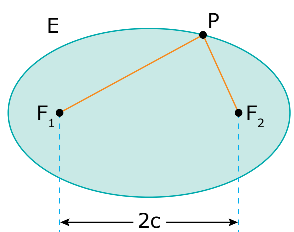
# Cônicas

## ELIPSE

Considerem-se, num plano $\alpha$, dois pontos fixos e distintos $F_1$ e $F_2$, e seja 2c a distância entre eles. Uma elipse **E** é o conjunto dos pontos de $\alpha$, cuja soma das distâncias a $F_1$ e $F_2$ é uma constante 2a maior que 2c.




$F_1$ e $F_2$: focos da elipse;

$F_1F_2 = 2c$: distância focal;

Em símbolos: $P \in E \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$

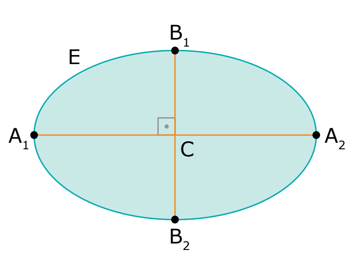
## Elementos da elipse

**i)** A elipse possui dois eixos de simetria $A_1A_2$ e $B_1B_2$ perpendiculares em **C**, ponto médio de $A_1A_2$ e $B_1B_2$.

$A_1A_2$ é chamado eixo maior.

$B_1B_2$ é chamado eixo menor.

**C** é chamado centro da elipse.



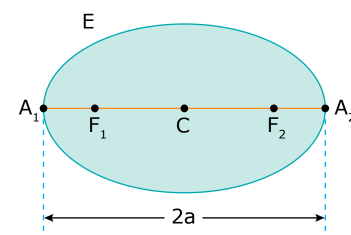

**ii)** O eixo maior $A_1A_2$ tem medida 2a. De fato:

$A_1 \in E \Rightarrow A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$ (I)

Como, $A_1F_1 = A_2F_2$ (simetria) (II)

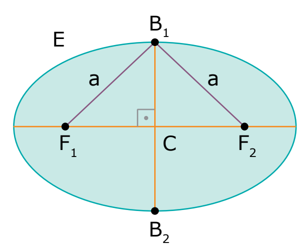
Substituindo (II) em (I), temos:

$A_2F_2 + A_1F_2 = 2a \Rightarrow A_1A_2 = 2a$



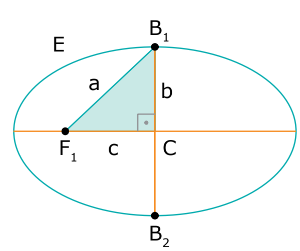

**iii)** Os segmentos $B_1F_1$ e $B_1F_2$ têm medida **a**. De fato:

$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a \Rightarrow B_1F_1 = B_1F_2 = a$




**iv)** Relação fundamental:

Sendo $B_1B_2 = 2b$, então $B_1C = b$.




Do triângulo $CB_1F_1$, temos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

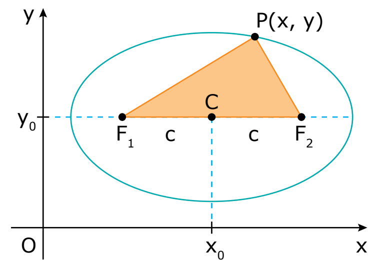
**v)** Chamamos de excentricidade da elipse o número **e**, tal que:

$$\boxed{e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1)}$$

## Equação reduzida da elipse

Serão estudadas as equações das elipses que têm eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados. Haverá dois casos:

**1º caso:** O eixo maior é paralelo ao eixo x.




Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da elipse, temos:

$$F_1(x_0 - c, y_0) \text{ e } F_2(x_0 + c, y_0)$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da elipse, podemos escrever:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{(x - x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2} = 2a$$

Fazendo $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$:

$$\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} + \sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} = 2a - \sqrt{(X - c)^2 + Y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado:

$$X^2 + 2Xc + c^2 + Y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} + X^2 - 2Xc + c^2 + Y^2$$

Simplificando e isolando o radical:

$$4a\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = 4a^2 - 4Xc$$

Dividindo a equação por 4 e elevando ao quadrado:

$$a^2X^2 - 2Xa^2c + a^2c^2 + a^2Y^2 = a^4 - 2Xa^2c + X^2c^2$$

Por agrupamento, encontramos:

$$(a^2 - c^2)X^2 + a^2Y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a^2 - c^2 = b^2$, a equação fica:

$$b^2X^2 + a^2Y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros por $a^2b^2$:

