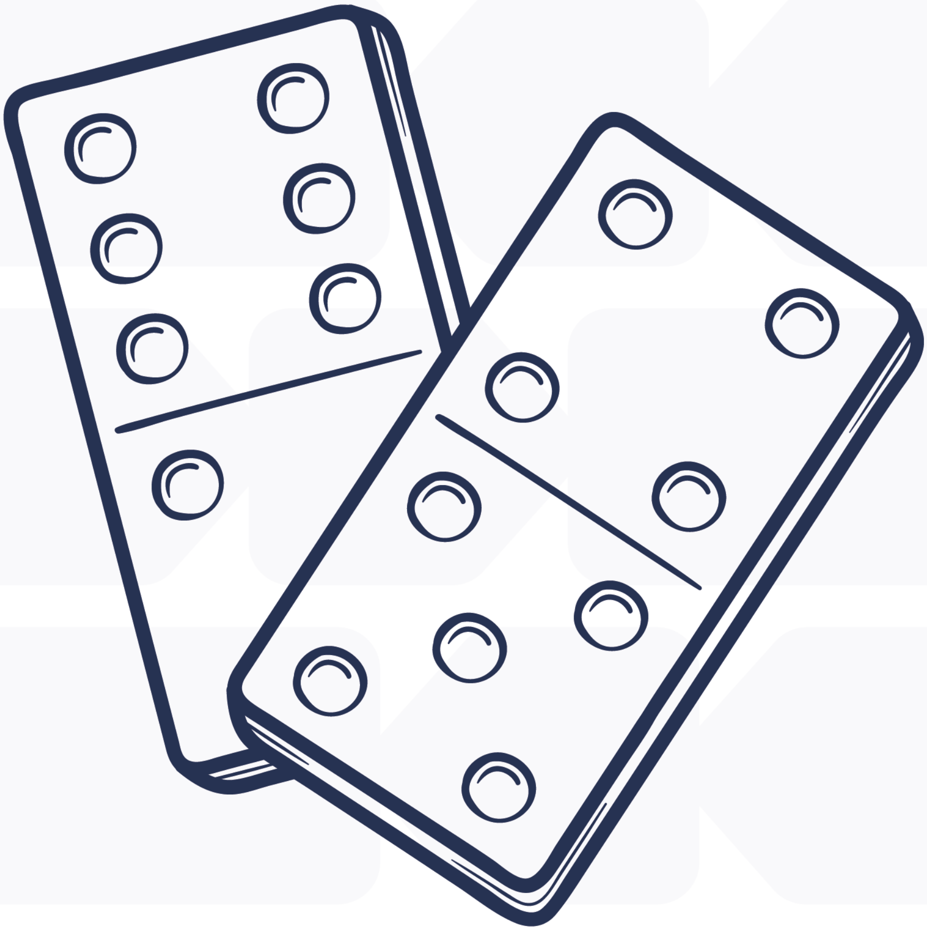
LIVRO 2

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

SUMÁRIO

ANÁLISE COMBINATÓRIA



RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

CONTAGEM

A necessidade e procura por técnicas de contagem estão diretamente ligadas à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta ciência. Ainda quando criança, a primeira técnica matemática aprendida é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos.

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições.

À primeira vista pode parecer desnecessária a existência desses métodos. Isto de fato é verdade, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase impossível sem o uso de métodos especiais.

De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relação discretas.

Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise combinatória são:

- Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
- Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Embora a Análise combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

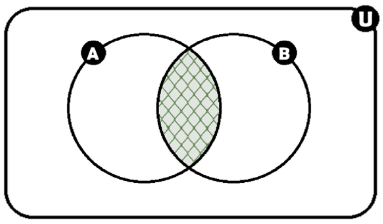
As operações aritméticas são também inicialmente motivadas através de sua aplicação a problemas de contagem, de modo que os princípios básicos que fundamentam e norteiam nosso estudo de Combinatória são os princípios da adição e da multiplicação.

Princípio de Adição

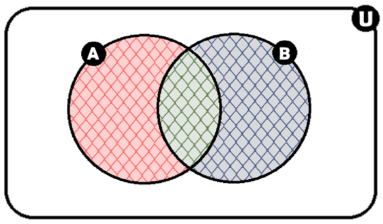
"Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui p + q elementos."

Apesar da simplicidade do princípio aditivo, para a interpretação dos problemas de combinatória é importante relembrar os Conectivos:

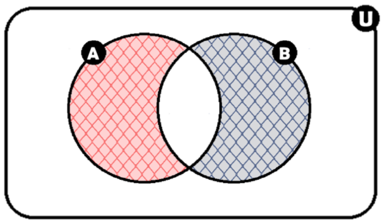
☞ **Conectivo "e" - Conjunção**
Está ligado a ideia de intersecção *(simultaneidade)*



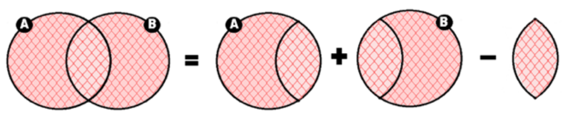
☞ **Conectivo "ou" – Disjunção**
Está ligado a ideia de união, de modo que podemos estar falando de um, de outro ou dos dois.



☞ **Conectivo "ou ... ou": Disjunção Exclusiva**
Trata-se de um situação ou da outra, nunca das duas.



Assim, caso os conjuntos A e B não sejam disjuntos, isto é, a intersecção entre eles não seja vazia, podemos expandir o princípio aditivo para o que já estudamos como o Princípio da Inclusão-Exclusão, vejamos:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Problema 01: Anualmente, uma escola oferece aos seus alunos duas palestras. No ano passado, a primeira foi sobre Finanças e a segunda sobre Relacionamentos. Todos os alunos da escola assistiram a pelo menos uma das palestras, sendo que 180 assistiram à primeira, 230 assistiram à segunda e 80 assistiram às duas palestras. Quantos alunos há na escola?

Solução:

Sendo:
F o conjunto dos alunos que assistiram à palestra sobre finanças, então $n(F) = 180$;
R o conjunto dos alunos que assistiram à palestra sobre relacionamentos, então $n(R) = 230$;
$F \cap R$ o conjuntos dos alunos que assistiram às duas palestras, então $n(F \cap R) = 80$;

O conjunto $F \cup R$ é formado pelos alunos que assistiram à primeira ou à segunda palestra, isto é, todos os alunos da escola, já que todos eles assistiram a pelo menos uma delas. Assim:

$$n(F \cup R) = n(F) + n(R) - n(F \cap R) = 180 + 230 - 80$$
$$n(F \cup R) = 330$$

Logo, a escola tem 330 alunos.

Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo)

“Se uma decisão (D1) pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão (D2) pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões (D1) e (D2) é igual $p \cdot q$.”

De um modo geral, temos que se determinado acontecimento ocorre em ***n*** etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total ***T*** de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:

$$\boldsymbol{T = k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_n}$$

Por exemplo, se uma pessoa tem cinco camisas e quatro calças a sua disposição, o total de maneiras que ela tem de se vestir, ou seja, que ela tem de escolher uma camisa e uma calça é dado pelo produto 5×4, logo ela tem 20 maneiras diferentes de se vestir.

Imagine agora que você deseja contar quantas são as poltronas de uma sala de cinema, dado que elas se distribuem em 15 fileiras de 16 cadeiras cada uma. Claro que a contagem poderia ser feita uma a uma, mas basta multiplicar o número de fileiras pelo número de poltronas em cada uma delas, ou seja, teremos $15 \times 16 = 240$ poltronas.

Problema 02: Numa sala há três homens e quatro mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?

Solução:

Para ficar mais fácil, vamos atribuir nomes a cada um dos personagens.

HOMENS	ARTUR
	BRUNO
	CARLOS
MULHERES	IZABEL
	JÉSSICA
	MARIA
	ROBERTA

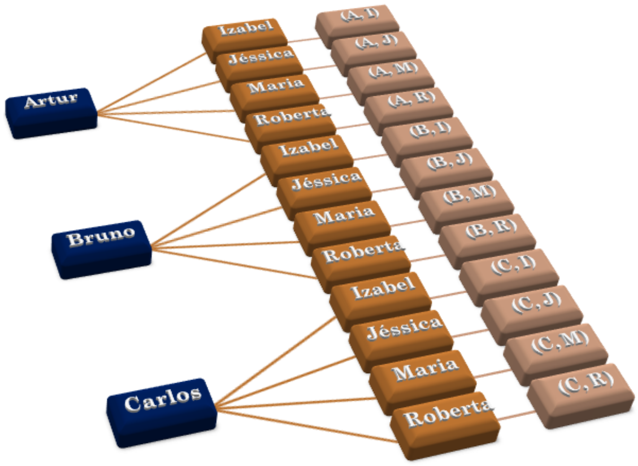
Uma matriz de possibilidades nos faz ver claramente cada um dos possíveis casais:

	Izabel	Jéssica	Maria	Roberta
Artur	(A, I)	(A, J)	(A, M)	(A, R)
Bruno	(B, I)	(B, J)	(B, M)	(B, R)
Carlos	(C, I)	(C, J)	(C, M)	(C, R)

Logo, o número de casais distintos que podemos formar é igual a 12.

Doutro modo, temos 3 possibilidades de escolher o homem e 4 possibilidades de escolher a mulher, portanto, pelo princípio multiplicativo o número possível de casais é dado por
$$3 \times 4 = 12.$$

Veja a Árvore de Possibilidades a seguir:



Mais uma vez constatamos que temos 12 possibilidades de formar o casal.

Estratégias e recomendações para resolver problemas de contagem:

- ***Postura.*** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

- ***Divisão.*** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade de processo de resolução.

- ***Não adiar dificuldades.*** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita (mais complicada) que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

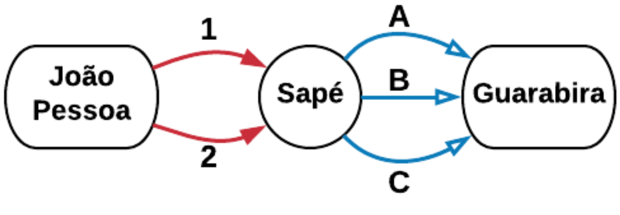
Obs.: Algumas vezes, o conjunto cujos elementos queremos contar consta de sequências de tamanhos diferentes (isto é, o número de elementos das sequências consideradas é diferente), o que impede o uso do princípio fundamental da contagem. Entretanto, usando o diagrama de árvore, podemos saber facilmente quantas são as sequências.

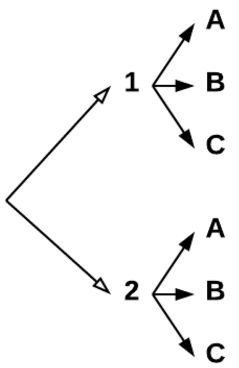
Vamos a alguns exemplos:

Problema 03: Uma pessoa pode viajar de João Pessoa a Sapé por dois caminhos diferentes e de Sapé a Guarabira por três roteiros diferentes. Por quantos caminhos diferentes este indivíduo poderá sair de João Pessoa e ir para Guarabira?

Solução:

Para facilitar a compreensão, observe o diagrama de árvore abaixo:





Observe que temos $2 \times 3 = 6$ caminhos diferentes pelos quais a pessoa poderá sair de João Pessoa e chegar em Guarabira.

Problema 04: Eu possuo 4 pares de sapatos e 10 pares de meias. De quantas maneiras poderei me calçar utilizando um par de meias e um de sapatos?

Solução:

Pelo princípio fundamental da contagem temos que multiplicar 4, que é o número de elementos do primeiro conjunto, por 10 que corresponde ao número de elementos do segundo conjunto.
Portanto, poderei me calçar de 40 maneiras diferentes.

Problema 05: Em uma carteira escolar temos quatro livros de diferentes matérias, empilhados de cima para baixo nesta exata ordem:

Português, Matemática, História e Geografia.

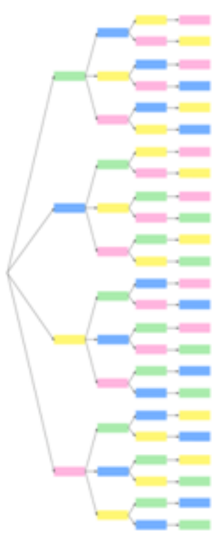
Incluindo a ordem atual, de quantas maneiras no total podemos empilhar tais livros nesta carteira?

Solução:

Vamos pensar sobre o problema!
Na escolha do primeiro livro a ser colocado na carteira temos 4 possibilidades, pois ainda não colocamos nenhum livro nela, temos então quatro livros a escolher: Português, Matemática, História e Geografia.
Se começarmos a pilha com o livro de português, na escolha do próximo livro a ser colocado sobre ele, temos 3 possibilidades: matemática, história e geografia.
Se escolhermos o livro de história como o segundo livro da pilha, para o terceiro livro temos 2 possibilidades apenas: matemática e geografia.
Se colocarmos na pilha o livro de geografia, para o último livro temos obviamente 1 possibilidade: matemática.

Veja pela figura a seguir que as 4 possibilidades do primeiro livro podem ser combinadas com cada uma das 3 possibilidades do segundo livro, que podem ser combinadas com cada uma das 2 possibilidades do terceiro livro, que podem finalmente ser combinadas com 1 possibilidade do quarto livro. Matematicamente o número total de possibilidades seria:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$



Problema 06: Quantos são os números naturais de dois algarismos que são múltiplos de 5?

Solução:

Como o zero à esquerda de um número não é significativo, para que tenhamos um número natural com dois algarismos ele deve começar com um dígito de 1 a 9, temos portanto 9 possibilidades.
Para que o número seja um múltiplo de 5, o mesmo deve terminar em 0 ou 5, portanto temos apenas 2 possibilidades.
A multiplicação de 9 por 2 nos dará o resultado desejado.
Logo, são 18 os números naturais de dois algarismos que são múltiplos de 5.

Problema 07: De quantas formas podemos dispor as letras da palavra FLUOR de sorte que a última letra seja sempre a letra R?

Solução:

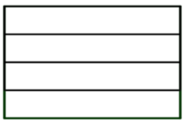
Para a última letra, segundo o enunciado temos apenas uma possibilidade que é a letra R.
Para a primeira, segunda, terceira e quarta letras temos respectivamente 4, 3, 2 e 1 possibilidades. Assim temos:

$$\mathbf{4 \times 3 \times 2 \times 1 \ = \ 24.}$$

Podemos dispor as letras da palavra FLUOR de 24 formas diferentes, tal que a última letra seja sempre a letra R.

Problema 08: Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, verde e azul, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?

Solução:



A primeira listra pode ser colorida de 3 modos, a segunda de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na primeira listra), a terceira de 2 modos (não podendo usar a cor empregada na segunda listra e a quarta de 2 modos (não podendo usar a cor empregada na terceira listra). Logo, pelo PFC, a resposta é

$$\mathbf{3 \times 2 \times 2 \times 2 \ = \ 24.}$$

Problema 09: Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Solução:

O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podendo usar o zero!), o segundo algarismo de 9 modos (não podendo usar o algarismo utilizado anteriormente) e o terceiro de 8 modos (não podendo usar os dois algarismos já empregados anteriormente). Logo, pelo PFC, a resposta é

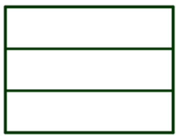
$$\mathbf{9 \times 9 \times 8 = 648.}$$

Note que se começássemos pelo último algarismo teríamos 10 modos de escolhê-lo, 9 modos de escolher o penúltimo algarismo (não podendo usar os algarismos empregado anteriormente) e ... e agora estamos diante de um problema: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é: ***depende!*** Se o algarismo zero tiver sido usado em alguma das últimas casas, a resposta é 8 (não podendo usar os dois algarismos já utilizados anteriormente). Caso contrário, a resposta é 7 (não podemos usar nem o zero nem os dois algarismos usados anteriormente).
É claro que essa dificuldade não teria ocorrido se tivéssemos começado pela escolha do primeiro algarismo do número, escolha essa que é mais "problemática" (restrita, pois ele não pode ser zero) do que a dos dois outros algarismos.

CUIDADO !!!

Alguns erros são cometidos e por vezes eles sempre passam despercebidos. Por isso que quando nos deparamos com problemas de contagem, devemos redobrar nossa atenção. Tem hora que contamos um mesmo elemento mais de uma vez, ou mesmo, esquecemos de contar certos grupos de elementos. Vejamos as situações a seguir:

Problema 10: Dispondo de quatro cores distintas, de quantas modos se pode pintar uma bandeira com três listras, tendo listras adjacentes cores diferentes?



Um aluno deu a seguinte solução:

"Primeiro, eu vou pintar as listras extremas; para cada uma, eu tenho 4 possibilidade de escolha. Depois, eu pinto a listra central; como ela tem que ter cor diferente das duas vizinhas, eu posso escolher sua cor de apenas 2 modos. Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é $4 \times 4 \times 2 \ = 32$*".*

A solução está *errada*, pois é possível que a mesma cor tenha sido escolhida para as faixas extremas. Nesse caso, o número de possibilidades de escolha para a cor da faixa central seria 3 e não 2. Logo, para esta ordem de pintura não é possível aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo.

Solução:

Claro que para esse problema, poderíamos simplesmente dizer que existem 4 possibilidades de cores para a primeira listra, 3 possibilidades de cores para a segunda listra e 3 possibilidades de cores para a terceira listra. Assim, pelo PFC, temos $4 \times 3 \times 3 = 36$ possibilidades de pintar a bandeira.

Veja também este outro exemplo:

Problema 11: Com cinco homens e cinco mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Este problema foi resolvido por um aluno do modo a seguir:

> *"A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher". Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente do da primeira pessoa. Há, portanto 10 x 5 = 50".*

Observe que com esse modelo de contagem, o casal João-Maria, por exemplo, foi considerado diferente do casal Maria-João. Isso é devido a termos trabalhado com o conceito de primeira pessoa do casal. Por isso, a resposta encontrada é o dobro da resposta real.

Solução:

Claro que para esse problema, temos 5 possibilidades de escolher o homem e 5 possibilidades de escolher a mulher, logo, o total de maneiras de formar o casal é $5 \times 5 = 25$.

Problema 12: Quantos são os números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?

Solução:

Vamos começar pelas decisões mais restritas. O último algarismo do número pode ser escolhido de 5 modos (0, 2, 4, 6, ou 8). O primeiro algarismo pode ser escolhido de ... ***depende!*** Se o zero foi usado como último algarismo, o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podendo ser o algarismo "zero" já empregado na última casa). Se o zero não foi usado como último algarismo, o primeiro algarismo só pode ser escolhido de 8 modos (não podendo usar nem o zero nem o algarismo já empregado na última casa).

Para vencer esse impasse, temos algumas alternativas:

A) "Abrir" o "Quebrar" o problema em casos:

Contamos separadamente os números que têm zero como último algarismo e aqueles cujo último algarismo é diferente de zero.

1º Caso: Terminando em zero, temos 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio, num total de $1 \times 9 \times 8 = 72$ números.

2º Caso: Terminando em um algarismo diferente de zero, temos 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6 ou 8), 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não podendo usar o zero nem o algarismo já utilizado na última casa) e 8 modos de escolher o algarismo do meio (não podendo usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas). Logo, temos $4 \times 8 \times 8 = 256$ números terminados com um algarismo diferente de zero.

Portanto, o total de números pares de três algarismos distintos é $72 + 256 = 328$.

B) Ignorar uma das restrições:

Ignorando o fato de zero não poder ser o primeiro algarismo, teríamos 5 modos de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio., num total de $5 \times 8 \times 9 = 360$ números. Esses 360 números incluem números começando por zero, que devem ser descontados. Começando em zero temos 1 modo de escolher o primeiro algarismo (0), 4 modos de escolher o último (2, 4, 6 ou 8) e 8 modos de escolher o do meio (não podendo usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas), num total de $1 \times 4 \times 8 = 32$ números.

Portanto, o total de números pares de três algarismos distintos é $360 - 32 = 328$.

C) Evento complementar:

É claro também que poderíamos ter resolvido o problema determinando todos os números de 3 algarismos distintos $(9 \times 9 \times 8 = 648)$ e abatendo os números ímpares de 3 algarismos distintos (5 possibilidades na última casa, 8 na primeira e 8 na segunda, num total de $5 \times 8 \times 8 = 320$ números).

Portanto, o total de números pares de três algarismos distintos é $648 - 320 = 328$.

