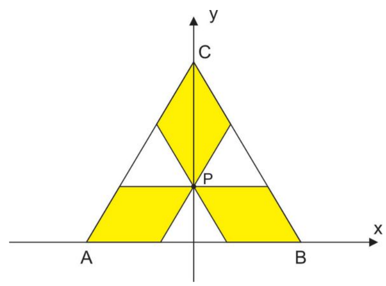
Exercícios Dissertativos

1. (2000)

   Considere os pontos $A = (-2, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 3)$ e $P = (0, \alpha)$, com $0 < \alpha < 3$. Pelo ponto P, traçamos as três retas paralelas aos lados do triângulo ABC.

   (a) Determine, em função de α, a área da região sombreada na figura.

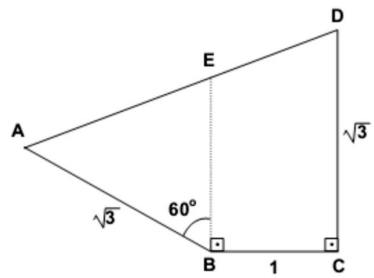
   (b) Para que valor de α essa área é máxima?



---

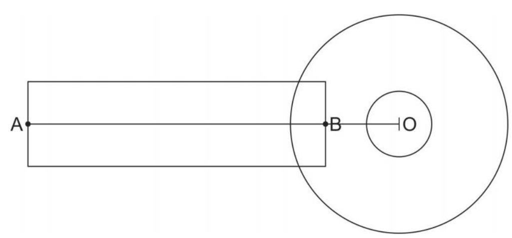
2. (2000)

   No quadrilátero ABCD da figura abaixo, E é um ponto sobre o lado $\overline{\text{AB}}$ tal que o ângulo $\text{A}\widehat{\text{E}}\text{B}$ mede 60° e os ângulos $\text{E}\widehat{\text{B}}\text{C}$ e $\text{B}\widehat{\text{C}}\text{D}$ são retos. Sabe-se ainda que $\text{AB} = \text{CD} = \sqrt{3}$ e $\text{BC} = 1$. Determine a medida de $\overline{\text{AD}}$.



---

3. (2001) Um agricultor irriga uma de suas plantações utilizando duas máquinas de irrigação. A primeira irriga uma região retangular, de base 100 m e altura 20 m, e a segunda irriga uma região compreendida entre duas circunferências de centro O, e de raios 10 m e 30 m. A posição relativa dessas duas regiões é dada na figura



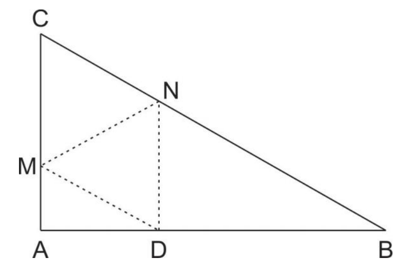
   onde A e B são os pontos médios das alturas do retângulo. Sabendo-se ainda que os pontos A, B e O estão alinhados e que $BO = 20m$, determine

   (a) a área da intersecção das regiões irrigadas pelas máquinas:

   (b) a área total irrigada.

Utilize as seguintes aproximações: $\sqrt{2} = 1,41$, $\pi = 3,14$ e $arcsen\left(\frac{1}{3}\right) = 0,340rad.$

4. (2002) O triângulo retângulo ABC , cujos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ medem 1 e $\sqrt{3}$, respectivamente, é dobrado de tal forma que o vértice C coincida com o ponto D do lado $\overline{AB}$. Seja $\overline{MN}$ o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra. Sabendo que $N\widehat{D}B$ é reto, determine



(a) o comprimento dos segmentos $\overline{CN}$ e $\overline{CM}$;

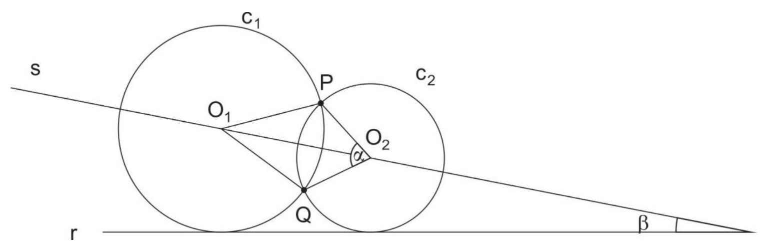
(b) a área do triângulo CMN.

---

5. (2002) Na figura abaixo, as circunferências C_1 e C_2, de centros O_1 e O_2, respectivamente, se interceptam nos pontos P e Q. A reta r é tangente a C_1 e C_2; a reta s passa por O_1 e O_2 e β é o ângulo agudo entre r e s. Sabendo que o raio de C_1 é 4, o de C_2 é 3 e que $sen\beta = \frac{1}{5}$, calcule:

(a) a área do quadrilátero O_1QO_2P;

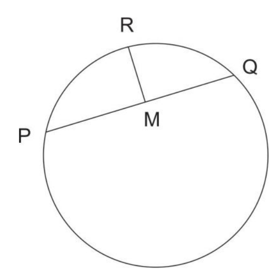
(b) $sen\alpha$, onde $\alpha = Q\widehat{O_2}P$



---

6. (2003)

Na figura ao lado, M é o ponto médio da corda $\overline{PQ}$ da circunferência e $PQ = 8$. O segmento $\overline{RM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e $RM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Calcule:

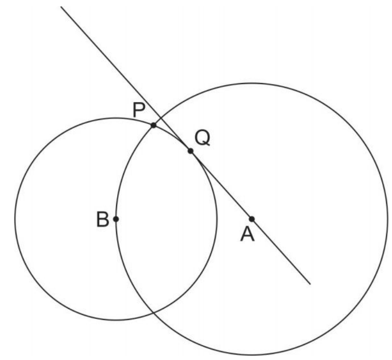


(a) O raio da circunferência.

(b) A medida do ângulo $P\widehat{O}Q$, onde O é o centro da circunferência.

7. (2003)

Na figura ao lado, as circunferências têm centros A e B. O raio da maior é $\frac{4}{5}$ do raio da menor; P é um ponto de intersecção delas e a reta $\overleftrightarrow{AQ}$ é tangente à circunferência menor no ponto Q. Calcule:



(a) $cos A\widehat{B}Q$

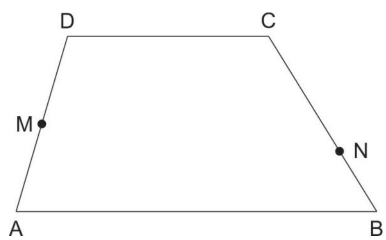
(b) $cos A\widehat{B}P$

(c) $cos Q\widehat{B}P$

---

8. (2003)

No trapézio $ABCD$, M é o ponto médio do lado $\overline{AD}$; N está sobre o lado $\overline{BC}$ e $2BN = NC$. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros $ABNM$ e $CDMN$ são iguais e que $DC = 10$. Calcule AB.



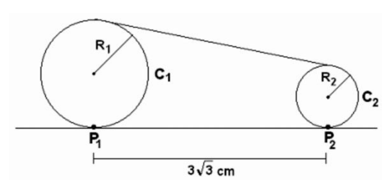
---

9. (2004) Um triângulo ABC tem lados de comprimentos $AB = 5$, $BC = 4$ e $AC = 2$. Sejam M e N os pontos de $\overline{AB}$ tais que $\overline{CM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $A\widehat{C}B$ e $\overline{CN}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$. Determinar o comprimento de $\overline{MN}$.

---

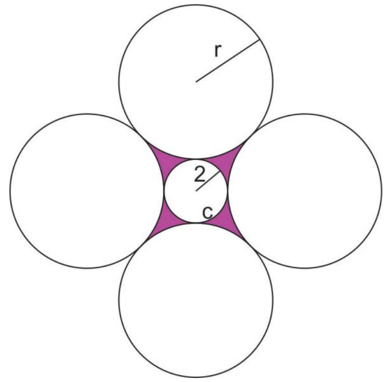
10. (2004)

A figura abaixo representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4$cm e $R2 = 1$cm, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2, determinar o comprimento da correia.



11. (2004)

Na figura ao lado, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C. Se o raio de C é igual a 2, determinar

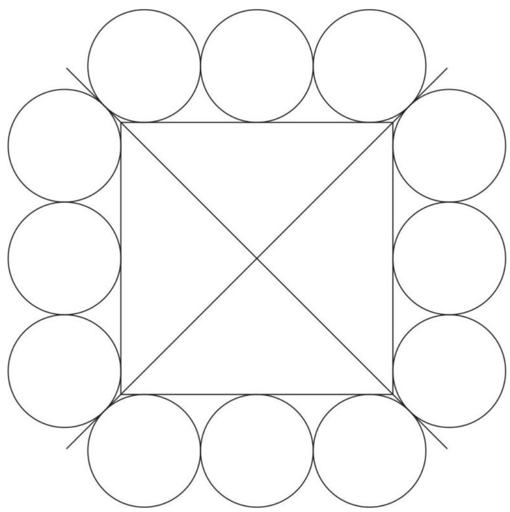


(a) o valor de r.

(b) a área da região hachurada.

---

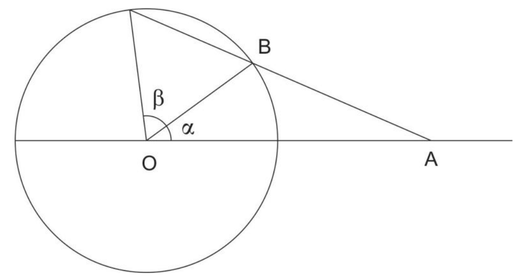
12. (2005)



Na figura acima, as 12 circunferências têm todas o mesmo raio r; cada uma é tangente a duas outras e ao quadrado. Sabendo-se que cada uma das retas suporte das diagonais do quadrado tangencia quatro das circunferências (ver figura), e que o quadrado tem lado $2\sqrt{7}$, determine r.

13. (2006)

Na figura abaixo, O e o centro da circunferência de raio 1, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e secante a ela, o ângulo β mede 60^o e $sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

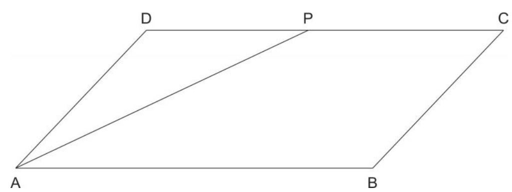


(a) Determine $senO\hat{A}B$ em função de AB.

(b) Calcule AB.

---

14. (2006) No paralelogramo $ABCD$ abaixo, tem-se que $AD = 3$ e $D\hat{A}B = 30^o$. Além disso, sabe-se que o ponto P pertence ao lado $\overline{DC}$ e à bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$.

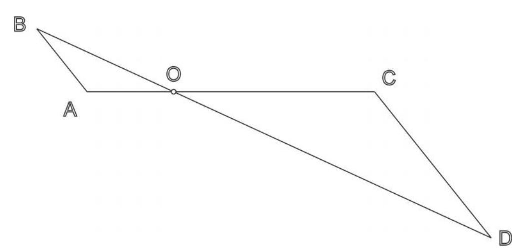


(a) Calcule AP.

(b) Determine AB sabendo que a área do quadrilátero $ABCP$ é 21.

---

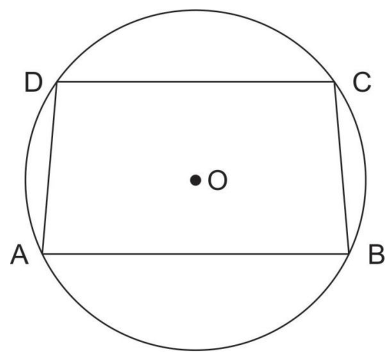
15. (2007) Na figura abaixo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, o ângulo $O\hat{A}B$ mede 120^o, $AO = 3$ e $AB = 2$. Sabendo-se ainda que a área do triângulo OCD vale $600\sqrt{3}$,



(a) calcule a área do triângulo OAB.

(b) determine OC e CD.

16. (2007) A figura representa um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, inscrito em uma circunferência cujo centro O está no interior do trapézio. Sabe-se que $AB = 4$, $CD = 2$ e $AC = 3\sqrt{2}$.



(a) Determine a altura do trapézio.

(b) Calcule o raio da circunferência na qual ele está inscrito.

(c) Calcule a área da região exterior ao trapézio e delimitada pela circunferência.

---

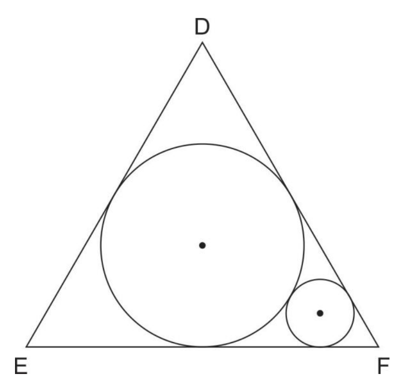
17. (2008) No triângulo ABC , tem-se que $AB > AC$, $AC = 4$ e $cos\widehat{C} = \frac{3}{8}$. Sabendo-se que o ponto R pertence ao segmento $\overline{BC}$ e é tal que $AR = AC$ e $\frac{BR}{BC} = \frac{4}{7}$, calcule

(a) a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

(b) a área do triângulo ABR.

---

18. (2008) O círculo C , de raio R , está inscrito no triângulo eqüilátero DEF. Um círculo de raio r está no interior do triângulo DEF e é tangente externamente a C e a dois lados do triângulo, conforme a figura.



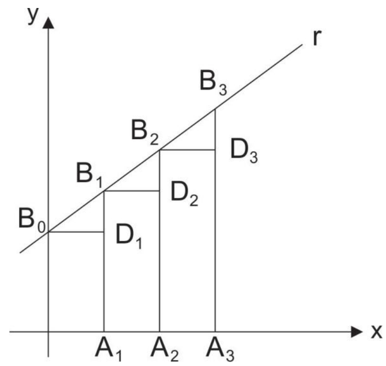
Assim, determine

(a) a razão entre R e r.

(b) a área do triângulo DEF em função de r .

19. (2009)

Na figura ao lado, a reta r tem equação $y = 2\sqrt{2}x + 1$ no plano cartesiano Oxy. Além disso, os pontos B_0, B_1, B_2, B_3 estão na reta r, sendo $B_0 = (0, 1)$. Os pontos A_0, A_1, A_2, A_3 estão no eixo Ox, com $A_0 = O = (0, 0)$. O ponto D_i pertence ao segmento $\overline{A_iB_i}$, para $1 \leq i \leq 3$. Os segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ são paralelos ao eixo Oy, os segmentos $\overline{B_0D_1}$, $\overline{B_1D_2}$, $\overline{B_2D_3}$ são paralelos ao eixo Ox, e a distância entre B_i e B_{i+1} é igual a 9, para $0 \leq i \leq 2$.



Nessas condições:

(a) Determine as abscissas de A_1, A_2, A_3

(b) Sendo R_i o retângulo de base A_iA_{i+1} e altura $A_{i+1}D_{i+1}$, para $0 \leq i \leq 2$, calcule a soma das áreas dos retângulos R_0, R_1 e R_2.

---

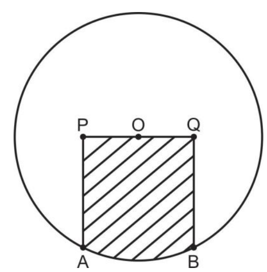
20. (2009)

Na figura, estão representadas a circunferência C, de centro O e raio 2, e os pontos A, B, P e Q, de tal modo que:

(1) O ponto O pertence ao segmento $\overline{PQ}$.

(2) $OP = 1$, $OQ = \sqrt{2}$.

(3) A e B são pontos da circunferência, $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$ e $\overline{BQ} \perp \overline{PQ}$.



Assim sendo, determine:

(a) A área do triângulo APO.

(b) Os comprimentos dos arcos determinados por A e B em C.

(c) A área da região hachurada.

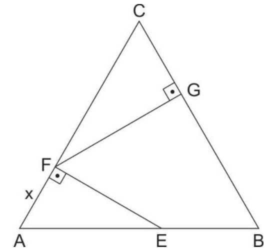
---

21. (2009)

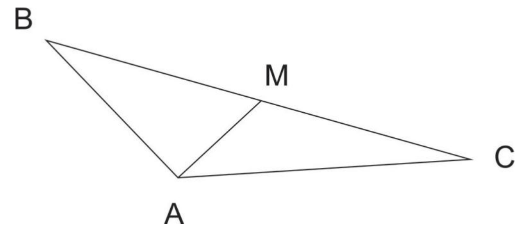
O triângulo ABC da figura ao lado é eqüilátero de lado 1. Os pontos E, F e G pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo. Além disso, os ângulos $A\widehat{F}E$ e $C\widehat{G}F$ são retos e a medida do segmento $\overline{AF}$ é x. Assim, determine:

(a) A área do triângulo AFE em função de x.

(b) O valor de x para o qual o ângulo $F\widehat{E}G$ também é reto.



22. (2010) No triângulo ABC da figura, a mediana $\overline{AM}$, relativa ao lado $\overline{BC}$, é perpendicular ao lado $\overline{AB}$. Sabe-se também que $BC = 4$ e $AM = 1$. Se α é a medida do ângulo $A\widehat{B}C$, determine



(a) $sen\alpha$;

(b) o comprimento AC;

(c) a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{AB}$;

(d) a área do triângulo AMC.

---

23. (2011) As circunferências C_1 e C_2 estão centradas em O_1 e O_2, têm raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 12$, respectivamente, e tangenciam-se externamente. Uma reta t é tangente a C_1 no ponto P_1, tangente a C_2 no ponto P_2 e intercepta a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ no ponto Q. Sendo assim, determine

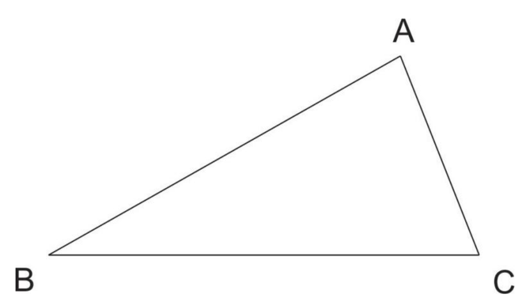
(a) o comprimento P_1P_2;

(b) a área do quadrilátero $O_1O_2P_2P_1$;

(c) a área do triângulo QO_2P_2.

---

24. (2012)



No triângulo acutângulo ABC, ilustrado na figura, o comprimento do lado $\overline{BC}$ mede $\sqrt{15}/5$, o ângulo interno de vértice C mede α, e o ângulo interno de vértice B mede $\alpha/2$. Sabe-se, também, que

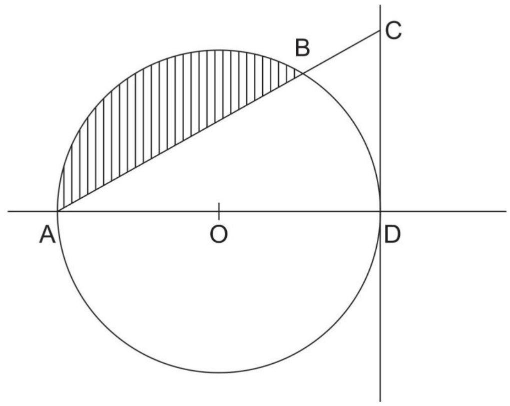
$$2cos(2\alpha) + 3cos\alpha + 1 = 0$$

Nessas condições, calcule

(a) o valor de $sen\alpha$

(b) o comprimento do lado $\overline{AC}$.

25. (2012)



Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta $\overline{CD}$ no ponto D, o qual pertence à reta $\overline{AO}$. Além disso, A e B são pontos da circunferência, $AB = 6\sqrt{3}$ e $BC = 2\sqrt{3}$. Nessas condições, determine

a) a medida do segmento $\overline{CD}$;

b) o raio da circunferência;

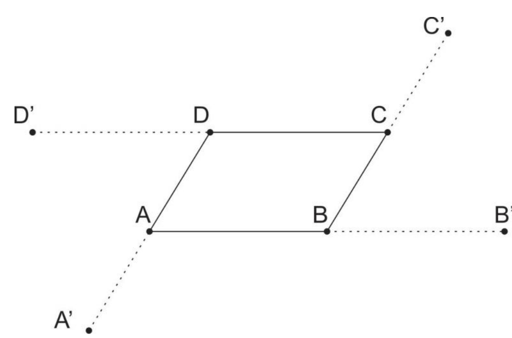
c) a área do triângulo AOB;

d) a área da região hachurada na figura.

---

26. (2013)

Percorre-se o paralelogramo $ABCD$ em sentido anti-horário. A partir de cada vértice atingido ao longo do percurso, prolonga-se o lado recém-percorrido, construindo-se um segmento de mesmo comprimento que esse lado. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por A', B', C' e D', de modo que os novos segmentos sejam, então, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$. Dado que $AB = 4$ e que a distância de D à reta determinada por A e B é 3, calcule a área do



(a) paralelogramo $ABCD$;

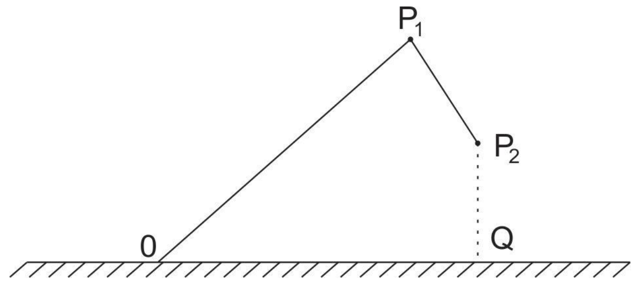
(b) triângulo $BB'C'$;

(c) quadrilátero $A'B'C'D'$.

---

27. (2013) Um guindaste, instalado em um terreno plano, tem dois braços articulados que se movem em um plano vertical, perpendicular ao plano do chão.

Na figura, os pontos O, P_1 e P_2 representam, respectivamente, a articulação de um dos braços com a base, a articulação dos dois braços e a extremidade livre do guindaste. O braço $\overline{OP_1}$ tem comprimento 6 e o braço $\overline{P_1P_2}$ tem comprimento 2. Num dado momento, a altura de P_2 é 2, P_2 está a uma altura menor do que P_1 e a distância de O a P_2 é $2\sqrt{10}$. Sendo Q o pé da perpendicular de P_2 ao plano do chão, determine



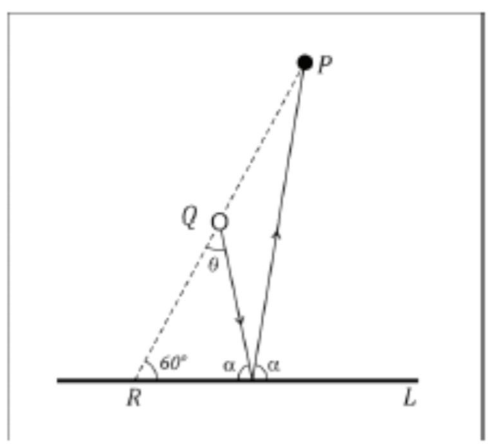
(a) o seno e o cosseno do ângulo $P_2\widehat{O}Q$ entre a reta $\overleftrightarrow{OP_2}$ e o plano do chão;

(b) a medida do ângulo $O\widehat{P_1}P_2$ entre os braços do guindaste;

(c) o seno do ângulo $P_1\widehat{O}Q$ entre o braço $\overline{OP_1}$ e o plano do chão.

---

28. (2014) Uma bola branca está posicionada no ponto Q de uma mesa de bilhar retangular, e uma bola vermelha, no ponto P, conforme a figura ao lado. A reta determinada por P e Q intersecta o lado L da mesa no ponto R. Além disso, Q é o ponto médio do segmento $\overline{PR}$, e o ângulo agudo formado por $\overline{PR}$ e L mede 60°. A bola branca atinge a vermelha, após ser refletida pelo lado L. Sua trajetória, ao partir de Q, forma um ângulo agudo θ com o segmento $\overline{PR}$ e o mesmo ângulo agudo α com o lado L antes e depois da reflexão. Determine a tangente de α e o seno de θ.



---

29. (2014) Considere o triângulo equilátero ΔA_0OB_0 de lado $7cm$.

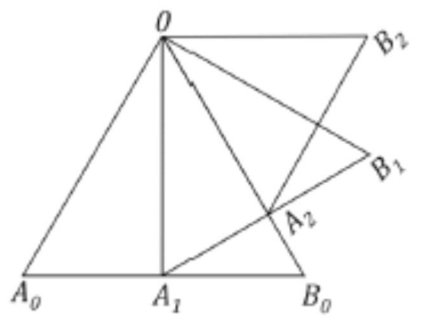


Figura obtida após aplicar o procedimento duas vezes.

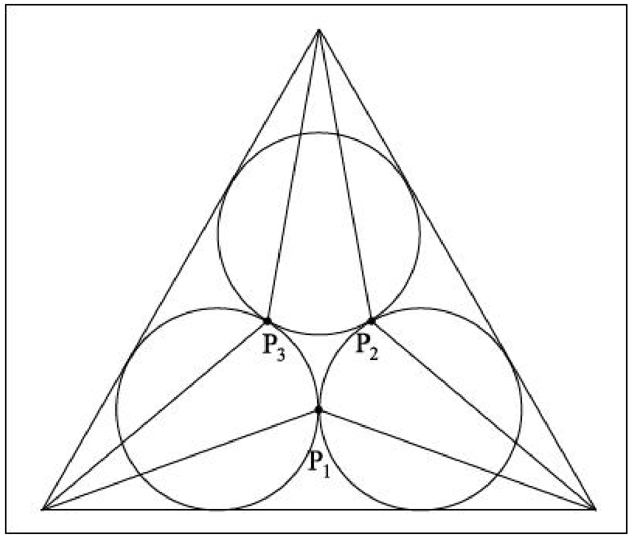
(a) Sendo A_1 o ponto médio do segmento $\overline{A_0B_0}$, e B_1 o ponto simétrico de A_1 em relação à reta determinada por O e B_0, determine o comprimento de $\overline{OB_1}$.

(b) Repetindo a construção do item (a), tomando agora como ponto de partida o triângulo ΔA_1OB_1, pode-se obter o triângulo ΔA_2OB_2 tal que A_2 é o ponto médio do segmento $\overline{A_1B_1}$, e B_2 o ponto simétrico de A_2 em relação à reta determinada por O e B_1. Repetindo mais uma vez o procedimento, obtém-se o triângulo ΔA_3OB_3. Assim, sucessivamente, pode-se construir uma sequência de triângulo ΔA_nOB_n tais que, para todo $n \geq 1$, A_n é o ponto médio de $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$, e B_n, o ponto simétrico de A_n em relação à reta determinada por O e B_{n-1}, conforme a figura. Denotando por a_n, para $n \geq 1$, o comprimento do segmento $\overline{A_{n-1}A_n}$, verifique que a_1, a_2, a_3, ... é uma progressão geométrica. Determine sua razão.

(c) Determine, em função de n, uma expressão para o comprimento da linha poligonal $A_0A_1A_2...A_n$, $n \geq 1$.

O ponto P' é simétrico ao ponto P em relação à reta r se o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular à reta r e a interseção de $\overline{PP'}$ e r é o ponto médio de $\overline{PP'}$.

30. (2016) São dadas três circunferências de raio r, duas a duas tangentes. Os pontos de tangências são P_1, P_2 e P_3.



Calcule, em função de r,

a) o comprimento do lado do triângulo equilátero T determinado pelas três retas que são definidas pela seguinte exigência: cada uma delas é tangente a duas das circunferências e não intersecta a terceira;

b) a área do hexágono não convexo cujos lados são os segmentos ligando cada ponto P_1, P_2 e P_3 aos dois vértices do triângulo T mais próximos a ele.