Aula 19 – Polinômios

ITA 2021

Professor Victor So

Sumário

Apresentação

Estudaremos, nesta aula, uma introdução ao assunto de polinômios. Veremos que, assim como as outras funções, eles possuem diversas propriedades. Preste muita atenção aos conceitos de divisão envolvendo polinômios, pois esses são tópicos que costumam cair em prova.

Tente resolver todas as questões da aula e, sempre que tiver dúvidas, volte para a teoria e reveja o conteúdo que você está com dificuldade. Todas as questões estão resolvidas. Se você tiver dificuldades em resolver alguma, basta consultar a resolução e verificar o passo que faltou para completar a questão.

Qualquer dificuldade, procure-nos no fórum de dúvidas. Estamos aqui para auxiliá-lo.

Bons estudos.

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

1. Função Polinomial

1.1. Definição

A função polinomial ou polinômio é uma função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, isto é, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ela é da forma:

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n}$$

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes complexas e são denominados coeficientes do polinômio e os expoentes de x são todos números naturais. As parcelas $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n$ do polinômio são chamados de termos da função polinomial.

Vejamos alguns exemplos de polinômios:

1.1.a) $f(x) = 2x \to mon\hat{o}mio$

1.1.b) $g(x) = x^3 + 2ix + 3 - 4i$

1.1.c) $h(x) = x^6 + 5x^4 + \sqrt{2}ix - 5$

1.2. Grau do Polinômio

O **grau do polinômio** é definido pelo **maior expoente** da variável do polinômio. Podemos representar o grau do polinômio P pelos símbolos ∂P ou grP.

Em termos matemáticos:

$$\partial P = grP = n \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ a_i = 0, \forall i > n \end{cases}$$

Polinômio	Grau
$2x + 5 \to 2x^1 + 5$	1
$3 \to 3x^0$	0
$3x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	3
$x^7 - 8x^6 + x^5 - x^4 - (3+i)x^3 - 2x^2$	7
$ax^2 + bx + c$	2
$x + b \cdot x^2$	2
$ax^4 + bx^3 + cx^2 - dx + i$	4

1.3. Valor numérico

Dado um polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, chamamos de valor numérico do polinômio o valor que P retorna a um determinado número $\alpha \in \mathbb{C}$. Ou seja:

$$P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n$$

Por exemplo, tomando-se $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, podemos ter os seguintes valores numéricos:

1.3.a) $x = 1 \Rightarrow P(1) = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 = 5$

1.3.b) $x = 2 \Rightarrow P(2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$

1.3.c) $x = i \Rightarrow P(i) = 1 + i + i^2 + i^3 = 0$

Note que, no caso $x = i$ encontramos $P(i) = 0$, nesse caso, dizemos que i é raiz do polinômio.

Logo, dado $\alpha \in \mathbb{C}$, dizemos que α é raiz do polinômio P quando $P(\alpha) = 0$.

$$\boxed{P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha\ é\ raiz\ de\ P}$$

2. Identidade de Polinômios

Podemos entender o termo identidade como uma igualdade. Dizemos que dois polinômios de variável x são idênticos quando eles assumem valores numéricos iguais para qualquer valor de x.

Dados os polinômios

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$P_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

P_1 e P_2 são idênticos se, e somente se, $P_1(x) = P_2(x), \forall x \in \mathbb{C}$.

Usamos o símbolo $\equiv$ para indicar a identidade de polinômios.

$$\boxed{P_1 \equiv P_2 \Leftrightarrow P_1(x) = P_2(x), \forall x \in \mathbb{C}}$$

2.1. Teorema

Dois polinômios são idênticos quando todos os coeficientes correspondentes são iguais, ou seja, dados os polinômios

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$P_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

Se $P_1 \equiv P_2$, então $a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Exemplo:

2.1.a) Resolva a identidade polinomial

$$ax^2 - 4x + 5 \equiv 3x^2 - bx + 5$$

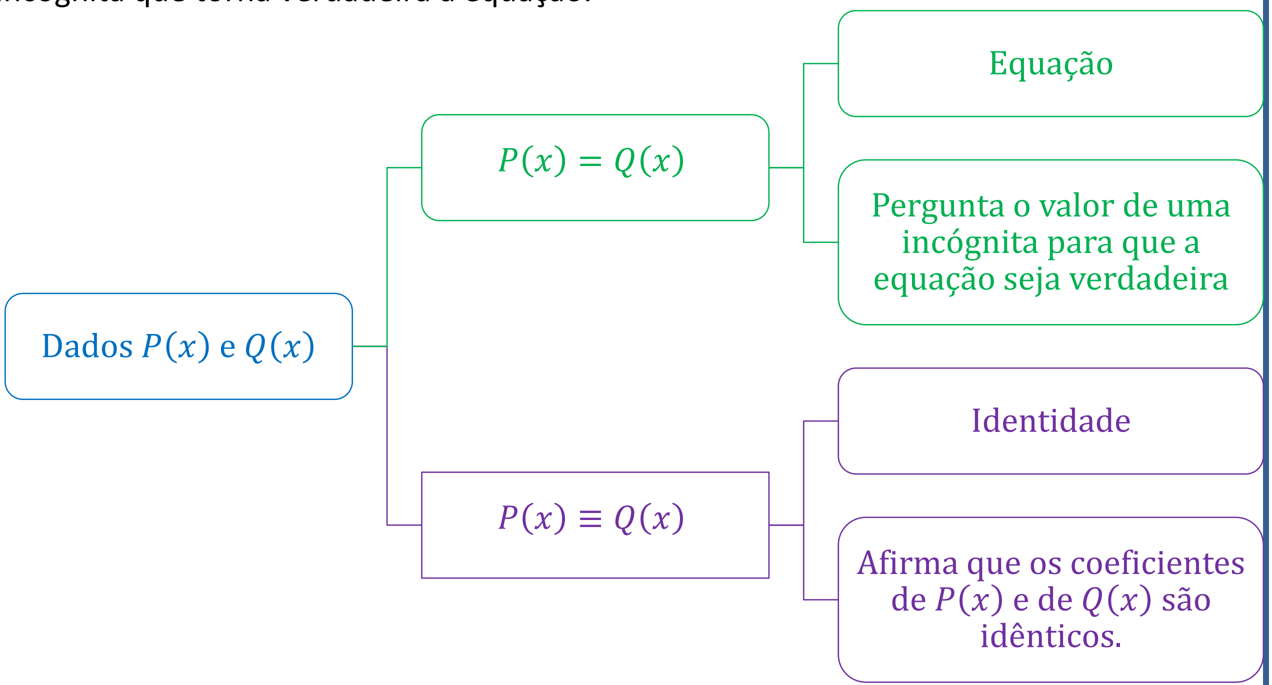
Como vimos, para que os polinômios sejam idênticos, devemos ter os coeficientes correspondentes iguais, desse modo:

$$\color{red}{a}x^2 - \color{blue}{4}x + 5 \equiv \color{red}{3}x^2 - \color{blue}{b}x + 5$$

$$a = 3 \; e \; b = 4$$

Não confunda o símbolo de identidade $\equiv$ com o símbolo de igualdade $=$!

Quando usamos o símbolo de igualdade, estamos perguntando qual o valor da incógnita que torna verdadeira a equação.



2.2. Polinômio nulo

Um polinômio é identicamente nulo quando todos os seus coeficientes forem nulos.

$$\boxed{P \equiv 0 \Leftrightarrow P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}}$$

Assim, usando o teorema anterior, temos

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \equiv 0$$

Se, e somente se, $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Exemplo:

2.2.a) Dado o polinômio $P(x) = sen\theta x^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)x + \theta$, determine os valores de $\theta \in [0, \pi]$ que tornem verdadeira a seguinte afirmação

$$P \equiv 0$$

Como queremos que o polinômio seja identicamente nulo, devemos ter cada coeficiente de P igual a zero, logo, no intervalo determinado, temos o seguinte sistema de equações:

$$P(x) = sen\theta x^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)x + \theta$$

$$\begin{cases} sen\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \ ou \ \theta = \pi \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0 \Rightarrow sen\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \ ou \ \theta = \pi \\ \theta = 0 \end{cases}$$

Fazendo a intersecção das soluções de cada equação, encontramos $\theta = 0$.

3. Operações Fundamentais

3.1. Adição e Subtração

Podemos somar e subtrair polinômios simplesmente relacionando seus termos de mesma potência. Dados dois polinômios

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
$$P_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

Se $P = P_1 \pm P_2$, então:

$$\boxed{P(x) = (P_1 \pm P_2)(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n = \sum_{i=0}^{n}(a_i \pm b_i)x^i}$$

Vejamos um exemplo. Dados os polinômios

$$P_1(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$
$$P_2(x) = x^2 - 3x + 5$$

Façamos a adição:

$$P_1(x) + P_2(x) = (2x^5 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 3x + 5)$$

Devemos somar os coeficientes correspondentes. Note que P_2 é de grau 2 e P_1 é de grau 5, assim, os coeficientes de x^5, x^4 e x^3 não serão alterados:

$$P_1(x) + P_2(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 + (-2 + 1)x^2 + (-5 - 3)x + (6 + 5)$$
$$\therefore P_1(x) + P_2(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - x^2 - 8x + 11$$

3.1.1. Grau da soma e subtração

Somando-se ou subtraindo-se dois polinômios, o grau do polinômio resultante será igual ao maior grau dentre os polinômios envolvidos. Dessa forma:

$$\boxed{\partial(P_1 \pm P_2) \leq máx\{\partial P_1, \partial P_2\}}$$

No exemplo anterior, vimos que o grau do polinômio resultante é igual ao grau do polinômio P_1.

3.2. Multiplicação

Para multiplicar dois polinômios, usamos a propriedade distributiva. Assim, tomemos os polinômios

$$P_1(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6$$
$$P_2(x) = x^2 - 3x + 5$$

E façamos a multiplicação

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = (2x^4 - 5x^3 + 6) \cdot (x^2 - 3x + 5)$$

Aplicando a distributiva, temos:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = (2x^4 - 5x^3 + 6) \cdot (x^2 - 3x + 5)$$

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = \begin{cases} 2x^4 \cdot x^2 + 2x^4 \cdot (-3x) + 2x^4 \cdot 5 \\ -5x^3 \cdot x^2 - 5x^3 \cdot (-3x) - 5x^3 \cdot 5 \\ +6 \cdot x^2 + 6 \cdot (-3x) + 6 \cdot 5 \end{cases}$$

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = \begin{cases} 2x^6 - 6x^5 + 10x^4 \\ -5x^5 + 15x^4 - 25x^3 \\ +6x^2 + 18x + 30 \end{cases}$$

Nesse ponto, fazemos como na soma ou na subtração, agrupamos os termos de mesma ordem.

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 2x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 5x^5 + 15x^4 - 25x^3 + 6x^2 + 18x + 30$$
$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 2x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 5x^5 + 15x^4 - 25x^3 + 6x^2 + 18x + 30$$

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 2x^6 - 11x^5 + 25x^4 - 25x^3 + 6x^2 + 18x + 30$$

Esse é o polinômio resultante.

Note que $\partial(P_1 \cdot P_2) = \partial P_1 + \partial P_2 = 4 + 2 = 6$. Assim, temos a seguinte propriedade.

3.2.1. Grau da multiplicação

O grau do polinômio resultante da multiplicação de dois polinômios não nulos P_1 e P_2 é dado por

$$\boxed{\partial(P_1 \cdot P_2) = \partial P_1 + \partial P_2}$$

3.3. Divisão euclidiana

Sejam P e D dois polinômios tais que D é não nulo. Dividir $P(x)$ por $D(x)$ significa obter dois outros polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que satisfaçam as seguintes condições:

I. $\underbrace{P(x)}_{dividendo} \equiv \underbrace{D(x)}_{divisor} \cdot \underbrace{Q(x)}_{quociente} + \underbrace{R(x)}_{resto}$

II. $\partial R < \partial D$ $(ou\ R \equiv 0, no\ caso\ de\ ocorrer\ uma\ divisão\ exata)$

Esse algoritmo é conhecido como divisão euclidiana.

É a mesma ideia usada para valores numéricos, por exemplo, na divisão de 17 por 5, pela divisão euclidiana, temos:

$$\underbrace{17}_{dividendo} = \underbrace{5}_{divisor} \cdot \underbrace{3}_{quociente} + \underbrace{2}_{resto}$$

A diferença é que quando trabalhamos com valores numéricos, usamos a condição do resto ser $0 \leq resto < divisor$. E quando operamos com polinômios, analisamos o grau do polinômio do resto e o grau do polinômio do divisor. Então, das condições da divisão euclidiana para polinômios, temos:

$$P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Calculemos o grau dos polinômios envolvidos:

$$\partial P = \partial(D \cdot Q + R)$$

Pela propriedade do grau da soma, temos:

$$\partial P \leq máx\{\partial(D \cdot Q), \partial R\}$$

Pela propriedade do grau da multiplicação:

$$\partial P \leq máx\{\partial D + \partial Q, \partial R\}$$

Como a condição da divisão é $\partial R < \partial D$, temos:

$$máx\{\partial D + \partial Q, \partial R\} = \partial D + \partial Q$$

Portanto $\partial P = \partial D + \partial Q$.

Vejamos um exemplo de divisão euclidiana.

3.3.a) Dividindo o polinômio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x + 4$ por $D(x) = x^2 + 2x - 1$, encontramos os polinômios $Q(x) = 2x^2 + x + 1$ e $R(x) = 2x + 5$. Perceba que os polinômios encontrados satisfazem às condições da divisão (você pode fazer os cálculos para verificar):

I. $P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$\Rightarrow 2x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x + 4 \equiv (x^2 + 2x - 1)(2x^2 + x + 1) + (2x + 5)$

II. $\partial D = 2$ e $\partial R = 1 \Rightarrow \partial R < \partial D$

Até agora vimos o que ocorre quando dividimos dois polinômios, mas não estudamos como encontrar os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$. No próximo capítulo, estudaremos alguns teoremas que nos ajudarão a encontrá-los.

4. Divisão

4.1. Método de Descartes

Esse método é consequência da definição da divisão euclidiana e é conhecido como **método dos coeficientes a determinar**.

Das condições da divisão euclidiana, devemos ter na divisão de um polinômio P por um polinômio D:

I. $P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$
II. $\partial R < \partial D \ (ou\ R \equiv 0)$

Vimos que da condição I, $\partial P = \partial D + \partial Q$, logo $\partial Q = \partial P - \partial D$.

Da condição II, devemos ter $\partial R < \partial D$.

Vejamos na prática como aplicamos esse método.

4.1.a) Faça a divisão de $P(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ por $D(x) = x^2 + 3x + 2$.

i) O primeiro passo é determinar o grau do polinômio Q (quociente):

$$\partial Q = \partial P - \partial D$$

Como $\partial P = 4$ e $\partial D = 2$, temos:

$$\partial Q = 4 - 2 = 2$$

Assim, o polinômio Q é de segundo grau:

$$\partial Q = ax^2 + bx + c$$

ii) O segundo passo é determinar o grau do polinômio R (resto):

$$\partial R < \partial D \Rightarrow \partial R < 2 \Rightarrow \partial R \leq 1$$

Encontramos que o resto é um polinômio cujo grau é menor ou igual a 1. Devemos supor o maior grau possível, logo, ele pode ser do primeiro grau:

$$R(x) = dx + e$$

iii) O terceiro passo é escrever a relação $P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e encontrar os coeficientes:

$$5x^4 + 3x^3 + 2x + 1 \equiv (x^2 + 3x + 2)(ax^2 + bx + c) + dx + e$$

Desenvolvendo a expressão do membro à direita:

$$5x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 2x + 1 \equiv ax^4 + (3a + b)x^3 + (2a + 3b + c)x^2 + (2b + 3c + d)x + 2c + e$$

Igualando os coeficientes, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5 = a \\ 3 = 3a + b \\ 0 = 2a + 3b + c \\ 2 = 2b + 3c + d \\ 1 = 2c + e \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -12 \\ c = 26 \\ d = -52 \\ e = -51 \end{cases}$$

Portanto, os polinômios são:

$$Q(x) = 5x^2 - 12x + 26$$

$$R(x) = -52x - 51$$

TOME NOTA!

Na divisão de um polinômio P por um polinômio D, se $\partial P < \partial D$, o polinômio quociente é identicamente nulo e o polinômio resto é idêntico ao polinômio P, ou seja,

$$P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$\partial P < \partial D \Rightarrow Q(x) \equiv 0 \text{ e } R(x) \equiv P(x)$$

4.2. Unicidade do quociente e do resto

Dados os polinômios P e Q, existe um único polinômio Q e um único polinômio R tais que satisfazem às condições da divisão:

I. $P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$
II. $\partial R < \partial D \ (ou\ R \equiv 0)$

Demonstração

Suponha a existência de dois quocientes Q_1 e Q_2, e dois restos R_1 e R_2, tais que $Q_1 \neq Q_2$ e $R_1 \neq R_2$. Pelas condições da divisão:

$$\partial R_1 < \partial D \text{ e } \partial R_2 < \partial D$$

$$P(x) \equiv D(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x)$$

$$P(x) \equiv D(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x)$$

Da identidade dos polinômios, temos:

$$D(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x) \equiv D(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x)$$

$$\Rightarrow D(x) \cdot \left(Q_1(x) - Q_2(x)\right) \equiv R_2(x) - R_1(x)$$

Dessa identidade, podemos analisar o grau dos polinômios:

$$\partial[D \cdot (Q_1 - Q_2)] = \partial(R_2 - R_1)$$

Pela propriedade do grau da subtração, temos:

$$\partial(R_2 - R_1) \leq máx\{\partial R_2, \partial R_1\}$$

Sabemos que $\partial R_1 < \partial D$ e $\partial R_2 < \partial D$, logo $máx\{\partial R_2, \partial R_1\} < \partial D$.

Pela propriedade do grau da multiplicação, temos:

$$\partial[D \cdot (Q_1 - Q_2)] = \partial D + \partial(Q_1 - Q_2) \geq \partial D$$

Chegamos a um absurdo! Portanto, o quociente e o resto da divisão polinomial são únicos.

4.3. Método das chaves

Na divisão pelo método das chaves, podemos usar o mesmo método quando calculamos a divisão usando valores numéricos. Relembremos.

Dividamos, por exemplo, 16 por 3.

Primeiro, montamos nosso algoritmo.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

No lugar do quociente, colocamos o menor inteiro possível que, ao ser multiplicado por 3, não supere 16. Nesse caso, 5.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} & 5 \end{array}$$

Multiplicamos o quociente (5) pelo divisor (3) e colocamos o resultado (15) logo abaixo do dividendo (16).

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} 15 & 5 \end{array}$$

Como temos que subtrair (15) do dividendo (16), vamos simbolizar essa operação alternando o sinal do (15) para (-15).

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \end{array}$$

E, agora, fazemos a subtração.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, dizemos que 16 dividido por 3 dá 5 com resto 1.

Alternativamente, podemos escrever a igualdade:

$$16 = 5 \cdot 3 + 1$$

Para a divisão de polinômios, vamos utilizar a mesma ordem de operações da divisão numérica.

Acompanhe um exemplo prático.

Dados os polinômios

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6$$
$$D(x) = x^2 - 3x + 5$$

Façamos a divisão

$$\frac{P(x)}{D(x)}.$$

De modo análogo ao que fazemos com os números, montemos nosso algoritmo.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Que é o mesmo que

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^4 & -5x^3 & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{4-4} \end{array}$$

Agora, dividimos o primeiro termo do dividendo $(2x^4)$ pelo primeiro termo do divisor (x^2).

$$2x^4 \div x^2 \rightarrow +2x^2$$

Colocamos, então, esse resultado no lugar do quociente na divisão.

$$\begin{array}{ccc|l} 2x^4 & -5x^3 & +6 & x^2-3x+5 \\ \hline & & & 2x^2 \end{array}$$

Multiplicamos o quociente ($2x^2$) por todo o divisor ($x^2 - 3x + 5$) e colocamos o resultado ($2x^4 - 6x^3 + 10x^2$) logo abaixo do dividendo ($2x^4 - 5x^3 + 6$).

$$\begin{array}{ccc|l} 2x^4 & -5x^3 & +6 & x^2-3x+5 \\ \hline 2x^4 & -6x^3 & +10x^2 & 2x^2 \end{array}$$

Como fizemos com a parte numérica, precisamos fazer a subtração dessa linha recém escrita. Para simbolizar essa subtração, vamos mudar o sinal de todos seus termos.

$$\begin{array}{ccc|l} 2x^4 & -5x^3 & +6 & x^2-3x+5 \\ \hline -2x^4 & +6x^3 & -10x^2 & 2x^2 \end{array}$$

E, finalmente, somamos essas duas linhas.

$$\begin{array}{ccc|l} \cancel{2x^4} & -5x^3 & +6 & x^2-3x+5 \\ \hline \cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & 2x^2 \\ \hline & x^3 & -10x^2 \quad +6 & \end{array}$$

Nesse momento, é como se tivéssemos um novo dividendo ($x^3 - 10x^2 + 6$).

Continuaremos esse processo até que o novo dividendo tenha grau menor que o grau do divisor.

Como o grau do nosso novo dividendo é 3 e nosso divisor tem grau 2, continuamos no processo de divisão.

Dividimos o termo de maior grau do novo dividendo pelo termo de maior grau do divisor e escrevemos no quociente.

$$\begin{array}{ccc|l} \cancel{2x^4} & -5x^3 & +6 & x^2-3x+5 \\ \hline \cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & 2x^2+x \\ \hline & x^3 & -10x^2 \quad +6 & \end{array}$$

Multiplicamos o resultado ($+x$) por todo o divisor ($x^2 - 3x + 5$) e anotamos o resultado dessa multiplicação logo abaixo do novo quociente.

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \hline
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & 2x^2 + x \\ \hline
 & x^3 & -10x^2 & +6 & \\
 & x^3 & -3x^2 & +5x &
\end{array}$$

Para simbolizar a subtração, mudamos o sinal de toda a linha recém escrita.

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \hline
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & 2x^2 + x \\ \hline
 & x^3 & -10x^2 & +6 & \\
 & -x^3 & +3x^2 & -5x &
\end{array}$$

E somamos as duas linhas.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & +6 & & x^2 - 3x + 5 \\ \hline
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2 + x \\ \hline
 & \cancel{x^3} & -10x^2 & +6 & & \\
 & \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & & \\ \hline
 & & -7x^2 & -5x & +6 &
\end{array}$$

Perceba que nosso novo dividendo ainda não tem grau menor que o grau do divisor, portanto, continuamos com nosso algoritmo. Dividindo o termo de maior grau do novo dividendo ($-7x^2$) pelo termo de maior grau do divisor (x^2) e colocando o resultado no quociente.

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \hline
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & 2x^2 + x - 7 \\ \hline
 & \cancel{x^3} & -10x^2 & +6 & \\
 & \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & \\ \hline
\end{array}$$

$$-7x^2 \quad -5x \quad +6$$

Multiplicamos (-7) pelo divisor $(x^2 - 3x + 5)$ e escrevemos o resultado logo abaixo do novo dividendo $(-7x^2 - 5x + 6)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & +6 & & & x^2 - 3x + 5 \\ \hline
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2 + x - 7 \\ \hline
& \cancel{x^3} & -10x^2 & +6 & & \\
& \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & & \\ \hline
& & -7x^2 & -5x & +6 & \\
& & -7x^2 & +21x & -35 &
\end{array}$$

Mudamos o sinal de toda a última linha.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & +6 & & & x^2 - 3x + 5 \\ \hline
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2 + x - 7 \\ \hline
& \cancel{x^3} & -10x^2 & +6 & & \\
& \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & & \\ \hline
& & -7x^2 & -5x & +6 & \\
& & +7x^2 & -21x & +35 &
\end{array}$$

E somamos as duas últimas linhas.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & +6 & & & x^2 - 3x + 5 \\ \hline
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2 + x - 7 \\ \hline
& \cancel{x^3} & -10x^2 & +6 & & \\
& \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & & \\ \hline
& & \cancel{-7x^2} & -5x & +6 & \\
& & \cancel{+7x^2} & -21x & +35 & \\ \hline
\end{array}$$

$$-26x \quad +41$$

Agora sim, nosso novo dividendo tem grau menor que grau do divisor, então, esse dividendo restante passa a ser considerado como o resto da divisão.

Assim, podemos dizer que a divisão de $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6$ por $D(x) = x^2 - 3x + 5$ tem quociente $Q(x) = 2x^2 + x - 7$ e resto $R(x) = -26x + 41$.

Podemos, alternativamente, dizer que:

$$2x^4 - 5x^3 + 6 = (2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 - 3x + 5) + (-26x + 41)$$

Ou seja,

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x).$$

4.4. Algoritmo de Briot-Ruffini

O algoritmo de Briot-Ruffini é útil quando queremos dividir um polinômio $P(x)$ por um divisor da forma $x - \alpha$. Quando α é raiz do polinômio, temos que o polinômio resto será identicamente nulo e, dessa forma, poderemos escrever:

$$P(x) \equiv (x - \alpha) \cdot Q(x)$$

O grau de Q será igual ao grau de P reduzido em uma unidade. Por isso, esse algoritmo também é conhecido como **algoritmo de redução de ordem do polinômio**.

Se α não for raiz do polinômio, teremos:

$$P(x) \equiv (x - \alpha) \cdot Q(x) + R(x)$$

Como o divisor possui grau 1, temos que o resto ou é nulo ou tem grau 0, ou seja, ele é um polinômio constante e não depende de x. Por isso, denotaremos $R(x)$ simplesmente por R.

Vejamos na prática como aplicamos o algoritmo, ou melhor, o **dispositivo prático de Briot-Ruffini**.

Vamos dividir o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$ por $x - 3$.

Passo 1: Representamos o dispositivo pela seguinte figura:

Passo 2: Tomamos a raiz do divisor e inserimos no dispositivo, nesse exemplo, temos como raiz $x = 3$.

3	

Passo 3: Inserimos os coeficientes do dividendo seguindo a ordem do maior expoente ao menor expoente. Note que o coeficiente de x é nulo, logo:

$$P(x) = 1x^3 + 2x^2 + 0x + 5$$

3	1	2	0	5

Passo 4: Repetimos o primeiro coeficiente de P na linha abaixo dela.

3	1	2	0	5
	1			

Agora, estamos prontos para iniciar a divisão pelo dispositivo prático. Chamaremos a linha dos coeficientes de L1 e a linha abaixo dela de L2.

Passo 5: Repetimos o processo conforme o diagrama abaixo até chegar à última coluna.

multiplicar o último coeficiente da segunda linha pela raiz

somar o resultado da multiplicação ao coeficiente da coluna ao lado

escrever o resultado na linha abaixo do coeficiente somado

$+$

3	1	2	0	5
	1	$1 \cdot 3 + 2 = 5$		

$\times$

$+$

3	1	2	0	5
	1	5	$5 \cdot 3 + 0 = 15$	

$\times$

3	1	2	0	5
	1	5	15	$15 \cdot 3 + 5$ $= 50$

3	1	2	0	5
	1	5	15	50

Esse é o resultado do algoritmo. Cada elemento da segunda linha representa um termo do quociente da divisão de $P(x)$ por $x - 3$. Como nosso polinômio P tem grau 3, nosso quociente começa com um grau a menos, ou seja, grau 2. O último elemento da segunda linha representa o resto da divisão. Dessa forma, temos:

3	1	2	0	5
	1 ↓ $1 \cdot x^2$	5 ↓ $5 \cdot x^1$	15 ↓ $15 \cdot x^0$	50 ↓ *resto*

$$Q(x) = x^2 + 5x + 15$$

$$R = 50$$

$$\therefore x^3 + 2x^2 + 5 \equiv (x - 3)(x^2 + 5x + 15) + 50$$

O dispositivo prático de Briot-Ruffini é muito útil quando queremos encontrar as raízes de um polinômio de grau $n \geq 3$. Pois, conhecendo uma das raízes, podemos usar o algoritmo para reduzir a ordem do polinômio em uma unidade. Isso, normalmente, resultará em uma equação conhecida como a equação quadrática. Vejamos um exemplo.

4.4.a) Encontre as raízes do polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 305x + 300$.

Para encontrar as raízes de P, podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini. Note que $x = 1$ é raiz:

$$P(1) = 1^3 + 4(1)^2 - 305 \cdot 1 + 300 = 0$$

Logo, podemos dividir o polinômio P por $x - 1$ usando Briot-Ruffini:

1	1	4	-305	300
	1	5	-300	0

Com isso, obtemos:

$$P(x) = (x-1)(x^2+5x-300)$$

Agora, basta resolver a equação quadrática $x^2+5x-300=0$ e encontrar as outras raízes.

$$x^2+5x-300=0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-5 \pm 35}{2} \Rightarrow x = 15 \; ou \; x = -20$$

Portanto, as raízes de P são:

$$x_1 = 1; x_2 = 15; x_3 = -20$$

4.4.1. Divisor da forma $ax+b$

Como dividimos um polinômio $P(x)$ por um divisor da forma $ax+b$? Nesse caso, podemos proceder da seguinte maneira:

$$P(x) \equiv (ax+b)Q(x) + R$$

Colocamos o coeficiente a do divisor em evidência:

$$P(x) \equiv a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x) + R$$

$$P(x) \equiv \left(x+\frac{b}{a}\right)\underbrace{[a \cdot Q(x)]}_{Q'(x)} + R$$

$$Q'(x) = a \cdot Q(x)$$

Assim, voltamos a um caso já conhecido. Podemos usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para calcular $Q'(x)$ e R, fazendo a divisão de $P(x)$ por $x + b/a$ e usando como raiz o número $-b/a$. Para encontrar $Q(x)$, basta fazer

$$Q(x) = \frac{Q'(x)}{a}$$

4.4.2. Divisões sucessivas

Podemos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini sucessivas vezes e dividir o mesmo polinômio por vários divisores da forma $x-\alpha$. Para isso, dado um polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, se queremos dividir esse polinômio pelos divisores $x-\alpha, x-\beta$ e $x-\gamma$, procedemos da seguinte forma:

Usamos o algoritmo de Briot-Ruffini e dividimos $P(x)$ pelo fator $x-\alpha$.

$$P(x) \equiv (x-\alpha)Q_1(x) + R_1(x)$$

Encontraremos um polinômio $Q_1(x)$ de grau $\partial P - 1$. Aplicamos novamente o algoritmo, mas dividimos $Q_1(x)$ pelo fator $x-\beta$.

$$Q_1(x) \equiv (x-\beta)Q_2(x) + R_2(x)$$

Repetimos o processo e dividimos $Q_2(x)$ pelo fator $x-\gamma$.

$$Q_2(x) \equiv (x-\gamma)Q_3(x) + R_3(x)$$

Assim, usando todas essas identidades, encontramos o seguinte resultado:

$$P(x) \equiv (x-\alpha)Q_1(x) + R_1(x)$$

$$P(x) \equiv (x-\alpha)[(x-\beta)Q_2(x) + R_2(x)] + R_1(x)$$

$$P(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x) + (x-\alpha)R_2(x) + R_1(x)$$

$$P(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)[(x-\gamma)Q_3(x) + R_3(x)] + (x-\alpha)R_2(x) + R_1(x)$$

$$P(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)Q_3(x) + \underbrace{(x-\alpha)(x-\beta)R_3(x) + (x-\alpha)R_2(x) + R_1(x)}_{R(x)}$$

Esse é o resultado obtido da divisão sucessiva por três fatores. Perceba que R_1, R_2, R_3 são polinômios constantes e, por isso, o grau de R é 2. Isso condiz com a condição do grau do resto ser menor que o grau do divisor, no caso $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Vejamos um exemplo de aplicação:

Vamos dividir o polinômio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ pelos fatores $x-2, x-3$ e $x+5$.

Usaremos o algoritmo de Briot-Ruffini sucessivas vezes. Iniciemos pelo fator $x-2$.

2	1	4	3	5	-1
	1				

Aplicando o algoritmo na primeira divisão, encontramos:

2	1	4	3	5	-1
	1	6	15	35	69

Agora, repetimos o processo e dividimos o quociente por outro fator. No caso, temos $Q_1(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 35$ e $R_1(x) = 69$. Vamos dividir $Q_1(x)$ por $x-3$:

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
	1				

Aplicando o algoritmo na segunda divisão, obtemos:

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
	1	9	42	161	

Temos $Q_2(x) = x^2 + 9x + 42$ e $R_2(x) = 161$. Vamos proceder à última etapa e dividir Q_2 pelo último fator $x + 5$.

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
-5	1	9	42	161	
	1				

Fazendo as contas, encontramos:

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
-5	1	9	42	161	
	1	4	22		

Logo, $Q_3(x) = x + 4$ e $R_3(x) = 22$.

Com esse diagrama, podemos escrever a identidade do polinômio inicial. Analisaremos da seguinte forma:

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
-5	1	9	42	161	
	1	4	22		

Tomamos a segunda linha e escrevemos conforme aprendemos:

$$P(x) \equiv (x-2)(x^3+6x^2+15x+35)+69$$

Agora, tomamos a terceira linha e escrevemos a divisão do polinômio $(x^3+6x^2+15x+35)$ pelo fator $x-3$:

$$(x^3+6x^2+15x+35) \equiv (x-3)(x^2+9x+42)+161$$

Por fim, tomamos a quarta linha e escrevemos a divisão do polinômio $(x^2+9x+42)$ por $x+5$:

$$(x^2+9x+42) \equiv (x+5)(x+4)+22$$

Assim, podemos escrever o polinômio $P(x)$ usando essas identidades:

$$P(x) \equiv (x-2)(x^3+6x^2+15x+35)+69$$

$$P(x) \equiv (x-2)[(x-3)(x^2+9x+42)+161]+69$$

$$P(x) \equiv (x-2)\{(x-3)[(x+5)(x+4)+22]+161\}+69$$

$$P(x) \equiv (x-2)[(x-3)(x+5)(x+4)+22(x-3)+161]+69$$

$$\therefore P(x) \equiv (x-2)(x-3)(x+5)\underbrace{(x+4)}_{Q(x)}+\underbrace{22(x-2)(x-3)+161(x-2)+69}_{R(x)}$$

Esse é o resultado da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)(x+5)$.

4.4.3. Teorema

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ são números complexos e distintos entre si com $k \leq n$, então o polinômio P de grau n é divisível separadamente por $x-\alpha_1, x-\alpha_2, x-\alpha_3, \ldots, x-\alpha_k$ se, e somente se, for divisível pelo produto $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)$.

Demonstração

Sabendo que P é divisível separadamente por $x-\alpha_1, x-\alpha_2, \ldots, x-\alpha_k$, temos que, pelas divisões sucessivas, P pode ser escrito como:

$$P(x) \equiv \underbrace{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)}_{grau\ k} \cdot Q(x)+R(x)$$

Como o divisor possui grau k, devemos ter $\partial R = k-1$, logo:

$$R(x) = \underbrace{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{k-1}x^{k-1}}_{k\ incógnitas}$$

Além disso, da divisibilidade, temos para cada um dos fatores:

$$\begin{cases} R(\alpha_1)=0 \\ R(\alpha_2)=0 \\ \vdots \\ R(\alpha_k)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0+a_1\alpha_1+a_2{\alpha_1}^2+a_3{\alpha_1}^3+\cdots+a_{k-1}{\alpha_1}^{k-1}=0 \\ a_0+a_1\alpha_2+a_2{\alpha_2}^2+a_3{\alpha_2}^3+\cdots+a_{k-1}{\alpha_2}^{k-1}=0 \\ \vdots \\ a_0+a_1\alpha_k+a_2{\alpha_k}^2+a_3{\alpha_k}^3+\cdots+a_{k-1}{\alpha_k}^{k-1}=0 \end{cases}$$

Assim, encontramos um sistema linear homogêneo. Podemos escrever o sistema na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{k-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{k-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2 & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{pmatrix}}_{matriz\ dos\ coeficientes} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ são as incógnitas do sistema e a matriz dos coeficientes é uma matriz de Vandermonde, logo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{k-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{k-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2 & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0, pois\ \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_k$$

Como o determinante é sempre diferente de zero, temos que o sistema linear homogêneo é possível e determinado, logo, admite apenas a solução trivial, ou seja,

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0 \Rightarrow R(x) \equiv 0$$

Portanto, dadas as condições iniciais, temos que P pode ser escrito como:

$$P(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_k) \cdot Q(x)$$

O que é análogo a dizer que P é divisível pelo produto dos fatores.

4.5. Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $P(a)$.

Demonstração

Para demonstrar esse teorema, podemos usar a definição da divisão de polinômios:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$$

Como o divisor $x - a$ é de grau 1, temos que $R(x)$ é um polinômio constante, podendo ser ou não nulo. Assim, fazendo $x = a$:

$$P(a) = \underbrace{(a - a)}_{0} \cdot Q(a) + R$$

$$\Rightarrow P(a) = R$$

Exemplo

4.5.a) Encontre o resto da divisão de $2x^4 + 3x^3 + 10x^2 - x - 9$ por $x - 1$.

Para resolver essa questão, podemos aplicar diretamente o teorema do resto. Sabendo que a raiz de $x-1$ é 1, temos:

$$P(x)=(x-1)\cdot Q(x)+R$$
$$P(1)=R\Rightarrow R=2(1)^4+3(1)^3+10(1)^2-(1)-9$$
$$R=2+3+10-1-9=5$$
$$\therefore R=5$$

4.6. Teorema de D'Alembert

Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x-a$ se, e somente se, $P(a)=0$.

Demonstração

Como vimos no teorema do resto, temos da divisão de $P(x)$ por $x-a$:

$$P(a)=R$$

Se $R=0$, temos que a divisão é exata, logo $P(a)=R=0$ implica que $P(x)$ é divisível por $x-a$.

Exemplo

4.6.a) Determine o valor de p para que o polinômio $P(x)=5x^3+px^2+x+10$ seja divisível por $x+1$.

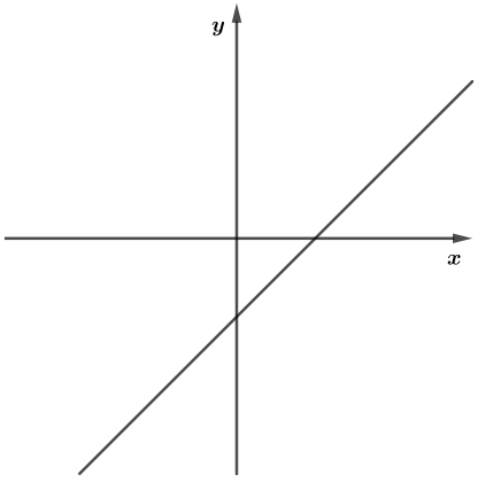
Pelo teorema de D'Alembert, sendo -1 a raiz de $x+1$, temos que $P(x)$ será divisível por $x+1$ se $P(-1)=0$, logo:

$$P(-1)=5(-1)^3+p(-1)^2+(-1)+10$$
$$P(-1)=-5+p-1+10=p+4$$
$$P(-1)=0\Rightarrow p+4=0\Rightarrow p=-4$$

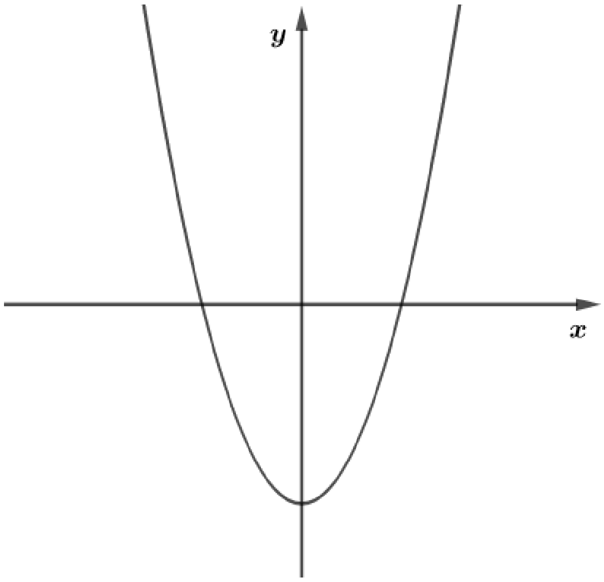
Portanto, para $P(x)$ ser divisível por $x+1$, devemos ter $p=-4$.

5. Gráfico da Função Polinomial

Já conhecemos o gráfico das funções afim e quadrática. Essas funções são também funções polinomiais. Vamos aprender a esboçar o gráfico de uma função polinomial de grau $n\geq 3$. Sabemos que uma função polinomial de grau 1 é uma reta:



Uma função polinomial de grau 2 é uma parábola:



Note que a parábola pode ter, dependendo do coeficiente do termo quadrático, ou ponto de máximo ou ponto de mínimo. É possível saber quais são esses pontos usando a derivada. Vamos aprender a analisar a derivada de uma função polinomial. Sabemos que um polinômio possui a seguinte forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Como os expoentes da incógnita x são todos números naturais, para derivar P, basta multiplicar o expoente de x pelo seu respectivo coeficiente e reduzir o valor do expoente em uma unidade, por exemplo:

$$f(x) = ax^{n} \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$$

Assim, a primeira derivada de uma função polinomial é

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1}$$

Agora, vamos analisar a primeira derivada de P. Um detalhe para a função polinomial é que ela é derivável em $\mathbb{R}$, ou seja, ela é contínua em todo o seu domínio.

5.1. Primeira derivada da função polinomial

A primeira derivada da função polinomial nos permite encontrar os pontos críticos da função. Mas o que são os pontos críticos? Um ponto crítico pode ser:

- Ponto de máximo (local ou absoluto);
- Ponto de mínimo (local ou absoluto);
- Ponto de inflexão (quando ocorre a troca de curvatura na função).

Para saber a classificação do ponto crítico, podemos encontrar a segunda derivada da função e analisar o ponto crítico. Porém, vamos analisar os resultados da primeira derivada.

5.1.1. Teorema

Seja f uma função derivável no ponto $x = x_0$, então:

- $f'(x_0) > 0$ implica que f é **estritamente crescente** em $x = x_0$.
- $f'(x_0) < 0$ implica que f é **estritamente decrescente** em $x = x_0$.
- $f'(x_0) = 0$ implica que $x = x_0$ é um **ponto crítico** de P.

Vejamos um exemplo. Seja P definido por:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

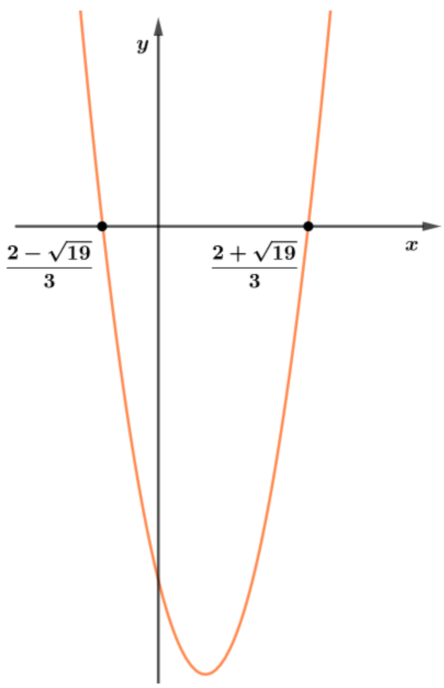
A primeira derivada de P é:

$$P'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$

E suas raízes são:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{3}$$

Como P' é uma função quadrática, temos que ela representa uma parábola:



Note que $P'(x) < 0$ para $\frac{2-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{19}}{3}$ e $P'(x) > 0$ para $x < \frac{2-\sqrt{19}}{3}$ ou $x > \frac{2+\sqrt{19}}{3}$. Podemos afirmar que P é estritamente crescente no intervalo $x < \frac{2-\sqrt{19}}{3}$ ou $x > \frac{2+\sqrt{19}}{3}$ e estritamente decrescente no intervalo $\frac{2-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{19}}{3}$. Os pontos $x = \frac{2-\sqrt{19}}{3}$ e $x = \frac{2+\sqrt{19}}{3}$ são pontos críticos da função. Agora, vamos proceder à análise da segunda derivada.

5.2. Segunda derivada da função polinomial

A segunda derivada nos permite saber a classificação do ponto crítico. Do nosso polinômio inicial, temos:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

A primeira derivada é:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

A segunda derivada é:

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

5.2.1. Teorema

Dada uma função f contínua e derivável até f'' em um dado intervalo I. Se $f'(x_0) = 0$, então:

- x_0 é **ponto de máximo local** quando: $f''(x_0) < 0$.
- x_0 é **ponto de mínimo local** quando: $f''(x_0) > 0$.

Se f admite f''' (derivada até a terceira ordem), então:

- x_0 é **ponto de inflexão** se: $f''(x_0) = 0 \; e \; f'''(x_0) \neq 0$.

Um ponto de máximo local implica que a função possui concavidade para baixo nesse ponto e um ponto de mínimo local implica que a função possui concavidade para cima.

Tomemos o exemplo anterior e analisemos a segunda derivada.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$P'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$

$$P''(x) = 6x - 4$$

Usando a segunda derivada, vamos substituir as raízes da primeira derivada e analisar o sinal do número resultante:

$$P''\left(\frac{2+\sqrt{19}}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{2+\sqrt{19}}{3}\right) - 4 = 2\sqrt{19} > 0 \; (ponto\ de\ mínimo\ local)$$

$$P''\left(\frac{2-\sqrt{19}}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{2-\sqrt{19}}{3}\right) - 4 = -2\sqrt{19} < 0 \; (ponto\ de\ máximo\ local)$$

Podemos também analisar as raízes de P'':

$$P''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Assim, $x = 2/3$ pode ser um ponto de inflexão. Para saber isso, devemos analisar a terceira derivada:

$$P'''(x) = 6 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como a terceira derivada é diferente de zero para qualquer x e $P''(2/3) = 0$, temos que $x = 2/3$ é ponto de inflexão da função.

5.3. Esboço do gráfico

Agora que aprendemos como analisar o comportamento da função polinomial, vamos ver, na prática, como esboçamos o seu gráfico.

Vamos esboçar o gráfico do nosso exemplo:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Inicialmente, devemos analisar o que ocorre com a função quando fazemos $\lim_{x \to \infty} P(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} P(x)$. Para saber isso, basta analisar o termo de maior grau do polinômio. No caso, temos x^3, esse termo tende ao infinito quando x tende ao infinito e tende ao menos infinito quando x tende ao menos infinito. Assim, sabemos o comportamento da função nas extremidades:

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$$

Agora, vamos analisar as derivadas. Dos resultados anteriores, temos:

$$P'(x) = 3x^2 - 4x - 5 \Rightarrow \begin{cases} P'(x) > 0, x < \dfrac{2-\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x > \dfrac{2+\sqrt{19}}{3} \to \textit{estritamente crescente} \\ P'(x) < 0, \dfrac{2-\sqrt{19}}{3} < x < \dfrac{2+\sqrt{19}}{3} \to \textit{estritamente decrescente} \\ P'(x) = 0, x = \dfrac{2 \pm \sqrt{19}}{3} \to \textit{pontos críticos} \end{cases}$$

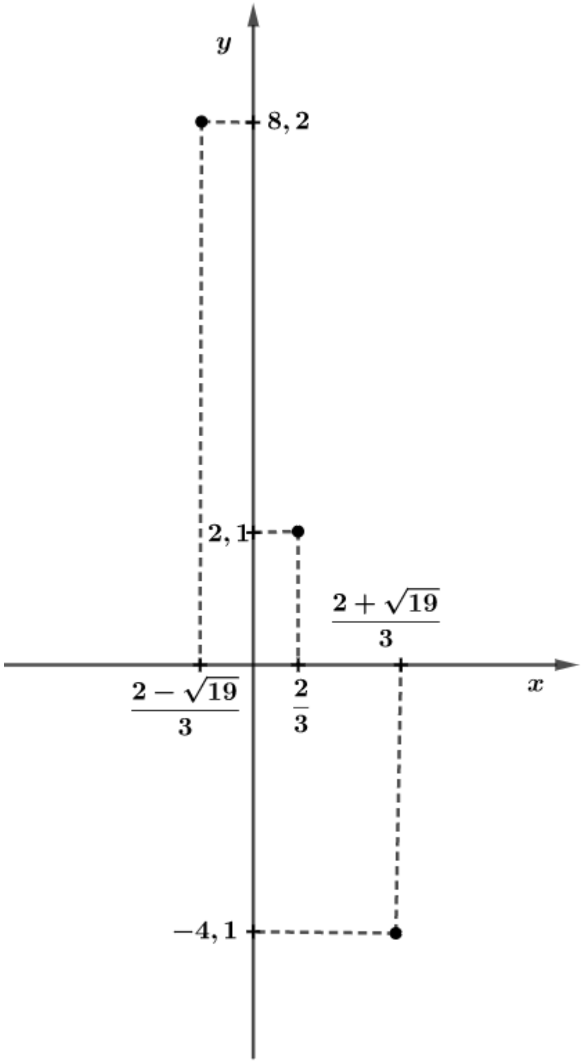
$$P''(x) = 6x - 4 \Rightarrow \begin{cases} P''\left(\dfrac{2+\sqrt{19}}{3}\right) = 2\sqrt{19} > 0 \ (\textit{concavidade para cima}) \\ P''\left(\dfrac{2-\sqrt{19}}{3}\right) = -2\sqrt{19} < 0 \ (\textit{concavidade para baixo}) \\ P''\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0 \ e \ P'''\left(\dfrac{2}{3}\right) \neq 0, x = \dfrac{2}{3} \to \textit{ponto de inflexão} \end{cases}$$

Com esses resultados, vamos esboçar o gráfico. Podemos iniciar com os pontos críticos:

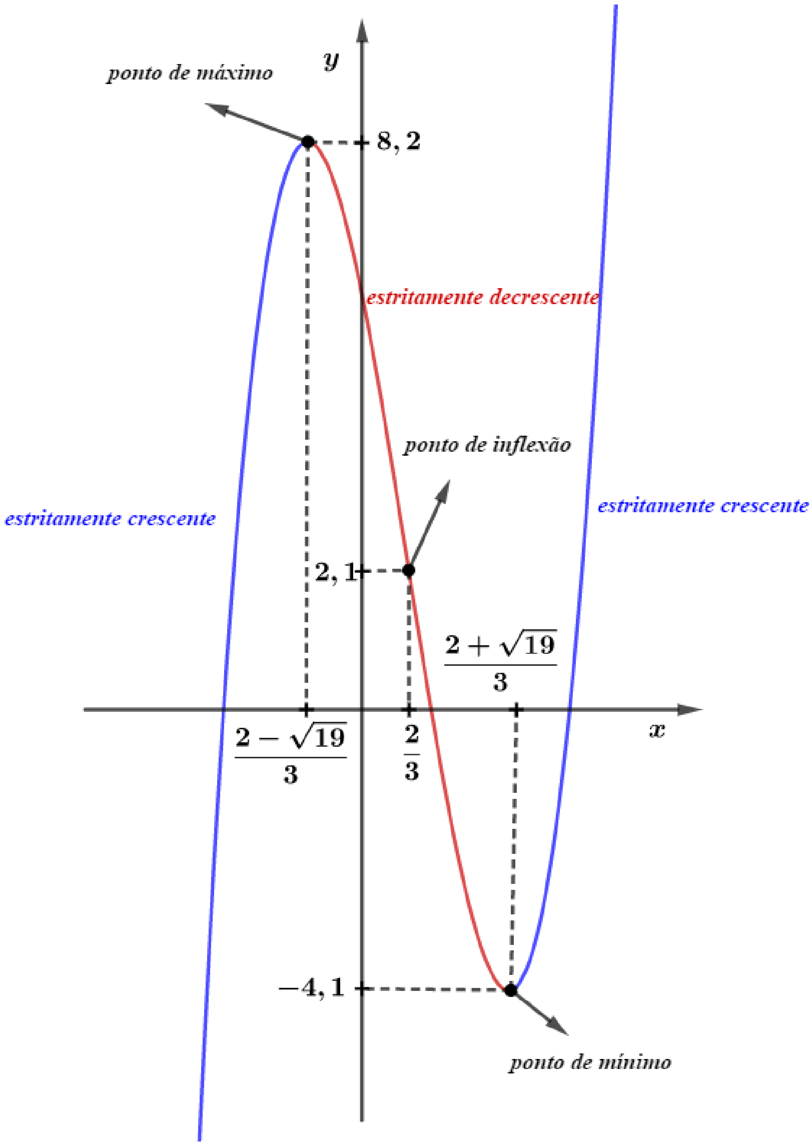
$$P\left(\frac{2+\sqrt{19}}{3}\right) = \frac{2}{27}\left(28 - 19\sqrt{19}\right) \cong -4{,}1$$

$$P\left(\frac{2-\sqrt{19}}{3}\right) = \frac{2}{27}\left(28 + 19\sqrt{19}\right) \cong 8{,}2$$

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{56}{27} \cong 2{,}1$$



Sabemos que a função é estritamente crescente para $x < \frac{2-\sqrt{19}}{3}$ ou $x > \frac{2+\sqrt{19}}{3}$ e estritamente decrescente para $\frac{2-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{19}}{3}$. Também sabemos que a função possui concavidade para baixo no ponto $x = \frac{2-\sqrt{19}}{3}$ e concavidade para cima no ponto $x = \frac{2+\sqrt{19}}{3}$. Logo, basta esboçar a curva no gráfico de acordo com seu comportamento:



6. Polinômio Interpolador de Lagrange

O polinômio interpolador de Lagrange nos permite determinar um polinômio a partir de n pontos (x, y) dados no plano cartesiano. Segundo Lagrange, temos o seguinte teorema:

Dados n pontos no plano cartesiano, existe um único polinômio de grau menor ou igual a $n-1$ que passa por todos esses pontos.

Partindo desse teorema, podemos construir o polinômio interpolador de Lagrange pela seguinte fórmula para os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dados:

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)}$$

Onde $P_i(x) = y_i \cdot a_i(x)$ e $a_i(x)$ é dado por:

$$\boxed{a_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}}$$

$a_i(x)$ é chamado de coeficiente de Lagrange.

Vejamos um exemplo de questão que foi cobrado no IME:

(IME/2018)

Seja $P(x)$ o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2, -4+3\sqrt{3})$, $B(1, 3\sqrt{2}-2)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)$ é:

a) $8\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 6.$

b) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1.$

c) $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2.$

d) $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3.$

e) $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2.$

Comentários

Essa questão requer uma técnica especial chamada de Polinômio Interpolador de Lagrange. Queremos responder à seguinte pergunta:

Dados 4 pontos no plano, qual o polinômio de menor grau que passa por esses quatro pontos?

A resposta é o polinômio abaixo, dado por:

$$P(x) = p_A(x) + p_B(x) + p_C(x) + p_D(x)$$

Onde:

$$A(2, -4+3\sqrt{3}) \to p_A(x) = \frac{(-4+3\sqrt{3})(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$$

$$B\left(1,3\sqrt{2}-2\right) \to p_B(x) = \frac{(3\sqrt{2}-2)(x-2)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(1-2)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}$$

$$C\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right) \to p_C(x) = \frac{(\sqrt{3})(x-2)(x-1)(x-\sqrt{3})}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$$

$$D\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right) \to p_D(x) = \frac{(\sqrt{2})(x-2)(x-1)(x-\sqrt{2})}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$

Queremos o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)$. Como o grau de $x-3$ é 1, o grau do resto é zero, logo:

$$P(x) = q(x)(x-3) + r$$

Para calcular r, vamos calcular $P(3)$, veja:

$$P(3) = q(3)(3-3) + r = r$$

Já temos $P(x)$, basta calcularmos cada parcela para $x = 3$, veja:

$$p_A(3) = \frac{(-4+3\sqrt{3})(3-1)(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}{(2-1)\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = -3\sqrt{2} + 20\sqrt{3} + 5\sqrt{6} - 12$$

$$p_B(3) = \frac{\left(3\sqrt{2}-2\right)(3-2)\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{(1-2)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{6} - 10\sqrt{3}$$

$$p_C(3) = \frac{(\sqrt{3})(3-2)(3-1)(3-\sqrt{3})}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = 15\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 18$$

$$p_D(3) = \frac{(\sqrt{2})(3-2)(3-1)(3-\sqrt{2})}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = -12 - 17\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 9\sqrt{6}$$

Dessa forma, temos que:

$$P(3) = p_A(3) + p_B(3) + p_C(3) + p_D(3) = -6 - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$

Gabarito: "a".

---

7. Lista de Questões

1. (EEAR/2016)

Dado o polinômio: $ax^3 + (2a + b)x^2 + cx + d - 4 = 0$, os valores de a e b para que ele seja um polinômio de 2º grau são

a) $a = 0$ e $b = 0$

b) $a = 1$ e $b \neq 0$

c) $a = 0$ e $b \neq 0$

d) $a = -1$ e $b \neq 0$

2. (EEAR/2018)

Sejam os polinômios $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$, $B(x) = ax^3 - bx^2 - 4x + 1$ e $P(x) = A(x) - B(x)$. Para que $P(x)$ seja de grau 2, é necessário que

a) $a \neq -1$ e $b = -2$

b) $a = 1$ e $b = -2$

c) $a = 1$ e $b \neq -2$

d) $a \neq 1$ e $b \neq -2$

3. (EEAR/2002)

Uma equação do 3º Grau cujas raízes são $-1, -2$ e 3 é

a) $x^3 + 6x^2 - 9x + 6 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 - 6 = 0$

c) $x^3 - 7x - 6 = 0$

d) $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

4. (ESA/2014)

Uma equação polinomial do 3º grau que admite as raízes $-1, -\frac{1}{2}$ e 2 é:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = 0$

b) $2x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $2x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0$

d) $2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$

e) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$

5. (ESA/2016)

O grau do polinômio $(4x - 1) \cdot (x^2 - x - 3) \cdot (x + 1)$, é:

a) 6

b) 5

c) 3

d) 4

e) 2

6. (EEAR/2013)

O resto da divisão de $4x^3 + 2x^2 + x - 1$ por $x^2 - 3$ é igual a

a) $13x + 5$

b) $11x - 3$

c) $2x + 5$

d) $6x - 3$

7. (EEAR/2017)

Ao dividir $3x^3 + 8x^2 + 3x + 4$ por $x^2 + 3x + 2$ obtém-se _____ como resto.

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

8. (EEAR/2001)

Os valores reais de a e b tais que os polinômios: $P(x) = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $Q(x) = x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x + 1$ são dois números

a) inteiros positivos.

b) inteiros negativos.

c) reais, sendo um racional e outro irracional.

d) inteiros, sendo um positivo e outro negativo.

9. (EEAR/2001)

Para que o polinômio $2x^3 + mx^2 + nx + 6$ seja divisível por $(x + 1)$ e $(x - 3)$, então os valores de m e n devem ser, respectivamente, iguais a:

a) -7 e -3

b) -6 e -10

c) -6 e -2

d) -2 e -6

10. (EEAR/2003)

Ao dividir o polinômio $-5x^2 - 3x + 2$ por um polinômio Q, Ana obteve -5 por quociente e $12x + 7$ por resto. O polinômio Q é igual a

a) $x^2 + 3x - 2$

b) $x^2 - 3x - 1$

c) $x^2 - 3x + 1$

d) $x^2 + 3x + 1$

11. (EEAR/2003)

A divisão do polinômio $P(x)$ por $x - a$ fornece o quociente $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e resto 1. Sabendo que $P(0) = -15$, o valor de a é

a) -16

b) -13

c) 13

d) 16

12. (ESA/2008)

Se o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^n + 5x - 30$ por $Q(x) = x - 2$ é igual a 44, então n é igual a:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

13. (EsPCEx/2013)

Sabendo que 2 é uma raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$, então o conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $\sqrt{P(x)}$ está definida é:

a) $\{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leq x \leq 2\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} |\ x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} |\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\ ou\ x \geq 2\right\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} |\ x \neq 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} |\ x \neq 2\ e\ x \neq 1\}$

14. (EsPCEx/2014)

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ tem como algumas de suas raízes os números -1 e 1. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os números reais para os quais a função $f(x)$ é positiva.

a) $(-\infty, -1) \cup (0,1)$

b) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

c) $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

d) $(-\infty,\ -3) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

e) $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$

15. (EsPCEx/2014)

O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $q(x) = x^3 - 3x + 2$ deixa resto $r(x)$. Sabendo disso, o valor numérico de $r(-1)$ é

a) -10

b) -4

c) 0

d) 4

e) 10

16. (EEAR/2002)

O nº 1 é uma das raízes do polinômio $x^3 + 4x^2 + x - 6$. Com relação às outras raízes do polinômio, podemos afirmar que

a) ambas são negativas

b) uma é negativa e a outra é positiva

c) ambas são positivas

d) uma delas é nula

17. (EsPCEx/2015)

Considere os polinômios $p(x) = x^{80} + 3x^{79} - x^2 - x - 1$ e $b(x) = x^2 + 2x - 3$.. Sendo $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $b(x)$, o valor de $r\left(\frac{1}{2}\right)$ é igual a

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) 2

e) $\frac{5}{2}$

18. (EEAR/2017)

Considere $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$, tal que $P(1) = -2$ e $P(2) = 6$. Assim, os valores de b e c são, respectivamente,

a) 1 e 2

b) 1 e -2

c) -1 e 3

d) -1 e -3

19. (EEAR/2011)

Se o polinômio $P(x) = ax^3 - 3x^2 - bx - 3$ é divisível por $(x - 3)(x + 1)$, então o valor de $a + b$ é

a) 10

b) 8

c) 7

d) 5

20. (EEAR/2017)

Sejam as funções polinomiais definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = f^{-1}(x)$. O valor de $g(3)$ é

a) 3

b) 2

c) 1

d) 0

21. (EEAR/2003)

Se 1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, então o valor de $x_2 - x_3$, para $x_2 > x_3$, é

a) 3

b) 1

c) 6

d) 5

22. (EEAR/2003)

Se o resto da divisão de $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + 5$ por $x - 2$ é 15, então o valor de $2m + n$ é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 5

23. (EEAR/2004)

Dado $P(x) = x^3 - (2m + 4)x^2 + 9x + 13$, o valor de m, para que $3i$ seja raiz de $P(x)$, é

a) $-\frac{49}{18}$

b) $-\frac{23}{18}$

c) $-\frac{25}{6}$

d) $\frac{23}{18}$

24. (ESA/2016)

O conjunto solução da equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, é:

a) $S = \{-3;\ -1;\ 2\}$

b) $S = \{-0,5;\ -3;\ 4\}$

c) $S = \{-3;\ 1;\ 2\}$

d) $S = \{-2;\ 1;\ 3\}$

e) $S = \{0,5;\ 3;\ 4\}$

25. (ESA/2013)

Para que o polinômio do segundo grau $A(x) = 3x^2 - bx + c$, com $c > 0$ seja o quadrado do polinômio $B(x) = mx + n$,é necessário que

a) $b^2 = 4c$

b) $b^2 = 12c$

c) $b^2 = 12$

d) $b^2 = 36c$

e) $b^2 = 36$

26. (ESA/2014)

Sendo o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ um cubo perfeito, então a diferença $a - b$ vale:

a) 3

b) 2

c) 1

d) 0

e) -1

27. (ESA/2010)

Sabe-se que $1, a$ e b são raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 11x^2 + 26x - 16$, e que $a > b$. Nessas condições o valor de $a^b + \log_b a$ é:

a) $\frac{49}{3}$

b) $\frac{193}{3}$

c) 67

d) 64

e) 19

28. (EsPCEx/2015)

Sendo R a maior das raízes da equação $\frac{11x+6}{x-4} = x^2$, então o valor de $2R - 2$ é:

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

29. (EsPCEx/2012)

Um polinômio $q(x)$, do 2º grau, é definido por $q(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $a \neq 0$. Dentre os polinômios a seguir, aquele que verifica a igualdade $q(x) = q(1-x)$, para todo x real, é

a) $q(x) = a(x^2 + x) + c$

b) $q(x) = a(x^2 - x) + c$

c) $q(x) = a^2(x^2 - x) + c$

d) $q(x) = a^2(x^2 + x) + c$

e) $q(x) = a^2 x + c$

30. (EsPCEx/2011)

Os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são tais que $A(x) = B(x) + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. Sabendo-se que -1 é raiz de $A(x)$ e 3 é raiz de $B(x)$, então $A(3) - B(-1)$ é igual a:

a) 98

b) 100

c) 102

d) 103

e) 105

31. (EsPCEx/2006)

Temos as funções:

$f(x) = x + 1$

$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$h(x) = g\big(f(x)\big)$

Considerando que as raízes de $h(x)$ são $\{-1;\ 0;\ 1\}$, determine $h(-2)$.

a) 0

b) -3

c) 4

d) 5

e) -6

32. (AFA/2016)

Considere os polinômios $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $P(x) = x^3 - 3x^2 - ax + b$, sendo a e b números reais tais que $a^2 - b^2 = -8$. Se os gráficos de $Q(x)$ e $P(x)$ têm um ponto em comum que pertence ao eixo das abscissas, então é INCORRETO afirmar sobre as raízes de $P(x)$ que

a) podem formar uma progressão aritmética

b) são todas números naturais.

c) duas são os números **a** e **b**

d) duas são números simétricos.

33. (AFA/2015)

Considere o polinômio $p(x) = ax^4 + bx^3 + 2x^2 + 1$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e marque a alternativa FALSA.

a) $x = 0$ não é raiz do polinômio $p(x)$

b) Existem valores distintos para a e b tais que $x = 1$ ou $x = -1$ são raízes de $p(x)$

c) Se $a = 0$ e $b = 3$, o resto da divisão de $p(x)$ por $3x^2 - x + 1$ é zero.

d) Se $a = b = 0$ tem-se que $x = -\frac{1}{2}i$ é uma raiz de $p(x)$, considerando que $i^2 = -1$

34. (AFA/2012)

O polinômio $P(x) = x^4 - 75x^2 + 250x$ tem uma raiz dupla.

Em relação à $P(x)$ é correto afirmar que

a) apenas uma de suas raízes é negativa.

b) a sua raiz dupla é negativa.

c) três de suas raízes são negativas.

d) nenhuma de suas raízes é negativa.

35. (AFA/2011)

Sobre o polinômio $A(x)$ expresso pelo determinante da matriz $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & x & x \end{bmatrix}$, é INCORRETO afirmar que

a) não possui raízes comuns com $B(x) = x^2 - 1$.

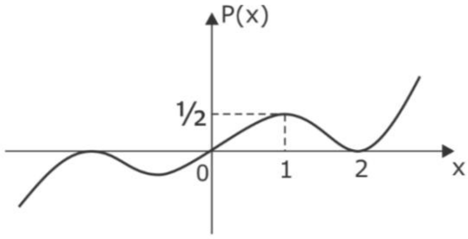
b) não possui raízes imaginárias.

c) a soma de suas raízes é igual a uma de suas raízes.

d) é divisível por $P(x) = x + 2$.

36. (AFA/2010)

Observe a função polinomial P esboçada no gráfico abaixo.



Sabe-se que $x = 0$ ou $x = 2$ são raízes de P e que o resto da divisão de $P(x)$ por $[(x-2)\cdot(x-1)\cdot x]$ é $R(x)$.

As raízes de $R(x)$ são números

a) inteiros pares

b) inteiros ímpares

c) fracionários opostos

d) irracionais opostos

37. (EFOMM/2016)

Sabendo que $\frac{5}{2}$ é uma raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$, a soma das outras raízes é igual a:

a) -2

b) 0

c) 10

d) 1

e) -1

38. (EFOMM/2014)

O valor da soma de a e b, para que a divisão de $f(x) = x^3 + ax + b$ por $g(x) = 2x^2 + 2x - 6$ seja exata, é

a) -1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

39. (Escola Naval/2017)

Seja $P(x) = x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ um polinômio do coeficientes inteiros e que $P(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$. O polinômio $R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^3 - 3x - 1$. Determine a soma dos coeficientes de $R(x)$ e assinale a opção correta.

a) -51

b) -52

c) -53

d) -54

e) -55

40. (Escola Naval/2016)

Sejam r_1, r_2, e r_3 as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Sabendo-se que as funções $f_1(x) = \log(4x^2 - kx + 1)$ e $f_2(x) = x^2 - 7\, arc\, sen\, (wx^2 - 8)$, com $k, w \in \mathbb{R}$, são tais que $f_1(r_1) = 0$ e $f_2(r_2) = f_2(r_3) = 4$, onde r_1 é a menor raiz positiva do polinômio $P(x)$, é correto afirmar que os números $(w + k)$ e $(w - k)$ são raízes da equação:

a) $x^2 - 6x - 2 = 0$

b) $x^2 - 4x - 12 = 0$

c) $x^2 - 4x + 21 = 0$

d) $x^2 - 6x + 8 = 0$

e) $x^2 - 7x - 10 = 0$

41. (Escola Naval/2015)

Em uma $P.G.$, $a_4 = \frac{2(k^2+1)^2}{5k}$ e $a_1 = \frac{25k^2}{4(k^2+1)}$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$. Para o valor médio M de k, no intervalo onde a $P.G.$ é decrescente, o resto da divisão do polinômio $P(x) = \frac{5}{4}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 25x^2 - 10$ pelo binômio $\left(Mx - \frac{15}{8}\right)$ é

a) $\frac{1039}{32}$

b) $\frac{1231}{16}$

c) $\frac{1103}{32}$

d) $\frac{1487}{32}$

e) $\frac{1103}{16}$

42. (Escola Naval/2014)

Considere $P(x) = (m-4)(m^2+4)x^5 + x^2 + kx + 1$ um polinômio na variável real x, em que m e k são constantes reais. Quais os valores das constantes $m\ e\ k$ para que $P(x)$ não admita raiz real?

a) $m = 4\ e - 2 < k < 2$

b) $m = -4\ e\ k > 2$

c) $m = -2\ e - 2 < k < 2$

d) $m = 4\ e\ |k| > 2$

e) $m = -2\ e\ k > -2$

43. (Escola Naval/2013)

Sejam $F(x) = x^3 + ax + b$ e $G(x) = 2x^2 + 2x - 6$ dois polinômios na variável real x, com a e b números reais. Qual valor de $(a+b)$ para que a divisão $\frac{F(x)}{G(x)}$ seja exata?

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

44. (Rússia)

Sejam $a, b\ e\ c$ inteiros positivos distintos. Verifique se existe um polinômio $P(x) = kx^2 + lx + m$, k, l, m inteiros, $k > 0$, que assume os valores a^3, b^3, c^3 para valores inteiros de x.

45. (Rússia)

Sejam a, b, c reais. Prove que pelo menos uma das equações $x^2 + (a-b)x + (b-c) = 0$, $x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$, $x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ tem soluções reais.

46. (Putnam and Beyond)

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n. Sabendo que:

$$P(k) = \frac{k}{k+1}, \qquad k = 0,1,\dots,n.$$

Encontre $P(m)$ para $m > n$.

47. (Putnam)

Verifique a igualdade

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

48. (AIME/1986)

O polinômio

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$$

Pode ser escrito na forma

$$a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17},$$

Onde $y=x+1$ e os $a_i's$ são constantes. Encontre a_2.

49. (101 problems in algebra)

Qual o coeficiente de x^2 quando

$$(1+x)(1+2x)\ldots(1+2^nx)$$

É expandido?

50. (Problem Solving Strategies)

Sejam $a, b\ e\ c$ três inteiros distintos, e seja P um polinômio com coeficientes inteiros. Mostre que, nesse caso, as condições

$$P(a)=b, P(b)=c\ e\ P(c)=a$$

Não podem ser satisfeitas simultaneamente.

51. Desafio

Obtenha um polinômio do 4º grau que verifique a identidade

$$P(x)-P(x-1)\equiv x^3$$

E utilize-o para obter uma fórmula para

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

52. (Problemas Selectos -Lumbreras)

Seja P um polinômio tal que $P(xy)=P(x)+P(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ e $P(10)=0$. Calcule $P(7)+P(99)+P(1001)$.

Questões ITA

53. (ITA/2020)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - mx^2 + x + 5 + n$, sendo m, n números reais fixados. Sabe-se que toda raiz $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, da equação $p(z) = 0$ satisfaz a igualdade $a = mb^2 + nb - 1$. Então, a soma dos quadrados das raízes de $p(z) = 0$ é igual a

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

54. (ITA/2020)

Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que:

I. $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$;

II. a soma das raízes de $p(x)$ é igual a 1;

III. o produto das raízes de $p(x)$ é igual a 3;

IV. $p(-1) = -\frac{15}{4}$;

então, $p(1)$ é igual a

a) $-\frac{17}{2}$.

b) $-\frac{19}{4}$.

c) $-\frac{3}{2}$.

d) $\frac{9}{4}$.

e) $\frac{9}{2}$.

55. (ITA/2020)

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 10x^4 - 4x^3 + 25x^2 + 20x + 28$.

a) Determine dois números reais α e β de modo que f possa ser reescrita como $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$.

b) Determine o valor mínimo de f.

c) Determine o(s) ponto(s) $x \in \mathbb{R}$ onde f assume seu valor mínimo.

56. (ITA/2020)

Determine todos os números inteiros k entre 0 e 200 para os quais o polinômio $p_k(x) = x^3 - x^2 - k$ possui uma única raiz inteira. Para cada um desses valores de k, determine a raiz inteira correspondente.

57. (ITA/2018)

As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

58. (ITA/2017)

Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - \left(1 + 2\sqrt{3}\right)x^3 + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)x^2 - \left(1 + 4\sqrt{3}\right)x + 2$$

a) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

b) Determine as raízes de $p(x)$.

59. (ITA/2016)

Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

60. (ITA/2015)

Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0,1, \dots ,15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

a) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

61. (ITA/2015)

Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p.

62. (ITA/2015)

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

63. (ITA/2014)

Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 - iz - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

a) $-3i, -1, 1$.

b) $-i, i, 1$.

c) $-i, i, -1$.

d) $-2i, -1, 1$.

e) $-2i, -i, i$.

64. (ITA/2012)

Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

a) $5(5 - 2\sqrt{3})$.

b) $15(5 - 2\sqrt{3})$.

c) $30(5 - 2\sqrt{3})$.

d) $45(5 - 2\sqrt{3})$.

e) $50(5 - 2\sqrt{3})$.

65. (ITA/2010).

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + ia_{n-1}$, $n = 1,2, \dots, 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \notin \mathbb{R}$,

II. $|p(x)| \leq 4(4 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\forall x \in [-1,1]$,

III. $a_8 = a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) II e III.

66. (ITA/2008)

Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

a) 30

b) 32

c) 34

d) 36

e) 38

67. (ITA/2008)

Considere o polinômio $p(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = \frac{1}{2}$, então $p(-2)$ é igual a

a) -25

b) -27

c) -36

d) -39

e) -40

68. (ITA/2007)

Um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

a) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0$.

b) $\pi^2x^3 + \pi^3x^2 + x + 1 = 0$.

c) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0$.

d) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0$.

e) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0$.

69. (ITA/2007)

Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos$(x+a)^3 - (x+b)^3$.

Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a

a) 104.

b) 114.

c) 124.

d) 134.

e) 144.

70. (ITA/2007)

Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

a) 9.

b) 7.

c) 5.

d) 3.

e) 1.

71. (ITA/2006)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a+1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é

a) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$.

b) $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$.

d) $\{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$.

e) $\mathbb{N}$.

72. (ITA/2005)

No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a

a) $-\frac{1}{2}$.

b) $-\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) 1.

e) $\frac{3}{2}$.

73. (ITA/2003)

Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) -6.

b) -4.

c) 4.

d) 7.

e) 9.

74. (ITA/2003)

Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, cujos coeficientes $2, a_2, \dots, a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com razão $q > 0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5460$, tem-se que o valor de $(n^2 - q^3)/q^4$ é igual a:

a) 5/4.

b) 3/2.

c) 7/4.

d) 11/6.

e) 15/8.

75. (ITA/2002)

A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto $x+1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x-1$ e $x-2$ são, respectivamente, os números a e b, então a^2+b^2 vale:

a) 13.

b) 5.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

76. (ITA/2001)

Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, temos que o número de arranjos sem repetição de n elementos, tomados 2 a 2, é:

a) 80.

b) 90.

c) 70.

d) 100.

e) 60.

77. (ITA/2000)

Seja $P(x)$ um polinômio divisível por $x-1$. Dividindo-o por x^2+x, obtêm-se o quociente $Q(x)=x^2-3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4)=10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a

a) -5.

b) -3.

c) -1.

d) 1.

e) 3.

78. (ITA/1999)

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 3 tal que $p(x)=p(x+2)-x^2-2$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Se -2 é uma raiz de $p(x)$, então o produto de todas as raízes de $p(x)$ é:

a) 36.

b) 18.

c) -36.

d) -18.

e) 1.

79. (ITA/1998)

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de $p(x)$ por $x-2$ obtém-se um quociente $q(x)$ e resto igual a 26. Na divisão de $p(x)$ por x^2+x-1 obtém-se um quociente $h(x)$ e resto $8x-5$. Sabe-se que $q(0)=13$ e $q(1)=26$. Então, $h(2)+h(3)$ é igual a:

a) 16.

b) Zero.

c) -47.

d) -28.

e) 1.

80. (ITA/1997)

Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ polinômios na variável real x de graus $n_1, n_2 e\ n_3$, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe-se que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são diviseis por $p_3(x)$. Seja $r(x)$ o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$. Considere as afirmações:

I. $r(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

II. $p_1(x) - 1/2p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

III. $p_1(x)r(x)$ é divisível por $[p_3(x)]^2$.

Então,

a) Apenas I e II são verdadeiras.

b) Apenas II é verdadeira.

c) Apenas I e III são verdadeiras.

d) Todas as afirmações são verdadeiras.

e) Todas as afirmações são falsas.

81. (ITA/1995)

A divisão de um polinômio $P(x)$ por x^2-x resulta no quociente $6x^2+5x+3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $P(x)$ por $2x+1$ é igual a:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

82. (ITA/1995)

Sabendo-se que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:

a) 17.

b) 19.

c) 21.

d) 23.

e) 25.

83. (ITA/1977)

$P(x)$ é um polinômio do 5º grau que satisfaz as condições $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1$ e $P(6) = 0$. Calcule $P(0)$.

Questões IME

84. (IME/2020)

Um polinômio $P(x)$ de grau maior que 3 quando dividido por $x - 2$, $x - 3$ e $x - 5$ deixa restos 2, 3 e 5, respectivamente. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)(x - 3)(x - 5)$ é:

a) 1

b) x

c) 30

d) $x - 1$

e) $x - 30$

85. (IME/2019)

Seja a inequação:

$$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$$

Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para $b - a$ é:

a) 2

b) $13/6$

c) $1/3$

d) $5/2$

e) $8/3$

86. (IME/2019)

Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

a) $32 - a$

b) $48 - 2a$

c) 48

d) $48 + 2a$

e) $32 + a$

87. (IME/2019)

Seja o polinômio $q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$ que possui valor mínimo igual a -64, onde k é uma constante real. Determine as raízes de $q(x)$.

88. (IME/2018)

Seja $P(x)$ o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2, -4 + 3\sqrt{3})$, $B(1, 3\sqrt{2} - 2)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$ é:

a) $8\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 6.$

b) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1.$

c) $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2.$

d) $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3.$

e) $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2.$

89. (IME/2015)

Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

a) $x^2 + x - 2$

b) $6x^2 - 4x + 3$

c) $3x - 9$

d) $6x^2 - 17x - 3$

e) $6x + 1$

90. (IME/2012)

Considere o polinômio $5x^3 - 3x^2 - 60x + 36 = 0$. Sabendo que ele admite uma solução da forma $\sqrt{n}$, onde n é um número natural, pode se afirmar que:

a) $1 \leq n < 5$

b) $6 \leq n < 10$

c) $10 \leq n < 15$

d) $15 \leq n < 20$

e) $20 \leq n < 30$

91. (IME/2011)

Seja $p(x)$ uma função polinomial satisfazendo a relação $p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p(\frac{1}{x})$. Sabendo que $p(3) = 28$, o valor de $p(4)$ é:

a) 10

b) 30

c) 45

d) 55

e) 65

92. (IME/2011)

Sejam o polinômio e conjunto $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ e os conjuntos $A = \{p(k)/k \in \mathbb{N}\ e\ k \leq 1999\}$, $B = \{r^2 + 1\ /r \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{q^2 + 2/q \in \mathbb{N}\}$. Sabe-se que $y = n(A \cap B) - n(A \cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto E. Determine o valor de y.

Obs.: $\mathbb{N}$ é $o\ conjunto\ dos\ números\ naturais$.

93. (IME/2001)

Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1(-2,-11)$, $P_2(-1,0)$, $P_3(1,4)$ e $P_4(2,9)$.

a) Determine os coeficientes do polinômio.

b) Calcule todas as raízes do polinômio.

94. (IME/2001)

Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

95. (IME/2000)

Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

96. (IME/1999)

Seja o polinômio $P(x)$ de grau $(2n+1)$ com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se $P(x)$ por $D(x)$, de grau 3, obtém-se o resto $R(x)$.

Determine $R(x)$, sabendo-se que as raízes de $D(x)$ são raízes de $A(x) = x^4 - 1$ e que $D(1) \neq 0$.

97. (IME/1998)

Determine α, β e γ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$, racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para $x = 1$.

98. (IME/1997)

Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\phi + xsen\,\phi)^n$ por (x^2+1), onde n é um número natural.

99. (IME/1995)

Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \cdots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$.

100. (IME/1987)

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.

a) Sabendo-se que $p(x)$ assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$, mostre que $p(x)$ não possui raízes inteiras.

b) Sabendo-se que $p(x) = 7$ para quatro valores de x, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de x, $p(x)$ assume o valor 14?

101. (IME/1984)

Determine o polinômio

$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Tal que $p(x) = p(1-x)$, $p(0) = 0$ e $p(-1) = 6$.

102. (IME/1976)

Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2$, determine p e q de modo que ele seja divisível por $(x-1)^2$.

8. Gabarito

1. c
2. c
3. c
4. e
5. d
6. a
7. a
8. d
9. c
10. d
11. d
12. d
13. c
14. e
15. a
16. a
17. a
18. d
19. a
20. c
21. d
22. a
23. a

24. d
25. b
26. b
27. c
28. e
29. b
30. c
31. e
32. b
33. d
34. a
35. a
36. a
37. e
38. a
39. e
40. b
41. Anulada
42. a
43. b
44. Existe o polinômio dado por $P(x) = (a+b+c)x^2 - (ab+bc+bc)x + abc$.
45. Demonstração.
46. $P(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(-1)^{n+1}(n+1)!(m+1)} + \frac{m}{m+1}$.
47. Demonstração.
48. $a_2 = \binom{18}{3}$.
49. $a_{n,2} = \frac{(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)}{3}$.
50. Demonstração.
51. $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
52. 0.

Gabarito das Questões ITA

53. b
54. d
55. a) $\alpha = -2$ e $\beta = 24$ b) $f_{mín}(x) = 24$ c) $-2; 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}$
56. $S = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
57. d
58. a) $a = -2\sqrt{3}$; $b = -1$ b) $S = \{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})\}$.
59. 781
60. b

61. a) $\beta \in \{0, \pm 15\}$ b) Soluções $= \left\{0, \pm\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\left(5 \pm i\sqrt{11}\right), \frac{1}{6}\left(-5 \pm i\sqrt{11}\right), \pm\sqrt{\frac{7}{18}}\right\}$
62. a) 10 ; b) $A = \{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2, x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1, 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1\}$
63. a
64. c
65. e
66. b
67. a
68. d
69. b
70. b
71. d
72. a
73. e
74. c
75. a
76. b
77. c
78. c
79. a
80. d
81. e
82. b
83. $P(0) = 2.$

Gabarito das Questões IME

84. b
85. b
86. c
87. $S = \left\{1;\ 3;\ 2 - \sqrt{17}; 2 + \sqrt{17}\right\}$
88. a
89. d
90. c
91. e
92. $y = 0.$
93. Item a) $a = 1; b = -1; c = 1\ e\ d = 3$ Item b) $\{-1, 1 \pm \sqrt{2}i\}$
94. $m = 3n + 1$, com n inteiro ímpar positivo, se $a \neq 0$ e $m \geq 0\ e\ m \geq 3n$ se $a = 0.$
95. $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n).$
96. $R(x) = x + 1, se\ n$ é $par; R(x) = 0, se\ n$ é í$mpar$.
97. $\alpha = 15; \beta = -16; \gamma = 15.$
98. $sen(n\phi)x + \cos\,(n\phi).$

99. Demonstração.
100. Demonstração.
101. $\boldsymbol{p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x}$ **.**
102. $\boldsymbol{p = -6 \text{ e } q = 1}$**.**

9. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas

1. (EEAR/2016)

Dado o polinômio: $ax^3 + (2a + b)x^2 + cx + d - 4 = 0$, os valores de a e b para que ele seja um polinômio de 2º grau são

a) $a = 0$ e $b = 0$

b) $a = 1$ e $b \neq 0$

c) $a = 0$ e $b \neq 0$

d) $a = -1$ e $b \neq 0$

Comentários

Para que seja de 2º grau o termo a deve ser nulo.

$$a = 0$$

Pelo mesmo motivo o termo $2a + b$ não pode ser nulo

$$2a + b \neq 0$$

$$2 \cdot 0 + b \neq 0$$

$$b \neq 0$$

Logo, $a = 0$ e $b \neq 0$

Gabarito: “c”.

---

2. (EEAR/2018)

Sejam os polinômios $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$, $B(x) = ax^3 - bx^2 - 4x + 1$ e $P(x) = A(x) - B(x)$. Para que $P(x)$ seja de grau 2, é necessário que

a) $a \neq -1$ e $b = -2$

b) $a = 1$ e $b = -2$

c) $a = 1$ e $b \neq -2$

d) $a \neq 1$ e $b \neq -2$

Comentários

Primeiramente iremos obter $P(x)$

$$P(x) = A(x) - B(x)$$
$$= (x^3 + 2x^2 - x - 4) - (ax^3 - bx^2 - 4x + 1) =$$
$$= (1 - a)x^3 + (2 + b)x^2 + (-1 + 4)x - (4 + 1) =$$
$$\Rightarrow \; P(x) = (1 - a)x^3 + (2 + b)x^2 + 3x - 5$$

Para que $P(x)$ seja de 2º grau o termo $(1 - a)$ deve ser nulo.

$$(1 - a) = 0$$
$$a = 1$$

Pelo mesmo motivo o termo $(2 + b)$ não pode ser nulo

$$(2 + b) \neq 0$$
$$b \neq -2$$

Logo, $a = 1$ e $b \neq -2$

Gabarito: "c".

---

3. (EEAR/2002)

Uma equação do 3º Grau cujas raízes são $-1, -2$ e 3 é

a) $x^3 + 6x^2 - 9x + 6 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 - 6 = 0$

c) $x^3 - 7x - 6 = 0$

d) $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

Comentários

$$\big(x - (-1)\big) \cdot \big(x - (-2)\big) \cdot \big(x - (3)\big) = 0$$
$$\Rightarrow (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) =$$
$$= (x^2 + 3x + 2) \cdot (x - 3) =$$
$$= x^3 + 3x^2 + 2x - 3x^2 - 9x - 6 =$$
$$\Rightarrow x^3 - 7x - 6 = 0$$

Gabarito: "c".

---

4. (ESA/2014)

Uma equação polinomial do 3º grau que admite as raízes $-1, -\frac{1}{2}$ e 2 é:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = 0$

b) $2x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $2x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0$

d) $2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$

e) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$

Comentários

$$(x-(-1))\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot(x-(2))=0$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)=$$

$$=\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)=$$

$$=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2x^2-3x-1=$$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1=0$$

$$\therefore\ 2x^3-x^2-5x-2=0$$

Gabarito: “e”.

---

5. (ESA/2016)

O grau do polinômio $(4x\ -\ 1)\cdot(x^2-x-3)\cdot(x+1)$, é:

a) 6

b) 5

c) 3

d) 4

e) 2

Comentários

Efetuando o produto

$$(4x\ -\ 1)\cdot(x^2-x-3)\cdot(x+1)=$$

$$=(4x^3-4x^2-12x-x^2+x+3)\cdot(x+1)=$$

$$=(4x^3-5x^2-11x+3)\cdot(x+1)=$$

$$=4x^4-5x^3-11x^2+3x+4x^3-5x^2-11x+3=$$

$$=4x^4-x^3-16x^2-8x+3\ \rightarrow grau\ 4$$

Gabarito: “d”.

---

6. (EEAR/2013)

O resto da divisão de $4x^3+2x^2+x-1$ por x^2-3 é igual a

a) $13x+5$

b) $11x-3$

c) $2x+5$

d) $6x - 3$

Comentários

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 + x - 1 & x^2 - 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 \qquad\quad + 12x & 4x + 2 \\ \hline 2x^2 + 13x - 1 & \\ -2x^3 \qquad\quad + 6 & \\ \hline 13x + 5 & \end{array}$$

Gabarito: “a”.

---

7. (EEAR/2017)

Ao dividir $3x^3 + 8x^2 + 3x + 4$ por $x^2 + 3x + 2$ obtém-se _____ como resto.

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

Comentários

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 8x^2 + 3x + 4 & x^2 + 3x + 2 \\ \cline{2-2} -3x^3 - 9x^2 - 6x & 3x - 1 \\ \hline -x^2 - 3x + 4 & \\ x^2 + 3x + 2 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Gabarito: “a”.

---

8. (EEAR/2001)

Os valores reais de a e b tais que os polinômios: $P(x) = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $Q(x) = x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x + 1$ são dois números

a) inteiros positivos.

b) inteiros negativos.

c) reais, sendo um racional e outro irracional.

d) inteiros, sendo um positivo e outro negativo.

Comentários

Em decorrência do teorema de D’Alembert, se $x + 1$ divide os polinômios, então, -1 é raiz de ambos os polinômios.

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ Q(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^3 - 2a(-1)^2 + (3a+b)(-1) - 3b = 0 \\ (-1)^3 - (a+2b)(-1) + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 - 2a - 3a - b - 3b = 0 \\ -1 + a + 2b + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + 4b = -1 \quad (eq.1) \\ 3a + 2b = 1 \quad (eq.2) \end{cases}$$

Fazendo $eq.1 - 2 \cdot eq.2$, obtemos:

$$(5a + 4b) - 2 \cdot (3a + 2b) = (-1) - 2 \cdot (1)$$

$$-a = -3 \Rightarrow a = 3$$

Substituindo o valor de a em $eq.1$ obtemos:

$$5(3) + 4b = -1$$

$$\Rightarrow \quad b = -4$$

Analisando as alternativas, concluímos que o item d é o único correto

Gabarito: "d".

---

9. (EEAR/2001)

Para que o polinômio $2x^3 + mx^2 + nx + 6$ seja divisível por $(x + 1)$ e $(x - 3)$, então os valores de m e n devem ser, respectivamente, iguais a:

a) -7 e -3

b) -6 e -10

c) -6 e -2

d) -2 e -6

Comentários

Seja $P(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + 6$.

Para que $P(x)$ seja divisível por $(x + 1)$ e $(x - 3)$, $x = -1$ e $x = 3$ devem ser raízes do polinômio. Logo:

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 6 = 0 \\ 2(3)^3 + m(3)^2 + n(3) + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + m - n + 6 = 0 \\ 54 + 9m + 3n + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - n = -4 \quad (eq.1) \\ 9m + 3n = -60 \quad (eq.2) \end{cases}$$

Isolando n em $eq.1$ e substituindo em $eq.2$, obtemos:

$$9m + 3(m + 4) = -60$$

$$\Rightarrow 12m = -72$$

$$\Rightarrow \quad m = -6$$

Substituindo o valor de m em $eq.1$ obtemos:

$$(-6) - n = -4$$
$$\Rightarrow n = -2$$

Portanto,

$$\begin{cases} m = -6 \\ n = -2 \end{cases}$$

Gabarito: "c".

---

10. (EEAR/2003)

Ao dividir o polinômio $-5x^2 - 3x + 2$ por um polinômio Q, Ana obteve -5 por quociente e $12x + 7$ por resto. O polinômio Q é igual a

a) $x^2 + 3x - 2$

b) $x^2 - 3x - 1$

c) $x^2 - 3x + 1$

d) $x^2 + 3x + 1$

Comentários

Segundo o enunciado, temos a seguinte situação:

$$-5x^2 - 3x + 2 = -5 \cdot Q(x) + 12x + 7$$
$$\Rightarrow \quad Q(x) = \frac{1}{-5} \cdot \left(-5x^2 - 3x + 2 - (12x + 7)\right) =$$
$$= -\frac{1}{5} \cdot (-5x^2 - 15x - 5) =$$
$$Q(x) = x^2 + 3x + 1$$

Gabarito: "d".

---

11. (EEAR/2003)

A divisão do polinômio $P(x)$ por $x - a$ fornece o quociente $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e resto 1. Sabendo que $P(0) = -15$, o valor de a é

a) -16

b) -13

c) 13

d) 16

Comentários

Segundo o enunciado

$$P(x) = (x - a) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) + 1$$
$$\Rightarrow \quad P(0) = (0 - a) \cdot (0^3 + 0^2 + 0 + 1) + 1 = -15$$
$$P(0) = (-a) \cdot (1) + 1 = -15$$

$$1 - a = -15$$
$$\Rightarrow \ a = 16$$

Gabarito: “d”.

---

12. (ESA/2008)

Se o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^n + 5x - 30$ por $Q(x) = x - 2$ é igual a 44, então n é igual a:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Comentários

$$P(x) = (2x^n + 5x - 30\ ) = (x-2) \cdot q(x) + 44$$
$$\Rightarrow \quad P(2) = 2 \cdot 2^n + 5 \cdot 2 - 30 = (2-2) \cdot q(x) + 44$$
$$2^{n+1} + 10 - 30 = 0 \cdot q(x) + 44$$
$$2^{n+1} - 20 = 44$$
$$2^{n+1} = 64 = 2^6$$
$$n + 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad n = 5$$

Gabarito: “d”.

---

13. (EsPCEx/2013)

Sabendo que 2 é uma raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$, então o conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $\sqrt{P(x)}$ está definida é:

a) $\{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leq x \leq 2\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} |\ x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} |\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \ ou\ x \geq 2\right\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} |\ x \neq 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} |\ x \neq 2 \ e\ x \neq 1\}$

Comentários

Para que $\sqrt{P(x)}$ seja definida nos reais, queremos que $P(x) \geq 0$

Como sabemos que 2 é raiz de $P(x)$, podemos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini:

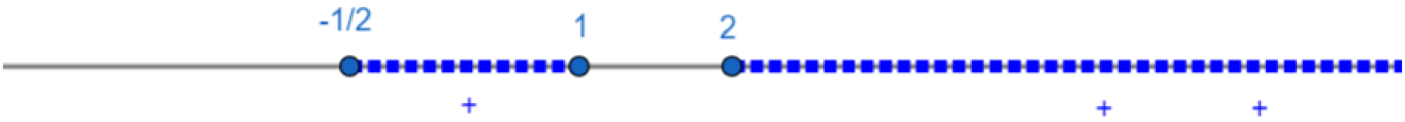
$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow\ 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (x-2)(2x^2 - x - 1)$$

Resolvendo a equação de segundo grau $2x^2 - x - 1$, obtemos que as raízes são 1 e $-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\ 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (x-2)(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Fazendo o estudo do sinal para o polinômio dado, obtemos:



Sendo assim, queremos

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \ ou\ x \geq 2\right\}$$

Gabarito: "c".

---

14. (EsPCEx/2014)

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ tem como algumas de suas raízes os números -1 e 1. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os números reais para os quais a função $f(x)$ é positiva.

a) $(-\infty, -1) \cup (0,1)$

b) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

c) $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

d) $(-\infty,\ -3) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

e) $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$

Comentários

Como sabemos que 1 e -1 são raízes, aplicaremos o algoritmo de Briot-Ruffini duas vezes seguidas, conforme:

1	1	−5	5	5	−6
−1	1	−4	1	6	0
	1	−5	6	0	

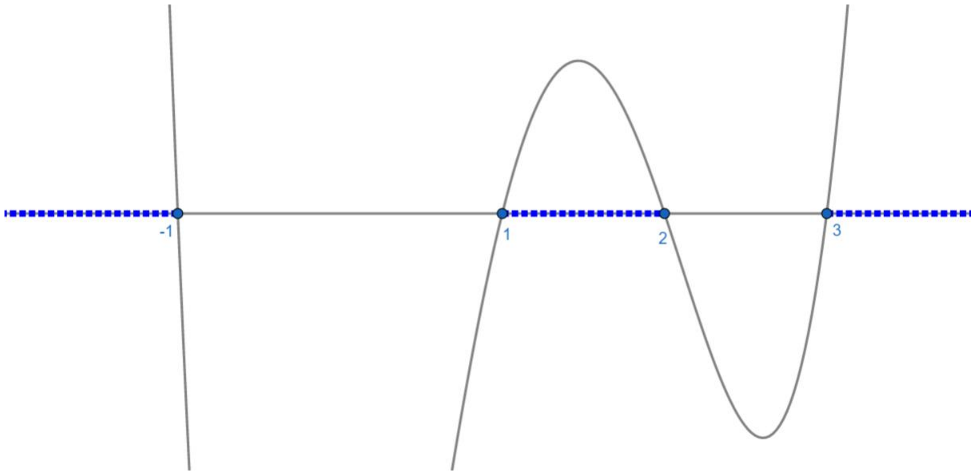
Sendo assim:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2 - 5x + 6)$$

Resolvendo a equação de segundo grau $x^2 - 5x + 6$, obtemos que as raízes são 3 e 2. Logo,

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$$

Fazendo o estudo dos sinais, obtemos sinal positivo para:



Sendo assim, temos

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$$

Gabarito: "e".

---

15. (EsPCEx/2014)

O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $q(x) = x^3 - 3x + 2$ deixa resto $r(x)$. Sabendo disso, o valor numérico de $r(-1)$ é

a) -10

b) -4

c) 0

d) 4

e) 10

Comentários

Efetuando a divisão, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - x^3 + x^2 + 1 & x^3 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} -x^5 + 3x^3 - 2x^2 & x^2 + 2 \\ \cline{1-1} 2x^3 - x^2 + 1 & \\ -2x^3 + 6x - 4 & \\ \cline{1-1} -x^2 + 6x - 3 & \end{array}$$

Logo, $r(x) = -x^2 + 6x - 3$

$$\Rightarrow \quad r(-1) = -(-1)^2 + 6\cdot(-1) - 3 = -10$$

Gabarito: "a".

---

16. (EEAR/2002)

O nº 1 é uma das raízes do polinômio $x^3 + 4x^2 + x - 6$. Com relação às outras raízes do polinômio, podemos afirmar que

a) ambas são negativas

b) uma é negativa e a outra é positiva

c) ambas são positivas

d) uma delas é nula

Comentários

Iremos utilizar o Algoritmo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \; x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1) \cdot (x^2 + 5x + 6)$$

Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + 5x + 6 = 0$ obtemos -2 e -3 como raízes, então,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$$

Portando, as duas outras raízes são -2 e -3, ambas são negativas.

Gabarito: “a”.

---

17. (EsPCEx/2015)

Considere os polinômios $p(x) = x^{80} + 3x^{79} - x^2 - x - 1$ e $b(x) = x^2 + 2x - 3$.. Sendo $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $b(x)$, o valor de $r\left(\frac{1}{2}\right)$ é igual a

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) 2

e) $\frac{5}{2}$

Comentários

Perceba que $b(x)$ tem grau 2, logo, $r(x)$ terá grau menor ou igual a 1.

Considere $r(x) = ax + b$.

Perceba também que $b(x) = x^2 + 2x - 3 = (x-1) \cdot (x+3)$

$$\Rightarrow \; b(1) = b(-3) = 0$$

Sendo assim:

$$p(x) = b(x) \cdot Q(x) + r(x)$$

$$\begin{cases} p(1) = b(1) \cdot Q(1) + r(1) \\ p(-3) = b(-3) \cdot Q(-3) + r(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(1) = r(1) \\ p(-3) = r(-3) \end{cases}$$

Mas,

$$p(1) = 1^{80} + 3 \cdot 1^{79} - 1^2 - 1 - 1 = 1$$

$$p(-3) = (-3)^{80} + 3 \cdot (-3)^{79} - (-3)^2 - (-3) - 1 =$$

$$p(-3) = 3^{80} - 3^{80} - 9 + 3 - 1 = -7$$

Então:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 1 + b \\ -7 = a \cdot (-3) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 3a - b = 7 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $a = 2$ e $b = -1$. Logo:

$$r(x) = 2x - 1$$

$$\Rightarrow r\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

Gabarito: “a”.

---

18. (EEAR/2017)

Considere $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$, tal que $P(1) = -2$ e $P(2) = 6$. Assim, os valores de b e c são, respectivamente,

a) 1 e 2

b) 1 e -2

c) -1 e 3

d) -1 e -3

Comentários

$$\begin{cases} P(1) = 2 \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 = -2 \\ P(2) = 2 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c = -4 \\ 2b + c = -5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos: $b = -1$ e $c = -3$

Gabarito: “d”.

---

19. (EEAR/2011)

Se o polinômio $P(x) = ax^3 - 3x^2 - bx - 3$ é divisível por $(x - 3)(x + 1)$, então o valor de $a + b$ é

a) 10

b) 8

c) 7

d) 5

Comentários

Se ele é divisível por $(x - 3)(x + 1)$ então, 3 e -1 são raízes de $P(x)$.

$$\begin{cases} P(3) = a(3)^3 - 3\cdot(3)^2 - b\cdot(3) - 3 = 0 \\ P(-1) = a(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - b\cdot(-1) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27a - 27 - 3b - 3 = 0 \\ -a - 3 + b - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a - b = 10 \\ -a + b = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Sendo assim, $a + b = 2 + 8 = 10$

Gabarito: “a”.

---

20. (EEAR/2017)

Sejam as funções polinomiais definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = f^{-1}(x)$. O valor de $g(3)$ é

a) 3

b) 2

c) 1

d) 0

Comentários

$$f(x) = y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\cdot(y - 1) = f^{-1}(y) = g(y)$$

$$g(3) = \frac{1}{2}\cdot(3 - 1) = 1$$

Gabarito: “c”.

---

21. (EEAR/2003)

Se 1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, então o valor de $x_2 - x_3$, para $x_2 > x_3$, é

a) 3

b) 1

c) 6

d) 5

Comentários

Iremos utilizar o Algoritmo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x^2 - x - 6)$$

Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - x - 6 = 0$ obtemos -2 e 3 como raízes, então,

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

Portando, as duas outras raízes são -2 e 3.

Logo,

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Por fim,

$$x_2 - x_3 = 3 - (-2) = 5$$

Gabarito: “d”.

---

22. (EEAR/2003)

Se o resto da divisão de $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + 5$ por $x - 2$ é 15, então o valor de $2m + n$ é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 5

Comentários

$$P(x) = (x-2)\cdot Q(x) + 15$$

$$P(2) = (2-2)\cdot Q(2) + 15$$

$$P(2) = 15$$

$$(2)^3 + m(2)^2 + n(2) + 5 = 15$$

$$8 + 4m + 2n + 5 = 15$$

$$4m + 2n = 2$$

$$2\cdot(2m+n) = 2$$

$$2m + n = 1$$

Gabarito: “a”.

---

23. (EEAR/2004)

Dado $P(x) = x^3 - (2m+4)x^2 + 9x + 13$, o valor de m, para que $3i$ seja raiz de $P(x)$, é

a) $-\frac{49}{18}$

b) $-\frac{23}{18}$

c) $-\frac{25}{6}$

d) $\frac{23}{18}$

Comentários

Queremos $P(3i) = 0$,

$$(3i)^3 - (2m+4)(3i)^2 + 9(3i) + 13 = 0$$

$$-27i + 9(2m+4) + 27i + 13 = 0$$

$$18m + 36 + 13 = 0$$

$$18m + 49 = 0$$

$$m = -\frac{49}{18}$$

Gabarito: "a".

---

24. (ESA/2016)

O conjunto solução da equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, é:

a) $S = \{-3;\ -1;\ 2\}$

b) $S = \{-0,5;\ -3;\ 4\}$

c) $S = \{-3;\ 1;\ 2\}$

d) $S = \{-2;\ 1;\ 3\}$

e) $S = \{0,5;\ 3;\ 4\}$

Comentários

Note que 1 é raiz. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x^2 - x - 6)$$

Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - x - 6 = 0$ obtemos -2 e 3 como raízes, então,

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

Portando, as raízes são $1, -2$ e 3.

$$S = \{-2;\ 1;\ 3\}$$

Gabarito: "d".

---

25. (ESA/2013)

Para que o polinômio do segundo grau $A(x) = 3x^2 - bx + c$, com $c > 0$ seja o quadrado do polinômio $B(x) = mx + n$,é necessário que

a) $b^2 = 4c$

b) $b^2 = 12c$

c) $b^2 = 12$

d) $b^2 = 36c$

e) $b^2 = 36$

Comentários

$$(mx+n)^2 = m^2x^2 + 2mnx + n^2$$

Queremos

$$3x^2 - bx + c = m^2x^2 + 2mnx + n^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 = 3 \\ 2mn = -b \\ n^2 = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (-b)^2 = (2mn)^2 = 4m^2n^2 = 4 \cdot 3 \cdot c = 12 \cdot c$$

$$b^2 = 12c$$

Gabarito: "b".

---

26. (ESA/2014)

Sendo o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ um cubo perfeito, então a diferença $a - b$ vale:

a) 3

b) 2

c) 1

d) 0

e) -1

Comentários

Seja α um valor a ser determinado para que a equação seja um cubo perfeito, conforme:

$$x^3 + 3x^2 + ax + b = (x+\alpha)^3$$

$$= x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3 = x^3 + 3x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} 3\alpha = 3 \\ 3\alpha^2 = a \\ \alpha^3 = b \end{cases} \Rightarrow \ \begin{cases} \alpha = 1 \\ 3 = a \\ 1 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Sendo assim,

$$a - b = 3 - 1 = 2$$

Gabarito: "b".

---

27. (ESA/2010)

Sabe-se que $1, a$ e b são raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 11x^2 + 26x - 16$, e que $a > b$. Nessas condições o valor de $a^b + \log_b a$ é:

a) $\frac{49}{3}$

b) $\frac{193}{3}$

c) 67

d) 64

e) 19

Comentários

Iremos utilizar o Algoritmo de Briot-Ruffini:

1	1	-11	26	-16
	1	-10	16	0

$$\Rightarrow x^3 - 11x^2 + 26x - 16 = (x-1) \cdot (x^2 - 10x + 16)$$

Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - 10x + 16 = 0$ obtemos 2 e 8 como raízes, então,

$$x^3 - 11x^2 + 26x - 16 = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-8)$$

Portando, as duas outras raízes são 2 e 8.

Logo,

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$$

Por fim,

$$a^b + \log_b a = 8^2 + \log_2 8 =$$
$$= 64 + \log_2 2^3 = 64 + 3$$
$$\Rightarrow a^b + \log_b a = 67$$

Gabarito: “c”.

---

28. (EsPCEx/2015)

Sendo R a maior das raízes da equação $\frac{11x+6}{x-4} = x^2$, então o valor de $2R - 2$ é:

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

Comentários

$$\frac{11x+6}{x-4} = x^2$$
$$11x + 6 = x^2 \cdot (x-4) = x^3 - 4x^2$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = 0$$

Por inspeção, perceba que -1 é raiz da equação, aplicando o Algoritmo de Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 1 & -4 & -11 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = (x+1) \cdot (x^2 - 5x - 6)$$

Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - 5x - 6 = 0$ obtemos -1 e 6 como raízes, então,

$$x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-6)$$

Portando, as raízes são -1 e 6. A maior das raízes é $R = 6$. Sendo assim,

$$2R - 2 = 2 \cdot 6 - 2 = 10$$

Gabarito: "e".

---

29. (EsPCEx/2012)

Um polinômio $q(x)$, do 2º grau, é definido por $q(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $a \neq 0$. Dentre os polinômios a seguir, aquele que verifica a igualdade $q(x) = q(1-x)$, para todo x real, é

a) $q(x) = a(x^2 + x) + c$

b) $q(x) = a(x^2 - x) + c$

c) $q(x) = a^2(x^2 - x) + c$

d) $q(x) = a^2(x^2 + x) + c$

e) $q(x) = a^2x + c$

Comentários

$$q(x) = q(1-x)$$

$$ax^2 + bx + c = a(1-x)^2 + b(1-x) + c =$$

$$= a(1 - 2x + x^2) + b - bx + c =$$

$$= ax^2 - (2a+b)x + (a+b+c)$$

$$\Rightarrow ax^2 - (2a+b)x + (a+b+c) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} -(2a+b) = b \\ a + b + c = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a = 2b \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = -a$$

Logo,

$$q(x) = ax^2 - ax + c = a(x^2 - x) + c$$

Gabarito: "b"

---

30. (EsPCEx/2011)

Os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são tais que $A(x) = B(x) + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. Sabendo-se que -1 é raiz de $A(x)$ e 3 é raiz de $B(x)$, então $A(3) - B(-1)$ é igual a:

a) 98

b) 100

c) 102

d) 103

e) 105

Comentários

$$A(-1) = 0$$
$$\Rightarrow B(-1) + 3(-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow B(-1) - 3 + 2 - 1 + 1 = 0$$
$$\therefore B(-1) = 1$$
$$B(3) = 0$$
$$A(3) = B(3) + +3(3)^3 + 2(3)^2 + (3) + 1 =$$
$$= 0 + 81 + 18 + 3 + 1 = 103$$
$$\therefore A(3) = 103$$

Logo,

$$A(3) - B(-1) = 103 - 1 = 102$$

Gabarito: "c".

---

31. (EsPCEx/2006)

Temos as funções:

$f(x) = x + 1$

$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$h(x) = g\big(f(x)\big)$

Considerando que as raízes de $h(x)$ são $\{-1;\ 0;\ 1\}$, determine $h(-2)$.

a) 0

b) -3

c) 4

d) 5

e) -6

Comentários

Observando-se $f(x)$ perceba que $g(f(x))$ trata-se de uma transformada aditiva da função $g(x)$.

$$\begin{cases} h(-1)=0 \\ h(0)=0 \\ h(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(f(-1))=0 \\ g(f(0))=0 \\ g(f(1))=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(-1+1)=0 \\ g(0+1)=0 \\ g(1+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0)=0 \\ g(1)=0 \\ g(2)=0 \end{cases}$$

Sendo assim, as raízes de $g(x)$ são $=\{0;\ 1;\ 2\}$. Portanto:

$$g(x)=(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)=$$

$$\therefore\ g(x)=x^3-3x^2+2x$$

$$x^3-3x^2+2x=x^3+ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$$

Sendo assim, temos que

$$h(-2)=g(f(-2))=g(-2+1)=g(-1)$$

$$g(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)=-6$$

$$h(-2)=-6$$

Gabarito: "e".

---

32. (AFA/2016)

Considere os polinômios $Q(x)=x^2-2x+1$ e $P(x)=x^3-3x^2-ax+b$, sendo a e b números reais tais que $a^2-b^2=-8$. Se os gráficos de $Q(x)$ e $P(x)$ têm um ponto em comum que pertence ao eixo das abscissas, então é INCORRETO afirmar sobre as raízes de $P(x)$ que

a) podem formar uma progressão aritmética

b) são todas números naturais.

c) duas são os números **a** e **b**

d) duas são números simétricos.

Comentários

Um ponto em comum pertencente ao eixo das abcissas é $(x_0, 0)$. Portanto, x_0 é raiz em comum de Q e P. As raízes de $Q(x)$:

$$Q(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

Portanto, sua raiz é única e igual a 1. Portanto, $x_0=1$. Esse ponto é também raiz de $P(x)$:

$$P(x_0)=P(1)=0\Rightarrow 1-3-a+b=0\Rightarrow \boxed{b-a=2}$$

Mas $a^2-b^2=-8\Rightarrow b^2-a^2=8\Rightarrow (b-a)(b+a)=8\Rightarrow 2(b+a)=8$

$$\Rightarrow \boxed{b+a=4}$$

Somando as duas equações emolduradas:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 1$$

Assim, o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x^2-1)$

$$\Rightarrow P(x) = (x-3)(x-1)(x+1)$$

Portanto, as raízes de $P(x)$ são 3, 1 e -1. Portanto, como -1 não é natural, a letra b) é incorreta. As demais alternativas estão corretas: as raízes estão em PA de razão 2 (-1, 1, 3); $a = 1$ e $b = 3$ são raízes; 1 e -1 são raízes simétricas.

Gabarito: “b”.

---

33. (AFA/2015)

Considere o polinômio $p(x) = ax^4 + bx^3 + 2x^2 + 1$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e marque a alternativa FALSA.

a) $x = 0$ não é raiz do polinômio $p(x)$

b) Existem valores distintos para a e b tais que $x = 1$ ou $x = -1$ são raízes de $p(x)$

c) Se $a = 0$ e $b = 3$, o resto da divisão de $p(x)$ por $3x^2 - x + 1$ é zero.

d) Se $a = b = 0$ tem-se que $x = -\frac{1}{2}i$ é uma raiz de $p(x)$, considerando que $i^2 = -1$

Comentários

Analisando o polinômio pelas alternativas:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + 2x^2 + 1$$

a) $P(0) = 1$, portanto, realmente $x = 0$ não é raiz. Verdadeira.

b) Se considerarmos que são raízes:

$$P(1) = 0 \Rightarrow a + b + 3 = 0 \Rightarrow a + b = -3$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow a - b + 3 = 0 \Rightarrow a - b = -3$$

Somando as duas equações:

$$2a = -6 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 0$$

Como encontramos $a \neq b$, então essa alternativa é verdadeira.

c) Se $a = 0\ e\ b = 3 \Rightarrow P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

$$\Rightarrow P(x) = 3x^3 - x^2 + x + 3x^2 - x + 1 = x(3x^2 - x + 1) + (3x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = (x+1)(3x^2 - x + 1)}$$

Portanto, esse polinômio é divisível por $3x^2 - x + 1$. Alternativa verdadeira.

d) $a = b = 0 \Rightarrow P(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$$

Assim as duas raízes de $P(x)$ seriam essas acima, que são distintas da que é dada nessa alternativa. Portanto, ela é falsa.

Gabarito: “d”.

---

34. (AFA/2012)

O polinômio $P(x) = x^4 - 75x^2 + 250x$ tem uma raiz dupla.

Em relação à $P(x)$ é correto afirmar que

a) apenas uma de suas raízes é negativa.

b) a sua raiz dupla é negativa.

c) três de suas raízes são negativas.

d) nenhuma de suas raízes é negativa.

Comentários

Vamos calcular as raízes de $P(x)$:

$$P(x) = x^4 - 75x^2 + 250x = x(x^3 - 75x + 250)$$

Veja que, por inspeção, $x = 5$ é raiz da equação acima. Fatorando para expor o fator $x - 5$:

$$P(x) = x(x^3 - 25x - 50x + 250) = x\big(x(x^2 - 25) - 50(x - 5)\big) = x(x-5)(x(x+5) - 50)$$

$$\Rightarrow P(x) = x(x-5)(x^2 + 5x - 50) = 0$$

Calculando as raízes da equação quadrática acima:

$$x^2 + 5x - 50 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-50) = 225$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-5 \pm 15}{2} = -10 \; ou \; 5$$

Portanto, conseguimos fatorar completamente $P(x)$, bem como descobrimos suas raízes:

$$P(x) = x(x-5)^2(x+10)$$

Raízes: $0, 5$ (dupla) e -10. Apenas uma delas é negativa.

Gabarito: "a".

---

35. (AFA/2011)

Sobre o polinômio $A(x)$ expresso pelo determinante da matriz $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & x & x \end{bmatrix}$, é INCORRETO afirmar que

a) não possui raízes comuns com $B(x) = x^2 - 1$.

b) não possui raízes imaginárias.

c) a soma de suas raízes é igual a uma de suas raízes.

d) é divisível por $P(x) = x + 2$.

Comentários

Calculando o determinante da matriz:

$$A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} \underbrace{=}_{*} \begin{vmatrix} x & 1 - x^2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$(*) \Rightarrow C_2 \leftarrow C_2 - x \cdot C_1$

Calculando o determinante por C_2 (coluna 2):

$$A(x) = (1 - x^2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = (x^2 - 1)(x + 2)$$

$$\Rightarrow A(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

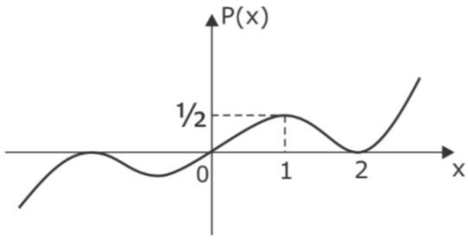
As raízes de $A(x)$ são $1, -1\ e - 2$. Portanto, veja que ele possui, sim, raízes em comum com $B(x)$, que são 1 e -1. Portanto, alternativa falsa é a letra a).

Gabarito: “a”.

---

36. (AFA/2010)

Observe a função polinomial P esboçada no gráfico abaixo.



Sabe-se que $x = 0$ ou $x = 2$ são raízes de P e que o resto da divisão de $P(x)$ por $[(x - 2) \cdot (x - 1) \cdot x]$ é $R(x)$.

As raízes de $R(x)$ são números

a) inteiros pares

b) inteiros ímpares

c) fracionários opostos

d) irracionais opostos

Comentários

Escrevendo o algoritmo da divisão de $P(x)$ por $[(x - 2) \cdot (x - 1) \cdot x]$, resultando num quociente $q(x)$ e resto $R(x)$:

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot x \cdot q(x) + R(x)$$

Sabemos que, pelas propriedades de divisão de polinômios, como o divisor é de terceiro grau, o resto tem que ser de segundo menor. Portanto, vamos considerar que seja de segundo grau, pelo menos.

Sabemos que 0 e 2 são raízes de P. Aplicando acima:

$$P(0) = 0 \Rightarrow P(0) = (0 - 2) \cdot (0 - 1) \cdot 0 \cdot q(0) + R(0) = 0 \Rightarrow R(0) = 0$$

Assim, 0 é também raiz de $R(x)$. Aplicando o ponto $x = 2$:

$$P(2) = 0 \Rightarrow P(2) = (2 - 2) \cdot (2 - 1) \cdot 2 \cdot q(2) + R(2) = 0 \Rightarrow R(2) = 0$$

Assim, vemos que 2 também é raiz de $R(x)$. Como ele é no máximo de segundo grau, então se tem duas raízes, ele de fato é de segundo grau, e suas raízes são 0 e 2, ambos inteiros pares.

Gabarito: “a”.

---

37. (EFOMM/2016)

Sabendo que $\frac{5}{2}$ é uma raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$, a soma das outras raízes é igual a:

a) -2

b) 0

c) 10

d) 1

e) -1

Comentários

Pelas relações de Girard, a soma das raízes de uma polinômio é igual ao simétrico do coeficiente de segundo maior grau, dividido pelo coeficiente de maior grau:

$$soma = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

Se chamarmos as outras duas raízes de $a\ e\ b$, então:

$$\frac{5}{2} + a + b = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a + b = -1}$$

Gabarito: “e”.

---

38. (EFOMM/2014)

O valor da soma de a e b, para que a divisão de $f(x) = x^3 + ax + b$ por $g(x) = 2x^2 + 2x - 6$ seja exata, é

a) -1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

Comentários

Se a divisão é exata, ou seja, não deixa restos, então quer dizer que, pelo algoritmo da divisão:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x)$$

Portanto, f e g têm mesmas raízes. Calculando as raízes de g, fatorando sua expressão:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 52$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \; ou \; -\frac{\sqrt{13}+1}{2}$$

Assim, $f\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right) = 0$. Mas antes de substituir para calcular o valor de a e b, vamos facilitar as contas:

Primeiramente, saibamos que, especificamente para esses valores:

$$2x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 - x$$

$$\Rightarrow x^3 = 3x - x^2 = 3x - (3 - x) = 4x - 3$$

Assim, para esses dois valores de x:

$$f(x) = x^3 + ax + b = 4x - 3 + ax + b = 0$$

Substituindo:

$$f\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) - 3 + a\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) + b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4\sqrt{13} - 10 + a\sqrt{13} - a + 2b = 0}$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right) - 3 + a\left(\frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right) + b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-4\sqrt{13} - 10 - a\sqrt{13} - a + 2b = 0}$$

Somando as duas equações emolduradas:

$$-20 - 2a + 4b = 0 \Rightarrow 2b - a = 10$$

Subtraindo as duas equações emolduradas:

$$8\sqrt{13} + 2a\sqrt{13} = 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

$$\Rightarrow 2b = a + 10 = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Assim, $a + b = -1$.

Gabarito: "a".

---

39. (Escola Naval/2017)

Seja $P(x) = x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ um polinômio do coeficientes inteiros e que $P(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$. O polinômio $R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^3 - 3x - 1$. Determine a soma dos coeficientes de $R(x)$ e assinale a opção correta.

a) -51

b) -52

c) -53

d) -54

e) -55

Comentários

Solução 1)

É dado que $P(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=0$. Assim, vamos tentar manipular a expressão abaixo para chegar no polinômio desejado:

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\Rightarrow x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}\Rightarrow\left(x-\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\Rightarrow x^3-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}x^2+6x=3$$

$$\Rightarrow x^3+6x-3=\sqrt{2}(3x^2+2)\Rightarrow(x^3+6x-3)^2=\left(\sqrt{2}(3x^2+2)\right)^2$$

$$\Rightarrow x^6+12x^4-6x^3+36x^2-36x+9=2(9x^4+12x^2+4)$$

$$\Rightarrow x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$$

Portanto, achamos o polinômio $P(x)$ de sexto grau, tal que $P(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=0$.

$$\Rightarrow P(x)=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$$

Queremos escrever $P(x)=(x^3-3x-1)q(x)+R(x)$.

Vamos fatorar $P(x)$ em busca do fator (x^3-3x-1):

$$P(x)=(x^6-3x^4-x^3)-(3x^4-9x^2-3x)-5x^3+15x+5+3x^2-54x-4$$

$$\Rightarrow P(x)=x^3(x^3-3x-1)-3x(x^3-3x-1)-5(x^3-3x-1)+3x^2-54x-4$$

$$\Rightarrow P(x)=(x^3-3x-1)(x^3-3x-5)+3x^2-54x-4$$

$$\Rightarrow R(x)=3x^2-54x-4$$

Assim, a soma dos coeficientes é:

$$3-54-4=-55$$

Solução 2)

Em questões desse tipo, a ideia é tentar obter um polinômio de coeficientes inteiros que tenha o número irracional como raiz manipulando o próprio número. Veja:

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=x\Rightarrow x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}\Rightarrow\left(x-\sqrt{2}\right)^3=3$$

Ou seja:

$$x^3-3\sqrt{2}x^2+6x+2\sqrt{2}=3\Rightarrow(x^3+6x-3)=\sqrt{2}(3x^2+2)$$

Elevando ao quadrado membro a membro:

$$x^6+36x^2+9+2(6x^4-3x^3-18x)=2(9x^4+12x^2+4)$$

Do que resulta:

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$$

Então seja $P(x)=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$.

Usando o método da chave, vamos dividir os polinômios:

$$\begin{array}{ccccccc|c} x^6 & 0 & -6x^4 & -6x^3 & 12x^2 & -36x & 1 & x^3-3x-1 \\ \hline \end{array}$$

$-x^6$	0	$3x^4$	x^3	0	0	0	x^3-3x-5
0	0	$-3x^4$	$-5x^3$	$12x^2$	$-36x$	1	
		$3x^4$	0	$-9x^2$	$-3x$	0	
		0	$-5x^3$	$3x^2$	$-39x$	1	
			$5x^3$	0	$-15x$	-5	
			0	$3x^2$	$-54x$	-4	

Logo, temos que:

$$P(x) = (x^3 - 3x - 1)(x^3 - 3x - 5) + 3x^2 - 54x - 4$$

A soma dos coeficientes de $R(x) = 3x^2 - 54x - 4$ é:

$$3 - 54 - 4 = -55$$

Gabarito: "e".

---

40. (Escola Naval/2016)

Sejam r_1, r_2, e r_3 as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Sabendo-se que as funções $f_1(x) = \log(4x^2 - kx + 1)$ e $f_2(x) = x^2 - 7\, arc\ sen\,(wx^2 - 8)$, com $k, w \in \mathbb{R}$, são tais que $f_1(r_1) = 0$ e $f_2(r_2) = f_2(r_3) = 4$, onde r_1 é a menor raiz positiva do polinômio $P(x)$, é correto afirmar que os números $(w + k)$ e $(w - k)$ são raízes da equação:

a) $x^2 - 6x - 2 = 0$

b) $x^2 - 4x - 12 = 0$

c) $x^2 - 4x + 21 = 0$

d) $x^2 - 6x + 8 = 0$

e) $x^2 - 7x - 10 = 0$

Comentários

Vamos calcular as raízes de $P(x)$. Por inspeção, vê-se que $x = 2$ é raiz. Fatorando em $x - 2$:

$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 =$

$$\Rightarrow P(x) = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - (2x - 4) = x^2(x - 2) + x(x - 2) - 2(x - 2)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x - 2)(x^2 + x - 2)$$

Também 1 é raiz da expressão quadrática acima. Fatorando buscando $x - 1$:

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - 1 + x - 1) = (x - 2)\big((x - 1)(x + 1) + (x - 1)\big)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1 + 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 2)$$

Assim, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ e $r_3 = -2$.

$$f_1(r_1) = 0 \Rightarrow \log(4 - k + 1) = 0 \Rightarrow \log 5 - k = 0 \Rightarrow 5 - k = 1 \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

$$f_2(-2) = f_2(2) = 4 \Rightarrow 4 - 7arcsen(4w - 8) = 4$$
$$\Rightarrow 7\,\text{arc sen}(4w - 8) = 0 \Rightarrow 4w - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{w = 2}$$

Assim, $w - k = 2 - 4 = -2$. E $w + k = 6$. Por soma e produto, esses números são raízes da equação:

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

Gabarito: "b".

---

41. (Escola Naval/2015)

Em uma $P.G.$, $a_4 = \frac{2(k^2+1)^2}{5k}$ e $a_1 = \frac{25k^2}{4(k^2+1)}$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$. Para o valor médio M de k, no intervalo onde a $P.G.$ é decrescente, o resto da divisão do polinômio $P(x) = \frac{5}{4}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 25x^2 - 10$ pelo binômio $\left(Mx - \frac{15}{8}\right)$ é

a) $\frac{1039}{32}$

b) $\frac{1231}{16}$

c) $\frac{1103}{32}$

d) $\frac{1487}{32}$

e) $\frac{1103}{16}$

Comentários

Vamos calcular a razão da PG em função de k:

$$a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{2(k^2+1)^2}{5k} \cdot \frac{4(k^2+1)}{25k^2} = \frac{8(k^2+1)^3}{5^3k^3}$$
$$\Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{8(k^2+1)^3}{5^3k^3}} = \frac{2(k^2+1)}{5k}$$

Sabemos que a PG somente é decrescente se $q < 1$:

$$\frac{2(k^2+1)}{5k} < 1 \Rightarrow 2k^2 + 2 < 5k \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 < 0$$
$$\Rightarrow 2k(k-2) - (k-2) < 0 \Rightarrow (k-2)(2k-1) < 0$$

Isso ocorre apenas para valores entre as raízes da expressão quadrática:

$$\frac{1}{2} < k < 2$$

Assim, M é o ponto médio desse intervalo acima:

$$M = \frac{\frac{1}{2} + 2}{2} = \frac{5}{4}$$

Assim, queremos saber o resto que $P(x)$ deixa na divisão por $\left(Mx - \frac{15}{8}\right)$. Pelo algoritmo da divisão:

$$P(x) = \left(\frac{5x}{4} - \frac{15}{8}\right)q(x) + R$$

Em que R é o resto. Perceba que, se aplicarmos $x = \frac{3}{2}$ acima:

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{15}{8} - \frac{15}{8}\right)q\left(\frac{3}{2}\right) + R = R$$

$$\Rightarrow R = P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\frac{3}{2} - 2\right) + 25 \cdot \frac{3^2}{2^2} - 10 = -\frac{5 \cdot 81}{128} + \frac{25 \cdot 9}{4} - 10$$

$$\Rightarrow R = \frac{5515}{128}$$

Como não há alternativa correta, a banca anulou essa questão no ano da prova.

Gabarito: "Anulada"

---

42. (Escola Naval/2014)

Considere $P(x) = (m-4)(m^2+4)x^5 + x^2 + kx + 1$ um polinômio na variável real x, em que m e k são constantes reais. Quais os valores das constantes $m\ e\ k$ para que $P(x)$ não admita raiz real?

a) $m = 4\ e - 2 < k < 2$

b) $m = -4\ e\ k > 2$

c) $m = -2\ e - 2 < k < 2$

d) $m = 4\ e\ |k| > 2$

e) $m = -2\ e\ k > -2$

Comentários

Veja que caso o coeficiente de x^5 não seja nulo, teremos um polinômio de grau ímpar e coeficientes reais. Isso nos diz que $P(x)$ deve ter, ao menos, uma raiz real. Como não queremos isso, devemos ter:

$$(m-4)(m^2+4) = 0 \Rightarrow m = 4$$

Já que m é uma constante real.

Dessa forma, somente nos resta o polinômio:

$$P(x) = x^2 + kx + 1$$

Para que ele não tenha raízes reais, seu discriminante deve ser negativo, logo:

$$\Delta = k^2 - 4 < 0 \Rightarrow |k| < 2\ ou - 2 < k < 2$$

Gabarito: "a".

---

43. (Escola Naval/2013)

Sejam $F(x) = x^3 + ax + b$ e $G(x) = 2x^2 + 2x - 6$ dois polinômios na variável real x, com a e b números reais. Qual valor de $(a + b)$ para que a divisão $\frac{F(x)}{G(x)}$ seja exata?

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Comentários

Se a divisão é exata, ou seja, não deixa restos, então quer dizer que, pelo algoritmo da divisão:

$$F(x) = G(x) \cdot q(x)$$

Portanto, F e G têm mesmas raízes. Calculando as raízes de G, fatorando sua expressão:

$$G(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 52$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \ ou - \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

Assim, $F\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) = F\left(\frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right) = 0$. Mas antes de substituir para calcular o valor de a e b, vamos facilitar as contas:

Primeiramente, saibamos que, especificamente para esses valores:

$$2x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 - x$$

$$\Rightarrow x^3 = 3x - x^2 = 3x - (3 - x) = 4x - 3$$

Assim, para esses dois valores de x:

$$F(x) = x^3 + ax + b = 4x - 3 + ax + b = 0$$

Substituindo:

$$F\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{2}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{2}\right) - 3 + a\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{2}\right) + b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4\sqrt{13} - 10 + a\sqrt{13} - a + 2b = 0}$$

$$F\left(\frac{-\sqrt{13} - 1}{2}\right) = 4\left(\frac{-\sqrt{13} - 1}{2}\right) - 3 + a\left(\frac{-\sqrt{13} - 1}{2}\right) + b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-4\sqrt{13} - 10 - a\sqrt{13} - a + 2b = 0}$$

Somando as duas equações emolduradas:

$$-20 - 2a + 4b = 0 \Rightarrow 2b - a = 10$$

Subtraindo as duas equações emolduradas:

$$8\sqrt{13} + 2a\sqrt{13} = 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

$$\Rightarrow 2b = a + 10 = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Assim, $a + b = -1$.

Gabarito: “b”.

---

44. (Rússia)

Sejam $a, b\ e\ c$ inteiros positivos distintos. Verifique se existe um polinômio $P(x) = kx^2 + lx + m$, k, l, m inteiros, $k > 0$, que assume os valores a^3, b^3, c^3 para valores inteiros de x.

Comentários

A grande sacada nessa questão é olhar para o polinômio:

$$Q(x) = P(x) - x^3$$

Além disso, o enunciado somente quer saber se existe ao menos um polinômio que satisfaz o fato de ele assumir os valores de $a^3, b^3\ e\ c^3$, isto é, para 3 inteiros $m, n\ e\ p$, devemos ter:

$$P(m) = a^3, P(n) = b^3\ e\ P(p) = c^3$$

Então, por conveniência, faça $m = a, n = b\ e\ p = c$. Disso, temos que:

$$Q(a) = P(a) - a^3 = a^3 - a^3 = 0$$

$$Q(b) = P(b) - b^3 = b^3 - b^3 = 0$$

$$Q(c) = P(c) - c^3 = c^3 - c^3 = 0$$

Ou seja, $a, b\ e\ c$ são raízes de $Q(x)$, do que podemos escrever:

$$Q(x) = P(x) - x^3 = A(x)(x-a)(x-b)(x-c)$$

Ou ainda:

$$P(x) = x^3 + A(x)(x-a)(x-b)(x-c)$$

Queremos que $P(x)$ seja do segundo grau. Ora, para isso basta fazer $A(x) = -1$, pois assim cortamos o termo x^3, veja:

$$P(x) = x^3 - (x-a)(x-b)(x-c) = (a+b+c)x^2 - (ab+ac+bc)x + abc$$

Veja que $P(x)$ é, de fato, do segundo grau, pois temos que:

$$a > 0, b > 0\ e\ c > 0 \Rightarrow a + b + c > 0 \Rightarrow a + b + c \neq 0$$

Como $a, b\ e\ c$ são inteiros positivos, os coeficientes de $P(x)$ são inteiros.

Logo, existe $P(x)$ do segundo grau e coeficientes inteiros que satisfazem o enunciado.

Gabarito: Existe o polinômio dado por $\boldsymbol{P(x) = (a+b+c)x^2 - (ab+bc+bc)x + abc}$.

---

45. (Rússia)

Sejam a, b, c reais. Prove que pelo menos uma das equações $x^2 + (a-b)x + (b-c) = 0$, $x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$, $x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ tem soluções reais.

Comentários

A negativa da afirmação “pelo menos uma” é “todas”. Vamos usar a redução ao absurdo.

Suponha que todas elas não possuem soluções reais. Disso, temos que seus discriminantes devem ser negativos, isto é:

$$(a-b)^2 - 4(b-c) < 0$$
$$(b-c)^2 - 4(c-a) < 0$$
$$(c-a)^2 - 4(a-b) < 0$$

Somando as três desigualdades, membro a membro:

$$(a-b)^2 - 4(b-c) + (b-c)^2 - 4(b-c) + (c-a)^2 - 4(a-b) < 0$$

Ou ainda:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 4(b-c+c-a+a-b) < 0$$
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 0$$

Mas $(a-b)^2, (b-c)^2\ e\ (c-a)^2$ são números reais, logo, a soma de seus quadrados deve ser positiva.

Disso, temos um absurdo e pelo menos uma delas deve ter uma raiz real.

Gabarito: Demonstração.

---

46. (Putnam and Beyond)

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n. Sabendo que:

$$P(k) = \frac{k}{k+1}, \qquad k = 0,1,\dots,n.$$

Encontre $P(m)$ para $m > n$.

Comentários

Observe que temos um polinômio de grau n e temos $n+1$ informações. Como $P(x)$ possui $n+1$ coeficientes, temos informações suficientes para determiná-los.

Pela relação dada, somos levados a olhar para o seguinte polinômio:

$$Q(x) = (x+1)P(x) - x$$

Veja que todo inteiro $x \in [0, n]$ é raiz de $Q(x)$, pelo enunciado.

Sabendo as raízes de $Q(x)$, podemos escrever:

$$Q(x) = a(x-0)(x-1)\dots(x-n) = (x+1)P(x) - x$$

Ou seja:

$$(x+1)P(x) = a(x-0)(x-1)\dots(x-n) + x$$

Fazendo $x = -1$, temos:

$$(-1+1)P(-1) = a(-1-0)(-1-1)\dots(-1-n) - 1 = 0$$

Ou ainda:

$$a(-1)^{n+1}(n+1)! = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}$$

Disso temos que, para $m > n$:

$$(m+1)P(m) = \frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}m(m-1)\dots(m-n) + m$$

Que resulta em:

$$P(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(-1)^{n+1}(n+1)!\,(m+1)} + \frac{m}{m+1}$$

Gabarito: $\boldsymbol{P(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(-1)^{n+1}(n+1)!(m+1)} + \frac{m}{m+1}}$**.**

---

47. (Putnam)

Verifique a igualdade

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$$

Comentários

Aparentemente, essa questão parece nada ter a ver com polinômios. Mas façamos o seguinte:

$$x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

Como temos raízes cúbicas, vamos tentar fazê-las desaparecer elevando a expressão acima ao cubo:

$$x^3$$
$$= 20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$$

Que simplificando, temos:

$$x^3 = 40 + 3x\left(\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\right) = 40 + 3x\left(\sqrt[3]{400-392}\right) = 40 + 6x$$

Ou seja, x satisfaz a seguinte equação:

$$x^3 - 6x - 40 = 0$$

Verifique que 4 é raiz dessa equação. Mas ela é a única raiz real?

Para sabermos isso, vamos usar Briot-Ruffini para dividir o polinômio por $x - 4$:

4	1	0	-6	-40
	1	4	10	0

Ou seja:

$$(x-4)(x^2+4x+10) = 0$$

Veja que:

$$x^2 + 4x + 10 = x^2 + 4x + 4 + 6 = (x+2)^2 + 6 \geq 6 > 0$$

Dessa forma, a única raiz real desse polinômio é $x = 4$, do que temos que:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$$

Gabarito: Demonstração.

---

48. (AIME/1986)

O polinômio

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{16} - x^{17}$$

Pode ser escrito na forma

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{16} y^{16} + a_{17} y^{17},$$

Onde $y = x + 1$ e os $a_i's$ são constantes. Encontre a_2.

Comentários

O primeiro passo nessa questão é perceber o seguinte:

$$p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{16} - x^{17} = \frac{x^{18} - 1}{-x - 1} =$$

$$= \frac{1 - x^{18}}{x + 1}$$

Pois o polinômio é dado por uma P.G. de razão $-x$ e primeiro termo 1.

Fazendo $x = y - 1$, temos:

$$p(y - 1) = \frac{1 - (1 - y)^{18}}{y} \Rightarrow yp(y - 1) = 1 - (1 - y)^{18}$$

Disso, temos que:

$$yp(y - 1) = y(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{17} y^{17}) = ya_0 + a_1 y^2 + a_2 y^3 + \cdots + a_{17} y^{18}$$

Queremos então o coeficiente de y^3 na expansão de:

$$1 - (1 - y)^{18}$$

Usando o binômio de Newton, temos que o termo y^3 é dado por:

$$-\binom{18}{3}(-y)^3(1)^{18-3} = \binom{18}{3} y^3$$

De tal forma que:

$$a_2 = \binom{18}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{a_2 = \binom{18}{3}}$**.**

---

49. (101 problems in algebra)

Qual o coeficiente de x^2 quando

$$(1 + x)(1 + 2x) \ldots (1 + 2^n x)$$

É expandido?

Comentários

O primeiro passo nessa questão é usar alguma notação. Vamos chamar esse polinômio de:

$$p_n(x) = (1+x)(1+2x)\dots(1+2^n x)$$

De modo que:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x)(1+2^n x)$$

Por que fizemos isso? A ideia aqui é tentar obter alguma recorrência, pois podemos achar facilmente o coeficiente de x na expansão, que é dado por:

$$1+2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$$

Ainda introduzindo mais notação, faça:

$$p_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

Do que temos que:

$$a_{k,0} = 1 \ \ \forall k, e \ a_{n,1} = 2^{n+1}-1$$

Usando essa notação, queremos:

$$a_{n,2}$$

Para isso, veja que como $a_{n,1} = 2^{n+1}-1$, devemos ter $a_{n-1,1} = 2^n - 1$. Do que podemos escrever:

$$p_n(x) = (1 + (2^n-1)x + \cdots + a_{n-1,n-1}x^{n-1})(1+2^n x)$$

Ou seja, temos que:

$$a_{n,2} = a_{n-1,2} + 2^{2n} - 2^n \Rightarrow a_{n,2} - a_{n-1,2} = 2^{2n} - 2^n$$

Essa relação é válida para todo n natural, como você deve provar usando o P.I.F.

Assim podemos escrever:

$$a_{n,2} - a_{n-1,2} = 2^{2n} - 2^n$$
$$a_{n-1,2} - a_{n-2,2} = 2^{2n-2} - 2^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$a_{2,2} - a_{1,2} = 2^4 - 2^2$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$a_{n,2} - a_{1,2} = (2^{2n} + \cdots + 2^{2\cdot 2}) - (2^n + \cdots + 2^2)$$

Veja que $a_{1,2} = 2$. Do que temos:

$$a_{n,2} = 2 + \frac{2^{2n+2}-2^4}{4-1} - \frac{2^{n+1}-4}{2-1}$$

$$a_{n,2} = \frac{(2\cdot 3 + 2^{2n+2} - 2^4 - 3\cdot 2^{n+1} + 3\cdot 4)}{3} = \frac{2^{2n+2} - 3\cdot 2^{n+1} + 2}{3}$$

Por fim:

$$a_{n,2} = \frac{(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{a_{n,2} = \frac{(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)}{3}}$.

50. (Problem Solving Strategies)

Sejam a, b e c três inteiros distintos, e seja P um polinômio com coeficientes inteiros. Mostre que, nesse caso, as condições

$$P(a) = b, P(b) = c \text{ e } P(c) = a$$

Não podem ser satisfeitas simultaneamente.

Comentários

Vamos usar a prova por contradição.

Suponha que seja possível atender às condições do enunciado. Dessa forma, teríamos:

$$P(x) - b = (x-a)P_1(x), eq. 01$$
$$P(x) - c = (x-b)P_2(x), eq. 02$$
$$P(x) - a = (x-c)P_3(x). eq. 03$$

Entre os números a, b e c, vamos escolher o par que possui a maior diferença absoluta. Suponha que seja $|a-c|$. Dessa maneira, temos:

$$|a-b| < |a-c| \; ineq. 01$$

Faça $x = c$ na primeira equação, disso temos que:

$$a - b = (c-a)P_1(c)$$

Como $P_1(c)$ é um inteiro, temos que:

$$|P_1(c)| \geq 1$$

Note que $P_1(c) \neq 0$, pois caso isso ocorresse, teríamos $a = b$, o que contraria o fato de eles serem distintos.

Logo:

$$|a-b| = |c-a||P_1(c)| \geq |c-a|$$

Ou seja:

$$|a-b| \geq |c-a|$$

Que, comparando com a primeira inequação, é uma contradição. Logo, as relações não podem ser satisfeitas simultaneamente.

Gabarito: Demonstração

51. Desafio

Obtenha um polinômio do 4º grau que verifique a identidade

$$P(x) - P(x-1) \equiv x^3$$

E utilize-o para obter uma fórmula para

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Comentários

Seja $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Queremos que:

$$P(x) - P(x-1) = x^3$$

Assim:

$$P(x) - P(x-1)$$
$$= (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) - [a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1) + e - e] = x^3$$

Ou ainda:

$$a(x^4 - (x-1)^4) + b(x^3 - (x-1)^3) + c(x^2 - (x-1)^2) + d\big(x - (x-1)\big) = x^3$$

Calculando termo a termo, temos:

Para o coeficiente a:

$$x^4 - (x-1)^4 = (x^2 + (x-1)^2)(x^2 - (x-1)^2) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$$

Para o coeficiente b:

$$(x^3 - (x-1)^3) = (1)(x^2 + x(x-1) + (x-1)^2) = 3x^2 - 3x + 1$$

Para o coeficiente c:

$$(x^2 - (x-1)^2) = (1)(2x-1) = 2x - 1$$

Para o coeficiente d:

$$x - (x-1) = 1$$

Ou seja:

$$a(4x^3 - 6x^2 + 4x - 1) + b(3x^2 - 3x + 1) + c(2x - 1) + d = x^3$$

Logo:

$$4ax^3 + (-6a + 3b)x^2 + (4a - 3b + 2c)x - a + b - c + d = x^3$$

Assim:

$$4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$-6 \cdot \frac{1}{4} + 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Do que segue que:

$$P(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + e$$

Note que, para n natural, temos:

$$P(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + e$$

E ainda:

$$P(n) - P(n-1) = n^3$$

Fazendo o somatório membro a membro desde $n = 1$, temos:

$$P(n) - P(n-1) = n^3$$
$$\vdots$$
$$P(1) - P(0) = 1^3$$

Do que resulta:

$$P(n) - P(0) = n^3 + \cdots + 1^3$$

Mas $P(0) = e$, ou seja:

$$P(n) - P(0) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

Perceba que isso é o quadrado da soma:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ou seja:

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)$$

Gabarito: $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

---

52. (Problemas Selectos -Lumbreras)

Seja P um polinômio tal que $P(xy) = P(x) + P(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ e $P(10) = 0$. Calcule $P(7) + P(99) + P(1001)$.

Comentários

Primeiramente, vamos provar um resultado que será importante:

$$P(xy) = P(x) + P(y) \Rightarrow P(x_1 \cdot \ldots \cdot x_m) = P(x_1) + \cdots + P(x_m)\ eq.01$$

Para todo $m \geq 2$ natural.

Caso inicial: $m = 2$ é dado no enunciado.

Hipótese de indução: $P(x_1 \cdot \ldots \cdot x_k) = P(x_1) + \cdots + P(x_k)$.

Queremos:

$$P(x_1 \cdot \ldots \cdot x_{k+1}) = P(x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1}) = P(x_1 \cdot \ldots \cdot x_k) + P(x_{k+1})$$

Da hipótese de indução:

$$P(x_1 \cdot \ldots x_k) = P(x_1) + \cdots + P(x_k)$$

Do que segue que:

$$P(x_1 \cdot \ldots \cdot x_{k+1}) = P(x_1) + \cdots + P(x_{k+1})$$

Seja ainda $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

Faça $x_1 = \cdots = x_n = x$ e $m = n + 2$ na equação 01. Disso, temos que:

$$P(x^{n+1}) = (n+1)P(x)$$

Ou ainda:

$$a_n(x^{n+2})^n + \cdots + a_1(x^{n+2}) + a_0 = (n+2)(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$$

A relação acima deve ser válida para todo x real. Logo, os coeficientes dos termos de mesmo expoente devem ser iguais. Disso, temos que:

$$a_n = \cdots = a_1 = 0$$

E:

$$(n+2)a_0 = a_0 \Rightarrow (n+1)a_0 = 0$$

Como $n \geq 0$, devemos ter $a_0 = 0$.

Por fim:

$$P(x) \equiv 0$$

Logo:

$$P(7) + P(99) + P(1001) = 0$$

Gabarito: 0.

Questões ITA Comentadas

53. (ITA/2020)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - mx^2 + x + 5 + n$, sendo m, n números reais fixados. Sabe-se que toda raiz $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, da equação $p(z) = 0$ satisfaz a igualdade $a = mb^2 + nb - 1$. Então, a soma dos quadrados das raízes de $p(z) = 0$ é igual a

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

Comentários

Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinômio possui 3 raízes. Além disso, como os coeficientes do polinômio são reais, se tivermos uma raiz complexa, pelo teorema da raiz complexa conjugada, podemos afirmar que o conjugado dessa raiz também é raiz. Assim, temos as seguintes possibilidades:

I) duas raízes complexas e uma real

II) três raízes reais

Para o caso II de apenas raízes reais, temos da condição do enunciado, que toda raiz $z = a + bi$ satisfaz a igualdade $a = mb^2 + nb - 1$, ou seja, as raízes reais implicam $b = 0$. Logo, todas as raízes são:

$$z = a = m(0)^2 + n(0) - 1 \Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 = -1$$

Aplicando a relação de Girard para a soma do produto dois a dois:

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1$$

Mas, como $z_1 = z_2 = z_3 = -1$:

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = (-1)(-1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) = 3$$

Portanto, chegamos a um absurdo!

A única possibilidade é a I, duas raízes complexas conjugadas e uma real. Então, sejam as raízes, para $p, q, r \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = p + qi$$

$$z_2 = p - qi$$

$$z_3 = r$$

Da condição do enunciado:

$$a = mb^2 + nb - 1$$

$$z_1 \Rightarrow p = mq^2 + nq - 1 \ \ (eq.I)$$

$$z_2 \Rightarrow p = mq^2 - nq - 1 \ \ (eq.II)$$

Da $eq.I$ e $eq.II$, temos $nq = 0$, logo:

$$p = mq^2 - 1$$

$$nq = 0$$

Se $q = 0$, teremos raízes reais, portanto, $n = 0$.

Como $z_3 = r$, temos $r = -1 \therefore z_3 = -1$.

O polinômio é:

$$p(x) = x^3 - mx^2 + x + 5$$

Aplicando Girard:

$$z_1 + z_2 + z_3 = m \Rightarrow p + qi + p - qi - 1 = m \Rightarrow \boxed{2p = m + 1 \ (eq.III)}$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \Rightarrow (p + qi)(p - qi) + (-1)(p + qi + p - qi) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p^2 + q^2 = 1 + 2p \ (eq.IV)}$$

$$z_1 z_2 z_3 = -5 \Rightarrow (p + qi)(p - qi)(-1) = -5 \Rightarrow \boxed{p^2 + q^2 = 5 \ (eq.V)}$$

Usando a $eq.V$ na $eq.IV$:

$$5 = 1 + 2p \Rightarrow 2p = 4 \therefore p = 2$$

Substituindo $p = 2$ na $eq. IV$:

$$4 + q^2 = 1 + 4 \Rightarrow q = \pm 1$$

Assim, a soma dos quadrados das raízes é:

$$S = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (p + qi)^2 + (p - qi)^2 + (-1)^2$$

$$S = p^2 + 2pqi - q^2 + p^2 - 2pqi - q^2 + 1 = 2p^2 - 2q^2 + 1 = 2(2)^2 - 2(-1)^2 + 1$$

$$S = 7$$

Gabarito: "b".

---

54. (ITA/2020)

Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que:

I. $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$;

II. a soma das raízes de $p(x)$ é igual a 1;

III. o produto das raízes de $p(x)$ é igual a 3;

IV. $p(-1) = -\frac{15}{4}$;

então, $p(1)$ é igual a

a) $-\frac{17}{2}$.

b) $-\frac{19}{4}$.

c) $-\frac{3}{2}$.

d) $\frac{9}{4}$.

e) $\frac{9}{2}$.

Comentários

De cada afirmação, temos:

I) Como $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$, temos:

$$p(x) = q(x)(x^2 - 4)$$

As raízes do polinômio $x^2 - 4$ são $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, desse modo:

$$p(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$$

$$p(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$$

II) Por Girard:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow b = -a$$

III) Por Girard:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{e}{a} = 3 \Rightarrow e = 3a$$

IV) Substituindo $x = -1$ no polinômio:

$$p(-1) = a - b + c - d + e = -\frac{15}{4}$$

Para $b = -a$ e $e = 3$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0 \\ 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0 \\ a - b + c - d + e = -\frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 8a + 4c + 2d + 3a = 0 \\ 16a + 8a + 4c - 2d + 3a = 0 \\ a + a + c - d + 3a = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11a + 4c + 2d = 0 \\ 27a + 4c - 2d = 0 \\ 5a + c - d = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

Multiplicando a última equação por 2:

$$\begin{cases} 11a + 4c + 2d = 0 \\ 27a + 4c - 2d = 0 \\ 10a + 2c - 2d = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda e a primeira com a terceira:

$$\begin{cases} 38a + 8c = 0 \\ 21a + 6c = -\frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19a + 4c = 0 \\ 7a + 2c = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19a + 4c = 0 \\ -14a - 4c = 5 \end{cases} \Rightarrow 5a = a \therefore a = 1$$

$$\therefore b = -1 \text{ e } e = 3$$

$$19a + 4c = 0 \Rightarrow 19 + 4c = 0 \therefore c = -\frac{19}{4}$$

$$11a + 4c + 2d = 0 \Rightarrow 11 + 4\left(-\frac{19}{4}\right) + 2d = 0 \Rightarrow -8 + 2d = 0 \therefore d = 4$$

Queremos $p(1)$, logo:

$$p(1) = a + b + c + d + e = 1 - 1 - \frac{19}{4} + 4 + 3 = -\frac{19}{4} + 7 = \frac{-19 + 28}{4} = \frac{9}{4}$$

Gabarito: “d”.

---

55. (ITA/2020)

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 10x^4 - 4x^3 + 25x^2 + 20x + 28$.

a) Determine dois números reais α e β de modo que f possa ser reescrita como $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$.

b) Determine o valor mínimo de f.

c) Determine o(s) ponto(s) $x \in \mathbb{R}$ onde f assume seu valor mínimo.

Comentários

a) $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$

$$f(x) = x^6 + 25x^2 + \alpha^2 + 2\alpha x^3 - 10\alpha x - 10x^4 + \beta$$
$$f(x) = x^6 - 10x^4 + 2\alpha x^3 + 25x^2 - 10\alpha x + \alpha^2 + \beta$$

Comparando a equação encontrada com a equação da função dada:

$$2\alpha x^3 = -4x^3 \ \therefore\ \alpha = -2 \text{ ou } -10\alpha x = 20x \therefore\ \alpha = -2$$

&

$$\alpha^2 + \beta = 28 \therefore 4 + \beta = 28 \therefore \beta = 24$$

b) Substituindo os valores encontrados:

$$f(x) = (x^3 - 5x - 2)^2 + 24$$
$$f(x) = q(x) + 24$$

Como $q(x) \geq 0$, $f(x)mín = 24$

c) $q(x) = (x^3 - 5x - 2)^2 = 0$

Por verificação, percebe-se que -2 é raiz.

Então: $q(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 1)$

Resolvendo a equação de segundo grau: as raízes obtidas são: $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$

Logo, as raízes de $q(x)$ são $-2, (1 + \sqrt{2})$ e $(1 - \sqrt{2})$.

Gabarito: a) $\alpha = -2$ e $\beta = 24$ b) $f_{mín}(x) = 24$ c) $-2; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}$

---

56. (ITA/2020)

Determine todos os números inteiros k entre 0 e 200 para os quais o polinômio $p_k(x) = x^3 - x^2 - k$ possui uma única raiz inteira. Para cada um desses valores de k, determine a raiz inteira correspondente.

Comentários

Suponha que $\alpha \in \mathbb{Z}$ seja a raiz inteira do polinômio. Aplicando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

α	1	-1	0	$-k$
	1	$\alpha - 1$	$\alpha^2 - \alpha$	$\alpha^3 - \alpha^2 - k$

Assim, podemos escrever:

$$p_k(x) = (x - \alpha)[x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha^2 - \alpha]$$
$$Resto = \alpha^3 - \alpha^2 - k = 0$$

Do resto, temos:

$$\alpha^3 - \alpha^2 - k = 0 \Rightarrow \alpha^2(\alpha - 1) = k$$

Como $k \in [0, 200]$ e $\alpha \in \mathbb{Z}$, temos que $\alpha^2 \geq 0$, logo $\alpha - 1 \geq 0$, ou seja, $\alpha \geq 1$. Sendo k um número natural, temos que $\alpha^2(\alpha - 1)$ também deve ser um número natural. Para isso, devemos ter $\alpha \in \mathbb{N}$. Testando as possibilidades:

$$\alpha = 1 \Rightarrow 1^2(1-1) = 0 = k$$
$$\alpha = 2 \Rightarrow 2^2(2-1) = 4 = k$$
$$\alpha = 3 \Rightarrow 3^2(3-1) = 18 = k$$
$$\alpha = 4 \Rightarrow 4^2(4-1) = 48 = k$$
$$\alpha = 5 \Rightarrow 5^2(5-1) = 100 = k$$
$$\alpha = 6 \Rightarrow 6^2(6-1) = 180 = k$$
$$\alpha = 7 \Rightarrow 7^2(7-1) = 294 > 200$$

Portanto, as possíveis raízes inteiras são: $\alpha \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Devemos provar que essas raízes são as únicas inteiras.

Vamos analisar o polinômio quadrático e verificar se há outra raiz inteira.

$$p_k(x) = (x-\alpha)[x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha]$$
$$q(x) = x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha$$

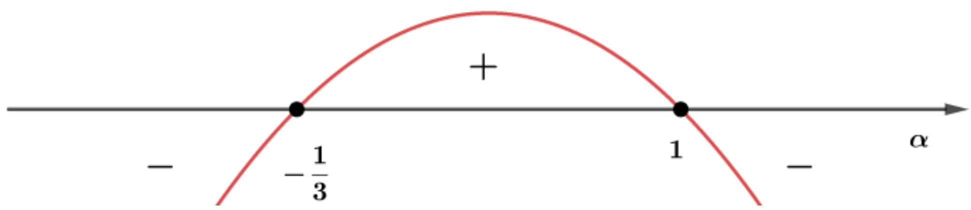
Analisando o discriminante:

$$\Delta = (\alpha-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha^2 - \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4\alpha^2 + 4\alpha$$
$$\Delta = -3\alpha^2 + 2\alpha + 1$$

Encontrando as raízes, temos:

$$\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{-6} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-6} = 1 \ ou - \frac{1}{3}$$

Fazendo o estudo do sinal para Δ:



Note que para $\alpha > 1$, o discriminante sempre será negativo e isso implica que as outras raízes são complexas. Vamos analisar a raiz $\alpha = 1$:

$$p_k(x) = (x-\alpha)[x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha] \Rightarrow p_0(x) = (x-1)x^2$$

Nesse caso, temos uma raiz 0 com multiplicidade 2 e uma raiz 1 e isso não satisfaz a condição do enunciado. Portanto, as únicas raízes são:

$$S = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \{2; 3; 4; 5; 6\}}$

---

57. (ITA/2018)

As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

Comentários

Se você parar para observar, o polinômio apresentado pode ser encarado como uma soma de P.G. de primeiro termo 1 e razão z. Seja então a equação abaixo:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = 0$$

Vamos ver se $z = 1$ é raiz dessa equação:

$$1 + 1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5 + 1^6 + 1^7 = 6 \neq 0$$

Dado que $z = 1$ não é raiz da equação, podemos escrever a equação dada como sendo:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = \frac{z^8 - 1}{z - 1} = 0$$

Da soma de P.G.

Ou seja:

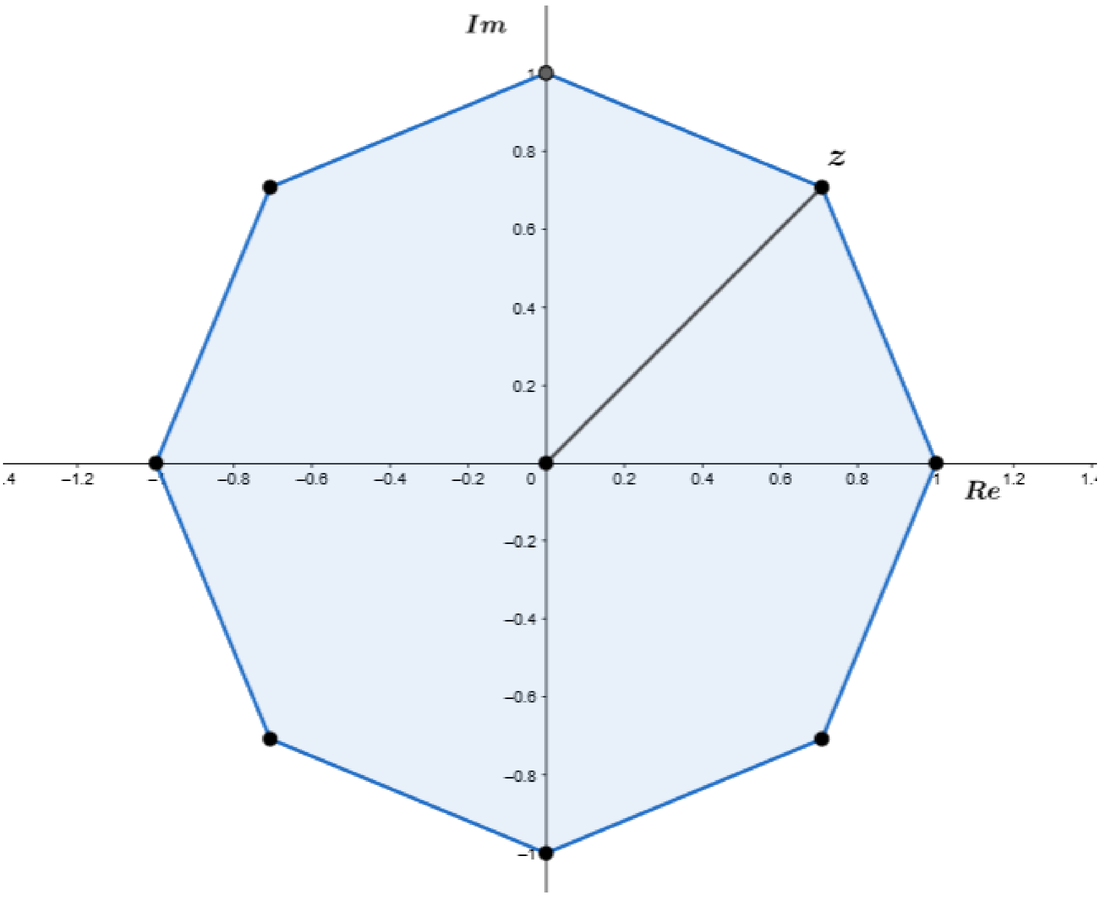
$$z^8 - 1 = 0$$

Do estudo dos números complexos, conhecemos bem essa equação: são as raízes oitavas da unidade. De maneira mais geral, sabe-se que as raízes da equação:

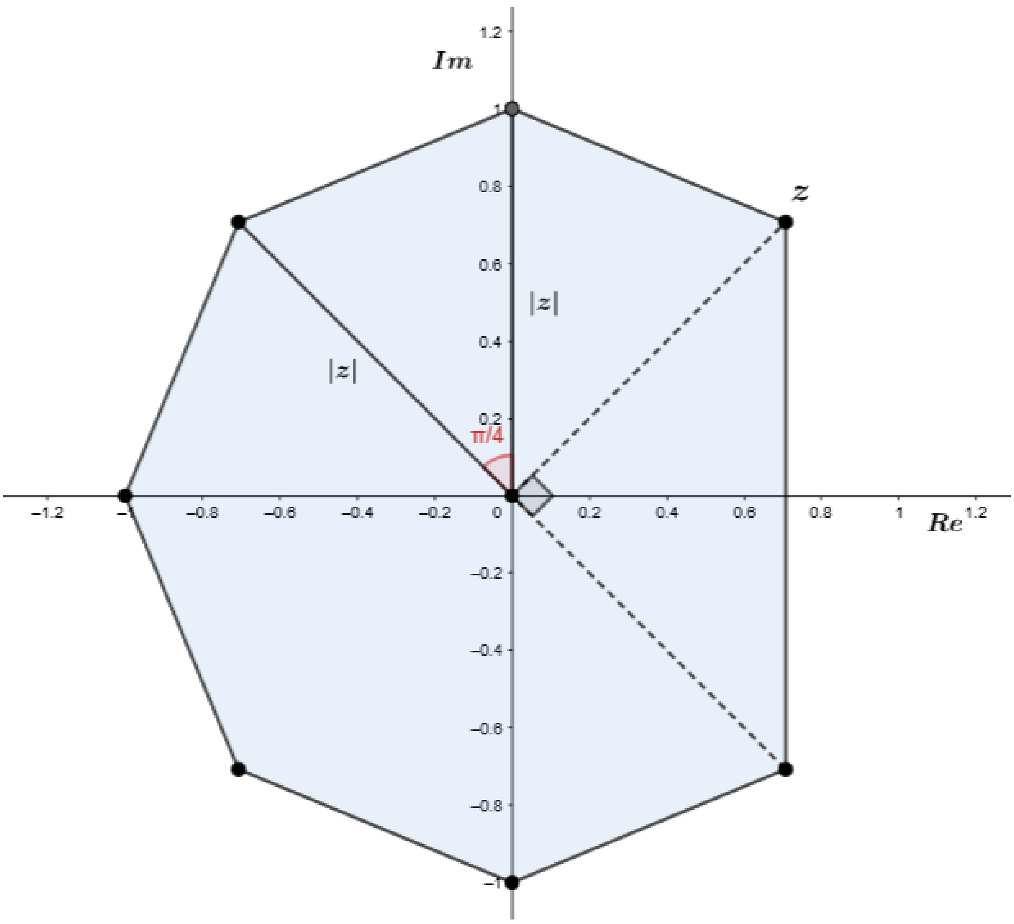
$$z^n - 1 = 0$$

Formam um polígono regular de n lados.

Então, vamos desenhar as raízes da equação $z^8 - 1 = 0$ no plano complexo:



Mas devemos lembrar que $z = 1$ não é raiz dessa equação, do que segue que o polígono convexo formado pelas raízes do polinômio é dado pela figura abaixo:



O polígono regular é formado por 8 triângulos com o ângulo mais interno dado por:

$$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

A área de cada triângulo é dada por:

$$A_{triângulo} = |z| \cdot |z| \cdot \frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

Mas lembre-se de que:

$$z^8 - 1 = 0 \Rightarrow |z|^8 = 1 \Rightarrow |z| = 1, pois\ |z| \in \mathbb{R}$$

Ou seja:

$$A_{triângulo} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Na figura acima, temos 6 triângulos, ou seja:

$$6 \cdot A_{triângulo} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

O triângulo restante é retângulo de área:

$$A = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Do que segue que a área total é:

$$A_{total} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

Gabarito: "d".

---

58. (ITA/2017)

Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2$$

a) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

b) Determine as raízes de $p(x)$.

Comentários

O primeiro conceito que deve ser relembrado é a igualdade de polinômios. Dois polinômios são iguais se e somente se os coeficientes correspondentes aos termos de mesmo grau, isto é, x^n, forem iguais.

Item a:

O primeiro passo é desenvolver a expressão fornecida para $p(x)$:

$$p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2) = x^4 + bx^3 + 2x^2 + ax^3 + abx^2 + 2ax + x^2 + bx + 2$$

$$p(x) = x^4 + (a + b)x^3 + (3 + ab)x^2 + (2a + b)x + 2$$

Utilizando a igualdade de polinômios, temos que:

$$\begin{cases} a + b = -1 - 2\sqrt{3} \\ 3 + ab = 3 + 2\sqrt{3} \\ 2a + b = -1 - 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos:

$$a = -2\sqrt{3} \ e \ b = -1$$

Item b:

Vamos utilizar o resultado o item a. Dele, temos:

$$p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$$

Ou ainda:

$$p(x) = (x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)(x^2 - x + 2)$$

Para achar suas raízes, devemos fazer $p(x) = 0$. Logo:

$$\left(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1\right)(x^2 - x + 2) = 0$$

Ou seja:

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \ eq.01$$

Ou

$$x^2 - x + 2 = 0 \ eq.02$$

Resolvendo a $eq.01$ para x:

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Resolvendo a $eq.02$ para x:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7})$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7})$$

Logo, seu conjunto solução é:

$$S = \{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})\}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{a = -2\sqrt{3}}$; $\boldsymbol{b = -1}$ b) $\boldsymbol{S = \{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})\}}$.

---

59. (ITA/2016)

Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

Comentários

Primeiramente, observe que:

$$x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1$$

Por que fizemos isso? A ideia é trabalhar com um polinômio de grau mais baixo possível, de forma que possamos obter as informações mais facilmente e, se possível, de maneira direta.

Nesse caso, é útil tentar evidenciar o termo $(x+1)$, pois ele compõe o polinômio divisor.

Usando o binômio de Newton, temos que:

$$[x(x+1)+1]^{40} = \binom{40}{0}[x(x+1)]^0 + \binom{40}{1}[x(x+1)]^1 + \cdots + \binom{40}{40}[x(x+1)]^{40}$$

Ou seja, a partir do expoente 3 dos termos do binômio, podemos colocar em evidência $(x+1)^3$, veja:

$$(x+1)^3\left[\binom{40}{40}x^{40}(x+1)^{37} + \cdots + \binom{40}{3}x^3\right] + \binom{40}{2}x^2(x+1)^2 + \binom{40}{1}x(x+1) + \binom{40}{0}$$

Dessa forma, temos que $(1+x+x^2)^{40}$ possui o mesmo resto que

$$h(x) = \binom{40}{2}x^2(x+1)^2 + \binom{40}{1}x(x+1) + \binom{40}{0} = 780x^2(x+1)^2 + 40x(x+1) + 1$$

Na divisão por $(x+1)^3$.

Vamos usar a mesma ideia para tentar simplificar ainda mais o polinômio obtido. Antes de continuar, veja que:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

No polinômio $h(x)$, obtido acima, temos que a única parcela candidata a possuir algum fator $(x+1)^3$ é $780x^2(x+1)^2$. Vamos tentar evidenciar esse fator. Veja:

$$x^2(x+1)^2 = x(x^3+2x^2+x) = x(x^3+3x^2+3x+1-x^2-2x-1)$$
$$= x(x+1)^3 - (x^3+2x+x) = x(x+1)^3 - (x+1)^3 + (x+1)^2$$

Dessa forma, em nossa análise do resto da divisão, podemos desprezar as parcelas $x(x+1)^3 - (x+1)^3$, de modo que restará apenas o polinômio:

$$780(x+1)^2 + 40x(x+1) + 1$$

Esse polinômio possui grau 2, de modo que não é mais possível evidenciar um fator $(x+1)^3$, pois ele é do terceiro grau. Disso, concluímos que esse polinômio é o próprio resto.

$$r(x) = 780(x+1)^2 + 40x(x+1) + 1$$

Lembre-se que o termo constante de um polinômio é obtido fazendo $x = 0$, logo:

$$r(0) = 780 + 1 = 781$$

Gabarito: 781.

---

60. (ITA/2015)

Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0,1,\ldots,15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

a) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Comentários

Em questões que envolvem a divisão de polinômios é sempre útil escrever a seguinte relação:

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

Do estudo dos polinômios, sabemos que o grau de $r(x)$ é no máximo 2, pois $q(x)$ tem grau 3.

Além disso, como $p(x)$ possui coeficientes reais, temos que se i é tal que $p(i) = 0$, então $p(-i) = 0$.

Ele nos fornece $p(2)$, então é conveniente verificar o valor de $q(2)$:

$$q(2) = 8 - 8 + 2 - 2 = 0$$

Ou seja, 2 é raiz de $q(x)$.

Vamos usar Briot-Ruffini para fatorar $q(x)$:

2	1	-2	1	-2
	1	0	1	0

Ou seja:

$$q(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$$

Dessa forma, podemos ver que $\pm i$ também são raízes de $q(x)$.

Em resumo, possuímos três informações:

1- $p(2) = g(2)q(2) + r(2) = 0 \Rightarrow r(2) = 1$;
2- $p(i) = g(i)q(i) + r(i) = 0 \Rightarrow r(i) = 0$;
3- $p(-i) = g(-i)q(-i) + r(-i) = 0 \Rightarrow r(-i) = 0$.

Das informações acima, temos que $\pm i$ são raízes de $r(x)$. Como ele possui grau no máximo 2, elas são todas as suas raízes. Assim, podemos escrever:

$$r(x) = a(x + i)(x - i) = a(x^2 + 1)$$

Da informação 1, temos:

$$r(2) = a(2^2 + 1) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

Por fim, temos:

$$r(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$$

Gabarito: "b".

61. (ITA/2015)

Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p.

Comentários

Item a:

Sejam $z, \bar{z}\ e\ x_R$ suas raízes, em que x_R é real e $z\ e\ \bar{z}$ são complexas conjugadas. Das relações de Girard, podemos escrever que:

$$-\left(-\frac{\beta}{18}\right) = x_R z\bar{z}$$

Mas uma de suas raízes complexas não reais possui módulo 1. Do estudo dos complexos, temos que:

$$z\bar{z} = z^2 = |z|^2 = 1^2 = 1$$

Ou seja:

$$\frac{\beta}{18} = x_R$$

Como $p(x_R) = 0$, temos:

$$18\left(\frac{\beta}{18}\right)^3 + \beta\left(\frac{\beta}{18}\right)^2 - 7\left(\frac{\beta}{18}\right) - \beta = 0$$

$$\frac{\beta^3}{162} - \frac{25\beta}{18} = 0 \Leftrightarrow \beta\left(\frac{\beta^2}{162} - \frac{25}{18}\right) = 0$$

Resolvendo para β, temos:

$$\beta = 0\ ou\ \beta = 15\ ou\ \beta = -15$$

Item b:

Para $\beta = 0$:

$$p(z) = 18z^3 - 7z = 0 \Leftrightarrow z(18z^2 - 7) = 0$$

$$z = 0\ ou\ z = \pm\sqrt{\frac{7}{18}}$$

Para $\beta = 15$:

$$p(z) = 18z^3 + 15z^2 - 7z - 15$$

Do item anterior, temos que uma de suas raízes é $x_R = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.

Usando Briot-Ruffini:

$\frac{5}{6}$	18	15	-7	-15
	18	30	18	0

Ou seja:

$$p(z) = \left(z - \frac{5}{6}\right)(18z^2 + 30z + 18)$$

As raízes de $18z^2 + 30z + 18 = 0$, usando Bháskara, são:

$$z = \frac{1}{6}(-5 + i\sqrt{11}) \; ou \; z = -\frac{1}{6}(5 + i\sqrt{11})$$

Para $\beta = -15$:

$$p(z) = 18z^3 - 15z^2 - 7z + 15$$

Do item anterior, temos que uma de suas raízes é $x_R = \frac{-15}{18} = -\frac{5}{6}$.

Usando Briot-Ruffini:

$-5/6$	18	-15	-7	15
	18	-30	18	0

Ou seja:

$$p(z) = \left(z + \frac{5}{6}\right)(18z^2 - 30z + 18)$$

As raízes de $18z^2 - 30z + 18 = 0$, usando Bháskara, são:

$$z = \frac{1}{6}(5 + i\sqrt{11}) \; ou \; z = \frac{1}{6}(5 - i\sqrt{11})$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{\beta} \in \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{15}\}$ **b) Soluções** $= \left\{\mathbf{0}, \pm\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\mathbf{5} \pm \boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{11}}), \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(-\mathbf{5} \pm \boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{11}}), \pm\sqrt{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}}}\right\}$

62. (ITA/2015)

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

Comentários

Item a:

Primeiramente, temos um problema de análise combinatória. Observe que um polinômio de grau 4 possui 5 coeficientes. Desses, três devem ser 2 e dois devem ser 1.

Assim, basta escolher dois lugares para colocar os números "1" e, automaticamente, os outros três serão ocupados por números "2". De quantas formas podemos escolher 2 lugares dentre 5? Do estudo das técnicas de contagem, sabemos que é:

$$\binom{5}{2} = 10$$

Item b:

Seja $p(x)$ um polinômio conforme o enunciado. Podemos escrevê-lo, de maneira mais geral, como sendo:

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Se -1 é uma de suas raízes, devemos ter:

$$p(-1) = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0$$

Ou seja:

$$a_4 + a_2 + a_0 = a_3 + a_1$$

Suponha que os números "1" estejam separados, um de cada lado da igualdade acima.

Teríamos, por exemplo:

$$1 + 2 + 2 = 1 + 2$$

Que é absurdo. Logo, os números "1" devem estar do mesmo lado da igualdade.

Suponha que eles estejam do lado direito.

Teríamos, necessariamente:

$$2 + 2 + 2 = 1 + 1$$

Que é absurdo. Ou seja, eles devem estar juntos no lado esquerdo da igualdade. Para que isso aconteça, temos 3 possibilidades, veja:

$$1 + 1 + 2 = 2 + 2$$

$$1 + 2 + 1 = 2 + 2$$

$$2 + 1 + 1 = 2 + 2$$

Dessa forma, temos os polinômios:

$$p_1(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$$

$$p_2(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$p_3(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

Gabarito: a) 10 ; b) $\boldsymbol{A = \{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2, x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1, 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1\}}$

---

63. (ITA/2014)

Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 - iz - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

a) $-3i, -1, 1.$

b) $-i, i, 1.$

c) $-i, i, -1.$

d) $-2i, -1, 1.$

e) $-2i, -i, i.$

Comentário

Se $2i$ é uma raiz do polinômio, então:

$$p(2i) = 0 \Rightarrow (2i)^4 + a(2i)^3 + 5(2i)^2 - i(2i) - 6 = 0$$

Resolvendo, temos:

$$a = i$$

Assim, o polinômio fica:

$$p(z) = z^4 + iz^3 + 5z^2 - iz - 6$$

Cuidado! Os coeficientes de $p(z)$ não são reais, então, não podemos garantir de início que $-2i$ também é raiz. Verifique que não é.

Além disso, observe que:

$$p(1) = 1 + i + 5 - i - 6 = 0$$

Ou seja, 1 é raiz de $p(z)$. Vamos usar Briot-Ruffini:

1	1	i	5	$-i$	-6
	1	$1+i$	$6+i$	6	0

Usando novamente, agora para $2i$:

$2i$	1	$1+i$	$6+i$	6
	1	$1+3i$	$3i$	0

Assim, $p(z)$ fica:

$$p(z) = (z - 2i)(z - 1)(z^2 + (1 + 3i)z + 3i)$$

Olhando para o fator $z^2 + (1 + 3i)z + 3i$, temos que as raízes são:

$$z^2 + (1 + 3i)z + 3i = 0$$

$$z = \frac{-(1 + 3i) \pm \sqrt{(1 - 3i)^2}}{2} = \frac{-1 - 3i \pm (1 - 3i)}{2} \Rightarrow z = -1 \; ou \; z = -3i$$

Gabarito: “a”.

64. (ITA/2012)

Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i-\sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x)=x-5$ obtém-se resto zero e que $p(1)=20(5+2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

a) $5\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

b) $15\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

c) $30\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

d) $45\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

e) $50\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

Comentários

O enunciado coloca de maneira desorganizada, mas já temos todas as raízes do polinômio, pois, se ele possui coeficientes reais, então $2i$ e $-i-\sqrt{3}$ também são raízes de $p(x)$, uma vez que eles são os conjugados complexos de $-2i$ e $i-\sqrt{3}$, respectivamente.

Além disso, $q(x)$ divide $p(x)$, ou seja:

$$p(x)=g(x)(x-5)\Rightarrow p(5)=g(5)\cdot 0=0$$

Portanto, 5 também é raiz de $p(x)$.

Como ele possui grau 5, temos todas as suas raízes. Assim, podemos escrever:

$$p(x)=a(x-5)(x-2i)(x+2i)(x+(-i-\sqrt{3}))(x+(i-\sqrt{3}))$$

Ou ainda:

$$p(x)=a(x-5)(x^2+4)(x^2+2\sqrt{3}x+4)$$

Do enunciado, temos que $p(1)=20(5+2\sqrt{3})$, do que segue:

$$20\left(5+2\sqrt{3}\right)=a(1-5)(1^2+4)\left(1^2+2\sqrt{3}+4\right)\Rightarrow a=-1$$

Assim, o polinômio fica:

$$p(x)=-(x-5)(x^2+4)(x^2+2\sqrt{3}x+4)$$

Por fim:

$$p(-1)=-(-1-5)((-1)^2+4)((-1)^2-2\sqrt{3}+4)$$

$$\therefore p(-1)=30(5-2\sqrt{3})$$

Gabarito: "c".

---

65. (ITA/2010).

Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{15}a_nx^n$ com coeficientes $a_0=-1$ e $a_n=1+ia_{n-1}$, $n=1,2,\dots,15$. Das afirmações:

I. $p(-1)\notin\mathbb{R}$,

II. $|p(x)| \leq 4\left(4+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right), \forall x \in [-1,1]$,

III. $a_8 = a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) II e III.

Comentários

Primeiramente, vamos tentar conhecer melhor o polinômio fornecido. Para isso, vamos calcular seus coeficientes de índices mais baixos usando a_0 que foi fornecido:

$$a_1 = 1 + ia_0 = 1 - i$$
$$a_2 = 1 + i(1-i) = 2 + i$$
$$a_3 = 1 + i(2+i) = 2i$$
$$a_4 = 1 + i(2i) = -1$$

Perceba que $a_4 = a_0$. Disso, temos que os coeficientes começam a se repetir de quatro em quatro vezes, pois a lei de recorrência nos garante isso.

Disso, temos que o polinômio pode ser escrito da seguinte forma:

$$p(x) = -(1 + x^4 + x^8 + x^{12}) + (1-i)(x + x^5 + x^9 + x^{13})$$
$$+(2+i)(x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14}) + 2i(x^3 + x^7 + x^{11} + x^{15})$$

Vamos julgar os itens:

Item I:

Vamos calcular $p(-1)$:

$$p(-1) = -(4) + (1-i)(-4) + (2+i)(4) + 2i(-4) = 4(-1-1+i+2+i-2i) = 0$$

Ou seja:

$$p(-1) = 0 \in \mathbb{R}$$

Portanto, é falso.

Item II:

O primeiro fato para o qual devemos atentar é que $x \in [-1,1]$. Que informação útil isso nos traz? Observe que a questão fala sobre módulo. Podemos então afirmar que:

$$|x| \leq 1$$

Além disso, do estudo dos números complexos, sabemos que, se temos n números complexos, podemos afirmar que:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

Podemos escrever $p(x)$ como sendo:

$$p(x) = (1 + x^4 + x^8 + x^{12})(-1 + (1 + i)x + (2 + i)x^2 + 2ix^3)$$

Do que temos:

$$|p(x)| = |1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \cdot | - 1 + (1 + i)x + (2 + i)x^2 + 2ix^3|$$

Usando a desigualdade acima, temos que:

$$|1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \leq 1 + |x^4| + |x^8| + |x^{12}|$$

E ainda:

$$|-1 + (1 + i)x + (2 + i)x^2 + 2ix^3| \leq |-1| + |(1 + i)x| + |(2 + i)x^2| + |2ix^3|$$

Observe que $|x| \leq 1 \Rightarrow |x^n| = |x|^n \leq 1$, pois $0 \leq |x|$. Prove isso por indução.

Dessa forma, temos que:

$$|1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \leq 1 + |x^4| + |x^8| + |x^{12}| \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

E ainda:

$$|-1 + (1 + i)x + (2 + i)x^2 + 2ix^3| \leq |-1| + |(1 + i)x| + |(2 + i)x^2| + |2ix^3|$$
$$\leq 1 + |1 + i| + |2 + i| + |2i| \leq 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + 2 \leq 3 + \sqrt{2} + \sqrt{5} \leq 4 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

Multiplicando as desigualdades, temos:

$$|1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \cdot |-1 + (1 + i)x + (2 + i)x^2 + 2ix^3| \leq 4(4 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$$

Ou seja:

$$|p(x)| \leq 4(4 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$$

Portanto o item é verdadeiro.

Item III:

Como os coeficientes se repetem de quatro em quatro, podemos dizer que $a_4 = a_8$.

Verdadeira.

Gabarito: "e".

---

66. (ITA/2008)

Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

a) 30

b) 32

c) 34

d) 36

e) 38

Comentários

O fato básico que resolve essa questão é lembrar que o grau do polinômio resultante do produto de n outros polinômios é a soma dos graus desses polinômios. Dessa forma, se q é a razão dessa progressão, podemos representar os graus por:

$$(2, 2q, 2q^2, 2q^3, 2q^4)$$

Usando o fato básico, temos:

$$2 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 = 62 \Rightarrow q^4 + q^3 + q^2 + q = 30$$

Observe que, como os graus de polinômios são números naturais, q também é natural. Dessa maneira, o polinômio $q^4 + q^3 + q^2 + q$ é crescente à medida que q cresce, pois é a soma de números positivos.

Vamos calcular o valor desse polinômio para $q = 3$:

$$3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 = 120 \geq 30$$

Ou seja, para todo q natural acima de 3, temos que a soma é maior que 30, do que segue que a solução para essa equação, no domínio dos naturais deve ser 1 ou 2.

Vamos verificar:

$$q = 1 \Rightarrow 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 = 4 \neq 30$$
$$q = 2 \Rightarrow 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = 30$$

Portanto, $q = 2$ é a única solução e o maior termo dessa sequência é 32.

Gabarito: "b".

---

67. (ITA/2008)

Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = \frac{1}{2}$, então $p(-2)$ é igual a

a) -25

b) -27

c) -36

d) -39

e) -40

Comentários

Se $x = -1$ é raiz do polinômio, então, temos que:

$$p(-1) = -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0$$

Além disso, como os coeficientes formam uma P.A., temos que os termos da sequência são:

$$(a_3 - 2r, a_3 - r, a_3, a_3 + r, a_3 + 2r)$$

Do que temos que:

$$p(-1) = -(a_3 + 2r) + (a_3 + r) - a_3 + a_3 - r - a_3 + 2r = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

Assim, a sequência fica:

$$(-2r, -r, 0, r, 2r)$$

Do enunciado, temos que:

$$a_4 = \frac{1}{2} = r$$

Assim, os coeficientes do polinômio são:

$$a_1 = -1; a_2 = -\frac{1}{2}; a_3 = 0; a_4 = \frac{1}{2}; a_5 = 1$$

Logo, o polinômio é:

$$p(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Por fim:

$$p(-2) = (-2)^5 + \frac{1}{2}(-2)^4 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 1 = -25$$

Gabarito: “a”.

---

68. (ITA/2007)

Um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

a) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0.$

b) $\pi^2x^3 + \pi^3x^2 + x + 1 = 0.$

c) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0.$

d) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0.$

e) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0.$

Comentários

Primeiramente, vamos estabelecer os termos da progressão geométrica. Sejam eles:

$$(A_1, A_2, A_3)$$

Do enunciado, temos que:

$$A_1 = BH$$

$$A_2 = \frac{BH}{2}$$

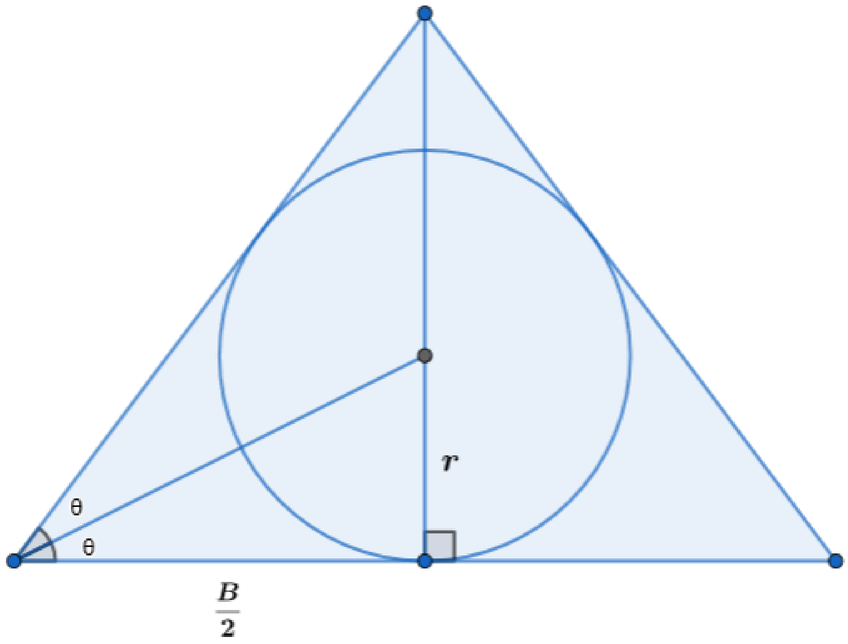
Disso, observamos que a razão da progressão é $\frac{1}{2}$, do que segue que:

$$A_3 = \frac{BH}{4}$$

Seja r o raio da circunferência inscrita no triângulo. Disso, temos que:

$$\pi r^2 = \frac{BH}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{BH}{4\pi}$$

Observe a seguinte figura:



Dela, podemos escrever que:

$$tg(\theta) = \frac{2r}{B} \; e \; tg(2\theta) = \frac{2H}{B}$$

Da trigonometria, temos que:

$$tg(2\theta) = \frac{2tg(\theta)}{1 - tg^2(\theta)}$$

Ou seja:

$$\frac{2H}{B} = \frac{\frac{4r}{B}}{1 - \frac{4r^2}{B^2}} \Rightarrow 2H = \frac{2rB^2}{B^2 - 4r^2} \Rightarrow H(B^2 - 4r^2) = 2rB^2$$

Substituindo r^2 na equação acima, para simplificar, temos:

$$H\left(B^2 - \frac{4BH}{4\pi}\right) = 2rB^2 \Rightarrow H\left(\frac{B}{H} - \frac{1}{\pi}\right) = 2r\left(\frac{B}{H}\right)$$

Elevando ao quadrado, membro a membro, temos:

$$H^2\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2 - 2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) = 4r^2\left(\frac{B}{H}\right)^2$$

Substituindo r^2 novamente, temos:

$$H^2\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2 - 2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) = 4\left(\frac{BH}{4\pi}\right)\left(\frac{B}{H}\right)^2$$

Logo:

$$\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2 - 2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{B}{H}\right)^3$$

Faça $\frac{B}{H} = x$, logo:

$$x^2 - \frac{2x}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}x^3$$

Ou ainda:

$$\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0$$

Gabarito: "d".

---

69. (ITA/2007)

Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos$(x+a)^3 - (x+b)^3$.

Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a

a) 104.

b) 114.

c) 124.

d) 134.

e) 144.

Comentários

Primeiramente, vamos fatorar a diferença de cubos fornecida. Veja:

$$(x+a)^3 - (x+b)^3 = (a-b)[(x+a)^2 + (x+a)(x+b) + (x+b)^2]$$

Para fatorar a diferença de cubos, usamos a seguinte identidade:

$$m^3 - n^3 = (m-n)(m^2 + mn + n^2)$$

Continuando o desenvolvimento da diferença de cubos, temos:

$$(a-b)[(x+a)^2 + (x+a)(x+b) + (x+b)^2] =$$

$$(a-b)(x^2 + 2ax + a^2 + x^2 + (a+b)x + ab + x^2 + 2bx + b^2) =$$

$$3(a-b)x^2 + (a-b)(3a+3b)x + (a-b)(a^2+ab+b^2) =$$

$$3(a-b)x^2 + (a-b)(3a+3b)x + a^3 - b^3$$

Ou seja:

$$3(a-b) = 9 \Rightarrow a - b = 3$$

E:

$$(a-b)(3a+3b) = 3(a-b)(a+b) = -63 \Rightarrow (a-b)(a+b) = -21$$

Mas $a - b = 3$, logo:

$$3(a+b) = -21 \Rightarrow a+b = -7$$

Resolvendo para a e b:

$$a = -2 \; e \; b = -5$$

Por fim, segue que:

$$c = a^3 - b^3 = (-2)^3 - (-5)^3 \Rightarrow c = 117$$

Calculando o que se pede:

$$|a + |b| - c| = |-2 + 5 - 117| = 114$$

Gabarito: "b".

---

70. (ITA/2007)

Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

a) 9.

b) 7.

c) 5.

d) 3.

e) 1.

Comentários

Primeiramente, sabemos que se $z^3 + z^2 + z + 1$ é um fator de $Q(z)$, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$Q(z) = q(z)(z^3 + z^2 + z + 1\,)$$

Em que $q(z)$ é um polinômio do segundo grau, pois $Q(z)$ é um polinômio do quinto grau.

Vamos usar as informações fornecidas:

$$Q(0) = 2 \Rightarrow q(0)(0^3 + 0^2 + 0 + 1) = 2 \Rightarrow q(0) = 2$$
$$Q(1) = q(1)(1^3 + 1^2 + 1 + 1) = 8 \Rightarrow q(1) = 2$$

Como $q(0) = q(1) = 2$, podemos afirmar que 1 e 0 são raízes de:

$$p(z) = q(z) - 2$$

Ou seja:

$$p(z) = a(z-1)z = q(z) - 2 \Rightarrow q(z) = a(z-1)z + 2$$

Se $q(z)$ é de grau 2, logo, $p(z)$ também será.

Substituindo em $Q(z)$, vem:

$$Q(z) = [a(z-1)z + 2](z^3 + z^2 + z + 1\,)$$

Dessa forma, observe que a será o coeficiente de z^5. Portanto, $a = 1$.

Ou seja:

$$Q(z) = (z^2 - z + 2)(z^3 + z^2 + z + 1\ )$$

Queremos $Q(z) = 0$, o que implica

$$z^2 - z + 2 = 0$$

Que, resolvendo para z, resulta em

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

Em que z tem o quadrado de seu módulo dado por $|z|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{1+7}{4} = 2$. Além disso, ambas possuem o mesmo módulo pois são conjugadas.

Ou:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Note que $z \neq 1$ nesse caso. Perceba que temos uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão z e, como $z \neq 1$, podemos escrever:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{z^4 - 1}{z - 1} = 0 \Rightarrow z^4 = 1$$

Não estamos interessados em saber quais são as raízes dessa equação, apenas no quadrado do seu módulo. Então:

$$z^4 = 1 \Rightarrow |z|^4 = 1 \Rightarrow |z|^2 = \pm 1$$

Mas $|z|^2 \geq 0$. Do que segue que:

$$|z|^2 = 1$$

Ou seja, suas três raízes obedecem à relação acima.

Queremos a soma dos quadrados dos módulos. Temos então:

$$Soma\ dos\ quadrados\ dos\ módulos = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$$

Gabarito: "b".

---

71. (ITA/2006)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a+1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é

a) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$.

b) $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$.

d) $\{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$.

e) $\mathbb{N}$.

Comentários

Um passo fundamental para a resolução dessa questão é perceber que $p(1) = 0$, veja:

$$p(1) = 1^3 - (a+1) \cdot 1 + a = 1 + a - (1+a) = 0$$

De posse de uma das raízes, que é inteira, podemos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para dividir o polinômio por $x - 1$:

1	1	0	$-a-1$	a
	1	1	$-a$	0

Logo, podemos escrever:

$$p(x) = (x-1)(x^2 + x - a)$$

Sabemos que uma das raízes de $p(x)$ é inteira. Para que todas sejam, seu fator $x^2 + x - a$ deve zerar para algum $n \in \mathbb{Z}$, isto é:

$$n^2 + n - a = 0$$

Essa equação possui solução geral:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

Ou seja:

$$2n + 1 = \pm\sqrt{1+4a} \Rightarrow (2n+1)^2 - 1 = 4a \Rightarrow 2n(2n+2) = 4a \Rightarrow a = n(n+1)$$

Portanto, concluímos que se tomarmos $a = n(n+1)$, com $n \in \mathbb{Z}$, atendemos as condições do enunciado.

Gabarito: “d”.

---

72. (ITA/2005)

No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a

a) $-\frac{1}{2}$.

b) $-\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) 1.

e) $\frac{3}{2}$.

Comentários

Vamos usar, sucessivamente, as condições que ele nos impôs.

Condição 1: 0 é raiz de $p(x)$.

$$p(0) = (c+1)^5 = 0 \Rightarrow c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$$

Condição 2: -1 é raiz de $p(x)$.

$$p(-1) = (a + 2b)^5 = 0 \Rightarrow a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b$$

Dessa forma, o polinômio pode ser escrito como:

$$p(x) = (-2bx^2 - 2bx)^5 = (-2b)^5(x^2 + x)^5$$

Antes de fazer o desenvolvimento de $p(x)$, observe que, dado um polinômio $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, temos que:

$$g(1) = a_n(1)^n + \cdots + a_1(1) + a_0 = a_n + \cdots + a_1 + a_0$$

Ou seja, para calcular a soma dos coeficientes de um polinômio qualquer, basta calcular seu valor para $x = 1$.

Condição 3: Os coeficientes de $p(x)$, no desenvolvimento, somam 32.

Conforme visto acima, temos:

$$p(1) = (-2b)^5(1^2 + 1)^5 = 32 \Rightarrow (-2b)^5 = 1$$

Como $b \in \mathbb{R}$, vem:

$$-2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Por fim:

$$a + b + c = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Gabarito: “a”.

---

73. (ITA/2003)

Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) -6.

b) -4.

c) 4.

d) 7.

e) 9.

Comentários

Do estudo da divisão de polinômios, podemos escrever as seguintes equações:

$$P(x) = q_1(x)(x - 1) + 2$$
$$P(x) = q_2(x)(x + 1) + 3$$
$$P(x) = q_3(x)(x - 2)$$

Perceba que:

$$P(1) = q_1(1)(1 - 1) + 2 = 2$$

$$P(-1) = q_2(-1)(-1+1) + 3 = 3$$
$$P(2) = q_3(2)(2-2) = 0$$

Ou seja:

$$P(1) = 1 + a + b + c + 1 = 2 \Rightarrow a + b + c = 0$$
$$P(-1) = -1 + a + b - c + 1 = 3 \Rightarrow a + b - c = 3$$
$$P(2) = 32 + 16a + 4b + 2c + 1 = 0 \Rightarrow 16a + 4b + 2c = -33$$

Obtemos, então, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b - c = 3 \\ 16a + 4b + 2c = -33 \end{cases}$$

Da primeira equação, temos:

$$a + b = -c$$

Substituindo na segunda:

$$-c - c = 3 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

Substituindo c na terceira equação:

$$16a + 4b - 3 = -33 \Rightarrow 8a + 2b = -15 \Rightarrow b = \frac{-15 - 8a}{2}$$

Ou seja:

$$a + \frac{-15 - 8a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a - 15 - 8a = 3 \Rightarrow -6a = 18 \Rightarrow a = -3$$

Por fim:

$$b = \frac{-15 - 8 \cdot (-3)}{2} = \frac{9}{2}$$

Queremos:

$$\frac{ab}{c} = \frac{-3 \cdot \frac{9}{2}}{-\frac{3}{2}} = 9$$

Gabarito: "e".

---

74. (ITA/2003)

Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, cujos coeficientes $2, a_2, \ldots, a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com razão $q > 0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5460$, tem-se que o valor de $(n^2 - q^3)/q^4$ é igual a:

a) 5/4.

b) 3/2.

c) 7/4.

d) 11/6.

e) 15/8.

Comentários

Se $2, a_2, \dots, a_n$ formam uma P.G., nesta ordem, podemos escrever a n-upla ordenada dos coeficientes:

$$(2, 2q, \dots, 2q^{n-1})$$

Substituindo no polinômio:

$$P(x) = 2x + 2qx^2 + \cdots + 2q^{n-1}x^n$$

Temos que $x = -\frac{1}{2}$ é raiz de $P(x)$, ou seja:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2q\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 2q^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Vamos pegar um termo qualquer de coeficiente de índice i de $P\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$2q^{i-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^i = (-1)^i q^{i-1}\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right) = (-1)\left(-\frac{q}{2}\right)^{i-1}$$

Seja, então, a progressão geométrica de termos b_i definidos por:

$$b_i = (-1)\left(-\frac{q}{2}\right)^{i-1}$$

Note que:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{-\frac{q}{2} - 1} = 0 \Rightarrow b_{n+1} = b_1$$

Isto é:

$$(-1)\left(-\frac{q}{2}\right)^n = -1 \Rightarrow \left(-\frac{q}{2}\right)^n = 1 \; eq.01$$

Note que $q > 0$, pois o enunciado assim restringe.

Essa equação é do tipo:

$$z^m = 1$$

Que do estudo dos números complexos, sabemos que somente admite 1 ou -1 como raízes reais. Além disso, $z = -1$ é raiz quando m é par.

Olhando para a equação 01, a única forma de satisfazer o enunciado é termos

$$-\frac{q}{2} = -1 \Rightarrow q = 2$$

Do que segue que n deve ser par.

Por outro lado:

$$P(2) = 2(2) + 2q(2)^2 + \cdots + 2q^{n-1}(2)^n = 4 + 4(2q) + \cdots + 4(2q)^{n-1}$$

Seja então a P.G. de termos

$$c_i = 4(2q)^{i-1}$$

Sua soma:

$$P(2) = c_1 + \cdots c_n = \frac{c_{n+1} - c_1}{2q - 1} = 5460 \Rightarrow \frac{4(2 \cdot 2)^n - 4}{2 \cdot 2 - 1} = 5460 \Rightarrow 2^{2n} = 4096 = 2^{12}$$

Ou seja:

$$2^{2n} = 2^{12} \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6$$

Note que n é, de fato, par.

Por fim:

$$\frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{6^2 - 2^3}{2^4} = \frac{7}{4}$$

Gabarito: "c".

---

75. (ITA/2002)

A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto $x+1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x-1$ e $x-2$ são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale:

a) 13.

b) 5.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

Comentários

Essa questão requer apenas que escrevamos o que está sendo dito. Veja:

"A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto $x+1$", significa:

$$f(x) = q(x)(x-1)(x-2) + x + 1$$

"Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x-1$ e $x-2$ são, respectivamente, os números a e b", significa:

$$f(x) = q_1(x)(x-1) + a$$
$$f(x) = q_2(x-2) + b$$

Mas, da primeira relação, temos que:

$$f(2) = q(2)(2-1)(2-2) + 2 + 1 = 3 \Rightarrow f(2) = 3$$
$$f(1) = q(1)(1-1)(1-2) + 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$$

Ou seja:

$$f(1) = q_1(1)(1-1) + a \Rightarrow f(1) = a \Rightarrow a = 2$$
$$f(2) = q_2(2)(2-2) + b \Rightarrow f(2) = b \Rightarrow b = 3$$

Por fim, temos:

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

Gabarito: “a”.

---

76. (ITA/2001)

Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, temos que o número de arranjos sem repetição de n elementos, tomados 2 a 2, é:

a) 80.

b) 90.

c) 70.

d) 100.

e) 60.

Comentários

O enunciado fala sobre soma de coeficientes.

Antes de sair usando o binômio de Newton, lembre-se que um polinômio $P(x,y)$, obtido pelo desenvolvimento de $(x+y)^n$, é da forma:

$$P(x,y) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_0 y^n$$

Assim, observe que:

$$P(1,1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$$

Ou seja, se $p(x,y) = (x+y)^n$, a soma de seus coeficientes é dada por:

$$p(1,1) = (1+1)^n = 2^n$$

Do enunciado, temos que:

$$2^n = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n = 10$$

Queremos:

$$A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{10!}{(10-2)!} = 10 \cdot 9 = 90$$

Gabarito: “b”.

---

77. (ITA/2000)

Seja $P(x)$ um polinômio divisível por $x-1$. Dividindo-o por x^2+x, obtêm-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4) = 10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a

a) -5.

b) -3.

c) -1.

d) 1.

e) 3.

Comentários

Se $P(x)$ é divisível por $x-1$, podemos escrever:

$$P(x) = H(x)(x-1)$$

Do que temos que:

$$P(1) = H(1)(1-1) = 0 \Rightarrow P(1) = 0$$

Além disso, seja $G(x) = x^2 + x$, temos que:

$$P(x) = Q(x)G(x) + R(x)$$

Do estudo dos polinômios, sabemos que o grau do resto, $R(x)$, é menor que o grau de $G(x)$, ou seja:

$$\partial R(x) < 2$$

Do que segue que $R(x)$ é do tipo:

$$R(x) = ax + b$$

Pois seu grau é, no máximo, 1.

Sabemos que 1 é raiz de $P(x)$, isso nos fornece:

$$P(1) = 0 = Q(1)G(1) + R(1) \Rightarrow (1^2 - 3)(1^2 + 1) + R(1) \Rightarrow R(1) = 4$$

Do enunciado, temos que $R(4) = 10$. Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4a + b = 10 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para $a\ e\ b$, vem:

$$a = 2\ e\ b = 2$$

Do que temos:

$$P(x) = (x^2 - 3)(x^2 + x) + 2x + 2 \Rightarrow P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$$

Gabarito: "c".

---

78. (ITA/1999)

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 3 tal que $p(x) = p(x+2) - x^2 - 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se -2 é uma raiz de $p(x)$, então o produto de todas as raízes de $p(x)$ é:

a) 36.

b) 18.

c) -36.

d) -18.

e) 1.

Comentários

Sabemos que -2 é raiz de $p(x)$. Ou seja:

$$p(-2) = 0$$

Usando a relação fornecida:

$$p(-2) = p(0) - (-2)^2 - 2 = p(0) - 6 = 0 \Rightarrow p(0) = 6$$

Seja $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Disso, temos que $p(0) = a_0 = 6$.

Por outro lado:

$$p(x+2) - p(x) = x^2 + 2$$

Ou seja:

$$a_3[(x+2)^3 - x^3] + a_2[(x+2)^2 - x^2] + a_1(x+2-x) = x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ou ainda:

$$a_3[2(3x^2 + 4x + 4)] + a_2(4x + 4) + 2a_1 = x^2 + 2$$

Das relações de Girard, temos que o produto das raízes é dado por:

$$-\frac{a_0}{a_3}$$

Já temos a_0, precisamos de a_3.

Note, do lado esquerdo da equação, que podemos obter a_3 através do coeficiente de x^2, usando a igualdade polinomial:

$$6a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$$

Por fim, o produto é dado por:

$$-\frac{6}{\frac{1}{6}} = -36$$

Gabarito: "c".

---

79. (ITA/1998)

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de $p(x)$ por $x - 2$ obtém-se um quociente $q(x)$ e resto igual a 26. Na divisão de $p(x)$ por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente $h(x)$ e resto $8x - 5$. Sabe-se que $q(0) = 13$ e $q(1) = 26$. Então, $h(2) + h(3)$ é igual a:

a) 16.

b) Zero.

c) -47.

d) -28.

e) 1.

Comentários

Primeiramente, vamos escrever as divisões:

$$p(x) = q(x)(x-2) + 26$$
$$p(x) = h(x)(x^2 + x - 1) + 8x - 5$$

A primeira informação útil se obtém calculando $p(2)$ na primeira equação, veja:

$$p(2) = q(2)(2-2) + 26 = 26$$

Além disso, usando que $q(0) = 13$:

$$p(0) = q(0)(0-2) + 26 = -26 + 26 = 0 \Rightarrow p(0) = 0$$

E ainda, usando que $q(1) = 26$:

$$p(1) = q(1)(1-2) + 26 = -26 + 26 = 0$$

Se $p(x)$ possui grau 4, podemos dizer que $h(x)$ tem grau 2. Ou seja:

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

Usando a segunda equação e os valores de $p(x)$ conhecidos:

$$p(2) = h(2)(2^2 + 2 - 1) + 8 \cdot 2 - 5 = 26 \Rightarrow 5h(2) = 15 \Rightarrow h(2) = 3$$
$$p(0) = h(0)(0^2 + 0 - 1) + 8 \cdot 0 - 5 = 0 \Rightarrow h(0) = -5$$
$$p(1) = h(1)(1^2 + 1 - 1) + 8 \cdot 1 - 5 = 0 \Rightarrow h(1) = -3$$

Ou seja:

$$h(0) = -5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0c \Rightarrow c = -5$$
$$h(2) = 4a + 2b - 5 = 3 \Rightarrow 2a + b = 4$$
$$h(1) = -3 = a + b - 5 \Rightarrow a + b = 2$$

Resolvendo para $a\ e\ b$, vem:

$$a = 2\ e\ b = 0$$

Do que resulta:

$$h(x) = 2x^2 - 5$$

Por fim:

$$h(2) + h(3) = 2 \cdot (2^2 + 3^2) - 2 \cdot 5 = 16$$

Gabarito: “a”.

---

80. (ITA/1997)

Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ polinômios na variável real x de graus $n_1, n_2 e\ n_3$, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe-se que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são diviseis por $p_3(x)$. Seja $r(x)$ o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$. Considere as afirmações:

I. $r(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

II. $p_1(x) - 1/2p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

III. $p_1(x)r(x)$ é divisível por $[p_3(x)]^2$.

Então,

a) Apenas I e II são verdadeiras.

b) Apenas II é verdadeira.

c) Apenas I e III são verdadeiras.

d) Todas as afirmações são verdadeiras.

e) Todas as afirmações são falsas.

Comentários

Interpretando, matematicamente, o enunciado, temos:

$$p_1(x) = q_1(x)p_3(x)$$
$$p_2(x) = q_2(x)p_3(x)$$
$$p_1(x) = q(x)p_2(x) + r(x)$$

Vamos então julgar os itens.

Item I:

Substitua $p_1(x)$ e $p_2(x)$ na terceira equação pela primeira e segunda equações:

$$q_1(x)p_3(x) = q(x)[q_2(x)p_3(x)] + r(x) \Rightarrow r(x) = p_3(x)[q_1(x) - q_2(x)]$$

Ou seja, $r(x)$ é divisível por $q_3(x)$.

Verdadeiro.

Item II:

Basta manipular a primeira e a segunda equação:

$$p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x) = q_1(x)p_3(x) - \frac{1}{2}q_2(x)p_3(x) = p_3(x)[q_1(x) - \frac{1}{2}q_2(x)]$$

Ou seja, $p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

Verdadeiro.

Item III:

Vamos multiplicar a terceira equação por $p_1(x)$:

$$p_1^2(x) = q(x)p_1(x)p_2(x) + p_1(x)r(x)$$

Usando a primeira e a segunda equação:

$$q_1^2(x)p_3^2(x) = q(x)q_1(x)q_2(x)p_3^2(x) + p_1(x)r(x)$$

Ou seja:

$$p_3^2(x)[q_1^2(x) - q(x)q_1(x)q_2(x)] = p_1(x)r(x)$$

Do que temos que $p_3^2(x)$ divide $p_1(x)r(x)$.

Verdadeiro.

Gabarito: “d”.

---

81. (ITA/1995)

A divisão de um polinômio $P(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ é igual a:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentários

Escrevendo o que foi dado no enunciado, vem:

$$P(x) = (6x^2 + 5x + 3)(x^2 - x) - 7x$$

Queremos analisar a divisão:

$$P(x) = q(x)(2x + 1) + r(x)$$

Do estudo das divisões de polinômios, sabemos que:

$$\partial r < (2x + 1)$$

Do que segue que:

$$\partial r = 0$$

Ou seja, $r(x) = a, a \in \mathbb{R}$.

Note ainda que:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = q\left(-\frac{1}{2}\right)\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) + a = a$$

Mas:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) - 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5$$

Ou seja:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 = a$$

Gabarito: “e”.

---

82. (ITA/1995)

Sabendo-se que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:

a) 17.

b) 19.

c) 21.

d) 23.

e) 25.

Comentários

Observe que o polinômio possui apenas coeficientes reais, do que temos que $4 - i\sqrt{2}$ também é sua raiz.

Disso, temos que o polinômio é divisível por:

$$\left(x - 4 + i\sqrt{2}\right)\left(x - 4 - i\sqrt{2}\right) = x^2 - 8x + 18$$

Como $\sqrt{5}$ é raiz do polinômio, ele também é divisível por:

$$(x - \sqrt{5})$$

Seu coeficiente líder é 2, de forma que podemos escrevê-lo como:

$$p(x) = 2(x^2 - 8x + 18)(x - \sqrt{5})(x^2 + ax + b)$$

Uma vez que $\partial p = 5$.

Como $p(0) = 540$, temos:

$$p(0) = 2 \cdot 18 \cdot \left(-\sqrt{5}\right) \cdot b = 540 \Rightarrow b = -3\sqrt{5}$$

Além disso, vamos calcular $p(1)$:

$$p(1) = 2 - 22 + 74 + 2 - 420 + 540 = 176$$

Do que resulta que:

$$p(1) = 2 \cdot 11 \cdot \left(1 - \sqrt{5}\right)\left(1 - 3\sqrt{5} + a\right) = 176 \Rightarrow 1 - 3\sqrt{5} + a = -2 - 2\sqrt{5}$$

Ou seja:

$$a = -3 + \sqrt{5}$$

Dessa forma, $p(x)$ fica:

$$p(x) = 2(x^2 - 8x + 18)(x - \sqrt{5})(x^2 + \left(-3 + \sqrt{5}\right)x - 3\sqrt{5})$$

Resolvendo:

$$x^2 + \left(-3 + \sqrt{5}\right)x - 3\sqrt{5} = 0$$

Temos $x = 3$ ou $x = -\sqrt{5}$.

E por fim:

$$3^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 19$$

Gabarito: "b".

---

83. (ITA/1977)

$P(x)$ é um polinômio do 5º grau que satisfaz as condições $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1$ e $P(6) = 0$. Calcule $P(0)$.

Comentários

Esse tipo de questão é clássico.

A ideia é criar um polinômio auxiliar da seguinte forma:

$$Q(x) = P(x) - 1$$

Criamos esse polinômio baseado no fato de que $P(1) = \cdots = P(5) = 1$. Se o enunciado estabelecesse, por exemplo, que:

$$\boldsymbol{P(1) = 1, P(2) = 2, \dots e\ P(5) = 5}$$

O polinômio mais conveniente seria:

$$\boldsymbol{Q(x) = P(x) - x}$$

O objetivo é sempre saber quais são as raízes do polinômio auxiliar e usar isso a seu favor.

Veja que $1, 2, 3, 4\ e\ 5$ são todas as raízes desse polinômio, pois o grau de P é 5. Disso, podemos escrever que:

$$Q(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

Onde $a \in \mathbb{R}$.

Além disso:

$$Q(6) = P(6) - 1 = 0 - 1 = -1$$

Ou seja:

$$Q(6) = a(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5) = 5!\,a \Rightarrow a = -\frac{1}{5!}$$

Do que segue que:

$$Q(x) = -\frac{1}{5!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

Da definição, temos que:

$$P(x) = Q(x) + 1 = -\frac{1}{5!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$$

E, por fim:

$$P(0) = -\frac{1}{5!}(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)(0-5) + 1 = -\frac{1}{5!}\cdot(-5!) + 1 = 2$$

Gabarito: $P(0) = 2$.

Questões IME Comentadas

84. (IME/2020)

Um polinômio $P(x)$ de grau maior que 3 quando dividido por $x-2$, $x-3$ e $x-5$ deixa restos 2, 3 e 5, respectivamente. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)(x-5)$ é:

a) 1

b) x

c) 30

d) $x-1$

e) $x-30$

Comentários

A divisão de um polinômio $P(x)$ por um divisor $D(x)$ é:

$$P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

Do enunciado:

$$P(x)=(x-2)\cdot Q_1(x)+2\Rightarrow P(2)=2$$

$$P(x)=(x-3)\cdot Q_2(x)+3\Rightarrow P(3)=3$$

$$P(x)=(x-5)\cdot Q_3(x)+5\Rightarrow P(5)=5$$

Queremos saber o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)(x-5)$, logo:

$$P(x)=\underbrace{(x-2)(x-3)(x-5)}_{grau\ 3}Q(x)+R(x)$$

Como nosso divisor tem grau 3, o grau do resto deve ser menor ou igual a 2. Vamos supor que o grau do resto seja 2:

$$R(x)=ax^2+bx+c$$

$$P(x)=\underbrace{(x-2)(x-3)(x-5)}_{raízes\ 2,3\ e\ 5}Q(x)+ax^2+bx+c$$

Fazendo $x=2;3;5$, obtemos:

$$P(2)=4a+2b+c=2$$

$$P(3)=9a+3b+c=3$$

$$P(5)=25a+5b+c=5$$

Agora, basta resolver o sistema linear:

$$\begin{cases}4a+2b+c=2\ \ (I)\\9a+3b+c=3\ \ (II)\\25a+5b+c=5\ \ (III)\end{cases}$$

Fazendo $(II)-(I)$ e $(III)-(II)$, encontramos:

$$\begin{cases}5a+b=1\\16a+2b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10a+2b=2\\16a+2b=2\end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação desse sistema com a primeira:

$$6a=0\Rightarrow a=0$$

$$a=0\Rightarrow 5a+b=1\Rightarrow b=1$$

$$a=0,b=1\Rightarrow 4a+2b+c=2\Rightarrow c=0$$

Portanto, o resto é dado por:

$$\boxed{R(x) = x}$$

Gabarito: "b".

---

85. (IME/2019)

Seja a inequação:

$$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$$

Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para $b - a$ é:

a) 2

b) $13/6$

c) $1/3$

d) $5/2$

e) $8/3$

Comentários

Inicialmente, devemos fatorar a expressão do polinômio:

$$p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x = x(6x^3 - 5x^2 - 29x + 10)$$

Para simplificar a expressão do terceiro grau podemos aplicar o teorema das raízes racionais. Os números divisores do coeficiente $a_0 = 10$ são $\{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$, vamos verificar se há alguma raiz inteira:

Para $x = 1$:

$$6(1)^3 - 5(1)^2 - 29(1) + 10 = 6 - 5 - 29 + 10 = -18$$

Para $x = -1$:

$$6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 29(-1) + 10 = -6 - 5 + 29 + 10 = 28$$

Para $x = 2$:

$$6(2)^3 - 5(2)^2 - 29(2) + 10 = 48 - 20 - 58 + 10 = -20$$

Para $x = -2$:

$$6(-2)^3 - 5(-2)^2 - 29(-2) + 10 = -48 - 20 + 58 + 10 = 0$$

Portanto, $x = -2$ é raiz. Podemos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini:

-2	6	-5	-29	10
	6	-17	5	0

Assim, encontramos:

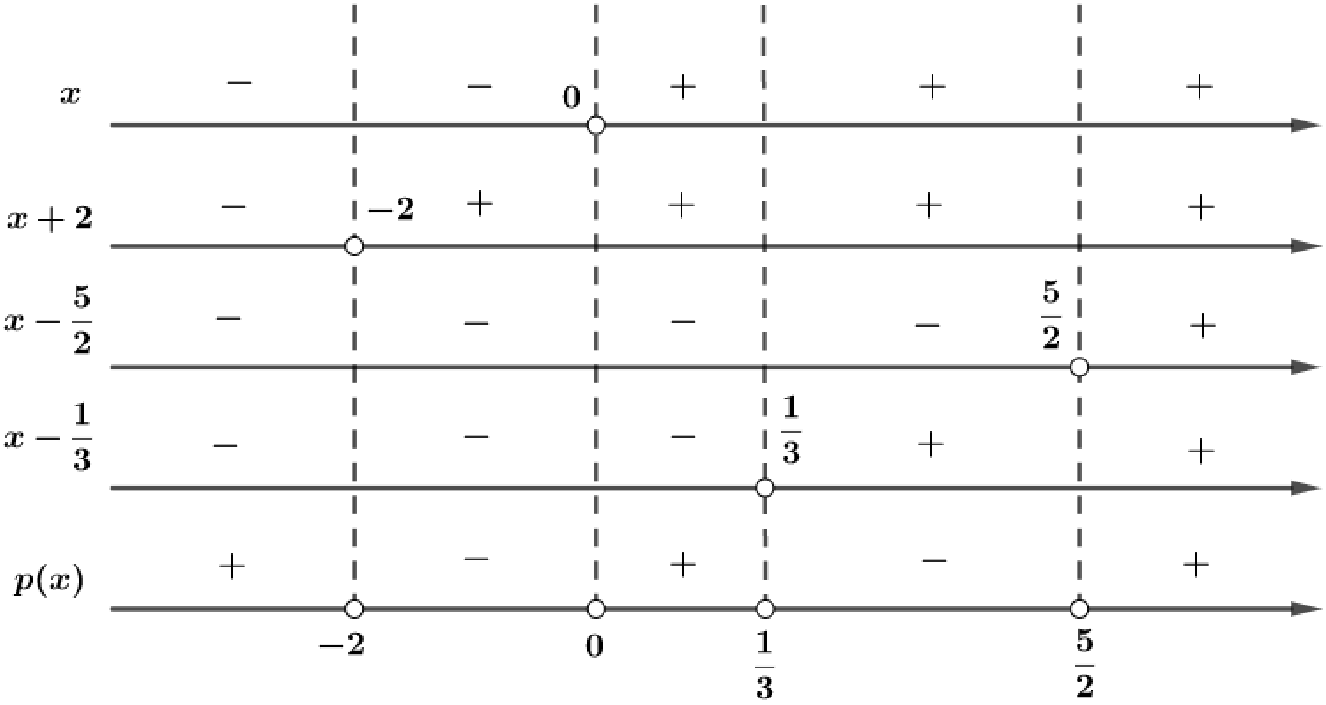
$$p(x) = x(x + 2)(6x^2 - 17x + 5)$$

Para simplificar a expressão do segundo grau, basta encontrar suas raízes:

$$6x^2 - 17x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{17 \pm 13}{12} = \frac{5}{2} \text{ ou } \frac{1}{3}$$

$$\boxed{p(x) = x(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

Vamos fazer o estudo do sinal:



Desse modo, para $p(x) < 0$, devemos ter:

$$\boxed{x \in (-2,0) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)}$$

Como (a,b) está contido no conjunto solução e queremos que $b-a$ seja máximo, então:

Se $(a,b) = (-2,0)$:

$$b-a = 0-(-2) = 2$$

Se $(a,b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$:

$$b-a = \frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6} > 2$$

Portanto:

$$\boxed{b-a = \frac{13}{6}}$$

Gabarito: “b”.

---

86. (IME/2019)

Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

a) $32 - a$

b) $48 - 2a$

c) 48

d) $48 + 2a$

e) $32 + a$

Comentários

A questão pede para calcular o valor da expressão $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, sendo x_1, x_2, x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Notando a presença do termo cúbico na equação, podemos substituir as raízes nessa equação e encontrar:

$$x_1^3 - ax_1 - 16 = 0$$
$$x_2^3 - ax_2 - 16 = 0$$
$$x_3^3 - ax_3 - 16 = 0$$

Somando as equações:

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - a(x_1 + x_2 + x_3) - 48 = 0$$
$$\boxed{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = a(x_1 + x_2 + x_3) + 48}$$

Pelas relações de Girard, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = a\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{0} + 48$$

Portanto:

$$\boxed{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 48}$$

Gabarito: "c".

---

87. (IME/2019)

Seja o polinômio $q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$ que possui valor mínimo igual a -64, onde k é uma constante real. Determine as raízes de $q(x)$.

Comentários

Antes de encontrarmos as raízes de $q(x)$, devemos calcular o valor de k tal que o mínimo de q seja -64. Podemos resolver essa questão de vários modos. Veja:

Método 1) Derivada

Derivando o polinômio e igualando a zero:

$$q'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 12x + 40 = 0$$
$$\Rightarrow q'(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 3x + 10) = 0$$

As soluções dessa equação são os pontos de máximos e/ou mínimos locais do polinômio. Note que $x = 2$ satisfaz a equação:

$$q'(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) + 10 = 0$$

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini em $q'(x)$, obtemos:

2	1	-6	3	10
	1	-4	-5	0

$$q'(x) = 4(x-2)(x^2-4x-5)$$

Fatorando $q'(x)$:

$$\boxed{q'(x) = 4(x-2)(x-5)(x+1)}$$

Logo, $x=-1$ e $x=5$ também são raízes. Substituindo esses valores em $q(x)$, temos:

$$q(-1) = (-1)^4 - 8(-1)^3 + 6(-1)^2 + 40(-1) + 25 + k$$

$$\boxed{q(-1) = k}$$

$$q(2) = (2)^4 - 8(2)^3 + 6(2)^2 + 40(2) + 25 + k$$

$$\boxed{q(2) = k + 81}$$

$$q(5) = (5)^4 - 8(5)^3 + 6(5)^2 + 40(5) + 25 + k$$

$$\boxed{q(5) = k}$$

Como $q(2) > q(-1) = q(5)$, temos que $q(-1)$ e $q(5)$ são os mínimos do polinômio. Assim, temos:

$$q(-1) = q(5) = \boxed{k = -64}$$

Precisamos calcular as raízes do seguinte polinômio:

$$q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$$

$$q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x - 39$$

Perceba que $x=1$ e $x=3$ são raízes de $q(x)$. Logo, podemos aplicar Briot-Ruffini:

1	1	-8	6	40	-39
3	1	-7	-1	39	0
	1	-4	-13	0	

$$\Rightarrow \boxed{q(x) = (x-1)(x-3)(x^2-4x-13)}$$

Solucionando a equação quadrática, encontramos:

$$x^2 - 4x - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-13)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{17}$$

Portanto, as raízes o polinômio $q(x)$ são dadas por:

$$S = \{1;\ 3;\ 2-\sqrt{17}; 2+\sqrt{17}\}$$

Método 2) Fatoração

Sabendo que $(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$, podemos usar essa relação para fatorar $q(x)$. Completando-se os quadrados e fatorando $q(x)$, obtemos:

$$q(x) = x^4 - 8x^3 + \underbrace{6x^2}_{24x^2-18x^2} + \underbrace{40x}_{-32x+72x} + \underbrace{25}_{16+9} + k$$

$$q(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - 18x^2 + 72x + \underbrace{9}_{-72+81} + k$$

$$q(x) = (x-2)^4 - 18\underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{(x-2)^2} + 81 + k$$

$$q(x) = \underbrace{(x-2)^4 - 18(x-2)^2 + 81}_{[(x-2)^2-9]^2} + k$$

$$q(x) = \underbrace{[(x-2)^2 - 9]}_{(x-2-3)(x-2+3)}^2 + k$$

Assim, encontramos a forma simplificada de $q(x)$:

$$\Rightarrow \boxed{q(x) = [(x-5)(x+1)]^2 + k}$$

Dado que $[(x-5)(x+1)]^2 \geq 0$, temos:

$$[(x-5)(x+1)]^2 \geq 0 \overset{+k}{\Rightarrow} [(x-5)(x+1)]^2 + k \geq k$$

$$\Rightarrow q(x) \geq k$$

Como $q_{min}(x) = -64$, devemos ter $k = -64$. Logo:

$$q(x) = [(x-5)(x+1)]^2 - 64$$

Fatorando $q(x)$:

$$q(x) = [(x-5)(x+1) - 8][(x-5)(x+1) + 8]$$

$$q(x) = (x^2 - 4x - 13)(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{q(x) = (x^2 - 4x - 13)(x-3)(x-1)}$$

Raízes:

$$S = \{1;\ 3;\ 2-\sqrt{17}; 2+\sqrt{17}\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \{1;\ 3;\ 2-\sqrt{17}; 2+\sqrt{17}\}}$

---

88. (IME/2018)

Seja $P(x)$ o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2, -4+3\sqrt{3})$, $B(1, 3\sqrt{2}-2)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)$ é:

a) $8\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 6$.

b) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1$.

c) $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2$.

d) $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3$.

e) $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$.

Comentários

Essa questão requer uma técnica especial chamada de Polinômio Interpolador de Lagrange. Queremos responder à seguinte pergunta:

Dados 4 pontos no plano, qual o polinômio de menor grau que passa por esses quatro pontos?

A resposta é o polinômio abaixo, dado por:

$$P(x) = p_A(x) + p_B(x) + p_C(x) + p_D(x)$$

A estratégia para montar esse polinômio é a seguinte:

Sabemos que $P(2) = -4 + 3\sqrt{3}$. Ou seja:

$$P(2) = p_A(2) + p_B(2) + p_C(2) + p_D(2) = -4 + 3\sqrt{3}$$

Vamos construir as parcelas de modo que $p_B(2) = p_C(2) = p_D(2) = 0$ e $p_A(2) = -4 + 3\sqrt{3}$. E de maneira análoga:

$$p_A(1) = p_C(1) = p_D(1) = 0\ e\ p_B(1) = 3\sqrt{2} - 2$$

$$p_A(\sqrt{2}) = p_B(\sqrt{2}) = p_D(\sqrt{2}) = 0\ e\ p_C(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

$$p_A(\sqrt{3}) = p_B(\sqrt{3}) = p_C(\sqrt{3}) = 0\ e\ p_D(\sqrt{3}) = \sqrt{2}$$

Perceba que, por exemplo para $p_A(x)$, temos pelo menos três raízes:

$$1, \sqrt{2}\ e\ \sqrt{3}$$

Ou seja, seu grau é no mínimo 3. Veja que isso ocorre para as outras parcelas também.

Assim, sabemos, por exemplo, que $p_A(x) = a(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})$. Queremos ainda que:

$$p_A(2) = a(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3}) = -4 + 3\sqrt{3}$$

Ou seja:

$$a = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$$

Do que temos:

$$p_A(x) = \frac{(-4 + 3\sqrt{3})(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$$

Seguindo o raciocínio que foi feito acima para as outras parcelas, temos que:

$$p_B(x) = \frac{(3\sqrt{2} - 2)(x-2)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(1-2)(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}$$

$$p_C(x) = \frac{(\sqrt{3})(x-2)(x-1)(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$p_D(x)=\frac{(\sqrt{2})(x-2)(x-1)(x-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

Queremos o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)$. Como o grau de $x-3$ é 1, o grau do resto é zero, do que temos:

$$P(x)=q(x)(x-3)+r$$

Para calcular r, vamos calcular $P(3)$, veja:

$$P(3)=q(3)(3-3)+r=r$$

Já temos $P(x)$, basta calcularmos cada parcela para $x=3$, veja:

$$p_A(3)=\frac{(-4+3\sqrt{3})(3-1)(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}{(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}=-3\sqrt{2}+20\sqrt{3}+5\sqrt{6}-12$$

$$p_B(3)=\frac{(3\sqrt{2}-2)(3-2)(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}{(1-2)(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}=\sqrt{6}-10\sqrt{3}$$

$$p_C(3)=\frac{(\sqrt{3})(3-2)(3-1)(3-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=15\sqrt{2}+6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+18$$

$$p_D(3)=\frac{(\sqrt{2})(3-2)(3-1)(3-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=-12-17\sqrt{2}-8\sqrt{3}-9\sqrt{6}$$

Dessa forma, temos que:

$$P(3)=p_A(3)+p_B(3)+p_C(3)+p_D(3)=-6-5\sqrt{2}+8\sqrt{3}$$

Gabarito: “a”.

---

89. (IME/2015)

Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26}-x^{25}-6x^{24}+5x^4-16x^3+3x^2$ pelo polinômio x^3-3x^2-x+3?

a) x^2+x-2

b) $6x^2-4x+3$

c) $3x-9$

d) $6x^2-17x-3$

e) $6x+1$

Comentários

Primeiramente, perceba que:

$$x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x^2-1)(x-3)=(x-1)(x+1)(x-3)$$

Suas raízes são dadas por:

$$(x-1)(x+1)(x-3)=0$$

Ou seja:

$$x = 1, x = -1 \; ou \; x = 3$$

Seja $p(x) = x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ e $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Do estudo da divisão de polinômios, vem:

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x) \;\; eq. 01$$

E ainda temos da análise do grau que:

$$\partial r < \partial g = 3$$

Vamos supor então que $r(x) = ax^2 + bx + c$.

Da $eq. 01$, temos que:

$$p(1) = q(1)g(1) + r(1) = q(1) \cdot 0 + r(1) = r(1) \Rightarrow p(1) = r(1)$$
$$p(-1) = q(-1)g(-1) + r(-1) = q(-1) \cdot 0 + r(-1) = r(-1) \Rightarrow p(-1) = r(-1)$$
$$p(3) = q(3)g(3) + r(3) = q(3) \cdot 0 + r(3) = r(3) \Rightarrow p(3) = r(3)$$

Vamos então calcular $p(1), p(-1) \; e \; p(3)$.

Mas antes disso, perceba que:

$$p(x) = x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2 = x^{24}(x^2 - x - 6) + x^2(5x^2 - 16x + 3)$$

Ou ainda:

$$p(x) = x^{24}(x + 2)(x - 3) + x^2(5x - 1)(x - 3) = x^2(x - 3)[x^{22}(x + 2) + 5x - 1]$$

Ou seja:

$$p(x) = x^2(x - 3)[x^{22}(x + 2) + 5x - 1]$$

Fica óbvio, então, que:

$$p(3) = 0$$

Além disso, temos:

$$p(1) = 1^2 \cdot (1 - 3) \cdot [1^{22}(1 + 2) + 5 - 1] = -14$$
$$p(-1) = (-1)^2(-1 - 3)[(-1)^{22}(-1 + 2) - 5 - 1] = 20$$

Assim, temos que:

$$p(3) = r(3) = 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \Rightarrow 9a + 3b + c = 0$$
$$p(1) = r(1) = -14 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = -14$$
$$p(-1) = 20 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \Rightarrow a - b + c = 20$$

Que resulta no sistema:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ a + b + c = -14 \\ a - b + c = 20 \end{cases}$$

Somando a segunda e a terceira equação, vem:

$$2a + 2c = 6 \Rightarrow a + c = 3$$

Substituindo $a + c$ na segunda equação, temos:

$$3 + b = -14 \Rightarrow b = -17$$

Subtraindo a primeira da terceira equação, vem:

$$a - b + c - (9a + 3b + c) = 20 - 0 \Rightarrow -8a - 4b = 20 \Rightarrow -5 - b = 2a$$

Ou seja:

$$-5 - (-17) = 2a \Rightarrow a = 6$$

Por fim:

$$a + c = 3 \Rightarrow 6 + c = 3 \Rightarrow c = -3$$

Dessa maneira, obtemos:

$$r(x) = 6x^2 - 17x - 3$$

Gabarito: “d”.

---

90. (IME/2012)

Considere o polinômio $5x^3 - 3x^2 - 60x + 36 = 0$. Sabendo que ele admite uma solução da forma $\sqrt{n}$, onde n é um número natural, pode se afirmar que:

a) $1 \leq n < 5$

b) $6 \leq n < 10$

c) $10 \leq n < 15$

d) $15 \leq n < 20$

e) $20 \leq n < 30$

Comentários

Vamos fatorar o polinômio. Perceba que:

$$5x^3 - 3x^2 - 60x + 36 = 0 \Rightarrow x^2(5x - 3) - 12(5x - 3) = 0$$

Ou seja:

$$(5x - 3)(x^2 - 12) = 0$$

Disso, temos que:

$$5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

Ou:

$$x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Note que, das raízes encontradas, a única da forma $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ é $x = \sqrt{12}$.

Ou seja, $n = 12$.

Observação: Que lição podemos aprender com essa questão? Podemos aprender que, quando se é questionado acerca das raízes de uma equação, às vezes, pode ser frutífero tentar fatorar o polinômio. Por isso, treine bastante fatoração.

Gabarito: “c”.

91. (IME/2011)

Seja $p(x)$ uma função polinomial satisfazendo a relação $p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p(\frac{1}{x})$. Sabendo que $p(3) = 28$, o valor de $p(4)$ é:

a) 10

b) 30

c) 45

d) 55

e) 65

Comentários

Primeiramente, vamos escrever a relação dada de outra forma:

$$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x) - p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ou ainda:

$$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x) - p\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 1 \Rightarrow p(x)\left[p\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] - \left[p\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] = 0$$

Do que temos:

$$[p(x) - 1]\left[p\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] = 1 \;\; eq.01$$

Faça $p(x) - 1 = g(x)$, do que temos, da equação 01:

$$g(x)g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Seja $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Temos então:

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = a_n\left(\frac{1}{x^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0$$

Substituindo na equação 01:

$$[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0]\left[a_n\left(\frac{1}{x^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0\right] = 1$$

Multiplicando ambos os lados por x^n:

$$[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0][a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n] = x^n$$

Note que o termo independente, pelo lado esquerdo, é dado por:

$$a_0 a_n$$

E do lado direito, todos os coeficientes são zero, à exceção do coeficiente de x^n. Ou seja:

$$a_0 a_n = 0$$

Como se supõe $a_n \neq 0$, temos:

$$a_0 = 0$$

Do que resulta:

$$[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x][a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1}] = x^n$$

Repetindo o processo, vemos que o coeficiente do termo x, pelo lado esquerdo, é:

$$a_1 a_n = 0$$

Ou seja:

$$a_1 = 0$$

Repetindo esse processo, ordenadamente, obtemos:

$$a_n x^n \cdot a_n = x^n \Rightarrow a_n^2 = 1 \Rightarrow a_n = \pm 1$$

Assim:

$$g(x) = \pm x^n \Rightarrow p(x) = \pm x^n + 1$$

Do enunciado:

$$p(3) = 28 \Rightarrow \pm 3^n + 1 = 28 \Rightarrow \pm 3^n = 27$$

Como $3 > 0$, devemos ter $3^n > 0$, ou seja, devemos descartar a possiblidade $p(x) = -x^n + 1$.

Além disso, veja que:

$$3^n = 27 = 3^3$$

Como a função exponencial é injetora, devemos ter $n = 3$ como única solução possível.

Por fim:

$$p(x) = x^3 + 1$$

Do que segue:

$$p(4) = 4^3 + 1 = 65$$

Gabarito: “e”.

---

92. (IME/2011)

Sejam o polinômio e conjunto $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ e os conjuntos $A = \{p(k)/k \in \mathbb{N}\ e\ k \leq 1999\}$, $B = \{r^2 + 1\ /r \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{q^2 + 2/q \in \mathbb{N}\}$. Sabe-se que $y = n(A \cap B) - n(A \cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto E. Determine o valor de y.

Obs.: $\mathbb{N}$ é $o\ conjunto\ dos\ números\ naturais.$

Comentários

Vamos analisar cada conjunto separadamente.

Conjunto $A \cap B$:

$$2k^3 - 3k^2 + 2 = r^2 + 1 \Rightarrow 2k^3 - 3k^2 + 1 = r^2$$

Fatorando o lado esquerdo da equação, temos:

$$(k-1)^2(2k-1) = r^2$$

Como estamos tratando o conjunto dos números naturais, temos que ou $k = 1$, do que teríamos $k = 0$, ou $k \neq 1$ e $2k - 1$ um quadrado perfeito. Veja que $(k-1)^2$ é quadrado perfeito para todo valor de k, então, não precisamos nos preocupar em analisar esse fator.

Seja $2k - 1 = m^2$.

Do fato de $k \in A$, disso:

$$0 \leq k \leq 1999 \Rightarrow 0 \leq 2k - 1 \leq 3997 \Rightarrow 0 \leq m^2 \leq 3997$$

Lembre-se que $2k - 1$ é ímpar, então m^2 é um quadro de um ímpar. Como m^2 é um quadrado ímpar compreendido entre 0 e 3997, veja que:

$$r \leq 63$$

Pois:

$$63^2 = 3969$$

Logo, queremos os quadrados de 1,3, … ,63. Temos, portanto, 32 elementos. Lembrando do caso $k = 1$, temos mais um caso. Logo:

$$n(A \cap B) = 32 + 1 = 33$$

Conjunto $A \cap C$:

$$2k^3 - 3k^2 + 2 = q^2 + 2 \Rightarrow k^2(2k - 3) = q^2$$

Note que k^2 é quadrado perfeito para todo valor de k, do que temos que analisar somente $2(k-1) - 1$ que é ímpar.

Seja $2(k-1) - 1 = n^2$.

Do fato de $k \in A$, temos:

$$0 \leq k \leq 1999 \Rightarrow 0 \leq 2k - 3 \leq 3995 \Rightarrow 0 \leq n^2 \leq 3995$$

Queremos então os quadrados ímpares entre 0 e 3995. Como no item acima, temos os quadrados de $1, 3, \dots, 63$.

Temos ainda o caso $k = 0$, que é quando $q = 0$. Logo:

$$n(A \cap C) = 32 + 1 = 33$$

Por fim:

$$y = n(A \cap B) - n(A \cap C) = 33 - 33 = 0$$

Gabarito: $y = 0$.

---

93. (IME/2001)

Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1(-2, -11)$, $P_2(-1{,}0)$, $P_3(1{,}4)$ e $P_4(2{,}9)$.

a) Determine os coeficientes do polinômio.

b) Calcule todas as raízes do polinômio.

Comentários

Item a:

Observe que, dado um polinômio $P(x)$, temos quatro equações dados quatro pontos. Isto é, ao substituir os pontos, teremos um sistema linear com quatro equações e $n+1$ incógnitas $(a_0, \dots, a_n)$, onde n é o grau de $P(x)$.

Do nosso estudo de sistemas de equações, sabemos que, para que esse sistema seja candidato a ser possível, seu número de incógnitas deve ser, no máximo, igual ao número de equações disponíveis.

Disso, temos que:

$$n+1 \leq 4 \Rightarrow n \leq 3$$

Suponha então:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Calculando $P(x)$ nos pontos dados, temos:

$$P(-2) = -11 = -8a + 4b - 2c + d$$

$$P(-1) = 0 = -a + b - c + d$$

$$P(1) = 4 = a + b + c + d$$

$$P(2) = 9 = 8a + 4b + 2c + d$$

Disso, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = -11 \\ -a + b - c + d = 0 \\ a + b + c + d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 9 \end{cases}$$

Somando a segunda e a terceira questão:

$$2b + 2d = 4 \Rightarrow b + d = 2 \Rightarrow d = 2 - b$$

Somando a primeira e a quarta equação:

$$8b + 2d = -2 \Rightarrow 4b + d = -1$$

Dessas equações, temos:

$$4b + 2 - b = -1 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$$

Do que resulta:

$$d = 2 - (-1) = 3$$

Substituindo esses valores na segunda equação:

$$-a - 1 - c + 3 = 0 \Rightarrow a + c = 2 \Rightarrow c = 2 - a$$

Substituindo na quarta equação:

$$8a + 4 \cdot (-1) + 2c + 3 = 9 \Rightarrow 8a + 2c = 10 \Rightarrow 4a + c = 5$$

Logo:

$$4a + 2 - a = 5 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

Do que temos:

$$c = 2 - 1 = 1$$

Logo, o polinômio possui grau no mínimo 3 e é dado por:

$$P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$$

Item b:

Note que, do enunciado, temos que -1 é uma de suas raízes. Usando Briot-Ruffini, vem:

-1	1	-1	1	3
	1	-2	3	0

Ou seja:

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 3)$$

Resolvendo a equação:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

Temos:

$$x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

Gabarito: Item a) $\boldsymbol{a = 1; b = -1; c = 1\ e\ d = 3}$ **Item b)** $\boldsymbol{\{-1, 1 \pm \sqrt{2}i\}}$

94. (IME/2001)

Determine todos os números inteiros $m\ e\ n$ para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

Comentários

Ser divisível por $x + a$ é equivalente a dizer que $-a$ é sua raiz. Disso, temos que:

$$2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = 0$$

Ou ainda:

$$2(-1)^m a^m + a^{3n}(-1)^{m-3n}a^{m-3n} - a^m = 0$$

Se $a = 0$, isso é válido para todo m e n tais que:

$$m \geq 0$$

Pois os expoentes de um polinômio são positivos ou nulos e ainda:

$$m \geq 3n$$

Pelo mesmo motivo.

Se $a \neq 0$, temos que:

$$2(-1)^m a^m + a^{3n}(-1)^{m-3n}a^{m-3n} - a^m = 0 \Rightarrow 2(-1)^m + (-1)^{m-3n} = 1$$

Suponha que m é ímpar. Então:

$$(-1)^m = -1$$

Ou seja:

$$-2 + (-1)^{m-3n} = 1 \Rightarrow (-1)^{m-3n} = 3$$

O que é absurdo, pois o lado esquerdo da equação vale ± 1.

Suponha, então, m par. Logo:

$$(-1)^m = 1$$

Do que temos:

$$2 + (-1)^{m-3n} = 1 \Rightarrow (-1)^{m-3n} = (-1)^1$$

Ou seja:

$$m - 3n = 1 \Rightarrow m = 3n + 1$$

Note que, se n é par, m é ímpar. Logo, n é um inteiro ímpar qualquer e m é tal que:

$$m = 3n + 1$$

Perceba, ainda, que $m \geq 0$, pois os expoentes de um polinômio são sempre positivos ou nulos. Disso:

$$m \geq 0 \Rightarrow 3n + 1 \geq 0 \Rightarrow n \geq -\frac{1}{3}$$

Mas n é inteiro, logo:

$$n \geq 0$$

Por fim:

$$m = 3n + 1$$

Com n inteiro ímpar positivo.

Gabarito: $\boldsymbol{m = 3n + 1}$, com $\boldsymbol{n}$ inteiro ímpar positivo, se $\boldsymbol{a \neq 0}$ e $\boldsymbol{m \geq 0}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{m \geq 3n}$ se $\boldsymbol{a = 0}$.

---

95. (IME/2000)

Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Comentários

Para você aumentar sua caixa de ferramentas em soluções de questões, vamos apresentar uma técnica chamada "perturbação de somatório".

Vamos olhar para o seguinte somatório:

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3}$$

Desenvolvendo o termo $(k+1)^3$, temos:

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

Ou seja:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+3k+1)$$

Das propriedades de somatório, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}}=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+3k+1)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^{\mathbf{3}}+3\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

A grande sacada dessa técnica é perceber que:

$$\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}}=\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{k}^{\mathbf{3}}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^{\mathbf{3}}+(n+1)^3-1$$

Ou seja:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^{\mathbf{3}}+(n+1)^3=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^{\mathbf{3}}+3\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

Logo:

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

Do nosso estudo de P.A., temos:

$$3\sum_{k=1}^{n}k=3\frac{n(n+1)}{2}$$

E ainda:

$$\sum_{k=1}^{n}1=1+1+\cdots+1=n$$

Logo:

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

Resolvendo para $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2$:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

Que é um polinômio com no máximo quatro termos.

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)}$**.**

---

96. (IME/1999)

Seja o polinômio $P(x)$ de grau $(2n+1)$ com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se $P(x)$ por $D(x)$, de grau 3, obtém-se o resto $R(x)$.

Determine $R(x)$, sabendo-se que as raízes de $D(x)$ são raízes de $A(x) = x^4 - 1$ e que $D(1) \neq 0$.

Comentários

Antes de tudo, observe que:

$$A(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Como $D(1) \neq 0$, devemos ter, necessariamente:

$$D(x) = a(x + 1)(x^2 + 1) \Rightarrow D(x) = a(x^3 + x^2 + x + 1)$$

Veja que o coeficiente líder de $D(x)$, a, é irrelevante para o estudo da divisão desses dois polinômios, do que vamos assumir, sem perda de generalidade:

$$a = 1$$

E $D(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Veja que, como os coeficientes de $P(x)$ são unitários positivos, devemos ter:

$$P(x) = x^{2n+1} + x^{2n} + \cdots + x + 1$$

Perceba que, da esquerda para a direita, sempre podemos formar blocos de quatro termos da seguinte maneira:

$$x^m(x^3 + x^2 + x + 1)$$

Note que $P(x)$ é formado por $2n + 1 + 1 = 2(n + 1)$ monômios. Devemos, então, analisar a divisibilidade de $2(n + 1)$ por 4, pois a ideia é sempre formar blocos de 4 monômios de $P(x)$.

Um número par pode deixar resto 0 ou resto 2 na divisão por quatro. Verifique!

Disso, temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: $2(n + 1)$ deixa resto zero na divisão por quatro, isto é, $n + 1$ é par e, portanto n e ímpar. Nesse caso, conseguimos formar blocos de quatro monômios, do que segue que $R(x) \equiv 0$.

2ª possibilidade: $2(n + 1)$ deixa resto 2 na divisão por quatro, isto é, $n + 1$ é ímpar e, portanto n é par. Nesse caso, não conseguimos formar blocos com quatro monômios pois sobram os últimos 2 termos de $P(x)$, $x + 1$.

Do que segue que $R(x) = x + 1$.

Gabarito: $\boldsymbol{R(x) = x + 1, se\ n}$ é $\boldsymbol{par}$; $\boldsymbol{R(x) = 0, se\ n}$ é í$\boldsymbol{mpar}$.

---

97. (IME/1998)

Determine $\alpha, \beta\ e\ \gamma$ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$, racional inteiro em x, seja divisível por $(x - 1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para $x = 1$.

Comentários

Se $(x - 1)^2$ divide o polinômio dado, temos que $x - 1$ divide o polinômio duas vezes. Usando Briot-Ruffini:

1	α	β	0	...	0	1
1	α	$\beta+\alpha$	$\beta+\alpha$	...	$\beta+\alpha$	$\beta+\alpha+1$
	α	$2\alpha+\beta$	$3\alpha+2\beta$	...	$(\gamma+1)\alpha$ $+\gamma\beta$	

Disso, devemos ter:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+1=0 \\ (\gamma+1)\alpha+\gamma\beta=0 \end{cases}$$

Pela divisão exata.

Resolvendo para β e γ, vem:

$$\beta = -1-\alpha$$

$$\gamma=\alpha$$

Da divisão realizada acima, temos que:

$$q(x)=\alpha x^{\gamma-1}+(2\alpha+\beta)x^{\gamma-1}+\cdots+[(\gamma)\alpha+(\gamma-1)\beta]$$

Substituindo os valores de $\gamma\ e\ \beta$, vem:

$$q(x)=\alpha x^{\alpha-1}+(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\cdots+1$$

Do enunciado, temos que:

$$q(1)=\alpha+(\alpha-1)+\cdots+1=120$$

Note que temos uma P.A. de α termos e razão 1, do que segue que:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}=120\Rightarrow\alpha^2+\alpha-240=0$$

Resolvendo para α, temos $\alpha=15\ ou\ \alpha=-16$. Como $\alpha>0$, segue que $\alpha=15$.

Por fim:

$$\beta=-1-15=-16$$

$$\gamma=15$$

Gabarito: $\boldsymbol{\alpha=15;\beta=-16;\gamma=15.}$

98. (IME/1997)

Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\phi+xsen\ \phi)^n$ por (x^2+1), onde n é um número natural.

Comentários

O primeiro passo é escrever a divisão do polinômio dado por x^2+1:

$$(cos\phi+xsen\phi)^n=q(x)(x^2+1)+r(x)$$

Do estudo da divisão de polinômios, sabemos que:

$$grau\big(r(x)\big)<grau\big((x^2+1)\big)=2$$

Então, podemos dizer que:

$$r(x) = ax + b$$

Vamos encontrar as raízes de $x^2 + 1$, que nos ajudarão a retirar o termo $q(x)(x^2 + 1)$.

Logo:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

Para $x = i$:

$$(cos\phi + isen\phi)^n = q(i)(i^2 + 1) + r(i) \Rightarrow (cos\phi + isen\phi)^n = r(i)$$

Da primeira fórmula de Moivre:

$$(cos\phi + isen\phi)^n = \cos(n\phi) + isen(n\phi)$$

Para $x = -i$:

$$(cos\phi - isen\phi)^n = \cos(n\phi) - isen(n\phi) = q(-i)((-i)^2 + 1) + r(-i)$$

Ou seja:

$$\cos(n\phi) - isen(n\phi) = r(-i)$$

Mas sabemos que:

$$r(i) = ai + b \text{ e } r(-i) = -ai + b$$

Somando $r(i)$ e $r(-i)$:

$$r(i) + r(-i) = 2b = 2\cos(n\phi) \Rightarrow b = \cos\,(n\phi)$$

Subtraindo $r(i)$ e $r(-i)$:

$$r(i) - r(-i) = 2isen(n\phi) = 2ai \Rightarrow a = sen(n\phi)$$

Portanto, temos que:

$$r(x) = sen(n\phi)x + \cos\,(n\phi)$$

Gabarito: $\boldsymbol{sen(n\phi)x + \cos\,(n\phi)}$.

---

99. (IME/1995)

Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \cdots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$.

Comentários

Para provar que $P(x)$ é divisível pelo polinômio dado, devemos mostrar que todas as raízes de $G(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$ são também raízes de $P(x)$.

Seja então ω qualquer de $G(x)$. Veja, antes de prosseguir, que:

$$G(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = 10 \neq 0$$

Ou seja, 1 não é raíz de $G(x)$, do que podemos afirmar, com certeza, que $\omega \neq 1$.

Continuando:

$$G(\omega) = \omega^9 + \cdots + 1 = \frac{\omega^{10} - 1}{\omega - 1} = 0$$

Veja que a expressão acima faz sentido, uma vez que $\omega \neq 1 \Rightarrow \omega - 1 \neq 0$.

Disso, devemos ter:

$$\omega^{10} - 1 = 0 \Rightarrow \omega^{10} = 1 \; eq. 01$$

Achamos, então, uma relação que todas as raízes de $P(x)$ obedecem.

Vamos calcular $P(\omega)$.

$$P(\omega) = \omega^{999} + \omega^{888} + \omega^{777} + \cdots + \omega^{111} + 1$$

Note que todas as potências são múltiplos de 111, do que temos:

$$\omega^{111} = \omega^{110} \cdot \omega$$

Da equação 01, temos que:

$$(\omega^{10})^{11} \cdot \omega = 1^{11} \cdot \omega = \omega$$

Logo, em $P(\omega)$, podemos escrever:

$$P(\omega) = (\omega^{111})^9 + (\omega^{111})^8 + (\omega^{111})^7 + \cdots + \omega^{111} + 1 = \omega^9 + \cdots + 1$$

Ou seja, temos que:

$$P(\omega) = G(\omega) = 0$$

Para todas as raízes de $G(x)$. Dessa forma, concluímos que $G(x)$ divide $P(x)$.

Gabarito: Demonstração.

---

100. (IME/1987)

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.

a) Sabendo-se que $p(x)$ assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$, mostre que $p(x)$ não possui raízes inteiras.

b) Sabendo-se que $p(x) = 7$ para quatro valores de x, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de x, $p(x)$ assume o valor 14?

Comentários

Item a:

Do enunciado, temos que:

$$p(0) = a_{16} \cdot 0^{16} + a_{15} \cdot 0^{15} + \cdots + a_0 = 2n + 1 \Rightarrow a_0 = 2n + 1$$

$$p(1) = a_{16} + a_{15} + \cdots + a_0 = 2m + 1$$

Suponha que exista uma raiz $x_0 \in \mathbb{Z}$. Vamos analisar dois casos:

Se x_0 for par:

$$p(x_0) = a_{16}x_0^{16} + a_{15}x_0^{15} + \cdots + a_1x_0 + a_0 = 0 \Rightarrow x_0(a_{16}x_0^{15} + a_{15}x_0^{14} + \cdots + a_1) = -(2n+1)$$

Note o lado esquerdo da igualdade é par, pois x_0 é par. Porém, do outro lado, temos $-a_0 = -(2n+1)$ que é ímpar. Absurdo!

Se x_0 for ímpar:

Note que se x_0 é ímpar, então, qualquer potência de x_0 também é. Dessa forma, veja que:

$$p(x_0)+p(1)=a_{16}(x_0^{16}+1)+a_{15}(x_0^{15}+1)+\cdots+a_1(x_0+1)+2a_0=2m+1$$

Mas cada parcela dessa soma é par, pois x_0^m+1 é sempre par e $2a_0$ também é par. A soma delas está resultando em $2m+1$, que é ímpar. Absurdo!

Logo, $p(x)$ não possui raízes inteiras.

Item b:

Suponha que $a, b, c\ e\ d$ sejam quatro valores distintos para os quais $p(x)=7$. Logo, podemos escrever que:

$$p(x)-7=g(x)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

Ou seja:

$$p(x)=g(x)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+7$$

Suponha então que exista k inteiro tal que $p(k)=14$. Disso, temos que:

$$p(k)=g(k)(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)+7=14$$

Ou seja:

$$g(k)(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)=7$$

Sabemos que $a, b, c\ e\ d$ são todos distintos, logo, os fatores $(k-a),(k-b),(k-c)\ e\ (k-d)$ são todos distintos. Mas 7 não pode ser decomposto em quatro fatores inteiros distintos, pois ele é primo. Logo, não é possível que isso ocorra.

Conclusão: não existe k inteiro tal que $p(k)=14$.

Gabarito: Demonstração.

---

101. (IME/1984)

Determine o polinômio

$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

Tal que $p(x)=p(1-x)$, $p(0)=0$ e $p(-1)=6$.

Comentários

Vamos começar pelas informações mais simples.

$$p(0)=0\Rightarrow p(0)=0^2+a(0)^3+b(0)^2+c(0)+d=0\Rightarrow d=0$$

Além disso, temos que $p(1)=p(1-1)=p(0)=0$.

$$p(1)=1+a+b+c=0\Rightarrow a+b+c=-1$$

De $p(-1)=6$:

$$p(-1)=1-a+b-c=6\Rightarrow -a+b-c=5$$

Também temos que $p(2)=p(1-2)=p(-1)=6$. Logo:

$$p(2)=16+8a+4b+2c=6\Rightarrow 8a+4b+2c=-10$$

Do que temos o sistema:

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \; eq.01 \\ -a+b-c=5 \; eq.02 \\ 8a+4b+2c=-10 \; eq.03 \end{cases}$$

Somando $eq.01$ e $eq.02$, vem:

$$2b=4 \Rightarrow b=2$$

Da $eq.02$, temos:

$$-a-c=3 \Rightarrow a=-3-c$$

Substituindo isso na $eq.03$, vem:

$$8(-3-c)+8+2c=-10 \Rightarrow c=-1$$

Por fim:

$$a=-2$$

Ou seja:

$$p(x)=x^4-2x^3+2x^2-x$$

Gabarito: $\boldsymbol{p(x)=x^4-2x^3+2x^2-x}$ **.**

---

102. (IME/1976)

Dado o polinômio $2x^4+x^3+px^2+qx+2$, determine p e q de modo que ele seja divisível por $(x-1)^2$.

Comentários

Vamos usar Briot-Ruffini duas vezes para dividir o polinômio por $x-1$:

1	2	1	p	q	2
1	2	3	$p+3$	$p+q+3$	$p+q+5$
	2	5	$p+8$	$2p+q+11$	

Queremos que:

$$\begin{cases} p+q+5=0 \\ 2p+q+11=0 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos que:

$$2p+q+11=0 \Rightarrow p+(p+q)+11=0 \Rightarrow p-5+11=0 \Rightarrow p=-6$$

Do que resulta:

$$q=-5+6=1$$

Gabarito: $\boldsymbol{p=-6 \; e \; q=1.}$

---

10. Considerações Finais da Aula

Chegamos ao final da aula. Vimos os conceitos iniciais sobre polinômios e resolvemos diversas questões. Você deve ter notado que a maioria das questões sobre polinômios envolve encontrar suas raízes. Existem diversos teoremas sobre as raízes de um polinômio. Estudaremos eles na próxima aula, equações algébricas. Tente absorver o essencial desse tema e sempre que tiver dúvidas, nos procure no fórum. Estamos aqui para auxiliá-lo.

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

11. Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios e equações. 8. ed. Atual, 2013. 250p.

[2] Morgado, Augusto. Wagner, Eduardo. Carvalho, Paulo. Lima, Elon. A Matemática do Ensino Médio volume 3. 7 ed. SBM, 2016. 198p.

[3] Guimarães, Caio. Matemática em nível IME/ITA Volume 1: Números Complexos e Polinômios. 1 ed. Vestseller, 2008. 330p.

[4] Vallejo, Cesar. Problemas Selectos. Lumbreras Editores. 656p.

[5] Andreescu, Titu. 101 Problems in Algebra. AMT Publishing, 2001. 139p.

[6] Andreescu, Titu. Gelca, Răzvan. Putnam and Beyond. Springer, 2007. 798p.