Problema 13: Uma senha é formada por cinco caracteres escolhidos dentre %, $, #, @, &, ∆ e ♣. Quantas são as senhas que podemos formar começando pelo símbolo de % ou terminando com o símbolo de @ ?

Solução:

O número de senhas que começam com o símbolo % é tal que:

$$1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4.$$

O número de senhas que terminam com o símbolo @ é tal que:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 = 7^4.$$

Note agora que existem senhas que começam com o símbolo % e terminam com @ e elas são em número de

$$1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 = 7^3,$$

e essas senhas foram contadas nas duas situações anteriores. Portanto, o total de senhas que começam com % ou terminam com @ é igual a

$$7^4 + 7^4 - 7^3 = 2 \cdot 7 \cdot 7^3 - 7^3 = 13 \cdot 7^3.$$

ANOTAÇÕES:

FATORIAL

Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, define-se fatorial de n, que é representado por $\boldsymbol{n}!$, como o produto dos números naturais consecutivos $n, n-1, n-2, \ldots, 1$. Ou seja:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\mathbf{2!} &= \mathbf{2 \cdot 1 = 2} \\
\mathbf{3!} &= \mathbf{3 \cdot 2 \cdot 1 = 6} \\
\mathbf{4!} &= \mathbf{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24} \\
\mathbf{5!} &= \mathbf{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120} \\
\mathbf{6!} &= \mathbf{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Propriedade Fundamental dos Fatoriais

Na igualdade $\mathbf{7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$, observe que o produto $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ pode ser substituído por $6!$, logo:

$$7! = 7 \cdot \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{6!} \implies 7! = 7 \cdot 6!$$

Assim, podemos generalizar esse resultado da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1)!}$$

De maneira informal, podemos dizer que o fatorial de um número pode ser "aberto" de modo a pararmos onde for mais conveniente. Vejamos:

$$10! = 10 \cdot 9!$$

$$8! = 8 \cdot 7! = 8 \cdot 7 \cdot 6!$$

Observação:

Para garantirmos a coerência dos futuros processos de contagem que iremos estudar, é importante que definamos o fatorial de zero e o fatorial de 1.

Da propriedade fundamental dos fatoriais, temos:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Assim,

$$\frac{2!}{2} = 1! \implies 1! = 1$$

$$\frac{1!}{1} = 0! \implies 0! = 1$$

Problema 13: Calcule o valor da expressão
$$\frac{\mathbf{100! + 101!}}{\mathbf{99!}}.$$

Solução:

$$\frac{100! + 101!}{99!} = \frac{100 \cdot 99! + 101 \cdot 100 \cdot 99!}{99!}$$

$$= \frac{99! \cdot (100 + 101 \cdot 100)}{99!} = 100 + 101 \cdot 100$$

$$= 100 + 10100 = 10200$$

Problema 14: Resolva a equação
$$\frac{(\boldsymbol{x} + \mathbf{1})!}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})!} = \mathbf{56}.$$

Solução:

$$\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 56 \Longrightarrow \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} = 56$$

$$(x+1) \cdot x = 56 \Longrightarrow x^2 + x = 56$$

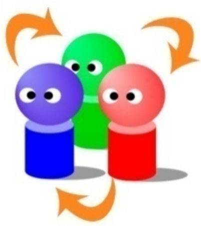
$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm 15}{2}$$

$$x = 7 \ \ ou \ \ x = -8$$

Logo, x = 7, pois não existe fatorial de um número negativo.

Permutação Simples



Permutar = "trocar entre si"

Dados n objetos distintos, de quantos modos é possível ordená-los?

Por exemplo, para os objetos *A*, *B* e *C* há 6 ordenações: *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CAB* e *CBA*. No caso geral temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, n-1 modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto,

O número de modos de ordenar n objetos distintos é

$$\boxed{\boldsymbol{P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!}}$$

Cada ordenação dos n objetos é chamada de uma *permutação simples* de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n.

Problema 15: De quantos modos diferentes quatro pessoas podem ficar em fila indiana?

Solução:

Como não existe nenhuma restrição de quem deve ficar na frente ou em outra determinada posição, apenas a ordem que elas ocupam na fila interessa, assim, teremos uma permutação de 4 elementos, logo
$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$$
isto é, podemos formar 24 filas indianas.

Problema 16: Quantas filas indianas podemos formar com oito pessoas?

Solução:

O número de filas indianas que podemos formar com 8 pessoas é
$$P_8 = 8! = 40320.$$

Problema 17: Quantos são os anagramas da palavra SAMUEL?

Solução:

Cada anagrama da palavra SAMUEL nada mais é que uma ordenação das letras S, A, M, U, E e L. Assim, o número de anagramas que podemos formar é dado por
$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Assim, dada uma quantidade de objetos distintos, uma permutação simples desses objetos é qualquer sequência que podemos formar com todos eles, ou seja, a diferença entre um agrupamento e outro formado se dá apenas pela mudança de posição entre seus elementos.

No caso descrito no Problema 05 deste capítulo, o agrupamento de livros *(português, matemática, história, geografia)*, difere do agrupamento *(matemática, história, português, geografia)*, pois embora os elementos de ambos os grupos sejam os mesmos, há mudança no posicionamento de ao menos um dos seus elementos.

Definição: *Um **anagrama** é uma palavra ou frase formada com todas as letras de outra palavra ou frase. Normalmente as palavras ou frases resultantes são sem significado, como já era de se esperar.*

Problema 18: Quantos anagramas podemos formar a partir da palavra ORDEM?

Solução:

Como a palavra ORDEM possui 5 letras distintas, devemos calcular o número de permutações calculando P_5. Temos então:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Portanto, o número de anagramas que podemos formar a partir da palavra ORDEM é igual 120.

Problema 19: Na fila do caixa de uma padaria estão três pessoas. De quantas maneiras elas podem estar posicionadas nesta fila?

Solução:

Temos que calcular P_3, então:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Logo, as três pessoas podem estar posicionas de seis maneiras diferentes na fila.

Problema 20: Quantos são os anagramas que podemos formar a partir das letras da palavra ERVILHAS, sendo que eles comecem com a letra E e terminem com vogal?

Solução:

Como na primeira posição sempre teremos a letra E, o número de possibilidades nesta posição é igual a 1, podemos até dizer que é igual a P_1.

Para a última posição temos disponíveis as letras I e A, pois a letra E já está sendo utilizada no começo, então para a oitava letra temos que calcular P_2:

$$P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

Como para as demais posições temos 6 letras disponíveis, calculemos então P_6:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Multiplicando tudo:

$$1 \cdot 720 \cdot 2 = 1440.$$

Então, a partir da palavra ERVILHAS podemos formar 1440 anagramas que comecem com a letra E e terminem em vogal.

Problema 21: Quantos anagramas podemos formar a partir das letras da palavra VITOR?

Solução:

Como já vimos, a permutação simples de n elementos distintos é dada por P_n, então como na palavra VITOR temos 5 letras distintas, o número de anagramas seria igual a P_5, ou seja, será igual a 5! que é igual a 120.

Problema 22: De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de uma mesma disciplina permaneçam juntos?

Solução:

Devemos inicialmente escolher a ordem das matérias, o que pode ser feito de 3! maneiras. Depois, devemos em cada matéria, escolher a ordem em que se apresentarão os livros, assim, para matemática temos 5! maneiras, para física 3! e para estatística 2! modos. Logo, pelo PFC o número de maneiras de organizar a prateleira é

$$3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! = 6 \cdot 120 \cdot 6 \cdot 2 = 8640.$$

Problema 23: De quantos modos quatro rapazes e seis moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem todas juntas?

Solução:

Devemos inicialmente escolher a ordem em que as moças ficarão juntas, o que pode ser feito de 6! modos. Em seguida, devemos arrumar em fila (4+1) objetos, os quatro rapazes e o bloco das moças, o qual pode ser feito de 5! maneiras.

Logo, o número de filas que podemos formar nas condições dadas é

$$6! \cdot 5! = 720 \cdot 120 = 864000.$$

Problema 24: Dez pessoas, entre elas Chico e Bento, devem ficar em fila. De quantas formas isso pode ser feito se Chico e Bento devem ficar sempre separados?

Solução:

Primeiramente vamos calcular o total de filas que podemos formar com as 10 pessoas sem que haja restrições, o que pode ser feito de 10! maneiras.

Vamos agora calcular o número de filas em que Chico e Bento ficam juntos. Nesse caso, consideremos ambos como "uma única pessoa", que junto com as outras 8 devem ser permutadas nos proporcionam um total de 9! permutações. Entretanto, em cada uma dessas permutações, Chico e Bento podem ser permutados entre si (CB ou BC) de 2! formas. Sendo assim, o número de maneiras em que eles aparecem juntos é $2! \cdot 9!$.

Como queremos que eles apareçam separados, o número de formas que temos de fazer isso é

$$10! - 2! \cdot 9! = 10 \cdot 9! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9! = 2903040.$$

Permutação com Elementos Repetidos

Consideremos a palavra ANA e procuremos seus anagramas. Vamos indicar por A* o segundo A. Teremos, então:

1) ANA*,	4) A*NA
2) A A*N,	5) A*AN
3) NAA*,	6) NA*A,

Notemos que as permutações:
(1) e (4) são iguais;
(2) e (5) são iguais;
(3) e (6) são iguais.

Na verdade, não temos 3! = 6 permutações distintas, mas apenas 3, que são: ANA, AAN, NAA.

Essa diminuição do número de permutações decorreu do fato de termos duas letras iguais, A e A, no conjunto das letras a serem permutadas. É intuitivo perceber que o fato de existirem letras repetidas para serem permutadas acarreta uma diminuição do número de permutações, em relação ao número que teríamos, se todas fossem distintas.
Note assim que, como a letra A figurou duas vezes, as possíveis trocas entre elas não alterariam o anagrama, portanto para evitar uma múltipla contagem de um mesmo anagrama dividimos o valor para 3 letras distintas por 2!, isto é,

$$\frac{3!}{2!} = 3.$$

Portanto o número de permutações de n elementos, onde um deles aparece α vezes, outro β vezes, outro γ vezes, ..., é dado pela expressão:

$$\boldsymbol{P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma! \ldots}},$$

onde $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$.

Observe que as sequências que podem ser formadas possuem termos repetidos e, portanto, duas delas se diferenciam apenas pela ordem dos termos distintos, já que todas possuem os mesmos termos, com o mesmo número de repetições cada um. Daí elas são denominadas de **permutação com elementos repetidos**.

Problema 25: Quantos anagramas podemos obter a partir das letras da palavra PARAR?

Solução:

Como a palavra PARAR possui 5 letras, mas duas delas são repetidas duas vezes cada, na solução do exemplo vamos calcular

$$P_5^{(2,2)} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30.$$

Portanto, o número de anagramas que podemos formar a partir das letras da palavra PARAR é igual 30.

Problema 26: Possuo 4 bolas amarelas, 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde. Pretendo colocá-las em um tubo acrílico translúcido e incolor, onde elas ficarão umas sobre as outras na vertical. De quantas maneiras distintas eu poderei formar esta coluna de bolas?

Solução:

Nesse caso de permutação com elementos repetidos temos um total de 10 bolas de quatro cores diferentes. Segundo a repetição das cores, devemos calcular

$$\boldsymbol{P_{10}^{(4,3,2,1)}} = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 12600.$$

Então, eu poderei formar esta coluna de bolas de 12600 maneiras diferentes.

Problema 27: Dos números distintos que são formados com todos os algarismos do número 333669, quantos desses são ímpares?

Solução:

Nesse exemplo, número ímpares serão aqueles terminados em 3 ou 9.
No caso dos números terminados em 3 devemos calcular $P_5^{(2,2)}$, pois um dos dígitos "três" já será utilizado na última posição e dos 5 dígitos restantes, teremos 2 ocorrências do próprio algarismo 3 e 2 ocorrências do 6:
Agora no caso dos números terminados em 9 devemos calcular $P_5^{(3,2)}$, pois o dígito 9 será utilizado na última posição e dos 5 dígitos que sobram, teremos 3 ocorrências do 3 e 2 ocorrências do dígito 6.

Como temos 30 números terminados em 3 e mais 10 terminados em 9, então no total temos 40 números ímpares.
Logo, dos números formados, 40 deles são ímpares.

Problema 28: Uma moeda é lançada 10 vezes. Quantas sequências de caras e coroas existem com exatamente 6 caras e 4 coroas?

Solução:

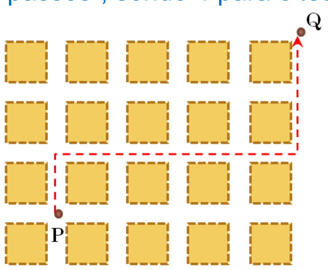
Cada sequência obtida é uma permutação das 10 faces, sendo 6 caras e 4 coroas. Assim, o resultado procurado é

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{10}}^{(6,4)} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210.$$

Problema 29: Um bairro é formado por 20 quarteirões dispostos segundo a figura a seguir. Uma pessoa sai do ponto P e dirige-se para o ponto Q pelo caminho mais curto, isto é, sempre da esquerda para direita ou de baixo para cima. Nessas condições, quantos caminhos diferentes ela poderá perfazer?

Solução:

Notemos inicialmente que a pessoa deve dar ao todo 4+3=7 "passos", sendo 4 para o leste e 3 para o norte. Cada caminho possível é então uma permutação de 7 "passos", sendo 4 para o leste e 3 para o norte.



Por exemplo, um possível caminho é (NLLLLNN) como descrito na figura ao lado.

Assim, o número de caminhos possíveis é

$$\boldsymbol{P}_{7}^{(4,3)} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35.$$

Veja alguns outros possíveis caminhos: (LLLLNNN); (NNNLLLL); ((LNLNLNL); ...

Problema 30: (Ronaebson) Um quadro de distribuição de energia tem 6 disjuntores que acendem os seis refletores de um auditório, sendo um disjuntor correspondente a um único refletor.

a) De quantos modos o auditório pode ficar iluminado?

b) De quantos modos podemos ligar exatamente 4 disjuntores?

Solução:

a) Para cada disjuntor temos duas possibilidades, ou ele está ligado ou está desligado, assim, o número de maneiras que temos para decidir sobre a iluminação do auditório é

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64,$$

onde uma delas corresponde a todos os disjuntores desligados, logo, ao auditório apagado. Sendo assim, o número de formas que o auditório pode ficar iluminado é 64 – 1 = 63.

b) Observe que como queremos que exatamente 4 disjuntores estejam ligados, devemos ter 2 desligados, sendo uma possibilidade (LLLLDD), outra possibilidade (DLLLDL), ou seja, o total dessas possibilidades corresponde ao total de permutações de 6 letras, sendo 4 L's e 2 D's, logo o número de maneiras será

$$P_6^{(4,2)} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

ANOTAÇÕES:

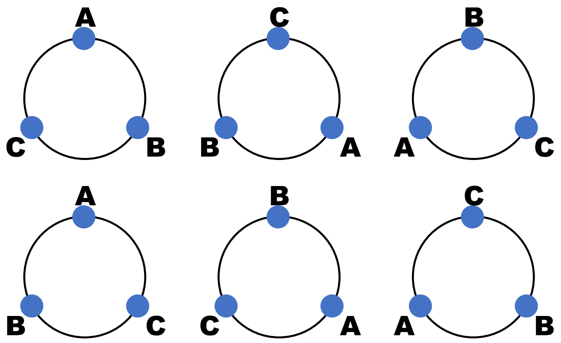
Permutação Circular

De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?

A resposta para esse problema será representada por $(PC)_n$, o número de permutações circulares de n objetos distintos. É fácil perceber que $(PC)_n$ é, em geral, diferente de P_n, uma vez que nas permutações simples importam os lugares que os objetos ocupam, ao passo que nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si.
Assim, se não considerássemos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições (rotações). Logo,

$$\boldsymbol{(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

Por exemplo, no caso n = 3, temos $P_3 = 3! = 6$ modos de dispor 3 objetos distintos em 3 lugares.



No entanto, as três primeiras disposições podem coincidir entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas, de modo que $(PC)_3 = 2$.

Problema 31: Quantas são as rodas de ciranda que podemos formar com 5 crianças?

Solução:

O número de rodas de ciranda que podemos formar com 5 crianças é o número de permutações circulares de 5 elementos distintos, ou seja,

$$(PC)_5 = 4! = 24.$$

Problema 32: De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

Solução:

O número de rodas de ciranda que podemos formar com as sete crianças é

$$(PC)_7 = 6! = 720.$$

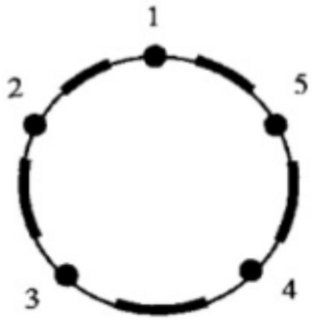
Agora vamos calcular o número de rodas em que as duas referidas crianças aparecem juntas, para tanto, consideremos que elas se comportam como um único objeto na permutação, logo temos um total de $(PC)_6 = 5! = 120$ rodas, além disso, as duas crianças juntas podem permutar entre si, portanto, o número de rodas em que elas aparecem juntas é

$$2! \cdot 120 = 240.$$

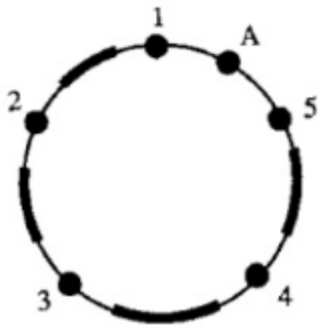
Sendo assim, o número de rodas em que as referidas crianças aparecem separadas é

$$720 - 240 = 480.$$

Outra forma de pensar esse problema é, primeiramente, formar $(PC)_5 = 4!$ rodas com as outras cinco crianças.



Há agora 5 modos de colocar a criança A na roda.

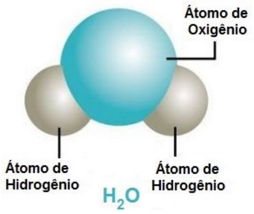


Há agora 4 modos de colocar a criança B na roda sem colocá-la junto de A. Assim, a resposta para o problema é

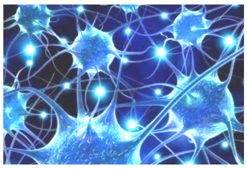
$$4! \times 5 \times 4 = 480.$$

AGRUPAMENTOS

Agrupamento é qualquer reunião de elementos, por exemplo: um vocábulo é um agrupamento de letras; a representação escrita de um número é um agrupamento de algarismos; uma turma de alunos é um agrupamento de pessoas; uma molécula é um agrupamento de átomos; uma substância é um agrupamento de moléculas; um tecido é um agrupamento de células; um órgão é um agrupamento de tecidos.



Agrupamento de átomos na molécula de água (H_2O).



Representação do tecido nervoso.

Na Análise Combinatória identificamos dois tipos de agrupamentos: os arranjos e as combinações.

- **ARRANJOS:** são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos, ou seja, qualquer alteração na ordem de elementos distintos altera o agrupamento. Por exemplo, ao representarmos números naturais de dois algarismos distintos escolhidos dentre os algarismos 1, 3, 4, 7 e 9, estaremos *arranjando* esses cinco elementos dois a dois. Os números formados são chamados de arranjos de algarismos porque, mudando a ordem dos algarismos em um deles, obtemos outro número, a saber, $47 \neq 74$.
- **COMBINAÇÃO**: são agrupamentos em que não se considera a ordem dos elementos, ou seja, mudanças na ordem dos elementos não geram um novo agrupamento. Por exemplo, quando vamos fazer uma vitamina de com duas frutas escolhidas entre dez, é indiferente escolhermos banana e mamão como mamão e banana, no final das contas teremos a mesma vitamina. Por isso dizemos que as possíveis composições que podem ser feitas são combinações das dez frutas tomadas duas a duas.

Quando não são permitidas repetições de elementos, o agrupamento é chamado de **simples**, tanto o arranjo quanto a combinação. Quando são permitidas repetições de elementos, ele é chamado de **completo**.

Problema 33: Classifique os agrupamentos sugeridos a seguir como Arranjo Simples (AS), Arranjo Completo (AC), Combinação Simples (CS) e Combinação Completa (CC).

