Preparação para a X Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Lista 03 12/04/99

▶ **Problema 1** Seja n um inteiro positivo dado. Determine o maior valor possível da expressão

$$senx_1cosx_2 + senx_2cosx_3 + \ldots + senx_{n-1}cosx_n + senx_ncosx_1,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são reais quaisquer.

▶ **Problema 2** Sejam ABC um triângulo retângulo em A, I o incentro de ABC e O o ponto médio da hipotenusa BC. Prove que $\overline{OI} < \overline{IA}$.

▶ **Problema 3** A, B, C são três pontos sobre a circunferência de um círculo de raio r, com $\overline{AB} = \overline{BC}$. D é um ponto no interior do círculo, tal que o triângulo BCD seja equilátero. A reta passando por A e D intersecta a circunferência novamente em E. Prove que $\overline{DE} = r$.

▶ **Problema 4** Prove que, ao expressarmos a soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{109} + \frac{1}{110}$ como uma fração irredutível, o numerador é um múltiplo de 11.

▶ **Problema 5** São dados vários inteiros cuja soma é 1496. É possível que a soma de suas sétimas potências seja:

a) 1999?

b) 2000?

▶ **Problema 6** Prove que é possível particionar o conjunto dos inteiros positivos em dois subconjuntos disjuntos A e B satisfazendo as seguintes condições:

i) $1 \in A$;

ii) não há dois elementos distintos em A com soma da forma $2^k + 2, k \geq 0$;

iii) não há dois elementos distintos em B com soma da forma $2^k + 2, k \geq 0$.

A qual dos dois conjuntos pertence o número 1999?

▶ **Problema 7** Cada um dos dez números mostrados abaixo contém exatamente um dos dígitos do telefone de Emanuel, e este se encontra em sua posição correta. Por exemplo, olhando para o primeiro número na lista, o número de Emanuel poderia ser $\underline{9}7108$ ou $\underline{9}2397$, mas **não** poderia ser $\underline{9}6\underline{8}14$. Qual o telefone de Emanuel? Explique por que existe apenas uma resposta possível.

94825 00182 09637 78419 46234

77949 35163 43855 81345 62548

Prazo para devolução: 28 de abril