MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

EAD – ITA/IME

AULAS 12 A 13

FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): MARCELO MENDES

ASSUNTO: SOMAS E PRODUTOS TELESCÓPICOS

Resumo Teórico

Vamos apresentar o conceito de soma telescópica através do cálculo do termo geral da P.A. (produto telescópico é definido de forma semelhante).

Exemplo: Considere a P.A. $\{a_n\}$ em que a diferença comum entre os termos é **k**. Assim, podemos escrever:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + k \\ a_{n-1} = a_{n-2} + k \\ \vdots \\ a_2 = a_1 + k \end{cases}$$

donde $(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) = (n-1)k$ e, portanto, $a_n - a_1 = (n-1)k$, ou seja, $a_n = a_1 + (n-1)k$ (termo geral da P.A.).

$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1)$ é um exemplo de soma telescópica, que simplifica após os cancelamentos, resultado em $a_n - a_1$.

Exercícios de Fixação

01. (IME) Calcule a soma $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{2998\cdot 3001}$.

02. Calcule $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n!$.

03. Para cada inteiro positivo **n**, seja

$f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{n^2-2n+1}}$. O valor de $f(1) + f(3) + f(5) + \ldots + f(999997) + f(999999)$ é:

A) 99/2
B) 50
C) 101/2
D) 10
E) 100

04. Calcule $\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}$.

05. (Romênia) Sejam $A = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \ldots + \frac{1}{1997\times 1998}$ e $B = \frac{1}{1000\times 1998} + \frac{1}{1001\times 1997} + \ldots + \frac{1}{1998\times 1000}$. Prove que $\frac{A}{B}$ é um número inteiro.

Exercícios Propostos

01. Calcule $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!}$

02. Determine $\sum_{n=1}^{1989} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$

03. O valor da expressão

$$E = \left[\frac{2002}{2\cdot 6} + \frac{2002}{6\cdot 10} + \frac{2002}{10\cdot 14} + \ldots + \frac{2002}{1998\cdot 2002}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}}$$

é igual a:

A) 1
B) 2002
C) $2002^{\sqrt{99}}$
D) $5^{27} \cdot 2^9$
E) n.d.a.

04. Mostre que $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\text{sen}\frac{(2n+1)x}{2}}{2\,\text{sen}\frac{x}{2}}$.

(Sugestão: Calcule $2\,\text{sen}\frac{x}{2}\cos kx$)

05. Prove que, para todo número natural **n** e para todo

$x \neq \frac{k\pi}{2^t}$ (t = 0, 1, ..., n; k inteiro), ocorre

$$\frac{1}{\text{sen } 2x} + \frac{1}{\text{sen } 2x} + \ldots + \frac{1}{\text{sen } 2x} = \cot x - \cot 2^n x.$$

(Sugestão: Calcule cot 2θ – cot θ).

06. Prove que

$$\frac{1}{\cos 0° \cos 1°} + \frac{1}{\cos 1° \cos 2°} + \ldots + \frac{1}{\cos 88° \cos 89°} = \frac{\cos 1°}{\text{sen}^2 1°}.$$

(Sugestão: Calcule $\frac{\text{sen}\left[(k+1)-k\right]}{\cos k \cos(k+1)}$)

07. Encontre $S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}$, sendo $x_i = \frac{i}{101}$.

08. Calcule a soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$.

09. Calcule o valor de

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}.$$

(Sugestão: Fatore $a^4 + 18^2$)

10. (Hungria) Prove que, para todos os inteiros positivos **n**,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\times 2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Gabarito

Exercícios de Fixação				
01	**02**	**03**	**04**	**05**
*	*	B	*	*

01. 1000/3001
02. (n + 1)! – 1
04. $\frac{1}{8n^2 + 4n - 1}$
05. Demonstração

Exercícios Propostos				
01	**02**	**03**	**04**	**05**
*	*	D	*	*
06	**07**	**08**	**09**	**10**
*	51	*	*	*

01. $\frac{1}{(n+1)!}$
02. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1989} + \sqrt{1990} - 1\right)$
04. Demonstração
05. Demonstração
06. Demonstração
08. $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
09. 373
10. Demonstração

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: MARCELO MENDES
DIG.: VICENTINA/REJANE – REV.: KATIARY