16}-\frac{(AM)^2}{8.8}=1\ \therefore$$

$$\therefore\ \frac{121}{128}+\frac{169}{128}-\frac{(AM)^2}{64}=1\ \therefore\ \frac{290}{128}-\frac{(AM)^2}{64}=1$$

$$\frac{145}{64}-\frac{(AM)^2}{64}=1\ \therefore \quad 145-(AM)^2=64\ \therefore\ AM=9\ m$$



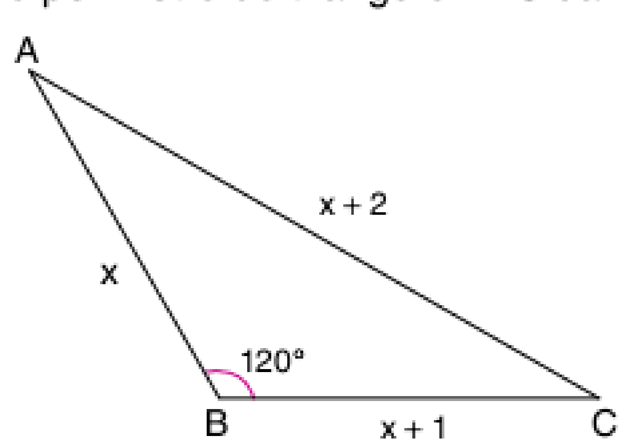
Aplicando o teorema da bissetriz no ΔABM, temos:

$$\frac{9-x}{x}=\frac{13}{8}\ \therefore\ 72-8x=13x$$

$$72=21x\ \Rightarrow\ x=\frac{72}{21}\ m$$

Revisando

1 Calcule o perímetro do triângulo ABC da figura abaixo.

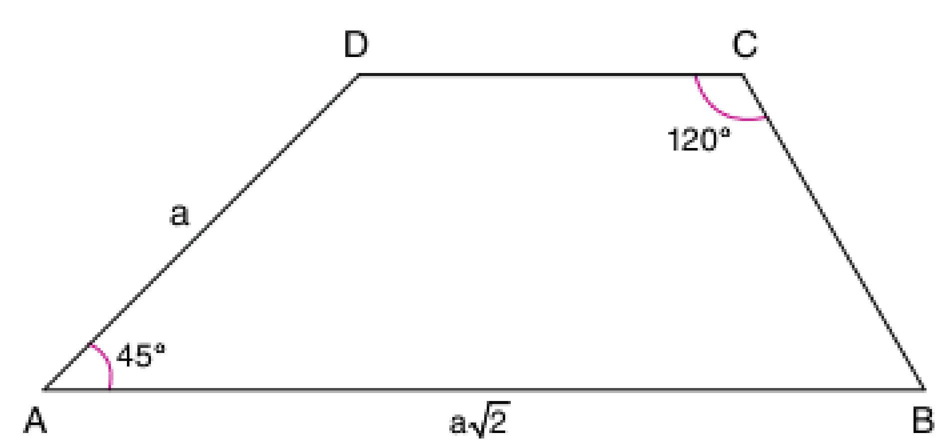


2 Determine a diagonal maior de um paralelogramo, em que dois de seus lados consecutivos formam um ângulo de 45º e medem, respectivamente, $5\sqrt{2}$ cm e 10 cm.

3 Se 4 cm, 5 cm e 6 cm são as medidas dos lados de um triângulo, então quanto vale cosseno do seu menor ângulo?

4 Demonstrar que a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.

5 No trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, são dados: $AB = a\sqrt{2}$, AD = a, $\hat{A}$ = 45º e $\hat{C}$ = 120°. Calcular a diagonal BD e os lados BC e CD.



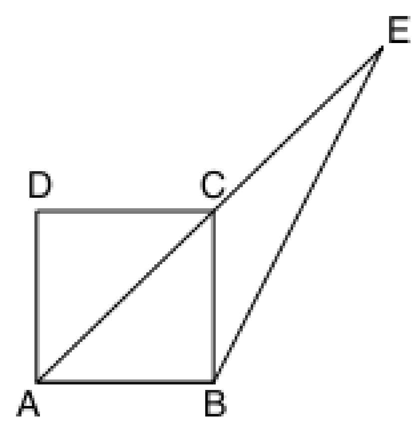
Exercícios propostos

Teorema dos cossenos

1 **Fuvest** Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O cosseno do maior ângulo de T é:

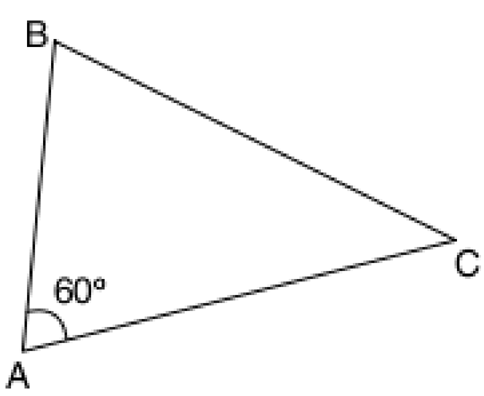
(a) $\frac{5}{6}$
(b) $\frac{4}{5}$
(c) $\frac{3}{4}$
(d) $\frac{2}{3}$
(e) $\frac{1}{8}$

2 **PUC-MG** Na figura, ABCD é um quadrado cuja área mede 4 m^2, e C é o ponto médio do segmento AE. O comprimento de BE, em metros, é:



(a) $\sqrt{5}$
(b) $2\sqrt{5}$
(c) $5\sqrt{2}$
(d) $3\sqrt{5}$
(e) $4\sqrt{2}$

3 **Unirio** Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 80 km e AC = 120 km e A é uma cidade conhecida, como mostra a figura abaixo. Logo, a distância entre B e C, em km, é:



(a) menor que 90.
(b) maior que 90 e menor que 100.
(c) maior que 100 e menor que 110.
(d) maior que 110 e menor que 120.
(e) maior que 120.

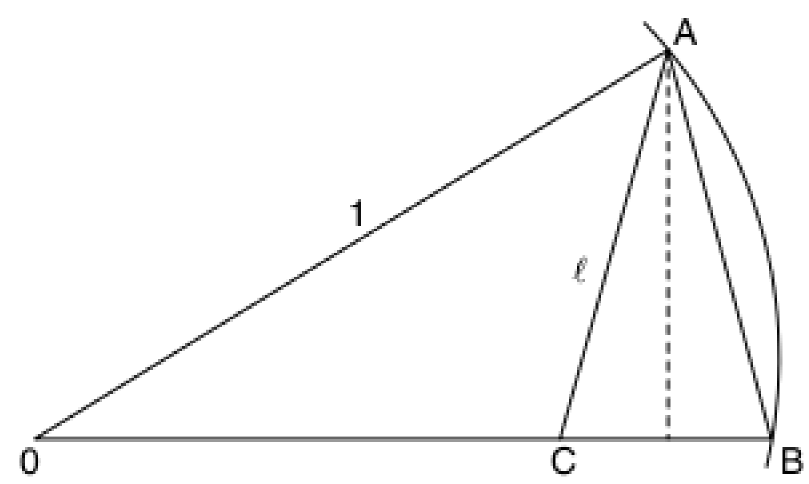
4 **Cesgranrio** Um navegador devia viajar durante duas horas, no rumo nordeste, para chegar a certa ilha. Enganou-se, e navegou duas horas no rumo norte. Tomando, a partir daí, o rumo correto, em quanto tempo, aproximadamente, chegará à ilha?

(a) 30 min
(b) 1 h
(c) 1 h 30 min
(d) 2 h
(e) 2 h 15 min

5 **Cesgranrio** Na figura está representado o retângulo ABCD. Sobre o lado DC foi marcado o ponto P, de modo que a medida de DP corresponde ao triplo do lado AD, enquanto a medida de CP vale o dobro de BC. O ângulo APB mede, em radianos:

(a) $\frac{\pi}{2}$
(b) $\frac{(2\pi)}{3}$
(c) $\frac{(3\pi)}{4}$
(d) $\frac{(5\pi)}{6}$
(e) $\frac{(8\pi)}{9}$

6 **Unicamp** Na figura seguinte, $\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$ é o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio 1 e centro O.



a) Calcule o valor de ℓ.

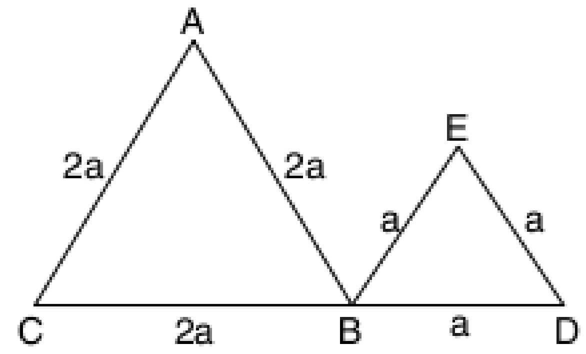
b) Mostre que $\cos 36° = \frac{(1+\sqrt{5})}{4}$

7 Os lados de um triângulo são: AB = 12 m, AC = 15 m e BC = 18 m. Calcular a bissetriz interna relativa ao ângulo Â.

8 Calcular a diagonal BD de um paralelogramo ABCD, sabendo que o lado AB = 4 cm, o lado BC = 5 cm e o ângulo $\hat{B} = 60°$.

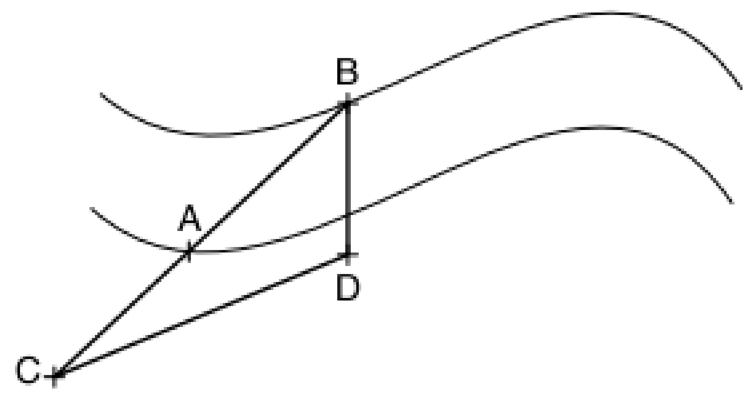
9 Os lados de um triângulo são: AB = 4 m, AC = 8 m e BC = 5 m. Prolonga-se o lado BC de um segmento CD = BC. Calcular AD.

10 Na figura abaixo, os triângulos ABC e BED são equiláteros de lados 2a e a, respectivamente. Calcule a medida do segmento $\overline{AE}$.



Teorema dos senos

11 **Vunesp** Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos A e B, um observador que se encontra com A afasta-se 20 m da margem, na direção da reta AB, até o ponto C e depois caminha em linha reta até o ponto D, a 40 m de C, do qual ainda pode ver as árvores.



Tendo verificado que os ângulos DCB e BDC medem, respectivamente, cerca de 15° e 120°, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação $\sqrt{6} = 2,4$?

12 **ITA** A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um α e o outro 2α. A razão entre o lado menor e o maior do paralelogramo é:

(a) $\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$
(b) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha}$
(c) $\dfrac{1}{2\operatorname{sen}\alpha}$
(d) $\dfrac{1}{2\cos\alpha}$
(e) $\operatorname{tg}\alpha$

Determinação da natureza do triângulo

13 Determinar a natureza, quanto aos ângulos, de um triângulo, cujos lados medem:

a) 6; 8 e 11.
b) 10; 14 e 17.

14 Os lados de um triângulo são: AB = 3 cm, BC = 5 cm, AC = 7 cm. Calcular a projeção do lado AB sobre a reta que contém o lado BC.

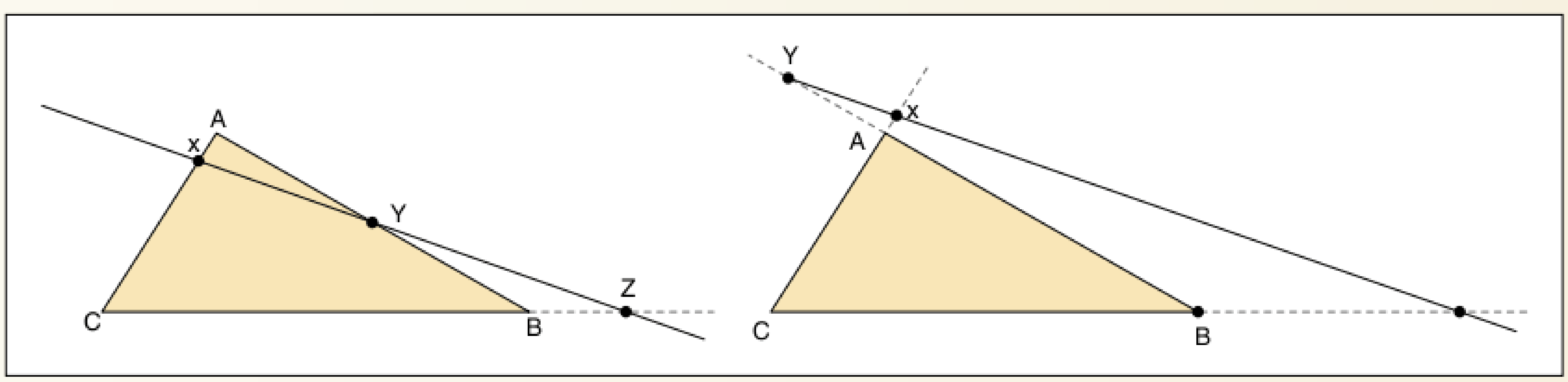
15 Dois lados de um triângulo são: AB = 7 cm, AC = 8 cm. Calcular o lado BC, sabendo que a sua projeção sobre a reta que contém o lado AB mede 11 cm.

TEXTO COMPLEMENTAR

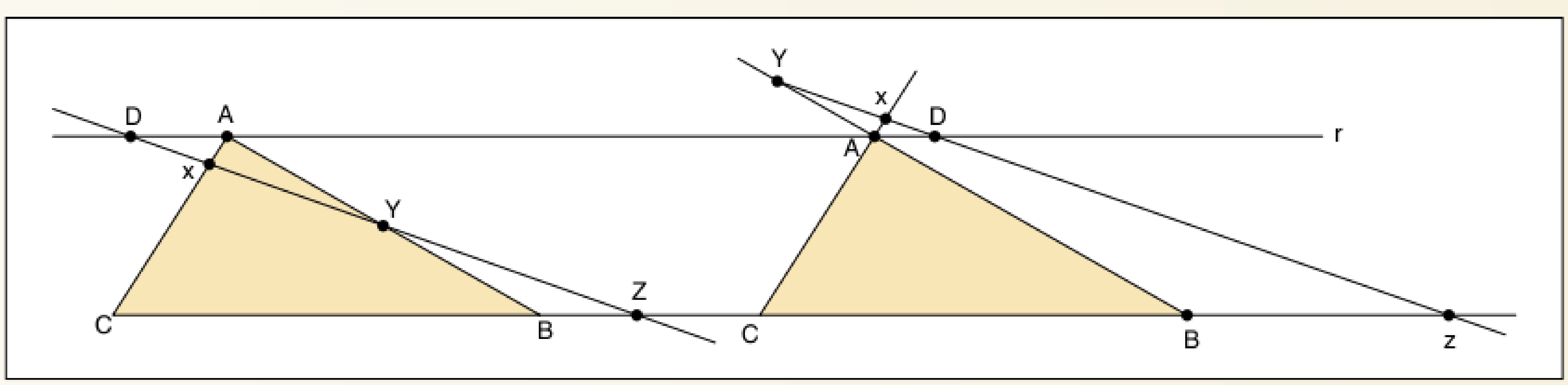
Teorema de Menelaus

Menelaus de Alexandria viveu cerca de 100 d.C. e foi autor de obras de Matemática e Astronomia. Podemos inserir neste capítulo o célebre teorema de Menelaus para um triângulo qualquer. Observe o seu enunciado:

Seja r uma reta que intercepta dois lados e o prolongamento do terceiro ou os prolongamentos dos três lados, nos pontos X, Y e Z, podemos afirmar que: $\dfrac{XA}{XC} \cdot \dfrac{ZC}{ZB} \cdot \dfrac{YB}{YA} = 1.$



Demonstração: explicaremos esse teorema simultaneamente para os dois casos.



$r // \overline{BC}$

$\Delta DAX \sim \Delta ZCX$

$$\frac{DA}{ZC} = \frac{XA}{XC} \therefore DA = ZC.\frac{XA}{XC}$$

$\Delta DAY \sim \Delta ZBY$

$$\frac{DA}{ZB} = \frac{YA}{YB} \therefore DA = ZB.\frac{YA}{YB}$$

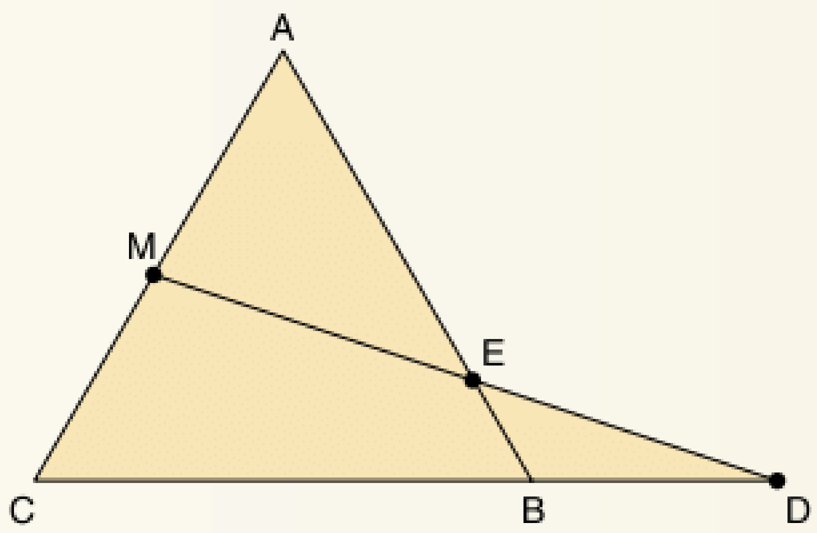
Igualando os valores de DA, temos:

$$ZC.\frac{XA}{XC} = ZB.\frac{YA}{YB} \therefore \frac{XA}{XC}.\frac{ZC}{ZB}.\frac{YB}{YA} = 1$$

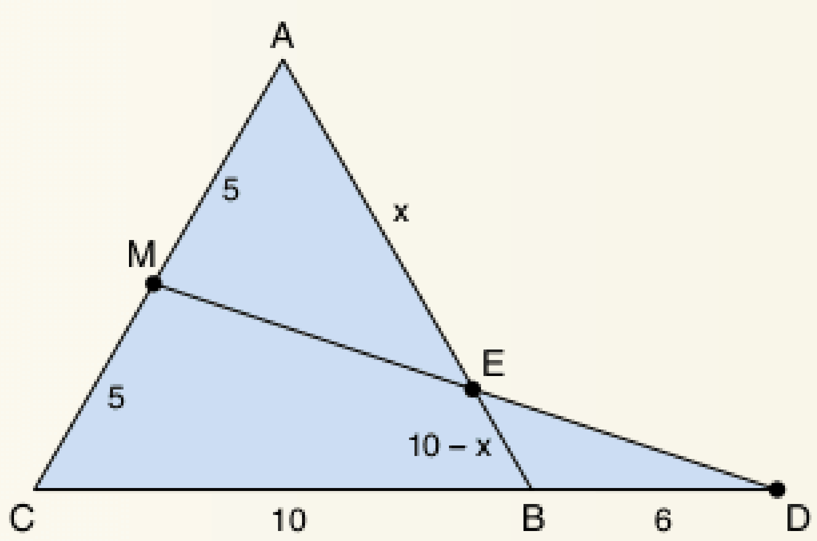
Observe os exemplos.

Exercícios resolvidos

1 O ΔABC é equilátero com AM = MC = 5 e BD = 6. Calcule AE.



Resolução:

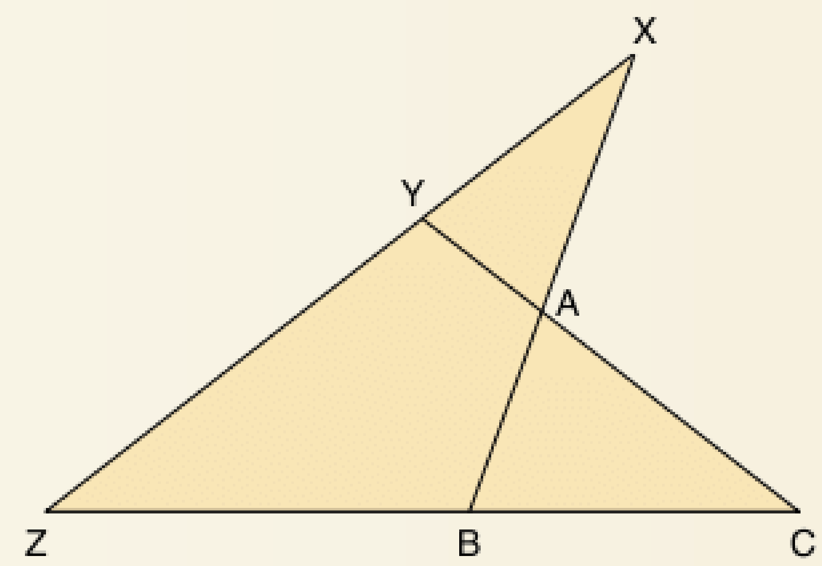


Pelo teorema de Menelaus, temos:

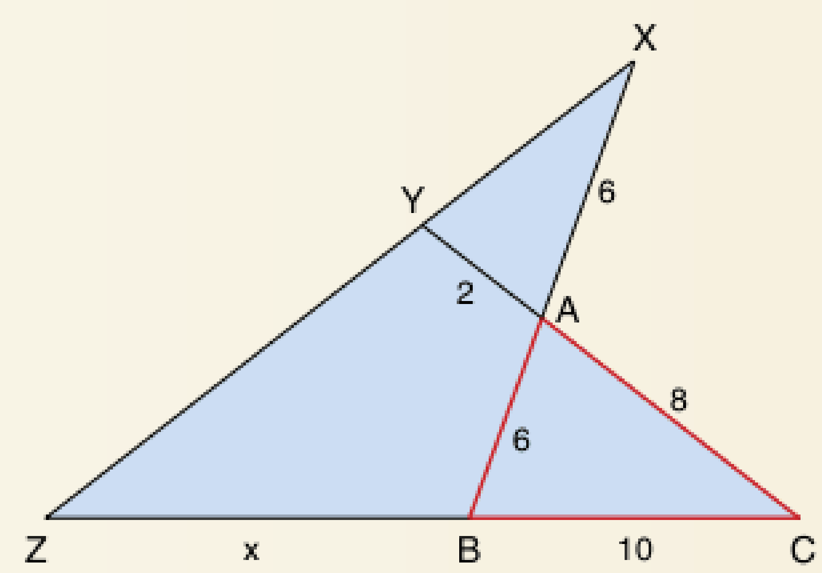
$$\frac{MA}{MC}.\frac{DC}{DB}.\frac{EB}{EA} = 1 \therefore \frac{5}{5}.\frac{16}{6}.\frac{10-x}{x} = 1$$

$$\frac{10-x}{x} = \frac{3}{8} \therefore 80 - 8x = 3x \therefore x = \frac{80}{11}$$

2 Calcule a medida do segmento $\overline{ZB}$ sabendo-se que: AB = 6, AC = 8, BC = 10, XA = 6 e YA = 2.



Resolução:



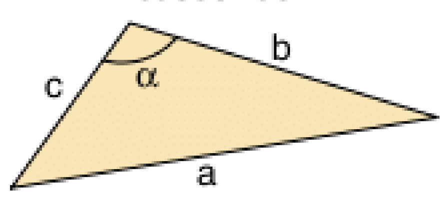
A reta $\overleftrightarrow{XYZ}$ intercepta os prolongamentos dos lados do ΔABC. Assim:

$$\frac{XA}{XB}.\frac{ZB}{ZC}.\frac{YC}{YA} = 1 \therefore \frac{6}{12}.\frac{x}{x+10}.\frac{10}{2} = 1 \therefore x = \frac{20}{3}$$

RESUMINDO

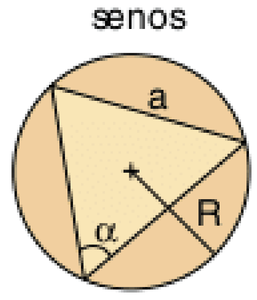
Quando estamos diante de um problema de triângulos não retângulos, para calcular seus lados ou ângulos utilizamos dois teoremas:

cossenos



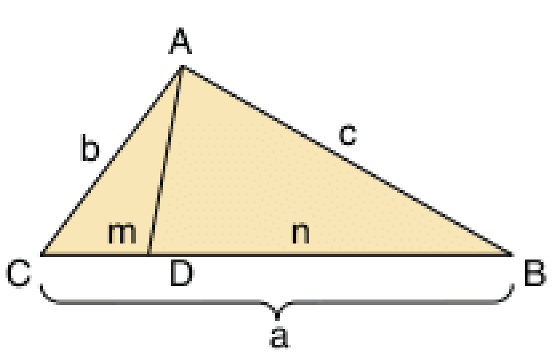
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$$

Para o cálculo das cevianas, utilizamos a relação de Stewart.



$$\frac{b^2}{ma} + \frac{c^2}{na} - \frac{AD^2}{mn} = 1$$

QUER SABER MAIS?

SITE

- Classificação de triângulos
  <www.uff.br/cdme/jct/jct.html/jct-br.html>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 **Cesgranrio** No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30°.
O seno do ângulo B vale:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{3}{4}$
(d) $\frac{4}{5}$
(e) $\frac{5}{6}$

2 **FEI** Se em um triângulo ABC o lado AB mede 3 cm, o lado BC mede 4 cm e o ângulo interno formado entre os lados AB e BC mede 60°, então o lado AC mede:

(a) $\sqrt{37}$ cm
(b) $\sqrt{13}$ cm
(c) $2\sqrt{3}$ cm
(d) $3\sqrt{3}$ cm
(e) $2\sqrt{2}$ cm

3 Os lados de um triângulo medem 7 cm, 15 cm e 20 cm. Calcular a projeção do menor lado sobre o maior.

4 Em um triângulo ABC, o lado AB = 6 m, o lado AC = 8 m e a mediana AM = 5 m. Calcular o lado BC.

5 Os lados de um triângulo são: AB = 13 m, AC = 11 m e BC = 16 m. A mediana AM e a bissetriz interna BD cortam-se em I. Calcular IM.

6 Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas a e b e uma das diagonais tem por medida c.
Determine a medida da outra diagonal.

7 Em um paralelogramo de lados a e b, calcule a soma dos quadrados das diagonais.

8 **ITA** Um triângulo ABC está inscrito num círculo de raio $2\sqrt{3}$. Sejam a, b e c os lados opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Sabendo que $a = 2\sqrt{3}$ e $(\hat{A}, \hat{B} \text{ e } \hat{C})$ é uma progressão aritmética, calcule os lados e os ângulos do triângulo ABC.

9 Calcular o ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC, sabendo que os lados AC e BC são respectivamente iguais aos $\frac{8}{3}$ e $\frac{7}{3}$ do lado AB.

10 Os lados de um triângulo são: AB = 6 cm, AC = 7 cm e BC = 5 cm. Calcular a distância do ponto de concurso das medianas (baricentro) ao lado AC.

11 Sobre os catetos AB e AC de um triângulo retângulo ABC constroem-se externamente triângulos equiláteros, cujos centros são X e Y. Demonstrar: $\overline{XY}^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + bc\sqrt{3}\right)$

12 Os lados de um triângulo são: AB = 21 cm, AC = 17 cm e BC = 26 cm. Calcular a distância do vértice B ao ponto médio da mediana AM.

13 ABCD é um paralelogramo no qual AB = 5 cm e AD = 3 cm. Calcular a diagonal AC, sabendo que a sua projeção sobre a reta que contém o lado AB mede 6 cm.

14 M é um ponto qualquer da base BC de um triângulo isósceles ABC. Demonstrar que é: $AB^2 - AM^2 = (MC)(MB)$.

15 Calcular o lado de um triângulo equilátero cujos vértices estão situados, respectivamente, sobre três retas paralelas, sabendo que são a e b as distâncias da paralela intermediária às outras duas.

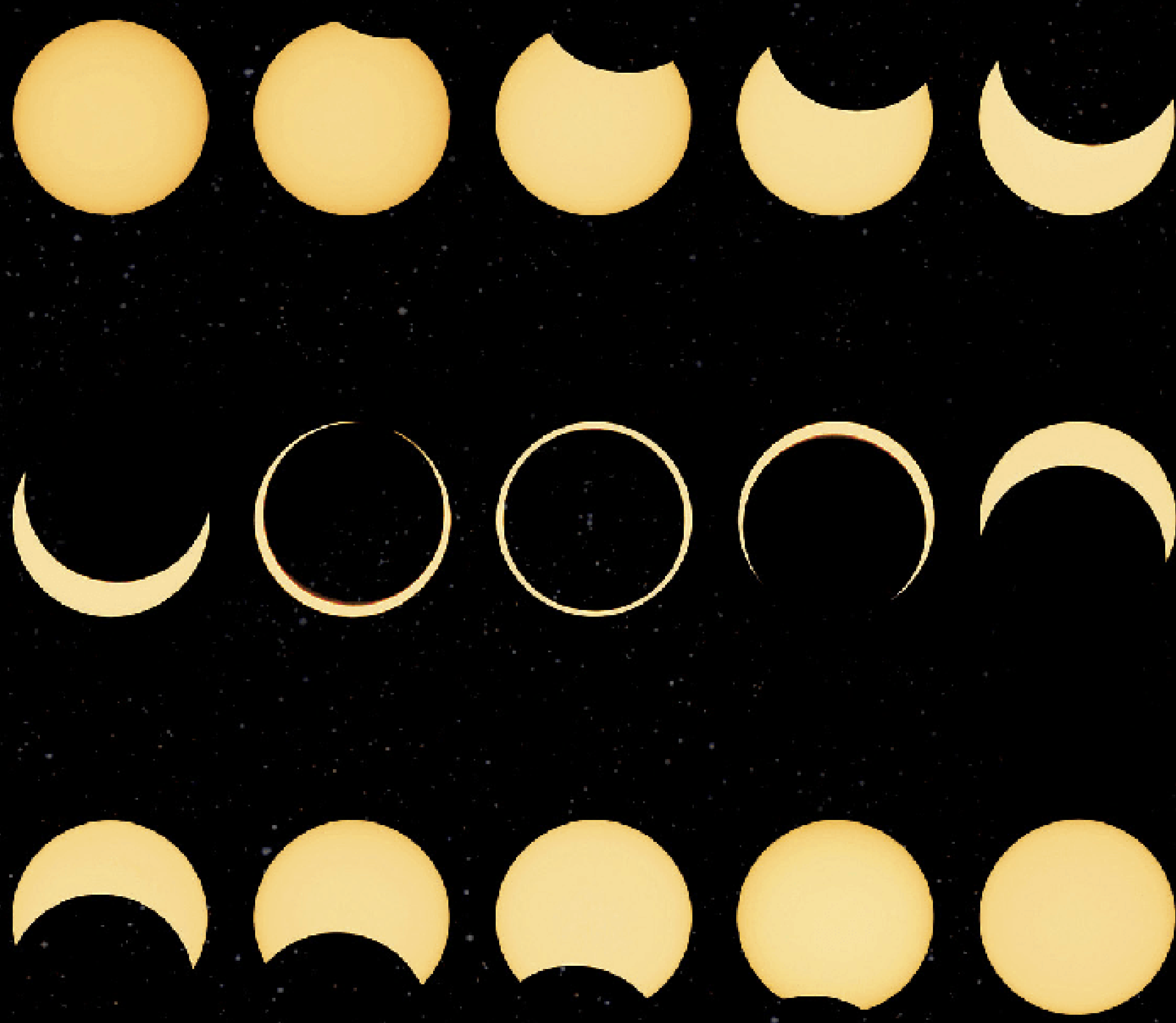
16 De um ponto fora de uma reta traçam-se a esta reta a perpendicular e duas oblíquas que medem 7 m e 5 m, respectivamente. Calcular a distância entre o pé da perpendicular e o da menor oblíqua, sabendo que os pés das oblíquas distam 4 m.

17 O raio do círculo circunscrito a um triângulo ABC é R, o circuncentro é O e o baricentro é G. Demonstrar que a distância do circuncentro ao baricentro é dada pela fórmula: $\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

11

FRENTE 3

Circunferência e círculo



ANTONIO CEREZO, PABLO ALEXANDRE, JESÚS MERCHÁN Y DAVID MARSÁN/WIKIMEDIA COMMONS

O espetáculo dos eclipses

Na foto, temos imagens obtidas durante o eclipse solar de 3 de outubro de 2005 em Portugal. Observe que a natureza está nos dando uma aula de círculos!

Diferença entre circunferência e círculo

Circunferência

É o lugar geométrico dos pontos do plano α, tal que a distância desses pontos a um ponto dado é constante. Observe a figura 1.

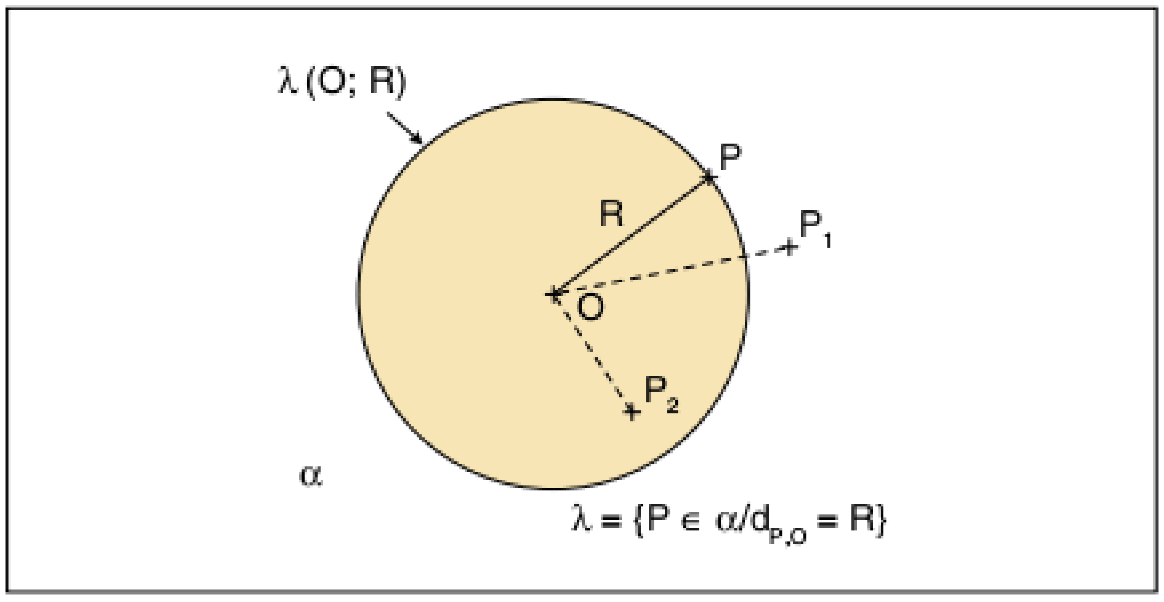


Fig. 1 Circunferência.

O ponto dado é o centro da circunferência, e a distância constante é o raio (R). Assim:

Se $P \in \lambda(O; R)$, então $d_{P;O} = \mathbb{R}$

Se P_2 é **interior**, então $d_{P_2;O} < \mathbb{R}$

Se P_1 é **exterior**, então $d_{P_1;O} > \mathbb{R}$

Círculo

É o lugar geométrico dos pontos do plano α, tal que a distância desses pontos a um ponto dado é menor ou igual a uma constante. Observe a figura 2.

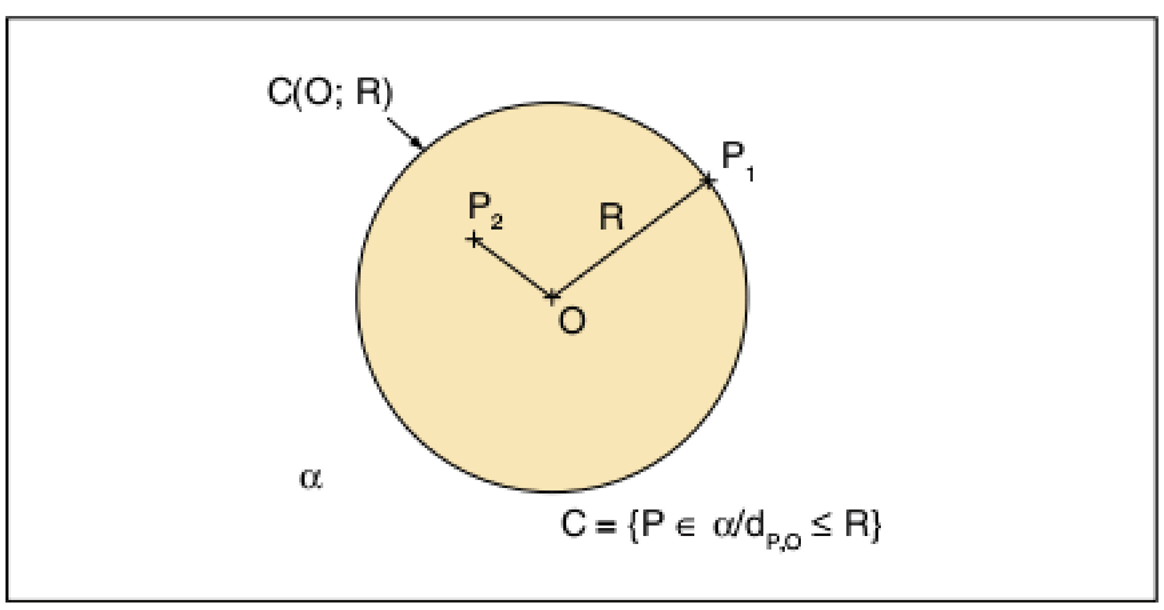


Fig. 2 Círculo.

P_1 e P_2 pertencem ao círculo, pois: $d_{P_2;O} < R$ e $d_{P_1;O} = \mathbb{R}$

Elementos do círculo

Analisando elementos do círculo, estaremos também definindo elementos da circunferência.

Observe a figura 3:

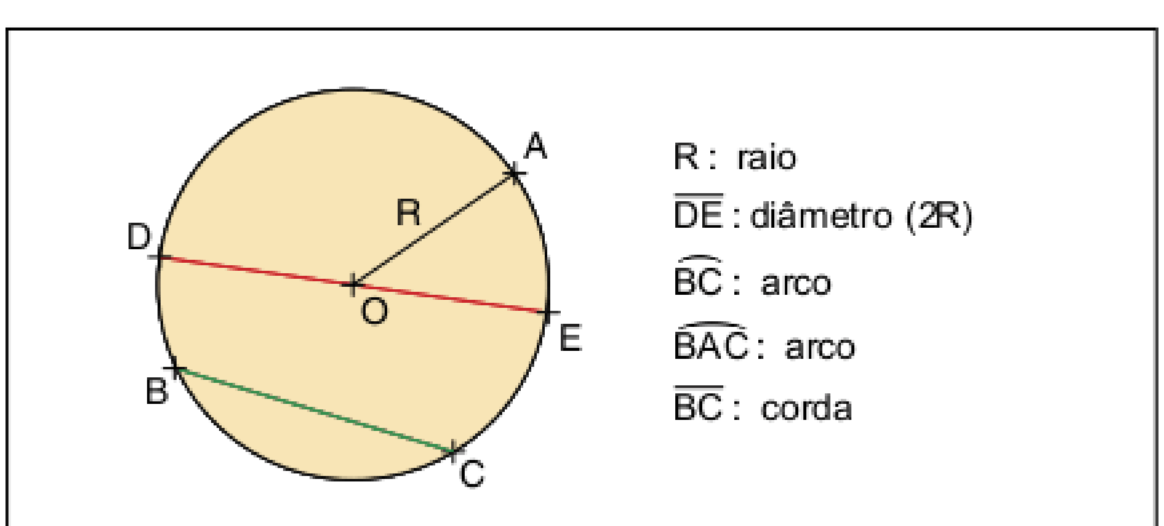


Fig. 3 Elementos básicos do círculo.

ATENÇÃO!

Uma circunferência de centro O e raio R pode ser representada por λ (O; R).

O círculo também é conhecido como disco.

$d_{P;O}$ significa a distância do ponto P ao ponto O.

Um círculo de centro O e raio R pode ser representado por C(O; R).

Corda

É o segmento que une dois pontos quaisquer da circunferência. A maior corda de um círculo é o diâmetro. Observe a demonstração que é simples e instrutiva.

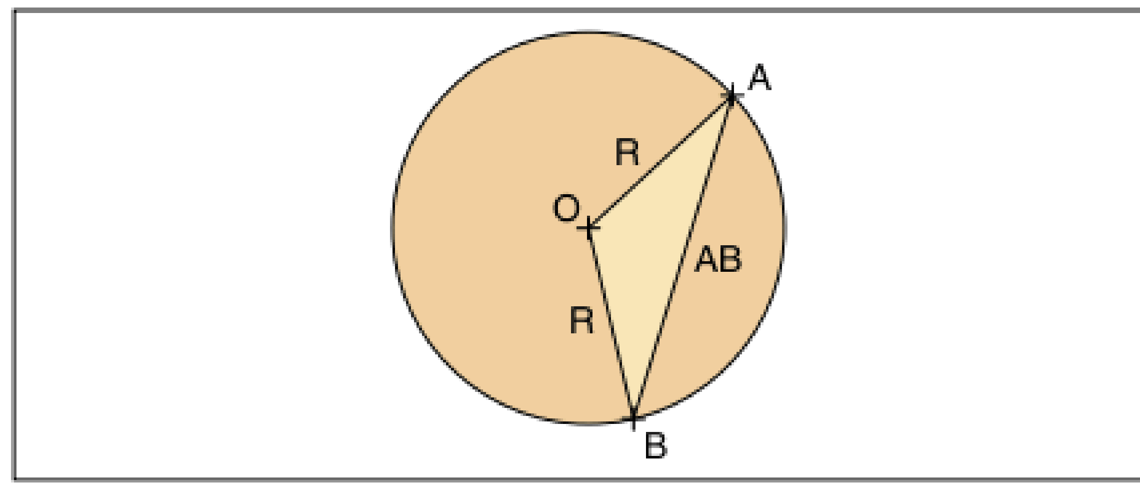


Fig. 4 Corda em uma circunferência.

No ΔABO isósceles, temos por desigualdade triangular $AB < R + R \Rightarrow AB < 2R$. Como o diâmetro vale 2R, ele é a maior corda.

Arco

É uma parte da circunferência delimitada por dois pontos. Para não confundirmos arcos com mesma extremidade, acrescentamos um ponto; de acordo com a figura 3, temos dois arcos: $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BAC}$ (o maior). Na figura 5, observe novos elementos do círculo.

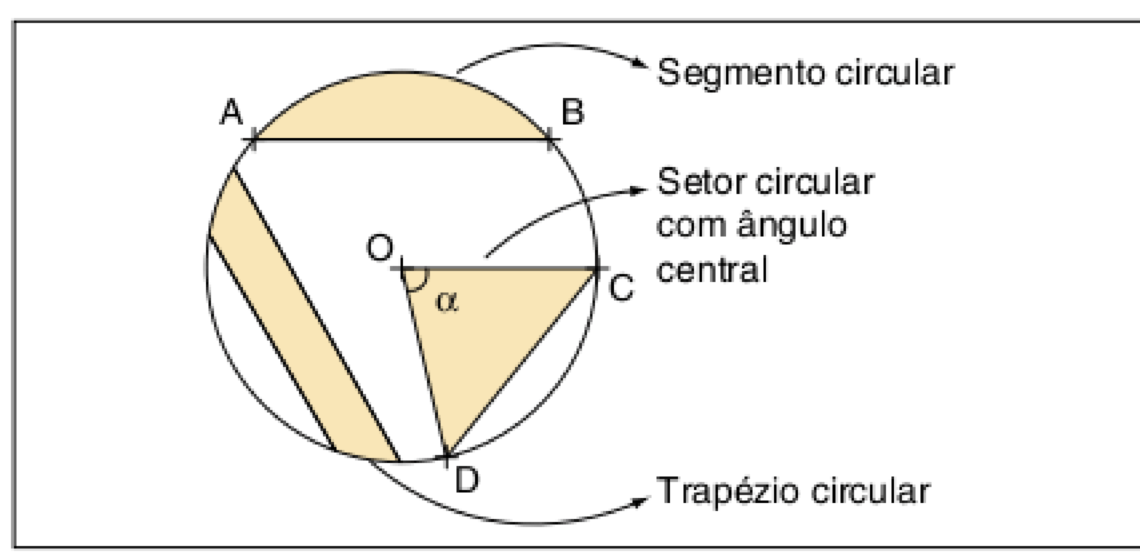


Fig. 5 Outros elementos do círculo.

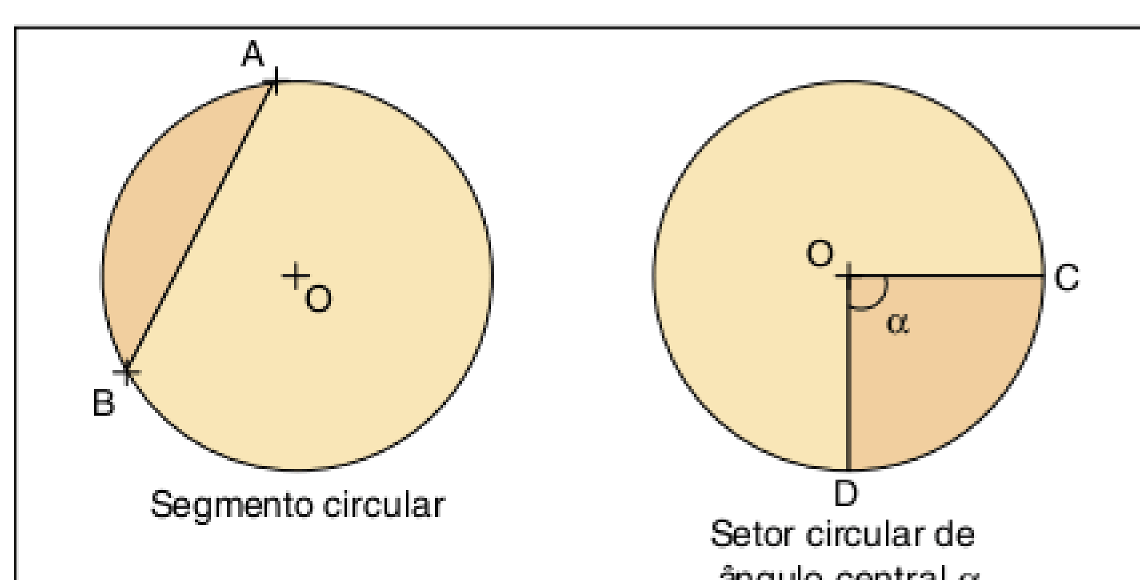


Fig. 6 Segmento e setor circular.

Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

Uma reta r e uma circunferência λ podem estar em três posições relativas:

Exterior

Uma reta r é exterior a uma circunferência λ (ou vice-versa) se $r \cap \lambda = \varnothing$.

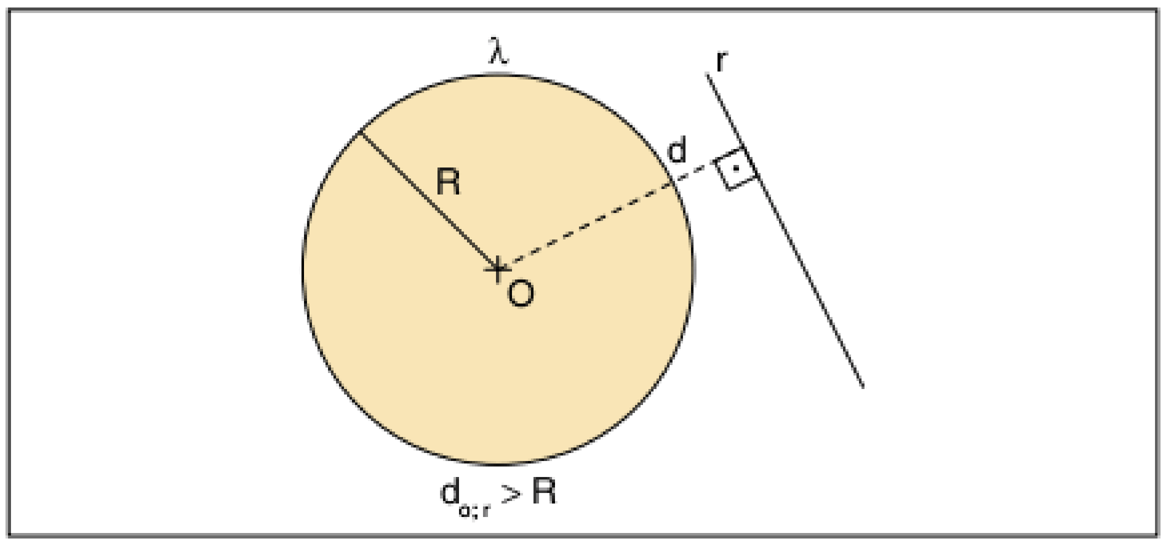


Fig. 7 Reta exterior.

Secantes

Uma reta r é secante a uma circunferência λ (ou vice-versa) se $r \cap \lambda = \{A; B\}$.

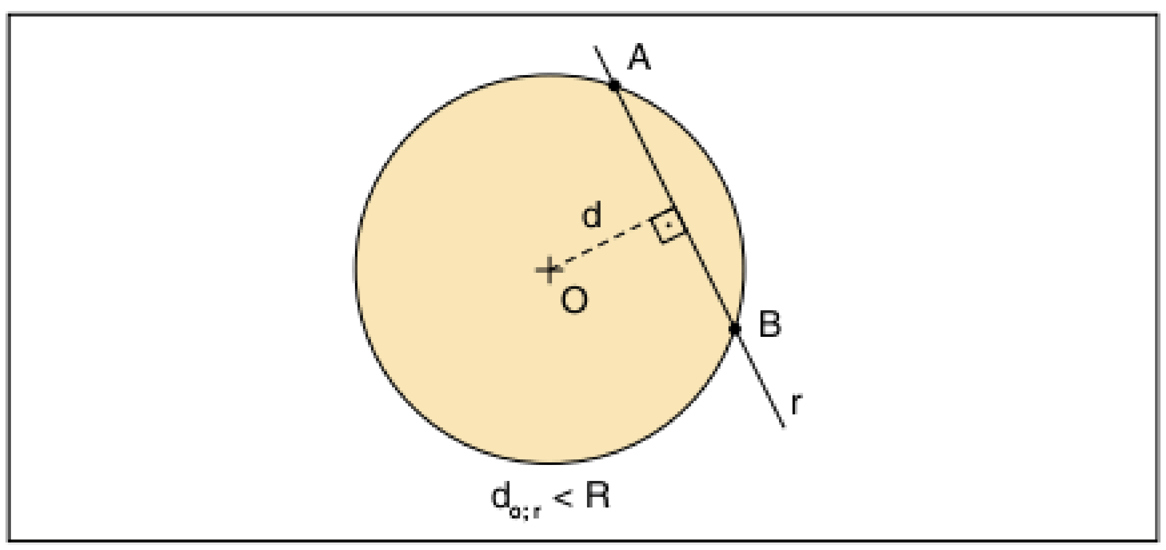


Fig. 8 Reta secante.

Dessa posição relativa, podemos tirar uma propriedade importante:

ATENÇÃO!

Uma reta r secante a uma circunferência λ forma uma corda $\overline{AB}$. A perpendicular traçada de O encontra o ponto médio M de $\overline{AB}$.
Não esqueça! No triângulo isósceles (AB = AC), ângulos da base são iguais. A altura é mediana e bissetriz.

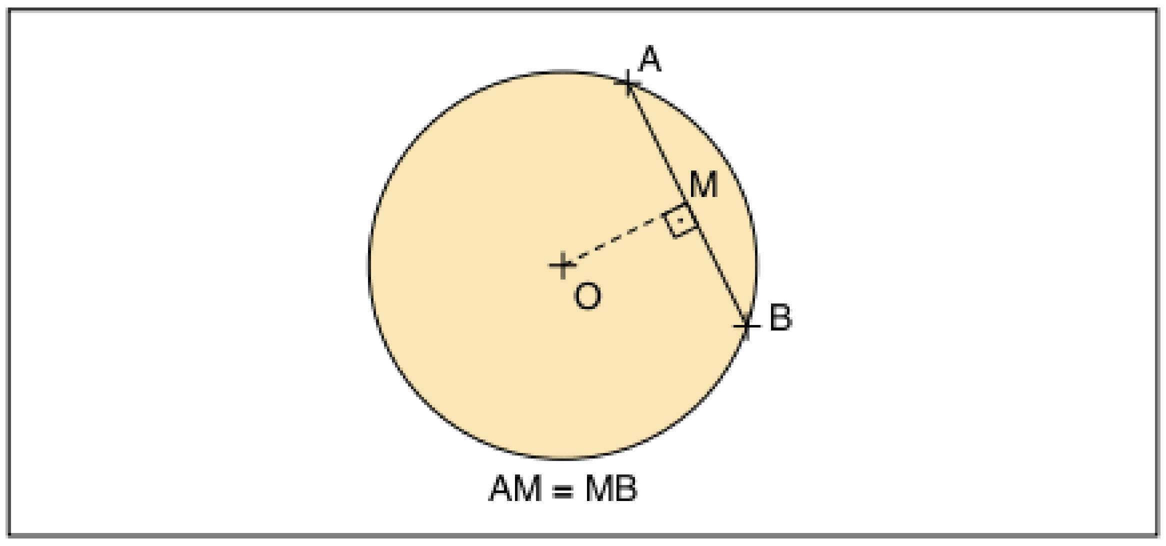


Fig. 9 Ponto médio de uma corda.

A demonstração dessa propriedade é bem simples! O ΔAOB é isósceles, e se $\overline{OM}$ é altura, sabemos também que é mediana; logo, AM = MB.

Tangentes

Uma reta r é tangente a uma circunferência λ (ou vice-versa) se $r \cap \lambda = \{T\}$.

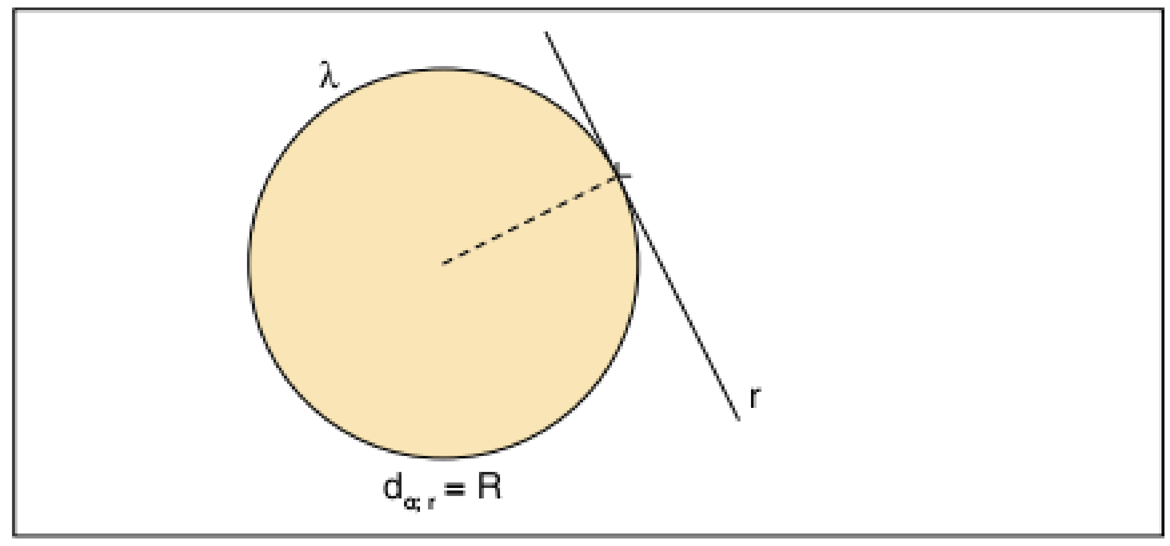


Fig. 10 Reta tangente.

Dessa posição relativa, podemos tirar uma propriedade importante:

O raio $\overline{OT}$ de uma circunferência tangente a uma reta r no ponto T é perpendicular à reta.

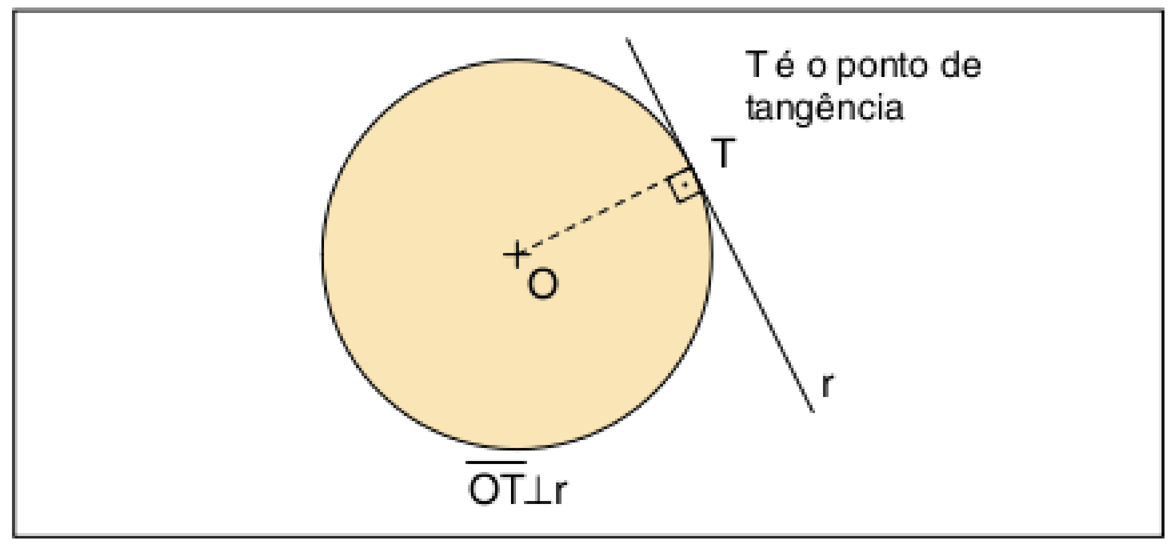


Fig. 11 Ponto de tangência.

A demonstração baseia-se no conceito de distância entre ponto e reta.

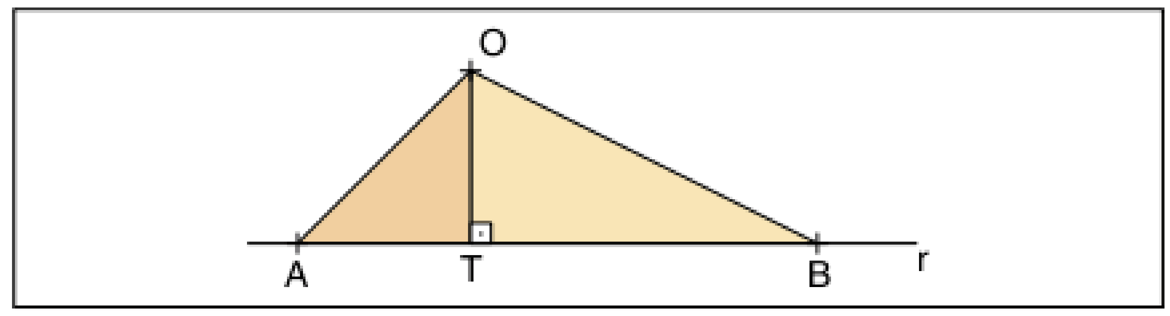


Fig. 12 Distância do ponto à reta.

A menor distância entre O e r é OT. (OB > OA > OT), pois o cateto é sempre menor que a hipotenusa. Voltando ao círculo, temos:

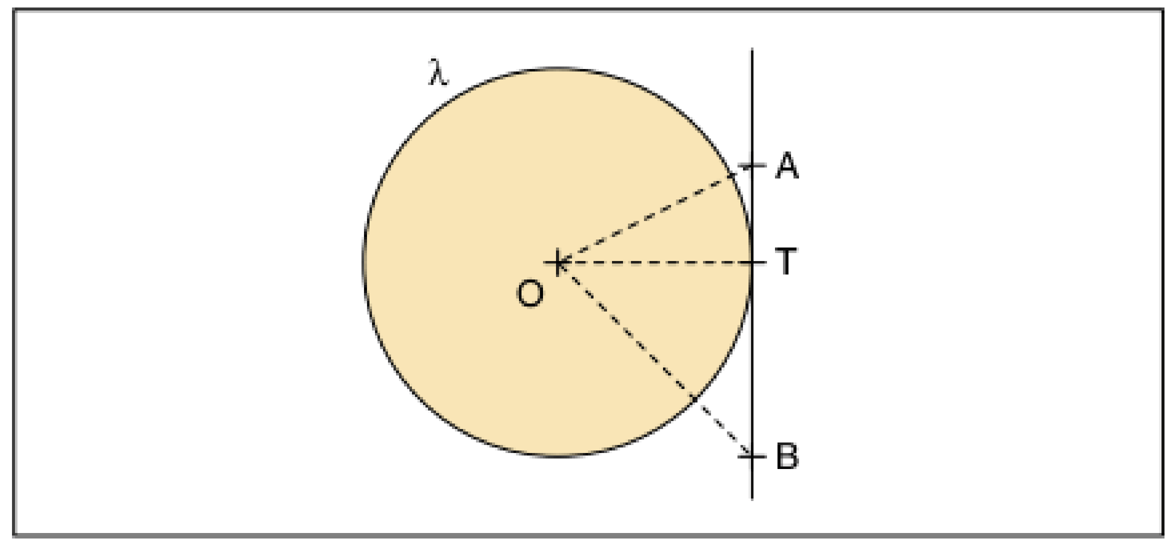


Fig. 13 Distância entre O e r.

$T \in \lambda$; então, $OT = R$. Quaisquer outros pontos de r (A; B...) são exteriores de λ; logo, $OA > R$, $OB > R$...

Assim, OT é a menor distância, por isso é perpendicular.

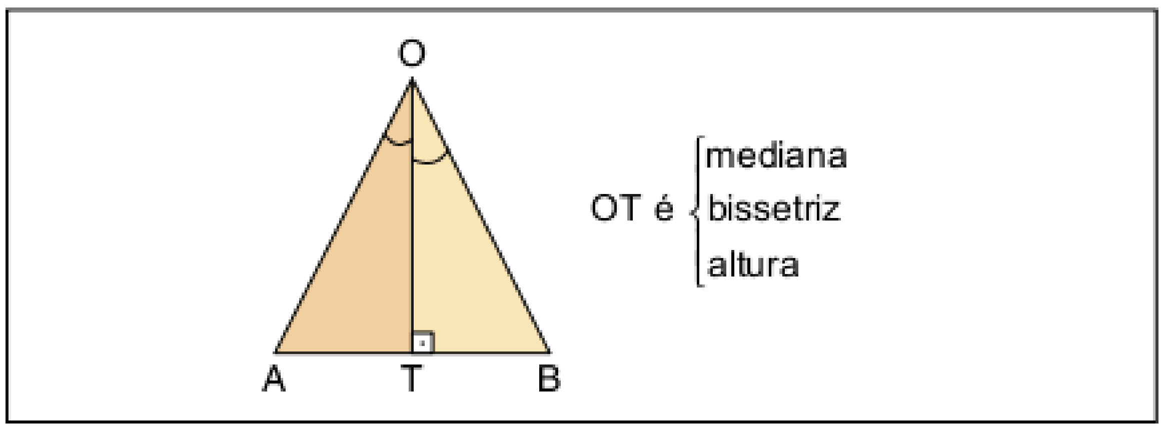


Fig. 14 Segmento OT.

Posições relativas entre círculos

Considere dois círculos $C_1(O_1; R_1)$ e $C_2(O_2; R_2)$, tal que $R_1 > R_2$. Os círculos podem ter as seguintes posições.

Exteriores

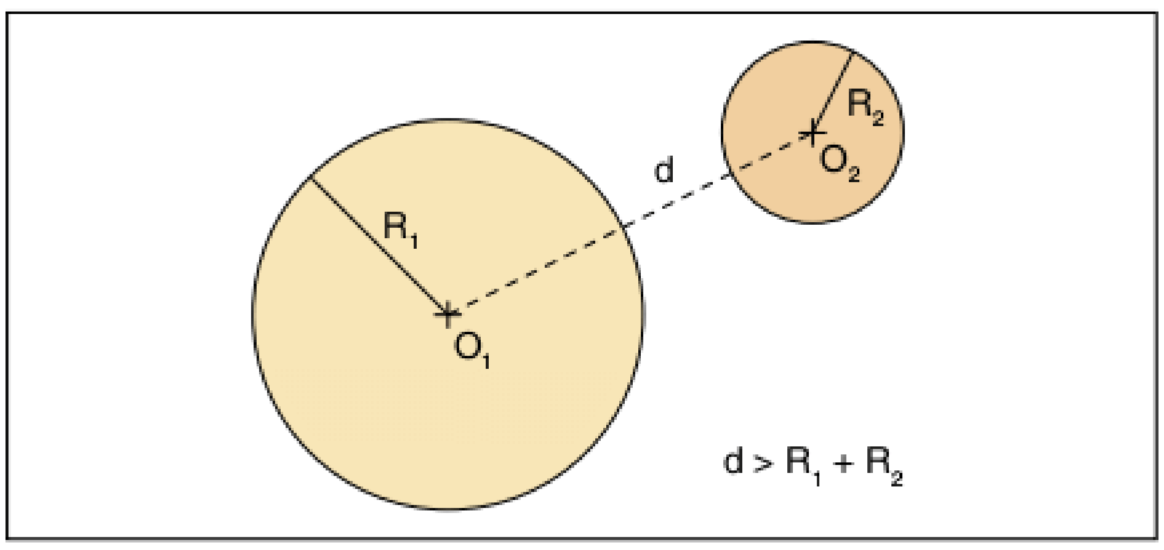


Fig. 15 Círculos exteriores.

Tangentes externos

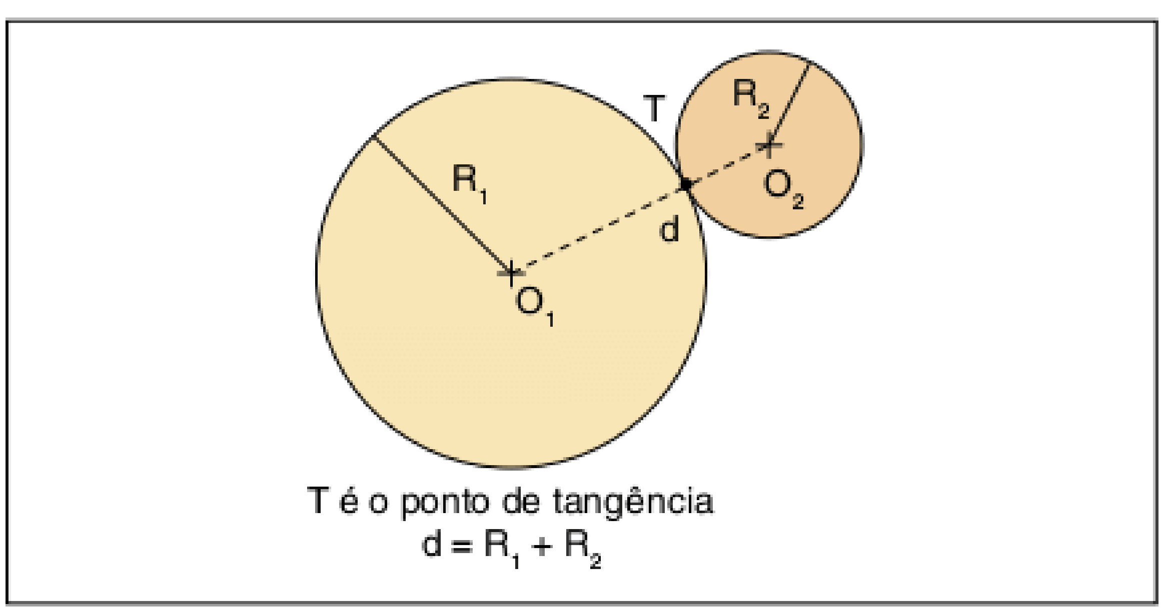


Fig. 16 Círculos tangentes externamente.

Secantes

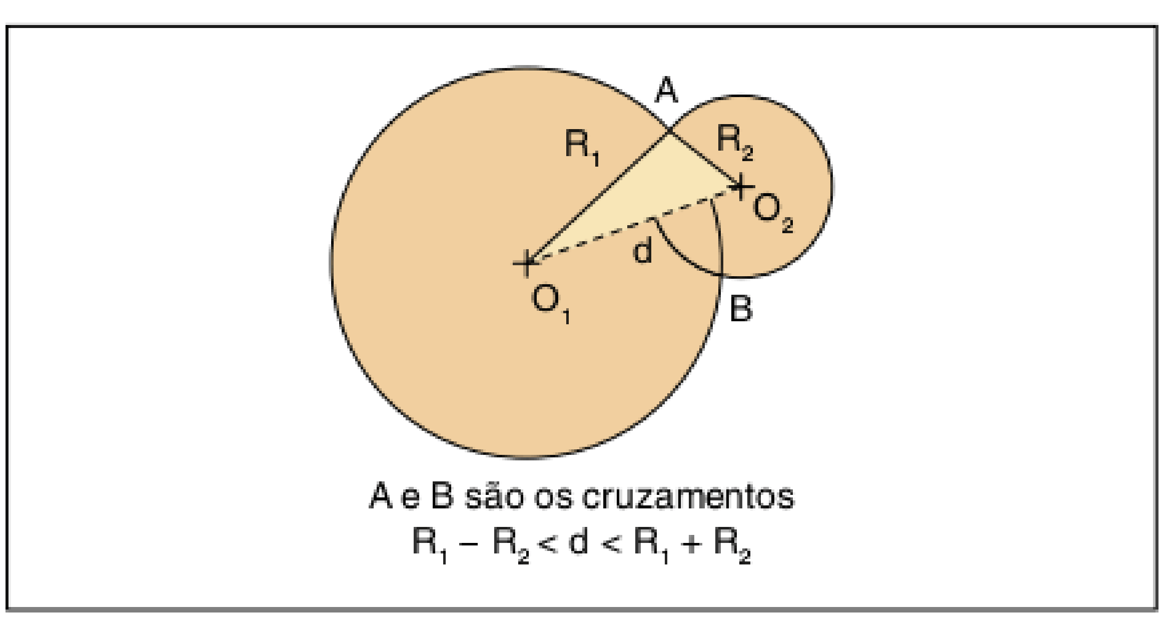


Fig. 17 Círculos secantes.

Tangentes internos

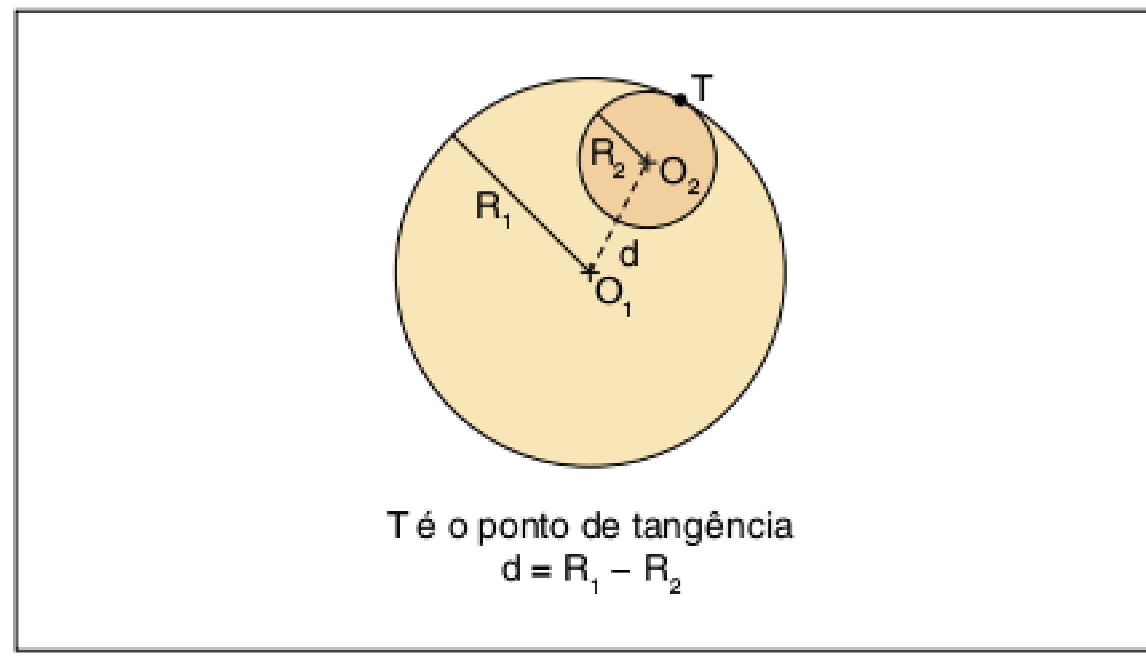


Fig. 18 Círculos tangentes internamente.