(___) As possíveis classificações para os cinco primeiro colocados (G5) no Campeonato Brasileiro.
(___) Misturar duas das três cores primárias de tinta, vermelho, azul e amarelo, para obter uma nova cor.
(___) Escolher seis dos sessenta números para uma aposta na Mega-Sena.
(___) Formar uma senha de 4 algarismos.
(___) Formar um código de identificação com 3 algarismos distintos.
(___) Eleger uma comissão de três alunos para representar uma turma, tendo todos iguais funções.
(___) Escolher três vértices de um eneágono para forma um triângulo.
(___) Eleger uma comissão de três diretores, onde um será o presidente, outro o vice-presidente e o outro será o secretário.
(___) Formar um anagrama com as letras da palavra AMOR.
(___) Formar um número de telefone com oito algarismos.
(___) Comprar 5 garrafas de refrigerantes num supermercado que os oferece em três tipos.
(___) Comprar 4 bolas de sorvete numa sorveteria que disponibiliza de 10 sabores distintos.

O princípio fundamental da contagem é nosso instrumento básico para atacar problemas de combinatória, entretanto, sua aplicação direta na resolução desses problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa. Assim, iremos estudar com mais profundidade cada um dos tipos de agrupamentos que vimos e, usando símbolos simplificativos, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos para cada caso particular a ser estudado.

Portanto, considerando um conjunto A formado por n elementos, nesse texto, mostraremos algumas técnicas que nos possibilitem determinar o número de agrupamentos de p elementos que podemos formar com os elementos de A, ou seja, contaremos quantos são os agrupamentos dos n elementos de A tomados p a p.

ANOTAÇÕES:

Arranjos Simples

Queremos determinar uma técnica que nos permite calcular o número de agrupamentos com p elementos distintos, que podem ser formados com os n elementos de um conjunto dado, os quais diferem entre si pela *natureza* ou pela *ordem* de seus elementos.

Definição: Seja A um conjunto de n elementos. Chamamos de arranjo simples dos n elementos tomados p a p (0 ≤ p ≤ n) qualquer sequência de p elementos distintos formados com elementos do conjunto A. Vamos representar o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p por $A_{n,p}$.

Para calcularmos o número de arranjos simples dos n elementos tomados p a p notemos que para a escolha do 1º elemento, temos n possibilidades, para a escolha do 2º elemento, temos $n - 1$ possibilidades (um deles foi utilizado), para a escolha do 3º elemento, temos $n - 2$ possibilidades (dois deles já utilizados) e assim sucessivamente, de modo que para a escolha do pº elemento, temos $n-(p-1)$ possibilidades ($p - 1$ deles já escolhidos).
Pelo PFC, temos que o número total de Arranjos simples dos n elementos agrupados p a p é dado por:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por $(n-p)!$, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!}$$

Observe que o numerador é igual a n!, assim podemos escrever:

$$\boxed{\boldsymbol{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}}.$$

Assim, a expressão $A_{7,4}$ indica o número de sequências diferentes de quatro elementos distintos escolhidos de um grupo de sete elementos dados. Daí temos:

$$\overbrace{1^o\ elemento}^{7} \times \overbrace{2^o\ elemento}^{6} \times \overbrace{3^o\ elemento}^{5} \times \overbrace{4^o\ elemento}^{4}$$

Logo, pelo PFC, temos que $A_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Problema 34: Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto {1, 2, 3, 4}?

Solução:

Observe que se tomarmos uma resposta como, por exemplo, o número 234 e trocarmos a ordem do 3 com o 4, obtemos um outro número, 243. Veja ainda que se trocarmos a natureza dos elementos, trocando o número 2 pelo número 1, também temos outro número, assim, trata-se de um caso de arranjo simples. Logo, a quantidade de números de três algarismos distintos que podemos formar é

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

A saber:

123	124	132	134	142	144
213	214	231	234	241	244
312	314	321	324	341	342
412	413	421	423	431	432

Note também que poderíamos ter resolvido o problema usando o Princípio Multiplicativo, pois temos 4 possibilidades para escolher o primeiro algarismo, 3 possibilidades para escolher o segundo e 2 possibilidades para escolher o terceiro, assim, temos $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades de formar o número em questão.

Problema 35: Uma corrida de 100 metros rasos é disputada por 8 atletas. De quantas formas podemos formar o ranking com os 5 primeiros melhores?

Solução:

Basta fazer um arranjo de 8 elementos tomados 5 a 5, assim teremos

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720\ possibilidades.$$

Mais uma vez observe que o problema poderia ter sido facilmente resolvido pelo PFC.

Problema 36: Em um campeonato de futebol participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

Solução:

O número de resultados possíveis é
$$A_{20,3} = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

Observação!

Note que a permutação simples é um caso particular de arranjo simples, pois, na permutação todos os n elementos do conjunto A participam do agrupamento, assim podemos concluir também que os agrupamentos na permutação diferenciam-se apenas pela ordem de seus elementos.

Daí:
$$P_n = A_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-n+1)$$
$$P_n = A_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Arranjos Completos

Queremos determinar uma técnica que nos permite calcular o número de agrupamentos com p elementos, não necessariamente distintos, que podem ser formados com os n elementos de um conjunto dado, os quais diferem entre si ou pela *natureza* ou pela *ordem* de seus elementos.

Definição: Seja A um conjunto de n elementos. Chamamos de arranjo com repetição dos n elementos tomados p a p (1 ≤ p ≤ n) qualquer sequência de p elementos, não necessariamente distintos, formados com elementos do conjunto A. Vamos representar o número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p por $AR_{n,p}$.

Assim, Arranjos com repetição ou Arranjos Completos de n elementos tomados p a p, são os arranjos de p elementos não necessariamente distintos. Portanto, ao calcularmos arranjos completos devemos considerar todos os arranjos com elementos distintos (que são os arranjos simples) como também, aqueles com elementos repetidos.

Para determinarmos o número de arranjos com repetição dos n elementos tomados p a p notemos que para a escolha do 1º elemento, temos n possibilidades, para a escolha do 2º elemento, também temos n possibilidades, para a escolha do 3º elemento, temos n possibilidades e assim sucessivamente, de modo que para a escolha do pº elemento, teremos n possibilidades.

Pelo PFC, temos que o número total de Arranjos com repetição dos n elementos agrupados p a p é dado por:

$$AR_{n,p} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{p\ vezes} = n^p$$

O número total de arranjos completos de n elementos, tomados p a p, é dado por:

$$\boxed{AR_{n,p} = n^p}$$

Problema 37: Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma azul (A) e uma preta (P). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida é feita outra extração e observada a cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas?

Solução:

Cada sequência é um par ordenado de cores (x, y) em que $x, y \in \{V, A, P\}$, logo pelo PFC, o número de pares é $3 \cdot 3 = 9$.

Doutro modo, bastaria fazer
$$AR_{3,2} = 3^2 = 9.$$

Combinações Simples

Queremos determinar uma técnica que nos permite calcular o número de agrupamentos com p elementos distintos, que podem ser formados com os n elementos de um conjunto dado, os quais diferem entre si apenas pela *natureza* de seus elementos.

Definição: Seja A um conjunto de n elementos. Chamamos de *combinação simples* dos n elementos tomados p a p (0 ≤ p ≤ n) qualquer subconjunto de A constituído de p elementos distintos. Vamos representar o número de combinações simples de n elementos tomados p a p por $C_{n,p}$.

Consideremos um conjunto com 5 elementos e calculemos o número de combinações simples de 3 elementos (subconjuntos com 3 elementos), que podemos formar. Seja o conjunto {a, e, i, o, u}.

Combinações simples com 3 elementos:
{a, e, i}; {a, e, o}; {a, e, u}; {a, i, o}; {a, i, u}; {a, o, u}; {e, i, o}; {e, i, u}; {e, o, u}; {i, o, u}.

Observe que cada combinação dessas origina 6 arranjos, permutando-se de todas as maneiras possíveis seus 3 elementos. Veja um exemplo: {a, e, i}, {a, i, e}, {e, a, i}, {e, i, a}, {i, a, e} e {i, e, a}. Assim temos que o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3 é seis vezes o número de combinações de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja:

$$A_{5,3} = 6 \cdot C_{5,3}$$

Na expressão acima, o fator 6 foi obtido da permutação dos 3 elementos de {a, e, i}, assim podemos substituir este valor (6), por $P_3 = 3!$. Logo:

$$A_{5,3} = 6 \cdot C_{5,3} \Rightarrow A_{5,3} = P_3 . C_{5,3} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3}$$

Assim, temos:

$$C_{5,3} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$$

Generalizando, a cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem p! arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, sendo assim, temos que

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Assim, o número de combinação de n elementos tomados p a p é dado por

$$\boldsymbol{C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}}.$$

Problema 38: Um hospital dispõe de 8 enfermeiros e deseja formar equipes de 3 deles para os plantões de fim de semana. De quantas maneiras diferentes a diretoria desse hospital poderá escolher esta equipe?

Solução:

Suponha que Antônio, Paulo e Fernando são os escolhidos e observe que se trocarmos a ordem para Paulo, Antônio e Fernando, continuaremos com a mesma equipe, mas se trocarmos a natureza dos elementos, ou seja, tirarmos Paulo e colocarmos o Pedro, então teremos uma nova equipe. Assim o número de equipes será dado por:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 8 \cdot 7 = 56$$

Problema 39: Dentre as 14 crianças de uma família, serão escolhidas cinco para arrecadarem prendas para a quermesse da fazenda onde vivem. De quantas maneiras diferentes as crianças poderão ser agrupadas?

Solução:

Identificamos neste exemplo um caso de combinação simples, pois a ordem de escolha das crianças é irrelevante, não causando distinção entre os agrupamentos com elementos distintos. Assim, vamos calcular $\mathbf{C_{14,5}}$:

$$C_{14,5} = \frac{14!}{5! \cdot 9!} = 2002.$$

As crianças poderão ser agrupadas de 2002 maneiras diferentes.

Problema 40: Entre cinco policiais, serão escolhidos dois para garantir a segurança pessoal de um embaixador durante um evento. Quantas são as possibilidades de duplas a serem formadas se os escolhidos terão funções idênticas?

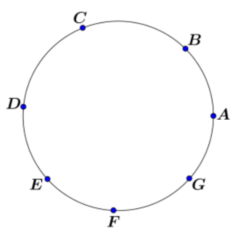
Solução:

Observe inicialmente que não há distinção entre os papéis desenvolvidos pelos policiais, ambos assumirão a mesma função. Assim, a troca de posição entre dois quaisquer escolhidos não gerará uma nova dupla, isto é, tanto faz escolher Ruben e Pedro como Pedro e Ruben. Logo, o número de possibilidades de duplas será igual a

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 10.$$

Problema 41: Considere sete pontos distintos, A, B, C, D, E, F e G, de uma circunferência, conforme a figura. Quantos triângulos podem ser determinados com vértices em três desses pontos?

Solução:



Para formar um triângulo, basta escolhermos três dos sete pontos apresentados e, como a ordem de escolha dos pontos é irrelevante para a formação do triângulo, o número de triângulos distintos que poderemos determinar é igual a

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$

Problema 42: Um sorveteiro vende sorvetes de quatro bolas, de sabores escolhidos dentre os de coco, manga, graviola, cajá, morango, tamarindo e pitanga. Calcule o número de possibilidades de escolha de quatro sabores distintos que devem compor um sorvete.

Solução:

Para montar um sorvete, basta escolher quatro sabores dos sete que são oferecidos, o que pode ser feito de

$$C_{7,4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35\ modos.$$

Problema 43: Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução:

Como não existe hierarquia entre os membros da comissão, o número de comissões distintas que podemos formar com três membros dos dez disponíveis é

$$C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Ao deparar com um problema que envolva agrupamentos de qualquer tipo de elementos, devemos, antes de tudo, verificar se os agrupamentos em questão são arranjos ou combinações. Para isso, formamos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema, com pelo menos dois elementos distintos e trocamos a posição (mudamos a ordem) de elementos distintos no agrupamento formado.

- Se, com essa mudança, obtivermos um agrupamento diferente do original, então esses agrupamentos são arranjos.
- Se, com essa mudança, obtivermos um agrupamento igual ao original, então esses agrupamentos são combinações.

É importante perceber que alguns problemas às vezes exigem muito mais do que uma simples aplicação direta de uma fórmula de arranjo ou combinação. É como que num mesmo problema, tenhamos que agrupar mais de uma vez e, inclusive, lidarmos com agrupamentos diferentes, ou mesmo, associarmos os agrupamentos ao Princípio Aditivo ou ao Princípio Multiplicativo. Vejamos algumas situações que demandam um pouco mais de engenhosidade e atenção.

Problema 44: Marcam-se cinco pontos sobre uma reta r e 8 pontos sobre uma reta s, com r paralela a s. Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 13 pontos?

Solução:

Para formarmos um triângulo ou tomamos um vértice em r e dois em s (1º Caso) ou tomamos um vértice em s e dois em r (2º Caso). O número de triângulos no 1º Caso é $5 \cdot C_{8,2}$ e do 2º Caso é $8 \cdot C_{5,2}$. Daí, o total de triângulos que podemos formar é

$$5 \cdot C_{8,2} + 8 \cdot C_{5,2} = 5 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2!} + 8 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!}$$

$$= 140 + 80 = 220.$$

Outra maneira de abordar o mesmo problema é, inicialmente, entender que para formar um triângulo basta escolher 3 dos 13 pontos dados, o que pode ser feito de $C_{13,3}$ modos. Desse total devemos retirar as $C_{5,3}$ escolha de 3 pontos da reta r e as $C_{8,3}$ escolhas possíveis de 3 pontos em s, pois todas essas escolhas não geram triângulos, uma vez que os pontos são colineares. Assim a resposta será

$$C_{13,3} - C_{5,3} - C_{8,3} = 286 - 10 - 56 = 220.$$

Problema 45: Temos nove homens e oito mulheres. Quantas comissões de cinco pessoas podemos formar se em cada uma deve haver dois homens e três mulheres?

Solução:

Podemos escolher 2 entre 9 de $C_{9,2} = 36$ formas e podemos escolher 3 mulheres entre 8 de $C_{8,3} = 56$ modos.

Cada grupo de 2 homens pode se juntar com um dos 56 grupos de 3 mulheres, formando uma comissão. Como existem 36 grupos de homens, teremos ao todo $36 \cdot 56 = 2016$ comissões.

Problema 46: Com as letras a, e, i, o, b, c, d, f, g, quantas palavras (com ou sem sentido) de seis letras distintas podem ser formadas, usando-se três vogais e três consoantes?

Solução:

As vogais podem ser escolhidas de $C_{4,3} = 4$ formas e as consoantes de $C_{5,3} = 10$ formas, num total de $4 \cdot 10 = 40$ possibilidades. Para cada uma dessas possibilidades, o número de palavras formadas é o número de permutações das seis letras escolhidas, isto é, P_6. Então, o total de palavras será

$$40 \cdot P_6 = 40 \cdot 6! = 28800.$$

Combinações Completas

Para compreendermos melhor esse tópico gostaria de começar propondo um pequeno problema:

Problema 47: De quantos modos é possível comprar quatro empadas numa lanchonete que as oferece em sete sabores?

Solução:

Normalmente, a primeira resposta que vem a nossa mente é $C_{7,4} = 35$. Entretanto o que está sendo indicado é o número de maneiras de escolher quatro sabores distintos entre os sete oferecidos. Mas se for feita uma leitura atenta perceberemos que o problema não exige que compremos as quatro empadas com sabores distintos, podemos comprar todas de um mesmo sabor, ou mesmo, duas de um sabor e duas de outro, etc.

Uma solução para esse problema pode ser dada a partir da divisão dele em casos, vejamos:

1º Caso: As quatro empadas terão o mesmo sabor.
Temos 7 possibilidades.

2º Caso: Três empadas de um mesmo sabor e uma de outro.
Temos 7 possibilidades para escolher o sabor das 3 empadas (de mesmo sabor) e 6 possibilidades para escolher o sabor da outra empada (de sabor diferente). Logo, pelo PFC, temos $7 \cdot 6 = 42$ possibilidades de comprar três empadas de um mesmo sabor e uma de outro.

3º Caso: Duas empadas de um sabor e duas de outro.
Basta escolhermos dois sabores dos sete ofertados (a ordem da escolha é irrelevante, uma vez que virá a mesma quantidade de empadas para cada sabor), assim o número de modos possível de fazer a compra é $C_{7,2} = 21$.

4º Caso: Duas empadas de um mesmo sabor, uma de outro sabor e a outra de um terceiro sabor.
Primeiramente escolhemos o sabor do qual compraremos duas empadas, para isso temos 7 possibilidades, depois basta escolher dois outros sabores dentre os 6 restantes e tomar uma empada de cada, para isso temos $C_{6,2} = 15$. Logo, pelo PFC, temos $7 \cdot 15 = 105$ maneiras de comprar Duas empadas de um mesmo sabor, uma de outro sabor e a outra de um terceiro sabor.

5º Caso: As quatro empadas com sabores distintos.
O número de maneiras de escolhermos 4 sabores distintos no meio de 7 disponíveis é $C_{7,4} = 35$.

Como os casos propostos são todos disjuntos, o número de maneiras de comprar 4 empadas numa lanchonete que as oferece em 7 sabores é

$$7 + 42 + 21 + 105 + 35 = 210.$$

Observe que se tivéssemos de comprar 5 empadas, o número de casos aumentaria para 7 e como consequência teríamos um trabalho ainda maior para resolver o problema, de modo que chega um momento que se tornar inviável dividirmos em casos, contanto inclusive com o aumento da probabilidade de esquecermos algum. Desse modo, nosso objetivo é desenvolver uma técnica que nos permita chegar à resposta de um problema como esse de forma mais rápida.

A resposta para um problema dessa natureza é representada por $CR_{7,4}$, número de combinações completas de classe 4 de 7 objetos. Portanto $CR_{7,4}$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 objetos distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez.

De modo geral, $C_{n,p}$ é o número de maneiras de escolher p objetos *distintos* entre n objetos distintos dados, e $CR_{n,p}$ é o número de modos de escolher p objetos *distintos ou não* entre n objetos distintos dados.

Assim, por exemplo, as combinações completas de classe 3 dos objetos a, b, c, d tomados 3 a 3 são

aaa	*aab*	*bba*	*cca*	*dda*	*abc*
bbb	*aac*	*bbc*	*ccb*	*ddb*	*abd*
ccc	*aad*	*bbd*	*ccd*	*ddc*	*acd*
ddd					*bcd*
Os 3 iguais	2 iguais e 1 diferente				Os 3 diferentes

daí, $CR_{4,3} = 20$.

Anotações:

A combinação completa $CR_{n,p}$ também pode ser interpretada de outra forma. Voltemos ao problema inicial da compra das quatro empadas na lanchonete que as oferece em sete sabores. Para efetuar a compra devemos escolher valores para as variáveis $x_1,\ x_2, x_3, \cdots, x_7$, onde x_1 é a quantidade que vamos comprar de empadas do 1º sabor, x_2 é a quantidade de empadas que vamos comprar do 2º sabor, ..., x_7 é a quantidade que vamos comprar de empadas do 7º sabor. Evidentemente, $x_1,\ x_2, x_3, \cdots, x_7$ devem ser inteiros não negativos, isto é, maiores ou iguais a zero e que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4.$$

Ou seja, comprar quatro empadas em uma lanchonete que as oferece em sete sabores é tomar uma solução em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4.$$

Vamos construir um quadro que possa representar algumas soluções para a equação, para isso, utilizaremos o esquema traço-bola, onde cada bola representa uma unidade no valor da incógnita e cada traço é usado para separar duas incógnitas.

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{x_7}$	*Solução*
● |	● |	|	|	● |	|	●	(1,1,0,0,1,0,1)
|	● |	● |	● |	● |	|		(0,1,1,1,1,0,0)
●● |	|	|	|	|	●● |		(2,0,0,0,0,2,0)
● |	|	●● |	|	|	|	●	(1,0,2,0,0,0,1)
|	|	●●● |	● |	|	|		(0,0,3,1,0,0,0)

Note, por exemplo, que a última solução exposta indica que foram compradas três empadas do 3º sabor e uma do 4º sabor.

Veja que para representar uma dada solução para a equação devemos arrumar em fila 4 bolas (pois em cada solução o total de unidades nas incógnitas é 4, já que $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 4$) e 6 traços (para separar as 7 incógnitas). Daí, o número de modos de fazer isso é o número de permutações desses 10 (4+6) objetos, onde um aparece 4 vezes e o outro 6 vezes, isto é,

$$P_{4+6}^{4,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = C_{10,4} = 210.$$

No caso geral, podemos interpretar $CR_{n,p}$ de dois modos:

i) $CR_{n,p}$ é o número de modos de escolher p objetos, distintos ou não, entre n objetos dados.
ii) $CR_{n,p}$ é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$.

E para calcular $CR_{n,p}$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras não negativas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

teríamos p bolas e $n-1$ traços. Logo,

$$\mathbf{CR_{n,p} = P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p! \cdot (n-1)!} = C_{(n+p-1),p}}$$

Problema 48: Uma papelaria vende certo tipo de canetas em três cores: azul, vermelho e preto. De quantas formas uma pessoa pode comprar cinco dessas canetas?

Solução:

Seja:
x o número de canetas azuis;
y o número de canetas vermelhas e
z o número de canetas pretas.

É claro que $x, y, z \in \mathbb{N}$ e $x + y + z = 5$.

Nosso problema consiste em achar o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x + y + z = 5.$$

Daí, 5 bolinhas que representam o número de unidades de canetas e como são três variáveis teremos 2 traços na representação de cada uma das soluções.
Portanto, o número de soluções será

$$P_{5+2}^{5,2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21.$$

Veja que a resposta é equivalente ao cálculo de $C_{7,5}$ e que depois da compreensão da ideia de que cada uma das soluções corresponde a uma permutação de bolas e traços, não se faz necessário decorar fórmulas.

ANOTAÇÕES:

#FICAADICA

Algumas simples observações podem nos levar a poupar alguns cálculos na hora da prova, então fica ligado!

- Dados n objetos distintos, só temos uma maneira de escolher "zero" deles que é, obviamente, escolhendo nenhum, portanto:

$$C_{n,0} = 1.$$

- Dados n objetos distintos, só há uma maneira de escolher n dentre eles que é, obviamente, escolhendo todos, portanto:

$$C_{n,n} = 1.$$

- Dado um conjunto de n elementos, escolher p deles é o mesmo que deixar $n - p$ de fora, assim:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}.$$

Essa propriedade é conhecida por igualdade de *combinações complementares*.
Vejamos o exemplo, dado um conjunto de 5 elementos, para cada subconjunto de 3 elementos sobra um subconjunto de 2, daí

$$C_{5,3} = C_{5,2}\ .$$

- Seja A um conjunto de n elementos, para calcularmos o número de subconjuntos de A, temos duas maneiras:
  i) Determinar quantos são os subconjuntos com zero elementos, quantos têm apenas um, quantos têm dois, ..., quantos tem n elementos, depois é só somar, isto é,

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n}\ .$$

  ii) Decidir sobre cada elemento se ele estará ou não no subconjunto que queremos formar, daí, para o primeiro elemento temos duas opções (está ou não está), para o segundo elemento temos duas, para o terceiro temos duas e assim por diante até chegar no n-ésimo, que também temos duas possibilidades. Portanto, pelo PFC, o total de subconjuntos que podemos formar é

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n.$$

Sendo assim, concluímos que:

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n.$$

ANOTAÇÕES:

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM:

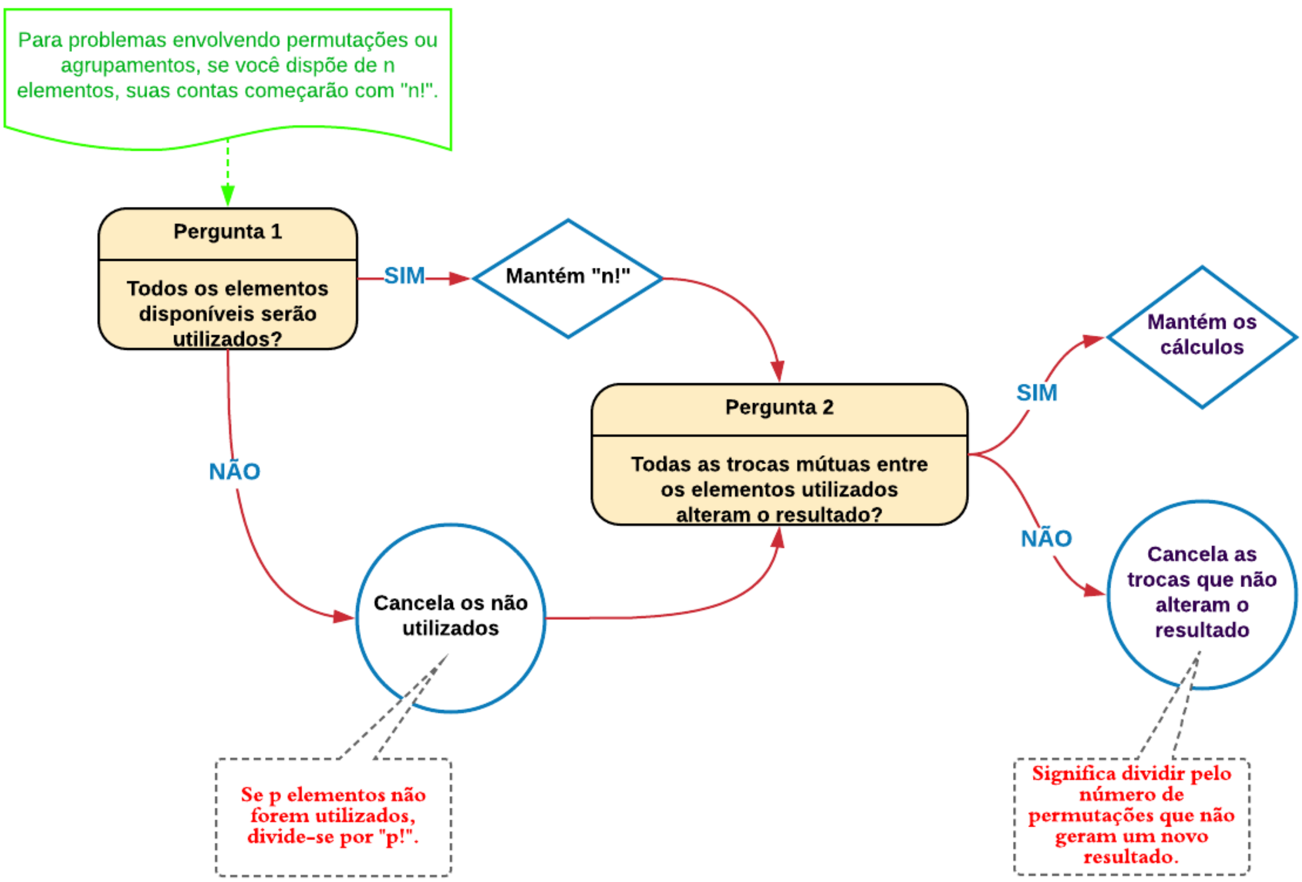
“Se uma decisão (D1) pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão (D2) pode ser tomada de q modos, então o número d maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões (D1) e (D2) é igual $p \cdot q$.”

PERMUTAÇÕES:

PERMUTAÇÃO SIMPLES	$P_n = n!$
PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS	$P_n^{a,b,c,\dots} = \dfrac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}$
PERMUTAÇÃO CIRCULAR	$(PC)_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

AGRUPAMENTOS

ARRANJO SIMPLES $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	▪ Sequência ▪ A ordem importa ▪ Toda troca entre os elementos utilizados gera um novo resultado
COMBINAÇÃO SIMPLES $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$	▪ Conjunto; ▪ A ordem não importa; ▪ As trocas entre os elementos utilizados não geram um novo resultado;



Hora de Praticar

::: PFC :::

Questão 01

(Ronaebson)

Um ciclista está fazendo uma trilha que passa por seis pontos de contemplação da natureza, a saber, os pontos A, B, C, D, E e F. A trilha possui ramificações de modo que é possível visitar cada um dos pontos nas mais diversas ordens possíveis.

De quantas maneiras diferentes pode planejar a sequência de visitas aos seis pontos, se, por uma questão de conveniência e horários, não quiser começar nem terminar pelos pontos A ou B?

Ⓐ 24
Ⓑ 48
Ⓒ 72
Ⓓ 144
Ⓔ 288

Questão 02

(Ronaebson)

Para desbloquear a tela do seu tablete, o usuário pode escolher uma senha que possui 4, 5 ou 6 dígitos escolhidos dentre os algarismos de 0 a 9, como descrito na imagem.

Qual a expressão que representa o número de senhas possíveis que o usuário pode escolher?

Ⓐ $10^4 + 10^5 + 10^6$
Ⓑ $10^4 \times 10^5 \times 10^6$
Ⓒ $C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6}$
Ⓓ $C_{10,4} \times C_{10,5} \times C_{10,6}$
Ⓔ $10 \times 9 \times 8 \times 7$

Questão 03

(Ronaebson)

Em um torneio de basquete, os pontos por partida são distribuídos da seguinte maneira:

- zero ponto por derrota;
- um ponto para cada empate;
- três pontos por vitória.

Num dado momento do campeonato, o time *Math* tem um total de 24 pontos. Para o final do campeonato, ainda restam sete partidas. Uma possível evolução de sua pontuação a partir desse momento do torneio pode ser dada por:

$$\mathbf{24 \longmapsto 25 \longmapsto 26 \longmapsto 29 \longmapsto 29 \longmapsto 30 \longmapsto 33 \longmapsto 34.}$$

O número de possibilidades distintas para evolução da pontuação desse time, a partir do referido momento, é

Ⓐ $C_{7,3}$ e a pontuação máxima que esse time pode atingir na competição é 21.
Ⓑ $A_{7,3}$ e a pontuação máxima que esse time pode atingir na competição é 45.
Ⓒ 7! e a pontuação máxima que esse time pode atingir na competição é 45.
Ⓓ 3^7 e a pontuação máxima que esse time pode atingir na competição é 21.
Ⓔ 3^7 e a pontuação máxima que esse time pode atingir na competição é 45.

Questão 04

(Ronaebson)

A cafeteria mais badalada de João Pessoa já começa a desenhar sua campanha publicitária para o carnaval 2023. Para isso, os sócios decidiram fazer um jogo de cores nas letras da palavra Cafeína e no _ logo abaixo do a.

Ficou decidido que o ícone ficará com sua cor original e que as letras deveriam ser pintadas, cada um de uma cor, dentre as cores azul, amarelo, verde, vermelho, rosa, roxo e laranja. Além disso, a cor do _ abaixo do a deve ter a mesma cor do respectivo a e letras adjacentes não podem ter a mesma cor.

O número de modos que essa marca pode ser pintada é

Ⓐ 7!
Ⓑ $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1$
Ⓒ $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7$
Ⓓ $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1$
Ⓔ $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1$

Questão 05

(Ronaebson)

A pequena sobrinha do tio Rona se chama **HANNAH**, que significa “favor”, “graça”, aquela que inspira outras pessoas.

Outra curiosidade sobre esse nome é que HANNAH é um palíndromo, ou seja, pode ser lido da esquerda para direita ou da direita para esquerda.

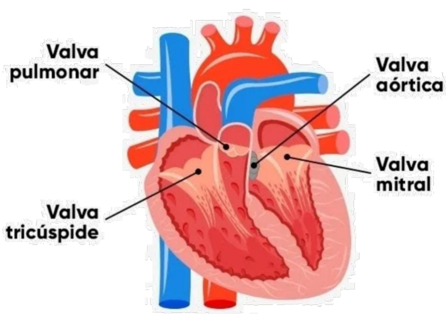
Qual o número de anagramas palíndromos da palavra HANNAH?

Ⓐ 3
Ⓑ 6
Ⓒ 15
Ⓓ 30
Ⓔ 120

Questão 06

(Ronaebson)

A estenose mitral quase sempre resulta de Febre reumática. Febre reumática é uma doença infantil que ocorre após alguns casos de faringite estreptocócica ou escarlatina não tratadas. Atualmente, a febre reumática é rara na América do Norte e Europa Ocidental, pois os antibióticos são amplamente utilizados para tratar a infecção. Assim, nessas regiões, a estenose mitral ocorre principalmente em pessoas idosas que tiveram febre reumática e que não tiveram o benefício do tratamento com antibióticos durante sua juventude ou em pessoas que se deslocaram de regiões onde antibióticos não são utilizados amplamente. Nessas regiões, a febre reumática é comum e causa estenose mitral em adultos, adolescentes e, às vezes, até mesmo em crianças. Normalmente, quando a febre reumática é a causa da estenose mitral, as cúspides da válvula mitral são parcialmente fundidas.



O coração tem 4 Válvulas (mitral, tricúspide, aortica e pulmonar). Cada uma delas pode ser acometida por 2 tipos de problemas (estenose e insuficiência), mas nunca haverá dois problemas em uma única válvula. Desconsiderando o caso em que nenhuma das quatro válvulas é acometida por problemas, qual o número de quadros clínicos possíveis de valvopatias?

Ⓐ 8
Ⓑ 15
Ⓒ 16
Ⓓ 80
Ⓔ 81

Questão 07

(Ronaebson)

O Brasil passou a adotar o sistema de placas para automóveis no padrão Mercosul, de modo que nas placas desse padrão são usadas quatro letras e três algarismos, com três letras nas três primeiras posições e a quarta letra na quinta posição, podendo haver repetição de letras ou de números. A figura ilustra esse tipo de placa.

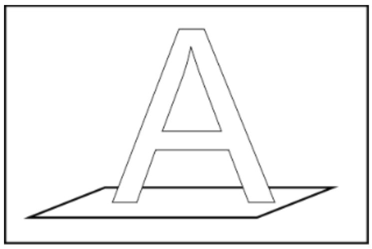
Assim, o número de placas possíveis do padrão Mercosul brasileiro de automóveis é igual a

Ⓐ $26^3 \cdot 36 \cdot 10^3$
Ⓑ $26^4 \cdot 10^3$
Ⓒ $26^4 \cdot 10^2$
Ⓓ $26^4 + 10^3$
Ⓔ $26^3 + 10 + 26 + 10^2$

Questão 08

(Ronaebson)

Logomarca, ou simplesmente logo, é a representação gráfica do nome de uma empresa ou marca, que determina a sua identidade visual e tem como objetivo facilitar o seu reconhecimento. Um designer deseja colorir a logo criada podendo usar as cores: preto, vermelho, azul e cinza. Mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da logo conforme a figura abaixo.



- O retângulo (fundo) pode ser pintado nas cores preto ou cinza;
- O “A” nas cores cinza, azul ou vermelho;
- O paralelogramo (base do “A”), nas cores azul ou preto.

Se o retângulo (fundo) não pode ter a mesma cor nem do “A” nem do paralelogramo, então o número de variações que podem ser obtidas para a logo é

Ⓐ 6.
Ⓑ 7.
Ⓒ 8.
Ⓓ 9.
Ⓔ 10.

Questão 09

(Ronaebson)

Para acesso à plataforma do curso Matemática Criativa, o aluno tem que possuir um *username* e uma *senha*. Essa senha tem um modelo predeterminado, de modo que ela deve possuir um total de 8 dígitos, onde:

- os quatro primeiros são letras escolhidas do nosso alfabeto, diferenciando, maiúsculas de minúsculas;
- o quinto dígito é um caractere especial escolhido dentre os cinco da lista (**$**, **#**, **%**, **@**, *****);
- os três últimos são algarismos de 0 a 9.

O número total de senhas possíveis para se ter acesso a essa plataforma é igual a

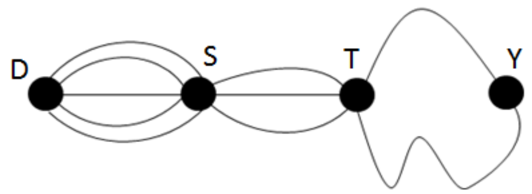
Ⓐ $52^4 \times 5 \times 10^3$.
Ⓑ $52^4 \times 5 \times 9^3$.
Ⓒ $52^4 \times 5 \times 9^3$.
Ⓓ $26^4 \times 1^5 \times 10^3$.
Ⓔ $26^4 \times 5 \times 10^3$.

Questão 10

(Ronaebson)

Ronaibe é o representante comercial da STAM nas regiões do Litoral e Brejo. Em virtude do seu trabalho ele viaja entre várias cidades dessa região divulgando e vendendo os produtos da empresa.

Ronaibe deseja visitar as cidades D, S, T e Y, partindo de D, passando por S, depois por T, visitando por último a cidade Y, para depois retornar a D.



Sabendo que as linhas acima representam as estradas que ligam as respectivas cidades. De quantas maneiras Ronaibe pode escolher o seu trajeto se não deseja passar pela mesma estrada duas vezes?

Ⓐ 17
Ⓑ 30
Ⓒ 38
Ⓓ 240
Ⓔ 900

ANOTAÇÕES:

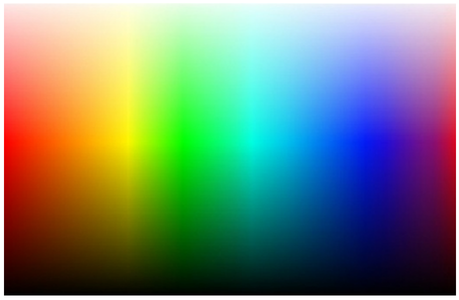
Questão 11

(Ronaebson)

No sistema RGB, cada cor é definida pela quantidade de vermelho (Red - R), verde (Green – G) e azul (Blue – B) que a compõe. Por conveniência, a maioria dos arquivos digitais atuais usam números inteiros entre 0 e 255 para especificar as quantidades dessas três cores que estão na composição de uma determinada cor, sendo que o número 0 indica ausência de intensidade e o número 255 indica intensidade máxima.

Nesse contexto, cada cor no sistema RGB é representada por uma combinação de números inteiros, em que

$$0 \leq R \leq 255;$$
$$0 \leq G \leq 255;$$
$$0 \leq B \leq 255.$$



O número de cores distintas que podem ser geradas a partir desse sistema é

Ⓐ 765.
Ⓑ 768.
Ⓒ 255^3.
Ⓓ 256^3.
Ⓔ 3^{256}.

Questão 12

(Ronaebson)

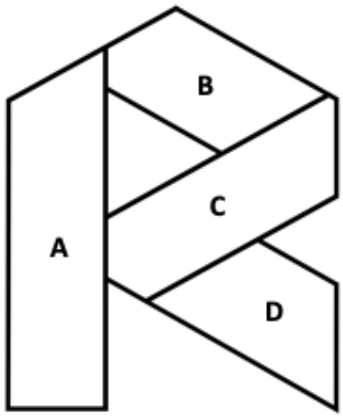
Uma pessoa vai visitar cinco pontos turísticos na cidade do Triunfo-PE, a saber: Pico do Papagaio, Cachoeira do Pinga, Casa Grande das Almas, Furna dos Holandeses e Cacimba de João Neco. De quantas maneiras diferentes pode planejar a sequência das cinco visitas, se, por uma questão de conveniência e horários, não quiser começar nem terminar pela Cachoeira do Pinga?

Ⓐ 36
Ⓑ 72
Ⓒ 96
Ⓓ 120
Ⓔ 240

Questão 13

(Ronaebson)

Para a campanha de marketing do curso Matemática Criativa no período do carnaval, a empresa de mídias decidiu colorir o ícone associado à logomarca do curso, de modo que apenas as regiões **A**, **B**, **C** e **D** indicadas no símbolo serão pintadas e, além disso, regiões que possuem uma linha de fronteira não podem ser pintadas com a mesma cor.



Sabendo que estarão disponíveis cinco cores distintas para aplicação na campanha, o número de maneiras diferentes de colorir o ícone, atendendo as condições dadas, é

Ⓐ 120.
Ⓑ 180.
Ⓒ 240.
Ⓓ 320.
Ⓔ 625.

Questão 14

(USC)

Em uma prova, as seis primeiras questões eram do tipo C/E, em que o candidato devia optar entre *certo* ou *errado* para sua resposta. Nas outras quatro questões, o candidato devia escolher, entre três alternativas, a verdadeira.
Quantas sequências de respostas são possíveis na resolução da prova?

Ⓐ $(6 \cdot 2)^2$
Ⓑ $(6 \cdot 2) + (4 \cdot 3)$
Ⓒ $6^2 \cdot 4^3$
Ⓓ 10^{2+3}
Ⓔ $2^6 \cdot 3^4$

ANOTAÇÕES:

Questão 15

(Ronaebson)

Críptex é uma palavra-valise criada por Dan Brown das palavras criptologia e códice (codex). No livro e filme O Código Da Vinci ele é um cofre no formato de cilindro supostamente criado por Leonardo da Vinci. Em muitos de seus esboços ele a descrevia como "caixa do mistério" ou "santo graal", pouco se sabe da veracidade do criptex, porém uma cópia fiel se encontra no museu do louvre.

O Criptex tem a forma cilíndrica, sua tranca é feita por um conjunto de anéis com todas as letras do alfabeto gravadas para efetuar a senha e abri-lo. O objetivo de um críptex é esconder uma mensagem (ou informação) de tal forma que somente a entrada correta (a senha) é capaz de revelá-la, abrindo o criptex. Qualquer tentativa de abri-lo à força bruta resulta na destruição imediata de seu conteúdo.

Disponível em https://www.conhecimentogeral.inf.br/criptex/
Acesso em 19/08/2018.

Considerando um *criptex* de cinco anéis como descrito acima, qual o número de possibilidades de senhas distintas?

Ⓐ 26^5
Ⓑ $26!$
Ⓒ $5 \cdot 26$
Ⓓ $\frac{26!}{21!}$
Ⓔ $\frac{26!}{21! \cdot 5!}$

Questão 16

(EPCAR_2017)

Um baralho é composto por 52 cartas divididas em 4 naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por 13 cartas, das quais 9 são numeradas de 2 a 10 e as outras 4 são 1 valete (J), 1 dama (Q), 1 rei (K) e 1 ás (A).

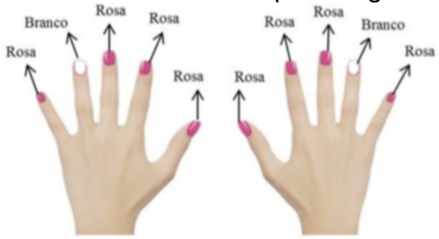
Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a

Ⓐ 612
Ⓑ 613
Ⓒ 614
Ⓓ 615

Questão 17

(UFSC)

Entre as últimas tendências da moda, pintar as unhas ganha um novo estilo chamado "filha única". A arte consiste em pintar a unha do dedo anelar de uma cor diferente das demais, fazendo uma coisa nas duas mãos, conforme mostra o exemplo na figura:



Perceba que todas as outras unhas possuem a mesma cor, apenas as unhas dos anelares que fica com uma cor diferente!
Larissa tem três diferentes de esmalte, então, usando essa forma de pintar as unhas, poderá fazê-lo de

Ⓐ 3 maneiras.
Ⓑ 6 maneiras.
Ⓒ 15 maneiras.
Ⓓ 30 maneiras.
Ⓔ 81 maneiras.

Questão 18

(UFSC)

No prédio que Gina mora, instalaram um sistema eletrônico de acesso, no qual, se deve criar uma senha com 4 algarismos, que devem ser escolhidos dentre os algarismos apresentados no teclado da figura.

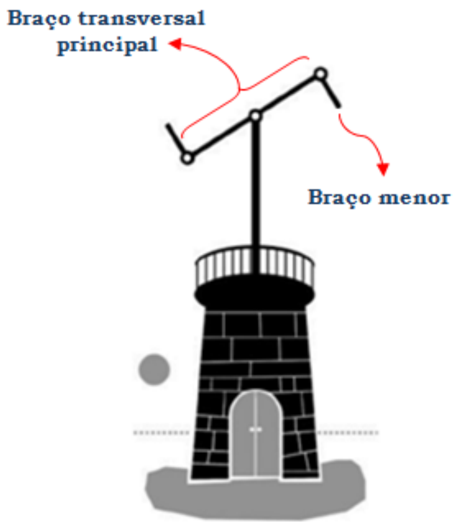
Para não esquecer a senha, ela resolveu escolher 4 algarismos dentre os 6 que representam a data de seu nascimento.
Dessa forma, se Gina nasceu em 27/10/93, quantas senhas ela pode formar com 4 algarismos distintos?

Ⓐ 24
Ⓑ 120
Ⓒ 360
Ⓓ 720
Ⓔ 1000

Questão 19

(Ronaebson)

Em 1791, os irmãos Claude e Ignace Chappe construíram um sistema de torres para acelerar os comunicados do governo revolucionário francês. A ideia proveio de um sistema que os irmãos haviam usado para enviar informações entre alojamentos no rígido internato que haviam frequentado quando crianças. Eles experimentaram uma porção de modos diferentes de mandar mensagens visuais, e por fim optaram por barras de madeira colocadas em diferentes ângulos, que o olho humano podia discernir com facilidade.



Os irmãos desenvolveram um código baseado num sistema móvel de braços de madeira articulados representando diferentes letras ou palavras comuns. O braço transversal principal podia ser colocado em quatro ângulos distintos, enquanto dois braços menores, presos às extremidades do transversal, tinham sete posições diversas cada.

SAUTOY, M. du. **Os Mistérios dos números.** São Paulo: Zahar, 2013.

O número de símbolos diferentes que esse código possibilitava os irmãos comunicarem era igual a

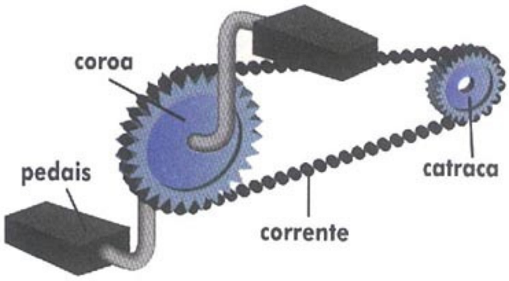
Ⓐ 18.
Ⓑ 28.
Ⓒ 49.
Ⓓ 196.
Ⓔ 784.

ANOTAÇÕES:

Questão 20

(Ronaebson)

No sistema de transmissão de uma bicicleta existe uma engrenagem acoplada ao pedal e outra na roda traseira, além de uma corrente. A corrente é responsável pela transmissão do movimento gerado pela pedalada do ciclista na engrenagem acoplada ao pedal para a engrenagem acoplada à roda, fazendo com que ela gire. As bicicletas evoluíram e, com isso, surgiu o sistema de marchas. Nesse sistema existem dois conjuntos de engrenagens, sendo um acoplado ao pedal (coroa) e outro, à roda traseira (pinhão ou catraca). Uma corrente é responsável pela ligação entre uma engrenagem da coroa e uma do pinhão, selecionadas pelo ciclista por meio de um mecanismo de seleção que, geralmente, fica no guidão.



Uma marcha é uma associação, feita pela corrente, de uma coroa e uma catraca.

Se uma bicicleta possui um sistema com três coroas e seis catracas, o número de marchas que essa bicicleta possui é igual a

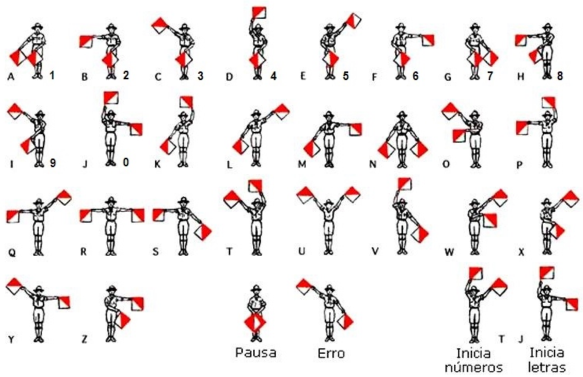
Ⓐ 1.
Ⓑ 10.
Ⓒ 18.
Ⓓ 21.
Ⓔ 24.

Anotações:

Questão 21

(Ronaebson)

A semáfora é, na verdade, um sistema óptico de sinalização baseado nas diversas posições que duas bandeirolas coloridas podem assumir quando empunhadas pelo transmissor. Na terminologia semafórica, cada caractere (que pode ser uma letra, um numeral ou um sinal de serviço) é representado por uma posição diferente das bandeirolas, formando, assim, um alfabeto próprio.
A semáfora é a técnica de transmissão mais barata que podemos praticar em nossas atividades. Com muito pouco dinheiro compra-se todo o material necessário para a confecção das bandeirolas. Ao contrário das torres de rádio, não há necessidade de manutenção nem de preocupação com a vida útil do equipamento e as restrições regulamentares e legislação são inexistentes! O único inconveniente da utilização da semáfora está no fato que ela é impraticável à noite!



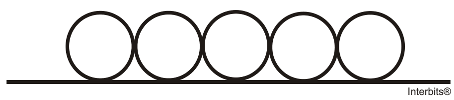
Sabendo que cada braço assume oito posições diferentes, o número de símbolos distintos possíveis de serem feitos com a semáfora é

Ⓐ 8.
Ⓑ 16.
Ⓒ 64.
Ⓓ 5040.
Ⓔ 40320.

Questão 22

(MACKENZIE)

Cada um dos círculos da figura deverá ser pintado com uma cor, escolhida dentre três disponíveis. Sabendo que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, o número de formas de se pintar os círculos é



Ⓐ 72.
Ⓑ 68.
Ⓒ 60.
Ⓓ 54.
Ⓔ 48.

Questão 23

(Ronaebson)

Um grupo de oito amigos participarão de um programa de auditório, sendo quatro moças e quatro rapazes. No palco há quatro bancos vagos, cada um deles com dois assentos, todos numerados. Ficou acertado que cada banco vago será ocupado por uma moça e um rapaz, e que Esther e Miguel, dois dos amigos, se sentarão juntos.

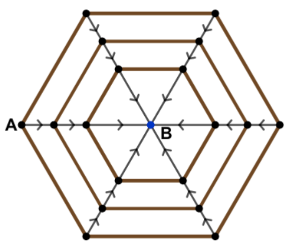
Respeitando-se esse acerto, de quantas maneiras o grupo de amigos pode se sentar nos assentos disponíveis no palco

Ⓐ 144.
Ⓑ 576.
Ⓒ 1728.
Ⓓ 2304.
Ⓔ 4608.

Questão 24

(Ronaebson)

Uma formiga caiu no ponto A de uma teia de aranha e quer chegar ao ponto B sem passar mais de uma vez pelo mesmo segmento de teia. Além disso, ao percorrer um segmento radial (traço mais fino), ela só poderá seguir o sentido indicado pela flecha ou andar através dos segmentos de teias do hexágono em que ela se encontra.



Quantos são os caminhos possíveis?

Ⓐ 13^3
Ⓑ 6^3
Ⓒ $2^3 \times 6$
Ⓓ $6^3 \times 2$
Ⓔ $12^3 \times 3$

Questão 25

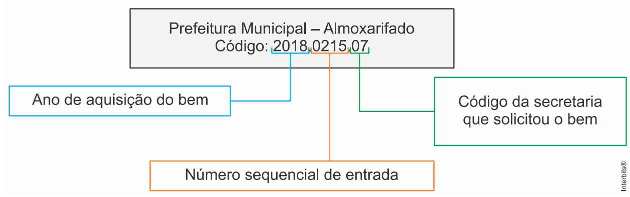
Para uma viagem, seis amigos alugaram três motocicletas distintas, com capacidade para duas pessoas cada. Sabe-se que apenas quatro desses amigos são habilitados para pilotar motocicletas e que não haverá troca de posições ao longo do percurso. De quantas maneiras distintas esses amigos podem se dispor nas motocicletas para realizar a viagem?

Ⓐ 24
Ⓑ 72
Ⓒ 120
Ⓓ 144
Ⓔ 720

Questão 26

(Fac. Albert Einstein)

O almoxarifado de uma prefeitura utiliza chapas metálicas para identificar bens materiais adquiridos por uma das 8 secretarias municipais. Nas chapas são gravados códigos com 10 dígitos numéricos, a fim de identificar o bem em questão. O esquema apresenta um exemplo dessas chapas.



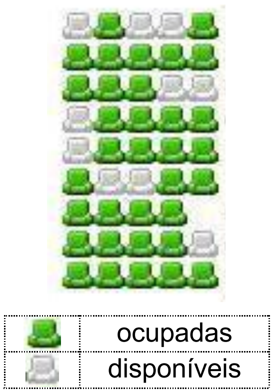
Dado que o número sequencial de entrada é composto por 4 dígitos e iniciado em 0001 para cada uma das secretarias, o sistema de codificação permite a essa prefeitura, considerando as 8 secretarias, ao longo de um ano, a codificação de, no máximo,

Ⓐ 8000 bens.
Ⓑ 7992 bens.
Ⓒ 80000 bens.
Ⓓ 989901 bens.
Ⓔ 79992 bens.

Questão 27

(Ronaebson)

A família Sampaio é composta por três membros, a saber, o casal Glauber e Soraia e seu filho Miguel. Quando eles foram comprar os ingressos para o filme *Vingadores: Ultimato*, as únicas cadeiras disponíveis para a sessão que eles queriam estavam no último setor (região) da sala como descrito na figura.



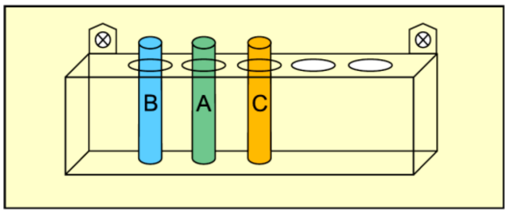
De quantas maneiras a família pode escolher as cadeiras para sentar-se, sabendo que o casal quer ficar lado a lado?

Ⓐ 24
Ⓑ 32
Ⓒ 45
Ⓓ 48
Ⓔ 64

Questão 28

(Famema_2018)

Três tubos de ensaio, com rótulos A, B e C, serão colocados em um suporte que possui cinco lugares alinhados e encontra-se fixado em uma parede. A figura mostra uma das possíveis disposições dos tubos.



Sabendo que o tubo com o rótulo A não pode ocupar as extremidades do suporte, o número de maneiras distintas de esses tubos serem colocados nesse suporte é

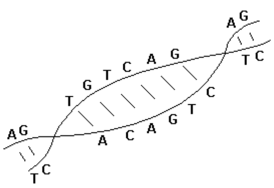
A 12.
B 24.
C 36.
D 18.
E 30.

Questão 29

(UFF)

O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A-T, T-A, C-G e G-C.

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:
- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par A-T não seja seguido por um par T-A e vice-versa;
- um par C-G não seja seguido por um par G-C e vice-versa.



Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem. Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

A 2^{11}.
B 2^{20}.
C 2×10.
D 2^{10}.
E $2^2 \times 10$.

Questão 30

(UFPB)

A prefeitura de certo município solicitou ao Governo Federal uma verba para a execução das seguintes obras:

- saneamento básico;
- calçamento de ruas;
- construção de uma escola;
- construção de uma creche;
- construção de casas populares.

O Governo Federal aprovou a concessão da verba solicitada, na condição de que fosse estabelecida uma ordem na execução das obras, de modo que, tendo sido liberada a verba para a primeira obra, a verba para a segunda só seria liberada após a conclusão da primeira, e assim sucessivamente até a execução da última obra. Nesse contexto, considere o planejamento feito pela prefeitura:

- a primeira obra escolhida foi a construção das casas populares;
- o calçamento das ruas só poderá ser executado com o saneamento básico concluído.

Atendendo às condições estabelecidas pelo Governo Federal e ao planejamento da prefeitura, é correto afirmar que o número de maneiras possíveis e distintas para a realização dessas 5 obras é:

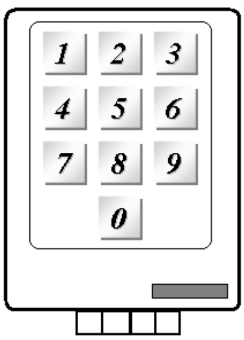
A 8
B 10
C 12
D 14
E 16

Questão 31

(IME

O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura um ladrão observa de longe e percebe que:

- A senha utilizada possui 4 dígitos;
- O primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- O segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.



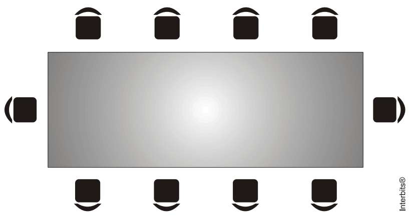
O número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa é

A 81. **B** 162. **C** 170. **D** 171. **E** 172.

Questão 32

(PUC)

Na sala de reuniões de certa empresa há uma mesa retangular com 10 poltronas dispostas da forma como é mostrado na figura abaixo.



Certo dia, sete pessoas foram convocadas para participar de uma reunião a ser realizada nessa sala: o presidente, o vice-presidente, um secretário e quatro membros da diretoria. Sabe-se que: o presidente e o vice-presidente deverão ocupar exclusivamente as poltronas das cabeceiras da mesa; o secretário deverá ocupar uma poltrona ao lado do presidente.
Considerando que tais poltronas são fixas no piso da sala, de quantos modos as sete pessoas podem nelas se acomodar para participar de tal reunião?

- **A** 3.360.
- **B** 2.480.
- **C** 1.680.
- **D** 1.240.
- **E** 840.

Questão 33

(UPE-SSA)

Um palíndromo ou capicua é um número, que se lê da mesma maneira nos dois sentidos, ou seja, da esquerda para a direita ou ao contrário, como 333, 1661 e 28482.
Assinale a alternativa correspondente à quantidade de palíndromos que são números pares de cinco algarismos do nosso sistema de numeração.

- **A** 300
- **B** 400
- **C** 500
- **D** 600
- **E** 800

Questão 34

(PUC_SP_2017)

Uma pessoa dispõe das seguintes cores de tinta: amarela, azul, verde, vermelha e branca, e irá utilizá-las para pintar um pote. Nesse pote serão pintadas a tampa, a lateral e uma lista na lateral, de modo que a tampa e a lateral poderão ter a mesma cor ou cores diferentes. O número de maneiras distintas de pintar esse pote é

- **A** 100
- **B** 80
- **C** 60
- **D** 40

Questão 35

(FAc. Albert Einstein_2017)

Um patrão tem 6 tarefas diferentes para serem distribuídas entre 3 empregados. Ele pode delegar todas elas a um só empregado, ou delegar apenas para alguns, ou ainda garantir que cada empregado receba pelo menos uma tarefa. O número de maneiras distintas de distribuir essas tarefas é

- **A** 639
- **B** 714
- **C** 729
- **D** 864

Questão 36

(UFU_2017)

Para realizar uma venda, uma loja virtual solicita de seus clientes o cadastramento de uma senha pessoal que permitirá acompanhar a entrega de sua compra. Essa senha anteriormente era composta por quatro algarismos e uma letra (minúscula), sem quaisquer restrições de posicionamentos entre letra e algarismos. Com o grande aumento no número de vendas, houve a necessidade de ampliação no número de senhas, as quais passaram a ser compostas por cinco algarismos e uma letra (minúscula). Sabe-se que existem 26 letras no alfabeto e 10 algarismos disponíveis.

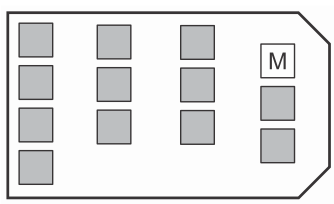
Se denotarmos por N e M, respectivamente, o número total de senhas possíveis, antes e após a mudança, então, a relação entre N e M é dada por:

- **A** $M = 10 \cdot N$
- **B** $M = 5! \cdot N$
- **C** $M = 6! \cdot N$
- **D** $M = 12 \cdot N$

Questão 37

(FMP)

A figura abaixo mostra o desenho de uma van. O lugar do motorista está assinalado com M e os lugares dos passageiros são os quadradinhos sombreados.



A van está, inicialmente, vazia e Bruno e Ana serão os primeiros a entrar. Eles desejam sentar juntos (um ao lado do outro), mas Ana não quer ficar ao lado do motorista.

Considerando esse contexto, de quantas maneiras esse casal pode se sentar nessa van?

- **A** 6
- **B** 14
- **C** 30
- **D** 7
- **E** 15

Questão 38

(IBMEC_RJ)

Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem sentar, respeitadas as preferências?

A Um número inteiro maior que 40000.
B Um número inteiro entre 167 e 40000.
C Exatamente 166.
D Um número inteiro menor que 100.
E Exatamente 40000.

Questão 39

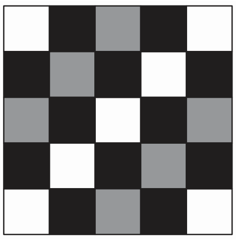
(FATEC_2017)

Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um [1]*pixel* na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada pixel, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255).

[1]Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Suponha que na figura estejam representados 25 *pixels* de uma tela.



A matriz numérica correspondente às cores da figura apresentada é dada por

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

O número máximo de matrizes distintas que podem ser formadas com 25 *pixels* de tamanho, em que se possa preencher cada pixel com qualquer uma dentre as 256 cores da escala de cinza, é igual a

A 256^{256}.
B 127^{25}.
C 25^{25}.
D 256^{25}.
E 0^{256}.

Questão 40

(IFPE_2017)

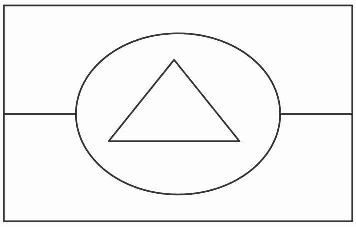
Um *pixel* é o menor elemento de uma imagem digital e, em casos de imagens coloridas, é composto por um conjunto de 3 pontos: vermelho, verde e azul. Cada um desses pontos é capaz de exibir 256 tonalidades distintas. Combinando tonalidades desses três pontos, quantas cores diferentes podem ser exibidas?

A 3^{256}
B $3 \cdot 256$
C 256^3
D 256
E $27 \cdot 256$

Questão 41

(UNISSINOS)

A bandeira a seguir está dividida em 4 regiões. Cada região deverá ser pintada com uma cor, e regiões que fazem fronteira devem ser pintadas com cores diferentes.



Sabendo que dispomos de 6 cores, de quantas maneiras distintas podemos pintar essa bandeira?

A 20.
B 24.
C 120.
D 600.
E 720.

Questão 42

(Fuvest)

Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1,2,3,4,5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

A 551
B 552
C 553
D 554
E 555

::: PERMUTAÇÃO :::

Questão 43

(Ronaebson)

Pedro tem um quarto repleto de itens “geek”, entre eles, suas *action figures*, que são pequenas réplicas de personagens de séries ou filmes. Sobre elas, temos a seguinte distribuição.

Franquia	Tipo	Quantidade
Marvel	Heróis	5
	Vilões	3
DC	Heróis	6
	Vilões	2

Pedro dispõe de uma grande prateleira nesse quarto onde expõe suas todas as suas action figures enfileiradas. Qual o total de maneiras que Pedro pode enfileirar suas action figures de modo que as réplicas de mesma franquia devem ficar sempre juntas e, além disso, considerando os itens de uma mesma franquia, as de mesmo tipo também devem ficar juntas?

Ⓐ $16!$
Ⓑ $2! \cdot 8!$
Ⓒ $(2!)^4 \cdot 5! \cdot 3! \cdot 6!$
Ⓓ $4 \cdot 2! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 6!$
Ⓔ $(2!)^2 \cdot 8! \cdot 8!$

Questão 44

(Ronaebson)

Na série de livros “Desventuras em Série”, do autor Snicket Lemony, os irmãos Baudelaire perdem os pais num incêndio muito suspeito e passam a ter como tutor o COUNT OLAF, que era um ator e tinha todo um grupo de “associados”, que os chamava de ‘trupe teatral”. Ele escreveu suas próprias peças, assinadas com pseudônimos que representavam anagramas de seu nome. Por exemplo, algumas delas foram assinadas como AL FUNCOOT.

Desconsiderando os possíveis espaços nos pseudônimos, o número de peças distintas que ele poderá assinar, sendo cada uma com um pseudônimo diferente é

Ⓐ $\frac{9!}{2!}$.
Ⓑ $7!$
Ⓒ $9!$.
Ⓓ $2! \cdot 9!$.
Ⓔ $9! - 2!$.

Questão 45

(FATEC)

Seis pessoas, entre elas João e Pedro, vão ao cinema. Existem seis lugares vagos, alinhados e consecutivos. O número de maneiras distintas como as seis podem sentar-se sem que João e Pedro fiquem juntos é

Ⓐ 720.
Ⓑ 600.
Ⓒ 480.
Ⓓ 240.
Ⓔ 120.

Questão 46

(UPE-SSA_2022)

"Nervoso e confiante, folheou imediatamente o álbum. Um pouco adiante, outra surpresa o esperava. Era uma página que estampava letras maiúsculas, seguidas por uma linha de algarismos. Nove dessas letras e três desses algarismos haviam sido retirados cuidadosamente. Sholmes escreveu-os na sua caderneta, seguindo as lacunas pela ordem, e obteve o seguinte resultado:

CDEHNOPRS237

[...] a princípio isso não significa muita coisa. Seria possível, misturando aquelas letras e usando todas elas, formar uma, ou duas, ou três palavras completas?".

Maurice Leblanc, Arsène Lupin contra Herlock Sholmes, SP: Tricaju, 2021.

O detetive testou alguns dos anagramas que poderia obter com aquela sequência de letras e números. Quantos anagramas podem ser assim obtidos, desde que os algarismos sempre fiquem juntos?

Ⓐ $9! \cdot 3!$
Ⓑ $10! \cdot 3!$
Ⓒ $12!$
Ⓓ $(9 \cdot 3)!$
Ⓔ $9! \cdot 3! \cdot 2!$

Questão 47

(Ronaebson)

Dona Izabel vai receber sua família para um café da manhã e, para mesa, ela decide colocar três tipos de frutas e quatro tipos de pães, onde todos deverão ficar dispostos sobre a mesa. Ela tem à sua disposição cinco tipos de frutas e seis tipos de pães.

Dado que esses itens ficarão dispostos lado a lado em torno de um círculo sobre um prato circular giratório, o número de formas distintas que ela tem de organizar a mesa levando em consideração as posições relativas dos itens escolhidos em relação aos outros é igual a

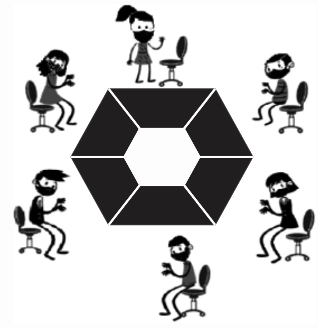
Ⓐ 150.
Ⓑ 3000.
Ⓒ 21600.
Ⓓ 108000.
Ⓔ 756000.

Questão 48

(FCMMG_2022)

Diferentes protocolos de segurança foram elaborados para o enfrentamento da pandemia de Covid-19. No ambiente escolar, uma das orientações comuns para o retorno às salas de aula relaciona-se com a organização em “bolhas”. O modelo consiste em determinar horários e ocupações de locais específicos para cada turma, evitando ao máximo o contato entre alunos de turmas diferentes.

Pensando em também reduzir o contato entre estudantes de uma mesma turma, certa escola optou por criar equipes fixas de seis estudantes. Para isso, mudou a disposição das carteiras das salas, reorganizando-as em formato hexagonal, como o esquema representado na figura abaixo.



(Disponível em https://www.powtoon.com/.Acesso em 26/10/2021. Adaptado.)

Considerando o modelo adotado pela escola, seis estudantes de determinada equipe podem ser dispostos ao redor do formato hexagonal de:

- Ⓐ 20 formas.
- Ⓑ 30 formas.
- Ⓒ 120 formas.
- Ⓓ 720 formas.

Questão 49

(Ronaebson)

A biblioteca do Curso de Matemática tem uma prateleira com 15 livros, sendo quatro de Combinatória, cinco de Geometria e seis de Funções. A secretária do curso decidiu organizá-los, colocando-os lado a lado, entretanto, a recomendação dada foi a de que livros de um mesmo assunto devem ficar juntos.
Assim, o número de maneiras diferentes que ela tem de organizar esses livros seguindo a recomendação dada é

- Ⓐ $15!$.
- Ⓑ $4! \cdot 5! \cdot 6!$.
- Ⓒ $3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6!$.
- Ⓓ $4! + 5! + 6!$.
- Ⓔ $6 \cdot (4! + 5! + 6!)$.

Questão 50

(Ronaebson)

“Nõa imorpta a oderm das ltreas drtneo da pvarala, bsata que a pmrireia e a úmtila etjasem no lguar crteo praa que vcoê enedtna o que etsá erctiso.”

Se você ainda não conseguiu, o texto diz: *Não importa a ordem das letras dentro da palavra, basta que a primeira e a última estejam no lugar certo para que você entenda o que está escrito.*

Mas como o nosso cérebro é capaz de executar estas tarefas?

A resposta, infelizmente, ainda não é muito certa. A ciência ainda diverge sobre os mecanismos mentais envolvidos no processo, embora haja fortes suspeitas. Neurologistas da Universidade da Califórnia (San Diego, EUA), por exemplo, explicam que o principal instrumento para isso é o contexto.

Disponível em: https://hypescience.com/como-sue-cerbero-pedo-lre-itso/
Acesso em 18/05/2018.

Com base no texto, quantos são os anagramas da palavra OFICIAL que uma pessoa poderá entender corretamente dentro de um dado contexto, isto é, quantos são os anagramas da palavra OFICIAL que começam com a letra O e terminal com a letra L?

- Ⓐ 30
- Ⓑ 60
- Ⓒ 120
- Ⓓ 240
- Ⓔ 5040

Questão 51

(OBM)

Dizemos que uma palavra *Q* é *quase-anagrama* de outra palavra *P* quando *Q* pode ser obtida retirando-se uma letra de *P* e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que *P*. Um quase-anagrama pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, RARO, RACR e ARCO são quase-anagramas de CARRO.
Quantos são os quase-anagramas da palavra BACANA que começam com A?

- Ⓐ 48
- Ⓑ 60
- Ⓒ 72
- Ⓓ 96
- Ⓔ 120

Questão 52

(PUC)

Alfredo, Armando, Ricardo, Renato e Ernesto querem formar uma sigla com cinco símbolos, onde cada símbolo é a primeira letra de cada nome. O número total de siglas possíveis é

- Ⓐ 10.
- Ⓑ 24.
- Ⓒ 30.
- Ⓓ 60.
- Ⓔ 120.

Questão 53

(Ronaebson)

A esgrima é um esporte que evoluiu da antiga forma de combate, em que o objetivo é tocar o adversário com uma lâmina ao mesmo tempo em que se evita ser tocado por ele. Existem três disciplinas de esgrima: o florete, a espada e o sabre, diferindo não só no formato da lâmina, mas também nas zonas do corpo onde um toque é válido e também como as armas funcionam.

Um esgrimista tem a sua disposição cinco movimentos básicos: a balestra, a estocada, a flecha, a reprise e a resposta.

Supondo que um esgrimista, preparando-se para um torneio internacional, queira criar uma sequência com sete movimentos, empregando necessariamente duas balestras, três estocadas, uma flecha e uma reprise, tem-se que o número máximo de sequências de movimentos que ele poderá criar nas condições propostas é

A 420.
B 720.
C 840.
D 5040.
E 10080.

Questão 54

(Ronaebson)

Em um torneio de handebol, os pontos por partida são distribuídos da seguinte maneira:

- três pontos por vitória;
- zero ponto por derrota;
- um ponto para cada empate.

Uma equipe disputou seis partidas, vencendo duas delas, perdendo uma e empatando três. Uma evolução possível da pontuação desse time no torneio está representada por:

$$\mathbf{0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9}$$

O número de possibilidades distintas para a evolução da pontuação dessa equipe é igual a

A 20.
B 60.
C 120.
D 240.
E 720.

Questão 55

(Ronaebson)

A Bett Educar é o maior evento de educação e tecnologia da América Latina. Congrega, anualmente, mais de 270 empresas nacionais e internacionais, mais de 20 startups do setor e cerca de 30.000 participantes da comunidade educacional de todos os estados brasileiros, que se encontram com o propósito de buscar inspiração, discutir o futuro da educação e o papel que a tecnologia e a inovação desempenham na formação de todos os educadores e estudantes.

Um grande grupo educacional comprou cinco estandes dessa feira para que cada uma de suas cinco escola pudessem estar expostas, dois dos estandes ficam na entrada, um do lado direito, outro do lado esquerdo, o terceiro estande fica no centro do salão, o quarto estande fica próximo à praça de alimentação e o quinto estande fica em frente ao grande salão de palestras.

O número de maneiras distintas que o grupo educacional pode distribuir suas cinco escolas nessa feira é

A 5.
B 25.
C 120.
D 600.
E 3125.

Questão 56

(Ronaebson)

Um desarranjo ou permutação caótica de n elementos distintos é um tipo de permutação em que nenhum elemento fica no seu lugar de origem. Assim, para o conjunto de números (1, 2, 3, 4, 5), a permutação 23154 é caótica, mas 52134 não é, pois o 2 está no seu lugar de origem.

O número de permutações caóticas de n elementos distintos é dado por

$$D_n = n! \cdot \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

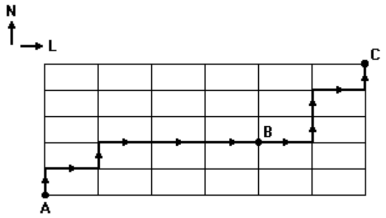
O número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra ELFO, de modo que pelo menos uma letra permaneça na sua posição origem é

A 8.
B 9.
C 15.
D 16.
E 24.

Questão 57

(Fuvest)

A figura a seguir representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João(A), de Maria(B), a escola(C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para o Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?



A 150
B 250
C 720
D 120
E 462

Questão 58

(ESPCEX)

Oito alunos, entre eles Gomes e Oliveira, são dispostos na primeira fileira do auditório da EsPCEx, visando assistirem a uma palestra. Sabendo-se que a fileira tem 8 poltronas, de quantas formas distintas é possível distribuir os 8 alunos, de maneira que Gomes e Oliveira não fiquem juntos?

A $8!$
B $7 \cdot 7!$
C $7!$
D $2 \cdot 7!$
E $6 \cdot 7!$

Questão 59

(FUVEST)

Uma lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família Sousa, o casal Lúcia e Mauro e mais quatro pessoas. Além disso,

- a família Sousa quer ocupar um mesmo banco;
- Lúcia e Mauro querem sentar-se lado a lado.

Nessas condições, o número de maneiras distintas de dispor os nove passageiros no lotação é igual a

A 928.
B 1152.
C 1828.
D 2412.
E 3456.

Questão 60

(UFMG)

Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolheram sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Nesse caso, o número de maneiras diferentes de se fazer a programação dessa semana é

A 144.
B 576.
C 720.
D 1040.

Questão 61

(EPICAR_2018)

Dez vagas de um estacionamento serão ocupadas por seis carros, sendo: 3 pretos, 2 vermelhos e 1 branco.

Considerando que uma maneira de isso ocorrer se distingue de outra tão somente pela cor dos carros, o total de possibilidades de os seis carros ocuparem as dez vagas é igual a

A 12600
B 16200
C 21600
D 26100

Questão 62

(Fac. Albert Einstein_2017)

Oito adultos e um bebê irão tirar uma foto de família. Os adultos se sentarão em oito cadeiras, um adulto por cadeira, que estão dispostas lado a lado e o bebê sentará no colo de um dos adultos. O número de maneiras distintas de dispor essas 9 pessoas para a foto é

A $8 \cdot 8!$
B $9!$
C $9 \cdot 8^8$
D 8^9

Questão 63

(IFPE)

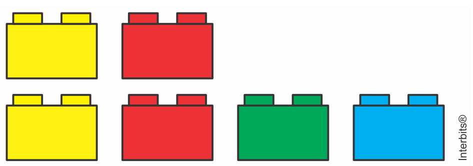
Uma urna contém 10 bolas, sendo 3 bolas pretas iguais, 3 bolas brancas iguais, 2 bolas verdes iguais e 2 bolas azuis iguais. Quantas são as maneiras diferentes de se extrair, uma a uma, as 10 bolas da urna, sem reposição?

A 25200
B 10!
C 144
D 3600
E 72000

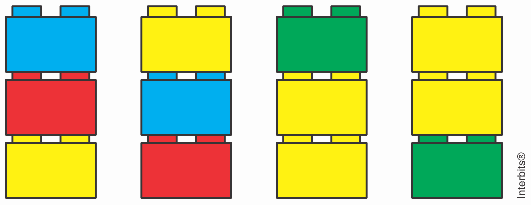
Questão 64

(UNESP_2017)

Uma criança possui 6 blocos de encaixe, sendo 2 amarelos, 2 vermelhos, 1 verde e 1 azul.



Usando essas peças, é possível fazer diferentes pilhas de três blocos. A seguir, são exemplificadas quatro das pilhas possíveis.



Utilizando os blocos que possui, o total de pilhas diferentes de três blocos, incluindo as exemplificadas, que a criança pode fazer é igual a

- Ⓐ 58.
- Ⓑ 20.
- Ⓒ 42.
- Ⓓ 36.
- Ⓔ 72.

Questão 65

(UNISC)

Newton possui 7 livros distintos, sendo 3 de Álgebra, 2 de Cálculo e 2 de Geometria. O número de maneiras diferentes que Newton pode organizar esses livros em uma estante, de forma que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos, é

- Ⓐ 24
- Ⓑ 36
- Ⓒ 56
- Ⓓ 72
- Ⓔ 144

Questão 66

(Ronaebson)

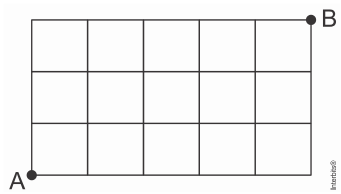
O professor de ciências levou 6 alunos do 5º. Ano para uma aula de campo. De quantas formas as 6 crianças podem se sentar numa fileira de 6 cadeiras? De quantas formas as 6 crianças podem formar uma roda?

- Ⓐ 720 e 120
- Ⓑ 600 e 120
- Ⓒ 720 e 340
- Ⓓ 120 e 24
- Ⓔ 320 e 48.

Questão 67

(UPF)

Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é:



- Ⓐ 40320
- Ⓑ 6720
- Ⓒ 256
- Ⓓ 120
- Ⓔ 56

Questão 68

(IFSP)

João trocou os móveis de seu quarto e, junto ao novo guarda-roupa, há também uma sapateira. João possui 7 pares de sapato do tipo social, 3 pares de tênis esportivos e 3 pares de chinelos. Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta a quantidade de disposições possíveis para os calçados, desde que os calçados de mesmo tipo fiquem juntos, lado a lado.

- Ⓐ 181440
- Ⓑ 209350
- Ⓒ 709890
- Ⓓ 920870
- Ⓔ 1088640

Questão 69

(IFSC)

Um banco está testando um novo produto e disponibilizou a alguns dos seus clientes acesso via internet para esse produto, por meio de senhas compostas por cinco vogais distintas e dois números pares distintos, de 2 a 8, nessa ordem, ou seja, primeiro as vogais e depois os números. O número de clientes que podem acessar esse novo produto, via internet, é:

- Ⓐ 22.
- Ⓑ 3520.
- Ⓒ 1440.
- Ⓓ 180.
- Ⓔ 920.

Questão 70

(FATEC)

No Boxe, um dos esportes olímpicos, um pugilista tem à sua disposição quatro golpes básicos: o *jab*, o *direto*, o *cruzado* e o *gancho*. Suponha que um pugilista, preparando-se para os Jogos Olímpicos do Rio, em 2016, queira criar uma sequência com 6 golpes, empregando necessariamente dois *jabs*, dois *diretos*, um *cruzado* e um *gancho*.

Assim, o número máximo de sequências que ele poderá criar será de

A 180.
B 160.
C 140.
D 120.
E 100.

Questão 71

(PUC_RJ)

Uma criança ganhou seis picolés de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate, representados, respectivamente, pelas letras B, M e C. De segunda a sábado, a criança consome um único picolé por dia, formando uma sequência de consumo dos sabores. Observe estas sequências, que correspondem a diferentes modos de consumo:

(B,B,M,C,M,C) ou (B,M,M,C,B,C) ou (C,M,M,B,B,C)

O número total de modos distintos de consumir os picolés equivale a:

A 6.
B 90.
C 180.
D 720.

Questão 72

(UEMA)

Uma professora de educação infantil de uma escola, durante a recreação de seus 6 alunos, organiza-os em círculos para brincar. Considere a seguinte forma de organização dos alunos pela professora: são três meninas e três meninos e cada menina ficará ao lado de um menino, de modo alternado. As possibilidades de organização dos seus alunos são

A 4.
B 6.
C 9.
D 12.
E 16.

Questão 73

(MACKENZIE)

Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é

A $9 \cdot 9!$
B $8 \cdot 9!$
C $8 \cdot 8!$
D $\frac{10!}{2}$
E $\frac{10!}{4}$

Questão 74

(UFMG)

Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas vermelhas e cinco vestem camisas verdes. Deseja-se formar uma fila com essas pessoas de forma que as três primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as seguintes mantenham a seqüência de cores dada pelas três primeiras. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode fazer tal fila?

A $3(5!)^3$
B $(5!)^3$
C $(5!)^3(3!)$
D $15!/(3!\,5!)$

Questão 75

(Ronaebson)

Um grupo de dez amigos, sendo cinco homens de alturas diferentes e cinco mulheres de alturas também diferentes são colocados em fila, obedecendo aos seguintes critérios:

- Homens em ordem crescente de altura;
- Mulheres em ordem decrescente de altura.

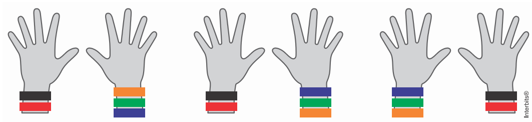
Dadas as condições, de quantos modos distintos os dez amigos podem ser dispostos na fila?

A $10!$
B $\frac{10!}{2\cdot5!}$
C $\frac{10!}{5!\cdot5!}$
D $\frac{10!}{2\cdot5!\cdot5!}$
E $2 \cdot 5! \cdot 5!$

Questão 76

(UEFS_2018)

Daniela tem 5 pulseiras diferentes e as utiliza necessariamente colocando-as uma após a outra. Ela pode usar todas as pulseiras em apenas um braço ou distribuí-las entre os braços direito e esquerdo. Daniela considera como um arranjo diferente tanto o braço em que as pulseiras são colocadas quanto a ordem como elas são distribuídas. As figuras mostram três arranjos diferentes que Daniela pode fazer.



O número de arranjos diferentes que Daniela pode fazer usando todas essas pulseiras é

Ⓐ 240.
Ⓑ 360.
Ⓒ 480.
Ⓓ 600.
Ⓔ 720.

Questão 77

(UFT_2023)

Carol abriu uma conta em uma rede social que permite que sejam postadas nove fotos em uma grade com espaços dispostos como na figura seguinte. Em uma das linhas horizontais, Carol pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para Salvador, em outra, ela pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para o Jalapão e, na restante, pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para o Rio de Janeiro. Carol possui 4 fotos de sua viagem para Salvador, 5 fotos de sua viagem para o Jalapão e 5 fotos de sua viagem para o Rio de Janeiro, todas distintas.

FOTO 9	FOTO 8	FOTO 7
FOTO 6	FOTO 5	FOTO 4
FOTO 3	FOTO 2	FOTO 1

Nestas condições, é CORRETO afirmar que o número total de possibilidades de Carol organizar suas fotos é:

Ⓐ $(5!)^2 \times 3!$
Ⓑ $(5!)^2 \times (3!)^2$
Ⓒ $(5!)^2 \times (4!)^2$
Ⓓ $5! \times 4!$

::: AGRUPAMENTOS :::

Questão 78

(Ronaebson)

Um grupo de adolescentes é formado por sete casais. Uma brincadeira é proposta e a ideia é que inicialmente serão selecionadas quatro pessoas para compor um quarteto, entretanto, não será permitido que nesse quarteto tenha um casal dentre os sete.

Qual o total de maneiras diferentes de formar esse quarteto?

Ⓐ 35.
Ⓑ 70.
Ⓒ 140.
Ⓓ 280.
Ⓔ 560.

Questão 79

(Ronaebson)

Uma escola possui 12 professores de humanas, sendo que oito deles atuam exclusivamente como professores de história e quatro atuam exclusivamente como professores de geografia.
Para a elaboração da primeira Olimpíada de Humanas da escola, será formada uma comissão com cinco desses professores, de modo que pelo menos um desses seja professor de geografia.

De quantas maneiras essa comissão poderá ser formada?

Ⓐ 280
Ⓑ 336
Ⓒ 344
Ⓓ 736
Ⓔ 792

Questão 80

(Ronaebson)

O grêmio de uma escola está organizando um campeonato de futsal entre times formados pelos alunos. Esse campeonato será disputado em uma única quadra e todos os times se enfrentarão em turno único, ou seja, cada time jogará contra todos os outros uma única vez.

O diretor da escola anunciou que, em virtude das limitações de tempo para o uso da quadra, só serão permitidas que sejam disputadas no máximo 70 partidas. Nessas condições, qual a quantidade máxima de times que poderá participar desse campeonato?

Ⓐ 10
Ⓑ 11
Ⓒ 12
Ⓓ 13
Ⓔ 14

Questão 81

(Ronaebson)

Uma equipe de dez adolescentes, sendo cinco meninos e cinco meninas, disputará uma competição em outro estado. Eles ficarão hospedados num hotel, sendo três homens num quarto triplo e os outros dois num quarto duplo, da mesma forma serão distribuídas as meninas, três delas num quarto triplo e duas num quarto duplo.

Os quartos disponíveis para essa equipe são:

Quarto 201: Triplo
Quarto 202: Duplo
Quarto 301: Triplo
Quarto 302: Duplo

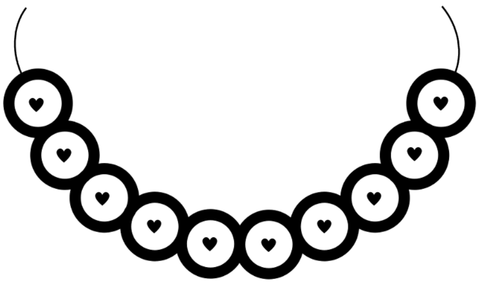
O número de maneiras que essa equipe pode ser distribuída nos quartos disponíveis é

Ⓐ 100.
Ⓑ 120.
Ⓒ 240.
Ⓓ 400.
Ⓔ 480.

Questão 82

(Ronaebson)

Um artesão confecciona um colar com dez contas (miçangas) enfileiradas de iguais formatos e tamanhos com um coração pretinho na frente de cada uma delas. Das 10 miçangas, 2 serão de cor rosa, 3 serão brancas, 4 serão de cor azul e uma verde.



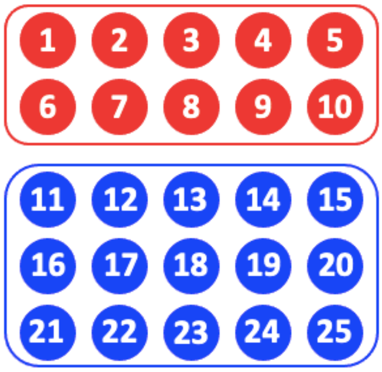
De acordo com as possíveis variações nas colorações das miçangas, a quantidade de colares que podem ser confeccionados, expresso por meio de combinações, é dado por

Ⓐ $C_{10,2} + C_{8,3} + C_{5,4} + C_{1,1}$.
Ⓑ $C_{10,2} \times C_{8,3} \times C_{5,4} \times C_{1,1}$.
Ⓒ $C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,1}$.
Ⓓ $C_{10,2} \times C_{10,3} \times C_{10,4} \times C_{10,1}$.
Ⓔ $C_{10,2} \times C_{8,3} + C_{5,4} \times C_{1,1}$.

Questão 83

(Ronaebson)

Uma cartela de um determinado tipo de jogo traz dois conjuntos de números, o conjunto vermelho, com os números de 1 a 10, e o conjunto azul, com os números de 11 a 25.



O jogador, para montar o seu jogo e poder concorrer, deve escolher ou quatro números do conjunto vermelho ou 5 números do conjunto azul, nunca escolhendo números de ambos os conjuntos e não importando a ordem que esses números são escolhidos.

O total de possibilidades que um jogador tem de montar seu jogo é

Ⓐ $\frac{10!}{4!\cdot 6!} \cdot \frac{15!}{5!\cdot 10!}$.
Ⓑ $\frac{10!}{4!\cdot 6!} + \frac{15!}{5!\cdot 10!}$.
Ⓒ $\frac{10!}{6!} \cdot \frac{15!}{10!}$.
Ⓓ $\frac{10!}{4!} + \frac{15!}{5!}$.
Ⓔ $\frac{10!}{6!} + \frac{15!}{10!}$.

Questão 84

(Ronaebson)

Uma loja dispõe de 9 capinhas para iPhone distintas e 5 pulseiras para Apple Watch também de modelos diferentes. Laedson compra três capinhas e duas pulseiras. Mais tarde, depois de Laedson ter feito sua compra, e sem haver reposição do estoque, Duda chega para comprar uma dessas capas e três dessas pulseiras.

Laedson tinha uma quantidade X de possibilidades de realizar sua compra, enquanto Duda tinha uma quantidade Y de possibilidades. A razão entre X e Y é igual a

Ⓐ 70.
Ⓑ 120.
Ⓒ 140.
Ⓓ 240.
Ⓔ 840.

Questão 85

(Ronaebson)

O dominó é um jogo de mesa que pode ser considerado como uma extensão dos dados. Embora imagine-se que sua origem é oriental e antiguíssima, não sabemos se a forma atual era conhecida na Europa até a metade do século XVIII, quando os italianos o introduziram. O jogo de dominó possui 28 peças distintas.
Numa das modalidades, cada jogador recebe 7 peças distintas quando começa a rodada e, se na partida houver menos de quatro jogadores, as peças restantes ficam no dorme.

Yasmin, Maria e Fernanda irão jogar essa modalidade. De quantas maneiras distintas se pode fazer a distribuição das peças?

Ⓐ $\frac{28!}{7!\cdot 21!}$.
Ⓑ $\frac{28!}{7!\cdot 4!}$.
Ⓒ $\frac{28!}{4!\cdot 24!}$.
Ⓓ $\frac{28!}{14!\cdot 21!}$.
Ⓔ $\frac{28!}{(7!)^4}$.

Questão 86

(Ronaebson)

A equipe médica de certo hospital é composta por 13 profissionais, com as seguintes especialidades: 6 são cirurgiões cardiologistas, 4 são anestesistas e 3 angiologistas. Num determinado plantão foram escalados 6 profissionais, sendo 2 de cada especialidade.

De quantos modos podemos escalar a equipe para esse referido plantão?

Ⓐ 1.716
Ⓑ 2.160
Ⓒ 540
Ⓓ 270
Ⓔ 72

Questão 87

(UFPB)

Um sorveteiro vende sorvetes de três bolas, de sabores escolhidos dentre os de coco, manga, graviola, cajá, acerola, maracujá e pitanga. Calcule o número de possibilidades de escolha de três sabores distintos que devem compor um sorvete, de modo que uma das bolas seja, necessariamente, de coco.

Ⓐ 30 Ⓑ 15 Ⓒ 24 Ⓓ 12 Ⓔ 64

Questão 88

(Ronaebson)

Uma equipe do exército brasileiro sairá numa missão de fronteira. O coronel encarregado da missão devera escalar uma comitiva formada por um capitão, três tenentes, dois sargentos e cinco soldados.

Estão aptos e disponíveis a participar dessa missão quatro capitães, cinco tenentes, quatro sargentos e oito soldados.

O número de possibilidades de comitivas distintas que podem ser formadas com esses militares é igual a

Ⓐ 20160.
Ⓑ 13440.
Ⓒ 3360.
Ⓓ 1344.
Ⓔ 76.

Questão 89

(Ronaebson)

Uma plataforma de moeda virtual fez um sistema de senhas para seus clientes obedecendo os seguintes critérios:

- Uma primeira tela com as cinco vogais aparece e, delas, o cliente deve identificar duas (não importando a ordem).
- Depois uma segunda tela com os cinco algarismos pares (0, 2, 4, 6 e 8) aparece e, deles, o cliente deve identificar três (não importando a ordem).
- A terceira tela apresenta os cinco algarismos ímpares (1, 3, 5, 7 e 9) e, deles, o cliente deve escolher apenas um.
- Na quarta tela, abre-se um campo para que o cliente digite um anagrama previamente definido do seu próprio nome.

Obedecendo os critérios supracitados, para a cliente chamada ESTHER, o número de senhas possíveis para ela é

Ⓐ 180.000.
Ⓑ 360.000.
Ⓒ 1.080.000.
Ⓓ 2.160.000.
Ⓔ 4.320.000.

Questão 90

Um ovo de brinquedo contém no seu interior duas figurinhas distintas, um bonequinho e um docinho. Sabe-se que na produção desse brinquedo, há disponível para escolha 20 figurinhas, 10 bonequinhos e 4 docinhos, todos distintos. O número de maneiras que se pode compor o interior desse ovo de brinquedo é

Ⓐ 15200
Ⓑ 7600
Ⓒ 3800
Ⓓ 800
Ⓔ 400

Questão 91

(UERJ)

Em uma reunião, trabalhadores de uma indústria decidiram fundar um sindicato com uma diretoria escolhida entre todos os presentes e composta por um presidente, um vice-presidente e um secretário. O número total de possibilidades de composição dessa diretoria é trinta vezes o número de pessoas presentes nessa reunião.

O número de trabalhadores presentes é:

A 13
B 11
C 9
D 7
E 4

Questão 92

(Ronaebson)

Um clube de esportes dispõe de doze jogadores de vôlei de praia dos quais oito são destros e quatro são canhotos. O clube deseja enviar uma dupla para uma competição nacional de vôlei de praia e, por uma questão de estratégia, dupla formada será composta por dois destros ou dois canhotos, nunca um destro e um canhoto.

Qual o número de possibilidades de escolha dos dois jogadores dentre os disponíveis para compor a dupla que representará o clube na competição nacional?

A 32
B 34
C 44
D 56
E 66

Questão 93

(Ronaebson)

A grande festa de despedida dos alunos do Curso Matemática Criativa, compareceram 200 homens e 170 mulheres. Sabe-se que dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mãos e se despedem (na saída) com outro aperto de mãos. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mãos e se despedem com um beijinho no rosto. Duas mulheres se cumprimentam com um beijinho no rosto e trocam acenos ao se despedirem. Quantos apertos de mãos ao todo foram dados nessa festa?

A 19900
B 34000
C 39800
D 53900
E 73800

Questão 94

Uma família mudou-se da zona rural para uma cidade grande, onde os pais e seus 10 filhos deverão morar numa casa de três quartos. Os dez filhos deverão ocupar dois quartos, sendo 6 filhos num quarto e 4 filhos em outro quarto.
De quantos modos os filhos poderão ser separados dessa forma?

A $6! + 4!$
B $6! \cdot 4!$
C $\frac{10!}{6! \cdot 4!}$
D $\frac{10!}{6!}$

Questão 95

(FCMSCSP)

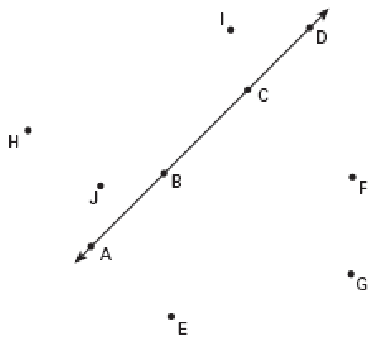
Ana, Beatriz e Carina são médicas intensivistas. Diana, Elisa, Fernanda, Gabriela, Helena, Inês e Júlia são enfermeiras da unidade de terapia intensiva (UTI). No sábado, haverá plantão de duas médicas intensivistas e quatro enfermeiras nessa UTI. No domingo, o plantão será feito pela médica intensivista que não fez plantão no sábado e por cinco enfermeiras, sendo que três delas não fizeram plantão no sábado. O total de combinações diferentes que esse cronograma de trabalho do fim de semana permite é igual a

A 840.
B 245.
C 420.
D 490.
E 630.

Questão 96

(Ronaebson)

Marcam-se, num plano, 10 pontos, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, dos quais 4 estão sobre a mesma reta e três outros pontos quaisquer nunca estão alinhados, conforme a figura. Qual o número de triângulos que podem ser formados, unindo-se três quaisquer desses pontos?



A 24
B 112
C 116
D 120
E 124

Questão 97

(Ronaebson)

A jovem Jenifer vai à corretora de investimentos *Ricos do Amanhã* para diversificar sua carteira de ativos. O consultor para tentar entender melhor o perfil de sua nova cliente, pede para que ela preencha o formulário abaixo com as seguintes informações:

- a ordem de preferência entre as três modalidades de perfil que ela deseja ter, se conservador, moderado ou agressivo;
- 1ª e 2ª opções dentre cinco produtos financeiros, a saber, poupança, títulos de capitalização, renda fixa, fundos de ações e previdência.
- os nomes de quatro fundos de investimentos diferentes que devem ser escolhidos (sem ordem de preferência) de uma lista de oito apresentados pelo consultor.

PREENCHER TODOS OS CAMPOS (SEM REPETIÇÃO)		
Modalidades de Perfil (em ordem de preferência)	Produtos Financeiros	Fundos de Investimentos (ordem indiferente)
1ª	1ª Opção	
2ª		
3ª	2ª Opção	

Supondo que nenhum campo seja deixado em branco, de quantas maneiras diferentes pode o formulário ser corretamente preenchido?

Ⓐ 840
Ⓑ 4200
Ⓒ 8400
Ⓓ 100800
Ⓔ 201600

Questão 98

(UFPB)

Um torneio de futebol foi disputado entre cinco equipes, sendo que cada uma delas jogou uma única vez com as demais equipes. Calcule o número de jogos realizados por cada equipe e o total de jogos nesse torneio.

Ⓐ 4 e 10
Ⓑ 5 e 20
Ⓒ 4 e 20
Ⓓ 5 e 10
Ⓔ 2 e 12

Questão 99

A partir de um grupo de 10 pessoas devemos formar k comissões de pelo menos dois membros, sendo que em todas deve aparecer uma determinada pessoa A do grupo. Então k vale:

Ⓐ 1024.
Ⓑ 512.
Ⓒ 216.
Ⓓ 511.
Ⓔ 1023.

Questão 100

(Ronaebson)

Isadora e Caio vão a uma casa de recepções para fazer um orçamento para sua festa de casamento. A gerente da casa de festas, para fornecer o orçamento, pede ao casal interessado que preencham o formulário abaixo com as seguintes informações:

- a ordem de preferência entre os 3 tipos de pratos principais que a casa oferece;
- a 1ª e a 2ª opções dentre 4 possíveis bebidas alcoólicas;
- os nomes de 4 tipos de finger food diferentes a serem servidos, que devem ser escolhidas de uma lista de 10 fornecida pela gerente (sem ordem de preferência).

PREENCHER TODOS OS CAMPOS (SEM REPETIÇÃO)		
Pratos Principais (em ordem de preferência)	Bebidas Alcoólicas	Finger foods (ordem indiferente)
1ª	1ª Opção	
2ª		
3ª	2ª Opção	

Supondo que nenhum campo seja deixado em branco, de quantas maneiras diferentes pode o formulário ser corretamente preenchido?

Ⓐ 240
Ⓑ 2520
Ⓒ 10000
Ⓓ 15120
Ⓔ 24000

Questão 101

(UEL)

Quando os deputados estaduais assumiram as suas funções na Câmara Legislativa, tiveram que responder a três questionamentos cada um. No primeiro, cada deputado teria que escolher um colega para presidir os trabalhos, dentre cinco previamente indicados. No segundo, deveria escolher, com ordem de preferência, três de seis prioridades previamente definidas para o primeiro ano de mandato. No último, deveria escolher dois dentre sete colegas indicados para uma reunião com o governador. Considerando que todos responderam a todos os questionamentos, conforme solicitado, qual o número de respostas diferentes que cada deputado poderia dar?

Ⓐ 167
Ⓑ 10500
Ⓒ 810
Ⓓ 12600
Ⓔ 8400

Questão 102

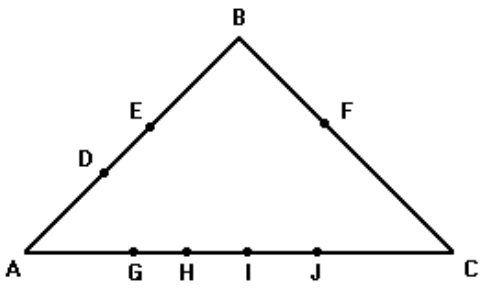
(Ronaebson)

Uma lanchonete faz vitaminas com um, duas, três, quatro ou cinco frutas diferentes, a saber: laranja, mamão, banana, morango e maçã. As vitaminas podem ser feitas com um só tipo de fruta ou misturando-se os tipos de fruta de acordo com o gosto do freguês. Desse modo, quantas opções de vitaminas a lanchonete oferece?

Ⓐ 10
Ⓑ 25
Ⓒ 31
Ⓓ 35
Ⓔ 120

Questão 103

Observe a figura.



