PROFESSOR FERRETTO

FÓRMULA UTILIZADA:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = I_n}$$

Obtenha a matriz inversa, se existir, de:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} a - c = 1 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$ $\quad 4a \; / = 1 \quad a = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} - c = 1$

$\frac{1}{4} - 1 = c$

$c = -\frac{3}{4}$

$\begin{cases} b - d = 0 \\ 3b + d = 1 \end{cases}$ $\quad 4b \; / = 1 \quad b = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} - d = 0$

$d = \frac{1}{4}$

A inversa existe!

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 5a + 7c = 1 \to a = \frac{1 - 7c}{5} \\ 2a + 3c = 0 \end{cases}$

$2 \cdot \left(\frac{1 - 7c}{5}\right) + 3c = 0$

$\frac{2 - 14c}{5} + 3c = 0$

mmc

$\frac{2 - 14c + 15c}{5} = 0$

$2 - 14c + 15c = 0$

$c = -2$

$a = \frac{1 - 7 \cdot (-2)}{5}$

$a = \frac{1 + 14}{5}$

$a = 3$

$\begin{cases} 5b + 7d = 0 \to b = -\frac{7d}{5} \\ 2b + 3d = 1 \end{cases}$

$2 \cdot \left(-\frac{7d}{5}\right) + 3d = 1$

$-\frac{14d}{5} + 3d = 1$

mmc

$\frac{-14d + 15d}{5} = 1$

$d = 5$

$b = -\frac{7 \cdot 5}{5}$

$b = -7$

A inversa existe!

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} a - c = 1 \\ -a + c = 0 \end{cases}$ $\quad / \quad / = 1$

$\begin{cases} b - d = 0 \\ -b + d = 1 \end{cases}$ $\quad / \quad / = 1$

A inversa não existe!

$A^{-1} = \nexists$

4. Dada $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & m \\ -m & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, calcule m de modo que se tenha $A^{-1} = A^t$.

$$A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -m \\ m & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I_n$

Mas $A^{-1} = A^t$ então: $\quad A \cdot A^t = I_n$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & m \\ -m & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -m \\ m & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + m \cdot m = 1 \\ -m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot m = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (-m) + m \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ -m \cdot (-m) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$

Temos duas equações iguais e que podemos utilizar para encontrar m:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + m \cdot m = 1$

$\frac{1}{4} + m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$m = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qual é a matriz A^2? E A^{111}?

Precisamos encontrar o padrão do expoente par e do expoente ímpar:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

Ou seja, em expoentes pares, A se torna uma matriz identidade. Já para expoentes ímpares ela se repete!

A^{2} PAR $\qquad A^{111}$ ÍMPAR

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{111} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$