# ÁREAS DE TRIÂNGULOS

## 1. DEFINIÇÃO DE ÁREA

Cada figura plana está associada a um número positivo chamado área que possui as seguintes propriedades:

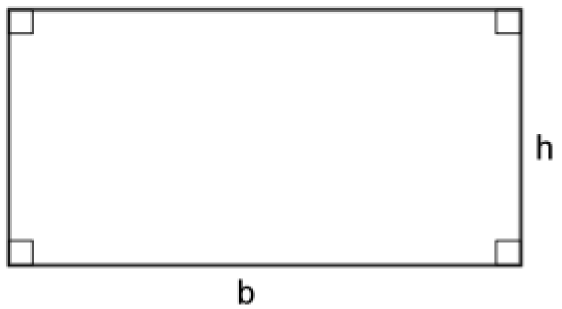
**P1. Figuras planas congruentes possuem a mesma área, ou seja, são equivalentes.**

**P2. Se uma figura plana $P$ for decomposta em duas outras $P_1$ e $P_2$ então a área de $P$ é a soma das áreas de $P_1$ e de $P_2$.**

**P3. A área de um retângulo de base $b$ e altura $h$ é igual ao produto $b \cdot h$.**

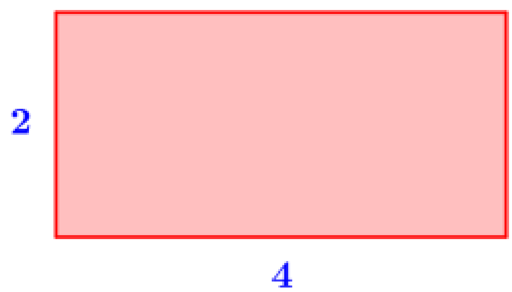
## 2. RETÂNGULO

Como estabelecido na propriedade P1, a área de um retângulo de base $b$ e altura $h$ é igual ao produto $b \cdot h$.




$$S = b \cdot h$$

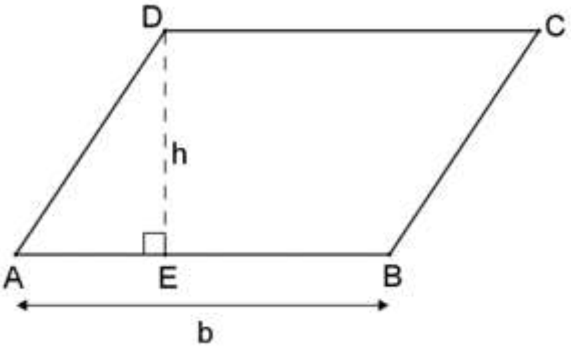
Exemplo: Calcule a área do retângulo da figura.




$$S_{ret.} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ u.a.}$$

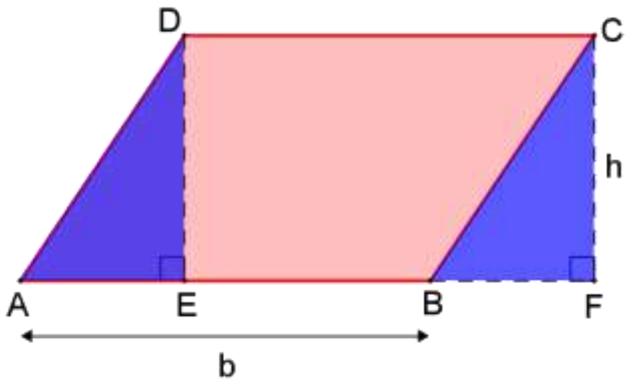
## 3. PARALELOGRAMO

A área de um paralelogramo de base $b$ e altura $h$ é igual ao produto $b \cdot h$, ou seja, é igual à área do retângulo de mesma base e altura.



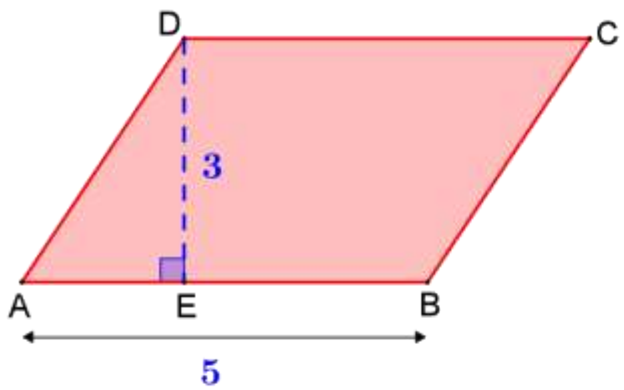

$S = b \cdot h$

Demonstração:




$$S_{ADE} = S_{BCF} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{DEFC} = b \cdot h$$

Exemplo: Calcule a área do paralelogramo da figura.

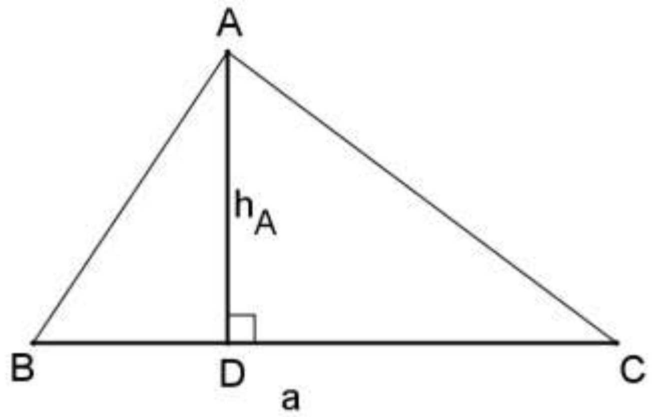



$$S_{ABCD} = 5 \cdot 3 = 15 \text{ u.a.}$$

## 4. TRIÂNGULOS

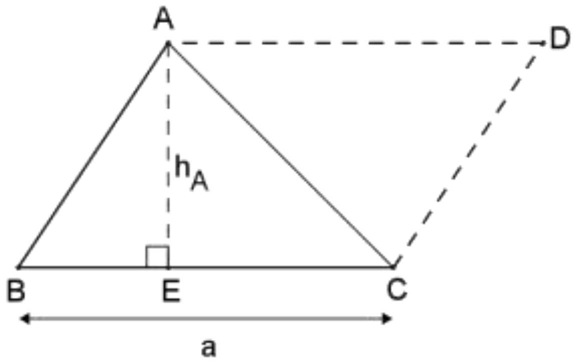
Nessa seção serão apresentadas diversas fórmulas para o cálculo da área de um triângulo.

A área de um triângulo é igual à metade do produto de um dos lados pela altura relativa a ele.




$$S_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{c \cdot h_C}{2}$$

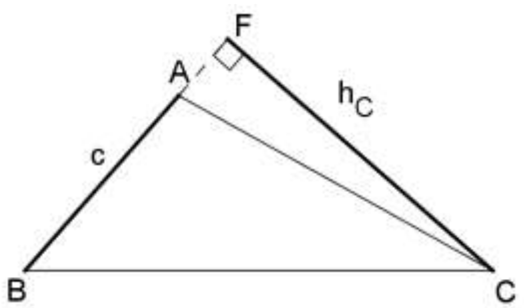
Demonstração:




Sejam $AD \parallel BC$ e $CD \parallel AB$, então o $\#ABCD$ é um paralelogramo e $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ (L.L.L.).

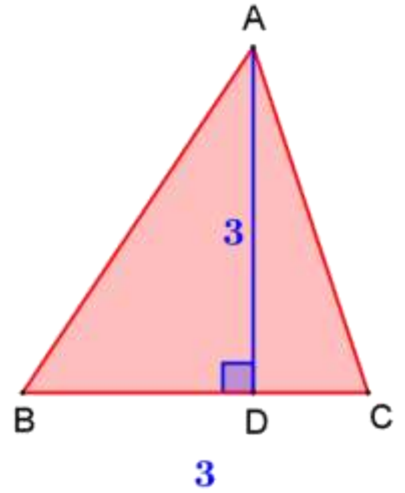
Logo, $S_{ABC} = S_{CDA}$, então $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_A = \frac{a \cdot h_A}{2}$.

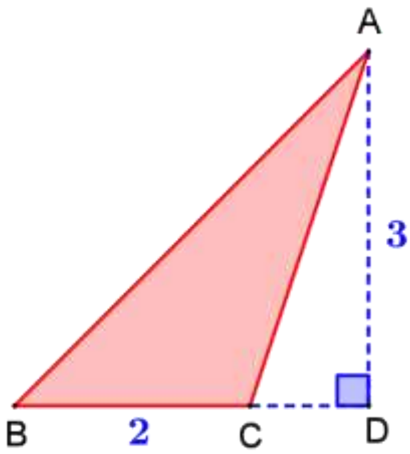
Note que, quando o triângulo é obtusângulo, o pé da altura pode estar no prolongamento do lado, mas a fórmula funciona do mesmo modo.




$$S_{ABC} = \frac{c \cdot h_C}{2}$$

Exemplo: Calcule a área dos triângulos das figuras a seguir.

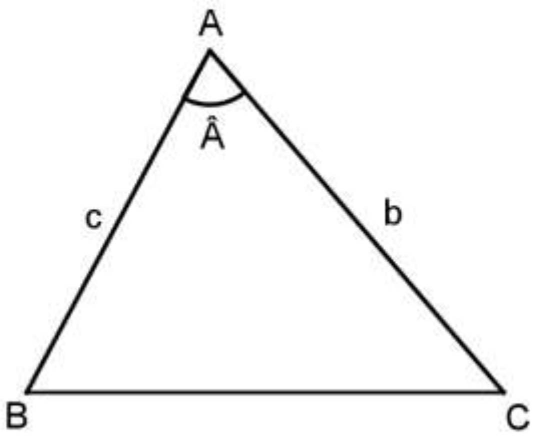



$S = 3 \cdot 3 = 9$ u.a.

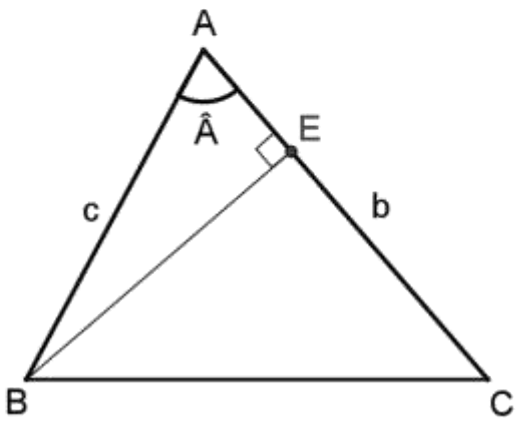
$S = 2 \cdot 3 = 6$ u.a.

A área de um triângulo é igual à metade do produto de dois lados adjacentes multiplicado pelo seno do ângulo entre eles.




$$S_{ABC} = \frac{b \cdot c}{2} \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a \cdot c}{2} \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{a \cdot b}{2} \operatorname{sen} \hat{C}$$

Demonstração:

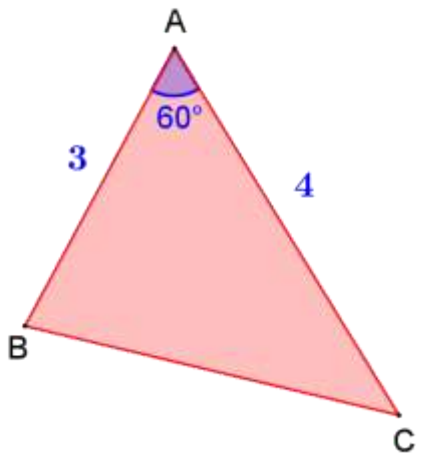


Seja $BE$ a altura relativa ao lado $AC$ do $\Delta ABC$, então $S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BE}{2}$.

No triângulo retângulo $ABE$, temos $\text{sen}\hat{A} = \dfrac{BE}{AB} \Leftrightarrow BE = AB \cdot \text{sen}\hat{A}$.

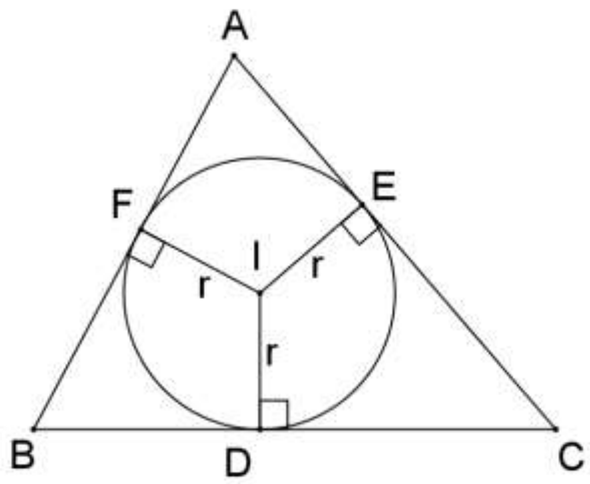
Logo, $S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BE}{2} = \dfrac{AC}{2} \cdot AB\,\text{sen}\hat{A} = \dfrac{b \cdot c}{2}\text{sen}\hat{A}$.

Exemplo: Calcule a área do triângulo da figura a seguir.




$$S = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \text{sen}60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

A área de um triângulo é igual ao produto de seu semiperímetro pelo raio do círculo inscrito nesse triângulo.

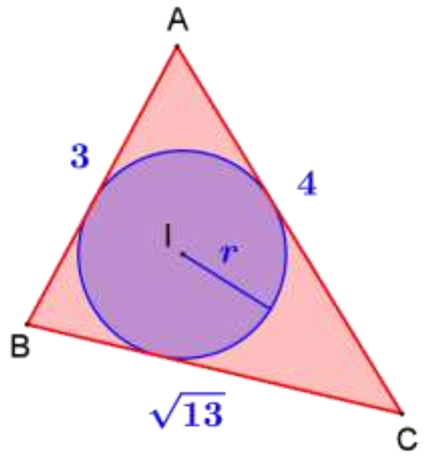



$S_{ABC} = p \cdot r$

Demonstração:

$$S_{ABC} = S_{ABI} + S_{ACI} + S_{BCI} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r = p \cdot r$$

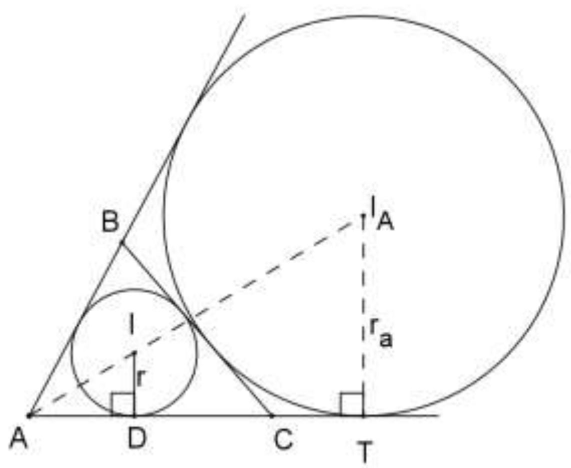
Exemplo: Calcule a área do triângulo da figura a seguir, onde $r = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{39}}{6}$.




$$p = \frac{3+4+\sqrt{13}}{2} = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

$$S = p \cdot r = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{3}-\sqrt{39}}{6} = \frac{49\sqrt{3} - 7\sqrt{39} + 7\sqrt{39} - 13\sqrt{3}}{12} = 3\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

A área de um triângulo é igual ao produto da diferença entre o semiperímetro e um dos seus lados pelo raio do círculo ex-inscrito relativo a esse lado.



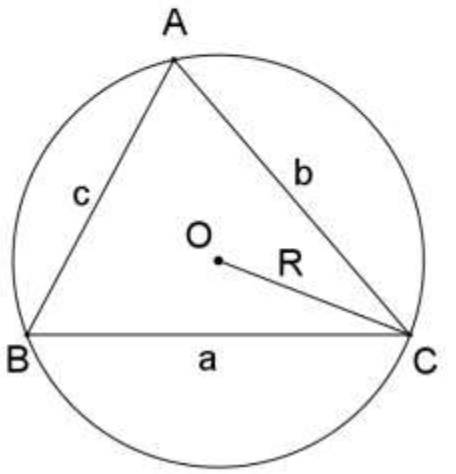

$$S_{ABC} = (p-a) \cdot r_a = (p-b) \cdot r_b = (p-c) \cdot r_c$$

Demonstração:

Na figura $AD = p - a$ e $AT = p$.

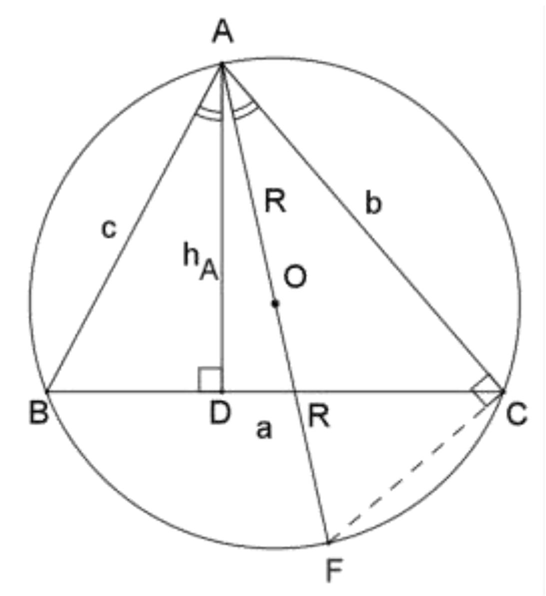
$$\Delta ADI \sim \Delta ATI_A \Rightarrow \frac{ID}{I_A T} = \frac{AD}{AT} \Rightarrow \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p} \Leftrightarrow p \cdot r = (p-a) \cdot r_a \Rightarrow S_{ABC} = (p-a) \cdot r_a$$

A área de um triângulo é igual ao produto dos três lados dividido pelo quádruplo do raio do círculo circunscrito a esse triângulo.




$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Demonstração:



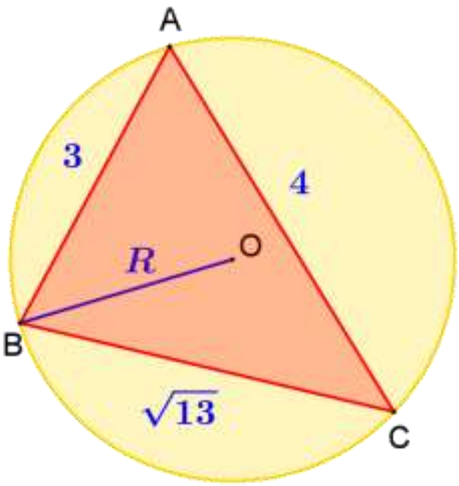

AOF é um diâmetro do círculo circunscrito, então $A\hat{C}F = 90^\circ$.

$$A\hat{B}C = A\hat{F}C = \frac{AC}{2} \Rightarrow B\hat{A}D = C\hat{A}F$$

$$\Delta BDA \sim \Delta FCA \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{c}{2R} = \frac{h_A}{b} \Leftrightarrow h_A = \frac{b \cdot c}{2R}$$

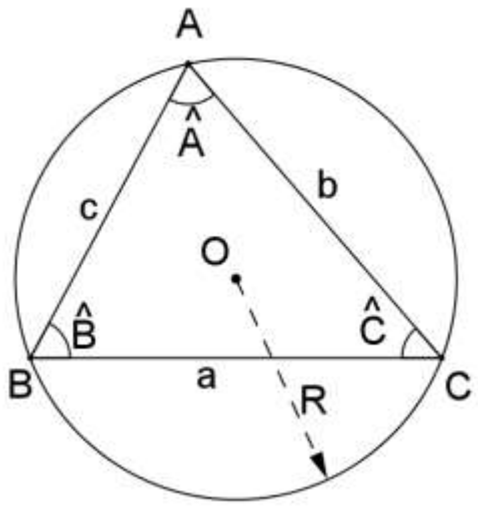
$$S_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{bc}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Exemplo: Calcule a área do triângulo da figura a seguir, sabendo que $R = \frac{\sqrt{39}}{3}$.




$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sqrt{13}}{4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{3}} = 3\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

A área de um triângulo é igual ao dobro do quadrado do raio do círculo circunscrito multiplicado pelo produto dos senos de seus ângulos.



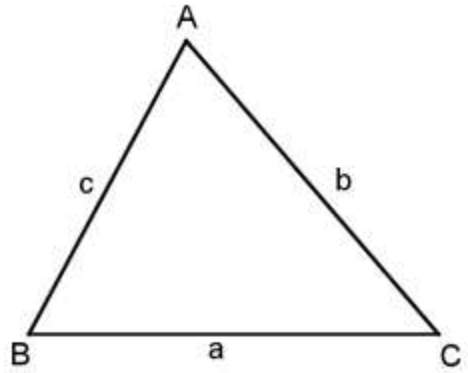

$$S_{ABC} = 2R^2 \cdot \text{sen}\hat{A} \cdot \text{sen}\hat{B} \cdot \text{sen}\hat{C}$$

Demonstração:

Aplicando a lei dos senos ao $\Delta ABC$, temos: $\frac{a}{\text{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\hat{C}}=2R$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}=\frac{2R\text{sen}\hat{A}\cdot 2R\text{sen}\hat{B}\cdot 2R\text{sen}\hat{C}}{4R}=2R^2\cdot\text{sen}\hat{A}\cdot\text{sen}\hat{B}\cdot\text{sen}\hat{C}$$

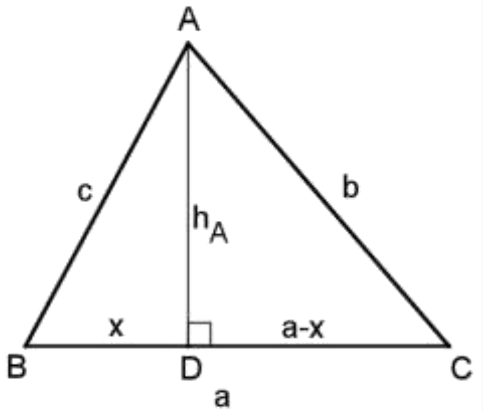
**Fórmula de Heron:** A área de um triângulo é igual à raiz quadrada do produto do semiperímetro pela diferença entre o semiperímetro e cada um dos lados do triângulo.




$$S_{ABC}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

onde $p=\frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Demonstração:




Aplicando o teorema de Pitágoras nos $\Delta ABD$ e $\Delta ACD$, temos:

$$h_A^2+x^2=c^2$$

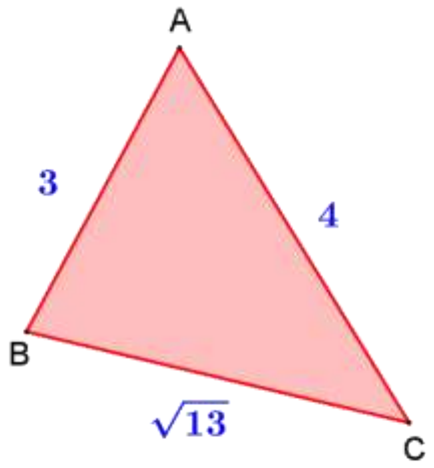
$$h_A^2+(a-x)^2=b^2$$

$$x^2-(a-x)^2=c^2-b^2 \Leftrightarrow a\cdot(2x-a)=c^2-b^2 \Leftrightarrow x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$$

$$\Rightarrow h_A^2=c^2-x^2=(c+x)(c-x)=\left(c+\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)\left(c-\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)=$$
$$=\frac{1}{4a^2}\left(2ac+a^2+c^2-b^2\right)\left(2ac-a^2-c^2+b^2\right)=\frac{1}{4a^2}\left[(a+c)^2-b^2\right]\left[b^2-\left(a-c^2\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{4a^2}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)=\frac{1}{4a^2}\cdot 2p\cdot(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)=$$
$$=\frac{4}{a^2}\cdot p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$$

$$\Rightarrow h_A=\frac{2}{a}\cdot\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{a\cdot h_A}{2}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

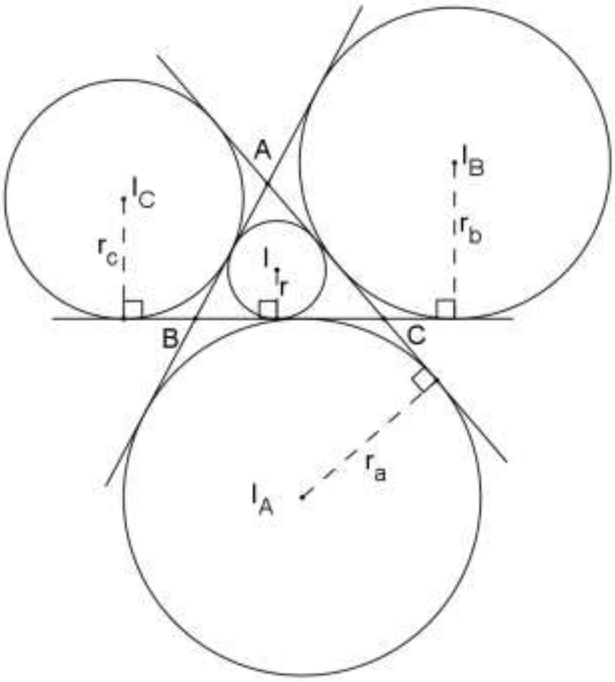
Exemplo: Calcule a área do triângulo da figura.




$$p=\frac{3+4+\sqrt{13}}{2}=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

$$S=\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}\cdot\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}-4\right)\cdot\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{13}\right)}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)}=$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(49-13)\cdot(13-1)}=\frac{1}{4}\sqrt{36\cdot 12}=3\sqrt{3}$$

A área de um triângulo é igual à raiz quadrada do produto do raio do círculo inscrito e dos três raios dos círculos ex-inscritos ao triângulo.




$$S_{ABC} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

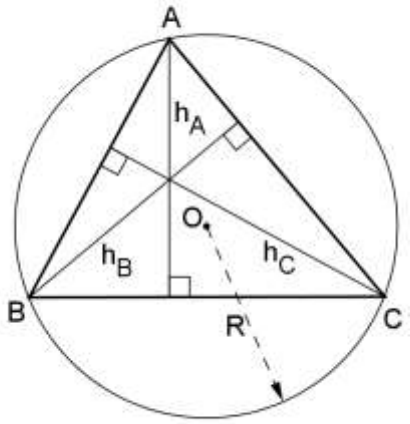
Demonstração:

$$S_{ABC} = p \cdot r = (p-a) \cdot r_a = (p-b) \cdot r_b = (p-c) \cdot r_c$$

$$\Rightarrow S_{ABC}^4 = p \cdot r \cdot (p-a) \cdot r_a \cdot (p-b) \cdot r_b \cdot (p-c) \cdot r_c = p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = S_{ABC}^2 \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

$$\Rightarrow S_{ABC}^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

A área de um triângulo é igual à raiz quadrada da metade do produto do raio do círculo circunscrito por cada uma das três alturas do triângulo.