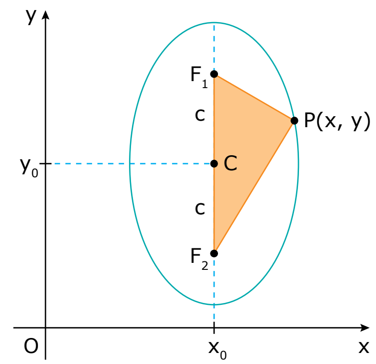
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Como $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, temos:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

**Caso particular:** $C(0, 0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

**2º caso:** O eixo maior é paralelo ao eixo y.




Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da elipse, temos:

$F_1(x_0, y_0 + c)$ e $F_2(x_0, y_0 - c)$

Se P(x, y) é um ponto genérico da elipse, podemos escrever:

$PF_1 + PF_2 = 2a$

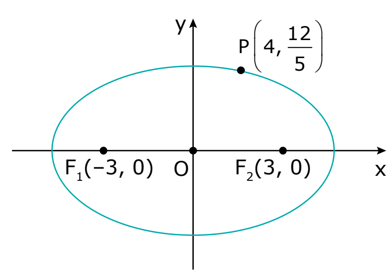
E, com procedimento análogo ao anterior, chegamos a:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1}$$

**Caso particular:** $C(0, 0) \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

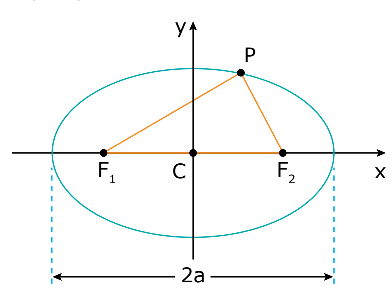
**01.** Na figura a seguir, o ponto **P** pertence à elipse de focos $F_1$ e $F_2$. Encontrar a equação reduzida da elipse.




***Resolução:***

O centro **C** da elipse é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

Logo, C(0, 0).



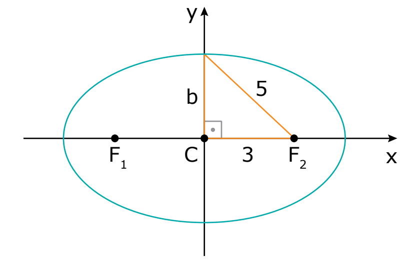

Sendo 2a a medida do eixo maior, então $2a = PF_1 + PF_2$, ou seja:

$$2a = \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} + \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} \Rightarrow$$

$$2a = \sqrt{49 + \frac{144}{25}} + \sqrt{1 + \frac{144}{25}} \Rightarrow 2a = \frac{37}{5} + \frac{13}{5} \Rightarrow$$

$2a = 10 \Rightarrow a = 5$

Sendo **b** a medida do semieixo menor, temos:

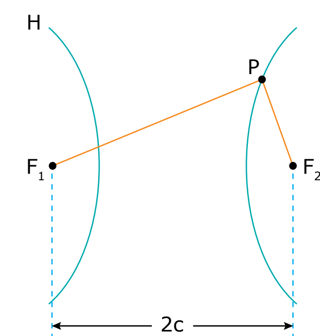



$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow b = 4$

Portanto, a equação da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

## HIPÉRBOLE

Considerem-se, num plano $\alpha$, dois pontos fixos e distintos $F_1$ e $F_2$, e seja 2c a distância entre eles. Uma hipérbole **H** é o conjunto dos pontos de $\alpha$ cuja diferença, em valor absoluto, das distâncias a $F_1$ e $F_2$ é uma constante 2a menor que 2c.




$F_1$ e $F_2$: focos da hipérbole.

$F_1F_2 = 2c$: distância focal.

Em símbolos: $P \in H \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$

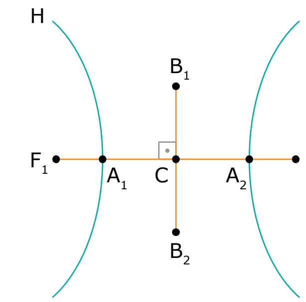
## Elementos da hipérbole

**i)** A hipérbole possui dois eixos de simetria $A_1A_2$ e $B_1B_2$ perpendiculares em **C**, ponto médio de $A_1A_2$ e $B_1B_2$.

