Combinações II

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (CEFET-MG) Num plano, existem vinte pontos dos quais três nunca são colineares, exceto seis, que estão sobre uma mesma reta. O número de retas determinadas pelos vinte pontos é:

A) 150.
B) 176.
C) 185.
D) 205.
E) 212.

Resolução:

Inicialmente, consideremos o total de grupos de dois pontos formado a partir dos vinte pontos. Depois, verificamos que, desse total de grupos, devemos subtrair os grupos formados a partir dos 6 pontos colineares. Em seguida, acrescentamos a própria reta, que contém os seis pontos. Assim, temos:

$$C_{20,\,2} - C_{6,\,2} + 1 = \frac{20!}{18!\,.\,2!} - \frac{6!}{4!\,.\,2!} + 1 = 176 \text{ retas}$$

02. (UFV-MG) Uma equipe de futebol de salão de cinco membros é formada escolhendo-se os jogadores de um grupo **V**, com 7 jogadores, e de um grupo **W**, com 6 jogadores. O número de equipes diferentes que é possível formar de modo que entre seus membros haja, no mínimo, um jogador do grupo **W** é:

A) 1 266.
B) 1 356.
C) 1 246.
D) 1 376.

Resolução:

Do total de equipes que podem ser formadas com os 13 jogadores (7 de **V** e 6 de **W**), subtraímos as equipes formadas apenas com jogadores do grupo **V**. Com isso, garantimos a presença de pelo menos um jogador do grupo **W**. Assim, temos:

$$C_{13,\,5} - C_{7,\,5} = \frac{13!}{8!\,.\,5!} - \frac{7!}{2!\,.\,5!} = 1\,266$$

03. (UFVJM-MG) Considere a situação-problema em que, dos 12 funcionários de uma microempresa, 5 são mulheres, os trabalhos são realizados por comissões de três funcionários cada uma e, em nenhuma delas, os 3 componentes são do mesmo sexo. Com base nessas informações, é correto afirmar que o número de maneiras de se compor essas comissões, com tais características, é igual a:

A) 125.
B) 155.
C) 175.
D) 165.

Resolução:

Do total de comissões possíveis, subtraímos as comissões formadas apenas por homens e apenas por mulheres. Assim, temos:

$$C_{12,\,3} - C_{5,\,3} - C_{7,\,3} = \frac{12!}{9!\,.\,3!} - \frac{5!}{2!\,.\,3!} - \frac{7!}{4!\,.\,3!} = 175$$

04. (UFMG) Uma urna contém 12 bolas: 5 pretas, 4 brancas e 3 vermelhas. O número de maneiras possíveis de se retirar simultaneamente dessa urna um grupo de 6 bolas que contém pelo menos uma de cada cor é:

A) 84.
B) 252.
C) 805.
D) 924.

Resolução:

Do total de grupos possíveis, retiramos os grupos formados apenas por duas cores, já que não é possível formar grupos com bolas de uma só cor. Portanto, temos:

Total de grupos: $C_{12,\,6} = \dfrac{12!}{6!\,.\,6!} = 924$

Apenas bolas pretas e brancas: $C_{9,\,6} = \dfrac{9!}{3!\,.\,6!} = 84$

Apenas bolas pretas e vermelhas: $C_{8,\,6} = \dfrac{8!}{2!\,.\,6!} = 28$

Apenas bolas brancas e vermelhas: $C_{7,\,6} = \dfrac{7!}{1!\,.\,6!} = 7$

Logo, o número de grupos é 924 – 84 – 28 – 7 = 805.

05. (UFG-GO) Uma caixa contém doze presentes diferentes. Quatro crianças, uma de cada vez, deverão escolher aleatoriamente três presentes da caixa de uma só vez. Nessas condições, encontre a quantidade possível de maneiras diferentes que esses presentes poderão ser distribuídos para essas quatro crianças.

Resolução:

A caixa dispõe de 12 presentes diferentes, de modo que a primeira criança cria um subconjunto de 3 presentes ($C_{12,\,3}$), a segunda criança, com 12 – 3 = 9 presentes disponíveis, também cria um subconjunto de 3 presentes ($C_{9,\,3}$); na sequência, a terceira criança, com 9 – 3 = 6 presentes, pega 3 presentes ($C_{6,\,3}$), e, por fim, a última criança, com 6 – 3 = 3 presentes na caixa, pega os últimos 3 presentes ($C_{3,\,3}$). Logo:

$$C_{12,3}\,.\,C_{9,3}\,.\,C_{6,3}\,.\,C_{3,3} = \frac{12!}{3!\,.\,9!}\,.\,\frac{9!}{3!\,.\,6!}\,.\,\frac{6!}{3!\,.\,3!}\,.\,\frac{3!}{3!\,.\,0!} =$$

220 . 84 . 20 . 1 = 369 600

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UESC-BA) A cobrança do pedágio na BR-116, principal rodovia brasileira, foi iniciada na primeira semana de dezembro 2010, com postos autorizados pela Agência Nacional de Transportes Terrestres (ANTT).

Suponha que entre as cidades **A** e **B** existem cinco postos de abastecimento, além de dois postos de pedágio – o primeiro com quatro cabines e o segundo, com três. É possível fazer o percurso de **A** até **B**, passando pelos dois pedágios e parando três vezes para abastecimento, de **n** formas distintas (variando as cabines e os postos de abastecimento). O valor de **n** é

A) 12.
B) 22.
C) 31.
D) 120.
E) 210.

02. (FJP-MG) O destacamento policial de uma pequena cidade é composto de um tenente (comandante), três sargentos, três cabos e doze soldados. O comandante precisa organizar uma patrulha composta de um sargento, um cabo e quatro soldados, escolhidos por sorteio. Os sargentos chamam-se Antônio, Pedro e João. O número de patrulhas diferentes que poderão ser organizadas sem a participação do sargento João é

A) 1 485.
B) 1 890.
C) 2 970.
D) 3 455.

03. (UFES) Uma cidade atravessada por um rio tem 8 bairros situados em uma das margens do rio e 5 bairros situados na outra margem. O número de possíveis escolhas de 1 bairro qualquer situado em qualquer uma das margens do rio e 3 bairros quaisquer situados na outra margem é

A) 280.
B) 360.
C) 480.
D) 1 680.
E) 2 160.

04. (PUC RS) Para a escolha de um júri popular formado por 21 pessoas, o juiz-presidente de uma determinada Comarca dispõe de uma listagem com nomes de trinta homens e de vinte mulheres. O número de possibilidades de formar um júri popular composto por exatamente 15 homens é:

A) $C_{30}^{15} \cdot C_{20}^{6}$
B) $A_{30}^{15} \cdot A_{20}^{6}$
C) $C_{30}^{15} + C_{20}^{6}$
D) $A_{30}^{15} + A_{20}^{6}$
E) C_{50}^{21}

05. (UEMG–2015) Observe a tirinha a seguir.

Passando por uma sorveteria, Magali resolve parar e pedir uma casquinha. Na sorveteria, há 6 sabores diferentes de sorvete e 3 é o número máximo de bolas por casquinha, sendo sempre uma de cada sabor.

O número de formas diferentes com que Magali poderá pedir essa casquinha é igual a

A) 20.
B) 41.
C) 120.
D) 35.

06. (UEG-GO) Uma comissão de quatro pessoas será escolhida de um grupo composto de cinco homens e cinco mulheres.

A) De quantas maneiras pode ser escolhida essa comissão, sendo constituída de dois homens e duas mulheres?

B) De quantas maneiras essa comissão pode ser formada, tendo pelo menos uma mulher?

07. (UFU-MG) Uma fábrica de tintas necessita contratar uma equipe para desenvolver e produzir um novo tipo de produto. A equipe deve ser formada por 4 químicos, 1 engenheiro ambiental e 2 engenheiros de produção. Se no processo final de seleção compareceram 6 químicos, 3 engenheiros ambientais e 4 engenheiros de produção, o número de maneiras que a equipe poderá ser formada é igual a:

A) $6! \cdot 3$
B) $6! \cdot 18$
C) $6! \cdot \frac{3}{8}$
D) $6! \cdot \frac{3}{4}$

08. (UERJ) A tabela a seguir apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

País	Descrição	Exemplo de placa
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem	M3MK09
Y	Um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem	YBW0299

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país **X** igual a **n** e, no país **Y**, igual a **p**. A razão $\frac{n}{p}$ corresponde a

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 6.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE) Dentre um grupo de dez trabalhadores, deseja-se formar comissões, cada uma delas constituída de no mínimo duas pessoas e no máximo cinco pessoas. O número de comissões que podem ser formadas é

A) 50.
B) 120.
C) 252.
D) 627.

02. (UERJ)

O Menino Maluquinho

Ziraldo

O GLOBO. 18 mar. 2009.

Considere como um único conjunto as 8 crianças – 4 meninos e 4 meninas – personagens da tirinha. A partir desse conjunto, podem-se formar **n** grupos, não vazios, que apresentam um número igual de meninos e de meninas.

O maior valor de **n** é equivalente a

A) 45. B) 56. C) 69. D) 81.

03. (Poli-USP–2015) As merendas oferecidas em uma escola são preparadas com dois itens diferentes de alimentos em cada um dos três grupos:

I. bolachas, sanduíche, barra de cereal, chocolate;

II. suco de laranja, suco de uva, suco de morango, limonada, chá;

III. banana, maçã, tangerina, caqui, ameixa, nêspera.

Como o chocolate é muito popular entre os alunos, e o chá não é, a diretoria da escola resolveu que a merenda que contiver chocolate deve ter também chá. Sendo assim, quantos tipos de merenda diferentes são oferecidos nessa escola?

A) 240 C) 410 E) 630
B) 320 D) 560

04. (UEL-PR) O jogo da Mega-Sena consiste no sorteio de 6 números distintos entre 1 e 60. Um apostador escolhe 20 números distintos e faz todos os $C_{20,\,6}$ jogos possíveis de serem realizados com os 20 números. Se ele acertar os seis números sorteados, entre os vinte escolhidos, além da aposta sorteada com a sena, quantas apostas premiadas com a quina (cinco números corretos) ele conseguirá?

A) 75 apostas. D) $C_{6,\,5}$ apostas.
B) 84 apostas. E) 70 apostas.
C) $C_{20,\,5}$ apostas.

05. (EsPCEx-SP–2018) Considere o conjunto de números naturais {1, 2, ..., 15}. Formando grupos de três números distintos desse conjunto, o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é

A) 168. C) 224. E) 231.
B) 196. D) 227.

06. (UEL-PR) Um grupo de 6 alunos decide escrever todos os anagramas da palavra PERGUNTA. Esta tarefa será feita em vários turnos de trabalho. Em cada turno, 3 alunos escrevem e os outros descansam. Para serem justos, decidiram escrever o mesmo número de anagramas em cada turno.

Qual deve ser o número mínimo de anagramas, escrito por turno, de modo que não se repitam grupos de trabalho?

A) 23 C) 2 016 E) 35 000
B) 720 D) 5 040

07. (UFSCar-SP) Em seu trabalho, João tem 5 amigos, sendo 3 homens e 2 mulheres. Já sua esposa Maria tem, em seu trabalho, 4 amigos (distintos dos de João), sendo 2 homens e 2 mulheres. Para uma confraternização, João e Maria pretendem convidar 6 dessas pessoas, sendo exatamente 3 homens e 3 mulheres. Determine de quantas maneiras eles podem convidar essas pessoas:

A) dentre todos os seus amigos no trabalho.

B) de forma que cada um deles convide exatamente 3 pessoas, dentre seus respectivos amigos.

08. (UERN–2015) Em uma sorveteria, há **x** sabores de sorvete e **y** sabores de cobertura. Combinando um sabor de sorvete com dois ou três sabores de cobertura tem-se, respectivamente, 150 ou 200 diferentes opções de escolha. Assim, conclui-se que o número de sabores de cobertura disponível é

A) 4. B) 5. C) 6. D) 7.

09. (UDESC) Um tanque de um pesque-pague contém apenas 15 peixes, sendo 40% destes carpas. Um usuário do pesque-pague lança uma rede no tanque e pesca 10 peixes. O número de formas distintas possíveis para que o usuário pesque exatamente 4 carpas é

A) 151 200. C) 210. E) 1 260.
B) 720. D) 185.

10. (UNEB-BA–2016) A distribuição de cinco bolas de cores distintas entre duas pessoas de modo que cada pessoa receba, pelo menos, uma bola pode ser feito em um número máximo, de formas distintas, igual a

A) 25. C) 35. E) 50.
B) 30. D) 45.

11. (Poli-USP) Em um grupo de 10 pessoas, deseja-se escolher 4 pessoas para compor uma comissão. Entre essas pessoas, José participa se e somente se Amanda também participar. Além disso, Márcia e Sandro não podem estar juntos na comissão. Então, o número de comissões que podem ser formadas obedecendo a todas essas condições é

A) 76. C) 80. E) 84.
B) 78. D) 82.

12. (EBMSP–2018) Os professores X e Y receberam ajuda financeira para levarem três alunos de cada um deles a um encontro científico. Na relação de possíveis integrantes desse grupo, foram selecionados, dos alunos de X, 4 homens e 3 mulheres e, dos alunos de Y, 3 homens e 4 mulheres. Sabendo-se que os professores não têm alunos em comum, pode-se afirmar que o número máximo de formas distintas de se compor um grupo com 3 estudantes homens e 3 estudantes mulheres, para ir ao encontro, é

A) 144. C) 324. E) 485.
B) 161. D) 468.

MATEMÁTICA

13. (FUVEST-SP) Numa certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem. Numa comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita anteriormente. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

A) 16
B) 17
C) 18
D) 19
E) 20

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

A) $\dfrac{10!}{2!8!} - \dfrac{4!}{2!2!}$

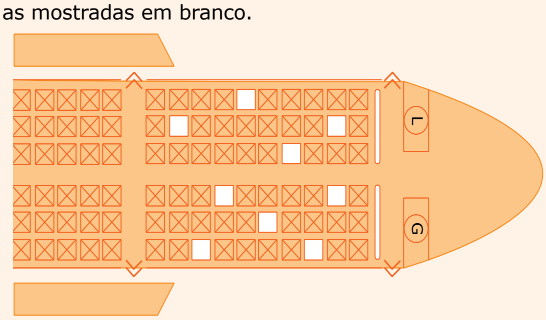
B) $\dfrac{10!}{8!} - \dfrac{4!}{2!}$

C) $\dfrac{10!}{2!8!} - 2$

D) $\dfrac{6!}{4!} + 4 . 4$

E) $\dfrac{6!}{4!} + 6 . 4$

02. (Enem–2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site,* as poltronas ocupadas estão marcadas com "**X**" e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

A) $\dfrac{9!}{2!}$

B) $\dfrac{9!}{7!\,.\,2!}$

C) 7!

D) $\dfrac{5!}{2!} . 4!$

E) $\dfrac{5!}{4!} . \dfrac{4!}{3!}$

03. A fim de aumentar a competitividade, as empresas necessitam aprimorar suas técnicas de gerenciamento de recursos, equipamentos e informações. Tais técnicas são chamadas de Logística e são fundamentais para operações de carga e descarga em larga escala, como no porto ilustrado na figura a seguir.

Twice25 & Rinina25 / Creative Commons

Considere que a administração do porto da figura pretende alocar 5 contêineres contendo minério de ferro (tipo A), 3 contêineres contendo produtos eletrônicos (tipo B) e 4 contêineres contendo peças automotivas (tipo C). Cada contêiner possui um número de identificação diferente. Um determinado setor do navio tem capacidade para 6 contêineres, e deve ser preenchido, obrigatoriamente, com dois contêineres de cada tipo. O total de maneiras de se colocar os contêineres nesse setor, em fila, de modo que contêineres do mesmo tipo permaneçam juntos, é igual a

A) 8 640.
B) 7 240.
C) 6 280.
D) 5 320.
E) 4 600.

04. Uma equipe de 5 cientistas deverá ser formada a partir de um grupo constituído por 7 biólogos, 8 físicos e 5 geólogos. Tal equipe deverá conter pelo menos um geólogo e pelo menos um físico. O total de maneiras distintas de se formar tal equipe é

A) 15 504.
B) 11 730.
C) 10 564.
D) 9 868.
E) 8 543.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem
Acertei ______ Errei ______

○ 01. D ○ 02. C ○ 03. B ○ 04. A ○ 05. B
06.
○ A) 100 maneiras ○ B) 205 maneiras
○ 07. C ○ 08. B

Propostos
Acertei ______ Errei ______

○ 01. D ○ 03. E ○ 05. C
○ 02. C ○ 04. B ○ 06. C
07.
○ A) 40 maneiras ○ B) 18 maneiras
○ 08. C ○ 10. B ○ 12. E
○ 09. E ○ 11. D ○ 13. B

Seção Enem
Acertei ______ Errei ______

○ 01. A ○ 02. A ○ 03. A ○ 04. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

MATEMÁTICA

FRENTE A | MÓDULO 22

Probabilidades I

INTRODUÇÃO

Há dois tipos de fenômenos que são objeto de estudo científico: os fenômenos **determinísticos** e os fenômenos **aleatórios**.

Em um fenômeno determinístico, os resultados dos experimentos correspondentes podem ser determinados de antemão. Conhecemos as leis que os governam a ponto de afirmarmos que tais experimentos, repetidos nas mesmas condições, vão produzir resultados idênticos. Podemos, por exemplo, descrever o movimento de um corpo em queda livre, determinando o tempo gasto para atingir o solo.

Já em um fenômeno aleatório, os experimentos correspondentes, repetidos nas mesmas condições, não necessariamente produzem os mesmos resultados. Apesar de não sabermos com exatidão qual resultado será obtido, geralmente somos capazes de descrever o conjunto de todos os resultados possíveis para esses experimentos. A seguir, dizemos que um desses possíveis resultados apresenta uma determinada "chance" de ocorrer. Essa "chance" é denominada **probabilidade de ocorrência de um evento**. Como exemplo, temos o experimento "lançar uma moeda e observar a face superior". A probabilidade de obtermos "cara" na face superior é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, 50%.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

É todo experimento que pode ser feito nas mesmas condições sem previsão de resultado finalístico.

Exemplos:

1º) Lançar um dado e observar o número obtido na face superior.

2º) Sortear uma das bolas numeradas de uma urna.

3º) Retirar duas cartas de um baralho e observar os seus naipes.

ESPAÇO AMOSTRAL

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, que será indicado por **E**. Denotamos por n(E) o número de elementos do espaço amostral.

Exemplos:

1º) Experimento: lançar uma moeda e observar a face superior.

$$E = \{\text{cara, coroa}\} \text{ e } n(E) = 2$$

2º) Experimento: lançar simultaneamente duas moedas e observar as faces superiores obtidas.
Indicamos cara por **C** e coroa por **K**.

Assim, temos $E = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ e $n(E) = 4$.

Podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem na obtenção de n(E), como segue:

$$\begin{array}{lccc} & \text{Moeda 1} & \text{e} & \text{Moeda 2} \\ & \downarrow & & \downarrow \\ n(E) = & 2 \text{ possibilidades} & . & 2 \text{ possibilidades} \Rightarrow \end{array}$$

$n(E) = 4$ resultados possíveis

3º) Experimento: lançar simultaneamente dois dados e observar as faces superiores obtidas.

Seja cada parênteses um experimento, no qual o primeiro valor foi obtido no primeiro dado, e o segundo valor, obtido no segundo dado. Assim, temos:

$$E = \left\{\begin{array}{cccccc} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & (1, 5), & (1, 6) \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & (2, 5), & (2, 6) \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), & (3, 5), & (3, 6) \\ (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4), & (4, 5), & (4, 6) \\ (5, 1), & (5, 2), & (5, 3), & (5, 4), & (5, 5), & (5, 6) \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & (6, 4), & (6, 5), & (6, 6) \end{array}\right\}$$

$n(E) = 36$

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$\begin{array}{lccc} & \text{Dado 1} & \text{e} & \text{Dado 2} \\ & \downarrow & & \downarrow \\ n(E) = & 6 \text{ possibilidades} & . & 6 \text{ possibilidades} \Rightarrow \end{array}$$

$n(E) = 36$ resultados possíveis

4º) Experimento: sortear uma comissão de 3 alunos entre 10 alunos de uma turma.
Descrever tal espaço amostral é trabalhoso. Portanto, vamos determinar apenas n(E). Temos que o total de comissões de 3 alunos é dado por:

$$n(E) = C_{10,\,3} = \frac{10!}{7!\,.\,3!} = 120 \text{ comissões}$$

EVENTO

Chama-se de evento qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplos:

1º) Evento **A**: No lançamento de um dado, obter um número ímpar.

$A = \{1; 3; 5\}$

$n(A) = 3$

2º) Evento **B**: No lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis, obter soma das faces igual a 7.

$B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

$n(B) = 6$

EVENTO COMPLEMENTAR

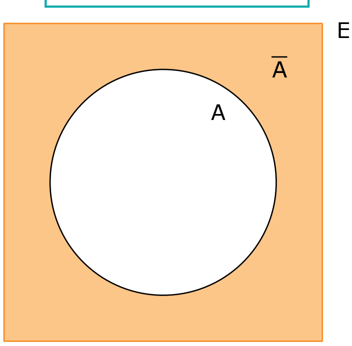
Sejam **E** um espaço amostral finito e não vazio e **A** um evento de **E**. Chama-se de evento complementar do evento **A** aquele formado pelos resultados que não fazem parte do evento **A** (indicamos por $\overline{A}$).

Como exemplo, sendo $A = \{1; 3; 5\}$ o evento "sair um número ímpar no lançamento de um dado", temos:

$\overline{A} = \{2; 4; 6\}$

Esquematicamente:

$$\boxed{n(A) + n(\overline{A}) = n(E)}$$



ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL

Chamamos de espaço amostral equiprovável aquele cujos resultados apresentam a mesma chance de ocorrerem. Em termos de frequências relativas, supomos que, ao aumentarmos indefinidamente o número de experimentos, os diferentes resultados tendem a aparecer na mesma frequência.

PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DE UM EVENTO

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral equiprovável **E**, com n(E) elementos. Seja **A** um determinado evento de **E** com n(A) elementos.

A probabilidade de ocorrência do evento **A** é dada por:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}}$$

Exemplo:

No lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis, qual é a probabilidade de obtermos uma soma das faces igual a 10?

Temos $n(E) = 6 \cdot 6 = 36$.

Seja **A** o evento de **E** "obter uma soma igual a 10".

$A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$ e $n(A) = 3$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ ou, aproximadamente, 8,3%.

Propriedades

i) $P(U) = 1$

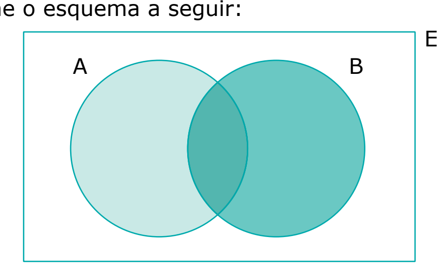
ii) $P(\varnothing) = 0$

iii) $0 \leq P(A) \leq 1$

iv) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

ADIÇÃO DE PROBABILIDADES

Sejam **A** e **B** dois eventos de um espaço amostral **E**, conforme o esquema a seguir:



Sabemos que o número de elementos da união de dois conjuntos **A** e **B** é dado por:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Dividindo os dois membros por n(E), temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

Ou seja:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

OBSERVAÇÃO

Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que **A** e **B** são **mutuamente exclusivos.**

Assim, $P(A \cap B) = 0$.

Logo, para eventos mutuamente exclusivos, temos:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unicamp-SP–2017) Um dado não tendencioso de seis faces será lançado duas vezes. A probabilidade de que o maior valor obtido nos lançamentos seja menor do que 3 é igual a:

A) $\frac{1}{3}$. B) $\frac{1}{5}$. C) $\frac{1}{7}$. D) $\frac{1}{9}$.

02. (PUC RS) Dois dados são jogados simultaneamente. A probabilidade de se obter soma igual a 10 nas faces de cima é

A) $\frac{1}{18}$. B) $\frac{1}{12}$. C) $\frac{1}{10}$. D) $\frac{1}{6}$. E) $\frac{1}{5}$.

03. (FMP-RJ–2017) Um grupo é formado por três homens e duas mulheres. Foram escolhidas, ao acaso, três pessoas desse grupo. Qual é a probabilidade de as duas mulheres do grupo estarem entre as três pessoas escolhidas?

A) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{2}{3}$

04. (UNISC-RS–2016) Dentre um grupo formado por 2 engenheiros e 4 matemáticos, três pessoas são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que sejam escolhidos um engenheiro e dois matemáticos é de

A) 25%. C) 39%. E) 60%.

B) 35%. D) 50%.

05. (PUC Rio–2016) Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {8, 9, 10}. Escolhendo-se ao acaso um elemento de **A** e um elemento de **B**, a probabilidade de que a soma dos dois números escolhidos seja um número ímpar é

A) $\frac{1}{2}$. C) $\frac{12}{25}$. E) $\frac{7}{10}$.

B) $\frac{3}{5}$. D) $\frac{6}{25}$.

06. (UEPA) Uma empresa realizou uma pesquisa com 300 candidatos sobre os fatores de risco de um infarto agudo do miocárdio (IAM) ou enfarte agudo do miocárdio (EAM). Foi observado que 20% dessas pessoas possuíam esses fatores de risco. A probabilidade de essa empresa contratar ao acaso dois candidatos do grupo pesquisado e eles apresentarem esses fatores de risco é

A) $\frac{60}{1\,597}$. C) $\frac{69}{1\,695}$. E) $\frac{77}{1\,898}$.

B) $\frac{59}{1\,495}$. D) $\frac{74}{1\,797}$.

07. (Unisinos-RS–2016) Em uma gaveta, há 12 meias brancas e 8 meias cinzas. Retiram-se duas meias, sem reposição. Qual a probabilidade de as duas meias que foram retiradas serem de cores diferentes?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{24}{95}$

C) $\frac{10}{17}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{48}{95}$

08. 3LGN (UPE–2016) Um cadeado está protegido pela combinação dos números em três cilindros numerados de 0 a 9 cada um, conforme a figura a seguir. Qual é a probabilidade de, numa única tentativa, se acertar uma senha formada apenas por números primos?

A) 6,0%.

B) 6,4%.

C) 7,2%.

D) 7,8%.

E) 8,0%.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UNIFESP–2018) Em uma classe de 16 alunos, todos são fluentes em português. Com relação à fluência em línguas estrangeiras, 2 são fluentes em francês e inglês, 6 são fluentes apenas em inglês e 3 são fluentes apenas em francês.

A) Dessa classe, quantos grupos compostos por 2 alunos podem ser formados sem alunos fluentes em francês?

B) Sorteando ao acaso 2 alunos dessa classe, qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja fluente em inglês?

02. (FUVEST-SP) Dois dados cúbicos, não viciados, com faces numeradas de 1 a 6, serão lançados simultaneamente. A probabilidade de que sejam sorteados dois números consecutivos, cuja soma seja um número primo, é de

A) $\frac{2}{9}$. C) $\frac{4}{9}$. E) $\frac{2}{3}$.

B) $\frac{1}{3}$. D) $\frac{5}{9}$.

03. (ESPM-SP–2016) Num programa de televisão, cada um dos dois competidores retira um cartão de uma urna contendo 50 cartões numerados de 1 a 50. Em seguida, o apresentador retira um dos 48 cartões restantes. O prêmio será dado ao competidor cujo número mais se aproxima do número do apresentador. Se Ana tirou o número 8 e Pedro tirou o 31, a probabilidade de Ana ganhar o prêmio é

A) 22,5%.
B) 27%.
C) 33,5%.
D) 37,5%.
E) 42%.

04. (UFRGS-RS–2016) No jogo de xadrez, cada jogador movimenta as peças de uma cor: brancas ou pretas. Cada jogador dispõe de oito peões, duas torres, dois cavalos, dois bispos, um rei e uma rainha. Escolhendo ao acaso duas peças pretas, a probabilidade de escolher dois peões é de

A) $\frac{7}{30}$.
B) $\frac{7}{20}$.
C) $\frac{7}{15}$.
D) $\frac{14}{15}$.
E) $\frac{14}{9}$.

05. (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um dos anagramas da palavra COVEST, qual a probabilidade de suas primeira e última letras serem consoantes?

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{2}{5}$
C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{4}{7}$
E) $\frac{5}{7}$

06. (ESPM-SP) Apenas 40% dos hóspedes de um hotel de São Paulo são estrangeiros, sendo que 70% deles são ingleses e os demais franceses. Sabe-se que 25% dos franceses e 50% dos ingleses falam português. Escolhendo-se, ao acaso, um dos hóspedes desse hotel, a probabilidade de que ele fale português é

A) 65%.
B) 72%.
C) 68%.
D) 77%.
E) 82%.

07. (PUC Rio–2015) Em uma urna, existem 10 bolinhas de cores diferentes, das quais sete têm massa de 300 gramas e as outras três têm massa de 200 gramas cada. Serão retiradas 3 bolinhas, sem reposição. A probabilidade de que as 3 bolinhas retiradas sejam as mais leves é de

A) $\frac{1}{120}$.
B) $\frac{3}{10}$.
C) $\frac{3}{5}$.
D) $\frac{1}{30}$.
E) $\frac{3}{50}$.

08. (Albert Einstein–2016) Em uma urna vazia foram colocadas fichas iguais, em cada uma das quais foi escrito apenas um dos anagramas da palavra HOSPITAL. A probabilidade de que, ao sortear-se uma única ficha dessa urna, no anagrama nela marcado as letras inicial e final sejam ambas consoantes é

A) $\frac{5}{14}$.
B) $\frac{3}{7}$.
C) $\frac{4}{7}$.
D) $\frac{9}{14}$.

09. (Unesp–2016) Um dado convencional e uma moeda, ambos não viciados, serão lançados simultaneamente. Uma das faces da moeda está marcada com o número 3, e a outra com o número 6. A probabilidade de que a média aritmética entre o número obtido da face do dado e o da face da moeda esteja entre 2 e 4 é igual a

A) $\frac{1}{3}$.
B) $\frac{2}{3}$.
C) $\frac{1}{2}$.
D) $\frac{3}{4}$.
E) $\frac{1}{4}$.

10. (UNISC-RS) O pelotão de elite da prova final de uma maratona é composto por corredores que representam 3 equipes. As equipes **A**, **B** e **C** possuem, respectivamente, 9, 5 e 6 atletas classificados. Se todos os participantes têm a mesma chance de vencer a corrida, então a probabilidade (expressa percentualmente) de as medalhas de ouro, prata e bronze serem entregues a uma mesma equipe está no intervalo:

A) [0, 10[
B) [10, 12[
C) [12, 14[
D) [14, 20[
E) [20, 100[

11. (UPE) Nove cartões, com os números de 11 a 19 escritos em um dos seus versos, foram embaralhados e postos um sobre o outro de forma que as faces numeradas ficaram para baixo. A probabilidade de, na disposição final, os cartões ficarem alternados entre pares e ímpares é de

A) $\frac{1}{126}$.
B) $\frac{1}{140}$.
C) $\frac{1}{154}$.
D) $\frac{2}{135}$.

12. (UFTM-MG) Em certo jogo de perguntas e respostas, o jogador ganha 3 pontos a cada resposta correta e perde 5 pontos a cada resposta errada. Paulo respondeu 30 perguntas e obteve um total de 50 pontos. Selecionando-se aleatoriamente uma das perguntas feitas a Paulo, a probabilidade de que ela seja uma das que tiveram resposta incorreta é de

A) $\frac{2}{5}$.
B) $\frac{1}{3}$.
C) $\frac{2}{7}$.
D) $\frac{1}{6}$.
E) $\frac{1}{8}$.

13. (FUVEST-SP–2015) De um baralho de 28 cartas, sete de cada naipe, Luís recebe cinco cartas, duas de ouros, uma de espadas, uma de copas e uma de paus. Ele mantém consigo as duas cartas de ouros e troca as demais por três cartas escolhidas ao acaso dentre as 23 cartas que tinham ficado no baralho. A probabilidade de, ao final, Luís conseguir cinco cartas de ouros é

A) $\frac{1}{130}$.

B) $\frac{1}{420}$.

C) $\frac{10}{1\,771}$.

D) $\frac{25}{7\,117}$.

E) $\frac{52}{8\,117}$.

14. (Mackenzie-SP–2016) Antônio, José, Pedro, Maria e Renata foram comemorar o aniversário de Antônio em uma churrascaria da cidade. O garçom que os recebeu acomodou-os prontamente em uma mesa redonda para 5 pessoas e, assim que todos se sentaram, Antônio percebeu que, sem querer, haviam sentado em volta da mesa por ordem de idade, isto é, a partir do segundo mais novo até o mais velho, cada um tinha como vizinho do mesmo lado, o colega imediatamente mais novo. A probabilidade de isso ocorrer se os cinco amigos sentassem aleatoriamente é

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{1}{4}$.

C) $\frac{1}{6}$.

D) $\frac{1}{12}$.

E) $\frac{1}{24}$.

15. (FUVEST-SP) Considere todos os pares ordenados de números naturais (a, b), em que $11 \leq a \leq 22$ e $43 \leq b \leq 51$. Cada um desses pares ordenados está escrito em um cartão diferente. Sorteando-se um desses cartões ao acaso, qual é a probabilidade de que se obtenha um par ordenado (a, b) de tal forma que a fração $\frac{a}{b}$ seja irredutível e com denominador par?

A) $\frac{7}{27}$ B) $\frac{13}{54}$ C) $\frac{6}{27}$ D) $\frac{11}{54}$ E) $\frac{5}{27}$

16. (Unicamp-SP) Uma urna contém 50 bolas que se distinguem apenas pelas seguintes características:

I. **x** delas são brancas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a **x**.

II. x + 1 delas são azuis e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x + 1.

III. x + 2 delas são amarelas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x + 2.

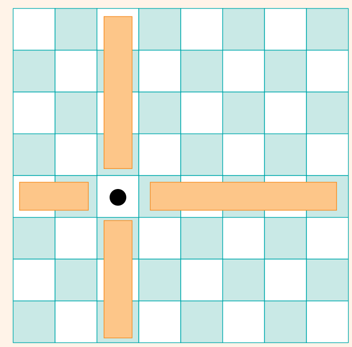
IV. x + 3 delas são verdes e numeradas sequencialmente de 1 a x + 3.

A) Qual é o valor numérico de **x**?

B) Qual a probabilidade de ser retirada, ao acaso, uma bola azul ou uma bola com o número 12?

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Um *designer* de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensão $n \times n$, com $n \geq 2$, no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensão 8×8.



O tabuleiro deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça aleatoriamente, seguindo a regra do jogo, e esta ficar sobre a zona de combate da primeira, seja inferior a $\frac{1}{5}$.

A dimensão mínima que o *designer* deve adotar para esse tabuleiro é

A) 4×4.

B) 6×6.

C) 9×9.

D) 10×10.

E) 11×11.

02. (Enem–2017) Um projeto para incentivar a reciclagem de lixo de um condomínio conta com a participação de um grupo de moradores, entre crianças, adolescentes e adultos, conforme dados do quadro.

Participantes	Número de pessoas
Crianças	x
Adolescentes	5
Adultos	10

Uma pessoa desse grupo foi escolhida aleatoriamente para falar do projeto. Sabe-se que a probabilidade de a pessoa escolhida ser uma criança é igual a dois terços.

Diante disso, o número de crianças que participa desse projeto é

A) 6.

B) 9.

C) 10.

D) 30.

E) 45.

03. (Enem–2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

A) $\frac{1}{100}$

B) $\frac{19}{100}$

C) $\frac{20}{100}$

D) $\frac{21}{100}$

E) $\frac{80}{100}$

04. (Enem–2015) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que iriam realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de que o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtêm-se:

A) P(I) < P(III) < P(II)

B) P(II) < P(I) < P(III)

C) P(I) < P(II) = P(III)

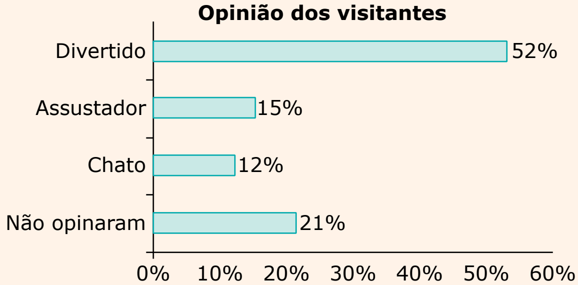
D) P(I) = P(II) < P(III)

E) P(I) = P(II) = P(III)

05. (Enem) Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em "Divertido", "Assustador" ou "Chato". Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.

Contos de Halloween
Opinião dos visitantes



O administrador do *blog* vai sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween". Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

A) 0,09.

B) 0,12.

C) 0,14.

D) 0,15.

E) 0,18.

06. (Enem) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

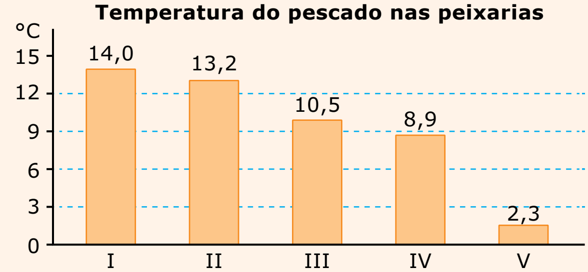
C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

D) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

07. (Enem)

Temperatura do pescado nas peixarias



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (Adaptação).

Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{1}{3}$.

C) $\frac{1}{4}$.

D) $\frac{1}{5}$.

E) $\frac{1}{6}$.

08. (Enem) A tabela a seguir indica a posição relativa de quatro times de futebol na classificação geral de um torneio, em dois anos consecutivos. O símbolo • significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, à frente do indicado na coluna. O símbolo * significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, à frente do indicado na coluna.

	A	B	C	D
A				*
B	• *		•	• *
C	• *	*		*
D	•		•	

A probabilidade de que um desses quatro times, escolhido ao acaso, tenha obtido a mesma classificação no torneio, em 2004 e 2005, é igual a

A) 0,00.
B) 0,25.
C) 0,50.
D) 0,75.
E) 1,00.

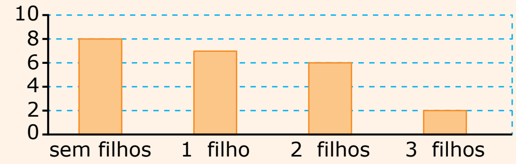
09. (Enem) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6: — Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1 + 1) até 12 (6 + 6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça. Tadeu, camisa 2: — Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta... Ricardo, camisa 12: — Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...

Desse diálogo, conclui-se que

A) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.
B) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
C) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.
D) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
E) não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

10. (Enem) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir:



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é

A) $\frac{1}{3}$.

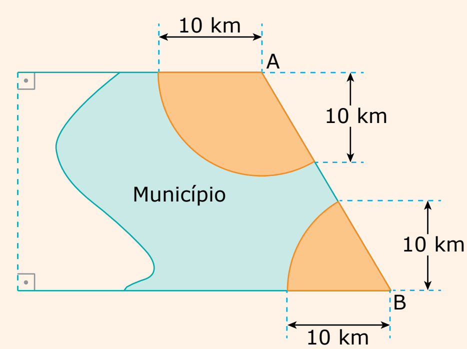
B) $\frac{1}{4}$.

C) $\frac{7}{15}$.

D) $\frac{7}{23}$.

E) $\frac{7}{25}$.

11. (Enem) Um município de 628 km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas **A** e **B** alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura.

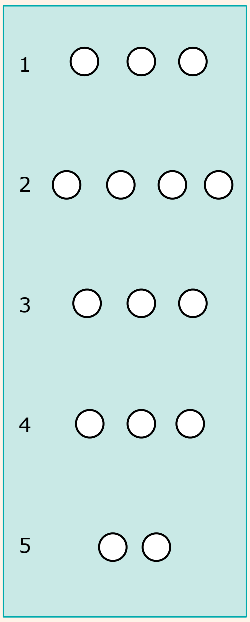


Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente,

A) 20%.
B) 25%.
C) 30%.
D) 35%.
E) 40%.

12. (Enem) Uma empresa de alimentos imprimiu, em suas embalagens, um cartão de apostas do seguinte tipo:

Frente do cartão



Verso do cartão

Como jogar:

- Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
- Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas. Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
- Se encontrar um "**X**" em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
- Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas, terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de **X** distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão, existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é

A) $\frac{1}{27}$.

B) $\frac{1}{36}$.

C) $\frac{1}{54}$.

D) $\frac{1}{72}$.

E) $\frac{1}{108}$.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. A
- 04. E
- 05. A
- 06. B
- 07. E
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01.
  - A) 55 grupos
  - B) $\frac{23}{30}$
- 02. A
- 03. D
- 04. A
- 05. B
- 06. D
- 07. A
- 08. A
- 09. A
- 10. B
- 11. A
- 12. D
- 13. C
- 14. D
- 15. E
- 16.
  - A) $x = 11$
  - B) $\frac{7}{25}$

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. D
- 03. C
- 04. E
- 05. D
- 06. D
- 07. D
- 08. A
- 09. D
- 10. E
- 11. B
- 12. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Probabilidades II

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Considere a seguinte situação:

Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma pessoa sorteia uma bola e, em vez de divulgar de imediato o resultado, ela declara: "O número sorteado é múltiplo de 6".

Com base nesses dados, pergunta-se: Qual é a probabilidade de o número sorteado ser um número maior do que 30?

Observe que a probabilidade de o número ser maior do que 30 está condicionada ao fato de já sabermos de antemão que o número sorteado é múltiplo de 6. Portanto, tal informação altera o espaço amostral que normalmente seria considerado.

Assim, temos:

i) Números múltiplos de 6 entre 1 e 50:
$\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$

ii) Observe que, no conjunto anterior, os números 36, 42 e 48 são maiores do que 30.

Portanto, a probabilidade pedida é igual a $\frac{3}{8}$.

O problema anterior poderia também ser resolvido de outra forma. Consideremos os seguintes eventos:

1º) A: Sortear um número múltiplo de 6.

$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$

$n(A) = 8$

2º) B: Sortear um número maior do que 30.

$B = \{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50\}$

$n(B) = 20$

3º) Como devemos considerar a ocorrência do evento B, uma vez que o evento A já ocorreu, estamos interessados nos elementos de B que pertencem também a A, ou seja, $A \cap B$.

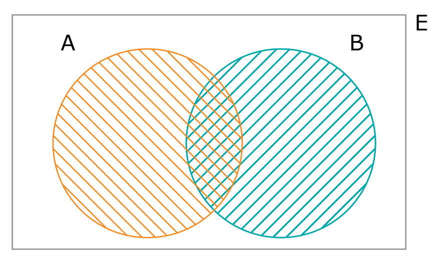
$A \cap B = \{36, 42, 48\}$

$n(A \cap B) = 3$

Observe que o conjunto A é o espaço amostral reduzido a ser considerado e que a probabilidade pedida é equivalente a:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{8}$$

Generalizando esse conceito, consideremos os eventos A e B de um espaço amostral E, conforme o diagrama a seguir:



Denotamos por $P(B|A)$ a probabilidade condicional de B em relação a A, ou seja, a probabilidade de ocorrer B dado que A já ocorreu.

Assim, temos:

$$P(B|A) = P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração por n(E), temos:

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\frac{n(A)}{n(E)}} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

OBSERVAÇÃO

Se a ocorrência do evento B não está condicionada à ocorrência do evento A, dizemos que os eventos A e B são independentes. Dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(B|A) = P(B)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Considerar o experimento: "lançar simultaneamente dois dados e observar as faces superiores obtidas". Sabendo que, ao realizar o experimento, a soma dos números obtidos foi igual a um número primo, calcular a probabilidade de essa soma ser menor do que 5.

Resolução:

Sejam os seguintes eventos:

i) Obter soma igual a um número primo.

$$A = \{\underbrace{(1, 1)}_{\text{Soma} = 2}, \underbrace{(1, 2), (2, 1)}_{\text{Soma} = 3}, \underbrace{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)}_{\text{Soma} = 5},$$

$$\underbrace{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}_{\text{Soma} = 7}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{\text{Soma} = 11}\}$$

$n(A) = 15$

ii) Obter soma menor do que 5.

$$A = \{\underbrace{(1, 1)}_{\text{Soma} = 2}, \underbrace{(1, 2), (2, 1)}_{\text{Soma} = 3}, \underbrace{(1, 3), (3, 1), (2, 2)}_{\text{Soma} = 4}\}$$

$n(B) = 6$

Assim, temos que:

$A \cap B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$n(A \cap B) = 3$

Sabemos, também, que $n(E) = 36$.

Portanto: $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{\cancel{36}}}{\frac{15}{\cancel{36}}} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$.

Na prática, basta considerarmos, no espaço amostral reduzido A**,** os pares cuja soma é menor do que 5. Desse modo, temos 3 pares em 15, e a probabilidade procurada é igual a $\dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$.

02. (UEL-PR) Considerar como verdadeiras as seguintes informações:

i) O Londrina Esporte Clube está com um time que ganha jogos com probabilidade de 0,40 em dias de chuva e de 0,70 em dias sem chuva.

ii) A probabilidade de um dia de chuva em Londrina, no mês de março, é de 0,30.

Se o time ganhou um jogo em um dia de março, em Londrina, então a probabilidade de que, nessa cidade, tenha chovido naquele dia é de

A) 30%.
B) 87,652%.
C) 19,672%.
D) 12,348%.
E) 80,328%.

Resolução:

Sejam:

$P(C)$ = probabilidade de chover no dia.

$P(V)$ = probabilidade de o time vencer.

$P(C|V)$ = probabilidade de chover no dia, uma vez que o time venceu.

Sabemos que $P(C|V) = \dfrac{P(C \cap V)}{P(V)}$ e temos que a probabilidade de chover e de o time vencer é dada por:
$P(C \cap V) = 0,3 \,.\, 0,4 = 0,12$

A probabilidade de o time vencer é dada por:

$$P(V) = \underbrace{0,4 \,.\, 0,3}_{\substack{\text{Vencer e}\\ \text{chover}}} + \underbrace{0,7 \,.\, 0,7}_{\substack{\text{Vencer e}\\ \text{não chover}}} = 0,12 + 0,49 = 0,61$$

Então, $P(C|V) = \dfrac{P(C \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,12}{0,61} = 0,19672 = 19,672\%$.

TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Uma importante consequência da definição de probabilidade condicional é vista a seguir:

$$\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A|B)}$$

Do mesmo modo, temos:

$$\boxed{P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B|A)}$$

Ou seja:

A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos (interseção) é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, em relação ao primeiro.

OBSERVAÇÃO

Se os eventos A e B são independentes, temos:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B).P(A)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Um recipiente R_1 contém 3 bolinhas pretas e 4 bolinhas brancas. Um segundo recipiente R_2 possui 8 bolinhas pretas e 2 bolinhas brancas. Ao escolhermos um recipiente ao acaso e dele retirarmos uma bolinha, qual é a probabilidade de se observar o recipiente R_2 e uma bolinha branca?

Resolução:

Sejam:
$P(R_2)$ = probabilidade de se escolher o recipiente R_2.
$P(B|R_2)$ = probabilidade de se escolher uma bolinha branca, dado que já escolhemos R_2.
$P(R_2 \cap B)$ = probabilidade de se escolher R_2 e uma bolinha branca.

Temos:

$P(R_2 \cap B) = P(R_2).P(B|R_2) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{10} = 10\%$

LEI BINOMIAL DA PROBABILIDADE

Consideremos uma sequência de ensaios nos quais a probabilidade de ocorrência de determinado resultado não dependa dos resultados obtidos em ensaios anteriores e tampouco interfira nos próximos resultados. Esses ensaios são chamados *Ensaios de Bernoulli*.

Como exemplo, imaginemos o seguinte experimento: "Lançar um dado e observar a face superior obtida". Ao repetir esse ensaio 5 vezes, qual é a probabilidade de obtermos o número 3 exatamente duas vezes?

A probabilidade de obtermos o número 3 em um lançamento é igual a $\frac{1}{6}$. Obviamente, a probabilidade de isso não ocorrer nesse lançamento é igual a $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Como a ordem de obtenção do número 3 na sequência de ensaios não é importante, devemos inicialmente escolher 2 dos 5 ensaios efetuados. Isso pode ser feito de $C_{5,2}$ modos distintos.

Denotemos por P(A) a probabilidade de obter o número 3 exatamente duas vezes.

Assim, temos:

$$P(A) = C_{5,2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5!}{3!\,.\,2!} \cdot \frac{125}{7\,776} = 0{,}160751 \Rightarrow$$

$$P(A) = 16{,}0751\%$$

De maneira geral, se desejamos calcular a probabilidade P de obtermos exatamente **k** resultados favoráveis em **n** ensaios, temos que:

$$\boxed{P = C_{n,k} \cdot (P_f)^k \cdot (1 - P_f)^{n-k}}$$

Em que P_f é a probabilidade de obtermos o resultado favorável em um ensaio.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

04. Um baralho contém 8 cartas, das quais apenas uma é um ás. Uma carta é retirada ao acaso e depois devolvida ao baralho. Ao repetir o experimento quatro vezes, qual é a probabilidade de obtermos um ás exatamente duas vezes?

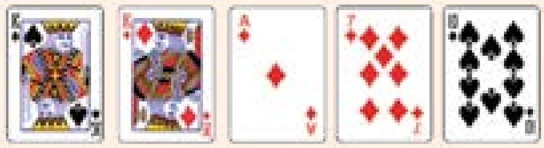
Resolução:

$$P = C_{4,2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{4!}{2!\,.\,2!} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{49}{64} = \frac{147}{2\,048}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UERJ–2018) Cinco cartas de um baralho estão sobre uma mesa; duas delas são Reis, como indicam as imagens.



Após serem viradas para baixo e embaralhadas, uma pessoa retira uma dessas cartas ao acaso e, em seguida, retira outra.

A probabilidade de sair Rei apenas na segunda retirada equivale a:

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{1}{3}$.
C) $\frac{2}{5}$.
D) $\frac{3}{10}$.

02. (PUC Rio) Jogamos uma moeda comum e um dado comum. A probabilidade de sair um número par e a face coroa é

A) 0,1.
B) 0,2.
C) 0,25.
D) 0,33.
E) 0,5.

03. (UERJ) Um instituto de pesquisa colheu informações para saber as intenções de voto no segundo turno das eleições para governador de determinado estado. Os dados estão indicados no quadro a seguir:

Intenção dos votos	Percentual
Candidato A	26%
Candidato B	40%
Votos nulos	14%
Votos brancos	20%

Escolhendo aleatoriamente um dos entrevistados, verificou-se que ele não vota no candidato B. A probabilidade de que esse eleitor vote em branco é

A) $\frac{1}{6}$.
B) $\frac{1}{5}$.
C) $\frac{1}{4}$.
D) $\frac{1}{3}$.
E) $\frac{2}{5}$.

04. (UFJF-MG) Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. A probabilidade de que pelos menos uma criança seja menino é de

A) 25%.
B) 42%.
C) 43,7%.
D) 87,5%.
E) 64,6%.

MATEMÁTICA

05. (UFPR) Durante um surto de gripe, 25% dos funcionários de uma empresa contraíram essa doença. Dentre os que tiveram gripe, 80% apresentaram febre. Constatou-se também que 8% dos funcionários apresentaram febre por outros motivos naquele período. Qual a probabilidade de que um funcionário dessa empresa, selecionado ao acaso, tenha apresentado febre durante o surto de gripe?

A) 20%.

B) 26%.

C) 28%.

D) 33%.

E) 35%.

06. (UEG-GO–2015) A tabela a seguir apresenta a preferência de homens e mulheres em relação a um prato, que pode ser doce ou salgado, típico de certa região do Estado de Goiás.

Sexo	Preferências	
	Doce	Salgado
Masculino	80	20
Feminino	60	40

Considerando-se os dados apresentados na tabela, a probabilidade de um desses indivíduos preferir o prato típico doce, sabendo-se que ele é do sexo feminino, é de

A) 0,43.

B) 0,50.

C) 0,60.

D) 0,70.

07. (UPE–2015) Dentre os esportes oferecidos aos estudantes de uma escola com 3 000 alunos, temos o futebol como preferência, sendo praticado por 600 estudantes. 300 estudantes dessa mesma escola praticam natação, e 100 praticam ambos os esportes. Selecionando-se um estudante praticante de futebol para uma entrevista, qual a probabilidade de ele também praticar natação?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{5}{6}$

08. (UEG-GO–2016) Pedro jogou dois dados comuns numerados de 1 a 6. Sabendo-se que o produto dos números sorteados nos dois dados é múltiplo de 3, a probabilidade de terem sido sorteados os números 3 e 4 é uma em

A) 18.

B) 12.

C) 10.

D) 9.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unicamp-SP–2019) O sistema de segurança de um aeroporto consiste de duas inspeções. Na primeira delas, a probabilidade de um passageiro ser inspecionado é de $\frac{3}{5}$. Na segunda, a probabilidade se reduz para $\frac{1}{4}$. A probabilidade de um passageiro ser inspecionado pelo menos uma vez é igual a

A) $\frac{17}{20}$.

B) $\frac{7}{10}$.

C) $\frac{3}{10}$.

D) $\frac{3}{20}$.

02. (UEPA) Uma universidade realizou uma pesquisa *online* envolvendo jovens do Ensino Médio para saber quais meios de comunicação esses jovens utilizam para se informarem dos acontecimentos diários. Para incentivá-los a preencher os dados referentes à pesquisa, cujas respostas estão registradas no quadro a seguir, a universidade sorteou um *tablet* dentre os respondentes.

Mulheres	Ouvem apenas rádio	350
	Assistem televisão e consultam a Internet	150
Homens	Assistem televisão e consultam Internet	375
	Utilizam apenas Internet	125
Total de jovens entrevistados		1 000

Sabendo-se que o respondente sorteado consulta a Internet para se manter informado diariamente, a probabilidade de o sorteado ser um homem

A) é inferior a 30%.

B) está compreendida entre 30% e 40%.

C) está compreendida entre 40% e 60%.

D) está compreendida entre 60% e 80%.

E) é superior a 80%.

03. (UEPA–2015) Leia o texto para responder à questão.

Sabe-se que ler cria bons estudantes, melhora a capacidade de relacionamento e ativa os lugares certos do cérebro. Cultivar o hábito da leitura surte efeitos nítidos: desenvolve a imaginação, o vocabulário e o conhecimento. Não é acaso que jovens de grande promessa nos estudos e na carreira profissional sejam leitores vorazes.

Pensando nisso, um jovem deseja presentear um amigo leitor com dois livros, entretanto fica na dúvida quanto ao estilo – ficção ou não ficção. Decide sortear dois títulos distintos dentre 10 títulos de ficção e 12 títulos de não ficção.

VEJA, ed. 2 373 (Adaptação).

Tomando por base as informações do texto, a probabilidade de esse jovem sortear, sucessivamente, um após o outro, dois títulos de ficção é:

A) $\frac{15}{77}$.

B) $\frac{5}{11}$.

C) $\frac{6}{11}$.

D) $\frac{5}{8}$.

E) $\frac{1}{5}$.

04. (PUC Minas–2015) Em uma população humana, a probabilidade de um indivíduo ser mudo é estimada em $\frac{50}{10\ 000}$, a probabilidade de ser cego é $\frac{85}{10\ 000}$, e a probabilidade de ser mudo e cego é $\frac{6}{10\ 000}$. Nesse caso, "ser mudo" não exclui a possibilidade de "ser cego". Com base nessas informações, a probabilidade de um indivíduo, escolhido ao acaso, ser mudo ou cego é igual a:

A) 0,0129.

B) 0,0135.

C) 0,0156.

D) 0,0174.

05. (FGV) Dois eventos **A** e **B** de um espaço amostral são independentes. A probabilidade do evento **A** é P(A) = 0,4 e a probabilidade da união de **A** com **B** é $P(A \cup B) = 0{,}8$. Pode-se concluir que a probabilidade do evento **B** é

A) $\frac{5}{6}$.

B) $\frac{4}{5}$.

C) $\frac{3}{4}$.

D) $\frac{2}{3}$.

E) $\frac{1}{2}$.

06. (UCS-RS–2016) Numa cidade com 60 000 domicílios, 35 000 deles têm acesso à Internet, 25 000 têm assinatura de TV a cabo, e um terço do número de domicílios não tem acesso a nenhum dos dois recursos. Qual é a probabilidade de um domicílio da cidade, escolhido ao acaso, ter acesso à Internet e não ter assinatura de TV a cabo?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{12}$

C) $\frac{7}{12}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{7}{8}$

07. (UEG-GO–2017) Um nadador vai disputar duas provas nas Olimpíadas, primeiro os 100 metros borboleta e depois os 100 metros nado livre. A probabilidade de ele vencer a prova dos 100 metros borboleta é de 70%, ao passo que a de ele vencer ambas é de 60%. Se ele vencer a prova dos 100 metros borboleta, a probabilidade de ele vencer a prova dos 100 metros nado livre é de aproximadamente

A) 0,42.

B) 0,86.

C) 0,50.

D) 0,70.

E) 0,60.

08. (Unifor-CE–2016) O resultado de uma pesquisa realizada por um órgão do governo do estado do Ceará sobre o perfil dos fumantes e publicado pela imprensa cearense mostrou que, num grupo de 1 000 pessoas, 17% fumam e, dentre os fumantes, 44% são mulheres. Se, nesse grupo de 1 000 pessoas, uma é escolhida ao acaso, então a probabilidade de ela ser fumante e mulher é, aproximadamente,

A) 0,044.

B) 0,054.

C) 0,075.

D) 0,085.

E) 0,095.

09. (FEI-SP) Uma moeda viciada apresenta probabilidade de ocorrer face cara quatro vezes maior que a probabilidade de ocorrer face coroa. Em 2 lançamentos consecutivos dessa moeda, qual a probabilidade de ocorrer 2 vezes a face coroa?

A) 0,2

B) 0,1

C) 0,01

D) 0,02

E) 0,04

10. (ACAFE-SC–2017) Uma prova consta de 7 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas cada uma, e apenas uma correta. Se um aluno escolher como correta uma alternativa ao acaso em cada questão, a probabilidade de que ele acerte ao menos uma questão da prova é de, aproximadamente,

A) 87%.

B) 85%.

C) 90%.

D) 47%.

11. (Fatec–SP) Em um supermercado, a probabilidade de que um produto da marca A e um produto da marca B estejam a dez dias, ou mais, do vencimento do prazo de validade é de 95% e 98%, respectivamente. Um consumidor escolhe, aleatoriamente, dois produtos, um produto da marca A e outro da marca B. Admitindo eventos independentes, a probabilidade de que ambos os produtos escolhidos estejam a menos de dez dias do vencimento do prazo de validade é

A) 0,001%.

B) 0,01%.

C) 0,1%.

D) 1%.

E) 10%.

12. (UERJ) Em uma escola, 20% dos alunos de uma turma marcaram a opção correta de uma questão de múltipla escolha que possui quatro alternativas de resposta. Os demais marcaram uma das quatro opções ao acaso.

Verificando-se as respostas de dois alunos quaisquer dessa turma, a probabilidade de que exatamente um tenha marcado a opção correta equivale a

A) 0,48.

B) 0,40.

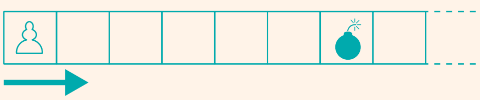
C) 0,36.

D) 0,25.

MATEMÁTICA

13. (Unesp–2017) Em um jogo de tabuleiro, o jogador desloca seu peão nas casas por meio dos pontos obtidos no lançamento de um par de dados convencionais e não viciados. Se o jogador obtém números diferentes nos dados, ele avança um total de casas igual à soma dos pontos obtidos nos dados, encerrando-se a jogada. Por outro lado, se o jogador obtém números iguais nos dados, ele lança novamente o par de dados e avança seu peão pela soma dos pontos obtidos nos dois lançamentos, encerrando-se a jogada.

A figura a seguir indica a posição do peão no tabuleiro desse jogo antes do início de uma jogada.



Iniciada a jogada, a probabilidade de que o peão encerre a jogada na casa indicada na figura com a bomba é igual a

A) $\frac{37}{324}$.

B) $\frac{49}{432}$.

C) $\frac{23}{144}$.

D) $\frac{23}{135}$.

E) $\frac{23}{216}$.

14. (UERJ–2017) Uma urna contém uma bola branca, quatro bolas pretas e **x** bolas vermelhas, sendo $x > 2$. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, é observada e recolocada na urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Se $\frac{1}{2}$ é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam da mesma cor, o valor de **x** é

A) 9.

B) 8.

C) 7.

D) 6.

15. (FUVEST-SP–2016) Em um experimento probabilístico, Joana retirará aleatoriamente 2 bolas de uma caixa contendo bolas azuis e bolas vermelhas. Ao montar-se o experimento, colocam-se 6 bolas azuis na caixa. Quantas bolas vermelhas devem ser acrescentadas para que a probabilidade de Joana obter 2 azuis seja $\frac{1}{3}$?

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 10

16. (UEG-GO–2016) Renata está grávida e realizará um exame que detecta o sexo do bebê. Se o exame detectar que é um menino, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de azul é de 70%, ao passo que de branco é de 30%. Mas, se o exame detectar que é uma menina, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de rosa é de 60% contra 40% de pintar de branco. Sabendo-se que a probabilidade de o exame detectar um menino é de 50%, a probabilidade da Renata pintar o quarto do bebê de branco é de

A) 70%.

B) 50%.

C) 35%.

D) 30%.

E) 20%.

17. (FUVEST-SP)

A) Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a $\frac{2}{3}$?

B) Considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e **x** bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente ao acaso uma bola dessa urna. Para que valores de **x** a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale $\frac{1}{2}$?

SEÇÃO ENEM

Resoluções no Bernoulli Play

01. (Enem–2018) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna.

Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- Opção 1: Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 2: Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
- Opção 3: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 4: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
- Opção 5: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

02. (Enem–2017) Numa avenida, existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

A) $\frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$

B) $\frac{10 \cdot 2^9}{3^{10}}$

C) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

D) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

E) $\frac{2}{3^{10}}$

03. (Enem–2017) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

A) 0,075

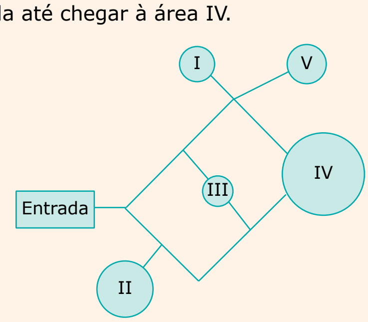
B) 0,150

C) 0,325

D) 0,600

E) 0,800

04. (Enem–2016) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que, relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

A) $\frac{1}{96}$.

B) $\frac{1}{64}$.

C) $\frac{5}{24}$.

D) $\frac{1}{4}$.

E) $\frac{5}{12}$.

05. (Enem–2016) Um casal, ambos com 30 anos de idade, pretende fazer um plano de previdência privada. A seguradora pesquisada, para definir o valor do recolhimento mensal, estima a probabilidade de que pelo menos um deles esteja vivo daqui a 50 anos, tomando por base dados da população, que indicam que 20% dos homens e 30% das mulheres de hoje alcançarão a idade de 80 anos.

Qual é essa probabilidade?

A) 50%.

B) 44%.

C) 38%.

D) 25%.

E) 6%.

06. (Enem–2016) Uma caixa contém uma cédula de R$ 5,00, uma de R$ 20,00 e duas de R$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior.

A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R$ 55,00 é

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{1}{4}$.

C) $\frac{3}{4}$.

D) $\frac{2}{9}$.

E) $\frac{5}{9}$.

07. (Enem) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

A) 0,02048.

B) 0,08192.

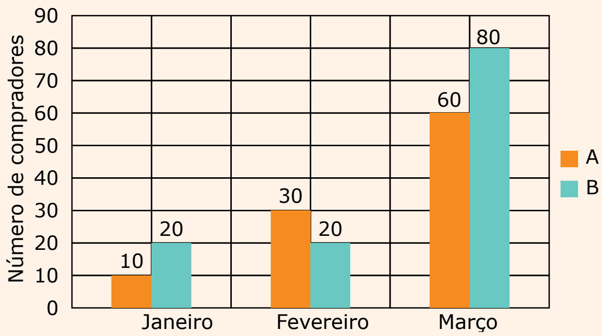
C) 0,24000.

D) 0,40960.

E) 0,49152.

MATEMÁTICA

08. (Enem) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, **A** e **B**, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto **A** e outro brinde entre os compradores do produto **B**.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

A) $\frac{1}{20}$
B) $\frac{3}{242}$
C) $\frac{5}{22}$
D) $\frac{6}{25}$
E) $\frac{7}{15}$

09. (Enem) Numa escola com 1 200 alunos, foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

Nessa pesquisa, constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{14}$

10. (Enem) O diretor de um colégio leu em uma revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

A) $\frac{1}{3}$. B) $\frac{1}{5}$. C) $\frac{2}{5}$. D) $\frac{5}{7}$. E) $\frac{5}{14}$.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. C
- 03. D
- 04. D
- 05. B
- 06. C
- 07. D
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. D
- 03. A
- 04. A
- 05. D
- 06. A
- 07. B
- 08. C
- 09. E
- 10. A
- 11. C
- 12. A
- 13. A
- 14. A
- 15. B
- 16. C
- 17.
  - A) 16 bolas
  - B) x = 1 ou x = 9

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. A
- 03. C
- 04. C
- 05. B
- 06. C
- 07. B
- 08. A
- 09. A
- 10. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Binômio de Newton

NÚMERO BINOMIAL

Dados dois números naturais **n** e **p**, com n ≥ p, chamamos de **número binomial** de classe **p** e ordem **n** a expressão $\dfrac{n!}{(n-p)!\,.\,p!}$. Denotamos esse número binomial por $\dbinom{n}{p}$.

Portanto, temos:

$$\boxed{\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,.\,p!}}$$

O número **n** é chamado numerador, e o número **p** é chamado denominador de $\dbinom{n}{p}$.

Sabemos que a expressão anterior corresponde à expressão do número de combinações simples, indicadas anteriormente por $C_{n,\,p}$. No presente contexto, vamos adotar a notação $\dbinom{n}{p}$. Tal notação, mais sintética, simplificará o estudo das propriedades e aplicações dessa expressão.

Exemplo:

Calcule o valor do número binomial $\dbinom{7}{3}$.

$$\dbinom{7}{3} = \dfrac{7!}{4!\,.\,3!} = \dfrac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,.\,3!} = \dfrac{7\,.\,\cancel{6}\,.\,5}{\cancel{6}} = 35$$

OBSERVAÇÕES

i) $\dbinom{n}{0} = \dfrac{n!}{(n-0)!\,.\,0!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

ii) $\dbinom{n}{n} = \dfrac{n!}{(n-n)!\,.\,n!} = \dfrac{n!}{0!\,.\,n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

NÚMEROS BINOMIAIS COMPLEMENTARES

Dois números binomiais são ditos complementares caso possuam o mesmo numerador e a soma de seus denominadores seja igual ao numerador. Ou seja, os números $\dbinom{n}{p}$ e $\dbinom{n}{n-p}$ são complementares, pois p + n − p = n.

Por exemplo, os números binomiais $\dbinom{10}{6}$ e $\dbinom{10}{4}$ são complementares.

Propriedade:

Dois números binomiais complementares são iguais.

$$\boxed{\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}}$$

Exemplos:

1º) $\dbinom{10}{6} = \dbinom{10}{4}$

2º) $\dbinom{6}{6} = \dbinom{6}{0}$

Observe que se $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{q}$, então p = q ou p + q = n.

Exemplo:

Resolva a equação $\dbinom{8}{x} = \dbinom{8}{x+2}$, sendo **x** um número natural menor do que 8.

Temos que:

$$\begin{cases} x = x + 2 \\ \quad \text{ou} \\ x + x + 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 \text{ (absurdo)} \\ \quad \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Portanto, S = {3}.

RELAÇÃO DE STIFFEL

A soma de dois números binomiais, com o mesmo numerador e denominadores consecutivos, é igual a um número binomial com uma unidade a mais no numerador e com denominador igual ao maior dos denominadores daqueles binomiais.

$$\boxed{\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}, \text{ em que } n \geq p.}$$

Exemplo:

Calcule o valor da expressão $\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}$.

$$\underbrace{\binom{8}{5}+\binom{8}{6}}_{\binom{9}{6}}+\binom{9}{7}=\binom{9}{6}+\binom{9}{7}=\binom{10}{7}$$

TRIÂNGULO DE PASCAL

Os números binomiais podem ser organizados em forma de matriz, de modo que um número binomial $\binom{n}{p}$ ocupe a linha **n** e a coluna **p**, formando o Triângulo de Pascal, conforme a figura a seguir:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	...	Coluna n
Linha 0	$\binom{0}{0}$						
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
...	...	...	...	...	...		
Linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	...	$\binom{n}{n}$

OBSERVAÇÕES

i) Cada um dos elementos da coluna 0 é da forma $\binom{n}{0}$, ou seja, é igual a 1.

ii) O último elemento da última linha é da forma $\binom{n}{n}$, ou seja, também é igual a 1.

iii) Ao somar dois binomiais consecutivos de uma determinada linha usando a Relação de Stiffel, obtemos o binomial localizado imediatamente abaixo do segundo binomial. Por exemplo, $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\binom{4}{3}$.

Desse modo, podemos facilmente montar um Triângulo de Pascal utilizando essas regras, em vez de calcular o valor de cada binomial.

Exemplo:

Construa um Triângulo de Pascal para n = 7.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Teorema das Linhas

A soma dos números binomiais da linha de ordem **n** é igual a 2^n.

linha 0	1					→	soma = 1 = 2^0
linha 1	1	1				→	soma = 2 = 2^1
linha 2	1	2	1			→	soma = 4 = 2^2
linha 3	1	3	3	1		→	soma = 8 = 2^3
linha 4	1	4	6	4	1	→	soma = 16 = 2^4

Teorema das Colunas

Ao somar os números binomiais de determinada coluna, desde o primeiro elemento $\binom{n}{n}$ até um elemento qualquer $\binom{n+p}{n}$, obtemos o número binomial imediatamente abaixo e à direita deste último, ou seja, o número binomial $\binom{n+p+1}{n+1}$.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

1 + 4 + 10 + 20 = 35

1							
1	**1**						
1	**2**	1					
1	**3**	3	**1**				
1	**4**	6	**4**	1			
1	**5**	10	**10**	5	1		
1	6	**15**	**20**	15	6	1	
1	7	21	35	**35**	21	7	1

Teorema das Diagonais

Ao somar os números binomiais de determinada transversal, desde o elemento $\binom{n}{0}$ até um elemento qualquer $\binom{n+p}{p}$, obtemos o número binomial imediatamente abaixo deste último, ou seja, o número binomial $\binom{n+p+1}{p}$.

1 + 3 + 6 +10 = 20

1							
1	1						
1	2	1					
1	**3**	3	1				
1	4	**6**	4	1			
1	5	10	**10**	5	1		
1	6	15	**20**	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

BINÔMIO DE NEWTON

Inicialmente, vamos desenvolver alguns produtos da forma $(x + a)^n$:

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = 1x + 1a$

$(x + a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$

$(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$

Os coeficientes resultantes do desenvolvimento desses binômios são os números binomiais que aparecem no Triângulo de Pascal.

1			
1	1		
1	2	1	
1	3	3	1

Portanto, observamos que expandir determinado binômio implica a utilização do cálculo combinatório. Cada um dos produtos anteriores pode ser escrito do seguinte modo:

$$(x + a)^0 = \binom{0}{0}.x^0.a^0$$

$$(x + a)^1 = \binom{1}{0}.x^1.a^0 + \binom{1}{1}.x^0.a^1$$

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0}.x^2.a^0 + \binom{2}{1}.x^1.a^1 + \binom{2}{2}.x^0.a^2$$

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0}.x^3.a^0 + \binom{3}{1}.x^2.a^1 + \binom{3}{2}.x^1.a^2 + \binom{3}{3}.x^0.a^3$$

....

Generalizando, temos:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}.x^n.a^0 + \binom{n}{1}.x^{n-1}.a^1 + \binom{n}{2}.x^{n-2}.a^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}.x^1.a^{n-1} + \binom{n}{n}.x^0.a^n$$

Essa expressão é conhecida como **Fórmula do Binômio de Newton**.

OBSERVAÇÃO

A expressão também pode ser escrita na notação somatório, como segue:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p$$

Exemplo:

Desenvolva o binômio $(x + 3)^4$.

$$(x + 3)^4 = \binom{4}{0}.x^4.3^0 + \binom{4}{1}.x^3.3^1 + \binom{4}{2}.x^2.3^2 +$$

$$+\binom{4}{3}.x^1.3^3 + \binom{4}{4}.x^0.3^4 \Rightarrow$$

$$(x + 3)^4 = 1.x^4.1 + 4.x^3.3 + 6.x^2.9 + 4.x.27 + 1 . 1 . 81 \Rightarrow$$

$$(x + 3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

Termo geral do Binômio $(x + a)^n$

Sabemos que: $(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p$

Observe que o primeiro termo (**T_1**) é obtido fazendo $p = 0$.

$$T_1 = \binom{n}{0}.x^{n-0}.a^0$$

Analogamente, o segundo termo (**T_2**) ocorre para $p = 1$.

$$T_2 = \binom{n}{1}.x^{n-1}.a^1$$

Portanto, o termo que ocupa a posição $p + 1$ é dado por:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p}$$

Com expoentes decrescentes de **x**.

Exemplos:

1º) Encontre o terceiro termo do desenvolvimento de $(x^2 + 3)^6$, com expoentes decrescentes de **x**.

$$T_3 = \binom{6}{2}.(x^2)^{6-2}.2^2 = \frac{6!}{2!.4!}.x^8.4 = 60x^8$$

2º) Determine o termo independente de **x** no desenvolvimento de $\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$.

O termo independente de **x** corresponde ao coeficiente de **x^0**. Assim:

$$T_{p+1} = \binom{4}{p}.\ x^{4-p}.\left(-\frac{2}{x}\right)^p = \binom{4}{p}.x^{4-p}.\frac{(-2)^p}{x^p} \Rightarrow$$

$$T_{p+1} = \binom{4}{p}.x^{4-2p}.(-2)^p$$

Fazendo $4 - 2p = 0$, temos $p = 2$.
Substituindo **p** na expressão, temos:

$$T_3 = \binom{4}{2}.x^0.(-2)^2 = 6 . 4 = 24$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) O coeficiente de **x** no desenvolvimento $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$ é

A) 10. B) 35. C) 15. D) 6. E) 20.

02. (UFRGS-RS) A soma dos coeficientes do polinômio $(x^2 + 3x - 3)^{50}$ é

A) 0. B) 1. C) 5. D) 25. E) 50.

03. (UPF-RS–2016) Desenvolvendo o binômio $(2x - 3y)^{3n}$, obtém-se um polinômio de 16 termos. O valor de **n** é

A) 15. C) 5. E) 2.

B) 10. D) 4.

04. (Mackenzie-SP–2017) Sabendo que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 256$, então o valor de **n** vale

A) 8. C) 6. E) 4.

B) 7. D) 5.

05. (UESPI) O coeficiente de x^3 no desenvolvimento binomial de $(x + 3)^5$ é

A) 10. C) 45. E) 180.

B) 20. D) 90.

06. (ESPM-SP) Os binomiais $\binom{11}{4x}$ e $\binom{x+3y}{y}$ são complementares e, por isso, são iguais. Seu valor é

A) 165. C) 55. E) 11.

B) 330. D) 462.

07. (UECE) Para **n** e **k** inteiros positivos com $n > k$, defina $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, em que $n! = 1 . 2 . 3 ...n$. Se **n** e **k** satisfazem a relação $\binom{n}{k+1} = 3\binom{n}{k}$, então tem-se:

A) $n = 4k + 1$

B) $n = 4k + 2$

C) $n = 4k + 3$

D) $n = 4k + 4$

08. (UECE–2016) No desenvolvimento de $x(2x + 1)^{10}$ o coeficiente de x^3 é

A) 480.

B) 320.

C) 260.

D) 180.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFOP-MG) Para que se tenha um dos termos do desenvolvimento de $(x + a)^{11}$ igual a $1\,386x^5$, o valor de **a** deve ser:

A) $\sqrt[6]{3}$

B) $2\sqrt[3]{6}$

C) $\sqrt{10}$

D) 3

E) $3\sqrt{10}$

02. (UFSM-RS) Desenvolvendo o binômio $(2x - 1)^8$, o quociente entre o quarto e o terceiro termos é:

A) -4

B) $-x$

C) x

D) $-\frac{1}{x}$

E) $4x$

03. (ESPM-SP) Simplificando-se a expressão com números binomiais $\binom{x}{2} + \binom{x+1}{2}$, para $x \geq 0$, obtém-se:

A) $x^2 - 1$

B) $x - 1$

C) x^2

D) $2x$

E) $2x - 1$

04. (Fatec-SP) No desenvolvimento do binômio $(x - 1)^{100}$, segundo as potências decrescentes de **x**, a soma dos coeficientes do segundo e do quarto termos é

A) $-323\,500$.

B) $-171\,700$.

C) $-161\,800$.

D) $3\,926\,175$.

E) $23\,532\,300$.

05. (UEPB) O termo que independe de **x** no desenvolvimento $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^4$ é

A) -324.

B) 324.

C) 216.

D) 96.

E) 81.

06. (ESPM-SP) No desenvolvimento do binômio $\left(x^3 + \frac{1}{y^2}\right)^{24}$, quando o expoente de **x** é 36, o de **y** é igual a

A) -12.

B) -24.

C) -6.

D) -18.

E) -4.

07. (FGV) No desenvolvimento do binômio $\left(\frac{x^2}{2} + Ax^{-1}\right)^7$ segundo a ordem decrescente de seus expoentes, o quinto termo é igual a $\frac{70x^B}{81}$, com **A** e **B** constantes racionais. Nessas condições, A + B é igual a

A) $\frac{4}{3}$ ou 2.

B) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{3}$.

C) 1 ou $\frac{5}{3}$.

D) $\frac{4}{3}$ ou $\frac{8}{3}$.

E) $\frac{2}{3}$ ou 2.

08. (UFRGS-RS) Considere a configuração dos números dispostos nas colunas e linhas a seguir.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7	...
Linha 0	1								
Linha 1	1	1							
Linha 2	1	2	1						
Linha 3	1	3	3	1					
Linha 4	1	4	6	4	1				
Linha 5	1	5	10	10	5	1			
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1		
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	

O número localizado na linha 15 e na coluna 13 é

A) 15.

B) 91.

C) 105.

D) 120.

E) 455.

09. (UERN) A soma dos algarismos do termo independente de **x** no desenvolvimento do Binômio de Newton $\left(\frac{2}{x} + x\right)^8$ é

A) 3.

B) 4.

C) 6.

D) 7.

10. (UERN–2015) Considere a seguinte equação:

$$\binom{x+2}{2} = \binom{3x+1}{1}$$

A partir dessa equação, conclui-se que o número binomial $\binom{2x-1}{2}$ equivale a

A) 3.
B) 10.
C) 21.
D) 60.

11. (UERN) Qual é o valor do termo independente de **x** do binômio $\left(\frac{2}{x^2}+x\right)^n$ considerando que ele corresponde ao sétimo termo de seu desenvolvimento?

A) 435
B) 672
C) 543
D) 245

12. (UECE) Se o desenvolvimento de $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ possui 9 termos e um deles é $112.c.x^7$, o valor de **c** será

A) 8.
B) 16.
C) 24.
D) 32.

13. (UEFS-BA) Sendo **x** e **y** os respectivos percentuais de nascimento de meninas e meninos em uma comunidade durante certo período, verificou-se que cada termo do desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$ correspondia à taxa de ocorrência de m – k meninas e de **k** meninos, em um total de m nascimentos.

Considerando-se T_1 a taxa de ocorrência de três meninas e três meninos e T_2 a taxa de ocorrência de quatro meninas e dois meninos, x = 0,44 e y = 0,56, tem-se que $\frac{T_1}{T_2}$ é, aproximadamente,

A) 0,72.
B) 0,80.
C) 1,01.
D) 1,44.
E) 1,70.

14. (FGV–2018) Uma aplicação financeira de **C** reais à taxa mensal de juros compostos de x% é resgatada depois de 8 meses no montante igual a $\frac{C_8}{C}$ reais. Sendo assim, é um polinômio P(x) de grau 8, cujo coeficiente do termo em x^5 será:

A) $70 \cdot 10^{-8}$
B) $35 \cdot 10^{-8}$
C) $56 \cdot 10^{-10}$
D) $35 \cdot 10^{-10}$
E) $21 \cdot 10^{-10}$

15. (PUC-SP) Considerando que todo número natural **n**, $n \geq 1$, tem-se $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, então a soma $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{1\,999.2\,000}$ é equivalente a:

A) $9{,}995 \cdot 10^{-3}$
B) $9{,}95 \cdot 10^{-2}$
C) $9{,}995 \cdot 10^{-2}$
D) $9{,}95 \cdot 10^{-1}$
E) $9{,}995 \cdot 10^{-1}$

16. (EsPCEx-SP–2017) Determine o valor numérico do polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2017$ para x = 89.

A) 53 213 009
B) 57 138 236
C) 61 342 008
D) 65 612 016
E) 67 302 100

17. (UECE–2016) Se **n** é um número natural maior do que dois, ao ordenarmos o desenvolvimento de $\left[x^2+\frac{1}{2x}\right]^n$ segundo as potências decrescentes de **x**, verificamos que os coeficientes dos três primeiros termos estão em progressão aritmética. Nessas condições, o valor de **n** é

A) 8.
B) 6.
C) 4.
D) 10.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. B
03. C
04. A
05. D
06. A
07. C
08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. D
03. C
04. C
05. C
06. B
07. D
08. C
09. B
10. B
11. B
12. B
13. E
14. C
15. E
16. D
17. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Progressão Geométrica

INTRODUÇÃO

Chamamos de progressão geométrica (P.G.) a toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante dada, denominada razão da P.G., e indicada por **q**.

Exemplos:

1º) (3, 6, 12, 24, 48, ...) é uma P.G. **crescente**, com razão q = 2.

2º) (5, 5, 5, 5, 5, ...) é uma P.G. **constante**, com razão q = 1.

3º) $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ é uma P.G. **decrescente**, em que $q = \frac{1}{2}$.

4º) (3, −6, 12, −24, ...) é uma P.G. **oscilante**, em que q = −2.

Termo geral da P.G.

Seja a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1.q \\ a_3 &= a_2.q \\ a_4 &= a_3.q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1}.q \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro essas n − 1 igualdades, temos:

$$(a_2.a_3.a_4.\ \ldots\ .a_{n-1}).a_n = a_1.(a_2.a_3.a_4.\ \ldots\ .a_{n-1}).\underbrace{q.q.q\ \ldots\ .q}_{(n-1)\text{ vezes}}$$

Simplificando os termos da expressão, obtemos:

$$\boxed{a_n = a_1.q^{n-1}}$$

Essa expressão é a fórmula do termo geral da P.G.

Exemplo:

Determinar o sétimo termo da P.G. (1, 3, 9, ...).

Sabemos que $a_1 = 1$ e q = 3. Assim, temos:

$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow a_7 = 1\ .\ 3^{7-1} \Rightarrow a_7 = 3^6 \Rightarrow a_7 = 729$

Propriedades da P.G.

i) Cada termo de uma P.G., a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo antecessor e o sucessor. Ou seja, dada uma P.G. (a, b, c, ...), temos:

$$\boxed{b^2 = ac}$$

Por exemplo, observe a P.G. (2, 6, 18, 54, 162, ...).

Temos: $6^2 = 2\ .\ 18$, $18^2 = 6\ .\ 54$, etc.

ii) O produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Por exemplo, na P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32), temos:

$$\underbrace{1\,.\,32}_{\text{Produto dos extremos}} = \underbrace{2\,.\,16}_{\text{Equidistantes dos extremos}} = \underbrace{4\,.\,8}_{\text{Equidistantes dos extremos}} = 32$$

Notação Especial:

Representações convenientes de uma P.G.

i) P.G. com 3 termos: $\left(\frac{x}{q}; x; xq\right)$, de razão **q**.

ii) P.G. com 4 termos: $\left(\frac{x}{q^3}; \frac{x}{q}; xq; xq^3\right)$, de razão $\mathbf{q}^2$.

iii) P.G. com 5 termos: $\left(\frac{x}{q^2}; \frac{x}{q}; x; xq; xq^2\right)$, de razão **q**.

Soma dos n termos de uma P.G.

Considere a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$.

Sendo $\mathbf{S_n}$ a soma dos seus **n** termos, temos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \Rightarrow$

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$ (I)

Multiplicando os dois membros da expressão (I) pela razão **q**, temos:

$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n$ (II)

Fazendo (II) – (I), obtemos:

$$\begin{array}{rl} qS_n = & \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{a_1q^3} + \cancel{...} + a_1q^n \\ - \quad S_n = a_1 + & \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{...} + \cancel{a_1q^{n-1}} \\ \hline \end{array}$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow$$

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Essa expressão é a fórmula da soma dos **n** termos de uma P.G.

Exemplo:

Calcular a soma dos 5 primeiros termos da P.G. (3, 9, 27, ...).

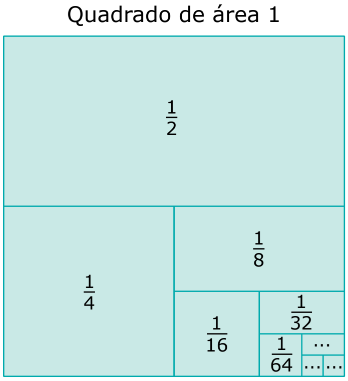
Temos $a_1 = 3$ e $q = 3$. Logo:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{3(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{3 \cdot 242}{2} = 363$$

Soma dos infinitos termos de uma P.G.

Em determinadas situações, podemos observar que a soma dos infinitos termos de uma P.G. pode convergir para um valor finito. Como exemplo, considere um quadrado de área igual a 1. Vamos dividi-lo em retângulos e quadrados menores, indicando a área de cada parte, conforme a figura a seguir:

Quadrado de área 1



Observe que o quadrado pode ser subdividido em infinitas figuras menores. A soma das áreas dessas figuras é dada por: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + ...$

Logo, dizemos que o limite dessa soma, quando o número de parcelas tende ao infinito, é igual a 1, ou seja, a área do quadrado original.

Assim, de maneira geral, a condição para que a soma dos infinitos termos de uma P.G. acabe convergindo para um valor finito é que a razão **q** seja um número entre –1 e 1.

Logo, aplicando a fórmula da soma, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Como **q** é um número entre –1 e 1, à medida que **n** se aproxima do infinito, o valor de $\mathbf{q}^n$ converge para zero.

Portanto, à medida que **n** tende ao infinito, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ para } -1 < q < 1}$$

Essa expressão é a fórmula da soma dos infinitos termos de uma P.G.

Exemplo:

Calcular o valor de $x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$

O valor anterior corresponde à soma dos infinitos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right)$.

Temos $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$. Assim:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (Mackenzie-SP) A soma dos termos da progressão $(3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, ...)$ é:

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) 4

Resolução:

Podemos escrever a P.G. anterior do seguinte modo:

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right)$. Observe que $a_1 = q = \frac{1}{3}$. Assim, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} = \frac{1}{2}$$

Produto dos n termos de uma P.G.

Consideremos a P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$. Denotemos por P_n o produto dos **n** primeiros termos dessa P.G. Assim, temos:

$$P_n = a_1.a_2.a_3. \ ... \ .a_n \Rightarrow$$

$$P_n = a_1.(a_1.q).(a_1.q^2). \ ... \ .(a_1.q^{n-1}) \Rightarrow$$

$$P_n = a_1^n.q^{1 + 2 + 3 + ... + (n-1)}$$

Observe que o expoente de **q** na expressão anterior é igual à soma dos n − 1 termos da P.A. (1, 2, 3, ..., n − 1). Logo, essa soma é dada por:

$$S_{n-1} = \frac{(a_1 + a_{n-1})(n-1)}{2} = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Substituindo a soma na expressão do produto dos **n** termos, obtemos:

$$\boxed{P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02. (UFPE) Supondo-se que, numa progressão geométrica, o 1º termo é 1 e o 6º termo é 32, assinalar a alternativa que corresponde ao produto dos 6 primeiros termos dessa progressão.

A) 4 096
B) 1 024
C) 5 120
D) 32 768
E) 10 000

Resolução:

Sabe-se que $a_n = a_1 . q^{n-1}$, ou seja:

$a_6 = a_1 . q^{6-1} \Rightarrow 32 = 1 . q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{32} = 2$

Portanto, o produto dos 6 primeiros termos da P.G. é dado por:

$$P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow P_6 = 1^6 . 2^{\frac{6.5}{2}} = 2^{15} = 32\ 768$$

03. (UNIFEI-MG) Considere uma progressão geométrica (P.G.) de 8 termos, em que a soma dos termos de ordem par é 510 e a soma dos termos de ordem ímpar é 255. Então, a razão **q** dessa P.G. vale:

A) $\frac{1}{3}$.
B) $\frac{1}{2}$.
C) 2.
D) 3.

Resolução:

$$S_{\text{Ímpar}} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_1 + a_1.q^2 + a_1.q^4 + a_1.q^6 \Rightarrow$$
$$a_1(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 255$$

$$S_{\text{Par}} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = a_1.q + a_1.q^3 + a_1.q^5 + a_1.q^7 =$$
$$q\underbrace{(a_1 + a_1.q^2 + a_1.q^4 + a_1.q^6)}_{S_{\text{Ímpar}} = 255} = 510 \Rightarrow q = \frac{510}{255} = 2$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

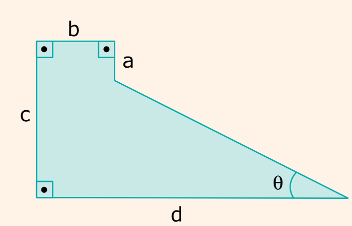
01. (PUC Rio) A sequência 10^x, 10^{x+1}, 10^{x+2}, ... representa

A) uma progressão aritmética de razão 10.
B) uma progressão aritmética de razão 1.
C) uma progressão geométrica de razão 10.
D) uma progressão geométrica de razão 1.
E) nem progressão aritmética nem progressão geométrica.

02. (PUC-RS–2015) O resultado da adição indicada 0,001 + 0,000001 + 0,000000001 + ... é

A) $\frac{1}{9}$.
B) $\frac{1}{10}$.
C) $\frac{1}{99}$.
D) $\frac{1}{100}$.
E) $\frac{1}{999}$.

03. (Unicamp-SP–2019) A figura a seguir exibe um pentágono em que quatro lados consecutivos têm comprimentos **a**, **b**, **c** e **d**. Se a sequência (a, b, c, d) é uma progressão geométrica de razão q > 1, então tan θ é igual a:



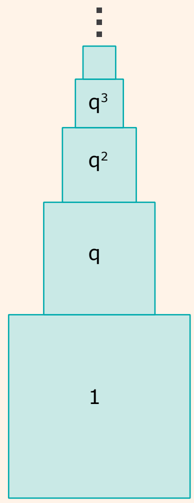
A) $\frac{1}{q}$
B) q
C) q^2
D) $\sqrt{q}$

04. (PUC Minas) Depois de percorrer um comprimento de arco de 12 m, uma criança deixa de empurrar o balanço em que está brincando. Se o atrito diminui a velocidade do balanço de modo que o comprimento de arco percorrido seja sempre igual a 80% do anterior, a distância total percorrida pela criança, em metros, até que o balanço pare completamente, é dada pela expressão D = 12 + 0,80 . 12 + 0,80.(0,80 . 12) + ... Observando-se que o segundo membro dessa igualdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica, pode-se estimar que o valor de **D**, em metros, é igual a

A) 24.
B) 36.
C) 48.
D) 60.

MATEMÁTICA

05. (UEFS-BA–2016)



Se infinitos quadrados, cujas áreas formam uma progressão geométrica decrescente de razão **q**, pudessem ser empilhados, como na figura, e o quadrado da base tivesse uma área de 1 m², a altura da pilha, em **m**, seria:

A) $\dfrac{1}{1-q}$

B) $\dfrac{1-q}{1-\sqrt{q}}$

C) $\dfrac{1-\sqrt{q}}{1-q}$

D) $\dfrac{1+\sqrt{q}}{1-q}$

E) infinita

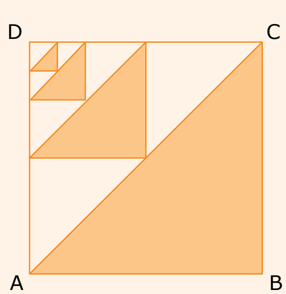
06. (Mackenzie-SP–2015) Se os números 3, **A** e **B**, nessa ordem, estão em progressão aritmética e os números 3, A – 6 e **B**, nessa ordem, estão em progressão geométrica, então o valor de **A** é

A) 12.
B) 15.
C) 18.
D) 21.
E) 24.

07. (UFRGS-RS) Três números formam uma progressão geométrica de razão 3. Subtraindo 8 unidades do terceiro número, obteremos uma progressão aritmética cuja soma dos termos é

A) 16.
B) 18.
C) 22.
D) 24.
E) 26.

08. (UFRGS-RS) Na figura a seguir, ABCD é um quadrado e os triângulos sombreados são triângulos semelhantes tais que as alturas correspondentes formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.



Se o perímetro do triângulo ABC é 1, a soma dos perímetros dos quatro triângulos sombreados é

A) $\frac{9}{8}$.

B) $\frac{11}{8}$.

C) $\frac{13}{8}$.

D) $\frac{15}{8}$.

E) $\frac{17}{8}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC-SP–2018) A sequência (a_1, a_2, a_3, ...) é uma progressão aritmética de razão 3, e a sequência (b_1, b_2, b_3, ...) é uma progressão geométrica crescente.

Sabendo que $a_2 = b_3$, $a_{10} = b_5$ e $a_{42} = b_7$, o valor de $b_4 - a_4$ é

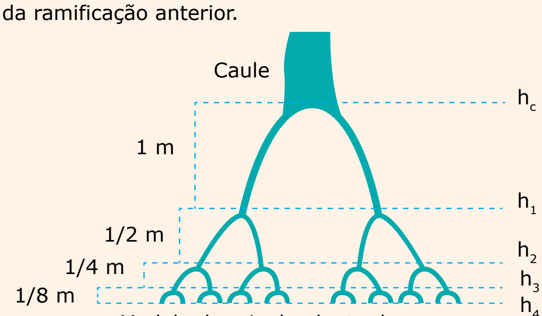
A) 2.

B) 0.

C) 1.

D) –1.

02. (UEL-PR) A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta do mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz e, em cada uma delas, surgem mais duas ramificações e, assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim desta, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.



Modelo de raiz de planta de mangue

Sabendo que o comprimento vertical da primeira ramificação é de h_1 = 1 m , qual o comprimento vertical total da raiz, em metros, até h_{10}?

A) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$

B) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{9}}\right)$

C) $2\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$

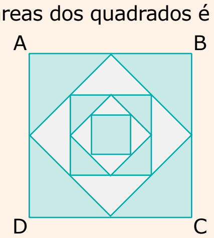
D) $2\left(1-\frac{1}{10^{10}}\right)$

E) $2\left(1-\frac{1}{2^{9}}\right)$

03. (UFU-MG) Sejam a_1, a_2, a_3 números reais cuja soma é igual a 88. Sabendo-se que $a_1 - 2$, a_2, a_3 estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão 6, determine o maior desses números.

A) 6
B) 12
C) 72
D) 24
E) 3

04. (UFSM-RS) No piso do *hall* de entrada de um *shopping*, foi desenhado um quadrado Q_1 de 10 m de lado, no qual está inscrito um segundo quadrado Q_2 obtido da união dos pontos médios dos lados do quadrado anterior, e assim sucessivamente, Q_3, Q_4, ..., formando uma sequência infinita de quadrados, seguindo a figura. Dessa forma, a soma das áreas dos quadrados é de



A) 25 m².
B) $25\sqrt{2}$ m².
C) 200 m².
D) $50\sqrt{2}$ m².
E) $100(2 + \sqrt{2})$ m².

05. (Mackenzie-SP–2016) Sejam ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_{100} os lados dos quadrados Q_1, Q_2, ..., Q_{100}, respectivamente.

Se $\ell_1 = 1$ e $\ell_k = 2\ell_{k-1}$, para k = 2, 3, ..., 100, a soma das áreas desses quadrados é igual a:

A) $\frac{3}{4} \cdot 4^{99}$
D) $\frac{1}{3} \cdot 4^{100}$
B) $\frac{1}{4} \cdot 4^{99}$
E) $\frac{1}{3} \cdot 4^{100} - 1$
C) $\frac{1}{3} \cdot (4^{100} - 1)$

06. (PUC-SP–2017) Considere a progressão aritmética $(3, a_2, a_3...)$ crescente, de razão **r**, e a progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, 3, ...)$ decrescente, de razão **q**, de modo que $a_3 = b_3$ e $r = 3q$. O valor de b_2 é igual a:

A) a_6 B) a_7 C) a_8 D) a_9

07. (UDESC–2015) Os números **a**, **b** e **c** são tais que a progressão geométrica $S_1 = \{5a - b, b, 48, ...\}$ e a progressão aritmética $S_2 = \{c, a - b, -6a - c, ...\}$ possuem razões opostas. Então, o valor de a + b + c é igual a

A) 3. C) 13. E) 10.
B) 20. D) 15.

08. (UECE–2016) Se a medida dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo forma uma progressão geométrica crescente, então, a razão dessa progressão é igual a:

A) $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}$
C) $\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2}}$
B) $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$
D) $\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{5} - 1}}{2}}$

09. (UECE–2016) Considere uma progressão aritmética, não constante, com sete termos, cuja razão é o número **r**. Se o primeiro, o terceiro e o sétimo termo desta progressão formam, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica, então, a soma dos termos da progressão aritmética é igual a:

A) 27r B) 30r C) 33r D) 35r

10. (Unicamp-SP) Para construir uma curva "floco de neve", divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60°, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas figuras 3 e 4.

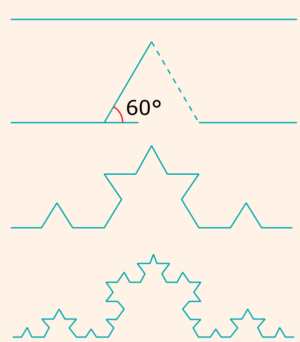


Figura 1
Figura 2
Figura 3
Figura 4

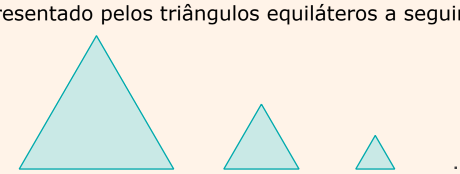
Se o segmento inicial mede 1 cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a

A) $\left(\frac{6!}{4!3!}\right)$ cm.
C) $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ cm.
B) $\left(\frac{5!}{4!3!}\right)$ cm.
D) $\left(\frac{4}{3}\right)^6$ cm.

11. (ESPM-SP–2017) Na progressão geométrica (1, 2, 4, 8, ...), sendo a_n o n-ésimo termo e S_n a soma dos **n** primeiros termos, podemos concluir que:

A) $S_n = 2.a_n$
D) $S_n = a_{n+1} - 1$
B) $S_n = a_n + 1$
E) $S_n = 2.a_{n+1}$
C) $S_n = a_{n+1} + 1$

12. (UFRGS-RS–2016) Considere o padrão de construção representado pelos triângulos equiláteros a seguir.


Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3 ...

O perímetro do triângulo da etapa 1 é 3 e sua altura é **h**; a altura do triângulo da etapa 2 é metade da altura do triângulo da etapa 1; a altura do triângulo da etapa 3 é metade da altura do triângulo da etapa 2 e, assim, sucessivamente.

Assim, a soma dos perímetros da sequência infinita de triângulos é

A) 2. B) 3. C) 4. D) 5. E) 6.

MATEMÁTICA

13. (PUC-SP–2016) Seja o triângulo equilátero T_1 cujo lado mede **x** cm. Unindo-se os pontos médios dos lados de T_1, obtém-se um novo triângulo equilátero T_2; unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo T_2, obtém-se um novo triângulo equilátero T_3; e, assim, sucessivamente. Nessas condições, se a área do triângulo T_9 é igual a $\frac{25\sqrt{3}}{64}$ cm², então **x** é igual a

A) 640. B) 520. C) 440. D) 320.

14. (UFRGS-RS–2015) Para fazer a aposta mínima na Mega-sena, uma pessoa deve escolher 6 números diferentes em um cartão de apostas que contém os números de 1 a 60. Uma pessoa escolheu os números de sua aposta, formando uma progressão geométrica de razão inteira.

Com esse critério, é correto afirmar que

A) essa pessoa apostou no número 1.
B) a razão da P.G. é maior do que 3.
C) essa pessoa apostou no número 60.
D) a razão da P.G. é 3.
E) essa pessoa apostou somente em números ímpares.

15. (ESPM-SP–2016) Em uma PG estritamente crescente, o terceiro termo é 98 e o quinto termo é 4 802. Se **x** é a soma dos dois primeiros termos dessa PG, então o valor de $\log_8 x$ é

A) $\frac{3}{4}$. C) $\frac{2}{3}$. E) $\frac{4}{3}$.
B) $\frac{1}{2}$. D) $\frac{1}{4}$.

16. (UECE–2016) Seja $x_1, x_2, x_3, \ldots$; uma progressão geométrica cuja razão é o número real positivo **q**. Se $x_5 = 24q$ e $x_5 + x_6 = 90$, então, o termo x_1 desta progressão é um número

A) inteiro.
B) racional maior do que 7,1.
C) irracional maior do que 7,1.
D) racional menor do que 7,0.

17. (UERJ–2017) Em uma atividade nas olimpíadas de matemática de uma escola, os alunos largaram, no sentido do solo, uma pequena bola de uma altura de 12 m. Eles observaram que, cada vez que a bola toca o solo, ela sobe e atinge 50% da altura máxima da queda imediatamente anterior. Calcule a distância total, em metros, percorrida na vertical pela bola ao tocar o solo pela oitava vez.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com 2n competidores , então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente, até a partida final. Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

A) 2 . 128
B) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
C) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1
D) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
E) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

02. (Enem–2017) Atualmente, a massa de uma mulher é 100 kg. Ela deseja diminuir, a cada mês, 3% da massa que possuía no mês anterior. Suponha que ela cumpra sua meta.

A sua massa, em quilogramas, daqui a dois meses, será

A) 91,00. D) 94,33.
B) 94,00. E) 96,91.
C) 94,09.

03. (Enem–2016) Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento.

Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é:

A) 3 . 345 D) 3 . 4 . 345
B) (3 + 3 + 3).345 E) 3^4 . 345
C) 3^3 . 345

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	04. D	07. B
02. E	05. D	08. D
03. A	06. B	

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A	07. E	13. D
02. C	08. B	14. A
03. C	09. D	15. E
04. C	10. C	16. B
05. C	11. D	17. 36 m
06. B	12. E	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. E	02. C	03. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Matrizes

INTRODUÇÃO

Em várias situações envolvendo diversas áreas da ciência, as informações são apresentadas na forma de uma tabela retangular, formada por linhas e colunas. Tal formatação justifica-se pela notável organização propiciada por essa configuração, aliada à facilidade de se efetuar vários cálculos simultâneos com os dados nesse formato. Essa tabela retangular é chamada de matriz.

A teoria das matrizes encontra aplicação em diversas áreas, tais como Computação, Engenharia, Física, Economia, Administração, entre outras. Na Matemática, as matrizes integram a teoria da chamada Álgebra Linear, da qual fazem parte também os Determinantes e os Sistemas Lineares.

DEFINIÇÃO DE MATRIZ

Vamos considerar a tabela a seguir, que indica o faturamento de três filiais de uma empresa, nos meses de janeiro e fevereiro de um certo ano:

	Faturamento	
	Janeiro	**Fevereiro**
Filial A	1 850 000	2 014 000
Filial B	765 000	1 023 000
Filial C	2 340 000	1 890 000

Essa tabela é um exemplo de matriz, e pode ser representada nos seguintes formatos:

Colchetes

$$\begin{bmatrix} 1\,850\,000 & 2\,014\,000 \\ 765\,000 & 1\,023\,000 \\ 2\,340\,000 & 1\,890\,000 \end{bmatrix}$$

Barras Duplas

$$\begin{Vmatrix} 1\,850\,000 & 2\,014\,000 \\ 765\,000 & 1\,023\,000 \\ 2\,340\,000 & 1\,890\,000 \end{Vmatrix}$$

Parênteses

$$\begin{pmatrix} 1\,850\,000 & 2\,014\,000 \\ 765\,000 & 1\,023\,000 \\ 2\,340\,000 & 1\,890\,000 \end{pmatrix}$$

OBSERVAÇÃO

Cada matriz anterior é formada por 3 linhas e 2 colunas. Por isso, dizemos que elas são de ordem 3×2.

De maneira geral, podemos definir uma matriz como uma tabela numérica na qual os elementos estão dispostos em linhas e colunas.

REPRESENTAÇÃO GENÉRICA

Consideremos a matriz genérica $A_{m \times n}$, ou seja, com **m** linhas e **n** colunas. Assim, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento da matriz A é indicado por a_{ij}. O índice **i** indica a linha, e o índice **j**, a coluna a que os elementos pertencem. As linhas são numeradas da esquerda para a direita, enquanto as colunas são numeradas de cima para baixo. Por exemplo, a_{23} representa o elemento da linha 2 e coluna 3.

Considerando a matriz $\begin{bmatrix} 1\,850\,000 & 2\,014\,000 \\ 765\,000 & 1\,023\,000 \\ 2\,340\,000 & 1\,890\,000 \end{bmatrix}$:

$a_{11} = 1\,850\,000$ $\quad a_{12} = 2\,014\,000$

$a_{21} = 765\,000$ $\quad a_{22} = 1\,023\,000$

$a_{31} = 2\,340\,000$ $\quad a_{32} = 1\,890\,000$

OBSERVAÇÃO

Uma matriz pode estar representada de forma abreviada, por meio de uma lei de formação.

Exemplo:

Escrever na forma de tabela a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $a_{ij} = 4i + 3j$.

Nesse caso, a matriz é dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Vamos calcular o valor de cada um dos termos da matriz, utilizando a lei de formação dada:

$a_{11} = 4.1 + 3.1 = 7$ $\quad a_{12} = 4.1 + 3.2 = 10$ $\quad a_{13} = 4.1 + 3.3 = 13$

$a_{21} = 4.2 + 3.1 = 11$ $\quad a_{22} = 4.2 + 3.2 = 14$ $\quad a_{23} = 4.2 + 3.3 = 17$

$a_{31} = 4.3 + 3.1 = 15$ $\quad a_{32} = 4.3 + 3.2 = 18$ $\quad a_{33} = 4.3 + 3.3 = 21$

Portanto, em forma de tabela temos $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 11 & 14 & 17 \\ 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}$.

MATRIZES ESPECIAIS

Matriz Linha

É toda matriz que possui uma única linha (ordem $1 \times n$).

Exemplo:

$A = [3 \quad 4 \quad -1]$ é uma matriz linha 1×3.

Matriz Coluna

É toda matriz que possui uma única coluna (ordem $m \times 1$).

Exemplo:

$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ \pi \\ 2 \\ -100 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 5×1.

Matriz Nula

É toda matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplo:

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula 3×3.

Matriz Quadrada

É toda matriz na qual o número de linhas é igual ao de colunas. A matriz quadrada do tipo $n \times n$ pode ser chamada de matriz de ordem **n**.

Exemplo:

Tomemos uma matriz genérica 3×3. Assim, temos:

Diagonal principal ↓   Diagonal secundária ↓

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Observe que a diagonal principal é formada pelos elementos $i = j$. Já a diagonal secundária é formada pelos elementos $i + j = n + 1$.

Matriz Diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos situados fora da diagonal principal são nulos.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade (ou Matriz Unidade)

É toda matriz quadrada em que os elementos situados fora da diagonal principal são nulos, e os elementos da diagonal principal são iguais à unidade. Representamos a matriz unidade de ordem **n** por I_n.

Exemplos:

1º) $I_1 = [\ 1\ ]$ (Matriz identidade de ordem 1)

2º) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Matriz identidade de ordem 2)

3º) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Matriz identidade de ordem 3)

E assim por diante.

Matriz Oposta

Dada a matriz A, sua oposta –A é obtida trocando-se os sinais dos elementos da A.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$. Então, $-A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 11 & -9 \end{bmatrix}$.

Matriz Transposta

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$, chama-se transposta de A à matriz A^t, do tipo $n \times m$, que possui as linhas ordenadamente iguais às colunas de A e as colunas ordenadamente iguais às linhas de A.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 13 \\ 21 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. Então, $A^t = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 0 & -4 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$.

Propriedades da Transposta

Sendo A e B matrizes e α um número real, e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

i) $(A + B)^t = A^t + B^t$

ii) $(\alpha \,.\, A)^t = \alpha \,.\, A^t$

iii) $(A^t)^t = A$

iv) $(A \,.\, B)^t = B^t \,.\, A^t$

OBSERVAÇÕES

Uma matriz quadrada A é dita **simétrica** se $A = A^t$.

Uma matriz quadrada A é dita **antissimétrica** se $A = -A^t$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFRGS-RS) Uma matriz A é dita simétrica quando $A = A^t$. Sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{bmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de x + y + z?

Resolução:

A matriz transposta da matriz dada é igual a $\begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & 4 & z \\ y & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Igualando as matrizes, temos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & 4 & z \\ y & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Logo, x = 2, y = 3 e z = 5.

Portanto, x + y + z = 2 + 3 + 5 = 10.

OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES

Igualdade de matrizes

Sejam duas matrizes A e B de mesma ordem m × n. As matrizes A e B são iguais se, e somente se, todos os elementos correspondentes de A e B são iguais.

Exemplo:

Determinar os valores de **x**, **y** e **z** na igualdade a seguir:

$$\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 6 & 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & z \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$$

Igualando-se os termos correspondentes, obtemos:

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$

$z = 4$

$5y = -15 \Rightarrow y = -3$

Adição de matrizes

Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem m × n. Chamamos de soma das matrizes A e B a uma matriz **C = A + B**,também do tipo m × n, tal que seus elementos sejam obtidos somando-se os elementos correspondentes das matrizes A e B.

Exemplo:

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 0 & -11 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & -13 & 55 & 7 \\ 6 & 1 & -3 & 18 \end{bmatrix},$$

determinar a matriz A + B.

$$A + B = \begin{bmatrix} 21+8 & 0-13 & -11+55 & 6+7 \\ 8+6 & 1+1 & 1-3 & 5+18 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 29 & -13 & 44 & 13 \\ 14 & 2 & -2 & 23 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

Sendo A, B e C matrizes de mesma ordem e O a matriz nula, e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

Comutativa	A + B = B + A
Associativa	(A + B) + C = A + (B + C)
Elemento neutro	A + O = O + A = A
Elemento oposto	A + (–A) = (–A) + A = O

Multiplicação de uma matriz por um número

Seja **k** um número real e A uma matriz do tipo m × n. Definimos o produto de **k** por A, representado por k.A, como uma matriz B, também do tipo m × n, tal que seus elementos são obtidos multiplicando-se todos os elementos da matriz A pelo número **k**.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, obter a matriz 5.A.

Resolução:

$$5.A = \begin{bmatrix} 5.1 & 5.11 \\ 5.0 & 5.3 \\ 5.4 & 5.4 \\ 5.1 & 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 55 \\ 0 & 15 \\ 20 & 20 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$. Chama-se produto das matrizes A e B, nessa ordem, à matriz $C_{m \times p}$, tal que cada elemento c_{ij} da matriz C é obtido pela soma dos produtos dos elementos da linha **i** de A pelos da coluna **j** de B.

OBSERVAÇÕES

i) Somente é possível a multiplicação de duas matrizes, se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, isto é:

$$\underbrace{A_{m \times n} \quad . \quad B_{n \times p}}_{\exists\, A.B}$$

ii) Na matriz produto $C_{m \times p}$, o número de linhas é igual ao número de linhas da primeira matriz, e o número de colunas é igual ao número de colunas da segunda matriz.

Exemplo:

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Observamos que o produto A.B existe, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Podemos utilizar o seguinte algoritmo:

Escrevemos, inicialmente, a matriz A e, em seguida, escrevemos a matriz B. O produto A.B é obtido do seguinte modo:

Multiplicamos cada elemento de uma determinada linha de A pelo elemento correspondente de uma coluna de B. Em seguida, somamos esses produtos, obtendo o elemento correspondente da matriz produto A.B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3+3.2 & 1.4+3.(-1) & 1.1+3.0 \\ 0.3+4.2 & 0.4+4.(-1) & 0.1+4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes

Sendo A, B e C matrizes e α um número real e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

i) Associativa	A.(B.C) = (A.B).C
ii) Distributiva à esquerda	A.(B + C) = A.B + A.C
iii) Distributiva à direita	(A + B).C = A.C + B.C

Além das anteriores, temos:

$$\left.\begin{aligned} A_{m \times n}.I_n &= A_{m \times n} \\ I_m.A_{m \times n} &= A_{m \times n} \end{aligned}\right\} \text{Elemento neutro}$$

$(\alpha.A).B = A.(\alpha.B) = \alpha.(A.B)$

OBSERVAÇÃO

Dadas as matrizes A e B, e supondo que o produto A.B exista, há três possibilidades para o produto B.A:

1ª possibilidade: B.A pode não existir.

2ª possibilidade: B.A pode existir e ser diferente de A.B.

3ª possibilidade: B.A pode existir e ser igual a A.B.

No terceiro caso, dizemos que as matrizes A e B comutam na multiplicação.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determinar, caso exista:

A) A^2

Temos que $A^2 = A.A$. Efetuando o produto, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2+0.1 & 2.0+0.3 \\ 1.2+3.1 & 1.0+3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

B) A.B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+0.2 & 2.2+0.0 \\ 1.1+3.2 & 1.2+3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

C) B.A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 & 1.0+2.3 \\ 2.2+0.1 & 2.0+0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO

Embora existam A.B e B.A, as matrizes obtidas não são iguais. Portanto, dizemos que A e B não comutam na multiplicação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (Unisa-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, então, calculando-se $(A + B)^2$, obtém-se:

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 121 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 60 \\ 1 & 121 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

Inicialmente, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 2+3 & 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Logo, $(A + B)^2$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.5 & 1.0+0.11 \\ 5.1+11.5 & 5.0+11.11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{bmatrix}$$

MATRIZES INVERSAS

Introdução

O conceito de matriz inversa nasceu da necessidade de se resolver equações matriciais da forma A.X = B. Como não existia um equivalente matricial da divisão, os matemáticos desenvolveram um conjunto de técnicas para efetuar uma operação chamada inversão de matrizes, de maneira similar ao cálculo do inverso multiplicativo de um número real.

Definição

Dada a matriz $A_{n \times n}$, chamamos de sua inversa a matriz $A^{-1}_{n \times n}$, tal que:

$$\boxed{A_{n \times n}.A^{-1}_{n \times n} = A^{-1}_{n \times n}.A_{n \times n} = I_{n \times n}}$$

Na fórmula, $I_{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem **n**.

OBSERVAÇÃO

Convém ressaltar que uma matriz A pode não possuir inversa. Caso possua, **A** é dita **inversível (ou investível)**, e sua inversa é única. Caso contrário, a matriz A é chamada **singular**.

Obtenção da matriz inversa

Exemplo:

Calcular a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Seja a matriz inversa dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$. Assim, temos:

$$A.A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x+y & 2z+t \\ 3y & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando termo a termo, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \text{e} \\ y=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2z+t=0 \\ 3t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{6} \\ \text{e} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Unicidade da matriz inversa

Se a matriz A é inversível, então a sua inversa é única.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que exista uma outra matriz B, tal que A.B = B.A = I.

Sabemos que $A.A^{-1} = I$.

Multiplicando-se, à esquerda, ambos os membros da equação anterior, temos:

$B.(A.A^{-1}) = B.I \Rightarrow (B.A).A^{-1} = B.I$

Mas, B.A = I.

Logo, $I.A^{-1} = B.I$ e, portanto, $A^{-1} = B$.

Portanto, a matriz inversa de A é única.

Propriedades da matriz inversa

Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Assim, temos:

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

iii) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFAL–2016) A matriz $A_{ij(2\times3)}$ tem elementos definidos pela expressão $a_{ij} = i^3 - j^2$. Portanto, a matriz A é:

A) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 26 \\ -3 & 4 & 23 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 4 \\ 26 & 23 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

02. (UFOP-MG) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, sabe-se que $A.B^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. O valor de a + b é

A) 3.

B) 7.

C) 10.

D) 11.

03. (FGV–2018) Seja $A = (a_{ij})_{2x2}$ uma matriz tal que $a_{ij} = \begin{cases} -j^{ii}, \text{se } i = j \\ (-i)^j, \text{se } i \neq j \end{cases}$. A inversa da matriz A, denotada por A^{-1}, é a matriz:

A) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

04. (PUC RS–2015) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a função **f**, definida no conjunto das matrizes 2 × 2 por $f(x) = x^2 - 2x$, então f(A) é:

A) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

05. (Unicamp-SP–2016) Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a

A) 12.

B) 15.

C) 16.

D) 20.

MATEMÁTICA

06. (ESPM-SP) Duas matrizes quadradas de mesma ordem são inversas se o seu produto é igual à matriz identidade daquela ordem. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ matrizes inversas, o valor de x + y + z + w é

A) 0.
B) 1 .
C) –2.
D) 3.
E) –4.

07. (UEA-AM–2016) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -b & -4 \\ 2 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, tais que A.B = 2.C.

O valor de b^a é

A) 28.
B) 30.
C) 32.
D) 34.
E) 36.

08. (Unifor-CE) A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2c-3 & -1 \end{bmatrix}$.

Calcule o valor de a + b + c + d.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Insper-SP) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$. Se **x** e **y** são as soluções não nulas da equação $A.Y + B.X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, então x.y é igual a

A) 6.
B) 7.
C) 8.
D) 9.
E) 10.

02. (UFRGS-RS) A = (a_{ij}) é uma matriz de ordem 2 × 2 com $a_{ij} = 2^{-i}$ se i = j e $a_{ij} = 0$ se i ≠ j. A inversa de **A** é:

A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{12} \end{bmatrix}$

03. (Uncisal) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+y & x-y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, os valores de **x** e **y** de modo que $A.A^t = B$ são:

A) x = y = –1
B) x = –2, y = 1
C) x = 1, y = –2
D) x = y = –2
E) x = y = 2

04. (UEG-GO–2016) Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes A e B, ambas de ordem 2 × 2, em que cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, a = 1, b = 2, c = 3, ..., z = 26. Por exemplo, se a resolução de A.B for igual a $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$, logo, a mensagem recebida é **amor**. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi **flor** e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, então a matriz **A** é

A) $\begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$

05. (UFG-GO) Uma metalúrgica produz parafusos para móveis de madeira em três tipos, denominados *soft*, escareados e sextavados, que são vendidos em caixas grandes, com 2 000 parafusos, e pequenas, com 900, cada caixa contendo parafusos dos três tipos. A tabela 1, a seguir, fornece a quantidade de parafusos de cada tipo, contida em cada caixa, grande ou pequena. A tabela 2 fornece a quantidade de caixas de cada tipo, produzida em cada mês do primeiro trimestre de um ano.

Tabela 1

Parafusos / caixas	Pequena	Grande
Soft	200	500
Escareado	400	800
Sextavado	300	700

Tabela 2

Caixas / mês	Jan	Fev	Mar
Pequena	1 500	2 200	1 300
Grande	1 200	1 500	1 800

Associando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 500 \\ 400 & 800 \\ 300 & 700 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1\,500 & 2\,200 & 1\,300 \\ 1\,200 & 1\,500 & 1\,800 \end{bmatrix}$$

às tabelas 1 e 2, respectivamente, o produto A.B fornece

A) o número de caixas fabricadas no trimestre.

B) a produção do trimestre de um tipo de parafuso, em cada coluna.

C) a produção mensal de cada tipo de parafuso.

D) a produção total de parafusos por caixa.

E) a produção média de parafusos por caixa.

06. (UEA-AM–2017) Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com $a_{ij} = i^j$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, com **a**, **b** e **c** números reais.

Sabendo que A.C = B e que b + c = 0, o valor de a.b.c é igual a

A) −40. B) −20. C) −10. D) 0.

07. (Mackenzie-SP–2015) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e os inteiros **x** e **y** são tais que $A^2 + x.A + y.B = C$, então:

A) x = 0

B) x = 1

C) x = −2

D) x = −1

E) x = 2

08. (UEL-PR) Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fazer três modelos de sapatos. A matriz **Q** fornece a quantidade de cada componente na fabricação dos modelos de sapatos, enquanto a matriz **C** fornece o custo unitário, em reais, destes componentes.

Dados:

$$Q = \begin{array}{c} \text{borracha} \quad \text{couro} \quad \text{tecido} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{modelo 1} \\ \text{modelo 2} \\ \text{modelo 3} \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{borracha} \\ \text{couro} \\ \text{tecido} \end{array}$$

A matriz **V** que fornece o custo final, em reais, dos três modelos de sapatos é dada por:

A) $V = \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$

B) $V = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$

C) $V = \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$

D) $V = \begin{pmatrix} 120 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}$

E) $V = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$

09. (ESPM-SP) Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2, a soma de todos os elementos da matriz $M = A.A^t$ é dada por:

A) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

B) $(a + b + c + d)^2$

C) $(a + b)^2 + (c + d)^2$

D) $(a + d)^2 + (b + c)^2$

E) $(a + c)^2 + (b + d)^2$

10. (Unicamp-SP–2015) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, em que **a** e **b** são números reais. Se $A^2 = A$ e **A** é invertível, então

A) a = 1 e b = 1.

B) a = 1 e b = 0.

C) a = 0 e b = 0.

D) a = 0 e b = 1.

11. (FUVEST-SP) Sejam α e β números reais com $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \pi$. Se o sistema de equações, dado em notação matricial, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{tg}\,\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ for satisfeito, então $\alpha + \beta$ é igual a:

A) $-\frac{\pi}{3}$

B) $-\frac{\pi}{6}$

C) 0

D) $\frac{\pi}{6}$

E) $\frac{\pi}{3}$

12. (UFU-MG) Seja **A** uma matriz de terceira ordem com elementos reais. Sabendo-se que $A.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, conclui-se que −1, 4 e 2 são os elementos da

A) diagonal da transposta de **A**.

B) primeira coluna da transposta de **A**.

C) primeira linha da transposta de **A**.

D) última linha da transposta de **A**.

13. (UEL-PR–2015) Uma reserva florestal foi dividida em quadrantes de 1 m² de área cada um. Com o objetivo de saber quantas samambaias havia na reserva, o número delas foi contado por quadrante da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc} \text{Número de samambaias por quadrante} & \text{Número de quadrantes} \\ A_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & B_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

O elemento a_{ij} da matriz **A** corresponde ao elemento b_{ij} da matriz **B**, por exemplo, 8 quadrantes contêm 0 (zero) samambaia, 12 quadrantes contêm 1 samambaia.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a operação efetuada entre as matrizes **A** e **B**, que resulta no número total de samambaias existentes na reserva florestal.

A) $A^t \times B$

B) $B^t \times A^t$

C) $A \times B$

D) $A^t \times B^t$

E) $A + B$

14. (UESC-BA) O fluxo de veículos que circulam pelas ruas de mão dupla 1, 2 e 3 é controlado por um semáforo, de tal modo que, cada vez que sinaliza a passagem de veículos, é possível que passem até 12 carros, por minuto, de uma rua para outra. Na matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 36 \\ 90 & 0 & 75 \\ 36 & 75 & 0 \end{pmatrix}$, cada termo S_{ij} indica o tempo, em segundos, que o semáforo fica aberto, num período de 2 minutos, para que haja o fluxo da rua **i** para a rua **j**.

Então, o número máximo de automóveis que podem passar da rua 2 para a rua 3, das 8h às 10h de um mesmo dia, é

A) 432.
B) 576.
C) 900.
D) 1 080.
E) 1 100.

15. (Unicamp-SP–2017) Sendo **a** um número real, considere a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \le i \le 5$ e $1 \le j \le 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco **i** para o banco **j** durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

02. (Enem) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. D
03. E
04. B
05. A
06. A
07. C
08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. C
03. C
04. B
05. C
06. B
07. C
08. E
09. E
10. B
11. B
12. C
13. A
14. C
15. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Determinantes

INTRODUÇÃO

Determinantes são números associados a matrizes quadradas. Tais números eram utilizados, por volta do século XVII, na resolução de sistemas lineares. Os determinantes são obtidos por meio de técnicas específicas de cálculo, que serão vistas a seguir.

REPRESENTAÇÃO

Considere, como exemplo, a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Seu determinante é representado de dois modos:

$$\boxed{\det A \text{ ou } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}$$

DETERMINANTE DA MATRIZ 1 × 1

Dada a matriz $A = (a_{11})_{1 \times 1}$, o seu determinante é igual ao seu único elemento.

Exemplo:

$A = [\ 5\ ] \Rightarrow \det A = 5$

DETERMINANTE DA MATRIZ 2 × 2

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\det A = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 1 = 24 - 2 = 22$

DETERMINANTE DA MATRIZ 3 × 3

O determinante da matriz de ordem 3 é calculado pela Regra de Sarrus, que é descrita a seguir:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

1º) Escrevemos os elementos da matriz repetindo ordenadamente as duas primeiras colunas:

$$\det A = \begin{array}{|ccc|cc} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$
$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

2º) Acompanhando os traços em diagonal, multiplicamos os elementos entre si, associando-lhes o sinal indicado. Assim:

$\det A =$

$4 \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot 3 \Rightarrow$

$\det A = 0 + 24 + 10 - 0 - 16 - 45 \Rightarrow \det A = -27$

DETERMINANTE DE ORDEM MAIOR OU IGUAL A 4

Antes de introduzirmos o teorema que nos permitirá calcular determinantes de ordem maior que 3, apresentaremos, inicialmente, alguns conceitos.

Menor Complementar (D_{ij})

Seja A uma matriz de ordem **n**, $n > 1$, e a_{ij} um elemento dessa matriz. Se eliminarmos a linha **i** e a coluna **j**, isto é, a linha e a coluna do elemento a_{ij}, obteremos uma matriz de ordem $n - 1$, cujo determinante será chamado de menor complementar do elemento a_{ij}, e indicado por D_{ij}.

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$. Encontrar D_{23}.

Identificamos o elemento que se encontra na linha 2 e na coluna 3 e eliminamos a linha 2 e a coluna 3. Veja:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Logo, $D_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 . 4 - 2 . 7 = 18.$

Cofator ou complemento algébrico (A_{ij})

O cofator ou complemento algébrico de um elemento a_{ij}, numa matriz **A** de ordem **n**, n > 1, é definido por:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}}$$

Exemplo:

Calcular o cofator A_{23} na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

$A_{23} = (-1)^{2+3}.D_{23} = (-1).\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$

$(-1).(1 . 5 - 4 . 0) = (-1) . 5 = -5$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz A, de ordem **n**, n > 1, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer com seus respectivos cofatores.

OBSERVAÇÃO

O Teorema de Laplace pode ser aplicado para o cálculo de determinantes de ordem maior ou igual a 2. Entretanto, para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2 e 3, existem regras práticas mais adequadas. Portanto, o Teorema de Laplace é mais indicado para o cálculo do determinante de matrizes de ordem maior ou igual a 4.

Como sugestão, para usar o Teorema de Laplace, devemos tomar a linha ou a coluna com o maior número de zeros.

Exemplo:

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Inicialmente, vamos escolher a primeira linha como referência. Assim, temos:

$\det(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} + a_{14}.A_{14} =$

$1.(-1)^{1+1}.D_{11} + 0.(-1)^{1+2}.D_{12} + 2.(-1)^{1+3}.D_{13} + 0.(-1)^{1+4}.D_{14} \Rightarrow$

$\det(A) = D_{11} + 2D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$

$[0 + 3 + 6 - (0 + 6 + 2)] + 2.[24 - 1 + 6 - (-3 + 4 + 12)] \Rightarrow$

$\det(A) = 1 + 2 . 16 = 1 + 32 = 33$

Portanto, det (A) = 33.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

i) O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante da sua transposta.

$$\boxed{\det A = \det A^t}$$

ii) Se um determinante possuir uma linha ou coluna nula, o determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 10 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 34 & 1 & -29 \\ 65 & 100 & 180 & 23 \end{vmatrix} = 0$$

D = 0, pois a segunda linha é nula.

iii) Se um determinante possuir duas filas paralelas iguais ou proporcionais, o determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 18 & 3 & 54 \\ -1 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

D = 0, pois a terceira coluna é proporcional à primeira coluna.

iv) Sejam **k** um número real e A uma matriz quadrada de ordem **n**, tais que:

$$A = \begin{bmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & \cdots & k.a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que **k** é um fator comum aos elementos da primeira linha. Nesse caso, podemos "colocar o fator **k** em evidência" ao calcular o determinante.

$$\det(A) = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Convém ressaltar que a propriedade também seria válida se **k** fosse um fator comum a uma coluna do determinante.

De maneira geral, se **k** é um fator comum a todas as **n** linhas de A, temos:

$$\boxed{\det(k.A) = k^n.\det(A)}$$

Exemplo:

Seja uma matriz $A_{3\times 3}$, tal que det (A) = 4. Calcular det (2A) + det (3A) – 2.det (A).

det (2A) + det (3A) – 2.det (A) =

2^3.det (A) + 3^3.det (A) – 2.det (A) =

8.det (A) + 27.det (A) – 2.det (A) =

33.det (A) = 33 . 4 = 132

v) Se os elementos situados abaixo ou acima da diagonal principal forem nulos, o determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 14 & 65 \\ 0 & 2 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 5 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 . 2 . 5 . 7 = 70$$

Consequência: Seja I_n uma matriz identidade de ordem **n**. Então:

$$\boxed{\det(I_n) = 1}$$

vi) **Teorema de Binet:** Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem **n**, então o determinante do produto de A por B é igual ao produto dos determinantes de A e B.

$$\boxed{\det(A.B) = \det A . \det B}$$

vii) Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas), o determinante muda de sinal.

Exemplo:

Sabemos que $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$.

Calcular o valor de $\det(B) = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

Observe que det (B) é obtido a partir da troca da primeira pela segunda linha em det (A). Então, det (B) = –10.

viii) **Combinação linear de filas paralelas:** Seja uma matriz quadrada A de ordem **n**. Tomemos um número **k** de filas (linhas ou colunas) indicadas por F_1, F_2, ..., F_k. Vamos multiplicar cada uma dessas filas pelos números c_1, c_2, ..., c_k. Se, em seguida, efetuarmos uma soma envolvendo os elementos dessas novas filas, o conjunto dos resultados obtidos é chamado de combinação linear das **k** filas.

Exemplo:

Vamos construir uma combinação linear das linhas 2 e 3 da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vamos multiplicar a linha 2 por 4 e a linha 3 por 5, por exemplo. Em seguida, somaremos os elementos correspondentes.

Multiplicação da linha 2 por 4:

$\{4 . 5 \quad 4 . 4 \quad 4 . 2\} \Rightarrow \{20 \quad 16 \quad 8\}$ (I)

Multiplicação da linha 3 por 5:

$\{5 . 1 \quad 5 . 1 \quad 5 . 2\} \Rightarrow \{5 \quad 5 \quad 10\}$ (II)

Somando (I) e (II), obtemos o conjunto {25, 21, 18}, que é uma combinação linear das linhas 2 e 3.

Teorema:

Se uma das filas de determinada matriz quadrada de ordem **n** é igual a uma combinação linear de outras filas, o seu determinante é nulo.

No exemplo anterior, vamos substituir a primeira linha pela combinação linear obtida. Assim, temos:

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 21 & 18 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\det(A') = \begin{vmatrix} 25 & 21 & 18 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 200 + 42 + 90 - 72 - 210 - 50 \Rightarrow$$

$$\det(A') = 332 - 332 = 0$$

MATEMÁTICA

ix) Teorema de Jacobi: Adicionando-se a uma fila de uma matriz A uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz A', tal que det (A) = det (A').

O Teorema de Jacobi é muito útil quando utilizado em conjunto com o Teorema de Laplace.

Exemplo:

Calcular o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Pelo Teorema de Jacobi, vamos efetuar as seguintes operações:

1) Multiplicar a primeira linha por –2 e somá-la à segunda linha.

2) Somar a primeira linha com a terceira linha.

3) Multiplicar a primeira linha por –3 e somá-la à quarta linha.

O determinante se torna igual a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Aplicando o Teorema de Laplace, usando como referência a primeira coluna, temos:

$$a_{11}.A_{11} = 1.(-1)^{1+1}.D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$a_{11}.A_{11} = (0 - 8 + 6) - (-8 + 0 + 3) = -2 + 5 = 3$$

x) Regra de Chió: A chamada Regra de Chió é um método alternativo para o cálculo de determinantes. A princípio, podemos aplicá-la apenas se $a_{11} = 1$. Entretanto, como veremos mais adiante, se $a_{11} \neq 1$, devemos inicialmente utilizar propriedades dos determinantes para fazer com que a_{11} se torne igual a 1 a fim de que que o método possa ser aplicado. Vejamos alguns exemplos.

1º caso: Determinante de uma matriz quadrada de ordem n ≥ 2 sendo que $a_{11} = 1$.

Os passos do método são os seguintes:

- Eliminamos a 1ª linha e a 1ª coluna.
- De cada elemento na nova matriz, subtraímos o produto dos elementos localizados nos extremos das perpendiculares à 1ª linha e à 1ª coluna da matriz original, traçadas a partir desse elemento.
- Os números obtidos a partir dessas subtrações serão os elementos correspondentes na nova matriz de ordem n – 1. Em seguida, calculamos o determinante dessa matriz, cujo valor corresponde ao determinante da matriz original.

Exemplo:

Calcular o determinante a seguir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 8 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 8 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-4.2 & 8-4.0 & -1-4.3 \\ 3-3.2 & 1-3.0 & 11-3.3 \\ 1-2.2 & 4-2.0 & 1-2.3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -13 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Observe que podemos utilizar novamente o método, pois $a_{11} = 1$. Então, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -13 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-(-3).8 & 2-(-3).(-13) \\ 4-(-3).8 & -5-(-3).(-13) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & -37 \\ 28 & -44 \end{vmatrix} =$$

$$25.(-44) - 28.(-37) = -1\,100 + 1\,036 = -64$$

2º caso: Determinante de uma matriz quadrada de ordem n ≥ 2 e $a_{11} \neq 1$.

- Se um dos elementos da matriz for igual a 1, aplicar a propriedade da troca de duas filas paralelas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & -1 \\ 6 & 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

(trocamos de posição as linhas 1 e 3.)

- Se nenhum elemento da matriz for igual a 1, podemos aplicar o Teorema de Jacobi.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ 11 & 4 & -3 & 6 \\ 16 & 8 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ 11 & 4 & -3 & 6 \\ 16 & 8 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

(Substituímos a linha 1 pela soma desta com a linha 2, previamente multiplicada por −1.)

Matriz de Vandermonde

É toda matriz quadrada com as seguintes características:

i) Os elementos da primeira linha são todos iguais a 1.

ii) As colunas são formadas por potências de mesma base.

Genericamente, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Propriedade

O determinante de uma matriz de Vandermonde é dado pelo produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos da segunda linha, de modo que, em cada diferença, o índice do primeiro termo (minuendo) seja maior do que o índice do segundo termo (subtraendo).

Exemplo:

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 & 16 \\ 8 & 27 & 1 & 64 \end{bmatrix}$.

det (A) = (3 − 2).(1 − 2).(1 − 3).(4 − 2).(4 − 3).(4 − 1) ⇒

det (A) = 1.(−1).(−2).2 . 1 . 3 ⇒ det (A) = 12

Existência da matriz inversa

Uma matriz A, quadrada, é inversível se, e somente se, det A ≠ 0.

Demonstração:

Sabemos que:

$A.A^{-1} = I$

Então, det $(A.A^{-1})$ = det (I), mas det (I) = 1.

Aplicando o Teorema de Binet, temos:

det A.det $A^{-1} = 1$

Logo, temos:

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRR–2017) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 23 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Qual o valor de det (A) + det (B)?

A) 2
B) 1
C) 23
D) 3
E) 0

02. (UERN–2015) Considere a seguinte matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela regra de *Sarrus*, o determinante dessa matriz é

A) 8.
B) 9.
C) 15.
D) 24.

03. (IFAL–2016) O valor do determinante $\begin{vmatrix} \cos x & -\text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{vmatrix}$ é:

A) 1
B) cos 2x
C) sen 2x
D) tg 2x
E) $\cos^2 x - \text{sen}^2\, x$

04. (PUC RS) Dadas as matrizes A = [1 2 3] e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, o determinante det (A.B) é igual a

A) 18.
B) 21.
C) 32.
D) 126.
E) 720.

05. (IFAL) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, o determinante da matriz $(AB)^{-1}$ é

A) $-\dfrac{1}{10}$.

B) $\dfrac{21}{10}$.

C) $\dfrac{13}{10}$.

D) $-\dfrac{13}{10}$.

E) N.d.a.

06. (FUVEST-SP) O determinante da inversa da matriz a seguir é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

A) $-\frac{52}{5}$.

B) $-\frac{48}{5}$.

C) $-\frac{5}{48}$.

D) $\frac{5}{52}$.

E) $\frac{5}{48}$.

07. (UERJ–2017) Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de **t** deve ser igual a

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

08. (UECE) Se **n** é um número inteiro positivo e **X** é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, então o valor do determinante da matriz $Y = X^n$ é:

A) 2^n

B) 3^n

C) 6^n

D) 9^n

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unicamp-SP–2019) Sabendo que **a** e **b** são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

A) 0.

B) 2.

C) 5.

D) 10.

02. (Feevale-RS–2016) O determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\,(x) & 0 & 1 \\ 1 & \sec\,(x) & 0 \\ 0 & 0 & \text{cotg}\,(x) \end{bmatrix} \text{ é}$$

A) 0.

B) 1.

C) sen x.

D) cos x.

E) tg x.

03. (IFSul–2015) Sejam as matrizes $A_{2\times2}$, em que $a_{i\times j} = \begin{cases} 2^j, \text{se } i \leq j \\ j^i, \text{se } i > j \end{cases}$, $B = I_2$, e **I** é a matriz identidade.

Sabendo que A^t é a matriz transposta de **A**, qual é o determinante de $(A^t + B)$?

A) 11

B) –11

C) 9

D) –9

04. (UECE–2017) Uma matriz quadrada $X = (a_{ij})$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Se o determinante da matriz simétrica $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$ é igual a 8, então, o valor da soma $x + y + z + w$ pode ser

A) 9 ou 11.

B) 9 ou 25.

C) 11 ou 25.

D) 9 ou 13.

05. (UEPB) Se a matriz com det (A) = 1 e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & 0 \end{pmatrix}$, o valor de **m** é

A) –1.

B) 1.

C) 0.

D) 2.

E) –2.

06. (UECE) Uma matriz quadrada $P = (a_{ij})$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Se a matriz $M = \begin{bmatrix} x+y & x-y & xy \\ 1 & y-x & 2y \\ 6 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, pode-se afirmar corretamente que o determinante de **M** é igual a

A) –1.

B) –2.

C) 1.

D) 2.

07. (UEPB) A equação $\begin{vmatrix} \log(x-1) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \log(x-1) & 1 & \log(x-1) \end{vmatrix} = 0$ tem como solução real os valores de **x**

A) 2 e 10.
B) 0 e 2.
C) 3 e 11.
D) 4 e 11.
E) 2 e 11.

08. (Mackenzie-SP–2017) Considerando **m** e **n** raízes da equação $\begin{vmatrix} 2^x & 8^x & 0 \\ \log_2 x & \log_2 x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, em que x > 0, então m + n é igual a

A) $\frac{2}{3}$.
B) $\frac{3}{4}$.
C) $\frac{3}{2}$.
D) $\frac{4}{3}$.
E) $\frac{4}{5}$.

09. (ACAFE-SC) Analise as afirmações a seguir, sabendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

I. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$

II. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = -6$

III. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$

IV. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$

Assinale a alternativa correta.

A) Apenas I, III e IV são verdadeiras.
B) Apenas a afirmação III é verdadeira.
C) Apenas I e II são verdadeiras.
D) Todas as afirmações são verdadeiras.

10. (UECE–2015) Se **x** é um ângulo tal que $\cos x = \frac{1}{4}$, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} \text{sen}\, 2x & 2.\cos^2 x \\ -\cos x & \text{sen}\, x \end{vmatrix}$ é

A) 1.
B) 2.
C) $\frac{1}{2}$.
D) $-\frac{1}{2}$.

11. (UFSJ-MG) O determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é igual a **S**. Para quaisquer valores reais tomados para os elementos de **M**, a matriz que possui determinante igual a –6S é:

A) $\begin{bmatrix} 6a_4 & 6a_5 & 6a_6 \\ 6a_1 & 6a_2 & 6a_3 \\ 6a_7 & 6a_8 & 6a_9 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} a_7 & 2a_8 & a_9 \\ 3a_4 & 6a_5 & 3a_6 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -6a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & -6a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & -6a_9 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & a_3 \\ 6a_4 & -6a_5 & -6a_6 \\ -a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$

12. (FGV-SP) Seja a matriz identidade de ordem três $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e **A** a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Considere a equação polinomial na variável real **x** dada por det (A – xI) = 0, em que o símbolo det (A – xI) indica o determinante da matriz A = xI. O produto das raízes da equação polinomial é

A) 3.
B) 2.
C) 1.
D) 0.
E) –1.

MATEMÁTICA

13. (ESPM-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, a diferença entre os valores de **x**, tais que det (A.B) = 3x pode ser igual a

A) 3.

B) –2.

C) 5.

D) –4.

E) 1.

14. (UDESC) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+1 & x^2 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se **I** representa a matriz identidade de ordem dois, então o produto entre todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação $\det(A.B) + \det(B + I) = \det(2B^T)$ é igual a

A) $-\frac{4}{3}$.

B) $-\frac{2}{3}$.

C) $\frac{3}{2}$.

D) $\frac{5}{2}$.

E) $-\frac{1}{3}$.

15. (UDESC–2015) Considerando que **A** é uma matriz quadrada de ordem 3 e inversível, se $\det(3A) = \det(A^2)$, então det (A) é igual a

A) 9.

B) 0.

C) 3.

D) 6.

E) 27.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. C
- 03. A
- 04. C
- 05. E
- 06. C
- 07. A
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. A
- 04. B
- 05. B
- 06. B
- 07. E
- 08. C
- 09. A
- 10. C
- 11. B
- 12. E
- 13. C
- 14. B
- 15. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Sistemas Lineares

EQUAÇÃO LINEAR

É toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que $x_1, x_2, ..., x_n$ são as variáveis; $a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes, e **b** é um número chamado termo independente.

Exemplo:

$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -7$

SISTEMAS LINEARES

Chamamos de sistema linear aquele formado por um conjunto de equações lineares.

Exemplos:

1º) $\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$

2º) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Solução de um sistema linear

Dizemos que o conjunto ordenado de número $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$, se, para $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$, todas as equações do sistema são verdadeiras.

CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA

i) Um sistema linear é impossível (SI) (ou incompatível) se não admite solução alguma.

ii) Um sistema linear é possível (ou compatível) se admite pelo menos uma solução.

iii) Um sistema linear é possível e determinado (SPD) se admite uma única solução.

iv) Um sistema linear é possível e indeterminado (SPI) se admite infinitas soluções.

Exemplos:

1º) O sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$ possui solução única igual a (8, 2). Portanto, esse sistema é possível e determinado (SPD).

2º) Considere o sistema $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 8x + 2y = 6 \end{cases}$

Se multiplicarmos a primeira equação por −2 e, em seguida, somarmos o resultado com a segunda equação, obtemos $0x + 0y = 0$, que é uma equação claramente indeterminada. Como a segunda equação é múltipla da primeira, qualquer solução da primeira equação também será solução da segunda. Portanto, existem infinitas soluções, ou seja, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

3º) O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ não possui soluções.

Observe que, ao multiplicar a primeira equação por −2 e, em seguida, somar o resultado com a segunda equação, obtemos $0x + 0y = 4$, que é uma equação que não possui soluções. Portanto, o sistema é impossível (SI).

REGRA DE CRAMER

Consideremos o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sejam:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz dos coeficientes.

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz de substituição dos termos independentes na 1ª coluna.

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz de substituição dos termos independentes na 2ª coluna.

A Regra de Cramer afirma que:

Se D ≠ 0, então o sistema linear é possível e determinado, e a solução única (x, y) é dada por:

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D} \quad \text{e} \quad y = \frac{D_y}{D}}$$

Exemplo:

Resolva o sistema a seguir, pela Regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2 + 3 + 2) - (-3 - 4 + 1) \Rightarrow$$

$D = 7 + 6 = 13$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (12 - 1 + 3) - (1 - 6 + 6) \Rightarrow$$

$D_x = 14 - 1 = 13$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-6 + 18 - 2) - (9 - 24 - 1) \Rightarrow$$

$D_y = 10 - (-16) = 26$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 9 + 12) - (-18 - 2 + 3) \Rightarrow$$

$D_z = 22 - (-17) = 39$

Logo, temos:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{13}{13} = 1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2;\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

Portanto, S = {(1, 2, 3)}.

OBSERVAÇÃO

O sistema anterior só pôde ser resolvido porque D ≠ 0. Em resumo:

Se D ≠ 0, então SPD.
Se D = 0, então SPI ou SI.

SISTEMA ESCALONADO

Definição

Chama-se de sistema escalonado aquele em que o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Resolução de um sistema escalonado

Podemos encontrar dois tipos de sistemas escalonados. Vejamos quais são e como são resolvidos.

Número de equações igual ao número de incógnitas

Trata-se de um sistema possível e determinado, e cada incógnita é obtida resolvendo-se o sistema "de baixo para cima".

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & \text{(I)} \\ \quad\ \ y + z = 5 & \text{(II)} \\ \qquad\ -z = -3 & \text{(III)} \end{cases}$$

Em (III), temos z = 3.

Em (II), temos y + 3 = 5 ⇒ y = 2.

Em (I), temos x + 2 + 3 = 6 ⇒ x = 1.

Portanto, S = {(1, 2, 3)}.

Número de equações menor que o número de incógnitas

Para resolver esse sistema, escolhemos uma incógnita que não aparece no começo de nenhuma equação, chamada variável livre. Em seguida, calculamos o valor de cada uma das outras variáveis em função dessa variável livre. Desse modo, criamos um parâmetro para gerar soluções, atribuindo valores arbitrários à variável.

Esse sistema possui mais de uma solução e, sendo assim, é possível e indeterminado (SPI).

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ \quad y - z = 1 \end{cases}$$

A variável que não aparece no começo de nenhuma equação é **z** (**z** é uma variável livre). Passando **z** para o 2º membro, temos:

$$\begin{cases} x + y = z + 4 & \text{(I)} \\ \quad y = z + 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos $x + z + 1 = z + 4 \Rightarrow x = 3$.

Assim, a solução do sistema é $S = \{(3;\ z + 1;\ z),\ \forall\ z \in \mathbb{R}\}$.

Vejamos algumas soluções:

Para $z = 0 \Rightarrow S = \{(3;\ 1;\ 0)\}$

Para $z = 3 \Rightarrow S = \{(3;\ 4;\ 3)\}$

Para $z = -1 \Rightarrow S = \{(3;\ 0;\ -1)\}$

E assim por diante.

ESCALONAMENTO DE SISTEMAS

Trata-se de uma excelente técnica de resolução de Sistemas Lineares. Vejamos o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

Vamos efetuar as seguintes operações:

i) Substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por –2.

ii) Substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por –3.

Com isso, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 0x - 3y - 3z = -15 \\ 0x - 7y - 5z = -31 \end{cases}$$

Em seguida, podemos dividir a segunda equação por –3:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 0x + y + z = 5 \\ 0x - 7y - 5z = -31 \end{cases}$$

Podemos, enfim, substituir a terceira equação pela soma desta com a segunda equação multiplicada por 7. Assim, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 0x + y + z = 5 \\ 0x + 0y + 2z = 4 \end{cases}$$

Resolvendo "de baixo para cima", temos $x = 1$, $y = 3$ e $z = 2$.

Portanto, $S = \{(1, 3, 2)\}$.

OBSERVAÇÕES

Se durante o escalonamento ocorrer

i) uma equação do tipo: $0.x_1 + 0.x_2 + ... = b$, com $(b \neq 0)$, o sistema será impossível (pois essa equação nunca está satisfeita).

ii) uma equação do tipo: $0.x_1 + 0.x_2 + ... = 0$, esta deve ser eliminada do sistema, pois ela é verificada para quaisquer valores das incógnitas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC-SP) Se **a**, **b**, **c** é solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y - z = -5 \\ 2x + y + z = -1 \\ 4x + 2y - z = -11 \end{cases}$$, então a + b + c é:

A) –2.

B) –1.

C) 0.

D) 1.

E) 2.

Resolução:

A fim de escalonar o sistema, devemos

i) substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por –2.

ii) substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por –4.

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = -5 \\ 0x - y + 3z = 9 \\ 0x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

MATEMÁTICA

Agora, vamos substituir a terceira equação pela soma desta com a segunda equação multiplicada por –2. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = -5 \\ 0x - y + 3z = 9 \\ 0x + 0y - 3z = -9 \end{cases}$$

Observe que o sistema encontra-se escalonado. Resolvendo-o "de baixo para cima", obtemos x = –2, y = 0 e z = 3. Como **a**, **b**, **c** é solução, concluímos que a = –2, b = 0 e c = 3. Portanto, a + b + c = –2 + 0 + 3 = 1.

SISTEMA HOMOGÊNEO

Um sistema é dito homogêneo quando todos os termos independentes das suas equações são nulos.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Todo sistema homogêneo sempre admite solução (pelo menos a nula); portanto, é sempre possível. A solução nula é chamada solução trivial.

Exemplo:

O sistema $\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ admite a solução (0; 0; 0),

pois: $\begin{cases} 3 \,.\, 0 - 3 \,.\, 0 + 4 \,.\, 0 = 0 \\ 2 \,.\, 0 + 0 - 0 = 0 \end{cases}$

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros significa determinar para quais valores desses parâmetros o sistema é determinado, indeterminado ou impossível. Assim, há duas situações a serem consideradas:

Sistema linear com o número de equações igual ao número de incógnitas

Nesse caso, usaremos a Regra de Cramer e as técnicas de escalonamento.

Exemplo:

Discutir o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + kz = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$ em função do parâmetro **k**.

Pela Regra de Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - k + 0 - (0 + 2 + k) = 2 - 2k$$

Para que o sistema seja possível e determinado (SPD), devemos ter D ≠ 0, ou seja, 2 – 2k ≠ 0 ⇒ k ≠ 1.

Agora, faremos k = 1 no sistema original, a fim de investigar se ele será possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). Assim, teremos:

$$\begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Vamos substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira multiplicada por –1. Além disso, vamos substituir a terceira pela soma desta com a primeira equação. Assim, obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ 0x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação pela soma desta com a segunda multiplicada por –2, obteremos:

$$\begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases}$$

Observe que a terceira equação é impossível. Logo, nesse caso, o sistema é impossível.

RESUMINDO

i) Se k ≠ 1 ⇒ Sistema possível e determinado (SPD)

ii) Se k = 1 ⇒ Sistema impossível (SI)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (UFMG) Determinar todos os valores reais **a** e **b**, de modo que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ tenha

A) solução única.

B) infinitas soluções.

C) nenhuma solução.

Resolução:

A) Temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4 + 4 + 9a) - (8a + 6 - 3) = a - 3$$

Para que o sistema seja possível e determinado, ou seja, admita solução única, devemos ter $D \neq 0$. Logo, $a - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$.

B) Fazendo $a = 3$ no sistema original, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Vamos substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira multiplicada por −3. Além disso, vamos substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira multiplicada por −2.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 0x + y - 7z = b - 6 \\ 0x + y - 7z = -3 \end{cases}$$

Nesse ponto, basta observarmos que o sistema somente terá solução se $b - 6 = -3$, ou seja, se $b = 3$. Nesse caso, o sistema será possível e indeterminado (SPI) e, portanto, vai admitir infinitas soluções.

C) É fácil perceber que, se $b \neq 3$, o sistema torna-se impossível (SI), ou seja, não admite soluções.

Sistema linear com o número de equações diferente do número de incógnitas

Nesse caso, a Regra de Cramer não pode ser aplicada. Portanto, usaremos apenas o escalonamento.

Exemplo:

Discutir o sistema $\begin{cases} x + y = 6 \\ 4x - 2y = 0 \\ -x + y = a \end{cases}$ em função de **a**.

Vamos substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira multiplicada por −4. Além disso, vamos substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0x - 6y = -24 \\ 0x + 2y = a + 6 \end{cases}$$

Trocando de posição a segunda equação com a terceira equação, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0x + 2y = a + 6 \\ 0x - 6y = -24 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação pela soma desta com a segunda multiplicada por 3, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0x + 2y = a + 6 \\ 0x + 0y = 3a - 6 \end{cases}$$

Observe que, para $a = 2$, a terceira equação se anula. Nesse caso, o sistema passa a ser escalonado com duas equações e duas incógnitas, ou seja, SPD. Caso contrário, o sistema torna-se SI.

OBSERVAÇÃO

Poderíamos também ter procedido do seguinte modo: Na primeira etapa do escalonamento, obtivemos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0x - 6y = -24 \\ 0x + 2y = a + 6 \end{cases}$$

Observe que, na segunda equação, temos $y = 4$ e, na terceira equação, temos $y = \frac{a+6}{2}$. Igualando esses valores, temos:

$$\frac{a+6}{2} = 4 \Rightarrow a + 6 = 8 \Rightarrow a = 2$$

Logo, se $a = 2$, o sistema é possível e determinado (SPD). É fácil perceber que, se $a \neq 2$, o sistema é impossível (SI).

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRGS-RS) Rasgou-se uma das fichas onde foram registrados o consumo e a despesa correspondente de três mesas de uma lanchonete, como indicado a seguir.

Mesa 1	Mesa 2	Mesa 3
2 sucos	4 sucos	1 suco
3 sanduíches	5 sanduíches	1 sanduíche
R$ 14,00	R$ 25,00	R$

Nessa lanchonete, os sucos têm um preço único, e os sanduíches também. O valor da despesa da mesa 3 é

A) R$ 5,50.
B) R$ 6,00.
C) R$ 6,40.
D) R$ 7,00.
E) R$ 7,20.

02. (UFRGS-RS) O sistema de equações

$$\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$$

possui

A) nenhuma solução.
B) uma solução.
C) duas soluções.
D) três soluções.
E) infinitas soluções.

03. (Albert Einstein–2018) Um parque tem 3 pistas para caminhada, X, Y e Z. Ana deu 2 voltas na pista X, 3 voltas na pista Y e 1 volta na pista Z, tendo caminhado um total de 8 420 metros. João deu 1 volta na pista X, 2 voltas na pista Y e 2 voltas na pista Z, num total de 7 940 metros. Marcela deu 4 voltas na pista X e 3 voltas na pista Y, num total de 8 110 metros. O comprimento da maior dessas pistas, excede o comprimento da menor pista em

A) 1 130 metros.
B) 1 350 metros.
C) 1 570 metros.
D) 1 790 metros.

04. (UFJF-MG) Resolvendo o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

encontramos **y** igual a

A) 1. B) 3. C) 5. D) 2. E) 4.

05. (Unimontes-MG) Se $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$ são as soluções do sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + z = 4 \\ x + 4z = 10 \end{cases}$, então $x_0 + y_0 + z_0$ é igual a

A) 4. B) 5. C) 3. D) 2.

06. (UPE–2016) Um PA mais dois PE mais um PI vale 15. Quatro PA mais cinco PE mais sete PI vale 63. Seis PA mais oito PE mais nove PI vale 89. Nessas condições, quanto vale um PA mais um PE mais um PI?

A) 11
B) 12
C) 15
D) 25
E) 28

07. (UFOP-MG) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} mx + 3y - z = 2 \\ x + my + 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Os valores de **m** para os quais a solução seja única são

A) m = –2 ou m = 5.
B) m = 2 ou m = –5.
C) m ≠ –2 ou m ≠ 5.
D) m ≠ 2 ou m ≠ –5.

08. (UPE) Em uma floricultura, é possível montar arranjos diferentes com rosas, lírios e margaridas. Um arranjo com 4 margaridas, 2 lírios e 3 rosas custa 42 reais. No entanto, se o arranjo tiver uma margarida, 2 lírios e uma rosa, ele custa 20 reais. Entretanto, se o arranjo tiver 2 margaridas, 4 lírios e uma rosa, custará 32 reais. Nessa floricultura, quanto custará um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa?

A) 5 reais.
B) 8 reais.
C) 10 reais.
D) 15 reais.
E) 24 reais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unicamp-SP–2018) Sabendo que **k** é um número real, considere o sistema linear nas variáveis reais **x** e **y**,

$$\begin{cases} x + ky = 1, \\ x + y = k. \end{cases}$$

É correto afirmar que esse sistema

A) tem solução para todo **k**.
B) não tem solução única para nenhum **k**.
C) não tem solução se k = 1.
D) tem infinitas soluções se k ≠ 1.

02. (UNIRIO-RJ) Num determinado teste psicológico, existem 20 questões, com três opções de resposta **a**, **b** e **c**. Cada opção **a** vale +1, cada opção **b** vale 0, e cada opção **c** vale –1. Uma pessoa faz o teste, respondendo a todas as questões, com uma só resposta por questão, totalizando –5 pontos. Com as mesmas marcações, essa mesma pessoa totalizaria 54 pontos se cada opção **a** valesse +1, se cada opção **b** valesse +2, e se cada opção **c** valesse +4 pontos. O número de marcações feitas por essa pessoa na opção **b** foi de

A) 2. B) 4. C) 6. D) 7. E) 9.

03. (ESPM-SP) O sistema $\begin{cases} ax + 4y = a^2 \\ x + ay = -2 \end{cases}$, em **x** e **y**, é possível e indeterminado se, e somente se

A) a ≠ –2.
B) a ≠ 2.
C) a = ±2.
D) a = –2.
E) a = 2.

04. (Unicamp-SP) As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal.

Para determinar o peso excedente das bagagens do casal **x** e do senhor que viajava sozinho **y**, bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa **z**, pode-se resolver o seguinte sistema linear:

A) $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

05. (UECE–2015) Em relação ao sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - my + z = 0, \\ mx - y - z = 0 \end{cases}$ pode-se afirmar corretamente que

A) o sistema admite solução não nula apenas quando m = –1.
B) para qualquer valor de **m**, a solução nula (x = 0, y = 0, z = 0) é a única solução do sistema.
C) o sistema admite solução não nula quando m = 2 ou m = –2.
D) não temos dados suficientes para concluir que o sistema tem solução não nula.

06. (PUC Rio–2016) Considere o sistema $\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ e assinale a alternativa correta.

A) O sistema tem solução para todo $a \in \mathbb{R}$.
B) O sistema tem exatamente uma solução para a = 2.
C) O sistema tem infinitas soluções para a = 1.
D) O sistema tem solução para a = 4.
E) O sistema tem exatamente três soluções para a = –1.

07. (Unicamp-SP–2015) Considere o sistema linear nas variáveis **x**, **y** e **z**.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 7x + 8y - mz = 26 \end{cases}$$

Em que **m** é um número real. Sejam a < b < c números inteiros consecutivos tais que (x, y, z) = (a, b, c) é uma solução desse sistema. O valor de **m** é igual a

A) 3.
B) 2.
C) 1.
D) 0.

08. (UFSJ-MG) A respeito do sistema

$$\begin{cases} x + y - az = 1 \\ 3x - y - 2z = 6 \\ 2x + 2y - 2z = b \end{cases}$$

é correto afirmar que

A) se a ≠ 1, o sistema tem solução única.
B) se b = 2, o sistema tem infinitas soluções.
C) se a = 1 e b = 2, o sistema não tem solução.
D) se a = 1, o sistema tem infinitas soluções.

09. (UFRGS-RS) Inovando na forma de atender aos clientes, um restaurante serve alimentos utilizando pratos de três cores diferentes: verde, amarelo e branco. Os pratos da mesma cor custam o mesmo valor. Na mesa **A**, foram consumidos os alimentos de 3 pratos verdes, de 2 amarelos e de 4 brancos, totalizando um gasto de R$ 88,00. Na mesa **B**, foram consumidos os alimentos de 2 pratos verdes e de 5 brancos, totalizando um gasto de R$ 64,00. Na mesa **C**, foram consumidos os alimentos de 4 pratos verdes e de 1 amarelo, totalizando um gasto de R$ 58,00.

Comparando o valor do prato branco com o valor dos outros pratos, verifica-se que esse valor é

A) 80% do valor do prato amarelo.
B) 75% do valor do prato amarelo.
C) 50% do valor do prato verde.
D) maior que o valor do prato verde.
E) a terça parte do valor da soma dos valores dos outros pratos.

10. (UERJ) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00. Veja, na tabela, os preços da água por embalagem:

Volume da embalagem (L)	Preço (R$)
20	10,00
10	6,00
2	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a **n**.

O valor de **n** é um divisor de

A) 32.
B) 65.
C) 77.
D) 81.

11. (EsPCEx-SP) Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ ax + 2y = b \end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de a + b é

A) −1.
B) 4.
C) 9.
D) 14.
E) 19.

12. (UFRGS-RS) O sistema a seguir admite mais de uma solução.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 3x - y = b \end{cases}$$

Então, segue-se que

A) $a \neq -3$ e $b = \frac{1}{3}$.

B) $a = -3$ e $b \neq \frac{1}{3}$.

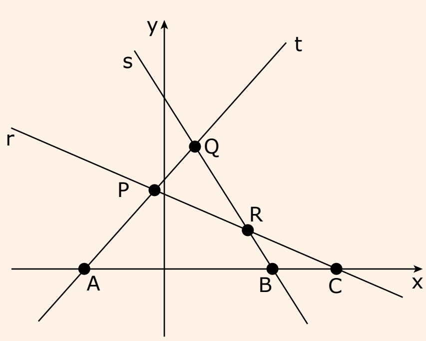
C) $a = -\frac{1}{3}$ e $b \neq 3$.

D) $a \neq -\frac{1}{3}$ e $b = 3$.

E) $a = -\frac{1}{3}$ e $b = 3$.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2016) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

A) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

B) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

C) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

D) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

E) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

02. (Enem) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca **X** é o dobro do número de carros roubados da marca **Y**, e as marcas **X** e **Y** juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca **Y** é:

A) 20.
B) 30.
C) 40.
D) 50.
E) 60.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. A
- 04. D
- 05. C
- 06. A
- 07. C
- 08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. D
- 03. D
- 04. A
- 05. A
- 06. B
- 07. A
- 08. A
- 09. A
- 10. C
- 11. D
- 12. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Polinômios I

DEFINIÇÃO DE POLINÔMIO

Um polinômio é uma função na variável **x** da forma:
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$

É dado que:

i) $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ e a_0 são os coeficientes do polinômio.

ii) Os expoentes são números naturais.

Exemplos:

1º) $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x + 2$

2º) $P(x) = -4x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 1$

Um polinômio é dito **nulo** se todos os seus coeficientes são iguais a zero. Portanto, $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é nulo se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

GRAU DO POLINÔMIO

Considere o polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Dizemos que o grau de P(x) é igual a **n** se $a_n \neq 0$.

Exemplos:

1º) O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.

2º) O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2.

3º) O grau de $P(x) = 13$ é igual a zero.

OBSERVAÇÃO

Não se define o grau de um polinômio nulo.

POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Os polinômios $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_nx^n + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ são idênticos se, e somente se, $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_2 = b_2, a_1 = b_1$ e $a_0 = b_0$, e escrevemos $P(x) = Q(x)$.

Exemplo:

Determinar os valores de **a**, **b** e **c** para os quais os polinômios $P(x) = ax^2 + 3x + 9$ e $B(x) = (b + 3)x^2 + (c - 1)x + 3b$ são idênticos.

Igualando os coeficientes dos termos correspondentes, obtemos:

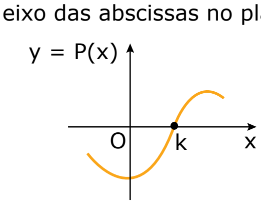
$$\begin{cases} a = b + 3 \\ 3 = c - 1 \\ 9 = 3b \end{cases}$$

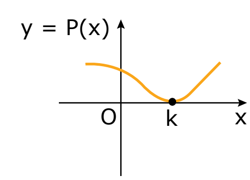
Resolvendo o sistema, obtemos a = 6, b = 3 e c = 4.

RAIZ OU ZERO DE UM POLINÔMIO

Dizemos que um número **k** é raiz de um polinômio P(x) se, e somente se, P(k) = 0.

Do ponto de vista geométrico, a raiz representa o ponto no qual a curva, correspondente ao gráfico de P(x), intercepta o eixo das abscissas no plano cartesiano.





OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Adição e subtração

Dados os polinômios:

$A(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e
$B(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$

i) A **adição** A(x) + B(x) é dada por:
$A(x) + B(x) =$
$(a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

ii) A **subtração** A(x) − B(x) é dada por:
$A(x) - B(x) =$
$(a_n - b_n)x^n + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$

Portanto, nessas operações, basta adicionarmos ou subtrairmos os termos semelhantes.

Exemplo:

Considerar os polinômios $A(x) = 5x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 9x + 12$ e $B(x) = x^4 + 23x^3 - 7x^2 + x + 3$. Assim, temos:

$A(x) + B(x) = 6x^4 + 20x^3 + 11x^2 - 8x + 15$

$A(x) - B(x) = 4x^4 - 26x^3 + 25x^2 - 10x + 9$

Multiplicação

O produto dos polinômios A(x) e B(x) é obtido por meio da multiplicação de cada termo de A(x) por todos os termos de B(x), reduzindo os termos semelhantes.

O grau do polinômio A(x).B(x) é igual à soma dos graus de A(x) e B(x).

Exemplo:

Sejam os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = 2x - 1$. Assim, temos:

$A(x).B(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 1) \Rightarrow$

$A(x).B(x) = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 4x - 2 \Rightarrow$

$A(x).B(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

Divisão (método da chave)

Da divisão de dois polinômios A(x) e B(x) não nulos são obtidos os polinômios Q(x) (quociente) e R(x) (resto), tais que:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ R(x) & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = B(x).Q(x) + R(x) \\ gr(R) < gr(B) \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

Em que:

A(x): Dividendo	gr(R): grau de R(x)
B(x): Divisor	gr(B): grau de B(x)
Q(x): Quociente	
R(x): Resto	

Para esclarecer o método da chave, vamos efetuar a divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ pelo polinômio $B(x) = x^2 + 2x + 3$.

Inicialmente, devemos verificar se o grau do dividendo é maior ou igual ao grau do divisor. Caso contrário, não é possível efetuar a divisão. No problema, o grau do dividendo é igual a 3 e o grau do divisor é igual a 2. Portanto, podemos efetuar a divisão.

Escrevemos os polinômios no seguinte formato:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Inicialmente, dividimos o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} & 4x \end{array}$$

Em seguida, multiplicamos 4x por todos os termos do divisor, da direita para a esquerda. O resultado de cada multiplicação é colocado, com o sinal trocado, abaixo de cada termo correspondente, no dividendo. Em seguida, somamos esses termos.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 8x^2 - 12x & 4x \\ \cline{1-1} -6x^2 - 13x + 1 & \end{array}$$

Repetindo o processo, dividimos $-6x^2$ por x^2.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 8x^2 - 12x & 4x - 6 \\ \cline{1-1} -6x^2 - 13x + 1 & \end{array}$$

Multiplicamos −6 por todos os termos do divisor, da direita para a esquerda. O resultado de cada multiplicação é colocado, com o sinal trocado, abaixo de cada termo correspondente, no dividendo. Em seguida, somamos esses termos.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 8x^2 - 12x & 4x - 6 \\ \cline{1-1} -6x^2 - 13x + 1 & \\ 6x^2 + 12x + 18 & \\ \cline{1-1} -x + 19 & \end{array}$$

Observe que não podemos continuar a divisão, pois o grau do termo obtido é menor do que 2.

Portanto, temos:

Quociente: $Q(x) = 4x - 6$

Resto: $R(x) = -x + 19$

Método de Descartes

O Método de Descartes, também conhecido como Método dos Coeficientes a Determinar, é outra forma utilizada para efetuar a divisão de polinômios. A sequência de passos é a seguinte:

Consideremos uma divisão de polinômios na qual P(x) é o dividendo, B(x) é o divisor, Q(x) é o quociente e R(x) é o resto.

i) Calculamos o grau do quociente Q(x) e também o grau do resto R(x).

ii) Escrevemos os polinômios correspondentes ao quociente e ao resto, representando seus coeficientes desconhecidos por letras.

iii) Determinamos esses coeficientes, utilizando a identidade polinomial P(x) = Q(x). B(x) + R(x).

Exemplo:

Dividir $P(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2$ por $B(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$.

Inicialmente, vamos determinar o grau do quociente e do resto. Observe que o grau do quociente é dado pela diferença entre o grau do dividendo e o grau do divisor, ou seja, o quociente é de grau 4 − 3 = 1. Portanto, podemos escrever o quociente na forma $Q(x) = ax + b$.

Além disso, o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor, ou seja, o resto encontrado precisa estar na forma $R(x) = cx^2 + dx + e$.

Temos que:

$P(x) = Q(x).B(x) + R(x)$

$5x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 = (x^3 + x^2 - 4x + 6).(ax + b) + cx^2 + dx + e =$

$ax^4 + ax^3 - 4ax^2 + 6ax + bx^3 + bx^2 - 4bx + 6b + cx^2 + dx + e =$

$ax^4 + (a + b)x^3 + (-4a + b + c)x^2 + (6a - 4b + d)x + (6b + e)$

Igualando termo a termo, temos:

$$\begin{cases} a = 5 \\ a + b = -2 \Rightarrow 5 + b = -2 \Rightarrow b = -7 \\ -4a + b + c = 1 \Rightarrow -4.5 - 7 + c = 1 \Rightarrow -27 + c = 1 \Rightarrow c = 28 \\ 6a - 4b + d = 1 \Rightarrow 6.5 - 4.(-7) + d = 1 \Rightarrow 30 + 28 + d = 1 \Rightarrow d = -57 \\ 6b + e = -2 \Rightarrow 6.(-7) + e = -2 \Rightarrow -42 + e = -2 \Rightarrow e = 40 \end{cases}$$

Assim, temos:

$Q(x) = 5x - 7$ e $R(x) = 28x^2 - 57x + 40$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE–2019) Considerando o polinômio $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x + 1$, é correto afirmar que o valor da soma $P(-1) + P\left(-\frac{1}{3}\right)$ é um número localizado entre

A) 5,0 e 5,5.
B) 4,0 e 4,5.
C) 4,5 e 5,0.
D) 5,5 e 6,0.

02. (UEG–2016) Na divisão do polinômio $6x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2$ pelo divisor $x^2 + 3x - 2$, o resto multiplicado por 2 é:

A) $-222x^2 + 252$
B) $444x^2 + 252$
C) $-444x^2 + 252$
D) $222x + 252$
E) $-444x^2 - 252$

03. (UERN–2015)

- Divisor: $x^2 + x$;
- Resto: $1 - 7x$; e
- Quociente: $8x^2 - 8x + 12$.

Logo, o dividendo dessa operação é:

A) $8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$
B) $6x^4 + 4x^2 + 4x + 3$
C) $8x^4 + 4x^2 + 4x + 1$
D) $6x^4 + 8x^2 + 5x + 1$

04. (UPF-RS–2015) Se o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^2 + mx + p$ é divisível por $D(x) = x^2 + 1$, o valor de $m - p$ é

A) −3.
B) −1.
C) 0.
D) 2.
E) 3.

05. (PUC RS–2017) Os polinômios $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $h(x)$ em $\mathbb{C}$, nessa ordem, estão com seus graus em progressão geométrica. Os graus de $p(x)$ e $h(x)$ são, respectivamente, 16 e 2. A soma do número de raízes de $q(x)$ com o número de raízes de $f(x)$ é

A) 24.
B) 16.
C) 12.
D) 8.
E) 4.

06. (UFMG) Sejam $p(x) = ax^2 + (a - 15)x + 1$ e $q(x) = 2x^2 - 3x + \frac{1}{b}$ polinômios com coeficientes reais. Sabe-se que esses polinômios possuem as mesmas raízes. Então, é correto afirmar que o valor de $a + b$ é

A) 3.
B) 6.
C) 9.
D) 12.

07. (UECE–2015) Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais, então o valor de $a - b + c$ é

A) 9.
B) 10.
C) 12.
D) 13.

08. (UFJF-MG–2017) Qual é o polinômio que, ao ser multiplicado por $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$, tem como resultado o polinômio $h(x) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$?

A) $x^3 + x^2 + x$
B) $x^3 + x^2 - x$
C) $x^3 + 3x^2 + x$
D) $x^3 + 3x^2 + 2x$
E) $x^3 + 3x^2 - x$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUCPR–2015) Se $(x - 2)$ é um fator do polinômio $x^3 + kx^2 + 12x - 8$, então, o valor de **k** é igual a

A) −3.
B) 2.
C) 3.
D) 6.
E) −6.

02. (UDESC) Sejam $q(x)$ e $r(x)$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $f(x) = 6x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 7$ por $g(x) = 2x^2 + x + 1$. O produto entre todas as raízes de $q(x)$ e $r(x)$ é igual a

A) $-\frac{7}{3}$.
B) 3.
C) $\frac{3}{5}$.
D) 5.
E) $\frac{5}{3}$.

03. (UERN) O valor de **n** para que a divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 17$ por $d(x) = 2x^2 + nx + 4$ tenha resto igual a 5 é um número

A) menor que −6.
B) negativo e maior que −4.
C) positivo e menor que 5.
D) par e maior que 11.

04. (ESPM-SP–2016) O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x - 1$ pelo binômio $x + 3$ são, respectivamente,

A) $x - 2$ e 5.
B) $x + 2$ e 6.
C) $x - 3$ e 2.
D) $x + 1$ e 0.
E) $x - 1$ e −2.

05. (UEL-PR) O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - 3ax - 4a$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 - x - 4$. Qual é o valor de **a**?

A) $a = -2$
B) $a = -1$
C) $a = 0$
D) $a = 1$
E) $a = 2$

06. (Ibmec) Se o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ pelo polinômio $Q(x) = x^2 + x + 2$ é igual a 4, então podemos afirmar que $a + b$ vale

A) 2.
B) −2.
C) 3.
D) −3.
E) 4.

MATEMÁTICA

07. (UFPE) Determine o polinômio com coeficientes reais $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, tal que $p(x + 1) - p(x) = 6x^2$ e indique $a^2 + b^2 + c^2$.

08. (FGV–2015) Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^3 + nx^2 + 1$, com **m** e **n** inteiros, então, $n + m$ é igual a

A) -2.
B) -1.
C) 0.
D) 1.
E) 2.

09. (UFOP-MG) O resto da divisão do polinômio $p(x)= x^{99} - 2x + 3$ pelo polinômio $q(x) = x^2 - 1$ é:

A) $-x + 3$
B) 6
C) 8
D) $3x - 1$

10. (Mackenzie-SP–2017) Os valores de **R**, **P** e **A** para que a igualdade $\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}=\frac{R}{x}+\frac{P}{x+1}+\frac{A}{x-1}$ seja uma identidade são, respectivamente,

A) 3, 1 e -2.
B) 1, -2 e 3.
C) 3, -2 e 1.
D) 1, 3 e -2.
E) -2, 1 e 3.

11. (Mackenzie-SP–2016) Na equação $(x^3 - x^2 + x - 1)^{20} = 0$, a multiplicidade da raiz $x = 1$ é

A) 1.
B) 18.
C) 9.
D) 20.
E) 40.

12. (UDESC) Seja $r(x)$ o resto da divisão do polinômio $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ por $q(x) = 2x^2 - x - 1$. Se $f(x) = 2x + k$ e $f(g(x)) = r(x)$. Então o valor da constante **k** para que o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 10$ seja $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ é

A) -12.
B) -2.
C) 12.
D) 2.
E) $-\frac{32}{5}$.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo **t**, em horas, que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções:

$V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3\,000$ e $V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3\,000$.

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e, também, no tempo **t** igual a

A) 1,3 h.
B) 1,69 h.
C) 10,0 h.
D) 13,0 h.
E) 16,9 h.

02. Ao estudar a variação entre os valores de duas grandezas **P** e **X**, um pesquisador concluiu que a relação matemática que caracterizava essa variação era dada pelo polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que **x** era o valor da grandeza **X** e $P(x)$ era o valor correspondente da grandeza **P**. Parte dos dados coletados pelo pesquisador encontram-se a seguir.

X	P
0	2
1	5
2	10

Com base nas informações apresentadas, pode-se afirmar que o valor do coeficiente **a** é

A) -3.
B) -2.
C) 0.
D) 2.
E) 3.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C
- 03. A
- 04. E
- 05. C
- 06. C
- 07. D
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. D
- 03. B
- 04. A
- 05. E
- 06. C
- 07. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$
  $a^2 + b^2 + c^2 = 14$
- 08. B
- 09. A
- 10. B
- 11. D
- 12. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

MATEMÁTICA

FRENTE **C** MÓDULO **22**

Polinômios II

TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de P(x) por um binômio ax + b é $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Podemos verificar esse fato facilmente. Temos:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & ax+b \\ \cline{2-2} R & Q(x) \end{array}$$

Podemos escrever o algoritmo na forma:

P(x) = (ax + b).Q(x) + R

Para $x = -\frac{b}{a}$, temos:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a.\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right].Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \Rightarrow$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = (-b+b).Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0\,.\,Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \Rightarrow$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

Em outras palavras, para encontrar o resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio do 1º grau, basta calcular a raiz do binômio do 1º grau e, em seguida, substituí-lo no polinômio P(x).

Exemplo:

Calcular o resto da divisão do polinômio

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 5$ por $B(x) = x - 1$.

Cálculo da raiz de B(x):

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

O resto **R** é dado por:

$R = P(1) = 3\,.\,1^3 + 4\,.\,1^2 - 1 + 5 \Rightarrow$

$R = 3 + 4 - 1 + 5 = 11$

TEOREMA DE D'ALEMBERT

P(x) é divisível por ax + b se, e somente se, $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Observe que o Teorema de D'Alembert é uma consequência imediata do Teorema do Resto. Eis a demonstração:

Seja P(x) = (ax + b).Q(x) + R.

Conforme vimos anteriormente, fazendo $x = -\frac{b}{a}$, temos $P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$.

Porém, o polinômio P(x) é divisível por ax + b se, e somente se, **R** for igual a zero.

Desse modo, o teorema está demonstrado.

DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

É um dispositivo prático que permite determinar o quociente e o resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma x − a. Como exemplo, vamos efetuar a divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ por $B(x) = x - 2$.

Inicialmente, vamos posicionar os termos indicados, conforme o esquema a seguir:

Raiz do divisor	Coeficientes do dividendo	
	Coeficientes do quociente	Resto

Assim, temos:

2	1	3	−1	4

Repetimos o coeficiente do termo de maior grau.

2	1	3	−1	4
	1			

Multiplicamos essa raiz (2) pelo coeficiente que foi repetido (1) e, em seguida, a somamos com o próximo coeficiente (3). O resultado é colocado à direita do 1.

Fazemos 2 . 1 + 3 = 5.

2	1	3	−1	4
	1	5		

Repetimos o processo, agora, com o último termo obtido (5). Fazemos 2 . 5 − 1 = 9.

2	1	3	−1	4
	1	5	9	

Finalmente, repetimos esse procedimento para o termo 9. Com isso, obtemos o último termo, separado por uma linha tracejada. Esse número é o resto da divisão de P(x) por B(x).

Fazemos 2 . 9 + 4 = 22.

2	1	3	−1	4
	1	5	9	22

Os números obtidos (1, 5 e 9) são os coeficientes do polinômio quociente. Como P(x) é do 3º grau e B(x) é do 1º grau, o dividendo deverá, necessariamente, ser do 2º grau. Por isso, costumamos dizer que o Dispositivo de Briot-Ruffini serve para abaixar o grau do polinômio P(x). Mais à frente, veremos uma importante aplicação desse fato no cálculo de raízes de equações. Portanto, temos o quociente $Q(x) = x^2 + 5x + 9$ e o resto $R(x) = 22$.

OBSERVAÇÃO

Podemos utilizar o Dispositivo de Briot-Ruffini também quando o divisor é um polinômio da forma ax + b. Nesse caso, devemos dividir os coeficientes do polinômio quociente por **a**.

Exemplo:

Efetuar a divisão de $P(x) = 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ por $2x - 4$.

A raiz do binômio do 1º grau é igual a 2. Assim, temos:

2	5	1	–2	1
	5	11	20	41

Para obter o polinômio quociente, devemos dividir cada termo obtido por 2. É importante observar que o resto não se altera. Assim, temos como quociente $Q(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$ e resto $R(x) = 41$.

TEOREMA DA DIVISÃO PELO PRODUTO

Um polinômio P(x) é divisível por (x – a)(x – b) se, e somente se, P(x) é divisível separadamente por x – a e por x – b.

Demonstração:

Se P(x) é divisível por (x – a)(x – b), podemos escrever a operação da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-a)(x-b) \\ \hline 0 & Q(x) \end{array}$$

Nela, Q(x) é o polinômio quociente.

Logo, temos $P(x) = (x - a)(x - b).Q(x)$.

Pelo Teorema de D'Alembert, P(x) é divisível por x – a se, e somente se, P(a) = 0.

Assim, temos $P(a) = (a - a)(a - b).Q(a) = 0$.

Logo, P(x) é divisível por x – a.

Analogamente, P(x) será divisível por x – b se, e somente se, P(b) = 0.

Assim, temos que $P(b) = (b - a)(b - b).Q(b) = 0$.

Logo, P(x) é divisível por x – b.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (FGV-SP) Se o polinômio $x^3 - 2mx^2 + (-m + 6)x + 2m + n$ é divisível por x – 1 e por x + 1, então m + n é igual a:

A) 7. B) –7. C) 6. D) –6. E) 0.

Resolução:

Pelo Teorema de D'Alembert, temos P(1) = 0 e P(–1) = 0. Assim:

$P(-1) = (-1)^3 - 2m(-1)^2 + (-m + 6)(-1) + 2m + n \Rightarrow$

$0 = -1 - 2m + m - 6 + 2m + n \Rightarrow m + n = 7$

Observe que não foi necessário fazer P(1) = 0, pois a pergunta envolvia m + n.

02. (Mackenzie-SP)

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-2 \\ \hline 4 & Q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} Q(x) & x-6 \\ \hline 1 & Q_1(x) \end{array}$$

Considerando as divisões de polinômios dadas, podemos afirmar que o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 8x + 12$ é:

A) 2x + 2
B) 2x + 1
C) x + 2
D) 3x – 2
E) x + 1

Resolução:

Podemos escrever do seguinte modo:

$P(x) = (x - 2).Q(x) + 4$ e

$Q(x) = (x - 6).Q_1(x) + 1$

Substituindo a expressão para Q(x) em P(x), temos:

$P(x) = (x - 2)[(x - 6).Q_1(x) + 1] + 4 \Rightarrow$

$P(x) = (x - 2).(x - 6).Q_1(x) + x - 2 + 4 \Rightarrow$

$P(x) = (x^2 - 8x + 12).Q_1(x) + x + 2$

Logo, o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 8x + 12$ é igual a (x + 2).

03. Um polinômio P(x) deixa resto 1 quando dividido por x – 1 e deixa resto 4 quando dividido por x + 2. Determinar o resto da divisão do polinômio P(x) por (x – 1)(x + 2).

Resolução:

Vamos representar os dados da seguinte forma:

$\begin{array}{l|l} P(x) & x-1 \\ \hline 1 & Q_1(x) \end{array}$ Pelo Teorema do Resto, temos que P(1) = 1.

$\begin{array}{l|l} P(x) & x+2 \\ \hline 4 & Q_2(x) \end{array}$ Pelo Teorema do Resto, temos que P(–2) = 4.

Agora, observe que (x – 1)(x + 2) é um polinômio do segundo grau. Na divisão de P(x) por (x – 1)(x + 2), o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor. Portanto, o resto R(x) é da forma R(x) = ax + b, em que **a** e **b** são números reais.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-1)(x+2) \\ \hline ax+b & Q_3(x) \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)(x + 2).Q_3(x) + ax + b$

Fazendo x = 1, temos:

$P(1) = (1 - 1)(1 + 2).Q_3(1) + a.1 + b \Rightarrow$

$1 = a + b$

Fazendo x = –2, temos:

$P(-2) = (-2 - 1)(-2 + 2).Q_3(-2) + a(-2) + b \Rightarrow$

$4 = -2a + b$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a + b = 4 \end{cases}$, temos a = –1 e b = 2.

Portanto, o resto é igual a R(x) = –x + 2.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UEPB) Dado que o polinômio $p(x) = -2x^3 + mx^2 - 5x + 2$ é divisível por $x - 1$, então

A) $m = -5$.
B) $m = 5$.
C) $m = 9$.
D) $m = 2$.
E) $m = 3$.

02. (UFJF-MG) Na divisão de um polinômio P(x) pelo binômio (x + a), usou-se o Dispositivo prático de Briot-Ruffini e encontrou-se:

−2	1	p	−3	4	−5
	q	−4	5	r	7

Os valores de **r**, **q**, **p** e **a** são, respectivamente,

A) 6, 1, −6, −2.
B) −6, −2, −2, 2.
C) −6, 1, −2, 2.
D) −6, −2, 1, 2.
E) 4, 1, −4, 2.

03. (FUVEST-SP) Determine o valor de **p** para que o polinômio $2x^3 + 5x^2 - px + 2$ seja divisível por $x - 2$.

04. (PUC RS–2015) Se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que **a**, **b**, **c**, **d** são números reais, e sabendo que p(x) é divisível por $x + 1$, podemos afirmar que:

A) $a + c > b + d$
B) $a + c = b + d$
C) $a + c < b + d$
D) $a + b + c + d = 0$
E) $a + b + c + d = 1$

05. (ESPM-SP) O trinômio $x^2 + ax + b$ é divisível por $x + 2$ e por $x - 1$. O valor de $a - b$ é

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

06. (PUC Minas) O resto da divisão do polinômio $P(x) = x^4 - 3x^2 + px + 1$ por $x - 1$ é 4. O valor de **p** é

A) −5.
B) −3.
C) −1.
D) 3.
E) 5.

07. (PUC RS–2016) O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, em $\mathbb{R}$, é divisível por $(x - 1)$. Podemos afirmar que p(p(1)) é:

A) −1
B) 0
C) 1
D) $a + b + c$
E) $-a + b - c$

08. (UFTM-MG) Dividindo-se o polinômio $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + mx + 1$ por $(x - 1)$ ou por $(x + 1)$, os restos são iguais. Nesse caso, o valor de **m** é igual a

A) −2.
B) −1.
C) 1.
D) 2.
E) 3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE–2018) Se o polinômio $p(x) = x^5 + ax^3 + x$ é divisível pelo polinômio $d(x) = x^3 + bx$, em que **a** e **b** são números reais, então, a relação entre **a** e **b** é:

A) $a^2 + ab + b^2 = 0$
B) $b^2 - ab + 1 = 0$
C) $a^2 - ab + 1 = 0$
D) $b^2 - ab + b = 0$

02. (Unesp) O polinômio $P(x) = ax^3 + 2x + b$ é divisível por $x - 2$ e, quando divisível por $x + 3$, deixa resto −45. Nessas condições, os valores de **a** e **b**, respectivamente, são

A) 1 e 4.
B) 1 e 12.
C) −1 e 12.
D) 2 e 16.
E) 1 e −12.

03. (FUVEST-SP) O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$, em que **a** e **b** são números reais, tem restos 2 e 4 quando dividido por $x - 2$ e $x - 1$, respectivamente. Assim, o valor de **a** é

A) −6. B) −7. C) −8. D) −9. E) −10.

04. (UPE) Para que o polinômio $6x^3 - 4x^2 + 2mx - (m + 1)$ seja divisível por $(x - 3)$, o valor da raiz quadrada do módulo de **m** deve ser igual a

A) 0. B) 1. C) 2. D) 3. E) 5.

05. (PUC Rio) O resto da divisão do polinômio $x^3 + px + q$ por $x + 1$ é 4 e o resto da divisão deste mesmo polinômio por $x - 1$ é 8. O valor de **p** é

A) 5.
B) −4.
C) 0.
D) 1.
E) 8.

06. (Mackenzie-SP) Dividindo-se $P(x) = x^2 + bx + c$ por $x - 1$ e por $x + 2$, obtém-se o mesmo resto 3. Então, a soma das raízes de $P(x) - 3$ é

A) −3.
B) −2.
C) −1.
D) 1.
E) 3.

07. (UDESC–2015) Um polinômio p(x) dividido por x + 1 deixa resto 16; por x − 1 deixa resto 12, e por **x** deixa resto −1. Sabendo que o resto da divisão de p(x) por (x + 1)(x − 1)x é da forma $ax^2 + bx + c$, então o valor numérico da soma das raízes do polinômio $ax^2 + bx + c$ é:

A) $\frac{3}{5}$.
B) 2.
C) $\frac{2}{15}$.
D) 4.
E) −2.

08. (UECE–2016) O resto da divisão de $(x^2 + x + 1)^2$ por $x^2 - x + 1$ é:

A) 4x
B) 4(x − 1)
C) 4(x − 2)
D) 4(x − 3)

09. (Mackenzie–SP) O resto da divisão de $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + ax + b$ por $x^2 + 1$ é 3.
Calcule o valor de a + b.

10. (UEL-PR) Para que o polinômio $f(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$ seja um cubo perfeito, ou seja, tenha a forma $f(x) = (x + b)^3$, os valores de **m** e **n** devem ser, respectivamente,

A) 3 e −1.
B) −6 e 8.
C) −4 e 27.
D) 12 e −8.
E) 10 e −27.

11. (UFTM-MG) Seja o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + m$, sendo **m** um número real. Sabendo-se que P(x) é divisível por (x − 2), determine:

A) O valor de **m**.
B) Todas as raízes de P(x).

12. (Unicamp-SP–2017) Considere o polinômio $p(x) = x^n + x^m + 1$, em que $n > m \geq 1$. Se o resto da divisão de p(x) por x + 1 é igual a 3, então

A) **n** é par e **m** é par.
B) **n** é ímpar e **m** é ímpar.
C) **n** é par e **m** é ímpar.
D) **n** é ímpar e **m** é par.

13. (FGV–2016) Sabendo-se que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 2^k + 2$ por x − 3 é igual a $4^k - 220$, o valor de **k** é

A) −4.
B) −2.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

SEÇÃO ENEM

01. Uma importante área da Matemática é a chamada Pesquisa Operacional (PO). Trata-se de um conjunto de técnicas de modelagem matemática aplicado a diversos problemas práticos. Atualmente, a Pesquisa Operacional é bastante utilizada para a maximização do lucro de empresas. Considere que um profissional da área de Pesquisa Operacional tenha efetuado a modelagem da maximização do lucro de uma empresa. Na sua pesquisa, ele descobriu que havia dois valores correspondentes à produção **x** para os quais o lucro seria nulo. O menor desses valores não é suficiente para atingir uma região de lucratividade, pois o valor adquirido com a venda do produto é o mesmo gasto para produzi-lo, e o maior desses valores eleva muito o custo da produção, devido à necessidade de aquisição de equipamentos, e também não gera lucro. Após analisar os dados, ele obteve uma expressão que descreve o lucro L(x) dessa empresa em função do número de toneladas produzidas **x**. A expressão é a seguinte:

$$L(x) = \frac{-x^3 + 8x^2 - 19x + 12}{x - 1}$$

Diante disso, o número de toneladas a serem produzidas a fim de que a empresa tenha a máxima lucratividade é igual a

A) 3. B) 3,5. C) 4. D) 4,5. E) 5.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. C
- 03. p = 19
- 04. B
- 05. D
- 06. E
- 07. B
- 08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. E
- 03. A
- 04. E
- 05. D
- 06. C
- 07. C
- 08. B
- 09. a + b = 4
- 10. D
- 11.
  - A) m = 8
  - B) 2 e −2
- 12. A
- 13. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações Polinomiais I

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Chamamos de equação algébrica ou equação polinomial a toda equação na variável **x** que pode ser escrita na forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

em que os coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 são números complexos e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

1º) $x^2 - 4x + 8 = 0$

2º) $5x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

RAÍZES OU ZEROS DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL

Dizemos que um número complexo **a** é raiz de uma equação polinomial do tipo $P(x) = 0$ se, e somente se, $P(a) = 0$. Por exemplo, a equação $2x^3 - x^2 + 4x - 5 = 0$ admite 1 como raiz, pois $2 . 1^3 - 1^2 + 4 . 1 - 5 = 2 - 1 + 4 - 5 = 0$.

Portanto, para verificar se um determinado número complexo é raiz de uma equação, devemos substituir a variável por esse número e verificar se a igualdade é satisfeita.

CONJUNTO SOLUÇÃO OU VERDADE

Chamamos de conjunto solução de uma equação $P(x) = 0$, em um determinado conjunto universo **U**, o conjunto formado por todas as raízes dessa equação. Resolver uma equação significa determinar o seu conjunto solução.

Exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 . 1 . 2 = 1 - 8 = -7$

No conjunto $\mathbb{R}$, a equação não apresenta soluções, ou seja, $S = \varnothing$.

2º) Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 . 1 . 2 = 1 - 8 = -7$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 . 1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

Portanto, no conjunto dos números complexos, o conjunto solução é dado por $S = \left\{\frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}\right\}$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Toda equação de grau **n**, $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Esse teorema foi enunciado no fim do século XVIII pelo matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Uma das consequências mais importantes desse teorema é a seguinte:

Um polinômio de grau **n**, $n \geq 1$, possui **n** raízes complexas.

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, podemos afirmar que existe pelo menos uma raiz complexa. Sendo k_1 essa raiz, temos $P(k_1) = 0$.

Logo, o polinômio $P(x)$ é divisível pelo polinômio $x - k_1$ (Teorema de D'Alembert).

Portanto, podemos escrever o seguinte:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - k_1 \\ \hline 0 & Q_1(x) \end{array} \Rightarrow P(x) = (x - k_1).Q_1(x)$$

Observe que, para $P(x) = 0$, temos que $x - k_1 = 0$ ou $Q_1(x) = 0$. Portanto, podemos concluir que as raízes de $Q_1(x)$ também são raízes de $P(x)$.

Podemos proceder de maneira análoga ao analisar o polinômio $Q_1(x)$.

Sendo k_2 uma raiz de $Q_1(x)$, podemos escrever:

$Q_1(x) = (x - k_2).Q_2(x)$

Substituindo $Q_1(x)$ na expressão de $P(x)$, obtemos:

$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).Q_2(x)$

Aplicando sucessivamente esse raciocínio, obtemos:

$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3). ... .(x - k_n).Q_n(x)$

Nessa expressão, $Q_n(x)$ é um polinômio de grau zero. Observe que o coeficiente de x_n em $P(x)$ é a_n. Logo, temos $Q_n(x) = a_n$.

Portanto:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3). \ldots .(x - k_n).a_n$$

Essa é a chamada forma fatorada do polinômio P(x).

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Como consequência do exposto, enunciamos a seguir o chamado Teorema da Decomposição.

Um polinômio P(x) de grau **n**, n ≥ 1, pode ser decomposto em **n** fatores do 1º grau, ou seja, pode ser escrito na forma:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3). \ldots .(x - k_n).a_n$$

Observe que uma consequência imediata desse teorema é que toda equação de grau **n**, n ≥ 1, possui **n** raízes complexas, distintas ou não.

OBSERVAÇÃO

Consideremos o polinômio P(x) de grau **n**, n ≥ 1. Sabemos que esse polinômio pode ser decomposto em **n** fatores do primeiro grau. Suponhamos que um mesmo número seja raiz de **k** fatores de P(x), k ≤ n. Dizemos que esse número é uma raiz de multiplicidade **k** do polinômio P(x).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Resolver a equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$.

Resolução:

Fatorando a equação, temos:

$x^2(x - 3) + 4(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(x^2 + 4) = 0$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \pm 2i \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por S = {–2i, 2i, 3}.

02. Determinar a multiplicidade de cada uma das raízes na equação $(x - 5)^3(x + 2)(x - 7)^4 = 0$.

Resolução:

Observe que existem 3 fatores cuja raiz é 5. Portanto, a multiplicidade da raiz 5 é igual a 3.

Existe um único fator que têm raiz –2. Logo, a multiplicidade da raiz –2 é igual a 1 (raiz simples).

Existem 4 fatores em que o número 7 é raiz. Logo, a multiplicidade da raiz 7 é igual a 4.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) Sabendo que 1 é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 - ax^2 - 2x$, podemos afirmar que p(x) é igual a:

A) $2x^2(x - 2)$
B) $2x(x - 1)(x + 1)$
C) $2x(x^2 - 2)$
D) $x(x - 1)(x + 1)$

02. (UFRGS-RS) As raízes do polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 + 4x$ são

A) –4, –1 e 0.
B) –4, 0 e 1.
C) –4, 0 e 4.
D) –1, 0 e 1.
E) 0, 1 e 4.

03. (PUC-Campinas-SP) Se **v** e **w** são as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$, em que **a** e **b** são coeficientes reais, então $v^2 + w^2$ é igual a

A) $a^2 - 2b$
B) $a^2 + 2b$
C) $a^2 - 2b^2$
D) $a^2 + 2b^2$
E) $a^2 - b^2$

04. (UFOP-MG) Considere a equação $7x(x - 1)^2(2x - 2) = 0$. Então, podemos afirmar que

A) 1 é raiz tripla.
B) 1 é raiz dupla.
C) 1 é raiz simples.
D) –1 é raiz dupla.
E) –1 é raiz tripla.

05. (UDESC–2015) O módulo da diferença das raízes de $(x - 1).(x + 2) - 2(x + 2) - 4 = x - 2$ é

A) 8.
B) 2.
C) 4.
D) 6.
E) 10.

06. (PUC Rio) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$ é divisível por (x – 2).

A) Determine **d**.
B) Calcule as raízes de p(x) = 10.

07. (UFRGS-RS) O polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ tem

A) apenas duas raízes reais distintas.
B) apenas duas raízes positivas.
C) todas as raízes positivas.
D) quatro raízes iguais.
E) quatro raízes distintas.

08. (UECE) Os números –2, –1, 0, 1 e 2 são as soluções da equação polinomial p(x) = 0, as quais são todas simples. Se o polinômio p(x) é tal que $p(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, então o valor de $p(\sqrt{3})$ é igual a:

A) $2\sqrt{3}$
B) $3\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE–2019) Considere os polinômios $m(x) = x^2 - 3x + 2$, $n(x) = x^2 - 4x + 3$ e $q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, que têm como fator comum o polinômio $f(x) = x - 1$. Se $P(x) = m(x).n(x).q(x)$, a soma das raízes distintas da equação polinomial $P(x) = 0$ é igual a

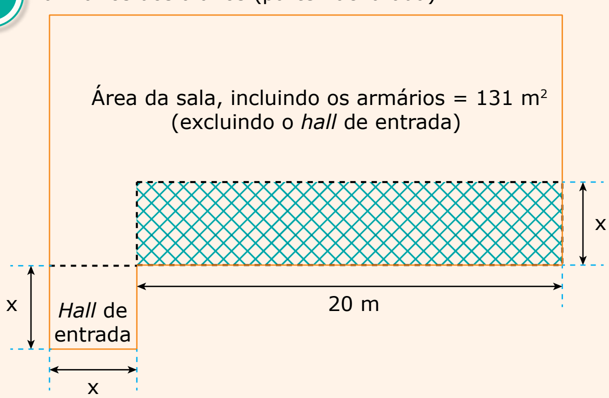
A) 16.

B) 6.

C) 10.

D) 4.

02. (Insper-SP) A figura, feita fora de escala, representa a planta de uma sala de aula que conta com uma área para armários dos alunos (parte hachurada).



A sala está sendo projetada de modo que o teto fique a uma distância de **x** metros do chão e, para que haja uma ventilação adequada, o volume total da sala mais o *hall* de entrada, descontando-se o espaço dos armários (que vão até o teto), deve ser de 280 m³. O menor valor de **x** que atende a todas essas condições é

A) 5.

B) 6.

C) 7.

D) 8.

E) 9.

03. (Mackenzie-SP–2015) Seja $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ um polinômio do 3º grau e $2x - 1$ um de seus fatores. A média aritmética das raízes de P(x) é

A) $\frac{7}{2}$.

B) $\frac{8}{2}$.

C) $\frac{9}{2}$.

D) $\frac{10}{2}$.

E) $\frac{11}{6}$.

04. (FGV-SP) O polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ tem o número 1 como raiz dupla. O valor absoluto da diferença entre as outras raízes é igual a

A) 5.

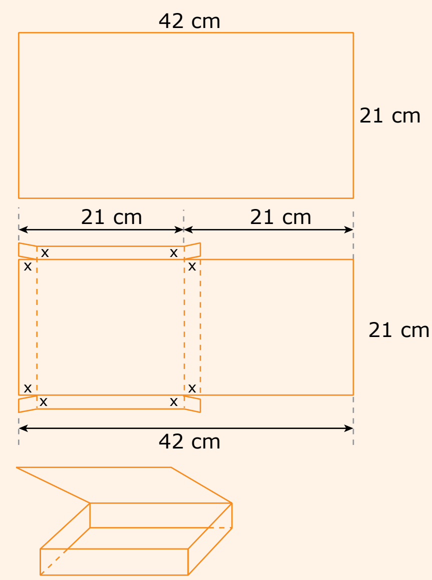
B) 4.

C) 3.

D) 2.

E) 1.

05. (UFPB) Uma organização não governamental desenvolveu um projeto de reciclagem de papel em um bairro popular de uma cidade, com o objetivo de contribuir com a política ambiental e gerar renda para as famílias carentes do bairro. A partir da catação do papel e utilizando um processo artesanal, as famílias produzem folhas de papelão em formato retangular medindo 21 cm × 42 cm. Um empresário local propôs comprar toda a produção mensal da comunidade para produzir caixas de papelão, em formato de paralelepípedo reto-retângulo, com volume igual a 810 cm³. Cada caixa é construída recortando-se quadrados em dois dos vértices da folha e retângulos nos outros dois vértices. Em seguida, as abas resultantes dos recortes são dobradas nas linhas tracejadas na folha, obtendo-se, dessa forma, a caixa, conforme representação nas figuras a seguir.



Considerando que uma possibilidade para a medida **x** do lado do quadrado a ser recortado é 3 cm, é correto afirmar que outro valor possível, em centímetros, para a medida **x**, pertence ao intervalo

A) (1, 3).

B) (3, 5).

C) (5, 7).

D) (7, 9).

E) (9, 11).

06. (UNITAU-SP–2016) Considere a função polinomial

$$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Sabendo-se que suas raízes são –2; 3; 4 e 5, e que $g(0) = -240$, é correto afirmar que g(6) é

A) 0.

B) 48.

C) 96.

D) 144.

E) 192.

07. (Ibmec-SP) As quantidades de raízes reais dos polinômios $p(x) = x^4 + 10$, $q(x) = 10x^2 + 1$ e $r(x) = p(x) - q(x)$ são, respectivamente,

A) 0, 0 e 4.

B) 4, 0 e 4.

C) 0, 2 e 2.

D) 4, 2 e 2.

E) 4, 2 e 4.

08. (UFRR–2017) Sejam $P_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ e $P_2(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ polinômios tais que α é raiz real de $P_1(x)$. Então, $P_2(\alpha)$é igual a

A) 10 ou 13.
B) 9 ou 7.
C) 8 ou 0.
D) 11 ou 20.
E) 12 ou 19.

09. (Mackenzie-SP–2016) A equação $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ tem como raízes $-\frac{1}{2}$, **m** e **n**. Então, m^n é igual a

A) −1 ou 0.
B) $-\frac{1}{2}$ ou 2.
C) −2 ou −1.
D) $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$.
E) −2 ou 1.

10. (UDESC–2015) Um polinômio p(x) possui grau 4 e é divisível simultaneamente por $f(x) = x^2 + 5$ e por $g(x) = 2x - 3$. Se **p** satisfizer as condições $p(-1) = 150$ e $p(2) = 63$, então a soma de todos os seus coeficientes é igual a:

A) −18.
B) −6.
C) −8.
D) −33.
E) −25.

11. (Insper–2016) Considere um polinômio P(x) do 4º grau, de coeficientes reais, tal que:

$P(-3) = P(1) = P(5) = 0$;

P(0) e P(2) são, ambos, números positivos.

Nessas condições, os sinais dos números P(−5), P(4) e P(6) são, respectivamente,

A) positivo, negativo e negativo.
B) positivo, negativo e positivo.
C) negativo, negativo e negativo.
D) negativo, positivo e negativo.
E) negativo, positivo e positivo.

12. (Unicamp-SP) Seja $p(x) = x^3 - 12x + 16$.

A) Verifique que x = 2 é raiz de p(x).
B) Use fatoração para mostrar que, se $x > 0$ e $x \neq 2$, então $p(x) > 0$.

SEÇÃO ENEM

01. Observe a notícia a seguir.

Desenvolvido primeiro robô brasileiro para combater incêndios

Uma proposta desafiadora que gerou uma grande invenção feita com poucos recursos e muita criatividade. Assim se concebeu o primeiro "robô-bombeiro" do país, desenvolvido na Universidade de Fortaleza (Unifor). Batizado de Saci – sigla para Sistema de Apoio ao Combate de Incidentes –, o equipamento já é utilizado pelo Corpo de Bombeiros do Ceará. Capaz de lançar jatos de 4,2 mil litros de água por minuto a uma distância de até 180 metros do operador, o robô cumpre a sua missão: "salvaguardar a vida daqueles que nos salvam", segundo seu criador, o engenheiro eletrônico Antônio Roberto Lins de Macedo. [...]

CESAR FILHO, Mário. *Ciência Hoje Online*, edição 344, 14 dez. 2005. Disponível em: <http://cienciahoje.org.br/desenvolvido-primeiro-robo-brasileiro-para-combater-incendios/>. Acesso em: 10 maio 2019. [Fragmento]

Considere que o robô descrito anteriormente se desloque ao longo do gráfico do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. O sistema cartesiano de eixos foi posicionado de modo que as raízes reais desse polinômio indicam possíveis focos de incêndio, os quais serão combatidos pelo robô. Portanto, pode-se afirmar que o robô bombeiro será utilizado

A) nenhuma vez.
B) uma vez.
C) duas vezes.
D) três vezes.
E) quatro vezes.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. A
- 03. A
- 04. A
- 05. D
- 06.
  - A) d = 10
  - B) As raízes são $x = 0$, $x = 1 - \sqrt{6}$ e $x = 1 + \sqrt{6}$.
- 07. D
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. A
- 03. E
- 04. A
- 05. C
- 06. C
- 07. A
- 08. C
- 09. E
- 10. A
- 11. D
- 12.
  - A) Demonstração.
  - B) Demonstração.

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações Polinomiais II

RELAÇÕES DE GIRARD

São as relações estabelecidas entre as raízes e os coeficientes da equação algébrica P(x) = 0. Vamos estudá-las caso a caso.

1º caso: Equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Sejam x_1 e x_2 suas raízes.

As relações entre essas raízes são as seguintes:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$

2º caso: Equação do 3º grau

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$.

Sejam x_1, x_2 e x_3 suas raízes.

As relações entre essas raízes são as seguintes:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$(x_1.x_2) + (x_1.x_3) + (x_2.x_3) = \frac{c}{a}$$

$$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$$

Generalizando uma equação do grau **n**, $n \geq 1$, temos:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Em que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as suas raízes.

As relações de Girard são:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(x_1.x_2) + (x_1.x_3) + \ldots + (x_{n-1}.x_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$(x_1.x_2.x_3) + (x_1.x_2.x_4) + \ldots (x_{n-2}.x_{n-1}.x_n) = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

....

$$x_1.x_2.x_3 \ldots x_n = (-1)^n.\frac{a_0}{a_n}$$

Exemplos:

1º) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - x + 4 = 0$.

Calcule:

A) $x_1 + x_2$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

B) $x_1.x_2$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

C) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

$$\frac{x_2 + x_1}{x_1.x_2} = \frac{1}{4}$$

D) $x_1^2 + x_2^2$

$x_1 + x_2 = 1$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$$(x_1 + x_2)^2 = 1^2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1.x_2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + 2 \,.\, 4 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = -7$$

2º) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação:

$2x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

Calcule:

A) $x_1 + x_2 + x_3$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

B) $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3$

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

C) $x_1.x_2.x_3$

$-\dfrac{d}{a} = -\dfrac{(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$

$\dfrac{x_2.x_3 + x_1.x_3 + x_1.x_2}{x_1.x_2.x_3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2$

E) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 3^2 \Rightarrow$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\underbrace{(x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)}_{1} = 9 \Rightarrow$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 . 1 = 9 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 7$

TEOREMA DAS RAÍZES COMPLEXAS

Se uma equação P(x) = 0, com coeficientes reais, tem uma raiz complexa a + bi (b ≠ 0), então o seu conjugado a − bi também é raiz desse polinômio.

Observe algumas consequências imediatas desse teorema:

i) As raízes complexas sempre aparecem aos pares.

ii) Se o grau de um polinômio é ímpar, então esse polinômio tem pelo menos uma raiz real.

PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS

Em determinadas situações, podemos pesquisar acerca da existência de uma raiz racional de uma equação da forma P(x) = 0, baseados na seguinte propriedade:

Caso o número $\dfrac{p}{q}$ seja uma raiz racional irredutível da equação algébrica $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ de coeficientes inteiros, com $a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$, podemos afirmar que **p** é divisor de a_0, e **q** é divisor de a_n.

Exemplo:

Resolva a equação $x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Efetuando a pesquisa de raízes racionais, temos:

i) **p** é um divisor de 2, ou seja, **p** pode ser igual a −2, −1, 1 ou 2.

ii) **q** é um divisor de 1, ou seja, **q** pode ser igual a −1 ou 1.

Portanto, a fração $\dfrac{p}{q}$ pode assumir os seguintes valores: −2, −1, 1 ou 2.

Entre esses valores, verificamos que 1 é raiz. Portanto, o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ é divisível pelo polinômio x − 1. Ao efetuar a divisão desses polinômios pelo Método de Briot-Ruffini (abaixamento do grau do polinômio), encontraremos um polinômio quociente cujas raízes são também raízes de P(x). Portanto, temos o seguinte:

1	1	2	−5	2
	1	3	−2	0

O quociente é dado por $Q(x) = x^2 + 3x - 2$.

Calculando as raízes de Q(x), temos:

$x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 . 1.(-2) = 17$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

Portanto, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}, 1\right\}$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio–2018) A soma das raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 6x = 0$ vale

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 4.
E) 9.

02. (UFSJ-MG) Se 2i é raiz da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (com a, b, c $\in \mathbb{R}$), a soma das suas duas outras raízes é:

A) $-a + 2i$
B) $-a - 2i$
C) $a + 2i$
D) $a - 2i$

03. (Unicamp-SP–2019) Sabendo que **a** e **b** são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + x + b$. Se a soma e o produto de duas de suas raízes são iguais a -1, então p(1) é igual a

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.

04. (EFOMM-RJ–2016) Sabendo que $\frac{5}{2}$ é uma raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$, a soma das outras raízes é igual a

A) -2.
B) 0.
C) 10.
D) 1.
E) -1.

05. (UFOP-MG) Considere o polinômio:

$p(x) = x^4 - x^3 - 14x^2 + 2x + 24$.

Sabendo-se que o produto de duas raízes de p(x) é -12, o produto das outras duas raízes é

A) -2.
B) 2.
C) 4.
D) -4.

06. (UEPB) O produto entre as raízes da equação $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ é

A) 2.
B) 1.
C) $\sqrt{2}$.
D) -1.
E) 2i.

07. (UFRGS-RS) Se 2 é raiz dupla do polinômio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$, então a soma das outras raízes é

A) -1.
B) $-0,5$.
C) 0.
D) 0,5.
E) 1.

08. (UFMG) Os números -1 e 1 são duas raízes do polinômio $p(x) = cx^3 + ax^2 + bx + 2c$. A terceira raiz de p(x) é

A) -3.
B) -2.
C) 0.
D) $\frac{1}{2}$.
E) 2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio–2016) Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Sabemos que $a + b + c = 0$ e que $x = 3$ é raiz da equação. Quanto vale o produto das duas raízes da equação?

A) -6
B) -3
C) 3
D) 6
E) 9

02. (Unicamp-SP–2015) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + ax - a$ em que **a** é um número real. Se $x = 1$ é a única raiz real de p(x), então podemos afirmar que:

A) $a < 0$
B) $a < 1$
C) $a > 0$
D) $a > 1$

03. (UECE–2015) Se os números $2 + i$, $2 - i$, $1 + 2i$, $1 - 2i$ e 0,5 são as raízes da equação $2x^5 + px^4 + 42x^3 - 78x^2 + 80x + q = 0$, então o valor de $p + q + pq$ é

A) 287.
B) 278.
C) 297.
D) 279.

04. (Insper-SP) A equação $x^5 = 8x^2$ possui duas raízes imaginárias cuja soma é

A) -2.
B) -1.
C) 0.
D) 1.
E) 2.

05. (Unesp) A equação polinomial $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ admite 1 como raiz. Suas duas outras raízes são

A) $(1 + \sqrt{3}i)$ e $(1 - \sqrt{3}i)$.
B) $(1 + i)$ e $(1 - i)$.
C) $(2 + i)$ e $(2 - i)$.
D) $(-1 + i)$ e $(-1 - i)$.
E) $(-1 + \sqrt{3}i)$ e $(-1 - \sqrt{3}i)$.

06. (UFRGS-RS) Um polinômio de 5º grau com coeficientes reais que admite os números complexos $-2 + i$ e $1 - 2i$ como raízes admite

A) no máximo, mais uma raiz complexa.
B) $2 - i$ e $-1 + 2i$ como raízes.
C) uma raiz real.
D) duas raízes reais distintas.
E) três raízes reais distintas.

07. (UEA-AM–2016) Na equação polinomial $x^3 + 2x^2 - mx - m - 1 = 0$, com **m** um número real, a soma de duas raízes é 1. Sabendo que **m** é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$, a soma das outras duas raízes de p(x) é

A) -1.
B) 0.
C) 1.
D) 4.
E) 5.

MATEMÁTICA

08. (FGV) O número 1 é raiz de multiplicidade 2 da equação polinomial $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$. O produto a.b é igual a

A) −8.
B) −4.
C) −32.
D) −16.
E) −64.

09. (UEFS-BA) Se a média aritmética das raízes do polinômio $p(x) = 2x^2 + rx + 5$ for 7, e a das raízes de $q(x) = 3x^2 + sx - 2$ for 2 (sendo **r** e **s** constantes), então a média aritmética das raízes do polinômio $p(x) + q(x)$ será

A) 4.
B) 4,5.
C) 5.
D) 8,5.
E) 9.

10. (Mackenzie-SP) Se α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + x^2 + px + q = 0$, em que **p** e **q** são coeficientes reais e $\alpha = 1 - 2i$ é uma das raízes dessa equação, então $\alpha.\beta.\gamma$ é igual a

A) 15.
B) 9.
C) −15.
D) −12.
E) −9.

11. (UECE–2017) Se os números de divisores positivos de 6, de 9 e de 16 são as raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que os coeficientes **a**, **b** e **c** são números reais, então, o valor do coeficiente **b** é

A) 41.
B) 45.
C) 43.
D) 47.

12. (UECE–2016) O polinômio de menor grau, com coeficientes inteiros, divisível por $2x - 3$, que admite $x = 2i$ como uma das raízes e $P(0) = -12$ é:

Dado: i é o número complexo cujo quadrado é igual a −1.

A) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 12$
B) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$
C) $P(x) = -2x^3 - 3x^2 - 8x - 12$
D) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$

13. (Unesp–2015) Sabe-se que 1 é uma raiz de multiplicidade 3 da equação $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$. As outras raízes dessa equação, no Conjunto Numérico dos Complexos, são

A) $(-1 - i)$ e $(1 + i)$.
B) $(1 - i)^2$.
C) $(-i)$ e $(+i)$.
D) $(-1i)$ e $(+1)$.
E) $(1 - i)$ e $(1 + i)$.

14. (UFRGS-RS–2015) Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$. Se $p(2) = 0$ e $p(-2) = 0$, então as raízes do polinômio p(x) são

A) −2, 0, 1 e 2.
B) −2, −1, 2 e 3.
C) −2, −1, 1 e 2.
D) −2, −1, 0 e 2.
E) −3, −2, 1 e 2.

15. (UDESC–2016) Um polinômio do terceiro grau, cujo coeficiente do termo dominante é igual a 1, admite apenas raízes reais e distintas que, quando multiplicadas, resultam em 15 e, quando somadas, resultam em 1. Se o resto da divisão desse polinômio por $g(x) = x + 2$ é igual a 7, então o quociente dessa divisão é igual a:

A) $x^2 - 3x - 11$
B) $x^2 + 3x - 7$
C) $x^2 - x - 15$
D) $x^2 - x - 11$
E) $x^2 + x + 15$

16. (Unicamp-SP) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: **r**, −r e **s**.

A) Determine os valores de **r** e **s**.
B) Calcule p(z) para $z = 1 + i$, em que **i** é a unidade imaginária.

SEÇÃO ENEM

01. Os números primos fascinam os matemáticos há séculos. Diversas tentativas já foram feitas para se determinar um polinômio gerador de números primos. Um desses polinômios, conhecido como polinômio de Goetgheluck, é dado por $P(x) = x^3 - 34x^2 + 381x - 1\,511$. Tal polinômio gera números primos para valores inteiros de **x**, variando de 0 até 25. Um dos números primos gerados é −1 163. Sabendo-se que o polinômio admite não somente valores inteiros para **x**, pode-se afirmar que o produto de todos os valores de **x**, para os quais $P(x) = -1\,163$, é

A) 1 511.
B) −1 511.
C) 381.
D) −348.
E) 348.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	04. E	07. B
02. B	05. A	08. E
03. D	06. A	

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C	06. C	11. D
02. C	07. A	12. D
03. A	08. C	13. C
04. A	09. A	14. E
05. B	10. C	15. A

16.
A) r = 3 e s = 2
B) p(z) = 7 − 11i

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %