Aula 00 – Teoria Elementar dos Conjuntos

ITA 2021

Professor Victor So

Sumário

Apresentação

Olá. Seja bem-vindo!

Sou Victor So, professor de Matemática do **Estratégia Vestibulares**! Fui aprovado em terceiro lugar no ranking geral do IME no vestibular de 2012 e sou graduado em engenharia da computação pelo ITA. Faço parte de uma equipe composta por professores de todo o país, reunida com o objetivo de ajudar estudantes como você, que buscam êxito no vestibular do **ITA**!

Diante de tantas opções de cursos preparatórios para vestibulares no mercado, o que faz do nosso material uma boa opção? Primeiramente, fazemos parte do **Estratégia Concursos**, que desde 2011 se tornou referência pela qualidade de seus cursos preparatórios para concursos públicos, o que garantiu milhares de aprovados.

Para a elaboração de nosso material, partimos da mesma fórmula de sucesso adotada no ramo de concursos, da qual podemos destacar os seguintes pontos:

- **Aulas exclusivas e voltadas para o seu edital.** O nosso curso é cuidadosamente customizado para o vestibular da sua instituição.
- **Valorizar o aluno.** Como o nosso objetivo é garantir a sua aprovação em uma das melhores instituições de ensino do país, acreditamos que são necessárias metodologias diversas de aprendizado para que isso seja possível.
- **Valorizar o professor.** Somos uma equipe composta por integrantes com vasta experiência em ensino e pesquisa, totalmente voltada para a produção de um curso completo e atualizado.

Além disso, o Estratégia Vestibulares se dedicou a preparar um **material completo e atualizado**. Não se trata de disponibilizar pequenos resumos ou esquemas, mas verdadeiros livros digitais para orientar seus estudos.

Um dos diferenciais do Estratégia Vestibulares é a disponibilização de comentários de cada uma das questões, a fim de que não reste nenhuma dúvida sobre o gabarito ou sobre o conteúdo.

Para entender melhor do que estamos falando, disponibilizo para você a **Aula 00**. Essa é uma pequena amostra do nosso curso, sobre o qual você pode se informar melhor no site https://www.estrategiavestibulares.com.br/.

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

Metodologia do Curso

Este curso apresentará toda a base da matemática para que você consiga resolver a integralidade das questões do **ITA**. Não será necessário consultar outras fontes externas. Ao longo do curso, resolveremos diversos exercícios e com isso você será capaz de aprender como as questões do **ITA** são cobradas no vestibular. Você terá que se dedicar se quiser passar nesses vestibulares, então estude bastante e treine a maior quantidade de exercícios possível!

Para os alunos que já possuem uma base sobre a matéria, vocês podem pular direto para a lista de questões. Surgindo alguma dúvida, vocês poderão ver a resolução do exercício e/ou consultar a teoria para sanar suas dúvidas.

Ao longo da teoria resolveremos alguns exercícios para fixação e veremos na prática como o assunto pode ser cobrado na prova.

Análise de Vestibulares Anteriores

O vestibular do ITA 2019 teve uma mudança em relação às provas dos anos anteriores. Antigamente, as provas ocorriam durante quatro dias seguidos divididos em Física, Português, Inglês, Matemática e Química em apenas 1 fase. As provas de Física, Química e Matemática possuíam 20 questões objetivas e 10 questões dissertativas cada uma e as provas de Português e Inglês possuíam 20 questões objetivas e também uma redação na prova de Português. Um detalhe, a prova de Inglês não contabilizava pontos na média, e até hoje essa regra se mantém. Outra novidade que ocorreu no vestibular de 2019 foi a inclusão do sistema de cotas em seu processo seletivo. Nesse ano, as provas foram divididas em 2 fases. A primeira fase consistiu em 60 questões objetivas envolvendo todas as matérias, sendo classificatória e eliminatória para a próxima fase com duração de 4 horas (12 questões de cada disciplina). A segunda fase ocorreu em 2 dias, o primeiro dia foi a prova de Matemática e Química com 10 questões dissertativas de cada matéria para serem realizadas em 4 horas. O segundo dia foi a prova de Física e Redação composta de 10 questões de Física e 1 Redação para serem realizadas também em 4 horas.

Atualmente, o vestibular de 2020 será parecido com o vestibular de 2019, mas terá uma mudança em relação à primeira fase. Ao invés de 60 questões, teremos 70 no total (15 para Matemática, Física, Química e Português e 10 para Inglês) para serem resolvidas em 5 horas.

Vejamos a composição da média final das provas do último vestibular:

Fase	Matéria	Percentual

1ª Fase	Prova Objetiva	20%
2ª Fase	Matemática	20%
	Química	20%
	Física	20%
	Redação	20%
Média Final		100%

A média de corte do vestibular desse ano foi acima de 7,00 para as vagas ordinárias e privativas. Vagas ordinárias são para os alunos que optaram pela carreira civil (serão militares apenas no primeiro ano) e as vagas privativas são para os alunos que optaram pela carreira militar (serão militares durante toda a graduação).

Vamos analisar a estatística dos vestibulares dos outros anos:

ANO	2019	2018	2017	2016	2015	2014
Relação candidato/vaga	82	101	113	89	46	43

Prova	Média				
	2018	2017	2016	2015	2014
Física	7,71	6,00	7,66	5,52	5,56
Português	7,66	7,63	7,31	6,76	6,26
Inglês	8,03	8,54	8,68	8,26	8,74
Matemática	7,71	8,29	7,45	8,02	7,82
Química	7,40	7,02	6,70	7,06	7,22
Média de corte	7,34	6,85	6,94	6,37	6,25

2019	Nota de Corte

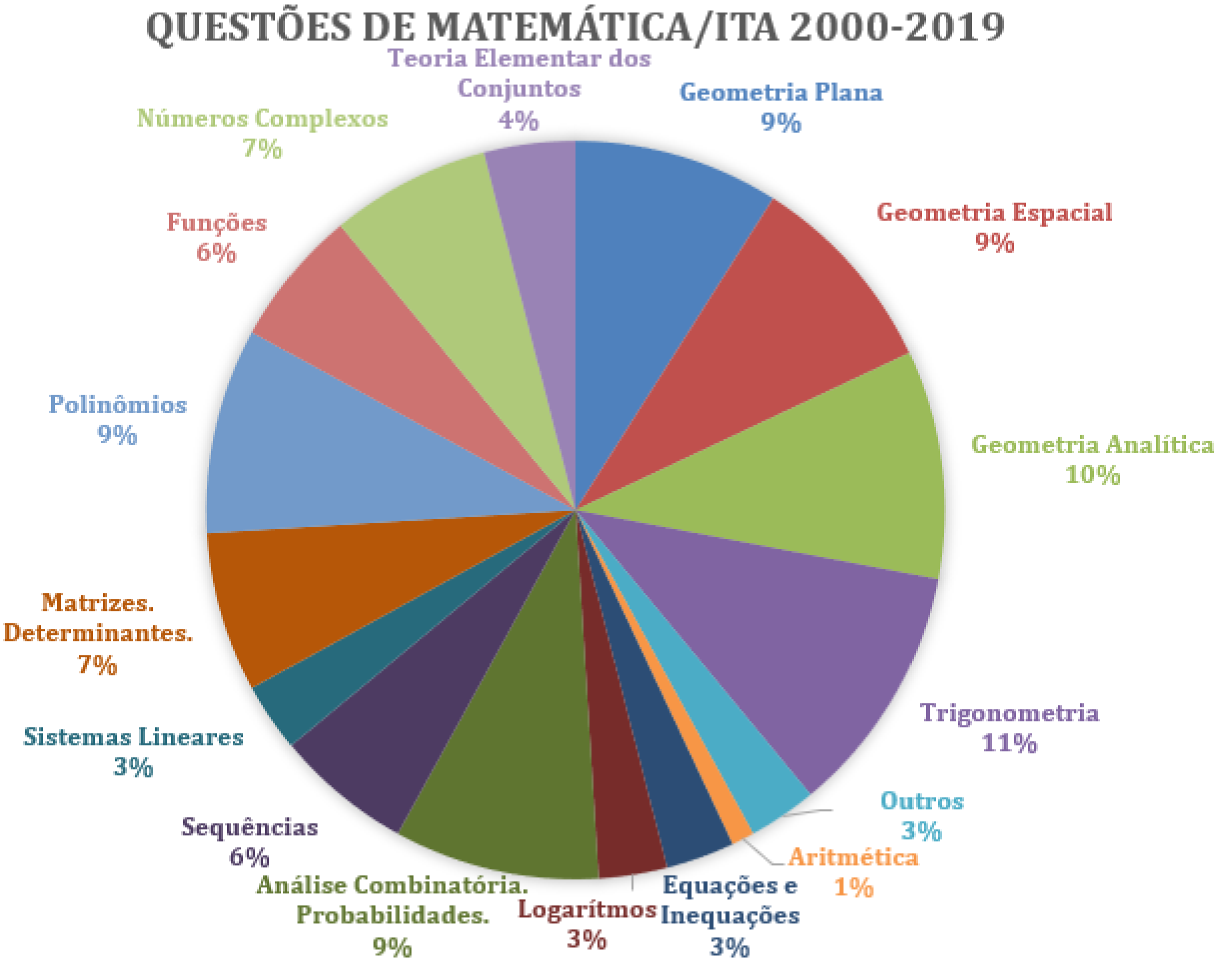
Tipo de Vaga	1ª Fase	2ª Fase
Privativa	6,04	7,03
Ordinária	5,83	7,06
Privativa (cotistas)	-	6,39
Ordinária (cotistas)	-	6,69

Perceba que a média para garantir a aprovação é 7,00. Note também que os aprovados normalmente possuem média em Matemática maior que em outras matérias de exatas. A prova de Matemática do ITA é menos exigente do que a do IME, por isso, vamos garantir os pontos nessa matéria para elevar a sua média!

Não há idade mínima para o ingresso no ITA, desde que você tenha concluído ou esteja concluindo o ensino médio no ano da inscrição. A idade máxima para esse vestibular é 23 anos de idade até o último dia do ano do concurso.

Estatística de Vestibulares Anteriores

O diagrama abaixo representa a distribuição de assuntos da prova de Matemática do ITA dos últimos 20 anos.



Observando-se o diagrama, podemos notar que no vestibular do ITA há uma alta taxa de incidência nos seguintes assuntos:

- Trigonometria
- Geometria Analítica
- Geometria Espacial
- Geometria Plana
- Polinômios

Podemos perceber também que os assuntos das questões dessa prova, excluindo os temas acima, é bem distribuído.

É muito provável que na sua prova você encontre questões sobre os temas citados acima, então tente resolver o máximo de questões possível das aulas desses assuntos para garantir preciosos pontos no vestibular!

Cronograma

AULA	ASSUNTO
Aula 00	**Teoria Elementar dos Conjuntos** Teoria elementar dos conjuntos: subconjuntos, união, intersecção, diferença, complementar.
Aula 01	**Álgebra Elementar** Conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais e irracionais, reais.
Aula 02	**Sequências** Progressões aritméticas e progressões geométricas: propriedades, soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.
Aula 03	**Introdução às Funções** Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras; funções pares, ímpares e periódicas; funções composta e inversa.
Aula 04	**Funções Quadráticas e Modulares** Funções quadráticas e modulares.
Aula 05	**Funções Exponenciais, Logarítmicas, Piso e Teto, Equações Funcionais** Funções logaritmo e exponencial: definições e propriedades. Equações e inequações logarítmicas e exponenciais.
Aula 06	**Trigonometria I** Trigonometria: fórmulas de adição, subtração e bissecção de arcos. Funções trigonométricas: propriedades e relações principais. Transformação de soma de funções trigonométricas em produtos.
Aula 07	**Trigonometria II** Trigonometria: equações e inequações trigonométricas.

Aula 08	**Geometria Plana I** Congruência de figuras planas e relações métricas nos triângulos.
Aula 09	**Geometria Plana II** Semelhança de triângulos e relações métricas nos triângulos.
Aula 10	**Geometria Plana III** Relações métricas nos círculos, circunferências e quadriláteros.
Aula 11	**Geometria Plana IV** Polígonos; relações métricas nos polígonos regulares; áreas de polígonos; áreas de círculos, coroas e setores circulares.
Aula 12	**Matrizes e Determinantes** Matrizes: operações, propriedades, inversa. Determinantes e propriedades.
Aula 13	**Sistemas Lineares** Matriz associada a um sistema de equações lineares. Resolução e discussão de sistemas lineares.
Aula 14	**Geometria Analítica I** Coordenadas cartesianas. Distância entre pontos. Equações da reta, paralelismo e perpendicularismo, ângulo entre retas, distância de um ponto a uma reta. Equação da circunferência, tangentes a uma circunferência, intersecção de uma reta a uma circunferência.
Aula 15	**Geometria Analítica II** Elementos principais e equações da elipse, hipérbole e parábola. Lugares geométricos e interpretações de equações de 2° grau.
Aula 16	**Análise Combinatória e Binômio de Newton** Combinatória: problemas de contagem, arranjos, permutações e combinações simples. Binômio de Newton.
Aula 17	**Probabilidades** Probabilidade e espaços amostrais. Probabilidade condicional e eventos independentes.
Aula 18	**Números Complexos**

	Números complexos: representação e operações nas formas algébrica e trigonométrica, raízes complexas, fórmula de Moivre.
Aula 19	**Polinômios** Polinômios: conceito, grau e propriedades fundamentais; operações, fatorações e produtos notáveis; raízes; teorema fundamental da álgebra.
Aula 20	**Equações Algébricas** Equações algébricas: definição, raiz, multiplicidade e número de raízes; transformações aditiva e multiplicativa; equações recíprocas; relação entre coeficientes e raízes. Raízes reais e complexas.
Aula 21	**Geometria Espacial I** Retas, planos e suas posições relativas no espaço. Poliedros regulares. Prismas, pirâmides e respectivos troncos. Cálculo de áreas e volumes.
Aula 22	**Geometria Espacial II** Cilindros, cones e esferas. Cálculo de áreas e volumes.

Introdução

A primeira aula desse curso será sobre Teoria dos Conjuntos. Precisamos aprender a ler as notações usadas nas questões antes de aprender a resolvê-las.

Antes de iniciar o estudo sobre a Teoria dos Conjuntos, vamos estudar Noções de Lógica. Ela é um pré-requisito para uma boa base no estudo da Teoria dos Conjuntos.

Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas. Sem mais delongas, vamos começar!

1. Noções de Lógica

1.1. Proposição Simples

1.1.1. Definição

Uma proposição simples ou sentença é uma oração declarativa que expressa um sentido completo e pode ser classificada em apenas um dos dois valores lógicos possíveis: verdadeiro ou falso.

Vamos aos exemplos:

1) Essa maçã é vermelha.
2) $10 > 5$
3) $9 = 5$

No exemplo 1, vemos que “Essa maçã é vermelha” é uma oração afirmativa. Podemos dizer que ela é verdadeira, caso a maçã seja vermelha, ou falsa, caso a maçã seja verde. Repare que no caso de uma oração, temos necessariamente a presença de sujeito (essa maçã) e de predicado (é vermelha).

Por exemplo, a frase “O rei leão” não é uma proposição, pois não possui sentido completo.

No exemplo 2, temos uma afirmação, lê-se 10 é maior que 5, ela é uma proposição pois possui sentido completo e recebe valor lógico verdadeiro.

No exemplo 3, temos outra afirmação, lê-se 9 é igual a 5, temos outra proposição com sentido completo. Ela afirma que 9 é igual a 5, logo é uma proposição falsa.

Também temos frases que não podem ser classificadas como proposição, por exemplo:

4) $10 \cdot 5 + 3$ (não possui sentido completo)
5) Isso é um absurdo! (frase exclamativa)
6) Essa pedra é dura? (frase interrogativa)
7) Faça 30 flexões agora. (frase imperativa)
8) $5x + 2 = 0$ (sentença aberta)

No exemplo 5, 6 e 7, temos uma frase exclamativa, interrogativa e imperativa, respectivamente. Não são proposições, pois não são classificáveis como verdadeiras ou falsas.

No exemplo 8 temos uma sentença aberta, porque não sabemos o valor de x. Então não sabemos se ela é verdadeira ou falsa. Observe que uma sentença aberta pode se tornar uma proposição mediante o uso de quantificadores! Exemplo:

9) $\exists x \in \mathbb{R} | 5x + 2 = 0$

O símbolo $\exists$ representa o quantificador existencial. Essa frase é lida como:

“Existe x pertencente ao conjunto dos reais, tal que $5x + 2 = 0$.”

Essa é uma proposição verdadeira, pois resolvendo essa equação encontramos algum x que satisfaz o problema.

Dois exemplos de quantificadores são:

a) Universal: $\forall$ significa “para todo”

Exemplo: $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0$

Essa proposição significa:

"Para todo x pertencente ao conjunto dos reais, $x + 1 = 0$"

Essa proposição possui valor lógico falso, pois ela afirma que todo x real satisfaz a equação. Se tomarmos $x = 0$, a equação fica $0 + 1 = 0$, o que é errado.

b) Existencial: $\exists$ significa "existe"
c) Não existencial: $\nexists$ significa "não existe"

Exemplo: $\nexists x \in \mathbb{R} | \sqrt{-1} = x$

Lê-se:

"Não existe x pertencente aos reais tal que $\sqrt{-1}$ é igual a x."

Essa é uma proposição verdadeira. Um número que satisfaz essa condição pertence ao conjunto dos complexos. Veremos mais adiante o estudo desses números.

Assim, para termos uma proposição temos que satisfazer as seguintes condições:

I. A oração deve possuir sentido completo.
II. Deve ser declarativa (não pode ser sentença aberta, frase exclamativa, frase interrogativa e frase imperativa).
III. Somente assume um dos valores lógicos possíveis: verdadeiro (V) ou falso (F).

1.1.2. Princípio da Não-Contradição

O Princípio da Não-Contradição diz que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Por exemplo:

Suponha que a seguinte proposição seja verdadeira:

1) Choveu ontem.

Se "choveu ontem" é uma proposição verdadeira, então não podemos afirmar que "não choveu ontem" (essa frase é equivalente a afirmar que "choveu ontem" é falsa). Pois assim, estaríamos nos contradizendo. Ou choveu ou não choveu.

1.1.3. Princípio do Terceiro-Excluído

O Princípio do Terceiro-Excluído diz que uma proposição poderá ser verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira possibilidade.

Veja o exemplo:

1) Maria é brasileira.
Pelo Princípio do Terceiro-Excluído:

Ou Maria é brasileira, ou Maria não é brasileira. Não existe um meio-termo!

1. Indique quais as frases abaixo são proposições.
a) Jack é maluco.
b) $5 > 2$.
c) $2x = 9$.
d) Qual a resposta dessa questão?

Resolução:

a) É proposição. Pois é uma frase com sentido completo e pode ser classificada em verdadeira ou falsa.
b) É proposição. Pois é uma frase com sentido completo e admite o valor lógico verdadeiro.
c) Não é proposição. Pois é sentença aberta.
d) Não é proposição. Pois é interrogativa.

2. Transforme as sentenças abertas em proposições.
a) $x + 4 > 10$
b) $x + 1 = 5$

Resolução:

a) Vamos tornar a afirmação verdadeira usando um quantificador.

Sem o quantificador, temos uma sentença aberta:

x mais 4 é maior que 10.

Como não sabemos o valor de x, não conseguimos definir se essa frase é verdadeira ou falsa.

Então, podemos escrever:

$$\exists x \in \mathbb{R}; x + 4 > 10$$

Assim, transformamos na seguinte proposição:

Existe x pertencente ao conjunto dos reais, tal que x mais 4 é maior que 10.

Essa é uma proposição verdadeira.

b) Podemos transformar essa frase em uma proposição falsa. Veja:

$$\forall x \in \mathbb{R}; x + 1 = 5$$

Lê-se:

Para todo x pertencente ao conjunto dos reais, temos x mais 1 igual a 5.

Essa é uma frase logicamente falsa.

1.2. Negação

Toda proposição pode ser negada. No estudo da lógica, o símbolo que representa a negação de uma proposição é $\neg$ ou $\sim$. Vamos usar o símbolo $\neg$.

As proposições são nomeadas com letras minúsculas. Usamos normalmente as letras p, q e r. Quando encontramos $\neg p$, estamos negando a proposição p. Então se p for verdadeira, $\neg p$ será falsa ou se p for falsa, $\neg p$ será verdadeira.

Por exemplo:

p: Essa banana é azul. (F)

$\neg p$: Essa banana não é azul. (V)

$q: 9 > 3$ (V)

$\neg q: 9 \leq 3$ (F)

$r: 1 = 2$ (F)

$\neg r: 1 \neq 2$ (V)

Observe que na proposição q, a sua negação foi escrita como $\leq$ e não apenas $<$. Caso escrevêssemos $<$ no lugar de $\leq$, tornaríamos a negação incompleta, já que $9 = 3$ também é falsa. Então, toda vez que você encontrar uma desigualdade, lembre-se de incluir todas as possibilidades da sua negação!

1.3. Proposição Composta

Podemos criar novas proposições a partir de proposições simples. Para isso, usamos alguns operadores lógicos (conectivos) que serão apresentados a seguir:

1.3.1. Conjunção ($\wedge$)

O operador lógico conjunção é mais conhecido como "e" e pode ser representada pelo símbolo "$\wedge$". Esse tipo de operador combina duas proposições com o conectivo "e". Por exemplo:

p: Hoje é sexta-feira.

q: Amanhã vai chover.

$p \wedge q$: Hoje é sexta-feira e amanhã vai chover.

E como vamos saber se a nova proposição será verdadeira ou falsa?

Veja: proposições com o conectivo "e" somente serão verdadeiras se ambas as proposições simples forem verdadeiras.

Imagine que você queira dirigir um carro. Você sabe que será necessário satisfazer duas condições:

1) Ser maior de 18 anos.
2) Ter carteira de habilitação.

Vamos nomear essas condições e criar proposições:

p: Ser maior de 18 anos.

q: Ter carteira de habilitação.

Então para você dirigir um carro, você precisa ter essas qualidades:

Ser maior de 18 anos e ter carteira de habilitação.

Isso também pode ser escrito como $p \wedge q$.

Agora veja as seguintes situações:

a) Sou maior de 18 anos e tenho carteira de habilitação. (p verdadeiro e q verdadeiro)
b) Sou maior de 18 anos e não tenho carteira de habilitação. (p verdadeiro e q falso)
c) Sou menor de 18 anos e tenho carteira de habilitação. (p falso e q verdadeiro)
d) Sou menor de 18 anos e não tenho carteira de habilitação. (p falso e q falso)

Qual dessas situações você terá condições de dirigir um carro?

Apenas a letra (a), pois as outras eu não satisfaço uma das condições. Logo, apenas na situação (a) teremos como verdadeira a proposição $p \wedge q$.

Vamos representar todas as possibilidades por meio da tabela-verdade. Observe:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ESCLARECENDO!

O que é a tabela-verdade?

Ela é uma tabela matemática que mostra todos os resultados possíveis de todas as combinações lógicas de uma proposição composta.

Como montar a tabela-verdade?

Preliminarmente, devemos escrever todas as possíveis combinações das proposições simples na tabela. E como vamos saber quantas linhas da tabela-verdade devemos escrever?

No caso de 2 proposições, teremos 4 linhas. As 4 linhas são resultado de todas as combinações possíveis: 2 possibilidades para p (V ou F) e 2 possibilidades para q (V ou F). Essas possibilidades são multiplicadas: $2 \cdot 2 = 4$.

Veja o passo-a-passo:

1) Escrevemos as proposições simples (p e q) e também a proposição composta logo a direita:

p	q	$p \wedge q$

2) Completamos a coluna p da seguinte forma:

p	q	$p \wedge q$
V		
V		
F		
F		

3) Completamos a coluna q da seguinte forma:

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Agora, basta analisar os valores lógicos de cada proposição e completar a tabela:

Sabemos que $p \wedge q$ será verdadeiro somente se p e q forem verdadeiros. Se qualquer dessas proposições forem falsas, o resultado de $p \wedge q$ também será falso! Então a presença de apenas 1 falso já torna o resultado falso! Vamos agora verificar cada linha e preencher o valor lógico. Na primeira linha, temos p é V e q é V, então $p \wedge q$ é V:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Na segunda linha, p é V e q é F, $p \wedge q$ é F:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

Na terceira linha, p é F e q é V, $p \wedge q$ é F:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	

Na última linha, p é F e q é F, $p \wedge q$ é F:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.3.2. Disjunção Inclusiva ($\vee$)

O operador lógico disjunção inclusiva é mais conhecido como "ou" e pode ser representado pelo símbolo $\vee$. Quando usamos o operador lógico "ou", dizemos que a nossa proposição será verdadeira quando qualquer uma das proposições simples forem verdadeiras. Vamos aos exemplos:

Imagine que sua mãe peça que você vá ao mercado e compre fruta. Você chega no mercado e encontra 2 opções, banana ou morango. Então, vamos criar nossas proposições:

p: Levar banana.

q: Levar morango.

Usando o conectivo "ou":

$p \vee q$: Levar banana ou levar morango.

Você precisa levar alguma fruta para tornar essa proposição verdadeira, assim, temos as seguintes possibilidades:

a) Vou levar banana e vou levar morango. (p verdadeira e q verdadeira)
b) Vou levar banana e não vou levar morango. (p verdadeira e q falsa)
c) Não vou levar banana e vou levar morango. (p falsa e q verdadeira)
d) Não vou levar banana e não vou levar morango. (p falsa e q falsa)

Qual delas você levará alguma fruta?

Nas letras (a), (b) e (c) você estará levando alguma fruta para casa e apenas a letra (d) você não levará nada. Logo, apenas a letra (d) será falsa, pois você não estará levando nenhuma fruta.

A tabela-verdade da disjunção é a seguinte:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.3. Disjunção Exclusiva ($\oplus$)

A disjunção exclusiva é conhecida como "Ou p ou q" e pode ser representada por $\oplus$. A diferença entre a disjunção exclusiva da disjunção inclusiva é que caso as **duas proposições sejam verdadeiras** ao mesmo tempo, a proposição com **disjunção exclusiva torna-se falsa**. Por exemplo:

p: Vou à escola.

q: Chove hoje.

$p \oplus q$: Ou vou à escola ou chove hoje.

Assim, se p: Vou à escola for verdadeira e q: Chove hoje também for verdadeira, a proposição $p \oplus q$ torna-se falsa. Pois a disjunção exclusiva apenas permite a escolha de uma opção (apenas uma das proposições pode ser verdadeira).

Veja a tabela-verdade:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.4. Negação ($\neg$)

A negação de uma proposição p pode ser escrita como $\neg p$. Ele é lido como "não p". A negação de p sempre receberá o valor lógico contrário ao de p. Por exemplo:

p: José é órfão.