$A_1A_2$ é chamado eixo real (ou transverso).

$B_1B_2$ é chamado eixo imaginário.

**C** é chamado centro da hipérbole.



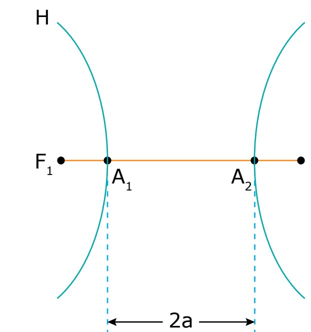

**ii)** O eixo real $A_1A_2$ tem medida 2a. De fato:

$A_1 \in H \Leftrightarrow A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$ (I)

Mas, $A_1F_1 = A_2F_2$ (simetria) (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

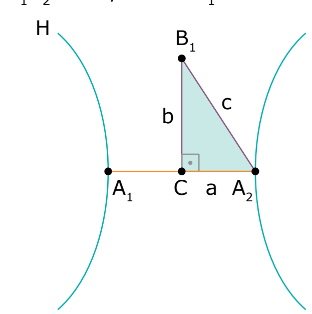
$A_1F_2 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow A_1A_2 = 2a$




**iii)** O ponto $B_1$ é tal que os segmentos $B_1A_1$ e $B_1A_2$ têm medida **c**.

**iv)** Relação fundamental:

Sendo $B_1B_2 = 2b$, então $B_1C = b$.




Do triângulo $CB_1A_2$, temos:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

**v)** Chamamos excentricidade da hipérbole o número **e**, tal que:

$$\boxed{e = \frac{c}{a} \quad (e > 1)}$$

OBSERVAÇÃO

Hipérbole equilátera é aquela em que a = b. Sua excentricidade é $\sqrt{2}$.

MATEMÁTICA

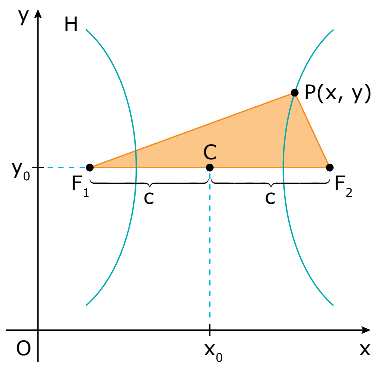
## Equação reduzida da hipérbole

Serão estudadas as equações das hipérboles cujos eixos de simetria são paralelos aos eixos coordenados. Haverá dois casos:

**1º caso:** O eixo real é paralelo ao eixo x.

Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da hipérbole, temos:

$F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$




Se P(x, y) é um ponto genérico da hipérbole, podemos escrever:

$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$

$$\left|\sqrt{(x-x_0+c)^2+(y-y_0)^2}-\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}\right| = 2a$$

Fazendo $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$:

$$\left|\sqrt{(X+c)^2+Y^2}-\sqrt{(X-c)^2+Y^2}\right| = 2a$$

Eliminando o módulo:

$$\sqrt{(X+c)^2+Y^2}=\sqrt{(X-c)^2+Y^2}\pm 2a$$

Elevando os membros da equação ao quadrado:

$$X^2+2Xc+c^2+Y^2=X^2-2Xc+c^2+Y^2\pm 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}+4a^2$$

Simplificando e isolando o radical:

$$\pm 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} = 4a^2 - 4Xc$$

Dividindo os membros da equação por 4 e elevando-os ao quadrado:

$$a^2X^2 - 2Xa^2c + a^2c^2 + a^2Y^2 = a^4 - 2Xa^2c + X^2c^2$$

Por agrupamento, encontramos:

$(c^2 - a^2)X^2 - a^2Y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Substituindo $c^2 - a^2 = b^2$, a equação fica:

$b^2X^2 - a^2Y^2 = a^2b^2$

Dividindo ambos os membros por $a^2b^2$: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

Como $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, temos:

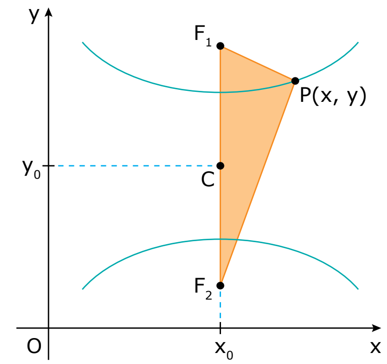
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

**Caso particular:** $C(0, 0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

**2º caso:** O eixo real é paralelo ao eixo y.

Sendo $C(x_0, y_0)$ o centro da hipérbole, temos:

$F_1(x_0, y_0 + c)$ e $F_2(x_0, y_0 - c)$




Se P(x, y) é um ponto genérico da hipérbole, podemos escrever:

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

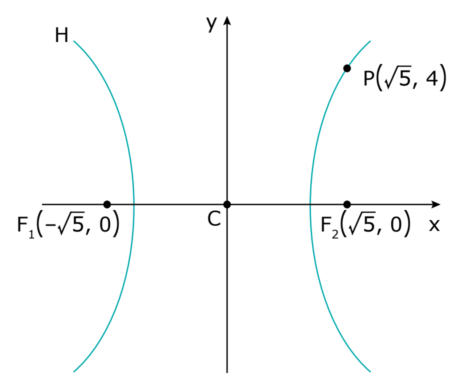
E, com procedimento análogo ao anterior, chegamos a:

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1}$$

**Caso particular:** $C(0, 0) \Rightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**02.** Na figura a seguir, o ponto **P** pertence à hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$. Encontrar a equação reduzida da hipérbole.




***Resolução:***

O centro **C** da hipérbole é o ponto médio de $F_1F_2$.

Logo, C(0, 0).

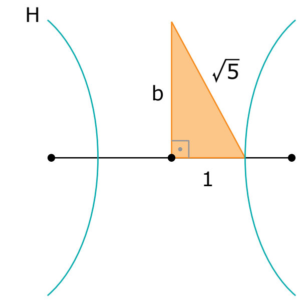
Sendo 2a a medida do eixo real, temos $2a = |PF_1 - PF_2|$, ou seja:

$$2a = \left|\sqrt{(\sqrt5+\sqrt5)^2+(4-0)^2}-\sqrt{(\sqrt5-\sqrt5)^2+(4-0)^2}\right| \Rightarrow$$

$$2a = \left|\sqrt{(2\sqrt5)^2+4^2}-\sqrt{0^2+4^2}\right| \Rightarrow 2a = \left|\sqrt{36}-\sqrt{16}\right| \Rightarrow$$

$2a = |6 - 4| \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

Sendo **b** a medida do semieixo imaginário, temos:



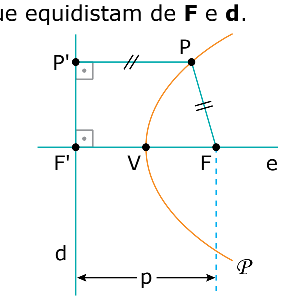

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow$

$b^2 = (\sqrt5)^2 - 1 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Portanto, a equação da hipérbole é $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

# PARÁBOLA

Considerem-se, num plano $\alpha$, uma reta **d** e um ponto fixo **F** não pertencente a **d**. Uma parábola $\mathcal{P}$ é o conjunto dos pontos de $\alpha$ que equidistam de **F** e **d**.




**F**: foco da parábola.
**d**: diretriz da parábola.
Em símbolos: $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow PF = PP'$

## Elementos da parábola

A parábola possui um eixo de simetria **e**, passando por **F** e perpendicular à diretriz **d**.

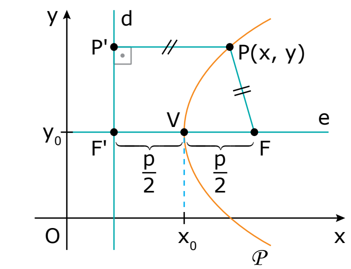
**V** é chamado vértice da parábola.
FF' = **p** é chamado parâmetro da parábola.
$FV = VF' = \frac{p}{2}$ (pois **V** equidista de **F** e **d**).

## Equação reduzida da parábola

Serão estudadas as equações das parábolas cujos eixos de simetria são paralelos a um dos eixos coordenados. Haverá dois casos:

**1º caso:** O eixo de simetria é paralelo ao eixo x.

**i)** Concavidade para a direita:




Sendo $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola e **p** o parâmetro, temos:

$$F\left(x_0+\frac{p}{2}, y_0\right) \text{ e d: } x = x_0 - \frac{p}{2}$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da parábola, podemos escrever:

$PF = PP'$, em que $P'\left(x_0 - \frac{p}{2}, y\right)$, ou seja:

$$\sqrt{\left(x-x_0-\frac{p}{2}\right)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{\left(x-x_0+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$$

Fazendo $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$, temos:

$$\sqrt{\left(X-\frac{p}{2}\right)^2+Y^2}=\sqrt{\left(X+\frac{p}{2}\right)^2+0^2}$$

Elevando os membros da equação ao quadrado, temos:

$$X^2 - 2.\frac{p}{2}X + \frac{p^2}{4} + Y^2 = X^2 + 2.\frac{p}{2}X + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando, fica:

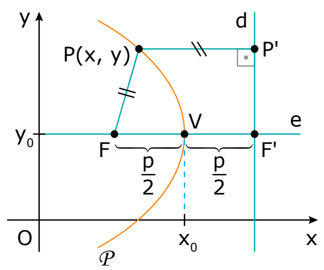
$$Y^2 = 2pX$$

Como $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, temos:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}$$

**Caso particular:** $V(0, 0) \Rightarrow y^2 = 2px$

**ii)** Concavidade para a esquerda:




Sendo $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola e **p** o parâmetro, temos:

$$F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right) \text{ e d: } x = x_0 + \frac{p}{2}$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da parábola, podemos escrever:

$$PF = PP', \text{ em que } P'\left(x_0 + \frac{p}{2}, y\right)$$

E, com procedimento análogo ao anterior, chegamos a:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)}$$

**Caso particular:** $V(0, 0) \Rightarrow y^2 = -2px$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**03.** Encontrar a equação reduzida da parábola com vértice (0, 0) e foco (1, 0).

***Resolução:***

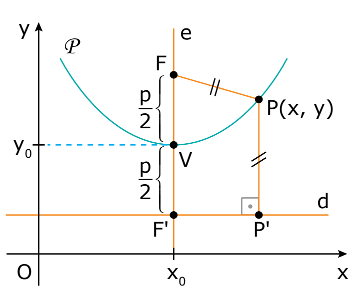
$\frac{p}{2} = d(F, V) = 1 \Rightarrow p = 2$

Como a concavidade é para a direita, temos:

$y^2 = 2 \,.\, 2x \Rightarrow y^2 = 4x$

**2º caso:** O eixo de simetria é paralelo ao eixo y.

**i)** Concavidade para cima:




Sendo $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola e **p** o parâmetro, temos:

$$F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right) \text{ e d: } y = y_0 - \frac{p}{2}$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da parábola, podemos escrever:

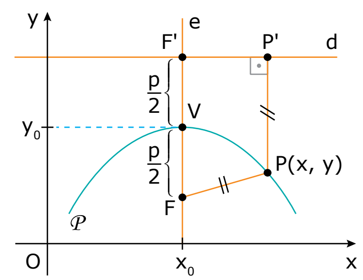
$$PF = PP', \text{ em que } P'\left(x, y_0 - \frac{p}{2}\right)$$

Com procedimento análogo ao inicial, chegamos a:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}$$

**Caso particular:** $V(0, 0) \Rightarrow x^2 = 2py$

**ii)** Concavidade para baixo:




Sendo $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola e **p** o parâmetro, temos:

$$F\left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right) \text{ e d: } y = y_0 + \frac{p}{2}$$

Se P(x, y) é um ponto genérico da parábola, podemos escrever:

$$PF = PP', \text{ em que } P'\left(x, y_0 + \frac{p}{2}\right)$$

E, com procedimento análogo ao anterior, chegamos a:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)}$$

**Caso particular:** $V(0, 0) \Rightarrow x^2 = -2py$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**04.** Encontrar a equação reduzida da parábola com vértice (0, 0) e foco (0, −2).

***Resolução:***

$\frac{p}{2} = d(F, V) = 2 \Rightarrow p = 4$

Como a concavidade é para baixo, temos:

$x^2 = -2 \,.\, 4y \Rightarrow x^2 = -8y$

## EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

**01.** (UFPI) Os focos da elipse $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ são:

A) (−3, 2) e (5, 2)
B) (−4, 2) e (6, 2)
C) (−5, 2) e (7, 2)
D) (−6, 2) e (8, 2)
E) (−7, 2) e (9, 2)

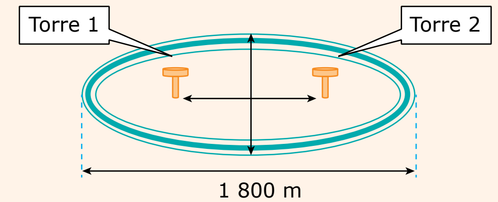
**02.** (UFAM) As coordenadas dos focos da elipse de equação $4x^2 + 3y^2 = 36$ são:

A) $(0, \sqrt{3})$ e $(0, -\sqrt{3})$
B) $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -2)$
C) $(\sqrt{21}, 0)$ e $(-\sqrt{21}, 0)$
D) (4, 0) e (−4, 0)
E) (5, 0) e (−5, 0)

**03.** (IFPE–2015) Uma pista de corridas da Fórmula *Indy* tem a forma de uma elipse. Nas posições de seus focos ficam duas torres, cada uma com um restaurante com vista panorâmica. Sabe-se que a maior distância entre dois pontos da pista (correspondente ao comprimento do eixo maior) é de 1 800 metros. O comprimento do eixo menor é $\frac{2}{3}$ do comprimento do eixo maior. Veja a figura.

Com base nesses dados, a distância entre as torres é, em metros, igual a:

**Observação:** Use $\sqrt{5} = 2{,}24$.




A) 1 344.
B) 1 254,4.
C) 1 120.
D) 1 075,2.
E) 896.

**04.** (UERJ–2016) Observe a função **f**, definida por:

$$f(x) = x^2 - 2kx + 29, \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

Se $f(x) \geq 4$, para todo número real **x**, o valor mínimo da função **f** é 4.

Assim, o valor positivo do parâmetro **k** é:

A) 5.
B) 6.
C) 10.
D) 15.

**05.** (FGV) Uma indústria química produz dois produtos **A** e **B** em quantidades diárias **x** e **y**, respectivamente. As quantidades **x** e **y**, expressas em toneladas, relacionam-se pela equação $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{100} = 1$.

A máxima quantidade do produto **A** que a empresa consegue produzir diariamente é:

A) 5 toneladas.
B) 10 toneladas.
C) 15 toneladas.
D) 20 toneladas.
E) 25 toneladas.

**06.** (UFPI) O gráfico da equação $x^2 - y^2 = 4$ representa uma hipérbole. Os focos dessa hipérbole são:

A) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
B) (2, 0) e (−2, 0)
C) $(2\sqrt{2}, 0)$ e $(-2\sqrt{2}, 0)$
D) $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$
E) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

**07.** (UFRN) O conjunto dos pontos P = (x, y), que estão a uma mesma distância do ponto F = (0, 2) e do eixo Ox, no plano cartesiano xy é a parábola de equação:

A) $y = \frac{x^2}{2} + 4$
B) $y = \frac{x^2}{4} + 1$
C) $y = 4x^2 + 1$
D) $y = 2x^2 + 1$

**08.** (UEL) Em uma praça, dispõe-se de uma região retangular de 20 m de comprimento por 16 m de largura para construir um jardim. A exemplo de outros canteiros, este deverá ter a forma elíptica e estar inscrito nessa região retangular. Para aguá-lo, serão colocados dois aspersores nos pontos que correspondem aos focos da elipse. Qual será a distância entre os aspersores?

A) 4 m.
B) 6 m.
C) 8 m.
D) 10 m.
E) 12 m.

MATEMÁTICA

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (Unifor-CE–2016) Joahanes Kepler (1571-1630) determinou que as órbitas dos planetas do sistema solar não são circunferências perfeitas, mas sim elípticas, tendo o sol em um dos focos, exceto por pequenas perturbações devido às influências de outros planetas no sistema solar. Assim posto, suponha que a órbita elíptica de um planeta tem o comprimento do eixo maior de 500 milhões de quilômetros e a distância entre os focos de 400 milhões de quilômetros.

A equação da órbita desse planeta é (em milhões de quilômetros):

A) $\dfrac{x^2}{15\,000}+\dfrac{y^2}{10\,000}=1$

B) $\dfrac{x^2}{25\,000}+\dfrac{y^2}{20\,000}=1$

C) $\dfrac{x^2}{50\,000}+\dfrac{y^2}{20\,500}=1$

D) $\dfrac{x^2}{62\,500}+\dfrac{y^2}{22\,500}=1$

E) $\dfrac{x^2}{50\,500}+\dfrac{y^2}{20\,500}=1$

**02.** (UESPI) No plano cartesiano xOy, a equação $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$ representa:

A) uma elipse.
B) uma reta.
C) duas retas concorrentes.
D) uma hipérbole.
E) uma parábola.

**03.** (UFAM–2015) Sejam V(4, 2) e F(4, –6), respectivamente, o vértice e o foco de uma parábola. A equação da reta diretriz e da parábola são, respectivamente,

A) $y = 10$ e $(x - 4)^2 = -32(y - 2)$
B) $y = 10$ e $(x - 4)^2 = 32(y - 2)$
C) $y = 8$ e $(y - 4)^2 = -32(x - 2)$
D) $y = -8$ e $(y - 4)^2 = 24(x - 2)$
E) $y = 8$ e $(x - 2)^2 = -24(y - 4)$

**04.** (FGV) No plano cartesiano, há dois pontos **R** e **S** pertencentes à parábola de equação $y = x^2$ e que estão alinhados com os pontos A(0, 3) e B(4, 0).

A soma das abscissas dos pontos **R** e **S** é:

A) –0,45.
B) –0,55.
C) –0,65.
D) –0,75.
E) –0,85.

**05.** (Mackenzie-SP) Dadas as cônicas de equações

(I) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ e

(II) $4x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$,

Assinale a alternativa incorreta.

A) Os gráficos de (I) e (II) são, respectivamente, uma circunferência e uma elipse.
B) As duas cônicas têm centro no mesmo ponto.
C) As duas cônicas se inteceptam em dois pontos distintos.
D) O gráfico da equação (I) é uma circunferência de raio 3.
E) O gráfico da equação (II) é uma elipse com centro C = (1, –4).

**06.** (Unifor-CE–2016) A galeria de sussurros é uma câmara na forma elipsoide (uma superfície de seções transversais elípticas) em que um sussurro emitido a partir de um dos focos pode ser claramente ouvido a uma distância considerável, no outro foco, mesmo sendo inaudível em pontos intermediários. O domo da Catedral de Saint Paul, em Londres, foi construído utilizando essa propriedade.

Supondo que a equação de uma seção transversal da Catedral seja dada pela equação:

$$4x^2 + 25y^2 - 16x + 200y + 316 = 0$$

onde **x** e **y** são medidos em metros, a distância focal, em metros, deverá ser de aproximadamente:

A) 8.
B) 9.
C) 10.
D) 11.
E) 12.

**07.** (Unifor-CE–2016) O arco de uma pequena ponte tem a forma de uma semielipse com um vão horizontal de 8 m e com 3 m de altura no centro.

A altura do arco (em metros) a 2 m à esquerda ou à direita do centro é de:

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

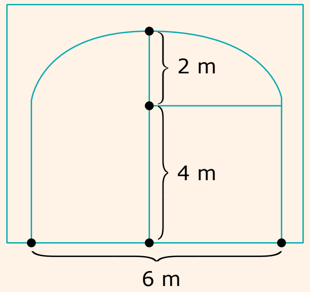
C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$



**08.** (Unifor-CE–2015) A figura a seguir mostra o vão da entrada de um armazém pelo qual passará um caminhão com 4 metros de largura. Sabendo-se que o arco superior do vão é semielíptico, a altura máxima permitida do caminhão é de:




A) $4+\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

B) $4+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

C) $4+\dfrac{3\sqrt{5}}{3}$

D) $4+\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

E) $4+\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

**09.** (Unimontes-MG–2015) Considere **a** e **b** dois números reais positivos. Se os pontos (2, 0) e (1, 2) pertencem à elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, então essa elipse também pode ser representada pela equação:

A) $4x^2 + 3y^2 = 16$
B) $3x^2 + 4y^2 = 16$
C) $x^2 + 3y^2 = 16$
D) $4x^2 + y^2 = 16$

**10.** (Unesp) O conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano, com $y \neq 0$, para os quais **x** e **y** satisfazem a equação:

$$\text{sen}\left(\frac{y}{x^2+1}\right)=0$$

é uma

A) família de parábolas.
B) família de circunferências centradas na origem.
C) família de retas.
D) parábola passando pelo ponto Q(0, 1).
E) circunferência centrada na origem.

**11.** (Unifor-CE–2016) A Empresa Ciclos produz dois tipos de bicicletas: Veloz e Rapidez. As possíveis quantidades **x** de bicicletas Veloz e **y** de bicicletas Rapidez produzidas anualmente (em milhares) estão relacionadas pela equação chamada de Curva de Transformação de Produtos:

$$100x^2 + 9y^2 - 1\,200x - 216y + 3\,996 = 0$$

A soma da quantidade máxima (em milhares) de cada tipo de bicicleta que pode ser fabricada anualmente é de:

A) 18.
B) 23.
C) 27.
D) 31.
E) 38.

**12.** (FUVEST-SP) O lugar geométrico dos pontos equidistantes da reta y = 0 e da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ é:

A) uma reta.
B) uma semirreta.
C) uma circunferência.
D) uma elipse.
E) uma parábola.

**13.** (EsPCEx-SP) Uma reta **t** passa pelo ponto A(–3, 0) e é tangente à parábola de equação $x = 3y^2$ no ponto **P**. Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações.

A) t: $x - 10y + 3 = 0$ e P(27, 3)
B) t: $2x - 15y + 6 = 0$ e P(12, 2)
C) t: $2x + 15y + 6 = 0$ e P(12, –2)
D) t: $y = 0$ e P(0, 0)
E) t: $x + 6y + 3 = 0$ e P(3, –1)

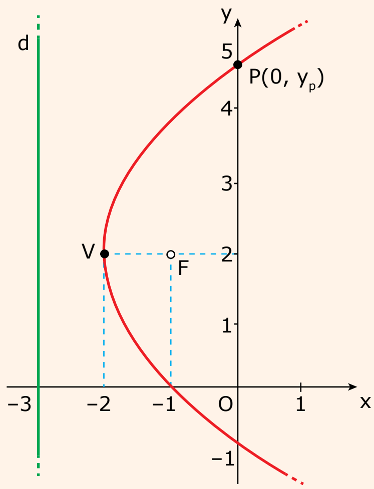
**14.** (UFES–2016) Uma reta tangente a uma parábola é uma reta não paralela ao eixo da parábola que intercepta a parábola em um único ponto. Dizemos que essa reta é tangente à parábola nesse ponto ou que ela tangencia a parábola nesse ponto. Assim, considere a parábola $y = 1 + (x - 5)^2$.

Determine

A) as retas tangentes à parábola que passam pelo ponto (0, 10);
B) os pontos onde essas retas tangenciam a parábola;
C) as distâncias desses pontos ao foco da parábola.

MATEMÁTICA

**15.** (Unesp–2016) Em um plano cartesiano ortogonal são dadas uma reta **d**, de equação x = −3, e um ponto **F**, de coordenadas (−1, 2). Nesse plano, o conjunto dos pontos que estão à mesma distância do ponto **F** e da reta **d** forma uma parábola. Na figura, estão nomeados dois pontos dessa parábola: o vértice **V**, de coordenadas (−2, 2), e o ponto **P**, de coordenadas $(0, y_p)$.




Determine as coordenadas de dois pontos quaisquer dessa parábola que sejam diferentes de **V** e de **P**. Em seguida, calcule $y_p$.

**16.** (AFA-SP) Considere as curvas dadas pelas equações:

I. $16x^2 + 4y^2 + 128x - 24y + 228 = 0$

II. $y = 7 - |x|$

III. $y^2 - 6y - x + 5 = 0$

Analise cada afirmação a seguir, classificando-a em verdadeira ou falsa.

01. O gráfico de (I) é representado por uma elipse, de (II), por duas retas e de (III), por uma parábola.

02. O centro de (I) é um ponto de (II) e coincide com o vértice de (III).

04. A soma das coordenadas do foco de (III) é um número menor que −1.

08. A excentricidade de (I) é igual a $\cos \frac{\pi}{6}$.

A soma dos itens verdadeiros é um número do intervalo:

A) [8, 11]

B) [4, 7]

C) [12, 15]

D) [1, 3]

## GABARITO

Meu aproveitamento

### Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. A
- 03. A
- 04. A
- 05. D
- 06. C
- 07. B
- 08. E

### Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. C
- 03. A
- 04. D
- 05. C
- 06. B
- 07. E
- 08. B
- 09. A
- 10. A
- 11. D
- 12. E
- 13. E
- 14.
  - A) y = −2x + 10 e y = −18x + 10
  - B) (4, 2) e (−4, 82)
  - C) $\frac{5}{4}$ e $\frac{325}{4}$
- 15. Os pontos Q (−1, 0) e R (−1, 4) pertencem à parábola. $y_p = 2 + 2\sqrt{2}$
- 16. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %