XI Olimpíada do Cone Sul
Primeiro Teste de Seleção

26 de fevereiro de 2000

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.

▸ PROBLEMA 1

Sejam L e M, respectivamente, as intersecções das bissetrizes interna e externa do ângulo C do triângulo ABC e a reta AB. Se $CL = CM$, prove que

$$AC^2 + BC^2 = 4R^2,$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

▸ PROBLEMA 2

Determine o menor valor que pode assumir a expressão $|12^m - 5^n|$, onde m e n são inteiros positivos.

▸ PROBLEMA 3

Se a, b, c são reais não nulos satisfazendo

$$a^2 - b^2 = bc \qquad \text{e} \qquad b^2 - c^2 = ac.$$

Prove que $a^2 - c^2 = ab$.

▸ PROBLEMA 4

Mostre que existe um conjunto infinito de inteiros positivos satisfazendo todas as seguintes condições:

(i) nenhum elemento divide qualquer outro elemento;

(ii) quaisquer dois elementos têm um divisor comum maior do que 1;

(iii) não há inteiro maior do que 1 que divide todos os elementos do conjunto.