$\neg p$: José não é órfão.

Veja a tabela-verdade:

p	$\neg p$
V	F
F	V

1.3.5. Condicional ($\rightarrow$)

O condicional é conhecido como "Se p, então q" e pode ser representado por $\rightarrow$. Esse caso só será falso quando p for verdadeiro e q for falso. Porque ela afirma que se p acontecer, q deve acontecer. Vamos exemplificar:

p: Choveu ontem.

q: Caio estudou.

$p \rightarrow q$: Se choveu ontem, então Caio estudou.

Vamos analisar as possibilidades:

1) Choveu ontem e Caio estudou. (p verdadeiro e q verdadeiro)
2) Choveu ontem e Caio não estudou. (p verdadeiro e q falso)
3) Não choveu ontem e Caio estudou. (p falso e q verdadeiro)
4) Não choveu ontem e Caio não estudou. (p falso e q falso)

A nossa proposição condicional diz que “se choveu ontem, então Caio estudou”, então na (1) temos que “choveu ontem e Caio estudou”, logo ela é verdadeira porque ela afirma que os eventos da condição aconteceram.

Na (2), temos que “choveu ontem e Caio não estudou”. A condicional diz que se chovesse, Caio teria estudado, esse caso é falso, pois a condicional diz que se chovesse ontem, Caio teria estudado.

Na (3) e na (4), temos que “não choveu ontem”. A condicional nada afirma sobre a primeira proposição ser falsa, então tanto faz se Caio estudou ou não estudou nesse caso. A proposição será verdadeira em ambos os casos.

Desse modo, podemos criar a tabela-verdade:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.3.6. Bicondicional (↔)

O bicondicional é conhecido como “se e somente se” e pode ser representado pelo símbolo (↔). Proposições com o conectivo bicondicional são verdadeiros quando ambos os eventos acontecem ou nenhum deles acontecem. Por exemplo:

p: Maria foi passear.

q: Jéssica ligou para Maria.

$p \leftrightarrow q$: Maria foi passear se e somente se Jéssica ligou para Maria.

Analisando as possibilidades:

1) Maria foi passear e Jéssica ligou para Maria. (p verdadeiro e q verdadeiro)
2) Maria foi passear e Jéssica não ligou para Maria (p verdadeiro e q falso)
3) Maria não foi passear e Jéssica ligou para Maria. (p falso e q verdadeiro)
4) Maria não foi passear e Jéssica não ligou para Maria. (p falso e q falso)

Qual delas torna a bicondicional verdadeira?

Apenas a (1) e a (4).

Na (1), Maria foi passear e Jéssica ligou para Maria, logo é verdadeira conforme estabelece a proposição.

Na (4), nenhum dos eventos aconteceram, isso não contradiz a proposição. Logo também é verdadeira.

Na (2), Maria foi passear e mesmo assim Jéssica não ligou para Maria. A proposição foi contradita! Assim, esse caso torna a proposição falsa.

Na (3), Jéssica ligou para Maria e Maria não foi passear. Temos uma situação análoga à (2). Então esse caso também é falso.

Vamos criar a tabela-verdade passo a passo:

1° passo: Preenchemos a terceira coluna com o conectivo $(p \to q)$ linha por linha e obtemos:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

A ordem de preenchimento da tabela sempre será das proposições simples para as proposições compostas!

2° passo: Preenchemos a quarta coluna com o conectivo $(q \to p)$ linha por linha e obtemos:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Perceba que a ordem das proposições foi trocada! Então, devemos analisar primeiro a coluna q e depois a coluna p.

3° passo: Preenchemos a última coluna linha por linha e obtemos:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Aqui, analisamos $p \to q$ e $q \to p$ e vemos as linhas que possuem F. Nessas linhas, completamos com F na coluna $p \leftrightarrow q$. O restante completamos com V.

Dessa forma, concluímos que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira somente quando $p \to q$ e $q \to p$ forem verdadeiras.

*Não seria necessário fazer uma tabela com $p \to q$ e $q \to p$. Isso foi feito apenas para mostrar didaticamente que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira somente quando a ida $(\to)$ e a volta $(\leftarrow)$ forem verdadeiras ao mesmo tempo.

Basta gravar que a proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira somente quando $p, q = V$ ou $p, q = F$.

1.4. Classificação das Proposições Compostas

1.4.1. Tautologia

Uma proposição composta é classificada como tautologia quando todos os valores lógicos que ela assume são verdadeiros. Isto é, independente dos valores lógicos das proposições simples, ela será verdadeira. Exemplo:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

1.4.2. Contradição

Uma proposição composta é classificada como contradição quando todos os seus valores lógicos são falsos.

Exemplo:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

1.4.3. Contingência

Uma proposição composta é classificada como contingência quando ela não puder ser classificada como tautologia ou contradição. Exemplo:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.5. Relação de Equivalência

Esse tópico será útil para você desenvolver o raciocínio da demonstração por argumentos lógicos e, também, a trabalhar com operadores lógicos. Veremos mais à frente que operações na teoria dos conjuntos são muito parecidos com operações da lógica proposicional.

Duas proposições serão equivalentes quando possuírem tabela-verdades iguais. Vamos usar o símbolo $\Leftrightarrow$ para indicar equivalência. Exemplo:

Vamos construir a tabela-verdade para $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$:

p	$\neg p$	q	$p \to q$	$\neg p \lor q$
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V

Perceba que a tabela-verdade de $p \to q$ e $\neg p \lor q$ possuem os mesmos valores lógicos, logo eles são equivalentes! Então, podemos escrever:

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \lor q$$

Se elas são equivalentes, podemos escrever qualquer uma das formas para representar a mesma proposição!

1.5.1. Teorema Fundamental

Uma equivalência muito útil no estudo da lógica é a seguinte:

I. $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

II. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \land (q \to p)$

Já sabemos que $p \to q \Leftrightarrow \neg p \lor q$, vamos construir a tabela-verdade de $\neg q \to \neg p$ para provar o teorema (I):

*O passo-a-passo está detalhado no exercício abaixo.

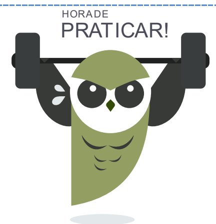
p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \lor q$	$\neg q \to \neg p$
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V

Essas proposições são todas equivalentes, portanto tanto faz escrever qualquer uma das formas.

Agora, construindo a tabela-verdade (II):

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Perceba que $(p \leftrightarrow q)$ possui a mesma tabela-verdade de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.



3. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes.

a) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

b) $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

Resolução:

a) $\boldsymbol{\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)}$

Vamos analisar quais proposições precisamos escrever na nossa tabela-verdade. Para saber quais, fazemos o seguinte:

Primeiro, identificamos as proposições simples. No caso será p e q.

Próximo passo será identificar se há alguma negação de uma proposição simples. Temos $\neg q$.

b) A seguir, identificamos as proposições compostas. Temos $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $(p \leftrightarrow \neg q)$.

Agora, identificamos as proposições compostas que estão sendo negadas por inteiro. Temos $p \leftrightarrow q$.

Veja que encontramos $p, q, \neg q, p \leftrightarrow q, \neg(p \leftrightarrow q), (p \leftrightarrow \neg q)$. Construindo a tabela-verdade para essas proposições:

1°) Escrever as tabela-verdade com todas as proposições que serão necessárias.

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow \neg q)$

2°) Escrever os valores lógicos das proposições simples.

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow \neg q)$
V	V	F			
V	F	V			
F	V	F			
F	F	V			

3°) Encontrar o valor lógico da proposição composta envolvendo proposições simples.

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow \neg q)$
V	V	F	V		
V	F	V	F		
F	V	F	F		
F	F	V	V		

4°) Negar a proposição composta.

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow \neg q)$
V	V	F	V	F	
V	F	V	F	V	
F	V	F	F	V	
F	F	V	V	F	

5°) Comparar a coluna de p e a coluna de $\neg q$ para encontrar o valor lógico de $p \leftrightarrow \neg q$.

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow \neg q)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F

b) $\neg(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$

Vamos construir a tabela-verdade:

Primeiro para $\neg(p \rightarrow q)$. Basta negar a tabela-verdade de $p \rightarrow q$ (a construção dessa tabela está explicada no tópico $p \rightarrow q$):

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Agora, construímos a tabela-verdade de $p \wedge \neg q$, primeiro devemos negar q:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	
V	F	V	
F	V	F	
F	F	V	

O próximo passo é completar a tabela com o valor lógico:

p		$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V		F	F
V		V	V
F		F	F
F		V	F

Por fim, juntamos as duas tabelas-verdades e comparamos:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Note que ambas são iguais, logo, são equivalentes.

*Poderíamos ter construído essa última tabela diretamente e estaria provada a equivalência.

1.6. Negação das Proposições

Esse tópico é útil para fazer demonstrações pelo método da redução ao absurdo e pode te ajudar a entender melhor as operações de complementar da teoria dos conjuntos.

Veremos agora como negar proposições. Vamos apresentar as principais:

1.6.1. Negação de uma proposição simples

Para negar uma proposição simples, basta inserir o símbolo de negação e trocar o valor lógico da proposição.

Negação de p: $\neg p$

Sua tabela-verdade é:

p	$\neg p$
V	F
F	V

1.6.2. Negação de disjunção

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Para negarmos proposições da forma p ou q, basta negar p e q e trocar o "ou" por "e". Por exemplo:

p: Estudei hoje.

q: Jogarei futebol amanhã.

$p \vee q$: Estudei hoje ou jogarei futebol amanhã.

$\neg p \wedge \neg q$: Não estudei hoje e não jogarei futebol amanhã.

Podemos provar pela tabela-verdade que ambas as proposições são equivalentes:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

1.6.3. Negação de conjunção

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Para negarmos a proposição da forma p e q, trocamos o "e" por "ou" e negamos as proposições simples. Exemplo:

p: Estudei física.

q: Joguei futebol.

$p \wedge q$: Estudei física e joguei futebol.

$\neg p \vee \neg q$: Não estudei física ou não joguei futebol.

Vamos representar na tabela-verdade sua equivalência:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

1.6.4. Negação da condicional

$$\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

A negação da condicional é mais bem compreendida quando representamos a condicional pela sua equivalente.

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Vamos usar $\neg p \vee q$ no lugar de $p \to q$.

Então a negação da condicional será:

$$\neg(\neg p \vee q)$$

Já sabemos como é a negação da disjunção, vamos aplicar. Negamos as proposições e trocamos "ou" por "e".

$$\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg q$$

O que será a negação da negação de p?

Quando negamos p, trocamos o seu valor lógico. Então, quando negamos $\neg p$, trocamos novamente seu valor lógico. Logo, a negação da negação de p será o próprio p.

Veja:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Continuando:

$$\neg(\neg p) \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Assim, provamos que $\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.

Vejamos sua tabela-verdade:

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

1.6.5. Negação da bicondicional

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

Vamos desenvolver $\neg(p \leftrightarrow q)$, para isso vamos usar a equivalência $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

$$i)\ \neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg[(p \to q) \wedge (q \to p)]$$

Vamos usar a negação da conjunção e aplicar na proposição acima:

*Negação da conjunção possui a forma: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$ii)\ \neg[(p \to q) \wedge (q \to p)] \Leftrightarrow \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$$

Agora basta aplicar a negação da condicional em cada proposição:

*Negação da condicional é da forma: $\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

$$iii)\ \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

1.6.6. Negação do quantificador ∀

$$\neg\big(\forall x, p(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x, \neg p(x))$$

Para negar o quantificador "para todo", trocamos o quantificador $\forall$ pelo quantificador $\exists$ e negamos a proposição dada.

Por exemplo:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \in \mathbb{R} \text{ (verdadeiro)}$$

Negando essa proposição:

$$\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \notin \mathbb{R} \text{ (falso)}$$

1.6.7. Negação do quantificador $\exists$

$$\neg\big(\exists x, p(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x, \neg p(x))$$

Analogamente à situação acima, basta trocar o quantificador $\exists$ pelo quantificador $\forall$ e negarmos a proposição dada.

Exemplo:

$$\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0 \text{ (verdadeiro)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \neq 0 \text{ (falso)}$$

1.7. Propriedades Operatórias

Todas as seguintes propriedades podem ser provadas pela tabela-verdade. Escreva a tabela-verdade para cada propriedade para praticar. Apenas demonstraremos algumas delas. É importante que você as conheça, pois elas serão usadas para entender a Teoria dos Conjuntos.

1.7.1. Idempotência

a) $p \wedge p \Leftrightarrow p$
b) $p \vee p \Leftrightarrow p$

1.7.2. Comutativa

c) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
d) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Comentário: perceba que a ordem das proposições não altera o seu valor lógico!

1.7.3. Associativa

e) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

f) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

Comentário: quando temos o mesmo operador envolvido ($\wedge$ ou $\vee$), podemos trocar os parênteses.

Veja que é parecido com a situação:

$$1 + (2 + 3) = (1 + 2) + 3$$

Vamos demonstrar a propriedade (e) usando a tabela-verdade. Repare que ela possui 3 variáveis, então devemos escrever uma tabela com 8 linhas (combinações de 2 possibilidades para p, 2 possibilidades para q e 2 possibilidades para r).

A tabela-verdade para 2 variáveis é:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Para 3 variáveis:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Veja a tabela-verdade para a propriedade (e).

p	q	r	$(q \wedge r)$	$(p \wedge q)$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

1.7.4. Involução

g) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
Comentário: dupla negação de uma proposição p é o próprio p.

1.7.5. Distributiva

h) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Comentário: quando encontramos 2 operadores lógicos diferentes, nessas situações podemos "distribuir" o operador entre as proposições. Veja:

$$\boldsymbol{p} \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \vee q) \wedge (\boldsymbol{p} \vee r)$$

1.7.6. Absorção

j) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

1.7.7. Complementares

k) $\neg p \vee p \Leftrightarrow T$ (tautologia)
l) $\neg p \wedge p \Leftrightarrow C$ (contradição)

1.7.8. Identidades

m) $p \vee T \Leftrightarrow T$
n) $p \wedge T \Leftrightarrow p$
o) $p \vee C \Leftrightarrow p$
p) $p \wedge C \Leftrightarrow C$
T representa o conjunto tautologia e C representa o conjunto contradição.

1.7.9. Teorema de De Morgan

q) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

r) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Comentário: o teorema de De Morgan é muito útil no estudo da teoria dos conjuntos. Perceba que a propriedade diz que podemos "distribuir" o operador $\neg$ entre as proposições e trocamos o operador lógico envolvido (negação de "ou" é "e" e negação de "e" é "ou").

Demonstração de De Morgan usando tabela-verdade:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Decore as propriedades das operações. Procure entender como elas atuam. Os exercícios abaixo estão todos comentados passo a passo. Você pode e deve resolver diretamente quando estiver acostumado a usar essas notações.

4. Simplifique as seguintes expressões:

a) $\neg(p \vee \neg q)$
b) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$
c) $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$
d) $\neg[\neg p \wedge (p \vee \neg q)] \wedge q$

Resolução:

a) $\neg(p \vee \neg q)$

Aplicando De Morgan:

$$\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg q)$$

Involução:

$$\neg p \wedge \neg(\neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$$

b) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

Vamos escrever $\neg p \rightarrow \neg q$ pelo seu equivalente.

Lembrando:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Então:

$$\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg[\neg(\neg p) \vee \neg q]$$

Involução:

$$\neg[\neg(\neg p) \vee \neg q] \Leftrightarrow \neg(p \vee \neg q)$$

De Morgan:

$$\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg q)$$

Involução:

$$\neg p \wedge \neg(\neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$$

c) $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$

Lembrando:

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Vamos usar o equivalente para $(\neg p \leftrightarrow q)$:

$$\neg(\neg p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg[(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)]$$

Usando:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\neg[(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)] \Leftrightarrow \neg[(\neg(\neg p) \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)]$$

Involução:

$$\neg[(\neg(\neg p) \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \Leftrightarrow \neg[(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)]$$

De Morgan:

$$\neg[(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee \neg p)$$

De Morgan:

$$\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee \neg p) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee [\neg(\neg q) \wedge \neg(\neg p)]$$

Involução:

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee [\neg(\neg q) \wedge \neg(\neg p)] \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$$

d) $\neg[\neg p \wedge (p \vee \neg q)] \wedge q$

De Morgan:

$$[\neg(\neg p) \vee \neg(p \vee \neg q)] \wedge q$$

Involução:

$$[p \vee \neg(p \vee \neg q)] \wedge q$$

De Morgan:

$$[p \vee (\neg p \wedge \neg(\neg q)] \wedge q$$

Involução:

$$[p \vee (\neg p \wedge q)] \wedge q$$

Distributiva:

$$[(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)] \wedge q$$

$$[T \wedge (p \vee q)] \wedge q$$

$$(p \vee q) \wedge q$$

Absorção:

$$q$$

5. Demonstre as seguintes implicações e equivalências sem usar tabela-verdade:

a) $(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

b) $p \Rightarrow (q \to p)$

c) $(p \to q) \Leftrightarrow (p \vee q) \to q$

d) $(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

Resolução:

a) O símbolo $\Rightarrow$ representa "implica". Para demonstrar essa implicação, devemos trocar $\Rightarrow$ por $\to$ e encontrar uma tautologia.

$$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$

$$\neg[(p \to q) \wedge \neg q] \vee \neg p$$

$$[\neg(p \to q) \vee q] \vee \neg p$$

$$[\neg(\neg p \lor q) \lor q] \lor \neg p$$
$$[(p \land \neg q) \lor q] \lor \neg p$$
$$[(p \lor q) \land (\neg q \lor q)] \lor \neg p$$
$$[(p \lor q) \land T] \lor \neg p$$
$$(p \lor q) \lor \neg p$$
$$(p \lor \neg p) \lor q$$
$$T \lor q$$
$$\mathrm{T}$$

b) $p \Rightarrow (q \to p)$

$$p \to (q \to p)$$
$$\neg p \lor (q \to p)$$
$$\neg p \lor (\neg q \lor p)$$
$$(\neg p \lor p) \lor \neg q$$
$$T \lor \neg q$$
$$T$$

c) $(p \to q) \Leftrightarrow (p \lor q) \to q$

Nesse caso, temos uma equivalência. Podemos demonstrar a equivalência tomando uma das proposições e tentar chegar à outra igualdade.

$$(p \lor q) \to q$$
$$\neg(p \lor q) \lor q$$
$$(\neg p \land \neg q) \lor q$$
$$(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor q)$$
$$(\neg p \lor q) \land T$$
$$\neg p \lor q$$
$$p \to q$$
$$\therefore (p \to q) \Leftrightarrow (p \lor q) \to q$$

O símbolo $\therefore$ é usado para representar a palavra “portanto”.

d) $(p \to q) \land (p \to \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

$$(p \to q) \land (p \to \neg q)$$
$$(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$$
$$[(\neg p \land (\neg p \lor \neg q)] \lor [(q \land (\neg p \lor \neg q)]$$

$$\neg p \vee [(q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)]$$
$$\neg p \vee [(q \wedge \neg p) \vee C]$$
$$\neg p \vee (q \wedge \neg p)$$
$$\neg p$$
$$\therefore (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg p$$

2. Teoria Elementar dos Conjuntos

Estudamos Noções de Lógica para prepará-los para o estudo da Teoria dos Conjuntos. Preliminarmente, devemos entender o que é um conjunto, um elemento e como relacioná-los.

2.1. Conjunto, elemento e relação de pertinência

2.1.1. Conjunto

O que é um conjunto?

Conjunto pode ser entendido como um grupo de elementos com uma mesma característica. Vejamos:

1) Conjunto dos mamíferos.
2) Conjunto das vogais.
3) Conjunto dos números pares positivos.
4) Conjunto de estudantes de Física.

Usualmente, os conjuntos são representados por letras maiúsculas (A, B, C, D...)

2.1.2. Elemento

E o que seria elemento?

Elemento é a parte que compõe o conjunto. Cada membro do conjunto é classificado como elemento. Por exemplo:

1) Os elementos do conjunto dos mamíferos podem ser: cachorro, gato, coelho, baleia...
2) Conjunto das vogais: a, e, i, o, u.
3) Conjunto dos números pares positivos: 2, 4, 6, 8...
4) Conjunto de estudantes de Física: (alunos matriculados em Física) Maria, Pedro, Laís, Paulo...

Os elementos são representados por letras minúsculas (a, b, c, d...)

2.1.3. Relação de pertinência

Como relacionar um elemento a um conjunto?

Podemos relacionar um elemento a um conjunto usando o símbolo $\in$. Vejamos no exemplo (1):

1) Chamando cachorro de c e mamíferos de M. Temos: c ∈ M. Isso significa que cachorro (c) é elemento do conjunto de mamíferos (M). (∈ significa pertence ou é elemento de)

Também podemos usar o símbolo ∉ para representar que um elemento não pertence a um conjunto. No exemplo (1):

1) Chamando peixe de p e mamíferos de M. Temos: p ∉ M. Isso é lido como: peixe (p) não é elemento do conjunto de mamíferos (M). (∉ significa não pertence ou não é elemento de)

2.2. Representação

2.2.1. Listagem ou enumeração

Imagine que João, Maria, Roberto e Luisa estejam matriculados em Matemática. Podemos representar o conjunto de estudantes de Matemática colocando todos os elementos do conjunto entre chaves ("{ }"), então ele será escrito da seguinte forma:

{João, Maria, Roberto, Luisa}

Esse caso serve para conjuntos finitos.

Para conjuntos infinitos, a única diferença é incluir "..." no último elemento do conjunto, isso indicará que a sequência segue infinitamente, por exemplo:

Conjunto dos números pares positivos: {2, 4, 6, 8, ...}

Também podemos incluir "..." no meio do conjunto, isso indicará que o conjunto segue um padrão. Exemplo:

Conjunto dos números inteiros de 0 a 100:

{0, 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100}

*Também estará correto se você colocar ";" separando os elementos do conjunto: $\{1; 2; 3; 4\}$.

Podemos também escrever um conjunto de outras maneiras. Veja:

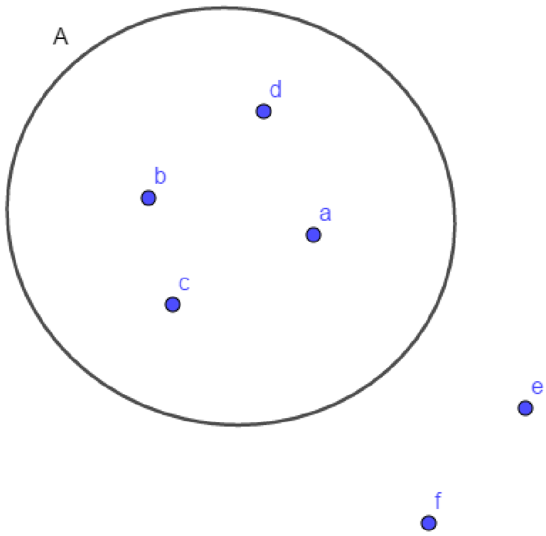
$$A = \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3, 4, 2\} = \{1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$$

O fato de mudar a ordem dos elementos e repetir elementos dentro do conjunto não o torna diferente!

Cuidado! $\{1, \{1\}\} \neq \{1, 1\}$, veremos mais adiante a explicação no tópico de subconjuntos!

2.2.2. Diagrama de Venn-Euler

Os conjuntos também podem ser representados por diagramas. Esse diagrama ajuda bastante na resolução de questões. Ela será útil no estudo das operações com conjuntos. Veja um exemplo do diagrama:



Temos um conjunto A e elementos a, b, c, d, e, f. Todos os elementos que estão dentro do círculo pertencem ao conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ e todos que estão fora do círculo não pertencem ao conjunto A. Podemos denotar que $e \notin A$ e $f \notin A$.

2.2.3. Compreensão

Durante a resolução de exercícios do vestibular, você encontrará questões que envolvem a descrição de um conjunto sem a enumeração de seus elementos. Veja a questão do ITA:

(2017/ITA) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}\ e\ B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy: x \in A\ e\ y \in B\}$, então o número de elementos de C é

Repare que ele descreve o conjunto C como $C = \{xy: x \in A\ e\ y \in B\}$, isso é lido como:

“C é o conjunto dos elementos xy tal que x é elemento de A e y é elemento de B”.

Note que o ITA usa “:” para dizer “tal que”. Outra maneira de escrever “tal que” seria usando “|”, ficaria da seguinte forma:

$$C = \{xy | x \in A\ e\ y \in B\}$$

Quando encontrarmos algum exercício com a definição de um conjunto na forma $A = \{x|P(x)\}$, devemos entender que x representa os elementos de A e $P(x)$ é a propriedade dos elementos de A.

2.3. Conjunto unitário, conjunto vazio e conjunto universo

2.3.1. Conjunto unitário

Um conjunto é chamado de unitário quando ele possuir apenas um elemento. Por exemplo:

Conjunto de soluções da equação $x + 1 = 2$

A solução dessa equação é $x = 1$, logo o conjunto solução é {1}.

2.3.2. Conjunto vazio

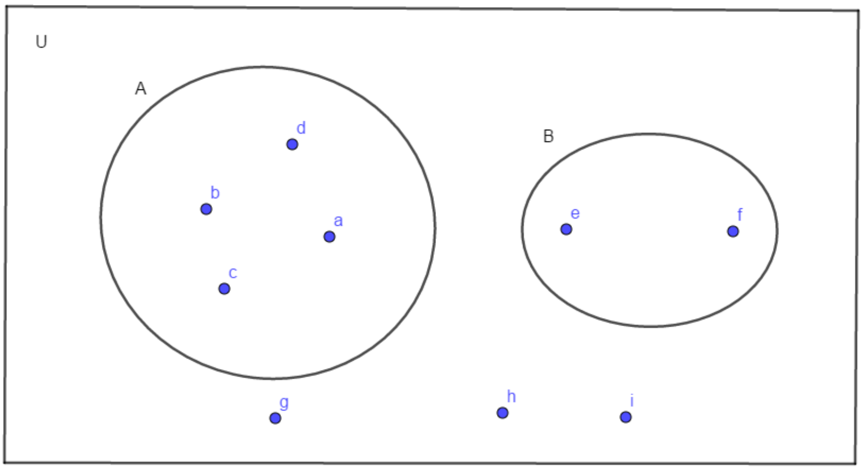
Um conjunto é chamado de vazio quando ele não possuir nenhum elemento. O símbolo do vazio na Matemática é representado por ∅. O conjunto vazio também pode ser escrito como { }. Usualmente, usamos o ∅ para mostrar que dado problema não possui solução. Por exemplo:

$$\{x: x \text{ é } par \ e \ x \text{ í}mpar\}$$

Solução: ∅, pois não existe x que seja par e ímpar ao mesmo tempo.

2.3.3. Conjunto universo

O conjunto universo é representado pelo símbolo U. Ela pode ser vista como um conjunto com todos os valores possíveis que uma variável pode assumir. Vejamos um exemplo de Diagrama de Venn-Euler:



Veja que nesse caso o conjunto universo é $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$.

É comum encontrar questões que pedem soluções reais em uma determinada equação. Nesse caso, as soluções reais limitam as soluções ao conjunto dos reais ($\mathbb{R}$), este será o conjunto universo do problema.

2.4. Subconjunto

Um subconjunto pode ser visto como um conjunto dentro de um conjunto maior. A definição de subconjunto é:

Dados os conjuntos A e B, B é subconjunto de A se todos os elementos de B também são elementos de A.

Ela é representada desse modo:

$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Isso significa:

B está contido em A se, e somente se, para todo x, se x é elemento de B, então x é elemento de A.

Traduzindo os termos:

$\subset$ representa "está contido"

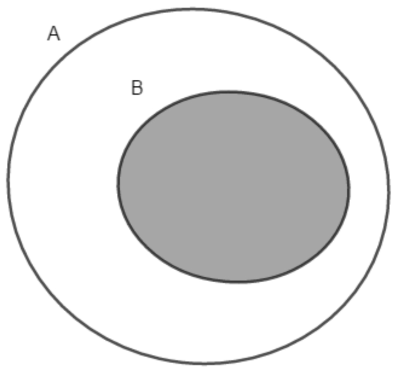
$\Leftrightarrow$ representa "se, e somente se"

$\forall$ representa "para todo"

$\in$ representa "é elemento de" ou "pertence"

$\Rightarrow$ representa "se ... então ..."

Usando o Diagrama de Venn-Euler para representar que $B \subset A$:

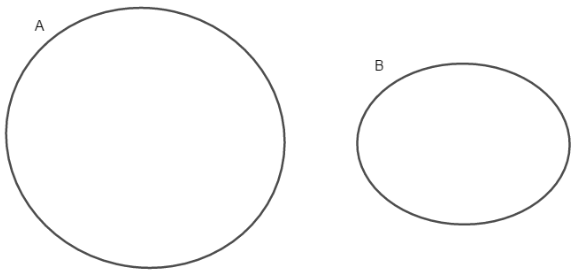


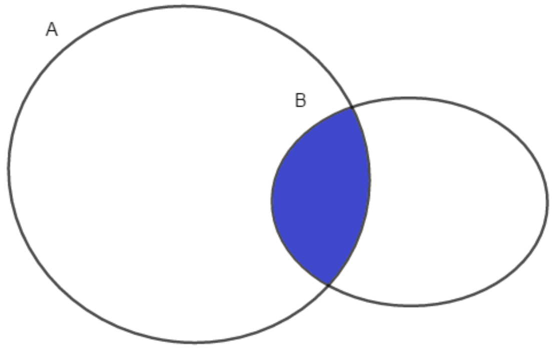
*Se o conjunto B for diferente do conjunto A, dizemos que B é subconjunto próprio de A.

Vamos a um exemplo de subconjunto:

Vamos considerar o conjunto de alunos em uma escola e chamar esse conjunto de E. A escola é dividida em duas turmas: turma infantil e turma juvenil. Podemos dizer que a turma infantil é subconjunto de E, e também podemos afirmar que a turma juvenil é subconjunto de E, pois os alunos de ambas as turmas são alunos da escola E.

Há também o símbolo $\not\subset$ que representa "não está contido". Veja:





Ambas as figuras podem representar: $B \not\subset A$.

A área em azul representa os elementos em comum entre os conjuntos, veremos mais adiante.

É comum encontrarmos nas questões o símbolo $\supset$ no lugar de $\subset$. O símbolo $\supset$ representa "contém".

Então, se $A \supset B$ (A contém B) então vale $B \subset A$ (B está contido em A). Uma forma de memorizar é lembrar que o "$\subset$" sempre aponta para o conjunto maior!

2.4.1. Propriedades

I. Reflexiva $(A \subset A)$
II. Transitiva $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$
III. Antissimétrica $(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$
IV. $\emptyset \subset A, \forall A$

Demonstração:

I. Todo conjunto é subconjunto dele próprio.

Basta usar a definição:

$$A \subset A \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in A)$$

II. Prova:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$
$$B \subset C \Leftrightarrow (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in C)$$

Juntando as duas, temos:

$$(A \subset B \land B \subset C) \Leftrightarrow \big((\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \land (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in C)\big)$$

Todo x elemento de A é elemento de B e todo x elemento de B é elemento de C, então todo x elemento de A também é elemento de C. Logo $A \subset C$.

III. Prova:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$
$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$$
$$(A \subset B \land B \subset A) \Leftrightarrow \big((\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \land (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)\big)$$

Todo x elemento de A também é elemento de B e todo x elemento de B também é elemento de A, logo o conjunto A é igual ao conjunto B.

IV. Pela definição:

$$\emptyset \subset A \Leftrightarrow (\forall x, x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

Perceba que $x \in \emptyset$ sempre será falso para qualquer valor de x, pois o conjunto vazio não possui elementos.

Lembrando na parte de Noções de Lógica, quando temos uma implicação ("se ... então ...") $p \rightarrow q$ e p for falsa, para qualquer valor de q a implicação será verdadeira.

Portanto, a implicação $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ será sempre verdadeira!

Por definição de subconjunto: $\emptyset \subset A$

2.4.2. Família de conjuntos

Seja o conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{1,2\}, \emptyset\}$

Quais são os elementos de A?

Os elementos de A são: $1, \{1\}, 2, \{1, 2\}$ e $\emptyset$.

Quando colocamos o número 1 entre "{ }", ele é considerado como um novo elemento e por isso não será igual ao elemento 1. Assim, o elemento $\{1\} \neq 1$.

Veja que $\emptyset$ é elemento de A, pois está enumerado no conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{1,2\}, \emptyset\}$. Sabemos que o conjunto $\emptyset$ sempre estará contido em qualquer conjunto pela propriedade do subconjunto. Logo $\emptyset$ é elemento e subconjunto de A.

Agora, vamos analisar os subconjuntos de A.

$\{1, 2\}$ é subconjunto de A?

Sim. Pois, 1 e 2 estão listados no conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{1,2\}, \emptyset\}$.

Não confunda com o elemento $\{1,2\}$! Se quiséssemos colocar esse elemento como subconjunto, deveríamos lista-lo desse modo: $\{\{1,2\}\} \subset A$. Note a presença das duas chaves!

6. Seja $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$. Complete com V (verdadeiro) ou F (falso) as afirmações.

a) $1 \in A$
b) $\{1\} \notin A$
c) $\{3\} \in A$
d) $\{3,5\} \notin A$
e) $\emptyset \subset A$
f) $\emptyset \in A$
g) $\{\{1\}\} \subset A$
h) $\{\{2\}\} \subset A$

Resolução:

a) V. 1 está listado em $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$.
b) F. $\{1\}$ está listado em $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$.
c) F. $\{3\}$ não está listado em A.
d) F. $\{3, 5\}$ está listado em $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$.
e) V. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
f) F. $\emptyset$ não está listado em A.
g) V. $\{1\}$ é elemento do conjunto $\{\{1\}\}$ e também é elemento do conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$.
h) F. $\{2\}$ é elemento do conjunto $\{\{2\}\}$ mas não é elemento do conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$.

2.4.3. Conjunto potência ou conjunto das partes

O conjunto das partes é denotado por $P(A)$. Ela contém todos os subconjuntos de A. A sua definição é dada por:

$$P(A) = \{X | X \subset A\}$$

Traduzindo:

$P(A)$ é o conjunto formado pelo subconjunto X, tal que X está contido em A. Isto é, X é todo subconjunto que pode ser formado pelos elementos de A.

Exemplo:

a) $A = \{1\}$

Quais os subconjuntos podem ser formados em A?

Pela propriedade dos subconjuntos, já sabemos que $\emptyset$ é subconjunto de A. (Lembre-se que $\emptyset$ sempre será subconjunto de qualquer conjunto)

O outro subconjunto possível é: $\{1\}$.

Assim, $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

b) $A = \{0, 1\}$

Os subconjuntos em A são: $\emptyset, \{0\}, \{1\}$ e $\{0, 1\}$.

Logo: $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

c) $A = \{0, 1, 2\}$

Os subconjuntos em A são: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$ e $\{0, 1, 2\}$.

Logo: $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

7. Escreva o conjunto das partes para o conjunto A:

a) $A = \{2, -2, 1\}$

b) $A = \{\emptyset, 1\}$

Resolução:

a) Vamos identificar todos os subconjuntos de A. Já podemos incluir o $\emptyset$, pois ele sempre será subconjunto de qualquer conjunto.

Agora, encontrando os subconjuntos unitários: $\{2\}, \{-2\}, \{1\}$.

Subconjuntos com 2 elementos: $\{2, -2\}, \{2, 1\}$ e $\{-2, 1\}$.

Subconjunto com 3 elementos: $\{2, -2, 1\}$.

Portanto: $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{-2\}, \{1\}, \{2, -2\}, \{2, 1\}, \{-2, 1\}, \{2, -2, 1\}\}$

b) Encontrando os subconjuntos:

Subconjuntos unitários: $\{\emptyset\}, \{1\}$.

Subconjuntos com 2 elementos: $\{\emptyset, 1\}$.

Portanto: $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, 1\}\}$.

2.5. Operações entre conjuntos

2.5.1. União ($\cup$)

Considere os conjuntos A e B, a definição do operador união é dado por:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Na união de dois conjuntos, juntamos todos os elementos de A com todos os elementos de B e formamos um único conjunto. Perceba que a definição $x \in A \vee x \in B$ pode ser vista como $p \vee q$. Chamando p de $(x \in A)$ e q de $(x \in B)$. $p \vee q$ será $\left(x \in (A \cup B)\right)$. Vamos construir a tabela-verdade:

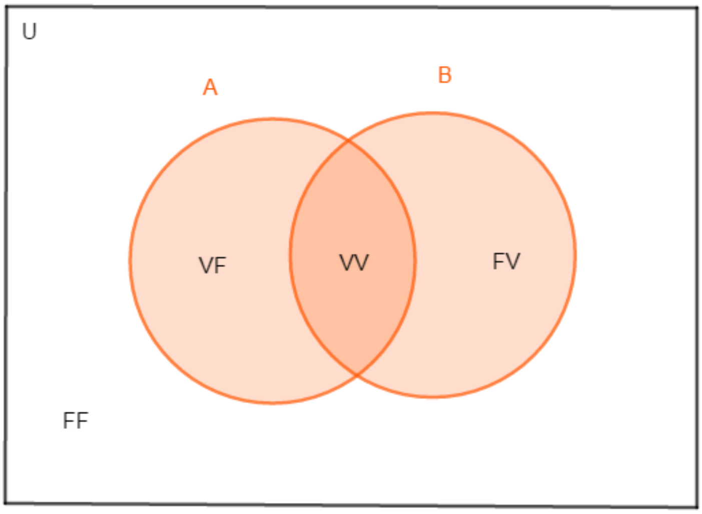
$p(x \in A)$	$q(x \in B)$	$p \vee q(x \in (A \cup B)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Traduzindo:

Quando $x \in A$, a tabela-verdade indicará V e caso $x \notin A$ ela indicará F. Analogamente para $x \in B$.

Assim, x somente não será elemento do conjunto união quando p é F $(x \notin A)$ e q é F $(x \notin B)$.

Usando o Diagrama de Venn-Euler, vamos representar $A \cup B$:

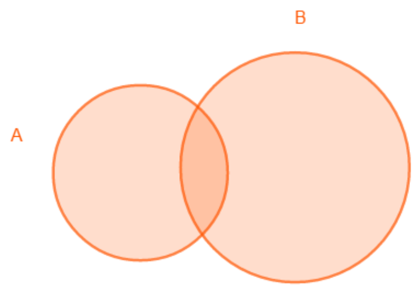


Repare que temos na figura os termos VV, VF, FV e FF. Elas representam os valores lógicos de p e q nessa ordem. Por exemplo, VF significa que p é V e q é F.

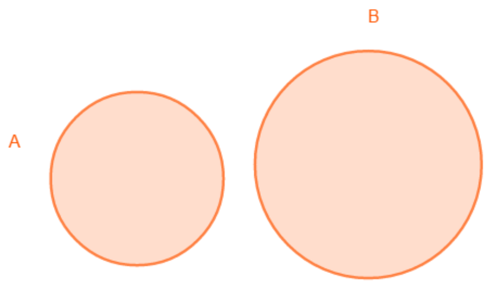
A região sombreada é a região dos elementos em comum entre os conjuntos.

Podemos ter três situações para o conjunto união:

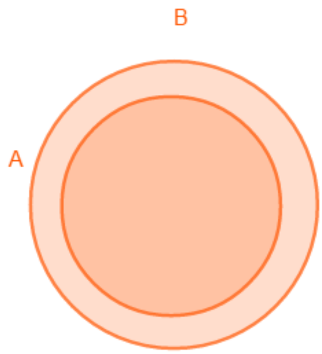
1) A e B possuem elementos em comum (representado pela região mais escura).



2) A e B não possuem elementos em comum (A e B são considerados disjuntos).



3) $A \subset B$.



Vamos a um exemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$$

Como fazemos a união desses conjuntos?

Basta juntar todos os elementos de A com os de B desse modo:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Propriedades da União

a) $A \cup A = A$
b) $A \cup \emptyset = A$
c) $A \cup U = U$
d) $A \cup B = B \cup A$
e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

f) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
*Todas essas propriedades podem ser provadas pela Lógica das Proposições.

2.5.2. Intersecção (∩)

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

O conjunto formado pela intersecção é o conjunto dos elementos em comum entre os conjuntos A e B. Assim, o elemento x deverá estar presente tanto no conjunto A quanto no conjunto B, isso acontece quando $x \in A$ for verdade e $x \in B$ for verdade. Vamos criar nossas proposições:

$$p: x \in A$$

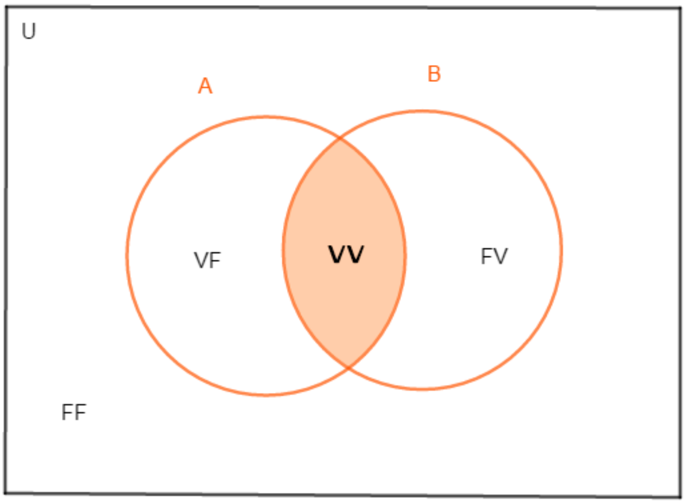
$$q: x \in B$$

$$p \wedge q: x \in (A \cap B)$$

Tabela-verdade:

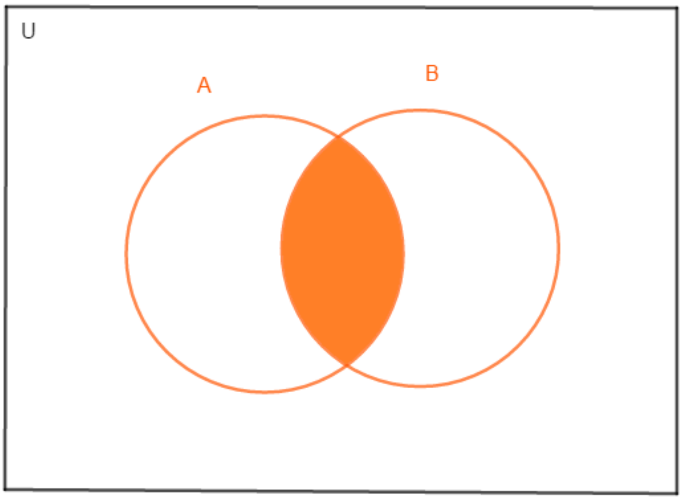
$p(x \in A)$	$q(x \in B)$	$p \wedge q(x \in (A \cap B)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Diagrama de Venn-Euler:

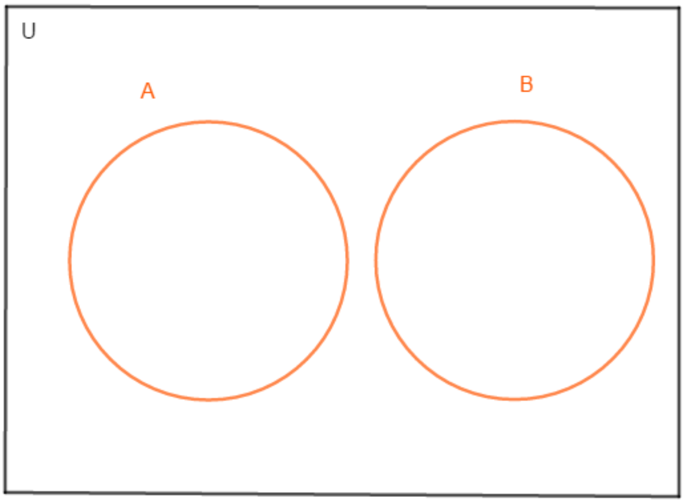


Possíveis casos para o conjunto intersecção:

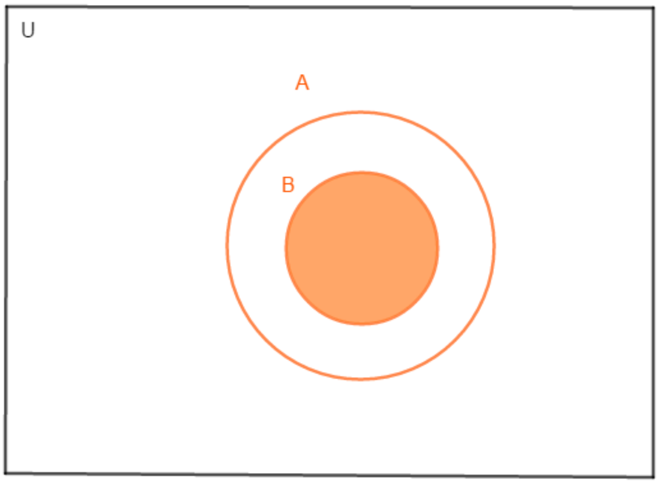
1) A e B possuem elementos em comum.



2) A e B não possuem elementos em comum.



3) $B \subset A$.



*A área em laranja denota o conjunto dos elementos $A \cap B$.

Exemplo:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 5, 6, 7\}$$

Quais os elementos de $A \cap B$?

Os elementos de $A \cap B$ serão os elementos em comum, no caso apenas o 3:

$$A \cap B = \{3\}$$

Propriedades da Intersecção

a) $A \cap A = A$
b) $A \cap U = A$
c) $A \cap \emptyset = \emptyset$
d) $A \cap B = B \cap A$
e) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
f) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
g) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A\ e\ B\ são\ disjuntos$

*Todas essas propriedades podem ser provadas pela Lógica das Proposições.

2.5.3. Propriedades do inter-relacionamento da união e da intersecção

a) $A \cap (A \cup B) = A$
b) $A \cup (A \cap B) = A$
c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva da união em relação à intersecção)
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva da intersecção em relação à união)

TOME NOTA!

As propriedades (c) e (d) são muito úteis na hora de resolver questões do ITA.

Um jeito de memorizar é raciocinar da seguinte maneira:

Vamos usar $A \cup (B \cap C)$ como exemplo.

Primeiro, escolhemos o que queremos distribuir (no caso $A \cup$). Vemos qual o operador dentro do conjunto entre parênteses $\left(A \cup (B \cap C)\right)$ e escrevemos:

$$\ldots \cap \ldots$$

Agora, fazemos a primeira distribuição $\left(A \cup (B \cap C)\right)$:

$$(A \cup B) \cap \ldots$$

Por último, fazemos a segunda distribuição $\left(A \cup (B \cap C)\right)$:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Resumindo:

$$A \cup (B \cap C)$$

E se fosse $(A \cap B) \cup (A \cap C)$?

Usamos a mesma ideia. Podemos escolher qualquer um dos dois conjuntos, já que ambos estão dentro de parênteses.

Observe, vamos distribuir o segundo conjunto $(A \cap C)$:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$1°) \ldots \cap \ldots$$

$$2°) [A \cup (A \cap C)] \cap \ldots$$

$$3°) [A \cup (A \cap C)] \cap [B \cup (A \cap C)]$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = [A \cup (A \cap C)] \cap [B \cup (A \cap C)]$$

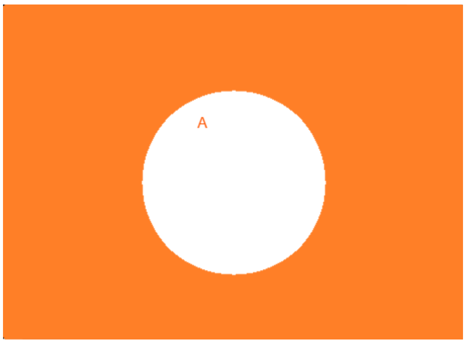
$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2.5.4. Complementar

O complementar de um conjunto A é denotado por $\bar{A}$. Ele representa todos os elementos que não são elementos de A. Ele também pode ser representado por A^C.

Exemplo:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\bar{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$



A área em laranja representa a região de todos os elementos de $\bar{A}$.

2.5.5. Teorema de De Morgan

1) $\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$
2) $\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$

O Teorema acima é análogo ao Teorema de De Morgan visto na parte de Noções de Lógica.

Também poderíamos escrever:

1) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

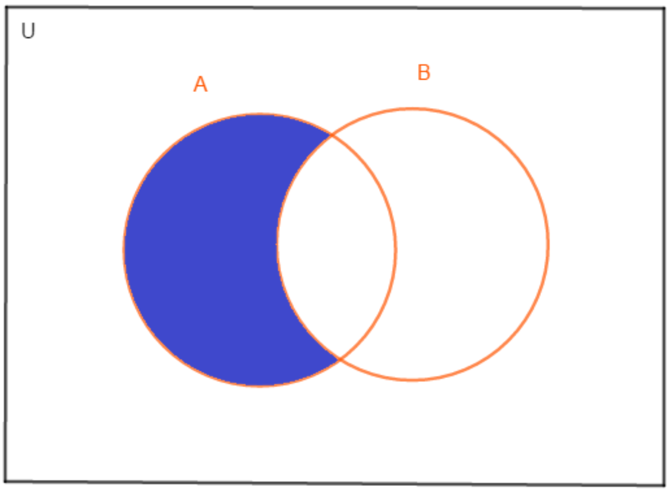
O caso (1) é semelhante a: $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Para o caso (2): $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

2.5.6. Diferença entre conjuntos

$$A - B = A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Os elementos do conjunto formado pela diferença entre A e B serão os elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Veja o diagrama de Venn-Euler:



Na diferença, removemos do conjunto A todos os elementos em comum entre A e B.

Também podemos escrever $A - B$ de outro modo.

Veja a definição:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge x \in \bar{B}\} = A \cap \bar{B}$$

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

Exemplos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

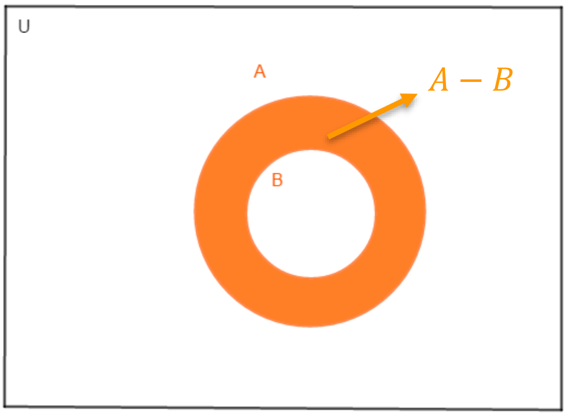
$$A - B = \{1, 5\}$$

$$B - C = \{2, 3\}$$

Possíveis casos:

1) $B \subset A$

Se B está contido em A, a operação $A - B$ removerá todos os elementos do conjunto B. Podemos ver o resultado no gráfico abaixo, a região em laranja representa os elementos de $A - B$ e a região em branco representa os elementos que não pertencem ao conjunto:



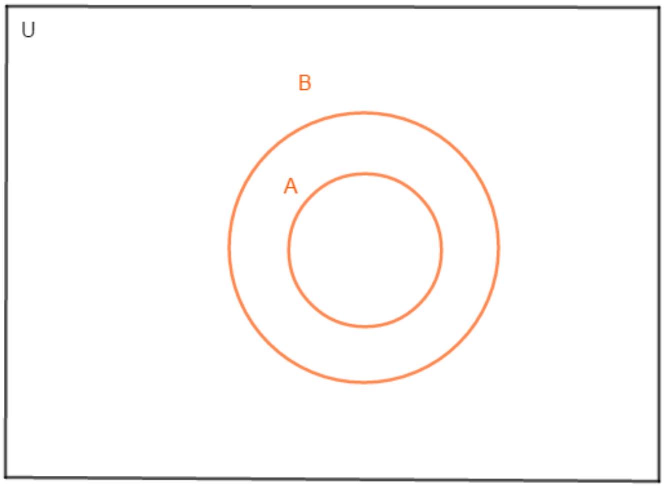
Nesse caso, podemos escrever:

$$A - B = C_A^B \Leftrightarrow B \subset A$$

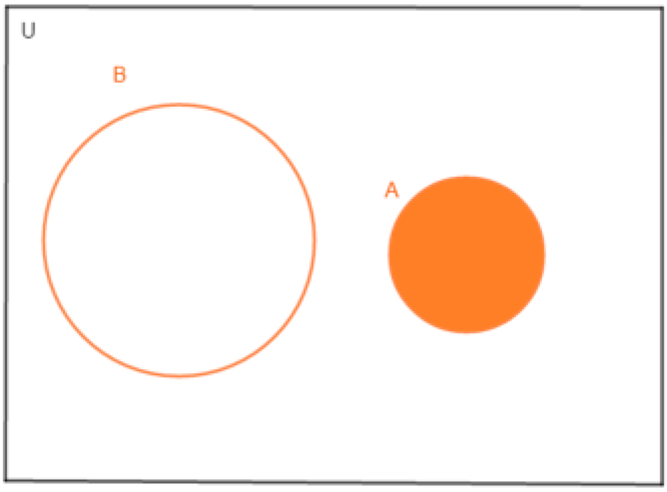
C_A^B chama-se complementar de B em relação a A.

2) $A \subset B$

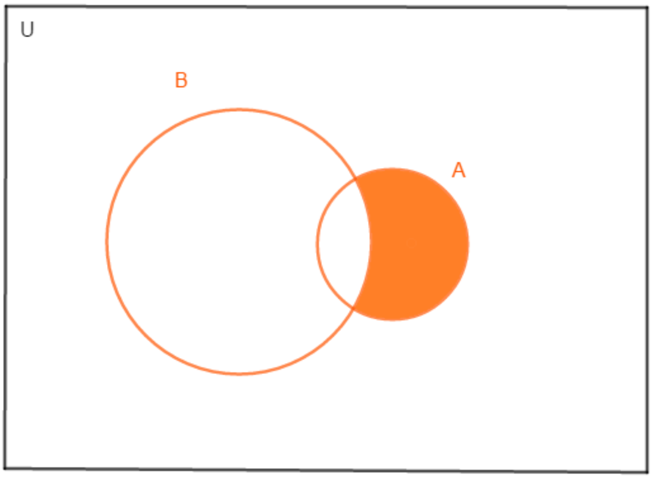
Se A está contido em B, todos os elementos de A serão removidos, então, o conjunto $A - B$ é o conjunto vazio:



3) A e B são disjuntos ($A \cap B = \emptyset$)
Nesse caso, os conjuntos não possuem elementos em comum e, por isso, $A - B = A$:



4) $A \cap B \neq \emptyset$
Aqui removemos os elementos de A que também pertencem ao conjunto B:



8. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{1,3,5,7\}, C = \{2,5,6,7\}$ e o conjunto universo $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Determine os conjuntos:

a) $A \cup C$
b) $B \cap A$
c) $C - B$
d) $\bar{B}$
e) $\bar{A} - B$
f) $\bar{B} \cup C$
g) $\overline{A - C}$
h) $\bar{C} \cap \bar{A}$
i) $\overline{A - \bar{B}}$
j) $\overline{A \cap \bar{A}}$

Resolução:

a) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $B \cap A = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 3, 5\}$

c) $C - B = \{2, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{2, 6\}$

d) $\bar{B}$

Para encontrar o complementar de B, devemos olhar para o conjunto universo U e verificar quais elementos estão nesse conjunto e não estão em B, ou seja, devemos fazer $\bar{B} = U - B$. Observe:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\bar{B} = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{2, 4, 6\}$$

e) $\bar{A} - B$

Encontramos primeiro $\bar{A}$:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\bar{A} = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$$

$$\bar{A} - B = \{6, 7\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{6\}$$

f) $\bar{B} \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 5, 6, 7\} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

g) $\overline{A - C}$

Nesse caso, fazemos primeiro $A - C$ e depois encontramos o seu complementar.

$$A - C = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 5, 6, 7\} = \{1, 3, 4\}$$

$$A - C = \{1, 3, 4\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\overline{A - C} = \{2, 5, 6, 7\}$$

h) $\bar{C} \cap \bar{A}$

$$C = \{2, 5, 6, 7\}$$

$$\bar{C} = U - C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 5, 6, 7\} = \{1, 3, 4\}$$

$$\bar{A} = \{6, 7\}$$

$$\bar{C} \cap \bar{A} = \{1, 3, 4\} \cap \{6, 7\} = \emptyset$$

Veja que não temos elementos em comum nesse caso.

i) $\overline{A - \bar{B}}$

Primeiro devemos encontrar o complementar de B. Depois encontramos o valor de $A - B$. E por último, encontramos o complementar desse conjunto.

$$\bar{B} = \{2, 4, 6\}$$

$$A - \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\overline{A - \bar{B}} = \{2, 4, 6, 7\}$$

j) $\overline{A \cap \bar{A}}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

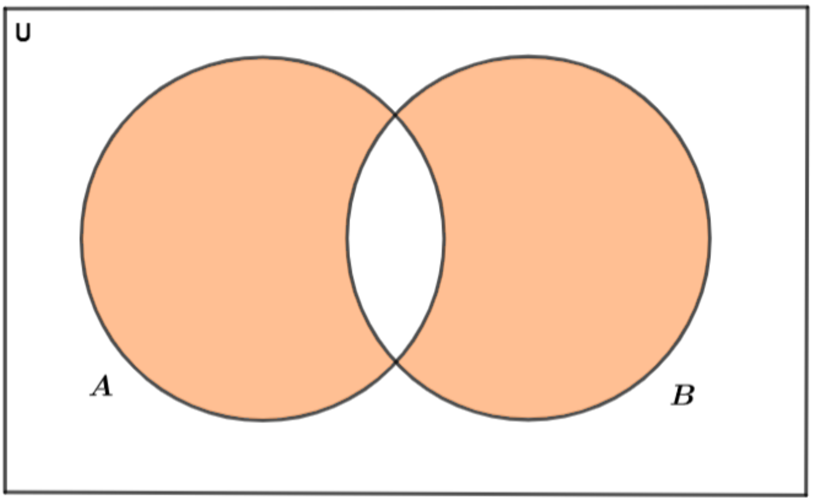
$$\bar{A} = \{6, 7\}$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\overline{A \cap \bar{A}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = U$$

2.5.7. Diferença Simétrica

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



Chama-se diferença simétrica a definição acima.

Podemos escrever de outro modo:

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Vamos demonstrar:

1°) Escrevendo a diferença em sua forma de intersecção:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$$

2°) De Morgan:

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

3°) Distributiva:

$$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = [(A \cup B) \cap \bar{A})] \cup [(A \cup B) \cap \bar{B}]$$

4°) Distributiva:

$$[(A \cup B) \cap \bar{A})] \cup [(A \cup B) \cap \bar{B}] = [(A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})] \cup [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})]$$

5°) Simplificando:

$$[(A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})] \cup [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})] = [\emptyset \cup (B \cap \bar{A})] \cup [(A \cap \bar{B}) \cup \emptyset]$$
$$= (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = (B - A) \cup (A - B) = A\Delta B$$

9. (IME/1987) Dados dois conjuntos A e B, define-se

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Prove que dados três conjuntos arbitrários X, Y e Z

$$X \cap (Y\Delta Z) = (X \cap Y)\Delta(X \cap Z)$$

Resolução:

Para resolver questões desse tipo, podemos escolher um dos lados da equação e tentar chegar à igualdade do outro lado.

Vamos escolher o lado direito, então, pela definição de diferença simétrica, temos:

$$(X \cap Y)\Delta(X \cap Z) = [(X \cap Y) - (X \cap Z)] \cup [(X \cap Z) - (X \cap Y)]$$

Escrevendo a diferença dos conjuntos na forma de intersecção:

$$\left[(X \cap Y) \cap \overline{(X \cap Z)}\right] \cup \left[(X \cap Z) \cap \overline{(X \cap Y)}\right]$$

Aplicando De Morgan:

$$[(X \cap Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Z})] \cup [(X \cap Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})]$$

Distributiva:

$$\{[(X \cap Y) \cap \bar{X}] \cup [(X \cap Y) \cap \bar{Z}]\} \cup \{[(X \cap Z) \cap \bar{X}] \cup [(X \cap Z) \cap \bar{Y}]\}$$

Associativa:

$$\left\{\left[\underbrace{(X \cap \bar{X})}_{\emptyset} \cap Y\right] \cup [X \cap (Y \cap \bar{Z})]\right\} \cup \left\{\left[\underbrace{(X \cap \bar{X})}_{\emptyset} \cap Z\right] \cup [X \cap (Z \cap \bar{Y})]\right\}$$

$$\left\{\underbrace{[\emptyset \cap Y]}_{\emptyset} \cup \underbrace{[X \cap (Y \cap \bar{Z})]}_{X \cap (Y - Z)}\right\} \cup \left\{\underbrace{[\emptyset \cap Z]}_{\emptyset} \cup \underbrace{[X \cap (Z \cap \bar{Y})]}_{X \cap (Z - Y)}\right\}$$

$$[X \cap (Y - Z)] \cup [X \cap (Z - Y)]$$

Agora, como $X \cap$ está presente em ambos os conjuntos, podemos colocá-lo em evidência para obter:

$$X \cap [(Y - Z) \cup (Z - Y)]$$

Essa expressão é a definição da seguinte diferença simétrica:

$$X \cap (Y\Delta Z)$$

Portanto:

$$(X \cap Y)\Delta(X \cap Z) = X \cap (Y\Delta Z)$$

*Nesse tipo de questão, eu acho mais fácil simplificar o lado da maior expressão. Se escolhêssemos o lado mais simplificado, teríamos que fazer o caminho inverso da resolução acima.

2.6. Cardinalidade dos Conjuntos

A cardinalidade dos conjuntos é representada pela notação $n(A)$ para um conjunto A e representa o número de elementos de A.

Veja o exemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Quantos elementos o conjunto A possui?

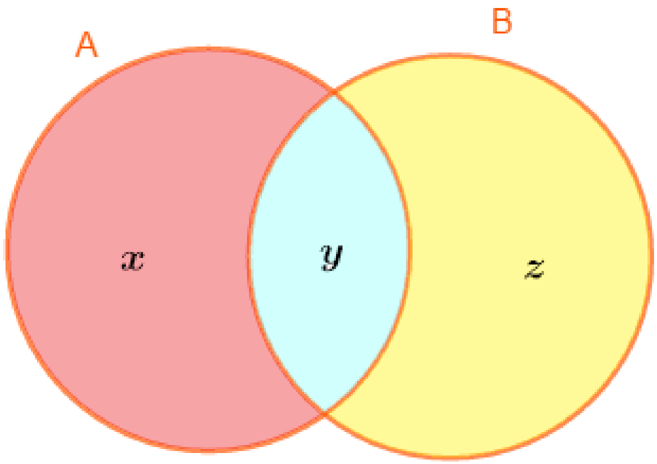
$n(A) = 6$, pois há 6 diferentes elementos no conjunto.

Agora considere $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Quantos elementos possui $A \cup B$?

Poderíamos fazer $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e contar o número de elementos desse conjunto. Porém, se tivéssemos um conjunto muito grande isso não seria viável.

2.6.1. Princípio da Inclusão e Exclusão

Vamos encontrar outro modo de calcular $n(A \cup B)$. Veja o diagrama abaixo, considerando um A e B genéricos:



As regiões estão nomeadas.

A quantidade de elementos de A é $n(A) = x + y$ e de B é $n(B) = y + z$.

Note que $y = n(A \cap B)$.

Então, pelo diagrama temos:

$$n(A \cup B) = x + y + z$$

Vamos tentar generalizar essa equação e substituir os termos x, y e z.

Somando $n(A)$ e $n(B)$:

$$n(A) + n(B) = (x + y) + (y + z) = x + y + z + y = (x + y + z) + y = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

Logo: $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$.

Vamos isolar $n(A \cup B)$ subtraindo $n(A \cap B)$ nos dois lados da equação:

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) - n(A \cap B)$$

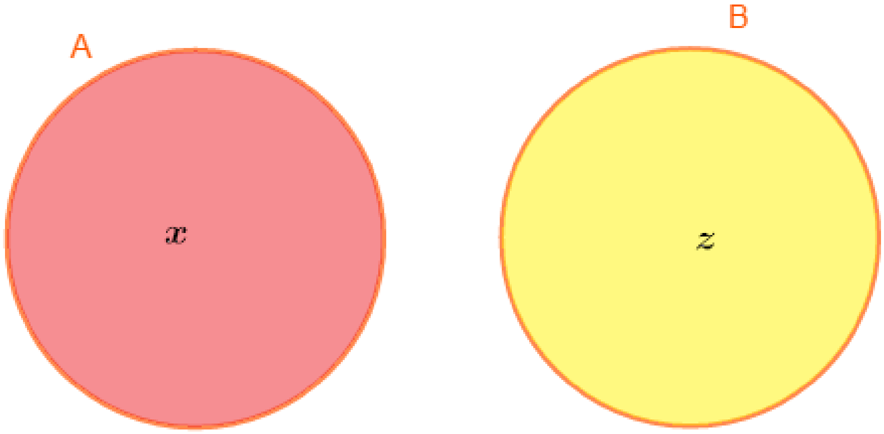
$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$$

Portanto:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Esta é a fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão.

Para conjuntos disjuntos:



Como não há elementos em comum, $n(A \cap B) = 0$. Assim, para conjuntos disjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Essa fórmula serve para dois conjuntos, podemos usá-la para encontrar a fórmula para três conjuntos.

Considere os conjuntos $A, B\ e\ C$. $n(A \cup B \cup C)$ será dado por:

$$n(A \cup B \cup C) = n\big((A \cup B) \cup C\big)$$

Aplicando a fórmula para dois conjuntos:

$$n\big((A \cup B) \cup C\big) = n(A \cup B) + n(C) - n\big((A \cup B) \cap C\big)$$

Expandindo $n(A \cup B)$ usando a fórmula e aplicando a distributiva em $n\big((A \cup B) \cap C\big)$:

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big)$$

Expandindo $n\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big)$ usando a fórmula:

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - \big[n(A \cap C) + n(B \cap C) - n\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big)\big]$$

Veja que $n\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big) = n(A \cap C \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap C)$:

Substituindo na equação:

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$$

Desse modo:

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Portanto:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Para quatro conjuntos, a fórmula é dada por:

$$\begin{aligned} &n(A \cup B \cup C \cup D) \\ &= [n(A) + n(B) + n(C) + n(D)] \\ &- [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(A \cap D) + n(B \cap C) + n(B \cap D) + n(C \cap D)] \\ &+ [n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D)] - [n(A \cap B \cap C \cap D)] \end{aligned}$$

Essa é uma curiosidade. Ainda não vi questões cobrando essa fórmula genérica.

O Princípio da Inclusão e Exclusão pode ser generalizado para n conjuntos (não se preocupe se você não entender as denotações usadas aqui, todos os assuntos serão abordados nas aulas futuras desse curso).

Sejam os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, a fórmula generalizada é dada por:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

Onde $S_i, i = 1,2, \dots, n$ é dado por:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} n(A_i)$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} n\left(A_i \cap A_j\right)$$

$$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} n\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right)$$

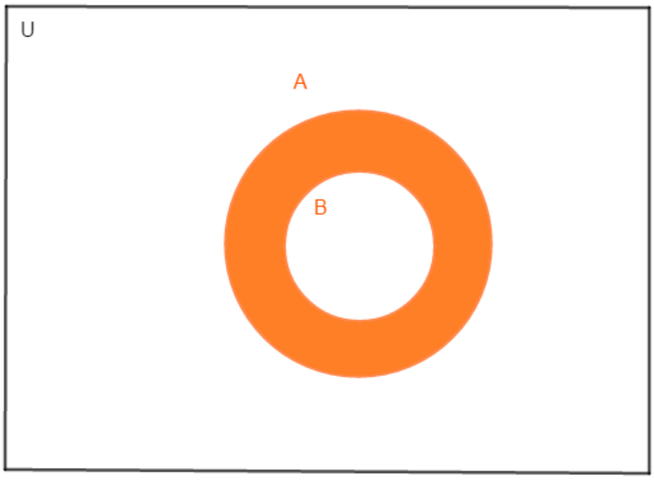
$$\vdots$$

$\sum$ é o símbolo usado para representar o somatório.

Qual o valor de $n(A \backslash B)$?

Vamos analisar esse valor para cada caso possível usando o Diagrama de Venn-Euler.

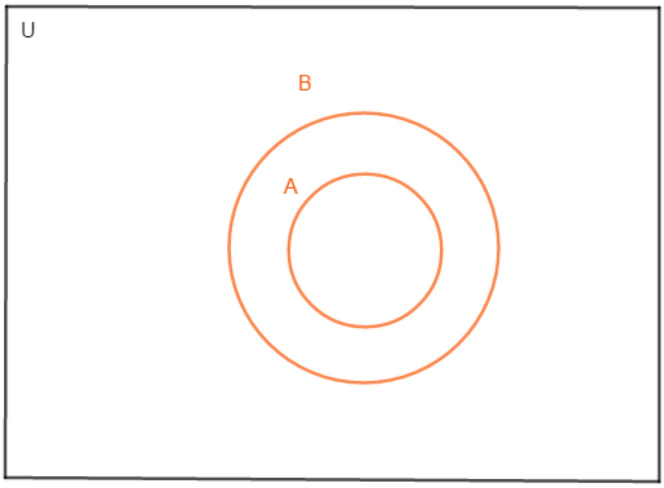
1) $B \subset A$



Nesse caso, como B está contido em A, todos os elementos de B devem ser removidos do conjunto A. Desse modo, podemos escrever:

$$n(A \backslash B) = n(A) - n(B)$$

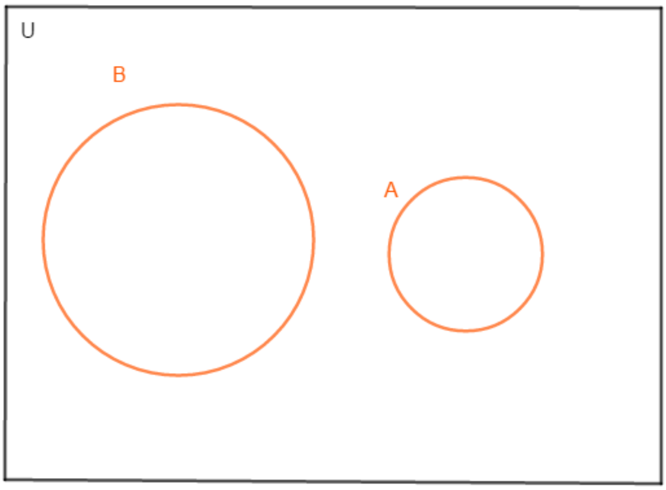
2) $A \subset B$



Como $A \subset B$, todos os elementos de A serão removidos. Assim:

$$n(A \backslash B) = 0$$

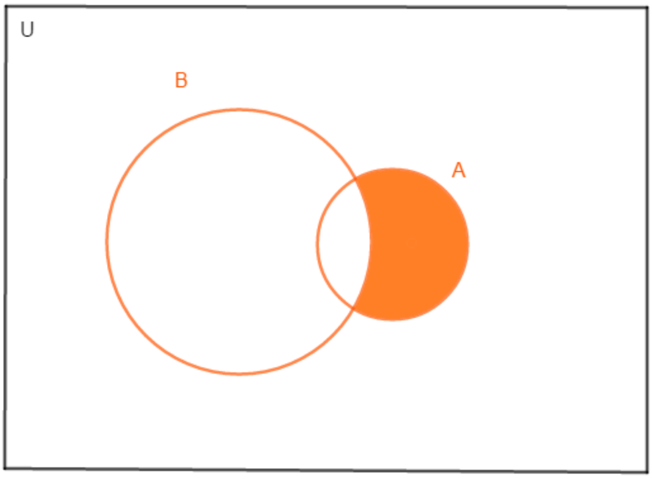
3) $A\ e\ B\ são\ disjuntos\ (A \cap B = \emptyset)$



Nesse caso, como não temos elementos em comum:

$$n(A\backslash B) = n(A)$$

4) $A \cap B \neq \emptyset$



Nesse caso, devemos subtrair o número de elementos de $A \cap B$ do conjunto A. Portanto:

$$n(A\backslash B) = n(A) - n(A \cap B)$$

Cardinalidade do conjunto das partes

Seja $P(A)$, o conjunto das partes de A, sendo A um conjunto finito com $n(A)$ elementos.

Sua cardinalidade é dada por:

$$n\big(P(A)\big) = 2^{n(A)}$$

A prova para essa fórmula poderá ser feita pelo Princípio Fundamental da Contagem que será aprendida na aula de Análise Combinatória.

Vamos a alguns exemplos:

$$A = \{1\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$C = \{1, 2, 3\}$$

Quantos elementos possui $P(A)$?

$$P(A) = \big\{\emptyset, \{1\}\big\}$$

Isso implica $n\big(P(A)\big) = 2$

Quantos elementos possui $P(B)$?

$$P(B) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$$

Isso implica $n\big(P(B)\big) = 4$

Quantos elementos possui $P(C)$?

$$P(C) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

Isso implica $n\big(P(C)\big) = 8$

10. (EN/2008/Modificada) Os 36 melhores alunos do Colégio Naval submeteram-se a uma prova de 3 questões para estabelecer a antiguidade militar. Sabendo que dentre estes alunos, 18 acertaram a primeira questão, 16 acertaram a segunda, 18 acertaram a terceira, 9 acertaram a primeira e a segunda, 10 acertaram a primeira e a terceira, 7 acertaram a segunda e a terceira e, 4 erraram todas as questões, podemos afirmar que o número de alunos que acertaram todas as 3 questões é igual a:

a) 6

b) 8

c) 26

d) 30

e) 32

Resolução:

Analisando o enunciado da questão, podemos ver que essa é uma questão envolvendo conjuntos. Os melhores alunos foram submetidos a uma prova de 3 questões e ele passa informações a respeito de quantos acertaram cada uma dessas questões. Podemos deduzir que se trata de uma questão envolvendo 3 conjuntos, sendo cada conjunto o número de alunos que acertaram cada uma das questões. Nomeando os conjuntos, temos:

36 melhores alunos $\Rightarrow n(U) = 36$

5 acertaram a primeira questão $\Rightarrow n(A) = 18$

6 acertaram a segunda questão $\Rightarrow n(B) = 16$

7 acertaram a terceira questão $\Rightarrow n(C) = 18$

9 acertaram a primeira e a segunda questão $\Rightarrow n(A \cap B) = 9$

10 acertaram a primeira e a terceira questão $\Rightarrow n(A \cap C) = 10$

7 acertaram a segunda e a terceira questão $\Rightarrow n(B \cap C) = 7$

4 erraram todas as questões $\Rightarrow n(\overline{A \cup B \cup C}) = 4$

x alunos acertaram todas as questões $\Rightarrow n(A \cap B \cap C) = x$

*Todos os alunos que acertaram alguma questão são representados por $n(A \cup B \cup C)$. Todos os alunos que erraram todas as questões será o complementar dessa união.

Podemos inferir do último dado que $n(\overline{A \cup B \cup C}) = n(U) - n(A \cup B \cup C) \Leftrightarrow n(A \cup B \cup C) = n(U) - n(\overline{A \cup B \cup C}) = 36 - 4 = 32$

Agora, podemos aplicar diretamente o Princípio da Inclusão e Exclusão para 3 conjuntos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$32 = 18 + 16 + 18 - 9 - 10 - 7 + x$$

$$32 = 52 - 26 + x$$

$$32 = 26 + x$$

$$x = 6$$

Gabarito: "a".

2.7. Conjuntos Numéricos

Antes de finalizarmos, vamos estudar um breve conceito sobre conjuntos numéricos e como eles podem ser organizados.

Os números podem ser divididos em conjuntos. Vamos estudar o primeiro deles.

2.7.1 Conjunto dos Números Naturais $(\mathbb{N})$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

O conjunto dos números naturais é definido por todos os números não-negativos e inteiros. Esse conjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Eles vão do intervalo de 0 até o infinito e foram criados para contar e ordenar.

2.7.2. Conjunto dos Números Inteiros $(\mathbb{Z})$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

O conjunto dos números inteiros é a união do conjunto dos números naturais com os números inteiros negativos. Esse conjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Eles são a extensão do conjunto dos números naturais. Podemos afirmar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2.7.3. Conjunto dos Números Racionais $(\mathbb{Q})$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

O conjunto dos números racionais inclui os números inteiros e os números fracionários. Esse conjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Números fracionários são números que não podem ser escritos como um valor inteiro, por exemplo:

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$

Esse número é considerado um número fracionário.

Podemos afirmar $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.7.4. Conjunto dos Números Irracionais $(\mathbb{I})$

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

O conjunto dos números irracionais é definido pelos números que não podem ser definidos. Esse conjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{I}$. Exemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373 \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732050807568 \ldots$$

Perceba que esses números não possuem um padrão nos números após a vírgula, não sabemos quanto eles valem exatamente.

2.7.5. Conjunto dos Números Reais $(\mathbb{R})$

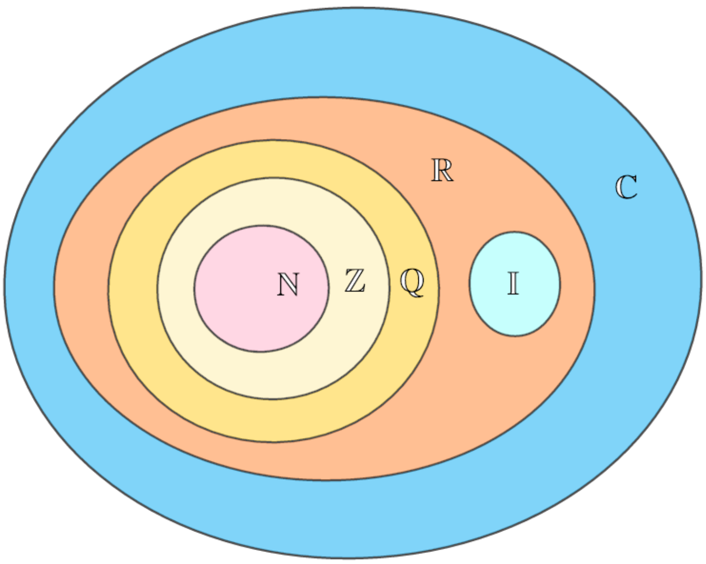
$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$$

O conjunto dos números reais é representado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Ele é a união do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

2.7.6. Conjunto dos Números Complexos $(\mathbb{C})$

O conjunto dos números complexos é formado pelos números reais e, também, pelos números que não podem ser representados pelo conjunto dos números reais. Estes são considerados como números imaginários. Podemos entendê-lo como a extensão dos números reais. Veremos mais adiante o estudo detalhado dos números complexos.

Pelo que vimos até aqui, podemos representar os conjuntos numéricos pelo Diagrama de Venn-Euler abaixo:



2.7.7. Notações úteis

Podemos restringir um conjunto numérico usando alguns símbolos em sua nomenclatura. Vamos tomar o conjunto dos números inteiros como exemplo.

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

Quando colocamos o asterisco "*" no conjunto dos números inteiros, excluímos desse conjunto o valor nulo ou número 0. Esse conjunto é chamado de inteiros não-nulos.

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros positivos.

O símbolo + escrito no símbolo $\mathbb{Z}$ indica que queremos apenas os números não negativos.

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros positivos não-nulos.

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

Conjunto dos números inteiros negativos.

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

Conjunto dos números inteiros negativos não-nulos.

3. Lista de Questões

11. (Exercício de Fixação)

Sobre o conjunto $A = \{\emptyset, \{a\}, a, b, \{a, c\}\}$, assinale a alternativa errada.

a) $\emptyset \in A$

b) $\{a, \{a\}\} \in A$

c) $\emptyset \subset A$

d) $a \in A$

e) $\{a, c\} \in A$

12. (Exercício de Fixação)

Dados $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$, analise as afirmações abaixo.

a) $\emptyset \notin B$

b) $a \in B$

c) $\{a\} \notin B$

d) $\{\emptyset, a\} \subset B$

e) $\{\{a, b\}\} \in B$

f) $\{a\} \not\subset B$

g) $\{\{a\}\} \subset B$

h) $\{b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\} \subset B$

i) $\emptyset \not\subset B$

13. (Exercício de Fixação)

Dados os conjuntos $U = \{a, b, c, d, e\}, A = \{c, d, e\}, B = \{a, b, c, d\}\ e\ C = \{e\}$. Determine os conjuntos:

a) $A - B$

b) $A \cup B$

c) $A \cap B$

d) A^C

e) $B^C - C^C$

f) $C^C - A$

g) $(A \cap B^C)^C$

14. (Exercício de Fixação)

Dados $A = \{a, b, c, e, f, i, j\}$ e $B = \{c, e, h, l, m\}$. Calcule $A \Delta B$.

15. (Exercício de Fixação)

Dados $A = \{a, b, c, e, f\}, B = \{a, b, d, g, h\}, C = \{b, c, d, k, l\}\ e\ U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l\}$. Calcule $[(A - B) - C] \cup [C - (A \cup B)] \cup (B \cap \bar{A})$.

16. (Exercício de Fixação)

Dados $A = \{a, b, \{a\}\}, B = \{a, b, \{a, b\}\}\ e\ C = \{a, \{a\}, \{b\}\}$. Julgue os itens a seguir.

a) $A \cap C = \{a, \{a\}\}$

b) $A \cap B = \{a, b\}$

c) $B \cap P(B) = \{\{a, b\}\}$

d) $A - C = \{b, \{a\}\}$

e) $A \subset C$

17. (Exercício de Fixação)

Simplifique as expressões:

a) $\overline{(A \cap \bar{B}) \cup (\overline{A \cap B})}$

b) $(\overline{A - B}) \cup A$

18. (Exercício de Fixação)

Demonstre que as seguintes igualdades são verdadeiras:

a) $A - B = A \cap B^C$

b) $A - (A - B) = A \cap B$

c) $A - B = (A \cup B) - B$

d) $B - A^C = B \cap A$

e) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

f) $(A^C \cup B^C)^C = A \cap B$

g) $A^C \Delta B^C = A \Delta B$

h) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C) = (A \cap C) - B = (A - B) \cap (C - B)$

19. (Fuvest/2018)

Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;

II. 16 não obtiveram nota mínima em português;

III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês;

IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;

V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;

VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e

VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi:

a) 44

b) 46

c) 47

d) 48

e) 49

20. (ITA/2017)

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy: x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

a) 10.

b) 11.

c) 12.

d) 13.

e) 14.

21. (ITA/2013)

Sejam *A, B* e *C* subconjuntos de um conjunto universo *U.* Das afirmações:

I. $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$,

II. $(A \cap C)\backslash B = A \cap B^C \cap C$,

III. $(A\backslash B) \cap (B\backslash C) = (A\backslash B)\backslash C$,

É (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas I e II.

d) Apenas I e III.

e) Todas.

22. (ITA/2012)

Dos *n* alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

23. (ITA/2012)

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não vazios, tais que $n\big(P(A) \cup P(B)\big) + 1 = n\big(P(A \cup B)\big)$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

a) Um único valor.

b) Apenas dois valores distintos.

c) Apenas três valores distintos.

d) Apenas quatro valores distintos.

e) Mais do que quatro valores distintos.

24. (ITA/2012)

Sejam *A, B* e *C* subconjuntos de um conjunto universo *U.* Das afirmações:

I. $(A \backslash B^C) \backslash C^C = A \cap (B \cup C)$,

II. $(A \backslash B^C) \backslash C = A \cup (B \cap C^C)^C$,

III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

É (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e III.

25. (ITA/2011)

Analise a existência de conjuntos A e *B,* ambos não-vazios, tais que $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A$.

26. (ITA/2011)

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C: C \subset B \backslash A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

I. $n(B) - n(A)$ é único,

II. $n(B) + n(A) \leq 128$,

III. A dupla ordenada $\big(n(A), n(B)\big)$ é única,

É (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e II.

e) Nenhuma.

27. (ITA/2010/Modificada)

Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B, n(B \backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B), n(A \cup B) = 22$ e $[n(A)]^2 = n(B). n(C)$.

a) Determine $n(C)$.

b) Determine $n\big(P(B \backslash C)\big)$.

28. (ITA/2010)

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III. $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e III.

e) Nenhuma.

29. (ITA/2009)

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}, B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \backslash B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 4.

e) 8.

30. (ITA/2008)

Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}, Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$.

Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$

c) $\{1, 3, 7, 8\}$

d) $\{1, 3\}$

e) $\{7, 8\}$

31. (ITA/2007/Modificada)

Se A, B, C forem conjuntos tais que

$n(A \cup B) = 23, n(B - A) = 12, n(C - A) = 10,$

$n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4,$

Encontre os valores de $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$.

32. (ITA/2006)

Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de $P(U)$ com a seguinte propriedade:

Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é:

a) 2^{n-1}

b) $n/2$, se n for par, e $(n+1)/2$ se n for ímpar

c) $n + 1$

d) $2^n - 1$

e) $2^{n-1} + 1$

33. ITA/2005/Modificada)

Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}, T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.

II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

34. (ITA/2004)

Seja o conjunto $S = \{r \in Q: r \geq 0 \ e \ r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S \ e \frac{7}{5} \in S$.

II. $\{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$.

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I e II

b) I e III

c) II e III

d) I

e) II

35. (ITA/2004)

Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$.

II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$.

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I e III.

b) Apenas II e IV.

c) Apenas II e III.

d) Apenas IV.

e) Todas as afirmações.

36. (ITA/2003)

Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U, B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B = \emptyset$, então $B \subset A^C$.

II. $B \backslash A^C = B \cap A$.

37. (ITA/2002)

Sejam *A* um conjunto com 8 elementos e *B* um conjunto tal que $A \; U \; B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \backslash A) \; U \; P(\emptyset)$ é igual a

a) 8.

b) 16.

c) 20.

d) 17.

e) 9.

38. (ITA/2001)

Sejam $X, Y\ e\ Z$ subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$, não-vazios. Com respeito às afirmações:

I) $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\} = X$

II) Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y$

III) Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$

Temos que:

a) Apenas (I) é verdadeira.

b) Apenas (I) e (II) são verdadeiras.

c) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

d) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

e) Todas são verdadeiras.

39. (ITA/2000)

Denotamos por $n(x)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam $A, B\ e\ C$ conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8, n(A \cup C) = 9, n(B \cup C) = 10, n(A \cup B \cup C) = 11\ e\ n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

a) 11.

b) 14.

c) 15.

d) 18.

e) 25.

40. (ITA/1996)

Analise as afirmações:

I) $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \emptyset$

II) $(A - B^C)^C = B - A^C$

III) $[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = A$

41. (ITA/1987)

Sejam F e G dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta.

a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.

b) Se $F \cap G = \emptyset$, então necessariamente $G \subset F$.

c) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.

d) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.

e) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então $(F \cap G) \cup G = \mathbb{R}$

42. (ITA/1985/Modificada)

Sejam X um conjunto não vazio e A e B dois subconjuntos. Analise as afirmações:

I. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B} \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$

II. $A - \emptyset = A \; e \; A - B = A - (A \cap B)$

III. $A - B \neq A \cap \bar{B}$

43. (IME/2016)

Dados três conjuntos quaisquer F, G e H. O conjunto $G - H$ é igual ao conjunto:

a) $(G \cup F) - (F - H)$

b) $(G \cup H) - (H - F)$

c) $\big(G \cup (H - F)\big) \cap \bar{H}$

d) $\bar{G} \cup (H \cap F)$

e) $(\bar{H} \cap G) \cap (G - F)$

44. (IME/2010)

Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 e S_2 tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1, (P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$. Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

45. (IME/2009)

Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Pode-se afirmar que

a) $(X \Delta Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$

b) $(X \Delta Y) \cap (X - Y) = \emptyset$

c) $(X \Delta Y) \cap (Y - X) = \emptyset$

d) $(X \Delta Y) \cup (X - Y) = X$

e) $(X \Delta Y) \cup (Y - X) = X$

46. (IME/2000)

Seja o conjunto:

$$D = \{(k_1, k_2) | 1 \leq k_1 \leq 13; 1 \leq k_2 \leq 4; k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$$

Determine quantos subconjuntos $L = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (t_1, t_2), (r_1, r_2)\}, L \subset D$, que existem com 5 (cinco) elementos distintos, que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

i) $x_1 = y_1 = z_1$.

ii) $x_1 \neq t_1, x_1 \neq r_1, t_1 \neq r_1$.

47. (IME/1991)

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

48. (IME/1976)

São dados os conjuntos $E = \{a, b, c, d\}$ e $F \subset E$, tal que $F = \{a, b\}$. Denote por $P(E)$ o conjunto das partes de E e considere, em $P(E)$, a relação R, tal que

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow F \cap X = F \cap Y$$

a) Verifique se R é uma relação de equivalência.

b) $Z \subset P(E)$. Determine Z, sabendo-se que $Z \cap F = \{b\}$.

c) $W \subset P(E)$. Determine W, sabendo-se que $F \cap W = \emptyset$.

Obs.: $P(E)$ tem 16 elementos. $\Leftrightarrow$ significa "se e somente se".

49. (IME/1972)

Seja A um conjunto tal que $n(A) = p > 0$. Determinar justificando:

a) O número de relações reflexivas distintas em A.

b) O número de relações simétricas distintas em A.

c) O número de relações antissimétricas distintas em A.

50. (IME/1972)

Seja A um conjunto não vazio e R uma relação em A, reflexiva e transitiva. Definimos a relação S, em A, por:

$$xSy \text{ se e somente se } xRy \text{ e } yRx.$$

a) Mostre que S é uma relação de equivalência em A. Caracterize as classes de equivalência determinadas por S em A, quando R é uma relação de ordem.

b) Determine explicitamente o conjunto quociente A/S, quando

$$R = [(A \cap B)x(A \cap B)] \cup [(A - B)x(A - B)],$$

onde B é um conjunto não vazio.

4. Gabarito

GABARITO

11. b
12. a)F b)V c)F d)V e)F f)F g)V h)V i)F
13. a)$\{e\}$ b)$\{a, b, c, d, e\}$ c)$\{c, d\}$ d)$\{a, b\}$ e)$\{e\}$ f)$\{a, b\}$ g)$\{a, b, c, d\}$
14. $\{a, b, f, i, j, h, l, m\}$
15. $\{d, e, f, g, h, k, l\}$
16. a)V b)V c)V d)F e)F
17. a)$B \cap A$ b)U
18. Demonstração.
19. e
20. e
21. c
22. $\nexists n$ que satisfaça as condições do problema.
23. a
24. c
25. Não existem conjuntos não-vazios que satisfaçam a relação.
26. a
27. a) $n(C) = 4$ b) $n\big(P(B\backslash C)\big) = 4096$
28. e
29. c
30. c
31. $n(A) = 11, n(A \cup C) = 21 \; e \; n(A \cup B \cup C) = 31.$
32. c
33. Ambas são falsas.
34. d
35. c
36. Demonstração
37. b
38. b
39. d
40. I) V II) F III) F
41. d
42. I) V II) V III) F

43. c
44. Prova
45. a
46. 54912
47. 57256
48. a) Demonstração b) $Z \in \{\{b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,c,d\}\}$ c) $W \in \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}$
49. a) $2^{p(p-1)}$ b) $2^{\frac{p(p+1)}{2}} - 2^p$ c) $2^{p^2} + 2^p - 2^{\frac{p(p+1)}{2}}$
50. a) $[y] = \{x \in A | x = y\}$ b) $A/S = \{\{y \in (A \cap B) | y = x\} | x \in (A \cap B)\} \cup \{\{y \in (A - B) | y = x\} | x \in (A - B)\}$

5. Lista de Questões Comentadas

QUESTÕES COMENTADAS

11. (Exercício de Fixação)

Sobre o conjunto $A = \{\emptyset, \{a\}, a, b, \{a,c\}\}$, assinale a alternativa errada.

a) $\emptyset \in A$

b) $\{a, \{a\}\} \in A$

c) $\emptyset \subset A$

d) $a \in A$

e) $\{a, c\} \in A$

Comentários

a) Certa. $\emptyset$ está listado no conjunto A.

b) Errada. $\{a, \{a\}\}$ não está listado em A. Ela pode ser considerada subconjunto de A, pois a e $\{a\}$ estão listados em A.

c) Certa. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

d) Certa. a está listado em A.

e) Certa. $\{a, e\}$ está listado em A.

Gabarito: "b".

---

12. (Exercício de Fixação)

Dados $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$, analise as afirmações abaixo.

a) $\emptyset \notin B$

b) $a \in B$

c) $\{a\} \notin B$

d) $\{\emptyset, a\} \subset B$

e) $\{\{a, b\}\} \in B$

f) $\{a\} \not\subset B$

g) $\{\{a\}\} \subset B$

h) $\{b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\} \subset B$

i) $\emptyset \not\subset B$

Comentários

a) F. $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$.

b) V. $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$.

c) F. $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$.

d) V. $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$.

e) F. $\{\{a, b\}\}$ não está listado em B.

f) F. $\{a\} \subset B$. $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$.

g) V. $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$.

h) V. $B = \{\emptyset, a, b, \{a\}, \{\emptyset, b\}\}$.

i) F. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

Gabarito: a)F b)V c)F d)V e)F f)F g)V h)V i)F

---

13. (Exercício de Fixação)

Dados os conjuntos $U = \{a, b, c, d, e\}, A = \{c, d, e\}, B = \{a, b, c, d\}$ e $C = \{e\}$. Determine os conjuntos:

a) $A - B$

b) $A \cup B$

c) $A \cap B$

d) A^C

e) $B^C - C^C$

f) $C^C - A$

g) $(A \cap B^C)^C$

Comentários

a) $A - B = \{c, d, e\} - \{a, b, c, d\} = \{e\}$

b) $A \cup B = \{c, d, e\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d, e\}$

c) $A \cap B = \{c, d, e\} \cap \{a, b, c, d\} = \{c, d\}$

d) $A^C = U - A = \{a, b, c, d, e\} - \{c, d, e\} = \{a, b\}$

e) $B^C - C^C$

$$B^C = U - B = \{a, b, c, d, e\} - \{a, b, c, d\} = \{e\}$$

$$C^C = U - C = \{a, b, c, d, e\} - \{e\} = \{a, b, c, d\}$$

$$B^C - C^C = \{e\} - \{a, b, c, d\} = \{e\}$$

f) $C^C - A = \{a, b, c, d\} - \{c, d, e\} = \{a, b\}$

g) $(A \cap B^C)^C$

$$A \cap B^C = \{c, d, e\} \cap \{e\} = \{e\}$$

$$(A \cap B^C)^C = U - A \cap B^C = \{a, b, c, d, e\} - \{e\} = \{a, b, c, d\}$$

Gabarito: a)$\{\boldsymbol{e}\}$ b)$\{\boldsymbol{a, b, c, d, e}\}$ c)$\{\boldsymbol{c, d}\}$ d)$\{\boldsymbol{a. b}\}$ e)$\{\boldsymbol{e}\}$ f)$\{\boldsymbol{a, b}\}$ g)$\{\boldsymbol{a, b, c, d}\}$

---

14. (Exercício de Fixação)

Dados $A = \{a, b, c, e, f, i, j\}$ e $B = \{c, e, h, l, m\}$. Calcule $A \Delta B$.

Comentários

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \cup B = \{a, b, c, e, f, i, j\} \cup \{c, e, h, l, m\} = \{a, b, c, e, f, i, j, h, l, m\}$$

$$A \cap B = \{a, b, c, e, f, i, j\} \cap \{c, e, h, l, m\} = \{c, e\}$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, b, c, e, f, i, j, h, l, m\} - \{c, e\} = \{a, b, f, i, j, h, l, m\}$$

Gabarito: $\{\boldsymbol{a, b, f, i, j, h, l, m}\}$

---

15. (Exercício de Fixação)

Dados $A = \{a, b, c, e, f\}, B = \{a, b, d, g, h\}, C = \{b, c, d, k, l\}\ e\ U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l\}$. Calcule $[(A - B) - C] \cup [C - (A \cup B)] \cup (B \cap \bar{A})$.

Comentários

Vamos resolver por partes.

$$(A - B) = \{a, b, c, e, f\} - \{a, b, d, g, h\} = \{c, e, f\}$$

$$(A - B) - C = \{c, e, f\} - \{b, c, d, k, l\} = \{e, f\}$$

$$(A \cup B) = \{a, b, c, e, f\} \cup \{a, b, d, g, h\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$C - (A \cup B) = \{b, c, d, k, l\} - \{a, b, c, d, e, f, g, h\} = \{k, l\}$$

$$\bar{A} = U - A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l\} - \{a, b, c, e, f\} = \{d, g, h, k, l\}$$

$$B \cap \bar{A} = \{a, b, d, g, h\} \cap \{d, g, h, k, l\} = \{d, g, h\}$$

$$[(A - B) - C] \cup [C - (A \cup B)] \cup (B \cap \bar{A}) = \{e, f\} \cup \{k, l\} \cup \{d, g, h\} = \{d, e, f, g, h, k, l\}$$

Gabarito: $\{\boldsymbol{d, e, f, g, h, k, l}\}$

---

16. (Exercício de Fixação)

Dados $A = \big\{a, b, \{a\}\big\}, B = \big\{a, b, \{a, b\}\big\}\ e\ C = \big\{a, \{a\}, \{b\}\big\}$. Julgue os itens a seguir.

a) $A \cap C = \{a, \{a\}\}$

b) $A \cap B = \{a, b\}$

c) $B \cap P(B) = \{\{a, b\}\}$

d) $A - C = \{b, \{a\}\}$

e) $A \subset C$

Comentários

a) V. $\{a, b, \{a\}\} \cap \{a, \{a\}, \{b\}\} = \{a, \{a\}\}$

b) V. $\{a, b, \{a\}\} \cap \{a, b, \{a, b\}\} = \{a, b\}$

c) V.

$$P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}, \{a, b\}, \{a, \{a, b\}\}, \{b, \{a, b\}\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$$

$$B \cap P(B) = \{a, b, \{a, b\}\} \cap \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}, \{a, b\}, \{a, \{a, b\}\}, \{b, \{a, b\}\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$$

$$B \cap P(B) = \{\{a, b\}\}$$

d) F. $A - C = \{a, b, \{a\}\} - \{a, \{a\}, \{b\}\} = \{b\}$

e) F. $b \notin C \Rightarrow A \not\subset C$

Gabarito: a) V b) V c) V d) F e) F

---

17. (Exercício de Fixação)

Simplifique as expressões:

a) $\overline{(A \cap \bar{B}) \cup (\overline{A \cap B})}$

b) $(\overline{A - B}) \cup A$

Comentários

a) $\overline{(A \cap \bar{B}) \cup (\overline{A \cap B})} \xLeftrightarrow{De\ Morgan} \overline{(A \cap \bar{B})} \cap (A \cap B) \xLeftrightarrow{De\ Morgan} (\bar{A} \cup B) \cap (A \cap B)$

$\Leftrightarrow (\bar{A} \cup B) \cap (B \cap A)$

Podemos usar a propriedade da intersecção $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e escrever:
$(\bar{A} \cup B) \cap (B \cap A) \Leftrightarrow [(\bar{A} \cup B) \cap B] \cap A$

Agora, observe o conjunto $(\bar{A} \cup B) \cap B$. Nesse caso, podemos usar a propriedade do inter-relacionamento da união e da intersecção $A \cap (A \cup B) = A$ e escrever:

$$(\bar{A} \cup B) \cap B = B$$

Note que a união do conjunto $\bar{A}$ com o conjunto B gerará um conjunto que possui todos os elementos do conjunto B, desse modo, $B \subset (\bar{A} \cup B)$ e fazendo a intersecção desse conjunto com o próprio conjunto B, obtemos o conjunto B. Essa propriedade é conhecida como lei da absorção ($\bar{A}$ é absorvido).

Assim, substituindo $(\bar{A} \cup B) \cap B = B$ na expressão acima, obtemos:

$$[(\bar{A} \cup B) \cap B] \cap A \Leftrightarrow B \cap A$$

b) $(\overline{A - B}) \cup A$

Usando a definição $A - B = A \cap \bar{B}$, obtemos:

$$\left(\overline{A \cap \bar{B}}\right) \cup A \overset{De\ Morgan}{\Longleftrightarrow} \left(\bar{A} \cup \bar{\bar{B}}\right) \cup A \Leftrightarrow (\bar{A} \cup B) \cup A \Leftrightarrow (\bar{A} \cup A) \cup B \Leftrightarrow U \cup B \Leftrightarrow U$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{B \cap A}$ b) $\boldsymbol{U}$

---

18. (Exercício de Fixação)

Demonstre que as seguintes igualdades são verdadeiras:

a) $A - B = A \cap B^C$

b) $A - (A - B) = A \cap B$

c) $A - B = (A \cup B) - B$

d) $B - A^C = B \cap A$

e) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

f) $(A^C \cup B^C)^C = A \cap B$

g) $A^C \Delta B^C = A \Delta B$

h) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C) = (A \cap C) - B = (A - B) \cap (C - B)$

Comentários

a) Pela definição: $A - B = \{\forall x | x \in A\ e\ x \notin B\} \Leftrightarrow \{\forall x | x \in A\ e\ x \in B^C\} = A \cap B^C$

b) $A - (A - B) = A - (A \cap B^C) = A \cap (A \cap B^C)^C = A \cap (A^C \cup (B^C)^C) = A \cap (A^C \cup B)$
$= (A \cap A^C) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$

c) $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B^C = (A \cap B^C) \cup (B \cap B^C) = (A \cap B^C) \cup \emptyset = A \cap B^C = A - B$

d) $B - A^C = B \cap (A^C)^C = B \cap A$

Podemos resolver, também, usando argumentos lógicos:

$\{\forall x | x \in B\ e\ x \notin A^C\} \Leftrightarrow \{\forall x | x \in B\ e\ x \in (A^C)^C\} = B \cap A$

Esse método pode ser útil para resolver algumas questões do ITA. Tente usá-lo nas demonstrações.

e) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = [(A \cap B) \cup A] \cap [(A \cap B) \cup B^C] = A \cap [(A \cup B^C) \cap (B \cup B^C)] = A \cap [(A \cup B^C) \cap U] = A \cap (A \cup B^C) = A$

f) $(A^C \cup B^C)^C = (A^C)^C \cap (B^C)^C = A \cap B$

g) $A^C \Delta B^C = (A^C - B^C) \cup (B^C - A^C) = [A^C \cap (B^C)^C] \cup [B^C \cap (A^C)^C] = (A^C \cap B) \cup (B^C \cap A)$
$= (B \cap A^C) \cup (A \cap B^C) = (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B$

h) $(A \cap C) - (B \cap C) = (A \cap C) \cap (B \cap C)^C = (A \cap C) \cap (B^C \cup C^C) = A \cap C \cap (B^C \cup C^C) =$
$A \cap [(C \cap B^C) \cup (C \cap C^C)] = A \cap [(C \cap B^C) \cup \emptyset] = A \cap (C \cap B^C) = A \cap B^C \cap C = (A \cap$
$B^C) \cap C = (A - B) \cap C$

$$(A \cap C) - B = A \cap C \cap B^C = A \cap B^C \cap C = (A \cap B^C) \cap C = (A - B) \cap C$$

$$(A - B) \cap (C - B) = (A \cap B^C) \cap (C \cap B^C) = A \cap B^C \cap C \cap B^C = A \cap B^C \cap C$$
$$= (A \cap B^C) \cap C = (A - B) \cap C$$

---

19. (Fuvest/2018)

Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;

II. 16 não obtiveram nota mínima em português;

III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês;

IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;

V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;

VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e

VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi:

a) 44

b) 46

c) 47

d) 48

e) 49

Comentários

Podemos aplicar diretamente a fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão para 3 conjuntos.

Vamos considerar os conjuntos:

M- candidatos que não obtiveram nota mínima em matemática

P- candidatos que não obtiveram nota mínima em português

I- candidatos que não obtiveram nota mínima em inglês

Do enunciado, temos:

$$n(M) = 14$$
$$n(P) = 16$$
$$n(I) = 12$$
$$n(M \cap P) = 5$$
$$n(M \cap I) = 3$$
$$n(P \cap I) = 7$$
$$n(P \cap M \cap I) = 2$$

Podemos encontrar $n(P \cup M \cup I)$:

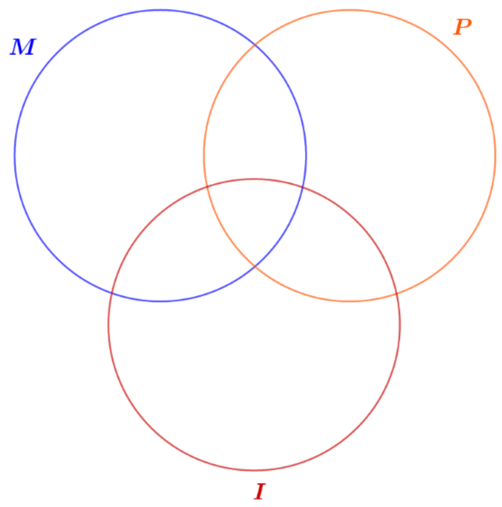
$$n(P \cup M \cup I) = n(P) + n(M) + n(I) - n(P \cap I) - n(M \cap I) - n(M \cap P) + n(P \cap M \cap I)$$
$$n(P \cup M \cup I) = 16 + 14 + 12 - 7 - 3 - 5 + 2 = 42 - 15 + 2 = 29$$

A questão diz que apenas 20 obtiveram nota mínima para as 3 disciplinas. Podemos dizer que o conjunto Universo (número total de candidatos) menos o conjunto dos candidatos que não obtiveram nota mínima ($n(P \cup M \cup I)$) vale 20.

$$U - n(P \cup M \cup I) = 20 \Rightarrow U = 20 + n(P \cup M \cup I) \Rightarrow U = 20 + 29 = 49$$

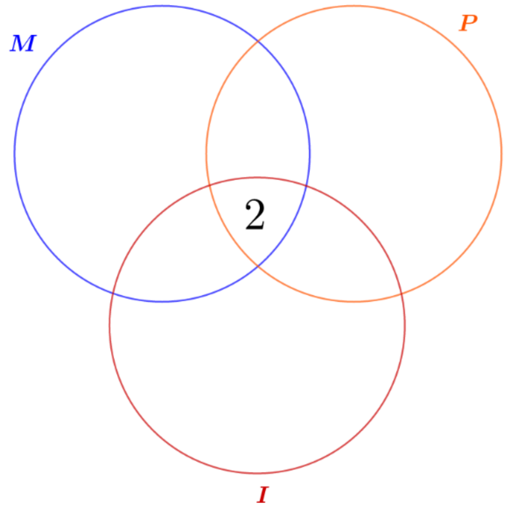
Poderíamos também usar o Diagrama de Venn para resolver a questão, veja:

1°) Desenhamos os círculos do diagrama e nomeamos cada círculo.



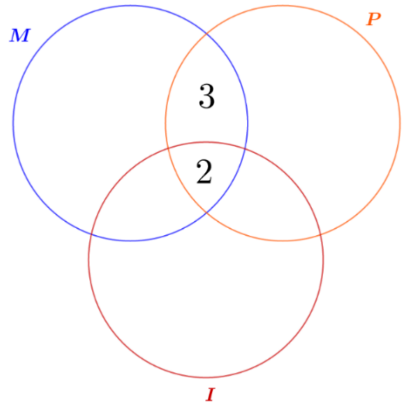
2°) Completamos o valor dos conjuntos nessa ordem $n(P \cap M \cap I) > \left(n(P \cap I), n(M \cap I), n(M \cap P)\right) > \left(n(P), n(M), n(I)\right)$.

Primeiro para $n(P \cap M \cap I) = 2$:



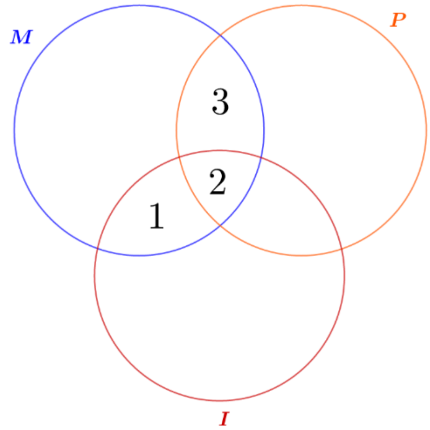
3°) Para $n(M \cap P) = 5$, perceba que nesse valor está incluso os candidatos que não passaram nas três disciplinas, então devemos subtrair $n(P \cap M \cap I) = 2$ desse valor.

$$n(M \cap P) - n(P \cap M \cap I) = 5 - 2 = 3$$



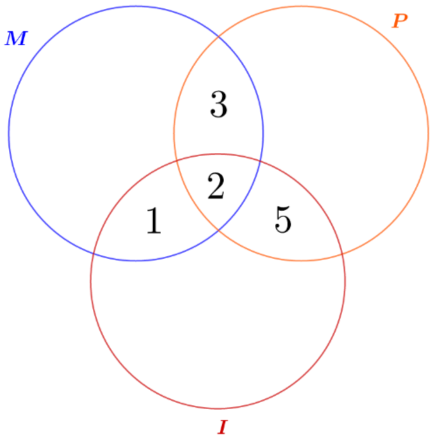
4°) Para $n(M \cap I) = 3$, perceba que nesse valor está incluso os candidatos que não passaram nas três disciplinas, então devemos subtrair $n(P \cap M \cap I) = 2$ desse valor.

$$n(M \cap I) - n(P \cap M \cap I) = 3 - 2 = 1$$



5°) Para $n(P \cap I) = 7$, perceba que nesse valor está incluso os candidatos que não passaram nas três disciplinas, então devemos subtrair $n(P \cap M \cap I) = 2$ desse valor.

$n(P \cap I) - n(P \cap M \cap I) = 7 - 2 = 5$

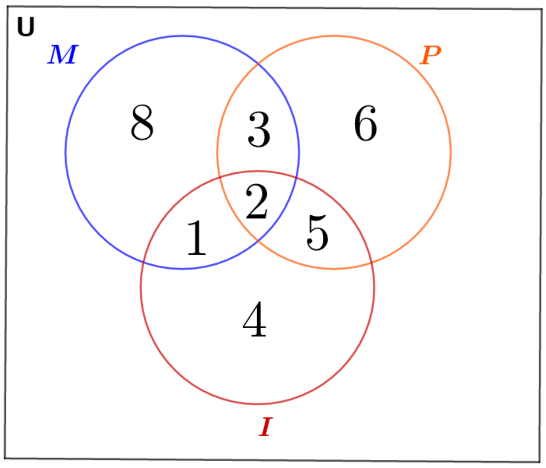


6°) Agora, basta completar com os valores de $n(M), n(P)\ e\ n(I)$. Lembre-se de subtrair os valores do diagrama.

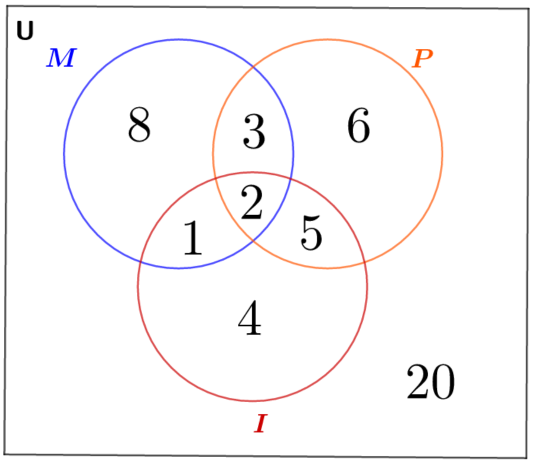
Para $n(M) = 14$, a área do círculo M que não possui valor será: $14 - 1 - 2 - 3 = 8$

Para $n(P) = 16$, a área do círculo P que não possui valor será: $16 - 3 - 2 - 5 = 6$

Para $n(I) = 12$, a área do círculo I que não possui valor será: $12 - 1 - 2 - 5 = 4$



7°) Agora falta incluir os candidatos que obtiveram aprovação. Eles estarão fora da região formada pela união dos círculos.



8°) Basta somar os valores e encontraremos o total de candidatos do concurso:

$n(U) = 8 + 3 + 6 + 1 + 2 + 5 + 4 + 20 = 49$

Gabarito: "e".

---

20. (ITA/2017)

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy: x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

a) 10.

b) 11.

c) 12.

d) 13.

e) 14.

Comentários

A questão pede o número de elementos de C que é definido por $\{xy: x \in A\ e\ y \in B\}$.

Os elementos do conjunto C serão os elementos formados pela multiplicação dos elementos de A com os elementos de B. Então, vamos encontrar os elementos de C que são todos os diferentes valores obtidos pela combinação dos elementos de A com os elementos de B.

Para $x = 1$:

$$C_1 = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$$

Para $x = 2$:

$$C_2 = \{-2, -4, -6, -8, -10\}$$

Para $x = 3$:

$$C_3 = \{-3, -6, -9, -12, -15\}$$

Para $x = 4$:

$$C_4 = \{-4, -8, -12, -16, -20\}$$

Para $x = 5$:

$$C_5 = \{-5, -10, -15, -20, -25\}$$

Agora, juntando todos os elementos diferentes para obter o conjunto C:

$$C = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -8, -9, -10, -12, -15, -16, -20, -25\}$$

Portanto, $n(C) = 14$.

Gabarito: “e”.

---

21. (ITA/2013)

Sejam *A, B* e *C* subconjuntos de um conjunto universo *U.* Das afirmações:

I. $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$,

II. $(A \cap C)\backslash B = A \cap B^C \cap C$,

III. $(A\backslash B) \cap (B\backslash C) = (A\backslash B)\backslash C$,

É (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas I e II.

d) Apenas I e III.

e) Todas.

Comentários

I. Verdadeira.

$$A\backslash(B \cap C) = A \cap (B \cap C)^C$$

Usando o Teorema de De Morgan:

$$A \cap (B \cap C)^C = A \cap (B^C \cup C^C)$$

Aplicando distributiva:

$$(A \cap B^C) \cup (A \cap C^C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$$

II. Verdadeira.

$$(A \cap C)\backslash B = (A \cap C) \cap B^C$$

III. Falsa.

$$(A\backslash B) \cap (B\backslash C) = (A \cap B^C) \cap (B \cap C^C)$$

Como o operador é igual entre cada conjunto, podemos usar a propriedade da associativa:

$$(A \cap B^C) \cap (B \cap C^C) = A \cap (B^C \cap B) \cap C^C = A \cap \emptyset \cap C^C = \emptyset$$

Gabarito: “c”.

---

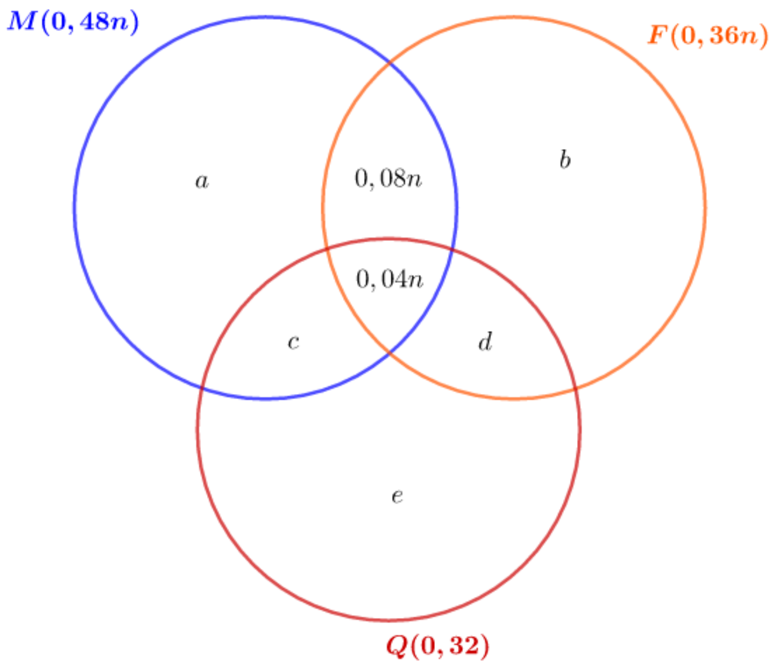
22. (ITA/2012)

Dos *n* alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e

36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

Comentários

Das informações do enunciado, podemos criar o seguinte Diagrama de Venn-Euler:



Legenda:

M – Matemática

F – Física

Q – Química

n é a quantidade de elementos no conjunto

$0{,}04n$ representa os 4% dos alunos que estudam todas as três matérias

Lembrando: 4% pode ser escrito como $\frac{4}{100}$ (forma fracionária).

Quando calculamos a porcentagem de um número, multiplicamos o valor da porcentagem pelo número. Por exemplo:

Pedro recebe $R\$1.000{,}00$ de salário por mês. Quanto vale 50% do seu salário?

Primeiro transformamos o número 50% na forma fracionária $\frac{50}{100}$ e podemos ainda resolver essa fração e encontrar $\frac{50}{100} = 0{,}5$. Agora, multiplicamos esse número pelo valor do salário: $0{,}5 \cdot 1000 = 50 \cdot 10 = 500$. Esse é o valor que representa 50% do salário de Pedro.

Voltando à questão, 4% será escrito na forma fracionária $\frac{4}{100} = 0{,}04$. n é o valor que representa a quantidade de todos os alunos do colégio. Assim, 4% dos alunos pode ser escrito como $0{,}04n$.

$0{,}08n$ representa os 8% dos alunos que estudam apenas Física e Matemática

$0{,}48n$ representa o total de alunos que estudam Matemática

$0{,}32n$ representa o total de alunos que estudam Química

$0{,}36n$ representa o total de alunos que estudam Física

Usando os dados do diagrama, podemos criar as seguintes equações:

$$\begin{cases} a + c + 0{,}04n + 0{,}08n = 0{,}48n \\ b + d + 0{,}04n + 0{,}08n = 0{,}36n \\ c + d + e + 0{,}04n = 0{,}32n \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} a + c + 0{,}12n = 0{,}48n \\ b + d + 0{,}12n = 0{,}36n \\ c + d + e + 0{,}04n = 0{,}32n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + c = 0{,}36n \\ b + d = 0{,}24n \\ c + d + e = 0{,}28n \end{cases}$$

O enunciado afirma que os alunos que estudam apenas Química e Física (d) mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química (c) totalizam 63 estudantes. Assim:

$$c + d = 63$$

Somando todas as equações, obtemos:

$$(a + c) + (b + d) + (c + d + e) = 0{,}36n + 0{,}24n + 0{,}28n$$

Reorganizando os termos e fazendo $c + d = 63$:

$$a + b + e + 2(c + d) = 0{,}88n$$

$$a + b + e = 0{,}88n - 2 \cdot 63 = 0{,}88n - 126$$

$$I)\ a + b + e = 0{,}88n - 126$$

Agora vamos somar os elementos usando os dados do diagrama de Venn-Euler:

$$a + b + c + d + e + 0{,}04n + 0{,}08n = n$$

Substituindo $c + d = 63$:

$$a + b + e + 63 + 0{,}12n = n$$

$$II)\ a + b + e = 0{,}88n - 63$$

Veja que a equação (I) e (II) possuem as mesmas variáveis, porém diferentes resultados.

Portanto, não existe n que satisfaz o problema.

Gabarito: $\nexists n$ que satisfaça as condições do problema.

---

23. (ITA/2012)

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não vazios, tais que $n\big(P(A) \cup P(B)\big) + 1 = n\big(P(A \cup B)\big)$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

a) Um único valor.

b) Apenas dois valores distintos.

c) Apenas três valores distintos.

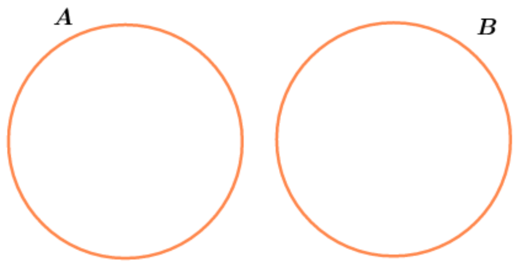
d) Apenas quatro valores distintos.

e) Mais do que quatro valores distintos.

Comentários

A e B são conjuntos disjuntos, logo $A \cap B = \emptyset$.

Temos a seguinte situação:



Considere que A tem x elementos e B tem y elementos.

Temos que calcular $n(A) - n(B)$.

Vamos usar $n\big(P(A) \cup P(B)\big) + 1 = n\big(P(A \cup B)\big)$ da questão.

Sabemos que $n\big(P(A)\big) = 2^x$ e $n\big(P(B)\big) = 2^y$

Veja que $P(A) \cup P(B)$ é a união do conjunto das partes de 2 subconjuntos. Perceba que $\emptyset$ é elemento de $P(A)$ e de $P(B)$ ao mesmo tempo. Então:

$$n\big(P(A) \cup P(B)\big) = 2^x + 2^y - 1$$

Subtraímos 1 da equação acima porque o elemento $\emptyset$ está presente em $P(A)$ e $P(B)$.

O número de elementos de $A \cup B$ é $x + y$ já que eles são disjuntos. Logo:

$$n\big(P(A \cup B)\big) = 2^{x+y}$$

$$n\big(P(A) \cup P(B)\big) + 1 = n\big(P(A \cup B)\big)$$

$$2^x + 2^y - 1 + 1 = 2^{x+y}$$

*Não se preocupe se você não souber calcular essa equação por enquanto, vamos aprender a resolvê-la na aula de exponencial.

Vamos simplificar a equação:

$$2^x + 2^y - 1 + 1 = 2^{x+y}$$
$$1 = 2^{x+y} - 2^x - 2^y + 1$$
$$1 = 2^{x+y} - 2^x - 2^y + 1$$
$$1 = 2^x(2^y - 1) - (2^y - 1)$$
$$1 = (2^x - 1)(2^y - 1)$$

Como $x, y \geq 0$, a única solução possível para essa equação é $x = 1\ e\ y = 1$.

Logo, $n(A) - n(B) = 1 - 1 = 0$.

Gabarito: "a".

---

24. (ITA/2012)

Sejam *A, B* e *C* subconjuntos de um conjunto universo *U.* Das afirmações:

I. $(A \backslash B^C) \backslash C^C = A \cap (B \cup C)$,

II. $(A \backslash B^C) \backslash C = A \cup (B \cap C^C)^C$,

III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

É (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e III.

e) II e III.

Comentários

I. Falsa.

Vamos simplificar $(A \backslash B^C) \backslash C^C$:

$$(A \backslash B^C) \backslash C^C = (A \cap (B^C)^C \cap (C^C)^C) = (A \cap B \cap C) \neq A \cap (B \cup C)$$

II. Falsa.

Vamos aplicar o Teorema de De Morgan $(B \cap C^C)^C$:

$$A \cup (B \cap C^C)^C = A \cup (B^C \cup (C^C)^C) = A \cup (B^C \cup C) = A \cup B^C \cup C$$

III. Verdadeira.

Aplicando o Teorema de De Morgan:

$$(B \cap C)^C = B^C \cup C^C$$

Gabarito: "c".

---

25. (ITA/2011)

Analise a existência de conjuntos A e B, ambos não-vazios, tais que $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A$.

Comentários

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

$$\Leftrightarrow (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) \underset{Distributiva}{\Longleftrightarrow} [(A \cap B^C) \cup B] \cap [(A \cap B^C) \cup A^C]$$

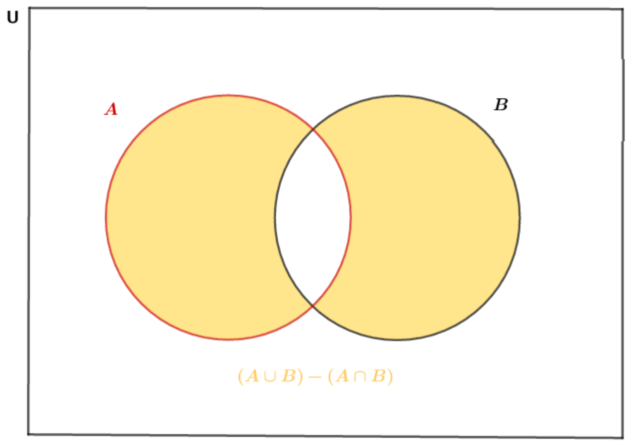
$$\underset{Distributiva}{\Longleftrightarrow} [(A \cup B) \cap (B^C \cup B)] \cap [(A \cup A^C) \cap (B^C \cup A^C)] \Leftrightarrow [(A \cup B) \cap T] \cap [T \cap (B^C \cup A^C)]$$

$$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (B^C \cup A^C) \underset{De\ Morgan}{\Longleftrightarrow} (A \cup B) \cap (B \cap A)^C \Leftrightarrow (A \cup B) - (B \cap A)$$

A questão pede conjuntos não vazios A, B tal que $(A \cup B) - (A \cap B) = A$.

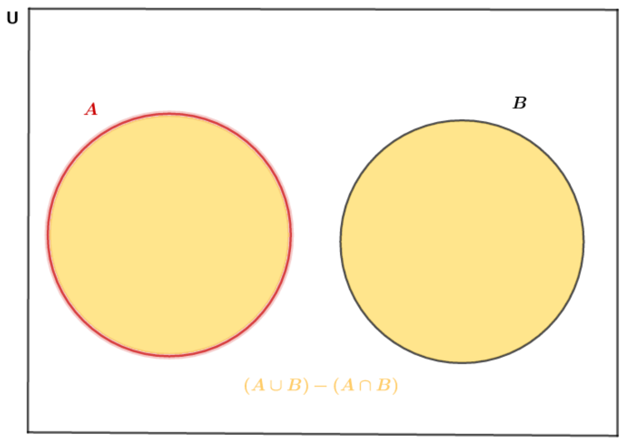
Vamos usar o Diagrama de Venn para representar todos os casos possíveis para $(A \cup B) - (A \cap B)$.

1) A e B não são disjuntos.



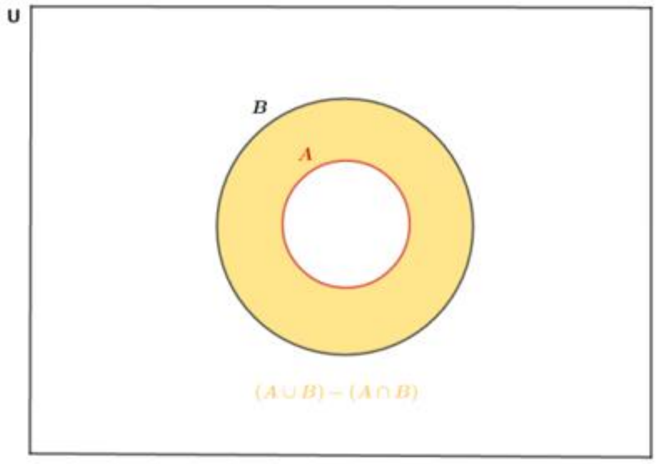
A região em amarelo representa $(A \cup B) - (A \cap B)$. Veja que ela não satisfaz a condição $(A \cup B) - (A \cap B) = A$, já que B é não vazio. Logo, nesse caso não temos solução.

2) A e B são disjuntos.



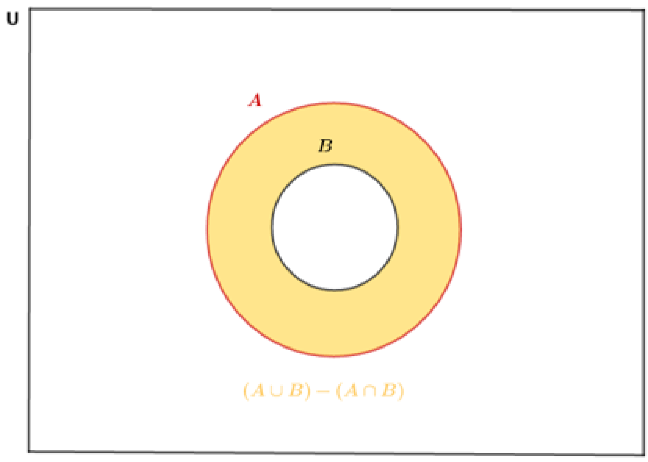
Esse caso também não satisfaz a condição já que B é um conjunto não vazio. Logo, não tem solução.

3) $A \subset B$.



B é um conjunto não vazio⇒não temos solução.

4) $B \subset A$.



B é um conjunto não vazio⇒não temos solução.

Gabarito: Não existem conjuntos não vazios que satisfaçam a relação.

---

26. (ITA/2011)

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C: C \subset B \backslash A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

I. $n(B) - n(A)$ é único,

II. $n(B) + n(A) \leq 128$,

III. A dupla ordenada $\big(n(A), n(B)\big)$ é única,

É (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e II.

e) Nenhuma.

Comentários

Para analisar as afirmações precisamos traduzir o enunciado.

Vamos traduzir $n(\{C: C \subset B\backslash A\}) = 128$

Ele diz que o número de elementos do conjunto $\{C: C \subset B\backslash A\}$ vale 128.

O que é o conjunto $\{C: C \subset B\backslash A\}$?

Ele diz que os elementos desse conjunto são os subconjuntos C tal que C está contido em $B\backslash A$. Então, ele representa o conjunto das partes de $B\backslash A$. Desse modo: $\{C: C \subset B\backslash A\} = P(B\backslash A)$

Logo, $n[P(B\backslash A)] = 128$

Mas 128 pode ser escrito como 2^7.

$$n[P(B\backslash A)] = 2^7 = 2^{n(B\backslash A)} \Rightarrow n(B\backslash A) = 7$$

O enunciado diz que $A \subset B$. Assim, quando fazemos $B\backslash A = B - A$, devemos remover todos os elementos de A presentes em B. Desse modo, podemos escrever:

$$n(B\backslash A) = n(B) - n(A) = 7$$

I. Verdadeira.

Conforme analisado acima, a afirmação é verdadeira já que $n(B) - n(A)$ possui um único valor.

II. Falsa.

A única condição do enunciado é $n(B) - n(A) = 7$. Então, se tomarmos $n(B) = 87$ e $n(A) = 80$, encontramos $n(B) + n(A) = 167 > 128$.

III. Falsa.

Podemos ter uma infinidade de duplas ordenadas que satisfazem as condições do problema $n(B) - n(A) = 7$.

Gabarito: "a".

---

27. (ITA/2010/Modificada)

Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B, n(B\backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B), n(A \cup B) = 22$ e $[n(A)]^2 = n(B) \cdot n(C)$.

a) Determine $n(C)$.

b) Determine $n\big(P(B\backslash C)\big)$.

Comentários

a) Pelo enunciado, como $C \subset B$ temos: $n(B \cap C) = n(C)$.

Sabemos que $n(B\backslash C) = n(B) - n(B \cap C)$. Substituindo na equação $n(B \cap C) = n(C)$:

$$n(B\backslash C) = n(B) - n(C)$$

Mas $n(B\setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B) \Rightarrow n(B) - n(C) = 3n(C) = 6n(A \cap B)$

$$\Rightarrow n(B) - n(C) = 3n(C) \Rightarrow n(B) = 4n(C)$$

$$\Rightarrow 3n(C) = 6n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{n(C)}{2}$$

Só falta descobrir o valor de $n(A)$ usando $[n(A)]^2 = n(B) \cdot n(C)$.

Substituindo $n(B) = 4n(C)$:

$$[n(A)]^2 = 4n(C) \cdot n(C) \Rightarrow [n(A)]^2 = 4[n(C)]^2$$

Aplicando a raiz quadrada nos dois lados:

$$\Rightarrow n(A) = 2n(C)$$

Vamos chamar $n(C)$ de x e usar a fórmula dos conjuntos $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Substituindo os valores de $n(A \cup B) = 22, n(A) = 2n(C), n(B) = 4n(C), n(A \cap B) = \frac{n(C)}{2}$ e $n(C) = x$ na fórmula:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$22 = 2x + 4x - \frac{x}{2} \Rightarrow 22 = \frac{11x}{2} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow n(C) = 4$$

b) Usando a fórmula de cardinalidade para o conjunto das partes:

$$n\big(P(B\setminus C)\big) = 2^{n(B\setminus C)}$$

$$n(B\setminus C) = 6n(A \cap B) = 3n(C) = 3 \cdot 4 = 12$$

Portanto:

$$n\big(P(B\setminus C)\big) = 2^{n(B\setminus C)} = 2^{12} = 4096$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{n(C) = 4}$ b) $\boldsymbol{n\big(P(B\setminus C)\big) = 4096}$.

---

28. (ITA/2010)

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III. $(A\setminus B) \cup (B\setminus A) = (A \cup B)\setminus(A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e III.

e) Nenhuma.

Comentários

I. Verdadeira.

A negação é dada por: $x \notin A \cap B$

Isso é equivalente a: $x \in \overline{A \cap B}$

Podemos aplicar o Teorema de De Morgan no conjunto $\overline{A \cap B}$.

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Desse modo $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Isso significa que $x \in \bar{A}\ ou\ x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \notin A\ ou\ x \notin B$.

II. Verdadeira.

Basta aplicar a propriedade da distributiva dos conjuntos.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

III. Verdadeira.

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

Vamos desenvolver o conjunto $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$ e tentar chegar ao conjunto $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Lembrando que para o operador diferença temos: $A - B = A \backslash B = A \cap \bar{B}$. Usando essa igualdade para desenvolver o conjunto:

$$(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$$

Aplicando o Teorema de De Morgan:

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

Usando a distributiva:

$$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = [(A \cup B) \cap \bar{A}] \cup [(A \cup B) \cap \bar{B}]$$

Usando novamente a distributiva:

$$[(A \cup B) \cap \bar{A}] \cup [(A \cup B) \cap \bar{B}] = [(A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})] \cup [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})]$$
$$= [\emptyset \cup (B \cap \bar{A})] \cup [(A \cap \bar{B}) \cup \emptyset] = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Gabarito: "e".

---

29. (ITA/2009)

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}, B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \backslash B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 4.

e) 8.

Comentários

Vamos usar as informações do enunciado para encontrar alguma relação.

Primeiro, usando $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$:

Simplificando $(B^C \cup A)^C$ usando as propriedades dos conjuntos:

$$(B^C \cup A)^C = (B^C)^C \cap A^C = B \cap A^C$$

$$\Rightarrow (B \cap A^C) = \{f, g, h\}$$

Agora para $B^C \cap A = \{a, b\}$:

Sabemos pelas propriedades que $B^C \cap A = A \cap B^C$

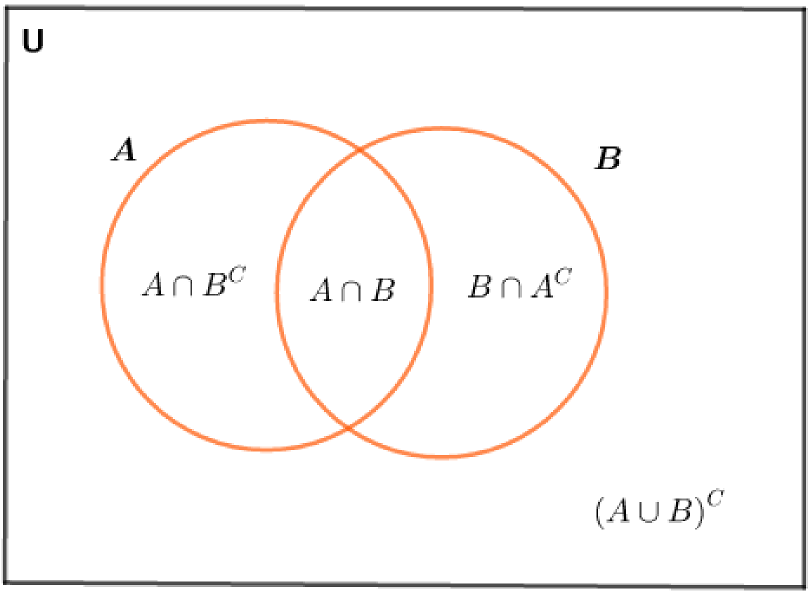
$$\Rightarrow A \cap B^C = \{a, b\}$$

Por último, vamos analisar $A^C \backslash B = \{d, e\}$. Vamos simplificar $A^C \backslash B$ usando as propriedades dos conjuntos:

$$A^C \backslash B = A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$$

$$\Rightarrow (A \cup B)^C = \{d, e\}$$

Vamos usar o Diagrama de Venn-Euler para ilustrar a situação:



Perceba que não sabemos quais os elementos de $A \cap B$. Porém, conhecemos os elementos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Usando as informações do diagrama, temos a seguinte relação:

$$U = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^C) \cup (A \cup B)^C$$

Agora, usando as informações que encontramos:

$$\Rightarrow (B \cap A^C) = \{f, g, h\}$$

$$\Rightarrow (A \cap B^C) = \{a, b\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B)^C = \{d, e\}$$

Substituindo na relação, obtemos:

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\} = \{a, b\} \cup (A \cap B) \cup \{f, g, h\} \cup \{d, e\} = \{a, b, d, e, f, g, h\} \cup (A \cap B)$$

Veja:

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\} = \{a, b, d, e, f, g, h\} \cup (A \cap B)$$

O único elemento que falta em $\{a, b, d, e, f, g, h\}$ é c. Portanto $(A \cap B) = \{c\}$.

A questão pede o número de elementos do conjunto das partes de $A \cap B$. Sabemos que esse valor é dado por $n\big(P(A \cap B)\big) = 2^{n(A\cap B)}$

Portanto:

$$n\big(P(A \cap B)\big) = 2^1 = 2$$

Gabarito: "c".

---

30. (ITA/2008)

Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}, Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$.

Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$

c) $\{1, 3, 7, 8\}$

d) $\{1, 3\}$

e) $\{7, 8\}$

Comentários

Primeiramente, vamos escrever as informações do exercício:

$$i)\ (X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$ii)\ Y = \{5, 6\}$$
$$iii)\ Z \cap Y = \emptyset$$
$$iv)\ W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$$
$$v)\ X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$$

A questão pede $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$, vamos encontrar o valor de cada conjunto X, Y, Z, W usando os dados do problema.

Já sabemos que de (ii) que $Y = \{5, 6\}$.

Vamos analisar o conjunto (i):

$$i)\ (X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$$

O conjunto acima nos permite descobrir os elementos que pertencem a X e Z.

Vamos separar em duas partes: $(X - Y)\ e\ Z$

Veja a intersecção $\cap Z$, isso nos permite afirmar que os elementos de (i) estão no conjunto Z:

$$\{1, 2, 3, 4\} \subset Z$$

A primeira parte $(X - Y)$ nos permite dizer que os elementos de X que não estão em Y é:

$$\{1,2,3,4\} \subset X$$

Agora, vamos analisar $(iii)\ Z \cap Y = \emptyset$:

Ela diz que Z não possui elementos em comum com Y, assim $\{5,6\}$ não pertence a Z.

Usando $(iv)\ W \cap (X - Z) = \{7,8\}$:

Situação análoga a (i). Podemos separar em duas partes e encontrar os elementos de cada um:

Assim, $\{7,8\} \subset W$

$$W \cap (X - Z) \Rightarrow \{7,8\} \subset X \Rightarrow \{1,2,3,4,7,8\} \subset X$$

Usando a última informação $(v)\ X \cap W \cap Z = \{2,4\}$:

Isso nos permite afirmar $\{2,4\} \subset X, Z, W$:

$$X = \{1,2,3,4,7,8\}$$

$$Y = \{5,6\}$$

$$Z = \{1,2,3,4\}$$

$$W = \{2,4,7,8\}$$

A questão pede $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$:

$$(Z \cup W) = \{1,2,3,4,7,8\}$$

$$X \cap (Z \cup W) = \{1,2,3,4,7,8\}$$

$$(Y \cup Z) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$W \cap (Y \cup Z) = \{2,4\}$$

$$[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)] = \{1,2,3,4,7,8\} - \{2,4\} = \{1,3,7,8\}$$

Esse modo de resolver seria o modo como eu resolveria durante a prova. Já que é uma questão de múltipla escolha, não devemos perder tempo com formalidades.

Gabarito: "c".

---

31. (ITA/2007/Modificada)

Se A, B, C forem conjuntos tais que

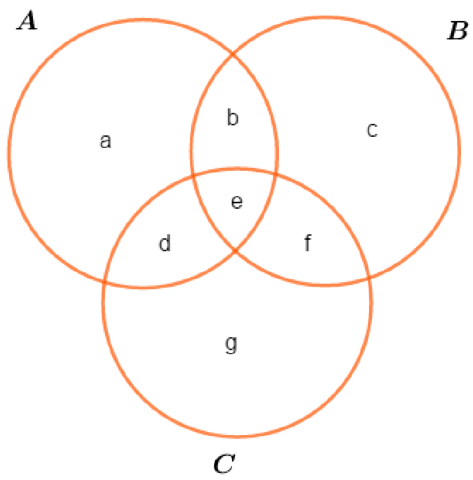
$n(A \cup B) = 23, n(B - A) = 12, n(C - A) = 10,$

$n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4,$

Encontre os valores de $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$.

Comentários

Vamos resolver usando o Diagrama de Venn-Euler:



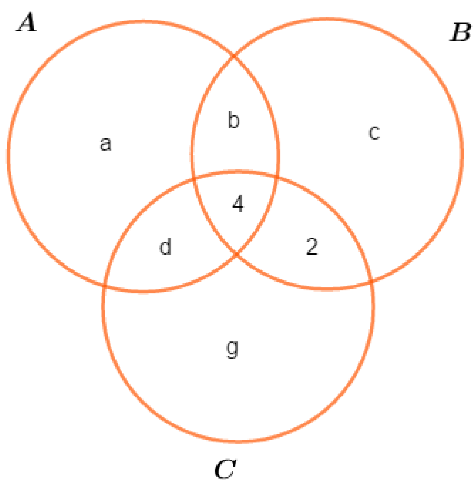
Nomeamos cada região do círculo com letras minúsculas.

Pelo enunciado, vamos descobrir os valores de cada região:

$$n(A \cap B \cap C) = 4 = e$$

$$n(B \cap C) = 6 = e + f \Rightarrow f = 2$$

Agora nosso diagrama fica assim:



Usando as outras informações, temos:

$$n(B - A) = 12$$

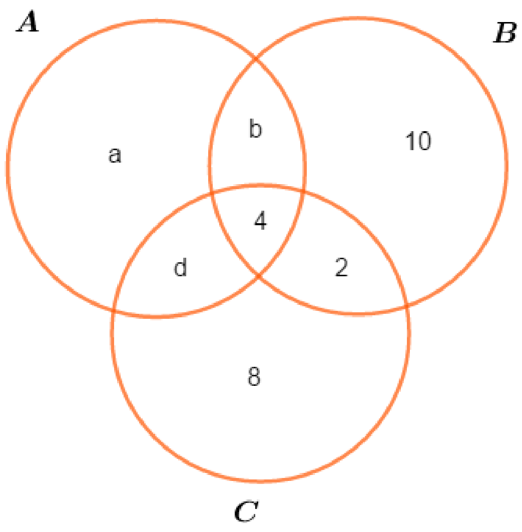
Veja que $n(B - A)$ é igual a $c + 2$ que é a região de elementos de B menos os elementos de A.

$$n(B - A) = c + 2 = 12 \Rightarrow c = 10$$

Agora para $n(C - A) = 10$ usando o mesmo raciocínio:

$$g + 2 = 10 \Rightarrow g = 8$$

Atualizando nosso diagrama:



Falta usar $n(A \cup B) = 23$.

Pela figura:

$$n(A \cup B) = a + b + d + 4 + 10 + 2 = 23$$

Devemos encontrar os valores de $n(A), n(A \cup C)$ e $n(A \cup B \cup C)$.

Note que $a + b + d + 4 = n(A)$. Assim, substituindo $n(A)$ na equação, conseguimos descobrir o valor de $n(A)$.

$$n(A) + 10 + 2 = 23$$

$$n(A) + 12 = 23$$

$$n(A) = 11$$

Vamos encontrar $n(A \cup C)$. Usando o diagrama:

$$n(A \cup C) = a + b + d + 4 + 2 + 8 = (a + b + d + 4) + 10 = n(A) + 10 = 11 + 10 = 21$$

$$\Rightarrow n(A \cup C) = 21$$

Agora o último termo:

$$n(A \cup B \cup C) = a + b + d + 4 + 10 + 2 + 8 = (a + b + d + 4) + 10 + 2 + 8 = n(A) + 20 = 31$$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 31$$

Gabarito: $\boldsymbol{n(A) = 11, n(A \cup C) = 21}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = 31}$.

---

32. (ITA/2006)

Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de $P(U)$ com a seguinte propriedade:

Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é:

a) 2^{n-1}

b) $n/2$, se n for par, e $(n+1)/2$ se n for ímpar

c) $n+1$

d) $2^n - 1$

e) $2^{n-1} + 1$

Comentários

Seja $U = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, um conjunto não vazio com n elementos e $n \geq 1$.

Vamos escrever o conjunto das partes de U:

$$P(U) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$$

S é subconjunto de $P(U)$, isto é, S pode possuir quaisquer elementos de $P(U)$ e deve satisfazer a condição:

Sendo A e B, elementos de S, então A está contido em B ou B está contido em A.

Isto é, se tomarmos, por exemplo:

$A = \{a_1\}$ e $B = \{a_1, a_2\}$, eles são subconjuntos de $P(U)$ e $A \subset B$, pois $\{a_1\} \subset \{a_1, a_2\}$, logo satisfazem a condição.

Mas, se tomarmos $A = \{a_1\}$ e $B = \{a_2\}$, eles são elementos de $P(U)$ e não satisfazem a condição!

Pois, $\{a_1\} \not\subset \{a_2\}\ e\ \{a_2\} \not\subset \{a_1\}$.

A condição diz que tomando dois elementos de S, devemos ter que A é subconjunto de B ou B é subconjunto de A.

Essa condição é satisfeita quando os elementos de S sempre possuírem elementos em comum, desse modo:

$$S = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$$

Veja que o elemento $\emptyset$ foi incluído para aumentar o número de elementos de S e maximizar esse valor.

Assim, perceba que o número de elementos será $n+1$ que é a quantidade de elementos de não vazios somado com o elemento vazio.

Portanto $n(S) = n + 1$.

Gabarito: "c".

---

33. (ITA/2005/Modificada)

Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}, T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.

II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

Comentários

I. Falsa.

A afirmação diz que $\{0\}$ é elemento de S. Isso não é verdade. Quando colocamos 0 entre "{ }", estamos dizendo que o subconjunto $\{0\}$ é elemento de S, o que não é verdade.

A segunda parte pede os elementos em comum entre S e U. Vemos que o único elemento em comum é o 0.

$$S = \{0, 2, 4, 6\}$$
$$U = \{0, 1\}$$

Portanto, $S \cap U = \{0\} \neq \emptyset$

II. Falsa.

$\{2\} \subset S \backslash U$, isso quer dizer que $\{2\}$ é subconjunto do conjunto formado por $S \backslash U$.

Vamos encontrar $S \backslash U$. Essa operação é a diferença $S \backslash U = S - U$.

O único elemento em comum entre S e U é 0, logo devemos remover esse elemento de S:

$$S \backslash U = \{2, 4, 6\}$$

Portanto, $\{2\} \subset \{2, 4, 6\} = S \backslash U$.

Agora, vamos verificar $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.

$S \cap T \cap U$ é a intersecção entre os três conjuntos, então devemos encontrar os elementos presentes nos três conjuntos. Não temos nenhum elemento que satisfaz essa condição, desse modo:

$$S \cap T \cap U = \emptyset$$

Gabarito: Ambas são falsas.

---

34. (ITA/2004)

Seja o conjunto $S = \{r \in Q: r \geq 0 \; e \; r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S \; e \; \frac{7}{5} \in S$.

II. $\left\{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\right\} \cap S = \emptyset$.

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I e II

b) I e III

c) II e III

d) I

e) II

Comentários

Vamos decifrar o conjunto $S = \{r \in Q: r \geq 0 \; e \; r^2 \leq 2\}$.

Ele diz que os elementos de S são representados por r e estes são números racionais (da forma p/q)

A primeira parte da propriedade diz que $r \geq 0$, assim, r é um número positivo.

A segunda parte diz que $r^2 \leq 2$.

Ainda não vimos radiciação, mas não se preocupe, veremos detalhadamente na aula de radiciação.

$$r^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{2}$$

Assim, juntando as duas condições, obtemos:

$$0 \leq r \leq \sqrt{2}$$

I. Verdadeiro.

Precisamos saber se esses elementos estão no intervalo definido por S.

Vamos deixar esses números dentro de uma raiz, pois assim será mais fácil analisá-lo.

Primeiro para $\frac{5}{4}$:

Elevando esse número ao quadrado e jogando dentro de uma raiz, encontramos: $\sqrt{\frac{25}{16}}$

Agora, dividindo 25 por 16:

$$\sqrt{\frac{25}{16}} \sim \sqrt{1{,}5} < \sqrt{2}$$

Lembre-se que não precisamos saber o valor exato do número, basta encontrar um valor que nos permita fazer a comparação. Então não perca tempo com isso!

Agora, fazendo a mesma coisa para $\frac{7}{5}$:

$$\frac{7}{5} = \sqrt{\frac{49}{25}} \sim \sqrt{1{,}9} < \sqrt{2}$$

Logo, os dois números são elementos de S.

II. Falso.

$$\{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap \{r \in Q: 0 \leq r \leq \sqrt{2}\} = S$$

A única diferença entre o conjunto dessa afirmação e o conjunto da questão é que os elementos daquela são números reais e estas são números racionais.

III. Falso.

$\sqrt{2}$ é um número irracional, logo ele não pertence ao conjunto S.

Gabarito: “d”.

---

35. (ITA/2004)

Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$.

II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$.

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I e III.

b) Apenas II e IV.

c) Apenas II e III.

d) Apenas IV.

e) Todas as afirmações.

Comentários

I. Falsa.

O conjunto U possui 10 elementos, logo $n(U) = 10$.

Atenção! $\emptyset$ não é elemento de U, pois ele não está listado no conjunto!

Assim, $\emptyset \notin U$.

II. Verdadeira.

Pelas propriedades vistas no tópico de subconjuntos, sabemos que $\emptyset$ sempre será subconjunto de qualquer conjunto. Portanto: $\emptyset \subset U$.

III. Verdadeira.

$5 \in U$, pois 5 está enumerado no conjunto U.

$\{5\}$ é subconjunto de U, porque 5 é um dos elementos de U. (Lembre-se que quando colocamos elementos entre chaves "{ }", elas se tornam conjuntos)

IV. Falsa.

Pegadinha! Perceba que faltou colocar chaves "{ }" no elemento 5 no outro lado da igualdade. O correto seria:

$$\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$$

Gabarito: "c".

---

36. (ITA/2003)

Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U, B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B = \emptyset$, então $B \subset A^C$.

II. $B \backslash A^C = B \cap A$.

Comentários

I. Pela definição de $A \cap B = \emptyset$:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \in B\ e\ x \notin A$$

Podemos escrever $x \notin A$ de outro modo:

$$x \notin A \Leftrightarrow x \in A^C$$

Isto é, se x não é elemento de A, então x é elemento do complemento de A (A^C).

Desse modo:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \in B\ e\ x \in A^C \Leftrightarrow B \subset A^C \text{ (definição de subconjunto)}$$

II. Pela definição de $B \backslash A^C$:

$$B \backslash A^C = \{x | x \in B \wedge x \notin A^C\}$$

Usando a mesma ideia da (I):

$$x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A$$

Logo:

$$B \backslash A^C = \{x | x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$$

Gabarito: Demonstração

---

37. (ITA/2002)

Sejam *A* um conjunto com 8 elementos e *B* um conjunto tal que $A\ U\ B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \backslash A)\ U\ P(\emptyset)$ é igual a

a) 8.

b) 16.

c) 20.

d) 17.

e) 9.

Comentários

A questão diz que $n(A) = 8$ e $n(A \cup B) = 12$. Vamos usar a fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Substituindo os valores na equação:

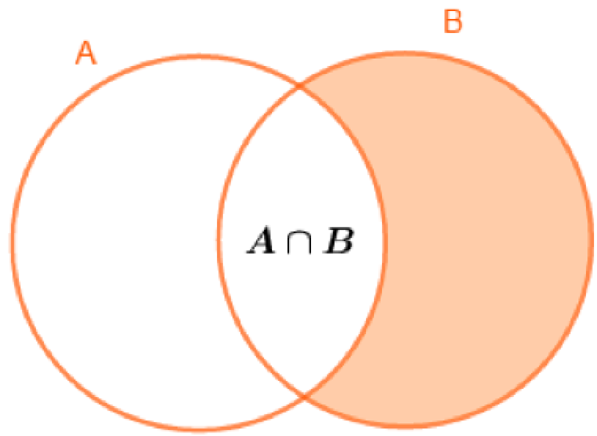
$$12 = 8 + n(B) - n(A \cap B)$$

Passando o 8 para o outro lado:

$$12 - 8 = n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(B) - n(A \cap B) = 4$$

Perceba que $n(B) - n(A \cap B)$ é $n(B \cap A^C)$:



Mas $(B \cap A^C) = (B \backslash A)$. Logo: $n(B \backslash A) = 4$

Temos que achar $n\big(P(B \backslash A) \cup P(\emptyset)\big)$:

Aplicando a fórmula da cardinalidade para dois conjuntos e substituindo $B \backslash A$ por $B \cap A^C$:

$$n\big(P(B \cap A^C) \cup P(\emptyset)\big) = n\big(P(B \cap A^C)\big) + n\big(P(\emptyset)\big) - n\big(P(B \cap A^C) \cap P(\emptyset)\big)$$

Vamos simplificar $P(B \cap A^C) \cap P(\emptyset)$.

Isso pode ser feito analisando $P(\emptyset)$. O único subconjunto do conjunto vazio é o próprio $\emptyset$. Logo, a intersecção de $P(B \cap A^C) \cap P(\emptyset) = P(\emptyset)$, pois pelas propriedades do subconjunto o $\emptyset$ está presente em ambos conjuntos.

Desse modo:

$$n\big(P(B \cap A^C) \cup P(\emptyset)\big) = n\big(P(B \cap A^C)\big) + n\big(P(\emptyset)\big) - n\big(P(B \cap A^C) \cap P(\emptyset)\big)$$
$$= n\big(P(B \cap A^C)\big) + n\big(P(\emptyset)\big) - n(\big(P(\emptyset)\big) = n\big(P(B \cap A^C)\big) = n\big(P(B \backslash A)\big)$$

Substituindo $n(B \backslash A) = 4$ e usando a fórmula $n\big(P(B \backslash A)\big) = 2^{n(B \backslash A)}$, encontramos:

$$n\big(P(B \backslash A)\big) = 2^4 = 16$$

Gabarito: "b".

---

38. (ITA/2001)

Sejam $X, Y\ e\ Z$ subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$, não-vazios. Com respeito às afirmações:

I. $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\} = X$

II. Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y$

III. Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$

Temos que:

a) Apenas (I) é verdadeira.

b) Apenas (I) e (II) são verdadeiras.

c) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

d) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

e) Todas são verdadeiras.

Comentários

I) Vamos simplificar a expressão e ver se chegamos à igualdade.

$$X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\}$$

$$X \cap \{[Y \cap (X^C \cap Y^C)] \cup [X \cup ((X^C)^C \cup (Y^C)^C)]\}$$

$$X \cap \{[Y \cap (Y^C \cap X^C)] \cup [X \cup (X \cup Y)]\}$$

$$X \cap \{[(Y \cap Y^C) \cap X^C] \cup (X \cup Y)\}$$

$$X \cap \{[\emptyset \cap X^C] \cup (X \cup Y)\}$$

$$X \cap \{\emptyset \cup (X \cup Y)\}$$

$$X \cap \{X \cup Y\}$$

$$X$$

$$\therefore\ X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\} = X$$

Verdadeiro.

II) Vamos simplificar $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)]$, usando $Z \subset X$:

$$(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)]$$

$$(Z \cup Y) \cup [(X \cup Z^C) \cap (X \cup Y)]$$

Vamos analisar as propriedades que surgem com $Z \subset X$.

Sabemos que $Z \cup Z^C = \mathbb{R}$.

Como $Z \subset X \Rightarrow X \cup Z^C = \mathbb{R}$.

$$(Z \cup Y) \cup [\mathbb{R} \cap (X \cup Y)]$$

$$(Z \cup Y) \cup (X \cup Y)$$

$$Z \cup Y \cup X \cup Y$$

$$Z \cup Y \cup X$$

$$Z \cup X \cup Y$$

$$Z \subset X \Rightarrow Z \cup X \cup Y = X \cup Y$$

$$\therefore (Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y.$$

Verdadeiro.

III) Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$?

Analisando $(X \cup Y)^C \subset Z \Leftrightarrow X^C \cap Y^C \subset Z$. Veja que podemos negar essa afirmação com um exemplo:

Considere $X = \{a\}, Y = \{b\}\ e\ Z = \mathbb{R} - \{a, b\}$.

$$(X \cup Y)^C = \{a, b\}^C = \mathbb{R} - \{a, b\} \subset Z$$

Encontrando Z^C:

$$Z^C = \{a, b\}$$

$$\{a, b\} \not\subset \{a\} = X$$

$$Z^C \not\subset X$$

∴Falsa.

Gabarito: “b”.

---

39. (ITA/2000)

Denotamos por $n(x)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam $A, B\ e\ C$ conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8, n(A \cup C) = 9, n(B \cup C) = 10, n(A \cup B \cup C) = 11\ e\ n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

a) 11.

b) 14.

c) 15.

d) 18.

e) 25.

Comentários

Pela fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão, temos para 3 conjuntos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)\ \ (i)$$

O enunciado da questão nos dá os valores de $n(A \cup B \cup C)$ e $n(A \cap B \cap C)$ e pede para encontrar $n(A) + n(B) + n(C)$.

Precisamos encontrar uma relação para $n(A \cap B), n(A \cap C)\ e\ n(B \cap C)$.

Vamos usar a fórmula para 2 conjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Isolando $n(A \cap B)$:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

Do enunciado $n(A \cup B) = 8$:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 8\ \ (ii)$$

Usando a mesma ideia para $n(A \cup C)\ e\ n(B \cup C)$:

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$$

$$n(A \cap C) = n(A) + n(C) - n(A \cup C)$$

$$n(A \cup C) = 9$$

$$n(A \cap C) = n(A) + n(C) - 9\ \ (iii)$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$$

$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$$

$$n(B \cup C) = 10$$

$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - 10 \ \ (iv)$$

Juntando (ii), (iii), (iv) em (i) e usando $n(A \cup B \cup C) = 11 \ e \ n(A \cap B \cap C) = 2$:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$11 = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A) + n(B) - 8] - [n(A) + n(C) - 9] - [n(B) + n(C) - 10] + 2$$

$$11 = n(A) + n(B) + n(C) - n(A) - n(B) + 8 - n(A) - n(C) + 9 - n(B) - n(C) + 10 + 2$$

$$11 = 29 - n(A) - n(B) - n(C)$$

$$n(A) + n(B) + n(C) = 29 - 11 = 18$$

Gabarito: "d".

---

40. (ITA/1996)

Analise as afirmações:

I. $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \emptyset$

II. $(A - B^C)^C = B - A^C$

III. $[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = A$

Comentários

I. V.

$(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = (A \cap B^C)^C \cap (B^C \cap A) = (A^C \cup B) \cap (B^C \cap A) = [(A^C \cup B) \cap B^C] \cap A$
$= [(A^C \cap B^C) \cup (B \cap B^C)] \cap A = [(A^C \cap B^C) \cup \emptyset] \cap A = (A^C \cap B^C) \cap A = A \cap (A^C \cap B^C)$
$= (A \cap A^C) \cap B^C = \emptyset \cap B^C = \emptyset$

II. F.

$$(A - B^C)^C = [(A \cap (B^C)^C]^C = (A \cap B)^C$$

$$B - A^C = B \cap (A^C)^C = B \cap A = A \cap B$$

$$(A - B^C)^C = (A \cap B)^C \neq A \cap B = B - A^C$$

III. F.

$[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = (A^C - B)^C \cup (B - A)^C = (A^C \cap B^C)^C \cup (B \cap A^C)^C$
$= [(A^C)^C \cup (B^C)^C] \cup [B^C \cup (A^C)^C] = (A \cup B) \cup (B^C \cup A) = A \cup B \cup B^C \cup A = A \cup B \cup B^C$
$= A \cup (B \cup B^C) = A \cup U = U$

Gabarito: I) V II) F III) F

---

41. (ITA/1987)

Sejam F e G dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta.

a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.

b) Se $F \cap G = \emptyset$, então necessariamente $G \subset F$.

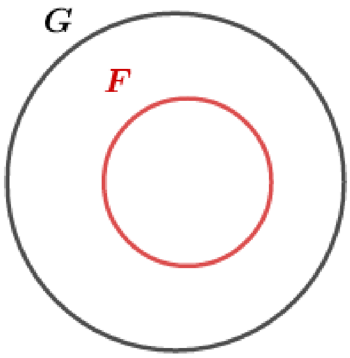
c) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.

d) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.

e) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então $(F \cap G) \cup G = \mathbb{R}$

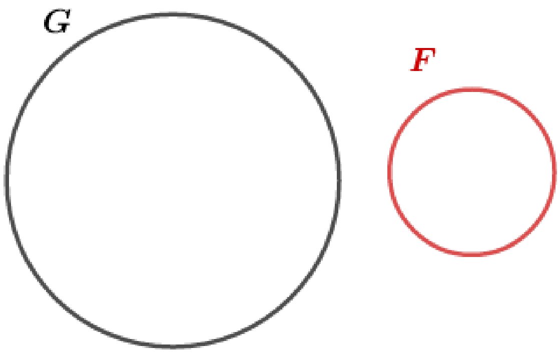
Comentários

a) Errado. Veja o diagrama de Venn-Euler:



A figura representa $F \subset G\ e\ G \neq F$. Note que $F = F \cap G \neq F \cup G$

b) Errado.

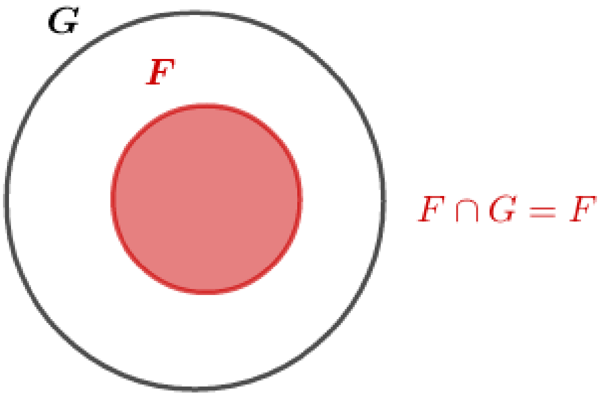


$F \cap G = \emptyset$ implica que F e G não possuem elementos em comum, logo é impossível que $G \subset F$.

c) Errado.

$$F \cap G = F \Rightarrow F \subset G$$

Veja o diagrama:

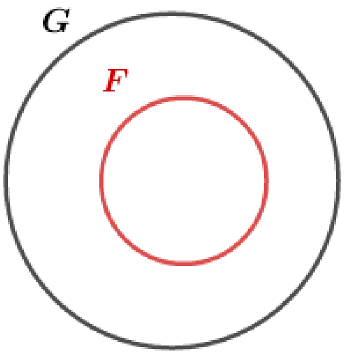


d) Certo.

$$F \subset G \wedge G \subset F \Rightarrow F = G$$

Assim, $F \cap G = F$ e $F \cup G = F$

e) Errado.



A figura representa $F \subset G\ e\ G \neq F$.

Conforme o diagrama, temos:

$$F \cap G = F \Rightarrow (F \cap G) \cup G = F \cup G = G$$

Gabarito: "d".

---

42. (ITA/1985/Modificada)

Sejam X um conjunto não vazio e A e B dois subconjuntos. Analise as afirmações:

I. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B} \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$

II. $A - \emptyset = A\ e\ A - B = A - (A \cap B)$

III. $A - B \neq A \cap \bar{B}$

Comentários

I. V.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \in A\ e\ x \notin B \Leftrightarrow \forall x, x \in A\ e\ x \in \bar{B} \Rightarrow A \subset \bar{B}$$

*Se $x \notin B$, x não é elemento de B então x será elemento de seu complementar $\bar{B}$. Logo, $x \in \bar{B}$.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \in B\ e\ x \notin A \Leftrightarrow \forall x, x \in B\ e\ x \in \bar{A} \Rightarrow B \subset \bar{A}$$

II. V.

$$A - \emptyset = A \cap \emptyset^C = A \cap U = A$$

$$\therefore A - \emptyset = A$$

$$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^C = A \cap (A^C \cup B^C) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B^C) = \emptyset \cup (A \cap B^C) = A \cap B^C = A - B$$

$$\therefore A - B = A - (A \cap B)$$

III. F.

Sabemos que podemos escrever $A - B = A \cap \bar{B}$.

Gabarito: I) V II) V III) F

---

43. (IME/2016)

Dados três conjuntos quaisquer F, G e H. O conjunto $G - H$ é igual ao conjunto:

a) $(G \cup F) - (F - H)$

b) $(G \cup H) - (H - F)$

c) $\big(G \cup (H - F)\big) \cap \bar{H}$

d) $\bar{G} \cup (H \cap F)$

e) $(\bar{H} \cap G) \cap (G - F)$

Comentários

A questão pede para encontrar um conjunto que seja a identidade de $G - H$.

Vamos analisar cada alternativa.

a) $(G \cup F) - (F - H)$

$$(G \cup F) \cap \left(\overline{F \cap \bar{H}}\right) =$$

$$(G \cup F) \cap (\bar{F} \cup H)$$

Procuramos $G - H = G \cap \bar{H}$. Perceba a ausência de $\bar{H}$ no conjunto acima. Logo, esse não é o conjunto que procuramos.

b) $(G \cup H) - (H - F)$

$$(G \cup H) \cap \left(\overline{H \cap \bar{F}}\right) =$$

$$(G \cup H) \cap (\bar{H} \cup F) =$$

$$[(G \cup H) \cap \bar{H}] \cup [(G \cup H) \cap F] =$$

$$[(G \cap \overline{H}) \cup (H \cap \overline{H})] \cup [(G \cup H) \cap F] =$$
$$[(G \cap \overline{H}) \cup \emptyset] \cup [(G \cup H) \cap F] =$$
$$(G \cap \overline{H}) \cup [(G \cup H) \cap F]$$

Encontramos $G \cap \overline{H}$ no conjunto acima, porém ela possui a união do conjunto $(G \cup H) \cap F$. Logo, não é o conjunto que procuramos.

c) $\big(G \cup (H - F)\big) \cap \overline{H}$

$$\big(G \cup (H \cap \overline{F})\big) \cap \overline{H} =$$
$$(G \cap \overline{H}) \cup [(H \cap \overline{F}) \cap \overline{H}] =$$
$$(G \cap \overline{H}) \cup [\overline{F} \cap H \cap \overline{H}] =$$
$$(G \cap \overline{H}) \cup [\overline{F} \cap \emptyset] =$$
$$(G \cap \overline{H}) \cup \emptyset = G \cap \overline{H} = G - H$$

Essa é a resposta.

d) $\bar{G} \cup (H \cap F)$

Essa alternativa não possui $\overline{H}$ nem G.

e) $(\overline{H} \cap G) \cap (G - F)$

$$(G \cap \overline{H}) \cap (G \cap \overline{F}) =$$
$$G \cap \overline{H} \cap G \cap \overline{F} =$$
$$G \cap \overline{H} \cap \overline{F}$$

Gabarito: “c”.

---

44. (IME/2010)

Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 e S_2 tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1, (P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$. Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

Comentários

Para demonstrar que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$, devemos mostrar que:

$$x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cap P_2)$$

Vamos analisar $x \in (S_1 \cap S_2)$. Pela definição do conjunto intersecção, temos:

$$x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in S_1 \wedge x \in S_2$$

Mas, do enunciado:

$$(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$$

Dessa forma, temos:

$$x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cup P_2)$$

E pela definição do conjunto união, temos que $x \in (P_1 \cup P_2)$ implica $x \in P_1$ ou $x \in P_2$.

Devemos analisar cada caso.

I) Suponha $x \in P_1$.

Nesse caso, temos:

$$\begin{cases} x \in S_1 \\ x \in S_2 \\ x \in P_1 \end{cases}$$

Como o enunciado afirma que $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$, então:

$$x \in P_1 \wedge x \in S_2 \Rightarrow x \in (P_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in P_2$$

Assim, concluímos que $x \in P_1$ e $x \in P_2$, logo $x \in (P_1 \cap P_2)$.

II) Suponha $x \in P_2$.

Nesse caso, temos:

$$\begin{cases} x \in S_1 \\ x \in S_2 \\ x \in P_2 \end{cases}$$

Como o enunciado afirma que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, então:

$$x \in P_2 \wedge x \in S_1 \Rightarrow x \in (P_2 \cap S_1) \Rightarrow x \in P_1$$

Assim, concluímos que $x \in P_1$ e $x \in P_2$, logo $x \in (P_1 \cap P_2)$.

Portanto, mostramos que, em qualquer um dos casos, $x \in (S_1 \cap S_2)$ implica $x \in (P_1 \cap P_2)$, ou seja, $x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cap P_2)$.

Ou, podemos escrever:

$$(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$$

Gabarito: Prova

---

45. (IME/2009)

Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por $X\Delta\, Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Pode-se afirmar que

a) $(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$

b) $(X\Delta Y) \cap (X - Y) = \emptyset$

c) $(X\Delta Y) \cap (Y - X) = \emptyset$

d) $(X\Delta Y) \cup (X - Y) = X$

e) $(X\Delta Y) \cup (Y - X) = X$

Comentários

a) Temos que:

$$(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = [(X - Y) \cup (Y - X)] \cap (X \cap Y)$$

$$(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = [(X - Y) \cap (X \cap Y)] \cup [(Y - X) \cap (X \cap Y)]$$

Contudo, $(X - Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$, pois $(X - Y)$ é o conjunto X menos todos os elementos de Y, então, não são incluídos os elementos de $X \cap Y$. Daí:

$$[(X - Y) \cap (X \cap Y)] \cup [(Y - X) \cap (X \cap Y)] = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

Portanto, o item é verdadeiro.

b) Temos:

$$(X\Delta Y) \cap (X - Y) = [(X - Y) \cup (Y - X)] \cap (X - Y) =$$
$$[(X - Y) \cap (X - Y)] \cup [(Y - X) \cap (X - Y)] = (X - Y) \cup \emptyset = (X - Y)$$

Portanto, o item é falso.

c) Temos:

$$(X\Delta Y) \cap (Y - X) = [(X - Y) \cup (Y - X)] \cap (Y - X) =$$
$$[(X - Y) \cap (Y - X)] \cup [(Y - X) \cap (Y - X)] = \emptyset \cup (Y - X) = (Y - X)$$

d) Temos:

$$(X\Delta Y) \cup (X - Y) = (X - Y) \cup (Y - X) \cup (X - Y) = (X - Y) \cup (Y - X) = (X\Delta Y)$$

Portanto, o item é falso.

e) Temos:

$$(X\Delta Y) \cup (Y - X) = (X - Y) \cup (Y - X) \cup (Y - X) = (X - Y) \cup (Y - X) = (X\Delta Y)$$

Portanto, o item é falso.

Gabarito: "a"

---

46. (IME/2000)

Seja o conjunto:

$$D = \{(k_1, k_2) | 1 \leq k_1 \leq 13; 1 \leq k_2 \leq 4; k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$$

Determine quantos subconjuntos $L = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (t_1, t_2), (r_1, r_2)\}, L \subset D$, que existem com 5 (cinco) elementos distintos, que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

i) $x_1 = y_1 = z_1$.

ii) $x_1 \neq t_1, x_1 \neq r_1, t_1 \neq r_1$.

Comentários

De "i)" temos 13 possibilidades em que $x_1 = y_1 = z_1$, pois existem 13 valores possíveis para k. Não somente, para cada uma das possibilidades de k_1, existem $\binom{4}{3}$ possibilidades para x_2, y_2 e z_2 distintos. Além disso, de "ii)" temos $\binom{12}{2}$ possibilidades para t_1 e r_1, pois eles não podem ser iguais aos valores de x_1, y_1, z_1 e r_1 tem que ser diferente de t_1. Para cada t_1, temos 4 valores de t_2 e para cada r_1, temos 4 valores de r_2. Logo, o número de subconjuntos é:

$$13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 54912$$

Gabarito: 54912

---

47. (IME/1991)

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

Comentários

Podemos dividir o conjunto A em três partes:

i) Se os elementos forem da forma $3k + 1$:

$$X = \{1,4,7, \dots ,100\}$$

k varia de 0 a 33, então, temos 34 elementos.

ii) Se os elementos forem da forma $3k + 2$:

$$Y = \{2,5,8, \dots ,101\}$$

k varia de 0 a 33, então, temos 34 elementos.

iii) Se os elementos forem da forma $3k + 3$:

$$Z = \{3,6,9, \dots ,102\}$$

k varia de 0 a 33, então, temos 34 elementos.

Assim, para escolhermos um subconjunto de três elementos em A, temos as seguintes possibilidades:

1) Escolhendo três elementos em qualquer conjunto isoladamente temos que sua soma é múltipla de 3, pois $3k_1 + 3 + 3k_2 + 3 + 3k_3 + 3 = 3(k_1 + k_2 + k_3) + 9$, $3k_1 + 1 + 3k_2 + 1 + 3k_3 + 1 = 3(k_1 + k_2 + k_3) + 3$ e $3k_1 + 2 + 3k_2 + 2 + 3k_3 + 2 = 3(k_1 + k_2 + k_3) + 6$. Podemos ver que, em todos os casos, os elementos são múltiplos de 3. Então, temos:

$$3 \cdot \binom{34}{3} \; possibilidades$$

2) Também podemos escolher um elemento do subconjunto X, um elemento do subconjunto Y e um elemento do subconjunto Z. Assim, teremos um subconjunto cuja soma de seus elementos será múltipla de 3. Então, temos:

$$34 \cdot 34 \cdot 34 \; possibilidades$$

Por fim, somando todas as possibilidades:

$$3 \cdot \binom{34}{3} + 34 \cdot 34 \cdot 34 = 57256$$

Gabarito: 57256

---

48. (IME/1976)

São dados os conjuntos $E = \{a, b, c, d\}$ e $F \subset E$, tal que $F = \{a, b\}$. Denote por $P(E)$ o conjunto das partes de E e considere, em $P(E)$, a relação R, tal que

$$X \; R \; Y \Leftrightarrow F \cap X = F \cap Y$$

a) Verifique se R é uma relação de equivalência.

b) $Z \subset P(E)$. Determine Z, sabendo-se que $Z \cap F = \{b\}$.

c) $W \subset P(E)$. Determine W, sabendo-se que $F \cap W = \emptyset$.

Obs.: $P(E)$ tem 16 elementos. $\Leftrightarrow$ significa "se e somente se".

Comentários

a) Inicialmente, temos que:

$$X\ R\ X \Leftrightarrow F \cap X = F \cap X$$

Então, R é reflexiva.

Vamos usar a definição de R dada no enunciado:

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow F \cap X = F \cap Y$$

$$Y\ R\ X \Leftrightarrow F \cap Y = F \cap X$$

$$\therefore X\ R\ Y = Y\ R\ X$$

Desse modo, R é simétrica.

Por fim, vamos analisar $X\ R\ Y$ e $Y\ R\ Z$. Dado que R é simétrica, temos:

$$\underbrace{F \cap X = F \cap Y}_{X\ R\ Y} \text{ e } \underbrace{F \cap Y = F \cap Z}_{Y\ R\ Z}$$

Portanto, chegamos em:

$$F \cap X = F \cap Z$$

Então, R é transitiva. Logo, como R é reflexiva, simétrica e transitiva: R é uma relação de equivalência.

b) Para que $Z \cap \underbrace{\{a,b\}}_{F} = \{b\}$ e $Z \subset P(E)$, Z deve possuir os elementos de $P(E)$ que possuem b mas não possuem a. Além disso, o conjunto $P(E)$ é formado por todos os subconjuntos possíveis de E.

$$P(E) = \begin{Bmatrix} \emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \{a,b\}; \{a,c\}; \{a,d\}; \{b,c\}; \\ \{b,d\}; \{c,d\}; \{a,b,c\}; \{a,b,d\}; \{a,c,d\}; \{b,c,d\}; \{a,b,c,d\} \end{Bmatrix}$$

Então, as possíveis soluções de Z são:

$$Z \in \{\{b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,c,d\}\}$$

c) Para que $\{a,b\} \cap W = \emptyset$, W não deve possuir os elementos a e b. Mas, W pode possuir os elementos c e d. Então, as possíveis soluções de $W \subset P(E)$ são:

$$W \in \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}$$

Gabarito: a) Demonstração b) $\boldsymbol{Z \in \{\{b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,c,d\}\}}$ c) $\boldsymbol{W \in \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}}$

---

49. (IME/1972)

Seja A um conjunto tal que $n(A) = p > 0$. Determinar justificando:

a) O número de relações reflexivas distintas em A.

b) O número de relações simétricas distintas em A.

c) O número de relações antissimétricas distintas em A.

Comentários

a) Vejamos a definição de relação reflexiva.

Uma relação é dita reflexiva em A se ela apresentar todos os pares de todos os elementos iguais que pertencem a A. Ou seja, a relação será reflexiva se ela tiver todos os pares (a_i, a_i) possíveis, com a_i elemento de A.

Além disso, a relação pode ter qualquer outro par. Então, basta encontrarmos o número de pares de elementos distintos de A. São $p \cdot (p-1)$ pares possíveis de elementos distintos, considerando que a ordem dos elementos é importante (ou seja (a, b) é diferente de (b, a)).

Para cada par encontrado acima, ela pode ou não fazer parte da relação, assim, para cada relação temos duas opções e, portanto, temos:

$$\boxed{2^{p(p-1)}}$$

b) Vejamos a definição de relação simétrica.

Uma relação é dita simétrica se os pares (a_i, a_j) e (a_j, a_i) pertencerem à relação, com a_i e a_j elementos de A. Além disso, a relação { } não é simétrica.

Vamos considerar então os pares com elementos distintos sem levar em conta a ordem deles. Temos $\frac{p(p-1)}{2}$ pares possíveis (p maneiras de escolher o primeiro elemento e $(p-1)$ maneiras de escolher o segundo elemento). Não foi considerada a ordem, pois podemos pensar que os pares (a_i, a_j) e (a_j, a_i) são os mesmos e se um deles fizer parte da relação, a outra automaticamente também fará parte; e se um deles não fizer parte da relação, a outra também não fará parte da relação.

Para cada par acima, ela pode ou não fazer parte da relação. Assim, para cada par temos duas opções e, portanto:

$$2^{\frac{p(p-1)}{2}}$$

Como a relação { } não é simétrica devemos desconsiderar ela, assim:

$$2^{\frac{p(p-1)}{2}} - 1$$

Porém, os pares de elementos iguais podem fazer parte da relação também e uma relação somente com pares de elementos iguais não é considerada uma relação simétrica. Desse modo, como são p pares de elementos iguais e cada uma pode ou não fazer parte da relação, teremos:

$$[2^{\frac{p(p-1)}{2}} - 1] \cdot 2^p = \boxed{2^{\frac{p(p+1)}{2}} - 2^p}$$

c) A definição de relação antissimétrica é o contrário de relação simétrica.

Assim, basta encontrarmos o total de relações possíveis e subtrair o número de relações simétrica para encontrar o número de relações antissimétricas.

Dado que um par pode ou não fazer parte da relação, para cada de relação temos duas possibilidades. Como o número de pares possíveis é $p^2 + 2$ (p maneiras para escolher o primeiro elemento e p maneiras de escolher o segundo elemento) então o número de relações possíveis é:

$$2^{p^2}$$

Assim, o número de relações assimétricas é:

$$2^{p^2} - \left[2^{\frac{p(p+1)}{2}} - 2^p\right] = \boxed{2^{p^2} + 2^p - 2^{\frac{p(p+1)}{2}}}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{2^{p(p-1)}}$ **b)** $\boldsymbol{2^{\frac{p(p+1)}{2}} - 2^p}$ **c)** $\boldsymbol{2^{p^2} + 2^p - 2^{\frac{p(p+1)}{2}}}$

---

50. (IME/1972)

Seja A um conjunto não vazio e R uma relação em A, reflexiva e transitiva. Definimos a relação S, em A, por:

$$xSy \text{ se e somente se } xRy \text{ e } yRx.$$

a) Mostre que S é uma relação de equivalência em A. Caracterize as classes de equivalência determinadas por S em A, quando R é uma relação de ordem.

b) Determine explicitamente o conjunto quociente A/S, quando

$$R = [(A \cap B)x(A \cap B)] \cup [(A - B)x(A - B)],$$

onde B é um conjunto não vazio.

Comentários

a) Para mostrar que S é uma relação de equivalência, temos que analisar se ela é reflexiva, simétrica e transitiva:

i) S é reflexiva:

Como R é reflexiva, temos xRx, então, pela definição dada no enunciado para S:

$$xSx \leftrightarrow xRx\ e\ xRx \leftrightarrow xSx$$

Portanto, S é reflexiva.

ii) S é simétrica:

Temos que:

$$xSy \leftrightarrow xRy \text{ e } yRx \leftrightarrow yRx \text{ e } xRy \leftrightarrow ySx$$

Portanto, S é simétrica.

iii) S é transitiva:

$$xSy \leftrightarrow xRy \text{ e } yRx$$

$$ySz \leftrightarrow yRz \text{ e } zRy$$

Mas, como R é transitiva:

$$xRy \text{ e } yRz \rightarrow xRz$$

$$zRy \text{ e } yRx \rightarrow zRx$$

Então, temos:

$$\begin{cases} xSy \leftrightarrow xRy \text{ e } yRx \\ ySz \leftrightarrow yRz \text{ e } zRy \end{cases} \rightarrow xRz \text{ e } zRx \leftrightarrow xSz$$

Logo:

$$xSy \text{ e } ySz \rightarrow xSz$$

Portanto, S é transitiva.

Desse modo, S é uma relação de equivalência. Além disso, se R é uma relação de ordem, temos que se xRy, então $x \leq y$. Com isso, podemos analisar o seguinte exemplo, seja um conjunto $X = \{a, b, c\}$, se R é uma relação de equivalência nesse conjunto e R é uma relação de ordem, temos que a relação de equivalência em X é:

$$Y = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$$

Ou seja, a relação segue se xRy, então $x \leq y$. Além disso, a definição de classe de equivalência é: $[a] = \{b \in X | a \sim b\}$. Com isso, nesse exemplo, as classes de equivalência devem ser:

$$[a] = \{a, b, c\}$$

$$[b] = \{b, c\}$$

$$[c] = \{c\}$$

Mas, como xSy se e somente se xRy e yRx, então, do conjunto Y, chegamos em um conjunto Z, onde $(x, y) \in Y$ e $(y, x) \in Y$:

$$Z = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

Portanto, as classes de equivalência são:

$$[y] = \{x \in A | x = y\}$$

b) Esse conjunto será o conjunto de todas as classes de equivalência possíveis de A com S. Além disso, podemos observar que $A - B = A - A \cap B$, ou seja, $A - B$ e $A \cap B$ são disjuntos, então, temos:

$$R = [(A \cap B)x(A \cap B)] \cup [(A - B)x(A - B)]$$

Precisamos analisar o conjunto quociente em $(A \cap B)x(A \cap B)$ e depois em $(A - B)x(A - B)$, uma vez que, conforme observamos acima, os mesmos são disjuntos. Logo:

$$A/S = \{[x] | x \in A\}$$

Mas, podemos dividir o $x \in A$ em $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$:

$$A/S = \{[x] | x \in (A \cap B)\} \cup \{[x] | x \in (A - B)\}$$

Conforme vimos anteriormente, temos $[x] = \{y \in A | y = x\}$:

$$A/S = \big\{\{y \in (A \cap B) | y = x\} \big| x \in (A \cap B)\big\} \cup \big\{\{y \in (A - B) | y = x\} \big| x \in (A - B)\big\}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{[y] = \{x \in A | x = y\}}$ **b)** $\boldsymbol{A/S = \big\{\{y \in (A \cap B) | y = x\} \big| x \in (A \cap B)\big\} \cup \big\{\{y \in (A - B) | y = x\} \big| x \in (A - B)\big\}}$

6. Considerações Finais das Aulas

Chegamos ao final da nossa primeira aula. Tentei resolver e comentar os exercícios da forma mais clara possível. Você deve consultar as resoluções apenas se tiver dúvidas ou se a sua resposta não conferir com o gabarito. Ao longo do tempo, iremos acumular diversas técnicas e métodos de resolução de questões e, também, aumentaremos o nosso arsenal de conhecimento.

Conte comigo nessa jornada! Lembre-se, para aprender matemática você deve treinar o maior número de questões para na hora da prova não haver dúvidas! Qualquer dúvida, crítica ou sugestão não hesitem em usar o fórum do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

7. Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, Gelson. Murakami, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções. 9. ed. Atual, 2013. 410p.

[2] Antar Neto, Aref. Sampaio, José. Noções de Matemática, v.1. 1 ed. Vestseller, 2016. 348p.

[3] Morgado, Augusto. Wagner, Eduardo. Carvalho, Paulo. Lima, Elon. A Matemática do Ensino Médio, v. 1. 11 ed. SBM, 2016. 250p.

[4] Oliveira, Marcelo. Pinheiro, Márcio. Elementos da Matemática volume 1 – conjuntos, funções, aritmética. 3 ed. Vestseller, 2010. 309p.