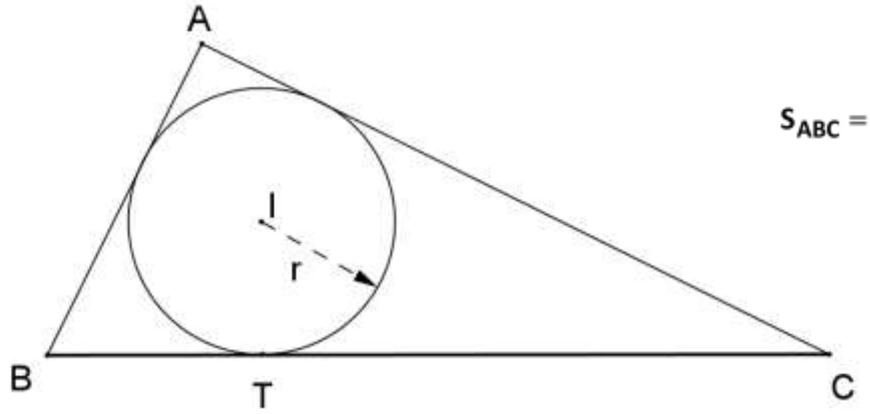

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{R \cdot h_A \cdot h_B \cdot h_C}{2}}$$

Demonstração:

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{ah_A}{2} = \frac{bh_B}{2} = \frac{ch_C}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{\frac{2S_{ABC}}{h_A} \cdot \frac{2S_{ABC}}{h_B} \cdot \frac{2S_{ABC}}{h_C}}{4R} \Leftrightarrow 4Rh_Ah_Bh_CS_{ABC} = 8S_{ABC}^3 \Leftrightarrow S_{ABC}^2 = \frac{Rh_Ah_Bh_C}{2} \Leftrightarrow S_{ABC} = \sqrt{\frac{Rh_Ah_Bh_C}{2}}$$

**Teorema de Burlet:** Em um triângulo retângulo, a área é igual ao produto dos segmentos determinados pelo círculo inscrito sobre a hipotenusa.




$S_{ABC} = BT \cdot TC$

Demonstração:

$BT = p - b;\ CT = p - c;\ r = p - a;\ S_{ABC} = p \cdot r$

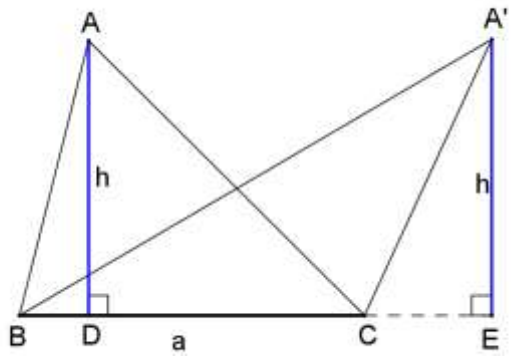
$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \Rightarrow S_{ABC}^2 = p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) = p \cdot r \cdot BT \cdot CT = S_{ABC} \cdot BT \cdot CT$

$\Leftrightarrow S_{ABC} = BT \cdot CT$

## 5. FIGURAS EQUIVALENTES E RAZÃO ENTRE ÁREAS

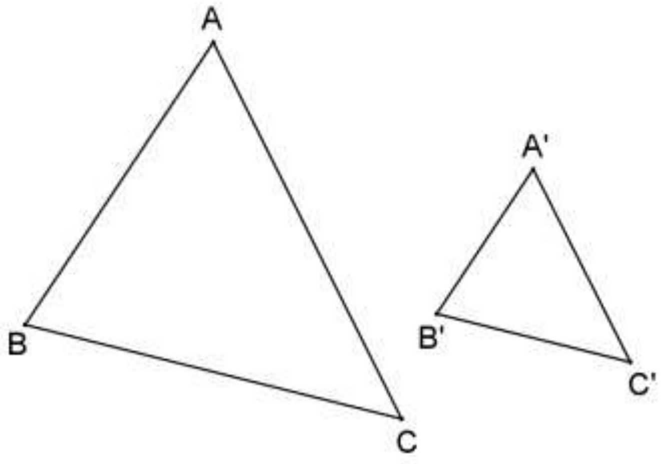
**Figuras equivalentes** são aquelas que possuem a mesma área.

Se dois triângulos possuem bases e alturas congruentes, então eles são equivalentes.




$S_{ABC} = S_{A'BC}$

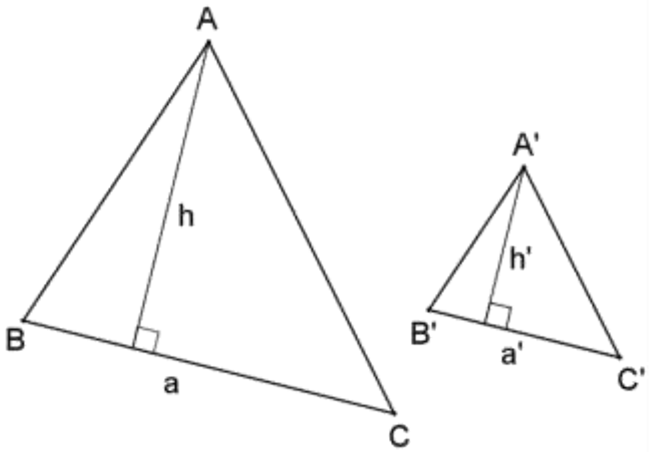
Se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança.




$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$

onde $k$ é a razão de semelhança.

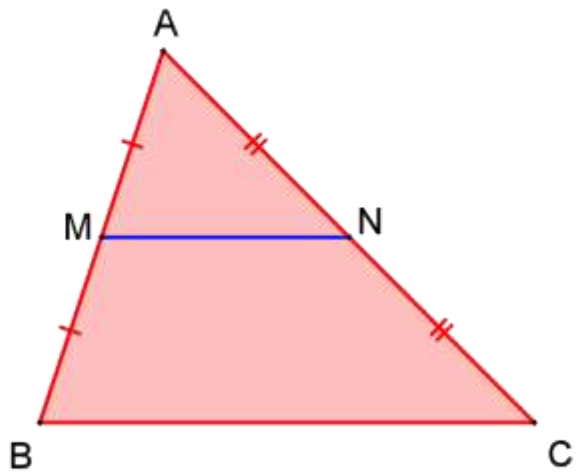
Demonstração:




$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{a' \cdot h'}{2}} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k^2$$

Note que essa propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes, não só para triângulos.

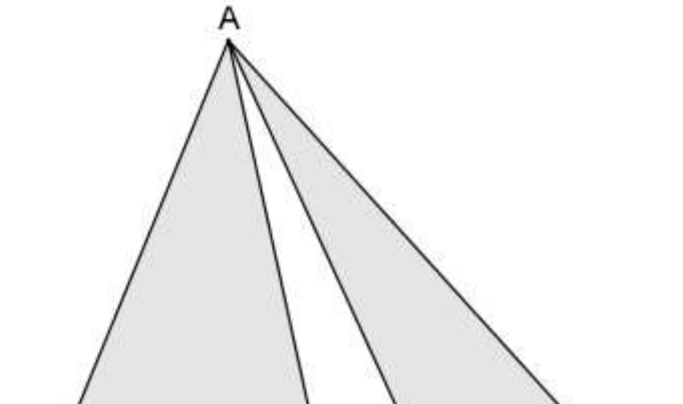
Exemplo: Sejam M e N pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, de um triângulo ABC. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos AMN e ABC.




MN é base média do triângulo ABC, então $MN \parallel BC$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Se dois triângulos possuem bases sobre a mesma reta e vértice comum, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases.

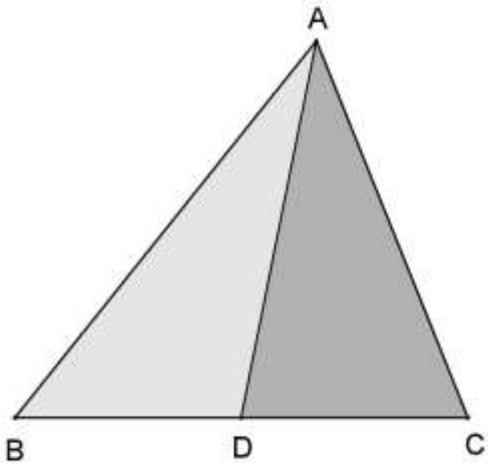



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{a}{a'}$$

Demonstração:

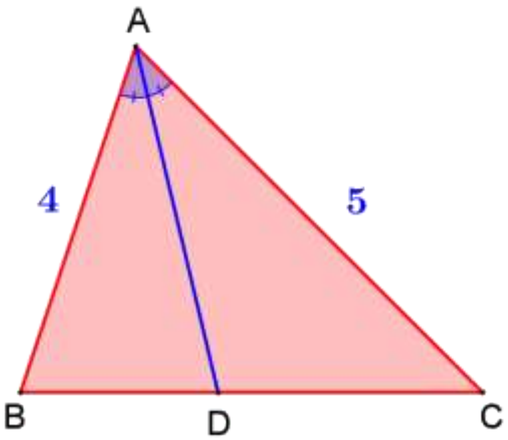
Seja $h$ a distância do ponto $A$ à reta $r$, então $h$ é altura do $\Delta ABC$ e do $\Delta AB'C'$. Assim, $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{a' \cdot h}{2}} = \frac{a}{a'}$.

Uma consequência imediata da proposição anterior é que a razão entre as áreas em que uma ceviana divide um triângulo é igual à razão entre as medidas dos segmentos em que essa ceviana divide o lado, ou seja, $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD}$; $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{BD}{BC}$; $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\frac{CD}{BC}$.




$$\frac{S_{ABD}}{BD}=\frac{S_{ACD}}{CD}=\frac{S_{ABC}}{BC}$$

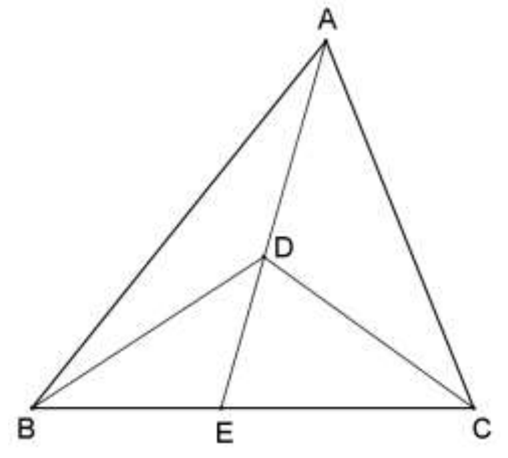
Exemplo: Seja um triângulo ABC de lados $AB=4$ e $AC=5$, e o ponto D sobre BC é o pé da bissetriz do ângulo $\hat{A}$. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos ABD e ACD.




Pelo teorema da bissetriz interna, temos: $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC} \Leftrightarrow \frac{BD}{4}=\frac{CD}{5}$.

A razão entre as áreas dos triângulos ABD e ACD é $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{4}{5}$.

Se dois triângulos possuem base comum e o vértice de um deles pertence a uma ceviana do outro partindo do vértice oposto à base comum, então a razão entre a área do maior e do menor deles é igual à razão entre a medida da ceviana e a medida da parte entre o vértice do menor e a base comum.



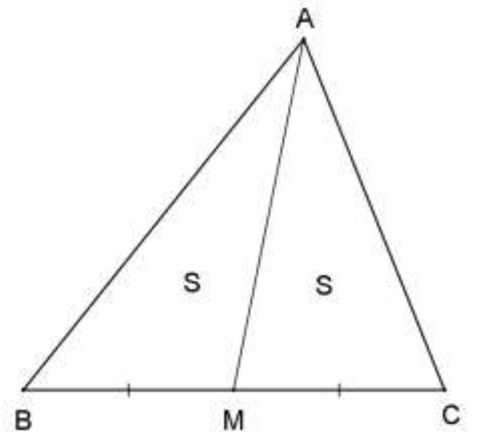

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AE}{DE}$$

Demonstração:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{BDE}} = \frac{AE}{DE} \wedge \frac{S_{ACE}}{S_{CDE}} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow \frac{S_{ABE} + S_{ACE}}{S_{BDE} + S_{CDE}} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AE}{DE}$$

Uma mediana divide o triângulo em duas regiões equivalentes.

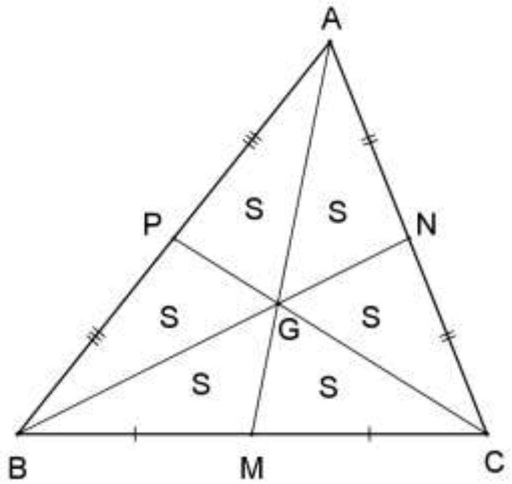
Seja $AM$ a mediana relativa ao lado $BC$ do $\triangle ABC$.




$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2}$$

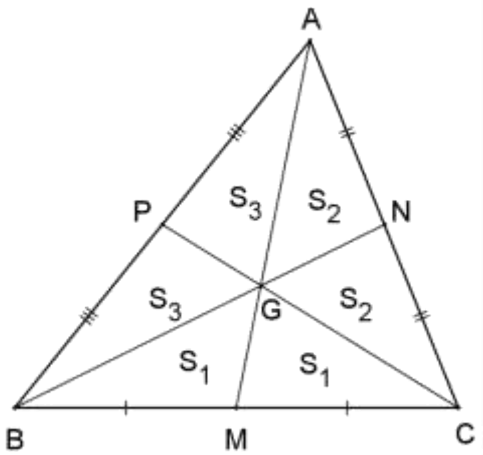
As três medianas de um triângulo dividem esse triângulo em seis triângulos equivalentes.

Sejam $AM$, $BN$ e $CP$ as medianas do $\triangle ABC$, então




$$S_{AGN} = S_{AGP} = S_{BGM} = S_{BGP} = S_{CGM} = S_{CGN} = \frac{S_{ABC}}{6}$$

Demonstração:




Como $M$, $N$ e $P$ são pontos médios, então os $\Delta BGC$, $\Delta AGC$ e $\Delta AGB$ são divididos em duas áreas equivalentes $S_1$, $S_2$ e $S_3$, respectivamente.

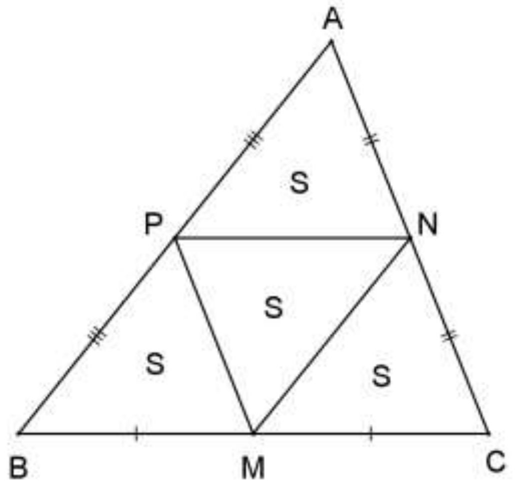
AM é mediana $\Rightarrow S_{ABM} = S_{ACM} \Rightarrow S_1 + 2 \cdot S_3 = S_1 + 2 \cdot S_2 \Leftrightarrow S_2 = S_3$

BN é mediana $\Rightarrow S_{BCN} = S_{BAN} \Rightarrow S_2 + 2 \cdot S_1 = S_2 + 2 \cdot S_3 \Rightarrow S_1 = S_3$

$$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S_{ABC}}{6}$$

As três bases médias de um triângulo dividem o triângulo em quatro regiões equivalentes.

Sejam $M$, $N$ e $P$ os pontos médios dos lados do $\Delta ABC$, então



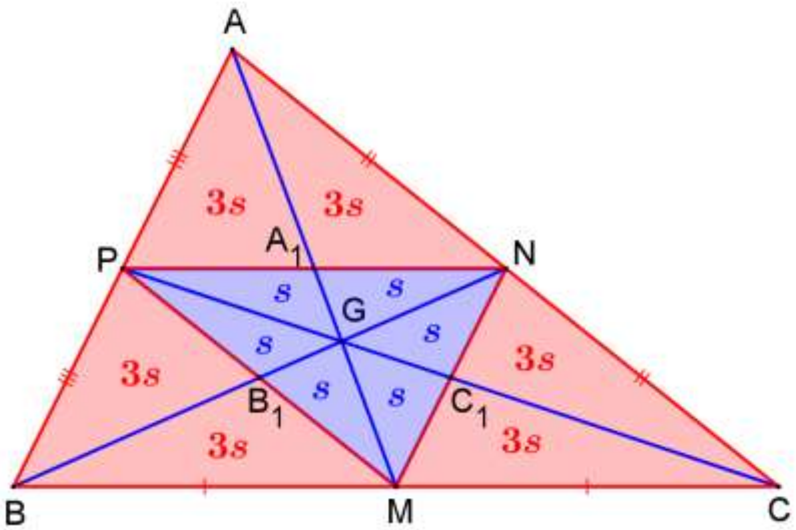

$$S_{MNP} = S_{ANP} = S_{BMP} = S_{CMN} = S = \frac{S_{ABC}}{4}$$

Demonstração:

Basta observar que $\Delta MNP \equiv \Delta ANP \equiv \Delta BMP \equiv \Delta CMN$.

As três medianas e as três bases médias de um triângulo dividem o triângulo em 12 triângulos, 6 deles equivalentes a $\frac{1}{8}$ da área do triângulo e 6 deles equivalentes a $\frac{1}{24}$ da área do triângulo.

Sejam $M$, $N$ e $P$ os pontos médios dos lados do $\Delta ABC$, então




$$S_{APA_1} = S_{ANA_1} = S_{BMB_1} = S_{BPB_1} = S_{CMC_1} = S_{CNC_1} = 3s = \frac{S_{ABC}}{8}$$

$$S_{A_1GP} = S_{A_1GN} = S_{B_1GM} = S_{B_1GP} = S_{C_1GM} = S_{C_1GN} = s = \frac{S_{ABC}}{24}$$

Demonstração:

Os pontos $A_1$, $B_1$ e $C_1$ são pontos médios de $PN$, $MN$ e $MP$, respectivamente.

$$AG=\frac{2}{3}AM \wedge AA_1=\frac{1}{2}AM \Rightarrow A_1G=AG-AA_1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)AM=\frac{AM}{6}\Rightarrow\frac{AA_1}{A_1G}=\frac{\frac{AM}{2}}{\frac{AM}{6}}=3\Rightarrow\frac{S_{A_1AN}}{S_{A_1GN}}=\frac{A_1A}{A_1G}=3$$

Analogamente, temos

$$\frac{S_{A_1AN}}{S_{A_1GN}}=\frac{S_{A_1AP}}{S_{A_1GP}}=\frac{S_{B_1BM}}{S_{B_1GM}}=\frac{S_{B_1BP}}{S_{B_1GP}}=\frac{S_{C_1CM}}{S_{C_1GM}}=\frac{S_{C_1CN}}{S_{C_1GN}}=3$$

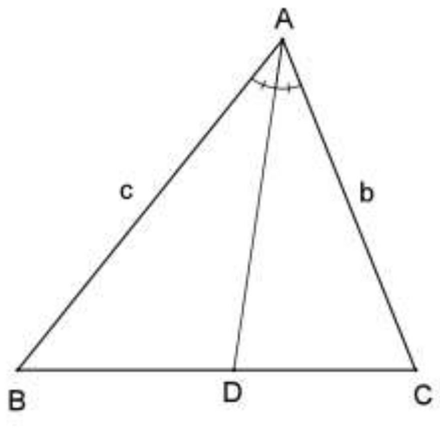
$$S_{APN}=S_{APA_1}+S_{ANA_1}=2\cdot S_{ANA_1}=\frac{S_{ABC}}{4}\Rightarrow S_{ANA_1}=\frac{S_{ABC}}{8}$$

$$\frac{S_{A_1GN}}{S_{ANA_1}}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{A_1GN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{S_{ABC}}{8}=\frac{S_{ABC}}{24}$$

Analogamente, prova-se para os outros triângulos.

A bissetriz de um dos ângulos de um triângulo divide-o em dois triângulos cujas áreas estão na mesma razão que os lados adjacentes ao ângulo.

Seja $AD$ a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$, então

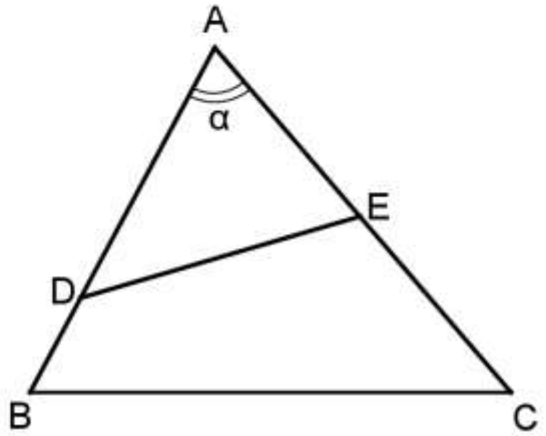



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

Demonstração:

Pelo teorema das bissetrizes, temos: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$. Logo, $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$.

Se dois triângulos possuem um ângulo comum, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre os produtos dos lados adjacentes a esse ângulo.




$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$$

Demonstração:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{AD\cdot AE}{2}\operatorname{sen}\alpha}{\frac{AB\cdot AC}{2}\operatorname{sen}\alpha}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$$

## EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (CN 2010) A área de um quadrado de 5 cm de lado, na unidade u definida como sendo a área de um círculo de raio 1 cm, é:

a) exatamente 25.

b) exatamente 12,5.

c) aproximadamente 8.

d) aproximadamente 6.

e) aproximadamente 5.

2. (CN 2010) O triângulo de lados $0,333\ldots\text{cm}$, $0,5\,\text{cm}$ e $0,666\ldots\text{cm}$ é equivalente ao triângulo isósceles de base $0,333\ldots\text{cm}$ e lados congruentes medindo x centímetros cada um. Com base nos dados apresentados, é correto afirmar que x é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{151}}{24}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{\sqrt{257}}{48}$

e) $\frac{\sqrt{15}+4\sqrt{6}}{36}$

3. (CN 2008) Dado um triângulo ABC de área 72, sobre a mediana $AM=12$, traçam-se os segmentos $AQ=3$ e $QP=6$. Sabendo-se que E é ponto de intersecção entre as retas BP e QC, qual é a área do triangulo QPE?

a) 6.

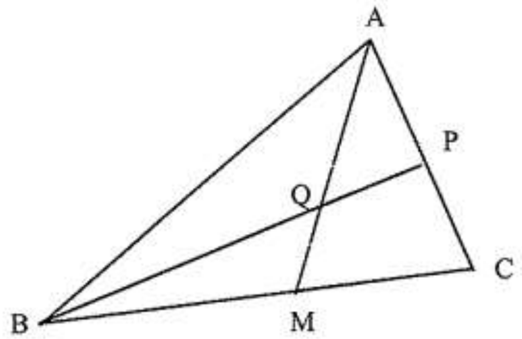
b) 8.

c) 9.

d) 12.

e) 18.

4. (CN 2005)




Na figura acima AM e BP são cevianas do triângulo ABC de área S. Sendo $AP = 2 \cdot PC$ e $AQ = 3 \cdot QM$, qual é o valor da área do triângulo determinado pelos pontos P, Q e M, em função de S?

a) $\frac{S}{16}$

b) $\frac{S}{18}$

c) $\frac{S}{20}$

d) $\frac{S}{21}$

e) $\frac{S}{24}$

5. (CN 2005) Considere o triangulo escaleno ABC e os pontos P e Q pertencentes ao plano de ABC e exteriores a esse triângulo.

