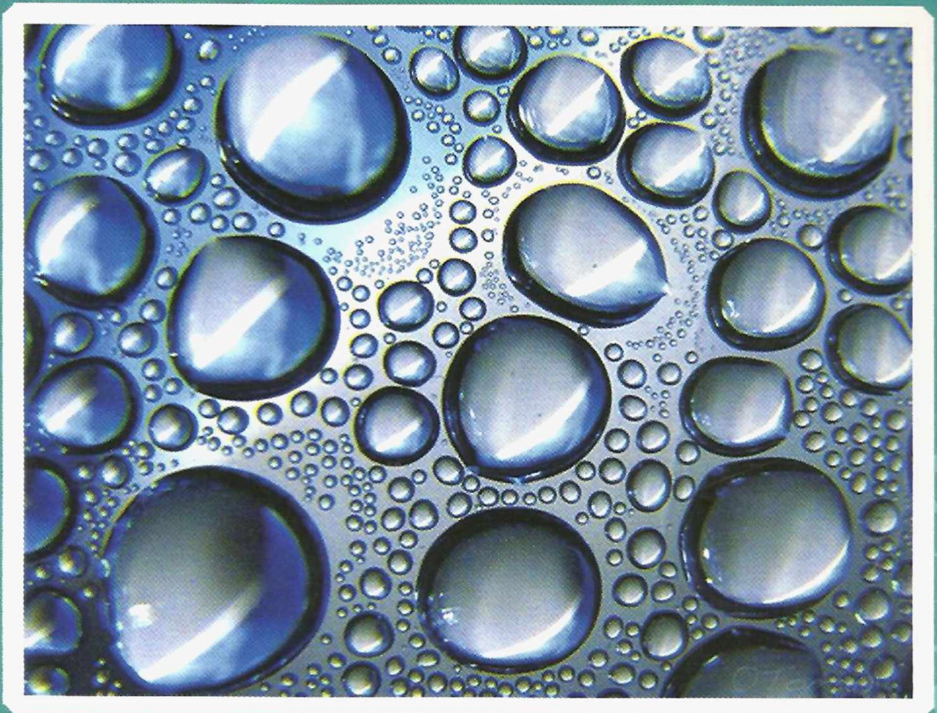
Física II

Teoría y problemas



GRUPO EDITORIAL
Megabyte

REGULO A. SABRERA ALVARADO
WALTER PEREZ TERREL

Dedicatoria:

A la juventud estudiosa y trabajadora, que con sus ideas y acciones innovadoras transforman a diario el mundo

PROLOGO

Este texto ha sido escrito pensando en hacer de él un libro texto para el desarrollo del curso de Física II a nivel superior. El presente texto contiene los siguientes temas: oscilaciones, elasticidad, hidrostática, tensión superficial y capilaridad, hidrodinámica, calor y temperatura, teoría cinética de gases, termodinámica, ondas y sonido. El desarrollo y estudio de estos temas se realiza totalmente en el Sistema Internacional y a la luz de los avances de la ciencia contemporánea. La intención de los autores es la de contribuir en la formación académica de los estudiantes que siguen una carrera profesional de Ciencias o Ingeniería.

Dado que la duración del dictado y desarrollo del curso de Física II es de 16 semanas el contenido de este texto se ha distribuido en 17 semanas, siendo los temas de una semana opcional. De otro lado, la obra está dividida en la forma que los autores creen que es la más conveniente, es decir, primero se presenta la teoría completa de los temas tratados en el capítulo, seguida de una cantidad suficiente de problemas propuestos, las que se han seleccionado cuidadosamente y organizado de una manera gradual, según el grado de dificultad; posteriormente se presenta la solución completa, detallada y minuciosa de cada uno de estos problemas propuestos, para lo cual, se ha utilizado el método estructural. También, al final del texto se presenta un apéndice que contiene equivalencias, constantes físicas, factores de conversión, prefijos del sistema internacional (S.I.),...etc.

El objetivo de éste trabajo, que es fruto de la experiencia de loa autores de muchos años de docencia en las aulas universitarias, es la de servir a la juventud estudiosa, progresista, innovadora y con ansias de superación, que en la actualidad siguen estudios en alguna especialidad de Ciencias ó Ingenierías en las diferentes Universidades Estatales ó Privadas del país, y que entusiastamente acometen la transformación que requiere con urgencia nuestra patria.

Finalmente, queremos expresar nuestro mayor agradecimiento a todas aquellas personas que estuvieron involucradas en la edición del presente trabajo, especialmente a la Srta. Karen Lara Torres, quién, colaboró en la digitación, diseño y diagramación del texto Desde ya, nos comprometemos a superarnos y hacer todo lo necesario para mejorar las futuras ediciones.

Régulo A. Sabrera A. – Walter Pérez Terrel

CONTENIDO

ma energía. Energía potencial de un cuerpo sumergido en un fluido. Energía potencial de un cuerpo que se mueve en un fluido. Energía potencial de un cuerpo parcialmente sumergido. **9.** Estudio del equilibrio de una varilla parcialmente sumergida. **10.** Fuerza hidrostática en un dique de represa. Fuerza total. Momento de la fuerza. Forma que adopta la superficie libre de un líquido en rotación. **11.** Aplicaciones de los manómetros. Medida de la aceleración horizontal de un vehículo. Medida de la aceleración de un ascensor. Medida de la velocidad angular de rotación de una plataforma. **12.** Medida de la aceleración de un ascensor por un observador inercial y no inercial. Problemas propuestos y resueltos.

Cap.4 — Tensión superficial

1. Tensión superficial. Concepto. Cohesión. Adherencia. Coeficiente de tensión superficial. Propiedades Tensioactivos. Funcionamiento. Propiedades. Clasificación. Punto crítico. Medida de la tensión superficial. Método de Tate, Dyoung, de la burbuja. **2.** Presión debida a la tensión superficial. En una gota superficial. En una burbuja llena de gas. **3.** Fórmula de Laplace. Casos particulares. **4.** Burbujas de jabón. Origen. Características. Composición de burbujas. El color de las burbujas. ¿Por qué desaparecen las burbujas? Medida de la tensión superficial. Comunicación entre burbujas. Modelo de evolución de una burbuja **5.** Angulo de contacto. Menisco. Perímetro de contacto. Casos. Causas. Formación. **6.** Capilaridad. Definición. ¿Por qué asciende el agua?. ¿Por qué desciende el mercurio?. Cálculo de la altura de ascenso o descenso. Aplicaciones. Presión de vapor saturado. Definición. Descripción. Problemas propuestos y resueltos.

Cap.5 — Hidrodinámica

1. Conceptos fundamentales. Hidrodinámica. Ecuaciones de Navier-Stokes. Ecuaciones de Euler. Fluidos. Características. Clasificación. Microfluidos. Fuerza intermolecular. Fluidos ideales. Flujos estacionario, compresible, laminar, turbulento, irrotacional. Flujo de capa límite. Líneas de corriente. Tubos de corriente. Porosidad. **2.** Caudal. Caudalímetro. Flujo másico. Reològía. Reómetros. Sustentación. **3.** Ecuación de continuidad. Teorema de Bernoulli. **4.** Aplicaciones del teorema de Bernoulli. Presión al interior de un fluido. Velocidad de salida de un fluido por un agujero. Velocidad y caudal en una tubería de Venturi. Velocidad de un gas en una tubería usando el tubo de Pitot. Tiempo de vaciado de un depósito abierto. Velocidad de vaciado de un depósito cerrado. El frasco de Mariotte. **5.** Fluido real. Viscosidad. Coeficiente de viscosidad. Viscosímetro. Medida de la viscosidad. Fenómenos de transporte. Fluido viscoso entre dos cilindros coaxiales. **6.** Ley de Poiseuille. Velocidad de caída de un líquido por un capilar. Paso de un gas por un tubo capilar. Descarga de un fluido por un tubo capilar. Ley de Stokes. **7.** Movimiento de una esfera en un fluido viscoso. Fuerza de resistencia proporcional a la velocidad. Fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Movimiento de un proyectil con resistencia del aire. Movimiento de una burbuja de aire en un fluido viscoso. **8.** Números en la hidrodinámica, de Reynolds, de Arquímedes, de Knudsen, de Mach, de Weber, de Strouhal, de Grashof, de Froude. **9.** Efectos en la hidrodinámica. Magnus, Leidenfrost, Kaye, Coanda, Cavitación, Supercavitación. **10.** Oscilación de un fluido ideal. Tubo en U con ambos extremos abiertos. Tubo en U con un extremo cerrado. Tubo en U de sección transversal no uniforme. **11.** Superfluidez del helio. Concepto. Propiedades. Problemas propuestos y resueltos.

Cap.6 Teoría cinética de los gases

1. Teoría cinética de gases. Definición. Postulados. Atomo. Molécula. Gas ideal. Gas real. Gas enrarecido. Condiciones normales (C.N). Mol. Volumen molar y específico. **2.** Ley y número de Avogadro. La constante de Boltzman. La constante de los gases ideales. Velocidad de difusión y efusión de un gas. Ley general de un gas ideal. Ley de Dalton. **3.** Energía cinética media. Velocidad media aritmética. Velocidad cuadrática media. Ecuación fundamental de la teoría cinética de los gases. Interpretación molecular de la temperatura. Efecto Knudsen. **4.** Ecuación de transformación adiabática. Medida del exponente adiabático. **5.** Bomba de vació. Definición. Tipos. Funcionamiento. **6.** Capacidad calorífica molar a volumen y presión constante. Calor específico molar a volumen y presión constante. Relación para las capacidades molares. **7.** La distribución de Boltzman. La distribución de Maxwell según las velocidades. Velocidad más probable. Velocidad media aritmética. La distribución de Maxwell según las energías. **8.** Flujo molecular. Definición. Cálculo de flujo. Velocidad media de fuga de las moléculas. Modelo simple de atmósfera. **9.** Equipartición de la energía. Recorrido libre medio. **10.** Difusión. Definición. Ley de Fick. Ecuación de proceso. Difusión unidimensional. **11.** Movimiento Browniano. Fluctuaciones. Problemas propuestos y resueltos.

Cap.7 Temperatura y calor

1. Calor. Calorimetría. Efectos del calor. Equilibrio térmico. Ley cero de la termodinámica. **2.** Temperatura. Medición de la temperatura. Termómetro. Tipos de escalas de temperatura. Relaciones entre las escalas. **3.** Dilatación. Fundamentos de la dilatación. Clases. Coeficiente de dilatación. Aplicaciones. Dilatómetro. **4.** Ciencia de los materiales. Clasificación. Macromoléculas. Ciencia de superficies. Física de superficies. Química de superficies. Interfase. Epitaxia. Semiconductores. Fonones. Plasmones. Efecto túnel. Fisión nuclear. **5.** Capacidad calorífica (C). Calor específico (c). Relación entre C y c. Cantidad de calor. **6.** Calorímetro. Funcionamiento. Equivalente en agua de un calorímetro. **7.** Cambio de fase. Sustancia pura. Fase termodinámica. Influencia de la presión en la temperatura de fusión. El agua una excepción. Vaporización. Influencia de la presión en la ebullición. Olla de presión. Componentes. Funcionamiento. Condiciones de saturación. Punto triple (A). Sublimación. Calor latente (L). Sustancia saturada. Equivalente mecánico del calor. Experimento de Joule. **8.** Propagación del calor. Conducción. Conductividad térmica. Difusividad térmica. ¿Cómo se transfiere el calor? Ecuación general de la conducción. Ley de Fourier. Medida de la conductividad térmica. Conducción en una placa sin fuente de calor. Conducción en una placa con fuente de calor. Conducción en un tubo cilíndrico sin fuente de calor. Conducción en un compacto con fuente de calor. Conducción en un cascarón esférico. Convección. Mecanismo de transferencia. Ley de enfriamiento. Tipos de convección. La convección en meteorología. Radiación. Intensidad de energía. Cuerpo negro. Agujero negro. Cuerpo gris. Cuerpo reflector. Depósito de calor. Absorción por resonancia. **9.** Teoría moderna de la radiación. Radiación térmica. Densidad volumétrica de energía. Densidad de energía por unidad de área y tiempo. Emitancia energética. Poder emisivo. Poder absorbente. **10.** Ley de Kirchoff. Función de Kirchoff. **11.** Ley de Steffan-Boltzman. Desplazamien

to de Wien. Fórmula de Wien. Fórmula de Rayleigh-Jean. Fórmula de Planck. Problemas propuestos y resueltos.

Cap.8 Termodinámica

1. Conceptos fundamentales. Sistema termodinámico. Sustancia de trabajo. Fase. Estado. Cambio de estado. Proceso. Ciclo. Proceso "iso". Proceso politrópico. Diagramas de proceso. Equilibrio termodinámico. Condiciones de equilibrio. **2.** Energía interna de un sistema (U). Variación de la energía interna. Entalpía. Isoentalpica. **3.** Trabajo realizado por un gas. **4.** Primer principio de la termodinámica. Móvil perpetuo de primera especie. Ley de Hess. Ecuación de Mayer. Coeficiente de Poisson. Efecto térmico E. **5.** Procesos termodinámicos. Isobárico, isotérmico, isocórico, politrópico y adiabático. Leyes de Charles, Gay-Lussac y Boyle–Mariotte. **6.** Ciclo de Carnot. Descripción del ciclo para un motor de combustión de cuatro tiempos. Teorema de Carnot. Transformaciones reversibles e irreversibles. Máquinas térmicas y refrigeradoras. Definición. Rendimiento. Coeficiente de efecto frigorìfico (ξ). Rendimiento de los ciclos de los motores térmicos alternativos. Ciclos de Otto, Diesel, Trinkler-Sabathe. Rendimiento de los ciclos de las turbinas de gas. Ciclos a presión constante y volumen constante. **7.** Segundo principio de la termodinámica. Postulados. Móvil perpetuo de segunda especie. **8.** Entropía. Concepto. Propiedades. Cálculo de la entropía para diferentes procesos termodinámicos. Calor reducido (Q*). Transformación isoentrópica. Energía libre (F). Energía ligada. **9.** Tercer principio de la termodinámica Ciclo de Carnot. Definición. Descripción del ciclo para un motor de combustión de cuatro tiempos. Entropía. Definición. Problemas propuestos y resueltos.

Cap.9 Ondas

1. Conceptos fundamentales. Tipos de ondas. Ondas longitudinales y transversales. Ondas mecánicas y electromagnéticas. Descripción matemática de una onda. **2.** Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio. Principio de superposición. **3.** Ondas sinusoidales. Ecuación matemática. Representación compleja. Elementos. Potencia (P). Intensidad de energía (I). Ondas monocromáticas. Onda homogénea. Frentes de onda. Ondas estacionarias. Onda plana. Coherencia. **4.** Velocidad de propagación de una onda en diferentes medios. **5.** Ondas sonoras. Clasificación. Velocidad de propagación. Características. Nivel de referencia de intensidad. Tono. Timbre. **6.** Ondas electromagnéticas. Características. Velocidad de propagación. **7.** Espectro de la radiación electromagnética. **8.** Espectro visible. **9.** Fenómenos ondulatorios de la luz. Reflexión, refracción, difracción, difusión, polarización, birrefringencia. Experimento de Young. Velocidad de grupo. **10.** Efecto Doppler. Casos particulares. Problemas propuestos y resueltos.

APENDICE

OSCILACIONES

CAP. 1

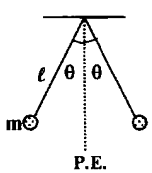
1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

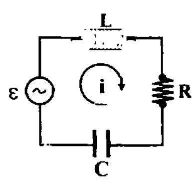
a) Oscilación

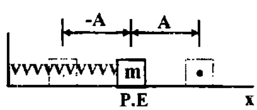
Es todo movimiento o cambio de estado físico que se repite en el tiempo, según su naturaleza física las oscilaciones pueden ser: mecánicas, electromag. néticas, atómicas, de presión, etc...

Ejemplo:

Algunas formas de oscilaciones son: movimiento de un péndulo, oscilaciones de un cuerpo unido a un resorte, oscilaciones en un circuito eléctrico.







b) Oscilación periódica

Es aquella oscilación cuyos valores variables s(t) de sus magnitudes físicas se repiten cada cierto intervalo de tiempo constante llamado período (T), esto es:

$$s(t) = s(t+T)$$

Ejemplo:

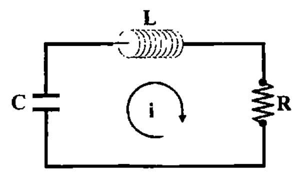
El movimiento de un péndulo que oscila en un plano vertical es periódico, pues, el valor del ángulo "θ" formado por la cuerda que sujeta al péndulo y la vertical, se repite cada cierto intervalo de tiempo.

c) Período (T)

Es el tiempo mínimo después del cual se repiten los valores de todas las magnitudes físicas que definen el movimiento oscilatorio. También, se podría decir que período (T), es el tiempo correspondiente a una oscilación completa.

☞ **Unidad:** "T" se mide en segundos (s)

Ejemplo:



En el circuito C-R-L mostrado en la Fig., las magnitudes físicas que oscilan y definen el movimiento oscilatorio son:

- La intensidad de corriente "i".
- La carga eléctrica "q" en el condensador.
- La diferencia de potencial "V" en las placas del condensador.

d) Frecuencia (f)

La frecuencia de una oscilación periódica, es el número de oscilaciones completas realizadas en la unidad de tiempo, es decir:

$$f = \frac{1}{T}$$

☞ **Unidad** : "f" se mide en hertzios (Hz)

e) Amplitud (A)

Es el valor máximo que alcanzan las magnitudes físicas que caracterizan el movimiento oscilatorio durante la oscilación periódica.

Ejemplo: En las oscilaciones armónicas simples que realiza un cuerpo unido a un resorte, la amplitud es la deformación máxima que experimenta el resorte.

f) Oscilaciones libres

Se denominan oscilaciones libres, naturales ó propias, a aquellas que se producen en ausencia de fuerzas externas que actúen sobre el sistema oscilatorio y surgen como consecuencia de cualquier desviación inicial.

g) Oscilaciones lineales

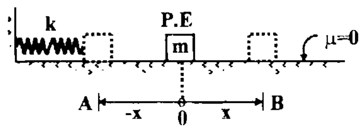
Se dice que un sistema oscilante con un sólo grado de libertad es lineal, si las oscilaciones libres de este sistema son armónicas, en caso contrario se dice que el sistema es inarmónico.

h) Oscilaciones moduladas

Se dice que una oscilación armónica de amplitud A(t) es modulada si $|dA/dt| << \omega A_{máx}$; se dice que la amplitud de la oscilación es modulada si su fase (Φ) es una constante; y se dice que la frecuencia (f) de la oscilación es modulada si su amplitud es una constante.

2. OSCILACION ARMONICA SIMPLE (M.A.S)

I. Péndulo de resorte



a) Definición

Es un cuerpo de masa (m), unido a un resorte de constante elástica (k) cuyo extremo izquierdo esta fijó, y que realiza oscilaciones rectilíneas a lo largo del eje X, entre los extremos A y B, pasando por la posición de equilibrio (P.E).

b) Ecuación diferencial

Como el cuerpo en todo instante se mueve bajo la acción de la fuerza de recuperación elástica del resorte (-k.x), entonces, de la segunda ley de Newton se tiene:

$$F_R = ma \quad => \quad -k.x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

siendo, $\omega_o = (k/m)^{1/2}$ la frecuencia angular de las oscilaciones libres.

c) Posición instantánea (x)

La solución general de la ecuación diferencial anterior, nos da la posición instantánea del cuerpo,

$$x(t) = A\text{sen}(\omega_o t + \theta_o)$$

siendo, (ω_o) la frecuencia angular, (A) la amplitud, y (θ_o) la fase inicial.

d) Velocidad instantánea (v)

La velocidad instantánea del cuerpo, es la primera derivada temporal de la posición, esto es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_o A\cos(\omega_o t + \theta_o)$$

la velocidad instantánea es máxima en la posición de equilibrio (0), y nula en los extremos A y B del movimiento oscilatorio.

La diferencia de fase entre la posición y la velocidad instantáneas es $\pi/2$.

e) Aceleración instantánea (a)

La aceleración instantánea del cuerpo, es la derivada temporal de la velocidad instantánea, es decir:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega_o^2 A\,\text{sen}(\omega_o t + \theta_o)$$

$$a = -\omega_o^2 x$$

Como se observa la aceleración del cuerpo varía en el tiempo, siendo su valor máximo en los extremos A y B; y nulo en la posición de equilibrio (0).
La diferencia de fase entre la posición y aceleración instantáneas es π.

f) Condiciones iniciales

Se llaman condiciones iniciales, al conocimiento de la posición (x_0) y velocidad (v_0), en el instante inicial (t_0) del movimiento; conocidas estas cantidades se hallan la amplitud (A) y la fase inicial (θ_o), a partir de las ecuaciones de posición y velocidad instantáneas, obteniéndose:

$$A = [x_o^2 + (v_o/\omega_o)^2]^{1/2}$$

$$\text{tg}\,\theta_0 = \omega_0 x_0 / v_0$$

se debe mencionar, que no siempre, el instante de tiempo inicial (t_0) es cero.

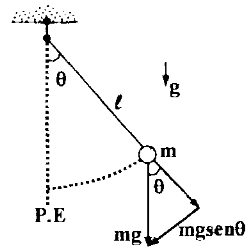
g) Período (T) y frecuencia (f)

El período y la frecuencia del movimiento oscilatorio armónico simple del cuerpo, viene dado por:

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$$

siendo, (k) la constante elástica del resorte, el cual, depende de la estructura interna del material con que está hecho el resorte.

II. Péndulo matemático



a) Definición

Se llama así, al cuerpo (bola) de masa (m) unida a una cuerda inelástica (ó varilla) de longitud (ℓ) y peso despreciable, que realiza oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio P.E., bajo la acción de la fuerza de gravedad y moviéndose en un plano vertical. La amplitud máxima de las oscilaciones (θ_o), debe ser un ángulo de aproximadamente 5^0.

b) Ecuación diferencial

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de la bola, en la dirección tangente a la trayectoria, se tiene:

$$F_R = ma \;\; => \;\; -mg\,\text{sen}\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2(\ell\theta)}{dt^2} + g\,\text{sen}\theta = 0$$

Para pequeños ángulos, $\text{sen}\theta \approx \theta$, de modo que la expresión queda así:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\theta = 0$$

siendo, $\omega_o = (g/\ell)^{1/2}$ la frecuencia angular del movimiento armónico simple del péndulo, y (g) la aceleración de la gravedad.

c) La posición angular

La solución de la ecuación diferencial anterior, nos da, la posición angular instantánea (θ) del péndulo, con respecto a la vertical, esto es:

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

siendo, (θ_0) la amplitud, y (δ) la fase inicial del movimiento oscilatorio.

d) Período y frecuencia

El período (T) y la frecuencia (f) del movimiento oscilatorio simple del péndulo, viene dado por:

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\left(\frac{\ell}{g}\right)^{1/2}$$

siendo, (g) la aceleración de la gravedad.

e) Energía potencial (E_P)

En la Fig., la energía potencial gravitatoria del péndulo simple, en todo instante de tiempo, viene dado por:

$$E_P = mgy = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

Para, (θ) muy pequeño, puede utilizarse la siguiente aproximación:

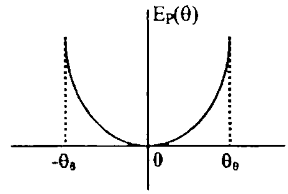
$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

Con esto la expresión de la energía potencial, queda así:

$$E_P(\theta) \approx \frac{1}{2} mg\ell\theta^2$$

<< Ecuación de una parábola con vértice en (0; 0), y que se abre hacia arriba >>

Representación de la curva de la energía potencial U(θ) versus el ángulo (θ).



- Como se aprecia, la energía potencial es máxima en los extremos del movimiento oscilatorio, y nulo en la posición de equilibrio (P.E).

f) Energía cinética (E_C)

La energía cinética del péndulo simple, en su movimiento armónico simple, en todo instante de tiempo es:

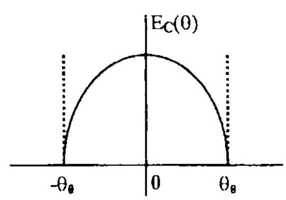
$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\ell^2[\omega_0\theta_0\cos(\omega_0 t + \delta)]^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\ell^2\omega_0^2[1 - (\theta_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta))^2]$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\ell^2\omega_0^2(1 - \theta^2)$$

$$E_C = \frac{1}{2}mg\ell(1 - \theta^2)$$



<< Ecuación de una parábola con vértice en (0; mg ℓ/2), y que se abre hacia abajo >>

g) Energía mecánica (E_M)

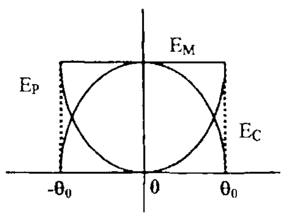
La energía mecánica del péndulo simple, es la suma de sus energías cinética (E_C) y potencial gravitatoria (E_P), esto es:

$$E_M = E_C + E_P$$

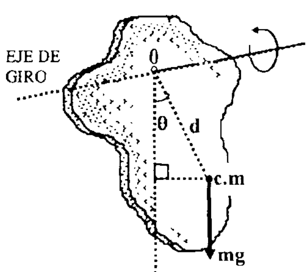
$$E_M = \frac{1}{2}mg\ell - \frac{1}{2}mg\ell\theta^2 + \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$$

$$E_M = \frac{1}{2}mg\ell$$

<< La E_M es una constante del movimiento oscilatorio>>



III. Péndulo físico



a) Definición

Se llama péndulo físico a un cuerpo rígido que realiza oscilaciones alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por el punto 0, que no es el centro de masa (c.m) del cuerpo; y bajo la acción de su propio peso (mg).

b) Ecuación diferencial

De la segunda ley de Newton para movimiento de rotación, el momento de la fuerza resultante (M_R) respecto de 0, es igual, al momento de inercia (I) por la aceleración angular (α), esto es:

$$M_R = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgd\,\text{sen}\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Para, θ muy pequeño, $\text{sen}\,\theta \approx \theta$, de modo que la expresión queda así:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mg}{I}\theta = -\omega_o^2\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\theta = 0$$

siendo, $\omega_o^2 = mgd/I$ la frecuencia angular correspondiente a las de un péndulo simple.

c) Período y frecuencia

El período y la frecuencia de las oscilaciones armónicas, que realiza el péndulo físico, viene dado por:

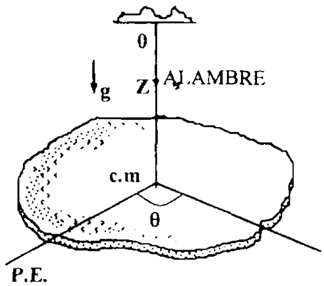
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\left(\frac{I}{mgd}\right)^{1/2}$$

recordemos que el momento de inercia (I) de un cuerpo rígido, depende de su forma y dimensiones.

d) Longitud reducida

Se llama longitud reducida (ℓ_{red}) de un péndulo físico a la longitud del péndulo matemático que tiene el mismo período de oscilación que el del péndulo físico.

IV. Péndulo de torsión



P.E. = Posición de equilibrio

a) Definición

Se llama péndulo de torsión al sólido suspendido de una varilla (alambre) elástica vertical de peso despreciable cuyo extremo superior está conectado rígidamente al punto 0, y cuyo eje 0Z coincide con uno de los ejes libres del sólido. El sólido realiza oscilaciones alrededor del eje 0Z, producidas por las fuerzas elásticas de torsión.

b) Ecuación diferencial

De la segunda ley de Newton para movimiento de rotación, el momento de torsión (M_R) aplicado al centro de masa (c.m) del sólido, es igual, al momento de inercia (I) por la aceleración angular (α), esto es:

$$M_R = -k\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\theta = 0$$

siendo, $\omega_o = (k/I)^{1/2}$ la frecuencia angular de las oscilaciones libres, y (k) el coeficiente de torsión del alambre.

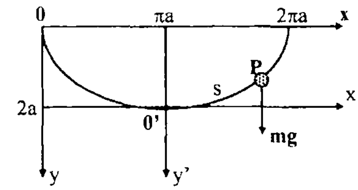
c) Período y frecuencia

El período y la frecuencia de las oscilaciones armónicas, que realiza el péndulo de torsión, viene dado por:

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\left(\frac{k}{I}\right)^{1/2}$$

recordemos que el momento de inercia (I) de un cuerpo rígido, depende de su forma geométrica y de sus dimensiones

V. Péndulo cicloidal



a) Definición

Se llama péndulo cicloidal al cuerpo ó partícula de masa (m) que se mueve bajo la acción de la fuerza de gravedad a lo largo de una cicloide cuyo eje es vertical, y cuya parte cóncava está abierto hacia arriba, como se aprecia en la Fig.

b) Ecuación diferencial

Eligiendo como nivel de referencia la recta horizontal que pasa por el punto 0' y como coordenada generalizada la longitud (s) del arco de cicloide, medida desde el punto 0', se tiene:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{mg}{8a}s^2 = E_o$$

las oscilaciones en el péndulo cicloidal se producirán si y sólo si $E_0 < 2mga$, siendo (a) un parámetro de la cicloide llamado el radio de la circunferencia generatriz, y E_0 la energía mecánica del cuerpo ó partícula.

c) Período y frecuencia

El período de las oscilaciones que realiza la partícula de masa "m", viene dado por:

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \left(\frac{4a}{g}\right)^{1/2}$$

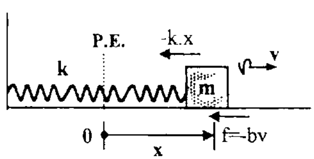
VI) Pequeñas oscilaciones en un campo

El periodo de las pequeñas oscilaciones aproximadamente armónicas simples, que realiza una partícula de masa "m", alrededor de su posición de equilibrio estable "r_o", bajo la acción de un campo V(r), viene dado por:

$$T = 2\pi \left[\frac{m}{(d^2V(r)/dr^2)_{r_0}}\right]^{1/2}$$

Para que la partícula realice oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio, su energía debe ser ligeramente mayor que "V(r)".

3. OSCILACION ARMONICA AMORTIGUADA



En la Fig., el cuerpo de masa (m) unido al resorte de constante elástica (k), realiza oscilaciones armónicas amortiguadas, alrededor de la posición de equilibrio (P.E.) bajo la acción de la fuerza recuperadora del resorte (-k.x) y la fuerza de fricción (f=-bv) que depende de la velocidad instantánea.

- La energía del sistema oscilante disminuye con el transcurso del tiempo, debido a la disipación de la energía, a causa de la fricción.

a) Ecuación diferencial

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento del cuerpo, obtenemos la ecuación diferencial que describe las oscilaciones armónicas amortiguadas, así:

$$F_R = ma$$

$$-k.x - bv = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Definiendo: $b/m = 2\delta$ como el coeficiente de amortiguamiento y $\omega_o^2 = k/m$ como la frecuencia angular de las oscilaciones libres, la ecuación anterior queda así

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

b) Soluciones generales

Se presentan tres casos diferentes en la solución de la ecuación diferencial, estos son:

Movimiento sobreamortiguado.

Este tipo de oscilación armónica se presenta cuando, $\delta^2 > \omega_o^2$ y $b^2 > 4mk$, y la solución general, viene dado por:

$$x(t) = e^{-\delta t}(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t})$$

siendo, $\alpha = \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}$ y A, B las constantes de integración, que se determinan de las condiciones iniciales del problema dado.

- El movimiento oscilatorio es aperiódico.

- La magnitud "x" disminuye monótonamente al aumentar t; el sistema regresa a su estado de equilibrio inicial, para $t\to\infty$.

* Movimiento críticamente sobreamortiguado.
Este tipo de oscilación armónica se presenta cuando, $\delta^2 = \omega_o^2$ y $b^2 = 4mk$, y la solución general, viene dado por:

$$x(t) = e^{-\delta t}(A + Bt)$$

donde, las constantes de integración A y B, se hallan de las condiciones iniciales del problema dado.
- El sistema regresa a su estado de equilibrio inicial, de modo inmediato, sin producirse oscilaciones.

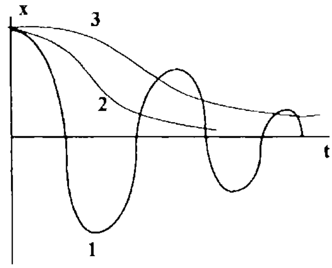
* Movimiento inframortiguado
Este tipo de oscilación armónica se presenta cuando, $\delta^2 < \omega_o^2$ y $b^2 < 4mk$, y la solución general para la posición instantánea (x), viene dado por:

$$x(t) = e^{-\delta t}(B\text{sen}\omega t + C\cos\omega t)$$

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\text{sen}(\omega t + \phi_o)$$

siendo, $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$ la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, $A=\sqrt{B^2 + C^2}$ la amplitud máxima y la fase inicial (ϕ_o), los cuales, se hallan de las condiciones iniciales.
- La magnitud $A(t)=Ae^{-\delta t}$ se llama la amplitud de las oscilaciones amortiguadas.
- Los valores de la amplitud en los instántes de tiempo t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$,...forman una progresión geométrica decreciente de razón $e^{-\delta\Delta t}$

- A continuación representemos la gráfica de la posición (x) versus el tiempo (t), para los tres casos estudiados.



(1) Infraamortiguado (2) Críticamente amortiguado (3) Sobreamortiguado

Como se observa en el movimiento críticamente amortiguado curva (2), la amplitud del movimiento oscilatorio decae rápidamente a cero, mientras que en el caso infraamortiguado, la amplitud decae lentamente, después de haber realizado el cuerpo varias oscilaciones.

c) Período del movimiento
Se define como la diferencia de tiempo entre dos máximos (ó mínimos) sucesivos en el movimiento infraamortiguado; viene dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mk - b^2}}$$

d) Decremento logarítmico
Se llama decremento logarítmico (ε) de una amortiguación, el logaritmo natural de la relación entre las amplitudes de las oscilaciones en los instantes t y t + Δt, esto es:

$$\varepsilon = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$$

El decremento logarítmico de una amortiguación es la magnitud inversa al número de oscilaciones (N) al cabo del cual la amplitud $Ae^{-\delta t}$ del movimiento oscilatorio amortiguado disminuye (e) veces.

e) Tiempo de relajación

Se llama así al intervalo de tiempo (τ) que se necesita para que la amplitud $Ae^{-\delta t}$ del movimiento oscilatorio amortiguado disminuya (e) veces, viene dado por:

$$\tau = NT = \frac{1}{\delta}$$

f) Relación entre ω y ε.

Entre la frecuencia cíclica (ω) de las oscilaciones amortiguadas y el decremento logarítmico (ε) de amortiguación existe la relación siguiente:

$$\omega = \omega_o[1 - (\frac{\omega}{\omega_o})^2(\frac{\varepsilon}{2\pi})]^{1/2}$$

g) Factor de calidad

Se llama factor de calidad de un sistema oscilante a la magnitud física adimensional (Q), que se define como el producto de 2π por la razón de la energía E(t) del sistema oscilante en un instante arbitrario (t) al decremento de esta energía durante el intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$, esto es:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

- Como la energía E(t) es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones C(t), entonces:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\varepsilon}}$$

- Para ε muy pequeño, se encuentra que el factor de calidad es: $Q = \pi / \varepsilon$.

h) Variación temporal de la energía

Derivando con respecto al tiempo, la energía mecánica total del sistema oscilante, tenemos:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k.x^2$$

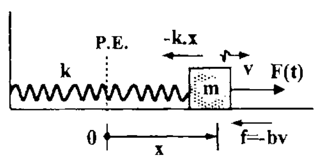
$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m(2v\frac{dv}{dt}) + \frac{1}{2}k(2x\frac{dx}{dt})$$

$$\frac{dE}{dt} = v(m\frac{dv}{dt} + kx) = v(-bv)$$

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2$$

<<La energía mecánica del sistema oscilante, disminuye con una rapidez proporcional al cuadrado de la velocidad>>

4. OSCILACION ARMONICA AMORTIGUADA FORZADA



En la Fig., el cuerpo de masa (m) unido al resorte de constante elástica (k), realiza oscilaciones armónicas amortiguadas, alrededor de la posición de equilibrio (P.E.) bajo la acción de la fuerza recuperadora del resorte (-k.x) la fuerza de fricción (f=-bv) que depende de la velocidad instantánea, y la fuerza externa F(t) que depende del tiempo.

a) Ecuación diferencial

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento del cuerpo, y considerando la fuerza externa F(t) de tipo sinusoidal, tenemos:

$$F_R = m\,a$$

$$-k.x - b\,v + F_o \cos\alpha t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k.x = F_o \cos\alpha t$$

Denominando a: $\delta = b/2m$ coeficiente de amortiguamiento, $\omega_o = (k/m)^{1/2}$ frecuencia angular de las oscilaciones libres ó propias, y $f_0 = F_0/m$ densidad de fuerza, la expresión anterior queda así:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = f_o \cos\alpha t$$

b) Solución general

La solución general a la ecuación diferencial de segundo orden lineal no homogénea anterior, se encuentra sumando la solución (x_1), correspondiente a la ecuación diferencial homogénea del oscilador armónico amortiguado, más la solución (x_2) de la ecuación diferencial no homogénea, es decir:

$$x(t) = x_1 + x_2$$

siendo,

$$x_2 = \frac{f_o}{[(\omega_o^2 - \alpha^2)^2 + 4\delta^2\alpha^2]^{1/2}}\cos(\alpha t - \phi)$$

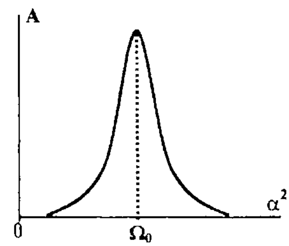
$$\text{tg}\,\phi = 2\delta\alpha/(\alpha^2 - \omega_o^2)$$

c) Resonancia

La amplitud de las oscilaciones amortiguadas forzadas, viene dado por:

$$A = \frac{f_o}{[(\omega_o^2 - \alpha^2)^2 + 4\delta^2\alpha^2]^{1/2}}$$

Se llama fenómeno de resonancia, cuando la amplitud A de la oscilación se hace muy grande, al aproximarse la frecuencia (α) de la fuerza externa a la frecuencia cíclica de la oscilación forzada $\Omega_o = (\omega_o^2 - 2\delta^2)^{1/2}$, que es un tanto menor que la frecuencia de las oscilaciones propias $\omega = (\omega_o^2 - \delta^2)^{1/2}$.



- A la frecuencia cíclica, también, se le denomina frecuencia resonante, así, el máximo valor de la amplitud A, para la frecuencia resonante es:

$$A_{max} = \frac{f_o}{2\delta\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}}$$

5. SUPERPOSICION DE OSCILACIONES ARMONICAS

a) Superposición de dos oscilaciones en la misma dirección

La resultante de la superposición de dos oscilaciones armónicas que tienen la misma dirección e igual período, es otra oscilación armónica que tiene el mismo período, y de amplitud igual a:

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\theta_2 - \theta_1)]^{1/2}$$

De otro lado, la fase inicial de la oscilación resultante, viene dado por:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{A_1 \text{sen}\,\theta_1 + A_2 \text{sen}\,\theta_2}{A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2}$$

siendo, A_1, A_2 las amplitudes de las oscilaciones que se superponen, y θ_1, θ_2 sus fases iniciales.

Demostración:

Sean: $x_1 = A_1 \text{sen}(\omega t + \theta_1)$ y $x_2 = A_1$ $\text{sen}(\omega t + \theta_2)$ las ecuaciones que describen las oscilaciones que se superponen entonces, la oscilación resultante es:

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A_1 \text{sen}(\omega t + \theta_1) + A_2\,\text{sen}(\omega t + \theta_2)$$

$$x = A_1(\text{sen}\,\omega t \cos\theta_1 + \cos\omega t\,\text{sen}\,\theta_1) + A_2(\text{sen}\,\omega t \cos\theta_2 + \cos\omega t\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$x = (A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2)\text{sen}\,\omega t + (A_1 \text{sen}\,\theta_1 + A_2\,\text{sen}\,\theta_2)\cos\omega t$$

Denominando:

$$A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2 = A\cos\theta \quad (1)$$

$$A_1 \text{sen}\,\theta_1 + A_2\,\text{sen}\,\theta_2 = A\,\text{sen}\,\theta \quad (2)$$

Obtenemos la ecuación de la trayectoria que describe las oscilaciones resultantes:

$$x = A\cos\theta\,\text{sen}\,\omega t + A\,\text{sen}\,\theta\cos\omega t$$

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \theta)$$

De las ecs.(1) y (2), obtenemos la amplitud "A" y la fase "θ" de la oscilación resultante:

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\theta_2 - \theta_1)]^{1/2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{A_1 \text{sen}\,\theta_1 + A_2 \text{sen}\,\theta_2}{A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2}$$

Casos particulares

1) Para: $\theta_1 = \theta_2$, $\delta = \theta_2 - \theta_1 = 0$ las oscilaciones que se superponen oscilan en la misma dirección (en fase), y la amplitud y ángulo de fase de la oscilación resultante son:

$$A = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2)^{1/2} = A_1 + A_2$$

$$\text{tg}\theta = \frac{2A_1\,\text{sen}\theta_1}{2A_1\cos\theta_1} = \text{tg}\theta_1 \quad => \quad \theta = \theta_1$$

1) Para: $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, $\delta = \theta_2 - \theta_1 = \pi$ las oscilaciones que se superponen oscilan en direcciones opuestas, y la amplitud y ángulo de fase de la oscilación resultante son:

$$A = (A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2)^{1/2} = A_1 - A_2$$

$$\text{tg}\theta = \frac{A_1\,\text{sen}\theta_1 + A_2\,\text{sen}(\theta_1 + \pi)}{A_1\cos\theta_1 + A_2\cos(\theta_1 + \pi)} = \text{tg}\theta_1$$

$$=> \quad \theta = \theta_1$$

b) Superposición de dos oscilaciones perpendiculares entre sí

La superposición de dos oscilaciones armónicas perpendiculares entre sí que tienen la misma dirección e igual período, dan como resultante un movimiento, cuya ecuación de la trayectoria viene dado por:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\theta_2 - \theta_1) = \text{sen}^2(\theta_2 - \theta_1)$$

La ecuación de la trayectoria de la partícula que oscila en el plano XY, puede ser una recta, una circunferencia o una elipse.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Un reloj de péndulo de longitud $\ell = 50$ cm se lleva a un planeta donde la gravedad es un 20 % mayor que la de la Tierra. ¿Qué longitud debe tener el péndulo en este planeta, para que funcione correctamente?

a) 40 cm b) 45 cm c) 50 cm d) 55 cm e) 60 cm

02. En la Fig.01, en el movimiento pendular se observa que cada 0,5 s la masa pasa por el posición de equilibrio. Hallar la longitud del péndulo ($g \approx \pi^2$ m/s^2)

a) 10 cm b) 15 cm c) 20 cm d) 25 cm e) 30 cm

03. El período de un péndulo es T=4 s. Hallar el nuevo período si la longitud del péndulo se incrementa en 21 %.

a) 4,0 s b) 4,2 s c) 4,4 s d) 4,6 s e) 4,8 s

04. Hallar la longitud del hilo de un péndulo simple, tal que, si este se aumenta en 3 m su período se duplica.

a) 0,25 m b) 0,50 m c) 0,75 m d) 1,00 m e) 1,25 m

05. En la Fig.02, los péndulos de longitudes $\ell_1 = 6{,}25$ m y $\ell_2 = 2{,}25$ m, oscilan en planos paralelos, e inician sus movimientos desde el mismo lado. ¿Después de que tiempo mínimo, los péndulos vuelven a estar como en su fase inicial? ($g \approx \pi^2$ m/s^2)

a) 10 s b) 15 s c) 20 s d) 25 s e) 30 s

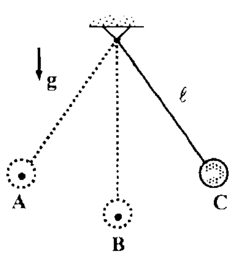


Fig.01

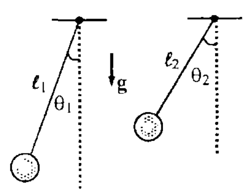


Fig.02

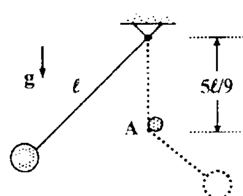


Fig.03

06. En la Fig.03, hallar el período de una oscilación completa del sistema, sabiendo que en A se encuentra un clavo horizontalmente, siendo $\ell = 9$ cm y $g \approx \pi^2$ m/s^2.

a) 0,1 s b) 0,3 s c) 0,5 s d) 0,7 s e) 0,9 s

07. En la Fig.04, la esferita del péndulo se suelta en la posición mostrada (θ=4°). Después de que tiempo la esferita regresa a su posición inicial. No hay fricción.($g \approx \pi^2 m/s^2$)

a) 1 s b) 2 s c) 3 s d) 4 s e) 5 s

08. En la Fig.05, el péndulo de longitud $\ell = 3$ m oscila en un plano vertical, suspendido del techo del ascensor, que asciende verticalmente con una aceleración de a=2,2 m/s^2. Hallar el período de oscilación. (g = 9,8 m/s^2)

a) $\pi/2$ s b) $\pi/4$ s c) π s d) 2π s e) 4π s

09. En la Fig.06, hallar la frecuencia de oscilación del péndulo de longitud $\ell = 0,5$ m que se encuentra en el techo del camión que se mueve horizontalmente con aceleración de a=7,5 m/s^2. (g=10 m/s^2)

a) $1,0/\pi$ s^{-1} b) $1,5/\pi$ s^{-1} c) $2,0/\pi$ s^{-1} d) $2,5/\pi$ s^{-1} e) $3,0/\pi$ s^{-1}

10. Un tren que se mueve con una rapidez constante de v=20 m/s, lleva en su techo un péndulo simple. El tren toma una curva de radio R=40 m. ¿Qué ángulo se desvía el hilo del péndulo, respecto de la vertical? (g=10 m/s^2)

a) 30^0 b) 37^0 c) 45^0 d) 53^0 e) 60^0

11. En la Fig.07, la bolita del péndulo se encuentra en el borde del disco y gira con el. Si el radio del disco es R=25 cm. Hallar la frecuencia (f) de rotación. ($g \approx \pi^2\ m/s^2$)

a) 0,5 s^{-1} b) 1,0 s^{-1} c) 1,5 s^{-1} d) 2,0 s^{-1} e) 2,5 s^{-1}

12. En la Fig.08, el péndulo simple rota en un plano horizontal, describiendo una circunferencia de radio R=10 cm. Hallar su velocidad angular (ω).(g=10

a) 10 rad/s b) 12 rad/s c) 14 rad/s d) 16 rad/s e) 18 rad/s

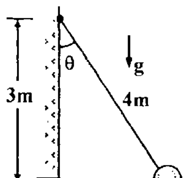


Fig.04

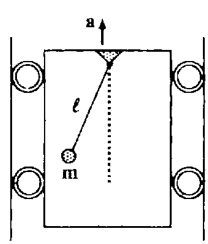


Fig.05

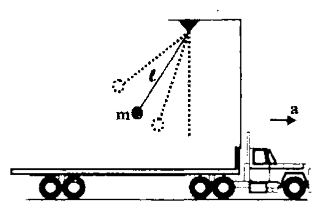


Fig.06

13. Hallar la velocidad lineal máxima de una partícula en M.A.S si su frecuencia es f=2 Hz y su amplitud A= 0,5 m.

a) π m/s b) 2π m/s c) 3π m/s d) 4π m/s e) 5π m/s

14. Hallar el período de un cuerpo en M.A.S de amplitud A=10 cm y que pasa por su posición de equilibrio con una velocidad de v= 0,4 m/s.

a) $\pi/2$ s b) $\pi/3$ s c) $\pi/4$ s d) $2\pi/3$ s e) $3\pi/4$ s

15. Un cuerpo de masa m=3 kg unido a un resorte oscila horizontalmente con amplitud de A=4 cm y período T=π s. Hallar el valor de la energía total del sistema.

a) 9,0 mJ b) 9,2 mJ c) 9,4 mJ d) 9,6 mJ e) 9,8 mJ

16. Un cuerpo de masa m=10 kg unido a un resorte de constante elástica k=40 N/m, oscila horizontalmente, pasando por su posición de equilibrio con una velocidad de v= 0,5 m/s. Hallar la amplitud (A) de su movimiento.

a) 0,10 m b) 0,15 m c) 0,20 m d) 0,25 m e) 0,30 m

17. Un cuerpo realiza un M.A.S de frecuencia f=2 Hz y amplitud A = 0,5 m. Hallar la máxima velocidad que adquiere el cuerpo.

a) π m/s b) 2π m/s c) 3π m/s d) 4π m/s e) 5π m/s

18. Un cuerpo realiza un M.A.S de período T= 0,8 s y amplitud A = 0,16 m. Hallar la magnitud de la máxima aceleración que adquiere el cuerpo.

a) π^2 m/s^2 b) $2\pi^2$ m/s^2 c) $3\pi^2$ m/s^2 d) $4\pi^2$ m/s^2 e) $5\pi^2$ m/s^2

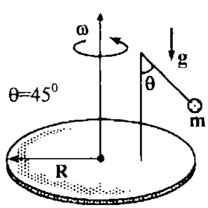


Fig.07

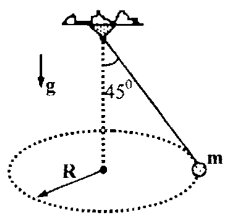


Fig.08

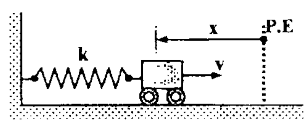


Fig.09

19. En la Fig.09, el móvil realiza un M.A.S de amplitud A= 60 cm y velocidad angular $\omega = 5$ rad/s. Hallar la posición (x) del móvil cuando su velocidad es v=180 cm/s.

a) ± 40cm b) ± 42cm c) ± 44cm d) ± 46cm e) ± 48cm

20. En la Fig.10, el carrito de masa m=2 kg unido al resorte de constante elástica k=200 N/m, oscila en el plano inclinado liso, con una amplitud de A=5 cm. Hallar la ecuación del movimiento oscilatorio.

a) 0,05 cos(5 t) b) 0,05 cos(10 t) c) 0,05 sen(5 t) d) 0,05 sen(10 t) e) 0,05 sen(2t)

21. En la Fig.11, el bloque de masa m=2 kg, oscila en un plano horizontal libre de fricción, asociado a dos resortes iguales de constantes elásticas k= 980 N/m. Hallar el período de oscilación. ($9{,}8 \approx \pi^2$)

a) 0,1 s b) 0,2 s c) 0,3 s d) 0,4 s e) 0,5 s

22. En la Fig.12, hallar el período del M.A.S que realiza el bloque de masa m= 0,3 kg, si la constante elástica del resorte es k=2 000 N/m.

a) $\pi/10$s b) $\pi/20$s c) $\pi/30$s d) $\pi/40$s e) $\pi/50$s

23. En la Fig.13, hallar el período de las oscilaciones libres del sistema de resortes de constantes elásticas k_1= 600 N/m, k_2= 300 N/m, y masa del bloque m= 18 kg.

a) $3\pi/2$s b) $3\pi/4$s c) $3\pi/5$s d) $2\pi/3$s e) $\pi/2$s

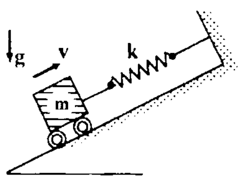


Fig.10

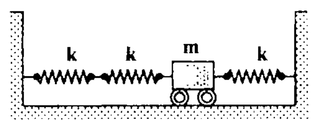
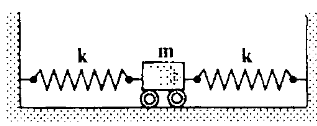
Fig.12


Fig.11


24. En la Fig.14, hallar el período del M.A.S que realiza el bloque de masa m= 0,2 kg, si las constantes elásticas de los resortes es k=3 000 N/m.

a) $\pi/10$s b) $\pi/20$s c) $\pi/30$s d) $\pi/40$s e) $\pi/50$s

25. En la Fig.15, hallar el período del M.A.S que realiza el bloque de masa m=10 kg, si las constantes elásticas de los resortes son: k_1=1 800 N/m y k_2=2 200 N/m.

a) $\pi/10$s b) $\pi/20$s c) $\pi/30$s d) $\pi/40$s e) $\pi/50$s

26. Hallar el período de un M.A.S, si se sabe que la razón entre su máxima aceleración y máxima velocidad es $a_{max}/v_{max} = 4\pi$.

a) 0,1 s b) 0,2 s c) 0,3 s d) 0,4 s e) 0,5 s

27. Un bloque conectado a un resorte oscila horizontalmente en M.A.S. Hallar que porcentaje de la energía total del sistema es energía cinética, cuando el bloque pasa por la mitad de su amplitud.

a) 55 % b) 60 % c) 65 % d) 70 % e) 75 %

28. En la Fig.16, la bolita soltándose de una altura de H=20 cm oscila entre los planos lisos inclinados $\theta = 37^0$, respecto de la horizontal. Halle el período de las oscilaciones, g=10 m/s^2

a) 2/3 s b) 1/2 s c) 3/4 s d) 3/2 s e) 4/3 s

29. Un bloque de masa m=1,5 kg unido a un resorte oscila sobre una superficie horizontal lisa con una frecuencia de f=0,5 osc/s; cuando el bloque se encuentra en el extremo de su oscilación, se aumenta su masa en 0,5 kg. Hallar el nuevo período del sistema oscilatorio.

a) 1,0 s b) 1,5 s c) 2,0 s d) 2,5 s e) 3,0 s

30. Al suspender un cuerpo de un resorte, éste se alarga 25 cm. Hallar el período de oscilación del cuerpo. ($\pi^2 \approx 9,8$)

a) 0,5 s b) 1,0 s c) 1,5 s d) 2,0 s e) 2,5 s

Fig.13

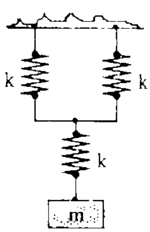


Fig.14

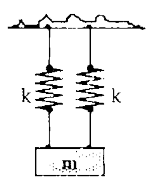


Fig.15

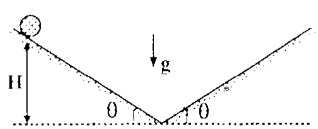


Fig.16

31. Un cuerpo suspendido de un resorte oscila con M.A.S de período T.¿ Qué tiempo transcurre para qué el cuerpo se encuentre, a partir de su posición de equilibrio, a una distancia igual a la mitad de su amplitud ?

a) T/2 b) T/4 c) T/6 d) T/8 e) T/12

32. La energía total de un cuerpo que oscila en M.A.S es de E=30 μJ y la fuerza máxima que actúa sobre el es de F=1,5 mN. Hallar la ecuación del movimiento, sabiendo que el período de oscilación es T=2 s y la fase inicial $\phi_0 = 45^0$.

a) $0{,}02\ \text{sen}(\pi t + \pi/2)$ b) $0{,}02\ \text{sen}(2\pi t + \pi/4)$ c) $0{,}04\ \text{sen}(\pi t + \pi/4)$ d) $0{,}04\ \text{sen}(2\pi t + \pi/4)$ e) $0{,}04\ \text{sen}(4\pi t + \pi/4)$

33. Un cuerpo de masa m= 100 g oscila horizontalmente con M.A.S de amplitud A=10 cm. Su aceleración en el extremo derecho es de a=8 000 m/s^2. Hallar la magnitud de la fuerza sobre el cuerpo, cuando la elongación es de x=4 cm.

a) 300 N b) 310 N c) 320 N d) 330 N e) 340 N

34. Un resorte de constante elástica k=20 N/m, que sostiene un bloque de peso W=50 N, se estira una longitud de x=10 cm a partir de su posición de equilibrio, soltándolo a continuación. Si el tiempo se mide a partir del inicio del movimiento oscilatorio del bloque, hallar la ecuación del movimiento oscilatorio. (g=10 m/s^2)

a) 0,1 sen(2.t) b) -0,1 sen(2.t) c) 0,2 cos(t) d) -0,2 cos(t) e) 0,4 sen(t)

35. En la Fig.17, la bala de masa m=50 g se mueve horizontalmente con una rapidez de v=200 m/s en dirección del bloque de masa M=10 kg en reposo sobre el piso, que se encuentra unido a un resorte de constante elástica k=400 N/m. Después del choque, la bala se adhiere al bloque. Hallar la amplitud de oscilación del sistema, luego de la colisión.

a) 11,8 cm b) 13,8 cm c) 15,8 cm d) 17,8 cm e) 19,8 cm

36. En la Fig.18, si el sistema formado por el bloque de masa m=3 kg y el resorte de constante elástica k=300 N/m, se deja en libertad de movimiento siendo x_0=2 m. Hallar la máxima velocidad que adquiere el bloque. Desprecie la fricción.

a) 10 m/s b) 15 m/s c) 20 m/s d) 25 m/s e) 30 m/s

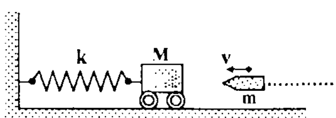


Fig.17

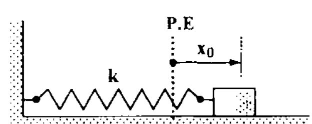


Fig.18

37. En la Fig.19, el bloque de masa M=5 kg, oscila con M.A.S de amplitud es A= 0,3 m. En el instante en que "M" pasa por su posición de equilibrio es impactada verticalmente por barro de masa m=4 kg, el cual se adhiere a M. Hallar la amplitud del sistema oscilatorio (m+M).

a) 10 cm b) 15 cm c) 20 cm d) 25 cm e) 30 cm

38. En la Fig.20, ¿ Con qué amplitud máxima puede oscilar el sistema, tal que no resbale el bloque de masa m=2 kg. El piso es liso, y el coeficiente de fricción entre los bloques es

$\mu=1/2$, además M=10 kg, k=500 N/m y g=10 m/s^2.

a) 10 cm b) 12 cm c) 14 cm d) 16 cm e) 18 cm

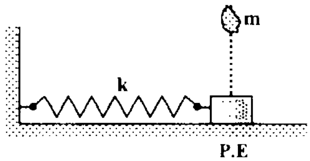


Fig.19

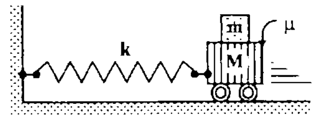
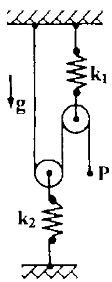
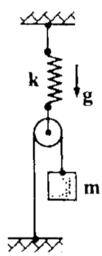


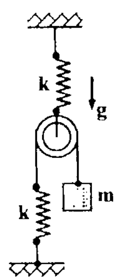
Fig.20

39. En la Fig.21, el punto "P" de la cuerda inextensible, se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia d=12 cm. Hallar las elongaciones de cada uno de los resortes, sabiendo que $k_1=2k_2$. Desprecie la masa de las poleas móviles y la fricción.

a) $x_1=2$ cm ; $x_2=4$ cm b) $x_1=2$ cm ; $x_2=3$ cm c) $x_1=2$ cm ; $x_2=2$ cm
d) $x_1=4$ cm ; $x_2=3$ cm e) $x_1=4$ cm ; $x_2=2$ cm







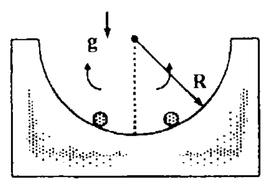


Fig.21 Fig.22 Fig.23 Fig.24

40. En la Fig.22, la polea móvil tiene masa despreciable, la constante elástica del resorte es k=400 N/m, la masa del bloque es m=4 kg, y no hay fricción. Hallar:

I. La constante elástica equivalente (k_e) del sistema.

a) 100 N b) 150 N c) 200 N d) 250 N e) 300 N

II. El período de oscilación del sistema.

a) $0{,}1\pi$ s b) $0{,}2\pi$ s c) $0{,}4\pi$ s d) $0{,}6\pi$ s e) $0{,}8\pi$ s

41. En la Fig.23, la polea móvil tiene masa despreciable, las constantes elásticas de los resortes son k=800 N/m, la masa del bloque es m=1,6 kg, y no existe fricción. Hallar:

I. La constante elástica equivalente (k_e) del sistema.

a) 100 N/m b) 120 N/m c) 140 N/m d) 160 N/m e) 180 N/m

II. El período de oscilación del bloque de masa "m".

a) $0,1\pi$ s b) $0,2\pi$ s c) $0,4\pi$ s d) $0,6\pi$ s e) $0,8\pi$ s

42. En la Fig.24, la esferita que se encuentra en el fondo del recipiente semiesférico de radio R=10 cm; se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se suelta, oscilando en M.A.S. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones, no hay fricción. ($g=10$ m/s^2)

a) $0,1\pi$ s b) $0,2\pi$ s c) $0,4\pi$ s d) $0,6\pi$ s e) $0,8\pi$ s

43. Un cuerpo de masa m= 0,5 kg oscila en M.A.S con una frecuencia de f=2 osc/s. Hallar la magnitud de la aceleración del cuerpo, cuando la elongación es x=2 cm.

a) $0,30\pi^2\frac{m}{s^2}$ b) $0,32\pi^2\frac{m}{s^2}$ c) $0,34\pi^2\frac{m}{s^2}$ d) $0,36\pi^2\frac{m}{s^2}$ e) $0,38\pi^2\frac{m}{s^2}$

44. En la Fig.25, el período de oscilación del sistema mostrado es T= 0,2 s; si se retira el bloque A de masa 12 kg, el nuevo período de oscilación es T'=0,4 s. Hallar la masa del bloque B.

a) 10 kg b) 12 kg c) 14 kg d) 16 kg e) 18 kg

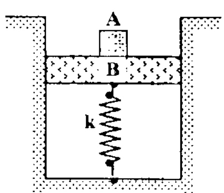


Fig.25

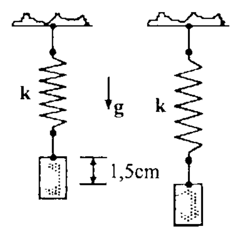


Fig.26

45. En la Fig.26, el bloque de peso W=10 N está colgado de un resorte. Hallar el período de las oscilaciones verticales del bloque, sabiendo que el resorte se estira x=1,5 cm cuando se le somete a la acción de la fuerza de magnitud F=1 N. ($g=10$ m/s^2)

a) 0,71 s b) 0,73 s c) 0,75 s d) 0,77 s e) 0,79 s

46. La amplitud de las oscilaciones armónicas simples que realiza una partícula de masa m=10 g es de A=5 cm, su fase inicial $\phi_0=60^0$, y su energía total $E=3,1.10^{-5}$ J. Hallar su posición (x) en el instante t=2/6 s.

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

47. ¿Qué tiempo transcurrirá desde el inicio del movimiento oscilatorio armónico hasta que la elongación (x) sea igual a la mitad de la amplitud (A)? El período de las oscilaciones es T=24 s y la fase inicial $\phi_o = 0^0$.

a) 0,5 s b) 1,0 s c) 1,5 s d) 2,0 s e) 2,5 s

48. La fase inicial de una oscilación armónica es $\phi_o = 0^0$. ¿Al cabo de qué fracción de período será igual la velocidad de la partícula a la mitad de su velocidad máxima?

a) T b) T/2 c) T/3 d) T/4 e) T/6

49. ¿Qué tiempo transcurrirá desde que se inicia el movimiento oscilatorio hasta que el punto que oscila armónicamente de acuerdo a la ley x=7 sen(0,5 π t) recorre la distancia que hay entre la posición de equilibrio y la de la elongación máxima?

a) 0,5 s b) 1,0 s c) 1,5 s d) 2,0 s e) 2,5 s

50. Una partícula oscila en M.A.S de período T=2 s, amplitud A=50 mm y fase inicial $\phi_o = 0^0$ Hallar la velocidad de la partícula en el instante en que la elongación es x=25 mm.

a) 130 mm/s b) 132 mm/s c) 134 mm/s d) 136 mm/s e) 138 mm/s

51. Escriba la ecuación del movimiento oscilatorio armónico, si la aceleración máxima de la partícula es a_{max}=49,3 cm/s^2, el período de las oscilaciones es T=2 s y la elongación en el instante inicial del movimiento es x_0=25 mm.

a) $10\,\text{sen}(\pi t + \pi/3)$ cm b) $10\,\text{sen}(\pi t + \pi/6)$ cm c) $5\,\text{sen}(\pi t + \pi/3)$ cm
d) $5\,\text{sen}(\pi t + \pi/6)$ cm e) $10\cos(\pi t + \pi/4)$ cm

52. Una partícula de masa m=10 g oscila según la ecuación x=5 sen$(\pi t/5 + \pi/4)$ cm. Hallar la energía total de las oscilaciones de la partícula. ($\mu = 10^{-6}$)

a) $0{,}1\pi^2\mu J$ b) $0{,}2\pi^2\mu J$ c) $0{,}3\pi^2\mu J$ d) $0{,}4\pi^2\mu J$ e) $0{,}5\pi^2\mu J$

53. Hallar la razón (E_C/E_P) entre la energía cinética de una partícula que oscila armónicamente y su energía potencial, en el instante t=T/12 s, siendo T el período de la oscilación.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

54. Hallar la razón (E_C/E_P) entre la energía cinética de una partícula que oscila armónicamente y su energía potencial, en el instante en que la elongación es x=A/4, siendo A la amplitud de la oscilación.

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

55. Un péndulo simple cuya cuerda forma con la vertical un ángulo de $\theta_0 = 4^0$, se suelta del reposo, realizando un M.A.S de frecuencia f=2 osc/s. Hallar la velocidad de la esferita del péndulo cuando pasa por su posición de equilibrio (P.E.). (g=10 m/s^2)

a) 5,0 cm/s b) 5,2 cm/s c) 5,4 cm/s d) 5,6 cm/s e) 5,8 cm/s

56. La amplitud de las oscilaciones armónicas de una partícula es A=2 cm y su energía total E=3.10^{-7} J. Hallar la posición de la partícula cuando la magnitud de la fuerza que actúa sobre él es F=$2,25.10^{-5}$ N.

a) 0,5 cm b) 1,0 cm c) 1,5 cm d) 2,0 cm e) 2,5 cm

57. Un aerómetro de forma cilíndrica de masa m= 0,2 kg y diámetro D=1 cm que flota parcialmente en un líquido, se sumerge parcialmente en el líquido y se libera, oscilando verticalmente con M.A.S de período T=4 s. Hallar la densidad del líquido (ρ). (g=10 m/s^2)

a) $0,1\pi\, g/cm^3$ b) $0,2\pi\, g/cm^3$ c) $0,3\pi\, g/cm^3$ d) $0,4\pi\, g/cm^3$ e) $0,5\pi\, g/cm^3$

58. Hallar la razón (T_S/T_P) de los períodos de las oscilaciones verticales armónicas que realiza un bloque, conectado a dos resortes idénticos; primero en serie (T_S) y luego en paralelo (T_P).

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

59. De un resorte está suspendido un platillo de balanza con pesas. El período de las oscilaciones verticales es T= 0,4 s. Luego, de poner en el platillo más pesas, el período de las oscilaciones verticales es T'= 0,6 s. Hallar la deformación en la longitud del resorte, debido a las pesas añadidas. ($g \approx \pi^2$)

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

60. Un bloque suspendido de un resorte realiza oscilaciones verticales armónicas de amplitud A=5 cm. Hallar la constante elástica (k) del resorte, sabiendo que la energía cinética máxima de las oscilación del bloque es $E_{C,\,máx}$=1 J.

a) 600 N/m b) 650 N/m c) 700 N/m d) 750 N/m e) 800 N/m

61. Escriba la ecuación del movimiento resultante de la composición de dos oscilaciones armónicas que tienen la misma dirección, períodos de T=8 s y amplitudes de A= 0,02 m. La diferencia de fase entre estas oscilaciones es $\varphi = \pi/4$. La fase inicial de una de las oscilaciones es $\phi_0 = 0^0$.

a) $3,5\,sen(\pi t/4 + \pi/2)\,cm$ b) $3,5\cos(\pi t/4 + \pi/2)\,cm$ c) $3,7\,sen(\pi t/4 + \pi/8)\,cm$
d) $3,7\cos(\pi t/4 + \pi/8)\,cm$ e) $3,1\,sen(\pi t/2 + \pi/4)\,cm$

62. Hallar la amplitud y la fase inicial de la oscilación armónica resultante de la composición de dos oscilaciones de igual dirección, cuyas ecuaciones, vienen dados por: x_1=0,02 $\text{sen}(5\pi t + \pi/2)$ m y x_2= 0,03 $\text{sen}(5\pi t + \pi/2)$ m.

a) 3,0 cm ; 62^0 34' b) 3,2 cm ; 62^0 38' c) 3,4 cm ; 62^0 42' d) 3,6 cm ; 62^0 46' e) 3,8 cm ; 62^0 50'

63. La oscilación resultante de la composición de dos oscilaciones de igual dirección, amplitud y período tiene el mismo período y amplitud que ellas. Hallar la diferencia de fase de las oscilaciones componentes.

a) $\pi/6$ b) $\pi/4$ c) $\pi/3$ d) π e) $2\pi/3$

64. Escriba la ecuación de la oscilación resultante de la composición de dos oscilaciones perpendiculares entre sí de igual frecuencia $f_1 = f_2 = 5$ Hz y de la misma fase inicial $\phi_1 = \phi_2 = 60^0$. Las amplitudes de cada una de estas oscilaciones es $A_1 = 0,10$ m y $A_2 =$ 0,05 m

a) $11,0\ \text{sen}(10\pi t + \frac{\pi}{3})$ cm b) $11,2\ \text{sen}(10\pi t + \frac{\pi}{3})$ cm c) $11,0\ \text{sen}(5\pi t + \frac{\pi}{3})$ cm d) $11,4\ \text{sen}(10\pi t + \frac{\pi}{6})$ cm e) $11,0\ \text{sen}(5\pi t + \frac{\pi}{2})$ cm

65. Una partícula participa de dos oscilaciones, de igual período y fase inicial. Las amplitudes de estas oscilaciones son $A_1 = 3$ cm y $A_2 = 4$ cm. Hallar la amplitud de la oscilación resultante si. I) las dos oscilaciones tienen la misma dirección II) las dos oscilaciones son perpendiculares entre sí.

a) 7 cm ; 5 cm b) 5 cm ; 7 cm c) 6 cm ; 8 cm d) 8 cm ; 6 cm e)7cm; 9 cm

66. Una partícula participa simultáneamente de dos oscilaciones perpendiculares entre sí de ecuaciones $x = 2\ \text{sen}(\omega t)$ m , $y = 2\cos(\omega t)$ m. Hallar la trayectoria de la partícula.

a) $y = 2x$ b) $y = 4x$ c) $x^2 + y^2 = 4$ d) $x^2 + y^2 = 1$ e) $y = x/2$

67. Una partícula en M.A.S tiene velocidades de 3 cm/s y 4 cm/s a las distancias de 8 cm y 6 cm de su posición de equilibrio (P.E.). Hallar el período de su movimiento oscilatorio.

a) π s b) 2π s c) 3π s d) 4π s e) 5π s

68. La aceleración de una partícula en M.A.S, a una distancia (d) de su posición de equilibrio (P.E) es (a). Hallar el período del movimiento oscilatorio.

a) $\pi(d/a)^{1/2}$ b) $2\pi(d/a)^{1/2}$ c) $4\pi(d/a)^{1/2}$ d) $\frac{\pi}{2}(d/a)^{1/2}$ e) $\frac{\pi}{4}(d/a)^{1/2}$

69. Una partícula participa simultáneamente de dos oscilaciones perpendiculares entre sí, de ecuaciones $x = \cos\pi t$ e $y = \cos\pi t/2$. Hallar la trayectoria del movimiento resultante.

a) $2x^2 - y = 1$ b) $x^2 - 2y = 1$ c) $y^2 - 2x = 1$ d) $y^2 - x = 1$ e) $2y^2 - x = 1$

70. Una partícula participa simultáneamente de dos oscilaciones perpendiculares entre sí, de ecuaciones $x = \text{sen } \pi t$ e $y = 2\,\text{sen}(\pi t + \pi/2)$. Hallar la ecuación de la trayectoria del movimiento de la partícula.

a) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ b) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ c) $x^2 - 2y = 0$ d) $x^2 + y^2 = 1$ e) $x = 2y$

71. El período de amortiguación de una oscilación es de T=4 s, su decremento logarítmico $\xi = 1{,}6$ y la fase inicial es $\phi_0 = 0^o$. La elongación de la oscilación cuando t=T/4 es 4,5 cm. Hallar la elongación (x) en el instante t=3 s.

a) -0,5 cm b) -1,0 cm c) -1,5 cm d) -2,0 cm e) -2,5 cm

72. La ecuación de unas oscilaciones amortiguadas, viene dado por: $x = 5e^{-0{,}25t}\text{sen}(\pi t/2)$ m. Hallar la velocidad del punto oscilante en el instante t=3T.

a) 0,31 m/s b) 0,33 m/s c) 0,35 m/s d) 0,37 m/s e) 0,39 m/s

73. El decremento logarítmico de la amortiguación de un péndulo matemático es $\xi = 0{,}4$. Hallar cuántas veces disminuye la amplitud durante una oscilación completa del péndulo.

a) 0,5 b) 1,0 c) 1,5 d) 2,0 e) 2,5

74. ¿A qué es igual el decremento logarítmico de la amortiguación de un péndulo matemático si la amplitud de su oscilación se hace dos veces menor en 1 min? El péndulo tiene 1 m de longitud. ($g = 9{,}81$ m/s^2)

a) 0,013 b) 0,023 c) 0,033 d) 0,043 e) 0,053

75. Un péndulo matemático de longitud ℓ=24,7 cm realiza oscilaciones amortiguadas. ¿Qué tiempo tardará la energía de las oscilaciones de este péndulo en disminuir 9,4 veces, si el decremento logarítmico es $\xi = 0{,}01$. ($g = 9{,}81$ m/s^2)

a) 110 s b) 112 s c) 114 s d) 116 s e) 118 s

76. Un péndulo matemático realiza oscilaciones amortiguadas cuyo decremento logarítmico de amortiguación es $\xi = 0{,}2$. ¿Cuántas veces disminuirá la aceleración total de este péndulo en su posición extrema durante una oscilación?

a) 1,02 b) 1,22 c) 1,42 d) 1,62 e) 1,82

77. La amplitud de las oscilaciones amortiguadas de un péndulo matemático se hace dos veces menor en 1 min. ¿Cuántas veces menor se hará en 3 min?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

78. En la Fig.27, la bolilla de masa (m) se encuentra en un túnel que pasa por uno de los diámetros de la tierra, de radio R= $6{,}37.10^6$ m, de masa M=$5{,}96.10^{24}$ kg. Hallar el período del M.A.S que realiza la bolilla. (G= $6{,}67.10^{-11}$ $m^3/kg.s^2$)

a) 80,4 min b) 82,4 min c) 84,4 min d) 86,4 min e) 88,4 min

79. Un péndulo matemático de longitud ℓ=0,5 m, sacado de su posición de equilibrio, durante su primera oscilación se desvió hacia un lado 5 cm y en la segunda 4 cm (hacia el mismo lado). Hallar el tiempo de relajación (τ). (g = 9,81 m/s^2)

a) 6,05 s b) 6,15 s c) 6,25 s d) 6,35 s e) 6,45 s

80. Al suspender un bloque de un resorte vertical, éste se estira una longitud de x= 9,8 cm. Luego, se jala el bloque hacia abajo y se libera, produciéndose oscilaciones.¿Para qué va-lor del coeficiente de amortiguación (δ) las oscilaciones cesan después de 10 s ? (g=9,8 m/s^2)

a) 0,15 s^{-1} b) 0,25 s^{-1} c) 0,35 s^{-1} d) 0,45 s^{-1} e) 0,55 s^{-1}

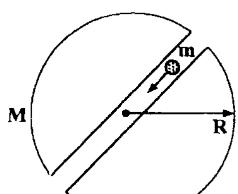


Fig.27

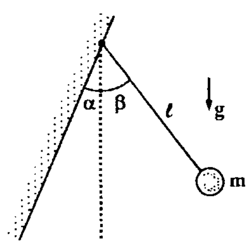


Fig.28

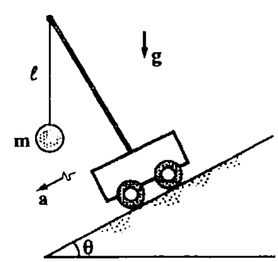


Fig.29

81. Un cuerpo de masa m = 10 g realiza oscilaciones amortiguadas de amplitud máxima A=7 cm, fase inicial $\phi_o = 0^0$ y coeficiente de amortiguación $\delta = 1{,}6$ s^{-1}. Sobre este cuerpo comienza a actuar una fuerza periódica exterior, produciéndose oscilaciones forzadas, cuya ecuación es: $x = 5\,\text{sen}(10\pi t - 0{,}75\pi)$ cm. Hallar la posición del cuerpo en el instante t=1 s, a partir de su posición de equilibrio.

a) 1,0 cm b) 1,2 cm c) 1,4 cm d) 1,6 cm e) 1,8 cm

82. Sobre un cuerpo de masa m=10 g en movimiento armónico amortiguado actúa la fuerza externa $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, si A=5 cm, $\omega_0 = 33$ rad/s, $\omega = 31{,}4$ rad/s, y $\delta = 1{,}6\ s^{-1}$ Hallar la magnitud de la fuerza externa en el instante t=1/30 s de iniciado el movimiento.

a) 30.mN b) 32 mN c) 34 mN d) 36 mN e) 38 mN

83. En la Fig.28, el péndulo de longitud ℓ=40 cm, formando un ángulo "β" con la vertical, se suelta. Hallar el período de oscilación de este péndulo, si los choques con la pared son absolutamente elásticos, y sabiendo que $\alpha = \beta/2$ y $g = 10\ m/s^2$.

a) 0,72 s b) 0,76 s c) 0,80 s d) 0,84 s e) 0,88 s

84. Una partícula inicia su movimiento en el instante t= 0 s, a lo largo del eje X, siendo la proyección de su velocidad v_x= 35 $\cos \pi t$ cm/s. Hallar la distancia recorrida por esta partícula en los primeros t=2,8 s de su movimiento.

a) 0,2 m b) 0,4 m c) 0,6 m d) 0,8 m e) 1,0 m

85. Un punto oscila armónicamente a lo largo de cierta recta con un período de T= 0,6 s y una amplitud de A= 10 cm. Hallar la velocidad media <v> del punto durante el tiempo, en el transcurso del cual éste recorre A/2, desde su posición de equilibrio.

a) 0,2 m/s b) 0,4 m/s c) 0,6 m/s d) 0,8 m/s e) 1,0 m/s

86. Una partícula de masa (m) se encuentra en un campo potencial unidimensional, siendo su energía potencial U(x) = U_0 (1- cos ax), con U_0 y a constantes. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones que realiza la partícula, alrededor de su posición de equilibrio.

a) $\dfrac{\pi m}{aU_o}$ b) $\dfrac{2\pi m}{aU_o}$ c) $(\dfrac{\pi^2 m}{aU_o})^{1/2}$ d) $(\dfrac{4\pi^2 m}{aU_o})^{1/2}$ e) $(\dfrac{4\pi^2 m}{a^2 U_o})^{1/2}$

87. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones de un péndulo matemático de longitud igual a ℓ=40 cm, sumergido totalmente en un líquido, cuya densidad es $\eta = 3$ veces menor que la de la bola del péndulo. Desprecie la resistencia del líquido. (g=10 m/s^2)

a) 1,14 s b) 1,24 s c) 1,34 s d) 1,44 s e) 1,54 s

88. Un punto participa simultáneamente de dos oscilaciones en una misma dirección, cuyas ecuaciones son: x_1=A $\cos \omega t$ y x_2=A cos $2\omega t$. Hallar la velocidad máxima del punto

a) 2,13 Aω b) 2,33 Aω c) 2,53 Aω d) 2,73 Aω e) 2,93 Aω

89. Una partícula se mueve con M.A.S a lo largo del eje X. En los instantes de tiempo t_0, $2t_0$ y $3t_0$ sus posiciones son a, b y c, respectivamente. Hallar el período de su movimiento.

a) $\dfrac{2\pi t_o}{sen^{-1}(a+b)/2c}$ b) $\dfrac{2\pi t_o}{cos^{-1}(a+b)/2c}$ c) $\dfrac{2\pi t_o}{sen^{-1}(a+c)/2b}$

d) $\dfrac{2\pi t_o}{cos^{-1}(a+c)/2b}$ e) $\dfrac{2\pi t_o}{sen^{-1}(b+c)/2a}$

90. En el instante de tiempo t_0 la coordenada de un oscilador es x_0 y su velocidad v_0. Probar que la dependencia entre su coordenada y el tiempo en caso de oscilaciones libres puede expresarse así: $x = x_0 \cos\omega(t-t_o) + (v_0/\omega)\,sen\,\omega(t-t_o)$.

91. Una partícula oscila según la ley x=A $\cos(\omega t - \phi_o)$ bajo la acción de la fuerza sinusoidal $F=F_0 \cos\omega t$, siendo $\omega = 4$ rad/s, A=2 cm, F_0=5 N y $\phi_o = 30^0$. Hallar la potencia media desarrollada por dicha fuerza.

a) 0,1 W b) 0,2 W c) 0,3 W d) 0,4 W e) 0,5 W

92. Un reloj de péndulo funciona correctamente en la superficie de la tierra. ¿En cuánto se atrasa ó adelanta el péndulo en 24 h; si se ubica en un pozo a la profundidad de h=400 m? (Radio de la tierra R= $6{,}37.10^6$ m , g=10 m/s^2)

a) 1,5 s b) 1,9 s c) 2,3 s d) 2,7 s e) 3,1 s

93. En la Fig.29, el carrito se mueve con una aceleración de a=4 m/s^2 por el plano inclinado que forma un ángulo de $\theta = 30^0$ con la horizontal. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones del péndulo de longitud ℓ=50 cm. (g=10 m/s^2)

a) 0,5 s b) 1,0 s c) 1,5 s d) 2,0 s e) 2,5 s

94. Un bloque que oscila libremente en un resorte, se desplaza durante el tiempo de t= 0,01 s desde la distancia de 0,5 cm con respecto a la posición de equilibrio hasta la máxima, igual a 1 cm. Hallar el período de sus oscilaciones.

a) 0,01 s b) 0,02 s c) 0,04 s d) 0,06 s e) 0,08 s

95. La frecuencia de las oscilaciones libres de un oscilador es ω. ¿Después de qué tiempo mínimo la energía cinética del oscilador disminuirá desde el valor máximo hasta la mitad de éste?

a) $\pi/2\omega$ b) $\pi/3\omega$ c) $\pi/4\omega$ d) $\pi/6\omega$ e) $\pi/8\omega$

96. La frecuencia natural con la que oscila un cuerpo conectado a un resorte es f_0 = 20 osc/s mientras que su frecuencia con amortiguamiento es f=16 osc/s. Hallar el decremento logarítmico (ξ).

a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 3/4 e) 4/5

97. En la Fig.30, hallar el período de las oscilaciones que realiza el mercurio de masa m=200 g, densidad $\rho = 13{,}6.10^3$ kg/m^3 contenido en el tubo curvado, cuyo rama derecha forma un ángulo de $\theta = 30^0$ con la vertical. El área de las sección del tubo recto es A= 0,5 cm^2. Desprecie la viscosidad del mercurio. (g=10 m/s^2)

a) 0,63 s   b) 0,67 s   c) 0,71 s   d) 0,75 s   e) 0,79 s

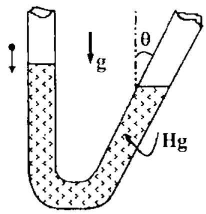


Fig.30

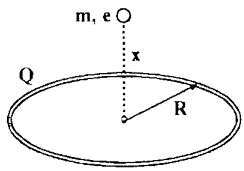


Fig.31

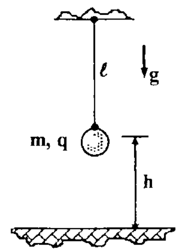


Fig.32

98. En la Fig.31, en el eje del anillo metálico de radio R=30cm y carga Q=+3.10^{-10} C distribuida uniformemente, se ubica un electrón a una distancia "x" de su centro (x<<R). Hallar el período de las pequeñas oscilaciones que realiza el electrón. (e=1,6.10^{-19} C, m_e= 9,1.10^{-31} kg $k = 9.10^9$ N.m^2/ C^2 y $\mu = 10^{-6}$)

a) 1,3 μs   b) 1,5 μs   c) 1,7 μs   d) 1,9 μs   e) 2,1 μs

99. Se tienen 4 cargas "q" fijas en los vértices de un cuadrado horizontal de lado $10\sqrt{2}$ cm. Una carga q=-1,6.10^{-19} C de masa m = 9,1.10^{-31} kg se desplaza desde el centro del cuadrado hacia arriba una pequeña distancia "x" y se suelta. Hallar el período de sus oscilaciones (desprecie la gravedad, además $10\sqrt{2} >> x$ y $k = 9.10^9$ N.m^2/ C^2)

a) 6,20 ms   b) 6,22 ms   c) 6,24 ms   d) 6,26 ms   e) 6,28 ms

100. En la Fig.32, la esferita de masa m= 9.10^{-23} kg y carga eléctrica q= 8.10^{-10} C está suspendido de un hilo de longitud ℓ=4 cm. A una distancia de h=2 cm debajo del mismo, se halla una lámina metálica infinita. Hallar el período de las oscilaciones libres de la esferita. (n=10^{-9})

a) 1π ns   b) 2π ns   c) 3π ns   d) 4π ns   e) 5π ns

101. Dos cargas Q=+4.10^{-9} C están fijas y separadas por una distancia a=1 cm. Una tercera carga q=-8.10^{-10} C de masa m = 9.10^{-22} kg, se ubica a una distancia "x" del centro de la recta que une las cargas "Q" (x<<d), y se libera. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones que realiza la carga "q". ($k = 9.10^9$ N.m^2/ C^2 , p=10^{-12})

a) 88,0π ps   b) 88,2π ps   c) 88,4π ps   d) 88,6π ps   e) 88,8π ps

102. En la cabina de un ascensor que empezó a elevarse del reposo con una aceleración constante de $a=5$ m/s^2, se instaló un reloj de péndulo. Habiendo recorrido una altura de $h=10$ m, la aceleración de la cabina cambio de sentido manteniéndose igual su módulo ¿Después de qué tiempo de iniciado el movimiento la indicación del reloj es correcta? ($g=10$ m/s^2)

a) 3,13 s b) 3,33 s c) 3,53 s d) 3,73 s e) 3,93 s

103. En la Fig.33, los bloques de masas $m_1 = 9$ kg y $m_2 = 16$ kg están unidos mediante un re sorte de constante elástica $k=576$ N/m. Se comprime el resorte mediante dos hilos. Ha llar el período de oscilación de los bloques, al quemarse los hilos.

a) $\pi/2$ s b) $\pi/3$ s c) $\pi/4$ s d) $\pi/5$ s e) $\pi/6$ s

104. En la Fig.34, el péndulo en forma de un recipiente esférico liviano muy delgado de ra dio R, está llena de agua y está unida al punto O mediante una barra liviana rígida.¿ Cuántas veces variará el período de las pequeñas oscilaciones de este péndulo, cuando el agua se congele completamente ? Desprecie la viscosidad del agua y la variación de su volumen.($\ell=2R$)

a) 1,05 b) 1,15 c) 1,25 d) 1,35 e) 1,45

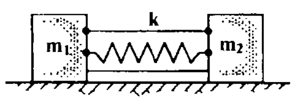


Fig.33

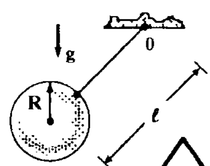


Fig.34

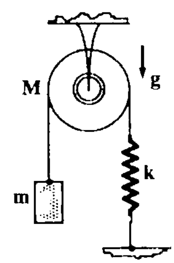


Fig.35

105. En la Fig.35, el bloque de masa $m=8$ kg , está unido al resorte de constante elástica $k=720$ N/m, mediante una cuerda inextensible que pasa a través de la polea en forma de cilindro de paredes delgadas de masa $M=12$ kg. Hallar el período de las oscilaciones que realiza el bloque.

a) $\pi/2$ s b) $\pi/3$ s c) $\pi/4$ s d) $\pi/5$ s e) $\pi/6$ s

106. Un reloj de péndulo simple se calibra para funcionar exacto con una amplitud de $\theta_0 = 5^0$, si la amplitud disminuye, tal que, $\theta_0 << 5^0$, ¿Qué tiempo aproximadamente se a delantará el reloj en un día?

a) 2,13 min b) 2,33 min c) 2,53 min d) 2,73 min e) 2,93 min

107. En la Fig.36, en el instante inicial $t_0 = 0$, el bloque de masa (m) se desplaza hasta x_0= 0,1 m y se lanza con una velocidad inicial v_0=1 m/s, siendo la frecuencia angular de las oscilaciones $\omega = 6$ rad/s. Hallar la posición del bloque en el instante t=1,4 s, a partir de su posición de equilibrio.

a) 1 cm b) 3 cm c) 5 cm d) 7 cm e) 9 cm

108. En la Fig.37, el resorte vertical tiene una constante elástica de k=16 N/m. En el instante inicial t_0= 0, una fuerza dada por F(t) = 64 sen 4t (N), se aplica al bloque de masa m=4 kg. Despreciando el amortiguamiento, hallar la posición del bloque en el instante t= 0,5 s, respecto de la posición de equilibrio.

a) 0,25 m b) 0,50 m c) 0,75 m d) 1,00 m e) 1,25 m

109. En la Fig.38, la esferita de masa m=2 kg se mueve a lo largo del eje X, atraída hacia el origen por una fuerza de magnitud 8x (N), y una fuerza amortiguadora de magnitud 8v (N). Hallar la posición de la esferita en el instante t= 0,5 s, a partir de su posición de equilibrio.

a) 1,07 m b) 1,27 m c) 1,47 m d) 1,67 m e) 1,87 m

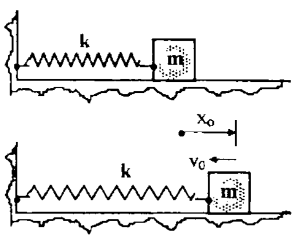


Fig.36

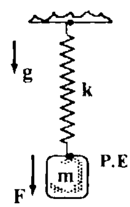


Fig.37

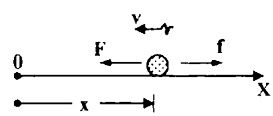


Fig.38

110. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones que realiza una barra homogénea de longitud ℓ=37,5 cm, al girar alrededor de un eje horizontal, que pasa por uno de sus extremos. ($g \approx \pi^2$ m/s^2)

a) 0,25 s b) 0,50 s c) 0,75 s d) 1,00 s e) 1,25 s

111. En la Fig.39, el anillo homogéneo muy delgado de radio R= 12,5 cm está suspendido de una varilla horizontal. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones que realiza el anillo alrededor de la varilla. ($g \approx \pi^2$ m/s^2)

a) 0,5 s b) 1,0 s c) 1,5 s d) 2,0 s e) 2,5 s

112. En la Fig.40, en el punto medio A se ubica una esferita de masa m= 0,4 kg y se conecta a los extremos de los resortes de constantes elásticas k=100 N/m y de longitudes normales ℓ_0=5 cm, luego se desliza la esferita verticalmente una pequeña distancia y ($y \ll \ell_0$), y se libera. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones que realiza la esferita. (d= 25 cm)

a) $\pi/5$ s b) $\pi/10$ s c) $\pi/15$ s d) $\pi/20$ s e) $\pi/25$ s

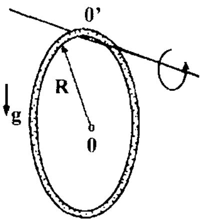


Fig.39

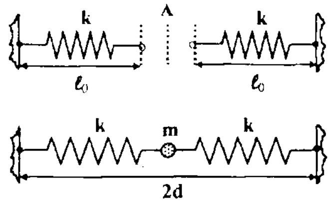


Fig.40

113. En la Fig.41, el disco homogéneo muy delgado de radio R=25 cm y masa m=1,28 kg cuelga de una varilla de constante de torsión k'= 360 N.m, y a su vez, su borde está conectado mediante un resorte de constante elástica k= 640 N/m a la pared. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones del disco, cuando la varilla experimenta una pequeña deformación.

a) 5πms b) 10πms c) 15πms d) 20πms e) 25πms

114. En la Fig.42, hallar el período de las pequeñas oscilaciones que realiza la placa cuadrada homogénea muy delgada de lado a = 48 cm y masa m = 6 kg, alrededor de su posición de equilibrio. (g=10 m/s^2)

a) $0,1\pi$ s b) $0,2\pi$ s c) $0,3\pi$ s d) $0,4\pi$ s e) $0,5\pi$ s

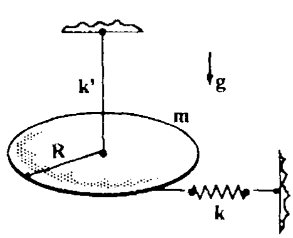


Fig.41

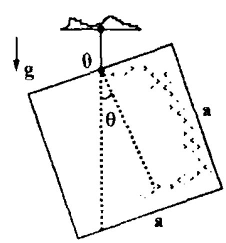


Fig.42

115. Una bolita de masa m=50 g y radio r=1 cm realiza pequeñas oscilaciones sobre una superficie esférica fija de radio. R=50/7 m, alrededor de su posición de equilibrio. Hallar el período de dichas oscilaciones. (g=10 m/s^2)

a) π s b) 2π s c) 3πs d) 4πs e) 5πs

116. En la Fig.43, la varilla homogénea de longitud 2ℓ=80 cm y masa "m" está en reposo al interior de la superficie totalmente lisa del cilindro de radio R=50 cm, contenida en un plano vertical. Hallar: (g=10 m/s^2)

I) El período de las pequeñas oscilaciones que realiza la varilla al sacarse de su estado de reposo.

a) 1,17 s b) 1,37 s c) 1,57 s d) 1,77 s e) 1,97 s

II) El aumento (A) o disminución (D) del período de las pequeñas oscilaciones que realiza la varilla, al colocarse en sus extremos dos bolas muy pequeñas de masas "m", y asumiendo que el peso de la varilla es despreciable.

a) D, 0,22 s b) A, 0,22 s c) D, 0,44 s d) A, 0,44 s e) D, 0,66 s

117. En la Fig.44, la esfera sólida de radio "b" rueda en el interior de la esfera hueca lisa de radio "a". Demostrar que el período de las pequeñas oscilaciones armónicas que realiza la esfera de radio "a", viene dado por: $T = 2\pi[7(a-b)/5g]^{1/2}$.

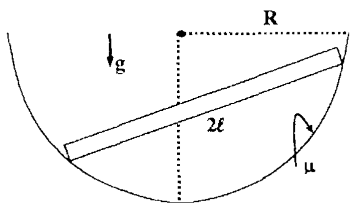


Fig.43

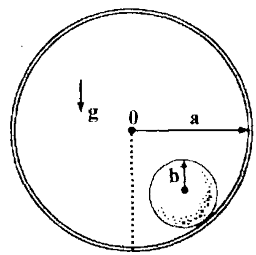


Fig.44

118. Una esfera sólida homogénea de radio R=40 cm y masa m=20 kg se suspende de un punto situado sobre su superficie. Hallar: (g=10 m/s^2)

I) El período de las pequeñas oscilaciones que realiza la esfera en un plano vertical, alrededor de su posición de equilibrio.

a) 1,09 s b) 1,29 s c) 1,49 s d) 1,69 s e) 1,89 s

II) La longitud del péndulo simple, que tiene el mismo período que el de la esfera.

a) 50 cm b) 52 cm c) 54 cm d) 56 cm e) 58 cm

119. Una placa homogénea delgada en forma de triángulo equilátero de masa "m", altura igual a h=80 cm, realiza oscilaciones pequeñas alrededor de un eje horizontal que coincide con uno de sus lados. Hallar el período de las oscilaciones. (g=10 m/s^2)

a) $2\pi/3$s b) $3\pi/4$s c) $2\pi/5$s d) $3\pi/7$s e) $4\pi/9$s

SOLUCIONARIO

Solución: 01

• Por dato, los períodos del péndulo en la Tierra (T_1) y en el planeta (T_2) son iguales, esto es:

$$T_1 = T_2$$

$$2\pi[\frac{\ell_1}{g_1}]^{1/2} = 2\pi[\frac{\ell_2}{g_2}]^{1/2}$$

$$\frac{\ell_1}{g_1} = \frac{\ell_2}{g_2} \Rightarrow \frac{50}{g} = \frac{\ell_2}{1{,}2g}$$

♣ $\ell_2 = 60\text{cm}$ (E)

Solución: 02

• Como el período de una oscilación es T=1 s, entonces, se tiene:

$$T = 2\pi[\frac{\ell}{g}]^{1/2} \Rightarrow 1 = 2\pi[\frac{\ell}{\pi^2}]^{1/2}$$

♣ $\ell = 0{,}25\text{m}$ (D)

Solución: 03

• Como la longitud inicial (ℓ) del péndu lo aumenta en un 21 %, su longitud final es ($1{,}21\ell$), luego dividiendo los períodos, se tiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi[\ell_2 / g\}^{1/2}}{2\pi[\ell_1 / g]^{1/2}} = \frac{[\ell_2]^{1/2}}{[\ell_1]^{1/2}}$$

$$\frac{T_2}{4} = \frac{(1{,}21\ell)^{1/2}}{(\ell)^{1/2}} = 1{,}1$$

♣ $T_2 = 4{,}4\text{s}$ (C)

Solución: 04

• Por dato, el período T_2 es dos veces el período T_1, cuando se aumenta la longitud del péndulo en 3 m, esto es:

$$T_2 = 2T_1$$

$$2\pi[\frac{\ell + 3}{g}]^{1/2} = 4\pi[\frac{\ell}{g}]^{1/2}$$

$$\ell + 3 = 4\ell$$

♣ $\ell = 1\text{m}$ (B)

Solución: 05

• Primero, hallemos los períodos de cada uno de los péndulos, así:

$$T_1 = 2\pi\,[\frac{\ell_1}{g}]^{1/2} = 2\pi\,[\frac{6{,}25}{\pi^2}]^{1/2} = 5\text{ s}$$

$$T_2 = 2\pi\,[\frac{\ell_2}{g}]^{1/2} = 2\pi\,[\frac{2{,}25}{\pi^2}]^{1/2} = 3\text{ s}$$

Luego, el tiempo mínimo, para el cual, la posición inicial de los péndulos se repite, será el m.c.m de los períodos T_1 y T_2, esto es:

♣ $t_{min} = 15\text{s}$ (B)

Solución: 06

• El período del sistema, es igual, a la su ma de dos semiperíodos de los péndulos de longitud ℓ y $4\ell/9$, esto es:

$$T = t_1 + t_2$$

$$T = \pi[\frac{\ell}{g}]^{1/2} + \pi[\frac{4\ell/9}{g}]^{1/2}$$

$$T = \frac{5\pi}{3}[\frac{0{,}09}{\pi^2}]^{1/2}$$

♣ $T = 0{,}5\text{ s}$ (C)

Solución: 07

• El tiempo pedido, es igual, a la suma de dos semiperíodos de los péndulos de longitudes $\ell_1 = 4$ m y $\ell_2 = 1$ m, esto es:

$$t = t_1 + t_2$$

$$t = \pi[\frac{\ell_1}{g}]^{1/2} + \pi[\frac{\ell_2}{g}]^{1/2}$$

$$t = \pi[\frac{4}{\pi^2}]^{1/2} + \pi[\frac{1}{\pi^2}]^{1/2}$$

$$t = 2s + 1s$$

$$♣\ t = 3\,s \qquad (C)$$

Solución: 08

• Cuando el ascensor asciende verticalmente, la bolita del péndulo experimenta una aceleración adicional (a) hacia abajo, debido a la fuerza de inercia, de modo que su aceleración neta es:

$$a_n = g + a = 9{,}8 + 2{,}2 = 12\ m/s^2$$

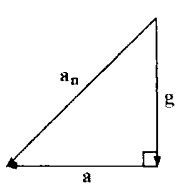
Luego, el período de las oscilaciones que realiza el péndulo en el ascensor es:

$$T = 2\pi[\frac{\ell}{a_n}]^{1/2} = 2\pi[\frac{3}{12}]^{1/2}$$

$$♣\ T = \pi\,s \qquad (C)$$

Solución: 09

• La bolita experimenta la aceleración de la gravedad (g) y la aceleración (a) debida a la fuerza de inercia, como se aprecia en la Fig.



Así, de la Fig., la aceleración neta que experimenta la bolita del péndulo es:

$$a_n = [g^2 + a^2]^{1/2}$$

$$a_n = [7{,}5^2 + 10^2]^{1/2} = 12{,}5\ m/s^2$$

Luego, la frecuencia de las oscilaciones que realiza el péndulo es:

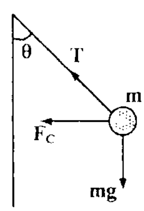
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi[\frac{\ell}{a_n}]^{1/2}$$

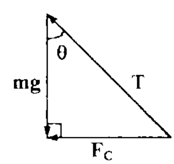
$$\frac{1}{f} = 2\pi[\frac{0{,}5}{12{,}5}]^{1/2}$$

$$♣\ f = \frac{5}{2\pi}\frac{osc}{s} \qquad (D)$$

Solución: 10

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la bolita del péndulo, y con ellas formemos el triángulo de fuerzas.





En el triángulo rectángulo, se cumple que:

$$tg\,\theta = \frac{F_c}{mg} = \frac{m(v^2/R)}{mg}$$

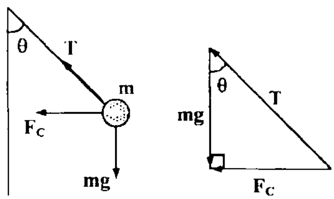
$$tg\,\theta = \frac{v^2}{gR} = \frac{20^2}{(10)(40)}$$

$$tg\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = tg^{-1}(1)$$

$$♣\ \theta = 45^o \qquad (C)$$

Solución: 11

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la bolita del péndulo, y con ellas formemos el triángulo de fuerzas.



En el triángulo rectángulo, se cumple que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_c}{mg} = \frac{m(v^2/R)}{mg}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m(4\pi^2 f^2 R^2/R)}{mg}$$

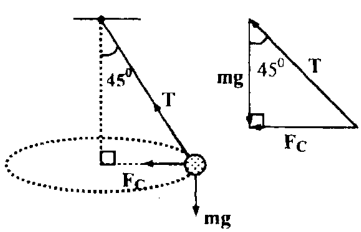
$$f^2 = \frac{g}{4\pi^2 R}\operatorname{tg}\theta$$

$$f = [\frac{(\pi^2)(\operatorname{tg}45^o)}{4\pi^2 0{,}25}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ f = 1\frac{osc}{s} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 12

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la bolita del péndulo, y con ellas formemos el triángulo de fuerzas.



En el triángulo rectángulo, se cumple:

$$\operatorname{tg}45^o = \frac{F_C}{mg} = \frac{m\omega^2 R}{mg}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R} = \frac{10}{0{,}1} \Rightarrow \omega^2 = 100$$

$$\clubsuit\ \omega = 10\frac{rad}{s} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 13

• En movimiento armónico simple, la velocidad lineal máxima, viene dado por:

$$v_{max} = \omega A = 2\pi f A$$

$$v_{max} = (2\pi)(2)(0{,}5)$$

$$\clubsuit\ v_{max} = 2\pi\frac{m}{s} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 14

• De la expresión de la velocidad máxima, hallemos el período, así:

$$v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T}A$$

$$0{,}4 = (\frac{2\pi}{T})(0{,}10)$$

$$\clubsuit\ T = \frac{\pi}{2}s \qquad \text{(A)}$$

Solución: 15

• De la expresión de la velocidad lineal máxima, tenemos:

$$T = 2\pi[\frac{\ell}{g}]^{1/2} = 2\pi[\frac{(24{,}7.10^{-2}}{9{,}8}]^{1/2}$$

$$v_{max} = (\frac{2\pi}{\pi})(0{,}04) = 0{,}08\frac{m}{s}$$

En el instante en que la velocidad es máxima, la energía potencial es cero, de modo que, la energía mecánica del sistema oscilatorio es:

$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = (\frac{1}{2})(3)(0,08)^2$$

$$\clubsuit \; E = 9,6.10^{-3} J$$ (D)

Solución: 16

• Utilizando la expresión de la velocidad lineal máxima, tenemos:

$$v_{max} = \omega A = (\frac{k}{m})^{1/2} A$$

$$0,5 = (\frac{40}{10})^{1/2} A$$

$$\clubsuit \; A = 0,25 \text{ m}$$ (D)

Solución: 17

• Recordemos que la expresión de la velocidad instantánea en un M.A.S, viene dado por:

$$v = \frac{2\pi}{T} A \cos(\frac{2\pi}{T} t + \phi_o)$$

Evaluando para, T=2 s, $\phi_o = \pi/2$, t=T/4, tenemos:

$$v = (\frac{2\pi}{2})(0,1)\cos(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} + \frac{\pi}{2})$$

$$\clubsuit \; v = -0,1 \frac{m}{s}$$ (B)

Solución: 18

• El móvil tiene máxima aceleración en los extremos del movimiento oscilatorio, es decir, cuando x = ±A, de modo que la fuerza elástica máxima es:

$$F_{max} = kA$$

De otro lado, de la expresión del período, tenemos:

$$T = 2\pi [\frac{m}{k}]^{1/2}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Con esto y de la segunda ley de Newton, la expresión inicial se reduce a:

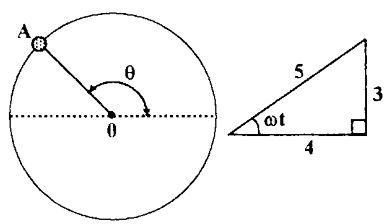
$$m\, a_{max} = \frac{4\pi^2 m}{T^2} A$$

$$a_{max} = \frac{(4\pi^2)(0,16)}{(0,8)^2}$$

$$\clubsuit \; a_{max} = \pi^2 \frac{m}{s^2}$$ (A)

Solución: 19

• Representemos el movimiento oscilatorio armónico del móvil.



De la expresión de la velocidad instantanea, del móvil, tenemos:

$$v = \omega A \cos(\omega t + \phi_o)$$

$$180 = (5)(60)\cos(\omega t + \phi_o)$$

$$\cos(\omega t + \phi_o) = 3/5$$

$$\Rightarrow \; \text{sen}(\omega t + \phi_o) = \pm\frac{4}{5}$$

Luego, la posición del móvil en cualquier instante de tiempo es:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_o)$$

$$x = (60)(\pm\frac{4}{5})$$

$$\clubsuit\quad x = \pm 48\ \text{cm} \qquad \text{(E)}$$

«Existen dos posiciones, en el cual, la velocidad del móvil, es de 180 cm/s»

Solución: 20

• Tomemos el eje X a lo largo del plano inclinado, tal que, la frecuencia angular con que oscila el carrito, alrededor de su posición de equilibrio (P.E) es:

$$\omega = [\frac{k}{m}]^{1/2}$$

$$\omega = [\frac{200}{2}]^{1/2} = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Evaluando la ecuación del movimiento armónico del carrito, en el instante inicial t_0=0 s, hallemos la fase inicial, así:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_o)$$

$$A = A\,\text{sen}(0 + \phi_o)$$

$$\phi_o = \pi/2$$

Luego, la ecuación de movimiento armónico del carrito, para cualquier instante de tiempo es:

$$x = 0{,}05\,\text{sen}(10t + \frac{\pi}{2})$$

$$\clubsuit\quad x = 0{,}05\cos(10t)\ (\text{m}) \qquad \text{(B)}$$

Solución: 21

• Para un pequeño desplazamiento horizontal del bloque, los resortes experimentan deformaciones iguales, de modo que, su conexión es en paralelo, y la constante elástica equivalente es:

$$k_e = k_1 + k_2$$

$$k_e = 980 + 980$$

$$k_e = 1960\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Luego, el período de las oscilaciones armónicas que realiza el bloque es:

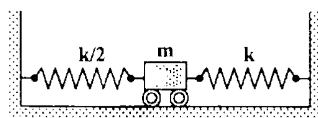
$$T = 2\pi\,[\frac{m}{k_e}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\,[\frac{2}{1960}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\quad T = 0{,}2\ \text{s} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 22

• Reduciendo el sistema inicial de resortes obtenemos dos resortes de constantes elásticas k/2 y k.



Ahora, para un pequeño desplazamiento del bloque los resortes experimentan deformaciones iguales, por lo que su conexión es en paralelo, y la constante elástica del sistema oscilatorio es:

$$k_e = k_1 + k_2$$

$$k_e = (\frac{1}{2})(2000) + 2000$$

$$k_e = 3000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Luego, el período de las oscilaciones armónicas que realiza el bloque es:

$$T = 2\pi[\frac{m}{k_e}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{0,3}{3000}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = \frac{\pi}{50}\ s \qquad \text{(E)}$$

Solución: 23

• Como los resortes de constantes elásticas k_1 y k_2, están conectados en serie, su constante elástica equivalente es:

$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$k_e = \frac{(600)(300)}{600 + 300}$$

$$k_e = 200\ N/m$$

Luego, el período de las oscilaciones armónicas que realiza el bloque es:

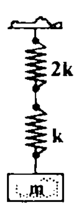
$$T = 2\pi[\frac{m}{k_e}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{18}{200}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = \frac{3\pi}{5}\ s \qquad \text{(C)}$$

Solución: 24

• Reduciendo el sistema inicial de resortes obtenemos dos resortes de constantes elásticas 2k y k.



Como se observa, cada uno de los resortes experimenta una misma tensión, por lo que están conectados en serie, siendo su constante elástica equivalente igual a:

$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$k_e = \frac{(6000)(3000)}{6000 + 3000}$$

$$k_e = 2000\ N/m$$

Luego, el período de las oscilaciones armónicas que realiza el bloque es:

$$T = 2\pi[\frac{m}{k_e}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{0,2}{2000}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = \frac{\pi}{50}\ s \qquad \text{(E)}$$

Solución: 25

• Como los resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 están conectados en paralelo, su constante elástica equivalente es:

$$k_e = k_1 + k_2 = 1800 + 2200$$

$$k_e = 4\,000\ \frac{N}{m}$$

Luego, el período de las oscilaciones armónicas que realiza el bloque es:

$$T = 2\pi[\frac{m}{k_e}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{10}{4000}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = (\frac{\pi}{10})\ s \qquad \text{(A)}$$

Solución: 26

• La razón entre las magnitudes de la aceleración máxima y velocidad máxima es:

$$\frac{a_{max}}{v_{max}} = \frac{\omega^2 A}{\omega A} = 4\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$$

$$\clubsuit \; T = 0{,}5 \text{ s}$$ (E)

Solución: 27

• El porcentaje que representa la energía cinética del movimiento oscilatorio armónico, respecto de la energía total es:

$$\eta = \left(\frac{E_A - E_{A/2}}{E_A}\right)(100)$$

siendo, E_A y $E_{A/2}$ las energías potenciales elásticas para x=A y x=A/2, respectivamente.

$$\eta = \left(\frac{1/2kA^2 - 1/2k(A/2)^2}{1/2kA^2}\right)(100)$$

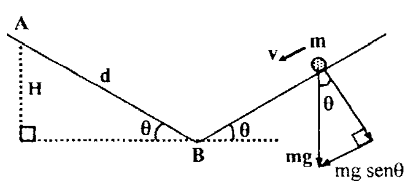
$$\eta = \left(\frac{3/8kA^2}{1/2kA^2}\right)(100)$$

$$\eta = \left(\frac{3}{4}\right)(100)$$

$$\clubsuit \; \eta = 75 \%$$ (E)

Solución: 28

• Representemos la fuerza que actúan sobre la esferita en todo instante.



En la Fig., la aceleración con la que se mueve la esferita es:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{mg \,\text{sen}\,\theta}{m} = g \,\text{sen}\,\theta$$

También, en la Fig., la distancia recorrida (d) entre A y B es:

$$d = H \csc\theta$$

De otro lado, el tiempo de recorrido entre A y B, hallamos de:

$$d = v_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$H \csc\theta = 0 + \frac{1}{2}(g \,\text{sen}\,\theta)\, t^2$$

$$t = \left(\frac{2H}{g}\right)^{1/2} \csc\theta$$

Luego, el período del movimiento oscilatorio que realiza la bolita es:

$$T = 4t = \left(\frac{32H}{g}\right)^{1/2} \csc\theta$$

$$T = \left[\frac{(32)(0{,}2)}{10}\right]^{1/2}\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\clubsuit \; T = \frac{4}{3} \text{ s}$$ (E)

Solución: 29

• Hallemos la constante elástica "k" del resorte, a partir de:

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\left[\frac{m}{k}\right]^{1/2}$$

$$k = 4\pi^2 f^2 m = (4\pi^2)\left(\frac{1}{2}\right)^2(2)$$

$$k = 2\pi^2$$

Luego, el nuevo período del sistema oscilatorio, cuando se añade una masa de 1 kg, es:

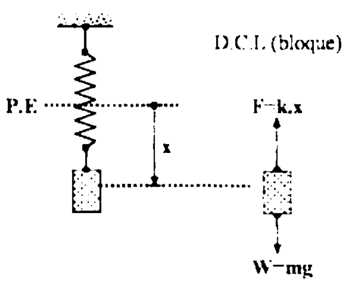
$$T = 2\pi\left[\frac{m + \Delta m}{k}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{1,5 + 0,5}{2\pi^2}\right]^{1/2}$$

$$♣\ T = 2\ s \qquad \text{(C)}$$

Solución: 30

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el bloque.



Como el bloque está en equilibrio, igualando el peso (mg) a la fuerza elástica (kx), obtenemos la constante elástica "k" así:

$$kx = mg \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{x}$$

Luego, sustituyendo (k) en la expresión del período, tenemos:

$$T = 2\pi\left[\frac{m}{k}\right]^{1/2}$$

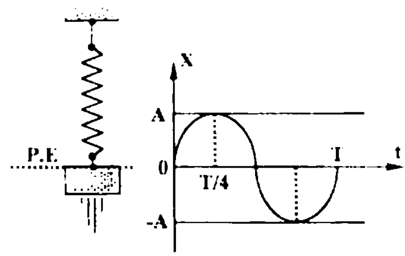
$$T = 2\pi\left[\frac{m}{mg/x}\right]^{1/2} = 2\pi\left[\frac{x}{g}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{0,25}{\pi^2}\right]^{1/2}$$

$$♣\ T = 1\ s \qquad \text{(B)}$$

Solución: 31

• Representemos la gráfica de la posición instantánea (x) en función del tiempo (t).



Como, el tiempo se mide a partir de la posición de equilibrio, entonces, evaluando la ecuación de posición, hallemos la fase inicial, así:

$$x = A\,\text{sen}(\omega\, 0 + \phi_o) = 0$$

$$\phi_o = 0$$

Luego, sustituyendo x=A/2 en la ecuación de posición, obtenemos el tiempo pedido:

$$x = A\,\text{sen}(\omega\, t + \phi_o) = \frac{A}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + 0\right) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6}$$

$$♣\ t = \frac{T}{12} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 32

• La energía del cuerpo en movimiento oscilatorio armónico, viene dado por:

$$\frac{1}{2}kA^2 = 30.10^{-6}\,J$$

$$kA^2 = 6.10^{-5}\,J \qquad (1)$$

De otro lado, la magnitud de la fuerza máxima que actúa sobre el cuerpo es:

$$kA = 1{,}5.10^{-3}\,N \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2), obtenemos:

$$A = 0{,}04\ m$$

A su vez, la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ \frac{rad}{s}$$

Finalmente, la ecuación de posición en cada instante de tiempo es:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_o)$$

C

$$\clubsuit\ x = 0{,}04\,\mathrm{sen}(\pi t + \frac{\pi}{4})\ (m)$$

Solución: 33

• De la expresión de la aceleración máxima de la partícula, hallemos la frecuencia angular, así:

$$a_{max} = \omega^2 A$$

$$8000 = \omega^2 (0{,}1)$$

$$\omega^2 = 8.10^4\ \frac{rad^2}{s^2}$$

Ahora, calculemos la aceleración instantanea, para x= 0,04 m, a partir de:

$$a = \omega^2 x$$

$$a = (8.10^4)(0{,}04)$$

$$a = 3\,200\ \frac{m}{s^2}$$

Luego, aplicando la 2da ley de Newton en la posición x= 0,04, obtenemos la fuerza:

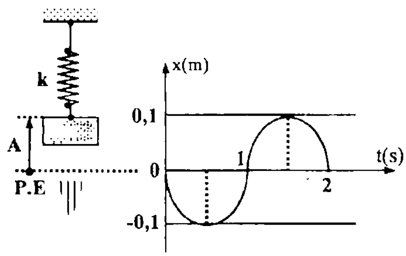
$$F = ma = (0{,}1)(3200)$$

C

$$\clubsuit\ F = 320\ N$$

Solución: 34

• Representemos la gráfica de la posición instantánea (x) en función del tiempo (t).



Primero, calculemos la frecuencia angular del movimiento oscilatorio armónico, así:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi[\frac{m}{k}]^{1/2}$$

$$\omega = [\frac{20}{5}]^{1/2} = 2\ \frac{rad}{s}$$

A continuación, evaluando la ecuación de posición en el instante t= 0, hallemos la fase inicial del movimiento oscilatorio, así:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega\,0 + \phi_o) = A$$

$$\mathrm{sen}\,\phi_o = 1 \ \Rightarrow\ \phi_o = \frac{\pi}{2}$$

Luego, la posición de la partícula en cada instante de tiempo, será:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega\,t + \phi_o)$$

$$x = 0{,}1\,\mathrm{sen}(2\,t + \frac{\pi}{2})$$

C

$$\clubsuit\ x = 0{,}1\cos 2t$$

Solución: 35

• Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento, hallemos la velocidad del bloque (u), después del impacto de la bala, así:

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues}$$

$$m\,v = (m + M)\,u$$

$$u = \frac{m}{(m+M)}\,v \qquad (1)$$

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, hallemos la amplitud (A) del movimiento oscilatorio, así:

$$E_{sistema} = E_{cinetica}$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m+M)\,u^2$$

$$A = [\frac{m+M}{k}]^{1/2}u \qquad (2)$$

De (1) y (2), obtenemos la amplitud del movimiento oscilatorio:

$$A = \frac{m}{[(m+M)k]^{1/2}}v$$

$$A = \frac{(0{,}05)(200)}{[(0{,}05+10)(400)]^{1/2}}$$

$$♣\ A \approx 0{,}158\ m \qquad \text{(C)}$$

Solución: 36

• Como la amplitud del movimiento oscilatorio del bloque es A=2 m, entonces, aplicando, el principio de conservación de la energía mecánica, se tiene:

$$E_{sistema} = E_C + E_P$$

La velocidad es máxima, cuando x= 0, por tanto la energía potencial elástica es nula, E_P= 0, luego, la expresión anterior queda así:

$$E_{sistema} = E_C$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$(300)(2)^2 = (3)\,v^2$$

$$♣\ v_{max} = 20\ \frac{m}{s} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 37

• Sea (v) la velocidad máxima del bloque antes del choque, y (u) la velocidad máxima del sistema después del choque, entonces, del principio de conservación de la cantidad de movimiento, se tiene:

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues}$$

$$m\,v = (m + M)\,u$$

$$u = \frac{m}{(m+M)}\,v \qquad (1)$$

Ahora, aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, se tiene:

Antes del choque:

$$\frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}m\,v^2 \qquad (2)$$

Después del choque:

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}(m+M)\,u^2 \qquad (3)$$

Dividiendo (2) entre (3):

$$\frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{m\,v^2}{(m+M)\,u^2} \qquad (4)$$

Finalmente, de (1) en (4), obtenemos la amplitud del nuevo sistema oscilatorio:

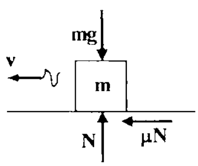
$$A_2 = [\frac{m}{m+M}]^{1/2} A_1$$

$$A_2 = (\frac{4}{4+5})^{1/2}(0,3)$$

$$♣ \; A_2 = 0,2 \text{ m}$$ (C)

Solución: 38

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el bloque de masa (m).



La aceleración máxima que experimenta el bloque es cuando la velocidad es mínima (v= 0), es decir en los extremos.
De la ecuación de movimiento del bloque de masa (m), se tiene:

$$F = m\,a \quad => \quad \mu N = m\,a$$

$$\mu (mg) = m\,a \quad => \quad a = \mu g$$

De la ecuación de movimiento del sistema (m+M) en el punto extremo, cuando x=A (Amplitud), obtenemos:

$$F = (m+M)\,a$$

$$k\,A = (m+M)\,\mu g$$

$$A = \frac{(m+M)\,\mu\, g}{k}$$

$$A = \frac{(2+10)(1/2)(10)}{500}$$

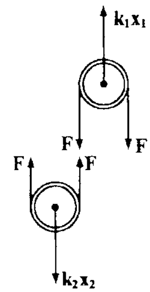
$$♣ \; A = 0,12 \text{ m}$$ (B)

Solución: 39

• En la Fig, como las poleas "1" y "2" están en equilibrio, se cumple:

$$k_1.x_1 = k_2.x_2 \quad => \quad (2k_2)\,x_1 = k_2\,x_2$$

$$x_2 = 2x_1 \qquad (1)$$

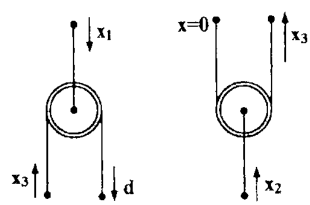


En la Fig., las longitudes que se deforman las poleas "1" y "2" son:

$$x_1 = \frac{d - x_3}{2} \qquad (2)$$

$$x_2 = \frac{0 + x_3}{2} \qquad (3)$$

DESPLAZAMIENTO 1 DESPLAZAMIENTO 2



Resolviendo (2) y (3), tenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{d}{2}$$

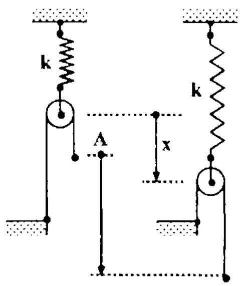
$$x_1 + x_2 = 6 \qquad (4)$$

Finalmente, de (1) y (4): (A)

$$♣ \; x_1 = 2 \text{ cm} \; ; \; x_2 = 4 \text{ cm}$$

Solución: 40

• En la Fig., si la polea móvil desciende una distancia "x" (x: deformación del resorte), entonces el punto "A" de la cuerda desciende "2x".



En la representación de fuerzas, la tensión en el resorte es igual a F=k.x.

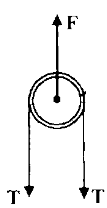
A) Sea, $T = k_e x_e$ la tensión en la cuerda es siendo k_e la constante elástica equivalente y x_e la deformación equivalente, entonces, como la polea está en equilibrio, tenemos:

$$2T = F \quad => \quad 2k_e x_e = k x$$

Pero se sabe que, $x_e = 2x$, de modo que:

$$2k_e(2x) = k x$$

$$k_e = \frac{k}{4} = \frac{400}{4} = 100\ \frac{N}{m}$$ (A)



B) De otro lado, el período del movimiento oscilatorio armónico de la masa (m) es:

$$T = 2\pi\left[\frac{m}{k_e}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{m}{k/4}\right]^{1/2} = 4\pi\left[\frac{m}{k}\right]^{1/2}$$

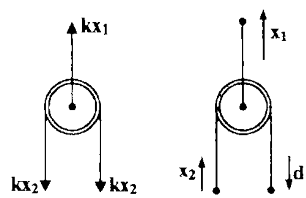
$$T = 4\pi\left[\frac{4}{400}\right]^{1/2}$$

♣ $T = 0{,}4\pi$ s (C)

Solución: 41

• Representemos las fuerzas y los desplazamientos de las cuerdas en la polea móvil.

D.C.L (POLEA) DESPLAZAMIENTO



En la Fig., como la polea está en equilibrio se cumple que:

$$k.x_1 = 2k\,x_2$$

$$x_1 = 2\,x_2 \qquad (1)$$

De otro lado, de la Fig., la deformación que experimenta el resorte superior es:

$$x_1 = \frac{d - x_2}{2}$$

$$2\,x_1 = d - x_2 \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2), obtenemos la distancia "d" que recorre el bloque:

$$d = 5\,x_2 \qquad (3)$$

Ahora, la tensión en la cuerda que sostiene al bloque es equivalente a:

$$T = k_e x_e$$

siendo, k_e la constante elástica equivalente, y x_e la deformación equivalente (x_e=d), luego:

$$k.x_2 = k_e.d \Rightarrow k.x_2 = k_e.(5x_2)$$

$$k_e = \frac{k}{5} = \frac{800}{5} = 160\ \frac{N}{m}$$

Luego, el período de las oscilaciones armónicas que realiza el bloque de masa (m) es:

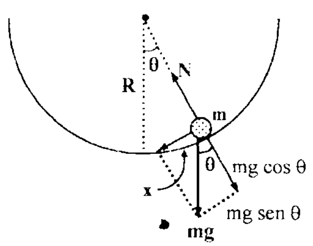
$$T = 2\pi\left[\frac{m}{k_e}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{1,6}{160}\right]^{1/2}$$

$$♣\ T = 0,2\pi\ s \qquad \text{(B)}$$

Solución: 42

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la esferita.



En la Fig., dado que "θ" es muy pequeño (senθ≈θ), y teniendo en cuenta que, θ=x/R, la fuerza que produce el movimiento de la esferita, mg sen θ, se escribe así:

$$F = \frac{mg}{R}x \qquad (1)$$

Como, "F" es una fuerza del tipo Hooke, entonces, (mg / R)=k, y el período del movimiento oscilatorio es:

$$T = 2\pi\left[\frac{m}{k}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{m}{mg/R}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{R}{g}\right]^{1/2} = 2\pi\left[\frac{0,10}{10}\right]^{1/2}$$

$$♣\ T = 0,2\pi\ s \qquad \text{(B)}$$

Solución: 43

• Según teoría, la aceleración instantánea con la que se mueve la partícula oscilatoria, viene dado por:

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2}x \Rightarrow a = 4\pi^2 f^2 x$$

$$a = (4\pi^2)(2)^2(2.10^{-2})$$

$$a = 0,32\,\pi^2\ \frac{m}{s^2} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 44

• El período de oscilación sólo depende de la masa total del sistema. La constante elástica (k) depende del material y de la forma del resorte, esto es:

$$T = 2\pi\left[\frac{m}{k}\right]^{1/2}$$

Antes de retirar el bloque "A":

$$T_1^2 = 4\pi^2\frac{(m_A + m_B)}{k} \qquad (1)$$

Después de retirar el bloque "A" :

$$T_2^2 = 4\pi^2\frac{m_B}{k} \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(m_A + m_B)}{m_B}$$

$$m_B = \frac{T_2^2}{(T_2^2 - T_1^2)} m_A$$

$$m_B = \frac{4^2}{(4^2 - 2^2)}(12)$$

♣ $m_B = 16$ kg Ⓓ

Solución: 45

• De la ley de Hooke, calculemos la constante elástica del resorte, así:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1}{1{,}5.10^{-2}}$$

$$k = (200/3)\ \text{N/m}$$

Luego, el período del movimiento oscilatorio armónico es:

$$T = 2\pi[m/k]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{(10/10)}{(200/3)}]^{1/2}$$

♣ $T = 0{,}77$ s Ⓓ

Solución: 46

• Primero, hallemos el período (T) de las oscilaciones, a partir de:

$$E = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T^2}$$

$$3{,}1.10^{-5} = \frac{2\pi^2(5.10^{-2})^2(10.10^{-3})}{T^2}$$

$$T = 4\ \text{s}$$

Luego, la posición (x) de la partícula para t=2/6 s, hallamos de:

$$x = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o)$$

$$x = 5\,\text{sen}(\frac{2\pi}{4}(\frac{2}{6}) + \frac{\pi}{3})$$

♣ $x = 5$ cm Ⓔ

Solución: 47

• Sustituyendo, x = A/2, en la ecuación de posición, tenemos:

$$x = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o)$$

$$\frac{A}{2} = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{24}t + 0)$$

$$\text{sen}(\frac{\pi}{12}t) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}$$

♣ $t = 2$ s Ⓓ

Solución: 48

• Derivando la ecuación de posición hallemos la velocidad instantánea, así:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o))$$

$$v = \frac{2\pi}{T}A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o)$$

Como se observa la velocidad es máxima para $(2\pi t/T + \phi_o) = 0$, esto es:

$$v_{max} = \frac{2\pi\,A}{T}$$

Por dato, para el instante de tiempo t=t+t', la velocidad es la mitad de la velocidad máxima, es decir:

$$\frac{2\pi\,A}{T}\cos(\frac{2\pi}{T}(t + t') + \phi_o) = \frac{\pi\,A}{T}$$

$$\cos(\frac{2\pi}{T}t') = \frac{1}{2} \quad => \quad \frac{2\pi}{T}t' = \frac{\pi}{3}$$

$$♣ \; t' = \frac{T}{6} \qquad Ⓔ$$

Solución: 49

• Sustituyendo en la ecuación de posición, x=7, $\phi_o = 0$ y T=4 s, se tiene:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o)$$

$$7 = 7\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{4}t + 0)$$

$$\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}t) = 1 \quad => \quad \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2}$$

$$♣ \; t = 1s \qquad Ⓑ$$

Solución: 50

• De la ecuación de posición, hallemos el tiempo transcurrido, así:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o)$$

$$25 = 50\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{2}t + 0)$$

$$\mathrm{sen}(\pi t) = \frac{1}{2} \quad > \quad \pi t = \frac{\pi}{6}$$

$$t = 1/6\ s$$

Luego, la velocidad de la partícula oscilatoria para este tiempo es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T}A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o)$$

$$v = (\frac{2\pi}{2})(50)\cos[(\frac{2\pi}{2})(\frac{1}{6}) + 0]$$

$$v = 50\pi\cos(\frac{\pi}{6})$$

$$♣ \; v = 136\ \frac{mm}{s} \qquad Ⓓ$$

Solución: 51

• De la expresión de la magnitud de la aceleración máxima, hallemos la amplitud, así:

$$a_{max} = \frac{4\pi^2}{T^2}A \quad => \quad 49{,}3 = \frac{4\pi^2}{2^2}A$$

$$A = 5\ cm = 50\ mm$$

Ahora, de la ecuación de posición, hallemos la fase inicial (ϕ_o), así:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o)$$

$$25 = 50\,\mathrm{sen}(0 + \phi_o)$$

$$\mathrm{sen}\,\phi_o = \frac{1}{2} \quad => \quad \phi_o = \frac{\pi}{6}$$

Luego, la ecuación del movimiento oscilatorio de la partícula es:

$$♣ \; x = 5\,\mathrm{sen}(\pi t + \frac{\pi}{6}) \qquad Ⓒ$$

Solución: 52

• La energía total del movimiento oscilatorio, viene dado por:

$$E = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T^2}$$

$$E = \frac{(2\pi^2)(5.10^{-2})^2(10.10^{-3})}{10^2}$$

$$♣ \; E = 0{,}5\pi^2\,\mu J \qquad Ⓔ$$

Solución: 53

• La razón entre la energía cinética y po tencial de la partícula que oscila armónicamente, para el instante t = T/12 es:

$$\frac{E_C}{E_P}=\frac{1/2\,mv^2}{1/2\,kx^2}$$

$$\frac{E_C}{E_P}=\frac{\dfrac{2\pi^2A^2m}{T^2}\cos^2(\dfrac{2\pi}{T}t+\phi_o)}{\dfrac{2\pi^2A^2m}{T^2}\operatorname{sen}^2(\dfrac{2\pi}{T}t+\phi_o)}$$

$$\frac{E_C}{E_P}=\frac{\cos^2(\dfrac{\pi}{6}+0)}{\operatorname{sen}^2(\dfrac{\pi}{6}+0)}=\operatorname{ctg}^2(\frac{\pi}{6})$$

$$♣\ \frac{E_C}{E_P}=3$$ C

Solución: 54

• De la ecuación de posición, hallemos la fase para el cual, x=A/4, así:

$$\frac{A}{4}=A\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}t+\phi_o)$$

$$\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}t+\phi_o)=\frac{1}{4}$$

Luego, la razón entre la energía cinética y potencial del movimiento oscilatorio, en el instante en que x=A/4 es:

$$\frac{E_C}{E_P}=\frac{\dfrac{2\pi^2A^2m}{T^2}\cos^2(\dfrac{2\pi}{T}t+\phi_o)}{\dfrac{2\pi^2A^2m}{T^2}\operatorname{sen}^2(\dfrac{2\pi}{T}t+\phi_o)}$$

$$\frac{E_C}{E_P}=\frac{1-\operatorname{sen}^2(\dfrac{2\pi}{T}t+\phi_o)}{\operatorname{sen}^2(\dfrac{2\pi}{T}t+\phi_o)}$$

$$\frac{E_C}{E_P}=\frac{1-(1/4)^2}{(1/4)^2}=\frac{15/16}{1/16}$$

$$♣\ E_C/E_P=15$$ C

Solución: 55

• Primero hallemos la longitud del péndulo simple, así:

$$T=\frac{1}{f}=2\pi(\frac{\ell}{g})^{1/2}$$

$$\ell=\frac{g}{4\pi^2f^2}$$

Derivando la posición angular, hallemos la expresión de la velocidad angular, así:

$$\omega=\frac{d}{dt}[\theta_o\operatorname{sen}(2\pi f\,t+\phi_o)]$$

$$\omega=2\pi f\theta_o\cos(2\pi f\,t+\phi_o)$$

Luego, la velocidad lineal de la bolita en cualquier instante de tiempo es:

$$v=\ell\omega=2\pi f\,\ell\theta_o\cos(2\pi f\,t+\phi_o)$$

$$v=\frac{g\theta_o}{2\pi f}\cos(2\pi f\,t+\phi_o)$$

$$v=\frac{(10)(4\pi/180)}{(2\pi)(2)}\cos[(\frac{2\pi}{T})(\frac{T}{4})+\frac{\pi}{2}]$$

$$♣\ v=-(1/18)\ m/s$$ D

Solución: 56

• La energía total (E) de la partícula en movimiento oscilatorio es:

$$\frac{2\pi^2A^2m}{T^2}=E$$

$$\frac{4\pi^2m}{T^2}=\frac{2E}{A^2}\qquad(1)$$

De otro lado, la expresión de la magnitud de la fuerza sobre la partícula es:

$$F = ma = \frac{4\pi^2 A}{T^2}\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o)$$

$$\frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{F}{x} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), tenemos:

$$x = \frac{FA^2}{2E} = \frac{(2{,}25.10^{-5})(2.10^{-2})^2}{(2)(3.10^{-7})}$$

♣ $x = 1{,}5$ cm (C)

Solución: 57

• Representemos al aerómetro en equilibrio, sumergido parcialmente en el agua.

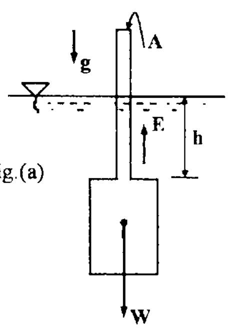


Fig.(a)

De la Fig.(a), el aerómetro se encuentra en equilibrio, bajo la acción de su peso (W) y el empuje (E) del agua, esto es:

$$W = E$$

$$W = \rho\, g\,(V + A h)$$

En la Fig,(b) la fuerza que produce las oscilaciones armónicas, es la debida al empuje de la columna de líquido de altura (x), esto es:

$$F = \rho\, g\,(V + A\, h + A\, x) - W$$

$$F = \rho\, g\,(V + A\, h) - W + \rho\, g\, A\, x$$

$$F = \rho\, g\, A\, x$$

Representemos al aerómetro, sumergido una longitud (x), a partir de su posición de equilibrio.

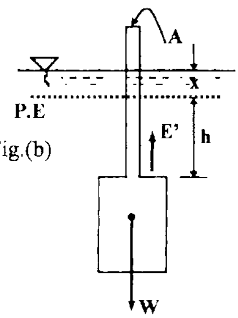


Fig.(b)

Como se observa esta fuerza es del tipo de Hooke, F=k.x, por lo que, la constante elástica (k) es:

$$k = \rho\, g\, A$$

Luego, sustituyendo (k) en la ecuación del período, hallamos la densidad del líquido (ρ), así:

$$T = 2\pi[m/k]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{m}{\rho\, g\, A}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{m}{\pi\,\rho\, g\, D^2/4}]^{1/2}$$

$$\rho = \frac{16\pi\, m}{g\, D^2 T^2} = \frac{(16\pi)(0{,}2)}{(10)(10^{-2})^2(4)^2}$$

♣ $\rho = 0{,}2\pi\ \dfrac{g}{cm^3}$ (B)

Solución: 58

• Cuando se conectan en serie, la resistencia equivalente es, $k_e = k/2$, de modo que, el período es:

$$T_S = 2\pi\ [m/k_e]^{1/2}$$

$$T_S = \sqrt{2}2\pi[m/k]^{1/2} \qquad (1)$$

Cuando se conectan en paralelo la resistencia equivalente es, $k_e = 2k$, de modo que, el período es:

$$T_P = 2\pi[m/k_e]^{1/2}$$

$$T_P = \frac{\sqrt{2}}{2}2\pi[m/k]^{1/2} \qquad (2)$$

Luego, de (1) y (2) la razón de los períodos, cuando se conectan en serie y paralelo, es;

$$\frac{T_S}{T_P} = \frac{\sqrt{2}\,2\pi[m/k]^{1/2}}{(\sqrt{2}/2)2\pi[m/k]^{1/2}}$$

$$\clubsuit\ \frac{T_S}{T_P} = 2 \qquad (B)$$

Solución: 59

• Al inicio, el período de las oscilaciones armónicas verticales es:

$$T_1 = 2\pi[m/k]^{1/2}$$

$$T_1^2 = 4\pi^2\ \frac{m}{k} \qquad (1)$$

Después, de añadir pesas de masa total Δm, el período de las oscilaciones armónicas verticales es:

$$T_2 = 2\pi\left[\frac{m+\Delta m}{k}\right]^{1/2}$$

$$T_2^2 = 4\pi^2\frac{m+\Delta m}{k} \qquad (2)$$

Restando (2) menos (1), obtenemos:

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k}$$

De otro lado, de la ley de Hooke, tenemos:

$$k = \frac{F}{\Delta\ell} = \frac{\Delta m\, g}{\Delta\ell}$$

Con esto, la expresión anterior queda, así:

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta\ell}{g}$$

$$\Delta\ell = \frac{g}{4\pi^2}(T_2^2 - T_1^2)$$

$$\Delta\ell = \frac{g}{4g}(0{,}6^2 - 0{,}4^2)$$

$$\clubsuit\ \Delta\ell = 0{,}05\ m \qquad (E)$$

Solución: 60

• Elevando al cuadrado el período del movimiento oscilatorio, se tiene:

$$T = 2\pi\left[\frac{m}{k}\right]^{1/2} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$

Luego, sustituyendo T^2 en la expresión de la energía cinética máxima de la partícula oscilatoria, obtenemos (k), así:

$$E_{C,max} = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T^2}$$

$$E_{C,max} = \frac{2\pi^2 A^2 m\, k}{4\pi^2 m}$$

$$k = \frac{2E_{C,max}}{A^2} = \frac{(2)(1)}{(0{,}05)^2}$$

$$k = 800\ \frac{N}{m} \qquad (E)$$

Solución: 61

• La ecuación del movimiento resultante, de la superposición de los dos movimientos es:

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t) + A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4})$$

$$x = 2\,A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{8})\cos(\frac{\pi}{8})$$

$$x = (2)(0{,}02)\cos(\frac{\pi}{8})\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8})$$

$$x = 3{,}7\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8})\text{cm} \qquad \text{C}$$

Solución: 62

• La amplitud del movimiento oscilatorio resultante, viene dado por:

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)]^{1/2}$$

$$A = [2^2 + 3^2 + (2)(2)(3)\cos\frac{\pi}{2}]^{1/2}$$

$$A = [2^2 + 3^2]^{1/2} = 3{,}6\text{ cm}$$

De otro lado, la fase inicial de la oscilación resultante, viene dado por:

$$\text{tg}\,\phi = \frac{A_1\,\text{sen}\,\phi_1 + A_2\,\text{sen}\,\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

$$\text{tg}\,\phi = \frac{2\,\text{sen}(\pi/2) + 3\,\text{sen}(\pi/4)}{2\cos(\pi/2) + 3\cos(\pi/4)}$$

$$\text{tg}\,\phi = \frac{(2)(1) + (3)(\sqrt{2}/2)}{(2)(0) + (3)(\sqrt{2}/2)}$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}(1{,}9428)$$

$$\clubsuit\ \phi = 62^\circ 46' \qquad \text{D}$$

Solución: 63

• Sustituyendo, $A_1 = A_2 = A$, en la expresión de la amplitud resultante, se tiene:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$A^2 = A + A + 2AA\cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\cos(\phi_2 - \phi_1) = -\frac{1}{2}$$

$$\clubsuit\ \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{E}$$

Solución: 64

• La ecuación de movimiento resultante de la superposición de dos oscilaciones perpendiculares entre sí, y de igual período, viene dado por:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2\,xy}{A_1A_2}\cos(\phi_2 - \phi_1) = \text{sen}^2(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} - \frac{2\,xy}{(10)(5)}\cos 0^\circ = \text{sen}^2 0^\circ$$

$$x^2 + 4y^2 - 4\,xy = 0$$

$$(x - 2y)^2 = 0$$

$$y = x/2$$

«La trayectoria de la oscilación resultante, es una línea recta»

El ángulo de inclinación de esta recta es:

$$\beta = \text{tg}^{-1}(\frac{1}{2}) = 26^\circ 34'$$

La amplitud de la oscilación resultante, viene dado por:

$$A=[A_1^2+A_2^2+2\,A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)]^{1/2}$$

$$A=[10^2+5^2+(2)(10)(5)\bullet$$
$$\cos(60^o-60^o)]^{1/2}$$

$$A=11{,}2\ \text{cm}$$

Luego, la ecuación de la oscilación resultante, tendrá la forma:

$$s=A\,\text{sen}(2\pi f\,t+\phi_o)$$

$$s=11{,}2\,\text{sen}[(2\pi)(5)\,t+\frac{\pi}{3}]$$

$$s=11{,}2\,\text{sen}(10\pi\,t+\frac{\pi}{3})\ \text{cm}$$ B

Solución: 65

• Según teoría, la amplitud de la oscilación resultante, viene dado por:

$$A=[A_1^2+A_2^2+2\,A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)]^{1/2}$$

Así, la amplitud de la oscilación resultante, de la superposición de las dos oscilaciones en la misma dirección es:

$$A=[3^2+4^2+(2)(3)(4)\cos(0)]^{1/2}$$

$$A=(49)^{1/2}=7\ \text{cm}$$

Asimismo, la amplitud de la oscilación resultante, de la superposición de las dos oscilaciones perpendiculares entre sí es:

$$A=[3^2+4^2+(2)(3)(4)\cos(\frac{\pi}{2})]^{1/2}$$

$$A=(25)^{1/2}=5\ \text{cm}$$ A

Solución: 66

• La ecuación de la trayectoria del movimiento oscilatorio resultante, viene dado por:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2\,xy}{A_1A_2}\cos(\phi_2-\phi_1)$$
$$=\text{sen}^2(\phi_2-\phi_1)$$

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{2^2}-\frac{2\,xy}{(2)(2)}\cos(\frac{\pi}{2}-0)=\text{sen}^2(\frac{\pi}{2}-0)$$

$$x^2+y^2=2^2$$ C

«La ecuación de la trayectoria es una circunferencia de radio 2»

Solución: 67

• Recordemos que la posición y la velocidad instantánea de la partícula, vienen dados por:

$$x=A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}\,t+\phi_o)\qquad(1)$$

$$v=\frac{2\pi}{T}A\cos(\frac{2\pi}{T}\,t+\phi_o)\qquad(2)$$

Sumando $(1)^2$ más $(2)^2$, obtenemos la siguiente ecuación:

$$x^2+\frac{v^2T^2}{4\pi^2}=A^2=\text{cte.}$$

$$8^2+\frac{3^2T^2}{4\pi^2}=6^2+\frac{4^2T^2}{4\pi^2}$$

$$\frac{7\,T^2}{4\pi^2}=28\quad\Rightarrow\quad T^2=16\pi^2$$

$$\therefore\ T=4\pi\ \text{s}$$ D

Solución: 68

• La magnitud de la aceleración de la partícula en M.A.S, viene dado por:

$$a=\frac{4\pi^2}{T^2}\,x\quad\Rightarrow\quad a=\frac{4\pi^2}{T^2}\,d$$

$$T = 2\pi[\frac{d}{a}]^{1/2} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 69

• Utilizando la identidad trigonométrica: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, tenemos:

$$x = \cos \pi t = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 1$$

$$x = 2y^2 - 1$$

$$2y^2 - x = 1 \qquad \text{(E)}$$

«La ecuación de la trayectoria es una parábola»

Solución: 70

• La ecuación de la trayectoria del movimiento oscilatorio resultante, viene dado por:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\phi_2 - \phi_1) = \text{sen}^2(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{2xy}{(1)(2)}\cos(\frac{\pi}{2} - 0) = \text{sen}^2(\frac{\pi}{2} - 0)$$

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \qquad \text{(B)}$$

«La ecuación de la trayectoria es una elipse de semiejes a=1 y b=2»

Solución: 71

• El coeficiente de amortiguamiento (δ), viene dado por:

$$\delta = \frac{\xi}{T} = \frac{1,6}{4} = 0,4$$

Evaluando la ecuación de movimiento para, t=T/4=1 s y x = 4,5 cm, obtenemos la amplitud, así:

$$x = A\, e^{-\delta t}\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_o)$$

$$4,5 = A\, e^{-(0,4)(1)}\,\text{sen}[(\frac{2\pi}{4})(1) + 0]$$

$$A = 6,7 \text{ cm}$$

Luego, la posición de la partícula en movimiento oscilatorio amortiguado, en el instante t=3 s, es:

$$x = A\, e^{-\delta t}\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_o)$$

$$x = 6,7\, e^{-(0,4)(3)}\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}(3) + 0)$$

$$\clubsuit\ x = -2 \text{ cm} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 72

• Hallemos la expresión de la velocidad instantánea, y evaluémosla en t=3T=(3)(4) =12 s, así:

$$x = 5\, e^{-0,25\,t}\,\text{sen}\frac{\pi}{2} t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -1,25\, e^{-0,25\,t}\,\text{sen}\frac{\pi}{2} t + \frac{5}{2}\pi\, e^{-0,25\,t}\cos\frac{\pi}{2} t$$

$$v = -1,25 e^{-3}\,\text{sen}\, 6\pi + \frac{5}{2}\pi e^{-3}\cos 6\pi$$

$$\clubsuit\ v = 0,39\ \frac{m}{s} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 73

• Recordemos que el coeficiente de amortiguamiento (δ) es:

$$\delta = \frac{\xi}{T}$$

siendo, (ξ) el decremento logarítmico.
La amplitud de la oscilación amortiguada, en el instante de tiempo t = t es:

$$A_1 = A_o\, e^{-\frac{\xi}{T}t}$$

La amplitud de la oscilación amortiguada, en el instante de tiempo, t = t + T es:

$$A_2 = A_o\, e^{-\frac{\xi}{T}(t+T)}$$

Dividiendo A_1 entre A_2, tenemos:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{-\xi} = e^{0,4}$$

$$\clubsuit\ \frac{A_1}{A_2} = 1,5 \qquad \text{C}$$

☞ **Nota**

Recordemos que la función seno es periódica, esto es, se cumple:

$$\text{sen}(t) = \text{sen}(t+T)$$

Solución: 74

• El período del péndulo matemático, viene dado por:

$$T = 2\pi[\frac{\ell}{g}]^{1/2} = 2\pi[\frac{1}{9,8}]^{1/2}$$

$$T = 2\ s$$

La razón entre las amplitudes para los instantes de tiempo, t=t y t=t + t', según el problema anterior es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{e^{-\frac{\xi}{T}(t+t')}} = e^{\frac{\xi}{T}t'}$$

$$\xi = \frac{T}{t'}\ell n(\frac{A_1}{A_2}) = \frac{2}{60}\ell n(2)$$

$$\clubsuit\ \xi = 0,023 \qquad \text{B}$$

Solución: 75

• Primero, calculemos el período del péndulo simple, así:

$$T = 2\pi[\frac{\ell}{g}]^{1/2} = 2\pi[\frac{(24,7.10^{-2}}{9,8}]^{1/2}$$

$$T = 0,997\ s$$

De otro lado, la razón de las energías del péndulo simple para los instantes de tiempo t=t y t=t + Δt es:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{(1/2)\,m\,\omega_o^2 A^2 e^{-\frac{2\xi}{T}t}}{(1/2)\,m\,\omega_o^2 A^2 e^{-\frac{2\xi}{T}(t+\Delta t)}}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = e^{2\frac{\xi}{T}\Delta t} \ \Rightarrow\ \Delta t = \frac{T}{2\xi}\ell n(\frac{E_1}{E_2})$$

$$\Delta t = \frac{0,997}{(2)(0,01)}\ell n(9,4)$$

$$\clubsuit\ \Delta t \approx 112\ s \qquad \text{B}$$

Solución: 76

• La razón de las magnitudes de las aceleraciones en los instantes de tiempo, t = t y t = t + T, viene dado por:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\frac{\xi}{T}t}}{A_0 e^{-\frac{\xi}{T}(t+T)}} = e^{\frac{\xi}{T}T}$$

$$A_1 / A_2 = e^{0,2}$$

$$A_1 / A_2 = 1,22 \qquad \text{B}$$

Solución: 77

• La razón de las amplitudes del movimiento oscilatorio amortiguado, cuando transcurre 1 min es:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_0 e^{-\frac{\xi}{T}t}}{A_0 e^{-\frac{\xi}{T}(t+60)}}$$

$$e^{60\frac{\xi}{T}}=2 \quad => \quad 60\frac{\xi}{T}=\ell n(2)$$

$$180\frac{\xi}{T}=3\,\ell n(2)$$

Luego, la razón de las amplitudes del movimiento oscilatorio amortiguado, cuando transcurre 3 min es:

$$\frac{A_1}{A_3}=\frac{A_0 e^{-\frac{\xi}{T}t}}{A_0 e^{-\frac{\xi}{T}(t+180)}}$$

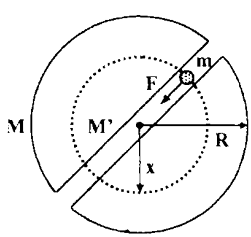
$$\frac{A_1}{A_3}=e^{180\frac{\xi}{T}}=e^{3\,\ell n(2)}$$

$$\clubsuit \quad \frac{A_1}{A_3}=8 \text{ veces}$$

D

Solución: 78

• Representemos la bolilla cuando se encuentra a una distancia (x) del centro de la Tierra.



En la Fig., por proporcionalidad, la masa (M') contenida en la esfera de radio (x) es:

$$\frac{M}{4\pi R^3/3}=\frac{M'}{4\pi x^3/3}$$

$$M'=\frac{x^3}{R^3}M$$

siendo, M la masa total de la Tierra.

Así, la fuerza ejercida sobre la bolilla, por esta masa (M'), cuando la bolilla se encuentra a la distancia (x) del centro de la Tierra es:

$$F=G\frac{m M'}{x^2}=G\frac{m}{x^2}\left(\frac{x^3}{R^3}M\right)$$

$$F=G\frac{m M}{R^3}x=k\,x$$

siendo, (k) la constante elástica del M.A.S.

Luego, el período del M.A.S que realiza la bolilla es:

$$T=2\pi\left[\frac{m}{k}\right]^{1/2}=2\pi\left[\frac{R^3}{G M}\right]^{1/2}$$

$$T=2\pi\left[\frac{(6{,}37.10^6)^3}{(6{,}67.10^{-11})(5{,}96.10^{24})}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad T=84{,}4 \text{ min}$$

C

Solución: 79

• Primero, hallemos el período del péndulo matemático, así:

$$T=2\pi\left[\frac{\ell}{g}\right]^{1/2}=2\pi\left[\frac{0{,}5}{9{,}8}\right]^{1/2}$$

$$T=1{,}418 \text{ s}$$

Luego, el tiempo de relajación del péndulo matemático es:

$$\tau=\frac{1}{\delta}=\frac{T}{\ell n[A(t)/A(t+T)]}$$

$$\tau = \frac{1{,}418}{\ell n(5/4)}$$

♣ $\tau = 6{,}35$ s Ⓓ

Solución: 80

• Primero, hallemos el "período" del movimiento oscilatorio amortiguado, así:

$$T = 2\pi\left[\frac{m}{k}\right]^{1/2} = 2\pi\left[\frac{m}{mg/A}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{9{,}8.10^{-2}}{9{,}8}\right]^{1/2}$$

$$T = \frac{\pi}{5}\ s$$

Por dato, la amplitud se reduce al 1 % de la amplitud inicial A_0, después de 10 s, esto es

$$A_0\, e^{-10\delta}\mathrm{sen}\left(\left(\frac{2\pi}{\pi/5}\right)(10) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{100}A_0$$

$$(e^{-10\,\delta})(0{,}86) = \frac{1}{100}$$

$$\delta = \frac{\ell n(86)}{10}$$

♣ $\delta = 0{,}45\ s^{-1}$ Ⓓ

Solución: 81

• La ecuación de las oscilaciones propias, viene dado por:

$$x = A_0 e^{-\delta\, t}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$x = A_0 e^{-\delta\, t}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + 0)$$

El desfase entre las oscilaciones propias y las forzadas es -0,75 π rad, por tanto:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\,\delta\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \mathrm{tg}(-0{,}75\pi) = 1$$

$$\omega_0 = [\omega^2 + 2\,\delta\,\omega]^{1/2}$$

$$\omega_0 = [(10\pi)^2 + (2)(1{,}6)(10\pi)]^{1/2}$$

$$\omega_0 = 32{,}97 \approx 33 = 10{,}5\pi$$

Luego, la amplitud de las oscilaciones propias, en el instante t = 1 s es:

$$x = 7e^{-1{,}6t}\,\mathrm{sen}(10{,}5\pi t)$$

$$x = 7e^{-(1{,}6)(1)}\mathrm{sen}((10{,}5\pi)(1))$$

♣ $x = 1{,}4$cm Ⓒ

Solución: 82

• La ecuación de la fuerza periódica exterior, viene dado por:

$$F = F_0\,\mathrm{sen}\omega t$$

Calculemos el valor máximo de la fuerza periódica exterior (F_0), a partir de:

$$F_0 = A\,m\,[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\delta^2\omega^2]^{1/2}$$

$$F_0 = (5.10^{-2})(10.10^{-3})\bullet$$
$$[(33^2 - 31{,}4^2)^2 + (4)(1{,}6)^2(31{,}4)^2]^{1/2}$$

$$F_0 \approx 7{,}2.10^{-2}\ N$$

Luego, el valor de la fuerza periódica exterior, en el instante de tiempo t=1/30 s es:

$$F = (7{,}2.10^{-2})\,\mathrm{sen}((10\pi)(1/30))$$

♣ $F = 3{,}6.10^{-2}$N Ⓓ

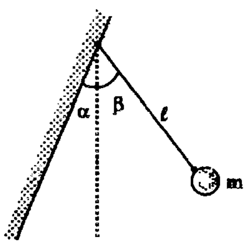
Solución: 83

• La ecuación del movimiento oscilatorio del péndulo, viene dado por:

$$\theta = \theta_o\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o) \qquad (1)$$

El período de las oscilaciones, que realiza el péndulo para un ciclo completo es:

$$T = 2\pi\,[\frac{\ell}{g}]^{1/2}$$



Evaluando la ec.(1), en t = T/4 y t = 0, con ayuda de la Fig., hallemos la fase inicial ϕ_o y la amplitud θ_o, así:

En, t = T/4:

$$0 = \theta_o\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} + \phi_o)$$

$$0 = \theta_o\,\text{sen}(\frac{\pi}{2} + \phi_o)$$

$$\frac{\pi}{2} + \phi_o = 0 \;\Rightarrow\; \phi_o = -\frac{\pi}{2}$$

En, t = 0:

$$\beta - \theta_o\text{sen}(\phi_o) = \text{sen}(-\frac{\pi}{2})$$

$$\theta_o = -\beta$$

Sustituyendo θ_o y ϕ_o en la ec.(1), y evaluando en t = T/2, obtenemos la mitad del período oscilatorio, así:

$$-\alpha = -\beta\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}\frac{T'}{2} - \frac{\pi}{2})$$

$$T' = \frac{T}{\pi}[\text{sen}^{-1}(\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\pi}{2}]$$

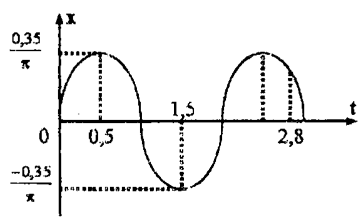
$$T' = 2[\frac{\ell}{g}]^{1/2}[\text{sen}^{-1}(\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\pi}{2}]$$

$$T' = (2)[\frac{0,4}{10}]^{1/2}[\text{sen}^{-1}(\frac{\alpha}{2\alpha}) + \frac{\pi}{2}]$$

$$\clubsuit\; T' = 0,84\ s \qquad \text{(D)}$$

Solución: 84

• Representemos esta ecuación, teniendo en cuenta que el período es T = 2 s.



Como la proyección de la velocidad sobre el eje X es, $v_x = 0{,}35\cos\pi t$ (m/s), entonces la ecuación de movimiento de la partícula es:

$$x = \frac{0,35}{\pi}\,\text{sen}(\pi t)\ (m)$$

En la Fig., la longitud recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $0 \le t \le 2{,}5$ s es:

$$\ell_1 = (\frac{0,35}{\pi})(5) = \frac{1,75}{\pi} \approx 0,557\ m$$

También, en la Fig., la longitud recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $2{,}5\,s \le t \le 2{,}8$ s es:

$$\ell_2 = x_{2,5} - x_{2,8}$$

$$\ell_2 = \frac{0,35}{\pi} - \frac{0,35}{\pi}\operatorname{sen}(\pi 2,8)$$

$$\ell_2 = 0,0458 \text{ m}$$

Luego, la longitud total recorrida por la partícula para $0 \le t \le 2,8$ es:

$$\ell = \ell_1 + \ell_2$$

$$\clubsuit \quad \ell = 0,6 \text{ m} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 85

• Como en el instante, t= 0 s, la partícula se encuentra en la posición de equilibrio (P.E.), su ecuación de movimiento es:

$$x = A\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}t)$$

Evaluando está ecuación en, x = A/2, hallemos (t), así:

$$\frac{A}{2} = A\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}t') \quad => \quad \frac{2\pi}{T}t' = \frac{\pi}{6}$$

$$t' = T/12$$

Luego, la velocidad media en el intervalo de tiempo, $0 \le t \le t' = T/12$ es:

$$<v> = \frac{1}{t'}\int_0^{t'} v_x\, dt$$

$$<v> = \frac{1}{t'}\int_0^{t'} \frac{2\pi}{T}A\cos(\frac{2\pi}{T}t)\,dt$$

$$<v> = \frac{1}{t'}A\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}t)\Big|_0^{t'}$$

$$<v> = \frac{1}{T/12}A[\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T})(\frac{T}{12}) - \operatorname{sen}0]$$

$$<v> = \frac{6A}{T} = \frac{(6)(0,1)}{0,6}$$

$$\clubsuit \quad <v> = 1\ \frac{m}{s} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 86

• Calculemos la primera derivada de U(x) e igualemos a cero, para hallar los mínimos ó máximos de U(x), así:

$$\frac{dU(x)}{dx} = -a\,U_o \operatorname{sen} ax = 0$$

$$\operatorname{sen} ax = 0$$

Luego, la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones es:

$$\omega = [\frac{1}{m}\frac{d^2U(x)}{dx^2}]^{1/2}_{x_0}$$

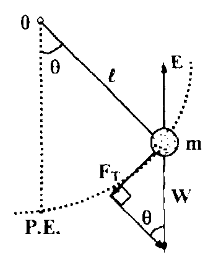
$$\frac{2\pi}{T} = [\frac{1}{m}a^2 U_o(1 - \operatorname{sen}^2 ax)]^{1/2}_{x_0}$$

$$\frac{2\pi}{T} = [\frac{a^2 U_o}{m}]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad T = 2\pi\,[\frac{m}{a^2 U_o}]^{1/2} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 87

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la bola del péndulo.



En la Fig., la fuerza tangencial que produce las oscilaciones del péndulo es:

$$F_T = (W - E)\,\text{sen}\,\theta$$

Así, de la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial que describe el movimiento pendular es:

$$F_T = m\,a_T$$

$$(W - E)\,\text{sen}\,\theta = \frac{W\ell}{g}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Para, $\theta \approx 0$, $\text{sen}\theta \approx 0$, de modo que la ecuación anterior, queda así:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(W - E)}{W\,\ell}\theta = 0$$

De aquí, la frecuencia angular de las oscilaciones del péndulo es:

$$\omega_o^2 = \frac{(W - E)\,g}{W\ell}$$

$$\omega_o^2 = \frac{[\rho_o g V - (\rho_o/\eta) g V]\,g}{\rho_o\,g V\ell}$$

$$\omega_o^2 = (\frac{2\pi}{T})^2 = \frac{(\eta - 1)\,g}{\eta\,\ell}$$

$$T = 2\pi[\frac{\eta\,\ell}{(\eta - 1)\,g}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{(3)(0,4)}{(3 - 1)(10)}]^{1/2}$$

♣ $T = 1,54$ s (E)

Solución: 88

• La ecuación oscilatoria resultante y la velocidad de la partícula son:

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A\cos\omega t + A\cos 2\omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega\,\text{sen}\,\omega t - 2A\,\omega\,\text{sen}\,2\,\omega t$$

Igualamos a cero la aceleración instantánea, para hallar los mínimos ó máximos de la velocidad, así:

$$\frac{dv}{dt} = -A\,\omega^2\cos\omega t - 4A\,\omega^2\cos 2\omega t = 0$$

$$\cos\omega t = -4\,(2\cos^2\omega t - 1)$$

$$8\cos^2\omega t + \cos\omega t - 4 = 0$$

$$\cos\omega t = 0{,}647 \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\omega t = 0{,}762$$

Luego, la magnitud de la velocidad máxima de la partícula es:

$$v_{max} = |-A\omega\,(0{,}762) - 4A\omega\,(0{,}762)(0{,}647)$$

♣ $v_{max} = 2{,}73\,A\,\omega$ (D)

Solución: 89

• Evaluando la ecuación de posición de la partícula en M.A.S, en $t=t_0$, $t=2t_0$ y $t=3t_0$, se tiene:

$$a = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t_o + \phi_o) \qquad (1)$$

$$b = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}2t_o + \phi_o) \qquad (2)$$

$$c = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}3t_o + \phi_o) \qquad (3)$$

Sumando (1) más (3), y utilizando (2):

$$\frac{a}{A} + \frac{c}{A} = 2\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}2t_o + \phi_o)\cos\frac{2\pi}{T}t_o$$

$$\frac{a}{A}+\frac{c}{A}=2\frac{b}{A}\cos\frac{2\pi}{T}t_o$$

$$\frac{2\pi}{T}t_o=\cos^{-1}(\frac{a+c}{2b})$$

$$\clubsuit\ T=\frac{2\pi\,t_o}{\cos^{-1}(a+c)/2b}$$ D

Solución: 90

• Recordemos que la posición y velocidad instantáneas de la partícula oscilatoria, viene dado por:

$$x = A\operatorname{sen}(\omega\, t+\phi_o)$$

$$v = \omega\, A\cos(\omega\, t+\phi_o)$$

Desarrollando estas ecuaciones. y evaluando en $t=t_0$, tenemos:

$$x = A\cos\phi_o \operatorname{sen}\omega t + A\operatorname{sen}\phi_o \cos\omega t$$

$$v = \omega A\cos\phi_o\cos\omega t - \omega\, A\operatorname{sen}\phi_o \operatorname{sen}\omega t$$

$$A\cos\phi_o \operatorname{sen}\omega t_o + A\operatorname{sen}\phi_o\cos\omega t_o = x_o$$

$$A\cos\phi_o\cos\omega t_o - A\operatorname{sen}\phi_o\operatorname{sen}\omega t_o = \frac{v_o}{\omega}$$

Resolviendo este par de ecs. para $A\cos\phi_o$ y $A\operatorname{sen}\phi_o$, obtenemos:

$$A\cos\phi_o = x_o\operatorname{sen}\omega t_o + \frac{v_o}{\omega}\cos\omega t_o$$

$$A\operatorname{sen}\phi_o = x_o\cos\omega t_o - (v_o/\omega)\operatorname{sen}\omega t_o$$

Sustituyendo, $A\cos\phi_o$ y $A\operatorname{sen}\phi_o$, en la ecuación de posición, tenemos:

$$x = (x_o\operatorname{sen}\omega t_o + \frac{v_o}{\omega}\cos\omega t_o)\operatorname{sen}\omega t +$$
$$(x_o\cos\omega t_o - \frac{v_o}{\omega}\operatorname{sen}\omega t_o)\cos\omega t$$

$$x = x_o(\operatorname{sen}\omega t_o\operatorname{sen}\omega t + \cos\omega t_o\cos\omega t) +$$
$$\frac{v_o}{\omega}(\cos\omega t_o\operatorname{sen}\omega t - \operatorname{sen}\omega t_o\cos\omega t)$$

$$x = x_o\cos\omega\,(t-t_o) + \frac{v_o}{\omega}\operatorname{sen}\omega\,(t-t_o)$$

Solución: 91

• La velocidad instantánea en el movimiento oscilatorio de la partícula es:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega\, A\operatorname{sen}(\omega\, t-\phi_o)$$

Luego, la potencia instantánea y media de la partícula oscilatoria es:

$$P = v\,F = -\omega\, A\operatorname{sen}(\omega\, t-\phi_o)\,F_o\cos\omega\, t$$

$$P = -\omega\, AF_o\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\cos\phi_o$$
$$+\omega\, AF_o\operatorname{sen}\phi_o\cos^2\omega t$$

$$< P >= -\omega\, AF_o\cos\phi_o < \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t > +$$
$$\omega\, AF_o\operatorname{sen}\phi_o\operatorname{sen}\phi_o\ < \cos^2\omega t >$$

Ahora, calculemos los valores medios de las funciones trigonométricas:

$$< \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t >= \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\operatorname{sen}\omega t'\cos\omega t'\,dt'$$

$$< \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t >= 0$$

$$< \cos^2\omega t >= \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{\cos 2\omega t'+1}{2}dt'$$

$$< \cos^2\omega t >= \frac{1}{2}$$

Finalmente, la potencia media de la partícula oscilatoria es:

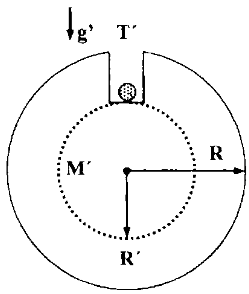
$$< P >= \frac{\omega\, AF_o\operatorname{sen}\phi_o}{2}$$

$$< P >= \frac{(4)(0{,}02)(5)(1/2)}{2}$$ (A)

$$\clubsuit \ < P >= 0{,}1 \text{ W}$$

Solución: 92

• Representemos el péndulo, cuando realiza oscilaciones en la superficie y a una profundidad de h=400 m.



Por proporciones, hallemos la masa M' contenida en la esfera de radio R', así:

$$\frac{M}{4/3\pi R^3} = \frac{M'}{4/3\pi R'^3}$$

$$M' = M\frac{R'^3}{R^3}$$

Ahora, hallemos la razón de las aceleraciones de la gravedad a una profundidad de h=400 m (g') y en la superficie (g), así:

$$\frac{g'}{g} = \frac{GM'/R'^2}{GM/R^2} = \frac{M'R^2}{MR'^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{(M/R^3)R'^3R^2}{MR'^2} = \frac{R'}{R}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{R-h}{R} = 1 - \frac{h}{R}$$

De modo que, la razón de los períodos del péndulo en la superficie (T) y a una profundidad de 400 m (T') es:

$$\frac{T}{T'} = \frac{2\pi\,[\ell/g]^{1/2}}{2\pi\,[\ell/g']^{1/2}} = [\frac{g'}{g}]^{1/2}$$

$$\frac{T}{T'} = [1 - \frac{h}{R}]^{1/2} \approx 1 - \frac{h}{2R}$$

para x<<1, se cumple que $(1+x)^{1/2} \approx 1 + x/2$, en nuestro caso x = h/R<<1.

De otro lado, el número de oscilaciones que realiza el péndulo a una profundidad de 400 m, durante 24 horas es:

$$N = \frac{t}{T'} = \frac{(24)(60)(60)}{T'}$$

Luego, a una profundidad de 400 m, el péndulo en 24 horas se retrasará un tiempo igual a:

$$\Delta t = N\,(T' - T) = \frac{(24)(60)^2}{T'}(T' - T)$$

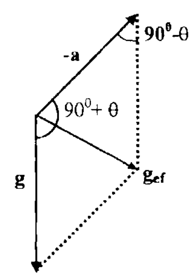
$$\Delta t = (24)(60)^2(1 - 1 + \frac{h}{2\,R})$$

$$\Delta t = \frac{(24)(60)^2(400)}{(2)(6{,}37.10^6)}$$

$$\clubsuit \ \Delta t = 2{,}7 \text{ s}$$ (D)

Solución: 93

• Representemos los vectores aceleración de inercia del péndulo ($-\vec{a}$) y el de la gravedad ($\vec{g}$), y hallemos la aceleración efectiva (g_{ef}).



$$g_{ef} = [a^2 + g^2 + 2\,a\,g\cos(90° + \theta)]^{1/2}$$

$$g_{ef} = [a^2 + g^2 - 2a\,g\,\text{sen}\,\theta]^{1/2}$$

Luego, el período de las oscilaciones libres que realiza el péndulo es:

$$T = 2\pi[\ell / g_{ef}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{\ell^2}{a^2 + g^2 - 2a\,g\,\text{sen}\,\theta}]^{1/4}$$

$$T = 2\pi[\frac{0{,}5^2}{4^2 + 10^2 - (2)(4)(10)(1/2)}]^{1/4}$$

♣ $T = 1{,}5$ s Ⓒ

Solución: 94

• La ecuación del movimiento oscilatorio de la carga, viene dado por:

$$x = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi_o) \qquad (1)$$

Como, en $t = t + 0{,}01$ la distancia (x) medida desde la posición de equilibrio es máxima, entonces:

$$\frac{2\pi}{T}(t + 0{,}01) + \phi_o = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{T}t + \phi_o = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}0{,}01$$

Sustituyendo en (1), y teniendo en cuenta que x= 0,5, tenemos:

$$0{,}5 = 1\,\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}0{,}01)$$

$$0{,}5 = \cos(\frac{2\pi}{T}0{,}01)$$

$$\frac{2\pi}{T}0{,}01 = \frac{\pi}{3}$$

♣ $T = 0{,}06$ s Ⓓ

Solución: 95

• Como la energía máxima corresponde a la velocidad máxima, hallemos el instante en que la velocidad es máxima, así:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_o)$$

$$v = \omega\,A\cos(\omega\,t + \phi_o)$$

La velocidad es máxima, para $\omega t + \phi_o = 0$, entonces la energía cinética máxima es:

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2\cos^2(\omega\,t + \phi_o)$$

$$E_{C,max} = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2$$

Por dato del problema, para t= t+ t', la energía cinética se reduce a la mitad de la energía cinética máxima $E_{C,\,max}$, esto es:

$$\frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2\cos^2[\omega(t + t') + \phi_o] = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2)$$

$$\cos^2\omega\,t' = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

♣ $t' = \dfrac{\pi}{4\omega}$ Ⓒ

Solución: 96

• El decremento logarítmico ξ en función de las frecuencias natural (f_0) y amortiguada (f), viene dado por:

$$\xi = \frac{f_o}{f}(1 - \frac{f^2}{f_o^2})^{1/2}$$

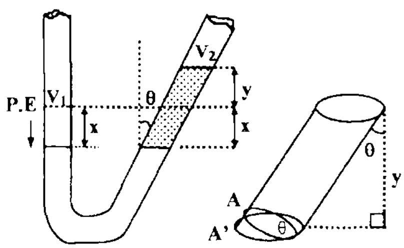
$$\xi = \left(\frac{20}{16}\right)\left(1 - \frac{16^2}{20^2}\right)^{1/2}$$

$$\xi = \frac{(5)(12)}{(4)(20)}$$

$$\clubsuit \ \xi = 3/4$$ **(D)**

Solución: 97

• En la rama izquierda del tubo desplacemos hacia abajo una columna de mercurio de altura (x), y luego liberándolo, producimos las oscilaciones, como se muestra en la Fig.



Como se observa, el volumen de mercurio desplazado en la rama izquierda, es igual, al volumen desplazado en la rama derecha, respecto de la posición de equilibrio (P.E), esto es:

$$V_1 = V_2$$

$$A\,x = A'y = \frac{A}{\cos\theta}\,y$$

$$y = x\cos\theta$$

pues, la proyección del área A' sobre la sección recta del tubo es $A'\cos\theta = A$.

En la Fig., la fuerza sobre el mercurio, debida a la presión hidrostática, creada por la columna de mercurio (sombreado) es:

$$F = \rho\, g\,(x + y)\,A$$

$$F = \rho\, g A\,(1 + \cos\theta)\,x = k\,x$$

$$k = \rho\, g A\,(1 + \cos\theta)$$

pues, las oscilaciones son armónicas, y la fuerza es del tipo de Hooke.

Luego, el período de las oscilaciones armónicas que realiza el mercurio es:

$$T = 2\pi\,(m/k)^{1/2}$$

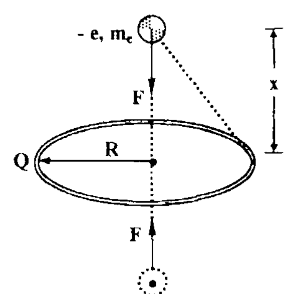
$$T = 2\pi\left[\frac{m}{\rho\, g A(1 + \cos\theta)}\right]^{1/2}$$

$$T = \left[\frac{(2\pi)^2(0,2)}{(13,6.10^3)(10)(0,5.10^{-4})(1 + \cos 30^\circ)}\right]^{1/}$$

$$\clubsuit \ T = 0,79 \text{ s}$$ **(E)**

Solución: 98

• Representemos la fuerza eléctrica ejercida por el anillo sobre el electrón de masa "m_e" y carga eléctrica -e.



Así, en la Fig., esta fuerza está dirigida en todo momento hacia el centro del anillo, y su magnitud es:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e.Q\,x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Ahora, como $x \ll R$, entonces despreciando x frente a R, tenemos:

$$F = \frac{e.Q}{4\pi\varepsilon_o R^3} x = k\,x$$

Esta fuerza es del tipo de Hooke, F=k.x, así, la carga se mueve alrededor del centro del anillo con M.A.S, cuyo período viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{m_e/k}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{m_e}{e.Q/4\pi\varepsilon_o R^3}\right]^{1/2}$$

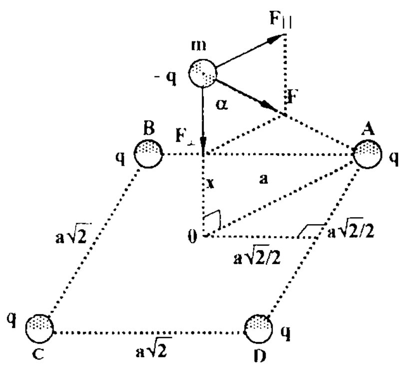
$$T = 2\pi\left[4\pi\varepsilon_o m_e R^3/e.Q\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{(9{,}1.10^{-31})(3.10^{-1})^3}{(9.10^9)(1{,}6.10^{-19})(3.10^{-10})}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = 1{,}5\ \mu s \qquad B$$

Solución: 99

- Representemos la fuerza eléctrica sobre (-q) debida a la carga ubicada en A.



En la Fig., la suma de las componentes paralelas al cuadrado ABCD de las fuerzas eléctricas sobre (-q), creadas por las cargas ubicadas en los vértices ABCD se cancelan entre sí, de modo que, la resultante (F'), es igual a la suma de las componentes verticaes, esto es:

$$F' = 4F_\perp = 4F\cos\alpha$$

$$F' = 4k\frac{q^2}{d^2}\cos\alpha$$

En los triangulos rectángulos:

$$d = \sqrt{x^2 + a^2} \quad y \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

De modo que:

$$F' = 4k\frac{q^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$F' = \frac{4kq^2}{a^3}\frac{1}{[1 + (x/a)^2]^{3/2}}$$

Por dato, x << a, entonces $(x/a)^2 \approx 0$, de modo que la ecuación anterior queda, así:

$$F' = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_o a^3} x = k\,x$$

Esta fuerza es del tipo de Hooke, F=k.x. Luego, el período de las pequeñas oscilaciones que realiza la carga eléctrica es:

$$T = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[m\,a^3 4\pi\varepsilon_o / 4q^2\right]^{1/2}$$

$$T = \left[\frac{\pi^2(9{,}1.10^{-31})(10^{-1})^3}{(9.10^9)(1{,}6.10^{-19})^2}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = 6{,}24.10^{-3}\ s \qquad C$$

☺ **Nota**

No confundir la constante de elasticidad en la ley de Hooke, con la constante eléctrica en la ley de Coulomb.

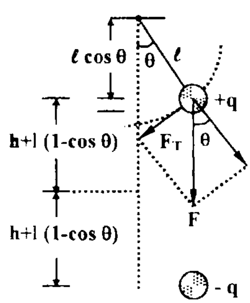
Solución: 100

• Según el método de imágenes, el sistema carga-lámina, se puede reemplazar por un sistema de dos cargas "q" y "-q", equidistantes de la lámina. Así, en la Fig., la fuerza que produce las oscilaciones de la carga "+q" es la componente tangencial de la fuerza eléctrica (F), esto es:

$$F_T = F \operatorname{sen}\theta$$

$$F_T = k \frac{q^2}{[2h + 2.\ell(1-\cos\theta)]^2} \operatorname{sen}\theta$$

$$F_T = k \frac{q^2}{4h^2[1 + 4\ell \operatorname{sen}^2(\theta/2)]^2} \operatorname{sen}\theta$$



Ahora, como $q \cong 0$, entonces:

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta \quad ; \quad \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \approx 0 \quad y \quad s = \ell.\theta$$

Luego, utilizando estas aproximaciones, en la ecuación anterior, ella queda así:

$$F_T = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o h^2 \ell} s = k\, s$$

Esta fuerza es del tipo de Hooke, F=k.s (siendo s la longitud de arco limitado por el ángulo θ), de período igual a:

$$T = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$$

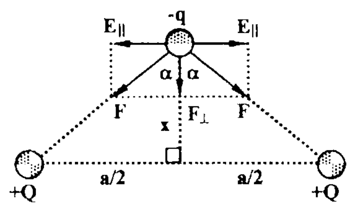
$$T = \frac{4\pi h}{q}\left[4\pi\varepsilon_o m L\right]^{1/2}$$

$$T = \frac{4\pi(2.10^{-2})}{(8.10^{-10})}\left[\frac{(9.10^{-23})(4.10^{-2})}{9.10^{9}}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad T = 2\pi.10^{-9}\ s \qquad \text{(B)}$$

Solución: 101

• Representemos las fuerzas eléctricas que actúan sobre la carga "-q".



El módulo de las fuerzas eléctricas que ejercen las cargas "Q" sobre -q, es:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q.Q}{x^2 + (a/2)^2} \qquad (1)$$

En la Fig., la suma de las componentes horizontales de estas fuerzas, se anulan entre si, luego, la fuerza resultante F' sobre -q, será igual, a la suma de las componentes verticales, esto es:

$$F' = 2\,F_\perp$$

$$F' = 2\,F\cos\alpha \qquad (2)$$

Pero, de la Fig.: se tiene que:

$$\cos\alpha = \frac{x}{[x^2 + (a/2)^2]^{1/2}} \qquad (3)$$

De (1) y (3) en (2):

$$F' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{q.Q}{[x^2 + (a/2)^2]^{3/2}}\, x$$

$$F' = \frac{4}{\pi\varepsilon_0 a^3} \frac{q.Q}{[1+(2x/a)^2]^{3/2}} x$$

Como (2x/a)<<1, entonces, podemos despreciar éste termino frente a 1, quedando la ecuación anterior, así:

$$F' = \frac{4q.Q}{\pi\varepsilon_0 a^3} x = k\,x$$

Esta fuerza es del tipo de Hooke, F=k.x, cuyo período, viene dado por:

$$T = 2\pi(m/k)^{1/2}$$

$$T = \left[\pi^2 4\pi\varepsilon_0 ma^3 / 4q.Q\right]^{1/2}$$

$$T = \left[\frac{\pi^2(9.10^{-22})(10^{-2})^3}{(4)(9.10^9)(8.10^{-10})(4.10^{-9})}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = 88{,}4\pi.10^{-12}\ s \qquad \text{C}$$

Solución: 102

• El tiempo que demora el ascensor en ascender la altura (h), hallamos a partir de:

$$h = v_o t + \frac{1}{2} a\,t^2 \quad => \quad t_A = (2h/a)^{1/2}$$

Los períodos del reloj de péndulo en el ascenso (T_A) y en el descenso (T_D) son:

$$T_A = 2\pi\left(\frac{\ell}{g+a}\right)^{1/2} \ \text{y}\ T_D = 2\pi\left(\frac{\ell}{g-a}\right)^{1/2}$$

Los tiempos que se adelanta y retrasa el reloj de péndulo, en cada ciclo, durante el as-censo y descenso, son:

$$\Delta T_A = 2\pi\left[\left(\frac{\ell}{g}\right)^{1/2} - \left(\frac{\ell}{g+a}\right)^{1/2}\right]$$

$$\Delta T_D = 2\pi\left[\left(\frac{\ell}{g-a}\right)^{1/2} - \left(\frac{\ell}{g}\right)^{1/2}\right]$$

Así, el número de oscilaciones que realiza el reloj de péndulo durante su ascenso es:

$$N_A = \frac{t}{T_A} = \frac{(2h/a)^{1/2}}{2\pi(\ell/g+a)^{1/2}}$$

$$N_A = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2h\,(g+a)}{a\,\ell}\right]^{1/2}$$

De modo que, el tiempo total que se ade-lanta el reloj de péndulo durante el ascenso es:

$$\Delta t_A = N_A \Delta T_A$$

$$\Delta t_A = \left(\frac{2h}{ag}\right)^{1/2}(\sqrt{g+a} - \sqrt{g})$$

De otro lado, el número de oscilaciones que realiza el reloj de péndulo, durante el descenso es:

$$N_D = \frac{\Delta t_A}{\Delta T_D}$$

Con esto, el tiempo total que desciende el reloj de péndulo es:

$$t_D = N_D T_D = \left(\frac{\Delta t_A}{\Delta T_D}\right) T_D$$

$$t_D = \frac{(2h/ag)^{1/2}(\sqrt{g+a} - \sqrt{g})}{2\pi\sqrt{\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{g-a}} - \frac{1}{\sqrt{g}}\right)} 2\pi \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{g-a}}$$

$$t_D = \left(\frac{2h}{a}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{g+a} - \sqrt{g}}{\sqrt{g} - \sqrt{g-a}}$$

Luego, el tiempo total que transcurre hasta que el péndulo vuelve a funcionar correctamente es:

$$t_T = t_A + t_D$$

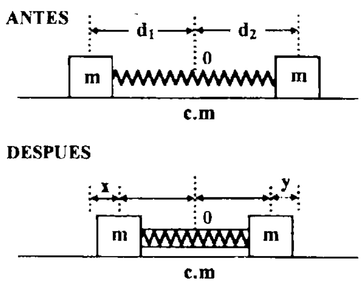
$$t_T = (\frac{2h}{a})^{1/2}\frac{\sqrt{g+a}-\sqrt{g-a}}{\sqrt{g}-\sqrt{g-a}}$$

$$t_T = [\frac{(2)(10)}{5}]^{1/2}\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}$$

$$♣\ t_T = 3{,}53\ s$$ (C)

Solución: 103

• Representemos a los bloque unidos al resorte antes y después de deformarse.



Antes, eligiendo el c.m del sistema, como el origen de coordenadas 0, hallemos la relación entre d_1 y d_2, así:

$$x_{c.m} = \frac{-m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

Después, sean, x e y las longitudes comprimidas del resorte a la izquierda y derecha del origen 0, como se aprecia, entonces, como la posición del centro de masa no cambia, se cumple que:

$$x_{c.m} = \frac{-m_1(d_1 - x) + m_2(d_2 - y)}{m_1 + m_2} = 0$$

$$y = \frac{m_1}{m_2}x$$

De modo que, la compresión total que experimenta el resorte es:

$$\Delta\ell = x + y = \frac{m_1 + m_2}{m_2}x$$

Así, la fuerza que actúa sobre el bloque (1), debido a la deformación del resorte es:

$$F = k\,\Delta\ell = \frac{m_1 + m_2}{m_2}k\,x$$

Como la fuerza es del tipo de Hooke, la constante elástica, del movimiento oscilatorio del bloque (1) es:

$$k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}k$$

Luego, el período de las oscilaciones que realiza el bloque (1), al quemarse los hilos es:

$$T = 2\pi(\frac{m_1}{k_1})^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{(9)(16)}{(9+16)(576)}]^{1/2}$$

$$♣\ T = \frac{\pi}{5}\ s$$ (D)

! Probar que los bloques (1) y (2), realizan oscilaciones, de igual período !

Solución: 104

• Recordemos que el período de las pequeñas oscilaciones que realiza un péndulo compuesto, alrededor de un eje, viene dado por:

$$T = 2\pi(\frac{I_0}{m\,g\,d})^{1/2}$$

siendo, (I_0) el momento de inercia respecto del eje que pasa por 0, (m) la masa del péndulo, y (d) la distancia del centro de masa (c.m) al punto 0.
Así, cuando el agua se encuentra en estado líquido, el período de las pequeñas oscilaciones es:

$$T = 2\pi\left(\frac{m\,\ell^2}{m\,g\,d}\right)^{1/2}$$

Del mismo modo, cuando el agua se encuentra en estado sólido (hielo), el período de las pequeñas oscilaciones es:

$$T = 2\pi\left(\frac{I_0}{m\,g\,d}\right)^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left(\frac{I_{cm} + m\,\ell^2}{m\,g\,d}\right)^{1/2}$$

$$T' = 2\pi\left[\frac{(2/5)\,m\,R^2 + m\,\ell^2}{m\,g\,d}\right]^{1/2}$$

siendo, I_{cm}, I_0 los momentos de inercia del recipiente esférico, respecto a su centro de masa (c.m) y del eje que pasa por 0.
Luego, el número de veces que aumenta el período de las pequeñas oscilaciones es:

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi\,[(2/5)\,R^2 + \ell^2/g\,d]^{1/2}}{2\pi\,[\ell^2/gd]^{1/2}}$$

$$\frac{T'}{T} = [1 + \frac{2}{5}(\frac{R}{\ell})^2]^{1/2}$$

$$\frac{T'}{T} = [1 + \frac{2}{5}(\frac{R}{2R})^2]^{1/2}$$

A

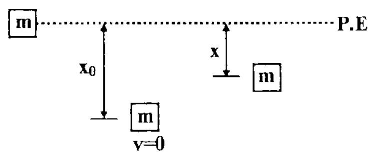
$$\clubsuit\ \frac{T'}{T} = 1{,}05 \text{ veces}$$

Solución: 105

• Cuando el sistema mecánico está en reposo, el peso del bloque (mg) produce un alargamiento ℓ del resorte, esto es, se cumple:

$$m\,g = k\,\ell$$

Para producir las oscilaciones del bloque, estiramos el resorte una longitud adicional (x_0), a partir de la posición de equilibrio, y liberamos el sistema, siendo la amplitud de las oscilaciones (x_0).



Ahora, apliquemos el principio de conservación de la energía mecánica, para una elongación cualesquiera ($x<x_0$) del resorte; y considerando a la polea imponderable, se tiene:

$$E = \frac{1}{2}k(x_o + \ell)^2 - m\,g\,x_o = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}k(x + \ell)^2 - m\,g\,x$$

Sustituyendo $mg = k\ell$, operando y simplificando, obtenemos la expresión para la ve-locidad, así:

$$\frac{1}{2}k\,(x_o^2 + \ell^2) = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}k\,(x^2 + \ell^2)$$

$$v = [k\,(x_o^2 - x^2)/m]^{1/2}$$

Nuevamente, apliquemos el principio de conservación de la energía mecánica, pero considerando la masa M de la polea, así:

$$E = \frac{1}{2}k(x_o + \ell)^2 - m\,g\,x_o = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2 + \frac{1}{2}k(x + \ell)^2 - m\,g\,x$$

$$\frac{1}{2}k(x_o+\ell)^2 - mg\,x_o = \frac{1}{2}m\,v^2 +$$

$$\frac{1}{2}(MR^2)(\frac{v}{R})^2 + \frac{1}{2}k(x+\ell)^2 - mg\,x$$

Sustituyendo $mg = k\ell$, operando y simplificando, obtenemos la expresión para la velocidad, así:

$$\frac{1}{2}k(x_o^2+\ell^2) = \frac{1}{2}(m+M)\,v^2 + \frac{1}{2}k\,(x^2+\ell^2)$$

$$v = [k\,(x_o^2 - x^2)/(m+M)]^{1/2}$$

Como se observa en el segundo caso, el bloque se mueve con una velocidad menor, como si su masa hubiese aumentado de m a m+M, de modo que, el período de las oscilaciones del bloque es:

$$T = 2\pi(\frac{m+M}{k})^{1/2}$$

$$T = 2\pi(\frac{8+12}{720})^{1/2}$$

$$♣\ T = \frac{\pi}{3}\,s \qquad \text{(D)}$$

Solución: 106

- El período correspondiente a la amplitud de $\theta_o = 5^0$, con una aproximación del segundo orden es:

$$T = T_o(1+\frac{1}{4}\text{sen}^2 5^o)$$

De modo que, el tiempo que se adelante el péndulo en un ciclo completo es:

$$\Delta T = T - T_o = T_o\frac{1}{4}\text{sen}^2 5^0$$

De otro lado, el número de ciclos que realiza el péndulo en el tiempo de t=1 día es:

$$N = \frac{t}{T_o} = \frac{(24)(60)(60)}{T_o}$$

Luego el tiempo total que se adelanta el péndulo en 1 día = (24)(60)(60) s es:

$$t' = N\Delta T = (24)(60)^2\,\frac{1}{4}\text{sen}^2 5^o$$

$$t' = 164{,}07s$$

$$♣\ t' = 2{,}73\text{min} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 107

- La posición y velocidad instantáneas del cuerpo en oscilación, vienen dados por:

$$x = A\,\text{sen}(\omega\,t+\phi_o)$$

$$v = \omega\,A\cos(\omega\,t+\phi_o)$$

Evaluando estas ecuaciones en $t_0 = 0$, obtenemos:

$$x_o = A\,\text{sen}\,\phi_o \qquad (1)$$

$$v_o = \omega\,A\cos\phi_o \qquad (2)$$

Sumando $(1)^2$ más $(2)^2$, obtenemos la amplitud del movimiento oscilatorio:

$$A = [x_o^2 + (\frac{v_o}{\omega})^2]^{1/2}$$

$$A = [0{,}1^2 + (1/6)^2]^{1/2} = 0{,}194\ m$$

Dividiendo (1) entre (2), obtenemos la fase inicial del movimiento oscilatorio:

$$\text{tg}\,\phi_o = \frac{\omega\,x_o}{v} \quad => \quad \phi_o = \text{tg}^{-1}(\frac{\omega\,x_o}{v})$$

$$\phi_o = \text{tg}^{-1}(\frac{(6)(0{,}1)}{1}) = 0{,}54\ \text{rad}$$

Así, la ecuación de la posición instantenea del cuerpo, vendrá dado por:

$$x(t) = 0{,}194\,\mathrm{sen}(6\,t + 0{,}54)$$

$$x(1{,}4) = 0{,}194\,\mathrm{sen}((6)(1{,}4) + 0{,}54)$$

$$♣\ x(1{,}4) = 0{,}09\ \mathrm{m} \qquad \text{E}$$

Solución: 108

• La ecuación diferencial que describe el movimiento del oscilador armónico forzado, viene dado por:

$$m\frac{dz^2}{dt^2} + k\,z = F(t)$$

$$4\frac{dz^2}{dt^2} + 16\,z = 64\,\mathrm{sen}\,4t$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 4\,x = 16\,\mathrm{sen}\,4t \qquad (1)$$

siendo, $\omega_o = 2\mathrm{rad/s}$ la frecuencia angular de las oscilaciones libres o propias.

La solución general de la ecuación diferencial (1), y la velocidad instantánea del cuerpo asociado al resorte, son:

$$z = A\cos 2t + B\,\mathrm{sen}\,2t - \frac{4}{3}\mathrm{sen}\,4t$$

$$v = -2A\,\mathrm{sen}\,2t + 2B\cos 2t - \frac{16}{3}\cos 4t$$

Evaluando estas ecuaciones en t= 0, hallemos las constantes de integración A y B, así:

$$0 = A\cos 0 + B\mathrm{sen}\,0 - \frac{4}{3}\mathrm{sen}\,0$$

$$A = 0$$

$$0 = 2A\,\mathrm{sen}\,0 + 2B\cos 0 - \frac{16}{3}\cos 0$$

$$0 = 2\,B - \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{8}{3}$$

Luego, expresando la solución particular a la ec.(1), y evaluando dicha solución para t= 0,5 s, obtenemos:

$$z = \frac{8}{3}\mathrm{sen}\,2t - \frac{4}{3}\mathrm{sen}\,4t$$

$$z = \frac{8}{3}\mathrm{sen}(2)(0{,}5) - \frac{4}{3}\mathrm{sen}(4)(0{,}5)$$

$$♣\ z \approx 1\ \mathrm{m} \qquad \text{D}$$

Solución: 109

• Como, 2γ= b/m=8/2=4, $\gamma = 2$, además ω_o^2 =k/m=8/2=4, luego, la ecuación que describe el movimiento oscilatorio amortiguado del cuerpo es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4\,x = 0$$

Como, $\gamma = \omega_o^2$ la solución general a la ecuación diferencial anterior, y la velocidad instantánea, vienen dados por:

$$x(t) = e^{-\gamma\,t}(A + B\,t)$$

$$v(t) = -\gamma\,e^{-\gamma\,t}(A + B\,t) + B\,e^{-\gamma\,t}$$

Evaluando estas expresiones en t= 0, hallemos las constantes A y B, así:

$$x(0) = 2 = A$$

$$v(0) = 0 = -2\,A + B \quad \Rightarrow \quad B = 4$$

Luego, expresando la solución particular y evaluando en t= 0,5 s, tenemos:

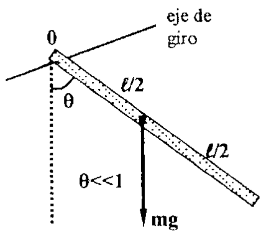
$$x(t) = 2e^{-2t}(1+2t)$$

$$x(0,5) = 2e^{-(2)(0,5)}[1+(2)(0,5)]$$

$$\clubsuit \ x(0,5) = 1,47 \text{ m} \qquad \text{C}$$

Solución: 110

• Representemos a la barra girando, debido a su propio peso.



El período de las pequeñas oscilaciones que realiza la barra, alrededor del eje de giro es:

$$T = 2\pi\left(\frac{I_o}{m g d}\right)^{1/2}$$

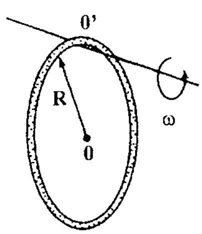
$$T = 2\pi\left[\frac{(1/3)m\ell^2}{m g(\ell/2)}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{2\ell}{3g}\right]^{1/2} = 2\pi\left[\frac{(2)(0,375)}{(3)(\pi)^2}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit \ T = 1\text{s} \qquad \text{D}$$

Solución: 111

• Representemos el anillo, oscilando alrededor del eje de giro.



Según el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia respecto del eje de giro que pasa por 0' es:

$$I = I_o + m d^2$$

$$I = m R^2 + m R^2$$

$$I = 2m R^2$$

Luego, el período de las pequeñas oscilaciones que realiza el anillo es:

$$T = 2\pi\left[\frac{I}{m g d}\right]^{1/2}$$

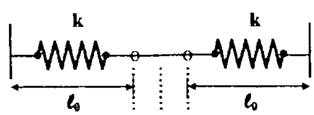
$$T = 2\pi\left[\frac{2m R^2}{m\pi^2 R}\right]^{1/2}$$

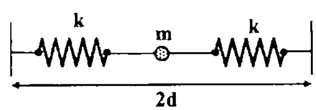
$$T = [8R]^{1/2} = [(8)(0,125)]^{1/2}$$

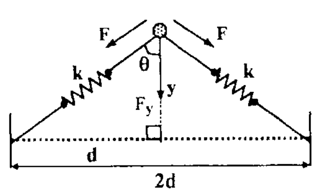
$$\clubsuit \ T = 1 \text{ s} \qquad \text{B}$$

Solución: 112

• Representemos a la conexión de resistencias en tres situaciones diferentes.







En la Fig., la fuerza resultante sobre la boli lla de masa (m) es:

$$F_y = 2\,F\cos\theta$$

$$F_y = 2k(\sqrt{y^2+d^2}-\ell_o)\frac{y}{\sqrt{y^2+d^2}}$$

$$F_y = 2k\,(y-\frac{\ell_o y}{d\sqrt{1+y^2/d^2}})$$

$$F_y = 2k\,(y-\frac{\ell_o y}{d}(1+\frac{y^2}{d^2})^{-1/2})$$

$$F_y = 2k\,(y-\frac{\ell_o y}{d}(1-\frac{1}{2}\frac{y^2}{d^2}))$$

$$F_y = 2k\,(y-\frac{\ell_o}{d}y+\frac{1}{2}\frac{\ell_o}{d^3}y^3)$$

Como, y/d << 1, entonces $(y/d)^3 \approx 0$, lue go la expresión anterior, queda así:

$$F_y = \frac{2k(d-\ell_o)}{d}y = ky$$

Luego, el período de las pequeñas oscila ciones que realiza la bolilla de masa (m) se-rá:

$$T = 2\pi\,(\frac{m}{k})^{1/2}$$

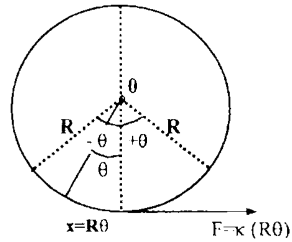
$$T = 2\pi[\frac{m\,d}{2k\,(d-\ell_o)}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{(0{,}4)(0{,}25)}{(2)(100)(0{,}2)}]^{1/2}$$

♣ $T = \frac{\pi}{10}\,s$ (B)

Solución: 113

• Representemos al disco después que ha girado un ángulo (θ), respecto de su posi- ción de equilibrio.



El disco experimenta dos torques, uno de bido a la recuperación del alambre defor mado y el otro debido a la fuerza de recu peración del resorte, así, el torque total es:

$$\tau = \kappa'\,\theta + \kappa\,(R\,\theta)\,R$$

$$\tau = (\kappa' + \kappa\,R^2)\,\theta = k\,\theta$$

siendo $k = \kappa' + \kappa\,R^2$ la constante elástica del movimiento oscilatorio simple.

Luego, el período de las pequeñas oscila ciones que realiza el disco es:

$$T = 2\pi\,(\frac{I_o}{k})^{1/2}$$

$$T = 2\pi\,(\frac{1/2 m\,R^2}{\kappa' + \kappa\,R^2})^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{(1/2)(1{,}28)(1/4)^2}{360+(640)(1/4)^2}]^{1/2}$$

♣ $T = 20\pi$ ms (D)

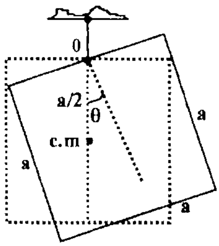
Solución: 114

• Aplicando el teorema de los ejes parale los, el momento de inercia respecto de eje que pasa por 0 es:

$$I_0 = I_{c.m} + m\,d^2$$

$$I_0 = \frac{1}{6}m\,a^2 + m\frac{a^2}{4}$$

$$I_0 = \frac{5}{12}\, m\, a^2$$



Luego, el período de las pequeñas oscila ciones que realiza la placa cuadrada es:

$$T = 2\pi\left(\frac{I_o}{m\,g\,d}\right)^{1/2}$$

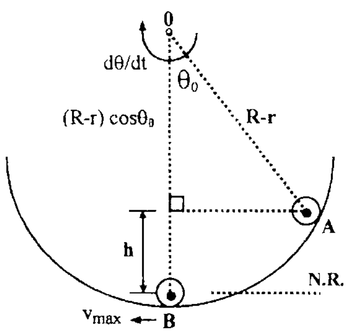
$$T = 2\pi\left(\frac{5m\,a^2/12}{m g\, a/2}\right)^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{5\,a}{6\,g}\right]^{1/2} = 2\pi\left[\frac{(5)(0{,}48)}{(6)(10)}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = 0{,}4\pi \text{ s} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 115

• Representemos la bolita en dos posicio nes diferentes A y B.



La energía potencial inicial de la bolita en A se transforma en energía cinética de ro tación y traslación cuando ella pasa por la posición B, esto es, se cumple:

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega_{max}^2 + \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

$$mg[(R-r)-(R-r)\cos\theta_o] =$$
$$\frac{1}{2}I\omega_{max}^2 + \frac{1}{2}m[(R-r)(\frac{d\theta}{dt})_{max}]^2$$

$$mg(R-r)(1-\cos\theta_o) = \frac{1}{2}I(\frac{v_{max}}{r})^2$$
$$+\frac{1}{2}m(R-r)^2\omega^2\theta_o^2$$

$$mg(R-r)2\text{sen}^2\frac{\theta_o}{2} = \frac{1}{2}I[\frac{(R-r)(\omega\theta_o)}{r}]^2$$
$$\frac{1}{2}m(R-r)^2\omega^2\theta_o^2$$

$$mg(R-r)\frac{\theta_o^2}{2} = \frac{1}{2}I\frac{(R-r)^2(\omega^2\theta_o^2)}{r^2} +$$
$$\frac{1}{2}m(R-r)^2\omega^2\theta_o^2$$

$$\omega^2 = \frac{mgr^2}{(R-r)(I+mr^2)}$$

Como, R>>r, $\omega = 2\pi/T$, y $I=2mr^2/5$, enton ces:

$$T = 2\pi\left[\frac{7R}{5g}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{(7)(50/7)}{(5)(10)}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = 2\pi\text{s} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 116

• En la Fig., en los triángulos rectángulos OCB y ODC, tenemos que:

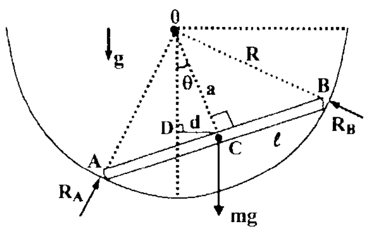
$$a = [R^2 - \ell^2]^{1/2} \quad \text{y} \quad d = a\,\text{sen}\,\theta$$

Del teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de la varilla de longitud "2ℓ", respecto de 0 es:

$$I_0 = I_C + m\,a^2$$

$$I_0 = \frac{1}{12} m(2\ell)^2 + m(R^2 - \ell^2)$$

$$I_0 = m(R^2 - \frac{2}{3}\ell^2)$$



Aplicando a la varilla la ecuación fundamental del movimiento de rotación, respecto del punto 0, tenemos:

$$\sum \vec{M}_0 = I_0\,\vec{\alpha}$$

$$m g a \operatorname{sen}\theta = m(R^2 - \frac{2\ell^2}{3})(-\frac{d^2\theta}{dt^2})$$

Como, $\theta \to 0$, entonces, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, por lo que, la ecuación anterior queda así:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g(R^2 - \ell^2)}{(R^2 - 2\ell^2/3)}\theta = 0$$

De aquí, la frecuencia propia de las pequeñas oscilaciones que realiza la varilla es:

$$\omega_o = [\frac{g(R^2 - \ell^2)}{(R^2 - 2\ell^2/3)}]^{1/2}$$

A su vez, el período de las pequeñas oscilaciones de la varilla es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi[\frac{R^2 - 2\ell^2/3}{g(R^2 - \ell^2)^{1/2}}]^{1/2}$$

$$T = 2\pi[\frac{0{,}5^2 - (2)(0{,}4)^2/3}{(10)(0{,}5^2 - 0{,}4^2)^{1/2}}]^{1/2}$$

$$T \approx 1{,}37 \text{ s}$$

II) El momento de inercia del sistema varilla-bolas, respecto del punto 0 es:

$$I_0 = m R^2 + m R^2 = 2 m R^2$$

Asumiendo que la masa total (2m) esta aplicada en el centro de la varilla, de la ecuación fundamental de rotación, tenemos:

$$\sum \vec{M}_0 = I_0\,\vec{\alpha}$$

$$2 m g a \operatorname{sen}\theta = (2 m R^2)(-\frac{d^2\theta}{dt^2})$$

Como, $\theta \to 0$, entonces, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, por lo que, la ecuación anterior queda así:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g a}{R^2}\theta = 0$$

De aquí, la frecuencia propia de las pequeñas oscilaciones que realiza la varilla es:

$$\omega_o = (\frac{g a}{R^2})^{1/2}$$

A su vez, el período de las pequeñas oscilaciones de la varilla es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi R}{[g(R^2 - \ell^2)^{1/2}]^{1/2}}$$

$$T = \frac{(2\pi)(0{,}5)}{[(10)(0{,}5^2 - 0{,}4^2\}^{1/2}]^{1/2}}$$

$$T' = 1{,}81 \text{ s}$$

Luego, el aumento del período del sistema oscilatorio es:

$$\Delta T - T' - T = 1{,}81 - 1{,}37$$

$$\Delta T \approx 0{,}44 \text{ s}$$

Nota
El signo (-) de la aceleración angular se debe a que el momento de la fuerza, se opone al aumento de "θ".

Solucin: 117

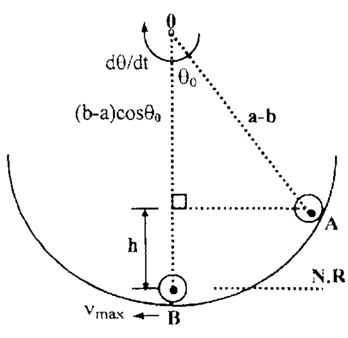
• Como las oscilaciones que realiza la esferita alrededor de su posición de equilibrio, son armónicas simples, su desplazamiento angular, viene dado por:

$$\theta = \theta_o \,\text{sen}(\omega t + \alpha)$$

Derivando esta expresión, encontramos la relación entre $(d\theta/dt)_{max}$ y ω, así:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_o \cos(\omega t + \alpha)$$

$$(\frac{d\theta}{dt})_{max} = \omega\,\theta_o$$



La energía potencial inicial de la bolita en A se transforma en energía cinética de rotación y traslación cuando ella pasa por la posición B, esto es, se cumple:

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2_{max} + \frac{1}{2}mv^2_{max}$$

$$mg[(a-b)-(a-b)\cos\theta_o] =$$

$$\frac{1}{2}I\,\omega^2_{max} + \frac{1}{2}m[(a-b)(\frac{d\theta}{dt})_{max}]^2$$

$$mg(a-b)(1-\cos\theta_o) = \frac{1}{2}I(\frac{v_{max}}{b})^2$$

$$+\frac{1}{2}m(a-b)^2\omega^2\,\theta_o^2$$

$$mg(a-b)\,2\,\text{sen}^2\frac{\theta_o}{2} = \frac{1}{2}I[\frac{(a-b)(\omega\,\theta_o)}{b}]^2$$

$$\frac{1}{2}m(a-b)^2\omega^2\,\theta_o^2$$

$$mg(a-b)\frac{\theta_o^2}{2} = \frac{1}{2}I\frac{(a-b)^2(\omega^2\theta_o^2)}{b^2} +$$

$$\frac{1}{2}m(a-b)^2\omega^2\,\theta_o^2$$

$$\omega^2 = \frac{mg\,b^2}{(a-b)(I+m\,b^2)}$$

Como, $\omega = 2\pi/T$, y $I=2m\,b^2/5$, entonces la expresión del período es:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mg\,b^2}{(a-b)(2m\,b^2/5+m\,b^2)}$$

$$T^2 = 4\pi^2\,7(a-b)/5g$$

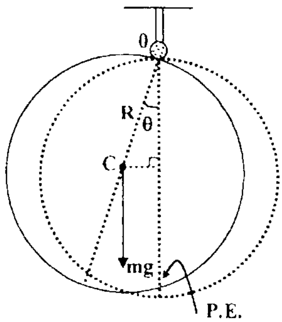
$$♣\ T = 2\pi[7(a-b)/5g]^{1/2}$$

Solució: 118

• Del teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de la esfera de radio "R", respecto del punto de giro 0 es:

$$I_0 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2$$

$$I_0 = \frac{7}{5} m R^2$$



Ahora, de la ecuación fundamental del movimiento de rotación de un sólido, respecto del punto 0, tenemos:

$$\sum \vec{M}_0 = I_0 \vec{\alpha}$$

$$m g \operatorname{sen}\theta R = \frac{7}{5} m R^2 \left(-\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

Como, $\theta \to 0$, entonces $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, y la ecuación anterior queda, así:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{2R}\theta = 0$$

Esta ecuación diferencial corresponde a un movimiento oscilatorio armónico de frecuencia angular y período, igual a:

$$\omega_o = \left(\frac{5g}{7R}\right)^{1/2} \quad y \quad T = 2\pi\left(\frac{7R}{5g}\right)^{1/2}$$

I) Evaluando la expresión del período, para los datos dados, obtenemos:

$$T = 2\pi\left[\frac{(7)(0,4)}{(5)(10)}\right]^{1/2}$$

$$T \approx 1{,}49 \text{ s}$$

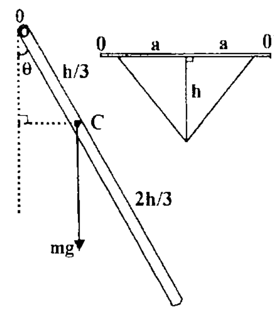
II) La longitud del péndulo simple que tiene el mismo período que la de la esfera oscilatoria es:

$$\ell = \frac{7R}{5} = \frac{(7)(0,4)}{5}$$

$$\ell = 56 \text{ cm}$$

Solución: 119

• El peso (mg) de la placa triangular actúa a una distancia de "h/3" del eje de giro 00', como se muestra en la Fig.



El momento de inercia de la placa, respecto del punto de giro 0 es:

$$I_o = \frac{1}{6} m h^2$$

Luego, la frecuencia angular y el periodo de las pequeñas oscilaciones que realiza la placa alrededor del punto de giro 0 es:

$$\omega_o = \left(\frac{2g}{h}\right)^{1/2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \pi\left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}$$

$$T = \pi\left[\frac{(2)(0,8)}{10}\right]^{1/2}$$

♣ $T = \frac{2\pi}{5}$ s **B**

ELASTICIDAD

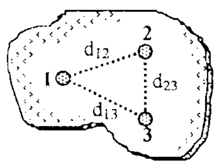
CAP-2

1. SOLIDOS

1) Definición

Se llama así a los cuerpos que tienen forma y volumen constantes, es decir, la distancia entre las partículas que lo constituyen se mantienen constantes, esto es:

$$d_{ij} = \text{cte.} \quad (i, j = 1, 2, 3, ...)$$



- Se dice que un sólido se ha deformado cuando ha variado sus dimensiones y volumen, que en general va acompañada de una variación en sus formas.
- En ciertos casos (de compresión y extensión) se conserva la forma del sólido.
- La deformación que experimenta un cuerpo se produce como resultado de la variación de la temperatura o la acción de una fuerza externa.
- Se dice que una deformación es elástica, cuando ella desaparece al cesar la acción de las fuerzas que la producen.

2) Clasificacion

Los sólidos se dividen en cristales y amorfos.

a) Cristales

➢ **Características**

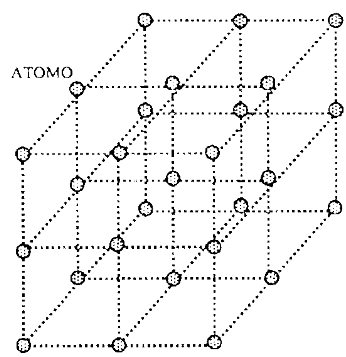
- Tiene forma exterior geométrica regular y la disposición de las partículas que los componen se repite períodicamente a lo largo de todo el cristal (red cristalina).
- Los cristales están limitados por caras planas, situadas ordenadamente unas respecto a las otras, que convergen en las aristas y vértices.

➢ **Tipos**

Según la forma que adoptan los cristales, se clasifican en:

* **Monocristales**

Se llaman así a los cristales grandes aislados en forma de poliedros regulares, su forma depende de la composición química del cristal.



Red cristalina

* **Policristales**

Se llama así a los cristales que tienen estructura fina y constan de un gran número de pequeños cristales, dispuestos caóticamente (granos cristalinos o cristalitos), unidos entre sí.

Según el carácter de las fuerzas de interacción de las partículas y a la disposición en los nudos de la red cristalina.

- **Cristales iónicos**
  Los iones positivos y negativos se alternan en los nudos de la red cristalina; el enlace es de tipo heteropolar.
  Ejemplo: NaCl, carbonato de calcio y otros.

- **Cristales de valencia**
  En los nudos de la red cristalina se hallan átomos neutros entre los cuales se realiza el enlace homopolar.
  Ejemplo: Semiconductores y muchos sólidos orgánicos.

- **Cristales moleculares**
  En los nudos de la red cristalina se encuentran moléculas, cuyo enlace se debe a las fuerzas de Van der Waals.
  Ejemplo: Ar, CH_4, parafina y otros.

- **Metales**
  En los nudos de la red cristalina están los iones positivos que se forman después de desprenderse de los átomos los electrones periféricos (de valencia).

b) Amorfos

- Se llaman amorfas a las sustancias que en estado condensado no tienen estructura cristalina, aunque a diferencia de los líquidos, tienen elasticidad de forma. Por ejemplo, los líquidos sobreenfriados no poseen las propiedades de los cristales.
- Las sustancias amorfas se vitrifican en determinadas condiciones, es decir, pasan de tener las propiedades y comportamiento de los líquidos al de los sólidos.
- Se llama vitrificación estructural a la transición de una sustancia amorfa del estado líquido al sólido por variación de la temperatura o presión.

Ejemplo: Alquitrán, vidrio, azufre, selenio, glicerina y la mayoría de los compuestos de alto peso molecular,....

3) Moléculas

a) Moléculas heteropolares

Se denomina así a las moléculas que se originan como resultado de la transformación de los átomos que interaccionan, en iones, con cargas eléctricas de signo contrario, que se atraen mútuamente.

b) Moléculas homopolares

Se denomina así a las moléculas que resultan de la atracción mutua de dos átomos neutros. El enlace químico de los átomos en la molécula homopolar se llama covalente.

4) Anisotropía

Es la dependencia que presentan las propiedades físicas de los sólidos (térmicas, elásticas, eléctricas, ópticas,...) respecto de las direcciones en el cristal; es una característica de los monocristales.

5) Homogeneidad

La homogeneidad del espacio consiste en que las propiedades físicas de un sistema cerrado y las leyes de su movimiento no dependen de la elección que se haga de la posición del origen de coordenadas del sistema de referencia inercial (S.I.R)

6) Propiedades de los sólidos

Algunas de las propiedades más importantes que presenta un sólido, son:

a) Adherencia

Se llama así a la atracción o unión que experimentan las moléculas próximas que se encuentran situados en las superficies de los cuerpos en contacto.

b) Aleabilidad
Es la propiedad que tienen los materiales para formar aleaciones que dan lugar a nuevos materiales mejorando sus características técnicas y por lo tanto sus prestaciones, En todas las aleaciones, al menos, una componente debe ser un metal.

c) Divisibilidad
Es la propiedad mediante la cual los cuerpos sólidos pueden fraccionarse hasta el límite molecular.

d) Ductilidad
Propiedad que tienen algunos materiales y aleaciones cuando, bajo la acción de una fuerza, pueden estirarse sin romperse permitiendo obtener alambres o hilos. A los metales que presentan esta propiedad se les denomina dúctiles. Los metales más dúctiles son el platino, oro y cobre.

e) Dureza
Se dice que un material es duro cuando no puede ser rayado por otro más blando. La dureza se mide con unos instrumentos llamados durómetros, para lo cual, se utilizan diferentes escalas tales como la de: Brinell, Rocwell, Vickers, etc...Un ejemplo de material muy duro es el diamante.

f) Elasticidad
Se llama así a la propiedad que tienen algunos materiales de experimentar deformaciones reversibles cuando son sometidos a la acción de fuerzas externas, y de recuperar su forma original cuando estas fuerzas dejan de actuar.

g) Fragilidad
Se dice que un sólido es frágil, cuando puede romperse en muchos pedazos al experimentar un golpe ligero, es decir, es quebradizo. La fragilidad es una propiedad opuesta a la tenacidad.

h) Maleabilidad
Propiedad que tiene los materiales para formar láminas muy finas. El oro es un metal muy maleable pues con ella se pueden hacer láminas muy finas de sólo unas milésimas de milímetro de espesor. La plata y el cobre también son muy maleables, así, como la hojalata que es una aleación de hierro y estaño.

i) Mecanibilidad
Es la propiedad que tienen algunos materiales ha ser mecanizados con procedimientos de arranque de viruta.

j) Plasticidad
Propiedad mecánica de un material, biológico o de otro tipo, de deformarse permanente e irreversiblemente cuando se encuentra sometido a tensiones por encima de su rango elástico.

k) Porosidad
Se llama así a la capacidad de los materiales de poder absorber líquidos y gases, debido al espacio libre que existe entre sus moléculas.

l) Resiliencia
Es la cantidad de energía que puede recibir o consumir un material, antes que comience la deformación irreversible, esto es, la deformación plástica.

m) Resistencia
Mecánica.- Es la capacidad que tiene un material de soportar los distintos ti

pos de esfuerzo que existen sin deformarse permanentemente.

Corrosión.- Comportamiento que tienen los materiales al tener contacto con productos químicos, especialmente ácidos.

Oxidación.- Comportamiento que tienen los materiales ante el oxigeno de la atmósfera y el contacto con el agua.

n) Templabilidad

Es la propiedad que tienen algunos metales para endurecerse por tratamientos térmicos ó químicos.

o) Tenacidad

Es la resistencia que opone un mineral u otro material a ser roto, molido, doblado o desgarrado. La tenacidad es una medida de la cohesión de las moléculas de un material. El acero es un material muy tenaz, especialmente algunas de sus aleaciones.

p) Higroscopicidad

Es la propiedad que presentan algunos materiales de absorber el agua variando su peso.

q) Permeabilidad

Es la capacidad que tienen ciertos materiales de dejarse atravesar por los los líquidos. Puede hacerse por capilaridad por presión o por ambas a la vez. La cantidad de líquido que penetra en el cuerpo por capilaridad mide su capacidad de absorción y está vinculado con la porosidad. Esto es, depende de la cantidad, forma y grado de comunicación de los espacios vacíos del material.

2. ELASTICIDAD

Es una disciplina de la física que estudia las deformaciones que experimentan los cuerpos y los procesos relacionados con ello; bajo la acción de fuerzas externas.

- La propiedad elástica de los materiales está relacionada, con la capacidad de estos materiales de experimentar transformaciones reversibles.
- Las fuerzas externas al deformar un cuerpo hacen trabajo, esta energía utilizada para deformar el cuerpo se almacena en el en forma de energía potencial elástica, y por tanto, produciéndose aumento en la energía interna del cuerpo.
- El sólido se comportará elásticamente si este aumento de energía se realiza de forma reversible, en este caso decimos que el sólido es elástico.

a) Teoría de la elasticidad lineal

Es el estudio de sólidos elásticos lineales sometidos a pequeñas deformaciones, de tal modo, que los desplazamientos y deformaciones sean "lineales" (es decir, las componentes del campo de desplazamiento sean aproximadamente una combinación lineal de las componentes del tensor deformación del sólido. En general un sólido elástico lineal sometido a grandes desplazamientos no cumplirá esta condición.

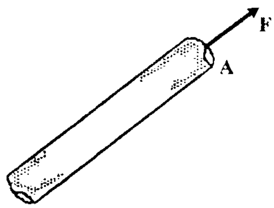
b) Sólido elástico lineal

Se dice que un sólido es elástico lineal cuando las tensiones y deformaciones están relacionadas linealmente. A su vez, los sólidos elásticos lineales se sub dividen en elásticos lineales isótropos y elásticos lineales no isótropos.

c) Deformación elástica

Se dice que una deformación es elástica cuando el cuerpo recupera su forma original al desaparecer la acción de las fuerzas externas que producen dicha deformación. Las deformaciones no elásticas, que implican un cambio irreversible de la red cristalina, se denominan deformaciones plásticas.

d) Esfuerzo o tensión (σ)

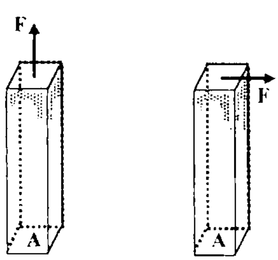


Es una medida de la fuerza aplicada por unidad de superficie, que produce una deformación del cuerpo, viene dado por:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

siendo, (F) la fuerza aplicada, (A) el área sobre el cual actúa la fuerza.

- La tensión se dice que es normal (1) si la fuerza $\vec{F}$ es perpendicular a la superficie A, y tangencial (2), de cortadura o de cizallamiento, si la fuerza es tangencial a dicha superficie, como se aprecia en la Fig.



(1) (2)

☞ **Unidad :** "σ" se mide en N/m^2.

e) Ley de Hooke

En las deformaciones elásticas longitudinales (a lo largo del eje del cuerpo) que experimenta un cuerpo, la tensión (σ) es proporcional a la deformación relativa ($\Delta\ell/x$), esto es:

$$\sigma = k\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

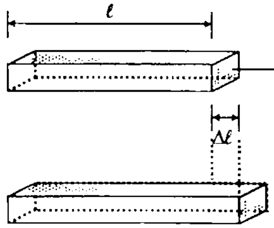
siendo, (k) el módulo de elasticidad, que numéricamente es igual a la tensión que aparece cuando se produce una deformación relativa a la unidad.

- El módulo de elasticidad depende de la estructura interna del cuerpo.
- La ley de Hooke se cumple únicamente dentro de los límites determinados de la deformación elástica lineal.
- El modulo de Young para el acero es igual, tanto para la tracción como la compresión, del mismo modo, su esfuerzo de rotura es el mismo para la tracción y compresión.
- El hormigón tiene el mismo modulo de Young para la tracción como para la compresión; pero sus esfuerzos de rotura para la tracción y compresión son 2 MN/m^2 y 17 MN/m^2, respectivamente.
- Los módulos de Young del hueso humano para la tracción y compresión son 16 GN/m^2 y 9 GN/m^2; en tanto sus esfuerzos de rotura para la tracción y compresión son 200 MN/m^2 y 270 MN/m^2, respectivamente.

f) Tensión de rotura (σ_r)

Se llama así a la tensión en la que el cuerpo se rompe luego de haber pasado por el período elástico y plástico en el cual las deformaciones no desaparecen al desaparecer las fuerzas externas.

g) Deformación unitaria (ξ)



Es una cantidad física adimensional; que mide la deformación por unidad de longitud de un cuerpo, viene dado por:

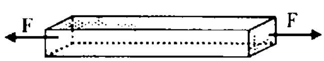
$$\xi = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

siendo, ($\Delta\ell$) la variación en la longitud, y (ℓ) la longitud inicial.

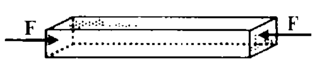
h) Límite de rotura

El límite de rotura o resistencia máxima a la tracción (ó compresión) es la tensión correspondiente a la carga máxima que puede resistir el cuerpo antes de romperse.

TRACCION



COMPRESION

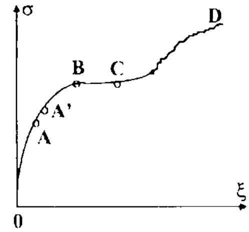


i) Límite de elasticidad

Se denomina límite de elasticidad (punto A') al máximo valor de la tensión ó esfuerzo (σ) que produce en el cuerpo una deformación permanente, después de suprimirse las tensiones.

j) Gráfica de la tensión versus la deformación unitaria.

De resultados experimentales, la gráfica de la tensión aplicada a un cuerpo versus la deformación que experimenta dicho cuerpo es:



En la Fig., el cuerpo después de alcanzar el límite de proporcionalidad (punto A) el alargamiento es más rápido que el aumento de la tensión.

k) Límite de fluencia

El límite de fluencia (punto B) caracteriza un estado del cuerpo deformado después del cual su alargamiento aumenta sin que aumente la fuerza aplicada.

ℓ) Límite de proporcionalidad

Se llama límite de proporcionalidad a la tensión, para el cual, deja de cumplirse la proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones, en la ley de Hooke.

3. DEFORMACIONES

En la práctica se presentan varios formas de deformaciones que pueden experimentar un cuerpo, las cuales, dependen de la forma en que actúan las tensiones y de la geometría del cuerpo, así, tenemos:

1) Deformación longitudinal

a) Módulo de Young (E)

Cuando se aplica una fuerza de estensión o tracción ($\vec{F}$), a lo largo de un alambre de longitud (ℓ), y área de sección transversal (A), este experimenta un alargamiento ($\Delta\ell$); y el módulo de Young que caracteriza la deformación, viene dado por:

$$E = \frac{\sigma}{\xi} = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell}$$

- El valor de (E) sólo depende del material del alambre ó varilla, y no de sus dimensiones.
- Si, $\Delta\ell = \ell$, el módulo de Young es numéricamente igual a la tensión, es decir $E = \sigma$, lo cual, sucede cuando la longitud inicial del cuerpo aumenta al doble (extensión) o disminuye a la mitad (compresión).

☞ **Unidad:** (E) se mide en N/m^2.

b) Coeficiente de elasticidad

Se llama coeficiente de elasticidad de un material, al inverso del módulo de Young (E), es decir:

$$a = \frac{1}{E} = \frac{\xi}{\sigma}$$

☞ **Unidad:** (a) se mide en m^2/N.

Nota

Para deformaciones longitudinales ya sea de extensión ó compresión, el módulo de Young es el módulo de elasticidad (E=k).

c) Energía potencial

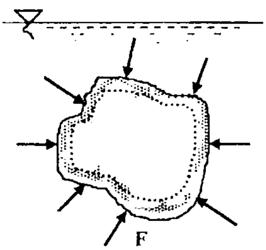
La energía potencial por unidad de volumen de un cuerpo deformado por tracción (ó compresión), es el trabajo específico realizado para vencer las fuerzas elásticas, esto es:

$$w = \frac{\sigma^2}{2E}$$

siendo, (σ) la tensión y (E) el módulo de Young.

La relación anterior es válida, siempre y cuando, el cuerpo se deforme según la ley de Hooke.

2) Deformación volumétrica



Un cuerpo sometido a una presión hidrostática, sobre cada elemento de su superficie, actúa la misma fuerza (F) normal a ella. La forma del cuerpo no cambia, pero su volumen disminuye, las cantidades físicas que describen la deformación volumétrica que experimenta el cuerpo, son:

a) Esfuerzo volumétrico

Se define como la razón de la fuerza al área total de la superficie del cuerpo, esto es:

$$\sigma_V = \frac{F}{A} = \Delta P$$

siendo, (ΔP) la presión a la cual está sometido el cuerpo.

b) Deformación unitaria de volumen

Es una cantidad física adimensional, que mide el cambio relativo en el volumen del cuerpo, viene dado por:

$$\xi_V = \frac{\Delta V}{V}$$

siendo, (ΔV) la variación en el volumen, y (V) el volumen inicial del cuerpo.

c) Módulo de compresibilidad

A semejanza del módulo de Young definido en la elasticidad longitudinal, el módulo de compresibilidad, viene dado por:

$$B = \frac{\sigma_V}{\xi_V} = \frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

el módulo de compresibilidad (B) es la tensión ó esfuerzo (σ_V) en la cual el aumento (ó disminución) relativo del volumen del cuerpo es igual a la unidad

☞ **Unidad:** (B) se mide en N/m^2.

d) Coeficiente de compresibilidad

Se llama coeficiente de compresibilidad de un material, al inverso del módulo de compresibilidad (B), esto es:

$$\frac{1}{B} = \frac{\Delta V}{V \Delta P}$$

☞ **Unidad:** (B) se mide en N/m^2.

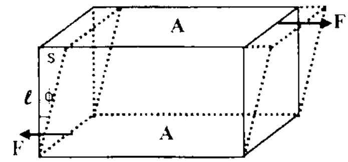
e) Relación entre E y B.

La relación entre el módulo de Young (E) y el módulo de compresibilidad (B), viene dado por:

$$B = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

3) Deformación cortante o de cizalladura

Cuando un cuerpo es sometido a fuerzas tangenciales, las caras de este experimentan un desplazamiento, como se observa en la Fig., las cantidades físicas que caracterizan la deformación del cuerpo, son:



a) Esfuerzo cortante

Es una cantidad física escalar, que se define como la razón de la fuerza tangencial aplicada (F) al área (A) de la superficie que se desliza, esto es:

$$\sigma_T = \frac{F}{A}$$

b) Deformación cortante

Es una cantidad física escalar, que se define como la razón de la distancia (s) que se deslizan las caras desde su posición inicial, a la distancia (ℓ) entre ellas, esto es:

$$D = \frac{s}{\ell}$$

c) Módulo de rigidez (η)

El módulo de rigidez para una deformación cortante, viene dado por:

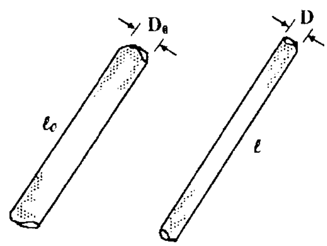
$$\eta = \frac{F / A}{s / \ell} = \frac{\sigma_T}{\phi}$$

En la Fig., como el ángulo de cizalla (ϕ) es muy pequeño, se ha hecho la siguiente aproximación:

$$\frac{s}{\ell} = \operatorname{tg}\phi \approx \phi$$

☞ **Unidad:** (η) se mide en N/m^2.

d) Coeficiente de Poisson (μ)



$$\ell_0 < \ell \quad \text{y} \quad D < D_0$$

En general, el alargamiento (ó compre sión) relativa (ξ_ℓ) de la longitud de un alambre va acompañada de una com presión (ó extensión) lateral o trans versal del diámetro (ξ_D) del alambre; llamamos coeficiente de Poisson (μ) a la razón siguiente:

$$\mu = \frac{\xi_D}{\xi_\ell} = \frac{\Delta D / D}{\Delta \ell / \ell}$$

siendo, (ℓ) la longitud inicial del alam bre y (D) el diámetro inicial de su sec ción transversal.

- Así, en la Fig., se observa que cuando el trozo de alambre es sometido a un a largamiento su longitud aumenta, pero a la vez, el diámetro de su sección transversal disminuye.
- El coeficiente de Poisson es una canti dad física adimensional; que depende del material con que está hecho el alam bre.

e) Relación entre η, μ y E.

La relación entre el módulo de rigidez ó de cizalla (η), el coeficiente de Poi- sson (μ) y el módulo de Young (E), viene dado por:

$$\eta = \frac{E}{2}(1+\mu)^{-1}$$

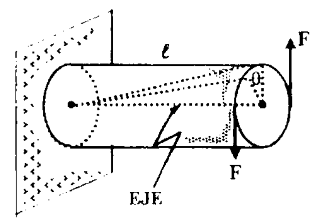
f) Energía potencial

La energía potencial específica, es de cir la energía por unidad de volumen, del cuerpo deformado por cizallamien to, viene dado por:

$$w = \frac{\sigma_T^2}{2\eta}$$

siendo, (σ_T) la tensión ó esfuerzo tan- gencial.

4) Deformación por torsión



Este tipo de deformación sucede cuan do una barra (alambre, varilla cilíndri ca, etc...) fijo por uno de sus extremos es sometido el otro extremo a un par de fuerzas (cupla), contenido en un plano perpendicular al eje de la barra, como se aprecia en la Fig.

- La torsión consiste en el giro relativo de las secciones paralelas entre sí y per pendiculares al eje de la barra.
- Debido al momento del par de fuerza, la sección transversal del extremo dere cho de la barra gira un ángulo (θ)
- Las cantidades físicas que caracterizan la deformación por torsión de la barra son:

a) Momento torsor

Es la suma algebraica de los momentos

de los pares aplicados, situados a un lado de la sección considerada de la barra, como se observa en la Fig.

b) Momento polar de inercia

Para una barra de sección transversal circular hueca de diámetros exterior (D) e interior (d), el momento polar de inercia de la sección representado generalmente por (I_P), viene dado por:

$$I_P = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

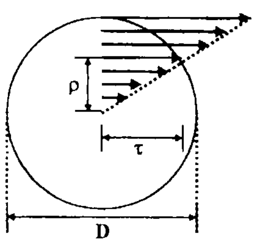
El momento polar de inercia de una barra maciza, se obtiene haciendo d= 0, esto es:

$$I_P = \frac{\pi}{32}D^4$$

siendo, (D) el diámetro de la barra cilíndrica compacta.

- El momento de inercia polar (IP) es una caracterización de la geometría de la sección transversal de la barra.

c) Tensión cortante de torsión

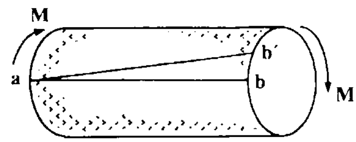


Para una barra cilíndrica hueca o maciza, sometido a un momento de torsión M, la tensión cortante de torsión (τ) a una distancia (ρ) del centro del eje, viene dado por:

$$\tau = \frac{M\rho}{I_P}$$

Esta distribución de tensiones varía desde cero en el centro de la barra compacta hasta un máximo en las fibras exteriores, como se aprecia en la Fig.

d) Deformación por torsión



En la Fig., al aplicársele a la barra cilíndrica el momento de torsión M, esta gira, pasando la generatriz (recta) de la posición inicial a-b a la final a-b'. El ángulo (φ) medido en radianes, entre las posiciones inicial y final de la generatriz, se define como la deformación por cortante en la superficie de la barra.

e) Módulo de elasticidad en cortante ó de rigidez

Se llama así a la relación entre la tensión cortante (τ) y su deformación (φ), es decir:

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$

f) Angulo de torsión relativo

Si una barra cilíndrica de longitud (ℓ) es sometido a un momento de torsión constante (M) a lo largo de su longitud, el ángulo (θ) que un extremo de la barra gira respecto del otro extremo, es:

$$\theta = \frac{M\ell}{GI_P}$$

siendo, (I_P) el momento polar de inercia de la sección, y (G) el módulo de rigidez.

- El momento de torsión para que una barra cilíndrica de longitud (ℓ) y radio (R) gire un ángulo (ϕ) es:

$$M = \frac{\pi G}{2}\frac{R^4}{\ell}\phi$$

siendo, (G) el módulo de rigidez.

g) Módulo de rotura

Es la tensión cortante ficticia que se obtiene sustituyendo en la ecuación de la tensión cortante el par máximo T que soporta la barra cuando se ensaya su rotura. En este caso, se toma para valor de (ρ) el radio exterior de la barra.

h) Energía potencial

La energía potencial específica, es decir la energía por unidad de volumen, de un cilindro deformado por torsión, viene dado por:

$$w = \frac{M^2 \rho^2}{2GI_P^2}$$

siendo, (ρ) la distancia al eje del cilindro.

4. TEORIA GENERAL DE LA ELASTICIDAD

En la mecánica de sólidos deformables elásticos la distribución de tensiones es mucho más compleja que en un resorte o una barra estirada o comprimida, según su longitud (eje). La deformación en el caso más general se describe mediante un tensor de deformaciones en tanto que los esfuerzos o tensiones internas en el material se representan mediante un tensor de tensiones.

a) Tensor de tensión

La tensión en un punto se define como el límite de la fuerza aplicada sobre una pequeña región sobre un plano $\mathscr{P}$ que contenga al punto, dividida por el área de la región, es decir, la tensión es la fuerza aplicada por unidad de superficie y depende del punto elegido, del estado tensional del sólido y de la orientación del plano escogido para calcular el límite. El tensor de tensiones expresada en una base vectorial ortogonal, viene dado por:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Para una región en forma de octoedro con caras paralelas a los ejes de coordenadas cartesianas rectangulares situado en el interior un sólido elástico tensionado las componentes σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} expresan los cambios de longitud en las tres direcciones, pero que no distorsionan los ángulos del octoedro, en tanto, que las componentes σ_{xy}, σ_{yz} y σ_{zx} están relacionadas con la distorsión angular que convertirá al octoedro en un paralelepípedo.

b) Tensor de deformación

En la teoría de la elasticidad dad la pequeñez de las deformaciones es una condición necesaria para poder asegurar que existe una relación lineal entre los desplazamientos y la deformación. Bajo estas condiciones la deformación puede representarse adecuadamente mediante el tensor de deformación, así:

$$D = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix}$$

Donde cada una de las componentes están linealmente relacionadas con los desplazamientos mediante la siguiente ecuación:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

c) Ecuaciones de equilibrio

Cuando las deformaciones no cambian con el tiempo, el campo de tensiones dado por el tensor de tensiones representa un estado de equilibrio con las fuerzas de volumen b= (b_x, b_y, b_z) en todo punto del volumen, lo cual implica que el campo de tensiones satisface estas condiciones de equilibrio, la cual, viene dada por:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$

d) Condiciones de contorno

Se llama así a la relación que existe entre la normal $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ exterior a la superficie del sólido con las fuerzas por unidad de superficie f=(f_x, f_y, f_z) que actúan en el mismo punto de la superficie, esta relación viene dada por

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = f_x$$

$$\sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z = f_y$$

$$\sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z = f_z$$

e) Ley general de Hooke

La ley general de Hooke relaciona los tensores de deformación (D) y tensiones (T), mediante la llamada ecuación constitutiva, la cual, caracterizan el comportamiento de un sólido elástico lineal, esta ecuación tiene la forma:

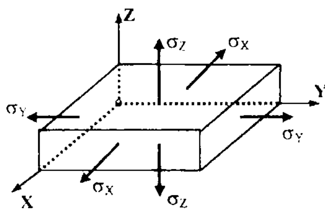
$$\sigma_{ij} = \sum\nolimits_{h\,\ell}\ {}_{ijk\ell}\ \xi_{k\ell}$$

Caso unidimensional

En el caso de un problema unidimensional donde las deformaciones o tensiones perpendiculares a una dirección dada (eje del cuerpo) son irrelevantes, se tiene que: $\sigma = \sigma_{11}$, $\xi = \xi_{11}$, C_{11}, y la ecuación de Hooke generalizada, se reduce a:

$$\sigma = \xi E$$

siendo "E" el módulo de Young.



Caso tridimensional isótropo

Para caracterizar el comportamiento de un sólido elástico lineal e isótropo se requieren además del módulo de Young otra constante elástica, llamado coeficiente de Polisón (μ). Por otro lado, las ecuaciones de Hooke para un sólido elástico lineal e isótropo pueden se deducidas del teorema de Rivlin-Ericksen, que se expresan en la forma:

$$\xi_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}))$$

$$\xi_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}))$$

$$\xi_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})),$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. ¿Qué diámetro mínimo debe tener un cable de acero de esfuerzo de rotura igual a $\sigma_r = 7{,}85.10^8$ N/m^2 para soportar una carga de peso W=9,86.10^3 N?

a) 1 mm b) 2 mm c) 3 mm d) 4 mm e) 5 mm

02. Del extremo de un cable de acero de longitud $\ell = 4$ m, sección transversal de diámetro D=2 mm, y módulo de Young E=2,16.10^{11} N/m^2 se cuelga un hombre de peso W= 686 N. Hallar la deformación en la longitud del cable.

a) 1 mm b) 2 mm c) 3 mm d) 4 mm e) 5 mm

03. ¿En cuánto debe aumentarse el radio R de la sección transversal de un alambre de acero, tal que, pueda soportar 4 veces la tensión máxima inicial?

a) R/2 b) R/4 c) R d) 2R e) 4R

04. El coeficiente de compresibilidad del agua es 44.10^{-6} atm^{-1}. Hallar la disminución del volumen de 100 cm^3 de agua al someterla a una presión de 150 atm.

a) 0,60 cm^3 b) 0,62 cm^3 c) 0,64 cm^3 d) 0,66 cm^3 e) 0,68 cm^3

05. A un alambre de cobre de área de sección transversal A= 1,5 mm^2 se le aplica una tracción de 44 N, produciéndose una deformación permanente. Hallar el esfuerzo de rotura (σ_r) del alambre. (M=10^6)

a) 21 MN/m^2 b) 23 MN/m^2 c) 25 MN/m^2 d) 27 MN/m^2 e)29 MN/m^2

06. Un alambre de cobre de longitud ℓ= 10 m, densidad $\rho = 8{,}6$ g/cm^3 y módulo de Young E=11,8.10^{10} N/m^2 se cuelga verticalmente, hallar la deformación en su longitud debido a su propio peso. (g=10 m/s^2, $\mu = 10^{-6}$)

a) 30 μm b) 32 μm c) 34 μm d) 36 μm e) 38 μm

07. Hallar la longitud que tendrá un alambre de cobre de densidad $\rho = 8{,}6$ g/cm^3 y esfuerzo de rotura $\sigma_r = 2{,}45.10^8$ N/m^2 que colgado verticalmente comience a romperse por su propio peso. (g = 10 m/s^2)

a) 1,7 km b) 2,7 km c) 3,7 km d) 4,7 km e) 5,7 km

08. A dos caras opuestas de un cubo compacto de acero de lados a = 25 cm y módulo de rigidez $\eta = 8{,}2.10^6$ N/cm^2 se aplican fuerzas de extensión opuestas de 4 900 N cada una. Hallar el ángulo de cizalla.

a) 1.10^{-7} rad b) 3.10^{-7} rad c) 5.10^{-7} rad d) 7.10^{-7} rad e) 9.10^{-7} rad

09. A dos caras opuestas de un cubo compacto de acero de lados a = 25 cm y módulo de rigidez $\eta = 8{,}2.10^6$ N/cm^2 se aplican fuerzas de extensión opuestas de 4 900 N cada una. Hallar el desplazamiento relativo (s).

a) 12 μcm b) 16 μcm c) 20 μcm d) 24 μcm e) 28 μcm

10. Cierto metal se calienta desde T_0 = 0 ^{0}C hasta T = 500 ^{0}C disminuyendo su densidad 1,027 veces. Hallar el coeficiente de dilatación térmica de este metal. ($\mu = 10^{-6}$)

a) $11{,}5\,\mu^0C^{-1}$ b) $13{,}5\,\mu^0C^{-1}$ c) $15{,}5\,\mu^0C^{-1}$ d) $17{,}5\,\mu^0C^{-1}$ e) $19{,}5\,\mu^0C^{-1}$

11. Al elevar verticalmente un bloque de peso W= 10^4 N con un cable de longitud $\ell = 2$ m, área de sección A= 0,1 cm^2 y módulo de Young E=2.10^{11} N/m^2, este experimenta un alargamiento de $\Delta\ell$ = 14 mm. Hallar la aceleración con la que se elevo el bloque.(g=10 m/s^2)

a) 1 m/s^2 b) 2 m/s^2 c) 3 m/s^2 d) 4 m/s^2 e) 5 m/s^2

12. ¿En cuánto se comprime la columna de una catedral de altura h=30 m, densidad $\rho = 2{,}7$ g/cm^3 y módulo de Young E = 10^{11} N/m^2, debido a su propio peso? (g=10 m/s^2)

a) 0,12 mm b) 0,16 mm c) 0,20 mm d) 0,24 mm e) 0,28 mm

13. Una cadena larga de bolas, unidos por resortes de constante elástica k = 200 N/m se estira por un extremo con una fuerza de F – 2 N. El otro extremo de la cadena está fijo. Hallar el alargamiento de los resortes y el desplazamiento de la n-ésima bola (n = 5).

a) 1 cm ; 5 cm b) 1 cm ; 4 cm c) 1 cm ; 3 cm d) 0,5 cm ; 4 cm e) 0,5 cm ; 0

14. Las uniones de los rieles de tren se sueldan a la temperatura de 10 ^{0}C. ¿Qué tensión aparecen en ellos al cambiar la temperatura a -30 ^{0}C? ($\alpha = 1{,}25.10^{-5}\ ^0C^{-1}$; E = 2.10^{11} N/m^2)

a) 1.10^8 Pa b) 2.10^8 Pa c) 3.10^8 Pa d) 4.10^8 Pa e) 5.10^8 Pa

15. Un alambre de acero de longitud $\ell = 5$ m, área de sección recta A = 0,04 cm^2 y módulo de Young E = $2{,}46.10^6$ N/cm^2 está suspendido en la vertical. En su extremo inferior se le cuelga un bloque de peso W = 2 N efectuando oscilaciones verticales. Hallar el período de estas oscilaciones. (g=10 m/s^2)

a) 10 ms b) 20 ms c) 30 ms d) 40 ms e) 50 ms

16. En una barra de acero de radio R = 100,125 cm fue ubicado un anillo de cobre de radio r=100 cm y área de la sección transversal A=4 mm^2. ¿Con qué fuerza será ensanchado el anillo, si el módulo de Young del cobre es E = 12.10^{10} N/m^2?

a) 400 N b) 450 N c) 500 N d) 550 N e) 600 N

17. Dos barras de hierro y cobre (2) de longitudes $\ell_1 = 20$ cm, $\ell_2 = 30$ cm y áreas de secciones transversales iguales a A=4 cm^2 se encuentran unidas entre dos paredes fijas. Si las barras se calientan en $\Delta T = 200\ ^0C$. hallar la magnitud de ka fuerza de compresión entre ellas. ($\alpha_1 = 1{,}2.10^{-5}\ ^0C^{-1}$, $E_1 = 19{,}6.10^{10}\ N/m^2$, $\alpha_2 = 1{,}6.10^{-5}\ ^0C^{-1}$, $E_2 = 19{,}6.10^{10}\ N/m^2$)

a) 100 kN b) 120 kN c) 140 kN d) 160 kN e) 180 kN

18. Un alambre de cobre (1) y otro de acero (2) de longitudes $\ell_1 = 8$ cm , $\ell_2 = 4$ cm, secciones transversales iguales, y módulos de Young $E_1=11{,}8\ .10^{10}\ N/m^2$, $E_2=21{,}6.10^{10}\ N/m^2$ se someten por separado a una misma tracción. Hallar la razón de las deformaciones en sus longitudes $(\Delta\ell_1/\Delta\ell_2)$.

a) 2,5 b) 2,8 c) 3,1 d) 3,4 e) 3,7

19. En los extremos de una barra de sección transversal A actúan dos fuerzas de tracción de igual magnitud y opuestas. Hallar la razón (σ_n/σ) siendo σ, σ_n los esfuerzos a las superficie transversal y a la superficie que forma 53^0 con esta.

a) 16/25 b) 9/25 c) 9/16 d) 16/9 e) 25/16

20. Una manguera de jebe de longitud $\ell_o = 50$ cm, radio interior R_0 = 5 mm, y coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}5$ se estira una longitud $\Delta\ell = 10$ cm. Hallar el radio interior de la manguera deformada.

a) 3,0 mm b) 3,5 mm c) 4,0 mm d) 2,5 mm e) 4,5 mm

21. Una manguera de jebe de longitud $\ell_o = 50$ cm, radio interior R_0=5 mm, y coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}5$ se estira una longitud $\Delta\ell = 10$ cm. ¿En qué porcentaje cambia el radio interior de la manguera?

a) 2 % b) 5 % c) 8 % d) 10 % e) 15 %

22. Un bloque de peso P al suspenderse verticalmente de un alambre homogéneo lo deforma, siendo la densidad de energía potencial elástica del alambre w=2.10^5 J/m^3 y la deformación unitaria en su longitud $\xi_\ell = 2.10^{-3}$. Hallar el módulo de Young de este alambre.

a) $1.10^{11}\ \frac{N}{m^2}$ b) $2.10^{11}\ \frac{N}{m^2}$ c) $3.10^{11}\ \frac{N}{m^2}$ d) $4.10^{11}\ \frac{N}{m^2}$ e) $5.10^{11}\ \frac{N}{m^2}$

23. A un alambre de masa m=36 g, longitud $\ell = 1$ m, y módulo de Young $E=11,8.10^{10}$ N/m^2 se le aplica una tracción de F=500 N, estirándose una longitud $\Delta\ell = 1$ mm. Hallar la densidad de masa del alambre.

a) 7,3 g/cm^3 b) 7,6 g/cm^3 c) 7,9 g/cm^3 d) 8,2 g/cm^3 e) 8,5 g/cm^3

24. Un cubo compacto de hierro de módulo de Young $E=19,6.10^{10}$ N/m^2 y coeficiente de Poisson $\mu = 0,29$ se somete a una presión multilateral. Hallar el coeficiente de compresibilidad (B) del cubo. ($p=10^{-12}$)

a) $6,0\ p\dfrac{m^2}{N}$ b) $6,2\ p\dfrac{m^2}{N}$ c) $6,4\ p\dfrac{m^2}{N}$ d) $6,6\ p\dfrac{m^2}{N}$ e) $6,8\ p\dfrac{m^2}{N}$

25. ¿Qué fuerzas se debe de aplicar a los extremos de una barra de acero, de área de sección transversal A=10 cm^2, para evitar que se dilate cuando se calienta desde $T_0 = 0\ ^0C$ hasta T=30 ^{0}C? ($\alpha = 1,06.10^{-5}\ ^0C^{-1}$; $E = 21,6.10^{10}$ N/m^2 ; $k=10^3$)

a) 61 kN b) 63 kN c) 65 kN d) 67 kN e) 69 kN

26. De un extremo de un alambre vertical de sección transversal de radio r=1 mm se cuelga una carga, estirándose el alambre una longitud equivalente a la que se estiraría si el alambre se elevará su temperatura en $\Delta T = 20\ ^0C$. Hallar la magnitud de la carga, sabiendo que: $\alpha = 1,06.10^{-5}\ ^0C^{-1}$; $E = 21,6.10^{10}$ N/m^2.

a) 132 N b) 136 N c) 144 N d) 148 N e) 152 N

27. Un alambre se ubico horizontalmente entre dos paredes fijas resistentes estando a la temperatura inicial de $T_0=150\ ^0C$. ¿A qué temperatura se romperá el alambre al enfriarse? ($\alpha = 1,6.10^{-5}\ ^0C^{-1}$; $\sigma_r = 2,45.10^8$ N/m^2 ; $E = 11,8.10^{10}$ N/m^2)

a) 10 ^{0}C b) 20 ^{0}C c) 30 ^{0}C d) 40 ^{0}C e) 50 ^{0}C

28. Desde un barco se lanzó una pesa sujeta por un cable de acero para medir la profundidad del mar. Despreciando el peso de la pesa, hallar la profundidad máxima que se puede medir con este procedimiento. (esfuerzo de rotura del acero $\sigma_r = 7,85.10^8$ N/m^2 ; densidades del acero y agua de mar $\rho_A = 7,7$ g/cm^3 ; $\rho_{H2O} = 1$ g/cm^3 , g = 9,81 m/s^2)

a) 11,1 km b) 11,3 km c) 11,5 km d) 11,7 km e) 11,9 km

29. Del extremo de un alambre de radio r=1 mm, y esfuerzo de ruptura $\sigma_r = 7,85.10^8$ N/m^2 se cuelga un bloque de peso igual a W= 981 N. ¿Qué ángulo máximo respecto de la vertical se puede desviar el alambre con el bloque sin que al soltarlo se rompa al pasar por la posición de equilibrio?

a) 60^0 b) 64^0 c) 68^0 d) 72^0 e) 76^0

30. Una esferita de peso W= 9,81 N esta unida al extremo de un alambre de hierro de longitud $\ell = 50$ cm, diámetro de su sección transversal D=1 mm y esfuerzo de rotura $\sigma_r = 2{,}94.10^8$ N.m^2 ¿A qué máxima frecuencia puede girar el alambre con la esferita, en un plano vertical, sin romperse el alambre? (g = 9,81 m/s^2)

a) 2,1 rev/s b) 2,5 rev/s c) 2,9 rev/s d) 3,3 rev/s e) 3,7 rev/s

31. Una barra homogénea de cobre de longitud $\ell = 1$ m gira uniformemente en un plano horizontal alrededor de un eje vertical que pasa por su punto medio. Esta barra se rompe cuando la velocidad lineal de su extremo es de v=380 m/s. Hallar el esfuerzo de rotura del material. ($\rho = 7{,}9.10^3$ kg/m^3 ; M=10^6)

a) 510 M $\frac{N}{m^2}$ b) 530 M $\frac{N}{m^2}$ c) 550 M $\frac{N}{m^2}$ d) 570 M $\frac{N}{m^2}$ e) 590 M $\frac{N}{m^2}$

32. Un niño lanza una piedra de masa m=20 g con una lanzadera cuyo cordón de jebe tiene una longitud de $\ell_o = 42$ cm y sección de radio r=3 mm, estirándose el cordón una longitud de $\Delta\ell = 20$ cm al desprenderse la piedra con una velocidad de v=20 m/s. Hallar el módulo de Young del cordón. (M=10^6)

a) 2,1 M $\frac{N}{m^2}$ b) 2,3 M $\frac{N}{m^2}$ c) 2,5 M $\frac{N}{m^2}$ d) 2,7 M $\frac{N}{m^2}$ e)2,9 M $\frac{N}{m^2}$

33. En la Fig.01, los alambres de hierro (1) AB y cobre (2) CD tienen la misma longitud y sección transversal. ¿A qué distancia x del extremo B de la barra BD de longitud $\ell = 80$ cm y peso despreciable se debe colgar un bloque de peso W=20 N, para que la barra quede horizontal? ($E_1 = 19{,}6.10^{10}$ N/m^2 ; $E_2 = 11{,}8.10^{10}$ N/m^2)

a) 20 cm b) 25 cm c) 30 cm d) 35 cm e) 40 cm

34. Halle el momento del par de fuerzas que se debe aplicar a un alambre de longitud $\ell = 10$ cm, sección de radio r=0,1 mm y módulo de rigidez $\eta = 5.10^4$ N/mm^2 para torcerlo un ángulo de 10'. (n=10^{-9})

a) 200 nN.m b) 230 nN.m c) 260 nN.m d) 290 nN.m e) 320 nN.m

35. El espejito de un galvanómetro está colgado de un hilo metálico de longitud L= 10 cm, sección de diámetro D=0,01 mm y módulo de rigidez $\eta = 4.10^{10}$ N/m^2. Hallar el momento de torsión correspondiente a una desviación de $\ell = 1$ mm del rayo luminoso reflejado sobre una escala ubicada a la distancia d=1 m del espejito.

a) 1.10^{-13} $\frac{N}{m^2}$ b) 2.10^{-13} $\frac{N}{m^2}$ c) 4.10^{-13} $\frac{N}{m^2}$ d) 6.10^{-13} $\frac{N}{m^2}$ e) 8.10^{-13} $\frac{N}{m^2}$

36. Hallar la energía potencial elástica de un alambre de longitud $\ell = 5$ cm, sección transversal de diámetro D = 4.10^{-3} cm y módulo de rigidez $\eta = 5{,}9.10^{10}$ N/m^2 que se ha torcido un ángulo de 10'. (p = 10^{-12})

a) 1,25 pJ b) 2,25 pJ c) 3,25 pJ d) 4,25 pJ e) 5,25 pJ

37. Cuando la corriente eléctrica pasa por el devanado de un galvanómetro, sobre su bastidor, al que va unido el espejito, actúa un momento de torsión de M=2.10^{-13} N.m. Este momento hace girar el bastidor un ángulo pequeño φ. El trabajo necesario para la torsión es de W=$8{,}7.10^{-16}$ J. ¿Qué distancia se desplazará el rayo de luz que refleja el espejito por la escala que se halla a una distancia d=1 m del galvanómetro?

a) 11,4 mm b) 13,4 mm c) 15,4 mm d) 17,4 mm e) 19,4 mm

38. ¿En qué razón deben estar las longitudes de dos alambres uno de acero (1) y el otro de plata (2) de iguales secciones transversales, tal que, al someterlos por separado a una misma tracción, almacenen la misma cantidad de energía potencial elástica? (E_1= $21{,}6.10^{10}$ N/m^2 , E_2=$7{,}4.10^{10}$ N/m^2)

a) 2,1 b) 2,3 c) 2,5 d) 2,7 e) 2,9

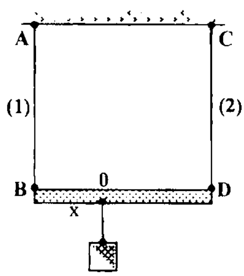


Fig.01

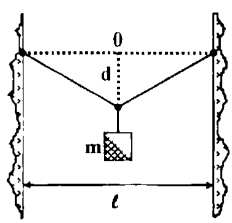


Fig.02

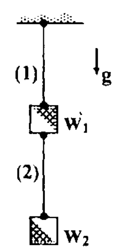


Fig.03

39. Un alambre de acero de longitud $\ell = 2$ m, área de sección transversal A=4 mm^2 y módulo de Young E=$21{,}6.10^{10}$ N/m^2 al ser deformado almacena una energía de W=0,216 J. Hallar la deformación ($\Delta\ell$) en la longitud del alambre.

a) 1 mm b) 2 mm c) 3 mm d) 4 mm e) 5 mm

40. Si la deformación en la longitud de un alambre de cobre aumenta al doble. ¿En qué porcentaje aumenta su energía potencial elástica? (E=$11{,}8.10^{10}$ N/m^2)

a) 100 % b) 200 % c) 300 % d) 400 % e) 500 %

41. Sobre las caras de un cubo de jebe de módulo de Young E=$7{,}2.10^5$ N/m^2 y coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}499$, actúa uniformemente una presión de P=$1{,}2.10^6$ N/m^2. ¿En qué porcentaje cambia la densidad del cubo?

a) 1 % b) 2 % c) 3 % d) 4 % e) 5 %

42. En la Fig.02, en el punto medio 0 del cable horizontal de acero de longitud $\ell = 2$ m, diá metro de sección transversal D=1 cm y módulo de Young E=21,6.10^{10} N/m^2 se ubica un bloque de masa m=100 kg. Hallar la distancia (d) que desciende el punto medio del cable. (g=10 m/s^2)

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

43. ¿A qué frecuencia máxima puede girar en un plano horizontal, una barra homogénea de plomo de longitud $\ell = 31{,}56$ cm, densidad $\rho = 11{,}3$ g/cm^3, esfuerzo de rotura igual a $\sigma_r = 2.10^7$ N/m^2, alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos?

a) 10 rev/s b) 20 rev/s c) 30 rev/s d) 40 rev/s e) 50 rev/s

44. En el extremo inferior de un alambre vertical de longitud $\ell_0 = 0{,}5$ m, módulo de Young E=19,6.10^{10} N/m^2, coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}3$ se cuelga un bloque de masa m=100 kg. Hallar el cambio en el volumen (ΔV) del alambre. (g = 9,81 m/s^2)

a) 1 mm^3 b) 2 mm^3 c) 3 mm^3 d) 4 mm^3 e) 5 mm^3

45. ¿Que presión máxima puede soportar una esfera de vidrio de radios interior r=5 mm y exterior R=6 mm y esfuerzo de rotura $\sigma_r = 3.10^7$ N/m^2? (M=10^6)

a) $10\ M\frac{N}{m^2}$ b) $12\ M\frac{N}{m^2}$ c) $14\ M\frac{N}{m^2}$ d) $16\ M\frac{N}{m^2}$ e) $18\ M\frac{N}{m^2}$

46. ¿Que presión máxima puede soportar un tubo de vidrio de radios interior r=6 mm y ex terior R=7 mm y esfuerzo de rotura $\sigma_r = 3.10^7$ N/m^2? (M=10^6)

a) $1\ M\frac{N}{m^2}$ b) $2\ M\frac{N}{m^2}$ c) $3\ M\frac{N}{m^2}$ d) $4\ M\frac{N}{m^2}$ e) $5\ M\frac{N}{m^2}$

47. Un alambre de longitud ℓ_0 y radio R_0, al ser estirado no varía su volumen. Hallar el coeficiente de Poisson del alambre despreciando términos de O(2) en $\Delta\ell$ y ΔR.

a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3 d) 0,4 e) 0,5

48. El peso específico del agua de mar a cierta profundidad es e^2 veces el peso específico en la superficie. Si el módulo de compresibilidad es B=2.10^4 atm, hallar la diferencia de presiones (ΔP) respecto de la superficie.

a) 1.10^4 atm b) 2.10^4 atm c) 3.10^4 atm d) 4.10^4 atm e) 5.10^4 atm

49. ¿En qué porcentaje varia la densidad de una barra cilíndrica de hierro, módulo de Young E=19,6.10^{10} N/m^2, esfuerzo de rotura $\sigma_r = 2{,}94.10^8$ N/m^2 y coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}3$, cuando su longitud se estira un $\Delta\ell$?

a) 0,01 % b) 0,02 % c) 0,04 % d) 0,06 % e) 0,08 %

50. ¿Qué trabajo puede realizar una barra de acero de longitud $\ell = 1$ m, área de sección transversal A= 4 cm^2, coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 1{,}25.10^{-5}$ ^{0}C^{-1} y módulo de Young E=2.10^{11} N/m^2, al calentarla en $\Delta T = 50$ ^{0}C?

a) 15,0 J b) 15,2 J c) 15,4 J d) 15,6 J e) 15,8 J

51. En la Fig.03, de los cables de aluminio (1) y acero (2) de iguales secciones transversales y módulos de Young E_1=7.10^{10} N/m^2, E_2=21.10^{10} N/m^2 están suspendidos los bloques de pesos W_1=2 W_2. Despreciando los pesos de los cables, hallar la razón de las deformaciones unitarias en los cables (ξ_1 / ξ_2).

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

52. Demostrar que el coeficiente de Poisson para cualquier material homogéneo sometido a una presión uniforme multilateral no puede ser mayor que 1/2.

53. Un anillo de alambre de plomo de radio r=25 cm, esfuerzo de rotura $\sigma_r = 15.10^6$ N/m^2 y densidad $\rho = 11{,}3$ g/cm^3, gira alrededor de un eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro. ¿A qué frecuencia de rotación se romperá el anillo?

a) 21 rev/s b) 23 rev/s c) 25 rev/s d) 27 rev/s e) 29 rev/s

54. En la Fig.04, la barra cónica compacta de plomo de sección circular está suspendida verticalmente. La longitud de la barra es L=50 cm, el diámetro de su base D=60 cm el módulo de Young E=1,6.10^{10} N/m^2 y su peso específico $\gamma = 11{,}3.10^4$ N/m^3. Hallar el alargamiento de la barra debido a su propio peso.

a) 0,21 μm b) 0,23 μm c) 0,25 μm d) 0,27 μm e) 0,29 μm

55. Cuando un alambre de longitud ℓ, área de sección transversal A, se somete a una fuerza de extensión, este experimenta una deformación unitaria longitudinal ξ_ℓ. Hallar la razón de la constante elástica al esfuerzo longitudinal (k/σ_ℓ)

a) $A\ell / \xi_\ell$ b) $\ell / A\xi_\ell$ c) $A\xi_\ell / \ell$ d) $\xi_\ell \ell / A$ e) $A / \xi_\ell \ell$

56. ¿Cuántos alambres de hierro idénticos de longitud $\ell = 1$ m, radio de sección R=1 mm, y esfuerzo de rotura $\sigma_r = 2{,}94.108$ N/m^2, deben ubicarse en paralelo, para soportar un peso máximo de 7 389 N, si cada uno de ellos experimenta el mismo alargamiento máximo?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

57. En la Fig.05, sobre la barra de acero de longitud $\ell = 2{,}25$ m, área de sección A=5 cm^2, y módulo de Young E=2,1.10^7 N/cm^2, actúan las fuerzas mostradas. Hallar la suma de las magnitudes de las fuerzas F_1 y F_2, si el trozo BC experimenta una deformación en su longitud de $\Delta\ell = 0{,}0025$ cm.

a) 1 000 N b) 1 500 N c) 2 000 N d) 2 500 N e) 3 000 N

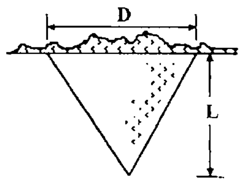


Fig.04

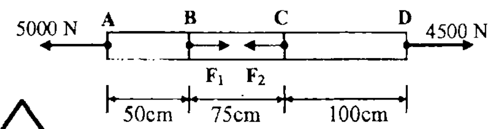


Fig.05

58. En la Fig.06, la barra homogénea de longitud $\ell = 30$ cm, masa m = 8 kg, área de sección A=25 cm^2, se mueve con una aceleración de a=2,4 m/s^2, bajo la acción de la fuerza F. Hallar el esfuerzo de extensión en el trozo AB, de longitud 2,5 cm.

a) 600 $\frac{N}{m^2}$ b) 610 $\frac{N}{m^2}$ c) 620 $\frac{N}{m^2}$ d) 630 $\frac{N}{m^2}$ e) 640 $\frac{N}{m^2}$

59. En la Fig.07, la barra homogénea se mueve con aceleración a, bajo la acción de la fuerza F. Hallar la razón $(\Delta\ell_1 / \Delta\ell_2)$ de las deformaciones en las longitudes de los trozos AB y BC, si $\ell_1 = 2\ell_2$.

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

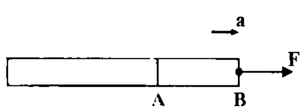


Fig.06

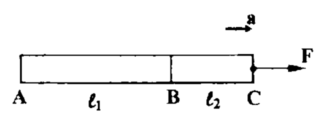


Fig.07

60. En la Fig.08, el bloque homogéneo de masa m=200 kg cuelga de tres alambres verticales, de iguales longitudes y secciones, situados simétricamente. El del medio es de acero y el de los extremos de cobre, sus módulos de Young están en la razón E_A=2 E_C. Hallar la tensión en los alambres de cobre. (g = 10 m/s^2)

a) 300 N b) 350 N c) 400 N d) 450 N e) 500 N

61. En la Fig.09, el cilindro compacto de acero y el tubo de cobre de diámetros d=10 cm y D=20 cm, y módulos de Young E_A=21,6.10^{10} N/m^2, E_C=11,8.10^{10} N/m^2, están comprimidos mediante los platos de la prensa. Hallar el esfuerzo longitudinal en el tubo de cobre, sabiendo que P=50 000 N.

a) 130 N/cm^2 b) 132 N/cm^2 c) 134 N/cm^2 d) 136 N/cm^2 e) 138 N/cm^2

62. En la Fig.10, la barra homogénea de longitud d=1 m, peso W=5.10^4 N se cuelga de los alambres verticales de acero (1) y cobre (2) de longitudes ℓ = 1 m, secciones iguales a A=4 mm^2 y módulos de Young E_1=21,6.10^{10} N/m^2, E_2=11,8.10^{10} N/m^2. Hallar aproximádamente la tangente del ángulo de inclinación de la barra, respecto de la horizontal.

a) 14.10^{-3} b) 24.10^{-3} c) 34.10^{-3} d) 44.10^{-3} e) 54.10^{-3}

63. Se dobla un alambre homogéneo de longitud ℓ, formándose un arco de circunferencia de radio ℓ y ángulo central 60^0. Hallar la deformación unitaria (ξ_ℓ) que experimenta la longitud del alambre.

a) 0,017   b) 0,027   c) 0,037   d) 0,047   e) 0,057

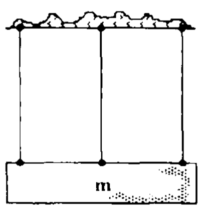


Fig.08

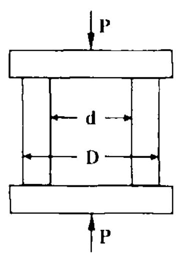


Fig.09

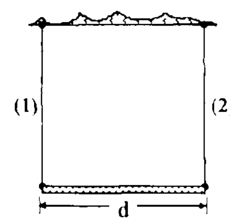


Fig.10

64. En la Fig.11, sobre el cubo de cobre de módulo de Young E=11,8.10^{10} N/m^2 y coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}34$ se ejerce un esfuerzo σ_x, produciéndose contracción lateral en la dirección Z, pero estando impedida en la dirección Y. Hallar la razón σ_x / ξ_x, sabiendo que: G=10^9.

a) 113 GPa   b) 133 GPa   c) 153 GPa   d) 173 GPa   e) 193 GPa

65. En la Fig.12, sobre la cara libre del cubo de plomo de módulo de Young E=1,6.10^{10} N/m^2, y coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}44$ que se encuentra en un hoyo cúbico de paredes rígidas, se ejerce un esfuerzo σ_z = 6.10^7 N/m^2. Hallar la deformación unitaria ξ_z.

a) 1,16.10^{-3} b) 3,16.10^{-3} c) 5,16.10^{-3} d) 7,16.10^{-3} e) 9,16.10^{-3}

66. A un tronco cónico macizo homogéneo de longitud ℓ = 20 cm y sección circular de diámetros menor d=10 cm y mayor D = 20 cm, y módulo de Young $E=1,6.10^{10}$ N/m^2 se le aplica en cada uno de sus extremos una fuerza de extensión $F=8.10^5$ N. Hallar el alargamiento que experimenta el tronco de cono.

a) 136 μm b) 236 μm c) 436 μm d) 636 μm e) 836 μm

67. En la Fig.13, el cilindro hueco de longitud $\ell = 10$ cm , diámetros exterior D=4 cm e interior d=2 cm , y módulo de rigidez $\eta = 26$ GPa al someterse a un momento de torsión M, el ángulo de cizalla es $\theta = 4.10^{-3}$ rad. Hallar el momento de torsión.

a) 215 N.m b) 225 N.m c) 235 N.m d) 245 N.m e) 255 N.m

68. Un cilindro hueco cerrado de acero de paredes delgadas de espesor h=2 mm, radio interior R=4 cm, módulo de Young $E = 21,6.10^{10}$ N/m^2 y coeficiente de Poisson $\mu = 0,29$ es sometido a una presión interior uniforme de $P=2.10^6$ N/m^2. Hallar el aumento del radio del cilindro debido a la presión. ($\mu = 10^{-6}$)

a) 1,3 μm b) 2,3 μm c) 4,3 μm d) 6,3 μm e) 8,3 μm

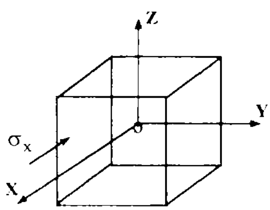


Fig.11

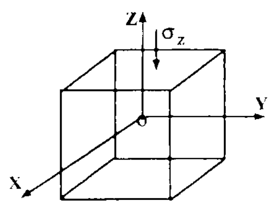


Fig.12

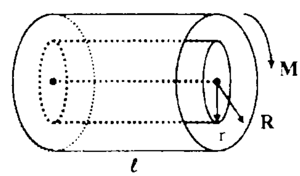


Fig.13

69. Una esfera hueca de acero de paredes delgadas de espesor h=2 mm, radio interior R=4 cm módulo de Young $E=21,6.10^{10}$ N/m^2 y coeficiente de Poisson $\mu = 0,29$ es sometido a una presión interior uniforme de $P=2.10^6$ N/m^2. Hallar el aumento del radio de la esfera debido a la presión.

a) 1,6 μm b) 2,6 μm c) 4,6 μm d) 6,6 μm e) 8,6 μm

70. Hallar el aumento en porcentaje del volumen de un cilindro cerrado hueco de radio interior R=35 cm, espesor 1,6 mm, módulo de Young $E=2,1.10^{11}$ N/m^2 y coeficiente de Poisson $\mu = 1/3$, sometido a una presión interior uniforme de $5,5.10^5$ N/m^2.

a) 0,1 % b) 0,3 % c) 0,5 % d) 0,7 % e) 0,9 %

SOLUCIONARIO

Solución: 01

• Según teoría, el esfuerzo de ruptura del cable, viene dado por:

$$\sigma_r = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi D^2/4}$$

$$D = (\frac{4F}{\pi \sigma_r})^{1/2}$$

$$D = [\frac{(4)(9{,}86.10^3)}{\pi(7{,}85.10^8}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ D \approx 4.10^{-3} m = 4mm$$ (D)

Solución: 02

• Según la ley de Hooke, la deformación en la longitud del cable, viene dado por:

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{AE}$$

$$\Delta\ell = \frac{(686)(4)}{(\pi/4)(2.10^{-3})^2(2{,}16.10^{11})}$$

$$\clubsuit\ \Delta\ell \approx 4.10^{-3} m = 4mm$$ (D)

Solución: 03

• Dado que el esfuerzo de ruptura se man tiene constante, entonces:

$$\sigma_r = \frac{F'}{A'} = \frac{F}{A}$$

$$\frac{4F}{\pi R'^2} = \frac{F}{\pi R^2}$$

$$R' = 2R$$

Luego, el aumento en el radio del alambre debe ser:

$$\Delta R = R' - R = 2R - R$$

$$\clubsuit\ \Delta R = R$$ (C)

Solución: 04

• La variación en el volumen del agua, viene dado por:

$$\Delta V = (\frac{1}{B})V\Delta P$$

$$\Delta V = (44.10^{-6})(100)(150)$$

$$\clubsuit\ \Delta V = 0{,}66 cm^3$$ (D)

Solución: 05

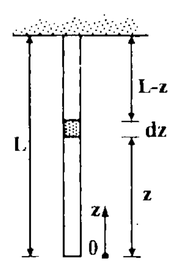
• El esfuerzo de ruptura del alambre, viene dado por:

$$\sigma_r = \frac{F}{A} = \frac{44}{1{,}5.10^{-6}}$$

$$\clubsuit\ \sigma_r = 2{,}9.10^7 N/m^2$$ (E)

Solución: 06

• Representemos un diferencial de la barra, de masa dm y longitud dz.



La deformación que experimenta el diferencial de barra (sombreado), debido a la acción del peso de la parte de la barra que se encuentra por debajo de el es:

$$d(\Delta z) = (\rho g z/E)dz$$

siendo, A el área de la sección transversal del la barra, y ρ su densidad.

Integrando sobre toda la longitud de la barra, obtenemos la deformación total, así:

$$\Delta z = \int_0^L \frac{\rho\, g\, z}{E}\, dz$$

$$\Delta z = \frac{1}{2}\frac{\rho\, g\, L^2}{E}$$

$$\Delta z = \frac{(8{,}6.10^3)(10)(10)^2}{(2)(11{,}8.10^{10})}$$

$$\Delta z = 3{,}6.10^{-5}\,m = 36.10^{-6}\,m$$

$$\clubsuit\ \Delta z = 36\ \mu m \qquad \text{(D)}$$

Solución: 07

• Igualando la deformación obtenida en el problema anterior, con la dada, por la ley de Hooke, se tiene:

$$\Delta\ell = \frac{\rho g \ell^2}{2E} = \frac{\sigma_r\, \ell}{E}$$

$$\ell = \frac{2\sigma_r}{\rho g} = \frac{(2)(2{,}45.10^8)}{(8{,}6.10^3)(10)}$$

$$\clubsuit\ \Delta\ell = 5697\ m \approx 5{,}7\ km \qquad \text{(E)}$$

Solución: 08

• Según teoría, el módulo de rigidez de un material, viene dado por:

$$\eta = \frac{F/A}{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{F}{\eta A}$$

$$\varphi = \frac{4900}{(8{,}2.10^6)(25)^2}$$

$$\clubsuit\ \varphi = 9\,10^{-7}\ rad \qquad \text{(E)}$$

Solución: 09

• El módulo de rigidez del material, viene dado por:

$$\eta = \frac{F/A}{s/\ell} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{F\ell}{\eta A}$$

$$s = \frac{(4900)(25)}{(8{,}2.10^6)(25)^2}$$

$$\clubsuit\ s = 24.10^{-6}\,cm \qquad \text{(D)}$$

Solución: 10

• Tomando la variación a la expresión de la densidad $\rho = m/V$, se tiene:

$$\Delta\rho = -\frac{m}{V_o^2}\Delta V$$

$$\rho - \rho_o = -\left(\frac{m}{V_o^2}\right)(V_o 3\alpha\Delta T)$$

$$\rho_o - \rho = \rho_o 3\alpha\, \Delta T$$

$$\alpha = \left(\frac{\rho_o/\rho - 1}{\rho_o/\rho}\right)\left(\frac{1}{3\Delta T}\right)$$

$$\alpha = \left(\frac{1{,}027 - 1}{1{,}027}\right)\left[\frac{1}{(3)(500)}\right]$$

$$\clubsuit\ \alpha = 1{,}75.10^{-5}\,{}^{o}C^{-1} \qquad \text{(D)}$$

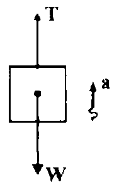
☞ **Notas**

El coeficiente de dilatación volumétrico es tres veces el lineal ($\beta = 3\alpha$).

Solución: 11

• De la ley de Hooke, la tensión en el cable de acero que eleva al bloque es:

$$E = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} \quad \Rightarrow \quad F = T = \frac{AE\Delta\ell}{\ell}$$



En la Fig., de la ecuación de movimiento del bloque, hallemos la aceleración, así:

$$F_R = ma$$

$$T - W = (\frac{W}{g})\,a$$

$$a = (\frac{A\,E\,\Delta\ell}{W\,\ell} - 1)\,g$$

$$a = [\frac{(10^{-5})(2.10^{11})(14.10^{-3})}{(10^4)(2)} - 1](10)$$

$$a = (1{,}4 - 1)(10)$$

$$\clubsuit\ a = 4\ m/s^2$$ D

Solución: 12

• Como la fuerza F varía entre 0 extremo superior de la columna y W extremo inferior de la columna, la fuerza media es W/2, luego, de la ley de Hooke, tenemos:

$$E = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{F\ell}{AE}$$

$$\Delta\ell = \frac{W\,\ell}{2\,A\,E} = \frac{mg\,\ell^2}{2A\,\ell\,E}$$

$$\Delta\ell = \frac{\rho\,g\,\ell^2}{2\,E} = \frac{(2{,}7.10^3)(10)(30)^2}{(2)(10^{11})}$$

$$\Delta\ell = 12{,}15.10^{-5} m$$ A

Solución: 13

• El alargamiento que experimenta cada uno de los resortes es:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{2}{200} = 0{,}01\ m$$

$$x = 1\ cm$$

El desplazamiento de la n-ésima bola es:

$$d = (n-1)\frac{F}{k} = (5-1)(1)$$

$$\clubsuit\ d = 4\ cm$$ B

Solución: 14

• La disminución en la longitud de los rieles debido al cambio en la temperatura es:

$$\Delta\ell = \ell_o\,\alpha\,\Delta T$$

A su vez, esta disminución en la longitud de los rieles, produce un esfuerzo interno en ella, igual a:

$$\sigma = \frac{E\,\Delta\ell}{\ell_o} = \frac{E\,\ell_o\,\alpha\,\Delta T}{\ell_o}$$

$$\sigma = (2.10^{11})(1{,}25.10^{-5})(40)$$

$$\clubsuit\ \sigma = 10^8\ N/m^2$$ A

Solución: 15

• De la ley de Hooke, hallemos la constante elástica (k) del resorte, así:

$$F = (\frac{A\,E}{\ell})\,\Delta\ell = k\,\Delta\ell$$

$$k = \frac{A\,E}{\ell}$$

Luego, el período de las oscilaciones que realiza el bloque será:

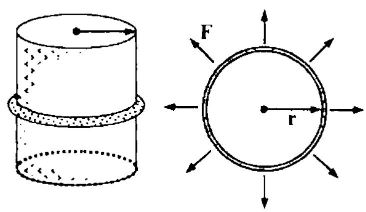
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\,\ell}{A\,E}}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{(2/10)(5)}{(4.10^{-2})(2{,}46.10^{6})}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = 2.10^{-2}\ \text{s} = 20\ \text{ms} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 16

• Representemos a la barra y al anillo que lo rodea.



De la ley de Hooke, deduzcamos la magnitud de la fuerza del modo siguiente:

$$F = \frac{E\,A\,\Delta\ell}{\ell}$$

$$F = \frac{E\,A\,(R - r)}{r}$$

$$F = \frac{(4.10^{-6})(12.10^{10})(0{,}125)}{10^{2}}$$

$$\clubsuit\ F = 600\ \text{N} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 17

• La deformación total ($\Delta\ell$) en la longitud de las barras, debido a dilatación térmica, es igual, a la deformación total en la longitud de las barras debido a su elasticidad, esto es:

$$\Delta\ell = \Delta\ell'$$

$$\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \Delta\ell'_1 + \Delta\ell'_2$$

$$\ell_1\alpha_1\Delta T + \ell_2\alpha_2\Delta T = \frac{F\,\ell_1}{AE_1} + \frac{F\,\ell_2}{AE_2}$$

$$F = \frac{A\,(\alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2)\,\Delta T}{\ell_1/E_1 + \ell_2/E_2}$$

$$\clubsuit\ F = 160.10^{3}\ \text{N} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 18

• La razón de las deformaciones en las longitudes de los alambres, viene dado por:

$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{F\ell_1/E_1A}{F\ell_2/E_2A} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{21{,}6.10^{10}}{11{,}8.10^{10}}\right)$$

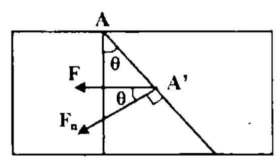
$$\clubsuit\ \frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = 3{,}7 \qquad \text{(E)}$$

Solución: 19

• En la Fig., el esfuerzo normal a la superficie cortante de área A' que forma 53^0 con la superficie transversal de área A es:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{A'} = \frac{F\cos\theta}{A/\cos\theta}$$

$$\sigma_n = \left(\frac{F}{A}\right)\cos^2\theta = \sigma\cos^2\theta$$



$$\frac{\sigma_n}{\sigma} = \cos^2\theta = \cos^2 53^0$$

$$\clubsuit\ \frac{\sigma_n}{\sigma} = \frac{9}{25} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 20

• El aumento en la longitud de la manguera y la disminución en el radio producido por ella, vienen dados por:

$$\Delta\ell = \xi_\ell\, \ell_o \quad , \quad \Delta R = \xi_T R$$

siendo, ξ_ℓ, ξ_T las deformaciones unitarias en la longitud y el radio, respectivamente. Sustituyendo estas expresiones en la definición del módulo de Poisson, se tiene:

$$\mu = \frac{\xi_T}{\xi_\ell} = \frac{\Delta R / R_o}{\Delta\ell / \ell_o} = \frac{\ell_o \Delta R}{R_o \Delta\ell}$$

$$\Delta R = R - R_o = \mu \frac{R_o \Delta\ell}{\ell_o}$$

$$R = R_o(1 - \mu\frac{\Delta\ell}{\ell_o})$$

$$R = 5[1 - (0,5)(\frac{10}{50})]$$

♣ $R = 4,5\text{mm}$ Ⓔ

Solución: 21

• Del problema anterior, el cambio en el radio de la manguera, viene dado por:

$$\Delta R = \mu \frac{R_o \Delta\ell}{\ell_o}$$

De modo que, el cambio en porcentaje del radio de la manguera es:

$$k = (\frac{\Delta R}{R_o})(100) = \mu(\frac{\Delta\ell}{\ell_o})100$$

$$k = (0,5)(\frac{10}{50})(100)$$

♣ $k = 10\%$ Ⓓ

Solución: 22

• De la Ley de Hooke, hallemos la constante elástica (k) del alambre, así:

$$F = k\Delta\ell = (\frac{EA}{\ell})\Delta\ell$$

$$k = \frac{EA}{\ell}$$

Luego, la energía potencial elástica del alambre deformado es:

$$E_P = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}(\frac{EA}{\ell})\Delta\ell^2$$

$$E_P = \frac{1}{2}E(\ell A)(\frac{\Delta\ell}{\ell})^2 = \frac{1}{2}EV\xi_\ell^2$$

$$E = 2(\frac{E_P}{V})(\frac{1}{\xi_\ell^2}) = \frac{(2)(2.10^5)}{(2.10^{-3})^2}$$

♣ $E = 10^{11}\,N/m^2$ Ⓐ

Solución: 23

• En la expresión de la ley de Hooke, reemplacemos el volumen $V = m/\rho$, así:

$$E = \frac{F\ell_o}{A\Delta\ell} = \frac{F\ell_o^2}{(A\ell_o)\Delta\ell}$$

$$E = \frac{F\ell_o^2}{V\Delta\ell} = \frac{F\rho\ell_o^2}{m\Delta\ell}$$

$$\rho = \frac{m\Delta\ell E}{F\ell_o^2}$$

$$\rho = \frac{(36.10^{-3})(10^{-3})(11,8.10^{10})}{(500)(1)^2}$$

♣ $\rho = 8,5.10^3\,\frac{kg}{m^3}$ Ⓔ

Solución: 24

• La relación entre el coeficiente de compresibilidad (B), el módulo de Young (E) y el coeficiente de Poisson (μ), viene dado por:

$$B = \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

$$B = \frac{(3)[1-(2)(0,29)]}{19,6.10^{10}}$$

$$♣\ B = 6,4.10^{-12} m^2/N \quad (C)$$

Solución: 25

• El cambio en la longitud, debido al cambio en la temperatura es:

$$\Delta\ell = \ell_o \alpha \Delta T$$

Sustituyendo esta expresión en la ley de Hooke, se tiene:

$$F = \frac{EA\Delta\ell}{\ell_o} = EA\alpha\Delta T$$

$$F = (21,6.10^{10})(10)(10^{-4})(1,06.10^{-5})(30)$$

$$♣\ F \approx 69.10^3 N \quad (E)$$

Solución: 26

• Los cambios en la longitud del alambre, debido al cambio en la temperatura y a la elasticidad son los mismos, esto es:

$$\Delta\ell = \frac{W\ell_o}{EA} = \ell_o \alpha \Delta T$$

$$W = EA\alpha\Delta T = E\pi r^2 \alpha \Delta T$$

$$W = (21,6.10^{10})(\pi(10^{-3})^2)(1,06.10^{-5})(20)$$

$$♣\ W = 143,8N \quad (C)$$

Solución: 27

• Recordemos que la deformación unitaria en la longitud del alambre es:

$$\xi_\ell = \frac{\Delta\ell}{\ell_o} = \alpha\Delta T$$

Sustituyendo está expresión en la ley de Hooke, obtenemos el cambio en la temperatura, así:

$$E = \frac{\sigma_r}{\xi_\ell} = \frac{\sigma_r}{\alpha\Delta T}$$

$$\Delta T = \frac{\sigma_r}{\alpha E} = \frac{2,45.10^8}{(1,6.10^{-5})(11,8.10^{10})}$$

$$\Delta T \approx 130°C$$

Luego, la temperatura a la que se romperá el alambre es:

$$T = 150° - 130°$$

$$♣\ T = 20^0\ C \quad (B)$$

Solución: 28

• Por condición de equilibrio, la tensión máxima que puede soportar el cable de acero en su extremo superior, debe ser, igual a su peso aparente, esto es:

$$T = W_a = W - E$$

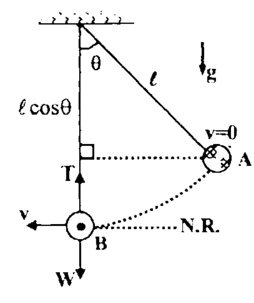
$$A\sigma_r = (\rho_A - \rho_{H20})\, gA\,\ell$$

$$\ell = \frac{\sigma_r}{g(\rho_A - \rho_{H20})} = \frac{7,85.10^8}{(9,81)(7,7-1)(10^3)}$$

$$♣\ \ell = 11,9.10^3 m \quad (E)$$

Solución: 29

• Representemos el péndulo en dos posiciones diferentes (A) y (B).



Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, para A y B:

$$EM_A = EM_B$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$m\frac{v^2}{\ell} = 2W(1-\cos\theta)$$

Luego, en B apliquemos la segunda ley de Newton para movimiento circular, así:

$$F_c = m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T - W = 2W\,(1-\cos\theta)$$

$$\sigma_r A - W = 2\,W\,(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{3\,W - \sigma_r A}{2\,W}$$

$$\cos\theta = \frac{(3)(981)-(\pi(10^{-3})^2)(7{,}85.10^8)}{(2)(981)}$$

$$\cos\theta \approx 0{,}243$$

♣ $\theta \approx 76°$ (E)

Solución: 30

• De la segunda ley de Newton, cuando la pesa pasa por el punto más bajo de su trayectoria, se cumple:

$$m\frac{v^2}{\ell} = T - W$$

$$(\frac{W}{g})\frac{(2\pi f\ell)^2}{\ell} = \sigma_r A - W$$

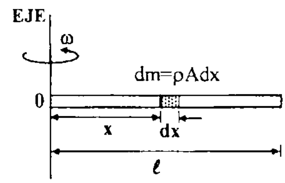
$$f^2 = \frac{(\sigma_r \pi D^2/4 - W)g}{4\pi^2\,\ell W}$$

$$f^2 = \frac{[(2{,}94.10^8)(\pi(10^{-3})^2)/4 - 9{,}81]9{,}81}{(4\pi^2)(0{,}5)(9{,}81)}$$

♣ $f = 3{,}3$ rev/s (D)

Solución: 31

• Representemos un diferencial de barra, de longitud dx y masa dm.



En la Fig., la fuerza centrífuga sobre el diferencial de barra es:

$$dF = dm\frac{v^2}{x}$$

$$dF = (\rho A dx)(\frac{\omega^2 x^2}{x})$$

De modo que, la fuerza centrífuga total sobre la barra de longitud "ℓ" es:

$$\int_0^F dF = \rho\,A\,\omega^2 \int_0^\ell x\,dx$$

$$F = \frac{1}{2}\rho\,A\omega^2\,x^2 = \frac{1}{2}\rho\,A\,v^2$$

Finalmente, el esfuerzo de rotura (σ_r) de la barra es:

$$\sigma_r = \frac{F}{A} = \frac{1}{2}\rho\,v^2$$

$$\sigma_r = (\frac{1}{2})(7{,}9.10^3)(3{,}8.10^2)^2$$

♣ $\sigma_r = 5{,}7.10^8\ N/m^2$ (D)

Solución: 32

• Primero calculemos la aceleración que adquiere la piedra, a partir de:

$$v^2 = v_o^2 + 2ad$$

$$a = \frac{v^2}{2(\Delta\ell/2)} = \frac{20^2}{20/100}$$

$$a = 2000 m/s^2$$

A su vez, la fuerza sobre la piedra en el instante que abandona la lanzadera es:

$$F = ma = (0,02)(2000) = 40N$$

Luego, el módulo de Young de la cuerda de jebe del lanzador es:

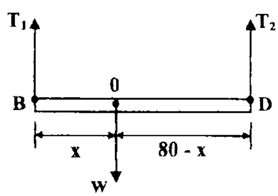
$$E = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} = \frac{F\ell}{A\Delta\ell}$$

$$E = \frac{(40)(42)}{\pi(3.10^{-3})^2(20)}$$

$$E = 2,9.10^6 N/m^2 \qquad \text{(E)}$$

Solución: 33

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la barra BD de peso despreciable.



La razón de las tensiones en las cuerdas AB y CD es:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{E_1 A\,\Delta\ell/\ell}{E_2 A\Delta\ell/\ell} = \frac{E_1}{E_2}$$

Ahora, tomemos momentos respecto del punto O, así:

$$M_o^{F_1} = M_o^{F_2}$$

$$T_1 x = T_2(80 - x)$$

$$x = \frac{80T_2}{T_1 + T_2} = \frac{80}{1 + T_1/T_2}$$

$$x = \frac{80}{1 + E_1/E_2}$$

$$x = \frac{80}{1 + (19.6.10^{10}/11,8.10^{10})}$$

$$\clubsuit \; x = 30cm \qquad \text{(C)}$$

Solución: 34

• El momento del par de fuerzas que hay que aplicar, viene dado por:

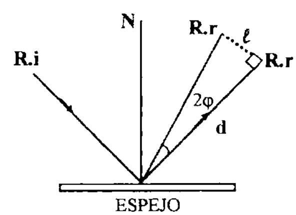
$$M = \frac{\pi\eta r^4 \varphi}{2\ell}$$

$$M = \frac{\pi(5.10^4.10^6)(10^{-4})^4(\pi/(6)(180))}{(2)(10^{-1})}$$

$$M = 2,28.10^{-7} N.m \qquad \text{(B)}$$

Solución: 35

• Representemos los rayos de luz incidente y reflejado antes y después del giro del espejo un pequeño ángulo φ.



La desviación que experimenta el rayo reflejado al girar el espejo un ángulo pequeño φ es 2φ, así, en la Fig., se cumple:

$$tg2\varphi = \frac{\ell}{d}$$

Para, $\varphi \to 0$, tg $2\varphi \approx 2\varphi = \ell / d$, así:

$$\varphi = \frac{\ell}{2d}$$

Luego, el momento de torsión del hilo del galvanómetro es:

$$M = \frac{\pi\,\eta\,D^4\varphi}{32\,L} = \frac{\pi\,\eta\,D^4\ell}{64\,L\,d}$$

$$M = \frac{\pi(4.10^{10})(10^{-5})^4(10^{-3})}{(64)(10^{-1})(1)}$$

$$\clubsuit\ M = 1{,}96.10^{-13}\ N/m^2$$ (D)

Solución: 36

• Para torcer el alambre un ángulo $d\varphi$ se debe hacer un diferencial de trabajo igual a:

$$dW = M\,d\varphi$$

Luego, el trabajo total que se transforma en energía potencial elástica del alambre es:

$$W = \int_0^W dW = \int_0^\varphi \frac{\pi\,\eta\,r^4\varphi}{2\,L}\,d\varphi$$

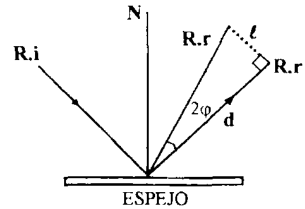
$$W = \frac{\pi\,\eta\,D^4\,\varphi^2}{64\,L}$$

$$W = \frac{\pi(5{,}9.10^{10})(4.10^{-5})^4(\pi)^2}{(64)(5.10^{-2})((6)(180))^2}$$

$$\clubsuit\ W = 1{,}25.10^{-12}\ J$$ (A)

Solución: 37

• Representemos los rayos de luz incidente y reflejado antes y después del giro del espejo un pequeño ángulo φ.



La desviación que experimenta el rayo de luz reflejado al girar el espejo un ángulo φ es 2φ, así, en la Fig., se tiene que:

$$tg2\varphi = \frac{\ell}{d}$$

Para, $\varphi \to 0$, tg $2\varphi \approx 2\varphi = \ell / d$, así:

$$\varphi = \frac{\ell}{2d}$$

De otro lado, el trabajo total para torcer el hilo del amperímetro un ángulo φ es:

$$W = \int_0^\varphi M\,d\varphi = \int_0^\varphi \frac{\pi\,\eta\,r^4\,\varphi}{2\,L}\,d\varphi$$

$$W = \frac{\pi\eta r^4}{4L}\varphi^2 = \frac{1}{2}M\varphi$$

$$W = \frac{1}{2}M(\frac{\ell}{2d})$$

$$\ell = \frac{4Wd}{M} = \frac{(4)(8{,}7.10^{-16})(1)}{2.10^{-13}}$$

$$\clubsuit\ \ell = 17{,}4.10^{-3}m$$ (D)

Solución: 38

• El trabajo necesario para estirar un alambre un $\Delta\ell$, viene dado por:

$$W = \int_0^{\Delta\ell} F\,dx = \int_0^{\Delta\ell} \frac{EA}{\ell}\,x\,dx$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{EA}{\ell}\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2\ell}{EA}$$

pues, $\Delta\ell = F\ell / EA$.

Luego, como se hace el mismo trabajo para estirar los alambres, se cumple:

$$\frac{1}{2}\frac{F^2\ell_1}{E_1 A} = \frac{1}{2}\frac{F^2\ell_2}{E_2 A}$$

$$\Delta_1 R = \xi_T R = \frac{PR^2}{2Eh}$$

$$\clubsuit \quad \ell_1 / \ell_2 \approx 2{,}9 \qquad \text{(E)}$$

Solución: 39

• La energía potencial elástica almacenada en el alambre deformado, viene dado por:

$$W = \frac{1}{2}\frac{EA}{\ell}\Delta\ell^2$$

$$0{,}216 = (\frac{1}{2})(\frac{(21{,}6.10^{10})(4.10^{-6})}{2})\Delta\ell^2$$

$$\Delta\ell^2 = 10^{-6} \Rightarrow \Delta\ell = 10^{-3}\,m$$

$$\clubsuit \quad \Delta\ell = 1mm \qquad \text{(A)}$$

Solución: 40

• El aumento en porcentaje de la energía potencial elástica del alambre de cobre, viene dado por:

$$N = (\frac{W - W_o}{W_o})(100)$$

$$N = [\frac{k(2\Delta\ell)^2/2 - k(\Delta\ell)^2/2}{k(\Delta\ell)^2/2}](100)$$

$$N = (\frac{4\Delta\ell^2 - \Delta\ell^2}{\Delta\ell^2})(100)$$

$$\clubsuit \quad N = 300\,\% \qquad \text{(C)}$$

Solución: 41

• Como la presión actúa por igual sobre las caras del cubo, la deformación relativa del volumen del cubo es:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Pero, el esfuerzo sobre el cubo es igual en las tres direcciones, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$, de modo que:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\sigma}{E}(1-2\mu) \qquad (1)$$

Ahora, deduzcamos una relación para el cambio relativo de la densidad, así:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} \qquad (2)$$

De (2) en (1), obviando el signo (-) y teniendo en cuenta que $\sigma = P$, tenemos:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{3P}{E}(1-2\mu)$$

Así, el cambio en porcentaje de la densidad del material es:

$$N = (\frac{\Delta\rho}{\rho})(100)$$

$$N = \frac{(3)(1{,}2.10^6)[1-(2)(0{,}499)]}{(7{,}2.10^5)}(100)$$

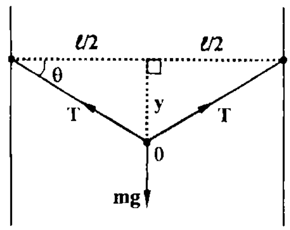
$$\clubsuit \quad N = 1\% \qquad \text{(A)}$$

☞ **Nota**

En la ec.(2) el signo (-) significa que si el volumen aumenta la densidad disminuye.

Solución: 42

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el punto medio del cable.



En la Fig., la deformación en la longitud que experimenta la mitad del cable es:

$$\Delta\ell = \sqrt{y^2 + (\ell/2)^2} - \ell/2 \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo, se cumple que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{[y^2 + (\ell/2)^2]^{1/2}} \qquad (2)$$

De otro lado, de la ley de Hooke, la tensión en el cable es:

$$T = \frac{A\,E\,\Delta\ell}{\ell/2} \qquad (3)$$

Ahora, aplicando la primera condición de equilibrio al punto medio O, se tiene:

$$2T\operatorname{sen}\theta = mg$$

De (1), (2) y (3), obtenemos la desviación (y):

$$2\frac{AE\Delta\ell}{\ell/2}\frac{y}{[y^2 + (\ell/2)^2]^{1/2}} = mg$$

$$\frac{4EA}{\ell}\frac{y[\sqrt{y^2 + (\ell/2)^2} - \ell/2]}{\sqrt{y^2 + (\ell/2)^2}} = mg$$

$$\frac{4EA}{\ell}y[1 - \frac{\ell}{2}(y^2 + (\frac{\ell}{2})^2)^{-1/2}] = mg$$

$$\frac{4EA}{\ell}y[1 - \frac{\ell/2}{\ell/2}(1 + (\frac{y}{\ell/2})^2]^{-1/2}] = mg$$

$$\frac{4EA}{\ell}y[1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{4y^2}{\ell^2}] = mg$$

$$\frac{8EAy^3}{\ell^3} = mg \Rightarrow \frac{2E\pi D^2 y^3}{\ell^3} = mg$$

$$y = (\frac{mg}{2E\pi D^2})^{1/3}\ell$$

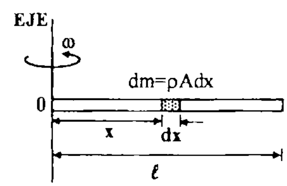
$$y = [\frac{(100)(10)}{(2)(21{,}6.10^{10})(\pi 10^{-4})}]^{1/3}(2)$$

$$y = 3{,}89.10^{-2}\,m$$

♣ $y \approx 4\,cm$ Ⓓ

Solución: 43

• Representemos un diferencial de barra, de longitud dx y masa dm.



En la Fig., la fuerza centrífuga sobre el diferencial de barra es:

$$dF = dm\frac{v^2}{x}$$

$$dF = (\rho A dx)\frac{(2\pi f x)^2}{x}$$

$$dF = 4\pi^2 f^2 \rho A x dx$$

De modo que, la fuerza centrífuga total sobre la barra de longitud ℓ es:

$$\int_0^F dF = 4\pi^2 f^2 \rho\, A \int_0^{\ell} x\, dx$$

$$F = (4\pi^2 f^2 \rho A)(\frac{\ell^2}{2})$$

Luego, la frecuencia máxima a la que pue de girar la barra sin romperse es:

$$f = \left(\frac{F/A}{2\pi^2 \rho \ell^2}\right)^{1/2}$$

$$f = \left(\frac{\sigma_r}{2\pi^2 \rho \ell^2}\right)^{1/2}$$

$$f = \left[\frac{2.10^7}{(2\pi^2)(11300)(0,3156)^2}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad f \approx 30 \text{ rev/s} \qquad (C)$$

Solución: 44

• Como un aumento en la longitud, genera una disminución en el radio del alambre, la la variación en el volumen es:

$$\Delta V = \pi R^2 \ell - \pi (R - \Delta R)^2 (\ell + \Delta \ell)$$

$$\Delta V = \pi R^2 \ell - \pi (R^2 - 2R\Delta R + \Delta R^2)(\ell + \Delta \ell)$$

Despreciando los términos que contienen ΔR^2 y $\Delta R \Delta \ell$ por ser muy pequeños, y simplificando.

$$\Delta V = \pi R^2 (\Delta \ell - 2\ell \frac{\Delta R}{R})$$

$$\Delta V = \pi R^2 (\Delta \ell - 2\ell \mu \frac{\Delta \ell}{\ell})$$

$$\Delta V = A \Delta \ell (1 - 2\mu)$$

$$\Delta V = A \frac{F\ell}{AE} (1 - 2\mu)$$

$$\Delta V = \frac{(100)(9,8)(0,5)}{(19,6.10^{10})} (1 - (2)(0,3))$$

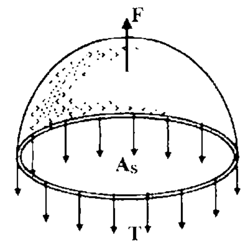
$$\Delta V = 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$\clubsuit \quad \Delta V = 1 \text{ mm}^3 \qquad (A)$$

Solución: 45

• Por equilibrio, la fuerza resultante (F) hacia arriba debido a la presión interna, es igual, a la tensión superficial resultante (T) hacia abajo, que actúa en los bordes de la esfera cortada, esto es:

$$F = P.A_S = T$$



$$P\pi r^2 = \sigma_r 2\pi r (R - r)$$

$$P = \frac{2\sigma_r (R - r)}{r}$$

$$P = \frac{(2)(3.10^7)(6 - 5)}{5}$$

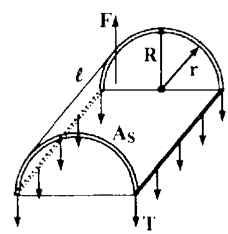
$$\clubsuit \quad P = 1,2.10^7 \text{ N/m}^2 \qquad (B)$$

☞ **Notas**

1) A_S es la proyección del área lateral de la esfera sobre su base.
2) No se toma en cuenta el peso de la esfera de vidrio.

Solución: 46

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el tubo de vidrio cortado por la mi tad.



Por equilibrio, la fuerza resultante (F) hacia arriba debido a la presión, es igual, a la tensión superficial resultante (T) hacia abajo, que actúa en los bordes del tubo cortado, esto es:

$$2T = F = PA_S$$

$$2\sigma_r \ell(R - r) = P(2r)\ell$$

$$P = \frac{\sigma_r(R - r)}{r}$$

$$P = \frac{(3.10^7)(7 - 6)}{6}$$

♣ $P = 5.10^6 \frac{N}{m^2}$ Ⓔ

☞ **Notas**

1) La fuerza debido a la presión (P), se calcula sobre la proyección del área lateral interno de la mitad del tubo.
2) No se toma en cuenta el peso del tubo de vidrio.

Solución: 47

• El alambre al ser estirado, aumenta en su longitud un "$\Delta\ell$", y disminuye en su radio un "ΔR", esto es:

$$\Delta\ell = \alpha\frac{F\ell}{A} \quad y \quad \Delta R = \beta\frac{FR}{A}$$

siendo, α y β los coeficientes de elasticidad y contracción lateral, respectivamente. Por dato, el volumen inicial es igual al final, esto es:

$$V_o = V$$

$$\pi R^2 \ell = \pi (R - \Delta R)^2(\ell + \Delta\ell)$$

$$R^2 \ell = (R - \beta\frac{FR}{A})^2(\ell + \alpha\frac{F\ell}{A})$$

$$(1 - \beta\frac{F}{A})^2(1 + \alpha\frac{F}{A}) = 1$$

$$1 - 2\beta\frac{F}{A} + \beta^2\frac{F^2}{A^2} + \alpha\frac{F}{A} - 2\alpha\beta\frac{F^2}{A^2} + \alpha\beta^2\frac{F^2}{A} = 1$$

Despreciando los términos de O(2) en α y β, tenemos:

$$\alpha = 2\beta \quad => \quad \mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

♣ $\mu = 0,5$ Ⓔ

Solución: 48

• Como no hay transferencia de masa de agua, esto es $dW = 0$, entonces:

$$dW = \gamma\, dV + V\, d\gamma = 0$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{dV}{V} = \frac{1}{B}dP$$

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\gamma} = \int_{P_0}^{P} \frac{1}{B}\, dP$$

$$\ln(\frac{\gamma}{\gamma_o}) = \frac{1}{B}(P - P_o)$$

$$\Delta P = P - P_o = B\ln(e^2) = 2B$$ Ⓓ

♣ $\Delta P = (2)(2.10^4) = 40.10^3 atm$

Solución: 49

• De la ley de Hooke, deduzcamos una expresión para la deformación unitaria.

$$E = \frac{\sigma_r}{\xi_\ell} = \frac{\sigma_r}{\Delta\ell/\ell} \quad => \quad \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\sigma_r}{E}$$

Ahora, como un aumento en la longitud de la barra cilíndrica, origina una disminución en su radio, la variación en su volumen es:

$$\Delta V = V - V_0 = \pi(R - \Delta R)^2(\ell + \Delta\ell) - \pi R^2 \ell$$

$$\Delta V = \pi(R^2 - 2R\,\Delta R + \Delta R^2)(\ell + \Delta\ell) - \pi R^2 \ell$$

$$\Delta V = \pi(R^2 - 2R\,\Delta R)(\ell + \Delta\ell) - \pi R^2 \ell$$

$$\Delta V = \pi(\ell R^2 + R^2 \Delta\ell - 2\ell R\,\Delta R - 2\Delta R\,\Delta\ell) - \pi R^2 \ell$$

$$\Delta V = \pi R^2 \ell \left(\frac{\Delta\ell}{\ell} - 2\frac{\Delta R}{R}\right)$$

$$\Delta V = V_o\left(\frac{\Delta\ell}{\ell} - 2\mu\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)$$

$$\Delta V = V_o\frac{\Delta\ell}{\ell}(1 - 2\mu) = V_o\frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)$$

De modo que, el volumen deformado de la barra cilíndrica es:

$$V = V_o + \Delta V$$

$$V = V_o\left[1 + \frac{\Delta\ell}{\ell}(1 - 2\mu)\right]$$

Finalmente, la variación en porcentaje de la densidad de la barra es:

$$N = \frac{|\rho - \rho_o|}{\rho_o}(100)$$

$$N = \frac{|m/V - m/V_o|}{m/V_o}(100) = \frac{\Delta V}{V}(100)$$

$$N = \frac{V_o(\sigma_r/E)(1 - 2\mu)}{V_o[1 + (\sigma_r/E)(1 - 2\mu)]}(100)$$

♣ $N = 0{,}06\ \%$ (D)

Nota

Se han despreciado términos en ΔR^2, $\Delta\ell^2$ y $\Delta R \Delta\ell$ por ser muy pequeños.

Solución: 50

- La fuerza máxima sobre la barra cuando está dilatada es $F = S.E.\alpha.\Delta T$, y la mínima es 0, luego, el trabajo que puede realizar la barra, será equivalente al que realice la fuerza media, esto es:

$$W = F_m \Delta\ell$$

$$W = \left(\frac{SE\alpha\Delta T + 0}{2}\right)(\Delta\ell)$$

$$W = \left(\frac{SE\alpha\Delta T}{2}\right)(\ell\alpha\Delta T)$$

$$W = \frac{1}{2}SE\ell\alpha^2\Delta T^2$$

$$W = \frac{1}{2}(4.10^{-4})(2.10^{11})(1)(1{,}25.10^{-5})^2(50)^2$$

♣ $W = 15{,}6\text{J}$ (D)

Solución: 51

- De la ley de Hooke, hallemos una expresión para la deformación unitaria.

$$E = \frac{\sigma}{\xi} = \frac{F/A}{\xi} \Rightarrow \xi = \frac{F}{AE}$$

Así, la razón de las deformaciones unitarias en las longitudes de los alambres es:

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{(W_1 + W_2)/AE_1}{W_2/AE_2}$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \left(\frac{W_1 + W_2}{W_2}\right)\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \left(\frac{2W_2 + W_2}{W_2}\right)\left(\frac{21.10^{10}}{7.10^{10}}\right)$$

♣ $\frac{\xi_1}{\xi_2} = 9$ (E)

Solución: 52

• En el problema 41, se encontró que la variación relativa del volumen, que experimenta un cuerpo bajo la acción de una presión uniforme multilateral es:

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3\sigma}{E}(1-2\mu)=\frac{3\Delta P}{E}(1-2\mu)$$

$$\frac{1}{B}=\frac{\Delta V}{V\Delta P}=\frac{1}{E}(1-2\mu)$$

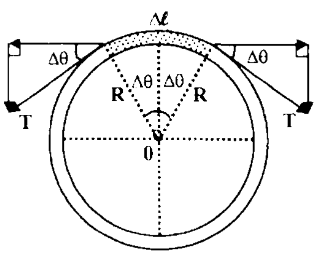
siendo, 1/B el coeficiente de compresibilidad y ΔP la variación de la presión.

$$(1-2\mu)=\frac{E}{B}\geq 0 \;\Rightarrow\; 1-2\mu\geq 0$$

$$♣\;\; \mu\leq 0{,}5$$

Solución: 53

• Tomemos un elemento del anillo, de longitud $\Delta\ell$ y masa Δm, y representemos la tensión (T) y sus componentes que actúan sobre el, así:



El elemento de masa Δm contenida en el elemento de longitud $\Delta\ell=2R\Delta\theta$ es:

$$\Delta m=\rho\Delta V=\rho A\Delta\ell$$

$$\Delta m=2\rho AR\Delta\theta$$

Luego, en la Fig., la fuerza centrípeta sobre el elemento de masa Δm es:

$$2T\text{sen}\Delta\theta=\Delta m\frac{v^2}{R}$$

Ahora, como $T=\sigma_r A$, $v=2\pi f R$ y para $\Delta\theta\to 0$, sen $\Delta\theta\approx\Delta\theta$, entonces:

$$2\sigma_r A\Delta\theta=2\rho AR\Delta\theta\frac{(2\pi fR)^2}{R}$$

$$f^2=\frac{\sigma_r}{4\pi^2\rho R^2}$$

$$f=\frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{\sigma_r}{\rho}}$$

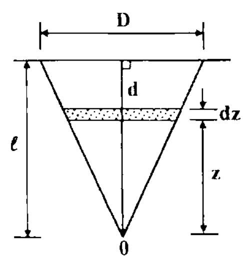
$$f=\frac{1}{(2\pi)(0{,}25)}\left[\frac{15.10^6}{11{,}3.10^3}\right]^{1/2}$$

$$♣\;\; f\approx 23\frac{rev}{s}$$

(B)

Solución: 54

• Tomemos un diferencial de la barra, de ancho dz, situada a una distancia z del vértice 0 de la barra cónica.



Primero hallemos el peso total (W) de la barra cónica, así:

$$W=\gamma V=\frac{1}{12}\gamma\pi D^2\ell$$

siendo, γ el peso específico, D el diámetro de la base y ℓ la altura.

En la Fig., deduzcamos por proporcionalidad la fuerza (F) de extensión sobre el diferencial de barra (sombreado), debida al peso de la barra cónica cuya base tiene un diámetro d, y que se encuentra por debajo de la franja, así:

$$\frac{W}{(\pi D^2/4)\ell/3} = \frac{F}{(\pi d^2/4)z/3}$$

$$F = (\frac{Wz}{\ell})(\frac{d}{D})^2$$

$$F = \frac{Wz^3}{\ell^3} = (\frac{1}{12}\gamma\pi D^2)(\frac{z^3}{\ell^2})$$

Sustituyendo esta fuerza en la ley de Hooke, $\Delta\ell = F\ell/AE$ obtenemos el alargamiento en la longitud dz del diferencial de la barra, esto es:

$$d(\Delta\ell) = \frac{(\gamma\pi D^2 z^3/12\ell^2)dz}{(\pi d^2/4)E}$$

$$d(\Delta\ell) = \frac{(\gamma\pi D^2 z^3/12\ell^2)dz}{(\pi d^2/4)E}$$

$$d(\Delta\ell) = (\frac{\gamma z^3}{3\ell^2 E})(\frac{D^2}{d^2})dz$$

$$d(\Delta\ell) = (\frac{\gamma z^3}{3\ell^2 E})(\frac{\ell^2}{z^2})dz$$

$$d(\Delta\ell) = \frac{\gamma z}{3E}dz$$

De modo que, el alargamiento total que experimenta la barra, debido a su propio peso es:

$$\int_0^{\Delta\ell} d(\Delta\ell) = \int_0^{\ell} \frac{\gamma z}{3E}dz$$

$$\Delta\ell = \frac{\gamma\ell^2}{6E} = \frac{(11{,}3.10^4)(0{,}5)^2}{(6)(1{,}6.10^{10})}$$

$$♣\ \Delta\ell = 0{,}29.10^{-6}\,m$$ (E)

Solución: 55

• De la ley de Hooke, hallemos una expresión para la constante elástica del alambre, así:

$$F = k\Delta\ell = \frac{EA}{\ell}\Delta\ell$$

$$k = \frac{EA}{\ell}$$

Por otro lado, el esfuerzo longitudinal es:

$$\sigma_\ell = \frac{F}{A} = E\frac{\Delta\ell}{\ell} = E\xi_\ell$$

Luego, la razón de la constante elástica al esfuerzo longitudinal es:

$$\frac{k}{\sigma_\ell} = \frac{EA/\ell}{E\xi_\ell}$$

$$♣\ \frac{k}{\sigma_\ell} = \frac{A}{\ell\xi_\ell}$$ (E)

Solución: 56

• Primero calculemos la fuerza máxima de extensión que puede experimentar cada uno de los alambres, sin romperse.

$$F = \sigma_r A = \sigma_r \pi R^2$$

$$F = (2{,}94.10^8)(\pi(10^{-3})^2)$$

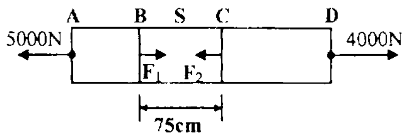
$$F = 923{,}6N$$

Como, el peso de 7389 N se distribuye por igual en cada uno de los alambres, entonces el número necesario de ellos es:

$$♣\ n = \frac{7389}{923{,}6} = 8$$ (D)

Solución: 57

• Representemos una sección S cualesquiera en el trozo de barra BC.



Como la barra está en equilibrio, entonces todas sus partes también lo están, así, la fuerza resultante a la izquierda de la sección S es (5 000 - F_1), luego, de la ley de la ley de Hooke, se tiene:

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{AE}$$

$$0{,}0025 = \frac{(5000 - F_1)(75)}{(5)(2{,}1.10^7)}$$

$$F_1 = 1500N$$

Asimismo, la fuerza resultante a la derecha de la sección S es (4500 - F_2), luego, de la ley de Hooke, se tiene:

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{AE}$$

$$0{,}0025 = \frac{(4500 - F_2)(75)}{(5)(2{,}1.10^7)}$$

$$F_2 = 1000N$$

Luego, la suma de las magnitudes de las fuerzas F_1 Y F_2 es:

$$\clubsuit\ F_1 + F_2 = 2500\,N \qquad \text{(D)}$$

Solución: 58

• Como la barra es homogénea, por proporcionalidad, hallemos la masa del trozo AB.

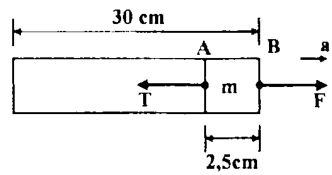
$$\frac{m}{2{,}5} = \frac{8}{30} \Rightarrow m = \frac{2}{3}kg$$

De la segunda ley de Newton, la fuerza resultante, sobre el trozo AB es:

$$(F - T) = ma = (\frac{2}{3})(2{,}4)$$

$$(F - T) = 1{,}6N$$

Representemos las fuerzas que actúan sobre el trozo de barra AB.



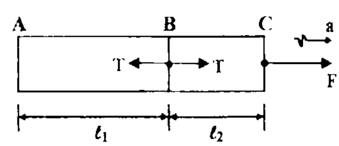
Luego, el esfuerzo longitudinal sobre el trozo de barra AB es:

$$\sigma = \frac{F - T}{A} = \frac{1{,}6}{25.10^{-4}}$$

$$\clubsuit\ \sigma = 640\frac{N}{m^2} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 59

• Representemos las fuerzas que actúan sobre los trozos AB y BC.



Como la barra es homogénea las masas de los trozos AB (m_1) y BC (m_2) son:

$$\frac{m_1}{\ell_1} = \frac{m}{\ell} \Rightarrow m_1 = m\frac{\ell_1}{\ell}$$

$$\frac{m_2}{\ell_2} = \frac{m}{\ell} \Rightarrow m_2 = m\frac{\ell_2}{\ell}$$

De la segunda ley de Newton, las fuerzas que actúan sobre cada uno de los trozos es:

$$T = m_1 a = m\frac{\ell_1}{\ell}a$$

$$F - T = m_2 a = m\frac{\ell_2}{\ell}a$$

Luego, de la ley de Hooke, la razón entre las deformaciones en las longitudes de los trozos AB y BC es:

$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{T\ell_1 / AE}{(F-T)\ell_2 / AE}$$

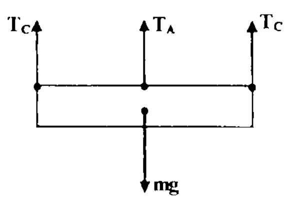
$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{(m\ell_1 a/\ell)\,\ell_1/AE}{(m\ell_2 a/\ell)\,\ell_2/AE}$$

$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = (\frac{\ell_1}{\ell_2})^2 = (\frac{2\,\ell_2}{\ell_2})^2$$

$$\clubsuit\ \frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = 4 \qquad \text{C}$$

Solución: 60

• Representemos las fuerzas que actúan en el sistema físico en equilibrio.



Por simetría, el alargamiento que experimenta cada uno de los alambres es el mismo, así, de la ley de Hooke, las tensiones en los alambres de cobre y acero, son:

$$T_C = \frac{\Delta\ell A E_C}{\ell} \ ; \ T_A = \frac{\Delta\ell A E_A}{\ell}$$

A su vez, la razón de estas tensiones es:

$$\frac{T_A}{T_C} = \frac{\Delta\ell A E_A / \ell}{\Delta\ell A E_C / \ell} = \frac{E_A}{E_C} = 2$$

$$T_A = 2T_C$$

Finalmente, como los alambres están en equilibrio, se cumple que:

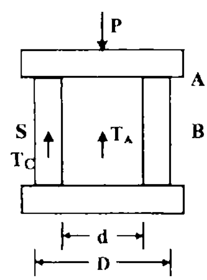
$$2T_C + T_A = mg$$

$$4T_C = (200)(10)$$

$$\clubsuit\ T_C = 500N \qquad \text{E}$$

Solución: 61

• Representemos una sección S común al cilindro y tubo, y representemos las fuerzas que actúan.



Las deformaciones unitarias que experimentan el cilindro de acero y el tubo de cobre es la misma, de modo que la razón de los esfuerzos es:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_C} = \frac{\xi E_A}{\xi E_C} = \frac{21{,}6}{11{,}8}$$

$$\sigma_A = 1{,}83\sigma_C$$

Ahora, apliquemos la condición de equilibrio al trozo AB, así:

$$P = T_C + T_A = \sigma_A A_A + \sigma_C A_C$$

$$P = (1{,}83\sigma_C)(\frac{\pi d^2}{4}) + \sigma_C(\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2))$$

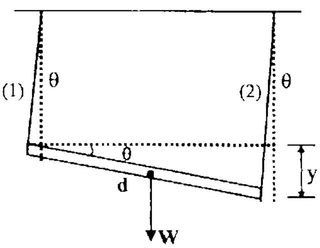
$$\sigma_C = \frac{4P}{\pi(D^2 + 0{,}83d^2)}$$

$$\sigma_C = \frac{(4)(50000)}{\pi[20^2 + (0{,}83)(10^2)]}$$

$$\sigma_C = 131{,}8\,\frac{N}{cm^2}$$ B

Solución: 62

• Representemos la barra, luego de haber se inclinado un ángulo θ respecto de la horizontal.



En la Fig., los alargamientos que experimentan los alambres de acero (1) y cobre (2) son:

$$\Delta\ell_1 = \frac{(W/2)\ell}{AE_1} \quad , \Delta\ell_2 = \frac{(W/2)\ell}{AE_2}$$

De modo que, las longitudes deformadas de los alambres son:

$$\ell_1 = (1 + \frac{W}{2AE_1})\ell \ \ , \ \ell_2 = (1 + \frac{W}{2AE_2})\ell$$

De otro lado, en la vertical la distancia enre los extremos de la barra es:

$$y = \ell_2\cos\theta - \ell_1\cos\theta$$

$$y = \frac{W\ell}{2A}(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1})\cos\theta$$

$$y = \frac{W\ell}{2A}(\frac{E_1 - E_2}{E_1E_2})\cos\theta$$

Luego, en el triángulo rectángulo, se cumple que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{d}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{W\ell(E_1 - E_2)}{2AdE_1E_2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(50000)(1)(21{,}6 - 11{,}8).10^{10}}{(2)(4.10^{-6})(1)(21{,}6)(11{,}8)(10^{20})}$$

$$\clubsuit\ \operatorname{tg}\theta = 24.10^{-3}$$ B

Solución: 63

• El alargamiento que experimenta la longitud del alambre es:

$$\Delta\ell = \ell\theta - \ell$$

Luego, la deformación unitaria que experimenta la longitud del alambre es:

$$\xi_\ell = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \theta - 1$$

$$\clubsuit\ \xi_\ell = \frac{\pi}{3} - 1 = 0{,}047$$ D

Solución: 64

• Sustituyendo las condiciones del problema, $\sigma_z = 0$, $\xi_y = 0$, en las ecs. de la ley general de Hooke, así, en las direcciones X e Y, las deformaciones unitarias son:

$$\xi_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + 0)]$$

$$\xi_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + 0) = 0$$

$$\sigma_y = \mu\sigma_x$$

Reemplazando esta expresión en la primera ecuación, se tiene:

$$\xi_x = \frac{(1-\mu^2)}{E}\sigma_x$$

$$\frac{\sigma_x}{\xi_x} = \frac{E}{1-\mu^2} = \frac{11{,}8.10^{10}}{1-0{,}34^2}$$

$$\clubsuit \quad \frac{\sigma_x}{\xi_x} = 133\text{GPa} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 65

• Como el cubo se encuentra dentro de un hoyo cúbico indeformable, $\xi_x = \xi_y = 0$, además por simetría $\sigma_x = \sigma_y$, luego sustituyendo estas condiciones en las ecs. de la ley general de Hooke, así, la deformación unitaria en X es:

$$\xi_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = 0$$

$$=> \quad \sigma_x = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z$$

A su vez, sustituyendo está expresión en la deformación unitaria en Z, se tiene:

$$\xi_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_x)]$$

$$\xi_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu\frac{2\mu}{1-\mu}\sigma_z]$$

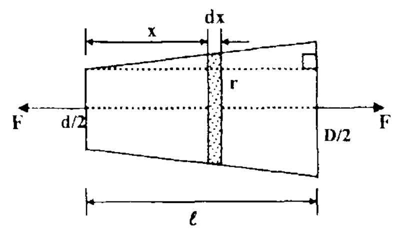
$$\xi_z = \frac{\sigma_z}{E}(\frac{1-\mu-2\mu^2}{1-\mu})$$

$$\xi_z = (\frac{6.10^7}{1{,}6.10^{10}})[\frac{1-0{,}44-(2)(0{,}44^2)}{1-0{,}44}]$$

$$\clubsuit \quad \xi_z = 1{,}16.10^{-3} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 66

• Tomemos un diferencial de tronco de cono, de ancho dx, radio r, situada a una distancia x de la base izquierda.



En la Fig., de la semejanza de los triángulos rectángulos, hallemos el radio del diferencial de tronco de cono, así:

$$\frac{r - d/2}{x} = \frac{(D-d)/2}{\ell}$$

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{\ell}(\frac{D-d}{2})$$

Ahora, de la ley de Hooke, $\Delta\ell = F\ell / AE$, el alargamiento que experimenta la longitud (dx) del diferencial de tronco de cono es:

$$d(\Delta\ell) = \frac{Fdx}{\pi[d/2 + x(D-d)/2\ell]^2 E}$$

Finalmente, el alargamiento total que experimenta la longitud del tronco de cono es:

$$\int_0^{\Delta\ell} d(\Delta\ell) = \int_0^{\ell} \frac{4\,F\,dx}{\pi[d + x\,(D-d)/\ell]^2}$$

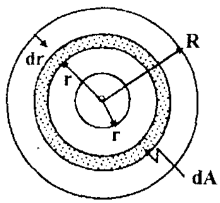
$$\Delta\ell = \frac{4F\ell}{\pi EDd}$$

$$\Delta\ell = \frac{(4)(8.10^5)(0{,}20)}{\pi(1{,}6.10^{10})(0{,}20)(0{,}10)}$$

♣ $\Delta\ell = 636.10^{-6}\,m$ (D)

Solución: 67

• Para hallar el momento de inercia polar del cilindro hueco, tomemos una capa cilíndrica de espesor dr, y área $dA = 2\pi r\,dr$



Según teoría, el momento polar del cilindro hueco, viene dado por:

$$I_P = \int_A r^2 dA$$

$$I_P = \int_r^R 2\pi\, r^3 dr = 2\pi\,[r^4/4]\Big|_r^R$$

$$I_P = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

Luego, el momento de torsión que produce un ángulo de giro θ es:

$$M = \frac{\eta I_P \theta}{\ell}$$

$$M = \frac{\pi\,\eta\,(D^4 - d^4)\,\theta}{32\,\ell}$$

$$M = \frac{\pi(26.10^9)(4^4 - 2^4)(10^{-8})(4.10^{-3})}{(32)(10.10^{-2})}$$

♣ $M = 245\,N.m$ (D)

Solución: 68

• Según el problema (46), el esfuerzo tangente (a un corte de la esfera), viene dado por:

$$\sigma_T = \frac{PR}{h}$$

Por lo que, la deformación unitaria en la longitud del borde de la esfera cortado por la mitad es:

$$\xi_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{PR}{Eh}$$

Así, el aumento en la longitud del borde, implica un aumento en el radio, igual a:

$$\Delta_1 R = \xi_T R = \frac{PR^2}{Eh}$$

De otro lado, el esfuerzo lineal (que actúa a lo largo del cilindro) es:

$$\sigma_\ell = \frac{PR}{2h}$$

La deformación unitaria correspondiente a este esfuerzo es:

$$\xi_\ell = \frac{\sigma_\ell}{E} = \frac{PR}{2Eh}$$

Ahora, un aumento en la deformación unitaria longitudinal, produce una deformación unitaria tangente, igual a:

$$\xi_T = -\mu\xi_\ell = -\mu\frac{PR}{2Eh}$$

Por lo que, el radio disminuye en una cantidad igual a:

$$\Delta_2 R = \xi_\ell R = -\mu\frac{PR^2}{2Eh}$$

Finalmente, el aumento total en el radio de la esfera es:

$$\Delta R = \Delta_1 R + \Delta_2 R$$

$$\Delta R = \frac{PR^2}{Eh}(1 - \frac{\mu}{2})$$

$$\Delta R = \frac{(2.10^6)(4.10^{-2})^2}{(21{,}6.10^{10})(2.10^{-3})}(1 - \frac{0{,}29}{2})$$

$$\Delta R = 6{,}3.10^{-6}\,m$$ D

Solución: 69

• Según el problema (45), el esfuerzo tangente (a un corte de la esfera), viene dado por:

$$\sigma_T = \frac{PR}{2h}$$

Por lo que, la deformación unitaria en la longitud del borde de la esfera cortado por la mitad es:

$$\xi_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{PR}{2Eh}$$

Así, el aumento en la longitud del borde, implica un aumento en el radio, igual a:

$$\Delta_1 R = \xi_T R = \frac{PR^2}{2Eh}$$

De otro lado, un aumento en la deformación unitaria tangente, implica una deformación unitaria lineal (en la dirección del radio) igual a:

$$\xi_\ell = -\mu\xi_T = -\mu\frac{PR}{2Eh}$$

Por lo que, el radio disminuye en una cantidad igual a:

$$\Delta_2 R = \xi_\ell R = -\mu\frac{PR^2}{2Eh}$$

Finalmente, el aumento total en el radio del tubo de acero es:

$$\Delta R = \Delta_1 R + \Delta_2 R$$

$$\Delta R = \frac{PR^2}{2Eh}(1 - \mu)$$

$$\Delta R = \frac{(2.10^6)(4.10^{-2})^2}{(2)(21{,}6.10^{10})(2.10^{-3})}(1 - 0{,}29)$$

$$\Delta R = 2{,}6.10^{-6}\,m$$ B

Solución: 70

• Según el prob.(68), los aumentos en el radio y la longitud del cilindro cerrado son

$$\Delta R = \frac{PR^2}{Eh}(1 - \frac{\mu}{2}) \ , \ \Delta\ell = \frac{PR\ell}{Eh}(\frac{1}{2} - \mu)$$

Ahora, con estas expresiones calculemos el aumento en el volumen del cilindro, así:

$$\Delta V = \pi(R + \Delta R)^2(\ell + \Delta\ell) - \pi R^2 \ell$$

$$\Delta V = \pi(R^2 + 2R\,\Delta R + \underbrace{\Delta^2 R}_{0})(\ell + \Delta\ell) - \pi R^2 \ell$$

$$\Delta V = \pi(R^2\ell + 2R\,\ell\,\Delta R + R^2\Delta\ell + \underbrace{2R\,\Delta R\,\Delta\ell}_{0}) - \pi R^2 \ell$$

$$\Delta V = \pi(2R\,\ell\,\Delta R + R^2\Delta\ell)$$

$$\Delta V = \pi[\frac{PR^3\ell}{Eh}(2 - \mu) + \frac{PR^3\ell}{Eh}(\frac{1}{2} - \mu)]$$

$$\Delta V = \frac{\pi P R^3 \ell}{Eh}(\frac{5}{2} - 2\mu)$$

Como, $V = \pi R^2 \ell$, entonces el aumento en porcentaje del volumen del cilindro es:

$$N = (\frac{\Delta V}{V})(100)$$

A

♣ $N = 0{,}105\,\%$

HIDROSTATICA

CAP. 3

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

a) Hidroaeromecánica
Es una rama de la física que estudia las leyes del equilibrio y del movimiento de los líquidos y de los gases, así, como las interacciones de los líquidos y gases en movimiento con los sólidos.

b) Hidroaerostática
Es una parte de hidroaeromecánica que estudia las leyes que rigen ó gobiernan el equilibrio de los líquidos y gases teniendo en cuenta a las fuerzas que actúan sobre ellas; la hidroaerostática se divide en hidrostática y aerostática.

c) Hidrostática
Estudia las propiedades y fenómenos de los líquidos en equilibrio.

d) Aerostática
Estudia las propiedades y fenómenos de los gases en equilibrio.

e) Fluido
Se designa con este nombre a los líquidos y gases, sean estos, compresibles o incompresibles.

f) Líquidos
Se llaman líquidos los cuerpos que tienen volumen determinado pero no elasticidad de forma (por carecer de módulo de cizallamiento).

g) Fluido compresible
Es el gas cuya densidad depende de la presión hasta tal punto que en la práctica está relación no puede despreciarse.

h) Fluido incompresible
Es el líquido ó gas en el que la relación de dependencia entre su densidad y presión es despreciable.

i) Líquidos inmiscibles
Se denomina así, a dos ó más líquidos diferentes, que al unirse entre si, no se mezclan.

j) Fluido perfecto ó ideal
Es aquel fluido que no presenta rozamiento interno (viscosidad) y a su vez es incompresible.

k) Fluido viscoso
Es aquel fluido que presenta rozamiento interno.

l) Rozamiento interno
Se denomina así al fenómeno que causa la aparición de las fuerzas tangenciales que se oponen al desplazamiento de unas partes de un líquido ó gas respecto a otras.

m) Fluido barotrópico
Es aquel fluido cuya densidad depende únicamente de la presión.

n) Tensor
Es una representación matemática, que resulta de la transformación de un conjunto de magnitudes físicas dadas en un sistema de coordenadas ortogonal (S) en otro sistema ortogonal (S´). Existen tensores de diferentes órdenes, así:

- La temperatura, masa y otras magnitudes escalares se representan mediante tensores de orden cero.
- La velocidad, aceleración y otras magniitudes físicas vectoriales, se representan mediante tensores de primer orden.

- La presión, momentos de inercia y otras magnitudes físicas se representan mediante tensores de tercer orden etc..

o) Características de los sólidos, líquidos y gases

> Sólidos

- Tienen forma y volumen definidos.
- Son incompresibles.

> Líquidos

- Adoptan la forma del recipiente que lo contiene.
- Tienen volumen definido.
- Son incompresibles.
- La interacción molecular es muy intensa, pues, la distancia intermolecular es muy pequeña.
- Los líquidos ordinarios en general son isótropos, a excepción de los cristales líquidos que son anisótropos.

> Gases

- Adoptan la forma del recipiente que lo contiene.
- Tienden a ocupar el mayor volumen posible.
- Son compresibles.

2. DENSIDAD Y PESO ESPECIFICO

a) Densidad (ρ)

Es una magnitud física escalar, que indica la cantidad de masa (m) contenido en un volumen (V) de un sólido ó fluido, así, para un cuerpo o sustancia de masa homogénea, la densidad viene dado por:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

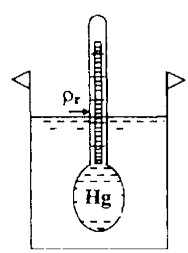
- Para un cuerpo o sustancia de masa no homogénea la densidad, viene dado por:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

siendo, (dm) un diferencial de masa contenido en un diferencial de volumen (dV), del cuerpo o sustancia.

- La densidad es una propiedad física de la materia que describe el grado de compacidad de una sustancia.
- La densidad describe cuan unidos están los átomos de un elemento ó las moléculas de un compuesto. Mientras más unidas están las partículas individuales de una sustancia, más densa es la sustancia.
- La densidad es una propiedad intensiva de la materia, pues, nos permite identificar distintas sustancias unas de otras.
- Cada material o sustancia tiene su propia densidad, el cual, depende de la estructura interna del material.
- Las fórmulas anteriores son válidas para cuerpos o sustancias homogéneas que se hallan a temperatura constante.

b) Densímetro



Llamado también hidrómetro, es un instrumento sencillo cuyo funcionamiento se basa en el principio de Arquímedes, y se utiliza para determinar la densidad relativa de los líquidos. Es, en esencia un flotador de vidrio que consiste de un cilindro con un bulbo lleno de mercurio en la parte inferior que le permite sumergirse parcialmente flotando verti mente. Generalmente los hidrómetros contienen una escala de papel al interior de ellos para que se pueda leer directamente la densidad relativa en gramos por centímetros cúbicos. Así, el líquido cuya densidad se desea determinar se vierte en un recipiente alto, marcando el nivel del líquido sobre la escala el valor de su densidad relativa (ρ_r).

Tipos de densímetros

Alcoholímetro.- Sirve para medir el grado de alcohol en una bebida.

Lactómetro.- Sirve para medir la densidad relativa de la leche.

Sacarímetro.- Sirve para medir la cantidad de azúcar de una melaza, la cual, es un producto líquido espeso derivado de la caña de azúcar o de la remolacha azucarera, su aspecto es parecido al de la miel, aunque un tanto más oscura.

Salímetro.- Sirve para medir la densidad relativa de sales.

☞ **Unidad:** "ρ" se mide en kg/m^3

b) Densidad relativa (ρ_r)

Es una cantidad física adimensional que mide ó compara la densidad de un cuerpo ó sustancia A con respecto de otro B, esto es:

$$\rho_r = \frac{\rho_A}{\rho_B}$$

- Las densidades de sólidos y líquidos se comparan con la densidad del agua a la temperatura de 4 ^{0}C.

$$\rho_{H20} = 1000\frac{kg}{m^3}$$

- Las densidades de los gases se comparan con la densidad del aire en condiciones normales, cuyo valor es:

$$\rho = 1{,}293\ \frac{kg}{m^3}$$

c) Peso específico (γ)

Es una magnitud física escalar, que mide el peso (W) que actúa en el volumen (V) de un sólido o fluido, así, para un cuerpo o sustancia de masa homogénea, el peso específico, viene dado por:

$$\gamma = \frac{W}{V}$$

- Para un cuerpo o sustancia de masa no homogénea el peso específico, viene dado por:

$$\gamma = \frac{dW}{dV}$$

siendo, (dW) un diferencial de peso contenido en un diferencial de volumen (dV), del cuerpo o sustancia.

☞ **Unidad:** "γ" se mide en N/m^3

d) Relación entre densidad y peso específico

La relación entre la densidad (ρ) y el peso específico (γ) de un cuerpo ó sustancia, viene dado por:

$$\gamma = \rho\ g$$

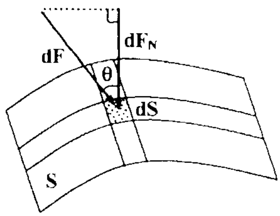
siendo, (g) la aceleración de la gravedad.

- El peso específico (γ) es (g) veces la densidad (ρ) del cuerpo ó sustancia.

  El peso específico de un cuerpo o sustancia es diferente en cada uno de los planetas, en tanto, la densidad es la misma.

3. PRESION (P)

1) Concepto de presión

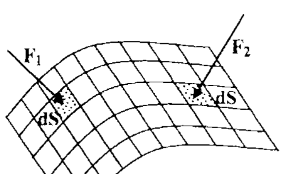


La presión en una pequeña región de una superficie "S" se define como la razón de la componente normal (dF_N) de la fuerza (dF) al área de dicha región superficial (dS), esto es:

$$P = \frac{dF_N}{dS} = \frac{dF\cos\theta}{dS}$$

siendo, "θ" el ángulo que forma el diferencial de fuerza (dF) con la normal a la superficie.

- Si el sistema de fuerza que actúa sobre la superficie "S" es no uniforme, la presión en cada punto de la superficie es diferente, y se habla de una presión local.



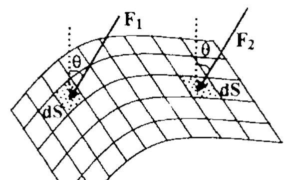
$P_1 \neq P_2$

Por ejemplo, en la Fig., las presiones en las pequeñas regiones "1" y "2" son diferentes, pues, las fuerzas que actúan en dichas regiones son diferentes.

- Si el sistema de fuerzas que actúa sobre la superficie "S" es uniforme, la presión en cada uno de los puntos de dicha superficie es la misma, y la expresión anterior se escribe así:

$$P = \frac{F_N}{S} = \frac{F\cos\theta}{S}$$

siendo, "F" la fuerza resultante que actúa sobre la superficie "S".



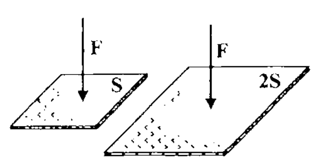
$P_1 = P_2$

Por ejemplo, en la Fig., las presiones en las pequeñas regiones "1" y "2" son iguales, pues, las fuerzas que actúan en dichas regiones son iguales.

- Ahora, si el sistema de fuerzas uniforme actúa perpendicularmente a la superficie "S" ($\theta = 0°$), y la expresión anterior se reduce a:

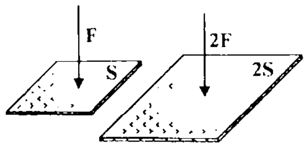
$$P = \frac{F}{S}$$

- La presión es una magnitud física tensorial.
- Cuando un cuerpo se encuentra apoyando totalmente su peso sobre una superficie, su peso se reparte uniformemente sobre toda la superficie.
- Una misma fuerza puede producir diferentes presiones si es ejercida sobre diferentes superficies.



$P_1 = 2P_2$

- Fuerzas diferentes pueden producir iguales presiones si son ejercidas sobre superficies diferentes.



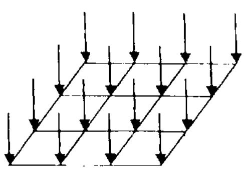
$P_1 = P_2$

- Sobre cada uno de los puntos de la superficie "S" actúan las fuerzas de presión, "F" es la fuerza resultante de la suma de todas estas fuerzas de presión, la cual actúa en el centro de masa del cuerpo.

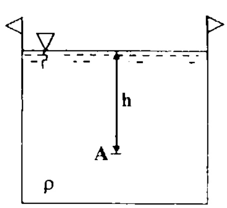
☞ **Unidad:** "P" se mide en N/m^2

Sistema de fuerzas uniforme

Un sistema de fuerzas que actúan sobre una superficie se dice que es uniforme, cuando en cada punto de dicha superficie las fuerzas son iguales en magnitud y dirección, caso contrario se dice que el sistema es no uniforme.



2) Presión de un líquido



La presión creada por un líquido se llama presión hidrostática, así, la presión creada por el líquido de densidad "ρ", en el punto A situada a una profundidad "h" por debajo de su superficie libre, viene dado por:

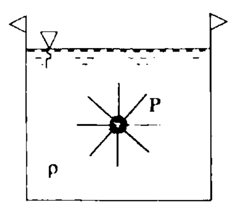
$$\boxed{P_A = \rho . g\, h}$$

siendo, "g" la aceleración de la gravedad.

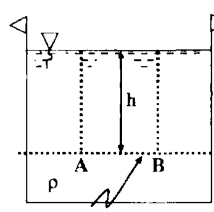
- La presión hidrostática en puntos de la superficie libre del líquido es cero.
- La presión creada por un líquido en un punto del mismo, no depende de su cantidad, sino, sólo depende de la profundidad a la que se encuentra dicho punto, respecto de su superficie libre.

3) Propiedades de la presión en un líquido

a) La presión en un punto cualquiera de un líquido es igual en todas las direcciones (principio de Pascal).



b) La presión en todos los puntos situados en un mismo plano horizontal de un líquido en reposo es el mismo.

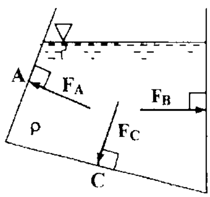


ISOBARA

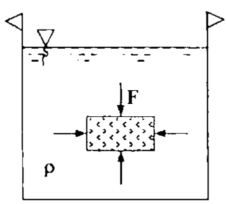
$$P_A = P_B$$

Se llama isobara a la recta cuyos puntos están a la misma presión.

c) La fuerza debida a la presión ejercida por un líquido en reposo sobre las paredes del recipiente que lo contiene es perpendicular a estas.

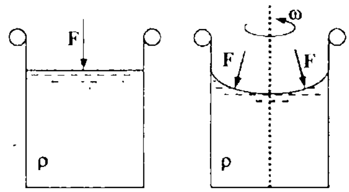


d) La fuerza de la presión en un líquido en reposo se dirige siempre hacia el interior del líquido, es decir, es una compresión, jamás una tracción o extensión



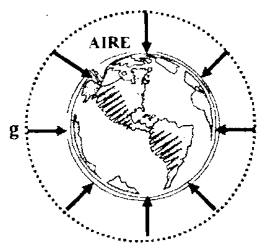
e) La superficie libre de un líquido en reposo es siempre horizontal. Esto es cierto solo en la superficie de la Tierra a simple vista, debido a la acción de la gravedad. Si no hay acciones gravitatorias, la superficie de un fluido es esférica, y por tanto, no es horizontal.

f) La superficie superior de un líquido en reposo situado en un recipiente abierto siempre es perpendicular a la fuerza resultante que actúa sobre ella. Si la gravedad es la única fuerza, la superficie es horizontal. Si actúan otras fuerzas además de la gravedad, la superficie libre se ajusta a ellas. Por ejemplo, si hacemos girar un vaso conteniendo agua, alrededor de su eje de simetría, además de la fuerza de la gravedad, aparece la fuerza centrífuga, y la superficie adopta la forma de un paraboloide de revolución, como se muestra en la Fig.



4) Tipos de presión

a) Presión atmosférica o barométrica (P_{atm})



- Es la presión ejercida por la masa de aire que rodea a la Tierra, como la superficie de la Tierra no es uniforme, se habla de la presión en un lugar determinado.
- El aire que rodea a la Tierra está constituída en mayor porcentaje por Nitrógeno (78%) y oxígeno (21%).
- La presión barométrica se mide con barómetros.

b) Presión atmosférica normal (P_0)

Es la presión atmosférica medida al nivel el nivel del mar, su valor es:

$$P_0 = 760 \text{ mm Hg} = 1 \text{ atm}$$

c) Presión manométrica (P_m)

Es la presión creada por gases encerrados en recipientes, sin considerar la presión atmosférica.

- La presión manométrica se mide con manómetros.

d) Presión absoluta (P_{ab})
Es la presión que se tiene cuando se toma como nivel de referencia el vació absoluto, se define así:

$$P_{ab} = P_{man} + P_{atm}$$

5) Recomendaciones:
En la solución de problemas se deben tener en cuenta lo siguiente:

a) Cuando no se conoce la P_{atm}, se asume que $P_{atm} = P_O$.

b) Si el problema no indica que la presión es manométrica (P_{man}) ó atmosférica (P_{atm}) se asume que la presión es absoluta (P_{abs})

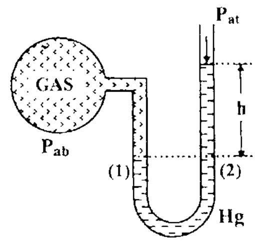
c) A lugares que están a mayor altura sobre el nivel del mar, le corresponden menor presión atmosférica, y recíprocamente.

6) Rango de presiones
Las presiones pueden variar entre 10^{-8} mmHg y 10^{-12} mmHg de presión absoluta en aplicaciones de alto vació, hasta niveles de atmósferas en prensas y controles hidráulicos. Con fines experimentales se han de obtenido presiones del orden de millones de atmósferas.

4. MEDICION DE LA PRESION ATMOSFERICA

1) Instrumentos para medir presiones

a) Manómetro
Es un dispositivo que está constituido por un gas encerrado en un recipiente y una columna de mercurio de altura (h), como se muestra en la Fig.

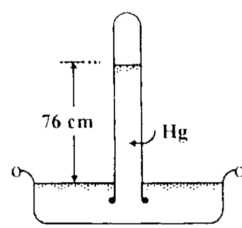


Así, en la Fig., los puntos (1) y (2) están a la misma presión (mismo nivel), de modo que, se cumple:

$$P_{man} = P_{abs} - P_{atm} = \gamma\ h$$

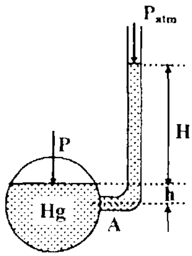
siendo, (γ) el peso específico del mercurio (Hg), (P_{atm}) la presión atmosférica y (P_{abs}) la presión absoluta

b) Barómetro



Es un dispositivo constituido por una probeta, un recipiente ó vaso y un líquido (mercurio, agua, etc...) que se utiliza para determinar la presión atmosférica en un lugar de la superficie terrestre.

c) Piezómetro
Es un dispositivo sencillo, sensible que se utiliza para medir presiones pequeñas; y está constituido por un tubo de cristal de diámetro pequeño y un recipiente que generalmente se llena con mercurio (Hg) como la Fig.



Así, según el principio de Pascal, la presión en el punto A, es igual, a la presión P en el recipiente, esto es:

$$P = P_A$$

$$P = P_{atm} + \rho\, g\,(h + H)$$

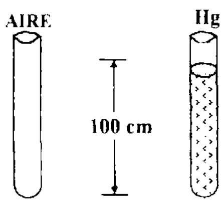
siendo, "ρ" la densidad del mercurio y "g" la aceleración de la gravedad.

2) Experimentos para medir la presión atmosférica

➢ Experimento de Torricelli

a) Objetivo

Medir la presión atmosférica

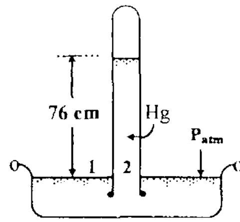


b) Instrumentos

1) Una probeta de vidrio.
2) Una vasija o recipiente de vidrio.
3) Una cantidad de mercurio.

c) Procedimiento

1) La probeta se llena con mercurio (Hg)
2) La probeta se invierte tal que el mercurio (Hg) se derrama sobre un recipiente, como muestra la Fig.



3) En la Fig., se observa que no todo el mercurio baja de la probeta, debido a la presión atmosférica que actúa sobre la superficie libre del mercurio.
4) Por el principio fundamental de la hidrostática los puntos (1) y (2) se encuentran en un mismo líquido (Hg), y al mismo nivel, por lo que:

$$P_1 = P_2$$

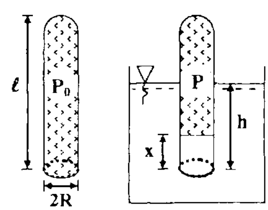
$$P_{atm} = 76\ cmHg$$

d) Conclusión

«La presión atmosférica es equivalente, a la presión que ejerce una columna de mercurio (Hg) de 76 cm de altura»

➢ Tubo cerrado por uno de sus extremos

Consideremos un tubo de longitud "ℓ" y radio "R" cerrado por uno de sus extremos, como se observa en la Fig.



En la Fig., a medida que introducimos verticalmente el tubo por su extremo abierto en el recipiente con agua, hasta alcanzar una altura "h", al aire en su interior se va comprimiendo, ascendiendo el agua al interior del tubo una altura "x".

Los volúmenes inicial (V_0) y final (V) del aire a las presiones (P_0) y (P) son:

$$V_o = \pi R^2 \ell \quad y \quad V = \pi R^2 (\ell - x)$$

De otro lado, la presión del aire encerrado en el tubo es la suma de la presión atmosférica más la presión de la columna de agua de altura (h-x), esto es:

$$P = P_o + \rho g (h - x)$$

Ahora, asumiendo que el aire es un gas ideal, y que el proceso de compresión es isotérmico (T=cte.), de la ecuación de los gases ideales, tenemos:

$$P_o V_o = P\,V$$

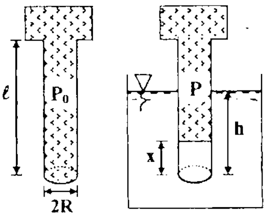
Sustituyendo en esta ecuación V_0, P y V, obtenemos la expresión para la presión atmosférica, así:

$$P_o = \frac{\rho g (h - x)(\ell - x)}{x}$$

En esta fórmula las cantidades "h" y "x" se miden directamente. Así, por ejemplo, para un tubo de longitud $\ell = 40$ cm, h=40 cm, R=9 mm, x=1,1 cm g=9,8 m/s^2 y $\rho = 1\,000$ kg/m^3, el valor que se obtiene para la presión atmosférica es: P_0=0,9684.10^5 N/m^2, siendo el error relativo cometido de: E=4,4 %.

➤ Tubo conectado a un recipiente

Conectando el extremo superior del tubo a un recipiente de volumen, logramos aumentar la longitud eficaz del tubo, tal como se observa en la Fig.



Los volúmenes inicial y final del aire a las presiones P_0 y P son:

$$V_o = \pi R^2 \ell + V$$

$$V = \pi R^2 (\ell - x) + V$$

La presión P del aire encerrado en el recipiente es la suma de la presión atmosférica P_0 más la presión de la columna de agua de altura (h-x), esto es:

$$P = P_o + \rho g (h - x)$$

Ahora, asumiendo que el aire es un gas ideal, y que el proceso de compresión de isotérmico (T=cte.), de la ecuación de los gases ideales, tenemos:

$$P_o V_o = P\,V$$

Sustituyendo en esta ecuación V_0, P, V, obtenemos la expresión para la presión atmosférica y longitud eficaz:

$$P_o = \rho g \frac{(h - x)(L - x)}{x}$$

$$L = \ell + \frac{V}{\pi R^2}$$

En estas fórmulas las cantidades "h" y "x" se miden directamente. Así, por ejemplo, para un tubo de longitud $\ell = 40$ cm, h=40 cm, R=9 mm, x=11,7 cm

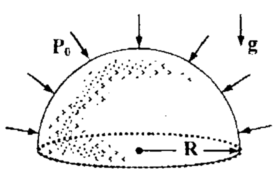
$g=9,8\ m/s^2$ y $\rho = 1\ 000\ kg/m^3$, el valor que se obtiene para la presión atmosférica es: $P_0=0,99866.10^5\ N/m^2$, la longitud eficaz $L=4,33$ m, el aumento de la longitud del tubo $A \approx 11$ veces, y el error relativo igual a: $E=1,42$ %.

Conclusiones

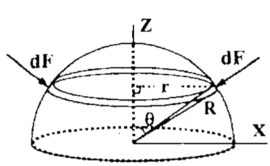
1) La altura "x" del agua que penetra en el tubo aumenta al disminuir el radio "R" del tubo capilar.
2) Añadiendo el recipiente en el extremo superior del tubo se disminuye el error al medir la presión atmosférica.
3) En la medición de la longitud "x" no se ha considerado la formación de un menisco, y el ascenso del agua en los tubos capilares, debido a la tensión superficial.

➢ Cálculo de la fuerza de presión atmosférica

Consideremos un recipiente de forma hemisférica de radio "R", y cuya base es perpendicular a la gravedad, como se muestra en la Figura.



Para calcular la fuerza sobre la superficie hemisférica, ejercida por la presión atmosférica (P_0=cte.), dividimos dicha superficie en muchos anillos, y representamos la fuerza de presión sobre uno de estos anillos.



En la Fig., el radio del anillo "r", su ancho "$d\ell$", y su área "dS" son:

$$r = R\,\text{sen}\,\theta, \quad d\ell = R\,d\theta$$

$$dS = 2\pi r\,d\ell = 2\pi R^2 \text{sen}\,\theta\,d\theta$$

La magnitud de la fuerza ejercida por la presión atmosférica sobre la superficie de este anillo es:

$$dF = P_0 dS = 2\pi R^2 P_0 \text{sen}\,\theta\,d\theta$$

La componente horizontal de esta fuerza se anula, quedando únicamente la componente vertical, cuya expresión es:

$$dF_z = dF\cos\theta$$

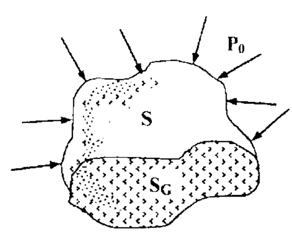
$$dF_z = 2\pi R^2 P_0 \text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta$$

Integrando esta expresión sobre todos los anillos, obtenemos la fuerza de presión total ejercida por la atmósfera, sobre la superficie hemisférica, así:

$$\int_0^{F_z} dF_z = \frac{1}{2}\pi R^2 P_o \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,2\theta\,d(2\theta)$$

$$F_z = \pi R^2 P_o$$

Como, πR^2 es el área de la proyección de la superficie del hemisferio sobre su base, entonces, podemos generalizar este resultado mediante el siguiente teorema.



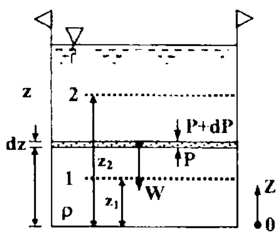
<<La fuerza ejercida por la presión atmosférica sobre una superficie "S" continua sin sobrelapamiento, es igual, a la presión ejercida sobre la proyección de está superficie "S_G" sobre un plano perpendicular a la gravedad>>

$$\boxed{F = P_o S_G}$$

Nota

Algunos autores a la proyección de la superficie "S" sobre un plano perpendicular a la gravedad, le denominan superficie eficaz.

5. PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTATICA



Para obtener la ecuación que expresa el principio fundamental de la hidrostática, en el recipiente que contiene el fluido de densidad "ρ", tomemos un elemento de fluido de espesor "dz", área "S" situada a una profundidad "z" de la superficie libre, como se muestra en la Fig, Ahora, como este elemento de fluido está en equilibrio estático, la resultante de las fuerzas debida a la presión (hacia arriba), debe ser igual, a su peso (hacia abajo), esto es:

$$PS - (P + dP)S = \rho g S dz$$

$$dP = -\rho g dz$$

Integrando está expresión entre los niveles "1" y "2", tenemos:

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$P_2 - P_1 = \rho g z_1 - \rho g z_2$$

$$\boxed{P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 = \text{cte.}}$$

Así, hemos obtenido la ecuación que expresa el principio fundamental de la hidrostática.

Ahora, esta ecuación matemática, podemos expresarla de tres formas, así:

a) Primera forma

Considerando que los puntos "1" y "2" son dos puntos cualesquiera del fluido, podemos obviar los subíndices, obteniendo:

$$\frac{P}{\rho} + g z = C_1$$

esta ecuación tiene dimensiones de la velocidad al cuadrado, donde C_1 es una constante.

b) Segunda forma

Dividiendo la ecuación anterior entre la aceleración de la gravedad, tenemos:

$$\frac{P}{\rho g} + z = C_2$$

esta ecuación tiene dimensiones de longitud, donde C_2 es una constante.

c) Tercera forma

Multiplicando la ecuación a) por la densidad, tenemos:

$$P + \rho g z = C_3$$

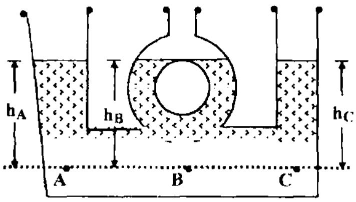
esta ecuación tiene dimensiones de presión, donde C_3 es una constante.

- La diferencia de presión hidrostática en tre dos puntos de un fluido, solo depende de la altura entre ellos.

➤ Vasos comunicantes

a) Para un líquido

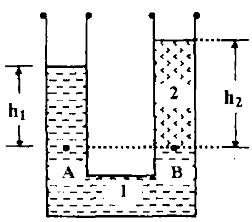
Son recipientes de diversas formas comunicados entre sí por su parte inferior.



Si por uno de los recipientes se vierte un sólo líquido, la altura que alcanza dicho líquido en todos ellos es la misma, es decir:

$$\boxed{h_A = h_B = h_C}$$

b) Para dos líquidos no miscibles



Para dos líquidos no miscibles 1 y 2 en equilibrio en un tubo en forma de U, sus alturas medidas a partir de la superficie de separación, son inversamente proporcionales a sus densidades.

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

Esta expresión nos permite determinar directamente la densidad relativa de una sustancia, midiendo las alturas alcanzadas por cada una de ellas.

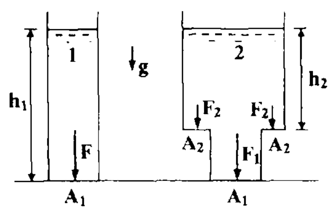
6. PARADOJA DE LA HIDROSTATICA

El enunciado de esta paradoja establece: «La fuerza debida a la presión que ejerce un fluido en la base de un recipiente puede ser mayor o menor que el peso del fluido que contiene dicho recipiente»

Para ilustrar esta paradoja, analicemos los siguientes casos:

a) Primer caso

Consideremos dos recipientes con simetría cilíndrica, ambos conteniendo el mismo tipo de fluido hasta la misma altura "h_1".



El peso del fluido contenido en el recipiente "1" es:

$$W_1 = m_1 g = \rho g A_1 h_1 g \qquad (1)$$

La magnitud de la fuerza de presión en la base del recipiente "1" es:

$$F = P A_1 = \rho g A_1 h_1 \qquad (2)$$

De las ecs.(1) y (2), tenemos que $F = W_1$

El peso del fluido contenido en el recipiente cilíndrico "2" es:

$$W_2 = m_2 g$$

$$W_2 = \rho g A_1 h_1 + \rho g A_2 h_2 \qquad (3)$$

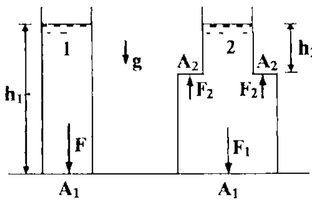
La magnitud de la fuerza de presión en la base del recipiente "2" es:

$$F = F_1 + F_2$$

$$F = \rho g A_1 h_1 + \rho g A_2 h_2 \qquad (4)$$

De las ecs.(3) y (4), tenemos que $F=W_2$

b) Segundo caso



El peso del fluido en el recipiente cilin drico "1" es:

$$W_1 = m_1 g = \rho g A_1 h_1 \qquad (5)$$

La magnitud de la fuerza de presión en la base del recipiente "1" es:

$$F = P A_1 = \rho g A_1 h_1 \qquad (6)$$

De las ecs.(5) y (6), tenemos que $F=W_1$

El peso del fluido contenido en el reci piente "2" es:

$$W_2 = m_2 g$$

$$W_2 = \rho g A_1 h_1 - \rho g A_2 h_2 \qquad (7)$$

La magnitud de la fuerza de presión en la base del recipiente "2" es:

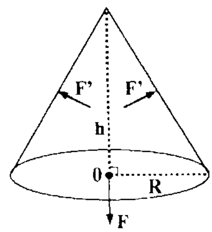
$$F = F_1 - F_2$$

$$F = \rho g A_1 h_1 - \rho g A_2 h_2 \qquad (8)$$

De las ecs.(7) y (8), tenemos que $F=W_2$

c) Tercer caso

Consideremos un recipiente cónico de base circular de radio "R" y altura "h" lleno con un fluido de densidad "ρ", co mo se muestra en la Fig.



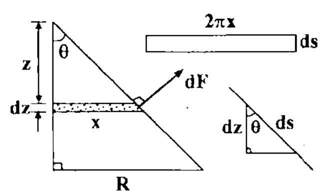
El peso del fluido contenido en el reci piente cónico es:

$$W = \frac{1}{3}\pi \rho g R^2 h \qquad (1)$$

La fuerza de presión F (hacia abajo) que ejerce el fluido sobre la base del reci piente es:

$$F = P A = \pi \rho g R^2 h \qquad (2)$$

Para calcular la fuerza sobre la superfi cie lateral del recipiente, dividamos este en muchos anillos, y representemos la fuerza de presión sobre uno de estos ani llos.



En la Fig., la fuerza que ejerce el fluido sobre la superficie del anillo de longitud "$2\pi x$", ancho $ds = dz/\cos\theta$, situado a una profundidad "z" es:

$$dF = P\,dA = 2\pi \rho g z x\,ds \qquad (3)$$

De otro lado, en el triángulo rectángulo tenemos que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{z} = \frac{R}{h} \qquad (4)$$

En la Fig., se observa que la componente horizontal de la fuerza "dF" se anula, quedando solo la componente vertical, cuya expresión teniendo en cuenta (3) y (4) es:

$$dF_z = dF \operatorname{sen}\theta$$

$$dF_z = 2\pi\rho g z \frac{R}{h} z \frac{dz}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta$$

$$dF_z = 2\pi\rho g \frac{R^2}{h^2} z^2\, dz$$

Así, integrando sobre todos los anillos, obtenemos la componente vertical total de la fuerza de presión (hacia arriba) sobre la superficie lateral del recipiente:

$$\int_0^{F_z} dF_z = \frac{2\pi\rho g R^2}{h^2} \int_0^h z^2\, dz$$

$$F_z = (2/3)\,\pi\rho g R^2 h \qquad (5)$$

Luego, de (2) y (5) la componente vertical resultante de las fuerzas de presión que ejerce el fluido sobre la superficie total del recipiente cónico es:

$$F_R = F - F_z$$

$$F_R = \pi\rho g R^2 h - (2/3)\,\pi\rho g R^2 h$$

$$F_R = \frac{1}{3}\pi\rho g R^2 h \qquad (6)$$

De (1) y (6), tenemos que $F_R = W$

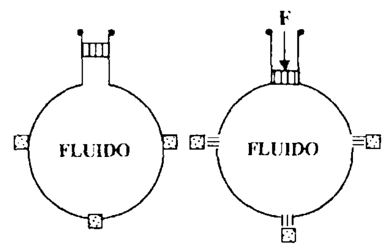
Conclusión

Como se ha comprobado en estos tres casos, la paradoja hidrostática consiste en que la fuerza de presión debida al fluido, ejercida sobre la base del recipiente puede ser diferente del peso del fluido, si no se consideran todas las componentes verticales que actúan sobre las paredes del recipiente.

7. PRINCIPIOS DE LA HIDROSTATICA

1) Principio de Pascal

Este principio físico establece que: «El incremento de presión aplicado a una superficie de un fluido incomprensible, contenido en un recipiente indeformable se transmite por igual en todas las direcciones y con la misma intensidad»



Este principio puede verificarse utilizando un recipiente esférico, conteniendo un fluido cerrado en la parte superior por un embolo, y tres tapones idénticos. Se observa que al deslizarse el embolo hacia abajo bajo la acción de la fuerza F, los tres tapones abandonan el recipiente simultáneamente, lo cual, demuestra que los agujeros están a la misma presión.

a) Tensor tensión

El tensor tensión para un fluido incompresible en reposo, debido a las presiones aplicadas sobre su superficie, viene dado por:

$$T_S = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

El tensor tensión total, debido al peso del fluido hace que el fluido situado en la parte baja de un recipiente tenga una tensión ligeramente mayor que el fluido situado en la parte superior. De hecho, si la única fuerza que actúa es el peso del fluido, el estado de tensión del fluido a una profundidad "z" es expresada mediante el tensor tensión del fluido:

$$T = T_S + T_W$$

$$T = \begin{pmatrix} -P-\rho z & 0 & 0 \\ 0 & -P-\rho z & 0 \\ 0 & 0 & -P-\rho z \end{pmatrix}$$

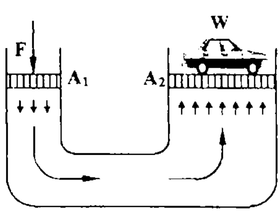
De aquí, podemos concluir que: «fijado un punto de un fluido incompresible en reposo y contenido en un recipiente bajo presión e indeformable, la presión del fluido, es idéntica en todas las direcciones»

- El principio de Pascal es una consecuencia de la ecuación fundamental de la hidrostática, y del carácter altamente incompresible de los líquidos, en este tipo de líquidos la densidad "ρ" se mantiene constante.

b) Prensa hidráulica

➢ Embolos a la misma altura.

- Es una máquina simple que se utiliza para multiplicar la fuerza (F) que se le comunica, permitiendo levantar cargas pesadas.
- Su funcionamiento se basa en el principio de Pascal.

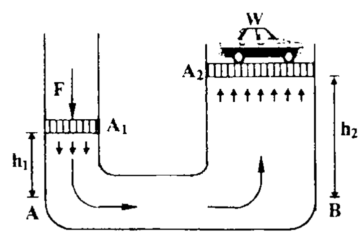


- Está constituida por dos cilindros de base común conteniendo un fluido y dos pistones ó émbolos deslizantes de áreas A_1 y A_2.
- Si sobre el pistón de menor área (A_1) aplicamos una fuerza F, entonces, esta fuerza se transmite a través del líquido y la carga de peso máximo W, ubicado en el pistón de área A_2, que podemos elevar es:

$$\boxed{W = (\frac{A_2}{A_1})F}$$

2) Embolos a diferentes alturas

Consideremos una prensa hidráulica en la que sus émbolos estén a diferentes alturas, tal como la que se muestra en la Fig.



Como los puntos A y B están al mismo nivel (pertenecen a una isoterma) las presiones en dichos puntos es la misma, esto es:

$$P_A = P_B$$

$$P_o + \rho g h_1 + \frac{F}{A_1} = P_o + \rho g h_2 + \frac{W}{A_2}$$

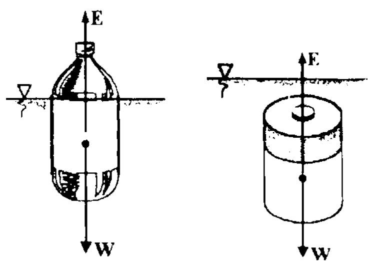
$$h_2 - h_1 = \frac{F}{\rho g A_1} - \frac{W}{\rho g A_2} \quad (1)$$

De otro lado, para que los émbolos se encuentren a la misma altura, el volu men de fluido que debe pasar de una rama a la otra debe ser la misma, esto es, si h_1 disminuye h_2 debe aumentar, este movimiento de masa, viene expresado por la ecuación:

$$A_1h_1 + A_2h_2 = (A_1 + A_2)h_o \quad (2)$$

Finalmente, las ecs.(1) y (2), nos permiten determinar las alturas a las que se encuentran los émbolos.

2) Principio de Arquímedes

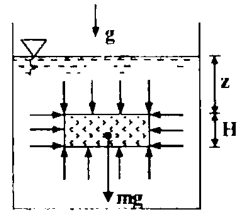


<<Todo cuerpo sumergido parcialmente o totalmente en un fluido experimenta la acción de una fuerza dirigida hacia arriba, llamada empuje (E) que numéricamente es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo; está fuerza está aplicada en el centro de gravedad del volumen de la parte sumergida del cuerpo (centro de flotación ó presión)>>

$$\boxed{E = \gamma_F V_S = \rho_F g V_S}$$

siendo, "ρ_F" la densidad, "γ_F" el peso específico del fluido, "V_S" el volumen sumergido del cuerpo, y "g" la aceleración de la gravedad.

- Para demostrar este principio, consideremos un prisma recto de bases rectangulares de área "S", altura "H", masa "m", sumergida totalmente en un fluido de densidad "ρ_F", como muestra la Fig.



En la Fig., la fuerza debida a la presión ejercida por el fluido sobre las caras laterales del prisma se anulan dos a dos, en tanto, las fuerzas de presión sobre las bases inferior y superior son:

$$F_I = P_I S = \rho_F g(z + H)S \quad (\uparrow)$$

$$F_S = P_S S = \rho_F g z S \quad (\downarrow)$$

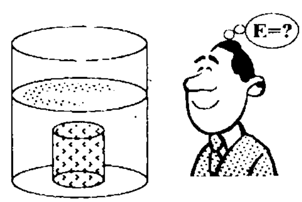
Luego, la fuerza total hacia arriba, llamada empuje es:

$$E = F_I - F_S$$

$$E = \rho_F g(z + H)S - \rho_F g z S$$

$$\clubsuit\ E = \rho_F\, g\, V_S$$

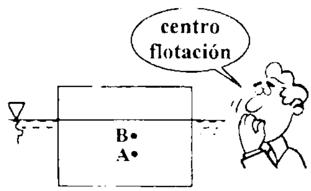
- Así, hemos probado que la fuerza de empuje (E), tiene su origen en la diferencia de presión entre la bases inferior y superior del cuerpo sumergido en el fluido.
- El principio de Arquímedes es válido tanto, para líquidos como para gases.



- Si ubicamos un cuerpo de base plana como un cilindro o paralelepípedo en el fondo de de un recipiente, que contiene un fluido de densidad menor que la del cuerpo. ¿Hay fuerza de empuje, sobre el cuerpo?

a) Centro de flotación

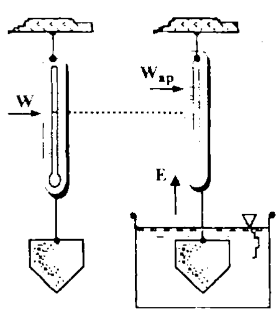
Se llama centro de flotación al punto "A" sobre el cual actúan todas las fuerzas que producen el efecto de flotación, y corresponde al centro de gravedad de la parte sumergida del cuerpo.



- Si el cuerpo homogéneo está sumergido totalmente el centro de flotación "A" coincide con el centro de gravedad "B" del cuerpo.
- Si el cuerpo homogéneo está sumergido parcialmente, el centro de flotación "A" está situado por debajo del centro de gravedad "B" del cuerpo.

¿Puede un cuerpo flotar en un fluido, sin estar sumergido ninguna parte de el en el fluido?

b) Peso aparente (W_{ap})



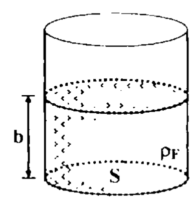
Es el peso que marca un dinamómetro cuando un cuerpo está sumergido en un fluido, y es igual, al peso del cuerpo en el aire (W) menos el empuje (E); es decir:

$$\boxed{W_{ap} = W - E}$$

8. EL TEOREMA DE ARQUIMEDES Y EL PRINCIPIO DE MINIMA ENERGIA

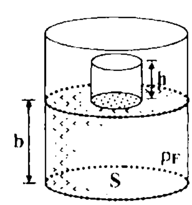
a) Energía potencial de un cuerpo sumergido en un fluido.

En este apartado estudiaremos el principio de Arquímedes, como un ejemplo de cómo la naturaleza busca minimizar la energía de un sistema.

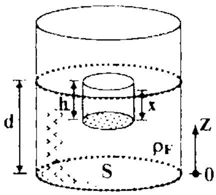


Consideremos un recipiente de área de la base "S", conteniendo un fluido de densidad "ρ_F" hasta una altura "b".

Sobre la superficie del fluido, ubiquemos un cuerpo compacto de forma cilíndrica de altura "h", área de la base "A", densidad "ρ_S" ($\rho_F > \rho_S$).



Si liberamos el cuerpo, este empieza a oscilar hasta alcanzar el equilibrio, flotando sobre el fluido, sumergido parcial mente una altura "x".



El fluido del recipiente asciende hasta una altura "d". Como la cantidad de fluido no varia, igualando volúmenes, obtenemos esta altura, así:

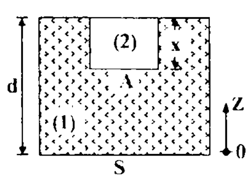
$$S b = S d - A x$$

$$d = b + \frac{A}{S} x \qquad (1)$$

- Debemos calcular "x", tal que, para esta altura la energía potencial del sistema fluido-cuerpo sea mínima.
- Escogiendo el sistema de referencia en la base del recipiente, el centro de masa del cuerpo está a una altura igual a: $z_S = d - x + h/2$, de modo que, su energía potencial es:

$$E_{P,S} = m g z_S = (\rho_S A h) g (d - x + \frac{h}{2})$$

$$E_{P,S} = \rho_S A h g (b + \frac{A}{S} x - x + \frac{h}{2})$$



En la Fig., para hallar el centro de masa del fluido, consideremos dos partes (1) y (2), siendo el centro de masa de cada uno de estas partes, igual a:

$$z_1 = \frac{d}{2} \quad y \quad z_2 = d - \frac{x}{2}$$

De modo que, el centro de masa del fluido, según el principio de superposición para centros de masa es:

$$z_F = \frac{z_1 V_1 - z_2 V_2}{V_1 - V_2}$$

$$z_F = \frac{(S d)(d/2) - (A x)(d - x/2)}{S d - A x}$$

$$z_F = \frac{1}{S b}[\frac{1}{2} S (b + \frac{A}{S} x)^2 + \frac{1}{2} A x^2 -$$

$$A x (b + \frac{A}{S} x)]$$

Con esto, la energía potencial correspondiente al fluido es:

$$E_{P,F} = m g z_F = \rho_F S b g z_F$$

Luego, la energía potencial total del sistema fluido-cuerpo, es la suma de las energías potenciales del fluido y cuerpo esto es:

$$E_P = E_{P,F} + E_{P,S}$$

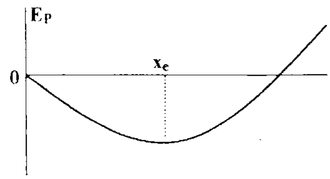
$$E_P = \frac{1}{2} \rho_F g A (1 - \frac{A}{S}) x^2 - \rho_S g h A (1 - \frac{A}{S}) x$$

$$+ \frac{1}{2} \rho_F S b^2 g + \rho_S h A (b + \frac{h}{2}) g$$

$$E_P = \frac{1}{2} \rho_F g A (1 - \frac{A}{S})(x^2 - 2 \frac{\rho_S}{\rho_F} h x) + C$$

donde, "C" es una constante aditiva que dependerá de la elección que se haga del nivel de referencia.

La representación gráfica de la energía potencial en función de "x" es:



Derivando la energía potencial respecto de "x", e igualando a cero, hallamos el valor de "x", para el cual, la energía potencial es mínima, así:

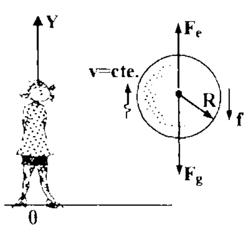
$$\frac{dE_P}{dx} = \frac{1}{2}\rho_F g A\left(1 - \frac{A}{S}\right)\left(2x - 2\frac{\rho_S}{\rho_F}h\right) = 0$$

$$x_e = \frac{\rho_S}{\rho_F}h < h$$

Así, para este valor de "x" el cuerpo está en equilibrio sumergido parcialmente y en un estado de mínima energía potencial total.

b) Energía potencial de un cuerpo que se mueve en un fluido

Consideremos un globo de volumen "V" que asciende verticalmente en el aire de densidad "ρ_F".



Las fuerzas que actúan sobre el globo son: su peso $\vec{F}_g = -mg\hat{j}$, el empuje del aire $\vec{F}_e = \rho_F g V\hat{j}$ y la fuerza de fricción

- Como el peso y el empuje son fuerzas conservativas, sus energías potenciales correspondientes son:

$$E_{P,g} = mgy \quad y \quad E_{P,e} = -\rho_F V g y$$

pues, si una fuerza es conservativa esta proviene de un potencial, $F=-dE_P/dy$.

- Así, la energía potencial asociada a las dos fuerzas conservativas es:

$$E_P = E_{P,g} + E_{P,e}$$

$$E_P = (mg - \rho_F V g)y \qquad (1)$$

De otro lado, para el tramo en el que el globo asciende con velocidad constante, la fuerza resultante es nula, esto es:

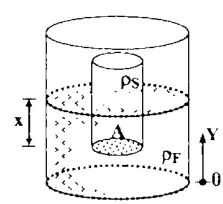
$$\rho_F V g - mg - f = 0$$

$$mg - \rho_F V g = -f < 0 \qquad (2)$$

Así, de (1) y (2), concluimos que a medida que el globo asciende, "y" aumenta, y "E_P" disminuye, pues, se hace más negativo.

c) Energía potencial de un cuerpo parcialmente sumergido

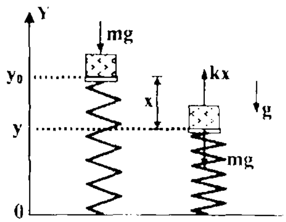
Consideremos un cuerpo de forma cilíndrica de área de la base "A", altura "h" y densidad "ρ_S" sumergida parcialmente sumergida en un líquido de densidad "ρ_F" ($\rho_S < \rho_F$).



Cuando el cuerpo está parcialmente sumergido en el líquido una altura "x", sobre el actúan su peso $\rho_S A h g$ y el em puje del líquido $\rho_F A g x$, de modo que la fuerza resultante es:

$$\vec{F} = (\rho_F A g x - \rho_S A g h)\hat{j}$$

El sistema fluido-cuerpo es equivalente al del sistema formado por un resorte de constante elástica "k" y un cuerpo de masa "m", como el mostrado en la Fig.



A medida que el resorte se comprime, partiendo de la posición "y_o" la energía potencial gravitatoria disminuye, y la energía potencial elástica aumenta, la suma de ambas energía nos da la energía potencial del sistema, esto es:

$$E_P = mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

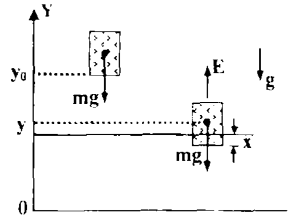
$$E_P = mgy + \frac{1}{2}k(y_o - y)^2$$

Derivando esta expresión respecto de "y", obtenemos la fuerza resultante que actúa sobre el sistema, así:

$$F_y = -\frac{dE_P}{dy} = -mg + k(y_o - y)$$

$$F_y = -mg + kx$$

El mínimo de la energía potencial (E_P) del sistema corresponde a la posición de equilibrio, esto es, cuando el peso se iguala a la fuerza elástica.



Por analogía, la energía potencial del cuerpo sumergido parcialmente en el líquido es:

$$E_P = \rho_S A h g y + \frac{1}{2}\rho_F A g x^2$$

$$E_P = \rho_S A h g y + \frac{1}{2}\rho_F A g (y_o - y)^2$$

Del mismo modo, la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo es:

$$F_Y = -\rho_S A h g + \rho_F A g (y_o - y)$$

$$F_y = -\rho_S A h g + \rho_F A g x$$

El mínimo de la energía de la energía potencial, corresponde a la posición de equilibrio, esto es, cuando el peso del cuerpo, se iguala, al empuje, de donde obtenemos:

$$x = \frac{\rho_S}{\rho_F} h = \rho h$$

siendo, $\rho = \rho_S / \rho_F$ la densidad relativa.

Análisis de fuerzas sobre el cuerpo

1) Cuando $\rho_S < \rho_F$ el cuerpo permanece en equilibrio, parcialmente sumergido.
2) Cuando $\rho_S > \rho_F$, el peso del cuerpo es siempre mayor que el empuje. No existe posición de equilibrio.

3) Cuando, $\rho_S = \rho_F$, el peso del cuerpo es mayor que el empuje, en tanto el cuerpo este parcialmente sumergido. La fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo, cuando esta completamente sumergido es nulo, y cualquier posición del cuerpo es de equilibrio.

Curvas de energía potencial

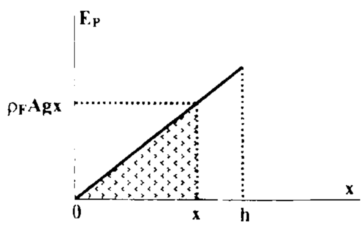
La energía potencial correspondiente al peso del cuerpo (fuerza conservativa) es

$$E_{P,g} = \rho_S A h\, g\, y$$

La energía potencial correspondiente a la fuerza de empuje, cuando el cuerpo está parcialmente sumergido una altura "x" es:

$$E_{P,e} = \frac{1}{2}\rho_F A g x^2$$

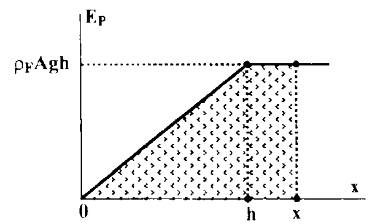
Como esta expresión es numéricamente igual al área de un triángulo de base "x", y altura "$\rho_F A g h$", la representación gráfica de esta energía potencial, es la que se observa.



La energía potencial correspondiente a la fuerza de empuje, cuando el cuerpo está completamente sumergido es:

$$E_{P,e} = \frac{1}{2}\rho_F A g h^2 + \rho_F A g h(x-h)$$

Como el primer término es numéricamente igual al área de un triángulo de base "x" y altura "$\rho_F A g h$", y el segundo término es el área de un rectángulo de base "x − h" y altura "$\rho_F A g h$", la representación gráfica de esta energía potencial es:



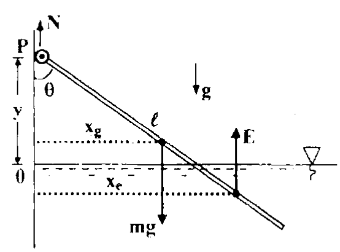
Cuando la densidad del cuerpo es igual a la del líquido $\rho_S = \rho_F$, la energía potencial total es constante e independiente de "x" para $x \geq h$.

9. EQUILIBRIO DE UNA VARILLA PARCIALMENTE SUMERGIDA.

En esta sección estudiaremos el equilibrio de una varilla homogénea de longitud "ℓ", área de sección "A", densidad "ρ_S", sumergida parcialmente en un líquido de densidad "ρ_F" ($\rho_S < \rho_F$) con u-no de sus extremos unida a una rotula (P), que le permite girar en un plano vertical, se presentan dos casos:

a) Rótula fuera del líquido

Las fuerzas que actúan sobre la varilla son: su peso (mg), el empuje del líquido (E) y la reacción en la rótula (N).



El peso $mg = \rho_S A \ell g$ actúa en el centro de masa de la varilla, en la posición de abscisa $x_g = (\ell/2)\operatorname{sen}\theta$.

El empuje $E = \rho_F g A(\ell - y/\cos\theta)$ actúa en el centro de la parte sumergida de la varilla, en la posición de abscisa igual a $x_e = (\ell + y/\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta/2)$.

Ahora, como la varilla está en equilibrio la resultante de la suma de los momentos respecto de la rótula P, debe ser cero, esto es:

$$E\,x_e - mg\,x_g + N(0) = 0$$

$$(\rho_F g A)(\ell - \frac{y}{\cos\theta})(\ell + \frac{y}{\cos\theta})(\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}) - (\rho_S g A \ell)(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta) = 0$$

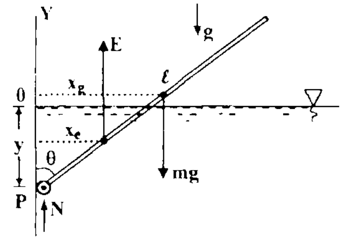
Simplificando, e introduciendo la densidad relativa, $\rho = \rho_S / \rho_F$, obtenemos la ecuación para el equilibrio de la varilla:

$$(1 - \rho - \frac{y^2}{\ell^2}\frac{1}{\cos^2\theta})\operatorname{sen}\theta$$

- Si: $y > \ell$ el término entre paréntesis es distinto de cero, por lo que, la posición de equilibrio, se dará para $\operatorname{sen}\theta = 0$ es decir $\theta = 0^o$. La varilla está suspendida verticalmente fuera del líquido.
- Si: $y < \ell$ el término entre paréntesis puede llegar a ser cero, siempre y cuando $\cos\theta = (y/\ell)(1/\sqrt{1-\rho}) \leq 1$, lo cual implica que, $y \leq \ell\sqrt{1-\rho}$. Cuando no se cumpla está condición el primer término no es nulo, y la condición de equilibrio se dará para $\theta = 0^o$.

b) Rótula dentro del líquido

En la Fig., el peso $mg = \rho_F A \ell g$ actúa en el centro de la varilla, en la posición de abscisa $x_g = (\ell/2)\operatorname{sen}\theta$.



El empuje $E = \rho_F g A(y/\cos\theta)$ actúa en el centro de la parte sumergida de la varilla, en la posición de abscisa igual a $x_e = (y/\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta/2)$

Ahora, como la varilla está en equilibrio la resultante de la suma de momentos debe ser nula, esto es:

$$E\,x_e - mg\,x_g = 0$$

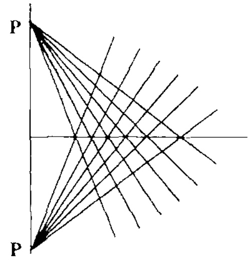
$$(\rho_F g A\frac{y}{\cos\theta})(\frac{y}{\cos\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}) - (\rho_S g A \ell)(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta) = 0$$

Simplificando, e introduciendo la densidad relativa $\rho = \rho_S / \rho_F$, obtenemos la ecuación para el equilibrio de la varilla:

$$(\frac{y^2}{\ell^2}\frac{1}{\cos^2\theta} - \rho)\operatorname{sen}\theta = 0$$

- Si: $y > \ell$ el término entre paréntesis es diferente de cero, por lo que, la posición de equilibrio de la varilla, se dará cuando $\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir $\theta = 0^o$.
- Si: $y < \ell$ el término entre paréntesis será cero si: $\cos\theta = y/\ell\sqrt{\rho} \leq 1$, y se dará si $y \leq \ell\sqrt{\rho}$. Cuando no se cumple está condición el primer termino no es nulo y la posición de equilibrio se dará para $\theta = 0^o$.
- Representemos gráficamente todas las posibles posiciones de equilibrio, para

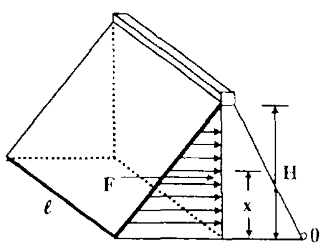
los dos casos.



10. FUERZA HIDROSTATICA EN UN DIQUE DE REPRESA

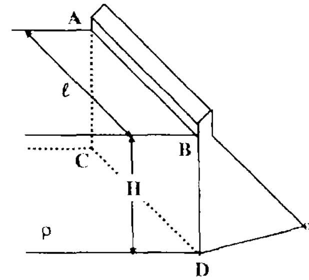
a) Fuerza total

La magnitud de la fuerza sobre un dique de una represa que contiene agua, aumenta según la profundidad, así, la representación de la distribución de estas fuerzas es:

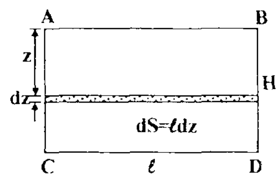


siendo, (ℓ) la longitud del dique, (H) la altura del agua en la represa, (F) la fuerza total que actúa sobre el dique debida a la presión del agua, y (x) la altura del punto de aplicación de la fuerza (F), medida respecto del fondo de la represa.

- Para deducir la fuerza total (F) que actúa sobre el dique de una represa de agua, dividamos el dique en pequeñas franjas, de área $dA=\ell.dh$, como se muestra en la Fig.



siendo, (h) la altura del agua en el dique, y (ℓ) la longitud del ancho del dique.



En la Fig., la fuerza sobre la franja de área (dA), debida a la presión el agua que esta por encima de la franja es:

$$dF = PdA$$

$$dF = (\rho g z)(\ell dz)$$

$$\int_0^F dF = \rho\, g\, \ell \int_0^H z\, dz$$

$$\ast\quad F = \frac{1}{2}\rho\, g\, \ell\, H^2$$

b) Momento de la fuerza.

Ahora, deduzcamos el momento de la fuerza total (F) sobre el dique, respecto de la base del dique, así:

$$dM = (dF)(H - z)$$

$$\int_0^M dM = \int_0^H \rho\, g\, \ell\, z\,(H-z)\, dz$$

$$(M)\Big]_0^M = \rho g \ell \left(\frac{H z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Big]_0^H$$

$$\clubsuit \quad M = \frac{1}{6}\rho\, g\, \ell\, H^3$$

c) Cálculo de la altura (x)

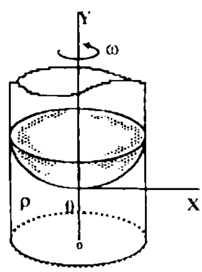
Para obtener la altura (x) del punto de aplicación de la fuerza total (F), apliquemos el teorema de Varignon, así:

$$F\,x = M$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho\, g\, \ell\, H^2\right) x = \frac{1}{6}\rho\, g\, \ell\, H^3$$

$$\clubsuit \quad x = \frac{H}{3}$$

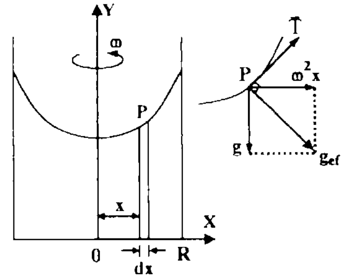
d) Forma que adopta la superficie de un líquido que gira con velocidad angular constante alrededor de un eje.



Al girar el recipiente con velocidad angular constante (ω), alrededor de su eje de simetría Y, la superficie libre del líquido adopta la forma de un paraboloide de revolución, cuya ecuación cartesiana en el plano XY, es una parábola:

$$y = \left(\frac{\omega^2}{2\,g}\right) x^2$$

siendo, "y" la altura del líquido, "x" la distancia horizontal, y "g" la aceleración de la gravedad.



Para demostrar este resultado, tomemos una columna de líquido de ancho "x" y masa "dm", como se muestra en la Fig. Las fuerzas que actúan sobre el diferencial de masa "dm" de agua, son: su peso (gdm) y la fuerza de inercia ($dm\,\omega^2 x$). En la Fig., la fuerza efectiva que actúa sobre este diferencial de masa de líquido (dm) es:

$$d\vec{F}_{ef} = dm\,\omega^2 x\,\hat{i} - dm\,g\,\hat{j}$$

A la vez, asociada a la fuerza efectiva, existe una aceleración efectiva, dada por:

$$\vec{g}_{ef} = \frac{\vec{F}}{dm} = \omega^2 x\,\hat{i} - g\,\hat{j}$$

Ahora, como todos los puntos de la superficie libre del agua, está sometido a la misma presión atmosférica, dicha superficie es una isobara, por lo que, $\vec{g}_{ef}$ es perpendicular a la tangente $\vec{T}$ a dicha superficie, esto es:

$$\vec{g}_{ef} \bullet \vec{T} = 0$$

$$(\omega^2 x\,\hat{i} - g\,\hat{j}) \bullet (dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}) = 0$$

$$g\,dy = \omega^2 x\,dx$$

Integrando está expresión obtenemos la ecuación de la superficie libre del líquido, así:

$$\int_{y_0=0}^{y} g\,dy = \int_{0}^{x} \omega^2\, x\, dx$$

$$y = (\frac{\omega^2}{2g})\, x^2$$

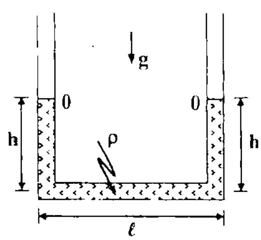
<<Ecuación de un paraboloide de revolución>>

11. APLICACIONES DE LOS MANOMETROS

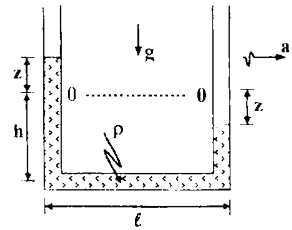
El manómetro es un dispositivo sencillo que puede utilizarse para medir la aceleción lineal o la velocidad angular de un cuerpo en movimiento.

a) Medida de la aceleración horizontal de un vehiculo

Sobre un vehiculo, ubiquemos un manómetro (tubo en forma de U) de sección transversal uniforme circular de diá metro "D" y área "S", longitud del bra zo horizontal "ℓ" ($D << \ell$) lleno con un fluido de densidad "ρ" Inicialmente, cuando el vehiculo está en reposo, el fluido en los brazos izquierdo y derecho del manómetro están a la misma altura, como se muestra en la Fig.

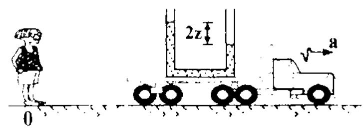


Ahora, cuando el vehiculo se desplaza hacia la derecha con una aceleración "a", el fluido en el brazo izquierdo asciende una altura "z", en tanto, en el brazo derecho desciende una altura "z", como se muestra en la Fig.



A continuación deduzcamos la fórmula de la aceleración en función de la diferencia de alturas (2z) alcanzadas por el fluido en los brazos izquierdo y derecho, para dos tipos de observadores.

1) Observador inercial



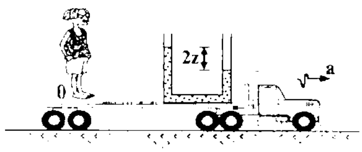
Para el observador situado en tierra, la masa de fluido contenido en el brazo horizontal del tubo, se mueve bajo la acción de las fuerzas de presión, ejercidas por las columnas de fluido izquierdo y derecho, esto es:

$$\rho g(h+z)S - \rho g(h-z)S = \rho S \ell a$$

$$a = (\frac{2g}{\ell})z$$

1) Observador inercial

Para el observador no inercial, situado sobre la plataforma del vehiculo, la masa de fluido contenido en el brazo horizontal del tubo está en equilibrio, bajo la acción de las fuerzas de presión de las columnas de fluido contenidas en los brazos izquierdo y derecho del tubo, y la fuerza de inercia que tiene sentido opuesto al de la aceleración, esto es:



$$\rho g(h+z)S - \rho g(h-z)S - \rho S\ell a = 0$$

$$a = (\frac{2g}{\ell})z$$

Los dos observadores obtienen la misma fórmula para la determinación de la aceleración del vehiculo.

- Por ejemplo, para una longitud del brazo horizontal de ℓ=50 cm, altura inicial del fluido h=25 cm, cuando el vehiculo se mueve con cierta aceleración a=?, la altura que alcanza el fluido en el brazo izquierdo es h+z=31,3 cm, por lo que, la altura que asciende y desciende el fluido en los brazos izquierdo y derecho es:

$$z = 31 - 25 = 6 \text{ cm}$$

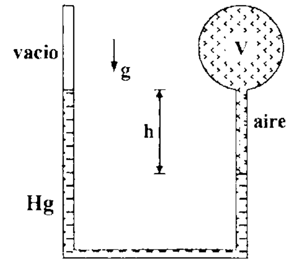
Y la magnitud de la aceleración del vehiculo es:

$$a = (\frac{2g}{\ell})z = \frac{(2)(9,8)(0,06)}{0,5}$$

$$a = 2,35\,\frac{m}{s^2}$$

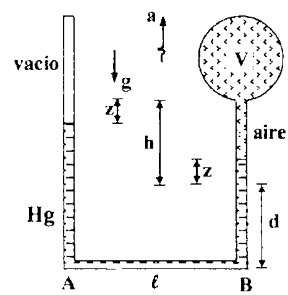
b) Medida de la aceleración de un ascensor

En un ascensor en reposo ubicamos un tubo en forma de U (manómetro) cerrado por el extremos izquierdo, unido el extremo derecho a un recipiente de volumen "V", conteniendo aire a la presión "P", siendo "h" la diferencia de alturas del fluido (mercurio) entre los brazos izquierdo y derecho, como se muestra en la Fig.



La presión del aire en el recipiente, lo crea la columna de mercurio, esto es:

$$P = \rho_{Hg} g h$$



Ahora, cuando el ascensor se desplaza verticalmente hacia arriba con una aceleración a', el fluido desciende una altura "z" en el brazo izquierdo y asciende una altura "z" en el brazo derecho, como se muestra en la Fig.

Para un observador no inercial que viaja en el ascensor, la masa de fluido contenido en el brazo horizontal está en equilibrio, bajo la acción de las fuerzas de presión de los fluidos contenidos en los brazos izquierdo y derecho, esto es:

$$F_A = F_B \Rightarrow P_A S = P_B S$$

$$\rho_{Hg}(g+a')(d+h-z) = P + \rho_{Hg}(g+a')(d+z)$$

$$\rho_{Hg}(g+a')(d+h-z)=\rho_{Hg}gh$$
$$\rho_{Hg}(g+a')(d+z)$$

De aquí, obtenemos la expresión de la aceleración a' en función de "z", así:

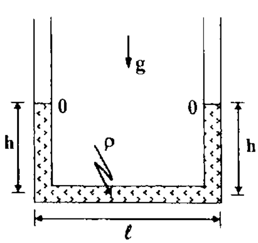
$$a'=\frac{2gz}{h-2z}$$

- Se observa que la altura "z" que asciende y desciende el fluido no es proporcional a la aceleración a' del ascensor.
- El volumen "V" del recipiente que contiene aire, debe ser lo suficientemente grande para evitar que la presión P del aire cambie bruscamente con la variación de la altura de la columna de fluido

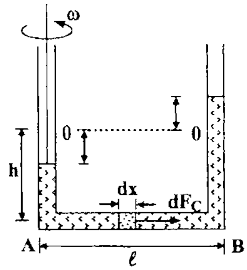
c) Medida de la velocidad angular de rotación de una plataforma

1) Objetivo
Medir la velocidad angular con la que gira una plataforma, mediante la utilización de un manómetro de sección uniforme "S".

2) Primer paso
Se ubica sobre la plataforma en reposo un manómetro conteniendo un líquido de densidad "ρ", y se mide la altura "h" que alcanza el líquido en ambos brazos del manómetro.



3) Segundo paso



Se hace girar la plataforma con cierta velocidad angular constante "ω", haciendo coincidir uno de los brazos del manómetro con el eje de rotación de la plataforma, observándose que el líquido desciende una altura "z" en el brazo que coincide con el eje de rotación y ascendiendo la misma altura en el otro brazo.

4) Tercer paso
Para un observador inercial situado en la plataforma, el líquido esta en equilibrio dinámico. Así, la fuerza centrífuga sobre el diferencial de líquido de masa "dm", es igual, a la diferencia de presión entre sus extremos, esto es:

$$dF_C = SdP$$

$$dm\,\omega^2 x = SdP$$

$$\omega^2 x\rho S dx = SdP$$

Integrando esta expresando sobre el brazo horizontal del manómetro, obtenemos la expresión para la velocidad angular, así:

$$\int_{P_A}^{P_B} dP = \omega^2 \rho \int_0^{\ell} x\,dx$$

$$P_B - P_A = \frac{1}{2}\omega^2 \rho \ell^2$$

$$\rho g(h+z) - \rho g(h-z) = \frac{1}{2}\omega^2 \rho \ell^2$$

$$\omega = \frac{2}{\ell}\sqrt{gz}$$

- La velocidad angular "ω" es independiente de la densidad del líquido, es decir, del tipo de líquido.
- La velocidad máxima con la que puede girar la plataforma, para una altura "h" dada, se obtiene cuando z=h.

  Por ejemplo, para una base del manómetro de longitud $\ell = 50$ cm, y una altura de h=25 cm del líquido en reposo, cuando la plataforma gira el líquido alcanza una altura de 13 cm en el brazo que coincide con el eje de rotación, por lo que, la altura que desciende y asciende el líquido es:

$$z = 25 - 13 = 12 \text{ cm}$$

  Y la velocidad angular con la que gira la plataforma es:

$$\omega = (\frac{2}{0,5})[(9,8)(0,12)]^{1/2}$$

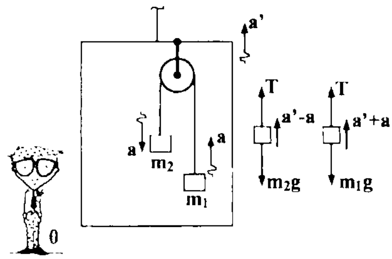
$$\omega = 4,34 \text{ rad/s}$$

12. MEDIDA DE LA ACELERACION DE UN ASCENSOR

a) Máquina de Atwood

Es un dispositivo mecánico sencillo, constituido por una polea de masa despreciable, que puede girar sin fricción alrededor de su eje de simetría, y dos bloques suspendidos unidos mediante una cuerda de peso despreciable que rodea a la polea. Ubicando la máquina de Atwood en un ascensor, puede medirse la aceleración con la que se mueve este.

b) Cálculo de la aceleración para un observador inercial



En la Fig., a' es la aceleración del ascensor, respecto del observador inercial 0, situado en tierra, y a' es la aceleración de los bloques de masas m_1 y m_2, respecto del ascensor, con esto, las ecuaciones de movimiento para cada uno de los bloques son:

$$T - m_1 g = m_1(a'+a) \qquad (1)$$

$$T - m_2 g = m_2(a'-a) \qquad (2)$$

Resolviendo este par de ecuaciones, obtenemos la aceleración (a):

$$a = \frac{(m_2 - m_1)(g + a')}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$

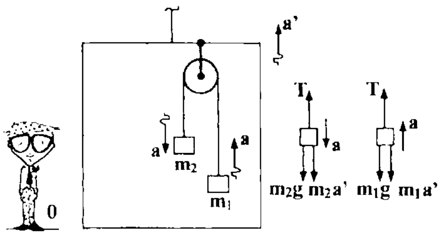
De otro lado, para el observador inercial los bloques se mueven con las siguientes aceleraciones:

$$a_1 = a'+a = \frac{2m_2}{m_1+m_2}a' + \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2}g$$

$$a_2 = a'-a = \frac{2m_1}{m_1+m_2} - \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2}g$$

Para bloques de igual masa $m_1=m_2$, las expresiones anteriores se reducen a: a=0, y $a_1=a_2=a'$.

c) Cálculo de la aceleración para un observador no inercial



En la Fig., a' es la aceleración con la que se mueve el ascensor respecto de un observador inercial, y a es la aceleración con la que se mueven cada una de las poleas, respecto del observador no inercial, de modo que, las ecuaciones de movimiento para cada uno de estos bloques son:

$$T - m_1g - m_1a' = m_1a \qquad (4)$$

$$m_2g + m_2a' - T = m_2a \qquad (5)$$

Resolviendo este par de ecuaciones, obtenemos la aceleración (a'):

$$a' = \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\right)a - g \qquad (6)$$

Ahora, sea "d" las distancias recorridas por los bloques durante el tiempo "t", entonces la aceleración "a" es:

$$a = 2\frac{d}{t^2}$$

Sustituyendo "a" en la ec.(6), obtenemos la expresión final para a':

$$a' = \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\right)\left(\frac{2d}{t^2}\right) - g \qquad (7)$$

Ejemplo:
Para bloques de masas $m_2=2m_1$, distancia recorrida d=16 cm, en un tiempo de t=60 ms, obtenemos el siguiente valor para la aceleración del ascensor:

$$a' = \left(\frac{2m_1 + m_1}{2m_1 - m_1}\right)\left(\frac{(2)(0{,}16)}{(0{,}06)}\right) - 9{,}8$$

$$a' = 6{,}2\ \frac{m}{s^2}$$

Nota
Recordemos que se llama sistema inercial de referencia inercial (S.I.R), a aquel sistema de referencia que se encuentra fijo a la Tierra (reposo relativo), o se mueve rectilíneamente con velocidad constante, respecto de un sistema de referencia fijo a Tierra.

d) Fluidez

La fluidez de un líquido depende del tipo de movimiento de sus moléculas. Así, si se aplica una fuerza externa F a un liquido, la dirección preferida del movimiento de sus moléculas, es en la dirección en la que actúa la fuerza aplicada, a esto denominamos fluidez del líquido. Se debe mencionar que un líquido, también, puede experimentar deformaciones elásticas, no sólo del tipo de extensión y compresión, sino también de cizallamiento, debidas a las tensiones tangenciales que se producen en él. Los experimentos realizados demuestran cierta semejanza de los líquidos con los sólidos, así, el análisis estructural radiográfico demuestra que la disposición de las partículas en los líquidos a temperaturas próximas a la de cristalización no es caótica. De modo que, muchas propiedades de los líquidos se diferencian poco de los sólidos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Una masa de m= 63,3 g de alcohol etílico ocupan un volumen de V=80,0 cm^3. Hallar:
I. La densidad del alcohol etílico.

a) 0,71 g/cm^3 b) 0,73 g/cm^3 c) 0,75 g/cm^3 d) 0,77 g/cm^3 e)0,79 g/cm^3

II. La densidad relativa del alcohol etílico.

a) 0,71 b) 0,73 c) 0,75 d) 0,77 e) 0,79

0.2 Hallar el volumen de 40 kg de tetracloruro de carbono cuya densidad relativa es 1,60.

a) 10 lt b) 15 lt c) 20 lt d) 25 lt e) 30 lt

03. Hallar el peso de medio metro cúbico de aluminio de densidad 2 700 kg/m^3. g=10 m/s^2

a) 13 100 N b) 13 200 N c) 13 300 N d) 13 400 N e) 13 500 N

04. Un bidón tiene capacidad para contener 110 kg de agua o 72,6 kg de gasolina. Hallar:
I. La capacidad del bidón. (g=10 m/s^2)

a) 100 lt b) 110 lt c) 120 lt d) 130 lt e) 140 lt

II. El peso específico de la gasolina.

a) 6500 N/m^3 b) 6600 N/m^3 c) 6700 N/m^3 d) 6800 N/m^3 e) 6900N/m^3

05. Un volumen de 0,7752 m^3 de aire pesa 10 N. Hallar la densidad del aire en. (g=10 m/s^2)
a) 1,21 kg/m^3 b) 1,23 kg/m^3 c) 1,25 kg/m^3 d) 1,27 kg/m^3 e) 1,29kg/m^3

06. Hallar la densidad de una bola de acero de diámetro D=0,750 cm y masa m=1,765 g. El volumen de una esfera de diámetro D, es $V=\pi D^3/6$.

a) 7,91 g/cm^3 b) 7,93 g/cm^3 c) 7,95 g/cm^3 d) 7,97 g/cm^3 e) 7,99g/cm^3

07. Un pan de oro de densidad ρ=19,3 g/cm^3 tiene una masa de m=1,93 mg; luego de laminarse se obtiene una película transparente que cubre una superficie de área A=14,5 cm^2.
I. Hallar el volumen de 1,93 mg de oro.

a) 0,1 mm^3 b) 0,2 mm^3 c) 0,3 mm^3 d) 0,4 mm^3 e) 0,5 mm^3

II. ¿Qué espesor en Angstrom ($\mathring{A}$), tiene la película? ($1\ \mathring{A} = 10^{-8}$ cm)

a) 681,6 $\mathring{A}$ b) 683,6 $\mathring{A}$ c) 685,6 $\mathring{A}$ d) 687,6 $\mathring{A}$ e) 689,6 $\mathring{A}$

08. La masa de oro contenida en una pepita de oro y cuarzo es de 138 g. Si las densidades relativas del oro, cuarzo y pepita son 19,3, 2,6 y 6,4, respectivamente. Hallar la masa de la pepita.

a) 201,02 g b) 203,02 g c) 205,02 g d) 207,02 g e) 209,02 g

09. En la Fig.01, halle la razón (P_A/P_B) entre las presiones en los puntos A y B, siendo A y B puntos situados en las mitades superior e inferior del tanque lleno de alcohol a granel. El tanque tiene sección recta uniforme.

a) 1/2 b) 1/3 c) 1/4 d) 1/5 e) 1/6

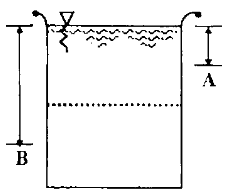


Fig.01

Fig.02

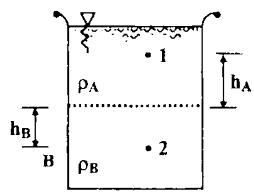


Fig.03

10. Se tiene un depósito cúbico de 3 m de lado llena de agua de peso específico $\gamma = 10000$ N/m^3. Hallar:

I. La magnitud de la fuerza hidrostática sobre el fondo del depósito.

a) 250 kN b) 260 kN c) 270 kN d) 280 kN e) 290 kN

II. La magnitud de la fuerza hidrostática sobre una de las caras laterales.

a) 115 kN b) 125 kN c) 135 kN d) 145 kN e) 155 kN

11. En la Fig. 02, Qiqo observa la "eterna negrura" del océano a 1 000 m bajo la superficie a través de un ocular de cuarzo fundido de forma circular de 15 cm de diámetro. Hallar la fuerza que soporta el ocular a dicha profundidad. El peso específico relativo del agua de mar es $\gamma_r = 1{,}03$. ($\gamma_{H2O} = 10^4$ N/m^3)

a) 180 kN b) 182 kN c) 184 kN d) 186 kN e) 188 kN

12. Los diámetros de los pistones de una prensa hidráulica son 20 cm y 80 cm. Si se aplica una fuerza de 10 N al pistón menor,¿Qué fuerza se ejerce en el otro pistón?

a) 150 N b) 155 N c) 160 N d) 165 N e) 170 N

13. En la Fig.03, en el recipiente hay 2 líquidos no miscibles de densidades ρ_A=800 kg/m^3, ρ_B= 1 200 kg/m^3. Hallar la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2. (h_A=10 cm, h_B=5 cm, g=10 m/s^2)

a) 1100 N/m^2 b) 1200 N/m^2 c) 1300 N/m^2 d) 1400 N/m^2 e)1500 N/m^2

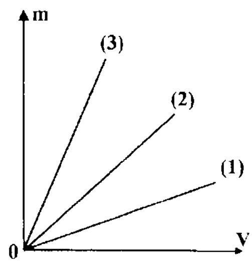


Fig.05

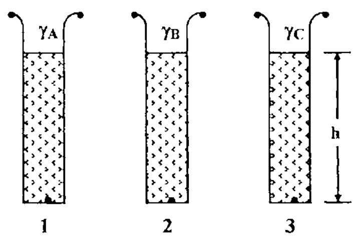


Fig.06

14. ¿Cuál es la mínima área que deberá tener un bloque rectangular de hielo de 50 cm de espesor para que pueda mantenerse a flote en agua con una persona de 500 N de peso, sin que ésta se moje los pies. (ρ_{hielo}= 900 kg/m^3 , ρ_{H20} = 1000 kg/m^3, g=10 m/s^2)

a) 0,50 m^2 b) 0,75 m^2 c) 1,00 m^2 d) 1,25 m^2 e) 1,50 m^2

15. Una esfera de peso W–30 kN se encuentra flotando en agua de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3 sumergido hasta la mitad. Hallar el volumen de la esfera.

a) 1 m^3 b) 2 m^3 c) 4 m^3 d) 6 m^3 e) 8m^3

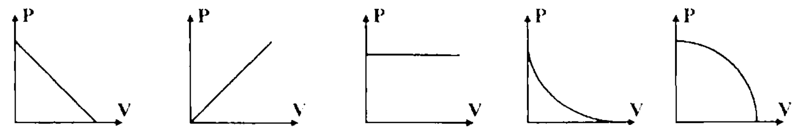
16. En la Fig.04, respecto de la gráfica masa (m) vs volumen (V); indique las proposiciones verdaderas (V) o falsas (F): I) Las pendientes de las rectas son las densidades (ρ). II) $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, y III) $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$

a) VFV b) VVF c) VFF d) FVV e) FFV

18. En la Fig.05, si $\gamma_A > \gamma_B > \gamma_C$, entonces la expresión correcta de las presiones en los puntos 1, 2, 3 es:

a) $P_A = P_B < P_C$ b) $P_A < P_B = P_C$ c) $P_A > P_B > P_C$ d) $P_A < P_B < P_C$ e) $P_A = P_B = P_C$

17. Si la fuerza (F) que actúa sobre un disco se mantiene constante y su área (A) se aumenta, la gráfica correspondiente a la presión (P) vs área (A) es:



a) b) c) d) e)

19. En la Fig.06, complete la frase siguiente: "El agua del vaso------------------pues, la presión que ejerce sobre el papel ----------------------------------- que el ejercido por la atmósfera.

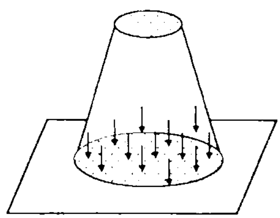


Fig.06

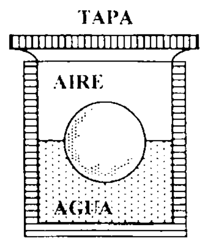


Fig.07

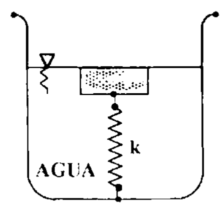
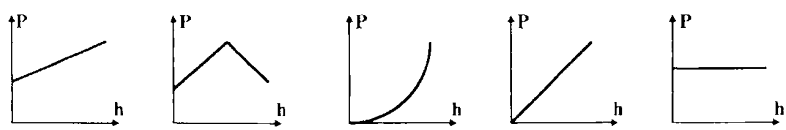


Fig.08

20. La presión (P) debida a un líquido homogéneo depende de su profundidad (h), luego la representación correcta de P vs h es:



a) b) c) d) e)

21. En la Fig.07, si se extrae el aire del recipiente, el volumen sumergido de la esfera, que flotaba en equilibrio sobre el agua.

a) No se altera　b) Aumenta　c) Disminuye
d) Sobresale totalmente　e) Sumerge totalmente

22. En la Fig.08, se muestra un bloque de volumen 2.10^{-3} m^3 y densidad 300 kg/m^3 sumergido totalmente en agua de densidad 1000 kg/m^3. Hallar la deformación en el resorte de constante elástica k=100 N/m. ($g=10$ m/s^2)

a) 10 cm　b) 11 cm　c) 13 cm　d) 14 cm　e) 15 cm

23. En la Fig.09, se muestra una esfera de volumen $V=4.10^{-3}$ m^3 y densidad $\rho=400$ kg/m^3, sumergido totalmente en agua de densidad $\rho_0 = 1000$ kg/m^3. Hallar la tensión en la cuerda AB. (g=10 m/s^2)

a) 10 N b) 12 N c) 14 N d) 16 N e) 18 N

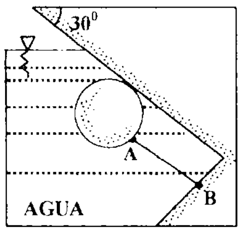


Fig.09

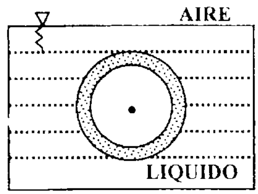


Fig.10

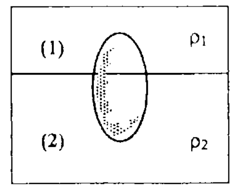


Fig.11

24. En la Fig.10, hallar la densidad del cascarón esférico de radios exterior R=3 m e interior r=2 m respectivamente, que se encuentra flotando en el interior de un líquido de densidad $\rho = 1\,900$ kg/m^3. (g=10 m/s^2)

a) 2500 $\frac{kg}{m^3}$ b) 2550 $\frac{kg}{m^3}$ c) 2600 $\frac{kg}{m^3}$ d) 2650 $\frac{kg}{m^3}$ e) 2700 $\frac{kg}{m^3}$

25. Un recipiente de área de base A=2 m^2 inicialmente contiene agua hasta una altura H. Si en la superficie se coloca un bloque de madera de 800 kg de masa, se observa que el nivel del agua aumenta en un 50% de H. Hallar el valor de H.

a) 0,1 m b) 0,2 m c) 0,4 m d) 0,6 m e) 0,8 m

26. En la Fig.11, se muestra dos líquidos (1) y (2) no miscibles contenido en el recipiente. Hallar la densidad del cuerpo, sabiendo que el 10% de su volumen está sumergido en el líquido (1). Las densidades de los líquidos son: $\rho_1 = 1\,000$ kg/m^3, $\rho_2 = 3\,000$ kg/m^3.

a) 2600 $\frac{kg}{m^3}$ b) 2650 $\frac{kg}{m^3}$ c) 2700 $\frac{kg}{m^3}$ d) 2750 $\frac{kg}{m^3}$ e) 2800 $\frac{kg}{m^3}$

27. En la Fig.12, cuando el ascensor baja a velocidad constante el empuje que actúa sobre el cuerpo parcialmente sumergido en un líquido de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3 es E=20 N. Hallar la magnitud del empuje, cuando el sistema baja con una aceleración de a=5 m/s^2. (g=10 m/s^2)

a) 10 N b) 15 N c) 20 N d) 25 N e) 30 N

28. En la Fig.13, las esferas de pesos W_1=1 N ; W_2=3 N poseen iguales volúmenes. Hallar la tensión de la cuerda que une a ambas esferas. (g=10 m/s^2)

a) 1 N b) 2 N c) 3 N d) 4 N e) 5 N

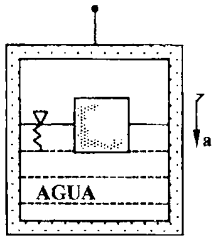


Fig.12

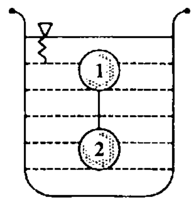


Fig.13

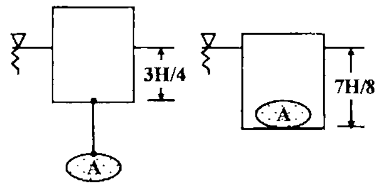


Fig.14

29. Un cuerpo de densidad $\rho = 400$ kg/m^3 se suelta desde una altura de h=3 m sobre la superficie libre del agua de densidad $\rho_0 = 1\,000$ kg/m^3, ¿Hasta qué profundidad como máximo se sumerge dicho cuerpo? (g=10 m/s^2)

a) 0,5 m b) 1,0 m c) 1,5 m d) 2,0 m e) 2,5 m

30. Un cuerpo en el aire pesa 30 N y en el agua 25 N y en un líquido desconocido pesa 20 N. ¿Cuánto vale la densidad del líquido desconocido?

a) 2000 $\frac{kg}{m^3}$ b) 2500 $\frac{kg}{m^3}$ c) 3000 $\frac{kg}{m^3}$ d) 3500 $\frac{kg}{m^3}$ e) 4000 $\frac{kg}{m^3}$

31. En la Fig.14, se tiene una caja cúbica de arista "H" y un cuerpo A que flotan como se muestra. ¿En qué razón están los volúmenes de la caja y del cuerpo? (g=10 m/s^2)

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

32. En la Fig.15, hallar la magnitud de la fuerza "$\vec{F}$" para que el cuerpo "B" de peso 600 N, suba a rapidez constante.

a) 60 N b) 65 N c) 70 N d) 75 N e) 80 N

33. Una boya cilíndrica de masa 348 kg y área de la base 0,5 m^2 flota en posición vertical en agua de mar de densidad $\rho = 1{,}114.10^3$ kg/m^3. (g=10 m/s^2)
I. ¿Cuánto se hundirá la boya si Qiqo de peso 557 N se sube a ella?

a) 0,1 m b) 0,2 m c) 0,3 m d) 0,4 m e) 0,5 m

II. ¿Cuál es el período del M.A.S, cuando Qiqo se lanza al mar?

a) $\pi/2$ s b) $\pi/3$ s c) $\pi/4$ s d) $\pi/5$ s e) $3\pi/2$ s

34. En la Fig.16, hallar la magnitud de la fuerza "F" aplicada al émbolo menor, si el auto móvil de peso 30 kN, está en reposo. Los émbolos menor y mayor tienen pesos despreciables y áreas 0,1 m^2 y 1 m^2, respectivamente. ($\rho = 1\,000$ kg/m^3)

a) 1 kN b) 2 kN c) 3 kN d) 4 kN e) 5 kN

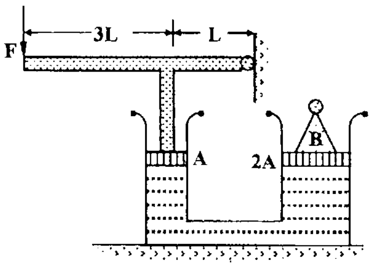


Fig.15

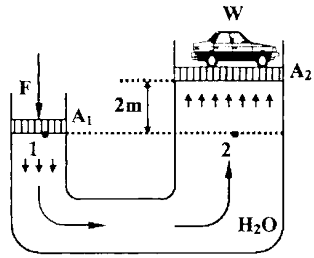


Fig.16

35. En la Fig.17, en el sistema mostrado hallar la presión absoluta del gas, sabiendo que el émbolo de peso despreciable tiene un área A= 0,04 m^2. Considere la presión atmosférica igual a 100 kPa, F=800 N, $\rho_{H2O} = 1\,000$ kg/m^3 y g=10 m/s^2.

a) 150 kPa b) 155 kPa c) 160 kPa d) 165 kPa e) 170 kPa

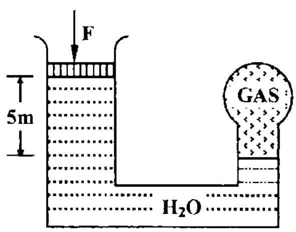


Fig.17

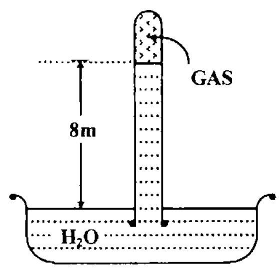


Fig.18

36. En la Fig.18, en el sistema mostrado hallar la presión absoluta del gas, sabiendo que el líquido en el recipiente es agua de densidad $\rho_{H2O} = 1\,000$ kg/m^3. Considérese la presión atmosférica P_0=100 kPa. (g=10 m/s^2)

a) 10 kPa b) 15 kPa c) 20 kPa d) 25 kPa e) 30 kPa

37. En la Fig.19, hallar la presión hidrostática en el punto "A". La densidad de los líquidos no miscibles son: $\rho_1 = 800$ kg/m^3 y $\rho_2 = 1000$ kg/m^3. (g=10 m/s^2)

a) 10 kPa b) 12 kPa c) 14 kPa d) 16 kPa e) 18 kPa

38. En la Fig.20, los líquidos no miscibles están en equilibrio en el tubo en forma de "U" que se muestra. Hallar la razón entre las presiones hidrostáticas en los puntos A y B.

a) 3/4 b) 4/3 c) 3/2 d) 2/3 e) 4/5

39. En la Fig.21, en el tubo en forma de "U" de ramas verticales y de igual sección se vierten tres líquidos (1); (2) y (3) obteniéndose el equilibrio en la forma mostrada. Hallar la altura "h". Las densidades son: $\rho_1 = 3\,000$ kg/m^3, $\rho_2 = 5\,000$ kg/m^3, $\rho_3 = 4\,000$ kg/m^3.

a) 0,1 m b) 0,2 m c) 0,4 m d) 0,6 m e) 0,8 m

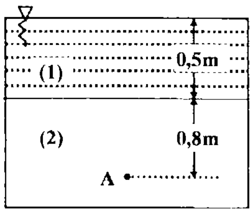


Fig.19

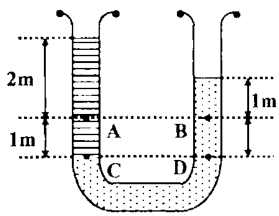


Fig.20

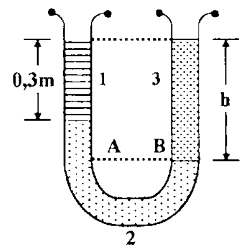


Fig.21

40. En la Fig.22, el tubo en forma de "U" cilíndrico de 4 cm^2 y 20 cm^2 de sección transversales, contiene mercurio de densidad ρ_{Hg}= 13,6 g/cm^3, a un mismo nivel. Por el tubo de mayor sección se vierte lentamente 816 gramos de H_2O. Hallar la altura que sube el nivel del mercurio en el otro tubo. ($\rho_{H20} = 1\,000$ kg/m^3)

a) 1,0 cm b) 1,5 cm c) 2,0 cm d) 2,5 cm e) 3,0 cm

41. En la Fig.23, a la profundidad de 60 m se abandona una esfera de corcho de densidad 250 kg/m^3, ¿Cuánto tiempo demora en salir a la superficie libre de agua de densidad 1000 kg/m^3? Desprecie toda forma de fricción. (g=10 m/s^2)

a) 0,5 s b) 1,0 s c) 1,5 s d) 2,0 s e) 2,5 s

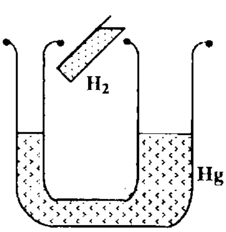


Fig.22

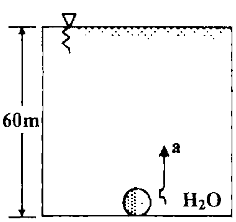


Fig.23

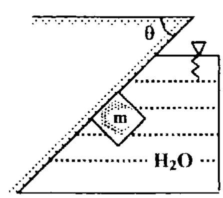


Fig.24

42. En la Fig.24, el bloque de masa "m" y densidad 500 kg/m^3 se abandona sobre el plano inclinado. Despreciando la fricción hallar la aceleración del bloque, $\theta = 30^O$ (ρ_{H20} = 1000 kg/m^3 , g=10 m/s^2)

a) 1 m/s^2 b) 2 m/s^2 c) 3 m/s^2 d) 4 m/s^2 e) 5 m/s^2

43. Un barril de madera de 4.10^{-2} m^3 de volumen flota en agua de densidad 1000 kg/m^3, que- dando tres cuartas partes sumergidas. Hallar la masa del barril.

a) 10 kg b) 15 kg c) 20 kg d) 25 kg e) 30 kg

44. En la Fig.25, la esfera hueca de radios interior r= 0,09 m y exterior R= 0,1 m flota con la mitad de su volumen fuera del agua de densidad $\rho_o = 1000$ kg/m^3. Hallar la densidad de la esfera hueca.

a) 1825 $\frac{kg}{m^3}$ b) 1835 $\frac{kg}{m^3}$ c) 1845 $\frac{kg}{m^3}$ d) 1855 $\frac{kg}{m^3}$ e) 1865 $\frac{kg}{m^3}$

45. En la Fig.26, la barra homogénea de longitud $L = (2+\sqrt{2})$m y densidad 500 kg/m^3, flota en equilibrio sumergido parcialmente en el agua de densidad 1000 kg/m^3, Hallar "x".

a) 1,0 m b) 1,5 m c) 2,0 m d) 2,5 m e) 3,0 m

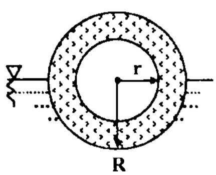


Fig.25

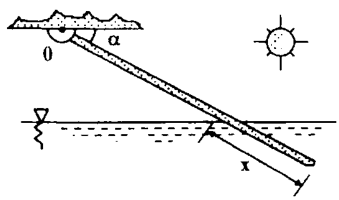


Fig.26

Fig.27

46. Un cuerpo que tiene un volumen de 17 dm^3 requiere una fuerza de 27,9 N hacia abajo para mantenerlo sumergido totalmente en agua de densidad 1000 kg/m^3. Si para mantenerlo sumergido en otro líquido se necesita que la fuerza sea de 16 N, hallar la densidad relativa de este último líquido. ($g=10$ m/s^2)

a) 0,91 b) 0,93 c) 0,95 d) 0,97 e) 0,99

47. En la Fig.27, el iceberg de densidad 912 kg/m^3 flota en el agua de densidad $\rho = 1\,025$ kg/m^3, sumergido un volumen de 600 m^3 fuera del agua Hallar el volumen total del iceberg.

a) 5412 m^3 b) 5422 m^3 c) 5432 m^3 d) 5442 m^3 e) 5452 m^3

48. En la Fig.28, el cuerpo de densidad 2 g/cm^3 se abandona en el punto (A) y a los 2 s está en el punto (C); el recipiente contiene agua de densidad 1000 kg/m^3. Hallar a qué altura sobre el agua se soltó el cuerpo ($g=10$ m/s^2)

a) 1 m b) 3 m c) 5 m d) 7 m e) 9 m

49. En la Fig.29, si al tubo en forma de U de sección transversal A que contiene una longitud de 20 cm de fluido se le desplaza de su posición de equilibrio, una pequeña longitud (x), ¿Cuál es el período del movimiento del fluido? (g=10 m/s^2)

a) $\pi/2$ s b) $\pi/3$ s c) $\pi/4$ s d) $\pi/5$ s e) $3\pi/2$ s

50. En la Fig.30, se tienen tres líquidos no miscibles mercurio, benzol y agua, de densidades $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m^3, $\rho_{BEN} = 880$ kg/m^3, $\rho_{H20} = 1000$ kg/m^3,¿Cuál es la presión en el punto A? (g=10 m/s^2)

a) $7100\ \dfrac{N}{m^2}$ b) $7200\ \dfrac{N}{m^2}$ c) $7300\ \dfrac{N}{m^2}$ d) $7400\ \dfrac{N}{m^2}$ e) $7500\ \dfrac{N}{m^2}$

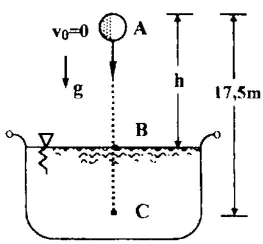


Fig.28

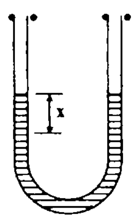


Fig.29

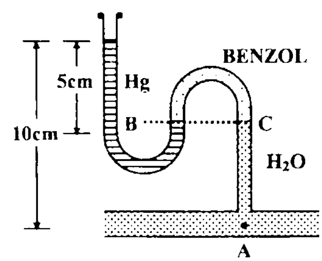


Fig.30

51. En la Fig.31, el cubo de arista "a" se encuentra en equilibrio, parcialmente sumergido en agua de densidad 1 g/cm^3. Hallar la densidad del cubo, para $\alpha = 37^0$ y g=10 m/s^2.

a) $0{,}31\ \dfrac{g}{cm^3}$ b) $0{,}33\ \dfrac{g}{cm^3}$ c) $0{,}35\ \dfrac{g}{cm^3}$ d) $0{,}37\ \dfrac{g}{cm^3}$ e) $0{,}39\ \dfrac{g}{cm^3}$

52. En la Fig.32, el tapón cónico tapa simultáneamente dos orificios de radios r = 5 cm y R=10 cm del recipiente rectangular, lleno de un líquido a presión P = 4.10^4 N/m^2. Hallar la fuerza que ejerce el líquido sobre el tapón.

a) 100πN b) 200πN c) 300πN d) 400πN e) 500πN

53. En la Fig.33, la esfera tapa un orificio de radio R = 10 cm en cierta pared plana que divide dos líquidos con presiones 3P y P (P=5000 N/m^2). ¿Con qué fuerza la esfera presiona el orificio?

a) 50πN b) 100πN c) 150πN d) 200πN e) 250πN

54. Una botella esférica de radio R = 8 cm con paredes de grosor Δ=2 mm estalla a causa de la presión interna de $P = 4.10^5$ N/m^2. Hallar el límite de resistencia del material de las paredes. ($M=10^6$)

a) 1 MPa b) 2 MPa c) 4 MPa d) 6 MPa e) 8 MPa

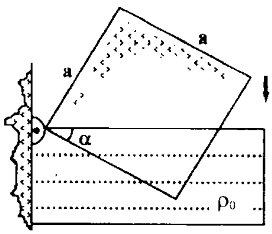


Fig.31

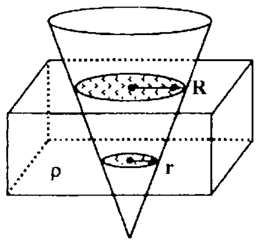


Fig.32

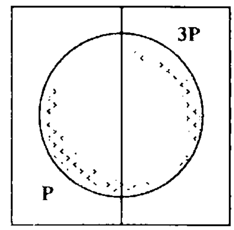


Fig.33

55. En la Fig.34, el prisma rectangular de lados a=b=c=10 cm, se halla en un líquido a la presión de $P=2.10^5$ N/m^2. Halle la suma de las fuerzas sobre las caras laterales del pris ma

a) $1000\sqrt{2}$ N b) $1500\sqrt{2}$ N c) $2000\sqrt{2}$ N d) $2500\sqrt{2}$ N e) $3000\sqrt{2}$ N

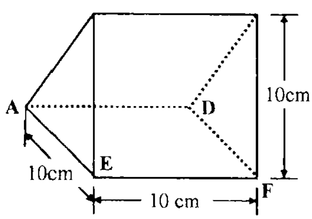


Fig.34

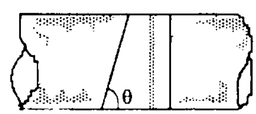


Fig.35

56. En la Fig.35, ambos lados del émbolo de masa m= 0,5 kg y secciones diferentes, que se encuentra en reposo, se somete a una presión de $P=2.10^5$ N/m^2, mediante un líquido. Ha llar la aceleración con la que se mueve el émbolo. ($\theta = 53^0$, $g = 10$ m/s^2)

a) 0 m/s^2 b) 1 m/s^2 c) 2 m/s^2 d) 3 m/s^2 e) 4 m/s^2

57. La fuerza resultante que ejerce un líquido comprimido sobre las tres caras laterales de un tetraedro regular de arista a=10 cm, es de $F=\sqrt{3}.10^4$ N. Hallar la presión del líquido.

a) 1 MPa b) 2 MPa c) 3 MPa d) 4 MPa e) 5 MPa

58. Una prensa hidráulica, llena de agua, tiene émbolos de áreas $A_1=100$ cm^2 y $A_2=10$ cm^2. Sobre el émbolo grande se ubica una persona de masa m=80 kg. ¿A qué altura se eleva rá el émbolo pequeño? ($\rho_{H2O} = 1\,000$ kg/m^3)

a) 1,27 m b) 3,27 m c) 5,27 m d) 7,27 m e) 9,27 m

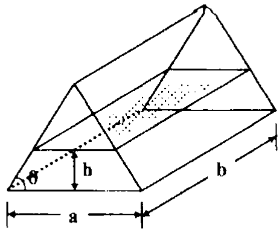


Fig.36

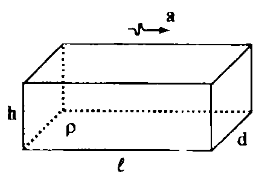
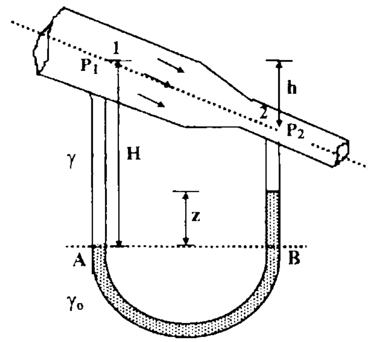


Fig.37

Fig.38



59. En la Fig.36, la base del recipiente en forma de prisma es un rectángulo de dimensiones a=10 cm, b=15 cm. El recipiente se llena con agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 hasta una altura de h=10 cm. Hallar la fuerza que ejercen las paredes laterales sobre la base del prisma, para $\theta = 37^0$ y $g = 10$ m/s^2.

a) 10 N b) 15 N c) 20 N d) 25 N e) 30 N

60. En la Fig.37, la cisterna cerrada en forma de paralelepípedo de dimensiones $\ell = 20$ cm, h=d=10 cm está completamente llena de agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3, y se mueve con aceleración de a=3 m/s^2. Hallar la fuerza que ejerce el agua sobre la tapa de la cis terna.

a) 2 N b) 4 N c) 6 N d) 8 N e) 10 N

61. Un recipiente abierto en forma de paralelepípedo que contiene agua de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3, desciende verticalmente con aceleración de a=2 m/s^2. Hallar la presión a una profundidad h=25 cm, de la superficie libre del agua. ($g = 10$ m/s^2)

a) 1 kPa b) 2 kPa c) 3 kPa d) 4 kPa e) 5 kPa

62. En la Fig.38, por la tubería mostrada circula agua de peso específico $\gamma = 10^4$ N/m^3. El mercurio del pirómetro tiene peso específico $\gamma_0 = 13{,}6.10^4$ N/m^3. Hallar la diferencia de presiones entre los puntos (1) y (2), para z=5 cm y h=3 cm.

a) 1 kPa b) 2 kPa c) 4 kPa d) 6 kPa e) 8 kPa

63. Al introducirse sucesivamente un pirómetro de área de sección A=0,2 cm^2, en dos líquidos diferentes de pesos específicos relativos 1,2 y 0,9 respectivamente, la diferencia de niveles es $\Delta h = 20$ cm. Hallar el peso del pirómetro. ($\gamma_{H2O} = 10^4$ N/m^3 , g=10 m/s^2)

a) 140 mN b) 142 mN c) 144 mN d) 146 mN e) 148 mN

64. En la Fig.39, el recipiente contiene tres sustancias, glicerina (G), aceite (A) y otra desconocida (X) de densidades $\rho_G = 1250$ kg/m^3, $\rho_A = 850$ kg/m^3. El manómetro (M) indica una presión de $3{,}5.10^4$ N/m^2. Hallar la densidad de la sustancia desconocida. (g=10 m/s^2)

a) 100 kg/m^3 b) 150 k/m^3 c) 200 kg/m^3 d) 250 kg/m^3 e) 300 kg/m^3

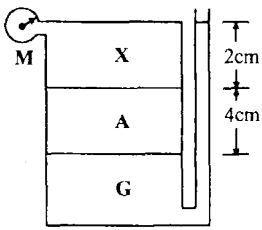


Fig.39

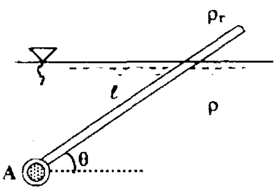


Fig.40

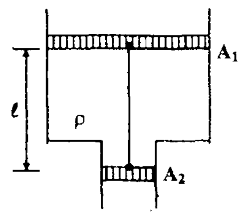


Fig.41

65. En la Fig.40, la barra homogénea de longitud $\ell = 2$ m, masa m=10 kg y densidad relativa $\rho_r = 0{,}5$ unida a la rótula en A está en equilibrio, y sumergida parcialmente en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 una longitud de b=1,5 m. Hallar la magnitud de la fuerza aplicada en su extremo derecho. (g=10 m/s^2)

a) 4,25 N b) 5,25 N c) 6,25 N d) 7,25 N e) 8,25 N

66. Un depósito cilíndrico abierto que contiene agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 y altura h=1 m, asciende verticalmente con aceleración de a=5 m/s^2. Hallar la presión en el fondo del depósito. ($P_0=10^5$ N/m^2 y g=10 m/s^2)

a) $1{,}05P_0$ b) $1{,}15P_0$ c) $1{,}25P_0$ d) $1{,}35P_0$ e) $1{,}45P_0$

67. Un depósito abierto de altura h=1,6 m, base cuadrada de lado $\ell = 2$ m que contiene agua una altura de b=1,25 m, se mueve horizontalmente con aceleración de a=5 m/s^2. Hallar la cantidad de agua que se derrama. (g=10 m/s^2)

a) 0,1 m^3 b) 0,2 m^3 c) 0,4 m^3 d) 0,6 m^3 e) 0,8 m^3

68. En la Fig.41, los émbolos del recipiente de áreas A_1=40 cm^2, A_2=20 cm^2 y pesos despreciables están unidos mediante un alambre delgado de longitud $\ell = 10$ cm, y contienen agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3. Hallar la tensión en el alambre. (g=10 m/s^2)

a) 1 N b) 2 kN c) 3 N d) 4 N e) 5 N

69. En la Fig.40, la barra homogénea de longitud $\ell = 2$ m, masa m=10 kg y densidad relativa $\rho_r = 0{,}5$ unida a la rótula en A está en equilibrio, y sumergida parcialmente en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 una longitud de b=1,5 m. Hallar la magnitud de la reacción en la rótula A. (g=10 m/s^2)

a) 41,75 N b) 43,75 N c) 45,75 N d) 47,75 N e) 49,75 N

70. En la Fig.42, el recipiente cónico cerrado de altura H=16 cm, contiene agua una altura de h=8 cm. Hallar la fuerza que ejerce las paredes laterales sobre la base del recipiente. ($\rho_{H20} = 1\,000$ kg/m^3, g=10 m/s^2, $\theta = 53^0$)

a) $1{,}32\pi$N b) $2{,}32\pi$N c) $3{,}32\pi$N d) $4{,}32\pi$N e) $5{,}32\pi$N

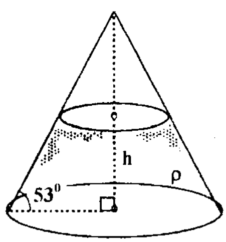


Fig.42

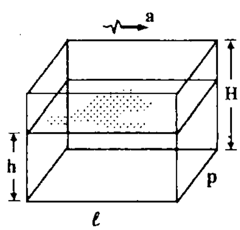


Fig.43

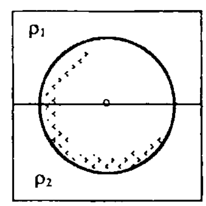


Fig.44

71. Un cuerpo de volumen V=1 lt se pesa en el aire de densidad $\rho_0 = 1{,}29$ g/lt, utilizando un peso de cobre de masa m_1=800 g y densidad $\rho_1 = 8{,}8$ g/cm^3. Hallar el error en porcentaje cometido al pesar el cuerpo.

a) 0,126 % b) 0,146 % c) 0,166 % d) 0,186 % e) 0,206 %

72. En la Fig.43, el depósito rectangular abierto de dimensiones H=20 cm, $\ell = 20$ cm contiene agua una altura de h=10 cm. ¿Para qué aceleración (a), el agua empieza a derramarse? (g=10 m/s^2)

a) 8 m/s^2 b) 10 m/s^2 c) 6 m/s^2 d) 4 m/s^2 e) 12 m/s^2

73. Un témpano de hielo rectangular de área de la base A=1 m^2, altura H=0,4 m y densidad $\rho = 900$ kg/m^3, flota sumergido parcialmente en agua de densidad $\rho_0 = 1\,000$ kg/m^3. ¿Qué trabajo se debe hacer para hundir por completo al témpano en el agua? (g=10 m/s^2)

a) 2 J b) 4 J c) 6 J d) 8 J e) 10 J

74. En la Fig.44, las mitades de la esfera compacta flotan en dos líquidos de densidades relativas 0,8 y 1,2. Hallar el peso específico de la esfera. $\rho_{H20} = 1\,000\ kg/m^3$, $g=10\ m/s^3$.

a) $10\ k\frac{N}{m^3}$ b) $20\ k\frac{N}{m^3}$ c) $30\ k\frac{N}{m^3}$ d) $40\ k\frac{N}{m^3}$ e) $50\ k\frac{N}{m^3}$

75. Una boya cilíndrica de masa m=100 kg y base de diámetro D=20 cm flota verticalmente en agua de peso específico $\gamma = 10^4\ N/m^3$. De su posición de equilibrio, se desplaza ligeramente hacia abajo y se abandona. Hallar el período de las oscilaciones armónicas simples. ($g=10\ m/s^2$)

a) 2,0 s b) 2,5 s c) 3,0 s d) 3,5 s e) 4,0 s

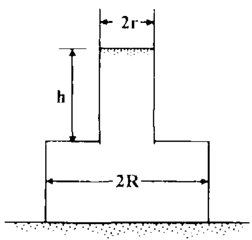


Fig.45

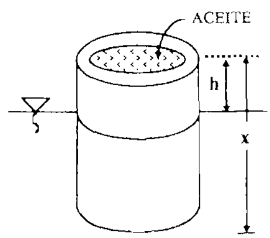


Fig.46

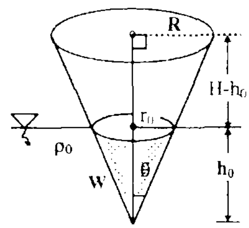


Fig.47

76. En la Fig.45, los bordes del recipiente sin fondo están bien ajustados a la superficie de la mesa. El peso del agua contenida en el recipiente es W=113,1 N, los radios de las bases superior e inferior r=4 cm, R=8 cm, la densidad $\rho = 1\,000\ kg/m^3$, $g=10\ m/s^2$. Hallar la altura (h).

a) 0,25 m b) 0,50 m c) 0,75 m d) 1,00 m e) 1,25 m

77. Una pelota de jebe de masa m=1 kg y radio R=9 cm se sumerge en el agua a una profundidad de h=1 m y se suelta. Hasta que altura llega la pelota por encima de la superficie libre del agua ($\rho = 1\,000\ kg/m^3$, $g=10\ m/s^2$)

a) 0,5 m b) 1,0 m c) 1,5 m d) 2,0 m e) 2,5 m

78. En la Fig.46, el tubo cilíndrico que contiene aceite de densidad $\rho_0 = 900\ kg/m^3$ flota en el agua de densidad $\rho = 1\,000\ kg/m^3$ en posición vertical, la altura que sobresale es h=5 cm. Hallar la altura (x) del tubo.

a) 30 cm b) 35 cm c) 40 cm d) 45 cm e) 50 cm

la altura de H=9 cm sobre la superficie.¿Qué trabajo se debe hacer para hundir la pelota hasta el plano diametral? ($\rho_0 = 1\,000$ kg/m^3 , g=10 m/s^2)

a) 0,36 J b) 0,46 J c) 0,56 J d) 0,66 J e) 0,76 J

80. Un cono recto compacto de altura H=40 cm y densidad (ρ) está sumergido en agua de densidad (ρ_0) una altura de h=20 cm, con su base paralela y por encíma de la superfi cie del agua. Hallar la razón de las densidades ρ_0 / ρ.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

81. En la Fig.47 el cono recto compacto de altura H=30 cm, ángulo del vértice $\theta = 60^0$ y densidad $\rho = 125$ kg/m^3 flota en agua de densidad $\rho_0 = 1\,000$ kg/m^3. Hallar el trabajo que se debe hacer para hundir completamente al cono. (g =10 m/s^2)

a) 1,86 J b) 2,86 J c) 3,86 J d) 4,86 J e) 5, 86 J

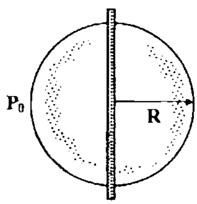


Fig.48

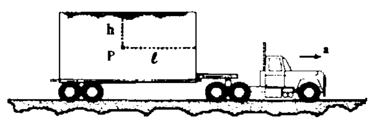


Fig.49

82. En la Fig.48, hallar la fuerza necesaria para separar los hemisferios de radio R=5 cm, uni-dos herméticamente, estando el exterior de los hemisferios a la presión de $P_0 = 10^5$ N/m^2 y al interior se ha hecho un vacío perfecto.

a) 100πN b) 150πN c) 200πN d) 250πN e) 300πN

83. Un depósito cilíndrico de altura h=3 m y base de diámetro D=2 m, se llena con agua de densidad $\rho_{H20} = 1\,000$ kg/m^3 hasta una altura de 2 m; luego al hacerse girar alrededor de su eje de simetría, el punto más bajo del agua alcanza una altura de 1,5 m. Hallar:
I. La fuerza total en el fondo del depósito cilíndrico. (g = 10 m/s^2)

a) 10πkN b) 20πkN c) 30πkN d) 40πkN e) 50πkN

II. La velocidad angular (ω) máxima para la cual el agua no se derrama.

a) 1,5 rad/s b) 2,5 rad/s c) 3,5 rad/s d) 4,5 rad/s e) 5,5 rad/s

84. En la Fig.49, el camión que lleva un depósito completamente llena de agua de densidad

$\rho = 1\,000$ kg/m^3 y herméticamente cerrado, se mueve con aceleración de a=5 m/s^2. Hallar la presión en el punto P, si h=0,5 m y $\ell = 1{,}0$ m. g=10 m/s^2)

a) 10 kPa b) 20 kPa c) 30 kPa d) 40 kPa e) 50 kPa

85. Una pelota compacta homogénea de radio R=10 cm y densidad $\rho = 500$kg/m^3, flota parcialmente sumergida en agua de densidad $\rho_o = 1\,000$ kg/m^3. Hallar la altura sumergida de la pelota. (g=10 m/s^2)

a) 4 cm b) 6 cm c) 8 cm d) 10 cm e) 12 cm

86. En la Fig.50, la barra homogénea de densidad $\rho = 500$ kg/m^3 y longitud $\ell = 5$ m está sumergido parcialmente en agua de densidad $\rho_o = 1\,000$ kg/m^3. Hallar la longitud sumergida (x) de la barra, si a=1 m y g= 0 m/s^2.

a) 0,5 m b) 0,8 m c) 1,1 m d) 1,4 m e) 1,7 m

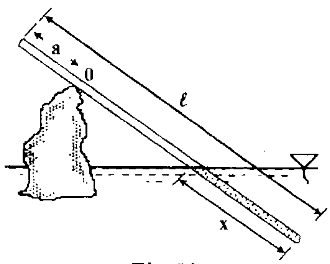


Fig.50

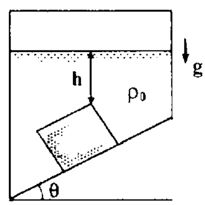


Fig.51

87. El trabajo para hundir completamente un cubo homogéneo de arista (a), que flota sumergido parcialmente en agua es (W). ¿Qué trabajo se debe hacer para hundir completa-mente un cubo de arista (2a), del mismo material?

a) 10W b) 12W c) 14W d) 16W e) 18W

88. ¿En qué razón están los trabajos (W_1/W_2) realizados por separado, al sumergir completamente dos cubos de igual tamaño y densidades $\rho_1 = 400$kg/m$_3$, $\rho_2 = 600$kg/m^3, respectivamente, que flotan sumergidos parcialmente en agua de densidad $\rho_o = 1000$ kg/m^3?

a) 2,00 b) 2,25 c) 2,50 d) 2,75 e) 3,00

89. La cara inferior de un tetraedro regular de arista a=50 cm, sumergido totalmente en un liquido de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3, se encuentra a h=1m de la superficie libre del líquido. Hallar la fuerza resultante sobre las caras laterales del tetraedro, si la presión atmosférica es de P_0=10^5 N/m^2 y g=10 m/s^2.

a) 10,6 kN b) 10,9 kN c) 11,2 kN d) 11,5 kN e) 11,8 kN

90. La base de un hemisferio cerrado de radio R=30 cm, descansa en el fondo de un depósito llena de agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3, a una profundidad de h=40 cm. Hallar la fuerza sobre la superficie lateral del hemisferio debida a la presión del agua, sabiendo que entre las bases del hemisferio y el depósito existe aire a la presión atmosférica de $P_0 = 0^5$ N/m^2, g=10 m/s^2.

a) 100πN b) 120πN c) 140πN d) 160πN e) 180πN

91. Un cuerpo de masa m=250 g y densidad $\rho = 2{,}5$ g/cm^3, se pesa sumergido en cierto líquido, para lo cual, se utiliza una balanza de brazos y una "pesa" de masa M=180 g. Hallar la densidad del líquido desconocido. (g=10 m/s^2)

a) $0{,}1\ \frac{g}{cm^3}$ b) $0{,}3\ \frac{g}{cm^3}$ c) $0{,}5\ \frac{g}{cm^3}$ d) $0{,}7\ \frac{g}{cm^3}$ e) $0{,}9\ \frac{g}{cm^3}$

92. Un cuerpo de masa m=180 g se pesa sumergida en agua de densidad $\rho_0 = 1$ g/cm^3, utilizando una "pesa" de masa M_0=150 g; luego el mismo cuerpo, se pesa sumergida en otro líquido, utilizando una "pesa" de masa M_1=144 g. Hallar la densidad del líquido desconocido (g=10 m/s^2)

a) $1{,}2\ \frac{g}{cm^3}$ b) $1{,}4\ \frac{g}{cm^3}$ c) $1{,}6\ \frac{g}{cm^3}$ d) $1{,}8\ \frac{g}{cm^3}$ e) $2{,}0\ \frac{g}{cm^3}$

93. En la Fig.51, en el fondo del recipiente, inclinado un ángulo $\theta = 30^0$ respecto de la horizontal, se encuentra el cubo de arista a=20 cm, de densidad $\rho = 7\,000$ kg/m^3. Hallar la fuerza que ejerce el cubo sobre la base del recipiente, si en éste se vierte agua de densidad $\rho_0 = 1\,000$ kg/m^3. Entre el fondo del recipiente y el cubo no hay agua, además, no considere la presión atmosférica. (h=1 m ; g=10 m/s^2)

a) 536 N b) 636 N c) 736 N d) 836 N e) 936 N

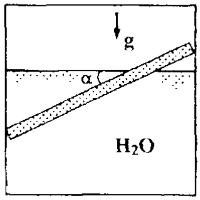


Fig.52

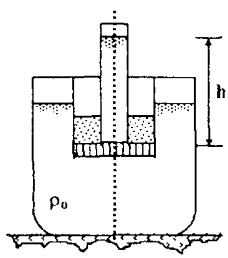


Fig.53

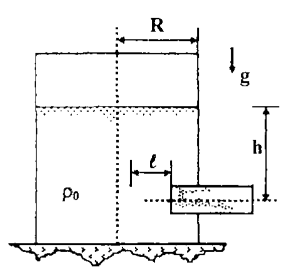


Fig.54

94. En la Fig.52, el palillo de masa homogénea M=12 kg está sumergido hasta la mitad en el agua del vaso cilíndrico, la fricción es despreciable. Hallar la fuerza de presión del palillo sobre el vaso para $\alpha=37^0$. ($\rho_{H20}=1\,000$ kg/m^3 , g=10 m/s^2)

a) 50 N b) 40 N c) 30 N d) 20 N e) 10 N

95. En la Fig.53, en la tapa del recipiente con agua de densidad $\rho=1\,000$ kg/m^3 hay un orificio cilíndrico, cerrado herméticamente con el émbolo móvil de radio R=10 cm, en el cual, se instala un tubo vertical de radio r=5 cm. La masa del émbolo más el tubo es de m=20 kg. Hallar la altura de la columna de agua en el tubo cuando el sistema se encuentra en equilibrio. (g=10 m/s^2)

a) 81 cm b) 83 cm c) 85 cm d) 87 cm e) 89 cm

96. En la Fig.54, en la pared del recipiente cilíndrico de radio R=40 cm, que contiene agua de densidad $\rho_0=1\,000$ kg/m^3 existe un orificio cerrado con un tapón. ¿Qué trabajo se debe hacer para introducir el tapón una longitud de $\ell=20$ cm ? El tapón tiene la forma de un cilindro de radio r=10 cm. El centro del orificio se encuentra a la profundidad de h=1 m. Despréciese la fricción. (g=10 m/s^2)

a) 61,22 J b) 63,22 J c) 65,22 J d) 67,22 J e) 69,22 J

97. En la Fig.55, en la campana semiesférica de radio interno R=3 cm, que yace herméticamente sobre la mesa, se vierte agua de densidad $\rho_0=1$ g/cm^3 por un orificio pequeño, ubicado en el punto más alto del hemisferio. Cuando el agua llega al orificio, levanta la campana y empieza a fluir por debajo de ella. Hallar el peso de la campana semiesférica.

a) π g b) 3π g c) 5π g d) 7π g e) 9π g

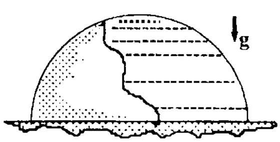


Fig.55

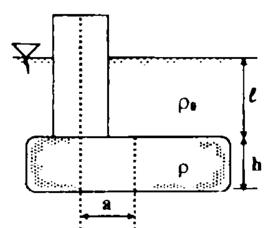


Fig.56

98. En la Fig.56, el tubo de radio r=5 cm se cierra por abajo con un disco metálico y se sumerge en agua de densidad $\rho_0=1\,000$ kg/m^3 a la profundidad de $\ell=1,056$ m. El radio del disco es R=15 cm, su densidad $\rho=2\,000$ kg/m^3 y su altura h = 4 cm. La distancia entre los ejes del disco y el tubo es de a=8 cm. ¿Hasta qué altura se debe verter el agua en el tubo, para que este se separe del disco? (g=10 m/s^2)

a) 10 cm b) 12 cm c) 14 cm d) 16 cm e) 18 cm

99. Hallar el ángulo que forma con la horizontal, la superficie de un líquido contenido en un recipiente que se desliza por un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = 49^0$ con la horizontal, si el coeficiente de fricción es $\mu = 3/4$.

a) 10^0 b) 12^0 c) 14^0 d) 16^0 e) 18^0

100. Un cilindro cerrado de radio R=40 cm, cuyas 3/4 partes de su volumen contienen agua de densidad $\rho_0 = 1\,000$ kg/m^3, gira alrededor de su eje de simetría con una velocidad angular de $\omega = 10$ rad/s. Hallar la presión a una distancia x=10 cm de la pared del cilindro.

a) 2,0 kPa b) 2,5 kPa c) 3,0 kPa d) 3,5 kPa e) 4,0 kPa

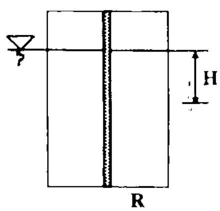


Fig.57

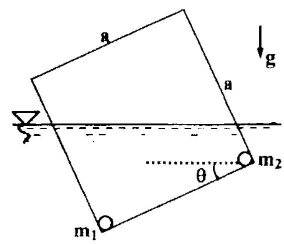


Fig.58

101. En la Fig.57, el sumergible constituido por dos semicilindros idénticos de radio R=25 cm, longitud $\ell = 1$ m, flota sumergido parcialmente en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3. Hallar la fuerza que comprime los dos semicilindros, a una profundidad H=10 cm de la superficie. (g=10 m/s^2)

a) 750 N b) 800 N c) 850 N d) 900 N e) 950 N

102. En la Fig.58, el cubo de arista a=50 cm sumergido con la mitad de su volumen en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3, está inclinado respecto de la horizontal un ángulo de $\theta = 37^0$. Despreciando el peso del cubo, hallar la razón m_1/m_2 de las masas de los alambres de longitudes a=50 cm, soldadas en las aristas del cubo. (g=10 m/s^2)

a) 4,5 b) 4,8 c) 5,1 d) 5,4 e) 5,7

103. En la Fig.59, el cuerpo en forma de cono regular de sección transversal circular, y peso específico "γ_1" está sumergido parcialmente en un líquido de peso específico "γ". Hallar la altura sumergida (y) si h=40 cm y $\gamma = 3\gamma_1/2$.

a) 10,3 cm b) 12,3 cm c) 14,3 cm d) 16,3 cm e) 18,3 cm

104. En la Fig.60, la esfera homogénea de radio R=1 m y peso específico "γ_1" está sumergido parcialmente en un líquido de peso específico "γ". Hallar la altura sumergida (h) de la esfera, sabiendo que $\gamma = 27\gamma_1/2$.

a) 1/2 m b) 1/3 m c) 1/4 m d) 1/5 m e) 3/4 m

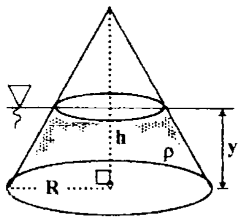


Fig.59

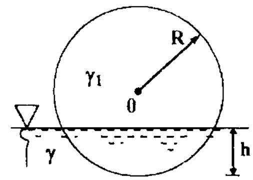


Fig.60

105. En la Fig.61, el cascarón esférico de acero de densidad $\rho_1 = 7\,800$ kg/m^3, espesor h=2 cm llena de aire de densidad $\rho_2 = 1{,}29$ kg/m^3, flota sumergida completamente en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3. Hallar el radio interno del cascarón. (g=10 m/s^2)

a) 40,8 cm b) 42,8 cm c) 44,8 cm d) 46,8 cm e) 48,8 cm

106. En la Fig.62, los líquidos no miscibles contenidos en el recipiente están en equilibrio, además se sabe que la razón aritmética de sus densidades es de 2 kg/m^3 y la presión en el fondo del recipiente es de 102 002,4 Pa. Hallar: (a=2 cm ; P_0=10^5 Pa ; g=10 m/s^2)
I. La densidad del líquido (1).

a) 1,0 g/cm^3 b) 1,5 g/cm^3 c) 2,0 g/cm^3 d) 2,5 g/cm^3 e) 3,0 g/cm^3

II. La densidad del líquido equivalente, que produce la misma presión en el fondo.

a) 8 g/cm^3 b) 10 g/cm^3 c) 12 g/cm^3 d) 14 g/cm^3 e) 16 g/cm^3

107. En la Fig.63, en la superficie de separación de dos líquidos de densidades $\rho_1 = 600$ kg/m^3 y $\rho_2 = 1\,200$ kg/m^3 flota un bloque de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 y altura h=60 cm. ¿A qué profundidad está sumergida el bloque en el segundo líquido?

a) 10 cm b) 20 cm c) 30 cm d) 40 cm e) 50 cm

108. En la Fig.64, el vaso de pared delgada y masa m=200 g, flota verticalmente en la superficie de separación de dos líquidos de densidades $\rho_1 = 800$ kg/m^3 y $\rho_2 = 1\,000$ kg/m^3. Hallar la altura (x) sumergida del vaso en el líquido inferior, si el fondo del vaso tiene espesor h=2 cm, área A=50 cm^2 y el vaso está lleno del líquido de densidad ρ_1.

a) 6 cm b) 8 cm c) 10 cm d) 12 cm e) 14 cm

109. En la Fig.65, la bola superior flota con la mitad de su volumen sumergida en agua de densidad $\rho = 1\,000\ kg/m^3$; los volúmenes de las bolas son iguales a $V=10\ cm^3$, y el peso de la bola inferior es tres veces el de la superior. Hallar:

I. El peso de la bola superior ($m=10^{-3}$).

a) 31,5 mN b) 33,5 mN c) 35,5 mN d) 37,5 mN e) 39,5 mN

II. La tensión en la cuerda que une a las bolas.

a) 10,5 mN b) 12,5 mN c) 14,5 mN d) 16,5 mN e) 18,5 mN

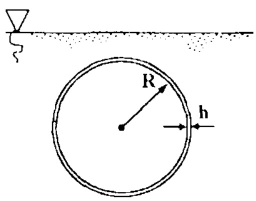


Fig.61

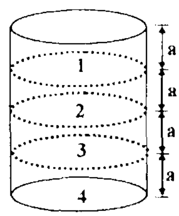


Fig.62

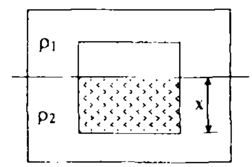


Fig.63

110. Una placa homogénea en forma de trapecio regular se sumerge verticalmente en el agua de densidad $\rho = 1\,000\ kg/m^2$, con su lado superior a=60 cm a 40 cm por debajo de la superficie libre del agua y el otro inferior b=80 cm a 100 cm, respectivamente. Hallar la fuerza total que ejerce el agua sobre la placa. ($g=10\ m/s^2$)

a) 1 kN b) 2 kN c) 3 kN d) 4 kN e) 5 kN

111. En la Fig.66, la placa delgada homogénea en forma de triángulo de base horizontal a=90 cm y altura h=40 cm, está sumergido verticalmente en agua de densidad igual a $\rho = 1\,000\ kg/m^3$. Hallar: ($g=10\ m/s^2$)

I. La fuerza que ejerce el agua sobre la placa, para z=0 cm.

a) 400 N b) 420 N c) 440 N d) 460 N e) 480 N

II. La fuerza que ejerce el agua sobre la placa, para z=50 cm.

a) 1 300 N b) 1 320 N c) 1 340 N d) 1 360 N e) 1 380 N

112. En la Fig.67, hallar la fuerza que el agua de densidad $\rho = 1\,000\ kg/m^3$ ejerce sobre la placa homogénea delgada de forma triangular, sumergida totalmente en posición vertical. (a=90 cm, h=40 cm, d=60 cm, $g=10\ m/s^2$)

a) 500 N b) 550 N c) 600 N d) 650 N e) 700 N

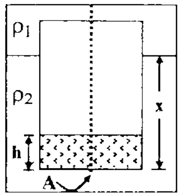


Fig.64

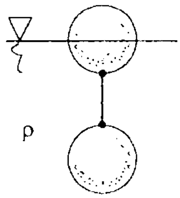


Fig.65

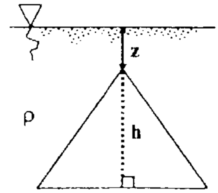


Fig.66

113. En la Fig.68, hallar la fuerza que ejerce el agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 sobre la placa homogénea delgada de forma semicircular de radio R=30 cm, sumergida en posición vertical. (g=10 m/s^2)

a) 120 N b) 140 N c) 160 N d) 180 N e) 200 N

114. En la Fig.69, hallar la fuerza que ejerce el agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 sobre la placa semicircular delgada homogénea de radio R=40 cm sumergido verticalmente. (g=10 m/s^2)

a) 519 N b) 539 N c) 559 N d) 579 N e) 599 N

115. En la Fig.70, la placa homogénea delgada cuadrada de lado a=1 m presenta un agujero de radio R=50 cm y está sumergido verticalmente en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3. Hallar la fuerza que ejerce el agua sobre la placa. (g=10 m/s^2)

a) 973 N b) 1173 N c) 853 N d) 1073 N e) 1273 N

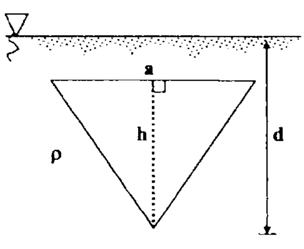


Fig.67

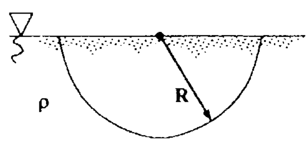


Fig.68

116. En la Fig.71, el lado superior AB de la placa cuadrada delgada homogénea de lado "a" que está sumergida verticalmente en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3, se sumerge a una profundidad "2a", ¿En cuántas veces aumenta la fuerza debida al agua sobre la placa?

a) 1 vez b) 2 veces c) 3 veces d) 4 veces e) 5 veces

117. En la Fig.72, ¿Cuántas veces mayor es la fuerza hidrostática, sobre la mitad superior (1) que sobre la mitad inferior (2), de la placa circular homogénea delgada, sumergida verticalmente en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3. (g=10 m/s^2)

a) 1,5 veces b) 2,0 veces c) 2,5 veces d) 3,0 veces e) 3,5 veces

118. En los vasos comunicantes de diámetros D_1=8 cm y D_2=4 cm se vierte un líquido de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3. ¿En cuánto subirá el nivel del líquido en los recipientes, si en uno de ellos se coloca cierto cuerpo de masa m=200 g de densidad $\rho_0 < \rho$?

a) 1,2 cm b) 2,2 cm c) 3,2 cm d) 4,2 cm e) 5,2 cm

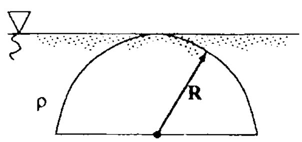


Fig.69

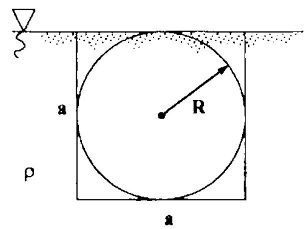


Fig.70

119. En la Fig.73, la bola de radio R=30 cm flota con la mitad de su volumen en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3, unida a un palo pesado homogéneo de longitud $\ell = 60$ cm. ¿Con qué fuerza presiona el palo el fondo del depósito de agua? (g = 10 m/s^2)

a) 300π N b) 320π N c) 340π N d) 360π N e) 380π N

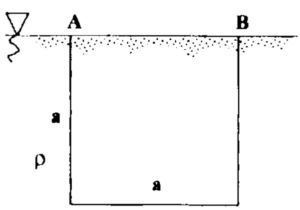


Fig.71

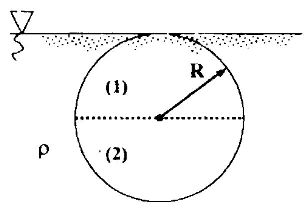


Fig.72

120. En la Fig.74, el sumergible constituido por dos semicilindros idénticos de radio R=30 cm, longitud $\ell = 1$ m, flota sumergido parcialmente en agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3. Hallar la fuerza que comprime los dos semicilindros, a una profundidad H=10 cm de la superficie. (g=10 m/s^2)

a) 500 N b) 600 N c) 700 N d) 800 N e) 900 N

121. En la Fig.75, el cuerpo homogéneo en forma de segmento esférico flota con sus bases paralelas a la superficie libre del agua de densidad $\rho = 1\,000\ kg/m^3$. Hallar la fuerza total que ejerce el agua sobre el cuerpo, si R=25 cm ; g=10 m/s^2.

a) 205 N b) 210 N c) 215 N d) 220 N e) 225 N

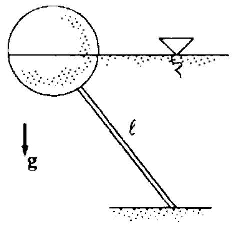


Fig.73

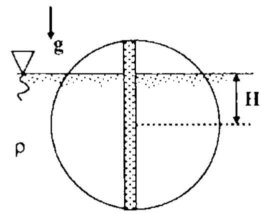


Fig.74

122. En la Fig.76, la esfera compacta homogénea de radio R=20 cm y peso $W = 100\pi$ N, tapa un agujero circular en la base del depósito de agua. Hallar la fuerza mínima necesaria para levantar la esfera, si H=80 cm, g=10 m/s^2 , $\rho = 1\,000\ kg/m^3$.

a) 200π N b) 250π N c) 300π N d) 350π N e) 400π N

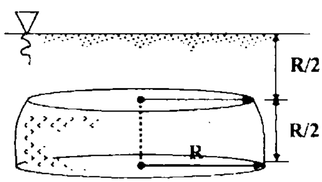


Fig.75

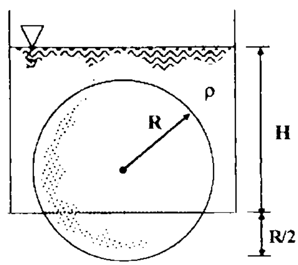


Fig.76

SOLUCIONARIO

Solución: 01

- La densidad del alcohol etílico es:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{63,3}{80,0}$$

$$\rho = 0,791\ g/cm^3$$

La densidad relativa del alcohol es:

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{0,791}{1,0}$$

$$\rho_r = 0,791$$

Solución: 02

- La densidad del tetracloruro es:

$$\rho = \rho_r \rho_{H_2O}$$

$$\rho = (1,60)(1000)$$

$$\rho = 1\ 600\ kg/m^3$$

Luego, el volumen pedido es:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{40}{1600} = \frac{1}{40}\ m^3$$

Como, $1\ m^3 = 10^3$ lt, entonces:

$$\clubsuit\ V = 25\ lt \qquad \text{(D)}$$

Solución: 03

- El peso del aluminio, viene dado por:

$$W = mg = \rho V g$$

$$W = (2700)(10)(\frac{1}{2})$$

$$\clubsuit\ W = 13500N \qquad \text{(E)}$$

Solución: 04

a) Primero hallemos el volumen del bidón:

$$V = \frac{m_{H_2O}}{\rho_{H_2O}} = \frac{110}{1000}$$

$$V = 110.10^{-3}\ m^3$$

b) Luego, el peso específico de la gasolina es:

$$\gamma = \frac{mg}{V} = \frac{(72,6)(10)}{110.10^{-3}}$$

$$\clubsuit\ \gamma = 6600\ N/m^3$$

Solución: 05

- Según teoría, la densidad del aire es:

$$\rho = \frac{W/g}{V} = \frac{(10/10)}{0,7752}$$

$$\rho = 1,29 \frac{kg}{m^3} \qquad \text{(E)}$$

Como, $1\ m^3 = 10^3$ lt, entonces:

$$\clubsuit\ \rho = 1,29.10^{-3}\ kg/lt$$

Solución: 06

- La densidad de la bola de acero es:

$$\rho = \frac{m}{(\pi D^3/6)}$$

$$\rho = \frac{1,765}{(7,5^3.10^{-3}\pi/6)}$$

$$\clubsuit\ \rho = 7,99\ g/cm^3 \qquad \text{(E)}$$

Solución: 07

- Hallemos el volumen de la película:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1,93.10^{-3}}{19,3}$$

$$V = 10^{-4} cm^3$$

Luego, el espesor de la lámina es:

$$h = \frac{V}{A} = \frac{10^{-4}}{14,5}$$

$$h = 689,6.10^{-8} cm$$

$$\clubsuit\ h = 689,6 \overset{o}{A}$$ (E)

Solución: 08

• Sea "m" la masa de la pepita, entonces, "m -138" será la masa del cuarzo, luego, se cumple:

$$V_{PEPITA} = V_{ORO} + V_{CUARZO}$$

$$\frac{m}{6,4} = \frac{138}{19,3} + \frac{(m-138)}{2,6}$$

$$0,594\ m = 119,41\ g$$

$$\clubsuit\ m = 201,02\ g$$ (A)

Solución: 09

• La presión en la mitad superior (A) es:

$$P_A = \rho g \frac{H}{4} \qquad (1)$$

La presión en la mitad inferior (B) es:

$$P_B = \rho g \frac{3}{4} H \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2), obtenemos:

$$\clubsuit\ \frac{P_A}{P_B} = \frac{1}{3}$$ (B)

Solución: 10

• La fuerza sobre el fondo del depósito con agua es:

$$F = \gamma h A$$

$$F = (10^4)(3)(9) = 2,7.10^5\ N$$

La fuerza sobre las caras laterales es:

$$F = P_m A = (1/2)\ \gamma\ h\ A$$

$$F = (\frac{1}{2})(10^4)(3)(9)$$

$$\clubsuit\ F = 1,35.10^5\ N$$ (C)

☞ **Nota**

P_m es la presión media sobre la cara lateral del depósito.

Solución: 11

• La fuerza que soporta el ocular es:

$$F = \gamma h S$$

$$F = (\gamma_r \gamma_{H_2O})(h)(\frac{1}{4}\pi D^2)$$

$$F = (10300)(10^3)(\frac{1}{4}\pi 15^2.10^{-4})$$

$$\clubsuit\ F = 18,2.10^4\ N$$ (B)

Solución: 12

• Según el principio de Pascal la presión en ambos émbolos es la misma, es decir:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_1 = \frac{\pi(80)^2/4}{\pi(20)^2/4}(10)$$

$$\clubsuit\ F_1 = 160N$$ (C)

Solución: 13

• La diferencia de presiones entre los pun tos:

$$\Delta P = \rho_A g h_A + \rho_B g h_B$$

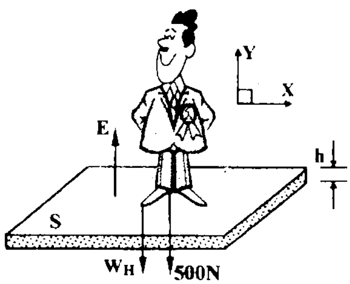
$$\Delta P = (0{,}8.10^3(10)(10.10^{-2}) + (1{,}2.10^3)(10)(5.10^{-2})$$

$$\Delta P = 800 + 600$$

$$\clubsuit\ \Delta P = 1400\ \mathrm{N/m^2} \qquad \text{D}$$

Solución: 14

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el hielo:



La fuerza resultante en el eje vertical, es cero, de modo que:

$$E - W_H = 500$$

$$(\rho_{H_2O} - g_{HIELO})\, g\, V = 500$$

$$(1000 - 900)(10)\ V = 500$$

$$V = 0{,}5\mathrm{m}^3$$

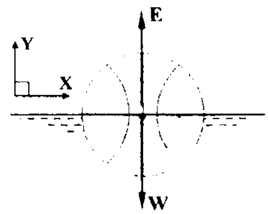
Pero, V= h.A, siendo "A" el área del bloque y "h" su espesor, luego:

$$0{,}5 = (0{,}5)A$$

$$A = 1\mathrm{m}^2 \qquad \text{C}$$

Solución: 15

• Sea V el volumen de la esfera, entonces el volumen sumergido es V/2.



En la Fig., la fuerza resultante en el eje vertical, es cero, de modo que:

$$E = W$$

$$\rho_{H_2O}\, g \frac{V}{2} = W$$

$$(1000)(10)\frac{V}{2} = 30.10^3$$

$$\clubsuit\ V = 6\mathrm{m}^3 \qquad \text{D}$$

Solución: 16

• Las respuestas son las siguientes:

I. Verdadero, pues, tg $\theta = \rho = m / V$

II. Verdadero, pues, tg $\theta_3 >$ tg $\theta_2 >$ tg θ_1

III. Falso.

$$\clubsuit\ \text{V V F} \qquad \text{B}$$

Solución: 17

• A medida que se aumenta el área del disco, la presión sobre el mismo disminuye, de modo que la gráfica correspondiente es la d).

Solución: 18

• Según teoría, la presión debida a un líquido, es directamente proporcional a su peso específico y a su altura, pero la altura es la misma para los tres líquidos luego:

$$P_A > P_B > P_C$$

Solución: 19

• La fuerza hacia abajo. El agua del vaso no derrama, pues la presión que ejerce sobre el papel, es menor, que la presión ejercida por la atmósfera.

Solución: 20

• A mayor profundidad le corresponde mayor presión, además, para h=- 0, P=- 0, luego, la gráfica correcta es la d).

Solución: 21

• Sean V, W el volumen y peso de la esfera y V' y V" los volúmenes de la parte sumergida antes y después de la extracción del aire, entonces:

Antes, la esfera se encuentra en equilibrio, de modo que:

$$W = E_{H_2O} + E_{AIRE}$$

$$W = \gamma_{H_2O} V' + \gamma_A (V - V')$$

$$V' = \frac{W - \gamma_A (V - V')}{\gamma_{H_2O} - \gamma_A} \qquad (1)$$

Después, la esfera, también se encuentra en equilibrio, de modo que:

$$V'' = \frac{W}{\gamma_{H_2O}} \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2), obtenemos:

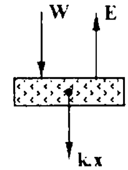
$$\frac{V'}{V''} = \left(\frac{W - \gamma_A V}{W}\right)\left(\frac{\gamma_{H20}}{\gamma_{H20} - \gamma_A}\right) < 1$$

$$V' < V''$$

Luego, el volumen sumergido aumenta, por tanto, la respuesta correcta es la b).

Solución: 22

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el bloque.



La fuerza resultante en el eje vertical, es cero, de modo que:

$$k.x = E - W$$

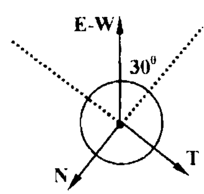
$$k.x = gV(\rho_{H_2O} - \rho_{BLOQUE})$$

$$100x = (10)(2.10^{-3})(1000 - 300)$$

$$\clubsuit\ x = 0{,}14\ m \qquad \text{D}$$

Solución: 23

• Como las dos fuerzas sobre la esfera, el empuje E y el peso W son verticales, para E>W, podemos reemplazar por un único vector vertical hacia arriba.



La fuerza resultante en la dirección del plano inclinado, es cero, así, tenemos:

$$T = (E - W)\ \text{sen}\ 30^0$$

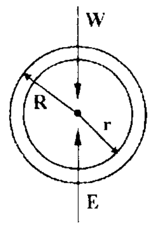
$$T = g\ V\ (\rho_{LIQ} - \rho_{ESF})\ \text{sen}\ 30^0$$

$$T = (10)(4.10^{-3})(1000 - 400)(1/2)$$

$$\clubsuit\ T = 12\ N \qquad \text{B}$$

Solución: 24

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cascarón esférico de radio R.



Como el cascarón esférico se encuentra en equilibrio, su peso (W) es igual, al empuje del agua (E), esto es:

$$W = E$$

$$\rho\, g\, V = \rho_o\, g\, V_S$$

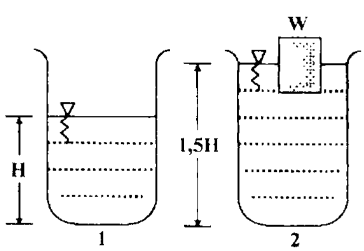
$$\rho \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) = \rho_o \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rho (3^3 - 2^3) = (1900)(3^3)$$

$$\clubsuit\ \rho = 2\,700 \frac{kg}{m^3} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 25

• Sea "A" el área de la base del recipiente. Luego, la fuerza en la base del recipiente aumenta de F_1 a F_2, debido al peso "W" de la madera, es decir:



$$F_2 - F_1 = W$$

$$A\,(P_2 - P_1) = m\,g$$

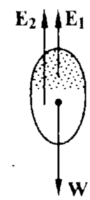
$$A\,\rho_{H_2O}\, g\,(1{,}5\,H - H) = m\,g$$

$$(2)(1000)(0{,}5)\,H = 800$$

$$\clubsuit\ H = 0{,}8\ m \qquad \text{(E)}$$

Solución: 26

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo sumergido en los dos líquidos.



Como el cuerpo está en equilibrio, su peso (W), es igual, a la suma de los empujes E_1 y E_2 de los líquidos (1) y (2), esto es:

$$W = E_1 + E_2$$

$$\rho_C.g.V = \rho_1.g.V_1 + \rho_2.g.V_2$$

$$\rho_C.V = (1000)(0{,}1\,V) + (3000)(0{,}9\,V)$$

$$\rho_C = 100 + 2\,700$$

$$\clubsuit\ \rho_C = 2\,800\ kg/m^3 \qquad \text{(E)}$$

Solución: 27

• La magnitud del empuje depende de la "gravedad local" que afecta al fluido que lo rodea, así:

$$E = \rho_{LIQ}.V.(g \pm a)$$

(+) : cuando sube con "a"
(-) : cuando baja con "a"

Cuando el sistema baja con velocidad constante (a= 0), se tiene:

$$E = \rho_{LIQ}.V.g$$

$$20 = (1000)(V)(10)$$

$$V = 2.10^{-3} m^3$$

Cuando el sistema baja con aceleración constante "a", se tiene:

$$E_1 = (1000)(2.10^{-3})(10 - 5)$$

$$\clubsuit \; E_1 = 10 \text{ N} \qquad \text{(A)}$$

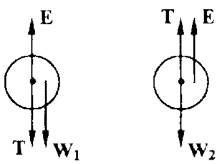
Solución: 28

- El cuerpo "1" está en equilibrio, así:

$$E = W_1 + T \qquad (1)$$

El cuerpo "2" está en equilibrio, así:

$$E = W_2 - T \qquad (2)$$



Igualando (1) con (2), y despejando T:

$$T = \frac{W_2 - W_1}{2} = \frac{3-1}{2}$$

$$\clubsuit \; T = 1N \qquad \text{(A)}$$

Solución: 29

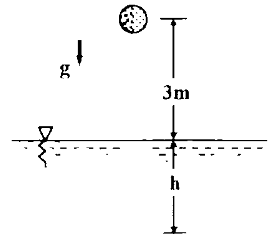
1> Primer método

La velocidad inicial del cuerpo en el agua es igual, a la velocidad con la que llega a la superficie del mismo, es decir:

$$v_0 = \sqrt{2.g.h}$$

$$v_0^2 = (2)(10)(3) = 60 \; m^2/s^2$$

Representemos al cuerpo en el instante en que se suelta.



La desaceleración del cuerpo en el agua es:

$$a = \frac{(E - W)\,g}{W} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(\rho_o - \rho)}{\rho} g$$

$$a = \frac{(1 - 0{,}4).10^3}{0{,}4.10^3}(10) = 15 \frac{m}{s^2}$$

Luego, la altura recorrida en el agua es:

$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{60^2 - 0^2}{(2)(15)}$$

$$\clubsuit \; h = 2 \text{ m} \qquad \text{(D)}$$

2> Segundo método

Por el principio de conservación de la energía mecánica, la energía potencial inicial del cuerpo se transforma en trabajo para vencer el empuje del agua, es decir, se cumple:

$$m.g.(h + 3) = E.h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3\rho}{(\rho_o - \rho)}$$

$$h = \frac{(3)(0{,}4.10^3)}{(1 - 0{,}4).10^3} = 2 \text{ m}$$

Solución: 30

- Sean, W', W" los pesos aparentes del cuerpo en el agua y el líquido, respectivamente, entonces:

Cuando el cuerpo se sumerge en el agua, el empuje es:

$$E = W - W'$$

$$\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V = W - W'$$

$$V = \frac{W - W'}{\rho_{H_2O} \cdot g} \qquad (1)$$

Cuando el cuerpo se sumerge en el líquido, el empuje es:

$$E' = W - W''$$

$$\rho . g . V = W - W''$$

$$V = \frac{W - W''}{\rho . g} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), y despejando ρ:

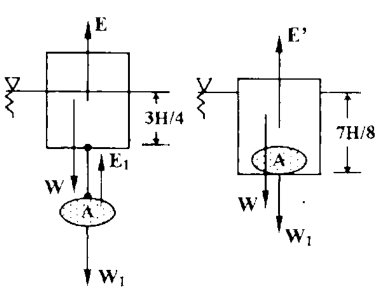
$$\rho = \frac{(W - W'')}{(W - W')} \rho_{H_2O}$$

$$\rho = \frac{(30 - 20)}{(30 - 25)}(1000)$$

$$♣ \quad \rho = 2\,000 \ \frac{kg}{m^3} \qquad Ⓐ$$

Solución: 31

• Sean V, V_1 los volúmenes y W, W_1 los pesos de la caja y cuerpo, respectivamente, entonces cuando el cuerpo A se encuentra fuera de la caja, se tiene:



$$E + E_1 = W + W_1$$

$$\rho . g . (\frac{3}{4} h . S) + \rho . g . V_1 = W + W_1$$

$$\rho . g \, (\frac{3}{4} V + V_1) = W + W_1 \qquad (1)$$

Asimismo, cuando el cuerpo A esta al interior de la caja, se tiene:

$$E' = W + W_1$$

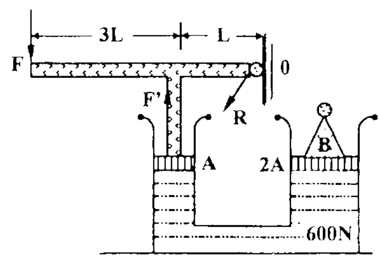
$$\frac{7}{8} \rho . g . V = W + W_1 \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), y simplificando:

$$♣ \quad \frac{V}{V_1} = 8 \qquad Ⓓ$$

Solución: 32

• Representemos las fuerzas que actúan so bre el sistema físico.



Para que la varilla se encuentre en posición horizontal, el momento resultante respecto del punto de giro O, debe ser cero, así:

$$F.(4L) = F'.(L)$$

$$F' = 4F \qquad (1)$$

De otra parte, del principio de Pascal:

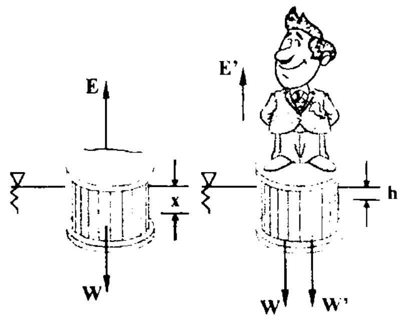
$$\frac{F'}{A} = \frac{600}{2A} \qquad (2)$$

De (1) en (2), obtenemos la fuerza:

$$\clubsuit\ F = 75\ N$$ B

Solución: 33

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la boya, antes y después del lanzamiento del barón.



El proceso consta de tres pasos:

1) Cuando la boya esta sumergida una altura "x", el empuje es igual a su peso:

$$\rho.g.S.x = W$$

2) Cuando Qiqo se sube a la boya, está se hunde una altura "h", y el empuje, es igual al peso de la boya más la de Qiqo, es decir:

$$\rho.g.S.(x + h) = W + W'$$

Utilizando (1), obtenemos la altura, así:

$$h = \frac{W'}{\rho g S} = \frac{557}{(1114)(10)(0{,}5)}$$

$$h = 0{,}1\ m$$

3) Cuando Qiqo se lanza al mar, la fuerza resultante que actúa sobre la boya, es del tipo de Hooke, es decir:

$$F = \rho.g.S.y = k.y$$

siendo, "y" la altura de la parte sumergida de la boya.

Luego, el período del movimiento armónico simples es:

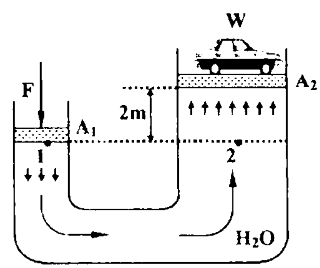
$$T = 2\pi(m/k)^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{348}{(1114)(10)(0{,}5)}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ T = \frac{\pi}{2}\ s$$

Solución: 34

• Representemos los puntos (1) y (2), que se encuentran a un mismo nivel.



Del principio fundamental de la hidrostática, la presión en 1 es igual a la presión en 2, es decir:

$$P_1 = P_2$$

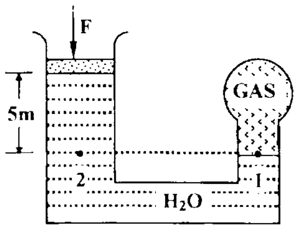
$$\frac{F}{A_1} = \rho_{H_2O}.g.h + \frac{W}{A_2}$$

$$\frac{F}{0{,}1} = (1000)(10)(2) + \frac{30\,000}{1}$$

$$\clubsuit\ F = 5\ kN$$ E

Solución: 35

• Consideremos los puntos (1) y (2) sometidos a la misma presión.



Según el principio fundamental de la hidrostática, la presión en 1 debida al gas es igual, a la presión en 2, debida a la columna de H_2O, la fuerza F y atmosférica, así:

$$P_1 = P_2$$

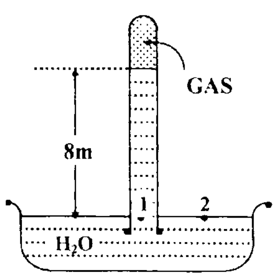
$$P_g = \rho_{H_2O}.g.h + \frac{F}{A} + P_0$$

$$P_g = (10^3).(10).(5) + \frac{800}{0{,}04} + 10^5$$

$$♣\ P_g = 170\ \text{kPa} \qquad \text{E}$$

Solución: 36

• Según el principio fundamental de la hidrostática, las presiones en los puntos (1) y (2) son iguales, así:



$$P_1 = P_2$$

$$P_{GAS} + \rho_{H_2O}.g.h = P_0$$

$$P_{GAS} = 10^5 - (10^3)(10)(8)$$

$$♣\ P_{GAS} = 20\ \text{kPa} \qquad \text{C}$$

Solución: 37

• La presión en el punto (A), viene dado por:

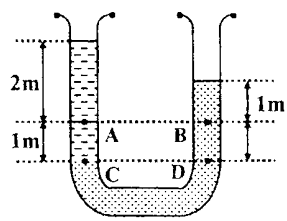
$$P_A = \rho_1.g.h_1 + \rho_2.g.h_2$$

$$P_A = (800)(10)(\frac{1}{2}) + (1000)(10)(\frac{8}{10})$$

$$P_A = 12\ \text{kPa} \qquad \text{B}$$

Solución: 38

• Representemos los niveles de cada uno de los líquidos.



Según el principio fundamental de la hidrostática, las presiones en los puntos C y D, son iguales, así:

$$P_C = P_D$$

$$\rho_1.g.(3) = \rho_2.g.(2)$$

$$\rho_1 = \frac{2}{3}\rho_2 \qquad (1)$$

Ahora, hallemos la relación entre las presiones hidrostáticas en A y B.

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_1.g.(2)}{\rho_2.g.(1)}$$

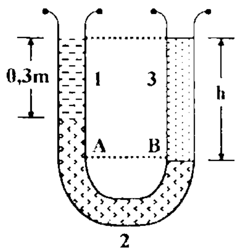
$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{2\rho_1}{\rho_2} \qquad (2)$$

De (1) en (2), obtenemos la razón de las presiones:

$$♣\ \frac{P_A}{P_B} = \frac{4}{3} \qquad \text{B}$$

Solución: 39

• Representemos los niveles de cada uno de los líquidos.



Según el principio fundamental de la hidrostática, las presiones en los puntos A y B son iguales, es decir:

$$P_A = P_B$$

$$\rho_1.g.h_1 + \rho_2.g.h_2 = \rho_3.g.h_3$$

$$\rho_1.h_1 + \rho_2.h_2 = \rho_3.h_3$$

$$(3000)(0{,}3) + (5000)(h - 0{,}3) = (4000)(h)$$

$$♣\ h = 0{,}6\ m \qquad \text{D}$$

Solución: 40

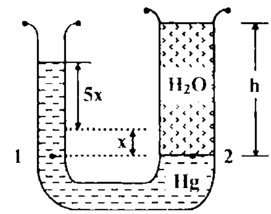
• Calculemos la altura de la columna de agua, del modo siguiente:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \Rightarrow \qquad m = \rho.V$$

$$816\,g = (1)(20).h$$

$$h = 40{,}8\ cm \qquad (1)$$

Según, el principio de conservación de la masa, el volumen desplazado en el tubo de mayor sección, es igual, al volumen que ocupa en el tubo de menor sección. Así, el mercurio en el tubo de mayor sección desciende "x" y en el tubo de menor sección sube "5x".



Luego, del principio fundamental de la hidrostática, se tiene:

$$P_1 = P_2$$

$$\rho_{Hg}.g.(6x) = \rho_{H_2O}.g.h$$

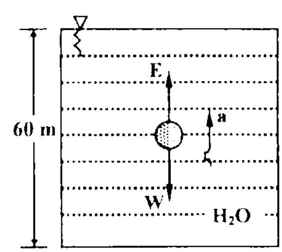
$$(13{,}6)(6x) = (1)(40{,}8)$$

$$♣\ x = 0{,}5\ cm \qquad \text{D}$$

Así, el mercurio sube en el tubo de menor sección "5x", por consiguiente 2,5 cm.

Solución: 41

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la esferita.



Cálculo de la aceleración "a", que experimenta la esferita de densidad "ρ", en el interior del líquido.

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{E - W}{(W/g)}$$

$$a = \frac{(\rho_{H_2O} - \rho)}{\rho} g = \frac{(1000 - 250)}{250}(10)$$

$$a = 30\ m/s^2$$

Luego, de cinemática, obtenemos la distancia recorrida, así:

$$d = v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2$$

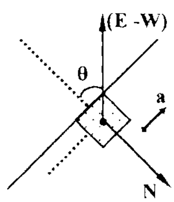
$$60 = 0 + \frac{1}{2}(30)\,t^2$$

D

♣ $t = 2\ s$

Solución: 42

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el bloque.



Aplicando la segunda ley de Newton, en la dirección del movimiento, se tiene:

$$F_R = m.a$$

$$(E - W)\,\text{sen}\,\theta = \frac{W}{g}\,a$$

$$a = (\frac{E}{W} - 1).g.\text{sen}\,\theta$$

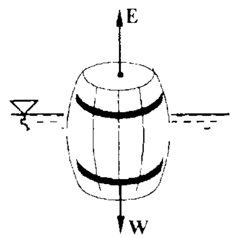
$$a = (\frac{\rho_{H_2O}}{\rho} - 1).g.\text{sen}\,\theta$$

$$a = (\frac{1000}{500} - 1).(10).(\frac{1}{2})$$

♣ $a = 5\ \frac{m}{s^2}$ E

Solución: 43

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cilindro.



Sea "W" el peso del barril y "V" su volumen, entonces, según el principio de Arquimides, se cumple:

$$W = E$$

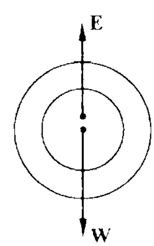
$$m.g = \rho_{H_2O}.g.V$$

$$m = (1000)(\frac{3}{4})(4.10^{-2})$$

♣ $m = 30\ kg$ E

Solución: 44

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cascarón esférico.



Según el principio de Arquímedes, el peso de la esfera hueca es igual al empuje, es decir, se cumple:

$$W = E$$

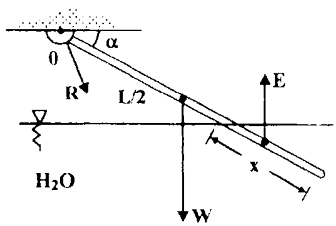
$$\rho\, g.\frac{4}{3}\pi\,(R^3 - r^3) = \rho_o.g.\frac{1}{2}.(\frac{4}{3}\,\pi\, R^3)$$

$$\rho = \frac{(1000)(1/2)(0{,}1)^3}{(0{,}1)^3 - (0{,}09)^3}$$

♣ $\rho = 1845\ kg/m^3$ Ⓒ

Solución: 45

- Representemos las fuerzas que actúan sobre la barra.



En la Fig., el torque resultante respecto de "O", es cero, así:

$$(W).(\frac{L}{2}) = (E).(L - \frac{x}{2})$$

$$(\rho.g.S.L)(\frac{L}{2}) = (\rho_{H_2O}.g.S.x)(L - \frac{x}{2})$$

$$2\,x^2 - 4\,L.x + L^2 = 0$$

Las raíces de está ecuación cuadrática son:

$$x_1 = \frac{L}{2}(2 - \sqrt{2}) \qquad (si)$$

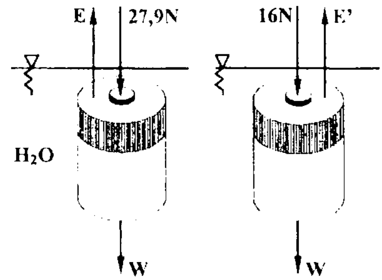
$$x_2 = \frac{L}{2}(2 + \sqrt{2}) \qquad (no)$$

$$x = (2 - \ 2)\frac{(2 + \ 2)}{2}$$

♣ $x = 1\ m$ Ⓐ

Solución: 46

- Representemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.



Cuando el cuerpo se sumerge en agua, se tiene:

$$W + 27{,}9 = E$$

$$W + 27{,}9 = \rho_{H_2O}.g.V \qquad (1)$$

Cuando el cuerpo se sumerge en el líquido, se tiene:

$$W + 16 + E'$$

$$W + 16 = \rho.g.V \qquad (2)$$

Restando (1) menos (2), obtenemos la densidad relativa:

$$11{,}9 = (\rho_{H_2O} - \rho).g.V$$

$$11{,}9 = \rho_{H_2O}(1 - \rho_r).g.V$$

$$\rho_r = \frac{\rho_{H_2O}.g.V - 11{,}9}{\rho_{H_2O}.g.V}$$

$$\rho_r = \frac{(10^3)(10)(17.10^{-3}) - 11{,}9}{(10^3)(10)(17.10^{-3})}$$

♣ $\rho_r = 0{,}93$ Ⓑ

Solución: 47

• Sea "V" el volumen del iceberg, entonces, por equilibrio su peso (W), es igual, al empuje (E) del agua, esto es:

$$W = E$$

$$\rho_{hielo}.g.V = \rho.g.(V - 600)$$

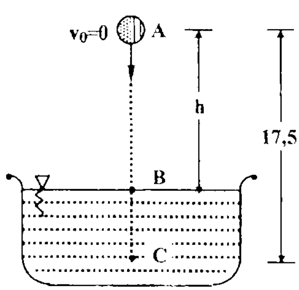
$$V = \frac{\rho}{(\rho - \rho_{hielo})}(600)$$

$$V = \frac{1\,025}{(1\,025 - 912)}(600)$$

$$♣\ V = 5\,442{,}47\ m^3 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 48

• Representemos la trayectoria que describe el movimiento del cuerpo.



Para el tramo A-B, el tiempo y la velocidad final, son:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (1)$$

$$v = \sqrt{2.g.h} \qquad (2)$$

Para el tramo B-C, la aceleración es:

$$a = \frac{(E - W)}{W}g = 5\frac{m}{s^2} \qquad (3)$$

Luego, la distancia recorrida en este tramo es:

$$17{,}5 - h = v_0.(2 - t_1) + \frac{1}{2}.a.(2 - t_1)^2$$

Pero, v_0= v, así, utilizando (1), (2), (3), operando y simplificando, tenemos:

$$h^2 - 50h + 225 = 0$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son:

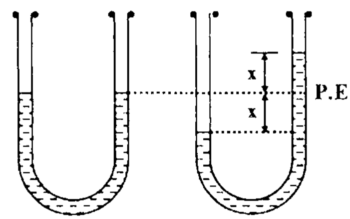
$$h_1 = 5\ m \qquad (si)$$

$$h_2 = 45\ m \qquad (no)$$

$$♣\ h = 5\ m \qquad \text{(C)}$$

Solución: 49

• Representemos los niveles que alcanza el mercurio en el frasco de vidrio.



ANTES DESPUES

El movimiento del fluido es armónico simple, la fuerza recuperadora F=k.x, es igual, al peso de la columna de fluido de longitud 2x, así:

$$F = \rho.g.(A.2x)$$

$$F = \underbrace{2\,\rho.g.A}_{k}\,x$$

Luego, el período del movimiento amónico simple es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

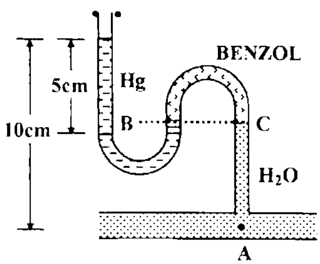
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho.A.L}{2\rho.g.A}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{20.10^{-2}}{(2)(10)}}$$

$$\clubsuit\ T = \frac{\pi}{5}\ s \qquad \text{(D)}$$

Solución: 50

• Introduzcamos dos puntos adicionales B y C, en las superficies de interfase.



Los puntos B y C están al mismo nivel, de modo que, $P_C = P_B$, luego, la presión total en A es:

$$P_A = P_B + \rho_{H_2O}.g.h_{H_2O}$$

$$P_A = \rho_{Hg}.g.h_{Hg} + \rho_{H_2O}.g.h_{H_2O}$$

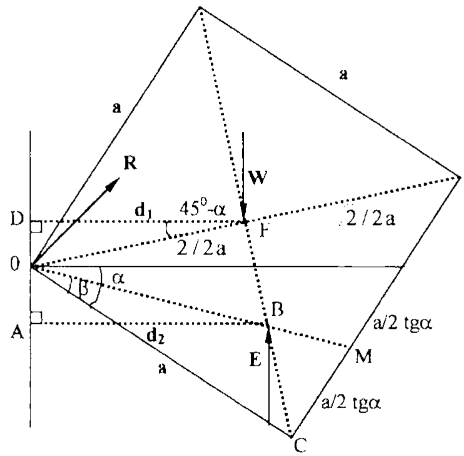
$$P_A = (\rho_{Hg} + \rho_{H_2O}).g.h_{H_2O}$$

$$P_A = (13600 + 1000)(10)(0,05)$$

$$\clubsuit\ P_A = 7\,300\ \frac{N}{m^2} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 51

• Las fuerzas que actúan sobre el cubo de densidad ρ' son: su peso (W), el empuje del agua (E) y la reacción (R).



Como el cubo se encuentra en equilibrio, entonces, el torque resultante respecto del eje que pasa por "O" es cero, así:

$$W.d_1 = E.d_2 \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo ODF:

$$d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a\cos(45^0 - \alpha)$$

$$d_1 = \frac{a}{2}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$$

En el triángulo rectángulo OCM:

$$x = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}[a^2 + \frac{a^2}{4}tg^2\alpha]^{1/2}$$

$$x = \frac{a}{3}[4 + tg^2\alpha]^{1/2}$$

En el triángulo rectángulo OAB:

$$d_2 = x\operatorname{sen}(\beta + 90^0 - \alpha)$$

$$d_2 = \frac{a}{3}[4 + tg^2\alpha]^{1/2}(\cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha)$$

En el triángulo rectángulo OCM:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}} \; ; \; \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \; d_2 = \frac{a}{3}(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha)$$

$$W = \rho'.g.a^3 \quad ; \quad E = \rho.g.\frac{1}{2}a^3.\operatorname{tg}\alpha$$

Reemplazando en (1) y simplificando:

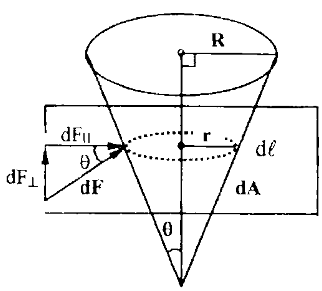
$$\rho'.(\operatorname{tg}\alpha + 1) = \rho.\frac{1}{3}.\operatorname{tg}\alpha.(\operatorname{tg}^2\alpha + 2)$$

$$\rho' = \frac{(1)[(3/4)^3 + 2(3/4)]}{(3)(1+3/4)}$$

$$\clubsuit \; \rho' = 0{,}37\,\frac{g}{cm^3} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 52

• Representemos la fuerza sobre la cara lateral, debido a la presión del agua.



En la Fig., el ancho del anillo de radio r es:

$$d\ell = \frac{dr}{\operatorname{sen}\theta}$$

La fuerza que ejerce el líquido sobre el diferencial de tapón cúbico, de área dA es la componente vertical de esta fuerza, esto es

$$dF_\perp = dF\operatorname{sen}\theta$$

$$dF_\perp = P\,dA\operatorname{sen}\theta$$

$$dF_\perp = P\,(2\pi\,r\,d\ell)\operatorname{sen}\theta$$

$$dF_\perp = P\,2\pi\,r\,\frac{dr}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta$$

Luego, la fuerza total sobre el tapón cúbico debido a la presión es:

$$\int_0^{F_\perp} dF_\perp = 2\pi\,P\int_r^R r\,dr$$

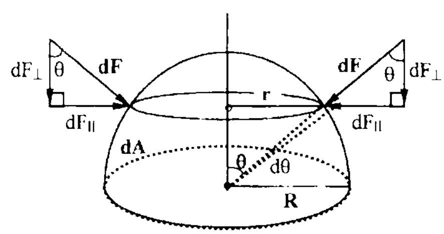
$$F_\perp = \pi P\,(R^2 - r^2)$$

$$F_\perp = \pi\,(4.10^4)(10^2 - 5^2).10^{-4}$$

$$\clubsuit \; F_\perp = 300\pi\ N \qquad \text{(C)}$$

Solución: 53

• Para calcular la fuerza sobre un hemisferio, debido a una presión constante, dividamos el hemisferio en anillos, y representemos uno de ellos.



La fuerza resultante sobre el anillo de radio r y área $dA = 2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$, es igual a la, componente vertical $dF_\perp$ de la fuerza debido a la presión constante P, esto es:

$$dF_\perp = dF\cos\theta = P\,dA\cos\theta$$

$$dF_\perp = 2\pi P\,R^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta$$

Así, la fuerza resultante sobre todo el hemisferio, será la suma de las fuerzas sobre cada uno de los anillos, esto es:

$$\int_0^{F_\perp} dF_\perp = 2\pi P R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$F_\perp = 2\pi P R^2 \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right) \Big]_0^{\pi/2}$$

$$F_\perp = \pi P R^2$$

Utilizando este resultado, la fuerza con que se aprieta la esfera contra el orificio es:

$$F = F_1 - F_2$$

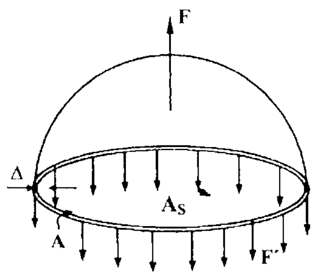
$$F = \pi R^2 (3P) - \pi R^2 (P) = 2\pi P R^2$$

$$F = (2\pi)(5.10^3)(10^{-1})^2$$

$$\clubsuit \ F = 100\pi \text{ N} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 54

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la botella cortada por la mitad.



En la Fig., la fuerza (F) debido a la presión hacia arriba, es igual, a la fuerza elástica hacia bajo, que actúa en el borde del hemisferio, esto es:

$$F' = F$$

$$\sigma A = P A_S$$

$$\sigma 2\pi R \Delta = P \pi R^2$$

$$\sigma = \frac{PR}{2\Delta} = \frac{(4.10^5)(8.10^{-2})}{(2)(2.10^{-3})}$$

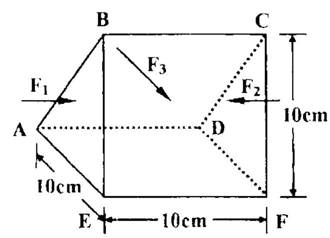
$$\clubsuit \ \sigma = 8.10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \qquad \text{(E)}$$

☞ **Nota**

A_S es la proyección del área lateral del hemisferio sobre su base, y A es el área del anillo de radio R.

Solución: 55

• Representemos la fuerza sobre la cara ABCD del prisma, debido a la presión.



En la Fig., las fuerzas F_1, F_2 sobre las caras ABE y CDF se anulan entre si, por ser opuestas y de igual magnitud.

Ahora, hallemos el área de la cara lateral ABCD del prisma:

$$A = (10.10^{-2})(10\sqrt{2}.10^{-2})$$

$$A = \sqrt{2}.10^{-2} \text{m}^2$$

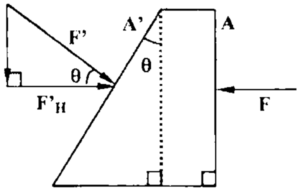
Luego, la magnitud de la fuerza resultante sobre las caras laterales del prisma es:

$$F_3 = PA = (2.10^5)(\sqrt{2}.10^{-2})$$

$$\clubsuit \ F_3 = 2000\sqrt{2} \text{ N} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 56

• Representemos las fuerzas en ambos lados del émbolo, debida a la presión.



En la Fig., la componente horizontal de la fuerza F' es:

$$F'_H = PA'\cos\theta = PA = F$$

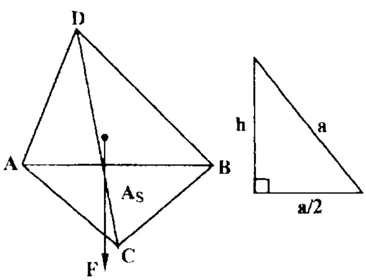
$$F'_H = F$$

Así, en la horizontal la fuerza resultante es nula, de modo que la aceleración del émbolo es:

$$\clubsuit\ a = 0\ \frac{m}{s^2} \qquad (A)$$

Solución: 57

• Representemos la fuerza resultante sobre el tetraedro, debido a la presión.



En el triángulo rectángulo, hallemos la altura correspondiente a la base ABC del tetraedro, así:

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad => \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Luego, para hallar la fuerza resultante F, utilizamos la proyección de las áreas de las tres caras laterales del tetraedro sobre su base ABC, esto es:

$$F = P\,A_S = P\,(\frac{1}{2}a\,h)$$

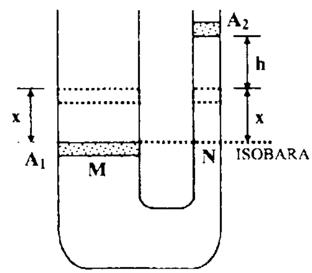
$$F = P\frac{1}{2}(a)(\frac{\sqrt{3}}{2}a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 P$$

$$P = \frac{4F}{\sqrt{3}a^2} = \frac{(4)(\sqrt{3}.10^4)}{(\sqrt{3})(10^{-1})^2}$$

$$\clubsuit\ P = 4.10^6\ \frac{N}{m^2} \qquad (D)$$

Solución: 58

• Representemos la altura (h) que asciende el émbolo más pequeño, cuando el émbolo más grande desciende una altura (x).



El volumen de agua que desciende en el émbolo (1), es igual, al volumen que asciende en el émbolo (2), esto es:

$$A_1 x = A_2 h \quad => \quad x = (\frac{A_2}{A_1})h$$

De otro lado, la presión en el émbolo (M) debido al peso W, es igual, a la presión en (N) creada por la columna de agua, así:

$$\frac{W}{A_1} = \rho\,g\,(h + x)$$

$$\frac{W}{A_1} = \rho\,g\,(h + \frac{A_2}{A_1}h)$$

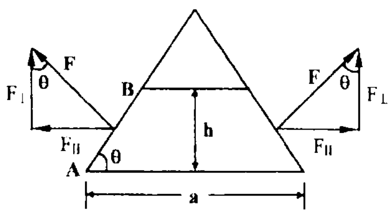
$$h = \frac{m}{\rho\,(A_1 + A_2)}$$

$$h = \frac{80}{(100+10)(10^{-4})(10^{3})}$$

♣ $h = 7{,}27$ m (D)

Solución: 59

• Representemos las fuerzas sobre las caras laterales del recipiente, debido a la presión del agua.



Como la presión del agua varía linealmente así, en el nivel B es nula y en A es $\rho g h$, entonces la presión madia es:

$$P_m = \frac{(\rho g h + 0)}{2}$$

Ahora, la fuerza F sobre las caras laterales del recipiente, debido a la presión del agua, es:

$$F = P_m A = (\frac{1}{2}\rho\ g\ h)(\frac{bh}{\operatorname{sen}\theta})$$

$$F = \frac{\rho\ g\ b\ h^2}{2\operatorname{sen}\theta}$$

Luego, en la Fig., la fuerza sobre la base del recipiente, será la suma de las componentes verticales de F, esto es:

$$f = 2F_\perp = 2F\cos\theta$$

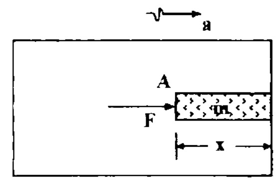
$$f = \rho g b h^2 \operatorname{ctg}\theta$$

$$f = (10^3)(10)(15.10^{-2})(10^{-1})^2(\frac{4}{3})$$

♣ $f = 20$ N (C)

Solución: 60

• Representemos en el recipiente una cierta cantidad de agua de masa (m), contenida en el volumen de área "A" y ancho "x".



En la Fig., sea P la presión a una distancia x de la cara derecha del depósito, entonces aplicando la segunda ley de Newton, a la masa (m) de agua, se tiene:

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad PA = \rho A x a$$

$$P = \rho a x$$

Así, la presión es la misma para todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de la cara derecha, además, esta presión varía linealmente según (x), por lo que su valor máximo es $\rho a \ell$ y el mínimo 0, de modo que la presión media es:

$$P_m = \frac{0 + \rho\ a\ \ell}{2} = \frac{1}{2}\rho\ a\ell$$

Finalmente, la fuerza total ejercida sobre la tapa superior del recipiente es:

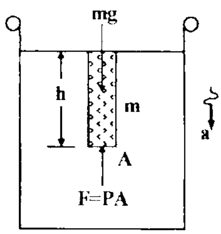
$$F = P_m A = (\frac{1}{2}\rho a \ell)(\ell d)$$

$$F = \frac{1}{2}\rho a \ell^2 d = \frac{1}{2}(10^3)(3)(2.10^{-1})^2(10^{-1})$$

♣ $F = 6$ N (C)

Solución: 61

• Representemos en el recipiente una cierta cantidad de agua de masa (m), contenida en el volumen de área A y altura h.



En la Fig., apliquemos a la masa de agua (m), la segunda ley de Newton, así:

$$F_R = m\,a \quad \Rightarrow \quad m\,g - PA = m\,a$$

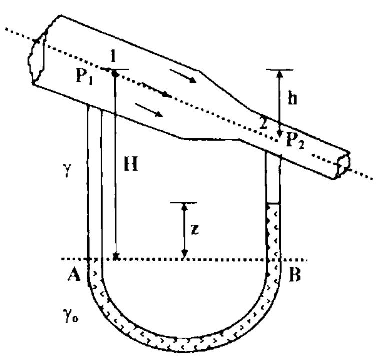
$$PA = \rho\,h A(g-a) \Rightarrow P = \rho\,h\,(g-a)$$

$$P = (10^3)(0,25)(10-2)$$

$$\clubsuit \ P = 2.10^3 \frac{N}{m^2}$$ (B)

Solución: 62

• Representemos el tubo de Venturi, que se utiliza para medir la presión en las corrientes de fluidos.



En la Fig., los puntos A y B se encuentra a la misma presión (isobara), esto es:

$$P_A = P_B$$

$$P_1 + \gamma H = P_2 + \gamma(H - h - z) + \gamma_o z$$

$$P_1 - P_2 = \gamma_o z - \gamma\,(h+z)$$

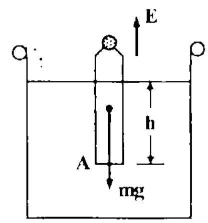
$$\Delta P_{12} = (\gamma_o - \gamma)\,z - \gamma\,h$$

$$\Delta P_{12} = (13,6-1)(10^4)(5.10^{-2}) - (10^4)(3.10^{-2})$$

$$\clubsuit \ \Delta P_{12} = 6k\ Pa$$ (D)

Solución: 63

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el hidrómetro, cuando se sumerge parcialmente en el líquido.



Por equilibrio, cuando el hidrómetro se sumerge en el líquido (1), el empuje es igual a su peso, esto es:

$$E = W$$

$$\rho_1 \rho_{H20}\, g\, A h_1 = W$$

$$h_1 = \frac{W}{\rho_1 \rho_{H20} g A}$$

Por lo mismo, cuando el hidrómetro se sumerge en el líquido (2), la altura es:

$$h_2 = \frac{W}{\rho_2\, \rho_{H20}\, g\, A}$$

Luego, la diferencia de alturas (niveles), al canzada en cada uno de los líquidos es:

$$h_2 - h_1 = \frac{W}{g\,A\,\rho_{H20}}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)$$

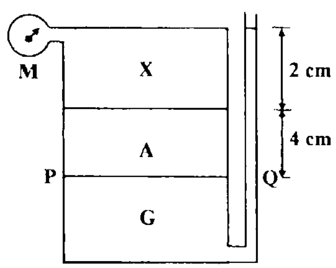
$$W = \frac{\gamma_{H20}\ A\ \Delta h\ \rho_1\ \rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)}$$

$$W = \frac{(10^4)(0{,}2.10^{-4})(20.10^{-2})(1{,}2)(0{,}9)}{(1{,}2 - 0{,}9)}$$

$$\clubsuit\ W = 144.10^{-3}\ N \qquad \text{(C)}$$

Solución: 64

• Representemos las tres sustancias contenidas en el recipiente y una isobara.



En la Fig., los puntos P y Q están a la misma presión, esto es:

$$P_P = P_Q$$

$$P_M + \rho_x g h_x + \rho_A g h_A = \rho_G g(h_x + h_A)$$

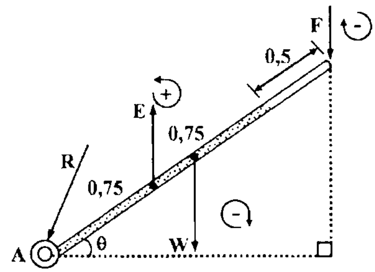
$$\rho_x = \frac{\rho_G g(h_x + h_A) - \rho_A g h_A - P_M}{g h_x}$$

$$\rho_x = \frac{(1250)(2+4) - (850)(4) - 3{,}5.10^3}{2}$$

$$\clubsuit\ \rho_x = 300\ kg/m^3 \qquad \text{(E)}$$

Solución: 65

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la barra sumergida parcialmente.



Hallemos el área de la sección transversal de la barra, así:

$$m = \rho V = \rho_r \rho_{H20}\,\ell A$$

$$A = \frac{m}{\rho_r\,\rho_{H20}\,\ell}$$

Ahora, calculemos los valores del empuje (E) y el peso de la barra (W), así:

$$E = \rho_{H20}\,g b A = \rho_{H20}\,g b \frac{m}{\rho_r\,\rho_{h20}\,\ell}$$

$$E = \frac{(10)(1{,}5)(10)}{(0{,}5)(2{,}0)} = 150N$$

$$W = mg = (10)(10) = 100N$$

Luego, como la barra está en equilibrio, entonces la suma de momentos, respecto a la rótula A debe ser nula, esto es:

$$M_A^F + M_A^W = M_A^E$$

$$F\,200\cos\theta + W\,100\cos\theta = E\,75\cos\theta$$

$$F = \frac{3E - 4W}{8} = \frac{(3)(150) - (4)(100)}{8}$$

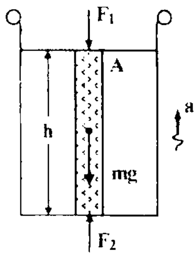
$$\clubsuit\ F = 6{,}25\ N \qquad \text{(C)}$$

☞ **Nota**

Como el momento del peso es menor que la del empuje, entonces F debe ser vertical hacia abajo.

Solución: 66

• Consideremos una columna de agua de masa (m), altura (h), área de sección (A), y representemos las fuerzas que actúan en la dirección del movimiento.



Ahora, apliquemos la segunda ley de Newton, a la columna de agua de masa (m):

$$F_2 - F_1 - mg = ma$$

$$P_2A - P_0A = m(a+g)$$

$$P_2\,A - P_0\,A = \rho\,h\,A\,(a+g)$$

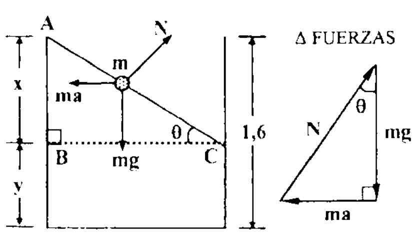
$$P_2 = P_0 + (10^3)(1)(5+10)$$

$$P_2 = P_0 + 0{,}15P_0$$

$$♣\ P_2 = 1{,}15\ P_0 \qquad \text{(B)}$$

Solución: 67

• Consideremos en la superficie libre del agua una partícula de masa (m), y representemos las fuerzas que actúan sobre ella.



En el triángulo de fuerzas, se cumple que:

$$tg\theta = \frac{ma}{mg} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

En la Fig., comparando los triángulos ABC y de fuerzas, hallemos x e y, así:

$$tg\theta = \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1m$$

$$y = 1{,}6 - 1 = 0{,}6\ m$$

Finalmente, calculemos los volúmenes de agua inicial y final, y la cantidad de agua derramada:

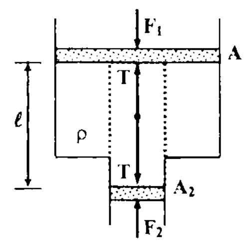
$$V_I = (2)(2)(1{,}25) = 5\ m^3$$

$$V_F = (\frac{1{,}6+0{,}6}{2})(2)(2) = 4{,}4\ m^3$$

$$♣\ \Delta V = 5 - 4{,}4 = 0{,}6\ m^3 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 68

• Representemos las fuerzas que actúan en el sistema físico.



En la Fig., la diferencia de fuerzas en los émbolos, debido a la presión atmosférica, es igual al peso de la columna de agua, esto es:

$$P_0(A_1 - A_2) = \rho g \ell A_2$$

$$P_0 = \frac{\rho g \ell A_2}{A_1 - A_2}$$

Luego, como el émbolo más grande de área A_1 está en equilibrio, se cumple que:

$$T = F_1 = P_0 A_1$$

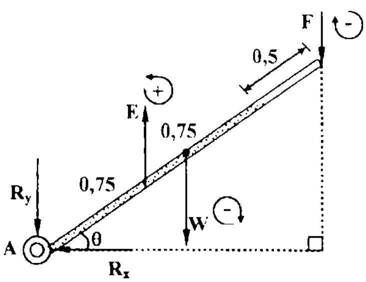
$$T = \frac{\rho g \ell A_1 A_2}{A_1 - A_2}$$

$$T = \frac{(10^3)(10)(10^{-1})(20.10^{-4})(40.10^{-4})}{(40-20).10^{-4}}$$

$$\clubsuit\ T = 4\ N \qquad \text{(D)}$$

Solución: 69

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la barra sumergida parcialmente.



Hallemos el área de la sección transversal de la barra, así:

$$m = \rho V = \rho_r \rho_{H20} \ell A$$

$$A = \frac{m}{\rho_r \rho_{H20} \ell}$$

Ahora, calculemos los valores del empuje (E) y el peso de la barra (W), así:

$$E = \rho_{H20} g b A = \rho_{H20} g b \frac{m}{\rho_r \rho_{h20} \ell}$$

$$E = \frac{(10)(1,5)(10)}{(0,5)(2,0)} = 150\ N$$

$$W = mg = (10)(10) = 100\ N$$

Luego, como la barra está en equilibrio, entonces la suma de momentos, respecto a la rótula A debe ser nula, esto es:

$$M_A^F + M_A^W = M_A^E$$

$$F\,200\cos\theta + W\,100\cos\theta = E\,75\cos\theta$$

$$F = \frac{3E - 4W}{8} = \frac{(3)(150)-(4)(100)}{8}$$

$$F = 6,25\ N$$

Ahora, aplicando la primera condición de equilibrio a la barra, se tiene que:

$$\sum F_x = 0 \ \rightarrow\ R_x = 0$$

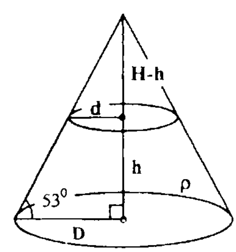
$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow\ E = F + W + R_y$$

$$150 - 100 - 6,25 = R_y$$

$$\clubsuit\ R = R_y = 43,75\ N \qquad \text{(B)}$$

Solución: 70

• Representemos la altura del nivel del agua en el recipiente cónico.



La fuerza que ejerce la pared lateral del recipiente cónico sobre su base, es igual, a la fuerza debida a la presión media del agua contenida en el, esto es:

$$F = \left(\frac{\rho g h + 0}{2}\right)\pi\,(D^2 - d^2)$$

$$F = \frac{1}{2}\rho\ g\ h\pi\ [H^2 - (H-h)^2]\ \text{ctg}^2\theta$$

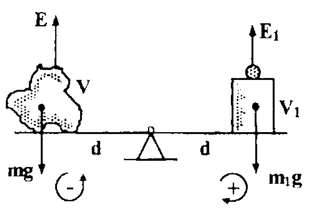
$$F = \frac{1}{2}(10^3)(10)(8.10^{-2})$$

$$\bullet(\pi)[16^2 - 8^2](10^{-4})(3/4)^2$$

$$♣\ F = 4{,}32\pi\ N \qquad \text{D}$$

Solución: 71

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y la pesa, cuando ambos están sobre la balanza de brazos.



Primero, hallemos el volumen (V_1) de la pesa de cobre, a partir de:

$$\rho_1 = m/V_1 \quad => \quad V_1 = m/\rho_1$$

Ahora, como el brazo de la balanza está en posición horizontal, la suma de momentos respecto de su centro (0) debe ser cero, esto es:

$$(mg - E)d = (m_1 g - E_1)d$$

$$mg - \rho_o g V = m_1 g - \rho_o g V_1$$

$$m = m_1 + \rho_o(V - V_1)$$

Luego, el error en porcentaje cometido al pesar el cuerpo en el aire es:

$$N = (\frac{\Delta m}{m})(100) = (\frac{m - m_1}{m})(100)$$

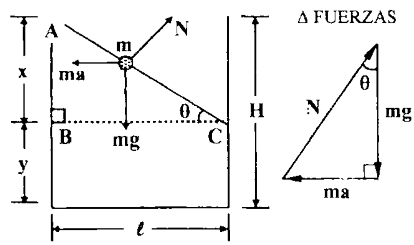
$$N = [\frac{\rho_o(V - m_1/\rho_1)}{m_1 + \rho_o(V - m_1/\rho_1}](100)$$

$$N = [\frac{(1{,}29.10^{-3})(10^3 - 800/8{,}8)}{800 + (1{,}29.10^{-3})(10^3 - 800/8{,}8)}](100)$$

$$♣\ N = 0{,}146\ \% \qquad \text{B}$$

Solución: 72

• Consideremos en la superficie libre del agua una partícula de masa (m), y representemos las fuerzas que actúan sobre ella.



En el triángulo de fuerzas, se cumple que:

$$\text{tg}\theta = ma/mg = a/g$$

En la Fig. comparando los triángulos ABC y de fuerzas, hallamos x e y, así:

$$x = \ell\text{tg}\theta = \frac{a}{g}\ell \quad => \quad y = H - \frac{a}{g}\ell$$

Finalmente, por dato el volumen final es el mismo que el inicial, esto es:

$$V_I = V_F$$

$$\ell\ h\ p = (\frac{H - a\ell/g + H)}{2}\ \ell\ p$$

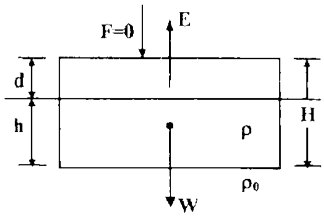
$$2h = 2H - \frac{a}{g}\ell \quad => \quad a = \frac{2(H-h)g}{\ell}$$

$$a = \frac{(2)(20-10).10^{-2}(10)}{20.10^{-2}}$$

$$♣\ a = 10\ \frac{m}{s^2} \qquad \text{B}$$

Solución: 73

• Representemos las fuerzas que actúan inicialmente sobre el témpano de hielo.



En la Fig., la fuerza externa es nula, y el peso del témpano es igual al empuje del agua, esto es:

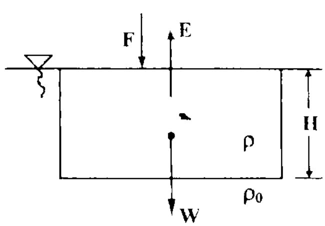
$$\rho g A H = \rho_o g A h$$

$$h = \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right) H$$

Así, la altura del témpano que está por encima de la superficie del agua es:

$$d = H - h = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_o}\right) H$$

Ahora representemos el témpano de hielo, cuando está sumergido completamente en el agua.



Como el témpano está en equilibrio, la fuerza externa (F) más el peso (W), es igual, al empuje (E), esto es:

$$F + W = E$$

$$F = (\rho_o - \rho) g A H$$

De modo que, la fuerza media empleada para hundir el témpano una altura (d) es:

$$F_m = \frac{0 + (\rho_o - \rho) g A H}{2}$$

Luego, el trabajo realizado para hundir el témpano totalmente es:

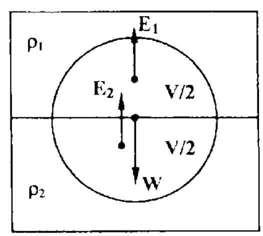
$$W = F_m d = \frac{1}{2} \frac{(\rho_o - \rho)^2}{\rho_o} g A H^2$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{(1000 - 900)^2}{1000} (10)(1)(0,4)^2$$

$$\clubsuit \quad W = 8 \text{ J} \qquad \text{D}$$

Solución: 74

• Representemos la esfera compacta sumergida en dos líquidos diferentes.



Según el principio de Arquímedes, la suma de los empujes de los líquidos (1) y (2), es igual, al peso del cuerpo, esto es:

$$E_1 + E_2 = W$$

$$\rho_{r,1} \rho_{H20} g\left(\frac{V}{2}\right) + \rho_{r,2} \rho_{H20} g\left(\frac{V}{2}\right) = \gamma V$$

$$\frac{1}{2}(\rho_{r,1} + \rho_{r,2}) \rho_{H20} g = \gamma$$

$$\frac{1}{2}(0,8 + 1,2)(1000)(10) = \gamma$$

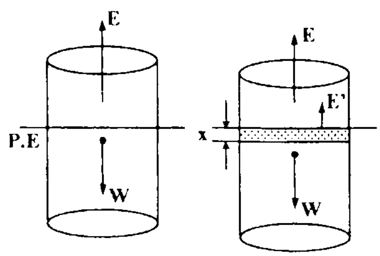
$$\clubsuit \quad \gamma = 10.10^3 \text{ N/m}^3 \qquad \text{A}$$

☞ **Nota**

Recordar que la densidad de una sustancia es: $\rho = \rho_r \rho_{H20}$.

Solución: 75

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la boya, cuando este ha sido sumergida una pequeña altura (x).



En la Fig., la fuerza que produce las oscilaciones es el empuje adicional (E') del agua sobre la boya, así:

$$F = E' = \gamma A x = \gamma \frac{1}{4}\pi D^2 x$$

$$F = kx = (\frac{1}{4}\pi\,\gamma\,D^2)\,x$$

De aquí, deducimos que la constante elástica (k) del resorte es:

$$k = \pi\,\gamma\,D^2 / 4$$

Luego, el período de las oscilaciones armónicas simples, que realiza la boya alrededor de su posición de equilibrio es:

$$T = 2\pi\,[\frac{m}{k}]^{1/2} = 2\pi\,[\frac{m}{\pi\gamma D^2/4}]^{1/2}$$

$$T = (2\pi)[\frac{(100)(4)}{(\pi)(10^4)(20.10^{-2})^2}]^{1/2}$$

♣ $T \approx 3{,}5$ s (D)

☞ **Nota**

Por ser las oscilaciones armónicas simples la fuerza que produce las oscilaciones es del tipo de Hooke F = k.x.

Solución: 76

• Como el recipiente está en equilibrio, la fuerza debido a la presión de la columna de agua de altura (h), es igual, al peso (W) del recipiente, esto es:

$$F = W \quad \Rightarrow \quad PA = W$$

$$\rho g h \pi (R^2 - r^2) = W$$

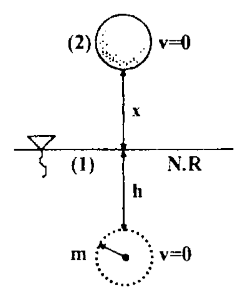
$$h = \frac{W}{\pi g \rho (R^2 - r^2)}$$

$$h = \frac{113{,}1}{\pi(10)(10^3)(8^2 - 4^2)(10^{-4})}$$

♣ $h = 0{,}75$ m (C)

Solución: 77

• Representemos la pelota en los instantes en que se suelta (1), y alcanza su máxima altura (2).



Según, el principio de conservación de la energía mecánica, la energía potencial en (2) es igual, a la energía potencial en (1) del peso aparente (W_a), esto es:

$$E_{P,2} = E_{P,1}$$

$$mgx = (\frac{4}{3}\pi R^3\rho - m)gh$$

$$x = \frac{(4\pi R^3\rho/3 - m)h}{m}$$

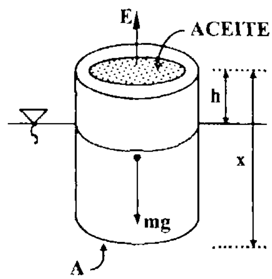
$$x = \frac{[(4\pi)(9.10^{-2})^3(10^3)/3 - 1](1)}{1}$$

$$♣\ x = 2{,}05\ m \approx 2\ m \quad \text{(D)}$$

Las energías potenciales, por debajo del nivel de referencia, se consideran negativas.

Solución: 78

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el tubo que flota en agua.



Por condición de equilibrio, el peso del aceite (mg), es igual, al empuje del agua (E), esto es:

$$\rho_o\, g\, A\, x = \rho\, g\, A\,(x - h)$$

$$x = \frac{\rho\, h}{(\rho - \rho_o)} = \frac{(1)(5)}{(1 - 0{,}9)}$$

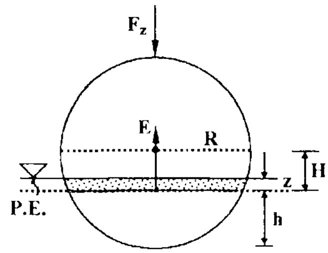
$$♣\ x = 50\ cm \quad \text{(E)}$$

☞ **Nota**

Las paredes del tubo son muy delgadas.

Solución: 79

• La fuerza necesaria (F_z) para hundir la pelota una pequeña altura (z), a partir de la posición de equilibrio (P.E.), es igual a la del empuje del agua contenida en el volumen sombreado, esto es:



$$F_z = \rho g V_S$$

Recordemos que el volumen de un segmento esférico de altura (h) y radio R, viene dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$$

En la Fig., el volumen de agua desalojado (V_S), que es el volumen de una zona esférica, es la diferencia de los volúmenes de los segmentos esféricos de alturas (z+h) y h, esto es:

$$V_S = \frac{1}{3}(z+h)^2[3R - (z+h)] - \frac{1}{3}\pi h^2[3R - h)]$$

De modo que, la expresión de la fuerza F_z, queda así:

$$F_z = \frac{\pi\rho_o g}{3}[3R(z+h)^2 - (z+h)^3 - h^2(3R - z)]$$

Luego, el trabajo necesario para hundir la pelota hasta la mitad de su volumen es:

$$W = \int_0^H F_z dz$$

$$W = \frac{\pi\rho_o g}{3}[\int_0^H 3R(z+h)^2 dz - \int_0^H (z+h)^3 dz -$$

$$-\int_0^H h^2(3R-h)]dz$$

$$W=\frac{\pi\rho_o g}{3}[R(z+h)^3-\frac{1}{4}(z+h)^4$$

$$-h^2(3R-h)z]\Big|_0^H$$

$$W=\frac{\pi\rho_o g}{3}[R(H+h)^3-\frac{1}{4}(H+h)^4$$

$$-h^2(3R-h)H-Rh^3+\frac{1}{4}h^4]$$

Sustituyendo en esta ecuación: $h+H=R$, y $h=R-H$, obtenemos la solución literal y numérica, respectivamente, así:

$$W=\frac{\pi\rho_o g}{3}[\frac{3}{4}R^4-(R-H)^2(2R+H)H$$

$$-R(R-H)^3+\frac{1}{4}(R-H)^4]$$

siendo, ρ_o la densidad del agua.

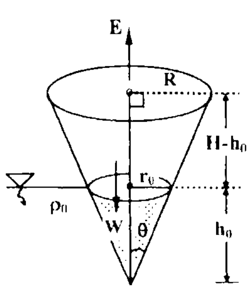
$$W=\frac{\pi(10^3)(10)}{3}[\frac{3}{4}(10)^4-(1)(29)(9)$$

$$-10+\frac{1}{4}](10^{-8})$$

$$♣\ W\approx 0{,}76\ J \qquad \text{(E)}$$

Solución: 80

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cono compacto.



En la Fig., el cono compacto flota en equilibrio, siendo su peso (W), igual, al empuje (E) del agua, esto es:

$$E=W \quad => \quad \rho_o g V_S=\rho g V$$

$$\rho_o\frac{1}{3}\pi r_o^2 h_o=\rho\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$\rho_o(h_o tg\theta)^2 h_o=\rho(Htg\theta)^2 H$$

$$\frac{\rho_o}{\rho}=(\frac{H}{h_o})^3=(\frac{40}{20})^3$$

$$♣\ \rho_o/\rho=8 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 81

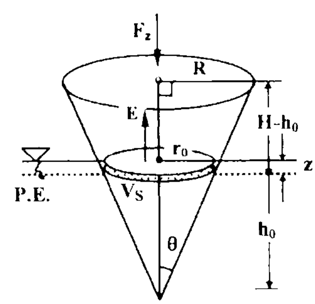
• Primero, hallemos la altura (h_0) sumergida del cono, igualando el empuje (E) del agua a su peso (W), esto es:

$$E=W \quad => \quad \rho_o g V_S=\rho g V$$

$$\rho_o\frac{1}{3}\pi r_o^2 h_o=\rho\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$\rho_o(h_o tg\theta)^2 h_o=\rho(Htg\theta)H$$

$$h_o=(\frac{\rho}{\rho_o})^{1/3}H$$



En la Fig., la fuerza (F_z) necesaria para sumergir el cono una altura (z), a partir de su posición de equilibrio (P.E.), es igual, al empuje del agua contenida en el volumen sombreado (V_S), esto es:

$$F_z = \rho_o g V_S$$

$$F_z = \rho_o g[\frac{1}{3}\pi(h_o + z)^3 tg^2\theta - \frac{1}{3}\pi h_o^3 tg^2\theta]$$

$$F_z = \frac{\pi\rho_o g tg^2\theta}{3}[(z+h_o)^3 - h_o^3]$$

Luego, el trabajo que se debe hacer para hundir por completo al cono es:

$$W = \int_0^{H-h_0} F_z dz$$

$$W = \frac{\pi\,\rho_o g\, tg^2\theta}{3}\int_0^{H-h_0}[(z+h_o)^3 - h_o^3]\,dz$$

$$W = \frac{\pi\,\rho_o g\, tg^2\theta}{3}[\frac{1}{4}(z+h_o)^4 - h_o^3 z]\Big|_0^{H-h_o}$$

$$W = \frac{\pi\,\rho_o g\, tg^2\theta}{3}[\frac{H^4}{4} - h_o^3(H-h_o) - \frac{h_o^4}{4}]$$

$$W = \frac{\pi\,\rho_o g\, H^4 tg^2\theta}{3}[\frac{1}{4} - \frac{\rho}{\rho_o}(1-(\frac{\rho}{\rho_o})^{1/3}) - \frac{1}{4}(\frac{\rho}{\rho_o})^{4/3}]$$

$$W = \frac{\pi\,\rho_o g\, H^4 tg^2\theta}{3}[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}(1-(\frac{1}{8})^{1/3}) - \frac{1}{4}(\frac{1}{8})^{4/3}]$$

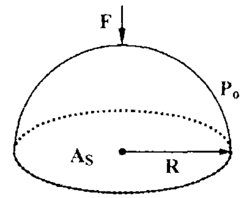
$$W = \frac{11\pi\,\rho_o g\, H^4 tg^2\theta}{192}$$

$$W = \frac{(11\pi)(10^3)(10)(3.10^{-1})^4 tg^2 30°}{192}$$

♣ $W = 4{,}86$ J Ⓓ

Solución: 82

• Representemos la fuerza resultante (F) debido a la presión, sobre uno de los hemisferios.



En la Fig., para separar los hemisferios, será necesario al menos aplicar una fuerza de igual magnitud, pero de sentido opuesto a (F), esto es:

$$F = P_0 A_S = P_0 \pi R^2$$

$$F = 10^5\pi(5.10^{-2})^2$$

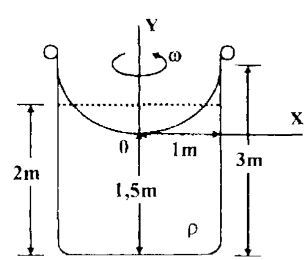
♣ $F = 250\pi N$ Ⓓ

☞ **Nota**

Anteriormente se demostró, que para calcular la fuerza debida a la presión, se puede utilizar la proyección del área lateral del hemisferio, sobre su base

Solución: 83

• Representemos el recipiente con agua, girando alrededor de su eje de simetría.



I). La fuerza total en el fondo del recipiente con agua, viene dado por:

$$F = P A = \rho g h A$$

$$F = \rho g h \frac{1}{4} \pi D^2$$

$$F = (10^3)(10)(2)(\frac{1}{4}\pi)(2^2)$$

$$\clubsuit \quad F = 20\pi \text{ kN} \qquad \text{(B)}$$

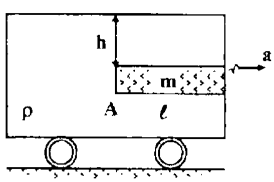
II). De otro lado, según teoría, la velocidad angular, con la que gira el recipiente, viene dado por:

$$\omega = (\frac{2 y g}{x^2})^{1/2} = [\frac{(2)(1,5)(10)}{1^2}]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad \omega = 5,5 \text{ rad/s} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 84

• En el recipiente tomemos una columna de agua de área de sección transversal "A" y longitud "ℓ".



Aplicando la segunda ley de Newton, a la columna de agua de masa (m), la presión en la sección A, debida a la aceleración es:

$$F = m a$$

$$P_1 A = \rho \ell A a$$

$$P_1 = \rho \ell a$$

También, la presión en la sección de área "A" debida a la cantidad de agua que está por encima de ella es:

$$P_2 = \rho g h$$

Luego, como las presiones en todas las direcciones es la misma, la presión total en la sección A es:

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = \rho (g h + a \ell)$$

$$P = (10^3)[(10)(0,5) + (5)(1)]$$

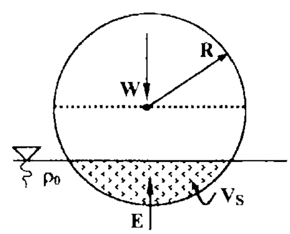
$$\clubsuit \quad P = 10 \text{ kPa} \qquad \text{(A)}$$

☞ **Nota**

La tapa del recipiente está herméticamente cerrado (P = 0)

Solución: 85

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la pelota, sumergida parcialmente.



En la Fig., la pelota flota en equilibrio, siendo su peso igual al empuje, esto es:

$$E = W \quad \Rightarrow \quad \rho_o g V_S = \rho g V$$

$$\rho_o \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h) = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$h^2 (3R - h) = 4 (\frac{\rho}{\rho_o}) R^3$$

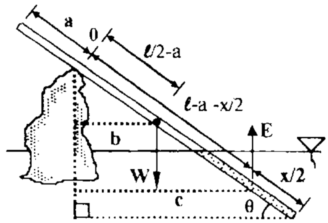
$$h^2 (30 - h) = (4)(1/2)(10)^3$$

$$h^2 (30 - h) = 10^2 (30 - 10)$$

$$\clubsuit \quad h = 10 \text{ cm} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 86

- Representemos las fuerzas que actúan sobre la barra en equilibrio.



En la Fig., como la barra está en equilibrio, el momento del peso, es igual, al momento del empuje, respecto de 0, esto es:

$$M_0^W = M_0^E \;\Rightarrow\; Wb = Ec$$

$$W(\frac{\ell}{2} - a)\cos\theta = E(\ell - a - \frac{x}{2})\cos\theta$$

$$\rho g \ell A(\frac{\ell}{2} - a) = \rho_o g x A(\ell - a - \frac{x}{2})$$

siendo, A el área de la sección transversal de la barra. Luego, simplificando y ordenando la última ecuación, obtenemos la ecuación cuadrática para "x", así:

$$x^2 - 2(\ell - a)x + \frac{\rho}{\rho_o}\ell(\ell - 2a) = 0$$

Las dos raíces de esta ecuación son:

$$x = (\ell - a) \pm [(\ell - a)^2 - \frac{\rho}{\rho_o}\ell(\ell - 2a)]^{1/2}$$

Como, $x < \ell - a$, entonces la solución es:

$$x = (\ell - a) - [(\ell - a)^2 - \frac{\rho}{\rho_o}\ell(\ell - 2a)]^{1/2}$$

$$x = (5 - 1) - [(5 - 1)^2 - \frac{1}{2}(5)(5 - 2)]^{1/2}$$

♣ $x \approx 1{,}1$ m (C)

Solución: 87

- Según el prob.(73), el trabajo para hundir completamente al cubo de arista (a), viene dado por:

$$W = \frac{1}{2}\frac{(\rho_o - \rho)^2}{\rho_o} g a^4$$

Asimismo, el trabajo para hundir el cubo de arista (2a) del mismo material es:

$$W' = \frac{1}{2}\frac{(\rho_o - \rho)^2}{\rho_o} g (2a)^4$$

♣ $W' = 16\,W$ (D)

Solución: 88

- Del prob.(73), la razón de los trabajos realizados para hundir completamente los cubos de diferentes materiales es:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{(\rho_o - \rho_1) g A H^2 / 2\rho_o}{(\rho_o - \rho_2) g A H^2 / 2\rho_o}$$

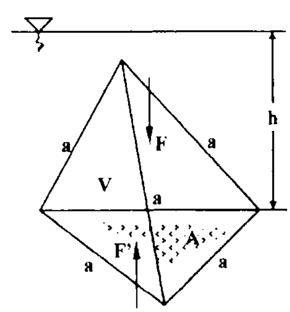
$$\frac{W_1}{W_2} = (\frac{\rho_o - \rho_1}{\rho_o - \rho_2})^2$$

$$\frac{W_1}{W_2} = (\frac{1000 - 400}{1000 - 600})^2$$

♣ $\frac{W_1}{W_2} = 2{,}25$ (B)

Solución: 89

- Representemos las fuerzas que actúan sobre el tetraedro.



En la Fig., el empuje (E), es la resultante de la fuerza (F') debido a la presión total, que actúa hacia arriba sobre la base, y la fuerza resultante (F) sobre las caras laterales que actúa hacia abajo, esto es:

$$E = F' - F \quad \Rightarrow \quad F = F' - E$$

$$F = (\rho g h + P_o)A - \rho g V$$

$$F = (\rho g h + P_o)(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2) - \rho g(\frac{\sqrt{2}}{12}a^3)$$

$$F = \frac{1}{12}\rho g a^2(3\sqrt{3}h - \sqrt{2}a) + \frac{\sqrt{3}}{4}P_o a^2$$

$$F = (\frac{1}{12})(10^3)(10)(0{,}5^2)(3\sqrt{3} - 0{,}5\sqrt{2})$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{4}(10^5)(0{,}5^2)$$

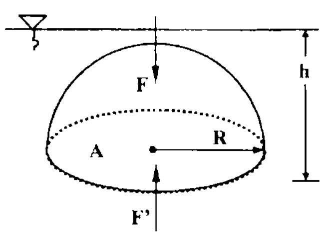
$$\clubsuit \; F = 11{,}8 \text{ kN} \qquad (E)$$

☞ **Nota**

El tetraedro está en equilibrio, siendo su peso (W), igual, al empuje (E).

Solución: 90

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el hemisferio.



En la Fig., el empuje (E), es la resultante de la fuerza (F') debido a la presión total, que actúa hacia arriba sobre la base, y la fuerza resultante (F) sobre la superficie lateral que actúa hacia abajo, esto es:

$$E = F' - F \quad \Rightarrow \quad F = F' - E$$

$$F = (P_o + \rho g h)A - \rho g V$$

$$F = (P_o + \rho g h)(\pi R^2) - \rho g(\frac{2}{3}\pi R^3)$$

$$F = \pi R^2 P_o + \pi \rho g R^2(h - \frac{2}{3}R)$$

Luego, la fuerza sobre la superficie lateral del hemisferio, debida a la presión que ejerce el líquido es:

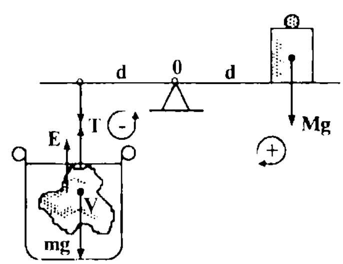
$$F_L = \pi \rho g R^2(h - \frac{2}{3}R)$$

$$F_L = (\pi)(10^3)(10)(0{,}3)^2[0{,}4 - (\frac{2}{3})(0{,}3)]$$

$$\clubsuit \; F_L = 180\pi \text{ N} \qquad (E)$$

Solución: 91

• Representemos la balanza de brazos, y el cuerpo sumergido en el líquido.



Aplicando la primera condición de equilibrio al cuerpo de masa (m).

$$T = mg - E = mg - \rho_o g V$$

$$T = mg - \rho_o g(\frac{m}{\rho})$$

Aplicando la segunda condición de equilibrio, respecto del punto de giro 0, y utili zando la ecuación anterior.

$$Td = Mgd$$

$$mg - mg(\frac{\rho_o}{\rho}) = Mg$$

$$\rho_o = (\frac{m - M}{m})\rho = (\frac{250 - 180}{250})(2,5)$$

$$♣\ \rho_o = 0,7\ g/cm^3$$ (D)

Solución: 92

• Del prob.(91), cuando un cuerpo de masa (m) y densidad (ρ), se pesa sumergido en cierto líquido, utilizando una pesa de masa (M), la densidad del líquido es:

$$\rho_o = (\frac{m - M}{m})\rho$$

De esta expresión, dividiendo las densidades de los líquidos ρ_1 (desconocido) y ρ_o (agua), tenemos:

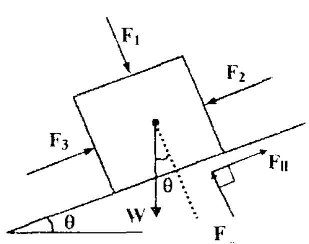
$$\frac{\rho_1}{\rho_o} = \frac{(m - M_1/m)\rho}{(m - M_o)m)\rho}$$

$$\rho_1 = (\frac{m - M_1}{m - M_0})\rho_o = (\frac{180 - 144}{180 - 150})(1)$$

$$♣\ \rho_1 = 1,2\ g/cm^3$$ (A)

Solución: 93

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cubo, debido a la presión del líquido y a la reacción de la base del recipiente.



En la Fig., las expresiones de las fuerzas, debidas a la presión del líquido son:

$$F_1 = \frac{1}{2}\rho_o g(2h + a sen\theta)a^2$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\rho_o g(2h + a cos\theta)a^2$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\rho_o g(2h + 2a sen\theta + a cos\theta)a^2$$

Así, las magnitudes de las componentes de la fuerza que ejerce el cubo sobre la base del recipiente, en las direcciones paralela y perpendicular a dicha base son:

$$F_{II} = F_2 - W sen\theta - F_3$$

$$F_{II} = ga^3(\rho - \rho_o)sen\theta$$

$$F_{II} = (10)(0,20)^3(7000 - 1000)sen 30^o$$

$$F_{II} = 240\ N$$

$$F_{\perp} = F_1 - W cos\theta$$

$$F_{\perp} = \frac{1}{2}\rho_o g(2h + a\ sen\theta)\,a^2 + \rho\,g\,a^3 cos\theta$$

$$F_{\perp} = \rho_o g a^3(\frac{\rho}{\rho_o}cos\theta + \frac{1}{2}sen\theta + \frac{h}{a})$$

$$F_{\perp} = (10^3)(10)(0,2)^3[(\frac{7000}{1000})\cos 30^o + \frac{1}{2}sen\ 30^o + \frac{1}{0,2}]$$

$$F_{\perp} \approx 905N$$

Luego, la magnitud de la fuerza ejercida por el cubo, sobre la base del recipiente es:

$$F = [240^2 + 905^2]^{1/2}$$ (E)

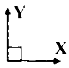
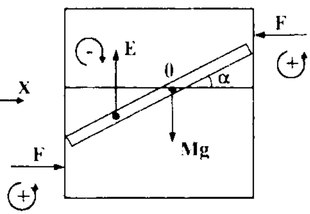
$$♣\ F = 936,2\ N$$

☞ **Nota**

Por la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la base del recipiente sobre el cubo, es igual, en magnitud pero de sentido opuesto al que ejerce el cubo sobre la base.

Solución: 94

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el palillo, sumergido parcialmente en agua.

Aplicando la primera condición de equilibrio, tenemos:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad E = Mg$$

Ahora, aplicando la segunda condición de equilibrio, respecto de 0, y sustituyendo E, obtenemos F, así:

$$\sum M_0 = 0$$

$$E(\frac{\ell}{4}\cos\alpha) = F(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\alpha) + F(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\alpha)$$

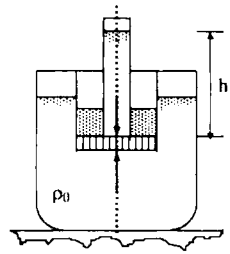
$$F = \frac{1}{4}M\,g\,\operatorname{ctg}\alpha$$

$$F = \frac{1}{4}(12)(10)(\frac{4}{3})$$

♣ $F = 40\ N$ (B)

Solución: 95

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el émbolo, debidas al peso y a la presión del líquido.



Como el émbolo está en equilibrio, la presión en la cara superior de área (A_1), es igual, a la presión en la cara inferior de área (A_2), esto es:

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{\rho_0 g h}{A_1} = \frac{mg + \rho_0 g h}{A_2}$$

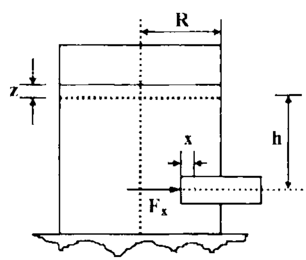
$$h = \frac{m}{\rho_0(A_2 - A_1)}$$

$$h = \frac{20}{(10^3)[\pi(0,1)^2 - \pi(0.05)^2]}$$

♣ $h = 0,849\ m \approx 85\ cm$ (C)

Solución: 96

• Representemos la fuerza que actúa sobre el tapón.



En la Fig., el volumen de agua de longitud (x) desplazada por el tapón, es igual, al volumen de agua de altura (z) que asciende el nivel del agua, esto es:

$$\pi r^2 x = \pi R^2 z$$

$$z = \frac{r^2}{R^2} x$$

Así, la fuerza sobre la base izquierda del tapón cilíndrico, debida a la presión del agua es:

$$F_x = P\,A = \rho_o g\,(h + z)\,\pi\,r^2$$

$$F_x = \pi\,r^2 \rho_o g\,(h + \frac{r^2}{R^2} x)$$

Luego, el trabajo que se debe hacer para introducir el tapón una longitud (ℓ), venciendo la fuerza de la presión del agua es:

$$W = \int_0^{\ell} F_x\,dx$$

$$W = \pi\,r^2 \rho_o g \int_0^{\ell} (h + \frac{r^2}{R^2} x)\,dx$$

$$W = \pi\,r^2 \rho_o g\,\{(hx)\big]_0^{\ell} + \frac{1}{2}(r^2 x^2 / R^2)\big]_0^{\ell}\}$$

$$W = \pi\,r^2 \rho_o g\,\ell\,(h + \frac{r^2}{2R^2}\ell)$$

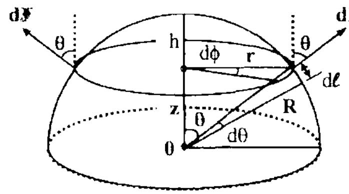
$$W = \pi\,(0{,}1)^2 (10^3)(10)(0{,}2)\ [1 + \frac{1}{2}(\frac{10}{40})^2 (0{,}2)]$$

♣ $W = 63{,}22\ \text{J}$ (B)

<<Analice el caso cuando R>>r>>

Solución: 97

- Dividamos el hemisferio en muchos anillos y representemos la fuerza de la presión del agua sobre dos diferenciales de anillo, situados simétricamente respecto de 0.



De la Fig., deducimos que el radio (r) del anillo, la altura de agua (h), y el área (dA) de los diferenciales de anillo son:

$$r = R\operatorname{sen}\theta\ ,\ \ z = R\cos\theta$$

$$h = R - z = R(1 - \cos\theta)$$

$$dA = r\,d\phi\,dl = r\,d\phi\,R\,d\theta$$

Ahora, la fuerza debida a la presión del agua, sobre cada uno de estos diferenciales de anillo es:

$$dF = P\,dA = \rho_o g h\,dA$$

Como se observa en la Fig., las componentes de estas fuerzas paralelas a la base del hemisferio se anulan, así, la fuerza resultante sobre los diferenciales de anillo es:

$$dF_R = 2\,dF\cos\theta$$

$$dF_R = 2\rho_o g R^3 (\cos\theta - \cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\phi\,d\theta$$

Integrando sobre el anillo, y luego sobre el hemisferio, obtenemos la fuerza resultante sobre el hemisferio debido a la presión del agua, así:

$$\int_0^{F_R} dF_R = 2\,\rho_o g\,R^3 \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} (\cos\theta - \cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$F_R = 2\rho_o g R^3 (\phi)\big]_0^{\pi} (-\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos^3\theta}{3})\Big]_0^{\pi}$$

$$F_R = \frac{\pi\rho_o g R^3}{3}$$

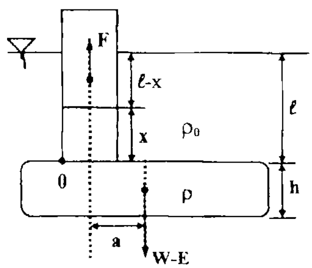
Finalmente, esta fuerza debe ser igual al peso del hemisferio, esto es:

$$mg = \frac{\pi\rho_0 g R^3}{3} \Rightarrow m = \frac{(\pi)(1)(3^3)}{3}$$

$$\clubsuit \quad m = 9\pi \text{ g} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 98

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el disco.



W - E = Peso del disco menos el empuje.
F = Fuerza debido a la presión de la columna de agua de altura $\ell - x$.

En la Fig. (x) es la altura del agua vertida en el tubo, luego, por la segunda condición de equilibrio, los momentos del (W-E) y F, respecto del punto 0, deben ser iguales, esto es:

$$Fr = (W - E)(r + a)$$

$$\rho_o g \pi r^2 (\ell - x) r = (\rho - \rho_o) g \pi R^2 (r + a)$$

$$x = \ell - (1 + \frac{a}{r})(\frac{\rho}{\rho_o} - 1)(\frac{R}{r})^2 h$$

$$x = 105{,}6 - (1 + \frac{8}{5})(\frac{2000}{1000} - 1)(\frac{15}{5})^2 (4)$$

$$x = 105{,}6 - 93{,}6$$

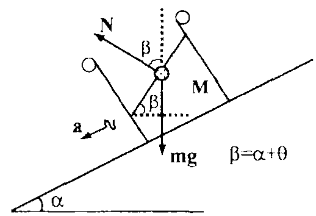
$$\clubsuit \quad x = 12 \text{ cm} \qquad \text{(B)}$$

Nota

* La fuerza F actúa hacia arriba, pues, al faltarle al tubo una cantidad de agua de altura $(\ell - x)$, el disco tiende a girar en sentido horario.
* Es interesante el caso particular $a = 0$.

Solución: 99

• Representemos el recipiente con el líquido y representemos las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa (m) de la superficie libre del líquido.



Aplicando la segunda ley de Newton, al movimiento del recipiente, hallemos la aceleración (a), así:

$$M g \operatorname{sen}\alpha - \mu M g \cos\alpha = M a$$

$$a = (\operatorname{sen}\alpha - \mu \cos\alpha) g \qquad (1)$$

Ahora, apliquemos la segunda ley de Newton, a la partícula de masa (m), en las direcciones horizontal y vertical, así:

$$N \operatorname{sen}\beta = m a \cos\alpha \qquad (2)$$

$$m g - N \cos\beta = m a \operatorname{sen}\alpha$$

$$N \cos\beta = m (g - a \operatorname{sen}\alpha) \qquad (3)$$

Dividiendo (2) entre (3), utilizando (1), y sabiendo que: $\beta = \alpha + \theta$, se tiene:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \mu\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\theta = -\mu \quad \Rightarrow \quad \theta = -\operatorname{tg}^{-1}(\mu)$$

Luego, el ángulo que formará la superficie libre del líquido con la horizontal es:

$$\beta = \alpha - \operatorname{tg}^{-1}(\mu) = 49^o - \operatorname{tg}^{-1}(\frac{3}{4})$$

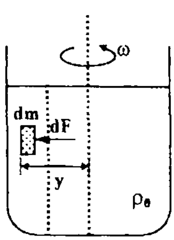
$$\clubsuit\ \beta = 12^o \qquad (B)$$

☞ **Nota**

El ángulo adicional θ, se debe a la aceleración con la que se mueve el recipiente.

Solución: 100

• Representemos las fuerzas que actúan sobre una columna de agua, de masa (dm), área de sección transversal (A) y longitud (dy).



R/2

Al girar el recipiente cerrado con el agua, debido a la fuerza centrífuga, el agua se distribuye en un cilindro hueco, de altura (h), radio exterior R, y cuyo radio interior hallamos de:

$$\pi R^2 \frac{h}{4} = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad r = R/2$$

Ahora, en la Fig., la presión sobre el diferencial de volumen de agua, de masa (dm) área de sección (A) y longitud (dy) es:

$$dP = \frac{dF}{A} = \frac{1}{A}(dm\omega^2 y)$$

$$dP = \frac{1}{A}(\rho_o A dy)\omega^2 y$$

$$dP = \rho_o \omega^2 y\, dy$$

Luego, la presión sobre la base izquierda de la columna cilíndrica de agua, que se encuentra a la distancia (R-x) es:

$$\int_0^{P(x)} dP = \rho_o\omega^2 \int_{R/2}^{R-x} y\,dy$$

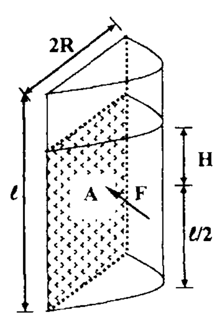
$$P(x) = \frac{1}{2}\rho_o\omega^2[(R-x)^2 - \frac{1}{4}R^2]$$

$$P(0{,}1) = \frac{1}{2}(10^3)(10^2)[(0{,}4-0{,}1)^2 - \frac{1}{4}(0{,}4)^2]$$

$$\clubsuit\ P(0{,}1) = 2{,}5.10^3\ \text{Pa} \qquad (B)$$

Solución: 101

• Representemos la mitad izquierda del batiscafo (semicilindro).



La presión hidrostática media sobre la superficie sumergida del semicilindro es:

$$P_m = \frac{0 + \rho g(H + \ell/2)}{2}$$

Luego, la fuerza hidrostática sobre la superficie sumergida del semicilindro es,

$$F = P_m A = \frac{1}{2}\rho g(H + \frac{\ell}{2})(H + \frac{\ell}{2})\, 2R$$

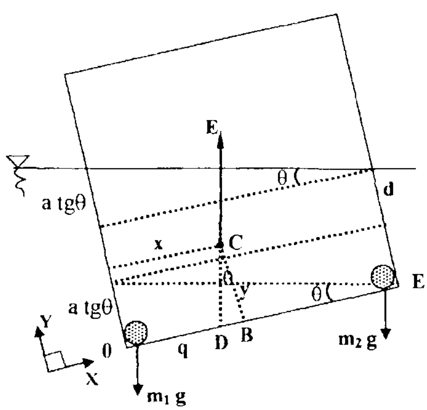
$$F = \rho g R\,(H + \frac{\ell}{2})^2$$

$$F = (10^3)(10)(0{,}25)(0{,}1 + 0{,}5)^2$$

$$\clubsuit\ F = 900\ N \qquad \text{(D)}$$

Solución: 102

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cubo sumergido a medias.



De la condición, que el volumen sumergido del cubo es la mitad de su volumen total, hallamos (d) así:

$$(a\,tg\theta + d)a^2 + \frac{1}{2}a\,tg\theta\, a^2 = \frac{1}{2}a^3$$

$$d = \frac{a}{2} - \frac{3}{2}a\,tg\theta$$

De otro lado, las coordenadas (x, y) del centro de gravedad (C) del volumen sumergido del cono son,

$$x = \frac{1}{6}(3 - tg\theta)a$$

$$y = \frac{1}{12}(3 + tg^2\theta)a$$

En el triángulo rectángulo CBD la longitud del lado BD=p es,

$$p = y\,tg\theta = \frac{1}{12}(3\,tg\theta + tg^3\theta)a$$

Así, la distancia del vértice D al origen de coordenadas 0 es:

$$q = x - p$$

$$q = \frac{1}{6}(3 - tg\theta)a - \frac{1}{12}(3\,tg\theta + tg^3\theta)a$$

$$q = \frac{a}{12}(6 - 5\,tg\theta - tg^3\theta)$$

Tomando momentos respecto del origen de coordenadas 0, hallamos m_2 así:

$$m_2\, g\, a\cos\theta = E\, q\cos\theta$$

$$m_2\, g\, a = (\frac{1}{2}\rho g a^3)[\frac{a}{12}(6 - 5\,tg\theta - tg^3\theta)]$$

$$m_2 = \frac{1}{24}\rho a^3\ (6 - 5\,tg\theta - tg^3\theta]$$

Luego, aplicando la primera condición de equilibrio en la vertical, hallamos m_1 así,

$$m_1 g + m_2 g = E$$

$$m_1 g + m_2 g = \frac{1}{2}\rho g a^3$$

$$m_1 = \frac{1}{24}\rho a^3\ (6 + 5\,tg\theta + tg^3\theta)$$

Finalmente, la razón de las masas es:

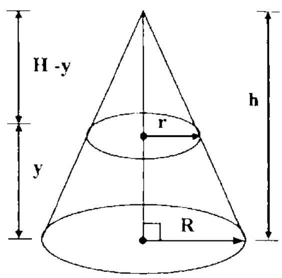
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{6+5\,tg\,\theta+tg^3\theta}{6-5\,tg\,\theta-tg^3\theta}$$

$$\clubsuit\ \frac{m_1}{m_2}\approx 5{,}65 \qquad \text{(E)}$$

<< Qué valor máximo puede tener el ángulo de inclinación θ >>

Solución: 103

• El cubo está en equilibrio bajo la acción de su peso (W) y el empuje del agua (E).



De la semejanza de triángulos, hallemos la expresión para el radio (r):

$$\frac{r}{h-y}=\frac{R}{h}\quad\Rightarrow\quad r=\frac{h-y}{h}R$$

Luego, aplicando la primera condición de equilibrio, se tiene:

$$W=E$$

$$\gamma_1\,V_C=\gamma\,V_T$$

$$\gamma_1\frac{1}{3}\pi R^2 h=\gamma\frac{1}{3}\pi y(r^2+rR+R^2)$$

$$\gamma_1 R^2 h=\gamma\, y\,[(\frac{r}{h-y})^2R^2+(\frac{r}{h-y}R^2+R^2]$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma}h=y(1+\frac{h-y}{h}+\frac{h^2-2yh+y^2}{h^2})$$

$$y^3-3hy^2+3h^2y-\frac{\gamma_1}{\gamma}h^3=0$$

$$(y-h)^3=(\frac{\gamma_1}{\gamma}-1)h^3$$

$$y=h+(\frac{\gamma_1}{\gamma}-1)^{1/3}h$$

$$y=40+(\frac{\gamma_1}{3\gamma_1/2}-1)^{1/3}(40)$$

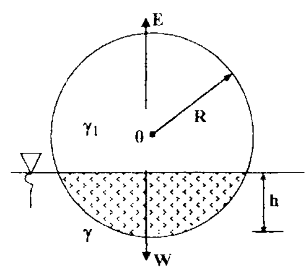
$$\clubsuit\ y=12{,}3\ \text{cm} \qquad \text{(B)}$$

Nota

* V_C, V_T son los volúmenes del cono y tronco de cono, respectivamente.

Solución: 104

• La esfera está en equilibrio bajo la acción de su peso (W) y el empuje del agua (E).



$$W=E$$

$$\gamma_1\,V_E=\gamma\,V_S$$

$$\gamma_1\frac{4}{3}\pi R^3=\gamma\frac{4}{3}\pi h^2(R-\frac{h}{3})$$

$$4\frac{\gamma_1}{\gamma}R^3=3h^2R-h^3$$

$$h^3 - 3Rh^2 + 4\frac{\gamma_1}{\gamma}R^3 = 0$$

$$h^3 - 3h^2 + \frac{8}{27} = 0$$

$$(h - \frac{1}{3})(h^2 - \frac{8}{3}h - \frac{8}{9}) = 0$$

Las raíces de esta ecuación cúbica son:

$$h_1 = \frac{1}{3}\,m \ \ (si) \ ; \ h_2 = 2{,}97\ m \ \ (no)$$

$$h_3 = -0{,}3\ m \ \ (no)$$

$$♣ \ h = \frac{1}{3}\,m \qquad B$$

Solución: 105

• El cascarón esférico de acero está en equilibrio bajo la acción de su peso W_1, peso del aire W_2 y el empuje del agua E, así:

$$W_1 + W_2 = E$$

$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 = \rho g V$$

$$\rho_1 \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) + \rho_2 \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho\frac{4}{3}\pi(r+h)^3$$

$$\rho_1[(r+h)^3 - r^3] + \rho_2 r^3 = \rho(r+h)^3$$

$$(\rho_1 - \rho)(r+h)^3 = (\rho_1 - \rho_2)r^3$$

$$r = \frac{h}{[(\rho_1 - \rho_2/\rho_1 - \rho)^{1/3} - 1]}$$

$$r = \frac{2}{[(7800 - 1{,}29/7800 - 1000)^{1/3} - 1]}$$

$$♣ \ r = 42{,}8\ cm \qquad B$$

Solución: 106

I) La presión total en el fondo del recipiente, creado por los líquidos es,

$$P = P_0 + \rho_1 g h + \rho_2 g h + \rho_3 g h + \rho_4 g h$$

$$P = P_0 + \rho_1 + \rho_1 + 2 + \rho_1 + 4 + \rho_1 + 6)gh$$

$$P = P_0 + (4\rho_1 + 12)gh$$

$$102\,002{,}4 = 10^5 + (4\rho_1 + 12)(10)(2.10^{-2})$$

$$\rho_1 = 2\,500\ kg/m^3$$

$$♣ \ \rho_1 = 2{,}5\ g/cm^3 \qquad D$$

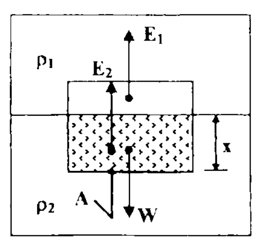
II) La densidad del líquido que produce la misma presión que la de los cuatro líquidos es,

$$(4\rho + 12) = 10\,012\,\frac{kg}{m^3}$$

$$♣ \ 4\rho + 12 \approx 10\ g/cm^3 \qquad B$$

Solución: 107

• Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso (W), los empujes de los líquidos E_1 y E_2, respectivamente.



Como el bloque está en equilibrio, su peso (W), debe ser igual, a la suma de los empujes (E_1) y (E_2), esto es:

$$W = E_1 + E_2$$

$$\rho g h A = \rho_1 g(h - x)A + \rho_2 g x A$$

$$\rho h = \rho_1 h + (\rho_2 - \rho_1)x$$

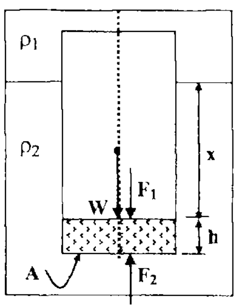
$$x = (\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1})h$$

$$x = (\frac{1\,000 - 600}{1\,200 - 600})(60)$$

♣ $x = 40$ cm Ⓓ

Solución: 108

• Representemos las fuerzas verticales que actúan sobre el vaso abierto.



Como el vaso está en equilibrio, su peso (W), es igual, a la diferencia de las fuerzas de la presión de los líquidos, esto es:

$$W = F_2 - F_1$$

$$mg = \rho_2 g(x+h)A - \rho_1 g x A$$

$$m = (\rho_2 - \rho_1)xA + \rho_2 h A$$

$$x = \frac{m - \rho_2 h A}{(\rho_2 - \rho_1)A}$$

$$x = \frac{0{,}2 - (1000)(2.10^{-2})(50.10^{-4})}{(1000 - 800)(50.10^{-4})}$$

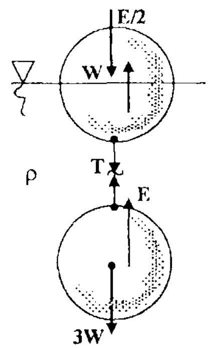
$$x = 0{,}1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Luego, la profundidad a la que está sumergido el vaso en el líquido inferior es,

♣ $h = 12$ cm Ⓓ

Solución: 109

• Las fuerzas que actúan sobre el sistema son: los pesos de las bolas W, 3W, los empujes E, E/2 y la tensión en la cuerda T



I. Considerando las bolas y el hilo como un solo cuerpo, hallemos el peso de la bola superior así,

$$W + 3W = E + \frac{1}{2}E$$

$$W = \frac{3}{8}E = \frac{3}{8}\rho g V$$

$$W = (\frac{3}{8})(10^3)(10)(10.10^{-6})$$

$$W = 37{,}5 \text{ mN}$$ Ⓓ

II. Luego, aplicando la primera condición de equilibrio a la bola inferior, hallemos la tensión en la cuerda así,

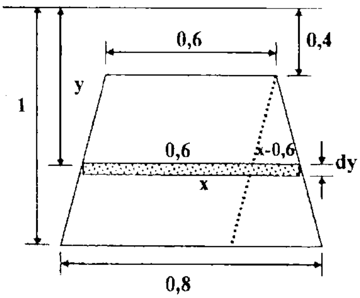
$$T = 3W - E = 3W - \rho g V$$

$$T = (3)(37{,}5.10^{-3}) - (10^3)(10)(10.10^{-6})$$

$$T = 12{,}5 \text{ mN}$$ Ⓑ

Solución: 110

- Representemos una franja de ancho (dy) y largo (x) en la placa.



Aplicando la semejanza de triángulos, hallemos la expresión para x en función de y así,

$$\frac{x-0{,}6}{0{,}2}=\frac{y-0{,}4}{0{,}6}$$

$$x=\frac{y+1{,}4}{3}$$

La fuerza debido al agua sobre la franja de área dA=x dy situada a una profundidad (y) de la superficie es,

$$dF = P\,dA = \rho\, g\, y\, x\, dy$$

$$dF = \rho g y \left(\frac{y+1{,}4}{3}\right) dy$$

Luego, la fuerza hidrostática total, sobre la superficie de la placa es,

$$\int_0^F dF = \frac{1}{3}\rho g \int_{0,4}^{1,0} (y^2+1{,}4y)\,dy$$

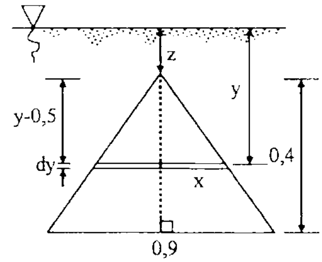
$$F=\frac{1}{3}\rho g\left(\frac{1}{3}y^3+0{,}7y^2\right)\Big|_{0,4}^{1,0}$$

$$F=\left(\frac{1}{3}\right)(1\,000)(10)(0{,}9)$$

♣ $F = 3\text{ kN}$ Ⓒ

Solución: 111

- Representemos una franja de ancho (dy) y longitud (x) en la placa.



Aplicando la semejanza de triángulos, hallemos una expresión para (x) en función de (y) así,

$$\frac{x}{y-z}=\frac{0{,}9}{0{,}4} \quad => \quad x=\frac{9}{4}(y-z)$$

De otro lado, la fuerza que ejerce el agua sobre la franja de área dA = x dy es,

$$dF = P\,dA = \rho\, g\, y\, x\, dy$$

$$dF=\frac{9}{4}\rho\, g\,(y^2-zy)\,dy$$

Luego, la fuerza total hidrostática sobre la placa triangular será,

$$\int_0^F dF = \frac{9}{4}\rho\, g \int_z^{z+0,4} (y^2-zy)\,dy$$

$$F=\frac{9}{4}\rho\, g\left(\frac{1}{3}y^3-\frac{z}{2}y^2\right)\Big|_z^{z+0,4}$$

$$F=\frac{9}{4}\rho\, g\left[\frac{1}{3}((z+0{,}4)^3-z^3)\right.$$
$$\left.-\frac{z}{2}((z+0{,}4)^2-z^2)\right]$$

I. Evaluando para z=0 m:

$$F=\left(\frac{3}{4}\right)(10^3)(10)(0{,}4)^3$$

$$F = 480\ \text{N} \qquad \text{(E)}$$

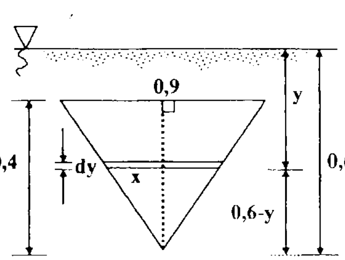
II. Evaluando para z = 0,5 m:

$$F = \frac{9}{4}(10^3)(10)[\frac{1}{3}(0{,}9^3 - 0{,}5^3) - \frac{0{,}5}{2}(0{,}9^2 - 0{,}5^2)]$$

$$\clubsuit\ F = 1\,380\ \text{N} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 112

• Representemos una franja de ancho (dy) y longitud (x) en la placa.



Aplicando la semejanza de triángulos, hallemos una expresión para (x) en función de (y) así,

$$\frac{x}{0{,}6 - y} = \frac{0{,}9}{0{,}4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{4}(0{,}6 - y)$$

De otro lado, la fuerza que ejerce el agua sobre la franja de área dA = x dy es,

$$dF = P\,dA = \rho g y x\,dy$$

$$dF = \frac{9}{4}\rho\, g\,(0{,}6y - y^2)dy$$

Luego, la fuerza total hidrostática sobre la placa triangular es,

$$\int_0^F dF = \frac{9}{4}\rho\, g \int_{0,2}^{0,6}(0{,}6y - y^2)dy$$

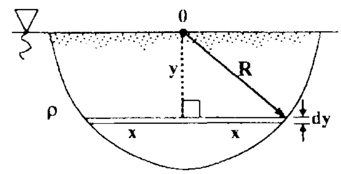
$$F = \frac{9}{4}\rho\, g\,(0{,}3\,y^2 - \frac{1}{3}y^3)\Big|_{0,2}^{0,6}$$

$$F = (\frac{9}{4})(10^3)(10)(0{,}026)$$

$$\clubsuit\ F = 600\ \text{N} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 113

• Representemos en la placa semicircular una franja de ancho (dy) y longitud (2x).



La fuerza que ejerce el agua sobre la franja de área dA = 2x dy es,

$$dF = P\,dA = \rho g 2x\,dy$$

$$dF = 2\rho g y (R^2 - y^2)^{1/2}dy$$

Luego, la fuerza total que ejerce el agua sobre la placa semicircular es,

$$\int_0^F dF = 2\rho\, g \int_0^R (R^2 - y^2)^{1/2}\, y\,dy$$

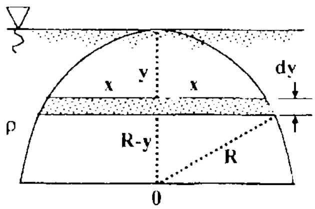
$$F = 2\rho\, g\,(-\frac{1}{3}(R^2 - y^2)^{3/2})\Big|_0^{0,3}$$

$$F = (2)(10^3)(10)(1/3)(0{,}3)^3$$

$$\clubsuit\ F = 180\ \text{N} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 114

• Representemos en la placa semicircular una franja de ancho (dy) y longitud (2x).



La fuerza hidrostática sobre la franja de á rea dA–2x dy es,

$$dF = P\,dA = \rho g y\, 2x\, dy$$

$$dF = 2\rho g y\,[R^2 - (R-y)^2]^{1/2}\, dy$$

Luego, la fuerza hidrostática total sobre la placa semicircular es,

$$\int_0^F dF = 2\rho\, g \int_0^R [R^2 - (R-y)^2]^{1/2}\, y\, dy$$

$$F = 2\rho g(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})R^3$$

$$F = (2)(10^3)(10)(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})(0{,}4)^3$$

♣ $F \approx 579$ N (D)

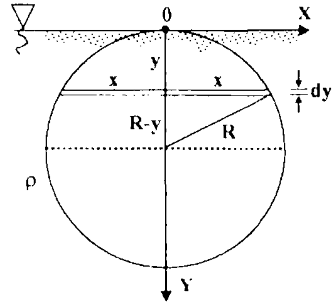
Solución: 115

• Aplicando el concepto de presión media, hallemos la fuerza hidrostática sobre la pla ca cuadrada sin agujero así,

$$F_1 = P_m\, A = (\frac{0 + \rho g a}{2})(a)^2$$

$$F_1 = \frac{1}{2}\rho g a^3$$

Ahora, para calcular la fuerza hidrostática sobre una placa circular, tomemos una fran ja de ancho (dy) y longitud (2x) esto es,



La fuerza hidrostática sobre la franja de á rea igual a dA=2x dy es,

$$dF_2 = P\,dA = \rho g y\, 2x\, dy$$

$$dF_2 = 2\rho g y\,[R^2 - (R-y)^2]^{1/2}\, dy$$

Así, la fuerza hidrostática total sobre la pla ca circular de radio R=a/2 es,

$$\int_0^{F_2} dF_2 = 2\rho g \int_0^{2R} [R^2 - (R-y)^2]^{1/2}\, y\, dy$$

$$F_2 = \pi \rho g R^3 = \pi\ \rho g a^3 / 8$$

Luego, la fuerza hidrostática total sobre la placa cuadrada agujereada es,

$$F = F_1 - F_2$$

$$F = \frac{1}{2}\rho g a^3 - \frac{1}{8}\ \pi \rho g a^3$$

$$F = (\frac{4-\pi}{8})\ \rho\ g\ a^3$$

$$F = (\frac{4-\pi}{8})(10^3)(10)(1)^3$$

♣ $F = 1\,073$ N (D)

Solución: 116

• Cuando la placa cuadrada flota con su la do superior AB al nivel del agua, la fuerza hidrostática sobre el es,

$$F = P_m\, A = \left(\frac{0+\rho g a}{2}\right) a^2$$

$$F = \frac{1}{2}\rho g a^3$$

Cuando la placa cuadrada flota con su lado superior AB a una profundidad (2a) del nivel del agua, la presión hidrostática sobre el es,

$$F' = P_m\, A = \left(\frac{\rho g a + 2\rho g a}{2}\right) a^2$$

$$F' = \frac{3}{2}\rho g a^3$$

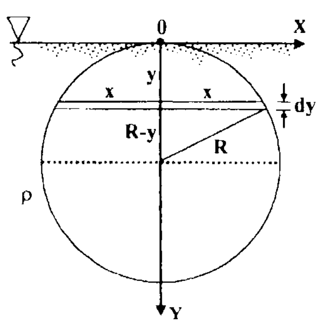
Luego, el número de veces que aumenta la fuerza hidrostática sobre la placa cuadrada es:

$$\eta = \frac{F'}{F} = \frac{(3/2)\rho g a^3}{(1/2)\rho g a^3}$$

$$\clubsuit\ \eta = 3 \text{ veces} \qquad \text{C}$$

Solución: 117

• Para calcular la fuerza hidrostática sobre cada una de las mitades de la placa circular, tomemos una franja de ancho (dy) y longitud (2x). Así, la fuerza hidrostática sobre la franja de área igual a dA=2x dy es:



$$dF = P\,dA = \rho g y\, 2x\, dy$$

$$dF = 2\rho g y\,[R^2 - (R-y)^2]^{1/2}\, dy$$

De modo que, la fuerza hidrostática total sobre la mitad superior de la placa es,

$$\int_0^{F_1} dF = 2\rho g \int_0^{R} [R^2 - (R-y)^2]^{1/2}\, y\, dy$$

$$F_1 = 2\rho g\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) R^3$$

Asimismo, la fuerza hidrostática sobre la mitad inferior de la placa circular es,

$$\int_0^{F_2} dF = 2\rho g \int_R^{2R} [R^2 - (y-R)^2]^{1/2}\, y\, dy$$

$$F_2 = 2\rho g\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right) R^3$$

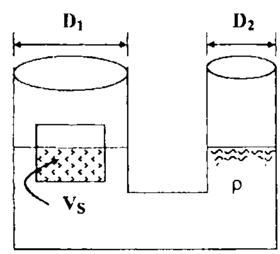
Luego, la razón de las fuerzas hidrostáticas en las mitades superior e inferior de la placa circular es:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{2\rho g(\pi/4 + 1/3)R^3}{2\rho g(\pi/4 - 1/3)R^3}$$

$$\clubsuit\ \frac{F_2}{F_1} = 2{,}47 \text{ veces} \qquad \text{C}$$

Solución: 118

• Representemos el cuerpo de masa (m) sumergido en los vasos comunicantes.



De la condición de equilibrio, hallemos el volumen sumergido del bloque así:

$$mg = \rho g V_S \quad => \quad V_S = \frac{m}{\rho}$$

Este volumen (V_S) desalojado de agua, es igual, a la suma de los volúmenes de líquido que ascienden una altura (x) en ambas ramas del vaso comunicante, esto es:

$$(\frac{\pi}{4}D_1^2 + \frac{\pi}{4}D_2^2)x = \frac{m}{\rho}$$

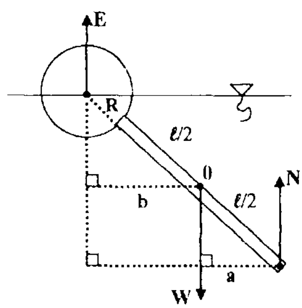
$$x = \frac{4m}{\pi(D_1^2 + D_2^2)\rho}$$

$$x = \frac{(4)(0{,}2)}{\pi(0{,}08^2 + 0{,}04^2)(1\,000)}$$

$$\clubsuit \quad x \approx 3{,}2 \text{ cm} \qquad \text{C}$$

Solución: 119

• Las fuerzas que actúan sobre la bola y el palo son: sus pesos W, W' el empuje del agua E y la reacción (N) en el fondo del depósito.



Tomando momentos respecto del centro de gravedad (0) del palo, hallemos (N) así:

$$N\,a = E\,b$$

$$N\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta = (R + \frac{\ell}{2})\operatorname{sen}\theta\, E$$

$$N\ell = (\ell + 2R)(\frac{2}{3}\pi R^3 \rho g)$$

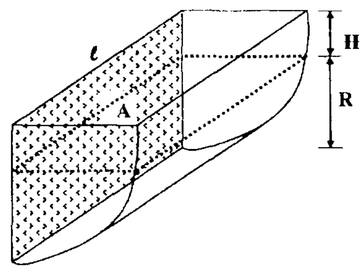
$$N = \frac{2\pi}{3}\rho g R^3(1 + \frac{2R}{\ell})$$

$$N = (\frac{2\pi}{3})(10^3)(10)(0{,}3)^3(1 + (2)(\frac{30}{60}))$$

$$\clubsuit \quad N = 360\pi \text{ N} \qquad \text{D}$$

Solución: 120

• Representemos la mitad derecha del semicilindro sumergido en el agua.



La presión hidrostática media sobre la superficie sumergida del semicilindro es:

$$P_m = \frac{0 + \rho g(H + R)}{2}$$

Luego, la fuerza hidrostática sobre la mitad de la superficie lateral sumergida del semicilindro es:

$$F = P_m A = \frac{1}{2}\rho g(H + R)(H + R)\,\ell$$

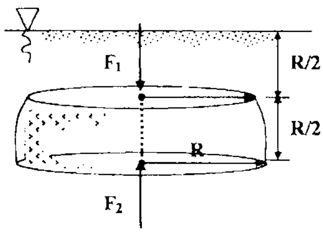
$$F = \frac{1}{2}\rho g \ell (H + R)^2$$

$$F = \frac{1}{2}(10^3)(10)(1)(0{,}1 + 0{,}3)^2$$

$$\clubsuit \quad F = 800 \text{ N} \qquad \text{D}$$

Solución: 121

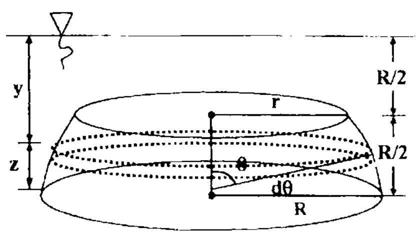
• Representemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en forma de segmento esférico.



Las fuerzas debidas a la presión del agua, en las bases del segmento esférico son:

$$F_1 = \frac{3}{8}\rho g \pi R^3 \quad y \quad F_2 = \pi \rho g R^3$$

Para calcular la fuerza sobre la superficie lateral del segmento esférico, consideremos anillos de radio (r), como se muestra:



De la Fig., el radio y el área del anillo son:

$$r = R\,\text{sen}\,\theta \quad , \quad z = R\cos\theta$$

$$dA = R^2\,\text{sen}\,\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$y = R - R\cos\theta$$

La fuerza del agua sobre el anillo situado a una distancia (y) de la superficie libre del agua es:

$$dF = P\,dA = \rho g y\, dA$$

Por simetría las componentes de estas fuerzas paralelas a las bases del segmento esférico se cancelan entre sí, de modo que la fuerza resultante sobre el anillo es:

$$dF_3 = 2\,dF\cos\theta$$

$$dF_3 = 2\rho g(R - R\cos\theta)R^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$dF_3 = 2\rho g R^3(\cos\theta - \cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\phi\, d\theta$$

Integrando esta expresión, obtenemos la magnitud de la fuerza resultante sobre la superficie lateral del segmento esférico, así:

$$\int_0^{F_3} dF_3 = 2\rho g R^3 \int_0^{\pi} d\phi \bullet \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$F_3 = 2\rho g R^3 (\phi)\Big|_0^{\pi} \bullet \left(-\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/2}$$

$$F_3 = \frac{1}{6}\pi\rho g R^3$$

Luego, la fuerza resultante sobre el cuerpo en forma de segmento esférico es,

$$F_R = F_2 - F_1 - F_3$$

$$F_R = \pi\rho g R^3 - \frac{3}{8}\pi\rho g R^3 - \frac{1}{6}\pi\rho g R^3$$

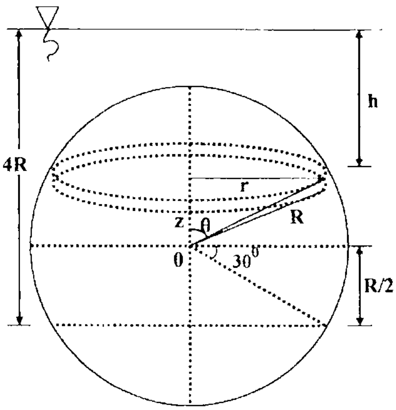
$$F_R = \frac{11}{24}\pi\rho g R^3$$

$$F_R = (\frac{11}{24}\pi)(10^3)(10)(0{,}25)^3$$

♣ $F_R \approx 225\ N$ (E)

Solución: 122

• Consideremos en la esfera un anillo de radio (r), espesor RdΘ a una distancia (z) de su centro (0).



En la Fig., el radio y el área del anillo son:

$$r = R\,\text{sen}\,\theta \quad , \quad z = R\cos\theta$$

$$dA = R^2\,\text{sen}\,\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$h = R(\frac{7}{2} - \cos\theta)$$

La fuerza del agua sobre el anillo situado a una distancia (h) de la superficie libre del a gua es,

$$dF = P\,dA = \rho g h\, dA$$

Por simetría las componentes de estas fuer zas paralelas a la superficie libre del agua cancelan entre sí, de modo que la fuerza resultante sobre el anillo es,

$$dF' = 2\,dF\cos\theta$$

$$dF' = 2\rho g R(\frac{7}{2} - \cos\theta)R^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$dF' = 2\rho g R^3(\frac{7}{2}\cos\theta - \cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$dF' = 2\rho g R^3(\cos\theta - \cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\phi\, d\theta$$

Integrando esta expresión, obtenemos la fuerza resultante sobre la superficie de la es fera así,

$$\int_0^{F'} dF' = 2\rho g R^3 \int_0^{\pi} d\phi \bullet$$

$$\int_0^{2\pi/3} (\frac{7}{2}\cos\theta - \cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$F' = 2\rho g R^3 (\phi)\Big|_0^{\pi} \bullet$$

$$(\frac{7}{4}\,\text{sen}^2\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^{2\pi/3}$$

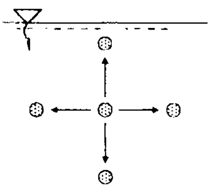
♣ $F' = (15/8)\,\pi\,\rho g R^3$ (B)

TENSION SUPERFICIAL

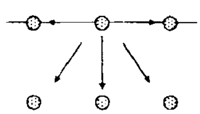
1. TENSION SUPERFICIAL

a) Definición

Se llama tensión superficial al trabajo de formación isotérmica (T=cte) de la unidad de área de la superficie de un líquido.



Fuerzas compensadas

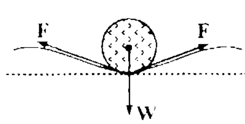


Fuerzas no compensadas

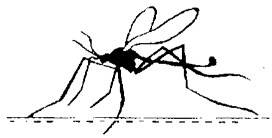
- El área de la superficie del líquido se aumenta, trasladando partículas del interior del líquido hacia la superficie, para lo cual, se necesita hacer trabajo.
- La capa superficial ejerce sobre el líquido una gran presión interna del orden de decenas de millares de atmósferas.
- Las partículas (moléculas) de la capa superficial del líquido tienen mayor energía potencial que las partículas que se hallan sumergidas en el, dado que para que estas se ubiquen en la superficie ha sido necesario hacer trabajo para vencer las fuerzas de cohesión, transformándose este trabajo en energía potencial almacenada en estas moléculas.
- Debido a la tensión superficial, la superficie de un líquido se comporta como una delgada película elástica, presentando cierta resistencia a la penetración de objetos.
- A nivel microscópico, la tensión superficial se debe a que las fuerzas que afectan a cada molécula son diferentes en el interior del líquido y en la superficie.
- El efecto principal de la tensión superficial es que tiende a disminuir su superficie para un volumen dado, de ahí que un líquido en ausencia de gravedad adopte la forma esférica, que es la que tiene menor relación área/volumen.
- Ahora, según el <<Principio de minimización de la energía>>, todo sistema físico, no perturbado tiende a estar en su estado de mínima energía total, así, el líquido llega a este estado, disminuyendo las moléculas situadas en su superficie, puesto que estas tiene mayor energía que las moléculas situadas al interior. Esto explica la reducción del área de la superficie del líquido hasta el mínimo posible.
- El agua tiene una alta tensión superficial, debido a los puentes (enlaces) de hidrógeno.

  Ejemplo: Dos ejemplos, donde hay presencia de fuerzas de tensión superficial son:

1) Una aguja en equilibrio flota sobre el líquido, siendo su peso (W), igual a la resultante de la fuerza debido a la tensión superficial, que actúa en el borde de la superficie de contacto de la aguja con el agua.

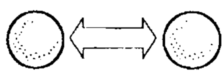


2) La tensión superficial permite que el coleóptero, pueda caminar sobre la superficie del agua sin hundirse, pues, su peso pequeño no es suficiente para vencer la resistencia que presenta la superficie del agua.



b) Cohesión

Se define como la fuerza de atracción entre las moléculas del líquido del mismo tipo. Si tenemos dos moléculas aisladas como el de la Fig., cada una de ellas se verá afectada por una fuerza que tiende a juntarlas y aproximarlas entre si.



c) Adherencia

Se define como la atracción mutua, entre las moléculas ubicadas en las superficie de un cuerpo y de un fluido, que están en contacto.

d) Coeficiente de tensión superficial

1) Definición

Es una cantidad física escalar, que mide el trabajo que se requiere para llevar moléculas del interior del líquido hacia la superficie, creando una nueva unidad de superficie, viene dado por:

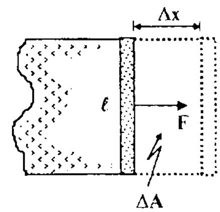
$$\gamma = \frac{W}{\Delta A} = \frac{F}{\ell}$$

siendo, (F) la fuerza que actúa sobre el borde del líquido, y (ℓ) la longitud del borde derecho.

☞ **Unidad**: (γ) se mide en N/m.

Demostración:

- Representemos el desplazamiento que experimenta el borde derecho del líquido, debido a la acción de la fuerza F.



En la definición de (γ) sustituyendo el trabajo (W) y el aumento del área, tenemos:

$$\gamma = \frac{F\Delta x}{\ell \Delta x} = \frac{F}{\ell}$$

- Es decir, (γ) es numéricamente igual a la fuerza aplicada a la unidad de longitud del borde de la película superficial del líquido.

2) Propiedades

- La tensión superficial (γ) depende de la naturaleza de las dos fases puestas en contacto que, en general, será un líquido y un sólido.
- El valor de la tensión superficial (γ) depende de la magnitud de las fuerzas intermoleculares (fuerzas de cohesión) en el seno del líquido. Así, cuanto mayor son las fuerzas de cohesión del líquido, mayor es su tensión superficial.
- Para un líquido dado, el valor de (γ) disminuye con la temperatura, debido al aumento de la agitación térmica, la cual, produce una disminución de la in

tensidad efectiva de la interacción de las fuerzas cohesivas.

- La tensión superficial depende de la composición química del líquido, y de la presencia de agentes tensioactivos ó surfactantes.
- El valor de (γ) tiende a cero a medida que la temperatura se acerca a la temperatura crítica (T_C) del líquido. Para este punto crítico el líquido no se diferencia del vapor.
- La tensión superficial de los líquidos no depende de las dimensiones de su superficie libre.

e) Tensioactivos

1) Definición

Llamados también surfactantes o agentes de superficie activa, son sustancias químicas de estructura polar-nopolar, con tendencia a localizarse en la interfase formando una capa monomolecular absorbida en la interfase que cambia el valor de la tensión superficial.

2) Funcionamiento

Las soluciones de tensioactivos se activan al colocarse en forma de capa monomolecular adsorbida en la superficie entre las fases hidrofilitas e hidrofóbicas. Esta ubicación "impide" el tráfico de moléculas que van de la superficie al interior del líquido en busca de un estado de mínima energía, disminuyendo así el fenómeno de tensión superficial.

3) Propiedades

Las propiedades generales y comportamiento de los agentes tensioactivos se deben al carácter dual de sus moléculas (grupos hidrófilo y lipófilo), es así como el antagonismo entre estas dos secciones de su molécula y el equilibrio entre ellas es lo que da al compuesto sus propiedades activas de superficie.

4) Clasificación

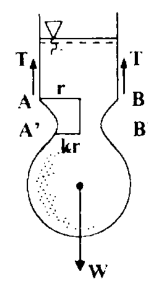
Según el poder de disociación del tensioactivo en presencia de un electrolito, y de sus propiedades fisicoquímicas, estas se clasifican en: tensioactivos iónicos y no-iónicos.

f) Punto crítico

El punto crítico es aquel límite para el cual el volumen del líquido es igual al de una masa igual de vapor, o dicho de otro modo, en el cual las densidades del líquido y del vapor son iguales. Midiéndose las densidades del líquido y del vapor en función de la temperatura y representando gráficamente estos resultados, determinamos la temperatura crítica, a partir del punto de intersección de ambas curvas.

g) Medida de la tensión superficial

1) Método de Tate



La gota se desprende del tubo en el instante en el que su peso (W) se iguala a las fuerzas de tensión superficial (T) que la sostiene y que actúan a lo largo de la circunferencia AB de contacto con el tubo. Dado que, la gota no se desprende justo en el extremo del tubo sino más abajo en la línea A'B' de menor diámetro y que no hay seguridad de que el líquido situado entre los niveles AB y A'B' sea arrastrado por la gota, la fór mula a emplear es:

$$W = 2\pi k r \gamma$$

siendo, (W) el peso de la gota, y (k) un coeficiente de contracción que se debe determinar experimentalmente.

- Aplicando está fórmula a dos líquidos, siendo uno de ellos el agua destilada (líquido de referencia), obtenemos la expresión que nos permitirá determinar la tensión superficial del líquido desconocido, así:

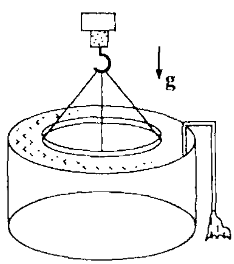
$$\gamma = \frac{m}{m'}\gamma'$$

siendo, $\gamma' = 0{,}0728$ N/m y m' la tensión superficial y masa del agua destilada.

Ejemplo: Las masas de 10 gotas de agua destilada y aceite son 586 mg y 267 mg, respectivamente, luego la tensión superficial del aceite es:

$$\gamma = (\frac{267}{586})(0{,}0728) = 0{,}033\ \frac{N}{m}$$

2) Método DeYong

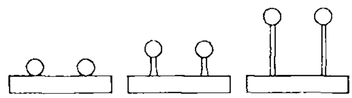


Este método consiste en medir mediante un dinamómetro la fuerza adicional "ΔF" que se debe ejercer sobre un anillo de aluminio justo en el instante en el que la lámina de líquido está a punto de romperse.

Midiendo el diámetro 2R del anillo y leyendo del dinamómetro el valor de la fuerza ΔF, se calcula el valor de la tensión superficial a partir de:

$$\gamma = \frac{\Delta F}{2(2\pi R)}$$

El líquido se ubica en un recipiente, con el anillo inicialmente sumergido. Mediante un tubo delgado que hace de sifón se extrae poco a poco el líquido del recipiente. Este proceso se representa en el siguiente esquema gráfico.



En (1) el anillo esta sumergido en el líquido.

En (2), el líquido se va separando del anillo, formándose una lamina de líquido.

En (3), se ha formado la lámina en forma de un cilindro muy delgado, justo antes de separase el anillo del líquido.

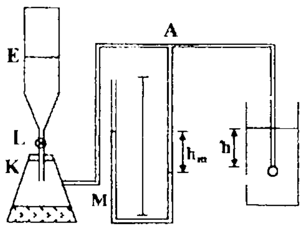
Nota

El anillo debe ser lo suficientemente delgado, afín, que el peso de la lámina de líquido cilíndrica sea despreciable.

3) Método de la burbuja

Se mide la tensión superficial de un líquido, a partir de la medida de la sobrepresión en el interior de una burbuja de aire formada en el interior de dicho líquido.

Para inyectar aire se emplea un embudo (E) lleno de agua, con una llave (L) que se abre muy poco. El agua que cae del embudo va llenando el matraz (K) y el aire desalojado sale hacia el dispositivo.



Calculamos la presión en el interior y en el exterior de la burbuja en el momento en el que se desprende.

- La presión exterior a la burbuja es la presión atmosférica (P_0) más la presión de la columna de líquido de densidad (ρ) y altura (h), esto es:

$$P_E = P_o + \rho g h$$

- La presión en el interior de la burbuja es la suma de la presión atmosférica (P_0) más la que corresponde a la altura máxima h_m marcada por el manómetro que contiene un líquido de densidad ρ_m (líquido manometrito).

$$P_I = P_o + \rho_m g\, h_m$$

Sustituyendo estas presiones en la fórmula de la diferencia de presiones para una burbuja, obtenemos la expresión para la tensión superficial, así:

$$P_I - P_E = \frac{2\gamma}{R}$$

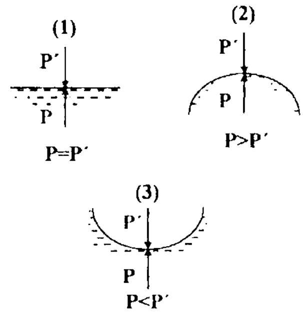
$$P_o + \rho_m g\, h_m - P_o - \rho\, g\, h = \frac{2\gamma}{R}$$

$$\gamma = \frac{gR}{2}(\rho_m h_m - \rho h)$$

La burbuja de aire se considera como una gota de agua.

2. PRESION DEBIDA A LA TENSION SUPERFICIAL

Una película superficial curva ejerce sobre el líquido una presión complementaria a la que experimenta dicho líquido cuando la película superficial es plana.

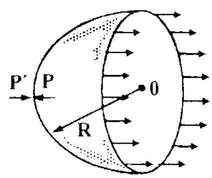


(1) Cuando las presiones interna (P) y externa (P′) al líquido son iguales, la superficie que se forma es plana, no existe sobrepresión.
(2) Cuando la presión interna (P) es mayor que la externa (P′), la superficie que se forma es convexa, y se origina una sobrepresión que actúa en la dirección de la presión externa P′.
(3) Cuando la presión interna (P) es menor que la externa (P′), la superficie que se forma es cóncava, y se origina una sobrepresión que actúa en la dirección de la presión interna P.

a) En una gota superficial

La presión al interior de una superficie esférica siempre es mayor que en el exterior, que la diferencia de presión (ΔP) aumenta a medida que disminuye el radio de la superficie esférica, y se hace cero cuando la superficie es plana

- Los líquidos tienden a minimizar su superficie. Por esta razón, las gotas de agua tienen la forma esférica en ausencia de gravedad. La tensión superficial tiende a reducir el área de la superficie y por tanto, el volumen de la gota. La diferencia de presión tiene a incrementar el volumen de la gota, la condición de equilibrio se alcanza cuando ambas tendencias se compensan.



La presión complementaria en una gota superficial de radio (R), debida a la tensión superficial, viene dado por:

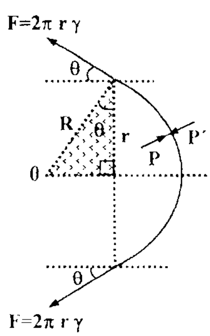
$$\Delta P = P - P' = \frac{2\gamma}{R}$$

siendo, (γ) el coeficiente de tensión superficial, y ΔP la diferencia de presiones entre el interior y exterior a la gota superficial.

- Obsérvese que la sección transversal de la gota presenta un sólo borde de longitud $\ell = 2\pi R$

Demostración:

- Tomemos una sección de la gota esférica, y representemos la fuerza debida a la tensión superficial (F) y la fuerza debida a la diferencia de presión (ΔP).



En la Fig., por condición de equilibrio la resultante de la fuerza debida a la diferencia de presión dirigida hacia la derecha, debe ser igual, a la componente horizontal de la fuerza de tensión superficial que actúa hacia la izquierda en el borde de la circunferencia de radio (r), esto es:

$$(P - P')\,\pi r^2 = \gamma\,(2\pi r)\cos\theta$$

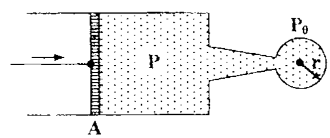
$$(P - P')\,\pi R\cos\theta = 2\gamma\cos\theta$$

$$\clubsuit\quad P - P' = \frac{2\gamma}{R}$$

- Como se observa la presión (P) al interior de la gota, es mayor que la presión (P') en el exterior en $2\gamma/R$.

Análisis energético

El resultado anterior, también podemos demostrar utilizando criterios energéticos. Así, en la Fig., empujando el émbolo de la jeringa conteniendo un líquido, formamos un gota, siendo la presión interna (P) mayor que la externa (P_0).



- Ahora, como el trabajo realizado por el émbolo sobre el líquido al desplazarse este una distancia "x" es PdV, y el trabajo realizado por la gota de agua sobre su entorno al desplazar el aire un volumen dV es $-P_0dV$, entonces, el trabajo total es

$$dW = (P - P_0)\,dV$$

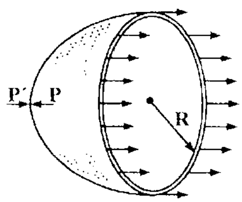
Este trabajo se utiliza para aumentar la superficie de la gota, mientras se mantiene la temperatura y el volumen del líquido constante, esto es:

$$dW = \gamma dA = (P - P_o)dV$$

$$\gamma 8\pi r\,dr = (P - P_o)4\pi r^2\,dr$$

$$P - P_o = \frac{2\gamma}{r}$$

b) En una burbuja llena de gas



La presión complementaria en una burbuja muy delgada llena de gas, de radio (R), debida a la tensión superficial, viene dado por:

$$\Delta P = P - P' = \frac{4\gamma}{R}$$

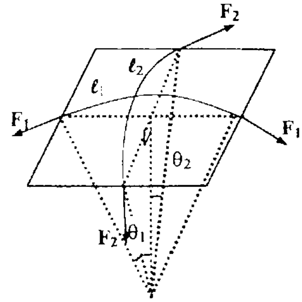
siendo, (γ) el coeficiente de tensión superficial, y ΔP la diferencia de presiones entre el interior y exterior a la burbuja.

- Obsérvese que la sección transversal de la burbuja presenta dos bordes de longitudes iguales a $\ell = 2\pi R$

3. FORMULA DE LAPLACE

Como se sabe la capa superficial del líquido ejerce sobre el líquido una presión (ΔP) adicional a la exterior, originada por las fuerzas de la tensión superficial.

- Esta presión es análoga a la que ejerce una envoltura elástica tensa sobre el gas contenido en ella.



- La presión adicional ó complementaria que ejerce sobre el líquido una capa superficial de forma arbitraria, viene dada por:

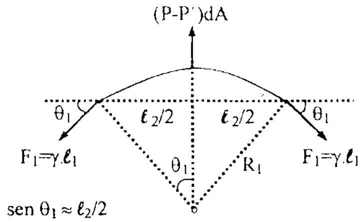
$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

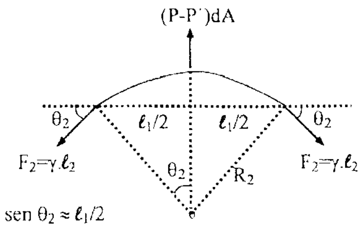
siendo, (γ) el coeficiente de tensión superficial, y R_1, R_2 los radios de curvatura de dos secciones cualesquiera, perpendiculares entre sí, y normales a la superficie del líquido, como se observa en la Fig.

- El radio de curvatura R_1 (ó R_2) se considera positivo si el centro de curvatura de la sección respectiva se encuentra dentro del líquido. En el caso contrario el radio de curvatura se considera negativo.
- Para $\Delta P > 0$, el menisco es convexo, para $\Delta P < 0$ el menisco es cóncavo, y para $\Delta P = 0$ la superficie es plana.
- Se llama sección normal en un punto de la superficie del líquido, a la curva que se obtiene como resultado de la intersección de la superficie del líquido con un plano que pase por la normal a la superficie en este punto.

Demostración:

- Representemos las dos secciones normales que le corresponden a la superficie.





Por condición de equilibrio, la fuerza debida a la diferencia de presión (P-P') que actúa hacia arriba, es igual, a la componente vertical de la tensión superficial que actúa hacia abajo sobre el borde de la capa superficial, esto es:

$$(P - P')\ell_1 \ell_2 - 2F_1 \operatorname{sen}\theta_1 - 2F_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

$$(P - P')\ell_1 \ell_2 - 2(\gamma \ell_1)\frac{\ell_2 / 2}{R_1}$$

$$- 2(\gamma \ell_2)\frac{\ell_1 / 2}{R_2} = 0$$

$$(P - P') = \gamma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

Casos particulares

a) Una superficie esférica

En la fórmula de Laplace tomando: $R_1 = R_2 = R$ se tiene:

$$\Delta P = P - P' = \frac{2\gamma}{R}$$

b) Una superficie cilíndrica

En la fórmula de Laplace tomando: $R_1 = \infty$ y $R_2 = R$, se tiene:

$$\Delta P = P - P' = \frac{\gamma}{R}$$

c) Una superficie plana

En la fórmula de Laplace tomando $R_1 = R_2 = \infty$, se tiene:

$$\Delta P = P - P' = 0$$

4. BURBUJAS DE JABON

a) Origen

Las burbujas de jabón se forman por la acción moldeadora que desempeña la tensión superficial, debida al peso despreciable de la mezcla de agua jabonosa. Así, al soplar la mezcla jabonosa con un tubo se forma una película delgada cuya presión interna, se iguala, a la presión externa más la presión debida a la tensión superficial, al formarse completamente la burbuja de jabón.

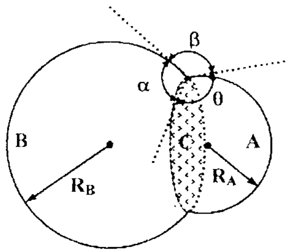
b) Características

1) La tensión superficial no es constante en toda la superficie de la burbuja. La tensión superficial es mayor en la parte superior de la burbuja que en la parte inferior, a su vez, esto explica el porque el espesor de la burbuja no es uniforme. En las regiones de mayor tensión superficial el espesor de la burbuja es más delgado.
2) El tamaño de las burbujas de jabón tienen un límite, las burbujas de mayor tamaño duran menos tiempo que las de menor tamaño.
3) Generalmente las burbujas de jabón se rompen por la zona alta, porque aquí el espesor de la burbuja es más delgada.
4) El aire puede pasar a través de la burbuja de jabón.
5) Dos o más burbujas de jabón no se pue

den fusionar para dar lugar a una sola burbuja.

c) Composición de burbujas

Cuando dos burbujas A y B se ponen en contacto, la superficie de contacto "C" tiene la menor superficie posible, por lo que, si trazamos las tangentes a las superficies en el punto en el que se unen, estas forman ángulos iguales, entre si, esto es: $\alpha = \beta = \theta = 120°$.

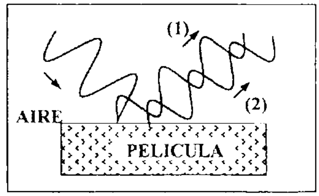


Ahora, como la presión al interior de la burbuja es proporcional a su curvatura, la presión en la burbuja "A" es mayor que en la burbuja "B". Por lo que, la película curva dac empuja el aire desde "A" a su izquierda, siendo esta contrarrestada por el empuje del aire hacia la derecha ejercida por las películas curvas cbd y dec, esto es, la curvatura de la superficie dac, es igual, a la suma de las curvaturas de las superficies cbd y dec:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$$

d) El color de las burbujas

Cuando un rayo de luz incide sobre una película delgada (burbuja de jabón), parte del rayo se refleja y otra parte se refracta, pasando a la otra cara de la película, donde igualmente experimenta una reflexión y refracción. El rayo reflejado en la segunda cara chocará nuevamente con el rayo reflejado en la primera cara, produciéndose una interferencia de rayos, tal como se indica en la Fig.



Cuando coinciden las crestas de las ondas reflejadas (1) y (2), se dice que se ha producido una interferencia constructiva, la cresta de la onda resultante es mayor que las de las ondas que interfieren, por lo que, se observa un color más intenso que el de las ondas iniciales.

De otro lado, cuando se superponen la cresta de la onda reflejada (1) con el valle de la onda reflejada (2), se tiene una onda que vibra hacia arriba y la otra hacia abajo, anulándose la una con la otra, se dice que se ha producido una interferencia destructiva, por lo que, aparecerá un color oscuro, al tener la onda resultante una intensidad luminosa escasa.

Conclusión

Los colores que aparecen en las burbujas de jabón son debidos a la interferencia de ondas, resultado de los fenómenos de reflexión y refracción que experimenta la luz al incidir sobre la burbuja. Ahora, debido a las distancias diferentes que recorren las ondas reflejadas, se producen las interferencias constructiva y destructiva, dando lugar a los diferentes colores que se observa.

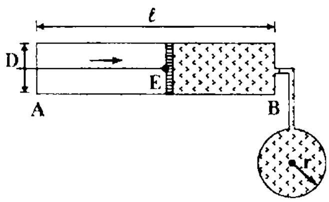
e) ¿Porque desaparecen las burbujas?

Algunas de las razones más comunes que explican el porque desaparecen las burbujas de jabón son:

1) La evaporación del agua de la burbuja, según se va evaporando el agua el espesor de la burbuja va disminuyendo hasta romperse. En la zona alta el adelgazamiento de la burbuja es mucho más rápido, por lo que, generalmente la burbuja se rompe en esta zona.
2) Turbulencia atmosférica, presencia de un viento fuerte o una brisa suave.
3) Sequedad, es decir, contacto de la burbuja con una superficie seca, esto explica el porque la burbuja se rompe cuando llega a la mano.

f) Medida de la tensión superficial de una burbuja

Con una jeringa de longitud (ℓ), sección circular de diámetro (D) producimos una burbuja de jabón de radio (r).

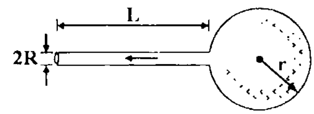


Al empujar el émbolo (E) de A hacia B, se forma la burbuja de jabón de radio "r_0", el cual, hallamos igualando los volúmenes de la jeringa y burbuja, así:

$$\pi\frac{D^2}{4}\ell = \frac{4}{3}\pi r_o^3$$

$$r_o = (\frac{3}{16}D^2\,\ell)^{1/3} \qquad (1)$$

Esta burbuja de jabón se pone en contacto con el extremo de un tubo capilar de radio (R) y longitud (L). Al salir el aire de la la burbuja, este se achica hasta desaparecer.



Asumiendo que el aire que circula por el tubo se comporte como un fluido viscoso de viscosidad (η), entonces, de la ley de Poiseuille, tenemos que la diferencia de presión en los extremos del capilar es:

$$\Delta P = \frac{8\eta LQ}{\pi R^4} \qquad (2)$$

Ahora, de la fórmula de Laplace, la diferencia de presión entre el interior y exterior de la burbuja de jabón (ó entre los extremos del capilar) es:

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{r} \qquad (3)$$

De otro lado, como el radio de la burbuja disminuye con el tiempo al escaparse el aire por el capilar, entonces, la rapidez con la que disminuye el volumen es:

$$Q = -\frac{dV}{dt} = -4\pi r^2\frac{dr}{dt} \qquad (4)$$

Sustituyendo las ecs.(3) y (4) en (2), obtenemos la ecuación que nos describe la variación del radio en función del tiempo:

$$4\pi r^2\frac{dr}{dt} = -\frac{\pi\gamma R^4}{2\,r\eta L}$$

Integrando esta ecuación, entre el ins

tante inicial $t_0=0$, en el que el radio de la burbuja es $r=r_0$ y el instante t=?, en el que la burbuja desaparece r=0, obtenemos la expresión para la tensión superficial, así:

$$\int_{r_0}^{0} r^3 dr = -\frac{\gamma R^4}{8\eta L}\int_0^t dt$$

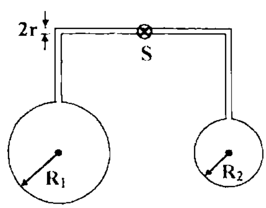
$$-\frac{r_o^4}{4} = -\frac{\gamma R^4}{8\eta L}t$$

$$\gamma = \frac{2\eta L}{t}\left(\frac{r_o}{R}\right)^4$$

Luego, midiendo el tiempo "t" que tarda en desaparecer la burbuja, obtenemos el valor de la tensión superficial de la burbuja.

g) Comunicando dos burbujas de jabón

Si ubicamos dos burbujas de radios R_1 y R_2 en los extremos de un tubo, y abrimos la llave (S) que los comunica, observaremos que la burbuja de jabón de radio menor es "absorvida" por la burbuja de radio mayor.



Como la diferencia de presión entre el exterior y el interior de la burbuja de jabón es pequeña, respecto de la presión atmosférica, prácticamente la densidad del aire se mantiene constante cuando pasa de una burbuja hacia la otra.

La diferencia de presión entre las burbujas de radios R_2 y R_1 es:

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

$$\Delta P = (P_o + \frac{4\gamma}{R_2}) - (P_o + \frac{4\gamma}{R_1})$$

$$\Delta P = 4\gamma\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Debido a esta diferencia de presión, el aire circula por el tubo de la burbuja pequeña hacia la grande, con una velocidad, dada por el teorema de Bernoulli:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho v^2$$

siendo, "ρ" la densidad del aire.

De otro lado, el volumen de aire que pasa de la burbuja pequeña a la grande, durante el tiempo "dt" es $vA\,dt$, siendo $A = \pi r^2$ el área de la sección del tubo.

Como el volumen de aire se mantiene constante, se tiene que:

$$\frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{4}{3}\pi R_2^2 = V = \text{cte.}$$

$$R_1^3 + R_2^2 = \frac{3V}{4\pi} = C$$

$$R_2 = (C - R_1^3)^{1/3} \qquad (1)$$

El volumen que aumenta la burbuja grande, es igual, al volumen que disminuye la burbuja pequeña, esto es:

$$dV_1 = A\,v\,dt$$

$$4\pi R_1^2\,dR_1 = \pi r^2\left[\frac{8\gamma(R_1 - R_2)}{\rho R_1 R_2}\right]^{1/2} dt$$

Separando variables, considerando (1), haciendo $R_1=x$, e integrando obtenemos la siguiente expresión:

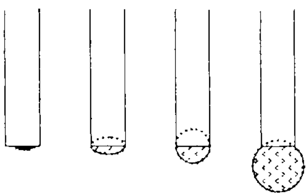
$$\int_{R_{01}}^{R_1} \frac{R_2^{1/2} R_1^{5/2}\, dR_1}{\sqrt{R_1 - R_2}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{\frac{8\gamma}{\rho}} \int_0^t dt$$

$$\int_{R_{01}}^{R_1} \frac{(C - x^3)x^{5/2}\, dx}{\sqrt{x - (C - x^3)^{1/3}}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{\frac{8\gamma}{\rho}}\, t$$

Conocido el radio inicial R_0 de la esfera grande, la integración numérica de esta integral nos proporciona el tiempo "t", que tarda dicha esfera en alcanzar el radio final $R_1 > R_{01}$.

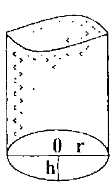
h) Modelo de evolución de una burbuja

En la Fig., se muestra el modelo de evolución de una burbuja, a medida que se suministra un volumen "V" de aire con una jeringa.



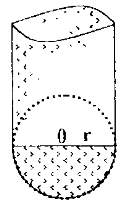
Inicialmente la burbuja tiene la forma de la mitad inferior de un elipsoide de revolución de semiejes "r" y "h", siendo "r" el radio del capilar y "h" el semieje vertical. El volumen "V" de aire contenido en este semielipsoide es:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$



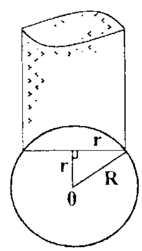
Conocido el volumen "V", podemos hallar la altura "h". Si seguimos suministrando aire, el semielipsoide se transforma en semiesfera de radio "r", cuyo volumen es:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3$$



Ahora, si se sigue suministrando aire, el radio de la burbuja se hace mayor que el radio del capilar "r", la burbuja tiene la forma de una esfera de radio "R", cuyo centro está a una distancia "h" de la parte inferior del capilar:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}$$



El volumen de aire suministrado, es igual, al volumen de la esfera de radio "R", menos el volumen del casquete esférico que está al interior del capilar, esto es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \left(\frac{2}{3}\pi R^3 - \pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi h^3\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(2R^3 - 3hR^2 + h^3)$$

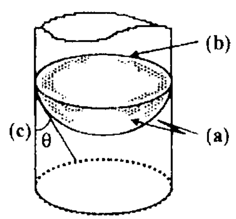
Conocido "V" y "r", a partir de esta ecuación podemos obtener el radio "R", con lo cual, podemos calcular la diferencia de presión del aire en el interior y exterior de la burbuja, a partir de:

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{R}$$

5. ANGULO DE CONTACTO

a) Menisco

Se llama así a la superficie libre de un líquido que se curva junto a las paredes del recipiente que lo contiene.



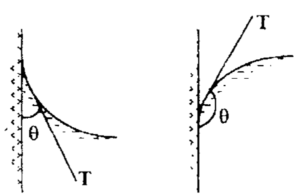
b) Perímetro de contacto

Es la línea de intersección del menisco con las paredes del recipiente.

c) Angulo de contacto

Es un ángulo que caracteriza el menisco; y se forma entre la tangente (T) al menisco y la superficie de contacto de la pared del recipiente.

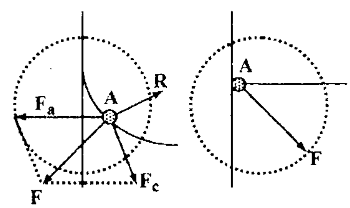
d) Casos



- Si, $\theta < \pi/2$ el líquido moja la pared, el menisco es cóncavo.
- Si, $\theta > \pi/2$ el líquido no moja la pared, el menisco es convexo.
- Si, $\theta = 0$ el líquido moja completamente la pared, el menisco tiene forma esférica cóncava.
- Si, $\theta = \pi$ el líquido no moja completamente la pared, el menisco tiene forma esférica convexa.
- Si, $\theta = \pi/2$, el líquido tiene superficie libre; hay ausencia de mojabilidad ó no mojabilidad.

e) Causas

La formación del menisco se debe a la existencia de las fuerzas de interacción entre las moléculas del líquido (fuerzas de cohesión F_c) y a las fuerzas de interacción de las moléculas del líquido con las moléculas de la superficie del recipiente que lo contiene (fuerzas de adherencia F_a).



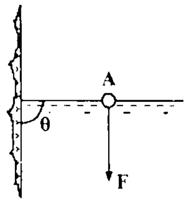
- La forma que adopte el menisco dependerá de la fuerza $\vec{F}$ resultante de la suma de $\vec{F}_c$ y $\vec{F}_a$, esta fuerza $\vec{F}$ siempre es perpendicular a la superficie libre del líquido.
- Las fuerzas de adherencia son mayores para las moléculas que se encuentran cercanas a la pared del recipiente, que las que se encuentran alejadas de el.

f) Formación

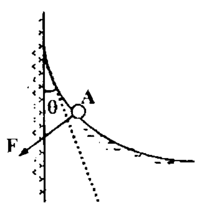
La forma del menisco viene determinada por las tres direcciones posibles de la fuerza $\vec{F}$, mostradas en la Fig.

1) Si la fuerza resultante $\vec{F}$ es paralela a la superficie de la pared del recipiente, la

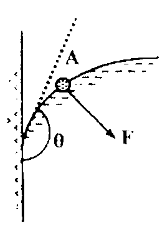
superficie del líquido será plana y el ángulo $\theta = \pi/2$.



2) Si las fuerzas de adherencia (F_a) son mayores que las fuerzas de cohesión (F_c), la resultante $\vec{F}$ está dirigida hacia el lado de la pared el menisco es cóncavo y $\theta < \pi/2$, el líquido moja la pared. Por ejemplo, la forma de la superficie libre del agua contenida en un recipiente de vidrio es cóncava.



3) Si las fuerzas de cohesión (F_c) son mayores que las fuerzas de adherencia (F_a), la resultante $\vec{F}$ está dirigida hacia el lado del líquido, el menisco es convexo y $\theta > \pi/2$, el líquido no moja la pared. Por ejemplo, la forma de la superficie libre del mercurio contenido en un recipiente de vidrio es convexa.



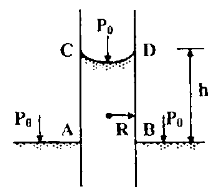
6. CAPILARIDAD

a) Definición

Se denomina, así, a la elevación o descenso de un líquido en un tubo capilar, éste fenómeno es resultado de la tensión superficial, depende de las magnitudes relativas de la cohesión y adherencia del líquido.

b) ¿Por que asciende al agua?

En el agua las fuerzas cohesivas corresponden a los enlaces de hidrógeno. En tanto, las fuerzas de adherencia ocurren cuando el capilar está compuesto de un material que tiene enlaces polares, como el vidrio. Este material contiene muchos átomos de oxigeno que tienen carga negativa, sobre la cual se adhieren los polos positivos de la molécula de agua.



$\theta < 90^0$

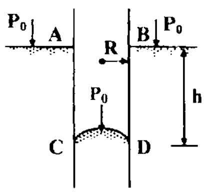
El líquido asciende en el capilar mojándolo (adherencia mayor que cohesión)

- El agua tiene la capacidad de ascender por las paredes del capilar de vidrio, cuando la superficie del agua toca el vidrio, por que las fuerzas de adherencia agua-vidrio son mayores que las de cohesión agua-agua, por lo que el agua contenida en el capilar, sube hasta que la fuerza resultante (tensión superficial) hacia arriba se compense con el peso de la columna de agua, que se forma en su ascenso.
- La absorción de agua por una esponja y

la ascensión de cera fundida por una cuerda son ejemplos comunes de ascensión capilar.

b) ¿Por que desciende el mercurio?

El mercurio desciende por las paredes del capilar de vidrio, situándose por debajo del nivel del mercurio que se encuentra fuera del capilar, por que las fuerzas de adherencia mercurio-vidrio son menores que las de cohesión mercurio-mercurio, por lo que el mercurio contenida en el capilar, sube hasta que la fuerza resultante (tensión superficial) hacia abajo se compense con la fuerza de presión creada por el mercurio externo al capilar de altura "h".



$\theta > 90°$

El líquido desciende en el capilar sin mojarlo (adherencia menor que cohesión)

c) Cálculo de la altura de ascenso o descenso.

La altura que asciende o desciende el líquido de densidad (ρ) y tensión superficial (γ) al interior de la pared del capilar de radio (r), debido a la tensión superficial, viene dado por:

$$h = \frac{2\,\gamma\cos\theta}{\rho\, g\, r}$$

siendo, (θ) el ángulo de contacto, y (g) la aceleración de la gravedad.

En ausencia de gravedad (ingravidez) no se observa el fenómeno de capilaridad.

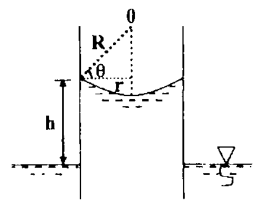
1) Análisis estático

Considerando la superficie del menisco que se forma en el capilar, como un casquete esférico de radio "R". La relación entre el radio "r" del capilar, el radio "R" del menisco, y el ángulo de contacto "θ" es:

$$r = R\cos\theta \qquad (1)$$

Debido a la curvatura de la superficie cóncava (convexa) surge una sobrepresión dirigida hacia el centro del menisco, el cual, viene dada por:

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2\gamma}{r}\cos\theta \qquad (1)$$



Por efecto de esta sobrepresión (tensión superficial) el líquido asciende por el capilar hasta una altura, dada por:

$$\Delta P = \rho g h \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), obtenemos la altura que asciende el líquido:

$$h = \frac{2\gamma}{r\rho g}\cos\theta$$

Como se observa, la altura que sacciende (o desciende) un líquido en un capilar es directamente proporcional a su tensión superficial (γ), y esta en razón inversa a la densidad del líquido (ρ), y del radio del capilar (r).

2) **Análisis dinámico**

Si introducimos verticalmente un capilar en un líquido, observaremos la variación que experimente la altura del líquido en función del tiempo.

Asumiendo que el líquido de viscosidad (η) fluye en régimen laminar por el capilar de radio (r), según la ley de Poiseuille, el caudal del líquido (volumen por unidad de tiempo) que pasa por el capilar es:

$$Q = \frac{\pi}{8}\frac{\Delta P r^4}{\eta h} \qquad (1)$$

A su vez, el caudal del líquido que fluye por el capilar, viene dado por:

$$Q = \frac{d}{dt}(\pi r^2 h) = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \qquad (2)$$

siendo, dh/dt el incremento de la altura de líquido en el capilar por unidad de tiempo, y "h" la altura de la columna de líquido en el capilar en el instante "t".

- Inicialmente el líquido asciende, hasta alcanzar su altura máxima, debido a que existe una sobrepresión dirigida hacia arriba, la cual, viene dada por:

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} - \rho g h \qquad (3)$$

Cuando esta diferencia de presión se anula, $\Delta P = 0$, se alcanza el estado de equilibrio. El líquido deja de ascender por el capilar, alcanzando una altura máxima, dada por:

$$h_{max} = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

Sustituyendo las ecs.(2) y (3) en (1), y asumiendo que $\theta \approx 0°$, R=r obtenemos la ecuación diferencial que describe el ascenso del líquido por el capilar:

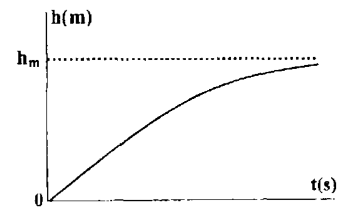
$$\pi r^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta h}\left(\frac{2\gamma}{r} - \rho g h\right)$$

Separando variables, e integrando para los límites dados, obtenemos la altura del líquido en el capilar en función del tiempo:

$$\int_0^h \frac{h\,dh}{(1-\rho g r^2 h/2\gamma)} = \frac{\gamma r}{8\eta}\int_0^t dt$$

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}\{1 - \exp[-\frac{\rho g r}{2\gamma}(h + \frac{\rho g r^2}{8\eta}t)]\}$$

- La representación gráfica de la altura (h) en función del tiempo (t) es:



Para $t \to \infty$, obtenemos la altura máxima que asciende el líquido en el capilar:

$$h_{max} = \frac{2\gamma}{\rho g r}$$

La altura máxima (h_{max}) es independiente de la viscosidad (η) del líquido.

El tiempo que tarda el líquido en alcanzar la altura máxima, depende de la viscosidad (η), una situación análoga a la que se presenta en la carga de un condensador a través de una resistencia, o a la velocidad que alcanza una esfera que se libera en un fluido viscoso.

- Para obtener "h" para un tiempo "t" da do, se debe resolver numéricamente la ecuación anterior, por ejemplo mediante un procedimiento de iteración.

d) Aplicaciones

- Se utiliza en la agricultura, en el regadio de los sembríos.
- Se utiliza en la medicina para la absorción por capilaridad de ciertas sustancias, a través de las venas y arterias.
- Se utiliza en la industria, en el diseño y construcción de aparatos mecánico-eléctricos de alta sensibilidad.
- En la escritura utilizamos la pluma estilográfica ó el rotulador (plumón), el funcionamiento de los cuales se basan en este principio, etc..

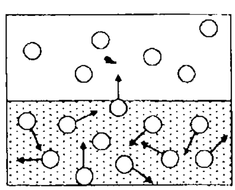
c) Presión de vapor saturado

1) Definición

Es la presión que ejerce el vapor de un líquido volátil sobre el propio líquido encerrado en un recipiente, una vez alcanzado el equilibrio a una temperatura dada.

2) Descripción

En un recipiente cerrado cuyo interior esta al vació, introducimos un líquido volátil.



A medida que el líquido ingresa al recipiente, una parte de sus moléculas abandonan el líquido pasando a formar el vapor por encima del líquido. Ahora, las moléculas que abandonan el líquido tienen suficiente energía, que les permite vencer las fuerzas de interacción molecular, esta energía las obtienen del intercambio de energía con las otras moléculas, durante los choques que se producen debido al movimiento caótico de ellas.

- A medida que las moléculas pasan al estado de vapor, la presión en el espacio cerrado sobre el líquido aumenta, este aumento no es indefinido, existe un valor de la presión, para el cual, por cada molécula que abandona el líquido necesariamente regresa una molécula al líquido, estableciéndose un equilibrio y manteniéndose la presión constante. Esta presión se conoce como presión de vapor saturado.
- La relación entre la temperatura y la presión de vapor saturado de las sustancias no es lineal, así, para cada valor de la temperatura a la que se encuentre la sustancia, existirá un valor fijo de la presión saturada para cada tipo de sustancia.
- La presión de vapor saturado depende de la naturaleza (estructura) del líquido y de la temperatura a la que se encuentre este. Obviamente a mayor temperatura se espera que la presión de vapor saturado sea mayor.
- La presión del vapor saturado sobre la superficie curvada del líquido depende de la forma del menisco. Si esta es cóncava (convexa), la presión del vapor saturado es menor (mayor) que sobre la superficie plana en la magnitud (ΔP_m) dada por:

$$\Delta P_m = \frac{\rho}{\rho_l - \rho}\Delta P$$

siendo, (ρ) la densidad del vapor saturado, (ρ_l) la densidad del líquido, y (ΔP) la presión adicional debida a la curvatura de la superficie.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Hallar la magnitud de la fuerza de la tensión superficial que actúa sobre una varilla maciza de vidrio de diámetro D=3 cm que flota verticalmente y parcialmente en agua de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 7{,}5.10^{-2}$ N/m.

a) 1 mN b) 3 mN c) 5 mN d) 7 mN e) 9 mN

02. Un aro de alambre muy delgado de diámetro D=76 mm se encuentra sobre la superficie de un líquido. Si la magnitud de la fuerza que se utiliza para separar al aro del líquido venciendo la fuerza de la tensión superficial es F=5.10^{-3} N. Hallar el coeficiente de tensión superficial del líquido.

a) 21.10^{-3} N/m b) 23.10^{-3} N/m c) 25.10^{-3} N/m d) 27.10^{-3} N/m e) 29.10^{-3} N/m

03. Un insecto de 6 patas está posado en un líquido de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m. Cada depresión tiene un radio de R=2 mm y un ángulo de contacto de $\theta = 37^0$. Hallar el peso (W) del insecto.(mili ; m=10^{-3})

a) 4,0 mN b) 4,2 mN c) 4,4 mN d) 4,6 mN e) 4,8 mN

04. Se crea una película jabonosa inflándola desde un radio de R= 0 cm hasta R=2/ π cm, asumiendo que la película es muy delgada y su coeficiente de tensión superficial es $\gamma = 43.10^{-3}$ N/m. Hallar el trabajo efectuado.

a) 131,6 μJ b) 133,6 μJ c) 135,6 μJ d) 137,6 μJ e) 139,6 μJ

05. Sobre la superficie del agua de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m se ubica una aguja de acero de densidad $\rho = 7\ 700$ kg/m^3 untada de grasa.¿Qué diámetro máximo debe tener esta aguja para mantenerse a flote sobre el agua? (g=10 m/s^2)

a) 1,51 mm b) 1,53 mm c) 1,55 mm d) 1,57 mm e) 1,59 mm

06. En la Fig.01, el aro de aluminio de densidad $\rho = 2\ 600$ kg/m^3, diámetros exterior D=52 mm, interior d=50 mm y altura h=10 mm se encuentra sobre el agua de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m. Hallar la magnitud de la fuerza que se necesita para separar el aro del agua. (g=10 m/s^2)

a) 50 mN b) 55 mN c) 60 mN d) 65 mN e) 70 mN

07. En la Fig.01, el aro de aluminio de densidad $\rho = 2\ 600$ kg/m^3, diámetros exterior D=52 mm, interior d=50 mm y altura h=10 mm se encuentra sobre el agua de coeficiente de por debajo de la superficie libre del agua de densidad ρ=1000 kg/m^3. (g=10 m/s^2 ; $\mu = 10^{-6}$; presión atmosférica P_0=10^5 N/m^2)

a) 1 atm b) 3 atm c) 5 atm d) 7 atm e) 9 atm

18. Un buque de guerra pesa W=4.10^7 N, y mide a=270 m de eslora y b=33 de manga. El perímetro de su casco en la línea de flotación es c=555 m. ¿Qué porcentaje representa la tensión superficial respecto del peso del buque? (γ = 0,081 N/m)

a) 10^{-4} % b) 2.10^{-4} % c) 3.10^{-4} % d) 4.10^{-4} % e) 5.10^{-4} %

19. La diferencia de la presión entre el interior y exterior de una burbuja de jabón es ΔP = 1 200 N/m^2, el coeficiente de tensión superficial de la burbuja es γ = 0,072 N/m. Hallar el diámetro de la burbuja.

a) 0,40 mm b) 0,42 mm c) 0,44 mm d) 0,46 mm e) 0,48 mm

20. En la Fig.05 ¿Qué carga máxima puede suministrarse a la gota de radio R= 5 mm, si su coeficiente de tensión superficial es γ = 0,5 N/m? (k = 9.10^9 N.m^2/ C^2 ; n=10^{-9})

a) 10,68 nC b) 12,68 nC c) 14,68 nC d) 16,68 nC e) 18,68 nC

21. Dos pompas de jabón esféricas de radios R_1=1,0 cm y R_2=1,5 cm, se unen compartiendo una superficie común. Hallar el radio de curvatura de esta superficie común.

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

22. Se tiene una burbuja esférica de volumen V=4,19 cm^3 , y coeficiente de tensión superficial γ = 0,025 N/m. ¿Qué trabajo se debe hacer para aumentar su volumen en 8 veces?

a) 10π μJ b) 20π μJ c) 40π μJ d) 60π μJ e) 80π μJ

23. Un tubo de diámetro exterior de D=1,0 cm, que está cerrado por un extremo; flota verticalmente en mercurio de coeficiente de tensión superficial γ = 0,46 N/m, con el extremo cerrado hacia abajo. La masa total del tubo es m=30 g y el ángulo de contacto $\theta = 0^o$. Hallar la altura sumergida del tubo. (ρ = 13 600 kg/m^3 , g=10 m/s^2)

a) 2,07 cm b) 2,27 cm c) 2,47 cm d) 2,67 cm e) 2,87 cm

24. Un tubo capilar de vidrio de diámetro exterior D=0,4 mm se ubica verticalmente en mercurio con un extremo sumergido ligeramente en el fluido. La densidad relativa del mercurio es ρ_r = 13,6 y su coeficiente de tensión superficial γ = 0,49 N/m. Hallar la altura que desciende el mercurio en el capilar, si el ángulo de contacto es $\theta = 130^0$. (g=10 m/s^2)

a) 2,1 cm b) 2,3 cm c) 2,5 cm d) 2,7 cm e) 2,9 cm

25. ¿En qué porcentaje debe variar la presión al interior de una burbuja jabonosa de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}075$ N/m y radio R= 0,1 μ m, para que su radio aumente en un 20 %? La presión atmosférica es $P_0=10^5$ N/m^2 y g=10 m/s^2.

a) 15,0 % b) 15,2 % c) 15,4 % d) 15,6 % e) 15,8 %

26. Un capilar se introduce verticalmente en un líquido de densidad $\rho = 10^4$ kg/m^3 y coeficien te de tensión superficial $\gamma = 0{,}5$ N/m. Hallar la cantidad de calor desprendida en el ascenso del líquido por el capilar, si el ángulo de contacto es $\theta = 0^o$.(g=10 m/s^2)

a) π μJ b) 2π μJ c) 3π μJ d) 4π μJ e) 5π μJ

27. Un capilar se introduce verticalmente en un líquido de densidad (ρ) y coeficiente de tensión superficial (γ). ¿Qué porcentaje representa el calor disipado durante el ascenso del líquido por el capilar, respecto del trabajo realizado por la fuerza de tensión superficial, si el ángulo de contacto es $\theta = 0^o$. (g=10 m/s^2)

a) 10 % b) 20 % c) 30 % d) 40 % e) 50 %

28. De un recipiente que contiene alcohol de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}02$ N/m, caen gotas a través de un tubo vertical de diámetro interior D=2 mm. Si cada gota se desprende t=1 s después que la anterior. ¿Qué tiempo tardarán en caer m=10 g de alcohol? (g=10 m/s^2)

a) 13,16 min b) 13,26 min c) 13,36 min d) 13,46 min e) 13,56 min

29. De un recipiente caen gotas de agua a través de un tubo vertical de diámetro interior D=3 mm. Cuando el agua se enfría desde $T_1=100^0$ C hasta $T_2=20^0$ C el peso de las gotas varian en $\Delta W = 13{,}5.10^{-5}$ N. Si el coeficiente de tensión superficial del agua a 20^0 C es $\gamma = 0{,}073$ N/m, hallar dicho coeficiente a 100^0 C. (g=10 m/s^2)

a) 0,050 $\frac{N}{m}$ b) 0,052 $\frac{N}{m}$ c) 0,054 $\frac{N}{m}$ d) 0,056 $\frac{N}{m}$ e) 0,058 $\frac{N}{m}$

30. Al fundirse el extremo inferior de un alambre de plomo de densidad $\rho = 11\ 300$ kg/m^3 y diámetro D=1 mm colgado verticalmente, se forman 20 gotas de plomo. El coeficiente de tensión superficial del plomo líquido es $\gamma = 0{,}47$ N/m. Hallar la longitud (ℓ) derretida del alambre. (g=10 m/s^2)

a) 31 cm b) 33 cm c) 35 cm d) 37 cm e) 39 cm

31. En un recipiente con mercurio de densidad $\rho = 13\ 600$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma =$ 0,5 N/m se introduce un tubo capilar abierto de diámetro D=3 mm. La diferencia entre los niveles del mercurio en el recipiente y en el tubo capilar es $\Delta h = 3{,}7$ mm. Hallar el radio de curvatura del menisco de mercurio que se forma en el tubo. (g=10 m/s^2)

por debajo de la superficie libre del agua de densidad ρ=1000 kg/m^3. (g=10 m/s^2 ; $\mu = 10^{-6}$; presión atmosférica P_0=10^5 N/m^2)

a) 1 atm b) 3 atm c) 5 atm d) 7 atm e) 9 atm

18. Un buque de guerra pesa W=4.10^7 N, y mide a=270 m de eslora y b=33 de manga. El perímetro de su casco en la línea de flotación es c=555 m. ¿Qué porcentaje representa la tensión superficial respecto del peso del buque? (γ = 0,081 N/m)

a) 10^{-4} % b) 2.10^{-4} % c) 3.10^{-4} % d) 4.10^{-4} % e) 5.10^{-4} %

19. La diferencia de la presión entre el interior y exterior de una burbuja de jabón es ΔP = 1 200 N/m^2, el coeficiente de tensión superficial de la burbuja es γ = 0,072 N/m. Hallar el diámetro de la burbuja.

a) 0,40 mm b) 0,42 mm c) 0,44 mm d) 0,46 mm e) 0,48 mm

20. En la Fig.05 ¿Qué carga máxima puede suministrarse a la gota de radio R= 5 mm, si su coeficiente de tensión superficial es γ = 0,5 N/m? (k = 9.10^9 N.m^2/ C^2 ; n=10^{-9})

a) 10,68 nC b) 12,68 nC c) 14,68 nC d) 16,68 nC e) 18,68 nC

21. Dos pompas de jabón esféricas de radios R_1=1,0 cm y R_2=1,5 cm, se unen compartiendo una superficie común. Hallar el radio de curvatura de esta superficie común.

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

22. Se tiene una burbuja esférica de volumen V=4,19 cm^3 , y coeficiente de tensión superficial γ = 0,025 N/m. ¿Qué trabajo se debe hacer para aumentar su volumen en 8 veces?

a) 10π μJ b) 20π μJ c) 40π μJ d) 60π μJ e) 80π μJ

23. Un tubo de diámetro exterior de D=1,0 cm, que está cerrado por un extremo; flota verticalmente en mercurio de coeficiente de tensión superficial γ = 0,46 N/m, con el extremo cerrado hacia abajo. La masa total del tubo es m=30 g y el ángulo de contacto $\theta = 0^\circ$. Hallar la altura sumergida del tubo. (ρ = 13 600 kg/m^3 , g=10 m/s^2)

a) 2,07 cm b) 2,27 cm c) 2,47 cm d) 2,67 cm e) 2,87 cm

24. Un tubo capilar de vidrio de diámetro exterior D=0,4 mm se ubica verticalmente en mercurio con un extremo sumergido ligeramente en el fluido. La densidad relativa del mercurio es ρ_r = 13,6 y su coeficiente de tensión superficial γ = 0,49 N/m. Hallar la altura que desciende el mercurio en el capilar, si el ángulo de contacto es $\theta = 130^0$. (g=10 m/s^2)

a) 2,1 cm b) 2,3 cm c) 2,5 cm d) 2,7 cm e) 2,9 cm

25. ¿En qué porcentaje debe variar la presión al interior de una burbuja jabonosa de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}075$ N/m y radio R= 0,1 μ m, para que su radio aumente en un 20 %? La presión atmosférica es $P_0=10^5$ N/m^2 y g=10 m/s^2.

a) 15,0 % b) 15,2 % c) 15,4 % d) 15,6 % e) 15,8 %

26. Un capilar se introduce verticalmente en un líquido de densidad $\rho = 10^4$ kg/m^3 y coeficien te de tensión superficial $\gamma = 0{,}5$ N/m. Hallar la cantidad de calor desprendida en el ascenso del líquido por el capilar, si el ángulo de contacto es $\theta = 0^o$.(g=10 m/s^2)

a) π μJ b) 2π μJ c) 3π μJ d) 4π μJ e) 5π μJ

27. Un capilar se introduce verticalmente en un líquido de densidad (ρ) y coeficiente de tensión superficial (γ). ¿Qué porcentaje representa el calor disipado durante el ascenso del líquido por el capilar, respecto del trabajo realizado por la fuerza de tensión superficial, si el ángulo de contacto es $\theta = 0^o$. (g=10 m/s^2)

a) 10 % b) 20 % c) 30 % d) 40 % e) 50 %

28. De un recipiente que contiene alcohol de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}02$ N/m, caen gotas a través de un tubo vertical de diámetro interior D=2 mm. Si cada gota se desprende t=1 s después que la anterior. ¿Qué tiempo tardarán en caer m=10 g de alcohol? (g=10 m/s^2)

a) 13,16 min b) 13,26 min c) 13,36 min d) 13,46 min e) 13,56 min

29. De un recipiente caen gotas de agua a través de un tubo vertical de diámetro interior D=3 mm. Cuando el agua se enfría desde $T_1=100^0$ C hasta $T_2=20^0$ C el peso de las gotas varian en $\Delta W = 13{,}5.10^{-5}$ N. Si el coeficiente de tensión superficial del agua a 20^0 C es $\gamma = 0{,}073$ N/m, hallar dicho coeficiente a 100^0 C. (g=10 m/s^2)

a) $0{,}050\ \frac{N}{m}$ b) $0{,}052\ \frac{N}{m}$ c) $0{,}054\ \frac{N}{m}$ d) $0{,}056\ \frac{N}{m}$ e) $0{,}058\ \frac{N}{m}$

30. Al fundirse el extremo inferior de un alambre de plomo de densidad $\rho = 11\ 300$ kg/m^3 y diámetro D=1 mm colgado verticalmente, se forman 20 gotas de plomo. El coeficiente de tensión superficial del plomo líquido es $\gamma = 0{,}47$ N/m. Hallar la longitud (ℓ) derretida del alambre. (g=10 m/s^2)

a) 31 cm b) 33 cm c) 35 cm d) 37 cm e) 39 cm

31. En un recipiente con mercurio de densidad $\rho = 13\ 600$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma =$ 0,5 N/m se introduce un tubo capilar abierto de diámetro D=3 mm. La diferencia entre los niveles del mercurio en el recipiente y en el tubo capilar es $\Delta h = 3{,}7$ mm. Hallar el radio de curvatura del menisco de mercurio que se forma en el tubo. (g=10 m/s^2)

a) 1 mm b) 2 mm c) 3 mm d) 4 mm e) 5 mm

32. Halle la elevación de la temperatura de una gota de mercurio resultante de la unión de dos gotas idénticas de diámetros D=2 mm. El mercurio tiene densidad $\rho = 13\ 600$ kg/m^3, coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}5$ N/m, calor específico c_e = 138 J/kg.^{0}C, g=10 m/s^2.

a) 1,05.10^{-4} ^{0}C b) 1,25.10^{-4} ^{0}C c) 1,45.10^{-4} ^{0}C d) 1,65.10^{-4} ^{0}C e)1,85.10^{-4} ^{0}C

33. ¿Qué trabajo se debe hacer contra las fuerzas de la tensión superficial para dividir una gota esférica de mercurio de radio R=3 mm en dos gotas idénticas. El coeficiente de tensión superficial del mercurio es $\gamma = 0{,}5$ N/m y su densidad $\rho = 13\ 600$ kg/m^3?

a) 14,1 μJ b) 14,3 μJ c) 14,5 μJ d) 14,7 μJ e) 14,9 μJ

34. La presión del aire al interior de una burbuja de jabón es 1 mmHg mayor que la atmosférica. El coeficiente de tensión superficial de la burbuja es $\gamma = 0{,}043$ N/m. Hallar el diámetro de la burbuja. (2,5.10^5 N/m^2 = 1880 mmHg)

a) 2,0 mm b) 2,2 mm c) 2,4 mm d) 2,6 mm e) 2,8 mm

35. ¿A qué profundidad bajo el agua se encuentra una burbuja de aire de diámetro D= 0,015 mm, densidad $\rho = 2$ kg/m^3, masa molecular M=29 kg/kmol, temperatura T=20 ^{0}C ? (P_{atm}=10^5 N/m^2 , R=8,31.10^3 J/kmol.^{0}C , g=10 m/s^2 , $\rho_{H20} = 10^3$ kg/m^3 , $\gamma_{H20} = 0{,}073$ N/m)

a) 4,1 m b) 4,3 m c) 4,5 m d) 4,7 m e) 4,9 m

36. ¿Cuántas veces es mayor la densidad del aire que hay en una burbuja de radio R=5.10^{-4} mm que se encuentra a una profundidad de h=5 m en el agua de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m, densidad $\rho = 10^3$ kg/m^3, que la densidad del aire a la presión atmosférica $P_0 = 10^5$ N/m^2 (a la misma temperatura)? (g=10 m/s^2)

a) 4,02 b) 4,22 c) 4,42 d) 4,62 e) 4,82

37. En la Fig.06, la probeta de diámetro D=2 mm, masa M= 0,5 π g flota verticalmente sumergido parcialmente en un líquido de densidad $\rho = 10^4$ kg/m^3, coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}5$ N/m. ¿Cuántas bolillas de masa m=$\pi/10$ g deben introducirse en la probeta para que la parte sumergida de este sea de h= 11 cm? (g=10 m/s^2)

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

38. ¿Hasta qué altura (h) puede llenarse con agua un recipiente que tiene en su base un agujero circular de diámetro D= 0,1 mm, sin que el agua empiece a salir por el agujero?. La densidad del agua $\rho = 1\ 000$ kg/m^3, su coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}075$

N/m, y g=10 m/s^2 .

a) 10 cm b) 20 cm c) 30 cm d) 40 cm e) 50 cm

39. Un cubo de masa m=20 g y arista a=3 cm mojado completamente, flota en la superficie del agua de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m. Hallar la altura sumergida del cubo. (g=10 m/s^2)

a) 2,12 cm b) 2,32 cm c) 2,52 cm d) 2,72 cm e) 2,92 cm

40. El extremo de un tubo capilar de cristal de radio R= 0,05 cm, se introduce en agua de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m, a una profundidad de h=2 cm. ¿Qué presión se necesita para soplar una burbuja de aire por el extremo inferior? (g=10 m/s^2)

a) $490\dfrac{N}{m^2}$ b) $492\dfrac{N}{m^2}$ c) $494\dfrac{N}{m^2}$ d) $496\dfrac{N}{m^2}$ e) $498\ \dfrac{N}{m^2}$

41. En un recipiente con agua se introduce un tubo capilar abierto de diámetro interior D=1 mm. La diferencia de los niveles del agua en el recipiente y en el tubo capilar es de h=2,8 cm. Hallar el radio de curvatura del menisco formado en el capilar.($\rho = 1\ 000$ kg/m^3, $\gamma = 0{,}073$ N/m, g=10 m/s^2)

a) 0,50 mm b) 0,52 mm c) 0,54 mm d) 0,56 mm e) 0,58 mm

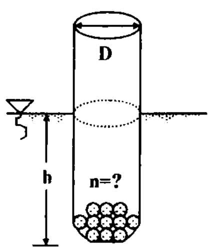


Fig.06

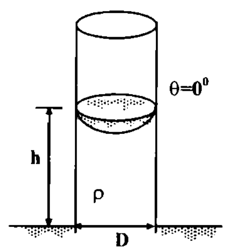


Fig.07

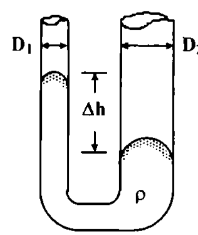


Fig.08

42. En la Fig.07, en un recipiente con agua se introduce un tubo capilar abierto de diámetro D=1 mm. Hallar la diferencia de los niveles del agua en el recipiente y en el tubo capilar, si el agua moja completamente el capilar. ($\rho = 1\ 000$ kg/m^3, $\gamma = 0{,}073$ N/m, g=10 m/s^2)

a) 2,12 cm b) 2,32 cm c) 2,52 cm d) 2,72 cm e) 2,92 cm

43. ¿Hasta qué altura se elevará el benzol de densidad $\rho = 880$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}03$ N/m, en un tubo capilar de diámetro interior D=1 mm? Asuma que el benzol moja completamente el capilar. (g=10 m/s^2)

a) 1,30 cm b) 1,32 cm c) 1,34 cm d) 1,36 cm e) 1,38 cm

44. En un tubo capilar el agua de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m, se eleva una altura de h=2 cm, mojando completamente el capilar. Hallar el diámetro interior del capilar. (g=10 m/s^2)

a) 1,40 mm b) 1,42 mm c) 1,44 mm d) 1,46 mm e) 1,48 mm

45. En la Fig.08, hallar la diferencia de alturas a que se encuentra el mercurio de densidad $\rho = 13\ 600$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}5$ N/m, que hay en los tubos capilares comunicantes de diámetros interiores $D_1 = 1$ mm y D_2=2 mm, respectivamente. Asuma que el mercurio no moja absolutamente los capilares.

a) 6,1 mm b) 6,4 mm c) 6,7 mm d) 7,0 mm e) 7,3 mm

46. ¿Qué diámetro máximo deben tener los poros de la mecha de una cocina a keroseno, para que este último suba desde el fondo del depósito hasta el mechero de la cocina una altura de h=10 cm? Asuma que los poros son tubos cilíndricos y que el keroseno moja perfectamente. ($\rho = 800$ kg/m^3, $\gamma = 0{,}03$ N/m, g=10 m/s^2)

a) 0,11 m b) 0,13 mm c) 0,15 mm d) 0,17 mm e) 0,19 mm

47. Un tubo capilar de radio interior r=2 mm se introduce en un líquido. Hallar el coeficiente de tensión superficial del líquido, sabiendo que la cantidad de líquido que asciende pesa W=9.10^{-4} N.

a) $0{,}070\ \frac{N}{m}$ b) $0{,}072\ \frac{N}{m}$ c) $0{,}074\ \frac{N}{m}$ d) $0{,}076\ \frac{N}{m}$ e) $0{,}078\ \frac{N}{m}$

48. Un tubo capilar de radio interior r=0,16 mm se introduce verticalmente en un recipiente con agua de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m. ¿Qué presión deberá ejercer el aire sobre el líquido que hay al interior del tubo capilar para que éste se encuentre al mismo nivel que el agua que hay en el recipiente ancho?. La presión exterior P_0=760 mmHg. Asuma que el agua moja completamente el capilar. (1 mmHg = 133,3 N/m^2)

a) 761 mHg b) 763 mmHg c) 765 mmHg d) 767 mmHg e)769 mmHg

49. Un tubo capilar cuyo extremo superior está cerrado se introduce verticalmente en un recipiente con agua de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m, a una profundidad del 1,5 % de la longitud del capilar. Si el nivel del agua dentro y fuera del capilar es el mismo, halle el radio interior del capilar. Considerar la presión exterior P_0 = 750 mmHg y que el agua moja perfectamente. (g=10 m/s^2 , 1 mmHg =133,3 N/m^2, $\mu = 10^{-6}$)

a) 90 μm b) 92 μm c) 94 μm d) 96 μm e) 98 μm

50. En la Fig.09, el tubo barométrico está lleno de mercurio de densidad $\rho = 13\ 600\ kg/m^3$, y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0,5\ N/m$. Halle la diferencia de las alturas alcanzadas por la columna de mercurio, cuando el diámetro del tubo es D_1=5 mm y D_2=1,5 cm, respectivamente. Considerar la presión atmosférica P_0=758 mmHg. (1 mmHg = 133,3 N/m^2 y g = 9,8 m/s^2)

a) 1 mmHg b) 2 mmHg c) 3 mmHg d) 4 mmHg e) 5 mmHg

51. Se tiene un barómetro de diámetro interior D=0,75 cm. ¿Qué corrección se debe hacer al medir la presión atmosférica por la altura de la columna de mercurio en el tubo. Considere la densidad del mercurio $\rho = 13\ 600\ kg/m^3$, su coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0,5\ N/m$, y que éste no moja en absoluto. (g = 9,8 m/s^2)

a) 1,0 mm b) 1,5 mm c) 2,0 mm d) 2,5 mm e) 3,0 mm

52. Hallar el error porcentual cometido al calcular la presión atmosférica, igual a P_0 = 760 mmHg, por la altura de la columna de mercurio de un tubo barométrico de diámetro interior D=5 mm. Asuma que el mercurio no moja en absoluto. ($\rho = 13\ 600\ kg/m^3$, g = 9,8 m/s^2 , $\gamma = 0,5\ N/m$)

a) 0,31 % b) 0,33 % c) 0,35 % d) 0,37 % e) 0,39 %

53. En la Fig.10, ¿Qué diámetro debe tener el orifico en el fondo del recipiente que contiene mercurio de densidad $\rho = 13\ 600\ kg/m^3$, y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0,5$ N/m; para que, cuando la altura de la columna de mercurio sea de h=3 cm, éste no pueda salir por el orificio? (g = 9,8 m/s^2)

a) 0,1 mm b) 0,3 mm c) 0,5 mm d) 0,7 mm e) 0,9 mm

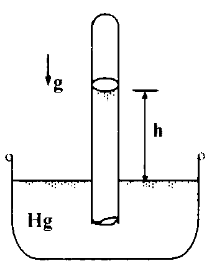


Fig.09

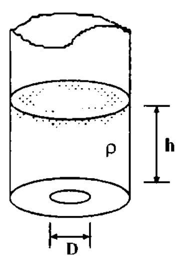


Fig.10

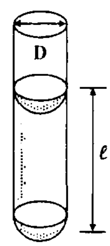


Fig.11

54. ¿Qué fuerza se debe aplicar para separar (sin deslizamiento) dos placas fotográficas mojadas rectangulares de lados a= 9 cm y b=12 cm? Considerar que el espesor de la capa de agua que hay entre las placas es d = 0,05 mm, $\gamma = 0,073\ N/m$, $\rho = 13\ 600\ kg/m^3$, y que el agua moja perfectamente las placas.

a) 31,5 N b) 33,5 N c) 35,5 N d) 37,5 N e) 39,5 N

55. Entre dos láminas verticales de vidrio planas y paralelas separadas por una distancia d=0,25 mm hay un líquido de coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}03$ N/m. Hallar la densidad de este líquido sabiendo que la altura que asciende entre las láminas es h=3,1 cm. Asuma que el líquido moja absolutamente las láminas. (g = 9,8 m/s^2)

a) 710 kg/m^3 b) 730 kg/m^3 c) 750 kg/m^3 d) 770 kg/m^3 e) 790 kg/m^3

56. Entre dos láminas de vidrio horizontales planas, paralelas y de pesos despreciables hay m=5 g de cierto líquido de densidad $\rho = 13\ 600$ kg/m^3. Cuando sobre la lámina superior se ubica un bloque de peso W= 49 N, la distancia entre las láminas es d = 0,087 mm. Hallar el coeficiente de tensión superficial de líquido. El líquido no moja en absoluto las láminas.

a) 0,1 N/m b) 0,3 N/m c) 0,5 N/m d) 0,7 N/m e) 0,9 N/m

57. En la Fig.11, en el tubo capilar abierto de diámetro interior D=1 mm hay una gota de a gua de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m. Cuando el tubo está en posición vertical la gota forma una columnita de longitud $\ell = 2$ cm. Hallar el radio de curvatura del menisco inferior en la columnita de agua. Considere que el agua moja perfectamente. (g = 9,8 m/s^2)

a) 1,50 mm b) 1,52 m c) 1,54 mm d) 1,56 mm e) 1,58 mm

58. En un tubo capilar horizontal de diámetro interior D=2 mm se introduce agua por suc ción, de modo que ésta forma una columnita de longitud $\ell = 10$ cm. ¿Cuántos gramos de agua de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m, saldrán de este tubo capilar si se coloca verticalmente? Considere que el agua mo ja perfecta mente. (g = 9,8 m/s^2)

a) 0,14 g b) 0,18 g c) 0,22 g d) 0,26 g e) 0,30 g

59. En un tubo capilar abierto de radio interior r = 0,6 mm, situado verticalmente, hay una columnita de alcohol de densidad $\rho = 790$ kg/m^3, y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}02$ N/m. El menisco inferior de radio de curvatura R_2=3r de esta columnita pende del extremo inferior del tubo capilar. Hallar la altura (h) de la columnita de alcohol, si este moja perfectamente el tubo capilar. (g = 9,8 m/s^2)

a) 10,5 mm b) 11,5 mm c) 12,5 mm d) 13,5 mm e) 14,5 mm

60. En la Fig.12, las ramas abiertas del tubo tienen radios r_1= 0,9 mm, r_2= 0,5 mm, y están llenas de keroseno de densidad $\rho = 800$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}03$ N/m. Si el menisco que se forma en la rama izquierda del tubo es cóncavo de radio $R_2=r_2$. Hallar la diferencia de alturas (Δh). El keroseno moja perfectamente. (g = 9,8 m/s^2)

a) 6,0 mm b) 6,4 mm c) 6,8 mm d) 7,2 mm e) 7,6 mm

61. En la Fig.12, las ramas abiertas del tubo tienen radios r_1= 0,9 mm, r_2= 0,5 mm, y están llenas de keroseno de densidad $\rho = 800$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}03$ N/m. Si el menisco que se forma en la rama izquierda del tubo es cóncavo de radio R_2=r_1. Hallar la diferencia de alturas (Δh). El keroseno moja perfectamente. (g = 9,8 m/s^2)

a) 11 mm b) 13 mm c) 15 mm d) 17 mm e) 19 mm

62. En la Fig.12, las ramas abiertas del tubo tienen radios r_1= 0,9 mm, r_2= 0,5 mm, y están llenas de keroseno de densidad $\rho = 800$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}03$ N/m. Si el menisco que se forma en la rama izquierda del tubo es plana. Hallar la diferencia de alturas (Δh). El keroseno moja perfectamente. (g = 9,8 m/s^2)

a) 8,1 mm b) 8,3 mm c) 8,5 mm d) 8,7 mm e) 8,9 mm

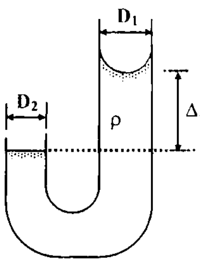


Fig.12

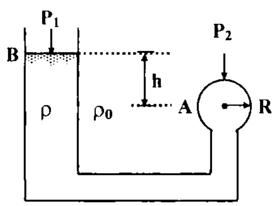


Fig.13

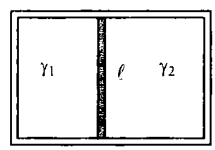


Fig.14

63. En la Fig.12, las ramas abiertas del tubo tienen radios r_1= 0,9 mm, r_2= 0,5 mm, y están llenas de keroseno de densidad $\rho = 800$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}03$ N/m. Si el menisco que se forma en la rama izquierda del tubo es convexa de radio R_2=r_2. Hallar la diferencia de alturas (Δh). El keroseno moja perfectamente. (g = 9,8 m/s^2)

a) 23,0 mm b) 23,2 mm c) 23,4 mm d) 23,6 mm e) 23,8 mm

64. Un tubo capilar de radio interior r=0,5 mm se introduce verticalmente y parcialmente en un recipiente ancho que contiene agua, siendo la altura que sobresale igual a h=2 cm. Hallar el radio de curvatura del menisco que se forma en el tubo capilar. Considere que el agua moja perfectamente. ($\rho = 1\ 000$ kg/m^3, $\gamma = 0{,}073$ N/m y g= 9,8 m/s^2)

a) 0,71 mm b) 0,75 mm c) 0,79 mm d) 0,83 mm e) 0,87 mm

65. Un aerómetro de diámetro interior D= 9 mm flota en el agua sumergido parcialmente y mojado perfectamente sus paredes. Hallar la variación de la altura (Δh) sumergida del aerómetro, si sobre la superficie del agua de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m se vierte unas gotas de alcohol de densidad $\rho_o = 790$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma_o = 0{,}02$ N/m? (g= 9,8 m/s^2)

a) 2,0 mm b) 2,2 mm c) 2,4 mm d) 2,6 mm e) 2,8 mm

66. Un aerómetro de diámetro interior D=9 mm flota sumergido parcialmente en un líquido de densidad $\rho = 800$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}03$ N/m. El líquido moja perfectamente las paredes del aerómetro. Hallar la variación de la altura (Δh) sumergida del aerómetro, si por estar grasiento, el líquido no moja en absoluto sus paredes. (g= 9,8 m/s^2)

a) 2,6 mm b) 3,0 mm c) 3,4 mm d) 3,8 mm e) 4,2 mm

67. Si la rapidez con que se transforma el agua en niebla constituida por gotas esféricas de diámetro D=3.10^{-4} cm es de R=3.10^{-3} m^3/min. Hallar la potencia necesaria para formar las superficies de las gotas de niebla. El coeficiente de tensión superficial del agua es $\gamma = 0{,}073$ N/m, g= 9,8 m/s^2.

a) 7,1 W b) 7,3 W c) 7,5 W d) 7,7 W e) 7,9 W

68. En la Fig.13, en el depósito lleno de un líquido de tensión superficial γ rodeado de su vapor, se forma en A una gota esférica de radio R, correspondiente al equilibrio de su tensión superficial. Si las densidades del líquido y su vapor son ρ, ρ_o respectivamente. Hallar la diferencia de las presiones complementarias entre la gota (A) y la superficie libre (B).

a) $\dfrac{2\gamma(\rho-\rho_o)}{R\rho}$ b) $\dfrac{2\gamma(\rho_o-\rho)}{R\rho_o}$ c) $\dfrac{2\gamma(\rho-\rho_o)}{R(\rho+\rho_o)}$ d) $\dfrac{2\gamma\rho}{R(\rho-\rho_o)}$ e) $\dfrac{2\gamma\rho_o}{R(\rho-\rho_o)}$

69. Hallar el radio máximo de las gotas de agua de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3, coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m, que pueden estar «suspendidas» en el techo. (g=9,8 m/s^2)

a) 4,13 mm b) 4,33 mm c) 4,53 mm d) 4,73 mm e) 4,93 mm

70. En la Fig.14, las películas de dos líquidos de coeficientes de tensión superficial $\gamma_1 = 0{,}03$ N/m y $\gamma_2 = 0{,}02$ N/m, se dividen por una varilla de longitud $\ell = 5$ cm. Hallar la magnitud de la fuerza resultante sobre la varilla.

a) 1 mN b) 2 mN c) 3 mN d) 4 mN e) 5 mN

71. Al ubicar un lazo de jebe de módulo de Young E=3.10^6 N/m^2 en forma de circunferencia de radio R$_0$=4,00 cm y área de sección transversal S= 0,001 cm^2, sobre una película de un líquido, este se extiende formando una circunferencia de radio R=4,02 cm, luego que la película ha sido pinchada al interior del lazo. Hallar el coeficiente de tensión superficial del líquido.

a) 0,01 N/m b) 0,02 N/m c) 0,03 N/m d) 0,04 N/m e) 0,05 N/m

72. En la Fig.15, la gota de radio R=2 cm flota en un líquido de densidad $\rho = 13\,600$ kg/m^3. Si la tensión superficial en la superficie de separación de los líquidos es $\gamma = 0{,}5$ N/m, y la altura del centro de la gota a la superficie es h=10 cm. Hallar la razón de la presión máxima a la presión mínima al interior de la gota. (g = 9,8 m/s^2)

a) 0,5 b) 1,0 c) 1,5 d) 2,0 e) 2,5

73. Un cubo de hierro de densidad $\rho_H = 7\,900$ kg/m^3, engrasado con parafina, flota en el agua de modo que su cara superior se encuentra al nivel del agua. El agua de densidad $\rho_A = 1000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m no moja la parafina. Hallar la longitud de la arista del cubo. (g = 9,8 m/s^2)

a) 2,1 mm b) 2,4 mm c) 2,7 mm d) 3,0 mm e) 3,3 mm

74. En la Fig.16, el palito de área de sección transversal cuadrada y longitud muy larga flota sobre un líquido en la forma mostrada. Hallar la razón de la densidad del palito (ρ_P) a la densidad del líquido (ρ_L), esto es $\rho_P / \rho_L = ?$.

a) 3/2 b) 4/5 c) 5/4 d) 6/5 e) 5/3

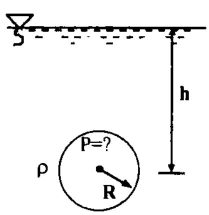


Fig.15

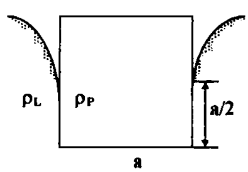


Fig.16

Fig.17

75. En la Fig.17, la suma de las fuerzas que actúan sobre el volumen de líquido mostrado es nula. Hallar la altura a la que se elevará el líquido de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m, por la pared vertical. El ángulo de contacto es $\theta = 37^\circ$. (g = 9,8 m/s^2)

a) 2,04 mm b) 2,24 mm c) 2,44 mm d) 2,64 mm e) 2,84 mm

76. Una placa larga de ancho $\ell = 8$ cm y masa por unidad de longitud $m = 200$ g/m se pone en contacto con la superficie de un líquido de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0{,}073$ N/m. Luego, se empezó a elevar la placa, hallar la fuer za qué actúa sobre la unidad de longitud de la placa en el instante en que la altura a la que se eleva el líquido es h=2 mm ($g = 9,8\ m/s^2$)

a) 1,63 N/m b) 2,63 N/m c) 3,63 N/m d) 4,63 N/m e) 5,63 N/m

77. Hallar la presión debajo de la superficie de un líquido de densidad $\rho = 13\ 600\ kg/m^3$, y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0,5$ N/m en forma de semicilindro de radio R= 2,5 mm, que se encuentra sobre una superficie horizontal. ($g = 9,8\ m/s^2$)

a) $150\ \frac{N}{m^2}$ b) $200\ \frac{N}{m^2}$ c) $250\ \frac{N}{m^2}$ d) $300\ \frac{N}{m^2}$ e) $350\ \frac{N}{m^2}$

78. En la Fig.18, hallar el grosor de la capa del líquido de densidad $\rho = 1\ 000\ kg/m^3$, y coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0,073$ N/m vertido sobre el plano horizontal. El ángulo de contacto es $\theta = 37^0$. ($g = 9,8\ m/s^2$)

a) 1,13 m b) 1,33 mm c) 1,53 mm d) 1,73 mm e) 1,93 mm

79. En la Fig.19, ¿Con qué fuerza se atraen mutuamente las placas paralelas cuadradas de lados a=8 cm, sumergidas parcialmente en el líquido, si éste no las moja? La densidad del líquido es $\rho = 1\ 000\ kg/m^3$, su coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0,073$ N/m, la distancia de separación entre las placas es d = 4 mm? ($g = 9,8\ m/s^2$; $m = 10^{-3}$)

a) 4,2 mN b) 4,6 mN c) 5,0 mN d) 5,4 mN e) 5,8 mN

80. En la Fig.20, el capilar de longitud $2\ell = 20$ cm, radio interior R=2 mm contiene líquido hasta la mitad, y gira alrededor del eje OO'. La densidad del líquido es $\rho = 13\ 600\ kg/m^3$, su coeficiente de tensión superficial $\gamma = 0,5$ N/m, y moja perfectamente el capilar. ¿A qué velocidad angular el líquido comenzará a salir del capilar?

a) 1,7 rad/s b) 2,7 rad/s c) 3,7 rad/s d) 4,7 rad/s e) 5,7 rad/s

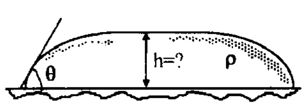


Fig.18

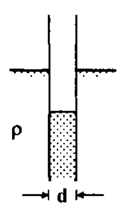


Fig.19

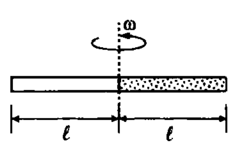


Fig.20

SOLUCIONARIO

Solución: 01

• La magnitud de la fuerza de tensión superficial que actúa sobre la línea de contacto de la varilla con el líquido es:

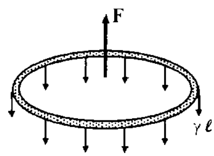
$$T = \gamma\,\ell = \gamma\,\pi\,D$$

$$T = (7{,}5.10^{-2})(3.10^{-2}\pi)$$

$$\clubsuit\ T = 7{,}06.10^{-3}\,N \qquad D$$

Solución: 02

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el aro de alambre.



Según teoría, el coeficiente de tensión superficial del líquido, viene dado por:

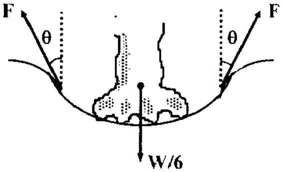
$$\gamma = \frac{F}{\ell} = \frac{F}{\pi D}$$

$$\gamma = \frac{5.10^{-3}}{\pi 76.10^{-3}}$$

$$\clubsuit\ \gamma = 20{,}9.10^{-3}\frac{N}{m} \qquad A$$

Solución: 03

• Representemos las fuerzas de tensión superficial (F) y el peso (W).



Como el insecto está en equilibrio, para una pata del insecto, se cumple que:

$$\frac{W}{6} = 2\,F_y = 2\,F\cos\theta$$

$$W = 12\,(\gamma\,\pi\,R)\cos\theta$$

$$W = (12)(0{,}073)(2.10^{-3}\pi)(\cos 37°)$$

$$\clubsuit\ W = 4{,}4.10^{-3}\,N \qquad C$$

Solución: 04

• Según teoría, el trabajo que se hace, es para aumentar el área lateral de la burbuja, esto es:

$$W = \gamma\,\Delta A = \gamma\,2\,(4\pi\,R^2)$$

$$W = (43.10^{-3})(8\pi)(\frac{4}{\pi}.10^{-4})$$

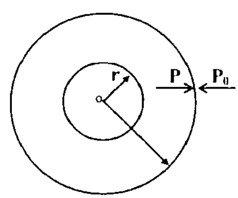
$$W = 1376.10^{-7}\,J$$

$$\clubsuit\ W = 137{,}6\ \mu J \qquad D$$

☞ **Nota**

El factor (2) se debe a las dos áreas laterales que presenta la burbuja, la interna y la externa.

<u>Segunda</u> <u>forma</u>



Sabemos que la diferencia de presiones entre el interior (P) y exterior (P_0) de la burbuja es:

$$P - P_o = \frac{4\gamma}{r}$$

Así, la fuerza que se debe aplicar para aumentar el radio de la burbuja, es opuesta a la fuerza debida a esta diferencia de presiones, es decir:

$$F_r = (P - P_o)(4\pi r^2)$$

$$F_r = 16\gamma\,\pi\, r$$

Luego, el trabajo realizado para aumentar el radio de la burbuja desde r=0 hasta r= R es:

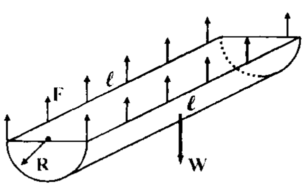
$$W = \int_0^R F_r\, dr$$

$$W = \int_0^R 16\,\gamma\,\pi\, r\, dr = 8\,\gamma\,\pi\, R^2$$

$$\clubsuit\ W = 137{,}6.10^{-6}\ J \qquad \text{(D)}$$

Solución: 05

- Representemos las fuerzas que actúan sobre el corte longitudinal de la aguja.



Por condición de equilibrio, el peso de la aguja (W), debe ser igual, a la fuerza de tensión superficial (F), esto es:

$$F = W$$

$$2\,\gamma\,\ell = \rho\, g V$$

$$2\,\gamma\,\ell = \rho\, g\,(\frac{\pi}{4} D^2 \ell)$$

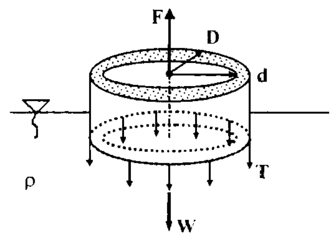
$$D = (\frac{8\,\gamma}{\pi\,\rho\, g})^{1/2}$$

$$D = [\frac{(8)(0{,}073)}{(\pi)(7700)(10)}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ D = 1{,}55mm \qquad \text{(C)}$$

Solución: 06

- Representemos las fuerzas que actúan sobre el aro de aluminio.



Calculemos el peso del anillo de diámetros exterior D e interior d, así:

$$W = \rho\, g V = \rho\, g [\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\, h]$$

$$W = (2\,600)(10)[\frac{\pi}{4}(52^2 - 50^2).10^{-6}(10^{-2})]$$

$$W = 41{,}66.10^{-3} N$$

Ahora, calculemos la fuerza debida a la tensión superficial, así:

$$T = \gamma\,\ell = \gamma\,\pi\,(D + d)$$

$$T = (0{,}073)(\pi)(52 + 50).10^{-3}$$

$$T = 23{,}4.10^{-3}\ N$$

Luego, la magnitud de la fuerza necesaria para desprender el aro de la superficie del agua es:

$$F = W + T$$

$$F = 41{,}6.10^{-3} + 23{,}4.10^{-3}$$

$$\clubsuit\ F = 65\ mN \qquad \text{(D)}$$

Solución: 07

• Según el problema anterior, el porcentaje que representa la fuerza de la tensión superficial (T), respecto de la fuerza aplicada (F) es:

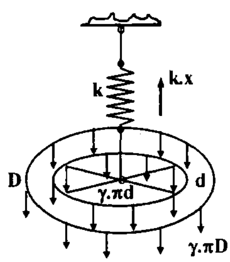
$$\eta = (\frac{T}{F})(100)$$

$$\eta = (\frac{23,4.10^{-3}}{65.10^{-3}})(100)$$

$$\clubsuit\ \eta = 36\%$$ (B)

Solución: 08

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el anillo en equilibrio.



En el instante en que se desprende el anillo de la superficie del agua, la fuerza de tensión superficial, es igual, a la fuerza elástica del resorte, esto es:

$$\gamma\ell = kx$$

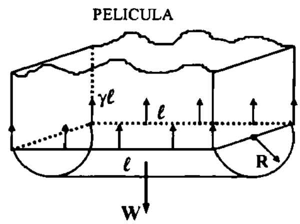
$$\gamma\pi(D+d) = kx$$

$$\gamma\pi(26+25).10^{-3} = (1)(5,3.10^{-3})$$

$$\clubsuit\ \gamma = 0,03\frac{N}{m}$$ (B)

Solución: 09

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el travesaño AB.



Por condición de equilibrio, el peso (W) del travesaño, debe ser igual, a la fuerza de tensión superficial ($2\gamma\ell$) que actúa sobre el borde del travesaño, esto es:

$$W = T \Rightarrow \rho g V = \gamma 2\ell$$

$$\rho g\frac{\pi}{4}D^2\ell = 2\gamma\ell \Rightarrow D = (\frac{8\gamma}{\pi\rho g})^{1/2}$$

$$D = [(\frac{(8)(0,045)}{(\pi)(8600)(10)})]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ D = 1,15mm$$ (B)

Solución: 10

• El trabajo para desplazar el travesaño AB, una distancia (d), viene dado por:

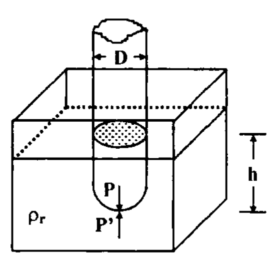
$$W = Fd = (\gamma 2\ell)d$$

$$4,5.10^{-5} = (0,045)(2\ell)(1.10^{-2})$$

$$\clubsuit\ \ell = 0,05m = 5cm$$ (E)

Solución: 11

• Representemos al tubo sumergido parcialmente en el aceite mineral.



En la Fig., la diferencia de presiones entre el interior (P) y exterior (P') del tubo es:

$$\Delta P = P - P' = P - \rho g h$$

$$\Delta P = 150 - (0{,}85.10^3)(10)(12.10^{-3})$$

$$\Delta P = 48\ N/m^2$$

Luego, el coeficiente de tensión superficial del aceite mineral es:

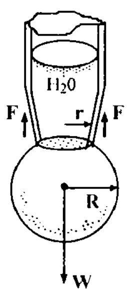
$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = \frac{4\gamma}{D}$$

$$48 = 4\gamma/1{,}5.10^{-3}$$

$$\clubsuit\ \gamma = 18.10^{-3}\ N/m \quad (B)$$

Solución: 12

• Representemos el tubo vertical, del cual caen gotas esféricas de agua.



En la Fig., por condición de equilibrio, en el instante en que se desprende la gota, su peso (W) es igual a la fuerza de tensión superficial (F), esto es:

$$W = F$$

$$\rho g V = \gamma \ell = \gamma(2\pi r)$$

$$\rho g\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 2\pi\gamma r$$

$$R = \left(\frac{3\gamma r}{2\rho g}\right)^{1/3} = \left[\frac{(3)(0{,}073)(10^{-3})}{(2)(10^3)(10)}\right]^{1/3}$$

$$\clubsuit\ R = 2{,}22.10^{-3}\,m \quad (B)$$

Solución: 13

• Del problema anterior, el porcentaje en que varían el radio de las gotas al cambiar el agua por el aceite de ricino es:

$$\eta = \left(\frac{R - R'}{R}\right)(100)$$

$$\eta = \left[\frac{(\gamma/\rho) - (\gamma'/\rho')}{\gamma/\rho}\right](100)$$

$$\eta = \left[\frac{\left(\frac{0{,}073}{1000}\right)^{1/3} - \left(\frac{0{,}035}{900}\right)^{1/3}}{0{,}073/1000}\right](100)$$

$$\eta = \left(\frac{0{,}0418 - 0.0339}{0{,}0418}\right)(100)$$

$$\clubsuit\ \eta = 18{,}9\% \quad (E)$$

Solución: 14

• Según el problema (12), el coeficiente de tensión superficial, viene dado por:

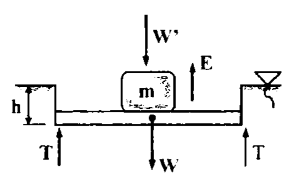
$$\gamma = \frac{2\rho g R^3}{3r}$$

$$\gamma = \frac{(2)(13600)(10)(1{,}767.10^{-3})^3}{(3)(10^{-3})}$$

$$\clubsuit\ \gamma = 0{,}5\ N/m \quad (E)$$

Solución: 15

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el sistema lámina + cuerpo.



Como el sistema está en equilibrio, el peso de la lámina (W) más el del cuerpo (W'), debe ser igual, a la fuerza de la tensión superficial (T) que actúa en los bordes de la lámina, más el empuje (E) del agua desplazada, esto es:

$$W + W' = T + E$$

$$mg + m'g = \gamma \ell + \rho g V$$

$$mg + m'g = \gamma(2a + 2b) + \rho g ab.h$$

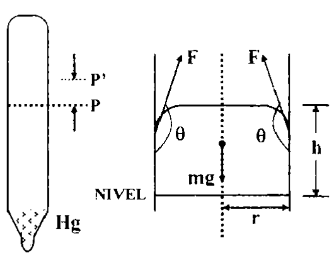
$$m' = \frac{2\gamma(a+b) + \rho g abh - mg}{g}$$

$$m' = \frac{0{,}73.10^{-2} + 1{,}2.10^{-2} - 1{,}8.10^{-2}}{10}$$

$$\clubsuit \quad m' = 0{,}13.10^{-3}\text{kg} = 0{,}13\text{g} \quad \text{B}$$

Solución: 16

• Representemos el barómetro después que el mercurio ha ascendido una altura (h) debida a la fuerza de tensión superficial.



Cuando el mercurio alcanza el equilibrio en el tubo capilar, el peso (mg) de mercurio por encima del nivel, es igual, a la componente vertical de la fuerza (F) debida a la tensión superficial, es decir:

$$F\cos(180^\circ - \theta) = mg$$

$$(\gamma 2\pi r)\cos(180^\circ - \theta) = \rho g \pi r^2 h$$

$$h = \frac{2\gamma \cos 180^\circ - \theta)}{\rho g r}$$

$$h = \frac{(2)(465)\cos(180^\circ - 140^\circ)}{(13{,}6)(980)(0{,}05)}$$

$$h = 1{,}069\text{cm} \approx 10{,}7\text{mm}$$

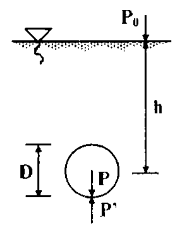
Luego, el valor correcto de la presión atmosférica es:

$$P' = 726{,}0 + 10{,}7$$

$$\clubsuit \quad P' = 736{,}7\text{mmHg} \quad \text{D}$$

Solución: 17

• Representemos a la burbuja de aire a una altura (h) por debajo de la superficie.



En la Fig., la diferencia de presiones entre el interior (P) y exterior (P') a la burbuja es

$$\Delta P = P - P' = \frac{4\gamma}{R} = \frac{8\gamma}{D}$$

$$P = P' + \frac{8\gamma}{D} = \rho g h + P_o + \frac{8\gamma}{D}$$

$$P = (1000)(10)(10) + 10^5 + \frac{(8)(0{,}03)}{0{,}8.10^{-6}}$$

$$\clubsuit \quad P = 5.10^5 \frac{N}{m^2} = 5\text{atm} \quad \text{C}$$

Solución: 18

• Primero calculemos la fuerza debida a la tensión superficial.

$$T = \gamma \ell = (81.10^{-3})(555)$$

$$T = 44955.10^{-3}\text{N}$$

Luego, el porcentaje que representa la tensión superficial respecto del peso del buque es:

$$\eta = \left(\frac{44\,955.10^{-3}}{4.10^{7}}\right)(100)$$

$$\eta = 10^{-4}\ \% \qquad \text{A}$$

Solución: 19

- La diferencia de presiones entre el interior (P) y exterior (P') a la burbuja, viene dado por:

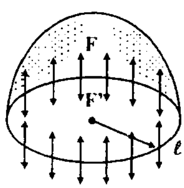
$$\Delta P = P - P' = \frac{4\gamma}{R} = \frac{8\gamma}{D}$$

$$D = \frac{8\gamma}{\Delta P} = \frac{(8)(0,072)}{1\,200}$$

$$\clubsuit\ D = 0,48.10^{-3}\text{m} = 0,48\text{mm} \qquad \text{E}$$

Solución: 20

- Representemos las fuerzas que actúan sobre un corte transversal de la gota.



La magnitud de la fuerza de extensión sobre la gota, debida a su carga eléctrica es:

$$F = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_o R^2}$$

De otra parte, la fuerza de tensión superficial, que actúa en el borde del corte transversal de la gota, viene dado por:

$$F' = \gamma\,\ell$$

$$F' = \gamma\,(2\pi R)$$

Ahora, por condición del problema, se cumple que, F = F', luego:

$$\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_o R^2} = 2\gamma\,\pi R$$

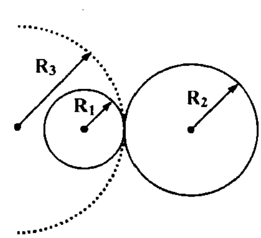
$$Q = [64\pi^2\varepsilon_o R^3\gamma]^{1/2}$$

$$Q = \left[\frac{(16\pi)(5.10^{-3})^3(5.10^{-1})}{9.10^9}\right]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ Q \approx 18,68.10^{-9}\ \text{C} \qquad \text{E}$$

Solución: 21

- Representemos las burbujas de radios R_1, R_2, y el radio de curvatura de la superficie común.



La diferencia de presiones entre las burbujas de radios R_1, R_2, debe ser igual, a la diferencia de presión de la burbuja equivalente, esto es:

$$\frac{4\gamma}{R_1} - \frac{4\gamma}{R_2} = \frac{4\gamma}{R_3}$$

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{(1,0)(1,5)}{1,5 - 1,0}$$

$$\clubsuit\ R_3 = 3\text{cm} \qquad \text{C}$$

Solución: 22

- Primero calculemos el radio inicial de la burbuja esférica.

$$V_o = \frac{4}{3}\pi R_o^3 = 4,19$$

$$R_o = 1cm$$

Por dato, el volumen final es 8 veces el volumen inicial, así, el radio final es:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 8(\frac{4}{3}\pi R_o^3)$$

$$R = 2R_o = 2\ cm$$

De otro lado, se sabe que la diferencia de presiones entre el interior y exterior de la burbuja es:

$$\Delta P = P - P_o = \frac{4\gamma}{r}$$

Luego, el trabajo para aumentar el radio de la burbuja esférica desde R_0=1 cm hasta R=2 cm es:

$$W = \int_{R_0}^{R} F_r\, dr = \int_{R_0}^{R} (\Delta P\, S)\, dr$$

$$W = 16\pi\gamma \int_{R_0}^{R} r\, dr$$

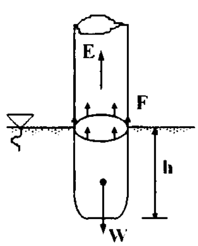
$$W = 8\pi\gamma(R^2 - R_o^2)$$

$$W = (8\pi)(0{,}025)(2^2 - 1^2).10^{-4}$$

$$\clubsuit\ W = 60\pi.10^{-6}\ J \qquad (D)$$

Solución: 23

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el tubo sumergido parcialmente.



Por condición de equilibrio, el peso del tubo (W), debe ser igual, al empuje (E) más la fuerza de tensión superficial (F), esto es:

$$W = E + F$$

$$m g = \rho g V + \gamma \ell$$

$$m g = \rho g \frac{1}{4}\pi D^2 h + \gamma \pi D$$

$$h = \frac{4m g - 4\pi\gamma D}{\rho g \pi D^2}$$

$$h = \frac{(4)(30.10^{-3})(10) - (4\pi)(0{,}46)(10^{-2})}{(13{,}6)(10^3)(10\pi)(10^{-2})^2}$$

$$\clubsuit\ h \approx 2{,}67\ cm \qquad (D)$$

Solución: 24

• Según teoría, la altura que desciende el mercurio, viene dado por:

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r} = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho_r \rho_{H20} g r}$$

$$h = \frac{(2)(0{,}49)(\cos 130^o)}{(13{,}6)(10^3)(10)(0{,}2.10^{-3})}$$

$$\clubsuit\ h = -2{,}3\ cm \qquad (B)$$

Nota

El signo (-) nos indica que el líquido desciende en el capilar sin mojarlo.

Solución: 25

• Recordemos que la presión al interior de una burbuja, viene dado por:

$$P = P_o + \frac{2\gamma}{R}$$

Así, el porcentaje en que debe variar la presión al interior de la burbuja es:

$$\eta = (\frac{P - P'}{P})(100)$$

$$\eta = (\frac{P_o + 2\gamma/R - P_o - 2\gamma/R'}{P_o + \frac{2\gamma}{R}})(100)$$

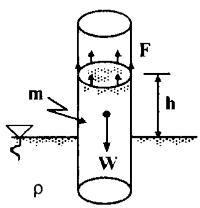
$$\eta = [\frac{2\gamma(R'-R)/R.R'}{P_o + 2\gamma/R}](100)$$

$$\eta = [\frac{(2)(0,075)(\frac{1,2.10^{-7} - 10^{-7}}{(10^{-7})(1,2.10^{-7})})}{10^5 + \frac{(2)(0,075)}{10^{-7}}}](100)$$

♣ $\eta = 15,6\ \%$ (D)

Solución: 26

• Representemos la altura alcanzada por el líquido en su ascenso por el capilar.



Como el ángulo de contacto es $\theta = 0^o$, la altura alcanzada por el líquido en el capilar, es:

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g R} = \frac{2\gamma}{\rho g R}$$

De otro lado, el trabajo realizado por la fuerza de tensión superficial (F) para elevar el líquido a una altura (h), se transforma en energía potencial gravitatoria (E_P) de la masa de agua por encima del nivel, más el calor (Q) disipado en el proceso, esto es:

$$W = E_P + Q$$

$$F.h = mg(\frac{h}{2}) + Q$$

$$Q = (F - \frac{1}{2}mg)h$$

$$Q = [2\pi\gamma R - \frac{1}{2}(\rho g \pi R^2 h)g]\ h$$

$$Q = [2\pi\gamma R - \frac{1}{2}\rho g \pi R^2 \frac{2\gamma}{\rho g R} g]\ h$$

$$Q = \frac{2\pi\gamma^2}{\rho g} = \frac{(2\pi)(0,5)^2}{(10^4)(10)}$$

♣ $Q = 5\pi.10^{-6}\,J$ (E)

Solución: 27

• Según el problema anterior, las expresiones para el calor disipado y el trabajo realizado por la fuerza de tensión superficial, son:

$$Q = \frac{2\pi\gamma^2}{\rho g} \quad y \quad W = \frac{4\pi\gamma^2}{\rho g}$$

Luego, el porcentaje que representa (Q) respecto de (W) es:

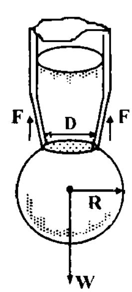
$$\eta = (\frac{W-Q}{W})(100) = (\frac{2Q-Q}{2Q})(100)$$

♣ $\eta = 50\ \%$ (E)

«La energía utilizada en el trabajo, se reparte por igual, entre la energía potencial y el calor disipado»

Solución: 28

• Representemos el recipiente y una gota de alcohol en el instante en que esta se desprende.



En el instante en que se desprende la gota de alcohol, su peso es igual, a la fuerza de tensión superficial, esto es:

$$W = F = \gamma \pi D$$

Así, el número de gotas que hay en (m) gramos de masa de alcohol es:

$$N = \frac{m\,g}{W} = \frac{m\,g}{\pi \gamma D}$$

Ahora, como cada gota demora 1 s en desprenderse, después, que se ha desprendido la gota anterior, entonces, el tiempo total en que se desprenden las (N) gotas es:

$$t_T = N\,t = \frac{m\,g\,t}{\pi \gamma D}$$

$$t_T = \frac{(10.10^{-3})(10)(1)}{(\pi)(0{,}02)(2.10^{-3})}$$

♣ $t_T = 13{,}26$ min (B)

Solución: 29

• En el instante en que se desprende la gota de agua, su peso es igual, a la fuerza de tensión superficial, así, sus pesos a 20^0 C y 100^0 C son:

$$W = \gamma \pi D \quad y \quad W' = \gamma' \pi D$$

Se sabe que a mayor temperatura la tensión superficial disminuye, de modo que, la diferencia de sus pesos a 20^0 C y 100^0 C es:

$$\Delta W = W - W' = (\gamma - \gamma')\,\pi D$$

$$\gamma' = \gamma - \frac{\Delta W}{\pi D} = 0{,}073 - \frac{13{,}5.10^{-5}}{(\pi)(3.10^{-3})}$$

♣ $\gamma' = 0{,}058$ N/m (E)

Solución: 30

• El peso del alambre derretido de longitud (ℓ), debe ser igual, al peso de las (N) gotitas de plomo desprendidas, esto es:

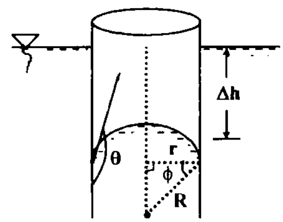
$$\rho\,g\,\frac{\pi}{4} D^2 \ell = N \gamma \pi D$$

$$\ell = \frac{4 N \gamma}{\rho\,g\,D} = \frac{(4)(20)(0{,}47)}{(11300)(10)(10^{-3})}$$

♣ $\ell = 0{,}33$ m $= 33$ cm (B)

Solución: 31

• Representemos la superficie convexa que se forma en el líquido.



De la Fig., hallemos la relación entre los radios del menisco (R) y el del capilar (r), así

$$r = R\cos\phi = R\cos(180^o - \theta)$$

$$r = -R\cos\theta \qquad (1)$$

De otro lado, la presión complementaria, debida a la curvatura del menisco es:

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = -\frac{2\gamma\cos\theta}{r}$$

$$P = P_o - \frac{2\gamma\cos\theta}{r}$$

Para el mercurio, $\theta > \pi/2$, de modo que $\cos\theta < 0$, y $P > P_0$, esto es la presión interna (P) es mayor que la externa (P_0), por lo que, el menisco es convexo y se forma por debajo del nivel en el recipiente.

Ahora, la diferencia de niveles entre el menisco y el recipiente, viene dado por:

$$\Delta h = -\frac{4\gamma\cos\theta}{\rho g D}$$

$$\cos\theta = -\frac{\rho g d \Delta h}{4\gamma}$$

$$\cos\theta = -\frac{(13600)(10)(3.10^{-3})(3,7.10^{-3})}{(4)(0,5)}$$

$$\cos\theta = -0,75$$

Luego, sustituyendo en (1), se tiene:

$$1,5 = -R\,(-0,75)$$

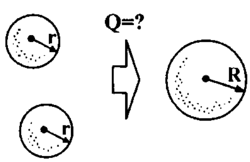
$$♣\ R = 2\ \text{mm} \qquad \text{B}$$

☞ **Nota**

Recuérdese que cuando el menisco se forma por debajo del nivel del líquido en el recipiente, la altura se considera negativa.

Solución: 32

• Representemos a las gotas iniciales y a la gota resultante.



Igualando la suma de los volúmenes de las gotitas con el volumen de la gota resultante, hallemos el radio (R), así:

$$(2)(\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$R = (2)^{1/3} r \qquad (1)$$

De otro lado, la energía desprendida al unirse las gotitas de radio (r) para formar la gota de radio (R) es:

$$\Delta E = \gamma\,\Delta S$$

$$\Delta E = \gamma\,[(2)(4\pi r^2) - 4\pi R^2]$$

$$\Delta E = 4\,(2-(4)^{1/3})\,\pi\,\gamma\,r^2 \qquad (2)$$

Esta energía desprendida se utiliza en calentar la gota resultante, esto es:

$$\Delta E = m\,c_e \Delta T$$

$$\Delta E = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 c_e \Delta T \qquad (3)$$

Finalmente, igualando (2) con (3):

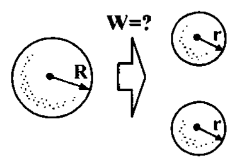
$$\Delta T = \frac{3\gamma(2-(4)^{1/3})}{2\rho c_e r}$$

$$\Delta T = \frac{(3)(0,5)(2-(4)^{1/3})}{(2)(13,6.10^3)(138)(10^{-3})}$$

$$♣\ \Delta T = 1,65.10^{-4}\,{}^0C \qquad \text{D}$$

Solución: 33

• Representemos a la gota inicial y a la gotitas resultante de la separación.



Igualando el volumen de la gota con la suma de los volúmenes de las gotitas, hallemos el radio (r), así:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = (2)(\frac{4}{3}\pi r^3)$$

$$r = R/(2)^{1/3}$$

Según el problema anterior, el trabajo necesario para dividir una gota en dos gotas idéntícas, viene dado por:

$$W = \gamma\,\Delta S$$

$$W = \gamma\,[(2)(4\pi r^2 - 4\pi R^2]$$

$$W = \gamma\,[8\pi \frac{R^2}{2^{2/3}} - 4\pi R^2]$$

$$W = 4\,(2^{1/3} - 1)\,\pi\,\gamma\,R^2$$

$$W = (4)(2^{1/3} - 1)(\pi)(0{,}5)(3.10^{-3})^2$$

$$♣\quad W = 14{,}7.10^{-6}\ J \qquad D$$

Solución: 34

• Según teoría, la diferencia de presiones entre el interior y exterior a la burbuja, viene dado por:

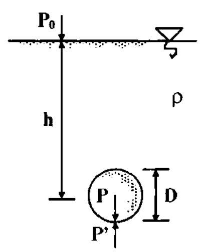
$$\Delta P = \frac{4\gamma}{R} = \frac{8\gamma}{D}$$

$$D = \frac{8\gamma}{\Delta P} = \frac{(8)(0{,}043)}{2{,}5.10^5/1880}$$

$$♣\quad D = 2{,}6.10^{-3}\ m \qquad D$$

Solución: 35

• Representemos la burbuja de aire a una profundidad (h) por debajo del agua.



De la ecuación de los gases ideales, hallemos la presión interna de la burbuja de aire, así:

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

$$P = \frac{\rho\,R\,T}{M} = \frac{(2)(8{,}31.10^3)(20+273)}{29}$$

$$P = 1{,}68.10^5\ N/m^2$$

De otro lado, la diferencia de presiones entre el interior y exterior a la burbuja, viene dado por:

$$\Delta P = P - P' = \frac{4\gamma}{D}$$

$$P = P' + \frac{4\gamma}{D} = P_0 + \rho\,g\,h + \frac{4\gamma}{D}$$

$$1{,}68.10^5 = 10^5 + (10^3)(10)\,h + \frac{(4)(0{,}073)}{0{,}015.10^{-3}}$$

$$1{,}68.10^5 = 10^5 + 10^4 h + 0{,}19.10^5$$

$$♣\quad h = 4{,}9\ m \qquad E$$

Solución: 36

• Del problema anterior, la presión al interior de la burbuja es:

$$P = P_0 + \rho\,g\,h + \frac{4\gamma}{D}$$

$$P = 10^5 + (10^3)(10)(5) + \frac{(4)(0{,}073)}{10^{-6}}$$

$$P = 4{,}42.10^5\ N/m^2$$

Luego, de la ecuación de los gases ideales, la razón de la presión (P) de la burbuja en el agua a la presión atmosférica (P_0) es:

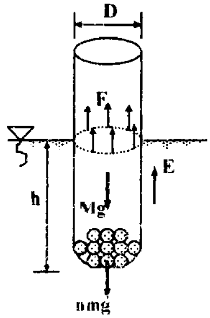
$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho RT/M}{\rho_0 RT/M} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{4{,}42.10^5}{10^5}$$

$$♣\quad \frac{\rho}{\rho_0} = 4{,}42\ \text{veces} \qquad C$$

Solución: 37

- Representemos las fuerzas que actúan en la probeta sumergida parcialmente una altura de (h).



Por condición de equilibrio, la fuerza de tensión superficial (F) más el empuje (E), es igual, al peso de la probeta (Mg) más el peso de las (n) bolitas (nmg), esto es:

$$F + E = M\,g + n\,m\,g$$

$$\gamma\, 2\pi \mathbf{R} + \rho\, g\,(\pi R^2 h) = M\,g + n\,m\,g$$

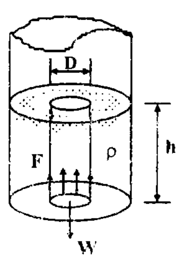
$$n = \frac{\gamma\,\pi D + \frac{\pi}{4}\rho\, g\, D^2 h - M\,g}{m\,g}$$

$$n = \frac{\pi.10^{-3} + 11\pi.10^{-3} - 5\pi.10^{-3}}{\pi.10^{-3}}$$

$$\clubsuit\ \ n = 7 \text{ bolillas} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 38

- Representemos la tensión superficial (F) y el peso del líquido (W).



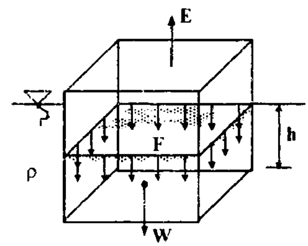
$$\rho\, g\,\frac{D^2}{4} h = \gamma\, D$$

$$h = \frac{4\gamma}{\rho\, g\, D} = \frac{(4)(0{,}075)}{(10^3)(10)(0{,}1.10^{-3})}$$

$$\clubsuit\ \ h = 0{,}3 \text{ m} = 30 \text{ cm} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 39

- Representemos las fuerzas que actúan sobre el cubo de madera de lado (a).



Por condición de equilibrio, el empuje (E) debe ser igual, al peso del cubo (W) más la fuerza de tensión superficial (F), es decir:

$$E = W + F$$

$$\rho\, g\, a^2 x = m\,g + 4\,a\,\gamma$$

$$x = \frac{m\,g + 4\,a\,\gamma}{\rho\, g\, a^2}$$

$$x = \frac{(20.10^{-3})(10) + (4)(3.10^{-2})(0{,}073)}{(10^3)(10)(3.10^{-2})^2}$$

$$\clubsuit\ \ x = 2{,}32.10^{-2} \text{m} = 2{,}32 \text{ cm} \qquad \text{(B)}$$

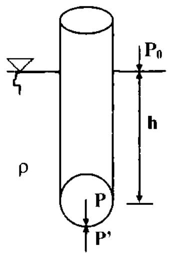
Solución: 40

- Según teoría, la diferencia de presión entre el interior y exterior a la burbuja es:

$$\Delta P - P - P' = \frac{2\gamma}{R}$$

$$P = P' + \frac{2\gamma}{R} = P_0 + \rho\, g\, h + \frac{2\gamma}{R}$$

Representemos el capilar con la burbuja soplada en su extremo inferior.



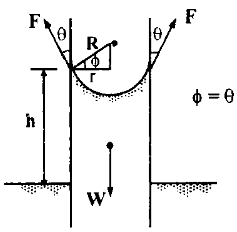
$$P - P_0 = \rho g h + \frac{2\gamma}{R}$$

$$P - P_0 = (10^3)(10)(2.10^{-2}) + \frac{(2)(0,073)}{5.10^{-4}}$$

$$\clubsuit \ P - P_0 = 492 \ N/m^2 \quad (B)$$

Solución: 41

• Representemos la fuerza de tensión superficial (F) y el peso (W) del líquido.



En la Fig., la componente horizontal de la fuerza de tensión superficial, debe ser igual al peso de la columna de agua, esto es:

$$\gamma\, 2\pi r \cos\theta = \pi r^2 \rho g h$$

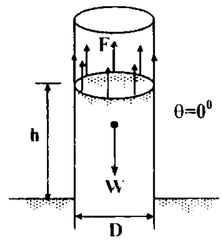
$$r = R\cos\theta = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g h}$$

$$R = \frac{(2)(0,073)}{(10^3)(10)(2,8.10^{-2})}$$

$$\clubsuit \ R = 0,52 \text{ mm} \quad (B)$$

Solución: 42

• Representemos al capilar con el agua mojándolo completamente, por lo que, el ángulo de contacto es $\theta = 0°$.



En la Fig., la fuerza de tensión superficial (F), debe ser igual, al peso (W) de la columna de agua, esto es:

$$2\pi\gamma r = \pi r^2 \rho g h$$

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} = \frac{4\gamma}{\rho g D}$$

$$h = \frac{(4)(0,073)}{(10^3)(10)(10^{-3})}$$

$$\clubsuit \ h = 2,92 \text{ cm} \quad (E)$$

Solución: 43

• Como el benzol moja completamente el capilar ($\theta = 0°$), y este asciende en el capilar una altura, igual a:

$$h = \frac{4\gamma}{\rho g D} = \frac{(4)(0,03)}{(880)(10)(10^{-3})}$$

$$h = 13,6.10^{-3} \text{m}$$

$$\clubsuit \ h = 1,36 \text{ cm} \quad (D)$$

Solución: 44

• Como el agua moja completamente el capilar ($\theta = 0°$), este asciende en el capilar cuyo diámetro, viene dado por:

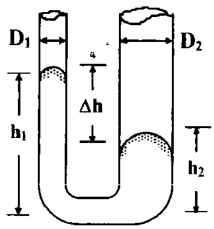
$$D = \frac{4\gamma}{\rho g h} = \frac{(4)(0,073)}{(10^3)(10)(2.10^{-2})}$$

$$D = 0,146.10^{-2}\,m$$

$$♣\ D = 1,46mm \qquad (D)$$

Solución: 45

• Representemos las alturas que alcanza el mercurio en los tubos capilares comunicantes (1) y (2).



Como el mercurio no moja completamente los capilares ($\theta = \pi$), los meniscos que se forman son convexos, y las alturas (h_1) y (h_2), vienen dadas por:

$$h_1 = \frac{4\gamma}{\rho g D_1} = \frac{(4)(0,5)}{(13,6.10^3)(10)(10^{-3})}$$

$$h_1 = 1,47\ cm$$

$$h_2 = \frac{4\gamma}{\rho g D_2} = \frac{(4)(0,5)}{(13,6.10^3)(10)(2.10^{-3})}$$

$$h_2 = 0,74cm$$

Luego, la diferencia de los niveles del mercurio en los capilares (1) y (2) es:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 1,47 - 0,74$$

$$♣\ \Delta h = 0,73\ cm \qquad (E)$$

Solución: 46

• El máximo diámetro que deben tener los poros del mechero de la cocina de kerosene es:

$$D = \frac{4\gamma}{\rho g h} = \frac{(4)(0,03)}{(800)(10)(10.10^{-2})}$$

$$♣\ D = 0,15\ mm \qquad (C)$$

Solución: 47

• Por equilibrio, la fuerza de tensión superficial (F), debe ser igual, al peso (W) de la columna de líquido que asciende en el capilar, esto es:

$$2\pi\gamma r = W$$

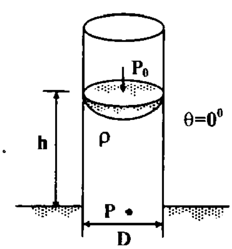
$$\gamma = \frac{W}{2\pi r} = \frac{9.10^{-4}}{(2\pi)(2.10^{-3})}$$

$$♣\ \gamma = 0,072\ \frac{N}{m} \qquad (B)$$

Solución: 48

• En la Fig., la presión al interior de un punto que está al mismo nivel que el líquido en el recipiente, es igual, a la suma de la presión atmosférica, más la presión complementaria debida a la tensión superficial, esto es:

$$P = P_0 + \frac{2\gamma}{R}$$



$$P = 760 + [\frac{(2)(0,073)}{(0,16.10^{-3})}](\frac{1}{133,3})$$

$$P = 760 + 6,8$$

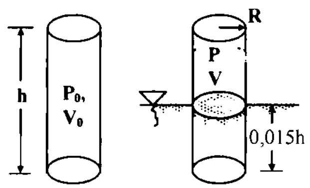
$\clubsuit$ $P \approx 767$ mmHg (D)

Nota

La presión debida a la tensión superficial, es igual, a la presión hidrostática de la columna de altura (h).

Solución: 49

- Representemos el tubo capilar cerrado antes y después de introducirlo en el agua.



En la Fig. los volúmenes inicial (V_0) y final (V) del aire en el capilar cerrado, son:

$$V_0 = \pi R^2 h \ ; \quad V = \pi R^2 0{,}985\, h \qquad (1)$$

De otro lado, de la ley de Boyle-Mariotte, hallamos la presión final (P), a la que se encuentra el aire en el capilar, así:

$$P_0 V_0 = P\,V \quad \Rightarrow \quad P = P_0 \frac{V_0}{V} \qquad (2)$$

Ahora, según teoría, la diferencia de presiones entre el interior y exterior al agua, viene dado por:

$$\Delta P = P - P_0 = \frac{2\gamma}{R}$$

$$P = P_0 + \frac{2\gamma}{R} \qquad (3)$$

Finalmente, igualando (2) con (3), y considerando (1), se tiene:

$$P_0 + \frac{2\gamma}{R} = P_0 \frac{V_0}{V}$$

$$R = \frac{2\gamma}{P_0}\left(\frac{V}{V_0 - V}\right)$$

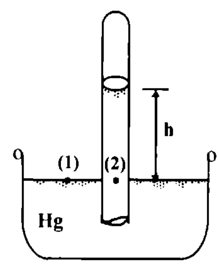
$$R = \frac{(2)(0{,}073)}{(750)(133{,}3)}\left(\frac{0{,}985\,\pi R^2}{0{,}015\,\pi R^2}\right)$$

$\clubsuit$ $R = 96.10^{-6}$m (D)

Solución: 50

- En la Fig., los puntos (1) y (2) están al mismo nivel, por lo que, sus presiones son iguales, esto es:

$$P_1 = P_2$$



$$P_0 = \rho\, g\, h + \frac{4\gamma}{D}$$

$$h = \frac{P_0 - (4\gamma / D)}{\rho\, g}$$

Para un diámetro D=5 mm, la altura alcanzada por el mercurio es:

$$h_1 = \frac{(758)(133{,}3) - (4)(0{,}5)/(5.10^{-3})}{(13{,}6.10^3)(9{,}8)}$$

$$h_1 = 755{,}1.10^{-3}\text{mHg}$$

$$h_1 \approx 755 \text{ mmHg}$$

Para un diámetro D=1,5 cm, la altura alcanzada por el mercurio es:

$$h_2 = \frac{(758)(133,3) - (4)(0,5)/(15.10^{-3})}{(13,6.10^3)(9,8)}$$

$$h_2 = 757,1.10^{-3}\text{mHg}$$

$$h_2 \approx 757 \text{ mmHg}$$

Luego, la diferencia de las alturas alcanzadas por el mercurio es:

$$\Delta h = h_2 - h_1$$

$$\clubsuit \ \Delta h = 2\text{mmHg} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 51

• El mercurio asciende una altura adicional, debida a la tensión superficial, igual a:

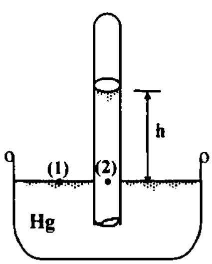
$$h = \frac{(2\gamma/R)}{\rho g} = \frac{4\gamma}{\rho g D}$$

$$h = \frac{(4)(0,5)}{(13,6.10^3)(9,8)(0,75.10^{-2})}$$

$$\clubsuit \ h = 2.10^{-3}\text{m} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 52

• Representemos el barómetro de mercurio, y la altura que alcanza éste en el tubo.



En la Fig., los puntos (1) y (2) están al mismo nivel, por lo que, sus presiones son iguales, esto es:

$$P_1 = P_2$$

$$P_0 = \rho g h + \frac{4\gamma}{D}$$

$$h = \frac{P_0 - (4\gamma/D)}{\rho g}$$

$$h = \frac{P_0}{\rho g} - \frac{4\gamma}{\rho g D}$$

$$h = 760 - \frac{(4)(0,5)}{(13,6.10^3)(9,8)(5.10^{-3})}$$

$$h = 760 - 3 = 757 \text{ mmHg}$$

Luego, el error porcentual que se comete al medir la presión atmosférica por la altura de la columna de mercurio en el tubo del barómetro es:

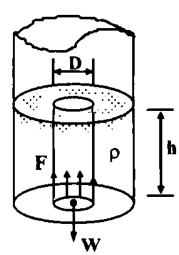
$$\eta = (\frac{H-h}{H})(100)$$

$$\eta = (\frac{760-757}{760})(100)$$

$$\clubsuit \ \eta \approx 0,39\% \qquad \text{(E)}$$

Solución: 53

• Representemos el recipiente conteniendo una altura (h) de mercurio, y un orificio de diámetro (D).



En la Fig., el peso de la columna de mercurio de altura (h) y diámetro (D), debe ser igual, a la fuerza de tensión superficial (F), que actúa en el borde del agujero, esto es:

$$\rho g \pi R^2 h = \gamma 2\pi R$$

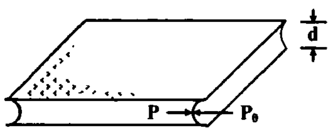
$$\rho g \frac{D^2}{4} h = \gamma D$$

$$D = \frac{4\gamma}{\rho g h} = \frac{(4)(0,5)}{(13,610^3)(9,8)(3.10^{-2})}$$

$$h = 0,5.10^{-3} m \qquad \text{C}$$

Solución: 54

- Representemos las placas fotográficas con el agua formando en los bordes semi cilindros cóncavos, como se aprecia.



En la Fig., como la presión atmosférica (P_0) es mayor que la presión al interior (P) del líquido, entonces la presión complementa ria debida a la tensión superficial es:

$$\Delta P = P - P_0 = \frac{2\gamma}{D}$$

siendo, el diámetro del cilindro, igual, a la distancia entre las láminas, pues, el agua moja perfectamente ($\theta = 0^o$).

Así, la fuerza que se necesita aplicar a las placas para separarlas, debe ser igual, en magnitud a la fuerza que ejerce la presión complementaria sobre las placas, esto es:

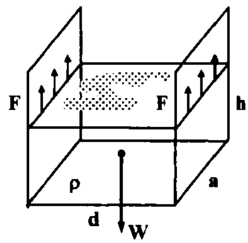
$$F = \Delta P\, S = \frac{2\gamma S}{D}$$

$$F = \frac{(2)(0,073)(9.10^{-2})(12.10^{-2})}{0,05.10^{-3}}$$

$$♣\; F = 31,5\ N \qquad \text{A}$$

Solución: 55

- Representemos el líquido entre las lámi nas.



Por equilibrio, el peso (W) del líquido en tre las láminas, debe ser igual, a la fuerza (F) de tensión superficial, esto es:

$$W = F$$

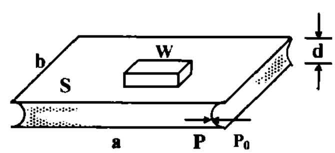
$$\rho g a d h = 2\gamma a$$

$$\rho = \frac{2\gamma}{g d h} = \frac{(2)(0,03)}{(9,8)(0,25.10^{-3})(3,1.10^{-2})}$$

$$♣\; \rho \approx 790\ \frac{kg}{m^3} \qquad \text{E}$$

Solución: 56

- Representemos las láminas rectangula res de lados (a) y (b) separados por una dis tancia (d).



En la Fig., el área (S) de cada una de las lá minas rectangulares de lados (a) y (b), halla mos así:

$$m = \rho V = \rho S d \quad => \quad S = \frac{m}{\rho d}$$

Ahora, la presión complementaria debida a la tensión superficial es:

$$\Delta P = P - P_0 = \frac{2\gamma}{d}$$

Luego, la fuerza debida a esta presión complementaria, debe ser igual, al peso del bloque que descansa en la lámina superior, esto es:

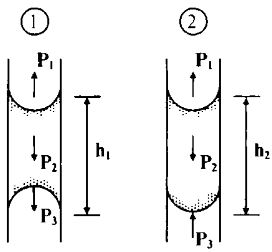
$$\Delta P.S = W \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\gamma}{d}\right)\left(\frac{m}{\rho d}\right) = W$$

$$\gamma = \frac{\rho W d^2}{2m} = \frac{(13{,}6.10^3)(49)(0{,}087.10^{-3})^2}{(2)(5.10^{-3})}$$

$$\clubsuit \quad \gamma = 0{,}5\ \frac{N}{m} \qquad \text{C}$$

Solución: 57

- Representemos los meniscos que se forman en los extremos superior e inferior del tubo capilar.



En la Fig., P_1, P_3 son las presiones complementarias en los meniscos, debidas a la tensión superficial, y P_2 es la presión hidrostática., como se observa se presentan dos casos:

Caso: 1

Cuando $P_1 > P_2$, la presión resultante es hacia arriba, el menisco que se forma en la parte inferior de la columnita de líquido es cóncava, de modo que, la presión complementaria P_3, debida a la tensión superficial es hacia abajo, pues la presión externa es mayor que la interna, luego, como la columnita de agua está en equilibrio, se cumple:

$$P_1 = P_2 + P_3$$

$$\frac{2\gamma}{R_1} = \rho g h_1 + \frac{2\gamma}{R_2}$$

$$h_1 = \frac{2\gamma(R_2 - R_1)}{\rho g (R_1.R_2)}$$

siendo, R_1, R_2 los radios de curvatura de los meniscos superior e inferior de la columnita de agua.

Caso: 2

Cuando $P_1 < P_2$, la presión resultante es hacia abajo, el menisco que se forma en la parte inferior de la columnita de líquido es convexa, de modo que, la presión complementaria P_3, debida a la tensión superficial es hacia arriba, pues la presión externa es menor que la interna, luego, como la columnita de agua está en equilibrio, se cumple:

$$P_2 = P_1 + P_3$$

$$\rho g h_2 = \frac{2\gamma}{R_1} + \frac{2\gamma}{R_2}$$

$$h_2 = \frac{2\gamma(R_1 + R_2)}{\rho g (R_1.R_2)}$$

Como el agua moja perfectamente ($\theta = 0^\circ$) el menisco superior es cóncavo y su radio de curvatura (R_1) es igual al radio del tubo capilar (r), de modo que:

$$P_1 = \frac{2\gamma}{R_1} = \frac{(2)(0{,}073)}{0{,}5.10^{-3}} = 292\ \frac{N}{m^2}$$

De otro lado, la presión hidrostática es:

$$P_2 = \rho g h = (10^3)(9{,}8)(2.10^{-2}) = 196\ \frac{N}{m^2}$$

Ahora, como $P_1 > P_2$, entonces, se trata del caso (1), y el radio de curvatura del menisco inferior es:

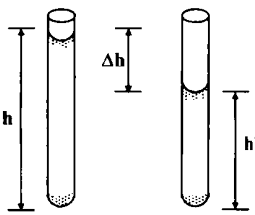
$$P_1 = P_2 + P_3$$

$$292 = 196 + \frac{(2)(0,073)}{R_2}$$

$$\clubsuit\ R_2 = 1{,}52.10^{-3}\,m \quad \text{(B)}$$

Solución: 58

- Sea (h) la altura inicial de columna de agua, y (h') la altura final de la misma, como se muestra en la Fig.



ANTES DESPUES

Calculemos las presiones complementaria P_1 e hidrostática P_2, teniendo en cuenta que el agua moja perfectamente, así:

$$P_1 = \frac{2\gamma}{R_1} = \frac{(2)(0{,}073)}{10^{-3}} = 146\,\frac{N}{m^2}$$

$$P_2 = \rho g h = (10^3)(9{,}8)(10^{-1}) = 980\,\frac{N}{m^2}$$

Como, $P_2 > P_1$, entonces, se trata del caso (2), el menisco inferior es convexo, y la altura (h') del agua que queda en el tubo capilar, viene dada por:

$$P_2 = P_1 + P_3$$

$$\rho g h' = \frac{2\gamma}{R_1} + \frac{2\gamma}{R_2}$$

$$h' = \frac{2\gamma(R_1 + R_2)}{\rho g (R_1 . R_2)}$$

Pero, como el agua moja perfectamente, los radios de curvatura de los meniscos, son iguales al radio interior del tubo, esto es:

$$h' = \frac{2\gamma(r+r)}{\rho g (r.r)} = \frac{(4)(0{,}073)}{(10^3)(9{,}8)(10^{-3})}$$

$$h' = 2{,}98.10^{-2}\,m \approx 3\ cm$$

Así, la masa de agua (Δm) que sale del tubo capilar es:

$$\Delta m = \rho\,\Delta V = \rho\,\frac{\pi}{4} D^2 \Delta h$$

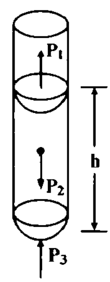
$$\Delta m = \rho\,\frac{\pi}{4} D^2 (h - h')$$

$$\Delta m = (10^3)(\frac{\pi}{4})(2.10^{-3})^2(10-3).10^{-2}$$

$$\clubsuit\ \Delta m = 0{,}22.10^{-3}\ kg \quad \text{(C)}$$

Solución: 59

- Representemos la columnita de alcohol y las presiones complementarias en los meniscos superior (cóncavo) e inferior (convexo), y la debida al líquido P_2.



En la Fig., como la columnita de alcohol está en equilibrio, se cumple:

$$P_2 = P_1 + P_3$$

$$\frac{2\gamma}{R_1} + \frac{2\gamma}{R_2} = \rho g h$$

Como el alcohol moja perfectamente el capilar, $R_1 = r$ y $R_2 = 3\,r$, luego:

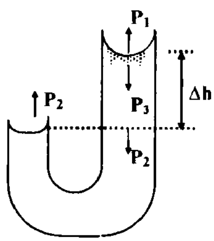
$$\frac{2\gamma}{r}+\frac{2\gamma}{3r}=\rho g h \;\Rightarrow\; h=\frac{8\gamma}{3\rho g r}$$

$$h=\frac{(8)(0,02)}{(3)(790)(9,8)(0,6.10^{-3})}$$

$$\clubsuit\; h=11,5.10^{-3}m \quad (B)$$

Solución: 60

• Representemos las presiones complementarias en los meniscos izquierdo (P_2), derecho (P_1) y la presión hidrostática (P_2) de la columna de líquido de altura (Δh)



En la Fig., como la columna de líquido de altura (Δh) está en equilibrio, se cumple:

$$P_1=P_2+P_3$$

$$\frac{2\gamma}{R_1}=\frac{2\gamma}{R_2}+\rho g\Delta h$$

$$\Delta h=\frac{2\gamma(R_2-R_1)}{\rho g R_1 R_2}$$

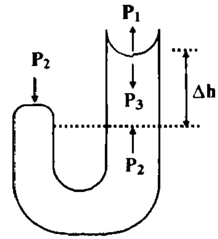
$$\Delta h=\frac{(2)(0,03)(0,5-0,9).10^{-3}}{(800)(9,8)(0,9.10^{-3})(0,5.10^{-3})}$$

$$\clubsuit\; \Delta h=-6,8.10^{-3}m \quad (C)$$

<< El signo (-) nos indica que el menisco derecho se forma por debajo del menisco izquierdo >>

Solución: 61

• Representemos las presiones complementaria (P_2) en el menisco izquierdo, y la presión hidrostática (P_2) de la columna de líquido de altura (Δh)



En la Fig., como la columna de líquido de altura (Δh) está en equilibrio, se cumple:

$$P_3=P_1+P_2$$

$$\rho g\Delta h=\frac{2\gamma}{R_1}+\frac{2\gamma}{R_2}$$

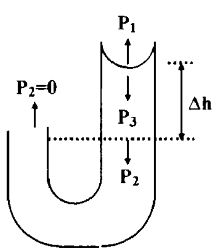
$$\Delta h=\frac{2\gamma(R_1+R_2)}{\rho g R_1 R_2}$$

$$\Delta h=\frac{(2)(0,03)(0,9+0,9).10^{-3}}{(800)(9,8)(0,9.10^{-3})(0,9.10^{-3})}$$

$$\clubsuit\; \Delta h=17.10^{-3}m \quad (D)$$

Solución: 62

• Representemos las presiones complementarias en los meniscos izquierdo (P_2), derecho (P_1) y la presión hidrostática (P_2) de la columna de líquido de altura (Δh)



En la Fig. la presión complementaria en el menisco plano es nula, luego, como la columna de líquido de altura (Δh) está en equilibrio, se cumple:

$$P_3 = P_1 \quad => \quad \rho\, g\, \Delta h = \frac{2\gamma}{R_1}$$

$$\Delta h = \frac{(2)(0{,}03)}{(800)(9{,}8)(0{,}9.10^{-3})}$$

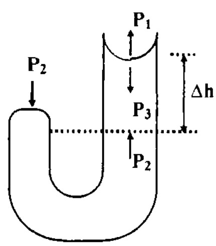
$$\clubsuit \;\; \Delta h = 8{,}5.10^{-3}\,m \qquad \text{(C)}$$

Solución: 63

• En la Fig., como la columnita de líquido de altura (Δh) está en equilibrio, se cumple

$$P_3 = P_1 + P_2$$

$$\rho\, g\, \Delta h = \frac{2\gamma}{R_1} + \frac{2\gamma}{R_2}$$



$$\Delta h = \frac{2\gamma\,(R_1 + R_2)}{\rho\, g\, R_1 R_2}$$

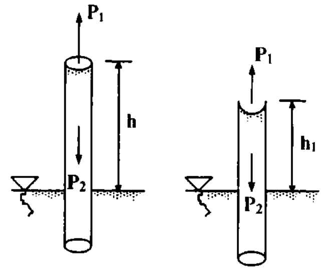
$$\Delta h = \frac{(2)(0{,}03)(0{,}9 + 0{,}5).10^{-3}}{(800)(9{,}8)(0{,}9.10^{-3})(0{,}5.10^{-3})}$$

$$\clubsuit \;\; \Delta h = 23{,}8.10^{-3}\,m \qquad \text{(E)}$$

« Para $\Delta h > 23{,}8$mm el líquido empieza a salir por la rama izquierda del tubo »

Solución: 64

• Representemos la máxima altura (h) que puede alcanzar el líquido en un tubo capilar y el menisco cóncavo que se forma cuando la altura es $h_1 = 2$ cm ($h_1 < h$).



En la Fig., la altura máxima que puede elevarse el líquido, considerando que el menisco que se forma en su extremo superior es plana, y moja perfectamente es:

$$P_2 = P_1 \quad => \quad \rho\, g\, h = \frac{2\gamma}{r}$$

$$h = \frac{(2)(0{,}073)}{(10^3)(9{,}8)(0{,}5.10^{-3})}$$

$$h = 2{,}98.10^{-2}\,m = 2{,}98\ cm$$

Como la altura que se eleva el líquido es menor que la altura máxima, se forma un menisco cóncavo, cuyo radio de curvatura (R), hallamos de:

$$P_1 = P_2 \quad => \quad \frac{2\gamma}{R} = \rho\, g\, h_1$$

$$R = \frac{(2)(0{,}073)}{(10^3)(9{,}8)(2.10^{-2})}$$

$$\clubsuit \;\; R = 0{,}75.10^{-3}\,m \qquad \text{(B)}$$

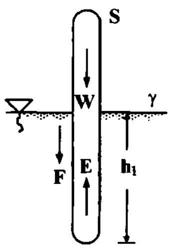
Solución: 65

• En la Fig., como la columna de líquido que se encuentra por encima del nivel de líqui-do en el recipiente, está en equilibrio, se cumple para los dos casos, las siguientes e-cuaciones:

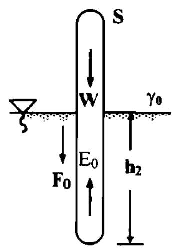
$$W + \gamma\, \pi\, D = \rho\, g\, h_1 S$$

$$W + \gamma_0 \pi D = \rho g h_2 S$$

Representemos el aerómetro sumergido parcialmente en agua, y en agua más algunas gotas de alcohol.



AGUA



AGUA+ALCOHOL

Restando a la primera ecuación la segunda, tenemos:

$$(\gamma - \gamma_0)\pi D = \rho g (h_1 - h_2)\frac{\pi}{4} D^2$$

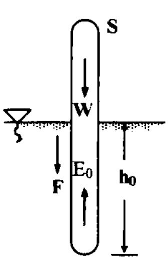
$$\Delta h = \frac{4(\gamma - \gamma_0)}{\rho g D}$$

$$\Delta h = \frac{(4)(0{,}073 - 0{,}02)}{(10^3)(9{,}8)(9.10^{-3})}$$

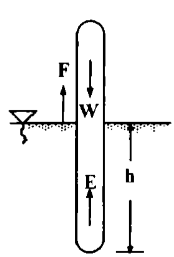
$$\clubsuit \quad \Delta h = 2{,}4.10^{-3} m \qquad \text{C}$$

Solución: 66

• Representemos al aerómetro y las presiones que actúan sobre el, cuando el líquido lo moja perfectamente y cuando no lo moja en absoluto.



MOJA



NO MOJA

En la Fig, las ecuaciones de equilibrio, para los dos casos representados, son:

$$W = E_0 - F \quad y \quad W = E + F$$

Igualando ambas ecuaciones, se tiene:

$$E_0 - F = E + F$$

$$\rho g S h_0 - \rho g S h = 2\gamma \pi D$$

$$\rho g \frac{\pi}{4} D^2 (h_0 - h) = 2\gamma \pi D$$

$$\Delta h = \frac{8\gamma}{\rho g D} = \frac{(8)(0{,}03)}{(800)(9{,}8)(9.10^{-3})}$$

$$\clubsuit \quad \Delta h = 3{,}4.10^{-3} m \qquad \text{C}$$

<< El aerómetro asciende una altura Δh >>

Solución: 67

• El volumen de una gota de niebla es:

$$V = \frac{\pi}{6} D^3 = (\frac{\pi}{6})(3.10^{-6})^3$$

$$V = \frac{9}{2}\pi.10^{-18} m^3$$

Así, el tiempo que demora en formarse una gota de niebla es:

$$t = \frac{V}{R} = \frac{(9\pi/2).10^{-18}}{3.10^{-3}}$$

$$t = \frac{3}{2}\pi.10^{-15} min = 9\pi.10^{-14} s$$

De otro lado, el trabajo necesario para formar la superficie de la gota de niebla es:

$$W = \gamma S = \gamma \pi D^2$$

$$W = (0{,}073)(\pi)(3.10^{-6})^2$$

$$W = (9\pi)(0{,}073).10^{-12}$$

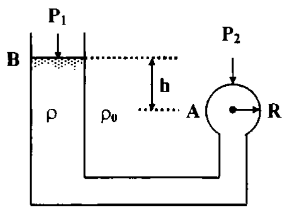
Luego, la potencia necesaria para formar las superficies de cada una de las gotas de niebla es:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{(9\pi)(0{,}073).10^{-12}}{9\pi.10^{-14}}$$

$$♣\ P = 7{,}3\ W \qquad \text{(D)}$$

Solución: 68

• Sean P_1 y P_2 las presiones complementarias en la superficie libre del líquido y en la gota, como se muestra.



En la Fig., la presión en el punto A, es igual, a la presión en B más la presión debida a la del vapor de líquido, esto es:

$$P_2 = P_1 + \rho_o\, g\, h$$

$$h = \frac{P_2 - P_1}{\rho_o g}$$

De otro lado, se sabe que la diferencia de presiones entre el interior (P_i) y exterior (P_e) a la gota, viene dada por:

$$P_i - P_e = \frac{2\gamma}{R}$$

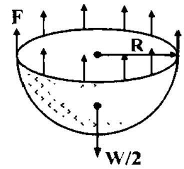
$$(P_1 + \rho\, g\, h) - P_2 = \frac{2\gamma}{R}$$

$$-(P_2 - P_1) + \frac{\rho}{\rho_o}(P_2 - P_1) = \frac{2\gamma}{R}$$

$$♣\ \Delta P = P_2 - P_1 = \frac{2\gamma\, \rho_o}{(\rho - \rho_o)R} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 69

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la mitad de la gota de agua.



En la Fig., por condición de equilibrio, el peso de la mitad de la gota (W/2), es igual, a la fuerza de tensión superficial (F), esto es:

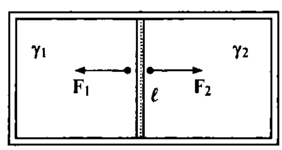
$$\frac{1}{2}\rho\, g \frac{4}{3}\pi R^3 = \gamma\, 2\pi R$$

$$R = [\frac{3\gamma}{\rho g}]^{1/2} = [\frac{(3)(0{,}073)}{(10^3)(9{,}8)}]^{1/2}$$

$$♣\ R = 4{,}73.10^{-3}\,m \qquad \text{(B)}$$

Solución: 70

• Representemos las fuerzas de la tensión superficial F_1, F_2, que actúan sobre la varilla delgada.



Como, $\gamma_1 > \gamma_2$ entonces $F_1 > F_2$, luego la magnitud de la fuerza resultante sobre la varilla es:

$$F_R = F_1 - F_2$$

$$F_R = 2\gamma_1 \ell - 2\gamma_2 \ell$$

$$F_R = 2(\gamma_1 - \gamma_2)\,\ell$$

$$F_R = (2)(0{,}03 - 0{,}02)(5.10^{-2})$$

presión lateral del líquido, viene dada por:

$$F_P = \frac{1}{2}\rho\, g\, x^2$$

Luego, como la parte de líquido mostrada está en equilibrio, en la horizontal, se cumple que:

$$F_P + \gamma \operatorname{sen}\theta = \gamma$$

$$\frac{1}{2}\rho\, g\, x^2 = \gamma(1-\operatorname{sen}\theta)$$

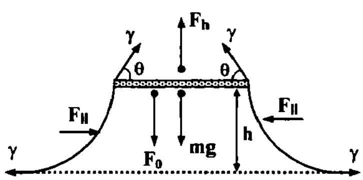
$$x = [\frac{2\gamma\,(1-\operatorname{sen}\theta)}{\rho\, g}]^{1/2}$$

$$x = [\frac{(2)(0{,}073)(1-\operatorname{sen}37^o)}{(10^3)(9{,}8)}]^{1/2}$$

♣ $x = 2{,}44.10^{-3}\,m$ Ⓒ

Solución: 76

- Representemos las fuerzas que actúan sobre la placa de ancho ℓ.



Las expresiones de la fuerza por unidad de longitud, debidas a la presión negativa del líquido, son:

$$F_0 = \rho\, g\, h\, \ell \;\text{ y }\; F_{II} = \frac{1}{2}\rho\, g\, h^2$$

Ahora, aplicando la condición de equilibrio al líquido por debajo de la placa, en la horizontal, se tiene:

$$F_{II} = \frac{1}{2}\rho g h^2 = \gamma - \gamma\cos\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\rho\, g\, h^2}{2\gamma}$$

Del mismo modo, apliquemos la condición de equilibrio a la placa en la vertical:

$$F_h = F_0 + m\,g + 2\,\gamma\,\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$F_h = m\,g + \rho\, g h\,(\ell + 2\sqrt{(\gamma/\rho\, g) - h^2/4}$$

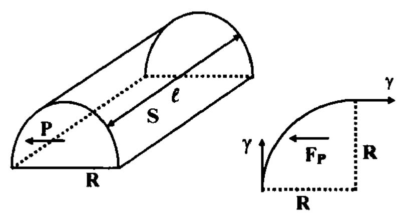
$$F_h = (200.10^{-3})(9{,}8) + (10^3)(9{,}8)(2.10^{-3}) \bullet$$

$$(8.10^{-2} + 2[\frac{0{,}073}{(10^3)(9{,}8)} - (\frac{4.10^{-6}}{4})]^{1/2}$$

♣ $F_h = 3{,}63\ N/m$ Ⓒ

Solución: 77

- Representemos la presión (P) debajo de la superficie lateral del líquido en forma de semicilindro.



En la Fig, como el líquido contenido en la mitad del semicilindro, está en equilibrio se cumple que:

$$F_P = \gamma$$

Luego, la presión interna sobre la mitad del área lateral del semicilindro es:

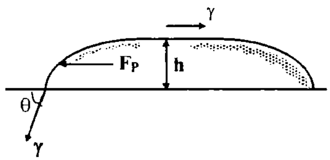
$$P = \frac{F}{A} = \frac{F_P\,\ell}{R\,\ell}$$

$$P = \frac{\gamma}{R} = \frac{0{,}5}{2{,}5.10^{-3}}$$

♣ $P = 200\ N/m^2$ Ⓑ

Solución: 78

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la mitad de la capa de líquido.



Como la mitad de la capa de líquido está en equilibrio, en la horizontal, se cumple:

$$F_P = \gamma - \gamma\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\rho g h^2 = \gamma(1-\cos\theta)$$

$$h = 2\,\text{sen}(\frac{\theta}{2})[\frac{\gamma}{\rho g}]^{1/2}$$

$$h = (2)(\text{sen}\frac{37}{2})[\frac{0,073}{(10^3)(9,8)}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ h = 1,73.10^{-3}\text{m} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 79

• La magnitud de la fuerza con que se atraen mutuamente las placas, es igual, a la fuerza de presión lateral del líquido, esto es

$$F = F_P\,a = (\frac{1}{2}\rho g h^2)\,a$$

Para hallar la altura, igualamos la fuerza de tensión superficial, con el peso del líquido que asciende entre las placas, así:

$$2\gamma a = \rho g a d h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\gamma}{\rho g d}$$

Sustituyendo (h) en la expresión inicial, obtenemos la magnitud de la fuerza de atracción entre las placas:

$$F = (\frac{1}{2}\rho g)(\frac{4\gamma^2}{\rho^2 g^2 d^2})a$$

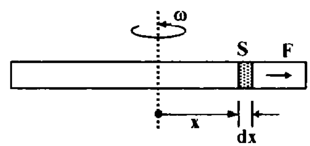
$$F = \frac{2a\gamma^2}{\rho g d^2}$$

$$F = \frac{(2)(8.10^{-2})(0,073)^2}{(10^3)(9,8)(4.10^{-3})^2}$$

$$\clubsuit\ F = 5,4.10^{-3}\text{N} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 80

• Representemos la fuerza (F) debida a la rotación del capilar, que actúa sobre un elemento de líquido.



En la Fig., la presión sobre el diferencial de volumen de líquido de masa (dm), área de sección transversal (S) y longitud (dx) es:

$$dP = \frac{dF}{S} = \frac{1}{S}(dm\,\omega^2 x)$$

$$dP = \frac{1}{S}(\rho S\,dx)(\omega^2 x)$$

$$\int_{P_0}^{P} dP = \rho\,\omega^2 \int_0^{\ell} x\,dx$$

$$P - P_0 = \Delta P = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\ell^2$$

Igualando esta diferencia de presión, a la presión complementaria, debida a la tensión superficial, se tiene:

$$\frac{1}{2}\rho\,\omega^2\ell^2 = \frac{2\gamma}{R} \quad \Rightarrow \quad \omega = [\frac{4\gamma}{\rho R\ell^2}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ \omega = 2,7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad \text{(B)}$$

presión lateral del líquido, viene dada por:

$$F_P = \frac{1}{2}\rho\, g\, x^2$$

Luego, como la parte de líquido mostrada está en equilibrio, en la horizontal, se cumple que:

$$F_P + \gamma \operatorname{sen}\theta = \gamma$$

$$\frac{1}{2}\rho\, g\, x^2 = \gamma(1 - \operatorname{sen}\theta)$$

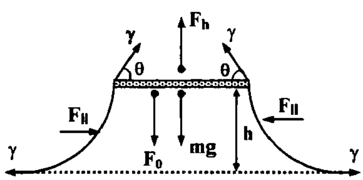
$$x = [\frac{2\gamma(1 - \operatorname{sen}\theta)}{\rho\, g}]^{1/2}$$

$$x = [\frac{(2)(0{,}073)(1 - \operatorname{sen}37^\circ)}{(10^3)(9{,}8)}]^{1/2}$$

♣ $x = 2{,}44.10^{-3}\,\text{m}$ Ⓒ

Solución: 76

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la placa de ancho ℓ.



Las expresiones de la fuerza por unidad de longitud, debidas a la presión negativa del líquido, son:

$$F_0 = \rho\, g\, h\, \ell \quad \text{y} \quad F_{II} = \frac{1}{2}\rho\, g\, h^2$$

Ahora, aplicando la condición de equilibrio al líquido por debajo de la placa, en la horizontal, se tiene:

$$F_{II} = \frac{1}{2}\rho g h^2 = \gamma - \gamma\cos\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\rho\, g\, h^2}{2\gamma}$$

Del mismo modo, apliquemos la condición de equilibrio a la placa en la vertical:

$$F_h = F_0 + m g + 2\gamma\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$F_h = m g + \rho\, g h\,(\ell + 2\sqrt{(\gamma/\rho\, g) - h^2/4}$$

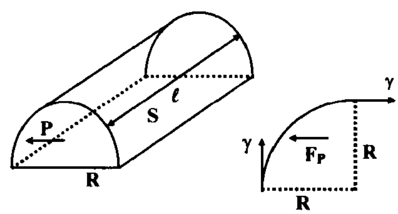
$$F_h = (200.10^{-3})(9{,}8) + (10^3)(9{,}8)(2.10^{-3})\bullet$$

$$(8.10^{-2} + 2[\frac{0{,}073}{(10^3)(9{,}8)} - (\frac{4.10^{-6}}{4})]^{1/2}$$

♣ $F_h = 3{,}63\ \text{N/m}$ Ⓒ

Solución: 77

• Representemos la presión (P) debajo de la superficie lateral del líquido en forma de semicilindro.



En la Fig, como el líquido contenido en la mitad del semicilindro, está en equilibrio se cumple que:

$$F_P = \gamma$$

Luego, la presión interna sobre la mitad del área lateral del semicilindro es:

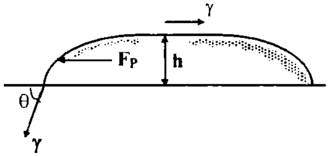
$$P = \frac{F}{A} = \frac{F_P\,\ell}{R\,\ell}$$

$$P = \frac{\gamma}{R} = \frac{0{,}5}{2{,}5.10^{-3}}$$

♣ $P = 200\ \text{N/m}^2$ Ⓑ

Solución: 78

- Representemos las fuerzas que actúan sobre la mitad de la capa de líquido.



Como la mitad de la capa de líquido está en equilibrio, en la horizontal, se cumple:

$$F_P = \gamma - \gamma\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\rho g h^2 = \gamma(1-\cos\theta)$$

$$h = 2\,\text{sen}(\frac{\theta}{2})[\frac{\gamma}{\rho g}]^{1/2}$$

$$h = (2)(\text{sen}\frac{37}{2})[\frac{0{,}073}{(10^3)(9{,}8)}]^{1/2}$$

♣ $h = 1{,}73.10^{-3}\,\text{m}$ (D)

Solución: 79

- La magnitud de la fuerza con que se atraen mutuamente las placas, es igual, a la fuerza de presión lateral del líquido, esto es

$$F = F_P\,a = (\frac{1}{2}\rho g h^2)\,a$$

Para hallar la altura, igualamos la fuerza de tensión superficial, con el peso del líquido que asciende entre las placas, así:

$$2\gamma a = \rho g a d h \quad => \quad h = \frac{2\gamma}{\rho g d}$$

Sustituyendo (h) en la expresión inicial, obtenemos la magnitud de la fuerza de atracción entre las placas:

$$F = (\frac{1}{2}\rho g)(\frac{4\gamma^2}{\rho^2 g^2 d^2})a$$

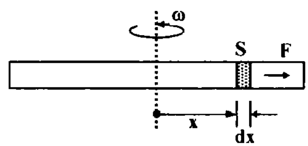
$$F = \frac{2a\gamma^2}{\rho g d^2}$$

$$F = \frac{(2)(8.10^{-2})(0{,}073)^2}{(10^3)(9{,}8)(4.10^{-3})^2}$$

♣ $F = 5{,}4.10^{-3}\,\text{N}$ (B)

Solución: 80

- Representemos la fuerza (F) debida a la rotación del capilar, que actúa sobre un elemento de líquido.



En la Fig., la presión sobre el diferencial de volumen de líquido de masa (dm), área de sección transversal (S) y longitud (dx) es:

$$dP = \frac{dF}{S} = \frac{1}{S}(dm\,\omega^2 x)$$

$$dP = \frac{1}{S}(\rho S\,dx)(\omega^2 x)$$

$$\int_{P_0}^{P} dP = \rho\,\omega^2 \int_0^{\ell} x\,dx$$

$$P - P_0 = \Delta P = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\ell^2$$

Igualando esta diferencia de presión, a la presión complementaria, debida a la tensión superficial, se tiene:

$$\frac{1}{2}\rho\,\omega^2\ell^2 = \frac{2\gamma}{R} \quad => \quad \omega = [\frac{4\gamma}{\rho R\ell^2}]^{1/2}$$

♣ $\omega = 2{,}7\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (B)

HIDRODINAMICA

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

a) Hidrodinámica

Estudia la dinámica de fluidos no compresibles. Las ecuaciones que describen la dinámica de estos fluidos son las ecuaciones de Navier-Stokes. En el caso de fluidos no viscosos, también llamados fluidos coloidales, se reducen a las ecuaciones de Euler.

b) Ecuaciones de Navier- Stokes

Es un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones se obtienen de las aplicación de los principio de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento de la mecánica y además de los principios de la termodinámica, a un determinado elemento de un fluido. En general las ecuaciones de Navier-Stokes, se expresan en forma integral o diferencial, y no tienen solución analítica (cerrada) por lo que, se plantean soluciones aproximadas. Mediante la utilización de técnicas numéricas con la ayuda de computadoras.

c) Ecuaciones de Euler

Son ecuaciones que describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso. Su expresión corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes, cuando las componentes disipativas son despreciables respecto a las convectivas.

Las ecuaciones de Euler se obtienen de la aplicación de los principios de conservación de la masa, momento y energía.

d) Fluidos

Es una sustancia o medio continuo que se deforma continuamente en el tiempo ante la aplicación de una tensión tangencial independientemente de la magnitud de esta. También, se puede definir como aquella sustancia que, debido a su poca cohesión intermolecular, carece de forma propia y adopta la forma del recipiente que lo contiene.

Características

- Los fluidos son capaces de fluir.
- La posición relativa de sus moléculas puede cambiar continuamente.
- Todos los fluidos son compresibles en cierto grado.
- Tienen viscosidad.
- Dependiendo de su viscosidad fluyen a menor o mayor velocidad.

Clasificación

1) Según su viscosidad, los fluidos se clasifican en:

Newtonianos

Se dice que un fluido con viscosidad es newtoniano, si las tensiones tangenciales son directamente proporcionales al gradiente de velocidades. Por ejemplo, el aire, agua, gasolina, ketchup, aceite, pintura, etc... son fluidos newtonianos.

No newtonianos

Es aquel fluido cuya viscosidad varía con el gradiente de tensión que se aplica. Como resultado, un fluido no newtoniano no tiene un valor de viscosidad definido y constante, a diferencia de un fluido newtoniano. Por ejemplo, la mezcla de agua con almidón, el agua con azúcar, la arcilla, la leche, la gelatina, la sangre son fluidos no newtonianos.

2) Según su estado, los fluidos se clasifican en líquidos o gases.

- **Líquidos**

  Es uno de los cinco estados de agregación de la materia, un líquido es un fluido cuyo volumen es constante en condiciones de temperatura y presión constante, y su forma queda definida por el recipiente que lo contiene.

- **Gases**

  Se llama gas al estado de agregación de la materia que no tiene forma ni volumen propio. Su principal composición son moléculas que no presentan enlaces, cuya fuerza de interacción entre ellas es pequeña y que se expanden en todo el recipiente que lo contiene.

e) Microfluidos

Es una disciplina que estudia el comportamiento de los fluidos en la microescala y la mesoescala. También comprende el diseño de sistemas en las que diminutas cantidades de fluido son utilizadas.

- El comportamiento de los fluidos en la microescala define sustancialmente de lo observado en la macroescala. La tensión superficial y la disipación de la energía son totalmente diferentes. En microcanales de 10 a 500 manómetros de diámetro el número de Reynolds es extremadamente pequeño. Por lo que, el fluido siempre es laminar y no ocurren turbulencias, sólo la difusión interviene en la mezcla de fluidos.
- Un efecto importante es que la relación de superficie a volumen es muy alta, por lo que, cualquier reacción química en un microfluido es acelerada.

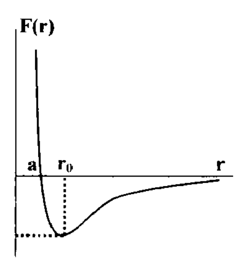
f) Estado de agregación de la materia

Se llama así al nuevo estado que adopta un cuerpo o compuesto al cambiar su temperatura, presión o volumen, estos estados pueden ser: sólido, líquido, gas o plasma.

g) Fuerza intermolecular

Llamadas también fuerzas de cohesión son fuerzas electromagnéticas que actúan entre las moléculas o entre regiones ampliamente distantes de una macromolécula en orden decrecientes de intensidad.

- En los gases, la fuerza de cohesión se observa en su licuefacción, que tiene lugar al comprimir una serie de moléculas y producirse fuerzas de atracción suficientemente altas para proporcionar una estructura líquida.
- En los líquidos, la cohesión se refleja en la tensión superficial, ocasionada por una fuerza no equilibrada hacia el interior del líquido que actúa sobre las moléculas superficiales, y también en la transformación en la transformación de un líquido en sólido cuando se comprimen suficientemente las moléculas.
- En los sólidos, la cohesión depende de cómo estén distribuidos los átomos, las moléculas y los iones, lo que a su vez depende del estado de equilibrio de las partículas atómicas. Muchos compuestos orgánicos, por ejemplo, forman cristales moleculares, en las que los átomos están fuertemente unidos dentro de las moléculas, pero éstas se encuentran débilmente unidas entre si.



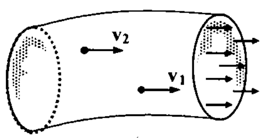
Para r>a la fuerza entre las moléculas es de atracción, y en "r_0" dicha fuerza atractiva alcanza su valor máximo. Para r<a, la fuerza entre las moléculas es de repulsión.

h) Fluidos ideales

Un fluido se dice que es ideal, si es incompresible, no viscoso, su flujo es estacionario e irrotacional. y carece de viscosidad.

i) Flujo estacionario

Se dice que un flujo es estacionario, cuando la velocidad de las partículas en cada uno de los puntos del fluido no cambia con el transcurso del tiempo. Se debe mencionar, que las velocidades de un punto respecto de otro pueden ser diferentes.



$\vec{v}_1 = \text{cte.}, \quad \vec{v}_2 = \text{cte.}$

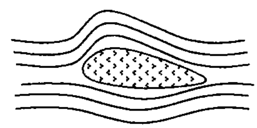
j) Flujo compresible

Uno de los principios básicos del flujo compresible es que la densidad de un gas cambia cuando el gas es sometido a grandes cambios de velocidad y presión Al mismo tiempo, su temperatura también cambia, lo que conduce a problemas más complejos. El comportamiento de flujo de un gas compresible depende de si la velocidad de flujo es mayor o menor que la velocidad del sonido.

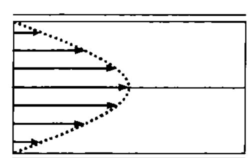
- Los flujos compresibles se presentan con frecuencia en las aplicaciones de ingeniería. Entre los ejemplos más comunes se pueden contar lo sistemas de aire comprimido utilizados en la operación de herramientas de taller y de equipos dentales, las tuberías de alta presión para transportar y los sistemas de sensores y de control neumático.
- Los efectos de la compresibilidad son muy importantes en el diseño de cohetes y aviones modernos, en las plantas generadoras, los ventiladores y compresoras.

k) Flujo laminar

Se dice que un flujo es laminar cuando el movimiento del fluido es perfectamente ordenado, estratificado, de modo que el fluido se mueve en láminas curvas que no se intersecan entre si.



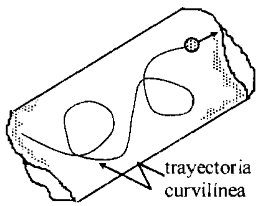
- El mecanismo de transporte en flujo laminar es estrictamente molecular. La perdida de energía es proporcional a la velocidad media. El perfil de velocidades tiene la forma de una parábola, donde de la velocidad máxima es en el eje del tubo y la velocidad en la pared del tubo es nula.



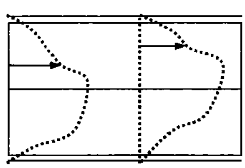
Perfil de la distribución de velocidades en un fluido ideal.

Por ejemplo el flujo de un fluido ideal en una jeringa de inyección, el flujo de agua que sale lentamente por un grifo son laminares.

l) Flujo turbulento



Se dice que el flujo es turbulento, cuando el fluido se mueve de forma caótica, en la que las partículas se mueven desordenadamente y las trayectorias de las partículas se encuentran formando pequeños remolinos aperiódicos. El flujo turbulento tiene un efecto en la viscosidad del fluido. Por ejemplo, el flujo de las aguas de un rió en la Sierra es turbulento, el flujo producido por la incineración de un cigarrillo es turbulento, etc...



Perfil de la distribución de velocidades en un fluido.

Remolino

Es un gran volumen de agua que gira producido por mareas oceánicas. Generalmente en los ríos turbulentos se generan los remolinos.

Vórtice

Es un flujo turbulento en rotación espiral con trayectorias de corriente cerradas. Como vórtice puede considerarse cualquier tipo de flujo circular o rotatorio que posee vorticidad. La vorticidad es un concepto matemático utilizado en dinámica de fluidos que se puede relacionar con la cantidad de circulación o rotación de un fluido.

Vorticidad

Se define como la circulación por unidad de área en un punto del flujo.

m) Flujo irrotacional

No presenta torbellinos, es dice, no hay momento angular del fluido respecto de cualquier punto del fluido.

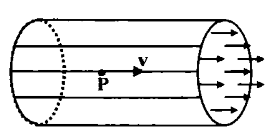
n) Flujo de capa límite

Se llama así a la región formada por una capa próxima a la superficie del conducto o tubo, lugar donde se concentran los efectos viscosos. Fuera de esta capa límite, se pueden despreciar los efectos de viscosidad, y pueden emplearse las ecuaciones matemáticas más sencillas para flujos no viscosos.

La teoría de la capa límite ha hecho posible gran parte de la construcción de los aviones modernos y del diseño de turbinas de gas y compresoras.

o) Líneas de corriente

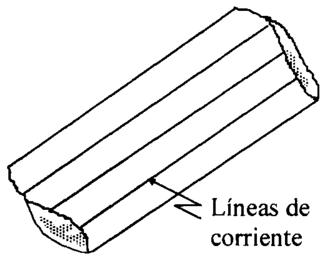
Se llama línea de corriente a la curva geométrica formada por puntos en los cuales la velocidad del fluido es tangente a la misma, en todo instante de tiempo. Las líneas de corriente son curvas imaginarias, que se utilizan para indicar la dirección del movimiento de un fluido. A partir de la definición de línea de corriente, se puede definir, para flujos laminares, el concepto de tubo de corriente.



La tangente en un punto P cualquiera de la curva, representa la dirección de la velocidad instantánea del fluido, en dicho punto.

p) Tubos de corriente

La superficie de un tubo de corriente está formada por líneas de corriente del fluido. En la Fig., se observa un tubo de corriente de forma cilíndrica.



Corolarios

1) No existe flujo a través de la superficie del tubo de corriente.
2) Solo hay tubo de corriente si la velocidad "$\vec{v}$" es diferente de 0.

q) Porosidad

Se llama porosidad a la capacidad de un objeto de absorber líquidos o gases. La porosidad del agua puede en porcentaje, puede calcularse a partir de:

$$P(\%) = [(P_{0S} - P_0)(100)/P_0]$$

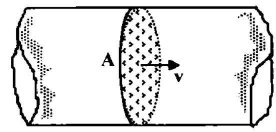
siendo, "P_o" peso del objeto, "P_{0S}" peso del objeto luego de haber sido sumergi do en agua.

2 CAUDAL Y FLUJO MASICO

a) Caudal (Q)

Cuando un fluido pasa a través de una tubería de área de sección transversal (A), con velocidad (v), se define el caudal (Q), como el volumen de fluido transportado por unidad de tiempo, esto es:

$$Q = Av$$



El caudal es una cantidad física escalar.

- Para que el fluido circule entre dos puntos a lo largo de una línea de corriente, debe existir una diferencia de energía entre estos dos puntos. Esta diferencia corresponderá, exactamente, a las perdídas por rozamiento, que son función de la rugosidad del conducto o tubo, y de la viscosidad del fluido, el régimen de funcionamiento (laminar ó turbulento) y del caudal circulante.
El cálculo de caudales se fundamenta en el principio de Bernoulli.

☞ **Unidad:** (Q) se mide en m^3/s

b) Caudalímetro

Es un instrumento que se utiliza para medir el caudal de fluido que pasa por un conducto o tubo. También existen contadores volumétricos (contador para el consumo de agua), los cuales proporcionan el volumen total que ha circulado por el conducto de fluido.
Los contadores volumétricos, según, su mecanismo de funcionamiento se clasifican en: Mecánicos, Eléctricos ultrasónicos, Electromagnéticos, Másicos, Vortex, Térmicos. Por ejemplo los medidores de agua en los domicilios, son contadores de volumen.

c) Flujo másico (F)

Se llama flujo másico de un fluido de

densidad (ρ), a la masa que atraviesa por unidad de tiempo, la sección transversal de área (A) de una tubería; con una velocidad (v), es decir:

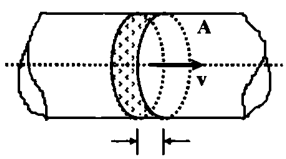
$$F = \rho\, v\, A = \rho\, Q$$

El flujo másico es una cantidad física escalar.

☞ **Unidad:** (F) se mide en kg.s

Demostración:

- Sea (Δm) el elemento de masa que pasa por la sección transversal de área A de la tubería, durante el tiempo Δt, recorriendo este elemento una distancia de "$v\,\Delta t$", como se aprecia en la Fig., entonces, de la definición de flujo másico, tenemos:



$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t}$$

$$F = \frac{\rho(A\, v\, \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\clubsuit \quad F = \rho\, A\, v = \rho\, Q$$

d) Reología

Es una parte de la Física, que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación en dos materiales que son capaces de fluir. Uno de los objetivos de la reología es encontrar ecuaciones constitutivas para modelar el comportamiento de los materiales, dichas ecuaciones son en general de carácter tensorial.

e) Reómetros

Aparatos que miden las propiedades mecánicas estudiadas por la reología, tales como las deformaciones, esfuerzo, viscosidad, coeficientes de esfuerzos normales, etc...

f) Sustentación

Fuerza generada sobre un cuerpo que se desplaza por un fluido, de dirección perpendicular a la velocidad de la corriente incidente.

La expresión matemática de la fuerza de sustentación es:

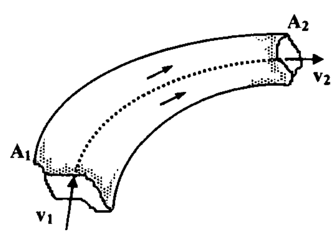
$$L = \frac{1}{2} \rho\, v^2\, A\, C_\ell$$

siendo, "ρ" la densidad del fluido en (kg/m^3), "v" velocidad en (m/s), "A" áea de la superficie de sustentación en (m^2) y "C_ℓ" coeficiente de sustentación

En aeronáutica es la principal fuerza que permite que una aeronave con alas se mantenga en vuelo.

3. ECUACION DE CONTINUIDAD Y EL TEOREMA DE BERNOULLI

a) Ecuación de continuidad



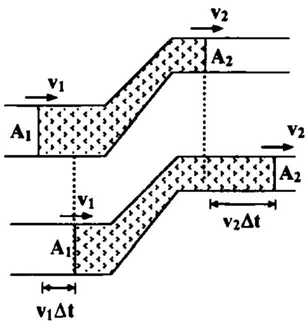
Para un flujo de fluido no compresible la cantidad de masa que pasa por las secciones transversales de áreas A_1 y

A_2 de la tubería, es la misma, esto es:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Demostración:

- Consideremos el movimiento de un fluido incompresible por una tubería de sección variable, y representemos un elemento del fluido en los instantes de tiempo "t" y "$t + \Delta t$".



En la Fig., el elemento de fluido de masa "Δm_1" que pasa por la sección ancha de la tubería de área "A_1" recorriendo una distancia $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$, es igual, al elemento de masa "Δm_2" que pasa por la sección angosta de la tubería de área "A_2", recorriendo una distancia "$\Delta x_2 = v_2 \Delta t$", esto es:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\rho \Delta V_1 = \rho \Delta V_2$$

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

$$\clubsuit \quad A_1 v_1 = A_2 v_2$$

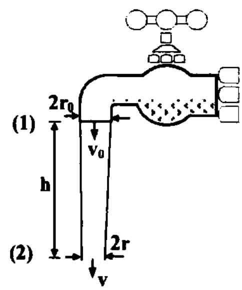
☞ **Conclusión**

«La ecuación de continuidad del caudal, es una consecuencia del principio de conservación de la masa»

Ejemplo:

Cuando se abre poco a poco un grifo, se forma un pequeño chorro de agua, un hilo cuyo radio va disminuyendo con la distancia al grifo y que al final, se rompe formando gotas.

La ecuación de continuidad nos proporciona la forma de la superficie del chorrito de agua que cae del grifo, como se observa en la Fig.



El área de la sección transversal del chorro de agua cuando sale del grifo es $A_o = \pi r_o^2$, y la velocidad del agua es "v_o". Debido a la acción de la gravedad la velocidad del chorro a una altura "h" es:

$$v^2 = v_o^2 + 2gh \qquad (1)$$

Aplicando la ecuación de continuidad a los puntos (1) y (2), obtenemos el radio de la sección en (2), así:

$$\pi r_o^2 v_o = \pi r^2 v$$

$$\pi r_o^2 v_o = \pi r^2 (r_o^2 + 2gh)^{1/2}$$

$$r = r_o \left[\frac{v_o^2}{v_o^2 + 2gh}\right]^{1/4}$$

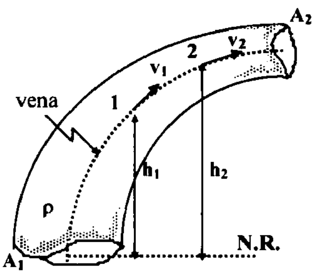
El radio de la sección del chorro de agua, es independiente de la densidad.

b) Teorema de Bernoulli

Para un fluido ideal y en régimen estacionario, a partir del principio de conservación de la energía, se encuentra que la suma de las energías de presión, cinética y potencial en cualquier punto de la vena líquida es una constante, es decir, se cumple:

$$\frac{m}{\rho}P+\frac{1}{2}m\,v^2+m\,g\,h=\text{cte.}$$

siendo, (m) la masa, (ρ) la densidad del fluido, (P) la presión, (v) la velocidad, (h) la altura y (g) la aceleración de la gravedad.



- Así, en la Fig., para los puntos (1) y (2) la ecuación anterior, se puede expresar, en cualquiera de las siguientes formas:

$$P_1+\frac{1}{2}\rho\,v_1^2+\rho\,g\,h_1=P_2+\frac{1}{2}\rho\,v_2^2+\rho\,g\,h_2$$

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+h_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+h_2$$

$P_1, P_2 =$ presión en los puntos 1 y 2.
$v_1, v_2 =$ velocidad del fluido en 1 y 2.
$h_1, h_2 =$ altura de los puntos 1 y 2.

☞ **Nota**

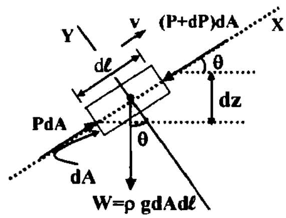
1) En la primera ecuación, las dimensiones de cada uno de los términos es de presión.

2) En la segunda ecuación, las dimensiones de cada uno de los términos es las de longitud.

Demostración:

1) **Análisis dinámico**

- Representemos las fuerzas que actúan sobre un diferencial de masa (dm) del fluido, y apliquemos la segunda ley de Newton al movimiento de este diferencial de masa, en la dirección del eje X, así:



$$F_R=m\,a$$

$$P\,dA-(P+dP)\,dA-W\,\text{sen}\,\theta=\frac{W}{g}a$$

$$-dP\,dA-\rho\,g\,dA\,d\ell\,\text{sen}\,\theta=\frac{\rho\,g\,dA\,d\ell}{g}\frac{dv}{dt}$$

En la Fig, se observa que: $dz=d\ell\,\text{sen}\theta$ además: $d\ell=v.dt$, de modo que la ecuación anterior, queda así:

$$-dP-\rho\,g\,dz=\rho\,(v\,dt)\frac{dv}{dt}$$

$$-dP-\rho\,g\,dz=\rho\,v\,dv$$

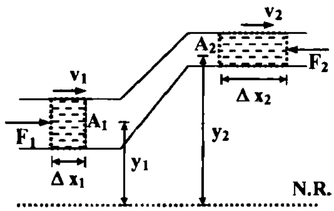
$$\int_0^P\frac{dP}{\rho g}+\int_0^v\frac{vdv}{g}+\int_0^h dz=0$$

$$\frac{P}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+h=\text{cte.}$$

$$\clubsuit\ \frac{m}{\rho}P+\frac{1}{2}m\,v^2+m\,g\,h=\text{cte.}$$

pues, la masa (m) es una constante.

2) Análisis energético



En la Fig., en el fluido incompresible de densidad "ρ" que circula por la tubería, tomemos un elemento de fluido de masa $\Delta m = \rho \Delta V$, y apliquemos el teorema del trabajo y la energía a este elemento de fluido que durante el intervalo de tiempo "Δt" recorre las distancias "Δx_1" y "Δx_2", cuando pasa por "1" y "2", así:

$$W = \Delta E_C + \Delta E_P$$

$$F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1$$

$$P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$
$$\rho \Delta V (y_2 - y_1) g$$

$$(P_1 - P_2)\Delta V = \frac{1}{2}\Delta V (v_2^2 - v_1^2) + \rho \Delta V (y_2 - y_1) g$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

☞ **Conclusión**

«La ecuación de Bernoulli, se deduce del principio de conservación de la energía»

4. APLICACIONES DEL TEOREMA DE BERNOULLI

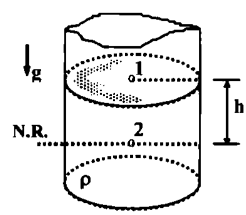
El teorema de Bernoulli tiene diversas aplicaciones en la mecánica de fluidos, algunas de ellas son:

a) Presión al interior de un fluido

En la Fig., la presión en el punto 2, situado a una profundidad (h) del nivel del fluido de densidad (ρ) es:

$$P_2 = P_0 + \rho g h$$

siendo, (P_0) la presión atmosférica, y (g) la aceleración de la gravedad.



Demostración:

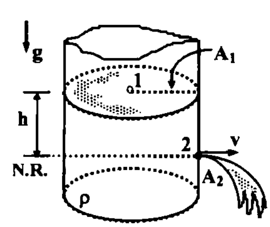
- Aplicando el teorema de Bernoulli, a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$P_0 + 0 + \rho g h = P_2 + 0 + 0$$

$$♣\ P_2 = P_0 + \rho g h$$

b) Velocidad de salida de un fluido por un agujero.



En la Fig. la velocidad (v) con la que sale el fluido por el agujero, situado a una distancia (h) por debajo del nivel del fluido, cuando el área A_2 del agujero es mucho que el área A_1 de la sección transversal del recipiente es:

$$v = \sqrt{2g\,h}$$

Demostración:

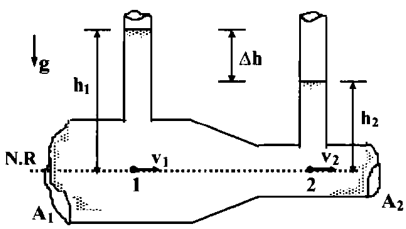
- Aplicando el teorema de Bernoulli, a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g h_2$$

$$P_0 + 0 + \rho\, g\, h = P_0 + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + 0$$

$$\clubsuit \quad v = \sqrt{2g\,h}$$

c) Velocidad y caudal en una tubería de Venturi.



En la Fig., la velocidad con la que pasa el fluido por el punto 2, viene dado por

$$v_2 = (\frac{2g\,h}{A_1^2 - A_2^2})^{1/2} A_1$$

El caudal del fluido, a través de la sección transversal de área A_1, viene dado por:

$$Q = A_2 v_2 = A_1 A_2 (\frac{2g\,h}{A_1^2 - A_2^2})^{1/2}$$

Demostración:

- Según la ecuación de continuidad, el caudal se mantiene constante, esto es:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Ahora, aplicando el teorema de Bernoulli, a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, h_2$$

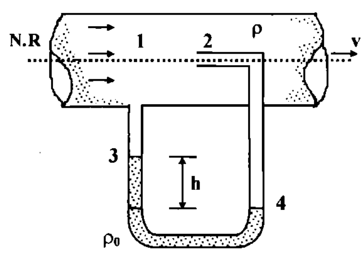
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\,(\frac{A_2}{A_1} v_2)^2 + 0 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + 0$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\,(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2})\, v_2^2$$

$$\rho\, g\, h_1 - \rho\, g\, h_2 = \frac{1}{2}\rho\,(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2})\, v_2^2$$

$$\clubsuit \quad v_2 = (\frac{2g\,h}{A_1^2 - A_2^2})^{1/2} A_1$$

d) Velocidad de un gas en una tubería, usando el tubo de Pitot.



En la Fig., la velocidad (v) del gas a través del tubo horizontal, viene dado por:

$$v = (\frac{2g\,\rho_o h}{\rho})^{1/2}$$

siendo, (ρ), (ρ_0) las densidades del gas y del fluido que se utiliza en el tubo de Pitot, respectivamente; en general se utiliza mercurio; y (h) es la diferencia de los niveles del mercurio en ambas ramas del tubo de Pitot.

Demostración:

- Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$P_3 + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 = P_4 + 0 + 0$$

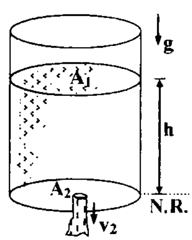
$$v^2 = \frac{2(P_4 - P_3)}{\rho} = \frac{2\rho_0 g h}{\rho}$$

$$\clubsuit \quad v = (\frac{2\rho_0 g h}{\rho})^{1/2}$$

☞ **Nota**

Se cumple que: P_1=P_3 y P_2=P_4, por que se asume, que la densidad del gas es muy pequeña, comparada con la del fluido.

e) Tiempo de vaciado de un depósito abierto



Se tiene un depósito abierto de sección transversal de área "A_1", conteniendo un líquido de densidad "ρ" hasta una altura "h". El tiempo que tarda el líquido en salir totalmente del depósito a través del agujero de área "A_2" es:

$$t = [(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1)\frac{2H}{g}]^{1/2}$$

Demostración:

- De la conservación del caudal, obtenemos la relación de velocidades, así:

$$Q = v_1 A_1 = A_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \qquad (1)$$

Sustituyendo esta velocidad en la ecuación de Bernoulli, obtenemos la velocidad de salida del líquido, así:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$P_o + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = P_o + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}\rho \frac{A_2^2}{A_1^2} v_2^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = [\frac{2gh}{A_2^2 - A_1^2}]^{1/2} A_1$$

Ahora, por conservación de la masa, el volumen de líquido que sale del depósito, debe ser igual, al volumen de líquido que disminuye en el depósito, esto es:

$$A_2 v_2 dt = -A_1 dh$$

Sustituyendo "v_2", separando variables e integrando, obtenemos el tiempo de vaciado, así:

$$-\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = [\frac{2g}{A_1^2 - A_2^2}]^{1/2} A_2 \int_0^t dt$$

$$(2\sqrt{h})\Big|_0^H = [\frac{2g}{(A_1^2/A_2^2 - 1)}]^{1/2} (t)\Big|_0^t$$

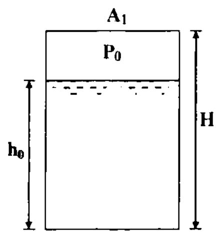
$$\clubsuit\quad t=[(\frac{A_1^2}{A_2^2}-1)\frac{2H}{g}]^{1/2}$$

Para, $A_1 >> A_2$, $A_1/A_2 >> 1$, por lo que despreciando la unidad, la expresión anterior se reduce a:

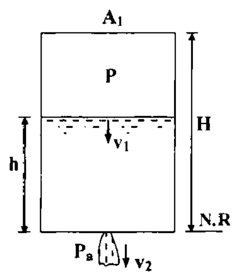
$$t=(\frac{2HA_1^2}{gA_2^2})^{1/2}$$

El tiempo de vaciado de un depósito que contiene un líquido, es independiente de la densidad del líquido.

e) Velocidad de vaciado de un depósito cerrado



En esta sección estudiaremos la velocidad con la que sale un líquido por un orificio situado en la base inferior de un depósito cerrado en su parte superior con una tapa, y que encierra aire a la presión P_0.



Consideremos un depósito de sección transversal de área "A_1" y altura "H", que presenta en su base inferior un orificio de área "A_2", y que contiene inicialmente un líquido de densidad "ρ" hasta una altura "h_o".

Para un instante t>0, luego de iniciado la salida del líquido del líquido por el orificio, de la ecuación de continuidad para los puntos (1) y (2), tenemos:

$$Q=A_1v_1=A_2v_2 \qquad (1)$$

A su vez, aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos (1) y (2), tenemos:

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g y_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g y_2$$

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h=P_a+\frac{1}{2}\rho v_2^2+0 \quad (2)$$

Ahora, asumiendo que el aire encerrado en el depósito se expande isotermicamente, entonces de la ley de los gases ideales, tenemos:

$$P_oA_1(H-h_o)=P_1A_1(H-h) \quad (3)$$

Cuando, $P_o < P_a$, el agua deja de salir del depósito y $v_1=v_2=0$, entonces de las ecs.(2) y (3), se reducen a:

$$P_1=P_a-\rho g h$$

$$P_1=P_o(\frac{H-h_o}{H-h})$$

Igualando estas ecuaciones, obtenemos la ecuación que determina la altura de equilibrio del líquido, así:

$$P_a-\rho g h=P_o(\frac{H-h_o}{H-h})$$

$$\rho g h^2-(\rho g H+P_a)h$$
$$-H(P_o-P_a)+\rho_o h_o=0$$

siendo, "P_a" la presión atmosférica.

Ahora, sustituyendo las ecs.(1) y (3) en (2), obtenemos la velocidad con la que disminuye la altura del líquido en el depósito, así:

$$P_o(\frac{H-h_o}{H-h})+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h =$$

$$P_a+\frac{1}{2}\frac{A_1^2}{A_2^2}v_1^2$$

$$v_1=[\frac{P_o(H-h_o/H-h)+\rho g h-P_a}{\rho(A_1^2/A_2^2-1)/2}]^{1/2}$$

Sustituyendo v_1=-dh/dt, seprando variables e integrando, obtenemos la integral que determina la altura instantánea del líquido en el depósito, así:

$$\int_{h_o}^{h}[\frac{H-h}{-\rho g h^2(\rho g H+P_a)h+H(P_o-P_a)}]^{\frac{1}{2}}dh$$

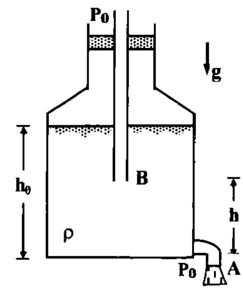
$$=-\frac{1}{[\rho(A_1^2/A_2^2-1)]}\int_0^t dt$$

La integración de esta ecuación presenta dificultad, por lo que, se recomienda utilizar alguna técnica numérica, para obtener la altura instantánea del líquido.

Para, $P_o \approx P_a$ el depósito de líquido no llega a vaciarse completamente.

f) El frasco de Mariotte

Como se vio anteriormente la velocidad con la que sale un líquido a través de un agujero de un depósito disminuye con el tiempo, pues depende de la altura instantánea del líquido. El frasco de Mariotte es un dispositivo sencillo que nos permite mantener constante la velocidad de salida del líquido, por un cierto tiempo.



El frasco de Mariotte presenta un tubo que pasa por la base superior, estando su extremo inferior sumergido en el fluido. Ahora, como el extremo inferior B del tubo se encuentra a la presión atmosférica "P_o", la velocidad "v" con la que sale el fluido por A depende de la altura "h" y no así de la altura del fluido "h_o".

La velocidad de salida del fluido se mantendrá constante, en tanto $h \le h_o$.

La velocidad de salida del fluido puede cambiarse desplazando el tubo hacia arriba o abajo.

La velocidad de salida no depende del diámetro del tubo.

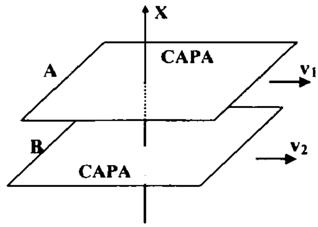
5. FLUIDO REAL

a) Definición

Se denominan así, a aquellos fluidos, en los cuales se considera su viscosidad o fricción interna, al estudiar las propiedades y características que presentan el fluido en movimiento.

b) Viscosidad

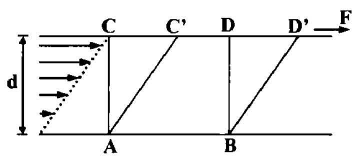
Se denomina así, al rozamiento interno que se presenta en un fluido; debido al rozamiento entre las capas de gas ó líquido que se mueven paralelamente una respecto de otra con velocidades demagnitudes diferentes, como se aprecia en la Fig.



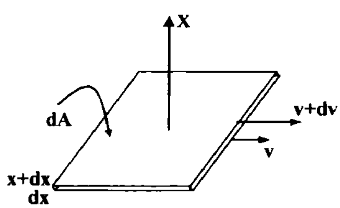
La fricción interna es una consecuencia del transporte de la cantidad de movimiento de una capa hacia otra que realizan las moléculas del fluido.

La viscosidad es una medida de la resistencia que presenta un fluido a fluir.

En la Fig., se representa un fluido comprendido entre una lámina inferior fija y otra superior móvil.



La capa de fluido en contacto con la lámina móvil tiene la misma velocidad que ella, en tanto la adyacente a la pared fija esta en reposo. La velocidad de las distintas capas intermedias aumenta uniformemente entre ambas láminas como sugieren las flechas.



Como resultado de este movimiento, una porción de líquido que en un determinado instante tiene la forma ABCD, después de transcurrido cierto tiempo se deformará y se transformará en la porción ABC'D'.

- Ahora, consideremos dos capas de fluido de área "dA" separadas una distancia "dx", existiendo entre ellas una diferencia de velocidad de "dv". La fuerza por unidad de área (esfuerzo cortante o de cizalla) que se necesita aplicar para que una placa se deslice respecto de la otra es proporcional al gradiente de velocidad. La constante de proporcionalidad se llama coeficiente de viscosidad "η", así, para el caso de un problema unidimensional, tenemos:

$$\frac{dF}{dA} = \eta \frac{dv}{dx} \qquad (1)$$

siendo, dv/dx el gradiente de velocidades del movimiento en la dirección del eje X, perpendicular a la superficie de la capa.

- La viscosidad de un fluido es afectada por la variación de la temperatura, y depende de su composición química. La viscosidad varia inversamente proporcional con la temperatura, a mayor temperatura menor viscosidad.
- La viscosidad solo se manifiesta en fluidos en movimiento, pues, cuando un fluido esta en reposo adopta una forma tal que en el no actúan las fuerzas tangenciales.
- Si la viscosidad es muy grande, el rozamiento entre las capas también lo es, lo que significa que las capas no pueden moverse una respecto de otra.
- Si la viscosidad es nula, estamos ante un superfluito que presenta propiedades notables como escapar de los recipientes aunque estos no estén llenos.
- La viscosidad es característica de todos los fluidos, en los gases su efecto es

despreciable

- La inversa de la viscosidad es la fluidez.
- La viscosidad es un parámetro relacionado a la emisión de contaminantes, dado que interviene en las condiciones de combustión.

c) Coeficiente de viscosidad

El coeficiente de viscosidad es una cantidad física escalar, que se representa por (η), y se utiliza para caracterizar el grado de viscosidad que presenta el fluido; existen dos tipos de viscosidad:

1) Viscosidad dinámica (η)

Está asociado con el movimiento en régimen laminar de un fluido, a través de tuberías de secciones regulares o irregulares.

☞ **Unidad**: (η) se mide en pascal.s

2) Viscosidad cinemática (ν)

Se denomina así, a la dependencia que presenta la viscosidad dinámica (η), respecto de la densidad del fluido (ρ), es decir:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

A nivel internacional, la referencia para construir la escala de viscosidad es 1,003 mm^2/s, correspondiente a la viscosidad cinemática del agua, a una temperatura de 20^0 C, a partir de este valor se construye la escala de medición de viscosidad.

☞ **Unidad:** (ν) se mide en m^2/s.

d) Viscosímetro

Instrumento utilizado para medir la viscosidad de los líquidos. Consiste en una pequeña vasija en cuyo fondo existe un orificio calibrado y de tamaño conocido, y en la que se vierte un volumen conocido de líquido. El tiempo que este emplea en fluir por el orificio es una medida de su viscosidad. Con el viscosímetro se mide la viscosidad relativa, la cual es directamente proporcional a la densidad del líquido y al tiempo que este tarda en fluir por el orificio, e inversamente proporcional al tiempo que tarda en fluir el mismo volumen de agua.

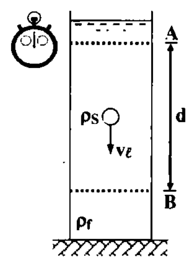
e) Medida de la viscosidad

1) Objetivo

Medir la viscosidad de un fluido

2) Instrumentos

- Una billa de plomo.
- Un micrómetro para medir el diámetro de la billa
- Un densímetro para medir la densidad del fluido (aceite)
- Un cronometro para medir el tiempo que tarda la billa en recorrer una distancia "d" al interior del recipiente vertical que contiene el fluido.



3) Fundamento teórico

En la Fig., asumiendo que la bolita en A ha alcanzado ya su velocidad límite, el valor de esta velocidad límite lo calculamos en el tramo AB, así:

$$v_\ell = \frac{d}{t} \qquad (1)$$

De otro lado, de la ley de Stokes, la expresión de la velocidad límite es:

$$v_\ell = \frac{2g(\rho_S - \rho_f)R^2}{9\eta} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), obtenemos la expresión para el coeficiente de la viscosidad del fluido, así:

$$\eta = \frac{2g(\rho_S - \rho_f)R^2 t}{9d}$$

siendo, "ρ_S", "ρ_f" las densidades de la billa y fluido, "R" radio de la billa, "t" tiempo que tarda la billa en recorrer el tramo AB, "d" distancia del tramo AB, "g" aceleración de la gravedad, todas estas cantidades se miden directamente, excepto "g".

4) Ejemplo

Se libera una billa de radio R=1,85 mm densidad $\rho = 11{,}35$ g/cm^3, en un recipiente que contiene aceite de densidad $\rho_f = 0{,}88$ g/cm^3, el resultado de las medidas de la distancia y el tiempo para el tramo AB son: d=50 cm, t=4,57s, entonces la viscosidad es:

$$\eta = \frac{(2)(9{,}8)(11350 - 880)(0{,}00185)^2(4{,}57)}{(9)(0{,}5)}$$

$$\eta = 0{,}71\ \text{kg/m.s}$$

f) Fenómenos de transporte

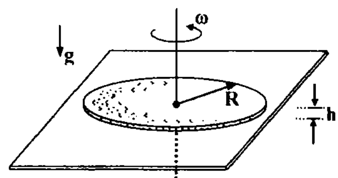
Es una rama de la física que se dedica al estado sistemático y unificado de la transferencia de momento, energía y materia.

Los modelos matemáticos que se utilizan para describir el comportamiento de estas cantidades físicas, son análogas unas de otras.

Los fenómenos de transporte son de dos tipos: Transporte molecular y transporte convectivo. Estos, a su vez, pueden estudiarse en tres niveles distintos: nivel macroscópico, miscroscópico y molecular.

El estudio y la aplicación de los fenómenos es esencial para la ingeniería contemporánea.

g) Rotación de un disco en un gas



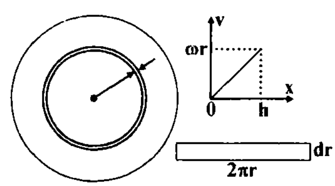
El disco delgado de masa "m" y radio "R", rota alrededor de su eje de simetría sin fricción, y está suspendido por la presión de un gas de viscosidad "η", a una altura "h" por encima de la placa horizontal. La velocidad angular instantánea del disco, viene dada por:

$$\omega = \omega_o e^{-\pi\eta R^2 t/mh}$$

siendo, "ω_o" la velocidad angular inicial y "t" el tiempo.

Demostración:

Consideremos una capa cilindrica de gas de radio "r", espesor "dr" y altura "h".



La velocidad del gas en puntos cercanos a la placa horizontal es nula, en tar

to, la velocidad lineal en puntos cercanos al disco de radio "r" es "ωr".
En la Fig., las expresiones del área del anillo de radio "r", espesor "dr", y el gradiente de velocidad son:

$$dA = 2\pi r\,dr \quad y \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\omega r}{h}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la fuerza por unidad de área (esfuerzo cortante), tenemos:

$$\frac{dF}{dA} = \eta \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dF}{2\pi r\,dr} = \eta \frac{\omega r}{h}$$

$$dF = \frac{2\pi\eta\omega}{h} r^2\,dr$$

Ahora, el momento creado por está fuerza, respecto del eje de simetría del disco rotante es:

$$dM = r\,dF = \frac{2\pi\eta\omega}{h} r^3\,dr$$

Integrando sobre todos los anillos, obtenemos el momento sobre el disco, el cual, se opone a su rotación, así:

$$\int_0^M dM = \frac{2\pi\eta\omega}{2h}\int_0^R r^3\,dr$$

$$M = \frac{\pi\eta R^4\omega}{2h}$$

Sustituyendo este momento en la ecuación fundamental de la rotación de un sólido, e integrando obtenemos la expresión para la velocidad angular instantánea, así:

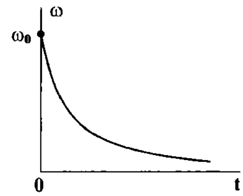
$$I\frac{d\omega}{dt} = -M$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\pi\eta R\omega}{mh}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\pi\eta R^2}{mh}\int_0^t dt$$

$$\omega = \omega_0 e^{-\pi\eta R^2 t/mh}$$

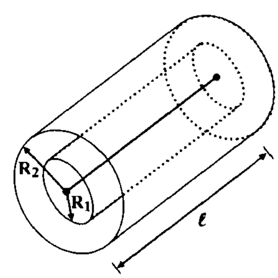
Representemos la velocidad angular en función del tiempo.



Notas

1) El signo (-) en la ecuación fundamental de rotación, nos indica que M se opone al movimiento de rotación del disco
2) El momento de inercia del disco respecto de su eje de simetría de rotación es $I = (1/2)mR^2$.

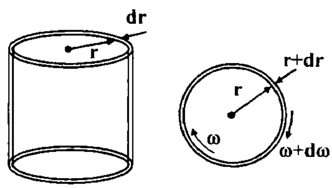
h) Fluido viscoso entre dos cilindros coaxiales



En esta sección estudiaremos la distribución de velocidades angulares del fluido entre dos cilindros coaxiales en rota ción, y calcularemos el momento que e jerce el fluido viscoso, respecto de su e je de rotación común.

Consideremos el movimiento de un fluido de densidad "ρ" y viscosidad "η" en -tre dos cilindros coaxiales de longitudes "ℓ" y radios "R_1", "R_2" que giran en el mismo sentido con velocidades angulares "ω_1" y "ω_2".

Representemos un capa de fluido de forma cilíndrica de radio "r" y espesor "dr".



En la definición de la viscosidad de un fluido, F/A=η (dv/dx) sustituyendo el área A=2π r ℓ lateral de la capa cilindrica, y v=r dω la velocidad lineal , tenemos:

$$\frac{F}{2\pi r \ell} = \eta \frac{r\,d\omega}{dr}$$

A su vez, esta fuerza crea un momento respecto del eje de rotación, igual a:

$$M = r\,F = 2\pi\,\eta\,\ell\,r^3 \frac{d\omega}{dr}$$

Ahora, como el líquido es incompresible y su movimiento es estacionario, M es independiente de "r", esto es:

$$r^3 \frac{d\omega}{dr} = C_1 \qquad (1)$$

siendo, "C_1" una constante a determinar.

Con esto, la ecuación para el momento de una fuerza, queda así:

$$M = 2\pi\eta\ell C_1 \qquad (2)$$

En la ec.(1) separando variables e integrando, obtenemos la distribución de velocidades para el fluido, así:

$$\int d\omega = \int \frac{C_1\,dr}{r^3}$$

$$\omega = -\frac{C_1}{2r^2} + C_2$$

Evaluando "ω" en "R_1" y "R_2", obtenemos dos ecuaciones para C_1 y C_2:

$$\omega_1 = -\frac{C_1}{2R_1^2} + C_2$$

$$\omega_2 = -\frac{C_1}{2R_2^2} + C_2$$

Resolviendo este par de ecuaciones para C_1, C_2, obtenemos:

$$C_1 = \frac{2R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$C_2 = \frac{R_2^2\omega_2 - R_1^2\omega_1}{R_2^2 - R_1^2}$$

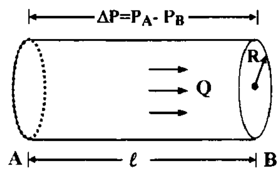
Sustituyendo C_1 en la ec.(2), obtenemos el momento ejercido por el fluido, respecto de su eje de rotación, así:

$$M = \frac{4\pi\eta\ell R_1^2 R_2^2(\omega_2 - \omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}$$

- Como se observa, "M" es proporcional a la velocidad relativa de los cilindros.
- Esta expresión se utiliza para medir la viscosidad (η) de un líquido.
- Si: $R_2 >> R_1$, el momento se reduce a $M = 4\pi\eta\ell R_1^2(\omega_2 - \omega_1)$.

6. LEYES DE POISEUILLE Y STOKES

a) Ley de Poiseuille



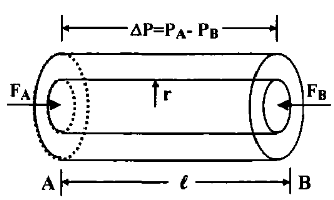
Esta ley se utiliza para determinar la pérdida de energía al interior de un fluido viscoso que circula en régimen laminar por una tubería; y establece que la diferencia de presión (ΔP) en los extremos de la tubería de longitud (ℓ) y diámetro (D), viene dado por:

$$\Delta P = \frac{8\eta\,\ell\,Q}{\pi R^4}$$

siendo, (Q) el caudal a través de la tubería.

Demostración:

- Representemos al interior del fluido viscoso que circula por la tubería de izquierda a derecha; una capa cilíndrica de radio (r), espesor (dr) y longitud (ℓ), como se muestra en la Fig



El fluido de forma cilíndrica de radio "r" se desplaza por el tubo de radio "R", de izquierda a derecha, debido a la acción de la fuerza resultante de la suma de las fuerzas F_A y F_B, esto es:

$$F = (P_A - P_B)\,\pi\,R^2$$

Sustituyendo "F" en la ecuación de viscosidad $F/A = \eta(dv/dx)$, y teniendo en cuenta que el área lateral de la capa cilíndrica es $A = 2\pi r\,\ell$, tenemos:

$$\frac{(P_A - P_B)\pi r^2}{2\pi r\,\ell} = -\eta\frac{dv}{dr}$$

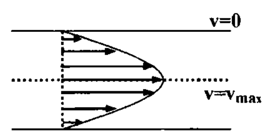
El signo (-) de dv/dx nos indica que la velocidad disminuye a medida que "x" aumenta.

Separando variables, integrando, y teniendo en cuenta que la velocidad en r=R es nula, obtenemos la expresión para la velocidad del fluido, así:

$$\int_v^0 dv = -\frac{\Delta P}{2\eta\,\ell}\int_r^R r\,dr$$

$$v = \frac{\Delta P}{4\eta\,\ell}(R^2 - r^2)$$

Esta es la ecuación de una parábola, por lo que, la gráfica del perfil de velocidades es:



Ahora, el volumen de fluido que pasa a través del área del anillo de radios interno "r" y externo "r + dr" en la unidad de tiempo es:

$$dQ = v\,dA = v(2\pi r\,dr)$$

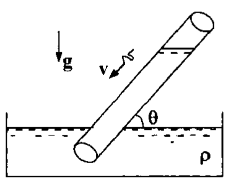
En esta ecuación reemplazando "v", e integrando sobre toda el área de la sección transversal del tubo, obtenemos la diferencia de presión (ΔP), así:

$$\int_0^Q dQ = \frac{\pi\Delta P}{2\eta\,\ell}\int_0^R (R^2 - r^2)\,r\,dr$$

$$Q\Big|_0^Q = \frac{\pi\Delta P}{2\eta\ell}\left(\frac{1}{2}R^2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^R$$

$$\clubsuit\ \ \Delta P = \frac{8\eta\ell Q}{\pi R^4}$$

b) Velocidad de caída de un líquido por un capilar



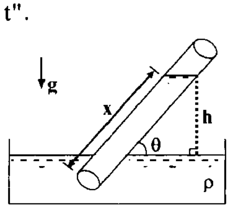
En la Fig, el fluido de densidad "ρ" y viscosidad "η" se desplaza por el tubo capilar de radio "R", inclinado un ángu lo "θ", respecto de la horizontal con u na velocidad constante, dada por:

$$v = \frac{\rho R^2}{8\eta} g \operatorname{sen}\theta$$

siendo "g" la aceleración de la grave dad.

Demostración:

- Sea "x" la la longitud de la columna de liquido en el capilar en el instante de tiempo "t".



La diferencia de presión ΔP, en los ex tremos de la columna de líquido de la longitud "x"

$$\Delta P = \rho g h = \rho g x \operatorname{sen}\theta$$

Ahora, aplicando la ecuación de Poiseuille a esta columna de líquido de lon gitud "x", para el instante en que su ve locidad es "v", tenemos:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta\ell}$$

$$\pi R^2 v = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\rho g x}{x}\operatorname{sen}\theta$$

$$v = \frac{\rho g R^2}{8\eta}\operatorname{sen}\theta$$

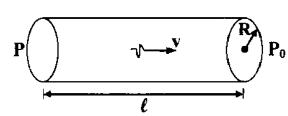
Casos particulares

1) Si: $\theta = 0^o$, v=0 el fluido está en reposo
2) Si: $\theta = 90^o$, $v_{max} = \rho R^2 g \operatorname{sen}\theta / 8\eta$.

Conclusiones

1) A mayor viscosidad del fluido, este se desliza con mayor rapidez.
2) A mayor radio del capilar, el fluido se desliza con mayor rapidez.
3) Un fluido denso cae más rápido que o tro menos denso.

c) Paso de un gas por un tubo capilar



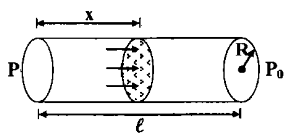
La rapidez con la que pasa la masa de gas por unidad de tiempo (dm/dt), por la sección transversal del tubo capilar de radio "R", longitud "ℓ", cuyos ex tremos están a la diferencia de presión $\Delta P - P - P_o$, viene dada por:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\pi M R^4}{16\eta R T \ell}(P^2 - P_o^2)$$

siendo, "η" la viscosidad del gas, "M" su masa molecular, "T" su temperatura absoluta y "R" la constante universal de los gases.

Demostración:

- El volumen de gas que ingresa en la unidad de tiempo a una presión P, es diferente del volumen que sale por unidad de tiempo a la presión P_0 (atmosférica), debido a la compresibilidad de los gases. No obstante, la masa de gas que ingresa en la unidad de tiempo, es igual, a la masa que sale por unidad de tiempo, pues, la masa de gas se conserva.



Ahora, como la presión disminuye según aumente la longitud "x", la ecuación de Poiseuille, escribimos así:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(-\frac{dP}{dx}\right) \qquad (1)$$

siendo, dV/dt la rapidez con la que pasa el volumen de gas por la sección transversal (sombreada) del capilar.

De otro lado, asumiendo que el gas es ideal, y que el proceso se da a temperatura constante, entonces de la ecuación de los gases ideales, tenemos:

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

$$PdV = \frac{RT}{M}dm$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{RT}{MP}\frac{dm}{dt} \qquad (2)$$

Igualando las ecs.(1) y (2), obtenemos la ecuación para la rapidez con la que pasa la masa de gas por la sección transversal del capilar, así:

$$\frac{RT}{MP}\frac{dm}{dt} = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{dP}{dx}$$

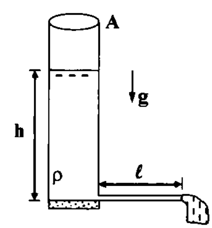
Separando variables, integrando, y teniendo en cuenta que dm/dt=cte., obtenemos:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)\int_0^{\ell} dx = -\frac{\pi M R^4}{8\eta RT}\int_P^{P_0} P\,dP$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\pi M R^4}{16\eta RT\ell}(P^2 - P_o^2)$$

d) Descarga de un fluido por un tubo capilar

Consideremos un capilar de longitud "ℓ", sección transversal de radio "R" conectado a la base inferior de un tubo de sección de área "A", la base superior esta abierta y la inferior esta cerrada por un tapa. Inicialmente el tubo contiene un fluido de viscosidad "η" hasta una altura "h_o".



La diferencia de presión entre los extremos izquierdo y derecho del capilar es:

$$\Delta P = (P_o + \rho g h) - P_o \qquad (1)$$

De otro lado, de la continuidad del fluido, el caudal que ingresa al capilar, es igual, al caudal con la que disminuye el fluido en el tubo, esto es:

$$Q = A\,v_1 = -A\frac{dh}{dt} \qquad (2)$$

Sustituyendo las ecs.(1) y (2) en la ecuación de Poiseuille para un capilar, tenemos:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta \ell}$$

$$-A\frac{dh}{dt} = \frac{\pi \rho g h R^4}{\eta \ell}$$

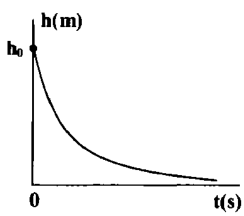
Definiendo: $C = \pi\rho g R^4 / 8\eta\ell$, separando variables e integrando, obtenemos la altura instantánea del fluido en el tubo, así:

$$\frac{dh}{dt} = -C h \quad \Rightarrow \quad \int_{h_0}^{h} \frac{dh}{dh} = -C \int_0^t dt$$

$$\ell n(h)\Big|_{h_0}^{h} = -C(t)\Big|_0^t$$

$$h = h_o e^{-Ct}$$

Como se aprecia, la altura del fluido en el tubo disminuye exponencialmente.



Se llama «constante de tiempo» al tiempo transcurrido hasta el instante en que la altura es el 36,78 % de la altura inicial, esto es:

$$\frac{h}{h_o} = \frac{h_o\, e^{-Ct}}{h_o} = e^{-1}$$

$$C\,t_C = 1 \quad \Rightarrow \quad t_C = 1/C$$

$$t_C = \frac{8\eta\ell A}{\pi\rho g R^4}$$

- Se llama «tiempo de vaciado medio» al tiempo que se necesita para que se descargue la mitad del volumen de fluido, esto es:

$$\frac{h_o}{h} = \frac{h_o}{h_o e^{-Ct}} = e^{Ct} = 2$$

$$t_m = \frac{\ell n(2)}{C} = \ell n(2)\, t_C$$

Esto es la razón del tiempo de vaciado medio a la constante de tiempo es: $t_m / t_C = \ell n(2)$.

e) Ley de Stokes

Esta ley establece que: todo cuerpo que cae en un fluido en régimen laminar de viscosidad "η", experimenta una fuerza de resistencia que depende la forma del cuerpo y de su velocidad instantánea "v", así, para el caso de una esfera de radio "R", la expresión de la fuerza de resistencia es:

$$f = 6\pi\eta R\,v$$

Demostración:

1) Primera forma

La fórmula general de la fuerza de resistencia, viene dado por:

$$f = \frac{1}{2} C_d\, \rho_f\, A\, v^2$$

siendo, "C_d" el coeficiente de arrastre (a determinar), "ρ_f" la densidad del fluido, "A" área de la sección transversal de la esfera (πR^2), y "v" la velocidad instantánea.

El coeficiente de arrastre es una función del número de Reynold (R_e), viene dado por:

$$R_e = \frac{\rho_f\,\ell\,v}{\eta}$$

siendo, "ℓ" la longitud del objeto medido a lo largo de su sección transversal (para una esfera es 2R), y "η" la viscosidad del fluido.

Par amplio intervalo de números R_e, la forma de la función del coeficiente de arrastre (C_d), viene dado por:

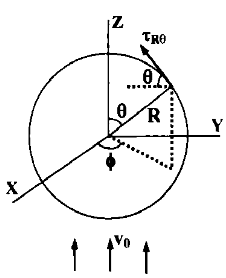
$$C_d \approx \frac{24}{R_e} + \frac{6}{1+\sqrt{R_e}} + 0{,}4$$

Para pequeños valores de $R_e<1$, el primer término es el más importante, por lo que, la fuerza de resistencia para la esfera de radio "R" es:

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{2\rho_f\,R\,v/\eta}\right)(\rho_f\,\pi\,R^2\,v^2)$$

$$f = 6\pi\eta R\,v$$

2) <u>Segunda forma</u>
Consideremos una esfera a través del cual pasa el flujo laminar de un fluido incompresible que se mueve en la dirección del eje Z con una velocidad v_0, lejos de la esfera.



Resolviendo la ecuación diferencial correspondiente al flujo de corriente en coordenadas esféricas con simetría axial y con las condiciones de contorno apropiadas, se encuentra que las componentes radial (v_r) y tangencial (v_θ) de la velocidad del fluido son:

$$v_r = v_0\left(1-\frac{3}{2}\frac{R}{r}+\frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = -v_0\left(1-\frac{3}{4}\frac{R}{r}-\frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta$$

Con esto el esfuerzo cortante que actúa en todos los puntos de la superficie de la esfera es:

$$\tau_{r\theta} = -\eta\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2}\frac{\eta v_o}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^4\operatorname{sen}\theta$$

A su vez, la distribución de presión debida al flujo de fluido que rodea a la esfera, viene dada por:

$$P = -\eta\left[2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2+2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)^2+\right.$$
$$\left.2\left(\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cos\theta}{r}\right)^2\right]$$

$$P = -\frac{3}{2}\frac{\eta v_o}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos\theta$$

Luego, la fuerza de resistencia que experimenta la esfera, hallamos integrando sobre la superficie de la esfera, las componentes de la distribución de presión y esfuerzo cortante a lo largo del eje Z, así:

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(-P\,|_{r+R}\cos\theta)\,R^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\tau_{r\theta}\,|_{r+R}\operatorname{sen}\theta)\,R^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$f = 3\pi\eta v_o R \int_0^{\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta +$$

$$3\pi\eta v_o R \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^3\theta\, d\theta$$

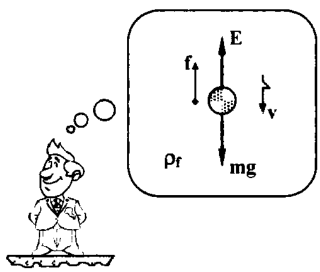
$$f = 2\pi\eta R v_o + 4\pi\eta R v_o$$

$$\clubsuit \quad f = 6\pi\eta R v$$

7. Movimiento de una esfera en un fluido viscoso.

En esta sección estudiaremos el movimiento de un cuerpo (esfera) en un fluido viscoso, bajo la acción de fuerzas de resistencia proporcional a la velocidad y al cuadrado de la velocidad, además se estudiara el movimiento de un proyectil en presencia de la fuerza de resistencia del aire.

a) Fuerza de resistencia proporcional a la velocidad



Consideremos el movimiento de una esfera de radio "R" y densidad "ρ_S", que partiendo del reposo, cae en un fluido de densidad "ρ_f" y coeficiente de viscosidad "η", como se aprecia en la Fig.

- Las fuerzas que actúan sobre la esfera en su movimiento de caída son: su peso (W), el empuje (E), y la fuerza de resistencia (f), cuyas expresiones son:

$$W = \rho_S V = \frac{4}{3}\pi\rho_S g R^3$$

$$E = \rho_f V = \frac{4}{3}\pi\rho_f g R^3$$

$$f = 6\pi\eta R v$$

- El movimiento de la esfera consta de dos etapas, en la primera etapa su movimiento es acelerado, en tanto, en la segunda etapa su movimiento es uniforme. La ecuación que describe el movimiento de la esfera es:

$$W - E - f = \frac{W}{g}\frac{dv}{dt}$$

Definiendo: F=W-E y $k = 6\pi\eta R$ la ecuación anterior se reduce a:

$$F - kv = m\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

La esfera alcanza su velocidad límite, cuando su aceleración se anula, es decir cuando la resultante de las fuerzas es nula, esto es:

$$F - k v_\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\ell = \frac{F}{k}$$

$$v_\ell = \frac{2g(\rho_S - \rho_f)R^2}{9\eta}$$

Separando variables en la ec.(1), e integrando, obtenemos la velocidad instantánea de la esfera para la primera etapa, así:

$$\int_0^v \frac{dv}{F - kv} = \frac{1}{m}\int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{k}\ell n(F - kv)\Big|_0^v = \frac{1}{m}(t)\Big|_0^t$$

$$v(t) = v_\ell\,(1 - e^{-kt/m})$$

Según está ecuación la velocidad límite se alcanza para $t \to \infty$.(en la práctica se toma "t" muy grande)

Asumiendo que la esfera inicia su movimiento en $x_0=0$, integrando la velocidad instantánea, obtenemos la posición instantánea de la esfera, así:

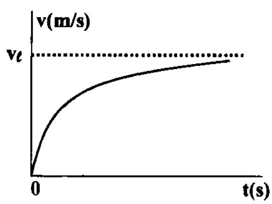
$$\int_0^x dx = \int_0^t v\,dt$$

$$x = \int_0^t v_\ell(1-e^{-kt/m})\,dt$$

$$x = v_\ell[t - \frac{m}{k}(1-e^{-kt/m})]$$

Para, $t \to \infty$ $x \approx v_\ell t$ es decir el movimiento es rectilíneo uniforme.

Gráfica de v vs t



Conclusiones

1) En la segunda etapa la bola se mueve con aceleración nula (a= 0), y con una velocidad igual a la velocidad límite.
2) La velocidad de un cuerpo en caída libre es proporcional al tiempo, en tanto, la velocidad de un cuerpo que cae en un fluido tiende a un valor constante (v_ℓ).
3) El desplazamiento de un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo, en tanto, el desplazamiento de un cuerpo que cae en un fluido es proporcional al tiempo.

b) Fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad

Consideremos el movimiento vertical de una esfera de radio "R", densidad "ρ_S" en un fluido viscoso incompresible de densidad "ρ_f" y viscosidad "η".

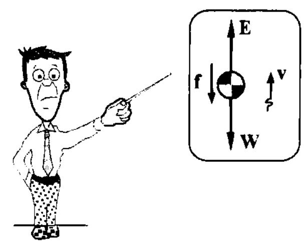
Las fuerzas que actúan en todo instante sobre la esfera son: su peso (W), el empuje (E) y la fuerza de resistencia (f), cuyas expresiones son:

$$W = \rho_S V = \frac{4}{3}\pi \rho_S R^3$$

$$E = \rho_f V = \frac{4}{3}\pi \rho_f R^3 \qquad (1)$$

$$f = 0{,}2\rho_f \pi R^2 v^2$$

1) Movimiento hacia arriba



De la Fig., la ecuación de movimiento de la esfera es:

$$E - W - f = m\,dv/dt$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_f - \rho_S)g - 0{,}2\rho_f \pi R^2 v^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -(1-\frac{\rho_f}{\rho_S})g - 0{,}15\frac{\rho_f}{\rho_S R}v^2$$

Denominando: $C_2 = (0{,}15\rho_f/\rho_S R C_1)^{1/2}$ y $C_1 = (1-\rho_f/\rho_S)g$, la ecuación anterior, queda así:

$$\frac{dv}{dt} = -C_1(1 + C_2^2 v^2)$$

Separando variables e integrando, obtenemos la velocidad instantánea de la esfera, así:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1 + C_2^2\, v^2} = -C_1 \int_0^t dt$$

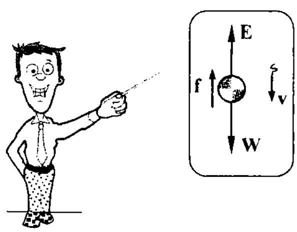
$$v(t) = \frac{1}{C_2} tg[-C_1 C_2\, t + tg^{-1}(C_2 v_o)]$$

Asumiendo que la esfera inicia su movimiento en $x_0 = 0$, integrando la velocidad instantánea, obtenemos la posición instantánea de la esfera así:

$$x(t) = \frac{1}{C_1 C_2^2} \ell n[\sqrt{1 + (C_2 v_o)^2} \bullet$$

$$\cos(-C_1 C_2 t + tg^{-1}(-C_2 v_o))]$$

2) Movimiento hacia abajo



En este caso, la ecuación de movimiento de la esfera es:

$$\frac{dv}{dt} = -C_1 (1 - C_2^2\, v^2)$$

Separando variables, integrando, y asumiendo que la esfera inicia su movimiento del reposo en el instante t_0, obtenemos la velocidad instantánea, así:

$$\int_0^{v} \frac{dv}{1 - C_2^2 v^2} = -C_1 \int_0^t dt$$

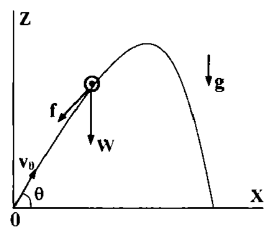
$$v(t) = -\frac{1}{C_2} tg\,h[C_1 C_2 (t - t_o)]$$

Integrando la velocidad instantánea, y asumiendo que la esfera inicia su movimiento en el instante "t_o" en la posición "x_o", obtenemos la posición instantánea, así:

$$x = x_o - \frac{1}{C_2^2 C_1} \ell n[\cosh(C_1 C_2 (t - t_o))]$$

e) Movimiento de un proyectil con resistencia del aire

En esta sección se estudia el movimiento de un proyectil lanzado desde tierra con una velocidad inicial "$\vec{v}_o$" formando un ángulo "θ" con el eje X, el proyectil se mueve bajo la acción de su peso (W) y de la fuerza de resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea ($\vec{f} = -k\, m\, \vec{v}$).



La ecuación de movimiento del proyectil, respecto de un observador situado en tierra es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\, m\, \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - k\, \vec{v}$$

Desdoblando esta ecuación en sus componentes a los largo de los ejes X y Z, tenemos:

$$\frac{dv_x}{dt} = -k\, v_x$$

$$\frac{dv_z}{dt} = g - k\,v_z$$

Separando variables e integrando, obtenemos las componentes de la velocidad instantánea del proyectil, así:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -k \int_0^t dt$$

$$\ell n(v_x)\Big|_{v_{0x}}^{v_x} = (-k\,t)\Big|_0^t$$

$$v_x = v_0 \cos\theta\, e^{-k\,t} \qquad (1)$$

$$\int_{v_{0z}}^{v_z} \frac{dv_z}{g + k\,v_z} = -\int_0^t dt$$

$$\ell n(g + k\,t)\Big|_{v_{0z}}^{v_z} = (-k\,t)\Big|_0^t$$

$$v_z = (\frac{g}{k} + v_0 \operatorname{sen}\theta)e^{-k\,t} - \frac{g}{k} \qquad (2)$$

Integrando nuevamente las ecs.(1) y (2) obtenemos las coordenadas de la posición instantánea del proyectil, así:

$$\int_0^x dx = v_0 \cos\theta \int_0^t e^{-k\,t}\,dt$$

$$x = \frac{v_0 \cos\theta}{k}(1 - e^{-k\,t}) \qquad (3)$$

$$\int_0^z dz = (\frac{g}{k} + v_0 \operatorname{sen}\theta)\int_0^t e^{-k\,t}dt - \frac{g}{k}\int_0^t dt$$

$$z = \frac{1}{k}(\frac{g}{k} + v_0 \operatorname{sen}\theta)(1 - e^{-k\,t}) - \frac{g}{k}t \qquad (4)$$

El tiempo que tarda el proyectil en alcanzar su altura máxima, obtenemos tomando v_z=0 en la ec.(2), así:

$$(\frac{g}{k} + v_0 \operatorname{sen}\theta)e^{-k\,t_S} = \frac{g}{k}$$

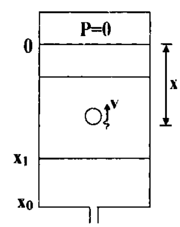
$$t_S = \frac{1}{k}\ell n(1 + \frac{k\,v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}) \qquad (5)$$

El tiempo que tarda el proyectil en regresar a tierra, obtenemos tomando z=0, en la ec.(4), así:

$$(\frac{g}{k} + v_0 \operatorname{sen}\theta)(1 - e^{-k\,t_V}) = g\,t_V \qquad (6)$$

- Como se aprecia está ecuación no tiene solución analítica, por lo que, se plantean soluciones aproximadas, mediante la utilización de técnicas numéricas.
- La ec.(5) puede utilizarse para la determinación la constante de proporcionalidad "k" de la fuerza de resistencia del aire, para lo cual, se mide el tiempo "t"

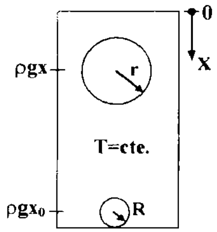
d) Movimiento de una burbuja de aire en un fluido viscoso



En esta sección estudiaremos el movimiento de una pequeña burbuja de aire en un fluido viscoso, y constataremos que la burbuja asciende con velocidad constante, y que la magnitud de esta velocidad dependerá del tamaño de la burbuja.

La parte superior del tubo de vidrio parcialmente lleno de un fluido (aceite) de densidad "ρ" y viscosidad "η" se conecta a una bomba de vació, afín que la presión sea muy pequeño $P \approx 0$ De modo que, la presión a una profundidad "x" sea sólo debida a la altura de la columna de aceite.

Al inyectar burbujas de aire por la parte inferior, se observa que las burbujas de radios comprendidos entre 0,1 cm y 0,3 cm, ascienden lentamente describiendo trayectorias rectilíneas. Las burbujas de radio mayor empiezan a oscilar a medida que ascienden, perdiendo su forma esférica a medida que se acercan a la superficie superior del fluido.



Consideremos una burbuja de forma esférica de radio "r" que esta a una profundidad "x". La presión del aire en el interior de la burbuja es igual a la presión debida a la columna de fluido de altura "x". Asumiendo que el aire encerrada en la burbuja se comporta como un gas ideal y que se expande isotérmicamente (T=cte.) a medida que asciende, de la ecuación de los gases ideales, tenemos que:

$$PV = P_oV_o$$

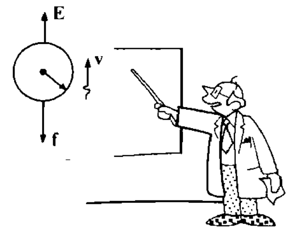
$$\rho g x \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho g x_o \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$r = (x_o / x)^{3/2} R \qquad (1)$$

siendo, "R" el radio de la burbuja a la profundidad "x_o" cuando la burbuja ingresa en el recipiente de vidrio.

Asumiendo que la burbuja asciende lentamente, tal que, podamos considerar que el flujo es laminar. Las expresiones de las fuerzas de fricción (f) y empuje (E) que actúan sobre la burbuja son:

$$f = 6\pi\eta r v \quad y \quad E = \rho g \frac{4}{3}\pi r^3$$



Despreciando el peso de la burbuja por ser muy pequeño, la ecuación que describe el movimiento de la burbuja es:

$$E - f = m\,a \approx 0$$

$$\rho g \frac{4}{3}\pi r^3 + 6\pi\eta r \frac{dx}{dt} = 0 \qquad (2)$$

pues, v=-dx/dt, la magnitud de la velocidad a medida que asciende disminuye Cuando un cuerpo se mueve en un fluido viscoso en régimen laminar, después de cierto tiempo de iniciado su movimiento alcanza una velocidad límite, la resultante de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo es nulo.

Sustituyendo la ec.(1) en la ec. (2), obtenemos la ecuación diferencial, que describe el movimiento de la burbuja:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{9}\frac{\rho g}{\eta}\left(\frac{x_o}{x}\right)^{2/3} R^2 = 0$$

Separando variables e integrando, con la condición de que se empieza a contar el tiempo en t=0 en el instante en el que la burbuja pasa por la marca situada a una profundidad x_1, obtenemos:

$$\int_{x_1}^{x} x^{3/2} dx = -\frac{2\rho g x_o^{2/3} R^2}{9\eta} \int_0^t dt$$

$$x = \{x_1^{5/2} - \frac{10}{27}\frac{\rho g}{\eta} x_o^{2/3} R^2 t\}^{2/5}$$

Esta ecuación nos da la posición de la burbuja en cualquier instante de tiempo "t".

8. NUMEROS EN LA HIDRODINAMICA

a) Número de Reynolds

Es un número adimensional, utilizado en mecánica de fluidos, diseño de reactores y fenómenos de transporte para caracterizar el movimiento de flujo laminar o turbulento de un fluido. El número de Reynolds resulta de la comparación de los términos convectivos y viscosos en las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el movimiento de un fluido, viene dado por:

$$R_e = \frac{Dv\rho}{\eta}$$

siendo, (D) diámetro de la tubería, (v) la velocidad del fluido a través de la tubería, (ρ) la densidad del fluido, y (η) su viscosidad.

- Por ejemplo un flujo con número de Reynolds alrededor de 10^5, expresa que las fuerzas viscosas son 10^5 veces menor que las fuerzas convectivas.
- Por ejemplo en conductos (tuberías) si el número de Reynolds es menor de 2000 el flujo será laminar y si es mayor de 4000 el flujo será turbulento, si R_e se encuentra entre estos valores el flujo se dice que es transicional.
- El valor límite ó crítico del número de Reynolds, que establece el paso del movimiento laminar al turbulento, es diferente para los cuerpos que tienen formas diferentes.

b) Número de Arquímedes

Es un número adimensional que relaciona las densidades de un cuerpo que se mueve en un fluido y la viscosidad dinámica del fluido, así:

$$A_r = \frac{g L^2 \rho_f (\rho - \rho_f)}{\eta^2}$$

siendo, "ρ_f" densidad del fluido, "ρ" densidad del cuerpo, "L" longitud característica del cuerpo, "η" viscosidad dinámica y "g" aceleración de la gravedad.

c) Número de Knudsen

Es un número adimensional, que se define como el cociente del recorrido libre medio molecular (λ) y una escala de longitud molecular (L), esto es:

$$k_n = \frac{\lambda}{L} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho L}$$

siendo, "T" la temperatura en (^{0}K), "k_B" la constante de Boltzmann, "P" la presión total en (Pa), "σ" diámetro en (m) y "ρ" la densidad en (kg/m^3).

Cuando el número de Knudsen es similar o mayor a la unidad ($k_n \approx 1$), el recorrido libre medio de las moléculas es del mismo tamaño (aproximadamente) que el sistema que contiene a la sustancia. Esto es, dada una región del espacio del tamaño de la longitud (L), sólo ocasionalmente pasará una molécula por dicha región.

- El número de Knudsen nos permite saber cuando se pueden describir el comportamiento de un fluido mediante las ecuaciones de la dinámica de fluidos o la mecánica estadística. Así, si k_n<1 se utilizan las ecuaciones de la dinámica de fluidos y si k_n>1 se utiliza la mecáni ca estadística.

Recorrido libre medio

Es la longitud media que recorren las reflexiones sonoras (moléculas) en un determinado espacio. Depende del volumen (V) y el área (S) de la superficie del recipiente, viene dada por:

$$\lambda = \frac{4\,V}{S}$$

d) Número de Mach

Es un número adimensional, que se define como la razón de la velocidad de un objeto a la velocidad del sonido en el medio en el que se mueve dicho objeto, esto es:

$$M_a = \frac{v}{v_S}$$

El número de Mach es la medida de la velocidad de un objeto, respecto de la velocidad del sonido (velocidad relativa).

Generalmente se utiliza para describir la velocidad de los aviones, así, Mach 1 equivale a la velocidad del sonido, Mach 2 es dos veces la velocidad del sonido, etc...

El número de Mach no es una constante, pues depende de la temperatura a la que se encuentre el fluido a través del cual se mueve el objeto.

<u>Clasificación de vuelos</u>

La velocidad de los vuelos de los aviones, se clasifican en:

- Subsónico $M_a < 0{,}7$
- Transónico $0{,}7 < M_a < 1{,}2$
- Supersónico $1{,}2 < M_a < 5$
- Hipersónico $M_a > 5$

e) Número de Weber

Es un número adimensional que expresa la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de tensión superficial, viene dad por:

$$N_W = \frac{\rho\, v^2\, L}{\gamma}$$

siendo, "γ" el coeficiente de tensión superficial del fluido, "ρ" la densidad, "v" la velocidad y "L" un parámetro característico.

f) Número de Strouhal

Es un número adimensional que relaciona la oscilación de un flujo con su velocidad media, y que surge en procesos en los que un flujo es interrumpido por un objeto sólido, de forma que, al ser el fluido incapaz de rodearlo, se despega de este con una estela de forma frecuencial.

- Se utiliza en el diseño y construcción de edificios y estructuras, para evitar desastres, como el caso del puente de Tocoma, en el que la estructura entro en resonancia con el viento. Este número, viene dado por:

$$S_t = \omega\, L / v$$

siendo, "v" la velocidad del fluido, "L" un parámetro geométrico propio del objeto, y "ω" la frecuencia angular del flujo de fluido.

g) Número de Grashof

Es un número de adimensional que relaciona las fuerzas de empuje y las fuerzas viscosas que actúan sobre el fluido, viene dado por:

$$G_r = \frac{g\,\beta\,(T_S - T_f)\,L_C^3}{\nu^2}$$

siendo, "β" es el coeficiente de expansión volumétrica de la sustancia, repre

senta la variación de la densidad de esa sustancia con la temperatura a presión constante, para un gas ideal $\beta = 1/T$, "T" temperatura absoluta en ^0K, "L_C" es la longitud característica, "g" la aceleración de la gravedad, "v" la viscosidad cinemática.
El número de Grashof es un indicativo del régimen de flujo en convección natural, equivalente al número de Reynold en convección forzada.

h) Número de Froude

Es un número de adimensional que relaciona la fuerza de inercia (F) y la fuerza peso (W), viene dado por:

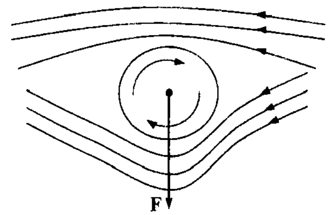
$$F_r = \frac{v}{\sqrt{(\gamma/\rho)L}}$$

siendo, "ρ" la densidad del fluido, "L" longitud en la dirección del flujo de fluido, "γ" peso específico del fluido, y "v" velocidad del flujo de fluido.
Si: $F_r > 1$, el flujo se llama supercrítico
Si: $F_r < 1$, el flujo se llama subcrítico.
Si: $F_r = 1$, se llama crítico.
Este número tiene gran importancia cuando la gravedad influye en el patrón de flujo como el caso de vertederos, canales, sistemas de drenaje, etc...

9. EFECTOS EN LA HIDRODINAMICA

a) Efecto Magnus

Este efecto consiste en que la rotación de un objeto (pelota) afecta a la trayectoria del mismo a través de un fluido, en particular el aire.
Este efecto es resultado de varios fenómenos, incluido el principio de Bernoulli y el proceso de formación de la capa límite en el fluido situado alrededor de los objetos en movimiento.



El objeto en rotación crea un remolino de aire a su alrededor. En la parte superior del objeto, el movimiento del remolino tiene la misma dirección que la corriente de aire que pasa por el objeto, por lo que, en la parte superior la velocidad aumenta. En la parte inferior, el movimiento del remolino esta en dirección opuesta à la de la corriente de aire, por lo que, la velocidad disminuye. Luego, como la presión debida al movimiento de un fluido es proporcional al cuadrado de su velocidad, la presión en la parte superior es mayor que en la inferior, produciéndose una fuerza perpendicular a la dirección de la corriente de aire. Esta fuerza desplaza al objeto de la trayectoria que tendría, si no existiese el fluido.

b) Efecto Leidenfrost

El efecto Leidenfrost es el nombre dado al fenómeno de la capa de vapor que se forma alrededor de una gota de un líquido que se encuentra sobre una superficie caliente.

- Cuando sobre una placa metálica a alta temperatura se coloca una gota de un líquido volátil (agua, alcohol, etc...), la gota no se evapora instantáneamente sino que se mueve erráticamente sobre la superficie durante cierto tiempo, hasta que finalmente desaparece.

c) Efecto Kaye

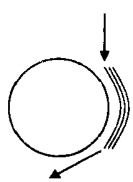
Es una extraña propiedad de los líquidos complejos. Cuando se vierte una mezcla viscosa de un líquido orgánico sobre una superficie, la superficie repentinamente devuelve otro chorro ascendente que tiende a combinarse con el chorro que esta cayendo.

- Líquidos comunes con esta propiedad son jabones de mano, champús y pintura líquida.

Este efecto dura no más de 300 ms.

d) Efecto Coanda

Este efecto esta relacionado con las fuerzas que se originan debido a la viscosidad de los fluidos. El efecto consiste en que un fluido tiende a seguir el contorno de la superficie sobre la que incide, si la curvatura de la misma, o el ángulo de incidencia del fluido con la superficie, no son demasiado acentuados.



En la Fig., el líquido que incide sobre la superficie del cilindro tiende a "pegarse" a la superficie curva. El fluido sale en dirección opuesta. El cilindro es atraído hacia el fluido.

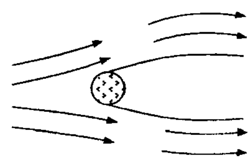
Este efecto se utiliza en el automovilismo para canalizar el aire en ciertas partes del chasis sin tener que reflectarlo en demasía evitando gran resistencia aerodinámica.

e) Cavitación

La cavitación en vació es un efecto hidrodinámico que se produce cuando el agua o cualquier otro fluido pasa a gran velocidad por una arista afilada, produciendo una descompresión del fluido. Puede ocurrir que se alcance la presión de vapor del líquido de tal forma que las moléculas que lo componen cambien inmediatamente a estado de vapor, formándose burbujas o más exactamente cavidades.

- Las burbujas formadas viajan a zonas de mayor presión e implosionan (el vapor regresa al estado líquido de modo súbito, "aplastándose" bruscamente las burbujas) produciendo una estela de gas y un rápido desgaste de la superficie que origina este fenómeno.

f) Supercavitación



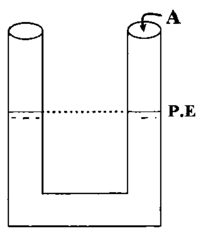
Este fenómeno hidrodinámico consiste en que al moverse el objeto a gran velocidad, el fluido que se desplaza a su alrededor adquiere una velocidad muy grande haciendo que su presión disminuya drásticamente. Si se llega al punto de evaporación del líquido, este se convierte en gas y por tanto el objeto se desplaza por un medio gaseoso disminuyendo así su fricción.

- La diferencia fundamental entre cavitación y supercavitación reside en la velocidad y en los usos potenciales de la misma, mientras la cavitación es un fenómeno generalmente negativo para la industria naval y aeronáutica, la supercavitación ofrece muchas posibilidades en el desarrollo de nuevas tecnologías.

10. OSCILACIONES DE UN FLUIDO IDEAL

En esta sección estudiaremos las oscilaciones de un fluido contenido en un tubo en forma de U, cuando ambos extremos están abiertos, cuando un extremo está cerrado, y cuando la sección transversal del tubo es no uniforme.

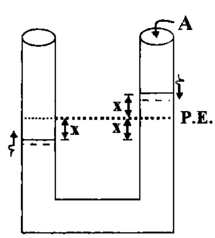
a) Ambos extremos abiertos



Consideremos un líquido de longitud "ℓ" y densidad "ρ" contenido en el tubo en forma de U de sección uniforme de área "A". Cuando el líquido se encuentra en equilibrio, la altura en ambas ramas del tubo es la misma.

Para producir las pequeñas oscilaciones armónicas, desplazamos el fluido en la rama izquierda una distancia "x" hacia abajo, y al liberar el fluido se inicia las oscilaciones bajo la acción del peso de la columna de fluido de longitud "2x" situada en la rama derecha, esto es, la fuerza que produce las oscilaciones es:

$$F = \rho g A\, 2x$$

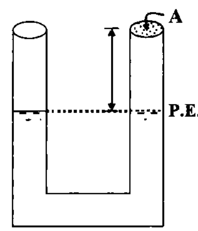


Ahora, como esta fuerza es del tipo de Hooke $F = k\,x$, entonces, comparando estas ecuaciones encontramos que la constante elástica es: $k = 2\rho g A$, por lo que, la frecuencia angular propia de las oscilaciones armónicas que realiza la masa de fluido de longitud "ℓ" es:

$$\omega_o = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\rho g A}{\rho \ell A}\right)^{1/2}$$

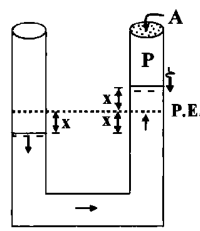
$$\omega_o = \left(\frac{2g}{\ell}\right)^{1/2}$$

b) Un extremo cerrado



Consideremos un líquido de longitud "ℓ" y densidad "ρ" contenido en un tubo en forma de U de sección uniforme de área "A", cuyo rama derecha está cerrada por una tapa en cuyo interior hay aire hasta una altura "H", y a la presión atmosférica "P_o".

Cuando en la rama izquierda el fluido se desplaza hacia abajo una longitud "x" desde su posición de equilibrio, la altura del nivel del fluido en la rama derecha respecto del nivel en la rama izquierda es "2x".



Las fuerzas que actúan sobre todo el fluido de masa "m" son: El peso de la columna de fluido de altura "2x", opuesta al desplazamiento:

$$W = \rho g A 2x$$

En la superficie libre del fluido de la rama izquierda actúa la fuerza de presión, en la dirección del desplazamiento:

$$F_1 = P_o A$$

En la superficie libre del fluido de la rama derecha, actúa la fuerza de presión, opuesta al desplazamiento:

$$F_2 = P A$$

De otro lado, considerando que el proceso de compresión del aire es adiabático, se tiene que:

$$P_o (A H)^{\gamma} = P[A(H-x)]^{\gamma}$$

Ahora, asumiendo que la amplitud "x" de las oscilaciones del fluido sean pequeñas comparadas con la longitud inicial de la columna de aire "H", se tiene que:

$$P = (1-\frac{x}{H})^{-\gamma} P_o \approx (1+\frac{x}{H}\gamma) P_o$$

$$P - P_o = \frac{\gamma P_o}{H} x$$

Con esto, la fuerza resultante que actúa sobre la masa "m" es:

$$F = -W + F_1 - F_2$$

$$F = -2\rho g A x - (P - P_o) A$$

$$F = -(2\rho g + \frac{\gamma P_o}{\rho \ell H}) A x$$

Como esta fuerza es del tipo de Hooke $F = k\,x$, entonces, la constante elástica es: $k = (2\rho g + \gamma P_o / \rho \ell H) A$, y la frecuencia angular propia de las oscilaciones armónicas que realiza la masa de fluido de longitud "ℓ" es:

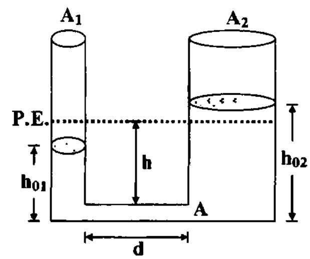
$$\omega_o = (k/m)^{1/2}$$

$$\omega_o = [\frac{(2\rho g + \gamma P_o / \rho \ell H) A}{\rho \ell A}]^{1/2}$$

$$\omega_o = (\frac{2g}{\ell} + \frac{\gamma P_o}{\rho \ell H})^{1/2}$$

siendo, "γ" el coeficiente de Poisson que caracteriza el tipo de gas.

c) Tubo de sección transversal no uniforme

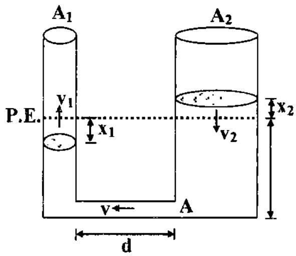


Consideremos el recipiente formado por dos vasos comunicantes de secciones de áreas "A_1", "A_2" conectados por el tubo horizontal de sección de área "A". El recipiente contiene un fluido de longitud "ℓ" y densidad "ρ". Las alturas inciales del fluido en ambas ramas son "h_{01}", "h_{02}", diferentes de las correspondientes al equilibrio.

Como la masa del fluido contenido en los vasos permanece constante, igualando volúmenes, obtenemos la altura correspondiente al equilibrio, así:

$$A_1 h_{01} + A_2 h_{02} = (A_1 + A_2) h$$

$$h = \frac{A_1 h_{01} + A_2 h_{02}}{A_1 + A_2} \qquad (1)$$



Ahora, cuando el fluido en el primer recipiente se desplaza "x_1" hacia debajo de la posición de equilibrio, en el segundo recipiente el fluido se desplaza "x_2" hacia arriba. Como el volumen total del fluido en ambos recipientes permanece constante, la relación entre estos desplazamientos es:

$$A_1 x_1 = A_2 x_2 \qquad (2)$$

Sean "v_1","v_2" las velocidades del fluido en el primer y segundo recipiente, y "v" la velocidad en el tubo horizontal que conecta los recipientes, entonces de la ecuación de continuidad, tenemos que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A\,v \qquad (3)$$

Para un instante "t", las masas de fluido contenidas en el primer y segundo reci-piente, y en el tubo horizontal son

$$m_1 = \rho A_1 (h - x_1)$$

$$m_2 = \rho A_2 (h + x_2) \qquad (4)$$

$$m = \rho A d$$

El cambio de energía cinética que experimenta el fluido entre los instantes "t" y "$t + dt$" es:

$$\Delta E_C = m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 + m\,v\,dv$$

La variación de la energía potencial que experimenta el fluido, debido al paso de un diferencial de masa "dm" desde la posición inicial; "$h + x_2$" hasta la posición final "$h - x_1$" es:

$$\Delta E_P = E_{P,I} - E_{P,F}$$

$$\Delta E_P = dm\,g(h + x_2) - dm\,g(h - x_1)$$

siendo, el diferencial de masa de fluido igual a $dm = -\rho A_1 dx_1$, pues "x_1" disminuye.

Ahora, según el teorema del trabajo y la energía, como la fuerza externa resultante es nula, el cambio en la energía cinética, debe ser igual, al cambio de la energía potencial, esto es:

$$\rho A_1 (h - x_1) v_1 dv_1 + \rho A_2 (h + \frac{A_1}{A_2} x_1) \bullet$$

$$\frac{A_1^2}{A_2^2} v_1 dv_1 + \rho A d \frac{A_1^2}{A^2} v_1 dv_1 =$$

$$-\rho A_1 d x_1 g (x_1 + \frac{A_1}{A_2} x_1)$$

$$[A_1 (1 + \frac{A_1}{A_2}) h + \frac{A_1^2}{A} d - A_1 (1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}) x_1] \bullet$$

$$v_1 dv_1 = -A_1 (1 + \frac{A_1}{A_2}) g x_1 dx_1$$

$$[(1 + \frac{A_1}{A_2}) h + \frac{A_1}{A} d - (1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}) x_1] v_1 dv_1 =$$

$$-(1 + \frac{A_1}{A_2}) g x_1 dx_1$$

$$[h + \frac{A_1 d}{A(1 + A_1 / A_2)} + (\frac{A_1}{A_2} - 1) x_1] v_1 dv_1$$

$$= -g x_1 dx_1$$

Definiendo las siguientes constantes:

$$C_1 = h + \frac{(A/A_1)d}{1+(A_1/A_2)} \quad y \quad C_2 = \frac{A_1}{A_2} - 1$$

La ecuación diferencial anterior se reduce a:

$$(C_1 + C_2 x_1)\frac{dx_1}{dt}\frac{d^2x_1}{dt^2} = -g\,x_1\,dx_1$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{g}{C_1 + C_2 x_1}x_1 = 0$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden que describe las oscilaciones no armónicas que realiza el fluido, no tiene solución analítica. Se plantean soluciones aproximadas mediante la utilización de técnicas numéricas, con la ayuda de computadoras.

Casos particulares

1) Para: $A_1=A_2=A$, las constantes son: $C_1=h+(d/2)=(2h+d)/2=\ell/2$, y $C_2=1-1=0$ siendo "ℓ" la longitud del fluido, por lo que, la ecuación diferencial obtenida se reduce a:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{2g}{\ell}x_1 = 0$$

Esta es la ecuación diferencial de un M.A.S de frecuencia angular propia y periódo, iguales a:

$$\omega_o = (\frac{2g}{\ell})^{1/2} \quad y \quad T = 2\pi(\frac{\ell}{2g})^{1/2}$$

2) Para: $A_1=A_2\neq A$, las constantes son: $C_1=h+(Ad/A_1+A_2)$, $C_2=0$ por lo que, la ecuación diferencial obtenida se reduce a:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{g}{h + A\,d/(A_1+A_2)}x_1 = 0$$

Esta es la ecuación diferencial de un M.A.S de frecuencia angular propia, igual a:

$$\omega_o = [\frac{g}{h + A\,d/(A_1+A_2)}]^{1/2}$$

3) Si: $A_1 = A_2 >> A$, las constantes son $C_1=h$ y $C_2=0$, y la ecuación diferencial obtenida se reduce a:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{g}{h}x_1 = 0$$

Esta es la ecuación diferencial de un M.A.S de frecuencia angular propia, igual a:

$$\omega_o = (\frac{g}{h})^{1/2}$$

11. SUPERFLUIDEZ DEL HELIO

a) Concepto

Se llama así al fenómeno observado en el helio II de la ausencia casi total de viscosidad al pasar por tubos capilares muy estrechos, de radios aproximadamente de $r \approx 10^{-8}$ cm. En este caso el coeficiente de viscosidad es menor de 10^{-11} Poises.

b) Propiedades

A temperaturas ultrabajas se observarón en el helio las siguientes propiedades:

1) No existe el punto triple.
2) A presiones menores que 24 atm el helio no cristaliza por enfriamiento por muy bajas que sean las temperaturas a las que se someta.
3) Los parámetros críticos del isótopo He^4 son T_k=5,19 ^{0}K, con la particularidad que la densidad del helio líquido es anómala por su pequeñez.
4) Si la temperatura desciende hasta T=2,2 ^{0}K y la presión es normal, en el He^4 se

produce la transición "λ", transición de fase de segundo orden, es decir, el helio líquido I se transforma en helio II. Al aumentar la presión disminuye la temperatura de transición "λ".

5) El helio II presenta una conductibilidad térmica anormalmente elevada, centenares de veces mayor que la conductibilidad térmica de los metales a la temperatura ambiente. Por lo mismo, en el helio II no se producen caídas sensibles de temperatura, éste no puede hervir, y solamente se vaporiza por su superficie libre. La alta conductibilidad del helio se debe a las intensas corrientes de convección que se producen en el helio líquido.

6) En concordancia con el modelo de los dos líquidos se considera que el helio líquido a la temperatura de $T<2,2\ ^0K$ es la mezcla de dos componentes líquidos que se infiltran perfectamente entre si, sin presentar fricción. Una componente es un liquido normal y la otra un superfluido que no presenta viscosidad ni excitación térmica.

12. EVAPORACION Y EBULLICION DE LOS LIQUIDOS

a) Evaporación

Se llama evaporación de un líquido al proceso de formación de vapor que se da en la superficie libre del líquido. La evaporación se produce a cualquiera temperatura y aumenta al elevarse ésta. La evaporación se produce debido a que las moléculas de la superficie libre tienen mayor velocidad y energía cinética que les permiten abandonar el líquido, venciendo las fuerzas de cohesión molecular, y como consecuencia se enfría el líquido.

b) Velocidad de evaporación

La velocidad con la que se evapora el líquido, es decir la cantidad de líquido que se transforma en vapor en 1 s, depende de la presión externa y del movimiento de la fase gaseosa en la superficie libre, esta velocidad viene dada por:

$$u = \frac{CS}{P_o}(P_S - P)$$

siendo, "C" una constante, "S" el área de la superficie libre, "P_S" presión del vapor saturado, "P" presión del líquido en la superficie y "P_o" la presión barométrica externa.

c) Ebullición

Se llama así al proceso de evaporación intensa que experimenta un líquido y que se da en su superficie libre y al interior de ella, en el seno de las burbujas de vapor que se forman. La presión al interior de una burbuja, viene dada por:

$$P = P_o + \rho g h + P_e$$

siendo, "P_o" la presión externa, "P_e" la presión debida a la tensión superficial, "h" la altura, y "ρ" la densidad.

c) Vaporización

Es el cambio de estado de líquido a gaseoso. Hay dos tipos de vaporización: la ebullición y la evaporación.

- A la temperatura durante la cual se dice que un determinado líquido hierve se llama punto de ebullición.
- La diferencia entre la evaporación y la ebullición, es que en la evaporación, el cambio de estado ocurre solamente en la superficie del líquido.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Por una tubería rectilínea de diámetro D=8 cm fluye aceite con una velocidad media de v= 3 m/s. Hallar el caudal (Q).

a) $0{,}015\ \dfrac{m^3}{s}$ b) $0{,}025\ \dfrac{m^3}{s}$ c) $0{,}035\ \dfrac{m^3}{s}$ d) $0{,}045\ \dfrac{m^3}{s}$ e) $0{,}055\ \dfrac{m^3}{s}$

02. Por una tubería rectilínea de diámetro D=8 cm fluye aceite de densidad $\rho = 900\ kg/m^3$ con una velocidad media de v= 3 m/s. Hallar el flujo másico (F).

a) 10,5 kg/s b) 11,5 kg/s c) 12,5 kg/s d) 13,5 kg/s e) 15,5 kg/s

03. En la Fig.01, los radios de las secciones transversales del tubo son R_1=3 cm, R_2=1,5 cm la velocidad del agua en la sección (1) es v_1 =2 m/s. Hallar la velocidad en la sección (2).

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 4 m/s d) 6 m/s e) 8 m/s

04. En la Fig.02, hallar el volumen de agua que sale por minuto, de un tanque abierto muy grande, a través de un orificio de diámetro D=2 cm situado a h=5 m por debajo del nivel del agua. ($g=10\ m/s^2$)

a) $0{,}19\ \dfrac{m^3}{min}$ b) $0{,}29\ \dfrac{m^3}{min}$ c) $0{,}39\ \dfrac{m^3}{min}$ d) $0{,}49\ \dfrac{m^3}{min}$ e) $0{,}59\ \dfrac{m^3}{min}$

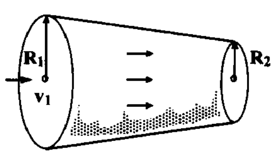


Fig.01

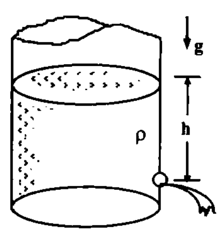


Fig.02

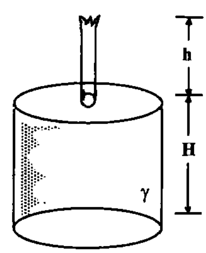


Fig.03

05. En la Fig.03, el tanque cerrado lleno de agua de peso específico $\gamma = 10^4\ N/m^2$, tiene una presión manométrica de $P_{man}=8.10^4\ N/m^2$ en el fondo. Si se hace un agujero en la tapa del tanque; sale un chorro verticalmente hacia arriba, alcanzando una altura de h=5 m. Hallar la altura (H) del tanque. ($g=10\ m/s^2$)

a) 1 m b) 2 m c) 3 m d) 4 m e) 5 m

06. En la Fig.04, hallar la velocidad de salida del agua de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3 a través de la pequeña abertura de la caldera que se muestra, siendo la presión sobre la atmosfé rica de 10^6 N/m^2. (g=10 m/s^2)

a) 25 m/s b) 30 m/s c) 35 m/s d) 40 m/s e) 45 m/s

07. En la Fig.05, por la tubería convergente de diámetros D_1 =25 cm y D_2=15 cm, pasa aceite de peso específico relativo $\gamma_r = 0,9$, y la lectura de los manómetros indican las presiones de P_1=48 N/cm^2 y P_2=45 N/cm^2. Hallar el caudal a través de la tubería. (g=10 m/s^2)

a) $0,37\ \dfrac{m^3}{s}$ b) $0,97\ \dfrac{m^3}{s}$ c) $0,77\ \dfrac{m^3}{s}$ d) $0,17\ \dfrac{m^3}{s}$ e) $0,57\ \dfrac{m^3}{s}$

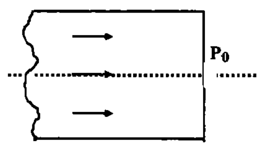


Fig.04

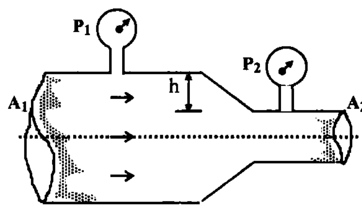


Fig.05

08. Una bola de metal de densidad $\rho = 8,5$ g/cm^3 de radio R=10 mm, se desplaza hacia a bajo, a través de glicerina de densidad $\rho_L = 1,32$ g/cm^3 y coeficiente de viscosidad $\eta = 0,833$ N.s/m^2. Hallar la velocidad de la bola cuando su aceleración es de a=250 cm/s^2. (g=10 m/s^2)

a) 1,05 m/s b) 2,05 m/s c) 3,05 m/s d) 4,05 m/s e) 5,05 m/s

09. Por un orificio situado en la base de un depósito que contiene agua una altura de h=4 m, sale un caudal de 50 lt/min. Hallar el caudal si sobre la superficie libre del agua se aplica una sobrepresión de 5 N/cm^2. (Peso específico del agua $\gamma = 10\ 000$ N/m^3)

a) 55 lit/min b) 60 lit/min c) 65 lit/min d) 70 lit/min e) 75 lit/min

10. Hallar el trabajo realizado por una bomba al elevar un volumen de V=3 m^3 de agua a u na altura de h=20 m contra una presión de P=15 N/cm^2. ($\gamma = 1\ 0000$ N/m^3)

a) 1,05 MJ b) 1,10 MJ c) 1,15 MJ d) 1,20 MJ e) 1,25 MJ

11. El agua de una represa cae sobre una turbina situada a 30 m por debajo de ella a razón de 60 m^3/min. La velocidad de salida del agua a través de la turbina es de 10 m/s. Ha llar el rendimiento de la tubería. ($\rho = 1000$ kg/m^3, g=10 m/s^2)

a) 81,3 % b) 83,3 % c) 85,3 % d) 87,3 % e) 89,3 %

12. En el tubo de Venturi, el diámetro de la entrada es D=40 cm y el de la garganta d=20 cm. Hallar el caudal de agua, sabiendo que la diferencia entre las alturas alcanzadas por el mercurio en las dos ramas es de h=30 cm; las densidades del agua y mercurio son $\rho = 1\ g/cm^3$ y $\rho' = 13{,}6\ g/cm^3$, respectivamente. ($g=10\ m/s^2$)

a) 0,20 m^3/s b) 0,22 m^3/s c) 0,24 m^3/s d) 0,26 m^3/s e) 0,28 m^3/s

13. El aire de densidad $\rho = 1{,}293\ kg/m^3$ fluye horizontalmente a través de un ala de avión de área A=4 m^2. Las velocidades del aire en las superficies superior e inferior son v_1 =30 m/s^2 y v_2=20 m/s, respectivamente. Hallar la fuerza sustentatoria sobre el ala del avión. ($g=10\ m/s^2$)

a) 1291 N b) 1293 N c) 1295 N d) 1297 N e) 1299 N

14. Hallar la rapidez límite de una esfera de radio $R=2.10^{-3}$ m y densidad $\rho = 1{,}5.10^3\ kg/m^3$ que cae en glicerina de densidad $\rho' = 1{,}26.10^3\ kg/m^3$ y viscosidad η=0,833 $N.s/m^2$ ($g=10\ m/s^2$)

a) 0,156 cm/s b) 0,556 cm/s c) 0,356 cm/s d) 0,256 cm/s e) 0,456 cm/s

15. Del orificio de una manguera, cubierto con el dedo, brotan dos chorros de agua bajo los ángulos $\alpha = 53°$ y $\beta = 37°$ respecto del piso, con una misma rapidez inicial $v_o = 5$ m/s,¿ Hallar la distancia horizontal "x" a la que se intersecan los chorros de agua ? ($g=10\ m/s^2$)

a) 2,0 m b) 2,2 m c) 2,4 m d) 2,6 m e) 2,8 m

16. De un acuario esférico de radio "R", que contiene agua hasta la mitad, de cada unidad de superficie se evapora por unidad de tiempo un volumen de líquido "q", ¿En qué tiempo se evaporará todo el agua?

a) 2q/R b) q/R c) 2R/q d) R/q e) R/2q

17. Un niño está inflando un globo. Cuando el radio de éste tenía el valor de 10 cm, la rapidez con que aumentaba el radio era 1 mm/s ¿Qué volumen de aire por segundo expele el niño?

a) $30\pi\frac{cm^3}{s}$ b) $35\pi\frac{cm^3}{s}$ c) $40\pi\frac{cm^3}{s}$ d) $45\pi\frac{cm^3}{s}$ e) $50\pi\frac{cm^3}{s}$

18. Un chorro de aceite que cae sobre la superficie del agua se extiende formando una mancha circular de grosor "h", ¿Cómo depende del tiempo "t" la rapidez del movimiento de los extremos de la mancha si en cada unidad de tiempo ingresa el volumen "q"?

a) $(q/4\pi ht)^{1/2}$ b) $(q/3\pi ht)^{1/2}$ c) $(q/2\pi ht)^{1/2}$ d) $(2q/\pi ht)^{1/2}$ e) $(q/\pi ht)^{1/2}$

19. Una esfera de radio R=2.10^{-3} m y densidad $\rho = 1{,}5.10^3$ kg/m^3 cae en glicerina de densidad $\rho_f = 1{,}26.10^3$ kg/m^3 y coeficiente de viscosidad η=0,833 N.s/m^2. Hallar la rapidez de la esfera cuando su aceleración es de a=1 m/s^2 (g=10 m/s^2)

a) 0,98 mm/s b) 0,96 mm/s c) 0,94 mm/s d) 0,92 mm/s e) 0,90 mm/s

20. Del orificio de una manguera, que está en el piso, brota agua con una rapidez inicial de v_0=10 m/s y un ángulo de inclinación de 45^0. El área de la sección del orificio de la manguera es de A=5 cm^2. Hallar la masa del chorro de agua que se halla en el aire. (g=10 m/s^2 ρ = 1000 kg/m^3)

a) 9 kg b) 7 kg c) 5 kg d) 3 kg e) 1 kg

21. En la Fig.06, en el recipiente cónico inicialmente vacío el nivel de agua se eleva con rapidez constante "v_0", ¿Cómo depende del tiempo la rapidez de entrada del agua al recipiente por el orificio de área de sección "S"?

a) $\pi\, v_0^3\, t^2\, tg^2\alpha / S$ b) $\pi\, v_0^2\, t^2\, tg^2\alpha / S$ c) $\pi\, v_0^2\, t^3\, tg^2\alpha / S$
d) $\pi\, v_0^2\, t\, tg\,\alpha / S$ e) $\pi\, v_0^2\, t^2\, tg\,\alpha / S$

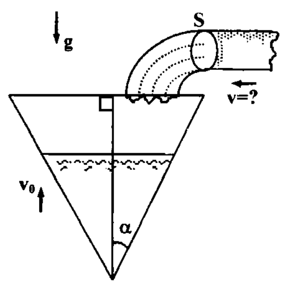


Fig.06

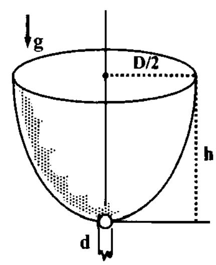


Fig.07

22. En la Fig.07, el depósito parabólico de diámetro superior D=30 cm y profundidad h=40 cm está lleno de vino. ¿En qué tiempo el vino sale totalmente a través del agujero de diámetro d=1 cm, practicado en la parte inferior del depósito? (g=10 m/s^2)

a) 1,41 min b) 1,45 min c) 1,49 min d) 1,53 min e) 1,57 min

23. Por un tubo horizontal de diámetro D=20 cm que forma una curva de radio R=20 m circula agua de densidad ρ=10^3 kg/m^3. Por la sección transversal "S" del tubo cada hora pasa una masa de agua M=3.10^5 kg. Hallar la presión lateral del agua debida a la fuerza centrífuga.

a) $57{,}2\ \dfrac{N}{m^2}$ b) $51{,}2\ \dfrac{N}{m^2}$ c) $53{,}2\ \dfrac{N}{m^2}$ d) $55{,}2\ \dfrac{N}{m^2}$ e) $59{,}2\ \dfrac{N}{m^2}$

24. Un chorro de agua que sale por una tubería de diámetro D=2,5 cm a una rapidez de

$v=30$ m/s choca contra una superficie normal a él que se desplaza en un mismo sentido con una rapidez de $u= 6$ m/s. Hallar la magnitud de la fuerza ejercida por el agua sobre la superficie móvil. La densidad del agua es $\rho = 1\ 000$ kg/m^3.

a) 245 N b) 250 N c) 255 N d) 260 N e) 265 N

25. Una lancha impulsada por chorro de agua se mueve por agua tranquila a rapidez constante de $v=20$ m/s. La rapidez del agua expulsada con relación a la lancha es $u=40$ m/s. Hallar la resistencia que ejerce el agua si la sección del flujo del agua que toma el motor es $S= 0,2$ m^2 y la densidad del agua es $\rho =10^3$ kg/m^3.

a) 10 kN b) 20 kN c) 40 kN d) 60 kN e) 80 kN

26. En la Fig.08, el chorro de agua sale por la manguera de sección transversal $S=100$ cm^2 con una rapidez de $v =5$ m/s, y choca con el suelo completamente liso formando un ángulo de $\theta=37^0$, la densidad del agua es $\rho=1000$ kg/m^3. Halle la fuerza ejercida sobre la pared.

a) 200 N b) 250 N c) 300 N d) 350 N e) 400 N

27. En la Fig.09, por la manguera de jebe de diámetro $d=5$ cm, circula agua de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3 con una rapidez de $v=4$ m/s, formando un circulo de radio $R=1$ m. Hallar la tensión interna en la manguera. ($g=10$ m/s^2)

a) 10π N b) 15π N c) 20π N d) 25π N e) 30π N

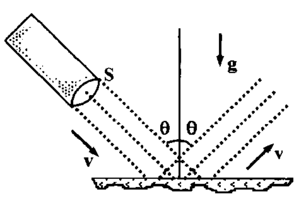


Fig.08

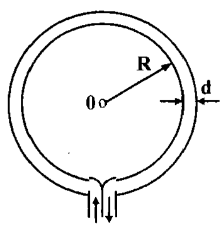


Fig.09

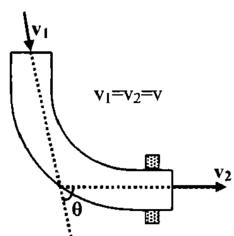


Fig.10

28. En la Fig.10, hallar el valor de la fuerza de presión que ejerce el agua sobre el soporte de codo del tubo de área de la sección transversal $S =100\pi$ cm^2 , el agua tiene una densidad de $\rho=10^3$ kg/m^3 y circula con una rapidez de $v=4$ m/s. El eje del tubo se encuentra sobre un plano horizontal ($g=10$ m/s^2 , $\theta = 60^0$)

a) 100π N b) 120π N c) 140π N d) 160π N e) 180π N

29. En la Fig.11, el globo aerostático de volumen $V=50$ m^3 ha sido inflado con gas de helio de densidad $\rho_{He} = 0,17$ kg/m^3. Hallar la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque de masa $m=100$ kg, sabiendo que $\mu_S = 0,66$, $\rho_{aire} = 1,29$ kg/m^3 y $g=10$ m/s^2.

a) 660 N b) 560 N c) 460 N d) 360 N e) 260 N

30. Un globo de masa total m=200 kg, volumen V=200 m^3 inflado con un gas de densidad $\rho = 0{,}29$ kg/m^3, se suelta del reposo. ¿Qué distancia recorrerá el globo en t=2 s, si $\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m^3 y g=10 m/s^2?

a) 10 m b) 15 m c) 20 m d) 25 m e) 30 m

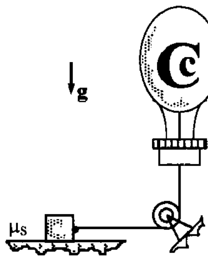


Fig.11

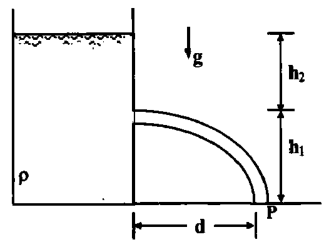


Fig.12

31. Hallar la velocidad con que fluye el anhídrido carbónico de densidad $\rho = 7{,}5$ kg/m^3 por un tubo de diámetro D=2 cm, si en media hora pasan por la sección transversal del tubo m= 0,51 kg de gas.

a) 0,12 m/s b) 0,22 m/s c) 0,32 m/s d) 0,42 m/s e) 0,52 m/s

32. Un depósito cilíndrico de diámetro D= 0,5 m tiene en su base un agujero circular de diámetro d=1 cm. Hallar la velocidad (v) con que desciende el nivel del agua en el depósito cuando la altura del nivel del agua es h= 0,2 m. (g=10 m/s^2)

a) 0,1 mm/s b) 0,2 mm/s c) 0,4 mm/s d) 0,6 mm/s e) 0,8 mm/s

33. En la Fig.12, la cara lateral de una vasija que se encuentra sobre la mesa, presenta un orificio pequeño situado a la distancia h_1 = 25 cm del fondo de la vasija y a la distancia h_2=16 cm del nivel del agua, el cual se mantiene constante. ¿A qué distancia horizontal del orificio caerá el chorro de agua sobre la mesa?

a) 0,1 m b) 0,2 m c) 0,3 m d) 0,4 m e) 0,5 m

34. En la Fig.13, el interior del frasco de Mariotte está llena de agua y en contacto con la atmósfera a través del tubo de vidrio (a) que atraviesa el tapón enmasillado que cierra su entrada. El grifo K se encuentra a la distancia h_2=2 cm del fondo del recipiente. Hallar la velocidad con que saldrá el agua por el grifo K, si h_1 = 10 cm y g=10 m/s^2.

a) 1,16 m/s b) 1,26 m/s c) 1,36 m/s d) 1,46 m/s e) 1,56 m/s

35. Un depósito cilíndrico abierto de altura H=1 m está lleno de agua hasta los bordes.¿ Qué tiempo tardará en salir toda el agua a través de un orifico situado en la base del de pósito ? El área de la sección transversal del orificio es 400 veces menor que el de la sección trans-versal del depósito. ($g = 9,8\ m/s^2$)

a) 1 min b) 2 min c) 3 min d) 4 min e) 5 min

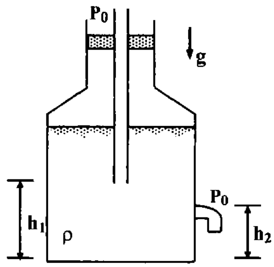


Fig.13

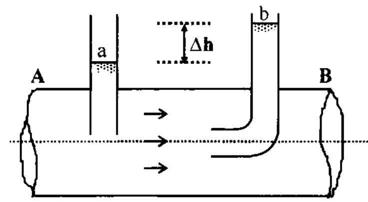


Fig.14

36. En un depósito abierto se echa agua a razón de $0,2\ m^3$ por segundo.¿Qué diámetro (d) deberá tener el orificio que hay en el fondo del depósito para que el agua se mantenga en él a un nivel constante de h=8,3 cm? ($g=10\ m/s^2$)

a) 1,0 cm b) 1,2 cm c) 1,4 cm d) 1,6 cm e) 1,8 cm

37. ¿Qué presión crea el compresor de un pulverizador si el chorro de pintura líquida de densidad $\rho = 0,8\ g/cm^3$, sale con una velocidad de v=25 m/s? ($1\ atm \approx 10^5\ N/m^2$)

a) 2,1 atm b) 2,3 atm c) 2,5 atm d) 2,7 atm e) 2,9 atm

38. En la Fig.14, por el tubo horizontal AB pasa un líquido. La diferencia de niveles de es te líquido en los tubitos a y b de diámetros iguales es $\Delta h = 20$ cm. Hallar la velocidad de la corriente del líquido en el tubo AB. ($g=10\ m/s^2$)

a) 1,0 m/s b) 1,5 m/s c) 2,0 m/s d) 2,5 m/s e) 3,0 m/s

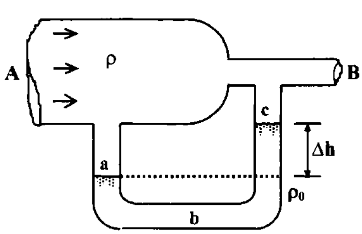


Fig.15

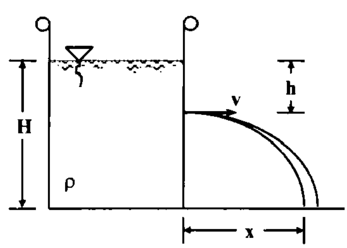


Fig.16

40. Una bola emerge con velocidad constante de un líquido de densidad 4 veces mayor que la de la bola. ¿Cuántas veces mayor es la fuerza de fricción (f) sobre la bola que emerge que el peso de esta (W)?

a) 1 vez b) 2 veces c) 3 veces d) 4 veces e) 5 veces

41. ¿Qué velocidad máxima puede alcanzar una gota de lluvia de diámetro d= 0,4 mm si la viscosidad dinámica del aire es $\eta = 1{,}2.10^{-5}$ N.s/m^2 ? ($\rho = 1\ 000$ kg/m^3 , g=10 m/s^2)

a) 7,0 m/s b) 7,2 m/s c) 7,4 m/s d) 7,6 m/s e) 7,8 m/s

42. Una bolita de acero de diámetro D=1 mm y densidad $\rho = 7\ 700$ kg/m^3, cae con velocidad constante de v= 0,185 cm/s en un gran recipiente lleno de aceite de densidad $\rho' = 900$ kg/m^3. Hallar la viscosidad dinámica del aceite. (g=10 m/s^2)

a) $2{,}0\ \frac{N.s}{m^2}$ b) $2{,}2\ \frac{N.s}{m^2}$ c) $2{,}4\ \frac{N.s}{m^2}$ d) $2{,}6\ \frac{N.s}{m^2}$ e) $2{,}8\ \frac{N.s}{m^2}$

43. Un torpedo se mueve con velocidad constante de v= 40 m/s an agua de mar de densidad $\rho = 1\ 025$ kg/m^3, y a una profundidad de h=10 m. Hallar la presión en la ojiva del torpedo. (g=10 m/s^2)

a) 9,0 Pa b) 9,2 Pa c) 9,4 Pa d) 9,6 Pa e) 9,8 Pa

44. En la Fig.16, al recipiente que contiene agua una altura de H=20 cm, se le hace un agujero muy pequeño a la profundidad (h). Hallar la máxima distancia (x) alcanzada por el chorro de agua.

a) 10 cm b) 15 cm c) 20 cm d) 25 cm e) 30 cm

45. En la Fig.17, la presión del aire encerrado en el depósito que contiene agua de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3 es de P=1,4 atm. Hallar la distancia horizontal (d) que alcanza el chorro de agua que sale por el agujero muy pequeño, considerando que el nivel del agua y la presión del aire se mantiene constante. (P_0= 1 atm=10^5 N/m^2 , g=10 m/s^2)

a) 1 m b) 2 m c) 3 m d) 4 m e) 5 m

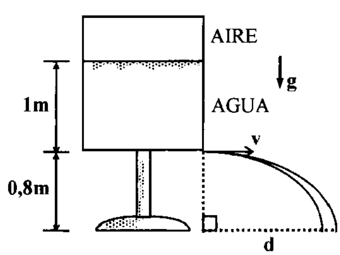


Fig.17

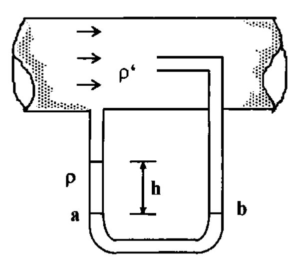


Fig.18

46. En un depósito de altura h=1 m lleno de glicerina de densidad $\rho' = 1\ 200$ kg/m^3 y viscosidad dinámica $\eta = 14{,}7.10^{-1}$ g/cm.s, se sueltan simultáneamente dos perdigones de plomo de densidad $\rho = 11\ 300$ kg/m^3, y diámetros D_1=3 mm y D_2=1 mm.¿Qué tiempo más tarde llega al fondo del depósito el perdigón más pequeño que el más grande? (g=10 m/s^2)

a) 1,9 min b) 2,9 min c) 3,9 min d) 4,9 min e) 5,9 min

47. Una bolita de acero de densidad $\rho = 7\ 700$ kg/m^3 y diámetro D=4 mm se suelta del reposo en un gran recipiente que contiene aceite de densidad $\rho' = 900$ kg/m^3 y viscosidad dinámica $\eta = 2$ N.s/m^2.¿ Después de qué tiempo la velocidad de la bolita es la mitad de su velocidad máxima? (g=10 m/s^2)

a) 1,38 min b) 2,38 min c) 3,38 min d) 4,38 min e) 5,38 min

48. Una bolita de acero de densidad $\rho = 7\ 700$ kg/m^3 y diámetro D=4 mm se suelta del reposo en un recipiente que contiene aceite de ricino de densidad $\rho' = 900$ kg/m^3. Hallar su aceleración, en el instante en que su velocidad es la mitad de su velocidad máxima. (g=10 m/s^2)

a) 1,4 m/s^2 b) 2,4 m/s^2 c) 3,4 m/s^2 d) 4,4 m/s^2 e) 5,4 m/s^2

49. Si el radio R de una bolita de acero que se suelta del reposo en un fluido viscoso; aumenta al doble.¿ En cuánto aumenta su velocidad máxima ?

a) 2 veces b) 3 veces c) 4 veces d) 4 veces e) 8 veces

50. Una bola de corcho de densidad $\rho = 200$ kg/m^3 y diámetro D=10 mm emerge con una velocidad constante de v=3,5 cm/s en un recipiente lleno de aceite de densidad $\rho' = 900$ kg/m^3. Hallar : (g=10 m/s^2)

I. La viscosidad dinámica del aceite.

a) 1,1 N.s/m^2 b) 1,3 N.s/m^2 c) 1,5 N.s/m^2 d) 1,7 N.s/m^2 e) 1,9 N.s/m^2

II La viscosidad cinemática del aceite.

a) 10 cm^2/s b) 12 cm^2/s c) 14 cm^2/s d) 16 cm^2/s e) 18 cm^2/s

51. Un recipiente cilíndrico de radio R=2 cm tiene en su cara lateral un agujero en el se ubica un tubo capilar de radio interior r=1 mm y longitud $\ell = 2$ cm. El recipiente contiene aceite de densidad $\rho = 900$ kg/m^3 y viscosidad dinámica $\eta = 1{,}2$ N.s/m^2. Hallar la velodad con que desciende el nivel del aceite en el recipiente, en el instante en que la altura es h=26 cm. (g=10 m/s^2 ; micro $\mu = 10^{-6}$)

a) 30,4 μm / s b) 32,4 μm / s c) 34,4 μm / s d) 36,4 μm / s e) 38,4 μm / s

52. En la pared lateral de un depósito está conectado un tubo capilar de radio interior r=1 mm y longitud $\ell = 1{,}5$ cm. El depósito contiene glicerina de densidad $\rho = 1\ 200$ kg/m^3

y viscosidad dinámica $\eta = 1,0$ N.s/m^2. La altura de la glicerina se mantiene constante en h=18 cm sobre el tubo capilar. ¿En qué tiempo saldrá por el tubo capilar V=5 cm^3 de glicerina? (g=10 m/s^2)

a) 1,35 min b) 1,39 min c) 1,43 min d) 1,47 min e) 1,51 min

53. Una bolita de acero de densidad $\rho = 7\ 700$ kg/m^3 y diámetro D=4 mm, se suelta primero en un recipiente que contiene aceite de densidad $\rho_1 = 900$ kg/m^3 y viscosidad dinámica $\eta_1 = 1,2$ N.s/m^2, y luego en glicerina de densidad $\rho_2 = 1\ 200$ kg/m^3 y viscosidad dinámica $\eta_2 = 1,47$ N.s/m^2. Hallar la razón de sus velocidades máximas (v_1/v_2 = ?).

a) 1,08 b) 1,28 c) 1,48 d) 1,68 e) 1,88

54. ¿Qué trabajo hace la presión al trasladar V=1,5 m^3 de agua por un tubo de diámetro D=12,7 mm, si la diferencia de presión en los extremos del tubo es $\Delta P = 1{,}08.10^5$ N/m^2?

a) 160 kJ b) 162 kJ c) 164 kJ d) 166 kJ e) 168 kJ

55. El agua que desciende de una altura de h=20 m a razón de Q=15 m^3/min impulsa una turbina de agua. Hallar la máxima potencia que se puede obtener con está turbina. (g=10 m/s^2)

a) 10 kW b) 20 kW c) 30 kW d) 40 kW e) 50 kW

56. En el tubo horizontal de un oleoducto, de sección transversal constante, la presión disminuye entre dos puntos separados d=300 m en $\Delta P = 36.10^3$ N/m^2. Hallar la pérdida de energía por unidad de longitud, de un volumen de V=1 m^3 de petróleo.

a) 100 J/m b) 120 J/m c) 140 J/m d) 160 J/m e) 180 J/m

57. Dos cilindros que contienen líquidos de densidades ρ_1 y ρ_2 e igual altura, presentan en sus bases agujeros muy pequeños de áreas A_1 y A_2 ($A_2 = 3A_1$). Hallar la razón de las densidades ρ_1 / ρ_2 = ?, si por los agujeros el flujo másico es el mismo.

a) 1/3 b) 3 c) 1/2 d) 2 e) 1/4

58. En la Fig.18, el tubo de Pitot que va conectado al ala de un avión contiene alcohol de densidad $\rho = 790$ kg/m^3, el cual, indica una diferencia de nivel de h=0,10 m. Hallar la velocidad del avión respecto del aire de densidad $\rho' = 1,32$ kg/m^3. (g=10 m/s^2)

a) 34,17 m/s b) 34,37 m/s c) 34,57 m/s d) 34,77 m/s e) 34,97 m/s

59. A un depósito cilíndrico abierto de altura h=20 cm y área de sección transversal A=70 cm^2 se le practica un agujero de área A'=1 cm^2 en el centro de su base. Si al depósito se vierte agua a una rapidez de $Q=140\ cm^3/s$,¿ Qué altura alcanza el agua, hasta el instante en que su altura se mantiene constante ? ($g=10\ m/s^2$)

a) 9,0 cm b) 9,2 cm c) 9,4 cm d) 9,6 cm e) 9,8 cm

60. Sobre una mesa hay un recipiente en cuya pared lateral y a la altura $h_1=5$ cm sobre el fondo va conectada horizontalmente un tubo capilar de radio interior r=1 mm y longitud $\ell_1=1$ cm. El recipiente está lleno de aceite de densidad $\rho=900\ kg/m^3$ y viscosidad dinámica $\eta=0,5\ N.s/m^2$. El nivel del aceite en el se mantiene a una altura $h_2=50$ cm sobre el tubo capilar. ¿A qué distancia horizontal del tubo capilar caerá el chorro de aceite sobre la mesa? ($g=10\ m/s^2$)

a) 1,1 cm b) 1,3 cm c) 1,5 cm d) 1,7 cm e) 1,9 cm

61. Una bola de acero de densidad $\rho=7\ 700\ kg/m^3$ cae dentro de un recipiente ancho lleno de aceite de densidad $\rho'=900\ kg/m^3$ y viscosidad dinámica $\eta=0,8\ N.s/m^2$. Sabiendo que la ley de Stokes se cumple para $R_e\leq 0,5$. Hallar el valor límite del diámetro de la bola. ($g=10\ m/s^2$)

a) 4,15 mm b) 4,35 mm c) 4,55 mm d) 4,75 mm e) 4,95 mm

62. Por un tubo de diámetro D=2 cm, cada media hora pasan 0,51 kg de un gas de densidad $\rho=7,5\ kg/m^3$ y viscosidad cinemática $\nu=1,33.10^{-6}\ m^2/s$. Hallar el número de Reynolds (R_e). ($g=10\ m/s^2$)

a) 1 500 b) 1 600 c) 1 700 d) 1 800 e) 1 900

63. Por la sección transversal de un tubo horizontal fluye agua de densidad $\rho=1\ 000\ kg/m^3$ y viscosidad dinámica $\eta=0,001\ N.s/m^2$, pasando en 1 s un volumen de 200 cm^3 de agua. Hallar el límite del diámetro del tubo, tal que, el movimiento del agua siga siendo laminar.

a) 81 mm b) 83 mm c) 85 mm d) 87 mm e) 89 mm

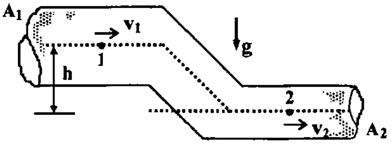


Fig.19

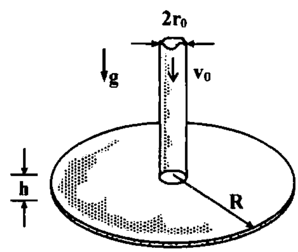


Fig.20

64. En la Fig.19, la velocidad del agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 en el punto 1 es $v_1 = 4$ m/s y la presión manométrica P_1 =2,5 atm. Hallar la presión manométrica en el punto 2 si A_1=2A_2 y h=15 m. (1 atm $\approx 10^5$ N/m^2 , g=10 m/s^2)

a) 3,16 atm b) 3,36 atm c) 3,56 atm d) 3,76 atm e) 3,96 atm

65. En la Fig.20, por el tubo cilíndrico de radio r_0=4mm ingresa aire de densidad $\rho = 1{,}293$ kg/m^3 con una velocidad de v_0=4 m/s entre las placas circulares paralelas de radio R=8 cm, separadas por una distancia de h=2 cm. Despreciando la compresibilidad del aire, hallar la fuerza de atracción entre las placas. (g=10 m/s^2)

a) 24 μN b) 26 μN c) 22 μN d) 28 μN e) 20 μN

66. En la Fig.21, por los agujeros de áreas iguales a A= 0,2 cm^2 separadas por una distancia vertical de H=50 cm sale agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3. Si en el depósito cada segundo se vierte 140 cm^3 de agua, hallar las coordenadas del punto de intersección de los chorros de agua. (g=10 m/s^2)

a) (115 ; 142) cm b) (124 ; 136) cm c) (110 ; 130) cm
d) (132 ; 148) cm e) (117 ; 128) cm

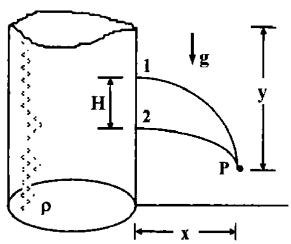


Fig.21

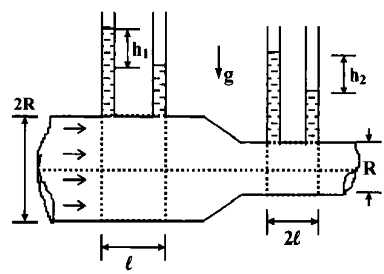


Fig.22

67. En la Fig.21, por los agujeros de áreas iguales a A= 0,2 cm^2 sale agua. Si en el depósito cada segundo se vierte 140 cm^3 de agua. ¿ Para qué valor de la distancia vertical (H) entre los agujeros, se cumple que : y=2 x ? (g=10 m/s^2)

a) 1,01 m b) 1,21 m c) 1,41 m d) 1,61 m e) 1,81 m

68. En la Fig.22, por el tubo circula un líquido viscoso de izquierda a derecha. Hallar la razón de las alturas h_2 / h_1 = ?.

a) 4 b) 8 c) 16 d) 24 e) 32

69. En la Fig.23, en el recipiente grande hay agua de densidad $\rho = 1\,000$ kg/m^3 y altura h=1 m, el peso del recipiente más el agua es de W=80 N. El área del agujero circular ta poneado es de A=10 cm^2.¿ Para qué valor de μ_S el movimiento del recipiente es inminente, al retirarse el tapón ? (g=10 m/s^2)

a) 1/2 b) 1/3 c) 1/4 d) 1/5 e) 1/6

70. En la Fig.24, la bomba está constituida de un cilindro, un pistón de área A=20 cm^2 y un agujero de área a=2 cm^2. Hallar la velocidad de salida del chorro de líquido de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3, bajo la acción de la fuerza de magnitud F=4 N, el pistón se desplaza con velocidad constante. (g=10 m/s^2)

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

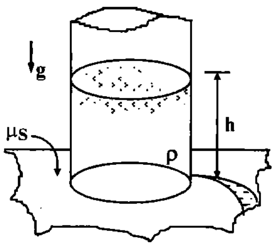


Fig.23

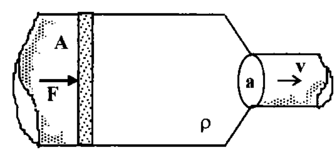


Fig.24

71. En la Fig.24, en la bomba cilíndrica, el área del pistón es A y la del agujero a (A>>a). Si el líquido de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3 sale por el agujero con una velocidad de v= 0,2 m/s, bajo la acción de la fuerza de magnitud F= 0,2 N. Hallar el área (A) del pistón, el cual se mueve con velocidad constante. (g=10 m/s^2)

a) 20 cm^2 b) 40 cm^2 c) 60 cm^2 d) 80 cm^2 e) 100 cm^2

72. En la Fig.21, por los agujeros de áreas iguales a A=0,2 cm^2. Si en el depósito cada segundo se vierte 120 cm^3 de agua. ¿ Para qué valor de la distancia vertical (H) entre los agujeros, se cumple que : y - x = 20 cm ? (g=10 m/s^2)

a) 10 cm b) 20 cm c) 40 cm d) 60 cm e) 80 cm

73. En la Fig.25, el recipiente abierto y área de sección muy grande contiene keroseno de densidad $\rho_1 = 800$ kg/m^3 y agua de densidad $\rho_2 = 1\ 000$ kg/m^3. Despreciando la viscosidad, hallar la velocidad con la que sale el agua por el agujero de la base del recipiente. (h_1=37,5 cm, h_2=50 cm, g=10 m/s^2)

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

74. Un recipiente abierto que contiene agua de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3 está suspendido del techo, la altura del agua es h=50 cm.¿ En cuánto variará la magnitud de la tensión en el soporte, si en el fondo del recipiente se hace un agujero muy pequeño de área $A=1\ cm^2$? ($g=10\ m/s^2$)

a) 1 N b) 2 N c) 3 N d) 4 N e) 5 N

75. En la Fig.26, el recipiente abierto de área de sección $A=100\ cm^2$ contiene agua de densidad $\rho = 1\ 000\ kg/m^3$ una altura de $h=50$ cm. Se hacen dos agujeros opuestos muy pequeños de áreas $A_1=1\ cm^2$, $A_2=2\ cm^2$, en el fondo de las paredes laterales. Despreciando la viscosidad y el peso del recipiente, hallar la aceleración con la que se mueve el recipiente, sobre la mesa totalmente lisa. ($g=10\ m/s^2$)

a) $0,1\ \frac{m}{s^2}$ ($\rightarrow$) b) $0,1\ \frac{m}{s^2}$ ($\leftarrow$) c) $0,2\ \frac{m}{s^2}$ ($\rightarrow$) d) $0,2\ \frac{m}{s^2}$ ($\leftarrow$) e) $0,4\ \frac{m}{s^2}$ ($\rightarrow$)

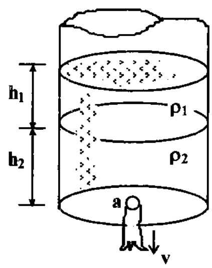


Fig.25

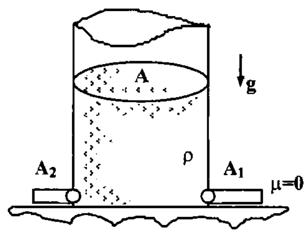


Fig.26

76. En la Fig.27, el depósito de forma semiesférica de radio $R=30$ cm, está llena de agua de densidad $\rho = 1\ 000\ kg/m^3$.¿Qué trabajo se debe hacer para bombear toda el agua a una altura de $h=20$ cm por encima del depósito? ($g=10\ m/s^2$)

a) $100\pi J$ b) $120\pi J$ c) $140\pi J$ d) $160\pi J$ e) $180\pi J$

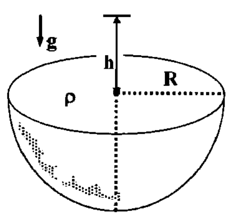


Fig.27

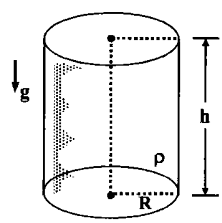


Fig.28

77. En la Fig.28, se tiene un depósito cilíndrico de altura $h=1$ m y radio de la base $R=50$ cm, llena de agua de densidad $\rho = 1\ 000\ kg/m^3$. Hallar el trabajo necesario para bombear toda el agua a la parte superior del depósito. ($g=10\ m/s^2$)

a) $1000\pi J$ b) $1250\pi J$ c) $1500\pi J$ d) $1750\pi J$ e) $2000\pi J$

78. Un globo esférico pierde aire con rapidez constante de 2 cm^3/s. ¿Con qué rapidez decrece el radio del globo en el instante en que su diámetro es D= 1 m?

a) 0,1 $\mu m/s$ b) 0,2 $\mu m/s$ c) 0,4 $\mu m/s$ d) 0,6 $\mu m/s$ e) 0,8 $\mu m/s$

79. En la Fig.29, en el reloj de agua de radio R=3 cm y altura h=6 cm, se pasa el agua a un sólo lado y se voltea fluyendo el agua con una rapidez de 2 cm^3/s. Hallar la rapidez con que aumenta la altura (h) en la parte inferior del reloj, en el instante en que h=4 cm.

a) $\frac{1}{\pi}\frac{cm}{s}$ b) $\frac{2}{\pi}\frac{cm}{s}$ c) $\frac{3}{\pi}\frac{cm}{s}$ d) $\frac{4}{\pi}\frac{cm}{s}$ e) $\frac{5}{\pi}\frac{cm}{s}$

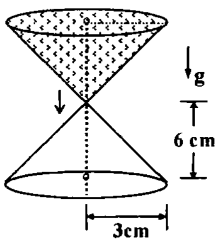


Fig.29

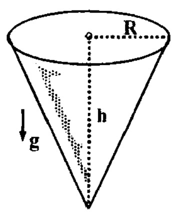


Fig.30

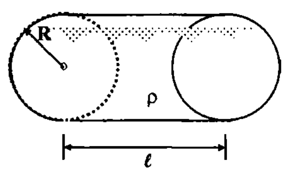


Fig.31

80. En la Fig.30, el depósito de forma cónica de radio de la base R= 30 cm y altura h= 60 cm, está llena de agua de densidad $\rho = 1\ 000$ kg/m^3.¿ Qué trabajo se debe hacer para bombear toda el agua hasta la parte superior del depósito ? (g=10 m/s^2)

a) $21\pi J$ b) $23\pi J$ c) $25\pi J$ d) $27\pi J$ e) $29\pi J$

81. En la Fig.31, el depósito cilíndrico de radio R=1 m y longitud $\ell = 2$ m está en posición horizontal y llena de aceite de densidad $\rho = 900$ kg/m^3. ¿Qué trabajo se debe hacer para bombear todo el aceite hasta la parte superior del depósito? (g=10 m/s^2)

a) 10π kJ b) 12π kJ c) 14π kJ d) 16π kJ e) 18π kJ

82. Del suelo se suelta un globo esférico de masa m=2 g y radio R=15 cm, lleno de hidrógeno de densidad $\rho_H = 0{,}09$ kg/m^3; unida a una cuerda enrollada de longitud $\ell = 30$ m y densidad $\lambda = 0{,}001$ kg/m. Hallar la altura alcanzada por el globo, en el equilibrio. (Densidad del aire $\rho_A = 1{,}293$ kg/m^3)

a) 10 m b) 15 m c) 20 m d) 25 m e) 30 m

83. En un condensador plano horizontal de distancia entre láminas d=1 cm, hay una gota de aceite cargada. Cuando no hay campo eléctrico, la gota cae a la velocidad constante de v_1= 0,011 cm/s. Si las láminas se ponen a una diferencia de potencial V=150 V, la gota cae a la velocidad v_2= 0,043 cm/s. Hallar el valor de la carga de la gota. El coeficiente de viscosidad del aire $\eta=1{,}82.10^{-2}$ N.s/m^2 la densidad del aceite es mayor que la del gas en la que cae la gota en $\Delta\rho = 900\ kg/m^3$.(k = 9.10^9 N.m^2/ C^2 , g = 9,8 m/s^2 , p=10^{-12})

a) 0,13 pC b) 0,73 pC c) 0,93 pC d) 0,23 pC e) 0,53 pC

84. En un aparato de Millikan se observa que una gota de aceite cargada cae a través de una distancia de 1 mm en 27,4 s, en ausencia de campo eléctrico externo. La misma gota permanece estacionaria en un campo de $2{,}37.10^4$ N/C. ¿Cuántos electrones en exceso ha adquirido la gota. La viscosidad del aire es de $1{,}8.10^{-5}$ N.s/m^2. La densidad del aceite es de 800 kg/m^3 y la densidad del aire es de 1,30 kg/m^3 ?

a) $2{,}24.10^4$ e_S b) $6{,}24.10^4$ e_S c) $4{,}24.10^4$ e_S d) $8{,}24.10^4$ e_S e) $1{,}24.10^4$ e_S

85. En la Fig.32, en la corriente de agua que se mueve con velocidad constante de v=2 m/s, se sumerge el tubo doblado, el cual, presenta un pequeño agujero en su parte superior. Hallar la altura (h) que alcanza el chorro de agua, si h_0 = 10 cm y g=10 m/s^2.

a) 10 cm b) 12 cm c) 14 cm d) 16 cm e) 18 cm

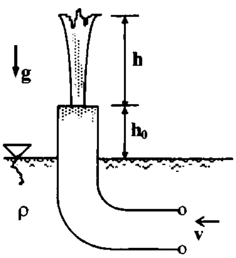


Fig.32

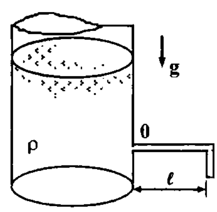


Fig.33

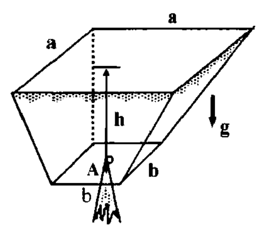


Fig.34

86. En la Fig.33, el agua contenida en el depósito grande sale a través del tubo doblado en ángulo recto, de radio interno R = 0,5 cm, y longitud de la parte horizontal ℓ = 22 cm. El consumo de agua es de Q = 0,5 lt/s. Hallar el momento de la fuerza de la reacción del agua en la pared del tubo con respecto al punto O. (ρ = 1 000 kg/m^3)

a) 0,1 N.m b) 0,3 N.m c) 0,5 N.m d) 0,7 N.m e) 0,9 N.m

87. Un tanque cilíndrico de diámetro D=20 cm, longitud $\ell = 3\pi/4$ m, está en posición horizontal y llena de agua de densidad ρ = 1 000 kg/m^3. ¿Qué tiempo demora el agua en vaciarse a través de un agujero de diámetro d=2 cm, practicado en el fondo del tanque? (Coeficiente de gasto k=2/3 y $g=10\ m/s^2$)

a) 1 min b) 2 min c) 3 min d) 4 min e) 5 min

88. En la Fig.34, el tanque en forma de tronco de pirámide de bases cuadradas de lados a=10 m, b=1 m, y altura h=4 m; está llena de agua.¿En qué tiempo se vacía toda el a gua, si se hace un pequeño agujero de área $A=20\ cm^2$, en la base inferior del tanque? (Coeficiente de gasto k= 0,72 y $g=10\ m/s^2$)

a) 1 h b) 2 h c) 3 h d) 4 h e) 5 h

89. En la Fig.35, en la pared lateral del recipiente cilíndrico grande de altura h= 50 cm y llena de agua de densidad $\rho = 1\ 000\ kg/m^3$, se hace una rendija vertical fina de longitud $\ell = 20$ cm y ancho b=2,5 mm. Hallar la fuerza resultante de la reacción del agua que sa le por la rendija. ($g=10\ m/s^2$)

a) 1 N b) 2 N c) 3 N d) 4 N e) 5 N

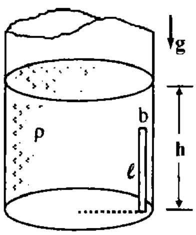


Fig.35

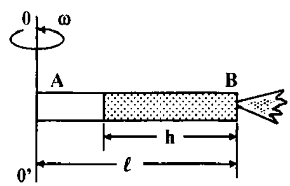


Fig.36

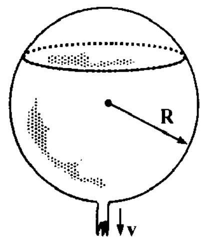


Fig.37

90. En la Fig.36, el tubo de ensayo AB de longitud $\ell = 50$ cm, que contiene un líquido, gira en un plano horizontal con una velocidad angular de $\omega = 10$ rad/s, alrededor del eje 00'. En el extremo cerrado B hay un agujero muy pequeño. Hallar la velocidad con la que sale el líquido por el agujero, para h=10 cm y $g=10\ m/s^2$.

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

91. En la Fig.37, el tanque esférico de paredes delgadas de radio R=1 m inicialmente está llena de agua.¿En qué tiempo se vacía toda el agua, al abrirse un pequeño agujero circu lar de radio r=1 cm, en la parte inferior del tanque ? (Coeficiente de gasto k= 0,625 y $g=10\ m/s^2$)

a) 0,5 h b) 1,0 h c) 1,5 h d) 2,0 h e) 2,5 h

SOLUCIONARIO

Solución: 01

- Según teoría, el caudal viene dado por:

$$Q = Av = \frac{1}{4}\pi\,(8.10^{-2})^2(3)$$

$$\clubsuit\ Q = 0{,}015\ \frac{m^3}{s} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 02

- Según teoría, el caudal másico, viene dado por:

$$F = \rho Q = (900)(0{,}015)$$

$$\clubsuit\ F = 13{,}5\ kg/s \qquad \text{(D)}$$

Solución: 03

- Aplicando la ecuación de continuidad, se tiene:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\pi(3.10^{-2})^2(2) = \pi\,(\frac{3}{2}.10^{-2})^2 v_2$$

$$(9.10^{-4})(2) = (\frac{9}{4}.10^{-4})\,v_2$$

$$\clubsuit\ v_2 = 8\ m/s \qquad \text{(E)}$$

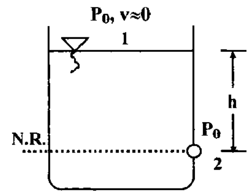
Solución: 04

- Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, h_2$$

$$P_0 + 0 + \rho\, g\, h = P_0 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + 0$$

$$v_2^2 = 2gh \quad => \quad v_2 = (2gh)^{1/2}$$



$$v_2 = [(2)(10)(5)]^{1/2}$$

$$v_2 = 10\ \frac{m}{s} = 600\ \frac{m}{min}$$

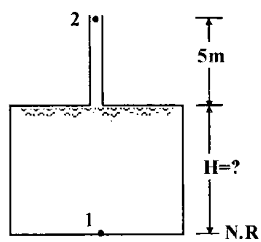
Luego, el caudal de agua que fluye a tra vés del orificio es:

$$Q = A_2 v_2 = \frac{1}{4}\pi\,(2.10^{-2})^2(600)$$

$$\clubsuit\ Q \approx 0{,}19\ \frac{m^3}{min} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 05

- Representemos el tanque cerrado y con sideremos dos puntos en el.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

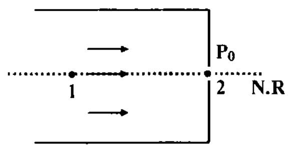
$$\frac{P_1}{\gamma} + 0 + 0 = 0 + 0 + H + 5$$

$$\frac{8.10^4}{10^4} = H + 5 \;\Rightarrow\; H = 8 - 5$$

$$\clubsuit\; H = 3\text{ m} \qquad \text{C}$$

Solución: 06

• Representemos la caldera y consideremos dos puntos en el.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + 0 + 0 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + 0$$

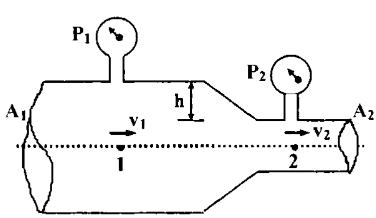
$$v_2 = [\frac{2\,(P_1 - P_2)}{\rho}]^{1/2}$$

$$v_2 = [\frac{(2)(10^6)}{10^3}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\; v_2 \approx 45\text{ m/s} \qquad \text{E}$$

Solución: 07

• Representemos dos puntos al interior del fluido.



En la Fig., la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2 es:

$$P_1 - P_2 = \gamma h \;\Rightarrow\; h = \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

Ahora, calculemos las áreas A_1 y A_2:

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(25.10^{-2})^2 = 490{,}9.10^{-4}\,m^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}(15.10^{-2})^2 = 176{,}7.10^{-4}\,m^2$$

Según teoría, en el tubo de Venturi, el caudal del líquido a través del tubo, viene dado por:

$$Q = A_1 A_2\,[\frac{2g\,h}{A_1^2 - A_2^2}]^{1/2}$$

$$Q = A_1 A_2\,[\frac{2g\,(P_1 - P_2)}{\gamma\,(A_1^2 - A_2^2)}]^{1/2}$$

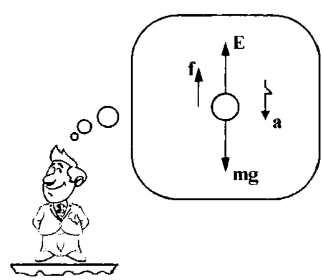
$$Q = (176{,}7.10^{-4})(490{,}9.10^{-4})\bullet$$

$$[\frac{(2)(10)(48 - 45).10^4}{(0{,}9.10^4)(490{,}9^2 - 176{,}7^2).10^{-8}}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\; Q \approx 0{,}17\,\frac{m^3}{s} \qquad \text{D}$$

Solución: 08

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la bola.



En la Fig., aplicando la segunda ley de Newton a la bola, se tiene:

$$m g - f - E = m a$$

$$6\pi \eta R v + \rho_L g \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 (g - a)$$

$$v = \frac{[\rho_L g + \rho (g - a)](4\pi R^3 / 3)}{6\pi \eta R}$$

$$v = \frac{2[g(\rho_L + \rho) - \rho a] R^2}{9\eta}$$

$$v = 2[(10)(1{,}32 + 8{,}5).10^3 -$$
$$(8{,}5.10^3)(2{,}5)](10.10^{-3})^2]/(9,)(0{,}833)$$

♣ $v = 3{,}05\ m/s$ C

Solución: 09

• Hallemos la altura (h) de agua, que crea una presión equivalente a la sobrepresión, a partir de:

$$h = \frac{P}{\gamma} = \frac{5.10^4}{10^4} = 5\ m$$

Ahora, como el área (A) del orificio se mantiene constante, se cumple que:

$$A = \frac{Q_1}{v_1} = \frac{Q_2}{v_2}$$

$$\frac{Q_1}{\sqrt{2g h_1}} = \frac{Q_2}{\sqrt{2g h_2}} \Rightarrow \frac{50}{\sqrt{4}} = \frac{Q_2}{\sqrt{4+5}}$$

♣ $Q_2 = 75 \frac{lt}{min}$ E

Solución: 10

• El trabajo total, es el trabajo necesario para elevar el agua (W_1), más, el trabajo para equilibrar la presión (W_2), esto es:

$$W = W_1 + W_2 = V \gamma h + P V$$

$$W = (3)(10^4)(20) + (15.10^4)(3)$$

$$W = 60.10^4 + 45.10^4$$

♣ $W = 1{,}05.10^6\ J$ A

Solución: 11

• La energía cinética por m^3 de agua a la entrada de la turbina es:

$$E_C = E_P = m g h$$

$$E_C = (10^3)(10)(30) = 30.10^4 \frac{J}{m^3}$$

La energía cinética por m^3 de agua a la salida de la turbina es:

$$E'_C = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}(10^3)(10)^2$$

$$E'_C = 5.10^4 \frac{J}{m^3}$$

Luego, el rendimiento de la turbina es:

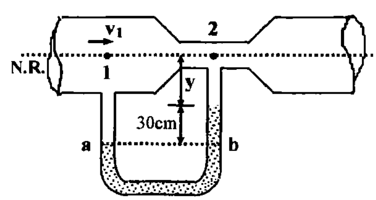
$$\eta = (\frac{E'_C - E_C}{E_C})(100)$$

$$\eta = (\frac{30.10^4 - 5.10^4}{30.10^4})(100)$$

♣ $\eta = 83{,}3\ \%$ B

Solución: 12

• Representemos el tubo de Venturi y consideremos dos puntos en el.



En la Fig., aplicando el teorema de Ver noulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + 0 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) \qquad (1)$$

De otro lado, como los puntos a y b están al mismo nivel, se cumple que:

$$P_a = P_b$$

$$P_1 + (0{,}30 + y)\rho g = P_2 + y\rho g + 0{,}30\,\rho_m\, g$$

$$P_1 - P_2 = 0{,}30(\rho_m - \rho)\, g$$

$$P_1 - P_2 = 0{,}30(13{,}6 - 1)(10^3)(10)$$

$$P_1 - P_2 = 3{,}78.10^4\ \frac{N}{m^2} \qquad (2)$$

También, el caudal de agua a través del tu bo de Venturi se conserva, esto es:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{\pi}{4}(40)^2 v_1 = \frac{\pi}{4}(20)^2 v_2$$

$$v_2 = 4\, v_1 \qquad (3)$$

De (2) y (3) en (1), obtenemos el valor de v_1, así:

$$3{,}78.10^4 = (\frac{1}{2})(10^3)(16\, v_1^2 - v_1^2)$$

$$v_1 = 2{,}24\ \frac{m}{s}$$

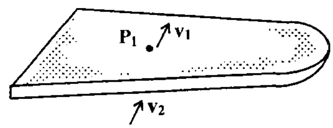
Luego, el caudal de agua a través del tubo de Venturi, es:

$$Q = A_1 v_1 = \frac{\pi}{4}(40.10^{-2})^2(2{,}24)$$

$$\clubsuit\ Q = 0{,}28\ \frac{m^3}{s} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 13

• Representemos el ala del avión, y consi deremos dos puntos en las superficies su- perior e inferior del mismo.



En la Fig., aplicando el teorema de Ber noulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + 0 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2)$$

Luego, la fuerza sustentatoria del aire so bre el ala del avión es:

$$F = (P_2 - P_1)\, A$$

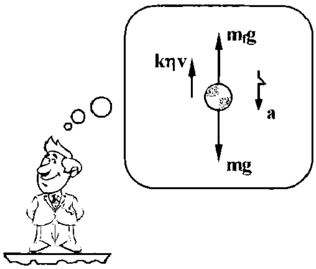
$$F = \frac{1}{2}\rho\, A\,(v_1^2 - v_2^2)$$

$$F = (\frac{1}{2})(1{,}293)(4)(30^2 - 20^2)$$

$$\clubsuit\ F = 1293\ N \qquad \text{(B)}$$

Solución: 14

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la esfera de masa (m), así:



$m_f\,g$ = peso de la masa del fluido desplazado.
$k\eta\,v$ = fuerza de fricción del fluido.
k = $6\pi R$ = coeficiente de fricción.
R = radio de la esfera.
η = coeficiente de viscosidad del fluido.
v = velocidad con la que cae la esfera.

En la Fig., en la vertical aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$m\,g - m_f\,g - 6\pi\,\eta\,R\,v = m\,a$$

La rapidez límite, se obtiene cuando la aceleración se anula, a = 0, esto es:

$$v_L = \frac{(m - m_f)\,g}{6\pi\,\eta\,R}$$

Dado que la masa es : $m = (4/3)\pi R^3 \rho$, entonces:

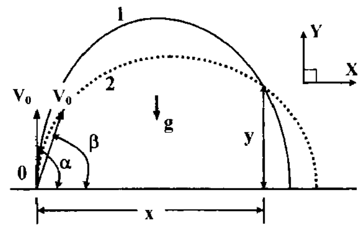
$$v_L = \frac{(4/3)\pi R^3(\rho - \rho')\,g}{6\pi\,\eta\,R}$$

$$v_L = \frac{(2)(2.10^{-3})^2(1{,}50 - 1{,}26).10^3(10)}{(9)(0{,}833)}$$

$$\clubsuit\ v_L = 2{,}56.10^{-2}\ m/s \qquad \text{(D)}$$

Solución: 15

• Sea "t" el instante en que se intersectan los chorros y (x; y) las coordenadas del punto de intersección, entonces:



En la dirección del eje X, hallemos el tiempo para el primer chorro, así:

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \quad => \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

En la dirección del eje Y, con este tiempo hallemos la coordenada (y) del punto de intersección P, para el primer chorro:

$$y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$y = v_0 \operatorname{sen}\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 (1)$$

En la dirección del eje X, hallemos el tiempo para el segundo chorro, así:

$$x = v_0 \cos\beta\, t \quad => \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\beta}$$

En la dirección del eje Y, con este tiempo hallemos la coordenada (y) del punto de intersección P, para el segundo chorro:

$$y = v_0 \operatorname{sen}\beta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$y = v_0 \operatorname{sen}\beta \left(\frac{x}{v_0 \cos\beta}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\beta}\right)^2 (2)$$

Igualando (1) con (2), obtenemos la coordenada "x", del punto de intersección de los dos chorros, así:

$$v_0 \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2=$$

$$v_0 \operatorname{sen}\beta\left(\frac{x}{v_0\cos\beta}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\beta}\right)^2$$

$$(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\,x=\frac{g}{2v_0^2}x^2(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta)$$

$$x=\frac{2v_0^2}{g(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}$$

$$x=\frac{(2)(5)^2}{(10)[(4/3)+(3/4)]}$$

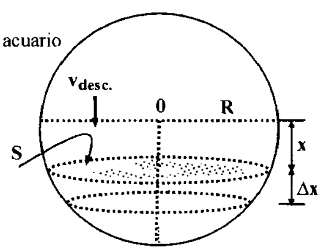
$$♣\quad x=2{,}4\ \text{m} \qquad \text{C}$$

Nota
En la obtención del resultado anterior se ha utilizado la identidad trigonométrica siguiente:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$$

Solución: 16

• Representemos un elemento de volumen de agua de área S y altura Δx.



Después de transcurrido un pequeño intervalo de tiempo "Δt", el volumen que desciende, es igual al volumen evaporado, esto es:

$$V_{desciende}=V_{evaporado}$$

$$S\,\Delta x=q\,S\,\Delta t$$

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=q$$

Luego, el tiempo en que se evapora toda el agua del acuario es:

$$t=\frac{R}{v}=\frac{R}{q}$$

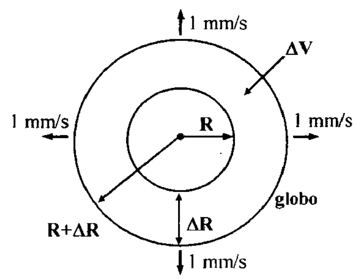
$$♣\quad t=\frac{R}{q} \qquad \text{D}$$

Solución: 17

• Consideremos que los volúmenes correspondientes a los instantes de tiempo "t" y "$t+\Delta t$" son V y V', durante el intervalo de tiempo muy pequeño "Δt" el tamaño del radio cambia de "R" a "$R+\Delta R$", entonces, la variación de volumen es:

$$\Delta V=V'-V=\frac{4}{3}\pi\left[(R+\Delta R)^2-R^2\right]$$

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(3R^2\Delta R+3R\Delta R^2+\Delta R^2)$$



Pero, $\Delta R^2=\Delta R^3\approx 0$, de modo que:

$$\Delta V=4\pi R^2\Delta R=4\pi R^2 u\,\Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=4\pi(100\ \text{mm})^2\left(1\ \frac{\text{mm}}{\text{s}}\right)$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=4\pi.10^4\ \frac{\text{mm}^3}{\text{s}}$$

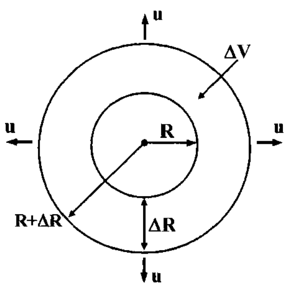
$$♣ \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = 40\pi \, \frac{cm^3}{s} \qquad \text{C}$$

Solución: 18

• Sean "R" y "R + ΔR" los radios de la mancha circular para los instantes "t" y "t + Δt", y "u" la rapidez de sus extremos, entonces, la variación de su volumen es:

$$\Delta V = V' - V = \pi\,(R + \Delta R)^2 h - \pi\, R^2 h$$

$$\Delta V = \pi\, h\,(2R\,\Delta R + \Delta R^2)$$



Pero, $\Delta R^2 \approx 0 y \Delta R = u\Delta t$, de modo que:

$$\Delta V = 2\pi h\, R\, \Delta R = 2\pi\, h\, R\, u\, \Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = q = 2\pi\, h\, u\, R \qquad (1)$$

De otro lado, en el tiempo "t" el volumen de la mancha es:

$$V = q\,t = \pi\, R^2 h \quad => \quad R = (qt/\pi h)^{1/2}$$

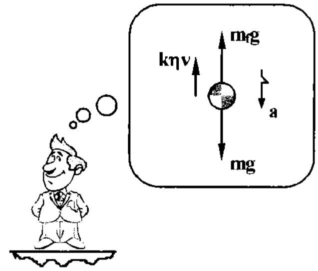
Sustituyendo en (1), obtenemos:

$$q = 2\pi\, h\, u\,(q\,t/\pi\, h)^{1/2}$$

$$♣ \quad u = \left(\frac{q}{4\pi\, h\, t}\right)^{1/2} \qquad \text{A}$$

Solución: 19

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la esfera de masa "m" así:



$m_f\, g$ = peso de la masa del fluido desplazado.

$k\eta\, v$ = fuerza de fricción del fluido.

k = $6\pi R$ = coeficiente de fricción.

R = radio de la esfera.

η = coeficiente de viscosidad del fluido.

v = velocidad con la que cae la esfera.

En la Fig., aplicando la segunda ley de Newton, en la dirección vertical, se tiene:

$$m\,g - m_f\,g - 6\pi\,\eta\, R\, v = m\,a$$

$$v = \frac{m\,(g - a) - m_f\,g}{6\pi\,\eta\, R}$$

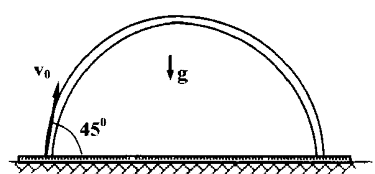
$$v = \frac{2\,[g\,(\rho - \rho_f) - \rho\, a]\, R^2}{9\,\eta}$$

$$♣ \quad v = 0{,}96.10^{-3}\ \frac{m}{s} \qquad \text{B}$$

Solución: 20

• El tiempo de vuelo de la masa de agua que se encuentra en el aire es:

$$t_v = \frac{2 v_o \operatorname{sen}\theta}{g} \qquad (1)$$



La masa del chorro de agua que se encuentra en el aire es:

$$m = v_0 t_v S \rho \qquad (2)$$

siendo "S" y "ρ" el área de la sección y la densidad del agua, respectivamente.
Sustituyendo (1) en (2), tenemos:

$$m = \frac{2\,v_0^2 \operatorname{sen}\theta\, S\,\rho}{g}$$

$$m = \frac{(2)(10)^2(\sqrt{2}/2)(5.10^{-4})(10^3)}{10}$$

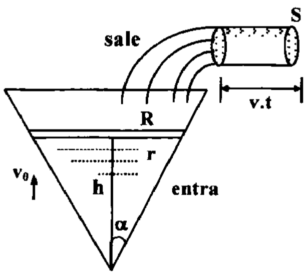
$$\clubsuit\;\; m = 7\ \text{kg} \qquad \text{B}$$

Solución: 21

• Sea "v" la rapidez del H_2O que entra, el elemento de volumen que sale del tubo es igual al elemento de volumen que ingresa al cono, esto es:

$$\Delta V_{SALE} = \Delta V_{ENTRA}$$

$$v\,S\,t = \frac{\pi}{3} h\,(R^2 + R\,r + r^2) \approx \pi\, h\, r^2$$



De otro lado, de la Fig, y por dato:

$$r = h\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{y} \quad h = v_0 t$$

Luego, la expresión para la rapidez con que ingresa el agua es:

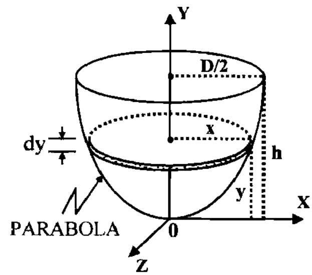
$$v\,S\,t = \pi\, v_0^3 t^3\, \mathrm{tg}^2\alpha$$

$$\clubsuit\;\; v = \frac{\pi\, v_0^3\, t^2\, \mathrm{tg}^2\alpha}{S} \qquad \text{A}$$

Solución: 22

• La rapidez con que sale el vino por el agujero inferior es:

$$v = \sqrt{2g.y} \qquad (1)$$



La ecuación que describe la parábola es:

$$x^2 = \frac{D^2}{4.h} y \qquad (2)$$

Por el principio de conservación de la masa, el volumen de vino que sale por el agujero en el tiempo "dt", es igual, al volumen de vino que desciende una altura "dy" en el mismo tiempo, esto es:

$$\pi.\frac{d^2}{4}.v.dt = \pi.x^2 dy$$

De (1) y (2), el tiempo que tarda el vino en vaciarse totalmente del depósito:

$$\pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2gy}\,dt = \pi.\frac{D^2}{4.h}\, y\,dy$$

$$\int_0^t dt = \frac{D^2}{\sqrt{2g}\,d^2 h}\int_0^h \sqrt{y}.dy$$

$$(t)\Big]_0^t = \frac{D^2}{\sqrt{2g}\,d^2 h}(2y^{3/2}/3)\Big]_0^h$$

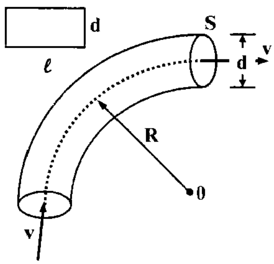
$$t = \frac{2}{3}(\frac{D}{d})^2 .(\frac{h}{2g})^{1/2}$$

$$t = \frac{2}{3}(\frac{30}{1})^2 [\frac{0,4}{(2)(10)}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ t \approx 1,41 min \quad \text{(A)}$$

Solución: 23

• Representemos al líquido ingresando y saliendo por los extremos de la tubería.



La rapidez del agua de masa que pasa por la sección transversal "S" en el tiempo "t", hallamos de:

$$M = \rho.V = \rho\,(S.v.t)$$

$$v = \frac{M}{\rho.S.t}$$

De otro lado, la fuerza centrífuga producida por la masa de agua "m", contenida en el volumen "ℓ.S", que pasa por la curva de radio "R" que forma el tubo es:

$$F = \frac{m\,v^2}{R} = \frac{(\rho.\ell.S)\,v^2}{R}$$

$$F = (\frac{\rho.\ell.S}{R})(\frac{M^2}{\rho^2.S^2.t^2})$$

$$F = \frac{\ell.M^2}{\rho.R.S.t^2}$$

Luego, la presión sobre el área lateral del tubo de longitud "ℓ", y diámetro "D", debida a la fuerza centrífuga es:

$$P = \frac{F}{\ell.D} = \frac{\ell.M^2/\rho.R.S.t^2}{\ell.D}$$

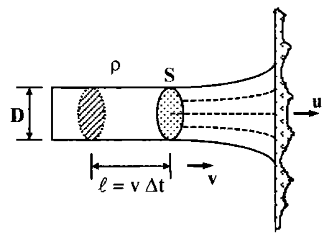
$$P = \frac{M^2}{\rho.R.S.D.t^2}$$

$$P = \frac{(3.10^5)^2}{(10^3)(20)(\pi 0,1^2)(0,2)(3,6.10^3)^2}$$

$$\clubsuit\ P = 55,2\ N/m^2 \quad \text{(D)}$$

Solución: 24

• Representemos las velocidades del agua respecto del tubo y de la pared.



Sea "F" la fuerza ejercida por la superficie móvil sobre el agua y considerando positivo el movimiento a la derecha, entonces después de transcurrido un intervalo de tiempo "Δt", tenemos que:

$$I = \Delta p$$

$$F\,\Delta t = m\,(v_f - v_i) \qquad (1)$$

Siendo la masa de agua, igual a:

$$m = \rho\,V = \rho\,S\,\ell$$

$$m = \rho\,(\frac{1}{4}\pi\,D^2 v\,\Delta t) \qquad (2)$$

De (2) en (1), obtenemos la fuerza, así:

$$F = \frac{1}{4}\pi\,\rho\,D^2 v\,(v_f - v_i)$$

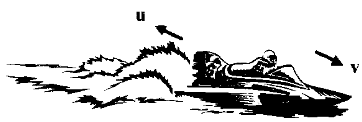
$$F = \frac{1}{4}\pi(10^3)(2{,}5)^2.10^{-4}(30)[6-(30-6)]$$

Según, la tercera ley de Newton, la magnitud de la fuerza ejercida por la superficie móvil sobre el chorro (F), es igual, a la magnitud de la fuerza ejercida por el chorro sobre la superficie móvil (F'), esto es:

$$\clubsuit\;\; F' = F = 265\,N \qquad (E)$$

Solución: 25

• Representemos las velocidades de la lancha (v) y del chorro de agua que sale de el (u).



La magnitud de la fuerza de resistencia del agua (fuerza reactiva), viene dado por:

$$F_r = (u - v)\frac{dm}{dt}$$

siendo "m" la masa de agua expulsada igual a : $m = \rho.S.x$, de modo que:

$$F_r = (u - v)\,\rho.S\frac{dx}{dt}$$

$$F_r = \rho\,S\,v\,(u - v)$$

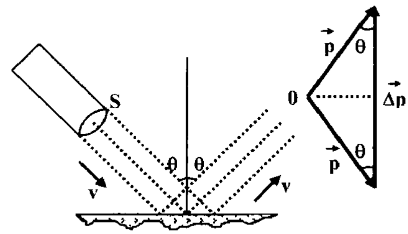
$$F_r = (10^3)(0{,}2)(20)(40 - 20)$$

$$\clubsuit\;\; F_r = 8.10^4\,N \qquad (E)$$

Solución: 26

• La velocidad del chorro de agua después de chocar con el suelo, forma un ángulo "θ" con la vertical, así de la Fig., el módulo de la variación de la cantidad de movimiento del chorro, durante un tiempo "Δt", es:

$$F\,\Delta t = \Delta p = (m)(2\,v\cos\theta)$$



$$F\,\Delta t = (\rho\,S\,v\,\Delta t)(2\,v\cos\theta)$$

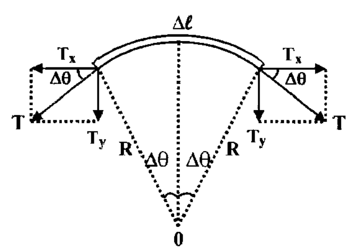
$$F = 2\,\rho\,S\,v^2\cos\theta$$

$$F = (2)(10^3)(10^2.10^{-4})(5)^2(4/5)$$

$$\clubsuit\;\; F = 400\ N \qquad (E)$$

Solución: 27

• Consideremos un elemento de manguera de longitud "$\Delta\ell$", y representemos la tensión interna y sus componentes que actúan sobre este elemento.



Como la masa de agua es homogénea, por proporcionalidad, la masa de agua contenida en el elemento de longitud "$\Delta\ell$" es:

$$\Delta m = m.\frac{\Delta\ell}{\ell} = (\rho.\frac{\pi}{4}d^2.\ell).\frac{2R.\Delta\theta}{\ell}$$

$$\Delta m = \frac{\pi}{2}.\rho.d^2 R\Delta\theta$$

En la Fig., las componentes horizontales (T_x) de la tensión se anulan entre si, y la suma de las componentes verticales (T_y), es la fuerza centrípeta sobre el elemento de masa "Δm", esto es:

$$\Delta m.\frac{v^2}{R} = 2.T\,\text{sen}\,\Delta\theta$$

Tomando: $\Delta\theta \to 0$ => $\text{sen}\Delta\theta \approx \Delta\theta$, y sustituyendo la expresión de "Δm" tenemos:

$$(\frac{\pi}{2}.\rho.d^2 R\,\Delta\theta).\frac{v^2}{R} = 2\,T.\Delta\theta$$

$$T = \frac{\pi}{4}.\rho.d^2 v^2$$

$$T = (\frac{\pi}{4})(10^3)(5.10^{-2})^2(4)^2$$

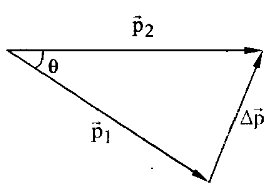
♣ $T = 10\pi$ N (A)

Solución: 28

• La cantidad de movimiento del agua por unidad de tiempo, no varía en magnitud pero si en dirección, así, en la parte superior e inferior las cantidades de movimiento por unidad de tiempo, son:

$$\vec{p}_1 = \rho\,S\,v\,\vec{v}_1 \quad y \quad \vec{p}_2 = \rho\,S\,v\,\vec{v}_2$$

Con estos vectores cantidad de movimiento construyamos un triángulo, así:



Luego, la magnitud de la fuerza, será igual a la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo, así, en el triángulo de la ley de coseno, tenemos:

$$F = \Delta p = \left[p_1^2 + p_2^2 - 2p_1\,p_2\cos\theta\right]^{1/2}$$

Como: $p_1 = p_2 = \rho S v^2$, entonces:

$$F = \rho\,S\,v^2\left[2 - 2\cos\theta\right]^{1/2}$$

$$F = \rho\,S\,v^2\left[4\,\text{sen}^2(\theta/2)\right]^{1/2}$$

$$F = 2\,\rho\,S\,v^2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

$$F = (2)(10^3)(\pi 10^2.10^{-4})(4)^2(1/2)$$

♣ $F = 160\pi$ N (D)

Solución: 29

• Primero calculemos la fuerza de fricción estática máxima:

$$f_S = \mu_S N = \mu_S m.g$$

$$f_S = (0{,}66)(100)(10) = 660 \text{ N}$$

De otro lado, la fuerza ascensional sobre el globo, debido a la diferencia de las densidades de los gases es:

$$F = (\rho_{aire} - \rho_{He})\,g\,V$$

$$F = (1{,}29 - 0{,}17)(10)(50)$$

$$F = 560 \text{ N}$$

Como, F > f, entonces la fuerza de fricción sobre el bloque es:

♣ $f = 560$ N (B)

Solución: 30

• Aplicando la segunda ley de Newton, hallemos la aceleración del globo, así:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{(\rho_{aire} - \rho)\, g\, V}{m}$$

$$a = \frac{(1,29 - 0,29)(10)(200)}{200}$$

$$a = 10\ m/s^2$$

Luego, la distancia recorrida por el globo durante el tiempo de 2 s es:

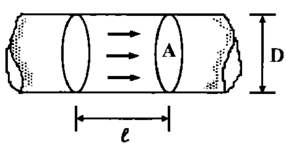
$$d = v_o t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

$$d = 0 + (\frac{1}{2})(10)(2)^2$$

$$♣\ d = 20\ m \qquad C$$

Solución: 31

• Representemos la tubería rectilínea y consideremos en el un volumen de gas.



En la Fig., el volumen de gas contenido en el cilindro de longitud ℓ y área de sec ción transversal A es:

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 \ell = \frac{m}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{4\,m}{\pi\, \rho\, D^2}$$

Luego, la velocidad con que fluye el gas a través de la tubería es:

$$v = \frac{\ell}{t} = \frac{4\,m}{\pi\, \rho\, D^2 t}$$

$$v = \frac{(4)(0,51)}{(\pi)(7,5)(0,02)^2(1800)}$$

$$♣\ v = 0,12\ m/s \qquad A$$

Solución: 32

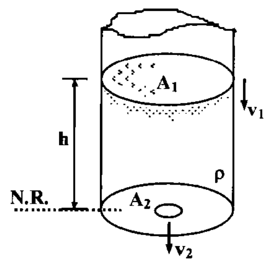
• Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, h_2$$

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h = P_0 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

$$v_1^2 + 2g\,h = v_2^2$$

$$v_2 = (v_1^2 + 2g\,h)^{1/2} \qquad (1)$$



De otro lado, como el caudal se conserva, se cumple que:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), y despejando v_1:

$$v_1 = \frac{A_2 (2g\,h)^{1/2}}{(A_1^2 - A_2^2)^{1/2}}$$

$$v_1 = \frac{\pi d^2/4 (2gh)^{1/2}}{(\pi D^2/4 - \pi d^2/4)^{1/2}}$$

$$v_1 = (\frac{2g\,h\,d^4}{D^4 - d^4})^{1/2}$$

Ahora, como $d^4 << D^4 \Rightarrow d^4/D^4 \approx 0$ y la expresión anterior, queda así:

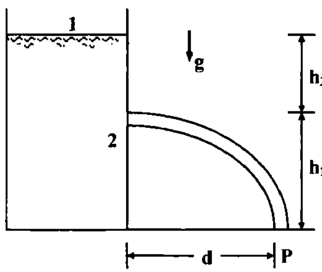
$$v_1 = (\frac{2g\,h\,d^4}{D^4})^{1/2}$$

$$v_1 = [\frac{(2)(10)(0,2)(0,01)^4}{0,5^4}]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad v_1 \approx 8.10^{-4}\ m/s$$ (E)

Solución: 33

• Representemos al chorro de agua que sale por el agujero del depósito.



En la Fig., la velocidad con la que sale el agua por el agujero 2 es:

$$v_2 = (2gh_2)^{1/2} \qquad (1)$$

Ahora, hallemos el tiempo que demora el chorro de agua en llegar a la mesa, a partir de:

$$h = v_o t + \frac{1}{2} g\,t^2$$

$$h_1 = 0 + \frac{1}{2} g\,t^2$$

$$t = (\frac{2\,h_1}{g})^{1/2} \qquad (2)$$

Luego, de (1) y (2) la distancia horizontal que alcanza el chorro de agua es:

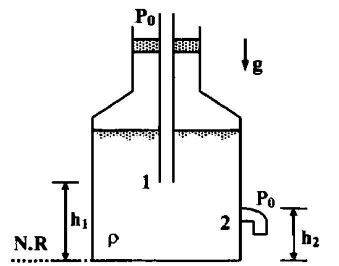
$$d = v_2 t = 2\,(h_1 h_2)^{1/2}$$

$$d = (2)[(0,25)(0,16)]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad d = 0,4\ m$$ (D)

Solución: 34

• Consideremos dos puntos en el recipiente que contiene agua.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,h_2$$

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho\,(0)^2 + \rho\,g\,h_1 = P_0 + \frac{1}{2}\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,h_2$$

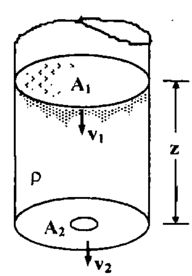
$$v_2 = [2g\,(h_1 - h_2)]^{1/2}$$

$$v_2 = [(2)(10)(0,1 - 0,02)]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad v_2 \approx 1,26\ m/s$$ (B)

Solución: 35

• Según el problema 32, la velocidad con la que desciende el nivel de agua en el depósito es:



$$v_1 = (\frac{2g\,A_2^2}{A_1^2 - A_2^2})^{1/2}\sqrt{z} = k\sqrt{z}$$

Como, $v_1 = dz/dt$, entonces en la ecuación anterior separando variables e integrando se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = k\sqrt{z}$$

$$\int_0^H \frac{dz}{\sqrt{z}} = k\int_0^t dt$$

$$t = \frac{2H}{k} = 2[\frac{(A_1^2 - A_2^2)\,H}{2g\,A_2^2}]^{1/2}$$

$$t = [\frac{2}{g}((\frac{A_1}{A_2})^2 - 1)H]^{1/2}$$

$$t = [\frac{2}{9{,}8}(400^2 - 1)(1)]^{1/2}$$

♣ $t \approx 180\ s = 3\ min$ Ⓒ

Solución: 36

• Para que la altura de agua permanezca constante, la cantidad de agua que ingresa debe ser igual, al que sale, así, para un intervalo de tiempo (Δt), se cumple:

$$Q\Delta t = \rho\,v_1\Delta t\,A$$

$$Q = \frac{\pi}{4}\rho\,v_1 d^2$$

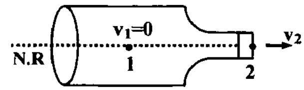
$$d^2 = \frac{4\,Q}{\pi\rho\,(2\,g\,h)^{1/2}}$$

$$d^2 = \frac{(4)(0{,}2)}{(\pi)(10^3)[(2)(10)(0{,}083)]^{1/2}}$$

♣ $d = 1{,}4.10^{-2}m$ Ⓒ

Solución: 37

• Representemos el compresor y consideremos dos puntos en el.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, hallemos la presión creada por el compresor, así:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,h_2$$

$$P_1 + 0 + 0 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\,v_2^2 + 0$$

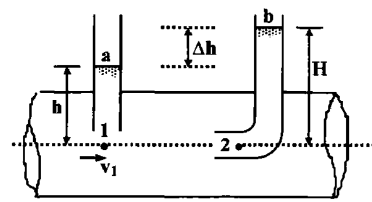
$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\,v_2^2$$

$$\Delta P = (\frac{1}{2})(0{,}8)(10^3)(25)^2$$

♣ $\Delta P = 2{,}5.10^5\ N/m^2$ Ⓒ

Solución: 38

• Representemos el tubo horizontal a través del cual pasa el líquido.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,h_2$$

$$P_0 + \rho\,g\,h + \frac{1}{2}\rho\,v_1^2 + 0 = P_0 + \rho\,g\,H + 0 + 0$$

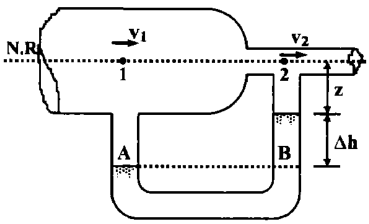
$$\frac{1}{2}v_1^2 = g\,(H - h) = g\,\Delta h$$

$$v_1 = (2g\,\Delta h)^{1/2} = [(2)(10)(0,2)]^{1/2}$$

$$♣\ v_1 = 2\ \frac{m}{s} \qquad \text{Ⓒ}$$

Solución: 39

• Representemos el tubo de Venturi y consideremos dos puntos en el.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, h_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + 0 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + 0$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\,(v_2^2 - v_1^2)$$

Pero, $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$, de modo que:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\, v_1$$

Con esto la expresión anterior, queda así:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) v_1^2 \qquad (1)$$

De otro lado, en la Fig., los puntos A y B están a la misma presión, esto es:

$$P_A = P_B$$

$$P_1 + \rho\, g\,(z + \Delta h) = P_2 + \rho\, g\, z + \rho_o g\,\Delta h$$

$$P_1 - P_2 = (\rho_o - \rho)\, g\,\Delta h \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), y despejando Δh:

$$(\rho_o - \rho)\, g\,\Delta h = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) v_1^2$$

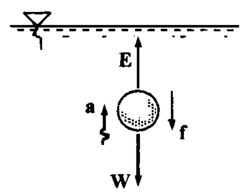
$$\Delta h = \frac{\rho}{2(\rho_o - \rho) g}\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) v_1^2$$

$$\Delta h = \frac{\rho}{2(11\rho - \rho)(10)}\left[\left(\frac{4A_2}{A_2}\right)^2 - 1\right](0,2)^2$$

$$♣\ \Delta h = 3.10^{-3}\ \text{m} \qquad \text{Ⓒ}$$

Solución: 40

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la esfera que asciende.



En la Fig., aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$a = \frac{F_R}{m}$$

$$0 = \frac{E - f - W}{m} \quad => \quad \frac{f}{W} = \frac{E - W}{W}$$

$$\frac{f}{W} = \frac{\rho g V - \rho_o g V}{\rho_o g V}$$

$$\frac{f}{W} = \left(\frac{\rho}{\rho_o} - 1\right) = \left(\frac{4\rho_o}{\rho_o} - 1\right)$$

$$♣\ \frac{f}{W} = 3\text{veces} \qquad \text{Ⓒ}$$

Solución: 41

• La gota de lluvia alcanza su velocidad máxima, cuando la fuerza de Stokes es i gual al peso de la gota, esto es:

$$f = W \Rightarrow 6\pi\eta R v_{max} = \rho g V$$

$$6\pi\eta\frac{D}{2}v_{max} = \rho g \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}$$

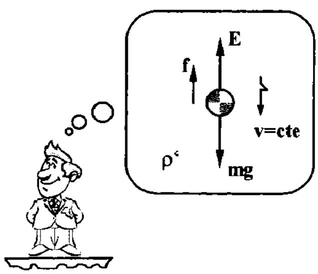
$$v_{max} = \frac{\rho g D^2}{18\eta}$$

$$v_{max} = \frac{(10^3)(10)(0,4)^2(10^{-6})}{(18)(1,2)(10^{-5})}$$

$$\clubsuit\ v_{max} = 7,4\ \frac{m}{s} \qquad \text{C}$$

Solución: 42

• Representemos las fuerzas que actúan sobre la esfera, que desciende con veloci dad constante.



En la Fig., aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$a = \frac{F_R}{m} \Rightarrow 0 = \frac{W - f - E}{m}$$

$$f = W - E = \rho g V - \rho' g V$$

$$6\pi\eta\frac{D}{2}v = (\rho - \rho')g\frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}$$

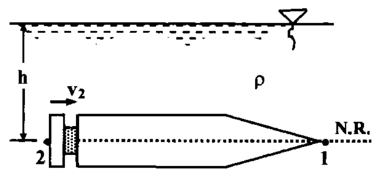
$$\eta = \frac{(\rho - \rho')g D^2}{18 v}$$

$$\eta = \frac{(7\,700 - 900)(10)(10^{-3})^2}{(18)(0,185.10^{-2})}$$

$$\clubsuit\ \eta = 2,0\ \frac{N.s}{m^2} \qquad \text{A}$$

Solución: 43

• Representemos el torpedo y considere mos dos puntos en el.



Para un observador ubicado en el torpedo, apliquemos el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, así:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$P_1 + 0 + 0 = \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

$$P_1 = (1025)(10)(10) + (\frac{1}{2})(1025)(40)^2$$

$$P_1 = 92,25.10^4\ N/m^2$$

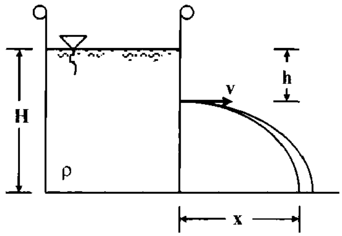
$$\clubsuit\ P_1 \approx 9,2\ Pa \qquad \text{B}$$

Solución: 44

• Como el agujero es muy pequeño, la ve locidad con la que sale el agua es:

$$v = (2g\,h)^{1/2}$$

Representemos el recipiente y el agujero por el cual sale el agua.



De otro lado, el tiempo que tarda el chorro de agua en llegar al piso es:

$$h = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$H - h = 0 + \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = [\frac{2(H-h)}{g}]^{1/2}$$

Así, la distancia horizontal que alcanza el chorro de agua es:

$$x = v t$$

$$x = (2g h)^{1/2} [\frac{2(H-h)}{g}]^{1/2}$$

$$x = 2(H h - h^2)$$

Ahora, derivando (x) respecto de (h) e igualando a cero, hallemos la altura (h) para la cual la distancia horizontal es máxima, así:

$$\frac{dx}{dh} = \frac{(H-2h)}{(H h - h^2)^{1/2}} = 0$$

$$h = \frac{H}{2}$$

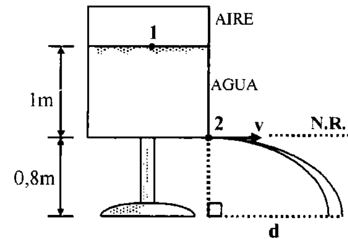
Luego, la distancia horizontal máxima alcanzada por el chorro de agua es:

$$x = 2[\frac{H}{2}(H - \frac{H}{2})]^{1/2}$$

$$\clubsuit \ x = H = 20 \text{ cm}$$ C

Solución: 45

• Consideremos los puntos 1 y 2 en el depósito de agua.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$1{,}4.10^5 + 0 + (10^3)(10)(1) = 10^5 + \frac{1}{2}(10^3) v^2 + 0$$

$$(\frac{1}{2})(10^5) = (\frac{1}{2})(10^3) v^2$$

$$v = 10 \text{ m/s}$$

El tiempo que tarda el chorro de agua en llegar al suelo, hallamos de:

$$h = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$0{,}8 = 0 + (\frac{1}{2})(10) t^2$$

$$t = 0{,}4 \text{ s}$$

Luego, la distancia horizontal alcanzada por el chorro de agua es:

$$d = v t = (10)(0{,}4)$$

♣ d = 4m Ⓓ

Solución: 46

• La velocidad máxima que alcanza una esfera en un medio viscoso, viene dado por:

$$v_{max} = \frac{(\rho - \rho')\, g\, D^2}{18\, \eta}$$

Así, las velocidades máximas para los perdigones de diámetros 1 mm y 3 mm son:

$$v_1 = \frac{(11300 - 1200)(10)(10^{-3})^2}{(18)(14{,}7)(10^{-1})}$$

$$v_1 = 0{,}38.10^{-2}\ m/s$$

$$v_2 = \frac{(11300 - 1200)(10)(3.10^{-3})^2}{(18)(14{,}7)(10^{-1})}$$

$$v_2 = 3{,}43.10^{-2}\ m/s$$

De modo que, los tiempos que demoran los perdigones en recorrer la distancia de 1 m son:

$$t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{1}{0{,}38.10^{-2}} = 263{,}16\ s$$

$$t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{1}{3{,}43.10^{-2}} = 29{,}15\ s$$

Luego, la diferencia de tiempos entre la esfera de diámetro 1 mm y la de 3 mm es:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 263{,}16 - 29{,}15$$

♣ $\Delta t = 234{,}01\ s \approx 3{,}9\ min$ Ⓒ

Solución: 47

• La velocidad máxima que alcanza la bolita, viene dado por:

$$v_{max} = \frac{(\rho - \rho')\, g\, D^2}{18\, \eta}$$

$$v_{max} = \frac{(7\,700 - 900)(10)(4.10^{-3})^2}{(18)(2)}$$

$$v_{max} = 30{,}22.10^{-3}\ m/s$$

Ahora, integrando la segunda ley de Newton, obtenemos el tiempo, así:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{W - E - f}{m}$$

$$a = \frac{(\rho - \rho')\, gV - 6\pi\, \eta\, r\, v}{\rho\, V}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho}\right) g - \frac{18\, \eta\, v}{\rho\, D^2}$$

Introduciendo las nuevas variables b y c, e integrando, se tiene:

$$b = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho}\right) g = \left(\frac{7\,700 - 900}{7\,700}\right)(10) = 8{,}83$$

$$c = -\frac{(18)(2)}{(7{,}7.10^3)(4.10^{-3})^2} = -292{,}2$$

$$\int_0^v \frac{dv}{b + cv} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{c}\, \ell n(b + cv)\Big]_0^v = t$$

$$t = \frac{1}{c}\, \ell n\left(\frac{b + cv}{b}\right)$$

♣ $t \approx 3{,}38\ min$ Ⓒ

Solución: 48

• Aplicando la segunda ley de Newton, hallemos su velocidad máxima, así:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{W - E - f}{m} = 0$$

$$W - E = f$$

$$\frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}(\rho - \rho')\,g = 6\pi\,\eta\frac{D}{2}\,v_{max}$$

$$v_{max} = \frac{(\rho - \rho')\,g\,D^2}{18\,\eta}$$

Luego, la aceleración de la bolita, cuando su velocidad sea la mitad de su velocidad máxima es:

$$a = \frac{6\pi\,\eta\,R\,v_{max} - 6\pi\,\eta\,R\,(v_{max}/2)}{m}$$

$$a = \frac{3\pi\,\eta\,(D/2)(\rho - \rho')\,g\,D^2/18\,\eta}{(4\pi\,D^3/3)/8\,\rho}$$

$$a = (\frac{\rho - \rho'}{\rho})\frac{g}{2} = (\frac{7\,700 - 900}{7\,700})(\frac{10}{2})$$

$$\clubsuit \quad a = 4{,}4\ m/s^2 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 49

• El aumento en la velocidad máxima de la bolita de acero es:

$$\frac{v'_{max}}{v_{max}} = \frac{(\rho - \rho')\,g\,(2d)^2/18\,\eta}{(\rho - \rho')\,g\,(d)^2/18\,\eta}$$

$$\clubsuit \quad \frac{v'_{max}}{v_{max}} = 4 \text{ veces} \qquad \text{(C)}$$

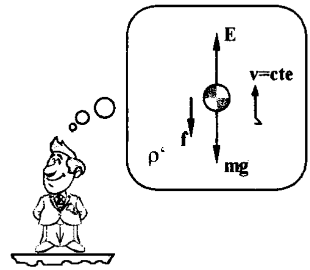
Solución: 50

• Como la bola de corcho se mueve con velocidad constante (a = 0), en la Fig., se cumple que:

$$f = E - W$$

$$6\pi\,\eta\,R\,v = \frac{4}{3}\pi\,R^3(\rho - \rho')\,g$$

$$\eta = \frac{(\rho - \rho')\,g\,D^2}{18\,v}$$



$$\eta = \frac{(900 - 200)(10)(10.10^{-3})^2}{(18)(3{,}5.10^{-2})}$$

$$\eta = 1{,}1\ \frac{N.s}{m^2} \qquad \text{(A)}$$

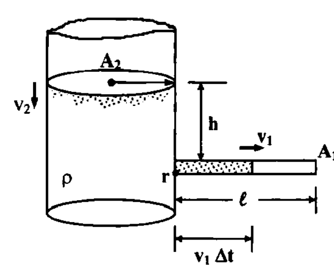
A su vez, la viscosidad cinemática es:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1{,}1}{900}$$

$$\clubsuit \quad \nu = 1{,}2.10^{-3}\ m^2/s \qquad \text{(B)}$$

Solución: 51

• Representemos el recipiente cilíndrico y tomemos en el los puntos 1 y 2.



En la Fig., la diferencia de presión en los extremos del tubo capilar es:

$$\Delta P = (P_0 + \rho\,g\,h) - P_0 = \rho\,g\,h$$

Ahora, según Poiseuille durante el intervalo de tiempo Δt el volumen de aceite que pasa por el tubo capilar es:

$$V = \frac{\pi r^4 \Delta t\, \Delta P}{8 \ell \eta}$$

$$V = \frac{\pi \rho g h r^4 \Delta t}{8 \ell \eta} \qquad (1)$$

De otro lado, en la Fig., el volumen de aceite contenido en el tubo capilar de longitud $(v_1 \Delta t)$ y área A_1 es:

$$V = A_1 v_1 \Delta t = \pi r^2 v_1 \Delta t \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), obtenemos:

$$v_1 = \frac{r^2 \rho g h}{8 \ell \eta}$$

Luego, como el caudal en el cilindro y el tubo capilar, es el mismo, entonces:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\right)\left(\frac{r^2 \rho g h}{8 \ell \eta}\right)$$

$$v_2 = \frac{r^4 \rho g h}{8 \ell \eta R^2}$$

$$v_2 = \frac{(10^{-3})^4 (900)(10)(26.10^{-2})}{(8)(2.10^{-2})(1,2)(2.10^{-2})^2}$$

$$\clubsuit \; v_2 = 3{,}04.10^{-5} \text{ m/s} \qquad \text{(A)}$$

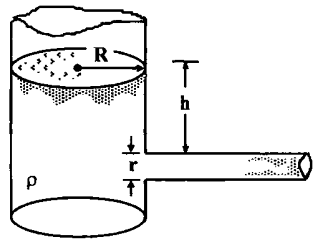
Solución: 52

• En la Fig., la diferencia de presión en los extremos del tubo capilar es:

$$\Delta P = (P_0 + \rho g h) - P_0 = \rho g h \qquad (1)$$

De otro lado, según Poiseuille, el volumen de glicerina que pasa por el tubo capilar durante el tiempo Δt, viene dado por:

$$V = \frac{\pi r^4 \Delta t\, \Delta P}{8 \ell \eta} \qquad (2)$$



De (1) y (2), y despejando Δt, tenemos:

$$\Delta t = \frac{8 \ell \eta V}{\pi \rho g h r^4}$$

$$\Delta t = \frac{(8)(1{,}5.10^{-2})(1)(5.10^{-6})}{(\pi)(1{,}2.10^3)(10)(0{,}18)(10^{-3})^4}$$

$$\Delta t = 88{,}42 \text{ s} \approx 1{,}47 \text{ min} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 53

• La razón de las velocidades máximas, de la bolita en el aceite de ricino y glicerina, viene dado por:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(\rho - \rho_1) g D^2 / 18 \eta_1}{(\rho - \rho_2) g D^2 / 18 \eta_2}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2}\right)\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{7\,700 - 900}{7\,700 - 1200}\right)\left(\frac{14{,}7}{12}\right)$$

$$\clubsuit \; \frac{v_1}{v_2} = 1{,}28 \qquad \text{(B)}$$

Solución: 54

• El trabajo realizado por la presión, viene dado por:

Igualando (2) con (3), obtenemos la velocidad en 1:

$$v_1 = \frac{r^2 \rho\, g\, h_2}{8\, \ell\, \eta}$$

A su vez, el tiempo que tarda el chorro de aceite en llegar a la mesa, hallamos de:

$$h_1 = v_o t + \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$t = (2\, h_1 / g)^{1/2}$$

Luego, la distancia horizontal recorrida por el chorro de aceite es:

$$x = v_1 t = \frac{r^2 \rho\, g\, h_2}{8\, \ell\, \eta}\left(\frac{2\, h_1}{g}\right)^{1/2}$$

$$x = \frac{(10^{-3})^2 (900)(0{,}5)}{(8)(10^{-2})(0{,}5)}[(2)(0{,}05)(10)]^{1/2}$$

$$x = 1{,}125.10^{-2} \text{m}$$

♣ $x \approx 1{,}1$ cm (A)

Solución: 61

• Recordemos que el carácter del movimiento de un líquido, viene dado por el número de Reynolds:

$$R_e = \frac{D\, v\, \rho'}{\eta} \qquad (1)$$

El valor límite del diámetro de la bola se obtiene cuando la velocidad es máxima, esto es:

$$v = \frac{(\rho - \rho')\, g\, D^2}{18 \eta} \qquad (2)$$

De (2) en (1), obtenemos el diámetro, así:

$$R_e = \frac{\rho'(\rho - \rho') g D^3}{18 \eta^2}$$

$$0{,}5 = \frac{(900)(7\,700 - 900)(10) D^3}{(18)(0{,}8)^2}$$

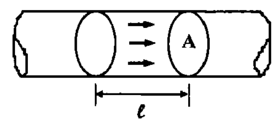
$$94{,}1.10^{-9} = D^3$$

$$D = 4{,}55.10^{-3} \text{m}$$

♣ $D = 4{,}55$ mm (C)

Solución: 62

• Representemos en el tubo un volumen de gas de longitud ℓ y área A.



En la Fig., el volumen de gas contenida en el trozo de tubo es:

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 \ell = \frac{m}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{4\, m}{\pi\, \rho\, D^2}$$

Así, la velocidad con que fluye el gas a través del tubo es:

$$v = \frac{\ell}{t} = \frac{4\, m}{\pi\, \rho\, D^2 t}$$

$$v = \frac{(4)(0{,}51)}{(\pi)(7{,}5)(0{,}02)^2 (1\,800)}$$

$$v = 0{,}12\ \frac{m}{s}$$

Luego, el número de Reynolds correspondiente al gas es:

$$R_e = \frac{D\, v}{\nu} = \frac{(2.10^{-2})(0{,}12)}{1{,}33.10^{-6}}$$

♣ $R_e \approx 1\,800$ (D)

☞ **Nota**

Según tabla, el flujo laminar se conserva para $R_e \leq 3\,000$.

Solución: 63

• Según el problema anterior la velocidad con la que fluye el agua a través del tubo es:

$$v = \frac{4V}{\pi D^2 t}$$

Sustituyendo está expresión en el número de Reynolds, se tiene:

$$R_e = \frac{D\rho v}{\eta} = \frac{4\rho V}{\pi \eta D t}$$

$$D = \frac{4\rho V}{\pi \eta t R_e}$$

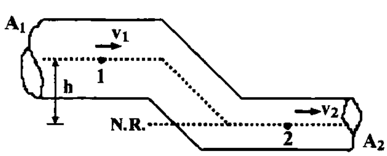
$$D = \frac{(4)(10^3)(200.10^{-6})}{(\pi)(10^{-3})(1)(3.10^3)}$$

$$D \approx 84{,}9.10^{-3}\,m$$

$$\clubsuit\ D \approx 85\ mm \qquad \text{C}$$

Solución: 64

• Representemos los puntos 1 y 2 en la vena del líquido.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

De otro lado, el caudal a través de las secciones A_1 y A_2 es el mismo, por lo que:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = A_1 v_1 / A_2$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, y despejando P_2, se tiene:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2})v_1^2 + \rho g h$$

$$P_2 = 2{,}5.10^5 + (\frac{1}{2})(10^3)[1 - (\frac{2A_2}{A_2})^2](4^2) +$$

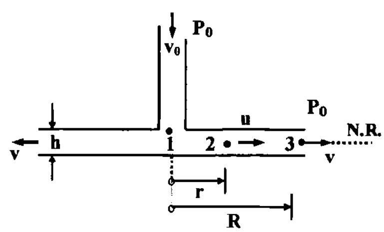
$$(10^3)(10)(15)$$

$$P_2 = 2{,}5\ atm - 0{,}24\ atm + 1{,}5\ atm$$

$$\clubsuit\ P_2 = 3{,}76\ atm \qquad \text{D}$$

Solución: 65

• Representemos las placas circulares y el tubo cilíndrico.



El caudal de aire que pasa por los puntos 1, 2 y 3 es el mismo, así, para los puntos 1 y 2, tenemos:

$$Q_1 = Q_2$$

$$\pi r_o^2 v_o = 2\pi r h u$$

$$u = \frac{r_o^2 v_o}{2 h r} \qquad (1)$$

Asimismo, para los puntos 1 y 3, tenemos:

Igualando (2) con (3), obtenemos la velocidad en 1:

$$v_1 = \frac{r^2 \rho\, g\, h_2}{8\, \ell\, \eta}$$

A su vez, el tiempo que tarda el chorro de aceite en llegar a la mesa, hallamos de:

$$h_1 = v_o t + \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$t = (2\, h_1 / g)^{1/2}$$

Luego, la distancia horizontal recorrida por el chorro de aceite es:

$$x = v_1 t = \frac{r^2 \rho\, g\, h_2}{8\, \ell\, \eta} \left(\frac{2\, h_1}{g}\right)^{1/2}$$

$$x = \frac{(10^{-3})^2 (900)(0,5)}{(8)(10^{-2})(0,5)} [(2)(0,05)(10)]^{1/2}$$

$$x = 1{,}125.10^{-2} \text{m}$$

♣ $x \approx 1{,}1$ cm (A)

Solución: 61

• Recordemos que el carácter del movimiento de un líquido, viene dado por el número de Reynolds:

$$R_e = \frac{D\, v\, \rho'}{\eta} \qquad (1)$$

El valor límite del diámetro de la bola se obtiene cuando la velocidad es máxima, esto es:

$$v = \frac{(\rho - \rho')\, g\, D^2}{18 \eta} \qquad (2)$$

De (2) en (1), obtenemos el diámetro, así:

$$R_e = \frac{\rho'(\rho - \rho') g D^3}{18 \eta^2}$$

$$0{,}5 = \frac{(900)(7\,700 - 900)(10) D^3}{(18)(0{,}8)^2}$$

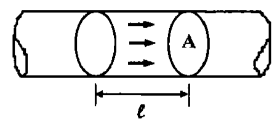
$$94{,}1.10^{-9} = D^3$$

$$D = 4{,}55.10^{-3} \text{m}$$

♣ $D = 4{,}55$ mm (C)

Solución: 62

• Representemos en el tubo un volumen de gas de longitud ℓ y área A.



En la Fig., el volumen de gas contenida en el trozo de tubo es:

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 \ell = \frac{m}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{4\, m}{\pi\, \rho\, D^2}$$

Así, la velocidad con que fluye el gas a través del tubo es:

$$v = \frac{\ell}{t} = \frac{4\, m}{\pi\, \rho\, D^2 t}$$

$$v = \frac{(4)(0{,}51)}{(\pi)(7{,}5)(0{,}02)^2 (1\,800)}$$

$$v = 0{,}12\ \frac{m}{s}$$

Luego, el número de Reynolds correspondiente al gas es:

$$R_e = \frac{D\, v}{\nu} = \frac{(2.10^{-2})(0{,}12)}{1{,}33.10^{-6}}$$

♣ $R_e \approx 1\,800$ (D)

☞ **Nota**

Según tabla, el flujo laminar se conserva para $R_e \leq 3\ 000$.

Solución: 63

• Según el problema anterior la velocidad con la que fluye el agua a través del tubo es:

$$v = \frac{4V}{\pi D^2 t}$$

Sustituyendo está expresión en el número de Reynolds, se tiene:

$$R_e = \frac{D\rho v}{\eta} = \frac{4\rho V}{\pi \eta D t}$$

$$D = \frac{4\rho V}{\pi \eta t R_e}$$

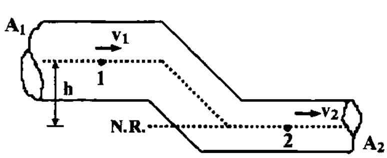
$$D = \frac{(4)(10^3)(200.10^{-6})}{(\pi)(10^{-3})(1)(3.10^3)}$$

$$D \approx 84{,}9.10^{-3} m$$

♣ $D \approx 85$ mm (C)

Solución: 64

• Representemos los puntos 1 y 2 en la vena del líquido.



Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

De otro lado, el caudal a través de las secciones A_1 y A_2 es el mismo, por lo que:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = A_1 v_1 / A_2$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, y despejando P_2, se tiene:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) v_1^2 + \rho g h$$

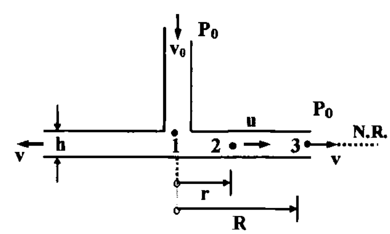
$$P_2 = 2{,}5.10^5 + \left(\frac{1}{2}\right)(10^3)\left[1 - \left(\frac{2A_2}{A_2}\right)^2\right](4^2) + (10^3)(10)(15)$$

$$P_2 = 2{,}5 \text{ atm} - 0{,}24 \text{ atm} + 1{,}5 \text{ atm}$$

♣ $P_2 = 3{,}76$ atm (D)

Solución: 65

• Representemos las placas circulares y el tubo cilíndrico.



El caudal de aire que pasa por los puntos 1, 2 y 3 es el mismo, así, para los puntos 1 y 2, tenemos:

$$Q_1 = Q_2$$

$$\pi r_o^2 v_o = 2\pi r h u$$

$$u = \frac{r_o^2 v_o}{2 h r} \qquad (1)$$

Asimismo, para los puntos 1 y 3, tenemos:

$$Q_1 = Q_3$$

$$\pi r_o^2 v_o = 2\pi R h v$$

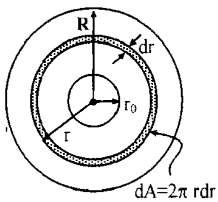
$$v = \frac{r_o^2 v_o}{2hR} \qquad (2)$$

Ahora, apliquemos el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, así:

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3$$

$$P + \frac{1}{2}\rho u^2 + 0 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$\Delta P = P_0 - P = \frac{1}{2}\rho(u^2 - v^2) \qquad (3)$$



Luego, de (1) y (2) en (3) la fuerza de atracción entre las placas cilíndricas es:

$$F = \int_{r_o}^{R} \Delta P\, dA$$

$$F = \frac{\pi\rho v_o^2 r_o^4}{4h^2}\int_{r_0}^{R}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) r\, dr$$

$$F = \frac{\pi\rho v_o^2 r_o^4}{8h^2}\left[2\,\ell n\left(\frac{R}{r_o}\right) - 1 + \frac{r_o^2}{R^2}\right]$$

$$F = \frac{(\pi)(1{,}293)(4)^2(4.10^{-3})^4}{(8)(2.10^{-2})^2} \bullet$$

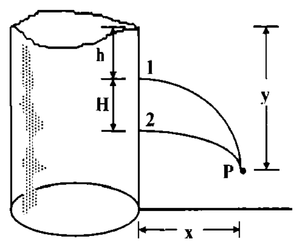
$$\bullet\left[2\,\ell n\left(\frac{8.10^{-2}}{4.10^{-3}}\right) - 1 + \left(\frac{4.10^{-3}}{8.10^{-2}}\right)^2\right]$$

$$\clubsuit\ F = 26\ \mu N \qquad \text{(B)}$$

Solución: 66

- Considerando que el nivel del agua en el depósito se mantiene constante, las velocidades con la que salen los chorros de agua son:

$$v_1 = (2gh)^{1/2},\ v_2 = (2g(H+h))^{1/2} \quad (1)$$



El caudal de agua que ingresa al depósito, es igual, al que sale por los agujeros 1 y 2, esto es:

$$Q = Av_1 + Av_2$$

$$v_1 + v_2 = \frac{Q}{A} \qquad (2)$$

De cinemática, las coordenadas del punto de intersección de los chorros de agua, son:

$$x = v_1 t_1 = v_2 t_2$$

$$t_1 = \frac{x}{v_1} \text{ y } t_2 = \frac{x}{v_2}$$

$$y = h + \frac{1}{2}g t_1^2 = h + H + \frac{1}{2}g t_2^2$$

$$\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_1^2} = H + \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_2^2}$$

$$x = (\frac{2H}{g})^{1/2} \frac{v_1 v_2}{(v_2^2 - v_1^2)^{1/2}} \quad (3)$$

De la ec.(1) y (2), la diferencia de velocidades, así:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(H+h) - 2h$$

$$(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = 2gH$$

$$v_2 - v_1 = \frac{2gHA}{Q} \quad (4)$$

Resolviendo las ecs.(2) y (4), obtenemos cada una de las velocidades:

$$v_1 = \frac{1}{2}(\frac{Q}{A} - \frac{2gHA}{Q})$$

$$v_2 = \frac{1}{2}(\frac{Q}{A} + \frac{2gHA}{Q})$$

Sustituyendo estas expresiones en (3):

$$x = \frac{1}{2}(\frac{Q^2}{2gA^2} - \frac{2gH^2A^2}{Q^2}) \quad (5)$$

Para hallar la coordenada (y) utilizamos la ec.(1) y (5), así:

$$y = h + \frac{1}{2}g\,t_1^2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_1^2}$$

$$y = \frac{1}{2}(\frac{Q^2}{2gA^2} + \frac{2gH^2A^2}{Q^2}) \quad (6)$$

Finalmente, evaluando (5) y (6):

♣ $x \approx 117$ cm ; $y \approx 128$ cm (E)

Solución: 67

• Utilizando los resultados del problema anterior, se tiene:

$$y = 2x$$

$$\frac{1}{2}(\frac{Q^2}{2gA^2} + \frac{2gH^2A^2}{Q^2}) =$$

$$2\frac{1}{2}(\frac{Q^2}{2gA^2} + \frac{2gH^2A^2}{Q^2})$$

$$\frac{Q^2}{2gA^2} + \frac{2gH^2A^2}{Q^2} = \frac{2Q^2}{2gA^2} - \frac{4gH^2A^2}{Q^2}$$

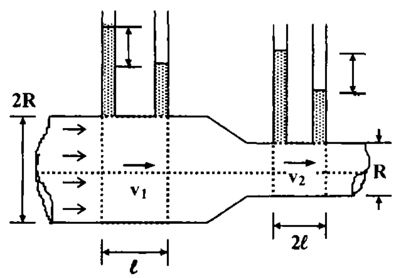
$$\frac{6gH^2A^2}{Q^2} = \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$H = \frac{Q^2}{\sqrt{12}gA^2} = \frac{(140.10^{-6})^2}{\sqrt{12}(10)(0{,}2.10^{-4})^2}$$

♣ $H \approx 1{,}41$ m (C)

Solución: 68

• Representemos el tubo cilíndrico y consideremos en el los volúmenes V_1 y V_2, respectivamente.



Según, Poiseuille el volumen de líquido que pasa en el tiempo (t) por las zonas (1) y (2) es el mismo, esto es:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{\pi(2R)^4 \Delta P_1\, t}{8\eta\ell} = \frac{\pi R^4 \Delta P_2\, t}{8\eta(2\ell)}$$

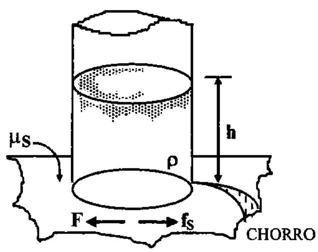
siendo, ΔP_1, ΔP_2 la diferencia de presiones en los extremos de los cilindros de longitudes ℓ y 2ℓ, luego:

$$32\rho g h_1 = \rho g h_2$$

$$\clubsuit\ \frac{h_2}{h_1} = 32 \qquad \text{E}$$

Solución: 69

• Representemos el recipiente que contiene agua, y presenta un agujero.



Como el área del agujero es mucho menor que la de la sección transversal del recipiente, la velocidad con la que sale el chorro de agua es:

$$v = (2g\,h)^{1/2}$$

De la tercera ley de Newton, la fuerza (F) sobre el recipiente, debido al chorro de agua que sale por el agujero es hacia la izquierda, y su expresión hallamos aplicando el teorema del impulso y la cantidad de movimiento, a un elemento de masa (Δm) del chorro de agua, así:

$$F\,\Delta t = \Delta p = \Delta m\,v$$

$$F\,\Delta t = (\rho\,A v\,\Delta t)\,v$$

$$F = \rho\,v^2 A = 2\rho g h A$$

El movimiento será inminente, cuando esta fuerza (F), sea igual, a la fuerza de fricción estática máxima, esto es:

$$f_S = 2\rho g h A \;\Rightarrow\; \mu_S W = 2\rho g h A$$

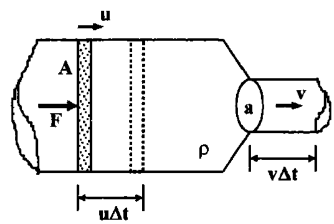
$$\mu_S = \frac{2\rho g h A}{W}$$

$$\mu_S = \frac{(2)(10^3)(10)(1)(10.10^{-4})}{80}$$

$$\clubsuit\ \mu_S = \frac{1}{4} \qquad \text{C}$$

Solución: 70

• Representemos al pistón de la bomba en dos posiciones diferentes.



Durante el intervalo de tiempo (Δt) el pistón recorre la distancia $(u\Delta t)$, bajo la acción de la fuerza externa F, así, el trabajo realizado por esta fuerza es:

$$W = F\,d = F\,u\,\Delta t \qquad (1)$$

Ahora, según el principio de conservación de la masa, la masa de líquido (Δm) que pasa durante el intervalo de tiempo (Δt) por las secciones A y a, es la misma, esto es:

$$\Delta m = \rho\,\Delta V = \rho\,A(u\,\Delta t) \qquad (2)$$

De otro lado, como el caudal de líquido a través de la bomba se conserva, se tiene:

$$Q = A u = a\,v$$

$$u = \frac{a}{A}\,v \qquad (3)$$

Luego, del teorema del trabajo y la energía, el trabajo de la fuerza F, es igual, a la variación de la energía cinética del elemento de masa de líquido (Δm), así:

$$W = \Delta E_C$$

$$F\,u\,\Delta t = \frac{1}{2}\Delta m\,v^2 - \frac{1}{2}\Delta m\,u^2$$

$$F\,u\,\Delta t = \frac{1}{2}(\rho\,A\,u\,\Delta t)(v^2 - \frac{a^2}{A^2}v^2)$$

$$v^2 = \frac{2F}{\rho\,A[1-(a/A)^2]}$$

$$v^2 = \frac{(2)(4)}{(10^3)(20.10^{-4})[1-(2/20)^2]}$$

$$v \approx 2{,}01\,\frac{m}{s}$$ B

Solución: 71

• Según el problema anterior, la velocidad con la que sale el líquido por el agujero es:

$$v^2 = \frac{2F}{\rho\,A[1-(a/A)^2]}$$

Como, A >> a, entonces $a^2/A^2 \approx 0$, de modo que la expresión anterior, queda así:

$$v^2 = \frac{2F}{\rho\,A} \Rightarrow A = \frac{2F}{\rho\,v^2}$$

$$A = \frac{(2)(0{,}2)}{(10^3)(0{,}2)^2}$$

♣ $A = 10^{-2}\,m^2 = 100\,cm^2$ E

Solución: 72

• Según el problema (66), las coordenadas del punto de intersección de los chorros de agua son:

$$x = \frac{1}{2}(\frac{Q^2}{2gA^2} - \frac{2g\,H^2A^2}{Q^2})$$

$$y = \frac{1}{2}(\frac{Q^2}{2g\,A^2} + \frac{2g\,H^2A^2}{Q^2})$$

Restando la segunda ecuación menos la primera, se tiene:

$$y - x = d = \frac{2g\,H^2A^2}{Q^2}$$

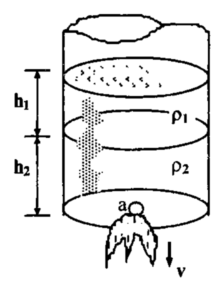
$$H = (\frac{d}{2g})^{1/2}\frac{Q}{A}$$

$$H = (\frac{20.10^{-2}}{(2)(10)})^{1/2}(\frac{120.10^{-6}}{0{,}2.10^{-4}})$$

♣ $H = 0{,}6\text{ m} = 60\text{ cm}$ D

Solución: 73

• Representemos el recipiente que contiene keroseno (ρ_1) y agua (ρ_2).



Según el teorema del trabajo y la energía, el trabajo realizado sobre un elemento de líquido de masa (Δm) que sale por el agujero, es igual, al cambio de su energía cinética, esto es:

$$W = \Delta E_C$$

$$F\,d = \frac{1}{2}\Delta m\,v^2$$

$$\Delta P\, a\, v\, \Delta t = \frac{1}{2}\rho_2\, a\, v\, \Delta t\, v^2$$

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho_2 v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2\,\Delta P}{\rho_2}$$

$$v^2 = \frac{2g\,(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_2}$$

$$v^2 = \frac{(2)(10)[(800)(0{,}375) + (1000)(0{,}5)]}{1000}$$

$$\clubsuit \;\; v = 4 \text{ m/s} \qquad \text{D}$$

Solución: 74

• Inicialmente la tensión en el soporte, es igual, al peso del agua más el del recipiente esto es:

$$T = W$$

Después, cuando se retira el tapón del agujero, la velocidad con la que sale el chorro de agua es:

$$v = (2g\,h)^{1/2}$$

De otro lado, el impulso de la fuerza F, debido a la salida del chorro de agua por el agujero es:

$$F\,\Delta t = \Delta p = \Delta m\, v$$

$$F\,\Delta t = (\rho\, A\, v\, \Delta t)\, v$$

$$F = \rho\, v^2 A = \rho\,(2g\,h)\, A$$

$$F = 2\rho g h A$$

Así, según la tercera ley de Newton, la tensión en el soporte es:

$$T' = W - F = W - 2\rho\, g\, h\, A$$

Luego, el cambio en la tensión en el soporte del recipiente es:

$$\Delta T = T' - T = -2\rho\, g\, h\, A$$

$$\Delta T = -(2.10^3)(10)(0{,}5)(10^{-4})$$

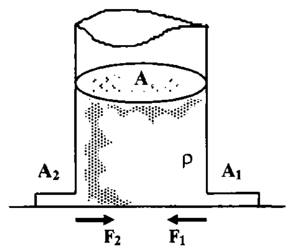
$$\clubsuit \;\; \Delta T = -1 \text{ N} \qquad \text{A}$$

☞ **Nota**

El signo (-) nos indica que la tensión en el soporte disminuye.

Solución: 75

• Representemos el recipiente en el instante en que retiran los tapones de los agujeros.



Según, el problema anterior las magnitudes de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, sobre el recipiente debido a los chorros de agua que salen por los agujeros 1 y 2 son:

$$F_1 = 2\rho\, g\, h\, A_1 \quad \text{y} \quad F_2 = 2\rho\, g\, h\, A_2$$

Luego, teniendo en cuenta que no hay fricción en la mesa y que $A_2 > A_1$, la aceleración que adquiere el recipiente en el instante en que se retira los tapones es:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{F_2 - F_1}{m}$$

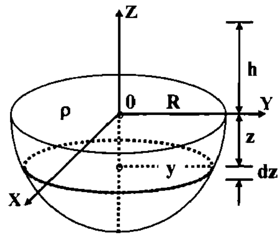
$$a = \frac{2\rho\, g\, h\,(A_2 - A_1)}{\rho\, A\, h}$$

$$a = \frac{2g\,(A_2 - A_1)}{A} = \frac{(2)(10)(2-1)}{100}$$

♣ $a = 0{,}2\ m/s^2\ (\rightarrow)$ Ⓒ

Solución: 76

• Dividamos el depósito semiesférico en muchos discos, y representemos uno de e llos, de radio (y) y espesor (dz).



En la Fig., el peso del agua contenido en el volumen del disco de radio (y) y espe sor (dz) es:

$$dw = g\,dm = g\,\rho\,dV$$

$$dw = g\,\rho\,\pi\,y^2 dz = g\,\rho\,\pi\,(R^2 - z^2)\,dx$$

Así, el trabajo para elevar el peso del agua contenida en el disco, hasta una altura (h) por encima del recipiente es:

$$dW = (dw)(h + z)$$

Luego, el trabajo total para elevar toda el agua contenida en el recipiente, hasta una altura (h) es:

$$\int_0^W dW = \int_0^R \pi\,\rho\,g\,(h+z)(R^2 - z^2)\,dz$$

$$W = \pi\rho g[h\int_0^R (R^2 - z^2)\,dz + \int_0^R (zR^2 - z^3)\,dz]$$

$$W = \pi\,\rho\,g\,[h(R^2 z - z^3/3)\Big]_0^R +$$

$$(Rz^2/2 - z^4/4)\Big]_0^R]$$

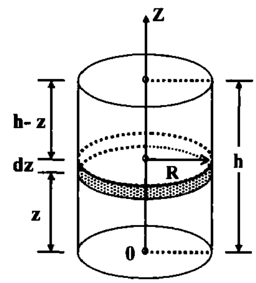
$$W = \frac{2}{3}\pi\,\rho\,g\,R^3(h + \frac{8}{3}R)$$

$$W = (\frac{2}{3}\pi)(10^3)(10)(0{,}3)^3[0{,}2 + (\frac{8}{3})(0{,}3)]$$

♣ $W = 180\pi\ J$ Ⓔ

Solución: 77

• Dividamos el depósito cilíndrico en mu chos discos, y representemos uno de ellos, de radio (R) y grosor (dz).



En la Fig., el peso del agua contenido en el volumen del disco de radio (R) y espe sor (dz) es:

$$dw = g\,dm = g\,\rho\,dV$$

$$dw = g\,\rho\,\pi R^2 dz$$

Así, el trabajo para elevar el peso del agua contenida en el disco, hasta una altura (h- z) por encima de el es:

$$dW = (dw)(h - z)$$

Luego, el trabajo total para elevar toda el agua contenida en el recipiente cilíndrico, hasta la parte superior es:

$$\int_0^W dW = \pi\,\rho\,gR^2 \int_0^h (h - z)\,dz$$

$$W = \pi\rho g R^2 (hz - \frac{z^2}{2})\Big]_0^h$$

$$W = \frac{1}{2}\pi\rho g R^2 h^2$$

$$W = (\frac{1}{2}\pi)(10^3)(10)(0{,}5)^2(1)^2$$

$$\clubsuit \; W = 1\,250\pi \text{ J} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 78

• Derivando el volumen del globo esférico, respecto del tiempo, se tiene:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt}$$

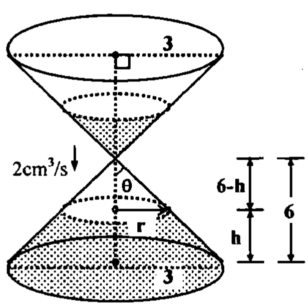
$$-2 = 4\pi(50)^2 \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = -0{,}00006 \frac{cm}{s}$$

$$\clubsuit \; \frac{dR}{dt} = -0{,}6\ \mu\frac{m}{s} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 79

• Representemos el reloj de agua, en el instante en que la altura del agua en la parte inferior es (h) y los radios del tronco de co-no (r) y (3), respectivamente.



En la Fig., aplicando semejanza de triángulos, se tiene que:

$$tg\theta = \frac{r}{6-h} = \frac{3}{6} \Rightarrow r = \frac{6-h}{2}$$

Ahora, hallemos el volumen del tronco de cono que forma el agua en la parte inferior, restando los volúmenes de los conos de radios (3) y (r), así:

$$V = \frac{1}{3}\pi(3)^2(6) - \frac{1}{3}\pi r^2(6-h)$$

$$V = 18\pi - \frac{1}{3}\pi(\frac{6-h}{2})^2(6-h)$$

$$V = 18\pi - \frac{1}{12}\pi(6-h)^3$$

Derivando está expresión respecto de la variable independiente (h), se tiene:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{4}\pi(6-h)^2$$

Finalmente, aplicando la regla de la cadena, la derivada temporal del volumen es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi(6-h)^2\frac{dh}{dt}$$

$$2 = \frac{1}{4}\pi(6-4)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\clubsuit \; \frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi}\frac{cm}{s} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 80

• En la Fig., aplicando la semejanza de triángulos, se tiene que:

$$tg\theta = \frac{r}{z} = \frac{R}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h}z$$

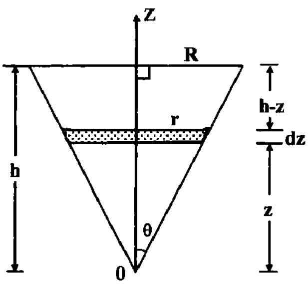
Así, el peso del agua contenido en el volu men de este disco es:

$$dw = g\,dm = g\,\rho dV$$

$$dw = g\,\rho\,\pi\,r^2 dz$$

$$dw = \pi\,g\,\rho\,\frac{R^2}{h^2}\,z^2 dz$$

Dividamos el depósito cónico en muchos discos, y representemos uno de ellos, de radio (r) y grosor (dz).



De modo que, el trabajo para elevar el peso del agua contenida en el disco, hasta una altura (h-z) por encima de el es:

$$dW = (dw)(h - z)$$

Luego, el trabajo total para elevar toda el agua contenida en el recipiente cónico, hasta la parte superior es:

$$\int_0^W dW = \pi\rho\,g\frac{R^2}{h^2}\int_0^h (h - z)\,z^2 dz$$

$$W = \pi\,\rho\,g\frac{R^2}{h^2}(h\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4})\ ]_0^h$$

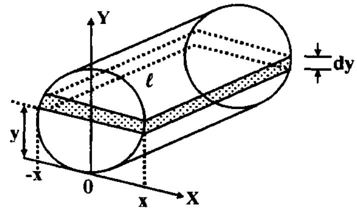
$$W = \frac{1}{12}\pi\,\rho\,g\,R^2 h^2$$

$$W = (\frac{1}{12}\pi)(10^3)(10)(0,3)^2(0,6)^2$$

♣ $W = 27\pi J$ Ⓓ

Solución: 81

• Dividamos el cilindro en muchas láminas y representemos una de ellas.



La ecuación cartesiana de la circunferencia de centro (0; 1) y radio 1 es:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x = (2y - y^2)^{1/2}$$

En la Fig., el peso del aceite contenido en el volumen de la lámina de ancho (2x), longitud (ℓ) y espesor (dy) es:

$$dw = \rho\,g\,dV = \rho\,g\,2x\,\ell\,dy$$

Así, el trabajo para elevar este peso (dw) a la parte superior del depósito es:

$$dW = dw\,(2 - y)$$

Luego, el trabajo total para elevar todo el aceite a la parte superior del depósito cilíndrico es:

$$\int_0^W dW = 2\rho\,g\,\ell\int_0^2 (2y - y^2)^{1/2}(2 - y)\,dy$$

$$W = 2\rho\,g\,\ell\int_0^2 (2y - y^2)^{1/2}[1 + \frac{1}{2}(2 - 2y)]dy$$

$$W = 2\rho\,g\,\ell\,[\int_0^2 (2y - y^2)^{1/2} dy +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 (2y - y^2)^{1/2}(2 - 2y)\,dy]$$

Calculemos la primera integral.

$$I_1 = \int_0^2 (2y - y^2)^{1/2} dy$$

$$I_1 = \int_0^2 [1 - (y - 1)^2]^{1/2} dy$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$y - 1 = \text{sen}\,\theta \quad => \quad dy = \cos\theta\, d\theta$$

la integral anterior, queda así:

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 d\theta = (\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4})\,\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$I_1 = \frac{\pi}{2}$$

Calculemos la segunda integral:

$$I_2 = \int_0^2 (2y - y^2)^{1/2}(2 - 2y)\,dy$$

$$I_2 = \frac{2}{3}(2y - y^2)^{3/2}\,\Big]_0^2$$

$$I_2 = 0$$

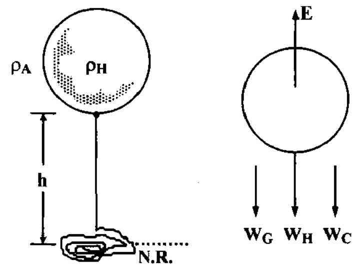
Luego, sustituyendo I_1 y I_2 en la expresión del trabajo total, se tiene:

$$W = (2)(900)(10)(2)[\frac{\pi}{2} + (\frac{1}{2})(0)]$$

$$♣\ W = 18\pi \text{ kJ} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 82

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el globo esférico en equilibrio.



En la Fig., el sistema globo y cuerda (un só lo cuerpo), se encuentra en equilibrio bajo la acción del peso del globo (W_G), peso de la cuerda (W_C), peso del gas de hidrógeno (W_H) y empuje del aire (E), es to es:

$$W_G + W_C + W_H = E$$

$$m\,g + \lambda\,g\,h + \rho_H\,g\,\frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_A g\,\frac{4}{3}\pi\,R^3$$

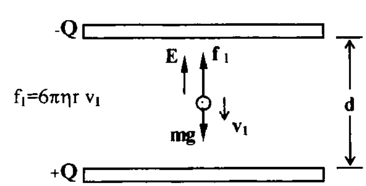
$$h = \frac{1}{3\lambda}[4\pi\,(\rho_A - \rho_H)\,R^3 - 3\,m]$$

$$h = \frac{1}{(3)(10^{-3})}[(4\pi)(1{,}293-{,}009)(0{,}15)^3 - (3)(2.10^{-3})]$$

$$♣\ h \approx 15\,\text{m} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 83

1. Cuando no existe campo eléctrico.



Para que la gota descienda con velocidad constante, su peso debe ser igual a la fuerza de rozamiento, más la fuerza de empuje del aire, esto es:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho' g = 6\pi\eta r v_1 + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

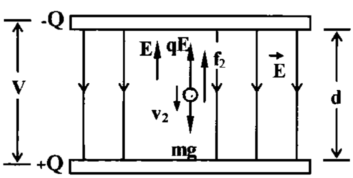
siendo, ρ' y ρ las densidades del aceite y aire, respectivamente.
Despejando en la expresión anterior "r", y evaluando:

$$r = \left(\frac{9\eta v_1}{2\Delta\rho g}\right)^{1/2}$$

$$r = \left[\frac{(9)(1{,}82.10^{-2})(1{,}1.10^{-4})}{(2)(900)(9{,}8)}\right]^{1/2}$$

$$r \approx 32.10^{-6}\ \text{m}$$

Cuando la gota cae en el campo eléctrico, establecido entre las placas del condensador, la ecuación que describe su movimiento es:



$f_2=6\pi\eta r\, v_2$ $\quad$ $E=(4/3)\pi r^3\rho g$

$$q\frac{V}{d} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho g - 6\pi\eta r v_2$$

$$q = \left(\frac{4}{3}\pi r^3 g\Delta\rho - 6\pi\eta r v_2\right)\frac{d}{V}$$

$$\clubsuit\ q \approx -0{,}23.10^{-12}\ \text{C} \qquad \text{(D)}$$

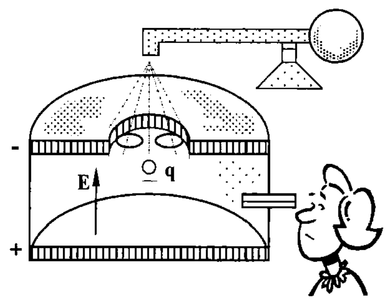
Solución: 84

• Cuando no hay campo eléctrico, la velocidad de caída es constante, a= 0, y la gota cae con velocidad igual a:

$$v_1 = 2(\rho-\rho')r^2 g/9\eta \qquad (1)$$

donde "r" es el radio de la gota, "η" la viscosidad del aceite y ρ, ρ' las densidades del aceite y aire, respectivamente.
Cuando hay campo eléctrico, la velocidad con la que cae la gota de aceite es:

$$v_2 = \frac{3q.E - 4\pi r^3(\rho-\rho')g}{18\pi\eta r} \qquad (2)$$



Puesto, que la gota permanece inmóvil debido a la presencia del campo eléctrico, v_2= 0, luego, despejando de la ec.(2), la carga "q", se tiene:

$$q = \frac{4\pi r^3(\rho-\rho')g}{3E} \qquad (3)$$

Eliminando entre (1) y (3) "r", se encuentra la expresión final para "q":

$$q = \frac{4\pi(\rho-\rho')g}{3E}\left[\frac{9v_1\eta}{2(\rho-\rho')g}\right]^{3/2}$$

$$q \approx 10^{-14}\ \text{C}$$

Luego, la cantidad de electrones de exceso, en la gota de aceite es:

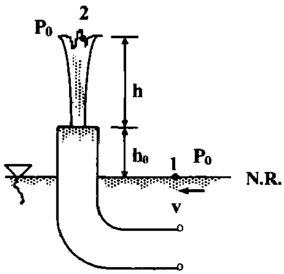
$$n = \frac{q}{e} = \frac{10^{-14}}{1{,}602.10^{-19}}$$

$$\clubsuit\ n \approx 6{,}24.10^4\ e_S \qquad \text{(B)}$$

Solución: 85

• Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$



$$P_o + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 = P_o + 0 + \rho g (h_o + h)$$

$$h = \frac{v^2}{2g} - h_o = \frac{2^2}{(2)(10)} - 0{,}1$$

$$h = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1 \text{ m}$$

♣ $h = 10$ cm (A)

Solución: 86

• Según el problema (69), la fuerza de reacción sobre el tubo, debido a la salida del agua, viene dado por:

$$F = \rho v^2 A = \rho (\frac{Q}{A})^2 A$$

$$F = \frac{\rho Q^2}{\pi R^2}$$

Luego, el momento de esta fuerza, respecto del punto O es:

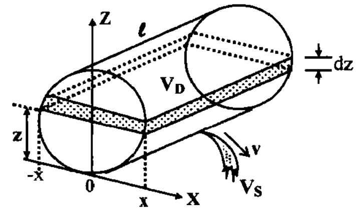
$$M = F\ell = \frac{\rho Q^2 \ell}{\pi R^2}$$

$$M = \frac{(10^3)(0{,}5.10^{-3})^2(22.10^{-2})}{\pi(0{,}5.10^{-2})^2}$$

♣ $M = 0{,}7$ N.m (D)

Solución: 87

• Dividamos el cilindro en muchas láminas y representemos una de ellas.



La ecuación cartesiana de la circunferencia de centro (0; R) y radio R es:

$$x^2 + (z-R)^2 = R^2$$

$$x^2 + z^2 - 2Rz = 0$$

$$x = (Dz - z^2)^{1/2}$$

De otro lado, la velocidad con la que sale el chorro de agua por el agujero es:

$$v = \kappa (2g z)^{1/2}$$

En la Fig., para un diferencial de tiempo (dt), el volumen de agua (V_S) que sale por el agujero, es igual, al volumen de agua (V_D) que desciende en el tanque, esto es:

$$V_S = V_D$$

$$A v\, dt = (2x)\,\ell\, dz$$

$$\frac{\pi}{4} d^2 \kappa (2g z)^{1/2} dt = 2\ell (D z - z^2)^{1/2} dz$$

$$\frac{8\ell}{\kappa (2g)^{1/2} \pi d^2} \int_0^D (D-z)^{1/2} dz = \int_0^t dt$$

$$\frac{8\,\ell}{\kappa\,(2g)^{1/2}\pi\,d^2}\,\frac{2}{3}\,(D-z)^{3/2}\Big]_D^0 = (t)\Big]_0^t$$

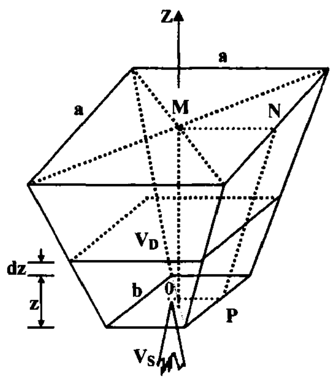
$$t = \frac{16\,\ell}{3\pi\,d^2\kappa}\left(\frac{D^3}{2g}\right)^{1/2}$$

$$t = \frac{(16)(3\pi/4)}{(3\pi)(0{,}02)^2(2/3)}\left[\frac{(0{,}2)^3}{(2)(10)}\right]^{1/2}$$

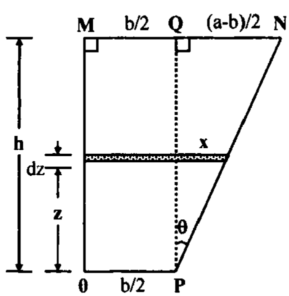
♣ $t = 300\ \text{s} = 5\ \text{min}$ (E)

Solución: 88

• Dividamos el tanque en muchas láminas, y representemos una de ellas.



En la Fig., N, P son puntos medios de los lados a y b del tronco de pirámide.



Aplicando semejanza de triángulo, hallemos una relación para (x), así:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{x}{z} = \frac{(a-b)/2}{h}$$

$$x = \frac{(a-b)}{2h}\,z$$

Así, el lado de la lámina cuadrada situada a la distancia (z) del origen es:

$$\ell = 2\left(\frac{b}{2} + x\right) = 2\left(\frac{b}{2} + \frac{a-b}{2h}\,z\right)$$

$$\ell = b + (a-b)\,\frac{z}{h}$$

Como el área del nivel del agua, es mucho mayor que el área del orificio, la velocidad de salida del chorro de agua es aproximádamente,

$$v = \kappa(2gz)^{1/2}$$

En la Fig., para un diferencial de tiempo (dt), el volumen de agua (V_S) que sale por el agujero, es igual, al volumen de agua (V_D) que desciende en el tanque, esto es:

$$V_S = V_D$$

$$A\,v\,dt = \ell^2 dz$$

$$A\,k\,(2g\,z)^{1/2}dt = \left[b + (a-b)\,\frac{z}{h}\right]^2 dz$$

$$(2g)^{1/2}A\,k\int_0^t dt = b^2\int_0^h z^{-1/2}dz +$$

$$\frac{2b\,(a-b)}{h}\int_0^h z^{1/2}dz + \frac{(a-b)^2}{h^2}\int_0^h z^{3/2}dz$$

$$(2g)^{1/2}A\,k = 2b^2(z^{1/2})\Big]_0^h +$$

$$\frac{4b(a-b)}{3h}(z)^{3/2}\Big]_0^h + \frac{2(a-b)^2}{5h^2}(z^{5/2})\Big]_0^h$$

$$(2g)^{1/2}kAt = 2b^2h^{1/2} + \frac{4b(a-b)}{3h}h^{3/2} +$$

$$\frac{2(a-b)^2}{5h^2}h^{5/2}$$

$$t = \frac{2h^{1/2}[b^2 + \frac{2}{3}b(a-b) + \frac{1}{5}(a-b)^2]}{(2g)^{1/2}k\,A}$$

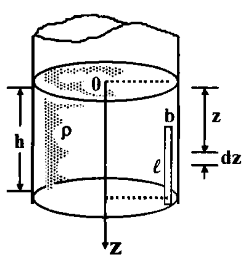
$$t = \frac{(2)(4)^{1/2}[1^2 + \frac{2}{3}(1)(10-1) + \frac{1}{5}(10-1)^2]}{((2)(10))^{1/2}(20.10^{-4})(0,72)}$$

$$t = 14\,400 \text{ s}$$

♣ $t = 4$ h (D)

Solución: 89

• Consideremos un agujero de longitud (dz) y ancho (b), situado a una distancia (z) del origen.



Recordemos que la velocidad con la que sa le el agua, a través de este agujero es:

$$v = (2g\,z)^{1/2}$$

Ahora, según el problema (69), la fuerza de reacción del agua que sale por este agu jero de área (dA= b dz) es:

$$dF = \rho v^2 dA$$

$$dF = \rho(2gz)b\,dz$$

Integrando esta expresión a lo largo del fi lamento, obtenemos la fuerza total de reac ción del agua, esto es:

$$\int_0^F dF = 2\rho g b \int_{h-\ell}^{h} z\,dz$$

$$F = 2\rho g b \frac{1}{2}z^2\Big]_{h-\ell}^{h}$$

$$F = \rho g b[h^2 - (h-\ell)^2]$$

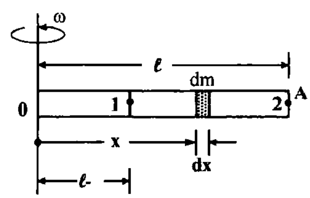
$$F = \rho g b \ell(2h - \ell)$$

$$F = (10^3)(10)(2{,}5.10^{-3})(0{,}2)[(2)(0{,}5) - 0{,}2]$$

♣ $F = 4$ N (D)

Solución: 90

• Consideremos un diferencial de masa (dm) en el líquido.



En la Fig., la fuerza sobre el diferencial de masa (dm) del líquido, contenido en el vo lumen dV=A.dx, debida a la rotación del tubo de ensayo es:

$$dF = (dm)\,\omega^2 x$$

$$dF = \rho\,A\,dx\,\omega^2 x$$

$$\int_0^F dF = \rho\,\omega^2 A \int_{\ell-h}^{\ell} x\,dx$$

$$F = \rho\omega^2 A\frac{1}{2}[\ell^2 - (\ell - h)^2]$$

$$F = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A h^2 (2\frac{\ell}{h} - 1)$$

De modo que, la diferencia de presión en los extremos del líquido es:

$$\Delta P = \frac{F}{A} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 h^2 (2\frac{\ell}{h} - 1) \quad (1)$$

Ahora, aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2, situado en los extremos del líquido, se tiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, h_2$$

$$P_1 + 0 + 0 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + 0$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\, v^2 \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), obtenemos la velocidad con la que sale el líquido a través del agujero:

$$v = \omega\, h\, (2\frac{\ell}{h} - 1)^{1/2}$$

$$v = (10)(0,1)[(2)(\frac{50}{10}) - 1]^{1/2}$$

♣ $v = 3\ m/s$ Ⓒ

Solución: 91

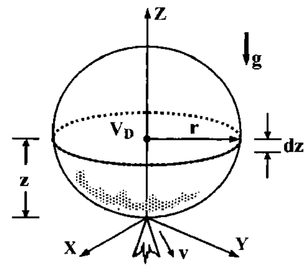
• La ecuación de la esfera de radio R y centro en (0; 0; R) es:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$$

$$x^2 + y^2 = r^2 = 2Rz - z^2$$

Representemos el depósito esférico de radio R, en el sistema de coordenadas cartesianas.



Como el área del nivel del agua, es mucho mayor que el área del orificio, la velocidad de salida del chorro de agua es aproximadamente:

$$v = \kappa\,(2g\,z)^{1/2}$$

En la Fig., para un diferencial de tiempo (dt), el volumen de agua (V_S) que sale por el agujero, es igual, al volumen de agua (V_D) que desciende en el tanque, esto es:

$$V_S = V_D$$

$$\frac{\pi}{4} d^2 k\,(2g\,z)^{1/2} dt = \pi\, r^2 dz$$

$$(2g)^{1/2} k\, d^2 (z)^{1/2} dt = 4\,(2R\,z - z^2)\,dz$$

$$(2g)\,k\,d^2 \int_0^t dt = 4\int_0^D (2D\,z^{1/2} - z^{3/2})\,dz$$

$$t = \frac{16\,(D^5/2g)^{1/2}}{15\,k\,d^2}$$

♣ $t = 1{,}5\ h$ Ⓒ

TEORIA CINETICA DE LOS GASES

1. TEORIA CINETICA DE LOS GASES

a) Definición

Es una parte de la física, que estudia mediante el uso de técnicas y métodos estadísticos, la estructura, propiedades, características físicas de los gases y los procesos físicos que se dan en el.

b) Postulados

Los principales postulados que utiliza la teoría cinética de los gases, son:

1) Se considera que un gas esta formado por un conjunto de partículas (átomos o moléculas) que se mueven caóticamente obedeciendo a las leyes de la mecánica Newtoniana.
2) En el sistema de partículas, se cumplen las leyes de conservación de la energía, momento lineal y momento angular.
3) Cada una de las partículas del sistema son distinguibles, unas de otras, esto es válido en la física clásica.
4) Todos los procesos físicos que se llevan a cabo en el sistema de partículas, evolucionan de un modo continuo.
5) No actúan fuerzas apreciables sobre las moléculas, excepto durante los choques

c) Atomo

Se llama así la menor partícula de un elemento químico que posee sus propiedades químicas. El átomo consta de un núcleo cargado positivamente y de electrones que se mueven en su campo coulombiano. La carga del núcleo es igual en magnitud a la carga total de los electrones. El sistema atómico más sencillo es el átomo de hidrógeno, que consta de un electrón que se mueve en el campo coulombiano de un protón.

d) Molécula

Se llama así a la partícula estable más pequeña de una sustancia dada que posee sus propiedades químicas fundamentales y que está formado por átomos idénticos o diferentes en un todo único por medio de enlaces químicos, existen dos tipos de moléculas las iónicas y las atómicas.

1) <u>Molécula iónica</u>.- Este tipo de moléculas esta formado por iones de los elementos químicos que integran la moléculas. Las moléculas iónicas son eléctricamente neutras.
2) <u>Molécula atómica</u>.- Son las moléculas cuyo estado fundamental corresponde a los estados normales de los átomos neutros. Las fuerzas que aseguran la estabilidad de las moléculas atómicas son de intercambio y su carácter es específicamente cuántico. El estado normal de un átomo es aquel que corresponde a su estado de equilibrio energético.

e) Gas ideal

Se llama así al gas que presenta o reune las siguientes características:

1) La fuerza de interacción entre sus moléculas, es pequeña (despreciable), debido a las grandes distancias existentes entre ellas.
2) Sus moléculas son de dimensiones infinitamente pequeñas del orden de 10^{-8} cm, por lo que, el volumen que ocupan las moléculas respecto del volumen del recipiente que lo contiene es muy pequeño, es decir, su densidad es muy pequeña.
3) Sus moléculas poseen movimiento caó

tico (al azar), moviéndose en trayectorias rectilíneas.

4) Los choques de las moléculas entre si y con las paredes del recipiente que lo contiene, son perfectamente elásticas, siendo estos choques de corta duración.

Ejemplo: En condiciones normales (C.N.) el hidrógeno, oxigeno, nitrógeno etc... se consideran gases ideales.

f) Gas real

Los gases reales son los que en condiciones normales (C.N.) de temperatura y presión se comportan como gases ideales, pero si la temperatura es muy baja o la presión muy alta, las propiedades de los gases reales se desvían en forma considerable de los gases ideales.

g) Gas enrarecido

Se dice que un gas está enrarecido si su densidad es tan pequeña que el recorrido libre medio (λ) de sus moléculas puede compararse con las dimensiones lineales "d" del recipiente que lo contiene. Este estado del gas también se llama vació.

h) Condiciones normales (C.N.)

Se llama así a los valores correspondientes a una temperatura de 0 ^{0}C (273 ^{0}K) y una presión de 1 atm (760 mmHg)

- En general las mediciones de los volúmenes de los gases se realizan en condiciones normales.

i) Mol (mol-kilogramo)

El mol es la unidad fundamental del Sistema Internacional de Unidades, que mide la cantidad de sustancia.

Esta definido como la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entes (partículas) como átomos hay en 0,012 kg del nucleido carbono 12.

La unidad fundamental en todo proceso químico es el átomo (si se trata de un elemento) o la molécula (si se trata de un compuesto).

- Un mol de cualquier gas ideal en C.N. ocupa aproximadamente un volumen de 22,4 litros (ó $22{,}4.10^{-3}$ m^3)
- El número de moles (n) de un gas ideal viene dado por:

$$n = \frac{m}{M}$$

siendo, (m) las masa de la sustancia expresada en kilogramos, y (M) la masa molecular o molar de la sustancia, esta cantidad es igual, a la suma de los pesos atómicos de los elementos que intervienen en la fórmula molecular.

Ejemplo: 1 mol de H_20 es igual a 18 kilogramos, pues, la masa molecular del H_20 es 18, luego 9 kg de H_20 será igual a 1/2 mol.

j) Volumen molar (V_M)

Es una magnitud física escalar, que se define, como la razón del volumen (V) del gas al número de moles contenido en él, esto es:

$$V_M = \frac{V}{n}$$

k) Volumen específico (v)

Es una magnitud física escalar, que se define, como el inverso de la densidad (ρ) del cuerpo ó sustancia, es decir:

$$v = \frac{1}{\rho}$$

- Para una sustancia homogénea el volumen específico, es igual, al volumen de dicha sustancia, cuya masa es igual a la unidad.

☞ **Unidad:** (v) se mide en m^3/kg.

ℓ) Punto crítico
Se dice que una sustancia se encuentra en equilibrio en el punto crítico, cuando desaparece la frontera bien definida entre las fases líquida y gaseosa de la sustancia. A la temperatura y presión a las que esto ocurre se les denomina temperatura crítica y presión crítica, y la densidad que alcanza la sustancia se conoce como densidad crítica.

2. LEY GENERAL DE UN GAS IDEAL

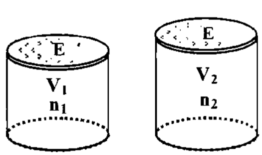
a) Ley de Avogadro
Establece la relación entre la cantidad de gas y su volumen, para una temperatura y presión constantes. La cantidad de gas se mide en moles.
Esto es, el volumen de gas es directamente proporcional a la cantidad de gas así:

- Si aumentamos la cantidad de gas, aumenta el volumen.
- Si disminuimos la cantidad de gas, el volumen disminuye.

• También, se puede expresar la ley de Avogadro, así:

$$\frac{V}{n} = k = cte.$$

es decir, el cociente entre el volumen y la cantidad de gas es constante.



Por ejemplo, en un gas contenido en un cilindro cerrado por un émbolo móvil (E), para variar el volumen del gas (V) debemos variar la cantidad de gas (n), tal que, para el estado inicial y final a presión constante y temperatura constantes, se cumple:

$$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$$

• Concluimos diciendo que: en las mismas condiciones de presión y temperatura, volúmenes iguales de cualquier gas, contienen siempre, el mismo número de moléculas.

b) Número de Avogadro (N_A)
Es el número de moléculas contenidas en 1 mol de cualquier sustancia en estado sólido, líquido o gaseoso, este valor, es igual a $6{,}02.10^{23}$.

c) La constante de Boltzman
Esta constante de la teoría cinética de gases se representa por "k", y se define como la constante de los gases (R) por unidad de molécula, esto es:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38.10^{-23}\ \frac{J}{^oK}$$

d) La constante R de los gases ideales
Es numéricamente igual al trabajo (δW) que realiza un mol de gas ideal al calentarlo un grado en un proceso de expansión isobárico (a presión constante), esto es:

$$R = \frac{\delta W}{n\,dT}$$

siendo "dT" la diferencia de temperaturas.

e) Velocidad de difusión y efusión de un gas

La velocidad de difusión o efusión de un gas a través de otro gas, viene dado por:

$$v = (\frac{3RT}{M})^{1/2}$$

siendo, "M" su masa molecular, "T" la temperatura absoluta, y "R" la constante universal de los gases.

- Velocidad de difusión es la velocidad con la que se mueve un gas a través de otro.
- Velocidad de efusión es la velocidad con la que un gas se escapa al aire a través de un orificio del recipiente que lo contiene.

f) Ley general de un gas ideal

Para un gas ideal en estado de equilibrio termodinámico, esta ecuación relaciona las variables presión (P), volumen (V) y temperatura (T), del modo siguiente:

$$PV = nRT$$

siendo, "P" la presión en (N/m^2), "V" el volumen en (m^3), "n" el número de moles, "T" la temperatura absoluta en (^0K) y $R= 8,31\ J.mol^{-1}\ ^0K^{-1}$ la constante universal de los gases.

- Para una misma masa de gas (n.R) es una constante, entonces la ecuación anterior, para dos estados diferentes "1" y "2" del gas, se escribe así:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

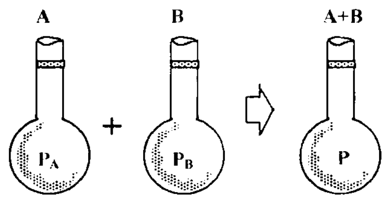
es decir, cuando se varia la presión y temperatura del gas, automáticamente cambia su volumen.

- Como, $V_1=m/\rho_1$ y $V_2=m/\rho_2$, también podemos expresar la ley de los gases ideales en función de las densidades, así

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

siendo, ρ_1 y ρ_2 las densidades del gas en los estados 1 y 2, respectivamente

g) Ley de Dalton



La presión total de una mezcla de gases ideales a volumen y temperatura constante, es igual, a la suma de las presiones de cada una de las componentes de la mezcla.

Así, la presión de una mezcla de dos gases A y B, viene dado por:

$$P = P_A + P_B$$

- Sustituyendo las expresiones de P_A y P_B, obtenidas de la ley de los gases ideales, se tiene:

$$P = \frac{RT}{V}(\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B})$$

- Se debe mencionar, que la presión creada por cada uno de los componentes de la mezcla, es independiente, de las presiones creadas por las otras componentes.
- La ecuación anterior, para una mezcla de N-componentes, se escribe así:

$$P = \frac{RT}{V}\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{M_k}$$

siendo, (m_k) la masa de la k-ésima componentes y (M_k) masa molecular de la k-ésima componentes.

- La presión parcial de la k-ésima componentes de la mezcla, es igual, al producto de la presión de la mezcla por la concentración molar de dicha componente, es decir:

$$P_k = z_k P$$

donde la concentración molar de la k-ésima componente, viene dada por:

$$z_k = \frac{m_k / M_k}{\sum_{k=1}^{N}(m_k / M_k)}$$

Ejemplo: 6 g de anhídrido carbónico (CO_2) y 5 g de óxido nitroso (N_2O) llenan un recipiente de volumen 2 000 cm^3. ¿Cuál será la presión total en el recipiente a la temperatura de 127^0 C?

Solución:

- Dado que se tiene 2 componentes, la presión total de la mezcla es:

$$P = \frac{R\,T}{V}\sum_{k=1}^{2}\frac{m_k}{M_k}$$

$$P = \frac{R\,T}{V}\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right)$$

$$P = \frac{(8{,}31.10^3)(400)}{2.10^{-3}}\left(\frac{6.10^{-3}}{44}+\frac{5.10^{-3}}{44}\right)$$

$$\clubsuit\ P = 4{,}15.10^5\frac{N}{m^2}$$

3. ECUACION FUNDAMENTAL DE LA TEORIA CINETICA DE LOS GASES

a) Energía cinética media <E$_C$>

La energía cinética media del movimiento de traslación de una molécula de un gas ideal, viene dado por:

$$< E_C >= \frac{1}{2}m < v_C >^2$$

$$< E_C >= \frac{3}{2}kT$$

siendo, (k) la constante de Boltzman, (T) la temperatura absoluta (^{0}K).

- Así, la energía cinética media es directamente proporcional a la temperatura absoluta y no depende de otra cantidad física.
- La temperatura absoluta es una medida de la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas del gas ideal.
- Esta expresión de la energía cinética media, no es válido en la región de temperaturas ultrabajas próximas al cero absoluto.
- La constante de Bolztman, se determina así:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}31 J.mol^{-1}\,{}^ok^{-1}}{6{,}022.10^{23}mol^{-1}}$$

$$k = 1{,}38.10^{-23}\ J.{}^o k^{-1}$$

b) Velocidad media aritmética <v>

La velocidad media aritmética de las N moléculas de un gas ideal, viene dado por:

$$< v >= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v_k$$

siendo, (v_k) la velocidad de la k-ésima molécula.

- Se demuestra que la expresión anterior, en función de los parámetros del gas ideal, viene dada por:

$$<v>= [\frac{8\,R\,T}{\pi\,M}]^{1/2}$$

siendo, (R) la constante universal de los gases, (T) la temperatura absoluta (^{0}k), y (M) la masa molecular o molar del gas.

c) Velocidad cuadrática media $<v_C>$

La velocidad cuadrática media de las N moléculas de un gas ideal, viene dado por:

$$< v >= [\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v_k^2]^{1/2}$$

siendo, (v_k) la velocidad de la k-ésima molécula.

- Se demuestra que la expresión anterior, en función de los parámetros del gas ideal, viene dada por:

$$<v_C>= [\frac{3R\,T}{M}]^{1/2} \quad \text{ó} \quad <v_C>= [\frac{3\,k\,T}{m}]^{1/2}$$

siendo, (m) la masa de una molécula del gas, (M) su masa molecular, y (T) la temperatura absoluta.

d) Ecuación fundamental de la teoría cinética de los gases

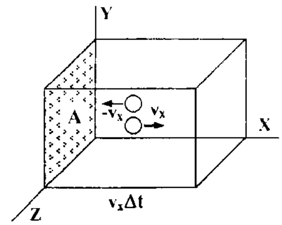
La presión ejercida por un gas ideal, sobre las paredes del recipiente que lo contiene, viene dado por:

$$P\,V = \frac{2}{3}E_C$$

siendo, (P) la presión, (V) el volumen del recipiente, y (E_C) la energía cinética total del movimiento de traslación de las (N) moléculas de gas que hay en el recipiente.

Demostración:

Consideremos el recipiente de áreas de sus bases izquierda y derecha igual a "A".



En la Fig. la variación de la cantidad de movimiento que experimenta la molécula de masa m' al chocar elásticamente con la pared del recipiente es:

$$\Delta p_x = p_x - p_{ox} = m'v_x - m'(-v_x)$$

$$\Delta p_x = 2\,m'\,v_x$$

Ahora, sea "n" el número de moléculas por unidad de volumen, y "$v_x\Delta t$" la distancia recorrida por las moléculas que se mueven en la dirección (X) durante el intervalo de tiempo "Δt", entonces el número de estas moléculas contenidas en el volumen "$v_x A\Delta t$" es:

$$N_x = n\,v_x\,A\,\Delta t$$

Como la mitad de estas moléculas se mueven en la dirección negativa del eje (-X), entonces, la variación de la cantidad de momento lineal total de las moléculas que se dirigen a la pared sombreada es:

$$\Delta P_x = \frac{1}{2}N_x\Delta p_x$$

$$\Delta P_x = (\frac{1}{2}n\,A\,v_x\,\Delta t)(2\,m'v_x)$$

De modo que, la fuerza ejercida por las moléculas sobre la pared sombreada es:

$$F_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = n\,A\,m'v_x^2$$

A su vez, como F=PA, entonces la presión sobre esta pared es:

$$N = n\,m'v_x^2 \qquad (1)$$

Ahora, como los grados de libertad que tienen las moléculas para moverse en las direcciones de los ejes X, Y y Z es la misma, el cuadrado de la magnitud de la velocidad de las moléculas del gas es:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2$$

$$v_x^2 = \frac{1}{3}v^2 \qquad (2)$$

Finalmente, reemplazando (2) en (1), y teniendo en cuenta que n=N/V, siendo "N" el número total de moléculas, obtenemos:

$$P = (\frac{N}{V})(\frac{1}{3}m'v^2)$$

$$P\,V = \frac{2}{3}(N\frac{1}{2}m'v^2)$$

$$P\,V = \frac{2}{3}E_C \qquad (3)$$

- Para un gas homogéneo (m_k=m'), las maas de todas las moléculas son iguales, pero sus velocidades (v_k, k=1,2,...) son diferentes, así, la energía cinética de las "N" moléculas es:

$$E_C = \frac{m'}{2}\sum_{k=1}^{N} v_k^2 \qquad (4)$$

- De otro lado, de la expresión de la velocidad cuadrática media, se tiene que:

$$< v_C >= [\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v_k^2]^{1/2}$$

$$\sum_{k=1}^{N} v_k^2 = N < v_C >^2 \qquad (5)$$

- Sustituyendo (4) y (5) en (3), tenemos:

$$P\,V = \frac{1}{3}N\,m' < v_C >^2$$

$$P\,V = \frac{1}{3}m < v_C >^2 \qquad (4)$$

siendo, m=Nm' la masa total del gas.

- Así, la ecuación fundamental para la presión del gas es:

$$P = \frac{1}{3}(\frac{m}{V}) < v_C >^2$$

$$P = \frac{1}{3}\rho < v_C >^2$$

siendo, ρ = m/V la densidad del gas.

- La presión al interior de un gas, se origina como resultado de los choques de las moléculas con las paredes del recipiente que contiene al gas, comunicandoles a estas su impulso.
- En un gas ideal los choques entre las moléculas no varían la presión del gas, siendo esta presión igual en todas las paredes del recipiente.
- Ahora, comparando la ec.(4) con la ecuación de los gases ideales, obtenemos la expresión para la velocidad cuadrática media, así:

$$\frac{1}{3}m < v_C >^2 = \frac{m}{M}R\,T$$

$$< v_C >= [\frac{3\,R\,T}{M}]^{1/2} = [\frac{3\,R\,T}{m'N_A}]^{1/2}$$

Como, $k = R/N_A$, entonces:

$$< v_C >= [\frac{3\,kT}{m'}]^{1/2}$$

siendo, (k) la constante de Boltzman, (m') la masa de una molécula, y (N_A) el número de Avogadro.

e) Interpretación molecular de la temperatura

También, conocida la velocidad cuadrática media, podemos expresar la energía cinética media de una molécula del gas, así:

$$\frac{1}{2}m' < v_C >^2 = \frac{3}{2}kT$$

siendo, "T" la temperatura absoluta.

- Esto es, la temperatura a la que se encuentra un gas es directamente proporcional a la energía cinética de sus moléculas. Es decir, la temperatura del gas depende del movimiento de las moléculas del gas.

f) Efecto Knudsen

Si dos recipientes que contienen un gas enrarecido a temperaturas distintas T_1 y T_2 se unen entre si mediante un tubo estrecho, entonces, la razón de las presiones en los recipientes, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de sus temperaturas, esto es:

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Demostración:

En el estado estacionario, el flujo de gas que pasa del recipiente 1 hacia el 2, debe ser igual, al que pasa de 2 hacia 1, esto es:

$$n_1 v_1 = n_2 v_2$$

siendo, n_1, n_2 los números de moléculas por unidad de volumen en ambos recipientes, y v_1, v_2 sus velocidades medias.

Ahora, como $n \propto P/T$ y $v \propto \sqrt{T}$, tenemos:

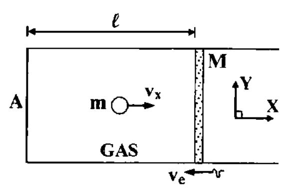
$$(C_1 \frac{P_1}{T_1})(C_2 \sqrt{T_1}) = (C_1 \frac{P_2}{T_2})(C_2 \sqrt{T_2})$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

siendo, C_1 y C_2 constantes de proporcionalidad.

4. ECUACION DE TRANSFORMACION ADIABATICA

Para deducir la ecuación de transformación adiabática consideremos un gas encerrado en un cilindro de longitud "ℓ" con un émbolo de área "A" y masa "m".



En la Fig., la molécula de masa "m" que se mueve en la dirección del eje X con una velocidad "v_x" choca elásticamente con el émbolo que se mueve con velocidad "$-v_e$", entonces, del principio de conservación de la cantidad de momento lineal, se tiene:

$$m\,v_x + M(-v_e) = m\,v_x' + M\,v_e'$$

También, del principio de conservación de la energía, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}M\,v_e^2 = \frac{1}{2}mv_x'^2 + \frac{1}{2}M\,v_e'^2$$

Reescribiendo estas ecuaciones en la forma:

$$m(v_x - v_x') = M(v_e' + v_e) \qquad (1)$$

$$m(v_x - v_x')(v_x + v_x') = M(v_e' + v_e)(v_e' - v_e)$$

Dividiendo estas ecuaciones entre si, tenemos:

$$(v_x + v_x') = (v_e' - v_e) \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) para v_x' y v_e', obtenemos:

$$v_x' = \frac{-2v_e - (1 - m/M)v_x}{1 + m/M}$$

$$v_e' = \frac{2m/M\, v_x - (1 - m/M)v_e}{1 + m/M}$$

Como, M>>m, entonces las velocidades de la molécula y el émbolo después de la colisión son:

$$v_x' = 2v_e - v_x \quad y \quad v_e' = -v_e$$

Esto es, la velocidad del émbolo no cambia, en tanto, la velocidad de la molécula aumenta, aumentando su energía cinética, esta energía ganada por la molécula rápidamente se redistribuye entre las otras moléculas del gas, de tal modo que, el gas siempre este en equilibrio.

El aumento de la energía cinética que experimenta el gas en cada colisión con el émbolo es:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m(-v_x - 2v_e)^2 - \frac{1}{2}m v_x^2$$

$$\Delta E_C = 2m v_x v_e (1 + \frac{v_e}{2v_x})$$

$$\Delta E_C \approx 2m v_x v_e \qquad (3)$$

pues, $v_e << v_x$.

Este incremento de la energía cinética en cada colisión se redistribuye entre todas las "N" moléculas del gas. La energía cinética media ganada por cada molécula $2mv_xv_e/N$ se refleja en un aumento de la temperatura del gas, esto es:

$$\frac{2m v_x v_e}{N} = \frac{3}{2}k\Delta T \qquad (4)$$

Ahora, el tiempo medio entre dos colisiones sucesivas y la velocidad del émbolo son:

$$\Delta t = \frac{2\ell}{N v_x} \quad y \quad v_e = -\frac{\Delta\ell}{\Delta t} \qquad (5)$$

siendo, "$\Delta\ell$" el desplazamiento que realiza la molécula entre dos colisiones sucesivas.

Sustituyendo (5) y (4) y teniendo en cuenta que el movimiento de la molécula en las tres direcciones es equivalente: $v^2 = 3v_x^2$, tenemos:

$$(\frac{2m v_x}{N})(-\frac{\Delta\ell}{2\ell / N v_x}) = \frac{3}{2}k\Delta T$$

$$-\frac{1}{3}m v^2 \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{3}{2}k\Delta T$$

Como, $(1/2)mv^2 = (3/2)kT$ entonces, la ecuación anterior se reduce a:

$$-kT\frac{A\Delta\ell}{A\ell} = \frac{3}{2}k\Delta T$$

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V} \quad ó \quad \frac{dT}{T} = -\frac{2}{3}\frac{dV}{V}$$

Integrando esta ecuación, obtenemos la

ecuación de la transformación adiabática, así:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = -\frac{2}{3} \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V}$$

$$\ell n(\frac{T}{T_o}) = \ell n(\frac{V_o}{V})^{2/3}$$

$$T\,V^{2/3} = T_o V_o^{2/3} = \text{cte.}$$

Como, $T = PV/nR$, entonces la ecuación anterior, también puede expresarse así:

$$P\,V^{5/3} = \text{cte.}$$

Para un gas monoatómico, la razón de los calores específicos, llamado exponente adiabático es:

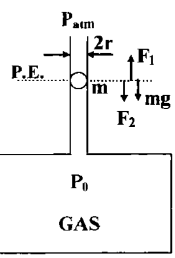
$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V}$$

$$\gamma = \frac{3R/2 + R}{3R/2} = \frac{5}{3}$$

Así, en función del exponente adiabático la ecuación de transformación adiabática es:

$$P\,V^{\gamma} = \text{cte.}$$

a) Medida del exponente adiabático de un gas



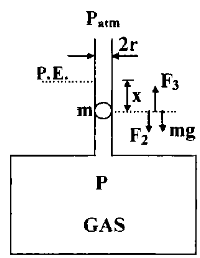
$$F_1 = \pi r^2 P_o, \quad F_2 = \pi r^2 P_{atm}$$

En un recipiente grande de volumen "V" que encierra un gas, se ubica verticalmente un tubo de radio "r", cerrando este con una bola esférica de acero de masa "m" que ajusta perfectamente el tubo. Se desplaza la bola de su posición de equilibrio, y se mide con un cronometro el período de oscilaciones. Conocido el período de oscilaciones se determina el índice adiabático del gas.

Cuando la bola está en equilibrio, la presión del gas hallamos así:

$$P_o \pi r^2 = P_{atm} \pi r^2 + m g$$

$$P_o = P_{atm} + \frac{m g}{\pi r^2}$$



Asumiendo que las oscilaciones de la bola son muy pequeñas, podemos considerar que el proceso es adiabático, por lo que, la relación entre la presión (P) y el volumen (V) es:

$$P\,V^{\gamma} = \text{cte.}$$

Cuando la bola desde su posición de equilibrio se desplaza "x" hacia abajo, el nuevo volumen del gas es $V_0 - \pi r^2 x$ y la nueva presión en el recipiente es:

$$P_o V_o^{\gamma} = P(V_o - \pi r^2 x)^{\gamma}$$

$$P = P_o(1 - \frac{\pi r^2 x}{V_o})^{-\gamma}$$

Como, $\pi.r^2 << V_o$, podemos utilizar el desarrollo $(1+x)^n \approx 1+n.x$, , obteniendo:

$$P \approx P_o(1+\frac{\pi r^2 \gamma}{V_o}x)$$

$$P - P_o = \frac{\pi r^2 \gamma P_o}{V_o}x \qquad (1)$$

La magnitud de la fuerza neta que actúa sobre la bola, cuando este se desplaza 'x" de su posición de equilibrio es:

$$F = P\pi r^2 - P_{atm}\pi r^2 - mg$$

$$F = P\pi r^2 - (P_0 - \frac{mg}{\pi r^2})\pi r^2 - mg$$

$$F = (P - P_o)\pi r^2$$

Sustituyendo la ec.(1), obtenemos:

$$F = \frac{\pi^2 r^4 \gamma P_o}{V_o}x$$

Como se observa esta fuerza del tipo de Hooke F=kx, pues es proporcional al desplazamiento "x" y esta dirigida hacia la posición de equilibrio, siendo la constante elástica $k = \pi^2 r^4 \gamma P_o / V_o$, y el período de las oscilaciones armónicas simples, igual a:

$$T = 2\pi(\frac{m}{k})^{1/2} \Rightarrow kT^2 = 4\pi^2 m$$

$$(\frac{\pi^2 r^4 \gamma P_o}{V_o})(T^2) = 4\pi^2 m$$

De aquí, obtenemos la expresión para el exponente adiabático:

$$\gamma = \frac{4m V_o}{r^4 P_o T^2}$$

Así, midiendo directamente la masa "m", el volumen "V_o", la presión "P_o" el radio "r" y el período "T", obtenemos el valor de "γ".

5. BOMBA DE VACIO

a) Definición

Es un dispositivo que se utiliza para extraer moléculas de gas de un volumen sellado creando un vació parcial. Las bombas de vació trabajan entre una presión mínima de entrada P_{min} y una presión máxima de salida P_{max}. Si la presión aumenta por encima de la presión P_{max}, el bombeo cesa.

b) Tipos

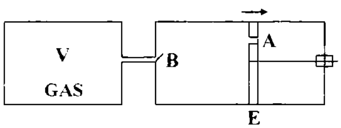
Existen diferentes tipos de bombas, algunas de las más conocidas son:

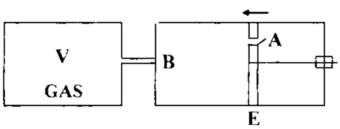
1) Rotativas de paletas.- Estas bombas son de diseño moderno y funcionan con control numérico, generalmente se utilizan para la extracción del aire y en procesos industriales.
2) Anillo líquido.- Tienen una construcción simple pero robusta, presentan una compresión casi isotérmica, funcionan sin lubricación interna, se utilizan para el procedimiento de gases y vapores.
3) Diafragma.- Es una bomba de desplazamiento que utiliza un diafragma de teflón o caucho y válvulas que se abren y cierran, para bombear un líquido.
4) Termobárica.- Llamada también bomba de combustible de «calor y presión», es un arma de guerra, que consiste en un contenedor de un líquido volátil (combustible) mezclado con un explosivo finamente pulverizado. La primera explosión de este dispositivo mezcla el combustible con la atmósfera, y la segunda explosión enciende dicha mezcla, produciendo fuego en una extensa región del espacio. Grandes son

tensa región del espacio. Grandes son los efectos destructivos sobre todo vestigio de vida e infraestructura, que produce el uso de este artefacto de guerra.

c) Funcionamiento

Para extraer aire de un deposito cerrado de volumen V que esta a la presión atmosférica P_0, conectemos a este una bomba de vació de volumen V_0.





Primer ciclo

En la Fig.1, al moverse el pistón de la bomba de vació (E) hacia la derecha, la válvula B se abre y la válvula A se cierra, pasando el aire del depósito hacia la bomba de vació.

Cuando el pistón ha completado el recorrido, el aire contenido inicialmente en el depósito de volumen V ahora ocupa un volumen $V+V_0$. Asumiendo que el proceso de expansión es isotérmico, la nueva presión del aire en el depósito es:

$$P_oV = P_1(V + V_o)$$

En la Fig.2, al moverse el pistón (E) hacia la izquierda, se cierra la válvula B y se abre la válvula A, permitiendo que el aire contenido en la bomba salga hacia la atmósfera.

Segundo ciclo

Cuando se inicia el nuevo ciclo, el aire encerrado en el depósito está a la presión P_1. Al repetirse el proceso del primer ciclo, la presión del aire contenido en el depósito terminado el segundo ciclo es:

$$P_2 = (\frac{V}{V + V_o})^2 P_o$$

Ciclo n-ésimo

Luego, de culminado el n-ésimo ciclo la presión en el depósito es:

$$P_n = (\frac{V}{V + V_o})^n P_o$$

El porcentaje en que ha variado la presión en el depósito, finalizado el n-ésimo ciclo es:

$$\eta = [1 - (\frac{V}{V + V_o})^n](100)$$

6. CAPACIDAD CALORIFICA MOLAR

a) Capacidad calorífica molar a volumen constante (C_V)

Es la cantidad de calor que se necesita suministrar (o sustraer) a un mol de sustancia para elevar (o disminuir) su temperatura en un grado, manteniendo su volumen constante, esto es:

$$C_V = \frac{\delta Q}{dT}$$

siendo, (δQ) la cantidad de calor, y (dT) la diferencia de temperaturas.

Ahora, sea "n" el número de moles del gas, entonces, la cantidad de calor que se debe suministrar (o sustraer) al gas para elevar (o disminuir) su temperatura en un grado centígrado es:

$$\delta Q' = n C_V dT \qquad (1)$$

De otro lado, del primer principio de la termodinámica, y dado que el proceso que experimenta el gas es isocoro (a volumen constante), se tiene:

$$\delta Q' = dW + dU$$

$$\delta Q' = P\,dV + d(\frac{\gamma}{2} n R T)$$

$$\delta Q' = \frac{\gamma}{2} n R\, dT \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), obtenemos la expresión de la capacidad calorífica molar a volumen constante para los gases ideales, así:

$$C_V = \frac{\gamma}{2} R$$

siendo, "R" la constante de los gases ideales, y "γ" una constante que depende de los grados de libertad que puedan tener las moléculas del gas, la cual, es propio del tipo de gas, así:

Tipo de Gas	γ
monoatómico	3
diatómico	5
triatómico	6
poliatómico	7

- Ahora, de la ecuación de los gases ideales: $R = P.M/\rho.T$, por lo que la ecuación anterior, también puede expresarse así:

$$C_V = \frac{\gamma P M}{2 \rho T}$$

siendo, (P) la presión, (T) la temperatura, (M) la masa molecular, y (ρ) la densidad.

Gas monoatómico

Como ejemplo de gas monoatómico, tenemos a los gases nobles que tienen moléculas formadas por un solo átomo. Al ser la molécula casi puntual, podemos despreciar su energía de rotación, por lo que, su energía total asumimos que es energía cinética de traslación. Así, en el espacio la molécula tiene tres grados de libertad de traslación, por lo que de acuerdo con el teorema de la equipartición $\gamma = 3$.

Para los gases reales monoatómicos también, de modo aproximado $\gamma = 3$.

Gas diatómico

En un gas diatómico la energía total puede encontrarse en forma de energía cinética de traslación y energía cinética de rotación, por lo mismo, un gas diatómico puede almacenar más energía a una temperatura dada. Para temperaturas altas, la energía de vibración de los enlaces empieza a ser importante y los gases diatómicos se desvían algo de las formulaciones obtenidas anteriormente.

Inercia térmica

Mide la dificultad con la que un cuerpo cambia su temperatura al estar en contacto con otros cuerpos a ser calentado. La inercia térmica depende de la cantidad de la masa y de la capacidad calorífica.

b) Calor específico a volumen constante

Se define como la capacidad calorífica por unidad de masa molecular, esto es:

$$c_V = \frac{C_V}{M}$$

siendo, "M" la masa molecular del gas

c) Capacidad calorífica molar a presión constante (C_P)

Es la cantidad de calor que se necesita

suministrar (ó sustraer) a una mol de una sustancia para elevar (ó disminuir) su temperatura en un grado, manteniendo su presión constante, viene dada por

$$C_P = \frac{\delta Q}{dT}$$

siendo, (δQ) la cantidad de calor, y (dT) la diferencia de temperaturas.
Ahora, sea "n" el número de moles del gas, entonces, la cantidad de calor que se debe suministrar (o sustraer) al gas para elevar (o disminuir) su temperatura en un grado centígrado es:

$$\delta Q' = n C_P dT \qquad (1)$$

De otro lado, del primer principio de la termodinámica, y dado que el proceso que experimenta el gas es isobárico (a presión constante), se tiene:

$$\delta Q' = dW + dU$$

$$\delta Q' = P\,dV + d(\frac{\gamma}{2} n R T)$$

$$\delta Q' = n R\,dT + \frac{\gamma}{2} n R\,dT$$

$$\delta Q' = (\frac{\gamma}{2} + 1) n R\,dT \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), obtenemos la expresión de la capacidad calorífica molar a presión constante para los gases ideales así:

$$C_P = (1 + \frac{\gamma}{2}) R \quad \text{o} \quad C_P = C_V + R$$

d) Calor específico a presión constante

Se define como la capacidad calorífica por unidad de masa molecular, esto es:

$$c_P = \frac{C_P}{M}$$

siendo, "M" la masa molecular del gas

e) Relación para las capacidades caloríficas

Las capacidades caloríficas de un gas ideal a presión constante (C_P) y a volumen constante (C_V) están relacionadas, así:

$$C_P - C_V = \frac{m}{M} R$$

siendo, (R) la constante universal de los gases, (m) la masa del gas, y (M) su masa molecular.

7. LEY DE DISTRIBUCION DE MAXWELL

a) La distribución de Boltzman

Para simplificar la deducción de la función de distribución de Boltzman, consideremos que nuestro sistema esta formado por cuatro partículas, con una energía total del sistema igual a $3\Delta\xi$, y que la energía que puede tener una partícula es: 0, $\Delta\xi$, $2\Delta\xi$ y $3\Delta\xi$, es decir, la energía esta discretizada.
Ahora, la energía $3\Delta\xi$ la podemos repartir entre las cuatro partículas de varias formas, así:

1) Si repartimos la energía $3\Delta\xi$ a una sola partícula, existen 4 formas diferentes de hacerlo.

1	2	3	4
$3\Delta\xi$	0	0	0
1	2	3	4
0	$3\Delta\xi$	0	0
1	2	3	4
0	0	$3\Delta\xi$	0
1	2	3	4
0	0	0	$3\Delta\xi$

2) Si a una partícula le damos la energía $\Delta\xi$, y a otra la energía $2\Delta\xi$ existen 12 formas diferentes de hacerlo.
3) Si a tres de las cuatro partículas, a cada una de ellas le damos la energía $\Delta\xi$, existen 4 formas de hacerlo. De modo que, el número total de formas en que podemos repartir la energía $3\Delta\xi$ es 20.

Las probabilidades de que ocurran cada una de estas formas son: P_1=4/20, P_2=12/20, P_3/40.

De otro lado, el número probable ($n(\xi)$) de partículas que tengan energías 0, $\Delta\xi$, $2\Delta\xi$ y $3\Delta\xi$, respectivamente, son:

$$n(0) = (3)(\frac{4}{20}) + (2)(\frac{12}{20}) + (1)(\frac{4}{20})$$

$$n(0) = \frac{40}{20}$$

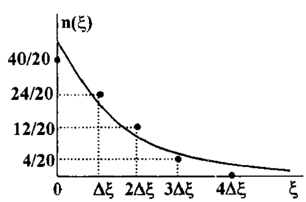
$$n(\Delta\xi) = (0)(\frac{4}{20}) + (1)(\frac{12}{20}) + (3)(\frac{4}{20})$$

$$n(2\Delta\xi) = (0)(\frac{4}{20}) + (1)(\frac{12}{20}) + (0)(\frac{4}{20})$$

$$n(2\Delta\xi) = \frac{12}{20}$$

$$n(3\Delta\xi) = (1)(\frac{4}{20}) = \frac{4}{20}$$

Ahora, representemos el número probable de estados ($n(\xi)$) en función de las energías 0, $\Delta\xi$, $2\Delta\xi$ y $3\Delta\xi$.



Obsérvese que la suma de los estados probables $n(\xi)$ nos da el número total de partículas (4).

En la Fig., si hacemos $\Delta\xi \to 0$, aumentamos el número de estados permitidos manteniendo la energía total en su valor inicial, y además si aumentamos el número de partículas, encontramos que la función discreta $n(\xi)$ se transforma en una función continua del tipo exponencial decreciente:

$$n(\xi) = A e^{-\xi/\xi_o}$$

siendo "A" y "ξ_o" constantes, que a continuación determinaremos.

En el modelo de los osciladores armónicos, se supone que las oscilaciones que realizan las moléculas son armónicas simples, entonces dividiendo la energía pesada por el número de osciladores que tiene esa energía, entre el número de osciladores, calculemos la energía media correspondiente a un oscilador, así:

$$<\xi>= \frac{\int_0^\infty \xi\, n(\xi)\, d\xi}{\int_0^\infty n(\xi)\, d\xi}$$

$$<\xi>= \frac{\int_0^\infty A\,\xi\, e^{-\xi/\xi_0} d\xi}{\int_0^\infty A\, e^{-\xi/\xi_0} d\xi}$$

$$<\xi>= \xi_o$$

Recordemos que la energía cinética media de un molécula que se mueve con tres grados de libertad es (3/2)kT, por lo que, la energía cinética media de una molécula que se mueve con un solo grado de libertad es (1/2)kT, luego, la energía media de un oscilador armónico simple será el doble de su energía cinética media, esto es:

$$<\xi>=\xi_o = kT$$

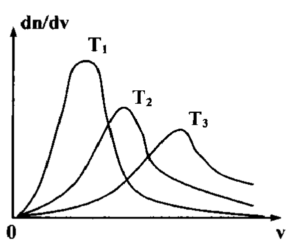
b) La distribución de Maxwell según las velocidades.

- Determina el número (dn) de moléculas por unidad de volumen a cierta temperatura con velocidades comprendidas entre <v y v+dv>, que hay en un gas ideal que contiene un total de (n_0) moléculas por unidad de volumen.
- Esta ley es aplicable a gases en estado de equilibrio termodinámico.
- La distribución de las moléculas de este gas, según sus velocidades es estacionaria, es decir, es independiente del tiempo.
- La densidad del gas es constante de modo que la distribución es homogénea.
- La expresión más utilizada de la ley de distribución de las moléculas, según los módulos de sus velocidades, viene dada por:

$$dn = n_o(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv$$

siendo (v) el módulo de la velocidad de una molécula, (m) la masa de una molécula, (k) la constante de Boltzman y (T) la temperatura absoluta.

Gráfica de <<dn/dv vs v>>



En la gráfica se observa, que al aumentar la temperatura, la velocidad más probable de las moléculas aumenta y la fracción de moléculas que tienen esta velocidad disminuye.

- La distribución de Maxwell, en función de las componentes de la velocidad en las direcciones de los ejes X, Y y Z, se expresa así:

$$dn = n_0(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{m(v_X^2+v_Y^2+v_Z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

siendo, (v_x, v_y, v_z) las componentes de la velocidad de la molécula.

Introduciendo la función de distribución de velocidades,

$$f(v_i) = (\frac{m}{2\pi kT})^{1/2} e^{-\frac{mv_i^2}{2kT}}$$

donde, (i =x, y, z)

La expresión de la distribución de Maxwell, puede expresarse, así:

$$dn = n_0 f(v_x) f(v_y) f(v_z) dv_x dv_y dv_z$$

- La distribución de Maxwell, es isótropa

Demostración

- Según la ecuación de distribución de Bolztman, el número de moléculas cuya velocidad este comprendida entre v y v+dv es:

$$dn = A\, e^{-\xi/kT} dv$$

$$dn = A\, e^{-mv^2/2kT} dv$$

Integrando esta ecuación en todo el espacio, e igualando al número total de moléculas "N", obtenemos la constante "A", así:

$$N = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

$$N = A \int_0^\infty e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_0^\infty e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_0^\infty e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z$$

$$N = A(\frac{2\pi kT}{m})^{1/2}(\frac{2\pi kT}{m})^{1/2}(\frac{2\pi kT}{m})^{1/2}$$

$$A = N(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}$$

Así, la función de distribución de Maxwell para las velocidades es:

$$dn = N(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

c) Velocidad más probable (v_P)

La expresión para la velocidad más probable, hallamos derivando la función distribución de velocidades e igualando a cero, así:

$$f(v) = \frac{dn}{dv} = 4\pi n_o(\frac{m}{2\pi kT}) e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$[\frac{df(v)}{dv}]_{v=v_P} = 0$$

$$v_P = (\frac{2kT}{m})^{1/2} = (\frac{2RT}{M})^{1/2}$$

$$v_P = (\frac{2kT}{m})^{1/2}$$

- Utilizando la velocidad más probable, la distribución de Maxwell, se expresa así:

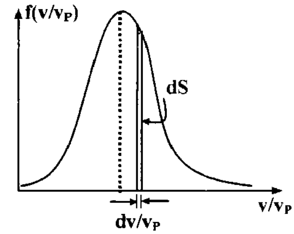
$$dn = \frac{4n_o}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2/v_P^2}(\frac{v}{v_P})\frac{dv}{v_P}$$

donde:

$$\frac{v_P}{n_o}\frac{dn}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2/v_P^2}(\frac{v}{v_P})^2 = f(\frac{v}{v_P})$$

- La fracción (dn/n_o) de moléculas del gas cuyas velocidades se hallan entre v y v+ dv es numéricamente igual al área sombreada (dS), esto es:

$$dS = \frac{dn}{n_o}$$



- El área limitada por la curva y el eje de abscisas es 1, esta área nos proporciona todos los valores posibles de velocidades desde 0 a ∞ que pueden adoptar las moléculas.

d) Velocidad media aritmética <v>

La velocidad media aritmética <v> del movimiento de traslación de las moléculas del gas ideal, para la distribución de Maxwell es:

$$< v >= \int_0^\infty v\, f(v)$$

$$< v >= \int_0^\infty n_o(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^3 dv$$

$$< v >= 4\pi n_o(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

Integrando por partes, obtenemos:

$$< v >= [\frac{8kT}{\pi m}]^{1/2} = 1{,}6\sqrt{PV}$$

e) La distribución de Maxwell según las energías

La distribución de las moléculas de un gas ideal, según sus energías determina la fracción dnE/n_0 de moléculas con energías entre E y E+dE, respecto del número total de moléculas n_0 por unidad de volumen, esto es:

$$dn_E = \frac{2n_o}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} e^{-\frac{E_C}{kT}} \sqrt{E_C}\, dE_C$$

aquí, $dnE/n_0 = f(E_C)dE_C$, siendo $f(E_C)$ la función distribución de energías de las moléculas del gas ideal.

Ejemplo: La energía cinética media $<E_C>$ de las moléculas del gas ideal, es

$$< E_C >= \int_0^{\infty} E_C f(E_C)$$

$$< E_C >= \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} E_C e^{-\frac{E_C}{kT}} dE_C$$

Integrando por partes, se obtiene:

$$< E_C >= \frac{3}{2} kT$$

8. FLUJO MOLECULAR

a) Definición

Se llama flujo molecular al número (N) de moléculas que pasan por una superficie de área (A) en cada unidad de tiempo (t), esto es:

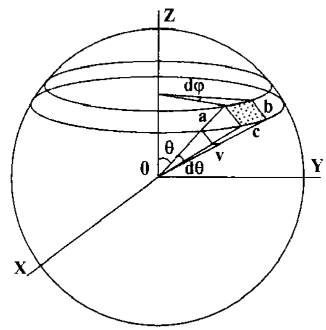
$$\Phi = \frac{N}{At}$$

b) Cálculo de flujo

Según la ecuación de distribución de Maxwell-Boltzman, el número de moléculas cuya velocidad comprendida entre $\vec{v}$ y $\vec{v} + d\vec{v}$, viene dada por:

$$dn = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}\, d\vec{v}$$

donde, la representación gráfica del elemento de volumen $d\vec{v}$ en el espacio de velocidades, en coordenadas esféricas es:

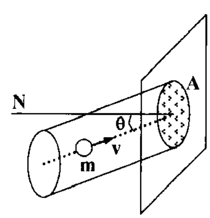


En la Fig., los lados del paralelepípedo, respectivamente son:

$$a = dv,\ b = v d\theta \text{ y } c = v\,\text{sen}\,\theta\, d\varphi$$

De modo que, el volumen de este paralelepípedo es:

$$dv = a\,b\,c = v^2 \text{sen}\,\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi$$



Ahora, el número de moléculas con velocidad $\vec{v}$ que chocan contra una porción de pared de área A en el tiempo dt, que se mueven en una dirección que forma un ángulo "θ" con la normal a la pared, son las contenidas en el volumen cilíndrico de base A y altura $v\cos\theta dt$, esto es:

$$dN = (\frac{dn}{dv})(A\, v\cos\theta\, dt$$

De modo que, el número de moléculas con velocidad $\vec{v}$, que chocan contra la pared por unidad de área y tiempo es:

$$d\Phi = \frac{dN}{A\,dt} = (\frac{dn}{dv})v\cos\theta$$

Integrando esta expresión sobre la mitad superior de la esfera para: $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ y $0 \le v \le \infty$, obtenemos el flujo total, así:

$$\int_0^\Phi d\Phi = \frac{1}{V}\int_V (v\cos\theta)dn$$

$$\Phi = \frac{1}{V}\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} N(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\bullet (v\cos\theta)\, v^2 \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta\, dv$$

$$\Phi = \frac{2\pi N}{V}(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\bullet v^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dv$$

$$\Phi = \frac{\pi N}{V}(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv$$

$$\Phi = \frac{\pi N}{V}(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}(\frac{2k^2T^2}{m^2})$$

$$\Phi = N(\frac{kT}{2\pi m})^{1/2} = \frac{N<v>}{4V}$$

c) Velocidad media de fuga de las moléculas

Si el recorrido libre medio $<\lambda>$ de las moléculas encerradas en un recipiente es grande comparado con el diámetro de un pequeño orificio hecho en la pared del recipiente, entonces, el número de moléculas que escapan por unidad de área y tiempo del recipiente de volumen V y que contiene inicialmente N moléculas, viene dado por:

$$\Phi = \frac{1}{4}\frac{N<v>}{V}$$

La rapidez con que disminuyen el número de moléculas en la unidad de tiempo es:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{N<v>}{V}A$$

De otro lado, de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$N = \frac{PV}{kT} \quad y \quad \frac{dN}{dt} = \frac{V}{kT}\frac{dP}{dt}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior, tenemos:

$$\frac{V}{kT}\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{4}<v>A\frac{PV}{kT}$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{<v>A}{V}P$$

Separando variables e integrando obtenemos la expresión para la presión en función del tiempo:

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = -\frac{1}{4}\frac{<v>A}{V}\int_0^t dt$$

$$P(t) = P_o\, e^{-\frac{1}{4}\frac{<v>A}{V}t}$$

d) Modelo simple de atmósfera

Asumiendo que la temperatura de la at

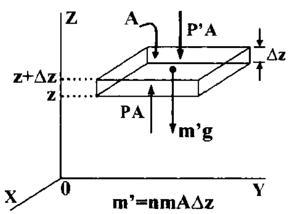
mósfera se mantiene constante con la altura, que la intensidad del campo Gravitatorio (g) se mantiene constante con la altura para regiones cercanas a la superficie terrestre y considerando que la atmósfera se comporta como un gas ideal formado por una sola componente (nitrógeno), se encuentra que la expresión de la presión atmosférica, en función de la altura (z) tiene la forma de la ecuación de distribución de Boltzman, esto es:

$$P = P_o e^{-mgz/kT}$$

siendo, "P_o" la presión atmosférica al nivel del mar, "m" la masa de una molécula, "k" la constante de Boltzman, y "T" la temperatura.

Demostración:

Representemos un pequeño volumen de atmósfera de sección de área "A" y espesor "Δz" comprendido entre las alturas z y z+Δz.



La magnitud de la fuerza de gravedad sobre este elemento de volumen de atmósfera es:

$$F_z = mg(n\,A\,\Delta z) \qquad (1)$$

siendo, "m" la masa de una molécula y "n" la densidad molecular, es decir, el número de moléculas por unidad de volumen.

De otro lado, la magnitud de la fuerza resultante de presión ejercida sobre el elemento de volumen, dirigida hacia arriba es:

$$F_z = P(z)A - P(z + \Delta z)A \qquad (2)$$

Como el elemento de volumen esta en equilibrio, igualamos las ecs.(1) y (2):

$$[P(z) - P(z+\Delta z)]A = m\,n\,g\,A\,\Delta z$$

$$\ell im_{\Delta z \to 0} \frac{P(z+\Delta z) - P(z)}{\Delta z} = -n\,m\,g$$

$$\frac{dP}{dz} = -n\,mg \qquad (3)$$

De otro lado, el número de moléculas es: $N = \mu N_A$ siendo μ el número de moles y N_A el número de Avogadro, también, la constante de los gases es: $R = k\,N_A$ siendo k la constante de Bolztman, con esto, de la ecuación de los gases ideales, tenemos:

$$P\,V = \mu R T = (\frac{N}{N_A})RT$$

$$P = (\frac{N}{V})(\frac{R}{N_A})T = n\,k\,T$$

$$n = \frac{P}{kT} \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3), separando variables e integrando, tenemos:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{mgP}{kT}$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dp}{P} = -\frac{mg}{kT}\int_0^z dz$$

$$\ell n(P)\Big|_{P_0}^{P} = -\frac{mg}{kT}(z)\Big|_0^z$$

$$P = P_o\, e^{-mg\,z/kT}$$

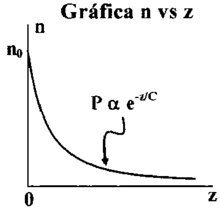
Sustituyendo en esta ecuación P=nkT, obtenemos la expresión de la densidad molecular en función de la altura (z), así:

$$n\,kT = n_o kT e^{-mg\,z/kT}$$

$$n(z) = n_o e^{-mg\,z/kT}$$

siendo, "n_o" la densidad molecular de la atmósfera, cercano a la superficie terrestre.

Gráfica n vs z



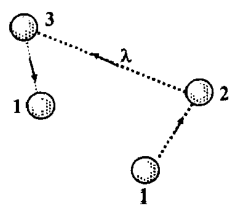
Así, hemos probado que la presión atmosférica como la densidad molecular, tienen la forma de la ecuación de distribución de Boltzman.

9. EQUIPARTICION DE LA ENERGIA

- El número de grados de libertad de un cuerpo es el número mínimo de coordenadas independientes que se utiliza para establecer completamente su posición en el espacio.
- Por ejemplo, una partícula que se mueve en línea recta, tiene un grado de libertad; del mismo modo, el movimiento de un péndulo en un plano vertical tiene dos grados de libertad; y el movimiento libre de un sólido tiene seis grados de libertad tres correspondientes al movimiento de traslación y tres al de rotación.
- En una gran variedad de problemas la molécula del gas monoatómico puede considerarse como un punto material, por lo que, se necesita de tres coordenadas para establecer su posición.
- Como las moléculas de gas se mueven caóticamente, la energía cinética media de la molécula: E=3kT/2, se reparte por igual en las tres direcciones correspondientes a los tres grados de libertad.
- Así, la ley de equipartición de la energía por grados de libertad, establece que a cada grado de libertad de una molécula le corresponde, por término medio, una misma energía cinética, igual a kT/2. Si la molécula tiene (i) grados de libertad, su energía media es:

$$< E_C >= i\,\frac{kT}{2}$$

a) Recorrido libre medio (λ)



- Las moléculas de un gas se mueven caóticamente al interior del recipiente que lo contiene, recorriendo trayectorias rectilíneas entre los choques producidas entre ellas, llamamos recorrido libre medio a la distancia media que recorre una molécula entre choque y choque.
- El recorrido libre medio del conjunto de moléculas que forman el gas depende de la temperatura y la presión a la que se encuentra el gas.
- El número de colisiones por unidad de tiempo que experimenta cada molécula, viene dada por:

$$< z >= \sqrt{2}\pi d^2 n_o < v >$$

siendo, "d" el diámetro eficaz de la molécula, "n_o" el número de moléculas de gas por unidad de volumen, "$< v >$" la velocidad media aritmética.

De modo que, la expresión para el recorrido libre medio es:

$$< \lambda >= \frac{< v >}{< z >} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_o}$$

Como, la densidad molecular (n) es proporcional a la presión del gas, para dos estados del gas 1 y 2, se encuentra que la razón de presiones es inversamente proporcional a sus recorridos libres medios, esto es:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{< \lambda_2 >}{< \lambda_1 >}$$

10. DIFUSION

a) Definición

Se llama así al proceso en el que se mezclan espontáneamente las partículas de dos gases, líquidos o sólidos en contacto. En los gases químicamente puros a temperatura constante, la difusión se produce debido a la no uniformidad de la densidad del gas.

b) Ley de Fick

Esta ley establece que: la densidad de flujo de moléculas (J) del gas, es decir, el número de de moléculas por unidad de tiempo a través de cierta superficie, es directamente proporcional al gradiente de la concentración de moléculas (n) cambiada de signo, así, para un gas que se difunde en la dirección del eje X, se tiene:

$$J = -D\frac{\partial n}{\partial x}$$

siendo "D" una constante de proporcionalidad, llamado coeficiente de difusión, el cual, caracteriza el comportamiento del soluto.

- En un gas químicamente homogéneo el fenómeno de la difusión consiste en el transporte de una masa de gas desde una región más densa hacia otra menos densa.

c) Ecuación de proceso

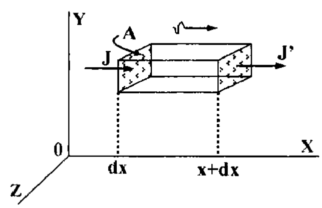
La ecuación diferencial que describe el comportamiento de la concentración molecular (n) durante el proceso de difusión de una sustancia sobre otra, viene dado por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n$$

donde, el coeficiente de difusión D se mantiene constante durante el proceso.

Demostración:

Consideremos un gas cuya concentración de moléculas (n) disminuye según el eje X, por lo que, las moléculas del gas se moverán de derecha a izquierda como se aprecia en la Fig.



La acumulación de moléculas en la unidad de tiempo que se produce en el elemento de volumen $A\,dx$, es igual, a la diferencia entre el flujo entrante JA y el saliente J'A, esto es:

$$J A - J'A = (\frac{J - J'}{dx}) A\,dx$$

$$JA - J'a = (\frac{\partial J}{\partial x})A\,dx \qquad (1)$$

También, la acumulación de moléculas en la unidad de tiempo es:

$$\frac{N}{t} = (A\,dx)\frac{\partial n}{\partial t} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), y teniendo en cuenta la ley de Fick, obtenemos la ecuación diferencial que describe el fenómeno de la difusión del gas a lo largo del eje X, así:

$$A\,dx\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial n}{\partial x})A\,dx$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial n}{\partial x})$$

Si, "D" es constante, la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

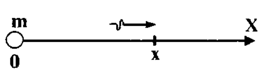
Si el gas se difunde en todo el espacio, esta ecuación se escribe, así:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n$$

siendo ∇^2 un operador diferencial vectorial de segundo orden.

d) Difusión unidimensional

Consideremos el proceso de difusión a lo largo del eje X de una masa "m" de soluto situado en el origen 0.



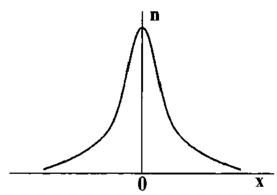
La ecuación diferencial que describe el proceso de difusión de la masa "m" de soluto es:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

La solución de esta ecuación diferencial nos proporciona la concentración de moléculas en los puntos "x" del medio en cada instante de tiempo "t", así:

$$n(x,t) = \frac{m}{2\sqrt{\pi D t}}\,e^{-x^2/4Dt}$$

Gráfica n vs x



El área bajo la curva es numéricamente igual a la masa "m" de soluto, esto es:

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,t)\,dx$$

11. MOVIMIENTO BROWNIANO Y FLUCTUACIONES

a) Movimiento Browniano

Se denomina así al movimiento caótico continuo de partículas pequeñas suspendidas en un gas ó líquido, el cual, es observado mediante un microscopio.

- El movimiento Browniano se debe a las fluctuaciones de la presión que ejercen las moléculas del gas ó líquido sobre las partículas en suspensión.
- Debido a las fluctuaciones de la presión las partículas brownianas experimentan en todas las direcciones la acción de fuerzas no equilibradas que producen el movimiento complejo de las partículas.

- El desplazamiento medio $<x>$ de la partícula browniana en una dirección arbitraria es cero, esto es:

$$<x>=0$$

- El cuadrado medio del desplazamiento $<x^2>$ es proporcional al tiempo (t) de observación de la partícula y viene dado por:

$$<x^2>=2\,D\,t$$

siendo, (D) el coeficiente de difusión de las partículas brownianas.

- Para partículas de forma esférica y radio (r), (D) viene dado por:

$$D=\frac{R\,T}{6\pi\,\eta\,r\,N_A}$$

siendo, (T) la temperatura absoluta, (R) la constante universal de los gases, (η) coeficiente de viscosidad del líquido ó gas, y (N_A) número de Avogadro.

b) Fluctuaciones

Se llama fluctuaciones a las grandes desviaciones de los valores medios de algunas cantidades físicas características del sistema, que ocurren en sistemas formados por un número relativamente pequeño de partículas.

- Si C es el valor verdadero de una cantidad física y $<C>$ su valor medio, entonces la cantidad ($\Delta C = C - <C>$) y su valor medio $<\Delta C> = <C - <C>>$ no pueden ser medidas de las fluctuación de la cantidad C. La cantidad ΔC no es constante en el tiempo, y la cantidad

$$<\Delta C>=<C>-<C>=0$$

Las desviaciones de la cantidad C respecto de $<C>$ ocurren hacia ambos lados de $<C>$.

La medida de la fluctuación es el cuadrado medio de la diferencia entre C y $<C>$, el cual recibe el nombre de fluctuación cuadrática, esto es:

$$<\Delta C^2>=<(C-<C>)^2>$$

Desarrollando esta expresión tenemos:

$$<\Delta C^2>=<C^2-2C<C>-<C>^2>$$

$$<\Delta C^2>=<C^2>-2<C><C>+<C>^2$$

$$<\Delta C^2>=<C^2>-<C>^2\geq 0$$

Si las fluctuaciones de una cantidad $<C>$ son pequeñas, las grandes discrepancias entre C y $<C>$, serán poco probables. La pequeñez de $<\Delta C^2>$ significa que el valor de C se aproxima al de $<C>$.

- La fluctuación cuadrática de la suma de N cantidades independientes $C_1, C_2, \ldots, C_N$ es igual a la suma de las fluctuaciones cuadráticas de dichas cantidades, esto es:

$$<[\Delta(\textstyle\sum_{i=1}^{N} C_i)]^2>=\textstyle\sum_{i=1}^{N}<(\Delta C_i)^2>$$

- El error relativo que se comete al sustituir C por su valor medio $<C>$, viene dado por la fluctuación relativa, esto es:

$$\delta_C=\frac{\sqrt{<(\Delta C)^2>}}{<C>}$$

c) Gas real

Es aquel gas cuya fuerza de interacción entre sus moléculas es considerable o apreciable. Para establecer las propiedades de los gases reales se utilizan varias ecuaciones de estado, diferentes de la de Clapeyrón-Mendeleiév.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Respecto de la teoría cinética de los gases, indique la afirmación correcta:

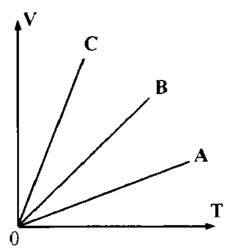
a) A la misma temperatura, las moléculas de un gas liviano tienen mayor velocidad cuadrática media que las moléculas de un gas pesado.
b) A la misma temperatura, las moléculas de un gas liviano tienen mayor energía cinética media que las moléculas de un gas pesado.
c) A la misma temperatura, las moléculas de un gas liviano tienen la misma velocidad cuadrática media que las moléculas de un gas liviano.
d) La velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas depende de la presión del gas.
e) Las moléculas de un gas liviano o de un gas pesado se quedan en reposo absoluto a 0^0 C.

02. Dos gases diferentes, de iguales volúmenes, sometidos a la misma presión y temperatura, poseen,-------------------------- :

a) La misma masa.
b) La misma masa molecular.
c) El mismo número de moles.
d) La misma velocidad cuadrática media.
e) La misma energía cinética media.

03. En la Figura, se representan tres isóbaras, para tres gases diferentes que tienen el mismo número de moles. Hallar la relación correcta, para las presiones:

a) $P_A = P_B = P_C$
b) $P_A < P_B = P_C$
c) $P_A > P_B > P_C$
d) $P_A = P_B > P_C$
e) $P_A < P_B < P_C$



04. Respecto de los electrones en los gases, indique la afirmación verdadera (V) ó falsa (F)

I. Los electrones de los átomos de hidrógeno y oxígeno son idénticos.
II. El electrón del átomo de hidrógeno tiene mayor masa que la del oxígeno.
III. El electrón del átomo de hidrógeno es más grande que la del oxígeno.

a) FVF b) FFV c) VFF d) VVF e) VFV

05. Una masa de gas de amoniaco ocupa un volumen de V_1=10 m^3 a la presión P_1 =2 atm. Hallar su volumen a la presión P_2 = 5/3 atm, manteniendo constante la temperatura.

a) 10 m^3 b) 12 m^3 c) 14 m^3 d) 16 m^3 e) 18 m^3

06. Una masa de cloro ocupa un volumen de $V_1 = 40\ cm^3$ a la temperatura de $T_1 = 47^0$ C. Hallar su volumen a la temperatura de $T_2 = 23^0$ C, manteniendo constante la presión.

a) 31 cm^3 b) 33 cm^3 c) 35 cm^3 d) 37 cm^3 e) 39 cm^3

07. Una masa de oxígeno a la temperatura T_1 y presión P ocupa un volumen V, si a la temperatura T_2 su volumen es 2V y su presión 3P/2. Hallar la razón T_2/T_1 = ?.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

08. ¿A cuántas atmósferas de presión se debe someter $V_1 = 10^{-3}\ m^3$ de un gas medido a $P_1 = 1$ atm y $T_1 = -33^0$ C, para que se comprima hasta ocupar un volumen de $V_2 = 0{,}25.10^{-3}\ m^3$ a la temperatura de $T_2 = 27^0$ C?

a) 1 atm b) 2 atm c) 3 atm d) 4 atm e) 5 atm

09. A 0^0 C y 760 mmHg, 28,0 g de nitrógeno ocupan un volumen de 22,4 lt. Hallar la masa de 10 lt de nitrógeno a 25^0 C y 810 mmHg.

a) 12,0 g b) 12,2 g c) 12,4 g d) 12,6 g e) 12,8 g

10. A 0^0 C y 1 atm, la densidad del oxígeno es 1,43 g/lt. Hallar su densidad a 17^0 C y 700 mmHg.

a) 1,14 g/lt b) 1,24 g/lt c) 1,34 g/lt d) 1,44 g/lt e) 1,54 g/lt

11. Una botella de acero de capacidad $5.10^3\ cm^3$ contiene oxígeno en C.N. ¿Cuántos gramos de oxígeno deben introducirse en la botella para elevar la presión hasta 40 atm, permaneciendo constante la temperatura? La masa molecular del oxígeno es 32.(R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 258 g b) 268 g c) 278 g d) 288 g e) 298 g

12. Hallar la masa de hidrógeno que en C.N. puede contener un tanque con una capacidad correspondiente a 4,0 g de oxígeno en C.N., si las masas moleculares del hidrógeno y oxígeno son 2 y 32, respectivamente.

a) 0,10 g b) 0,15 g c) 0,20 g d) 0,25 g e) 0,30 g

13. Hallar el volumen que ocuparían 1,216 g del gas SO_2 a 18^0 C y 755 mmHg, La masa molecular del SO_2 es 64,07. (R=8,31 J/mol.K^0) , 1 mmHg=133,3 N/m^2)

a) 418 cm^3 b) 438 cm^3 c) 458 cm^3 d) 478 cm^3 e) 498 cm^3

14. Cierta variedad del virus del tabaco tiene una masa molecular igual a 40.10^6. Hallar el número de moléculas de virus contenidas en 1 cm^3 de una solución con 0,10 mg/cm^3 de virus.($N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$)

a) $1{,}0.10^{12}$ b) $1{,}5.10^{12}$ c) $2{,}0.10^{12}$ d) $2{,}5.10^{12}$ e) $3{,}0.10^{12}$

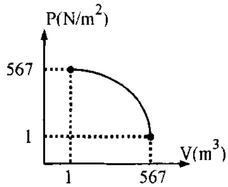
15. Hallar la masa (en kg) de aire en un aula de 5 m de altura y 200 m^2 de superficie del piso. La presión del aire es de 750 mmHg y la temperatura de 17^0 C, la masa molecular del aire es de 29 kg/kmol, R= 8,31 J/mol.K^0 y 1 mmHg=133,3 N/m^2)

a) $1{,}28.10^3$ b) $1{,}08.10^3$ c) $1{,}48.10^3$ d) $1{,}68.10^3$ e) $1{,}98.10^3$

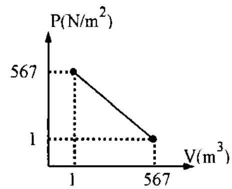
16. ¿Cuántas veces pesará más el aire que llena un local en invierno (7^0 C) que el que lo llena en verano (37^0 C)? La presión es la misma.

a) 1,1 veces b) 1,3 veces c) 1,5 veces d) 1,7 veces e) 1,9 veces

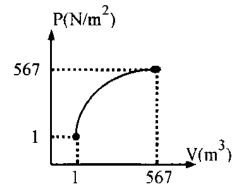
17. Trazar la isoterma de 0,5 g de hidrógeno a la temperatura de 0^0 C. (R= 8,31 J/mol.K^0)



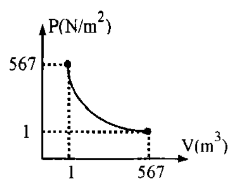
a)



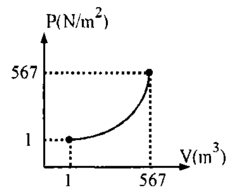
b)



c)



d)



e)

18. ¿Qué cantidad de moles habrá en una botella de 10 m^3 de capacidad a la presión de 720 mmHg y a la temperatura de 17^0 C? (1 mmHg =133,3 N/m^2, R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 318 moles b) 398 moles c) 358 moles d) 378 moles e)338 moles

19. Un recipiente A de capacidad V_1=3 lt está lleno de gas a la presión P_1=2 atm. Otro recipiente B, de capacidad V_2=4 lt, está lleno de éste mismo gas a la presión P_2=1 atm ambos recipientes están a la misma temperatura, ¿A qué presión se encontrará el gas si los recipientes A y B se unen entre si por medio de un tubo?

a) 3/2 atm b) 5/3 atm c) 7/5 atm d) 9/4 atm e) 10/7 atm

20. En un recipiente cerrado hay una cantidad de agua que ocupa la mitad de su capacidad.

Hallar la presión del vapor de está agua a la temperatura de 400^0 C, sabiendo que a esta temperatura total el agua se convierte en vapor. (R=8,31 J/mol.^{0}K , M=10^6)

a) 135 $M\frac{N}{m^2}$ b) 145 $M\frac{N}{m^2}$ c) 155 $M\frac{N}{m^2}$ d) 165 $M\frac{N}{m^2}$ e)175 $M\frac{N}{m^2}$

21. En un recipiente hay 14 g de nitrógeno y 9 g e hidrógeno a la temperatura de 10^0 C y a la presión de 10^6 N/m^2. Hallar la masa de una molécula kilogramo de la mezcla.(R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 1,6 g/mol b) 2,6 g/mol c) 3,6 g/mol d) 4,6 g/mol e) 5,6 g/mol

22. En un recipiente hay 14 g de nitrógeno y 9 g e hidrógeno a la temperatura de 10^0 C y a la presión de 10^6 N/m^2. Hallar la capacidad del recipiente. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 11 150 cm^3 b) 11 350 cm^3 c) 11 550 cm^3 d) 11 750 cm^3 e)11950 cm^3

23. En un recipiente hay una mezcla de 10 g de anhídrido carbónico (CO_2) y 15 g de nitró geno. Hallar la densidad de la mezcla a 27^0 C de temperatura y a $1,5.10^5$ N/m^2 de pre sión. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 1,85 kg/m^3 b) 1,88 kg/m^3 c) 1,91 kg/m^3 d) 1,94 kg/m^3 e)1,97 kg/m^3

24. En un recipiente cerrado lleno de aire se inyecta éter dietílico ($C_2H_5OC_2H_5$). El aire se encuentra en C.N. Cuando se volatilizó todo el éter la presión dentro del recipiente se hizo igual a 1 050 mmHg, ¿Qué cantidad de éter se inyecto en el recipiente? La capaci dad de éste último es V=2 lt. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 2,07 g b) 2,27 g c) 2,47 g d) 2,67 g e) 2,87 g

25. ¿Cuántas partículas hay en 16 g de oxígeno disociado en un 50 % ? (N_A= $6,02.10^{23}$)

a) $1,52.10^{23}$ b) $2,52.10^{23}$ c) $3,52.10^{23}$ d) $4,52.10^{23}$ e) $5,52.10^{23}$

26. Halle la velocidad cuadrática de las moléculas de aire a la temperatura de 17^0 C, consi derándolo como un gas homogéneo cuya molécula-kilogramo tiene una masa igual a M=29 kg/kmol. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 300 m/s b) 350 m/s c) 400 m/s d) 450 m/s e) 500 m/s

27. Hallar la razón entre las velocidades cuadráticas medias de las moléculas de helio y de nitrógeno a iguales temperaturas.

a) 2,05 b) 2,25 c) 2,45 d) 2,65 e) 2,85

28. ¿A qué altura la densidad del aire será igual a un 50 % de la que tiene al nivel del mar. Considérese que la temperatura es constante e igual a 0^0 C? . (M=29 ; R= 8,31J/mol.^{0}K y g=10 m/s^2)

a) 5,02 km b) 5,22 km c) 5,42 km d) 5,62 km e) 5,82 km

29. Hallar la energía del movimiento de rotación de las moléculas que hay en 1 kg de nitrógeno a la temperatura de 7^0 C. (R= 8,31 J/mol.^{0}K ; k=10^3)

a) 81 kJ b) 83 kJ c) 85 kJ d) 87 kJ e) 89 kJ

30. La energía cinética del movimiento de traslación de las moléculas de nitrógeno que se encuentran en una botella de 0,02 m^3 de capacidad es igual a 5.10^3 J y la velocidad cuadrática media de estas moléculas igual a 2.10^3 m/s. Hallar la masa de nitrógeno que hay en la botella.

a) 1,0 g b) 1,5 g c) 2,0 g d) 2,5 g e) 3,0 g

31. La energía cinética del movimiento de traslación de las moléculas de nitrógeno que se encuentran en una botella de 0,02 m^3 de capacidad es igual a 5.10^3 J y la velocidad cuadrática media de estas moléculas igual a 2.10^3 m/s. Hallar la presión a la que se encuentra el nitrógeno. (1 atm=1,013.10^5 N/m^2)

a) 1,05 atm b) 1,25 atm c) 1,45 atm d) 1,65 atm e) 1,85 atm

32. ¿Cuántas moléculas de gas diatómico ocuparán el volumen V=10 cm^3 a la presión P= 40 mmHg si la temperatura es T = 27^0 C? (k=1,38.10^{-23} J/^{0}K ; 1 mmHg=133,3 N/m^2)

a) 1,39.10^{19} b) 2,39.10^{19} c) 3,39.10^{19} d) 4,39.10^{19} e) 5,39.10^{19}

33. Hallar el calor específico del oxígeno a volumen constante (V=cte.) (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) $500\,\dfrac{J}{kg.^0K}$ b) $550\,\dfrac{J}{kg.^0K}$ c) $600\,\dfrac{J}{kg.^0K}$ d) $650\,\dfrac{J}{kg.^0K}$ e) $700\,\dfrac{J}{kg.^0K}$

34. Hallar el calor específico del oxígeno a presión constante (P=cte.) (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) $900\,\dfrac{J}{kg.^0K}$ b) $910\,\dfrac{J}{kg.^0K}$ c) $920\,\dfrac{J}{kg.^0K}$ d) $930\,\dfrac{J}{kg.^0K}$ e) $940\,\dfrac{J}{kg.^0K}$

35. Hallar la razón c_P/c_V = ? entre el calor específico a presión constante (c_P) y el calor específico a volumen constante (c_V) para el oxígeno.

a) 1,2 b) 1,4 c) 1,6 d) 1,8 e) 2,0

36. Para cierto gas diatómico el calor específico a presión constante es 3,5 cal/g.^{0}K. Hallar la masa de una molécula-kilogramo de este gas. (R= 8,31 J/mol.^{0}K ; 1 cal = 4,186 J)

a) 1,11 g/mol b) 1,33 g/mol c) 1,55 g/mol d) 1,77 g/mol e)1,99 g/mol

37. Hallar el calor específicos (en J/kg.^{0}C) a volumen constante (c_V) de un gas diatómico cuya densidad en (C.N.) es 1,43 kg/m^3. (R=8,31 J/mol.^{0}K , P_0=1,01.10^5 N/m^2)

a) 617 b) 627 c) 637 d) 647 e) 657

38. Hallar el calor específico (en J/kg.^{0}C) a presión constante (c_P) de un gas diatómico cuya densidad en condiciones normales es 1,43 kg/m^3?(R=8,31 J/mol.^{0}K , P_0=1,01.10^5 N/m^2)

a) 906 b) 916 c) 926 d) 936 e) 946

39. Hallar el calor específico (en J/kg.^{0}C) del vapor de yodo sabiendo que su grado de diso ciación es igual al 50 %. La masa de una molécula-kilogramo de yodo I_2 es igual a 254 kg/kmol. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 131 b) 133 c) 135 d) 137 e) 139

40. Un gramo-mol de oxígeno a 1 atm y 0^0 C ocupa un volumen macroscópico de 22,415 lt. Si se supone que cada molécula de oxígeno es una esfera de radio 10^{-8} cm. Hallar el volumen que ocupan realmente las moléculas del oxígeno. (N_A = 6,023.10^{23} mol^{-1})

a) 1,0 cm^3 b) 1,5 cm^3 c) 2,0 cm^3 d) 2,5 cm^3 e) 3,0 cm^3

41. Un gas ideal de masa 12 g ocupa un volumen de 12 lt a 27^0 C y a la presión atmosférica normal. Hallar el porcentaje en que disminuye su presión cuando la temperatura es de 67^0 C y el volumen de 18 lt.

a) 20 % b) 22 % c) 24 % d) 26 % e) 28 %

42. Un gas ideal de masa 12 g ocupa un volumen de 12 lt a 27^0 C y a la presión atmosférica normal. Hallar la masa de un kilogramo-molecular del gas. (R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm= 1,013.10^5 N/m^2)

a) 24,0 g/mol b) 24,2 g/mol c) 24,4 g/mol d) 24,6 g/mol e)24,8 g/mol

43. De un tanque de volumen 40 lt, que se encuentra a la presión de 20 atm, y temperatura de 35^0 C se extrae oxígeno hasta que la temperatura desciende a 12^0 C y la presión a 10 atm. Hallar la masa de oxígeno extraída del tanque. (R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm=1,013.10^5 N/m^2)

a) 407 g b) 427 g c) 447 g d) 467 g e) 487 g

44. Se comprime cierto gas de volumen 2 lt, que está a una presión de 1 atm, y una tempe ratura de -25^0 C hasta un volumen de 0,5 lt. Hallar el número de moléculas existentes en el gas. ($R=8,31$ J/mol.^{0}K , 1 atm=$1,013.10^5$ N/m^2 , $N_A=6,023.10^{23}$ mol^{-1})

a) 1.10^{22} b) 2.10^{22} c) 4.10^{22} d) 6.10^{22} e) 8.10^{22}

45. Un tanque de acero de gran tamaño contiene dióxido de carbono a 20^0 F y 10 atm de presión. Si el CO_2 se calienta hasta 200^0 F, hallar la nueva presión en el tanque.

a) 13,15 atm b) 13,35 atm c) 13,55 atm d) 13,75 atm e) 13,95 atm

46. La masa kilogramo-molecular equivalente del aire es 28,97 kg/kmol. ¿Cuántos gramos de aire se requieren para elevar la presión manométrica de una llanta de volumen 6 lt desde 0 hasta $2,172.10^5$ N/m^2, si la temperatura es de 0^0 C? ($R=8,31$ J/mol.^{0}K, 1 atm= $1,013.10^5$ N/m^2)

a) 24,0 g b) 24,2 g c) 24,4 g d) 24,6 g e) 24,8 g

47. Durante el tiempo de $\Delta t=1$ s contra la pared de un recipiente de área A=2 cm^2 chocan $n=10^{23}$ moléculas de hidrógeno (H_2) de masa $3,32.10^{-24}$ g cada una, formando un ángulo de $\theta=45^0$ con la normal a la pared, y moviéndose con una rapidez de v=1 000 m/s. Hallar la presión ejercida sobre la pared, si los choques son perfectamente elásticos.

a) 1,35 kPa b) 2,35 kPa c) 3,35 kPa d) 4,35 kPa e) 5,35 kPa

48. Una llanta de volumen $V_1=15.10^3$ cm^3 contiene aire a la presión manométrica de $P_1=4.10^5$ N/m^2, y a la temperatura de $T_1=0^0$ C. Hallar la presión manométrica del aire al interior de la llanta, cuando su temperatura sube a $T_2=27^0$ C y su volumen aumenta a $V_2=16.10^3$ cm^3. ($P_0=1,013.10^5$ N/m^2)

a) 4,1 atm b) 4,3 atm c) 4,5 atm d) 4,7 atm e) 4,9 atm

49. Hallar el valor medio de la energía cinética de las moléculas de un gas ideal a 127^0 C. ($R=8,31$ J/mol.^{0}K ; $k=1,38.10^{-23}$ J/^{0}K)

a) $7,1.10^{-21}$ J b) $7,4.10^{-21}$ J c) $7,7.10^{-21}$ J d) $8,0.10^{-21}$ J e) $8,3.10^{-21}$ J

50. Demostrar que la energía cinética media de una molécula de un gas ideal, viene dado por: $<E_C>=3kT/2$, siendo (k) la constante de Boltzman y (T) la temperatura absoluta

51. En un instante dado se observa que en un mol de gas hay 4800 moléculas con velocidades comprendidas entre 495 m/s y 505 m/s. Hallar la función de distribución de velocidades a la velocidad de v=500 m/s.

a) 400 moléculas/m.s^{-1} b) 420 moléculas/m.s^{-1} c) 440 moléculas/m.s^{-1} d) 460 moléculas/m.s^{-1} e) 480 moléculas/m.s^{-1}

52. La función de distribución para cierto sistema de partículas es: f(v)=v (500- v) partículas/(m/s), donde (v) está comprendida entre 0 m/s y 500 m/s; y la masa de cada partí cula es $m=2.10^{-12}$ kg. Hallar la velocidad media de cada partícula.

a) 150 m/s b) 200 m/s c) 250 m/s d) 300 m/s e) 350 m/s

53. La función de distribución para cierto sistema de partículas es: f(v)= v (500- v) partícu las/(m/s), donde (v) está comprendida entre 0 m/s y 500 m/s; y la masa de cada partícu la es $m=2.10^{-12}$ kg. Hallar la energía cinética media de cada partícula. ($n=10^{-9}$ nano)

a) 60 nJ b) 65 nJ c) 70 nJ d) 75 nJ e) 80 nJ

54. Para velocidades entre v=0 m/s a $v=10^3$ m/s la función distribución de velocidades por grupos de partículas es: $f(v)=(5.10^{20})\,\text{sen}(\pi\, v/10^3)$ partículas/(m/s) y f(v) = 0 para velo cidades superiores a 10^3 m/s. Hallar el número de partículas en el sistema.

a) $3,18.10^{23}$ b) $3,38.10^{23}$ c) $3,58.10^{23}$ d) $3,78.10^{23}$ e) $3,98.10^{23}$

55. Para la función de distribución de velocidades dada en el prob.54, con los mismos inter valos de velocidades, hallar la velocidad media de las partículas.

a) 400 m/s b) 450 m/s c) 500 m/s d) 550 m/s e) 600 m/s

56. Para la función de distribución de velocidades dada en el prob.54, con los mismos inter valos de velocidades, hallar la velocidad cuadrática media de las partículas.

a) 535 m/s b) 540 m/s c) 545 m/s d) 550 m/s e) 555 m/s

57. Hallar la razón v_P/v_C=? entre la velocidad más probable (v_P), y la velocidad cuadrática me-dia (v_C) para la distribución de velocidades de Maxwell.

a) 0,80 b) 0,82 c) 0,84 d) 0,86 e) 0,88

58. Asumiendo que la variación de la temperatura, según la altura es: $T=T_0-\xi h$, siendo $\xi=$ 0,006 ^{0}K/m una constante y $T_0=300$ ^{0}K la temperatura en la superficie. La masa molecu lar del aire M=28,97 g/mol, R=8,31 J/mol.^{0}K, g=9,8 m/s^2. ¿En qué porcentaje varia la presión a una altura de H=4000 m, respecto de la presión en la superficie P_0?

a) 31,8 % b) 33,8 % c) 35,8 % d) 37,8 % e) 39,8 %

59. Un globo lleno de helio a presión atmosférica y 20^0 C tiene un volumen de 12 lt. El glo bo se eleva a 4 km de altura, donde la temperatura es de -20^0 C y la presión de 0,63 atm. Hallar el volumen final del globo y el número de moles de helio que hay en el glo bo. (R=0,082 lt.atm/mol.^{0}K)

a) 16,05 lt ; 0,7 moles b) 16,85 lt ; 0,1 moles c) 16,25 lt ; 0,3 moles d) 16,65 lt ; 0,9 moles e) 16,45 lt ; 0,5 moles

60. Un recipiente de plástico contiene 12 g de oxígeno a 10 atm de presión y 25^0 C de temperatura. Debido a una fuga en el recipiente la presión desciende a 6 atm y la temperatura a 21^0C.¿ Cuántos gramos de oxígeno todavía quedan en el recipiente ? (R=0,082 lt.atm/mol.^{0}K)

a) 7,1 g b) 7,3 g c) 7,5 g d) 7,7 g e) 7,9 g

61. La parte del fondo de un lago de 35 m de profundidad está a 5^0 C mientras que la superficie está a 25^0 C. Si una burbuja de aire tiene 15 cm^3 de volumen en el fondo, hallar su volumen cuando llega a la superficie. (R=0,082 lt.atm/mol.^{0}K, g=9,8 m/s^2 , $\rho = 1\ 000$ kg/m^3)

a) 51,5 cm^3 b) 52,5 cm^3 c) 53,5 cm^3 d) 54,5 cm^3 e) 55,5 cm^3

62. La presión atmosférica normal corresponde a 760 mmHg. En un recipiente el alto vacío se tienen 5.10^{-10} mmHg de presión. Si el recipiente está a 25^0 C, hallar el número de moléculas por cm^3 en el sistema al vacío. (1 mmHg=$1,316.10^{-3}$ atm , N_A=$6,23.10^{23}$ mol^{-1} y R=0,082 lt.atm/mol.^{0}K y)

a) $1,58.10^7$ b) $1,62.10^7$ c) $1,66.10^7$ d) $1,70.10^7$ e) $1,74.10^7$

63. ¿Qué porcentaje de la velocidad de escape del oxígeno respecto del campo gravitatorio, representa la velocidad cuadrática media del oxigeno a la temperatura de 300^0 K, en la superficie de la Tierra? (Radio de la Tierra R_T = $6,37.10^6$ m , R=8,31 J/mol.^{0}K y g= 9,8 m/s^2)

a) 1,33 % b) 2,33 % c) 3,33 % d) 4,33 % e) 5,33 %

64. La densidad media de un planeta hipotético es de 5 000 kg/m^3 y su temperatura en la superficie es de 375^0 C. Si el radio del planeta es menor que r_{min}, la velocidad cuadrática media térmica será mayor que la velocidad de escape, y el planeta no podrá retener una at-mósfera de oxígeno. Hallar el valor de r_{min}. (G= $6,67.10^{-11}$ $N.m^2/kg^2$, R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 405 km b) 410 km c) 415 km d) 420 km e) 425 km

65. Hallar la densidad del aire a 15^0 C y presión normal, sabiendo que los calores específicos a presión y volumen constantes, son: c_P= 0,237 cal/g.^{0}K, c_V=0,169 cal/g.^{0}K. (1 cal=4,186 J, 1 atm=$1,013.10^5$ N/m^2)

a) 1,03 kg/m^3 b) 1,23 kg/m^3 c) 1,43 kg/m^3 d) 1,63 kg/m^3 e)1,83 kg/m^3

66. En un recipiente de 10 lts a 0^0 C se introducen 8 lts de aire a 20^0 C y 750 mmHg, y 6 lts de CO_2 a 5^0 C y 780 mmHg. Se cierra el recipiente y se calienta a 100^0 C. Hallar la pre sión en mmHg al interior del recipiente, despreciando su dilatación. Considérese R= 62,4 mmHg.lt/mol.^{0}K.

a) 1 374 b) 1 378 c) 1 382 d) 1 386 e) 1 390

67. ¿Cuál sería la lectura de un barómetro lleno de un líquido de densidad $\rho_L = 1,6$ g/ml, cuando el barómetro de mercurio indica 730 mm? La densidad del mercurio es igual a $\rho_{Hg} = 13,56$ g/ml.

a) 6,0 m b) 6,2 m c) 6,4 m d) 6,6 m e) 6,8 m

68. Hallar la masa molecular aparente de una mezcla gaseosa compuesta de 20 % de H_2, 70 % de CO_2 y 10 % de N_2O. El porcentaje se da en volumen.

a) $31,6\frac{g}{mol}$ b) $33,6\frac{g}{mol}$ c) $35,6\frac{g}{mol}$ d) $37,6\frac{g}{mol}$ e) $39,6\frac{g}{mol}$

69. Una mezcla gaseosa que contiene oxígeno y que tiene una presión de 1 atm, se somete a la acción del fósforo amarillo, para eliminar el oxígeno. De este modo se pudo determinar que la mezcla tenía un 35 % en volumen de oxígeno. ¿Cuál era la presión parcial del oxígeno del O_2 en la mezcla?

a) 0,31 atm b) 0,33 atm c) 0,35 atm d) 0,37 atm e) 0,39 atm

70. En un recipiente de capacidad 10 lt se mezclan 2 lt de N_2 a 1 atm, 5 lt de de H_2 a 5 atm, y 3 lt de CH_4 a 2 atm. Hallar la presión resultante de la mezcla.

a) 3,1 atm b) 3,3 atm c) 3,5 atm d) 3,7 atm e) 3,9 atm

71. Una mezcla de gases contenida en un recipiente a 0,5 atm tiene una composición en volumen de 15 % de N_2, 50 % de N_2O y 35 % de CO_2. Si se añade un trozo de KOH sólido para eliminar el CO_2. Hallar la presión resultante.

a) 0,300 atm b) 0,325 atm c) 0,350 atm d) 0,375 atm e) 0,400 atm

72. Una caja cúbica de lado $\ell = 20$ cm se divide en dos partes iguales por medio de una lámina. Cada mitad contiene (n) moles de un gas ideal e inicialmente la temperatura tiene el valor $T_0 = 2^0$ C Luego se calienta el gas de un lado hasta la temperatura $T_1 = 22^0$ C, manteniéndose el otro a la temperatura T_0. No hay paso de gas a través de la lámina. Hallar la fuerza total sobre la lámina divisoria. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 100nR b) 200nR c) 300nR d) 400nR e) 500nR

73. La masa molecular del CO_2 es de 44 g/mol mientras que la del O_2 es de 32 g/mol. Un tanque se mantiene a una temperatura constante contiene inicialmente 8 kg de CO_2 a 6 atm. Si se extrae el CO_2 y se reemplaza por 7 kg de O_2. Hallar la nueva presión en el tanque.

a) 7,02 atm b) 7,22 atm c) 7,42 atm d) 7,62 atm e) 7,82 atm

74. El volumen de un tanque con metano (CH_4) es de 100 lt. Si su temperatura es de 50^0 C y su presión de 12 atm. Hallar la masa del metano en el tanque.(R=0,082 atm.lt/mol.^{0}K)

a) 700 g b) 705 g c) 710 g d) 720 g e) 725 g

75. El gas de argón se difunde en C.N. de temperatura y presión a través de un agujero a una velocidad de 3 ml/min. ¿A qué velocidad se difundirá el gas de xenón a través del mismo agujero en las mismas condiciones? (M_A=39,94 g/mol ; M_{Xe}=131,3 g/mol)

a) $1{,}05\dfrac{ml}{min}$ b) $1{,}25\dfrac{ml}{min}$ c) $1{,}45\dfrac{ml}{min}$ d) $1{,}65\dfrac{ml}{min}$ e) $1{,}85\dfrac{ml}{min}$

76. Un globo de goma de masa m=55 g y radio R=30 cm se llena con hidrógeno a 730 mmHg y 25^0 C. Hallar la fuerza ascensional del globo, si la densidad del aire es igual a $\rho_A = 1{,}29$ kg/m^3, R= 8,31 J/mol.^{0}K, 1 mmHg=133,3 N/m^2 y g = 10 m/s^2.

a) 0,5 N b) 1,0 N c) 1,5 N d) 2,0 N e) 2,5 N

77. Un globo de goma de diámetro D=25 cm está lleno de hidrógeno y suspendido en el aire. Tanto el hidrógeno como el aire están en C.N. La presión dentro del globo es igual a la presión exterior. Hallar el peso total del globo. M_A=29 kg/kmol, M_H = 2 kg/kmol, R=8,31 J/mol.^{0}K, P_0=1,013.10^5 N/m^2, g = 9,8 m/s^2, m=10^3

a) 84 mN b) 87 mN c) 90 mN d) 93 mN e) 96 mN

78. En un recipiente cerrado de capacidad V=1 m^3 hay m_A= 0,9 kg de agua y m_O=1,6 kg de oxígeno. Hallar la presión en este recipiente a la temperatura de T=500^0 C si a está tem peratura toda el agua se convierte en vapor de agua. (M_O =32 kg/kmol y M_A =18 kg/kmol R= 8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm=1,013.10^5 N/m^2)

a) 6,14 atm b) 6,24 atm c) 6,34 tm d) 6,44 atm e) 6,54 atm

79. 12 g de un gas ocupan un volumen de 4.10^{-3} m^3 a la temperatura de 7^0 C. Después de ca lentar el gas a presión constante, su densidad es de 6.10^{-4} g/cm^3. ¿Hasta qué tempera tura se calentó el gas?

a) 1300 ^{0}K b) 1350 ^{0}K c) 1400 ^{0}K d) 1450 ^{0}K e) 1500 ^{0}K

80. La densidad de cierto gas a la temperatura de 10^0 C y a la presión de 2.10^5 N/m^2 es de 0,34 kg/m^3. Hallar la masa de una molécula-kilogramo de este gas. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 1 kg/kmol b) 2 kg/kmol c) 3 kg/kmol d) 4 kg/kmol e) 5 kg/kmol

81. Una molécula de nitrógeno a una velocidad de 600 m/s choca normalmente con la pared de un recipiente y rebota elásticamente en ella sin perder velocidad. Hallar el impulso de la fuerza que le transmite la molécula a la pared durante el choque. ($g= 9,8\ m/s^2$ 1 uma $=1,66.10^{-27}$ kg)

a) $2,8.10^{-23}$ N.s b) $3,6.10^{-23}$ N.s c) $5,6.10^{-23}$ N.s d) $6,4.10^{-23}$ N.s e) $7,2.10^{-23}$ N.s

82. Una molécula de nitrógeno se mueve con una velocidad de 430 m/s. Hallar la cantidad de movimiento de esta molécula. (1 uma$=1,66.10^{-27}$ kg)

a) 10^{-23} kg.m/s b) 2.10^{-23} kg.m/s c) 3.10^{-23} kg.m/s d) 4.10^{-23} kg.m/s e) 5.10^{-23} kg.m/s

83. ¿Qué cantidad de moléculas contiene 1 g de vapor de agua? ($N_A= 6,023.10^{23}\ mol^{-1}$)

a) $3,1.10^{22}$ b) $3,3.10^{22}$ c) $3,5.10^{22}$ d) $3,7.10^{22}$ e) $3,9.10^{22}$

84. ¿Qué cantidad de moléculas habrá en una habitación de capacidad 80 m^3 a la temperatura de 17^0 C y a la presión de 750 mmHg? (1 mmHg$=133,3\ N/m^2$, R= 8,31 J/mol.^{0}k)

a) 1.10^{27} b) 2.10^{27} c) 3.10^{27} d) 4.10^{27} e) 5.10^{27}

85. ¿Qué cantidad de partículas habrá en 1 g de vapor de yodo si su grado de disociación es del 50 %? La masa de una molécula kilogramo de yodo I_2 es igual a 254 kg/kmol? ($N_A=6,023.10^{23}\ mol^{-1}$)

a) $3,15.10^{21}$ b) $3,35.10^{21}$ c) $3,55.10^{21}$ d) $3,75.10^{21}$ e) $3,95.10^{21}$

86. En la explosión de una bomba atómica la temperatura alcanza $10^7\ {}^0$K. Si a esta temperatura todas las moléculas están disociadas en átomos y que éstos, a su vez, están ionizados. Hallar la velocidad cuadrática media del ión de hidrógeno. (1 uma$=1,66.10^{-27}$ kg k$=1,38.10^{-23}$ J/^{0}K)

a) $1.10^5\dfrac{m}{s}$ b) $2.10^5\dfrac{m}{s}$ c) $3.10^5\dfrac{m}{s}$ d) $4.10^5\dfrac{m}{s}$ e) $5.10^5\dfrac{m}{s}$

87. La densidad de cierto gas es de $6.10^{-2}\ kg/m^3$ y la velocidad cuadrática media de sus moléculas es de 500 m/s. Hallar la presión que este gas ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene.

a) $1.10^3\dfrac{N}{m^2}$ b) $2.10^3\dfrac{N}{m^2}$ c) $3.10^3\dfrac{N}{m^2}$ d) $4.10^3\dfrac{N}{m^2}$ e) $5.10^3\dfrac{N}{m^2}$

88. ¿Cuántas veces menor es la velocidad cuadrática media de las partículas de polvo suspenidas en el aire que la de las moléculas del aire? La masa de una partícula de polvo es de 10^{-8} g. Considerar el aire como un gas homogéneo y que la masa de su molécula kilogramo es de 29 kg/kmol. ($N_A= 6,023.10^{23}\ mol^{-1}$)

a) $1,04.10^7$ b) $1,24.10^7$ c) $1,44.10^7$ d) $1,64.10^7$ e) $1,84.10^7$

89. Hallar la cantidad de movimiento (en kg.m/s) de las moléculas de hidrógeno a una temperatura de 20^0 C. Asuma que su velocidad es su velocidad cuadrática media. (R=8,31 J/mol.^{0}K , 1uma=$1,66.10^{-27}$ kg)

a) $6,14.10^{-24}$ b) $6,34.10^{-24}$ c) $6,54.10^{-24}$ d) $6,74.10^{-24}$ e) $6,94.10^{-24}$

90. En un recipiente de capacidad 2 lt hay 10 g de oxígeno a la presión de 680 mmHg. Hallar la velocidad cuadrática media de las moléculas del gas. (1 mmHg=133,3 N/m^2)

a) $213\frac{m}{s}$ b) $223\frac{m}{s}$ c) $233\frac{m}{s}$ d) $243\frac{m}{s}$ e) $253\frac{m}{s}$

91. Unas partículas de gutagamba de diámetro D=1 μm tienen movimiento Browniano. La densidad de la gutagamba es $\rho = 1$ g/cm^3. Hallar la velocidad cuadrática media de estas partículas a la temperatura de T= 0^0 C. (N_A= $6,023.10^{23}$ mol^{-1}, R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) $4,04\frac{mm}{s}$ b) $4,24\frac{mm}{s}$ c) $4,44\frac{mm}{s}$ d) $4,64\frac{mm}{s}$ e) $4,84\frac{mm}{s}$

92. La velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas es de 450 m/s y la presión a que éste se encuentra es de 5.10^4 N/m^2. Hallar la densidad del gas en estas condiciones.

a) $0,70\frac{kg}{m^3}$ b) $0,72\frac{kg}{m^3}$ c) $0,74\frac{kg}{m^3}$ d) $0,76\frac{kg}{m^3}$ e) $0,78\frac{kg}{m^3}$

93. Hallar la velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas cuya densidad a la presión de 750 mmHg es igual a $8,2.10^{-5}$ g/cm^3. (1 mmHg = 133,3 N/m^2)

a) $1910\frac{m}{s}$ b) $1912\frac{m}{s}$ c) $1914\frac{m}{s}$ d) $1916\frac{m}{s}$ e) $1918\frac{m}{s}$

94. La velocidad cuadrática media de las moléculas de cierto gas en condiciones normales, es de 461 m/s. ¿Cuántas moléculas habrá en 1 g de este gas? (N_A= $6,023.10^{23}$ mol^{-1}, R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) $1,22.10^{22}$ b) $1,44.10^{22}$ c) $1,66.10^{22}$ d) $1,88.10^{22}$ e) $2,32.10^{22}$

95. Hallar la energía cinética del movimiento térmico de las moléculas que hay en un 1 g de aire a la temperatura de 15^0 C. Asuma que el aire es un gas homogéneo y que su masa molecular-kilogramo es de 29 kg/kmol. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 128 J b) 126 J c) 122 J d) 124 J e) 120 J

96. Hallar la energía del movimiento térmico correspondiente a la rotación de 20 g de oxígeno a la temperatura de 10^0 C. (R= 8,31 J/mol.^{0}K, $\gamma_r = 2$)

a) 1,07 kJ b) 1,27 kJ c) 1,47 kJ d) 1,67 kJ e) 1,97 kJ

97. ¿A qué temperatura será suficiente la energía cinética media del movimiento térmico de los átomos de helio para que venzan la atracción de la Tierra y abandonen para siempre la atmósfera terrestre? (k=1,38.10^{-23} J/^{0}K, 1 uma=1,66.10^{-27} Kg, G=6,67.10^{-11} N.m^2/kg^2, M_T=5,96.10^{24} kg, R_T=6,37.10^6 m)

a) 23 000^0 K b) 21 000^0 K c) 22 000^0 K d) 24 000^0 K e) 20 000^0 K

98. Hallar el grado de disociación (α) del oxígeno, si su calor específico a presión constante es de 1 050 J/kg.^{0}K. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 30 % b) 32 % c) 34 % d) 36 % e) 38 %

99. En un cuarto de volumen V=30 m^3 la temperatura subió de 15^0 C a 25^0 C.¿En cuánto cambió la masa de aire en el cuarto, si la presión atmosférica es P=1 atm?. La masa molecular-kilogramo del aire es M=28,9 kg/kmol, R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm=1,013.10^5 N/m^2.

a) 1,13 kg b) 1,23 kg c) 1,33 kg d) 1,43 kg e) 1,53 kg

100. Hallar la temperatura del gas que se encuentra en un recipiente cerrado, si la presión del gas aumenta en un 0,4 % respecto a la presión inicial al calentar el gas en 1^0 C.

a) 100^0 K b) 150^0 K c) 200^0 K d) 250^0 K e) 300^0 K

101. Hallar el calor específico a presión constante de una mezcla de gases formada por 3 kmol de argón y 2 kmol de nitrógeno. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) $665\,\frac{J}{kg.^0K}$ b) $670\,\frac{J}{kg.^0K}$ c) $675\,\frac{J}{kg.^0K}$ d) $680\,\frac{J}{kg.^0K}$ e) $685\,\frac{J}{kg.^0K}$

102. La densidad del vapor de cierta mezcla de carbono con hidrógeno es 3 g/lt para 43^0 C y 820 mmHg. Hallar la fórmula molecular de esta mezcla. (1 mmHg=133,3 N/m^2 , R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) C_4H_{14} b) C_2H_{12} c) C_3H_{14} d) C_4H_{10} e) C_5H_{12}

103. Hallar la razón c_P/c_V para la mezcla gaseosa de 8 g de helio con 16 g de oxígeno. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 1,51 b) 1,53 c) 1,55 d) 1,57 e) 1,59

104. Una bola de jebe, de paredes muy delgadas se llena con 1 g de nitrógeno y se sumerge en agua de densidad $1000\ kg/m^3$ a una profundidad de 100 m, siendo la temperatura del agua de 4^0 C. ¿Qué peso debe tener la bola, para que este en equilibrio estático? (g = 9,8 m/s^2, R=8,31 J/mol.^{0}K , M=28 kg/kmol)

a) 0,54 N b) 0,64 N c) 0,74 N d) 0,84 N e) 0,94 N

105. El calor específico a volumen constante de una mezcla gaseosa formada por una molé cula-kilogramo de oxígeno y varias moléculas-kilogramo de argón es igual a 430 J/kg.^{0}K. Hallar la masa de argón en esta mezcla.

a) 40 kg b) 45 kg c) 50 kg d) 55 kg e) 60 kg

106.10 g de oxígeno que está a la temperatura de 10^0 C y a la presión de $3.10^5\ N/m^2$ se ca lienta a presión constante llegando a ocupar un volumen de 10 lt. Hallar la cantidad de calor suministrada al gas. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 7,1 kJ b) 7,3 kJ c) 7,5 kJ d) 7,7 kJ e) 7,9 kJ

107.10 g de oxígeno que está a la temperatura de 10^0 C y a la presión de $3.10^5\ N/m^2$ se ca lienta a presión constante llegando a ocupar un volumen de 10 lt. Hallar la diferencia de las energías del movimiento térmico de las moléculas del gas, depués y antes de ser calentado. (R=8,31 J/mol.^{0}K , k=10^3)

a) 5,05 kJ b) 5,25 kJ c) 5,45 kJ d) 5,65 kJ e) 5,85 kJ

108. Un recipiente cerrado de capacidad 2 lt que contiene 12 g de nitrógeno a 10^0 C, se ca lienta hasta alcanzar la presión de 10^4 mmHg. Hallar la cantidad de calor suministrada al gas. (R=8,31 J/mol.^{0}K , 1 mmHg=133,3 N/m^2)

a) 1,15 kJ b) 2,15 kJ c) 3,15 kJ d) 4,15 kJ e) 5,15 kJ

109.¿Qué cantidad de calor se debe suministrar a 2 lt de nitrógeno, que se encuentra a la presión de $10^5\ N/m^2$, para aumentar su volumen al doble, manteniendo su presión cons tante? (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 500 J b) 550 J c) 600 J d) 650 J e) 700 J

110.¿Qué cantidad de calor se debe suministrar a 12 g de oxígeno, que se encuentra en con diciones normales, para calentarlo hasta 50^0 C a presión constante? (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 516 J b) 526 J c) 536 J d) 546 J e) 556 J

111. Se suministran 150 cal a 40 g de oxígeno, subiendo su temperatura desde 16^0 C hasta 40^0 C. ¿El gas se calentó a presión constante o a volumen constante? (1 cal=4,186 J, R=8,31 J/mol.^{0}K)

112. En un recipiente cerrado de capacidad V=10 lt hay aire a la presión de 10^5 N/m^2. ¿Qué cantidad de calor se debe suministrar al aire para que la presión en el recipiente aumente 5 veces? (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 5 kJ b) 10 kJ c) 15 kJ d) 20 kJ e) 30 kJ

113.¿Qué cantidad de anhídrido carbónico se puede calentar desde 20^0 C hasta 100^0 C con una cantidad de calor de 0,053 kcal? (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 2,5 g b) 2,8 g c) 3,1 g d) 3,4 g e) 3,7 g

114. Hallar la razón del calor específico del monóxido de carbono al calor específico del oxido nítrico, a presión constante. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 1,1 b) 1,3 c) 1,5 d) 1,7 e) 1,9

115. En un recipiente cerrado de capacidad V=2 lt hay nitrógeno de densidad $\rho = 1,4$ kg/m^3. ¿Qué cantidad de calor se debe suministrar al nitrógeno, para que su temperatura aumente en 100^0 C? (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 200 J b) 202 J c) 204 J d) 206 J e) 208 J

116. Un recipiente de volumen V=30 lt, contiene un gas ideal a la temperatura de 0^0 C y presión constante. Después que se dejó salir cierta cantidad del gas, la presión en el recipiente descendió en $\Delta P = 0,78$ atm, sin cambiar su temperatura. Hallar la masa del gas que se liberó. La densidad del gas en condiciones normales es $\rho = 1,3$ g/lt. (Po=1 atm)

a) 30,4 g b) 32,4 g c) 34,4 g d) 36,4 g e) 38,4 g

117. Dos botellas iguales se encuentran unidas por un tubo con una válvula que deja pasar el gas de una botella a la otra cuando la diferencia de presión alcanza $\Delta P \geq 1,10$ atm. Inicialmente una de las botellas estaba vacía, y en la otra había un gas ideal a la temperatura de $T_1 = 27^0$ C y a la presión de $P_1 = 1,0$ atm. Luego, ambas botellas fueron calentadas hasta la temperatura $T_2 = 107^0$ C. ¿A cuánto llegó la presión del gas en la botella que estaba vacía?

a) 0,01 atm b) 0,02 atm c) 0,04 atm d) 0,06 atm e) 0,08 atm

118. Un recipiente de volumen V=20 lt contiene una mezcla de hidrógeno y helio a la temperatura T=20^0 C, siendo su presión P=2,0 atm. La masa de la mezcla m=5,0 g, Hallar la razón (m_1/m_2) de las masas del hidrógeno (m_1) y del helio (m_2) en la mezcla. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 0,1 b) 0,3 c) 0,5 d) 0,7 e) 0,9

119. Una mezcla de $m_1 = 7,0$ g de nitrógeno y $m_2 = 11,0$ g de de gas carbónico se encuentran en un recipiente a una temperatura T=290^0 K y una presión $P_0 = 1,0$ atm. Hallar la densi dad de la mezcla, considerando que los gases son ideales. (1 atm=1,013.10^5 N/m^2, R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) $0{,}5\,\frac{kg}{m^3}$ b) $1{,}5\,\frac{kg}{m^3}$ c) $2{,}0\,\frac{kg}{m^3}$ d) $2{,}5\,\frac{kg}{m^3}$ e) $3{,}0\,\frac{kg}{m^3}$

120. Una botella de volumen V=7,5 lt que está a la temperatura de T=300^0 K contiene la si guiente mezcla de gases ideales : n_1 = 0,10 moles de oxígeno, n_2= 0,20 moles de nitróge no y n_3 = 0,30 moles de gas carbónico. Hallar la presión de la mezcla y su masa molecu lar. (R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm=1,013.10^5 N/m^2)
I) Hallar la presión de la mezcla.

a) 1,0 atm b) 1,5 atm c) 2,0 atm d) 2,5 atm e) 3,0 atm

II) Hallar la masa molecular de la mezcla.

a) 30,7 g/mol b) 32,7 g/mol c) 34,7 g/mol d) 36,7 g/mol e)38,7 g/mol

121.A cierto gas se suministran a presión constante Q_1 =160 cal elevándose su temperatura en $\Delta T_1 = 50^0$ C. Si al mismo gas se le sustraen a volumen constante Q_2 = 240 cal su tem peratura desciende en $\Delta T_2 = 100^0$ C. Hallar el número de grados de libertad de las molé culas de este gas.

a) 3 b) 5 c) 6 d) 7 e) 3 ó 7

122. En un recipiente cerrado de capacidad 3 lt hay nitrógeno a la temperatura de 27^0 C y a la presión de 3 atm. Después de calentarlo, la presión en el recipiente aumentó hasta 25 atm. Hallar la cantidad de calor suministrada al nitrógeno. (1 atm=1,013.10^5 N/m^2, R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 15,5 kJ b) 15,8 kJ c) 16,1 kJ d) 16,4 kJ e) 16,7 kJ

123. En un recipiente cerrado hay 10 g de nitrógeno a la temperatura de 7^0 C. ¿Qué cantidad de calor se debe suministrar al nitrógeno para que la velocidad cuadrática media de sus moléculas aumente al doble?

a) 6 210 J b) 6 220 J c) 6 230 J d) 6 240 J e) 6 250 J

124.A un recipiente cerrado de capacidad 2 lt que contiene helio a la temperatura de 20^0 C y a la presión de 10^5 N/m^2, se le suministra cierta cantidad de calor, elevándose su tem peratura en 100^0 C. Hallar la razón de la energía del movimiento térmico de las molécu las de helio a la cantidad de calor suministrada.

a) 1,73 b) 2,73 c) 3,73 d) 4,73 e) 5,73

125.¿Qué número máximo de moléculas de gas por cm^3 puede haber en un recipiente esféri co de diámetro D=15 cm para que las moléculas no choquen entre sí? El diámetro de las moléculas es $d=3.10^{-8}$ cm.

a) $1,7.10^{13}$ cm^{-3} b) $2,7.10^{13}$ cm^{-3} c) $3,7.10^{13}$ cm^{-3} d) $4,7.10^{13}$ cm^{-3} e) $5,7.10^{13}$ cm^{-3}

126. Hallar el recorrido libre medio de las moléculas del anhídrido carbónico a la temperatura de 100^0 C y a la presión de 0,1 mmHg. El diámetro de las moléculas de anhídrido carbónico es $D=3,2.10^{-8}$ cm. ($N_A= 6,023.10^{23}$ mol^{-1} , R= 8,31 $J/mol.^0K$, 1 mmHg=133,3 N/m^2)

a) 805 μm b) 815 μm c) 825 μm d) 835 μm e) 845 μm

127. Hallar el recorrido libre medio de las moléculas del aire en condiciones normales (C.N). El diámetro de estas moléculas es $D=3.10^{-8}$ cm. ($N_A=6,023.10^{23}$ mol^{-1}, R=8,31 $J/mol.^0K$, $P=1,013.10^5$ N/m^2)

a) 12,6 nm b) 32,6 nm c) 52,6 nm d) 72,6 nm e) 92,6 nm

128. Hallar el número medio de choques que ocurrirán en 1 s entre las moléculas del nitrógeno que se encuentra a la temperatura de 27^0 C y a la presión de 400 mmHg. ($N_A= 6,023.10^{23}$ mol^{-1} , R= 8,31 $J/mol.^0K$, 1 mmHg=133,3 N/m^2)

a) $1,5.10^9$ s^{-1} b) $2,5.10^9$ s^{-1} c) $3,5.10^9$ s^{-1} d) $4,5.10^9$ s^{-1} e) $5,5.10^9$ s^{-1}

129. ¿Cuántas veces se hará menor el número de choques que ocurren en 1 s entre las moléculas de un gas diatómico si el volumen de dicho gas se aumenta por vía adiabática al doble?

a) 2,1 b) 2,3 c) 2,5 d) 2,7 e) 2,9

130. Hallar el recorrido libre medio de las moléculas del nitrógeno a la temperatura de 17^0 C y a la presión de 10^4 N/m^2. El diámetro de las moléculas de nitrógeno es $D=3.10^{-8}$ cm. ($N_A= 6,023.10^{23}$ mol^{-1} , R=8,31 $J/mol.^0K$, $\mu = 10^{-6}$)

a) 1 μm b) 2 μm c) 3 μm d) 4 μm e) 5 μm

131. Hallar el recorrido libre medio de los átomos de helio sabiendo que su densidad es $\rho = 2,1.10^{-2}$ kg/m^3. El diámetro de estos átomos es $D=2.10^{-10}$ m. ($N_A= 6,023.10^{23}$ mol^{-1} ,$\mu = 10^{-6}$)

a) 1,8 μm b) 2,8 μm c) 3,8 μm d) 4,8 μm e) 5,8 μm

132. Hallar el tiempo medio que transcurre entre dos choques consecutivos de las moléculas del nitrógeno que se encuentra a la temperatura de 10^0 C y a la presión de 1 mmHg. El diámetro de las moléculas de hidrógeno es $D=3.10^{-10}$ m. (1 mmHg=133,3 N/m^2 , R= 8,31 $J/mol.^0K$, $N_A= 6,023.10^{23}$ mol^{-1})

a) $0,16\mu s$ b) $0,36\mu s$ c) $0,56\mu s$ d) $0,76\mu s$ e) $0,96\mu s$

133. En un recipiente hay anhídrido carbónico de densidad $\rho = 1,7$ kg/m^3; el recorrido libre medio de sus moléculas en estas condiciones es $<\lambda>=7,9.10^{-6}$ cm. Hallar el diámetro de las moléculas del anhídrido carbónico. (N_A= 6,023.10^{23} mol^{-1} , n=10^{-9})

a) 0,15 nm b) 0,35 nm c) 0,55 nm d) 0,75 nm e) 0,95 nm

134. En un cilindro vertical cerrado por ambos extremos se encuentra un émbolo de fácil movilidad, en cada lado del cual hay un mol de aire. En estado de equilibrio, cuando la temperatura es T_0=300^0 K, el volumen de la parte superior del cilindro es $\eta = 4,0$ veces mayor que el de la parte inferior. ¿A qué temperatura la relación entre estos volúmenes llegará a ser $\eta' = 3$ veces?

a) 402 ^{0}K b) 412 ^{0}K c) 422 ^{0}K d) 432 ^{0}K e) 442 ^{0}K

135. Con una bomba neumática de émbolo se evacua el aire de un recipiente de volumen V. La bomba extrae en cada ciclo un volumen ΔV =V/500. ¿Cuántos ciclos deben realizarse para que la presión en el recipiente disminuya $\xi = 2$ veces? Considerar que el proceso es isotérmico y que el gas es ideal. (Utilizar ln(x))

a) 307 ciclos b) 317 ciclos c) 327 ciclos d) 337 ciclos e) 347 ciclos

136. De un recipiente de volumen V=50 lt, se extrae aire con una rapidez de dV/dt= 5 lt/s. La presión inicial del aire en el recipiente es P_0. Asumiendo que el proceso es isotérmico y la rapidez de extracción no depende de la presión, hallar la presión en el recipiente en el instante de tiempo t=2 s.

a) 0,80 P_0 b) 0,82 P_0 c) 0,84 P_0 d) 0,86 P_0 e) 0,88 P_0

137. Un haz paralelo de moléculas de nitrógeno desplazándose a una rapidez de v=400 m/s, incide sobre una pared bajo un ángulo de $\theta = 30^0$ respecto a la normal. La concentración de las moléculas en el haz es n=0,9.10^{19} cm^{-3}. Hallar la presión que el haz ejerce sobre la pared, considerando que los choques de las moléculas con la pared son absolutamente elásticos. (1 uma=1,66.10^{-27} kg, 1 atm $\approx$ 10^5 N/m^2)

a) 1 atm b) 2 atm c) 3 atm d) 4 atm e) 5 atm

138. ¿Cuántas veces se debe expandir adiabáticamente un gas que se compone de moléculas diatómicas rígidas, para que su velocidad media cuadrática disminuya n=1,5 veces?

a) 1,6 veces b) 3,6 veces c) 5,6 veces d) 7,6 veces e) 9,6 veces

139. Hallar la velocidad más probable (v_P) de las moléculas de un gas de densidad $\rho = 1$ g/lt a la presión atmosférica normal. (P_0=1,013.10^5 N/m^2, R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 300 m/s b) 350 m/s c) 400 m/s d) 450 m/s e) 500 m/s

140. Hallar el número relativo de moléculas de un gas, cuyas velocidades difieren en no más del Δn = 1,0 % del valor de su velocidad más probable (v_P).

a) 1,02 % b) 1,22 % c) 1,44 % d) 1,66 % e) 1,88 %

141.¿Qué parte de las moléculas del oxígeno a la temperatura de 0^0 C tiene velocidades comprendidas entre 100 m/s y 110 m/s? (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 0,2 % b) 0,4 % c) 0,6 % d) 0,8 % e) 1,0 %

142. En una botella hay 2,5 g de oxígeno. Utilizando la tabla de la fracción de moléculas (ΔN/N) versus la velocidad relativa (u), hallar el número de moléculas de oxígeno cuyas velocidades son mayores que el valor de su velocidad cuadrática media. (N_A= 6,023.10^{23} mol^{-1})

u	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
ΔN/N	0,95	0,75	0,41	0,18	0,05	0,01

a) 1,9.10^{22} b) 3,9.10^{22} c) 5,9.10^{22} d) 7,9.10^{22} e) 9,9.10^{22}

143. Hallar la velocidad relativa media de las moléculas del oxígeno que se encuentra a la temperatura de 27^0 C. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 600 m/s b) 610 m/s c) 620 m/s d) 630 m/s e) 640 m/s

144. Hallar la temperatura de un gas de hidrógeno, si se sabe que la velocidad media cuadrática de sus moléculas es mayor que su velocidad más probable en Δv = 400 m/s.

a) 381^0 K b) 383^0 K c) 385^0 K d) 387^0 K e) 389^0 K

145. Utilizando la distribución de Maxwell, hallar la presión ejercida por un gas sobre una pared, si la temperatura del gas es T=127^0 C y la concentración de las moléculas igual a n=8.10^{18} cm^{-3}. (k =1,38.10^{-23} J/^{0}K , 1 atm=1,013.10^5 N/m^2)

a) 0,11 atm b) 0,22 atm c) 0,44 atm d) 0,66 atm e) 0,88 atm

SOLUCIONARIO

Solución: 01

a) La velocidad cuadrática media es:

$$< v_C >= [\frac{3RT}{M}]^{1/2}$$

Verdadero, pues, a menor masa molecular (M) gas liviano, le corresponde mayor velocidad.

b) La energía cinética media es:

$$< E_C >= \frac{3}{2}kT$$

Falso, pues, la energía cinética media es independiente de las masas moleculares.

c) Falso, por a).

d) Falso, por a)

e) Falso, las moléculas alcanzan el reposo absoluto a la temperatura de 0^0 k.

Solución: 02

- Las respuestas a cada una de las afirmaciones son:

a) Falso, pues, los gases tienen el mismo número de moles y masas moleculares diferentes, por tanto, diferentes masas.

b) Falso, por a)

c) Verdadero, por a)

d) Falso, pues, la velocidad cuadrática media depende de las masas moleculares.

e) Verdadero, pues, la energía cinética media, depende directamente de la temperatura.

Solución: 03

- De la ley general de los gases ideales, la pendiente (m) de la isobara es:

$$m = \frac{V}{T} = \frac{nR}{P}$$

Luego, para las tres isóbaras, tenemos:

$$m_C > m_B > m_A$$

$$\frac{nR}{P_C} > \frac{nR}{P_B} > \frac{nR}{P_A}$$

$$\clubsuit \; P_A > P_B > P_C \qquad \text{(C)}$$

Solución: 04

- La respuesta a cada una de las afirmaciones son:

$$\clubsuit \; V F F$$

Solución: 05

- La temperatura es constante, $T_1 = T_2$, luego, la ecuación general de los gases ideales, queda así:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

$$(2)(10) = (\frac{5}{3})V_2$$

$$\clubsuit \; V_2 = 12 \text{ m}^3 \qquad \text{(B)}$$

Solución: 06

- Como, $P_1=P_2$, la ecuación general de los gases ideales, queda así:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\frac{40}{47+273} = \frac{V_2}{23+273}$$

$$\frac{40}{320} = \frac{V_2}{296}$$

$$\clubsuit \; V_2 = 37 \text{ cm}^3 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 07

- De la ley general de los gases ideales:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{PV}{T_1} = \frac{(3P/2)(2V)}{T_2}$$

$$♣\ T_2 / T_1 = 3 \qquad \text{Ⓒ}$$

Solución: 08

- De la ley general de los gases ideales:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{(1)(10^{-3})}{-33 + 273} = \frac{P_2(0{,}25.10^{-3})}{27 + 273}$$

$$P_2 = (\frac{300}{240})(4)$$

$$♣\ P_2 = 5 \text{ atm} \qquad \text{Ⓔ}$$

Solución: 09

- De la ley general de los gases ideales:

* Cuando el gas está en el estado (1):

$$P_1 V_1 = \frac{m_1}{M} R T_1 \qquad (1)$$

* Cuando el gas está en el estado (2):

$$P_2 V_2 = \frac{m_2}{M} R T_2 \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1), tenemos:

$$\frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{m_2 T_2}{m_1 T_1}$$

$$\frac{(810)(10)}{(760)(22{,}4)} = \frac{m_2(25 + 273)}{(28)(0 + 273)}$$

$$♣\ m_2 = 12{,}2 \text{ g} \qquad \text{Ⓑ}$$

Solución: 10

- De la ley general de los gases ideales, en función de la densidad del gas:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

$$\frac{760}{(1{,}43)(0 + 273)} = \frac{700}{\rho_2(17 + 273)}$$

$$\rho_2 = (1{,}43)(\frac{700}{760})(\frac{273}{290})$$

$$♣\ \rho_2 \approx 1{,}24\ \frac{g}{lt} \qquad \text{Ⓑ}$$

Solución: 11

- De la ecuación general de los gases ideales, despejemos la masa del gas.

$$PV = \frac{m}{M} RT \quad => \quad m = \frac{MPV}{RT}$$

Así, la masa inicial del oxigeno es:

$$m_0 = \frac{(32)(1{,}0.110^5)(5.10^{-3})}{(8{,}31.10^3)(273)}$$

$$m_0 = 7{,}14.10^{-3} \text{kg}$$

Asimismo, la masa final del oxigeno es:

$$m = \frac{(32)(4{,}04.10^6)(5.10^{-3})}{(8{,}31.10^3)(273)}$$

$$m = 285{,}5.10^{-3} \text{kg}$$

Luego, la masa de oxígeno introducida será

$$\Delta m = m - m_0$$

$$\Delta m = 285{,}5.10^{-3} - 7{,}14.10^{-3}$$

$$♣\ \Delta m = 0{,}278 \text{ kg} \qquad \text{Ⓒ}$$

Solución: 12

- Sean, m, m' las masas del oxígeno y hidrógeno, respectivamente, luego, como los gases contienen el mismo número de moles, pues, están en C.N. y tienen el mismo volumen, entonces:

$$n = \frac{m'}{2} = \frac{m}{32} \Rightarrow m' = (\frac{2}{32})(4)$$

$$\clubsuit\ m' = 0{,}25 \text{ g} \qquad (D)$$

Solución: 13

• De la ley general de los gases ideales, el volumen, viene dado por:

$$V = \frac{m}{M}\frac{RT}{P}$$

$$V = (\frac{1{,}216.10^{-3}}{64{,}07})\frac{(8{,}31.10^3)(18+273)}{(755)(133{,}3)}$$

$$\clubsuit\ V \approx 0{,}458.10^{-3}\ m^3 \qquad (C)$$

Solución: 14

• El número de moléculas (N), contenidas en 1 cm^3 de virus de tabaco es:

$$N = (\frac{\rho}{M})N_A$$

$$N = (\frac{0{,}1.10^{-3}}{40.10^6})(6{,}02.10^{23})$$

$$\clubsuit\ N = 1{,}5.10^{12}\ \frac{moleculas}{cm^3} \qquad (B)$$

Solución: 15

• Transformemos la presión de mmHg a N/m^2, así:

$$P = 750 \text{ mmHg} = (750)(133{,}3\ \frac{N}{m^2})$$

$$P = 0{,}9.10^5\ \frac{N}{m^2}$$

Luego, de la ley de los gases ideales, hallemos la masa del gas, así:

$$PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow m = \frac{MPV}{RT}$$

$$m = \frac{(29)(0{,}9.10^5)(5)(200)}{(8{,}31.10^3)(17+273)}$$

$$\clubsuit\ m = 1{,}08.10^3\ kg \qquad (B)$$

Solución: 16

• Sean m, m' las masas del aire en invierno y verano y T, T' sus temperaturas, entonces como la presión por el volumen es una constante, se cumple:

$$\frac{m}{M}RT = \frac{m'}{M}RT'$$

$$\frac{mg}{m'g} = \frac{W}{W'} = \frac{T'}{T}$$

$$\frac{W}{W'} = \frac{(37+273)}{(7+273)} = \frac{310}{280}$$

$$\clubsuit\ \frac{W}{W'} = 1{,}1 \text{ veces} \qquad (A)$$

Solución: 17

• De la ley de los gases ideales, hallemos el producto de la presión por el volumen, así:

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

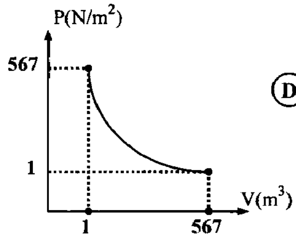
$$PV = (\frac{5.10^{-4}}{2})(8{,}31.10^3)(0+273)$$

$$PV = 567J$$

Hallemos dos puntos de la gráfica, del modo siguiente.

Para: $V = 1\ m^3$ $P = 567\ N/m^2$
Para: $V = 567\ m^3$ $P = 1\ N/m^2$

Ahora, tracemos la gráfica P-V, de tal modo, que pase por los dos puntos anteriores, y sea cóncava hacia arriba.



Solución: 18

• Transformemos la presión de mmHg a N/m^2, así:

$$P = 720\ \text{mmHg} = (720)(133{,}3\ \frac{N}{m^2})$$

$$P = 9{,}6.10^4\ \frac{N}{m^2}$$

Luego, de la ley de los gases ideales, el número de kmoles es:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{(9{,}6.10^4)(10)}{(8{,}31.10^3)(17+273)}$$

$$\clubsuit\ n = 0{,}398\ \text{kmoles} \qquad \text{B}$$

Solución: 19

• El volumen resultante de la mezcla de los gases A+B es:

$$V = 3 + 4 = 7\ \text{lt}$$

La presión del gas A, en la mezcla es:

$$P_A = (\frac{V_1}{V})P_1 = (\frac{3}{7})(2) = \frac{6}{7}\ \text{atm}$$

La presión del gas B, en la mezcla es:

$$P_B = (\frac{V_2}{V})P_2 = (\frac{4}{7})(1) = \frac{4}{7}\ \text{atm}$$

Luego, la presión de la mezcla es:

$$P = P_A + P_B = \frac{6}{7} + \frac{4}{7}$$

$$\clubsuit\ P = \frac{10}{7}\ \text{atm} \qquad \text{E}$$

Solución: 20

• Las masas de agua m y m'antes y despues de la evaporación, son iguales, así:

$$m = m'$$

$$\rho V = \rho' 2V$$

$$\rho' = \frac{1}{2}\rho = \frac{1}{2}\frac{g}{cm^3} = 500\ \frac{kg}{m^3}$$

La presión, hallamos de la ley de los gases ideales, así:

$$P = \frac{\rho}{M}RT$$

$$P = (\frac{500}{18})(8{,}31.10^3)(400+273)$$

$$\clubsuit\ P = 155.10^6\ \frac{N}{m^2} \qquad \text{C}$$

Solución: 21

• Según, la ley de Dalton, la presión de la mezcla, viene dado por:

$$P = (\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2})\frac{RT}{V} \qquad (1)$$

Sea, M la masa molecular de la mezcla, entonces, de la ley de los gases ideales, se tiene:

$$P = \frac{(m_1+m_2)}{M}\frac{RT}{V} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), y despejando M:

$$M = \frac{m_1 + m_2}{(m_1/M_1) + (m_2/M_2)}$$

$$M = \frac{14+9}{(14/28)+(9/2)} = \frac{23}{5}$$

$$\clubsuit \ M = 4{,}6 \ \frac{kg}{kmol} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 22

- De la ec.(2), del problema anterior, el volumen del recipiente es:

$$V = \frac{m_1 + m_2}{M}\frac{RT}{P}$$

$$V = (\frac{23.10^{-3}}{4{,}6})\frac{(8{,}31.10^3)(10+273)}{10^6}$$

$$\clubsuit \ V = 11{,}75.10^{-3} m^3 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 23

- Del problema anterior, la densidad de la mezcla es:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{(m_1/M_1)+(m_2/M_2)}\frac{P}{RT}$$

$$\rho = \frac{(10+15)}{(10/44)+(15/28)}\frac{(1{,}5.10^5)}{(8{,}31.10^3)(300)}$$

$$\clubsuit \ \rho = 1{,}97 \ \frac{kg}{m^3} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 24

- Transformemos las presiones del aire P_1 y de la mezcla (aire+éter) de mmHg a N/m^2, así:

$$P_1 = 1atm = 1{,}01.10^5 \frac{N}{m^2}$$

$$P = 1050 \ mmHg = 1{,}39.10^5 \frac{N}{m^2}$$

$$M_2 = (4)(12) + (1)(16) + (10)(1) = 74$$

Ahora, sea P_2 la presión parcial del éter, entonces, según la ley de Dalton, se cumple

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = P_1 + \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V}$$

$$m_2 = (P - P_1)\frac{M_2 V}{RT}$$

$$m_2 = (1{,}39.10^5 - 1{,}01.10^5)\frac{(74)(2.10^{-3})}{(8{,}31.10^3)(273)}$$

$$\clubsuit \ m_2 = 2{,}47.10^{-3} \ kg \qquad \text{(C)}$$

Solución: 25

- Sea, "α" el grado de disociación, entonces, el número de moles de oxígeno atómico es:

$$n_1 = \alpha \frac{m}{M/2}$$

El nro. de moles de oxígeno molecular es:

$$n_2 = (1-\alpha)\frac{m}{M}$$

El nro. total de moles en el recipiente es:

$$n = n_1 + n_2$$

$$n = (1+\alpha)\frac{m}{M}$$

Luego, el número total de partículas, que hay en el recipiente es:

$$N = n \, N_A$$

$$N = (1+\frac{1}{2})(\frac{16}{32})(6{,}02.10^{23})$$

$$\clubsuit \ N = 4{,}52.10^{23} \ \text{partículas} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 26

- La velocidad cuadrática de las moléculas de aire, viene dado por:

$$v_C = [\frac{3\,RT}{M}]^{1/2}$$

$$v_C = [\frac{(3)(8{,}31.10^3)(290)}{29}]^{1/2}$$

$$v_C = [25.10^4]^{1/2}$$

$$♣\ v_C \approx 500\ \frac{m}{s} \qquad (E)$$

Solución: 27

• La velocidad cuadrática media de las moléculas de hidrógeno, viene dado por:

$$v_{C,H2} = [\frac{3\,RT}{M_{H2}}]^{1/2}$$

La velocidad cuadrática media de las moléculas de nitrógeno, viene dado por:

$$v_{C,N} = [\frac{3\,RT}{M_N}]^{1/2}$$

Luego, la razón de las velocidades cuadráticas medias es:

$$\frac{v_{C,H2}}{v_{C,N}} = [\frac{M_N}{M_{H2}}]^{1/2} = [\frac{14}{2}]^{1/2}$$

$$♣\ \frac{v_{C,H2}}{v_{C,N}} = 2{,}65 \qquad (D)$$

Solución: 28

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos la densidad del aire, así:

$$P\,V = \frac{m}{M}RT \quad => \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

De otro lado, como la presión disminuye según la altura, la ecuación que describe está disminución es:

$$\frac{dP}{dh} = -\rho\, g$$

Sustituyendo la densidad (ρ), separando variables, e integrando:

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{P\,M}{RT}g$$

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}\int_0^h dh$$

$$\ell n(\frac{P}{P_0}) = -\frac{M\,g}{RT}h$$

Así, la presión en función de la altura, viene dado por:

$$P_h = P_0\, e^{-\frac{Mg\,h}{RT}} \qquad (1)$$

siendo, P_0 la presión al nivel del mar.

De otro lado, la ley general de los gases ideales a temperatura constante, se escribe así:

$$\frac{P_h}{\rho_h} = \frac{P_0}{\rho_0} \qquad (2)$$

De (2) en (1), tenemos:

$$\frac{P_0\, e^{-\frac{Mg\,h}{RT}}}{\rho_h} = \frac{P_0}{\rho_0}$$

Simplificando, y por dato $\rho_h / \rho_0 = 1/2$:

$$e^{-\frac{Mg\,h}{RT}} = 2$$

Tomando logaritmo a ambos miembros y despejando (h):

$$h = \frac{\ell n(2)RT}{Mg}$$

$$h = \frac{\ell n(2)(8{,}31.10^3)(273)}{(29)(10)}$$

$$\clubsuit\ h = 5{,}42\ \text{km} \qquad \text{C}$$

Solución: 29

• La energía de rotación de las moléculas de nitrógeno, viene dado por:

$$E_r = \frac{\gamma_r}{2}\frac{m}{M}RT$$

$$E_r = (\frac{2}{2})(\frac{1}{28})(8{,}31.10^3)(280)$$

$$\clubsuit\ E_r = 83{,}1.10^3\,J \qquad \text{B}$$

Solución: 30

• La energía cinética de traslación en función de la velocidad cuadrática media es:

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v_C^2 \quad => \quad m = \frac{2\,E_C}{v_C^2}$$

$$m = \frac{(2)(5.10^3)}{4.10^6} = 2{,}5.10^{-3}\ \text{kg}$$

$$\clubsuit\ m = 2{,}5\ \text{g} \qquad \text{D}$$

Solución: 31

• La presión a que se encuentra el nitrógeno, viene dado por:

$$P = \frac{2\,E_C}{3V} = \frac{(2)(5.10^3)}{(3)(0{,}02)}$$

$$P = 1{,}65.10^5\ \frac{N}{m^2} \qquad \text{D}$$

Solución: 32

• Transformemos la presión de mmHg a N/m^2, así:

$$P = 40\ \text{mmHg} = (40)(133{,}3\ \frac{N}{m^2})$$

$$P = 5{,}33.10^3\ N/m^2$$

Luego, el número de moléculas de gas diatómico es:

$$N = \frac{PV}{kT} = \frac{(5{,}33.10^3)(10^{-5})}{(1{,}28.10^{-23})(300)}$$

$$N \approx 1{,}39.10^{19}\ \text{moléculas} \qquad \text{A}$$

Solución: 33

• Como el gas es diatómico, $\gamma = 5$, luego, su calor específico a volumen constante es:

$$c_V = \frac{\gamma}{2}\frac{R}{M} = (\frac{5}{2})(\frac{8{,}31.10^3}{32})$$

$$c_V \approx 650\ \frac{J}{kg.^0k} \qquad \text{B}$$

Solución: 34

• Como el gas es diatómico, $\gamma = 5$, luego, su calor específico a presión constante es:

$$c_P = c_V + \frac{R}{M}$$

$$c_P = (\frac{\gamma}{2} + 1)\frac{R}{M}$$

$$c_P = (\frac{5}{2} + 1)(\frac{8{,}31.10^3}{32})$$

$$\clubsuit\ c_P \approx 910\ \frac{J}{kg.^0k} \qquad \text{B}$$

Solución: 35

• Como el oxígeno es diatómico, $\gamma = 5$, su calor específico a volumen constante es:

$$c_V = \frac{\gamma}{2}\frac{R}{M} \qquad (1)$$

De otro lado, su calor específico a volumen constante es:

$$c_P = (\frac{\gamma}{2}+1)\frac{R}{M} \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1), obtenemos:

$$\frac{c_P}{c_V} = \frac{\gamma+2}{\gamma} = \frac{5+2}{5}$$

$$\clubsuit \ \frac{c_P}{c_V} = \frac{7}{5} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 36

• Transformemos el calor específico (c_P) de cal/g.^{0}k a J/kg.^{0}C, así:

$$c_P = 3{,}5\frac{\text{cal}}{\text{g.}^0\text{k}} = (3{,}5)(4{,}186.10^3\frac{\text{J}}{\text{kg.}^0\text{k}})$$

$$c_P = 1{,}47.10^4 \ \text{J/kg.}^o\text{k}$$

De la ec.(2) del problema anterior, el calor específico a P=cte. es:

$$c_P = (\frac{\gamma}{2}+1)\frac{R}{M}$$

$$M = (\frac{\gamma}{2}+1)\frac{R}{c_P}$$

$$M = (\frac{5}{2}+1)(\frac{8{,}31.10^3}{1{,}47.10^4})$$

$$\clubsuit \ M \approx 1{,}99\ \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 37

• El calor específico a volumen constante viene dado por:

$$c_V = \frac{\gamma R}{2M} \qquad (1)$$

De otro lado, de la ley de los gases ideales, la densidad del gas es:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}$$

$$\frac{R}{M} = \frac{P}{\rho T} \qquad (2)$$

De (2) en (1), obtenemos el calor específico a volumen constante:

$$c_V = \frac{\gamma}{2}\frac{P}{\rho T} = \frac{(5)(1{,}01.10^5)}{(2)(1{,}43)(273)}$$

$$\clubsuit \ c_V \approx 647 \ \text{J/kg.}^o\text{k} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 38

• Según teoría, el calor específico a presión constante es:

$$c_P = c_V + \frac{R}{M}$$

$$c_P = (\frac{\gamma}{2}+1)\frac{P}{\rho T}$$

$$c_P = (\frac{5}{2}+1)\frac{(1{,}01.10^5)}{(1{,}43(273)}$$

$$\clubsuit \ c_P \approx 906\ \frac{\text{J}}{\text{kg.}^0\text{k}} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 39

• La cantidad de calor (Q) necesaria para calentar α m/(M/2) moléculas-kg de yodo atómico y (1-α)m / M moléculas-kg de yodo molecular a presión constante es :

$$Q = \alpha\frac{m}{M/2}C'_P\Delta T + (1-\alpha)\frac{m}{M}C''_P\Delta T \qquad (1)$$

siendo, C'_P el calor del gas monoatómico, y C''_P el calor molecular del gas diatómico.

También, se sabe que la cantidad de calor, viene dado por:

$$Q = \frac{m}{M} C_P \Delta T \qquad (2)$$

siendo, C_P el calor molecular de la mezcla. Igualando (1) con (2), y despejando C_P:

$$C_P = 2\alpha C'_P + (1-\alpha) C''_P$$

Ahora, como $C_P = M c_P$, entonces:

$$c_P = 2\alpha c'_P + (1-\alpha) c''_P \qquad (3)$$

De otro lado, del problema anterior:

$$c_P = (\frac{\gamma}{2} + 1)\frac{R}{M}$$

De esta expresión calculamos c'_P y c''_P :

$$c'_P = (\frac{3}{2}+1)\frac{8{,}31 10^3}{254} = 81{,}79 \frac{J}{kg.^0 k}$$

$$c''_P = (\frac{5}{2}+1)\frac{8{,}31 10^3}{254} = 114{,}5 \frac{J}{kg.^0 k}$$

Sustituyendo en (3), obtenemos:

$$c_P = (2)(\frac{1}{2})(81{,}79) + (1-\frac{1}{2})(114{,}5)$$

$$c_P = 81{,}79 + 57{,}2$$

$$\clubsuit \quad c_P = 139 \text{ J/kg.}^o\text{k} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 40

• Como 1 mol-gramo de oxígeno en C.N. tiene $N_A = 6{,}023.10^{23}$ moléculas, entonces, el volumen que ocupan estas moléculas es:

$$V = N_A(\frac{4}{3}\pi r^3)$$

$$V = (6{,}023.10^{23})(\frac{4}{3}\pi)(10^{-8})$$

$$\clubsuit \quad V = 2{,}523 \text{cm}^3 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 41

• De la ecuación de los gases ideales, para dos estados diferentes, hallemos la presión final, así:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P V}{T}$$

$$\frac{(1)(12)}{27+273} = \frac{P(18)}{67+273}$$

$$P = 0{,}76 \text{ atm}$$

Luego, el porcentaje en que disminuye la presión del gas es:

$$\eta = (\frac{P_0 - P}{P_0})(100)$$

$$\eta = (\frac{1{,}0 - 0{,}76}{1{,}0})(100)$$

$$\clubsuit \quad \eta = 24 \% \qquad \text{(C)}$$

Solución: 42

• De la ecuación de los gases ideales, la masa kilogramo-molecular es:

$$M = \frac{m R T}{P V}$$

$$M = \frac{(12.10^{-3})(8{,}31.10^3)(300)}{(1{,}013.10^5)(12.10^{-3})}$$

$$\clubsuit \quad M = 24{,}6 \frac{kg}{kmol} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 43

• De la ley de los gases ideales, hallemos el número de moles que inicialmente hay en el tanque, así:

$$n = \frac{P V}{R T} = \frac{(20)(1{,}013.10^5)(40.10^{-3})}{(8{,}31.10^3)(308)}$$

$$n = 0{,}0317 \text{ kmoles}$$

Asimismo, el número de moles que quedan en el tanque, luego de extraer una cierta cantidad de oxígeno es:

$$n' = \frac{P' V'}{R T'} = \frac{(10)(1{,}013.10^5)(40.10^{-3})}{(8{,}31.10^3)(285)}$$

$$n' = 0{,}0171 \text{ kmoles}$$

De modo que, el número de moles de oxígeno extraídas del tanque es:

$$\Delta n = n - n' = 0{,}0146 \text{ kmoles}$$

Luego, la masa de oxígeno extraída del tanque es:

$$m = \Delta n\, M = (0{,}0146)(32)$$

$$\clubsuit\ m = 0{,}467 \text{ kg} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 44

• De la ley de los gases ideales, hallemos el número de moles, así:

$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} = \frac{(1{,}013.10^5)(2.10^{-3})}{(8{,}31.10^3)(-25+273)}$$

$$n = 0{,}098.10^{-3} \text{ kmoles} = 0{,}098 \text{ moles}$$

Luego, el número de moléculas que hay en el gas es:

$$N = n\, N_A = (0{,}098)(6{,}023.10^{23})$$

$$\clubsuit\ N = 5{,}9.10^{22} \text{ moléculas} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 45

• Recordemos que la relación de transformación entre las escalas Fahreinheit y Kelvin es:

$$^0K = \frac{5}{9}(^0F - 32) + 273$$

Así, las temperaturas inicial y final del gas en la escala Kelvin, son:

$$T_0 = \frac{5}{9}(20-32) + 273 = 266{,}33\,^0k$$

$$T = \frac{5}{9}(200-32) + 273 = 366{,}33\,^0k$$

Luego, como el proceso es a volumen constante ($V_0 = V$), de la ecuación de los gases ideales para dos estados, obtenemos la presión final, así:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P V}{T}$$

$$\frac{10}{266{,}33} = \frac{P}{366{,}33}$$

$$\clubsuit\ P = 13{,}75 \text{ atm} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 46

• La presión absoluta al interior de la llanta, es la suma de la presión manométrica más la atmosférica, esto es:

$$P = 2{,}172.10^5 + 1{,}013.10^5$$

$$P = 3{,}185.10^5 \text{ N/m}^2$$

Luego, aplicando la ecuación de los gases ideales, al estado final de la llanta, hallemos la masa de aire, así:

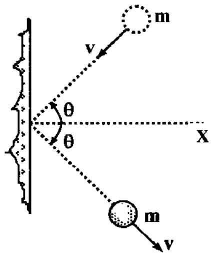
$$P V = \frac{m}{M} R T \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P V M}{R T}$$

$$m = \frac{(3{,}185.10^5)(6.10^{-3})(28{,}97)}{(8{,}31.10^3)(273)}$$

$$\clubsuit\ m = 0{,}0244 \text{ kg} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 47

• Como los choques de las moléculas con la pared del recipiente son perfectamente e lásticos, los ángulos de incidencia y reflexión son iguales, como se observa.



El impulso total que le comunica las (n) moléculas a la pared, es igual, al cambio de su cantidad de movimiento en la dirección horizontal (X), esto es:

$$I = n\,\Delta P$$

$$F\,\Delta t = n\,(p - p_o)\cos\theta$$

$$F\,\Delta t = n\,[m\,v - (-m\,v)]\cos\theta$$

$$P\,A\,\Delta t = 2\,n\,m\,v\cos\theta$$

$$P = \frac{2n\,m\,v\cos\theta}{A\,\Delta t}$$

$$P = \frac{(2)(10^{23})(3{,}32.10^{-27})(10^{3})(\cos 45°)}{(2.10^{-4})(1)}$$

♣ $P = 2{,}35.10^{3}\ \dfrac{N}{m^2}$ (B)

Solución: 48

• La presión absoluta inicial de la llanta, es igual, a la suma de la presión manométrica más la atmosférica, esto es:

$$P_1 = 4.10^5 + 1{,}013.10^5 = 5{,}013.10^5\,\frac{N}{m^2}$$

Así, de la ecuación de los gases ideales, la presión absoluta final de la llanta es:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{(5{,}013.10^5)(15.10^3)}{273} = \frac{P_2(16.10^3)}{300}$$

$$P_2 = 5{,}164.10^5\ N/m^2$$

Luego, la presión manométrica final al interior de la llanta es:

$$P_{man} = 5{,}164.10^5 - 1{,}013.10^5$$

$$P_{man} = 4{,}151.10^5\ N/m^2$$

♣ $P_{man} \approx 4{,}1$ atm (A)

Solución: 49

• La energía cinética media del movimiento de traslación de una molécula de gas ideal es:

$$<E_C> = \frac{3}{2}kT$$

$$<E_C> = (\frac{3}{2})(1{,}38.10^{-23})(400)$$

♣ $<E_C> = 8{,}28.10^{-21}\,J$ (E)

Solución: 50

• Utilizando la función de distribución de Boltzman según la energía, expresemos la energía cinética media de una molécula:

$$<E_C> = \int_0^{\infty} E_C f(E_C)\,dE_C$$

$$<E_C> = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\int_0^{\infty} E_C\, e^{-\frac{E_C}{kT}}\sqrt{E_C}\,dE_C$$

$$<E_C> = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\int_0^{\infty} E_C^{3/2}\, e^{-\frac{E_C}{kT}}\,dE_C$$

Haciendo la transformación de variable:

$$\frac{E_C}{k\,T} = u \;\; => \;\; dE_C = k\,T\,du$$

la integral anterior, queda así:

$$< E_C >= \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{3/2} e^{-u} du$$

Integrando por partes, se tiene:

$$< E_C >= \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} \{u^{3/2}(-e^{-u})\Big]_0^{\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{\infty} \sqrt{u}\, e^{-u} du\}$$

$$< E_C >= \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} \{0 + (\frac{3}{2})(\frac{\sqrt{\pi}}{2})\}$$

$$\clubsuit \;\; < E_C >= \frac{3}{2} kT$$

☞ **Nota**

La temperatura absoluta sirve de medida de la energía cinética del movimiento de traslación de las moléculas de un gas ideal.

Solución: 51

- Hallemos la variación de los módulos de las velocidades de las moléculas:

$$\Delta v = 505 - 495 = 10 \; \frac{m}{s}$$

Luego, la función distribución según las velocidades es:

$$dn_v = f_v dv$$

$$f_v = \frac{dn_v}{dv} \approx \frac{\Delta n_v}{\Delta v} = \frac{4800}{10}$$

$$\clubsuit \;\; f_v = 480 \; \frac{\text{moleculas}}{m/s}$$

(E)

Solución: 52

- Primero calculemos el número total de partículas con velocidades comprendidas entre 0 m/s y 500 m/s, así:

$$N = \int_0^{500} f(v)\, dv$$

$$N = \int_0^{500} (500v - v^2)\, dv$$

$$N = (250v^2 - \frac{1}{3}v^3) \;\Big]_0^{500}$$

$$N = 500^3/6$$

Luego, la velocidad media de cada una de las partículas es:

$$< v >= \frac{1}{N} \int_0^{500} v\, f(v)\, dv$$

$$< v >= \frac{1}{N} \int_0^{500} (500\,v^2 - v^3)\, dv$$

$$< v >= \frac{1}{N} (\frac{500}{3} v^3 - \frac{1}{4} v^4) \;\Big]_0^{500}$$

$$< v >= \frac{500^4/12}{500^3/6} = \frac{500}{2}$$

$$\clubsuit \;\; < v >= 250 \; \frac{m}{s}$$

(C)

Solución: 53

- La energía cinética media por partícula, viene dado por:

$$< E_C >= \frac{1}{N} \int_0^{500} \frac{1}{2} m v^2 f(v)\, dv$$

$$< E_C >= \frac{m}{2N} \int_0^{500} (500v^3 - v^4)\, dv$$

$$< E_C >= \frac{m}{2N}(\frac{500}{4}v^4 - \frac{1}{5}v^5)\ ]_0^{500}$$

$$< E_C >= \frac{(2.10^{-12})}{(2)(500^3/6)}(\frac{500^5}{20})$$

$$\clubsuit\ < E_C >= 75.10^{-9}\,J \quad \text{(D)}$$

☞ **Nota**

Se ha utilizado el resultado del problema anterior, para el número de partículas.

Solución: 54

• El número de partículas en el sistema, viene dado por:

$$N = \int_0^{\infty} f(v)\,dv$$

$$N = \int_0^{10^3} 5.10^{20}\,\text{sen}\frac{\pi v}{10^3}\,dv + \int_{10^3}^{\infty} 0\,dv$$

$$N = (5.10^{20})(\frac{10^3}{\pi})\cos\frac{\pi v}{10^3}\ ]_{10^3}^{0}$$

$$N = (\frac{5.10^{23}}{\pi})[1-(-1)] = (\frac{10}{\pi}).10^{23}$$

$$\clubsuit\ N = 3{,}18.10^{23} \quad \text{(A)}$$

Solución: 55

• La velocidad media con la que se mueven las partículas es:

$$< v >= \frac{1}{N}\int_0^{\infty} v\,f(v)\,dv$$

$$< v >= \frac{1}{N}\{\int_0^{10^3} 5.10^{20}\,v\,\text{sen}\frac{\pi}{10^3}\,dv + \int_{10^3}^{\infty} v\,0\,dv\}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\frac{\pi v}{10^3} = u \quad => \quad dv = \frac{10^3}{\pi}du$$

Siendo los nuevos límites de integración:

Para : $v = 0 \quad => \quad u = 0$

Para : $v = 10^3 \quad => \quad u = \pi$

Con esto, la integral anterior, queda así:

$$< v >= (\frac{5.10^{20}}{10.10^{23}/\pi})(\frac{10^6}{\pi^2})\int_0^{\pi} u\,\text{sen}\,u\,du$$

$$< v >= \frac{500}{\pi}(\text{sen}\,u - u\cos u)\Big]_0^{\pi}$$

$$< v >= (\frac{500}{\pi})(\pi)$$

$$\clubsuit\ < v >= 500\ \frac{m}{s} \quad \text{(C)}$$

Solución: 56

• El cuadrado de la velocidad cuadrática media de las partículas, viene dado por:

$$< v_C >^2 = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} v^2 f(v)\,dv$$

$$< v_C >^2 = \frac{1}{N}\int_0^{10^3} 5.10^{20}\,v^2\,\text{sen}\frac{\pi v}{10^3}\,dv$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\frac{\pi v}{10^3} = u \quad => \quad dv = \frac{10^3}{\pi}du$$

Siendo los nuevos límites de integración:

Para : $v = 0 \quad => \quad u = 0$

Para : $v = 10^3 \quad => \quad u = \pi$

Con esto, la integral anterior, queda así:

$$< v_C >^2 = (\frac{5.10^{20}}{10.10^{23}/\pi})(\frac{10^9}{\pi^3})\int_0^{\pi} u^2 \text{sen}\, u\, du$$

$$< v_C >^2 = (\frac{5.10^5}{\pi^2})(2u\,\text{sen}\,u - (u^2-2)\cos u)\Big]_0^{\pi}$$

$$< v_C >^2 = (\frac{5.10^5}{\pi^2})(\pi^2 - 4)$$

$$\clubsuit \quad < v_C > \approx 545\ \frac{m}{s} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 57

- La expresión para la velocidad más probable, hallamos derivando la función distribución de velocidades e igualando a cero, así:

$$f(v) = \frac{dn}{dv} = 4\pi\, n_o (\frac{m}{2\pi kT})\, e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$[\frac{df(v)}{dv}]_{v=v_P} = 0$$

$$v_P = (\frac{2kT}{m})^{1/2} = (\frac{2RT}{M})^{1/2}$$

$$v_P = (\frac{2kT}{m})^{1/2}$$

De otro lado, la velocidad cuadrática media, hallamos de la expresión de la energía cinética media, así:

$$< E_C > = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\, v_C^2$$

$$v_C = [\frac{3kT}{m}]^{1/2}$$

Luego, la razón de la velocidad más probable a la velocidad cuadrática media es:

$$\frac{v_P}{v_C} = \frac{[2kT/m]^{1/2}}{[3kT/m]^{1/2}} = [\frac{2}{3}]^{1/2}$$

$$\clubsuit \quad \frac{v_P}{v_C} = 0{,}816 \qquad \text{(B)}$$

Solución: 58

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos la densidad del aire, así:

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad => \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

Por dato, la temperatura disminuye linealmente con la altura, es decir:

$$T = T_0 - \xi\, h$$

De modo que, la expresión para la densidad (ρ), queda así:

$$\rho = \frac{PM}{R\,(T_0 - \xi\, h)}$$

De otro lado, como la presión disminuye según la altura, la ecuación que describe está disminución es:

$$\frac{dP}{dh} = -\rho\, g$$

Sustituyendo la densidad (ρ), separando variables, integrando y evaluando:

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{PM}{R\,(T_0 - \xi h)}g$$

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\int_0^H \frac{dh}{T_0 - \xi\, h}$$

$$\ell n(P)\Big]_{P_0}^{P} = \frac{Mg}{\xi R}\,\ell n(T_0 - \xi h)\Big]_0^H$$

$$\ell n(\frac{P}{P_0}) = \frac{Mg}{\xi R}\,\ell n(\frac{T_0 - \xi\, H}{T_0})$$

$$P = P_0(1 - \frac{\xi\, H}{T_0})^{Mg/\xi R}$$

$$P = P_0[1 - \frac{(0,006)(4000)}{300}]^{\frac{(28,97.10^{-3})(9,8)}{(0,006)(8,31)}}$$

$$P = 0,622\, P_0$$

Luego, el porcentaje en que disminuye la presión atmosférica es:

$$\eta = (\frac{P_0 - P}{P_0})(100)$$

$$\eta = (\frac{P_0 - 0,622P_0}{P_0})(100)$$

$$\clubsuit\ \eta = 37,8\ \%$$ (D)

Solución: 59

• De la ecuación de los gases ideales, el volumen de helio, cuando el globo está a una altura de 4 km, es:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$$

$$\frac{(1)(12)}{20 + 273} = \frac{(0,63)V}{-20 + 273}$$

$$V = 16,45\ \ell t$$

De otro lado, el número de moles de helio lo calculamos en la superficie, así:

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0$$

$$(1)(12) = n_0(0,082)(293)$$

$$\clubsuit\ n_0 = 0,499 \text{ moles}$$ (E)

Solución: 60

• De la ley de los gases ideales hallemos el volumen inicial del recipiente, así:

$$P_0 V_0 = \frac{m_0}{M} R T_0$$

$$(10)\, V_0 = (\frac{12}{32})(0,082)(298)$$

$$V_0 = 0,917\ \ell t$$

Como el volumen del recipiente no cambia, la masa final del oxígeno es:

$$P\, V = \frac{m}{M} R T$$

$$(6)(0,917) = (\frac{m}{32})(0,082)(294)$$

$$\clubsuit\ m = 7,30 g$$ (B)

Solución: 61

• La presión hidrostática a una profundidad de 50 m es:

$$P = \rho\, g\, h$$

$$P = (10^3)(9,8)(35) = 3,43.10^5\ N/m^2$$

$$P = \frac{3,43.10^5}{1,013.10^5} = 3,39 \text{ atm}$$

Luego, de la ecuación de los gases ideales, el volumen de la burbuja en la superficie del lago es:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P\, V}{T}$$

$$\frac{(1)V_0}{298} = \frac{(3,39)(15)}{278}$$

$$V_0 = 54,5\ cm^3$$ (D)

Solución: 62

• Transformemos la presión de mmHg a atm, así:

$$P = 5.10^{-10}\,mmHg$$

$$P = (5.10^{-10})(1{,}316.10^{-3}\,atm)$$

$$P = 6{,}58.10^{-13}\,atm$$

De la ecuación de los gases ideales, hallemos el número de moles por unidad de volumen, así:

$$P\,V = n\,R\,T$$

$$(6{,}58.10^{-13})\,V = n\,(0{,}082)(298)$$

$$\frac{n}{V} = 0{,}2691.10^{-13}\,\frac{moles}{\ell t}$$

Ahora, como cada mol tiene $6{,}23.10^{23}$ moléculas y 1 $\ell t = 10^3$ cm^3, entonces, el número de moléculas por cm^3 es:

$$\clubsuit\ \frac{n}{V} = 1{,}62.10^{7}\,\frac{moleculas}{cm^3}$$ B

Solución: 63

• La velocidad cuadrática media de las moléculas de oxígeno, viene dado por:

$$v_C = (\frac{3\,RT}{M})^{1/2}$$

$$v_C = (\frac{(3)(8{,}31)(300)}{32.10^{-3}})^{1/2}$$

$$v_C = 483{,}544\,\frac{m}{s}$$

De otro lado, la velocidad de escape de las moléculas de oxígeno, debido a la gravitación, viene dado por:

$$v_E = (2g\,R_T)^{1/2}$$

$$v_E = [(2)(9{,}8)(6{,}37.10^6)]^{1/2}$$

$$v_E = 11\,174\,\frac{m}{s}$$

Luego, el porcentaje que representa la velocidad cuadrática media respecto de la velocidad de escape gravitatorio es:

$$\eta = (\frac{v_C}{v_E})(100)$$

$$\eta = (\frac{483{,}56}{11174})(100)$$

$$\clubsuit\ \eta = 4{,}33\ \%$$ D

Solución: 64

• La velocidad cuadrática media térmica de las moléculas de oxígeno, viene dado por:

$$v_C = (\frac{3\,RT}{M})^{1/2}$$

$$v_C = \{\frac{(3)(8{,}31)(648)}{0{,}032}\}^{1/2}$$

$$v_C = 710{,}5\,\frac{m}{s}$$

De otro lado, la velocidad del gas de oxígeno fuera de la superficie del planeta, viene dado por:

$$v_E = (\frac{2\,G\,m_P}{R_P})^{1/2}$$

Pero, la masa del planeta de radio R_P es:

$$m_P = \rho_P V_P = \rho_P\,(\frac{4}{3}\,\pi\,R_P^3)$$

Con esto, la ecuación para la velocidad de escape, queda así:

$$v_E = (\frac{8}{3}\,\pi\,G\,R_P^2\,\rho_P)^{1/2}$$

Para que haya retención de la atmósfera, es decir, para que la atmósfera no se pierda, deberá cumplirse que:

$$v_C < v_E$$

$$v_C < (\frac{8}{3}\pi\, G\, \rho_P)^{1/2} R_P$$

$$R_P > \frac{v_C}{(8\pi\, G\, \rho_P / 3)^{1/2}}$$

$$R_P > \frac{710{,}5}{\{(8\pi/3)(6{,}67.10^{-11})(5000)\}^{1/2}}$$

♣ $R_P > 425.10^3$ m (E)

Solución: 65

• Transformemos los calores específicos de cal/g.^{0}k a J/kg.^{0}k, así:

$$c_P = \frac{(0{,}237)(4{,}186\,J)}{10^{-3}kg.^0k} = 992{,}1\ \frac{J}{kg.^0k}$$

$$c_V = \frac{(0{,}169)(4{,}186\,J)}{10^{-3}kg.^0k} = 707{,}4\ \frac{J}{kg.^0k}$$

Ahora, de la ecuación de los gases ideales, la densidad del aire es:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

$$\frac{R}{M} = \frac{P}{\rho\,T} \qquad (1)$$

De otro lado, la relación entre los calores específicos a presión y volumen constantes, viene dado por:

$$\frac{R}{M} = c_P - c_V \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), despejando la densidad, y evaluando, se tiene:

$$\rho = \frac{P}{(c_P - c_V)\,T}$$

$$\rho = \frac{1{,}013.10^5}{(992{,}1 - 707{,}4)(288)}$$

♣ $\rho = 1{,}23\ \frac{kg}{m^3}$ (B)

Solución: 66

• De la ecuación de los gases ideales, el número de moles de aire es:

$$P_1 V_1 = n_1 R T_1$$

$$(750)(8) = n_1\,(62{,}4)(293)$$

$$n_1 = 0{,}328 \text{ moles}$$

Asimismo, el número de moles de CO_2 es:

$$P_2 V_2 = n_2 R T_2$$

$$(780)(6) = n_2 (62{,}4)(278)$$

$$n_2 = 0{,}269 \text{ moles}$$

De modo que, el número total de moles es:

$$n = 0{,}328 + 0{,}269 = 0{,}597 \text{ moles}$$

Luego, la presión al interior del recipiente a la temperatura de 100^0 C es:

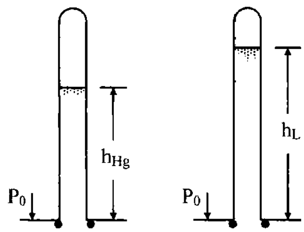
$$P\,V = n\,R\,T$$

$$P\,(10) = (0{,}597)(62{,}4)(373)$$

♣ $P = 1\,390$ mmHg (B)

Solución: 67

• Representemos las alturas alcanzadas por el Hg y el líquido en el barómetro.



MERCURIO LIQUIDO

Como se observa la presión de las columnas de Hg y líquido en el barómetro, es igual, a la presión atmosférica, esto es:

$$P_0 = \rho_L\, g\, h_L = \rho_{Hg}\, g\, h_{Hg}$$

$$h_L = \frac{(13,6)(73)}{1,6}$$

$$\clubsuit\ h_L = 620,5 \text{ cm} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 68

- Como el número de moles es proporcional al volumen, entonces, las masas de cada uno de los componentes de la mezcla, son:

$$m_{H2} = n_{H2} M_{H2} = (20)(2) = 40 \text{ g}$$

$$m_{CO2} = n_{CO2} M_{CO2} = (70)(44) = 3080 \text{ g}$$

$$M_{N2O} = n_{N2O} M_{N2O} = (10)(44) = 440 \text{ g}$$

Luego, la masa molecular de la mezcla es:

$$M = \frac{m}{n} = \frac{m_{H2} + m_{CO2} + m_{N2O}}{n_{H2} + n_{CO2} + n_{N2O}}$$

$$M = \frac{40 + 3080 + 440}{20 + 70 + 10}$$

$$\clubsuit\ M = 35,6\ \frac{g}{mol} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 69

- Como el número de moles es proporcional al volumen en porcentaje, el número de moles de oxígeno es:

$$n_{O2} = 35 \text{ moles}$$

Luego, la presión parcial del oxígeno en la mezcla es:

$$\clubsuit\ P_{O2} = (\frac{35}{100})(1) = 0,35 \text{ atm} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 70

- De la ecuación de los gases ideales, las presiones parciales de cada uno los componentes, son:

$$P_{N2} = (1)(\frac{2}{10}) = 0,2 \text{ atm}$$

$$P_{H2} = (5)(\frac{5}{10}) = 2,5 \text{ atm}$$

$$P_{CH4} = (2)(\frac{3}{10}) = 0,6 \text{ atm}$$

Luego, la presión resultante de la mezcla es:

$$P_T = 0,2 + 2,5 + 0,6$$

$$\clubsuit\ P_T = 3,3 \text{ atm} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 71

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos las presiones parciales de cada una de las componentes, así:

$$P_{N2} = (0,5)(\frac{15}{100}) = 0,075 \text{ atm}$$

$$P_{N2O} = (0,5)(\frac{50}{100}) = 0,25 \text{ atm}$$

$$P_{CO2} = (0,5)(\frac{35}{100}) = 0,175 \text{ atm}$$

Como el trozo de KOH absorbe todo el CO_2, entonces, la presión total es:

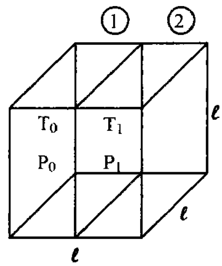
$$P_T = P_{N2} + P_{N2O}$$

$$P_T = 0{,}075 + 0{,}25$$

$$♣\ P_T = 0{,}325 \text{ atm} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 72

• Representemos la lámina dividiendo al cubo de lado "ℓ" en dos partes iguales.



En la Fig., la fuerza total ejercida por el gas sobre la lámina es:

$$F = (P_1 - P_0)\,A = (P_1 - P_0)(\frac{V}{\ell})$$

$$F = \{(P_1)(\frac{V}{2}) - (P_0)(\frac{V}{2})\}(\frac{2}{\ell})$$

$$F = (n\,RT_1 - n\,RT_0)(\frac{2}{\ell})$$

$$F = (\frac{2\,n\,R}{\ell})(T_1 - T_0)$$

$$F = (\frac{2n\,R}{0{,}1})(22 - 2)$$

$$♣\ F = 400\ nR \qquad \text{(D)}$$

Solución: 73

• Teniendo en cuenta que el volumen (V_0) del tanque es una constante y la temperatura (T) no cambia, entonces, de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

Para el tanque con Dióxido de carbono:

$$P_0 V_0 = (\frac{m_0}{M_0})\,RT \qquad (1)$$

Para el tanque sin Dióxido de carbono, y con oxígeno molecular:

$$P\,V_0 = (\frac{m}{M})\,RT \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1), tenemos:

$$P = (\frac{m}{m_0})(\frac{M_0}{M})P_0$$

$$P = (\frac{7}{8})(\frac{44}{32})(6)$$

$$♣\ P = 7{,}22 \text{ atm} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 74

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos la masa del metano (CH_4), así:

$$m = \frac{P\,V\,M}{R\,T} = \frac{(12)(100)(16)}{(0{,}082)(323)}$$

$$♣\ n \approx 725 \text{ g} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 75

• Recordemos que la velocidad media de los gases ideales, viene dado por:

$$v = (\frac{8\,RT}{\pi\,M})^{1/2}$$

Luego, la razón de las velocidades para el argón (1) y xenón (2) es:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(8\,RT/\pi\,M_1)^{1/2}}{(8\,RT/\pi\,M_2)^{1/2}} = (\frac{M_2}{M_1})^{1/2}$$

$$\frac{3}{v_2} = (\frac{131{,}30}{39{,}94})^{1/2}$$

♣ $v_2 = 1{,}65\ \dfrac{ml}{min}$ (D)

Solución: 76

• El volumen del globo en condiciones normales (C.N) es:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (0{,}3)^3$$

$$V_0 = 0{,}113\ m^3$$

El volumen del globo a presión de 730 mm de Hg y temperatura de 25^0 C es:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P\,V}{T}$$

$$\frac{(760)(0{,}113)}{273} = \frac{(730)\,V}{298}$$

$$V = 0{,}128\ m^3$$

Ahora, de la ley de los gases ideales, calcu lemos la densidad del hidrógeno, así:

$$\rho_H = \frac{m}{V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

$$\rho_H = \frac{(2)(730)(133{,}3)}{(8{,}31.10^3)(298)}$$

$$\rho_H = 0{,}079\ kg/m^3$$

Luego, la fuerza ascensional del globo será, igual, al empuje del aire (E) menos el peso del hidrógeno (W) y menos el peso del glo bo (P), esto es:

$$F = E - W - P$$

$$F = \rho_A g V - \rho_H g\,V - m\,g$$

$$F = (\rho_A - \rho_H)\,gV - m\,g$$

$$F = (1{,}29 - 0{,}079)(10)(0{,}128) - (0{,}055)(10)$$

♣ $F = 1{,}0\ N$ (B)

Solución: 77

• La fuerza ascensional del globo es i gual, al empuje del aire desplazado (E), me nos, el peso total del globo (gas +cubierta), esto es:

$$F = E - W_H - W$$

$$F = m_A g - m_H g - W$$

Como, $m = MPV/RT$, y F= 0, entonces la expresión anterior, queda así:

$$W = \frac{P\,Vg\,(M_A - M_H)}{R\,T}$$

$$W = \frac{4\pi R^3 P g\,(M_A - M_H)}{3RT}$$

$$W = \frac{(4\pi)(0{,}125)^3(1{,}013.10^5)(9{,}8)(29-2)}{(3)(8{,}31.10^3)(273)}$$

♣ $W = 0{,}096\ N$ (E)

Solución: 78

• Después que el agua se convierte en va por, las presiones parciales del oxígeno (P_1) y vapor de agua (P_2), son:

$$P_1 = \frac{m_1 RT}{M_1 V} = \frac{(1{,}6)(8{,}31.10^3)(773)}{(32)(1)}$$

$$P_1 = 3{,}21.10^5\ N/m^2$$

$$P_2 = \frac{m_2 RT}{M_2 V} = \frac{(0{,}9)(8{,}31.10^3)(773)}{(18)(1)}$$

$$P_2 = 3{,}21.10^5\ N/m^2$$

Luego, la presión total en el recipiente ce- rrado es:

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = 3{,}21.10^5 + 3{,}21.10^5$$

$$♣\ P = 6{,}42.10^5 \frac{N}{m^2} \quad \text{(C)}$$

Solución: 79

• Recordemos que la expresión para la densidad de un gas ideal, viene dado por:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

Así, la razón de las densidades del gas a las temperaturas de T y T_0 es:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{M\,P/R\,T}{M\,P/R\,T_0} = \frac{T_0}{T}$$

$$T = \frac{m\,T_0}{\rho\,V} = \frac{(12)(280)}{(6.10^{-4})(4.10^3)}$$

$$♣\ T = 1400^0 k \quad \text{(C)}$$

Solución: 80

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos una expresión para la masa molecular, así:

$$PV = \frac{m}{M} R\,T$$

$$M = \frac{(m/V)\,RT}{P} = \frac{\rho\,RT}{P}$$

$$M = \frac{(0{,}34)(8{,}31.10^3)(283)}{2.10^5}$$

$$♣\ M \approx 4\ \frac{kg}{kmol} \quad \text{(D)}$$

Solución: 81

• Primero hallemos la masa de la molécula de nitrógeno en kg, así:

$$m = 20 \text{ uma} = (28)(1{,}66.10^{-27}\text{ kg})$$

$$m = 46{,}48.10^{-27}\text{ kg}$$

Luego, el impulso que le transmite la molécula de nitrógeno a la pared del recipiente es:

$$I = m\,\Delta p = m\,(v - (-v))$$

$$I = 2m\,v = (2)(46{,}48.10^{-27})(600)$$

$$♣\ I \approx 5{,}6.10^{-23}\text{ N.s} \quad \text{(C)}$$

Solución: 82

• Primero calculemos la masa de una molécula de nitrógeno en kg, así:

$$m = 28 \text{ uma} = (28)(1{,}66.10^{-27}\text{kg})$$

$$m = 46{,}48.10^{-27}\text{kg}$$

Luego, la cantidad de movimiento lineal de la molécula de nitrógeno es:

$$p = m\,v = (46{,}48.10^{-27})(430)$$

$$♣\ p \approx 2.10^{-23}\ kg.\frac{m}{s} \quad \text{(B)}$$

Solución: 83

• El número de moles contenidos en 1 g de vapor de agua es:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1}{18}\text{ moles}$$

Luego, el número de moléculas de vapor de agua es:

$$N = n\,N_A = (\frac{1}{18})(6{,}023.10^{23})$$

$$♣\ N = 3{,}3.10^{22}\text{ moléculas} \quad \text{(B)}$$

Solución: 84

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos el número de moles:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{(750)(133{,}3)(80)}{(8{,}31.10^3)(290)}$$

$$n = 3{,}318 \text{ kmoles}$$

Luego, el número de moléculas contenidas en la habitación es:

$$N = n\,N_A = (3{,}318.10^3)(6{,}023.10^{23})$$

$$N \approx 2.10^{27} \text{ moléculas} \quad \text{(B)}$$

Solución: 85

- Sea "α" el grado de disociación de las moléculas de yodo, entonces, el número de moles de oxígeno atómico (n_1) y número de moles de oxígeno molecular (n_2) son:

$$n_1 = \alpha\frac{m}{M/2} \quad \text{y} \quad n_2 = (1-\alpha)\frac{m}{M}$$

Así, el número de moles en el recipiente, es:

$$n = n_1 + n_2 = (1+\alpha)\frac{m}{M}$$

Luego, el número total de partículas de yodo, que hay en el recipiente es:

$$N = n\,N_A$$

$$N = (1+\frac{1}{2})(\frac{1}{254})(6{,}023.10^{23})$$

$$\clubsuit \; N = 3{,}55.10^{21} \text{ partículas} \quad \text{(C)}$$

Solución: 86

- Hallemos la masa del isótopo de hidrógeno en kg, así:

$$m = 1 \text{ uma} = 1{,}66.10^{-27}\text{kg}$$

Luego, la velocidad cuadrática media de los isótopos de hidrógeno es:

$$< v_C >= (\frac{3\,kT}{m})^{1/2}$$

$$< v_C >= \{\frac{(3)(1{,}38.10^{-23})(10^7)}{1{,}66.10^{-27}}\}^{1/2}$$

$$\clubsuit \; < v_C >= 5.10^5 \; \frac{m}{s} \quad \text{(E)}$$

Solución: 87

- Recordemos que la presión del gas, en función de la energía cinética media, viene dado por:

$$P = \frac{2}{3}n < E_C >$$

$$P = \frac{2}{3}(\frac{N}{V})(\frac{1}{2}m < v_C >^2)$$

$$P = \frac{1}{3}(\frac{Nm}{V}) < v_C >^2 = \frac{1}{3}\rho < v_C >^2$$

$$P = (\frac{1}{3})(6.10^{-2})(500)^2$$

$$\clubsuit \; P = 5.10^3 \; \frac{N}{m^2} \quad \text{(E)}$$

Solución: 88

- La razón de las velocidades cuadráticas medias de las moléculas de aire a las partículas de polvo es:

$$\frac{< u_C >}{< v_C >} = \frac{(3\,RT/M)^{1/2}}{(3\,kT/m)}$$

$$\frac{< u_C >}{< v_C >} = \{(\frac{m}{M})(\frac{R}{k})\}^{1/2}$$

$$\frac{< u_C >}{< v_C >} = (N_A\,\frac{m}{M})^{1/2}$$

$$\frac{<u_C>}{<v_C>} = \{\frac{(6{,}023.10^{26})(10^{-11})}{29}\}^{1/2}$$

Ⓒ

$$\clubsuit\ \frac{<u_C>}{<v_C>} = 1{,}44.10^{7}\ \text{veces}$$

Solución: 89

• Primero hallemos la velocidad cuadrá tica media de las moléculas de hidrógeno, a partir de:

$$<v_C> = (\frac{3RT}{M})^{1/2}$$

$$<v_C> = \{\frac{(3)(8{,}31.10^{3})(293)}{2}\}^{1/2}$$

$$<v_C> = 1{,}91.10^{3}\ \frac{m}{s}$$

Luego, la cantidad de movimiento de cada una de las moléculas de hidrógeno es:

$$p = m<v_C>$$

$$p = (2)(1{,}66.10^{-27})(1{,}91.10^{3})$$

$$\clubsuit\ p = 6{,}34.10^{-24}\ kg.\frac{m}{s}$$ Ⓑ

Solución: 90

• De la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad => \quad \frac{RT}{M} = \frac{PV}{m}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la velocidad cuadrática media, se tiene:

$$<v_C> = (\frac{3RT}{M})^{1/2} = (\frac{3PV}{m})^{1/2}$$

$$<v_C> = \{\frac{(3)(680)(133.,3)(2.10^{-3})}{10.10^{-3}}\}^{1/2}$$

$$\clubsuit\ <v_C> \approx 233\ \frac{m}{s}$$ Ⓒ

Solución: 91

• El volumen ocupado por las N partícu las de gutagamba es:

$$V = N\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}n\,N_A\,\pi\,D^3$$

De otro lado, recordemos que la presión creada por las partículas, viene dado por:

$$P = \frac{1}{3}\rho<v_C>^2$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecua ción de los gases ideales, se tiene:

$$PV = nRT$$

$$(\frac{1}{3}\rho<v_C>^2)(\frac{1}{6}n\,N_A\,\pi\,D^3) = n\,RT$$

$$<v_C>^2 = \frac{18\,RT}{\pi\,\rho\,N_A D^3}$$

$$<v_C>^2 = \frac{(18)(8{,}31.10^{3})(273)}{(\pi)(10^{3})(6{,}023.10^{26})(10^{-18})}$$

$$<v_C>^2 = 21{,}58.10^{-6}$$

$$\clubsuit\ <v_C> = 4{,}64.10^{-3}\ \frac{m}{s}$$ Ⓓ

Solución: 92

• Según el prob.(87), la presión creada por las moléculas, viene dada por:

$$P = \frac{1}{3}\rho<v_C>^2$$

$$\rho = \frac{3P}{<v_C>^2} = \frac{(3)(5.10^{4})}{(450)^2}$$

♣ $\rho = 0,74\ \dfrac{kg}{m^3}$ (C)

Solución: 93

• Según el prob.(87), la presión creada por las moléculas, viene dada por:

$$P = \frac{1}{3}\rho < v_C >^2$$

$$(750)(133,3) = \frac{1}{3}(8,2.10^{-5})(10^3) < v_C >^2$$

♣ $< v_C > \approx 1\,912\ \dfrac{m}{s}$ (B)

Solución: 94

• Sabemos que la presión creada por el movimiento térmico de las moléculas es:

$$P = \frac{1}{3}\rho < v_C >^2$$

$$P = \frac{1}{3}\frac{m}{V} < v_C >^2 \qquad (1)$$

De otro lado, de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P\,V = n\,R\,T$$

$$P = \frac{n\,R\,T}{V} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), hallemos el número de moles:

$$\frac{1}{3}\frac{m}{V} < v_C >^2 = \frac{n\,R\,T}{V}$$

$$n = \frac{m < v_C >^2}{3\,R\,T} = \frac{(10^{-3})(461)^2}{(3)(8,31.10^3)(273)}$$

$$n = 3,12.10^{-5}\ \text{kmol}$$

Luego, el número de moléculas que hay en 1 g de gas es:

$$N = n\,N_A = (3,12.10^{-5})(6,023.10^{26})$$

♣ $N \approx 1,88.10^{22}$ moléculas (D)

Solución: 95

• La energía cinética del movimiento térmico de las moléculas, viene dado por:

$$E_C = \frac{1}{2} m < v_C >^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} m \left(\frac{3\,R\,T}{M}\right) = \frac{3}{2}\frac{m}{M} R\,T$$

$$E_C = \frac{(3)(10^{-3})(8,31.10^3)(288)}{(2)(29)}$$

♣ $E_C \approx 124$ J (D)

Solución: 96

• La energía cinética correspondiente a la rotación de las moléculas, viene dado por:

$$E_{C,r} = \frac{\gamma_r}{2}\frac{m}{M} R\,T$$

$$E_{C,r} = \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{20.10^{-3}}{32}\right)(8,31.10^3)(283)$$

♣ $E_{C,r} \approx 1,47.10^3$ J (C)

Solución: 97

• Primero calculemos la masa del átomo de helio en kilogramos, así:

$$m = 4\ \text{uma} = (4)(1,66.10^{-27}\,\text{kg})$$

$$m = 6,64.10^{-27}\,\text{kg}$$

Luego, para que los átomos de helio venzan la atracción de la Tierra, y abandonen la atmósfera terrestre, su velocidad cuadrá tica media, debe ser igual, a su velocidad de escape, esto es:

$$< v_C >= v_E$$

$$(\frac{3\,kT}{m})^{1/2} = (\frac{2\,G\,M_T}{R_T})^{1/2}$$

$$T = 2\,G\,mM_T/3\,kR_T$$

$$T = \frac{(2)(6{,}67.10^{-11})(6{,}64.10^{-27})(5{,}96.10^{24})}{(3)(1{,}38.10^{-23})(6{,}37.10^{6})}$$

$$\clubsuit\ T \approx 20\,011^0 k \qquad \text{(E)}$$

Solución: 98

• Primero calculemos las capacidades caloríficas del oxígeno atómico C'_P (gas monoatómico $\gamma = 3$), del oxígeno molecular C''_P (gas diatómico $\gamma = 5$) y de la mezcla C_P, así:

$$C'_P = (\frac{\gamma}{2}+1)R = (\frac{3}{2}+1)(8{,}31.10^3)$$

$$C'_P = 20{,}78.10^3\ J/kmol.^0k$$

$$C''_P = (\frac{\gamma}{2}+1)R = (\frac{5}{2}+1)(8{,}31.10^3)$$

$$C''_P = 29{,}08.10^3 \frac{J}{kmol.^0k}$$

$$C_P = c_P M = (1050)(32)$$

$$C_P = 33{,}6.10^3\ J/kmol.^0k$$

De otro lado, la cantidad de calor que se necesita para calentar las α m/(M/2) moléculas-kilogramo de oxígeno atómico y las (1-α)m/M moléculas-kilogramo de oxígeno molecular a presión constante es:

$$Q = \alpha\frac{m}{M/2}C'_P\Delta T + (1-\alpha)\frac{m}{M}C''_P\Delta T = \frac{m}{M}C_P\Delta T$$

$$2\alpha\, C'_P + (1-\alpha)\, C''_P = C_P$$

$$\alpha = \frac{C_P - C''_P}{2\,C'_P - C''_P}$$

$$\alpha = \frac{33{,}6.10^3 - 29{,}08.10^3}{(2)(20{,}78.10^3) - 29{,}08.10^3}$$

$$\clubsuit\ \alpha = 0{,}36 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 99

• De la ecuación de los gases ideales, las masas de aire a la temperatura de $T_1 = 15^0$ C y $T_2 = 25^0$ C son:

$$m_1 = \frac{M\,P\,V}{RT_1} \quad y \quad m_2 = \frac{M\,P\,V}{RT_2}$$

Luego, el cambio en la masa de aire en el cuarto al subir la temperatura es:

$$\Delta m = m_1 - m_2$$

$$\Delta m = \frac{M\,PV}{R}(\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2})$$

$$\Delta m = \frac{(28{,}9)(1{,}013.10^5)(30)(25-15)}{(8{,}31.10^3)(288)(298)}$$

$$\clubsuit\ \Delta m = 1{,}23\ kg \qquad \text{(B)}$$

Solución: 100

• Como el proceso es a volumen constante (isobárico), entonces, de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad => \quad \frac{P_2}{P_1} - 1 = \frac{T_2}{T_1} - 1$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

$$\frac{0{,}4}{100} = \frac{1}{T_1}$$

$$\clubsuit\ T_1 = 250^0 k$$ (D)

Solución: 101

• Recordemos que el calor específico de un gas, a presión constante, viene dado por:

$$c_P = (\frac{\gamma}{2}+1)\frac{R}{M}$$

siendo, (γ) los grados de libertad y (M) la masa molecular-kilogramo del gas.

Así, como el argón es un gas monoatómico ($\gamma = 3$), su calor específico a presión constante es:

$$c_{P,1} = (\frac{3}{2}+1)(\frac{8,31.10^3}{40}) = 519,4\frac{J}{kg.^0k}$$

Asimismo, el nitrógeno es un gas diatómico ($\gamma = 5$), su calor específico a presión constante es:

$$c_{P,2} = (\frac{5}{2}+1)(\frac{8,31.10^3}{28}) = 1038,8\ \frac{J}{kg.^0k}$$

De otro lado, las masas del gas de argón, nitrógeno y mezcla son:

$$m_1 = n_1 M_1 = (3)(40) = 120\ kg$$

$$m_2 = n_2 M_2 = (2)(28) = 56\ kg$$

$$m = m_1 + m_2 = 176\ kg$$

Luego, como la cantidad de calor de la mezcla, es igual, a la suma de las cantidades de calor de cada una de sus componentes, se cumple:

$$m\, c_P = m_1 c_{P,1} + m_2 c_{P,2}$$

$$c_P = \frac{(120)(519,4)+(56)(1038,8)}{176}$$

$$\clubsuit\ c_P \approx 684,7\ J/kg.^0k$$ (E)

Solución: 102

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos la masa molecular-kilogramo de la mezcla, así:

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

$$M = (\frac{m}{V})\frac{RT}{P} = \frac{\rho RT}{P}$$

$$M = \frac{(3)(8,31.10^3)(316)}{(820)(133,3)}$$

$$M = 72\ kg/kmol$$

Ahora, sea C_xH_y la fórmula de la mezcla, entonces, se cumple:

$$(12)(x)+(1)(y) = 72$$

Los valores de x e y que satisfacen esta ecuación, son:

x	1	2	3	4	5
y	60	48	36	24	12

Como se observa se trata del gas de metano,

$$\clubsuit\ C_5H_{12}$$ (E)

Solución: 103

• Las capacidades caloríficas del gas de helio monoatómico ($\gamma = 3$), y gas de oxígeno diatómico ($\gamma = 5$), a presión constante, son:

$$C_P' = (\frac{3}{2}+1)(8,31.10^3) = 20,8.10^3\ \frac{J}{kmol.^0k}$$

$$C_P'' = (\frac{5}{2}+1)(8,31.10^3) = 29,1.10^3\ \frac{J}{kmol.^0k}$$

Las capacidades caloríficas del gas de helio monoatómico ($\gamma = 3$), y gas de oxígeno diatómico ($\gamma = 5$), a volumen constante, son:

$$C'_V = (\frac{3}{2})(8{,}31.10^3) = 12{,}5.10^3 \frac{J}{kmol.^0k}$$

$$C''_V = (\frac{5}{2})(8{,}31.10^3) = 20{,}8.10^3 \frac{J}{kmol.^0k}$$

El número de moles de helio, de nitrógeno y de la mezcla, son:

$$n_1 = \frac{8}{4} = 2 \text{ moles} \; ; \quad n_2 = \frac{16}{32} = 0{,}5 \text{ moles}$$

$$n = n_1 + n_2 = 2{,}5 \text{ moles}$$

Así, las capacidades caloríficas de la mezcla de helio con oxígeno, para presión constante y volumen constante, hallamos de:

$$n\, C_P \Delta T = n_1 C'_P \Delta T + n_2 C''_P \Delta T$$

$$2{,}5 C_P = (2)(20{,}8.10^3) + (0{,}5)(29{,}1.10^3)$$

$$C_P = 22{,}46.10^3 \frac{J}{kmol.^0 k}$$

$$n\, C_V \Delta T = n_1 C'_V \Delta T + n_2 C''_V \Delta T$$

$$2{,}5\, C_V = (2)(12{,}5.10^3) + (0{,}5)(20{,}8.10^3)$$

$$C_V = 14{,}16.10^3 \frac{J}{kmol.^0k}$$

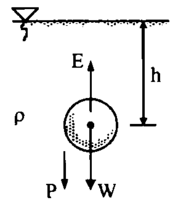
Luego, la razón de calores específicos a presión constante y volumen constante es:

$$\frac{c_P}{c_V} = \frac{C_P}{C_V} = \frac{22{,}46.10^3}{14{,}16.10^3}$$

♣ $\frac{c_P}{c_V} = 1{,}59$ (E)

Solución: 104

- Las fuerzas que actúan sobre la bola de jebe son: el empuje del agua (E), el peso de la pelota (W), el peso del gas de nitrógeno (P) encerrado en la bola.



De la ecuación de los gases ideales, hallemos el volumen de la bola, así:

$$P\,V = \frac{m}{M} RT \quad => \quad V = \frac{m\,RT}{M\,P}$$

Siendo, la presión (P) a la cual se encuentra la bola, igual, a la suma de la presión atmosférica más la hidrostática, esto es:

$$P = P_0 + \rho\, g\, h$$

Luego, de la condición de equilibrio, el empuje, debe ser igual, al peso de la bola más el peso del nitrógeno, es decir:

$$E = W + P$$

$$\rho g V = W + m\, g$$

Sustituyendo las expresiones del volumen (V) y la presión (P), obtenemos:

$$W = \rho\, g\, (\frac{m\,RT}{M\,(P_0 + \rho g h)}) - m\, g$$

$$W = \frac{(10^3)(9{,}8)(10^{-3})(8{,}31.10^3)(277)}{(28)(1{,}013.10^5 + (10^3)(9{,}8)(10^2)} - (10^{-3})(9{,}8)$$

♣ $W \approx 0{,}74$ N (C)

Solución: 105

• Recordemos que el calor específico de un gas, en función de los grados de libertad (γ) de sus moléculas, y a volumen constante, viene dado por:

$$c_V = \frac{\gamma}{2}\frac{R}{M}$$

Así, los calores específicos del gas de argón ($\gamma = 3$), y del oxígeno ($\gamma = 5$), a volúmenes constantes, son:

$$c_1 = (\frac{3}{2})(\frac{8{,}31.10^3}{40}) = 312{,}5\ \frac{J}{kg.^0k}$$

$$c_2 = (\frac{5}{2})(\frac{8{,}31.10^3}{32}) = 650\ \frac{J}{kg.^0k}$$

Si, (m) es la masa del gas de argón entonces (m+32) será la masa total de la mezcla, y se cumple que:

$$(m+32)c\,\Delta T = m\,c_1\Delta T + 32\ c_2\Delta T$$

$$(m+32)(430) = m\,(312{,}5) + (32)(650)$$

$$m = \frac{(32)(650-430)}{430-312{,}5}$$

$$♣\ m = 60\ kg \qquad (E)$$

☞ **Nota**

La masa de 1 molécula-kilogramo de oxígeno es 32 kg.

Solución: 106

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos la temperatura inicial del gas, así:

$$P_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1 \quad => \quad T_1 = \frac{M\,P_1V_1}{m\,R}$$

Sustituyendo T_1 en la ecuación de los gases ideales, para los estados inicial (1) y final (2), obtenemos la temperatura T_2, así:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1}T_1 = \frac{M\,V_2P_1}{m\,R}$$

$$T_2 = \frac{(32)(10.10^{-3})(3.10^5)}{(10.10^{-3})(8{,}31.10^3)}$$

$$T_2 = 1155^0k$$

De otro lado, como el oxígeno es un gas diatómico ($\gamma = 5$) su capacidad calorífica a presión constante es:

$$C_P = (\frac{\gamma}{2}+1)R = (\frac{5}{2}+1)(8{,}31.10^3)$$

$$C_P = 29{,}08.10^3\ J/kmol.^0k$$

Luego, la cantidad de calor que recibe el oxígeno, a presión constante es:

$$\Delta Q = \frac{m}{M}C_P(T_2 - T_1)$$

$$\Delta Q = \frac{(10.10^{-3})(29{,}08.10^3)(1155-283)}{32}$$

$$♣\ \Delta Q = 7{,}9.10^3 J \qquad (E)$$

Solución: 107

• Recordemos que la energía del movimiento térmico de las moléculas, viene dado por:

$$E = \frac{m}{M}\frac{\gamma}{2}RT$$

Como el oxígeno es diatómico ($\gamma = 5$), las energías del movimiento térmico de las moléculas antes (1) y después (2) de ser calentado el gas, son:

$$E_1 = \frac{(10.10^{-3})(5)(8{,}31.10^3)(283)}{(32)(2)}$$

$$E_1 = 1{,}84 \text{ kJ}$$

$$E_2 = \frac{(10.10^{-3})(5)(8{,}31.10^3)(1155)}{(32)(2)}$$

$$E_2 = 7{,}49 \text{ kJ}$$

Luego, la diferencias de energías térmicas, después y antes, de ser calentado el oxígeno es:

$$\Delta E = 7{,}49 \text{ kJ} - 1{,}84 \text{ kJ}$$

$$\clubsuit\ \Delta E = 5{,}65 \text{ kJ} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 108

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos la presión en el estado (1), así:

$$P_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{m\, R T_1}{M\, V_1}$$

Sustituyendo esta presión, en la ecuación de los gases ideales para los estados (1) y (2), obtenemos la temperatura T_2, así:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}, \quad (V_1 = V_2)$$

$$T_2 = \frac{P_2}{P_1} T_1 = \frac{P_2}{m\, R T_1 / M V_1} T_1$$

$$T_2 = \frac{M\, P_2 V_1}{m\, R} = \frac{(28)(10^4)(133{,}3)(2.10^{-3})}{(12.10^{-3})(8{,}31.10^3)}$$

$$T_2 = 748{,}6^0 K$$

De otro lado, la capacidad calorífica a volumen constante del nitrógeno ($\gamma = 5$) es:

$$C_V = \frac{\gamma}{2} R = (\frac{5}{2})(8{,}31.10^3)$$

$$C_V = 20{,}8.10^3 \frac{J}{kmol.^0K}$$

Luego, la cantidad de calor suministrada al nitrógeno a volumen constante es:

$$Q = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$$

$$Q = \frac{(12.10^{-3})(20{,}8.10^3)(748{,}6 - 283)}{28}$$

$$\clubsuit\ Q = 4{,}15.10^3 \text{ J} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 109

• Dado que el nitrógeno es diatómico, su capacidad calorífica a presión constante es:

$$C_P = (\frac{\gamma}{2} + 1) R = (\frac{5}{2} + 1)(8{,}31{,}10^3)$$

$$C_P = 29{,}1.10^3 \frac{J}{kmol.^0K}$$

Ahora, como el proceso es a presión constante las ecuaciones de estado del gas, para los estados inicial (1) y final (2), son:

$$P\, V_1 = \frac{m}{M} R T_1$$

$$P\, V_2 = \frac{m}{M} R T_2$$

Restando miembro a miembro la segunda ecuación menos la primera, se tiene:

$$P\,(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R\,(T_2 - T_1)$$

$$\frac{m}{M}(T_2 - T_1) = \frac{P\,(V_2 - V_1)}{R}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la cantidad de calor, tenemos:

$$Q = \frac{m}{M} C_P (T_2 - T_1)$$

$$Q = \frac{P(V_2 - V_1)}{R} C_P$$

$$Q = \frac{(29{,}1.10^3)(10^5)(2.10^{-3})}{8{,}31.10^3}$$

♣ $Q = 700\ J$ (E)

Solución: 110

• Como el oxígeno es diatómico ($\gamma = 5$) su capacidad calorífica a presión constante, es:

$$C_P = (\frac{\gamma}{2} + 1) R = (\frac{5}{2} + 1)(8{,}31.10^3)$$

$$C_P = 29{,}1.10^3\ J/kmol.^0K$$

Luego, como el gas se encuentra en C.N su temperatura inicial es $T_1 = 273^0$ K, y la cantidad de calor suministrada a el, a presión constante es:

$$Q = \frac{m}{M} C_P (T_2 - T_1)$$

$$Q = \frac{(12.10^{-3})(29{,}1.10^3)(323 - 273)}{32}$$

♣ $Q \approx 546\ J$ (D)

Solución: 111

• Como el oxígeno es diatómico ($\gamma = 2$) su capacidad calorífica, a presión constante y volumen constante, son:

$$C_P = (\frac{\gamma}{2} + 1) R = (\frac{5}{2} + 1)(8{,}31.10^3)$$

$$C_P = 29{,}1.10^3 \frac{J}{kmol.^0K}$$

$$C_V = \frac{\gamma}{2} R = (\frac{5}{2})(8{,}31.10^3)$$

$$C_V = 20{,}8.10^3\ J/kmol.^0K$$

De otro lado, su capacidad calorífica, según los datos del problema es:

$$C = \frac{M\,Q}{m(T_2 - T_1)}$$

$$C = \frac{(32)(150)(4{,}186)}{(40.10^{-3})(40 - 16)}$$

$$C = 20{,}9 \frac{J}{kmol.^0K}$$

Comparando esta capacidad con las obténidas anteriormente, se encuentra que la temperatura se elevó a volumen constante.

Solución: 112

• Como el oxígeno es diatómico ($\gamma = 2$) su capacidad calorífica, a volumen constante es:

$$C_V = \frac{\gamma}{2} R = (\frac{5}{2})(8{,}31.10^3)$$

$$C_V = 20{,}8.10^3 \frac{J}{kmol.^0K}$$

De otro lado, de la ecuación de los gases ideales, para los estados inicial (1) y final (2), se tiene:

$$P_1 V = \frac{m}{M} R T_1$$

$$P_2 V = \frac{m}{M} R T_2$$

Restando a la segunda ecuación la primera:

$$(P_2 - P_1) V = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$$

$$\frac{m}{M}(T_2 - T_1) = \frac{(P_2 - P_1)}{R} V$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la cantidad de calor, tenemos:

$$Q = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$$

$$Q = \frac{(P_2 - P_1)\,V}{R} C_V$$

$$Q = \frac{(5.10^5 - 10^5)(10.10^{-3})(20{,}8.10^3)}{8{,}31.10^3}$$

$$\clubsuit \quad Q = 10^4 \text{ J} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 113

• El anhídrido carbónico (CO_2) es triatómico ($\gamma = 6$), su capacidad calorífica a presión constante es:

$$C_P = (\frac{\gamma}{2} + 1)\,R = (\frac{6}{2} + 1)(8{,}31.10^3)$$

$$C_P = 33{,}2.10^3 \text{ J/kmol.}^0\text{K}$$

Luego, la masa de anhídrido carbónico que se ha calentado es:

$$m = \frac{M\,Q}{C_P (T_2 - T_1)}$$

$$m = \frac{(44)(0{,}053.10^3)(4{,}186)}{(3{,}32.10^3)(100 - 20)}$$

$$\clubsuit \quad m \approx 3{,}7 \text{ g} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 114

• El oxido nítrico (NO) es diatómico ($\gamma = 5$) su calor específico a presión constante es:

$$c_P = (\frac{\gamma}{2} + 1)\frac{R}{M} = (\frac{5}{2} + 1)(\frac{8{,}31.103}{30})$$

$$c_P = 969{,}5 \ \frac{\text{J}}{\text{kg.}^0\text{K}}$$

El monóxido de carbono (CO) es diatómico ($\gamma = 5$) su calor específico a presión constante es:

$$c'_P = (\frac{\gamma}{2} + 1)\frac{R}{M} = (\frac{5}{2} + 1)(\frac{8{,}31.10^3}{28})$$

$$c'_P = 1039{,}0 \text{ J/kg.}^0\text{K}$$

Luego, la razón del calor específico del monóxido de carbono al calor específico del oxído nítrico es:

$$\frac{c'_P}{c_P} = \frac{1039{,}0}{969{,}5}$$

$$\clubsuit \quad \frac{c'_P}{c_P} \approx 1{,}1 \text{ veces} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 115

• El nitrógeno es diatómico ($\gamma = 5$), su capacidad calorífica a presión constante es:

$$C_V = (\frac{\gamma}{2})\,R = (\frac{5}{2})(8{,}31.10^3)$$

$$C_V = 20{,}8.10^3 \text{ J/kmol.}^0\text{K}$$

De otro lado, la masa de nitrógeno conténida en el volumen de 2 lt es:

$$m = \rho\,V = (1{,}4)(2.10^{-3})$$

$$m = 2{,}8.10^{-3}\text{m}^3$$

Luego, la cantidad de calor suministrada al nitrógeno, a volumen constante es:

$$Q = \frac{m}{M} C_V \Delta T$$

$$Q = \frac{(2{,}8.10^{-3})(20{,}8.10^3)(100)}{28}$$

$$\clubsuit \quad Q = 208 \text{ J} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 116

• Sustituyendo en la ecuación de los gases ideales $\rho = m/V$, se tiene:

$$P_0 V = \frac{m}{M} R T$$

$$\frac{R\,T}{M} = \frac{P_0}{\rho} \qquad (1)$$

De otro lado, las ecuaciones de estado, para el estado inicial y final del gas ideal, son:

$$P_0 V = (m_0 / M) R T$$

$$P V = (m / M) R T$$

Restando de la segunda ecuación la primera, y considerando (1), tenemos:

$$(P_0 - P)\,V = \frac{(m_0 - m)}{M} R T$$

$$m_0 - m = \frac{\rho\, V\, \Delta P}{P_0}$$

$$\Delta m = \frac{(1{,}3)(30.10^{-3})(0{,}78)}{1}$$

♣ $\Delta m = 30{,}4.10^{-3} kg$ (A)

Solución: 117

• El número de moles contenidas en la botella llena de gas, antes (n_1) y después (n_1') de ser calentada, son:

$$P_1 V = n_1 R\, T_1 \quad \Rightarrow \quad n_1 = \frac{P_1 V}{R\, T_1}$$

$$(P_2 + \Delta P)\, V = n_1' R T_2$$

$$n_1' = \frac{(P_2 + \Delta P)\, V}{R\, T_2}$$

Sustituyendo n_1, n_1' en la ecuación de estado, para el gas en la botella inicialmente vacía, se tiene:

$$P_2 V = (n_1 - n_1')\, R\, T_2$$

$$P_2 V = \left(\frac{P_1}{R\, T_1} V - \frac{(P_2 + \Delta P)}{R\, T_2} V\right) R\, T_2$$

$$P_2 = \frac{T_2}{T_1} P_1 - P_2 - \Delta P$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(P_1 \frac{T_2}{T_1} - \Delta P\right)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left[(1)\left(\frac{380}{300}\right) - 1{,}1\right]$$

♣ $P_2 = 0{,}08$ atm (E)

Solución: 118

• De la ecuación de los gases ideales, la masa molecular (M) de la mezcla de masa (m=5 g) es:

$$P\, V = \left(\frac{m}{M}\right) R T$$

$$M = \frac{m\, R T}{P\, V} = \frac{(5.10^{-3})(8{,}31.19^{3})(293)}{(2)(1{,}013.10^{5})(20.10^{-3})}$$

$$M = 3{,}0\ kg/kmol$$

De otro lado, la masa molecular de la mezcla de gases de masas m_1 y m_2, viene dado por:

$$M = \frac{m_1 + m_2}{(m_1/M_1) + (m_2/M_2)}$$

$$M = \frac{(m_1/m_2) + 1}{(m_1/m_2 M_1) + (1/M_2)}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - M/M_2}{M/M_1 - 1}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - (3/4)}{(3/2) - 1}$$

♣ $\frac{m_1}{m_2} = 0{,}5$ (C)

Solución: 119

• La masa molecular de la mezcla de nitrógeno N_2 con gas carbónico CO_2, viene dado por:

$$M = \frac{m_1 + m_2}{(m_1/M_1) + (m_2/M_2)}$$

$$M = \frac{7.10^{-3} + 11.10^{-3}}{(7.10^{-3}/28) + (11.10^{-3}/44)}$$

$$M = 36\ kg/kmol$$

Luego, la densidad de la mezcla de nitrógeno con gas carbónico es:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

$$\rho = \frac{(36)(1{,}013.10^5)}{(8{,}31.10^3)(290)}$$

$$\clubsuit\ \rho = 1{,}5\ \frac{kg}{m^3} \qquad \text{B}$$

Solución: 120

• La presión a la cual está sometida la mezcla de los gases es:

$$P\,V = n\,R\,T$$

$$P = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)}{V} R\,T$$

$$P = \frac{(0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3).10^{-3}}{7{,}5.10^{-3}}(8{,}31.10^3)(300)$$

$$P = 1{,}99.10^5\ N/m^2 = 2\ atm$$

Ahora., la masa molecular de la mezcla, es igual, a la masa total de la mezcla, entre el número de moles de la mezcla, esto es:

$$M = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{n_1 + n_2 + n_2}$$

$$M = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

$$M = \frac{(0{,}1)(32) + (0{,}2)(28) + (0{,}3)(44)}{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3}$$

$$\clubsuit\ M \approx 36{,}7\ \frac{kg}{kmol} \qquad \text{E}$$

Solución: 121

• Las cantidades de calor suministrada (Q_1) y sustraída (Q_2) al gas a presión constante y volumen constante, son:

$$Q_1 = \frac{m}{M}(\frac{\gamma}{2} + 1)\,R\,\Delta T_1$$

$$Q_2 = \frac{m}{M}\frac{\gamma}{2}\,R\,\Delta T_2$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, y despejando (γ):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\gamma + 2}{\gamma}\,\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}$$

$$\gamma = \frac{2\,(\Delta T_1/\Delta T_2)}{(Q_1/Q_2) - (\Delta T_1/\Delta T_2)}$$

$$\gamma = \frac{(2)(50/100)}{(160/240) - (50/100)}$$

$$\clubsuit\ \gamma = 6 \qquad \text{C}$$

Solución: 122

• Escribamos las ecuaciones de estado para el estado inicial y final del gas, así:

$$P_0\,V = (m/M)\,R\,T_0$$

$$P\,V = (m/M)\,R\,T$$

Restando a la segunda ecuación la primera, se tiene:

$$(P - P_0)\,V = \frac{m}{M}\,R\,(T - T_0)$$

$$\frac{m}{M}\Delta T = \frac{V\,\Delta P}{R}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la cantidad de calor del gas, a volumen constante, se tiene:

$$Q = \frac{m}{M}C_V\Delta T \quad => \quad Q = \frac{V\Delta P}{R}C_V$$

$$Q = \frac{(3.10^{-3})(22)(1{,}013.10^5)(20{,}8.10^3)}{8{,}31.10^3}$$

$$\clubsuit\ Q = 16{,}7.10^3\ J \qquad \text{(E)}$$

Solución: 123

• El nitrógeno es diatómico ($\gamma = 5$), su capacidad calorífica, a volumen constante es:

$$C_V = \frac{\gamma}{2}R = (\frac{5}{2})(8{,}31.10^3)$$

$$C_V = 20{,}8.10^3\ J/kmol.^0K$$

Por dato, la velocidad cuadrática media se duplica, esto es:

$$< v_C >= 2 < v_C >_0$$

$$(\frac{3\,RT}{M})^{1/2} = 2\,(\frac{3\,RT_0}{M})^{1/2}$$

$$T = 4\,T_0 = (4)(280) = 1120^0K$$

Luego, la cantidad de calor suministrada al nitrógeno es:

$$Q = \frac{m}{M}C_V(T - T_0)$$

$$Q = \frac{(10.10^{-3})(20{,}8.10^3)(1120 - 280)}{28}$$

$$\clubsuit\ Q = 6240J \qquad \text{(D)}$$

Solución: 124

• La razón de la energía del movimiento térmico molecular a la cantidad de calor suministrada a volumen constante al helio es:

$$\frac{E}{Q_V} = \frac{(m/M)(\gamma/2)\,RT}{(m/M)(\gamma/2)\,R\Delta T}$$

$$\frac{E}{Q_V} = \frac{T}{\Delta T} = \frac{100 + 273}{100}$$

$$\clubsuit\ E/Q_V = 3{,}73 \qquad \text{(C)}$$

Solución: 125

• Para que no haya choques entre las moléculas, su recorrido libre medio, no debe ser menor que el diámetro del recipiente, esto es:

$$< \lambda >\geq D \geq \frac{1}{\sqrt{2}\pi\, d^2 N}$$

$$N \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi\, d^2 D}$$

$$N \leq \frac{1}{(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-8})^2(15)}$$

$$N \leq 1{,}7.10^{13}cm^{-3} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 126

• De la ecuación de los gases ideales, el número de moles por unidad de volumen es:

$$\frac{n}{V} = \frac{P}{R\,T}$$

De modo que, el número de moléculas por unidad de volumen es:

$$N = n\,N_A = \frac{P\,N_A}{R\,T}$$

$$N = \frac{(0{,}1)(133{,}3)(6{,}023.10^{26})}{(8{,}31.10^3)(373)}$$

$$N \approx 2{,}6.10^{21}\ \frac{\text{moleculas}}{m^3}$$

Luego, el recorrido libre medio de las moléculas de anhídrido carbónico es:

$$<\lambda>=\frac{1}{\sqrt{2}\pi D^2 N}$$

$$<\lambda>=\frac{1}{(\sqrt{2}\pi)(3{,}2.10^{-10})^2(2{,}6.10^{21})}$$

$$\clubsuit\ <\lambda>=845.10^{-6}\,m \quad \text{(E)}$$

Solución: 127

- De la ecuación de los gases ideales, el número de moles por unidad de volumen, es:

$$\frac{n}{V}=\frac{P}{R\,T}$$

De modo que, el número de moléculas por unidad de volumen es:

$$N=n\,N_A=\frac{P\,N_A}{R\,T}$$

$$N=\frac{(1{,}013.10^5)(6{,}023.10^{26})}{(8{,}31.10^3)(273)}$$

$$N=2{,}7.10^{25}\,\text{moleculas}/m^3$$

Luego, el recorrido libre medio de las moléculas de anhídrido carbónico es:

$$<\lambda>=\frac{1}{\sqrt{2}\pi D^2 N}$$

$$<\lambda>=\frac{1}{(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-10})^2(2{,}7.10^{25})}$$

$$\clubsuit\ <\lambda>=92{,}6.10^{-9}\,m \quad \text{(E)}$$

Solución: 128

- El número de moléculas por unidad de volumen es:

$$N=n\,N_A=\frac{P\,N_A}{R\,T}$$

$$N=\frac{(400)(133{,}3)(6{,}023.10^{26})}{(8{,}31.10^3)(300)}$$

$$N=1{,}29.10^{25}\ \frac{\text{moleculas}}{m^3}$$

De otro lado, la velocidad media con la que se mueven las moléculas es:

$$<v>=\left(\frac{8\,R\,T}{\pi\,M}\right)^{1/2}$$

$$<v>=\left[\frac{(8)(8{,}31.10^3)(300)}{28\,\pi}\right]^{1/2}$$

$$<v>=476\ m/s$$

Luego, el número medio de choques entre las moléculas de nitrógeno es:

$$<z>=\frac{<v>}{<\lambda>}=\sqrt{2}\pi D^2 N<v>$$

$$<z>=(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-10})^2(1{,}29.10^{25})(476)$$

$$\clubsuit\ <z>\approx 2{,}5.10^9\,s^{-1} \quad \text{(B)}$$

Solución: 129

- Del problema 128, el número medio de choques que ocurren en 1 s, viene dado por

$$<z>=\sqrt{2}\pi D^2 N<v>$$

$$<z>=\sqrt{2}\pi D^2\left(\frac{P\,N_A}{R\,T}\right)\left(\frac{8\,R\,T}{\pi\,M}\right)^{1/2}$$

Luego, la razón del número medio de choques antes y después de duplicarse el volumen es:

$$\frac{<z>_0}{<z>}=\frac{\sqrt{2}\pi(\frac{P_0N_A}{RT_0})(\frac{8RT_0}{\pi M})^{1/2}}{\sqrt{2}\pi(\frac{PN_A}{RT})(\frac{8RT}{\pi M})^{1/2}}$$

$$\frac{<z>_0}{<z>}=(\frac{P_0}{P})(\frac{T}{T_0})^{1/2}$$

Ahora, de la ecuación de los gases ideales para los estados inicial y final, se tiene:

$$\frac{P_0V_0}{T_0}=\frac{PV}{T} \quad => \quad \frac{T}{T_0}=(\frac{P}{P_0})(\frac{V}{V_0})$$

Sustituyendo (T/T_0) en la expresión anterior, y teniendo en cuenta que para un proceso adiabático, $(P/P_0)=(V_0/V)^x$, de modo que:

$$\frac{<z>_0}{<z>}=(\frac{P_0}{P})(\frac{P}{P_0})^{1/2}(\frac{V}{V_0})^{1/2}$$

$$\frac{<z>_0}{<z>}=(\frac{P_0}{P})^{1/2}(\frac{V}{V_0})^{1/2}$$

$$\frac{<z>_0}{<z>}=(\frac{V}{V_0})^{\frac{x}{2}}(\frac{V}{V_0})^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{<z>_0}{<z>}=(\frac{V}{V_0})^{\frac{x+1}{2}}=(2)^{\frac{1,4+2}{2}}$$

$$\clubsuit \quad \frac{<z>_0}{<z>}\approx 2,3 \qquad (B)$$

Solución: 130

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos el número de moléculas por unidad de volumen, así:

$$N=n\,N_A=\frac{P\,N_A}{R\,T}$$

$$N=\frac{(10^4)(6,023.10^{26})}{(8,31.10^3)(290)}$$

$$N\approx 2,5.10^{24}\ \frac{\text{moleculas}}{m^3}$$

Luego, el recorrido libre medio de las moléculas de nitrógeno es:

$$<\lambda>=\frac{1}{\sqrt{2}\pi\,D^2N}$$

$$<\lambda>=\frac{1}{(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-10})^2(2,5.10^{24})}$$

$$\clubsuit \quad <\lambda>=10^{-6}m \qquad (A)$$

Solución: 131

• El número de moléculas de helio por unidad de volumen es:

$$N=n\,N_A=\rho\,N_A/M$$

Luego, el recorrido libre medio que realizan las moléculas de helio es:

$$<\lambda>=\frac{M}{\sqrt{2}\pi\,D^2\rho\,N_A}$$

$$<\lambda>=\frac{(4)(10^{-26})}{(\sqrt{2}\pi)(2.10^{-10})^2(2,1.10^{-2})(6,023)}$$

$$\clubsuit \quad <\lambda>=1,8.10^{-6}m \qquad (A)$$

Solución: 132

• El número de moléculas de nitrógeno por unidad de volumen es:

$$N=\frac{P\,N_A}{R\,T}$$

$$N=\frac{(1)(133,3)(6,023.10^{26})}{(8,31.10^3)(283)}$$

$$N=3,4.10^{22}\ \frac{\text{moleculas}}{m^3}$$

La velocidad media con la que se mueven las moléculas de nitrógeno es:

$$<v>=(\frac{8RT}{\pi M})^{1/2}$$

$$<v>=[\frac{(8)(8{,}31.10^3)(283)}{(\pi)(28)}]^{1/2}$$

$$<v>\approx 462{,}5\ m/s$$

Luego, el tiempo medio que transcurre entre dos choques consecutivos es:

$$<t>=\frac{<\lambda>}{<v>}$$

$$<t>=\frac{1}{\sqrt{2}\pi D^2 N <v>}$$

$$<t>=\frac{1}{(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-10})^2(3{,}4.10^{22})(462{,}5)}$$

♣ $<t>\approx 0{,}16\ \mu s$ (A)

Solución: 133

• Recordemos que el número de moléculas por unidad de volumen, viene dado por:

$$N=\rho N_A/M$$

Sustituyendo está expresión en la ecuación del recorrido libre medio, y despejando el diámetro (D), se tiene:

$$<\lambda>=\frac{M}{\sqrt{2}\pi D^2 \rho N_A}$$

$$D=(\frac{M}{\sqrt{2}\pi <\lambda> \rho N_A})^{1/2}$$

$$D=[\frac{44}{(\sqrt{2}\pi)(7{,}9.10^{-8})(1{,}7)(6{,}023.10^{26})}]^{1/2}$$

♣ $D\approx 0{,}35.10^{-9}\ m$ (B)

Solución: 134

• Las ecuaciones de estado para ambas partes del cilindro, antes y después que cambie la relación de volúmenes es:

Cuando la razón de volúmenes es $\eta=4$.

$$\left.\begin{array}{l} P_1 V_1 = nRT_0 \\ P_2 V_2 = nRT_0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Igualando estas ecuaciones entre sí.

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{V_1}{V_2}=\eta \qquad (2)$$

Cuando la razón de volúmenes es $\eta'=3$.

$$\left.\begin{array}{l} P_1' V_1' = nRT \\ P_2' V_2' = nRT \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Igualando estas ecuaciones entre sí.

$$\frac{P_2'}{P_1'}=\frac{V_1'}{V_2'}=\eta' \qquad (4)$$

De otro lado, de las ecs.(2) y (4), se deduce que la diferencia de presión antes y después del cambio en la relación de volúmenes es la misma, esto es:

$$P_1-P_2=P_1'-P_2'$$

$$\frac{P_1}{P_1'}=\frac{\eta'-1}{\eta-1} \qquad (5)$$

Sumando las ecuaciones en (1) y en (3), considerando (2) y (4):

$$P_1(V_1+V_2)=n\,R\,(T_0+\frac{T_0}{\eta})$$

$$P_1'(V_1'+V_2')=n\,R\,(T+\frac{T}{\eta'})$$

Dividiendo estas ecuaciones, y teniendo en cuenta la relación (5), obtenemos:

$$\frac{P_1}{P_1'} = \frac{(1+1/\eta)T_0}{(1+1/\eta')T} = \frac{\eta'-1}{\eta-1}$$

$$T = \frac{\eta'(\eta^2-1)}{\eta(\eta'^2-1)}T_0$$

$$T = \frac{(3)(4^2-1)}{(4)(3^2-1)}(300)$$

♣ $T = 422^0 K$ Ⓒ

Solución: 135

• El número de moles que se extraen en el primer ciclo, y el número de moles que quedan en el recipiente, son:

$$\frac{n}{V} = \frac{\Delta n_1}{\Delta V} \quad => \quad \Delta n_1 = \frac{\Delta V}{V} n$$

$$n_1 = n - \Delta n_1 = (\frac{V-\Delta V}{V})\, n$$

Así, la presión después del primer ciclo es:

$$P_1 V = n_1 RT = (\frac{V-\Delta V}{V})\, n\, RT$$

$$P_1 V = (\frac{V-\Delta V}{V})\, P_0 V$$

$$P_1 = (1-\frac{\Delta V}{V})\, P_0$$

Análogamente, la presión luego del 2do, 3ro,..., n-ésimo ciclo es:

$$P_2 = (1-\frac{\Delta V}{V})^2 P_0$$

$$P_3 = (1-\frac{\Delta V}{V})^3 P_0$$

$$P_n = (1-\frac{\Delta V}{V})^n P_0$$

Por dato, $P_0/P = \xi$, entonces:

$$(1-\frac{\Delta V}{V})^{-n} = \frac{P_0}{P} = \xi$$

$$n\,\ell n(1-\frac{\Delta V}{V})^{-1} = \ell n\, \xi$$

Como, $\Delta V / V \to 0$, entonces utilizamos la aproximación $(1+x)^n \approx 1 + nx$, así:

$$n = \frac{\ell n\, \xi}{\ell n(1+\Delta V/V)}$$

$$n = \frac{\ell n(2)}{\ell n(1+1/500)}$$

♣ $n \approx 347$ ciclos Ⓔ

Solución: 136

• De la ecuación de los gases ideales, despejemos el volumen y derivemos con respecto al tiempo, así:

$$P\,V = n\,RT \quad => \quad V = \frac{n\,RT}{P}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{n\,RT}{P^2}\frac{dP}{dt}$$

$$C = -\frac{V}{P}\frac{dP}{dt}$$

Separando variables e integrando:

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{C}{V}\int_0^t dt$$

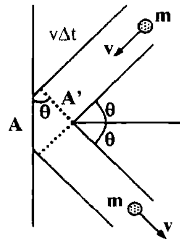
$$\ell n(\frac{P}{P_0}) = -\frac{C}{V}t$$

$$P(t) = P_0\, e^{-Ct/V} = P_0\, e^{-\frac{(5)(2)}{50}}$$

♣ $P(2) \approx 0{,}82\, P_0$ Ⓑ

Solución: 137

• Representemos el has de moléculas de nitrógeno incidiendo sobre la pared.



En la Fig., el impulso suministrado por la N moléculas, a la pared vertical, es igual, al cambio en la cantidad de su movimiento en la dirección del eje X, esto es:

$$F\,\Delta t = N\,[p\cos\theta - (-p\cos\theta)]$$

$$F\,\Delta t = 2\,N\,m v\cos\theta$$

Siendo, (N) el número de moléculas contenidas en el volumen del cilindro de longitud ($v\Delta t$) y base (A'), luego:

$$F\,\Delta t = 2\,(n\,v\,\Delta t\,A')\,m\,v\cos\theta$$

$$F = 2n\,m\,v^2 A'\cos\theta$$

En la Fig. el área transversal del haz (A') es la proyección del área de incidencia (A) esto es $A'=A\cos\theta$, de modo que:

$$F = 2n\,m\,v^2 A\cos^2\theta$$

Luego, la presión que ejercen las moléculas de nitrógeno sobre la pared es:

$$P = \frac{F}{A} = 2n\,m\,v^2\cos^2\theta$$

$$P = (2)(28)(1{,}66.10^{-27})(0{,}9.10^{25})(400)^2\cos^2 30^o$$

$$\clubsuit\;\; P = 10^5\ N/m^2 \approx 1\ atm \quad (A)$$

Solución: 138

• De la ecuación de los gases ideales para dos estados, y teniendo en cuenta que la expansión es adiabática, se tiene:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P\,V}{T}$$

$$\frac{T_0}{T} = (\frac{P_0}{P})(\frac{V_0}{V}) = (\frac{V}{V_0})^x(\frac{V_0}{V})$$

$$\frac{T_0}{T} = (\frac{V}{V_0})^{x-1}$$

Sustituyendo esta expresión en la razón de las velocidades cuadráticas medias inicial y final, se tiene:

$$\frac{<v_C>_0}{<v_C>} = \frac{(3RT_0/M)^{1/2}}{(3RT/M)^{1/2}} = (\frac{T_0}{T})^{1/2}$$

$$\frac{<v_C>_0}{<v_C>} = (\frac{V}{V_0})^{\frac{x-1}{2}} = n$$

$$n' = \frac{V}{V_0} = n^{\frac{2}{x-1}} = 1{,}5^{\frac{2}{1{,}4-1}}$$

$$\clubsuit\;\; n' \approx 7{,}6\ \text{veces} \quad (D)$$

Solución: 139

• De la ecuación de los gases ideales, se tiene que:

$$P\,V = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \frac{R\,T}{M} = \frac{P}{\rho}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la velocidad más probable, se tiene:

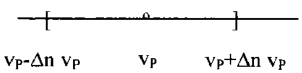
$$v_P = (\frac{2R\,T}{M})^{1/2}$$

$$v_P = (\frac{2\,P}{\rho})^{1/2} = [\frac{(2)(1{,}013.10^5)}{(1)}]^{1/2}$$

$$\clubsuit \ v_P \approx 450 \ \frac{m}{s}$$ (D)

Solución: 140

- Representemos el intervalo de velocidades que pueden tener las moléculas.



El intervalo de velocidades con las que se pueden mover las moléculas, y el intervalo de la velocidad relativa respecto de la más probable, son:

$$\Delta v = (v_P + \Delta n \ v_P) - (v_P - \Delta n \ v_P)$$

$$\Delta v = 2\Delta n \ v_P \quad \Rightarrow \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_p} = 2\,\Delta n$$

Ahora, hallemos la velocidad relativa (u) con la que se mueven las moléculas, así:

$$\frac{v - v_P}{v_P} = \Delta n$$

$$u = 1 + \Delta n = 1{,}01$$

Sustituyendo (u) y (Δu) en la fracción de moléculas (en porcentaje), para la distribución de Maxwell según sus velocidades relativas (u), tenemos:

$$\frac{\Delta N}{N} = (\frac{4}{\sqrt{\pi}})\, e^{-u^2} u^2 \Delta u$$

$$\frac{\Delta N}{N} = (\frac{8}{\sqrt{\pi}})\, e^{-(1{,}01)^2} (1{,}01)^2 (1\%)$$

$$\clubsuit \ \frac{\Delta N}{N} \approx 1{,}66 \ \%$$ (D)

Solución: 141

- La velocidad más probable con la que se muevan las moléculas de oxígeno es:

$$v_P = (\frac{2\,RT}{M})^{1/2}$$

$$v_P = [\frac{(2)(8{,}31.10^3)(273)}{32}]^{1/2}$$

$$v_P = 376{,}5 \ \frac{m}{s}$$

Ahora, hallemos el intervalo de velocidades, la velocidad relativa y el intervalo de velocidades relativa, así:

$$\Delta v = 110 - 100 = 10 \ \frac{m}{s}$$

$$u = \frac{v}{v_P} = \frac{100}{376{,}5} = 0{,}27$$

$$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_P} = \frac{10}{376{,}5}$$

Sustituyendo en la fracción de moléculas, para la distribución de Maxwell según sus velocidades, se tiene:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-(0{,}27)^2} (0{,}27)^2 (\frac{10}{376{,}5})$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 0{,}004$$

Así, el porcentaje de moléculas con velocidades entre 100 y 110 es:

$$\clubsuit \ \frac{\Delta N}{N} = 0{,}4 \ \%$$ (B)

Solución: 142

- El numero total de moléculas de oxígeno que hay en 2,5 g es:

$$N = n\,N_A = \frac{m}{M}N_A$$

$$N = \frac{(2{,}5.10^{-3})(6{,}023.10^{26})}{32}$$

$$N = 4{,}7.10^{22} \text{ moléculas}$$

De otro lado, la velocidad relativa (u) con la que se mueven las moléculas es:

$$u = \frac{v}{v_P} = \frac{(3\,kT/m)^{1/2}}{(2\,kT/m)^{1/2}}$$

$$u = (\frac{3}{2})^{1/2} = 1{,}22$$

Luego, de la tabla la fracción correspondiente a velocidades mayores que la velocidad cuadrática media es:

$$\frac{\Delta N}{N} = 0{,}41$$

$$\Delta N = (4{,}7.10^{22})(0{,}41)$$

$$♣\ \Delta N = 1{,}93.10^{22} \qquad \text{A}$$

Solución: 143

• La velocidad relativa media de las moléculas de oxígeno, viene dado por:

$$< u >= \int_0^{\infty} u\,f(u)\,du$$

$$< u >= 4\pi\,(\frac{m}{4\pi kT})^{3/2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{mu^2}{4kT}}\,u^3 du$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$-\frac{m\,u^2}{4\,kT} = x \quad => \quad u^2 = -\frac{4\,kT}{m}x$$

$$u\,du = -\frac{2\,kT}{m}dx$$

Con los nuevos límites de integración.

Para: $u = 0 \quad => \quad x = 0$

Para: $u = \infty \quad => \quad x = -\infty$

La integral anterior queda, así:

$$< u >= 32\pi\,(\frac{m}{4\pi\,kT})^{3/2}(\frac{kT}{m})^2\int_0^{-\infty} e^x\,x\,dx$$

$$< u >= (\frac{16\,kT}{\pi\,m})^{1/2}(e^x\,(x-1))\Big]_0^{-\infty}$$

$$< u >= (\frac{16\,RT}{\pi\,M})^{1/2}(1)$$

$$< u >= [\frac{(16)(8{,}31.10^3)(300)}{32\,\pi}]^{1/2}$$

$$♣\ < u >\approx 630\,\frac{m}{s} \qquad \text{D}$$

Solución: 144

• Por dato, la diferencia de la velocidad cuadrática media y velocidad probable es: Δv=400 m/s, esto es:

$$(\frac{3\,kT}{m})^{1/2} - (\frac{2\,kT}{m})^{1/2} = \Delta v$$

$$T = \frac{m\,(\Delta v)^2}{k\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$T = \frac{M\,(\Delta v)^2}{R\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

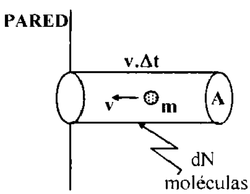
$$T = \frac{(2)(400)^2}{(8{,}31.10^3)(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$♣\ T = 381^oK \qquad \text{A}$$

Solución: 145

- Recordemos que al chocar una partícula de masa (m) contra una pared, moviéndose con una velocidad (v) perpendicular a ella, le comunica un impulso, igual a:

$$I = F\,\Delta t = 2m\,v$$



Así, el impulso suministrado a la pared vertical por las (dN) moléculas, contenidas en el cilindro de volumen (v.Δt.A) es:

$$dF\,\Delta t = 2\,d\,N\,m\,v$$

$$dF\,\Delta t = 2(d\,n\,v\,\Delta t\,A)\,m\,v$$

Sustituyendo aquí, el diferencial de la concentración de moléculas (dn) dada por la distribución de Maxwell, e integrando, se tiene:

$$\int_0^F dF = \int_0^\infty 2Am\,v^2\left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{1/2} n\,e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv$$

$$P = \frac{F}{A} = 2m\,n\left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{1/2}\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2 dv$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\frac{m\,v^2}{2k\,T} = u^2 \quad => \quad v^2 = \frac{2\,kT}{m}u^2$$

$$v = \left(\frac{2\,kT}{m}\right)^{1/2} \quad => \quad dv = \left(\frac{2\,kT}{m}\right)^{1/2} du$$

Con los nuevos límites de integración:

Para: $v = \infty$ => $u = \infty$

Para: $v = 0$ => $u = 0$

La integral anterior queda, así:

$$P = 2m\,n\left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{1/2}\left(\frac{2\,kT}{m}\right)^{1/2}\int_0^\infty e^{-u^2}u^2 du$$

$$P = \left(\frac{2m\,n}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\frac{2\,kT}{m}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)$$

$$P = n\,kT$$

$$P = (8.10^{24})(1{,}38.10^{-23})(400)$$

$$P = 4{,}416.10^{4}\,\frac{N}{m^2}$$

♣ $P \approx 0{,}44$ atm (C)

TEMPERATURA Y CALOR

1. CALOR

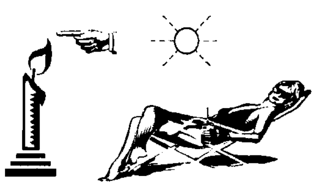
a) Calorimetría

Es una rama de la física molecular, que estudia las leyes que gobiernan el mecanismo del equilibrio térmico y los fenómenos de transporte del calor.

b) Calor

Se llama calor a la propagación o flujo de la energía entre cuerpos que se ponen en contacto, es decir, el calor es la energía en movimiento.

- El calor fluye en forma natural de los cuerpos calientes hacia los fríos, hasta alcanzar el equilibrio térmico.
- Se puede decir, también, que el calor es una forma de energía, producida por el movimiento térmico de las moléculas de un cuerpo o sustancia.
- El calor puede ser generado por reacciones químicas (como en la combustión), nucleares (como en la fusión nuclear de los átomos de hidrógeno que tienen lugar en el Sol), disipación electromagnética (como en los hornos de microondas), o por disipación mecánica (fricción)

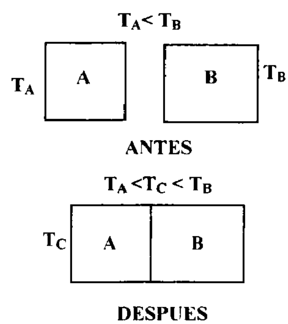


- Llamamos energía térmica a la suma de las energías de todas las partículas que componen un cuerpo. Cuando un cuerpo se calienta gana energía, aumentando su temperatura, y cuando se enfría pierde energía disminuyendo su temperatura. La energía ganada o perdida por el cuerpo se llama calor.
- Los cuerpos no tienen calor, sino energía interna. El calor es la transferencia de parte de esta energía interna (energía térmica) de un sistema a otro, que se encuentran a diferente temperatura.
- El calor que puede intercambiar un cuerpo con su entorno depende del tipo de transformación que se efectué sobre ese cuerpo y por tanto depende de cómo llega el cuerpo del estado inicial al estado final (camino).
- El calor puede ser transferido de un sistema hacia otro, mediante conducción, convección o radiación.

c) Efectos del calor

1) El calor dilata los cuerpos, todos los cuerpos, cuando se calientan, aumentan de volumen.
2) El calor modifica los estados de la materia convirtiendo los sólidos en líquidos y estos en gases.
3) El calor hace variar la temperatura.

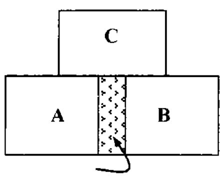
d) Equilibrio térmico



Todos los cuerpos de la naturaleza tienden a un estado final llamado equilibrio termodinámico con el medio que los rodea o con otros cuerpos en contacto, es decir, adquieren la misma temperatura. Así, en la Fig., los cuerpos A (frió) y B (caliente) de temperaturas T_A y T_B ($T_A<T_B$) al ponerse en contacto entre sí, luego de transcurrido cierto tiempo, alcanzan la misma temperatura T_C, llamada la temperatura del equilibrio térmico.

e) Ley cero de la termodinámica

Consideremos dos sistemas A y B unidos entre sí mediante un material aislante, y a su vez cada uno de ellos en contacto con un tercer sistema C, como se muestra en la Fig.. En estas condiciones se origina una transferencia de energía calorífica entre los sistemas, hasta que alcancen el equilibrio termodinámico.



AISLANTE

A este fenómeno se conoce con el nombre de la ley cero de la termodinámica, cuyo enunciado es:

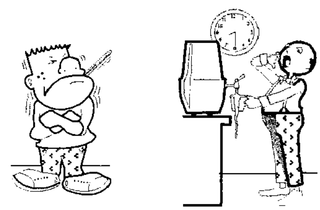
<<Si dos sistemas A y B están en equilibrio térmico con un tercer sistema C, entonces dichos sistemas se encuentran en equilibrio térmico entre sí >>

2. TEMPERATURA

a) Concepto

Es una magnitud física escalar, mide el grado de movimiento de las moléculas de un cuerpo (ó sistema); es decir, mide la energía media molecular. A mayor temperatura las moléculas vibran u oscilan con mayor intensidad, alrededor de su posición de equilibrio, y a menor temperatura con menor intensidad.

- La temperatura sirve para caracterizar el grado de calentamiento o enfriamiento (caliente-frío) de un cuerpo. Por ejemplo, nuestra piel percibe automáticamente si un cuerpo esta caliente o frío, pero no sirve para medir la energía cinética media de las moléculas de ese cuerpo. Entonces, podemos decir que la temperatura es una medida de esta energía cinética media.



FRIO CALIENTE

b) Medición de la temperatura

La temperatura de un cuerpo no es una propiedad que pueda medirse directamente, si no que para obtenerla se emplean otras propiedades, ya sea del propio cuerpo a medir, o del aparato que se utiliza para tal fin, llamado termómetro. Este método de medir la temperatura es posible, gracias a que se conoce la relación entre la temperatura y alguna otra propiedad, que puede ser, por ejemplo la dilatación, la resistencia del material, etc...Dependiendo de la termométrica utilizada los termómetros reciben distintos nombres y funcionan de modo diferente.

- Las más altas temperaturas que pueden lograrse en la Tierra ocurren en colisiones de partículas de alta energía, principalmente iones pesados, en los cuales se aprecian "bolas de fuego" a temperaturas de varios cientos de MeV.

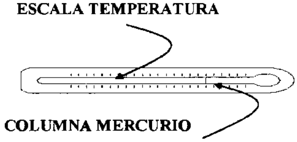
c) Termómetro

Es un dispositivo que se utiliza para medir la temperatura de un cuerpo, la mayoría de ellos se basan en el fenómeno de dilatación de los cuerpos (mercurio).

d) Tipos de termómetros

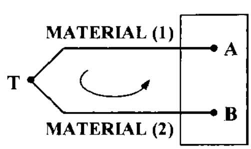
1) Mercurio

Es el más común, consiste de un tubo capilar de vidrio al vació con un depósito de mercurio en el fondo y el extremo superior cerrado. Debido a que el mercurio se dilata más rápidamente que el vidrio, cuando aumenta la temperatura este se dilata y sube por la pared del tubo. Este termómetro es el más utilizado, aunque no es el más preciso, porque el mercurio a los -40 ^{0}C se congela limitando el intervalo de su funcionamiento.



2) Termocupla

Su funcionamiento se basa en un voltaje eléctrico producido por la unión de conductores diferentes y que cambia con la temperatura, este voltaje se utiliza como medida indirecta de la temperatura.



La unión de dos metales diferentes en el punto T, producen un efecto termoeléctrico, el cual, es utilizado en las llamadas termocuplas.

3) Termistor

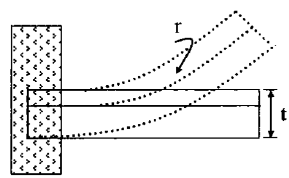
Este método se obtiene gracias a la propiedad de variación de la resistencia eléctrica con la temperatura.

4) Pirómetro

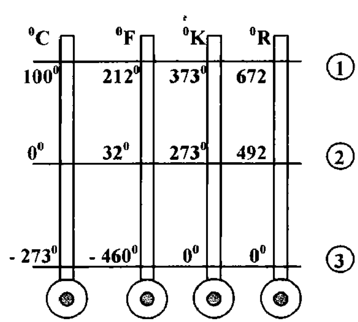
Se utiliza en los casos donde las temperaturas a medir son altas. La medición se logra por el registro de la energía radiante (radiación electromagnética, por ejemplo emisión de infrarrojo) que desprende un cuerpo caliente.

5) Bandas de metal

Consiste en dos tiras delgadas de metal unidas en uno de sus extremos, dilatándose a diferentes velocidades al cambiar la temperatura, y arqueándose. Estas tiras se utilizan en los radiadores de los automóviles, y en los sistemas de calentamiento y aire acondicionado.



e) Escalas de temperatura



La temperatura de un cuerpo se puede medir en diferentes escalas, así, las escalas más conocidas son:

* Centígrada
* Kelvin
* Fahreinheit
* Rankine

Para la construcción de una escala de temperatura, se deben considerar tres puntos de referencia fijos, los cuales se muestran en la Fig., y son:

1) Punto de ebullición del agua.
2) Punto de congelación del agua.
3) Cero absoluto (0^0 K)

Los puntos 1 y 2 se toman para una presión de 1 atm.

f) Relación entre las escalas de temperaturas

Basados en el esquema anterior, se puede fácilmente deducir las relaciones de transformación entre las escalas de temperatura, así, tenemos:

1) Centígrada - Kelvin

$$^0C = {}^0K - 273$$

2) Centígrada - Fahreinheit

$$^0C = \frac{5}{9}(^0F - 32)$$

3) Centígrada - Rankine

$$^0C = \frac{5}{9}(^0R - 492)$$

4) Kelvin - Fahreinheit

$$^0K = \frac{5}{9}(^0F - 32) + 273$$

5) Fahreinheit - Rankine

$$^0F = {}^0R - 460$$

3. DILATACION

a) Definición

Se llama así, al aumento o disminución que experimenta las dimensiones (tamaño) de un cuerpo al aumentar o disminuir su temperatura.

b) Fundamentos de la dilatación

La dilatación térmica tiene un fundamento físico diferente en líquidos, gases y sólidos.

Gases.- En los gases las moléculas están deslocalizadas, por lo que, a lo largo del tiempo una molécula puede llegar a ocupar cualquier posición en el seno de la masa gaseosa, el calentamiento produce un aumento de la energía cinética de cada molécula lo cual aumenta la presión del mismo, que a su vez es el fundamento de la dilatación térmica.

Sólidos.- En lo sólidos antes de la fusión o aparición de deformación por calor, cada molécula está constreñida a moverse alrededor de una pequeña región alrededor de la posición de equilibrio de la misma. Al aumentar la temperatura la molécula realiza oscilaciones de mayor amplitud alrededor de su posición de equilibrio, lo cual, tiene el efecto de expandir el sólido.

Líquidos.- En los líquidos el proceso es más complejo y presenta características tanto de los gases como de los líquidos.

c) Clases

1) Dilatación lineal

Es el aumento o disminución que experimentan las longitudes de los cuerpos al aumentar o disminuir su temperatura.

* Longitud dilatada

La longitud dilatada del cuerpo, viene dada por:

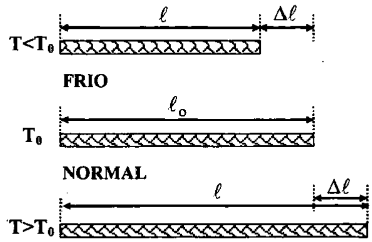
$$\ell = \ell_o[1 + \alpha(T - T_o)]$$

siendo, (ℓ_o, ℓ) las longitudes inicial y final, (T_0, T) las temperaturas inicial y final, y (α) el coeficiente de dilatación lineal.

* Variación en la longitud
La diferencia entre las longitudes final e inicial del cuerpo, viene dado por:

$$\Delta\ell = |\ell - \ell_o| = |\ell_o \alpha (T - T_o)|$$

Si, el cuerpo se calienta su longitud final (ℓ) es mayor que su inicial (ℓ_o), y si el cuerpo se enfría su longitud final (ℓ) es menor que su inicial (ℓ_o), como se muestra en la Fig.



* Coeficiente de dilatación lineal
Se llama coeficiente de dilatación lineal al cociente que mide el cambio relativo de longitud, que se produce cuando un cuerpo experimenta un cambio de temperatura, viene dado por:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta\ell / \ell}{\Delta T}$$

☞ **Unidad:** (α) se mide en $^0C^{-1}$.

2) Dilatación superficial

Es el aumento o disminución que experimentan las superficies de los cuerpos al aumentar o disminuir su temperatura.

* Superficie dilatada
La superficie dilatada del cuerpo, viene dada por:

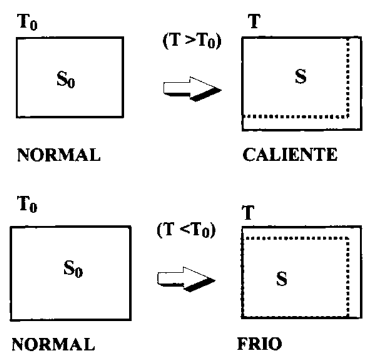
$$S = S_o[1 + \gamma (T - T_o)]$$

siendo, (S_o, S) las longitudes inicial y final, (T_0, T) las temperaturas inicial y final, y (γ) el coeficiente de dilatación superficial.

* Variación en la superficie
La diferencia entre las áreas de la superficie final e inicial del cuerpo, viene dado por:

$$\Delta S = |S - S_o| = |S_o \alpha (T - T_o)|$$

Si, el cuerpo se calienta el área de la superficie final (S) es mayor que la inicial (S_0), y si el cuerpo se enfría el área de su superficie final (S) es menor que la inicial (S_0), como se muestra en la Fig.



* Coeficiente de dilatación superficial
Se llama coeficiente de dilatación superficial al cociente que mide el cambio relativo del área de una superficie, que se produce cuando un cuerpo experimenta un cambio de temperatura, viene dado por:

$$\gamma = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta S / S}{\Delta T}$$

☞ **Unidad:** (γ) se mide en $^0C^{-1}$.

3) Dilatación volumétrica

Es el aumento o disminución que experimentan los volúmenes de los cuerpos al aumentar o disminuir su temperatura.

* Volumen dilatado

El volumen dilatado del cuerpo, viene dado por:

$$V = V_o[1 + \beta(T - T_o)]$$

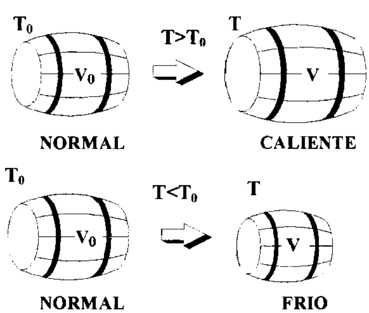
siendo, (V_0, V) los volúmenes inicial y final, (T_0, T) las temperaturas inicial y final, y (β) el coeficiente de dilatación volumétrico.

* Variación en el volumen

La diferencia entre los volúmenes final e inicial del cuerpo, viene dado por:

$$\Delta V = |V - V_o| = |V_o \beta (T - T_o)|$$

Si, el cuerpo se calienta su volumen final (V) es mayor que su inicial (V_0), y si el cuerpo se enfría su volumen final (V) es menor que su inicial (V_0), como se muestra en la Fig.



* Coeficiente de dilatación volumétrica

Se llama coeficiente de dilatación volumétrica al cociente que mide el cambio relativo del volumen de un cuerpo, que se produce cuando un cuerpo experimenta un cambio de temperatura, viene dado por:

$$\beta = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta V / V}{\Delta T}$$

☞ **Unidad:** (β) se mide en $^0C^{-1}$.

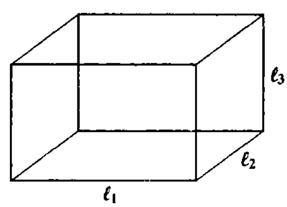
d) Relación entre α, γ y β

La relación entre los coeficientes de dilatación lineal (α), superficial (γ) y volumétrico (β), viene dado por:

$$\gamma = 2\alpha \;,\; \beta = 3\alpha \;,\; \beta = \frac{3}{2}\gamma$$

Demostración:

- Consideremos un paralelepípedo de lados ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 a la temperatura T.



El volumen del paralelepípedo a la temperatura T es:

$$V_o = \ell_1 \ell_2 \ell_3$$

El volumen del paralelepípedo a la temperatura T+ΔT es:

$$V_o + \Delta V = (\ell_1 + \Delta\ell_1)(\ell_2 + \Delta\ell_2)(\ell_3 + \Delta\ell_3)$$

$$V_o + \Delta V = (\ell_1 + \alpha\,\ell_1\Delta T)(\ell_2 + \alpha\,\ell_2\Delta T)$$
$$(\ell_3 + \alpha\,\ell_3\Delta T)$$

$$V_o + \Delta V = \ell_1 \ell_2 \ell_3 (1 + \alpha\,\Delta T)^3$$

$$V_o + \Delta V = V_o[1 + 3\alpha\Delta T + 3\alpha^2\Delta T^2 + \alpha^3\Delta T^3]$$

$$\Delta V = V_o\Delta T[3\alpha + 3\alpha^2\Delta T + \alpha^3\Delta T^2]$$

Luego, de la definición de coeficiente de dilatación volumétrica, obtenemos:

$$\beta = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta V / V_o}{\Delta T}$$

$$\beta = \lim_{\Delta T \to 0} [3\alpha + 3\alpha^2\Delta T + \alpha^3\Delta T^2]$$

$$♣\ \beta \approx 3\alpha$$

Segunda forma

Consideremos una esfera compacta homogénea de radio "r", cuyo volumen a la temperatura "T" es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ahora, sean "dr" y "dV" los cambios en el radio y volumen que experimenta la esfera, al cambiar su temperatura en "dT", entonces:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Luego, la relación entre los coeficientes de dilatación volumétrica (β) y lineal (α) es:

$$\beta = \frac{dV/V}{dT} = \frac{4\pi r^2 dr / 4\pi r^3/3}{dT}$$

$$♣\ \beta = 3\frac{dr/r}{dT} = 3\alpha$$

e) Aplicaciones

1) Se utiliza en el diseño y construcción de máquinas de todo tipo, por ejemplo máquinas industriales.
2) Se tiene en cuenta en el diseño de rieles del ferrocarril. Para evitar la obstrucción o estiramiento de los rieles se utiliza la técnica de neutralización de tensiones.

f) Dilatómetro

Es un instrumento que se utiliza para determinar los coeficientes de dilatación lineal de los cuerpos, cuando estos reciben calor. Los tipos más utilizados son: 1) de palanca, 2) de diferencial, y 3) de frasco.

4. CIENCIA DE LOS MATERIALES

a) Ciencia de los materiales

Investiga las relaciones entre la estructura y las propiedades de los materiales. Es un campo multidisciplinario que estudia conocimientos fundamentales sobre las propiedades físicas macroscópicas de los materiales y las aplicaciones en varias áreas de la ciencia y la ingeniería, permitiendo la construcción de máquinas y herramientas. Incluye disciplinas tales como la física, química, la nanotecnología, etc...

Clasificación

Según sus propiedades y su estructura atómica, la ciencia de los materiales se clasifica en: metales, cerámicos, polímeros, materiales compuestos y semiconductores.

1) Metales.- Es un material en el que existe un traslape entre la banda de valencia y la banda de conducción en sus estructura electrónica (enlace metálico). Esto le da la capacidad de conducir fácilmente calor y electricidad, y reflejar la luz, produciendo el brillo en los metales.
2) Cerámicos.- Son materiales duros, porosos y frágiles que pueden presentarse de diferentes formas, incluye a todos los materiales inorgánicos no metálicos

Por ejemplo, los ladrillos, los azulejos, el cemento, el vidrio son cerámicos.

Las propiedades más importantes que presentan los cerámicos son:

Refractarios.- Algunos cerámicos soportan temperaturas extremadamente altas sin perder su solidez, estos materiales presentan una baja conductividad térmica por lo que, son buenos aislantes del calor, y se llaman refractarios.

Aislador eléctrico.- La mayoría de los cerámicos no tienen suficiente cantidad de electrones libres, por lo que, no son conductores de electricidad. Esto se debe a los enlaces iónicos y covalente que restringen la movilidad iónica y electrónica. Por ejemplo, en las líneas de transmisión eléctrica se utilizan discos de porcelana, como aislantes de la corriente eléctrica.

Superconductividad.- A temperaturas extremadamente bajas algunos cerámicos presentan la superconductividad, el cual, es un fenómeno que consiste en que en ciertos metales y aleaciones (cerámicos) se produce un descenso brusco de la "resistividad" en las proximidades de una temperatura T_S llamada temperatura de transición al estado superconductor.

Polímeros.- Son macromoléculas (generalmente orgánicas) formadas por la unión de moléculas más pequeñas llamadas monómeros.

Macromoléculas.- Son moléculas de masa molecular elevada, formadas por un gran número de átomos. Cuando una molécula tiene más de 100 átomos se considera una macromolécula. Pueden ser orgánicas o inorgánicas. Dentro de las moléculas orgánicas sintéticas se encuentran los plásticos.

Moléculas orgánica natural.- Son las sintetizadas por los seres vivos, y se llaman biomoléculas, las cuales son estudiadas por la bioquímica.

* Moléculas orgánicas artificiales.- Son sustancias que no existen en la naturaleza y han sido fabricados por el hombre como los plásticos. Los compuestos orgánicos tienen carbono con enlaces de hidrógeno, y los compuestos inorgánicos no.

4) Material compuesto.- Se llaman así a los materiales que presentan las siguientes propiedades:

* Están formados por dos o más componentes distinguibles físicamente y separables mecánicamente.
* Presentan varias formas químicamente distintas, completamente insolubles entre si y separadas por una intercala.
* Sus propiedades mecánicas son superiores a la simple suma de las propiedades de sus componentes (sinergia).

Estos materiales se originan debido a la necesidad de obtener materiales que combinen las propiedades de los cerámicos, los polímeros y los metálicos. Por ejemplo, en la industria del transporte son necesarios materiales ligeros, rígidos, resistentes al impacto y que resista bien la corrosión y el desgaste. Generalmente estas propiedades no se presentan en un solo tipo de material.

b) Ciencia de superficies

Es el estudio de los fenómenos físicos y químicos que ocurren en la interfase de dos fases, incluyendo interfaces sólido líquido, sólido-gas, sólido-vacío, líquido-gas. Es una ciencia interdisciplinaria con campos superpuestos de la química de superficies y física de superficies. Como ciencia es un subcampo de la ciencia de los materiales.

c) Física de superficies

Estudia los cambios físicos que ocurren en las interfaces. Algunos de los aspectos que estudia esta rama de la física incluyen las reconstrucciones superficiales, las transiciones electrónicas (plasmones) y acústicas en las superficies (fonones), la epitaxia, la emisión electrónica, el tunelamiento electrónico, el ensamble de superficies, la formación de nanoestructuras.

d) Química de superficies

Estudia las reacciones químicas que ocurren en las interfaces. Esta ciencia es particularmente importante para el estudio de las reacciones catalizadoras.

e) Interfase

Se llama así a la superficie en la que se unen dos estados diferentes de una misma sustancia o cuerpo o de diferentes sustancias o cuerpos. Por ejemplo, la superficie en la que se unen el hielo con el agua líquida es una interfase.

f) Epitaxia

Se llama así al proceso en la fabricación de circuitos integrados (CI). A partir de una cara de un cristal de material semiconductor se hace crecer un substrato con la misma estructura cristalina. Mediante esta técnica se puede controlar de forma muy precisa el nivel de impurezas en el semiconductor, que son los que definen su carácter (N o P). Para hacer esto se calienta el semiconductor hasta casi su punto de fusión y se pone en contacto con el material de base para al enfriarse, recristalice con la estructura adecuada.

g) Semiconductores

Se llaman así a los cuerpos o sustancias que se comportan como conductores o aisladores y cuya resistividad varia en un amplio intervalo desde 10^{-5} Ω.m hasta 10^{8} Ω.m y disminuye muy rápidamente, según una ley exponencial, al elevarse la temperatura.

1) Semiconductor tipo N

Este tipo de semiconductor, se obtiene llevando a cabo un proceso de dopado añadiendo un cierto tipo de átomos al semiconductor para aumentar el número de portadores de cargas libres (negativas), cuando el material dopante es añadido, este aporta sus electrones mas débilmente ligados a los átomos del semiconductor. Este tipo de agente dopante se conoce como material donante ya que da alguno de sus electrones.

2) Semiconductor tipo P

Este tipo de semiconductor se obtiene llevando a cabo un proceso de dopado, añadiendo un cierto tipo de átomos al semiconductor para aumentar el número de portadores de cargas libres (positivas). Cuando el material dopante es añadido, este libera los electrones más débilmente ligados a los átomos del semiconductor. Este agente dopante es conocido como material aceptor y los átomos del semiconductor que han perdido un electrón son conocidos como huecos.

* Hueco.- Se así llama a la ausencia de un electrón en la banda de valencia. Una banda de valencia completa (o semicompleta) es característica de los aisladores y semiconductores.

h) Fonones

Es un modo cuantizado de vibración que tiene lugar en redes cristalinas como la red atómica de un sólido. El estudio de los fonones es una parte importante en la física del estado sólido debido a que los fonones juegan un rol muy importante en muchas de sus propieda des físicas, como la conductividad térmica y eléctrica.

- En particular, las propiedades de los fonones de longitud de onda larga dan lugar al sonido en los sólidos.
- En el calentamiento de sólidos, los fonones son el mecanismo primario mediante el cual se produce la conducción del calor.

i) Plasmones

Son un tipo de excitación elemental en sólidos (ondas asociadas al movimiento de electrones), es decir, son fotones que al llegar a la superficie de un material quedan atraídos y atrapados por electrones libres, que las transportan por el interior del sólido.

Estas "partículas" pueden ser utilizadas para transportar la luz a través de una lámina. Su aplicación futura en circuitos ópticos abre grandes posibilidades para el desarrollo de nanotecnologías, en campos tales como la informática, las telecomunicaciones, la biomedicina, etc..

j) Efecto túnel

Es un efecto mecánico-cuántico que consiste en que una partícula puede atravesar una barrera de potencial sin tener energía suficiente para superarlas por encima (en el sentido clásico), debido a que la probabilidad de que la partícula se encuentre al otro lado de la barrera es no nula.

- Es un fenómeno que no presenta analogía fuera de la mecánica-cuántica. Este efecto se explica utilizando el concepto nuevo de la naturaleza dual de la materia, el cual, consiste en que una partícula puede comportarse como onda o como partícula.
- Una aplicación de este efecto es el microscopio de efecto túnel y el microscopio de fuerza atómica.

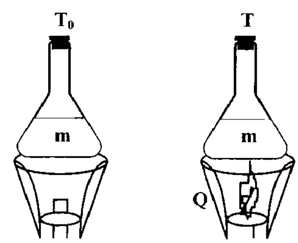
k) Fisión nuclear

Es un proceso nuclear en el que el núcleo de un átomo se divide en dos o más núcleos pequeños, más algunos subproductos como neutrones libres, fotones (rayos gamma) y partículas alfa (núcleos de helio) y beta (electrones y positrones de alta energía).

- La fisión de núcleos pesados es un proceso exotérmico en el que se liberan cantidades sustanciales de energía, que se utilizan en la producción de energía eléctrica.
- La fisión se puede inducir de varias formas, como por ejemplo bombardear el núcleo fisionable de un átomo con otra partícula de alta energía (neutrón libre).

5. CANTIDAD DE CALOR

a) Capacidad calorífica (C)



ESTADO INICIAL ESTADO FINAI

Se define como la cantidad de calor (Q) que se debe suministrar (ó sustraer) a un cuerpo o sustancia para elevar (ó disminuir) su temperatura en un grado centígrado, esto es:

$$C = \frac{Q}{T - T_0}$$

siendo, (T_0, T) las temperaturas inicial y final, respectivamente.

- La capacidad calorífica es una cantidad física escalar, que depende de la com posición y estructura interna del cuerpo o sustancia, lo cual, implica que cada cuerpo o sustancia tiene su propia capacidad calorífica.

- Puede decirse, también, que la capacidad calorífica de un cuerpo o sustancia, es la capacidad que tiene dicho cuerpo de almacenar energía calorífica.

☞ **Unidad:** (C) se mide en cal/^{0}C.

b) Calor específico (c_e)

Se define como la cantidad de calor (Q) que se debe suministrar (ó sustraer) a la masa (m) de un cuerpo o sustancia para elevar (o disminuir) su temperatura en un grado centígrado, es decir:

$$c_e = \frac{Q}{m(T - T_0)}$$

siendo, (T_0, T) las temperaturas inicial y final, respectivamente.

Calor específico del agua (H_2O)

FASE	c_e (cal/g.°C)	c_e (J/kg.°C)
Líquido	1,0	4 200
Sólido	0,5	2 100
Gaseoso	0,5	2 100

- El calor específico es una cantidad física escalar, que depende de la composición y estructura interna del cuerpo o sustancia.

☞ **Unidad :** (c_e) se mide en cal/kg^{0}C.

c) Relación entre C y c_e.

La expresión que relaciona la capacidad calorífica (C) con el calor específico (c_e), viene dado por:

$$C = m\,c_e$$

d) Cantidad de calor (Q)

Se llama así, a la cantidad de calor que gana ó pierde un cuerpo o sustancia al ponerse en contacto con otro cuerpo ó sustancia que se encuentra a diferente temperatura, viene dado por:

$$Q = m\,c_e(T - T_0)$$

siendo, (c_e) el calor específico, (m) la masa, y (T_0, T) las temperaturas inicial y final, respectivamente.

- Cuando, $T>T_0$ el cuerpo gana calor, y cuando $T<T_0$ el cuerpo pierde calor.

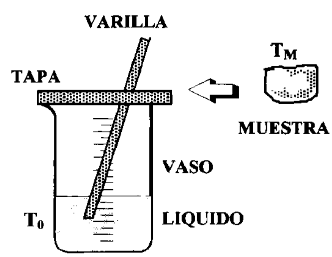
☞ **Unidad:** (Q) se mide en calorías (cal)

6. CALORIMETRO

a) El calorímetro

Es un dispositivo sencillo que permite medir el calor específico (c_e) de un cuerpo o sustancia, conociendo el calor específico de la sustancia patrón (en general agua), está constituido por:

* Un vaso metálico (aluminio)
* Una tapa de madera (aislante)
* Un termómetro.
* Una varilla de madera (aislante)



Funcionamiento

=> **Paso 1**
Se llena el vaso con agua (u otro líquido cuyo calor específico se conoce) a la temperatura del medio ambiente.

=> **Paso 2**
Se calienta la muestra (cuerpo o sustancia cuyo calor específico se desea conocer) y se mide su temperatura.

=> **Paso 3**
Abriendo la tapa del calorímetro se introduce la muestra en el vaso con agua, y se mueve cuidadosamente la mezcla con la varilla de madera.

=> **Paso 4**
Se mide la temperatura de la mezcla.

=> **Paso 5**
Se utiliza el principio de conservación de la energía, cuya expresión literal, dice:

$$\begin{Bmatrix}\text{Calor}\\ \text{perdido}\\ \text{muestra}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\text{Calor ganado}\\ \text{calorimetro}\\ +\text{agua}\end{Bmatrix}$$

La forma explícita de está expresión, adopta la forma siguiente:

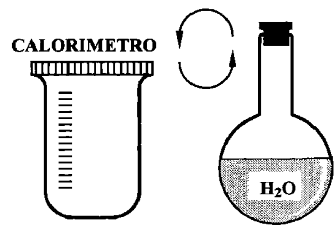
$$m_M c_{e,M}(T_M - T) = m_C c_{e,C}(T - T_o)$$
$$m_L c_{e,L}(T - T_o)$$

los subíndices M, C, L se refieren a muestra, calorímetro y líquido, respectivamente; además, T_M) temperatura de la muestra, (T_0) temperatura medio ambiente y (T) temperatura final de la mezcla.

b) Equivalente en agua de un calorímetro

Se llama así, a la cantidad de agua que absorbe o disipa la misma cantidad de calor que un calorímetro, experimentando la misma variación de temperatura, esto es:

$$Q_{H20} = Q_{CALORIMETRO}$$



De modo que, el equivalente de la masa de agua es:

$$m_{H20} = m_C c_{e,C}$$

siendo, m_C, $c_{e,C}$ la masa y el calor específico del calorímetro.

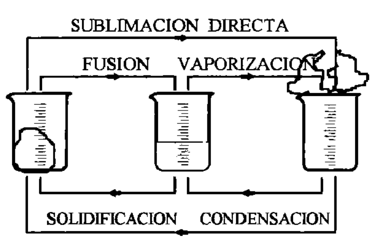
- Generalmente, el equivalente en agua de un calorímetro se da en gramos.

7. CAMBIO DE FASE

Es la transformación física que experimenta una sustancia saturada pura al recibir o entregar cierta cantidad de calor.

- Durante el cambio de fase la sustancia experimenta un reordenamiento molecular, adoptando nuevas propiedades físicas y perdiendo otras.
- En general, la sustancia puede encontrarse en tres fases, sólido, líquido y gaseoso.

Los cambios de fase se muestran en el siguiente esquema.



- La temperatura a la cual se produce un cambio de fase depende de la presión, y es una característica que posee cada sustancia ó cuerpo.
- Así, a la presión de 1 atm la temperatura de fusión del hielo es de 0^0 C, y a otras presiones su temperatura de fusión adopta otros valores.
- Todos los procesos señalados en la figura anterior, poseen las siguientes características comunes:
- El cambio de fase se produce a presión y temperatura constantes, esto es, los procesos son isotérmicos e isobáricos.
- Para un cambio de fase, se hace necesario que se produzca un intercambio de calor (energía).
- Se produce una variación en el volumen del recipiente que contiene a la sustancia o del cuerpo.

a) Sustancia pura

Es la sustancia que presenta una composición química homogénea y que es capaz de reaccionar, pudiendo su estructura molecular experimentar cambios.

b) Fase termodinámica

Se denomina, así, a la configuración molecular homogénea que presenta una sustancia pura, en determinadas condiciones de presión y temperatura.

- La sustancia puede incrementar su temperatura, sin modificar la configuración de su estructura molecular.

c) Influencia de la presión en la temperatura de fusión

Cuando una sustancia sólida se derrite, generalmente, aumenta de volumen

- En las sustancias que presentan este comportamiento se observa que un incremento en la presión ejercida sobre ellas ocasiona un aumento en su temperatura de fusión, por tanto, en su temperatura de solidificación.
- Así, el plomo que aumenta de volumen al fundirse, tiene su punto de fusión en 327^0 C a la presión normal de $1{,}01.10^5$ Pa. Al someterlo a una presión más elevada, se funde a una temperatura más alta.

d) El agua una excepción

Son muy pocas las sustancias, entre ellas, que no siguen el comportamiento general, y que disminuyen de volumen al fundirse (cuando el hielo se derrite).

- Por tanto, el volumen de determinada masa de agua aumenta cuando se transforma en hielo (solidificación).
- A ello se debe que una botella llena de agua y colocada en un congelador se rompa cuando el agua se solidifica.
- En estas sustancias, un aumento de presión ocasiona una disminución de la temperatura de fusión.
- Como se sabe, el hielo se funde a 0^0 C únicamente si la presión ejercida sobre él es $1{,}01.10^5$ Pa.
- Si se aumenta ésta presión se derretirá a una temperatura inferior a 0^0 C, y recíprocamente, a una presión inferior a $1{,}01.10^5$ Pa su punto de fusión será superior a 0^0 C.

e) Vaporización

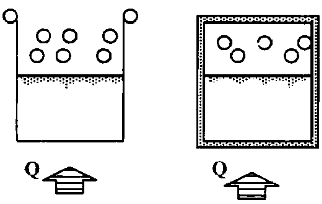
El cambio de fase de líquido a gaseoso puede producirse de dos formas:

1) Por evaporización, cuando el cambio de fase se realiza lentamente, a cualquier temperatura. Por ejemplo, la ropa mojada, se seca debido a la evaporización del agua en contacto con el aire.
2) Por ebullición, cuando el cambio de fase se realiza rápidamente a una temperatura específica para cada líquido. El agua en una tetera sólo comienza a hervir, o sea, únicamente entra en ebullición, cuando su temperatura alcanza un

valor determinado.

f) Influencia de la presión en la temperatura de ebullición

Supongamos que tenemos un líquido confinado en un recipiente abierto como el de la Fig., en este caso sobre el líquido actúa el aire a la presión de la atmósfera, si esta presión es mayor que la presión de vapor saturado del líquido a esa temperatura, la evaporación será muy lenta y se deberá básicamente, a que siempre en el incesante choque de las moléculas, algunas de modo esporádico, alcanzan la energía suficiente para pasar al estado gaseoso con la posibilidad de abandonar el recipiente, especialmente si hay alguna corriente de gases que lo arrastre.



$T_e=100^0$ C $T_e=120^0$ C

- Si incrementamos la temperatura del sistema, cada vez será mayor la cantidad de moléculas que lo abandonen y se irá incrementando gradualmente la evaporación.
- Cuando se alcance una temperatura, para el cual, el valor de la presión de vapor saturado del líquido en cuestión, sea igual al valor de la presión atmosférica, la evaporación se producirá en toda la masa del líquido, se dice entonces que el líquido ha entrado en ebullición.
- Podemos decir, entonces que el punto de ebullición, es el valor de la temperatura para el cual la presión de vapor saturado de un líquido cualquiera, alcanza la presión a que esta sometido.
- Así, el punto de ebullición de un líquido dependerá de la presión a que está sometido y será más bajo para bajas presiones y más alto en el caso contrario.
- Este fenómeno se utiliza en muchas aplicaciones, tales como la olla de presión, las calderas de vapor, las máquinas refrigeradoras o la producción de aire líquido.
- Finalmente, debemos decir, que en un recipiente abierto a la presión normal de $1,01.10^5$ Pa el agua entra en ebullición a 100^0 C. En un recipiente cerrado los vapores de agua que se forman al interior de ella pueden alcanzar la presión de 2.10^5 Pa, a esta presión el agua entra en ebullición a la temperatura de 120^0 C.

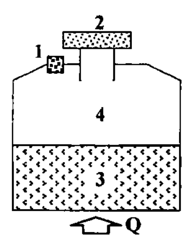
g) Olla de presión

1) Definición

Es un dispositivo que basa su funcionamiento en el hecho de que la temperatura de ebullición de un líquido depende de la presión a que está sometido, de forma tal que, a mayor presión mayor temperatura.

2) Componentes

Las principales componentes presentes en una olla de presión son:



1- Válvula de seguridad
2- Tapa (peso)
3- Líquido (agua)

4- Vapor del líquido.

3) Funcionamiento

En la Fig., si a la olla de presión que contiene agua con su tapa ajustada se le suministra calor, se forman burbujas de vapor por encima de la superficie del líquido. Este vapor como esta encerrado y no puede escapar, van gradualmente incrementando la presión al interior de la olla, y con ello la presión de vapor saturado del agua, por lo que está no podrá entrar en ebullición.

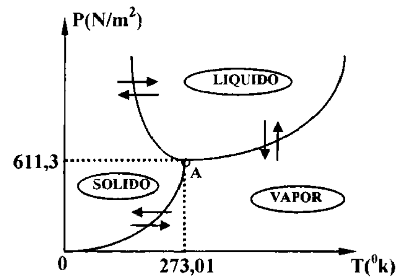
- El incremento de presión terminará levantando el peso que cierra un pequeño conducto al exterior y los vapores escaparán haciendo que la presión interior se estabilice en un valor fijo, si baja, el peso cae y cierra el conducto, si sube el peso se levanta y deja escapar el vapor en una suerte de regulador de presión.
- Durante este proceso, el agua de la olla ha ido subiendo de temperatura, y entra al fin en ebullición a un valor más alto de temperatura final, que si la olla estuviera abierta a la atmósfera.
- El incremento de temperatura, resulta evidente que dependerá de la magnitud del peso colocado para cerrar el agujero de escape, y del diámetro de este agujero.
- Este incremento de temperatura hace que los alimentos se cuezan mucho más rápido.
- La válvula de seguridad se abre cuando la presión al interior de la olla sobrepasa la presión límite, fijada por el fabricante.

h) Condiciones de saturación

Se denomina así a los valores de presión y temperatura que se mantienen constantes durante el cambio de fase.

- Si en un cambio de fase la temperatura de saturación permanece constante, su respectiva presión de saturación, también, permanece constante. Es decir, cada sustancia tiene su propia presión y temperatura de saturación.

Gráfica Presión-Temperatura de saturación para el H_2O



i) Punto Triple (A)

Se denomina, así, al valor que adoptan la temperatura y presión de saturación, en la que la sustancia se halla en las tres fases (sólido, líquido y gas), esto es las tres fases coexisten simultaneamente.

- Por ejemplo, para el agua, los valores de la temperatura y presión, en el punto triple A, son:

$$T = 0{,}01^0\ C \quad y \quad P = 611{,}3\ N/m^2$$

j) Sublimación

Es aquel proceso de cambio de fase, en la que la sustancia pasa de la fase sólido a la fase gaseosa, sin pasar por la fase líquida.

- Este fenómeno, generalmente ocurre en algunas sustancias llamadas volatiles.
- Para el agua (de hielo a vapor) se realiza a bajas presiones, por debajo del punto triple A.

k) Calor latente (L)

Es la cantidad de calor necesaria que se debe suministrar o sustraer a una unidad de masa de una sustancia saturada, para que esta cambie de fase, se expresa así:

$$L = \frac{Q}{m}$$

siendo (Q) la cantidad de calor latente.

- El calor latente (L) puede ser positivo o negativo, es decir, a veces se necesitará calentar al sistema y en otras veces enfriarlo, con la finalidad que se produzca el cambio de fase.
- Experimentalmente, se ha observado que L depende, en general, de la presión a la que se realiza el cambio de fase.

Así, para el agua el calor latente de fusión (solidificación) y vaporización (condensación) son:

1) Fusión $\rightleftarrows$ solidificación
(T = 0° C)

$$L = 80\ cal/g = 335\ kJ/kg$$

2) Vaporización $\leftrightarrows$ condensación
(T=100° C)

$$L = 540\ cal/g = 2260\ kJ/kg$$

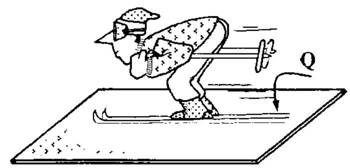
ℓ) Sustancia saturada

Es aquella sustancia que durante el cambio de fase, mantiene constante su presión y temperatura.

m) Equivalente mecánico del calor

Es el factor de conversión que permite transformar la energía térmica (caloría) en energía mecánica (joule), así, tenemos:

$$1\ cal = 4,186\ J \quad o \quad 1\ J = 0,239\ cal$$



Por ejemplo, en la Fig., al desplazarse el deportista en la pista de hielo, el trabajo contra la fuerza de fricción, que aparece entre los patines y el hielo, se transforma en energía en forma de calor, como resultado se derrite una parte del hielo de la pista de patinaje.

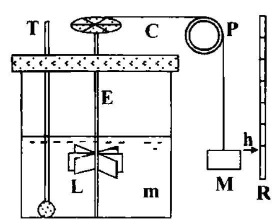
n) Experimento de Joule

1) Objetivo

Determinar el equivalente mecánico del calor, es decir, la relación entre la unidad de energía el joule (J) y la unidad de calor la caloría (cal).

2) Materiales

- Un recipiente graduado y aislado térmicamente conteniendo agua.
- Un eje de giro (E) con paletas (L)
- Una polea (P), una cuerda (C) y una pesa (M)
- Una regla (R) y un termómetro (T)



3) Fundamento teórico

Sea "M" la masa de la pesa suspendida, "h" su desplazamiento vertical, "m" la masa de agua en el calorímetro y "T_o", "T" sus temperaturas inicial y final, entonces, del principio de conservación de la energía, la energía potencial perdida por la pesa se transforma en calor ganado por el agua, esto es:

$$Mgh = mc(T - T_o)$$

De aquí, obtenemos la expresión para la equivalencia entre las unidades de calor y energía, así:

$$c = \frac{Mgh}{m(T - T_o)}$$

4) Procedimiento

La energía potencia perdida por la pesa que desciende con velocidad constante, se utiliza para hacer girar las paletas, produciendo un calentamiento del agua por fricción.

- Así, si el bloque de masa "M" desciende de una altura "h", la energía potencial disminuye en Mgh, y esta energía se transforma en calor al calentarse el agua.
- En la experiencia se encuentra que la disminución de la energía potencial es proporcional al incremento de temperatura del agua, siendo la constante de proporcionalidad (el calor específico del agua) igual a 4,186 J/g.^{0}C.
- Esto es, 4,186 J de energía mecánica aumentan la temperatura de 1 g de agua en 1 ^{0}C.

8. PROPAGACION DEL CALOR

En la naturaleza el calor se transfiere de un sistema (cuerpo) hacia otro sistema (cuerpo) por conducción, convección, o radiación.

a) Conducción

1) Concepto

Es un mecanismo de transferencia de energía térmica entre dos sistemas basados en el contacto directo de sus partículas (moléculas, electrones, etc..) sin flujo neto de materia y que tiende a igualar la temperatura al interior del cuerpo y entre diferentes cuerpos en contacto.

- Todas las formas de materia condensada (sólido o líquido) transfieren calor mediante la conducción térmica, los gases no transfieren calor por conducción, debido a que sus moléculas están demasiado distanciadas unas con otras.
- En el vacío no hay conducción de calor, pues, es necesario que haya una sustancia que permita la transferencia de calor.
- El principal parámetro dependiente del material que regula la condición de calor en los materiales es la conductividad térmica.
- La conductividad térmica es elevada en metales y en general en cuerpo continuos, y es baja en los gases y muy baja en la fibra de vidrio, que son aislantes térmicas.

2) Conductividad térmica

Es una propiedad física que mide la capacidad de conducción del calor en un cuerpo y se representa con una "k". La conductividad térmica de un cuerpo depende de la interacción de sus moléculas que intercambian energía cinética sin producir movimiento neto de la materia.

☞ **Unidad:** "k" se mide en W/m^{0}C

3) Difusividad térmica

Estima la rapidez con que se difunde el

calor por el cuerpo, viene dado por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho\, c_e}$$

siendo, "k" la conductividad térmica, "ρ" la densidad de masa, y "c_e" el calor específico a presión constante.

4) ¿Cómo se transfiere el calor?

La transferencia de calor en un cuerpo por conducción, se da por choques de las moléculas y electrones entre si. Por ejemplo, si calentamos uno de los extremos de una barra, las moléculas que reciben el calor aumentan su temperatura y chocan con los que los rodean, estos a su vez hacen lo mismo con sus vecinos hasta que todas las moléculas del cuerpo se agitan, calentándose toda la barra.

5) Ecuación general de la conducción

En general la temperatura en un proceso de conducción del calor a través de un cuerpo depende de las coordenadas de posición (x, y, z) y del tiempo (t), esto es, T=T(x, y, z, t). La ecuación diferencial a partir del cual podemos determinar la temperatura en puntos del cuerpo, viene dado por:

$$\nabla^2 T + \frac{q_G}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

siendo, "q_G" una fuente interna de calor, "k" la conductividad térmica, "α" la difusividad térmica.

Por ejemplo, en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la temperatura es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_G}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

6) Ley de Fourier

Establece que el flujo de calor (j) en régimen permanente en una dirección dada, es proporcional al gradiente de temperatura (∇T) cambiado de signo, esto es:

$$\vec{j} = -k\,\nabla T$$

siendo, "k" la constante de proporcionalidad llamada conductividad térmica, y "T" la temperatura que en general depende de las coordenadas (x, y, z) y el tiempo, esto es: $T = T(x, y, z, t)$.

Régimen permanente.- La temperatura de los cuerpos que intervienen en la transferencia de calor permanece constante.

Régimen variable.- La temperatura de los cuerpos que participan en la transferencia de calor varía con el tiempo.

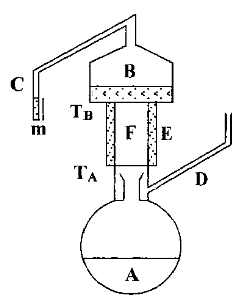
Nota

El gradiente de la temperatura dT/dx es negativa, por que, la temperatura disminuye en la dirección del flujo.

7) Medida de la conductividad térmica

➢ **Objetivo**

Medir el coeficiente de conductividad de una barra metálica.



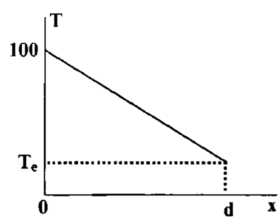
Materiales

- Una vasija conteniendo agua (A)
- Una vasija conteniendo un líquido volátil (B).
- Una barra metálica (F)
- Aislante térmico (G)
- Tubo para la fuga del vapor de agua (D).
- Tubo graduado para la fuga del vapor de líquido volátil (C).

Fundamento teórico

Según la ley de Fourier, el flujo de calor a lo largo de la barra de longitud "d", de áreas de sus bases "A", y que están a las temperaturas T_A y T_B, viene dada por:

$$H = k(\frac{T_A - T_B}{d}) \qquad (1)$$



La cantidad de calor "Q" que llega al extremo superior de la barra en el tiempo "t" es:

$$Q = H\,A\,t = k(\frac{T_A - T_B}{d})A\,t \qquad (2)$$

Este calor se emplea en evaporar una masa "m" de líquido volátil de calor de latente de vaporización "L_V" en el tiempo "t", esto es:

$$Q = m\,L_V = \rho\,V\,L_V \qquad (3)$$

siendo, "ρ" y "V" la densidad y el volumen del líquido condensado, respectivamente.

Finalmente, igualando las ecs.(2) y (3), obtenemos la fórmula para la determinación del coeficiente de conductividad térmica de la barra, así:

$$\rho\,V\,L_V = k(\frac{T_A - T_B}{d})A\,t$$

$$k = \frac{\rho\,V\,L_V d}{(T_A - T_B)A\,t} \qquad (4)$$

Procedimiento

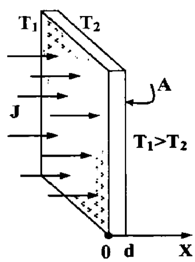
La barra metálica se coloca en posición vertical, su extremo inferior se calienta con vapor de agua en ebullición, y su extremo superior se pone en contacto con un líquido volátil en ebullición, manteniendo así ambos extremos de la barra a una temperatura constante.

- El vapor de agua se escapa por el tubo vertical que es refrigerado con agua fría. Parte del vapor se condensa regresando al depósito inferior.
- La barra metálica en posición vertical, se envuelve con material aislante excepto en sus bases inferior y superior, para evitar las pérdidas de calor por su superficie lateral.
- El extremo inferior de la barra, se calienta con vapor de agua a la temperatura de T_A=100 ^{0}C, la barra conduce el calor hacia el extremo superior que está en contacto con un líquido volátil a su temperatura de ebullición T_B. El vapor sale por un tubo cerrado que se refrigera con agua fría, el vapor se condensa y el líquido resultante se acumula en un tubo graduado, que mide el volumen de líquido que se condensa a medida que transcurre el tiempo.
- Conocido el volumen de líquido volátil condensado durante un determinado tiempo, se obtiene el valor de la conductividad térmica, a partir de la ecuación (4)

8) Conducción en una placa

➢ Sin fuente de calor

Consideremos una placa de espesor "d" cuyas caras izquierda y derecha están a las temperaturas fijas "T_1" y "T_2" ($T_1>T_2$), respectivamente.



Ahora, como el calor en régimen permanente se propaga de la cara izquierda (caliente) hacia la cara derecha (fría), la ecuación general de la conducción expresada en coordenadas cartesianas rectangulares, se reduce a:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0$$

Integrando consecutivamente dos veces obtenemos la solución general:

$$T(x)=A\,x+B$$

siendo, A y B las constantes de integración.

Evaluando esta ecuación en x=0 y x=d, obtenemos las constantes A y B, así:

$$T(0)=A\,(0)+B=T_1$$

$$T(d)=A(d)+B=T_2$$

Resolviendo este par de ecuaciones:

$$A=\frac{T_2-T_1}{d} \quad y \quad B=T_1$$

Así, la temperatura a una distancia "x" de la cara izquierda de la placa es:

$$T(x)=(\frac{T_2-T_1}{d})x+T_1$$

De otro lado, de la ley de Fourier el flujo de calor es:

$$j=-k\frac{dT}{dx}$$

$$j=k(\frac{T_1-T_2}{d})=\text{cte.}$$

A su vez, la rapidez con que se propaga el calor es:

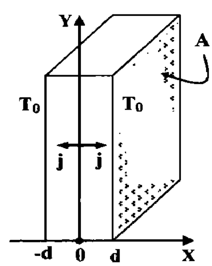
$$\frac{dQ}{dt}=j\,A=k\,A\,(\frac{T_1-T_2}{d})$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{T_1-T_2}{d/kA}=\frac{T_1-T_2}{R}$$

siendo, R=d/kA, la resistencia térmica

➢ Con fuente de calor

Consideremos una placa de espesor "d" cuyas caras izquierda y derecha es tán a las temperaturas fijas "T_o" y que presenta una fuente de calor situada en el plano central de la placa.



En este caso la ecuación general de la conducción se reduce a:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{q_G}{k}=0$$

Integrando esta ecuación, obtenemos la solución general:

$$T(x)=-\frac{q_G}{k}x^2+A\,x+B$$

siendo, A y B las constantes de integración.

Aplicando las condiciones de contorno

* En: x=0, hay un máximo, pues la fuente está situada ahí, por lo que:

$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0}=-\frac{q_G}{k}(0)+A=0$$

$$A=0$$

* En, x=d, el flujo de calor por conducción, debe ser igual, al flujo de calor por convenció, esto es:

$$-k\frac{dT}{dx}\Big|_{x=d}=h(T_S-T_o)\Big|_{x=d}$$

$$-k(-\frac{q_G d}{k})=h(-\frac{q_G}{2k}d^2+A-T_o)$$

$$B=\frac{q_G d^2}{2k}+\frac{q_G d}{h}+T_o$$

Así, la temperatura a la distancia "x" del centro de la placa es:

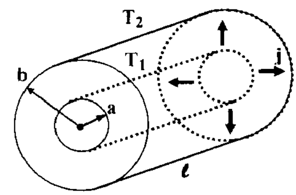
$$T(x)=-\frac{q_G}{2k}x^2+\frac{q_G d^2}{2k}+\frac{q_G d}{h}+T_o$$

De otro lado, de la ley de Fourier, el flujo de calor es:

$$j=-k\frac{dT}{dx}=q_G\,x$$

2) Tubo cilíndrico sin fuente de calor

Consideremos un tubo de radios interno "a", externo "b", cuyas superficies interna y externa están a las temperaturas fijas "T_1" y "T_2", respectivamente.



Como el calor en régimen permanente se transfiere en la dirección radial, la ecuación general de conducción expresada en coordenadas cilíndricas, se reduce a:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})=0$$

Integrando consecutivamente dos veces obtenemos la solución general:

$$T(r)=A\,\ell n(r)+B$$

siendo, "A" y "B" las constantes de integración.

Evaluando está ecuación en r=a y r=b, obtenemos estas constantes, así:

$$T(a)=A\,\ell n\,a+B=T_1$$

$$T(b)=A\,\ell n\,b+B=T_2$$

Resolviendo este par de ecuaciones:

$$A=\frac{T_2-T_1}{\ell n(b/a)}\quad y\quad B=T_1-\frac{T_2-T_1}{\ell n(b/a)}\ell n\,a$$

De modo que, la temperatura en puntos situados en $a\le r\le b$ es:

$$T(r)=\frac{T_2-T_1}{\ell n(b/a)}\ell n(r/a)+T_1$$

De otro lado, el flujo de calor en la dirección radial del cilindro compacto es:

$$j=-k\frac{dT}{dr}$$

$$j=-k\frac{(T_2-T_1)}{\ell n(b/a)}\frac{1}{r}$$

A su vez, la rapidez con la que pasa el calor por unidad de longitud, a través de la superficie lateral de radio "r" y área $A=2\pi r\ell$ es:

$$\frac{dQ}{dt}=jA$$

$$\frac{dQ}{dt}=(k\frac{T_1-T_2}{\ell n(b/a)}\frac{1}{r})(2\pi r\ell)$$

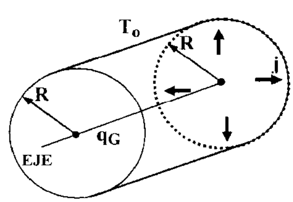
$$\frac{dQ/dt}{\ell}=2\pi k\frac{T_1-T_2}{\ell n(b/a)}$$

$$\frac{dQ/dt}{\ell}=\frac{T_1-T_2}{\ell n(b/a)/2\pi k}$$

$$\frac{dQ/dt}{\ell}=\frac{T_1-T_2}{R}$$

siendo, $R=\ell n(b/a)/2\pi k1$ a resistencia térmica.

3) Cilindro compacto con fuente de calor



Consideremos un cilindro compacto de radio "R" cuya superficie está a la temperatura fija "T_o", y con una fuente de calor "q_G" constante, situado en el eje del cilindro.

Como el calor en régimen permanente se transfiere en la dirección radial, la ecuación general de la conducción expresada en coordenadas cilíndricas, se reduce a:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})+\frac{q_G}{k}=0$$

La integración de esta ecuación nos da la siguiente solución general:

$$T(r)=-\frac{q_G}{4k}r^2+A\ell n r+B$$

siendo, "A" y "B" las constantes de integración.

Aplicando la condición de contorno.

* En, r=0, hay un máximo dado que la fuente esta situada ahí, por lo que:

$$\frac{dT}{dr}=\ell im_{r\to 0}-\frac{q_G}{2k}r+\frac{A}{r}=0$$

$$A=0$$

* En, r=R, el flujo de calor por conducción, debe ser igual, al flujo de calor por convección, esto es:

$$-k\frac{dT}{dr}\Big|_{r=R}=h(T_S-T_o)\Big|_{r=R}$$

$$-k(-\frac{q_G R}{2k})=h(-\frac{q_G R^2}{4k}+B-T_o)$$

$$B=\frac{q_G R^2}{4k}+\frac{q_G R}{2h}+T_o$$

Así, la temperatura en puntos situados en $0<r\le R$ es:

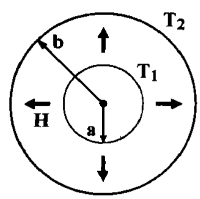
$$T(r) = -\frac{q_G r^2}{4k} + \frac{q_G R^2}{4k} + \frac{q_G R}{2h} + T_o$$

De otro lado, el flujo de calor en la dirección radial del cilindro compacto es:

$$j = -k\frac{dT}{dr} = \frac{q_G r}{2k}$$

4) Cascarón esférico

Consideremos un cascarón esférico de radios interno "a", externo "b", cuyas superficies interna y externa están a las temperaturas fijas "T_1" y "T_2", respectivamente; y que no presenta fuentes de calor interno.



$T_1 > T_2$

Como el calor en régimen permanente se transfiere en la dirección radial, y no existe fuentes de calor interno, la ecuación general de conducción expresada en coordenadas esféricas, se reduce a:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dT}{dr}) = 0$$

Integrando consecutivamente dos veces obtenemos la solución general:

$$T(r) = -\frac{A}{r} + B$$

siendo, "A" y "B" las constantes de integración.
Evaluando esta ecuación en r=a y r=b, obtenemos las constantes A y B, así;

$$T(a) = -\frac{A}{a} + B = T_1$$

$$T(b) = -\frac{A}{b} + B = T_2$$

Resolviendo este par de ecuaciones:

$$A = \frac{(T_2 - T_1)ab}{b-a} \quad y \quad B = \frac{T_2 b - T_1 a}{b-a}$$

Así, la temperatura en puntos situados en $a \le r \le b$ es:

$$T(r) = \frac{(T_1 - T_2)ab}{(b-a)r} + \frac{T_2 b - T_1 a}{b-a}$$

De otro lado, el flujo de calor en la dirección radial es:

$$j = -k\frac{dT}{dr} = k\frac{(T_1 - T_2)ab}{(b-a)}\frac{1}{r^2}$$

A su vez, la rapidez con que pasa el calor a través de una superficie esférica de radio "r", con $a \le r \le b$ es:

$$\frac{dQ}{dt} = jA$$

$$\frac{dQ}{dt} = [k\frac{(T_1 - T_2)ab}{(b-a)r^2}](4\pi r^2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{(b-a)/4\pi k ab}$$

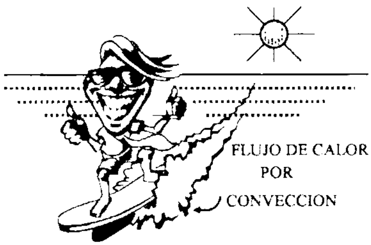
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R} = \text{cte.}$$

siendo, $R = (b-a)/4\pi kab$ la resistencia térmica.

b) Convección

1) Definición

Se caracteriza porque la transferencia de calor se da a través del desplazamiento de partículas entre regiones con diferentes temperaturas. La convección se produce únicamente en los fluidos más no en los sólidos.



- Por ejemplo, en los radiadores de calefacción por agua, la energía del agua caliente es transmitida hacía las paredes del radiador por convección.
- Los procesos de transferencia de calor que comprenden cambio de fase de un fluido, también se consideran convección por el movimiento inducido de dicho fluido durante el proceso. Por ejemplo, la ascensión de las burbujas de vapor durante la ebullición o el descenso de las gotas de líquido durante la condensación.

2) Mecanismo de transferencia

El fluido al calentarse disminuye su densidad y asciende al ser desplazado por las porciones superiores de fluido que se encuentran a menor temperatura. Lo que se llama convección en si, es el transporte de calor por medio de las partes de fluido ascendente y descendente.

3) Ley de enfriamiento

Esta ley establece que la rapidez con la que se transfiere el calor en un proceso de convección, es directamente proporcional al área "A" de la superficie del cuerpo en contacto con el fluido, y a la diferencia entre la temperatura de la superficie del cuerpo (T_S) y la temperatura del fluido (T_I) lejos del cuerpo, esto es:

$$H = \frac{dQ}{dt} = h\,A\,(T_2 - T_1)$$

siendo, "h" la constante de proporcionalidad, llamado coeficiente de convección.

☞ **Unidad:** (H) se mide en vatios (W)

4) Tipos de convección

Existen dos tipos de convección:

Convección natural. Es la que se produce como resultado de la diferencia de densidades en el líquido o gas.

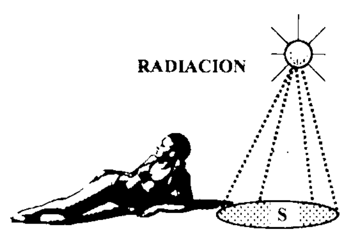
Convección forzada. Es la que se produce cuando el cuerpo o sustancia caliente posee movimiento.

5) La convección en meteorología

El proceso que origina la convección en el seno de la atmósfera es muy importante y genera una serie de fenómenos fundamentales en la explicación de los vientos y en la formación de nubes, vaguadas, ciclones, huracanes, tifones, precipitaciones etc...

- Todos los procesos y mecanismos de convección del calor atmosférico obedecen a las leyes físicas de la termodinámica.

c) Radiación



1) Definición

Es la radiación emitida por un cuerpo debido a su temperatura que depende de una propiedad superficial llamada emitancia. Todo cuerpo emite radiación hacia su entorno y absorbe radiación de este.

- Este tipo de transmisión del calor se efectúa sin necesidad de que los cuerpos estén en contacto entre sí, y consiste en la absorción y emisión de energía del campo electromagnético.
- Por ejemplo, por radiación llega desde el Sol a la superficie de la Tierra una enorme cantidad de energía.
- Otros ejemplos de radiación térmica son la radiación infrarroja emitida por un radiador hogareño o un calefactor eléctrico, al igual, que la luz emitida por una lámpara incandescente.
- La materia en un estado sólido o líquido emite un espectro de radiación continuo.
- A temperatura ambiente, vemos que los cuerpos por la luz que reflejan, dado que por si mismos no emiten luz. Si no se hace incidir luz sobre ellos, si no se los ilumina, no podemos verlos.
- A temperaturas más altas, vemos los cuerpos por la luz que emiten, pues en este caso son luminosos por si mismos. Así, es posible determinar la temperatura de un cuerpo de acuerdo a su color, pues un cuerpo que es capaz de emitir luz se encuentra a altas temperaturas.
- Las superficies opacas pueden absorber o reflejar la radiación incidente. Generalmente, las superficies mates y rugosas absorben más calor que las superficies brillantes y pulidas, y las superficies brillantes reflejan más energía radiante que las superficies mates. Además, las sustancias que absorben mucha radiación, también, son buenos emisores; las que reflejan mucha radiación y absorben, son malos emisores. Por eso, la sartén de cocina tiene fondo mate para una buena absorción y paredes pulidas para una emisión mínima, con lo que se maximiza la transferencia del calor al contenido de la sartén.
- A diferencia de la conducción y la convección, la radiación no necesita de un medio de transmisión, y puede producirse en el vació. Por ejemplo, la radiación térmica emitida por el Sol llega a Tierra a través del vació.
- La transferencia de calor por radiación es la más rápida, pues, las ondas electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz, que en el vació es $c=3.10^8$ m/s. No experimenta atenuación en el vació

2) Intensidad de energía

- La cantidad de energía por unidad de área y tiempo (R), que emite un cuerpo, viene dado por:

$$R = \frac{E}{tS}$$

siendo, (E) la energía, (t) el tiempo, y (S) el área del cuerpo que radia.

- También, la intensidad de radiación según Steffan-Boltzmann, se puede calcular a partir de:

$$R = e\,\sigma\,T^4$$

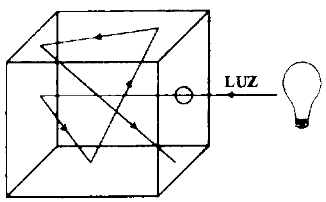
siendo, $\sigma = 5{,}67.10^{-6}$ W / $m^2.{}^{o}k^4$ la constante de Steffan-Boltzmann, (e) la emisividad del cuerpo, valor comprendido entre 0 y 1; y (T) la temperatura en ^{0}K del cuerpo que radia energía.

☞ **Unidad:** (R) se mide en W/m^2.

d) Cuerpo negro

Es un objeto que absorbe toda la luz y energía que incide en el. Ninguna parte de la radiación es reflejada o pasa a través del cuerpo negro. A pesar de su nombre, el cuerpo negro emite luz y constituye un modelo físico ideal para el estudio de la radiación electromagnética.

- La sustancia que menos refleja la luz (el cuerpo más negro), es una aleación de fósforo y níquel, con fórmula química NiP. Esta sustancia refleja tan sólo el 0,16 % de la luz visible, o sea, 25 veces menos que la pintura negra convencional.



- Por ejemplo, si hacemos incidir luz a través de un agujero, hecho, en una caja cúbica de paredes internas pintadas de negro, el rayo de luz después de reflejarse varias veces es absorbida, así, podemos decir, que tenemos un modelo sencillo de cuerpo negro.

e) Agujero negro

Es una región del espacio-tiempo originada por una gran concentración de masa en su interior, con enorme aumento de la densidad, lo que a su vez crea un campo gravitatorio de gran intensidad, tal que ninguna partícula natural, ni siquiera la luz pueden escapar de la atracción de dicho campo.

f) Cuerpo gris

Los cuerpos reales nunca se comportan como cuerpos negros ideales. Así, la radiación emitida a una frecuencia dada es una fracción de la emisión ideal.
La emisividad de un material especifica cual es la fracción de radiación de cuerpo negro que es capaz de emitir el cuerpo real. Se considera que el cuerpo negro tiene emisividad 1. Esta aproximación que se hace, se llama aproximación de cuerpo gris.

g) Cuerpo reflector

Es aquel cuerpo que tiene emisividad aproximadamente cero, y reflecta toda la energía que incide sobre el, es decir, no absorbe energía calorífica.

h) Depósito de calor

Se llama así al sistema capaz de absorber calor de un objeto con el que esta en contacto térmico sin que se produzca un cambio de fase o una variación significativa en su temperatura.
Por ejemplo, respecto de la Tierra, el espacio exterior, el campo gravitacional son depósitos de calor.

i) Absorción por resonancia

Decimos que se ha producido absorción de calor por resonancia cuando la frecuencia de vibración de las moléculas del cuerpo o sustancia receptora coincide con la frecuencia de las ondas incidentes de radiación infrarroja solar.

- Por ejemplo, los humanos sentimos el calor irradiado por el Sol y otros sistemas más calientes que nosotros por que nuestros cuerpos están formados por un 55% a 75% de agua. El calor radiante que incide en nuestra piel es absorbido por nuestras moléculas de agua por absorción por resonancia.

9. TEORIA MODERNA DE LA RADIACION TERMICA

a) Radiación térmica

1) Se llama radiación térmica a la radiación electromagnética que emite una sustancia o cuerpo a expensas de su energía interna. Esta radiación depende únicamente de la temperatura y de las propiedades ópticas del cuerpo.
2) Los cuerpos muy calientes radian luz, mientras que a temperaturas ordinarias emiten radiación infrarroja invisible.
3) Se llama intercambio de calor por radiación el proceso espontáneo de transmisión de energía en forma de calor de un cuerpo más caliente a otro menos caliente.

b) Densidad volumétrica de energía

Es una característica de la radiación en equilibrio, se define así:

$$\rho(\nu, T) = \frac{dw}{d\nu}$$

siendo, (dw) la energía de radiación por unidad de volumen con frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$.

A su vez, la energía por unidad de volumen, viene dado por:

$$w = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T)\, d\nu$$

La radiación en equilibrio es isótropa, no está polarizada y todas sus direcciones de propagación son igualmente probables.

c) Densidad de energía por unidad de área y tiempo

La energía (dW) de radiación en equilibrio en el vacío, con frecuencias desde (ν) hasta ($\nu + d\nu$), que incide por unidad de área y tiempo sobre el cuerpo en equilibrio termodinámico, viene dado por:

$$dW = \frac{c}{4}\rho(\nu, T)\, d\nu$$

siendo, (c) la velocidad de la luz en el vacío.

d) Emitancia energética (R_e)

Se denomina así a la energía de las ondas electromagnéticas de todas la frecuencias posibles (y longitudes de onda) desde 0 hasta ∞, emitidas por unidad de área y tiempo.

e) Poder emisivo (r)

Es numéricamente igual a la razón de la energía (dW), radiada en la unidad de tiempo y área del cuerpo, de las ondas electromagnéticas, en un intervalo de frecuencias que varían desde (ν) hasta ($\nu + d\nu$), a la anchura de este intervalo, esto es:

$$r_\nu = \frac{dW}{d\nu}, \quad r_\lambda = \frac{dW}{d\lambda}$$

donde, r_ν (ó r_λ) dependen de la frecuencia ν (ó λ) de la temperatura, de la composición química del cuerpo y del estado de su superficie.

f) Relación entre r_ν y r_λ

La expresión que relaciona (r_ν) con (r_λ), viene dada por:

$$r_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} r_\nu$$

siendo, (c) la velocidad de la luz en el vacío.

g) Relación entre R_e y r_ν, r_λ

g) Relación entre R_e y r_ν, r_λ

La expresión que relaciona (R_e) con (r_ν) y (r_λ), viene dada por:

$$R_e = \int_0^\infty r_\nu d\nu = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda$$

h) Poder absorbente (a)

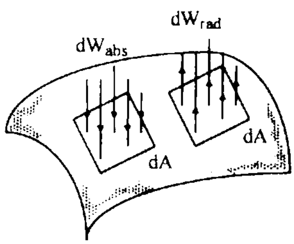
Es una cantidad física adimensional, que proporciona la fracción de energía de las ondas electromagnéticas con frecuencias desde (ν) hasta ($\nu + d\nu$), que inciden sobre la superficie del cuerpo; que este absorbe:

$$a_\nu = \frac{dW_{abs}}{dW_{inc}} \leq 1$$

El valor de (a_ν) depende de la frecuencia, de la temperatura, de la composición química del cuerpo y del estado de su superficie.

10. LEY DE KIRCHOFF

a) Ley de Kirchoff



Esta ley se deduce del principio de equilibrio detallado, el cual establece que todo proceso microscópico en equilibrio se desarrolla con la misma velocidad que su inverso, como se muestra en la Fig.

Así, la energía radiada en la unidad de tiempo y unidad de área de la superficie del cuerpo para frecuencias entre (ν) y ($\upsilon + d\upsilon$), es igual, a la energía absorbida en la unidad de tiempo y área, esto es:

$$dW_{rad} = dW_{abs}$$

$$r_\nu d\nu = a_\nu \frac{c}{4} \rho(\nu, T)$$

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = r_\nu^* = \frac{c}{4} \rho(\nu, T)$$

La ley de Kirchoff, establece que la razón del poder emisivo del cuerpo a su poder absorbente no depende de la naturaleza del cuerpo y es igual a la emisividad del cuerpo negro (r_ν^*) para los mismos valores de la temperatura y frecuencia.

b) Función de Kirchoff

Se llama así, a la dependencia que presenta (r_ν^*) respecto a (ν) y (T), esto es:

$$r_\nu^* = f(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho(\nu, T)$$

- De la ley de Kirchoff se sigue que la emitancia energética de un cuerpo es:

$$R_e = \int_0^\infty a_\nu r_\nu^* d\nu$$

- En particular, la emitancia del cuerpo gris, viene dado por:

$$R_e^g = \int_0^\infty a_\nu^g r_\nu^* d\nu = a_\nu^g \int_0^\infty r_\nu^* d\nu$$

$$R_e^g = a_\nu^g R_e^*$$

emitancia energética del cuerpo negro a la misma temperatura.

- Para un cuerpo no gris, se cumple:

$$R_e = \alpha R_e^*$$

siendo, (α) la negrura integral del cuerpo, el cual, depende del material, del estado de su superficie y de la temperatura; para todos los cuerpos excepto el negro $\alpha < 1$.

- La radiación en equilibrio a la temperatura (T) es idéntica a la radiación térmica del cuerpo negro a esta misma temperatura; por lo mismo, a la radiación en equilibrio se le llama radiación negra.
- La relación entre la emitancia energética del cuerpo negro y la densidad volumétrica de la energía de radiación negra tiene la forma:

$$R_e^* = \frac{c}{4}\omega = \frac{c}{4}\int_0^\infty \rho(\nu, T)\,d\nu$$

11. LEY DE STEFFAN- BOLTZMANN

Establece que la emitancia energética del cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta, esto es:

$$R_e^* = \sigma T^4$$

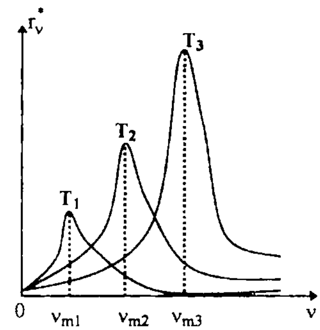
siendo, $\sigma = 5{,}67.10^{-8}$ W/m^2.^{0}K la constante de Steffan-Boltzmann, y (T) la temperatura absoluta (^{0}K).

- Esta ley se deduce a partir de los métodos de la termodinámica para la radiación en equilibrio en una cavidad cerrada.
- Para un cuerpo real la ley de Steffan-Boltzmann, se expresa así:

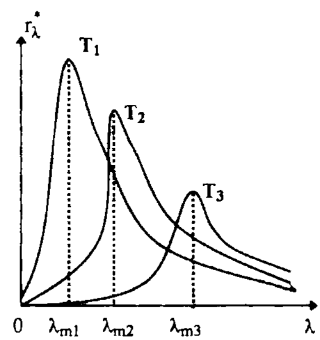
$$R_e = \sigma k T^4, \quad 0 < k < 1$$

siendo, (R_e) un número fraccionario.

La representación gráfica de la dependencia de la emisividad del cuerpo negro r_ν^* (r_λ^*) respecto de la frecuencia ν (ó λ) para varios valores constantes de la temperatura, hallada experimentalmente es:



- En la región de las frecuencias pequeñas, $r_\nu^* \approx \nu^2 T$, y en las frecuencias grandes, $r_\nu^* \approx \nu^3 \exp[-a_S \nu / T]$, siendo a_S un factor constante.
- El cuerpo negro casi no radia en las regiones de frecuencias muy pequeñas y muy grandes.



- A medida que aumenta la temperatura del cuerpo, el máximo de r_ν^* se desplaza hacia el lado de las frecuencias mayo-res, de acuerdo con la ley:

$$\nu_m = b_1 T$$

siendo, (ν_m) la frecuencia correspondiente al máximo de r_ν^* para la temperatura (T), y (b_S) un factor constante.

a) Desplazamiento de Wien

A medida que aumenta la temperatura del cuerpo, el máximo de r_λ^* se desplaza hacia el lado de las longitudes menores, según:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}$$

siendo, $b=2{,}9.10^{-3}$ m.^{0}K la constante de Wien.

- Del mismo modo, a medida que desciende la temperatura de los cuerpos calientes, en su espacio predomina cada vez con más intensidad la radiación de las ondas largas.
- Los valores λ_m y ν_m no se relacionan mediante la fórmula $\lambda = c/\nu$, pues, los máximos de r_ν^* y r_λ^* están en distintas partes del espectro.

b) Fórmula de Wien

Todos los intentos de fundamentar teóricamente la función de Kirchoff $r_\nu^* = f(\nu,T)$ en la física clásica hallada experimentalmente y representada anteriormente fueron inútiles. Así, a partir de métodos de la termodinámica Wien obtuvo la siguiente fórmula:

$$r_\nu^* = \nu^3\,\varphi(\frac{\nu}{T})$$

siendo, $\varphi(\nu/T)$ una función desconocida dependiente de ν/T.

c) Fórmula de Rayleigh-Jean

Rayleigh y Jean basándose en las leyes de la electrodinámica y la física estadística clásica sobre la equipartición de la energía según los grados de libertad del sistema en equilibrio obtuvieron la fórmula:

$$r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT$$

siendo, (k) la constante de Bolztmann. Está fórmula se ajusta a los datos experimentales únicamente para pequeñas frecuencias.

- Se deduce una conclusión absurda, según la cual, para cualquier temperatura, la emitancia energética del cuerpo negro R_e^* y la densidad volumétrica de la energía de radiación en equilibrio son infinitamente grandes, a este resultado absurdo se le conoce con el nombre de «catástrofe ultravioleta».
- La causa de estas dificultades surgidas al determinar la expresión de la función de Kirchoff r_ν^* está relacionada con uno de los principios fundamentales de la física clásica, según el cual la energía de cualquier sistema puede variar continuamente, es decir, puede adquirir cualesquiera valores próximos, es decir:

«La energía de radiación térmica, es una cantidad física continua»

d) Fórmula de Planck

Según la teoría cuántica de Planck, la energía de un oscilador de radiación de frecuencia propia (ν) puede adquirir sólo determinados valores discretos (cuantificados), que se diferencian en un número entero de porciones elementales, llamados cuantos de energía, esto es:

$$\varepsilon_0 = h\,\nu$$

siendo, $h=6{,}625.10^{-34}$ J.s la constante de Planck (cuanto elemental de acción)

- En correspondencia con esto, la absorción y radiación de energía por las partículas del cuerpo emisor (átomos, moléculas o iones) que intercambian energía con los osciladores de energía, se debe efectuar de forma discontinua, a porciones.
- La energía media de un oscilador de radiación, viene dado por:

$$\varepsilon(\nu) = \frac{h\,\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- La fórmula de Planck para el poder emisivo del cuerpo negro, viene dado por:

$$r_\nu = \frac{2\pi\,\nu^2}{c^2}\,\frac{h\,\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- Esta fórmula concuerda con los resultados experimentales de medición de la distribución de la energía en el espectro del cuerpo negro a distintas temperaturas.
- El valor numérico de la constante de Planck se puede calcular conociendo los valores de la constante de Boltzman "k", la constante de Steffan-Boltzman "σ" y la velocidad de la luz en el vacío "c", a partir de la expresión:

$$h = \left[\frac{2\pi^5\,k^4}{15\,\sigma\,c^2}\right]^{1/3}$$

e) Pirometría de radiación

Se llama pirometría de radiación el conjunto de métodos de medición de elevadas temperaturas fundamentadas en la relación de dependencia que existe entre la temperatura y el poder emisivo de un cuerpo caliente.

f) Pirómetros de radiación

Se llaman así, a los instrumentos que se utilizan para medir el conjunto de temperaturas elevadas de un cuerpo. En los pirómetros de radiación se registra la radiación integral del cuerpo caliente que se estudia, en tanto, en el pirómetro óptico, su radiación en una o en dos partes estrechas de su espectro. Para medir la temperatura de los cuerpos sólidos, líquidos o gaseosos, estos deben estar en estado de equilibrio termodinámico.

g) Temperatura de radiación

Se llama temperatura de radiación de un cuerpo, a la temperatura del cuerpo negro cuya radiación total de energía coincide con la radiación del cuerpo en mención.

h) Temperatura de color

Se llama temperatura de color de un cuerpo, a la temperatura T del cuerpo negro que tiene una distribución de energía en el espectro la más próxima a la distribución de energía del cuerpo considerado a la temperatura dada.

i) Temperatura de brillo

Se llama temperatura de brillo de un cuerpo a la temperatura del cuerpo negro, cuya densidad espectral de brillo energético para la longitud de onda de $\lambda_o = 660$ nm es igual a la densidad espectral de brillo energético del cuerpo en mención para la misma longitud de onda y en la dirección de la normal a la superficie.

j) Fotoelectricidad

Se llama así al proceso de interacción de la radiación electromagnética con la materia, en el que, la energía de los fotones se transmiten a los electrones de la materia. En los sólidos y líquidos se observa el efecto fotoeléctrico externo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Para medir la temperatura de una persona debemos mantener el termómetro en su contacto durante cierto tiempo ¿Porqué?

02. Responda a las siguientes preguntas:

a) La temperatura normal del cuerpo humano es de 36°C. Expresar esta temperatura en la escala Kelvin.

b) La temperatura de ebullición del nitrógeno líquido es de 78 °K ¿Cuál es su valor en grados centígrados °C?

c) La temperatura de un cuerpo se elevó en 52°C. ¿Cuál fue la elevación de la temperatura en la escala Kelvin del mismo?

03. Dos recipientes A y B contienen masas iguales de un mismo gas a diferentes tempe peraturas siendo $t_A > t_B$. Decir si es correcto:

a) "El gas en A posee más calor que en el gas B "

b) "La energía cinética de las moléculas del gas A es mayor que la energía cinética del gas B"

04. Si el coeficiente de dilatación lineal del plomo es 29.10^{-6} $°C^{-1}$ esto significa que una barra de plomo:

a) De un kilómetro de longitud se dilata 29.10^{-6} km, cuando su temperatura aumenta en --

b) De un centímetro de longitud, cuando su temperatura aumenta en 1 °C, se dilata en-- --

05. Una placa de zinc (α=25.10^{-6} $°C^{-1}$) de forma rectangular, tiene 60 cm de longitud y 40 cm de ancho, a la temperatura de 20 °C, si se calienta hasta 120 °C.

a) ¿Cuál será el aumento de longitud de la placa?

b) ¿Cuál será el aumento de la anchura de la placa?

06. Un líquido de coeficiente de dilatación cúbica $\beta_L = 6{,}9.10^{-5}$ $°C^{-1}$ se ubica en un recipiente de aluminio (Al) de coeficiente lineal α=23.10^{-6} $°C^{-1}$ alcanzando una altura "h".

a) Determinar el coeficiente de dilatación cúbica del aluminio.

b) Si el conjunto recipiente-líquido se calienta, el nivel del líquido:

I) subirá II) bajará III) quedará fijo

c) ¿Cuál será la dilatación aparente del líquido?

07. Una esfera de madera flota sumergida con la mitad de su volumen en agua contenida en un recipiente, los cuales están a 2 ^{O}C de temperatura. Si sólo se calienta el agua hasta una temperatura de 4 ^{O}C:

I) El volumen de agua:

a) aumentará b) disminuirá c) quedará estable

II) La densidad del agua:

a) aumentará b) disminuirá c) quedará estable

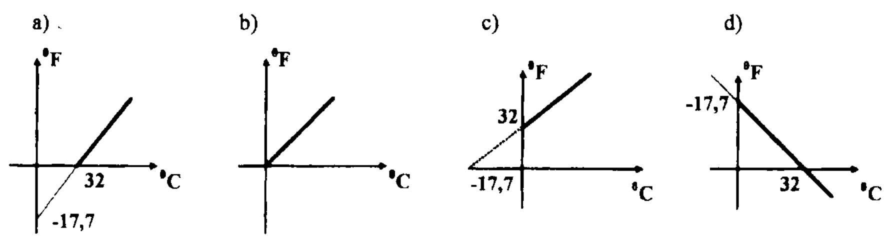
III) La parte sumergida de la esfera:

a) aumentará b) disminuirá c) quedará estable

08. Respecto de las escalas de temperatura Centígrada-Fahrenheit, indique. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) ó falsas (F)?

a) El cero en ambas escalas corresponden a la temperatura del medio ambiente.
b) Para obtener la temperatura Fahrenheit es necesario sumar 32 a la temperatura Centigrada.
c) Una división (o sea, 1 grado) en la escala Centígrada tiene la misma magnitud de una división en la escala Fahrenheit.
d) Una división (o sea, 1 grado) en la escala de Centígrada es igual a 9/5 de una división en la escala Fahrenheit.
e) Una división (o sea, 1 grado) en la escala Centígrada es igual a 5/9 de una división en la escala Fahrenheit.

09. ¿Cuál de las gráficas expresa la relación entre los grados Centígrada y Fahrenheit?.



10. Complete la oración siguiente:

<<El calor es una forma de------------------, y la temperatura es la magnitud que establece el grado de-----------------------de las moléculas de un cuerpo>>

a) Potencia , oscilación b) Energía , movimiento.
c) Movimiento , calentamiento d) Movimiento , enfriamiento
e) Corriente , calentamiento

11. Si el cuerpo A frió se une con el cuerpo B caliente, indique las afirmaciones verdaderas (V) y falsas (F):

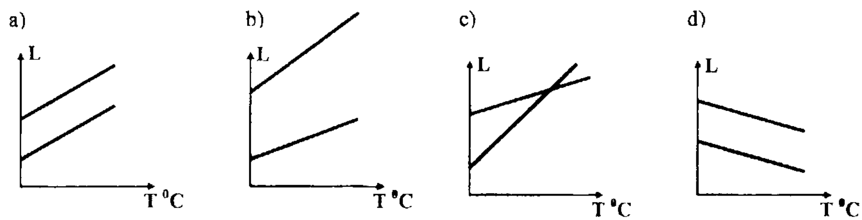
I) A y B alcanzan después de un tiempo la misma temperatura.
II) A le cede energía a B.
III) La temperatura del equilibrio térmico es mayor que la temperatura inicial de B.
IV) La temperatura alcanzada por A y B está comprendida entre sus temperaturas iniciales.

a) VFFV b) FVFF c) VVFV d) FFVF e) VFVV

12. De conocerse el calor específico de una pulga (c_P), en el proceso seguido para medir su temperatura indique los pasos correctos ó falsos:
I) Medimos la temperatura (T_0) y la masa del agua (m_{H2O}) en el vaso.
II) Medimos la masa (m_P) de las 1 000 pulgas.
III) En el vaso con agua echamos las pulgas.
IV) Medimos la temperatura de la mezcla (T) (agua + pulgas).
V) Luego, la temperatura de una pulga, puede hallarse de:

$$T_P = \frac{1}{1000}\left[\frac{c_{H2O}.m_{H2O}}{c_P.m_P}(T - T_0) + T\right]$$

13. Se tienen dos barras del mismo material de longitudes diferentes, indique la gráfica correcta de la variación de longitud (L) vs temperatura (T):



14. Indicar las afirmaciones verdaderas (V) ó falsas (F). En las construcciones de hormigón armado, se utiliza únicamente el hierro como armadura, por:
I) Ser el material de construcción más barato.
II) Tener su coeficiente de dilatación muy próximo al del hormigón armado.
III) No se quiebra fácilmente.
IV) No se oxida ó corrosiona.
V) Es el metal más resistente ó duro.

a) FVFFF b) FFVVF c) FVFVF d) VFVFV e) VVFFV

15. Indicar las afirmaciones verdaderas (V) ó falsas (F). En un cuarto, si abrimos la puerta de la refrigeradora en pleno funcionamiento:
I) La temperatura del cuarto disminuye.
II) La temperatura del cuarto aumenta.
III) La temperatura del cuarto no cambia.

IV) La temperatura de la refrigeradora aumenta.

V) La potencia consumida por la refrigeradora es igual, a la potencia transferida al cuarto, en forma de calor.

a) FVFFV b) FFVVF c) FVFVF d) VFVFV e) VVFFV

16. Transformar -2,2° F a grados centígrados.

a) $10,55^0$ b) $12,55^0$ c) $14,55^0$ d) $16,55^0$ e) $18,55^0$

17. Calcular la temperatura que es expresada por el mismo número usándose la escala centígrada o la escala Fahrenheit.

a) -10^0 C b) -20^0 C c) -30^0 C d) -40^0 C e) -50^0 C

18. El punto de fusión del plomo es 330^0 C y su punto de ebullición a presión atmosférica es 1 170^0 C. Hallar la razón (T/T_0) de estas temperaturas en la escala Fahrenheit.

a) 1,4 b) 2,4 c) 3,4 d) 4,4 e) 5,4

19. La longitud de la columna de mercurio de un termómetro es 4 cm cuando el termómetro se sumerge en agua con hielo, y de 24 cm cuando el termómetro se sumerge en vapor de agua hirviendo a condiciones normales, ¿Qué longitud tendrá en una habitación a 22^0 C?

a) 8,0 cm b) 8,2 cm c) 8,4 cm d) 8,6 cm e) 8,8 cm

20. Si la lectura de una temperatura en grados Fahrenheit excede en 40 a la temperatura en grados Celsius. Hallar la temperatura en grados kelvin.

a) 253^0 K b) 263^0 K c) 273^0 K d) 283^0 K e) 293^0 K

21. Un termómetro con escala arbitraria tiene como punto de fusión del hielo -20 y como punto de ebullición del agua +180. ¿A qué temperatura en grados Fahrenheit ambos termómetros indicarán lo mismo?

a) 400^0 F b) 450^0 F c) 500^0 F d) 550^0 F e) 600^0 F

22. Si en la escala inti la temperatura de ebullición del agua es de 80^0 y la de fusión del hielo es de 0^0. Hallar la lectura en esta escala cuando la temperatura en la escala kelvin es de 293^0.

a) 10^0 I b) 12^0 I c) 14^0 I d) 16^0 I e) 18^0 I

23. Un termómetro con escala arbitraria tiene como punto de fusión del hielo -40^0 y como punto de ebullición del agua 160^0, cuando en este termómetro se lee 20^0, ¿Cuánto vale la temperatura en la escala centígrada?

a) 10^0 C b) 20^0 C c) 30^0 C d) 40^0 C e) 50^0 C

24. Un termómetro mal calibrado, indica $+1^0$ a la temperatura de congelación del agua y 99^0 a la temperatura de ebullición del agua. Con este termómetro mal calibrado se mide la temperatura de cierta sustancia dando como lectura 25^0. ¿Cuál es la verdadera temperatura en grados centígrados de la sustancia?

a) $20{,}5^0$ C b) $22{,}5^0$ C c) $24{,}5^0$ C d) $26{,}5^0$ C e) $28{,}5^0$ C

25. La longitud de un riel de ferrocarril a la temperatura de -15^0 C es de 20 000 m. ¿Cuál será su longitud a la temperatura de 35 ^{0}C? ($\alpha = 12.10^{-6}\,{}^0C^{-1}$)

a) 20 012 m b) 20 016 m c) 20 020 m c) 20 024 m e) 20 028 m

26. En un día en la que la temperatura es de 31 ^{0}C, se llena un tanque de acero a 20^{0}C con gasolina fría extraída de un almacén subterráneo a la temperatura de 20^{0}C, ¿Qué fracción de gasolina se derrama cuando el tanque y este alcanzan la temperatura de 31 ^{0} C? (Los coeficientes de dilatación lineal de la gasolina y aluminio son: $\alpha_A = 36.10^{-6}$ $^0C^{-1}$, $\alpha_G = 956.10^{-6}\,{}^0C^{-1}$)

a) 1/10 b) 1/20 c) 1/50 d) 1/80 e) 1/100

27. Hallar la longitud de una barra a 10^{0}C, si su longitud a 0 ^{0}C es de 50 cm. El coeficiente de dilatación lineal de la barra es $2.10^{-5}\,{}^0C^{-1}$.

a) 50,01 m b) 50,03 m c) 50,05 m d) 50,07 m e) 50,09 m

28. Para obtener la temperatura de un horno, se coloca en el una barra de longitud 4,414 m a 0 ^{0}C aumentando su longitud a 4,432m. Hallar la temperatura del horno, si el coeficiente de dilatación lineal de la barra es de $1{,}2.10^{-4}\,{}^0C^{-1}$.

a) $33{,}82^0$ C b) $33{,}86^0$ C c) $33{,}90^0$ C d) $33{,}94^0$ C e) $33{,}98^0$ C

29. ¿En cuánto debe elevarse la temperatura de una barra de latón de longitud L_O y coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 20.10^{-6}\,{}^0C^{-1}$ para que su longitud aumente en $L_O/1000$?

a) 30^0 C b) 35^0 C c) 40^0 C d) 45^0 C e) 50^0 C

30. La densidad del acero a la temperatura de 0^0 C es de 7,8 g/cm^3. Hallar su densidad a 100^0 C. El coeficiente de dilatación lineal del acero es $12.10^{-6}\,{}^0C^{-1}$.

a) $7,71\frac{g}{cm^3}$ b) $7,73\frac{g}{cm^3}$ c) $7,75\frac{g}{cm^3}$ d) $7,77\frac{g}{cm^3}$ e) $7,79\frac{g}{cm^3}$

31. En un termómetro que se encuentra 0 ^oC de temperatura el volumen de su depósito es V_O= 50 cm^3 y la sección transversal del capilar es A_O=5 cm^2, si el mercurio llena justamente el depósito a 0 ^oC,¿ Cuál es la longitud de la columna de mercurio en el capilar a la temperatura de T=50 ^oC ? ($\beta_M = 182.10^{-6}\ ^0C^{-1}$, $\alpha_V = 3.10^{-6}\ ^0C^{-1}$)

a) 0,165 mm b) 0,265 mm c) 0,465 mm d) 0,665 mm e) 0,865 mm

32. Alrededor de un aro de locomotora de diámetro 1,30 m que está a 20 ^oC se trata de ubicar una rueda de acero cuyo diámetro interior es menor que el de la rueda en 0,50 mm y de coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 12.10^{-6}\ ^0C^{-1}$, ¿A qué temperatura deberá calentarse la rueda para que supere al del aro en 0,50 mm?

a) 72^0 C b) 76^0 C c) 80^0 C d) 84^0 C e) 88^0 C

33. Un frasco de vidrio de volumen 1000 cm^3 completamente lleno de mercurio de coeficiente de dilatación volumétrica $\beta_M = 180.10^{-6}\ ^0C^{-1}$, está a 0^{o}C. Si se calienta el frasco hasta 100 ^oC se derrama 15 cm^3 de mercurio.

I) ¿Cuánto se dilatará el mercurio?

a) 10 cm^3 b) 12 cm^3 c) 14 cm^3 d) 16 cm^3 e) 18 cm^3

II) ¿Cuánto fue la dilatación volumétrica del frasco?

a) 1 cm^3 b) 2 cm^3 c) 3 cm^3 d) 4 cm^3 e) 5 cm^3

III) ¿Para este frasco de vidrio qué valor tiene α?

a) $10\mu\,^oC^{-1}$ b) $12\mu\,^oC^{-1}$ c) $14\mu\,^oC^{-1}$ d) $16\mu\,^oC^{-1}$ e) $18\mu\,^oC^{-1}$

34. Una tubería de acero para transporte de vapor tiene una sección transversal de $8,0.10^{-3}$ m^2 a 20^0 C, ¿Cuál será la sección transversal cuando la tubería se encuentre lleno de vapor recalentado a 170^0 C? ($\alpha = 12.10^{-6}\ ^0C^{-1}$)

a) 80,19 cm^2 b) 80,49 cm^2 c) 80,59 cm^2 d) 80,39 cm^2 e) 80,29 cm^2

35. En la Fig.01, la varilla de cobre de 5 m de longitud fijo por un extremo y apoyado sobre rodillos de 1 cm de diámetro, se calienta la varilla desde 20^0 C a 220^0 C lo cual hace girar los rodillos. ¿Cuántos radianes gira el último rodillo contando a partir del extremo fijo? (α_{Cu}=$17.10^{-6}\ ^oC^{-1}$)

a) 3,0 rad b) 3,2 rad c) 3,4 rad d) 3,6 rad e) 3,8 rad

36. Con una regla metálica de coeficiente de dilatación lineal $5.10^{-4}\ {}^0C^{-1}$, se realiza mediciones exactas a 10^0 C. Se efectúa una medición a la temperatura de 30^0 C, obteniéndose una lectura de 100 cm dilatados. Hallar la longitud correcta de la medida realizada.

a) 97 cm b) 98 cm c) 99 cm d) 100 cm e) 101 cm

37. Una lámina delgada de latón a 20^0 C tiene la misma superficie que una lámina delgada de acero a 10^0 C. Hallar la temperatura común a la que tendrán la misma superficie ambas láminas. ($\alpha_{latón} = 3\alpha_{acero}$)

a) 10^0 C b) 15^0 C c) 20^0 C d) 25^0 C e) 30^0 C

38. Se tiene una esfera hueca de radio (R) y en su interior otra esfera concéntrica de radio (r). Hallar la razón (R/r) entre sus radios para que el volumen de la parte intermedia no varíe al incrementarse la temperatura del sistema. La relación de los coeficientes de dilatación lineal de las esferas es $\alpha_r = 8\ \alpha_R$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

39. Hallar la altura de mercurio que debe ser colocado en un tubo de vidrio de 15 cm de altura para que el volumen dentro del tubo sobre el mercurio sea el mismo a cualquier temperatura. El coeficiente de dilatación cúbica del vidrio es $6.10^{-5}\ {}^0C^{-1}$ y el coeficiente de dilatación cúbica del mercurio es $18.10^{-5}\ {}^0C^{-1}$.

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

40. Se tiene una lámina metálica de coeficiente de dilatación superficial igual a $2{,}02.10^{-4}\ {}^0C^{-1}$, al cual se le ha sustraído un círculo de radio 1 cm. Se pretende hacer pasar por el orificio una esfera de radio 1,02 cm. ¿En cuánto se debe incrementar la temperatura de la lámina metálica, tal que, la esfera pueda pasar por el orificio?

a) 100^0 C b) 150^0 C c) 200^0 C d) 250^0 C e) 300^0 C

41. En la Fig.02, mostrada, en cuántos ${}^0C$ se debe incrementar la temperatura de las barras A y B para que sus extremos se junten. Las barras están empotradas a paredes aislantes del calor y además: $\alpha_A = 15.10^{-4}\ {}^0C^{-1}$; $\alpha_B = 1.10^{-3}\ {}^0C^{-1}$

a) 10^0 C b) 20^0 C c) 30^0 C d) 40^0 C e) 50^0 C

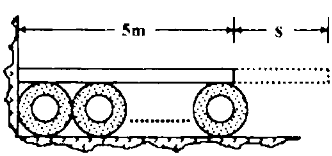


Fig.01

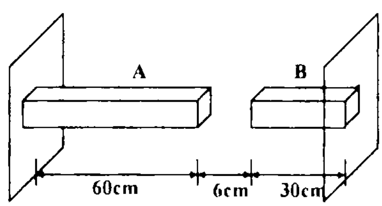


Fig.02

42. Hallar las longitudes de dos varillas a la temperatura ambiente, de coeficientes de dilatación lineal: $\alpha_1 = 18.10^{-6}\ {}^0C^{-1}$; $\alpha_2 = 12.10^{-6}\ {}^0C^{-1}$. De tal modo que la diferencia de sus longitudes sea igual a 5 cm, a cualquier temperatura.

a) 13 cm, 8 cm b) 12 cm, 7 cm c) 14 cm, 9 cm d) 15 cm, 10 cm e) 16 cm, 11 cm

43. Un alambre de coeficiente de dilatación lineal α y longitud L_0 se dobla en forma de circunferencia dejando una abertura, si incrementamos su temperatura en ΔT, ¿El anillo cerrará?

44. Un reloj de péndulo metálico adelanta $\tau_1 = 2$ s por día a una temperatura T_1 y atrasa $\tau_2 =$ 4 s por día a una temperatura T_2, si el coeficiente de dilatación lineal del metal es $2{,}31.10^{-5}\ {}^0C^{-1}$. Hallar la diferencia de temperaturas $T_2 - T_1$. ($T_2 > T_1$)

a) 2^0 C b) 4^0 C c) 6^0 C d) 8^0 C e) 10^0 C

45. Cuál es la temperatura más probable cerca del fondo de un lago con hielo en la superficie? ¿Por qué razón?

a) 2^0 C b) 4^0 C c) 6^0 C d) 8^0 C e) 10^0 C

46. En un calorímetro de equivalente en agua 40 g, que contiene 360 g de agua a la temperatura de 10 ^{0}C, se introduce un cuerpo de 100 g de masa que está a 120 ^{0}C. Hallar el calor específico (en cal/g.^{0}C) del cuerpo, si la temperatura de equilibrio del sistema es de 40^0 C

a) 1,1 b) 1,2 c) 1,3 d) 1,4 e) 1,5

47. En un calorímetro de equivalente en agua 55 g, que contiene 500 g de agua a 0^0 C, se introduce 0,5 kg de cobre a 200 ^{0}C. Hallar la temperatura del equilibrio térmico. (El calor específico del cobre es 0,09 cal/g ^{0}C)

a) 11^0 C b) 13^0 C c) 15^0 C d) 17^0 C e) 19^0 C

48. Cuando un trozo de hierro de 290 g a una temperatura de 190 ^{0}C se sumerge en 259 g de glicerina que se encuentran en un calorímetro de aluminio de 100 g a 10 ^{0}C, se observa una temperatura final de 38 ^{0}C, ¿Cuál es el calor específico (en J/kg.^{0}C) de la glicerina? (c_{Fe}=450 J/kg.^{0}C, c_{Al} = 900 J/kg.^{0}C)

a) 2358 b) 2368 c) 2378 d) 2388 e) 3398

49. Una sustancia de masa 220 g se calienta hasta 330 ^{0}C y se introduce en un calorímetro de aluminio de 90 g que contiene 150 g de agua a 11,5 ^{0}C, la temperatura final, medida con un termómetro de vidrio de masa 17 g es 33,8 ^{0}C. Hallar el calor específico (en J/kg.^{0}C) de la sustancia (c_{Al} = 900 J/kg.^{0}C, c_{H20}=4186 J/kg.^{0}C, c_V = 840 J/kg.^{0}C)

a) 217,5 b) 227,5 c) 237,5 d) 247,5 e) 257,5

50. ¿Cuál es el calor específico (en cal/g.^{0}C) de una sustancia metálica si se requieren 36 kcal de calor para elevar la temperatura de 4,5 kg de metal de 20^0 C a 40^0 C?

a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3 d) 0,4 e) 0,5

51. En la Fig.03, en un vaso de vidrio que está a la temperatura ambiente de 20^0 C se vierten 200 cm^3 de agua a 50^0 C. Hallar el máximo calor que fluirá hacía el medio ambiente por dicha experiencia. (c_e=1 cal/g.^{0}C)

a) 1 kcal b) 2 kcal c) 4 kcal d) 6 kcal e) 8 kcal

52. En la Fig.04, la cabeza de 0,50 kg de un martillo tiene una velocidad de 6,0 m/s justo antes de golpear el clavo de hierro de 20 g y quedar en reposo. Hallar el aumento de temperatura del clavo generada por 10 golpes sucesivos del martillo. Suponer que el clavo absorbe todo el calor. (c_{Fe} = 450 J/kg.^{0}C)

a) 6^0 C b) 10^0 C c) 8^0 C d) 12^0 C e) 14^0 C

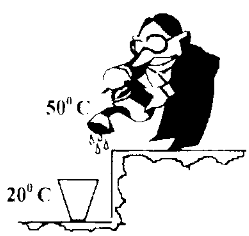


Fig.03

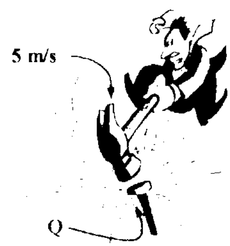


Fig.04

53. Una bala de plomo de 25 g moviéndose a 400 m/s atraviesa una delgada pared de hierro y emerge de ella con una velocidad de 250 m/s. Si la bala absorbe el 50% del calor que se genera. (T_F = 327^0 C, c_{Pb} = 130 J/kg.^{0}C)

a) ¿Cuál será el aumento de temperatura de la bala?

a) $181,5^0$ C b) $183,5^0$ C c) $185,5^0$ C d) $187,5^0$ C e) $189,5^0$ C

b) Si la temperatura ambiente es de 20^0 C, ¿Se fundirá alguna parte de la bala? Y si esto sucede ¿Qué cantidad se funde?

a) 0 g b) 5 g c) 10 g d) 15 g e) 20 g

54. ¿En cuánto tiempo una cafetera de 500 W hervirá 0,45 lt de agua que se encuentran inicialmente a 10^0 C ? Suponer que la parte de la cafetera que se calienta junto con el agua es de aluminio y tiene una masa de 400 g. (c_{H20} = 4186 J/kg.^{0}C, c_{Al} = 900 J/kg.^{0}C)

a) 1,7 min b) 2,7 min c) 4,7 min d) 6,7 min e) 8,7 min

55. Hallar la altura de una catarata, sabiendo que la diferencia de temperaturas entre las a guas de abajo y las de arriba es $1,0^0$ C.(Calor específico del agua 4 200 J/kg ^{0}C y g= 10 N/kg)

a) 400 m b) 410 m c) 420 m d) 430 m e) 440 m

56. Una bola de metal de 2 kg se suelta desde 160 m de altura y al impactar sobre el piso se eleva hasta la mitad de la altura inicial. Si la cuarta parte de la energía que se transfor mó en calor se disipa al medio exterior. Hallar el incremento de su temperatura (c_e=200 J/kg ^{0}C y g=10 m/s^2)

a) 1^0 C b) 2^0 C c) 3^0 C d) 4^0 C e) 5^0 C

57. Si la cantidad de calor necesario para aumentar en 100^0 C la temperatura de 10 kg de un metal es 100 kcal. Hallar el porcentaje de calor cedido al medio ambiente. (c_e= 85 cal/kg ^{0}C)

a) 10 % b) 15 % c) 20 % d) 25 % e) 30 %

58. Sobre un carrito de masa 7 kg, que se mueve por inercia con velocidad de 4 m/s, se co loca desde arriba un ladrillo de masa 1 kg. Hallar la cantidad de calor desprendido en el proceso. (1 J = 0,25 cal)

a) 1,00 cal b) 1,25 cal c) 1,50 cal d) 1,75 cal e) 2,00 cal

59. ¿Con qué velocidad se debe lanzar un bloque de hielo a 0^0 C, contra una pared, tal que cambie de fase íntegramente (agua líquida a 0^0 C). Calor latente de fusión del agua i gual a 320 kJ/kg.

a) 600 m/s b) 650 m/s c) 700 m/s d) 750 m/s e) 800 m/s

60. En la Fig.05, se muestra la gráfica del calor que utiliza un cuerpo para derretirse. Si la masa del cuerpo es de 25 gramos. Halle el calor latente de fusión del cuerpo.

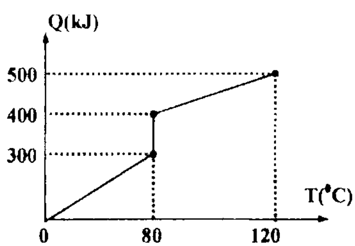


Fig.05

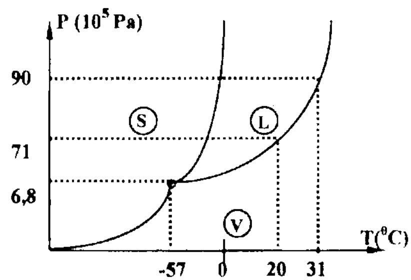


Fig.06

a) 1000 J/g b) 2000 J/g c) 3000 J/g d) 4000 J/g e) 5000 J/g

61. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se encuentran M gramos de hielo a 0^0 C. Se introducen en el 120 gramos de agua a 60^0 C que permiten fundir exactamente todo el hielo.¿ Qué cantidad de hielo había en el recipiente ? ($L_F = 80$ cal/g)

a) 70 g b) 75 g c) 80 g d) 85 g e) 90 g

62. Un recipiente de calor específico despreciable, contiene 20 gramos de hielo a -20^0 C.¿ Cuántos gramos de agua a 100^0 C se debe verter en el recipiente, para obtener finalmente agua líquida a 0^0C? ($L_F = 80$ cal/g)

a) 10 g b) 12 g c) 14 g d) 16 g e) 18 g

63. Un recipiente de calor específico despreciable, contiene 30 gramos de hielo a 0^0 C.¿ Cuántos gramos de vapor de agua a 100^0 C se debe inyectar al recipiente, para obtener finalmente agua líquida a 100^0 C ? ($L_F = 80$ cal/g , $L_V = 540$ cal/g)

a) 10 g b) 12 g c) 14 g d) 16 g e) 18 g

64. Se tiene M gramos de hielo a 0^0 C y se sumerge en M gramos de agua a 100^0 C.¿Cuál será la temperatura final de equilibrio del sistema?. Desprecie toda ganancia o perdida de calor con el exterior. ($L_F = 80$ cal/g)

a) 10^0 C b) 12^0 C c) 14^0 C d) 16^0 C e) 18^0 C

65. Hallar la temperatura de equilibrio de la mezcla de 992 gramos de hielo a 0^0 C y 160 gramos de vapor de agua a 100^0 C. El recipiente térmicamente aislado no gana ni pier de calor. ($L_F = 80$ cal/g , $L_V = 540$ cal/g)

a) 10^0 C b) 15^0 C c) 20^0 C d) 25^0 C e) 30^0 C

66. En la Fig.06, las preguntas se refieren al diagrama de fase del CO_2 (hielo seco), que se muestra. El gráfico no está trazado a escala uniforme.

I) Si el CO_2 estuviera sometido a una presión de 70.10^5 Pa y a una temperatura de -80^0 C. ¿En que fase se encuentra?

a) sólida b) líquida c) gaseosa

II) Cierta masa de CO_2, en las mismas condiciones de temperatura y presión que en aula de clases (aproximadamente 10^5 Pa y 20^0 C) ¿En qué fase se hallará?

a) sólida b) líquida c) gaseosa

III) En un recipiente se tiene CO_2 líquido a una presión de 73.10^5 Pa. Al calentarlo y manteniendo constante la presión que se ejerce sobre el, ¿A qué temperatura Emp.

zará a vaporizarse?

a) 10^0 C b) 15^0 C c) 20^0 C d) 25^0 C e) 30^0 C

IV) ¿A qué presión y temperatura debemos someter el CO_2 para que sea posible encontrarlo, simultáneamente en las tres fases?

a) $6{,}2.10^5$ Pa , -51^0 C b) $6{,}2.10^5$ Pa , -59^0 C c) $6{,}6.10^5$ Pa , -53^0 C d) $6{,}4.10^5$ Pa , -55^0 C e) $6{,}8.10^5$ Pa , -57^0 C

V) Considere un trozo de "hielo seco" a una presión de 3.10^5 Pa manteniendo constante esta presión y calentándolo dicho trozo, cambiará de fase al llegar a cierta temperatura. ¿Cuál será este cambio de fase?

a) sublimación b) fusión c) solidificación d) vaporización e) condensación

VI) Un recipiente contiene una mezcla de CO_2, en los estados sólido, líquido y gaseoso, con los tres en equilibrio. La temperatura se mantiene constante y se aumenta la presión ejercida sobre la mezcla. ¿En qué fase, entonces, se presentará toda la masa de CO_2?

a) sólida b) líquida c) gaseosa

67. Una resistencia recibe de una fuente eléctrica una potencia de 500 watts. El bloque de hielo en donde se encuentra el resistor es de 716,7 gramos a 0^0 C. Encontrar después de cuántos minutos se logrará fundir íntegramente el hielo. (L_F=80 cal/g , 1 cal = 4,186 J)

a) 1 min b) 2 min c) 4 min d) 6 min e) 8 min

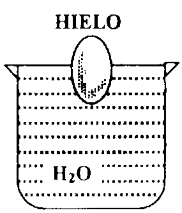


Fig.07

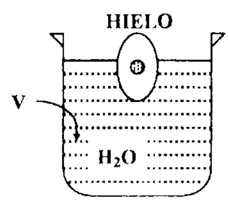


Fig.08

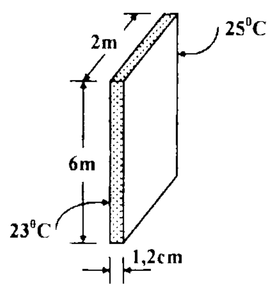


Fig.09

68. En una cacerola se echa agua a 10^0 C y se pone a calentar sobre un hornillo eléctrico. Al cabo de 10 min el agua empieza a hervir. ¿Cuánto tiempo tardará en vaporizarse totalmente el agua? (L_V=540 cal/g)

a) 40 min b) 45 min c) 50 min d) 55 min e) 60 min

69. La Fig.07, muestra un bloque de hielo masa m=10 kg sumergido parcialmente en agua. Si el recipiente se encuentra completamente lleno con agua, cuando el hielo se derrite.¿ Cuánto (en kg) de agua se derrama?

a) 1 kg b) 2 kg c) 3 kg d) 4 kg e) 0 kg

70. En la Fig.08, en el vaso con agua está sumergido parcialmente un bloque de hielo que contiene una billa metálica, ¿Al derretirse el hielo, que sucede con el nivel del agua?

a) El nivel de agua baja b) El nivel de agua sube c) El nivel de agua se mantiene

71. A 10 kg de un líquido "x" que está a 50^0 C, se le agrega 1,0 kg de hielo a -50^0 C, obteniéndose una mezcla líquida a 30^0 C.¿Cuál es el calor específico (en cal/kg.^{0}C) de "x"? (L_F=80 cal/g , $c_{e,H}$ = 0,5 cal/g.^{0}C)

a) 600 b) 625 c) 650 d) 675 e) 700

72 En un calorímetro que contiene 50 g de agua a 0^0 C, se introduce 40 g de hielo a -30^0 C. Hallar la cantidad de agua que se solidifica cuando se alcanza la temperatura del equilibrio, asuma que el calorímetro no gana ni pierde calor. (L_F=80 cal/g , $c_{e,H}$=0,5 cal/g.^{0}C)

a) 6,0 g b) 6,5 g c) 7,0 g d) 7,5 g e) 8,0 g

73. En un calorímetro ideal, se introduce 800 g de hielo a la temperatura de -20^0 C y se vierte 800 g de agua fría a 0^0 C. Hallar la cantidad de hielo que queda en el recipiente cuando se alcanza la temperatura del equilibrio térmico. (L_F =80 cal/g , $c_{e,H}$=0,5 cal/g.^{0}C)

a) 70 g b) 80 g c) 90 g d) 100 g e) 110 g

74. En la Fig.09, el vidrio de una ventana de edificio mide 2x6 m^2 y tiene un espesor de 1,2 cm. La superficie exterior está a una temperatura de 23 ^OC y la interior a 25 ^OC, ¿Cuánto calor se transfiere por el vidrio en una hora? (K= 0,25 cal / m.s.^{0}C)

a) 1,0 Mcal b) 1,2 Mcal c) 1,4 Mcal d) 1,6 Mcal e) 1,8 Mcal

75. En la Fig.10, la hielera de madera de espesor de 4 cm tiene un área total eficaz de 2 m^2, ¿Cuántos gramos de hielo se fundirán en un minuto si la temperatura del interior es 4 ^OC y la temperatura exterior es 26 ^OC? (K= $2,5.10^{-5}$ kcal/m.s.^OC)

a) 20,600 g b) 20,625 g c) 20,650 g d) 20,675 g e) 20,700 g

76. Una pared vertical plana de área 24 m^2 se mantiene a una temperatura de 90 ^OC. El aire de los alrededores en ambos lados es de 30 ^OC. ¿Cuánto calor se pierde en ambos lados de la pared en una hora? (El coeficiente de convección del aire es igual a $1,27.10^{-3}$

105. En la Fig.19, el cascarón esférico está formado por dos capas, la primera de cobre y la segunda de aluminio de conductividades térmicas k_1 =390 W/m.^{0}C y k_2=210 W/m.^{0}C. Hallar la temperatura (T_b) en la superficie común de las capas. (a=10 cm, b=20 cm, c=30 cm, T_a=200^0 C y T_c=100^0 C)

a) 130,2^0 C b) 132,2^0 C c) 134,2^0 C d) 136,2^0 C e) 138,2^0 C

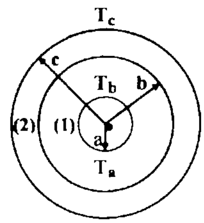


Fig.19

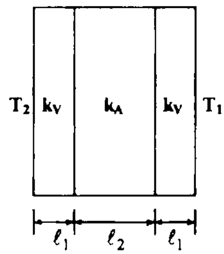


Fig.20

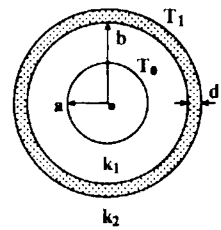


Fig.21

106. La dependencia del calor específico de cierta sustancia respecto de la temperatura, viene dado por: c(T)=a+ b.T (cal/g.^{0}C), siendo a, b constantes (b=a/30). ¿Qué cantidad de calor por unidad de masa ($\Delta Q/m$), se debe suministrar para elevar la temperatura de la sustancia de T_1 =20^0 C hasta T_2 = 40^0 C?

a) 10a cal b) 20a cal c) 30a cal d) 40a cal e) 50a cal

107. Un esquiador de masa m = 90 kg desciende con velocidad constante de v=16 m/s, por una pendiente uniforme de hielo que está a la temperatura de T_0=-32^0 C. ¿Qué cantidad de hielo por segundo se derrite, si toda la energía disponible se emplea en fundir el hielo, cuya calor específico es c_H=2 093 J/kg.^{0}C, y calor latente de fusión L_F=335 kJ/kg.

a) 20,66 g b) 22,66 g c) 24,66 g d) 26,66 g e) 28,66 g

108. En la Fig.20, la ventana está constituida de una capa de aire intercalada entre dos placas de vidrio, de conductividades térmicas k_A, k_V, respectivamente. Hallar la conductividad térmica equivalente del sistema. ($\ell_2 = 2\ell_1$)

a) $\dfrac{k_A k_V}{k_A + k_V}$ b) $\dfrac{k_A k_V}{k_V - k_A}$ c) $\dfrac{2k_A k_V}{k_A + k_V}$ d) $\dfrac{2k_A k_V}{k_V - k_A}$ e) $\dfrac{4k_A k_V}{k_A + k_V}$

109. En la Fig.21, el tubo muy largo de conductividad térmica k_1 =390 W/m.^{0}C, radios interior a=2 cm y exterior b=2,2 cm conduce vapor a la temperatura T_0=150^0 C. El área lateral externo del tubo esta cubierto de un material aislante térmico de conductividad térmica k_2 = 0,046 W/m.^{0}C, espesor d = 0,4 cm, y cuya superficie externa se encuentra a una temperatura constante de T_1=50^0 C. Halle la temperatura en la superficie externa del tubo (r=b).

82. Hallar el flujo de calor a través de un tubo cilíndrico de longitud $\ell = 1$ m, radios interior (a) y exterior (b) (b=2a), conductividad térmica k=74,4 W/m.^{0}C, cuyas superficies laterales interna y externa están a una diferencia de temperatura de $\Delta T = 200^0$ C

a) 129 kW b) 132 kW c) 135 kW d) 138 kW e) 141 kW

83. Un cuerpo de masa m=3 kg se suelta desde una altura de h=30 m, sobre un dispositivo que contiene M=100 g de agua, que está a la temperatura de $T_0=20^0$ C. Hallar la nueva temperatura del agua, si el 60 % de la energía del cuerpo de masa (m) se transforma en calor, en el instante del impacto. (c_e=4 186 J/kg.^{0}C, g=10 m/s^2)

a) $21,1^0$ C b) $21,3^0$ C c) $21,5^0$ C d) $21,7^0$ C e) $21,9^0$ C

84. En la Fig.12, la barra de hierro de conductividad térmica k=74,4 W/m.^{0}C, sección transversal rectangular de lados a=1 cm, b=2 cm y longitud $\ell = 20$ cm, está revestida de un aislador térmico especial, que evita perdidas de calor por las paredes laterales. Uno de los extremos está a la temperatura $T_1=100^0$ C y el otro a $T_2=20^0$ C. Hallar el flujo de calor a lo largo de la barra.

a) 1 W b) 2 W c) 4 W d) 6 W e) 8 W

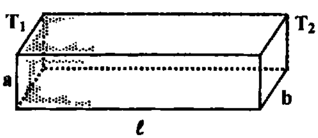


Fig.12

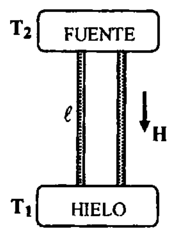


Fig.13

85. Un tubo de cobre de longitud $\ell = 25$ cm, diámetros interior d= 1 cm y exterior D=2 cm es sumergido en un recipiente que contiene agua a la temperatura de 25^0 C, la temperatura de la superficie lateral interna del tubo es de 50^0 C. Hallar la masa de agua que se calienta hasta la temperatura de 70^0 C durante 10 min. (k=385 W/m.^{0}C, c_e=4 186 J/kg.^{0}C)

a) 61,5 kg b) 63,5 kg c) 65,5 kg d) 67,5 kg e) 69,5 kg

86. La temperatura en la superficie de un lago es de -15^0 C. Si el coeficiente de conductividad térmica del hielo es k=2,093 W/m.^{0}C y su densidad $\rho = 910$ kg/m^3. ¿En qué tiempo se formará una capa de hielo de espesor d=10 cm? (L_F= 335 kJ/kg)

a) 12,3 h b) 12,7 h c) 13,1 h d) 13,5 h e) 13,9 h

87. En la Fig.13, la barra maciza de acero de conductividad térmica k=50,23 W/m.^{0}C, longitud $\ell = 30{,}48$ cm, diámetro de la sección transversal D= 1,27 cm, está revestida de un aislamiento térmico evitando perdidas de calor laterales. La barra al recibir calor de la fuente, derrite 50 g de de hielo, durante 50 min. Hallar la temperatura del foco calien te. (L_F=335 kJ/kg)

a) 261 ^{0}C b) 263 ^{0}C c) 265 ^{0}C d) 267 ^{0}C e) 269 ^{0}C

88. En la Fig.14, el sistema formado por las barras de acero (1) y cobre (2) de longitudes i guales a $\ell = 15$ cm, y diámetro de sección D_1=1,4 cm, están cubiertas por un aislante térmico evitando perdidas laterales. Hallar el diámetro de la barra de cobre (D_2=?), si el flujo de calor por la barra de acero es $H_1 = 6$ W. (k_1 =50,23 W/m.^{0}C, k_2=385,1 W/m.^{0}C)

a) 4,5 mm b) 4,8 mm c) 5,1 mm d) 5,4 mm e) 5,7 mm

89. En la Fig.15, la pared de un horno está formada por dos capas, el ancho de cada una de e-llas es $\ell_1 = 22$ cm, $\ell_2 = 12$ cm, sus conductividades térmicas k_1 = 0,43 W/m.^{0}C, k_2= 0,053 W/m.^{0}C. La temperatura en el interior del horno es T_1= 1600^0 C y en el exterior T_2=20^0 C.

I) Hallar la temperatura común a ambas capas de la pared compuesta del horno.

a) 1 309^0 C b) 1 319^0 C c) 1 329^0 C d) 1 339^0 C e) 1 349^0 C

II) Hallar el flujo de calor por unidad de área.

a) $561{,}2\,\frac{W}{m^2}$ b) $563{,}2\,\frac{W}{m^2}$ c) $565{,}2\,\frac{W}{m^2}$ d) $567{,}2\,\frac{W}{m^2}$ e) $569{,}2\,\frac{W}{m^2}$

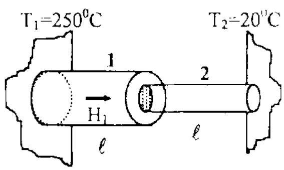


Fig.14

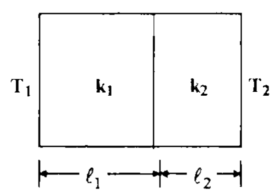


Fig.15

90. A un alambre de cobre de calibre 18 (diámetro igual a 0,1016 cm), longitud 30,48 m, resistividad $\rho = 1{,}7.10^{-8}$ Ωm se aplica una diferencia de potencial de 1,0 V. Hallar el rit mo con que se genera energía térmica en el alambre.

a) 1,58 W b) 1,56 W c) 1,54 W d) 1,52 W e) 1,50 W

91. Un calentador de potencia 350 W opera en una línea de 120 V,¿ En qué tiempo convier te este calentador 250 cm^3 de agua a la temperatura de 27^0 C totalmente en vapor de a gua. (c_e = 4186 J/kg.^{0}C , L=2,257.10^6 J/kg , ρ=1000 kg/m^3)

a) 15,5 min b) 26,9 min c) 20,5 min d) 30,5 min e) 35,5 min

92. Una lámpara de incandescencia funcionando con una tensión de V= 130 voltios, y una corriente de intensidad $i=10$ A eleva la temperatura de 2,7 litros de agua en 26 ^{0}C, durante un tiempo de t=5 min. Hallar que porcentaje de la energía entregada se convierte en luz.

a) 15 % b) 20 % c) 25 % d) 30 % e) 35 %

93. Hallar la cantidad de calor que se desprende por segundo y por unidad de volumen de un conductor de cobre de resistividad $\rho = 1{,}7.10^{-8}\ \Omega.m$, si la densidad de corriente uniforme es, J = 30 A/cm^2.

a) $1{,}51.10^3$ J/m^3.s b) $1{,}53.10^3$ J/m^3.s c) $1{,}55.10^3$ J/m^3.s d) $1{,}57.10^3$ J/m^3.s e) $1{,}59.10^3$ J/m^3.s

94. En una red se conectan en serie un conductor de cobre y otro de acero de longitudes y diámetros iguales, y resistividades $\rho_{Cu} = 1{,}7.10^{-8}\ \Omega.m$, $\rho_A = 1.10^{-7}\ \Omega.m$. Hallar la razón de las cantidades de calor (Q_{Cu} / Q_A) que se disipa en estos conductores.

a) 0,11 b) 0,13 c) 0,15 d) 0,17 e) 0,19

95. Para calentar 4,5 lt de agua desde la temperatura de $T_0 = 25\ ^0$C hasta la de ebullición, un calentador consume E=0,5 kWh de energía eléctrica. Hallar el rendimiento del calentador. (1 cal = 4,186 J , $\rho =$ 1000 kg/m^3)

a) 78,0 % b) 78,2 % c) 78,4 % d) 78,6 % e) 78,8 %

96. ¿Cuántos vatios consume la resistencia de una tetera eléctrica, si un 1 lt de agua a la temperatura de $T_0 = 13{,}5^0$ C tarda en hervir 5 min? (c_e = 1 cal/g.^{0}C , 1 cal = 4,186 J)

a) 1,0 kW b) 1,2 kW c) 1,4 kW d) 1,6 kW e) 1.8 kW

97. Un calentador de potencia P=500 W, se coloca en un recipiente que contiene V=2,0 litros de agua a la temperatura de $T_0 = 20\ ^0$C. ¿Qué tiempo tardará en hervir el agua, asumiendo que absorbe el 80 % de la energía disponible? (1 cal = 4,186 J)

a) 20 min b) 22 min c) 24 min d) 26 min e) 28 min

98. Un calentador de resistencia de hilo de nicromio de diámetro D=1 mm y resistividad $\rho = 1.10^{-6}\ \Omega m$, se conecta a una línea de 120 V, suministrando 20 800 kcal al día, para calentar una habitación. Hallar la longitud del hilo de nicromio.

a) 11,1 m b) 11,3 m c) 11,5 m d) 11,7 m e) 11,9 m

99. Una lámpara de potencia P=400 W que opera con un voltaje V=220 voltios, se sumerge en agua de masa m=8 kg a la temperatura de T_0=20 ^{0}C. Hallar la temperatura del agua después de 5 min. (c_e =1 cal/g.^{0}C ; 1 J = 0,24 cal)

a) 23,0 ^{0}C b) 23,2 ^{0}C c) 23,4 ^{0}C d) 23,6 ^{0}C e) 23.8 ^{0}C

100. En la Fig.16, el calorímetro C de resistencia R_1=60 Ω, que contiene una masa m=480 g de agua, se conecta a la fuente de energía durante t=5 min, indicando el amperímetro una intensidad de corriente i =6 A. ¿En cuánto se eleva la temperatura del agua, si R_2=30 Ω?

a) 12 ^{0}C b) 18 ^{0}C c) 24 ^{0}C d) 30 ^{0}C e) 36 ^{0}C

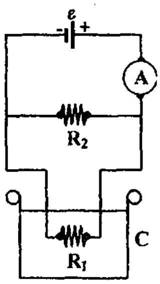


Fig.16

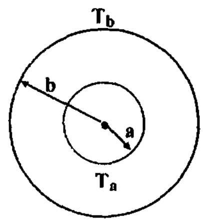


Fig.17

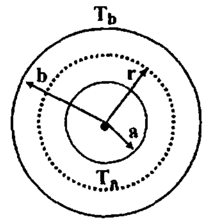


Fig.18

101. La temperatura de un termostato de agua de 1 litro de capacidad se mantiene constante mediante un calentador de potencia P=26 W; en el calentamiento del agua se utiliza el 80 % de esta potencia. ¿Cuántos grados desciende la temperatura del agua del termostato en 10 min, si se desconecta el calentador?

a) 1 ^{0}C b) 2 ^{0}C c) 3 ^{0}C d) 4 ^{0}C e) 5 ^{0}C

102. Una lámpara de incandescencia conectado a 120 voltios se sumerge en un calorímetro que contiene 400 g de petróleo de calor específico 0,5 cal/g.^{0}C, luego de transcurrido 1 min 40 s, la temperatura del petróleo se eleva en 6 ^{0}C. Hallar el gasto que supone tener encendida la lámpara 5 h, si el kW-h cuesta $ 20. (1 cal = 4,186 J)

a) $ 100 b) $ 5 c) $ 10 d) $ 15 e) $ 20

103. En la Fig.17, el cascarón esférico de aluminio de conductividad térmica igual a k=210 W/m.^{0}C, tiene radios interno a=10 cm y externo b=20 cm, y sus superficies interna y externa están a las temperaturas constantes de T_a=200^0 C y T_b=100^0 C. Hallar el flujo de calor.

a) 50,8 kW b) 52,8 kW c) 54,8 kW d) 56,8 kW e) 58,8 kW

104. En la Fig.18, el cascarón esférico de cobre de conductividad térmica k=390 W/m.^{0}C, tiene radios interno a=10 cm y externo b=20 cm, y sus superficies interna y externa están a las temperaturas constantes de T_a=200^0 C y T_b=100^0 C. ¿Para qué valor de (r) la temperatura es de T=150^0 C?

a) 12,5 cm b) 12,9 cm c) 13,3 cm d) 13,7 cm e) 14,1 cm

105. En la Fig.19, el cascarón esférico está formado por dos capas, la primera de cobre y la segunda de aluminio de conductividades térmicas k_1 =390 W/m.^{0}C y k_2=210 W/m.^{0}C. Hallar la temperatura (T_b) en la superficie común de las capas. (a=10 cm, b=20 cm, c=30 cm, T_a=200^0 C y T_c=100^0 C)

a) 130,2^0 C b) 132,2^0 C c) 134,2^0 C d) 136,2^0 C e) 138,2^0 C

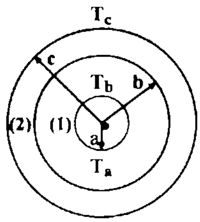


Fig.19

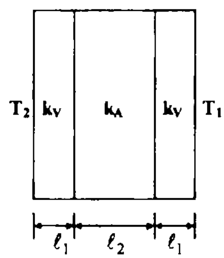


Fig.20

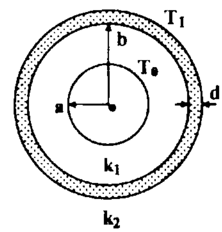


Fig.21

106. La dependencia del calor específico de cierta sustancia respecto de la temperatura, viene dado por: c(T)=a+ b.T (cal/g.^{0}C), siendo a, b constantes (b=a/30). ¿Qué cantidad de calor por unidad de masa ($\Delta Q/m$), se debe suministrar para elevar la temperatura de la sustancia de T_1 =20^0 C hasta T_2 = 40^0 C?

a) 10a cal b) 20a cal c) 30a cal d) 40a cal e) 50a cal

107. Un esquiador de masa m = 90 kg desciende con velocidad constante de v=16 m/s, por una pendiente uniforme de hielo que está a la temperatura de T_0=-32^0 C. ¿Qué cantidad de hielo por segundo se derrite, si toda la energía disponible se emplea en fundir el hielo, cuya calor específico es c_H=2 093 J/kg.^{0}C, y calor latente de fusión L_F=335 kJ/kg.

a) 20,66 g b) 22,66 g c) 24,66 g d) 26,66 g e) 28,66 g

108. En la Fig.20, la ventana está constituida de una capa de aire intercalada entre dos placas de vidrio, de conductividades térmicas k_A, k_V, respectivamente. Hallar la conductividad térmica equivalente del sistema. ($\ell_2 = 2\ell_1$)

a) $\dfrac{k_A k_V}{k_A + k_V}$ b) $\dfrac{k_A k_V}{k_V - k_A}$ c) $\dfrac{2k_A k_V}{k_A + k_V}$ d) $\dfrac{2k_A k_V}{k_V - k_A}$ e) $\dfrac{4k_A k_V}{k_A + k_V}$

109. En la Fig.21, el tubo muy largo de conductividad térmica k_1 =390 W/m.^{0}C, radios interior a=2 cm y exterior b=2,2 cm conduce vapor a la temperatura T_0=150^0 C. El área lateral externo del tubo esta cubierto de un material aislante térmico de conductividad térmica k_2 = 0,046 W/m.^{0}C, espesor d = 0,4 cm, y cuya superficie externa se encuentra a una temperatura constante de T_1=50^0 C. Halle la temperatura en la superficie externa del tubo (r=b).

a) 137^0 C b) 140^0 C c) 143^0 C d) 146^0 C e) 149^0 C

110. La densidad del hielo es $\rho = 920$ kg/m^3, su conductividad térmica k=0,92 W/m.^{0}C y su calor de fusión es L_F=308,5 kJ/kg. Un lago tiene una capa superficial de hielo de espesor d=10 cm cuando la temperatura del aire es de T_0=-15^0 C. Hallar la rapidez con qué aumenta el espesor de la capa de hielo. ($\mu = 10^{-6}$)

a) 0,37 μm/s b) 0,40 μm/s c) 0,43 μm/s d) 0,46 μm/s e) 0,49 μm/s

111.¿Qué cantidad de gasolina consume el motor de un auto al recorrer 100 km si con su potencia media de 15 CV, la rapidez media que desarrolla es de 30 km/h ? El motor tiene un rendimiento del 22 %, el poder calorífico de la gasolina es $4,6.10^7$ J/kg. (1 CV=736 W)

a) 11 kg b) 13 kg c) 15 kg d) 17 kg e) 19 kg

112. Hallar el rendimiento del motor de un auto, si para recorrer d=100 km con rapidez constante de v=40 km/h consume V=13,5 lt de gasolina; y la potencia desarrollada en este tramo es de P=16,3 CV. La densidad de la gasolina $\rho = 0,8$ g/cm^3, el poder calorífico de la gasolina C=$4,6.10^7$ J/kg, 1 CV = 736 W.

a) 21,1 % b) 21,3 % c) 21,5 % d) 21,7 % e) 21,9 %

113. Un cuerpo de masa m=3 kg que se mueve con rapidez v=4 m/s choca con otro cuerpo de igual masa que se encuentra en reposo. Si el choque es central e inelástico, hallar la cantidad de calor que se desprende durante el choque.

a) 10 J b) 12 J c) 14 J d) 16 J e) 18 J

114. En la Fig.22, la barra de peso 60 N y longitud 1 m se halla en equilibrio apoyada en dos superficies rugosas. Si un agente externo realiza un trabajo de 26 J para deslizar la barra y ubicarla en posición horizontal. Hallar la cantidad de calor que se desprende, θ =37^0.

a) 30 J b) 35 J c) 40 J d) 45 J e) 50 J

115. En la Fig.23, en el platillo esférico de radio R=1 m se pone las pesas cuya barra es de masa despreciable y longitud L=$\sqrt{3}$R las bolas son de masas m=8 kg. Una de las bolas yace en el punto inferior de la semiesfera. Existe una fricción pequeña. Las pesas empiezan a moverse. Hallar que cantidad de calor se desprende después de un tiempo largo. (g=10 m/s^2)

a) 30 J b) 35 J c) 40 J d) 45 J e) 50 J

116. Una bala de masa m=50 g, moviéndose con rapidez inicial de v=400 m/s, perfora un disco de masa m=50 g y se atraca en el siguiente, idéntico al primero. Hallar la canti dad de calor que se desprendió en el primer disco si en el segundo se desprendió la cantidad de calor Q_2=1000 J.

a) 1617 J b) 1627 J c) 1637 J d) 1647 J e) 1657 J

117. Una bala de acero de masa "m" y velocidad "$\vec{v}$" perfora una esfera de plomo de masa "M" (M=51m), como consecuencia de lo cual la rapidez de la bala disminuye a la mitad. ¿Qué parte de la energía cinética de la bala se transformó en calor?

a) 26/37 b) 65/84 c) 42/59 d) 11/27 e) 38/51

118. Un núcleo en movimiento se desintegra en dos fragmentos de masas "m_1" y "m_2" ($m_2=2m_1$), cuyos impulsos "$\vec{p}_1$" y "$\vec{p}_2$" ($p_2=2p_1$) forman un ángulo de $\theta = 60^0$. Hallar la energía "Q" que se libera al desintegrarse el núcleo, en función de la energía cinética ($E_{C,1}$) del fragmento "1".

a) $2E_{C,1}/3$ b) $3E_{C,1}/4$ c) $4E_{C,1}/5$ d) $4E_{C,1}/3$ e) $E_{C,1}/2$

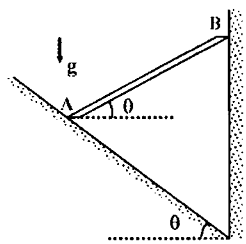


Fig.22

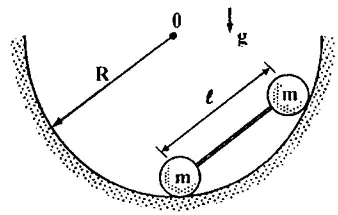


Fig.23

119. Una granada de masa "m" en reposo explota en dos fragmentos, cuyas masas están en relación de m_1/m_2=1/4. Hallar la energía de estos fragmentos, si el calor producido en la explosión es Q=10 kJ.

a) 8 kJ, 2 kJ b) 6 kJ, 4 kJ c) 9 kJ, 1 kJ d) 7 kJ, 3 kJ e) 5 kJ, 5 kJ

120. Hallar la pérdida de energía "Q" en un choque frontal entre dos bolillas de masa m_1 = 0,4 kg y rapidez v_1=6 m/s y otra de masa m_2=0,8 kg en reposo, si el coeficiente de restitución es e=1/2.

a) 1 J b) 2 J c) 4 J d) 6 J e) 8

121. La expresión de la energía potencial de interacción entre los dos núcleos de una molécula diatómica (hidrógeno), viene dado por: $U(r) = U_0[(r_0/r)^2 - 2(r_0/r)]$ siendo "r" la distancia entre los núcleos y "r_0" una constante. ¿Qué trabajo debemos de hacer sobre la molécula, de energía inicial $-V_0$, para duplicar la distancia intermolecular?

a) V_0 b) $V_0/2$ c) $V_0/3$ d) $V_0/4$ e) $3V_0/4$

122. Experimentalmente se encuentra que la expresión de la velocidad con la que cae una bola esférica m=40 g, radio R=1 cm a partir del reposo, bajo la acción del campo gravitatorio, viene dado por: $v = V\,\text{th}\,kt$, siendo "V" y "k" constantes. La resistencia del aire es de la forma $f = K\,a\,r^2v^2$ siendo a=1,5 g/ℓt y "K" una constante que depende de las dimensiones de la bola. (g=10 m/s^2)

I) Sabiendo que la velocidad límite que alcanza la bola es v=40 m/s, hallar el valor de "k".

a) 0,10 s^{-1} b) 0,15 s^{-1} c) 0,20 s^{-1} d) 0,25 s^{-1} e) 0,30 s^{-1}

II) Hallar la magnitud de la fuerza resultante sobre la bola, en el instante en que su velocidad es la mitad de su velocidad límite.

a) 0,1 N b) 0,2 N c) 0,3 N d) 0,4 N e) 0,5 N

III) Hallar el valor de la constante "K".

a) 1,07 b) 1,27 c) 1,47 d) 1,67 e) 1,87

IV) Hallar la rapidez con la que varia la energía mecánica de la bola, para el instante en que su rapidez instantánea es v=V/4.

a) 0,15 J/s b) 0,20 J/s c) 0,25 J/s d) 0,30 J/s e) 0,35 J/s

123. Un disco homogéneo de masa "m" y radio R=20 cm se hace girar alrededor de su eje de simetría perpendicular a el, hasta una velocidad angular de $\omega = 100$ rad/s y se coloca de plano sobre una mesa horizontal. El coeficiente de fricción entre el disco y la mesa es $\mu = 0,5$. ¿Después de qué tiempo se detiene el disco? (g=10 m/s^2)

a) 2,0 s b) 2,5 s c) 3,0 s d) 3,5 s e) 4,0 s

124. Un cilindro homogéneo de radio R=50 cm y masa "m" se hace girar hasta alcanzar la velocidad angular de $\omega_0 = 20$ rad/s y se pone en un plano inclinado un ángulo de $\theta = 15^0$ respecto de la horizontal. El coeficiente de fricción entre el plano y el cilindro es $\mu = 0,8$. ¿A qué altura ascenderá el cilindro? (g=10 m/s^2)

a) 60,4 cm b) 62,4 cm c) 64,4 cm d) 66,4 cm e) 68,4 cm

125. Un anillo fino de radio R=50 cm y masa "m" se impulsa hasta obtener la velocidad angular de $\omega_0 = 40$ rad/s y se pone verticalmente sobre un plano horizontal de coeficiente de fricción $\mu = 0,5$. ¿Con qué rapidez se mueve el anillo al final de la rotación con deslizamiento, y qué parte de la energía inicial se transforma en calor? (g=10 m/s^2)

a) $4\,\frac{m}{s}$, 2/3 b) $6\,\frac{m}{s}$, 3/4 c) $8\,\frac{m}{s}$, 1/4 d) $10\,\frac{m}{s}$, 1/2 e) $12\,\frac{m}{s}$, 1/3

SOLUCIONARIO

Solución: 01

- Para que la persona y el termómetro alcancen, la misma temperatura, se necesita que transcurra cierto tiempo.

Solución: 02

a) La temperatura en la escala Kelvin es:

$$K = C + 273$$

$$K = 36 + 273 = 309$$

b) La temperatura de ebullición es:

$$C = K - 273$$

$$C = 78 - 273 = -195^{o}$$

c) Sean, K_O y C_O las temperaturas iniciales y K y C las finales, entonces, la elevación de temperatura en Kelvin es:

$$K - K_0 = (C + 273) - (C_0 + 273)$$

$$K - K_0 = C - C_0$$

$$\clubsuit \; K - K_0 = 52^0$$

Solución: 03

a) Según teoría, el calor viene dado por:

$$Q = m.c.\Delta T$$

como se observa Q depende de la variación de temperatura, por tanto, no se puede afirmar nada.

b) La energía cinética de las moléculas de un gas ideal, viene dado por:

$$E_C = (3/2)kT$$

Por tanto, las moléculas del gas A poseen mayor energía cinética, pues, su temperatura es mayor.

Solución: 04

a) El aumento de la temperatura es:

$$\Delta T = \frac{L - L_0}{\alpha.L_0}$$

$$\Delta T = \frac{29.10^{-6}}{(29.10^{-6})(1)} = 1\,^{o}C$$

b) La longitud de plomo dilatada es:

$$L - L_0 = L_0.\alpha.\Delta T$$

$$L - L_0 = (1)(29.10^{-6})(1)$$

$$L - L_0 = 29.10^{-6}\ cm$$

Solución: 05

a) El aumento en la longitud (L) es:

$$\Delta L = \alpha.L.(T - T_0)$$

$$\Delta L = (25.10^{-6})(60)(120 - 20)$$

$$\Delta L = 0{,}015\ cm$$

b) El aumento en el ancho (A) es:

$$\Delta A = \alpha.A.(T - T_0)$$

$$\Delta A = (25.10^{-6})(40)(120 - 20)$$

$$\Delta A = 0{,}01\ cm$$

Solución: 06

a) El volumen final del líquido es:

$$V = V_0 + V_0.\beta_L \Delta T \qquad (1)$$

El volumen final del recipiente es:

$$V = V_0 + V_0.\beta_{Al}.\Delta T \qquad (2)$$

Pero, (1) es igual a (2), entonces:

$$\beta_{Al} = \beta_L = 6{,}9.10^{-5}\,{}^{o}C^{-1}$$

b) Del resultado anterior, el volumen de líquido quedará estable.
c) El aumento aparente del líquido será nulo, pues, el aumento del volumen del recipiente, es igual, al del líquido.

Solución: 07

I) El agua al calentarse se dilatará, de modo que su volumen aumentará. (a)

II) La densidad volumétrica de un cuerpo viene dado por:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

como la masa (m) permanece constante y el volumen (V) aumenta, entonces la densidad (ρ) disminuye. (b)

III) Como la densidad del agua disminuye y el empuje seguirá siendo igual al peso de la esfera, entonces el volumen sumergido de la esfera deberá aumentar. (a)

Solución: 08

- Las respuestas a cada de una de las afirmaciones son:

a) Falso, 0^0 C corresponde a 32^0 F.
b) Falso, para obtener ^{0}F se suma 32 a ^{0}C y se le multiplica por 9/5.
c) Falso, 100 divisiones en ^{0}C corresponden a 180 divisiones en ^{0}F, luego, 1 división en ^{0}C corresponde a 9/5 divisiones en ^{0}F.
d) Verdadero, por c).
e) Falso, por c).

♣ FFFVF

Solución: 09

- Hallemos los puntos de corte de la gráfica ^{0}C - ^{0}F, con los ejes:

Eje horizontal : $^0F = 0 \Rightarrow {^0C} = -17{,}7$

Eje vertical : $^0C = 0 \Rightarrow {^0F} = 32$

Luego, la gráfica correcta es la c).

Solución: 10

- El calor es una forma de energía, y la temperatura establece el grado de movimiento de las moléculas, las cuales oscilan alrededor de su posición de equilibrio.

Solución: 11

- Según, la ley cero de la termodinámica, los cuerpo A y B alcanzan en el equilibrio térmico, una temperatura común, la cual está comprendida entre las temperaturas iniciales de A y B., luego, las respuestas a cada una de las afirmaciones es:

♣ VFF

Solución: 12

- Todos los pasos seguidos son correctos pero, en el proceso se considera que el material del vaso no sufre variación de su temperatura, siendo este un aislante térmico perfecto.

Solución: 13

- La gráfica correcta debe satisfacer las siguientes condiciones:

1) Las pendientes de las rectas, son proporcionales a las longitudes de las barras, así, a mayor longitud inicial, le corresponde mayor pendiente.
2) Las longitudes iniciales (a 0 ^{0}C), deben ser diferentes.
3) Las longitudes deben aumentar a medida que la temperatura (T) aumenta.

Luego, la gráfica que cumple con estas tres condiciones es la b).

Solución: 14

- Las respuestas a cada una de las afirmaciones son:

♣ FVFFF

Solución: 15

• La energía por unidad de tiempo transferida al cuarto, en forma de calor, es igual a la energía eléctrica por unidad de tiempo consumida por la refrigeradora (máquinas térmicas), así, disminuyendo en su temperatura, y el cuarto aumentado en su temperatura, luego, las respuestas a cada una de las afirmaciones son:

♣ FVFFV

Solución: 16

• De la transformación centígrada Fahrenheit, se tiene:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{9}(-2{,}2 + 32)$$

$$♣\ C = 16{,}55^{O} \qquad (D)$$

Solución: 17

• De la transformación centígrada-Fahrenheit, se tiene:

$$9\,C = 5\,(F - 32)$$

Por dato del problema, F = C, entonces:

$$9\,C = 5\,C - 160$$

$$♣\ C = -40^{O} \qquad (D)$$

Solución: 18

• Para el punto de fusión tenemos:

$$F = (9/5)\,C + 32$$

$$F = \frac{9}{5}(330) + 32 = 626^{0}$$

Para el punto de ebullición tenemos:

$$F = \frac{9}{5}(1170) + 32$$

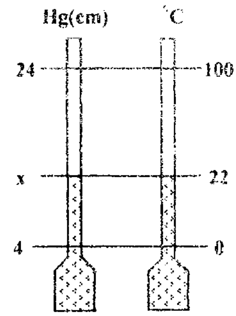
$$F = 2138^{0}$$

Luego, la razón de la temperatura de ebullición a la de fusión es:

$$♣\ \eta = \frac{2\,138}{626} \approx 3{,}4 \qquad (C)$$

Solución: 19

• En la Fig., sea x la longitud del mercurio a 22^{0}C.



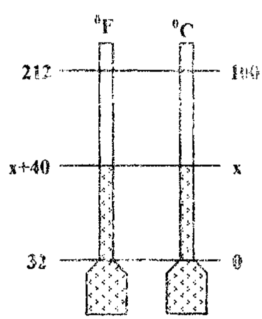
Aplicando proporcionalidad de segmentos

$$\frac{x - 4}{24 - 4} = \frac{22 - 0}{100 - 0}$$

$$♣\ x = 8{,}4\ \text{cm} \qquad (C)$$

Solución: 20

• En la Fig., sea "x" el valor de la temperatura en grados C, en la que la diferencia con los grados Fahrenheit es de 40.



Aplicando proporcionalidad de segmentos

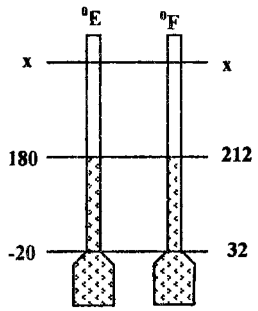
$$\frac{(x+40)-32}{180} = \frac{x-0}{100} \Rightarrow x = 10$$

Luego, ésta temperatura en grados Kelvín, será:

$$\clubsuit\ K = 273 + 10 = 283^0 \qquad \text{D}$$

Solución: 21

• En la Fig., sea (x) el valor de la temperatura en grados F, en la que ambos termómetros indican el mismo valor.



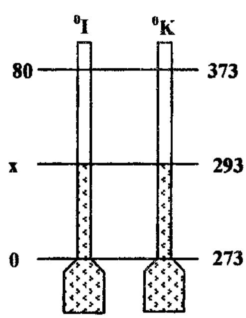
Aplicando proporcionalidad de segmentos

$$\frac{x-180}{180-(-20)} = \frac{x-212}{212-32}$$

$$\clubsuit\ x = 500^\circ F \qquad \text{C}$$

Solución: 22

• Sea (x) la lectura de la temperatura en la escala inti.



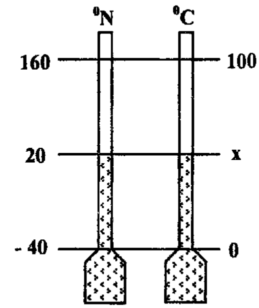
Aplicando proporcionalidad de segmentos

$$\frac{x-0}{80-0} = \frac{293-273}{373-273}$$

$$\clubsuit\ x = 16^\circ I \qquad \text{D}$$

Solución: 23

• Sea (x) la lectura de la temperatura en la escala centígrada.



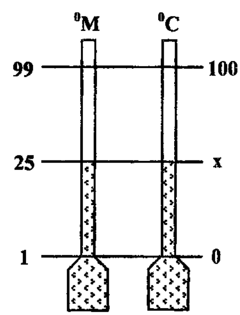
Aplicando proporcionalidad de segmentos

$$\frac{20-(-40)}{160-(-40)} = \frac{x-0}{100-0}$$

$$\clubsuit\ x = 30^\circ C \qquad \text{C}$$

Solución: 24

• Sea ^0M la escala del termómetro mal calibrado y "x" la lectura correcta en la escala centígrada.



Aplicando proporcionalidad de segmentos

$$\frac{25-1}{99-1} = \frac{x-0}{100-0} \Rightarrow \frac{24}{98} = \frac{x}{100}$$

$$♣\ x \approx 24{,}5\ ^{o}C \qquad Ⓒ$$

Solución: 25

- La nueva longitud del ferrocarril es:

$$L = L_0 + L_0.\alpha.(T - T_0)$$

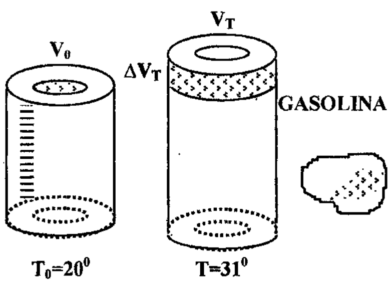
$$L = 20000 + (20000)(12.10^{-6})[35-(-15)]$$

$$L = 20000 + 12$$

$$♣\ L = 20012\ m \qquad Ⓐ$$

Solución: 26

- Representemos a la gasolina antes y después de derramarse del depósito.



El volumen final de la gasolina es:

$$V_G = V_0 + V_0.\beta_G.(T - T_0) \qquad (1)$$

El volumen final del tanque es:

$$V_T = V_0 + V_0.\beta_T.(T - T_0) \qquad (2)$$

Restando (2) - (1), obtenemos la fracción de volumen de la gasolina derramada:

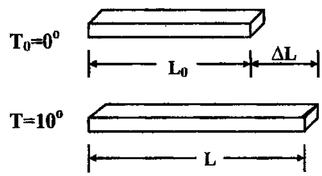
$$f = \frac{V_G - V_T}{V_0} = (\beta_G - \beta_T)(T - T_0)$$

$$f = (956.10^{-6} - 36.10^{-6})(31 - 20)$$

$$♣\ f = \frac{1}{100} \qquad Ⓔ$$

Solución: 27

- Representemos la barra antes y después de deformarse.



La nueva longitud de la barra caliente es:

$$L = L_0 + L_0.\alpha.(T - T_0)$$

$$L = 50 + (50)(2.10^{-5})(10 - 0)$$

$$L = 50 + 0{,}01$$

$$♣\ L = 50{,}01\ m \qquad Ⓐ$$

Solución: 28

- Según teoría, la longitud dilatada de la barra es:

$$L = L_0\,[1 + \alpha\,(T - T_0)]$$

$$4{,}432 = 4{,}414\,[1 + 1{,}2.10^{-4}(T - 0)]$$

$$T = 33{,}98\ ^{o}C \qquad Ⓔ$$

Solución: 29

- Según teoría, la variación en la longitud de la barra es:

$$L - L_0 = \Delta L = L_0.\alpha.(T - T_0)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha.L_0} = \frac{(L_0/1000)}{(20.10^{-6})(L_0)}$$

$$\Delta T = 50\ ^{o}C \qquad Ⓔ$$

Solución: 30

- Por dilatación volumétrica, se cumple:

$$V = V_0\,[1+\beta.(T-T_0)]$$

Como, $V = m/\rho$, y la masa no cambia entonces, la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}[1+\beta\,(T-T_0)]$$

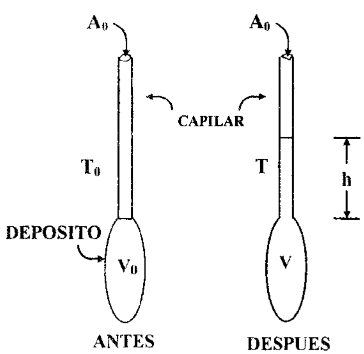
$$\rho = \frac{\rho_0}{[1+\beta\,(T-T_0)]}$$

$$\rho = \frac{7{,}8}{[1+(36.10^{-6})(100-0)]}$$

$$\clubsuit\ \ \rho \approx 7{,}77\ \frac{g}{cm^3}$$ (D)

Solución: 31

- Representemos al mercurio antes y después del proceso de dilatación.



El volumen final del depósito de vidrio es

$$V_V = V_0(1+\beta_V.T) \qquad (1)$$

El volumen final del mercurio es:

$$V_M = V_0(1+\beta_M T) \qquad (2)$$

El volumen de mercurio en el capilar, es igual, a la diferencia de los volúmenes finales del mercurio y depósito de vidrio. Luego, de (1) y (2), se tiene:

$$A_0 h = V_0(\beta_M - \beta_V)T$$

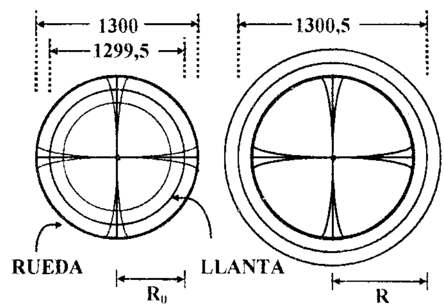
$$h = \frac{V_0(\beta_M - \beta_V)\,T}{A_0}$$

$$h = \frac{(50)(182.10^{-6}-(3)(3).10^{-6})(50)}{5}$$

$$\clubsuit\ \ h = 8{,}7\ cm$$ (E)

Solución: 32

- Representemos a la llanta y aro antes y después de dilatarse.



En la Fig., la longitud final de la llanta es:

$$2\pi R = 2\pi R_0\,[1+\alpha\,(T-T_0)]$$

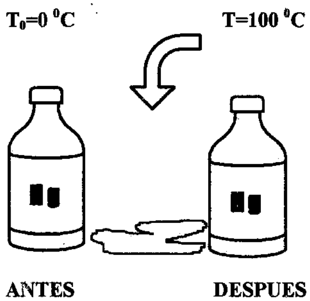
$$D = D_0\,[1+\alpha\,(T-T_0)]$$

$$1300{,}5 = 1299{,}5\,[1+12.10^{-6}(T-20)]$$

$$\clubsuit\ \ T = 84{,}127^\circ C$$ (D)

Solución: 33

- Representemos al frasco y mercurio antes y después de dilatarse.



a) El volumen de mercurio dilatado es:

$$V_M - V_0 = V_0\,\beta_M(T - T_0)$$

$$\Delta V_M = (1000)[(180.10^{-6})(100-0)]$$

$$\Delta V_M = (1\,000)(0{,}018)$$

$$\Delta V_M = 18\ cm^3 \qquad \text{E}$$

b) El volumen del frasco dilatado es:

$$\Delta V_F = 18 - 15 = 3\ cm^3 \qquad \text{C}$$

c) El valor de "α" para el frasco, se halla de:

$$\Delta V_F = V_0.3\alpha\,(T-T_0)$$

$$\alpha = \frac{3}{(3)(1000)(100-0)}$$

$$\clubsuit\ \alpha = 1.10^{-5}\,{}^{o}C^{-1} \qquad \text{A}$$

Solución: 34

• El área de la sección transversal final de la tubería de acero es:

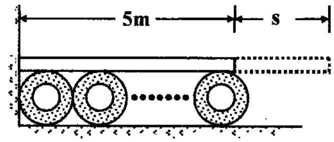
$$A = A_0\,[1 + 2\alpha\,(T - T_0)]$$

$$A = (8.10^{-3})[1 + (2)(12.10^{-6})(170-20)]$$

$$\clubsuit\ A \approx 80{,}29\ cm^2 \qquad \text{E}$$

Solución: 35

• Representemos la varilla de cobre apoyada sobre el rodillo



El desplazamiento lineal (θ R) que experimenta el último rodillo es igual al incremento de longitud (s) de la varilla al dilatarse, así:

$$\theta\,R = \alpha\,L_0\,\Delta T$$

$$\theta\,(0{,}5.10^{-2}) = 17.10^{-6}\,(5)(200)$$

$$\clubsuit\ \theta = 3{,}4\ rad \qquad \text{C}$$

Solución: 36

• Al elevarse la temperatura de 10^0 a 30^0 C, la regla se dilata, de modo que la longitud correcta (L_C) es:

$$L_C = L_0\,[\,1 + \alpha\,(T - T_0)\,]$$

$$L_C = 100\,[\,1 + (\,5.10^{-4}\,)(30 - 10)]$$

$$L_C = 100 + 1$$

$$\clubsuit\ L_C = 101\ cm \qquad \text{E}$$

Solución: 37

• Sea (T) la temperatura a la cual ambas láminas tienen la misma área, es decir:

$$A_{F(latón)} = A_{F(acero)}$$

$$\alpha_{latón}.A_0.(T-20) = \alpha_{acero}.A_0.(T-10)$$

$$\alpha_{latón}.(T-20) = \frac{1}{3}\,\alpha_{latón}.(T-10)$$

$$3\,(T - 20) = T - 10$$

♣ $T = 25\ ^oC$ (B)

Solución: 38

- El volumen de la parte intermedia se mantiene constante, si el incremento de volumen de la esfera y de la esfera hueca tienen el mismo valor, para el mismo incremento de temperatura, así:

$$\Delta V_r = \Delta V_R$$

$$3.\alpha_r \frac{4\pi}{3} r^3.\Delta T = 3.\alpha_R \frac{4\pi}{3} R^3.\Delta T$$

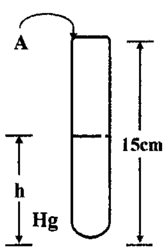
$$\alpha_r.r^3 = \alpha_R.R^3$$

$$8.r^3 = R^3$$

♣ $\dfrac{R}{r} = 2$ (B)

Solución: 39

- Sea A el área de la base del tubo de vidrio. El volumen vacío sobre el mercurio se mantiene constante si el incremento de volumen del mercurio de altura (h) es igual al incremento de volumen del tubo de vidrio de altura 15 cm, así:



$$\Delta V_{Hg} = \Delta V_{tubo}$$

$$\beta_{Hg}.A.h.\Delta T = \beta_V.15A.\Delta T$$

$$h = \left(\frac{\beta_V}{\beta_{Hg}}\right)15 = \left(\frac{6}{18}\right)15$$

♣ $h = 5$ cm (E)

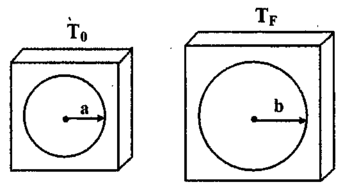
Solución: 40

- Experimentalmente se demuestra que el espacio vacío, el orificio, se dilatan como si fueran del mismo material de la lámina metálica. Sean:

a = radio del orificio a la temperatura T_0, inicial = 1 cm.

b = radio del orificio a la temperatura T_F, final = 1,02 cm.

γ = coeficiente de dilatación superficial del metal = $2{,}02.10^{-4}\ ^0C^{-1}$.



De otra parte, la variación superficial del orificio, es directamente proporcional al área inicial y al cambio de temperatura ($T_F - T_0$), así:

$$\Delta A_F = \gamma.A_0.\Delta T$$

$$\pi\,(b^2 - a^2) = \gamma.\pi.a^2.\Delta T$$

$$(b + a)(b - a) = \beta.a^2.\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{(1{,}02 + 1{,}0)(1{,}02 - 1{,}0)}{(1)^2(2{,}02.10^{-4})}$$

♣ $\Delta T = 200\ ^oC$ (C)

Solución: 41

- De la condición del problema, se tiene:

$$\Delta L_A + \Delta L_B = 6$$

$$\alpha_A.L_{0,A}.\Delta T + \alpha_B.L_{0,B}.\Delta T = 6$$

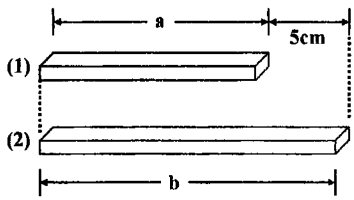
$$(15.10^{-4})(60)\,\Delta T + (10^{-3})(30)\,\Delta T = 6$$

$$\Delta T = \frac{6}{9.10^{-2} + 3.10^{-2}} = \frac{600}{12}$$

$$\clubsuit \quad \Delta T = 50\ ^{o}C \qquad \text{(E)}$$

Solución: 42

• Representemos las varillas en el instante en la que la diferencia de sus longitudes es de 5 cm.



De la condición del problema, se sabe que

$$b - a = 5 \qquad (1)$$

De otra parte, la variación de la longitud por cada unidad de temperatura, para cada varilla debe tener el mismo valor, así:

$$\alpha_1.a.\Delta T = \alpha_2.b.\Delta T$$

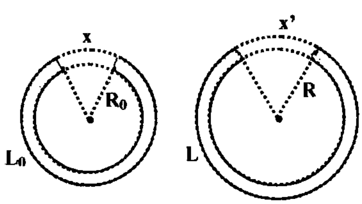
$$3\,a = 2\,b \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2), obtenemos:

$$\clubsuit \quad a = 10\ cm\ ;\ b = 15\ cm \qquad \text{(D)}$$

Solución: 43

• Representemos el alambre antes y después de elevarse su temperatura.



ANTES DESPUES

Sean, x, x' las longitudes de la abertura antes y después, de incrementado la temperatura, entonces de la Fig., se tiene:

Antes de la dilatación:

$$x = 2\pi R_0 - L_0$$

Después de la dilatación:

$$x' = 2\pi R - L$$

$$x' = 2\pi R_0 [1 + \alpha.\Delta T] - L_0 [1 + \alpha.\Delta T]$$

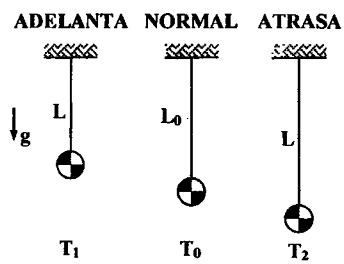
$$x' = \underbrace{2\pi R_0 - L_0}_{x} + \underbrace{(2\pi R_0 - L_0)}_{x} \alpha.\Delta T$$

$$\frac{x}{x'} = 1 + \alpha.\Delta T > 1 \quad => \quad x > x'$$

Así, la longitud final de la abertura es mayor que la inicial, por tanto, no cerrará el anillo.

Solución: 44

• Representemos el reloj de péndulo en estado normal, cuando se atrasa y adelante



Sea L_0 la longitud del péndulo a la temperatura normal T_0, entonces, el período del péndulo es:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}}$$

Cuando el péndulo se atrasa 2 s en 24 h= 86 400 s = D, entonces, en un período de τ

segundos se atrasa 2τ / D segundos, siendo ésta cantidad, igual, a la diferencia de períodos, a las temperaturas T_0 y T_1, es decir:

$$\frac{2\tau}{D}=2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}-2\pi\sqrt{\frac{L_0[1+\alpha.(T_1-T_0)]}{g}}$$

$$\frac{2\tau}{D}=\tau[1-\sqrt{1+\alpha\,(T_1-T_0)}]$$

$$\alpha\,T_1-\alpha\,T_0=-\frac{4}{D}+\frac{4}{D^2} \qquad (1)$$

Cuando el péndulo se adelanta 4 s en 24h=86 400 s = D, entonces, en un período de τ segundos se adelanta 4 τ/D segundos, siendo ésta cantidad, igual, a la diferencia de períodos, a las temperaturas T_2 y T_0, es decir:

$$\frac{4\tau}{D}=2\pi\sqrt{\frac{L_0[1+\alpha.(T_2-T_0)]}{g}}-2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}$$

$$\frac{4\tau}{D}=\tau[\sqrt{1+\alpha\,(T_2-T_0)}-1]$$

$$\alpha\,T_2-\alpha\,T_0=\frac{8}{D}+\frac{16}{D^2} \qquad (2)$$

Restando (2) menos (1), obtenemos:

$$T_2-T_1=\frac{12}{\alpha}(\frac{1}{D}+\frac{1}{D^2})\approx\frac{12}{\alpha.D}$$

$$T_2-T_1=\frac{12}{(2{,}31.10^{-5}\,{}^0C^{-1})(86\,400)}$$

$$\clubsuit\; T_2-T_1=6\ {}^oC \qquad \text{(C)}$$

Solución: 45

- La temperatura más probable en el fondo del lago es de 4° C, debido, a que la densidad del agua es máxima a esta temperatura, (fenómeno conocido como la anomalía del agua).

Solución: 46

- Del principio de conservación de la energía, se cumple:

Calor perdido =	Calor ganado +	Calor ga-
muestra	calorímetro	nado H_2O

$$(100)(c_e)(120-40)=$$
$$(40)(1)(40-10)+(360)(1)(40-10)$$
$$80\;c_e=(40)(3)$$
$$\clubsuit\; c_e=1{,}5\;\frac{cal}{g\,{}^oC} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 47

- Del principio de conservación de la energía, se cumple:

Calor perdido =	Calor ganado +	Calor ga-
muestra	calorímetro	nado H_2O

$$(500)(0{,}09)(200-T)=(55)(1)(T-0)+$$
$$(500)(1)(T-0)$$
$$60\;T=900$$
$$\clubsuit\; T=15\ {}^oC \qquad \text{(C)}$$

Solución: 48

- Por el principio de conservación de la energía, se cumple:

Calor perdido =	Calor ganado +	Calor
trozo	calorímetro	ganado
hierro	aluminio	glicerina

$$(0{,}290)(450)(190\text{-}38)=$$
$$(0{,}1)(900)(38\text{-}10)+(0{,}259).c_e.(38\text{-}10)$$

$$7\,252\,c_e = 17\,316$$

$$\clubsuit\ c_e \approx 2\,388\ J/kg\,^0C \quad \text{(D)}$$

Solución: 49

- El calor perdido por la sustancia es:

$$Q_1 = (0{,}22)(c_e)(330-33{,}8)$$

$$Q_1 = 65{,}164\,c_e\ J$$

El calor ganado por el calorímetro es:

$$Q_2 = (0{,}09)(900)(33{,}8-11{,}5)$$

$$Q_2 = 1806{,}3\ J$$

El calor ganado por el agua es:

$$Q_3 = (0{,}15)(4\,186)(33{,}8-11{,}5)$$

$$Q_3 = 14\,002{,}17J$$

El calor ganado por el termómetro es:

$$Q_4 = (0{,}017)(840)(33{,}8-11{,}5)$$

$$Q_4 = 318{,}44\ J$$

Según, el principio de conservación de energía, se cumple:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$65{,}164c_e = 1806{,}3 + 14\,002{,}17 + 318{,}44$$

$$c_e = \frac{16\,126{,}91}{65{,}164}$$

$$\clubsuit\ c_e = 247{,}48\ \frac{J}{kg.^oC} \quad \text{(D)}$$

Solución: 50

- Según teoría, el calor especifico es:

$$c_e = \frac{Q}{m\,(T-T_0)}$$

$$c_e = \frac{36.10^3}{(4\,500)(40-20)}$$

$$\clubsuit\ c_e = 0{,}4\ cal/g\,^oC \quad \text{(D)}$$

Solución: 51

- Calculemos la masa de agua contenida en el vaso:

$$m = \rho\,V \quad => \quad m = (1)(200)$$

$$m = 200\ g$$

Luego, el máximo de calor transferido al medio ambiente es:

$$Q = m\,c_e\,(T - T_0)$$

$$Q = (200)(1)(50-20)$$

$$\clubsuit\ Q = 6\ kcal \quad \text{(C)}$$

Solución: 52

- Toda la energía cinética de los 10 golpes del martillo contra el clavo, se convierte en calor, así, elevándose la temperatura del clavo:

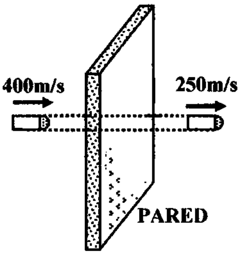
$$10\left(\frac{1}{2}M\,v^2\right) = m\,c_e\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{5\,M\,v^2}{m\,c_e} = \frac{(5)(0{,}5)(6)^2}{(0{,}02)(450)}$$

$$\Delta T \approx 10\ ^oC \quad \text{(B)}$$

Solución: 53

a) Representemos a la bala antes y después de atravesar la pared de hierro.



De la Fig., el 50% (1/2) de la energía cinética perdida de la bala, se transforma en calor de la misma bala, elevándose su temperatura, así:

$$(0,50)(\frac{1}{2}m\,v_o^2 - \frac{1}{2}m\,v^2) = m\,c_e\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{v_o^2 - v^2}{4\,c_e} = \frac{(400)^2 - (250)^2}{(4)(130)}$$

Luego, el aumento de temperatura es:

$$\Delta T = 187,5\ ^oC \qquad \text{D}$$

b) La temperatura final de la bala es:

$$T = 187,5 + 20 = 207,5^0\ C$$

Como la temperatura de fusión del plomo T_F=327^0 C, es mayor que la temperatura final de la bala, no se funde ninguna parte de la bala.

Solución: 54

• El calor total, es igual al calor utilizado para hacer hervir el agua, más, el calor ganado por la cafetera, es decir:

$$Q = (0,45)(4\,186)(100-10) + (0,4)(900)(100-10)$$

$$Q = 201\,933\ J$$

Luego, el tiempo necesario para hacer hervir el agua es:

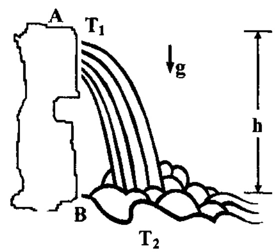
$$t = \frac{Q}{P} = \frac{201\,933\ J}{500\ J/s}$$

$$t = (403,86\ s)(\frac{1\ min}{60\ s})$$

$$♣\ t = 6,73\ min \qquad \text{D}$$

Solución: 55

• Representemos la catarata de agua, siendo la temperatura en la parte superior e inferior T_1 y T_2, respectivamente.



Según el principio de conservación de la energía, la energía potencial en A de una cantidad de agua (m), se transforma en calor en B, así:

$$E_P = Q$$

$$m.g.h = m.c_e.(T_2 - T_1)$$

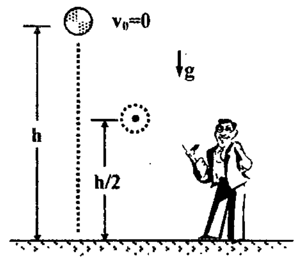
$$h = \frac{(4200)(1)}{(10)}$$

$$♣\ h = 420\ m \qquad \text{C}$$

Solución: 56

• Según el principio de conservación de la energía, las 3/4 partes de la disminución de la energía potencial de la bola, se transforma en calor, elevando su temperatura, así:

$$\frac{3}{4}(E_{P,0} - E_P) = Q$$



$$\frac{3}{4}(m.g.h - m.g.\frac{h}{2}) = m.c_e.\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{3\,g.h}{8\,c_e} = \frac{3}{8}\frac{(10)(160)}{(200)}$$

$$\clubsuit\ \Delta T = 3\ ^0C \qquad \text{C}$$

Solución: 57

• El calor utilizado para elevar la temperatura del cuerpo es:

$$Q' = m\,c_e\,\Delta T = (10)(85)(100)$$

$$Q' = 85\ \text{kcal}$$

El porcentaje de calor cedido al medio ambiente es:

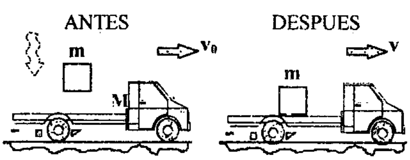
$$R = (\frac{Q - Q'}{Q})(100)$$

$$R = (\frac{100 - 85}{100})(100)$$

$$R = 15\ \% \qquad \text{B}$$

Solución: 58

• Representemos al carrito antes y después del impacto de la carga sobre el.



Según el principio de conservación de la energía, la variación de la energía cinética (en cal) del carrito, es igual al calor desprendido, así:

$$Q = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)\,v^2] \qquad (1)$$

De otra parte, de la conservación de la cantidad de movimiento, se tiene:

$$\underline{M\,v_0 = (m+M)\,v}$$

$$v = \frac{M}{(m+M)}\,v_0 \qquad (2)$$

De (2) en (1), obtenemos la cantidad de calor, así:

$$Q = \frac{m\,M}{8\,(m+M)}\,v_0^2$$

$$Q = \frac{(1)(7)}{8\,(1+7)}\,(4)^2$$

$$\clubsuit\ Q = 1{,}75\ \text{cal} \qquad \text{D}$$

Solución: 59

• La energía cinética del bloque de hielo se transforma íntegramente en energía calorífica, así:

$$Q = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad (1)$$

También, la cantidad de calor (Q) necesaria para que el hielo cambie de fase (de hielo a líquido) es:

$$Q = m.L_F \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), obtenemos la velocidad del bloque de hielo:

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = m.L_F$$

$$v = [(2)(320\ 000)]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ v = 800\ m/s \qquad \text{(E)}$$

Solución: 60

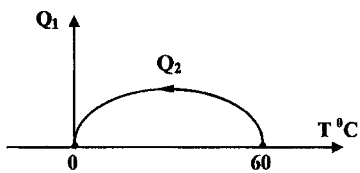
- La sustancia cambia de fase a la temperatura constante de T=80⁰ C, absorbiendo 100 kJ de energía calorífica.

$$L_F = \frac{Q}{m} = \frac{100}{0{,}025}$$

$$\clubsuit\ L_F = 4\ 000\ \frac{kJ}{kg} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 61

- Representemos el diagrama del proceso de intercambio de calor.



Si el hielo se funde exactamente, entonces la temperatura de equilibrio es 0^0 C. Luego, del principio de conservación de la energía, se cumple que:

$$Q_1 = Q_2$$

$$M.L_F = m.c_e.\Delta T$$

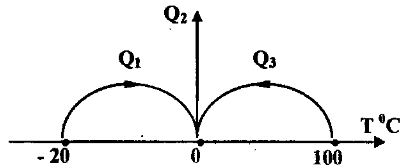
$$M\,(80) = (120)\,(1)\,(60)$$

$$\clubsuit\ M = 90\ g \qquad \text{(E)}$$

Luego, inicialmente había 90 gramos de hielo. Finalmente queda en el recipiente 210 gramos de agua fría a 0^0 C.

Solución: 62

- Representemos el diagrama del proceso de intercambio de calor.



Del principio de conservación de la energía, se tiene:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$m.c_{e,\,hielo}\,\Delta T_1 + m.L_F = M.c_{e,\,agua}\,\Delta T_3$$

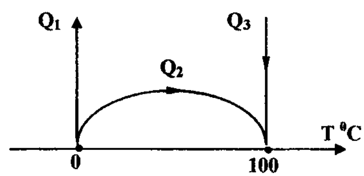
$$(20)(0{,}5)(20) + (20)(80) = M\,(1)(100)$$

$$\clubsuit\ M = 18\ g \qquad \text{(E)}$$

Luego, se debe verter 18 gramos de agua a 100^0 C. Finalmente queda en el recipiente 38 gramos de agua a 0^0 C.

Solución: 63

- Representemos el diagrama del proceso de intercambio de calor.



Del principio de conservación de la energía, se tiene:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$m.L_F + m.c_{e,agua}\,\Delta T_2 = M.L_C$$

$$(30)(80) + (30)(1)(100) = M\,(540)$$

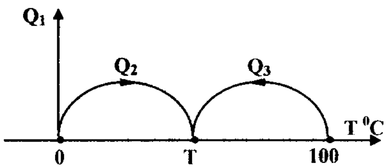
$$\clubsuit\ M = 10\ g \qquad \text{(A)}$$

Luego, se debe inyectar 10 gramos de va

por de agua a 100^0 C. Finalmente queda en el recipiente 40 gramos de agua caliente a 100^0 C.

Solución: 64

• Representemos el diagrama del proceso de intercambio de calor.



Del principio de conservación de la energía, se tiene:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$M.L_F + M.c_{e,\,H2O}\,\Delta T_2 = M.c_{e,\,H2O}\,\Delta T_3$$

$$L_F + c_{e,\,H2O}\,(T - 0) = c_{e,\,H2O}\,(100 - T)$$

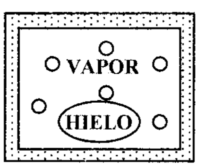
$$80 + (1)\,(T) = (1)\,(100 - T)$$

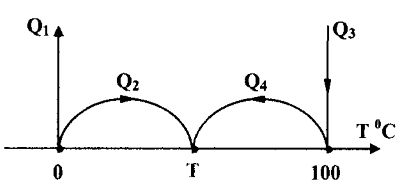
$$♣\ T = 10^0\ C \qquad \text{A}$$

Luego, la temperatura de equilibrio es 10 ^{0}C.

Solución: 65

• Representemos el diagrama del proceso de intercambio de calor.





Del principio de conservación de la energía, se tiene:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$$

$$m.L_F + m.c_{e,\,H2O}\,\Delta T_2 = M.L_V + M.c_{e,H2O}\,\Delta T_4$$

$$(992)\,(80) + (992)\,(1)\,T = (160)\,(540) + (160)\,(1)\,(100 - T)$$

$$1\,152\ T = 23\,040$$

$$♣\ T = 20^0\ C \qquad \text{C}$$

Luego, la temperatura de equilibrio es 20 ^{0}C.

Solución: 66

I) Sólida
II) Gaseosa
III) 20^0 C
IV) $6{,}8.10^5$ Pa y -57^0 C
V) Sublimación
VI) Sólida

Solución: 67

• Calculemos la cantidad de calor necesaria para fundir íntegramente el bloque de hielo:

$$Q = m.L_F$$

$$Q = (716{,}7)\,(80) = 57\,334\ \text{cal}$$

$$Q = (57\,334)(4{,}186\ J) = 240\,000\ J$$

De otro lado, la cantidad de calor Q que libera la resistencia eléctrica, es igual al producto de la potencia P, por el tiempo transcurrido, esto es:

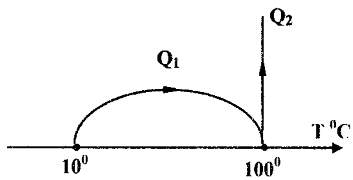
$$Q = P.t$$

$$240\,000\ J = (500\ W)\,t$$

$$♣\ t = 480\ s = 8\ \text{min} \qquad \text{E}$$

Solución: 68

- Representemos el diagrama del proce so de intercambio de calor.



Q_1, es la cantidad de calor invertido para calentar el agua desde 10^0 C hasta 100^0 C, y ella es igual a:

$$Q_1 = m.c_{e,\,H2O}\,T = m\,(1)(90)$$

$$Q_1 = 90\text{ m} \qquad (1)$$

Q_2, es la cantidad de calor invertido para vaporizar el agua totalmente, a la tempera tura constante de 100^0 C, y ella es igual a:

$$Q_2 = m.L_V = m\,(540)$$

$$Q_2 = 540\text{ m} \qquad (2)$$

Luego, aplicando proporcionalidad, obte nemos la temperatura final, así:

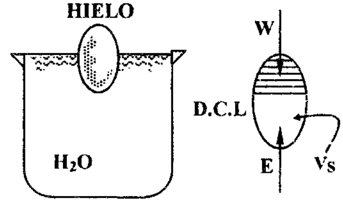
$$\frac{x}{10\text{ min}} = \frac{540\text{ m}}{90\text{ m}}$$

$$\clubsuit\ x = 60\text{ min} \qquad \text{(E)}$$

Luego, el agua tardará en vaporizarse to talmente en 60 minutos.

Solución: 69

- Representemos las fuerzas que actúan sobre el trozo de hielo, siendo (V) el volu men total del hielo, y (V_S) el volumen de la parte sumergida.



Aplicando la primera condición de equili brio al trozo de hielo:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad E = W$$

$$\rho_{H2O}.g.V_S = \rho_{Hielo}.g.V$$

$$\rho_{H2O}.V_S = \rho_{Hielo}.V \qquad (1)$$

Ahora, consideremos V'_S el volumen que ocupa el bloque de hielo cuando se derri te, luego, del principio de conservación de la masa, cuando el bloque de hielo se de rrite, se tiene:

$$m_{Hielo} = m_{Agua}$$

$$\rho_{Hielo}.V = \rho_{H2O}.V' \qquad (2)$$

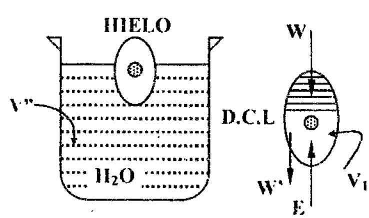
Comparando (1) con (2), obtenemos:

$$V'_S = V_S \qquad \text{(E)}$$

«El nivel de agua se mantiene inalterable, el agua no se derrama»

Solución: 70

- Representemos las fuerzas que actúan sobre el bloque de hielo.



En la representación de las fuerzas que ac túan sobre el trozo de hielo:

W': peso de la billa metálica
W : peso del bloque de hielo
V_1 : volumen sumergido con billa
V_2 : volumen sumergido sin billa
V : volumen total del hielo

Primera condición de equilibrio

$$\sum F_Y = 0$$

1) Cuando el hielo contiene a la billa.

$$W + W' = E$$

$$\rho_{Hielo}.g.V + W' = \rho_{H2O}.g.V_1$$

$$V_1 = \frac{\rho_{Hielo}.V + (W'/g)}{\rho_{H2O}} \qquad (1)$$

2) Cuando parte del hielo se derrite, la bi lla cae, el peso del hielo no se altera, y se tiene:

$$W = E$$

$$\rho_{Hielo}.g.V = \rho_{H2O}.g.V_2$$

$$V_2 = \frac{\rho_{Hielo}.V}{\rho_{H2O}} \qquad (2)$$

Comparando (1) con (2), obtenemos:

$$V_1 > V_2$$

Ahora, sea V" el volumen de agua en el re cipiente, entonces, el volumen total del ni vel, para ambos casos es:

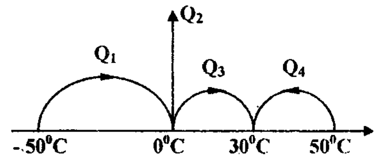
$$V_T = V" + V_1 > V" + V_2 = V'_T$$

$$V_T > V'_T \qquad \text{A}$$

Por tanto, el nivel del agua bajará.

Solución: 71

- Representemos el diagrama del proce so de intercambio de calor.



En el diagrama del proceso del intercam bio de calor, las cantidades de calor son:

$$Q_1 = m.c_{e,H}.\Delta T = 25 \text{ kcal}$$

$$Q_2 = m.c_{L,F} = 80 \text{ kcal}$$

$$Q_3 = m.c_{e,H2O}\,\Delta T = 30 \text{ kcal}$$

$$Q_4 = M.c_{e,x}.\Delta T$$

Por el principio de conservación de la e nergía, se tiene:

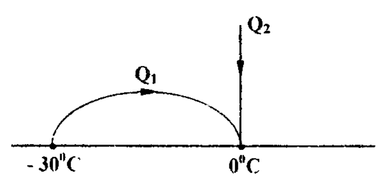
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4$$

$$135 \text{ kcal} = (10 \text{ kg})(c_{e,x})(20\ ^0C)$$

$$\clubsuit\ c_{e,x} = 0{,}675\ \frac{\text{kcal}}{\text{kg}\,^0C} \qquad \text{D}$$

Solución: 72

- Representemos el diagrama del proce so de intercambio de calor.



Analizando se deduce que la temperatura final de equilibrio es 0^0 C. Ahora, sea "x" la cantidad de agua que se solidifica, (Q_1) el calor ganado por el hielo, (Q_2) el calor perdido por el agua para solidificarse los "x" gramos, entonces, por el principio de conservación de la energía, tenemos:

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_H.c_{e,\,H}.\Delta T = x.c_L$$

$$(40\,g)(0{,}5\,\frac{cal}{g\,{}^0C})(30^0\,C) = x\,(80\,\frac{cal}{g})$$

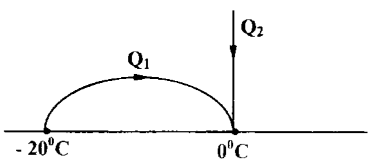
$$x = 7{,}5\ g \qquad D$$

Estado final de equilibrio térmico:

Temperatura	=	0^0 C
Masa de hielo	=	47,5 g
Masa de agua	=	42,5 g

Solución:73

- Representemos el diagrama del proceso de intercambio de calor.



Q_1 = calor ganado por el hielo
Q_2 = calor perdido por los "x" g de agua
x = cantidad de agua que se solidifica

Luego, del principio de conservación de la ener-gía, tenemos:

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_H.c_{e,\,H}.\Delta T = x\,.\,c_L$$

$$(800g)(0{,}5\frac{cal}{g\,{}^0C})(20^0C) = x\,(80\frac{cal}{g})$$

$$x = 100\ g \qquad D$$

Estado final del equilibrio térmico:

Temperatura	=	0^0 C
Masa de agua	=	700 gramos
Masa de hielo	=	900 gramos

Solución: 74

- Según teoría, la cantidad de calor transferido, viene dado por:

$$Q = K\,A\,\frac{T_2 - T_1}{L}\,t$$

$$Q = (0{,}25)(12)\frac{(25-23)}{0{,}012}(3\,600)$$

$$\clubsuit\ Q = 1{,}8.10^6\ cal \qquad E$$

Solución: 75

- La cantidad de calor transferida al hielo, a través de la hielera es:

$$Q = K\,A\,\frac{T_2 - T_1}{L}\,t$$

$$Q = (2{,}5.10^{-5})(2)\frac{(26-4)}{0{,}04}(60)$$

$$Q = 1{,}650\ kcal$$

De otro lado, para fundir 1 g de hielo se necesitan 80 cal, luego, la cantidad de hielo fundido es:

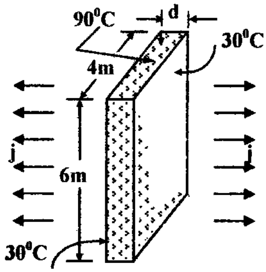
$$m = \frac{1\,650\ cal}{80\ cal/g}$$

$$\clubsuit\ m = 20{,}625g \qquad B$$

Solución: 76

- El coeficiente de convección del aire es $1{,}27.10^{-3}$ kcal/m^2.s.°C, entonces, el calor perdido en una cara de la pared es:

$$Q = h\,S(T_2 - T_1)\,t$$



$$Q = (1{,}27.10^{-3})(24)(90-30)(3\ 600)$$

$$Q = 6\ 583{,}68\text{kcal}$$

Luego, la cantidad de calor perdido en am-bas caras, será el doble, es decir:

$$\clubsuit\ Q_T = 13\ 167{,}36\ \text{kcal}$$ (B)

Solución: 77

- Según teoría, la absorbancia de un cuerpo, viene dado por:

$$a = \frac{\text{energía absorvida}}{\text{energía incidente}}$$

$$a = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

La emisividad es, e =1- a = 4 / 5, luego la energía emitida por el cuerpo en 1 min es:

$$E = e\sigma A T^4 t$$

$$E = (\frac{4}{5})(5{,}67.10^{-8})(1)(10^3)^4(60)$$

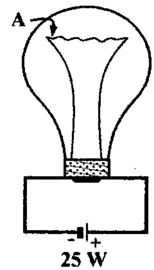
$$\clubsuit\ E = 2{,}72.10^6\,\text{J}$$ (D)

Solución: 78

- Según teoría, la potencia por unidad de área, viene dado por:

$$\frac{P}{A} = e\,\sigma\,T^4$$

$$A = \frac{25}{(0{,}3)(5{,}67.10^{-8})(1\ 727+273)^4}$$



$$A = \frac{25}{2{,}72.10^5}$$

$$\clubsuit\ A = 9{,}19.10^{-5}\text{m}^2$$ (B)

Solución: 79

- Para, T= 60^0 C, la rapidez de radiación del cuerpo negro (e=1) es:

$$R = e\,\sigma\,T^4$$

$$R = (1)(5{,}67.10^{-8})(60+273)^4$$

$$R = 697{,}2\ \text{W/m}^2$$

Para, T=120^0 C, la rapidez de radiación del cuerpo negro es:

$$R' = (1)(5{,}67.10^{-8})(120+273)^4$$

$$R' = 1352{,}5\ \text{W/m}^2$$

Comparando R' respecto de R, tenemos:

$$\frac{R'}{R} = \frac{1\ 352{,}5}{697{,}5}$$

$$\clubsuit\ \frac{R'}{R} \approx 1{,}94$$ (B)

Solución: 80

• Sea (T) la temperatura de la superficie de separación y A el área de las láminas. Entonces, como no hay pérdida de calor, el calor que pasa por la lámina izquierda, es igual, al que pasa por la lámina derecha, así:

$$k\left(\frac{T-20}{d}\right)A=(2k)\left(\frac{40-T}{2d}\right)$$

$$2\,T=60$$

$$T=30\ ^{\circ}C \qquad \text{C}$$

Solución: 81

• Utilizando el procedimiento del problema anterior, hallemos la temperatura de la superficie común, así:

$$k\left(\frac{T-20}{d}\right)A=(3k)\left(\frac{40-T}{d}\right)$$

$$T=35\,^{\circ}C \qquad \text{C}$$

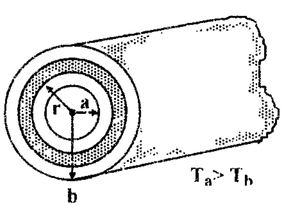
Luego, el calor que pasa por la lámina izquierda, es igual, al que pasa a través de to-da la pared, de coeficiente de conductividad termica k', así:

$$k\left(\frac{35-20}{d}\right)A=k'\left(\frac{40-20}{2d}\right)A$$

$$\clubsuit\ k'=(3/2)\,k \qquad \text{E}$$

Solución: 82

• Al interior del tubo de longitud "ℓ" representemos una capa cilíndrica de radio (r) y espesor (dr).



En la Fig., el flujo de calor que pasa por el área lateral $dA=2\pi r\ell$ de la capa cilíndrica de radio (r), longitud ℓ y espesor (dr) es:

$$H=k\,(2\pi\, r\,\ell)\left(-\frac{dT}{dr}\right)$$

Separando variables, e integrando con (H) constante, obtenemos:

$$H\int_a^b\frac{dr}{r}=-2\pi\, k\ell\int_{T_a}^{t_b}dT$$

$$H=\frac{2\pi\, k\ell\,(T_a-T_b)}{\ell n(b/a)}$$

$$H=\frac{(2\pi)(74{,}4)(1)(200)}{\ell n(2)}$$

$$H\approx 135.10^3\,W \qquad \text{C}$$

☞ **Nota**

El gradiente de temperatura (dT/dr) es negativa, pues, a medida que (r) aumenta la temperatura disminuye.

Solución: 83

• Como el 60 % de la energía del cuerpo de masa (m) se transforma en calor, elevando la temperatura del agua, se cumple:

$$0{,}6\,mg\,h=M\,c_e(T-T_o)$$

$$T=T_o+\frac{0{,}6\,mg\,h}{M\,c_e}$$

$$T=20+\frac{(0{,}6)(3)(10)(30)}{(0{,}1)(4186)}$$

$$\clubsuit\ T\approx 21{,}3^{\circ}C \qquad \text{B}$$

Solución: 84

• El flujo de calor a través de la sección transversal del tubo de hierro, viene dado por:

$$H = k\,A\,\frac{T_2 - T_1}{\ell}$$

$$H = (74{,}4)(2.10^{-4})(\frac{100-20}{0{,}2})$$

$$♣\ H = 5{,}952\ W \qquad \text{(D)}$$

Solución: 85

• La cantidad de calor transferida por el tubo caliente hacia el agua del depósito durante 10 min es:

$$Q = Ht = \frac{2\pi k\,\ell\,(T_a - T_b)}{\ell n(D/d)}\,t$$

$$Q = \frac{(2\pi)(385)(0{,}25)(50-25)}{\ell n(1/0{,}5)}(10)(60)$$

$$Q = 1{,}3.10^{7}\,J$$

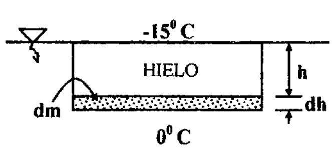
Luego, la masa de agua que se calienta hasta una temperatura de 70^0 C es:

$$m = \frac{Q}{c_e \Delta T} = \frac{1{,}3.10^7}{(4186)(70-25)}$$

$$♣\ m \approx 69{,}5\ kg \qquad \text{(E)}$$

Solución: 86

• Consideremos una capa de hielo de espesor (h) y área (A), cuyas caras inferior y exterior están a las temperaturas de 0^0 C y -15^0 C.



En la Fig., la cantidad de calor necesaria para que se forme una capa de hielo de masa (dm) contenida en el volumen sombreado de espesor (dh) y área (A) es:

$$dQ = dm\,L_F = \rho\,A\,dh\,L_F \qquad (1)$$

De otro lado, la cantidad de calor transferido al medio ambiente, a través del área A de la capa de hielo de espesor (h), durante el tiempo (dt) es:

$$dQ = H\,dt = k\,A(\frac{T_2 - T_1}{z})\,dt \qquad (2)$$

Igualando las ecs.(1) y (2), separando variables e integrando, tenemos:

$$\rho\,A\,L_F\,dh = k\,A\,(\frac{T_2 - T_1}{h})\,dt$$

$$\rho\,L_F \int_0^d h\,dh = k\,(T_2 - T_1)\int_0^t dt$$

$$\rho\,L_F\,(\frac{1}{2}d^2) = k\,(T_2 - T_1)\,t$$

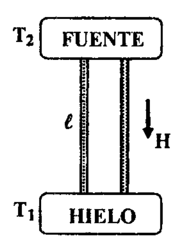
$$t = \frac{\rho\,L_F\,d^2}{2\,k\,(T_2 - T_1)}$$

$$t = \frac{(910)(335.10^3)(0{,}1)^2}{(2)(2{,}093)(0-(-15))}$$

$$♣\ t = 48\ 550{,}7\ s = 13{,}5\ h \qquad \text{(D)}$$

Solución: 87

• Representemos la barra de acero y los focos caliente (fuente) y frío (hielo).



Primero, calculemos el área de la sección transversal de la barra de acero, así:

$$A = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi}{4}(1{,}27.10^{-2})^2$$

$$A = 1{,}27.10^{-4}\,m^2$$

En la Fig. el calor (Q) transmitido de la fuente hacia el hielo, a través de la barra, durante un tiempo (t) se invierte en fundir el hielo, de modo que, se cumple:

$$Q = H\,t = m\,L_F$$

$$k\,A\,(\frac{T_2 - T_1}{\ell})\,t = m\,L_T$$

$$T_2 = T_1 + \frac{m\,\ell\,L_F}{k\,A\,t}$$

$$T_2 = 0°C + \frac{(50.10^{-3})(0{,}3048)(335.10^3)}{(50{,}23)(1{,}27.10^{-4})(3.10^3)}$$

$$\clubsuit\ T_2 \approx 267\,°C \qquad \text{D}$$

Solución: 88

- Hallemos la temperatura en el punto de unión de los extremos de las barras, sabiendo que el flujo de calor por la barra de acero es:

$$H_1 = k_1 A_1 (\frac{T_1 - T}{\ell})$$

$$T = T_1 - \frac{H_1 \ell}{k_1 A_1}$$

$$T = 250^0C - \frac{(6)(0{,}15)}{(50{,}23)(1{,}54.10^{-4})}$$

$$T = 133{,}65\ °C$$

De la expresión del flujo de calor a través del área (A_2) del extremo izquierdo de la barra de cobre, hallemos el diámetro del área A_2, así:

$$H_2 = k_2 A_2 (\frac{T - T_2}{\ell})$$

$$T = T_2 + \frac{H_2 \ell}{k_2 A_2}$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}D_2^2 = \frac{H_2 \ell}{k_2 (T - T_2)}$$

$$D_2 = [\frac{4\,H_2 \ell}{\pi\,k_2 (T - T_2)}]^{1/2}$$

Sustituyendo (T), y teniendo en cuenta que $H_1 = H_2$, tenemos:

$$D_2 = [\frac{(4)(6)(0{,}15)}{(\pi)(385{,}1)(133{,}65 - 20)}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ D = 5{,}1.10^{-3}m = 5{,}1\ mm \quad \text{C}$$

Solución: 89

I) Como el flujo de calor a través de las paredes (1) y (2) es la misma, se cumple:

$$H_1 = H_2$$

$$k_1 A\,(\frac{T_1 - T}{\ell_1}) = k_2 A\,(\frac{T - T_2}{\ell_2})$$

$$k_1 \ell_2 T_1 - k_1 \ell_2 T = k_2 \ell_1 T - k_2 \ell_1 T_2$$

$$T = \frac{k_1 \ell_2 T_1 + k_2 \ell_1 T_2}{k_1 \ell_2 + k_2 \ell_1}$$

$$T = \frac{(0{,}43)(0{,}12)(1600) + (0{,}053)(0{,}22)(20)}{(0{,}43)(0{,}12) + (0{,}053)(0{,}22)}$$

$$T \approx 1\,309\ ^0C \qquad \text{A}$$

II) Sustituyendo (T) en la expresión del flujo de calor a través de la pared izquierda, obtenemos el flujo por unidad de área, así:

$$H_1 = k_1 A\,(\frac{T_1 - T}{\ell_1})$$

$$\frac{H_1}{A}=\frac{k_1}{\ell_1}(T_1-\frac{k_1\ell_2T_1+k_2\ell_1T_2}{k_1\ell_2+k_2\ell_1})$$

$$\frac{H_1}{A}=\frac{k_1\,k_2\ell_1(T_1-T_2)}{\ell_1\;k_1\ell_2+k_2\ell_1}$$

$$\frac{H_1}{A}=\frac{k_1k_2(T_1-T_2)}{k_1\ell_2+k_2\ell_1}$$

$$\frac{H_1}{A}=\frac{(0,43)(0,053)(1600-20)}{(0,43)(0,12)+(0,053)(0,22)}$$

$$\clubsuit\ \frac{H_1}{A}=569,2\ \frac{W}{m^2}\qquad (E)$$

Solución: 90

• Primero calculemos la resistencia del a lambre de cobre, así:

$$R=\rho\ \frac{\ell}{A}$$

$$R=(1,7.10^{-8})\frac{30,48}{\pi.(0,1016.10^{-2})^2/4}$$

$$R\approx 0,64\ \Omega$$

Luego, el ritmo con que se genera energía térmica es:

$$P=\frac{V^2}{R}=\frac{1^2}{0,64}$$

$$\clubsuit\ P=1,56\ W\qquad (B)$$

Solución: 91

• Calculemos el tiempo que demora el calentador en elevar la temperatura del a gua de 27^0 C a 100^0 C, así:

$$P.t_1=m.c_e.(T-T_o)$$

$$P.t_1=\rho.V.c_e.(T-T_o)$$

$$350.t_1=(10^3)(2,5.10^{-4})(4\,186)(100-27)$$

$$t_1=218,3\ s$$

Ahora, calculemos el tiempo que demora el calentador en vaporizar totalmente el a gua líquida, así:

$$P.t_2=m.L$$

$$350.t_2=(10^3)(250.10^{-6})(2,257.10^6)$$

$$t_2=1612,1\ s$$

Luego, el tiempo total del proceso es:

$$t=218,3+1\,612,1=1830,4\ s$$

$$\clubsuit\ t=30,5\ min\qquad (D)$$

Solución: 92

• La energía entregada a la lámpara, en calorías, viene dado por:

$$E_E=0,24.i.V.t$$

$$E_E=(0,24)(10)(130)(5)(60)$$

$$E_E=9,36.10^4\,cal$$

De otro lado, la energía consumida en ca lentar al agua es:

$$E_C=m.c_e.\Delta T$$

$$E_C=(2,7.10^3)(1)(26)$$

$$E_C=7,02.10^4\,cal$$

Luego, el porcentaje de energía entregada que se convierte en luz es:

$$\eta=(\frac{E_E-E_C}{E_E})(100)$$

$$\eta=(\frac{9,36.10^4-7,02.10^4}{9,36.10^4})(100)$$

$$\clubsuit \ \eta = 25\ \%$$ (C)

Solución: 93

• Deduzcamos la expresión de la potencia disipada en el conductor, así:

$$P = i^2.R = (J.A)^2.(\rho\frac{\ell}{A})$$

$$P = \rho.J^2.(A.\ell) = \rho.J^2.V$$

$$\frac{P}{V} = \rho.J^2 = (1{,}7.10^{-8})(3.10^5)^2$$

$$\clubsuit \ \frac{P}{V} = 1{,}53.10^3\ \frac{J}{m^3.s}$$ (B)

Solución: 94

• La razón de las cantidades de calor disipado en los conductores de cobre y acero es:

$$\frac{Q_{Cu}}{Q_A} = \frac{i^2.R_{Cu}.t}{i^2.R_A.t}$$

$$\frac{Q_{Cu}}{Q_A} = \frac{\rho_{Cu}(\ell/A)}{\rho_A(\ell/A)} = \frac{1{,}7.10^{-8}}{1.10^{-7}}$$

$$\clubsuit \ \frac{Q_{Cu}}{Q_A} = 0{,}17$$ (D)

Solución: 95

• La energía consumida por el calentador para elevar la temperatura del agua de 25 °C hasta 100 °C es:

$$Q = m.c_e.(T - T_0)$$

$$Q = (4{,}5.10^3)(1)(100 - 25)$$

$$Q = 3{,}375.10^5\ cal = 1{,}412.10^6\ J$$

$$Q = (1{,}412.10^6\ W.s)(\frac{1\ h}{3{,}6.10^3\ s})$$

$$Q = 0{,}392\ kW.h$$

Luego, el rendimiento del calentador es:

$$\eta = (\frac{Q}{E})(100) = (\frac{0{,}392}{0{,}5})(100)$$

$$\clubsuit \ \eta = 78{,}4\ \%$$ (C)

Solución: 96

• Calculemos la energía (en J) necesaria para hacer hervir el agua, así:

$$Q = m.c_e.(T - T_o)$$

$$Q = (10^3)(1)(100 - 13{,}5) = 86{,}5.10^3\,cal$$

$$Q = (86{,}5.10^3)(4{,}186J) = 362{,}089.10^3\,J$$

Luego, la potencia consumida para hacer hervir el litro de agua es:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{362{,}089.10^3}{(5)(60)}$$

$$\clubsuit \ P = 1{,}2\ kW$$ (B)

Solución: 97

• El 80 % de la energía entregada por el calentador, se transforma en calor (en J) para hacer hervir el agua, esto es:

$$4{,}186\,Q = (\frac{80}{100})\,P.t$$

$$t = \frac{4{,}186\,m.c_e.(T - T_o)}{0{,}8\,P}$$

$$t = \frac{(4{,}186)(2.10^3)(1)(100 - 20)}{(0{,}8)(500)}$$

$$t = 1674{,}4\ s = 27{,}9\ min$$

$$\clubsuit \ t \approx 28\ min$$ (E)

Solución: 98

- La energía entregada por el calentador (en cal), se utiliza para calentar la habitación, así:

$$0{,}24\frac{V^2}{R}.t = Q$$

$$R = \rho\frac{\ell}{A} = \frac{0{,}24\,V^2.t}{Q}$$

$$\ell = \frac{0{,}24\,V^2(\pi.D^2/4).t}{\rho.Q}$$

$$\ell = \frac{(0{,}24)(120)^2(\pi(10^{-3})^2/4)(24)(3{,}6.10^3)}{(10^{-6})(20{,}8.10^6)}$$

$$\clubsuit\ \ \ell \approx 11{,}3\ \text{m} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 99

- La energía suministrada por la línea (en cal), se utiliza para elevar la temperatura de los 8 kg de agua, esto es:

$$0{,}24\,P.t = m.c_e.(T - T_o)$$

$$T = T_o + \frac{0{,}24\,P.t}{m.c_e}$$

$$T = 20 + \frac{(0{,}24)(400)(5)(60)}{(8.10^3)(1)}$$

$$T = 20°C + 3{,}6°C$$

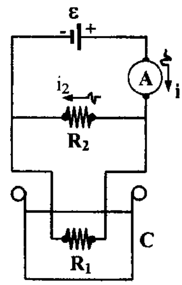
$$\clubsuit\ \ T = 23{,}6°C \qquad \text{(D)}$$

Solución: 100

- La intensidad de corriente eléctrica que pasa por la resistencia R_2 es:

$$i_2 = (\frac{R_1}{R_1 + R_2})(i)$$

$$i_2 = (\frac{60}{60+30})(6) = 4\ \text{A}$$



A su vez, el voltaje en los bornes de la resistencia R_2 es:

$$V_2 = i_2.R_2 = (4)(30) = 120\ \text{V}$$

Luego, la energía suministrada por el calorímetro (en cal), se utiliza para elevar la temperatura del agua, esto es:

$$0{,}24\frac{V_2^2}{R_1}t = m.c_e.\Delta T$$

$$(0{,}24)(\frac{120^2}{60})(5)(60) = (480)(1)\Delta T$$

$$\Delta T = 1728/48$$

$$\clubsuit\ \ \Delta T = 36°C \qquad \text{(E)}$$

Solución: 101

- El 80 % de la energía (en cal) suministrada por el calentador, se utiliza para calentar el agua, esto es, se cumple:

$$0{,}8\,(0{,}24\,P.t) = m.c_e.\Delta T$$

$$(0{,}8)(0{,}24)(26)(10)(60) = (10^3)(1)\Delta T$$

$$(0{,}8)(0{,}24)(2{,}6)(6) = \Delta T$$

$$\clubsuit\ \ \Delta T \approx 3^0C \qquad \text{(C)}$$

Solución: 102

- La energía suministrada por la lámpara es igual, al calor (en J) ganado por el petróleo, esto es:

$$P.t = 4{,}186\, m.c_e.\Delta T$$

$$P = \frac{(4{,}186)(400)(0{,}5)(6)}{100}$$

$$P = 50{,}232\ \text{W} = 0{,}05\ \text{kW}$$

Luego, el costo de funcionamiento de la lámpara durante 5 h es:

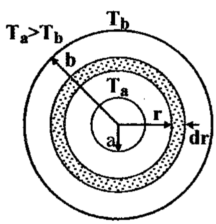
$$C = P.t.T$$

$$C = (0{,}05)(5)(20)$$

$$\clubsuit\ C = \$\ 5 \qquad \text{(B)}$$

Solución: 103

- Dividimos el cascarón esférico en muchas capas, representemos una de ellas de radio "r" y espesor "dr".



En la Fig., el calor se propaga radialmente hacia fuera, así, el flujo de calor a través de la capa esférica sombreada es:

$$H = k\,(4\pi\, r^2)(-\frac{dT}{dr})$$

$$\int_{T_a}^{T_b} dT = -\frac{H}{4\pi\, k}\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$(T)\Big|_{T_a}^{T_b} = \frac{H}{4\pi\, k}(\frac{1}{r})\Big|_a^b$$

$$T_b - T_a = \frac{H}{4\pi\, k}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$$

$$H = \frac{4\pi k\, a\, b\,(T_a - T_b)}{b - a}$$

$$H = \frac{(4\pi)(210)(0{,}1)(0{,}2)(200 - 100)}{0{,}2 - 0{,}1}$$

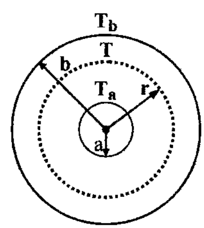
$$\clubsuit\ H \approx 52{,}8\ \text{kW} \qquad \text{(B)}$$

☞ **Nota**

El gradiente de temperatura es (-), porque, la temperatura disminuye, cuando el radio aumenta.

Solución: 104

- Representemos el cascarón esférico de radios (a) y (b), un capa esférica de radio (r).



Según el problema anterior, el flujo de calor a través del cascarón esférico de radios interno (a) y externo (b) es:

$$H = \frac{4\pi\, k a\, b\,(T_a - T_b)}{b - a} \qquad (1)$$

También, el flujo de calor a través del cascarón esférico de radios interno (a) y externo (r) es:

$$H_2 = \frac{4\pi\, k\, a\, r\,(T_a - T)}{r - a} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), y despejando (r):

$$\frac{4\pi k a b(T_a - T_b)}{b-a} = \frac{4\pi k a r(T_a - T)}{r-a}$$

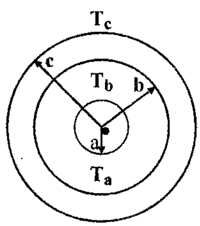
$$r = \frac{ab(T_a - T_b)}{aT_a - bT_b + (b-a)T_c}$$

$$r = \frac{(10)(20)(200-100)}{(10)(200)-(20)(100)+(20-10)(150)}$$

$$\clubsuit\ r = \frac{40}{3} = 13{,}3 \text{ cm} \qquad \text{C}$$

Solución: 105

- Representemos el cascarón esférico compuesto de dos capas esféricas.



Según el problema (103), el flujo de calor a través de la capa esférica de radios interno (a) y externo (b) es:

$$H_1 = \frac{4\pi k_1 ab(T_a - T_b)}{b-a} \qquad (1)$$

También, el flujo de calor de calor a través de la capa esférica de radios interno (b) y externo (c) es:

$$H_2 = \frac{4\pi k_2 bc(T_b - T_c)}{c-b} \qquad (2)$$

Como el flujo de calor a través de las capas de aluminio y cobre es la misma, igualamos (1) con (2):

$$\frac{k_1 ab(T_a - T_b)}{b-a} = \frac{k_2 bc(T_b - T_c)}{c-b}$$

Haciendo las siguientes denominaciones, y evaluaciones, tenemos:

$$\alpha = \frac{k_1 ab}{b-a} = \frac{(390)(0{,}1)(0{,}2)}{0{,}2-0{,}1} = 78\ \frac{W}{^\circ C}$$

$$\beta = \frac{k_2 bc}{c-b} = \frac{(210)(0{,}2)(0{,}3)}{0{,}3-0{,}2} = 126\ \frac{W}{^\circ C}$$

$$T_b = \frac{\alpha T_a + \beta T_C}{\alpha + \beta}$$

$$T_b = \frac{(78)(200)+(126)(100)}{78+126}$$

$$\clubsuit\ T_b = 138{,}2^\circ C \qquad \text{E}$$

Solución: 106

- Según teoría, la cantidad de calor que se debe suministrar a una masa (m) de sustancia para elevar su temperatura de T_1 a T_2 es:

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} m\, c(T)\, dT$$

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} m\,(a + bT)\, dT$$

$$\Delta Q = m\,(a\,T + \frac{1}{2} b\,T^2)\Big|_{T_1}^{T_2}$$

$$\Delta Q = m\,[a\,(T_2 - T_1) + \frac{1}{2} b\,(T_2^2 - T_1^2)]$$

$$\frac{\Delta Q}{m} = (T_2 - T_1)[a + \frac{b}{2}(T_2 + T_1)]$$

$$\frac{\Delta Q}{m} = (40-20)[a + \frac{a}{30}(\frac{40+20}{2})]$$

$$\clubsuit\ \frac{\Delta Q}{m} = 40\,a \qquad \text{D}$$

Solución: 107

• La energía cinética del esquiador se transforma en calor, debido a la fricción de los esquíes con el hielo, aumentando su temperatura el hielo hasta 0^0 C, y luego derrritiéndose una parte de el, así:

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = m_H c_H \Delta T_H + m_H L_F$$

Dividiendo ambas lados de esta ecuación por el tiempo, se tiene:

$$\frac{(1/2)\, mv^2}{t} = (\frac{m_H}{t})\, c_H \Delta T_H + (\frac{m_H}{t})\, L_F$$

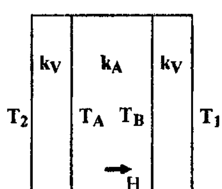
$$\frac{m_H}{t} = \frac{m\, v^2}{2\,(c_H \Delta T_H + L_F)\, t}$$

$$\frac{m_H}{t} = \frac{(90)(16)^2}{(2)[(2\ 093)(0-(-32)) + 335.10^3]}$$

$$\clubsuit\ \frac{m_H}{t} = 28{,}66.10^{-3}\text{kg} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 108

• Sean T_A, T_B las temperaturas en las caras derecha e izquierda de las capas de vidrio, como se muestra.



Por conservación de la energía, el flujo de calor que pasa a través de una sección de área A, de cada una de las placas es la misma, así, asumiendo que $T_2 > T_1$, se tiene:

Para la placa de vidrio izquierda.

$$T_2 - T_A = H \frac{\ell_1}{k_V A}$$

Para la placa de aire.

$$T_A - T_B = H \frac{\ell_2}{k_A A}$$

Para la placa de vidrio derecha.

$$T_B - T_1 = H \frac{\ell_1}{k_V A}$$

Sumando miembro a miembro cada una de estas ecuaciones:

$$T_2 - T_1 = \frac{H}{A}(\frac{2\ell_1}{k_V} + \frac{\ell_2}{k_A})$$

$$H = \frac{(2\ell_1 + \ell_2)}{(2\ell_1/k_V + \ell_2/k_A)} \frac{(T_2 - T_1)}{(2\ell_1 + \ell_2)} A$$

$$H = k_e \frac{(T_2 - T_1)}{(2\ell_1 + \ell_2)} A$$

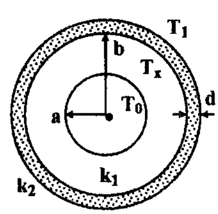
Luego, la conductividad térmica equivalente del sistema de placas es:

$$k_e = \frac{2\ell_1 + \ell_2}{\frac{2\ell_1}{k_V} + \frac{\ell_2}{k_A}} = \frac{4\ell_1}{2\ell_1(\frac{1}{k_V} + \frac{1}{k_A})}$$

$$\clubsuit\ k_e = \frac{2 k_A k_V}{k_A + k_V} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 109

• Representemos al tubo de radios interno a=2 cm y externo b=2,2 cm.



Como la temperatura de la superficie exterior de la capa aislante es constante, el flujo de calor radial hacia afuera, también, es una constante, así, según el prob.(82), este flujo de calor, viene dado por:

$$H = \frac{2\pi k\ell(T_a - T_b)}{\ell n(b/a)}$$

Para el tubo de radios a, b, la diferencia de temperaturas entre la superficie interna y externa es:

$$T_0 - T_x = \frac{H}{2\pi k_1 \ell}\ell n(\frac{b}{a}) \qquad (1)$$

Para el aislante de radios b, c= b+d, la diferencia de temperaturas entre la superficie interna y externa es:

$$T_x - T_1 = \frac{H}{2\pi k_2 \ell}\ell n(\frac{c}{b}) \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2), y despejando T_x, tenemos:

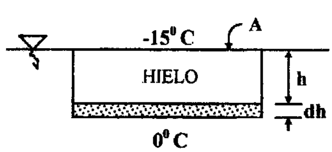
$$\frac{T_0 - T_x}{T_x - T_1} = \frac{(H/2\pi k_1\ell)\ell n(b/a)}{(H/2\pi k_2\ell)\ell n(c/b)}$$

$$T_x = \frac{k_2 \ell n(b/a)\, T_1 + k_1 \ell n(c/b)\, T_0}{k_2 \ell n(b/a) + k_1 \ell n(c/b)}$$

♣ $T_x \approx 143\ ^oC$ E

Solución: 110

• Consideremos una capa de hielo de espesor (h) y área (A), cuyas caras inferior y exterior están a las temperaturas de 0^0 C y -15^0 C.



En la Fig., la cantidad de calor necesaria para que se forme una capa de hielo de masa (dm) contenida en el volumen sombreado de espesor (dh) y área (A) es:

$$dQ = dm\, L_F = \rho\, A\, dh\, L_F \qquad (1)$$

De otro lado, la cantidad de calor transferido al medio ambiente, a través del área A de la capa de hielo de espesor (h), durante el tiempo (dt) es:

$$dQ = H\, dt = k\, A(\frac{T_2 - T_1}{z})\, dt \qquad (2)$$

Igualando las ecs.(1) y (2), y despejando obtenemos la rapidez con que aumenta el espesor de la capa de hielo:

$$\rho A L_F dh = k\, A\, (\frac{T_2 - T_1}{h})\, dt$$

$$u = \frac{dh}{dt} = \frac{k\,(T_2 - T_1)}{\rho\, L_F h}$$

$$u = \frac{(0{,}92)(0-(-15))}{(920)(308{,}5.10^3)(0{,}1)}$$

♣ $u \approx 0{,}49.10^{-6}\ m/s$ E

Solución: 111

• El 22 % de la energía de combustión se utiliza en trabajo para trasladar al auto, esto es:

$$0{,}22Cm = Fd = (P/v)\, d$$

$$m = \frac{P.d}{0{,}2C.v} = \frac{(15)(736)(10^5)}{(0{,}22)(4{,}6.10^7)(30/3{,}6)}$$

♣ $m = 13$ kg B

Nota

"C" es el poder calorífico de la gasolina.

Solución: 112

• Una fracción de la energía de la combustión se transforma en trabajo útil, para desplazar el auto, esto es:

$$R.C.m = F.d$$

$$R.C.\rho.V = \frac{P.d}{v}$$

Así, el rendimiento R en porcentaje es:

$$R = (\frac{P.d}{C.\rho.V.v})(100)$$

$$R = \frac{(16{,}3)(736)(10^5)(100)}{(4{,}6.10^7)(0{,}8.10^{-3})(13{,}5.10^3)(40/3{,}6)}$$

$$\clubsuit\ R = 21{,}7\ \%$$ (D)

Solución: 113

• Del principio de conservación de la cantidad de movimiento, hallemos la rapidez del conjunto después del choque, así:

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues}$$

$$m.v = (m+m)\,u$$

$$u = (\frac{3}{3+3})(4) = 2\ \frac{m}{s}$$

Luego, el calor desprendido durante el choque, será la diferencia de las energías cinéticas antes y después del choque, esto es:

$$Q = \Delta E_C = E_{C,I} - E_{C,F}$$

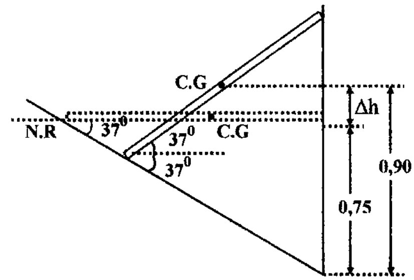
$$Q = \frac{1}{2}m.v^2 - \frac{1}{2}(m+m)\,u^2$$

$$Q = \frac{1}{2}(3)(4)^2 - \frac{1}{2}(6)(2)^2$$

$$\clubsuit\ Q = 12\ J$$ (B)

Solución: 114

• Representemos el C.G.de la barra en sus posiciones inicial y final.



En la Fig., la variación de altura del centro de gravedad de la barra es:

$$\Delta h = 0{,}90 - 0{,}75 = 0{,}15\ m$$

Ahora, según el teorema del trabajo y la energía mecánica, el trabajo externo, es igual a la variación de la energía potencial gravitatoria del centro de gravedad, más el calor disipado por la fricción de la barra con las superficies, así:

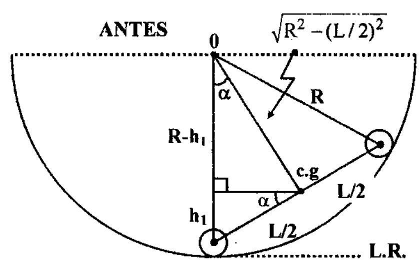
$$W = \Delta E_P + Q = -w\,\Delta h + Q$$

$$Q = W + w\,\Delta h = 26 + (60)(0{,}15)$$

$$\clubsuit\ Q = 35\ J$$ (B)

Solución: 115

• Sean h_1, h_2 las alturas inicial y final del centro de gravedad (c.g) del halterio, entonces, el calor desprendido, es igual, a la variación de la energía potencial gravitatoria, esto es:



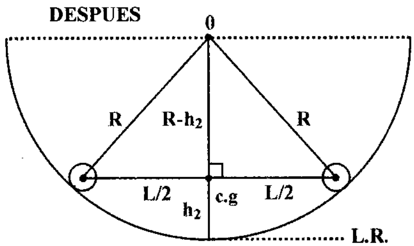
$$Q = \Delta E_P$$

$$Q = 2mg\,(h_1 - h_2) \qquad (1)$$

De la posición inicial del halterio, hallemos la altura "h_1"

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h_1}{L/2} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{L/2}{R}$$

$$\frac{h_1}{L/2} = \frac{L/2}{R} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{L^2}{4R}$$



De la posición final del halterio, hallemos la altura "h_2".

$$R - h_2 = [R^2 - (L/2)^2]^{1/2}$$

$$h_2 = R - R\,[1 - (L/2R)^2]^{1/2}$$

$$h_2 = R\left\{1 - [1 - (L/2R)^2]^{1/2}\right\}$$

Sustituyendo (1) "h_1" y "h_2", tenemos:

$$1 - [1 - (L/2R)^2]^{1/2}$$

$$Q = 2mgR\left\{[1 - (\frac{L}{2R})^2]^{1/2} - [1 - (\frac{L}{2R})^2]\right\}$$

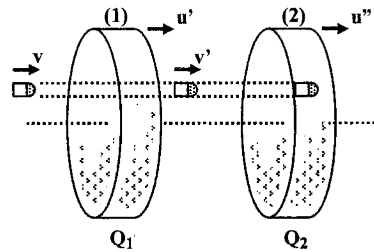
$$Q = 2mgR\{1 - [1 - (\frac{L}{2R})^2]^{1/2}\}[1 - (\frac{L}{2R})^2]^{1/2}$$

$$Q = (2)(8)(10)(1)(1 - \frac{1}{2})(\frac{1}{2})$$

$$\clubsuit \quad Q = 40\ \text{J} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 116

- Representemos el sistema de dos discos fijos situados verticalmente y la bala.



<u>Primer choque bala-disco</u>

Del principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$m\,v = m\,v' + m\,u'$$

$$v = v' + u' \qquad (1)$$

De otro lado, del principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,v'^2 + \frac{1}{2}u'^2 + Q_1 \qquad (2)$$

<u>Segundo choque bala-disco</u>

Del principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$m\,v' = (m + m)\,u''$$

$$u'' = \frac{1}{2}v' \qquad (3)$$

De otro lado, del principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m\,v'^2 = \frac{1}{2}(m + m)\,u''^2 + Q_2 \qquad (4)$$

De (1) en (2), obtenemos la expresión:

$$m\,v\,v' = m\,v'^2 + Q_1 \qquad (5)$$

De (3) en (4), obtenemos la expresión:

$$\frac{1}{2}m\,v'^2 = \frac{1}{4}m\,v'^2 + Q_2$$

$$v' = 2\sqrt{Q_2/m} \qquad (6)$$

Finalmente, reemplazando (6) en (5):

$$m\,v\,2\sqrt{Q_2/m} = 4\,Q_2 + Q_1$$

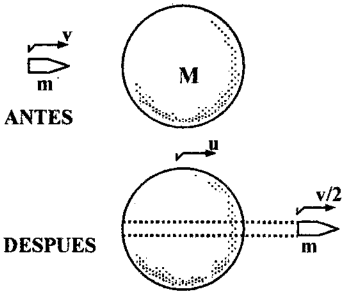
$$Q_1 = 2\sqrt{m\,Q_2}\,(v - 2\sqrt{Q_2/m})$$

$$Q_1 = 2\sqrt{(50.10^{-3})(10^3)}\,(400 - 2\sqrt{10^3/50.10^{-3}})$$

$$\clubsuit\ Q_1 \approx 1657\ \text{J} \qquad \text{E}$$

Solución: 117

• Representemos la esfera de plomo inicialmente fija, y la bala de acero.



La cantidad de movimiento antes y después de la colisión, se conserva, así:

$$m\,v = M\,u + m\frac{v}{2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{2M}v$$

La diferencia de energías cinéticas del sistema antes y después de la colisión, es igual, al calor desprendido (Q), esto es:

$$Q = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\frac{v^2}{4} - \frac{1}{2}M\,u^2$$

Sustituyendo la velocidad u, obtenemos

$$Q = \frac{3}{8}m\,v^2 - \frac{1}{8}\frac{m^2}{M}v^2$$

$$Q = \frac{1}{4}(3 - \frac{m}{M})(\frac{1}{2}m\,v^2)$$

Luego, como la parte de la energía cinética inicial que se transforma en calor, es $\eta = Q/((1/2)m\,v^2)$, entonces:

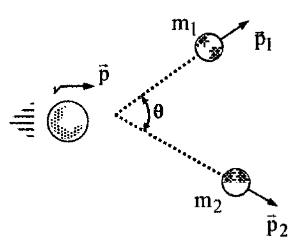
$$\eta = \frac{1}{4}(3 - \frac{m}{M})$$

$$\eta = \frac{1}{4}(3 - \frac{m}{51m}) = \frac{1}{4}(\frac{152}{51})$$

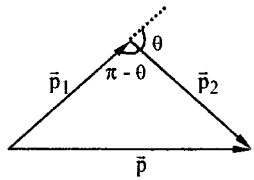
$$\clubsuit\ \eta = \frac{38}{51} \qquad \text{E}$$

Solución: 118

• Representemos al núcleo antes y después de la desintegración en dos fragmentos de masa m_1 y m_2.



Con los vectores cantidad de movimiento, antes y después de la desintegración del núcleo, formemos un triángulo, así:



En la Fig., aplicando la ley de coseno, tenemos:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(\pi - \theta) \quad (1)$$

De otro lado, del principio de conservación de la energía, tenemos:

$$\frac{p^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{p_1^2}{2\,m_1} + \frac{p_2^2}{2\,m_2} + Q \quad (2)$$

Luego, de (1) en (2), obtenemos:

$$\frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}{2(m_1+m_2)} = \frac{p_1^2}{2\,m_1} + \frac{p_2^2}{2\,m_2} + Q$$

$$Q = -\frac{m_2^2p_1^2 + m_1^2p_2^2 - 2m_1m_2p_1p_2\cos\theta}{2m_1m_2(m_1+m_2)}$$

$$Q = -\frac{4p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2}{12m_1}$$

$$Q = -\frac{4p_1^2 + 4p_1^2 - 4p_1^2}{12\,m_1}$$

$$Q = -\frac{p_1^2}{3m_1} = -\frac{2}{3}\left(\frac{p_1^2}{2m_1}\right)$$

$$\clubsuit\ Q = \frac{2}{3}E_{C,1} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 119

- En el sistema Laboratorio, la variación de la energía cinética del sistema, es igual, al calor desprendido en la explosión, es decir:

$$Q = E_{C,despues} - E_{C,antes}$$

$$Q = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - (0)$$

Como, $p = m.v$, entonces la ecuación anterior se puede escribir, así:

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2}\right) \quad (1)$$

De otro lado, la cantidad de movimiento seconserva, de modo que:

$$\vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \implies p_1 = p_2 \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$p_1 = p_2 = \left(\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}Q\right)^{1/2}$$

Luego, las energías cinéticas de cada uno de los fragmentos son:

$$E_{C,1} = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}Q$$

$$E_{C,1} = \frac{1}{((m_1/m_2)+1)}Q = \frac{4}{5}Q$$

Procediendo del mismo modo, la energía cinética para el fragmento "2", así:

$$E_{C,2} = \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}Q$$

$$E_{C,2} = \frac{1}{(1+(m_2/m_1))}Q = \frac{1}{5}Q$$

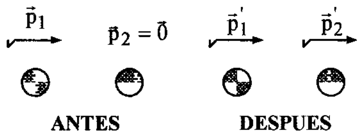
$$E_{C,1} = \frac{4}{5}Q \ \text{ y } \ E_{C,2} = \frac{1}{5}Q$$

(A)

$$\clubsuit\ E_{C,1} = 8 \text{ kJ} \ \text{ y } \ E_{C,2} = 2 \text{ kJ}$$

Solución: 120

- Representemos a las bolillas antes y después de la colisión frontal.



Aplicando, el principio de conservación de la cantidad de movimiento, antes y después de la colisión, se tiene:

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues}$$

$$p_1 = p_1' + p_2' \qquad (1)$$

Aplicando, el principio de conservación de la energía, antes y después de la colisión, tenemos:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (2)$$

De otro lado, el coeficiente de restitución, viene dado por:

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

$$e = \frac{(p_2'/m_2) - (p_1'/m_1)}{p_1/m_1}$$

$$\frac{p_2'}{m_2} = \frac{e\,p_1 + p_1'}{m_1} \qquad (3)$$

Resolviendo (1) y (3) para p_1' y p_2':

$$p_1' = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} p_1 \qquad (4)$$

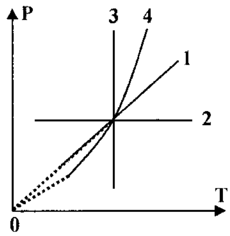
$$p_2' = \frac{m_2(1+e)}{m_1 + m_2} p_1 \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (2), y despejando "Q", tenemos:

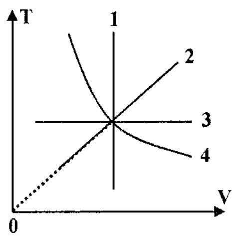
$$Q = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + e^2)\, v_1^2$$

$$Q = (\frac{1}{2})\frac{(0,4)(0,8)(1 + (1/2)^2)(6)^2}{0,4 + 0,8}$$

$$\clubsuit\ Q = 6J$$ D



3) Temperatura (T)–Volumen (V)



En todos los diagramas de proceso: (1) isócora, (2) isobara, (3) isoterma y (4) adiabata.

2. ENERGIA INTERNA DE UN SISTEMA Y ENTALPIA

a) Equilibrio termodinámico

1) Concepto

Se dice que un sistema (gas ideal) se encuentra en equilibrio termodinámico cuando sus variables macroscópicas presión (P), volumen (V) y temperatura (T) permanecen constantes.

2) Condiciones

Para que un sistema, este, en equilibrio termodinámico, deberá existir equilibrio:

- Mecánico: La fuerza resultante externa sobre el sistema, debe ser nula.
- Térmico: Todos los puntos del sistema internos y externos, deben estar a la misma temperatura, esto es, no debe haber flujo de calor (Q = 0).
- Químico: El sistema no debe experimentar reacciones químicas.

b) Energía interna de un sistema (U)

La energía interna de un sistema es la suma de las energías de los movimientos que existen en el sistema más la energía de interacción entre las partículas que conforman el sistema.

Así, la energía de un gas de moléculas monoatómicas, está formada por:

1) La energía cinética de los movimientos térmicos de traslación y rotación de las moléculas.
2) Las energías cinética y potencial de las oscilaciones de los átomos en las moléculas.
3) La energía potencial debida a las interacciones intermoleculares.
4) La energía de las capas electrónicas de los átomos e iones.
5) La energía cinética y potencial entre los nucleones de los átomos.

El valor de la energía interna (U) de un gas, debido a su movimiento térmico, viene dado por:

$$U = \frac{\gamma}{2}\frac{m}{M}R.T$$

siendo, (m) la masa del gas, (M) su masa molecular, (T) la temperatura absoluta (^{0}K), (R) la constante universal de los gases y (γ) los grados de libertad que posee el movimiento de las moléculas del gas, cuyo valores dependen de la naturaleza del gas, así:

Tipo de Gas	γ
monoatómico	3
diatómico	5
triatómico	6
poliatómico	7

- La energía interna de un gas depende sólo del estado termodinámico en el que se encuentre.
- Si el sistema termodinámico realiza una transformación cerrada o ciclo la variación total de su energía interna es nula, esto es:

$$\oint dU = 0$$

- En un sistema que no esté sometido a la acción de fuerzas externas y que se encuentre en estado de equilibrio macroscópico la energía interna es la energía total del sistema.
- La energía interna de un sistema homogéneo es una magnitud aditiva, esto es, es igual a la suma de las energías internas de todas sus partes macroscópicas, es decir, es proporcional a la masa del sistema.

c) Variación de la energía interna (ΔU)

En todo proceso termodinámico, la variación de la energía interna, es independiente de los estados intermedios, está variación sólo depende de los estados inicial y final, esto es:

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

siendo, U_1, U_2 las energías internas inicial y final, respectivamente.

Ejemplo: 05

Hallar la energía del movimiento térmico de las moléculas de un gas diatómico contenido en un recipiente de volumen 2 litros la presión de $1{,}5.10^5$ N/m^2

Solución:

- Para un gas diatómico, γ=5, y la energía interna es:

$$U = \frac{\gamma}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{\gamma}{2}PV$$

$$U = \frac{5}{2}(1{,}5.10^5)(2.10^{-3})$$

$$U = 750 \text{ J}$$

Ejemplo: 06

En un recipiente cerrado hay 20g de nitrógeno y 32 g de oxígeno. Hallar la variación que experimentará la energía interna de esta mezcla de gases al enfriarla 28^0 C.

Solución:

- La mezcla es un gas diatómico, γ=5, luego, la variación de su energía interna es:

$$\Delta U = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) R.\Delta T$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\left(\frac{20.10^{-3}}{28} + \frac{32.10^{-3}}{32}\right)(8{,}31.10^3)(28)$$

$$\Delta U = 997{,}2 \text{ J}$$

d) Entalpía (H)

Se llama entalpía (H) a la función de estado de un sistema termodinámico igual a su energía interna (U) más el producto de la presión (P) por el volumen (V) del sistema expresado en las mismas unidades, esto es:

$$H = U + PV$$

- A la entalpía también se le denomina contenido calorífico o calor total de un sistema.
- La entalpía de un gas perfecto depende únicamente de su temperatura absoluta y es proporcional a la masa (m) del gas, así:

$$H = \int_0^T C_P \, dT + H_o$$

siendo, (C_P) la capacidad calorífica a presión constante y $H_0=U_0$ la entalpía del gas a la temperatura de $T=0^0$ K.

- La entalpía de los gases monoatómicos viene dado por:

$$H = C_P T + H_0$$

- La entalpía de una mezcla de (N) gases perfectos, es igual, a la suma de las entalpías de cada uno de los gases que forman la mezcla, esto es:

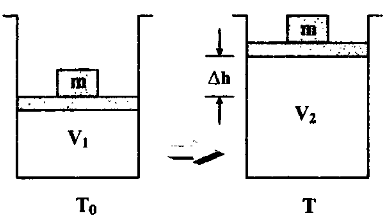
$$H = \sum_{k=1}^{N} H_k = \sum_{k=1}^{N} [\int_0^T C_{P,k}\, dT + H_{0,k}]$$

siendo, $C_{P,k}$ la capacidad calorífica a presión constante de la k-ésima componente de la mezcla.

e) Isoentálpica

Se llama así a la transformación termodinámica en la que la entalpía del sistema no varía.

3. TRABAJO REALIZADO POR UN GAS

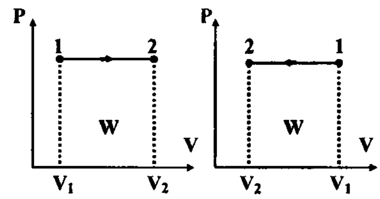


En la Fig., al calentarse el gas perfecto que ocupa inicialmente un volumen (V_1) se expande a presión constante hasta ocupar un volumen V_2, elevando al émbolo de área (A) y al bloque de masa (m) una altura (Δh), por lo que, realiza un trabajo igual a:

$$W = F\Delta h = (P A)(\Delta h)$$

$$W = P\Delta V = P(V_2 - V_1)$$

- Este trabajo dependerá de la presión y temperatura a la que se encuentre el gas es decir, dependerá de la forma como el gas llega del estado inicial al final.



EXPANSION COMPRESION

- En un diagrama P-V, el trabajo (W) es unuméricamente, igual, al área bajo la curva.

$$W_{1\to 2} = \text{área sombreada}$$

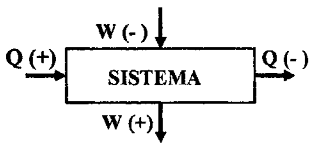
- Cuando, $W_{1\to 2} > 0$, el trabajo lo realiza el gas, su volumen aumenta.
- Cuando, $W_{1\to 2} < 0$, el trabajo se realiza sobre el gas, su volumen disminuye.

4. PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA

Se basa en el principio de conservación de la energía total mecánica+calorífica y establece que:

> «En todo proceso termodinámico la cantidad de calor entregado (o sustraido) al sistema es igual al trabajo realizado por (o sobre) el sistema, más la variación de su energía interna»

$$Q = W + \Delta U$$



En el diagrama la convención de signos es:

Q (+) el sistema recibe calor.
Q (-) el sistema pierde calor.
W (+) trabajo realizado por el sistema.
W (-) trabajo realizado sobre sistema.
$\Delta U(+)$ el sistema se calienta.
$\Delta U(-)$ el sistema se enfría.

- En la ecuación anterior, todas las magnitudes físicas (Q, W, ΔU) deben ser expresadas en las mismas unidades (en joules o en calorías).

a) Móvil perpetuo de primera especie

Si llama móvil perpetuo de primera especie a una máquina de acción periódica en la cual un gas, un vapor o cualquier otro agente de transformación después de cumplir un ciclo vuelve a su estado inicial, $\Delta U = 0$ y A=Q. Por lo tanto, es imposible construir un motor de acción periódica capaz de realizar un trabajo mayor que la energía que reciba del exterior.

b) Ley de Hess

El efecto calorífico de una reacción que transcurre en un sistema a volumen constante o a presión constante no depende de los estados intermedios, sólo depende de los estados inicial y final del sistema.

- La ley de Hess expresa el primer principio de la termodinámica referido a las transformaciones químicas y es la ley fundamental de la termodinámica.

c) Ecuación de Mayer

Es una ecuación matemática, que relaciona las capacidades caloríficas molares a presión constante (C_P) y volumen constante (C_V), viene dado por:

$$C_P - C_V = \frac{m}{M}R$$

siendo, (m) la masa del gas, (M) su masa molecular, y (R) la constante de los gases.

- También, está ecuación para los calores específicos molares, se escribe así:

$$c_P - c_V = \frac{R}{M}$$

siendo, c_P, c_V los calores específicos a presión y volumen constantes, respectivamente.

d) Exponente adiabático (χ)

Se define como la razón de la capacidad calorífica a presión constante (C_P) a la capacidad calorífica a volumen constante (C_V), esto es:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_P}{c_V}$$

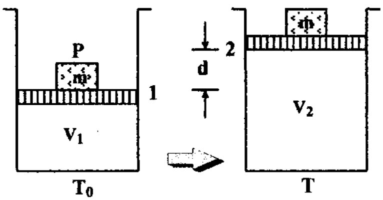
e) Efecto térmico E

Se llama efecto térmico E de una transformación la suma de las cantidades de calor Q', que cede el sistema en esta transformación y del equivalente térmico A* de un trabajo igual a la diferencia entre el trabajo total del sistema en dicha transformación y su trabajo de expansión, esto es:

$$E = Q' + A^*$$

5. PROCESOS TERMODINAMICOS

a) Proceso isobárico (P=cte)



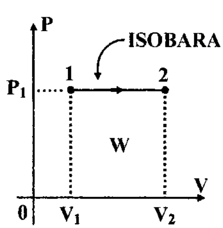
En este tipo de proceso la presión se mantiene constante y el trabajo realizado por (o sobre) el sistema (gas) cuando este pasa del estado 1 hacia el 2, es:

$$W_{1\to 2} = P\,(V_2 - V_1)$$

Si, $V_2 > V_1$, el sistema realiza trabajo, el gas se expande.
Si, $V_2 < V_1$, el trabajo se realiza sobre el sistema, el gas se comprime.

- El trabajo neto realizado por (o sobre) el gas en un ciclo, es igual al área encerrada por la curva "P -V".
- Si, el ciclo se realiza en el sentido horario, el trabajo neto será positivo, caso contrario negativo.

Diagrama P-V



- La cantidad de calor suministrada (ó sustraída) durante el proceso es:

$$Q = C_P(T_2 - T_1)$$

- La variación de la energía interna, durante el proceso es:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1)$$

- La capacidad calorífica, a presión constante, viene dado por:

$$C_P = \frac{m}{M}\frac{\chi R}{(\chi - 1)}$$

siendo (χ) el exponente adiabático.

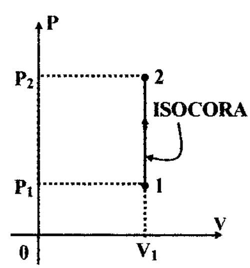
➢ **Ley de Charles (P=cte)**

Esta ley establece, que en un gas ideal a presión constante, la razón de su volumen a su temperatura es una constante, así para dos estados diferentes 1 y 2, se tiene:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

b) Proceso isocórico (V=cte)

Diagrama P-V



En este tipo de proceso, el sistema pasa del estado "1" hacia el estado "2", sin variar su volumen y por tanto no realiza trabajo, el calor que recibe (o entrega) se invierte en elevar (o disminuir) su energía interna.

$$W = 0$$

- La cantidad de calor suministrada (ó sustraída) durante el proceso es:

$$Q = C_V(T_2 - T_1)$$

- La variación de la energía interna, durante el proceso, es igual, a la variación de la cantidad de calor:

$$\Delta U = Q$$

- La capacidad calorífica, a volumen constante, viene dado por:

$$C_V = \frac{m}{M}\frac{R}{(\chi - 1)}$$

siendo (χ) el exponente adiabático.

➢ **Ley de Gay-Lusacc (V=cte)**

Esta ley establece que en un gas ideal a volumen constante, la razón de su presión a su temperatura es una constante, así para dos estados diferentes 1 y 2, se tiene:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

c) Proceso isotérmico (T=cte)

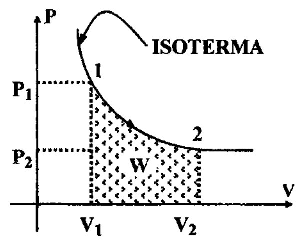
En este tipo de proceso el sistema pasa del estado "1" hacia el estado "2", a temperatura constante y por tanto la variación de su energía interna es nula, el calor que recibe (o entrega) se transforma en trabajo realizado por (o sobre) el sistema.

$$\Delta U = 0$$

- El trabajo (W) realizado por (o sobre) el gas, es igual, al área bajo la curva (área sombreada).
- El valor numérico del trabajo realizado en el proceso, viene dado por:

$$W = \frac{m}{M}R.T\,\ell n(\frac{V_2}{V_1})$$

Diagrama P-V



Demostración:

- De la ecuación de los gases ideales despejando la presión (P), y sustituyendo en la expresión del trabajo elemental, e integrando, obtenemos:

$$dW = P\,dV$$

$$dW = \frac{m}{M}R\,T\frac{dV}{V}$$

$$\int_0^W dW = \frac{m}{M}R\,T\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$$

$$W = \frac{m}{M}R.T\,\ell n(\frac{V_2}{V_1})$$

- La variación de la cantidad de calor, es igual, al trabajo realizado en el proceso, es decir:

$$Q = W$$

- La capacidad calorífica del gas, a temperatura constante es:

$$C_T = \infty$$

➢ **Ley de Boyle–Mariotte (T=cte)**

Esta ley establece que en un gas ideal a temperatura constante, el producto de su presión por su volumen es una constante, así, para dos estados diferentes 1 y 2, se tiene:

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

Ejemplo: 07
1 litro de helio que está en C.N. se dilata isotérmicamente, al recibir calor hasta ocupar un volumen de 2 litros. Hallar
a) El trabajo hecho por el gas.
b) El calor que recibió.
Solución:
a) El trabajo realizado por el gas:

$$W = \frac{m}{M}R.T\,\ell n(\frac{V_2}{V_1})$$

$$W = P.V\,\ell n(\frac{V_2}{V_1})$$

$$W = (1{,}01.10^5)(10^{-3})\,\ell n(2/1)$$

$$W = 70\ J$$

b) La cantidad de calor que recibió es:

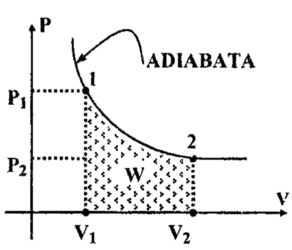
$$Q = W = 70\ J$$

d) Proceso adiabático (Q=0)

En este tipo de proceso el sistema pasa del estado "1" hacia el estado "2", sin recibir ni entregar calor, la variación de su energía interna se utiliza para hacer trabajo.

$$W = -\Delta U$$

Diagrama P-V



- El trabajo realizado por el gas en el proceso $1\to2$, es igual, al área sombreada bajo la curva, su valor numérico, se puede hallar de cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$W = \frac{m}{M}\frac{R}{\chi-1}(T_1 - T_2)$$

$$W = \frac{P_1.V_1}{\chi-1}(1-\frac{T_2}{T_1})$$

$$W = \frac{P_1.V_1}{\chi-1}[1-(\frac{V_1}{V_2})^{(\chi-1)}]$$

siendo, "m" la masa del gas, "M" su masa molecular y "χ" el exponente adiabático.

Demostración:
- Para un proceso adiabático, la relación entre las presiones y volúmenes correspondientes al estado inicial y final del gas ideal, vienen dados por:

$$\frac{P}{P_1} = (\frac{V_1}{V})^{\chi} \Rightarrow P = \frac{P_1V_1^{\chi}}{V^{\chi}}$$

Luego, el trabajo realizado sobre el gas en el proceso de compresión adiabática es:

$$\int_0^W dW = \int_{V_0}^{V} P\,dV$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2}\frac{P_1V_1^{\chi}}{V^{\chi}}dV$$

$$W = \frac{P_1V_1^{\chi}}{1-\chi}(V^{1-\chi})\Big]_{V_1}^{V_2}$$

$$W = \frac{P_1V_1^{\chi}}{1-\chi}(V_2^{1-\chi} - V_1^{1-\chi})$$

$$W = \frac{P_1V_1^{\chi}}{\chi-1}[V_1^{1-\chi} - V_2^{1-\chi}]$$

$$W = \frac{P_1 V_1^{\chi}}{(\chi - 1) V_1^{\chi-1}}[1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\chi-1}]$$

$$♣\ W = \frac{P_1.V_1}{\chi - 1}[1 - (\frac{V_1}{V_2})^{(\chi-1)}]$$

- La capacidad calorífica del gas, en un proceso adiabático, es nulo, es decir:

$$C_{ad} = 0$$

- La relación entre las variables termodinámicas P, V y T, para los estados 1, 2, vienen dados por:

$$\frac{P_1}{P_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi} \quad ó \quad \frac{T_1}{T_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi-1}$$

Demostración:

- Como el proceso es adiabático, no hay transferencia de calor (dQ = 0), entonces de la primera ley de la termodinámica, se tiene:

$$dQ = dW + dU$$

$$dW = -dU = -\frac{\gamma}{2} n\,R\,dT \qquad (1)$$

También de la ecuación de los gases ideales, el volumen es:

$$V = \frac{nRT}{P} \qquad (2)$$

De otro lado, diferenciando la ecuación de los gases ideales, y teniendo en cuenta que el trabajo elemental es dW=PdV, tenemos:

$$P\,V = n\,RT$$

$$P\,dV + V\,dP = n\,R\,dT$$

$$dW + VdP = n\,R\,dT$$

De (1) y (2), obtenemos la expresión:

$$-\frac{\gamma}{2} n\,R\,dT + \frac{n\,RT}{P} dP = n\,R\,dT$$

$$\frac{T}{P} dP = (\frac{\gamma}{2} + 1)\,dT$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = (\frac{\gamma}{2} + 1) \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$\ell n(\frac{P_2}{P_1}) = (\frac{\gamma}{2} + 1)\,\ell n(\frac{T_2}{T_1})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{\gamma+2}{2}}$$

Ahora, encontremos una relación entre el exponente adiabático (χ) y los grados de libertad (γ), así:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\frac{\gamma}{2} + 1) R}{\frac{\gamma}{2} R}$$

$$\chi = \frac{\gamma + 2}{\gamma} \quad => \quad \gamma = \frac{2}{\chi - 1}$$

$$\frac{\gamma + 2}{2} = \frac{\chi}{\chi - 1}$$

Con esto la expresión para las presiones y temperaturas, queda así:

$$\frac{P_2}{P_1} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{\chi}{\chi-1}}$$

$$♣\ \frac{T_2}{T_1} = (\frac{P_2}{P_1})^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

Ejemplo: 08

1 kg de aire que está a la temperatura de 30^0 C y a la presión de 1,5 atm se expande adiabáticamente disminuyendo

su presión hasta 1 atm. Hallar:

a) El grado de expansión.
b) La temperatura final.
c) El trabajo realizado.

Solución:

a) El aire es un gas diatómico, $\gamma = 5$, luego, el exponente adiabatico es:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V}$$

$$\chi = 1 + \frac{2}{\gamma} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

Y el grado de expansión es:

$$\frac{V_2}{V_1} = (\frac{P_1}{P_2})^{\frac{1}{\chi}} = (\frac{1,5}{1})^{\frac{5}{7}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 1,33 \text{ veces}$$

b) La temperatura final (T_2), hallamos de:

$$T_2 = (\frac{V_1}{V_2})^{\chi - 1}.T_1$$

$$T_2 = (\frac{1}{1,33})^{\frac{7}{5}-1}.(303^0K)$$

$$T_2 = 270,3\ ^0K$$

c) El trabajo realizado por el gas es:

$$W = \frac{m}{M}\frac{R}{\chi - 1}(T_1 - T_2)$$

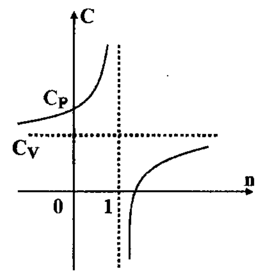
$$W = \frac{1}{29}\frac{8,31.10^3}{(7/5-1)}(303 - 270)$$

$$W = 2,36.10^4 \text{ J}$$

e) Proceso politrópico (C=cte.)

En este tipo de proceso el sistema pasa del estado "1" hacia el estado "2", manteniéndose la capacidad calorífica (C) del perfecto constante, y el calor que recibe (o entrega) el sistema se transforma en cambio en su energía interna y en trabajo.

Gráfica C-n



En la gráfica se muestra la capacidad calorífica (C) del gas perfecto en la transformación politrópica, en función del exponente politrópico (n).

- La variación de la energía térmica que experimenta el gas perfecto es:

$$\Delta U = C_V (T_2 - T_1)$$

siendo, C_V la capacidad calorífica a volumen constante, y T_1, T_2 las temperaturas inicial y final.

- La cantidad de calor cedida por el gas perfecto, viene dado por:

$$Q = C(T_2 - T_1)$$

siendo, (C) la capacidad calorífica constante en el proceso politrópico.

- La variación en la entalpía del gas perfecto, viene dado por:

$$\Delta H = C_P (T_2 - T_1)$$

siendo, C_P la capacidad calorífica a presión constante, y T_1, T_2 las temperaturas inicial y final.

- La capacidad calorífica del gas perfecto en el proceso politrópico es:

$$C = \frac{R(n-\chi)}{(\chi-1)(n-1)}$$

siendo, (χ) el exponente adiabático, y (n) el exponente politrópico, cuya expresión, viene dado por:

$$n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$$

- La relación entre las variables termodinámicas P, V y T, para los estados 1, 2, vienen dados por:

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$$

$$P_1 (T_1)^{n/(1-n)} = P_2 (T_2)^{n/(1-n)}$$

$$V_1 (T_1)^{1/(n-1)} = V_2 (T_2)^{1/(n-1)}$$

- El trabajo realizado por el gas perfecto, cuando pasa del estado (1) hacia el (2), se halla a partir de cualquiera de las siguientes expresiones:

$$W = \frac{1}{n-1}(P_1 V_1 - P_2 V_2)$$

$$W = \frac{m}{M}\frac{R T_1}{n-1}[1 - (\frac{P_2}{P_1})^{(n-1)/n}]$$

$$W = \frac{P_1 . V_1}{n-1}[1 - (\frac{V_2}{V_1})^{(1-n)}]$$

siendo, (m) las masa del gas, (M) su masa molecular, y (n) el exponente politrópico.

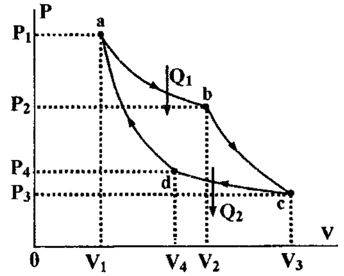
6. CICLO DE CARNOT Y MAQUINAS TERMICAS

a) Ciclo de Carnot

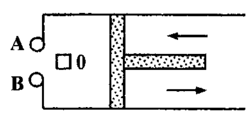
1) Definición

Se denomina así al ciclo reversible formado por dos procesos isotérmicos y otros dos adiabáticos; dando lugar, a dos procesos de compresión y dos de expansión.

- El principio de Carnot establece que toda máquina térmica, trabajando entre dos temperaturas fijas T_1(alta) y T_2 (baja), desarrolla una eficiencia menor que la del ciclo de Carnot.
- Es utilizado en máquinas que usan vapor o una mezcla de combustible (con aire o oxigeno)



PISTON



2) Descripción completa del ciclo de Carnot

Consideremos el pistón de un motor de combustión interna a gas, para el cual, describimos los cuatro procesos que forman el ciclo de Carnot.

Proceso isotérmico (a-b)

Inicialmente el gas que esta en equilibrio en el estado P_1, V_1, T_1, se expande lentamente hasta el estado P_2, V_2, T_1 absorviendo la energía calorífica Q_1. El gas hace trabajo desplazando el pistón hacia la derecha.

Proceso adiabático (b-c)

Ponemos el cilindro sobre una base no

conductora de calor y permitimos que el gas se dilate hasta P_3, V_3, T_2. La dilatación es adiabática porque no hay pérdida ni ganancia de calor. El gas efectúa trabajo elevando el émbolo y disminuye su temperatura desde T_1 hasta T_2.

Proceso isotérmico (c-d)
Ponemos el cilindro sobre un depósito de calor (más frió) T_2 y comprimimos lentamente el gas hasta P_4, V_4, T_2. Durante este proceso se transfiere cierta cantidad de energía calorífica Q_2 del gas al depósito.

Proceso adiabático (d-a)
Ponemos al cilindro en un soporte no conductor de calor y comprimimos lentamente hasta el estado inicial P_1, V_1, T_1. La compresión es adiabática, se efectúa trabajo sobre el gas elevándose su temperatura hasta T_1.

3) **Teorema de Carnot**
El rendimiento térmico del ciclo reversible de Carnot no depende de la composición del agente de transformación y viene dado por:

$$\eta_C = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

- El rendimiento térmico del ciclo irreversible de Carnot ($\eta_{C'}$) es siempre menor que el rendimiento térmico (η_C) del ciclo reversible de Carnot realizado entre las mismas temperaturas T_1, T_2, esto es:

$$\eta_{C'} < \eta_C$$

- El rendimiento térmico de un ciclo reversible cualquiera no puede ser nunca mayor que el rendimiento térmico (η_C) del ciclo reversible de Carnot, a las mismas temperaturas T_1, T_2.

b) Transformaciones reversibles e irreversibles
Una transformación se dice que es reversible si al efectuarla un sistema termodinámico primero en sentido directo y después en sentido inverso, tanto el sistema mismo como todos los cuerpos externos que interaccionan con él retornan al estado inicial.

- Esto es durante la transformación inversa el sistema termodinámico regresa a su estado inicial, de tal modo que el nuevo medio que lo rodea no experimenta ninguna variación.
- La condición necesaria y suficiente para que una transformación termodinámica sea reversible, es que todos los estados que sucesivamente recorre la transformación sean de equilibrio.
- Así, las transformaciones directa e inversa que experimenta un sistema termodinámico serán idénticos.
- La reversibilidad de los movimientos mecánicos significa que son simétricos respecto de la sustitución del futuro por el pasado.

Ejemplo: 09
El movimiento mecánico de un cuerpo en el vacío, en ausencia de fuerzas de fricción, es un proceso reversible

c) Máquinas térmicas

1) **Definición**
Es todo dispositivo mecánico que transforma parte de la energía calorífica que recibe en energía mecánica.

2) **Funcionamiento**
- Toda máquina térmica para su funcionamiento necesita de un foco caliente (entrega energía) a la temperatura T_C, un foco frío (consume energía) a la temperatura T_F (T_C>T_F) y de un agente de

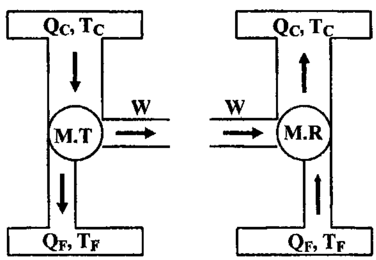
transformación (sustancia activa o de trabajo).

- La máquina térmica de la Fig., recibe energía calorífica Q_C del foco caliente, y parte la transforma en trabajo (W), y la energía restante la cede al foco frío en forma de calor Q_F.
- Según, el principio de conservación de la energía total, se cumple:

$$Q_C = W + Q_F$$

Ejemplo: 10
Los motores de combustión interna (petróleo y gasolina), las turbinas de vapor las calderas, las refrigeradoras, etc ..., son máquinas térmicas.

Representación de una máquina térmica



MOTOR REFRIGERADOR

- Esto es, el trabajo útil efectuado por una máquina térmica, es igual, a la diferencia de calores (Q_C - Q_F).
- En el caso de una refrigerador, el proceso es inverso, es decir, el calor se transfiere del foco frío (Q_F) al foco caliente (Q_C), para lo cual, las fuerzas externas deben hacer trabajo sobre el sistema.

3) Rendimiento de una maquina térmica (η)

El rendimiento es una cantidad adimensional que mide el trabajo útil que hace una máquina térmica, y se define así:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

las temperaturas deben estar en la escala absoluta (^oK).

- El rendimiento térmico caracteriza el grado de perfeccionamiento de la transformación de la energía interna en mecánica que tiene lugar en el motor térmico que funciona de acuerdo con el ciclo que se analiza.
- En porcentaje, el rendimiento (η) de una máquina térmica, se escribe así:

$$\eta(\%) = (1 - \frac{Q_F}{Q_C})(100)$$

4) Coeficiente de efecto frigorífico (ξ)

Es una cantidad que caracteriza el rendimiento económico de una instalación frigorífica, viene dado por:

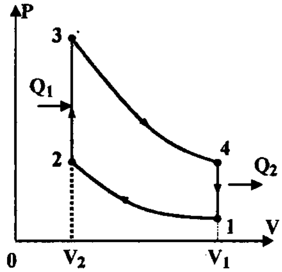
$$\xi = \frac{Q}{W}$$

siendo, (Q) la cantidad de calor absorbida del cuerpo que se enfría y (W) el equivalente térmico del trabajo realizado

- El coeficiente de efecto frigorífico de cualquier instalación que funcione según un ciclo reversible depende únicamente de la temperatura absoluta del cuerpo que se enfría (T_0) y del cuerpo receptor del calor (T).

5) Rendimiento de los ciclos de los motores térmicos alternativos

[1] Ciclo de Otto (V=cte.)

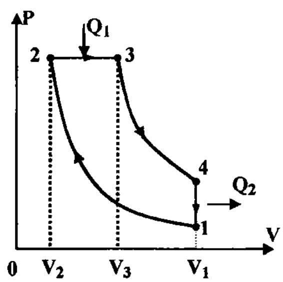


1-2	compresión	adiabática
2-3	calentamiento	isócoro
3-4	expansión	adiabática
4-1	enfriamiento	isócoro.

$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\chi-1}}$$

siendo, $\alpha = V_1/V_2$ la relación de compresión, y (χ) el exponente adiabático de compresión y expansión.

2] Ciclo de Diesel (P=cte.)

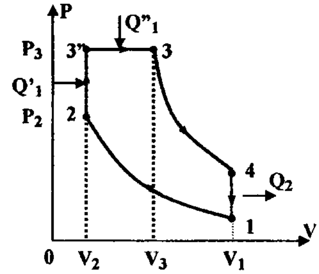


1-2	compresión	adiabática
2-3	calentamiento	isobárico
3-4	expansión	adiabática
4-1	enfriamiento	isócoro.

$$\eta = 1 - \frac{\beta^{\chi} - 1}{\chi \alpha^{\chi-1}(\beta - 1)}$$

siendo, $\beta = V_3/V_2$ la relación de expansión isobárica, $\alpha = V_1/V_2$ la relación de compresión, y χ el exponente adiabático de compresión y expansión.

[3] Ciclo de Trinkler -Sabathé



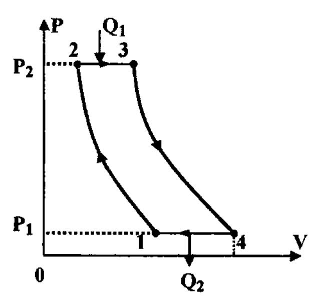
1-2	compresión	adiabática
2-3'	calentamiento	isócoro
3'-3	calentamiento	isobárico
3-4	expansión	adiabática
4-1	enfriamiento	isócoro.

$$\eta = 1 - \frac{\lambda \beta \chi - 1}{\alpha^{\chi-1}[(\lambda - 1) + \chi \lambda (\beta - 1)]}$$

siendo, $\beta = V_3/V_2$ la relación de expansión isobárica, $\alpha = V_1/V_2$ la relación de compresión, $\lambda = P_3/P_2$ la relación de aumento de la presión, y χ el exponente adiabático de compresión y expansión.

6) Rendimiento de los ciclos de las turbinas de gas

[1] Ciclo de combustión a presión constante

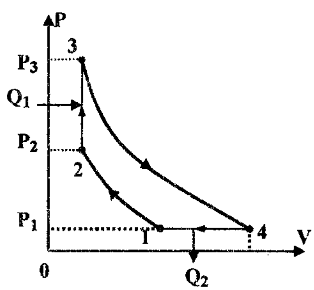


1-2	compresión	adiabática
2-3	calentamiento	isobárico
3-4	expansión	adiabática
4-1	enfriamiento	isobárico

$$\eta = 1 - \frac{\gamma^{\chi}}{\chi - 1}$$

siendo, $\gamma = P_2/P_1$ la relación de aumento de la presión durante la compresión, y χ el exponente adiabático de compresión y expansión.

[2] Ciclo de combustión a volumen constante



1-2	compresión	adiabática
2-3	calentamiento	isócoro
3-4	expansión	adiabática
4-1	enfriamiento	isobárico

$$\eta = 1 - \frac{\chi(\lambda^{1/\chi} - 1)}{(\lambda - 1)\gamma^{(\chi-1)/\chi}}$$

siendo, $\gamma = P_2/P_1$ la relación de aumento de la presión durante la compresión, $\lambda = P_3/P_2$ la relación del aumento complementario de la presión y χ el exponente adiabático de compresión y expansión.

7. SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA

a) Enunciados

Basado en el hecho que el calor se propaga de las regiones de altas temperaturas hacia las regiones de bajas temperaturas, este principio afirma:

1) No existe máquina térmica (ideal) en la que todo el calor del foco caliente sea transformado en trabajo útil, es decir, es imposible construir el móvil perpetuo de segunda especie.
2) El calor no puede propagarse de modo natural de un cuerpo frío hacia un cuerpo caliente, salvo que el proceso termodinámico sea forzado.

b) Móvil perpetuo de segunda especie

Se llama así al dispositivo (motor) cuyo agente de transformación, recibiera, para efectuar el ciclo, energía en forma de calor de un cuerpo exterior y la cediera después totalmente en forma de trabajo a otro cuerpo exterior.

8. ENTROPIA

a) Concepto

No es una magnitud física, tal como temperatura o presión, que se pueden medir en forma directa, al contrario, la entropía de un sistema termodinámico se determina utilizando métodos indirectos.

- Se define como la propiedad física que permite medir el grado de desorden de un sistema termodinámico.
- Se puede decir, también, que la entropía de un sistema, es su capacidad de hacer trabajo.
- La entropía de un sistema es una propiedad física puntual, es decir, es independiente del camino que utiliza el sistema para ir de un estado 1 (inicial) hacia otro 2 (final).

- El cambio en la entropía que experimenta un sistema termodinámico, cuando pasa de un estado inicial (1) hacia un estado final (2), viene dado por:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

- El carácter de la variación de la entropía sirve para determinar en que sentido se realiza el intercambio de calor, así, cuando el cuerpo (ó sustancia) se calienta ($\Delta S > 0$) su entropía aumenta, y cuando se enfría ($\Delta S < 0$), su entropía disminuye.

b) Propiedades

1) La entropía de un sistema cerrado que realiza un ciclo reversible de Carnot no varía, esto es:

$$\Delta S_{rev} = 0 \;\; ; \;\; S = \text{cte.}$$

2) La entropía de un sistema cerrado que realiza un ciclo irreversible de Carnot aumenta, esto es:

$$\Delta S_{irrev} > 0$$

3) La entropía de un sistema cerrado, cualesquiera que sean las transformaciones que ocurran en él, no disminuye, esto es:

$$\Delta S \geq 0$$

4) Si el estado de un sistema cerrado experimenta una variación elemental, la entropía del sistema no disminuye, así: $dS \geq 0$, el signo igual se refiere a las transformaciones reversibles, y el de la desigualdad, a las irreversibles.

c) Calor reducido (Q*)

Se llama calor reducido (Q*), en una transformación isotérmica, a la razón de la cantidad de calor (Q), recibida por el sistema, a la temperatura (T) del cuerpo que cede calor, esto es:

$$Q^* = \frac{Q}{T}$$

siendo, Q>0 cuando el sistema le cede energía al cuerpo, y Q<0 cuando absorbe energía de él.

d) Transformación isoentrópica

Se llama así al proceso termodinámico en el cual la entropía del sistema no varía. Por ejemplo en una transformación adiabática reversible $\delta Q = 0$ y $S = \text{cte.}$

e) Energía libre (F)

Se denomina energía libre a la diferencia entre la energía interna del sistema (U) menos la energía ligada (TS), esto es:

$$F = U - TS$$

- Si el sistema realiza una transformación isotérmica reversible, dT=0 y $\delta W_{isot} = dF$. Al pasar el sistema del estado 1 al estado 2 en una transformación reversible,

$$W_{isot} = F_1 - F_2$$

- La disminución de la energía libre es la medida del trabajo que realiza el sistema durante la transformación isotérmica reversible.

f) Energía ligada

La energía ligada es la parte de la energía interna del sistema que no puede ser transferida en forma de trabajo en la una transformación isotérmica. La energía ligada es directamente proporcional a la entropía, es decir, a una mayor entropía le corresponde una mayor energía ligada del sistema.

9. TERCER PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA

- El primer y segundo principio de la termodinámica no permiten determinar el valor de la entropía (S_0) de un sistema a la temperatura del cero absoluto ($T=0^0$ K).
- Este principio basado en las investigaciones experimentales de las propiedades de diversas sustancias a temperaturas ultrabajas, establece que: en cualquier transformación isotérmica que se realice a la temperatura del cero absoluto la variación de la entropía es nula, esto es:

$$\Delta S_{T=0} = 0\,, \quad S = S_0 = \text{cte}.$$

independientemente de las variaciones que experimenten los demás parámetros del estado.
- Del tercer principio de la termodinámica se deduce, que las capacidades caloríficas C_P y C_V y el coeficiente termodinámico de expansión "χ" son nulos para trodos los cuerpos a la temperatura $T=0$ ^{0}K.de una sustancia a la temperatura del cero absoluto es nula. También, se deduce que es imposible realizar transformaciones sucesivas mediante el cual el cuerpo alcance la temperatura de 0 ^{0}K, esto se conoce como: <<El principio de la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto>>.

a) Principio de Nernst

Este principio se basa en el desarrollo obtenido por Planck, que supuso que $S_o = 0$, es decir, que a la temperatura de cero absoluto la entropía de un sistema es nulo. La interpretación física de este principio se realiza en el marco de la física estadística. La condición $S_0=0$ para $T=0$ ^{0}K es una consecuencia del carácter cuántico que tienen los procesos que se danen un sistema cualquiera a bajas temperaturas y solamente lo cumplen los sistemas cuyo estado, a $T=0$ ^{0}K es de equilibrio estable, así, basándose en este principio se pueden determinar los valores absolutos de la entropía de un sistema en cualquier estado de equilibrio.

b) Estrangulación de un gas

Se llama estrangulación de un gas a la disminución que experimente la presión de este al pasar adiabáticamente por un orificio estrecho o por un tapón poroso. Este proceso de estrangulación es una transformación irreversible y, por lo tanto, va acompañada de un incremento de la entropía. La entalpía del gas en los estados inicial y final de la estrangulación no cambia.

c) Efecto Joule-Thomson

Este efecto consiste en que todo gas al ser estrangulado experimenta una variación de su temperatura, la expresión diferencial de este efecto, viene dado por:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right]$$

d) Licuefacción de un gas

Se llama así a la transformación de los gas al estado líquido, esta se realiza enfriándolos hasta una temperatura inferior a la de ebullición a la presión dada También, esto se puede obtener disminuyendo el volumen del gas, pero solamente en el caso en que su temperatura sea menor que la crítica.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. En cierto proceso, se suministra a una sustancia de energía interna 100 J, una cantidad de calor de 400 J y al mismo tiempo se realiza sobre él un trabajo de 200 J,¿Cuál es la energía interna final?

a) 100 J b) 300 J c) 400 J d) 600 J e) 700 J

02. A un recipiente de volumen V que contiene un mol de un gas perfecto a la presión P; se le suministra una cantidad de calor Q y el gas sufre una variación de volumen μ a la presión constante P.

I) ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas?

a) $P\mu$ b) PV c) $P(V - \mu)$ d) $Q - P\mu$ e) $P\mu^2 / 2$

II) ¿Cuál es la variación de energía interna del gas?

a) PVQ b) $P\mu/V$ c) $Q - p\mu$ d) $Q/P\mu$ e) $P\mu^2/2$

III) ¿Cuál es la variación de temperatura del gas?

a) $P/\mu R$ b) $P\mu/R$ c) $P.R/\mu$ d) $R\mu/P$ e) $R/\mu P$

03. El ciclo experimentado por un gas se representa en el diagrama P-V, mostrado en la Fig.01. La energía interna en A es 0 J y en B es 15 J.

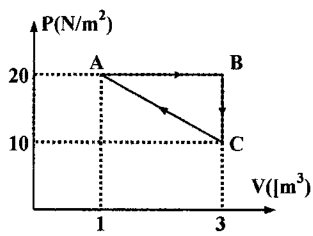


Fig.01

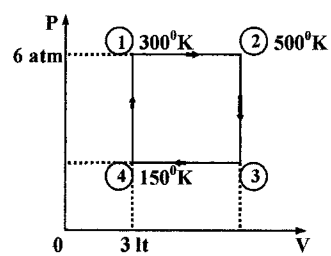


Fig.02

I) ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas de A a B?

a) 0 J b) 10 J c) 20 J d) 40 J e) 60 J

II) ¿Cuál es el calor suministrado al gas de A a B?

a) 0 J b) 25 J c) 40 J d) 45 J e) 55 J

III) Si el gas recibe 45 J de calor de B a C, ¿Cuál es la energía interna en C?

a) 15 J b) 45 J c) 60 J d) 80 J e) 100 J

IV) ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas de C a A?

a) 0 J b) -30 J c) -40 J d) 60 J e) -60 J

V)¿Cuál es el calor extraído del gas de C a A?

a) -15 J b) 30 J c) -30 J d) 60 J e) -90 J

VI) ¿Cuál es el trabajo neto efectuado por el gas en este ciclo?

a) 10 J b) 20 J c) -20 J d) 30 J e) 60 J

04. Un motor de Carnot recibe de un foco a 727 ^{o}C 10 000 cal; realiza un trabajo y cede una cierta cantidad de caloría a un foco a 27 ^{o}C.

I) ¿Cuál es el rendimiento térmico de este motor?

a) 30% b) 40% c) 50% d) 60% e) 70%

II)¿Cuál es el trabajo realizado?

a) 1 000 cal b) 3 000 cal c) 4000 cal d) 7 000 cal e) 8 000 cal

III) ¿Qué cantidad de calor es cedido al foco frío?

a) 1 000 cal b) 3 000 cal c) 4000 cal d) 7 000 cal e) 8 000 cal

05. La afirmación correcta correspondiente a la teoría cinética de los gases es:

a) A la misma temperatura, las moléculas de un gas liviano tienen mayor velocidad cuadrática media que las moléculas de un gas pesado.
b) A la misma temperatura, las moléculas de un gas liviano tienen mayor energía cinética media que las moléculas de un gas pesado.
c) A la misma temperatura, las moléculas de un gas liviano tienen la misma velocidad cuadrática media que las moléculas de un gas pesado.
d) La velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas depende de la presión.
e) Las moléculas de un gas liviano o pesado se quedan en reposo absoluto a 0^0 C.

06. Hallar el equivalente mecánico del calor si la energía interna de un sistema aumenta en 630 J cuando se hace un trabajo sobre el de 210 J y suministrándole 100 cal.

07. Durante un cierto tiempo se suministra a un sistema 100 cal mientras realiza un trabajo de 100 J, ¿Cuál es el incremento de la energía interna? (1 cal = 4,186 J)

a) 310,6 J b) 312,6 J c) 314,6 J d) 316,6 J e) 318,6 J

08. Un gas ideal es sometido a las transformaciones representadas en la Fig.02.

I) Calcular el valor de las variables P, V, T en los puntos 2, 3 y 4.

II) ¿Cuál es el trabajo neto realizado por el gas?

09. En la Fig.03, el sistema pasa del estado X al estado Y siguiendo la trayectoria xay reciben do 100 cal y realizando un trabajo de 40 cal.

I) ¿Qué calor recibe o libera si el sistema a lo largo de la trayectoria xby realiza un trabajo de 10 cal?

a) 50 cal b) 60 cal c) 70 cal d) 80 cal e) 90 cal

II) Si el sistema recibe 80 cal a lo largo de la trayectoria xcy,¿ Qué trabajo es realizado por o sobre el sistema.

a) 50 cal b) 60 cal c) 70 cal d) 80 cal e) 90 cal

III) Cuando el sistema regresa de Y a X a lo largo de la trayectoria curva se realiza sobre él un trabajo de 30 cal, ¿Qué calor recibe o libera?

a) -50 cal b) -60 cal c) -70 cal d) -80 cal e) -90 cal

IV) Si la energía interna $U_x = 0$ y $U_a = 45$ cal. Hallar Q y W para los procesos xa y ay.

a) 40 cal b) 45 cal c) 50 cal d) 55 cal e) 60 cal

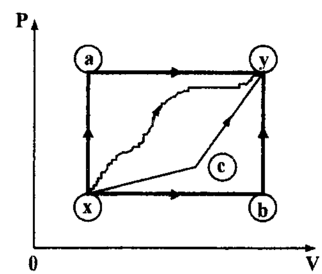


Fig.03

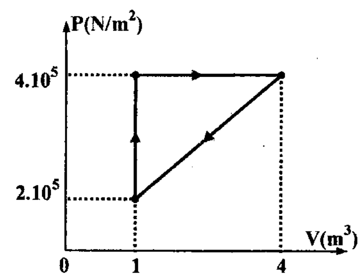


Fig.04

10. En cada uno de los siguientes casos, hallar la variación de energía interna del sistema.(1 cal = 4,186 J)

I) Un sistema absorbe 500 cal y realiza 40 J de trabajo.

a) 2051 J b) 2053 J c) 2055 J d) 2057 J e) 2059 J

II) Un sistema absorbe 300 cal cuando se le aplica un trabajo de 419 J.

a) 1655 J b) 1660 J c) 1665 J d) 1670 J e) 1675 J

III) Un gas pierde 1 500 cal a volumen constante.

a) -6271 J b) -6273 J c) -6275 J d) -6277 J e) -6279 J

11. En cada una de las siguientes transformaciones adiabáticas, halle la variación de energía interna.

I) Un gas produce, en una expansión adiabática, 5 J de trabajo exterior.

a) -1 J b) -3 J c) -5 J d) -7 J e) -9 J

II) Durante una compresión adiabática se aplica a un gas un trabajo de 100 J.

12 En un determinado proceso se suministra a un sistema 5.10^4 cal y simultáneamente el sistema se expande venciendo una presión exterior constante de 7,2 N/cm^2. La energía in-terna del sistema es la misma al comienzo que al final del proceso. Hallar el incremento de volumen del sistema. (1 cal = 4,186 J)

a) 2,1 m^3 b) 2,3 m^3 c) 2,5 m^3 d) 2,7 m^3 e) 2,9 m^3

13. Hallar el trabajo exterior en la expansión de un gas que, en contra de una presión constante de 2.10^5 N/m^2 pasa de ocupar un volumen de 3 lt a otro de 30 lt.

a) 5100 J b) 5200 J c) 5300 J d) 5400 J e) 5500 J

14. Hallar el trabajo que realiza un gas cuyo volumen inicial es de 3 lt y cuya temperatura aumenta de 27 ^{o}C a 227 ^{o}C, al expansionarse en contra de una presión constante de 2.10^5 N/m^2.

a) 100 J b) 200 J c) 300 J d) 400 J e) 500 J

15. Para el diagrama P-V mostrado en la Fig.04, hallar el trabajo realizado en los siguientes procesos:

I) De 1 a 2.

a) 1,0 MJ b) 1,2 MJ c) 1,4 MJ d) 1,6 MJ e) 1,8 MJ

II) De 2 a 3.

a) 600 kJ b) -600 kJ c) 900 kJ d) -900 kJ e) 500 kJ

III) De 3 a 1.

a) 0 J b) 1 J c) 2 J d) 3 J e) 4 J

IV) En todo el ciclo.

a) 100 kJ b) 200 kJ c) 300 kJ d) 400 kJ e) 500 kJ

V) Si se invierte el sentido del ciclo. Hallar el trabajo en c/u de los procesos a, b, c, d.

16. Para el diagrama P-V mostrado en la Fig.05, hallar el trabajo realizado en los siguientes procesos:
I) De 1 a 4.

a) 0 J b) 1 J c) 2 J d) 3 J e) 4 J

II) De 4 a 3.

a) 100 kJ b) 200 kJ c) 300 kJ d) 400 kJ e) 500 kJ

III.) De 3 a 2.

a) 0 J b) 1 J c) 2 J d) 3 J e) 4 J

IV) De 2 a 1.

a) -1,0 MJ b) -1,2 MJ c) -1,4 MJ d) -1,6 MJ e) -1,8 MJ

V) En todo el ciclo.

a) -1,0 MJ b) -1,2 MJ c) -1,4 MJ d) -1,6 MJ e) -1,8 MJ

VI) Si se invierte el sentido del ciclo, hallar el trabajo en c/u de los procesos a, b, c, d y e.

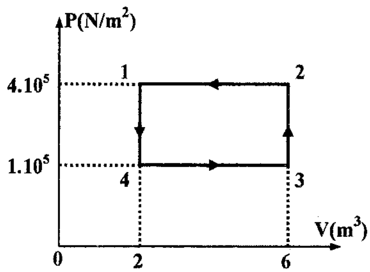


Fig.05

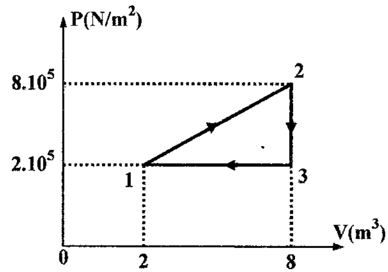


Fig.06

17. Para el diagrama P-V mostrado en la Fig.06, hallar el trabajo realizado en los siguientes procesos:
I) De 1 a 2.

a) 1 MJ b) 2 MJ c) 3 MJ d) 4 MJ e) 5 MJ

II) De 2 a 3.

a) 0 J b) 1 J c) 2 J d) 3 J e) 4 J

III) De 3 a 1.

a) -1,0 MJ b) -1,2 MJ c) -1,4 MJ d) -1,6 MJ e) -1,8 MJ

IV) En todo el ciclo.

a) 1,0 MJ b) 1,2 MJ c) 1,4 MJ d) 1,6 MJ e) 1,8 MJ

V) Si se invierte el ciclo. Hallar el trabajo en cada uno de los procesos a, b, c y d.

18. A un gas diatómico se le suministra 500 cal. Al ocurrir esto, el gas de dilata a presión constante. Hallar el trabajo de expansión del gas. (1 cal= 4,186 J)

a) 582 J b) 586 J c) 590 J d) 594 J e) 598 J

19. En un recipiente cerrado hay 20 g de nitrógeno y 32 g de oxígeno. Hallar la variación que experimentará la energía interna de esta mezcla de gases al enfriarla en 28^0 C. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 981 J b) 985 J c) 989 J d) 993 J e) 997 J

20. 10 g de oxígeno están sometidos a la presión de 3.10^5 N/m^2 a una temperatura de 10^0 C. Después de calentarlo a presión constante este gas ocupó un volumen de 10 lt. Hallar: (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

I) La cantidad de calor que recibió el gas.

a) 7 916 J b) 7 926 J c) 7 936 J d) 7 946 J e) 7 956 J

II) La variación de la energía interna del gas.

a) 5 641 J b) 5 661 J c) 5 631 J d) 5 651 J e) 5 621 J

III) El trabajo realizado por el gas.

a) 2 285 J b) 2 225 J c) 2 245 J d) 2 205 J e) 2 265 J

21. 6,5 g de nitrógeno cuya temperatura es de 27^0 C se dilatan hasta ocupar doble volumen, siendo la P=cte, debido al calor que perciben del exterior, R= 8,31 J/mol.^{0}K.

I) Hallar el trabajo de expansión.

a) 8,1 kJ b) 8,4 kJ c) 8,7 kJ d) 9,0 kJ e) 9,3 kJ

II) Hallar la variación que experimenta la energía interna del gas.

a) 20,2 kJ b) 20,6 kJ c) 22,4 kJ d) 22,8 kJ e) 24,6 kJ

a) 1500 J, 2500 J b) 2500 J, 1500 J c) 1200 J, 1400 J
d) 1400 J, 1200 J e) 1600 J, 1300 J

27. Un motor de explosión consume 250 g de gasolina por hora para una potencia de 1 CV. Los gases se queman a una temperatura de 1 527 ^{0}C y se escapan a una temperatura de 527 ^{0}C. Si se sabe que la gasolina produce 11000 cal/g y que 1 CV = 735 W. Hallar el rendimiento real y el rendimiento térmico ideal de este motor.

a) 21 %, 52 % b) 23 %, 56 % c) 25 %, 50 % d) 27 %, 54 % e) 29 %, 58%

28. Tres moles de un gas ideal experimentan una expansión isotérmica a 30^{0} C. Si el volu men aumenta desde 5 lt hasta 20 lt, hallar: (R= 0,08206 lt.atm/mol.^{0}K)
I) Las presiones inicial y final del gas.

a) 14,9 atm , 3,7 atm b) 14,1 atm , 3,5 atm c) 14,3 atm , 3,3 atm
d) 14,5 atm , 3,9 atm e) 14,1 atm , 3,1 atm

II. El trabajo efectuado por el gas sobre sus alrededores.

a) 10,5 kJ b) 12,5 kJ c) 14,5 kJ d) 16,5 kJ e) 18,5 kJ

29. Un mol de un gas diatómico se expande adiabáticamente desde un volumen V_0 hasta un volumen $2V_0$. Hallar la presión final en función de la presión inicial P_0.

a) 0,30 P_0 b) 0,32 P_0 c) 0,34 P_0 d) 0,36 P_0 e) 0,38 P_0

30. Se suministran 100 cal a 2 moles de un gas monoatómico ideal. Hallar: (Considere: R=1,986 cal/mol.^{0}K)
I) El cambio de temperatura si el volumen se mantiene constante.

a) 16,0^{0} C b) 16,2^{0} C c) 16,4^{0} C d) 16,6^{0} C e) 16,8^{0} C

II) El cambio de temperatura si la presión se mantiene constante.

a) 10,1^{0} C b) 10,3^{0} C c) 10,5^{0} C d) 10,7^{0} C e) 10,9^{0} C

31. Diez moles de un gas ideal a 100^{0} C se expanden isotérmicamente efectuando un tra bajo de 400 J sobre sus alrededores. Si inicialmente el gas ocupaba un volumen de 10 ℓt. Hallar: (R= 8,314 J/mol.^{0}K)
I) El volumen final ocupado por el gas.

a) 10,13 lt b) 10,33 lt c) 10,53 lt d) 10,73 lt e) 10,93 lt

II) La presión final del gas.

a) 30,02 atm b) 30,22 atm c) 30,42 atm d) 30,62 atm e) 30,82 atm

a) 1500 J, 2500 J b) 2500 J, 1500 J c) 1200 J, 1400 J d) 1400 J, 1200 J e) 1600 J, 1300 J

27. Un motor de explosión consume 250 g de gasolina por hora para una potencia de 1 CV. Los gases se queman a una temperatura de 1 527 ^oC y se escapan a una temperatura de 527 ^oC. Si se sabe que la gasolina produce 11000 cal/g y que 1 CV = 735 W. Hallar el rendimiento real y el rendimiento térmico ideal de este motor.

a) 21 %, 52 % b) 23 %, 56 % c) 25 %, 50 % d) 27 %, 54 % e) 29 %, 58%

28. Tres moles de un gas ideal experimentan una expansión isotérmica a 30^0 C. Si el volumen aumenta desde 5 lt hasta 20 lt, hallar: (R= 0,08206 lt.atm/mol.^{0}K)

I) Las presiones inicial y final del gas.

a) 14,9 atm , 3,7 atm b) 14,1 atm , 3,5 atm c) 14,3 atm , 3,3 atm d) 14,5 atm , 3,9 atm e) 14,1 atm , 3,1 atm

II. El trabajo efectuado por el gas sobre sus alrededores.

a) 10,5 kJ b) 12,5 kJ c) 14,5 kJ d) 16,5 kJ e) 18,5 kJ

29. Un mol de un gas diatómico se expande adiabáticamente desde un volumen V_0 hasta un volumen $2V_0$. Hallar la presión final en función de la presión inicial P_0.

a) 0,30 P_0 b) 0,32 P_0 c) 0,34 P_0 d) 0,36 P_0 e) 0,38 P_0

30. Se suministran 100 cal a 2 moles de un gas monoatómico ideal. Hallar: (Considere: R=1,986 cal/mol.^{0}K)

I) El cambio de temperatura si el volumen se mantiene constante.

a) 16,0^0 C b) 16,2^0 C c) 16,4^0 C d) 16,6^0 C e) 16,8^0 C

II) El cambio de temperatura si la presión se mantiene constante.

a) 10,1^0 C b) 10,3^0 C c) 10,5^0 C d) 10,7^0 C e) 10,9^0 C

31. Diez moles de un gas ideal a 100^0 C se expanden isotérmicamente efectuando un trabajo de 400 J sobre sus alrededores. Si inicialmente el gas ocupaba un volumen de 10 ℓt. Hallar: (R= 8,314 J/mol.^{0}K)

I) El volumen final ocupado por el gas.

a) 10,13 lt b) 10,33 lt c) 10,53 lt d) 10,73 lt e) 10,93 lt

II) La presión final del gas.

a) 30,02 atm b) 30,22 atm c) 30,42 atm d) 30,62 atm e) 30,82 atm

III) Si se puede utilizar completamente los 400 J para elevar la temperatura de 5 moles de un gas monoatómico ideal a volumen constante, ¿Qué aumento en la temperatura se producirá?

a) $6{,}01^0$ C b) $6{,}21^0$ C c) $6{,}41^0$ C d) $6{,}61^0$ C e) $6{,}81^0$ C

32. Un gas diatómico ideal ($\chi = 1{,}4$) de volumen inicial V_0=1,5 lt y presión inicial P_0=10 atm experimenta una compresión adiabática, siendo su volumen final V=3 lt y presión final P=4 atm. Hallar el trabajo efectuado por el gas. (1 lt.atm =101,316 J)

a) 720 J b) 730 J c) 740 J d) 750 J e) 760 J

33. La variación del calor específico de una sustancia respecto de la temperatura, viene dado por: $c=A+BT^2$, siendo A y B constantes. Hallar la diferencia entre el calor específico medio en el intervalo de temperaturas $[0^0 ; 24^0]$ C y el calor específico evaluado en 12^0 C.

a) 12 B b) 24 B c) 36 B d) 48 B e) 60 B

34. El calor específico a volumen constante del argón es, c_V = 0,075 kcal/kg.^{0}K. Hallar la masa del átomo de argón. (N_A= $6{,}023.10^{23}$ mol^{-1} , 1 cal = 4,186 J , R = 8,314 J/mol.^{0}K)

a) $1{,}6.10^{-23}$ g b) $2{,}6.10^{-23}$ g c) $4{,}6.10^{-23}$ g d) $6{,}6.10^{-23}$ g e) $8{,}6.10^{-23}$ g

35. La masa del átomo de helio es m = $6{,}66.10^{-27}$ kg. Hallar el calor específico del gas de helio a volumen constante. (R = 8,314 J/mol.^{0}K, N_A= $6{,}023.10^{23}$ mol^{-1}, 1 cal = 4,186 J)

a) $0{,}55\dfrac{cal}{g.^oK}$ b) $0{,}60\dfrac{cal}{g.^oK}$ c) $0{,}65\dfrac{cal}{g.^oK}$ d) $0{,}70\dfrac{cal}{g.^oK}$ e) $0{,}75\dfrac{cal}{g.^oK}$

36. 10 g de oxígeno se calientan a presión atmosférica constante desde 27^0 C hasta 127^0 C. Hallar el porcentaje de calor utilizado para aumentar la energía interna del oxígeno. (R=8,314 J/mol.^{0}K)

a) 70,2 % b) 70,6 % c) 71,0 % d) 71,4 % e) 71,8 %

37. Hallar la velocidad con la que se propaga el sonido en el gas de oxígeno ($\chi = 1{,}4$), que está a la temperatura de T=27^0 C. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 300 m/s b) 310 m/s c) 320 m/s d) 330 m/s e) 340 m/s

38. ¿En cuánto aumenta la velocidad de propagación del sonido en el aire, por cada grado centígrado que aumenta la temperatura del aire? R=8,31 J/mol.^{0}K, M=29 kg/kmol, $\chi = 1{,}4$.

a) 0,2 m/s b) 0,4 m/s c) 0,6 m/s d) 0,8 m/s e) 1,0 m/s

39. Hallar razón de los trabajos (W_{adiab}/W_{iso}) realizados para comprimir un volumen de aire a la mitad, si los procesos son adiabático e isotérmico. (M=29 kg/kmol, R=8,31 J/mol.^{0}k, $\chi=1,4$)

a) 1,15 b) 1,30 c) 1,45 d) 1,60 e) 1,75

40. 10 g de nitrógeno aumenta su volumen al variar su temperatura de 50^0 C a 10^0 C. Hallar el trabajo realizado por el gas, si el proceso es adiabático. (R= 8,31 J/mol.^{0}K, $\chi=1,4$)

a) 237 J b) 217 J c) 277 J d) 297 J e) 257 J

41. ¿Hasta qué temperatura se enfriará el aire que se encuentra a 0^0 C, si se dilata adiabáticamente desde el volumen V_0 hasta el volumen $V=2V_0$?

a) -60^0 C b) -62^0 C c) -64^0 C d) -66^0 C e) -68^0 C

42. 7,5 lt de oxígeno se comprimieron adiabáticamente hasta que su volumen se redujo a 1 lt, siendo su presión final de $1,6.10^6$ N/m^2. ¿A qué presión estaba el gas antes de la compresión? (R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm=$1,013.10^5$ N/m^2)

a) 0,82 atm b) 0,86 atm c) 0,90 atm d) 0,94 atm e) 0,98 atm

43. 10 g de nitrógeno que está a la temperatura de 17^0 C se expande isotérmicamente, realizando un trabajo de 860 J.¿ En cuántas veces disminuyo la presión del nitrógeno al expandirse ? (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 2,12 veces b) 2,32 veces c) 2,52 veces d) 2,72 veces e)2,92 veces

44. ¿Cuántas veces disminuirá la velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas diatómico si el volumen de dicho gas aumenta hasta el doble adiabáticamente?

a) 1,05 b) 1,15 c) 1,25 d) 1,35 e) 1,45

45. Al interior de los cilindros de un motor de combustión interna el aire se comprime adiabáticamente de modo que su presión varía desde P_1 =1 atm hasta P_2=35 atm. La temperatura inicial del aire es de T_1 =40^0 C. Hallar la temperatura al final de la compresión.

a) 583^0 C b) 587^0 C c) 591^0 C d) 595^0 C e) 601^0 C

46. Por el tubo de un calentador de agua de gas metano (CH_4) que consume V_0=1,8 m^3 de gas por hora, sale un chorro de gas de diámetro D=1 cm a una rapidez de v= 0,5 m/s y a la presión de P=1,2 atm. La temperatura inicial del agua y del gas es T_0=11^0 C. La capacidad calorífica del metano es $\zeta=55\ 000$ J/g y el rendimiento del calentador es del $\eta=60$ %. Hallar la temperatura del agua calentada. (1 atm=$1,013.10^5$ N/m^2, 1 cal = 4,186 J)

a) 82^0 C b) 86^0 C c) 90^0 C d) 94^0 C e) 98^0 C

47. ¿Cuántas veces aumentará el recorrido libre medio de las moléculas de un gas diatómico si su presión disminuye hasta la mitad, dilatándose su volumen?
I) Durante un proceso isotérmico.

a) 1 vez b) 2 veces c) 3 veces d) 4 veces e) 5 veces

II) Durante un proceso adiabático.

a) 1,04 b) 1,24 c) 1,44 d) 1,64 e) 1,84

48. Al interior de un cilindro vertical provisto de émbolo hay un gas detonante que en condiciones normales ocupa un volumen de 10^{-4} m^3. Cuando la compresión es rápida el gas se inflama. Hallar la temperatura de inflamación del gas detonante sabiendo que el trabajo de compresión es de 46,4 J. ($P_0 = 1{,}013.10^5$ N/m^2, $\chi = 1{,}40$)

a) 764^0 K b) 767^0 K c) 770^0 K d) 773^0 K e) 776^0 K

49. Un gas se expande adiabáticamente de forma que su presión disminuye desde 2 atm hasta 1 atm. Después este gas se calienta a volumen constante hasta la temperatura inicial, pasando su presión a 1,22 atm. Hallar la razón C_P/C_V para este gas.

a) 1,30 b) 1,32 c) 1,40 d) 1,41 e) 1,67

50. Durante la compresión adiabática de una molécula-kilogramo de un gas diatómico se realizo un trabajo de 146 kJ. Hallar el aumento de la temperatura del gas, durante la compresión. (R=8,31 J/mol.^{0}K , $\chi = 1{,}4$)

a) 1^0 C b) 3^0 C c) 5^0 C d) 7^0 C e) 9^0 C

51. 10,5 g de nitrógeno se expanden en un proceso isotérmico a la temperatura de -23^0 C desde la presión P_1 =2,5 atm hasta P_2=1 atm. Hallar el trabajo realizado por el gas en esta expansión. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 706 J b) 710 J c) 714 J d) 718 J e) 722 J

52. Al interior de los cilindros de un motor de combustión interna el aire se comprime adiabáticamente de modo que su presión cambia desde P_1=1 atm hasta P_2=35 atm. La temperatura inicial del aire es de 40^0 C. Hallar la temperatura al final de la compresión. ($\chi = 1{,}4$)

a) 587^0 C b) 591^0 C c) 595^0 C d) 599^0 C e) 603^0 C

53. Un gas se expande adiabáticamente de forma que su volumen se duplica mientras que su temperatura (absoluta) disminuye 1,32 veces.¿Cuántos grados de libertad tienen las moléculas de este gas?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

54. Dentro de un cilindro vertical con émbolo hay un gas en condiciones normales (C.N.). La distancia que hay entre el fondo del cilindro y la culata del émbolo es de 25 cm. Si sobre el émbolo se ubica un peso de 196,2 N este desciende 13,4 cm. Considerando que la compresión es adiabática, hallar para este gas la razón C_P/C_V. El área de la sección de la sección transversal del émbolo es de 10 cm^2, y su peso es despreciable. (P_0 = $1{,}013.10^5$ N/m^2)

a) 1,30 b) 1,32 c) 1,40 d) 1,41 e) 1,67

55. Un gas diatómico dilatándose por vía isobárica realizó un trabajo de 142,8 J. Hallar la cantidad de calor suministrada al gas.

a) 400 J b) 450 J c) 500 J d) 550 J e) 600 J

56. Hallar el recorrido libre medio de las moléculas de hidrógeno de diámetro $D=2{,}3.10^{-10}$ m que se encuentra a la presión de $P=10^{-3}$ mmHg y a la temperatura de $T=50^0$ C. (R=8,31 J/mol.^{0}K , 1 mmHg = 133,3 N/m^2 , $N_A = 6{,}023.10^{23}$ mol^{-1})

a) 12,6 cm b) 13,0 cm c) 13,4 cm d) 13,8 cm e) 14,2 cm

57. Un gas diatómico a la presión P_1 = 0,5 atm ocupa el volumen V_1 = 0,5 lt. Este gas se comprime adiabáticamente hasta el volumen V_2 y a la presión P_2 y después, manteniendo constante el volumen V_2 se enfría hasta la temperatura inicial, siendo su presión P_0=1 atm. Hallar el volumen V_2 y la presión P_2. ($\chi = 1{,}40$)

a) 0,21 lt ; 1,38 atm b) 0,29 lt ; 1,30 atm c) 0,23 lt ; 1,36 atm
d) 0,27 lt ; 1,34 atm e) 0,25 lt ; 1,32 atm

58. 1 kmol de nitrógeno que se encontraba en condiciones normales se expande adiabáticamente desde el volumen V_1 hasta el $V_2=5V_1$. Hallar la variación de la energía interna del gas. ($M = 10^6$, R = 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 2,63 MJ b) -2,63 MJ c) 2,69 MJ d) -2,69 MJ e) 2,66 MJ

59. A la temperatura de $T_0 = 0^0$ C el recorrido libre medio de las moléculas de oxígeno es de $<\lambda>=9{,}5.10^{-8}$ m. Hallar el número medio de choques por segundo que experimentan las moléculas del oxígeno, la temperatura permanece constante. (R=8,31 J/mol.^{0}K, $G=10^9$)

a) 3,0 G b) 3,5 G c) 4,0 G d) 4,5 G e) 5,0 G

60. En un matraz de volumen V=100 cm^3 hay m=0,5 g de nitrógeno. Hallar el recorrido libre medio de las moléculas de nitrógeno de diámetro $D=3.10^{-10}$ m, $N_A=6{,}023.10^{23}$ mol^{-1}

a) 13 nm b) 23 nm c) 33 nm d) 43 nm e) 53 nm

61. ¿Qué presión habrá que crear al interior de un recipiente esférico de diámetro D=10 cm, para que las moléculas de diámetro $d=3.10^{-8}$ cm, no choquen entre sí? La tempera-ratura del recipiente es de 0^0 C. (N_A= $6,023.10^{23}$ mol^{-1} ; R=8,31 J/mol.^{0}K ; m = 10^{-3})

a) 94,2 mPa b) 94,6 mPa c) 95,0 mPa d) 95,4 mPa e) 95,8 mPa

62. Un matraz esférico de capacidad V=1lt contiene nitrógeno. ¿Qué densidad deberá tener este nitrógeno para que el recorrido libre medio de sus moléculas sea mayor que las dimensiones del recipiente? (N_A= $6,023.10^{23}$ mol^{-1} ; $\mu = 10^{-6}$)

a) $0,82\,\mu\frac{kg}{m^3}$ b) $0,86\,\mu\frac{kg}{m^3}$ c) $0,90\,\mu\frac{kg}{m^3}$ d) $0,94\,\mu\frac{kg}{m^3}$ e) $0,98\,\mu\frac{kg}{m^3}$

63. Hallar el coeficiente de difusión del hidrógeno en condiciones normales, si el recorrido libre medio de sus moléculas es de $<\lambda> = 1,6.10^{-7}$ m. (R=8,31 J/mol.^{0}K ; $\mu = 10^{-6}$)

a) $85\,\mu\frac{m^2}{s}$ b) $88\,\mu\frac{m^2}{s}$ c) $91\,\mu\frac{m^2}{s}$ d) $94\,\mu\frac{m^2}{s}$ e) $97\,\mu\frac{m^2}{s}$

64. Demuestre que el trabajo realizado en un proceso isotérmico de expansión (ó compresión) de un gas, viene dado por: $W=n.R.T\,\ell n(V_2/V_1)$, siendo V_1, V_2 los volúmenes inicial y final, respectivamente.

65. Para un proceso adiabático, demuestre la ecuación de Poisson: $T_2 / P_1 = (P_2 / P_1)^{(\chi-1)/\chi}$.

66. Demuestre que el trabajo realizado en un proceso de expansión (ó compresión) adiabática viene dado por: $W = (P_0V_0 - P.V)/(\chi-1)$, siendo ($\chi$) el exponente adiabático.

67. Hallar el coeficiente de difusión del helio en condiciones normales. El diámetro de las moléculas de helio es $D=2.10^{-10}$ m. (N_A= $6,023.10^{23}$ mol^{-1} ; R=8,31 J/mol.^{0}K ; $\mu = 10^{-6}$)

a) $68\,\mu\frac{m^2}{s}$ b) $72\,\mu\frac{m^2}{s}$ c) $76\,\mu\frac{m^2}{s}$ d) $80\,\mu\frac{m^2}{s}$ e) $84\,\mu\frac{m^2}{s}$

68. Hallar la cantidad de nitrógeno que pasa por difusión a través de una superficie de área 100 cm^2 en 10 s sabiendo que el gradiente de densidad en dirección perpendicular a dicha superficie es 1,26 kg/m^4. La temperatura del nitrógeno es de 27^0 C y el recorrido libre me-dio de sus moléculas es de 10^{-5} cm. (R=8,31 J/mol.^{0}K ; m=10^{-3})

a) 1 mg b) 2 mg c) 3 mg d) 4 mg e) 5 mg

69. Hallar el coeficiente de rozamiento interno del nitrógeno en condiciones normales, sabiendo que su coeficiente de difusión en estas condiciones es 0,142 cm^2/s. (R=8,31 J/mol.^{0}K , P_0=$1,013.10^5$ N/m^2, $\mu = 10^{-6}$)

a) $10\,\mu\frac{N.s}{m^2}$ b) $12\,\mu\frac{N.s}{m^2}$ c) $14\,\mu\frac{N.s}{m^2}$ d) $16\,\mu\frac{N.s}{m^2}$ e) $18\,\mu\frac{N.s}{m^2}$

70. Hallar el diámetro de las moléculas del oxígeno, sabiendo que el coeficiente de rozamiento interno de este gas a 0^0 C es $\eta = 18{,}8.10^{-6}$ N.s/m^2. (R=8,31 J/mol.^{0}K , N_A= 6,023.10^{23} mol^{-1} , 1 $\overset{o}{A} = 10^{-10}$ m)

a) 1 $\overset{o}{A}$ b) 2 $\overset{o}{A}$ c) 3 $\overset{o}{A}$ d) 4 $\overset{o}{A}$ e) 5 $\overset{o}{A}$

71. 1,0 kg de vapor de agua a 100^0 C y 1 atm de presión ocupa un volumen de 0,836 m^3.¿ Qué porcentaje representa el trabajo exterior producido al transformarse agua en vapor a 100^0 C, venciendo la presión atmosférica, con respecto al calor de vaporización del agua. (1 cal = 4,186 J, L_V=540 cal/g, 1 atm=1,013.10^5 N/m^2)

a) 1,74 % b) 2,74 % c) 3,74 % d) 4,74 % e) 5,74 %

72. ¿Qué porcentaje representa el aumento de la energía interna respecto del calor desprendido, al convertir 1 mol de agua a 100^0 C y 1 atm de presión en vapor de agua? (1 cal = 4,186 J, 1 atm = 1,013.10^5 N/m^2)

a) 90,4 % b) 92,4 % c) 94,4 % d) 96,4 % e) 98,4 %

73. Demuestre la relación entre las capacidades caloríficas a presión constante (C_P) y volumen constante (C_V): C_P - C_V = R, donde (R) es la constante universal de los gases ideales.

74. Hallar el número medio de choques por segundo que experimentan las moléculas de un gas cuyo recorrido libre medio es 5.10^{-4} cm y su velocidad cuadrática media de 500 m/s.

a) 52 Ms^{-1} b) 62 Ms^{-1} c) 72 Ms^{-1} d) 82 Ms^{-1} e) 92 Ms^{-1}

75. Hallar el recorrido libre medio de las moléculas del helio a la temperatura de 0^0 C y a la presión de 760 mmHg, si en estas condiciones su viscosidad dinámica es de 1,3.10^{-4} g/cm.s. (R=8,31 J/mol.^{0}K , 1 mmHg = 133,3 N/m^2 , $\mu = 10^{-6}$)

a) 0,18 μm b) 0,28 μm c) 0,38 μm d) 0,48 μm e) 0,58 μm

76. Hallar los coeficientes de difusión y de viscosidad del aire a la presión de 760 mmHg y a la temperatura de 10^0 C. Sabiendo que el diámetro de las moléculas del aire es de 3.10^{-10} m. (R=8,31 J/mol.^{0}K , N_A = 6,023.10^{23} mol^{-1} , 1 mmHg = 133,3 N/m^2 , $\mu = 10^{-6}$)

a) $15\mu\frac{m^2}{s}$, $19\mu\frac{kg}{m}$ b) $25\mu\frac{m^2}{s}$, $29\mu\frac{kg}{m}$ c) $35\mu\frac{m^2}{s}$, $39\mu\frac{kg}{m}$

d) $45\mu\frac{m^2}{s}$, $49\mu\frac{kg}{m}$ e) $55\mu\frac{m^2}{s}$, $59\mu\frac{kg}{m}$

77. Hallar la razón de los coeficientes de difusión (D_1 / D_2 = ?) del anhídrido carbónico (1) y nitrógeno (2), si ambos gases se encuentran a la misma temperatura y presión. Los diámetros de sus moléculas son $d_1 = 4.10^{-10}$ m, $d_2 = 3,7.10^{-10}$ m.

a) 0,56 b) 0,60 c) 0,64 d) 0,68 e) 0,72

78. Hallar la razón de los coeficientes de rozamiento interno (η_1/η_2 = ?) del anhídrido carbónico (1) y nitrógeno (2), si ambos gases se encuentran a la misma temperatura y presión. Los diámetros de sus moléculas son $d_1 = 4.10^{-10}$ m, $d_2 = 3,7.10^{-10}$ m.

a) 1,1 b) 1,3 c) 1,5 d) 1,7 e) 1,9

79. Hallar la cantidad de calor que se debe suministrar a 10 moles de un gas ideal, para que al expandirse su presión disminuya de 1 atm a 0,1 atm; a la temperatura constante de 0^0 C. (R=8,31 J/mol.^{0}K , k=10^3)

a) 50,2 kJ b) 52,2 kJ c) 54,2 kJ d) 56,2 kJ e) 58,2 kJ

80. ¿Cuántas veces mayor es el coeficiente de rozamiento interno del oxígeno (1) que el del nitrógeno (2). Si ambos gases están a la misma temperatura, y si los diámetros de sus moléculas son iguales a $d_1 = d_2 = 3.10^{-10}$ m?

a) 1,01 veces b) 1,03 veces c) 1,05 veces d) 1,07 veces e)1,09 veces

81. Un cilindro contiene un gas ideal de volumen 5 lts a la presión de 2 atm y a la temperatura de 250^0 K. El gas es calentado a volumen constante hasta la presión de 4 atm; y luego a presión constante hasta la temperatura de 650^0 K. Hallar el calor total suministrado en todo el proceso. (R=8,31 J/mol.^{0}K , 1 atm = $1,013.10^5$ N/m^2 , C_V = 21 J/mol.^{0}K)

a) 4107,5 J b) 4307,5 J c) 4507,5 J d) 4707,5 J e) 4907,5 J

82. Dos litros de un gas ideal que esta a la presión de 1 atm se expande a temperatura constante triplicándose su volumen. Luego se comprime el gas a su volumen inicial a presión constante, y finalmente retorna a su presión inicial a temperatura constante. Hallar el trabajo total efectuado en el proceso. (1 atm=10^5 N/m^2, R=8,31 J/mol.^{0}K , 1 lt=10^{-3} m^3)

a) 12,4 J b) 12,8 J c) 13,2 J d) 13,6 J e) 17,0 J

83. Hallar la densidad del aire a 15^0 C y presión normal, sabiendo que c_P= 0,237 cal/g.^{0}C y c_V= 0,169 cal/g.^{0}C. (P_0=$1,013.10^5$ N/m^2 , 1 cal = 4,186 J)

a) $1,20\frac{kg}{m^3}$ b) $1,23\frac{kg}{m^3}$ c) $1,26\frac{kg}{m^3}$ d) $1,29\frac{kg}{m^3}$ e) $1,32\frac{kg}{m^3}$

84. A cierto gas ideal se le suministran 500 cal, expandiéndose a presión constante. Hallar el trabajo realizado. (C_P=5 cal/mol.^{0}K , C_V=3 cal/mol.^{0}K , 1 cal = 4,186 J)

a) 831,2 J b) 833,2 J c) 835,2 J d) 837,2 J e) 839,2 J

85. 1 m^3 de aire que se encuentra a la temperatura de 49^0 C y a la presión de 2 atm se expande a presión constante hasta un volumen de 5 m^3. Luego se expande adiabáticamente hasta un volumen de 10 m^3 y una presión de 0,5 atm. Hallar la razón de los trabajos (W_2/W_1) realizados por el gas en la segunda y primera etapa. (1 atm=$1,013.10^5$ N/m^2)

a) 1,16 b) 1,26 c) 1,36 d) 1,46 e) 1,56

86. Si en un proceso isotérmico, las razones de la presión final a la inicial cambia de 0,1 a 0,2. ¿En qué porcentaje varia el trabajo realizado por el gas ideal?

a) 20 % b) 25 % c) 30 % d) 35 % e) 40 %

87. En la Fig.07, un gas monoatómico realiza el proceso ABC mostrado. Si en el proceso adiabático AB el trabajo realizado por el gas es de -720 kJ, hallar el trabajo realizado por el gas en el proceso isotérmico BC. (ℓn 2 = 0,7)

a) 2 210 kJ b) 2 220 kJ c) 2 230 kJ d) 2 240 kJ e) 2 250 kJ

88. En la Fig.08, 0,2 moles de un gas ideal monoatómico describen el ciclo mostrado. Si en el proceso isobárico A-B el trabajo realizado por el gas es de -415,5 J, hallar el trabajo realizado por el gas en el proceso adiabático C-A. (T_A = 650 ^{0}K , R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 370 J b) 372 J c) 374 J d) 376 J e) 378 J

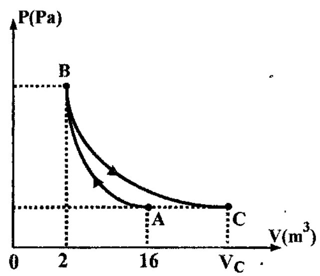


Fig.07

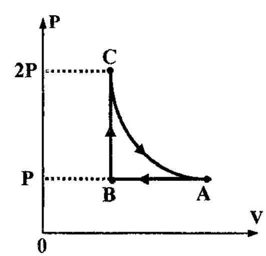


Fig.08

89. La razón de volúmenes para un motor diesel es $V_1/V_2 = 20$. Si el cilindro, al empezar la carrera de compresión contiene aire a la presión de 1 atm. Hallar la presión total al quedar completamente comprimido.

a) 65,7 atm b) 66,0 atm c) 66,3 atm d) 66,6 atm e) 66,9 atm

90. Al comprimirse adiabáticamente dos gases (A) monoatómico y (B) diatómico que están a la misma temperatura y volumen, sus volúmenes se reducen a la tercera parte y a la mitad, respectivamente. Hallar la temperatura final del gas (A), si la temperatura final del gas (B) es de 150^0 C.

a) 390^0 C b) 392^0 C c) 394^0 C d) 396^0 C e) 398^0 C

91. En la Fig.09, en el diagrama P-V se muestra el proceso de expansión de un gas diató mico, al cual, se le ha suministrado Q=1000 cal. Hallar el trabajo de expansión del gas. (R=8,31 J/mol.^{0}K , 1 cal=4,186 J)

a) 1 182 J b) 1 186 J c) 1 190 J d) 1 194 J e) 1 198 J

92. En la Fig.10, se muestra el diagrama P-V de los procesos isotérmico (A-B), isobárico (B-C) y adiabático (C-A) que experimenta un gas ideal de exponente adiabático $\chi=1{,}5$, además: $T_A=700^0$ K, P_A=10 atm, V_A=5 lts; V_B = V_C =2 lts. Hallar P_C/P_B y T_C/T_B.

a) 1,2 ; 1,2 b) 1,4 ; 1,4 c) 1,6 ; 1,6 d) 1,8 ; 1,8 e) 2,2 ; 2,2

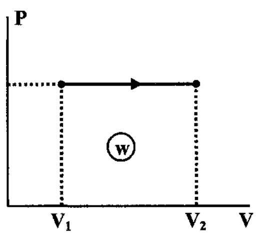


Fig.09

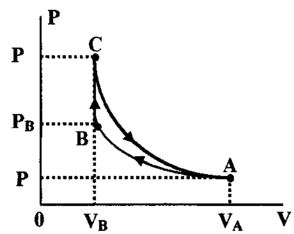


Fig.10

93. Se comprime adiabáticamente un mol de nitrógeno gaseoso a 27^0 C y una presión de 1 atm, hasta que su volumen sea 1/10 del inicial. (R=8,31 J/mol.^{0}K, $\chi=1{,}4$)

a) -9 123 J b) -9 223 J c) -9 323 J d) -9 423 J e) -9 523 J

94. 5 moles de nitrógeno están contenidos dentro de un cilindro, en cuyo interior se despla za un pistón, a una presión de 1 atm, y a una temperatura de 30^0 C. Luego, a presión constante se calienta el gas hasta 300^0 C. Determinar el cambio de su energía interna. (R=8,31 J/mol.^{0}K 1 atm=$1{,}013.10^5$ N/m^2, $\gamma=5$)

a) 28 016 J b) 28 026 J c) 28 036 J d) 28 046 J e) 28 056 J

95. Dos gases ideales A monoatómico ($\gamma=3$) y B diatómico ($\gamma=5$), que se encuentran a la misma temperatura inicial y el mismo volumen, se comprimen adiabáticamente redu ciéndose su volumen de cada uno de ellos a la mitad. Hallar la razón de sus tempera turas finales T_A/T_B = ?

a) 1,0 b) 1,2 c) 1,4 d) 1,6 e) 1,8

96. Hallar la energía interna total de diez litros de oxígeno que se encuentra a una presión de 5 atm. (1 atm = $1,013.10^5$ N/m^2)

a) 7 582 J b) 7 586 J c) 7 590 J d) 7 594 J e) 7 598 J

97. En la Fig.11, se muestra el diagrama P-V del proceso cíclico que experimenta 3 moles de un gas monoatómico ideal. En el proceso A-B el gas recibe 200 cal y T_A=300^0 K. Hallar el trabajo realizado por el gas en el proceso B-C. (R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 cal = 4,86 J)

a) 8 010 J b) 8 020 J c) 8 030 J d) 8 040 J e) 8 050 J

98. En la Fig.12, se muestra el diagrama P-V del proceso lento que experimenta 20 g de helio, encerrado en un cilindro por un pistón, pasando del estado 1 (V_1 =32 lt, P_1 = 4,1 atm) al estado 2 (V_2 = 9 lt, P_2 =15,5 atm). Hallar la mayor temperatura alcanzada por el gas. (R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm = 10^5 N/m^2)

a) 482^0 K b) 486^0 K c) 490^0 K d) 494^0 K e) 498^0 K

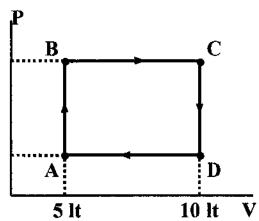


Fig.11

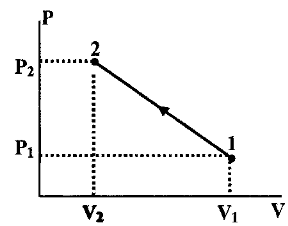


Fig.12

99. 20 g de gas carbónico que encuentra encerrado en un cilindro por un pistón pesado, se calienta desde una temperatura T_1 = 20^0 C hasta T_2 =108^0 C. Hallar el trabajo realizado por el gas. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 324 J b) 328 J c) 332 J d) 336 J e) 340 J

100. ¿Qué cantidad de calor debe suministrarse al gas carbónico del problema anterior, para que se dilate a presión constante. La capacidad calorífica de una molécula-gramo para un volumen constante es C_V =28,8 J/mol.^{0}K? (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 1 476 J b) 1 480 J c) 1 484 J d) 1 488 J e) 1 492 J

101. En la Fig.13, dos moles de un gas ideal de capacidad calorífica a volumen constante C_V=3 cal/mol.^{0}K realiza el ciclo mostrado. Hallar el exponente adiabático (χ) y la razón de los trabajos para los procesos isotérmico (B-C) e isobárico (A-B). (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 5/3 ; 1,2 b) 7/5 ; 1,2 c) 5/3 ; 1,4 d) 7/5 ; 1,4 e) 7/5 ; 1,6

102. En referencia al prob.(101), hallar la razón del calor en el proceso isobárico (A-B) al calor en el proceso isotérmico (B-C). ($R=0,082$ atm.lt/mol.^{0}K, 1 atm=10^5 N/m^2 , 1 cal=4,186 J)

a) 1,72 b) 1,76 c) 1,80 d) 1,84 e) 1,88

103. En la Fig.14, se muestra el proceso termodinámico ABC que experimenta un gas. Si el trabajo realizado por el gas en el proceso isobárico AB es de -60 kJ y la cantidad de calor absorbido en el proceso isocórico BC es de 150 kJ. Hallar el exponente adiabático para este gas, e indique que tipo de gas es.

a) 1,67 ; monoatómico b) 1,30 ; monoatómico c) 1,30 ; poliatómico d) 1,32 ; diatómico e) 1,40 ; diatómico

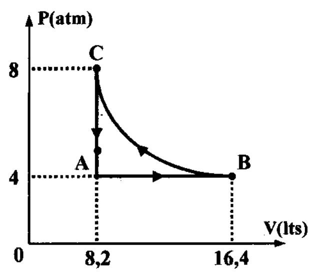


Fig.13

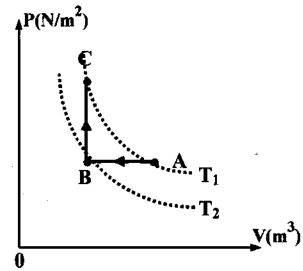


Fig.14

104. En la Fig.15, se muestra el proceso termodinámico que realiza un gas ideal. Si la presión del gas en el estado (1) es de 1 MPa, hallar el trabajo realizado por el gas en el proceso termodinámico 1-2-3-4. ($M=10^6$)

a) 2 kJ b) 4 kJ c) 6 kJ d) 8 kJ e) 10 kJ

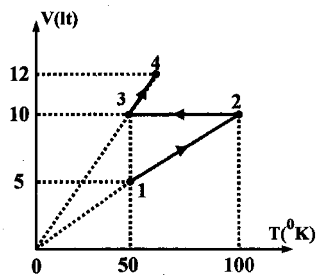


Fig.15

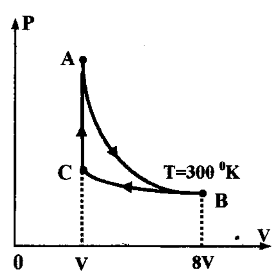


Fig.16

105. En la Fig.16, un gas ideal monoatómico realiza el ciclo termodinámico mostrado en la gráfica P-V. Si AB es un proceso adiabático, BC es un proceso isotérmico y CA es un proceso isocórico, hallar la eficiencia del ciclo.

a) 51,8 % b) 52,8 % c) 53,8 % d) 54,8 % e) 55,8 %

106. En la Fig.17, se muestra el ciclo de un proceso termodinámico que desarrolla un motor, frecuencia 100 ciclos/s, si $T_A = 27^0$ C, $T_B = 627^0$ C, $T_C = 327^0$ C. Hallar la potencia que desarrolla el motor en cada ciclo. ($M=10^6$)

a) 10 MW b) 20 MW c) 30 MW d) 40 MW e) 50 MW

107. En la Fig.18, se muestra un ciclo termodinámico de un gas ideal. Hallar el trabajo total desarrollado durante el ciclo, si $P_1 = 600$ Pa, $P_4 = 200$ Pa, $V_3 = 3\ m^3$ y $V_4 = 1\ m^3$.

a) 800 kJ b) 600 kJ c) 400 kJ d) 200 kJ e) 100 kJ

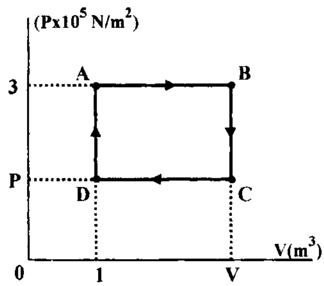


Fig.17

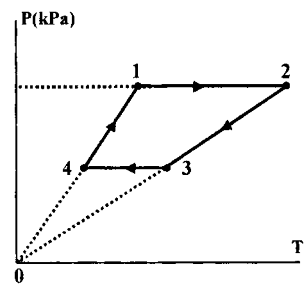


Fig.18

108. En la Fig.19, hallar el período de las pequeñas oscilaciones que realiza el émbolo de masa m=400 g en el recipiente cilíndrico liso de área de sección A=40 cm^2. A ambos lados del émbolo se encuentra cierto gas a la presión de $P_0=4.10^{-5}$ N/m^2, volumen $V_0= A.\ell$ y temperatura T_0, siendo $\ell = 20$ cm, g=10 m/s^2, $m=10^{-3}$.

a) 10πms b) 20πms c) 30πms d) 40πms e) 50πms

109. En la Fig.20, en el recipiente cilíndrico se encuentra en equilibrio el émbolo pesado E. A ambos lados del émbolo se hallan masas iguales de gas a la misma temperatura, y de volúmenes $V_1=3V_0$ y $V_2=V_0$. Hallar la razón de los volúmenes V_1'/V_2', cuando se duplica la temperatura inicial.

a) 1,3 b) 1,6 c) 1,9 d) 2,2 e) 2,5

110. En la Fig.21, la pompa de jabón llena de aire caliente, está suspendida inmóvil en la atmosfera de presión $P_0=10^5$ N/m^2 y temperatura $T_0=27^0$ C. La densidad de la película de jabón es $\rho = 0,8$ g/cm^3, el grosor $\delta = 1\ \mu m$, la tensión superficial $\sigma = 0,045$ N/m y el radio r=1 cm. Hallar la temperatura del aire al interior de la pompa de jabón. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 90^0 C b) 95^0 C c) 100^0 C d) 105^0 C e) 110^0 C

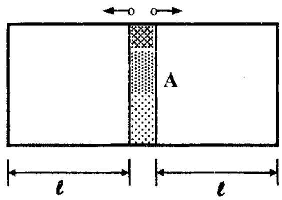


Fig.19

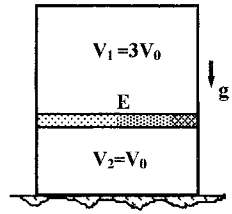


Fig.20

111. En la Fig.22, sobre la superficie del líquido de densidad $\rho = 1000$ kg/m^3 flota el vaso cilíndrico de paredes delgadas de altura H=10 cm, sumergido en el líquido hasta la mitad. ¿En cuánto se hundirá en el líquido el borde inferior del vaso, si éste se coloca sobre la superficie del líquido con el fondo hacia arriba. La presión del aire es de $P_0=10^5$ N/m^2?

a) 4,90 cm b) 4,95 cm c) 5,00 cm d) 5,05 cm e) 5,10 cm

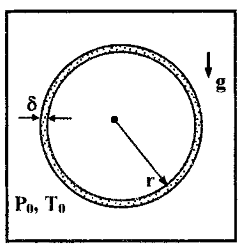


Fig.21

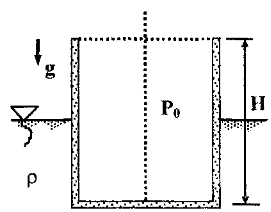


Fig.22

112. Hallar la razón de la energía interna de 1 kg de aire a la energía interna de 1 cm^3 de aire, medidas en condiciones normales. (1 atm =1,013.10^5 N/m^2, R=8,31 J/mol.^{0}K, M=29 kg/kmol, M=10^6)

a) 0,1 M b) 0,2 M c) 0,4 M d) 0,6 M e) 0,8 M

113. En un volumen V_1=200 cm^3 se encuentra un gas monoatómico a la presión P_1=1 atm y temperatura T_1=400^0 K, mientras que en el volumen V_2=100 cm^3, un gas monoatómico a la presión P_2=4 atm y temperatura T_2= 600^0 K. Hallar la temperatura de estos gases al unirlos.

a) 510,3^0 K b) 512,3^0 K c) 514,3^0 K d) 516,3^0 K e) 518,3^0 K

114. En un volumen V_1=200 cm^3 se encuentra un gas monoatómico a la presión P_1=1 atm y temperatura T_1=400^0 K, mientras que en el volumen V_2=100 cm^3, un gas monoatómico a la presión P_2=4 atm y temperatura T_2= 600^0 K. Hallar la presión de estos gases al unir los.

a) 1 atm b) 2 atm c) 3 atm d) 4 atm e) 5 atm

115. Dos pompas de jabón de radios $R_2=2R_1$, se unen formando una pompa de radio igual a $R_3=2{,}2R_1$. Hallar la tensión superficial (σ) de la película de jabón, si la presión atmosférica es P_0.

a) $\frac{101}{40}P_0R_1$ b) $\frac{103}{40}P_0R_1$ c) $\frac{105}{40}P_0R_1$ d) $\frac{107}{40}P_0R_1$ e) $\frac{109}{40}P_0R_1$

116. En la Fig.23, el émbolo móvil de área A=100 cm^2 del recipiente cilíndrico fijo que contiene medio mol de un gas monoatómico de volumen V_0=10^4 cm^3 y temperatura T_0 = 0^0 C, se conecta al resorte de constante elástica k=10^3 N/m. Despreciando la fricción en el recipiente, hallar la longitud que se deforma el resorte. (R=8,31 J/mol.^{0}K, P_{atm}=10^5 N/m^2)

a) 2,3 cm b) 3,3 cm c) 4,3 cm d) 5,3 cm e) 6,3 cm

117. En la Fig.24, en el tubo termoaislado liso de longitud infinita se encuentran dos émbolos de masas M=2m (m=10 kg) entre los cuales hay un gas monoatómico de volumen V_0= 0,2 lt a la presión de P_0 = 4 atm. Los émbolos se dejan libres. Estímese la velocidad máxima del émbolo de masa (m). Despréciese la masa del gas respecto de la masa de los émbolos. (1 atm=10^5 N/m^2 , g=10 m/s^2 , R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 1m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

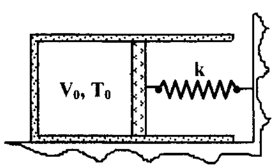


Fig.23

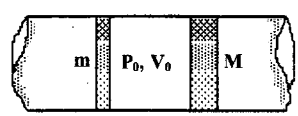


Fig.24

118. En la Fig.25, en el tubo termoaislado largo entre dos émbolos idénticos de masas m=1 kg se encuentra 1 mol de gas monoatómico a la temperatura de T_0=400^0 K en el instante inicial las velocidades están dirigidas en un mismo sentido y son iguales a $3v_0$ y v_0. ¿ Hasta qué temperatura máxima se calentará el gas. Los émbolos no conducen el calor. Despréciese la masa del gas respecto de la masa de los émbolos. (R=8,31 J/mol.^{0}K, v_0=10 m/s)

a) 402^0 K b) 404^0 K c) 406^0 K d) 408^0 K e) 410^0 K

119. En la Fig.26., se muestra la gráfica de la dependencia entre la presión de un gas y el volumen. Hallar el trabajo que realiza el gas durante su expansión de 2 lt a 6 lt.

a) 442 J b) 446 J c) 450 J d) 454 J e) 458 J

120. En la Fig.27, el émbolo de masa M=1 kg, que encierra el volumen V_0=2 lt con un gas monoatómico a la presión de P_0=2 atm y temperatura T_0 , se mueve a la velocidad de v=20 m/s. Hallar el volumen del gas correspondiente a la compresión máxima. El sistema está termoaislado. Despréciese las capacidades caloríficas del émbolo y el recipiente.

a) 1,1 lt b) 1,3 lt c) 1,5 lt d) 1,7 lt e) 1,9 lt

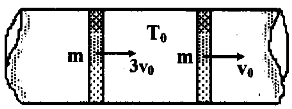


Fig.25

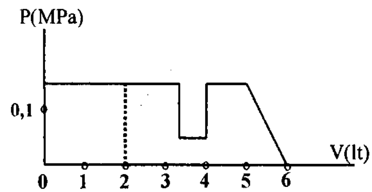


Fig.26

121. En la Fig.28, sobre un mol de gas se realiza un ciclo cerrado que consta de dos isócoras y dos isóbaras. Las temperaturas en los puntos 1 y 3 son T_1 =324^0 K y T_3 =400^0 K. Hallar el trabajo realizado por el gas durante el ciclo, sabiéndose que los puntos 2 y 4 pertenecen a una isoterma, y R constante universal de los gases.

a) R b) 2R c) 3R d) 4R e) 5R

122. Hallar la cantidad de calor que se debe suministrar a un mol de hidrógeno para que se caliente a presión constante desde 0^0 C, hasta que su volumen se duplique, además qué trabajo realizará el gas. (R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 7,34 kJ ; 2,67 kJ b) 7,14 kJ ; 2,47 kJ c) 7,74 kJ ; 2,87 kJ d) 7,54 kJ ; 2,07 kJ e) 7,94 kJ ; 2,27 kJ

123. Un gas ideal se expande isotérmicamente desde la presión P_1= 10^5 N/m^2, volumen V_1=2.10^3 cm^3, hasta un volumen V_2=4.10^3 cm^3, luego se expande isobaricamente hasta ocupar un volumen de V_3=8.10^3 cm^3. Hallar el trabajo total realizado por el gas.

a) 231 J b) 233 J c) 235 J d) 237 J e) 239 J

124. En la Fig.29, hallar la capacidad calorífica del sistema constituido del recipiente que contiene un gas monoatómico a la presión P_0, temperatura T_0 y volumen V_0 encerrado por el émbolo conectado al resorte de constante elástica k. En el espacio a la izquierda del émbolo se ha creado el vacío. Al extraerse el gas, el émbolo se pega a la pared derecha del cilindro recuperando el resorte su longitud no deformada. Despréciese las capacidades caloríficas del recipiente, émbolo y resorte.

a) P_0V_0/T_0 b) $3P_0V_0/2T_0$ c) $2P_0V_0/3T_0$ d) $P_0V_0/2T_0$ e) $2P_0V_0/T_0$

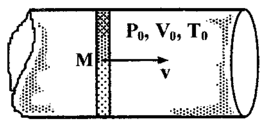


Fig.27

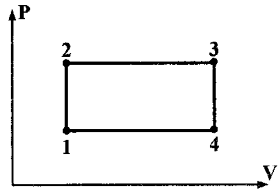


Fig.28

125. En la Fig.30, el tubo vertical liso abierto por ambos extremos y de secciones diferentes arriba y abajo se encuentran dos émbolos, unidos por un hilo inextensible, y entre los émbolos, un mol de gas ideal. El área del émbolo superior es $\Delta S = 10$ cm^2 mayor que la del inferior. La masa total de los émbolos es m = 5 kg. La presión atmosférica $P_0=10^5$ N/m^2. ¿En cuántos grados Kelvin debe calentarse el gas contenido entre los émbolos, para que éstos se desplacen una distancia de d = 5 cm? (R=8,31 J/mol.^{0}K, g=10 m/s^2)

a) 0,1^0 K b) 0,3^0 K c) 0,5^0 K d) 0,7^0 K e) 0,9^0 K

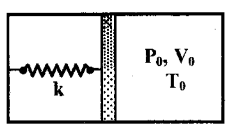


Fig.29

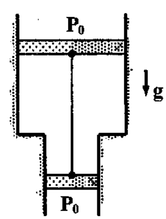


Fig.30

126. Hallar la temperatura máxima posible de un gas ideal en un proceso donde la presión en función del volumen, viene dado por: $P=P_0-\alpha V^2$, siendo $P_0=2,7.10^5$ N/m^2, $\alpha = 0,25.10^{-2}$ N/m^8, R= 8,31 J/mol.^{0}K, k=10^3)

a) k/R b) 2k/R c) 3k/R d) 4k/R e) 5k/R

127. Hallar la presión mínima posible de un mol de un gas ideal en un proceso donde la temperatura en función del volumen, viene dado por la expresión: $T=T_0+\alpha V^2$, siendo $\alpha = 16.10^4$ ^{0}K/m^6, $T_0 = 400^0$ K, R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm = 10^5 N/m^2.

a) 1,11 atm b) 1,33 atm c) 1,55 atm d) 1,77 atm e) 1,99 atm

128. En la Fig.31, al cilindro horizontal cerrado por uno de sus extremos se le hace girar con una velocidad angular de $\omega = 100$ rad/s alrededor del eje vertical que pasa por su extremo abierto. La presión atmosférica es P_0, la temperatura $T=400^0$ K, y la masa molar del aire M=29 kg/kmol. Hallar la presión del aire a una distancia de r=1 m del extremo abierto. R=8,31 J/mol.^{0}K.

a) 1,00P_0 b) 1,02P_0 c) 1,04P0 d) 1,06P_0 e) 1,08P_0

129. En la Fig.32, se muestra el diagrama P-V de un proceso cíclico que realizan 3 moles de un gas monoatómico ideal, siendo $\Delta Q_{AB} = 200$ cal y $T_A=300^0$ K. Hallar la razón del calor en el proceso BC al calor en el proceso AB. (R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm=1,013.10^5 N/m^2, 1 cal=4,186 J)

a) 12 b) 18 c) 24 d) 30 e) 36

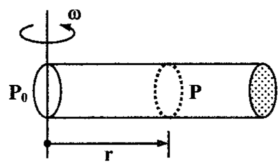


Fig.31

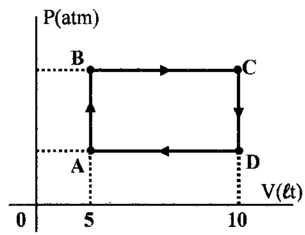


Fig.32

130. En referencia al problema anterior, hallar el trabajo total realizado en el ciclo.

a) 514 J b) 524 J c) 534 J d) 544 J e) 554 J

131.7 g de anhídrido carbónico se calentaron 10^0 C en condiciones que permitieron la expansión libre. Hallar el trabajo de expansión y la variación de sus energía interna.(R=8,31 J/mol.^{0}K)

a) 13,2 J, 33 J b) 13,8 J, 39 J c) 13,6 J, 31 J d) 13,4 J, 35 J e) 13,0 J, 37J

132.28 g de nitrógeno que se encuentran a la temperatura de 40^0 C y a la presión de 750 mmHg se comprimen adiabáticamente hasta un volumen de 13 lt. (1 mmHg = 133,3 N/m^2, R=8,31 J/mo.^{0}K, 1 atm=1,013.10^5 N/m^2)

I) Hallar la temperatura y la presión del nitrógeno después de la compresión.

a) 443^0 K ; 2,0 atm b) 433^0 K ; 2,8 atm c) 423^0 K ; 2,4 atm d) 453^0 K ; 2,2 atm e) 413^0 K ; 2,6 atm

II) Hallar el trabajo de compresión realizado en el proceso adiabático.

a) -2 016 J b) -2 036 J c) -2 056 J d) -2 076 J e) -2 096 J

133. En la Fig.33, al interior del cilindro hay 1 g de nitrógeno encerrado por el émbolo de peso W=10 N, área de sección transversal $S=10\ cm^2$ y sometido a la presión $P_0=1$ atm. ($R=8,31\ J/mol.^0K$, $1\ atm = 1,013.10^5\ N/m^2$, $g=10\ m/s^2$)

I) ¿Qué cantidad de calor se debe suministrar al gas para elevar su temperatura en 10^0 C?

a) 6,4 J b) 7,4 J c) 8,4 J d) 9,4 J e) 10,4 J

II) ¿Qué altura (h) se eleva el émbolo en este proceso?

a) 2,07 cm b) 2,27 cm c) 2,47 cm d) 2,67 cm e) 2,87 cm

134. En la Fig.34, los émbolos electroconductores de área $S=8\ cm^2$ ubicados en el tubo de ma-terial aislante forman un condensador plano, que contiene aire a la presión $P_0=1,013.10^5\ N/m^2$. Como cambiará la distancia entre los émbolos al aplicársele cargas de signos diferentes de valor $Q=2\,\mu C$. El sistema es buen conductor de calor, no existe fricción, y la constante eléctrica vale $k=1/4\pi\varepsilon_0 = 9.10^9\ N.m^2/C^2$.

a) 1,5 veces b) 2,5 veces c) 3,5 veces d) 4,5 veces e) 5,5 veces

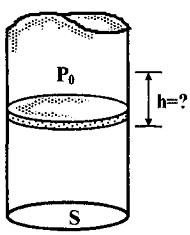


Fig.33

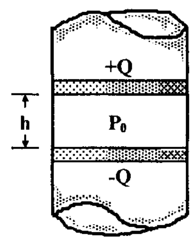


Fig.34

135. En la Fig.35, los estados en A y B de cierta cantidad de oxígeno son: volumen $V_A=3$ lt, $V_B=4,5$ lt, temperatura $T_A=27^0$ C y presión $P_A= 8,2.10^5\ N/m^2$, $P_B= 6.10^5\ N/m^2$. Hallar:

I) La razón del calor en el proceso ADB al calor en el proceso ACB.

a) 1,12 b) 1,22 c) 1,32 d) 1,42 e) 1,52

II) La razón del trabajo en el proceso ADB al trabajo en el proceso ACB.

a) 1,17 b) 1,37 c) 1,57 d) 1,77 e) 1,97

136. En la Fig.36, una máquina térmica ideal funciona según el ciclo de Carnot empleando aire caliente, el cual, se toma a la presión de $P_A=7$ atm, temperatura de $T_A=127^0$ C y volumen de $V_A=2$ lt, luego de la expansión isotérmica AB, el volumen es $V_B=5$ lt, y des pués de la expansión adiabática el volumen es $V_C = 8$ lt. Hallar: (R=8,31 J/mol.^{0}K, 1 atm=1,013.10^5 N/m^2, 1 cal=4,186 J)

I) La relación de las presiones en los estados A, B, C y D.

a) $P_A>P_B>P_C>P_D$ b) $P_A>P_C>P_B>P_D$ c) $P_C>P_D>P_A>P_B$ d) $P_B>P_D>P_A>P_C$ e) $P_A>P_D>P_B>P_C$

II) La relación de los trabajos realizados en cada uno de los procesos: $W_{AB}=W_1$, $W_{BC}=W_2$, $W_{CD}=W_3$ y $W_{DA}=W_4$.

a) $W_1=W_2>W_3>W_4$ b) $W_2=W_4>W_3>W_1$ c) $W_3>W_4=W_1>W_2$ d) $W_3>W_2=W_1>W4$ e) $W_1>W_3>W_2=W_4$

III.) El trabajo total realizado en el ciclo.

a) 220 J b) 222 J c) 224 J d) 226 J e) 228 J

IV) El porcentaje que representa el trabajo en el proceso de compresión respecto del trabajo en el proceso de expansión.

a) 80,3 % b) 82,3 % c) 84,3 % d) 86,3 % e) 88,3 %

V) El rendimiento en el ciclo de Carnot.

a) 11,3 % b) 13,3 % c) 15,3 % d) 17,3 % e) 19,3 %

VI) La cantidad de calor que se toma del foco caliente en cada ciclo.

a) 301 cal b) 303 cal c) 305 cal d) 307 cal e) 309 cal

VII) La cantidad de calor que se cede al foco frío en cada ciclo.

a) 250 cal b) 252 cal c) 254 cal d) 256 cal e) 258 cal

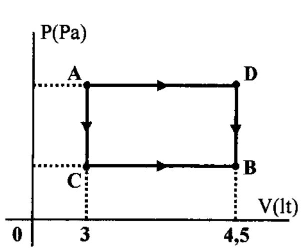


Fig.35

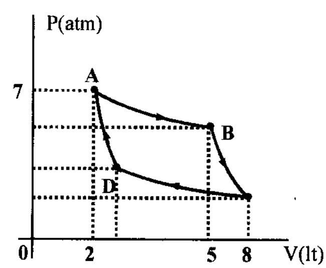


Fig.36

137. Un kilomol de gas perfecto realiza un ciclo compuesto de dos isocóras y dos isobaras, va-riando el volumen del gas desde V_1=25 m^3 hasta V_2=50 m^3 y la presión desde P_1=1 atm hasta P_2=2 atm. ¿Cuántas veces será menor el trabajo realizado en este ciclo que el que se obtiene con el ciclo de Carnot, cuyas isotermas corresponden a las temperaturas máxima y mínima del ciclo anterior, y sabiendo que en la expansión isotérmica el volu men del gas se duplica? (R=8,31 J/mol.^{0}K , 1 atm = 1,013.10^5 N/m^2 , 1 cal = 4,186 J)

a) 1,5 veces b) 1,8 veces c) 2,1 veces d) 2,4 veces e) 2,7 veces

138. Una máquina frigorífica ideal que funciona según el ciclo de Carnot inverso realiza ca da ci clo un trabajo de W=3,7.10^4 J. La máquina durante su funcionamiento toma calor de un cuerpo cuya temperatura es de T_F=-10^0 C y lo cede a otro cuerpo que tiene una temperatura de T_C=17^0 C. Hallar:

I) El rendimiento del ciclo.

a) 5,3 % b) 6,3 % c) 7,3 % d) 8,3 % e) 9,3 %

II) La cantidad de calor que se toma del cuerpo frío cada ciclo.

a) 361 kJ b) 363 kJ c) 365 kJ d) 367 kJ e) 369 kJ

III) La cantidad de calor que se cede al cuerpo caliente cada ciclo.

a) 390 kJ b) 392 kJ c) 394 kJ d) 396 kJ e) 398 kJ

139. Una máquina frigorífica ideal que funciona según el ciclo de Carnot inverso transmite el calor de un refrigerador con agua a 0^0 C a un hervidor con agua a 100^0 C. ¿Qué canti dad de agua habrá que helar en el refrigerador para convertir en vapor 1 kg de agua del hervidor ? (L_F = 335 kJ/kg , L_V = 2 260 kJ/kg)

a) 4,14 kg b) 4,34 kg c) 4,54 kg d) 4,74 kg e) 4,94 kg

140. Una máquina refrigeradora reversible extrae calor de dos fuentes (A) y (B) que están a las temperaturas de 250^0 K y 300^0 K enviando el calor a un sumidero (C). El calor ex traído de (A) es de 400 kJ y el trabajo realizado sobre la máquina para extraer el calor de cada una de las fuentes es de 400 kJ. Hallar la cantidad de calor (Q_C) enviada al su midero.

a) 1 500 kJ b) 1 600 kJ c) 1 700 kJ d) 1 800 kJ e) 1 900 kJ

141. Un refrigerador opera entre depósitos térmicos a 210^0 K y a 360^0 K, y absorbe 600 J a la temperatura inferior, si su eficiencia es la mitad de la de un refrigerador de Carnot, ¿Cuánto calor se cede al depósito de alta temperatura?

a) 718 J b) 728 J c) 738 J d) 748 J e) 758 J

142. Una máquina térmica en un ciclo de Carnot opera entre 71^0 C y 177^0 C. ¿Para qué tem peratura del foco caliente se duplica la eficiencia?

a) $611{,}52^0$ K b) $621{,}52^0$ K c) $631{,}52^0$ K d) $641{,}52^0$ K e) $651{,}52^0$ K

143. Un mol de un gas ideal monoatómico realiza un ciclo de Carnot entre 300^0 K y 600^0 K. Para el proceso isotérmico superior, el volumen aumenta desde 2 lt hasta 5 lt. Hallar:

I) El trabajo efectuado por el gas durante el ciclo.

a) 2 244,3 J b) 2 254,3 J c) 2 264,3 J d) 2 274,3 J e) 2 284,3 J

II) La razón del cambio de calor entre los procesos isotérmico superior e inferior.

a) 1,5 b) 2,0 c) 2,5 d) 3,0 e) 3,5

III) La eficiencia térmica.

a) 0,3 b) 0,4 c) 0,5 d) 0,6 e) 0,7

144. Dos máquinas de Carnot están conectados en serie entre dos focos térmicos a 1200^0 K y 300^0 K. Si la primera recibe calor a razón de 600 kW, produciendo 400 kW de potencia. Hallar la potencia producida por la segunda máquina y la temperatura a la que recibe calor

a) 70 kW, 500^0 K b) 30 kW, 500^0 K c) 60 kW, 350^0 K
d) 45 kW, 450^0 K e) 50 kW, 400^0 K

145.¿Cuál es la mínima cantidad de trabajo necesaria para extraer 10 cal de un cuerpo que está a la temperatura de -18^0 C cuando la temperatura ambiente es de 21^0 C?

a) 1,13 cal b) 1,23 cal c) 1,33 cal d) 1,43 cal e) 1,53 cal

146. En la Fig.37, se muestra dos máquinas refrigeradoras de Carnot con la misma oficiencia, conectadas en serie. Si la refrigeradora R_1 extrae del foco frío una potencia de 100 kW, hallar la potencia que consume la máquina refrigeradora R_2.

a) 135 kW b) 140 kW c) 145 kW d) 150 kW e) 155 kW

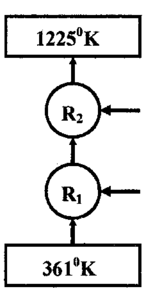


Fig.37

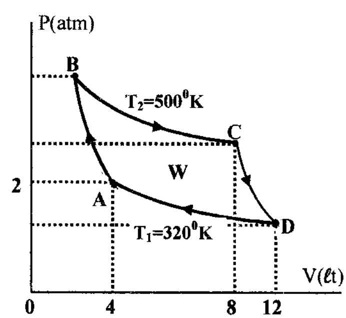


Fig.38

147. En la Fig.38, se llena aire mediante un ciclo de Carnot comenzando en el estado A. Los procesos BC y DA son isotérmicos y los procesos CD y AB son adiabáticos. Hallar el trabajo total realizado en el ciclo de Carnot. ($R=8,31$ J/mol.^{0}K, 1 atm$=1,013.10^5$ N/m^2)

a) 1 402 J b) 1 412 J c) 1 422 J d) 1 432 J e) 1 442 J

148. La eficiencia de un refrigerador es 1/3 de la de un refrigerador ideal de Carnot. Se requiere convertir en hielo 200 kg a 0^0 C. Si la temperatura ambiente es de 29^0 C. Hallar:

I) ¿Cuánto trabajo (W) se requiere para dicho proceso ($M=10^6$, 1 cal=4,186 J)?

a) 2,11 MJ b) 2,21 MJ c) 2,31 MJ d) 2,41 MJ e) 2,51 MJ

II) ¿Cuántas calorías (Q_C) se transfiere al medio ambiente ($L_F = 80$ cal/g)?

a) 13,5 Mcal b) 14,5 Mcal c) 15,5 Mcal d) 16,5 Mcal e) 17,5 Mcal

149. El hidrógeno efectúa un ciclo de Carnot. Hallar la eficiencia del ciclo, si durante la expansión adiabática:

I) El volumen del gas aumenta n = 2 veces.

a) 21,2 % b) 22,2 % c) 23,2 % d) 24,2 % e) 25,2 %

II) La presión disminuye n = 2 veces.

a) 15 % b) 16 % c) 17 % d) 18 % e) 19 %

150. En la Fig.39, un gas perfecto efectúa el ciclo formado por isotermas y adiabatas. Las temperaturas de los procesos isotérmicos son $T_1 = 900^0$ K, $T_2 = 600^0$ K y $T_3=300^0$ K. Hallar el rendimiento térmico del ciclo, si en cada expansión isotérmica el volumen del gas aumenta un mismo número de veces (k).

a) 40 % b) 45 % c) 50 % d) 55 % e) 60 %

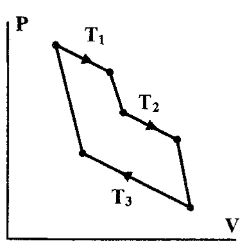


Fig.39

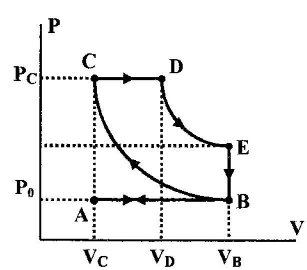


Fig.40

151. Una máquina de Carnot que trabaja en un ciclo de Carnot con un rendimiento de $\eta = 10\%$ se utiliza con los mismos depósitos térmicos que una máquina refrigeradora. Hallar su coeficiente de refrigeración (ε).

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

152. Hallar el rendimiento de un ciclo formado por dos isócoras y dos adiabatas, si en los límites del ciclo el volumen del gas perfecto (nitrógeno) varía n=10 veces.

a) 45 % b) 50 % c) 55 % d) 60 % e) 65 %

153. Hallar el rendimiento de un ciclo formado por dos isobaras y dos adiabatas, si en los límites del ciclo la presión varía n=4 veces. El gas utilizado es perfecto y diatómico ($\chi = 1{,}4$)

a) 30,7 % b) 32,7 % c) 34,7 % d) 36,7 % e) 38,7 %

154. Un gas perfecto diatómico ($\chi = 1{,}4$) realiza un ciclo formado por dos isocoras y dos isobaras. Hallar el rendimiento de este ciclo, si la temperatura absoluta del gas aumenta n=5 veces tanto durante el calentamiento isócoro como durante la expansión isobárica.

a) 14 % b) 17 % c) 20 % d) 23 % e) 26 %

155. Un gas perfecto efectúa un ciclo formado de una isócora, una adiabata y una isoterma. Hallar el rendimiento del ciclo, si la temperatura absoluta en sus límites varía n=3 veces, y el proceso isotérmico se realiza a la temperatura mínima del ciclo.

a) 30 % b) 35 % c) 40 % d) 45 % e) 50 %

156. Un gas perfecto efectúa un ciclo formado de una isócora, una adiabata y una isoterma. Hallar el rendimiento del ciclo, si la temperatura absoluta en sus límites varía n=7 veces, y el proceso isotérmico se realiza a la temperatura máxima del ciclo.

a) 48 % b) 52 % c) 56 % d) 60 % e) 64 %

157. Un gas perfecto diatómico ($\chi = 1{,}4$) efectúa un ciclo directo formado por una adiabata, una isobara y una isocora. Hallar el rendimiento del ciclo, si en el proceso adiabático el volumen del gas aumenta n=12 veces.

a) 51 % b) 53 % c) 55 % d) 57 % e) 59 %

158. Hallar el rendimiento de un ciclo formado de una isoterma, una isobara, y una isocora, si en el proceso isotérmico del gas ideal diatómico su volumen aumenta k=10 veces.

a) 28 % b) 31 % c) 34 % d) 37 % e) 40 %

159. Un gas perfecto diatómico ($\chi = 1{,}4$) realiza un ciclo formado por dos isocoras y dos isotermas. Hallar el rendimiento del ciclo, si durante el mismo el volumen varía k=4 veces, y la temperatura t= 6 veces.

a) 31,3 % b) 33,3 % c) 35,3 % d) 37,3 % e) 39,3 %

160. En la Fig.40, se muestra el ciclo de un motor Diesel de cuatro tiempos, siendo: I) AB el proceso de admisión de aire en el cilindro a la presión de P_0=1 atm, II) BC el proceso de compresión adiabática del aire hasta la presión P_C; III) al finalizar el tiempo de compresión del aire en el cilindro se inyecta el combustible, que al ponerse en contacto con el aire caliente se inflama y se quema, el émbolo se mueve hacia la derecha, primero por vía isobara (CD) y luego adiabáticamente (DE); IV) al final de la expansión adiabática se abre la válvula de escape y la presión desciende hasta P_0 (EB); y el émbolo se mueve hacia la izquierda y los gases de escape son expulsados del cilindro (BA). Probar que el rendimiento del motor Diesel, viene dado por: $\eta = 1-(\beta^{\chi}-1)/\chi\,\alpha^{\chi-1}(\beta-1)$, siendo, ($\beta$) y ($\alpha$) los grados de expansión isobárica y compresión adiabática, respectivamente.

161. Un motor Diesel tiene un grado de compresión adiabático igual a $\alpha = 16$ y un grado de expansión adiabático igual a $\xi = 6{,}4$. ¿Qué cantidad mínima de combustible consumirá por hora este motor si su potencia es de P=36,8 kW, el exponente politrópico de $\chi = 1{,}3$ y el valor calorífico de la gasolina de J=4,6.10^7 J/kg?

a) 4,7 kg b) 5,0 kg c) 5,3 kg d) 5,6 kg e) 5,9 kg

162. Una máquina de vapor de potencia P=14,7 kW consume cada hora m=8,1 kg de carbón de valor calorífico igual a J=3,3.10^7 J/kg. La temperatura de la caldera es de T_C=200^0 C y la del condensador de T_F=58^0 C. Hallar el rendimiento real de la máquina y el rendimiento de una máquina térmica ideal que funciona según el ciclo de Carnot entre las mismas temperaturas.

a) 22 % , 30 % b) 24 % , 30 % c) 20 % , 30 % d) 26 % , 30 % e)28%, 30%

163. Hallar la variación que experimenta la entropía al transformarse 10 g de hielo a -20^0 C en vapor a 100^0 C. (L_F=80 cal/g , L_V=540 cal/g, c_{HIELO}=0,5 cal/g.^{0}C , c_{AGUA}=1 cal/g.^{0}C)

a) $15\,\dfrac{cal}{^oK}$ b) $18\,\dfrac{cal}{^oK}$ c) $21\,\dfrac{cal}{^oK}$ d) $24\,\dfrac{cal}{^oK}$ e) $27\,\dfrac{cal}{^oK}$

164. Hallar el aumento de entropía correspondiente a la transformación de 1 g de agua a 0^0 C en vapor de agua a 100^0 C. (c_e=1 cal/g.^{0}C, L_V = 540 cal/g, 1 cal = 4,186 J)

a) 6,8 J/^{0}K b) 7,1 J/^{0}K c) 7,4 J/^{0}K d) 7,7 J/^{0}K e) 8,0 J/^{0}K

165. Hallar la variación que experimenta la entropía al fundirse 1 kg de hielo que se encontraba a la temperatura de 0^0 C. (L_F = 80 cal/g, 1 cal = 4,186 J)

a) $1{,}217\,\dfrac{kJ}{^oK}$ b) $1{,}227\,\dfrac{kJ}{^oK}$ c) $1{,}237\,\dfrac{kJ}{^oK}$ d) $1{,}247\,\dfrac{kJ}{^oK}$ e) $1{,}257\,\dfrac{kJ}{^oK}$

166. Sobre hielo que está a la temperatura de 0^0 C se vierten 640 g de plomo derretido a la temperatura de fusión. Hallar la variación que experimenta la entropía durante está transformación. (para el agua L_F=3,35.10^5 J/kg, para el plomo T_F= 327^0 C, L_F=2,26.10^4 J/kg, c_e=126 J/kg.^{0}C)

a) 59,1 J/^{0}K b) 62,1 J/^{0}K c) 65,1 J/^{0}K d) 68,1 J/^{0}K e) 71,1 J/^{0}K

167. Hallar la variación que experimenta la entropía cuando m=8 g de oxígeno que ocupaban el volumen de V_1 =10 lt a la temperatura de T_1 =80^0 C pasan a ocupar el volumen de V_2=40 lt a la temperatura de T_2 =300^0 C. (R = 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 5,0 J/^{0}K b) 5,2 J/^{0}K c) 5,4 J/^{0}K d) 5,6 J/^{0}K e) 5,8 J/^{0}K

168. Hallar la variación de la entropía que se observa cuando m = 6 g de hidrógeno que ocupaban un volumen de V_1 =20 lt a la presión de P_1 =1,5.10^5 N/m^2 pasan a ocupar un volumen de V_2 = 60 lt a la presión de P_2=1,0.10^5 N/m^2. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 70,6 J/^{0}K b) 72,6 J/^{0}K c) 74,6 J/^{0}K d) 76,6 J/^{0}K e) 78,6 J/^{0}K

169. Mediante un proceso isobárico se expanden 6,6 g de hidrógeno hasta duplicar su volumen. Hallar la variación que experimenta la entropía en este proceso. R=8,31 J/mol.^{0}K

a) 59,5 J/^{0}K b) 61,5 J/^{0}K c) 63,5 J/^{0}K d) 65,5 J/^{0}K e) 67,5 J/^{0}K

170. Hallar la variación de la entropía correspondiente a la expansión isobárica de 8 g de helio desde el volumen V_1 =10 lt hasta el volumen V_2 =25 lt. (R= 8,31 J/mol.^{0}K)

a) 30,1 J/^{0}K b) 32,1 J/^{0}K c) 34,1 J/^{0}K d) 36,1 J/^{0}K e) 38,1 J/^{0}K

171. 3,5 g de oxígeno a la presión de P=28 atm ocupan un volumen de V= 90 cm^3. Hallar la diferencia de temperaturas correspondientes al oxígeno real e ideal. (1 atm=1,013.10^5 N/m^2 R= 8,31 J/mol.^{0}K, a=1,36.10^5 kmol^2/N.m^4, b =3,16.10^{-2} kmol/m^3)

a) 2^0 C b) 4^0 C c) 6^0 C d) 8^0 C e) 10^0 C

172. Se mezclan 200 g de agua a la temperatura de 0^0 C con 50 g de agua a la temperatura de 50^0 C. Hallar el cambio en la entropía del agua.

a) $0{,}2\,\frac{\text{cal}}{^o\text{K}}$ b) $0{,}4\,\frac{\text{cal}}{^o\text{K}}$ c) $0{,}6\,\frac{\text{cal}}{^o\text{K}}$ d) $0{,}8\,\frac{\text{cal}}{^o\text{K}}$ e) $1{,}0\,\frac{\text{cal}}{^o\text{K}}$

173. Se calienta 1 kg de hielo desde -20^0 C hasta 120^0 C a la presión de 1 atm. Hallar el cambio en la entropía en este proceso. (L_F = 80 cal/g, L_V =540 cal/g, $c_{e,\,HIELO}$ = 0,5 cal/g.^{0}C, $c_{e,\,AGUA}$=1 cal/g.^{0}C, $c_{e,\,VAPOR}$ = 0,5 cal/g.^{0}C , 1 cal = 4,186 J)

a) 8 822 J/^{0}C b) 8 842 J/^{0}C c) 8 862 J/^{0}C d) 8 882 J/^{0}C e)8 902 J/^{0}C

174. El trabajo realizado por un gas ideal en un proceso de expansión isotérmica a la temperatura de T= 127^0 C es de W=1 200 J. Hallar el cambio en la entropía en este proceso.

a) 1 $J/^0K$ b) 2 $J/^0K$ c) 3 $J/^0K$ d) 4 $J/^0K$ e) 5 $J/^0K$

175. Al expandirse 8 g de helio, la razón de sus volúmenes es de $V_2/V_1=4$ y la de sus temperaturas $T_1/T_2=3$. Hallar el cambio en la entropía que experimenta el helio. (R=8,31 $J/mol.^0K$, $\chi = 1,4$)

a) –20,6 $J/^0K$ b) –22,6 $J/^0K$ c) –24,4 $J/^0K$ d) –26,4 $J/^0K$ e)–28,6 $J/^0K$

176. En un ciclo de Carnot el cambio de la entropía entre las dos adiabáticas es de 1 $kcal/^0C$, siendo la diferencia de temperaturas en las isotermas de 100^0 C.¿Qué cantidad de calor se transforma en trabajo en éste ciclo? ($M=10^6$, 1 cal $\approx$ 4,2)

a) 0,12 MJ b) 0,22 MJ c) 0,32 MJ d) 0,42 MJ e) 0,52 MJ

177. Para un proceso isocórico halle la variación de la entropía respecto de la energía interna (dS/dU), y para un proceso isotérmico hallar la variación de la entropía respecto del volumen (dS/dV).

a) T ; T/P b) P ; P/T c) 1/T ; P/T d) P/T ; T e) T/P ; P

178. Cinco moles de un gas monoatómico ideal ($\chi = 5/3$) experimentan una expansión adiabática reversible desde un volumen inicial de V_1 =24,0 lt y temperatura inicial de T_1 =31^0 C hasta un volumen final de V_2=40 lt. Hallar los cambios en la energía interna y en la entropía del gas. (R=8,31 $J/mol.^0K$)

a) -5 428 J ; 0 $J/^0K$ b) -5 468 ; 0 $J/^0K$ c) -5 428; 1 $J/^0K$
d) -5 468 J ; 1 $J/^0K$ e) -5 448 J ; 1 $J/^0K$

179.A bajas temperaturas, la capacidad calorífica de muchas sustancias cristalinas, viene dado por la ley de Debye: $C_V = A\,T^3$, siendo A una cte. Hallar el cambio en la entropía por mol de la sustancia, cuando esta cambia su temperatura desde $T_1 = 0^0$ K hasta T_2= 3^0 K.

a) 1A b) 3A c) 5 A d) 7A e) 9A

180. Un gas perfecto de exponente adiabático $\chi = 7/5$ efectúa un proceso, donde la dependencia de la presión (P) respecto del volumen (V), viene dado por: $P = P_0 - \alpha V$, siendo P_0 y α constantes positivas. ¿Para qué volumen la entropía del gas es máxima?

a) $\frac{12P_0}{7\alpha}$ b) $\frac{7P_0}{12\alpha}$ c) $\frac{5P_0}{7\alpha}$ d) $\frac{7P_0}{5\alpha}$ e) $\frac{2P_0}{5\alpha}$

SOLUCIONARIO

Solución: 01

- Según teoría, la energía interna es:

$$U = U_0 + Q - W$$

$$U = 100\,J + 400\,J - (-200\,J)$$

$$U = 700\,J \qquad (e)$$

Solución: 02

I) Según teoría, el trabajo a presión constante es:

$$W = P\,\Delta V = P\,\mu \qquad (a)$$

II) La variación de energía interna es:

$$\Delta U = Q - W = Q - P\mu \qquad (c)$$

III) La variación de temperatura del gas, se halla de la ley general de los gases, así:

$$P\,V = n\,R\,T$$

$$\Delta(PV) = \Delta(n\,R\,T)$$

$$P\,\Delta V = n\,R\,\Delta T$$

$$\Delta T = P\,\mu / R \qquad (b)$$

Solución: 03

I) El trabajo efectuado, es igual, al área bajo la curva A-B:

$$W = P\,\Delta V$$

$$W = (20)(3 - 1)$$

$$W = 40\,J \qquad (d)$$

II) El calor suministrado al gas de A-B es:

$$Q = W + U_B - U_A$$

$$Q = 40\,J + 15\,J - 0\,J$$

$$Q = 55\,J \qquad (e)$$

III) La energía interna en C es:

$$U_C = Q - W + U_B$$

$$U_C = 45\,J - 0 + 15\,J$$

$$U_C = 60\,J \qquad (c)$$

IV) El trabajo realizado de C a A, es igual, al área bajo la curva C-A:

$$W = \text{área trapecio}$$

$$W = \left(\frac{10 + 20}{2}\right)(1 - 3)$$

$$W = -30\,J \qquad (b)$$

V) El calor extraído de C a A es:

$$Q = W - U_A - U_C$$

$$Q = -30\,J - 0\,J - 60\,J$$

$$Q = -90\,J \qquad (e)$$

VI) El trabajo total en el ciclo, es igual, al área encerrada por la curva ABCA, así:

$$W = \text{área triángulo ABC}$$

$$W = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(10)$$

$$W = 10\,J\ (*) \qquad (a)$$

El trabajo total, también, es igual a la suma de los trabajos parciales, así:

$$W = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to A}$$

$$W = 40J + 0J - 30J$$

$$W = 10J$$

Cuando el proceso del ciclo cerrado, está en sentido horario, el trabajo neto es positivo, caso contrario negativo.

VII) El rendimiento térmico es:

$$R = \frac{\text{trabajo neto}}{\text{calor suministrado}}$$

$$R = \frac{10\,J}{55\,J + 45\,J}$$

$$R = 10\ \% \qquad \text{(a)}$$

Solución: 04

I) El rendimiento de éste motor es:

$$R = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

$$R = 1 - \frac{(27 + 273)}{(727 + 273)}$$

$$R = 1 - \frac{300}{1000} = \frac{7}{10}$$

En porcentaje el rendimiento es (*):

$$R = 70\ \% \qquad \text{(e)}$$

En el cálculo del rendimiento, se debe tomar siempre, la temperatura en gra-. dos kelvin.

II) El trabajo realizado es:

$$W = R\,Q_C$$

$$W = (0{,}70)(10\ 000\ \text{cal})$$

$$W = 7\ 000\ \text{cal} \qquad \text{(d)}$$

III) El calor cedido al foco frío es:

$$Q_F = Q_C - W$$

$$Q_F = 10\ 000 - 7\ 000$$

$$Q_F = 3\ 000\ \text{cal} \qquad \text{(b)}$$

Solución: 05

a) La velocidad cuadrática media es:

$$v_C = \sqrt{\frac{3R.T}{M}}$$

Verdadero, pues, a menor masa mole cular (M), gas liviano, le corresponde mayor velocidad.

b) La energía cinética media es:

$$< E_C > = \frac{3}{2} k.T$$

Falso, pues, la energía cinética media, es independiente de las masas molecu lares.

c) Falso por a).

d) Falso por a.)

e) Falso, las moléculas alcanzan el reposo absoluto a la temperatura de 0 ^{0}K.

Solución: 06

- De la primera ley de la termodinámica:

$$Q = W + \Delta U$$

$$100\ \text{cal} = -210\ J + 630\ J$$

$$1\ \text{cal} = \frac{420}{100}\ J$$

$$\clubsuit\ 1\ \text{cal} \approx 4{,}2\ J$$

Solución: 07

- El incremento de su energía interna es:

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Delta U = (100 \text{x} 4{,}186\ J) - 100\ J$$

$$\Delta U = 318{,}6\ J \qquad \text{(E)}$$

Solución: 08

I) En los estados 1-2, ley de Charles:

$$V_2 = (\frac{T_2}{T_1})V_1$$

$$V_2 = (3\ lt)(\frac{500^oK}{300^0K})$$

$$V_2 = 5\ lt$$

En los estados 3-4, ley de Charles:

$$T_3 = T_4\ (V_3 / V_4)$$

$$T_3 = (150^0K)(\frac{5\ lt}{3\ lt})$$

$$T_3 = 250^oK$$

En los estados 2 - 3, ley de Gay-Lussac:

$$P_3 = P_2\ (\frac{T_3}{T_2})$$

$$P_3 = (6\ atm)(\frac{250^0K}{500^0K})$$

$$P_3 = 3\ atm$$

II) El trabajo total, es igual al área encerrada por la curva ($1lt = 10^{-3}\ m^3$):

$$W = (P_1 - P_4)(V_3 - V_4)$$

$$W = (6-3).10^5(5-3).10^{-3}$$

$$W = 600\ J$$

Solución: 09

I) En la trayectoria xay, la variación de energía interna es:

$$(U_y - U_x) = Q - W$$

$$(U_y - U_x) = 100\ cal - 40\ cal$$

$$(U_y - U_x) = 60\ cal$$

En la trayectoria xby, el calor es:

$$Q = W + (U_y - U_x)$$

$$Q = 10\ cal + 60\ cal$$

$$Q = 70\ cal \qquad \text{(c)}$$

el sistema recibe calor ($Q > 0$).

II) En la trayectoria xcy, el trabajo es:

$$W = Q - (U_y - U_x)$$

$$W = 80\ cal - 60\ cal$$

$$W = 60\ cal \qquad \text{(b)}$$

el sistema realiza trabajo ($W > 0$)

III) En la trayectoria yx, el calor es:

$$Q = W + (U_x - U_y)$$

$$Q = -30\ cal + (-60\ cal)$$

$$Q = -90\ cal \qquad \text{(e)}$$

el sistema libera energía ($Q < 0$).

IV) Para el proceso xa, el calor es:

$$Q = W + U_a - U_x$$

$$Q = 0 + 45\ cal - 0\ cal$$

$$Q = 45\ cal$$

el sistema recibe calor ($Q > 0$).

Para el proceso ay, el calor es:

$$Q = 40\ cal - 15\ cal$$

$$Q = 25\ cal \qquad \text{(e)}$$

el sistema recibe calor ($Q > 0$)

Solución: 10

I) La variación de la energía interna es:

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Delta U = (500)(4{,}186\ J) - 40\ J$$

$$\Delta U = 2\ 053\ J \qquad (b)$$

II) La variación de la energía interna es:

$$\Delta U = (300)(4{,}186\ J) - (-419\ J)$$

$$\Delta U = 1\ 674{,}8\ J \qquad (e)$$

III) La variación de la energía interna es:

$$\Delta U = (-1\ 500)(4{,}186\ J) - 0\ J$$

$$\Delta U = -6\ 279\ J \qquad (e)$$

Solución: 11

I) La variación de la energía interna es:

$$\Delta U = Q - W = 0 - 5\ J$$

$$\Delta U = -5\ J \qquad (c)$$

II) La variación de la energía interna es:

$$\Delta U = 0 - (-100\ J) = 100\ J$$

Solución: 12

- De la 1ra. ley de la termodinámica:

$$Q = W + \Delta U = P\Delta V + 0$$

$$\Delta V = \frac{Q}{P} = \frac{(5.10^4)(4{,}186)}{7{,}2.10^4}$$

$$\clubsuit\ \Delta V = 2{,}906\ m^3 \qquad (e)$$

Solución: 13

- El trabajo exterior en la expansión es:

$$W = P.(V - V_0)$$

$$W = (2.10^5)(30 - 3).10^{-3}$$

$$\clubsuit\ W = 5\ 400\ J \qquad (d)$$

Solución: 14

- De la ley de Charles, el volumen final es:

$$V = V_o\left(\frac{T}{T_o}\right) = (3\ lt)\left(\frac{227 + 273}{27 + 273}\right)$$

$$V = 5\ lt$$

Luego, el trabajo que realiza el gas es:

$$W = P.(V - V_0)$$

$$W = (2.10^5)(5 - 3).10^{-3}$$

$$\clubsuit\ W = 400\ J$$

Solución: 15

I) De 1 a 2, proceso isobárico.

$$W = P(V_2 - V_1) = (4.10^5)(4 - 1)$$

$$W = 12.10^5 J \qquad (b)$$

II) De 2 a 3, proceso isotérmico.

$$W = \text{área trapecio}$$

$$W = \left(\frac{2 + 4}{2}\right).10^5(1 - 4)$$

$$W = -9.10^5 J \qquad (d)$$

III) De 3 a 1, proceso isocórico.

$$W = P.(V_1 - V_3) = P(1 - 1)$$

$$W = 0\ J \qquad (a)$$

IV) En todo el ciclo, el trabajo es:

$$W = \text{área triángulo}$$

$$W = \frac{1}{2}(4-1)(4-2).10^5$$

$$W = 3.10^5 J \qquad (c)$$

También, el trabajo es la suma de los trabajos parciales, así:

$$W = W_{1\to 2} + W_{2\to 3} + W_{3\to 1}$$

$$W = 12.10^5 J - 9.10^5 J + 0J$$

$$W = 3.10^5 J$$

V) Cuando se invierte el ciclo los trabajos cambian de signo, así, el trabajo neto será, -3.10^5 J.

Solución: 16

I) De 1 a 4, proceso isocórico.

$$W = P.\Delta V = P\,(0)$$

$$W = 0\ J \qquad (a)$$

II) De 4 a 3, proceso isobárico.

$$W = P(V_3 - V_4) = (1.10^5)(6-2)$$

$$W = 4.10^5 J \qquad (d)$$

III) De 3 a 2, proceso isocórico.

$$W = P\,\Delta V = P\,(0) = 0\ J \qquad (a)$$

IV) De 2 a 1, proceso isobárico.

$$W = P(V_1 - V_2) = (4.10^5)(2-6)$$

$$W = -16.10^5 J \qquad (d)$$

V) En todo el ciclo, el trabajo es:

$$W = \text{área rectángulo 1-2-3-4.}$$

$$W = (2-6)(4-1).10^5$$

$$W = -12.10^5 J \qquad (b)$$

El signo se toma negativo (-), debido a que el sentido del ciclo es antihorario.
El trabajo total, también, es la suma de los trabajos parciales, así:

$$W = W_{1\to 4} + W_{4\to 3} + W_{3\to 2} + W_{2\to 1}$$

$$W = 0 + 4.10^5 + 0 - 16.10^5$$

$$W = -12.10^5 J$$

VI) Cuando se invierte el sentido del ciclo, el signo de los trabajos cambia, así por ejemplo el trabajo total, en este caso será 12.10^5 J.

Solución: 17

I) De 1 a 2, proceso isotérmico.

$$W = \text{área trapecio}$$

$$W = (\frac{2+8}{2}).10^5(8-2)$$

$$W = 3.10^6 J \qquad (c)$$

II) De 2 a 3, proceso isocórico.

$$W = P.\Delta V = P(0)$$

$$W = 0 \qquad (a)$$

III) De 3 a 1, proceso isobárico.

$$W = P(V_1 - V_3) = (2.10^5)(2-8)$$

$$W = -1{,}2.10^6 J \qquad (b)$$

IV) En todo el ciclo, el trabajo es:

$$W = \text{área triángulo}$$

$$W = \frac{1}{2}(8-2)(8-2).10^5$$

$$W = 1{,}8.10^6\,J \qquad \text{(e)}$$

El trabajo es positivo, pues, el sentido de circulación del ciclo es horario.
También, el trabajo total, es igual a la suma de los trabajos parciales, así:

$$W = W_{1\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to1}$$

$$W = 3.10^6 + 0 - 1{,}2.10^6$$

$$W = 1{,}8.10^6\,J$$

Cuando se invierte el ciclo, el signo de los trabajos cambia.

Solución: 18

- De la primera ley de la termodinámica:

$$W = Q - \Delta U \qquad (1)$$

La variación de la energía interna y la cantidad de calor entregada son:

$$\Delta U = C_V(T_2 - T_1) \qquad (2)$$

$$Q = C_P(T_2 - T_1)$$

$$(T_2 - T_1) = \frac{Q}{C_P} \qquad (3)$$

De (3) y (2) en (1), obtenemos:

$$W = \frac{C_P - C_V}{C_P}Q \qquad (4)$$

Los calores molares a, P=cte y V=cte, son

$$C_P = \frac{\gamma}{2}\frac{m}{M}R \quad , \quad C_V = (\frac{\gamma}{2}+1)\frac{m}{M}R$$

Luego, sustituyendo en (4), obtenemos:

$$W = \frac{2}{\gamma+2}Q = \frac{2}{5+2}(500)$$

$$\clubsuit\ W = 142{,}9\text{ cal} = 598\text{ J} \quad \text{(E)}$$

Solución: 19

- El proceso es isocórico, V=cte, la variación de la energía interna es:

$$\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = \frac{\gamma}{2}(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2})R\,\Delta T$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}(\frac{20.10^{-3}}{28} + \frac{32.10^{-3}}{32})(8{,}31.10^3)(28)$$

$$\clubsuit\ \Delta U = 997{,}2\text{ J} \quad \text{(E)}$$

Solución: 20

- El proceso es isobárico, P=cte.

El volumen inicial del oxígeno es:

$$V_1 = \frac{m}{M}\frac{R.T_1}{P_1}$$

$$V_1 = \frac{10.10^{-3}}{32}\frac{(8{,}31.10^3)(283)}{3.10^5}$$

$$V_1 = 2{,}45.10^{-3}m^3$$

La temperatura final del oxígeno es:

$$T_2 = (\frac{V_2}{V_1})T_1$$

$$T_2 = \frac{(10.10^{-3})}{(2{,}45.10^{-3})}(283)$$

$$T_2 = 1\,155\ {}^0K$$

I) La cantidad de calor recibido por el gas es:

$$Q = C_P(T_2 - T_1)$$

$$Q = (\frac{\gamma}{2}+1)\frac{m}{M}R\,(T_2 - T_1)$$

$$Q = (\frac{5}{2}+1)\frac{10.10^{-3}}{32}(8{,}31.10^3)\bullet\ (1\,155 - 283)$$

$$Q = 7\ 926\ J \qquad \text{B}$$

II) La variación de la energía interna es:

$$\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = \frac{\gamma}{2}\frac{m}{M}R\,(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{10.10^{-3}}{32}(8{,}31.10^3)(1\,155 - 283)$$

$$\Delta U = 5\ 661\ J \qquad \text{B}$$

III) El trabajo realizado por el gas es:

$$W = P\,\Delta V$$

$$W = (3.10^5)(10 - 2{,}45).10^{-3}$$

$$W = 2\ 265\ J \qquad \text{E}$$

Solución: 21

- El proceso es isobárico, P=cte.

La temperatura final del gas es:

$$T_2 = (\frac{V_2}{V_1})\,T_1$$

$$T_2 = (\frac{2V}{V})(27 + 273)$$

$$T_2 = 600\ ^0K$$

I) El trabajo realizado por el gas es:

$$W = P\,(V_2 - V_1)$$

$$W = \frac{m}{M}R\,(T_2 - T_1)$$

$$W = \frac{6{,}5.10^{-3}}{2}(8{,}31.10^3)(600 - 300)$$

$$W = 8{,}1.10^3\,J \qquad \text{A}$$

II) La variación de la energía interna es:

$$\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = \frac{\gamma}{2}\frac{m}{M}R\,(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{6{,}5.10^{-3}}{2}(8{,}31.10^3)(600 - 300)$$

$$\Delta U = 20{,}2.10^3\,J \qquad \text{A}$$

III) La cantidad de calor suministrado al gas es:

$$Q = C_P\,(T_2 - T_1)$$

$$Q = (\frac{\gamma}{2}+1)\frac{m}{M}R\,(T_2 - T_1)$$

$$Q = (\frac{5}{2}+1)\frac{6{,}5.10^{-3}}{2}(8{,}31.10^3)\bullet\ (600-300)$$

$$Q = 28{,}3.10^3\,J \qquad \text{A}$$

Solución: 22

- El anhídrido carbónico (CO_2) es poliatómico ($\gamma = 6$).

I) La variación de su energía interna es:

$$\Delta U = \frac{\gamma}{2}n\,R\,(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = \frac{6}{2}(2)(8{,}31.10^3)(50)$$

$$\Delta U = 2\ 493\ kJ \qquad \text{E}$$

II) El trabajo de expansión del gas es:

$$W = P(V_2 - V_1)$$

$$W = n\,R\,(T_2 - T_1)$$

$$W = (2)(8{,}31.10^3)(50)$$

$$W = 831\ \text{kJ} \qquad \text{E}$$

III.) La cantidad de calor suministrado es:

$$Q = C_P(T_2 - T_1)$$

$$Q = (\frac{\gamma}{2} + 1)\,n\,R\,(T_2 - T_1)$$

$$Q = (\frac{6}{2} + 1)(2)(8{,}31.10^3)(50)$$

$$Q = 3\ 324\ \text{kJ} \qquad \text{B}$$

Solución: 23

- Cálculo del coeficiente de Poisson:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\frac{\gamma}{2}+1)\frac{m}{M}R}{\frac{\gamma}{2}\frac{m}{M}R}$$

$$\chi = \frac{\gamma + 2}{\gamma} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5}$$

La temperatura final del gas es:

$$T_2 = (\frac{V_1}{V_2})^{\chi - 1} T_1$$

$$T_2 = (\frac{2V_2}{V_2})^{\frac{7}{5}-1}(300)$$

$$T_2 = 395{,}8\ ^0K = 123\ ^0C \qquad \text{E}$$

La presión final del gas diatómico es:

$$P_2 = (\frac{V_1}{V_2})^{\chi} P_1$$

$$P_2 = (\frac{2V_2}{V_2})^{\frac{7}{5}}(2.10^6)$$

$$\clubsuit\ P_2 = 5{,}3.10^6\ N/m^2 \qquad \text{B}$$

Solución: 24

- El rendimiento de la máquina de vapor viene dado por:

$$R = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{50+273}{250+273}$$

$$R = 0{,}382$$

Entonces, el calor de la caldera por unidad de tiempo es:

$$Q_C = \frac{P}{R} = \frac{(8)(735\ J/s)}{0{,}382}$$

Este calor, es el 30 % de la máquina térmi ca ideal, de modo que, el calor que se debe suministrar a la caldera es:

$$Q = \frac{Q_C}{0{,}30}$$

$$Q = \frac{(8)(735/4{,}186)\ cal/s}{(0{,}382)(0{,}30)}$$

$$\clubsuit\ Q = 12\ 257{,}26\ \frac{cal}{s} \qquad \text{E}$$

Solución: 25

- El rendimiento de la máquina es:

$$R = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{0+273}{819+273}$$

$$R = 0{,}75$$

Así, el trabajo para fundir el hielo es:

$$W = R.Q_C = (0{,}75)(3200)$$

$$W = 2\ 400\ \text{cal}$$

Luego, la masa de hielo fundido es:

$$♣\ m = \frac{2\ 400\ cal}{80\ cal/g} = 30\ g \quad \text{(C)}$$

Solución: 26

- El rendimiento de la máquina es:

$$R = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{300}{500}$$

$$R = 2/5$$

En porcentaje el rendimiento es del 40 %.
La cantidad de calor recibida es:

$$Q_C = \frac{W}{R} = \frac{1\ 000\ J}{2/5}$$

$$Q_C = 2\ 500\ J$$

La cantidad de calor cedida es:

$$Q_F = Q_C - W$$

$$Q_F = 2\ 500\ J - 1\ 000\ J$$

$$♣\ Q_F = 1\ 500\ J \quad \text{(B)}$$

Solución: 27

- La potencia producida por los 250 g de gasolina es:

$$P' = (11\ 000)(4{,}186)(\frac{250}{3{,}6.10^3})$$

$$P' = 3\ 197{,}64\ J/s$$

El rendimiento real de la máquina es:

$$R = \frac{735\ J/s}{3197{,}64\ J/s} = 0{,}2298$$

El rendimiento ideal de la máquina es:

$$R = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{800}{1\ 800}$$

$$R \approx 0{,}56 \approx 56\ \% \quad \text{(B)}$$

Solución: 28

I) De la ecuación de los gases ideales hallemos la presión inicial, así:

$$P_0 V_0 = n\ R\ T_0$$

$$P_0(5) = (3)(0{,}08206)(273 + 30)$$

$$P_0 = 14{,}92\ atm$$

Como el proceso es isotérmico ($T=T_0$), entonces de la ecuación de los gases ideales para dos estados, obtenemos la presión final, así:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P\ V}{T_0}$$

$$(14{,}92)(5) = P\,(20)$$

$$P = 3{,}73\ atm \quad \text{(A)}$$

II) El trabajo efectuado por el gas, para un proceso isotérmico, viene dado por:

$$W = n\ R T_0 \ell n(V/V_o)$$

$$W = (3)(8{,}314)(303)\ell n(\frac{20}{5})$$

$$♣\ W = 10\ 476{,}82\ J \quad \text{(A)}$$

Solución: 29

- Hallemos el coeficiente de Poisson (χ) teniendo en cuenta que para un gas diatómico ($\gamma = 5$), así:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\frac{\gamma}{2} + 1)R}{\frac{\gamma}{2}R}$$

$$\chi = \frac{5+2}{5} = 1{,}4$$

Luego, de la ecuación de estado para un proceso adiabático de un gas ideal, obtenemos la presión final, así:

$$\frac{P_0}{P} = (\frac{V}{V_0})^{\chi}$$

$$P = (\frac{V_0}{V})^{\chi} P_0 = (\frac{V_0}{2V_0})^{1,4} P_0$$

$$♣\ P = 0,38\, P_0 \qquad Ⓔ$$

Solución: 30

I) Como el volumen es constante (W= 0), entonces de la primera ley de la termodiná mica, se tiene:

$$\Delta Q = W + \Delta U = n C_V \Delta T_V$$

$$\Delta Q = n\, \frac{\gamma}{2} R\, \Delta T_V$$

$$100 = (2)(\frac{3}{2})(1{,}986)\, \Delta T_V$$

$$\Delta T_V = 16{,}78\ ^0C \qquad Ⓔ$$

II) A presión constante se realiza trabajo, de modo que la primera ley de la termodi námica, queda así:

$$\Delta Q = P\, \Delta V + n\, C_P \Delta T_P$$

$$\Delta Q = n\, R\, \Delta T_P + n\, (\frac{\gamma}{2} + 1)\, R\, \Delta T_P$$

$$\Delta Q = n\, (\frac{\gamma}{2} + 2)\, R\, \Delta T_P$$

$$100 = (2)(\frac{3}{2} + 1)(1{,}986)\, \Delta T_P$$

$$♣\ \Delta T_P = 10{,}07\ ^0C \qquad Ⓐ$$

Solución: 31

I) El volumen final que ocupa el gas i deal, hallamos de la expresión del trabajo e fectuado por el gas a temperatura constan te, así:

$$W = n\, R\, T\, \ell n(\frac{V}{V_0})$$

$$V = V_0\, e^{\frac{W}{n\,RT}}$$

$$V = (10)\, e^{\frac{400}{(10)(8{,}314)(373)}}$$

$$♣\ V = 10{,}13\ \ell t \qquad Ⓐ$$

II) De la ecuación de los gases ideales, ha llemos la presión inicial, así:

$$P_0 V_0 = n\, RT_0$$

$$P_0(10) = (10)(0{,}08206)(373)$$

$$P_0 = 30{,}61\ \text{atm}$$

Luego, de la ecuación de los gases ideales para dos estados, obtenemos la presión fi nal, así:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P\, V}{T_0}$$

$$(30{,}61)(10) = P\,(10{,}13)$$

$$P = 30{,}22\ \text{atm} \qquad Ⓑ$$

III) Como el proceso es a volumen cons tante el trabajo es nulo (W= 0), luego, la primera ley de la termodinámica, queda así:

$$\Delta Q = W + \Delta U$$

$$\Delta Q = n\, C_V \Delta T_V$$

$$\Delta Q = n\, \frac{\gamma}{2} R\, \Delta T_V$$

$$400 = (5)(\frac{3}{2})(8{,}314)\, \Delta T_V$$

$$\Delta T_V = 6{,}41\ ^0C \qquad Ⓒ$$

Nota

La variación de temperaturas en las escalas centígrada y kelvin es la misma.

Solución: 32

- Para un proceso adiabático, la relación entre las presiones y volúmenes correspondientes al estado inicial y final del gas ideal viene dado por:

$$\frac{P}{P_0} = (\frac{V_0}{V})^{\chi} \quad => \quad P = \frac{P_0 V_0^{\chi}}{V^{\chi}}$$

Luego, el trabajo realizado sobre el gas en el proceso de compresión adiabático es:

$$\int_0^W dW = \int_{V_0}^{V} P\, dV$$

$$W = \int_{V_0}^{V} \frac{P_0 V_0^{\chi}}{V^{\chi}}\, dV$$

$$W = \frac{P_0 V_0^{\chi}}{1-\chi}(V^{1-\chi})\Big]_{V_0}^{V}$$

$$W = \frac{P_0 V_0^{\chi}}{1-\chi}(V^{1-\chi} - V_0^{1-\chi})$$

$$W = \frac{1}{\chi - 1}[P_0 V_0 - P_0(\frac{V_0}{V})^{\chi} V]$$

$$W = \frac{1}{\chi - 1}(P_0 V_0 - PV)$$

$$W = \frac{1}{(1{,}4-1)}[(10)(1{,}5)-(4)(3)]$$

$$W = 7{,}5\ \ell t.atm = (7{,}5)(101{,}316\ J)$$

$$\clubsuit\ W = 759{,}87\ J \qquad \text{(E)}$$

Solución: 33

- El calor específico medio para el intervalo de temperaturas [0; T] es:

$$< c > = \frac{1}{T}\int_0^T (A + B T^2)\, dT$$

$$< c > = \frac{1}{T}(AT + \frac{1}{3}B T^3)\ \Big]_0^T$$

$$< c > = A + \frac{1}{3} B T^2$$

De otro lado, evaluamos la expresión dada, en T=T/2, así:

$$c = A + B(\frac{T}{2})^2 = A + \frac{1}{4}T^2$$

Luego, la diferencia entre el calor específico medio y el calor específico en T=T/2 es:

$$\Delta c = A + \frac{1}{3}B T^2 - (A + \frac{1}{4}B T^2)$$

$$\Delta c = \frac{1}{12}B T^2 = \frac{1}{12}B(24)^2$$

$$\clubsuit\ \Delta c = 48\,B \qquad \text{(D)}$$

Solución: 34

- La relación entre calor específico (c_e) y capacidad calorífica (C) es:

$$C = M c_e$$

Como el argón es monoatómico ($\gamma = 3$), entonces de la expresión anterior, la masa molecular (M) del gas es:

$$(\frac{\gamma}{2}) R = M c_e$$

$$(\frac{3}{2})(8{,}314) = M(0{,}075)(4{,}186)$$

$$M = 39{,}7\ g/mol$$

Luego, la masa de cada molécula del gas ideal argón es:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{39{,}7\ g/mol}{6{,}023.10^{23} moleculas/mol}$$

$$\clubsuit\ m = 6{,}61.10^{-23} g \qquad \text{(D)}$$

Solución: 35

- Como el helio es monoatómico ($\gamma = 3$) su masa molecular es:

$$M = m\,N_A$$

$$M = (6{,}66.10^{-24})(6{,}023.10^{23})$$

$$M = 4\ g/mol$$

Luego, el calor específico del gas de helio a volumen constante es:

$$c_V = \frac{\gamma}{2}\frac{R}{M} = (\frac{3}{2})(\frac{8{,}314}{4})$$

$$c_V = 3{,}12\ \frac{J}{g.^oK} = 3\ 120\ \frac{J}{kg.^oK}$$

$$\text{ó}\ \ c_V \approx 0{,}75\ \frac{cal}{g.^oK} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 36

- El porcentaje que representa la energía interna del gas (ΔU), respecto de la energía suministrada (ΔQ)l, viene dado por:

$$\eta = (\frac{\Delta U}{\Delta Q})(100)$$

$$\eta = [\frac{n(\gamma/2)R\,\Delta T}{n(\gamma/2+1)R\,\Delta T}](100)$$

$$\eta = (\frac{\gamma}{\gamma+2})(100) = (\frac{5}{5+2})(100)$$

$$\clubsuit\ \eta = 71{,}4\ \% \qquad \text{(D)}$$

Solución: 37

- Según teoría, la velocidad de propagación del sonido en un gas, viene dado por:

$$v = [\frac{\chi\,P}{\rho}]^{1/2} \qquad (1)$$

siendo, (χ) el exponente adiabático, (P) la presión, y (ρ) la densidad.

Ahora, de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P\,V = \frac{m}{M} R\,T$$

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R\,T}{M} \qquad (2)$$

De (2) en (1), y teniendo en cuenta que el oxígeno es diatómico ($\chi = 1{,}4$), se tiene:

$$v = [\frac{\chi\,R\,T}{M}]^{1/2}$$

$$v = [\frac{(1{,}4)(8{,}31.10^3)(300)}{32}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ v = 330{,}3\ \frac{m}{s} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 38

- Recordemos que la velocidad de propagación del sonido en un gas ideal, viene dado por:

$$v = (\frac{\chi\,R\,T}{M})^{1/2}$$

Como el aire es diatómico ($\chi = 1{,}4$), entonces, sus velocidades de propagación a las temperaturas de 0^0 C y 1^0 C, son:

$$v = [\frac{(1{,}4)(8{,}31.10^3)(273)}{29}]^{1/2}$$

$$v = 330{,}94\ m/s$$

$$v' = [\frac{(1{,}4)(8{,}31.10^3)(274)}{29}]^{1/2}$$

$$v' = 331,54\ m/s$$

Luego, el aumento en la velocidad de propagación del sonido, por cada grado centígrado que aumenta la temperatura del gas es:

$$\Delta v = v' - v$$

$$\clubsuit\ \Delta v = 0,6\ \frac{m}{s} \qquad \text{C}$$

¿La variación de la velocidad, cambia si la temperatura inicial se toma diferente a 0 ^{0}C?

Solución: 39

• El trabajo realizado sobre el aire en el proceso isotérmico, viene dado por:

$$W_{iso} = n\,R T_0\,\ell n(\frac{V}{V_0})$$

El trabajo realizado sobre el aire en el proceso adiabático, según el prob.(32) viene dado por:

$$W_{adia} = \frac{n\,R T_0}{\chi - 1}[1 - (\frac{V_0}{V})^{\chi-1}]$$

Luego, la razón del trabajo en el proceso isotérmico al trabajo en el proceso adiabático es:

$$\frac{W_{adia}}{W_{iso}} = \frac{\frac{n\,RT_0}{\chi-1}[1-(\frac{V_0}{V})^{\chi-1}]}{n\,RT_0\,\ell n(\frac{V}{V_0})}$$

$$\frac{W_{adia}}{W_{iso}} = \frac{[1-(\frac{V_0}{V})^{\chi-1}]}{(\chi-1)\,\ell n(\frac{V}{V_0})}$$

$$\frac{W_{adia}}{W_{iso}} = \frac{[1-(2)^{1,4-1}]}{(1,4-1)\,\ell n(0,5)}$$

$$\clubsuit\ \frac{W_{adia}}{W_{iso}} = 1,15 \qquad \text{A}$$

Solución: 40

• Según teoría, el trabajo realizado por el gas para un proceso adiabático es:

$$W = \frac{m}{M}\frac{RT_0}{(\chi-1)}(1-\frac{T}{T_0})$$

$$W = (\frac{10.10^{-3}}{28})[\frac{(8,31.10^3)(323)}{1,4-1}](1-\frac{283}{323})$$

$$\clubsuit\ W \approx 297\ J \qquad \text{D}$$

Solución: 41

• Según teoría, la expresión que relaciona las presiones y volúmenes correspondientes al estado inicial y final en un proceso adiabático es:

$$\frac{T_0}{T} = (\frac{V}{V_0})^{\chi-1}$$

$$T = (\frac{V_0}{V})^{\chi-1}T_0$$

$$T = (\frac{V_0}{2V_0})^{1,4-1}(273)$$

$$\clubsuit\ T \approx 207\ ^0K \qquad \text{D}$$

Solución: 42

• De la ecuación de los gases ideales, para dos estados, se tiene:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = (\frac{P_1}{P_2})(\frac{V_1}{V_2})$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Poisson, tenemos:

$$\frac{T_1}{T_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi-1}$$

$$(\frac{P_1}{P_2})(\frac{V_1}{V_2}) = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi-1}$$

$$P_1 = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi} P_2 = (\frac{1}{7,5})^{1,4}(1,6.10^6)$$

$$\clubsuit\ P_1 = 0,953.10^5 \frac{N}{m^2} = 0,94 \text{ atm} \quad \text{(B)}$$

Solución: 43

- Como el proceso es isotérmico, la ecuación de estado del gas es:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad => \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

Sustituyendo está expresión en la ecuación del trabajo realizado por el gas en el proceso de expansión isotérmica, se tiene:

$$W = \frac{m}{M} R T \ \ell n(\frac{V_2}{V_1})$$

$$W = \frac{m}{M} R T \ \ell n(\frac{P_1}{P_2})$$

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{\frac{MW}{mRT}} = e^{\frac{(28)(860)}{(10)(8,31)(290)}}$$

$$\clubsuit\ \frac{P_1}{P_2} \approx 2,72 \text{ veces} \quad \text{(D)}$$

Solución: 44

- De la ecuación de Poisson, se tiene la relación entre temperaturas y volúmenes:

$$\frac{T_1}{T_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi-1}$$

Sustituyendo esta expresión en la razón entre las velocidades cuadráticas medias, se tiene:

$$\frac{< v_C >_1}{< v_C >_2} = \frac{[3RT_1/M]^{1/2}}{[3RT_2/M]^{1/2}}$$

$$\frac{< v_C >_1}{< v_C >_2} = (\frac{T_1}{T_2})^{1/2}$$

$$\frac{< v_C >_1}{< v_C >_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\frac{\chi-1}{2}} = (2)^{\frac{1,4-1}{2}}$$

$$\clubsuit\ \frac{< v_C >_1}{< v_C >_2} \approx 1,15 \text{ veces} \quad \text{(B)}$$

Solución: 45

- De la ecuación de Poisson, se tiene la relación de temperaturas y presiones:

$$\frac{T_1}{T_2} = (\frac{P_1}{P_2})^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

$$T_2 = (\frac{P_2}{P_1})^{\frac{\chi-1}{\chi}} T_1 = (\frac{35}{1})^{\frac{1,4-1}{1,4}} (313)$$

$$\clubsuit\ T_2 = 864,4\ ^0K = 591\ ^0C \quad \text{(C)}$$

Solución: 46

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos la masa de metano que se quema en cada hora, así:

$$PV_0 = \frac{m}{M} R T_0 \quad => \quad m = \frac{V_0 M P}{R T_0}$$

La cantidad de calor entregada por la combustión del metano en cada hora es:

$$Q_E = \xi m = \xi \frac{V_0 M P}{R T_0} \qquad (1)$$

De otro lado, la cantidad de calor consumida por el agua durante el tiempo (t) es:

$$Q_C = mc_e(T - T_0)$$

$$Q_C = \rho V c_e (T - T_0)$$

$$Q_C = \rho(\frac{\pi}{4}D^2 v\,t)\,c_e(T - T_0) \qquad (2)$$

Por dato: $Q_C = 0,6\ Q_E$, luego de (1) y (2):

$$\frac{\pi}{4}\rho\,D^2 v\,t\,c_e(T - T_0) = \frac{3}{5}\frac{V_0 M P \xi}{R T_0}$$

$$T = T_0 + \frac{12 V_0 M P \xi}{5\pi\rho\,D^2 v\,t\,c_e R T_0}$$

$$T = 11^0C + \frac{(12)(1,8)(16)}{(5\pi)(10^3)(10^{-2})^2(0,5)} \bullet$$

$$\frac{(1,22.10^5)(55.10^6)}{(3,6.10^3)(4186)(8,31.10^3)(284)}$$

D

♣ $T = 11\ ^0C + 83\ ^0C = 94\ ^0C$

Nota

La presión (P) al interior del tubo de salida del gas se mantiene constante.

Solución: 47

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos el número de moles por unidad de volumen, así:

$$P V = n R T \quad => \quad \frac{n}{V} = \frac{P}{R T}$$

De modo que, el número de moléculas por unidad de volumen es:

$$N = \frac{n}{V}N_A = \frac{P N_A}{R T}$$

Luego, la razón de los recorridos libres medios es:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1/\sqrt{2}\pi D^2 N}{1/\sqrt{2}\pi D^2 N_0} = \frac{N_0}{N}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{n_0 N_A}{n N_A} = \frac{P_0 / R\,T_0}{P / R\,T}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = (\frac{P_0}{P})(\frac{T}{T_0}) \qquad (1)$$

A) Para el proceso isotérmico, T_0=T, y P=P_0/2:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = (\frac{P_0}{P_0/2})(\frac{T_0}{T_0})$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 2 \text{ veces}$$

B

B) Según la ecuación de Poisson, la relación entre presiones y temperaturas para un proceso adiabático es:

$$\frac{T}{T_0} = (\frac{P}{P_0})^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

Sustituyendo (T/T_0) en la ec.(1), se tiene:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = (\frac{P_0}{P})(\frac{P}{P_0})^{\frac{\chi-1}{\chi}} = (\frac{P_0}{P})(\frac{P_0}{P})^{\frac{1-\chi}{\chi}}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = (\frac{P_0}{P})^{\frac{1}{\chi}} = (2)^{\frac{1}{1,4}}$$

♣ $\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1,64$ veces

D

Solución: 48

• El trabajo de compresión para un proceso adiabático, viene dado por:

$$W = \frac{P_0 V_0 (T_0 - T)}{(\chi - 1)\,T_0}$$

$$-46,4 = \frac{(1,013.10^5)(10^{-4})(273 - T)}{(1,4 - 1)(273)}$$

♣ $T \approx 773\ ^oK$

D

Solución: 49

- De la ecuación de Poisson, cuando el gas se expande adiabáticamente, se tiene:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

$$T_2=2^{-\frac{\chi-1}{\chi}}\,T_1$$

De otro lado, cuando el gas se calienta a volumen constante, se tiene:

$$\frac{P_2}{T_2}=\frac{P_3}{T_3}$$

$$\frac{1}{2^{-\frac{\chi-1}{\chi}}\,T_1}=\frac{1{,}22}{T_1} \;=>\; 2^{\frac{\chi-1}{\chi}}=1{,}22$$

$$\frac{\chi-1}{\chi}\,\ell n(2)=\ell n(1{,}22)$$

$$\chi=\frac{\ell n(2)}{\ell n(2)-\ell n(1{,}22)}$$

♣ $\chi=1{,}40$ Ⓒ

Solución: 50

- De la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P_0V_0=n\,RT_0 \;=>\; \frac{P_0V_0}{T_0}=n\,R$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación del trabajo para un proceso adiabático, se tiene:

$$W=\frac{P_0V_0(T-T_0)}{(\chi-1)\,T_0}$$

$$W=\frac{n\,R\,\Delta T}{(\chi-1)} \;=>\; \Delta T=\frac{(\chi-1)\,W}{n\,R}$$

$$\Delta T=\frac{(1{,}4-1)(146.10^3)}{(1)(8{,}31.10^3)}$$

♣ $\Delta T\approx 7\ {}^0C$ Ⓓ

Nota

La variación de temperaturas en las escalas centígrada y kelvin es la misma.

Solución: 51

- Como el proceso es isotérmico (T_1=T_2) de la ecuación de gases ideales, se tiene:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2} \;=>\; \frac{V_2}{V_1}=\frac{P_1}{P_2}$$

Sustituyendo está expresión en la ecuación del trabajo para un proceso isotérmico, se tiene:

$$W=\frac{m}{M}R\,T\,\ell n\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$W=\frac{m}{M}R\,T\,\ell n\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$W=\left(\frac{10{,}5}{28}\right)(8{,}31)(250)\,\ell n\left(\frac{2{,}5}{1}\right)$$

♣ $W\approx 714\ J$ Ⓒ

Solución: 52

- De la ecuación de Poisson, se tiene:

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} \;=>\; \frac{T_2}{313}=\left(\frac{35}{1}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}$$

$$T_2=864{,}4^oK=(864{,}4-273)\,^oC$$

♣ $T_2=591\ {}^0C$ Ⓑ

Solución: 53

- Hallemos el exponente adiabático (χ) en función de los grados de libertad (γ), así:

$$\chi=\frac{C_P}{C_V}=\frac{((\gamma/2)+1)\,R}{(\gamma/2)\,R}$$

$$\chi = \frac{\gamma + 2}{\gamma}$$

De otro lado, de la ecuación de Poisson, se tiene:

$$\frac{T_1}{T_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi-1} \Rightarrow 1{,}32 = 2^{\chi-1}$$

$$\ell n(1{,}32) = (\chi - 1)\,\ell n(2)$$

$$\chi = \frac{\gamma + 2}{\gamma} = 1 + \frac{\ell n(1{,}32)}{\ell n(2)}$$

$$\gamma = \frac{2\,\ell n(2)}{\ell n(1{,}32)}$$

$$♣\ \gamma \approx 5 \qquad \text{C}$$

Solución: 54

- Primero, calculemos los volúmenes y presiones correspondientes al estado inicial (1) y final (2), así:

$$V_1 = (10.10^{-4})(25.10^{-2}) = 25.10^{-5}\,m^3$$

$$V_2 = (10.10^{-4})(11{,}6.10^{-2}) = 11{,}6.10^{-5}\,m^3$$

$$P_1 = 1{,}013.10^5\,N/m^2$$

$$P_2 = 1{,}013.10^5 + \frac{196{,}2}{10.10^{-4}}$$

$$P_2 = 2{,}975.10^5\,N/m^2$$

Sustituyendo estas cantidades en la ecuación de Poisson, se tiene:

$$\frac{P_1}{P_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi}$$

$$\frac{1{,}013.10^5}{2{,}975.10^5} = (\frac{11{,}6.10^{-5}}{25.10^{-5}})^{\chi}$$

$$0{,}34 = 0{,}464^{\chi}$$

$$♣\ \chi = \frac{\ell n(0{,}34)}{\ell n(0{,}464)} = 1{,}40 \qquad \text{C}$$

Solución: 55

- De la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P\,V = n\,R\,T \Rightarrow P\,\Delta V = n\,R\,\Delta T$$

$$n\,\Delta T = P\,\Delta V / R \qquad (1)$$

De otro lado, la expresión del trabajo para un proceso isobárico, viene dado por:

$$W = P\,\Delta V \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la expresión de la cantidad de calor que se suministro al gas, obtenemos:

$$Q = n\,C_P \Delta T = (\frac{\gamma}{2} + 1)\,R\,\frac{P\,\Delta V}{R}$$

$$Q = (\frac{\gamma}{2} + 1)\,W = (\frac{5}{2} + 1)(142{,}8)$$

$$♣\ Q \approx 500\ J \qquad \text{C}$$

Solución: 56

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos el número de moles por unidad de volumen, así:

$$P\,V = n\,R\,T \Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{P}{R\,T}$$

Así, el número de moléculas por unidad de volumen es:

$$N = (\frac{n}{V})\,N_A = \frac{P\,N_A}{R\,T}$$

Sustituyendo (N) en la expresión del recorrido libre medio, se tiene:

$$< \lambda > = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\,D^2 N}$$

$$<\lambda>=\frac{R\,T}{\sqrt{2}\pi D^2 P N_A}$$

$$<\lambda>=\frac{(8{,}31.10^3)(323)}{\sqrt{2}\pi)(2{,}3.10^{-10})^2(10^{-3})(133{,}3)}\bullet\frac{1}{(6{,}023.10^{26})}$$

$$\clubsuit\ <\lambda>=0{,}142\text{ m}$$ Ⓔ

Solución: 57

- De las ecuaciones de Poisson, se tiene:

$$\frac{P_2}{P_1}=(\frac{V_1}{V_2})^{\chi} \qquad (1)$$

$$\frac{T_2}{T_1}=(\frac{P_2}{P_1})^{\frac{\chi-1}{\chi}} \qquad (2)$$

De otro lado, como el proceso es isocórico (V_2=V_3), entonces de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$\frac{P_2 V_2}{T_2}=\frac{P_3 V_3}{T_3}$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{P_2}{P_0} \qquad (3)$$

Igualando (2) con (3), tenemos:

$$\frac{P_2}{P_0}=(\frac{P_2}{P_1})^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

$$P_2=\frac{P_0^{\chi}}{P_1^{\chi-1}}=\frac{(1)^{1,4}}{(0{,}5)^{1,4-1}}$$

$$P_2=1{,}32\text{ atm}$$

Despejando en (1) V_2, y sustituyendo P_2:

$$V_2=(\frac{P_1}{P_2})^{\frac{1}{\chi}}V_1=(\frac{0{,}5}{1{,}32})^{\frac{1}{1,4}}(0{,}5)$$

$$\clubsuit\ V_2=0{,}25\ \ell t$$ Ⓔ

Solución: 58

- De la ecuación de Poisson, hallemos la temperatura final, así:

$$\frac{T_2}{T_1}=(\frac{V_1}{V_2})^{\chi-1}$$

$$T_2=(\frac{V_1}{5V_1})^{1,4-1}(273)$$

$$T_2=143{,}4\ {}^0K$$

Luego, la variación de la energía interna del gas es:

$$\Delta U=n\frac{\gamma}{2}R\,(T_2-T_1)$$

$$\Delta U=(1)(\frac{5}{2})(8{,}31.10^3)(143{,}4-273)$$

$$\Delta U=-2\,692{,}3.10^3\text{ J}$$

$$\clubsuit\ \Delta U\approx-2{,}69.10^6\text{J}$$ Ⓓ

Solución: 59

- Según teoría, el número medio de choques por segundo que experimentan las moléculas del gas, viene dado por:

$$<z>=\frac{<v>}{<\lambda>}$$

$$<z>=\frac{(8\,RT/\pi\,M)^{1/2}}{<\lambda>}$$

$$<z>=\frac{[(8)(8{,}31.10^3)(273)/(\pi)(32)]^{1/2}}{9{,}5.10^{-8}}$$

$$<z>\approx4{,}5.10^9\text{ choques/s}$$ Ⓓ

Solución: 60

- El número de moléculas de nitrógeno por unidad de volumen es:

$$N = \frac{m\,N_A}{M\,V}$$

$$N = \frac{(0{,}5.10^{-3})(6{,}023.10^{26})}{(28)(100.10^{-6})}$$

$$N = 10{,}8.10^{25}\ \frac{\text{moleculas}}{m^3}$$

Luego, el recorrido libre medio que experimentan las moléculas de nitrógeno es:

$$<\lambda>= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\,D^2 N}$$

$$<\lambda>= \frac{1}{(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-10})^2(10{,}8.10^{25})}$$

$$\clubsuit\ <\lambda>= 23.10^{-9}\,m \quad \text{(B)}$$

Solución: 61

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos el número de moles por unidad de volumen, así:

$$P\,V = n\,R\,T \quad => \quad \frac{n}{V} = \frac{P}{R\,T}$$

De modo que, el número de moléculas por unidad de volumen es:

$$N = (\frac{n}{V})N_A = \frac{P\,N_A}{R\,T}$$

Luego, para que las moléculas no experimenten choques entre sí, su recorrido libre medio debe ser mayor ó igual al diámetro del recipiente, esto es:

$$<\lambda>\geq D \quad => \quad \frac{1}{\sqrt{2}\pi\,d^2 N} \geq D$$

$$N = \frac{PN_A}{RT} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 D}$$

$$P \leq \frac{R\,T}{\sqrt{2}\pi\,d^2 D\,N_A}$$

$$P \leq \frac{(8{,}31.10^3)(273)}{(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-10})^2(10.10^{-2})(6{,}023.10^{26})}$$

$$\clubsuit\ P \leq 94{,}2.10^{-3}\ \frac{N}{m^2} \quad \text{(B)}$$

Solución: 62

- Primero, hallemos el diámetro del recipiente esférico, así:

$$\frac{\pi}{6}D^3 = V \quad => \quad D = (\frac{6}{\pi})^{1/3}10^{-1}$$

$$D = 0{,}124\ m$$

Ahora, el número de moléculas de nitrógeno por unidad de volumen es:

$$N = \frac{n\,N_A}{V} = \frac{m\,N_A}{M\,V}$$

De otro lado, por dato el recorrido libre medio es mayor que el diámetro del recipiente esto es:

$$<\lambda>= D \quad => \quad \frac{1}{\sqrt{2}\pi\,d^2 N} \geq D$$

$$\frac{M\,V}{\sqrt{2}\pi\,d^2 m\,N_A} \geq D$$

$$\rho = \frac{m}{V} \leq \frac{M}{\sqrt{2}\pi\,d^2 N_A D}$$

$$\rho \leq \frac{28}{(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-10})^2(0{,}124)(6{,}023.10^{26})}$$

$$\clubsuit\ \rho \leq 0{,}94.10^{-6}\ \frac{kg}{m^3} \quad \text{(D)}$$

Solución: 63

- El coeficiente de difusión de las moléculas de hidrógeno, viene dado por:

$$D = \frac{1}{3}<v><\lambda>$$

$$D = \frac{1}{3}(\frac{8RT}{\pi M})^{1/2} < \lambda >$$

$$D = \frac{1}{3}[\frac{(8)(8{,}31.10^3)(273)}{(\pi)(2)}]^{1/2}(1{,}6.10^{-7})$$

$$\clubsuit\ D = 91.10^{-6}\ m^2/s \quad \text{C}$$

Solución: 64

• De la ecuación de los gases ideales, despejemos la presión, así:

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$$

Sustituyendo (P) en la expresión del trabajo, tenemos:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

$$W = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dv}{V}$$

$$W = nRT\,\ell n(V)\Big|_{V_1}^{V_2}$$

$$\clubsuit\ W = nRT\,\ell n(\frac{V_2}{V_1})$$

Solución: 65

• Como el proceso es adiabático, no hay transferencia de calor (dQ = 0), entonces de la primera ley de termodinámica, se tiene:

$$dQ = dW + dU$$

$$dW = -dU = -\frac{\gamma}{2} n R\,dT \qquad (1)$$

También de la ecuación de los gases ideales el volumen es:

$$V = \frac{nRT}{P} \qquad (2)$$

De otro lado, diferenciando la ecuación de los gases ideales, y teniendo en cuenta que el trabajo elemental es dW=PdV, tenemos:

$$PV = nRT$$

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT$$

$$dW + V\,dP = nR\,dT$$

De (1) y (2), tenemos:

$$-\frac{\gamma}{2} nR\,dT + \frac{nRT}{P}dP = nR\,dT$$

$$\frac{T}{P}dP = (\frac{\gamma}{2}+1)\,dT$$

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} = (\frac{\gamma}{2}+1)\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}$$

$$\ell n(\frac{P_2}{P_1}) = (\frac{\gamma}{2}+1)\,\ell n(\frac{T_2}{T_1})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{\gamma+2}{2}}$$

Ahora, encontremos una relación entre el exponente adiabático (χ) y los grados de libertad (γ), así:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\frac{\gamma}{2}+1)R}{\frac{\gamma}{2}R}$$

$$\chi = \frac{\gamma+2}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{2}{\chi-1}$$

$$\frac{\gamma+2}{2} = \frac{\chi}{\chi-1}$$

Con esto la expresión para las presiones y temperaturas, queda así:

$$\frac{P_2}{P_1} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{\chi}{\chi-1}}$$

$$♣ \quad \frac{T_2}{T_1} = (\frac{P_2}{P_1})^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

Solución: 66

• Para un proceso adiabático, la relación entre las presiones y volúmenes correspondientes al estado inicial y final del gas ideal, viene dado por:

$$\frac{P}{P_0} = (\frac{V_0}{V})^{\chi} \quad => \quad P = \frac{P_0 V_0^{\chi}}{V^{\chi}}$$

Luego, el trabajo realizado sobre el gas en el proceso de compresión adiabática es:

$$\int_0^W dW = \int_{V_0}^{V} P\, dV$$

$$W = \int_{V_0}^{V} \frac{P_0 V_0^{\chi}}{V^{\chi}} dV$$

$$W = \frac{P_0 V_0^{\chi}}{1-\chi} (V^{1-\chi})\Big]_{V_0}^{V}$$

$$W = \frac{P_0 V_0^{\chi}}{1-\chi} (V^{1-\chi} - V_0^{1-\chi})$$

$$W = \frac{1}{\chi - 1}[P_0 V_0 - P_0(\frac{V_0}{V})^{\chi} V]$$

$$♣ \quad W = \frac{1}{\chi - 1}(P_0 V_0 - P\,V)$$

Solución: 67

• El número de moléculas de helio por unidad de volumen es:

$$N = (\frac{n}{V})\, N_A = \frac{P\, N_A}{R\,T}$$

De modo que, el recorrido libre medio que experimentan las moléculas de helio es:

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi D^2 N}$$

$$<\lambda> = \frac{R\,T}{\sqrt{2}\pi D^2 P\, N_A}$$

$$<\lambda> = \frac{(8{,}31.10^3)(273)}{(\sqrt{2}\pi)(2.10^{-10})^2(1{,}013.10^5)} \cdot \frac{1}{(6{,}023.10^{26})}$$

$$<\lambda> = 2{,}09.10^{-7}\,m$$

De otro lado, la velocidad aritmética media de las moléculas de helio es:

$$<v> = (\frac{8\,R\,T}{\pi\, M})^{1/2}$$

$$<v> = [\frac{(8)(8{,}31.10^3)(273)}{(\pi)(4)}]^{1/2}$$

$$<v> = 1201{,}8\ m/s$$

Luego, el coeficiente de difusión para las moléculas de helio es:

$$D = \frac{1}{3} <v><\lambda>$$

$$D = (\frac{1}{3})(1201{,}8)(2{,}09.10^{-7})$$

$$D = 83{,}7.10^{-6} \frac{m^2}{s} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 68

• Primero calculemos el coeficiente de difusión de las moléculas de nitrógeno, así:

$$D = \frac{1}{3} <v><\lambda>$$

$$D = \frac{1}{3}(\frac{8\,R\,T}{\pi\, M})^{1/2} <\lambda>$$

$$D = (\frac{1}{3})[\frac{(8)(8,31.10^3)(300)}{(\pi)(28)}]^{1/2}(10^{-7})$$

$$D = 1,59.10^{-5}\frac{m^2}{s}$$

Luego, la cantidad de nitrógeno que pasa por difusión a través de la superficie es:

$$m = -D\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\,\Delta t$$

$$m = -(1,59.10^{-5})(-1,26)(10^2.10^{-4})(10)$$

$$\clubsuit\; m = 2.10^{-6}\text{kg} = 2\text{ mg}\quad B$$

Solución: 69

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos la densidad del gas, así:

$$P\,V = \frac{m}{M}RT \;\Rightarrow\; \rho = \frac{m}{V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

Luego, el coeficiente de rozamiento interno del nitrógeno en C.N. es:

$$\eta = \frac{1}{3} < v >< \lambda > \rho$$

$$\eta = \frac{1}{3}D\frac{M\,P}{R\,T}$$

$$\eta = \frac{(0,142.10^{-4})(28)(1,013.10^5)}{(3)(8,31.10^3)(273)}$$

$$\clubsuit\; \eta = 18.10^{-6}\frac{N.s}{m^2}\quad E$$

Solución: 70

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos la densidad del gas, así:

$$P\,V = \frac{m}{M}RT \;\Rightarrow\; \rho = \frac{m}{V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

Con esto, calculemos el recorrido libre medio de las moléculas del gas, a partir de:

$$\eta = \frac{1}{3} < v >< \lambda > \rho$$

$$\eta = \frac{1}{3}(\frac{8RT}{\pi M})^{1/2} < \lambda > \frac{M\,P}{R\,T}$$

$$\eta = \frac{1}{3}(\frac{8M}{\pi RT})^{1/2} < \lambda > P$$

$$< \lambda > = \frac{3\eta}{P}(\frac{\pi RT}{8M})^{1/2} \qquad (1)$$

De otro lado, la expresión del recorrido libre medio de las moléculas es:

$$< \lambda > = \frac{1}{\sqrt{2}\pi D^2 N}$$

$$< \lambda > = \frac{RT}{\sqrt{2}\pi D^2 P N_A} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), y despejando D^2:

$$D^2 = \frac{(8M\,RT)^{1/2}}{3\sqrt{2}\,\pi^{3/2}\eta\,N_A}$$

$$D^2 = \frac{[(8)(32)(8,31.10^3)(273)]^{1/2}}{(3\sqrt{2}\pi^{3/2})(18,8.10^{-6})(6,023.10^{26})}$$

$$D^2 = 9.10^{-20}$$

$$\clubsuit\; D = 3.10^{-10}\text{m}\quad C$$

Solución: 71

- El volumen inicial que ocupa 1 kg de agua líquida, a 0^0 C es:

$$V_1 = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{10^3} = 0,001\text{ m}^3$$

Así, el trabajo realizado en la transformación del agua en vapor de agua, a presión constante es:

$$W = P(V_2 - V_1)$$

$$W = (1{,}013.10^5)(0{,}836 - 0{,}001)$$

$$W = 84{,}6.10^3 \, J$$

De otro lado, el calor utilizado en la transformación del agua líquida en vapor de agua es:

$$Q = m\,L_V = (10^3)(540) \text{ cal}$$

$$Q = (54.10^4)(4{,}186 \text{ J})$$

$$Q = 2{,}26.10^6 \text{ J}$$

Luego, el porcentaje que representa el trabajo (W), respecto del calor (Q) es:

$$\eta = (\frac{W}{Q})(100) = (\frac{8{,}46.10^4}{2{,}26.10^6})(100)$$

$$\clubsuit \ \eta = 3{,}74 \ \%$$ Ⓒ

Solución: 72

- Como la masa molecular del agua es 18 g/mol, entonces la masa de 1 mol es:

$$m = n\,M = (1)(18) = 18 \text{ g}$$

Así, el volumen inicial que ocupa el mol de agua líquida es:

$$V_1 = \frac{m}{\rho} = \frac{18}{1} = 18 \text{ cm}^3$$

$$V_1 = 18.10^{-6} m^3$$

Ahora, se sabe que 1 mol de un gas (vapor) en condiciones normales ocupa un volumen de V_1=22,4.10^{-3} m^3, entonces, de la ecuación de los gases ideales para $P_1 = P_2$, obtenemos el volumen final (V_2), así:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{P_1(22.4.10^{-3})}{273} = \frac{P_1 V_2}{273 + 100}$$

$$V_2 = 30\ 605.10^{-6} m^3$$

Así, el trabajo realizado en la expansión de 1 mol de vapor de agua, a presión constante es:

$$W = P(V_2 - V_1)$$

$$W = (1{,}013.10^5)(30\ 605 - 18).10^{-6}$$

$$W = 3\ 098{,}5 \text{ J}$$

De otro lado, el calor utilizado en la transformación de 1 mol de agua líquida (18 g) en vapor de agua es:

$$Q = m\,L_V = (18)(540) \text{ cal}$$

$$Q = (9\ 720)(4{,}186 \text{ J})$$

$$Q = 40\ 687{,}9 \text{ J}$$

De modo que, el aumento de la energía interna en el proceso de transformación de 1 mol de agua líquida en 1 mol de vapor de agua es:

$$Q = W + \Delta U$$

$$\Delta U = 40\ 687{,}9 - 3\ 098{,}5$$

$$\Delta U = 37\ 589{,}4 \text{ J}$$

Luego, el porcentaje que representa (ΔU) respecto de (Q) es:

$$\eta = (\frac{\Delta U}{Q})(100)$$

$$\eta = (\frac{37\ 589{,}4}{40\ 687{,}9})(100)$$

$$\clubsuit\ \eta \approx 92{,}4\,\%$$ Ⓑ

Solución: 73

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos la expresión del trabajo, a presión constante, así:

$$P\,V = n\,RT \;\;=>\;\; P\Delta V = n\,R\Delta T$$

$$W = n\,R\Delta T$$

Sustituyendo en la primera ley de la termodinámica, las expresiones del calor (Q), el trabajo (W) y la variación de la energía interna (ΔU), se tiene:

$$Q = W + \Delta U$$

$$n\,C_P\Delta T = n\,R\,\Delta T + n\,C_V\Delta T$$

$$\clubsuit\ C_P - C_V = R$$

Solución: 74

- Dividiendo la velocidad media entre la velocidad cuadrática media, se tiene:

$$\frac{<v>}{<v_C>} = \frac{(8\,RT/\pi\,M)^{1/2}}{(3\,RT/M)^{1/2}}$$

$$<v> = (\frac{8}{3\,\pi})^{1/2} <v_C>$$

Luego, el número medio de choques por segundo que experimentan las moléculas es:

$$<z> = \frac{<v>}{<\lambda>} = \frac{<v_C>}{<\lambda>}(\frac{8}{3\pi})^{1/2}$$

$$<z> = \frac{(500)(8/3\pi)^{1/2}}{5.10^{-6}}$$

$$\clubsuit\ <z> = 92.10^{6}s^{-1}$$ Ⓔ

Solución: 75

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos la densidad del gas, así:

$$P\,V = \frac{m}{M}RT \;\;=>\;\; \rho = \frac{m}{V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

Sustituyendo (ρ) y la velocidad media en la expresión del coeficiente de rozamiento interno del gas, se tiene:

$$\eta = \frac{1}{3} <v><\lambda> \rho$$

$$\eta = \frac{1}{3}(\frac{8\,RT}{\pi\,M})^{1/2} <\lambda> (\frac{M\,P}{R\,T})$$

$$<\lambda> = \frac{3\,\eta}{P}(\frac{\pi\,RT}{8\,M})^{1/2}$$

$$<\lambda> = \frac{(3)(1{,}3.10^{-5})}{(760)(133{,}3)}[\frac{(\pi)(8{,}31.10^{3})(273)}{(8)(4)}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\ <\lambda> = 0{,}18.10^{-6}m$$ Ⓐ

Solución: 76

- Calculemos la velocidad media <v> y el recorrido libre medio $<\lambda>$, así:

$$<v> = (\frac{8\,RT}{\pi\,M})^{1/2}$$

$$<v> = [\frac{(8)(8{,}31.10^{3})(283)}{(\pi)(29)}]^{1/2}$$

$$<v> = 454{,}4\ m/s$$

$$<\lambda> = \frac{R\,T}{\sqrt{2}\pi\,d^2 P\,N_A}$$

$$<\lambda> = \frac{(8{,}31.10^{3})(283)}{(\sqrt{2}\pi)(3.10^{-10})^2(760)(133{,}3)} \bullet \frac{1}{(6{,}023.10^{26})}$$

$$<\lambda> = 9{,}6.10^{-8}m$$

Ahora, de la ecuación de los gases ideales, hallemos la densidad del aire, así:

$$P\,V = \frac{m}{M} R\,T \quad => \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

$$\rho = \frac{(29)(760)(133{,}3)}{(8{,}31.10^3)(283)}$$

$$\rho = 1{,}249\ \frac{kg}{m^3}$$

Así, el coeficiente de difusión de las molé culas de aire es:

$$D = \frac{1}{3} < v >< \lambda >$$

$$D = (\frac{1}{3})(454{,}4)(9{,}6.10^{-8})$$

$$D = 15.10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$$

A su vez, el coeficiente de rozamiento in terno de las moléculas de aire es:

$$\eta = \frac{1}{3} < v >< \lambda > \rho = D\,\rho$$

$$\eta = (15.10^{-6})(1{,}249)$$

$$♣\ \eta = 18{,}7.10^{-6}\ \frac{kg}{m} \qquad (A)$$

Solución: 77

• La razón de los coeficientes de difusión de las moléculas de anhídrido carbónico (D_1) a nitrógeno (D_2) es:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{< v_1 >< \lambda_1 > /3}{< v_2 >< \lambda_2 > /3}$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{(\frac{8\,RT}{\pi\,M_1})^{1/2}(\frac{RT}{\sqrt{2}\pi\, d_1^2 P\, N_A})}{(\frac{8\,RT}{\pi\,M_2})^{1/2}(\frac{RT}{\sqrt{2}\pi\, d_2^2 P\, N_A})}$$

$$\frac{D_1}{D_2} = (\frac{M_2}{M_1})^{1/2}(\frac{d_2}{d_1})^2$$

$$\frac{D_1}{D_2} = (\frac{28}{44})^{1/2}(\frac{0{,}37.10^{-9}}{0{,}40.10^{-9}})^2$$

$$♣\ \frac{D_1}{D_2} = 0{,}68 \qquad (D)$$

Solución: 78

• La razón de los coeficientes de roza miento interno, correspondientes al anhídri do carbónico (η_1) y nitrógeno (η_2) es:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{< v_1 >< \lambda_1 > \rho_1 /3}{< v_2 >< \lambda_2 > \rho_2 /3}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = (\frac{D_1}{D_2})(\frac{\rho_1}{\rho_2}) = (\frac{D_1}{D_2})(\frac{M_1 P/RT)}{M_2 P/RT)}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = (\frac{D_1}{D_2})(\frac{M_1}{M_2}) = (0{,}68)(\frac{44}{28})$$

$$♣\ \frac{\eta_1}{\eta_2} \approx 1{,}1 \qquad (A)$$

Solución: 79

• Para un proceso isotérmico, de la ecua ción de los gases ideales, se tiene:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad => \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

Así, el trabajo realizado en el proceso iso térmico es:

$$W = n\,RT\,\ell n(V_2/V_1)$$

$$W = n\,RT\,\ell n(\frac{P_1}{P_2})$$

$$W = (10)(8{,}31)(273)\,\ell n(\frac{1}{0{,}1})$$

$$W = 52{,}2\ kJ$$

Finalmente, como el proceso es isotérmico, $\Delta U = 0$, entonces, de la primera ley de la termodinámica, se tiene:

$$Q = W + \Delta U$$

$$\clubsuit\ Q = 52{,}2\ kJ \qquad (B)$$

Solución: 80

• La razón de los coeficientes de rozamiento interno de las moléculas de oxígeno (η_1) y nitrógeno (η_2) es:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{<v_1><\lambda_1>\rho_1/3}{<v_2><\lambda_2>\rho_2/3}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = (\frac{M_1}{M_2})^{1/2}(\frac{d_2}{d_1})^2$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = (\frac{32}{28})^{1/2}(\frac{3.10^{-10}}{3.10^{-10}})^2$$

$$\clubsuit\ \frac{\eta_1}{\eta_2} \approx 1{,}07 \text{ veces} \qquad (D)$$

Solución: 81

• El primer proceso es isocórico (V=cte.) la temperatura final es:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad => \quad \frac{2}{250} = \frac{4}{T_2}$$

$$T_2 = 500\ ^oK$$

Ahora, de la ecuación de los gases ideales, calculemos el número de moles, así:

$$P_1 V_1 = n R T_1$$

$$n = \frac{(2)(1{,}013.10^5)(5.10^{-3})}{(8{,}31.10^3)(250)}$$

$$n = 0{,}488 \text{ moles}$$

En el primer proceso el trabajo es cero (W=0), de modo que, el calor entregado es igual a la variación de la energía interna, esto es:

$$Q_1 = \Delta U = n C_V \Delta T$$

$$Q_1 = (0{,}488)(21)(500 - 250)$$

$$Q_1 = 2\ 562\ J$$

En el segundo proceso, la presión se mantiene constante, de modo que, el calor entregado es:

$$Q_2 = n\, C_P \Delta T$$

$$Q_2 = n\,(C_V + R)\,\Delta T$$

$$Q_2 = (0{,}488)(21 + 8{,}31)(650 - 500)$$

$$Q_2 = 2\ 145{,}5\ J$$

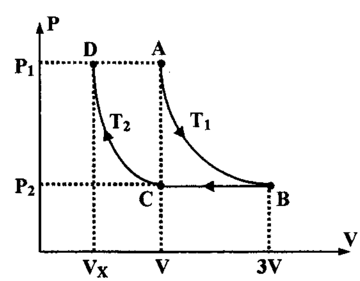
Luego, el calor total suministrado al gas en todo el proceso es:

$$Q_T = Q_1 + Q_2$$

$$\clubsuit\ Q_T = 4\ 707{,}5\ J \qquad (D)$$

Solución: 82

• Representemos los dos procesos isotérmicos y el proceso isobárico.



En el proceso isotérmico (A-B), de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P_1 V = n R T_1$$

Así, el trabajo realizado en la expansión del gas a temperatura constante es:

$$W_{A\to B} = n R T_1 \ell n(\frac{3V}{V})$$

$$W_{A\to B} = P_1 V\, \ell n(3)$$

En el proceso isobárico (B-C), de la ecuación de los gases ideales, la temperatura final es:

$$\frac{V}{T_2} = \frac{3V}{T_1} \quad => \quad T_2 = \frac{1}{3} T_1$$

Así, el trabajo realizado en la compresión del gas a presión constante es:

$$W_{B\to C} = P\,\Delta V = n R \Delta T$$

$$W_{B\to C} = n R (T_2 - T_1) = n R (\frac{1}{3} T_1 - T_1)$$

$$W_{B\to C} = -\frac{2}{3} n R T_1 = -\frac{2}{3} P_1 V$$

En el proceso isotérmico (A-B), de la ecuación de los gases ideales, tenemos:

$$P_1 V = P_2 (3V) \quad => \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{3}$$

En el proceso isotérmico (C-D), de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P_1 V_x = P_2 V \quad => \quad \frac{V_x}{V} = \frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{V_x}{V} = \frac{1}{3}$$

Así, el trabajo realizado en la compresión del gas a temperatura constante es:

$$W_{C\to D} = n R T_2 \ell n(V_x / V)$$

$$W_{C\to D} = \frac{1}{3} n R T_1 \ell n(\frac{1}{3})$$

$$W_{C\to D} = \frac{1}{3} P_1 V \ell n(\frac{1}{3})$$

Luego, el trabajo total realizado en todo el proceso es:

$$W = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D}$$

$$W = P_1 V \ell n(3) - \frac{2}{3} P_1 V + \frac{1}{3} P_1 V \ell n(\frac{1}{3})$$

$$W = (10^5)(2.10^{-3})[\ell n(3) - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \ell n(\frac{1}{3})]$$

$$\clubsuit \quad W = 13{,}2 \text{ J} \qquad \text{C}$$

Solución: 83

- Transformando los calores específicos c_P y c_V de cal/ g.^{0}K a J/kg.^{0}K, así:

$$c_P = 992 \frac{J}{kg.^oK} \,,\ c_V = 707 \frac{J}{kg.^oK}$$

Ahora, de la ecuación de los gases ideales, teniendo en cuenta que $R=C_P-C_V$, y $c=C/M$, hallemos la densidad del aire, así:

$$P V = \frac{m}{M} R T \quad => \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{M P}{R T}$$

$$\rho = \frac{M P}{(C_P - C_V)\,T} = \frac{P}{(c_P - c_V)\,T}$$

$$\rho = \frac{1{,}013.10^5}{(992 - 707)(288)}$$

$$\clubsuit \quad \rho = 1{,}23 \ \frac{kg}{m^3} \qquad \text{B}$$

Solución: 84

- Sustituyendo en la primera ley de la termodinámica las expresiones de Q y ΔU, se tiene:

$$Q = W + \Delta U$$

$$W = n\,C_P \Delta T - n\,C_V \Delta T$$

$$W = (C_P - C_V)\,n\,\Delta T$$

$$W = (\frac{C_P - C_V}{C_P})Q$$

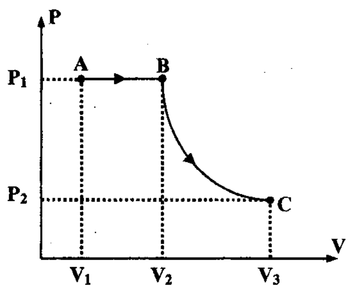
$$W = (\frac{5-3}{5})(500) = 200 \text{ cal}$$

$$W = (200)(4{,}186 \text{ J})$$

♣ $W = 837{,}2$ J (D)

Solución: 85

• Representemos los procesos isobárico (A-B) y adiabático (B-C) que experimenta el gas.



En el proceso isobárico (A-B) el trabajo de expansión del gas es:

$$W_{A\to B} = P_1(V_2 - V_1)$$

$$W_{A\to B} = (2)(1{,}013.10^5)(5-1)$$

$$W_{A\to B} = 810{,}4 \text{ kJ}$$

En el proceso adiabático (B-C), el trabajo de expansión del gas es:

$$W_{B\to C} = \frac{P_1 V_2 - P_2 V_3}{\chi - 1}$$

$$W_{B\to C} = \frac{[(2)(5)-(0{,}5)(10)](1{,}013.10^5)}{1{,}4-1}$$

$$W_{B\to C} = 1\,266{,}3 \text{ kJ}$$

Luego, la razón de los trabajos entre la segunda y la primera etapa es:

$$\frac{W_{B\to C}}{W_{A\to B}} = \frac{1\,266{,}3}{810{,}4}$$

♣ $\dfrac{W_{B\to C}}{W_{A\to B}} = 1{,}56$ (E)

Solución: 86

• Como el proceso es isotérmico, de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 / V_1 = P_1 / P_2$$

Luego, la variación del trabajo en el proceso isotérmico es:

$$\eta = (\frac{W_1 - W_2}{W_1})(100)$$

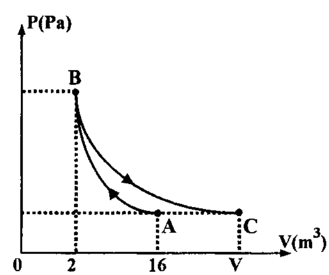
$$\eta = [\frac{\ell n(V_2/V_1) - \ell n(V_2'/V_1')}{\ell n(V_2/V_1)}](100)$$

$$\eta = [\frac{\ell n(10) - \ell n(5)}{\ell n(10)}](100)$$

$$\eta \approx 30\ \%$$ (C)

Solución: 87

• Representemos los procesos adiabático (A-B) y isotérmico (B-C).



Como el gas es monoatómico ($\chi = 5/3$), entonces de la ecuación de Poisson, se tiene:

$$\frac{P_A}{P_B} = (\frac{V_B}{V_A})^{\chi} \quad => \quad \frac{P_A}{P_B} = (\frac{2}{16})^{5/3}$$

$$P_B = 32\,P_A \qquad (1)$$

De otro lado, de la expresión del trabajo para el proceso adiabático (A-B), se tiene:

$$\frac{P_A V_A - P_B V_B}{\chi - 1} = W_{A\to B}$$

$$\frac{16 P_A - 2 P_B}{5/3 - 1} = -720\,k$$

$$8\,P_A - P_B = -240\,k \qquad (2)$$

De (1) en (2), tenemos:

$$8\,P_A - 32\,P_A = -240\,k$$

$$P_A = 10\,kPa \;\; y \;\; P_B = 320\,kPa$$

Ahora, como el proceso (B-C) es isotérmico, de la ecuación de los gases ideales, hallemos V_C, así:

$$P_B\,V_B = P_C\,V_C$$

$$(320k)(2) = (10k)V_C$$

$$V_C = 64\ m^3$$

Luego, el trabajo de expansión del gas en el proceso isotérmico (B-C) es:

$$W_{B\to C} = n\,RT_B\,\ell n(\frac{V_C}{V_B})$$

$$W_{B\to C} = P_B\,V_B\,\ell n(\frac{V_C}{V_B})$$

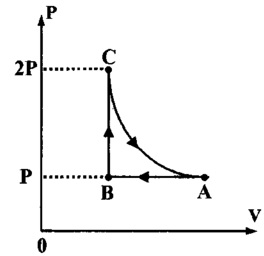
$$W_{B\to C} = (320k)(2)\,\ell n(64/2)$$

$$W_{B\to C} = (320k)(2)(5)\,\ell n(2)$$

♣ $W_{B\to C} = 2\ 240\ kJ$ **D**

Solución: 88

• Representemos los procesos isobárico (A-B), isocórico (B-C) y adiabático (C-A).



Como el proceso (A-B) es isobárico, de la expresión del trabajo, hallemos la temperatura T_B, así:

$$W = P\,\Delta V = n\,R\Delta T$$

$$W = n\,R\,(T_B - T_A)$$

$$-415{,}5 = (0{,}2)(8{,}31)(T_B - 650)$$

$$T_B = 400^{\circ}K$$

Ahora, aplicando la ecuación de los gases ideales a los estados B y C, hallemos la temperatura T_C, así:

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} \quad => \quad \frac{P}{400} = \frac{2P}{T_C}$$

$$T_C = 800\ ^{\circ}K$$

Luego, el trabajo realizado por el gas monoatómico ($\chi = 5/3$) en el proceso de expansión adiabática (C-A) es:

$$W = \frac{n\,RT_C}{\chi - 1}(1 - \frac{T_A}{T_C})$$

$$W = \frac{(0{,}2)(8{,}31)(800)}{5/3 - 1}(1 - \frac{650}{800})$$

♣ $W \approx 374$ J (C)

Solución: 89

- Como el aire (CO_2) es diatómico su exponente adiabático es $\chi = 7/5$, luego, de la ecuación de Poisson, se tiene:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\chi} \Rightarrow \frac{P_2}{1} = (20)^{7/5}$$

♣ $P_2 \approx 66{,}3$ atm (C)

Solución: 90

- Recordemos la ecuación de Poisson que relaciona temperaturas y volúmenes

$$T_1 / T_2 = (V_2 / V_1)^{\chi - 1}$$

Para el gas (A) monoatómico ($\chi = 5/3$).

$$T_1 = \left(\frac{V/3}{V}\right)^{\frac{5}{3}-1} T_2 \qquad (1)$$

Para el gas (B) diatómico ($\chi = 7/5$).

$$T_1 = \left(\frac{V/2}{V}\right)^{\frac{7}{5}-1} (423) \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), tenemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} T_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} (423)$$

$$T_2 = \left(\frac{3^{1/3}}{2^{1/5}}\right)^2 (423)$$

♣ $T_2 \approx 667\ ^0K$ (C)

Solución: 91

- Como el gas es diatómico ($\gamma = 5$), sus capacidades caloríficas a presión y volumen constantes son:

$$C_P = \left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) R = 29{,}1.10^3 \frac{J}{\text{kmol.}^o K}$$

$$C_V = \left(\frac{\gamma}{2}\right) R = 20{,}8.10^3 \frac{J}{\text{kmol.}^o K}$$

Sustituyendo C_P y C_V en la primera ley de la termodinámica, se tiene:

$$Q = W + \Delta U$$

$$W = n\, C_P \Delta T - n\, C_V \Delta T$$

$$W = (C_P - C_V)\, n\, \Delta T$$

$$W = \left(\frac{C_P - C_V}{C_P}\right) Q$$

$$W = \left(\frac{29{,}1.10^3 - 20{,}8.10^3}{29{,}1.10^3}\right)(4\ 186)$$

♣ $W \approx 1194$ J (D)

Solución: 92

- Para el proceso isotérmico (A-B), hallemos la presión en el estado B, así:

$$P_B V_B = P_A V_A \Rightarrow P_B(2) = (10)(5)$$

$$P_B = 25 \text{ atm}$$

Para el proceso adiabático (A-B), de la ecuación de Poisson, hallemos P_C y T_C:

$$\frac{P_C}{P_A} = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\chi} \Rightarrow \frac{P_C}{10} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1,5}$$

$$P_C = 39{,}53 \text{ atm}$$

$$\frac{T_C}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\chi - 1} \Rightarrow \frac{T_C}{700} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1,5-1}$$

$$T_C = 1\ 106{,}8\ ^oK$$

Luego, la razón de las presiones y temperatura pedidas es:

$$\frac{P_C}{P_B} = \frac{39{,}53}{25} = 1{,}58 \approx 1{,}6$$

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{1\,106{,}8}{700} = 1{,}58 \approx 1{,}6 \quad \text{C}$$

Solución: 93

• El trabajo realizado en la compresión a diabática del gas de nitrógeno ($\chi = 1{,}4$) es:

$$W = \frac{n\,R\,T_1}{(\chi - 1)}[1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\chi-1}]$$

$$W = \frac{(1)(8{,}31)(300)}{(1{,}4 - 1)}[1 - (10)^{1{,}4-1}]$$

$$♣ \; W = -9\,423 \text{ J} \quad \text{D}$$

Nota
El signo menos significa una disminu ción en el volumen.

Solución: 94

• Sustituyendo en la primera ley de la ter modinámica, las expresiones de la cantidad de calor (Q) y el trabajo (W), se tiene:

$$Q = W + \Delta U$$

$$\Delta U = n\,C_P(T_2 - T_1) - P\,(V_2 - V_1)$$

$$\Delta U = n\,(\frac{\gamma}{2} + 1)\,R\,(T_2 - T_1) - n\,R\,(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = n\,R(\gamma/2)(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = (5)(8{,}31)(\frac{5}{2})(300 - 30)$$

$$♣ \; \Delta U \approx 28\,046 \text{ J} \quad \text{D}$$

Solución: 95

• Primero calculemos los exponentes adia báticos para los gases A y B, así:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\gamma/2 + 1)\,R}{\gamma/2R} = \frac{\gamma + 2}{\gamma}$$

Para el gas (A) monoatómico ($\gamma = 3$):

$$\chi = \frac{3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$$

Para el gas (B) diatómico ($\gamma = 5$):

$$\chi = \frac{5 + 2}{5} = \frac{7}{5}$$

Ahora, según la ecuación de Poisson, la re lación entre temperaturas y volúmenes, vie ne dado por:

$$\frac{T_1}{T_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\chi-1} \;\Rightarrow\; T_2 = (\frac{V_1}{V_2})^{\chi-1}T_1$$

Luego, como los gases A y B tienen la mis ma temperatura inicial, entonces, la razón de sus temperaturas finales es:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{(2)^{5/3-1}T_{0A}}{(2)^{7/5-1}T_{0A}}$$

$$♣ \; \frac{T_A}{T_B} = 1{,}203 \quad \text{B}$$

Solución: 96

• De la ecuación de los gases ideales, se tiene que:

$$P\,V = n\,R\,T$$

Sustituyendo nRT en la expresión de la e nergía interna, tenemos:

$$U = \frac{3}{2}n\,R\,T = \frac{3}{2}P\,V$$

$$U = (\frac{3}{2})(5)(1{,}013.10^5)(10.10^{-3})$$

$$♣ \; U \approx 7\,598 \text{ J} \quad \text{E}$$

Solución: 97

• Aplicando la ecuación de los gases idea les al estado A, hallemos P_A, así:

$$P_A = \frac{n\,RT_A}{V_A}$$

$$P_A = \frac{(3)(8{,}31)(300)}{5.10^{-3}}$$

$$P_A = 14{,}96.10^5\ N/m^2$$

Como la cantidad de calor absorbido en el proceso isocórico (A-B) es 200 cal, entonces:

$$\Delta Q = n\,C_V(T_B - T_A)$$

$$\Delta Q = n\frac{\gamma}{2}R\,(T_B - T_A)$$

$$(200)(4{,}186) = (3)(\frac{3}{2})(8{,}31)(T_B - 300)$$

$$T_B = 322{,}39\ ^oK$$

Ahora, apliquemos la ecuación de los gases ideales a los estados A y B, así:

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B}$$

$$\frac{14{,}96.10^5}{300} = \frac{P_B}{322{,}39}$$

$$P_B = 16{,}08.10^5 N/m^2$$

Luego, el trabajo desarrollado por el gas en el proceso isobárico B-C es:

$$W = P_B(V_C - V_B)$$

$$W = (16{,}08.10^5)(10-5)(10^{-3})$$

♣ $W = 8\,040\ J$ (D)

Solución: 98

- En el diagrama P-V, como la presión varía linealmente según la temperatura, se tiene que:

$$P = AV + B \qquad (1)$$

donde, las constantes A y B, se hallan evaluando la ecuación anterior en los estados 1 y 2, así:

$$P_1 = AV_1 + B \quad y \quad P_2 = AV_2 + B$$

Resolviendo este par de ecuaciones para A y B, se tiene:

$$A = \frac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1} = \frac{(15{,}5 - 4{,}1).10^5}{(9-32).10^{-3}}$$

$$A = -0{,}5.10^8\ N/m^2$$

$$B = P_1 - AV_1 = 4{,}1.10^5 + (0{,}5.10^8)(32.10^{-3})$$

$$B = 20{,}1.10^5\ N/m^2$$

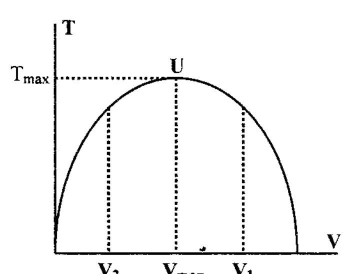
Sustituyendo (1) en la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$AV^2 + BV = n\,RT$$

Luego, de completar cuadrados esta ecuación queda así:

$$(V + \frac{B}{2A})^2 = \frac{n\,R}{A}(T + \frac{B^2}{4n\,RA})$$

Esta es la ecuación de una parábola de vértice U(-B/2A; -B^2/4nRA) que se abre hacia abajo, como se aprecia en la Fig.



Luego, la temperatura máxima que alcanza el gas durante el proceso es:

$$T_{max} = -\frac{B^2}{4nRA} = -\frac{MB^2}{4mRA}$$

$$T_{max} = -\frac{(4)(20{,}1.10^5)^2}{(4)(20)(8{,}31)(-0{,}5.10^8)}$$

$$\clubsuit\ T_{max} \approx 486\ ^oK \qquad \text{B}$$

Nota
La parábola se abre hacia abajo, por que, nR/A < 0.

Solución: 99

- Tomando variación a la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P\,V = n\,R\Delta T$$

$$P\Delta V = nR\Delta T \qquad (1)$$

De otro lado, el trabajo realizado en un proceso isobárico (P=cte.) es:

$$W = P\Delta V \qquad (2)$$

De (1) y (2), tenemos:

$$W = n\,R\Delta T = \frac{m}{M}R\,(T_2 - T_1)$$

$$W = (\frac{20}{44})(8{,}31)(108-20)$$

$$\clubsuit\ W \approx 332\ J \qquad \text{C}$$

Solución: 100

- Sustituyendo en la primera ley de la termodinámica, las expresiones del trabajo (W) y la variación de la energía interna (ΔU), se tiene:

$$Q = W + \Delta U$$

$$Q = P\,\Delta V + n\,C_V\Delta T$$

$$Q = \frac{m}{M}R\,(T_2 - T_1) + \frac{m}{M}C_V(T_2 - T_1)$$

$$Q = \frac{m}{M}(R + C_V)(T_2 - T_1)$$

$$Q = (\frac{20}{44})(8{,}31 + 28{,}8)(108-20)$$

$$\clubsuit\ Q \approx 1\ 484\ J \qquad \text{C}$$

Solución: 101

- Hallemos el exponente adiabático (χ) del gas ideal, así:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$$

$$\chi = 1 + \frac{8{,}31}{(3)(4{,}186)} = 1{,}66 = \frac{5}{3}$$

<< El gas ideal es monoatómico >>

Ahora, calculemos la razón de los trabajos realizados en el proceso isotérmico (BC) e isobárico (AB), así:

$$\frac{W_{B\to C}}{W_{A\to B}} = \frac{P_B V_B \ell n(V_C / V_B)}{P_B(V_B - V_A)}$$

$$\frac{W_{B\to C}}{W_{A\to B}} = \frac{(16{,}4)\,\ell n(\frac{8{,}2}{16{,}4})}{(16{,}4 - 8{,}2)}$$

$$\clubsuit\ \frac{W_{B\to C}}{W_{A\to B}} \approx -1{,}4 \text{ veces} \qquad \text{C}$$

Nota
El signo (-) nos indica que en el proceso isotérmico, el volumen disminuye.

Solución: 102

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos la temperatura en los estados A, B y C, así:

$$P_A\,V_A = n\,RT_A$$

$$(4)(8,2) = (2)(0,082)T_A$$

$$T_A = 200\ ^oK$$

$$P_B V_B = n\, R T_B$$

$$(4)(16,4) = (2)(0,082)\, T_B$$

$$T_B = 400\ ^oK$$

$$P_C V_C = n\, R T_C$$

$$(8)(8,2) = (2)(0,082)\, T_C$$

$$T_C = 400\ ^oK$$

Como, 1 cal=4,186 J, entonces la constante de los gases ideales (R) en cal/mol.^{0}K es:

$$R = 8,31 \frac{J}{mol.^oK} \approx 2 \frac{cal}{mol.^oK}$$

El calor recibido por el gas en el proceso isobárico A-B es:

$$Q_{AB} = n\, C_P (T_B - T_A)$$

$$Q_{AB} = n\, (C_V + R)(T_B - T_A)$$

$$Q_{AB} = (2)(3+2)(400-200)$$

$$Q_{AB} = 2000\ cal = (2000)(4,186\ J)$$

$$Q_{AB} = 8\ 372\ J$$

En el proceso isotérmico B-C, $\Delta U = 0$, pues la temperatura es constante, de modo que, el calor para este proceso es:

$$Q_{BC} = W_{B \to C}$$

$$Q_{BC} = P_B V_B\, \ell n(\frac{V_C}{V_B})$$

$$Q_{BC} = (4.10^5)(16,4.10^{-3})\ell n(8,2/16,4)$$

$$Q_{BC} = -4\ 547\ J$$

Luego, la razón del calor en el proceso isobárico al calor en el proceso isotérmico es:

$$♣\ \frac{Q_{AB}}{Q_{BC}} = \frac{8\ 372}{4\ 547} = 1,84 \quad \text{D}$$

Solución: 103

- El trabajo realizado en el proceso isobárico (A-B) es:

$$P_A (V_B - V_A) = W$$

$$n\, R\, (T_2 - T_1) = -60.10^3 J \qquad (1)$$

En el proceso isocórico (B-C), W=0, de modo que, el calor es igual al cambio en la energía interna, esto es:

$$Q = \Delta U = n\, C_V\, \Delta T$$

$$n \frac{\gamma}{2} R\, (T_1 - T_2) = 150.10^3 \qquad (2)$$

De (1) y (2), obtenemos el número de grados de libertad (γ) y el coeficiente de Poisson (χ), así:

$$(60.10^3)(\frac{\gamma}{2}) = 150.10^3$$

$$\gamma = \frac{15}{3} = 5$$

$$\chi = \frac{\gamma + 2}{\gamma} = \frac{5+2}{5}$$

$$♣\ \chi = 1,40 \qquad \text{E}$$

<<Como $\gamma = 5$ el gas es diatómico>>

Solución: 104

- En el proceso (1-2), la presión en el estado (2) es:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{(10^6)(5)}{50} = \frac{P_2(10)}{100}$$

$$P_2 = 10^6 \text{Pa}$$

En el proceso (2-3), la presión en el estado (3) es:

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \quad => \quad \frac{10^6}{100} = \frac{P_3}{50}$$

$$P_3 = 0{,}5.10^6 \text{Pa}$$

En el proceso (3-4) la presión en el estado (4) es:

$$\frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_4 V_4}{T_4}$$

$$\frac{(0{,}5.10^6)(10)}{50} = \frac{P_4(12)}{60}$$

$$P_4 = 0{,}5.10^6 \text{Pa}$$

Como los procesos son a presión constantes, el trabajo realizado por (ó sobre el gas) en cada uno de ellos es:

$$W_{1\to2} = P_2(V_2 - V_1)$$

$$W_{1\to2} = (10^6)(10-5).10^{-3} = 5 \text{ kJ}$$

$$W_{2\to3} = P_2(V_3 - V_2)$$

$$W_{2\to3} = (10^6)(10-10).10^{-3} = 0 \text{ kJ}$$

$$W_{3\to4} = P_3(V_4 - V_3)$$

$$W_{3\to4} = (0{,}5.10^6)(12-10).10^{-3} = 1 \text{ kJ}$$

Luego, el trabajo total realizado por (ó sobre) el gas es:

$$W_T = 5 \text{ kJ} + 0 \text{ kJ} + 1 \text{ kJ}$$

$$\clubsuit \quad W_T = 6 \text{ kJ} \qquad \text{C}$$

Solución: 105

- Recordemos que para un gas monoatómico ($\chi = 5/3$), así, de la ecuación de Poisson, la temperatura en el estado A es:

$$\frac{T_A}{T_B} = (\frac{V_B}{V_A})^{\chi-1} \quad => \quad \frac{T_A}{300} = (\frac{8V}{V})^{\frac{5}{3}-1}$$

$$T_A = 1200 \text{ °K}$$

El trabajo realizado en el proceso adiabático A-B es:

$$W_{A\to B} = \frac{n\,R T_A}{\chi - 1}(1 - \frac{T_B}{T_A})$$

$$W_{A\to B} = \frac{n\,R(1200)}{5/3-1}(1 - \frac{300}{1200})$$

$$W_{A\to B} = 1\,350\,nR$$

El trabajo realizado en el proceso isotérmico B-C es:

$$W_{B\to C} = n\,R T_B \ell n(\frac{V_C}{V_B})$$

$$W_{B\to C} = n\,R\,(300)\,\ell n(\frac{V}{8V})$$

$$W_{B\to C} = -623{,}8\,nR$$

El calor entregado al gas en el proceso isocórico C-A es:

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = n\,C_V(T_A - T_C)$$

$$Q_{CA} = n\frac{3}{2}R\,(1200-300)$$

$$Q_{CA} = 1\,350\,nR$$

El proceso adiabático (A-B) el gas no recibe ni pierde calor, y en el proceso isotérmico el gas pierde calor, pues, se enfría.
Luego, la eficiencia del proceso cíclico que desarrolla el gas ideal es:

$$R = \left(\frac{W_{A\to B} + W_{B\to C}}{Q_{CA}}\right)(100)$$

$$R = \left(\frac{1350\,nR - 623{,}8\,nR}{1\,350\,nR}\right)(100)$$

$$\clubsuit\ R \approx 53{,}8\ \%$$ (C)

Solución: 106

• En el proceso isobárico (A-B), hallemos el volumen en el estado B, así:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{1}{300} = \frac{V_B}{900}$$

$$V_B = 3\ m^3$$

En el proceso isocórico (B-C), hallemos la presión en el estado C, así:

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} \Rightarrow \frac{3.10^5}{900} = \frac{P_C}{600}$$

$$P_C = 2.10^5\ N/m^2$$

El trabajo en un ciclo, es igual, al área encerrada por el diagrama P-V, esto es:

$$W = (V_B - V_A)(P_B - P_C)$$

$$W = (3-1)(3-2).10^5$$

$$W = 2.10^5\,J$$

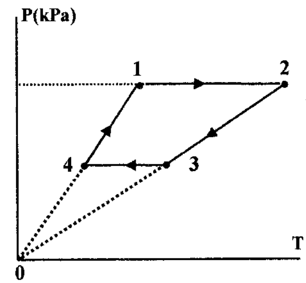
Como, el período es el inverso de la frecuencia, entonces la potencia desarrollada en cada ciclo por el motor es:

$$P = \frac{W}{T} = \frac{2.10^5}{1/100}$$

$$\clubsuit\ P = 20.10^6\ W$$ (B)

Solución: 107

• Representemos los dos procesos isobáricos (1-2), (3-4), y los dos procesos desconocidos (2-3), (4-1).



De la Fig., en el proceso (4-1) la presión (P) varía linealmente según la temperatura (T), por lo que:

$$P = AT + B$$

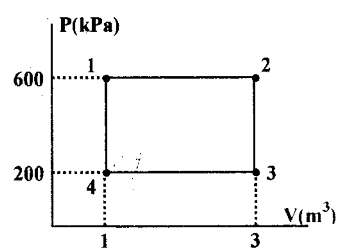
donde las constantes A y B, hallamos evaluando (P), así:

En: $T = 0,\ 0 = A(0) + B \Rightarrow\ B = 0$

Ahora, de la ecuación de los gases ideales, T = PV/nR, de modo que la ecuación de la presión, queda así:

$$P = A\frac{PV}{nR} \Rightarrow V = \frac{nR}{A} = \text{cte.}$$

Así, hemos probado que los procesos (4-1) y (2-3) son isocóricos, por lo que, la gráfica de la presión versus el volumen es:



Luego, el trabajo realizado en el ciclo termodinámico es:

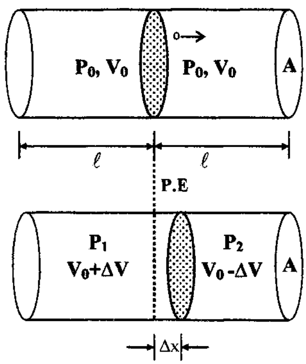
$$W = \text{área rectángulo}$$

$$W = (3-1)(600-200).10^3$$

$$\clubsuit\ W = 800\ kJ \qquad \text{(A)}$$

Solución: 108

- El émbolo al experimentar un pequeño desplazamiento Δx, empieza a oscilar alrededor de su posición de equilibrio (P.E), como se aprecia en la Fig.



En la Fig, de la ecuación de los gases ideal para T=cte., las presiones P_1, P_2 a ambos lados del émbolo, son:

$$P_1 = (\frac{V_0}{V_0-\Delta V})P_0 \;;\; P_2 = (\frac{V_0}{V_0+\Delta V})P_0$$

De modo que, la fuerza que actúa sobre el émbolo, debido a la diferencia de presiones es:

$$F = (P_1 - P_2).A$$

$$F = (\frac{1}{V_0-\Delta V} - \frac{1}{V_0+\Delta V})V_0 P_0 A$$

$$F = \frac{2V_0 P_0 A \Delta V}{V_0^2 - \Delta V^2}$$

$$F = \frac{2V_0 P_0 A\,(A\Delta x)}{V_0^2\,[1-(\Delta V/V_0)^2]}$$

Como, $(\Delta V / V_0)^2 \approx 0$, y las pequeñas oscilaciones son producidas por una fuerza del tipo de Hooke, entonces la ecuación anterior, queda así:

$$F = \frac{2P_0 A}{\ell}\Delta x = k\,\Delta x$$

Así, conocido la constante (k), podemos obtener el período de las pequeñas oscilaciones, a partir de:

$$T = 2\pi(\frac{m}{k})^{1/2}$$

$$T = 2\pi(\frac{m\,\ell}{2P_0 A})^{1/2}$$

$$T = 2\pi\,[\frac{(400.10^{-3})(20.10^{-2})}{(2)(4.10^5)(40.10^{-4})}]^{1/2}$$

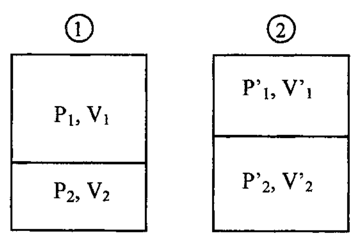
$$\clubsuit\ T = 0{,}01\pi\ s \qquad \text{(A)}$$

Solución: 109

- En el estado inicial y final, las masas de gas a ambos lados del émbolo se encuentran a la misma temperatura, por lo que:

$$P_1 3V_0 = P_2 V_0$$

$$P_2 = 3P_1 \qquad (1)$$



$$P_1' V_1' = P_2' V_2'$$

$$\frac{P_1'}{P_2'} = \frac{V_2'}{V_1'} \qquad (2)$$

Aplicando la ecuación de los gases ideales, a los estados (1) y (2), para los volúmenes que están por encima y por debajo del ém bolo, se tiene:

$$\frac{P_1 3V_0}{T_1} = \frac{P_1' V_1'}{2\,T_1}$$

$$V_1' = 6\,\frac{P_1}{P_1'}\,V_0 \qquad (3)$$

$$\frac{P_2 V_0}{T_1} = \frac{P_2' V_2'}{2T_1}$$

$$V_2' = 2\,\frac{P_2}{P_2'}\,V_0 \qquad (4)$$

Ahora el volumen del recipiente es $4V_0$, en tonces sumando las ecs.(3) y (4), y utilizan do la ec.(1), se tiene:

$$4\,V_0 = (6\,\frac{P_1}{P_1'} + 2\,\frac{P_2}{P_2'})\,V_0$$

$$3\,\frac{P_1}{P_1'} + 3\,\frac{P_1}{P_2'} = 2$$

$$6\,P_1 = \frac{4\,P_1' P_2'}{P_1' + P_2'} \qquad (5)$$

De otro lado, la diferencia de presiones a ambos lados del émbolo antes y después de aumentarse la temperatura es la misma, es to es:

$$P_2 - P_1 = P_2' - P_1'$$

$$2\,P_1 = P_2' - P_1'$$

$$6\,P_1 = 3\,P_2' - 3\,P_1' \qquad (6)$$

Igualando (5) y (6), y teniendo en cuenta la ec.(2), tenemos:

$$\frac{4\,P_1' P_2'}{P_1' + P_2'} = 3\,(P_2' - P_1')$$

$$\frac{4}{3} = \frac{P_2'}{P_1'} - \frac{P_1'}{P_2'} = \frac{V_1'}{V_2'} - \frac{V_2'}{V_1'}$$

Denominando, $V_1'/V_2' = x$, tenemos:

$$\frac{4}{3} = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

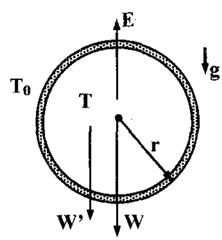
$$3x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x_1 = 1{,}868\ s\ \ (\text{si}) \quad y \quad x_2 = -0{,}535\ s\ \ (\text{no})$$

♣ $V_1'/V_2' \approx 1{,}9$ veces Ⓒ

Solución: 110

• Las fuerzas que actúan sobre la burbuja son: su peso (W), el peso del aire encerra do (W') y el empuje del aire (E), como se aprecia.



Según teoría, la diferencia de presiones en tre el interior (P) y exterior (P_0) a la burbu ja es:

$$P - P_0 = \frac{4\sigma}{r} \quad => \quad P = P_0 + \frac{4\sigma}{r}$$

Ahora, de la ecuación de los gases ideales, las masas del aire (m_0), (m) a las tempera turas y presiones T_0, P_0 y T, P son:

$$m_0 = \frac{P_0 M\,V}{R\,T_0} \ ; \ m = \frac{PM\,V}{R\,T}$$

Luego, como la burbuja se encuentra en e quilibrio estático, se cumple:

$$E = W + W'$$

$$m_0 g = mg + 4\pi r^2 \delta \rho g$$

$$\frac{P_0 MV}{RT_0} = \frac{PM V}{RT} + 4\pi r^2 \delta \rho$$

$$\frac{P_0 MV}{RT_0} = \frac{(P_0 + \frac{4\sigma}{r}) MV}{RT} + 4\pi r^2 \delta \rho$$

$$\frac{(P_0 + \frac{4\sigma}{r}) MV}{RT} = \frac{P_0 MV}{RT_0} - 4\pi r^2 \delta \rho$$

$$RT = \frac{(P_0 + \frac{4\sigma}{r}) MV}{\frac{P_0 MV}{RT_0} - 4\pi r^2 \delta \rho}$$

$$RT = \frac{\frac{MV}{r}(P_0 r + 4\sigma) RT_0}{V(MP_0 - \frac{4\pi r^2 \delta \rho RT_0}{4\pi r^3/3})}$$

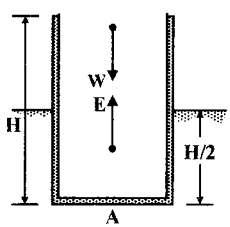
$$T = \frac{M(P_0 r + 4\sigma)}{MP_0 r - 3\delta \rho RT_0} T_0$$

♣ $T = 378\ ^oK = 105\ ^oC$ (D)

Solución: 111

• Representemos las fuerzas que actúan sobre el vaso, cuando este está sumergido en el líquido una altura (H/2).

①



Del principio de Arquímedes, el peso del vaso (W), es igual, al empuje (E) del líqui do desplazado, esto es:

Aplicando el principio de Arquímedes.

> Cuando la base del vaso está sumergida en el líquido Fig.(1), se cumple:

$$W = \rho g A \frac{H}{2} \qquad (1)$$

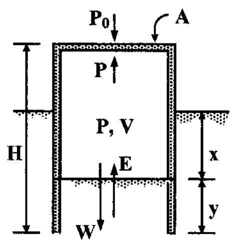
> Cuando la base del vaso está fuera del lí quido Fig.(2), se cumple:

$$W = \rho g A x \qquad (2)$$

De (1) y (2), tenemos:

$$x = \frac{H}{2} \qquad (3)$$

②



Ahora, en la Fig.(2) de la ecuación de los gases ideales, hallemos la presión (P) al in terior del vaso para T= cte., así:

$$P_0 V_0 = PV$$

$$P_0 AH = PA(H - y)$$

$$P = \frac{H}{H - y} P_0 \qquad (4)$$

De otro lado, en la Fig.(2), la fuerza sobre la base del vaso, debida a la diferencia de la presión interna (P) y externa (P_0), es i gual, al peso del vaso, esto es:

$$(P - P_0)A = W$$

$$(P - P_0)\,A = \frac{1}{2}\rho\,gAH$$

$$P = P_0 + \frac{1}{2}\rho\,gH \qquad (5)$$

Igualando (4) con (5), y despejando (y):

$$\frac{H}{H-y}P_0 = P_0 + \frac{1}{2}\rho\,gH$$

$$P_0 H = P_0(H-y) + \frac{1}{2}\rho\,gH\,(H-y)$$

$$(P_0 + \frac{1}{2}\rho\,gH)\,y = \frac{1}{2}\rho\,gH^2$$

$$y = \frac{\rho\,g\,H^2}{2\,P_0 + \rho\,gH}$$

Luego, la altura a la que se encuentra el bor de inferior del vaso, de la superficie libre del líquido es:

$$h = x + y$$

$$h = \frac{H}{2} + \frac{\rho\,gH^2}{2\,P_0 + \rho\,gH}$$

$$h = \frac{H}{2}(1 + \frac{2\rho\,gH}{2\,P_0 + \rho\,gH})$$

$$h = (\frac{0{,}1}{2})[1 + \frac{(2)(10^3)(10)(0{,}1)}{2.10^5 + (10^3)(10)(0{,}1)}]$$

♣ $h = 5{,}05$ cm (D)

Solución: 112

• La razón de la energía interna (U_1) de 1 kg de aire a la energía interna (U_2) de 1 cm^3, viene dada por:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{\gamma}{2}\frac{m}{M}RT}{\frac{\gamma}{2}P\,V} = \frac{m\,RT}{M\,PV}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{(1)(8{,}31.10^3)(273)}{(29)(1{,}013.10^5)(10^{-6})}$$

♣ $\frac{U_1}{U_2} \approx 0{,}8.10^6$ (E)

Solución: 113

• De la ecuación de los gases ideales, el número de moles de cada uno de los gases, es:

$$n_1 = \frac{P_1 V_1}{RT_1} \quad ; \quad n_2 = \frac{P_2 V_2}{RT_2}$$

De otro lado, la energía interna de la mez cla de gases, es igual, a la suma de las ener gías internas de cada una de sus componen tes, esto es:

$$U = U_1 + U_2$$

$$\frac{\gamma}{2}n\,RT = \frac{\gamma}{2}n_1 T_1 + \frac{\gamma}{2}n_2 T_2$$

$$(n_1 + n_2)\,T = n_1 T_1 + n_2 T_2$$

$$T = \frac{(P_1 V_1 / RT_1)\,T_1 + (P_2 V_2 / RT_2)\,T_2}{(P_1 V_1 / RT_1) + (P_2 V_2 / RT_2)}$$

$$T = T_1 T_2 \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1}$$

$$T = \frac{(400)(600)[(1)(200) + (4)(100)]}{(1)(200)(600) + (4)(100)(400)}$$

♣ $T = 514{,}3$ °K (C)

Solución: 114

• De la ecuación de los gases ideales, y u tilizando el resultado del problema anterior se tiene:

$$P\,V = n\,RT$$

$$P = \frac{(n_1 + n_2)\,RT}{V_1 + V_2}$$

$$P(V_1+V_2)=(n_1+n_2)R\frac{(n_1T_1+n_2T_2)}{(n_1+n_2)}$$

$$P(V_1+V_2)=R\left(\frac{P_1V_1}{RT_1}T_1+\frac{P_2V_2}{RT_2}T_2\right)$$

$$P=\frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}$$

$$P=\frac{(1)(200)+(4)(100)}{200+100}$$

$$♣\ P = 2\ \text{atm} \qquad (B)$$

Solución: 115

• Los volúmenes y las presiones al interior de las pompas de jabón son:

$$V_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3\ ;\ P_1=P_0+\frac{4\sigma}{R_1}$$

$$V_2=\frac{4}{3}\pi R_2^3\ ;\ P_2=P_0+\frac{4\sigma}{R_2}$$

De otro lado, según el prob.(114) la presión al interior de la pompa resultante es:

$$P=\frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}$$

$$P-P_0=-P_0+\frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}$$

$$\frac{4\sigma}{R}=-P_0+\frac{(P_0+\frac{4\sigma}{R_1})(\frac{4}{3}\pi R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi R^3}+$$

$$\frac{(P_0+4\sigma/R_2)(4\pi R_2^3/3)}{(4/3)\pi R^3}$$

$$4\sigma R^2=-P_0R^3+P_0R_1^3+P_0R_2^3+$$
$$4\sigma R_1^2+4\sigma R_2^3$$

$$4\sigma(R^2-R_1^2-R_2^2)=P_0(R_1^3+R_2^3-R^3)$$

$$\sigma=\frac{P_0}{4}\frac{R_1^3+R_2^3-R^3}{R^2-R_1^2-R_2^2}$$

$$\sigma=\frac{P_0}{4}\frac{R_1^3+(2R_1)^3-(2{,}2R_1)^3}{(2{,}2R_1)^2-R_1^2\quad(2R_1)^2}$$

$$\sigma=\left(\frac{P_0}{4}\right)(10{,}3)(R_1)$$

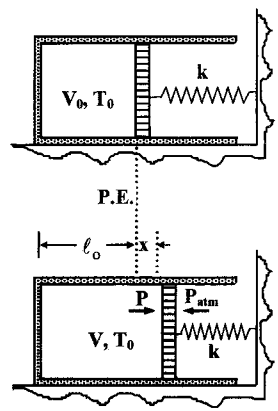
$$♣\ \sigma\approx\frac{103}{40}P_0R_1 \qquad (B)$$

Solución: 116

• Representemos el estado inicial y final del sistema recipiente resorte.

ANTES

DESPUES



En la Fig., la longitud inicial del recipiente que contiene el gas es:

$$\ell_o=\frac{V_o}{A_o}=\frac{10^4}{10^2}=100\ \text{cm}=1\ \text{m}$$

Ahora, de la ecuación de los gases ideales, hallemos la presión final (P), cuando el resorte está en equilibrio, así:

$$P_0V_0=P\,V$$

$$P = \frac{V_0}{V} P_0 = \frac{V_0}{(x + \ell_o) A} P_0 \qquad (1)$$

Cuando el resorte está en equilibrio, la fuerza debida a la diferencia de presión en el émbolo, es igual, a la fuerza del resorte, esto es:

$$(P - P_{atm}) A = k x$$

$$P = P_{atm} + \frac{k x}{A} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), tenemos:

$$A P_{atm} + k x = \frac{V_0}{(x + \ell_o)} P_0$$

$$A P_{atm} (x + \ell_o) + k x (x + \ell_o) = P_0 V_0$$

$$k x^2 + (k\ell_o + A P_{atm}) x + A P_{atm} \ell_o - P_o V_o = 0$$

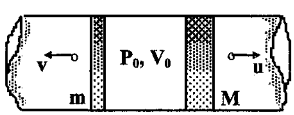
$$x^2 + 2x - 0{,}13 = 0$$

$$x_1 = 0{,}063 \text{ m (si) y } x_2 = -2{,}065 \text{ m (no)}$$

♣ $x = 6{,}3$ cm (E)

Solución: 117

• Sean v, u las velocidades de los émbolos de masas (m) y (M), respectivamente, como se muestra en la Fig.



Del principio de conservación de la cantidad de movimiento, se tiene:

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues}$$

$$0 = -m v + M u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{M} v$$

Ahora, las velocidades de los émbolos es máxima, cuando la energía interna del gas, se transforma completamente en energía cinética de los émbolos, esto es:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M u^2 = \frac{\gamma}{2} n R T_0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M (\frac{m}{M} v)^2 = \frac{3}{2} P_0 V_0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{M} v^2 = \frac{3}{2} P_0 V_0$$

$$v = [\frac{3 M P_0 V_0}{m (m + M)}]^{1/2}$$

$$v = [\frac{(3)(2m) P_0 V_0}{(m)(m + 2m)}]^{1/2}$$

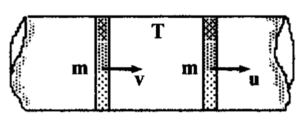
$$v = [\frac{2 P_0 V_0}{m}]^{1/2}$$

$$v = [\frac{(2)(4.10^5)(0{,}2.10^{-3})}{10}]^{1/2}$$

♣ $v = 4$ m/s (D)

Solución: 118

• Sean, (v) y (u) las velocidades de los émbolos, luego de una compresión del gas, como se aprecia en la Fig.:



Del principio de conservación de la cantidad de movimiento, se tiene:

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues}$$

$$m (3v_o) + m (v_o) = m v + m u$$

$$u = 4 v_o - v$$

La temperatura del gas será máxima cuando la variación de la energía cinética del émbolo sea máxima, así:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m(3v_o)^2 + \frac{1}{2}m\,v_o^2 - (\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mu^2)$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m(10v_o^2) - \frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{2}m(4v_o - v)^2$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m\,(-6\,v_o^2 + 8\,v_o v - 2\,v^2)$$

Derivemos ΔE_C e igualemos a cero, para hallar la velocidad (v), para el cual, ΔE_C es máxima, así:

$$\frac{d\Delta E_C}{dv} = 8v_o - 4v = 0$$

$$v = 2\,v_o \quad y \quad u = 2\,v_o$$

Luego, igualando la variación de la energía interna del gas, a la variación máxima de la energía cinética, obtenemos la temperatura máxima:

$$\Delta U = \Delta E_C$$

$$\frac{\gamma}{2}n\,RT - \frac{\gamma}{2}n\,RT_0 = \frac{1}{2}m\,(3v_o)^2 + \frac{1}{2}mv_o^2 - (\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}m\,u^2)$$

$$3R\,(T - T_0) = m\,(10v_o^2 - 8v_o^2)$$

$$T = T_0 + \frac{2\,mv_o^2}{3R}$$

$$T = 400\ ^oK + \frac{(2)(1)(10^2)}{(3)(8{,}31)}\ ^oK$$

$$\clubsuit\ T = 408\ ^oK \qquad \text{(D)}$$

Solución: 119

• El trabajo realizado por el gas durante su expansión, es igual, al área del trapecio menos el del rectángulo, esto es:

$$W = (\frac{4.10^{-3} + 3.10^{-3}}{2})(0{,}15.10^6) - (\frac{2}{3}.10^{-3})(0{,}1.10^6)$$

$$W = 525\ J - 66{,}7\ J$$

$$\clubsuit\ W \approx 458\ J \qquad \text{(E)}$$

Solución: 120

• Cuando la compresión es máxima, la velocidad del émbolo es nula, de modo que, la temperatura alcanzada es:

$$\Delta U = E_{C,0}$$

$$\frac{\gamma}{2}n\,RT - \frac{\gamma}{2}n\,RT_0 = \frac{1}{2}M\,v^2$$

$$3\,n\,R\,(T - T_0) = M\,v^2$$

$$3\frac{P_0 V_0}{T_0}(T - T_0) = M\,v^2$$

$$T = T_0\,(1 + \frac{M\,v^2}{3P_0 V_0}) \qquad (1)$$

De otro lado, de la ecuación de Poisson que relaciona las presiones y temperaturas, se tiene:

$$(\frac{P_0}{P})^{\frac{\chi-1}{\chi}} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow \frac{P_0}{P} = (\frac{T_0}{T})^{\frac{\chi}{\chi-1}}$$

$$\frac{P_0}{P} = (\frac{T_0}{T})^{\frac{5/3}{5/3-1}} = (\frac{T_0}{T})^{\frac{5}{2}} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la ecuación de los gases ideales para los estados inicial y final obtenemos el volumen del gas, que corresponde a la máxima compresión:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$$

$$V = \left(\frac{P_0}{P}\right)\left(\frac{T}{T_0}\right) V_0 = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{5/2}\left(\frac{T}{T_0}\right) V_0$$

$$V = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{5/2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{-1} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2} V_0$$

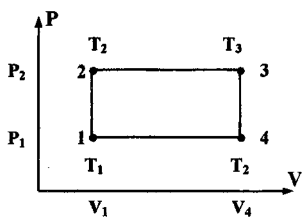
$$V = V_0\left(\frac{3\,P_0 V_0}{3\,P_0 V_0 + M\,v^2}\right)^{3/2}$$

$$V = (2)\left[\frac{(3)(2.10^5)(2.10^{-3})}{(3)(2.10^5)(2.10^{-3}) + (1)(20^2)}\right]^{3/2}$$

$$\clubsuit \ V \approx 1{,}3 \ \ell t \qquad \text{D}$$

Solución: 121

- Representemos los dos procesos isobáricos y isocóricos.



Aplicando la ecuación de los gases ideales a los estados 2 y 4, se tiene:

$$P_2 V_1 = P_1 V_4 \qquad (1)$$

En el proceso isobárico (2-3):

$$\frac{T_2}{V_1} = \frac{T_3}{V_4} \quad => \quad \frac{V_1}{v_4} = \frac{T_2}{T_3}$$

En el proceso isocórico (1-2):

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_4} \quad => \quad \frac{V_1}{V_4} = \frac{T_1}{T_2}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones:

$$T_2 / T_3 = T_1 / T_2 \quad => \quad T_2^2 = T_1 T_3$$

$$T_2 = \sqrt{T_1 T_3} \qquad (2)$$

Luego, utilizando las ecs.(1) y (2), hallemos el trabajo realizado por el gas, así:

$$W = (P_2 - P_1)(V_4 - V_1)$$

$$W = P_2 V_4 - P_2 V_1 - P_1 V_4 + P_1 V_1$$

$$W = P_2 V_4 - 2P_1 V_4 + P_1 V_1$$

$$W = n\,R T_3 - 2n\,R T_2 + n\,R T_1$$

$$W = n\,R T_3 - 2n\,R\sqrt{T_1 T_3} + n\,R T_1$$

$$W = n\,R\,(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$$

$$W = (1)(R)(\sqrt{400} - \sqrt{324})^2$$

$$\clubsuit \ W = 4\,R \qquad \text{D}$$

Solución: 122

- De la ecuación de los gases ideales para dos estados, hallemos la temperatura final del gas a P=cte., así:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad => \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{2\,V_1}{T_2}$$

$$T_2 = 2\,T_1$$

Así, la cantidad de calor que se debe suministrar al gas es:

$$\Delta Q = n\,C_V (T_2 - T_1)$$

$$\Delta Q = n\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) R\,(2T_1 - T_1)$$

$$\Delta Q = (1)\left(\frac{5}{2} + 1\right)(8{,}31)(273)$$

$$\Delta Q \approx 7{,}94 \text{ kJ}$$

De otro lado, el trabajo realizado por el gas a presión constante es:

De otro lado, el trabajo realizado por el gas a presión constante es:

$$W = P\,\Delta V = n\,R\Delta T$$

$$W = n\,R\,(T_2 - T_1) = n\,R T_1$$

$$W = (1)(8{,}31)(273)$$

$$\clubsuit\ W \approx 2{,}27\ kJ \qquad \text{(E)}$$

Solución: 123

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos la presión final P_2 en el proceso isotérmico, así:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad P_1(2) = P_2(4)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} P_1$$

El trabajo total realizado por el gas, es la suma de los trabajos parciales realizados en cada uno de los procesos, así:

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W = P_1 V_1 \ell n(\frac{V_2}{V_1}) + 0 + \frac{1}{2} P_2 (V_3 - V_2)$$

$$W = (10^5)(2.10^{-3})\ell n(\frac{4}{2}) + \frac{1}{4}(10^5)(8-4).10^{-3}$$

$$W = 138{,}63\ J + 100\ J$$

$$\clubsuit\ W \approx 239\ J \qquad \text{(E)}$$

Solución: 124

• Cuando el émbolo de área A está en equilibrio, la fuerza de la presión del gas, es igual, a la fuerza de recuperación del resorte, esto es:

$$P_0 A = k\,x \quad \Rightarrow \quad P_0 A = k\,\frac{V_0}{A}$$

$$A^2 = k\frac{V_0}{P_0} \quad y \quad x^2 = \frac{P_0^2 A^2}{k^2}$$

Así, la energía potencial elástica almacenada en el resorte es:

$$E_P = \frac{1}{2} k\,x^2 = \frac{1}{2} k\,\frac{P_0^2 A^2}{k^2}$$

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{P_0^2}{k}\frac{k V_0}{P_0} = \frac{1}{2} P_0 V_0$$

De otro lado, la energía del gas monoatómico, a la presión P_0, volumen V_0 y temperatura T_0 es:

$$U = \frac{\gamma}{2} n\,RT = \frac{3}{2} n\,RT_0$$

$$U = \frac{3}{2} P_0 V_0$$

Luego la capacidad calorífica del gas monoatómico es:

$$C = \frac{Q}{T_0} = \frac{E_P + U}{T_0}$$

$$C = \frac{\frac{1}{2} P_0 V_0 + \frac{3}{2} P_0 V_0}{T_0}$$

$$\clubsuit\ C = \frac{2\,P_0 V_0}{T_0} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 125

• Como el proceso es isobárico, entonces de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P\,V = n\,RT \quad \Rightarrow \quad P\,\Delta V = n\,R\Delta T$$

$$P = \frac{n\,R\Delta T}{\Delta V} = \frac{n\,R\Delta T}{\Delta S\,d} \qquad (1)$$

Ahora, cuando los émbolos están en el equilibrio, la fuerza debida a la diferencia de presión, es igual, al peso de los émbolos, esto es:

$$\Delta P\,\Delta S = m\,g \;\Rightarrow\; (P - P_0)\,\Delta S = m\,g$$

$$P = \frac{mg + P_0 \Delta S}{\Delta S} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), tenemos:

$$\frac{n\,R \Delta T}{\Delta S\, d} = \frac{mg + P_0 \Delta S}{\Delta S}$$

$$\Delta T = \frac{(mg + P_0 \Delta S)\, d}{n\,R}$$

$$\Delta T = \frac{[(5)(10) + (10^5)(10.10^{-4})](5.10^{-2})}{(1)(8{,}31)}$$

$$\clubsuit\;\Delta T \approx 0{,}9\ ^{o}K \qquad \text{(E)}$$

Solución: 126

• Sustituyendo la expresión de (P) en la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P\,V = n\,R\,T$$

$$(P_0 - \alpha\, V^2)\, V = n\,R\,T$$

$$T = \frac{1}{n\,R}(P_0 V - \alpha\, V^3) \qquad (1)$$

Derivando está expresión respecto de V, e igualando a cero, hallemos el volumen (V) para el cual, la temperatura (T) es máxima, así:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{n\,R}(P_0 - 3\,\alpha\, V^2) = 0$$

$$V^2 = \frac{P_0}{3\,\alpha} \;\Rightarrow\; V = (\frac{P_0}{3\,\alpha})^{1/2}$$

Sustituyendo esta expresión en (1), obtenemos la temperatura máxima:

$$T_{max} = \frac{1}{n\,R}[P_0(\frac{P_0}{3\,\alpha})^{1/2} - \alpha\,(\frac{P_0}{3\,\alpha})^{3/2}]$$

$$T_{max} = \frac{2}{n\,R}(\frac{P_0}{27\,\alpha})^{1/2}$$

$$T_{max} = \frac{2}{(1)(R)}[\frac{2{,}7.10^5}{(27)(0{,}25.10^{-2})}]^{1/2}$$

$$\clubsuit\; T_{max} = \frac{4.10^3}{R} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 127

• Sustituyendo la expresión de la temperatura en la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$P\,V = n\,R\,T$$

$$P = n\,R\,(T_0 V^{-1} + \alpha\, V) \qquad (1)$$

Derivando está expresión respecto de V, e igualando a cero, hallemos el volumen (V) para el cual, la presión (P) es mínima, así:

$$\frac{dP}{dV} = n\,R\,(-T_0 V^{-2} + \alpha) = 0$$

$$\frac{T_0}{V^2} = \alpha \;\Rightarrow\; V = (\frac{T_0}{\alpha})^{1/2}$$

Sustituyendo esta expresión en (1), obtenemos la presión mínima:

$$P_{min} = n\,R\,[\frac{T_0}{(T_0/\alpha)^{1/2}} + \alpha\,(\frac{T_0}{\alpha})^{1/2}]$$

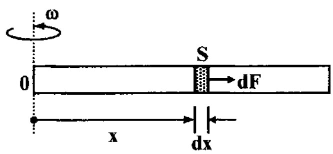
$$P_{min} = 2n\,R\,(\alpha\, T_0)^{1/2}$$

$$P_{min} = (2)(1)(8{,}31)[(16.10^4)(400)]^{1/2}$$

$$\clubsuit\; P_{min} \approx 1{,}33\ \text{atm} \qquad \text{(B)}$$

Solución: 128

• Representemos la fuerza (F) debida a la rotación del capilar, que actúa sobre un elemento de líquido.



En la Fig., la presión sobre el diferencial de volumen de gas de masa (dm), área de sección transversal (S) y longitud (dx) es:

$$dP = \frac{dF}{S} = \frac{1}{S}(dm\,\omega^2 x)$$

$$dP = \frac{1}{S}(\rho\, S\, dx)(\omega^2 x)$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{1}{P} dP = \frac{M}{RT}\omega^2 \int_0^r x\, dx$$

$$\ell n(\frac{P}{P_0}) = \frac{M\omega^2 r^2}{2RT}$$

$$P = P_0\, e^{M\omega^2 r^2/2RT}$$

$$P = P_0\, e^{\frac{(29)(10^2)^2(1)^2}{(2)(8{,}31.10^3)(400)}}$$

$$\clubsuit\quad P \approx 1{,}04\, P_0 \qquad \text{(C)}$$

Solución: 129

• De la ecuación de los gases ideales, hallemos la presión en A, así:

$$P_A = \frac{n\,R\,T_A}{V_A} = \frac{(3)(8{,}31)(300)}{5.10^{-3}}$$

$$P_A = 14{,}958.10^5\,\frac{N}{m^2} = 14{,}76 \text{ atm}$$

En el proceso isocórico (AB), hallemos la temperatura y la presión en B, así:

$$\Delta Q_{AB} = n\, C_V (T_B - T_A)$$

$$\Delta Q_{AB} = n\frac{\gamma}{2} R\,(T_B - T_A)$$

$$200 = (3)(\frac{3}{2})(\frac{8{,}31}{4{,}186})(T_B - 300)$$

$$T_B = 322{,}39\ ^oK$$

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_A}{T_A} \quad => \quad \frac{P_B}{322{,}39} = \frac{14{,}76}{300}$$

$$P_B = 15{,}86 \text{ atm}$$

En el proceso isobárico AB, la temperatura en el estado C es:

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \quad => \quad \frac{5}{322{,}39} = \frac{10}{T_C}$$

$$T_C = 644{,}78\ ^oK$$

Así, el calor absorbido por el gas en el proceso isobárico BC es:

$$\Delta Q_{BC} = n\, C_P (T_C - T_B)$$

$$\Delta Q_{BC} = n(\frac{\gamma}{2} + 1)R(T_C - T_B)$$

$$\Delta Q_{BC} = (3)(\frac{3}{2} + 1)(\frac{8{,}31}{4{,}186}) \bullet (644{,}78 - 322{,}39)$$

$$\Delta Q_{BC} = 4\ 800 \text{ cal}$$

Luego, la razón del calor en el proceso BC al calor en el proceso AB, es:

$$\clubsuit\quad \frac{\Delta Q_{BC}}{\Delta Q_{AB}} = \frac{4\ 800}{200} = 24 \qquad \text{(C)}$$

Solución: 130

• El trabajo total realizado en el ciclo, es numéricamente igual, al área encerrada por el ciclo, esto es:

$$W = \text{área rectángulo ABCD}$$

$$W = (P_B - P_A)(V_D - V_A)$$

$$W = (16{,}066 - 14{,}958).10^5 \bullet (10-5).10^{-3}$$

$$\clubsuit\ W = 554\ J \qquad \text{(E)}$$

Solución: 131

• El trabajo de expansión libre del anhídrido carbónico es:

$$W = P\Delta V = n\,R\Delta T$$

$$W = (\frac{7}{44})(8{,}31)(10) = 13{,}2\ J$$

De otro lado, la variación de su energía interna es:

$$\Delta U = (\gamma/2)\,nR\Delta T$$

$$\Delta U = (\frac{5}{2})(\frac{7}{44})(8{,}31)(10)$$

$$\clubsuit\ \Delta U = 33\ J \qquad \text{(A)}$$

Solución: 132

I) De la ecuación de los gases ideales, hallemos el volumen inicial, así:

$$P_1V_1 = n\,RT_1$$

$$(750)(133{,}3)V_1 = (\frac{28}{28})(8{,}31)(313)$$

$$V_1 = 0{,}026\ m^3 = 26\ \ell t$$

De la relación de temperaturas y volúmenes, dada por la ecuación de Poisson, obtenemos la temperatura final (T_2), así:

$$\frac{T_2}{T_1} = (\frac{V_1}{V_2})^{\chi-1}$$

$$T_2 = (\frac{26}{13})^{\frac{7}{5}-1}(313)$$

$$T_2 = 413\ ^oK$$

De la relación de presiones y volúmenes, dada por la ecuación de Poisson, obtenemos la temperatura final (P_2), así:

$$\frac{P_2}{P_1} = (\frac{V_1}{V_2})^{\chi}$$

$$P_2 = (\frac{26}{13})^{\frac{7}{5}}(99975)$$

$$P_2 = 2{,}64.10^5\frac{N}{m^2} = 2{,}6\ atm \qquad \text{(E)}$$

II) El trabajo de compresión realizado en el proceso adiabático, viene dado por:

$$W = \frac{P_1V_1}{(\chi-1)}[1 - \frac{T_2}{T_1}]$$

$$W = \frac{(750)(133{,}3)(26.10^{-3})}{(7/5-1)}[1 - \frac{413}{313}]$$

$$\clubsuit\ W \approx -2076\ J \qquad \text{(D)}$$

Solución: 133

I) La cantidad de calor que se debe suministrar al gas, para elevar su temperatura en 10^0 C es:

$$\Delta Q = n\,C_P\Delta T = \frac{m}{M}(\frac{\gamma}{2}+1)\,R\Delta T$$

$$\Delta Q = (\frac{1}{28})(\frac{5}{2}+1)(8{,}31)(10)$$

$$\Delta Q = 10{,}4\ J \qquad \text{(E)}$$

II) De la ecuación de los gases ideales, hallemos la altura que se eleva el émbolo, así:

$$P\,V = n\,RT \implies P\Delta V = n\,R\Delta T$$

$$(P_0+\frac{W}{S})(S\,h)=\frac{m}{M}R\Delta T$$

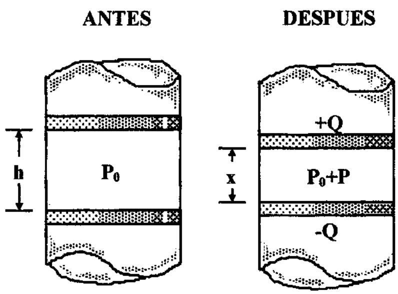
$$h=\frac{(m/M)\,R\Delta T}{P_0S+W}$$

$$h=\frac{(1/28)(8{,}31)(10)}{(1{,}013.10^5)(10.10^{-4})+10}$$

$$\clubsuit\ h\approx 2{,}67\ cm \qquad \text{(D)}$$

Solución: 134

• Representemos al condensador antes y después de la compresión del aire.



La magnitud del campo eléctrico unlforme entre las placas del condensador es:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_o}=\frac{Q}{\varepsilon_o S}$$

Así, el diferencial de fuerza eléctrica, debido a este campo eléctrico, sobre un diferencial de área de una de las placas es:

$$dF=E\,dQ=\frac{Q\,dQ}{\varepsilon_o S}$$

De modo que, la fuerza total entre las placas cargadas del condensador y la presión eléctrica entre ellas, son:

$$\int_0^F dF=\frac{1}{\varepsilon_o S}\int_0^Q Q\,dQ$$

$$F=\frac{Q^2}{2\varepsilon_o S}$$

$$P=\frac{F}{S}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_o S^2}$$

Luego, en la ecuación de los gases ideales, considerando T= cte., se tiene:

$$P_1V_1=P_2V_2$$

$$P_0S\,h=(P_0+P)\,S\,x$$

$$\frac{h}{x}=(1+\frac{P}{P_0})=1+\frac{Q^2}{2\varepsilon_o S^2P_0}$$

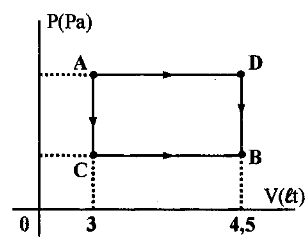
$$\frac{h}{x}=1+\frac{2\pi Q^2}{4\pi\varepsilon_o S^2P_0}$$

$$\frac{h}{x}=1+\frac{(2\pi)(9.10^9)(2.10^{-6})^2}{(8.10^{-4})^2(1.013.10^5)}$$

$$\clubsuit\ \frac{h}{x}\approx 4{,}5\ \text{veces} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 135

• Representemos los procesos isobárico y isocórico.



I) De la ecuación de los gases ideales, hallemos (nR), así:

$$P_AV_A=n\,RT_A$$

$$(8{,}2.10^5)(3.10^{-3})=(nR)(300)$$

$$nR = 8{,}2\ J/^{o}K$$

También, de la ecuación de los gases ideales, hallemos las temperaturas en los estados B, C y D.
En el proceso isocórico A-C:

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_C}{T_C} \quad => \quad \frac{8{,}2.10^5}{300} = \frac{6.10^5}{T_C}$$

$$T_C = 219{,}5\ ^{o}K$$

En el proceso isobárico C-B:

$$\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_B}{T_B} \quad => \quad \frac{3}{219{,}5} = \frac{4{,}5}{T_B}$$

$$T_B = 329{,}25\ ^{o}K$$

En el proceso isobárico A-D:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_D}{T_D} \quad => \quad \frac{3}{300} = \frac{4{,}5}{T_D}$$

$$T_D = 450\ ^{o}K$$

La cantidad de calor entregada al gas en el proceso ADB es:

$$\Delta Q_{ADB} = n\,C_P(T_D - T_A) + n\,C_V(T_B - T_D)$$

$$\Delta Q_{ADB} = n\,(\frac{\gamma}{2}+1)\,R\,(T_D - T_A) \;+$$

$$n\,(\frac{\gamma}{2})\,R\,(T_B - T_D)$$

$$\Delta Q_{ADB} = (8{,}2)(\frac{5}{2}+1)(450-300) +$$

$$(8{,}2)(\frac{5}{2})(329{,}25 - 450)$$

$$\Delta Q_{ADB} \approx 1{,}83\ kJ$$

La cantidad de calor entregada al gas en el proceso ACB es:

$$\Delta Q_{ACB} = n\,C_V(T_C - T_A) + n\,C_P(T_B - T_C)$$

$$\Delta Q_{ACB} = n\,(\frac{\gamma}{2})\,R\,(T_C - T_A) +$$

$$n\,(\frac{\gamma}{2}+1)\,R\,(T_B - T_C)$$

$$\Delta Q_{ACB} = (8{,}2)(\frac{5}{2})(219{,}5 - 300) +$$

$$(8{,}2)(\frac{5}{2}+1)(329{,}25 - 219{,}5)$$

$$\Delta Q_{ACB} \approx 1{,}5\ kJ$$

Luego, la razón del calor en el proceso ADB al calor en el proceso ACB es:

♣ $$\frac{\Delta Q_{ADB}}{\Delta Q_{ACB}} = \frac{1{,}83}{1{,}5} = 1{,}22$$ **B**

II) El trabajo realizado por el gas en el proceso ADB es:

$$W_{ADB} = P_A(V_B - V_A)$$

$$W_{ADB} = (8{,}2.10^5)(4{,}5-3).10^{-3}$$

$$W_{ADB} = 1\ 230\ J$$

El trabajo realizado por el gas en el proceso ACB es:

$$W_{ACB} = P_B(V_B - V_A)$$

$$W_{ACB} = (6.10^5)(4{,}5-3).10^{-3}$$

$$W_{ACB} = 900\ J$$

Luego, la razón del trabajo en el proceso ADB al trabajo en el proceso ACB es:

♣ $$\frac{W_{ADB}}{W_{ACB}} = \frac{1\ 230}{900} = 1{,}37$$ **B**

Solución: 136

• Aplicando la ecuación de los gases ideales al estado A, hallemos el número de moles, así:

$$P_A V_A = n\,R T_A$$

$$n = \frac{(7)(1{,}013.10^5)(2.10^{-3})}{(8{,}31.10^3)(273+127)}$$

$$n = 0{,}427.10^{-3}\,\text{kmol}$$

En el proceso isotérmico AB, la presión en el estado B es:

$$P_B V_B = P_A V_A$$

$$P_B = \frac{(7)(1{,}013.10^5)(2.10^{-3})}{5.10^{-3}}$$

$$P_B = 2{,}84.10^5\,N/m^2 = 2{,}8\text{ atm}$$

En el proceso adiabático BC, de la ecuación de Poisson, obtenemos la presión en C, así:

$$\frac{P_C}{P_B} = (\frac{V_B}{V_C})^{\chi}$$

$$P_C = (\frac{5}{8})^{1{,}4}(2{,}8) = 1{,}45\text{ atm}$$

Aplicando la ecuación de los gases ideales al estado C, obtenemos la temperatura en C, así:

$$P_C V_C = n\,R T_C$$

$$T_C = \frac{(1{,}45)(1{,}013.10^5)(8.10^{-3})}{(0{,}427.10^{-3})(8{,}31.10^3)}$$

$$T_C = 331\text{ }^{o}K$$

En el proceso adiabático DA, de la ecuación de Poisson, obtenemos el volumen en D, así:

$$(\frac{V_D}{V_A})^{\chi-1} = \frac{T_A}{T_D}$$

$$V_D = (\frac{400}{331})^{\frac{1}{1{,}4-1}}(2) = 3{,}2\,\ell\text{lt}$$

En el proceso isotérmico CD, la presión en D es:

$$P_D V_D = P_C V_C$$

$$P_D = \frac{(1{,}45)(1{,}013.10^5)(8.10^{-3})}{3{,}2.10^{-3}}$$

$$P_D = 3{,}67.10^5\frac{N}{m^2} = 3{,}6\text{ atm}$$ E

I) Así, los parámetros P, V y T para cada uno de los estados, son:

	A	B	C	D
P(atm	7	2,8	1,45	3,6
V(lt)	2	5	8	3,2
T(^{0}K)	400	400	331	331

II) El trabajo en el proceso isotérmico AB es:

$$W_1 = n\,R T_A \ell n(\frac{V_B}{V_A})$$

$$W_1 = (0{,}427)(8{,}31)(400)\,\ell n(5/2)$$

$$W_1 = 1\,300\text{ J}$$

El trabajo en el proceso adiabático BC es:

$$W_2 = \frac{n\,R T_B}{(\chi-1)}[1-\frac{T_C}{T_B}]$$

$$W_2 = \frac{(0{,}427)(8{,}31)(400)}{(1{,}4-1)}[1-\frac{331}{400}]$$

$$W_2 = 612\text{ J}$$

El trabajo en el proceso isotérmico CD es:

$$W_3 = n\,RT_C \ell n(V_D / V_C)$$

$$W_3 = (0,427)(8,31)(331)\,\ell n(3,2/8)$$

$$W_3 = -1\ 076\ J$$

El trabajo en el proceso adiabático DA es:

$$W_4 = \frac{n\,RT_D}{(\chi - 1)}[1 - \frac{V_A}{T_D}]$$

$$W_4 = \frac{(0,427)(8,31)(331)}{(1,4-1)}[1 - \frac{400}{331}]$$

$$W_4 = -612\ J$$

III) El trabajo total realizado en el ciclo es:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$W = 1\ 300 + 612 - 1076 - 612$$

$$W = 224\ J$$ (C)

IV) El porcentaje que representa el trabajo en el proceso de compresión respecto del trabajo en el proceso de expansión es:

$$\eta = (\frac{1\ 076 + 612}{1\ 300 + 612})(100)$$

$$\eta = 88,3\ \%$$ (E)

V) El rendimiento del ciclo de Carnot es:

$$\eta = (1 - \frac{T_D}{T_A})(100)$$

$$\eta = (1 - \frac{331}{400})(100)$$

$$\eta = 17,3\ \%$$ (D)

VI) La cantidad de calor que se toma del foco caliente en cada ciclo es:

$$Q_C = \frac{W}{\eta} = \frac{224}{0,173} = 1\ 295\ J$$

$$Q_C = 309\ cal$$ (E)

VII) La cantidad de calor que se envía al foco frío en cada ciclo es:

$$Q_F = Q_C - W = 1\ 295\ J - 224\ J$$

$$Q_F = 1\ 071\ J \approx 256\ cal$$ (D)

Solución: 137

- De la ecuación de los gases ideales, calculemos las temperaturas en los estados A, B C y D, así:

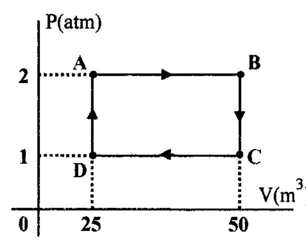
$$T = P V / n R$$

$$T_A = \frac{(2)(1,013.10^5)(25)}{(1)(8,31.10^3)} = 609,5\ ^oK$$

$$T_B = \frac{(2)(1,013.10^5)(50)}{(1)(8,31.10^3)} = 1\ 219\ ^oK$$

$$T_C = \frac{(1)(1,013.10^5)(50)}{(1)(8,31.10^3)} = 609,5\ ^oK$$

$$T_D = \frac{(1)(1,013.10^5)(25)}{(1)(8,31.10^3)} = 304,8\ ^oK$$



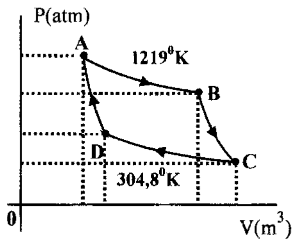
El trabajo en el ciclo formado por dos procesos isobáricos y dos isocóricos es:

$$W = (P_A - P_D)(V_B - V_A)$$

$$W = (1{,}013.10^5)(50 - 25)$$

$$W = 2\ 533\ \text{kJ}$$

Ahora, representemos el ciclo de Carnot formado por dos procesos isotérmicos y dos procesos adiabáticos.



De la ecuación de Poisson, para los procesos adiabáticos BC y DA, se tiene:

$$(\frac{V_C}{V_B})^{\chi-1} = \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = (\frac{T_B}{T_C})^{1/\chi-1}$$

$$(\frac{V_D}{V_A}) = \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow \frac{V_D}{V_A} = (\frac{T_B}{T_C})^{1/\chi-1}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones:

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{1}{2}$$

El trabajo en el proceso isotérmico AB es:

$$W_1 = n\,RT_A \ell n(V_B / V_A)$$

$$W_1 = (1)(8{,}31.10^3)(1\ 219)\ell n(2/1)$$

$$W_1 = 7\ 022\ \text{kJ}$$

El trabajo en el proceso adiabático BC es:

$$W_2 = \frac{n\,RT_B}{(\chi - 1)}(1 - \frac{T_C}{T_B})$$

$$W_2 = \frac{n\,R}{(\chi - 1)}(T_B - T_C)$$

El trabajo en el proceso isotérmico CD es:

$$W_3 = n\,RT_C \ell n(V_D / V_C)$$

$$W_3 = (1)(8{,}31.10^3)(304{,}8)\ell n(\frac{1}{2})$$

$$W_3 = -1756\text{kJ}$$

El trabajo en el proceso adiabático DA es:

$$W_4 = \frac{n\,RT_C}{(\chi - 1)}(1 - \frac{T_B}{T_C})$$

$$W_4 = \frac{n\,R}{(\chi - 1)}(T_C - T_B) = -W_2$$

Así, el trabajo total realizado en el ciclo de Carnot es:

$$W' = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$W' = 7\ 022\ \text{kJ} + W_2 - 1\,756\ \text{kJ} - W_2$$

$$W' = 5\ 266\ \text{kJ}$$

Luego, la razón del trabajo en el ciclo de Carnot al trabajo en el ciclo isobárico-isocórico es:

$$\eta = \frac{W'}{W} = \frac{5\ 266}{2\ 533}$$

♣ $\eta \approx 2{,}1$ veces **C**

Solución: 138

I) El rendimiento de la máquina frigorífica en el ciclo de Carnot inverso es:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{273 - 10}{273 + 17}$$

$$\eta = (0{,}093)(100)$$

$$\eta = 9{,}3\ \%$$ **E**

II) La cantidad de calor que se toma del foco frío cada ciclo es:

$$Q_F = Q_C - W = W/\eta - W$$

$$Q_F = (\frac{1-\eta}{\eta})W = (\frac{1-0,093}{0,093})(37\ 000)$$

$$Q_F \approx 361 \text{ kJ} \qquad \text{A}$$

III) La cantidad de calor que se cede al cuerpo caliente cada ciclo es:

$$Q_C = Q_F + W = 361 \text{ kJ} + 37 \text{ kJ}$$

$$Q_C = 398 \text{ kJ} \qquad \text{E}$$

Solución: 139

- El rendimiento de la máquina frigorífica en el ciclo de Carnot inverso es:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{273+0}{273+100}$$

$$\eta = 0,268$$

La cantidad de calor que se utiliza en el foco caliente para vaporizar 1 kg de agua es:

$$Q_C = m\,L_F = (1)(22,6.10^5)$$

$$Q_C = 2\ 260 \text{ kJ}$$

Así, la cantidad de calor que se toma del foco frío es:

$$Q_F = (1-\eta)\,Q_C$$

$$Q_F = (1-0,268)(2\ 260.10^3)$$

$$Q_F \approx 1\ 654 \text{ kJ}$$

Luego, la cantidad de agua que se debe helar en el refrigerador es:

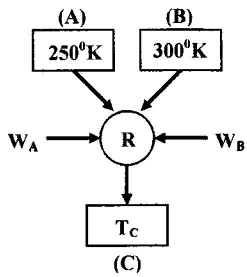
$$Q_F = m'\,L_F$$

$$1654.10^3 = m'\,(335.10^3)$$

$$\therefore\ m' \approx 4,94 \text{ kg} \qquad \text{E}$$

Solución: 140

- Representemos a las fuentes (A), (B), a la refrigeradora (R) y al sumidero (C).



De la primera ley de la termodinámica, obtenemos la cantidad de calor en (B), así:

$$Q_A + Q_B + W_A + W_B = Q_C$$

$$400 + Q_B + 400 + 400 = Q_C$$

$$Q_B = Q_C - 1\ 200$$

Aplicando la expresión de la eficiencia a la fuente (A), hallemos la temperatura del sumidero (C), así:

$$\eta_A = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 1 - \frac{W_A}{W_A + Q_A}$$

$$T_C = (\frac{W_A + Q_A}{W_A})\,T_A$$

$$T_C = (\frac{400+400}{400})(250)$$

$$T_C = 500\ {}^oK$$

Luego, la cantidad de calor enviado al sumidero (C), lo obtenemos de la expresión de la eficiencia para la fuente (B), así:

$$\eta_B = 1 - \frac{T_B}{T_C} = 1 - \frac{W_B}{W_B + Q_B}$$

$$\frac{300}{500} = \frac{400}{400 + Q_C - 1\,200}$$

$$\clubsuit\ Q_C = 1\,800\,\text{kJ} \qquad \text{(D)}$$

Notas

1) En una máquina refrigeradora los trabajos siempre son negativos, pues, los trabajos se hacen sobre el sistema.
2) El sumidero (foco caliente), siempre está a mayor temperatura que las fuentes (foco frío).

Solución: 141

• La eficiencia del refrigerador en el ciclo de Carnot es:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{210}{360} = 0{,}417$$

Luego, como la eficiencia del refrigerador es la mitad de la eficiencia del refrigerador de Carnot (η), entonces:

$$\frac{\eta}{2} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} \Rightarrow Q_C = \frac{Q_F}{1 - (\eta/2)}$$

$$Q_C = \frac{600}{1 - (0{,}417/2)} = 758{,}05\text{J}$$

$$\clubsuit\ Q_C \approx 758\ \text{J} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 142

• La eficiencia de la máquina térmica en el ciclo de Carnot es:

$$\eta = 1 - T_F/T_C$$

$$\eta = 1 - \frac{273 + 71}{273 + 177} = 0{,}236$$

Luego, la temperatura del foco caliente para el cual la eficiencia se duplica es:

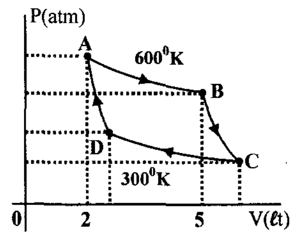
$$2\eta = 1 - T_F/T'_C$$

$$(2)(0{,}236) = 1 - \frac{273 + 71}{T'_C}$$

$$\clubsuit\ T'_C \approx 651{,}52\ ^{\circ}\text{K} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 143

I) Representemos el ciclo de Carnot formado por dos procesos isotérmicos y dos adiabáticas.



De la ecuación de Poisson, para los procesos adiabáticos BC y DA, se tiene:

$$\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\chi-1} = \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{1/\chi-1}$$

$$\left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\chi-1} = \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow \frac{V_D}{V_A} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{1/\chi-1}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones:

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{2}{5}$$

El trabajo en el proceso isotérmico AB es:

$$W_1 = n\,R\,T_A\,\ell n(V_B/V_A)$$

$$W_1 = (1)(8{,}31)(600)\,\ell n(5/2)$$

$$W_1 = 4\,568{,}6\ \text{J}$$

El trabajo en el proceso adiabático BC es:

$$W_2 = \frac{n\,R T_B}{(\chi - 1)}(1 - \frac{T_C}{T_B})$$

$$W_2 = \frac{n R}{(\chi - 1)}(T_B - T_C)$$

El trabajo en el proceso isotérmico CD es:

$$W_3 = n\ RT_C \ell n(V_D / V_C)$$

$$W_3 = (1)(8{,}31)(300)\,\ell n(2/5)$$

$$W_3 = -2\ 284{,}3\ J$$

El trabajo en el proceso adiabático DA es:

$$W_4 = \frac{n\,R T_C}{(\chi - 1)}(1 - \frac{T_B}{T_C})$$

$$W_4 = \frac{n R}{(\chi - 1)}(T_C - T_B) = -W_2$$

Así, el trabajo total realizado en el ciclo de Carnot es:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$W' = 4\ 568{,}6\ J + W_2 - 2\ 284{,}3\ J - W_2$$

$$W = 2\ 284{,}3\ J \qquad \text{(E)}$$

II) Aplicando la primera ley de la termodinámica a los procesos isotérmicos AB y CD, obtenemos los intercambios de calor, así:

$$\Delta Q_1 = W_1 + \Delta U_1 = W_1$$

$$\Delta Q_1 = 4\ 568{,}6\ J$$

$$\Delta Q_2 = W_2 + \Delta U_2 = W_2$$

$$\Delta Q_2 = -2284{,}3 J$$

Luego, la razón del cambio de calor en el proceso AB al cambio de calor en el proceso CD es:

$$r = \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = 2 \qquad \text{(B)}$$

III) La eficiencia del ciclo de Carnot es:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{300}{600}$$

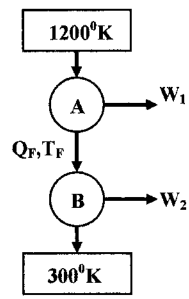
$$\clubsuit\ \eta = 0{,}5 \qquad \text{(C)}$$

Solución: 144

• Aplicando la primera ley de la termodinámica a la máquina térmica (A):

$$\dot{Q}_C = \dot{W}_1 + \dot{Q}_F$$

$$\dot{Q}_F\ 600 - 400 = 200\ kW$$



Aplicando la fórmula de rendimiento a la máquina térmica (A):

$$\eta_A = 1 - \frac{T_F}{T_C} = \frac{\dot{W}_1}{\dot{Q}_C}$$

$$T_F = (1 - \frac{400}{600})(1\ 200) = 400\ ^oK$$

El calor del foco frío para la máquina (A), es el calor del foco caliente para la máquina (B), así, de la fórmula de rendimiento, se tiene:

$$\eta_B = 1 - \frac{T_F}{T_C} = \frac{\dot{W}_2}{\dot{Q}_C}$$

E

♣ $\dot{W}_2 = (1 - \frac{300}{400})(200) = 50\ kW$

Nota

El punto encima de la letra, significa la derivada respecto del tiempo, así:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt}$$

Solución: 145

• La máxima cantidad de calor cedida al foco caliente, empleando el mínimo trabajo, se obtiene mediante una máquina refrigeradora en el ciclo de Carnot, esto es:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = \frac{W}{Q_F + W}$$

$$W = \frac{\eta}{\eta - 1} Q_F = \frac{T_F - T_C}{T_F} Q_F$$

$$W = (1 - \frac{273+21}{273-18})(10)$$

♣ $W \approx 1{,}53$ cal E

Solución: 146

• La eficiencia térmica de cada una de las máquinas refrigeradoras es:

$$\eta_1 = 1 - \frac{361}{T_1} = \frac{\dot{W}_1}{\dot{Q}_1} \quad (1)$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_1}{1\,225} = \frac{\dot{W}_2}{\dot{Q}_2} \quad (2)$$

Como, $\eta_1 = \eta_2$, entonces, igualando las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$\frac{T_1}{1225} = \frac{361}{T_1} \Rightarrow T_1^2 = (35^2)(19^2)$$

$$T_1 = 665\ ^oK$$

Sustituyendo T_1 en las ec.(1), obtenemos las eficiencias de las máquinas:

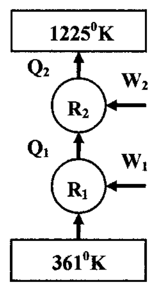
$$\eta_1 = \eta_2 = 0{,}457$$

Ahora, aplicando la primera ley de la termodinámica a la máquina (1), y teniendo en cuenta la ec.(1), se tiene:

$$\dot{Q}_1 = \dot{W}_1 + 100$$

$$\dot{Q}_1 = 0{,}457\,\dot{Q}_1 + 100$$

$$\dot{Q}_1 = 184{,}16$$



También, aplicando la primera ley de la termodinámica a la máquina (2), y teniendo en cuenta la ec.(2), se tiene:

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_1 + \dot{W}_2$$

$$\frac{\dot{W}_2}{0{,}457} = 184{,}16 + \dot{W}_2$$

♣ $\dot{W}_2 \approx 155\ kW$ E

Solución: 147

• Aplicando la ecuación de Poisson al pro ceso adiabático AB, y teniendo en cuenta que el aire es diatómico ($\chi = 1{,}4$) hallemos el volumen en B, así:

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\chi-1} \Rightarrow V_B = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\chi-1}} V_A$$

$$V_B = \left(\frac{320}{500}\right)^{\frac{1}{1{,}4-1}}(4) = 1{,}3\ \ell t$$

De otro lado, aplicando la ecuación de los gases ideales al estado A, hallemos el número de moles del aire, así:

$$n = \frac{P\,V}{R\,T} = \frac{(2)(1{,}013.10^5)(4.10^{-3})}{(8{,}31)(320)}$$

$$n = 0{,}305 \text{ moles}$$

El trabajo en el proceso adiabático AB es:

$$W_1 = \frac{n\,R\,T_A}{\chi - 1}\left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)$$

$$W_1 = \frac{n\,R}{\chi - 1}(T_A - T_B)$$

El trabajo en el proceso isotérmico BC es:

$$W_2 = n\,R\,T_B\,\ell n\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$$W_2 = (0{,}305)(8{,}31)(500)\,\ell n(8/1{,}31)$$

$$W_2 = 2\ 293\ \text{J}$$

El trabajo en el proceso adiabático CD es:

$$W_3 = \frac{n\,R\,T_B}{\chi - 1}\left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right)$$

$$W_3 = \frac{n\,R}{\chi - 1}(T_B - T_A) = -W_1$$

El trabajo en el proceso isotérmico DA es:

$$W_4 = n\,R\,T_A\,\ell n\left(\frac{V_A}{V_D}\right)$$

$$W_4 = (0{,}305)(8{,}31)(320)\,\ell n(4/12)$$

$$W_4 = -891\ \text{J}$$

Luego, el trabajo total realizado en el ciclo de Carnot es:

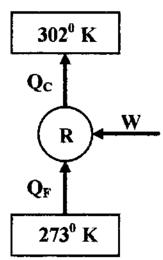
$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$W = W_1 + 2\ 293\ \text{J} - W_1 - 891\ \text{J}$$

$$\clubsuit\ W = 1\ 402\ \text{J} \qquad \text{A}$$

Solución: 148

• Representemos la máquina refrigeradora y los focos caliente y frío.



La eficiencia del refrigerador es 1/3 de la de un refrigerador de Carnot, por lo que:

$$\eta = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{273+0}{273+29}\right)$$

$$\eta = 0{,}032$$

De otro lado, el calor que extrae el refrigerador del foco frío, es igual, al calor de solidificación del agua, esto es:

$$Q_F = m\,L_F = (200.10^3)(80)$$

$$Q_F = 16.10^6\,\text{cal}$$

I) Ahora, el trabajo que se hace sobre el refrigerador, hallamos de la expresión de la eficiencia, así:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = \frac{W}{W + Q_F}$$

$$W = \frac{\eta}{1-\eta} Q_F = (\frac{0{,}032}{1-0{,}032})(16.10^6)$$

$$W = 0{,}529.10^6 \text{cal} = 2{,}21.10^6 \text{ J}$$ B

II) Finalmente, de la primera ley de la termodinámica, hallamos el calor enviado al foco caliente, así:

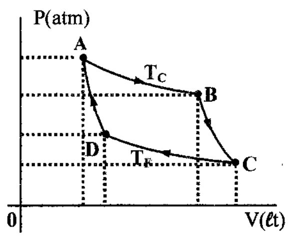
$$Q_C = W + Q_F$$

$$Q_C = 0{,}529.10^6 + 16.10^6$$

$$\clubsuit \; Q_C \approx 16{,}5.10^6 \text{cal}$$ D

Solución: 149

- Representemos el ciclo de Carnot, formado por dos procesos isotérmicos (AB y CD) y dos procesos adiabáticos (BC y DA).



I) De la ecuación de Poisson, hallemos la razón de la temperatura del foco frió (T_F) a la temperatura del foco caliente (T_C), así:

$$\frac{T_F}{T_C} = (\frac{V_B}{V_C})^{\chi-1} = (\frac{1}{n})^{\chi-1}$$

Así, la eficiencia del ciclo de Carnot es:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - n^{1-\chi}$$

$$\eta = 1 - (2)^{1-1{,}4} = 0{,}242$$ D

II) De la ecuación de Poisson, hallemos la razón de la temperatura del foco frió (T_F) a la temperatura del foco caliente (T_C), así:

$$\frac{T_F}{T_C} = (\frac{P_B}{P_C})^{\frac{\chi-1}{\chi}} = (\frac{1}{n})^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

Así, la eficiencia del ciclo de Carnot es:

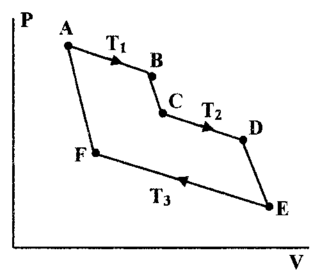
$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - n^{\frac{1-\chi}{\chi}}$$

$$\eta = 1 - (2)^{\frac{1-1{,}4}{1{,}4}}$$

$$\clubsuit \; \eta = 0{,}18$$ D

Solución: 150

- Representemos los tres procesos isotérmicos y los tres procesos adiabáticos que forman el ciclo.



El trabajo total realizado en el ciclo, es igual, a la suma de los trabajos realizados en cada uno de los procesos, esto es:

$$W = n\,R T_1 \ell n(\frac{V_B}{V_A}) + n\,R T_2 \ell n(\frac{V_D}{V_C}) +$$

$$n\,RT_3\ell n(\frac{V_F}{V_E})+\frac{n\,RT_1}{\chi-1}(1-\frac{T_2}{T_1})+$$

$$\frac{n\,RT_2}{\chi-1}(1-\frac{T_3}{T_2})+\frac{n\,RT_3}{\chi-1}(1-\frac{T_1}{T_3})$$

$$W=nRT_1\ell n(k)+nRT_2\ell n(k)+nRT_3\ell n(\frac{1}{k^2})+$$

$$\frac{nR}{\chi-1}(T_1-T_2)+\frac{nR}{\chi-1}(T_2-T_3)+\frac{nR}{\chi-1}(T_3-T_1)$$

$$W=n\,R\,\ell n(k)(T_1+T_2-2T_3)$$

De otro lado, el calor recibido del foco caliente durante el ciclo, es igual, a la suma de los trabajos en los procesos de expansión isotérmica del gas, esto es:

$$Q_C=n\,RT_1\ell n(\frac{V_B}{V_A})+n\,RT_2\ell n(\frac{V_D}{V_C})$$

$$Q_C=n\,R\,\ell n(k)(T_1+T_2)$$

Luego, el rendimiento térmico del ciclo es:

$$\eta=\frac{W}{Q_C}$$

$$\eta=\frac{n\,R\,\ell n(k)(T_1+T_2-2T_3)}{n\,R\,\ell n(k)(T_1+T_2)}$$

$$\eta=1-\frac{2T_3}{T_1+T_2}=1-\frac{(2)(300)}{(900+600)}$$

♣ $\eta=0{,}6$ (E)

Nota

Se ha demostrado anteriormente, que el aumento del volumen en la expansión isotérmica es (n) veces, entonces, la disminución del volumen durante la compresión isotérmica será (1/n) veces.

Solución: 151

• Recordemos que el coeficiente de refrigeración es $\varepsilon=Q_F/W$, así, de la expresión del rendimiento, se tiene:

$$\eta=\frac{W}{Q_C}=\frac{W}{W+Q_F}$$

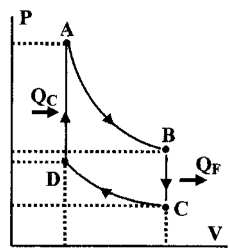
$$W=\frac{\eta}{1-\eta}Q_F$$

$$\varepsilon=\frac{Q_F}{W}=\frac{1-\eta}{\eta}=\frac{1-0{,}1}{0{,}1}$$

♣ $\varepsilon=9$ (E)

Solución: 152

• Representemos el ciclo formado por dos isocoras y dos adiabatas.



De la ecuación de Poisson para los procesos adiabáticos AB y CD, se tiene:

$$\frac{T_A}{T_B}=(\frac{V_B}{V_A})^{\chi-1}=(n)^{\chi-1} \qquad (1)$$

$$\frac{T_D}{T_C}=(\frac{V_C}{V_D})^{\chi-1}=(n)^{\chi-1} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), tenemos:

$$\frac{T_A}{T_B}=\frac{T_D}{T_C} \Rightarrow \frac{T_C}{T_B}=\frac{T_D}{T_A}$$

$$1-\frac{T_C}{T_B}=1-\frac{T_D}{T_A} \qquad (3)$$

De otro lado, el rendimiento térmico del ciclo, viene dado por:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C}$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{n\,C_V(T_C - T_B)}{n\,C_V(T_A - T_D)}$$

Como, $T_B > T_C$, la ecuación anterior queda así:

$$\eta = 1 - \frac{T_B(1 - T_C / T_B)}{T_A(1 - T_D / T_A)}$$

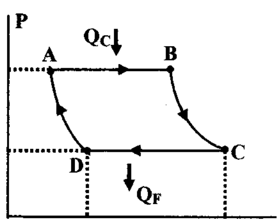
Finalmente, teniendo en cuenta (1) y (3), obtenemos:

$$\eta = 1 - n^{1-\chi} = 1 - (10)^{1-1,4}$$

$$♣\ \eta = 0,6 \qquad \text{(D)}$$

Solución: 153

- Representemos el ciclo formado por dos isobaras y dos adiabatas.



De la ecuación de Poisson para los procesos adiabáticos BC y DA, se tiene:

$$\frac{T_B}{T_C} = \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} = (n)^{\frac{\chi-1}{\chi}} \qquad (1)$$

$$\frac{T_A}{T_D} = \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} = (n)^{\frac{\chi-1}{\chi}} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), tenemos:

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{T_A}{T_D} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C}$$

$$1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{T_D}{T_C} \qquad (3)$$

De otro lado, el rendimiento térmico del ciclo, viene dado por:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C}$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{n\,C_V(T_C - T_D)}{n\,C_V(T_B - T_A)}$$

Como, $T_C > T_D$, la ecuación anterior queda así:

$$\eta = 1 - \frac{T_C(1 - T_D / T_C)}{T_B(1 - T_A / T_B)}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (1) y (3), obtenemos:

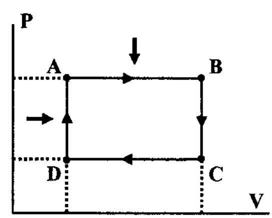
$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_B} = 1 - n^{\frac{1-\chi}{\chi}}$$

$$\eta = 1 - 4^{\frac{1-1,4}{1,4}} = 0,327$$

$$♣\ \eta = 32,7\ \% \qquad \text{(B)}$$

Solución: 154

- Representemos el ciclo formado por dos isobaras y dos isocoras.



Aplicando la ecuación de los gases ideales. Al proceso isocórico DA:

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_D}{T_D} \Rightarrow \frac{P_A}{P_D} = \frac{T_A}{T_D} = n \qquad (1)$$

Al proceso isobárico AB:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \;\Rightarrow\; \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} = n \qquad (2)$$

A continuación, hallemos una relación entre los grados de libertad (γ), y el coeficiente adiabático (χ), así:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\gamma/2+1}{\gamma/2}$$

$$\gamma = \frac{2}{\chi - 1} \qquad (3)$$

De otro lado, el trabajo realizado en el ciclo es numéricamente igual, al área del rectángulo ABCD, esto es:

$$W = (P_A - P_D)(V_B - V_A)$$

$$W = P_A(1 - \frac{P_D}{P_A})\frac{n\,R\,(T_B - T_A)}{P_A}$$

$$W = n\,R\,(1 - \frac{P_D}{P_A})(\frac{T_B}{T_A} - 1)\,T_A$$

Utilizando las ecs.(1) y (2), obtenemos la expresión para el trabajo:

$$W = n\,R\,(1 - 1/n)(n-1)\,T_A$$

Como la temperatura del sistema aumenta en los procesos isocórico (DA), e isobárico (AB), entonces, el calor del foco caliente es

$$Q_C = n\frac{\gamma}{2}R(T_A - T_D) + n\,(\frac{\gamma}{2}+1)(T_B - T_A)$$

$$Q_C = n\frac{\gamma}{2}R(1 - \frac{T_D}{T_A})T_A + n(\frac{\gamma}{2}+1)R(\frac{T_B}{T_A} - 1)T_A$$

$$Q_C = n\,R\,[\frac{\gamma}{2}(1 - \frac{1}{n}) + (\frac{\gamma}{2}+1)(n-1)]\,T_A$$

Sustituyendo (W) y (Q_C) en la expresión del rendimiento de una máquina térmica, se tiene:

$$\eta = \frac{W}{Q_C}$$

$$\eta = \frac{(n-1)^2/n}{\gamma\,(n-1)/2n + (\gamma/2+1)(n-1)}$$

$$\eta = \frac{2\,(n-1)}{\gamma + n\,\gamma + 2\,n}$$

Sustituyendo (γ) dada por la ec.(3):

$$\eta = \frac{2\,(n-1)}{\frac{2}{\chi-1} + n\,\frac{2}{\chi-1} + 2\,n}$$

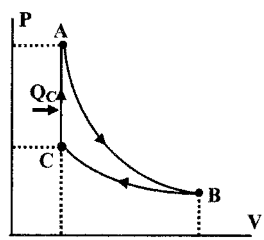
$$\eta = \frac{(n-1)(\chi-1)}{1 + n\chi}$$

$$\eta = \frac{(5-1)(1{,}4-1)}{1+(5)(1{,}4)} = 0{,}2$$

♣ $\eta = 20\ \%$ Ⓒ

Solución: 155

• Representemos el ciclo formado por una isocora (CA), una adiabata (AB) y una isoterma (BC).



Aplicando la ecuación de Poisson, al proceso adiabático AB, se tiene:

$$\frac{T_A}{T_B} = (\frac{V_B}{V_C})^{\chi-1} \;\Rightarrow\; \frac{T_A}{T_C} = (\frac{V_B}{V_C})^{\chi-1}$$

$$\frac{V_C}{V_B} = (\frac{T_C}{T_A})^{\frac{1}{\chi-1}} \qquad (1)$$

De otro lado, el trabajo es la suma de los trabajos realizados en los procesos adiabá tico AB e isotérmico BC, así:

$$W = \frac{n\,RT_A}{\chi - 1}(1 - \frac{T_C}{T_A}) + n\,RT_C \ell n(\frac{V_C}{V_B})$$

$$W = \frac{nRT_C}{\chi - 1}(\frac{T_A}{T_C} - 1) + \frac{nRT_C}{\chi - 1}\ell n(\frac{T_C}{T_A})$$

$$W = \frac{nRT_C}{\chi - 1}(n - 1) + \frac{nRT_C}{\chi - 1}\ell n(\frac{1}{n})$$

$$W = \frac{n\,RT_C}{\chi - 1}[n - 1 - \ell n(n)] \qquad (2)$$

A su vez, el calor recibido (Q_C) en el pro ceso isocórico CA es:

$$Q_C = n(\gamma/2)R(T_A - T_C)$$

$$Q_C = \frac{n\,RT_C}{\chi - 1}(\frac{T_A}{T_C} - 1)$$

$$Q_C = \frac{n\,RT_C}{\chi - 1}(n - 1) \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en la expresión del rendimiento de una máquina térmica, se tie ne:

$$\eta = \frac{W}{Q_C}$$

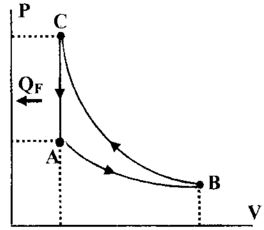
$$\eta = \frac{\frac{nRT_C}{\chi - 1}[n - 1 - \ell n(n)]}{\frac{nRT_C}{\chi - 1}(n - 1)}$$

$$\eta = 1 - \frac{\ell n(n)}{n - 1} = 1 - \frac{\ell n(3)}{3 - 1} = 0{,}45$$

♣ $\eta = 45\ \%$ Ⓓ

Solución: 156

- Representemos el ciclo formado por la i socora CA, adiabata AB e isoterma BC.



Aplicando la ecuación de Poisson, al pro ceso adiabático AB, se tiene:

$$\frac{T_A}{T_B} = (\frac{V_B}{V_C})^{\chi-1} \Rightarrow \frac{T_A}{T_C} = (\frac{V_B}{V_C})^{\chi-1}$$

$$\frac{V_C}{V_B} = (\frac{T_C}{T_A})^{1/\chi-1} \qquad (1)$$

De otro lado, el trabajo es la suma de los trabajos realizados en los procesos adiabá tico AB e isotérmico BC, así:

$$W = \frac{nRT_A}{\chi - 1}(1 - \frac{T_C}{T_A}) + nRT_C \ell n(\frac{V_C}{V_B})$$

$$W = \frac{nRT_C}{\chi - 1}(\frac{T_A}{T_C} - 1) + \frac{nRT_C}{\chi - 1}\ell n(\frac{T_C}{T_A})$$

$$W = \frac{nRT_C}{\chi - 1}(\frac{1}{n} - 1) + \frac{nRT_C}{\chi - 1}\ell n(n)$$

$$W = \frac{n\,RT_C}{\chi - 1}[\frac{1}{n} - 1 + \ell n(n)] \qquad (2)$$

A su vez, el calor cedido o perdido (Q_F) en el proceso isocórico CA es:

$$Q_C = n\frac{\gamma}{2}R\,(T_A - T_C)$$

$$Q_C = \frac{n\,RT_C}{\chi - 1}(\frac{T_A}{T_C} - 1)$$

$$Q_C = \frac{n\,RT_C}{\chi - 1}(\frac{1}{n} - 1)$$

De modo que, el calor recibido del foco caliente (Q_C), en el ciclo es:

$$Q_C = W + Q_F$$

$$Q_C = \frac{n\,R T_C}{\chi - 1}\left[\frac{1}{n} - 1 + \ell n(n) - \frac{1}{n} + 1\right]$$

$$Q_C = \frac{n\,R T_C}{\chi - 1}\,\ell n(n) \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en la expresión del rendimiento de una máquina térmica, se tiene:

$$\eta = W / Q_C$$

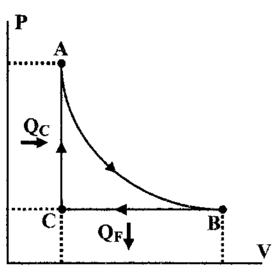
$$\eta = \frac{\dfrac{n\,R T_C}{\chi - 1}\left[\dfrac{1}{n} - 1 + \ell n(n)\right]}{\dfrac{n\,R T_C}{\chi - 1}\,\ell n(n)}$$

$$\eta = 1 - \frac{n-1}{n\,\ell n(n)} = 1 - \frac{7-1}{7\,\ell n(7)}$$

♣ $\eta \approx 56\ \%$ (C)

Solución: 157

• Representemos el ciclo formado por una adiabata AB, una isobara BC y una isócora CA.



En el proceso isobárico BC, de la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_B}{T_B}$$

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{V_B}{V_C} = n \qquad (1)$$

En el proceso isocórico CA, de la ecuación de los gases ideales y de la ecuación de Poisson, se tiene:

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_C}{T_C}$$

$$\frac{T_A}{T_C} = \frac{P_A}{P_C} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\chi} = n^{\chi} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la expresión de la eficiencia de una máquina térmica, se tiene:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$

$$\eta = 1 + \frac{n\,C_P R\,(T_C - T_B)}{n\,C_V R\,(T_A - T_C)}$$

$$\eta = 1 - \frac{\chi T_C (T_B / T_C - 1)}{T_C (T_A / T_C - 1)}$$

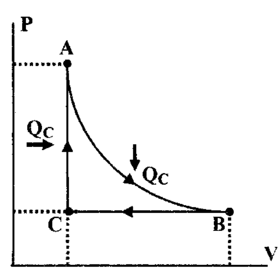
$$\eta = 1 - \frac{\chi\,(n-1)}{n^{\chi} - 1}$$

$$\eta = 1 - \frac{(1{,}4)(12-1)}{12^{1{,}4} - 1} \approx 0{,}51$$

♣ $\eta = 51\ \%$ (A)

Solución: 158

• Representemos el ciclo formado por una isoterma AB, una isobara BC y una isócora CA.



Aplicando la ecuación de los gases ideales. Al proceso isocórico CA:

$$\frac{P_C}{T_C}=\frac{P_A}{T_A} \Rightarrow \frac{P_C}{P_A}=\frac{T_C}{T_A} \qquad (1)$$

Al proceso isobárico BC

$$\frac{V_B}{T_B}=\frac{V_C}{T_C} \Rightarrow \frac{T_C}{T_B}=\frac{V_C}{V_B}=\frac{1}{n} \qquad (2)$$

Al proceso isotérmico AB.

$$P_A V_A = P_B V_B$$

$$\frac{P_B}{P_A}=\frac{V_A}{V_B}=\frac{1}{n} \qquad (3)$$

El trabajo realizado en el ciclo, es igual, a la suma de los trabajos en los procesos isotérmico (AB) e isobárico (BC), esto es:

$$W = n\,RT_A \ell n(\frac{V_B}{V_A}) + P_B(V_C - V_B)$$

$$W = n\,RT_A \ell n(\frac{V_B}{V_A}) - P_B V_B(1-\frac{V_C}{V_B})$$

$$W = n\,RT_A \ell n(k) - n\,RT_A(1-\frac{1}{k})$$

$$W = n\,RT_A(\frac{1}{k}-1+\ell nk) \qquad (4)$$

El calor que recibe el sistema en el proceso isotérmico (AB), es igual, al trabajo en dicho proceso, de modo que el calor recibido en todo el ciclo es:

$$Q_C = n\frac{\gamma}{2}R\,(T_A - T_C) + n\,R\,T_A \ell n(\frac{V_B}{V_A})$$

$$Q_C = \frac{n\,RT_A}{\chi - 1}(1-\frac{T_C}{T_A}) + n\,RT_A \ell n(\frac{V_B}{V_A})$$

$$Q_C = n\,RT_A(\frac{1/k-1}{\chi-1}+\ell nk) \qquad (5)$$

Luego, de (4) y (5) el rendimiento térmico del ciclo es:

$$\eta = W/Q_C$$

$$\eta = \frac{n\,RT_A\dfrac{1-k+k\,\ell nk}{k}}{n\,RT_A\dfrac{k-1+(\chi-1)\,k\,\ell nk}{k\,(\chi-1)}}$$

$$\eta = \frac{(1-k+k\,\ell nk)(\chi-1)}{k-1+(\chi-1)\,k\,\ell nk}$$

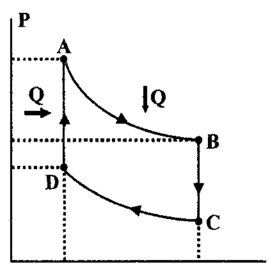
$$\eta = 1-\frac{\chi\,(k-1)}{k-1+(\chi-1)\,k\,\ell nk}$$

$$\eta = 1-\frac{(1{,}4)((10-1)}{10-1+(1{,}4-1)(10)\ell n10}$$

$$\clubsuit\ \eta \approx 31\ \%$$ **B**

Solución: 159

• Representemos el ciclo formado por dos isotermas (AB y CD) y dos isocoras (DA y BC).



Por dato del problema se sabe que:

$$\frac{T_A}{T_D}=\frac{T_B}{T_C}=t \quad y \quad \frac{V_B}{V_A}=\frac{V_C}{V_D}=k$$

El trabajo en el ciclo, es igual, a la suma de los trabajos en los procesos isotérmicos AB y CD, esto es:

$$W = n\,RT_A\,\ell n(\frac{V_B}{V_A}) + n\,RT_C\,\ell n(\frac{V_D}{V_C})$$

$$W = n\,RT_A \ell nk - n\,RT_C \ell nk$$

$$W = n\,R\,\ell nkT_A(1 - T_C/T_A)$$

$$W = n\,R\,T_A \frac{\ell n}{t}(t-1)$$

De otro lado, el sistema recibe calor en el proceso isobárico DA e isotérmico AB, así:

$$Q_C = n\frac{\gamma}{2}R\,(T_A - T_D) + n\,R\,T_A \ell n(\frac{V_B}{V_A})$$

$$Q_C = \frac{n\,RT_A}{\chi - 1}(1 - \frac{T_D}{T_A}) + n\,RT_A \ell nk$$

$$Q_C = n\,RT_A[\frac{t-1}{t\,(\chi-1)} + \ell nk]$$

$$Q_C = \frac{n\,RT_A}{t\,(\chi-1)}[t - 1 + (\chi - 1)\,t\,\ell nk]$$

Finalmente, sustituyendo W y Q_C en la expresión del rendimiento, obtenemos:

$$\eta = \frac{W}{Q_C}$$

$$\eta = \frac{n\,RT_A \frac{\ell nk}{t}(t-1)}{n\,RT_A \frac{[t-1+(\chi-1)\,t\,\ell nk]}{t\,(\chi-1)}}$$

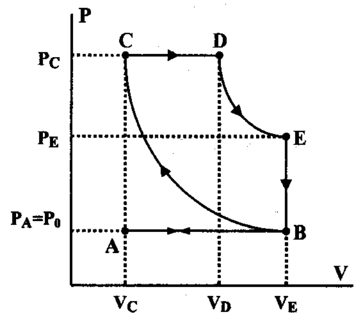
$$\eta = \frac{(\chi-1)(t-1)\,\ell nk}{t-1+(\chi-1)\,t\,\ell nk}$$

$$\eta = \frac{(1{,}4-1)(6-1)\,\ell n4}{6-1+(1{,}4-1)(6)\,\ell n4} \approx 0{,}333$$

♣ $\eta = 33{,}3\ \%$ B

Solución: 160

- Representemos el ciclo desarrollado por el motor diesel.



El calor producido por la combustión en el proceso de expansión isobárica CD es:

$$Q_C = n\,C_P(T_D - T_C)$$

El calor perdido por el sistema en el proceso de enfriamiento isocórico EB es:

$$Q_F = n\,C_V(T_E - T_B)$$

De modo que, el trabajo realizado en el ciclo del motor Diesel, teniendo en cuenta que, $\chi = C_P / C_V$ es:

$$W = Q_C - Q_F$$

$$W = n\,C_V[\chi\,(T_D - T_C) - (T_E - T_B)]$$

A su vez, el rendimiento del ciclo en el motor Diesel es:

$$\eta = \frac{W}{Q_C}$$

$$\eta = \frac{n\,C_V[\chi\,(T_D - T_C) - (T_E - T_B)]}{n\,\chi\,C_V(T_D - T_C)}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\chi}\frac{T_E - T_B}{T_D - T_C} \qquad (1)$$

Aplicando la ecuación de los gases ideales al proceso de expansión isobárica CD, hallemos T_C, así:

$$\frac{V_C}{T_C}=\frac{V_D}{T_D} \Rightarrow \frac{T_D}{T_C}=\frac{V_D}{V_C}=\beta$$

$$T_C=(1/\beta)\,T_D \qquad (2)$$

siendo, (β) el grado de expansión isobárica

Aplicando la ecuación de Poisson, al proceso de expansión adiabático DE, hallemos T_E, así:

$$\frac{T_D}{T_E}=(\frac{V_E}{V_D})^{\chi-1}=\xi^{\chi-1}$$

$$T_E=\frac{1}{\xi^{\chi-1}}T_D \qquad (3)$$

Aplicando la ecuación de Poisson, al proceso de compresión adiabático BC, hallemos T_B, así:

$$\frac{T_C}{T_B}=(\frac{V_B}{V_C})^{\chi-1}=\alpha^{\chi-1}$$

$$T_B=\frac{T_C}{\alpha^{\chi-1}}=\frac{T_D}{\alpha^{\chi-1}\beta} \qquad (4)$$

Finalmente, sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), y teniendo en cuenta que, $\beta=\alpha/\xi$, obtenemos:

$$\eta=1-\frac{1}{\chi}\frac{\frac{T_D}{\xi^{\chi-1}}-\frac{T_D}{\alpha^{\chi-1}\beta}}{T_D-\frac{1}{\beta}T_D}$$

$$\eta=1-\frac{1}{\chi}\frac{\frac{1}{(\alpha/\beta)^{\chi-1}}-\frac{1}{\alpha^{\chi-1}\beta}}{\frac{\beta-1}{\beta}}$$

$$\eta=1-\frac{(\beta^{\chi}-1)/\beta\,\alpha^{\chi-1}}{\chi\,(\beta-1)/\beta}$$

$$\clubsuit\quad \eta=1-\frac{\beta^{\chi}-1}{\chi\,\alpha^{\chi-1}\,(\beta-1)}$$

Solución: 161

- El grado de expansión isobárica, viene dado por:

$$\beta=\frac{\alpha}{\xi}=\frac{16}{6{,}4}=2{,}5$$

Utilizando el resultado del problema anterior, el rendimiento del motor Diesel es:

$$\eta=1-\frac{\beta^{\chi}-1}{\chi\alpha^{\chi-1}(\beta-1)}$$

$$\eta=1-\frac{2{,}5^{1,3}-1}{(1{,}3)(16^{1,3-1})(2{,}5-1)}$$

$$\eta=0{,}489\approx 0{,}49$$

De otro lado, de la definición de rendimiento de una máquina térmica, se tiene:

$$\eta=\frac{W}{Q_C}=\frac{P\,t}{m\,J}$$

$$m=\frac{P\,t}{\eta\,J}=\frac{(36{,}8.10^3)(3{,}6.10^3)}{(0{,}49)(4{,}6.10^7)}$$

$$\clubsuit\quad m=5{,}9\text{ kg}$$ (E)

Solución: 162

- El rendimiento real de la máquina térmica, viene dada por:

$$\eta_1=\frac{W}{Q_C}=\frac{P\,t}{m\,J}$$

$$\eta_1=\frac{(14{,}7.10^3)(3{,}6.10^3)}{(8{,}1)(3{,}3.10^7)}$$

$$\eta_1=0{,}198\approx 20\ \%$$

El rendimiento de la máquina térmica ideal, que funciona según el ciclo de Carnot es:

$$\eta_2=1-\frac{T_C}{T_C}=1-\frac{58+273}{200+273}$$

$$\eta_2 = 0{,}30 = 30\ \%$$ C

Solución: 163

• La variación que experimenta la entropía al elevarse la temperatura del hielo de $T_1 = -20^0$ C a $T_2 = 0^0$ C es:

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m\,c_e\,dT}{T}$$

$$\Delta S_1 = m\,c_e\,\ell n(\frac{T_2}{T_1})$$

$$\Delta S_1 = (10)(0{,}5)\,\ell n(\frac{273}{253})$$

$$\Delta S_1 = 0{,}38\ \frac{cal}{{}^oK}$$

La variación que experimenta la entropía al transformarse el hielo en agua, a la temperatura constante de $T_2 = 0^0$ C es:

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{m\,L_F}{T_2}$$

$$\Delta S_2 = \frac{(10)(80)}{273} = 2{,}93\ \frac{cal}{{}^oK}$$

La variación que experimenta la entropía al elevarse la temperatura del agua desde $T_2 = 0^0$ C hasta $T_3 = 100^0$ C es:

$$\Delta S_3 = \int_2^3 \frac{dQ}{T} = \int_{T_2}^{T_3} \frac{m\,c_e\,dT}{T}$$

$$\Delta S_3 = m\,c_e\,\ell n(\frac{T_3}{T_2})$$

$$\Delta S_3 = (10)(1)\,\ell n(\frac{373}{273})$$

$$\Delta S_3 = 3{,}12\ \frac{cal}{{}^oK}$$

La variación que experimenta la entropía al transformarse el agua en vapor de agua, a la temperatura de $T_3 = 100^0$ C es:

$$\Delta S_4 = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{m\,L_F}{T_3}$$

$$\Delta S_4 = \frac{(10)(540)}{373} = 14{,}48\ \frac{cal}{{}^oK}$$

Luego, la variación total que experimenta la entropía es:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4$$

$$\Delta S = 0{,}38 + 2{,}93 + 3{,}12 + 14{,}48$$

♣ $$\Delta S \approx 21\ \frac{cal}{{}^oK}$$ C

Solución: 164

• La variación que experimenta la entropía al elevarse la temperatura del agua desde $T_1 = 0^0$ C hasta $T_2 = 100^0$ C es:

$$\Delta S_1 = m\,c_e\,\ell n(\frac{T_2}{T_1})$$

$$\Delta S_1 = (1)(1)\,\ell n\frac{373}{273} = 0{,}312\ \frac{cal}{{}^oK}$$

La variación que experimenta la entropía al transformarse el agua en vapor de agua, a la temperatura de $T_2 = 100^0$ C es:

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{m\,L_F}{T_2}$$

$$\Delta S_2 = \frac{(1)(540)}{373} = 1{,}448\ \frac{cal}{{}^oK}$$

Luego, la variación total que experimenta la entropía es:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$\Delta S = 0{,}312 + 1{,}448 = 1{,}76\ \frac{cal}{{}^oK}$$

$$\Delta T = T' - T = 289^o - 281^o$$

$$\clubsuit\ \Delta T = 8\ ^oC$$ ⓓ

Solución: 172

- Igualando el calor perdido por el agua caliente, con el calor ganado por el agua fría, hallemos la temperatura de la mezcla, así:

$$(50)(1)(50 - T) = (200)(1)(T - 0)$$

$$T = 10^o C$$

El cambio en la entropía debido al calentamiento de los 200 g de agua fría es:

$$\Delta S_2 = \int_{273}^{283} \frac{dQ}{T} = \int_{273}^{283} \frac{m\,c_e dT}{T}$$

$$\Delta S_1 = mc_e \ell nT\Big|_{273}^{283} = (200)(1)\ell n\frac{283}{273}$$

$$\Delta S_1 = 7{,}2\ cal/^o C$$

El cambio en la entropía debido al enfriamiento de los 50 g de agua caliente es:

$$\Delta S_2 = \int_{323}^{283} \frac{dQ}{T} = \int_{323}^{283} \frac{m\,c_e dT}{T}$$

$$\Delta S_2 = m\,c_e \ell nT\Big|_{323}^{283} = (50)(1)\,\ell n\frac{283}{323}$$

$$\Delta S_2 = -6{,}6\ cal/^o C$$

Luego, el cambio total en la entropía en el proceso de la mezcla del agua fría con el agua caliente es:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$\Delta S = 7{,}2\,\frac{cal}{^oC} - 6{,}6\,\frac{cal}{^oC}$$

$$\clubsuit\ \Delta S = 0{,}6\ cal/^o C$$ ⓓ

Solución: 173

- Los cambios de entropía que experimenta el sistema en cada uno de los procesos son: el hielo se calienta desde $T_1 = -20^0$ C hasta $T_2 = 0^0$ C, aumentando su entropía en:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m\,c_e dT}{T}$$

$$\Delta S_1 = m\,c_e \ell n(\frac{T_2}{T_1})$$

$$\Delta S_1 = (10^3)(0{,}5)\,\ell n\frac{0+273}{-20+273}$$

$$\Delta S_1 = 38{,}04\,\frac{cal}{^oC}$$

El hielo se derrite a la temperatura constante de $T_2 = 0^0$ C, recibiendo calor, por lo que su entropía aumenta en:

$$\Delta S_2 = \frac{m\,L_F}{T_2} = \frac{(10^3)(80)}{273}$$

$$\Delta S_2 = 293{,}04\,\frac{cal}{^oC}$$

El agua se calienta desde $T_2 = 0^0$ C hasta $T_3 = 100^0$ C, aumentando su entropía en:

$$\Delta S_3 = m\,c_e \ell n(\frac{T_3}{T_2})$$

$$\Delta S_3 = (10^3)(1)\,\ell n\frac{100+273}{0+273}$$

$$\Delta S_3 = 312{,}10\,\frac{cal}{^oC}$$

El agua se vaporiza a la temperatura constante de $T_3 = 100^0$ C, recibiendo calor, por lo que su entropía aumenta en:

$$\Delta S_4 = \frac{m\,L_F}{T_3} = \frac{(10^3)(540)}{373}$$

$$\Delta S_4 = 1\ 447{,}72\ \frac{cal}{^oC}$$

El vapor de agua se calienta desde la temperatura de T_3=100^0 C hasta T_4=120^0 C, aumentando su entropía en:

$$\Delta S_5 = m\,c_e\,\ell n(\frac{T_4}{T_3})$$

$$\Delta S_5 = (10^3)(0{,}5)\,\ell n\frac{120+273}{100+273}$$

$$\Delta S_5 = 26{,}12\ \frac{cal}{^oC}$$

Finalmente, el aumento total de la entropía en el proceso de conversión del hielo a -20^0 C en vapor de agua a 120^0 C es:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 + \Delta S_5$$

$$\Delta S = 38{,}04 + 293{,}04 + 312{,}10 + 1\ 447{,}72 + 26{,}12$$

$$\Delta S = 2\,117{,}02\ \frac{cal}{^oC}$$

$$\Delta S \approx 8\ 862\ \frac{J}{^oC}$$ Ⓒ

Solución: 174

• Recordemos que el trabajo realizado por un gas en un proceso de expansión isotérmica a la temperatura T_A es:

$$W = n\,R T_A\,\ell n\frac{V_B}{V_A}$$

$$n\ R\ \ell n\frac{V_B}{V_A} = \frac{W}{T_A} \qquad (1)$$

De otro lado, de la ecuación de los gases ideales, y de la primera ley de la termodinámica, se tiene:

$$dQ = dW + dU$$

$$dQ = P\,dV + n\,C_V dT$$

$$dQ = \frac{n\,RT}{V}dV + n\,C_V dT$$

Sustituyendo (dQ) en la expresión del cambio de la entropía de un gas, tenemos:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S = n\,R\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V} + n\,C_V\int_{T_A}^{T_B} dT$$

$$\Delta S = n\,R\,\ell n\frac{V_B}{V_A} + n\,C_V\,\ell n\frac{T_B}{T_A}$$

Como el proceso es isotérmico, T_A=T_B, el segundo término se anula, de modo que:

$$n\,R\,\ell n\frac{V_B}{V_A} = \Delta S \qquad (2)$$

Finalmente, igualando (1) con (2):

$$\Delta S = \frac{W}{T_A} = \frac{1\ 200}{127+273}$$

$$\clubsuit\ \Delta S = 3\ \frac{J}{^oK}$$ Ⓒ

Solución: 175

• Primero hallemos una relación entre los grados de libertad (γ) y el coeficiente adiabático (χ), así:

$$\chi = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\gamma/2+1}{\gamma/2}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\chi - 1}$$

Del problema anterior, el cambio en la entropía que experimenta el helio es:

$$\Delta S = n\,R\,\ell n\frac{V_2}{V_1} + n\frac{\gamma}{2}R\,\ell n\frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S = n\,R\,\ell n\frac{V_2}{V_1} + \frac{n\,R}{\chi - 1}\ell n\frac{T_2}{T_1}$$

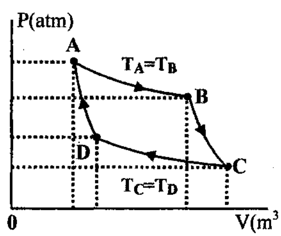
$$\Delta S = n\,R[\ell n\frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\chi - 1}\ell n\frac{T_2}{T_1}]$$

$$\Delta S = (\frac{8}{4})(8{,}31)[\ell n 4 + \frac{1}{1{,}4 - 1}\ell n\frac{1}{3}]$$

♣ $\Delta S = -22{,}6\ \frac{J}{{}^{o}K}$ (B)

Solución: 176

• Representemos el ciclo de Carnot, formado por las isotermas AB y CD, y las adiabatas BC y DA.



El cambio de la entropía entre las adiabatas es el que experimenta el proceso de expansión isotérmica AB, esto es:

$$\Delta S = n\,R\,\ell n\frac{V_B}{V_A}$$

De otro lado, el calor que recibe el sistema (Q_C), es igual, al trabajo realizado por el gas en el proceso de expansión isotérmica AB, esto es:

$$Q_C = n\,R\,T_A\,\ell n\frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_C = T_A\,\Delta S$$

Luego, sustituyendo (Q_C) en la expresión del rendimiento del ciclo de Carnot, obtenemos el trabajo (W), así:

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_A} = \frac{W}{Q_C}$$

$$\frac{T_A - T_C}{T_A} = \frac{W}{T_A\,\Delta S}$$

$$W = (100)(10^3) = 10^5\,cal$$

♣ $W \approx 0{,}42\ MJ$ (D)

Nota

En el ciclo de Carnot la isoterma superior (AB), está a mayor temperatura que la isoterma inferior (CD).

Solución: 177

• En un proceso isocórico, W= 0, así, de la definición de entropía y de la primera ley de la termodinámica, se tiene:

$$dQ = T\,dS = dU$$

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

Como no hay cambio en la energía interna, dU= 0, así, de la definición de entropía y de la primera ley de la termodinámica, se tiene

$$dQ = T\,dS = P\,dV$$

♣ $\frac{dS}{dV} = \frac{P}{T}$ (C)

Solución: 178

- En un proceso adiabático, dQ= 0, así, de la primera ley de la termodinámica, el cambio en la energía interna del gas es:

$$\Delta U = -\Delta W = -\frac{n R T_1}{\chi - 1}[1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\chi-1}]$$

$$\Delta U = -\frac{(5)(8{,}31)(304)}{5/3 - 1}[1 - (\frac{24}{40})^{5/3-1}]$$

$$\clubsuit \ \Delta U \approx -5\ 469 \text{ J} \qquad \text{(B)}$$

De otro lado, como en un proceso adiabático no hay transferencia de calor, entonces, no hay cambio en la entropía.

Solución: 179

- El trabajo en el proceso de calentamiento de la sustancia cristalina es nula, de modo que, el cambio en la entropía es:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n C_V dT}{T}$$

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n A T^3}{T} dT = \frac{1}{3} n A T^3 \Big|_{T_1}^{T_2}$$

$$\Delta S = \frac{1}{3} n A (T_2^3 - T_1^3)$$

$$\frac{\Delta S}{n} = \frac{1}{3} A (3)^3$$

$$\clubsuit \ \frac{\Delta S}{n} = 9 \text{ A} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 180

- De la ecuación de los gases ideales, hallemos la temperatura en función del volumen, así:

$$P V = n R T$$

$$T = \frac{1}{nR} P V = \frac{1}{nR}(P_0 V - \alpha V^2)$$

$$dT = \frac{1}{nR}(P_0 - 2\alpha V) dV$$

Luego, como a un cambio máximo en la entropía, le corresponde un cambio máximo en la cantidad de calor, entonces:

$$dQ = dW + dU$$

$$dQ = P dV + n C_V dT$$

$$dQ = (P_0 - \alpha V) dV + \frac{n(\gamma/2)R}{nR}(P_0 - 2\alpha V) dV$$

$$\frac{dQ}{dV} = P_0 - \alpha V + \frac{1}{\chi - 1}(P_0 - 2\alpha V)$$

Igualando a cero esta expresión, hallemos el volumen (V) para el cual, la entropía es máxlma, así:

$$2\alpha V - P_0 = (\chi - 1) - \alpha(\chi - 1) V$$

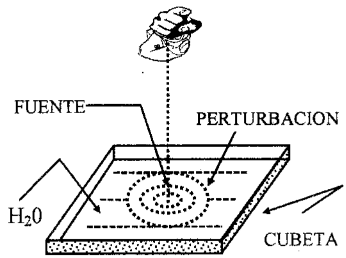
$$\alpha(2 + \chi - 1) V = (\chi - 1 + 1) P_0$$

$$V_{max} = \frac{\chi P_0}{\alpha(1 + \chi)} = \frac{(7/5) P_0}{\alpha(1 + 7/5)}$$

$$\clubsuit \ V_{max} = \frac{7 P_0}{12 \alpha} \qquad \text{(B)}$$

ONDAS

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES



a) Onda

Es toda perturbación que experimenta un medio sólido, líquido o gaseoso, y que se transmite por vibraciones de sus moléculas, transportando energía sin el movimiento del medio (materia).

b) Fuentes de ondas

Son los cuerpos que actuando en un medio provocan la perturbación, que por su naturaleza u origen pueden ser mecánicas, electromagnéticas, etc..

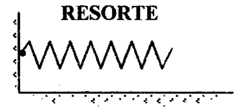
Ejemplo: 01
En la Fig., la piedrita, es la fuente de ondas y el agua el medio.

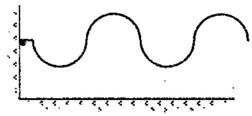
c) Clasificación de ondas

I. Según el medio de propagación

1) Ondas mecánicas

Se llaman así a las perturbaciones mecánicas (deformaciones) que se propagan en un medio elástico.





Ejemplo: 02
Ondas en un resorte, ondas en una cuerda, ondas en una columna de gas.

2) Ondas electromagnéticas

Se llaman así a las perturbaciones del campo electromagnético que se propagan en un medio material o en el vacío.

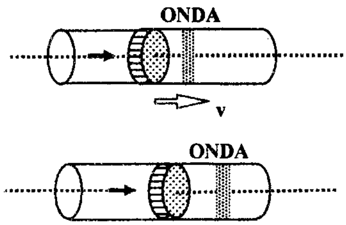
Ejemplo: 03
Ondas de radio, televisión, rayos X, rayos gamma, luz, etc...

II. Según su modo de propagación

1) Ondas longitudinales

Una onda elástica es longitudinal cuando las partículas del medio de propagación oscilan en la misma dirección en la que se propaga la onda.

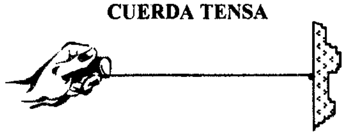
Ejemplo: 04
Las ondas en una columna de gas son longitudinales.



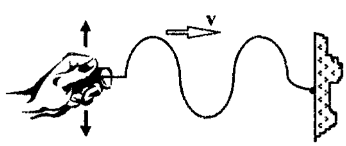
2) Ondas transversales

Una onda elástica es transversal cuando las partículas del medio de propagación oscilan perpendicularmente a la dirección en la que se propaga la onda.

CUERDA TENSA



CUERDA PERTURBADA



Ejemplo: 05
Las ondas provocadas en una cuerda tensa son transversales.

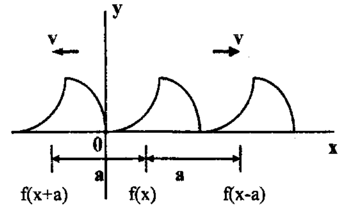
2. ECUACION DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

a) Descripción matemática de una onda

En la Fig., se tienen dos ondas que se propagan a la derecha e izquierda, con velocidades de propagación (v), así:

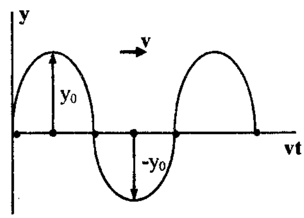
$$y = f(x - a) = f(x - vt)$$

es la representación matemática de la onda que se mueve a la derecha.



$$y = f(x + a) = f(x + vt)$$

es la representación matemática de la onda que se mueve a la izquierda.



Ejemplo: 06
Una onda del tipo sinusoidal representamos, así:

$$y(x, t) = y_0 \operatorname{sen} k(x - vt)$$

siendo, (y) la amplitud de la perturbación (y_0), ($k=2\pi/\lambda$) el número de onda, y (v) la velocidad de propagación la amplitud máxima de la perturbación.

b) Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio

La ecuación diferencial que describe el movimiento de una onda que se propaga a velocidad constante (v), en la dirección de los ejes X^+ y X^-, viene dado por:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

La solución general de esta ecuación diferencial de segundo orden homogénea en derivadas parciales es:

$$y(x,\ t) = f_1(x - v.t) + f_2(x + v.t)$$

como se vio anteriormente, $f_1(x\text{-}vt)$, $f_2(x\text{+}vt)$ son las representaciones matemáticas de ondas que se propagan hacia la derecha e izquierda del eje X, con velocidades de propagación constantes (v).

Demostración:

- Sean: $y = f(x \pm vt)$ y $u = x \pm vt$, entonces:

$$y = f(u) \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \ \text{ y } \ \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v$$

De modo que, de la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v\frac{\partial y}{\partial u}$$

Procediendo del mismo modo:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}(\pm v)$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2 y}{du^2} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2), obtenemos:

$$\clubsuit \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

c) Principio de superposición de ondas

Si en un medio se propagan al mismo tiempo (n) ondas diferentes determinadas por los potenciales escalares $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, y los potenciales vectoriales $\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_n$ los potenciales φ y $\vec{A}$ de la onda resultante, serán:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \quad \text{y} \quad \vec{A} = \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_1$$

Cada onda se propaga por el medio independientemente de las demás.

Sólo es válido para medios lineales, que obedecen a la ley de Hooke.

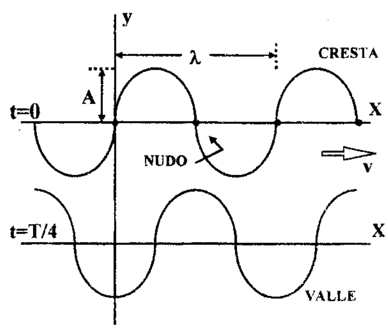
3. ONDAS SINUSOIDALES

a) Definición

Una onda que tiene como perfil una sinusoide se dice que es armónica, recordemos que toda función armónica es periódica.

Las ondas de perfiles más complicados pueden expresarse como sumas de funciones sinusoidales mediante los métodos de Fourier.

b) Ecuación matemática de una onda sinusoidal



La ecuación de una onda sinusoidal plana (armónica), que se propaga en un medio no absorbente, se representa así:

$$y(x,\ t) = A\,\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_o)$$

siendo, (A) amplitud de la onda, (T) período de la onda, (λ) longitud de onda, (v) velocidad de propagación, (φ_o) fase inicial de la onda, (ω) frecuencia cíclica (y) posición en la vertical de un punto de la onda.

- El signo (+) es para una onda que se propaga hacía la izquierda.
- El signo (-) es para una onda que se propaga hacía la derecha.

c) Representación compleja de una onda

La ecuación matemática de un movimiento ondulatorio, en general puede representarse en su forma compleja, del modo siguiente:

$$y(x,\ t) = A^{i\,(k\,x \mp \omega.t + \theta_0)}$$

$$y(x,\ t) = A\,[\cos(k.x \mp \omega.t + \theta_o) + \text{sen}(k.x \mp \omega.t + \theta_o)]$$

siendo, (A) la amplitud, (k) el número de onda, (ω) la frecuencia cíclica, y (θ_o) la fase inicial.

d) Elementos de una onda sinusoidal

1) Fase de la onda (Φ)

Es el argumento de la función que representa a la onda, por ejemplo para una onda del tipo sinusoidal, su fase de onda es:

$$\Phi = (\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_o)$$

2) Longitud de onda (λ)

Es la distancia recorrida (λ) por la onda plana en un tiempo igual al período (T), es decir:

$$\lambda = v\,T$$

3) Número de onda (k)

Es el número de longitudes de onda (λ) contenidas en una fase de 2π, esto es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v\,T} = \frac{\omega}{v}$$

4) Frecuencia cíclica (ω)

La frecuencia cíclica (angular) de una onda plana del tipo sinusoidal, es la rapidez con la que se cubre una fase completa (2π), es decir:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

5) Amplitud (A)

Es la máxima distancia alcanzada por las partículas que oscilan, respecto de su posición de equilibrio, cuando la onda pasa por ellas.

6) Relaciones entre v, T, ω, λ, f

Las expresiones que relacionan, la velocidad de propagación (v), la longitud de onda (λ), la frecuencia (f) y el período, son:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\,f = \lambda\,\frac{\omega}{2\pi}$$

e) Potencia (P)

La rapidez media con que transporta la onda la energía por unidad de tiempo, viene dada por:

$$< P >= \frac{1}{2}\rho\,v\,\omega^2 A y_o^2$$

siendo, (ρ) la densidad del medio de propagación, (v) la velocidad de propagación, (ω) la frecuencia cíclica, (A) el área de la sección a través del cual pasa la energía, y (y_0) la amplitud de la onda.

f) Intensidad de energía (I)

Se llama así, a la energía media por unidad de área y tiempo, que pasa a través de una sección del medio de propagación, viene dado por:

$$I = \frac{<P>}{A} = \frac{1}{2}\rho\, v\, \omega^2 y_o^2$$

g) Ondas monocromáticas

Se dice que un conjunto de ondas son monocromáticas, si estas poseen la misma frecuencia, esto es:

$$f_1 = ... = f_n$$

h) Onda homogénea

Una onda es homogénea si la función de onda (y) es constante, sobre el frente de onda; esto es, si la amplitud de la onda es constante.

i) Frentes de onda

Se llama así a la superficie en la cual la fase de una onda (φ) es constante.

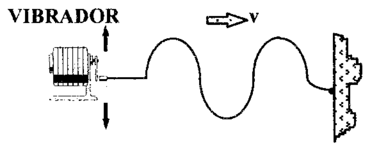
- Para una onda plana los frentes de onda son superficies planas para los cuales $\vec{k} \bullet \vec{r} = cte.$
- Para una onda esférica los frentes de onda son esferas siendo $r = cte.$

j) Ondas estacionarias

Se llama así a la onda que resulta de la superposición de dos ondas sinusoidales que se propagan una al encuentro de la otra y que tienen la misma frecuencia y amplitud; y en caso de ser transversales igual polarización.

Ejemplo: 07

Una onda estacionaria transversal se origina, si un extremo de un hilo lo fijamos y el otro extremos lo ponemos en movimiento oscilatorio, mediante un vibrador.



- Si se superponen dos ondas planas coherentes móviles se obtiene una onda plana estacionaria.

k) Onda plana

Una onda se dice que es plana si sus frentes de onda forman un conjunto de planos paralelos entre si, por ejemplo, las ondas del tipo sinusoidal que se propagan en un medio no absorbente son planas.

ℓ) Coherencia

Dos ó más ondas se dicen que son coherentes cuando son generadas por fuentes (focos) que oscilan con la misma frecuencia manteniendo un defasaje constante, caso contrario se dice que son incoherentes.

4. VELOCIDAD DE PROPAGACION DE UNA ONDA

a) Velocidad del sonido

La velocidad de las ondas sonoras en líquidos y gases, viene dado por:

$$v = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{1/2}$$

siendo, (K) el módulo de compresibilidad del líquido ó gas, y (ρ) la densidad del medio no perturbado.

- La velocidad de propagación de la onda en el gas, también, puede obtenerse a partir de:

$$v = \left(\frac{\chi P}{\rho}\right)^{1/2}$$

siendo, (χ) el coeficiente de Poisson, (P) la presión del gas y (ρ) su densidad.

b) Velocidad en un medio isótropo sólido

La velocidad de las ondas transversales en un medio isótropo, viene dado por:

$$v = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2}$$

siendo, (G) el módulo de rigidez del medio de propagación, y (ρ) su densidad.

c) Velocidad de las ondas longitudinales en una varilla

La velocidad de propagación de las ondas longitudinales en una varilla de módulo de Young (E) y densidad (ρ), viene dado por:

$$v = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$$

d) Velocidad de las ondas transversales en una cuerda

La velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda de densidad de masa longitudinal (ρ), de resistencia a la rotura (σ), viene dado por:

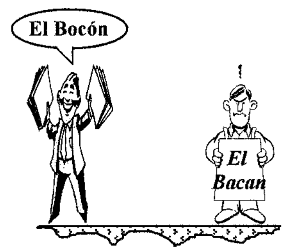
$$v = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{F}{\rho A}\right)^{1/2}$$

siendo, (F) la fuerza de tracción y (A) el área de la sección transversal de la cuerda.

5. ONDAS SONORAS

a) Definición

Se llaman ondas sonoras o acústicas a las ondas elásticas de poca intensidad, es decir, a las perturbaciones mecánicas débiles que se propagan en un medio elástico.



b) Clasificación

Las ondas sonoras según su frecuencia, se dividen en cuatro grupos:

Grupo	Frecuencia (Hz)
Infrasonido	$f < 16$
Sonido audible	$16 < f < 2.10^4$
Ultrasonido	$2.10^4 < f < 10^9$
Hipersonido	$f > 10^9$

c) Velocidad de propagación

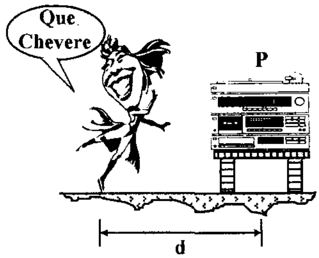
Es una magnitud vectorial, mide la rapidez con la que se propaga la perturbación, así, la rapidez del sonido en el aire es de aproximadamente 340 m/s.

d) Características

1) Intensidad

Para una fuente de sonido de potencia "P", ubicada a una distancia "d", del receptor, la intensidad viene dado por:

$$I = \frac{P}{4\pi\, d^2}$$



- El *oído* humano puede percibir *intensidades* sonoras comprendidas en el intervalo de 10^{-12} W/m^2 a 1 W/m^2.

2) Nivel de referencia de intensidad

Es una cantidad física escalar, que se representa simbólicamente con una "β" y que mide la intensidad de un sonido "I", respecto de la intensidad de referencia "I_0", viene dado por:

$$\beta = 10\,\ell og_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

siendo, (β) el nivel de referencia de la intensidad I_0,cuyo valor es 10^{-12} W/m^2.

3) Tono

Se utiliza para diferenciar si un sonido es fuerte o débil, así, a un sonido de baja frecuencia le corresponde un tono bajo.

4) Timbre

Es la diferencia de sonidos producidos por dos fuentes diferentes de una misma intensidad de tono.

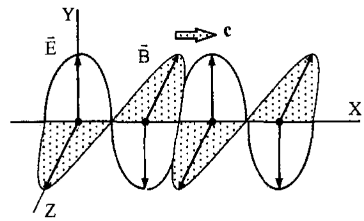
6. ONDAS ELECTROMAGNETICAS

a) Definición

Se llaman ondas electromagnéticas a las perturbaciones del campo eléctrico y magnético que se propagan en un medio material o el vacío.

b) Características

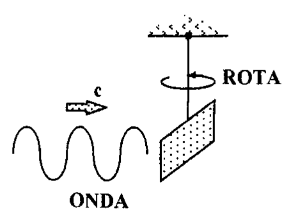
1) Las ondas electromagnéticas están formadas por ondas del tipo sinusoidal, una correspondiente al vector del campo eléctrico ($\vec{E}$), y la otra al vector del campo magnético ($\vec{B}$), perpendiculares entre sí, y ambas transversales a la dirección de propagación de la onda, como se aprecia en la Fig.



2) Los campos eléctrico y magnético que forman la onda oscilan en fase, esto es, cuando uno de ellos es mínimo el otro también es mínimo.
3) En una onda electromagnética plana, las magnitudes de los campos eléctrico y magnético, están relacionados por:

$$E = c\,B$$

4) Las ondas electromagnéticas transportan energía, más no materia.



5) Las ondas electromagnéticas transportan energía y poseen cantidad de movi

miento, así, en la Fig. se observa que la energía y cantidad de movimiento de la onda electromagnética, producen la rotación de la placa muy sensible y delgada.

6) Las ondas electromagnéticas pueden experimentar los fenómenos de reflexión, refracción, interferencia, difracción y polarización.

c) Velocidad de propagación

La velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío, viene dado por:

$$c = \lambda_o . f_o = 3.10^8 m/s$$

siendo, "λ_o" su longitud de onda, "f_o" su frecuencia, y (c) la velocidad de la luz en el vacío.

- La velocidad de la luz en el vacío depende de la permitividad eléctrica en el vacío (ε_o), y de la permeabilidad magnética en el vacío (μ_o), así:

$$c = [\varepsilon_o \mu_o]^{-1/2} = 3.10^8 \ \frac{m}{s}$$

- La velocidad de propagación de una onda electromagnética en un medio diferente del vacío, viene dado por:

$$v = \lambda \, f$$

- Como, la frecuencia de la onda electromagnética no cambia (f_0=f), entonces:

$$\frac{c}{v} = \frac{f_o \lambda_o}{f \lambda} > 1 \ \ => \ \ \lambda_o > \lambda$$

es decir, la onda electromagnética tiene una mayor longitud en el vació, que en otro medio.

7. ESPECTRO DE LA RADIACION ELECTROMAGNETICA

a) Definición

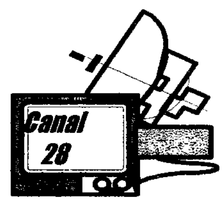
Se denomina espectro de la radiación electromagnética, al conjunto de diferentes frecuencias y longitudes de onda que presentan las ondas electromagnéticas, matemáticamente este conjunto de frecuencias ó longitudes de onda se representan así:

$$[f] = (f_1, ..., f_n) \quad ó \quad [\lambda] = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

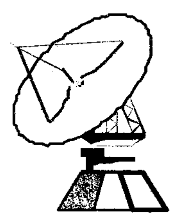
b) Clasificación

El espectro electromagnético, se clasifica en:

1) Ondas de radio-frecuencia
Este tipo de ondas incluyen la radiación de las líneas eléctricas, ondas de radio de AM y FM y las de TV.



2) Micro-ondas
Se utilizan frecuentemente en las ondas de radar, comunicaciones, análisis de la estructura atómica y molecular.
A la región de las micro-ondas se le llama también UHF (ultra high frecuency) frecuencias ultra altas.



3) Espectro infrarrojo

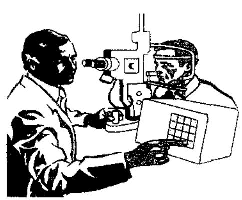
3) Espectro infrarrojo
Estas ondas son producidas por cuerpos calientes y moléculas.

Ejemplo: El motor de un avión genera ondas infrarrojas.

4) Luz o espectro visible
La luz producida por átomos y moléculas como resultado del movimiento interno de sus componentes, principalmente los electrones de las capas atómicas.

5) Rayos ultravioletas
Son producidas por átomos y moléculas en descargas eléctricas. Por ejemplo, el sol es una fuente rica de radiación ultravioleta, la que hace posible el bronceado de la piel.

6) Rayos - X



Los rayos - X son producidos por los electrones más fuertemente ligados, que abandonan el átomo, también se produce rayos-X por efecto de la radiación de frenado. Debemos mencionar que una cantidad inapropiada de radiación X destruye los tejidos sanos.

7) Rayos gamma
Estas ondas son de origen nuclear y son producidas por muchas sustancias radioactivas, cuando son absorbidas por organismos vivos producen efectos graves. Se utilizan con mucha frecuencia en la investigación astronómica.

8. ESPECTRO VISIBLE

- Los colores que perciben el ojo humano dependen de la frecuencia (ó longitud de onda) de la onda electromagnética.
- La sensibilidad del ojo también depende de la longitud de onda de la luz; está sensibilidad es máxima para longitudes de onda de $5{,}6.10^{-7}$ m.

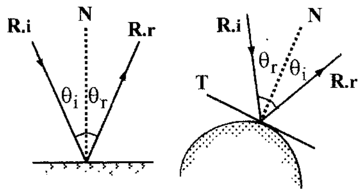
Color	$\lambda.10^{-7}$, (m)	$\nu\ 10^{-4}$, (Hz)
violeta	3,90 - 4,55	7,69 - 6,59
azul	4,55 - 4,92	6,59 - 6,10
verde	4,92 - 5,77	6,10 - 5,20
amarillo	5,77 - 5,97	5,20 - 5,03
naranja	5,97 - 6,22	5,03 - 4,82
rojo	6,22 - 7,80	4,82 - 3,84

- La visión es el resultado de señales transmitidas al cerebro por dos elementos presentes en una membrana llamada retina, la cual, se encuentra en el fondo del ojo; estos elementos son los conos y bastoncillos.
- Los conos son activos a la luz intensa, y sensibles a los colores, mientras los bastoncillos nos permiten ver con poca luz (oscuridad), y son insensibles a los colores.

9. FENOMENOS ONDULATORIOS DE LA LUZ

a) Reflexión de la luz

Es el cambio de dirección que experimentan los rayos luminosos cuando encuentran una superficie pulida.



SUPERFICE PLANA   SUPERFICIE CURVA

➢ **Leyenda**

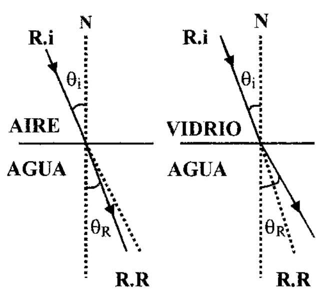
R.i : rayo incidente
R.r : rayo reflejado
θ_i : ángulo de incidencia
θ_r : ángulo de reflexión
N : perpendicular (normal) a la superficie pulida.

➢ **Leyes de la reflexión**

1) El rayo incidente, rayo reflejado y normal, se encuentran en un mismo plano
2) El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, esto es:

$$\theta_i = \theta_r$$

b) Refracción de la luz



Es el cambio que experimentan los rayos cuando atraviesan la superficie que divide dos medios transparentes distintos.

➢ **Leyenda**

R.i : rayo incidente
R.R : rayo refractado
θ_i : ángulo de incidencia
θ_R : ángulo de refracción
N : perpendicular (normal) a la superficie que divide los medios

➢ **Indice de refracción (n)**

El índice de una sustancia transparente se define como la razón de la velocidad de la luz en el vacío "c" a la velocidad de la luz "v" en el medio transparente, es decir:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_o}{\lambda}$$

siendo,"λ_o" y "λ" las longitudes de onda de la luz en el vacío y en el medio respectivamente.

- El índice de refracción mide la densidad óptica de un medio transparente.
- El índice de refracción es una magnitud física adimensional mayor que 1.

TABLA

Sustancia	Indice de refracción
Agua (25^0 C)	1,33
Alcohol (20^0 C)	1,36
Vidrio "crown"	1,52
Hielo	1,31
Aire	1,00029
Cuarzo	1,51
Diamante	2,417

➢ Leyes de la refracción

1) El rayo incidente, el rayo refractado y la normal, se encuentran en el mismo plano.
2) Si el rayo es monocromático, se cumple la ecuación conocida como la ley de Snell:

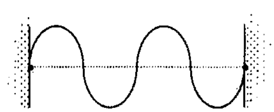
$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_R \operatorname{sen}\theta_R$$

n_i = índice de refracción del medio incidente

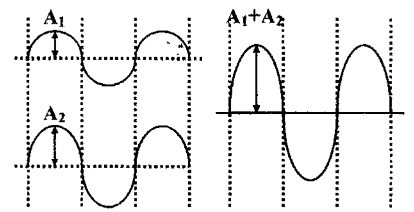
n_R = índice de refracción del medio refractante.

c) Interferencia

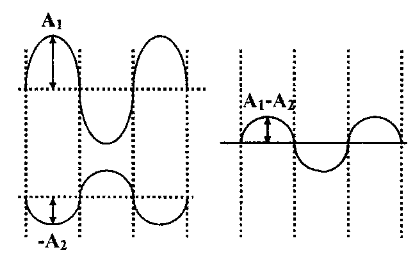
- Se denomina interferencia a la superposición simultánea en una región del espacio de dos ondas.
- Se pueden generar de varias formas la interferencia ondulatoria, así, cuando una onda se superpone a su onda reflejada se genera una onda estacionaria.
- Otra forma de interferencia se encuentra en el movimiento ondulatorio confinado a una región del espacio de una cuerda fija por sus extremos, un líquido en un canal, una onda electromagnética en una cavidad metálica, etc.... La interferencia en estos casos da como resultado ondas estacionarias.



- Se produce interferencia constructiva cuando las amplitudes (A_1, A_2) de las ondas que interfieren se suman, dando como resultado una onda de mayor amplitud (A_1+A_2) como muestra la Fig.

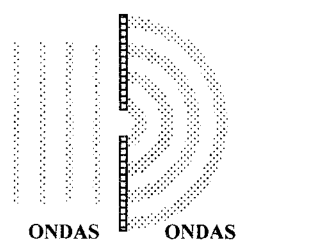


- Se produce interferencia destructiva cuando las amplitudes (A_1, A_2) de las ondas que interfieren se restan, dando como resultado una onda de menor amplitud (A_1 -A_2) como muestra la Fig.



d) Difracción de la luz

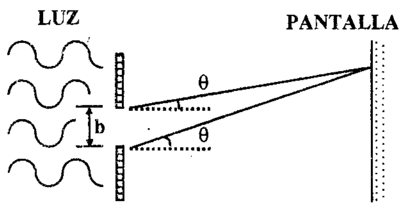
Se denomina así a las desviaciones en sus trayectorias que sufren las ondas de luz, cuando pasan por el borde de la abertura de una pantalla, o colisionan con un objeto, que puede ser un alambre o disco, como muestra la Fig.



- Para que la difracción sea notoria la longitud de onda debe ser menor que el tamaño de la abertura.

- La difracción es un fenómeno caracteristico de la naturaleza ondulatoria de la luz.
- La difracción no es posible observar a simple vista, pues la mayoría de los objetos o aberturas son mucho mayores que la longitud de onda de la luz, cuya magnitud es del orden de 5.10^{-7} m.
- Para ondas de luz de longitud de onda (λ) que inciden perpendicularmente sobre una abertura muy angosta de ancho (b), Fig., los rayos difractados interfieren destructivamente para:

$$b \operatorname{sen} \theta = n \lambda \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$$



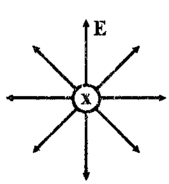
e) Difusión

Se llama así al fenómeno en la que el obstáculo que se interpone a la onda se convierte en fuente de nuevas ondas.

- El fenómeno de difusión está intimamente relacionada con la de difracción.

f) Polarización de la luz

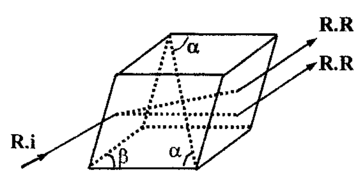
La luz emitida por fuentes comunes, es un conjunto de muchos trenes de ondas plano polarizados, cuyos vectores de campo eléctrico $\vec{E}$ oscilan a lo largo de todas las posibles direcciones perpendiculares al rayo.



En la Fig., el rayo de luz ingresa al papel y $\vec{E}$ es perpendicular al mismo.

- La luz se denomina natural o no polarizada si en ella no predomina ninguna de las direcciones indicadas de las oscilaciones.
- En la luz natural el vector campo eléctrico $\vec{E}$ oscila en todas las direcciones en forma rápida y desordenada en el plano perpendicular al rayo de luz.
- A la luz cuyo vector de campo eléctrico $\vec{E}$ oscila en una dirección predominante se le denomina luz parcialmente polarizada, la cual se considera estar formada por luz natural y luz linealmente polarizada, que se propagan en una misma dirección.
- Se denomina polarización de la luz a la separación de la luz linealmente polarizada de la luz natural o parcialmente polarizada. Esto se consigue haciendo uso de dispositivos especiales llamados polarizadores.
- El funcionamiento de los polarizadores se basa en la polarización de la luz al reflejarse y refractarse en la superficie de separación (interfase) de dos medios dieléctricos diferentes o en los fenómenos de birrefringencia.
- Se denomina analizadores a los dispositivos que se utilizan para determinar el carácter y el grado de polarización de la luz, en general los polarizadores también se utilizan como analizadores

g) Birrefringencia



Se denomina birrefringencia o doble refracción al fenómeno en la cual el rayo que incide sobre una superficie de cristal se desdobla en dos rayos refractados linealmente polarizados de manera perpendicular entre si como si el material tuviera dos índices de refracción distintos, como muestra la Fig., para el cristal de espato de islandia.

- La primera de las dos direcciones sigue las leyes normales de la refracción y se llama rayo ordinario; la otra tiene una velocidad y un índice de refracción variables y se llama rayo extraordinario. Ambas ondas están polarizadas perpendicularmente entre sí. Este fenómeno sólo puede ocurrir si la estructura del material es anisótropa. Si el material tiene un solo eje de anisotropía, (es decir es uniaxial), la birrefringencia puede formalizarse asignando dos índices de refracción diferentes al material para las distintas polarizaciones.

  La birrefringencia está cuantificada por la relación:

$$\boxed{\Delta n = n_e - n_o}$$

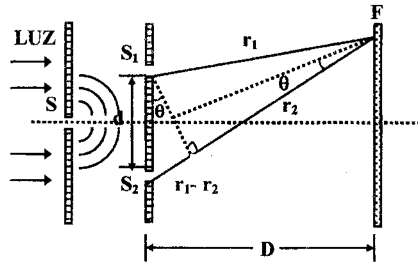
  siendo, n_o, n_e los índices de refracción para las polarizaciones perpendicular (rayo ordinario) y paralela al eje de anisotropía (rayo extraordinario), respectivamente.

- La birrefringencia puede darse también en materiales magnéticos, pero variaciones sustanciales en la permeabilidad magnética de materiales son raras a las frecuencias ópticas.

  El papel de celofán es un material birrefringente común.

  El fenómeno de birrefringencia no se da en cristales cúbicos regulares.

h) Experimento de Young



- Mediante está experiencia Thomas Young en 1 802, demostró por vez primera el fenómeno de la interferencia de ondas luminosas, para lo cual utilizó como fuente luminosa la luz solar.
- Mediante el experimento de Young se demuestra, también, el comportamiento ondulatorio que posee la luz.
- Los dispositivos utilizados en el experimento, consisten básicamente de dos láminas la primera de una sola rendija "S" y la segunda de dos rendijas "S_1" y "S_2", una fuente de luz monocromática (de una sola frecuencia o longitud de onda) coherente, y una pantalla "F", tal como se observa en la Fig..
- Las ondas de luz al pasar por "S" se difractan, a su vez, estas ondas al incidir sobre las rendijas "S_1" y "S_2", producen la interferencia, las cuales se observan en la pantalla "F" como franjas obscuras e iluminadas, las franjas oscuras se asocian a la interferencia destructiva, y las franjas iluminadas a la interferencia constructiva.

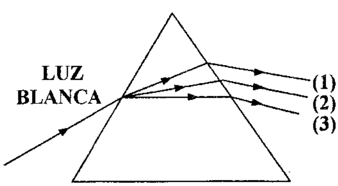
i) Holografía

Es una técnica avanzada de fotografía, que consiste en crear imágenes tridimensionales de los objetos basados en el fenómeno de la interferencia de las ondas de luz. Para esto se utiliza un rayo láser, que graba microscópicamente una película fotosensible. Esta, al reci bir la luz desde la perspectiva adecuada, proyecta una imagen en tres dimensiones.

- En la holografía, a diferencia de lo que ocurre en el método fotográfico común, se registran, por medio de una emulsión fotosensible, no sólo las relaciones entre las amplitudes (o sus cuadrados, es decir, las intensidades) de las ondas luminosas difundidas por las distintas partes pequeñas de la superficie del objeto, sino también entre las fases de estas ondas.

j) Prisma

Dispositivo de vidrio que se utiliza para observar la descomposición de la luz en los colores del arco iris, que van desde el rojo hasta el violeta, cuando se refracta a través del prisma, este fenómeno recibe el nombre de dispersión y se debe a que la velocidad de la luz en un medio cualquiera varía con la longitud de onda (el índice de refracción de un medio y por tanto la velocidad de la luz en el mismo depende de la longitud de onda). Cada color tiene una longitud de onda distinta. Así, para un mismo ángulo de incidencia, la luz se refracta con ángulos distintos para diferentes colores, como se aprecia en la Fig.



(1) rojo, (2) amarillo, (3) azul

k) Arco iris

El arco iris es una consecuencia de la dispersión de la luz del sol cuando se refracta y se refleja en las gotas de agua de lluvia. El color rojo es el que menos se refracta y se encuentra en la parte exterior del arco.

ℓ) Efecto invernadero

Se llama así al calentamiento que experimenta la atmósfera terrestre, debido a que este absorbe la luz infrarroja (IR) procedente del suelo, evitando una perdida de calor hacia el espacio exterior, como consecuencia el suelo y el clima terrestre adquieren una mayor temperatura de la que pudieran estar si no existiese este efecto.

- La pequeña contribución del ozono (molécula O_3) al "efecto invernadero", es ocasionada por la presencia del ozono en el aire urbano altamente contaminado en regiones cercanas al suelo.
- El efecto invernadero ayuda a mantener la Tierra a temperaturas cómodas para la vida, pero esta es una situación con un balance muy delicado. En el último medio siglo, la quema de combustibles fósiles, carbón y petróleo, ha incrementando continuamente el contenido atmosférico de CO_2. La temperatura promedio de la Tierra también se ha incrementado, y este incremento se cree que es debido al aumento de CO_2.

m) ¿Por qué se pierde el ozono?

El ozono que se encuentra a grandes alturas se pierde debido a la presencia del cloro, producido en los gases refrigerantes que se pierden, en los dispositivos de aires acondicionados, refrigeradores, botes de aerosol y también en algunas aplicaciones industriales. Como estos gases son muy estables pueden permanecer en la atmósfera por muchos años, y al llegar a la estratosfera sus moléculas son divididas por la luz ultravioleta desprendiendo cloro. Debido al daño que ocasionan estos gases a la capa de ozono, su uso está siendo descontinuado y prohibido.

10. EFECTO DOPPLER

a) Concepto

Se llama efecto Doppler a la variación de la frecuencia de las ondas de sonido o de luz emitidas por una fuente (F), registrada por un receptor (R), debida al movimiento relativo de la fuente de ondas y del receptor. Este efecto explica por qué, cuando una fuente de sonido de frecuencia constante avanza hacia el receptor, el sonido parece más agudo (de mayor frecuencia), mientras que si la fuente se aleja parece más grave (de menor frecuencia). En el caso del espectro visible de la radiación electromagnética, si el objeto se aleja, su luz se desplaza a longitudes de onda más largas, desplazándose hacia el rojo. Si el objeto se acerca, su luz presenta una longitud de onda más corta, desplazándose hacia el azul. Esta desviación hacia el rojo o el azul es muy leve incluso para velocidades elevadas, como las velocidades relativas entre estrellas o entre galaxias, y el ojo humano puede captarlo, solamente medirlo indirectamente utilizando instrumentos de precisión como espectrómetros.

b) Aplicaciones

- Se utilizan dispositivos láser por efecto Doppler para medir la velocidad de fluidos, en la investigación de la formación de fenómenos atmosféricos (ciclones, torbellinos, huracanes, etc..)

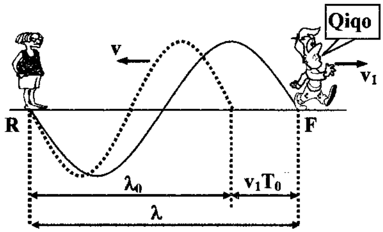
  En la espectroscopia, el efecto Doppler se utiliza en el trazado de los movimientos estelares, también, para estimar la masa de las estrellas o la edad del universo (usando la ley de Hubble). O en el estudio de la expansión de universo.
- En el control del transito vehicular, se utiliza para determinar la velocidad de los vehículos automotores, mediante dispositivos que utilizan este efecto.
- En la industria se utiliza en el control de procesos industriales y optimización de la producción en el ramo textil, papelero y de empresas fabricantes de cables, entre otros.
- En la medicina, este efecto mediante la técnica de ultrasonidos, se utiliza para la elaboración de radiografías de algunos órganos internos del cuerpo humano.
- En el transporte aéreo, se utiliza en los radares, para determinar la posición de los aviones.
- Se utiliza en la interpretación de espectros, así, en el espectro del hidrogeno se encuentra que las líneas espectrales tienen una estructura fina debida a tres causas: la forma elíptica de las órbitas de los electrones, el espín del electrón y el eepín del protón, y el efecto Doppler debido al movimiento relativo de las partículas constituyentes del hidrógeno atómico y molecular.

c) Efecto Doppler acústico

Como la velocidad de la fuente (F) respecto del receptor (R), o viceversa es mucho menor que la velocidad de la luz en el vació (c), el efecto Doppler acústico se estudia dentro de los límites de la física clásica, los casos que se presentan para la frecuencia de las ondas de sonido registrada por el receptor son:

➢ Primer caso

El receptor (R) está en reposo respecto de un medio gaseoso (o líquido), y la fuente (F) se aleja de él con la velocidad $\vec{v}_1$ a lo largo de la recta que los une, como se muestra en la Fig.



Para un tiempo igual al período T_0 de sus oscilaciones, la fuente recorrerá una distancia igual a $v_1T_0=v_1/f_0$, siendo f_0 la frecuencia de las oscilaciones de la fuente (claxón de la combi). En la Fig., la diferencia de las longitudes de onda cuando la fuente (F) está en movimiento "λ", y cuando está en reposo "λ_o" es:

$$\lambda - \lambda_0 = v_1 T_0$$

$$\lambda = \lambda_0 + v_1 T_0 = (v + v_1) T_0$$

$$\lambda = (v + v_1)/f_0$$

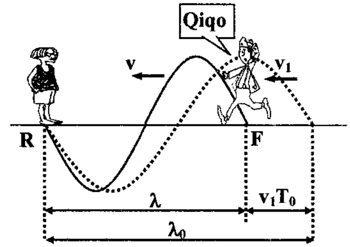
siendo, "v" la velocidad de fase de la onda en el medio. Así, la frecuencia de la onda registrada por el receptor (R) es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{f_0}{1 + (v_1 / v)}$$

Ahora, si la dirección del vector velocidad de la fuente $\vec{v}_1$ forma un ángulo arbitrario "θ" con la recta que une a la fuente (F) con el receptor (R), la expresión anterior se escribe así:

$$f = \frac{f_0}{1 + (v_1 \cos\theta / v)}$$

La frecuencia registrada por el receptor "f" es menor que la frecuencia de las oscilaciones de la fuente "f_0".



- Si la fuente (F) se acerca con una velocidad $\vec{v}_1$, al receptor (R) en reposo a lo largo de la recta que los une, la frecuencia de las ondas de sonido, registrada por el receptor, viene dada por:

$$f = \frac{f_0}{1 - (v_1 / v)}$$

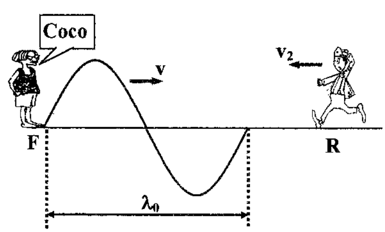
La frecuencia registrada por el receptor "f" es mayor que la frecuencia de las oscilaciones de la fuente "f_0".

- Ahora, si la dirección del vector velocidad de la fuente $\vec{v}_1$ forma un ángulo arbitrario "θ" con la recta que une a la fuente (F) con el receptor (R), la expresión anterior se escribe así:

$$f = \frac{f_0}{1 - (v_1 \cos\theta / v)}$$

➤ <u>Segundo caso</u>

El receptor (R) se acerca con una velocidad $\vec{v}_2$ a la fuente (F) en reposo respecto de un medio gaseoso, a lo largo de la recta que los une.



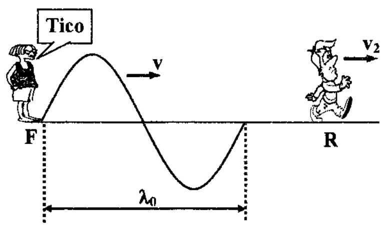
- En la Fig., la longitud de la onda en el medio es $\lambda=\lambda_0=v/f_0$. Pero la velocidad de propagación de la onda con respecto al receptor es $v+v_2$, de modo que la fre cuencia del de sonido registrada por el receptor (R) es:

$$f = \frac{v+v_2}{\lambda_0} = (1+\frac{v_2}{v})f_0$$

La frecuencia "f" registrada por el re ceptor es mayor que la frecuencia de las oscilaciones de la fuente "f_0".

- Si la dirección de la velocidad $\vec{v}_2$ del receptor forma un ángulo "θ" con la recta que une al receptor con la fuente, la expresión anterior se escribe así:

$$f = (1+\frac{v_2}{v}\cos\theta)f_0$$



- Si el receptor (R) se aleja con una ve locidad $\vec{v}_2$ de la fuente (F) en reposo respecto de un medio gaseoso, a lo lar go de la recta que los une, la frecuencia de las ondas de sonido registrada por el recep tor (R), viene dada por:

$$f = \frac{v-v_2}{\lambda_0} = (1-\frac{v_2}{v})f_0$$

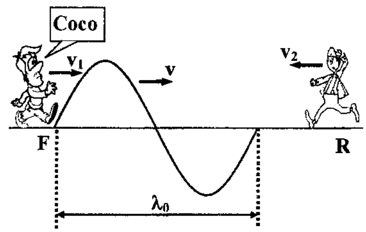
La frecuencia "f" registrada por el re ceptor es menor que la frecuencia de las oscilaciones de la fuente "f_0".

- Si la dirección de la velocidad $\vec{v}_2$ del receptor forma un ángulo "θ" con la recta que une al receptor con la fuente, la expresión anterior se escribe así:

$$f = (1-\frac{v_2}{v}\cos\theta)f_0$$

➢ Tercer caso

La fuente (F) y el receptor (R) se acer can (o alejan) entre si con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respecto del medio gaseoso (o flui do), a lo largo de la recta que los une.



Aplicando el principio de superposi ción al primer y segundo caso, se en cuentra que la frecuencia registrada por el receptor (R) es:

$$f = [\frac{1\pm(v_2/v)}{1\mp(v_1/v)}]f_0$$

siendo, "v" la velocidad la velocidad de fase de la onda en el medio.

- Si los vectores velocidad $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, for man ángulos θ_1 y θ_2, con la recta que une al receptor con la fuente, la expre sión anterior, se escribe así:

$$f = [\frac{1\pm(v_2/v)\cos\theta_2}{1\mp(v_1/v)\cos\theta_1}]f_0$$

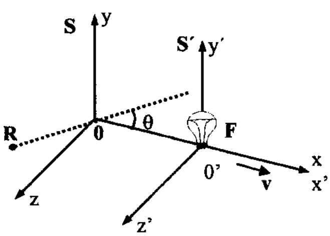
d) Efecto Doppler electromagnético

Es la variación de la frecuencia de las ondas luminosas percibidas por el obser vador debido al desplazamiento mutuo del observador y de la fuente de luz.

- Si la fuente luminosa y el receptor de ondas luminosas se desplazan uniformemente con respecto a un sistema inercial de referencia, la frecuencia observada (f) de la luz está relacionada con la frecuencia (f_0) observada en este sistema estando inmóviles la fuente emisora y el observador, mediante la relación:

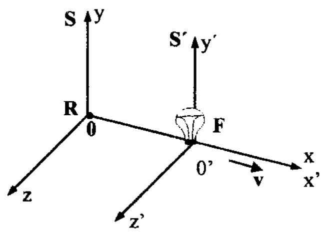
$$f = f_0 \frac{[1-(v/c)^2]^{1/2}}{1+(v/c)\cos\theta}$$

siendo, (θ) el ángulo entre la línea de observación y la dirección del movimiento de la fuente con respecto al observador, medido en el sistema de coordenadas relacionado con el observador, (v) la magnitud de la velocidad del movimiento relativo de la fuente emisiva, y (c) la velocidad de la luz en el vació.



siendo,(R) el receptor y (F) la fuente de la ondas luminosas, que se traslada con velocidad (v) a lo largo del eje X, y S, S' los sistemas de coordenadas cartesianas el primero fijo y el segundo moviéndose junto a la fuente.

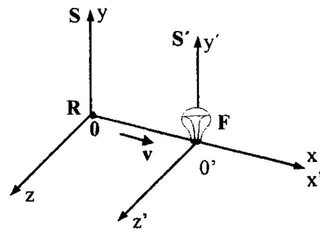
Casos particulares



- Si la fuente (F) y el observador (R) se alejan el uno del otro, $\theta = 0^0$, se tiene:

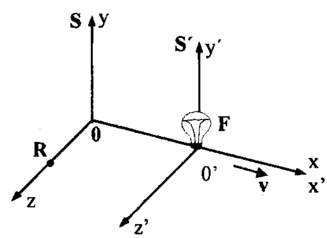
$$f = f_0 [\frac{c-v}{c+v}]^{1/2}, \quad f < f_0 \quad , \quad \lambda > \lambda_0$$

- Si la fuente (F) y el observador (R) se acercan el uno hacia el otro, $\theta = 180^0$, se tiene:



$$f = f_0 [\frac{c+v}{c-v}]^{1/2}, \quad f > f_0 \quad , \quad \lambda < \lambda_0$$

- Si la fuente (F) y el observador (R) forman un ángulo de $\theta = 90^0$ ó $\theta = 180^0$, se tiene:

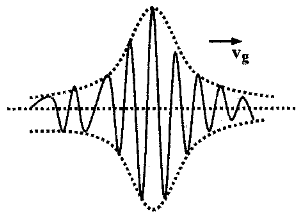


$$f = f_0[1-(\frac{v}{c})^2]^{1/2}, \quad f < f_0 \quad , \quad \lambda > \lambda_0$$

« Efecto transversal Doppler »

- Para, $\theta = \pi/2$ ó $\theta = 3\pi/2$ y v<<c, se tiene que $f = f_0$, $\lambda = \lambda_0$, y no se observa el efecto Doppler.
- Para, $\cos\theta = -[1-(1-\beta^2)]^{1/2}$ y v<<c no se observa el efecto Doppler, siendo (β =v/c).

e) Velocidad de grupo (v_g)



- El pulso de la Fig., no es armónica, pues, su amplitud no es constante.
- La velocidad de grupo es la velocidad es la velocidad con la que se desplaza un pulso.
- Para un medio no dispersivo ni absorvente la velocidad de fase coincide con la de grupo.
- Para un medio dispersivo, la velocidad de propagación depende de la longitud de onda (frecuencia), y la velocidad de grupo, viene dada por:

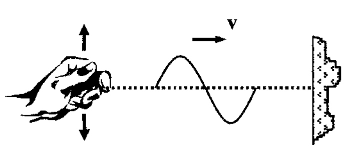
$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}$$

siendo, (v) la velocidad de propagación de la onda sinusoidal, (k) el número de onda.

- Las ondas de amplitud modulada (pulsos) se utilizan para transmitir señales electromagnéticas.

f) Pulso de onda

Un pulso es un perturbación que experimenta un medio o estado físico que dura un corto intervalo de tiempo y de extensión limitada. Una característica principal de un pulso es que tiene un principio y un final. Ejemplos de pulso son:



1) Una sacudida brusca (subida y bajada de la mano) aplicada en el extremo de una cuerda tensa produce un pulso de una onda mecánica que se propaga a lo largo de la cuerda, de izquierda a derecha.
2) El sonido de un disparo es un pulso de una onda de sonido que se propaga en el espacio, en todas las direcciones.
3) Un flash o destello luminoso es un pulso de una onda de luz, etc...

- Se debe decir que un pulso es producido por una sola vibración (efecto perturbador), en tanto, una onda es producida por una serie sucesiva de vibraciones, por lo que, un pulso no es precisamente una onda.

g) Pulso electromagnético

Se llama pulso electromagnético (PEM) a la emisión de energía electromagnética de alta intensidad en un breve período de tiempo. Esta emisión de radiación electromagnética puede ser resultado de una gran explosión nuclear o un campo magnético que fluctúa intensamente causado por la fuerza de empuje del efecto Compton en electrones y fotoelectrones de los fotones dispersados en los materiales del aparato electrónico o explosivo, o a su alrededor.

h) ¿Por qué el cielo se ve azul?

Los rayos solares, al pasar por la atmósfera colisionan con las partículas constituyentes (moléculas, iones, etc...) dando lugar a la emisión de ondas secundarias (Difusión) que al propagarse en todas las direcciones, producen nuevas ondas secundarias. Estas ondas secundarias son de longitudes de ondas pequeñas, o sea, una mezcla de azul y violeta lo que da como resultado el color azul del cielo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Una onda se propaga con rapidez de $v=3.10^8$ m/s, y tiene un período igual a $T=10^{-14}$ s. Hallar su longitud de onda.

a) 1 μm b) 2 μm c) 3 μm d) 4 μm e) 5 μm

02. Una onda mecánica de longitud de onda 5 cm, recorre 100 cm en 5 s. Hallar su frecuencia.

a) 1 Hz b) 2 Hz c) 3 Hz d) 4 Hz e) 5 Hz

03. Por la posición de Pepé pasan 20 crestas en 40 s, de unas olas superficiales de agua cuya distancia entre un valle y una cresta adyacentes es 2 m. Hallar la rapidez de propagación de las olas.

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

04. La distancia entre la primera y la cuarta cresta de una onda es 15 cm. Hallar su longitud de onda.

a) 1 cm b) 3 cm c) 5 cm d) 7 cm e) 9 cm

05. El oído humano percibe sonidos cuyas frecuencias están entre 20 Hz y 20000 Hz. Hallar la menor longitud de onda correspondiente a estas frecuencias, la rapidez del sonido es $v_S = 340$ m/s.

a) 11 mm b) 13 mm c) 15 mm d) 17 mm e) 19 mm

06 Una onda que se propaga con una rapidez de 400 cm/s. ¿En qué tiempo recorrerá una distancia de 12 cm? (mili : m = 10^{-3})

a) 10 ms b) 20 ms c) 30 ms d) 40 ms e) 50 ms

07. Las ondas superficiales producidas por el balanceo de un bote en un lago tienen una longitud de onda de 5 m y tardan 20 s en llegar a la orilla distante 50 m. Hallar el período de oscilación de las ondas.

a) 1 s b) 2 s c) 3 s d) 4 s e) 5 s

08. En la Fig.01, los dos pulsos de onda generados en una cuerda tensa se mueven en direcciones contrarias. Hallar el tiempo que tardan en pasar uno sobre el otro.

a) 1 s b) 2 s c) 3 s d) 4 s e) 5 s

09. En la Fig.02, la onda se mueve hacia la derecha. Diga en qué direcciones se mueven las partículas A y B.

a) A(←) ; B(→) b) A(→) ; B(←) c) A(↑) ; B(↓) d) A(↓) ; B(↑) e) A(→) ; B(→)

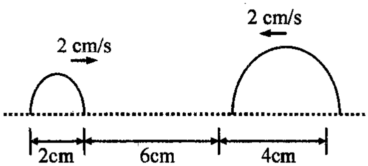


Fig.01

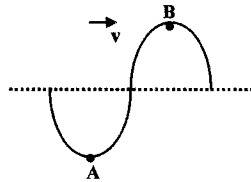


Fig.02

10. En la Fig.03, las ondas "1", "2" y "3" se propagan hacia la derecha. Hallar el valor de la la siguiente relación: $(\lambda_1/\lambda_2)+(\lambda_1/\lambda_3)$

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

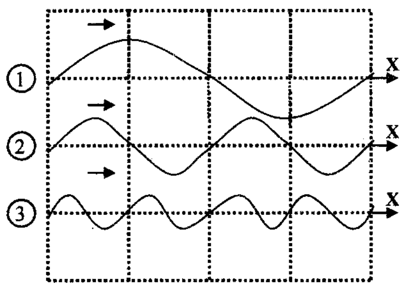


Fig.03

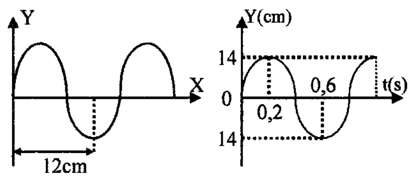


Fig.04

11. En la Fig.04, se muestra el movimiento de una onda mecánica. Hallar su rapidez de pro pagación.

a) 0,1 m/s b) 0,2 m/s c) 0,3 m/s d) 0,4 m/s e) 0,5 m/s

12. En la Fig.05, la onda de frecuencia 2 Hz se propaga en una cuerda.

I) ¿En qué tiempo el punto P realiza una oscilación completa?

a) 0,1 s b) 0,2 s c) 0,3 s d) 0,4 s e) 0,5 s

II) ¿Donde se encuentra el punto P luego de un tiempo de 0,375 s?

a) x=+A b) x=-A c) x=+A/2 d) x=-A/2 e) x = 0

III) ¿Cuántas ondas completas han pasado por el punto P en un tiempo de 6 s?

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

13. El período de un movimiento ondulatorio es de 0,04 s y su rapidez de propagación de 300 m/s. Hallar la diferencia de fase entre las oscilaciones de dos puntos que están a las distancias de 10 m y 16 m de la posición de equilibrio.

a) $\pi/2$ b) $\pi/4$ c) π d) 2π e) 3π

14. La longitud de onda de un movimiento ondulatorio es 1 m. Hallar la diferencia de fase en tre las oscilaciones de dos puntos, que se hallan en un mismo rayo y a la distancia de 2 m.

a) $\pi/2$ b) $\pi/4$ c) π d) 2π e) 4π

15. En la Fig.06, cuando la onda pasa por el punto A, este sube. Hallar la dirección de propagación de la onda.

a) ($\leftarrow$) b) ($\rightarrow$) c) ($\uparrow$) d) ($\downarrow$) e) ($\leftrightarrow$)

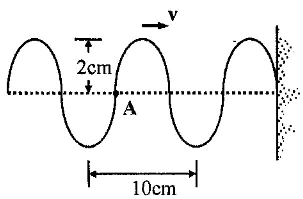


Fig.05

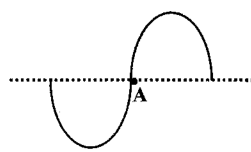


Fig.06

16. Un rayo de luz pasa del aire (n=1) al agua (n=4/3) con un ángulo de incidencia igual a 53^{o}. Hallar el ángulo de refracción.

a) 30^{0} b) 37^{0} c) 45^{0} d) 53^{0} e) 60^{0}

17. La rapidez de la luz en el diamante es de 125000 km/s. Hallar el índice de refracción del diamante.

a) 2,0 b) 2,2 c) 2,4 d) 2,6 e) 2,8

18. ¿Qué tiempo tarda en atravesar un rayo de luz, una placa de vidrio de espesor 3 cm e índice de refracción n=1,5? (pico : $p=10^{-12}$)

a) 50 ps b) 60 ps c) 70 ps d) 80 ps e) 90 ps

19. En la Fig.07, un rayo de luz incide sobre un medio transparente, de índice de refracción n=4/3, formando un ángulo "θ". Hallar el valor de "θ" si el rayo reflejado es perpendicular al rayo refractado.

a) 30^0 b) 37^0 c) 45^0 d) 53^0 e) 60^0

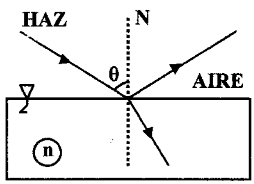


Fig.07

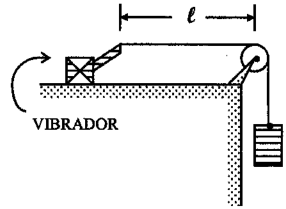


Fig.08

20. Respecto de las ondas, complete correctamente la oración.
Ondas monocromáticas, son aquellas que tiene la ----------------frecuencia y ---------------longitudes de onda.

21. Una cuerda de piano de acero de 80 cm de longitud y masa de 10 g, se tensa mediante una fuerza de 500 N.
I) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda?

a) 100 m/s b) 150 m/s c) 200 m/s d) 250 m/s e) 300 m/s

II) Para reducir la velocidad de la onda a la mitad sin modificar la tensión, ¿Qué masa de alambre de cobre habrá que enrollar alrededor del hilo de acero?

a) 10 g b) 20 g c) 30 g d) 40 g e) 50 g

22. Cierta cuerda de violín tiene 50 cm de largo entre sus extremos fijos y su masa es de 2 g. La cuerda genera la nota "La" (440 Hz) cuando se pulsa con los dedos, ¿A qué distancia del extremo fijo, debe ubicarse el dedo para tocar un "Do" (528 Hz)?

a) 8,1 cm b) 8,3 cm c) 8,5 cm d) 8,7 cm e) 8,9 cm

23. Hallar la frecuencia del modo fundamental de la onda transversal que puede establecerse en un alambre de acero de masa 5 g y longitud 1 m, sometido a una tensión de 968 N.

a) 200 Hz b) 210 Hz c) 220 Hz d) 230 Hz e) 240 Hz

24. En la Fig.08, una cuerda de densidad lineal de masa μ= 0,2 g/cm es tensada con un peso de 98 N como se muestra. Sabiendo que la diferencia en longitudes de onda del 1er armónico y 7mo armónico es de 24 m. Hallar la longitud de onda cuando la cuerda vibra en su 5to armónico y su frecuencia de oscilación.

a) 5,2 m ; 12,7 Hz b) 5,8 m ; 12,1 Hz c) 5,4 m ; 12,3 Hz
d) 5,6 m ; 12,5 Hz e) 5,0 m ; 12,9 Hz

25. Un hilo de longitud $\ell = 3$ m y masa m= 0,3 kg, tiene un extremo unido a un vibrador y el otro extremo pasa por una polea y sostiene a un bloque de masa M=9 kg, ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales?, ¿Qué tiempo invierte el pulso para recorrer todo el hilo? (g=10 m/s^2)

a) 40 m/s ; 0,4 s b) 10 m/s ; 0,5 s c) 50 m/s ; 0,2 s d) 20 m/s ; 0,3 s e) 30 m/s ; 0,1 s

26. En la Fig.09, se muestra una cuerda estirada constituida por una parte delgada de longitud "ℓ" y otra parte gruesa de longitud "2ℓ". Al hacer oscilar el extremo de la cuerda delgada con frecuencia f=20 Hz se propaga una onda. Si en la parte delgada la longitud de onda es $\lambda_1 = \ell/8$ y en la parte gruesa $\lambda_2 = \ell/16$, hallar el tiempo aproximado que demora un pulso en recorrer toda la cuerda.

a) 1 s b) 2 s c) 3 s d) 4 s e) 5 s

27. Dos cuerdas (1) y (2) de densidades lineales de masa μ_1 y μ_2 ($\mu_2=4\mu_1$) se encuentran unidos por sus extremos. En el extremo izquierdo de la cuerda (1) se genera una onda armónica de frecuencia 20 Hz y velocidad de propagación 5 m/s, hallar la longitud de onda en la cuerda (2), cuyo extremo derecho está unido a una pesa a través de una polea.

a) 0,110 m b) 0,115 m c) 0,120 m d) 0,125 m e) 0,130 m

28. Los extremos izquierdo y derecho de una cuerda de longitud 1 m y masa 0,25 g están unidos a un diapasón que efectúa 200 vibraciones cada segundo, y a través de una polea a un bloque. Hallar la tensión en el hilo para que se establezca el 4to armónico de una onda estacionaria.

a) 1,0 m b) 1,5 m c) 2,0 m d) 2,5 m e) 3,0 m

29. En la Fig.10, la cuerda de longitud "ℓ" vibra con la frecuencia de su tercer armónico, cuando el platillo contiene M=1 kg, si se recubre la cuerda con un material de tal manera que se duplica su densidad lineal de masa, ¿Qué masa "m" hay que agregar en el platillo para que su frecuencia de oscilación en el 4to armónico sea igual a su frecuencia de oscilación anterior?

a) 110 g b) 115 g c) 120 g d) 125 g e) 130 g

30. Una cuerda de longitud $\ell = 20$ m y masa m=5 kg está suspendida del techo, y en su extremo inferior se ubica una masa de M=8 kg. Si en el extremo inferior se producen ondas de frecuencia 20 Hz, ¿Cuál es aproximadamente la longitud de onda? (g=10 m/s^2)

a) 1,015 m b) 1,025 m c) 1,035 m d) 1,045 m e) 1,055 m

31. La elongación de una onda en función de la posición y el tiempo es $y = 8\,\text{sen}(3x - 1\,020.t)$ con "x" e "y" en m y "t" en segundos. Hallar la velocidad de propagación de la onda.

a) 300 m/s b) 310 m/s c) 320 m/s d) 330 m/s e) 340 m/s

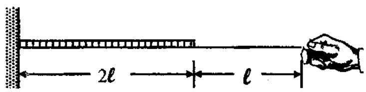


Fig.09

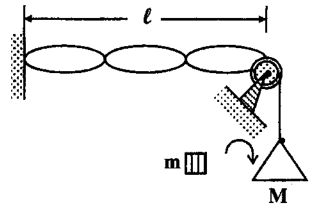


Fig.10

32. Dada la ecuación de una onda transversal, que se propaga en un hilo de longitud $\ell = 1\,\text{m}$ y masa m = 4 kg, $y = 10\,\text{sen}\,2\pi\,(\frac{x}{8} - 5.t)$, donde x e y están en centímetros, "t" en segundos. Hallar:

I) El número de onda y la frecuencia angular.

a) $\frac{\pi}{2}\text{cm}^{-1}$; $5\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ b) $\frac{\pi}{3}\text{cm}^{-1}$; $15\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ c) $\frac{\pi}{4}\text{cm}^{-1}$; $10\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
d) $\frac{\pi}{5}\text{cm}^{-1}$; $20\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e) $\frac{\pi}{6}\text{cm}^{-1}$; $25\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

II) La longitud de onda y el período de las oscilaciones.

a) 8 cm ; 0,2 s b) 6 cm ; 0,1 s c) 4 cm ; 0,3 s
d) 2 cm ; 0,4 s e) 10 cm ; 0,5 s

III) La velocidad de propagación de las ondas.

a) 10 cm/s b) 20 cm/s c) 30 cm/s d) 40 cm/s e) 50 cm/s

IV) La tensión en el hilo.

a) 0,14 N b) 0,24 N c) 0,44 N d) 0,64 N e) 0,84 N

33. $y = 2\,\text{sen}(\pi x + 200\pi.t + \pi/2)$ es la ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda, en la que "x" e "y" se miden en cm y "t" en segundos. Hallar velocidad de propagación de la onda.

a) 100 cm/s b) 200 cm/s c) 300 cm/s d) 400 cm/s e) 500 cm/s

34. Respecto del sonido, indicar las proposiciones verdaderas (V) o falsas (F):

I) El sonido se propaga en el vacío.
II) La velocidad del sonido es mayor en los sólidos que en los gases.
III) El oído humano percibe intensidades de sonido mayores que 2 W/m^2.

a) VFV b) FVF c) FFV d) VVF e) FFF

35. Respecto del espectro electromagnético, indicar las proposiciones verdaderas ó falsas (F):

I) Los rayos gamma son ondas de tipo longitudinal.
II) Las ondas de radio frecuencia, son las que tienen la mayor longitud de onda.
III) El espectro infrarrojo es producido por la liberación de electrones en los átomos.

a) VFV b) FVF c) FFV d) VVF e) VFF

36. Respecto de las ondas electromagnéticas, indicar las proposiciones verdaderas ó falsas (F):

I) Siempre son longitudinales.
II) En el vació, siempre viajan a la velocidad de la luz "c".
III) Solo se propagan en un medio material

a) VFV b) FVF c) FFV d) VVF e) VFF

37. Respecto de las ondas electromagnéticas, indicar las proposiciones verdaderas ó falsas (F):

I) La luz puede refractarse pero no polarizarse.
II) El sonido puede polarizarse pero no refractarse.
III) La luz puede polarizarse, difractarse y refractarse.

a) VFV b) FVF c) FFV d) VVF e) VFF

38. Respecto de las ondas sonoras, indique las proposiciones verdaderas (V) ó falsas (F):

I) Pueden experimentar reflexión, refracción y difracción.
II) Pueden experimentar reflexión, refracción e interferencia.
III) Pueden experimentar refracción, reflexión y polarización.

a) VFV b) FVF c) FFV d) VVF e) VFF

39. Dos fuentes sonoras idénticas separadas por 100 m, producen un nivel de intensidad de 80 db en el punto medio de la recta que los une. Hallar la potencia de cada fuente.

a) $\pi/2$ W b) $\pi/4$ W c) π W d) 2π W e) 4π W

40. ¿Tico a que distancia mínima de una sirena de potencia $64\pi.10^{-8}$ W, debe situarse para no escuchar el ruido emitido por la sirena?

a) 100 m b) 200 m c) 300 m d) 400 m e) 500 m

41. El nivel de intensidad emitido por 100 grillos es de 120 db. Hallar el nivel de intensidad que genera cada grillo.

a) 50 db b) 70 db c) 80 db d) 90 db e) 100 db

42. La potencia de una sirena es de $0,64\pi$ W. ¿A qué distancia de la sirena el nivel de intensidad será de 100 db?

a) 2 m b) 4 m c) 6 m d) 8 m e) 10 m

43. Pepe situado a una distancia "d" de una fuente sonora recibe una intensidad de 0,5 W/m^2. ¿Qué intensidad recibirá, si se sitúa a una distancia "2d" de la fuente?

a) $\frac{1}{2}\frac{W}{m^2}$ b) $\frac{1}{4}\frac{W}{m^2}$ c) $\frac{1}{8}\frac{W}{m^2}$ d) $4\frac{W}{m^2}$ e) $8\frac{W}{m^2}$

44. ¿Cuántas personas deben gritar a razón de 60 db cada una, para producir un nivel de intensidad de 80 db?

a) 60 b) 70 c) 80 d) 90 e) 100

45. ¿Cuántos sapos deben situarse en una circunferencia de radio 1 m, para que, al croar el nivel de intensidad en el centro sea de 20 db, cada sapo produce 10 db?

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

46. La diferencia de los niveles de intensidad emitidas por dos sirenas es de 60 db. Hallar la razón de sus intensidades.

a) 10^2 b) 10^4 c) 10^6 d) 10^8 e) 10^{10}

47. Pepa situado a 1 m de una fuente sonora recibe un nivel de intensidad de 40 db. ¿A qué distancia mínima de la fuente, debe ubicarse Pepa, para que no escuche el sonido emitido por la fuente?

a) 60 m b) 70 m c) 80 m d) 90 m e) 100 m

48. Hallar la intensidad (en W/cm^2) de un sonido 3 decibelios más alto que otro de intensidad 10 $\mu W/cm^2$.

a) 10μ b) 20μ c) 30μ d) 40μ e) 50μ

49. Las intensidades de dos ondas sonoras son: I_1=100 $\mu W/cm^2$ y I_2=10 $\mu W/cm^2$ Hallar la diferencia de sus niveles de intensidad.

a) 4 db b) 6 db c) 8 db d) 10 db e) 12 db

50. Hallar la frecuencia de una onda electromagnética de longitud de onda 3000 $\mathring{A}$. (peta ; P=10^{15})

a) 1 PHz b) 2 PHz c) 3 PHz d) 4 PHz e) 5 PHz

51. Un rayo luminoso pasa del aire a un medio refringente "x", con un ángulo de incidencia de 53^0, y de refracción de 37^0. Hallar la rapidez de propagación en el medio "x".

a) $1,25.10^8\ \frac{m}{s}$ b) $2,25.10^8\ \frac{m}{s}$ c) $3,25.10^8\ \frac{m}{s}$ d) $4,25.10^8\ \frac{m}{s}$ e) $5,25.10^8\ \frac{m}{s}$

52. Una sirena genera un sonido de frecuencia 1700 Hz y rapidez de propagación 340 m/s. Hallar la longitud de onda del sonido.

a) 10 cm b) 15 cm c) 20 cm d) 25 cm e) 30 cm

53. La dispersión de la luz blanca en un prisma es originada por:
a) La doble refracción de la luz.
b) La polarización de la luz.
c) La interferencia que experimenta la luz al pasar a través del prisma.
d) La variación de la frecuencia de la luz al pasar del aire hacia el prisma.
e) La correspondencia univoca entre color e índice de refracción.

54. Respecto de las longitudes de onda del espectro visible: azul (λ_A), verde (λ_V), rojo (λ_R); indique la relación correcta.

a) $\lambda_A > \lambda_V > \lambda_R$ b) $\lambda_A < \lambda_V < \lambda_R$ c) $\lambda_A = \lambda_V = \lambda_R$
d) $\lambda_A > \lambda_R > \lambda_V$ e) $\lambda_V > \lambda_R > \lambda_A$

55. Un auto se acerca a una rapidez de v=30 m/s hacia una sirena que emite un sonido de frecuencia 500 Hz. Hallar la frecuencia captada por el conductor, la rapidez del sonido es de v_S=340 m/s

a) 144 Hz b) 244 Hz c) 344 Hz d) 444 Hz e) 544 Hz

56. Un submarino que va sumergiéndose uniformemente emite impulsos sonoros de duración T_0 =101T/99. La duración del impulso reflejado del fondo que se percibe es "T". La rapidez del sonido en el agua es 1400 m/s. ¿Con qué rapidez "v" va sumergiéndose el submarino?

a) 10 m/s b) 12 m/s c) 14 m/s d) 16 m/s e) 18 m/s

57. Respecto de las ondas electromagnéticas indicar las proposiciones verdaderas (V) ó falsas (F):
I) Los campos eléctrico y magnético que forman la onda de luz no oscilan en fase.
II) No se propagan en el vacío.

III) Están formadas por dos ondas del tipo sinusoidal.

a) VFV b) FVF c) FFV d) VVF e) VFF

58. Respecto de las ondas de sonido, indicar las proposiciones verdaderas (V) o falsas (F):

I) El oído humano puede percibir sonidos de intensidad de 10^{-3} W/cm^3.

II) Timbre es la diferencia de sonidos producidos por dos fuentes diferentes de intensidad de tono diferentes.

III) A un sonido de alta frecuencia le corresponde un tono bajo.

a) VFV b) FVF c) FFF d) VVF e) VFF

59. Respecto del espectro visible, indicar las proposiciones verdaderas (V) ó falsas (F).

I) La mayor longitud de onda corresponde al color violeta.

II) La menor frecuencia corresponde al color rojo.

III) El color naranja tiene mayor longitud de onda que el color azul.

a) VFV b) FVF c) FVV d) VVF e) VFF

60. Respecto de los rayos-X, indicar las proposiciones verdaderas (V) o falsas (F).

I) Tienen mayor longitud de onda que las ondas de radio.

II) Son producidos por la expulsión de electrones de un átomo y por el efecto de radiación de frenado.

III) Son altamente energéticos.

a) VFV b) FVF c) FVV d) VVF e) VFF

61. Respecto de una onda electromagnética, indicar las proposiciones verdaderas (V) ó falsas (F):

I) La magnitud de $\vec{E}$ es "c" (velocidad de la luz) veces la magnitud de $\vec{B}$.

II) Siempre puede polarizarse.

III) Su velocidad de propagación depende del medio en la que se propaga.

a) VFV b) FVF c) FVV d) VVF e) VVV

62. Respecto del sonido, indicar las proposiciones verdaderas (V) ó falsas (F).

I) Son ondas electromagnéticas.

II) Su intensidad depende directamente de la potencia del generador del sonido.

III) El nivel de referencia "β" correspondiente a una intensidad de 10^{-11} W/m^2, es 10.

a) VFV b) FVF c) FVV d) VVF e) VFF

63. Respecto del espectro electromagnético, indicar las proposiciones verdaderas (V) ó falsas (F):

I) Se llama así al conjunto de oscilaciones que realizan las ondas.

II) Las mayor longitud de onda corresponde a las ondas de radio.

III) Las menor longitud de onda corresponde a los rayos gamma.

a) VFV b) FVF c) FVV d) VVF e) VFF

64. Respecto de las ondas, indicar las proposiciones verdaderas (V) o falsas (F).

I) Ondas monocromáticas, son aquellas que tienen la misma frecuencia y diferentes longitudes de onda.

II) Cuando una onda pasa de un medio a otro varía su longitud de onda, más no su frecuencia.

III) Dos ondas son coherentes cuando son generadas por fuentes que oscilan con la misma frecuencia.

a) VFV b) FVF c) FVV d) VVF e) VVV

65. Si la razón de las longitudes de onda de dos ondas electromagnéticas es $\lambda_1/\lambda_2=4$, entonces la razón de sus frecuencias f_1 / f_2 es:

a) 1/2 b) 1/3 c) 1/4 d) 1/6 e) 1/8

66. Un recluta observa el estallido de una bomba y después de un tiempo "t" escucha la explosión. ¿A qué distancia del recluta se produjo la explosión, las velocidades de la luz y del sonido son: "c" y "v"?

a) $\dfrac{c.v}{c-v}t$ b) $\dfrac{c.v}{c+v}t$ c) $\dfrac{c+v}{c.v}t$ d) $\dfrac{c-v}{c.v}t$ e) $\dfrac{c}{c-v}t$

67. Hallar la rapidez de propagación del sonido en el acero cuyo de modulo de Young es: $E=21{,}6.10^{10}$ N/m^2 y su densidad de masa $\rho = 7{,}7.10^3$ kg/m^3.

a) 1296 m/s b) 2296 m/s c) 3296 m/s d) 4296 m/s e) 5296 m/s

68. La rapidez de propagación del sonido en el keroseno de densidad de masa igual a $\rho = 800$ kg/m^3 es de 1330 m/s. Hallar su coeficiente de compresión (B) en m^2/N.

a) $1{,}1.10^{-10}$ b) $3{,}1.10^{-10}$ c) $5{,}1.10^{-10}$ d) $7{,}1.10^{-10}$ e) $9{,}1.10^{-10}$

69. ¿Cuántas veces mayor es la rapidez de propagación del sonido en verano (+27^0 C) que en el invierno (-33^0 C)?

a) 1,12 b) 2,12 c) 3,12 d) 4,12 e) 5,12

SOLUCIONARIO

Solución: 01

- La longitud de onda, viene dado por:

$$\lambda = v.T$$

$$\lambda = (3.10^8)(10^{-14})$$

$$\clubsuit\ \lambda = 3\ \mu m \qquad (C)$$

Solución: 02

- La rapidez con la que se propaga la onda mecánica es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100}{5} = 20\ \frac{cm}{s}$$

Luego, la frecuencia de la onda es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{20}{5}$$

$$\clubsuit\ f = 4\ Hz \qquad (D)$$

Solución: 03

- La longitud de onda de las ondas es:

$$\lambda = 2.d = (2)(2) = 4\ m$$

La frecuencia de las ondas de agua es:

$$f = \frac{\text{Nro. ondas}}{\text{Tiempo}} = \frac{20}{40} = 0{,}5\ Hz$$

Luego, la rapidez de propagación es:

$$v = \lambda.f = (4)(0{,}5)$$

$$\clubsuit\ v = 2\ m/s \qquad (B)$$

Solución: 04

- Entre la primera y cuarta cresta, hay tres longitudes de onda, por tanto:

$$\clubsuit\ \lambda = \frac{d}{3} = \frac{15}{3} = 5\ cm \qquad (C)$$

Solución: 05

- Las longitudes de onda correspondientes a las frecuencias dadas, son:

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{340}{20000} = 17\ mm$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{340}{20} = 17\ m$$

$$\clubsuit\ 17\ mm < \lambda < 17\ m \qquad (C)$$

Solución: 06

- El tiempo empleado por la onda es:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{400} = 3.10^{-2} s$$

$$\clubsuit\ t = 30\ ms \qquad (C)$$

Solución: 07

- La rapidez de propagación de las ondas de superficie es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{50}{20} = 2{,}5\ \frac{m}{s}$$

Luego, el período de oscilación es:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{5}{2{,}5}$$

$$\clubsuit\ T = 2\ s \qquad (B)$$

Solución: 08

- Recordando el tiempo de encuentro, el tiempo que tardan en pasar totalmente un pulso sobre el otro es:

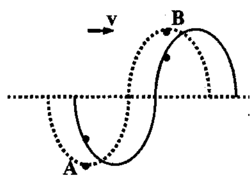
$$t = \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{2+6+4}{2+2} = 3.$$

$$\clubsuit\ t = 3\ s \qquad (C)$$

Nota
"d" es la distancia total de separación.

Solución: 09

• Representemos la onda en dos instantes de tiempo diferentes, así:



.... Posición inicial
———— Posición final

(C)

Como se aprecia la partícula "A" sube, y la partícula "B" baja.

Nota
Recordemos que las ondas no transportan materia, por lo que, las partículas no poseen movimiento horizontal.

Solución: 10

• En la Fig, la longitud de cada cuadradito es 1 u, así, las longitudes de onda, son:

$$\lambda_1 = 4\ u\ ,\ \lambda_2 = 2\ u\ ,\ \lambda_3 = 1\ u$$

Luego, el valor de la relación dada es:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = 2 + 4$$

$$♣\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = 6$$

(D)

Nota
Recuerde que tres nodos consecutivos forman una longitud de onda (λ).

Solución: 11

• El primer valle de la onda ha recorrido 12 cm en 0,6 s, de modo que la rapidez de propagación de la onda es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{0{,}12}{0{,}6}$$

$$♣\ v = 0{,}2\ \frac{m}{s}$$

(B)

Solución: 12

I) El tiempo que el punto P realiza una oscilación completa, corresponde al período del movimiento ondulatorio, es decir

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ s$$

(E)

II)El punto P luego de transcurrido 3/4 del período, se encuentra en la cresta de la onda.

(A)

III) El número de ondas que han pasado por el punto P, durante el tiempo de 6 s es:

$$N = \frac{t}{T} = \frac{6}{0{,}5} = 12\ \text{ondas}$$

(B)

Solución: 13

• La diferencia de fase entre dos puntos diferentes que oscilan, viene dado por:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{\ell_2 - \ell_1}{\lambda}$$

Como: $\lambda = v.T$, la expresión anterior queda así:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{\ell_2 - \ell_1}{v.T}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{16 - 10}{(300)(0{,}04)}$$

$$♣\ \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$$

(C)

Solución: 14

• La diferencia de fase entre dos puntos diferentes que oscilan, viene dado por:

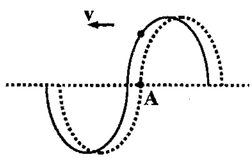
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\ell_2 - \ell_1}{\lambda}$$

$$♣\ \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{2}{1} = 4\pi \quad \text{(E)}$$

«Los puntos oscilan en fase»

Solución: 15

• Representemos la onda en dos instantes de tiempo diferentes, así:



.... Posición inicial
——— Posición final (A)

La partícula "A" sube, luego, la onda se propaga a la izquierda

Solución: 16

• Aplicando la ley de Snell, tenemos:

$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_R \operatorname{sen}\theta_R$$

$$(1)\operatorname{sen}53^0 = (\frac{4}{3})\operatorname{sen}\theta_R$$

$$(1)(\frac{4}{5}) = (\frac{4}{3})\operatorname{sen}\theta_R$$

$$\operatorname{sen}\theta_R = \frac{3}{5}$$

$$♣\ \theta_R = 37^0 \quad \text{(B)}$$

Solución: 17

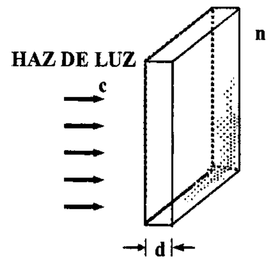
• El índice de refracción de una sustancia, viene dado por:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{300\,000\ km/s}{125\,000\ km/s}$$

$$♣\ n = 2{,}4 \quad \text{(C)}$$

Solución: 18

• Representemos los rayos de luz incidiendo sobre la lámina de vidrio.



La velocidad de la luz en el vidrio es, v=c/n luego, el tiempo que tarda en recorrer la luz la distancia "d" es:

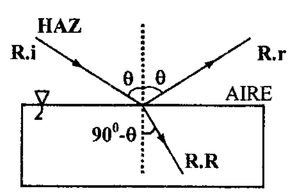
$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{c/n} = \frac{n.d}{c}$$

$$t = \frac{(1{,}5)(12.10^{-3})}{3.10^8} = 60.10^{-12}s$$

$$♣\ t = 60\ ps \quad \text{(B)}$$

Solución: 19

• Representemos los rayos de luz incidente (R.i), reflejado (R.r) y refractado (R.R)



Aplicando la ley de Snell, tenemos:

$$n_{aire}\operatorname{sen}\theta = n\operatorname{sen}(90^0 - \theta)$$

$$(1)\ \operatorname{sen}\theta = n\cos\theta$$

$$\clubsuit\ \operatorname{tg}\theta = \frac{4}{3} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 20

• Ondas monocromáticas, son aquellas que tiene la misma frecuencia y las misma longitud de onda.

Solución: 21

I) La densidad lineal de masa de la cuerda viene dado por:

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{0{,}01}{0{,}8} = 0{,}0125\ \frac{kg}{m}$$

Luego, la velocidad de propagación de las ondas transversales es:

$$v = (\frac{T}{\mu})^{1/2} = (\frac{500}{0{,}0125})^{1/2} = 200\ \frac{m}{s}$$

II) La nueva velocidad de propagación es, $v_1 = 100 m/s$, luego la nueva densidad lineal de masa de la cuerda es:

$$\mu_1 = \frac{T}{v_1^2} = \frac{500}{100^2} = 0{,}05\ \frac{kg}{m}$$

Pero: $\mu_1 = (m + x)/\ell$, siendo (x) la masa aumentada de cobre, de modo que:

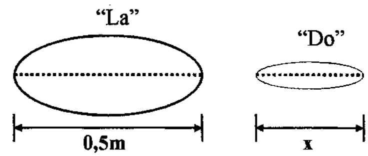
$$x = \mu_1 \ell - m = (0{,}05)(0{,}8) - 0{,}01$$

Luego, la masa del alambre de cobre que se debe aumentar es:

$$\clubsuit\ 0{,}03\ kg \ \text{ ó } \ 30\ g \qquad \text{(C)}$$

Solución: 22

• Representemos los pulsos correspondientes a las notas "La" y "Do".



La velocidad de propagación de la onda depende de la tensión en la cuerda y de la densidad lineal de masa, por consiguiente en ambos casos la velocidad es la misma, es decir:

$$v_1 = v_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 . f_1 = \lambda_2 . f_2$$

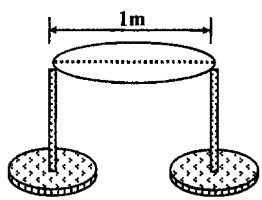
$$(1)(440) = (2x)(528)$$

$$x \approx 0{,}417\ m \approx 41{,}7\ cm \qquad \text{(B)}$$

Luego, el dedo se debe poner a 8,3 cm del extremo fijo.

Solución: 23

• La Fig., muestra el modo fundamental de una onda transversal, de donde se deduce que la longitud de onda es: λ=2 m.



Luego, la densidad lineal de masa del alambre es:

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{0{,}005}{1} = 0{,}005\ \frac{kg}{m}$$

A su vez, la velocidad de la onda transversal es:

$$v = [\frac{T}{\mu}]^{1/2} = [\frac{968}{0{,}005}]^{1/2} = 440\ \frac{m}{s}$$

Luego, la frecuencia de oscilación es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{440}{2}$$

$$\clubsuit \; f = 220 \text{ Hz} \qquad \text{C}$$

Solución: 24

• La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es:

$$v = [\frac{T}{\mu}]^{1/2} = [\frac{98}{0{,}02}]^{1/2} = 70 \frac{m}{s}$$

De otro lado, las longitudes de onda del 1er y 7 mo armónico son:

$$\lambda_1 = \frac{2\ell}{1} \quad ; \quad \lambda_7 = \frac{2\ell}{7}$$

Por dato sabemos que: $\lambda_1 - \lambda_7 = 24$ m, de modo que:

$$2\ell - \frac{2\ell}{7} = 24 \text{ m} \quad => \quad (\frac{6}{7})(2\ell) = 24 \text{ m}$$

$$\ell = 14 \text{ m}$$

Luego, la longitud de onda del 5to armónico es:

$$\lambda_5 = \frac{2\ell}{5} = (\frac{2}{5})(14 \text{ m})$$

$$\lambda_5 = 5{,}6 \text{ m}$$

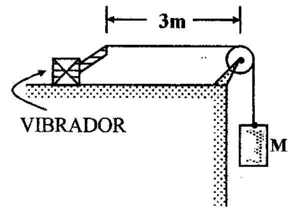
Luego, la frecuencia (f) de la onda es:

$$f_5 = \frac{v}{\lambda_5} = \frac{70}{5{,}6}$$

$$\clubsuit \; \lambda_5 = 5{,}6 \text{ m} \quad ; \quad f_5 = 12{,}5 \text{ Hz} \qquad \text{D}$$

Solución: 25

• Representemos al bloque unido por la cuerda a un vibrador.



La densidad lineal de masa del hilo, viene dado por:

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1 \frac{kg}{m}$$

La velocidad de propagación de las ondas transversales, es igual a:

$$v = [\frac{T}{\mu}]^{1/2} = [\frac{Mg}{\mu}]^{1/2}$$

$$v = [\frac{90}{0{,}1}]^{1/2} = 30 \frac{m}{s}$$

Luego, el tiempo que demora la onda en recorrer todo el hilo es:

$$t = \frac{\ell}{v} = \frac{3}{30} = 0{,}1 \text{ s}$$

$$\clubsuit \; v = 30 \frac{m}{s} \quad ; \quad t = 0{,}1 \text{ s} \qquad \text{E}$$

Solución: 26

• Cuando una onda pasa de un medio a otro no se altera la frecuencia "f", porque cada pulso incidente origina un pulso refractado, su velocidad de propagación, viene dado por, $v = \lambda f$. Así, las velocidades de propagación de las cuerdas delgada (1) y gruesa (2), son:

$$v_1 = \lambda_1 f = (\frac{\ell}{8})(20) = \frac{5}{2}\ell$$

$$v_2 = \lambda_2 f = (\frac{\ell}{16})(20) = \frac{5}{4}\ell$$

A su vez, los tiempos de propagación en cada cuerda, son:

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{\ell}{(5\ell/2)} = \frac{2}{5}\,s \quad y$$

$$t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{2\ell}{(5\ell/4)} = \frac{8}{5}\,s$$

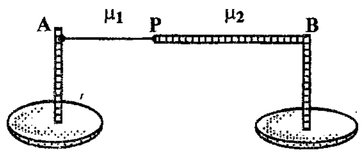
De modo que, el tiempo total de propagaciño es:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2}{5}\,s + \frac{8}{5}\,s$$

$$\clubsuit\ t = 2\,s \qquad \text{(B)}$$

Solución: 27

• Representemos las dos cuerdas de densidades de masa lineales μ_1, μ_2, unidas en el punto P.



Las tensiones de las cuerdas AP y PB son iguales; luego, la razón entre las velocidades de propagación v_1, v_2 , en estas cuerdas es:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{T/\mu_1}}{\sqrt{T/\mu_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{4\mu_1}{\mu_1}} = 2$$

Por dato se sabe que, $v_1 = 5\,m/s$, entonces, $v_2 = 2{,}5\,m/s$.

Cuando una onda pasa de un medio a otro no se altera su frecuencia, porque cada pulso incidente origina un pulso refractado, así, la longitud de onda en la cuerda PB es:

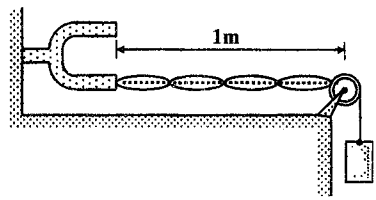
$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{2{,}5}{20}$$

$$\clubsuit\ \lambda_2 = 0{,}125\ m \qquad \text{(D)}$$

Solución: 28

• De la Fig. se deduce que la longitud de onda es: $\lambda = 0{,}5$ m. De otra parte, la densidad lineal de masa es:

$$\mu = \frac{m}{\ell} = 0{,}25.10^{-3}\ \frac{kg}{m}$$



A su vez, la velocidad de propagación de la onda (v) es:

$$v = \lambda.f = (0{,}5)(200) = 100\ m/s$$

Finalmente, la tensión (T) en la cuerda es:

$$T = \mu.v^2 = (0{,}25.10^{-3})(10^4)$$

$$\clubsuit\ T = 2{,}5\ N \qquad \text{(D)}$$

Solución: 29

• Las densidades lineales de masa, para el tercer y cuarto armónico son:

$$\mu_1 = \mu \quad y \quad \mu_2 = 2\mu$$

Las longitudes de onda, para el tercer y cuarto armónico son:

$$\lambda_1 = \frac{2\ell}{3} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{2\ell}{4}$$

Las velocidades de la onda, para el tercer y cuarto armónico son:

$$v_1 = (T_1/\mu_1)^{1/2} = (Mg/\mu)^{1/2}$$

$$v_2 = (T_2/\mu_2)^{1/2} = [(M+m)g/2\mu]^{1/2}$$

Ambas ondas tienen, igual frecuencia, de modo que:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}$$

$$\frac{\sqrt{Mg/\mu}}{(2\ell/3)} = \frac{\sqrt{(M+m)g/(2\mu)}}{(\ell/2)}$$

$$\frac{9M}{4} = \frac{4(M+m)}{2}$$

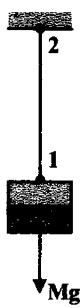
$$m = (\frac{1}{8})M = (\frac{1}{8})(1\ 000\,g)$$

♣ $m = 125$ g D

Solución: 30

• La densidad lineal de masa de la cuerda es:

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{5}{20} = 0{,}25\ \frac{kg}{m}$$



Sean T_1, T_2 las tensiones en los extremos de la cuerda (en la Fig. puntos 1 y 2), entonces, su tensión media es:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$T = \frac{(m+2M)g}{2}$$

$$T = \frac{[5+(2)(8)](10)}{2} = 105N$$

A su vez, la velocidad de propagación de la onda es:

$$v = (\frac{T}{\mu})^{1/2} = (\frac{105}{0{,}25})^{1/2}$$

$$v \approx 20{,}5\ m/s$$

Finalmente, la longitud de onda (λ) aproximádamente es:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{20{,}5}{20}$$

♣ $\lambda = 1{,}025$ m B

Solución: 31

• Haciendo la comparación con la ecuación general de una onda del tipo sinusoidal, encontramos, los parámetros físicos, número de onda (k) y frecuencia angular (ω):

$$y = A\,\text{sen}(k.x - \omega.t)$$

$$y = 8\,\text{sen}(3.x - 1\ 020.t)$$

Amplitud	:	$A = 8$ m
Número de onda	:	$k = 3\ m^{-1}$
Frecuencia angular	:	$\omega = 1\ 020$ rad/s
Velocidad de propagación	:	$v = \omega/k = 340$ m/s

Solución: 32

• Haciendo la comparación con la ecuación general de una onda del tipo sinusoidal, encontramos, los parámetros físicos, número de onda (k) y frecuencia angular (ω):

$$y = A\,\text{sen}(k.x - \omega.t)$$

$$y = 10\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}x - 10\pi.t)$$

La amplitud es : $A = 10$ cm

Número de onda : $k = \pi/4\ cm^{-1}$

Frecuencia angular : $\omega = 10\pi$ rad/s

Velocidad de propagación : $v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\pi}{\pi/4}$

$v = 40$ cm/s

Período de las oscilaciones : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi}$

$T = 0,2$ s

Longitud de onda : $\lambda = v.T = 8$ cm

Densidad lineal de masa : $\mu = \frac{m}{\ell} = 4\ \frac{kg}{m}$

Tensión en el hilo : $T = \mu.v^2 = 0,64$ N

Solución: 33

• Haciendo la comparación con la ecuación general de una onda del tipo sinusoidal, encontramos los parámetros físicos, número de onda (k) y frecuencia angular (ω).

$$y = A\ sen(k\ x \pm \omega\ t + \phi)$$

el signo (+) ó (-) se empleará si la onda se mueve respectivamente hacia la izquierda o hacia la derecha del eje "X".

La amplitud de la onda: $A = 2$ cm

El número de onda : $k = \pi\ cm^{-1}$

La frecuencia angular : $\omega = 200\pi$ rad/s

La fase inicial : $\phi = \pi/2$

La velocidad de propagación : $v = \frac{\omega}{k}$

$v = \frac{200\pi\ s^{-1}}{\pi\ cm^{-1}}$

$v = 200$ cm/s

Solución: 34

• Las respuestas a cada una de las afirmaciones son: FFF

Solución: 35

• Las respuestas a cada una de las afirmaciones son: FVF

Solución: 36

• Las respuestas a cada una de las afirmaciones son: FVF.

Solución: 37

• Las respuestas a cada una de las afirmaciones son: FFV

Solución: 38

• Las respuestas a cada una de las afirmaciones son: VVF

Solución: 39

• La intensidad en el punto medio de la recta que une las dos fuentes sonoras, viene dado por:

$$I = I_o 10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{-12}.10^{\frac{80}{10}} = 10^{-4}\frac{W}{m^2}$$

Luego, la potencia de cada fuente es:

$$P = 4\pi\, d^2.\frac{I}{2}$$

$$P = (4\pi)(50)^2(\frac{1}{2}10^{-4})$$

$$\clubsuit\ P = \frac{\pi}{2}\ W$$ (A)

Solución: 40

• Recordemos que la intensidad mínima que puede percibir el oído humano es de 10^{-12} W/m², de modo que:

$$I = \frac{P}{4\pi\, d^2}$$

$$10^{-12} = \frac{64\pi.10^{-8}}{4\pi\, d^2}$$

$$d^2 = 16.10^4$$

$$\clubsuit\ d = 400\ m \qquad \text{(D)}$$

Solución: 41

• La relación entre la intensidad de sonido (I) y el nivel de intensidad de sonido (β), viene dado por:

$$I = I_o 10^{\frac{\beta}{10}}$$

Así, el número de grillos multiplicado por la intensidad de cada grillo, es igual, a la intensidad de los 100 grillos.

$$100 I_o 10^{\frac{\beta}{10}} = I_o 10^{\frac{120}{10}}$$

$$10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{10}$$

$$\clubsuit\ \beta = 100\ db \qquad \text{(E)}$$

Solución: 42

• La intensidad de sonido producido por la sirena, viene dado por:

$$I = \frac{P}{4\pi\, d^2}$$

$$I_o 10^{\frac{\beta}{10}} = \frac{P}{4\pi\, d^2}$$

$$10^{-12}.10^{\frac{100}{10}} = \frac{64\pi.10^{-2}}{4\pi\, d^2}$$

$$d^2 = 16$$

$$\clubsuit\ d = 4\ m \qquad \text{(B)}$$

Solución: 43

• Como la potencia de la fuente es independiente de la posición que ocupe Pepe, se cumple:

$$P = 4\pi\,(2d)^2 I = 4\pi\, d^2 (\frac{1}{2})$$

$$\clubsuit\ I = \frac{1}{8}\ \frac{W}{m^2} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 44

• El número de personas (N) multiplicado por la intensidad de cada persona, es igual, a la intensidad de las N personas, es decir:

$$N\, I_o.10^{\frac{60}{10}} = I_o 10^{\frac{80}{10}}$$

$$N.10^6 = 10^8$$

$$\clubsuit\ N = 100\ \text{personas} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 45

• El número de sapos (N) multiplicado por la intensidad de cada sapo, es igual, a la intensidad de los N sapos, es decir:

$$N\, I_o.10^{\frac{10}{10}} = I_o 10^{\frac{20}{10}}$$

$$N.10 = 10^2$$

$$\clubsuit\ N = 10\ \text{sapos} \qquad \text{(A)}$$

Solución: 46

• La razón de las intensidades de los sonidos emitidos por las sirenas es:

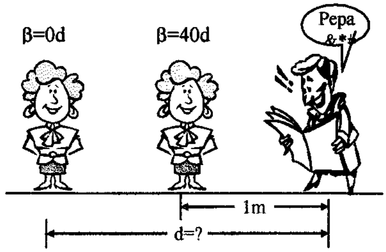
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_o 10^{\beta_1/10}}{I_o 10^{\beta_2/10}}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{\beta_1-\beta_2}{10}} = 10^{\frac{60}{10}}$$

$$♣ \ \frac{I_1}{I_2} = 10^6 \quad \text{(C)}$$

Solución: 47

• Representemos a Pepa, en su posición inicial y final, respectivamente.



Ahora, recordemos que la potencia de la fuente sonora, viene dado por:

$$P = 4\pi.d^2.I = 4\pi.d^2.I_o.10^{\frac{\beta}{10}}$$

Luego, como la potencia de la fuente sonora, es independiente de la posición que ocupe Luis, se tiene:

$$P = 4\pi.d^2.I_o.10^{\frac{0}{10}} = 4\pi.(1)^2.I_o.10^{\frac{40}{10}}$$

$$d^2 = 10^4$$

$$♣ \ d = 100 \text{ m} \quad \text{(E)}$$

Nota

El nivel de intensidad (β) correspondiente a la intensidad mínima ($I=10^{-12}$) es cero.

Solución: 48

• La diferencia de los niveles de intensidad de los sonidos, viene dado por:

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\,\ell og_{10}(\frac{I_1}{I_o}) - 10\,\ell og_{10}(\frac{I_2}{I_o})$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\,\ell og_{10}(\frac{I_1/I_o}{I_2/I_o})$$

$$3 = 10\,\ell og_{10}(\frac{I_1}{I_2})$$

$$I_1 = I_2.10^{3/10} \approx (10\mu)(2)$$

$$♣ \ I_1 \approx 20\,\mu\frac{W}{cm^2} \quad \text{(B)}$$

Solución: 49

• La diferencia de los niveles de intensidad de las ondas sonoras, viene dado por:

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\,\ell og_{10}(\frac{I_1}{I_o}) - 10\ell og_{10}(\frac{I_2}{I_o})$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\,\ell og_{10}(\frac{I_1/I_o}{I_2/I_o})$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\log_{10}(\frac{100}{10})$$

$$♣ \ \beta_1 - \beta_2 = 10\text{db} \quad \text{(D)}$$

Solución: 50

• La rapidez de propagación de una onda electromagnética en el vacío es:

$$c = \lambda.f$$

$$3.10^8 = (3\,000)(10^{-10})\,f$$

$$♣ \ f = 10^{15} \text{ Hz} = 1 \text{ PHz} \quad \text{(A)}$$

Nota

Recordemos que: $1\ \mathring{A} = 10^{-10}$m

Solución: 51

• Aplicando la ley de Snell a los medios aire-x, tenemos:

$$n_i.\text{sen}\,\theta_i = n_R.\text{sen}\,\theta_R$$

$$\frac{c}{v_i}\operatorname{sen}\theta_i = \frac{c}{v_R}\operatorname{sen}\theta_R$$

$$\frac{4/5}{3.10^8} = \frac{3/5}{v_R}$$

$$\clubsuit\ v_R = 2{,}25.10^8\ m/s \quad \text{(B)}$$

Solución: 52

• La velocidad de propagación del sonido en el aire, viene dado por:

$$v = \lambda.f \quad \Rightarrow \quad 340 = 1\,700\,\lambda$$

$$\clubsuit\ \lambda = 0{,}20\ m = 20\ cm \quad \text{(C)}$$

Solución: 53

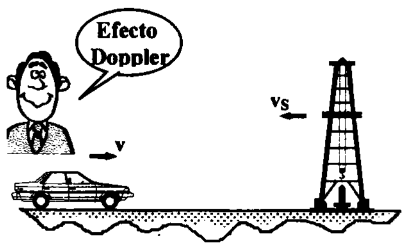
• A cada color del espectro visible de la luz, le corresponde un índice de refracción propio, por lo que, la respuesta es la e)

Solución: 54

• La relación correcta para las longitudes de onda de los colores azul, verde y rojo es la b).

Solución: 55

• Representemos al auto y a la sirena que emite el sonido.



Según, el efecto Doppler para sonidos, la frecuencia captada por el conductor es:

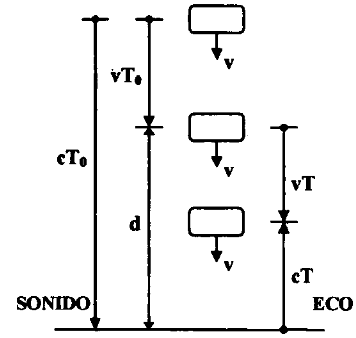
$$f' = \frac{(v_S + v)}{v_S} f$$

$$f = \frac{(340+30)}{340}(500)$$

$$\clubsuit\ f \approx 544\ Hz \quad \text{(E)}$$

Solución: 56

• Representemos al submarino en tres posiciones diferentes.



En la Fig., la diferencia de distancias recorridas por el sonido y el submarino, es igual, a la suma de distancias recorridas por el eco y el submarino, esto es:

$$d = c.T_0 - v.T_0 = c.T + v.T$$

$$c(T_0 - T) = v(T_0 + T) \Rightarrow v = \frac{T_0 - T}{T_0 + T}c$$

$$v = \frac{(101/99)T - T}{(101/99)T + T}(1400)$$

$$\clubsuit\ v = \frac{1}{100}(1\,400) = 14\frac{m}{s} \quad \text{(C)}$$

Solución: 57

• Las respuestas a cada una de las afirmaciones son: FFV

Solución: 58

• Las respuestas a cada una de las afirmaciones son: FFF

Solución: 59

- Las respuestas a cada una de las afir maciones son: FVV

Solución: 60

- Las respuestas a cada una de las afir maciones son: FVV

Solución: 61

- Las respuestas a cada una de las afir maciones son: VVV

Solución: 62

- Las respuestas a cada una de las afir maciones son: FVV

Solución: 63

- Las respuestas a cada una de las afir maciones son: FVV

Solución: 64

- Las respuestas a cada una de las afir maciones son: FVV

Solución: 65

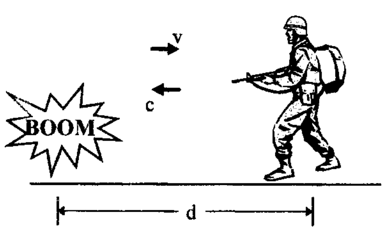
- Todas las ondas electromagnéticas, se propagan a la velocidad de la luz (c), así:

$$\frac{c}{c} = \frac{\lambda_1 . f_1}{\lambda_2 . f_2}$$

$$♣ \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{4} \qquad \text{(C)}$$

Solución: 66

- Representemos las velocidades de la luz (c) y la del sonido (v).



En la Fig. el sonido y la luz recorren la misma distancia "d", la diferencia de sus tiempos de recorridos es "t", esto es:

$$t_S - t_L = t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{v} - \frac{d}{c} = t$$

$$♣ \quad d = \frac{c.v}{c - v} t \qquad \text{(A)}$$

Solución: 67

- La rapidez de propagación del sonido en un medio material, viene dado por:

$$v = [E / \rho]^{1/2}$$

$$v = [21{,}6.10^{10} / 7{,}7.10^3]^{1/2}$$

$$♣ \quad v \approx 5\ 296 \ \frac{m}{s} \qquad \text{(E)}$$

Solución: 68

- La rapidez de propagación del sonido en una sustancia, viene dado por:

$$v = [1 / \rho.B]^{1/2}$$

$$1330 = [1 / 800.B]^{1/2}$$

$$♣ \quad B = 7{,}1.10^{-10} \frac{m^2}{N} \qquad \text{(D)}$$

Solución: 69

- La razón de las rapideces del sonido en verano (v_1) a invierno (v_2) es:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{[\chi.R.T_1 / M]^{1/2}}{[\chi.R.T_2 / M]^{1/2}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = [\frac{T_1}{T_2}]^{1/2} = [\frac{300}{240}]^{1/2}$$

$$♣ \quad \frac{v_1}{v_2} \approx 1{,}12 \text{ veces} \qquad \text{(A)}$$

FACTORES DE CONVERSION

Angulo plano

	grado	minuto	segundo	radian	revolución
1 grado	1	60	3 600	$1\ 745.10^{-2}$	$2{,}778.10^{-3}$
1 minuto	$1{,}667.10^{-2}$	1	60	$2{,}909.10^{-4}$	$4{,}630.10^{-5}$
1 segundo	$2{,}778.10^{-4}$	$1{,}667.10^{-2}$	1	$4{,}848.10^{-6}$	$7{,}716.10^{-7}$
1 radían	57,30	3 438	$2{,}063.10^{5}$	1	0,1592
1 revolución	360	$2{,}16.10^{4}$	$1{,}296.10^{6}$	6,283	1

Angulo sólido

1 esfera = 4π estereorradianes = 12,57 estereorradianes

Longitud

	Å	mm	cm	metro	km
Angstrom	1	10^{-7}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-13}
1 milímetro	10^{7}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}
1 centímetro	10^{8}	10	1	10^{-2}	10^{-5}
1 metro	10^{10}	10^{3}	100	1	10^{-3}
1 kilómetro	10^{13}	10^{6}	10^{5}	1 000	1

Area

	mm^2	cm^2	m^2	km^2
1 mm^2	1	10^{-2}	10^{-6}	10^{-12}
1 cm^2	10^{2}	1	10^{-4}	10^{-10}
1 m^2	10^{6}	10^{4}	1	10^{-6}
1 km^2	10^{12}	10^{10}	10^{6}	1

Masa

	g	kg
1 gramo	1	10^{-3}
1 kilogramo	10^{3}	1

Densidad

	g/cm^3	kg/m^3
1 g/cm^3	1	10^{3}
1 kg/m^3	10^{-3}	1

Volumen

	mm^3	cm^3	m^3	km^3	litro
1 mm^3	1	10^{-3}	10^{-9}	10^{-18}	10^{-6}
1 cm^3	10^3	1	10^{-6}	10^{-15}	10^{-3}
1 m^3	10^9	10^6	1	10^{-9}	10^3
1 km^3	10^{18}	10^{15}	10^9	1	10^{12}
1 litro	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-12}	1

Tiempo

	año	día	h	min	seg
1 año	1	365,2	$8{,}766.10^{-3}$	$5{,}259.10^5$	$3{,}156.10^7$
1 día	$2{,}738.10^{-3}$	1	24	1 440	$8{,}640.10^4$
1 hora	$1{,}141.10^{-4}$	$4{,}167.10^{-2}$	1	60	3 600
1 minuto	$1{,}901.10^{-6}$	$6{,}944.10^{-4}$	$1{,}667.10^{-2}$	1	60
1 segundo	$3{,}169.10^{-8}$	$1{,}157.10^{-5}$	$2{,}778.10^{-4}$	$1{,}667.10^{-2}$	1

Velocidad

	cm/s	m/s	km/h
1 cm/s	1	0,01	$3{,}6.10^{-2}$
1 m/s	100	1	3,6
1 km/h	27,78	0,2778	1

Fuerza

	dina	newton
1 dina	1	10^{-5}
1 newton	10^5	1

Presión

	atm	dina/cm^2	newton/m^2	mm Hg	pascal
1 atmósfera	1	$1{,}013.10^6$	0,101	760	$1{,}013.10^5$
1 dina/cm^2	$9{,}869.10^{-7}$	1	0,1	$7{,}501.10^{-2}$	0,1
1 newton/m^2	$9{,}869.10^{-6}$	10	1	0,7501	1
1 mm Hg	$1{,}316.10^{-3}$	$1{,}333.10^3$	$1{,}333.10^2$	1	133,3
1 pascal	$9{,}869.10^{-6}$	10	1	$7{,}501.10^{-3}$	1

Energía, trabajo, calor

	ergio	joule	caloría	kW.h	eV
1 ergio	1	10^{-7}	$2{,}389.10^{-8}$	$2{,}777.10^{-14}$	$6{,}242.10^{11}$
1 joule	10^7	1	0,239	$2{,}777.10^{-7}$	$6{,}242.10^{18}$
1 caloría	$4{,}186.10^7$	4,186	1	$1{,}163.10^{-6}$	$2{,}613.10^{19}$
1 kW.h	$3{,}600.10^{13}$	$3{,}600.10^6$	$8{,}598.10^5$	1	$2{,}247.10^{25}$
1 eV	$1{,}602.10^{-12}$	$1{,}602.10^{-19}$	$3{,}828.10^{-20}$	$4{,}450.10^{-26}$	1

Potencia

	cal/s	kW	W
1 cal/s	1	$4{,}186.10^{-3}$	4,186
1 kW	238,9	1	1 000
1 W	0,2389	0,001	1

Sol

Masa	$1{,}99.10^{30}$ kg
Radio	$6{,}96.10^5$ km
Densidad promedio	1 410 kg/m^3
Gravedad superficial	274 m/s^2
Temperatura superficial	6 000^0 K

Tierra

Masa	$5{,}98.10^{24}$
Radio ecuatorial	$6{,}378.10^6$ km
Radio polar	$6{,}357.10^6$ m
Densidad promedio	5 522 kg/m^3
Rapidez angular	$7{,}29.10^{-5}$ rad/s

Densidades

Sólidos (g/cm^3)		Líquidos (g/cm^3)		Gases (C.N.) (kg/m^3)	
Acero	7,8	Agua	1,0	Amoniaco	0,77
Aluminio	2,7	Agua de	1,03	Aire	1,293
Cadmio	8,65	mar	1,1	Cloro	3,21
Cobalto	8,9	Agua	0,81	Gas	1,98
Cobre	8,9	pesada	0,79	carbónico	0,09
Corcho	0,20	Alcohol etil.	0,9	Hidrógeno	1,25
Diamante	3,5		0,9	Nitrógeno	0,72
Estaño	7,4	Alcohol	0,72	Metano	1,43
Grafito	1,6	Aceite	1,26	Oxígeno	
Hielo	0,92	ricino	13,6		
Hierro	7,2	Benceno	0,8		
Latón	8,6	Eter			
Molibdeno	10,2	Glicerina			
Níquel	8,9	Mercurio			
Oro	19,3	Keroseno			
Plata	10,5				
Platino	21,4				
Plomo	11,3				
Porcelana	2,3				
Sodio	0,97				
Titanio	4,5				
Tungsteno	19,1				
Uranio	19,0				
Zinc	7,0				

Angulos de contacto

Líquido	Pared	Angulo de contacto
α-bromonaftaleno ($C_{10}H_7Br$)	Vidrio de sosa y cal Vidrio de plomo Pyrex Cuarzo fundido	5^0 $6^0\ 45'$ $20^0\ 30'$ 21^0
Yoduro de metileno (CH_2I_2)	Vidrio de sosa y cal Vidrio de plomo Pyrex Cuarzo fundido	29^0 30^0 29^0 33^0
Agua	Parafina	107^0
Mercurio	Vidrio de sosa y cal	140^0

Calores específicos de sólidos y líquidos a presión atmosférica

Sustancia	Temperatura (^{0}C)	c (cal/g.^{0}C)	c (cal/mol.^{0}C)
Agua	0	1,0087	18,172
	15	1,0000	18,015
	40	0,9976	17,972
	100	1,0064	18,130
Hielo	-21-0 (med.)	0,505	9,100
Aluminio	0	0,2079	5,610
	20	0,214	5,774
	100	0,225	6,071
	300	0,248	6,692
	0-100 (med.)	0,211	5,693
Cobre	0-100 (med.)	0,0930	5,910
Oro	0-100 (med.)	0,0316	6,224
Hierro	0-100 (med.)	0,1097	6,130
Plomo	0-100 (med.)	0,0309	6,402
Plata	0-100 (med.)	0,0561	6,502
Estaño	0-100 (med.)	0,0556	6,599
Zinc	0-100 (med.)	0,0935	6,112
Mercurio	0-100 (med.)	0,0331	6,640
Cloruro de sodio	0-100 (med.)	0,210	12 273
	0-100 (med.)	0,0917	-
Latón	0-100 (med.)	0,113	-
Acero	0-100 (med.)	0,199	-
Vidrio	0-100 (med.)	0,188	11,305

Tensión superficial

Sustancia	T ^{0}C	Coeficiente de tensión superficial (N/m)
Aceite de oliva	20	0,032
Aceite de ricino	20	0,035
Agua	0	0,0756
Agua	20	0,0728
Agua	60	0,0662
Alcohol etílico	20	0,0223
Benceno	20	0,0289
Glicerina	20	0,0631
Keroseno	20	0,030
Mercurio	20	0,465
Agua con jabón	20	0,025
Tetracloruro de carbón	20	0,0268
Oxígeno	-193	0,0157
Neón	-247	0,00515
Helio	-269	0,00012

Calores específicos de gases a presión atmosférica normal (P_0)

Gas	T (^{0}C)	c_P cal/mol.^{0} C	c_V cal/mol.^{0} C	c_P - c_V cal/mol.^{0} C	χ=c_P/c_V	c_V/R	c_P/R
He	18	4,964	2,992	1,972	1,659	1,506	2,499
A	15	5,005	3,001	2,004	1,668	1,510	2,520
Ne	15	4,965	3,027	1,938	1,64	1,524	2,500
Kr	15	4,944	2,942	2,002	1,68	1,481	2,489
Xe	15	4,963	2,990	1,973	1,66	1,505	2,499
H_2	15	6,832	4,846	1,986	1,410	2,439	3,440
	2 000	8,241	6,253	1,988	1,318	3,148	4,149
N_2	15	6,939	4,942	1,997	1,404	2,488	3,494
O_2	15	6,976	4,979	1,997	1,401	2,507	3,512
	2 000	8,541	6,555	1,986	1,303	3,300	4,300
NO	15	6,993	4,995	1,998	1,400	2,514	3,521
CO	15	6,944	4,946	1,998	1,404	2,490	3,496
Cl_2	15	8,17	6,03	2,14	1,355	3,03	4,11
Br_2	20-300	8,79	6,66	2,13	1,32	3,35	4,42
I_2	200-400	8,63	6,63	2,00	1,30	3,34	4,34
SO_2		9,73	7,55	2,18	1,29	3,80	4,90
NH_3	15	8,92	6,81	2,11	1,31	3,43	4,49
	15						

Presión de vapor de agua

T (^{0}C)	Presión de vapor (10^5 Pa)	Presión de vapor (lb.in-^{7})	T (^{0}F)
0	0,00610	0,0886	32
5	0,00868	0,126	41
10	0,0119	0,173	50
15	0,0169	0,245	59
20	0,0233	0,339	68
40	0,0734	1,07	104
60	0,199	2,89	140
80	0,473	6,87	176
100	1,01	14,7	212
120	1,99	28,8	248
140	3,61	52,4	284

Temperaturas de fusión y vaporización, calores de fusión y vaporización a presión atmosférica normal (P_0)

Sustancia	Temperatura de fusión (^{0}C)	Calor de fusión (cal/g)	Temperatura de vaporización (^{0}C)	Calor de vaporización (^{0}C)
He	-	-	-268,6	6,0
A	-190	8,94	-186	37,6
H_2	-259,25	13,8	-252,8	108
N_2	-210	6,09	-195,55	47,6
O_2	-219	3,30	-182,9	50,9
NH_3	-75	108,1	-33,4	327,1
H_2O	0,00	79,71	100,0	539,6
Etanol	-114,4	24,9	78,3	204
Metanol	-97	16,4	64,7	262,8
Acetona	-95	19,6	56,1	124,5
Acido acético	16,58	44,7	118,3	96,8
Benceno	5,42	30,3	80,2	94,3
NaCl	804,3	124	-	-
Aluminio	658	76,8	-	-
Cobre	1 083	42	-	-
Plata	961	21,07	-	-
Oro	1 064	15,8	-	-
Plomo	327	5,86	-	-
Estaño	232	14,0	-	-
Zinc	419	28,13	-	-
Mercurio	-39	2,82		67,85

Datos del punto triple

Sustancia	Temperatura (^{0}K)	Presión (10^5 Pa)
Hidrógeno (normal)	13,84	0,0704
Deuterio (normal)	18,63	0,171
Neón	24,57	0,432
Nitrógeno	63,18	0,125
Oxígeno	54,36	0,00152
Amoniaco	195,40	0,0607
Dióxido de carbono	216,55	5,17
Dióxido de azufre	197,68	0,00167
Agua	273,16	0,00610

Temperaturas, presiones y densidades críticas

Sustancia	T_{crit} (^0C)	P_{crit} (atm)	ρ_{crit} (g/cm^3)
Helio	-267,9	2,26	0,0693
Hidrógeno	-239,9	12,8	0,0310
oxígeno	-118,8	49,7	0,430
Nitrógeno	-141,1	33,5	0,3110
Argón	-122	48,0	0,531
Neón	-228,7	25,9	0,484
Kriptón	-63	54,0	0,780
Xenón	16,6	58,2	1,155
Cloro	144,0	76,1	0,573
Dióxido de carbono	31,1	73,0	0,460
Dióxido de azufre	157,2	77,7	0,520
Amoniaco	132,4	111,5	0,235
Metano	-82,5	45,8	0,162
Etano	32,1	48,8	0,210
Propano	95,6	43,0	-
Etileno	9,7	50,9	0,220
Acetileno	36,0	62,0	0,231
Agua	374,0	218,5	0,325
Metanol	240,0	78,7	0,272
Etanol	243,1	63,1	0,275
Acetona	235,0	47,0	0,268
Acido acético	321,6	57,2	0,351
Benceno	288,5	47,7	0,304

Coeficientes de viscosidad (en Poises)

Líquidos	$\eta.10^2$	Gases	$\eta.10^3$
Agua (0 ^0C)	1,792	Aire (0 ^0C)	1,71
Agua	1,005	Aire	1,81
Agua (40 ^0C)	0,656	Aire (40 ^0C)	1,90
Glicerina	833	Hidrógeno	0,93
Aceite de caster	9,86	Amoníaco	0,97
Alcohol	0,367	Bióxido de carbono	1,46

* Todos a 20^0 C, salvo aquellos en las que se indica la temperatura

* 1 Poise = 10^{-1} $N.s^{-1}$.

Energía cinética traslacional de los gases

Gas	Peso molecular (g/mol)	v_{rcm} a 0 ^0C (m/s)	E_C por mol a ^0C (J/mol)
H_2	2,02	1 838	3 370
He	4,0	1 311	3 430
H_2O	18	615	3 400
Ne	20,1	584	3 420
N_2	28	493	3 390
CO	28	493	3 390
Aire	28,8	485	3 280
O_2	32	461	3 400
CO_2	44	393	3 400

Algunas temperaturas (^0K)

Reacción termonuclear del carbono	5.10^8
Reacción termonuclear del helio	10^8
Interior del sol	10^7
Corona solar	10^6
Onda de choque en el aire a 20 Mach	$2,5.10^4$
Nebulosas luminosas	10^4
Superficie solar	6.10^3
Fusión del wolframio	$3,6.10^3$
Fusión del plomo	$6,0.10^2$
Congelación del agua	$2,7.10^2$
Ebullición del oxígeno (1 atm)	$9,0.10^1$
Ebullición del nitrógeno (1atm)	$2,0.10^1$
Ebullición del helio (He^4) a 1 atm	4,2
Ebullición del H^3 a la presión baja alcanzable	$3,0.10^{-1}$
Desmagnetización adiabática de las sales	10^{-3}
paramagnéticas	10^{-6}
Desmagnetización adiabática de los núcleos	

Constantes elásticas. Límite de resistencia

Material	Módulo de Young E (GPa)	Módulo de cizallamiento G (GPa)	Coeficiente de Poisson (χ)	Resistencia a la rotura σ_r (GPa)	Coeficiente de compresibilidad β (GPa)
Aluminio	70	26	0,34	0,10	0,014
Cobre	130	40	0,34	0,30	0,007
Plomo	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Acero	200	81	0,29	0,60	0,006
(hierro)	60	30	0,25	0,05	0,025
Vidrio	-	-	-	-	0,49
Agua					

Coeficientes de dilatación térmica de sólidos y líquidos

Sustancia	Temperatura (^0C)	Lineal-α 10^{-6} ($^0C^{-1}$)	Volumétrico-β 10^{-3} ($^0C^{-1}$)
Aluminio	20-100	23,8	
Latón	25-100	19,0	
Cobre	25-100	16,8	
Oro	15-100	14,3	
Plata	15-100	18,8	
Hierro	-18-100	11,4	
Acero	0-100	10,5	
Plomo	18-100	29,4	
Invar*	20	0,9	
Estaño	18-100	26,9	
Zinc	10-100	26,3	
Vidrio	0-100	8,9	
Hielo	-20-0	51,0	
Cuarzo (fundido)	0-100	0,5	
Mercurio	0-100		0,1818
Acido acético	16-107		1,06
Acetona	0-50		1,32
Etanol	27-50		1,01
Metanol	0-60		1,13
Bençeno	11-80		1,18
Tetracloruro de carbono	0-76		1,18
Eter			1,51
Pentano			1,464

Calor de vaporización del agua a diferentes temperaturas

T (^0C)	L (cal/g)	$L.10^{-5}$ (J/kg)
0	595	24,9
50	568	23,8
100	539	22,6
200	464	19,4

Diámetro de átomos y moléculas

Helio	$2,0.10^{-10}$ m	Oxígeno (O_2)	$3,0.10^{-10}$
Hidrógeno (H_2)	$2,3.10^{-10}$ m	Nitrógeno (N_2)	$3,0.10^{-10}$

Indices de refracción

Gases	n	Líquidos	n	Sólidos	n
Nitrógeno	1,00030	Benceno	1,50	Diamante	2,42
Aire	1,00029	Agua	1,33	Cuarzo	1,46
Oxígeno	1,00027	Glicerina	1,47	fundido	1,50
		Bisulfuro de carbono	1,63	Vidrio común	

Coeficientes de conductividad térmica

	k ($J.s^{-1}.m^{-1}.^0C^{-1}$)	k ($cal.s^{-1}.cm^{-1}.^0C^{-1}$)
Metales		
Acero	50,2	0,12
Aluminio	205	0,49
Cobre	385	0,92
Hierro	58,7	0,14
Latón	109	0,26
Mercurio	8,3	0,020
Plata	406	0,97
Plomo	34,7	0,083
Sólidos		
Arena seca	0,325	0,0008
Asbesto	0,079	0,00019
Corcho	0,04	0,0001
Cuarzo fundido	1,37	0,0033
Ebonita	0,174	0,00042
Espuma de poliestireno	0,01	0,00002
Fieltro	0,04	0,0001
Hielo	1,6	0,004
Hormigón	0,8	0,002
Ladrillo refractario	0,15	0,00035
Ladrillo rojo	0,6	0,0015
Lana espiral	0,04	0,0001
Madera	0,12-0,04	0,0003-0,0001
Silicio	0,992	0,00237
Vidrio	0,8	0,0025
Gases		
Aire	0,024	0,000057
Argón	0,016	0,000039
Helio	0,14	0,00034
Hidrógeno	0,14	0,00033
Oxígeno	0,023	0,000056

Niveles de intensidad de algunos ruidos

Origen del ruido	Nivel del ruido (db)	Intensidad $W.m^{-2}$
Umbral del dolor	120	1
Máquina remachadora	95	$3,2.10^{3}$
Tren elevado	90	10^{-3}
Calle de tránsito intenso	70	10^{-5}
Conversación ordinaria	65	$3,2.10^{-6}$
Automóvil silencioso	50	10^{-7}
Radio con volumen bajo en casa	40	10^{-8}
Conversación en voz baja	20	10^{-10}
Murmullo de las hojas	10	10^{-11}
Umbral de la sensación auditiva	0	10^{-12}

Constantes de los gases en C.N.

Gas	Masa molecular relativa	$\chi = C_P/C_V$	Conductibilidad k (mW/m.K)	Viscocidad η (μPa.s)	Diámetro de la molécula (nm)	Constantes de Van der Waals	
						a	b
He	4	1,67	141,5	18,9	0,20	-	-
Ar	40	1,67	16,2	22,1	0,35	1,30	0,032
H_2	2	1,41	168,4	8,4	0,27	0,24	0,027
N_2	28	1,40	24,3	16,7	0,37	1,35	0,039
O_2	32	1,40	24,4	19,2	0,35	1,35	0,032
CO_2H	44	1,30	23,2	14,0	0,40	3,62	0,043
H_2O	18	1,32	15,8	9,0	0,30	5,47	0,030
Aire	29	1,40	24,1	17,2	0,35	-	-

* Las unidades de a y b son: $(atm.l^2/mol^2)$ y (l/mol) respectivamente.

Bibliografía

1) **L. Landau–E. Lifshitz** *Física General*, Ed. MIR, Moscú – 1980.

2) **A. F. Saveliev** *Física General*, Tomo II y III, Ed. MIR, Moscú.

3) **Piórishkin–Ródina** Física 1-2-3-4, Ed. MIR, Moscú.

4) **Frish–Timoreva** *Física General*, Tomo II, Ed. MIR, Moscú-1983.

5) **O. Y. Savchenko** *Problemas de Física General*, Ed. MIR, Moscú.

6) **I. M. Saraeva** *Problemas Seleccionados de la Física Elemental*, Ed. MIR, Moscú – 1986.

7) **V. Volkenshtein** *Problemas de Física General*, Ed. MIR, Moscú.

8) **S. Kosel** *Problemas de Física General*, Ed. MIR, Moscú.

9) **I. E. Irodov** *Problemas de Física General*, Ed. MIR, Moscú.

10) **Tarazov–Tarazova** *Preguntas y Problemas de Física*, Ed. MIR, Moscú.

11) **Régulo A. Sabrera A.** *Problemas de Oscilaciones*, Ed.GLOW, Perú 1998.

12) **Régulo A. Sabrera A.** *Problemas de Hidrostática*, Ed. GLOW, Perú 1998.

13) **Régulo A. Sabrera A.** *Problemas de Termodinámica*, Ed. GLOW, Perú.

14) **Régulo A. Sabrera A.** *Problemas Selectos de Física II*, Ed. GLOW, Perú.

15) **R. Sabrera–W. Pérez** *Física++*, Teoría y Problemas, Ed. V&H, Tomos I y II., Lima-1998.

16) **R. Sabrera–W. Pérez** *Física General*, Teoría y Problemas, Ed. V&H, Lima-1996

17) **R. Sabrera A.** *Libro de problemas de Física II*, Ed. GLOW, 2003.

18) **R. Sabrera A.** Física II, Teoría y Problemas, Ed. San Silvestre.

Lima-2009