Interiores

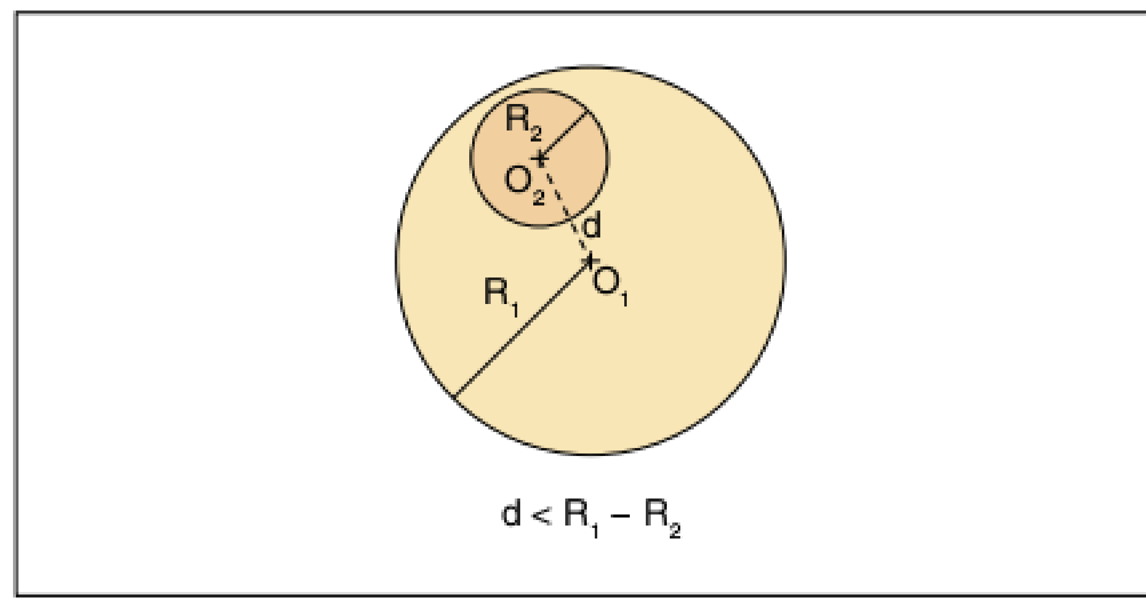


Fig. 19 Círculos interiores.

Concêntricos

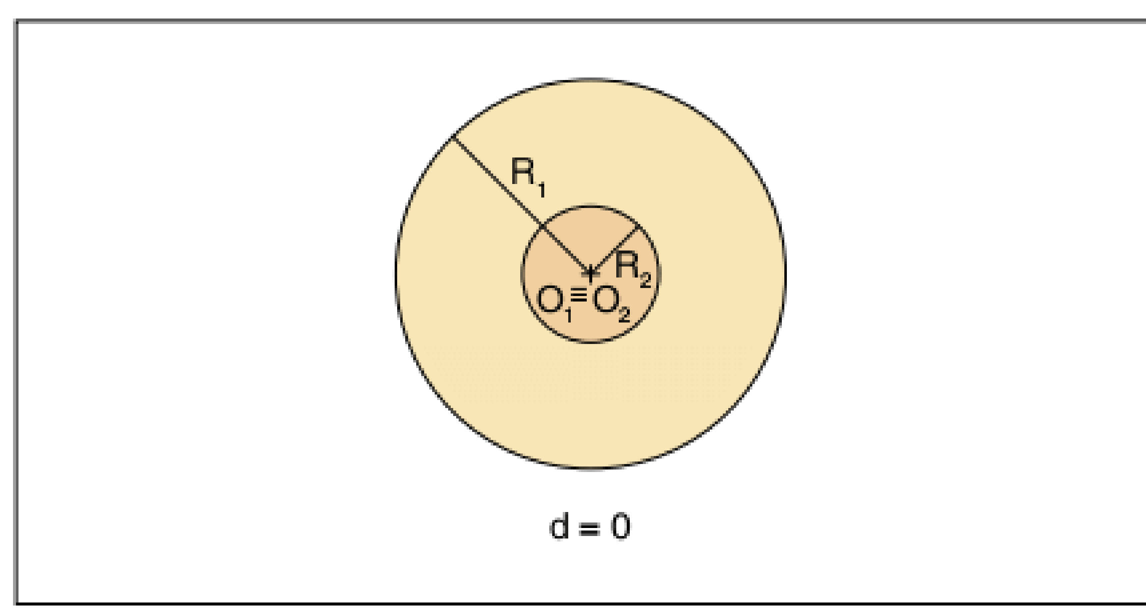


Fig. 20 Círculos concêntricos.

Podemos resumir esses seis casos de uma maneira prática e eficiente. Considere a reta real representando a distância d entre os círculos de raios R_1 e R_2 ($R_1 > R_2$).

$d \in \,]R_1 + R_2; +\infty[\; \Leftrightarrow$ círculos exteriores
$d = R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ tangentes externamente
$d \in \,]R_1 - R_2; R_1 + R_2[\; \Leftrightarrow$ círculos secantes
$d = R_1 - R_2 \Leftrightarrow$ tangentes internamente
$d \in \,]0; R_1 - R_2[\; \Leftrightarrow$ círculos interiores
$d = 0 \Leftrightarrow$ círculos concêntricos

Exercício resolvido

1 Considere dois círculos de raios 15 cm e 7 cm. Monte uma tabela indicando todas as posições possíveis entre eles, em função da distância d entre seus centros.

Resolução:

Fazendo $R_1 = 15$ cm e $R_2 = 7$ cm, temos:

d > 22	*círculos exteriores*
d = 22	*tangentes externos*
8 < d < 22	*secantes*
d = 8	*tangentes internos*
0 < d < 8	*círculos interiores*
d = 0	*concêntricos*

Tangentes comuns a dois círculos

Vamos agora traçar retas tangentes simultaneamente a dois círculos.

Círculos exteriores

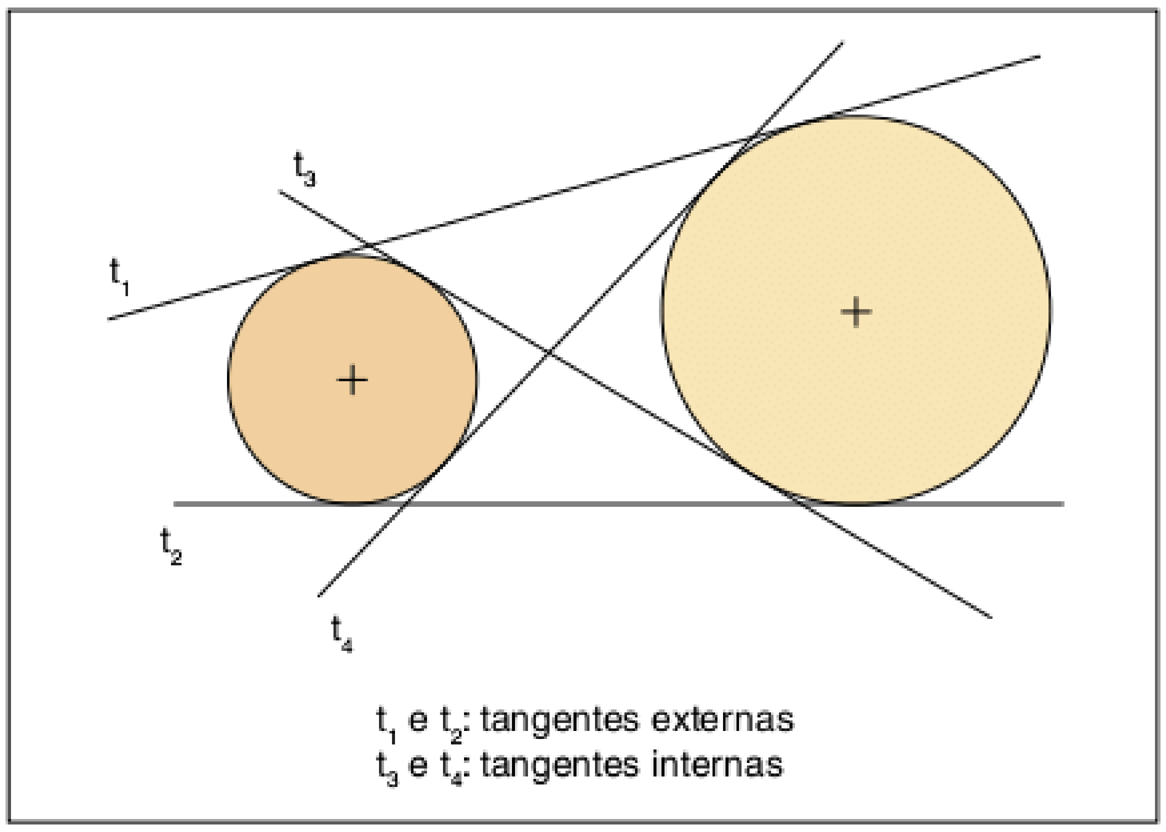


Fig. 21 Retas tangentes comuns externas.

Círculos tangentes externamente

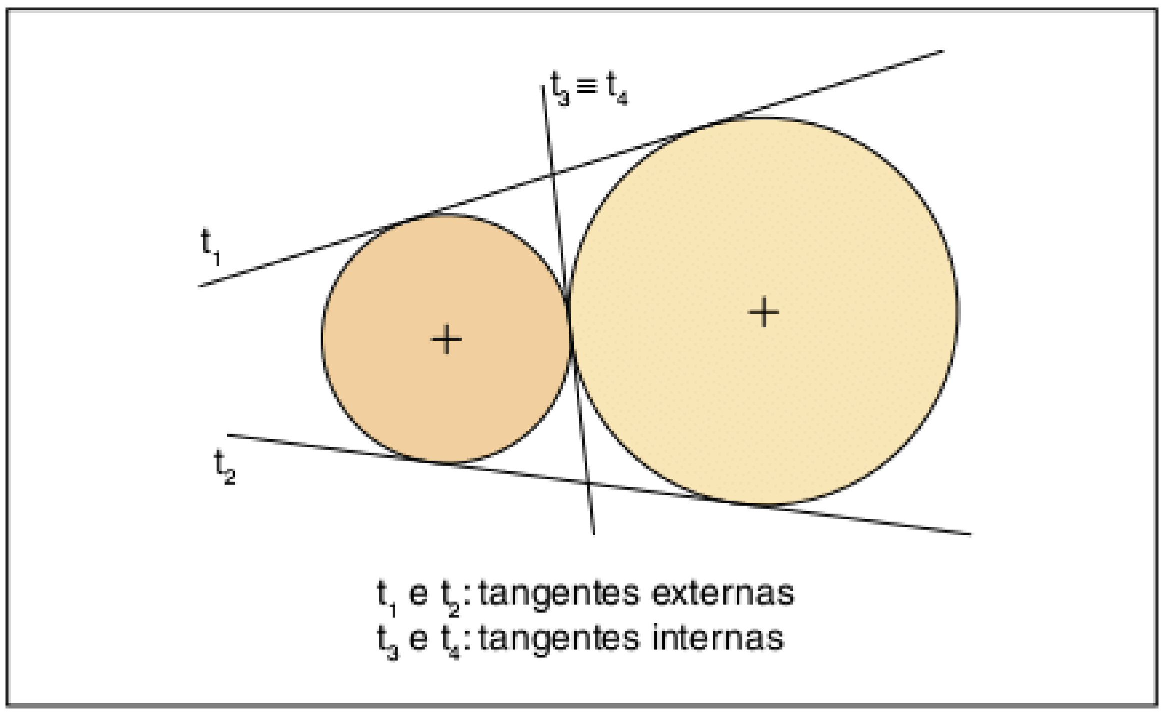


Fig. 22 Retas tangentes comuns internas.

Círculos secantes

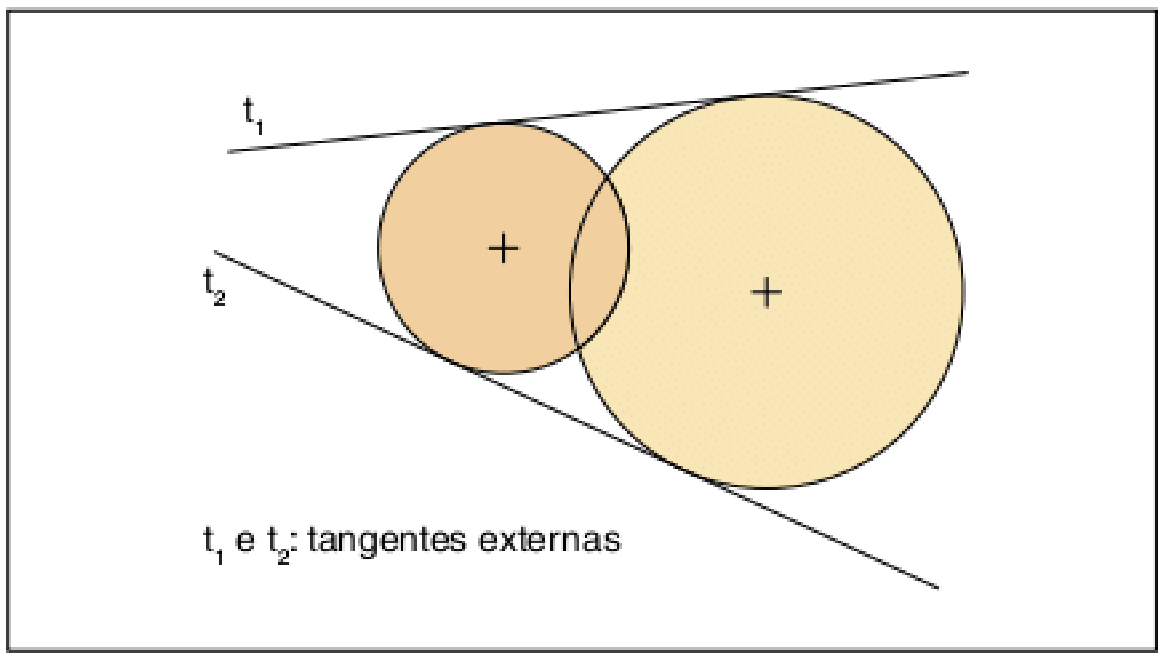


Fig. 23 Retas tangentes em círculos secantes.

Círculos tangentes internamente

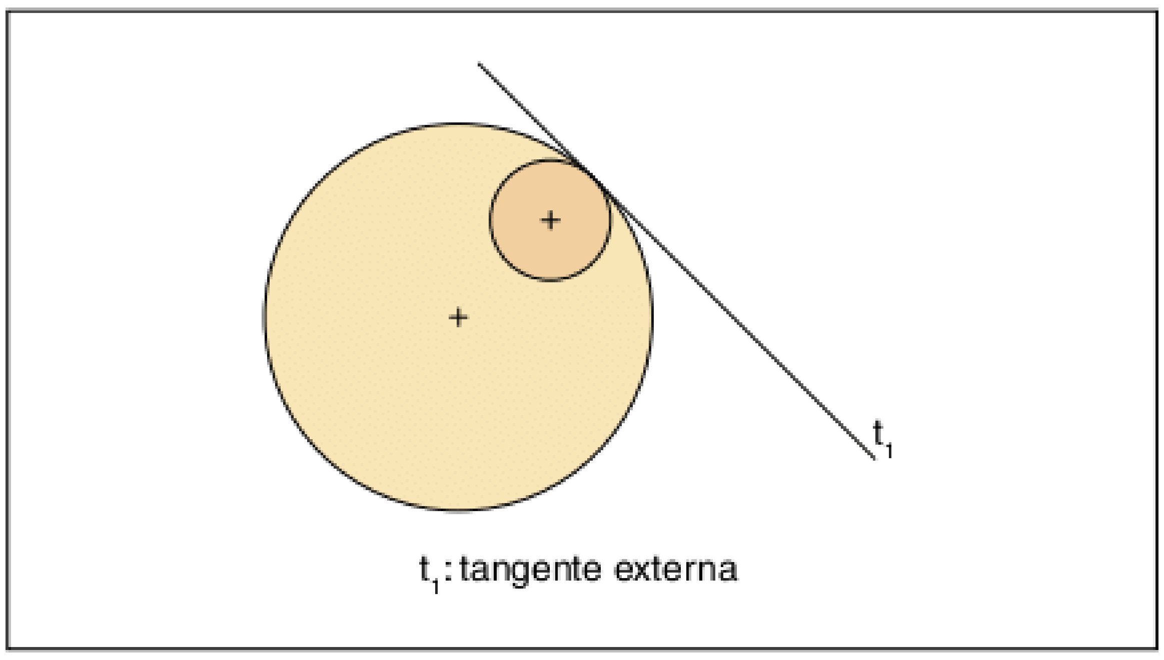


Fig. 24 Reta tangente em círculos tangentes internamente.

Segmentos tangentes a um círculo

Considere um ponto P exterior a um círculo e t_1 e t_2 as tangentes traçadas por P:

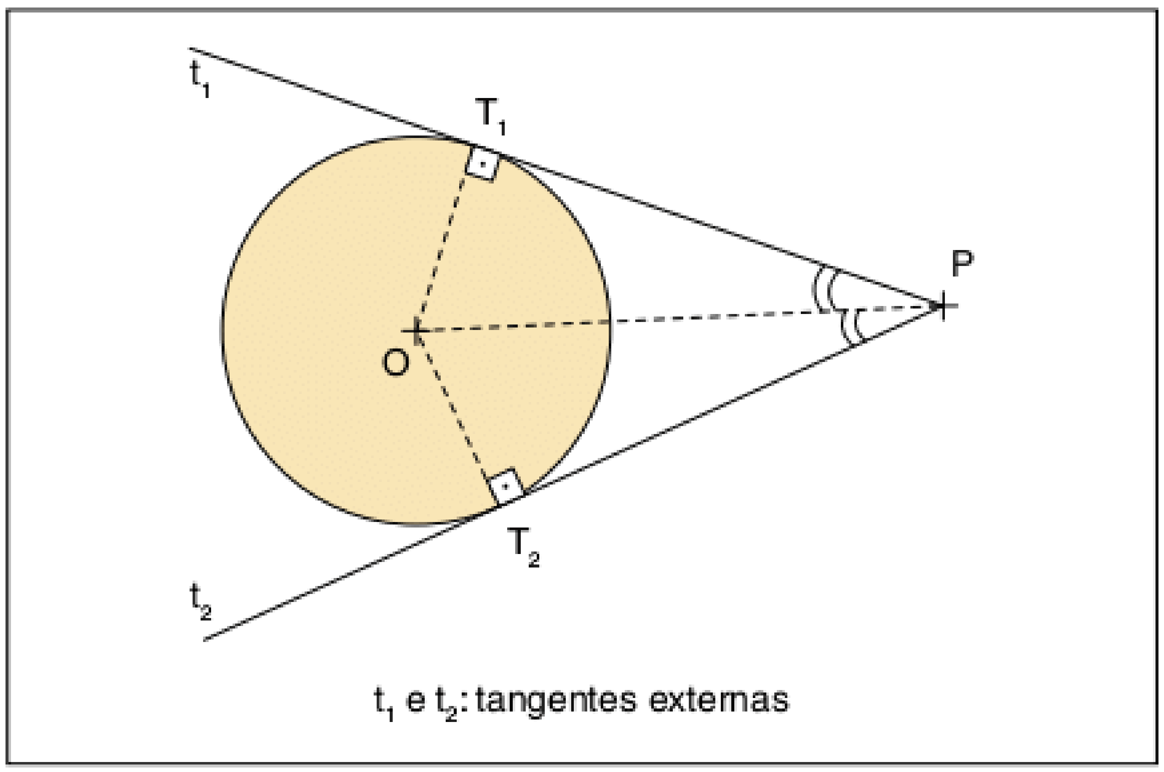


Fig. 25 Segmentos tangentes.

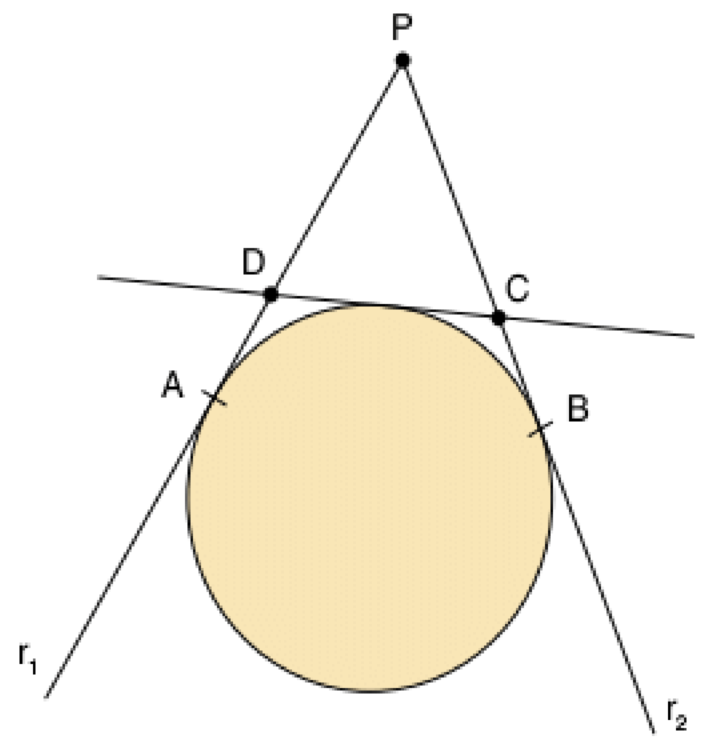
Propriedade!

$$PT_1 = PT_2 \text{ e } T_1\hat{P}O = T_2\hat{P}O$$

A demonstração dessas propriedades importantíssimas é bem simples. Os $\Delta POT_1 \approx \Delta POT_2$ (caso especial); assim, $PT_1 = PT_2$ e $T_1\hat{P}O = T_2\hat{P}O$.

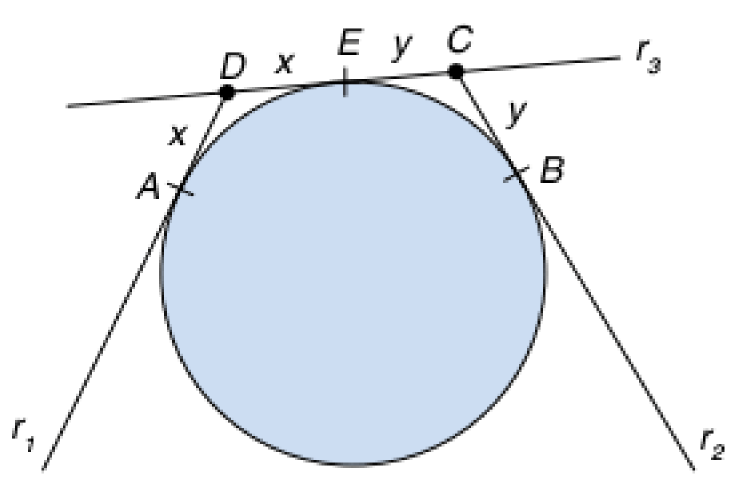
Exercícios resolvidos

2 Na figura, temos 3 retas tangentes ao círculo e PA = 10 cm. Calcule o perímetro do ΔPCD.



Resolução:

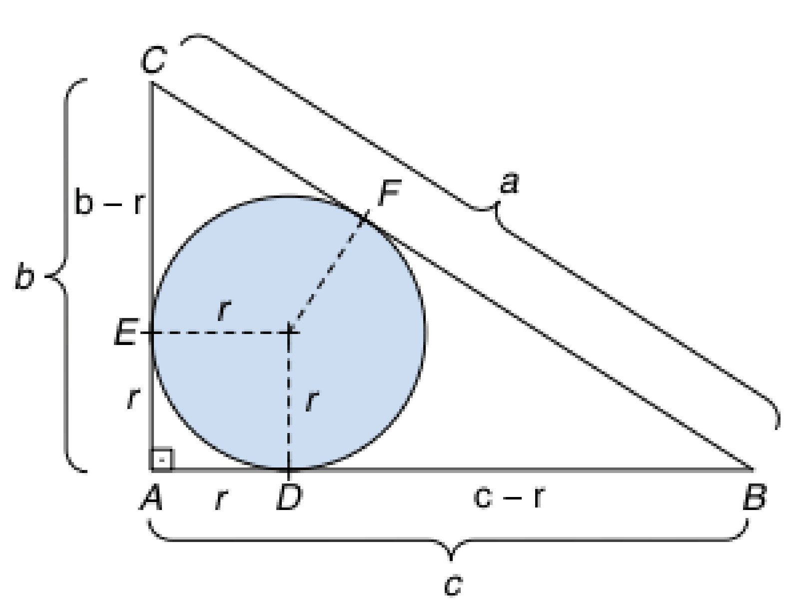
Pela propriedade, temos PA = PB e também
DA = DE = x e CE = CB = y.



Assim, PD = 10 – x, PC = 10 – y e CD = x + y.
O perímetro do ΔPCD é a soma de seus lados, assim;
$2p = PD + PC + CD \therefore 2p = (10 - x) + (10 - y) + (x + y) = 20\ cm$

3 Calcular o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos b e c hipotenusa a.

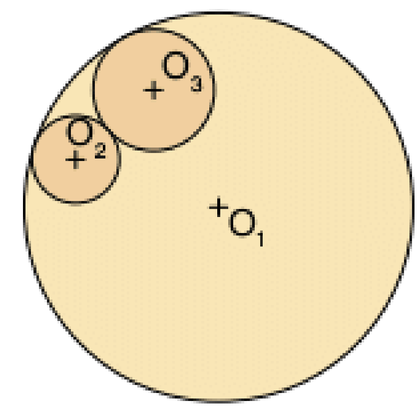
Resolução:



Pela propriedade dos segmentos tangentes, temos:
CE = CF = b – r e BD = BF = c – r, então:

$$(b - r) + (c - r) = a \Rightarrow b + c - a = 2r \therefore r = \frac{b + c - a}{2}$$

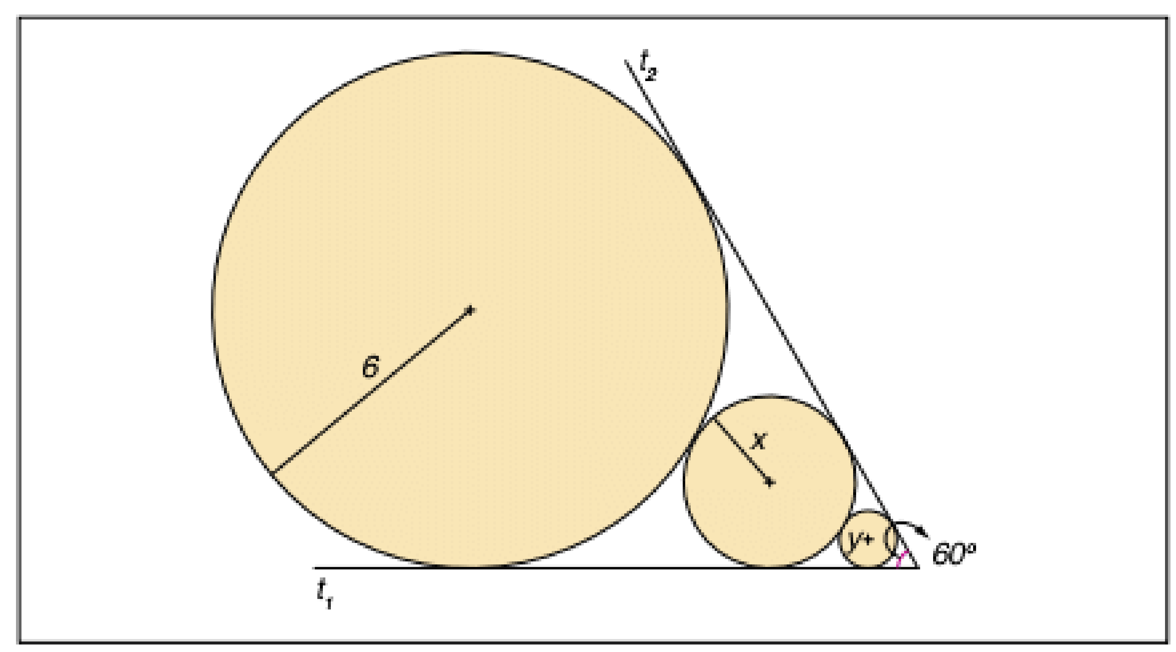
4 Na figura abaixo, temos círculos tangentes internamente e externamente, de raios r_1 = 10 cm, r_2 = 3 cm e r_3 = 2 cm. Calcule o perímetro do $\Delta O_1O_2O_3$.



Resolução:

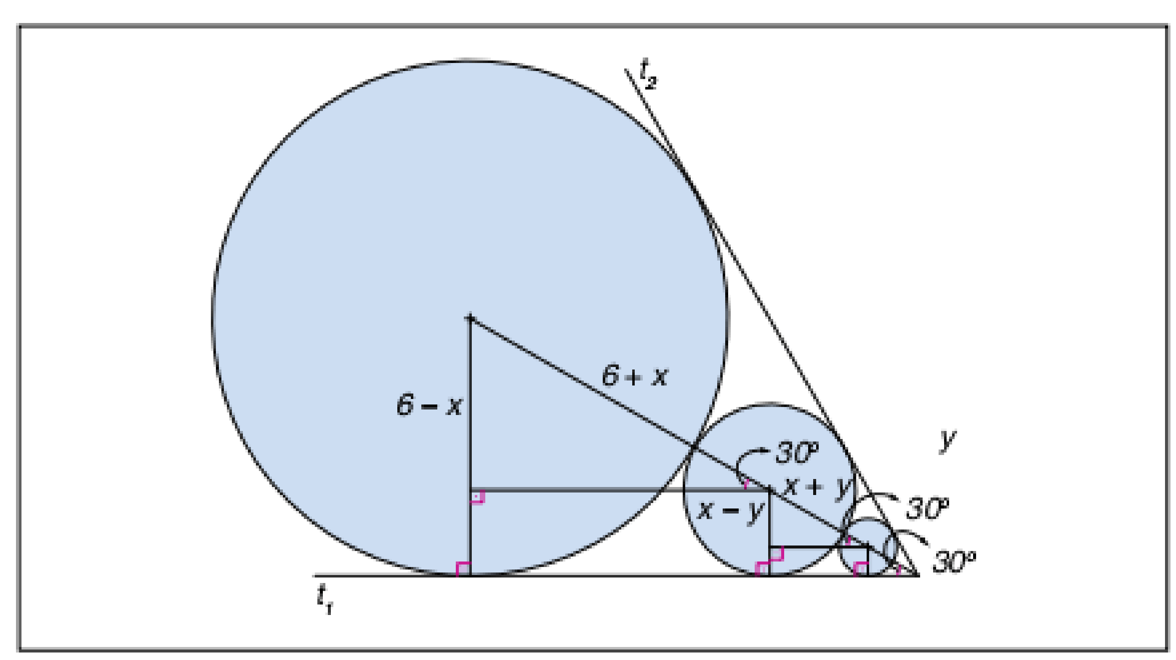
Unindo os centros, temos:
$O_2O_3 = r_2 + r_3$, $O_1O_2 = r_1 - r_2$ e $O_1O_3 = r_1 - r_3$, assim: $O_2O_3 = 3 + 2 = 5$ cm, $O_1O_2 = 10 - 3 = 7$ cm e $O_1O_3 = 10 - 2 = 8$ cm e $2p = 5 + 7 + 8 = 20$ cm

5 Na figura abaixo, as circunferências são tangentes. Determine a soma dos diâmetros das circunferências.



Resolução:

Os procedimentos para a resolução de um problema de tangência é unir os centros e traçar os raios perpendiculares a t_1 e t_2.

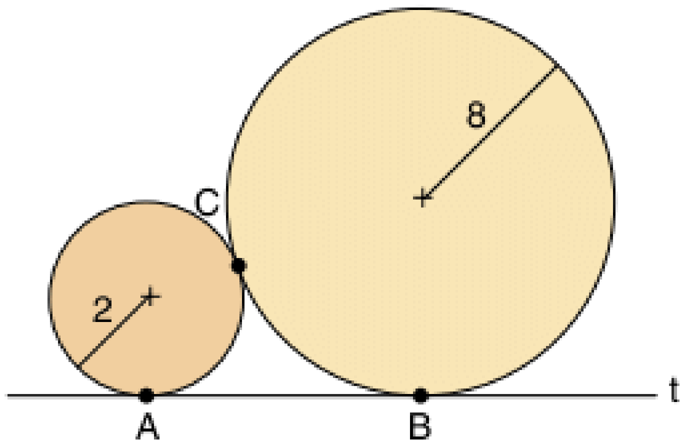


$$sen30^o = \frac{6-x}{6+x} \therefore \frac{1}{2} = \frac{6-x}{6+x} \therefore 6 + x = 12 - 2x \therefore x = 2$$

$$sen30^o = \frac{x-y}{x+y} \therefore \frac{1}{2} = \frac{2-y}{2+y} \therefore y = \frac{2}{3}$$

Soma dos diâmetros é $12 + 2x + 2y = 12 + 4 + \frac{4}{3} = \frac{52}{3}$

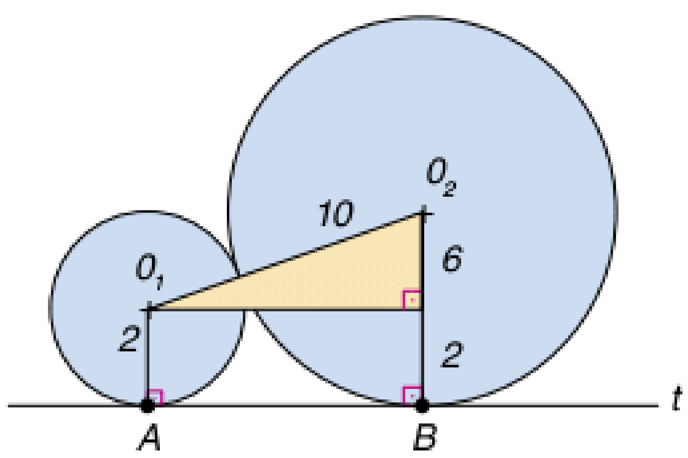
6 As circunferências da figura a seguir possuem raios iguais a 2 cm e 8 cm. Determine a medida do segmento tangente $\overline{AB}$.



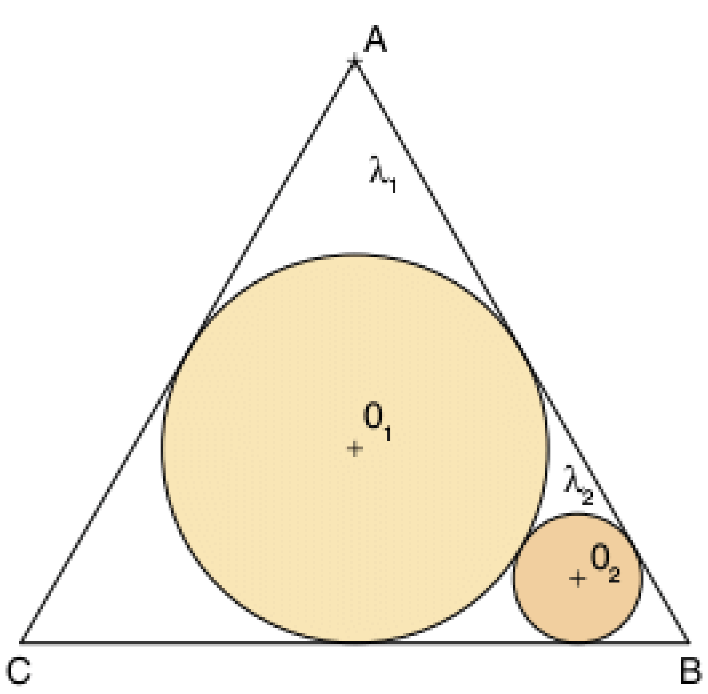
Resolução:

Para resolvermos a questão, observe o trapézio retângulo AO_1O_2B, após utilizarmos todas as propriedades de tangência.

$(10)^2 = (6)^2 + (AB)^2 \therefore AB = 8\ cm$

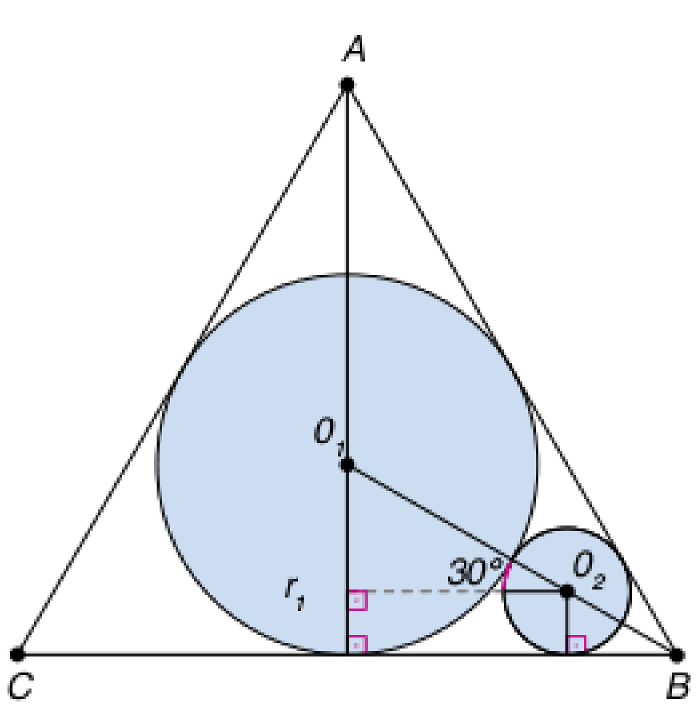


7 O triângulo ABC da figura é equilátero de lado a. Determine, em função de a, o valor dos raios dos círculos λ_1 e λ_2.

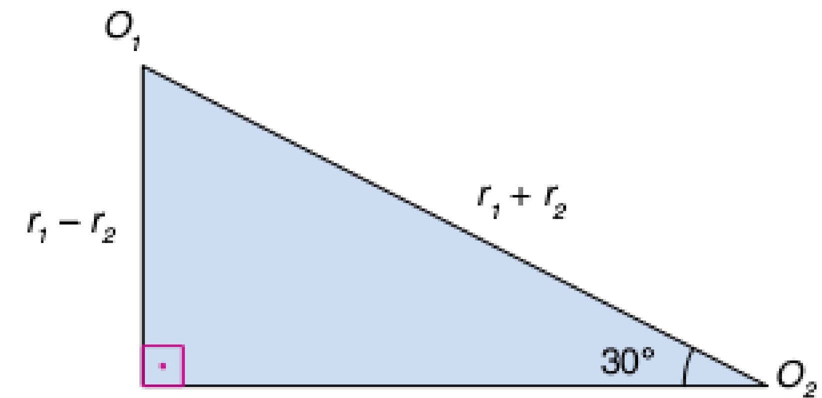


Resolução:

Efetuando as construções básicas de tangência, temos:



Lembrando que no triângulo equilátero O_1 é o baricentro, temos que:



$$r_1 = \frac{1}{3}(altura) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \therefore r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$sen30^o = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \therefore \frac{1}{2} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \therefore r_2 = \frac{1}{3} r_1 \therefore r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{18}$$

Quadrilátero circunscritível

Um quadrilátero está circunscritível a um círculo, quando seus quatro lados são tangentes ao círculo.

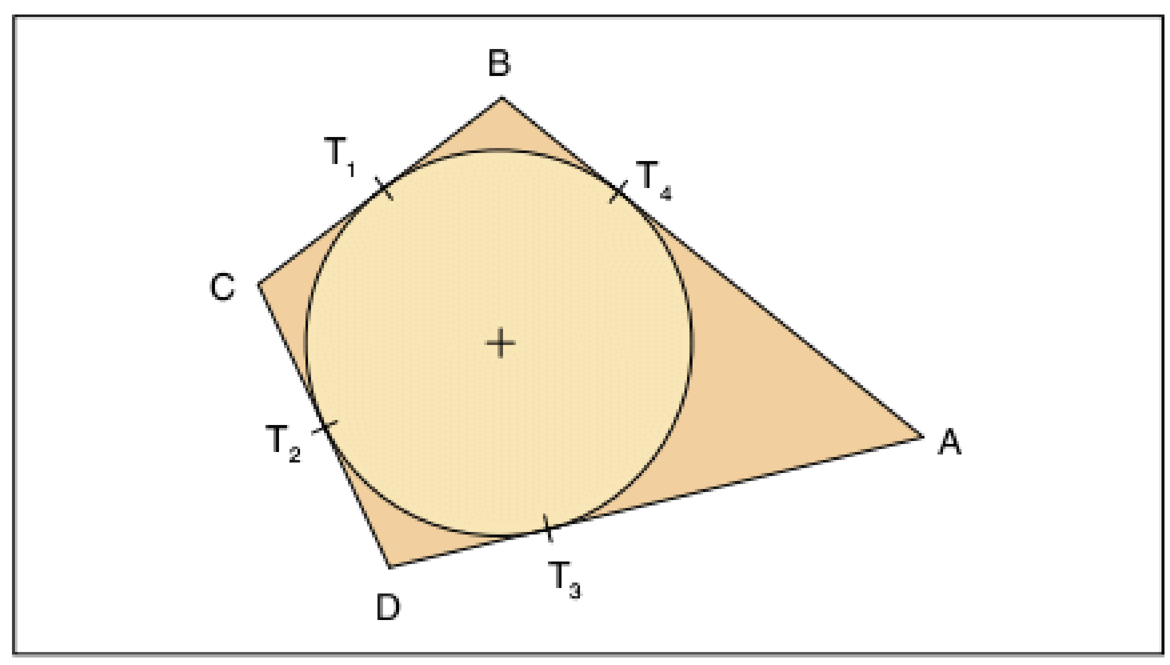


Fig. 26 Quadrilátero circunscritível.

Teorema

A condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja circunscritível é:

$$AB + CD = AD + BC$$

1. (Condição necessária)

Pela propriedade dos segmentos tangentes, temos:

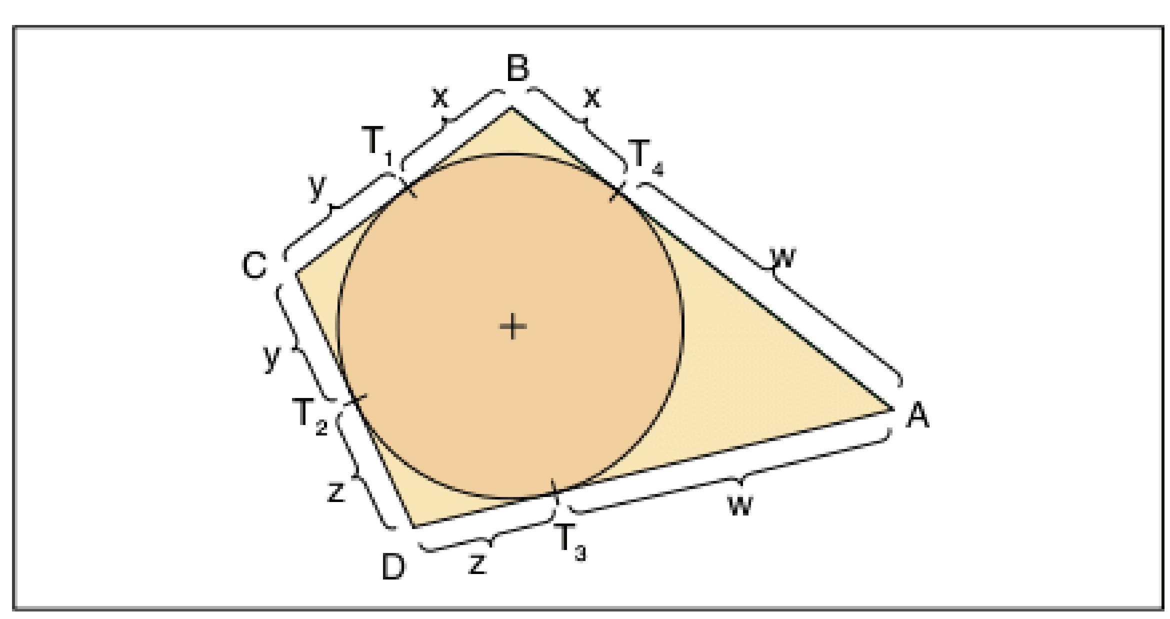


Fig. 27 Quadrilátero circunscritível ABCD.

AB + CD = x + w + y + z e BC + AD = x + y + z + w ⇒ AB + + CD = BC + AD

2. (Condição suficiente)
Se AB + CD = BC + AD, então ABCD é circunscritível.
Considerando ABCD não circunscritível, temos:

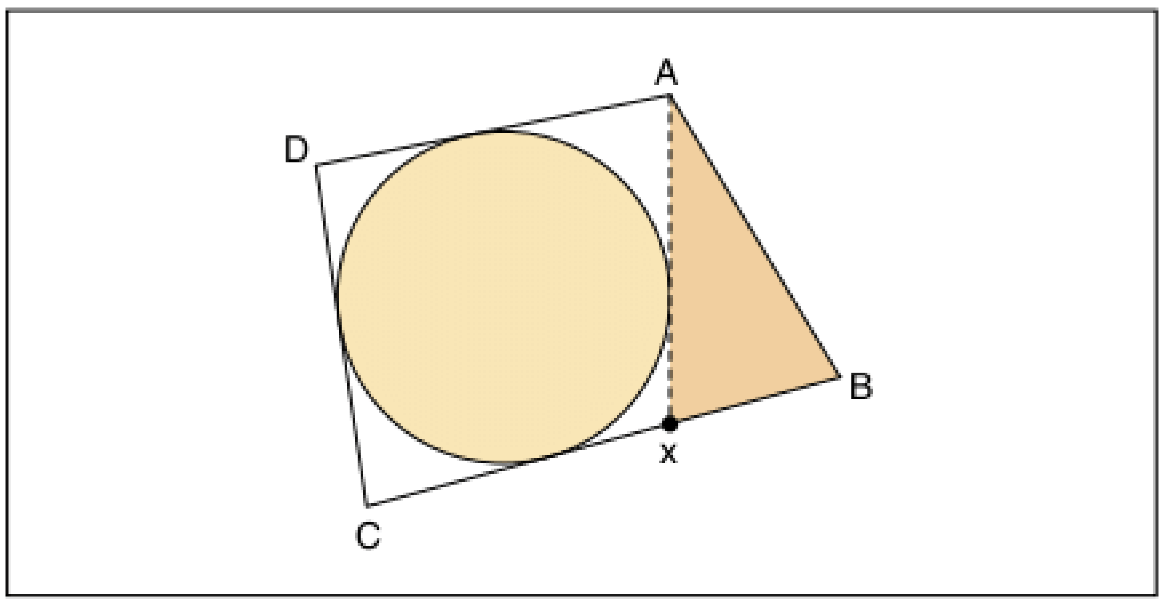
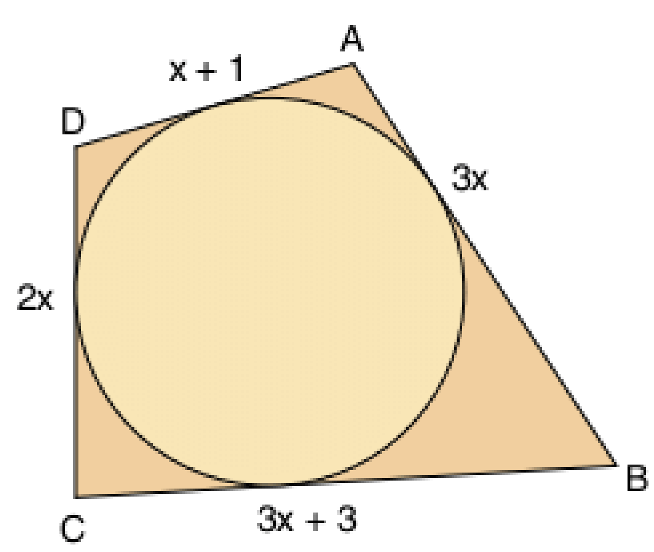


Fig. 28 Demonstração.

Contudo, podemos traçar $\overline{AX}$ tal que AXCD seja circunscritível, assim: AX + CD = AD + XC ⇒ AX + CD = AD + + BC – BX, mas por hipótese AD + BC = AB + CD ⇒ AX + + CD = AB + CD – BX ∴ AX + BX = AB esse resultado é um absurdo, pois pela desigualdade triangular: AX + BX > AB

Exercícios resolvidos

8 Determine o perímetro do quadrilátero ABCD, circunscritível, da figura.



Resolução:
Pelo teorema do quadrilátero circunscritível, temos:
$(3x + 3) + (x + 1) = (3x) + (2x) \therefore 4x + 4 = 5x \Rightarrow x = 4$
O perímetro é $2p = (3x) + (3x + 3) + (x + 1) + (2x) \Rightarrow 2p = 9x + 4 = 9 \cdot 4 + 4 = 40$

9 Determine a medida de um dos lados não paralelos de um trapézio isósceles, circunscrito a um círculo, sabendo que suas bases medem 40 cm e 20 cm.

Resolução:
As bases do trapézio são opostas e os lados não paralelos são iguais a x. Assim: $x + x = 20 + 40 \therefore 2x = 60 \therefore x = 30$ *cm*
Calculando o perímetro, temos:
$2p = 20 + 40 + 30 + 30 = 120$ *cm*

Ângulos no círculo

Ângulo central

Vamos coincidir o vértice de um ângulo com o centro de um círculo. Os lados do ângulo vão formar um arco na circunferência.

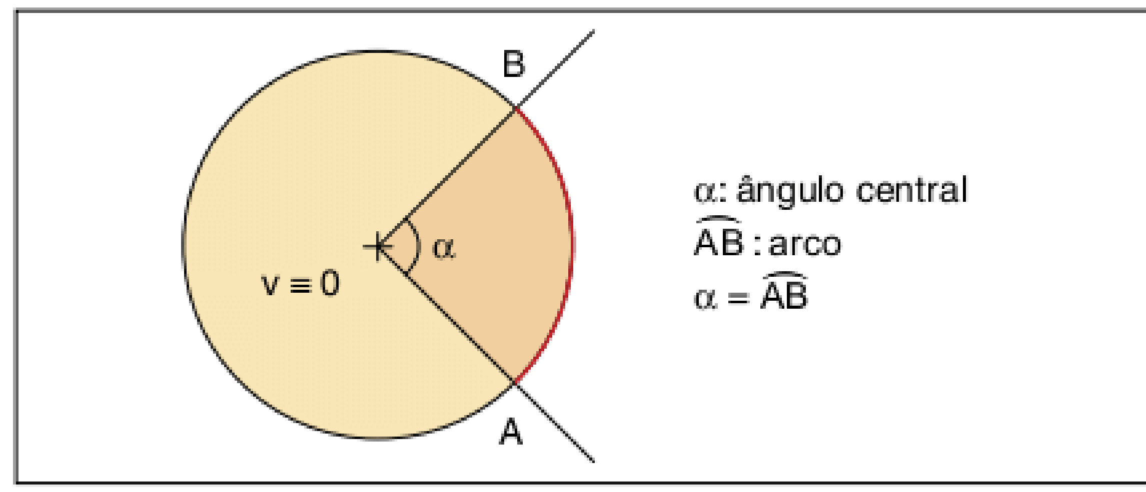


Fig. 29 Ângulo central.

Por definição: $\alpha = \overset{\frown}{AB}$

Ângulo inscrito

O vértice do ângulo inscrito pertence à circunferência.

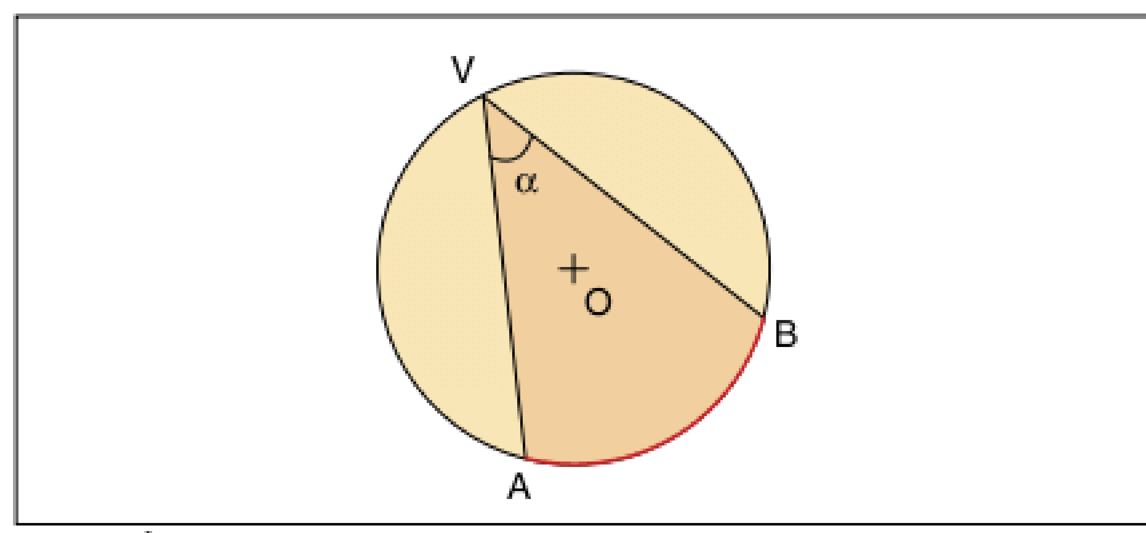


Fig. 30 Ângulo inscrito.

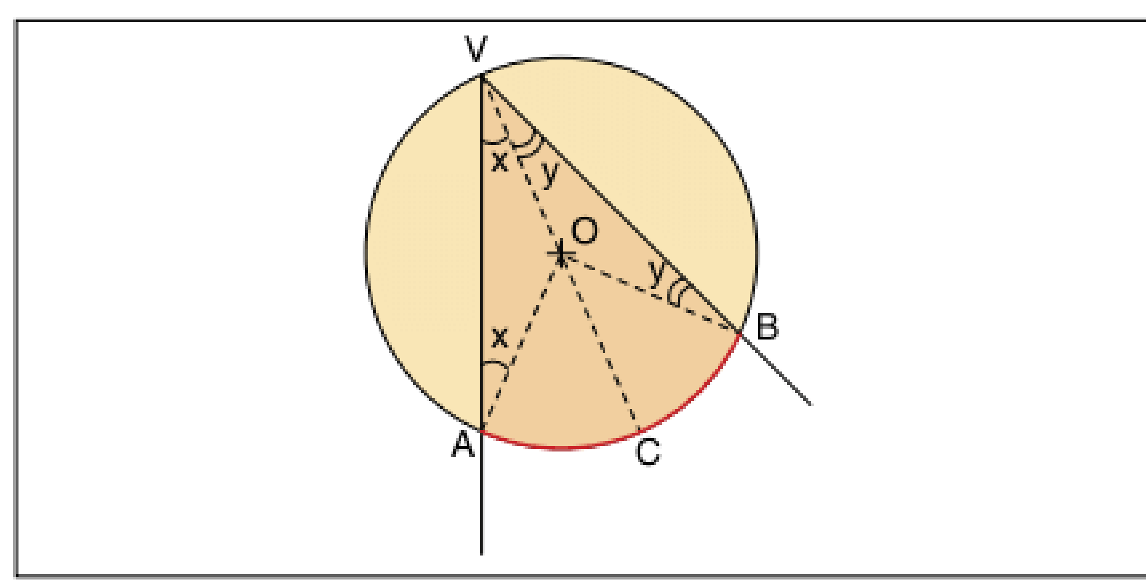


Fig. 31 Demonstração.

Construímos dois triângulos isósceles, ΔVOA e ΔVOB. Temos dois ângulos externos $A\hat{O}C = 2x$ e $B\hat{O}C = 2y$ e $A\hat{O}B = 2x + 2y$

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \text{(ângulo central)}$$

$$2(x + y) = \overset{\frown}{AB} \therefore x + y = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

Uma consequência importante do ângulo inscrito é quando temos um arco de 180°. Observe:

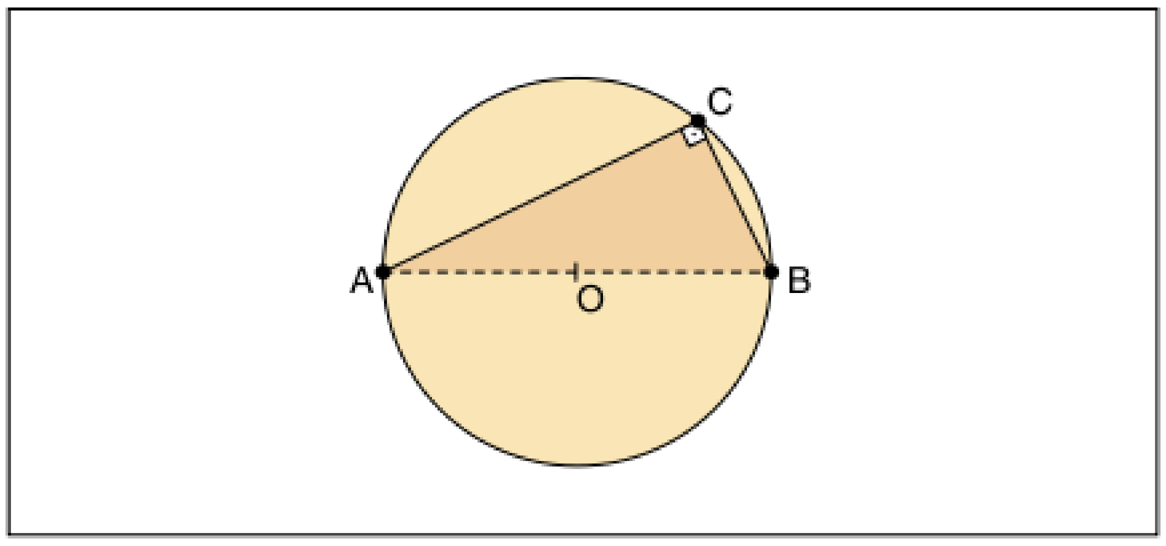


Fig. 32 Triângulo retângulo inscrito.

$$\text{Como } \widehat{AB} = 180^o \Rightarrow A\hat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

Em um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência, a hipotenusa é o diâmetro do círculo; a mediana relativa à hipotenusa é a metade da mesma.

Ângulo de segmento

O ângulo de segmento é formado por uma reta tangente a um círculo em um ponto T, e por uma secante ao círculo passando por T. Observe a figura 33.

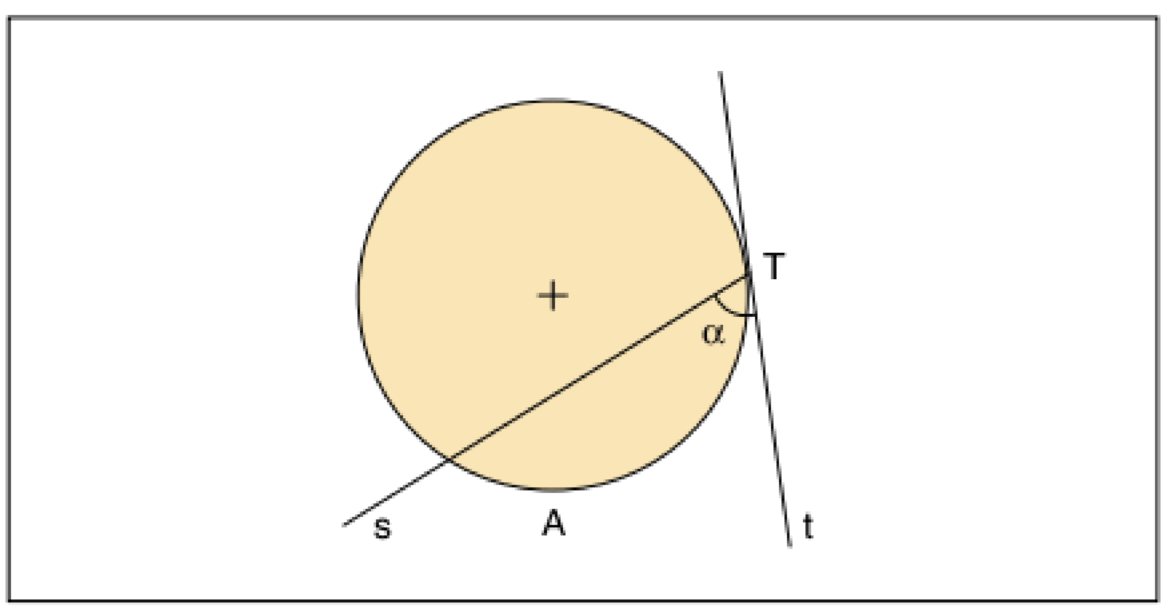


Fig. 33 Ângulo de segmento.

Pelo observado na figura 33, percebemos que o ângulo de segmento funciona também como um ângulo inscrito.

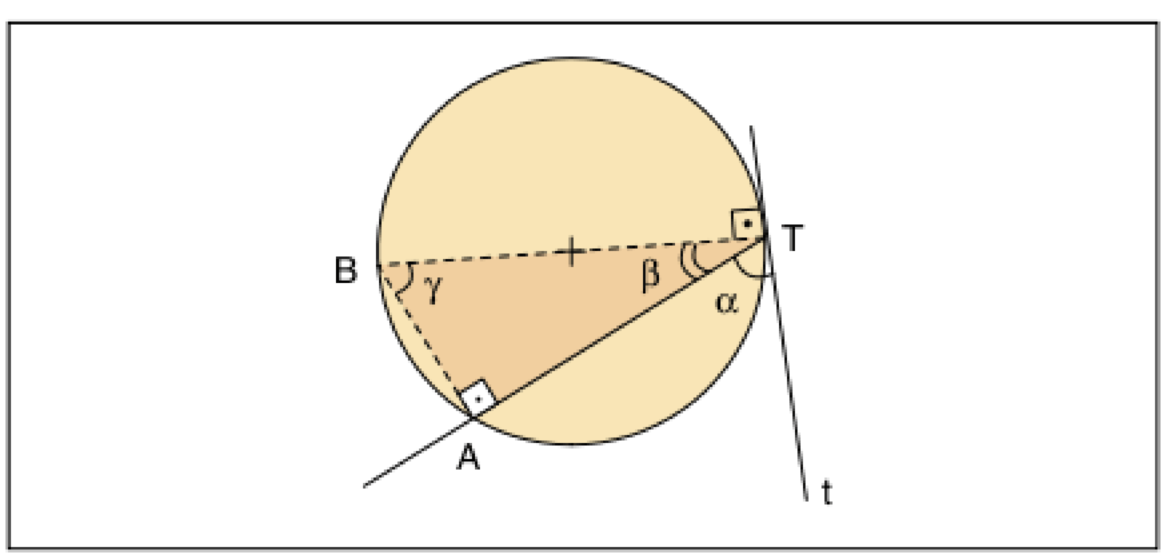


Fig. 34 Demonstração.

Traçamos o diâmetro $\overline{BT}$, o ΔABT é retângulo em A.
$\alpha + \beta = 90° \text{ e } \gamma + \beta = 90° = \gamma = \alpha$

Mas γ é ângulo inscrito; logo, $\gamma = \alpha = \dfrac{\widehat{AT}}{2}$

Arco capaz

Considere os ângulos inscritos de vértices P_1; P_2; P_3 ... P_n no círculo a seguir:

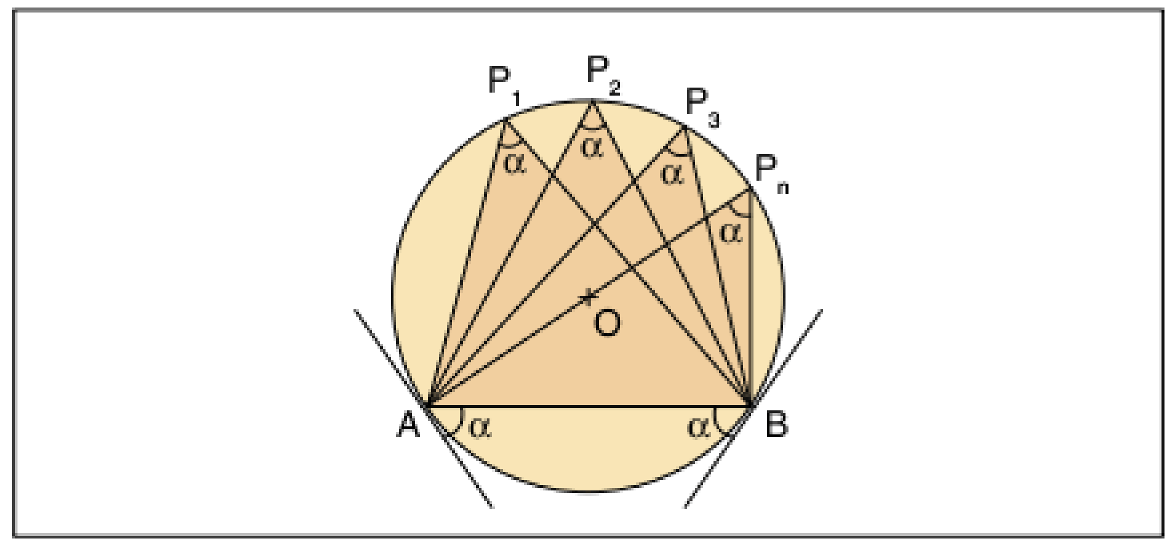


Fig. 35 Arco capaz.

Da figura 35, temos:

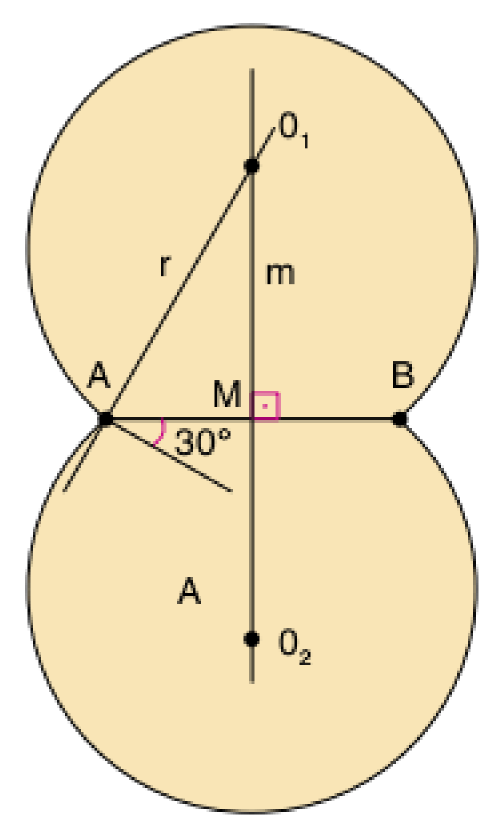
$$A\hat{P}_1B = A\hat{P}_2B = A\hat{P}_3B = \ldots = A\hat{P}_nB = \alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Observe também que nos pontos A e B temos retas tangentes e os ângulos de segmentos de medida α. $\widehat{AP_1B}$ é o arco capaz do ângulo α. A seguir, temos um exemplo numérico.

Exercício resolvido

10 Determine o lugar geométrico dos pontos do plano que "enxergam" um segmento $\overline{AB}$ dado sob ângulo de 30º.

Resolução:
Esse lugar geométrico, como sabemos, é o arco capaz de 30º. Leia atentamente a sequência para a construção do arco.



a) *Marcar um ângulo de 30º na extremidade A (esse ângulo será o ângulo de segmento).*
b) *Traçar r perpendicular ao lado do ângulo de 30º.*
c) *Traçar mediatriz de $\overline{AB}$.*
d) *$R \cap m = \{O_1\}$.*
e) *O arco capaz possui centro O_1 e passa por A e B.*
f) *Marca-se $O_2M = O_1M$.*
g) *Os dois arcos formados são o lugar geométrico completo.*

Quadrilátero inscritível

Um quadrilátero está inscrito em uma circunferência se os seus 4 vértices estão sobre a circunferência.

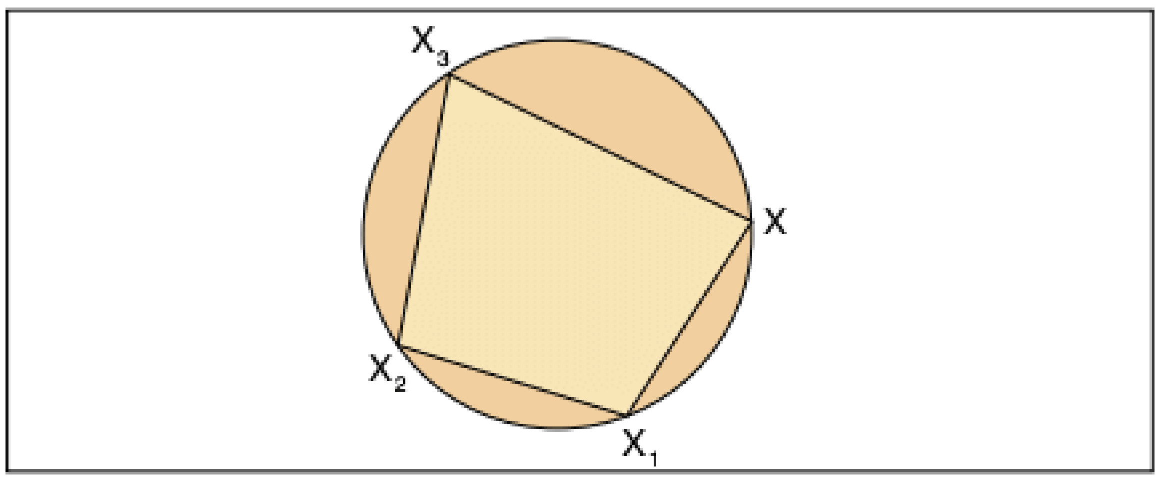


Fig. 36 Quadrilátero inscritível.

Teorema

A condição necessária e suficiente para que um quadrilátero esteja inscrito em uma circunferência é que os ângulos opostos sejam suplementares.

Demonstração:

1. (Condição necessária)

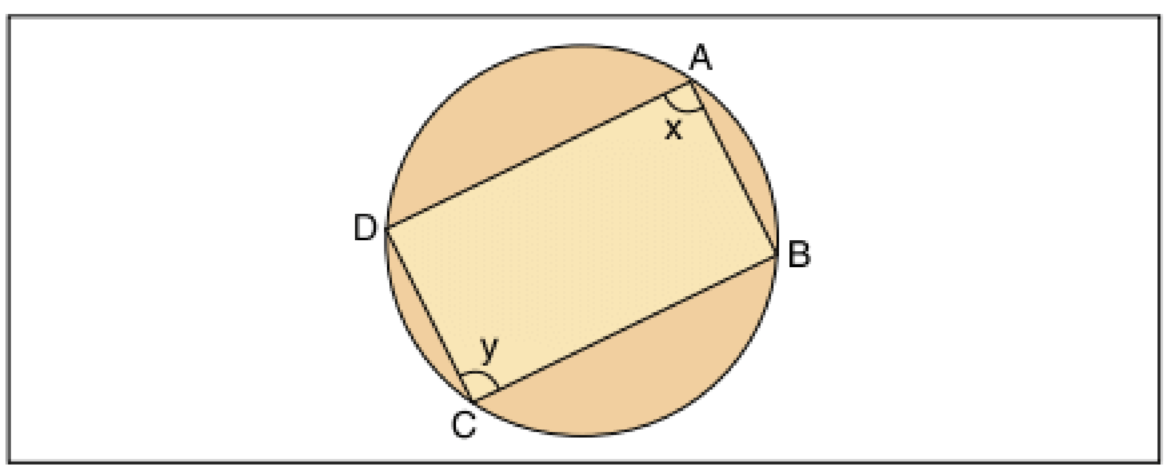


Fig. 37 Quadrilátero inscritível ABCD.

Pelo teorema do ângulo inscrito, temos:

$$\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2} = y \text{ e } \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} = x$$

Assim, $\overset{\frown}{BCD} = 2x$ e $\overset{\frown}{BCD} = 2x$ mas $\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{BCD} = 360° \therefore$
$\therefore 2x + 2y = 360° \Rightarrow x + y = 180°$

2. (Condição suficiente)

Suponha que o quadrilátero ABCD não é inscritível. Observe a figura.

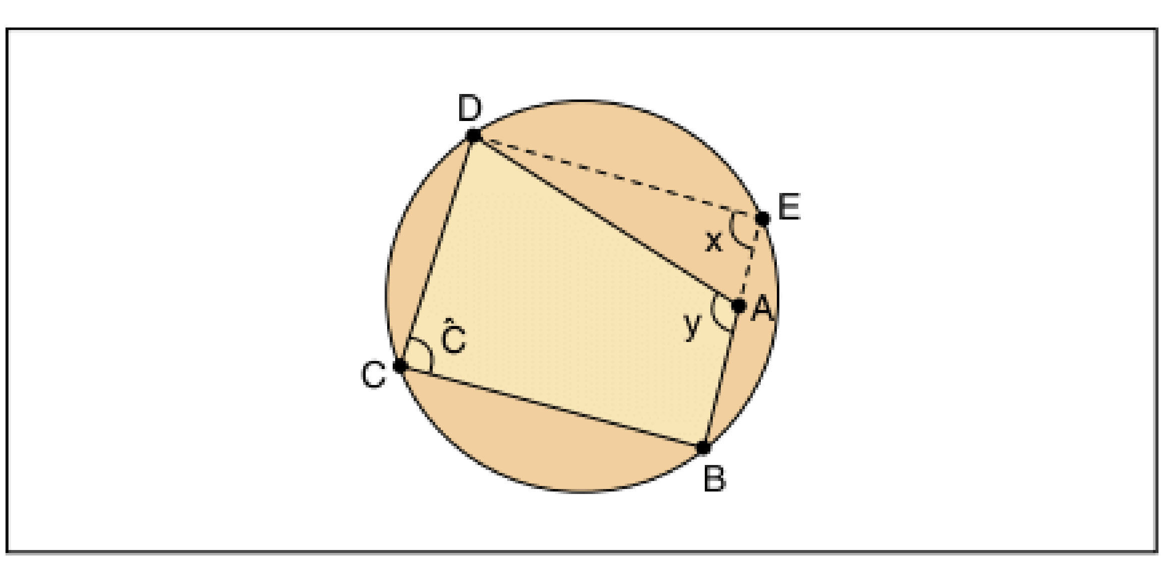
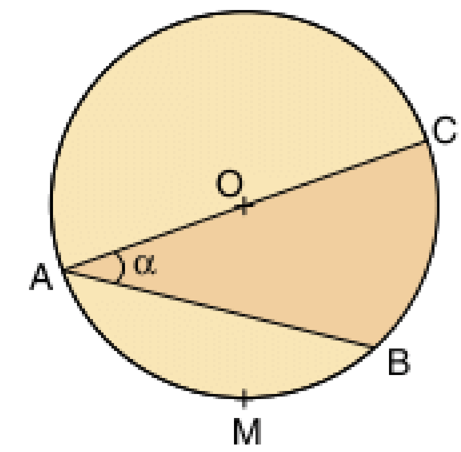


Fig. 38 Demonstração.

Construímos o quadrilátero CDEB inscritível; logo, $y + \hat{C} = 180°$ (condição necessária). Mas por hipótese $y + \hat{C} = 180° \Rightarrow y + \hat{C} = x + \hat{C} \ \therefore x = y$ *absurdo*! Pois o ângulo externo é sempre maior que os internos não adjacentes.

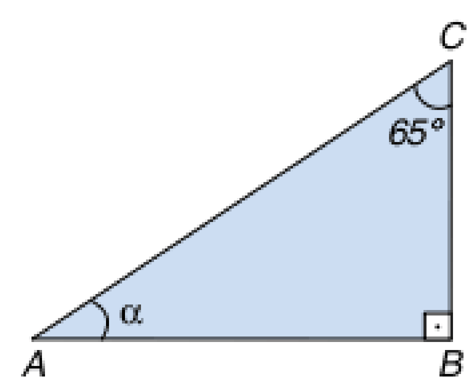
Exercícios resolvidos

11 Se o arco $\overset{\frown}{AMB} = 130°$, calcule α.



Resolução:

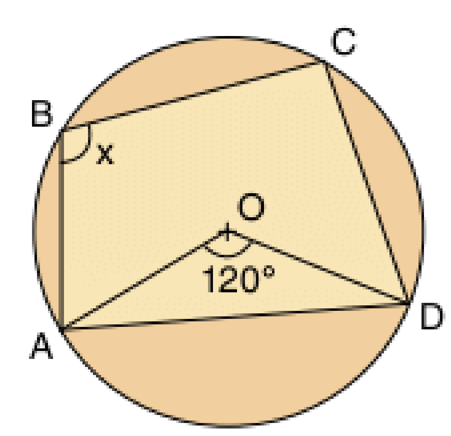
O ΔABC é retângulo:



$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AMB}}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$$

$\alpha + 65° = 90° \therefore \alpha = 25°$

12 Na figura, $\overset{\frown}{CD}$ mede 100°. Calcule x.

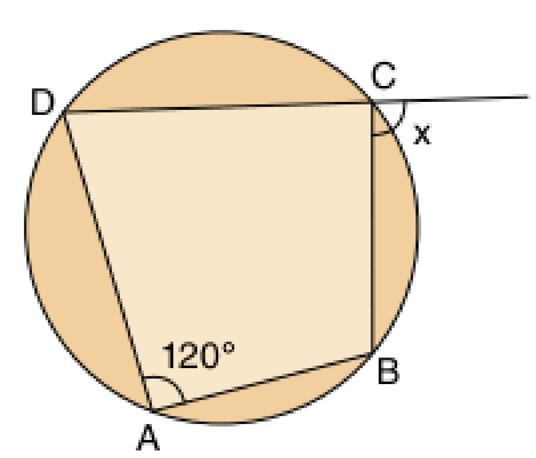


Resolução:

$A\hat{B}C = x$ é ângulo inscrito e $x = \dfrac{\overset{\frown}{ADC}}{2}$

Mas $\overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = 120° + 100° \therefore \overset{\frown}{ADC} = 220° \Rightarrow x = 110°$

13 Calcule x na figura a seguir.

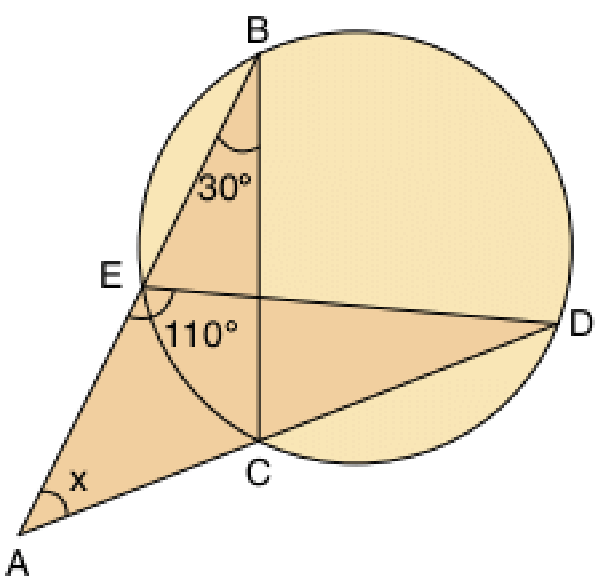


Resolução:

O quadrilátero ABCD é inscritível; logo, $120° + \hat{C} = 180° \therefore$
$\therefore \hat{C} = 60°$

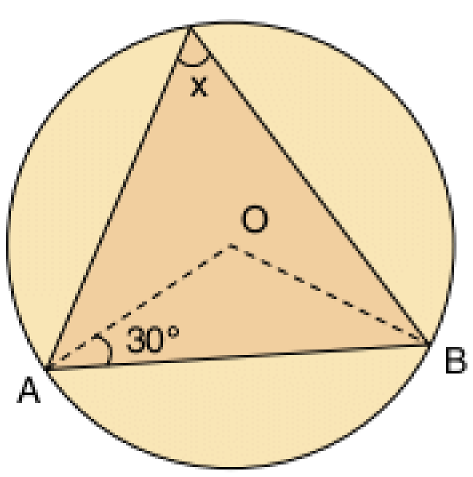
Mas x é o suplemento de $\hat{C}$*, assim* $x = 120°$.

14 Calcule x na figura a seguir.



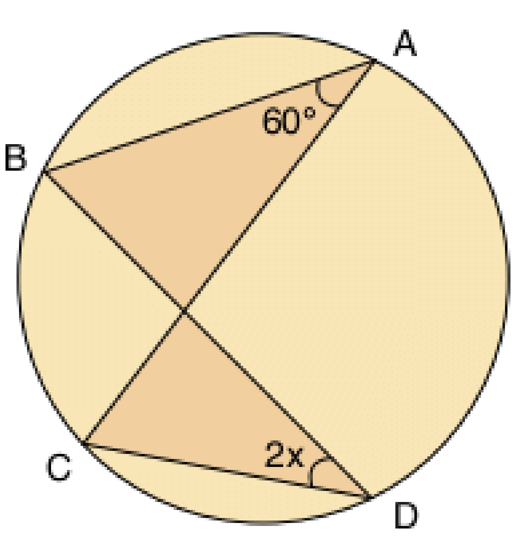
Resolução:
$E\hat{B}C = E\hat{D}C = 30^o$
No ΔAED, temos $x + 110^o + 30^o = 180^o \therefore x = 40^o$

15 Na figura, temos $B\hat{A}O = 30^o$. Calcule x.



Resolução:
No ΔAOB, temos $AO = OB$; assim, $A\hat{O}B + 30^o + 30^o = 180^o \therefore$
$\therefore A\hat{O}B = 120^o$.
$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = 120^o$, mas $x = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$

16 Calcule o valor de x na figura seguinte.



Resolução:
Os ângulos 2x e 60° "olham" para o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$; assim, $2x = 60^o \Rightarrow x = 30^o$.

Ângulo excêntrico interior

O vértice do ângulo não está no centro nem na circunferência.

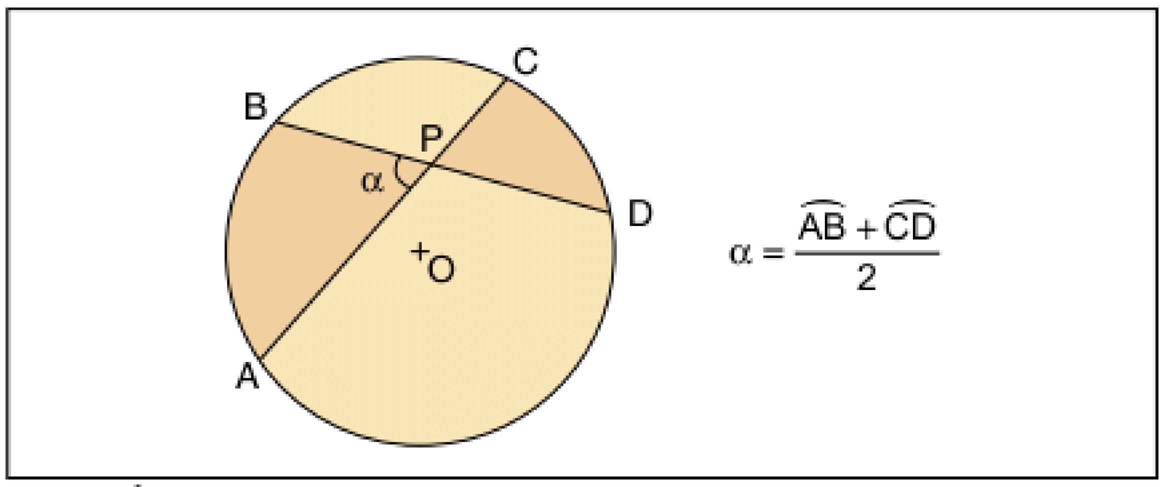


Fig. 39 Ângulo excêntrico interior.

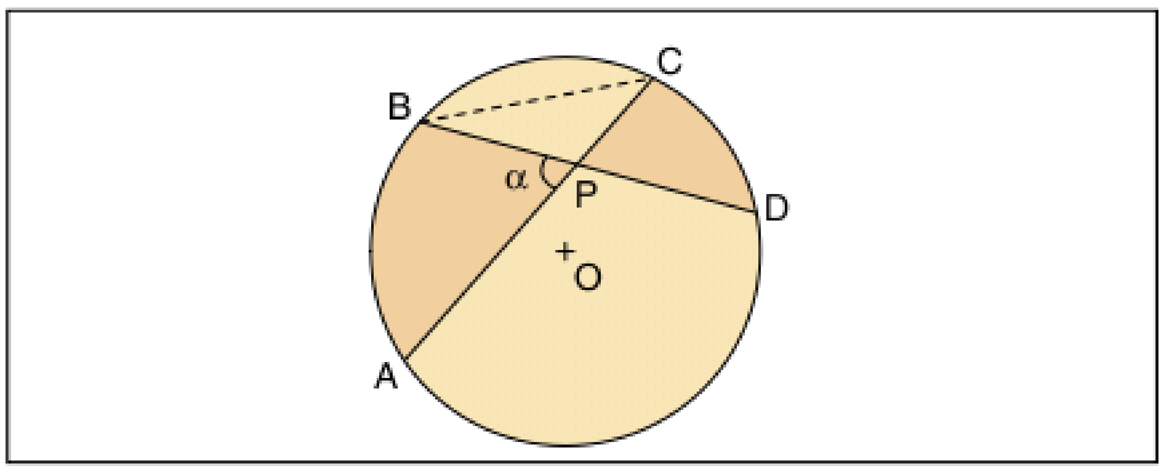


Fig. 40 Ângulo excêntrico interior com segmento $\overline{BC}$.

Traçando $\overline{BC}$, temos o ΔBCP, assim $B\hat{C}P = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ e $C\hat{B}D = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ α é ângulo externo, $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2} \therefore \alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$

Ângulo excêntrico exterior

O vértice P está fora do círculo.

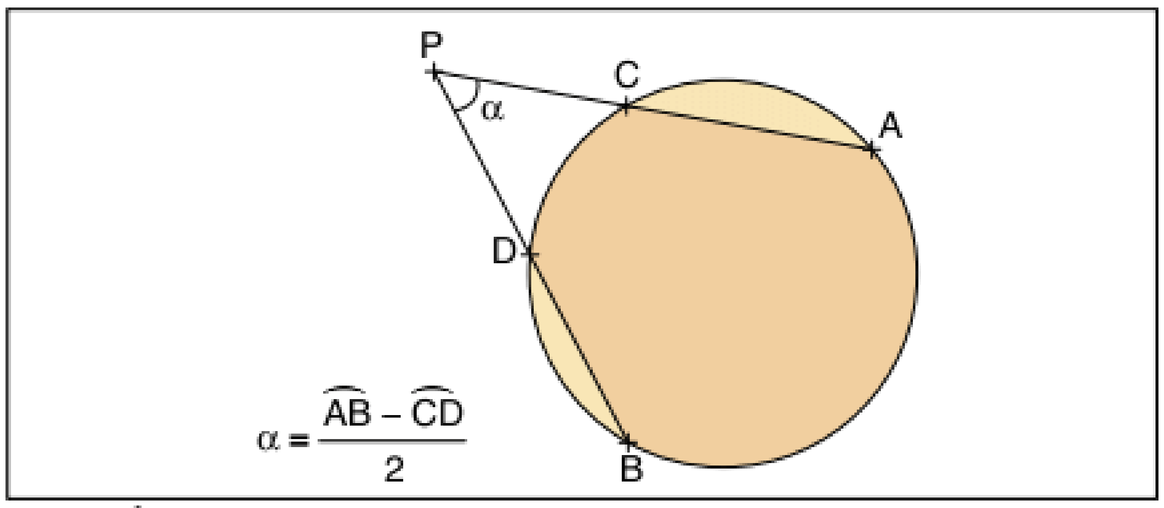


Fig. 41 Ângulo excêntrico exterior.

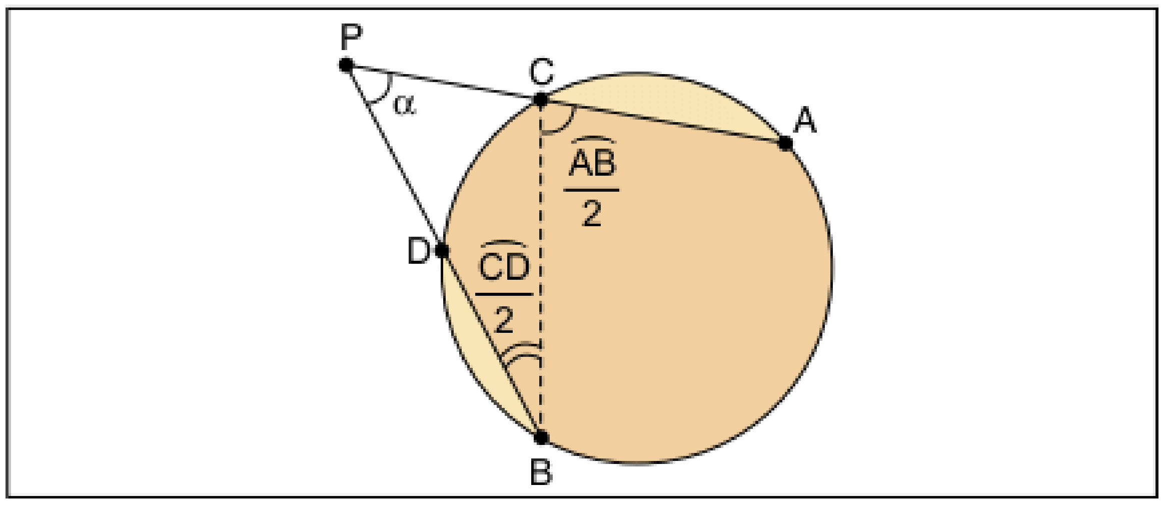


Fig. 42 Demonstração.

Traçando $\overline{BC}$, temos $D\hat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2}$ e $B\hat{C}A = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

No ΔBPC, temos pelo teorema do ângulo externo:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} + \alpha \therefore \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Relações métricas no círculo

Considere um ponto P interior ao círculo e duas cordas passando por P.

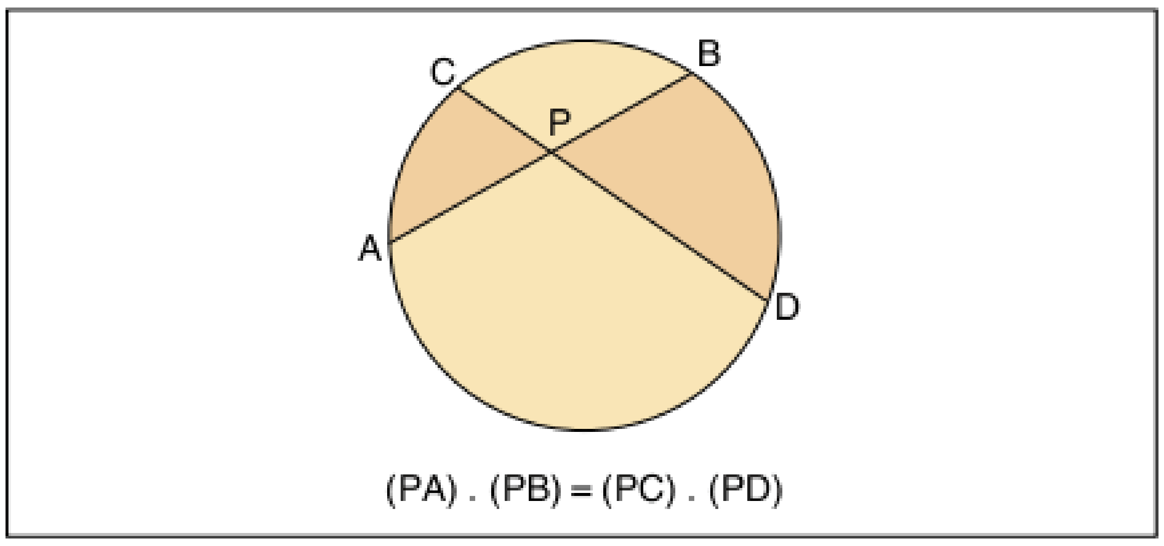


Fig. 43 Ponto P interior ao círculo.

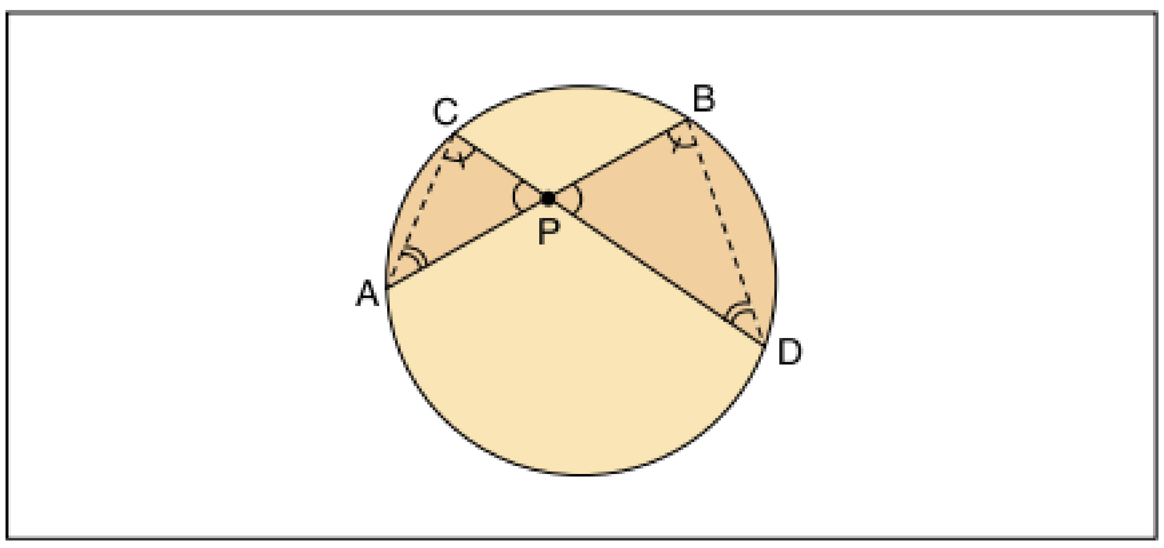


Fig. 44 Triângulo APC e DPB.

$\Delta APC \sim \Delta DPB$

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \therefore (PA).(PB) = (PC).(PD)$$

Considere um ponto P exterior ao círculo, e o prolongamento de duas cordas passando por P.

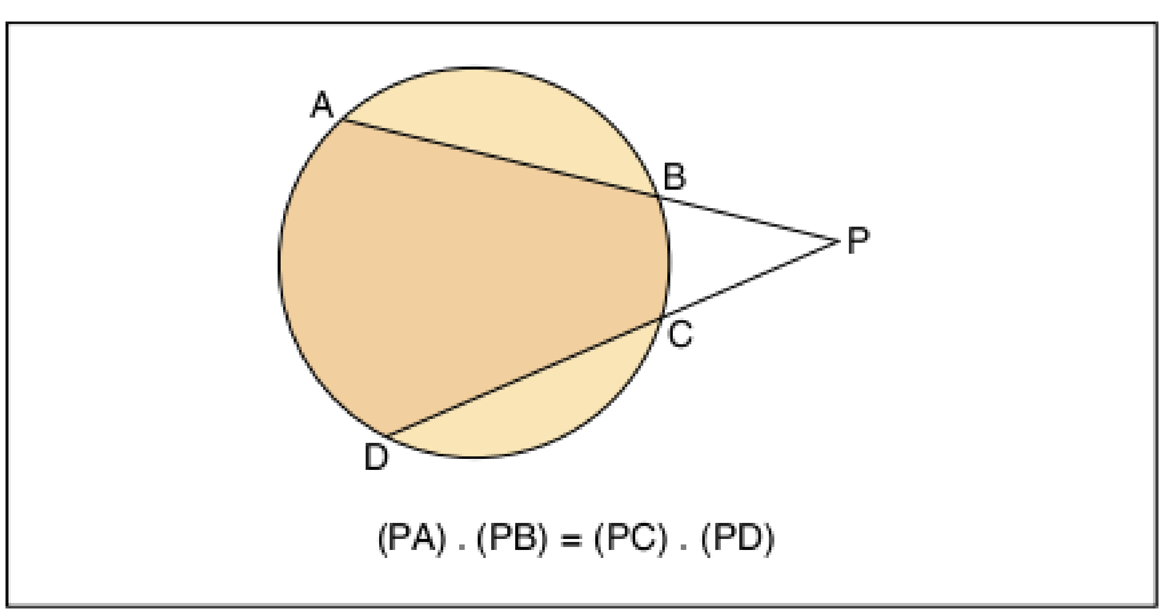


Fig. 45 Ponto P exterior ao círculo.

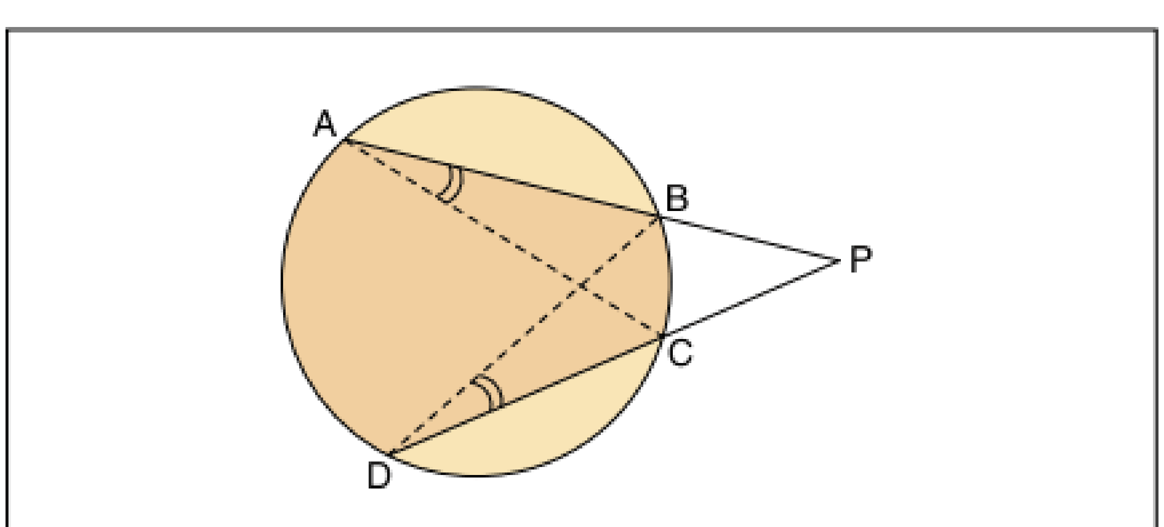


Fig. 46 Demonstração.

$\Delta PAC \sim \Delta PDB$

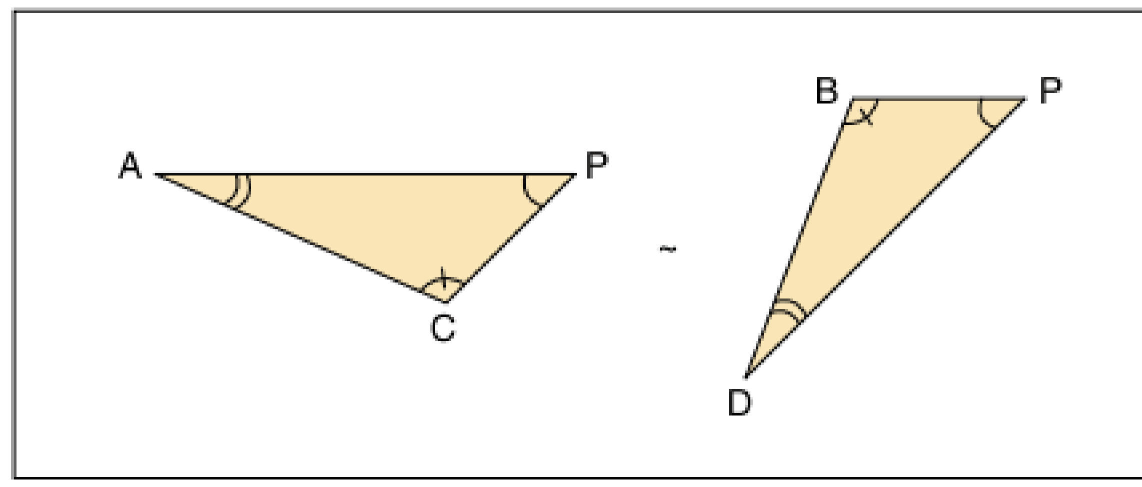


Fig. 47 Triângulo APC e BPC.

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \therefore (PA).(PB) = (PC).(PD)$$

Novamente com o ponto P exterior ao círculo, mas agora uma secante e uma tangente.

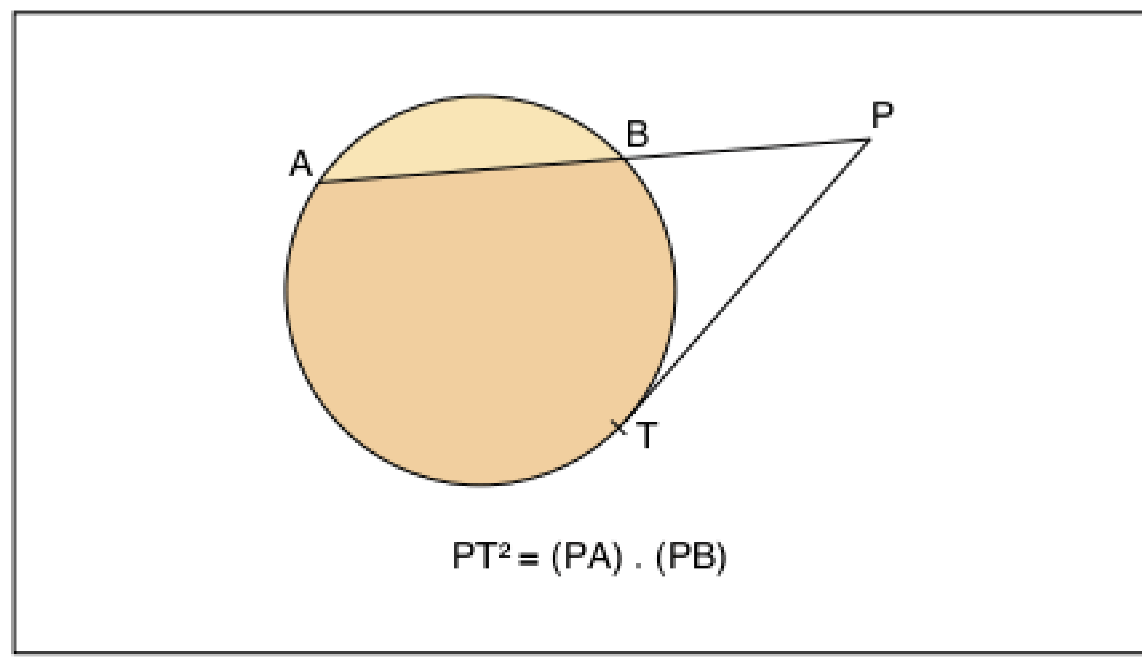


Fig. 48 Ponto P exterior ao círculo.

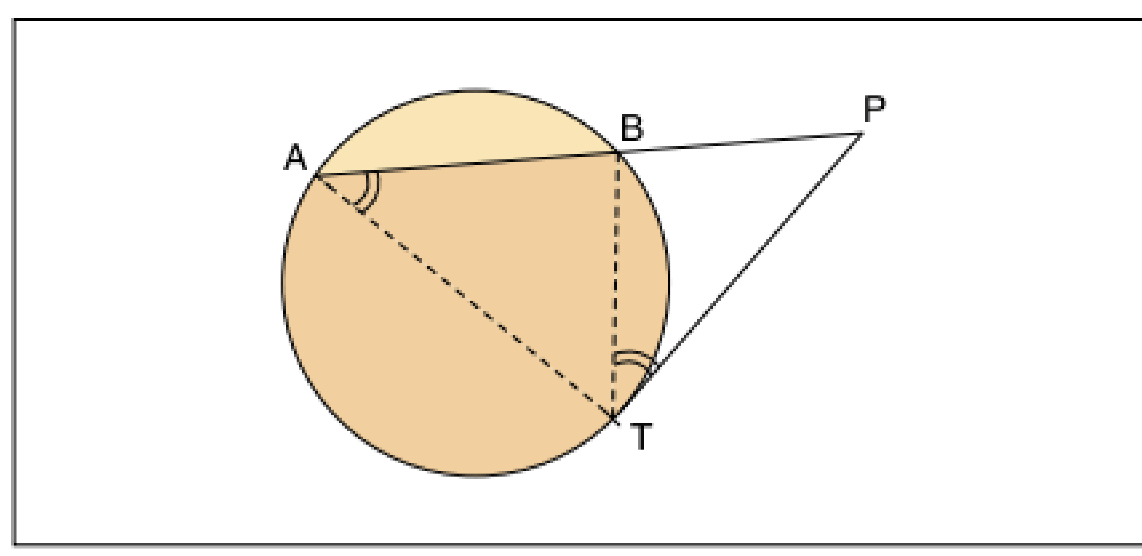


Fig. 49 Demonstração.

$B\hat{T}P$ é ângulo de segmento e $B\hat{T}P = B\hat{A}T$.

$\Delta PBT \sim \Delta PTA$

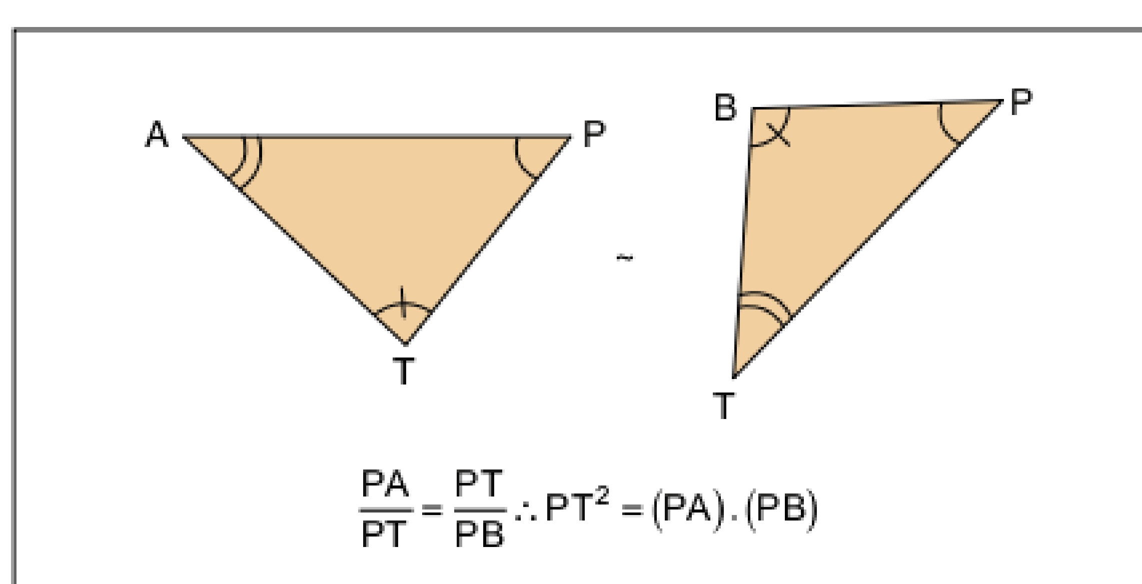
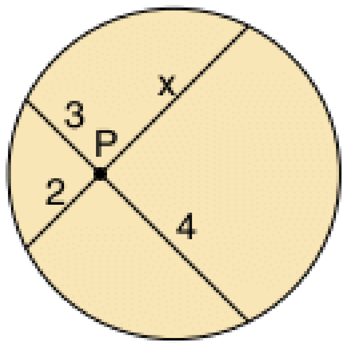


Fig. 50 Demonstração da relação.

Exercícios resolvidos

17 Calcule o valor de x.

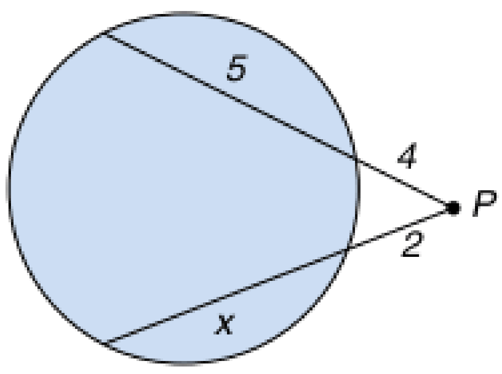
a)



Resolução:

$2x = 3 \cdot 4 \therefore x = 6$

b)



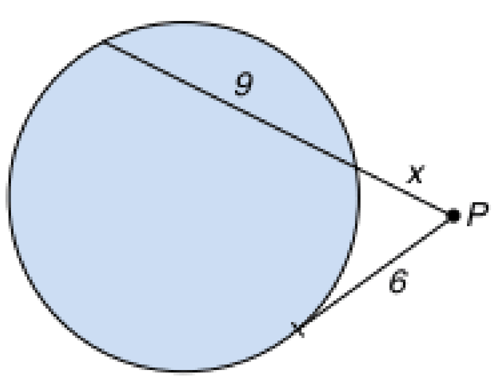
Resolução:

$4 \cdot (4 + 5) = 2(x + 2)$

$\therefore 4 \cdot 9 = 2(x + 2)$

$\therefore x + 2 = 18 \therefore x = 16$

c)

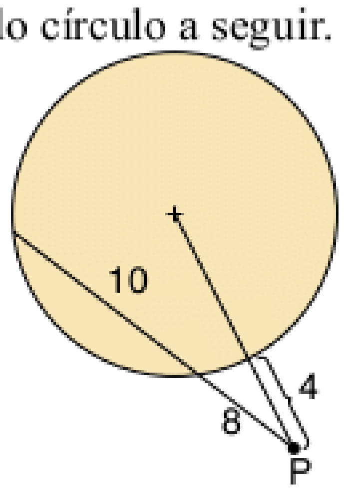


Resolução:

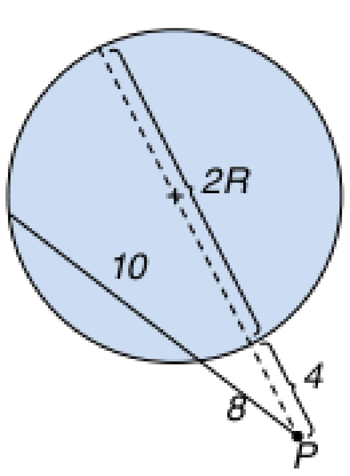
$(6)^2 = x(x + 9) \therefore x^2 + 9x = 36 \therefore x^2 + 9x - 36 = 0$

$(x + 12) \cdot (x - 3) = 0 \therefore x = 3$

18 Calcule o raio do círculo a seguir.



Resolução:



$8(18) = 4(4 + 2R) \therefore 36 = 4 + 2R$

$32 = 2R \therefore R = 16$

ATENÇÃO!

Observe duas circunferências secantes. Traça-se a reta r secante às duas e que contém a corda comum $\overline{AB}$. Qualquer ponto P de r é equipotente às duas circunferências.

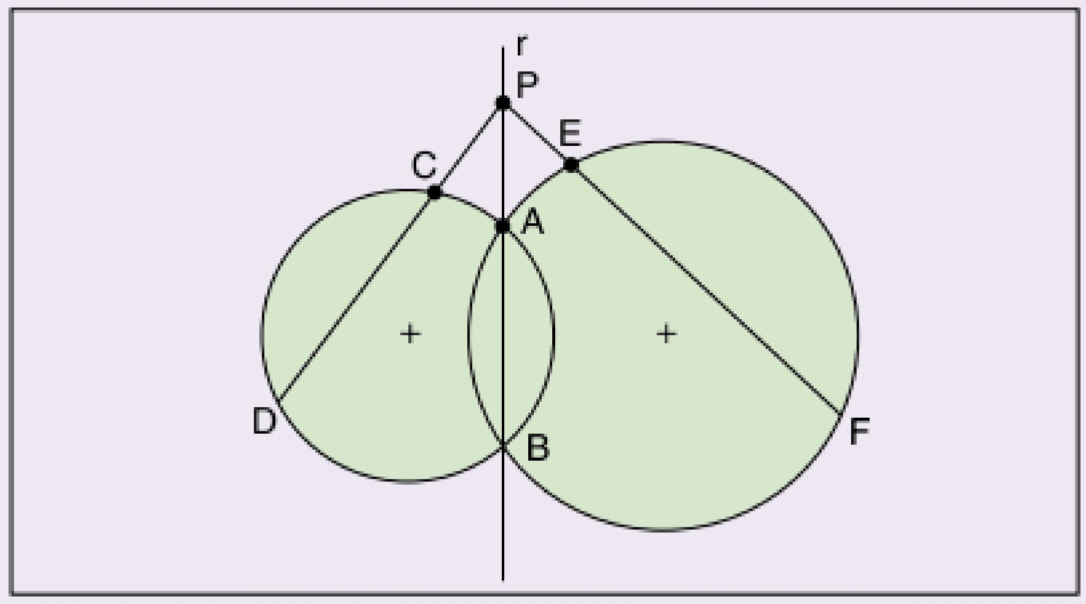


Fig. 51 Secante comum.

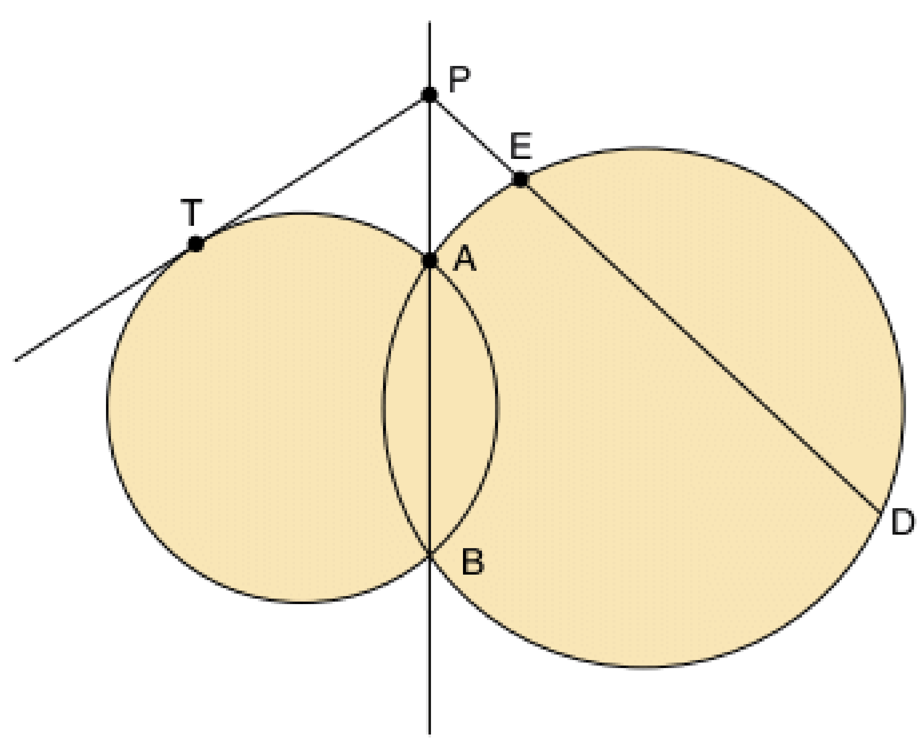
Observando a figura 51, temos: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ e $PA \cdot PB = PE \cdot PF$

Assim, $PC \cdot PD = PE \cdot PF$, ou seja, P é equipotente em relação às circunferências.

O produto $(PA) \cdot (PB)$ é conhecido também como potência do ponto P.

Exercício resolvido

19 Na figura a seguir, sabemos que PE = 2 e ED = 6. Calcule o valor da tangente PT.



Resolução:

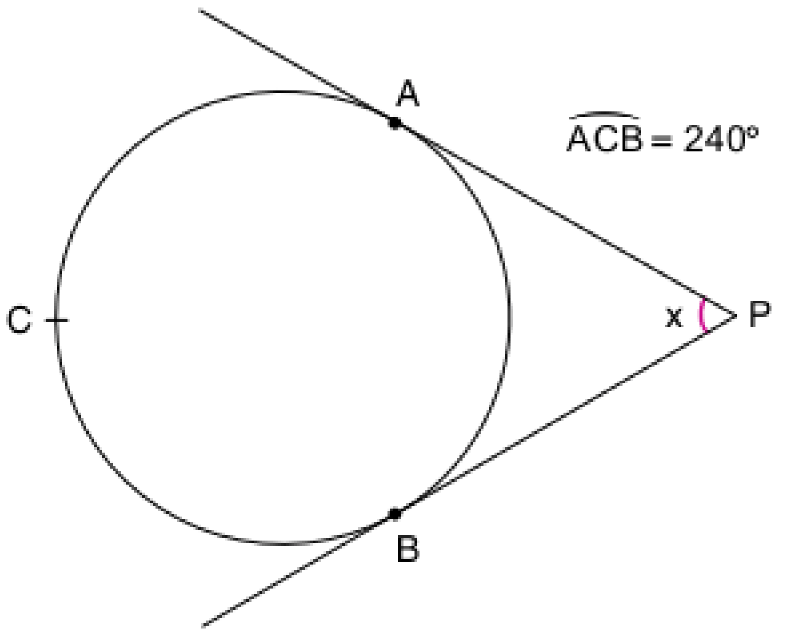
$PE \cdot PD = PT^2 \therefore 2\,(PE + ED) = PT^2 \therefore 2\,(2 + 6) = PT^2$

$PT^2 = 16 \therefore PT = 4$

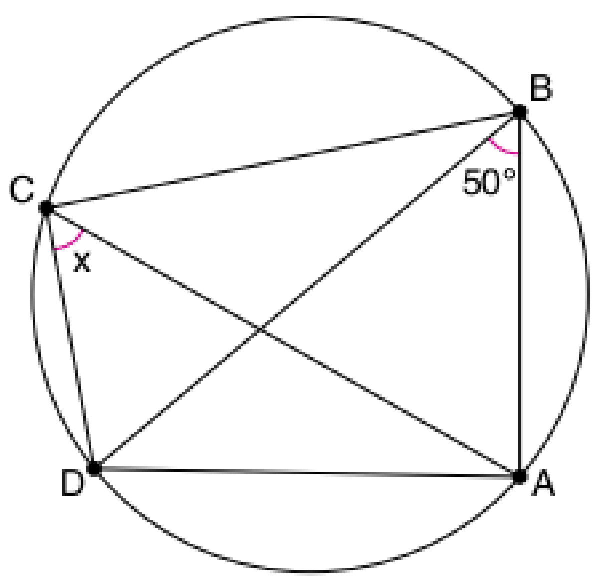
Revisando

1 Calcule o valor de x nas figuras:

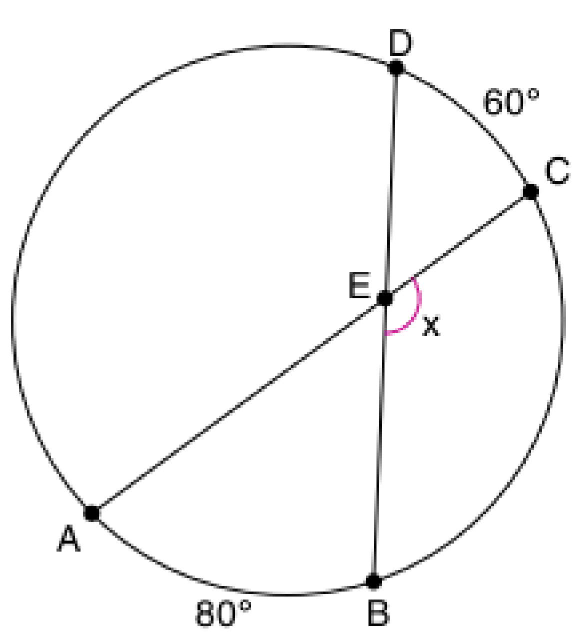
a)



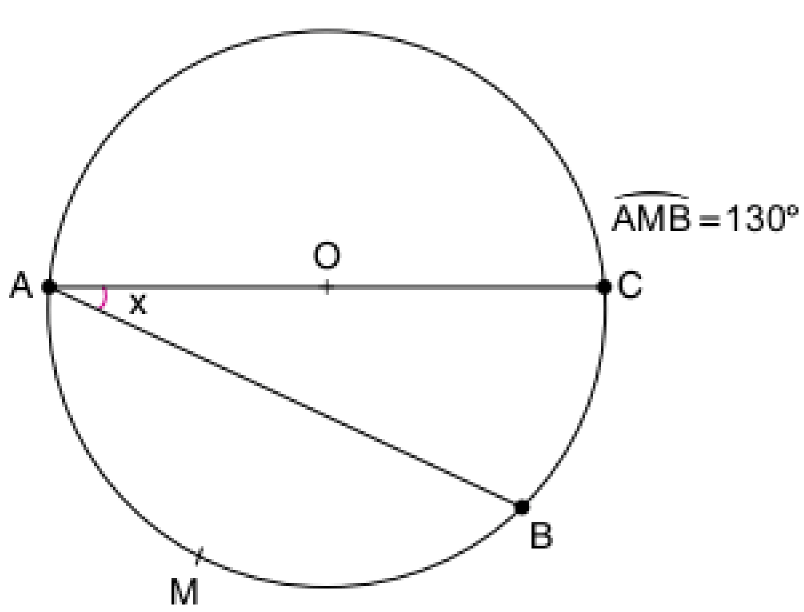
b)



c)

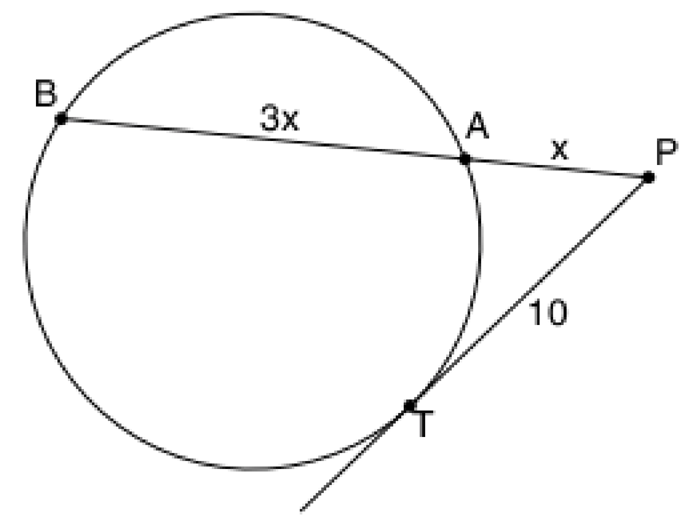


d)

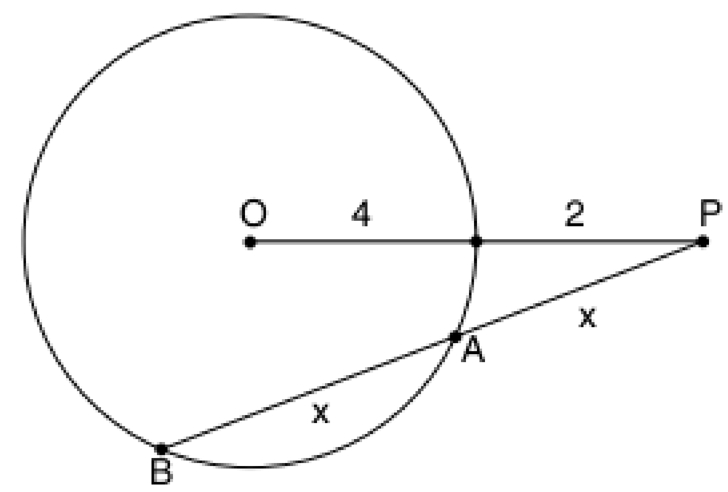


2 Em cada figura, calcule o valor de x.

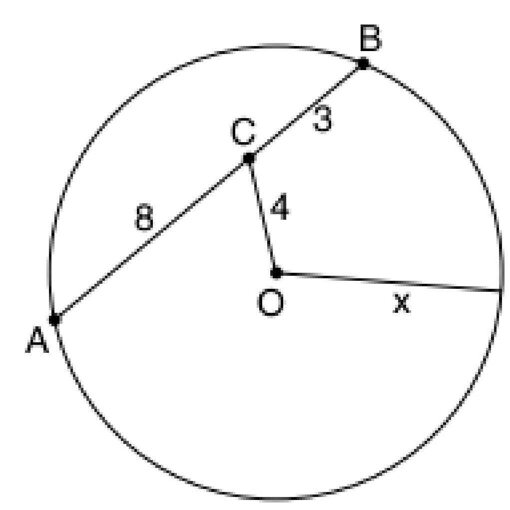
a)



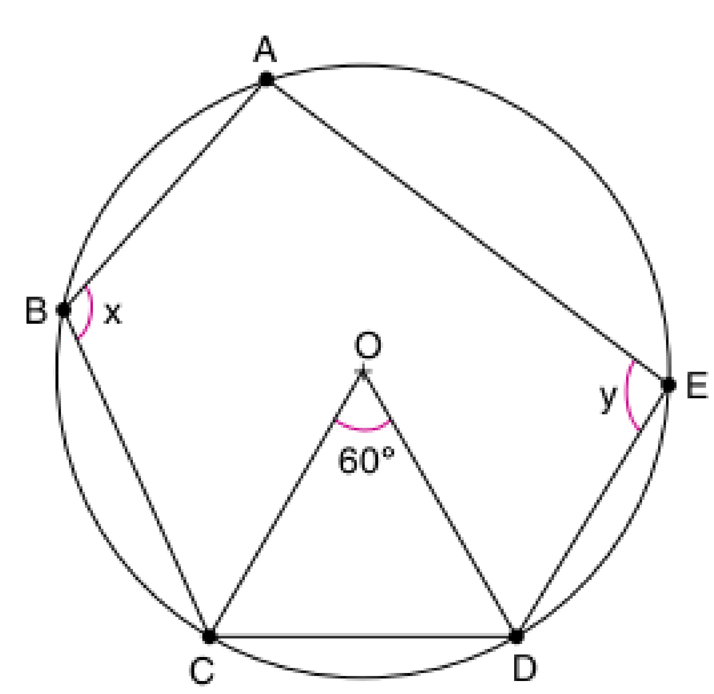
b)



c)



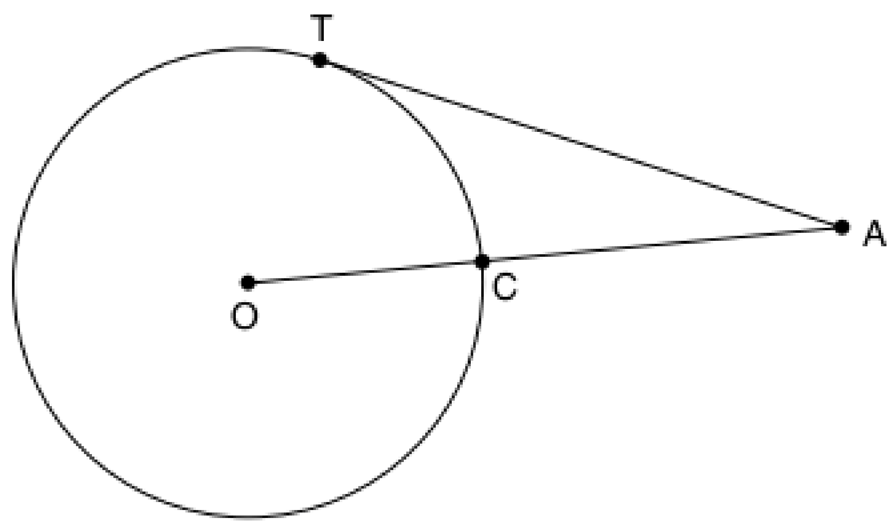
3 O pentágono ABCDE da figura está inscrito em um círculo de centro O. O ângulo central $C\hat{O}D$ mede 60°. Calcule x + y.



Exercícios propostos

Tangência e ângulo reto

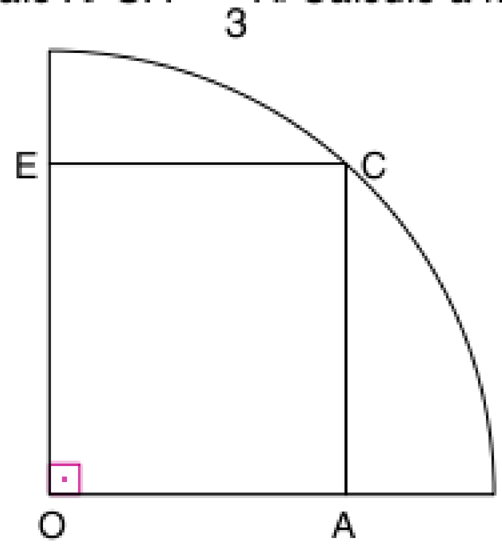
1 Na figura a seguir, $\overline{AT}$ é tangente à circunferência de raio r.



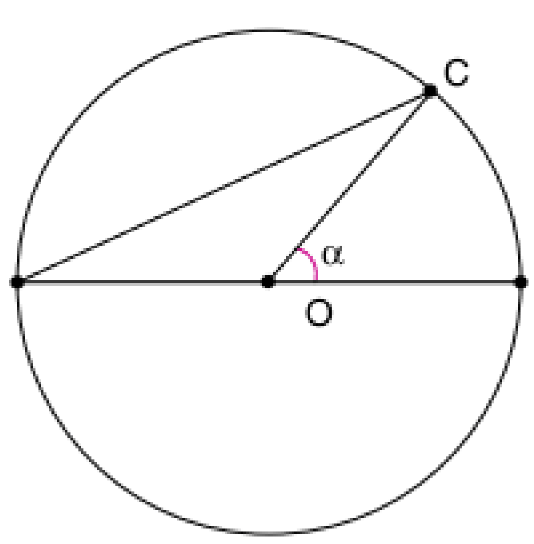
Sabendo-se que AT = 2r, então o valor de AC é:

(a) $\left(\sqrt{5}+1\right)r$
(b) $1 + 2r$
(c) r^2
(d) $r\sqrt{5}$
(e) $\left(\sqrt{5}-1\right)r$

2 Na figura, o retângulo OACE está inscrito em um setor circular de 90° e raio R. $OA = \frac{2}{3}R$. Calcule a medida de $\overline{AC}$.



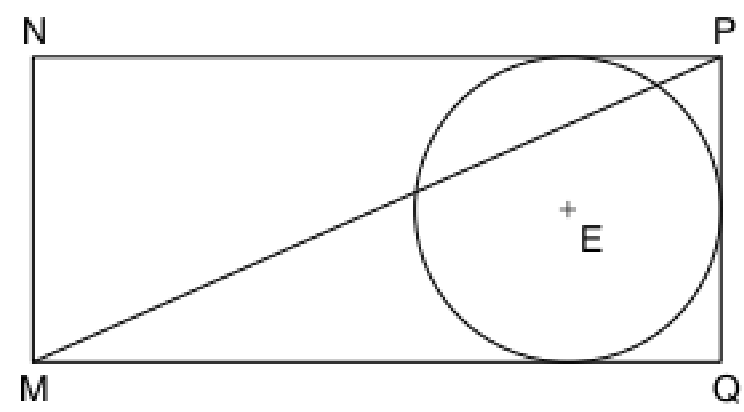
3 No círculo a seguir, O é o centro, AB = 2 e $AC = \sqrt{3}$.



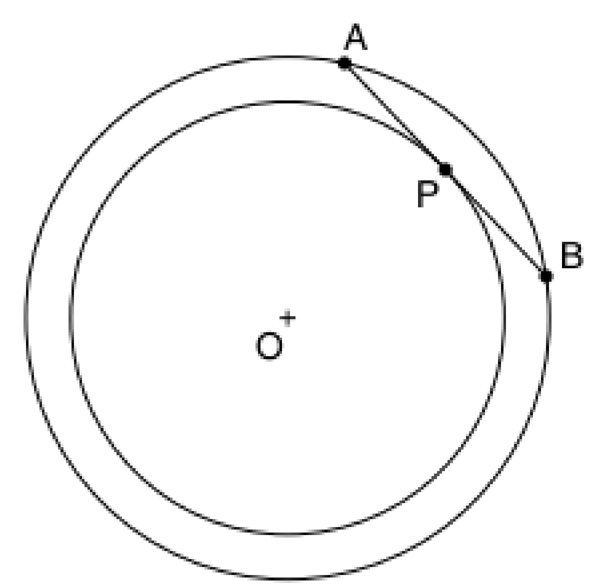
Então, α vale:

(a) 70°
(b) 60°
(c) 45°
(d) 30°
(e) 15°

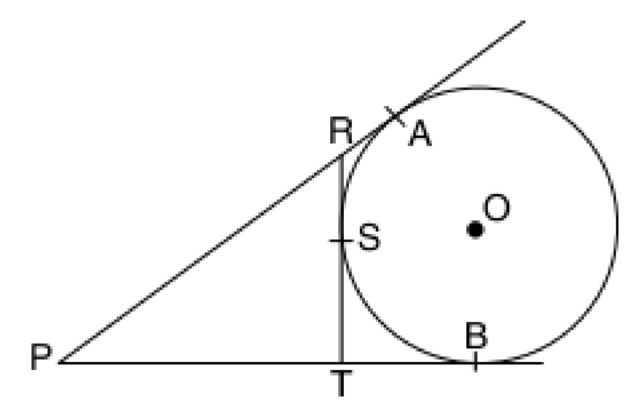
4 Na figura, MNPQ é um retângulo, o ponto E é o centro da circunferência tangente aos lados NP, PQ e MQ. Se MN = 4 cm e NP = 8 cm, determine a distância do ponto E à diagonal MP.



5 Na figura a seguir, temos duas circunferências concêntricas, com raios medindo 4 cm e 5 cm. Por um ponto P da circunferência menor, traça-se a reta tangente à mesma, a qual determina pontos A e B na circunferência maior. Determine o valor de AB.

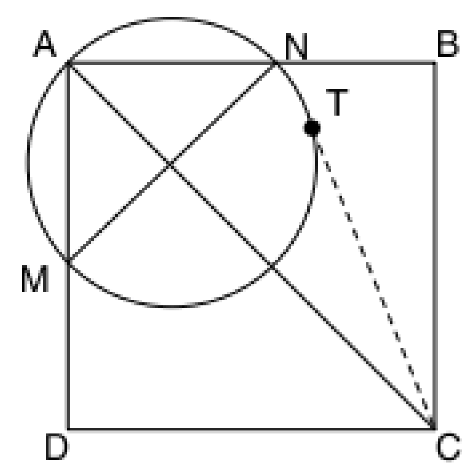


6 Na figura, o segmento tangente PA mede 15 cm e PR mede 12 cm.



a) Determine a medida RS.
b) Qual é o perímetro do triângulo PRT?

7 **Mackenzie** Na figura a seguir, M e N são pontos médios dos lados do quadrado ABCD e T é o ponto de tangência. Se CT mede k, então a área do quadrado vale:



(a) $2k^2$
(b) $\frac{3k^2}{4}$
(c) k^2
(d) $\frac{k^2}{4}$
(e) $\frac{4k^2}{5}$

8 Duas circunferências de centros A e B são tangentes externamente e tangenciam internamente uma circunferência de centro C. Sendo AB = 12 m, AC = 17 m e BC = 13 m, determine os raios dessas circunferências.

9 Seja P o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo ABC, com o lado AB. Se AB = 7, BC = 6 e AC = 8, quanto vale AP?

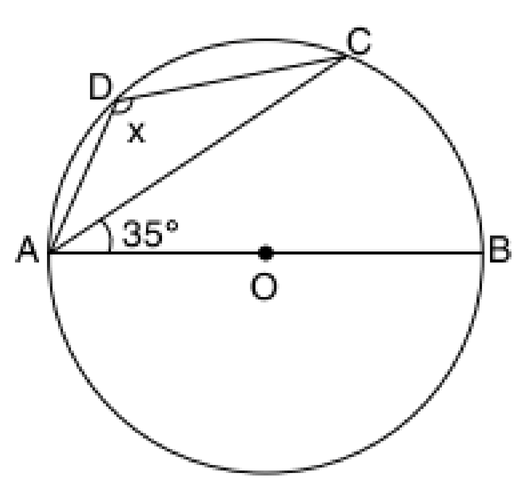
10 Considere um triângulo ABC de lados AB = c, AC = b, BC = a, e sejam P, Q e R os pontos em que os lados BC, AC e AB tangênciam a circunferência inscrita. Calcule os segmentos AR = x, BP = y e CQ = z.

11 Determine a medida do diâmetro de um círculo inscrito em um triângulo retângulo cujos lados medem 9 cm, 12 cm e 15 cm.

12 Determine o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a.

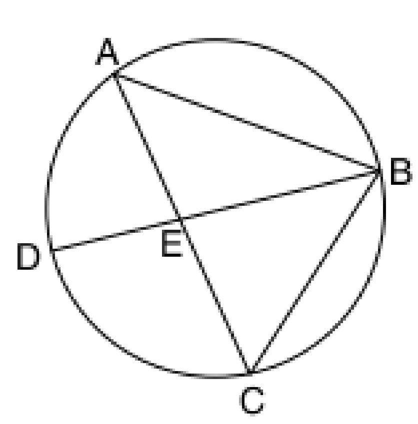
Ângulos no círculo

13 **Fuvest** A medida do ângulo $A\hat{D}C$ inscrito na circunferência de centro O é:



(a) 125°
(b) 110°
(c) 120°
(d) 100°
(e) 135°

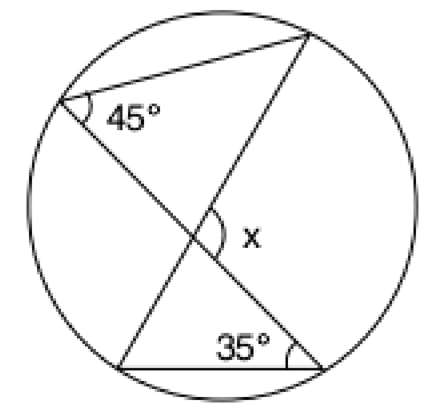
14 **UFMG** Observe a figura.



Nessa figura, BD é um diâmetro da circunferência que envolve o triângulo ABC, e os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{E}D$ medem, respectivamente, 20° e 85°. Assim sendo, o ângulo $C\hat{B}D$ mede:

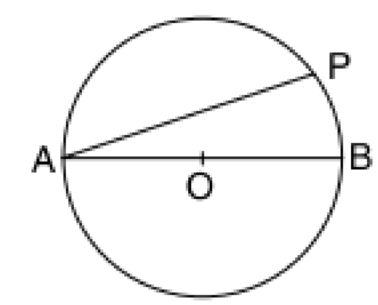
(a) 25°
(b) 35°
(c) 30°
(d) 40°

15 **PUC** O ângulo x, na figura a seguir, mede:



(a) 60° (b) 80° (c) 90° (d) 100° (e) 120°

16 **UFMG** Observe a figura.



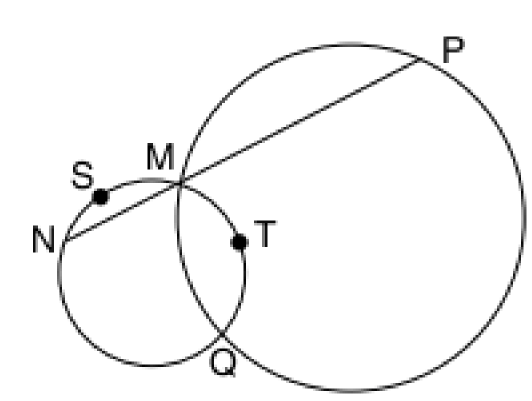
Nessa figura, AB é um diâmetro do círculo de centro O e raio 2 e o ângulo $P\hat{A}B$ mede 15°.
Nesse caso, a distância do ponto P à reta AB é de:

(a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(b) 1
(c) $\sqrt{2}$
(d) $\sqrt{3}$

17 **Fuvest** Um arco de circunferência mede 300°, e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio em metros?

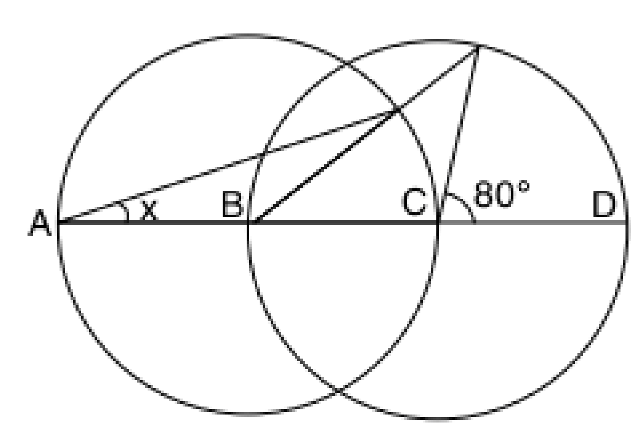
(a) 157 (b) 284 (c) 382 (d) 628 (e) 764

18 **Mackenzie** Na figura a seguir, os arcos QMP e MTQ medem, respectivamente, 170° e 130°. Então, o arco MSN mede:

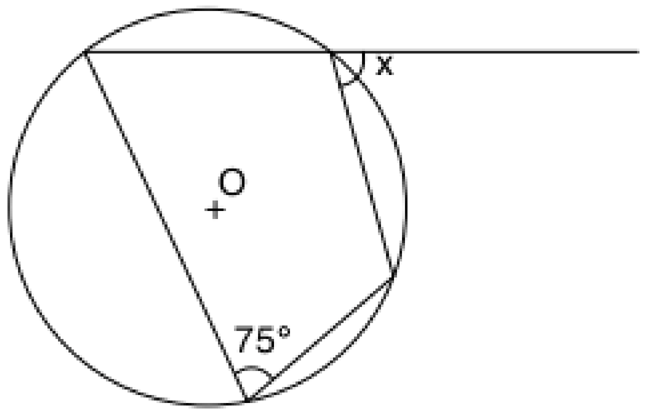


(a) 60° (b) 70° (c) 80° (d) 100° (e) 110°

19 Calcule o valor de x na figura abaixo.

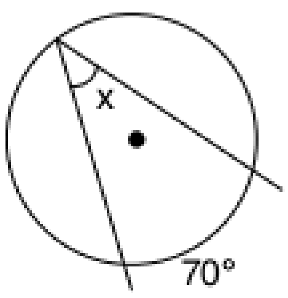


20 Calcule o valor de x na figura a seguir.

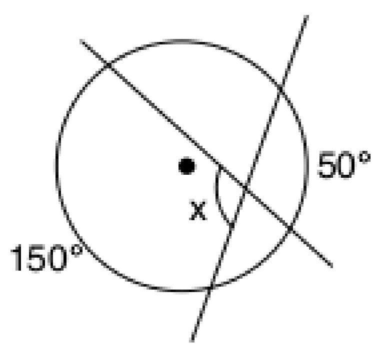


21 Calcule o valor de x em cada caso:

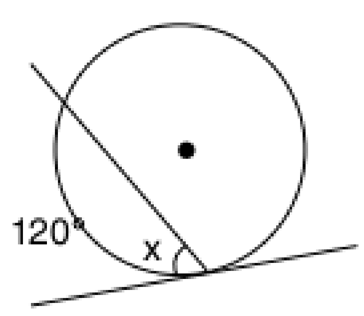
a)



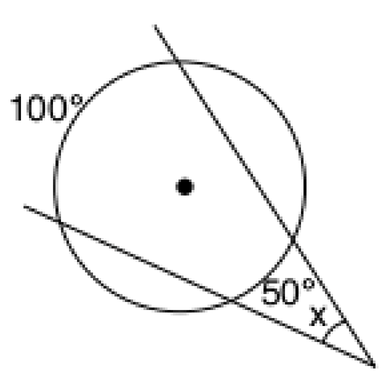
b)



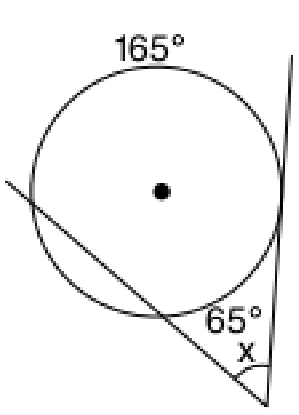
c)



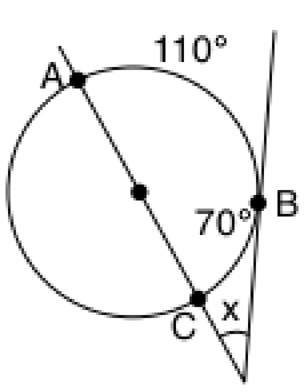
d)



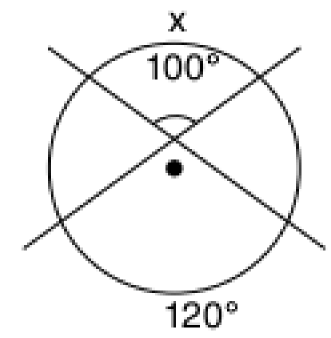
e)



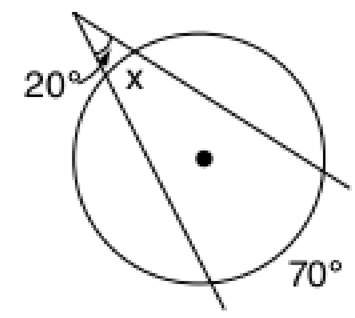
f)



g)

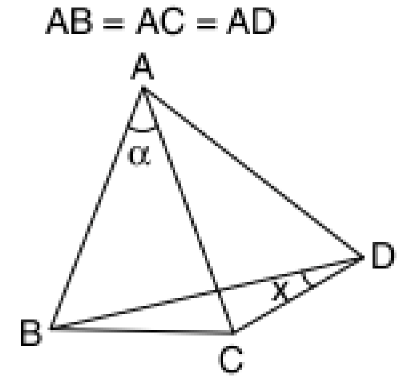


h)



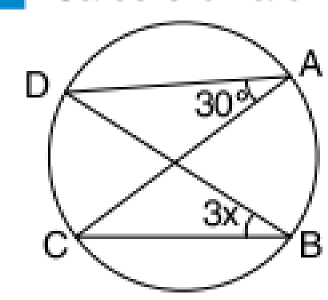
i)

AB = AC = AD

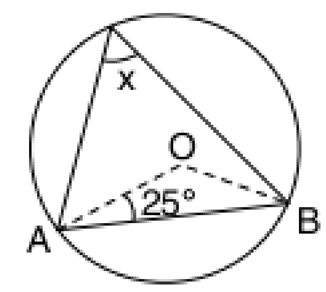


22 Calcule o valor de x em cada caso.

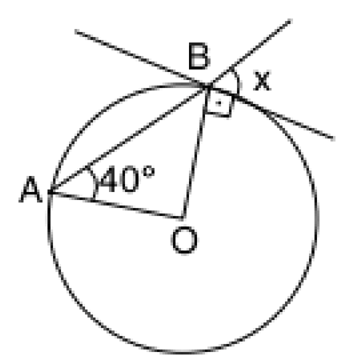
a)



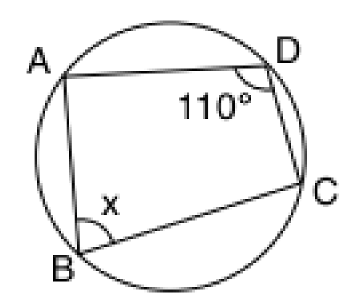
b)



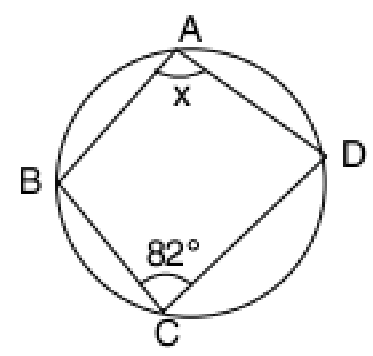
c)



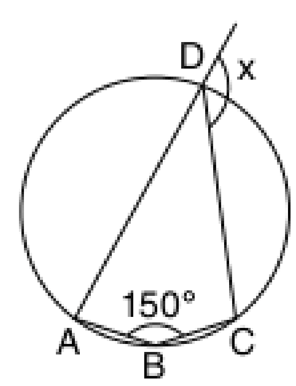
d)



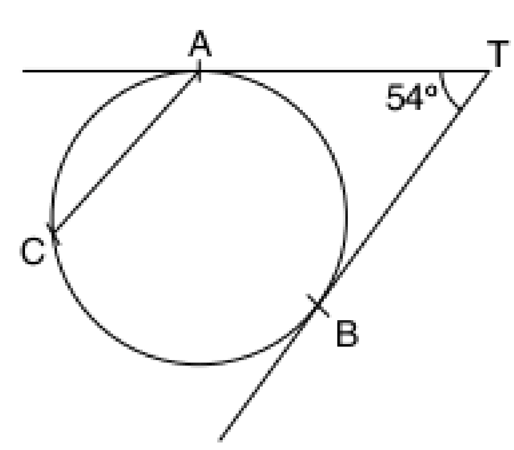
e)



f)



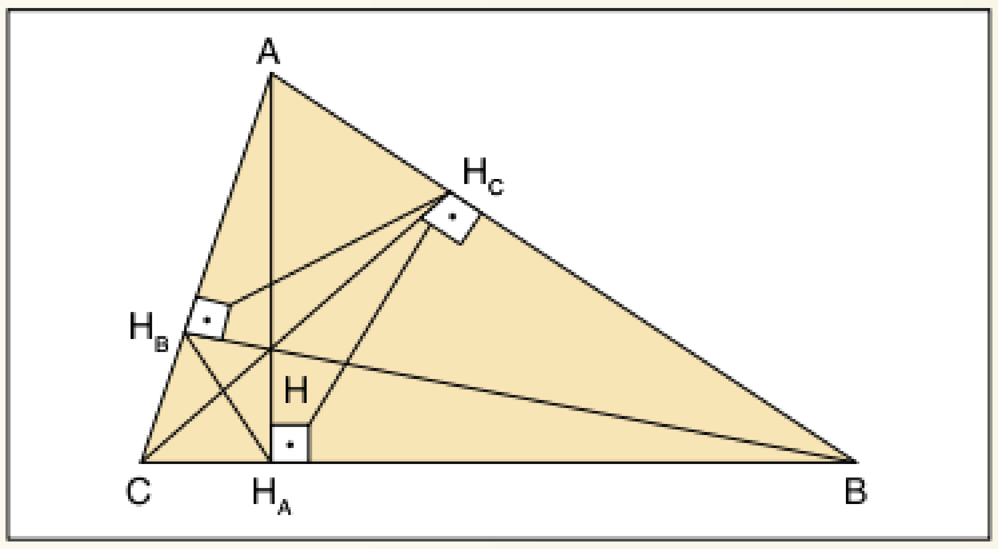
23 Na figura seguinte, $\overline{TA}$ e $\overline{TB}$ são tangentes ao círculo e $\overline{AC} // \overline{TB}$. Calcule os ângulos do ΔABC.



TEXTO COMPLEMENTAR

Triângulo órtico

No capítulo 6, quando estudamos os pontos notáveis no triângulo, analisamos as propriedades de todos os pontos notáveis (baricentro, circuncentro e incentro). A propriedade do ortocentro foi estudada no Texto Complementar do Livro 1. Agora iremos analisar sua propriedade por outro aspecto, através da circunferência.



Triângulo órtico.

H é o ortocentro do ΔABC
$\Delta H_AH_BH_C$ é o triângulo órtico

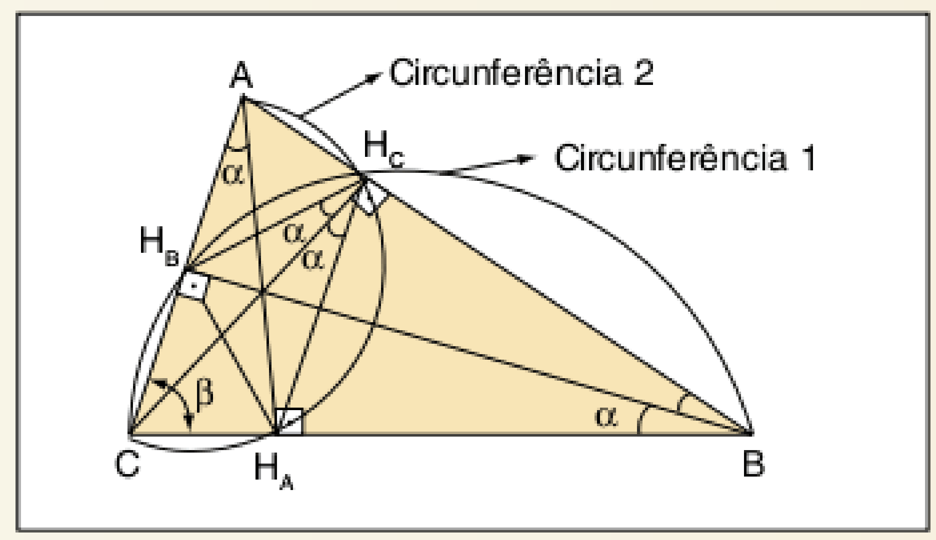
Propriedade: o ortocentro do ΔABC é incentro do $\Delta H_AH_BH_C$.

Demonstração: $H_B\hat{H}_CC = H_B\hat{B}C$ (ângulos inscritos na circunferência 1).

ΔAH_AC e ΔBH_BC possuem o ângulo b em comum e logo $C\hat{A}H_A = C\hat{B}H_B = \alpha$

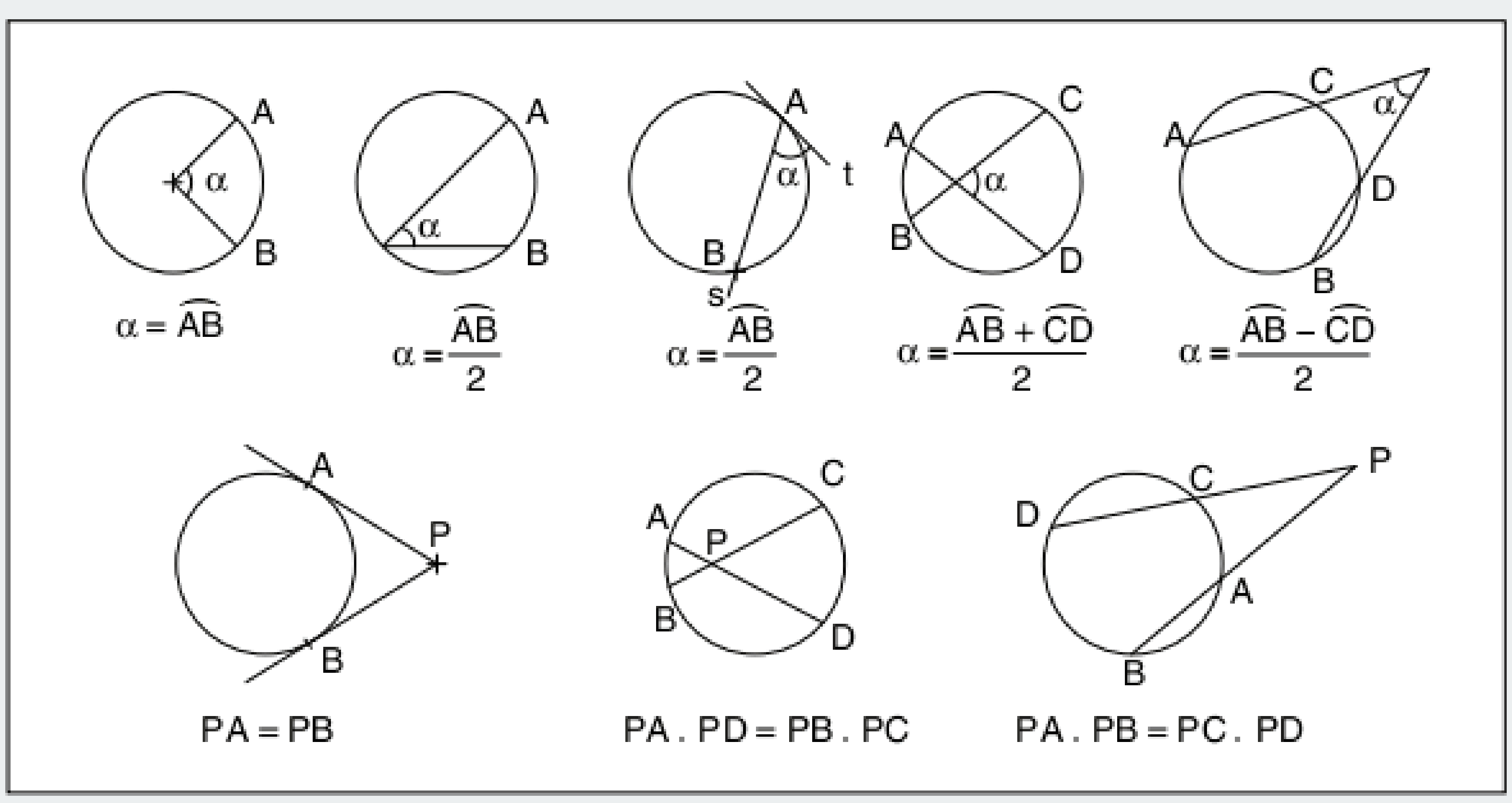
$C\hat{H}_CH_A = C\hat{A}H_A = \alpha$ (ângulos inscritos na circunferência 2)

Analogamente para os outros ângulos:



RESUMINDO

- Neste capítulo de circunferência e círculo, dividimos a teoria em uma parte angular e outra linear.



QUER SABER MAIS?

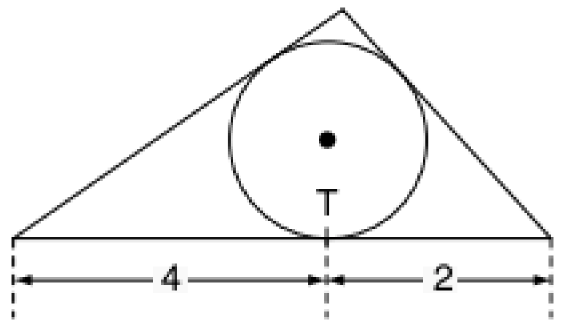
SITE

- Constantes matemáticas – o caso do Pi
<www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1a.html>.

Exercícios complementares

Problemas de tangências

1 **Mackenzie** No triângulo da figura a seguir, a circunferência inscrita tem raio 1 e T é o ponto de tangência.
Então, o menor lado do triângulo mede:

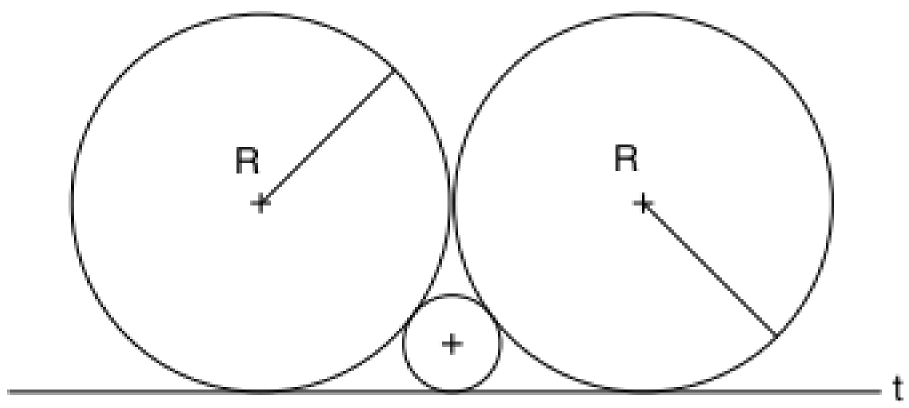


(a) 3
(b) $\frac{20}{7}$
(c) $\frac{7}{2}$
(d) $\frac{9}{2}$
(e) $\frac{30}{7}$

2 Determine a medida de um dos lados não paralelos de um trapézio isósceles, circunscrito a um círculo, sabendo que suas bases medem 30 cm e 10 cm, respectivamente. Calcule também o raio do círculo inscrito.

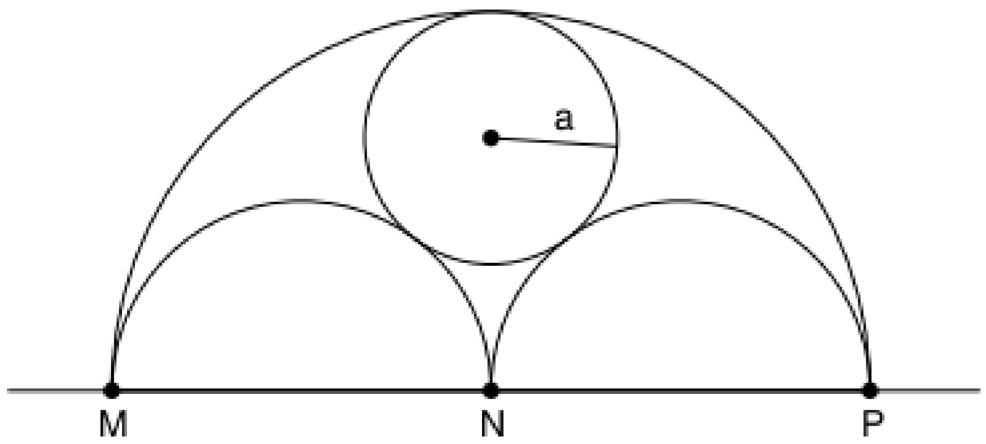
3 Calcular os raios das circunferências tangentes a duas circunferências concêntricas de raios 6 cm e 10 cm.

4 São dados 2 círculos tangentes exteriormente de mesmo raio R. Calcule o raio do círculo tangente aos 2 primeiros e à tangente comum externa.

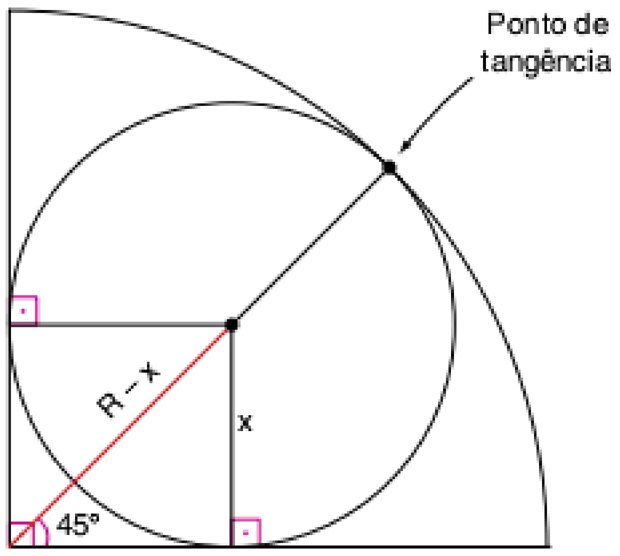


5 Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo cujos lados medem 5; 5 e 6 cm.

6 A circunferência de raio a é tangente às duas semicircunferências menores e à semicircunferência maior. Se MN = NP = R, calcule a um função de R.



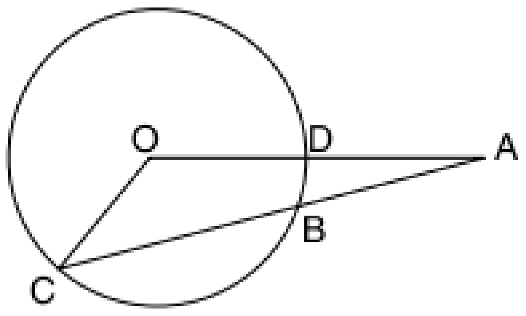
7 Calcular o raio do círculo inscrito em um quadrante de outro círculo de raio R.



8 Uma circunferência de raio R é tangente a duas retas perpendiculares. Calcular os raios das duas circunferências tangentes a essa circunferência e às duas retas.

Problemas gerais

9 **Cesgranrio** Na figura a seguir, AB = 8 cm, BC = 10 cm, AD = 4 cm e o ponto O é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm:



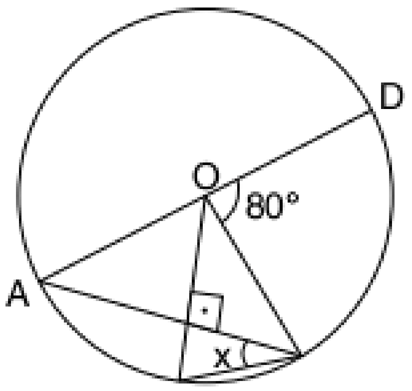
(a) 36
(b) 45
(c) 48
(d) 50
(e) 54

10 A distância entre os centros de duas circunferências tangentes exteriormente é de 33 cm. Determine seus diâmetros, sabendo que a razão entre seus raios é $\frac{4}{7}$.

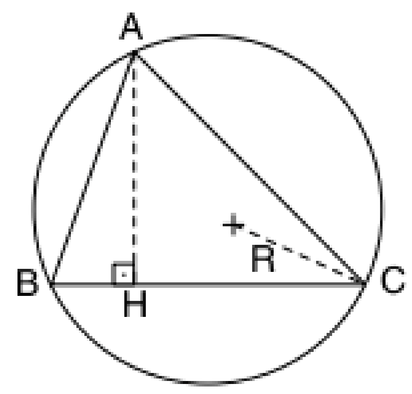
11 A distância entre os centros de duas circunferências tangentes internamente é 5 cm. Se a soma dos raios é 11 cm, determine os raios.

12 Duas circunferências são secantes, sendo 20 cm a distância entre seus centros. Sabendo que o raio da menor circunferência mede 11 cm, determine o raio da maior, que é múltiplo de 6.

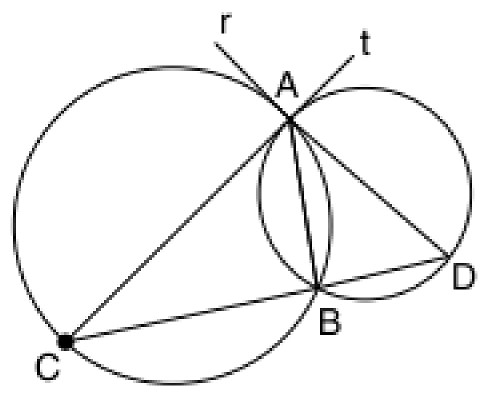
13 Na figura abaixo, calcule o valor de x:



14 Calcule R, raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura, sendo: AB = 8, AC = 12 e AH = 6.



15 As retas t e r são perpendiculares entre si e tangentes às circunferências em A.
Determine AB em função de BC = a e BD = b.



16 Os catetos de um triângulo retângulo são AB = 9 cm e AC = 15 cm. Determinar o raio da circunferência que passa pelo vértice B e é tangente ao cateto AC em C.

17 AB = AC = 10 cm e BC = 16 cm são os lados de um triângulo isósceles ABC. O prolongamento da altura AH intercepta a circunferência circunscrita ao triângulo em K. Calcular HK.

18 M, N e P são os pontos médios dos lados de um triângulo ABC. Achar a razão entre os raios dos círculos circunscritos aos triângulos MNP e ABC.

19 ABCD é um paralelogramo cujas diagonais são AC = 8 m e BD = 10 m. A circunferência que passa pelos pontos B; C e D intercepta o prolongamento da diagonal CA em E. Calcular AE.

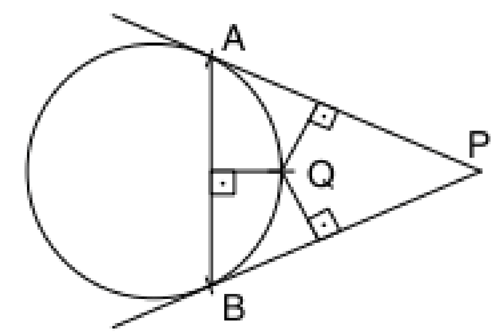
20 $\overline{AB}$ é uma corda de uma circunferência de centro O, tal que o ângulo $O\hat{A}B = 21°$, e $\overline{BC}$ é uma corda paralela ao raio AO. Calcular o ângulo agudo que BC forma com a tangente à circunferência em B.

21 ABCD é um retângulo cujas diagonais se cortam em um ponto I, tal que AI > AB. A circunferência de centro A e raio AI intercepta o prolongamento do lado $\overline{AB}$ em E. Sabendo que o ângulo $A\hat{I}B$ é o quádruplo do ângulo $B\hat{I}E$, calcular o ângulo $B\hat{A}C$.

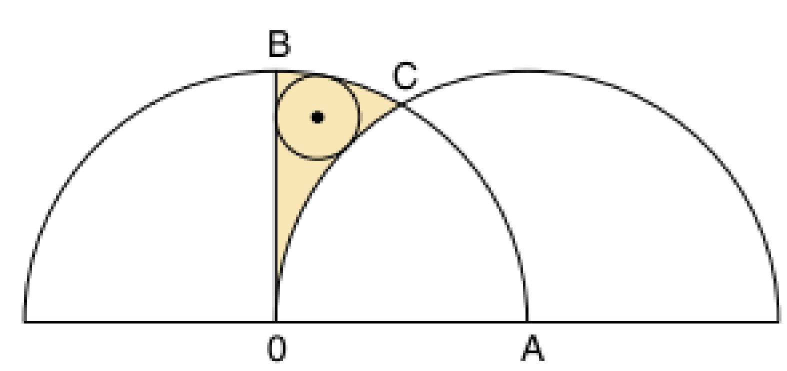
22 Duas circunferências tangenciam-se externamente em M; TP e TQ são retas tangentes a essas circunferências traçadas por um ponto externo T, tal que $P\hat{T}Q = 70°$. Calcule o ângulo $P\widehat{M}Q$.

23 Uma circunferência de centro C, inscrita em um ângulo reto $X\hat{O}Y$, tangencia o lado OX em D. Uma semirreta de origem O, interna ao ângulo $X\hat{O}Y$, intercepta a circunferência C nos pontos A e B, tais que o arco $\overset{\frown}{AD}$ é a metade do arco $\overset{\frown}{BD}$. Calcule o ângulo $B\hat{O}D$.

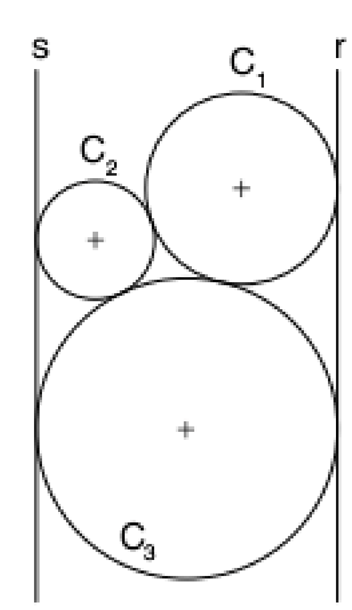
24 Na figura, as semirretas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência. Se as distâncias entre Q e as tangentes são a e b. Ache a distância entre Q e a corda $\overline{AB}$.



25 Em um círculo de centro O e raio R, temos um quadrante AOB. Com centro em A e mesmo raio, traçamos outro círculo que forma com o primeiro triângulo mistilíneo OBC. Calcule o raio da circunferência inscrita nesse triângulo em função de R. Observe a figura:



26 Na figura a seguir, temos r//s. A reta r é tangente às circunferências C_1 e C_3, a reta s é tangente às circunferências C_2 e C_3 e as circunferências tangênciam-se como mostra a figura. As circunferências C_2 e C_1 têm raios b e a, respectivamente. Calcule o raio da circunferência C_3.



12 Áreas

FRENTE 3

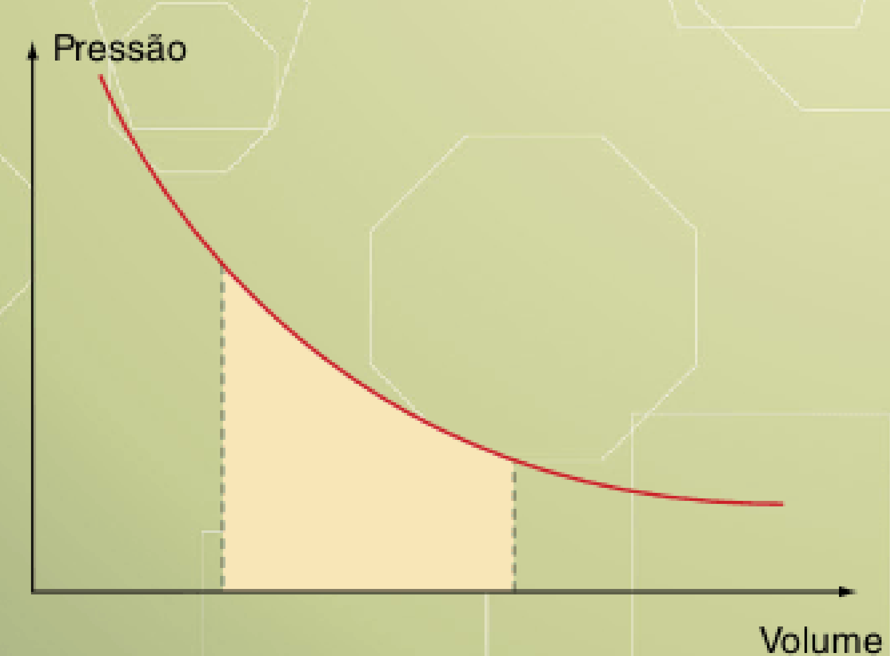
O cálculo de áreas é uma grande ferramenta para a Física.

A área de uma figura plana é um conceito muito utilizado na Física para a compreensão de diversos fenômenos.

Na Cinemática, no gráfico tempo x velocidade.

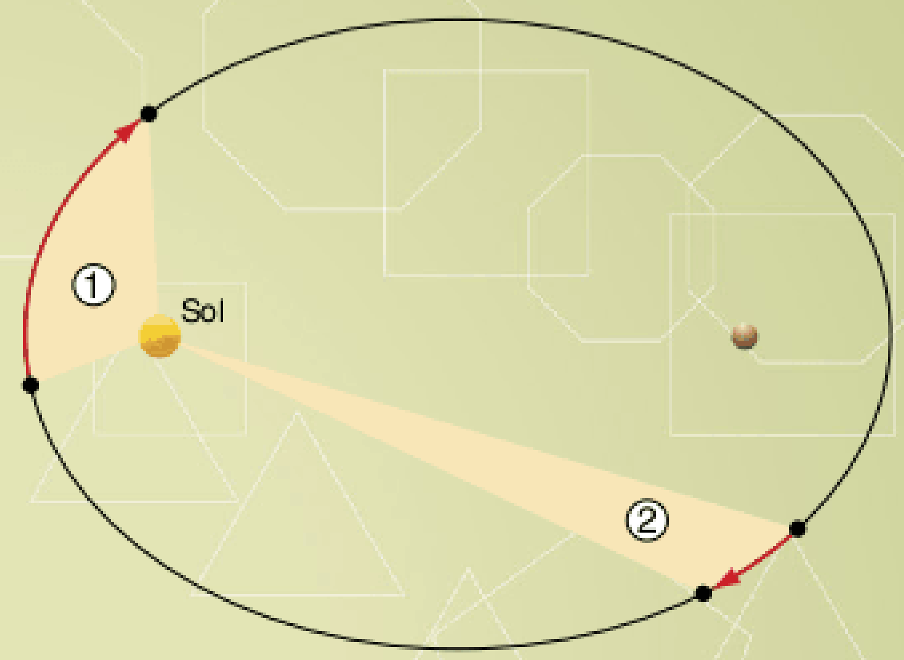
A área colorida representa o deslocamento do móvel no intervalo de tempo entre os instantes t_A e t_B.

Cálculo do trabalho realizado por um gás.



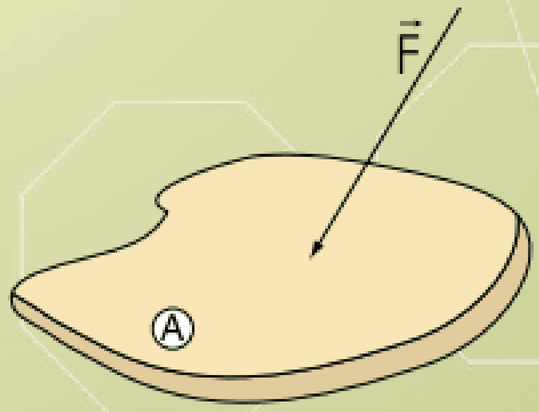
A área hachurada representa o trabalho realizado pelo gás.

Segunda Lei de Kepler (lei das áreas).



A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Assim, no mesmo intervalo de tempo, um planeta girando em torno do Sol percorre áreas iguais. (área 1 = área 2).

Cálculo da pressão exercida por $\vec{F}$.



Para calcular a pressão exercida pela força sobre o corpo, devemos calcular a razão:

$$\frac{\text{componente normal de } \vec{F}}{\text{área } A}$$

Conceitos básicos

Até o capítulo 11 de Geometria Plana, estávamos o tempo todo preocupados em calcular o tamanho de um segmento ou medir ângulos. Agora, vamos definir um número e associá-lo à superfície de uma figura plana. Observe:

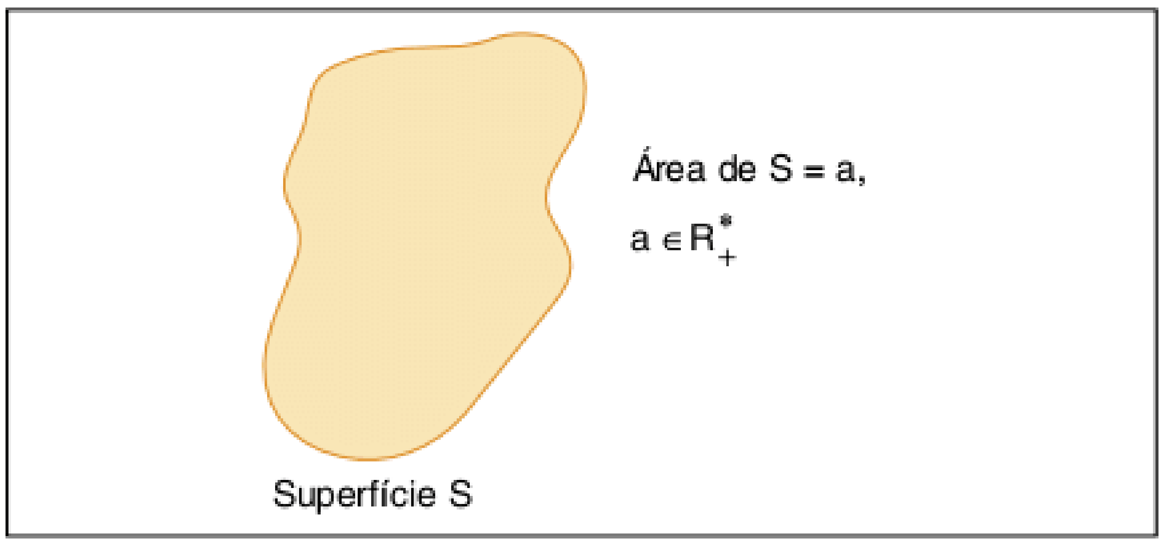


Fig. 1 Definição de área.

Devemos, então, associar áreas (A) a todas as figuras planas conhecidas. Por simplificação, vamos definir a área de um retângulo, e demonstrar todas as outras em função desse resultado. Assim:

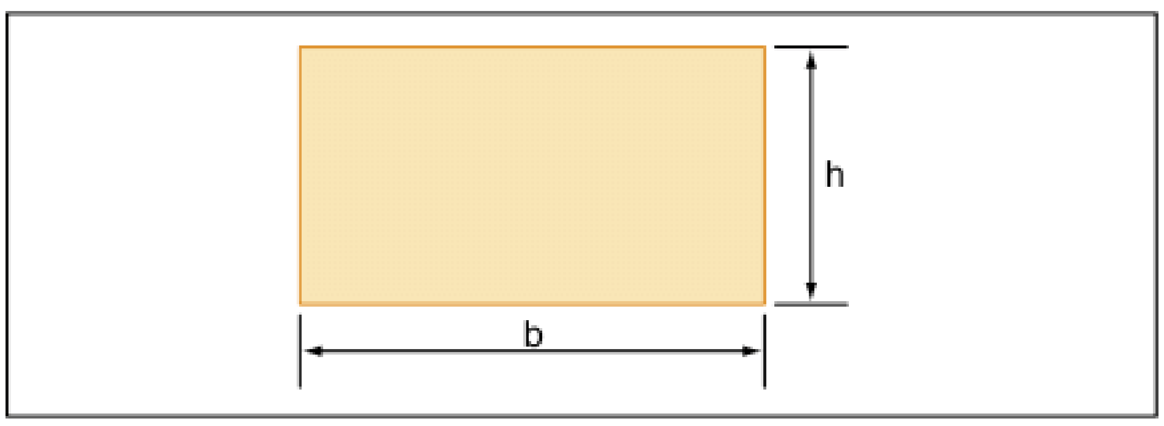


Fig. 2 Retângulo.

Área do retângulo = bh.

Áreas das principais figuras

Quadrado

O quadrado é um retângulo de dimensões iguais, assim:

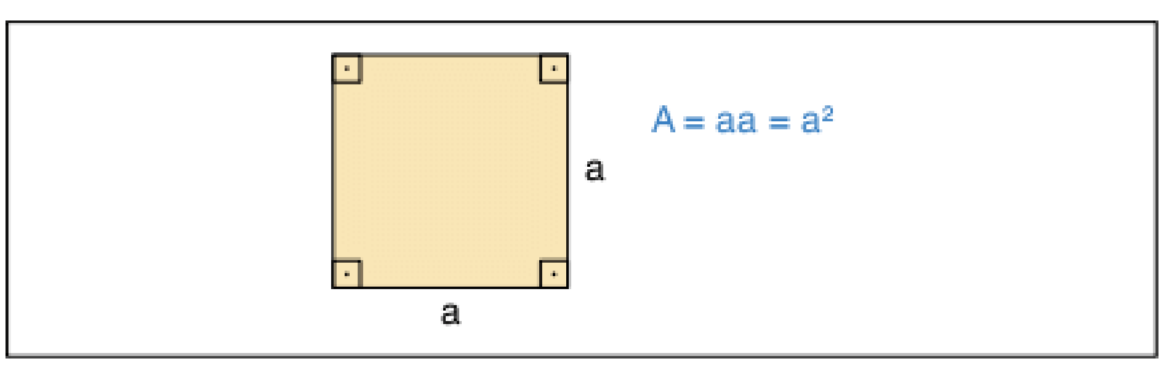


Fig. 3 Quadrado.

Paralelogramo

Podemos decompor qualquer paralelogramo em 3 figuras e constituir um retângulo equivalente.

Observe a figura 4.

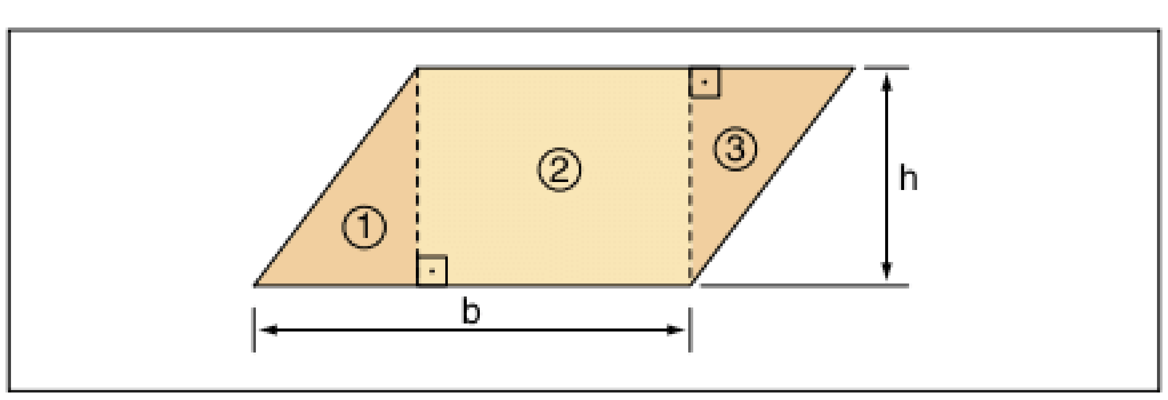


Fig. 4 $\Delta 1 \cong \Delta 3 \Rightarrow$ são equivalentes.

Remontando a figura, temos:

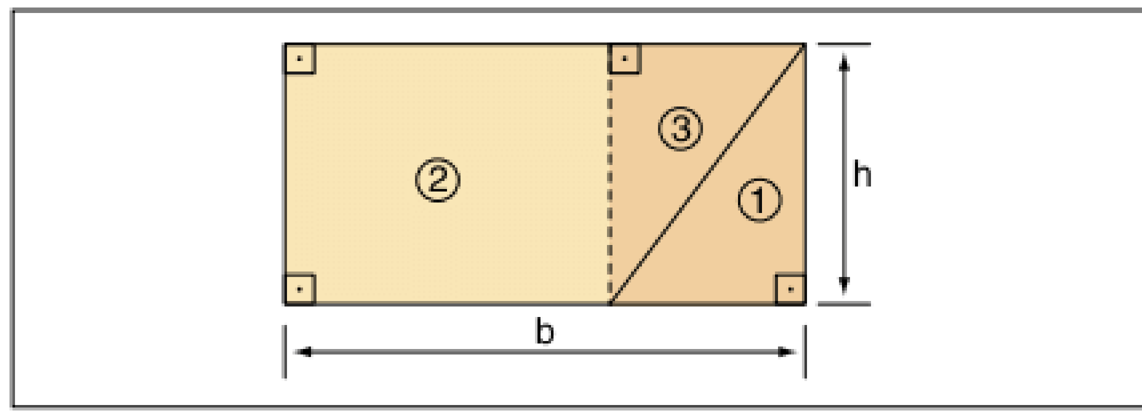


Fig. 5 Paralelogramo.

Retângulo é equivalente a um paralelogramo com as mesmas dimensões:

$$A = bh$$

Triângulo

Um triângulo de base b e altura relativa h é equivalente a um paralelogramo de mesma base b e altura $\frac{h}{2}$. Observe a figura 6.

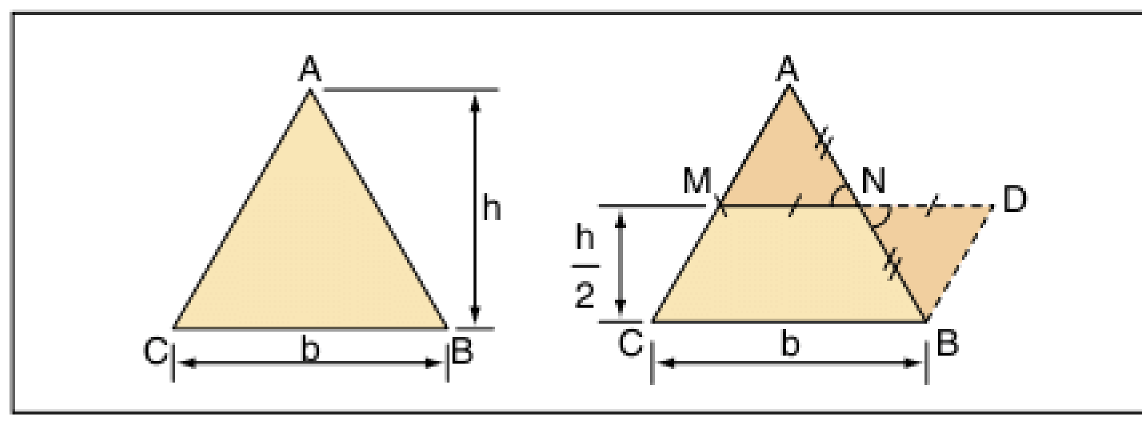


Fig. 6 Triângulo.

$\Delta MNA \cong \Delta DNB$ (LAL) $\Rightarrow$ triângulos equivalentes

ΔABC é equivalente ao paralelogramo MDBC.

$$A_T = b\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{bh}{2}$$

A fórmula apresentada na figura 6 é básica para a demonstração de outras fórmulas do triângulo. Observe:

Triângulo equilátero

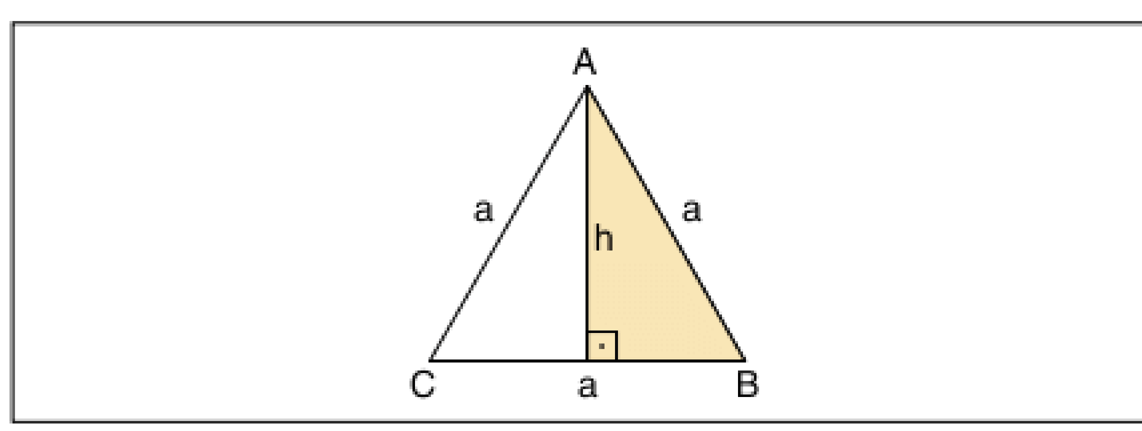


Fig. 7 O ΔABC é um triângulo equilátero.

A altura de um triângulo equilátero é:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{ah}{2} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Triângulo retângulo

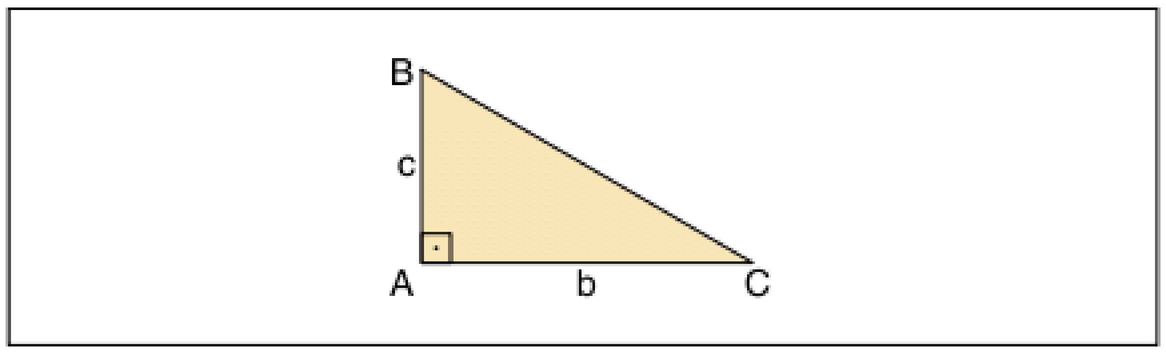


Fig. 8 O ΔABC é um triângulo retângulo.

O cateto é altura em relação ao outro cateto:

$$A = \frac{bc}{2}$$

Observação: *Superfície é um conceito primitivo. Figuras equivalentes possuem a mesma área (fig. 6).*

Fórmula trigonométrica

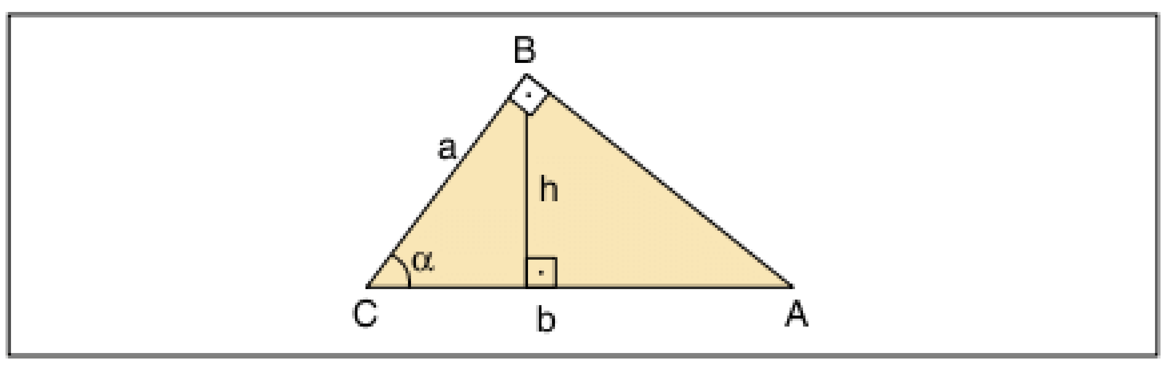


Fig. 9 O ΔABC é um triângulo retângulo.

$$A = \frac{bh}{2}, \text{ mas } \operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a.\operatorname{sen}\alpha$$

$$A = \frac{b.a.\operatorname{sen}\alpha}{2}$$

$$A = \frac{a.b.\operatorname{sen}\alpha}{2}$$

Circunferência inscrita

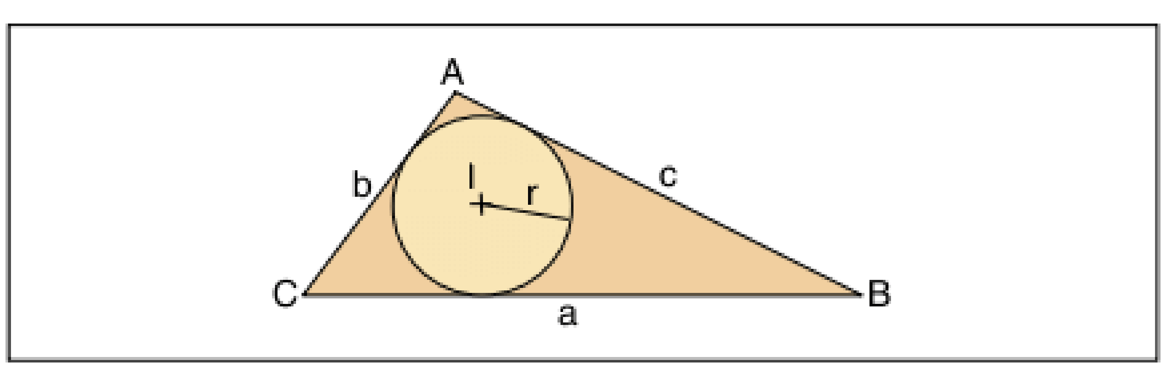


Fig. 10 Circunferência inscrita a um triângulo.

r: raio do círculo inscrito
p: semiperímetro

Ligando o I (incentro) até os vértices A, B e C, temos três triângulos com bases a, b e c e altura r:

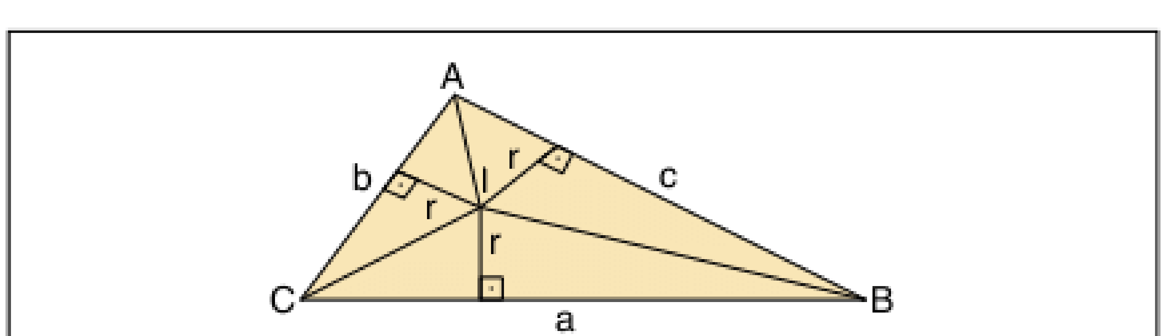


Fig. 11 Incentro.

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = A \therefore \frac{r}{2}(a+b+c) = A$$

$$\therefore A = 2p.\frac{r}{2} \therefore A = pr$$

Circunferência circunscrita

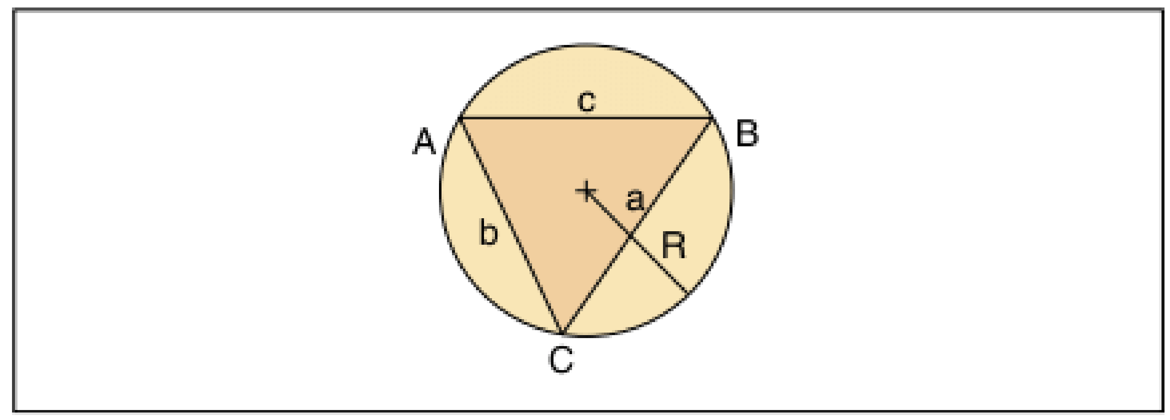


Fig. 12 Circunferência circunscrita a um triângulo.

R: raio do círculo circunscrito

Observe o ΔABC.

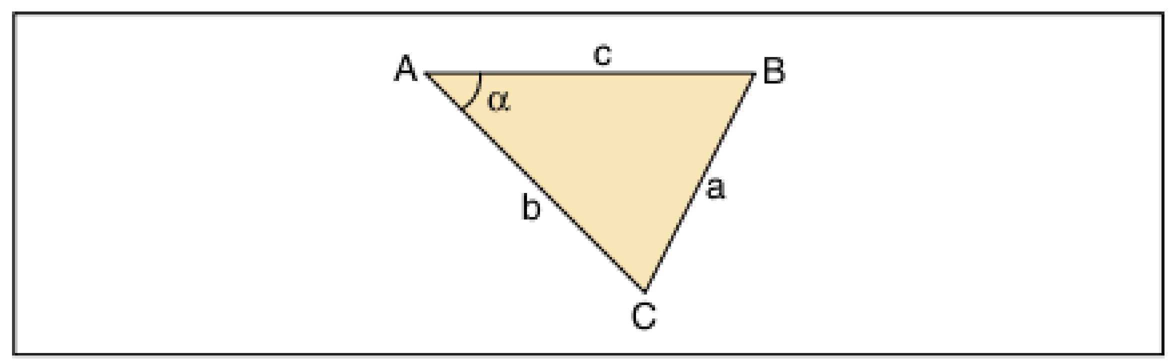


Fig. 13 Determinação da área em função de um ângulo interno.

$$A = \frac{b.c.\operatorname{sen}\alpha}{2}$$

Pelo teorema dos senos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R \therefore \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{2R}$

Assim: $A = bc.\dfrac{a}{2R}.\dfrac{1}{2} \therefore A = \dfrac{abc}{4R}$

Circunferência ex-inscrita

A circunferência ex-inscrita é uma circunferência tangente a um lado e aos prolongamentos dos outros dois. Observe a figura:

I_c: ex-incentro
r_c: raio da circunferência ex-inscrita

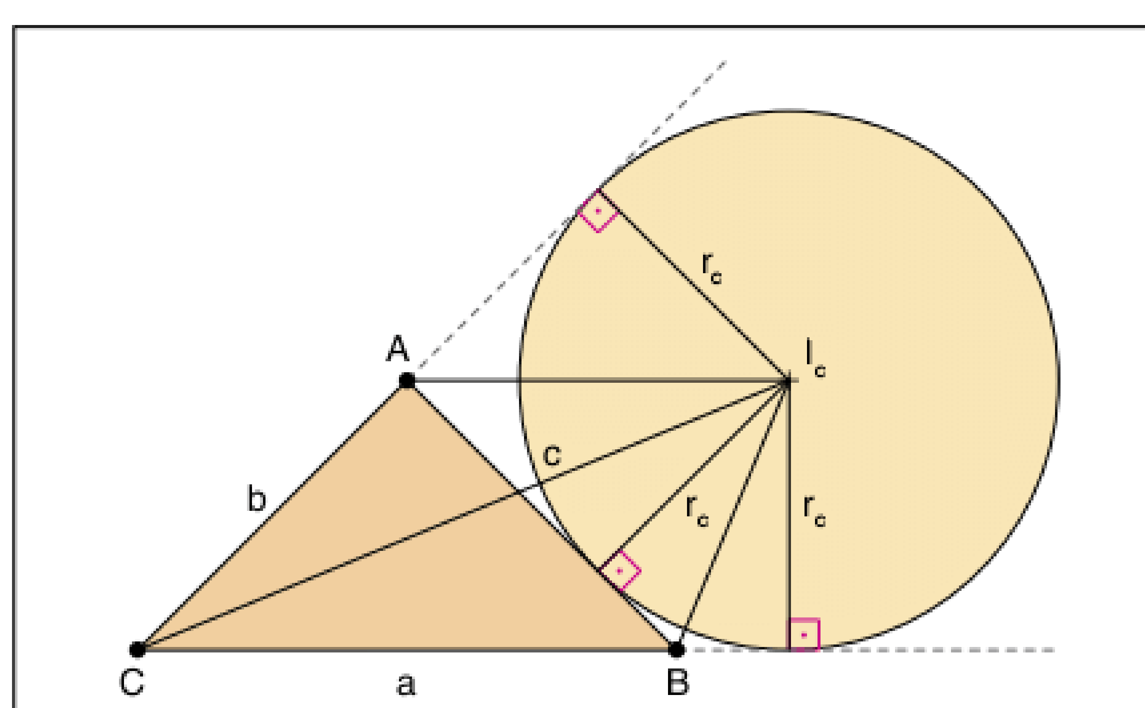


Fig. 14 Circunferência ex-inscrita ao triângulo.

Para calcular a área do triângulo ABC, observe a seguinte expressão que relaciona a área do quadrilátero CAI_CB.

Área (CAI_CB) = área (ΔABC) + área (ΔAI_CB) =
área (ΔAI_CC) + área(ΔCI_CB)
área(ΔABC) = área (ΔAI_CC) + área (ΔCI_CB) – área (ΔAI_CB) =

$$= \frac{br_C}{2} + \frac{ar_C}{2} - \frac{cr_C}{2} = \frac{r_C}{2}.(b+a-c)$$

$$\text{área } (\Delta ABC) = \frac{r_C}{2}.(a+b+c-2c)$$

$$\text{área}(\Delta ABC) = \frac{r_C}{2}.(2p-2c)$$

$$\therefore \text{área}(\Delta ABC) = r_C.(p-c)$$

Analogamente para as outras circunferências ex-inscritas:

$$\text{Área } (\Delta ABC) = r_a \cdot (p-a) = r_b \cdot (p-b) = r_c \cdot (p-c)$$

Fórmula de Herão

Permite o cálculo da área de um triângulo em função dos lados.

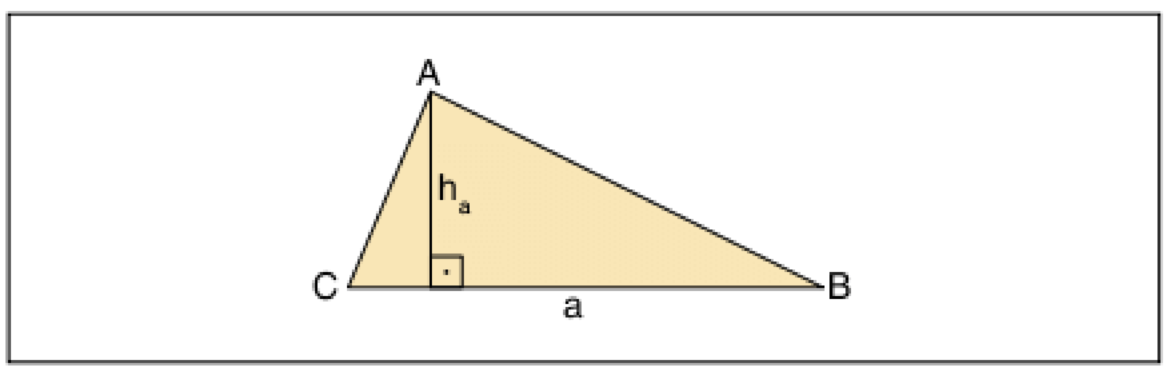


Fig. 15 Triângulo ABC.

No capítulo 10, calculamos os valores das principais cevianas do triângulo. Assim:

$$h_a = \frac{2}{a}.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\therefore A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Trapézio

Vamos decompor o trapézio em dois triângulos. Observe a figura 16.

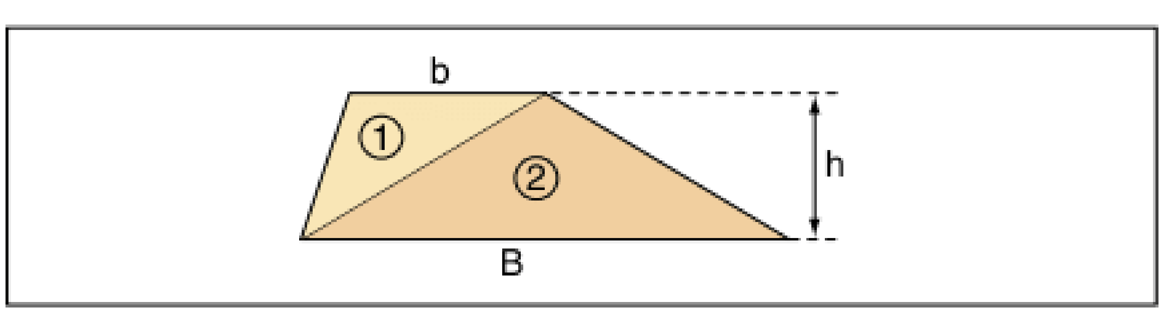


Fig. 16 Trapézio.

$$\Delta 1 = \frac{bh}{2} \text{ e } \Delta 2 = \frac{Bh}{2}$$

$$A_{trap} = \Delta 1 + \Delta 2 \therefore A = \frac{(b+B)h}{2}$$

Losango

Vamos dividir o losango em 4 triângulos retângulos. Observe a figura 17.

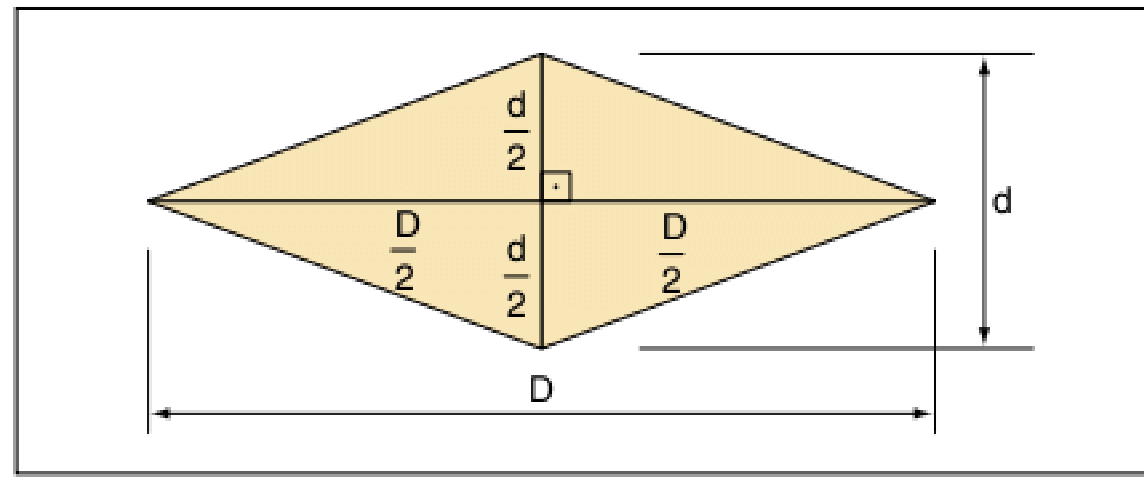


Fig. 17 Losango.

$$A = 4\left(\frac{d}{2}.\frac{D}{2}\right)\frac{1}{2} \therefore A = \frac{Dd}{2}$$

Quadrilátero qualquer

Existe um resultado interessante para o cálculo da área de um quadrilátero cujas diagonais medem d_1 e d_2 e formam um ângulo de medida α. Observe a sequência de figuras.

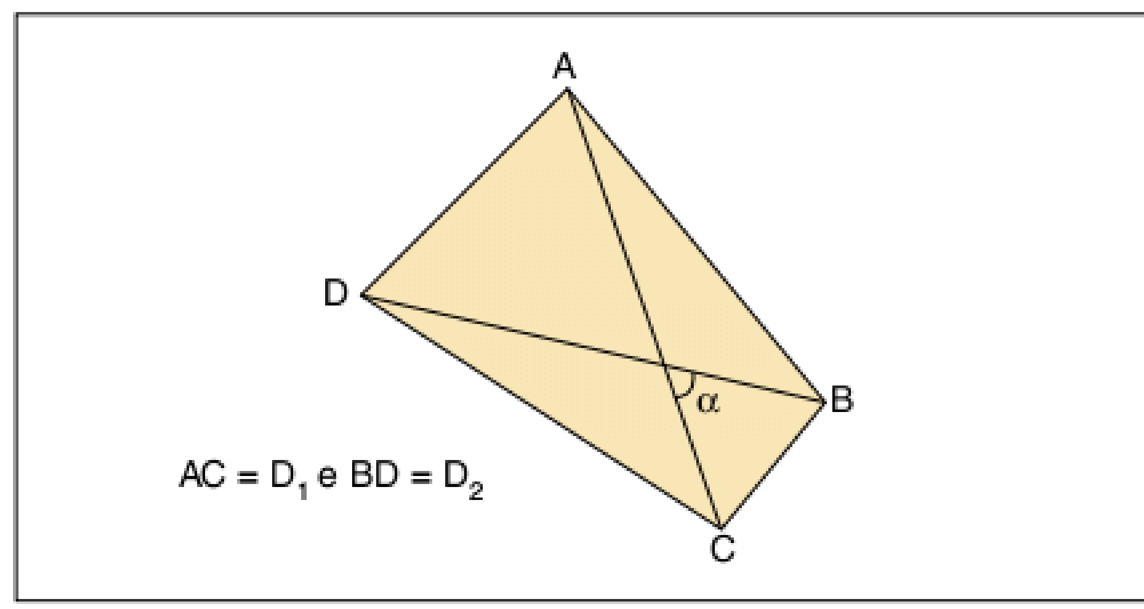


Fig. 18 α é o ângulo entre as diagonais.

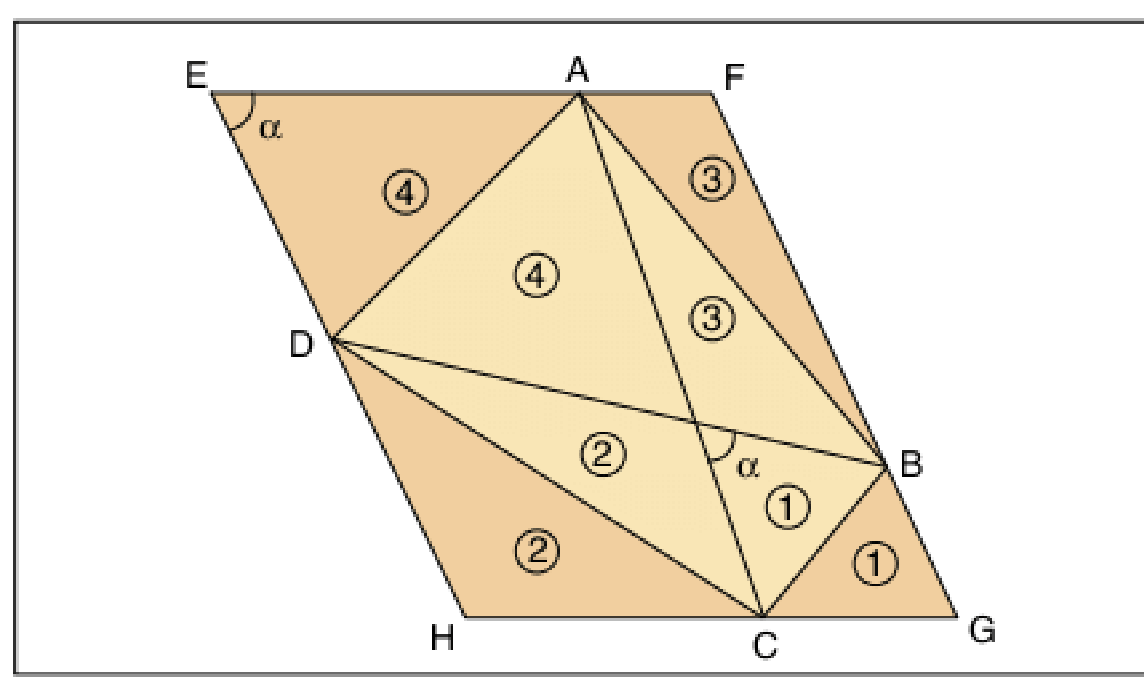


Fig. 19 Paralelogramo.

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais transladadas paralelamente, formando assim um paralelogramo.

A área do quadrilátero ABCD é a metade da área do paralelogramo EFGH devido as congruências dos triângulos 1, 2, 3 e 4.

Então, a área do quadrilátero é $\frac{d_1 . d_2 . \text{sen}\alpha}{2}$.

Polígonos regulares

Vamos calcular os principais elementos dos polígonos regulares para depois calcular suas áreas.

Podemos construir polígonos regulares inscritos ou circunscritos em uma circunferência. Observe os principais elementos:

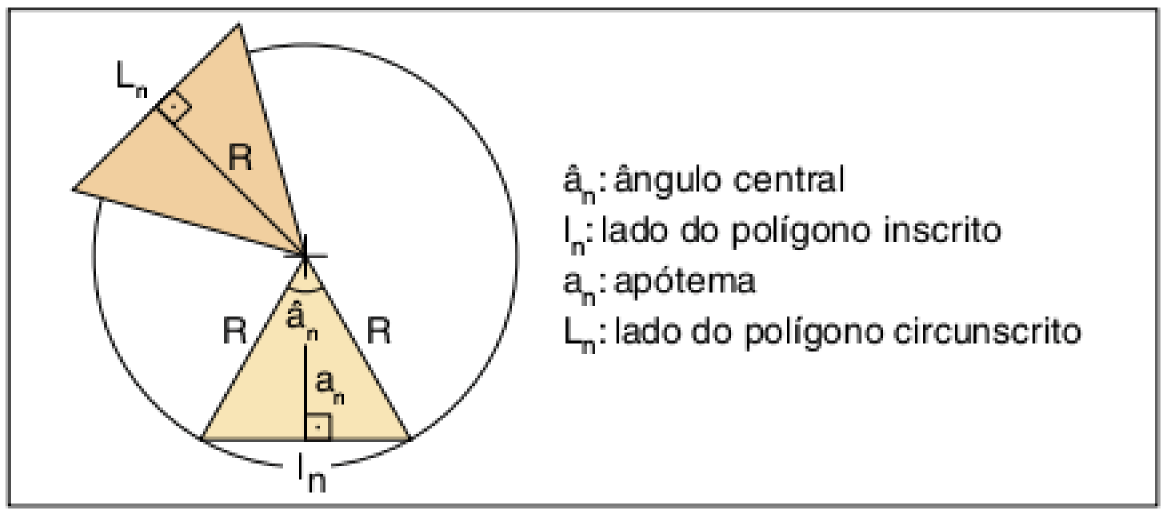


Fig. 20 Elementos dos polígonos regulares.

Triângulo equilátero inscrito

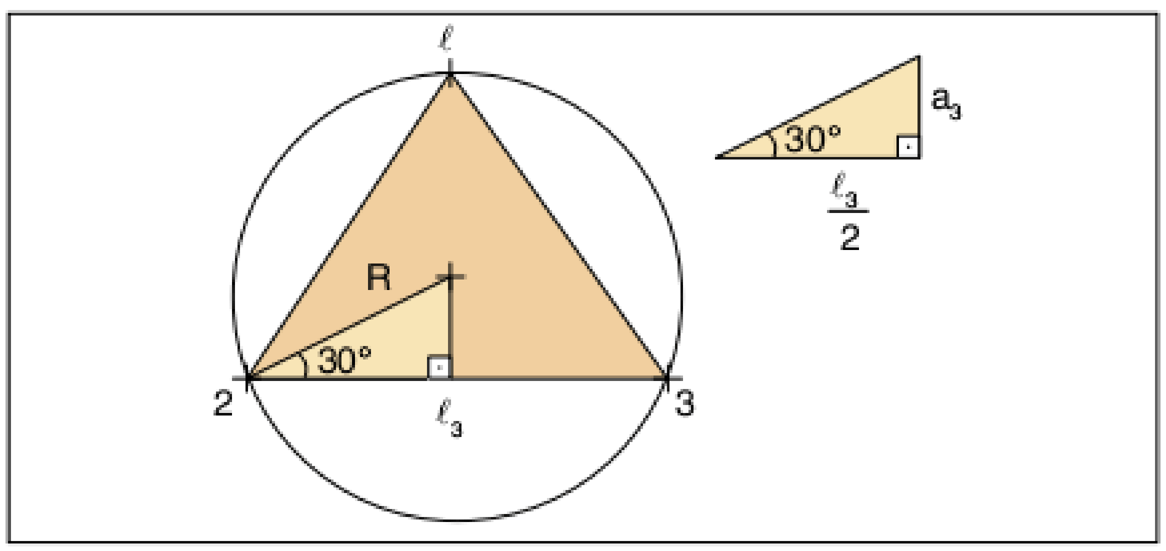


Fig. 21 Triângulo equilátero.

$$\text{sen}30^\circ = \frac{a_3}{R} \therefore \frac{1}{2} = \frac{a_3}{R} \Rightarrow a_3 = \frac{R}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{R} \therefore \ell_3 = R\sqrt{3}$$

$$\text{área} = \ell_3^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \therefore \text{área} = \frac{3\sqrt{3}}{4} . R^2$$

Triângulo equilátero circunscrito

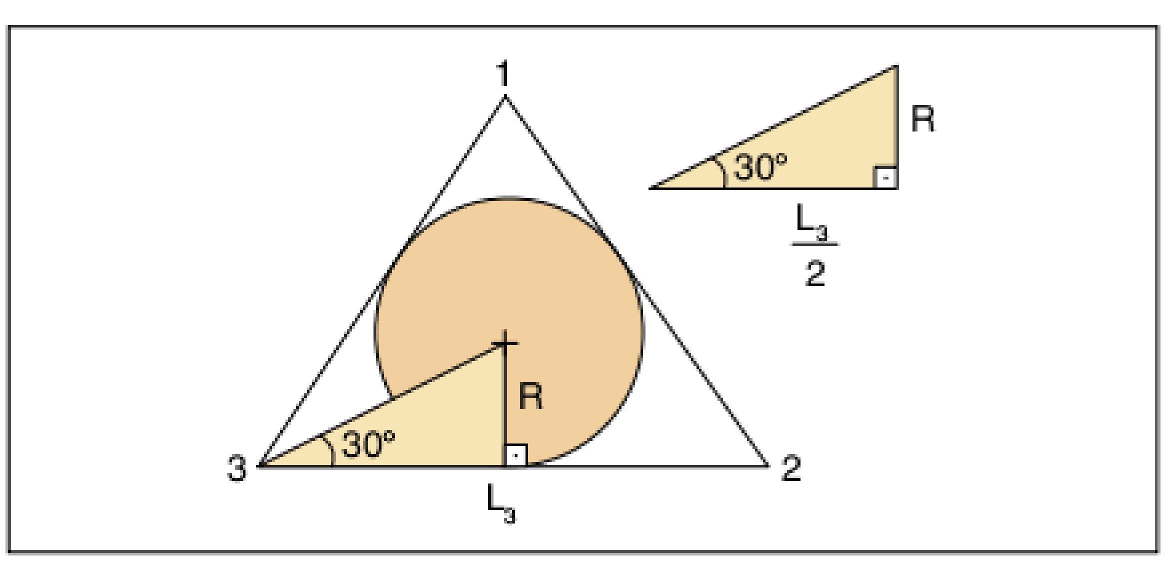


Fig. 22 Triângulo equilátero.

$$\text{tg}30^\circ = \frac{R}{\frac{L_3}{2}} \therefore L_3 = 2\sqrt{3}R$$

$$\text{área} = L_3^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \therefore \text{área} = 3\sqrt{3}R^2$$

Quadrado inscrito

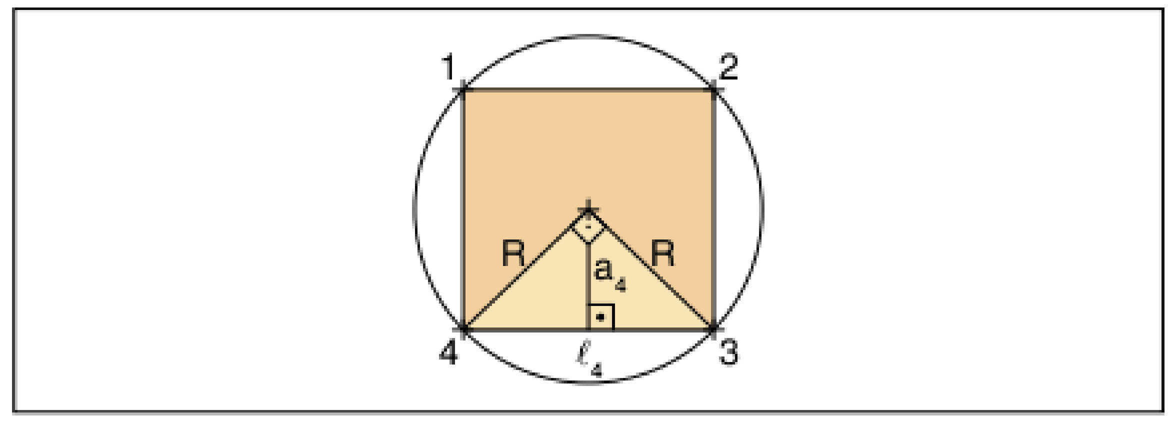


Fig. 23 Quadrado inscrito.

$$\ell_4 = R\sqrt{2}$$

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{área} = \ell_4^2 \therefore \text{área} = 2R^2$$

Quadrado circunscrito

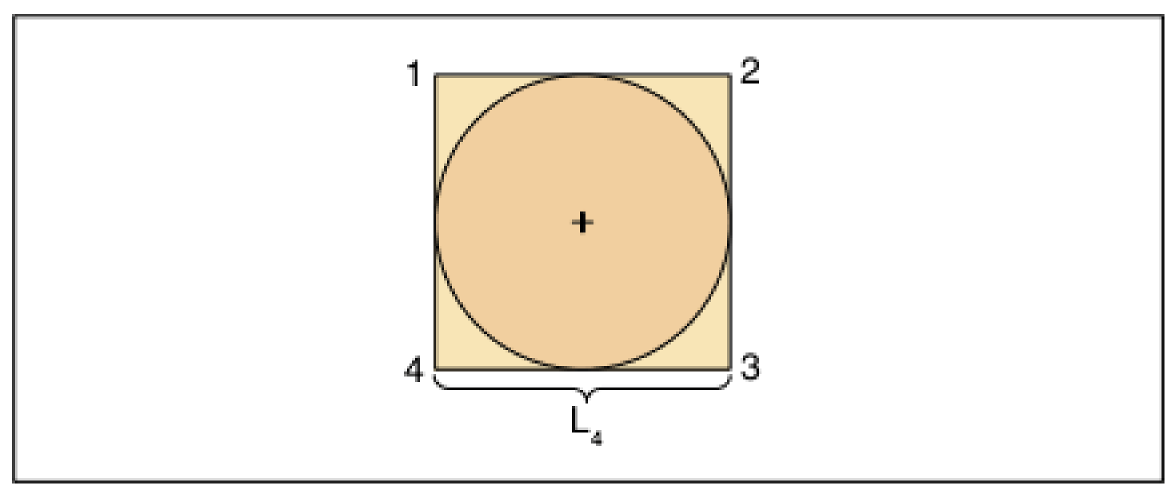


Fig. 24 Quadrado circunscrito.

$$L_4 = 2R$$

$$\text{área} = 4R^2$$

Hexágono regular inscrito

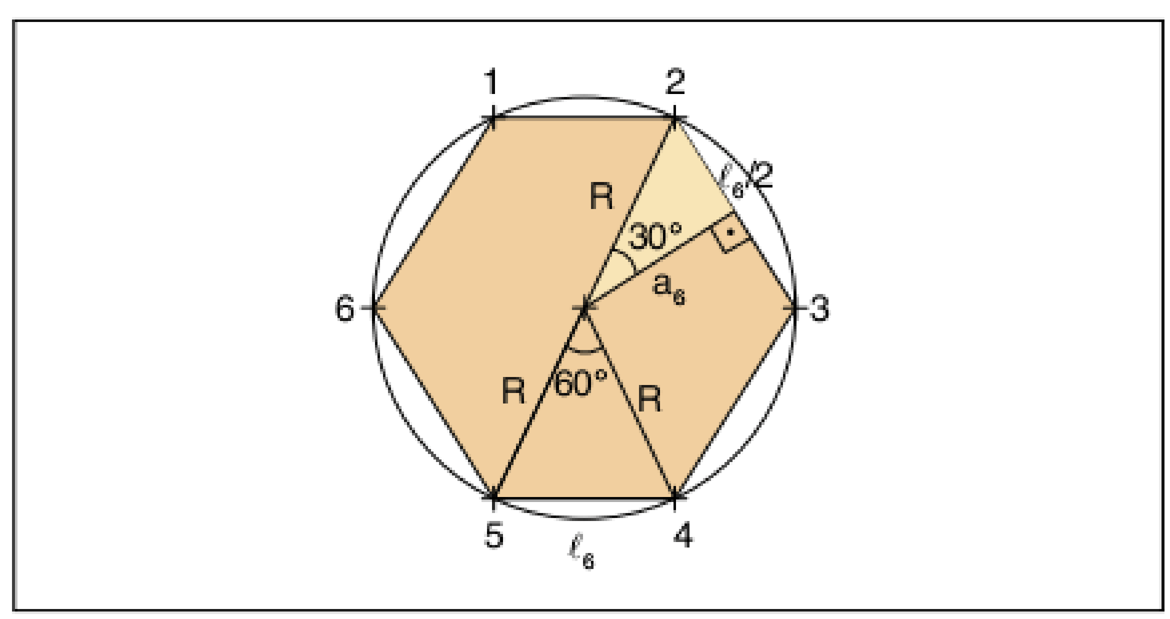


Fig. 25 Hexágono.

No hexágono regular, temos 6 triângulos equiláteros, assim:

$$\ell_6 = R$$

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{área} = 6 . \frac{\ell_6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

Octógono regular inscrito

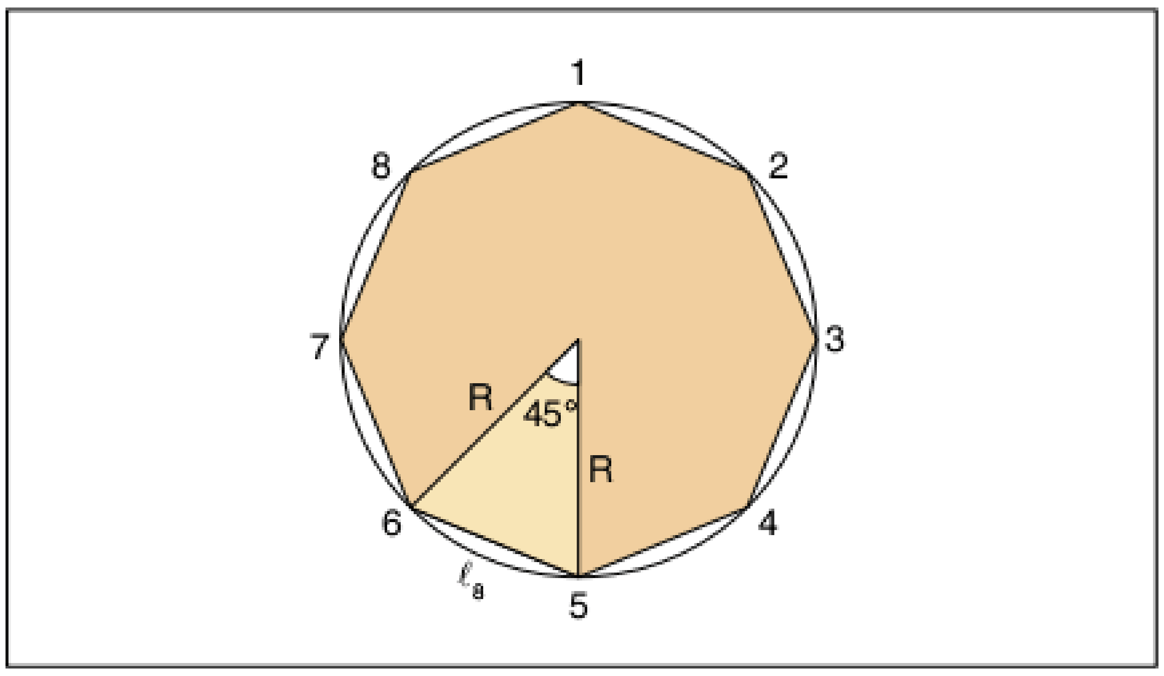


Fig. 26 Octógono regular.

$$\ell_8^2 = R^2 + R^2 - 2RR\cos 45^\circ$$
$$\therefore \ell_8^2 = R^2.\left(2-\sqrt{2}\right)\therefore$$
$$\ell_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}R$$
$$\text{área} = 8.\frac{R^2\text{sen}45^\circ}{2}$$
$$\text{área} = 2\sqrt{2}R^2$$

Decágono inscrito

O decágono regular inscrito é formado por dez triângulos isósceles com ângulo do vértice de 36º. Observe a figura 27:

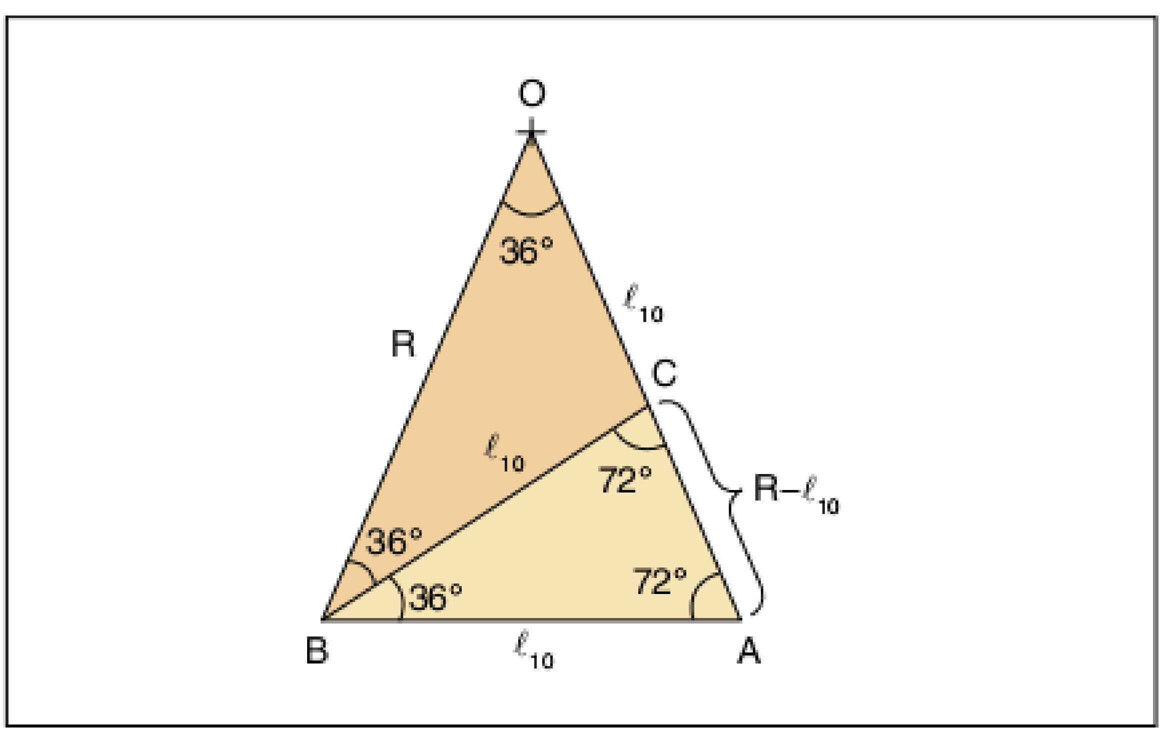


Fig. 27 Triângulo componente do decágono regular.

$$\Delta OAB \sim \Delta BCA$$
$$\frac{\ell_{10}}{R-\ell_{10}} = \frac{R}{\ell_{10}}$$
$$\ell_{10}^2 + R.\ell_{10} - R^2 = 0 \therefore \ell_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4.1\left(-R^2\right)}}{2}$$
$$\ell_{10} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2} \text{ convém a raiz positiva, assim:}$$
$$\ell_{10} = \frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

Dodecágono inscrito

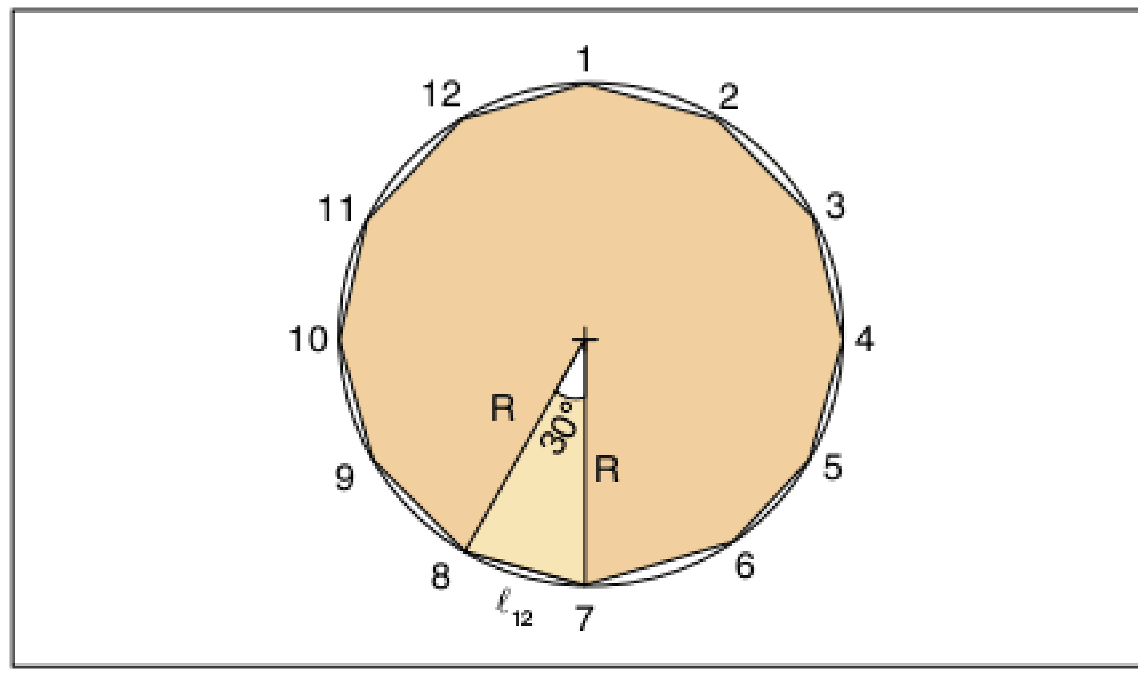


Fig. 28 Dodecágono regular.

$$\ell_{12}^2 = R^2 + R^2 - 2RR.\cos 30^\circ \therefore$$
$$\ell_{12}^2 = R^2\left(2-\sqrt{3}\right)$$
$$\ell_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}R$$
$$\text{área} = 12.\frac{R^2.\text{sen}30^\circ}{2}$$
$$\text{área} = 3R^2$$

Área do círculo

O círculo é um polígono regular de infinitos lados. Podemos montar uma tabela e mostrar os diversos valores para as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos:

n	Polígono inscrito	Polígono circunscrito
3	$1{,}29R^2$	$5{,}19R^2$
4	$2R^2$	$4R^2$
6	$2{,}59R^2$	$3{,}46R^2$
8	$2{,}82R^2$	$3{,}31R^2$
10	$2{,}93R^2$	$3{,}24R^2$
12	$3R^2$	$3{,}21R^2$
....	....	....
n	πR^2	πR^2

Tab. 1 Área de polígonos inscritos e circunscritos se aproximando da área do círculo.

Setor circular

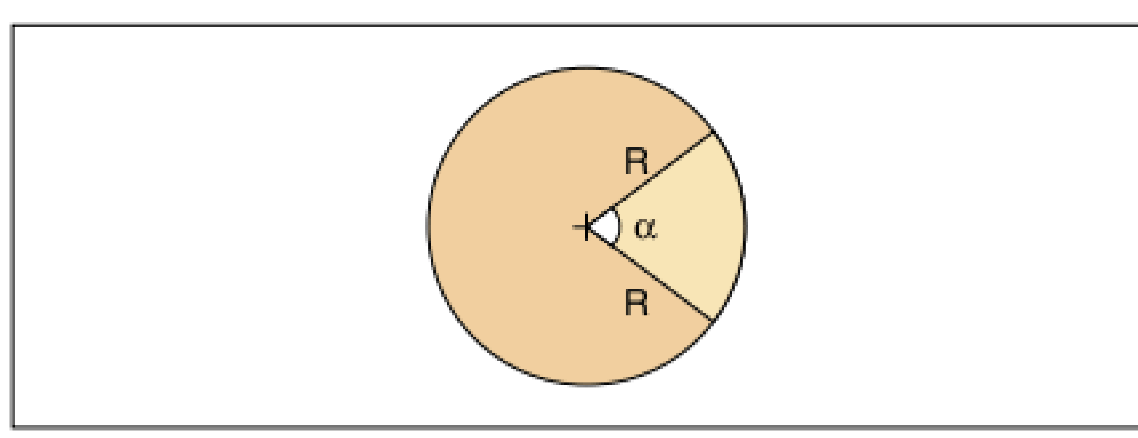


Fig. 29 Círculo.

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \text{——} & \pi R^2 \\ \alpha & \text{——} & A \end{array} \qquad A = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

Coroa circular

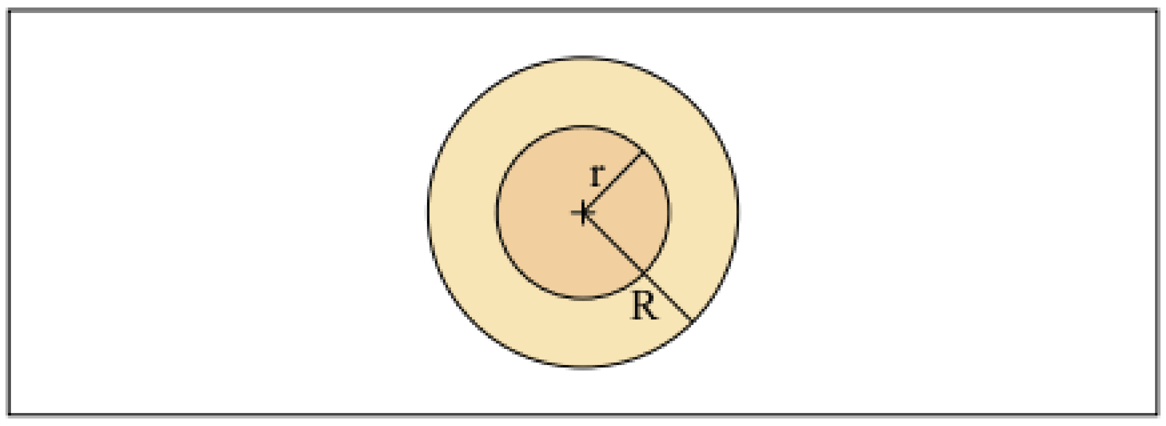


Fig. 30 Coroa circular.

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Segmento circular

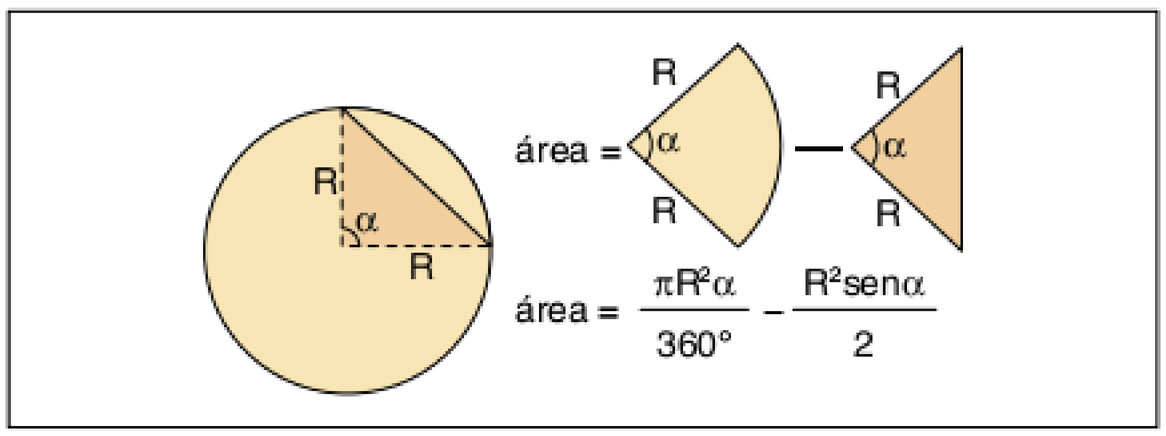
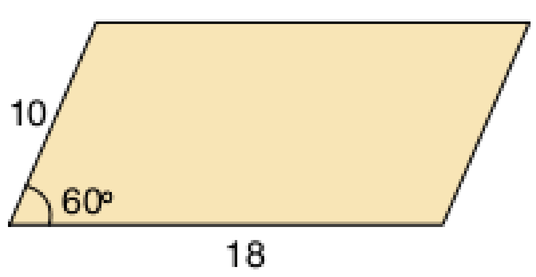


Fig. 31 Segmento circular.

$$A = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180°} - \text{sen}\alpha\right)$$

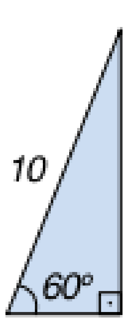
Exercícios resolvidos

1 Calcule a área do paralelogramo:



Resolução:

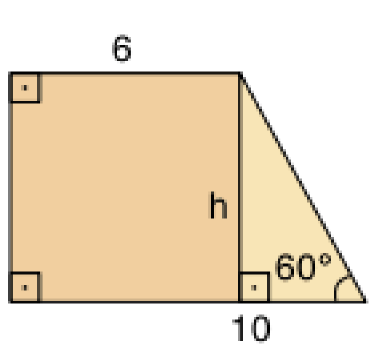
Traçando a altura do paralelogramo, temos:



$$sen60^o = \frac{h}{10} \therefore h = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

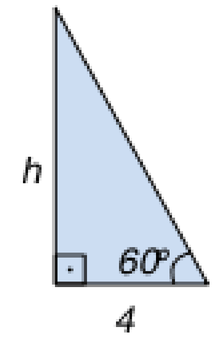
$$área = (18).\left(5\sqrt{3}\right) = 90\sqrt{3}$$

2 Calcule a área do trapézio:



Resolução:

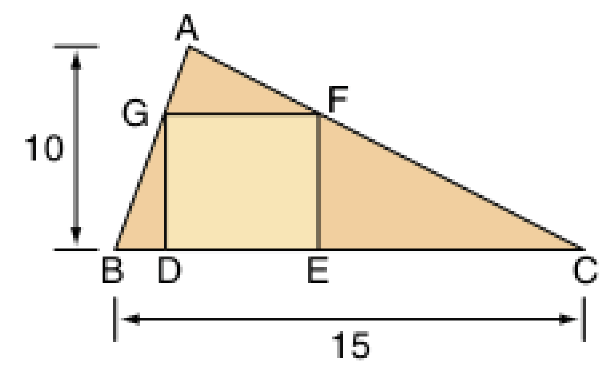
Traçando a altura do trapézio, temos:



$$tg60^o = \frac{h}{4} \therefore h = 4\sqrt{3}$$

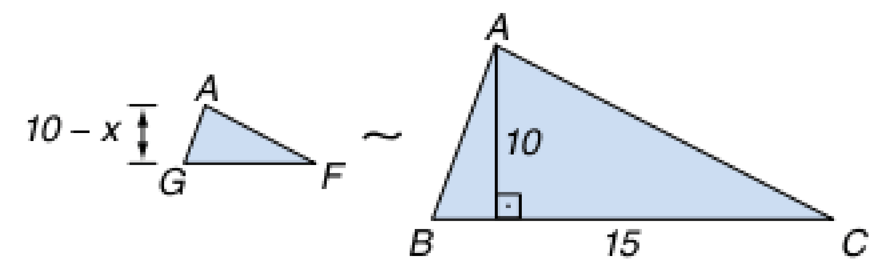
$$área = \frac{(6+10)4\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$$

3 Determine a área do quadrado inscrito no triângulo ABC, sendo BC = 15 m e a altura relativa a base $\overline{BC}$ é igual a 10 m.



Resolução:

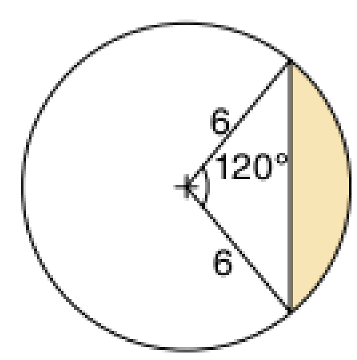
$\Delta AGF \sim \Delta ABC$



$$\frac{x}{15} = \frac{10-x}{10} \therefore \frac{x}{3} = \frac{10-x}{2}$$

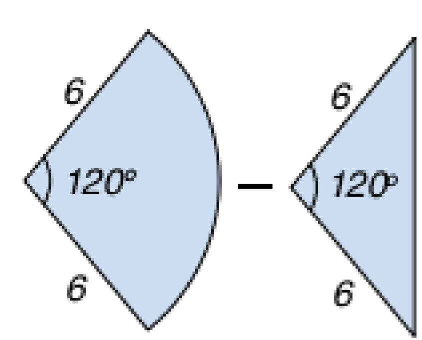
$2x = 30 - 3x \therefore 5x = 30 \therefore x = 6\ m \Rightarrow área = 36\ m^2$

4 Sendo 6 m o raio do círculo, calcule a área colorida.



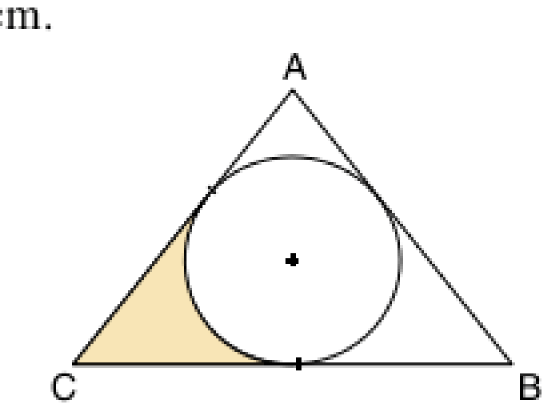
Resolução:

Para calcular a área do segmento circular:



$$= \frac{\pi(6)^2.120^o}{360^o} - \frac{6^2 sen120^o}{2} = 12\pi - 18\pi\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(12\pi - 9\sqrt{3}\right) m^2$$

5 Calcule a área colorida sendo ABC um triângulo equilátero de lado 6 cm.

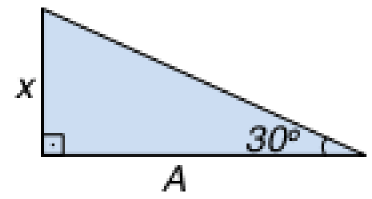


Resolução:

Vamos montar uma expressão para calcular a área colorida.

$$A = \frac{\triangle - \bigcirc}{3}$$

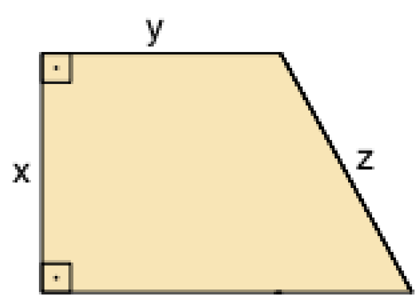
Precisamos calcular o raio do círculo.



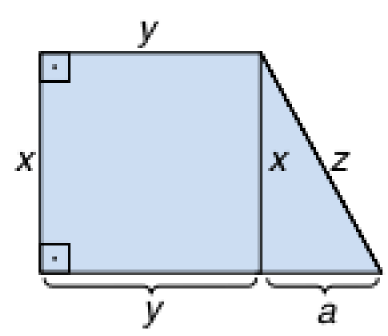
$$tg\,30^o = \frac{x}{3} \therefore \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{3} \therefore x = \sqrt{3}\ cm$$

$$A = \frac{\frac{6^2\sqrt{3}}{4} - \pi\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} \Rightarrow \left(3\sqrt{3} - \pi\right)\ cm^2$$

6 Calcule a área do trapézio da figura:



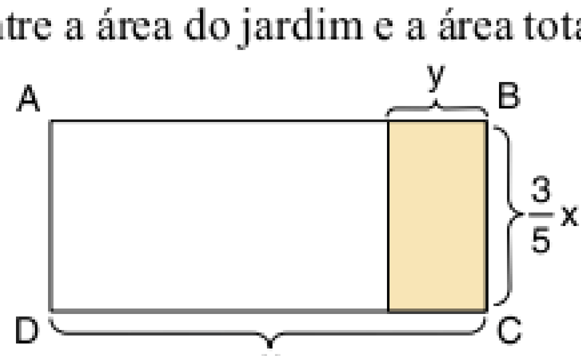
Resolução:



$$z^2 = x^2 + a^2 \therefore z^2 - x^2 = a^2 \therefore a = \sqrt{z^2 - x^2}$$

$$área = \left[y + (y + a)\right].\frac{x}{2} = \left(2y + \sqrt{z^2 - x^2}\right).\frac{x}{2}$$

7 O retângulo ABCD representa um terreno retangular cuja largura é $\frac{3}{5}$ do comprimento. A parte colorida representa um jardim retangular cuja largura é também $\frac{3}{5}$ do comprimento. Qual a razão entre a área do jardim e a área total do terreno?

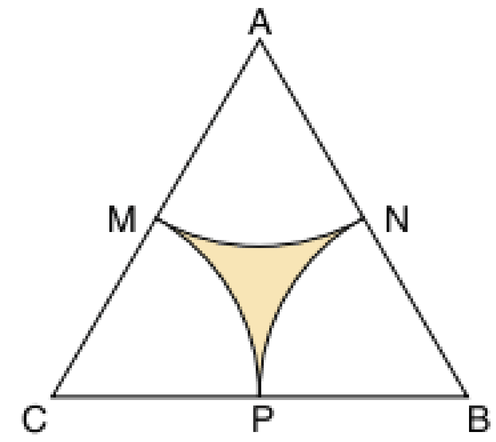


Resolução:

$$y = \frac{3}{5}.\left(\frac{3}{5}x\right) \therefore y = \frac{9}{25}x$$

$$\% = \frac{\frac{3}{5}x.\ y}{x.\frac{3}{5}x} = \frac{y}{x} = \frac{9}{25} = 36\%$$

8 Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero de lado igual a 2 m. $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$ e $\widehat{PM}$ são arcos de circunferências com centros nos vértices A, B e C, respectivamente, e de raios todos iguais a 1 m. Calcule a área da região preenchida.



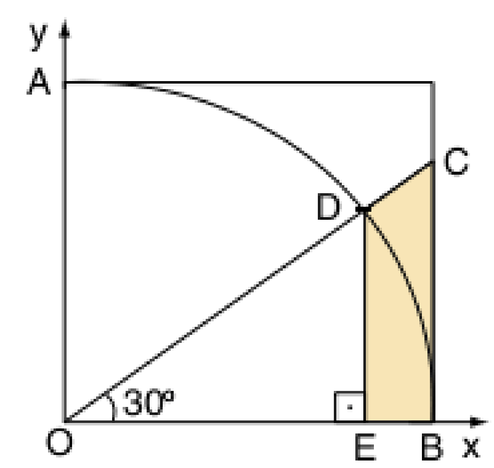
Resolução:

Primeiro, precisamos tomar o triângulo equilátero.

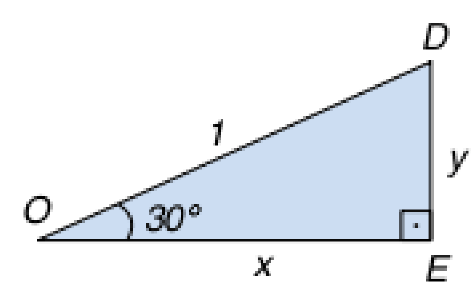
$$A = \triangle - 3 \cdot \left(\text{setor } 60^o \text{ de raio } 1\right) = \frac{(2)^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi(1)^2}{2} = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)\ m^2$$

Depois, encontrar os pontos médios e traçar os arcos.

9 Na figura, $\widehat{AB}$ é um arco de circunferência de raio 1 m. Determine a área do trapézio retângulo BCDE.



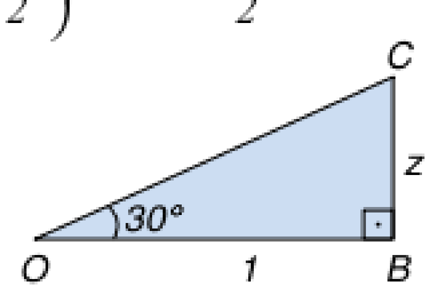
Resolução:



$$sen30^o = y \text{ e } cos30^o = x$$

$$y = \frac{1}{2} \text{ e } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BE = 1 - x = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } DE = \frac{1}{2}$$

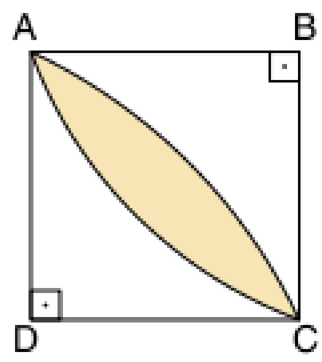


$$tg\,30^o = \frac{z}{1} \therefore z = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

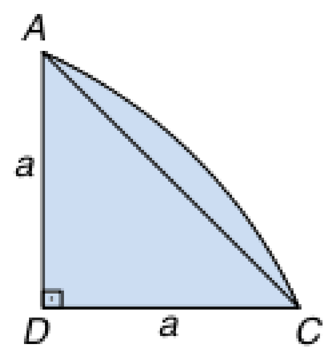
$$área = \frac{(DE + BC)EB}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow área = \frac{\sqrt{3}}{24}\ m^2$$

10 O quadrilátero ABCD é um quadrado de lado a. Calcule a área colorida.



Resolução:
Traçando a diagonal $\overline{AC}$, temos o seguimento circular:



$$\acute{a}rea = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{\pi a^2 - 2a^2}{4} = a^2\left(\frac{\pi - 2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \acute{a}rea_{Total} = 2\acute{a}rea = a^2\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)$$

Relações métricas entre áreas

Triângulos de mesma altura

Triângulos de mesma altura possuem áreas proporcionais às bases. Observe a figura 32.

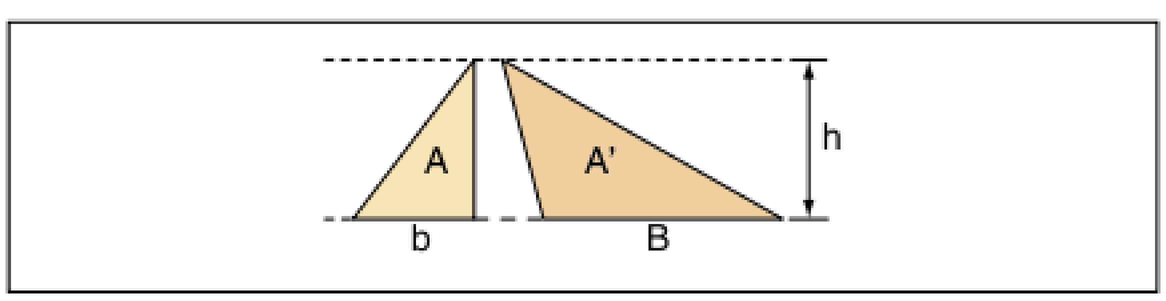


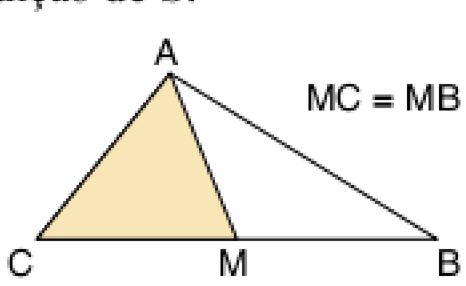
Fig. 32 Triângulos de mesma altura.

$$A = \frac{bh}{2} \text{ e } A' = \frac{Bh}{2} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{b}{B}$$

Exercício resolvido

11 Se a área do triângulo ABC é S, calcule a área preenchida em função de S.

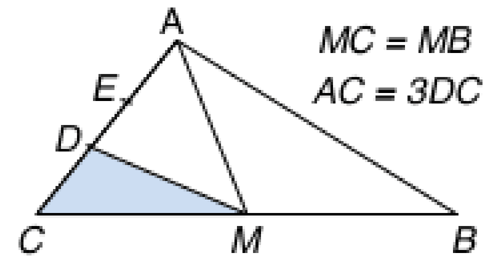
a)



Resolução:
ΔABC e ΔAMC possuem a mesma altura e a base $MC = \dfrac{BC}{2}$,

$\Rightarrow S_{AMC} = \dfrac{S}{2}$

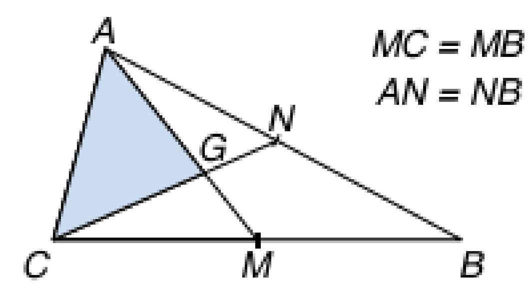
b)



Resolução:
ΔACM possui área $\dfrac{S}{2}$ e possui a mesma altura do ΔMCD e $DC = \dfrac{1}{3}AC$

$S_{MCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{S}{2} = \dfrac{S}{6}$

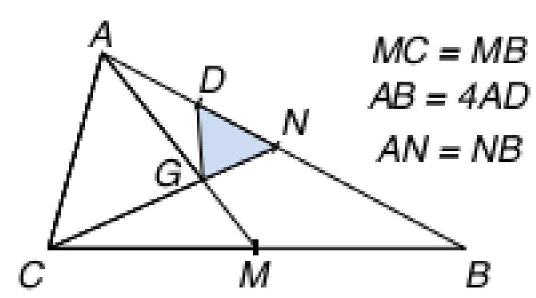
c)



Resolução:
ΔACM possui área $\dfrac{S}{2}$ e possui a mesma altura do ΔAGC e $AG = \dfrac{2}{3}AM$

$S_{AGC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{S}{2} = \dfrac{S}{3}$

d)



Resolução:
ΔACM possui área $\dfrac{S}{2}$. O ΔAGN possui mesma altura que o ΔACN e $NG = \dfrac{1}{3}CN$.

Assim, $S_{AGN} = \dfrac{S}{6}$. O ΔGDN possui mesma altura que o ΔAGN e $ND = \dfrac{1}{2}AN$, logo $S_{GDN} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{S}{6} = \dfrac{S}{12}$

Triângulos semelhantes

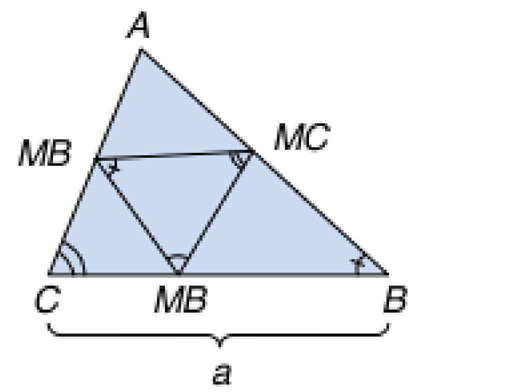
Dois triângulos semelhantes possuem elementos correspondentes proporcionais.

Triângulos semelhantes de razão de semelhança K possuem áreas proporcionais a K^2.

Exercício resolvido

12 Determine a relação entre as áreas de um triângulo ABC e do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do ABC.

Resolução:



$$\Delta ABC \sim \Delta M_A M_B M_C \ (K = 2)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{M_A M_B M_C}} = K^2 = 4$$

Triângulos equivalentes

Triângulos equivalentes possuem a mesma área. Não modificando a base e a altura de um triângulo, a área é a mesma. Observe a figura 33.

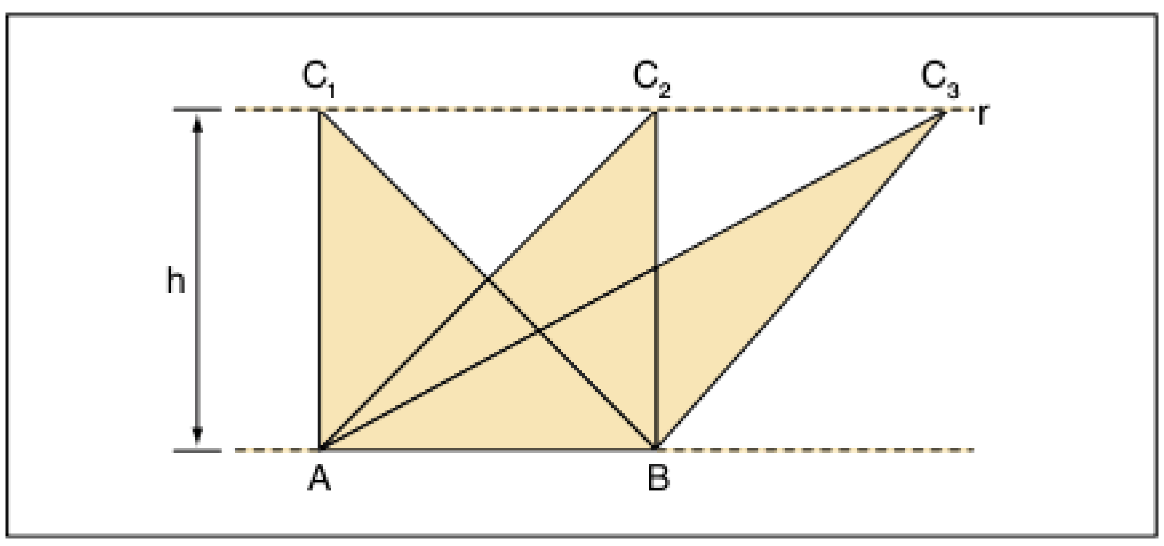
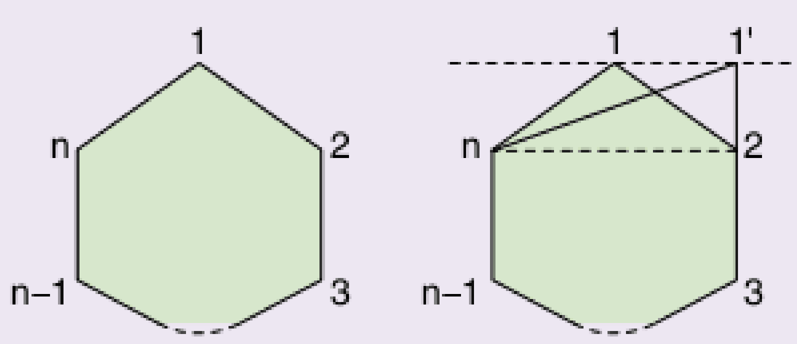


Fig. 33 Triângulos equivalentes.

ATENÇÃO!

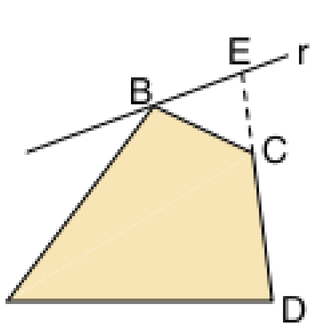
Podemos transformar um polígono de n lados em um polígono equivalente com n – 1 lados



$r // \overline{n2}$ e o $\Delta 12n$ é equivalente ao $\Delta 1'2n$, reduzindo assim o número de lados para (n–1).

Exercícios resolvidos

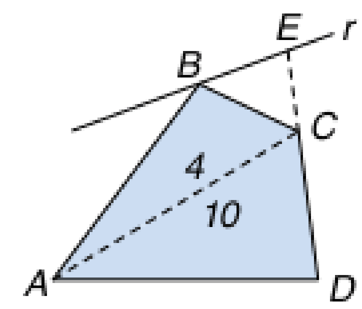
13 Na figura a seguir, a reta r é paralela ao segmento $\overline{AC}$ sendo E o ponto de interseção de r com a reta determinada por D e C.



Se as áreas dos triângulos ACE e ADC são 4 e 10, respectivamente, e a área do quadrilátero ABED é 21, então a área do triângulo BCE é:

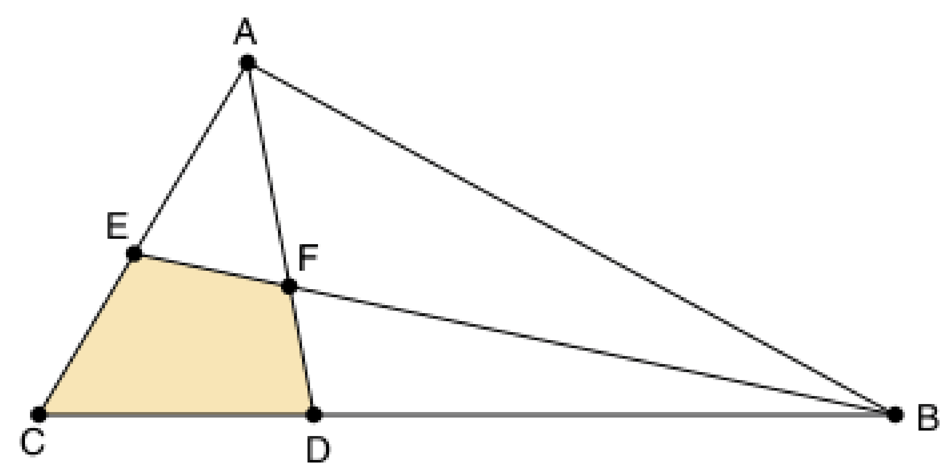
(a) 6
(b) 7
(c) 8
(d) 9
(e) 10

Resolução:

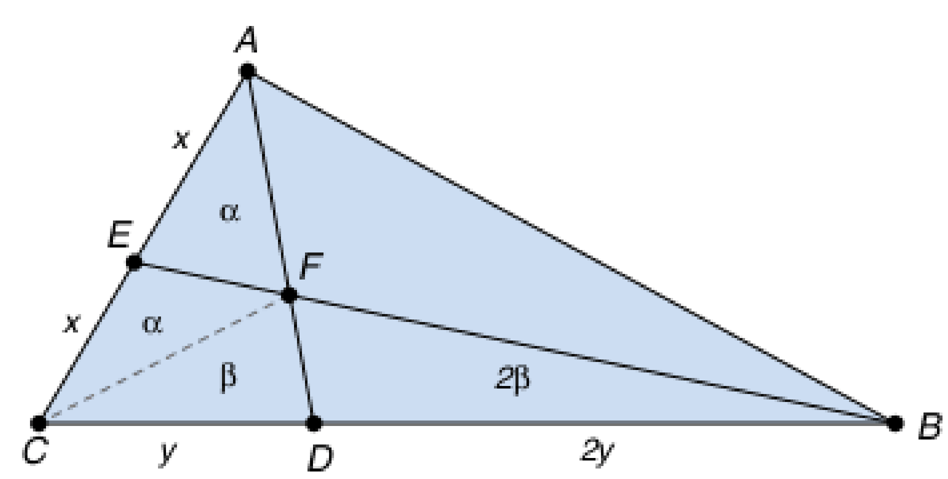


Os ΔACE e ΔABC são equivalentes, $S_{ABC} = 4$, mas $x + 4 + 10 = 21$
$\therefore x = 7$ (alternativa B).

14 Considere o triângulo ABC de área A. E é o ponto médio de $\overline{AC}$ e D está no lado $\overline{BC}$, tal que BD = 2CD. As cevianas $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ formam o quadrilátero CDFE. Calcule a área desse quadrilátero em função de A.



Resolução:

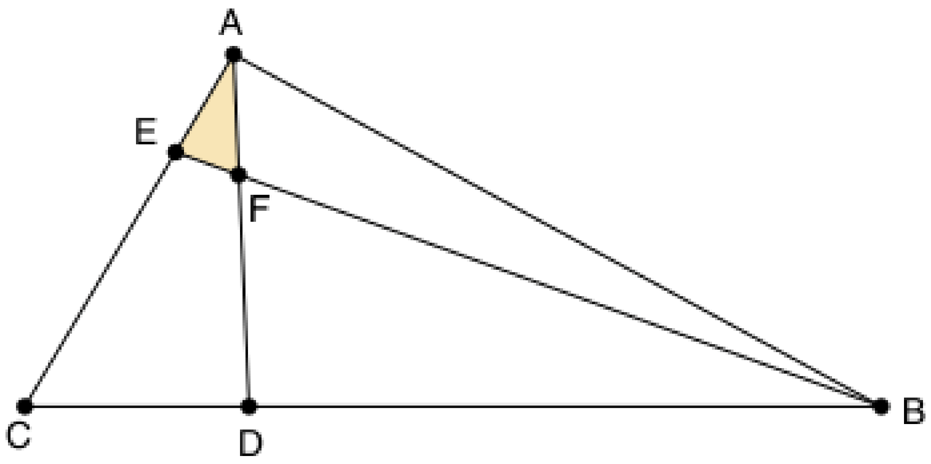


Utilizando as relações métricas entre áreas, temos que área (ΔAEF) = área (ΔCEF) e área (ΔBDF) = 2 · área (ΔCDF)
O ΔBCE possui área igual à metade da área do ΔABC, assim $\alpha + 3\beta = \frac{A}{2}$.
O ΔCDA possui área igual à $\frac{A}{3}$, assim $2\alpha + \beta = \frac{A}{3}$.
Resolvendo o sistema:

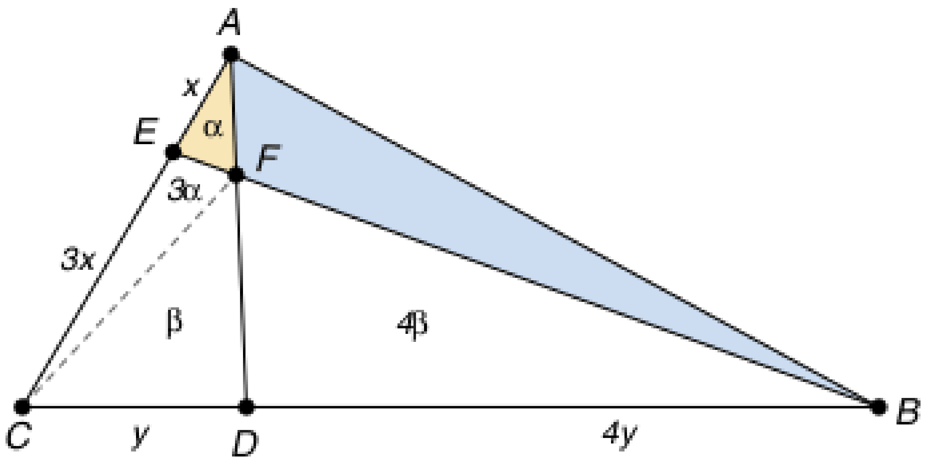
$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = \frac{A}{2} \\ 2\alpha + \beta = \frac{A}{3} \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{A}{10} \text{ e } \beta = \frac{4A}{30}$$

Área do quadrilátero CDFE é igual a $\alpha + \beta = \frac{7A}{30}$

15 O triângulo ABC da figura possui área A. Nos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, temos os pontos E e D, tais que CE = 3EA e DB = 4CD. Determine a porcentagem da área do triângulo preenchido, em relação à área total.



Resolução:



$$Área(\Delta CEF) = 3\ .\ área(\Delta EFA)$$

$$área(\Delta BDF) = 4.\ área(\Delta CDF)$$

$$área(\Delta ACD) = \frac{1}{5}A \therefore 4\alpha + \beta = \frac{A}{5}$$

$$área(\Delta BCE) = \frac{3}{4}A \therefore 3\alpha + 5\beta = \frac{3}{4}A$$

Através do sistema:

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta = \dfrac{A}{5} \\ 3\alpha + 5\beta = \dfrac{3A}{4} \end{cases} \quad \textit{temos: } \alpha = \frac{A}{68} \approx 0{,}015$$

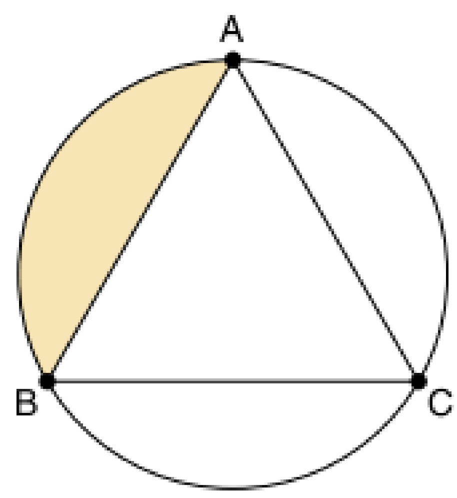
A área do triângulo é, aproximadamente, 1,5% da área do ΔABC.

Revisando

1 Calcule a área de um quadrado inscrito em um triângulo de base 12 e altura 6.

2 O perímetro de um triângulo retângulo isósceles é igual a 2p. Calcule a área desse triângulo em função de p.

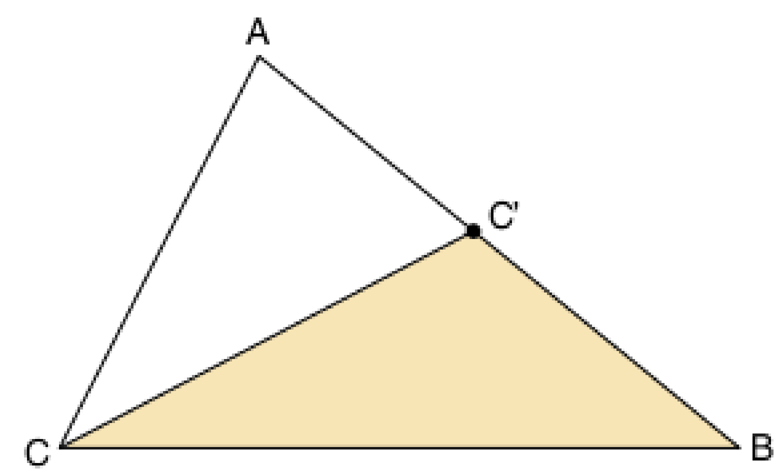
3 A figura representa um triângulo equilátero de lado 6 e seu círculo circunscrito. Calcule o valor da área colorida.



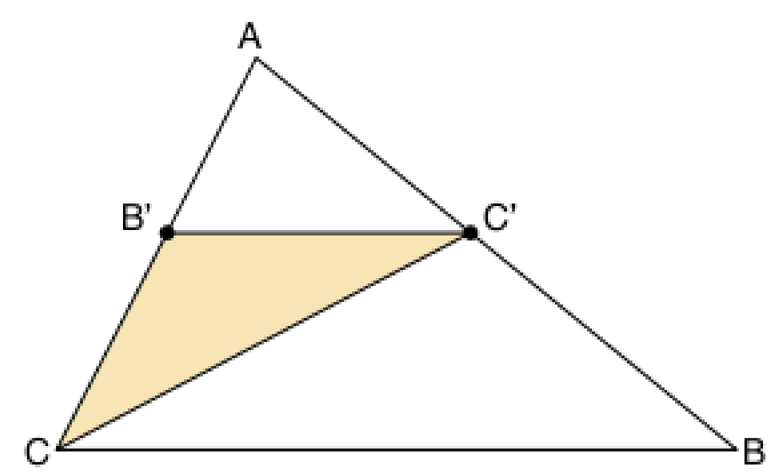
4 Um triângulo de altura h é dividido por uma reta paralela à base em 2 partes equivalentes. Calcule a distância dessa reta ao vértice.

5 Um triângulo ABC de área A possui as medianas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$. Calcule as áreas coloridas em função de A para as diversas situações a seguir.

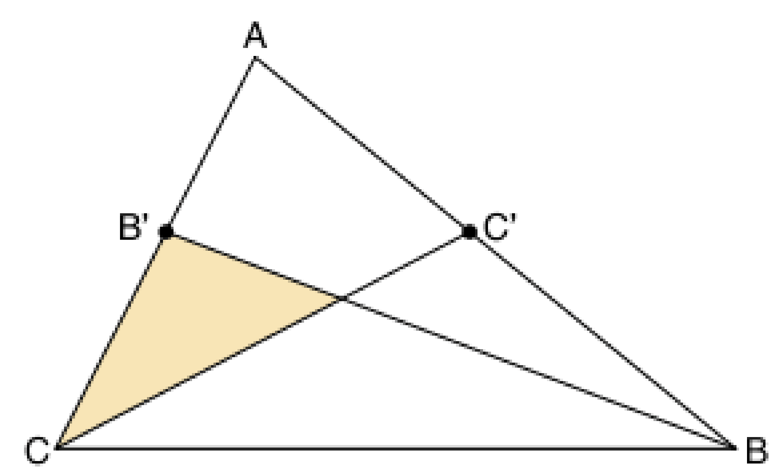
I.



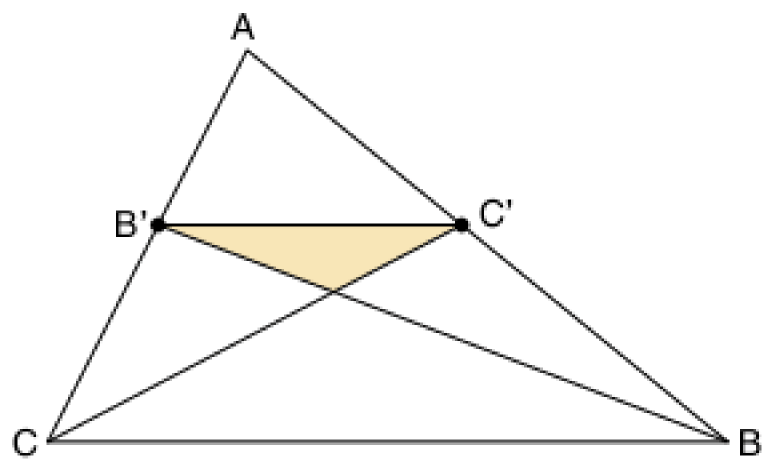
II.



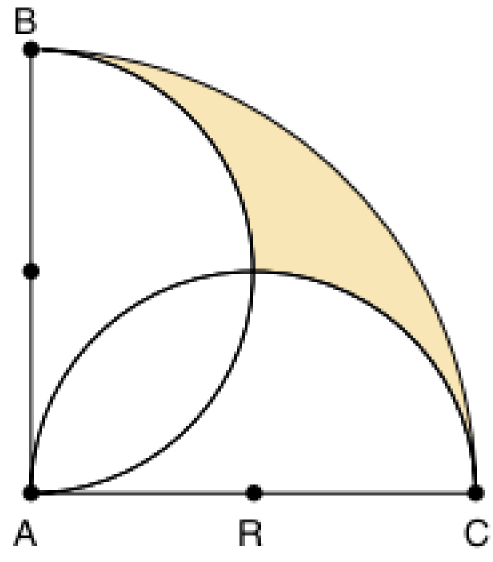
III.



IV.



6 Calcule a área colorida da figura considerando ABC um quadrante de raio R e $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ diâmetros de semicircunferências de diâmetro R.



Exercícios propostos

Áreas

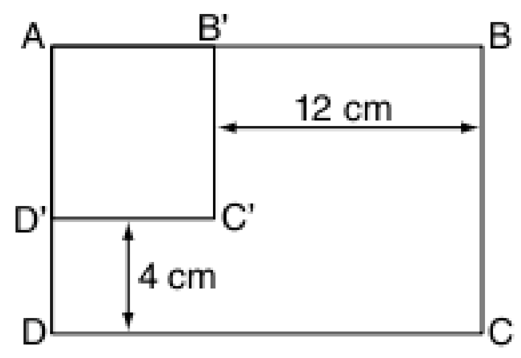
1 **Faap** As bases de um trapézio são 80 cm e 60 cm e sua altura 40 cm. A 10 cm da base maior, traça-se uma paralela às bases, que determina dois trapézios. Qual é a área de cada um?

2 Um azulejo retangular vai ser usado em uma parede de uma cozinha, que tem 5 m de comprimento e 3 m de altura. Se as dimensões do azulejo são 10 cm e 30 cm, quantas peças desse azulejo vão ser usadas?

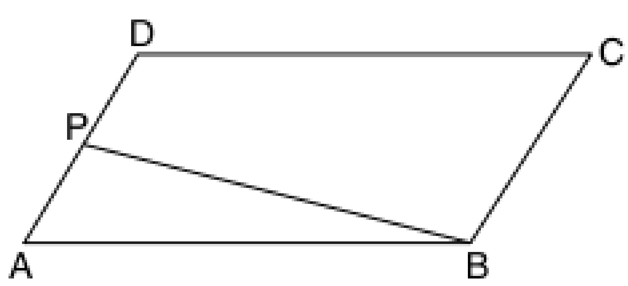
3 O perímetro de um quadrado é igual a 36 cm. Qual é a área desse quadrado?

4 Calcule a área do losango que tem diagonal maior igual a 8 m e diagonal menor igual a 70 dm.

5 **UFPE** Na figura a seguir o retângulo ABCD tem área igual a 153 cm^2. Quanto mede o lado, em cm, do quadrado AB'C'D'?



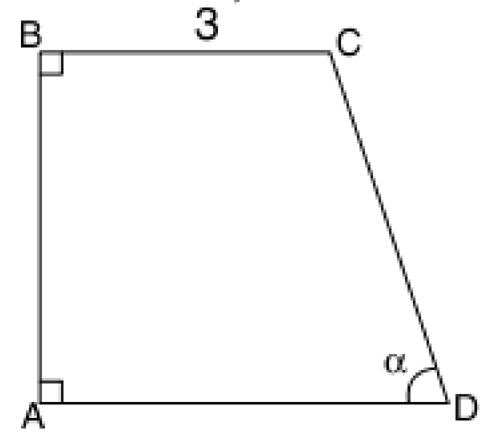
6 **UFPE** Na figura a seguir P é o ponto médio do segmento AD do paralelogramo ABCD. Calcule a área, em m^2, do triângulo ΔAPB sabendo-se que a área do paralelogramo é 136 m^2.



7 **UFSC** A base de um triângulo mede 132 m e sua altura, em metros é h. Se a base for aumentada em 22 m e a altura, em 55 m, obtém-se um novo triângulo cuja área é o dobro da área do primeiro. Calcule o valor de h.

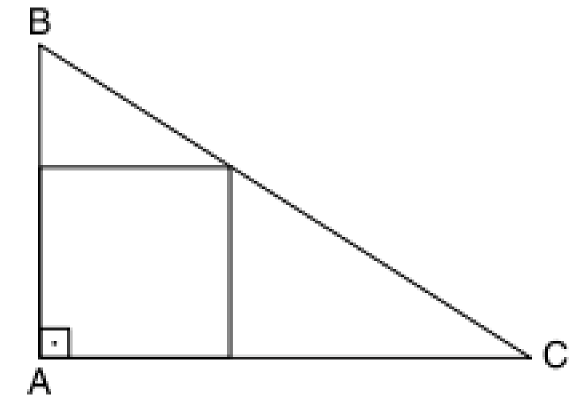
8 **Vunesp** A área de um triângulo retângulo é 12 dm^2. Se um dos catetos é $\frac{2}{3}$ do outro, calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

9 **Cesgranrio** Se, no trapézio retângulo ABCD da figura adiante, AB = BC = 3 e $\alpha = \frac{\pi}{3}$, então a sua área vale:



(a) $3\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(b) $3\left(5-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
(c) $3\left(4+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
(d) $3\left(5-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
(e) $6\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

10 **Fatec** Na figura a seguir, tem-se um quadrado inscrito num triângulo retângulo ABC, reto em Â.



Se os catetos do triângulo medem 3 cm e 4 cm, então a área do quadrado, em centímetros quadrados, é igual a:

(a) $\frac{169}{49}$ (c) $\frac{100}{49}$ (e) $\frac{25}{49}$

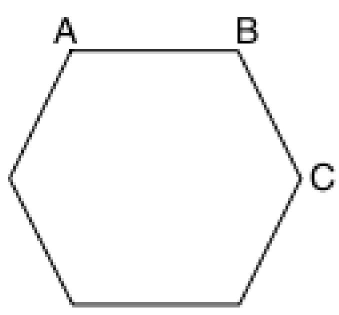
(b) $\frac{144}{49}$ (d) $\frac{81}{49}$

11 **Fuvest** Os lados de um retângulo de área 12 m^2 estão na razão 1:3. Qual o perímetro do retângulo?

(a) 8 m (c) 16 m (e) 24 m

(b) 12 m (d) 20 m

12 **Fuvest** Os pontos A, B, e C são vértices consecutivos de um hexágono regular de área igual a 6. Qual a área do triângulo ABC?



(a) 1 (c) 3 (e) $\sqrt{2}$

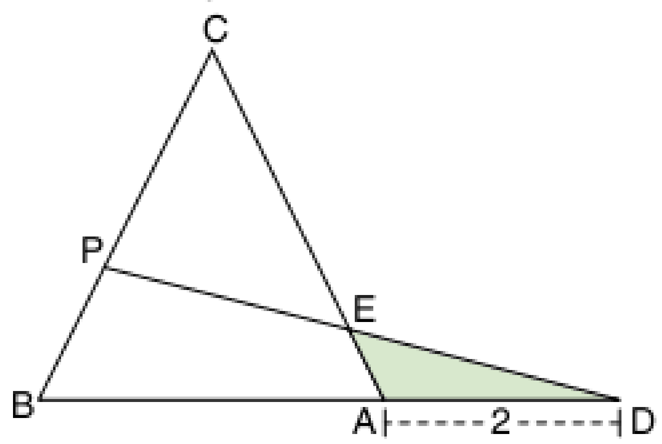
(b) 2 (d) $\sqrt{2}$

13 **ESPM** O retângulo ABCD tem área igual a 60 cm^2. Sabendo-se que E é um ponto do lado CD, podemos afirmar que a área do triângulo ABE é:

(a) 30 (c) 50 (e) $50\sqrt{3}$

(b) 40 (d) $40\sqrt{3}$

14 **Mackenzie** Na figura a seguir, o perímetro do triângulo equilátero ABC é 12 e o ponto P é médio do lado BC.

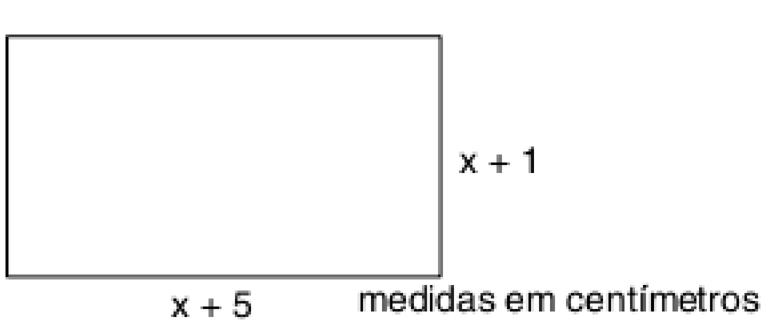


Então, a área do triângulo AED é:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 4 (e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sqrt{3}$ (d) 2

15 **UEL** No retângulo da figura abaixo, aumentando-se de 6 cm o lado maior e de 3 cm o lado menor, a área aumenta 102 cm^2.



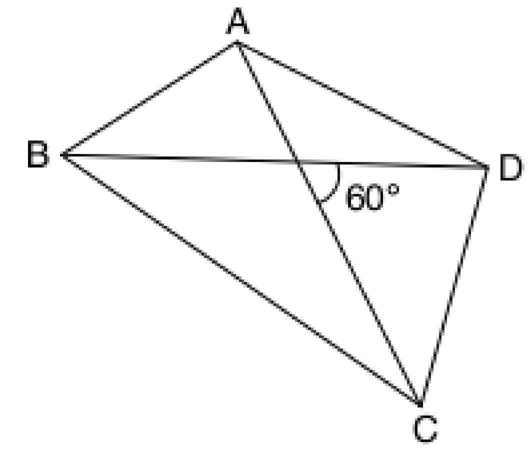
O valor de x, em centímetros, é:

(a) 5,5 (d) 7,0

(b) 6,0 (e) 7,5

(c) 6,5

16 **Mackenzie** Na figura a seguir, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ medem, respectivamente, $8\sqrt{3}$ e 5.



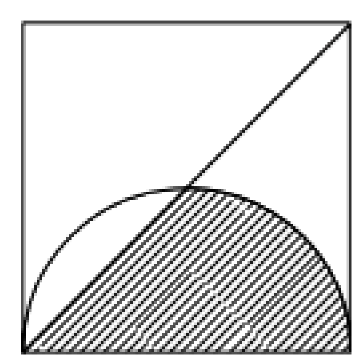
Então, a área do quadrilátero ABCD é:

(a) 30 (d) 60

(b) 35 (e) 80

(c) 40

17 **Fuvest** Na figura seguinte, estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2.



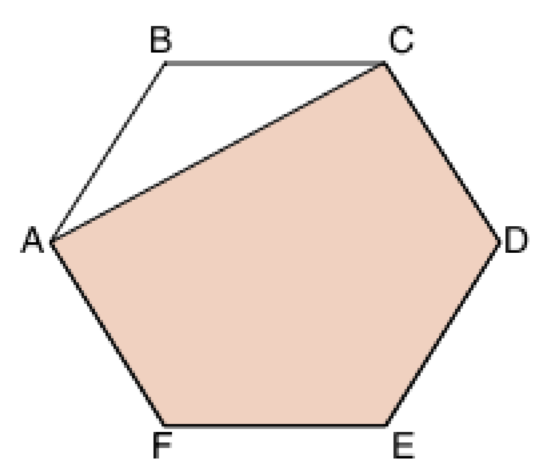
Então, a área da região hachurada é:

(a) $\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2$ (c) $\pi + 3$

(d) $\pi + 4$

(b) $\pi + 2$ (e) $2\pi + 1$

18 **Mackenzie** No hexágono regular da figura a seguir, a distância do vértice E à diagonal AC é 3.



Então, a área do polígono assinalado é:

(a) 6 (d) $6\sqrt{3}$

(b) $4\sqrt{3}$ (e) $8\sqrt{3}$

(c) $5\sqrt{3}$

19 **Fuvest** Dois irmãos herdaram um terreno com a seguinte forma e medidas:

AD = 20 m
AB = 60 m
BC = 16 m

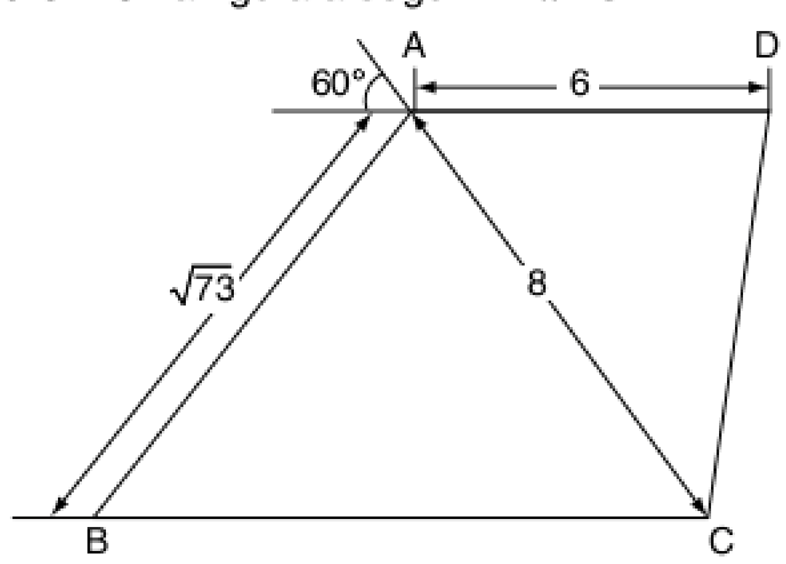
Para dividir o terreno em duas partes de mesma área, eles usaram uma reta perpendicular a $\overline{AB}$. Para que a divisão seja feita corretamente, a distância dessa reta ao ponto A, em metros, deverá ser:

(a) 31
(b) 32
(c) 33
(d) 34
(e) 35

20 FOC Um triângulo tem lados 3x, 4x e 5x e sua área é 48. O valor de x é:

(a) $\sqrt{2}$
(b) $2\sqrt{2}$
(c) 2
(d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

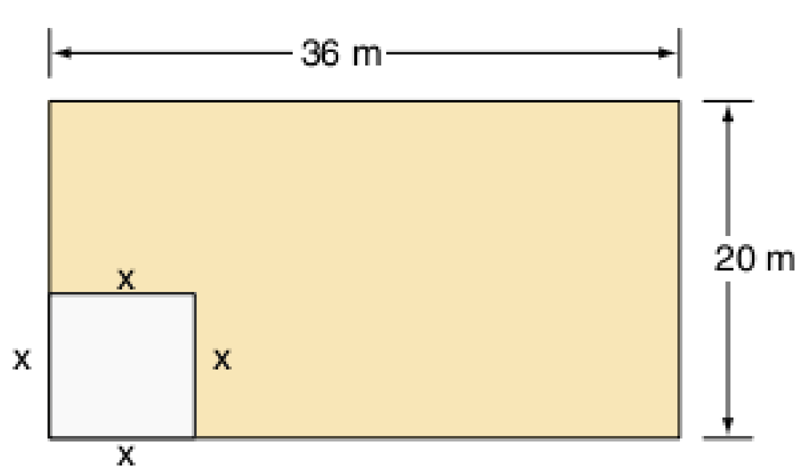
21 Mackenzie Na figura a seguir $\overline{AD}//\overline{BC}$.



Então, a área do quadrilátero ABCD é:

(a) $24\sqrt{3}$
(b) $26\sqrt{3}$
(c) $28\sqrt{3}$
(d) $30\sqrt{3}$
(e) $32\sqrt{3}$

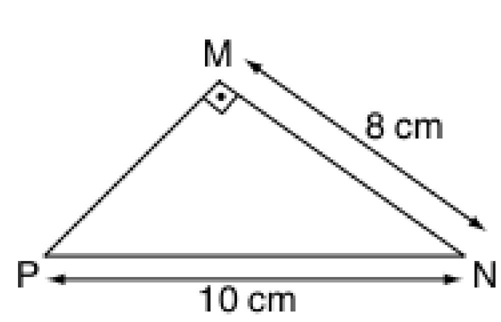
22 Puccamp Na figura a seguir tem-se um terreno retangular no qual se pretende construir um galpão cujo lado deve medir x metros.



Se a área da parte sombreada é 684 m^2, o lado do galpão mede, em metros:

(a) 8,5
(b) 8
(c) 7,5
(d) 6
(e) 4,5

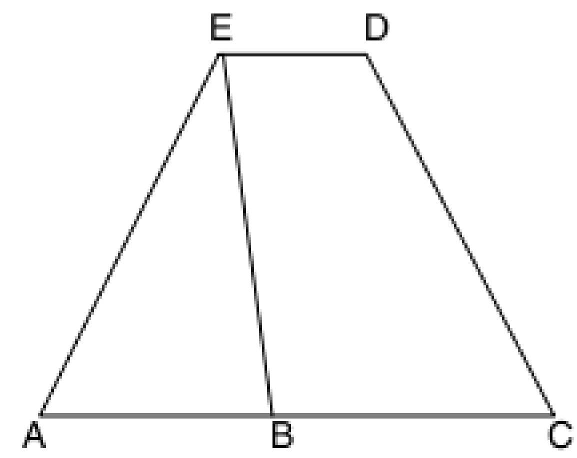
23 UFF Considere o triângulo PMN, retângulo em M, representado na figura a seguir.



A área, em cm^2, do triângulo obtido, unindo-se os pontos médios de PM, MN e NP é:

(a) 4
(b) 6
(c) 12
(d) 20
(e) 24

24 UFMG Observe a figura.

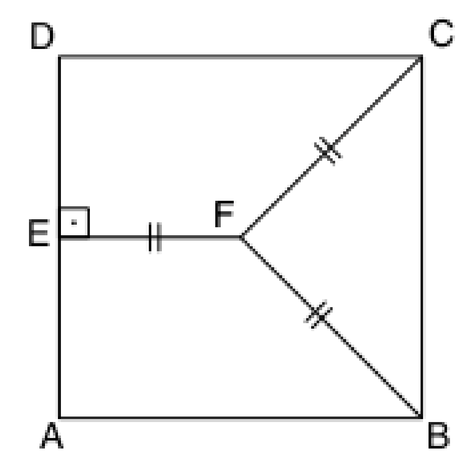


Nessa figura, o segmento AC é paralelo ao segmento ED, AB = BC = 3cm e $\dfrac{BC}{ED} = 2$.

A área do triângulo ABE é igual a 3 cm^2. A área do trapézio BCDE, em cm^2, é:

(a) $\dfrac{9}{2}$
(b) 6
(c) 9
(d) $\dfrac{11}{2}$
(e) 12

25 UFMG Observe a figura.



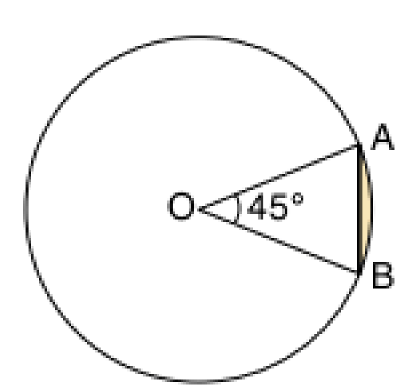
Nessa figura, ABCD é um quadrado de lado 1, EF = FC = FB e DE = $\dfrac{1}{2}$. A área do triângulo BCF é:

(a) $\dfrac{3}{16}$
(b) $\dfrac{1}{5}$
(c) $\dfrac{1}{6}$
(d) $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)}{4}$

Áreas de círculos

26 UFBA O triângulo ABC está inscrito num círculo de área igual a 16π cm^2, sendo Â = 30°, $\overline{AB}$ = 8 cm e $\overline{AC}.\overline{BC}$ = x cm^2. Determine o valor de $x\sqrt{3}$.

27 Fatec Na figura a seguir, tem-se uma circunferência C de centro O e raio de medida 3 cm. Os pontos A e B pertencem a C, e a medida do ângulo AÔB é 45°.



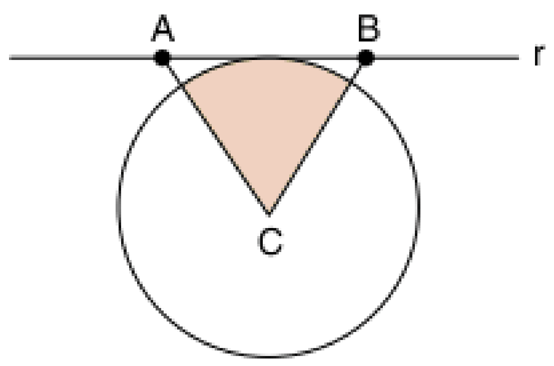
A área da região sombreada, em centímetros quadrados, é igual a:

(a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(b) $\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}\right)$
(c) $\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)$
(d) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\right)$
(e) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

28 **Fuvest** O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda BC mede 6 cm. Então, a área do triângulo ABC, em cm^2, vale:

(a) 24
(b) 12
(c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
(d) $6\sqrt{2}$
(e) $2\sqrt{3}$

29 **UEL** Na figura a seguir, tem-se a reta r tangente à circunferência de centro C e o triângulo equilátero ABC, cujo lado mede $8\sqrt{3}$ cm.

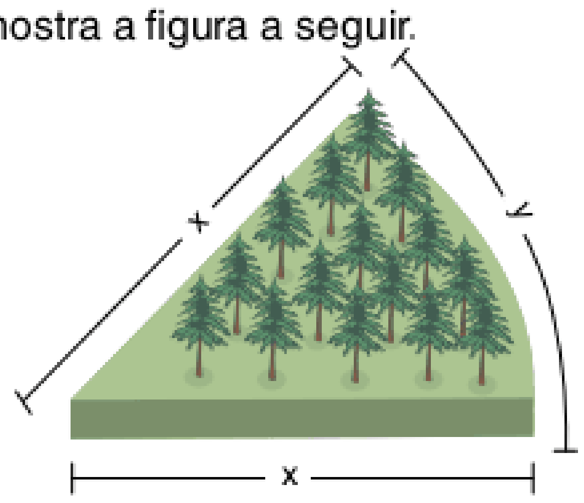


A área da região sombreada é, em centímetros quadrados:

(a) 52 π
(b) 48 π
(c) 36 π
(d) 30 π
(e) 24 π

30 **UFF** Determine a área da região limitada do plano que está compreendida entre as retas y = x e y = 0 e é exterior ao círculo de centro em (1, 1) e raio 1.

31 **UEL** Um rolo de tela com 28 m de comprimento será totalmente aproveitado para cercar um jardim com formato de setor circular como mostra a figura a seguir.



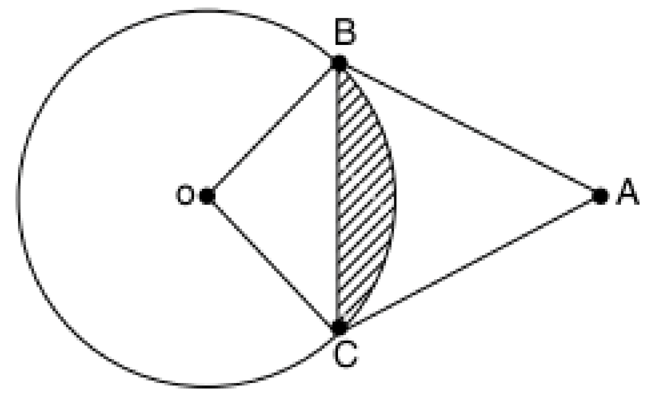
Se a área do setor é 40 m^2 e x é maior que y, então o raio do setor é um número:

(a) divisor de 35.
(b) menor que 8.
(c) múltiplo de 5.
(d) quadrado perfeito.
(e) ímpar.

32 **UFRGS** Se o raio de um círculo cresce 20%, sua área cresce:

(a) 14%
(b) 14,4%
(c) 40%
(d) 44%
(e) 144%

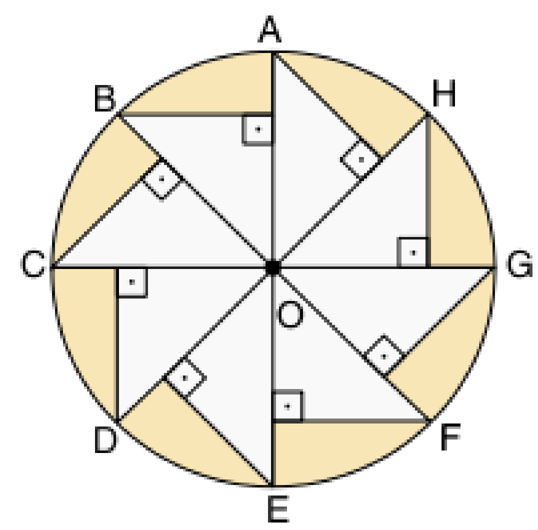
33 **UFMG** Observe a figura a seguir. Nessa figura OA = $4\sqrt{3}$, OB = $2\sqrt{3}$ e $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ tangenciam a circunferência de centro O em B e C.



A área da região hachurada é:

(a) $\pi - 3$
(b) $2\pi - \sqrt{3}$
(c) $4\pi - 3\sqrt{3}$
(d) $4\pi - 2\sqrt{3}$
(e) $4\pi - \sqrt{3}$

34 **UFMG** Observe a figura.



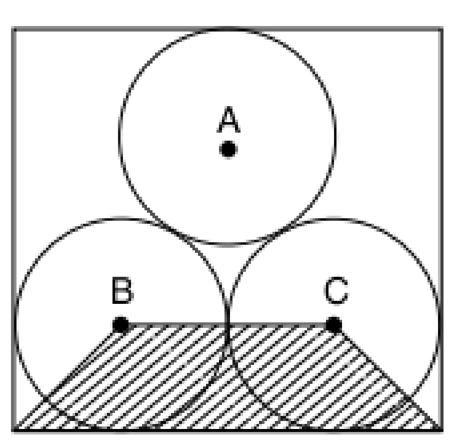
Nela a circunferência de centro O tem raio r e arcos AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH e HA congruentes.
O valor da área sombreada, em função de r, é:

(a) $r^2(\pi - 2)$
(b) $2r^2(\pi - 1)$
(c) $2r^2$
(d) $r^2(\pi - 1)$

35 **PUC-MG** O comprimento de uma circunferência é o quádruplo do perímetro de um quadrado. A razão entre a área do quadrado e a área do círculo é:

(a) $\frac{\pi}{64}$
(b) $\frac{\pi}{72}$
(c) $\frac{\pi}{80}$
(d) $\frac{\pi}{120}$
(e) $\frac{\pi}{128}$

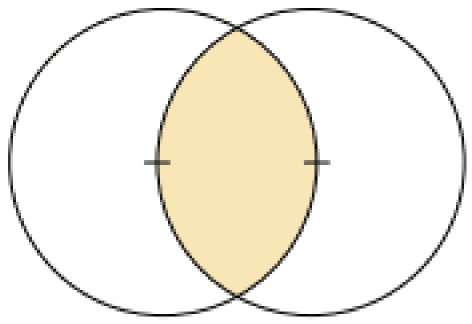
36 **Mackenzie** Na figura a seguir, A, B e C são centros de circunferências iguais.



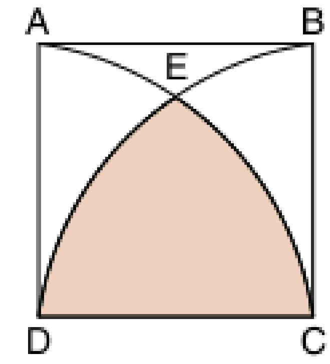
Se a área do trapézio assinalado é 3, então a área do retângulo vale:

(a) $4 + 4\sqrt{3}$
(b) $8 + 4\sqrt{3}$
(c) $8 + 8\sqrt{3}$
(d) $4 + 8\sqrt{3}$
(e) $8 + \sqrt{3}$

37 Calcule a área colorida sabendo que os círculos possuem raio R.



38 ABCD é um quadrado de lado a. Calcule a área preenchida.



TEXTOS COMPLEMENTARES

Teorema de Pitágoras através de áreas

Observe a seguinte propriedade:

O retângulo ABCD e o triângulo CDE possuem a mesma base e altura, mas a área do triângulo CDE é a metade da área do retângulo.

O ΔADE possui área igual a metade do retângulo

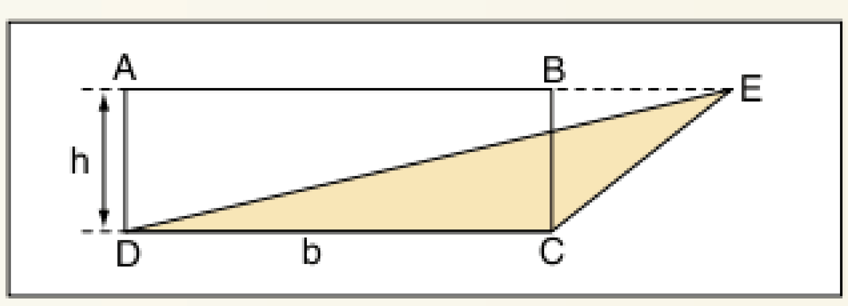
ΔMLE $A_{ADE} = \dfrac{A_{\Delta MLE}}{2}$

O ΔCDG possui área igual a metade do quadrado ABCD. $A_{CDG} = \dfrac{A_{ABCD}}{2}$

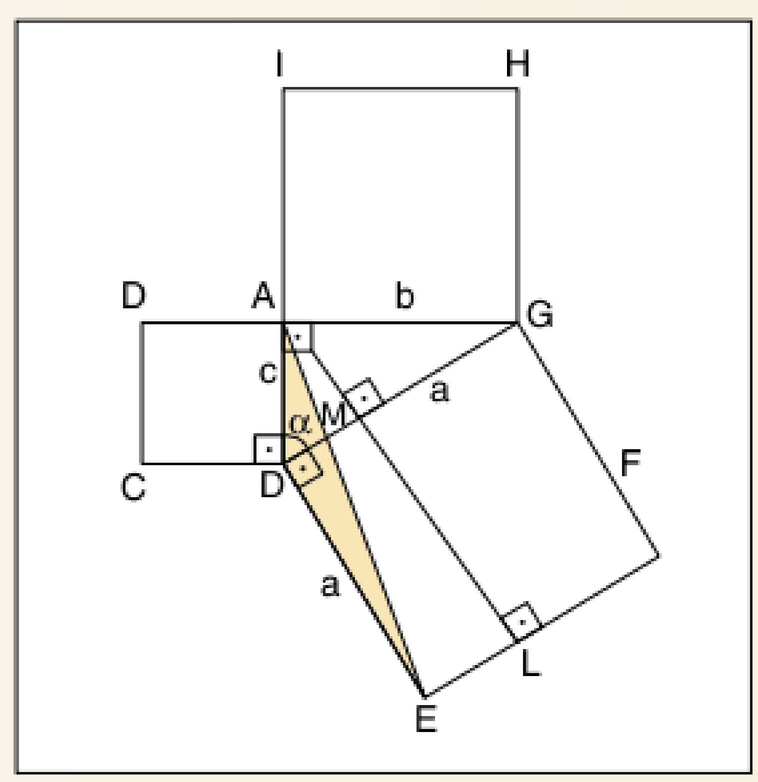
$\Delta CDG \approx \Delta ADE$ (LAL) $\Rightarrow$

$A_{ABCD} = A_{DMLE} = c^2$ analogamente

$A_{AIGH} = A_{MGFL} = b^2$ assim $b^2 + c^2 = a^2$



Área $\Delta DIE = \dfrac{1}{2}$. Área $\Delta ABCD$.

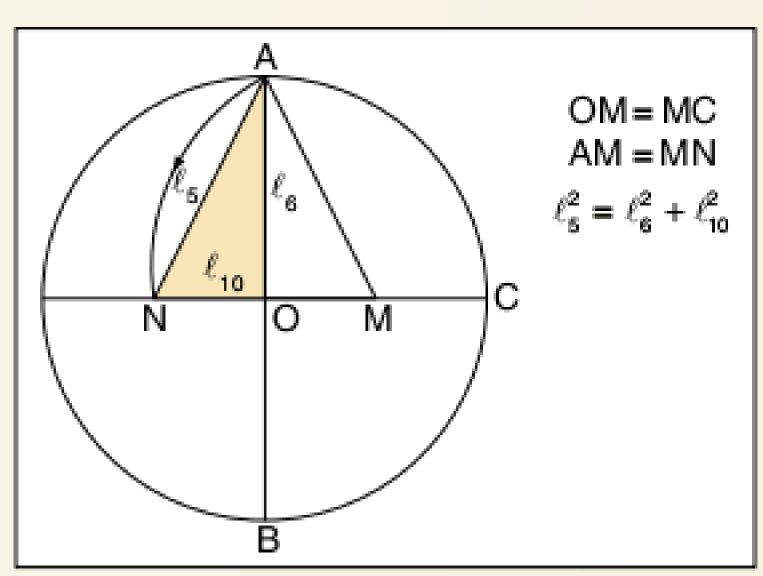


Teorema de Pitágoras através de áreas.

Pentágono regular

Observe a demonstração do seguinte resultado:

Em uma circunferência de raio R, ℓ_5, ℓ_6 e ℓ_{10} são as medidas dos lados do pentágono, hexágono e decágono, todos regulares e inscritos nessa circunferência.



Relação entre ℓ_5, ℓ_6 e ℓ_{10}.

Na figura anterior, temos um setor circular de 36°.

O ΔOAB é isósceles com ângulos de 36°; 72° e 72°. Marca-se $BC = R$ e temos um novo triângulo isósceles OBC cujo ângulo do vértice é 72°. Assim, $OC = \ell_5$.

Pelo ponto C, traçamos uma tangente $\overline{CT}$ e, através da potência de ponto, podemos escrever:

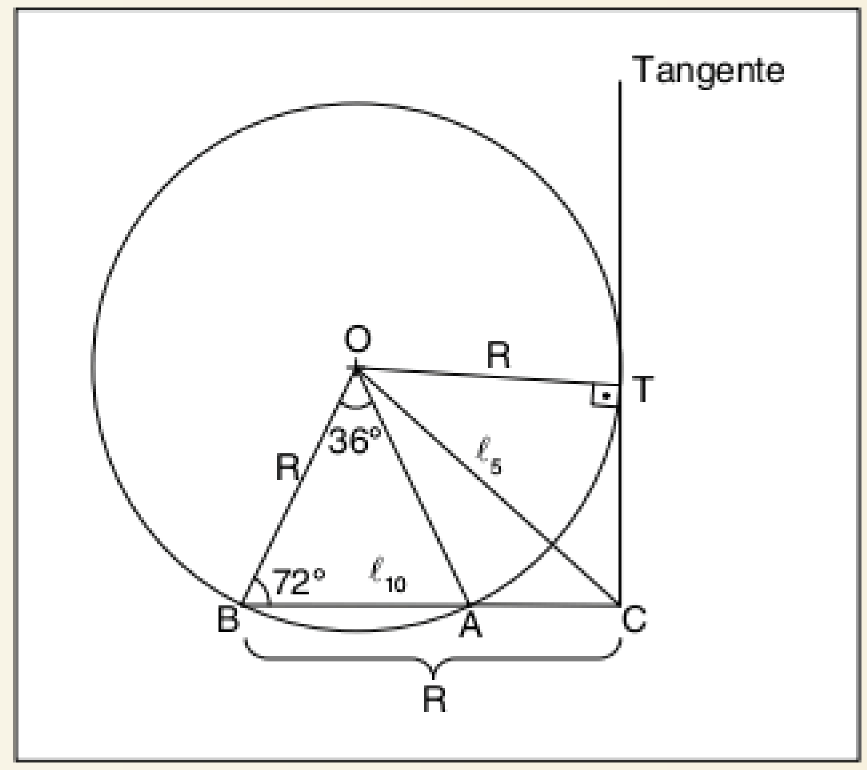
$CT^2 = (CA)(CB) \rightarrow CT^2 = (R - \ell_{10}) \cdot R \therefore CT^2 = R^2 - R \cdot \ell_{10}$

Com essa relação, volte até a teoria no item "decágono inscrito" e observe a relação $\ell_{10}^2 + R \cdot \ell_{10} - R^2 = 0 \therefore \ell_{10}^2 = +R^2 - R\ell_{10}$, assim:

$$CT^2 = \ell_{10}^2 \therefore CT = \ell_{10}.$$

Conclusão: No ΔCOT, temos:

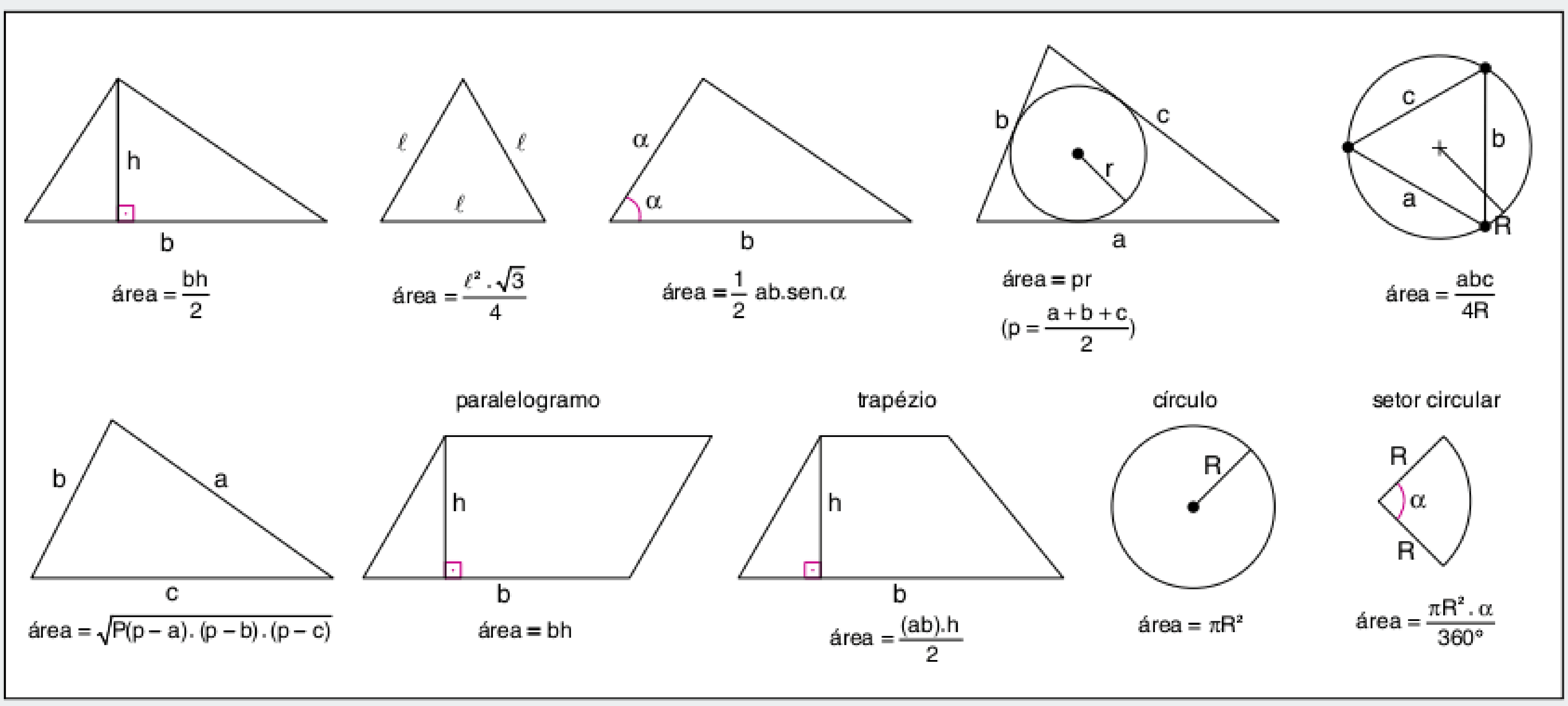
$$\ell_5^2 = R^2 + CT^2 \rightarrow \ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2$$



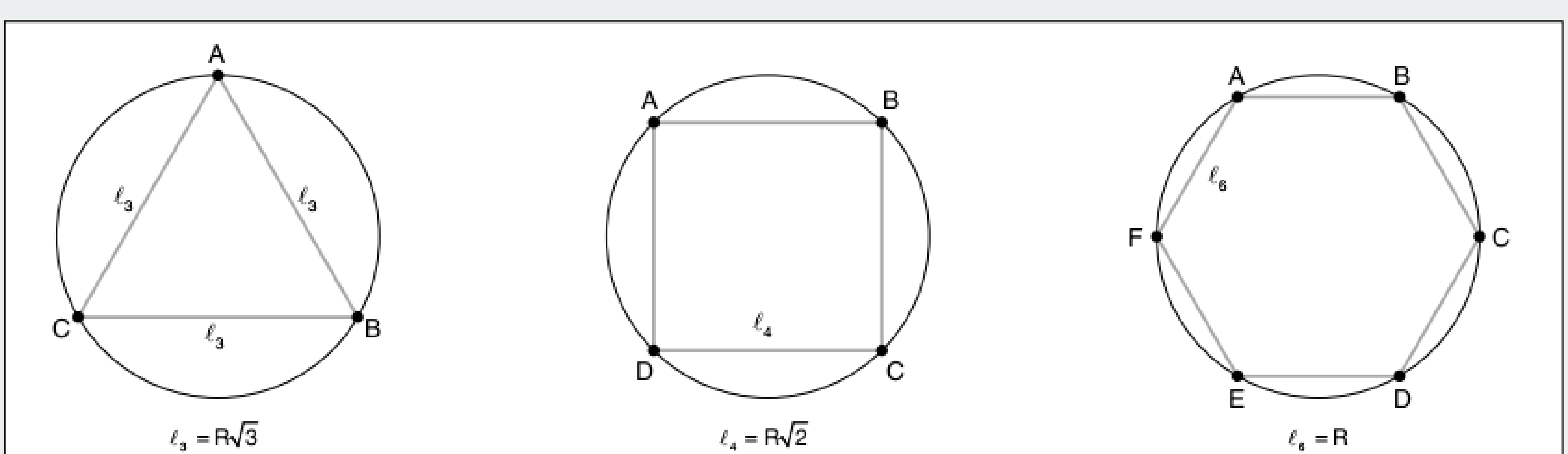
Construção da relação $(\ell_5)^2 = (\ell_6)^2 + (\ell_{10})^2$.

RESUMINDO

- Formulário básico para o calculo de áreas.



- Lados dos principais polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio R.



QUER SABER MAIS?

SITES

- Demonstração de teoremas com áreas
<www.uff.br/cdme/dsp/dsp-html/dsp-tp-br.html>.
- Cálculo de áreas com integrais
<http://ecalculo.if.usp.br>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 Fuvest Calcule:

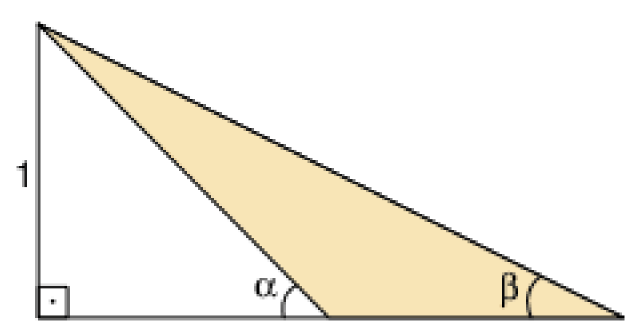
a) sen15º.

b) A área do polígono regular de 24 lados inscrito no círculo de raio 1.

2 ITA Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2 cm. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC e AC. A área do triângulo é (em cm^2) igual a:

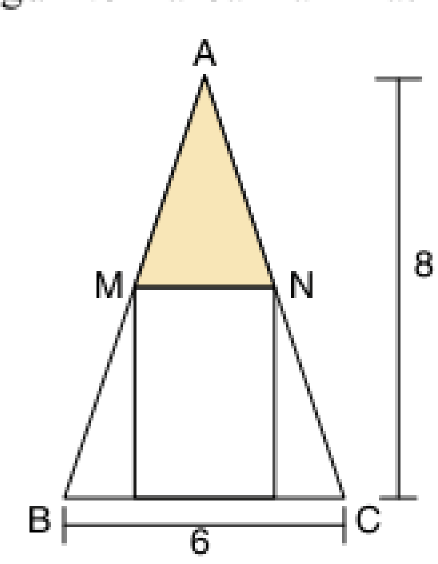
(a) $2\ sen^2\alpha \cdot cotg\beta + sen\ 2\alpha$
(b) $2\ sen^2\alpha \cdot tg\beta - sen\ 2\alpha$
(c) $2\ cos^2\alpha \cdot cotg\beta + sen\ 2\alpha$
(d) $2\ cos^2\alpha \cdot tg\beta + sen\ 2\alpha$
(e) $2\ sen^2\alpha \cdot tg\beta - cos\ 2\alpha$

3 Mackenzie Na figura, $tg\beta = 2 - \sqrt{3}$ e $\alpha + \beta = 60º$. Então, a área do triângulo assinalado é:



(a) $2+\sqrt{3}$
(b) $1+\sqrt{3}$
(c) $\frac{(2+\sqrt{3})}{2}$
(d) $\frac{(4+\sqrt{3})}{2}$
(e) $\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$

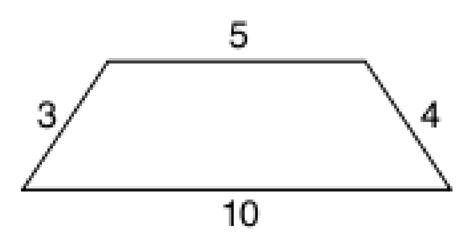
4 Mackenzie O retângulo inscrito no triângulo isósceles ABC da figura a seguir tem área máxima.



Então, a área do triângulo assinalado AMN é:

(a) 4
(b) 6
(c) 8
(d) 12
(e) 16

5 Puccamp Considere o trapézio representado na figura a seguir, cujas medidas dos lados são dadas em centímetros.



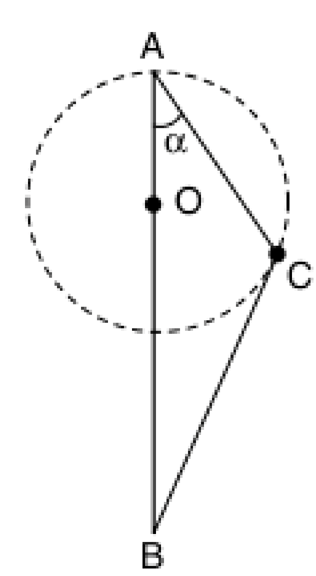
A área desse trapézio, em centímetros quadrados, é:

(a) 18
(b) 24
(c) 30
(d) 32
(e) 36

6 UEL Considere todos os triângulos que têm dois lados de medida 2 cm, formando um ângulo de medida x graus. O menor valor de x para o qual a área do triângulo é igual a $\sqrt{3}\ cm^2$ é:

(a) 30
(b) 45
(c) 60
(d) 75
(e) 90

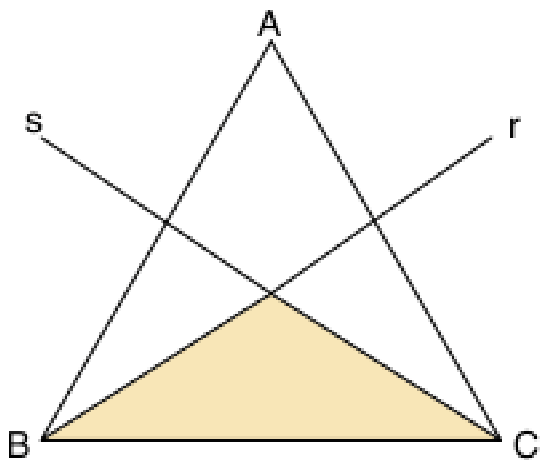
7 Mackenzie Na figura, a circunferência de centro O tem raio 6, $\alpha = arctg\ \frac{1}{2}$ e C é ponto de tangência.



Então, a área do triângulo ABC é igual a:

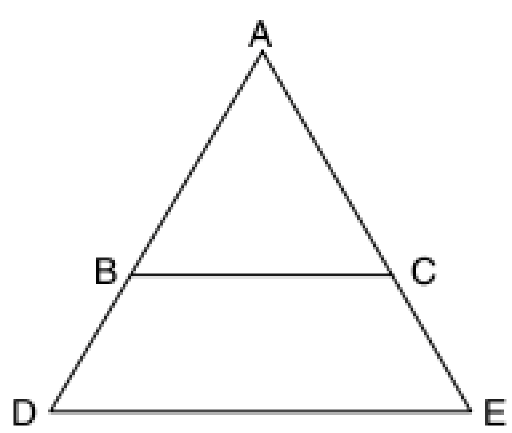
(a) 36
(b) 38,4
(c) 40
(d) 40,5
(e) 42

8 **Mackenzie** Na figura, ABC é um triângulo equilátero de perímetro 24. Se r e s são bissetrizes, então a área do triângulo assinalado é:



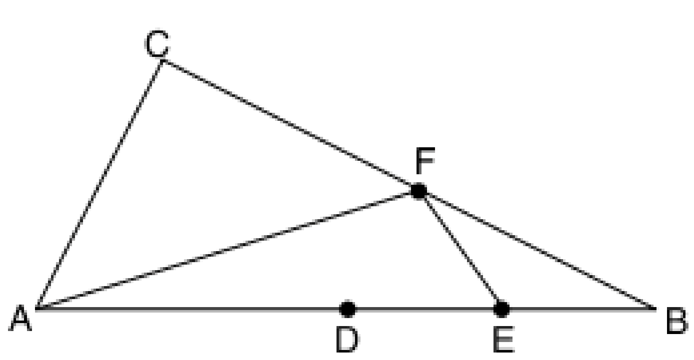
(a) $\frac{(16\sqrt{3})}{3}$
(b) $8\sqrt{3}$
(c) $16\sqrt{3}$
(d) $\frac{(8\sqrt{3})}{3}$
(e) $12\sqrt{3}$

9 **Fuvest** Na figura, BC é paralela a DE. AB = 4 e BD = 5



Determine a razão entre as áreas do triângulo ABC e do trapézio BCDE.

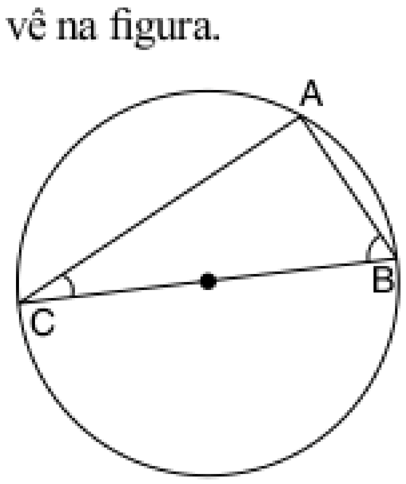
10 **Cesgranrio** Seja D o ponto médio do lado AB do triângulo ABC. Sejam E e F os pontos médios dos segmentos DB e BC, respectivamente, conforme se vê na figura.



Se a área do triângulo ABC vale 96, então a área do triângulo AEF vale:

(a) 42
(b) 36
(c) 32
(d) 30
(e) 28

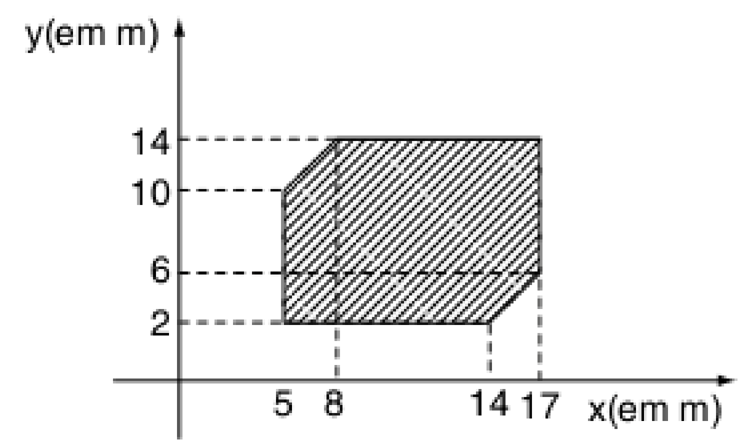
11 **Cesgranrio** O triângulo ABC está inscrito em círculo cujo diâmetro BC mede 1 e cujos ângulos satisfazem a condição $\hat{B} = 2\hat{C}$ conforme se vê na figura.



A área desse triângulo ABC vale:

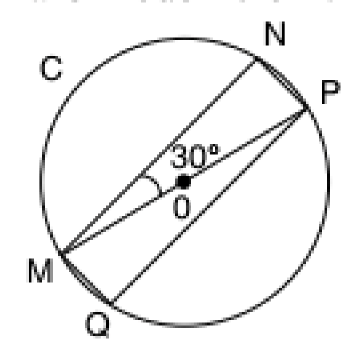
(a) $\frac{(3\sqrt{3})}{8}$
(b) $\frac{(2\sqrt{3})}{5}$
(c) $\frac{\sqrt{(3)}}{5}$
(d) $\frac{\sqrt{(3)}}{6}$
(e) $\frac{\sqrt{(3)}}{8}$

12 **Unirio** A área da figura hachurada é:

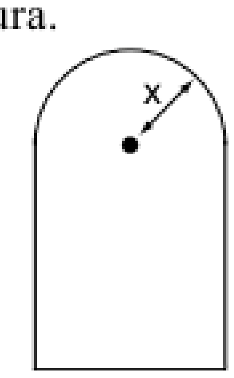


(a) 100 m^2
(b) 132 m^2
(c) 140 m^2
(d) 144 m^2
(e) 156 m^2

13 **UFF** Determine a área do retângulo MNPQ, representado na figura abaixo, sabendo que a diagonal MP é o diâmetro da circunferência C cujo raio mede 10 cm.



14 **UFF** Deseja-se construir uma janela com a forma de um retângulo em cima formado por uma semicircunferência de raio x como indica a figura.

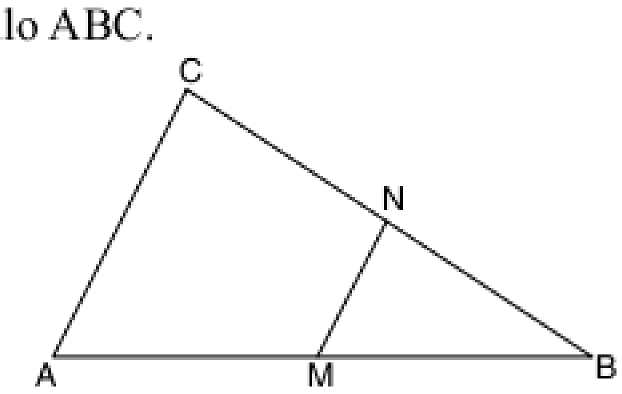


Sabendo que o perímetro da janela deve ser igual a 4 m:

a) expresse a área da janela em função de x.
b) encontre o valor de x para o qual a área da janela é a maior possível.

15 **UFMG** Seja P o ponto de interseção das diagonais do trapézio de altura h de bases AB = a e CD = b, com a > b.
Expresse a diferença entre as áreas dos triângulos ABP e CDP, nessa ordem, em função de a, b e h.

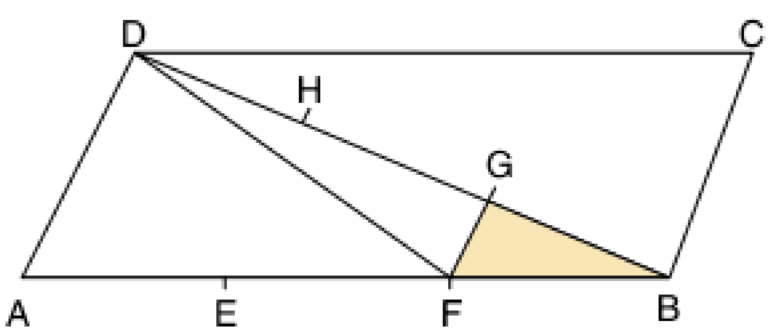
16 **PUC-MG** Na figura, M é o ponto médio de AB, e MN é paralelo a AC. S_1 é a medida da área do triângulo MBN, e S_2, a do triângulo ABC.



O valor da razão $\frac{S_1}{S_2}$ é:

(a) 1
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{3}$
(d) $\frac{1}{4}$
(e) $\frac{1}{5}$

17 Uerj O paralelogramo ABCD teve o lado (AB) e a sua diagonal (BD) divididos, cada um, em três partes iguais, respectivamente, pelos pontos {E, F} e {G, H}. A área do triângulo FBG é uma fração da área do paralelogramo (ABCD).



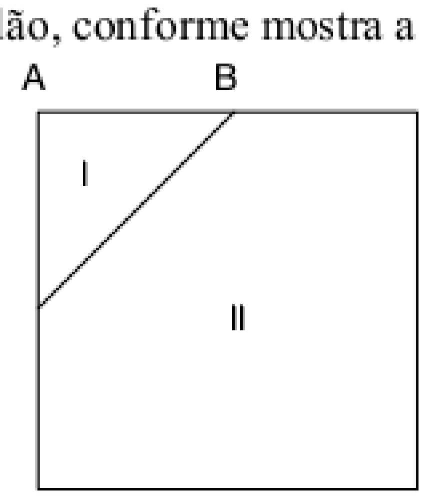
A sequência de operações que representa essa fração está indicada na seguinte alternativa:

(a) $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$
(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$
(d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

18 ITA Duas circunferências de raios iguais a 9 m e 3 m são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia essas duas circunferências nos pontos distintos A e B. A área, em m², do triângulo ABC é:

(a) $27\sqrt{3}$
(b) $\frac{\left(27\sqrt{3}\right)}{2}$
(c) $9\sqrt{3}$
(d) $27\sqrt{2}$
(e) $\frac{\left(27\sqrt{2}\right)}{2}$

19 Uerj Um arquiteto projetou um salão quadrangular 10 m x 10 m. Ele dividiu o salão em dois ambientes I e II através de um segmento de reta passando pelo ponto B e paralelo a uma das diagonais do salão, conforme mostra a figura a seguir.

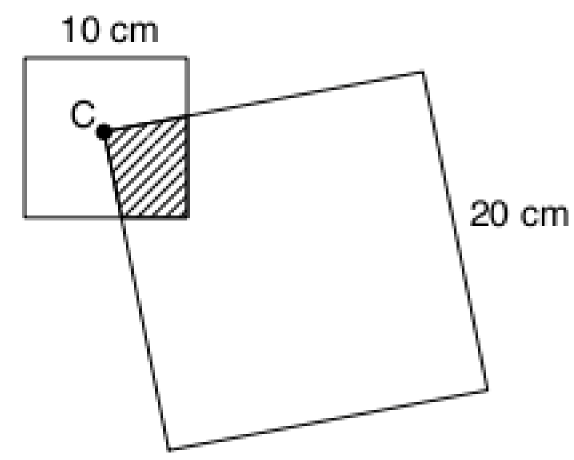


A área do ambiente I é a sétima parte da área do ambiente II. Calcule a distância entre os pontos A e B.

20 Unicamp Os lados de um triângulo medem 5, 12 e 13 cm.

a) Calcule a área desse triângulo.
b) Encontre o raio da circunferência inscrita nesse triângulo.

21 Fuvest Os quadrados da figura têm lados medindo 10 cm e 20 cm, respectivamente.



Se C é o centro do quadrado de menor lado, o valor da área hachurada, em cm², é:

(a) 25
(b) 27
(c) 30
(d) 35
(e) 40

22 Considere as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero de lado ℓ. Determine a área da coroa circular formada por essas circunferências.

23 Os centros de quatro circunferências iguais de raio R, tangentes, duas a duas, são os vértices de um losango cujo lado é igual a uma das suas diagonais. Calcular, em função de R, a área da superfície compreendida entre as quatro circunferências.

24 ABCD é um quadrado cujo lado é a. De cada um dos vértices desse quadrado como centro e com raio a descreve-se internamente um arco. Calcular a área do quadrilátero curvilíneo cujos vértices são os pontos de interseção desses arcos.

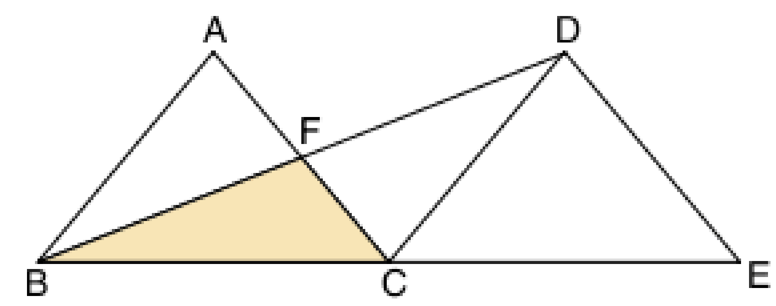
25 AM e NA são as tangentes a uma circunferência de raio R traçadas por um ponto externo A. Sabendo que o ângulo $M\hat{A}N = 60°$, calcular a área do triângulo mistilíneo AMN.

26 Uma semicircunferência tem para diâmetro um segmento AB = 4 m, uma outra semicircunferência tem para diâmetro uma corda da primeira semicircunferência e é tangente ao diâmetro $\overline{AB}$ no seu ponto médio O. Calcular a área da superfície limitada pelas duas semicircunferências e o diâmetro $\overline{AB}$.

27 Fuvest A, B e C são pontos de uma circunferência de raio 3 cm, AB = BC e o ângulo $A\hat{B}C$ mede 30°.

a) Calcule, em cm, o comprimento do segmento $\overline{AC}$.
b) Calcule, em cm², a área do triângulo ABC.

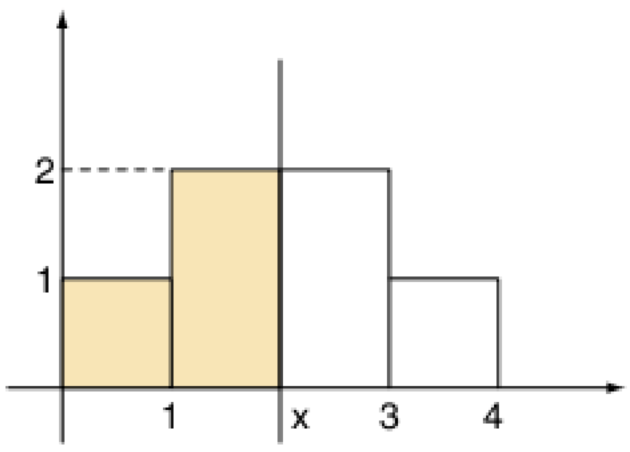
28 Fuvest Na figura a seguir, os ΔABC e ΔDCE são equiláteros de lado ℓ, com B, C e E colineares. Seja F a interseção de $\overline{BD}$ com $\overline{AC}$. Calcule a área do ΔBCF.



29 **Fuvest** As retas r e s são paralelas e A é um ponto entre elas que dista 1 de r e 2 de s. Considere um ângulo reto de vértice em A, cujos lados interceptam r e s nos pontos B e C respectivamente. O ângulo agudo entre o segmento $\overline{AB}$ e a reta r mede α.

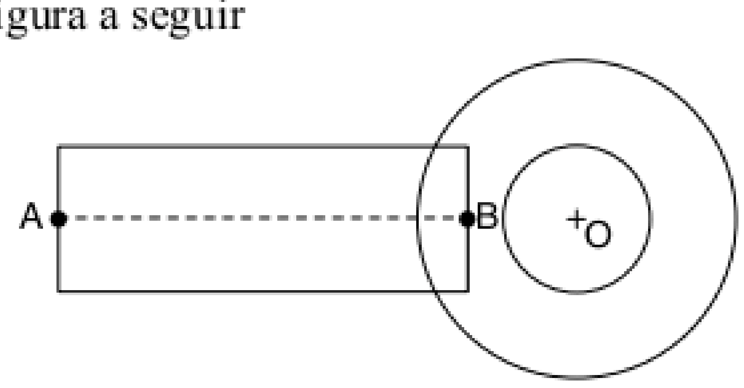
a) Calcule a área do ΔABC em função de α.
b) Para que valor de α a área do triângulo ABC é mínima?

30 **Fuvest** Considere na figura a seguir a área A(x) da região interna à figura formada pelos 3 quadrados e compreendida entre o eixo Ox e a reta vertical passando pelo ponto (x, O).



Determine o gráfico da função $y = A(x)$ para $0 \leq x \leq 4$.

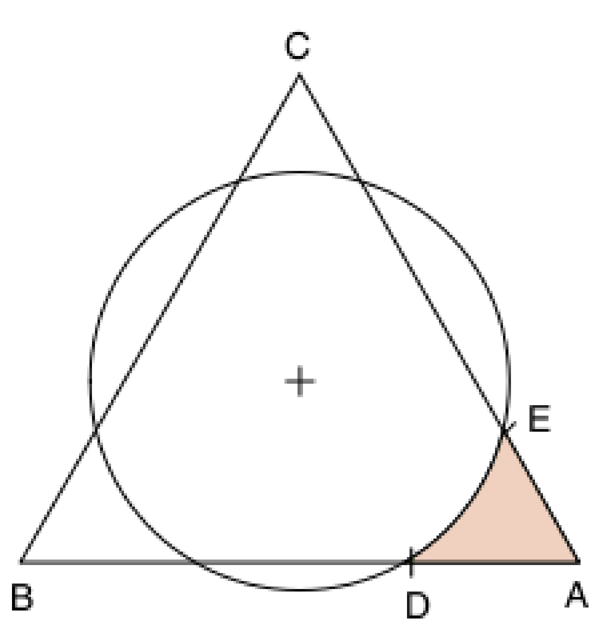
31 **Fuvest** Um agricultor irriga uma de suas plantações utilizando duas máquinas de irrigação. A 1ª irriga uma região retangular de base 100 m e altura 20 m, e a 2ª irriga uma região compreendida entre duas circunferências de centro O, e de raios 10 m e 30 m. A posição relativa dessas duas regiões é dada pela figura a seguir



onde os pontos A e B são médios do retângulo. Sabe-se ainda que A, B e O estão alinhados e que BO = 20 m, determine:

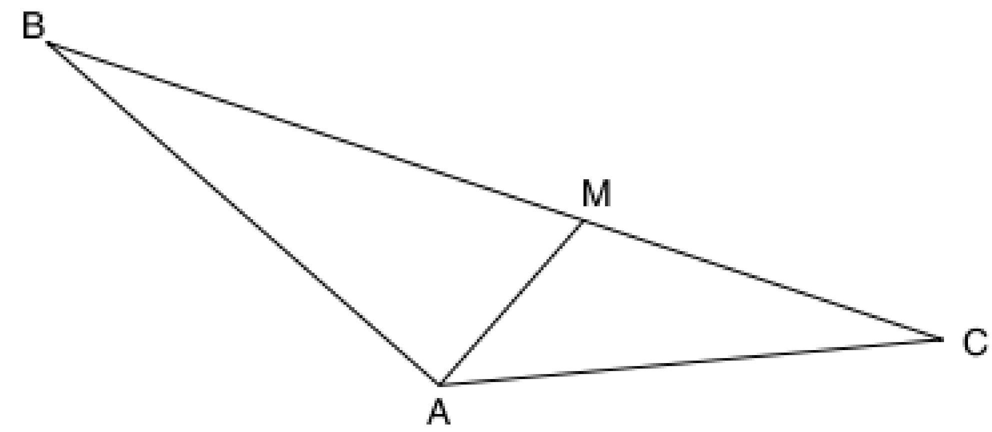
a) a área da interseção das regiões irrigadas pelas máquinas.
b) a área total irrigada.
Utilize as seguintes aproximações: $\sqrt{2} = 1{,}41$, $\pi = 3{,}14$ e $\text{arcsen}\,\frac{1}{3} = 0{,}34$.

32 Em um triângulo equilátero ABC de centro O e de lado a, a circunferência de centro O e de raio $\frac{a}{3}$ intercepta os lados AB e AC nos pontos D e E. Calcular a área do triângulo mistilíneo ADE. Observe a figura:



33 Em um triângulo ABC retângulo em A, seja D a projeção de A sobre $\overline{BC}$. Sabendo-se que o segmento $\overline{BD}$ mede ℓ cm e que o ângulo $D\hat{A}C$ mede θ graus, calcule a área do ΔABC.

34 No triângulo ABC da figura, a mediana $\overline{AM}$, relativa ao lado $\overline{BC}$, é perpendicular ao lado $\overline{AB}$. Sabe-se também que BC = 4 e AM = 1.

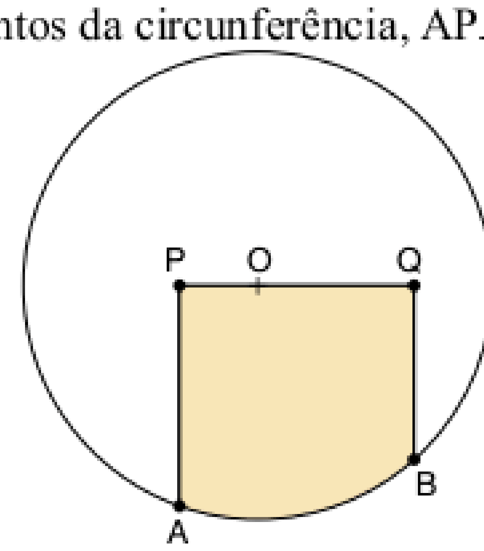


Se α é a medida do ângulo $A\hat{B}C$, determine:

a) senα.
b) AC.
c) a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{AB}$.
d) a área de AMC.

35 Na figura, estão representadas a circunferência C, de centro O e raio 2, e os pontos A, B, P e Q, de tal modo que:

I. o ponto O pertence ao segmento $\overline{PQ}$.
II. OP = 1 e OQ = $\sqrt{2}$.
III. A e B são pontos da circunferência, $\overline{AP} \perp \overline{PQ} \perp \overline{BQ} \perp \overline{PQ}$.

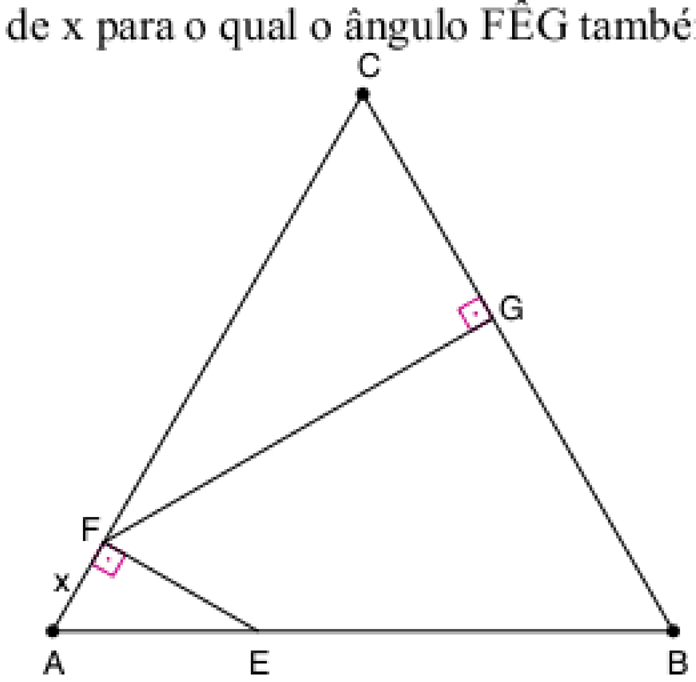


Assim sendo, determine:

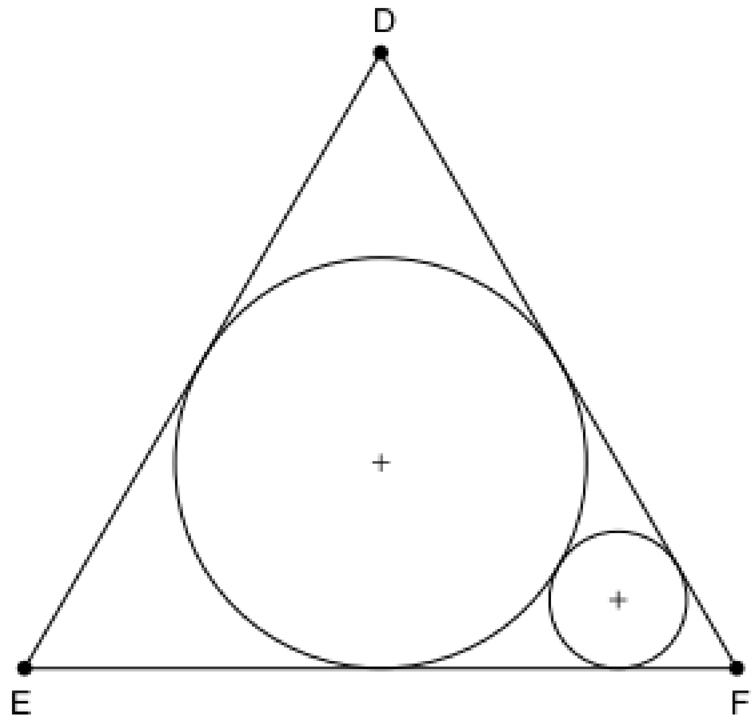
a) a área do triângulo APO.
b) os comprimentos dos arcos determinados por A e B em C.
c) a área da região colorida.

36 O triângulo ABC da figura a seguir é equilátero de lado 1. Os pontos E, F e G pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo. Além disso, os ângulos $A\hat{F}E$ e $C\hat{G}F$ são retos e a medida do segmento $\overline{AF}$ é x. Assim, determine:

a) a área do triângulo AFE em função de x.
b) o valor de x para o qual o ângulo $F\hat{E}G$ também é reto.

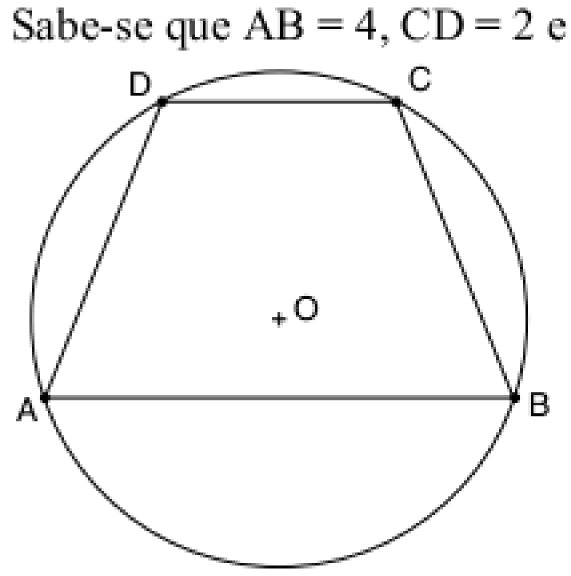


37 O círculo C, de raio R, está inscrito no triângulo equilátero DEF. Um círculo de raio r está no interior do triângulo DEF e é tangente externamente a C e a dois lados do triângulo, conforme a figura.



Assim, determine:
a) a razão entre R e r.
b) a área do triângulo DEF em função de r.

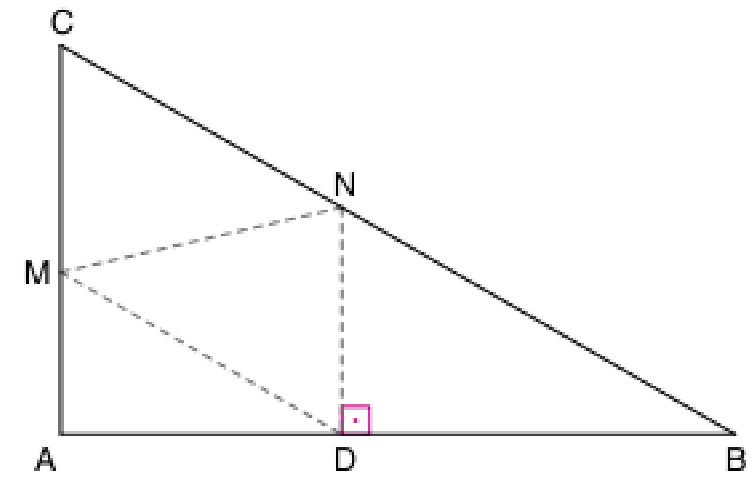
38 A figura representa um trapézio ABCD de bases, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ inscrito em uma circunferência cujo centro O está no interior do trapézio. Sabe-se que AB = 4, CD = 2 e AC = $3\sqrt{2}$.



Assim, determine:
a) altura do trapézio.
b) raio da circunferência na qual ele está inscrito.
c) Calcule a área da região exterior ao trapézio e delimitada pela circunferência.

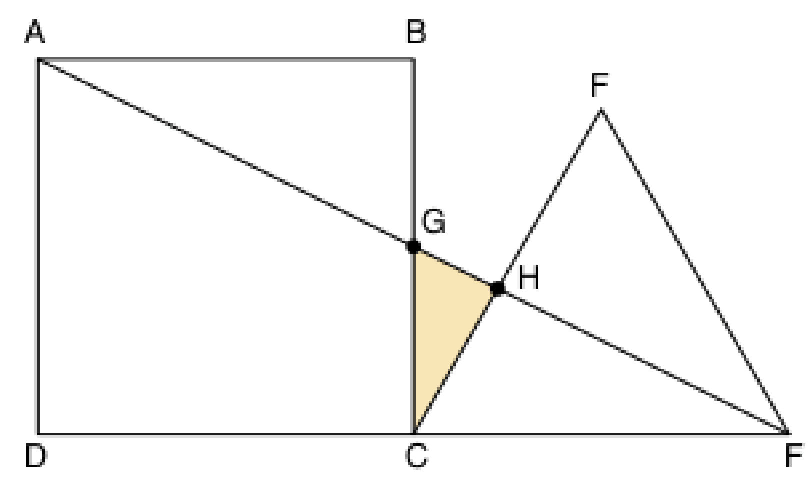
39 Em um triângulo de vértices A, B e C, inscrevemos um círculo de raio r. Sabe-se que o ângulo $\hat{A}$ tem 90º e que o círculo inscrito tangencia o lado $\overline{BC}$ no ponto P, dividindo esse lado em dois trechos com comprimentos PB = 10 e PC = 3.
a) Determine r.
b) Determine as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.
c) Determine a área da região que é, ao mesmo tempo, interna ao triângulo e externa ao círculo.

40 O triângulo retângulo ABC, cujos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ medem 1 e $\sqrt{3}$, respectivamente é dobrado de tal forma que o vértice C coincide com o ponto D do lado $\overline{AB}$. Seja $\overline{MN}$ o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra. Sabendo que $N\hat{D}B$ é reto, determine:



a) o comprimento dos segmentos $\overline{CN}$ e $\overline{CM}$.
b) a área do triângulo CMN.

41 Na figura a seguir, ABCD é um quadrado e CEF é um triângulo equilátero de mesmos lados medindo a. D, C e F estão alinhados. Calcule o valor da área colorida em função de a.



13

FRENTE 3

Ponto

A criação da geometria analítica

René Descartes, foi um filósofo e matemático francês (1596-1650). Sua grande contribuição ao mundo foi o trabalho intitulado de "Discurso do método", no qual o filósofo expõe todo o seu racionalismo para a compreensão dos problemas. Segundo Descartes, um problema sempre será mais bem compreendido se o dividirmos em uma série de pequenos problemas que serão analisados isoladamente do todo.

Para ilustrar o alcance filosófico do seu trabalho, Descartes utilizou o terceiro apêndice da sua obra para descrever a atual geometria analítica. A geometria analítica é uma tradução das operações algébricas em linguagem geométrica.

Introdução

A Geometria, como ciência dedutiva, foi desenvolvida pelos gregos. Entretanto, a Álgebra não era muito estudada por eles, principalmente se não conseguissem estabelecer uma relação com a Geometria.

Somente no século XVII ocorreu o primeiro grande passo na Geometria após os gregos. De maneira independente, os franceses Pierre De Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) descobriram um novo método que unificou definitivamente a Geometria e a Álgebra. Esse método é conhecido, atualmente, como **geometria analítica**.

Fermat e Descartes, além de traduzirem por equações e letras o que os gregos já tinham escrito por palavras e proporções, introduziram o método das coordenadas na Geometria. A introdução das coordenadas teve como imediata consequência o tratamento algébrico de muitas questões geométricas e, reciprocamente, a interpretação de forma geométrica de muitos aspectos algébricos.

Atenção!

Na geometria analítica, os pontos da reta são representados pelos números reais, e os pontos do plano por pares ordenados de números reais.
Lembre-se de que duas retas concorrentes determinam um único plano.

Coordenadas na reta

Para representar pontos em uma reta, devemos primeiramente definir um eixo. Considere uma reta orientada e um **ponto O** chamado de **origem**.

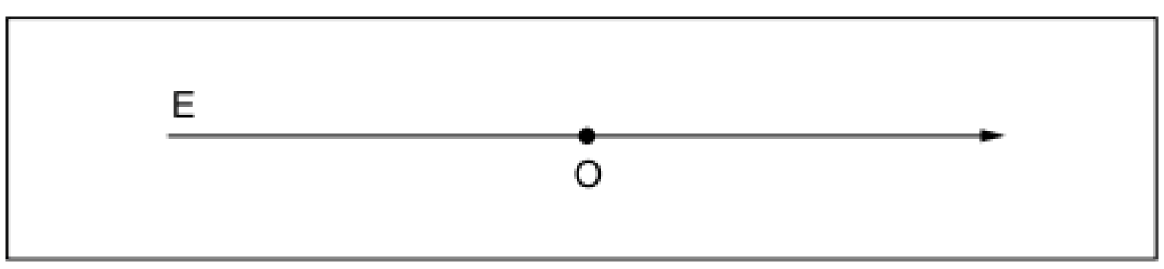


Fig. 1 Eixo E.

Todos os pontos do eixo E estabelecem uma correspondência biunívoca com os números reais, ou seja, cada ponto do eixo E é representado por um número real, e cada número real é representado por um único ponto.

Vamos associar o ponto O ao número zero. Pontos à direita de O correspondem a um número $x \in \mathbb{R}_+^*$, e pontos à esquerda de O a um número $x \in \mathbb{R}_-^*$. Esse número x é a coordenada do ponto. Observe a figura 2.

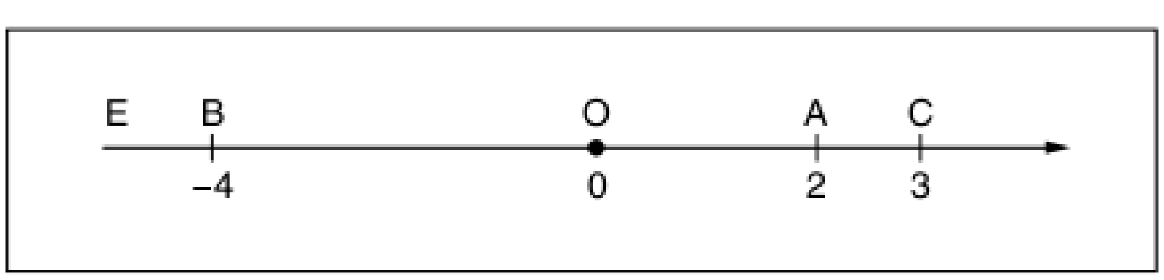


Fig. 2 Representação dos pontos B, O, A e C no eixo E.

Dados os pontos A e B sobre o eixo E, suas coordenadas são x e y, respectivamente. Temos então que a distância do ponto A ao ponto B é $d(A;B) = |x - y|$.

Da figura 2, podemos calcular:

$d(O;A) = |0 - 2| = 2$

$d(B;O) = |-4 - 0| = 4$

$d(A;C) = |2 - 3| = 1$

Coordenadas no plano

Vamos agora considerar dois eixos, E_1 e E_2, perpendiculares e com origem comum O. Essas duas retas determinam o plano α. Observe a figura 3.

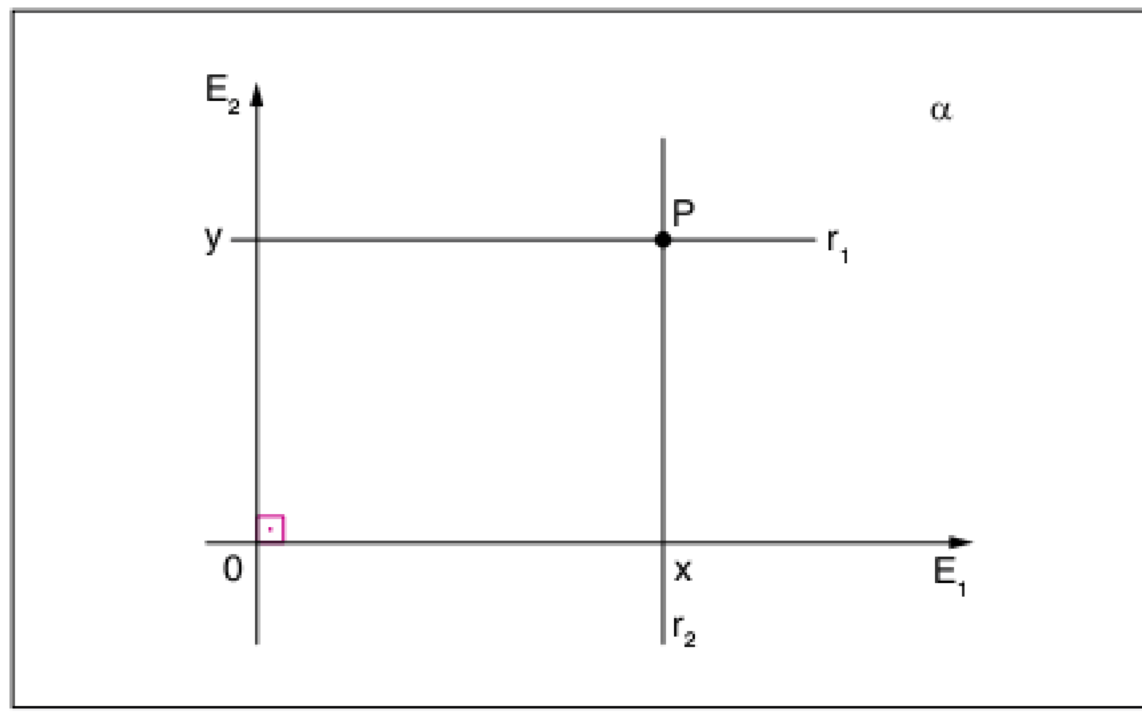


Fig. 3 Sistema de eixos ortogonais.

Nesse sistema de eixos, podemos determinar um ponto P qualquer do plano α, por meio de $r_1 \,//\, E_1$ e $r_2 \,//\, E_2$.

Assim:

$r_1 \cap r_2 = \{P\}$

Este ponto P é identificado pela coordenada x do eixo E_1 e pela coordenada y do eixo E_2.

Temos, então, que o ponto P é representado de maneira única pelo par ordenado (x; y), tal que x é abscissa de P e y é a ordenada de P.

De maneira prática, o eixo $\mathbf{E_1}$ é chamado de **eixo x (eixo das abscissas)** e o eixo $\mathbf{E_2}$ é o **eixo y (eixo das ordenadas)**. Na figura 4, chamada agora de sistema cartesiano ortogonal, temos a representação de alguns pontos por meio de suas coordenadas.

A(4; 1) B(–2; 2) C(0; –3)

D(5; –2) E(–3; –4) F(2; 0)

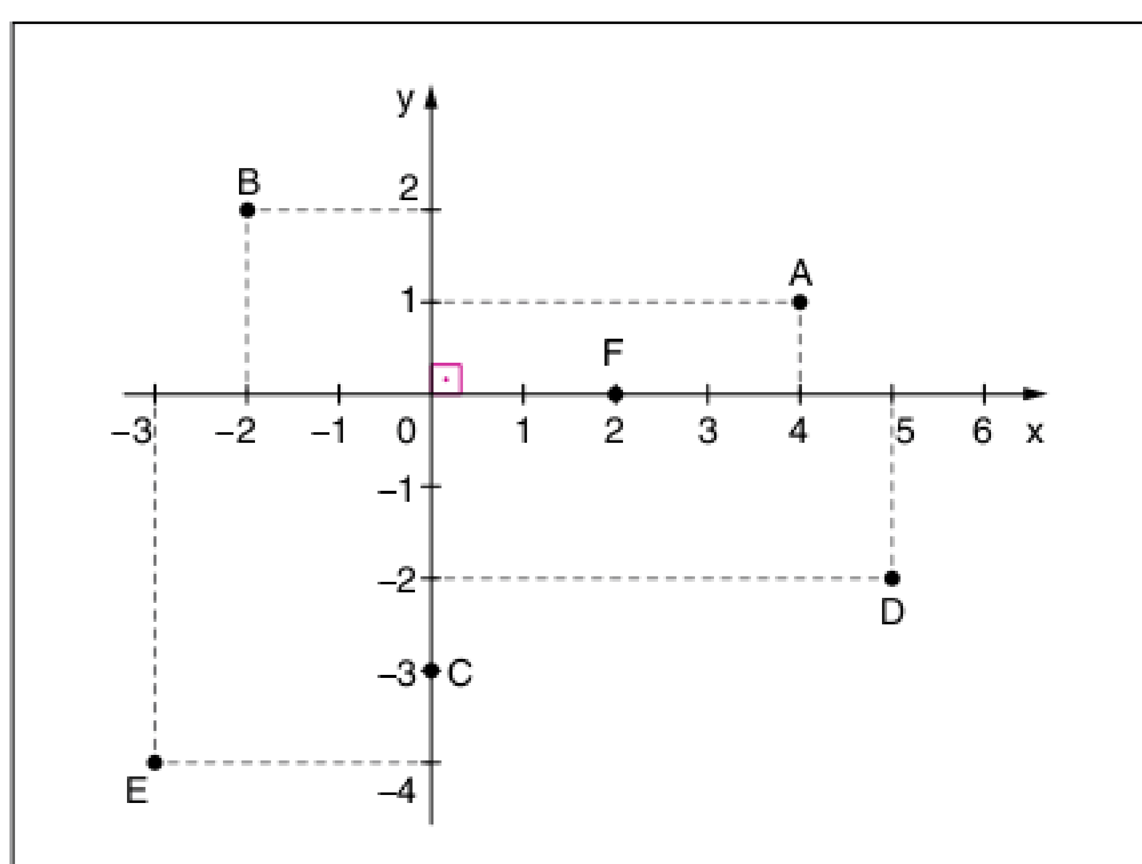


Fig. 4 Sistema cartesiano ortogonal.

Os eixos ortogonais dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas de **quadrantes**. Assim, na figura anterior, podemos afirmar que:

$A \in 1^{\circ}$ quadrante $E \in 3^{\circ}$ quadrante
$B \in 2^{\circ}$ quadrante $D \in 4^{\circ}$ quadrante

Temos na figura 4 pontos localizados nos eixos, $F \in$ eixos das abscissas e $C \in$ eixo das ordenadas.

Podemos afirmar que o eixo Ox das abscissas têm coordenadas (x; 0) e no eixo Oy das ordenadas os pontos são da forma (0; y). O ponto O, origem dos eixos, tem coordenadas (0; 0).

Distância entre dois pontos

Considere os pontos $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$; queremos obter a medida do segmento $\overline{AB}$, ou seja, a distância de A até B.

Vamos analisar três casos possíveis para esse problema.

1º Caso

$\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das abscissas.

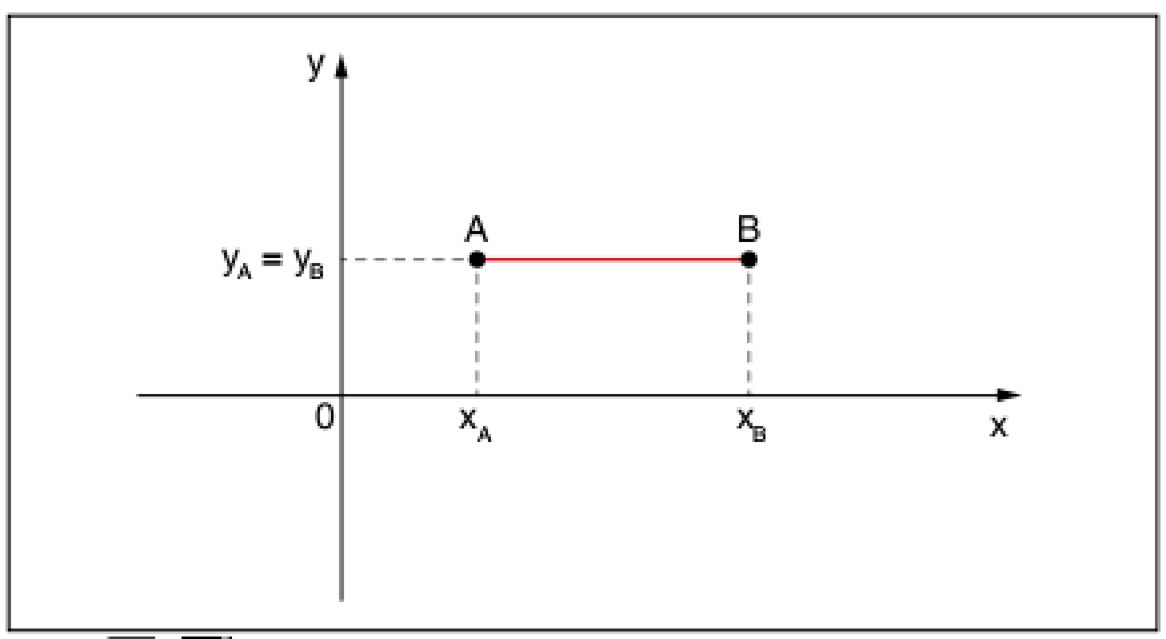


Fig. 5 $\overline{AB} // \overline{OX}$.

Nesse caso, temos que $d_{AB} = |x_B - x_A|$.

2º Caso

$\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das ordenadas.

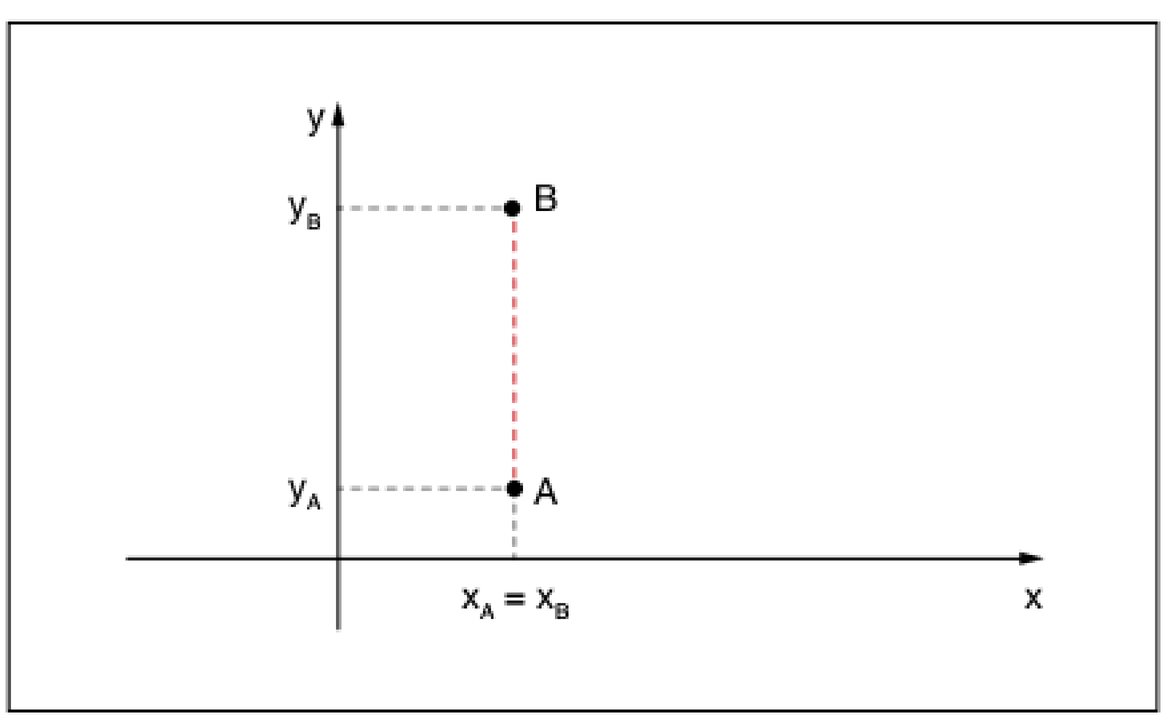


Fig. 6 $\overline{AB}$//OY .

De raciocínio análogo ao caso anterior, temos que $d_{AB} = |y_B - y_A|$.

3º Caso

$\overline{AB}$ é inclinado em relação aos eixos.

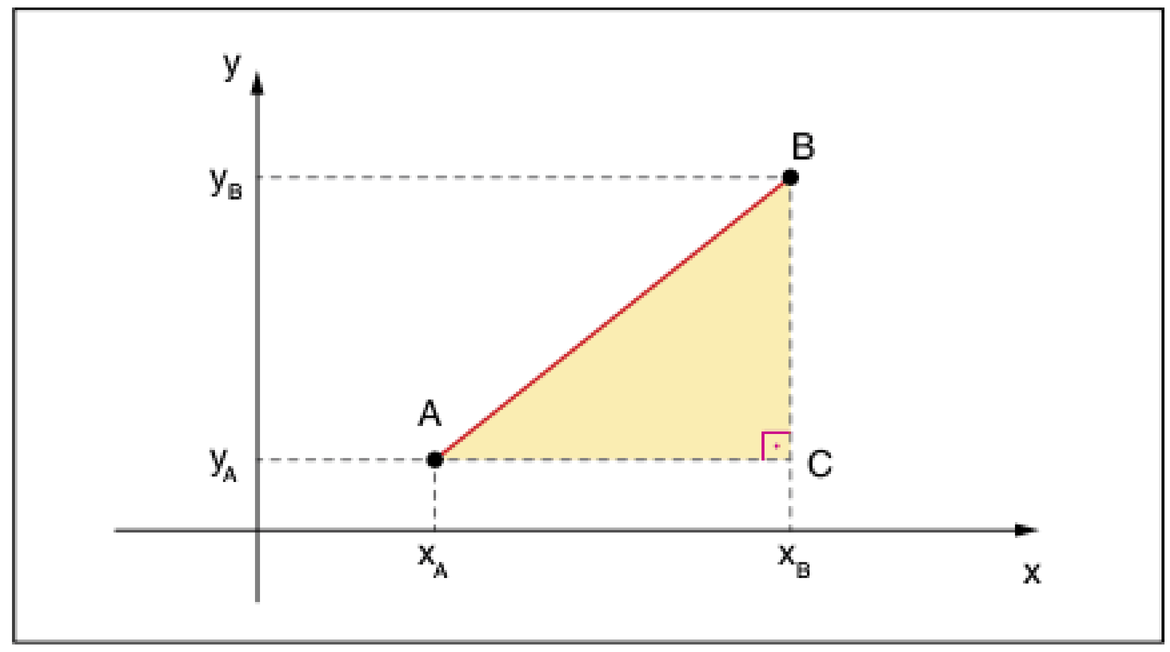


Fig. 7 $\overline{AB}$ inclinada.

Nesse caso, podemos perceber o triângulo retângulo ABC, tal que:

$$AC = |x_B - x_A| \quad (1^{\circ}\text{ caso})$$
$$BC = |y_B - y_A| \quad (2^{\circ}\text{ caso})$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \therefore AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2}$$
$$AB = \sqrt{|x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2}$$

Percebemos que são indiferentes as expressões:

$|x_B - x_A| = |x_A - x_B|$ e $|y_B - y_A| = |y_A - y_B|$

Assim, temos:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

ATENÇÃO!

Dados dois pontos $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ quaisquer do plano cartesiano, a distância entre A e B é dada por:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Na fórmula da distância entre dois pontos, o termo $(\Delta x)^2$ é indiferente $(x_A - x_B)^2$ ou $(x_B - x_A)^2$.

Exercícios resolvidos

1 Determine a natureza do triângulo A(2; –3), B(–5; 1) e C(4; 3).

Resolução:

Vamos inicialmente calcular os lados do triângulo. Assim:

$$AB = \sqrt{[2-(-5)]^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{49 = 16} = \sqrt{65}$$

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$BC = \sqrt{(-5-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$$

Para verificar a natureza de um triângulo de lados a, b, e c, compare a^2 e $b^2 + c^2$, em que a é o maior lado.

$$\left(\sqrt{85}\right)^2 < \left(\sqrt{65}\right)^2 + \left(\sqrt{40}\right)^2 \therefore 85 < 105 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *triângulo acutângulo.*

2 Determine o ponto do eixo das abscissas equidistante dos pontos A(6; 5) e B(–2, 3).

Resolução:

Um ponto do eixo das abscissas possui coordenadas P(a; 0). Assim, PA = PB.

$$PA = \sqrt{(6-a)^2 + (5)^2} \text{ e } PB = \sqrt{(a+2)^2 + 3^2} \Rightarrow$$

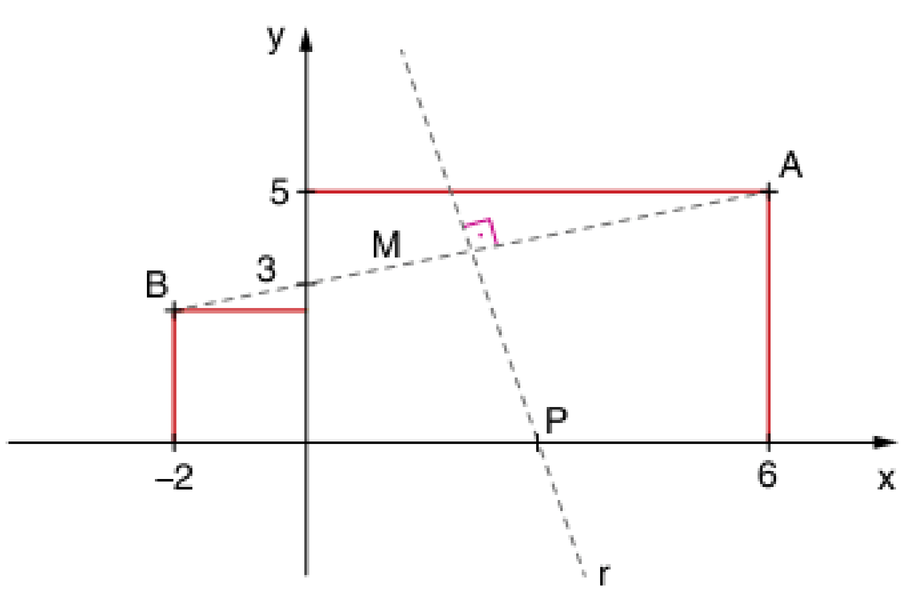
$$\Rightarrow \sqrt{(6-a)^2 + 25} = \sqrt{(a+2)^2 + 9} \therefore 36 - 12a + a^2 + 25 =$$

$$= a^2 + 4a + 4 + 9$$

$$a^2 - 12a + 61 = a^2 + 4a + 13 \therefore 48 = 16a \therefore a = 3$$

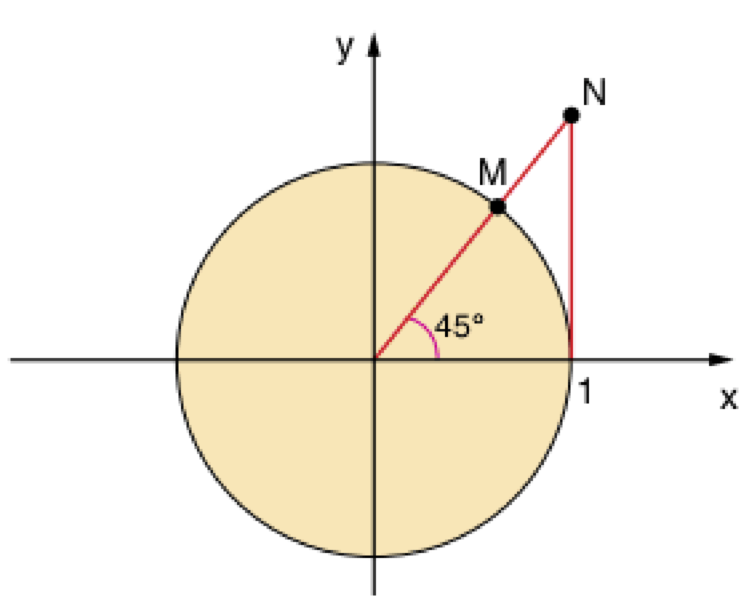
P(3; 0)

Vamos analisar o problema geometricamente:



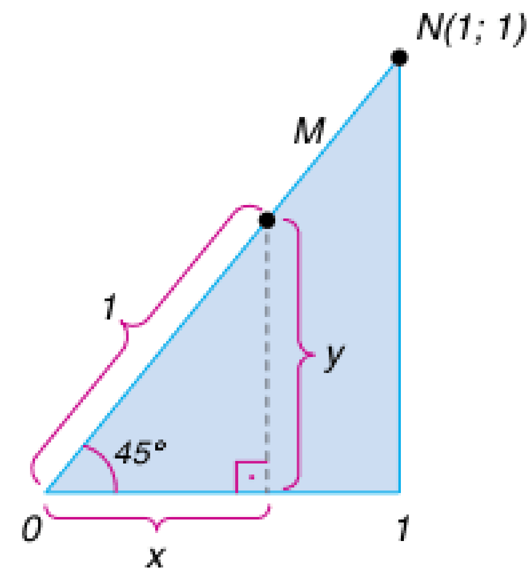
M é ponto médio de $\overline{AB}$, e r é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, ou seja, o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B. Como o nosso ponto pertence ao eixo $\overleftrightarrow{OX}$, temos $r \cap \overleftrightarrow{OX} = \{P\}$.

3 Considere a figura a seguir. Calcule o comprimento do segmento MN.



Resolução:

Não seria necessária uma solução por meio da geometria analítica, mas vamos enfatizar a distância entre pontos.



Temos que x = y e $sen45° = \frac{y}{1} \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

As coordenadas dos pontos são:

$$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } N(1; 1)$$

$$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}{4} + \frac{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4}} =$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2} - 1$$

4 Dados os pontos A(a – 3b; 5) e B(4; 2b), determine a distância entre A e B sabendo que eles pertencem, respectivamente, às bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares.

Resolução:

Se A pertence às bissetrizes dos quadrantes ímpares, temos $x_A = y_A \therefore a - 3b = 5$. *Se B pertence às bissetrizes dos quadrantes pares, temos* $x_B = -y_B \therefore 4 = -2b \therefore b = -2$

$$\begin{cases} a - 3b = 5 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = -2$$

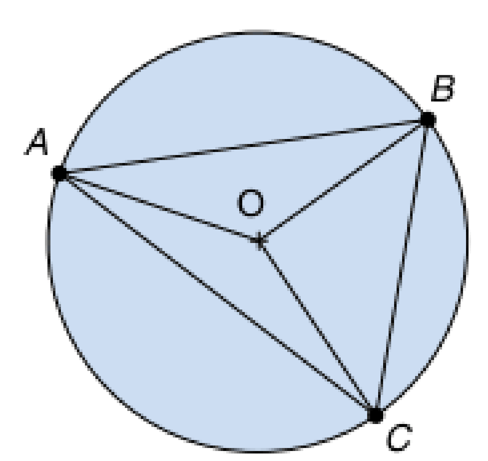
Os pontos são A(5; 5) e B(4; –4)

$$d_{AB} = \sqrt{(5-4)^2 + (5+4)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$$

5 Dados os pontos A(8; 11), B(–4; –5) e C(–6; 9), obter o circuncentro e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Resolução:

Observe a figura a seguir.



O é o circuncentro do triângulo ABC, e devemos ter OA = OB = OC = raio O(a; b).

$$OA = \sqrt{(a-8)^2 + (b-11)^2}$$

$$OB = \sqrt{(a+4)^2 + (b+5)^2}$$

$$OC = \sqrt{(a+6)^2 + (b-9)^2}$$

Podemos escrever:

$OA = OB \therefore a^2 - 16a + 64 + b^2 - 22b + 121 =$

$= a^2 + 8a + 16 + b^2 + 10b + 25 \therefore -24a - 32b =$

$= -144 \therefore 3a + 4b = 18$

$OB = OC \therefore a^2 + 8a + 16 + b^2 + 10b + 25 =$

$= a^2 + 12a + 36 + b^2 - 18b + 81 \therefore -4a + 28b =$

$= 76 \therefore a - 7b = -19$

Montamos agora um sistema para encontrar o ponto O.

$$\begin{cases} 3a + 4b = 18 \\ a - 7b = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \end{matrix} \Rightarrow O(2;\ 3)$$

$$raio = OC = \sqrt{(2+6)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{64+36} = 10$$

Coordenadas do ponto médio

Dados dois pontos distintos $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, desejamos encontrar o ponto M de $\overline{AB}$, tal que AM = MB. Esse ponto M é denominado ponto médio de $\overline{AB}$. Observe a figura 8.

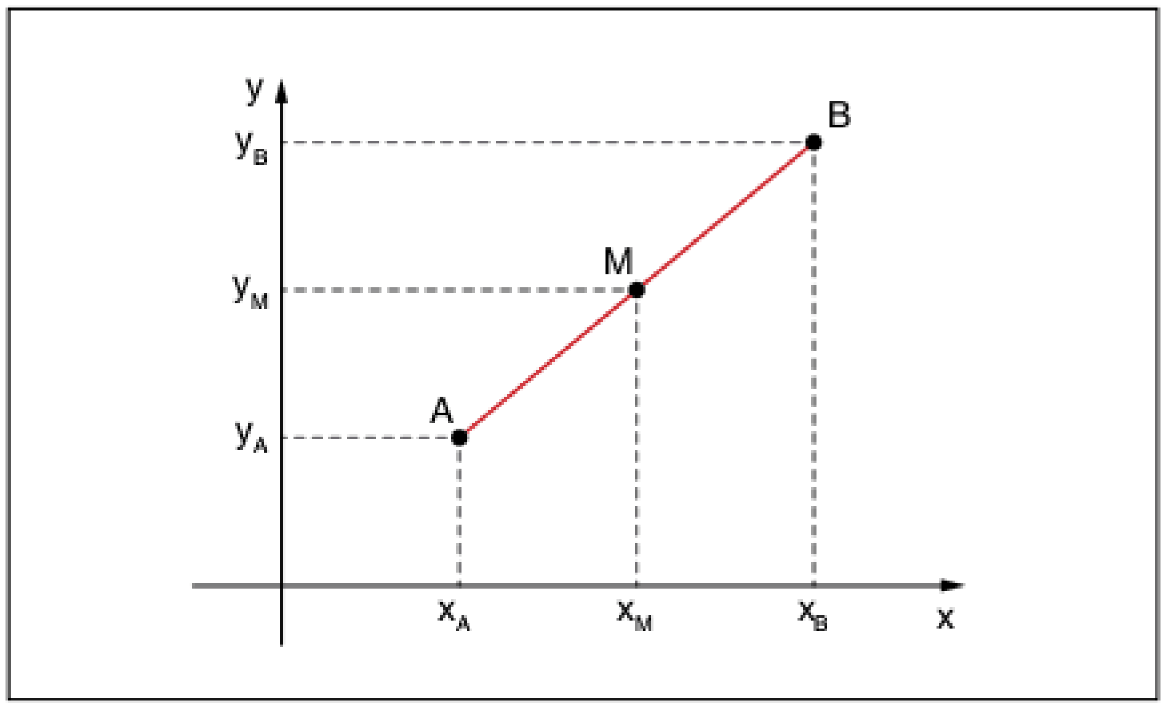
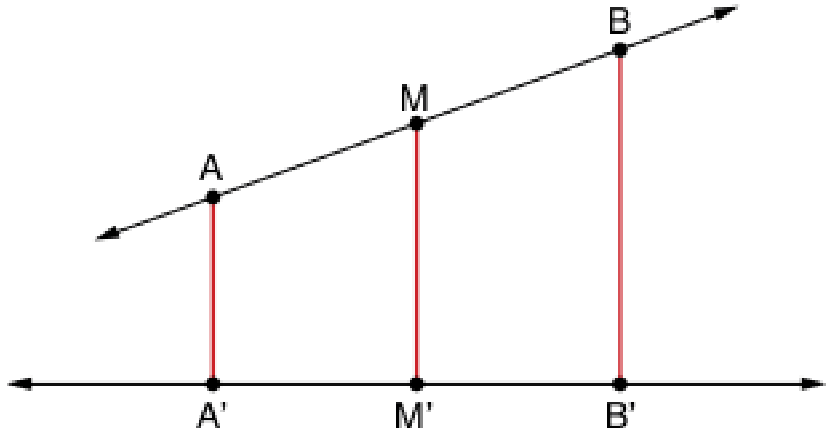


Fig. 8 $M(x_M; y_M)$ é ponto médio de $\overline{AB}$.

Pelo teorema de Tales, temos:



(feixe de 3 retas paralelas e 2 transversais)

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'} \therefore 1 = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \therefore x_M - x_A =$$

$$= x_B - x_M \therefore 2x_M = x_A + x_B \therefore x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Utilizando o mesmo raciocínio para obter a ordenada de M, temos que:

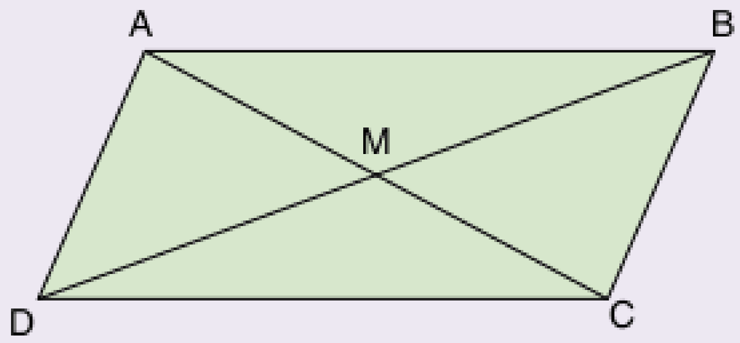
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

ATENÇÃO!

Dados os pontos $A(x_A;\ y_A)$ e $B(x_B;\ y_B)$, as coordenadas do ponto médio M de $\overline{AB}$ são:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Para a resolução de vários exercícios, não se esqueça da principal propriedade do paralelogramo:

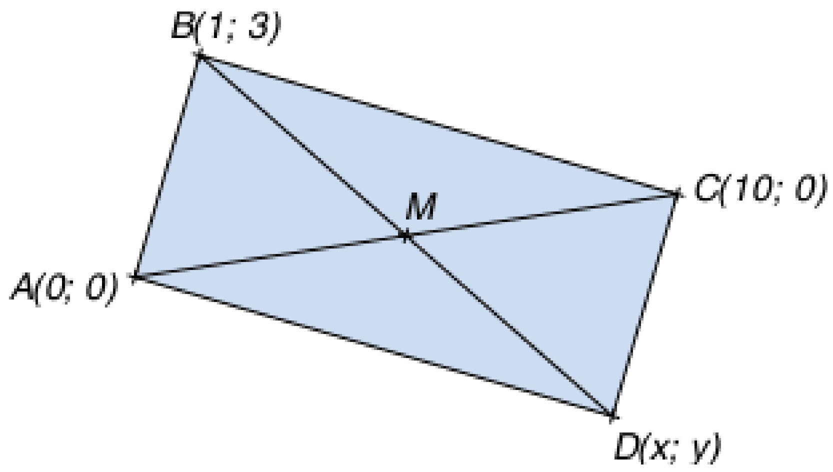


As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ cruzam-se no ponto médio M (AM = MC e DM = MB).

Exercícios resolvidos

6 Os pontos (0; 0), (1; 3) e (10; 0) são vértices de um retângulo. Determine o 4º vértice do retângulo.

Resolução:



M é ponto médio de $\overline{AC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_M = \frac{0+10}{2} = 5 \text{ e } y_M = \frac{0+0}{2} = 0 \therefore M(5;\ 0)$$

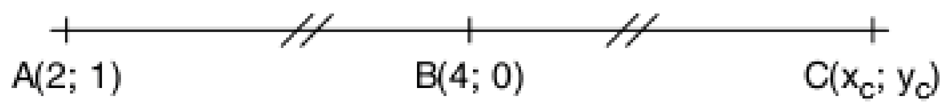
M é ponto médio de:

$$BD \Rightarrow \frac{x+1}{2} = 5 \therefore x = 9 \text{ e } \frac{y+3}{2} = 0 \therefore$$

$$\therefore y = -3 \therefore D(9;\ -3)$$

7 Considere que A(2; 1) e B(4; 0) são dois pontos no plano coordenado. Determine as coordenadas do ponto C, simétrico do ponto A, em relação ao ponto B.

Resolução:



$AB = BC \Rightarrow B$ é ponto médio de $\overline{AC}$

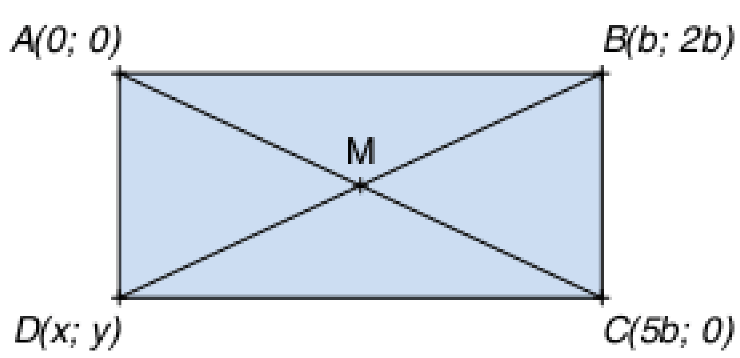
$$\frac{x_C+2}{2} = 4 \therefore x_C = 6$$

$$\frac{y_C+1}{2} = 0 \therefore y_C = -1$$

O ponto C é (6; –1)

8 Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0; 0), (b; 2b) e (5b; 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. Determine as coordenadas do 4º vértice.

Resolução:



$$AM = MC \therefore x_M = \frac{0+5b}{2} = \frac{5b}{2} \text{ e } y_M = \frac{0+0}{2} = 0 \therefore M\left(\frac{5b}{2}; 0\right)$$

M é ponto médio de $\overline{BD}$, assim:

$$\frac{x+b}{2} = \frac{5b}{2} \therefore x = 4b \text{ e } \frac{y+2b}{2} = 0 \therefore y = -2b$$

D(4b; –2b)

9 Dado o triângulo ABC de vértices A(2; 2), B(–4; –6) e C(4; –12), prove que o triângulo é retângulo. Calcule o raio da sua circunferência circunscrita e o circuncentro.

Resolução:

$$AB = \sqrt{(2+4)^2 + (2+6)^2} = 10$$

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (2+12)^2} = 10\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(4+4)^2 + (-6+12)^2} = 10$$

Temos, então, que $AC^2 = AB^2 + BC^2$; logo, o ΔABC é retângulo em B. A sua hipotenusa é o diâmetro da circunferência circunscrita, assim $2R = 10\sqrt{2} \therefore R = 5\sqrt{2}$.
O circuncentro é o ponto médio da hipotenusa $\overline{AC}$, assim,

$$x_M = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ e } y_M = \frac{2-12}{2} = -5$$

M(3; –5) é o circuncentro do ΔABC.

Divisão de um segmento em uma razão dada

Vamos dividir um segmento $\overline{AB}$ em uma razão $K \in \mathbb{R}_+^*$ por meio de dois teoremas de Tales, um em cada eixo coordenado. Observe o exemplo a seguir.

Divida o segmento $\overline{AB}$ com extremidades A(2; 3) e B(4; 6) por um ponto C, tal que $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$.

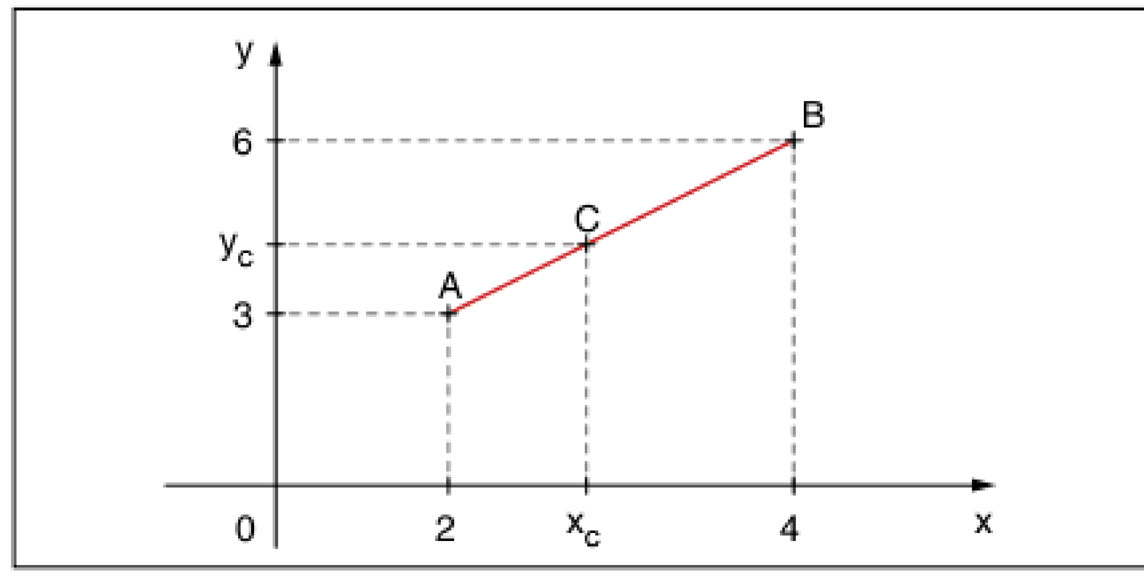


Fig. 9 Segmento $\overline{AB}$.

Pelo teorema de Tales, em que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{OX}$ são retas transversais, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x_C - 2}{4 - x_C} \therefore \frac{2}{3} = \frac{x_C - 2}{4 - x_C} \therefore 8 - 2x_C = 3x_C - 6$$

$$x_C = \frac{14}{5}$$

Pelo teorema de Tales, em que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{OY}$ são retas transversais, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{y_C - 3}{6 - y_C} \therefore \frac{2}{3} = \frac{y_C - 3}{6 - y_C} \therefore 3y_C - 9 = 12 - 2y_C$$

$$5y_C = 21 \therefore y_C = \frac{21}{5}$$

O ponto é $C\left(\frac{14}{5}; \frac{21}{5}\right)$

Determinação do baricentro (G) de um triângulo ABC de vértices $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$

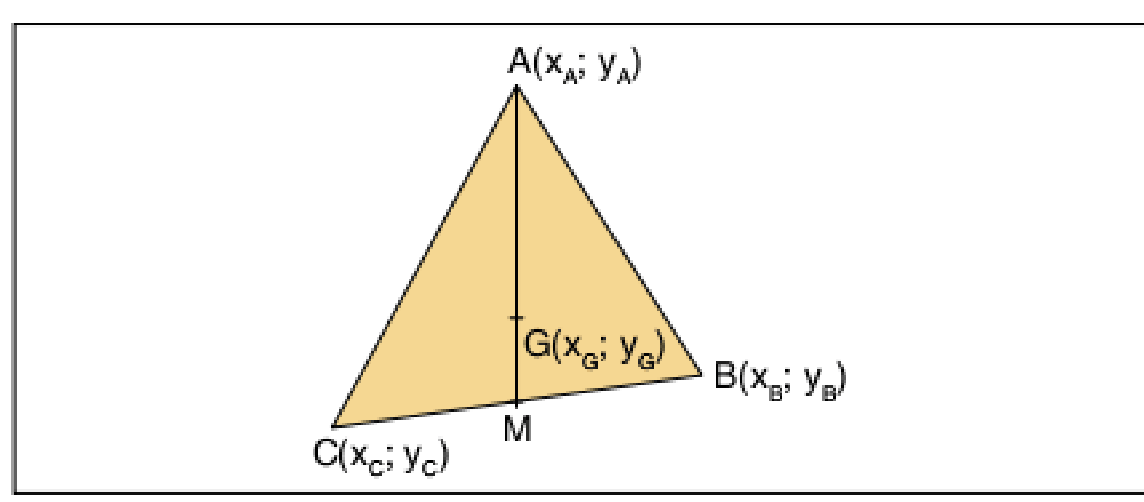


Fig. 10 Baricentro do ΔABC.

M é ponto médio de $\overline{BC}$, temos:

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_C + y_B}{2}$$

G divide $\overline{AM}$ na razão 2:1, assim:

$$\frac{GM}{GA} = \frac{x_G - x_M}{x_A - x_G} \therefore \frac{1}{2} = \frac{x_G - x_M}{x_A - x_G} \therefore x_A - x_G = 2x_G - 2x_M$$

$$x_A + 2x_M = 3x_G \therefore x_A + 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) = 3x_G \therefore$$

$$\therefore x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Analogamente, temos: $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

O baricentro de um triângulo qualquer ABC é:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

ATENÇÃO!

O baricentro de um triângulo qualquer é o ponto de encontro das medianas. O baricentro divide as medianas na razão 2:1.

Cálculo da área de um triângulo

Vamos calcular a área do triângulo ABC de vértices $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$. Observe a figura.

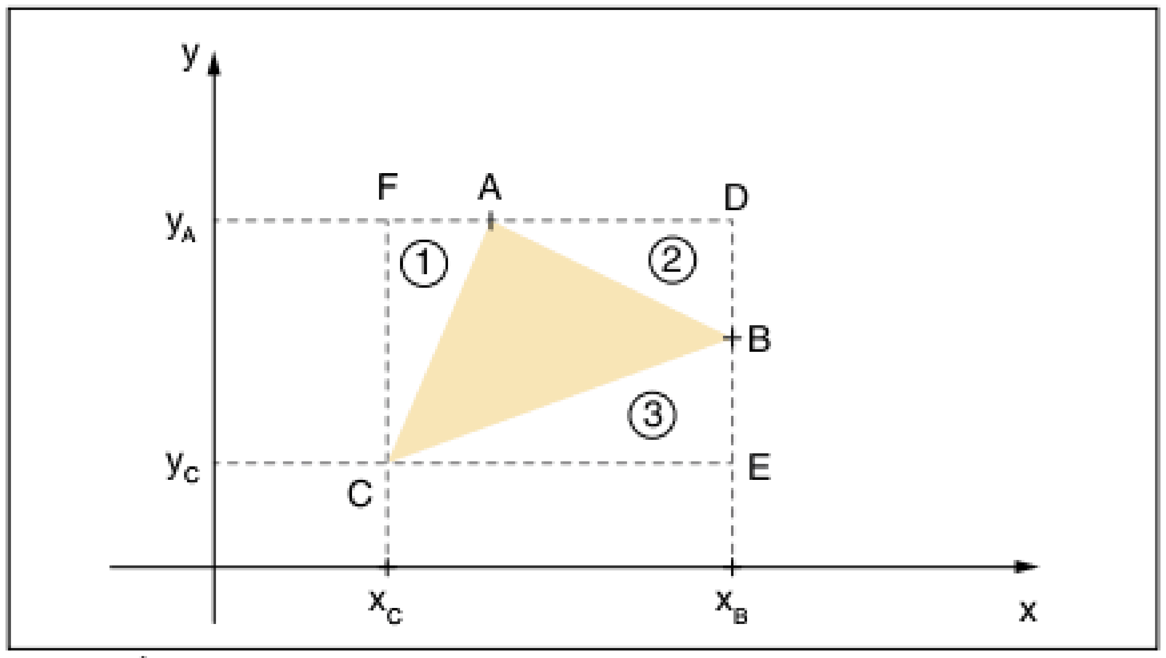


Fig. 11 Área do triângulo.

Para obter a área do ΔABC, subtraímos do retângulo DFCE as áreas dos triângulos (1), (2) e (3).

$$S_{ABC} = (x_B - x_C) \cdot (y_A - y_C) - [(1) + (2) + (3)]$$

$$(1) = (x_A - x_C).(y_A - y_C).\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(2) = (x_B - x_A).(y_A - y_B).\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(3) = (x_B - x_C).(y_B - y_C).\left(\frac{1}{2}\right)$$

Substituindo os valores e simplificando os resultados, temos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.[x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A]$$

Esta expressão pode ser simplificada por um determinante, assim:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}$$

Como S_{ABC} não pode ser negativo, precisamos inserir um módulo.

A área de um ΔABC qualquer é dada por:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{matrix}\right\|$$

Exercícios resolvidos

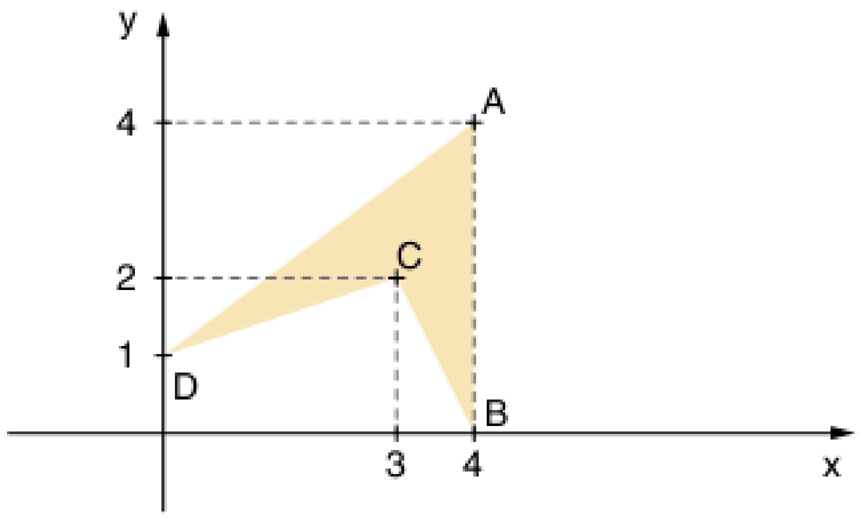
10 As coordenadas dos vértices de um triângulo são A(0; 0), B(2; y) e C(–4; 2y). Sabendo que a área desse triângulo é 8, calcule y.

Resolução:

$$A = \frac{1}{2}.\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & y & 2y \end{matrix}\right\| \therefore 2A = |8y| \therefore 16 = |8y| \therefore$$

$\therefore 8y = \pm 16$, *assim* $y = \pm 2$.

11 Determine a área da figura colorida.



Resolução:

Vamos dividir a figura em dois triângulos (BCA e DCA), temos:

$$\text{área} = \frac{1}{2}.\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{matrix}\right\| + \frac{1}{2}.\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{4}{2} + \frac{5}{2}$$

área = 4,5 unidades de área.

Condição de alinhamento entre três pontos

Três pontos alinhados determinam um triângulo de área nula, então a fórmula da área do triângulo transforma-se em uma condição de alinhamento dos três pontos, assim:

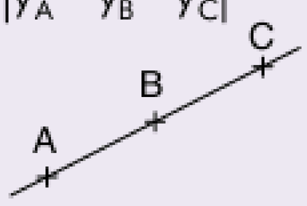
Os pontos A, B e C estão alinhados se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0$$

ATENÇÃO!

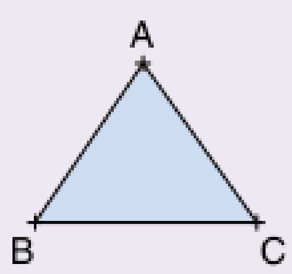
Sejam os pontos $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$, então:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0, \text{ teremos:}$$



determinando uma reta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} \neq 0, \text{ teremos:}$$



determinando um triângulo.

Exercício resolvido

12 Determine a, ponto do eixo das abscissas, que está na mesma reta, formado pelos pontos (–2; 3) e (5; 1).

Resolução:

Se o ponto pertence ao eixo das abscissas, então é da forma (a; 0). Sendo que, os três pontos estão na mesma reta: (a; 0), (–2; 3) e (5; 1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, temos:

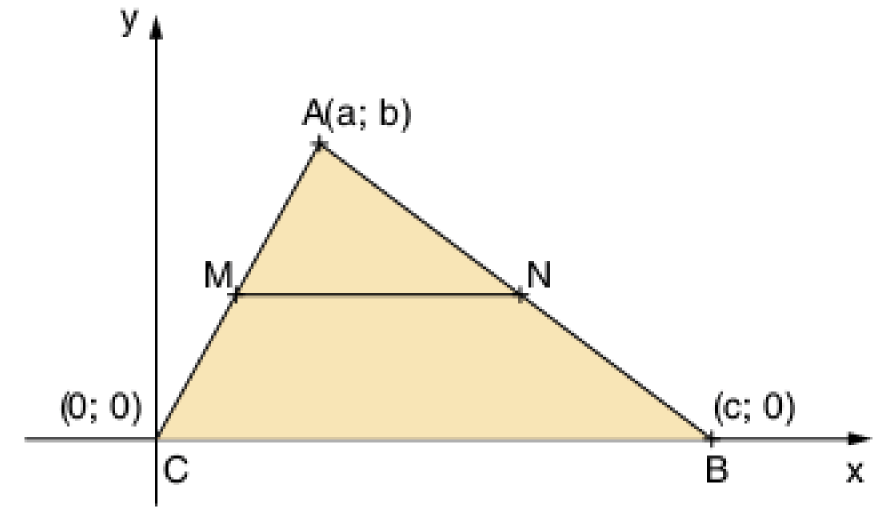
$$(3a - 2) - (15 + a) = 0 \therefore 2a - 17 = 0$$

$$a = \frac{17}{2}. \text{ O ponto é } \left(\frac{17}{2}; 0\right)$$

Exemplos de aplicação da geometria analítica na geometria plana.

Exercícios resolvidos

13 Calcule a base média do triângulo ABC.



Resolução:

M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do ΔABC. Pelas coordenadas do ponto médio, temos:

$$AM = MC \therefore x_M = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2} \text{ e } y_M = 0 + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

$$AN = NB \therefore x_N = \frac{a+c}{2} \text{ e } y_N = \frac{b+0}{2} = \frac{b}{2}$$

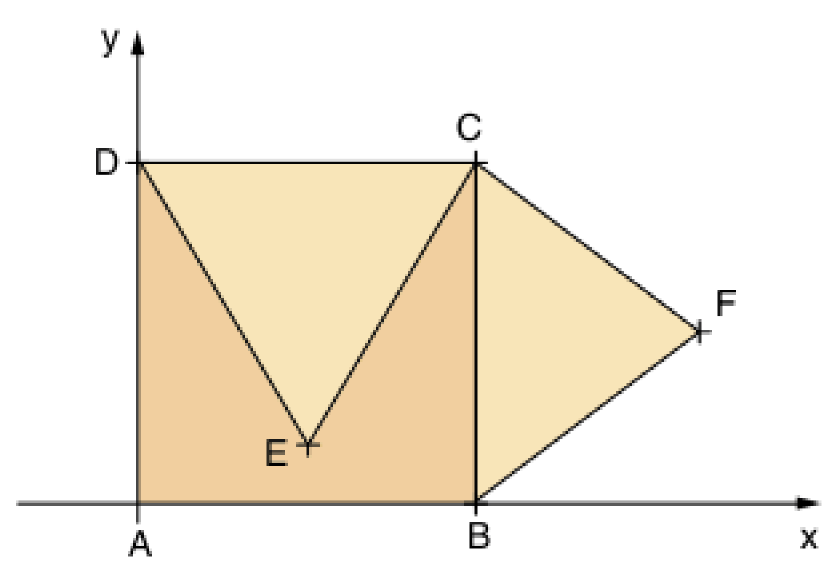
$$\text{Assim, } M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) \text{ e } N\left(\frac{a+c}{2}; \frac{b}{2}\right)$$

Os pontos M e N possuem as mesmas ordenadas; logo, $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

$$MN = x_N - x_M = \frac{a+c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a+c-a}{2} = \frac{c}{2}$$

Esse resultado equivale à metade da base $\overline{BC}$.

14 Considere que o quadrado ABCD tem lado a, e os triângulos CDE e BFC são equiláteros. Prove que os pontos AEF estão alinhados.



Resolução:

Colocamos o sistema cartesiano com a origem no ponto A e os eixos x e y contêm os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Vamos obter geometricamente as coordenadas dos pontos A, E e F.

$$\text{Assim, } A(0; 0),\ E\left(\frac{a}{2}; a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } F\left(a + \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

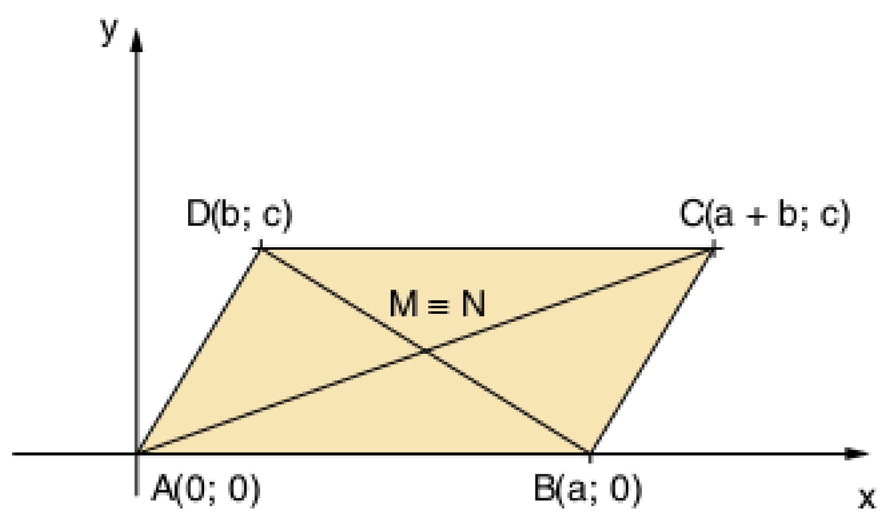
Vamos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{a}{2} & \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a \\ 0 & \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a & \frac{a}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{a^2}{4}-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2 = \frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=0$$

Os pontos A, E e F são colineares.

15 Prove que as diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio.



Resolução:

Ponto médio de $\overline{AC}$: $M\left(\frac{0+a+b}{2};\frac{0+c}{2}\right) \equiv M\left(\frac{a+b}{2};\frac{c}{2}\right)$

Ponto médio de $\overline{BD}$: $N\left(\frac{b+a}{2};\frac{c+0}{2}\right) \equiv N\left(\frac{a+b}{2};\frac{c}{2}\right)$

Assim, M e N são coincidentes, demonstrando que as diagonais de um paralelogramo são coincidentes.

16 Sejam P(a; b), Q(1; 3) e R(–1; –1) pontos do plano. Se a + b = 7, determine P de modo que P, Q e R estejam colineares.

Resolução:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} a & 1 \\ b & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \quad \therefore$$

$$(3a-1-b)-(-3-a+b)=0$$

$$\therefore \quad 3a-1-b+3+a-b=0$$

$$4a-2b=-2 \therefore 2a-b=-1$$

$$\begin{cases} a+b=7 \\ 2a-b=-1 \end{cases} +$$

$$3a = 6 \qquad a=2 \text{ e } b=5$$

$$a=2$$

Assim, as coordenadas de P são (2;5).

Revisando

1 O ponto A pode ser representado de duas formas, (x + 2; 2y – 4) e (8x; 3y – 10). Determine o valor de x e y e das coordenadas de A.

2 Seja $\overline{AC}$ uma diagonal do quadrado ABCD. Se A = (–2; 3) e C = (0; 5), determine a área de ABCD, em unidades de área.

3 Sejam A(1; 0) e B(5; $4\sqrt{3}$) dois vértices de um triângulo equilátero ABC. O vértice C está no 2º quadrante. Determine suas coordenadas.

4 Determine o valor de x para que os pontos (1; 3), (–2; 4) e (x; 0) do plano sejam colineares.

5 Determine os valores de a, tal que o ponto (a; 2) diste 5 unidades do ponto (0; –2).

Exercícios propostos

Distância entre pontos

1 **Fasp** A distância entre os pontos (2; –1) e (–1; 3) é igual a:

(a) zero
(b) $\sqrt{5}$
(c) $\sqrt{7}$
(d) 5
(e) n.d.a.

2 **FEI** Para que valores de x o triângulo de vértices (–6; 0), (0; 6) e (x; –x) é equilátero?

3 Dado um ponto P(x; y) do plano cartesiano, o número $\sqrt{x^2+y^2}$ é:

(a) a distância de P ao eixo de x.
(b) a distância de P à origem do sistema.
(c) a distância de P ao eixo de y.
(d) a soma das coordenadas de P.

4 **PUC** O triângulo de vértices A(4; 3), B(6; –2) e C(–11; –3) é:

(a) equilátero.
(b) isósceles.
(c) acutângulo.
(d) obtusângulo.
(e) retângulo.

5 O ponto (x; 2x) é equidistante dos pontos (3; 0) e (–7; 0) para:

(a) $x = -2$
(b) $x = -\frac{5}{2}$
(c) $x = \pm 2$
(d) $x = 0$
(e) $x = \frac{7}{2}$

6 Sabe-se que A(1; 2) e B(2; 1). A distância do centro do quadrado ABCD à origem é:

(a) 0 ou 1
(b) 1 ou 2
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou 2
(d) $\sqrt{2}$ ou 2
(e) $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$

7 **Mackenzie** Determinar o ponto P distante 10 unidades do ponto A(–3; 6) com abscissa igual a 3.

8 Calcule o comprimento da mediana AM do triângulo de vértices A(0; 0), B(3; 7) e C(5; –1).

9 **UFJF-MG** Se (2; 1), (3; 3) e (6; 2) são os pontos médios dos lados de um triângulo, quais são os seus vértices?

(a) (–1; 2), (5; 0), (7; 4)
(b) (2; 2), (2; 0), (4; 4)
(c) (1; 1), (3; 1), (5; 5)
(d) (3; 1), (1; 1), (3; 5)
(e) n.d.a.

10 **UFSC** Dados os pontos A(–1; –1), B(5; –7) e C(x; 2), determine x, sabendo que o ponto C é equidistante dos pontos A e B.

(a) x = 8
(b) x = 6
(c) x = 15
(d) x = 12
(e) x = 7

11 **Ufal** Sejam os pontos A(1; 2) e B(3; 1). A área de um triângulo equilátero de lado AB é:

(a) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$
(b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(c) $2\sqrt{3}$
(d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
(e) $\frac{11\sqrt{3}}{4}$

12 Sendo dados os vértices consecutivos de um quadrado A(3; –7) e B(–1; 4), calcular a sua área.

13 Sendo A(3; 1), B(4; –4) e C(–2; 2) vértices de um triângulo, classifique-o quanto ao seus lados.

14 Prove que o triângulo cujos vértices são A(2; 2), B(–4; –6) e C(4; –12) é retângulo.

15 Determine x de modo que o triângulo de vértices A(–2; 5), B(2; –1) e C(3; x) seja retângulo em A.

16 Dados A(x; 3), B(–1; 4) e C(5; 2), obtenha x de modo que A seja equidistante de B e C.

Quadriláteros notáveis

17 Dados os pontos M(2; 2) e N(5; –2), determinar um ponto P do eixo das abscissas cujo ângulo MPN seja reto.

18 **Cesgranrio** Os pontos M, N, P e Q do R^2 são os vértices de um paralelogramo situado no 1º quadrante. Se M(3; 5), N(1; 2) e P(5; 1), então o vértice Q é:

(a) (7; 4)
(b) (6; 5)
(c) (9; 8)
(d) (8; 6)
(e) (6; 3)

19 **ITA** Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0; 0), (b; 2b) e (5b; 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

(a) (–b; –b)
(b) (2b; –b)
(c) (4b; –2b)
(d) (3b; –2b)
(e) (2b; –2b)

20 **PUC-SP** Os pontos (0; 0), (1; 3) e (10; 0) são vértices de um retângulo. O quarto vértice do retângulo é o ponto:

(a) (9; –3)
(b) (9; –2)
(c) (9; –1)
(d) (8; –2)
(e) (8; –1)

21 Dados dois vértices opostos de um quadrado A(3; 5) e B(1; –3), calcular a sua área.

22 Dados dois vértices consecutivos de um paralelogramo, A(–3; 5) e B(1; 7), determinar os outros vértices, sabendo que as diagonais interceptam-se em M(1; 1).

23 Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

24 **Fuvest** No plano cartesiano, os pontos (1; 0) e (–1; 0) são vértices de um quadrado, cujo centro é a origem. Qual a área do quadrado?

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

25 **Mackenzie** Conhecidos os vértices A(0; 0), B(3; 0) e C(4; 2), podemos afirmar que a área do paralelogramo ABCD vale:

(a) 3
(b) 6
(c) 8
(d) 9
(e) 12

Áreas e colinearidade de pontos

26 Se os três pontos

$$A\left(\frac{1}{2}; t\right), B\left(\frac{2}{3}; 0\right) \text{ e } C(-1; 6)$$

são colineares, então o valor de t é igual a:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{3}{2}$
(d) $\frac{3}{5}$
(e) $\frac{5}{6}$

27 O ponto do eixo das abscissas alinhado aos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, A(2; 4); B(4; 2); C(1; –1) e D(3; –3) é:

(a) $\left(0; \frac{12}{5}\right)$
(b) $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$
(c) (3; 0)
(d) $\left(\frac{12}{5}; 0\right)$
(e) $\left(0; \frac{5}{2}\right)$

28 **FMU** As coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades (5; –2) e (–1; –4) são:

(a) (3; 1)
(b) (1; 3)
(c) (–3; 2)
(d) (2; –3)
(e) (3; 3)

29 **UFMG** Sejam P(a; b) e Q(c; –2) dois pontos no plano cartesiano, tais que a . c < 0, b < 0 e c < 0. Pode-se afirmar que:

(a) P é um ponto do 1º quadrante.
(b) P é um ponto do 2º quadrante.
(c) P é um ponto do 3º quadrante.
(d) P é um ponto do 4º quadrante.
(e) P pode estar no 1º ou 4º quadrante.

30 A área de um triângulo é 3, dois de seus vértices são os pontos A(3; 1) e B(1; –3). O terceiro vértice C está situado no eixo das ordenadas. Determinar as coordenadas do vértice C.

31 Determine y de modo que o triângulo de vértices A(1; 4), B(4; 1) e C(0; y) tenha área 6.

32 A área de um triângulo é 3, dois de seus vértices são os pontos A(3; 1) e B(1; –3). O centro de gravidade desse triângulo está situado no eixo Ox. Determinar as coordenadas do terceiro vértice C.

33 A área de um triângulo é 4, e dois de seus vértices são os pontos A(2; 1) e B(3; –2). O terceiro vértice C está situado no eixo Ox. Determinar as coordenadas do vértice C.

34 **UFP-RS** Determine a área do triângulo cujas coordenadas são A(3; 11), B(–9; –5) e C(6; –10).

(a) 180
(b) 150
(c) 120
(d) 100
(e) 80

35 **UEPG-PR** Sabendo-se que os vértices de um triângulo são os pontos A(0; 0), B(–m; –m), C(–m; m), a área deste triângulo vale:

(a) $\frac{m^2}{2}$
(b) $2m^2$
(c) m^2
(d) $\frac{m^2}{4}$
(e) $4m^2$

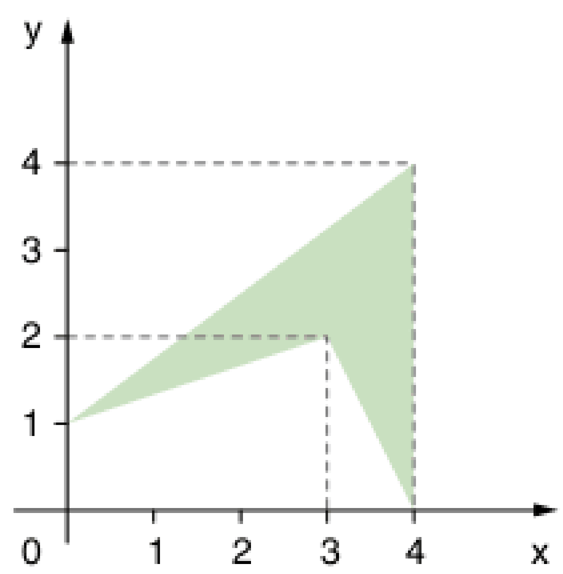
36 **PUC-SP** Os pontos A(–1; 2), B(3; 1) e C(a; b) são colineares. Para que C esteja sobre o eixo das abscissas, a e b devem ser, respectivamente, iguais a:

(a) 0 e 4
(b) 0 e 7
(c) 4 e 0
(d) 7 e 0
(e) 0 e 0

37 **Cefet-PR** Determine o valor inteiro de y para que a área do triângulo de vértices A(–2; 0), B(1; y) e C(5; 1) seja igual a 12,5 ua.

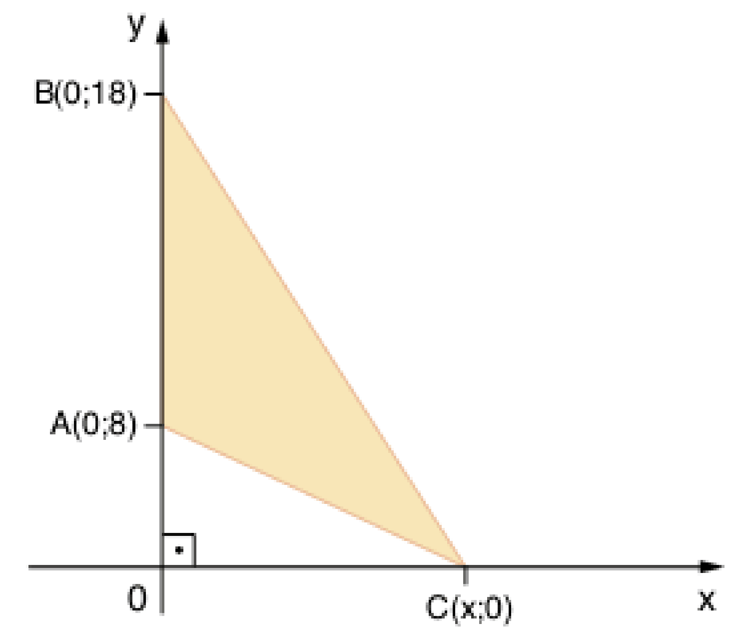
(a) –4
(b) –2
(c) 2
(d) 4
(e) 22

38 **FGV** A área da figura colorida no diagrama a seguir vale:



(a) 4,0
(b) 3,5
(c) 3,0
(d) 5,0
(e) 4,5

39 **Osec-SP** Na figura a seguir, o triângulo ABC é isósceles, com AB = AC. Calcule a área do triângulo ABC.



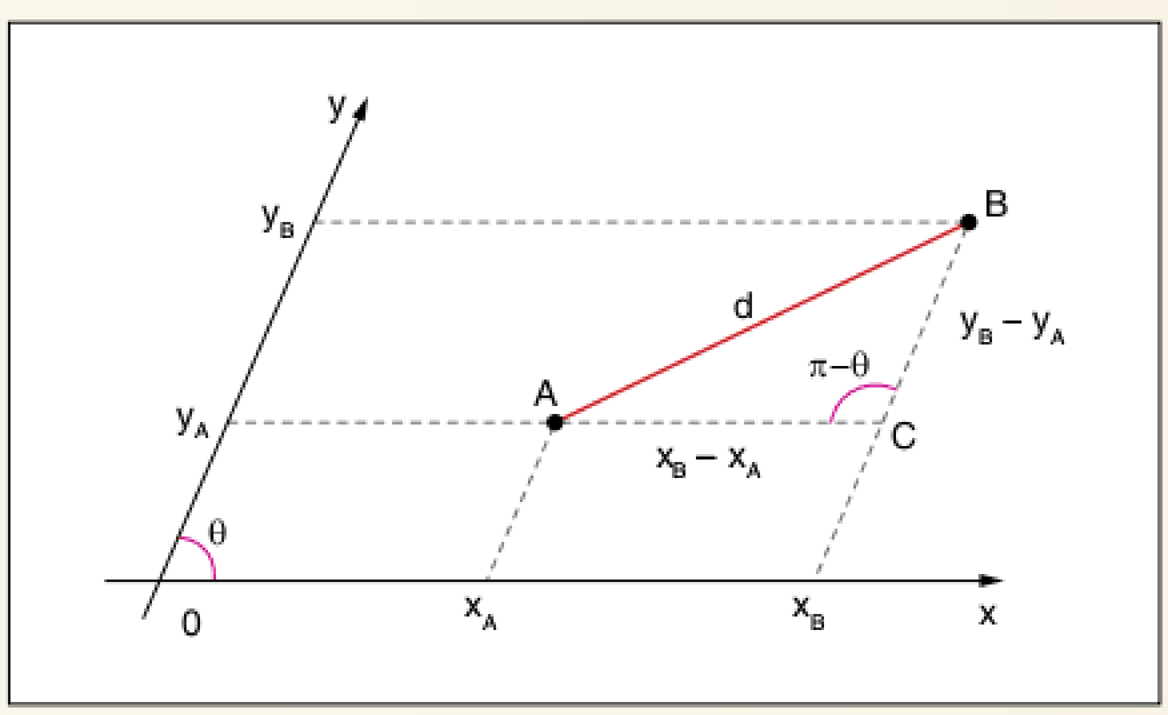
(a) 54
(b) 50
(c) 30
(d) 72
(e) n.d.a.

TEXTO COMPLEMENTAR

Porque os eixos cartesianos são ortogonais?

Para determinarmos um ponto no plano, não existe a necessidade de os eixos serem ortogonais. Escolhendo um ângulo θ (0 < q < 90°), continuaremos a estabelecer a correspondência biunívoca entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Tal modificação iria afetar as fórmulas de distância.

Observe como seria a fórmula da distância entre dois pontos.



Pelo teorema dos cossenos no ΔABC, temos:

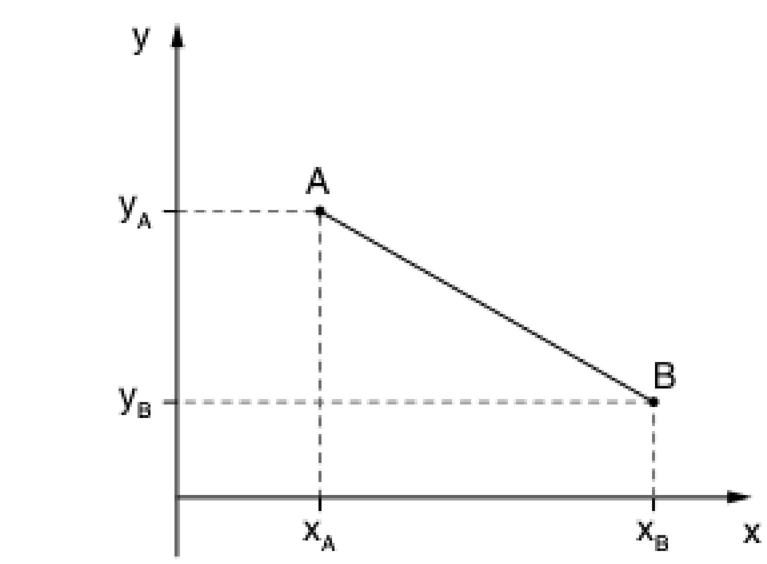
$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - 2(x_B - x_A)(y_B - y_A)\cos(\pi - \theta) \therefore$$
$$\therefore d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + 2(x_B - x_A).(y_B - y_A).\cos\theta}$$

Percebemos o incremento algébrico no resultado. Na maioria dos casos, é melhor a utilização do sistema ortogonal.

RESUMINDO

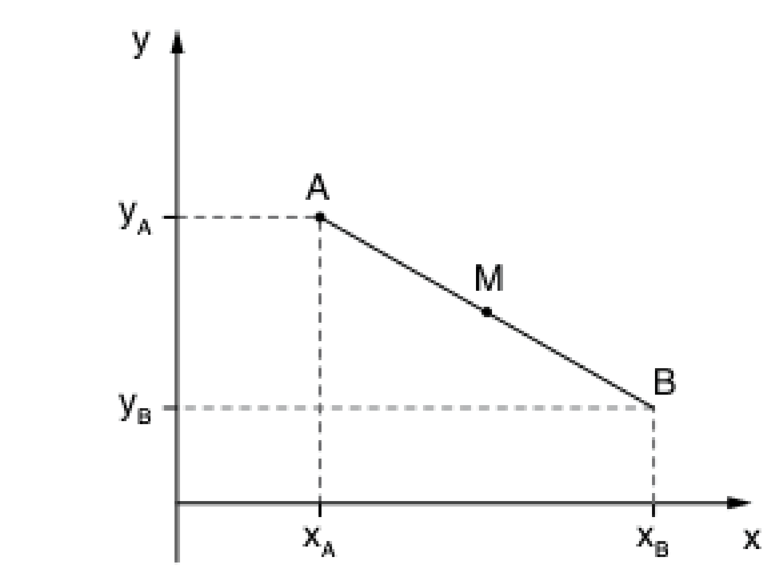
A geometria analítica resolve os problemas da geometria plana através de equações algébricas. O ponto fica perfeitamente determinado pelas suas coordenadas (x; y).

Distância entre dois pontos



$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ponto médio do segmento $\overline{AB}$



AM = MB

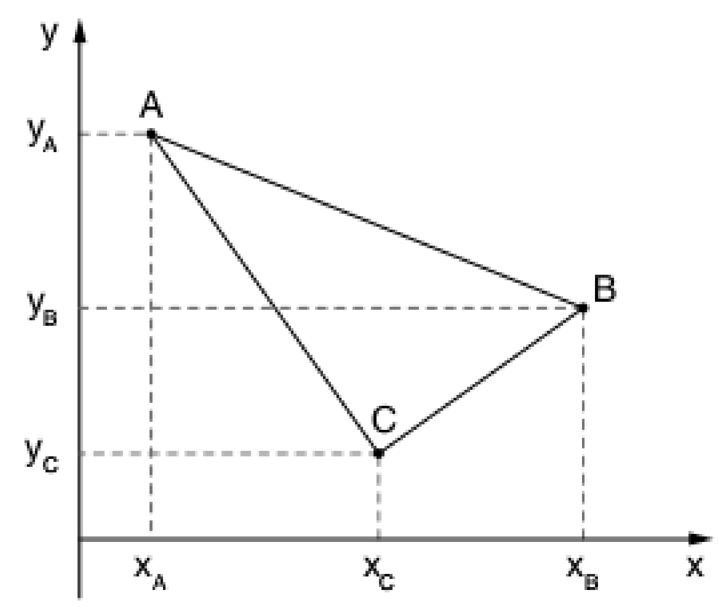
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Condição de alinhamento entre A, B e C

$$\begin{matrix} A(X_A; Y_A) \\ B(X_B; Y_B) \\ C(C_C; Y_C) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_A & X_B & X_C \\ Y_A & Y_B & Y_C \end{vmatrix} = 0$$

estão alinhados

Área de um triângulo ABC



$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{matrix} \right\|$$

QUER SABER MAIS?

SITE

- Projeções ortogonais de pontos
  <www.uff.br/cdme/pro/pro.html/pro.br.html>.

Exercícios complementares

Problemas gerais

1 **Fuvest** Sejam A = (1; 2) e B = (3; 2) dois pontos do plano cartesiano. Nesse plano, o segmento AC é obtido do segmento AB por uma rotação de 60º, no sentido anti-horário, em torno do ponto A. As coordenadas do ponto C são:

(a) $\left(2;\,2+\sqrt{3}\right)$

(b) $\left(1+\sqrt{3};\,\frac{5}{2}\right)$

(c) $\left(2;\,1+\sqrt{3}\right)$

(d) $\left(2;\,1-\sqrt{3}\right)$

(e) $\left(1+\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}\right)$

2 **UFMG** Considere A(2; 1) e B(4; 0) dois pontos no plano coordenado. As coordenadas do ponto C, simétrico do ponto A em relação ao ponto B, são:

(a) (6; –1)

(b) (3; 1)

(c) (2; –1)

(d) $\left(3;\,\frac{1}{2}\right)$

(e) (1; 0)

3 Dados B(2; 3) e C(–4; 1), determine o vértice A do triângulo ABC, sabendo que é o ponto do eixo y do qual se vê BC sob ângulo reto.

4 Sejam O = (0; 0), A = (a; b) e C = (c; d). Prove que o triângulo OAC é equilátero se, e somente se, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2(ac + bd)$.

5 Do triângulo ABC, são dados: o vértice A(2; 4), o ponto médio M(1; 2) do lado AB e o ponto médio N(–1; 1) do lado BC. Calcule o perímetro do triângulo ABC.

6 Se M(1; 1), N(0; 3) e P(–2; 2) são os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente, de um triângulo ABC, determine as coordenadas de A, B e C.

7 O baricentro de um triângulo é G(5; 1) e dois de seus vértices são A(9; –3) e B(1; 2). Determine o terceiro vértice.

8 O baricentro de um triângulo é $G\left(\frac{2}{3};\,\frac{1}{3}\right)$, o ponto médio do lado BC é $N\left(0;\,\frac{1}{2}\right)$ e o ponto médio do lado AB é $M\left(\frac{1}{2};\,2\right)$.

Determine os vértices A, B e C.

9 O ponto M de interseção das medianas de um triângulo está situado no eixo das abscissas; dois de seus vértices são os pontos A(2; –3) e B(–5; 1); o terceiro vértice C está situado no eixo das ordenadas. Determinar as coordenadas dos pontos M e C.

10 Determine os vértices B e C de um triângulo equilátero ABC, sabendo que o ponto médio do lado AB é $M(3^{\frac{1}{2}};\,1)$ e A é a origem do sistema.

11 Em um triângulo ABC, são dados que A(–4; 3), M(–4; 6) é o ponto médio de AB, $d_{AC} = 8$ e $d_{BC} = 10$. Determine o vértice C do triângulo.

12 Os vértices de um triângulo são A(3; –5), B(–3; 3) e C(–1; –2). Determine o comprimento da bissetriz do ângulo interno do vértice A.

13 Escolhendo um sistema de coordenadas adequado, mostre que, em um triângulo retângulo ABC retângulo em A, o comprimento da mediana AM é metade do comprimento da hipotenusa.

14 **Uema** Uma reta passa pelos pontos A(–12; –13) e B(–2; –5). Determine, nesta reta, um ponto cuja abscissa é 3.

(a) (3; –2)

(b) (3; 1)

(c) (3; –1)

(d) (3; 3)

(e) (3; 0)

15 **FURRN** A reta r é determinada pelos pontos (3; 3) e (–5; 1). O ponto (–3; m) também pertencerá a r para um certo valor m, tal que:

(a) $m = -2$

(b) $-2 < m = 0$

(c) $0 < m \le \frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{2} < m < 2$

(e) $m > 2$

16 Determine os pontos que dividem em três partes iguais o segmento que tem por extremos os pontos (8; 10) e (–6; 4).

17 Determine os pontos que dividem interna e externamente, na razão 2, o segmento que une os pontos (–7; 7) e (–1; –2).

18 Determine o valor de m para que os pontos A(0; 8), B(m; –4) e C(2; m) estejam alinhados.

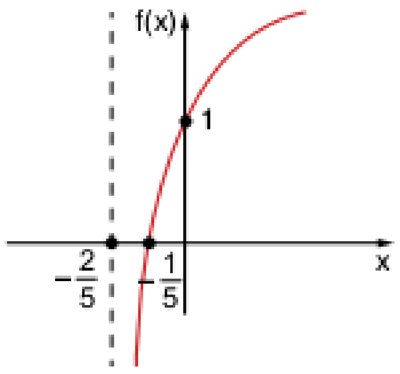
19 Encontre um ponto do gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = x^2 + 1$, que equidista de A(0; 0) e B(1; 1).

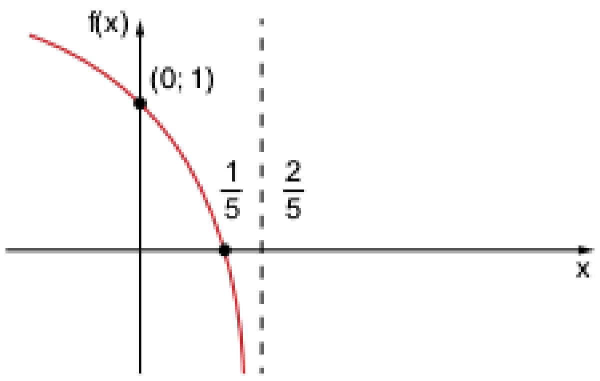
20 Determine o conjunto de pontos do plano equidistantes dos pontos A(0; 0) e B (b; 0).

Frente 1

5 Funções logarítmicas

Revisando

1. a) $\frac{3}{4}$ b) 36 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{2}$
2. $\frac{a+2}{1+2a}$
3. $\frac{\alpha+\beta}{\frac{1}{2}-\beta}$
4. 

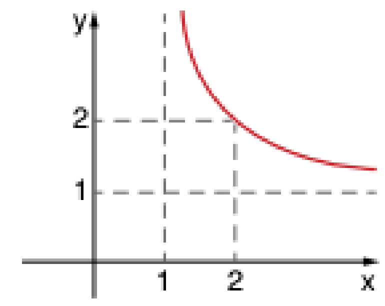
5. 

6. S = {3;5}
7. a) S = {14}
 b) S = {2}
8. a) $S = \left]0; -2+\frac{\sqrt{26}}{2}\right[$
 b) S = [1;10]

Exercícios propostos

1. C
2. E
3. C
4. D
5. C
6. −2
7. D
8. C
9. D
10. a) 2
 b) m + 2
11. B
12. B
13. C
14. E
15. E
16. C
17. D
18. C
19. D
20. B
21. a + b = 80
22. D
23. 27
24. a) log x = 8 e log y = 6
 b) 7
25. 1
26. D
27. A
28. D
29. A
30. B
31. C
32. A
33. C
34. A
35. C
36. A
37. D
38. D
39. A
40. D
41. A
42. $Y = 100x^2$
43. D
44. A
45. B
46. B
47. C
48. E
49. D
50. C
51. E
52. A
53. a) $\frac{1}{4}$
 b) $\frac{-2}{5}$
 c) 8
 d) $\left\{1; 100; \frac{1}{100}\right\}$
 e) ∅
54. 2
55. B
56. B
57. B
58. C
59. $x = 4 + 2\sqrt{3}$
60. D
61. a) $\left]\log_{\frac{5}{3}} 4; +\infty\right[$
 b) ℝ
 c) $[-2; -\sqrt{10}/2[\cup]\sqrt{10}/2; 2]$
 d)]1; 5[
 e)]0; 1[∪]2; + ∞[
62. A
63. A
64. E

Exercícios complementares

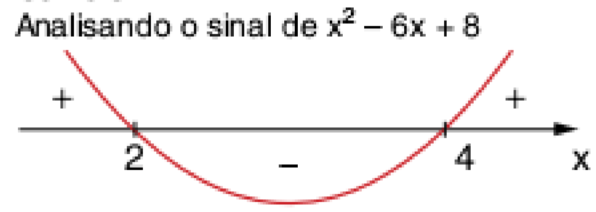
1. $\frac{1}{5} \cdot \left[\frac{2b+1-3a}{b+1-a}\right]$
2. a) x + y = xy, se x > 0 e y > 0
 b) 

3. E
4. $x = 32;\ y = \frac{1}{4}$
5. B
6. A
7. D
8. $S = \left\{(2;64), \left(2^{7/4}; 2^{21/4}\right)\right\}$
9. B
10. D
11. a) −1
 b) zero
 c) $\log_3 12$
 d) a > 1 e b > 1 ou 0 < a < 1 e 0 < b < 1, temos como resposta $\log_a b$.
12. $\frac{5n-3}{6}$
13. $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$
14. Demonstração
15. Demonstração
16. D
17. B
18. B
19. B
20. D
21. B
22. $b^{\log_2 a}$
23. B
24. $\frac{1}{5} \le x \le 1$
25. C
26. E
27. $S = \left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$
28. $\text{sen } x = e^{-2}$
29. A
30. D
31. $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
32. $S = 0 < x < \sqrt{2} - 1$
33. $x \in \left]\frac{7}{4}; +\infty\right[$
34. D
35. A
36. $]-3; -\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6}; 3[$

6 Função modular

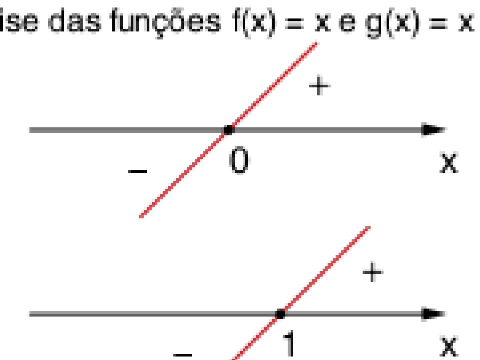
Revisando

1. Analisando o sinal de $x^2 - 6x + 8$



Assim:
$$|x^2-6x+8| = \begin{cases} x^2-6x+8; x \le 2 \text{ ou } x \ge 4 \\ -x^2+6x-8; 2 < x < 4 \end{cases}$$

2. Análise das funções f(x) = x e g(x) = x − 1



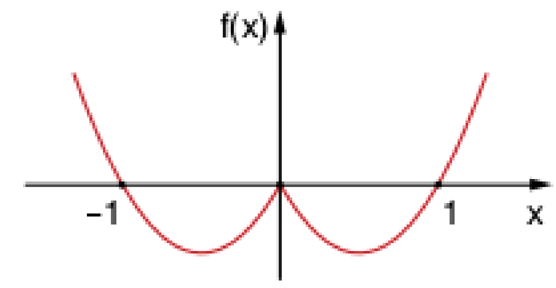
Quadro de sinais

|x|	− x	x	x
|x − 1|	− x + 1	− x + 1	x − 1
|x| + |x − 1|	− 2x + 1	1	2x − 1

0 1

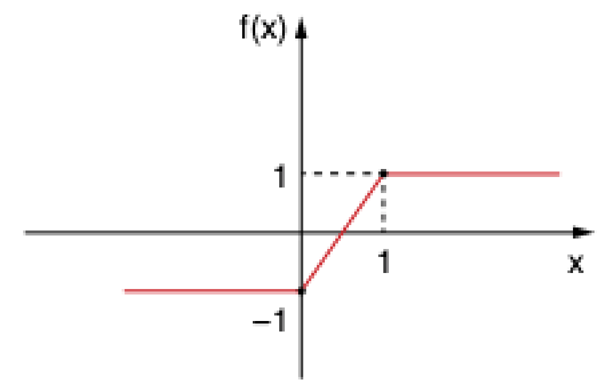
$$\text{Assim: } |x|+|x-1| = \begin{cases} -2x+1; x \le 0 \\ 1; 0 < x < 1 \\ 2x-1; x \ge 1 \end{cases}$$

3. $x \ge 0\ |x^2 - x|$
 $x \le 0\ |x^2 + x|$



4. Construindo o quadro de sinais:

|x|	− x	x	x
|x − 1|	− x + 1	− x + 1	x − 1
f(x)	− 1	2x − 1	1



5. a) $||5 - |x|| = 3 \therefore 5 - |x| = 3$ ou $5 - |x| = -3 \therefore$
 $\therefore 2 = |x|$ ou $8 = |x|$
 $S = \{\pm 2; \pm 8\}$
 b) $|x - 1| = 2x$
 $x \ge 1: x - 1 = 2x \therefore x = -1$
 $x < 1: -x + 1 = 2x \therefore 1 = 3x \therefore x = \frac{1}{3}$
 $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
 c) $|x + 2| = 2|x - 2|$

|x + 2|	− x − 2	x + 2	x + 2
|x − 2|	− x + 2	− x + 2	x − 2

−2 2 x

<u>x ≤ − 2</u> $-x - 2 = 2(-x + 2) \therefore$
$\therefore -x - 2 = 2x + 4 \therefore$
$\therefore x = 6$

<u>− 2 < x ≤ 2</u> $x + 2 = 2(-x + 2) \therefore$
$\therefore x + 2 = -2x + 4 \therefore$
$\therefore 3x = 2 \therefore x = \frac{2}{3}$

<u>x > 2</u> $x + 2 = 2(x - 2) \therefore$
$\therefore x + 2 = 2x - 4 \therefore x = 6$
$S = \left\{\frac{2}{3}; 6\right\}$

6. a) $|x - 3| < 7 \Leftrightarrow -7 < x - 3 < 7 \therefore$
 $\therefore -7 + 3 < x < 7 + 3 \therefore -4 < x < 10$
 $S =]-4; 10[$
 b) $|x + 2| + x \le 5$
 <u>x ≥ − 2:</u> $x + 2 + x \le 5 \therefore 2x \le 3 \therefore$
 $\therefore x \le \frac{3}{2} \therefore \left[-2; \frac{3}{2}\right]$
 <u>x < − 2:</u> $-x - 2 + x \le 5 \therefore -2 \le 5$
 $x < -2 \therefore]-\infty; -2[$
 $S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

c)

$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$	$x-1$	$x-1$
	1	3	x

$x \le 1$: $\quad -x+3 \le 1-x \therefore$
$\therefore 3 \le \varnothing$

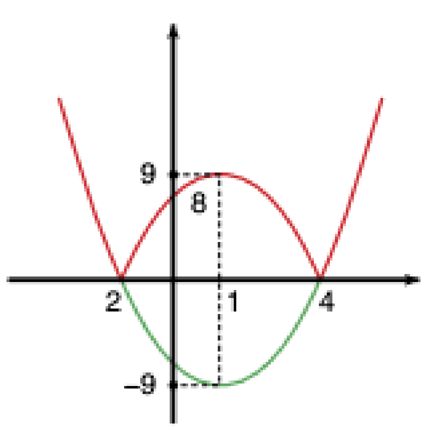
$1 < x \le 3$: $\quad -x+3 \le x-1 \therefore$
$\therefore 4 \le 2x \therefore x \ge 2$
$\boxed{2 \le x \le 3}$

$x > 3$: $\quad x-3 \le x-1 \therefore -3 \le -1$
$\boxed{x > 3}$
$S = [2; +\infty[$

Exercícios propostos

1. a) 3
b) $\pi - \sqrt{5}$
c) $x^2 + 1$
d) $-1 + \sqrt{2}$

2. E **5.** B **8.** E **11.** D
3. C **6.** B **9.** C **12.** B
4. C **7.** B **10.** A **13.** F; F; V
14. Q = 5,098
15. S = {8; 2}
16. $S = \varnothing$
17. V = {–2; –1; 1; 2}
18. C **20.** C **22.** D
19. A **21.** C
23. x = 50 e x = 250
24. A
25. $\{x \in \mathbb{R}^* \mid -1 < x < 1\}$
26. E **28.** B **30.** D
27. A **29.** A
31. $S = \left[-2; \frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty[$
32. 06
33. fog: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \lvert x^2 - 2x - 8\rvert$

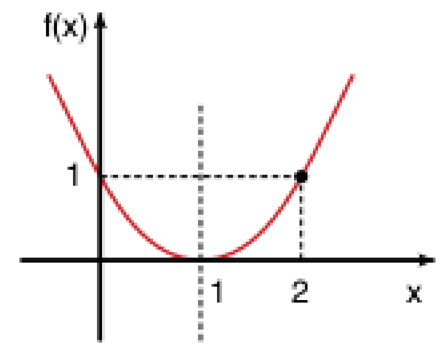


34. E
35. $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ e $(-2, 2)$
36. B **38.** C **40.** B
37. E **39.** A
41. a = 1 e b = 3
42. C **44.** C **46.** A
43. A **45.** A **47.** B

Exercícios complementares

1. B
2. a) $S = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$
b) $S = \{-6; -1; 1; 4\}$
c) $S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
e) $S = [3; +\infty[$
f) $S =]1; 4[$
g) $S = \left]-3; \frac{11}{3}\right[$

3. Zero.
4. S = [0; 1]
5. E
6. Gráfico de f(x)



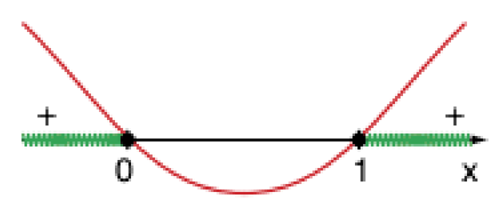
$f(x) = a \cdot (x-1)^2$
$f(2) = 1 \therefore 1 = a \cdot (2-1)^2 \therefore a = 1$
$f(x) = x^2 - 2x + 1$
$g(f(x)) = m \cdot f(x) + n$
$= m \cdot (x^2 - 2x + 1) + n$
$= mx^2 - 2mx + m + n \equiv -x^2 + 2x$

$\begin{cases} m = -1 \\ -2m = 2 \\ m + n = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases} \therefore g(x) = -x +$

a) $g^{-1}(y) = x$ e $y = -x + 1 \Rightarrow g^{-1}(y) = -y + 1 \therefore$
$\therefore g^{-1}(x) = -x + 1$ (V)

b) $f(\lvert x\rvert) = 0 \therefore \lvert x\rvert^2 - 2\lvert x\rvert + 1 = 0 \therefore$
$\therefore (\lvert x\rvert - 1)^2 = 0 \therefore \lvert x\rvert = 1 \therefore x = \pm 1$ (F)

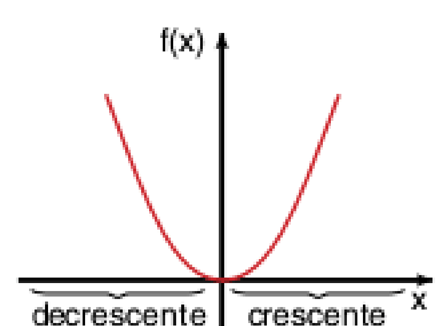
c)



$x^2 - 2x + 1 - \lvert -x + 1\rvert \ge 0 \therefore$
$\therefore \lvert x - 1\rvert^2 - \lvert x - 1\rvert \ge 0; \lvert x - 1\rvert = \alpha \therefore$
$\alpha^2 - \alpha \ge 0$
$\alpha \le 0$ ou $\alpha \ge 1 \therefore \lvert x - 1\rvert \le 0$ ou $\lvert x - 1\rvert \ge 1 \therefore$
$x = 1$ ou $(x - 1 \ge 1$ ou $x - 1 \le -1) \therefore$
$\therefore x = 1$ ou $(x \ge 2$ ou $x \le 0)$

$S = [2; +\infty[\cup]-\infty; 0] \cup \{1\}$ (F)

d)



$r(x) = f(g(x)) = g(x) - 1)^2 = [(-x+1)]^2 = x^2$

7. C **9.** A **11.** C
8. D **10.** A

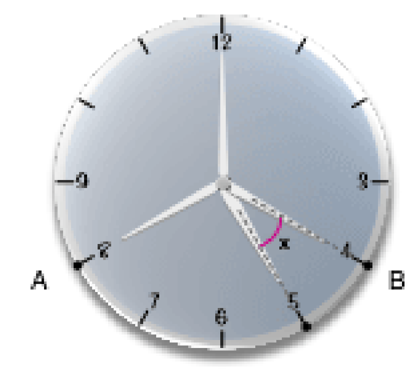
7 Trigonometria – conceitos básicos

Revisando

1.

0°	0		210°	$\frac{7\pi}{6}$
30°	$\frac{\pi}{6}$		225°	$\frac{5\pi}{4}$
45°	$\frac{\pi}{4}$		240°	$\frac{4\pi}{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$		270°	$\frac{3\pi}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$		300°	$\frac{5\pi}{3}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$		315°	$\frac{7\pi}{4}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$		330°	$\frac{11\pi}{6}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$		360°	2π
180°	π		540°	3π

2.



$\widehat{AB} = 120° - x$

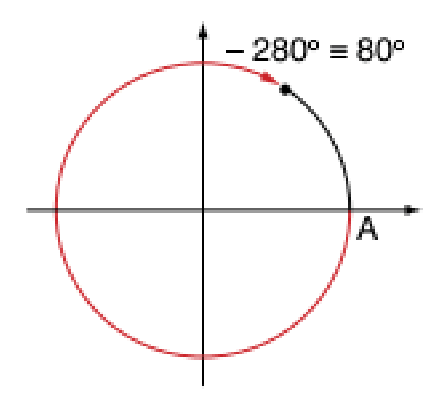
x é o ângulo que o ponteiro pequeno percorre durante 40 minutos.

30° — 60 min
x — 40 min
x = 20°

Assim: $\widehat{AB} = 120 - 20° = 100°$

3.
a)
$1.730° \,\underline{|360°}\, \to 1.730° = 4(360°) + 290° \to 290°$
$290° \quad 4$

b)
$1.000° \,\underline{|360°}\, \to (-1.000°) = (-2).360° + (-280°) \to 80°$
$280° \quad 2$



c)

$\frac{23\pi}{4} \Big| \underline{2\pi \equiv \frac{8\pi}{4}} \to \frac{23\pi}{4} = 2(2\pi) + \frac{7\pi}{4} \to \frac{7\pi}{4}$ rad

$\frac{16\pi}{4} \quad 2$

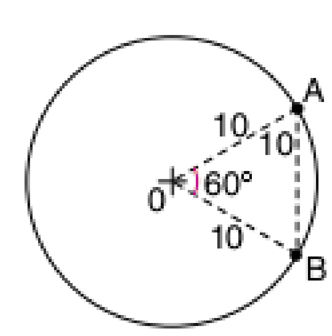
$\frac{7\pi}{4}$

Exercícios propostos

1. a) 300°
b) 22° 30'
c) 240°
d) 9°
e) 720°

2. a) $\frac{5}{2}\pi$ rad
b) $\frac{5}{4}\pi$ rad
c) $\frac{7}{6}\pi$ rad
d) $\frac{11}{6}\pi$ rad
e) $\frac{7}{5}\pi$ rad

3. D e E
4. 4 rad
5.

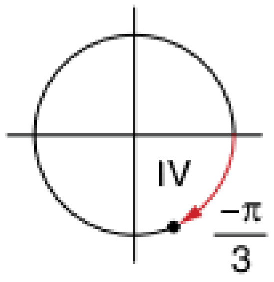


O ΔOAB é equilátero.

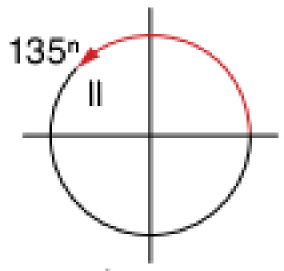
$\Rightarrow A\hat{O}B = 60° \Rightarrow \widehat{AB} = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad.

6. C **9.** B **12.** C
7. B **10.** 0,5 rad **13.** B
8. C **11.** B

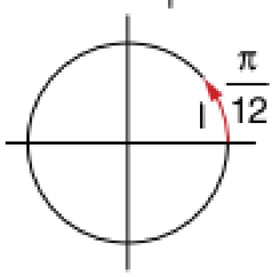
14. a)



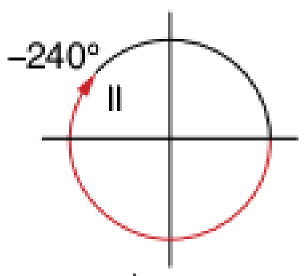
b)



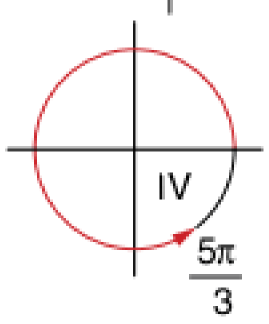
c)



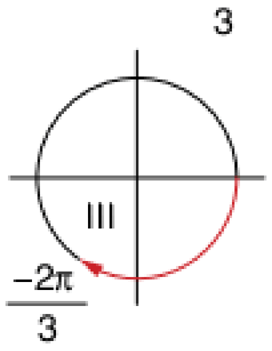
d)



e)



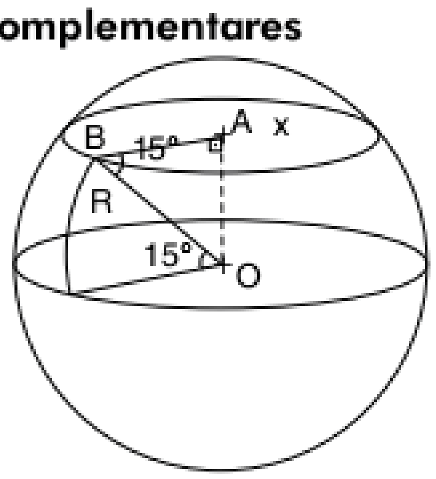
f)



15. A e C
16. $x \in]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$
17. a) 230° é a 1ª determinação positiva.
b) 50° é a 1ª determinação positiva.
c) $\frac{2\pi}{3}$ é a 1ª determinação positiva.
d) 300° é a 1ª determinação positiva.
e) $\frac{\pi}{3}$ é a 1ª determinação positiva.
18. C
19. B
20. D
21. 265°, 625° e 985°
22. $x = \frac{-\pi}{20} + K.\left(\frac{2\pi}{5}\right);\ K \in \mathbb{Z}$
23. $x = 40° + K.(120°);\ K \in \mathbb{Z}$
24. a) Demostração
b) Demostração
25. C
26. D
27. C

Textos complementares

1.



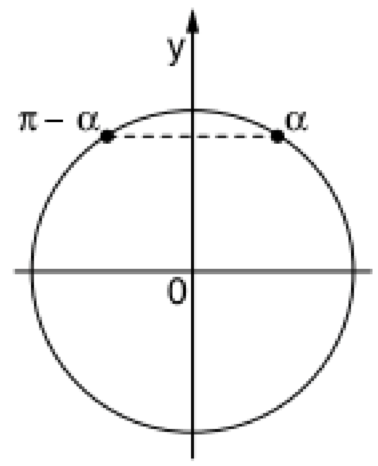
No ΔOAB, temos:

$\cos 15° = \frac{x}{R} \therefore x = R.\cos 15°$

$x = (6.378).(\cos 15°) \approx 6.160{,}7$ km
$C = 2\pi.x = 2\pi\,(6.160{,}7) \approx 38.708{,}6$ km

Exercícios complementares

1. $\frac{\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4}$
2. 265°; 625°; 985°; 1.345° e 1.705°
3. 82° ou $\frac{41}{80}\pi$ rad
4. I e II quadrantes
5. $\frac{\pi}{6}$ rad
6.

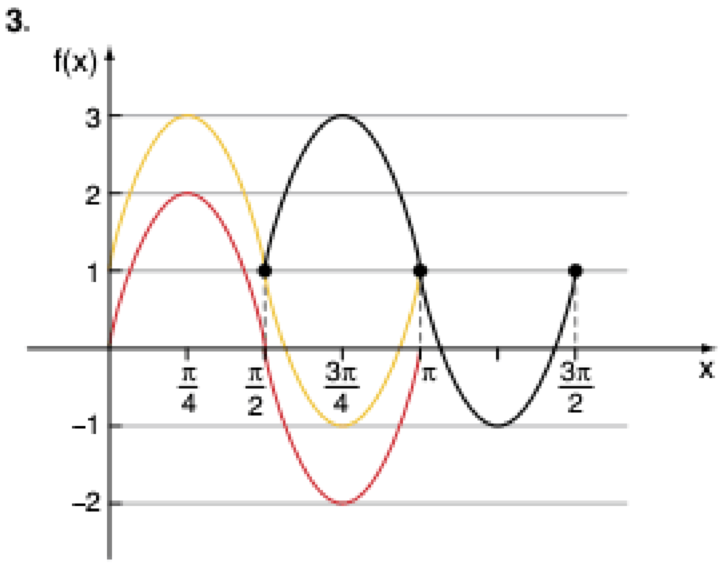


7. 6°
8. Demonstração
9. a) $-35°30 + k.90°;\ k \in \mathbb{Z}$
b) $-\frac{\pi}{3} + \frac{(2k+1)}{5}\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
c) $\forall x \in \mathbb{R}$
10. 6 cm
11. 3.352,32 km
12. $\frac{5\pi}{18}$ rad.
13. E; E; C
14. E
15. O fato ocorrerá às: 4 h 10 min $54\frac{6}{11}$ s

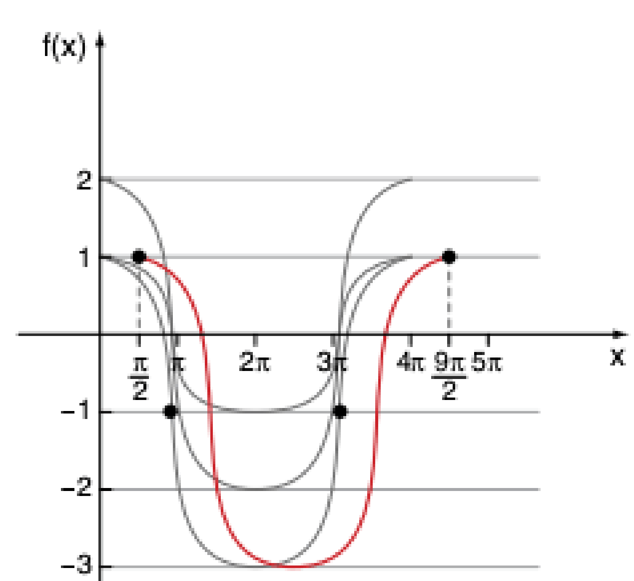
8 Funções trigonométricas básicas – seno e cosseno

Revisando

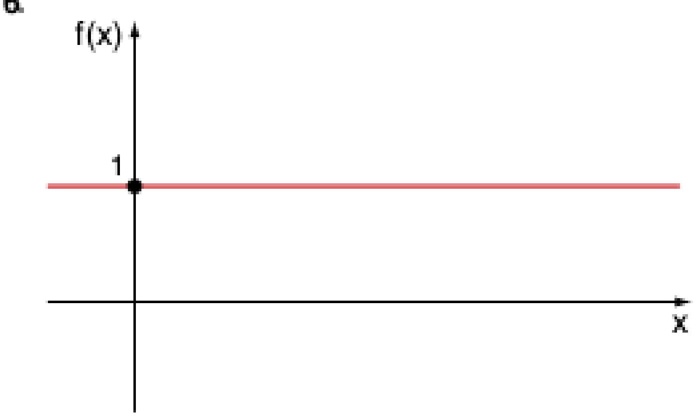
1. $E(x) \in [-5;1]$
2. $\text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$
3.



4.



5. $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
6.

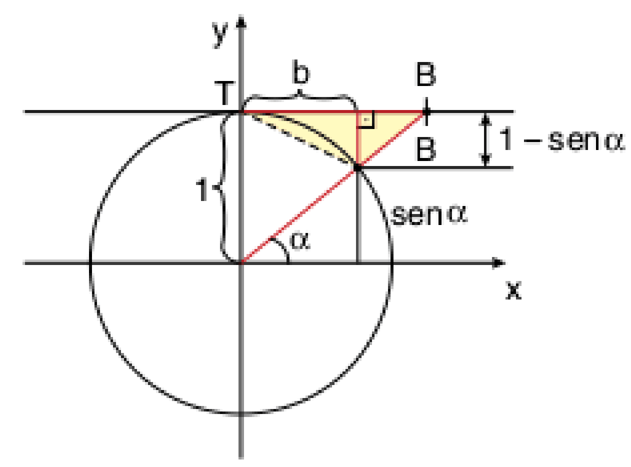


Exercícios propostos

1. C
2. E
3. E
4. B
5. C
6. B
7. C
8. E
9. No ΔBOC $\cos\theta = \frac{OB}{OC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60° \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ rad

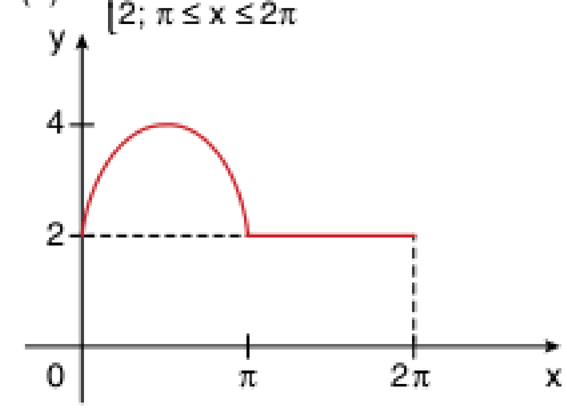
10. E
11.



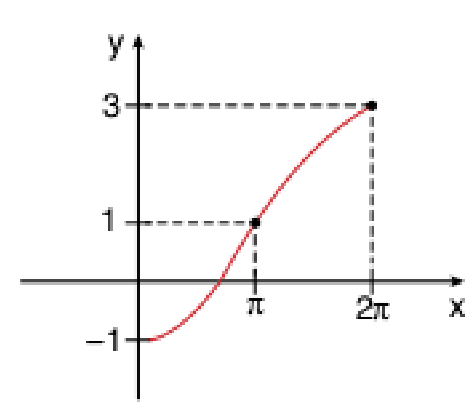
$\text{área} = \frac{b.(1-\text{sen}\alpha)}{2}$

12. C
13. B
14. D
15. C
16. Para $0 \le x \le \pi$, $\text{sen}x \ge 0$, logo:
$f(x) = 2 + \text{sen}x + \text{sen}x = 2 + 2\,\text{sen}x.$
Para $\pi \le x \le 2\pi$, $\text{sen}x \le 0$, logo:
$f(x) = 2 + \text{sen}x - \text{sen}x = 2$

$f(x) = \begin{cases} 2 + 2\,\text{sen}x;\ 0 \le x \le \pi \\ 2;\ \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$



17.



18. B
19. C
20. A
21. $\frac{\cos^2\theta}{1-\text{sen}\theta} = \frac{1-\text{sen}^2\theta}{1-\text{sen}\theta} =$

$\frac{\cancel{(1-\text{sen}\theta)}.(1+\text{sen}\theta)}{\cancel{(1-\text{sen}\theta)}} = 1 + \text{sen}\theta$

22. C
23. A
24. D
25. C
26. D
27. A

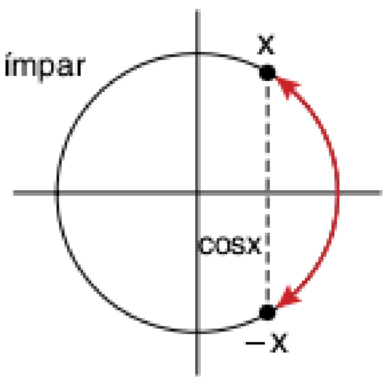
Exercícios complementares

1. C
2. O período é dado por $P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

   $-1 \le \text{sen}2x \le 1 \therefore -3 \le 3\text{sen}2x \le 3$
   $Im_f = [-3; 3]$
3. Pela simetria dos arcos, temos:

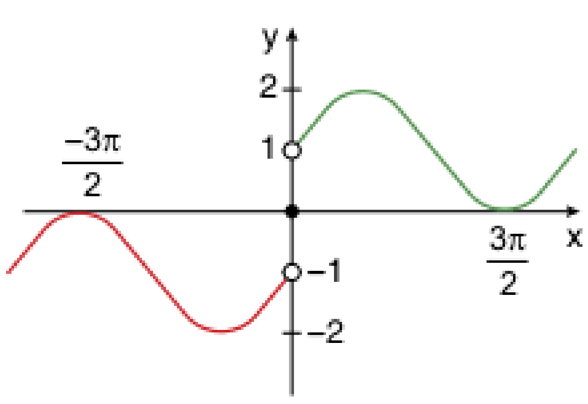
   $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$

   Função ímpar

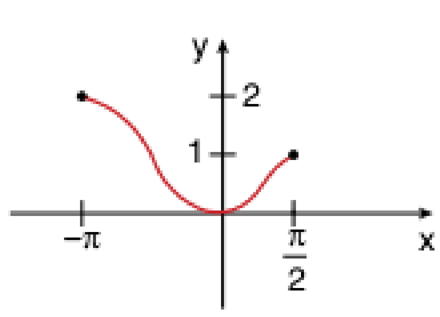


   Pela simetria dos arcos, temos:

   $\cos(x) = \cos(-x)$
   Função par
4. A
5. A
6. $S = \{1; -\text{sen}^2\alpha\}$
7. E
8. $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
9. a) $\text{sen}1.195^\circ < \text{sen } 830^\circ$
   b) $\cos190^\circ > \cos(-535^\circ)$
10. f é par; g é ímpar.
11. $\cos205^\circ < \cos32^\circ < \cos353^\circ$
12. $\text{sen}72^\circ > \text{sen}10^\circ > \text{sen}7^\circ \therefore$
    $\text{sen}108^\circ > \text{sen}10^\circ > \text{sen}173^\circ$
13. $-\text{sen}^2x \cdot \cos^2x + \text{sen}^2x \cdot \cos^2x = \text{zero}$
14. $\frac{\cos a}{2} \cdot \frac{2}{\cos a} = 1$
15. $\frac{x}{|x|} + \text{sen}x = \begin{cases} x > 0 \ldots \frac{x}{x} + \text{sen}x = 1 + \text{sen}x \\ x < 0 \ldots \frac{x}{-x} + \text{sen}x = -1 + \text{sen}x \end{cases}$



16. D
17. C
18. a) $\lambda = 3.000$
    b) Houve 3 mil doações de sangue em maio ($t = 4$) e em novembro ($t = 10$).
19. C
20.



21. B

Frente 2

6 Razões, proporções e regra de três

Revisando

1. 45
2. A menor parte é de R$ 600,00.
3. 4 h
4. $\frac{2}{1}$

Exercícios propostos

1. 15, 20 e 25
2. 18 e 27
3. R$ 8.000,00; R$ 12.000,00 e R$ 28.000,00
4. 40 e 25
5. $c = -\frac{10}{9}$ e $d = -\frac{1}{9}$
6. 49
7. a) 26 e 20
   b) 21 e 25
8. 15, 25, 4 e 100
9. 36°, 72°, 108° e 144°
10. Aumentar W de ≈ 26,5% do seu valor.
11. A parte correspondente a Rafael é de R$ 2.200,00.
12. 36
13. 20
14. V; F; F; V.
15. B
16. $\frac{25}{3}$
17. 15
18. 80 mulheres e 40 homens.
19. 58 anos.
20. D
21. 20
22. $\frac{3a^2 - b}{2}$
23. 34
24. D
25. 21 dias.
26. 18 horas.
27. C
28. 560 minutos.
29. 7 h e 12 min
30. 15 minutos.
31. 3 h e 45 min
32. $\frac{t}{7}$
33. E

Exercícios complementares

1. 10 dias, 19 horas e 12 minutos.
2. 30 dias.
3. Demonstração
4. a) $\frac{100x}{100 - x}\%$
   b) Tende para o infinito.
5. 7 h e 12 min
6. a) R$ 194,00
   b) R$ 233,00
7. a) ≈ 33%
   b) ≈ 19%
8. B
9. 4 h
10. B
11. $\frac{9}{20}$
12. 17,5 kg de ouro e 7,5 kg de prata.
13. A
14. 2 ou –1.
15. a) O plano C é o mais vantajoso nessa situação.
    b) O plano A é mais vantajoso a partir de 50 minutos.
16. E
17. 12
18. 133

7 Noções básicas de estatística

Revisando

1. Nº de homens: x + 100
   Nº de mulheres: x
   Total de empregados: 2x + 100

   $\frac{\Sigma\text{salários dos homens}}{x + 100} = 2.000$

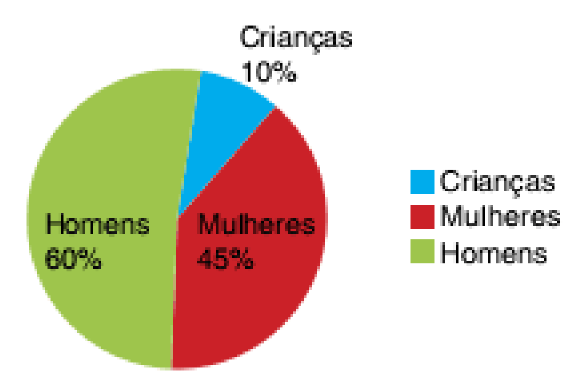
   $\frac{\Sigma\text{salários das mulheres}}{x} = 1.800$

   $\frac{\Sigma\text{salários dos empregados}}{2x + 100} = 1.920$

   Assim:
   $2.000(x+100) + 1.800x = 1.920(2x+100) \Rightarrow x = 200$
   Nº de empregados: 2x + 100 = 2.200 + 100 = 500
2. a) Nº de homens = 0,6.150 = 90
   Nº de mulheres = 45
   Nº de crianças = 150 – (50 + 45) = 15
   b)

Passageiros	Frequência absoluta	Frequência relativa
Homens	90	0,6
Mulheres	45	0,3
Crianças	15	0,1
Total	150	1

   c)



3. Média aritmética:
   $\frac{4.2 + 3.5 + 9.4 + 9.3}{4 + 3 + 9 + 9} = \frac{86}{25} = 3{,}44$
   Mediana: (2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; $\boxed{3}$; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5)
   Colocando as notas em ordem crescente, temos o valor central (mediana) igual a 3.
   A distribuição de notas é bimodal, 3 e 4.

Exercícios propostos

1. A
2. A
3. D
4. 8, 9; 9 e 7
5. D
6. F; F; F; V; V
7. D
8. E
9. a) O número de candidatos que tiveram nota 3 foi 16% de 32.000, ou seja, 0,16 . 32.000 = 5.120.
   b) A média nessa questão foi 0,1 . 0 + 0,2 .1 + + 0,32 . 2 + 0, 16 . 3 + 0,12 . 4 + 0,1 . 5 = 2,3. Portanto, a nota média foi maior que 2.

Exercícios complementares

1. a) média: R$ 2.000.000,00
   mediana: R$ 1.500.000,00
   b) A variância diminui.
2. a) 6
   b) 7,5
   c) 5 e 8
3. D
4. F; V; V
5. C
6. a) –1
   b) 23
7. Trabalho experimental
8. R$ 227,20 e R$ 188,00

9. D
10. A média é de 2,27 e a mediana 2.
11. D
12. a) 72,2
    b) 3 alunos.
13. D
14. E

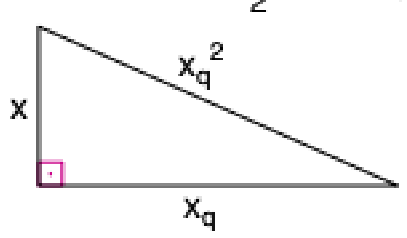
8 Sequências: Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

Revisando

1. $\frac{n}{n+1}$
2. 6.857
3. PG : $(x;\ xq;\ xq^2)$

   PA : $(x-1;\ xq;\ xq^2)$

   Para $x = 9$ e $q = \frac{2}{3}$, temos $(9;6;4)$

   Para $x = 4$ e $q = \frac{3}{2}$, temos $(4;6;9)$
4. 

$q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

5. 6a

Exercícios propostos

1. a) $x = 2$
   b) $a_{10} = 67$
2. A
3. a) $a_{56} = 313$
   b) $a_n = -23 + 6n$
4. PA (4; 7; 10; 13)
5. C
6. D
7. D
8. $a_{100} = 199$; $a_n = 2n - 1$
9. R = 4 (3; 7; 11)
10. (7; 11; 15; 19; 23; 27; 31)
11. – 593 não pertence à sequência.
    – 125 pertence à PA.
12. Há 271 múltiplos.
13. B
14. (6, 8 e 10)
15. $b - a = c - b = R$

    $\left.\begin{array}{l}(b+k)-(a+k)=b-a\\(c+k)-(b+k)=c-b\end{array}\right\}$

    ou seja, a razão é R. A nova sequência também é uma PA, com a mesma razão.
16. R = 5 (–6; –1; 4; 9; 14) ou
    R = –5 (14; 9; 4; –1, –6)
17. Lembrando do teorema:

    PA $(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow y = \frac{x+z}{2}$

    Assim: $b = \frac{a+c}{2}$; $(a^2bc,\ ab^2c,\ abc^2)$

    $\frac{a^2bc + abc^2}{2} = \frac{abc(a+c)}{2} = abc(b) = ab^2,$

    assim esta nova sequência é uma PA.
18. $x = \frac{-7}{2}$
19. A PA é (10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45)
20. $a_{30} = 148$; $S_{30} = 2.265$
21. A
22. $x = \frac{101}{51}$
23. $x = 3 \cdot 9 - 2 = 25$
24. E
25. C
26. 601
27. B
28. B
29. B
30. D
31. B
32. 38
33. Dica: utilize a ideia:

    $$\begin{cases}1^3 = 1^3\\2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1\end{cases}$$

    Resposta: $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$
34. 15 minutos
35. 56º quadrado, 2ª linha e 2ª coluna.
36. C
37. $a_1 = 5$; $r = 2$
38. Sabemos que $b = \frac{a+c}{2}$

    $x = \frac{(b^2+bc+c^2)+(a^2+ab+b^2)}{2} \therefore$

    $2x = a^2 + c^2 + 2b^2 + bc + ab$
    $2x = a^2 + c^2 + 2b^2 + b.(a + c)$
    $2x = a^2 + c^2 + 4b^2 \therefore 2x = a^2 + c^2 + (2b)^2 \therefore 2x =$
    $= a^2 + c^2 + (a + c)^2$
    $\therefore 2x = a^2 + c^2 + a^2 + 2ac + c^2$
    $2x = 2a^2 + 2c^2 + 2ac \therefore x = a^2 + ac + c^2 \Rightarrow$ que é o termo médio. Logo, os termos também estão em PA.
39. B
40. –2
41. C
42. B
43. 10
44. Demonstração
45. Não podem.
46. 60 filas
47. $9b^2 = 100\,ac$
48. A
49. $$\begin{cases}a_1 = \frac{1}{3}\\a_n = \frac{1}{3}^{(n-1)}\ ;\ 2 \le n \le 5\end{cases}$$
50. E
51. D
52. E
53. D
54. E
55. D
56. B
57. D
58. B
59. C
60. B
61. A
62. B
63. Não possui raízes reais.
64. (1, 2, 4) ou $\left(\frac{16}{3}, \frac{-20}{3}, \frac{25}{3}\right)$
65. a = 3
66. D
67. Os números são 4, 6 e 9.
68. r = 10 e R = 25
69. C
70. A
71. E
72. $\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \frac{27}{5}\right)$ ou (–1, 1, –1)
73. B
74. C
75. D
76. C
77. a = 8, b = 12 e c = 16
78. E
79. A
80. C
81. A
82. $\frac{10}{9}(10^n - 1) - n$
83. 3h
84. $\frac{3}{4}$
85. D
86. A
87. D
88. D
89. $\frac{S}{a_1 \cdot a_n}$
90. C
91. D
92. E

Exercícios complementares

1. (2, 4, 8) ou (8, 4, 2).
2. Demonstração
3. E
4. A (dica: sen2x = 2senx . cosx)
5. PG crescente.
6. a) $b_1 = q^4$; b) $n = 5$; c) $2n = m + 5$
7. $q \in \left]1;\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right[$
8. $\frac{A+B}{A-B}$
9. Os números são 13, 14 e 15.
10. $\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} = \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i \cdot a_{i-1}} = \frac{r}{a_i \cdot a_{i+1}}$

    Portanto: $\frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right)$

    Desse modo:

    $\frac{1}{a_1\ a_2} + \frac{1}{a_2\ a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}\ a_n} =$

    $= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) =$

    $= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{r} = \frac{a_n - a_1}{a_1\ a_n} = \frac{(n-1)r}{r\ a_1\ a_n}$

    Portanto:

    $\frac{1}{a_1\ a_2} + \frac{1}{a_2\ a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}\ a_n} = \frac{n-1}{a_1\ a_n}$
11. E
12. B
13. 27
14. (2, 4, 8, 16, 32)
15. $A = \frac{1}{1-a} \therefore A - a.A = 1 \therefore A - 1 = a.A \therefore a = \frac{A-1}{A}$

    $B = \frac{1}{1-b} \therefore B - b.B = 1 \therefore B - 1 = b.B \therefore b = \frac{B-1}{B}$

    $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + ab + a^2b^2 + a^3b^3 + \ldots + a^nb^n\right) = \frac{1}{1-ab} =$

    $= \frac{1}{1-\left(\frac{A-1}{A}\right)\cdot\left(\frac{B-1}{B}\right)} = \frac{AB}{AB-(AB-A-B+1)} =$

    $= \frac{AB}{A+B-1}$
16. a) 1º solução

    $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} =$

    $= \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{\sqrt{x\ldots}}$

    $= \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x} \cdot \sqrt[16]{x\ldots} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot x^{\frac{1}{16}} \ldots = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots} =$

    $= x^{\frac{1/2}{1-1/2}} = x^{\frac{1/2}{1/2}} = x$

    2º solução

    $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}} = a \therefore \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}\right)^2 =$

    $= a^2 \ldots x\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}}_{a} = a^2$

    $x \cdot a = a^2 \therefore \mathbf{a} = x$

    b)

    $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\ldots}}}} = a \therefore x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y}}}}} = a^2 \therefore$

    $\therefore x^2y\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\ldots}}}} = a^4$

    $x^2y \cdot a = a^4 \therefore a^3 = x^2y \therefore a = \sqrt[3]{x^2y}$

9 Matrizes

Revisando

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 27 \end{pmatrix}$

2. $x = 2$

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix}$

Exercícios propostos

1. D
2. a) $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 14 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

   c) $2A + 3A^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & -5 \end{bmatrix}$
3. E
4. B
5. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
6. D
7. A
8. B
9. B
10. C
11. D
12. B
13. $X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$
14. B
15. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
16. $\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
17. E
18. C
19. $B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$
20. D
21. a) $(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t$

    b) $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$

    c) $(A^t + A^2)^t = (A^t)^t + (A^2)^t = A + (A^2)^t = A + (A \cdot A)^t = A + A^t$. At, como $A = A^t$, temos $A^t + A \cdot A = A^t + A^2$

    d) $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$

    e) $A = \underbrace{\left(\frac{A + A^t}{2}\right)}_{\substack{\text{simétrica} \\ \text{(item b)}}} + \underbrace{\left(\frac{A - A^t}{2}\right)}_{\substack{\text{antissimétrica} \\ \text{(item d)}}}$

    f)

    $$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

    $$\begin{cases} ax + bz = 1 & (\cdot -c) \\ cx + dz = 0 & (\cdot a) \end{cases} \therefore \begin{array}{r} -acx - bcz = -c \\ acx + adz = 0 \quad + \\ \hline (ad - bc)z = -c \end{array}$$

    $$z = \frac{-c}{ad - bc}$$

    $$x = \frac{d}{ad - bc}$$

    $$\begin{cases} ay + bw = 0 & (\cdot -c) \\ cy + dw = 1 & (\cdot a) \end{cases} \therefore \begin{array}{r} -acy - bcw = 0 \\ acy + adw = a \quad + \\ \hline (ad - bc)w = a \end{array}$$
22. B
23. B

Texto complementar

1. 2
2. 3
3. B

Exercícios complementares

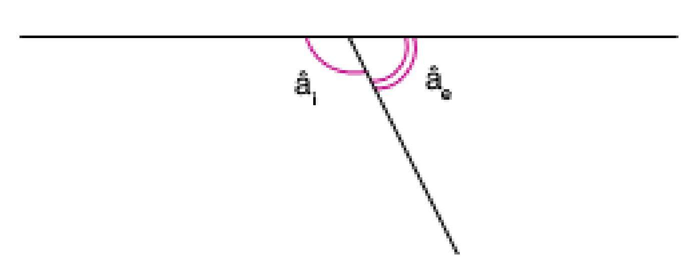
1. A
2. C
3. D
4. A
5. $\begin{bmatrix} -\alpha & \frac{1-\alpha^2}{\beta} \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{R}^* \end{matrix}$ e $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$
6. B
7. D
8. E
9. $x = 2$; $y = 4$ e $z = 6$
10. A
11. A
12. D
13. D
14. A
15. O valor de a é 1 e o de b é 0.
16. Demonstração
17. A matriz é inversível para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
18. I. Verdadeira.
    II. Falsa.
    III. Verdadeira.
19. $9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$
20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Frente 3

7 Polígonos convexos

Revisando

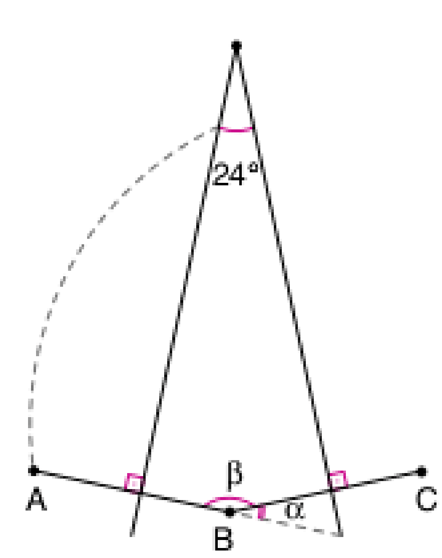
1.



$$\begin{cases} \hat{a}_i + \hat{a}_e = 180^\circ \rightarrow 6\hat{a}_e = 180^\circ \therefore \hat{a}_e = 30^\circ \\ \hat{a}_i = 5\hat{a}_e \end{cases}$$

$$30^\circ = \frac{360^\circ}{n} \therefore n = 12$$

2.



$\beta + 24^\circ = 180^\circ \therefore \beta = 156^\circ \rightarrow \alpha = 24^\circ$

$\hat{a}_e = \frac{360^\circ}{n} = 24^\circ \therefore n = 15$ (Pentadecágono regular)

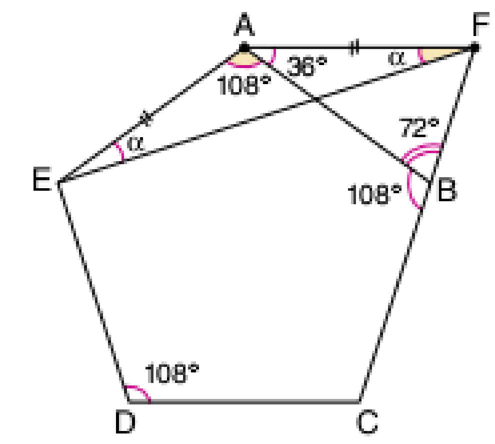
$$d = \frac{15(15-3)2}{2} = \frac{15 \cdot 12}{2} = 90 \text{ diagonais}$$

3. $d_1 = \frac{n(n-3)}{2}$

   $d_2 = \frac{(n+6) \cdot [(n+6)-3]}{2} = \frac{(n+6) \cdot (n+3)}{2}$

   $d_2 = d_1 + 39 \rightarrow \frac{(n+6)(n+3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 39 \rightarrow n = 5$

4.



$\hat{a}_i = \frac{180^\circ \cdot (5-2)}{5} = 108^\circ$

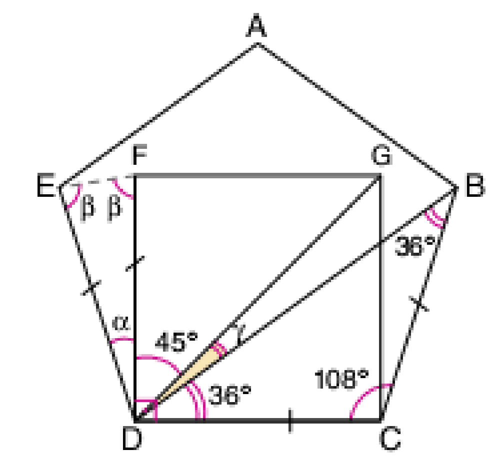
ΔABF é um triângulo isósceles

$\rightarrow A\hat{B}F = A\hat{F}B = 72^\circ$ e $B\hat{A}F = 36^\circ$

ΔAEF é isósceles: $2\alpha + 144^\circ = 180^\circ$

$2\alpha = 36^\circ \therefore \alpha = 18^\circ$

5.



$\alpha + 50^\circ = 108^\circ \therefore \alpha = 18^\circ$

$\Delta DEF \;\; \alpha + 2\beta = 180^\circ \therefore 18^\circ + 2\beta = 180^\circ$

$\beta = 81^\circ$

$45^\circ + 36^\circ + \gamma = 90^\circ \therefore 81^\circ + \gamma = 90 \therefore \gamma = 9^\circ$

Exercícios propostos

1. E
2. C
3. C
4. 40 lados
5. 5 lados (pentágono)
6. 126°
7. B
8. E
9. Octógono; hexadecágono.
10. $n_1 = 6$ e $n_2 = 9$
11. $x = 110^\circ$
12. Octógono.
13. A
14. B
15. 20 diagonais
16. 50°

Exercícios complementares

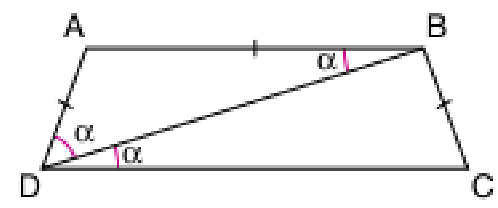
1. B
2. Dodecágono; 54 diagonais.
3. A
4. C
5. D
6. 90 diagonais
7. 162°
8. Polígonos: 6, 7 e 8; o menor polígono é o hexágono.
9. C
10. E
11. 12; o polígono é o dodecágono.
12. Demonstração
13. $x = \frac{360^\circ}{n}$
14. Demonstração
15. Hexágono equiângulo.
    Traçando paralelas aos lados do ΔABC que é equilátero.
    Os triângulos ΔADE, ΔBFG, ΔCHI são equiláteros, o que implica que os ângulos internos do hexágono são todos iguais a 120°.
    Pentágono equiângulo.

Construindo o ΔABC isósceles com ângulo do vértice 108°.
Nos vértices C e B, construímos triângulos isósceles, assim os ângulos externos valem 108°.

8 Quadriláteros notáveis

Revisando

1. $MP = QN = \frac{a}{2}$ e $PQ = \frac{b-a}{2}$

2. 

ΔABD é isósceles $\to A\hat{D}B = A\hat{B}D = \alpha$
$\overline{AB} // \overline{CD} \to A\hat{B}D = \alpha = B\hat{D}C$
Assim, $\overline{BD}$ é bissetriz de $\hat{D}$
Usamos raciocínio análogo para $\overline{AC}$.

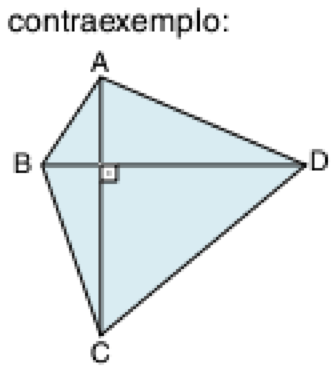
3. $\Delta XPW \sim \Delta XYZ$
$\frac{x}{b} = \frac{a-x}{a} \therefore ax = ab - bx$
$x = \frac{ab}{a+b}$

4. AB = CD = 12 cm e AD = BC = 6 cm

5. $PQ = \frac{a+c}{2} - \frac{d}{2} - \frac{b}{2} = \frac{(a+c)-(b+d)}{2}$

Exercícios propostos

1. a) V; b) F; c) V; d) F; e) F; f) V; g) F; h) V; i) V; j) F; k) F; l) F; m) V; n) F; o) F; p) F; q) F; r) V; s) V; t) F, observe o contraexemplo:



u) F, deveriam cruzar-se no ponto médio;
v) V; x) V

2. C
3. B
4. 30 m; 45 m
5. y = 36° 40'
6. x = 50°; y = 130°
7. B
8. ΔAMD é isósceles
ΔBMC é equilátero
$\Delta CMD \Rightarrow 30°, 60°$ e $90°$
AD + BC + AB + DC = 30
$\therefore 6a = 30 \therefore a = 5$ cm
AD = BC = 5 cm
AB = DC = 10 cm
9. a) $\beta = 5\alpha$, mas $\alpha + \beta = 180°$
$\therefore a + 5\alpha = 180°$
$\alpha = 30°$ e $\beta = 150°$
b) $x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° \therefore x + \frac{\alpha+\beta}{2} = 180°$
$x + 90° = 180° \therefore x = 90°$
10. 16 cm; 24 cm
11. ABDE é um retângulo $\Rightarrow$ DE = b
CE = a – b e o ΔBEC é isósceles h = CE
$\therefore$ h = a – b
12. 130°
13. 25 cm

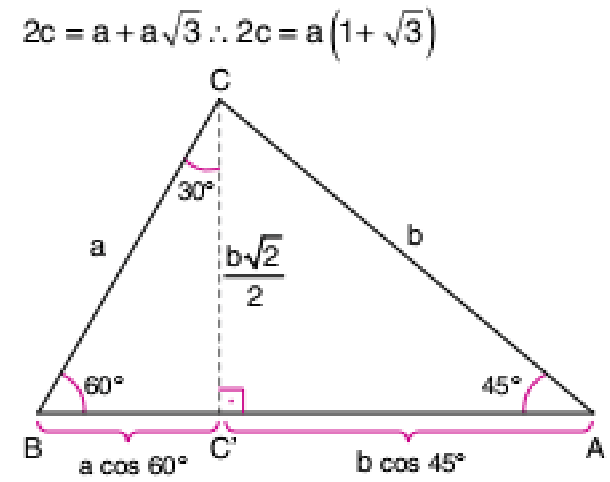
Exercícios complementares

1. x = 75°
2. x = 25°; y = 65°
3. D
4. 45°, 45°, 135° e 135°
5. 85° e 95°
6. 72°
7. 11 cm
8. 36 cm
9. 180°
10. 125°
11. $\overline{AC}$ é bissetriz do $B\hat{A}D$ (losango ABCD)
$\overline{AQ}$ é bissetriz do $B\hat{A}C$ (losango CAPQ)
108° + 4a = 180° \ 4a = 72 \ a = 18°
x = 108° + a \ x = 108° + 18° = 126° e o suplemento 54°
12. No ΔABM: 35°, 115° e 30°
13. 36°, 72° e 72°
14. x = 66°; y = 12° e z = 84°
15. $\overline{MP}$ é base média do $\Delta ABD \Rightarrow MP = \frac{a}{2}$
$\overline{QN}$ é base média do $\Delta ABC \Rightarrow QN = \frac{a}{2}$
$\overline{PQ}$ é o chamado segmento de Euler e
$MP + PA + QN = \frac{a+b}{2} \Rightarrow$
$\frac{a}{2} + PQ + \frac{a}{2} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow PQ = \frac{b-a}{2}$
16. 110° e 70°
17. Semiperímetro do trapézio.
18. 11

9 Triângulo retângulo

Revisando

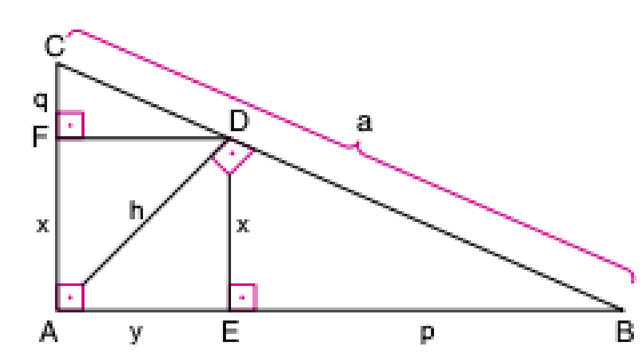
1. $x = \frac{44}{16} = \frac{11}{4}$
2. $h = 2\sqrt{3}$
3. x = 1,5
4. R = 5 cm
5. $c = a\cos 60° + b\cos 45°$
$c = \frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2} \therefore 2c = a + b\sqrt{2}$
$\cos 30° = \frac{b\sqrt{2}}{2a} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2a} \therefore b\sqrt{2} = a\sqrt{3}$
Assim:
$2c = a + a\sqrt{3} \therefore 2c = a(1+\sqrt{3})$

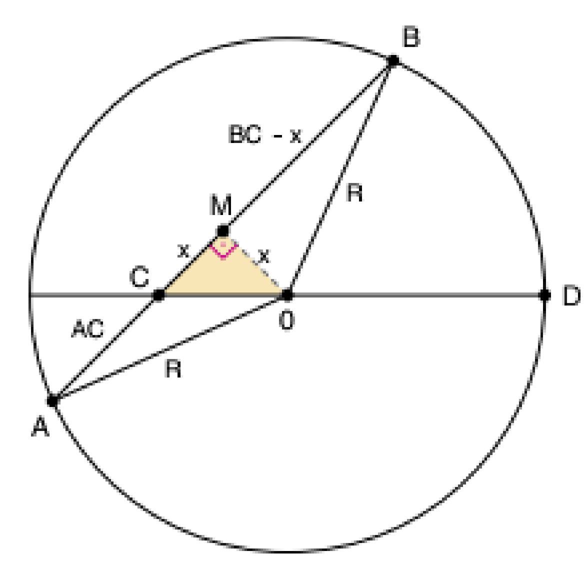


Exercícios propostos

1. D 2. B 3. B 4. B
5. $x = a\sqrt{2}$
6. $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
7. $\text{sen}\,\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
8. $h = 15(3+\sqrt{3})$ m
9. D
10. $2\sqrt{13}$ dm
11. A 13. A 15. C
12. B 14. D 16. D
17. 13 cm
18. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm
19. 8 cm
20. $\frac{100}{7}$
21. C
22. E
23. $x = \frac{\sqrt{2}\,.\,bc}{b+c}$
24. 10 cm e altura = 9,6 cm
25. $CM = \frac{\sqrt{91}}{2}$ cm

Exercícios complementares

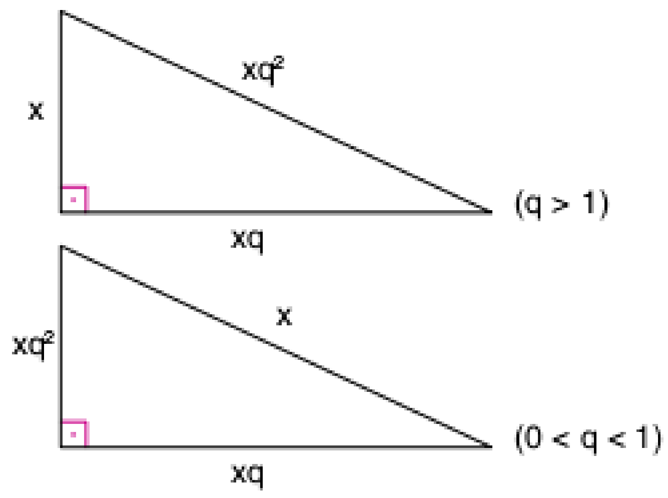
1. B 3. D 5. A
2. B 4. C
6. $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$
7. $2.\frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\sqrt{3}}$
8. $3\sqrt{2}$ cm
9. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$
10. K = 2 ou K = $\frac{-1}{2}$
11. $\frac{b}{a}.\sqrt{a^2-b^2}$
12. AE = 16.342 m
13. $2\sqrt{ab}$
14. $\frac{4}{5}$
15. $\Delta = \left(-\frac{2}{h}\right)^2 - 4.\frac{2}{a}.\frac{1}{b} = \frac{4}{h^2} - \frac{8}{ab} =$
$= 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{8}{ab} = 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{ab}\right) =$
$= 4\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq 0$
Logo, a equação admite sempre raízes reais.
16. 

ΔABC $a^2 = (q+x)^2 + (p+y)^2 \therefore a^2 =$
$= q^2 + p^2 + x^2 + y^2 + 2(qx + py)$
ΔDAE $x^2 + y^2 = h^2$
ΔCDA $y^2 = qx$
ΔADB $x^2 = yp$
Assim:
$a^2 = p^2 + q^2 + (x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2) \therefore a^2 =$
$= p^2 + q^2 + 3(x^2 + y^2) \therefore a^2 = p^2 + q^2 + 3h^2$
17. 

1. ΔAOB é isósceles OB = OA = R
$\overline{OM}$ é altura e mediana AC + x = BC – x
2x = BC – AC

2. $\Delta BOM \quad R^2 = x^2 + (BC - x)^2$
3. $\Delta AOM \quad R^2 = x^2 + (AC + x)^2$
4. Somando as equações de 2 e 3, temos:
$2R^2 = 4x^2 + (BC)^2 + (AC)^2 - 2x\,(BC - AC)$
Como BC AC = 2x, temos:
$2R^2 = 4x^2 + (BC)^2 + (AC)^2 - 4x^2 \therefore (AC)^2 + (BC)^2 =$
$= 2R^2$.

18.



$\left(xq^2\right)^2 = x^2 + (xf)^2 \therefore x^2q^4 = x^2 + x^2q^2$

$\therefore g^4 - q^2 - 1 = 0 \therefore q^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \therefore q^2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

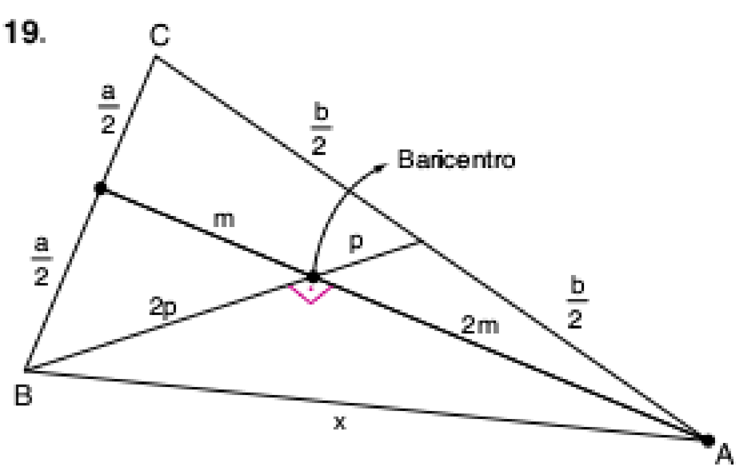
$\therefore q = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$

$(x)^2 = (xq)^2 + \left(xq^2\right)^2 \therefore x^2 = x^2q^2 + x^2q^4$

$\therefore q^4 + q^2 - 1 = 0 \therefore q^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore q^2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \therefore q = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

19.



$x^2 = 4p^2 + 4m^2$

$\dfrac{b^2}{4} = 4m^2 + p^2 \qquad \dfrac{b^2 + a^2}{4} = 5m^2 + 5p^2$

$\rightarrow$

$\dfrac{a^2}{4} = m^2 + 4p^2 \qquad \dfrac{b^2 + a}{4} = 5\dfrac{x^2}{4} \therefore x^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{5}$

$x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{5}}$

10 Triângulos quaisquer

Revisando

1. $\dfrac{15}{2}$
2. $x = 5\sqrt{10}$ cm
3. $\dfrac{3}{4}$
4. $(d_1)^2 + (d_2)^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$
5. $CD = \dfrac{a}{6}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$

Exercícios propostos

1. E
2. B
3. C
4. C
5. C
6. a) $\ell = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ b) Demonstração
7. 10 m
8. $\sqrt{61}$ cm
9. $9\sqrt{2}$ m
10. $a\sqrt{3}$
11. A distância entre as duas árvores é de 28 metros.
12. D
13. a) Obtusângulo. b) Acutângulo.
14. $\dfrac{3}{2}$ cm
15. 13 cm

Exercícios complementares

1. B
2. B
3. $\dfrac{28}{5}$ cm
4. 10 m
5. $\dfrac{24}{7}$ m
6. $\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}$
7. $2a^2 + 2b^2$
8. Lados: $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$ e 6; ângulos: 30º, 60º e 90º.
9. Â = 60º
10. $\dfrac{4\sqrt{6}}{7}$ cm
11. Demonstração
12. 16 cm
13. $2\sqrt{11}$ cm
14. Demonstração
15. $2\sqrt{\dfrac{a^2 + ab + b^2}{3}}$
16. 1 m
17. Demonstração

11 Circunferência e círculo

Revisando

1. a) 60°
b) 50°
c) 110°
d) 25°
2. a) 5
b) $\sqrt{10}$
c) $2\sqrt{10}$
3. 210°

Exercícios propostos

1. E
2. $AC = \dfrac{R\sqrt{5}}{3}$
3. B
4. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
5. 6 cm
6. a) 3 cm
b) 30 cm
7. C
8. 21 m, 4 m e 8 m
9. $AP = \dfrac{9}{2}$
10. $z = \dfrac{a+b-c}{2}$; $y = \dfrac{a+c-b}{2}$ e $x = \dfrac{b+c-a}{2}$
11. 6 cm
12. $R = \dfrac{b+c-a}{2}$
13. A
14. A
15. B
16. B
17. C
18. A
19. x = 20°
20. x = 75°
21. a) 35°; b) 100°; c) 60°; d) 25°; e) 50°; f) 20°; g) 80°; h) 30°; i) $\dfrac{\alpha}{2}$
22. a) 10°; b) 65°; c) 50°; d) 70°; e) 98°; f) 150°
23. 63°, 63° e 54°

Exercícios complementares

1. B
2. 20 cm e $R = 5\sqrt{3}$ cm
3. 2 cm e 8 cm
4. $\dfrac{R}{4}$
5. 1,5
6. $\dfrac{R}{3}$
7. $R\left(\sqrt{2} - 1\right)$
8. $R\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$
9. E
10. 42 cm e 24 cm
11. 8 cm e 3 cm
12. 12, 18, 24 e 30
13. 25°
14. 8
15. $\sqrt{ab}$
16. 17 cm
17. $HK = \dfrac{32}{3}$ cm
18. $\dfrac{1}{2}$
19. $\dfrac{9}{4}$
20. 48°
21. 67° 30'
22. 145°
23. 15°
24. $\sqrt{ab}$
25. $\dfrac{R}{6}$
26. $2\sqrt{ab}$

12 Áreas

Revisando

1. 16
2. área $= \left(3 - 2\sqrt{2}\right).\ p^2$
3. área $= 4\pi - 3\sqrt{3}$
4. $d = \dfrac{h\sqrt{2}}{2}$
5. I. $\dfrac{A}{2}$
II. $\dfrac{A}{4}$
III. $\dfrac{A}{6}$
IV. $\dfrac{A}{12}$
6. área $= (\pi - 2)\dfrac{R^2}{8}$

Exercícios propostos

1. 2.025 cm² e 775 cm²
2. 500 azulejos
3. 81 cm²
4. 28 m² ou 2.800 dm²
5. 5 cm
6. 34 m²
7. 77 m
8. $2\sqrt{13}$ dm
9. A
10. B
11. C
12. A
13. A
14. A
15. D
16. A
17. B
18. C
19. D
20. B
21. D
22. D
23. B
24. A
25. A
26. 48 cm²
27. C
28. A
29. E
30. $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)$
31. C
32. D
33. C
34. A
35. A
36. B
37. $R^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

38. $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Exercícios complementares

1. a) $\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$

   b) $3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ unidades de área.

2. A
3. E
4. B
5. A
6. C
7. B
8. A
9. $\frac{16}{65}$
10. B
11. E
12. B
13. $100\sqrt{3}\ cm^2$
14. a) $A(x)=-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)x^2+4x$

    b) $\frac{4}{\pi+4}$ m
15. $(a-b)\frac{h}{2}$
16. D
17. A
18. B
19. 5 m
20. a) 30 cm^2

    b) 2 cm
21. A
22. $\frac{\pi\ell^2}{4}$
23. $R^2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$
24. $a^2\left(\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}\right)$
25. $R^2\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\right)$
26. 2 m^2
27. a) 3 cm

    b) $\frac{18+9\sqrt{3}}{4}\ cm^2$
28. $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{8}$
29. a) $\frac{2}{sen2\alpha}$ (não se esqueça: sen 2a = 2sen a.cos a)

    b) $\frac{\pi}{4}$
30. $A(x)=\begin{cases} x;\ 0\le x\le 1\\ 2x-1;\ 1\le x\le 3\\ x+2;\ 3\le x\le 4\end{cases}$
31. a) 188 m^2

    b) 4.324 m^2
32. $\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{54}\right).a^2$
33. $área=\frac{\ell^2}{2}.sec^2\,\theta.\,tg\theta$
34. a) $sen\alpha=\frac{1}{2}$

    b) $AC=\sqrt{7}$

    c) 2

    d) $área_{\Delta AMC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
35. a) $área_{\Delta APO}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

    b) arco menor $=\frac{5\pi}{6}$

       arco maior $=\frac{19\pi}{6}$

    c) $área=\frac{3\sqrt{3}+6+5\pi}{6}$
36. a) $\frac{x^2.\sqrt{3}}{2}$

    b) $\frac{1}{5}$
37. a) $\frac{R}{r}=3$

    b) $27\sqrt{3}.r^2$
38. a) ABCD é um trapézio isósceles.

    $\Delta ACC'\quad \left(3\sqrt{2}\right)^2=h^2+(3)^2\ \therefore\ h=3$

    $sen\left(B\hat{C}\right)=\frac{h}{3\sqrt{2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \therefore\ B\hat{C}=45°$

    b) $\Delta CC'B\quad (BC)^2=h^2+(1)^2\ \therefore\ (BC)^2=(3)^2+$ $+(1)^2\ \therefore\ BC=\sqrt{10}$

    $\Delta ABC\quad \frac{\sqrt{10}}{sen45°}=2R\ \therefore\ R=\sqrt{5}$

    c) A área designada é a área de círculo menos a área do trapézio.

    $A_{Trap}=\frac{(2+4).3}{2}=9$

    $Área=\pi\left(\sqrt{5}\right)^2-9=5\pi-9$
39. a) r = 2

    b) $\overline{AB}=12$ e $\overline{AC}=5$

    c) área $=30-4\pi$
40. a) $CN=CM=\frac{2}{3}$

    b) $área=\frac{\sqrt{3}}{9}$
41. $\frac{\left(2\sqrt{3}-1\right)}{44}.a^2$

13 Ponto

Revisando

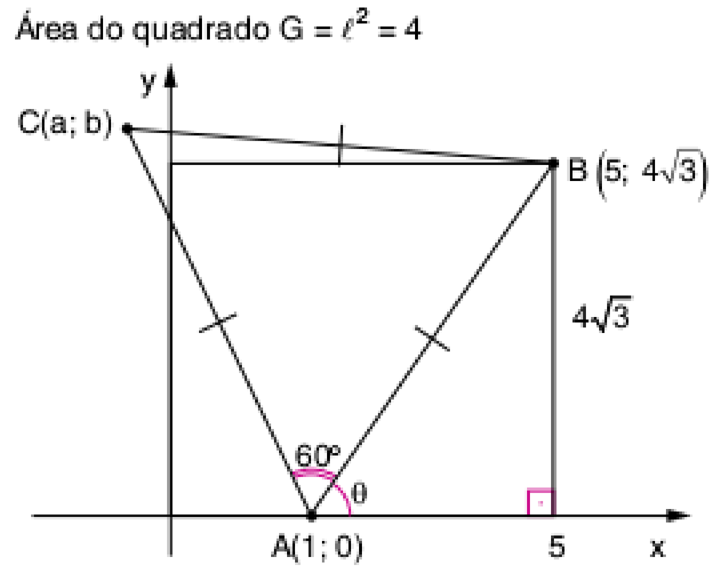
1. $x+2=8x\rightarrow x=\frac{2}{7}$

   $2y-4=3y-10\rightarrow y=6$

   $A(8x;\ 3y-10)\equiv\left(\frac{16}{7};8\right)$

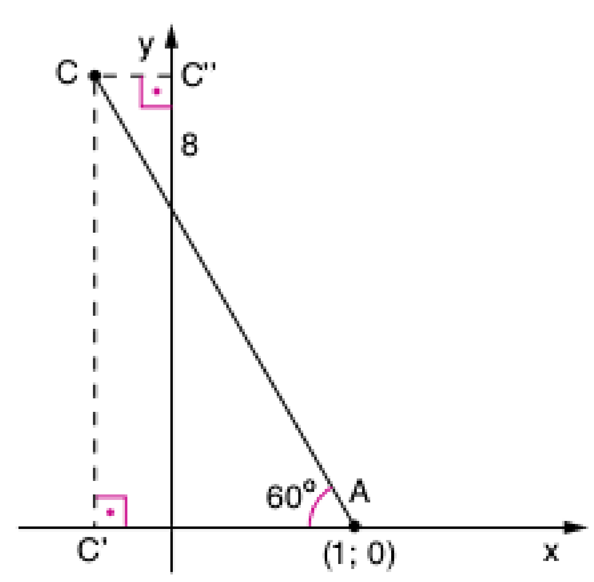
2. $AC=\ell\sqrt{2}=\sqrt{(-2-0)^2+(3-5)^2}=\sqrt{4+4}=$ $=2\sqrt{2}\ \therefore\ \ell=2$

   Área do quadrado $G=\ell^2=4$

3. 

   $tg\theta=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\ \therefore\ \theta=60°$

   $AB=\sqrt{(5-1)^2+\left(4\sqrt{3}-0\right)^2}=8$



   $cos60°=\frac{c'a}{8}\ \therefore\ c'a=4$

   $sen60°=\frac{cc'}{8}\ \therefore\ cc'=8\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

   Assim:

   $C\left(-3;\ 4\sqrt{3}\right)$

4. $\begin{vmatrix}1&-2&x\\3&4&0\\1&1&1\end{vmatrix}=0\ \therefore\ \left|\begin{array}{ccc|cc}1&-2&x&1&-2\\3&4&0&3&4\\1&1&1&1&1\end{array}\right.$

   $(4+0+3x)-(4x+0-6)=0$

   $3x+4-4x+6=0\ \therefore\ x=10$

5. $\sqrt{(a-0)^2+\left[2-(-2)\right]^2}=5\ \therefore\ \sqrt{a^2+16}=5$

   $a^2+16=25\qquad a^2=9\qquad \therefore\quad a=\pm3$

Exercícios propostos

1. D
2. $x=-3\pm3\sqrt{3}$
3. B
4. E
5. A
6. E
7. Os pontos são (3; 14) ou (3; –2).
8. 5
9. A
10. A
11. A
12. 137
13. Isósceles.
14. Demonstração
15. $\frac{25}{3}$
16. 2
17. (1; 0) e (6; 0)
18. A
19. C
20. A
21. 34
22. (5; –3) e (1; –5)
23. Demonstração
24. B
25. B
26. D
27. D
28. D
29. D
30. (0; –8) ou (0; –2)
31. y = 9 ou y = 1
32. (5; 2) ou (2; 2)
33. (5; 0) ou $\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$
34. B
35. C
36. D
37. D
38. E
39. C

Exercícios complementares

1. A
2. A
3. (0; –1) ou (0; 5)
4. Demonstração
5. $2(2.5^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}})$
6. A(–1; 0), B(3; 2) e C(–3; 4)
7. C(5; 4)
8. A(2; 0), B(–1; 4) e C(1; –3)
9. M(–1; 0) e C(0; 2)
10. $B\left(2\sqrt{3};2\right)$ e C(0; 4) ou $C\left(2\sqrt{3};-2\right)$
11. C(4; 3) ou C(–12; 3)
12. $\left(\frac{14}{3}\right).2^{\frac{1}{2}}$
13. Demonstração
14. C
15. D
16. $\left(\frac{10}{3};8\right)$ e $\left(-\frac{4}{3};6\right)$
17. (–3; 1) e (5; 11)
18. $\nexists m\in\mathbb{R}$
19. (0; 1) e (–1; 2)
20. $(x;\ y)\in\mathbb{R}^2$, tal que $x=\frac{b}{2}$, $b\neq0$.