Se: as medidas dos ângulos PAC e QBC são iguais; as medidas dos ângulos PCA e QCB são iguais; M é o ponto médio de AC; N é o ponto médio de BC; $S_1$ é a área do triangulo PAM; $S_2$ é a área do triangulo QBN; $S_3$ é a área do triangulo PMC; e $S_4$ é a área do triangulo QNC, analise as afirmativas:

I. $S_1$ está para $S_4$, assim como $S_3$ está para $S_2$.

II. $S_1$ está para $S_2$, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$.

III. $S_1$ está para $S_3$, assim como $S_2$ está para $S_4$.

Logo pode-se concluir, corretamente, que:

a) apenas a afirmativa I é verdadeira.

b) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

c) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

d) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

e) as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

6. (CN 1999) Considere o quadrado ABCD e o triângulo equilátero ABP, sendo P interior ao quadrado. Nestas condições o triângulo cobre cerca de quantos porcento da área do quadrado?

a) 40

b) 43

c) 45

d) 50

e) 53

7. (CN 1998) Num triângulo ABC, retângulo em A, os lados AB e AC valem, respectivamente c e b. Seja o ponto G o baricentro do triângulo ABC. A área do triângulo AGC é:

a) $\frac{bc}{2}$

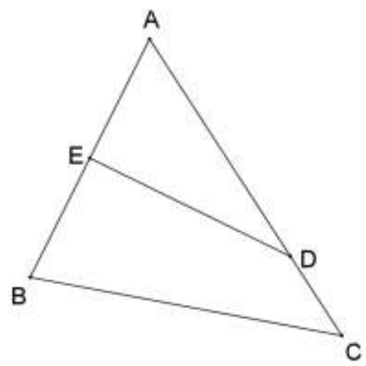
b) $\frac{bc}{3}$

c) $\frac{bc}{4}$

d) $\frac{bc}{6}$

e) $\frac{bc}{9}$

8. (CN 1994) O triângulo ADE da figura é equivalente ao quadrilátero BCDE. Se $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$, então $\overline{AD}$ é qual fração de $\overline{AC}$?




a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{5}{8}$

9. (CN 1993) Num triângulo retângulo ABC de catetos $AB = 8$ e $AC = 6$, a mediana AM intercepta a bissetriz BD no ponto E. A área do triângulo BME é expressa pelo número real x, tal que:

a) $3,5 \le x \le 4,0$

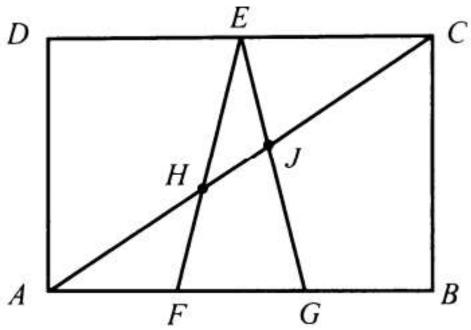
b) $4,0 < x \le 4,5$

c) $4,5 < x \le 5,0$

d) $5,0 < x \le 5,5$

e) $5,5 < x \le 6,5$

10. (CMRJ 2011) No retângulo ABCD, os pontos F e G pertencem ao lado AB e são tais que $AF = FG = GB$. O ponto médio do lado CD é o ponto E. A diagonal AC intercepta os segmentos EF e EG, respectivamente, nos pontos H e J. A área do retângulo ABCD mede $70\,cm^2$. A área do triângulo EHJ, então, é igual a




a) $\frac{5}{2}\,cm^2$

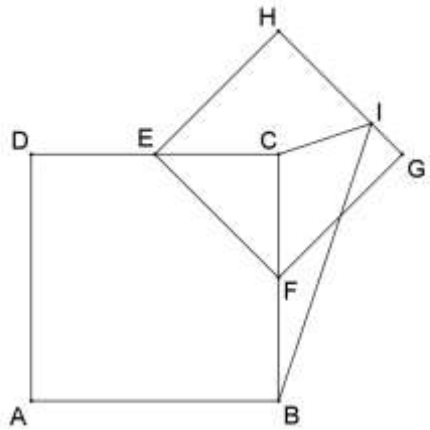
b) $\frac{35}{12}\,cm^2$

c) $3\,cm^2$

d) $\frac{7}{2}\,cm^2$

e) $\frac{35}{8}\text{cm}^2$

11. (CN 2013) Observe a figura a seguir.




A figura acima apresenta um quadrado ABCD de lado 2. Sabe-se que E e F são os pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Além disso, EFGH também forma um quadrado e I está sobre o lado GH, de modo que $GI = \frac{GH}{4}$. Qual é a área do triângulo BCI?

a) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{6}{7}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{3}{4}$

12. (CN 2012) Num paralelogramo ABCD de altura $CP = 3$, a razão $\frac{AB}{BC} = 2$. Seja ‘M’ o ponto médio de AB e ‘P’ o pé da altura de ABCD baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\frac{S(MPC)}{S(ADM)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo BPC é igual a

a) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

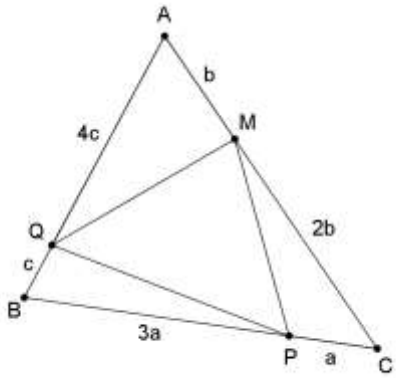
b) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. (CN 2012) Considere a figura abaixo.




A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é

a) $\frac{7}{12}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{15}$

d) $\frac{8}{15}$

e) $\frac{7}{8}$

14. (CN 2011) Seja ABC um triângulo com lados $AB = 15$, $AC = 12$ e $BC = 18$. Seja P um ponto sobre o lado AC, tal que $PC = 3AP$. Tomando Q sobre BC, entre B e C, tal que a área do quadrilátero APQB seja igual à área do triângulo PQC, qual será o valor de BQ?

a) 3,5

b) 5

c) 6

d) 8

e) 8,5

15. (CN 2011) Tem-se o quadrado de vértices ABCD com lados medindo $'k'\text{cm}$. Sobre AB marca-se M, de modo que $AM = \frac{BM}{3}$. Sendo N o simétrico de B em relação ao lado CD, verifica-se que MN corta a diagonal AC em P. Em relação à área ABCD, a área do triângulo PBC equivale a:

a) 18%

b) 24%

c) 27%

d) 30%

e) 36%

16. (CN 2011) Considere o conjunto de todos os triângulos retângulos. Sendo 'h' a altura relativa à hipotenusa, quantos elementos nesse conjunto tem área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$?

a) Infinitos.

b) Mais de dezesseis e menos de trinta.

c) Mais de quatro e menos de quinze.

d) Apenas um.

e) Nenhum.

17. (CN 2009) Seja ABC um triângulo retângulo com catetos $AC = 12$ e $AB = 5$. A bissetriz interna traçada de C intersecta o lado AB em M. Sendo I o incentro de ABC, a razão entre as áreas de BMI e ABC é:

a) $\frac{1}{50}$

b) $\frac{13}{60}$

c) $\frac{1}{30}$

d) $\frac{13}{150}$

e) $\frac{2}{25}$

18. (CN 2007) Em lugar do quadrado de lado igual a 1 (um) centímetro, tomou-se como unidade de área o triangulo equilátero de lado igual a 1 (um) centímetro. Qual será, nessa nova unidade, o número que expressará a área de um retângulo de base igual a 6 (seis) centímetros e altura igual a 4 (quatro) centímetros?

a) $24$.

b) $63$.

c) $18\sqrt{3}$.

d) $24\sqrt{3}$.

e) $32\sqrt{3}$.

19. (CN 2007) Em um triângulo retângulo ABC, o cateto AC e a hipotenusa BC medem, respectivamente, 10 e 40. Sabe-se que os segmentos CX, CY e CZ dividem o ângulo ABC em quatro ângulos de medidas iguais, e que AX, XY, YZ e ZB são segmentos consecutivos contidos internamente no segmento AB. Se $S_1$, $S_2$, $S_3$, e $S_4$ são, respectivamente, as áreas dos triângulos CAX, CXY, CYZ e CZB, qual será o valor da razão $\frac{S_1S_3}{S_2S_4}$ ?

a) 0,25

b) 0,5

c) 0,75

d) 1

e) 1,25

20. (CN 2000) Dado um trapézio qualquer, de bases 6 e 8, traça-se paralelamente às bases um segmento de medida x que o divide em outros dois trapézios equivalentes. Podemos afirmar que:

a) $x = 6,5$

b) $x = 4\sqrt{3}$

c) $x = 7$

d) $x = 5\sqrt{2}$

e) $x = 7,5$

21. (CN 2000) Dadas as afirmativas abaixo, coloque (V) verdadeiro ou (F) falso:

( ) Se a altura AH de um triângulo ABC o divide em dois triângulos ABH e ACH semelhantes e não congruentes, então o triângulo ABC é retângulo.

( ) A mediana AM de um triângulo ABC o divide em dois triângulos AMB e AMC equivalentes.

( ) A bissetriz interna AD de um triângulo ABC o divide em dois triângulos ABD e ACD cujas áreas são, respectivamente, proporcionais aos lados AB e AC.

Assinale a alternativa correta.

a) (V), (V), (V)

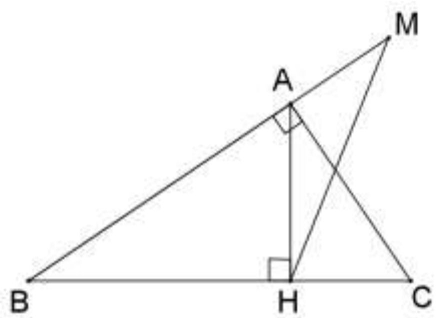
b) (V), (V), (F)

c) (V), (F), (V)

d) (F), (V), (F)

e) (V), (F), (F)

22. (CN 1996) No triângulo ABC, retângulo em A, da figura, $AB = c$, $AC = b$, $AM = 2$ e AH é a altura relativa ao lado BC. Qual é a área do triângulo AHM?




a) $\frac{bc}{b^2 + c^2}$

b) $\frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$

c) $\frac{bc^2}{b^2 + c^2}$

d) $\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

e) $\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

23. (CN 1995) Em um triângulo de vértices A, B e C, retângulo em A, os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente $6\sqrt{3}$ cm e 6 cm. Traça-se o segmento $\overline{AM}$, com M pertencente e interno ao segmento $\overline{BC}$. Sabendo-se que ângulo $M\hat{A}C$ mede 15º, a razão entre as áreas dos triângulos AMC e ABC é:

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

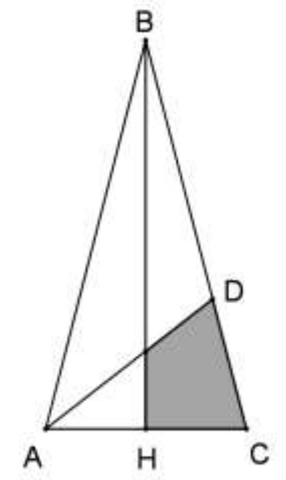
b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

e) impossível de se determinar com apenas esses dados.

24. (CN 1991) O triângulo ABC da figura abaixo tem área S. Sabendo que $\overline{AB}=\overline{BC}=2\overline{AC}$, $\overline{BH}$ é altura e $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$, a área da região hachurada, em função de S é igual a:




a) $\frac{2S}{15}$

b) $\frac{S}{10}$

c) $\frac{S}{18}$

d) $\frac{7S}{30}$

e) $\frac{S}{21}$

25. (CN 1989) Os lados de um triângulo medem $\overline{AB}=40$, $\overline{AC}=50$ e $\overline{BC}=60$. Sendo D a interseção da bissetriz interna do ângulo B com o lado $\overline{AC}$, a área do triângulo ABD é:

a) $225\sqrt{7}$

b) $\frac{375}{2}\sqrt{7}$

c) $150\sqrt{7}$

d) $125\sqrt{7}$

e) $75\sqrt{7}$

26. (CN 1987) O número de triângulos de perímetro igual a 19, uma das alturas igual a 4, inscritíveis num círculo de raio 5, e cujos lados têm medidas expressas por números inteiros é:

a) 1

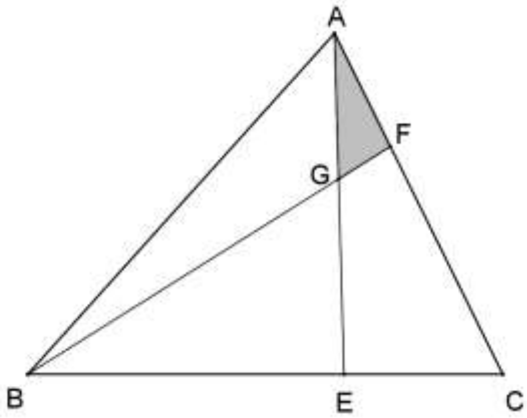
b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

27. (CN 1984) Na figura: $\overline{AC} = 3\overline{AF}$ e $\overline{BC} = 3\overline{CE}$, sendo $S$ a área do triângulo ABC, a área do triângulo AGF é:




a) $\frac{S}{3}$

b) $\frac{S}{7}$

c) $\frac{S}{9}$

d) $\frac{S}{21}$

e) $\frac{S}{18}$

28. (CN 2003) Considere os triângulos ABC e MNP. Se as medidas dos lados do segundo triangulo são, respectivamente, iguais às medidas das medianas do primeiro, então a razão da área de MNP para a área de ABC é igual a:

a) $\frac{1}{3}$

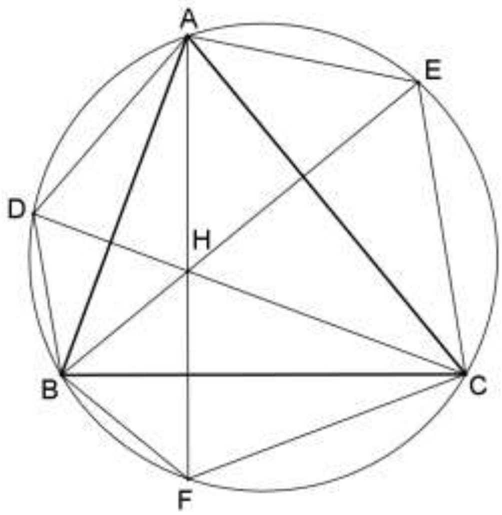
b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{6}$

29. (CN 1997) Considere na figura abaixo o triângulo ABC de lados $AB = 8$, $AC = 10$ e $BC = 12$, e seja H o seu ortocentro. As retas que passam por A e H, B e H, C e H intersectam o círculo circunscrito ao triângulo nos pontos F, E e D, respectivamente. A área do hexágono de vértices A, D, B, F, C e E é igual a




a) $30\sqrt{7}$

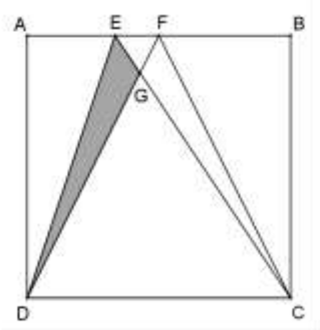
b) $18\sqrt{7}$

c) 80

d) 70

e) 65

30. (CN 1992) Sendo ABCD um quadrado de área S, onde $AF = \frac{1}{2}AB$ e $AE = \frac{1}{3}AB$, a área sombreada na figura é:




a) $\frac{S}{12}$

b) $\frac{S}{14}$

c) $\frac{S}{18}$

d) $\frac{11S}{70}$

e) $\frac{31S}{420}$

## GABARITO

1.

**RESOLUÇÃO: C**

$$u = \pi \cdot 1^2\ cm^2 = \pi\ cm^2 \Leftrightarrow 1\ cm^2 = \frac{1}{\pi} u$$

$$S = 5^2\ cm^2 = 25\ cm^2 = 25 \cdot \frac{1}{\pi} u = \frac{25}{\pi} u \approx 8u$$

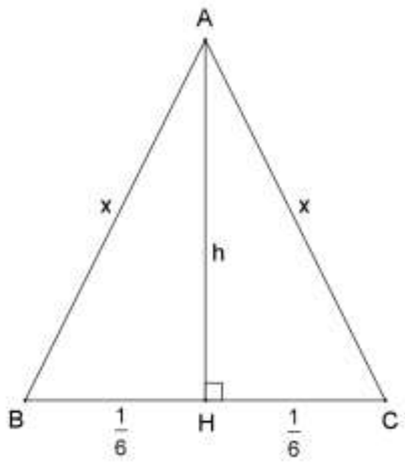
2.

**RESOLUÇÃO: B**

$$0{,}333\ldots = \frac{1}{3};\ 0{,}5 = \frac{1}{2};\ 0{,}666\ldots = \frac{2}{3} \Rightarrow 2p = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$$

Utilizando a Fórmula de Heron para o cálculo da área do triângulo:

$$S = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{15}}{48}\ cm^2.$$




O triângulo isósceles da figura tem base $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$ e deve possuir área igual a $\frac{\sqrt{15}}{48}\ cm^2$, então $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h = \frac{\sqrt{15}}{48} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\Delta ACH$, temos:

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{64} + \frac{1}{36} = \frac{151}{64 \cdot 9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{151}}{24}\ cm$$

3.

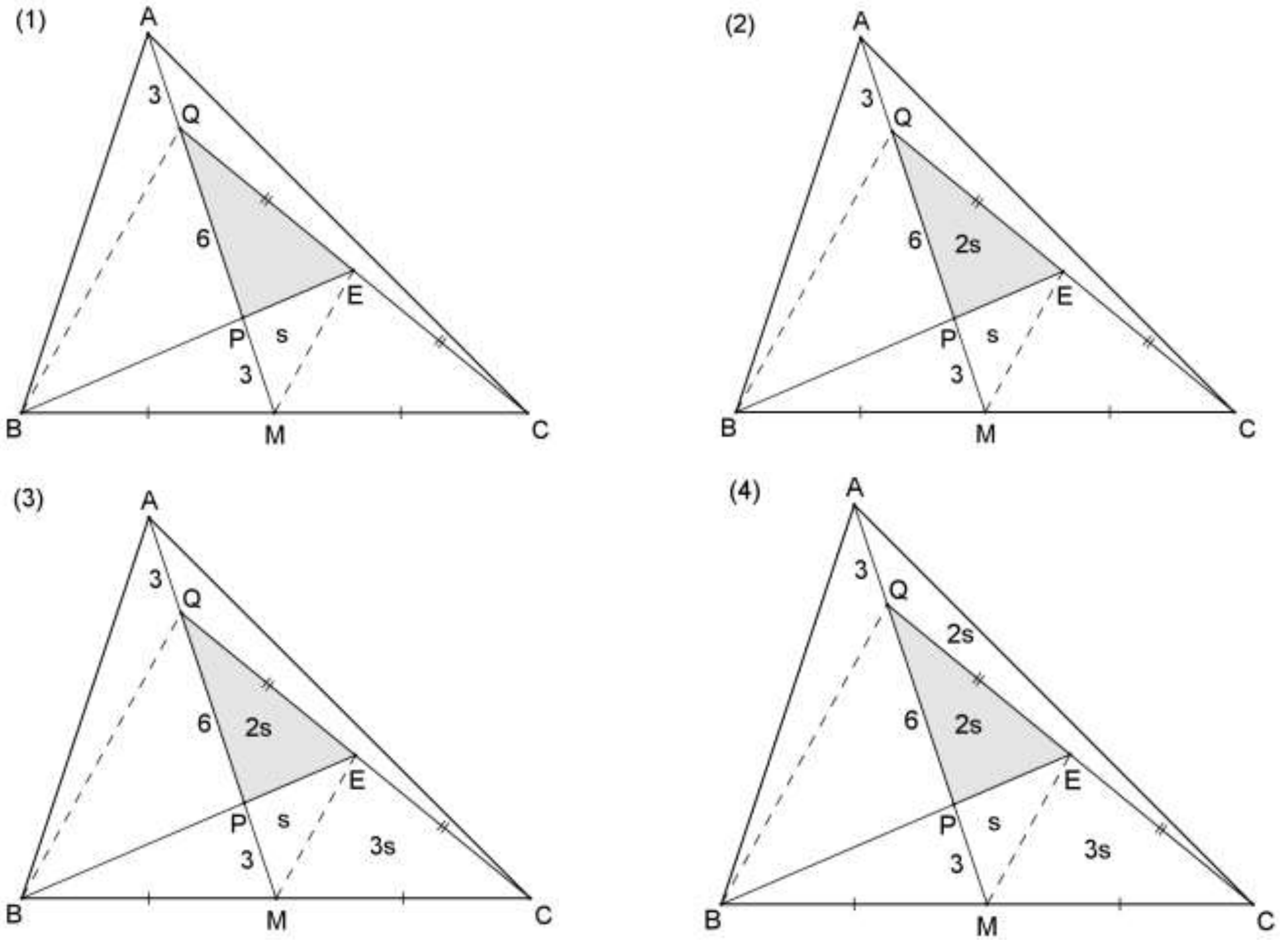
**RESOLUÇÃO: C**

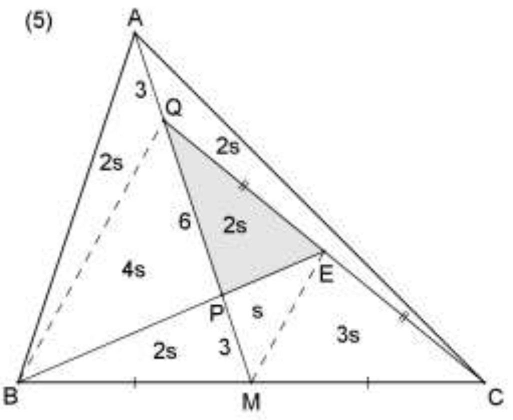
Dado que $AM = 12$, $AQ = 3$ e $QP = 6$, então $PM = AM - AQ - QP = 12 - 3 - 6 = 3$.

Como $AM$ é mediana do $\Delta ABC$, então $M$ é ponto médio de $AB$ e, consequentemente, $QM$ é mediana do $\Delta BQC$.

O ponto $P$ divide a mediana $QM$ na razão $\frac{QP}{PM} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, portanto $P$ é baricentro do $\Delta BQC$ e, consequentemente, $E$ é ponto médio de $QC$.

A figura abaixo representa a situação descrita no enunciado e as conclusões acima. Nessa figura, vamos supor $S_{PEM} = s$. A partir daí, vamos encontrar a área dos outros triângulos utilizando o fato de que a razão entre as áreas de triângulos de mesma altura é igual à razão entre suas bases.






Observando a figura $(5)$, concluímos que $S_{ABC} = 16s = 72 \Rightarrow S_{QPE} = 2s = 9$ u.a..

Note que, na figura $(5)$, só precisávamos saber que $S_{ABM} = S_{ACM} = 8s$ para resolver esse problema.

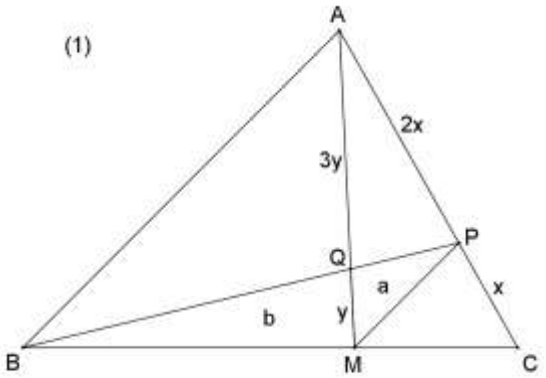
4.

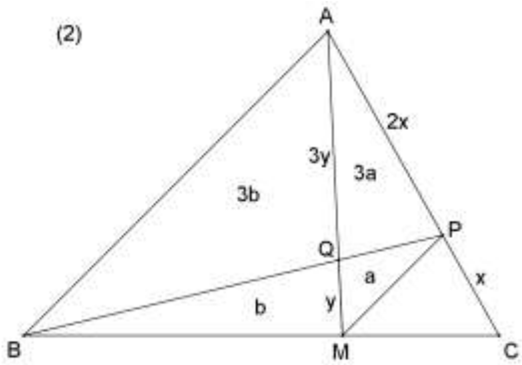
**RESOLUÇÃO: B**

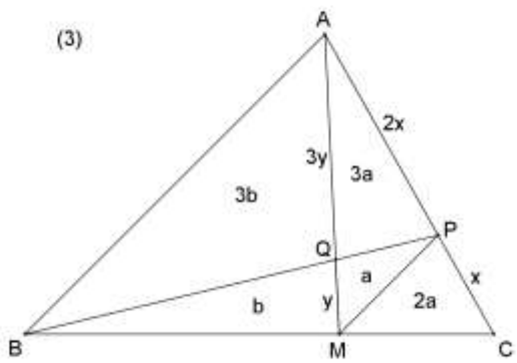
$AP = 2 \cdot PC \Rightarrow PC = x \wedge AP = 2x$

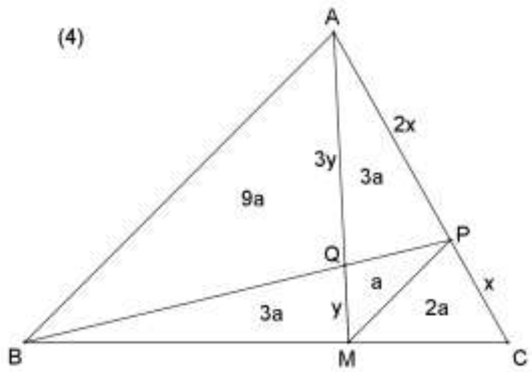
$AQ = 3 \cdot QM \Rightarrow QM = y \wedge AQ = 3y$

Na figura abaixo, vamos supor $S_{PQM} = a$ e $S_{BQM} = b$. A partir daí, vamos encontrar a área dos outros triângulos utilizando o fato de que a razão entre as áreas de triângulos de mesma altura é igual à razão entre suas bases.



Na figura (3), temos:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{CBP}}=\frac{AP}{PC}\Leftrightarrow\frac{3a+3b}{3a+b}=\frac{2x}{x}\Leftrightarrow 3a+3b=6a+2b\Leftrightarrow b=3a$$

Na figura (4), temos: $S_{ABC}=S=18a\Rightarrow S_{PQM}=a=\frac{S}{18}$.

Note que fizemos uma sequência de figuras para facilitar a compreensão, mas o estudante pode realizar todo o procedimento numa única figura.

Uma solução alternativa pode ser feita com auxílio do teorema de Menelaus.

Aplicando o teorema de Menelaus com o $\Delta AMC$ e a secante BQP, temos:

$$\frac{AQ}{MQ}\cdot\frac{CP}{AP}\cdot\frac{MB}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{MB}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{MB}{CB}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{AMC}=\frac{S}{3}$$

$$\frac{S_{BCP}}{S_{ABC}}=\frac{CP}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{BCP}=\frac{S}{3}$$

$$\frac{S_{PMC}}{S_{BCP}}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{PMC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{3}=\frac{S}{9}$$

$$\frac{S_{AQP}}{S_{AMC}}=\frac{AQ\cdot AP}{AM\cdot AC}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{AQP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{3}=\frac{S}{6}$$

$$S_{MPQ}=S_{AMC}-S_{AQP}-S_{PMC}=\frac{S}{3}-\frac{S}{6}-\frac{S}{9}=\frac{S}{18}$$

Note que as relações entre as áreas descritas acima também poderiam ser representadas na figura para agilizar a solução.

Outra maneira de resolver a questão é aplicar duas vezes o teorema de Menelaus.

Aplicando o teorema de Menelaus com o $\Delta AMC$ e a secante BQP, temos:

$$\frac{AQ}{MQ}\cdot\frac{CP}{AP}\cdot\frac{MB}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{MB}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{MB}{CB}=\frac{2}{3}$$

Aplicando o teorema de Menelaus com o $\Delta BCP$ e a secante AQM, temos:

$$\frac{BM}{CM}\cdot\frac{PQ}{BQ}\cdot\frac{CA}{PA}=1\Leftrightarrow\frac{2}{1}\cdot\frac{PQ}{BQ}\cdot\frac{3}{2}=1\Leftrightarrow\frac{PQ}{BQ}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{S_{BCP}}{S_{ABC}}=\frac{CP}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{BCP}=\frac{S}{3}$$

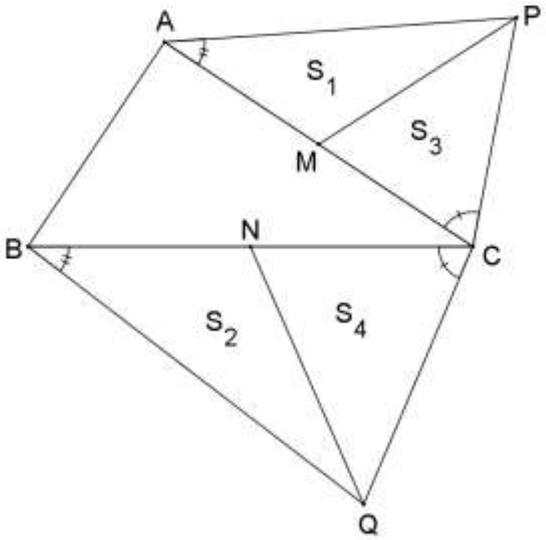
$$\frac{S_{PMB}}{S_{BCP}}=\frac{MB}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow S_{PMB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{3}=\frac{2S}{9}$$

$$\frac{S_{MPQ}}{S_{PMB}}=\frac{PQ}{PB}=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2S}{9}=\frac{S}{18}$$

5.

**RESOLUÇÃO: E**

A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.




$$P\hat{A}C=Q\hat{B}C\ \wedge\ P\hat{C}A=Q\hat{C}B\Rightarrow\Delta PAC\sim\Delta QBC\Rightarrow\frac{PA}{QB}=\frac{AC}{BC}=\frac{PC}{QC}=\frac{PM}{QN}=k\Rightarrow\frac{S_{PAC}}{S_{QBC}}=k^2$$

Note que $\frac{PM}{QN}$ também é igual à razão de semelhança, pois PM e PN são segmentos homólogos nos dois triângulos semelhantes (ambos são medianas relativas a lados correspondentes).

$$AM=MC\Rightarrow S_1=S_3=\frac{S_{PAC}}{2}$$

$$BN=CN\Rightarrow S_2=S_4=\frac{S_{QBC}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{S_1}{S_4}=\frac{S_3}{S_2}$$

$$\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{PAC}/2}{S_{QBC}/2}=\frac{S_{PAC}}{S_{QBC}}=\left(\frac{PM}{QN}\right)^2=\frac{(PM)^2}{(QN)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{S_1}{S_3}=1=\frac{S_2}{S_4}$$

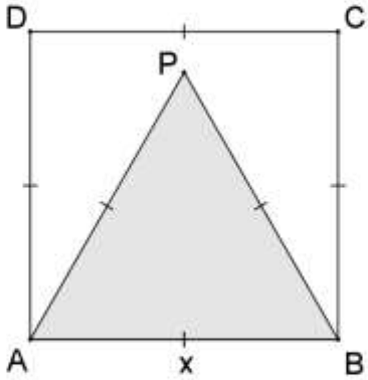
I. $S_1$ está para $S_4$, assim como $S_3$ está para $S_2$. (VERDADEIRA)

II. $S_1$ está para $S_2$, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$. (VERDADEIRA)

III. $S_1$ está para $S_3$, assim como $S_2$ está para $S_4$. (VERDADEIRA)

6.

**RESOLUÇÃO: B**



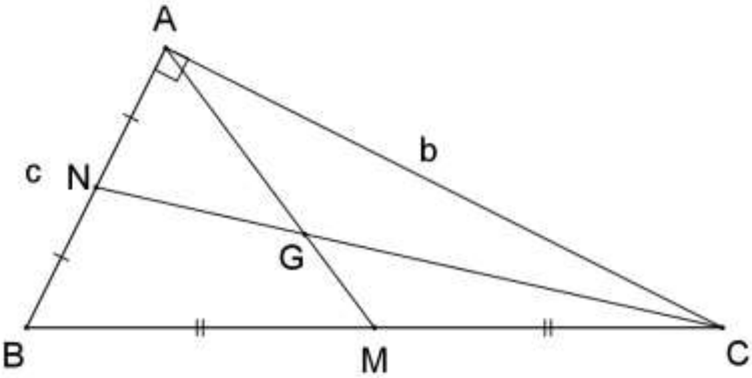

O quadrado ABCD e o triângulo equilátero ABP possuem o mesmo lado. Seja x a medida do lado dos dois polígonos, então a área do quadrado é igual a $S_Q = x^2$ e a área do triângulo equilátero é igual a $S_T = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Assim, $\frac{S_T}{S_Q} = \frac{\frac{x^2\sqrt{3}}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx \frac{1,73}{4} = 0,4325 \approx 43\%$.

Logo, o triângulo cobre cerca de $43\%$ da área do quadrado.

7.

**RESOLUÇÃO: D**




$\frac{CM}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

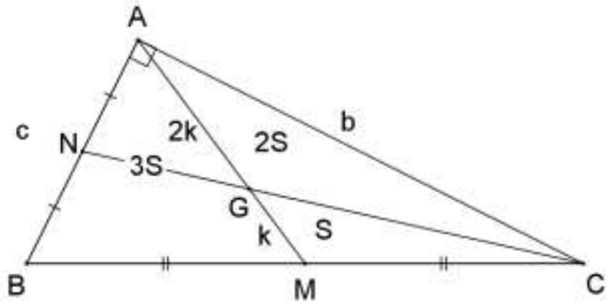
O baricentro do triângulo divide a mediana na razão $2:1$, então $\frac{AG}{GM}=\frac{2}{1}$.

$$\frac{AG}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{S_{AGC}}{S_{ACM}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow S_{AGC}=\frac{2}{3}S_{ACM}$$

$$\Rightarrow S_{AGC}=\frac{2}{3}S_{ACM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{b\cdot c}{2}=\frac{bc}{6}$$

MÉTODO PRÁTICO:

Seja $S_{CGM}=S$. Vamos calcular as áreas dos outros triângulos da figura utilizando o fato de que a razão entre as áreas de triângulos de altura comum é igual à razão entre suas bases.

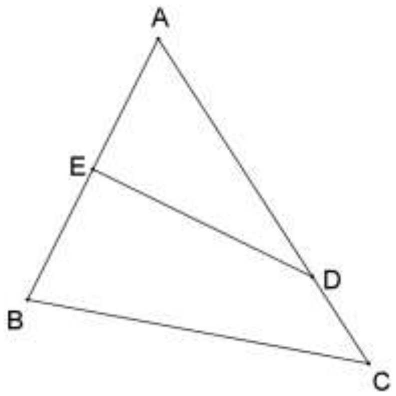



$$6S=\frac{bc}{2}\Leftrightarrow S=\frac{bc}{12}$$

$$S_{AGC}=2S=\frac{bc}{6}$$

8.

**RESOLUÇÃO: B**

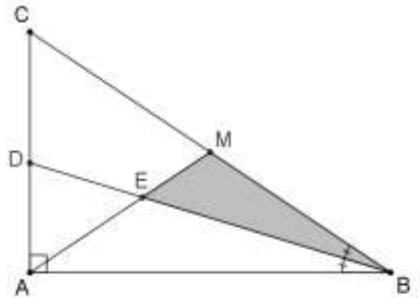



$$S_{ADE}=S_{BCDE}\Rightarrow S_{ADE}=\frac{1}{2}S_{ABC}$$

$$\Rightarrow\frac{AE\cdot AD}{2}\cdot\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB\cdot AC}{2}\cdot\operatorname{sen}\hat{A}\Rightarrow\frac{2}{3}\cdot AB\cdot AD=\frac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow AD=\frac{3}{4}AC$$

9.

**RESOLUÇÃO: C**




Teorema de Pitágoras no $\Delta ABC$:

$$BC^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow BC = 10 \Rightarrow AM = BM = CM = 5$$

Teorema das Bissetrizes no $\Delta ABM$:

$$\frac{ME}{5} = \frac{AE}{8} = k \Leftrightarrow ME = 5k \text{ e } AE = 8k$$

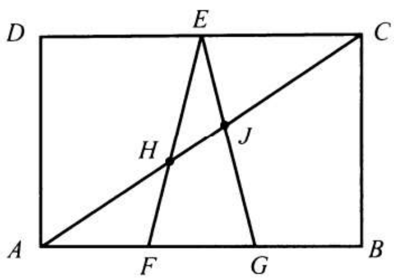
$$S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 6}{2} = 12$$

$$\frac{S_{BME}}{S_{ABM}} = \frac{ME}{AM} = \frac{5k}{13k} \Rightarrow S_{BME} = \frac{5}{13} S_{ABM} = \frac{5}{13} \cdot 12 = \frac{60}{13} \text{ u.a.}$$

$$x = \frac{60}{13} \Rightarrow 4,5 = \frac{58,5}{13} < x < \frac{65}{13} = 5$$

10.

**RESOLUÇÃO: C**




$$\Delta AFH \sim \Delta CEH \Rightarrow \frac{HF}{EH} = \frac{AF}{EC} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{2}CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EH}{EF} = \frac{3}{5}$$

$$\Delta AGJ \sim \Delta CEJ \Rightarrow \frac{JG}{EJ} = \frac{AG}{EC} = \frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{1}{2}CD} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{EJ}{EG} = \frac{3}{7}$$

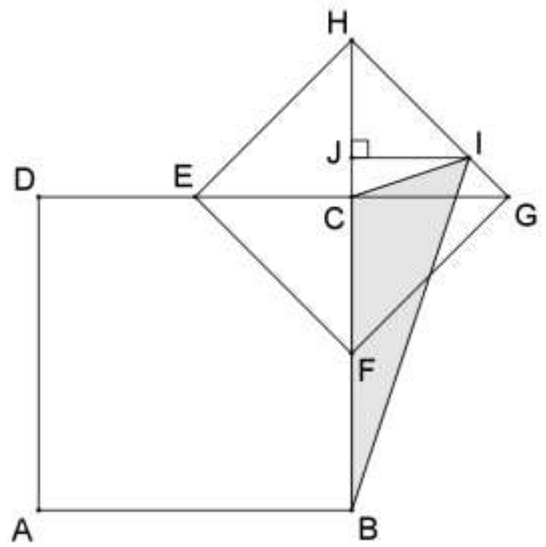
$$\frac{S_{EHJ}}{S_{EFG}}=\frac{EH\cdot EJ}{EF\cdot EG}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{35}\Rightarrow S_{EHJ}=\frac{9}{35}\cdot S_{EFG}$$

$$S_{EFG}=\frac{FG\cdot AD}{2}=\frac{\frac{1}{3}AB\cdot AD}{2}=\frac{1}{6}\cdot AB\cdot AD=\frac{1}{6}S_{ABCD}$$

$$S_{EHJ}=\frac{9}{35}\cdot S_{EFG}=\frac{9}{35}\cdot\frac{1}{6}S_{ABCD}=\frac{3}{70}S_{ABCD}=\frac{3}{70}\cdot 70=3\text{ cm}^2$$

11.

**RESOLUÇÃO: E**



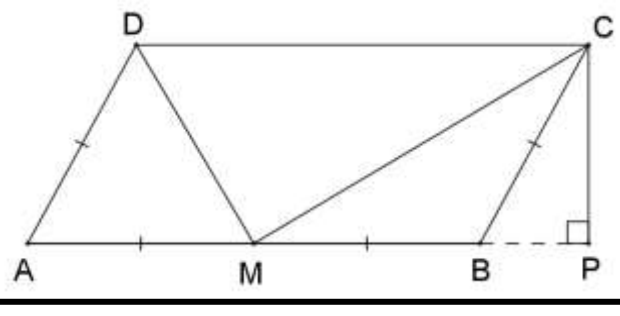

Seja $IJ\perp BH\Rightarrow\Delta HIJ\sim\Delta HGC\Rightarrow\frac{JI}{CG}=\frac{HI}{HG}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow JI=\frac{3}{4}CG=\frac{3}{4}$.

Observando que JI é a altura relativa à base BC do $\Delta BCI$, então a área do $\Delta BCI$ é dada por:

$$S_{BCI}=\frac{BC\cdot JI}{2}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{2}=\frac{3}{4}\text{ u.a.}$$

12.

**RESOLUÇÃO: B**



$$\frac{AB}{BC}=2\Leftrightarrow BC=\frac{AB}{2}=AM=MB$$

Como os triângulos MPC e ADM possuem alturas de mesma medida, a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas bases.

$$\frac{S(MPC)}{S(ADM)}=\frac{MP}{AM}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{MB+BP}{AM}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 1+\frac{BP}{BC}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{BP}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{BP}{\sqrt{3}}=\frac{BC}{2}=k$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta BPC$:

$$BP^2+CP^2=BC^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}k\right)^2+3^2=(2k)^2\Leftrightarrow k=3$$

$$\Rightarrow S(BPC)=\frac{BP\cdot PC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\cdot 3}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{ unidades de área}$$

13.

**RESOLUÇÃO: B**

$$\frac{S(AQM)}{S(ABC)}=\frac{AQ\cdot AM}{AB\cdot AC}=\frac{4c\cdot b}{5c\cdot 3b}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{S(BPQ)}{S(ABC)}=\frac{BP\cdot BQ}{BC\cdot BA}=\frac{3a\cdot c}{4a\cdot 5c}=\frac{3}{20}$$

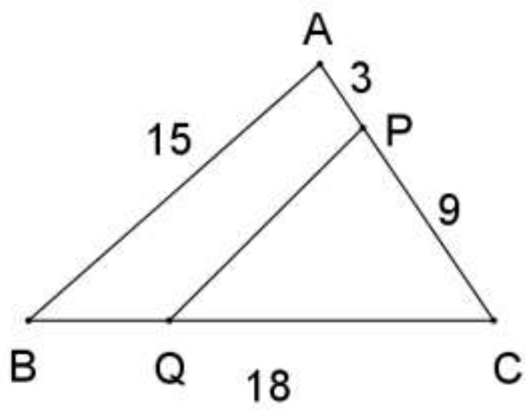
$$\frac{S(CMP)}{S(ABC)}=\frac{CM\cdot CP}{CA\cdot CB}=\frac{2b\cdot a}{3b\cdot 4a}=\frac{1}{6}$$

$$S(MPQ)+S(AQM)+S(BPQ)+S(CMP)=S(ABC)\Leftrightarrow S(MPQ)+\frac{4}{15}S(ABC)+\frac{3}{20}S(ABC)+\frac{1}{6}S(ABC)=S(ABC)$$

$$\Leftrightarrow S(MPQ)=\left(1-\frac{4}{15}-\frac{3}{20}-\frac{1}{6}\right)S(ABC)=\frac{5}{12}S(ABC)\Leftrightarrow\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}=\frac{5}{12}$$

14.

**RESOLUÇÃO: C**

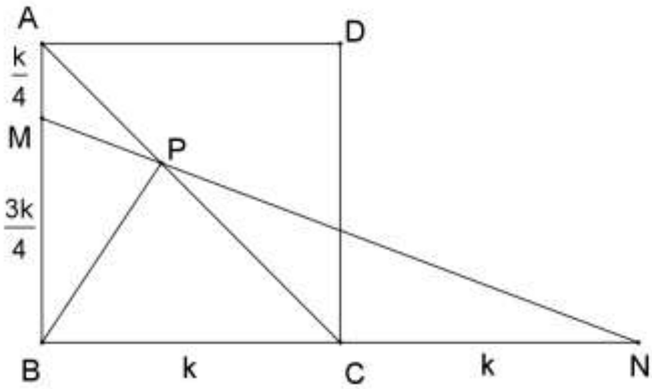


$$PC = 3 \cdot AP \Leftrightarrow \frac{PC}{AP} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow \frac{AP+PC}{AP} = \frac{3+1}{1} \Leftrightarrow \frac{AC}{AP} = 4 \Leftrightarrow AP = \frac{AC}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$S(APQB) = S(PQC) \Leftrightarrow S(ABC) = 2 \cdot S(PQC) \Rightarrow \frac{S(ABC)}{S(PQC)} = \frac{CB \cdot CA}{CQ \cdot CP} = \frac{18 \cdot 12}{CQ \cdot 9} = 2 \Leftrightarrow CQ = 12 \Rightarrow BQ = 6$$

15.

**RESOLUÇÃO: D**




Aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo ABC com a secante MPN:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{BN}{CN} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{k}{4}}{\frac{3k}{4}} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{2k}{k} = 1 \Leftrightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{CP}{AP+CP} = \frac{3}{2+3} \Leftrightarrow \frac{CP}{CA} = \frac{3}{5}$$

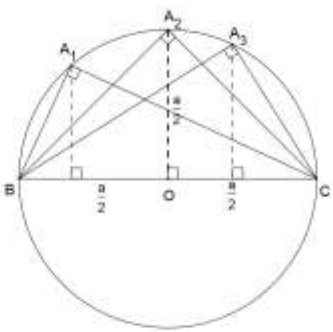
$$\Rightarrow \frac{S(PBC)}{S(ABC)} = \frac{CP}{CA} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow S(PBC) = \frac{3}{5} \cdot S(ABC) = \frac{3}{5} \cdot \frac{S(ABCD)}{2} = \frac{3}{10} \cdot S(ABCD) = 30\% \cdot S(ABCD)$$

16.

**RESOLUÇÃO: E**

Seja a a hipotenusa de um triângulo retângulo de altura relativa à hipotenusa ‘h’ e área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$, então

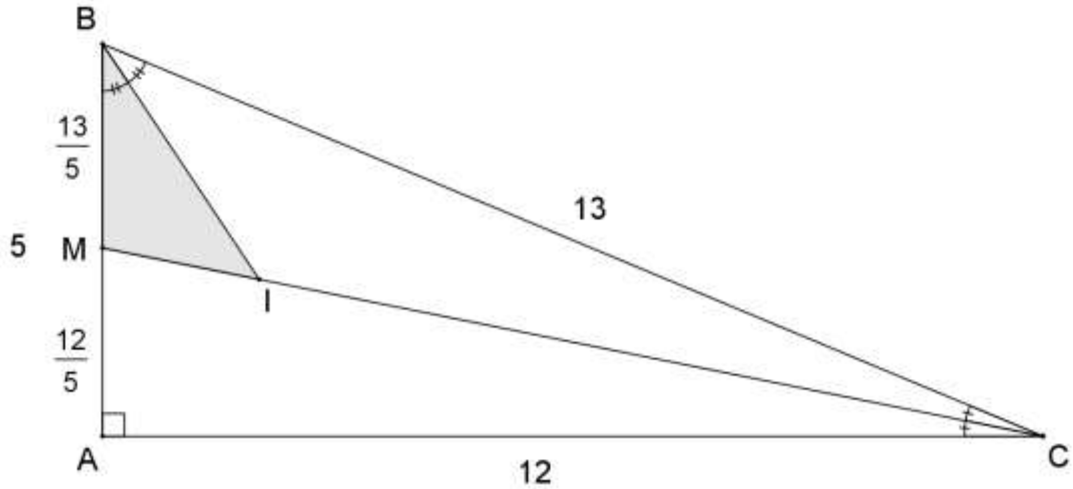
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{\sqrt{15}}{4}h^2 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{15}}{2}h \Leftrightarrow h = \frac{2}{\sqrt{15}}a > \frac{2}{\sqrt{16}}a = \frac{a}{2}$$



Considerando o arco capaz de $90^\circ$ sobre uma circunferência de diâmetro a, conforme figura acima, o valor máximo da altura relativa à hipotenusa é $\frac{a}{2}$. Logo, não existe nenhum triângulo retângulo de altura relativa à hipotenusa $h$ e área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$.

17.

**RESOLUÇÃO: E**




Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao $\Delta ABC$, temos: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow BC = 13$.

Como CM é bissetriz do $\Delta ABC$, então, pelo teorema das bissetrizes, temos:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow \frac{BM}{13} = \frac{AM}{12} = \frac{BM+AM}{13+12} = \frac{5}{25} \Leftrightarrow BM = \frac{13}{5} \text{ e } AM = \frac{12}{5}$$

Como $I$ é o incentro do $\Delta ABC$, então $BI$ é bissetriz interna do $\Delta BCM$. Aplicando-se novamente o teorema das bissetrizes, temos:

$$\frac{MI}{BM} = \frac{IC}{BC} \Leftrightarrow \frac{MI}{13/5} = \frac{IC}{13} \Leftrightarrow \frac{MI}{IC} = \frac{1}{5}.$$

No caso de triângulos de vértice comum e bases sobre a mesma reta, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases, então

$$\frac{S_{BMC}}{S_{ABC}} = \frac{BM}{AB} = \frac{13/5}{5} = \frac{13}{25} \Leftrightarrow S_{BMC} = \frac{13}{25} \cdot S_{ABC}$$

$$\frac{S_{BMI}}{S_{BMC}} = \frac{MI}{MC} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow S_{BMI} = \frac{1}{6} \cdot S_{BMC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{25} \cdot S_{ABC} = \frac{13}{150} S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{S_{BMI}}{S_{ABC}} = \frac{13}{150}$$

18.

**RESOLUÇÃO: E**

A área de um triângulo equilátero de lado 1 cm, com a unidade de medida original, é $u = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow 1\,\text{cm}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\,u$.

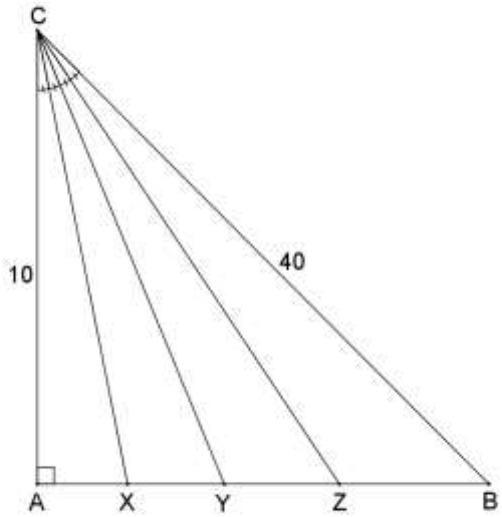
A área de um retângulo de base igual a $6\,\text{cm}$ e altura igual a $4\,\text{cm}$, com a unidade de medida original, é $S = 6 \cdot 4 = 24\,\text{cm}^2$.

Assim, a área desse retângulo tomando $u$ como unidade de medida é $S = 24\,\text{cm}^2 = 24 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}\,u = 32\sqrt{3}\,u$.

19.

**RESOLUÇÃO: A**

A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado e está fora de proporção para facilitar a visualização.




Seja $A\hat{C}X = X\hat{A}Y = Y\hat{A}Z = Z\hat{A}B = \theta$, então

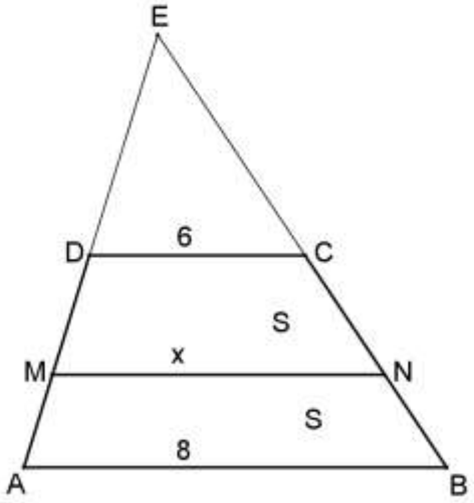
$$S_1 = S_{CAX} = \frac{CA \cdot CX}{2}\operatorname{sen}\theta;\; S_2 = S_{CXY} = \frac{CX \cdot CY}{2}\operatorname{sen}\theta;\; S_3 = S_{CYZ} = \frac{CY \cdot CZ}{2}\operatorname{sen}\theta;\text{ e } S_4 = S_{CZB} = \frac{CZ \cdot CB}{2}\operatorname{sen}\theta.$$

$$\Rightarrow \frac{S_1S_3}{S_2S_4} = \frac{\frac{CA \cdot CX}{2}\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{CY \cdot CZ}{2}\operatorname{sen}\theta}{\frac{CX \cdot CY}{2}\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{CZ \cdot CB}{2}\operatorname{sen}\theta} = \frac{CA}{CB} = \frac{10}{40} = 0{,}25$$

Nessa questão utilizamos o seguinte conceito: A área de um triângulo que possui dois lados de medida a e b adjacentes ao ângulo $\theta$ é $S = \frac{a \cdot b}{2}\operatorname{sen}\theta$.

20.

**RESOLUÇÃO: D**




Seja o trapézio ABCD da figura, prolongam-se os lados não paralelos do trapézio até o ponto E.

$AB \| MN \| CD \Rightarrow \Delta EAB \sim \Delta EMN \sim \Delta EDC$

Como a razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos:

$$\frac{S_{EDC}}{6^2}=\frac{S_{EMN}}{x^2}=\frac{S_{EAB}}{8^2}=k$$

$$S_{ABNM}=S_{MNCD} \Leftrightarrow S_{EAB}-S_{EMN}=S_{EMN}-S_{EDC} \Leftrightarrow 2\cdot S_{EMN}=S_{EAB}+S_{EDC}$$

$$\Rightarrow 2\cdot kx^2=k\cdot 8^2+k\cdot 6^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{6^2+8^2}{2}}=5\sqrt{2}\text{ u.c.}$$

21.

**RESOLUÇÃO: A**

1ª) VERDADEIRA

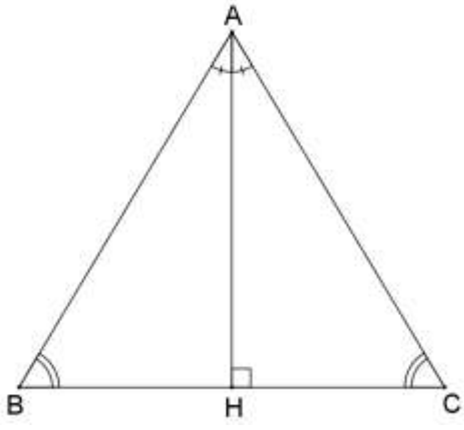



Figura 1

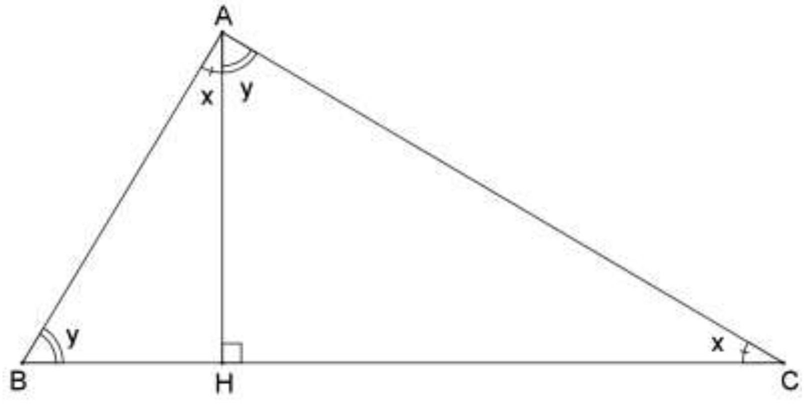
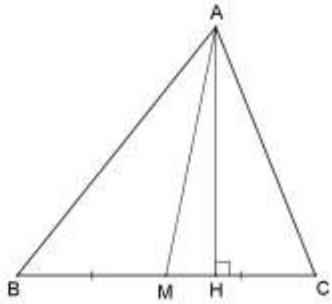



Figura 2

Se $\Delta ABH \sim \Delta ACH$, então os triângulos possuem todos os ângulos iguais. Isso pode acontecer de duas formas representadas nas figuras acima. Entretanto, na configuração da Figura $1$, temos $\Delta ABH \equiv \Delta ACH \ (LAA_o)$, o que não satisfaz a hipótese. Logo, a disposição dos ângulos deve ser a da Figura $2$. No $\Delta ABC$, temos $x+(x+y)+y=180^\circ \Leftrightarrow x+y=90^\circ$ e, portanto, $A=90^\circ$. Portanto, o $\Delta ABC$ é retângulo.

2ª) VERDADEIRA



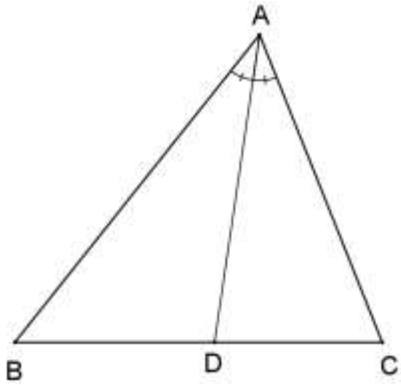

Sejam $AM$ e $AH$, respectivamente, a mediana e a altura, relativas ao lado $BC$ do $\Delta ABC$. Então, $BM=CM$ e $AH$ é a altura relativa à base $BM$ do $\Delta AMB$ e relativa à base $CM$ do $\Delta AMC$.

$$S_{AMB}=\frac{BM\cdot AH}{2} \wedge S_{AMC}=\frac{CM\cdot AH}{2} \Rightarrow \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}=\frac{\frac{BM\cdot AH}{2}}{\frac{CM\cdot AH}{2}}=1 \Leftrightarrow S_{AMB}=S_{AMC}$$

Logo, os triângulos $AMB$ e $AMC$ são equivalentes.

Observe que, de modo análogo, demonstra-se que a razão entre áreas de triângulos de altura comum (mesmo vértice e bases sobre a mesma reta) é igual à razão entre suas bases.

3ª) VERDADEIRA

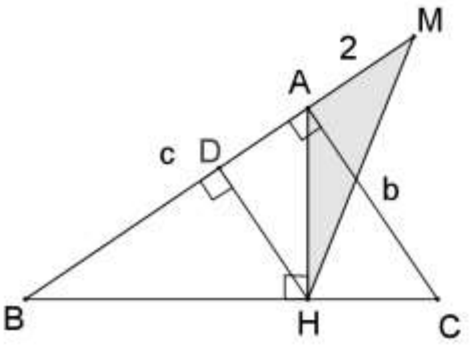



Seja $AD$ a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do $\Delta ABC$, então, pelo teorema das bissetrizes, temos: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.

Logo, $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$, ou seja, as áreas dos triângulos $ABD$ e $ACD$ são proporcionais aos lados $AB$ e $AC$.

22.

**RESOLUÇÃO: C**




Seja $HD \perp AB$, então $S_{AHM} = \frac{AM \cdot HD}{2}$.

No triângulo retângulo $ABC$, temos:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$HA \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow HA = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$AB^2 = BC \cdot HB \Leftrightarrow HB = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

No triângulo retângulo $ABH$, temos:

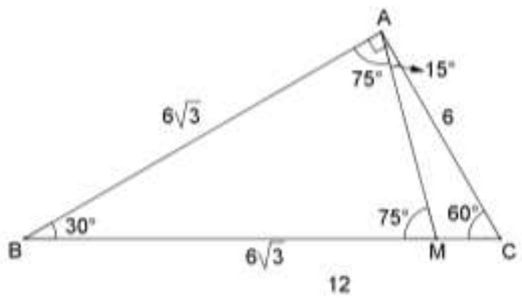
$$HD \cdot AB = HA \cdot HB \Rightarrow HD = \frac{\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}}{c} = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$$

Portanto, a área do $\Delta AHM$ é

$$S_{AHM} = \frac{AM \cdot HD}{2} = \frac{2 \cdot \frac{bc^2}{b^2+c^2}}{2} = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$$ unidades de área.

23.

**RESOLUÇÃO: D**



Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta ABC$, temos:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 144 \Leftrightarrow BC = 12$.

No $\Delta ABC$, temos: $\text{sen}\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$ e $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$B\hat{A}M = B\hat{A}C - M\hat{A}C = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$

$B\hat{M}A = M\hat{C}A + M\hat{A}C = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$

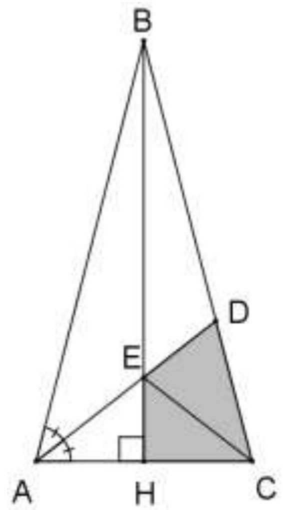
$B\hat{A}M = B\hat{M}A = 75^\circ \Rightarrow \Delta BAM$ é isósceles $\Rightarrow BM = BA = 6\sqrt{3}$

$MC = BC - BM = 12 - 6\sqrt{3}$

Os triângulos $AMC$ e $ABC$ possuem altura comum, então a razão entre as suas áreas é igual à razão entre suas bases. Assim, temos: $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.

24.

**RESOLUÇÃO: D**




$$\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow \Delta ABC \text{ é isósceles} \Rightarrow AH = HC = \frac{AC}{2}$$

Aplicando o teorema das bissetrizes ao $\Delta ABC$, temos $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = 2$.

Aplicando o teorema das bissetrizes ao $\Delta ABH$, temos $\frac{BE}{AB} = \frac{EH}{AH} \Rightarrow \frac{BE}{EH} = \frac{AB}{AH} = 4$.

$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{ABH} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$

$$\frac{S_{AEH}}{S_{ABH}} = \frac{EH}{BH} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow S_{AEH} = \frac{S_{ABH}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{S_{ABC}}{10}$$

$$\frac{S_{EHC}}{S_{AEH}} = \frac{HC}{AH} = 1 \Leftrightarrow S_{EHC} = 2 \cdot S_{AEH} = \frac{S_{ABC}}{10}$$

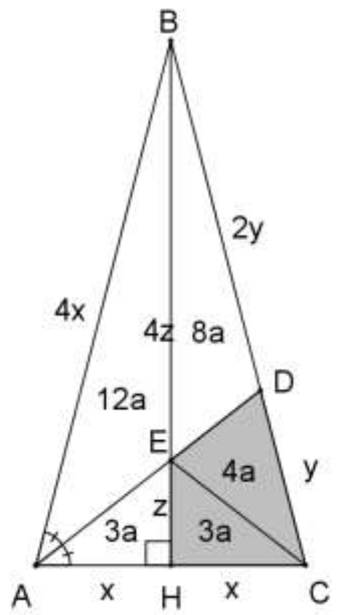
$$\frac{S_{BEC}}{S_{EHC}} = \frac{BE}{EH} = 4 \Leftrightarrow S_{BEC} = 4 \cdot S_{EHC} = 4 \cdot \frac{S_{ABC}}{10} = \frac{2}{5} \cdot S_{ABC}$$

$$\frac{S_{EDC}}{S_{BEC}} = \frac{DC}{BC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow S_{EDC} = \frac{1}{3} \cdot S_{BEC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot S_{ABC} = \frac{2}{15} \cdot S_{ABC}$$

$$S_{CDEH} = S_{EHC} + S_{EDC} = \frac{S_{ABC}}{10} + \frac{2}{15} \cdot S_{ABC} = \frac{7}{30} \cdot S_{ABC} = \frac{7S}{30}$$

Uma maneira mais simples de resolver esse tipo de problemas é indicar as razões entre os segmentos conhecidos na figura, designar uma das áreas por uma variável e determinar as outras áreas em função daquela.

$$S_{EHC} = 3a \Rightarrow S_{CDEH} = 7a = 7.\frac{S_{ABC}}{30} = \frac{7S}{30}$$

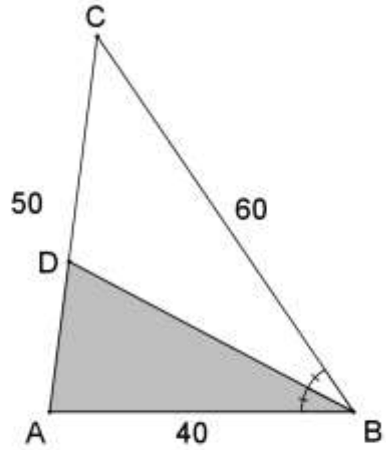



Outra opção interessante é usar a seguinte relação:

$$\frac{S_{BDE}}{S_{CBH}} = \frac{BD \cdot BE}{BC \cdot BH} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15} \Rightarrow S_{CDEH} = \left(1 - \frac{8}{15}\right) S_{CBH} = \frac{7}{15} \cdot \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{7S}{30}$$

25.

**RESOLUÇÃO: C**




Usando a Fórmula de Heron para calcular a área do $\Delta ABC$

$$S(ABC)=\sqrt{75(75-60)(75-50)(75-40)}=375\sqrt{7}$$

Pelo Teorema das Bissetrizes:

$$\frac{CD}{60}=\frac{DA}{40}=\frac{CD+DA}{100}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow CD=30 \text{ e } DA=20$$

$$\frac{S(ABD)}{S(ABC)}=\frac{AD}{AC}=\frac{20}{50}\Leftrightarrow S(ABD)=\frac{2}{5}\cdot 375\sqrt{7}=150\sqrt{7}$$

26.

**RESOLUÇÃO: A**

Sejam a, b e c os lados do triângulo, onde $a,b,c\in\mathbb{Z}_+^*$.

Pela desigualdade triangular,

$$c<a+b\Rightarrow 2c<a+b+c=2p=19\Leftrightarrow c<\frac{19}{2}\Rightarrow c\le 9.$$

Assim, conclui-se que cada um dos lados do triângulo deve possuir medida inferior a 9.

Seja, sem perda de generalidade, $h=4$ a altura relativa ao lado $c$, e seja $S$ a área do triângulo, então temos:

$$S=\frac{c\cdot h}{2}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R}\Leftrightarrow a\cdot b=2\cdot R\cdot h=2\cdot 5\cdot 4=40$$

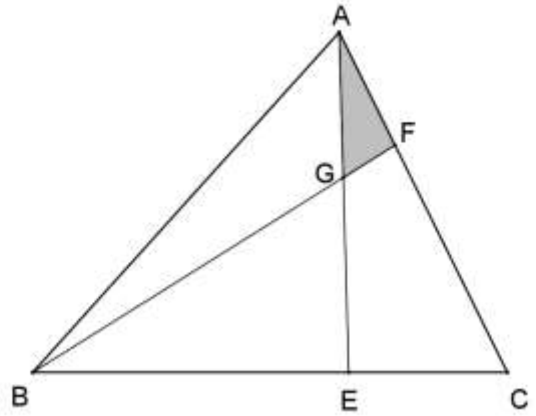
Como $a|40$, $b|40$ e $a,b\le 9$, então $a=8$ e $b=5$.

Como $2p=19$, então $c=6$.

Logo, há apenas 1 triângulo que satisfaz as condições do enunciado.

27.

**RESOLUÇÃO: D**




Aplicando o teorema de Menelaus no $\Delta ACE$, com a secante $BGF$, temos:

$$\frac{AF}{CF}\cdot\frac{EG}{AG}\cdot\frac{CB}{EB}=1\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{EG}{AG}\cdot\frac{3}{2}=1\Leftrightarrow\frac{EG}{AG}=\frac{4}{3}$$

Vamos usar o fato de que triângulos de mesmo vértice e que tem bases sobre a mesma base possuem áreas proporcionais às suas bases.

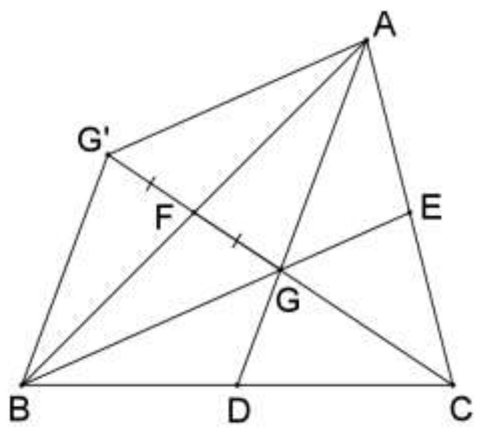
$$\frac{S_{AEC}}{S_{ABC}}=\frac{EC}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{AEC}=\frac{S}{3}$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AEC}}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{AEF}=\frac{1}{3}\cdot S_{AEC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{3}=\frac{S}{9}$$

$$\frac{S_{AFG}}{S_{AFE}}=\frac{AG}{AE}=\frac{3}{7}\Rightarrow S_{AFG}=\frac{3}{7}\cdot S_{AFE}=\frac{3}{7}\cdot\frac{S}{9}=\frac{S}{21}$$

28.

**RESOLUÇÃO: D**




Sejam AD, BE e CF as medianas do triângulo ABC e G o seu baricentro.

Sabe-se que: $\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=2$.

Prolonga-se CF de forma que $FG'=FG$. Assim, $GG'=CG$.

Como F é médio de AB e de GG’, o quadrilátero BGAG’ é um paralelogramo e $AG'=BG$.

Dessa forma, o triângulo AGG’ tem lados iguais a AG, BG e CG, ou seja, $\frac{2}{3}$ das medianas do $\Delta ABC$.

$$\Rightarrow \frac{S_{AGG'}}{S_{MNP}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \Leftrightarrow S_{AGG'}=\frac{4}{9}\cdot S_{MNP}$$

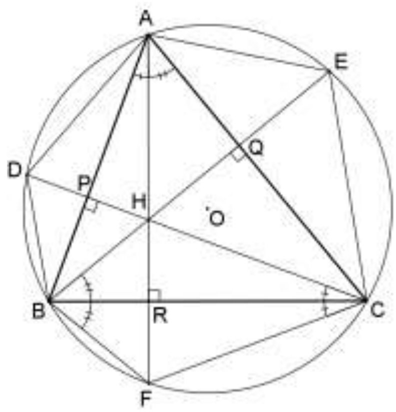
$$S_{AFG}=S_{BFG}=S_{BDG}=S_{CDG}=S_{CEG}=S_{AEG}=\frac{S_{ABC}}{6}$$

$$S_{AGG'}=2\cdot S_{AFG} \Rightarrow S_{AGG'}=2\cdot\frac{S_{ABC}}{6}=\frac{S_{ABC}}{3}.$$

$$\Rightarrow S_{AGG'}=\frac{4}{9}\cdot S_{MNP}=\frac{S_{ABC}}{3} \Leftrightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{3}{4}$$

29.

**RESOLUÇÃO: A**




O ortocentro H é o ponto de encontro das alturas do $\Delta ABC$, portanto as retas que passam por A e H, B e H, C e H são alturas do triângulo.

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}R=B\hat{C}P=90º-\hat{B} \\ B\hat{A}F=B\hat{C}F=\frac{BF}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{C}H=B\hat{C}F$$

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{A}R=C\hat{B}Q=90º-\hat{C} \\ C\hat{A}F=C\hat{B}F=\frac{CF}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{B}H=C\hat{B}F$$

$$\Delta BFC \equiv \Delta BHC \ (A.L.A.) \Rightarrow S_{BFC}=S_{BHC}$$

Analogamente, $S_{AEC}=S_{AHC}$ e $S_{ADB}=S_{AHB}$.

Logo, $S_{ADBFCE}=S_{BFC}+S_{BHC}+S_{AEC}+S_{AHC}+S_{ADB}+S_{AHB}=2\cdot\left(S_{BHC}+S_{AHC}+S_{AHB}\right)=2\cdot S_{ABC}$

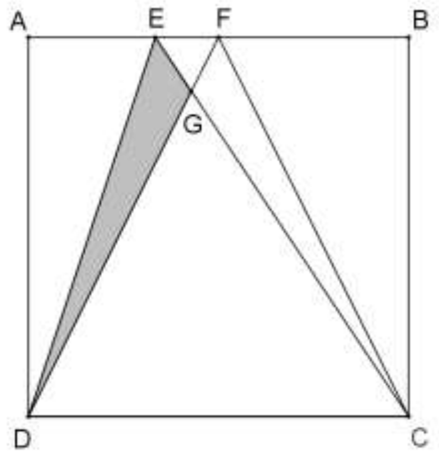
Aplicando a fórmula de Heron para o cálculo da área do $\Delta ABC$, temos:

$2p_{ABC}=8+10+12=30\Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{15(15-8)(15-10)(15-12)}=15\sqrt{7}$

$\Rightarrow S_{ADBFCE}=2\cdot 15\sqrt{7}=30\sqrt{7}$ unidades de área

30.

**RESOLUÇÃO: B**




$EF=AF-AE=\frac{1}{6}AB$

$\Delta EFG\sim\Delta CDG\Rightarrow\frac{FG}{DG}=\frac{1}{6}\Rightarrow DG=\frac{6}{7}DF$

$S_{DEF}=\frac{1}{6}S_{ABD}=\frac{1}{6}\cdot\frac{S}{2}=\frac{S}{12}$

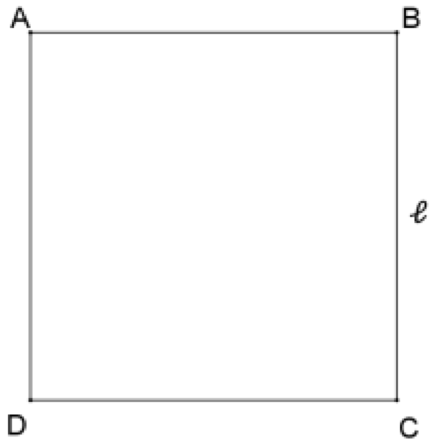
$S_{DEG}=\frac{6}{7}\cdot S_{DEF}=\frac{6}{7}\cdot\frac{S}{12}=\frac{S}{14}$

## ÁREAS DE QUADRILÁTEROS POLÍGONOS E REGIÕES CIRCULARES

## 1. QUADRILÁTEROS

### 1.1. QUADRADO

A área do quadrado é igual ao seu lado elevado ao quadrado.



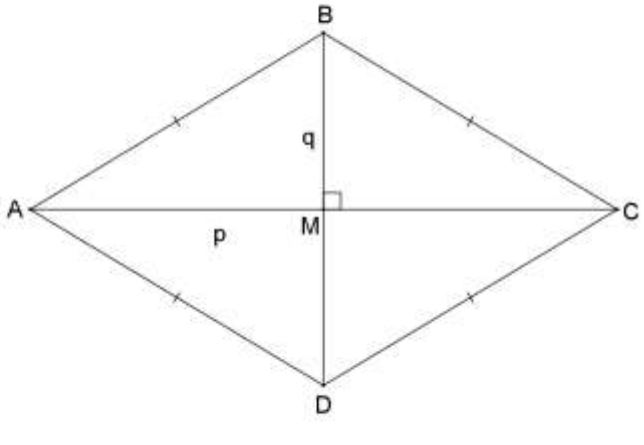

Seja $\ell$ o lado do quadrado ABCD, então sua área é $\mathbf{S_{ABCD} = \ell^2}$.

Demonstração:

Basta utilizar a expressão da área do retângulo onde a base e a altura são ambas iguais a $\ell$. Assim, $S_{ABCD} = \ell \cdot \ell = \ell^2$.

### 1.2 LOSANGO

A área do losango é igual à metade do produto de suas diagonais.



Seja o losango $ABCD$ de diagonais $AC = p$ e $BD = q$, então sua área é $\mathbf{S_{ABCD} = \frac{p \cdot q}{2}}$

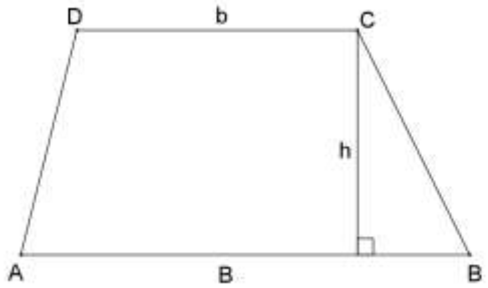
Demonstração:

Inicialmente, cabe observar que o losango possui diagonais perpendiculares. Assim,

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{AC \cdot BM}{2} + \frac{AC \cdot MD}{2} = \frac{AC \cdot (BM + MD)}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{p \cdot q}{2}$$

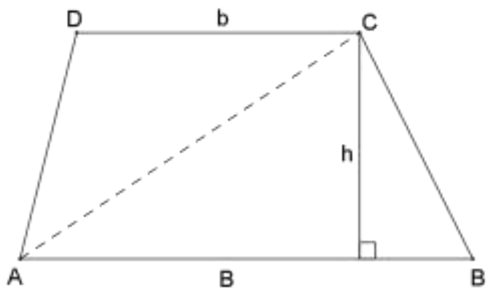
## 1.3. TRAPÉZIO

A área do trapézio é igual ao produto da semissoma de suas bases pela sua altura.




Seja o trapézio $ABCD$ de bases $AB = B$ e $CD = b$, e altura $h$, então sua área é $\mathbf{S = \frac{B + b}{2} \cdot h}$

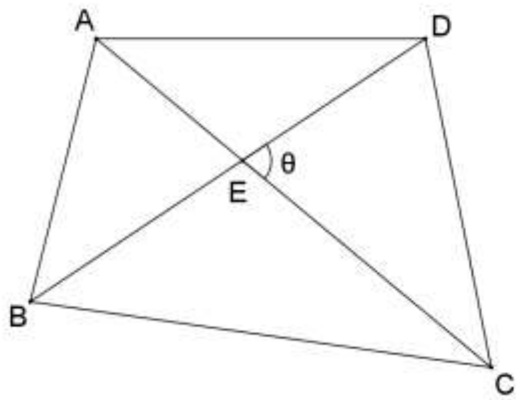
Demonstração:




$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{AB \cdot h}{2} + \frac{CD \cdot h}{2} = \frac{(AB + CD)}{2} \cdot h = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$$

## 1.4. ÁREA DO QUADRILÁTERO CONVEXO

A área do quadrilátero convexo é igual à metade do produto das diagonais vezes o seno do ângulo entre as diagonais.



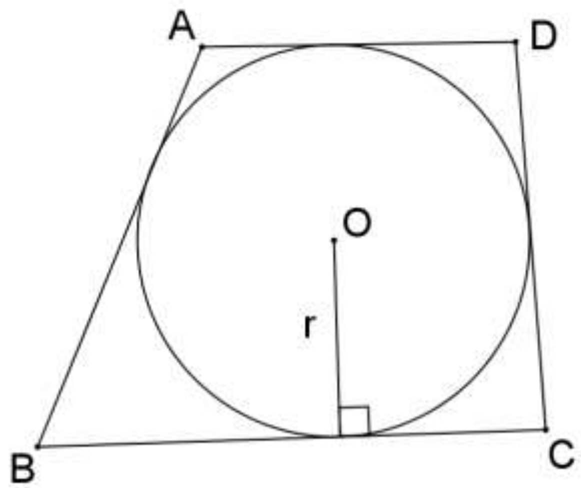

Seja um quadrilátero convexo cujo ângulo entre as diagonais $AC=p$ e $BD=q$ é igual a $\theta$, então a área do quadrilátero é $\mathbf{S=\frac{pq}{2}\cdot sen\theta}$

Demonstração:

$$S_{ABCD}=S_{AEB}+S_{BEC}+S_{CED}+S_{DEA}=$$
$$=\frac{AE\cdot BE}{2}sen\theta+\frac{BE\cdot CE}{2}sen\left(180^\circ-\theta\right)+\frac{CE\cdot DE}{2}sen\theta+\frac{DE\cdot AE}{2}sen\left(180^\circ-\theta\right)=$$
$$=\frac{AE\cdot BE}{2}sen\theta+\frac{BE\cdot CE}{2}sen\theta+\frac{CE\cdot DE}{2}sen\theta+\frac{DE\cdot AE}{2}sen\theta=$$
$$=\frac{AE\cdot(BE+DE)}{2}sen\theta+\frac{CE\cdot(BE+DE)}{2}sen\theta=\frac{(BE+DE)(AE+CE)}{2}sen\theta=$$
$$=\frac{AC\cdot BD}{2}sen\theta=\frac{p\cdot q}{2}sen\theta$$

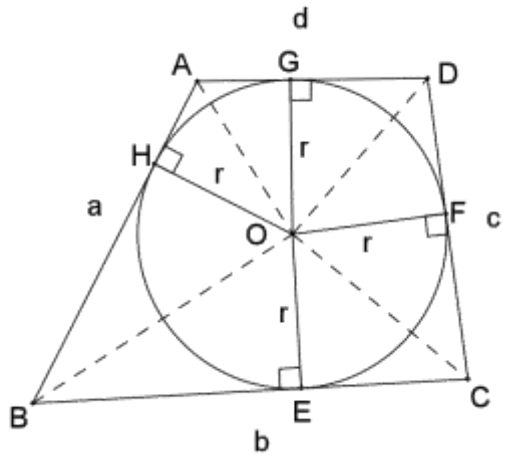
## 1.5. QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL

A área do quadrilátero circunscritível é igual ao produto do seu semiperímetro pelo raio do círculo inscrito.



Seja o quadrilátero circunscritível $ABCD$, cujo semiperímetro é $p=\frac{a+b+c+d}{2}$, então sua área é $\mathbf{S_{ABCD}=p\cdot r}$

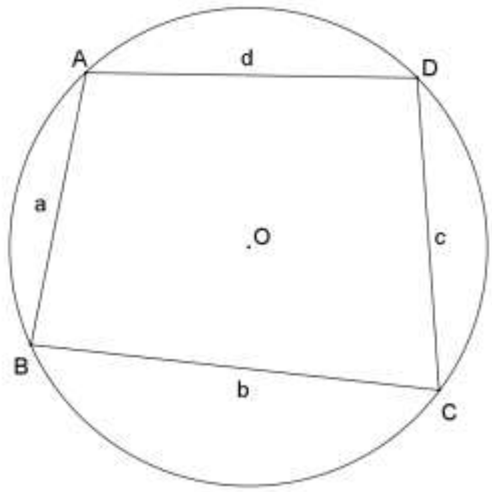
Demonstração:




$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}=\frac{AB\cdot OH}{2}+\frac{BC\cdot OE}{2}+\frac{CD\cdot OF}{2}+\frac{DA\cdot OG}{2}=$$
$$=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}+\frac{d\cdot r}{2}=r\cdot\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)=p\cdot r$$

Note que essa propriedade é válida para qualquer polígono circunscritível.

## 1.6. QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL




Seja o quadrilátero inscritível $ABCD$ de lados $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ e $DA=d$, e semiperímetro $p=\frac{a+b+c+d}{2}$, então sua área é $\mathbf{S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$

Demonstração:

Aplicando a lei dos cossenos no $\Delta ABD$, temos:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos \hat{A} \quad (*)$$

Aplicando a lei dos cossenos no $\Delta BCD$, temos:

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{C} \quad (**)$$

Como o $\# ABCD$ é inscritível, então $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \wedge \operatorname{sen} \hat{C} = \operatorname{sen} \hat{A}$.

Igualando (*) e (**), temos:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos \hat{A} = BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(-\cos \hat{A}\right)$$

$$2(ad + bc)\cos \hat{A} = a^2 - b^2 - c^2 + d^2$$

$$\operatorname{sen}^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)}\right)^2 =$$

$$= \frac{4(ad + bc)^2 - \left(a^2 - b^2 - c^2 + d^2\right)^2}{4(ad + bc)^2} =$$

$$= \frac{\left(2ad + 2bc + a^2 - b^2 - c^2 + d^2\right)\left(2ad + 2bc - a^2 + b^2 + c^2 - d^2\right)}{4(ad + bc)^2} =$$

$$= \frac{\left[(a + d)^2 - (b - c)^2\right]\left[(b + c)^2 - (a - d)^2\right]}{4(ad + bc)^2} =$$

$$= \frac{(a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d)}{4(ad + bc)^2} =$$

$$= \frac{(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2d)(2p - 2a)}{4(ad + bc)^2} =$$

$$= \frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ad + bc)^2}$$

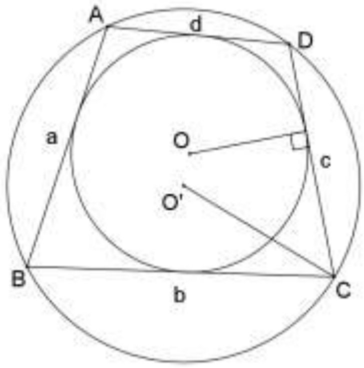
$$\Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{2}{ad + bc}\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{ad}{2}\operatorname{sen}\hat{A} + \frac{bc}{2}\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{ad+bc}{2}\operatorname{sen}\hat{A} =$$

$$= \frac{ad+bc}{2} \cdot \frac{2}{ad+bc}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

## 1.7. QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL E CIRCUNSCRITÍVEL

A área do quadrilátero inscritível e circunscritível é igual à raiz quadrada do produto dos seus lados.




Seja o quadrilátero inscritível e circunscritível $ABCD$ de lados $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$, então sua área é $\mathbf{S = \sqrt{abcd}}$

Demonstração:

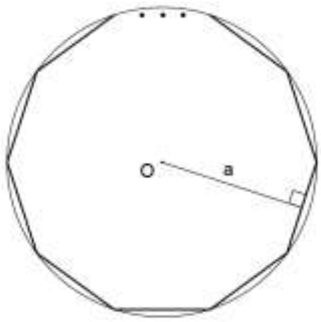
Como o $\# ABCD$ é circunscritível, então, pelo teorema de Pitot, temos: $a + c = b + d = p$. Assim, $a = p - c$, $c = p - a$, $b = p - d$ e $d = p - b$.

Utilizando a fórmula para o cálculo da área do quadrilátero inscritível, temos:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{abcd}.$$

## 2. POLÍGONO REGULAR

A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.



Seja um polígono regular de semiperímetro $p$ e apótema $a$, então sua área é $\mathbf{S = p \cdot a}$

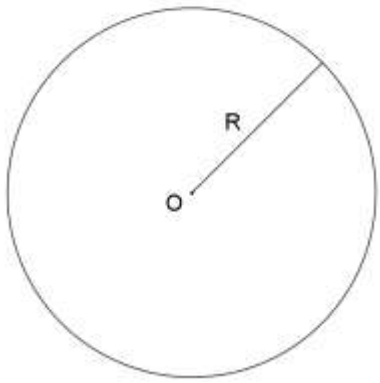
Demonstração:

Seja um polígono regular de gênero $n$, lado $x$ e apótema $a$. Ele pode ser dividido em $n$ triângulos isósceles de vértice no centro do círculo circunscrito ao polígono, cuja base é o lado e a altura é o apótema do polígono. A área de cada um desses triângulos isósceles é $S_\Delta = \frac{x \cdot a}{2}$. Portanto, a área do polígono é dada por $S = n \cdot S_\Delta = n \cdot \frac{x \cdot a}{2} = \frac{nx}{2} \cdot a = p \cdot a$, onde utilizamos $p = \frac{n \cdot x}{2}$.

## 3. REGIÕES CIRCULARES

### 3.1. CÍRCULO

A área do círculo é o produto do quadrado do seu raio pelo número irracional $\pi$.




Seja um círculo de raio $R$, então sua área é $\mathbf{S = \pi \cdot R^2}$

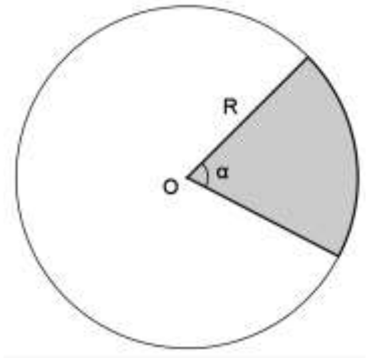
Demonstração:

Observe que a área do círculo pode ser calculada considerando-o um polígono regular cujo número de lado tende ao infinito. Assim, sua área é p produto do seu semiperímetro $\frac{2\pi R}{2} = \pi R$ pelo seu apótema $R$, ou seja, $S = \pi R \cdot R = \pi \cdot R^2$.

### 3.2. SETOR CIRCULAR

Um setor circular é a região da circunferência delimitada por dois raios e um arco e é caracterizado pelo ângulo central por ele determinado.

A área do setor circular é igual à metade do produto do quadrado do raio pelo ângulo central em radianos.




Seja um setor circular de ângulo central $\alpha$ em radianos e de raio $R$, então sua área é $\mathbf{S=\frac{\alpha \cdot R^2}{2}}$

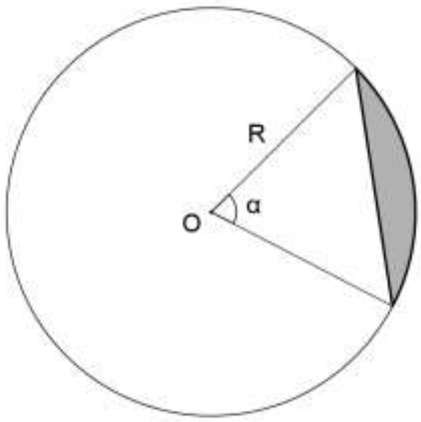
Observe que se o ângulo central estiver expresso em graus, a expressão resultante é $\mathbf{S=\frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360}}$

Demonstração:

A área do setor circular é proporcional ao ângulo central. Assim, um setor circular de $\alpha$ radianos representa $\frac{\alpha}{2\pi}$ da área total do círculo, ou seja, $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{\alpha \cdot R^2}{2}$.

## 3.3. SEGMENTO CIRCULAR

Um segmento circular é uma região da circunferência delimitada por uma corda e um arco e também é caracterizado pelo ângulo central associado à corda.

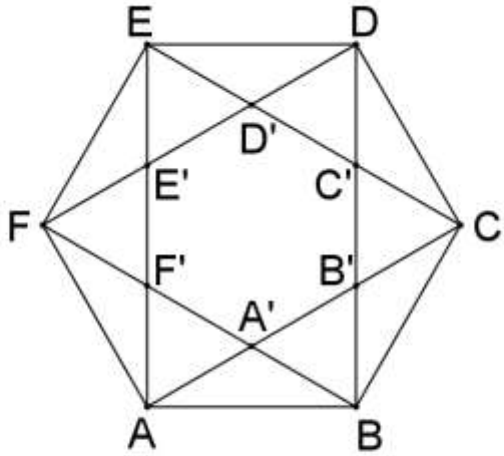



Seja um segmento circular de $\alpha$ em radianos e de raio $R$, então sua área é

$$\mathbf{S_{segmento\,\alpha} = S_{setor\,\alpha} - S_{triângulo} = \frac{R^2}{2} \cdot (\alpha - sen\alpha)}$$

## EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (CN 2002) As diagonais $AC$, $BD$, $CE$, $DF$, $EA$ e $FB$ de um hexágono regular $ABCDEF$ interceptam-se formando outro hexágono $A'B'C'D'E'F'$ conforme a figura abaixo. Qual a razão entre as áreas do maior e a do menor hexágono?




a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{3}{2}$

d) 2

e) 3

2. (CN 2001) Uma massa fermentada, ao ser colocada para descansar, ocupou uma área circular $S$ de raio $r$. Após um certo tempo $t$, ela passou a ocupar uma área $21\%$ maior que $S$. Qual o maior valor possível de $r$, em centímetros, para que a massa não transborde, quando colocada para descansar durante o tempo $t$, em um tabuleiro circular de raio 22 centímetros?

a) 17,38

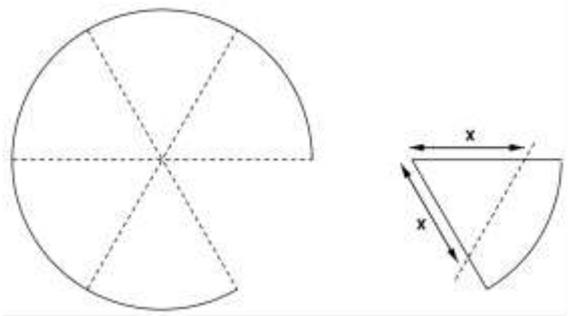
b) $18\frac{2}{11}$

c) 20

d) 20,38

e) 21

3. (CN 2000) Uma pizza circular de raio $30\,\text{cm}$ foi dividida em $6$ partes iguais para seis pessoas. Contudo, uma das pessoas resolveu repartir ao meio o seu pedaço, como mostra a figura acima. O valor de $x$ é:




a) $10\sqrt{\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

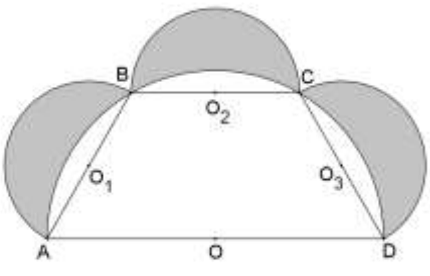
b) $10\sqrt{\dfrac{3\pi}{3}}$

c) $10\sqrt{\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}}$

d) $10\sqrt{\dfrac{3\pi}{\sqrt{3}}}$

e) $10\sqrt{\dfrac{5\pi}{\sqrt{3}}}$

4. (CN 1997) Na figura abaixo, tem-se um semicírculo de centro $O$ e diâmetro $AD$ e os semicírculos de diâmetros $AB$, $BC$, $CD$ e os centros $O_1$, $O_2$ e $O_3$, respectivamente. Sabendo-se que $AB = BC = CD$ e que $AO = R$, a área sombreada é igual a:




a) $\dfrac{R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{4}$

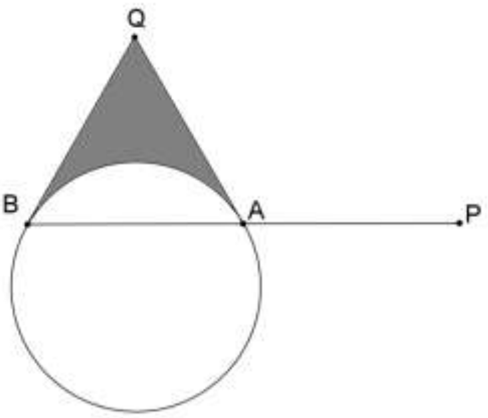
b) $\dfrac{\pi R^2}{16}\left(2\sqrt{3}+\pi\right)$

c) $\dfrac{R^2}{8}\left(6\sqrt{3}-\pi\right)$

d) $\dfrac{R^2\left(5\sqrt{3}-2\pi\right)}{24}$

e) $\dfrac{\pi R^2}{4}$

5. (CN 1987) Na figura abaixo, tem-se: $\overleftrightarrow{QB}$ e $\overleftrightarrow{QA}$ são tangentes ao círculo de raio $2$; a medida do segmento $\overline{PA}$ é $2\sqrt{3}$ e a potência do ponto $P$ em relação ao círculo é igual a $24$. A área sombreada da figura é igual a




a) $\dfrac{4}{3}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$

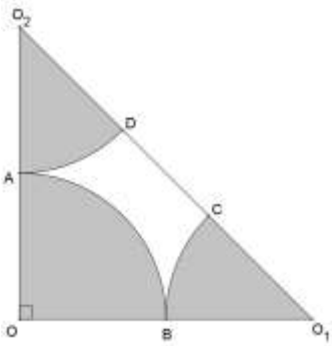
b) $\dfrac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$

c) $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{3}-\pi\right)$

d) $\dfrac{4}{3}\left(4\sqrt{3}-\pi\right)$

e) $\dfrac{4}{3}\left(6\sqrt{3}-\pi\right)$

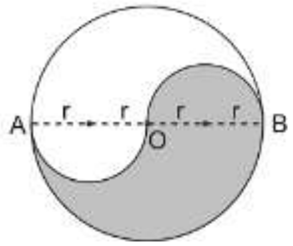
6. (EPCAr 2012) Considere a área $S$ da parte sombreada no triângulo retângulo isósceles $OO_1O_2$.



AD, AB e BC são arcos de circunferência com centro em $O_2$, O e $O_1$, respectivamente, cujos raios medem 2r.

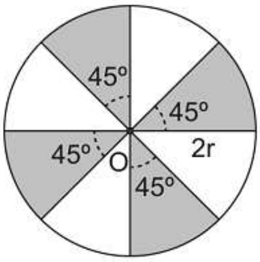
Das figuras abaixo, a única em que a área sombreada **NÃO** é igual a S, é

a)



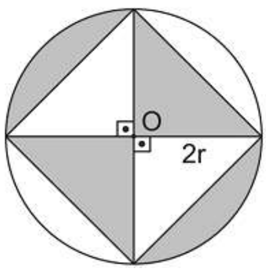

Circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e semicircunferências de diâmetros $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

b)



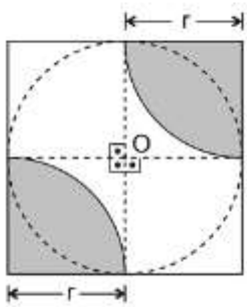

Circunferência de centro O.

c)




Circunferência de centro O.

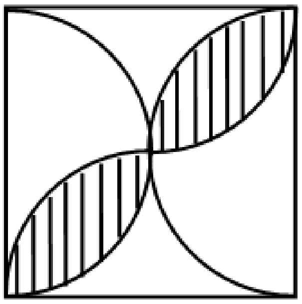
d)




Circunferência de centro O inscrita num quadrado.

Dois setores circulares de raio r.

7. (AFA 1998) Na figura abaixo, o lado do quadrado é 1 cm. Então, a área da região hachurada, em $cm^2$, é



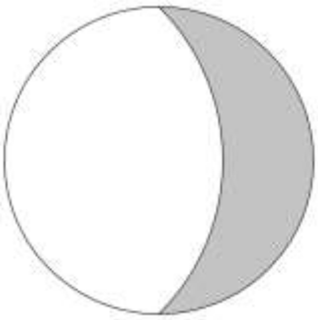
a) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

b) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$.

c) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$.

d) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}$.

8. A borda da sombra na Lua é sempre um arco de círculo. Em um certo dia, a Lua é vista com a sombra passando por pontos diametralmente opostos. Se o centro do arco de círculo que forma a sombra está sobre a circunferência da Lua, determine a proporção da Lua que não está na sombra.



a) $\frac{1}{4}$

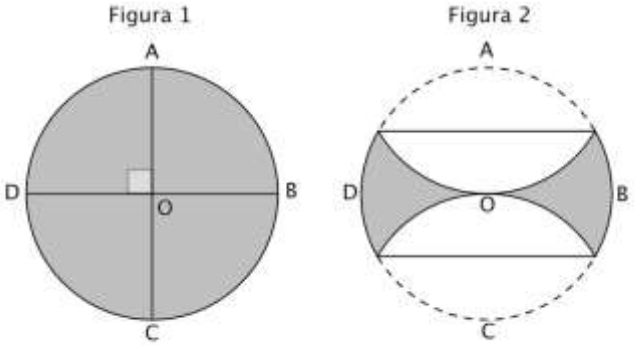
b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{\pi}$

d) $\frac{1}{\pi+1}$

e) $\frac{\pi-1}{\pi}$

9. (EFOMM 2010) João construiu um círculo de papel com centro O e raio 4cm (Figura 1). Traçou dois diâmetros AC e BD perpendiculares e, em seguida, dobrou o papel fazendo coincidir A, O e C, conforme sugere a Figura 2.




A área da parte do círculo não encoberta pelas dobras, sombreada na figura 2, é igual a

a) $\frac{1}{3}(96-16\pi)\text{cm}^2$

b) $\frac{1}{3}(16\pi-48)\text{cm}^2$

c) $\frac{1}{3}\left(16\pi-12\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

d) $\frac{1}{3}\left(16\pi+12\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

e) $\frac{1}{3}\left(48\sqrt{3}-16\pi\right)\text{cm}^2$

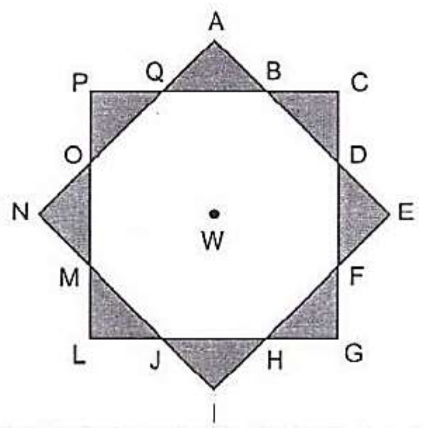
10. (AFA 2009) Considere num mesmo plano os pontos da figura abaixo, de tal forma que:

(I) $\overline{AW}\equiv\overline{CW}\equiv\overline{EW}\equiv\overline{GW}\equiv\overline{IW}\equiv\overline{LW}\equiv\overline{NW}\equiv\overline{PW}$

(II) $\overline{BW}\equiv\overline{DW}\equiv\overline{FW}\equiv\overline{HW}\equiv\overline{JW}\equiv\overline{MW}\equiv\overline{OW}\equiv\overline{QW}$

(III) $AWB\equiv BWC\equiv CWD\equiv\ldots\equiv PWQ\equiv QWA$

(IV) $\overline{PC}\equiv\overline{AE}\equiv\overline{CG}\equiv\overline{EI}\equiv\overline{GL}\equiv\overline{IN}\equiv\overline{NA}\equiv\overline{LP}\equiv a$




A área da região sombreada da figura, em função de a, é:

a) $12a^2-8a^2\sqrt{2}$

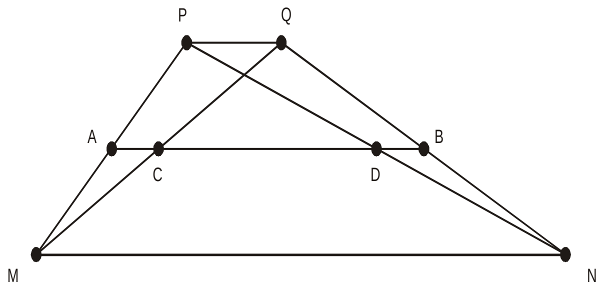
b) $6a^2+4a^2\sqrt{2}$

c) $12a^2+8a^2\sqrt{2}$

d) $6a^2-4a^2\sqrt{2}$

e) $6a^2$

11. (EN 2004) Considere o trapézio $MNPQ$ de bases $\overline{MN}=m$ e $\overline{PQ}=4$, com $m>4$ e altura igual a $6$, conforme figura abaixo. Sendo $A$ e $B$ os pontos médios dos lados $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$, respectivamente, e sabendo que $\overline{AB}=10$, então a área do trapézio $MCDN$ vale:




a) 28

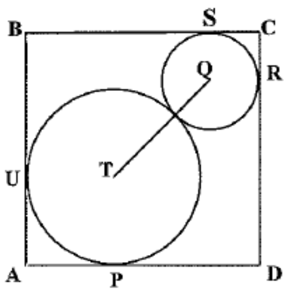
b) 33

c) 37

d) 42

e) 45

12. (EN 2010) As circunferências da figura abaixo possuem centro nos pontos $T$ e $Q$, têm raios $3\,\text{cm}$ e $2\,\text{cm}$, respectivamente, são tangentes entre si e tangenciam os lados do quadrado $ABCD$ nos pontos $P$, $R$, $S$ e $U$.




Qual o valor da área da figura plana de vértices $P$, $T$, $Q$, $R$ e $D$ em $\text{cm}^2$?

a) $\dfrac{7\sqrt{2}+18}{2\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{50\sqrt{2}+23}{8}$

c) $\dfrac{15\sqrt{2}+2}{4}$

d) $\dfrac{30\sqrt{2}+25}{4}$

e) $\dfrac{50\sqrt{2}+49}{4}$

13. (IME 1988) Dado um círculo de raio R e centro O, constroem-se três círculos iguais de raios r, tangentes dois a dois, nos pontos E, F, G e tangentes interiores ao círculo dado. Determine, em função de R, a área da superfície EFG, compreendida entre os três círculos e limitada pelos arcos EG, GF e FE.

a) $\frac{(2\sqrt{3}-\pi)(2\sqrt{3}-3)^2}{2}R^2$

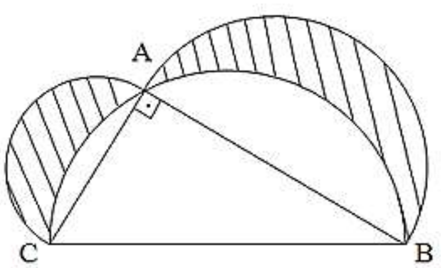
b) $\frac{(2\sqrt{3}-\pi)(2\sqrt{3}-3)^2}{4}R^2$

c) $\frac{(3\sqrt{3}-\pi)(3\sqrt{3}-3)^2}{2}R^2$

d) $\frac{(3\sqrt{3}-\pi)(3\sqrt{3}-3)^2}{4}R^2$

e) $\frac{(\pi-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})^2}{2}R^2$

14. (IME 2011) Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo 3 cm e 4 cm. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura abaixo, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em $cm^2$, é:




a) 6

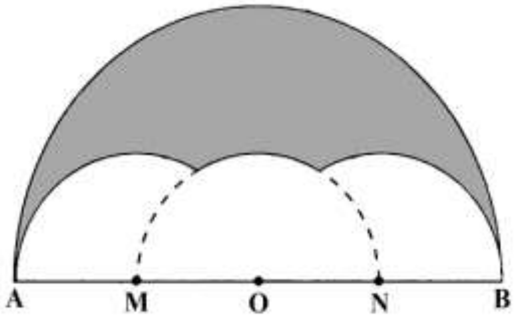
b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

15. (CMRJ 2011) Na figura abaixo, temos o semicírculo de diâmetro $AB = 4\text{ cm}$ e centro O. Sejam M o ponto médio de AO e N o ponto médio de OB. Com centros em M, O e N, traçam-se 3 semicírculos de raios iguais a $1\text{ cm}$ e contidos no interior do semicírculo de diâmetro $4\text{ cm}$ e centro O. A área da região sombreada, em $cm^2$, a qual está situada no interior do semicírculo maior e exterior aos três semicírculos menores, vale




a) $\pi-\sqrt{3}$

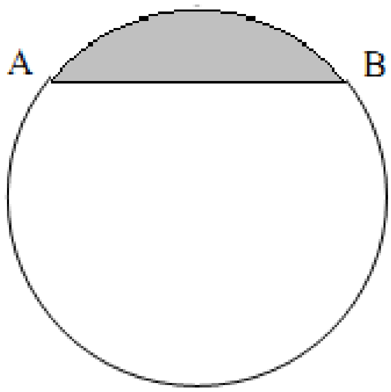
b) $\pi-\sqrt{2}$

c) $\frac{\pi+\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\pi+\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. (CMRJ 2003) Um aluno do CMRJ traçou uma circunferência de raio $R\,\text{cm}$ e dividiu o círculo correspondente em duas regiões, usando uma corda $AB$ de comprimento $R\sqrt{3}\,\text{cm}$, conforme mostra a figura abaixo. Sabendo que a área da região sombreada é $(4\pi-3\sqrt{3})\,\text{cm}^2$, então, a medida de $R$ é:




a) $2\sqrt{3}$

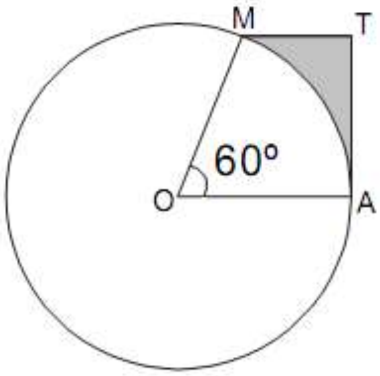
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2\pi\sqrt{3}$

d) $3\pi$

e) $(5\pi-\sqrt{3})$

17. (EPCAR 2001) Na figura, O é o centro do círculo de raio r, AT é tangente ao círculo e MT é perpendicular a AT. Então, a área hachurada é




a) $\frac{r^2}{24}\left(9\sqrt{3}-4\pi\right)$

b) $\frac{r^2}{24}\left(15\sqrt{3}-4\pi\right)$

c) $\frac{r^2}{24}\left(6\sqrt{3}-4\pi\right)$

d) $\frac{r^2}{24}\left(4\sqrt{3}-4\pi\right)$

18. (CN 2008) Com a “ponta seca” de um compasso, colocada no centro de um quadrado de lado $2$, traça-se uma circunferência de raio $r$. Observa-se que cada arco da circunferência, externo ao quadrado, tem o dobro do comprimento de cada arco interno. Usando-se raiz quadrada de $3$ igual a $1,7$ e $\text{pi}=3$, qual a área da região intersecção do quadrado e do círculo, assim determinado?

a) 2,8

b) 3,0

c) 3,2

d) 3,4

e) 3,6

19. (CN 2006) Um círculo $\alpha$ de centro num ponto $A$ e raio $2\sqrt{3}$ é tangente interior, num ponto $B$, a um círculo $\beta$ de centro num ponto $O$ e raio $6\sqrt{3}$. Se o raio $OC$ é tangente a $\alpha$ num ponto $D$, a medida da área limitada pelo segmento $DC$ e os menores arcos $BC$ de $\beta$ e $BD$ de $\alpha$ é igual a

a) $4\pi-3\sqrt{3}$

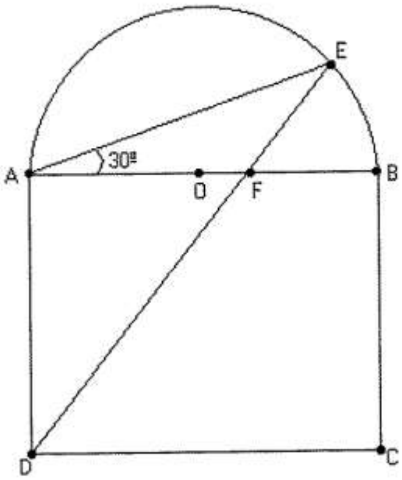
b) $5\pi - 4\sqrt{3}$

c) $4\pi - 6\sqrt{3}$

d) $5\pi - 6\sqrt{3}$

e) $5\pi - 5\sqrt{3}$

20. (CN 2005)




Na figura acima, $ABCD$ é um quadrado de área $104$ e o ponto $O$ é o centro do semicírculo de diâmetro $AB$. A área do triângulo $AEF$ é dada por

a) $2\left(3\sqrt{3}+3\right)$

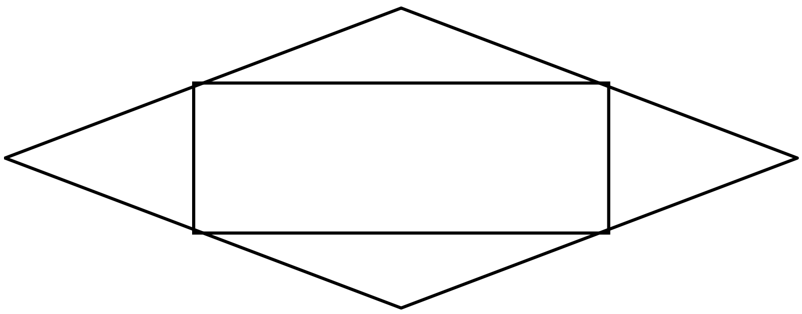
b) $6\left(4\sqrt{3}-3\right)$

c) $5\left(4\sqrt{3}-6\right)$

d) $3\left(4\sqrt{3}-3\right)$

e) $8\left(4\sqrt{3}-3\right)$

21. (CN 2002) Considere um retângulo inscrito em um losango, conforme a figura abaixo. Se as diagonais do losango medem, respectivamente, $8\text{ cm}$ e $12\text{ cm}$ e a área do retângulo é $24\text{ cm}^2$, então o perímetro deste retângulo, em $\text{cm}$, é igual a:



a) 28

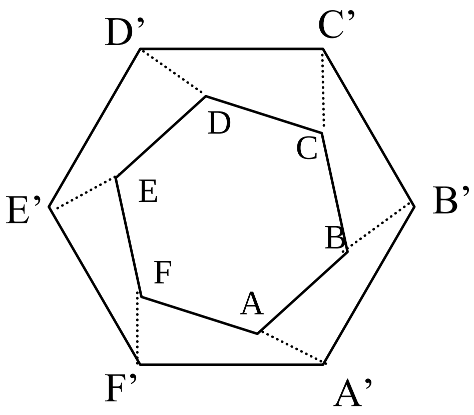
b) 24

c) 22

d) 20

e) 18

22. (CN 2002) Observe a figura abaixo, onde os seis lados do hexágono regular $ABCDEF$ foram prolongados de segmentos $AA'=BB'=CC'=DD'=EE'=FF'$, de modo que a medida do segmento $AA'$ corresponde a $P\%$ da medida do lado $AB$, $(P>0)$. Se o percentual de aumento que a área do hexágono $A'B'C'D'E'F'$ apresenta em relação à área do hexágono original é $75\%$, então o valor de $P$ é:




a) 25

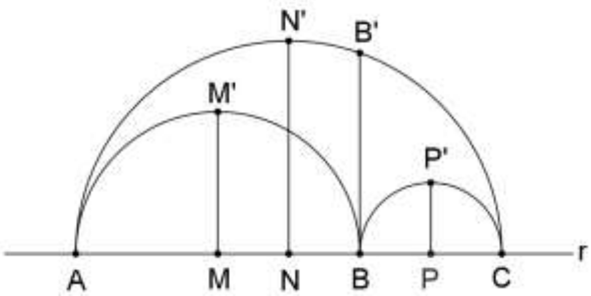
b) 30

c) 45

d) 50

e) 75

23. (CN 2002) Observe a figura abaixo que representa três semicircunferências de centros M, N e P, tangentes duas a duas, respectivamente, nos pontos A, B e C. Os segmentos $MM'$, $NN'$, $BB'$ e $PP'$ são perpendiculares à reta $r$. Se a medida do segmento $BB'$ é $6\text{ cm}$, a área do triângulo $M'N'P'$ em $\text{cm}^2$, é igual a:




a) 9

b) 10

c) 12

d) 18

e) 36

24. (CN 1976) Sobre os lados de um hexágono regular de $4 \text{ cm}$ de lado, e exteriormente a ele, constroem-se quadrados, de modo que cada quadrado tenha um lado em comum com o hexágono. Calcular a área do dodecágono cujos vértices são os vértices dos quadrados que não são vértices do hexágono:

a) $48\left(\sqrt{3}+2\right) \text{ cm}^2$

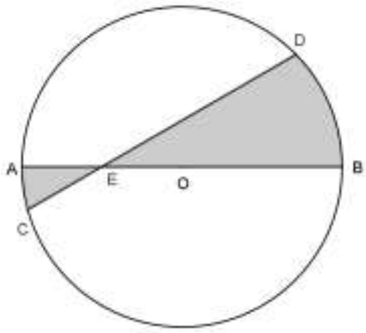
b) $50\left(\sqrt{3}+2\right) \text{cm}^2$

c) $24\left(\sqrt{3}+4\right) \text{ cm}^2$

d) $192 \text{ cm}^2$

e) $36 \text{ cm}^2$

25. (CN 1985) Na figura, o diâmetro AB mede $8\sqrt{3}\text{ cm}$ e a corda CD forma um ângulo de 30° com AB. Se E é o ponto médio de AO, onde O é o centro do círculo, calcule a área da região sombreada, em $\text{cm}^2$.




a) $8\pi+3\sqrt{3}$

b) $8\pi+2\sqrt{3}$

c) $4\pi+3\sqrt{3}$

d) $4\pi+2\sqrt{3}$

e) $4\left(\pi+\sqrt{3}\right)$

26. (IME 2006) Um trapézio $ABCD$, de base menor $AB$ e base maior $CD$, possui base média $MN$ e área $S$. Os pontos $M'$ e $N'$ dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem $MM'N'N$. Ao se traçar as retas $AM'$ e $BN'$, verificou-se que as mesmas se encontram sobre o lado $CD$ no ponto $P$. Calcule a área do trapézio $M'N'CD$ em função da área $S$ de $ABCD$.

a) $\frac{S}{2}$

b) $\frac{2S}{5}$

c) $\frac{3S}{8}$

d) $\frac{4S}{9}$

e) $\frac{5S}{12}$

27. (ITA 2011) Um triangulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se $\alpha$ é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e $\beta$ é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em $cm^2$, é igual a

a) 14.

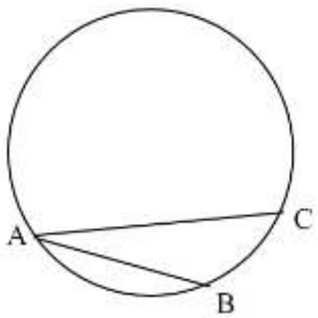
b) 15.

c) 16.

d) 17.

e) 18.

28. A circunferência abaixo tem raio 1, o arco AB mede $70^0$ e o arco BC mede $40^0$. A área da região limitada pelas cordas AB e AC e pelo arco BC mede:




a) $\pi/8$

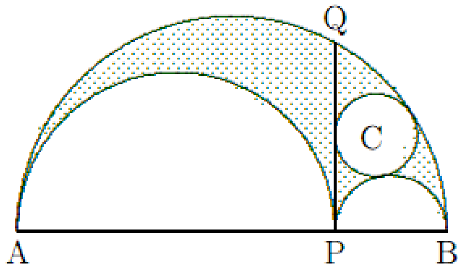
b) $\pi/9$

c) $\pi/10$

d) $\pi/12$

e) $\pi/14$

29. Na figura abaixo, são mostrados três semicírculos. O círculo C é tangente a dois dos semicírculos e ao segmento PQ perpendicular ao diâmetro AB. A área da região sombreada é $39\pi$, e a área do círculo C é $9\pi$. A medida do diâmetro AB é




a) 18

b) 24

c) 30

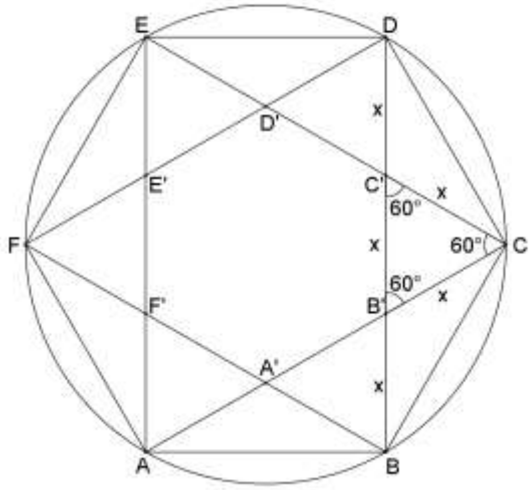
d) 32

e) 36

## GABARITO

**1.**

**RESPOSTA: E**




Seja o hexágono $ABCDEF$ inscrito em uma circunferência de raio $R$, então o lado do hexágono é igual a $R$.

Os triângulos $AA'F'$, $BA'B'$, $CB'C'$, $DC'D'$, $ED'E'$, $FE'F'$ são triângulos equiláteros congruentes. Logo, $BB' = B'C' = C'D$.

A corda $BD$ é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio $R$, então $BD = 3x = R\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ e o lado do hexágono regular $A'B'C'D'E'F'$ é igual a $\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Os dois hexágonos regulares são polígonos semelhantes, portanto a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, temos:

$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{A'B'C'D'E'F'}} = \left(\frac{R}{R\sqrt{3}/3}\right)^2 = 3.$$

**2.**

**RESPOSTA: C**

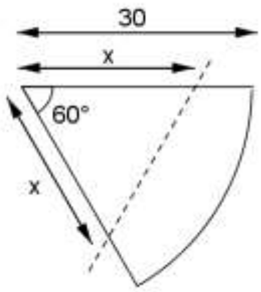
A área ocupada pela massa originalmente era $S = \pi \cdot r^2$ e, após descansar durante o tempo $t$, a área ocupada era $(1+21\%) \cdot S = 1{,}21 \cdot \pi r^2$.

A área ocupada pela massa, após descansar durante o tempo $t$, deve ser igual à área de uma circunferência de raio $22\text{ cm}$. Dessa forma, temos: $1{,}21 \cdot \pi r^2 = \pi \cdot 22^2 \Leftrightarrow 1{,}1 \cdot r = 22 \Leftrightarrow r = 20\text{ cm}$.

**3.**

**RESPOSTA: D**

Cada uma das $6$ fatias é um setor circular de $60^\circ$. Para dividir o pedaço ao meio, basta observar que o triângulo isósceles formado tem área igual à metade da área do setor circular.



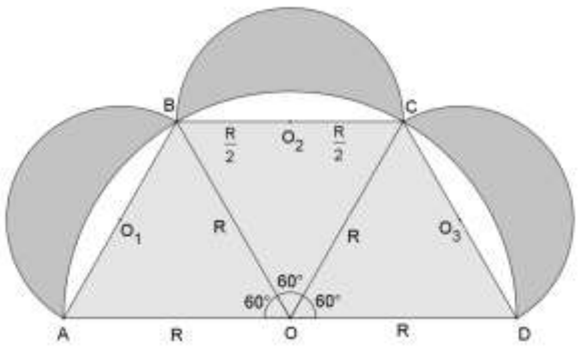

$$S_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} S_{\text{setor circular}} \Leftrightarrow \frac{x \cdot x}{2} \text{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{900\pi}{6} \Leftrightarrow x^2 = \frac{300\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = 10\sqrt{\frac{3\pi}{\sqrt{3}}} \text{ u.c.}$$

**4.**

**RESPOSTA: C**




O trapézio $ABCD$ é metade de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio $R$, então $AB = BC = CD = R$ e $AD = 2R$. A área do trapézio $ABCD$ é igual à área de três triângulos equiláteros de raio $R$.

A área sombreada é igual à área dos três semicírculos de centro $O_1$, $O_2$ e $O_3$, e raio $\frac{R}{2}$, menos a área dos três segmentos circulares (em branco na figura).

A área dos três segmentos circulares é igual à área do semicírculo de centro $O$ e raio $R$, menos a área do trapézio $ABCD$.

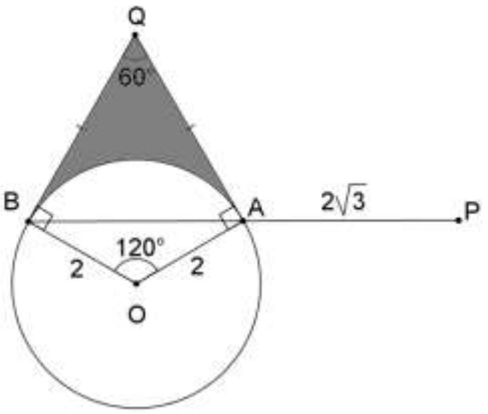
Logo, a área sombreada é igual à área dos três semicírculos de centro $O_1$, $O_2$ e $O_3$, e raio $\frac{R}{2}$, menos a área do semicírculo de centro $O$ e raio $R$, mais a área do trapézio $ABCD$.

$$S_{sombreada} = 3 \cdot \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} + 3 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{R^2}{8}\left(6\sqrt{3} - \pi\right) \text{u.a.}$$

**5.**

**RESPOSTA: B**




A potência do ponto P em relação ao círculo é 24, então

$$Pot_O P = PA \cdot PB = 24 \Rightarrow 2\sqrt{3} \cdot \left(2\sqrt{3} + AB\right) = 24 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

Como $AB = R\sqrt{3}$, conclui-se que $AB$ é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência, logo $A\hat{O}B = 120^\circ$.

Os segmentos $QB$ e $QA$ são tangentes à circunferência, então $QA = QB$, $Q\hat{A}O = Q\hat{B}O = 90º$ e, consequentemente, $A\hat{Q}B = 60º$.

O triângulo $QAB$ é equilátero de lado $2\sqrt{3}$, pois $QA = QB$ e $A\hat{Q}B = 60º$.

A área sombreada é, então, igual à área do triângulo equilátero $QAB$ menos a área de um segmento circular de $120º$ no círculo de centro $O$.

$$S_{QAB} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

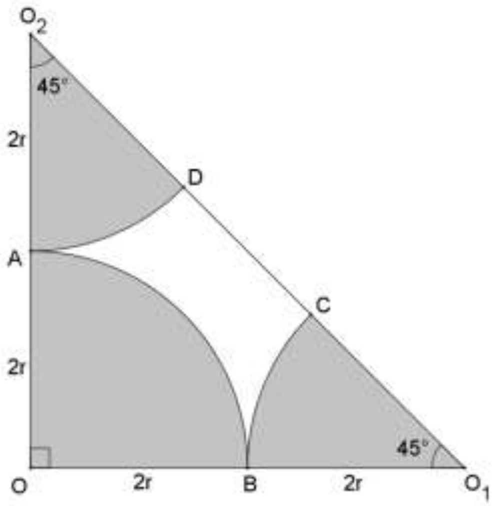
$$S_{seg.120º} = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot 2^2\right) - \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \text{sen}120º =$$

$$= \frac{4\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_{sombr.} = S_{QAB} - S_{seg.120º} = 3\sqrt{3} - \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$$

**6.**

**RESPOSTA: D**




A área sombreada é igual à área de um setor circular de $90^\circ$ mais a área de dois setores circulares de $45^\circ$, todos de raio $2r$, o que é igual à área de um setor circular de $180^\circ$ e raio $2r$. Logo, $S = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (2r)^2 = 2\pi \cdot r^2$.

a) A área sombreada é igual à área de uma semicircunferência de raio $2r$, ou seja, igual a $S$.

b) A área sombreada é igual à soma de $4$ setores circulares de $45^\circ$ e raio $2r$, o que é igual à área de um setor circular de $180^\circ$ e raio $2r$, ou seja, igual a $S$.

c) A área sombreada é igual à soma de $2$ setores circulares de $90^\circ$ e raio $2r$, o que é igual à área de um setor circular de $180^\circ$ e raio $2r$, ou seja, igual a $S$.

d) A área sombreada é igual à soma de $2$ setores circulares de $90^\circ$ e raio $r$, o que é igual à área de um setor circular de $180^\circ$ e raio $r$, ou seja, $\frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ que é diferente de $S$.

**7.**

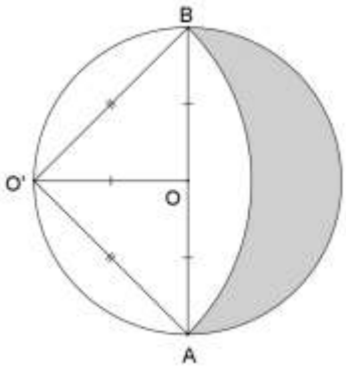
**RESPOSTA: A**

A região hachurada é formada por quatro segmentos circulares de $90^\circ$ e raio $\frac{1}{2}$, que pode ser calculado como a diferença entre o setor circular de $90^\circ$ e o triângulo retângulo com ambos os catetos iguais a $\frac{1}{2}$.

$$S = 4 \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 4 \cdot \left( \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

**8.**

**RESPOSTA: E**




Na figura acima, o segmento $\overline{AB} = 2r$ é um diâmetro da circunferência e o ponto $O'$ é o centro o arco de círculo que forma a sombra.

Os segmentos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OO'}$ são raios da circunferência da lua e os segmentos $\overline{O'A} = \overline{O'B}$ são raios do arco de círculo que forma a sombra. Portanto, $\Delta OBO' \equiv \Delta OAO' (\text{L.L.L.})$, o que implica $B\hat{O}O' = A\hat{O}O' = 90^\circ$ e $O\hat{B}O' = O\hat{O}'B = O\hat{A}O' = O\hat{O}'A = 45^\circ$.

Note ainda que $O'A = O'B = r\sqrt{2}$ e $A\hat{O}'B = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$.

Portanto, a área da Lua que não está na sombra $S$ é igual à semicircunferência da Lua mais um segmento circular de $90^\circ$ com raio $r\sqrt{2}$. Assim, temos

$$S = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 + \left( \frac{1}{4} \pi \left( r\sqrt{2} \right)^2 - \frac{\left( r\sqrt{2} \right)^2}{2} \right) = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - r^2 = r^2 (\pi - 1).$$

Logo, a proporção da Lua que não está na sombra é $\frac{r^2 (\pi - 1)}{\pi r^2} = \frac{\pi - 1}{\pi}$.

REFERÊNCIA: Revista Crux Mathematicorum Volume 36 n° 3.

**9.**

**RESPOSTA: E**

A corda formada na Figura 2 divide o raio da circunferência ao meio, logo essa corda é igual ao raio do triângulo equilátero inscrito na circunferência.

Dessa foram, a área pedida pode ser obtida retirando-se da área da circunferência, a área de 4 segmentos circulares de $120^\circ$.

$$S = S_{CIRC} - 4 \cdot S_{SEG\,120^\circ} =$$

$$= \pi r^2 - 4 \cdot \left( \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} 120^\circ \right) =$$

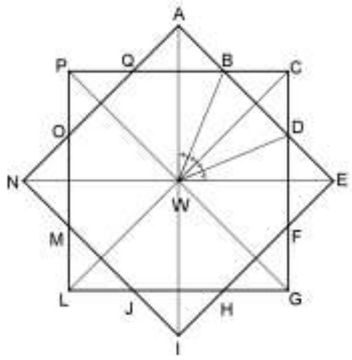
$$= r^2 \left( \pi - \frac{4\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = r^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$$

Como o raio do círculo é r = 4 cm, temos:

$$S = 4^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( 48\sqrt{3} - 16\pi \right) \text{ cm}^2$$

**10.**

**RESPOSTA: D**




Como $\overline{PC} \equiv \overline{AE} \equiv \overline{CG} \equiv \overline{EI} \equiv \overline{GL} \equiv \overline{IN} \equiv \overline{NA} \equiv \overline{LP} \equiv a$, então os quadriláteros AEIN e CGLP são losangos e suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio.

Como $\overline{AW} \equiv \overline{CW} \equiv \overline{EW} \equiv \overline{GW} \equiv \overline{IW} \equiv \overline{LW} \equiv \overline{NW} \equiv \overline{PW}$, as diagonais de AEIN e CGLP são iguais e consequentemente os quadriláteros são quadrados.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AW} \equiv \overline{CW} \\ A\hat{W}B \equiv B\hat{W}C \\ \overline{BW} \text{ comum} \end{array} \right\} \overset{\text{L.A.L.}}{\Rightarrow} \Delta AWB \equiv \Delta CWB \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{BC}$$

Analogamente, $\overline{CD} \equiv \overline{DE}$. Sejam $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = x$.

O $\Delta BCD$ é retângulo isósceles de catetos $\overline{BC}=\overline{CD}=x$ e, portanto, a sua hipotenusa é $\overline{BD}=x\sqrt{2}$.

Assim, temos:

$$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DE}=x+x\sqrt{2}+x=a \Leftrightarrow x=\frac{1}{2+\sqrt{2}}a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$$

Pela simetria da figura, observa-se que a área sombreada é igual à área de oito triângulos retângulos isósceles de catetos $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$. Portanto,

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\left(6-4\sqrt{2}\right)\cdot a^2 \text{ unidades de área.}$$

**11.**

**RESPOSTA: B**

O segmento $\overline{AB}=10$ é base média do trapézio $MNPQ$, então $\overline{AB}=\frac{\overline{MN}+\overline{PQ}}{2} \Leftrightarrow 2\cdot 10=m+4 \Leftrightarrow m=16$.

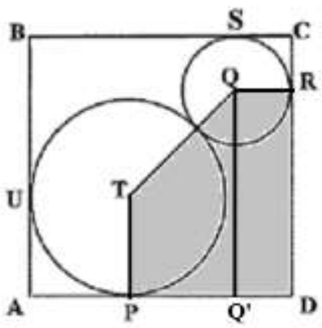
O segmento $\overline{CD}$ é a mediana de Euler do trapézio $MNPQ$, então $\overline{CD}=\frac{\overline{MN}-\overline{PQ}}{2}=\frac{16-4}{2}=6$.

A altura do trapézio $MCDN$ é metade da altura do trapézio $MNPQ$, ou seja, $h=\frac{6}{2}=3$.

Portanto a área do trapézio $MCDN$ é dada por $S_{MCDN}=\frac{\overline{MN}+\overline{CD}}{2}\cdot h=\frac{16+6}{2}\cdot 3=33\text{ u.a.}$.

**12.**

**RESPOSTA: E**




Inicialmente, observemos que os quadriláteros $APTU$ e $CRQS$ são quadrados e, portanto, $\overline{TQ}$ está sobre a diagonal do quadrado.

Seja $Q'$ a projeção de Q sobre AD, então:

$$PQ' = \frac{TQ}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

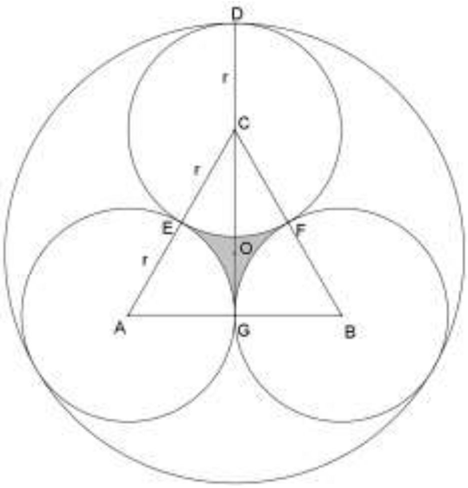
$$QQ' = \frac{AT}{\sqrt{2}} = \frac{5+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} + 3$$

$$S_{PTQRD} = S_{PTQQ'} + S_{Q'QRD} = \frac{(PT+QQ')\cdot PQ'}{2} + QQ'\cdot QR =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{\sqrt{2}} + 3\right)\cdot\frac{5}{\sqrt{2}} + \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 3\right)\cdot 2 = \frac{25}{\sqrt{2}} + \frac{49}{4} = \frac{50\sqrt{2}+49}{4}\text{ cm}^2$$

**13.**

**RESPOSTA: A**




Ligando-se os centros dos três círculos de raio $r$, obtém-se um triângulo equilátero $ABC$ de lado $2r$.

O centro $O$ da circunferência de raio $R$ é baricentro do triângulo equilátero $ABC$. Assim, temos:

$$OD = OC + CR \Leftrightarrow R = \frac{2}{3}\cdot\frac{2r\cdot\sqrt{3}}{2} + r$$

$$\Leftrightarrow R = \left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)r \Leftrightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{3}+3}R = \left(2\sqrt{3}-3\right)R$$

A área pedida $S$ é a área sombreada na figura e pode ser calculada subtraindo-se da área do triângulo equilátero $ABC$ a área de três setores circulares de $60^\circ$ e raio $r$.

$$S = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\pi\cdot r^2\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)^2 R^2$$

**14.**

**RESPOSTA: A**

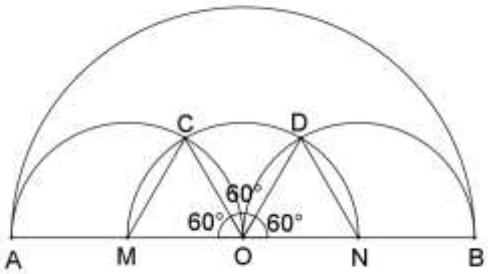
Aplicando o teorema de Pitágoras ao $\Delta ABC$, conclui-se que a hipotenusa $BC = 5\text{ cm}$.

A área hachurada é igual a área do semicírculo de diâmetro $AC = 3\,\text{cm}$ somada à área do semicírculo de diâmetro $AB = 4\,\text{cm}$, subtraída da área do semicírculo de diâmetro $AB = 5\,\text{cm}$ e somada à área do $\Delta ABC$. Assim,

$$S = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3\cdot 4}{2} = 6\,\text{cm}^2$$

**15.**

**RESPOSTA: E**




A área da região sombreada é igual à área do semicírculo de diâmetro AB menos a área dos semicírculos de diâmetros AO e OB, menos a área do setor circular OCD de $60^\circ$ mais a área de dois segmentos circulares de $60^\circ$.

$$S = \frac{\pi\cdot 2^2}{2} - 2\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{2} - \frac{\pi\cdot 1^2}{6} + 2\cdot\left(\frac{\pi\cdot 1^2}{6} - \frac{1^2\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi - \pi - \frac{\pi}{6} + 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$$

**16.**

**RESPOSTA: A**

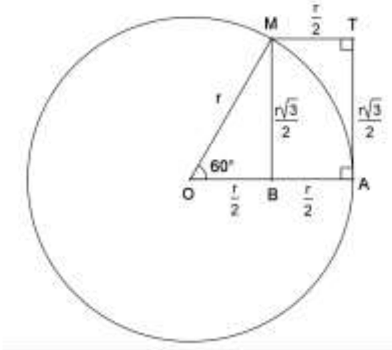
A corda $AB = R\sqrt{3}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio $R$. Assim, a região sombreada é um segmento circular de $120^\circ$.

$$S = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R\cdot R}{2}\text{sen}120^\circ = 4\pi - 3\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 12\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Leftrightarrow R^2 = 12$$
$$\Leftrightarrow R = 2\sqrt{3}$$

**17.**

**RESPOSTA: A**

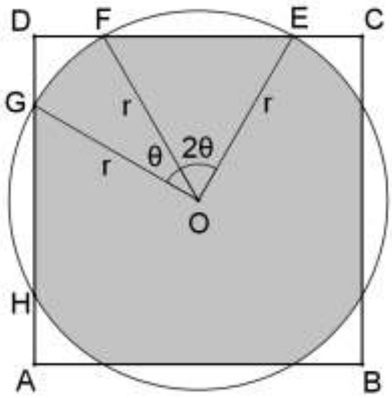
A área hachurada é igual à área do trapézio retângulo OATM menos a área de um setor circular de $60^\circ$ e raio r.




$$S=\frac{\left(r+\frac{r}{2}\right)\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{1}{6}\cdot\pi r^2=r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{r^2}{24}\left(9\sqrt{3}-4\pi\right)$$

**18.**

**RESPOSTA: E**




Como cada arco externo tem o dobro do comprimento de cada arco interno, o ângulo central associado ao arco externo é o dobro do ângulo central associado ao arco interno. Assim,

$4\cdot(\theta+2\theta)=360^\circ \Leftrightarrow \theta=30^\circ$.

Como $2\theta=60^\circ$, o triângulo OEF é equilátero de lado $r$ e a sua altura é metade do lado do quadrado. Portanto, $\frac{r\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{2}\Leftrightarrow r=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

A área da interseção do quadrado com o círculo é dada pela área do círculo menos $4$ segmentos circulares de $2\theta=60^\circ$.

A área do segmento circular de $60^\circ$ em uma circunferência de raio $r=\frac{2}{\sqrt{3}}$ é:

$$S_{\text{seg }60^\circ}=\frac{1}{6}\pi r^2-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

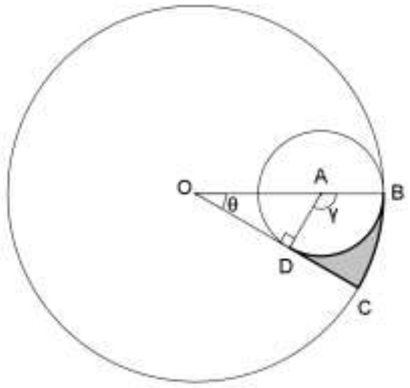
Portanto, a área pedida é dada por:

$$S = \pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \frac{8\pi}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{4\pi}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx \frac{4}{9} \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 1,7 = \frac{4}{3} \cdot 2,7 = 3,6 \text{ u.a.}$$

**19.**

**RESPOSTA: D**




$$AD = 2\sqrt{3}$$

$$OA = OB - AB = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{AD}{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$OD = OA \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

$$\gamma = 180^\circ - O\hat{A}D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

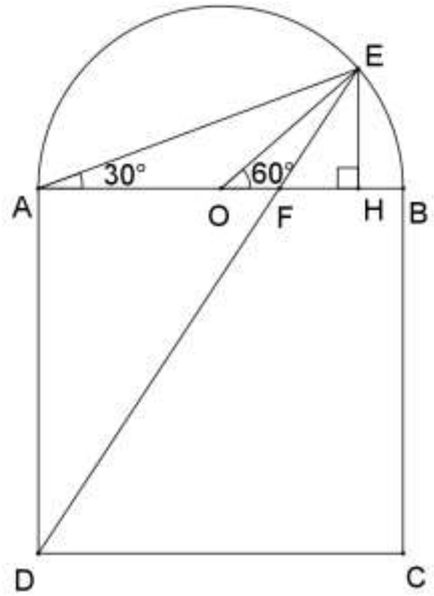
A área procurada é dada pela área de um setor circular de $30^\circ$ em $\beta$, menos a área do triângulo OAD e menos a área de um setor circular de $120^\circ$ em $\alpha$.

$$S = \frac{\pi \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2}{12} - \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2}{3} =$$

$$= 9\pi - 6\sqrt{3} - 4\pi = \left(5\pi - 6\sqrt{3}\right) \text{u.a.}$$

**20.**

**RESPOSTA: D**




Se $B\hat{A}E = 30^\circ \Rightarrow EB = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow E\hat{O}B = 60^\circ$

Seja $EH \perp AB$, então:

$$EH = OE \cdot \text{sen}60º = \frac{\sqrt{104}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{78}}{2}$$

$$OH = OE \cdot \cos 60º = \frac{\sqrt{104}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$AH = AO + OH = \frac{\sqrt{104}}{2} + \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

$$\Delta ADF \sim \Delta HEF \Rightarrow \frac{EH}{AD} = \frac{FH}{AF} \Rightarrow \frac{FH}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{78}}{2}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AF + FH} = \frac{4}{4 + \sqrt{3}}$$

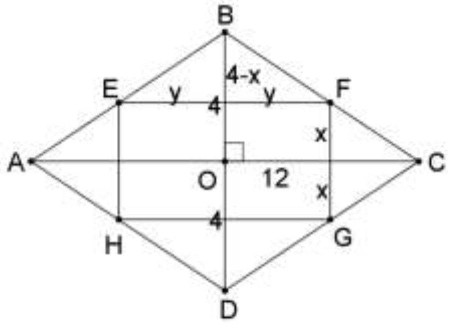
$$\Rightarrow \frac{AF}{AH} = \frac{4}{4 + \sqrt{3}} \Rightarrow AF = \frac{3\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{4}{4 + \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{26}}{4 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{AF \cdot EH}{2} = \frac{\frac{6\sqrt{26}}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{78}}{2}}{2} = \frac{3 \cdot 26 \cdot \sqrt{3}}{2\left(4 + \sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{39\sqrt{3}\left(4 - \sqrt{3}\right)}{16 - 3} = 3\left(4\sqrt{3} - 3\right) \text{u.a.}$$

**21.**

**RESPOSTA: D**




$S_{EFGH} = 24 \Leftrightarrow 2x \cdot 2y = 24 \Leftrightarrow xy = 6$

$\Delta ABC \sim \Delta EBF \Rightarrow \dfrac{4-x}{4} = \dfrac{2y}{12} \Leftrightarrow 3x + 2y = 12$

$\Rightarrow 3x + 2 \cdot \dfrac{6}{x} = 12 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ e } y = 3$

$2p_{EFGH} = 4(x+y) = 4(2+3) = 20\text{ cm}$

**22.**

**RESPOSTA: D**

Seja x o lado do hexágono regular ABCDEF, então

$AB' = AB + BB' = x + \dfrac{P}{100}x = \left(1 + \dfrac{P}{100}\right)x$

$AA' = \dfrac{P}{100}x$

$B'\hat{A}A' = 180º - 120º = 60º$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $A'AB'$, temos:

$(A'B')^2 = (1+P\%)^2 x^2 + (P\%)^2 x^2 - 2 \cdot (1+P\%)x \cdot (P\%)x \cdot \cos 60º =$

$= x^2 \left(1 + 2(P\%) + (P\%)^2 + (P\%)^2 - 2 \cdot (1+P\%) \cdot (P\%) \cdot \dfrac{1}{2}\right) =$

$= x^2 \left(1 + 2(P\%) + 2(P\%)^2 - (P\%) - (P\%)^2\right) = x^2 \left(1 + (P\%) + (P\%)^2\right)$

Como os hexágonos regulares $A'B'C'D'E'F'$ e $ABCDEF$ são polígonos semelhantes, então

$\dfrac{S_{A'B'C'D'E'F'}}{S_{ABCDEF}} = \left(\dfrac{A'B'}{AB}\right)^2 = 1{,}75 \Rightarrow \dfrac{x^2\left(1 + (P\%) + (P\%)^2\right)}{x^2} = 1{,}75$

$\Leftrightarrow (P\%)^2 + (P\%) - 0{,}75 = 0 \Leftrightarrow (P\%) = -\dfrac{3}{2} \text{ ou } (P\%) = \dfrac{1}{2}$

$P>0 \Rightarrow P\% = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P}{100} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P = 50$

**23.**

**RESPOSTA: A**

$S_{M'N'P'} = S_{MM'N'N} + S_{PP'N'N} - S_{MM'P'P}$

Seja r o raio da circunferência de centro N, a o centro da circunferência de centro M e b o centro da circunferência de centro P.

$\Rightarrow 2r = 2a + 2b \Leftrightarrow r = a + b$

$$S_{MM'N'N} = \frac{(MM'+NN')\cdot MN}{2} = \frac{(r+a)(r-a)}{2} = \frac{(a+b+a)(a+b-a)}{2} = \frac{(2a+b)b}{2}$$

$$S_{PP'N'N} = \frac{(NN'+PP')\cdot NP}{2} = \frac{(r+b)(r-b)}{2} = \frac{(a+b+b)(a+b-b)}{2} = \frac{(a+2b)a}{2}$$

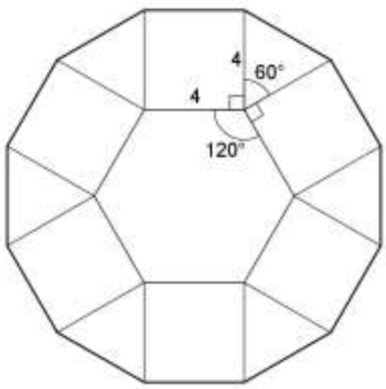
$$S_{MM'P'P} = \frac{(MM'+PP')MP}{2} = \frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$S_{M'N'P'} = \frac{(2a+b)b}{2} + \frac{(a+2b)a}{2} - \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2ab+b^2+a^2+2ab-a^2-b^2-2ab}{2} = ab$$

O triângulo AB'C é retângulo em B' e BB' é a altura relativa à hipotenusa, então $(BB')^2 = AB \cdot BC \Rightarrow 6^2 = 2a \cdot 2b \Leftrightarrow ab = 9 \Rightarrow S_{M'N'P'} = ab = 9\text{ cm}^2$.

**24.**

**RESPOSTA:** A




A área do dodecágono é a área de uma hexágono de lado 4, mais a área de 6 quadrados de lado 4 e mais 6 triângulos equiláteros de lado 4.

A área do hexágono de lado 4 é igual à área de 6 triângulos equiláteros de lado 4.

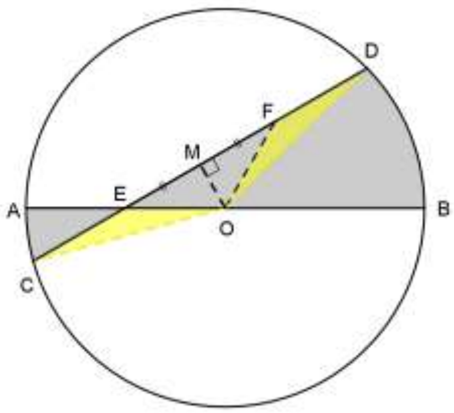
$$S_{\text{dodecágono}} = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 4^2 + 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\left(\sqrt{3}+2\right)\text{cm}^2$$

**25.**

**RESPOSTA: A**

O problema será resolvido em situação geral sendo dados R, raio do círculo, $d = EO$ e $\theta$ a medida, em radianos, do menor ângulo formado por AB e CD.

Sejam $\alpha$ e $\beta$ as medidas em radianos dos arcos BD e AC, respectivamente. Seja F um ponto de ED tal que $OF = d$. Como $EF$ e $CD$ possuem o mesmo ponto médio, concluímos que $FD = CE$ e, portanto, os triângulos $OFD$ e $OEC$ são congruentes. Assim, a área procurada é a soma das áreas dos setores $OBD$ e $OAC$ com a do triângulo isósceles $OEF$. Temos, então




$$S = \frac{\alpha R^2}{2} + \frac{\beta R^2}{2} + \frac{d^2}{2}\operatorname{sen}(\pi - 2\theta) =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2}R^2 + \frac{d^2}{2}\operatorname{sen}2\theta = \theta R^2 + \frac{d^2}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

Observe que esta fórmula também vale para os casos degenerados $d = 0$ e $d = R$.

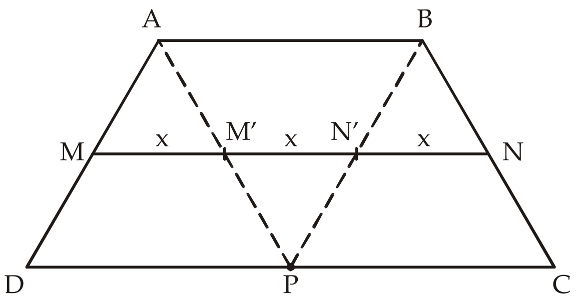
Quando $R = 4\sqrt{3}$, $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad e $d = EO = \frac{R}{2} = 2\sqrt{3}$, temos:

$$S = \frac{\pi}{6}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2}\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 8\pi + 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(8\pi + 3\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$$

**26.**

**RESPOSTA: E**



MM’ é base média do $\Delta ADP$, logo DP = 2x

N’N é base média do $\Delta BCP$, logo CP = 2x

$\Rightarrow CD = 4x$.

Como $MN = \frac{AB + CD}{2}$ (base média), então $AB = 2x$.

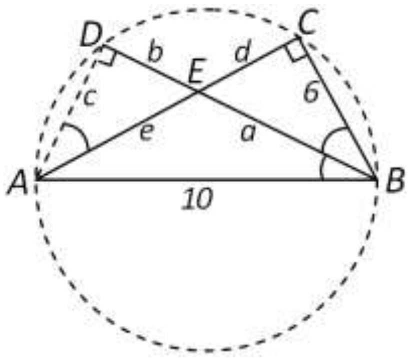
O trapézio ABCD tem área igual a $S = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) \cdot h = 3x \cdot h$.

O trapézio M’N’CD tem bases $M'N' = x$, $CD = 4x$ e altura $h' = \frac{h}{2}$, logo $S_{M'N'CD} = \left(\frac{4x + x}{2}\right) . \frac{h}{2} = \frac{5x \cdot h}{4}$.

$$\Rightarrow \frac{S_{M'N'CD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5x \cdot h}{4}}{3x \cdot h} = \frac{5}{12} \Rightarrow S_{M'N'CD} = \frac{5}{12} S_{ABCD}$$

**27.**

**RESPOSTA: A**




Do teorema da bissetriz interna no triângulo ABC temos: $\frac{d}{6} = \frac{e}{10}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta ABC$, temos $d + e = 8$, então $d = 3$ e $e = 5$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCE temos $a = 3\sqrt{5}$.

Assim, temos

$$\alpha - 2 \cdot \beta = \left(S_{ABC} + S_{ABD}\right) - 2 \cdot S_{AEB} = S_{ADE} + S_{BCE}.$$

Além disso, temos

$$\Delta ADE \sim \Delta BCE \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{BCE}} = \left(\frac{e}{a}\right)^2 = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

Como $S_{BCE} = \frac{6 \cdot d}{2} = 3 \cdot 3 = 9$, $S_{ADE} = \frac{5}{9} \cdot S_{BCE} = \frac{5}{9} \cdot 9 = 5$ e $\alpha - 2 \cdot \beta = S_{ADE} + S_{BCE} = 5 + 9 = 14 \text{ cm}^2$.

**28.**

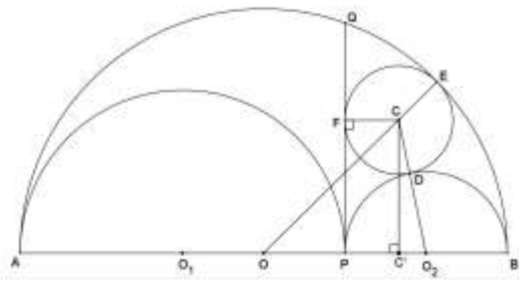
**RESPOSTA: B**

Sendo O o centro da circunferência

$$S(\text{reg.}ABC) = S(\text{seg.}AC) - S(\text{seg.}AB) =$$
$$= S(\text{setor}110^\circ) - S(\Delta AOC) - \left[S(\text{setor}70^\circ) - S(\Delta AOB)\right] =$$
$$= S(\text{setor}110^\circ) - S(\text{setor}70^\circ) - \frac{1\cdot 1}{2}\text{sen}110^\circ + \frac{1\cdot 1}{2}\text{sen}70^\circ =$$
$$= S(\text{setor}110^\circ) - S(\text{setor}70^\circ) = S(\text{setor}40^\circ) = \frac{\pi\cdot 1^2}{9} = \frac{\pi}{9}$$

**29.**

**RESPOSTA: D**




Como a área do círculo C é $9\pi$, seu raio é 3.

Sendo R e r os raios das semicircunferências de diâmetro AP e PB, respectivamente, o raio da circunferência de diâmetro AB será $R+r$. Assim, a área da região sombreada será dada por

$$\frac{\pi(R+r)^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} - 9\pi = 39\pi \Leftrightarrow R\cdot r = 48$$

Como $O_2C = r+3$ e $O_2C' = O_2P - PC' = r-3$, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $CC'O_2$ temos: $CC'^2 = (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r$

Como

$$OC' = OB - O_2B - C'O_2 = (R+r) - r - (r-3) = R - r + 3$$

e $OC = OE - CE = (R+r) - 3 = R + r - 3$, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $OCC'$:

$$OC^2 = OC'^2 + CC'^2$$
$$\Leftrightarrow (R+r-3)^2 = (R-r+3)^2 + 12r$$
$$\Leftrightarrow 12r = (R+(r-3))^2 - (R-(r-3))^2$$
$$\Leftrightarrow 12r = 2R(2r-6) \Leftrightarrow 3(R+r) = R\cdot r = 48$$
$$\Leftrightarrow R + r = 16 \Rightarrow AB = 2(R+r) = 32$$

REFERÊNCIA: Baltic Way 1996