Nessa figura, qual o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, I, J?

Ⓐ 31
Ⓑ 32
Ⓒ 35
Ⓓ 23
Ⓔ 48

Questão 104

(CESESP-PE)

Num acidente automobilístico, após ouvir várias testemunhas, concluiu-se que o motorista culpado do acidente dirigia um veículo cuja placa era constituída de 2 vogais distintas e 4 algarismos diferentes, sendo que o algarismo das unidades era o dígito 2. Assinale a única alternativa correspondente ao número de veículos suspeitos.

Ⓐ 1.080
Ⓑ 10.800
Ⓒ 10.080
Ⓓ 840
Ⓔ 60.480

Questão 105

(FCMSC-SP)

Num hospital, há 3 vagas para trabalhar no berçário, 5 no banco de sangue e 2 na administração. Se 6 funcionários se candidatam para o berçário, 8 para o banco de sangue e 5 para a administração, de quantas maneiras distintas essas vagas podem ser preenchidas?

Ⓐ 11200
Ⓑ 10240
Ⓒ 12560
Ⓓ 12100
Ⓔ 15260

Questão 106

(UNIFESP)

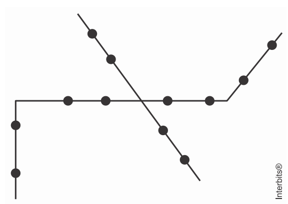
O corpo clínico da pediatria de um certo hospital é composto por 12 profissionais, dos quais 3 são capacitados para atuação junto a crianças que apresentam necessidades educacionais especiais. Para fins de assessoria, deverá ser criada uma comissão de 3 profissionais, de tal maneira que 1 deles, pelo menos, tenha a capacitação referida.
Quantas comissões distintas podem ser formadas nestas condições?

Ⓐ 792
Ⓑ 494
Ⓒ 369
Ⓓ 136
Ⓔ 108

Questão 107

(FUVEST_2018)

Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.



O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é

Ⓐ 200.
Ⓑ 204.
Ⓒ 208.
Ⓓ 212.
Ⓔ 220.

Questão 108

Em um torneio de futsal, em que cada equipe jogou uma única vez contra cada uma das demais, foram realizados, no total, 105 jogos. Quantas equipes participaram desse torneio?

Ⓐ 10
Ⓑ 15
Ⓒ 20
Ⓓ 25
Ⓔ 55

Questão 109

(UFCG)

Com o objetivo de fazer uma boa campanha nos Jogos Olímpicos de Pequim em 2008, almejando a conquista da medalha de ouro para o nosso futebol, o técnico da seleção brasileira feminina de futebol convocou 18 jogadoras para formar nossa seleção. Dentre estas estavam: 2 goleiras, 3 laterais, 3 zagueiras, 6 meio – campistas e 4 atacantes. Pensando sempre na melhor formação para representar nosso país, o número de possibilidades que o técnico teve para montar um time com 1 goleira, 2 laterais, 2 zagueiras, 4 meio – campistas e 2 atacantes foi:

Ⓐ 1620
Ⓑ 720
Ⓒ 810
Ⓓ 135
Ⓔ 1080

Questão 110

(UPF_2017)

Um jogo consiste em um prisma triangular reto com uma lâmpada em cada vértice e um quadro de interruptores para acender essas lâmpadas. Sabendo que quaisquer três lâmpadas podem ser acesas por um único interruptor e que cada interruptor acende precisamente três lâmpadas, o número de interruptores que existem no quadro é

Ⓐ 4
Ⓑ 20
Ⓒ 24
Ⓓ 120
Ⓔ 720

Questão 111

(PUC-RJ_2017)

O técnico da seleção brasileira de futebol precisa convocar mais 4 jogadores, dentre os quais exatamente um deve ser goleiro.

Sabendo que na sua lista de possibilidades para essa convocação existem 15 nomes, dos quais 3 são goleiros, qual é o número de maneiras possíveis de ele escolher os 4 jogadores?

Ⓐ 220
Ⓑ 660
Ⓒ 1980
Ⓓ 3960
Ⓔ 7920

Questão 112

(UDESC)

A Câmara de Vereadores de uma cidade é composta por 13 vereadores, sendo que 6 destes são de partidos políticos da *situação* (aliados ao governo municipal) e os 7 restantes são de partidos da *oposição* (contrários ao governo municipal). É necessário compor uma comissão especial a ser formada por exatamente 5 vereadores, de forma que haja pelo menos dois representantes de cada um destes blocos políticos. Além disso, foi definido que o líder da *situação* e o líder da *oposição* não poderão fazer parte da mesma comissão. Sob essas condições, a quantidade de comissões distintas que pode ser constituída é igual a:

Ⓐ 945
Ⓑ 500
Ⓒ 620
Ⓓ 810
Ⓔ 310

Questão 113

(IFPE)

O auditório do IFPE, campus Vitoria de Santo Antão, tem formato retangular e dispõe de quatro aparelhos de ar-condicionado, sendo um ar-condicionado instalado em cada uma das suas quatro paredes. Em todos os eventos, pelo menos um aparelho deve estar ligado para a refrigeração do ambiente.

De quantos modos diferentes este auditório pode ser refrigerado?

Ⓐ 4
Ⓑ 16
Ⓒ 8
Ⓓ 64
Ⓔ 15

Questão 114

(Ronaebson)

Num ponto de troca de figurinhas do álbum da copa do mundo, Esdras levou 4 figurinhas e Jocy levou 9, sendo todas as 13 figurinhas distintas. A regra para essas trocas é que Esdras receba a mesma quantidade de figurinhas que entrega, ou seja, uma, duas, três ou quatro figurinhas, podendo, inclusive, não realizar troca alguma.

Considerando-se apenas o conjunto de figurinhas que cada um terá ao final do processo de negociação de suas figurinhas, de quantas maneiras os dois podem realizar essa transação?

Ⓐ 715
Ⓑ 286
Ⓒ 127
Ⓓ 126
Ⓔ 85

::: COMBINAÇÃO COMPLETA :::

Questão 115

(Ronaebson & Weslley)

Michael Fred Phelps II é um nadador profissional americano aposentado, conquistou trinta e sete recordes mundiais e conquistou o maior número de medalhas de ouro olímpicas em uma única edição, feito este realizado nos Jogos de Pequim, na China, em agosto de 2008.

Sabe-se que ele tem 23 medalhas olímpicas de ouro e pretende distribuí-las em três cômodos da sua casa, a saber: o escritório, a suíte e a sala de estar.

Admitindo que não há distinção entre as medalhas de ouro e que em cada cômodo haja pelo menos uma medalha, o total de maneiras que essas medalhas podem ser distribuídas é igual a

Ⓐ 231.
Ⓑ 253.
Ⓒ 300.
Ⓓ 1140.
Ⓔ 1771.

Questão 116

(Ronaebson)

Gaby juntou em um cofrinho várias moedas, distribuídas entre moedas de dez centavos, vinte e cinco centavos, de cinquenta centavos e moedas de um real, numa quantidade suficientemente grande de cada um desses tipos de moeda.

Assumindo que não há qualquer distinção entre moedas do mesmo tipo, o número de maneiras que ela tem de escolher 11 dessas moedas de modo que retire pelo menos uma de cada tipo é igual a

Ⓐ 120.
Ⓑ 165.
Ⓒ 220.
Ⓓ 270.
Ⓔ 364.

Questão 117

(CEFET-MG)

Como prêmio pela vitória em uma competição, serão distribuídas 12 moedas de ouro idênticas entre as três pessoas da equipe vencedora, e cada uma deverá receber, pelo menos, duas moedas. O número de maneiras distintas de efetuarmos essa distribuição é

Ⓐ 12.
Ⓑ 28.
Ⓒ 38.
Ⓓ 40.
Ⓔ 120.

Questão 118

(Ronaebson)

Com o objetivo de relaxar um pouco depois do primeiro dia de provas do ENEM, Alisson e Abigail vão a uma sorveteria para tomar um delicioso sorvete. Eles pedem três bolas cada um e a sorveteria dispõe de seis sabores distintos. Alisson faz questão de que suas três bolas de sorvete sejam de sabores distintos, ao passo que Abigail se contenta com qualquer combinação de sabores, podendo, inclusive, serem todas as bolas do mesmo sabor.
Dessa forma, Abigail tem a mais que Alisson

Ⓐ 21 opções de escolha.
Ⓑ 36 opções de escolha.
Ⓒ 45 opções de escolha.
Ⓓ 60 opções de escolha.
Ⓔ 96 opções de escolha.

Questão 119

Um floricultor vende buquês que contêm quatro flores de três tipos: rosas, dálias ou crisântemos. Cada um dos buquês tem pelo menos dois tipos diferentes de flores e uma rosa. Sendo assim, o número total de tipos de buquês que podem ser vendidos por esse floricultor é

Ⓐ 7.
Ⓑ 8.
Ⓒ 9.
Ⓓ 10.
Ⓔ 12.

Questão 120

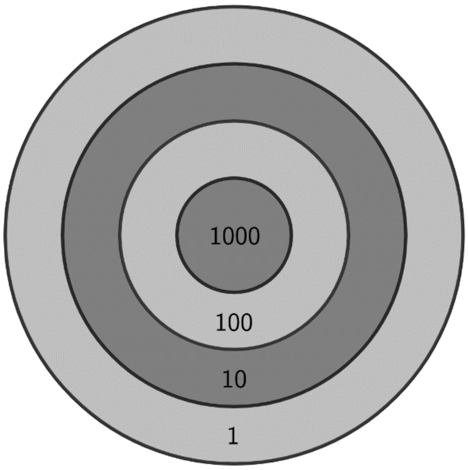
Sandro é o dono de uma empresa de segurança que tem como empregados Alberto, Thiago, Robson e Rodrigo. Sandro deve realizar pagamento aos seus empregados totalizando um valor de vinte mil reais. Alberto, Thiago, Robson e Rodrigo recebem pagamentos com valor mínimo de dois mil, dois mil, três mil e quatro mil reais, respectivamente. Considerando que cada pagamento realizado aos empregados é múltiplo de um mil reais, assinale a opção que apresenta a quantidade de maneiras distintas que a distribuição do pagamento de vinte mil reais aos funcionários pode ser realizada.

Ⓐ 110
Ⓑ 120
Ⓒ 220
Ⓓ 330
Ⓔ 560

Questão 121

(Ronaebson)

Para divertir-se com seu filho, um artesão confeccionou um jogo de tiro ao alvo, constituído por nove dardos idênticos e um alvo de formato circular, dividido em quatro regiões concêntricas, conforme ilustrado na figura.



As regras estabelecidas para a brincadeira foram as seguintes:

- cada um deles deve lançar, de uma determinada posição, os nove dardos na direção do alvo, com a finalidade de fixá-los no objeto;
- para cada dardo que atinge o alvo e permanece fixado nele, o jogador que o lançou acumula a pontuação da região atingida, de acordo com a indicação da figura;
- se um dardo lançado se fixa em uma circunferência que é fronteira de duas regiões, a pontuação atribuída é a da região que apresenta a maior pontuação dentre estas;
- atribui-se pontuação nula para dardos lançados e não fixados ao alvo;
- a pontuação final de cada jogador é dada pela soma das pontuações obtidas por cada dardo lançado.

Como gosta muito de Matemática, o filho do artesão percebeu rapidamente que, apesar das pontuações finais dos jogadores estarem sempre entre 0 e 9000, algumas pontuações, como, por exemplo, 19, 47, 136 e 7821, nunca poderiam ser atingidas.

O número de pontuações distintas possíveis de se alcançar nesse jogo é

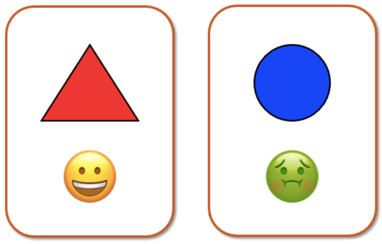
Ⓐ $\frac{9!}{4!\times 5!}$.
Ⓑ $3! \times \frac{9!}{4!\times 5!}$.
Ⓒ $\frac{12!}{9!\times 3!}$.
Ⓓ $2! \times \frac{12!}{9!\times 3!}$.
Ⓔ $\frac{13!}{9!\times 4!}$.

::: MISCELÂNEA :::

Questão 122

(Ronaebson)

A ilustração a seguir mostra duas cartas de um jogo com o qual crianças pequenas aprendem a reconhecer cores, formas geométricas e emoções. Em cada carta aparece uma forma, escolhida entre triângulo, quadrado e círculo, e essa forma é pintada de uma única cor, escolhida entre vermelho, amarelo, azul, verde e preto. Além disso, em cada carta aparece um emojy expressando algum tipo de emoção, sendo elas alegria, raiva, tristeza, nojo e medo, representadas, respectivamente, pelos emojys 😀, 😡, 😢, 🤢 e 😱.



Qual o número de cartas distintas possíveis de serem criadas para esse jogo?

Ⓐ 13
Ⓑ 15
Ⓒ 25
Ⓓ 75
Ⓔ 100

Questão 123

(Ronaebson)

Uma pessoa vai visitar cinco pontos turísticos na cidade do João Pessoa: Farol de Cabo Branco, Centro Histórico, Bica, Estação Ciências e Centro de Convenções. De quantas maneiras diferentes pode planejar a sequência das cinco visitas, se, por uma questão de conveniência e horários, não quiser começar nem terminar pela Bica?

Ⓐ 36
Ⓑ 72
Ⓒ 96
Ⓓ 120
Ⓔ 240

Questão 124

(UECE)

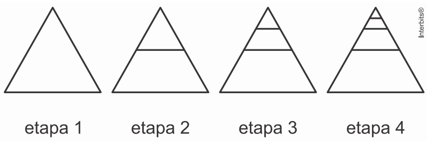
A turma K do Curso de Administração da UECE é formada por 36 alunos, sendo 22 mulheres e 14 homens. O número de comissões que podem ser formadas com alunos desta turma, tendo cada comissão três componentes e sendo assegurada a participação de representantes dos dois sexos em cada comissão, é

Ⓐ 5236
Ⓑ 6532
Ⓒ 3562
Ⓓ 2635

Questão 125

(UFRGS)

Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Na etapa 1, há um único triângulo equilátero. Na etapa 2, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo da etapa 1, formando dois triângulos equiláteros. Na etapa 3, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo menor da etapa 2, formando três triângulos equiláteros. Na etapa 4 e nas etapas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos triângulos menores da etapa anterior.

O número de trapézios na 6ª etapa de construção é

- **A** 14.
- **B** 15.
- **C** 16.
- **D** 17.
- **E** 18.

Questão 126

(UFPR_2022)

Após pagar o valor da conta da pizzaria, Ana, Beatriz e Carlos voltaram para casa. No caminho, ninguém se recordava de quanto foi exatamente o valor da conta. Ana lembrava que a conta deu um valor inteiro e menor que 200 reais. Beatriz lembrava que deu um valor maior que 50 reais. Carlos lembrou que a soma dos algarismos do valor da conta dava 6. Admitindo que todos estavam certos, quantos são os valores possíveis para a conta?

- **A** 6.
- **B** 7.
- **C** 8.
- **D** 9.
- **E** 10.

Questão 127

(UFMS_2022)

Para a composição da comissão de formatura de Veterinária de 2021 da UFMS, há 8 estudantes, sendo 5 homens e 3 mulheres. A comissão deverá ser composta por 6 estudantes. Se 2 mulheres são de caráter obrigatório estar na comissão, o número de possibilidades para a composição da comissão de formatura é:

- **A** 5.
- **B** 8.
- **C** 25.
- **D** 56.
- **E** 120.

Questão 128

(UEPA)

Atual tendência alimentar baseada no maior consumo de legumes, verduras e frutas impulsiona o mercado de produtos naturais e frescos sem agrotóxicos e uma diminuição no consumo de produtos que levam glúten, lactose e açúcar. Uma empresa especializada no preparo de refeições, visando a esse novo mercado de consumidores, disponibiliza aos seus clientes uma “quentinha executiva” que pode ser entregue no local de trabalho na hora do almoço. O cliente pode compor o seu almoço escolhendo entradas, pratos principais e sobremesas. Se essa empresa oferece 8 tipos de entradas, 10 tipos de pratos principais e 5 tipos de sobremesas, o número de possiblidades com que um cliente pode compor seu almoço, escolhendo, dentre os tipos ofertados, duas entradas, um prato principal e uma sobremesa é:

- **A** 400
- **B** 500
- **C** 800
- **D** 1200
- **E** 1400

Questão 129

(INSPER)

Um dirigente sugeriu a criação de um torneio de futebol chamado Copa dos Campeões, disputado apenas pelos oito países que já foram campeões mundiais: os três sul-americanos (Uruguai, Brasil e Argentina) e os cinco europeus (Itália, Alemanha, Inglaterra, França e Espanha). As oito seleções seriam divididas em dois grupos de quatro, sendo os jogos do grupo A disputados no Rio de Janeiro e os do grupo B em São Paulo. Considerando os integrantes de cada grupo e as cidades onde serão realizados os jogos, o número de maneiras diferentes de dividir as oito seleções de modo que as três sul-americanas não fiquem no mesmo grupo é

- **A** 140.
- **B** 120.
- **C** 70.
- **D** 60.
- **E** 40.

Questão 130

(UECE_2022)

Cinco rapazes e quatro moças fundaram uma empresa e resolveram que a diretoria da empresa seria composta de cinco sócios dentre os quais pelo menos dois seriam mulheres. Assim, é correto afirmar que o número de maneiras que se pode escolher a diretoria dessa empresa é

- **A** 110.
- **B** 95.
- **C** 105.
- **D** 100.
- **E** 115.

Questão 131

(UEMG)

Na Copa das Confederações de 2013, no Brasil, onde a seleção brasileira foi campeã, o técnico Luiz Felipe Scolari tinha à sua disposição 23 jogadores de várias posições, sendo: 3 goleiros, 8 defensores, 6 meio-campistas e 6 atacantes. Para formar seu time, com 11 jogadores, o técnico utiliza 1 goleiro, 4 defensores , 3 meio-campistas e 3 atacantes. Tendo sempre Júlio César como goleiro e Fred como atacante, o número de times distintos que o técnico poderá formar é

Ⓐ 14 000.
Ⓑ 480.
Ⓒ 8! + 4!
Ⓓ 72 000.

Questão 132

(UNESP)

Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo.

Modelo de folha de resposta (gabarito)

	A	B	C	D	E
01	X				
02			X		
03		X			
04				X	
05	X				
06					X
07				X	
08					X
09		X			
10			X		

Nessas condições, a quantidade de folha de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será

Ⓐ 302 400.
Ⓑ 113 400.
Ⓒ 226 800.
Ⓓ 181 440.
Ⓔ 604 800.

Questão 133

(PUC-RJ_2022)

Considere todos os números naturais de cinco algarismos que são escritos utilizando dois algarismos 1, dois algarismos 2 e um algarismo 3.
Quantos destes números são ímpares?

Ⓐ 6
Ⓑ 12
Ⓒ 18
Ⓓ 24

Questão 134

(IFSP)

Um banco está testando um novo produto e disponibilizou a alguns dos seus clientes acesso via internet para esse produto, por meio de senhas compostas por cinco vogais distintas e dois números pares distintos, de 2 a 8, nessa ordem, ou seja, primeiro as vogais e depois os números. O número de clientes que podem acessar esse novo produto, via internet, é:

Ⓐ 22.
Ⓑ 3520.
Ⓒ 1.440.
Ⓓ 180.
Ⓔ 920.

Questão 135

(UEMG)

Em uma apresentação na escola, oito amigos, entre eles Carlos, Timóteo e Joana, formam uma fila.

Calcule o número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada de modo que Carlos, Timóteo e Joana fiquem sempre juntos:

Ⓐ $8!$
Ⓑ $5! \cdot 3!$
Ⓒ $6! \cdot 3!$
Ⓓ $8! \cdot 3!$

Questão 136

(Ronaebson)

Um site de hospedagem de vídeos estabelece, para cada vídeo postado, um código de 10 letras do nosso alfabeto seguidas de 5 algarismos.

Dado que $\log_{10} 2 = 0{,}3$ e $\log_{10} 13 = 1{,}11$, a quantidade máxima de vídeos que podem ser postados nessa plataforma de modo que a cada um deles possua um código obedecendo os critérios supracitados é igual a

Ⓐ $10^{11{,}1}$.
Ⓑ $10^{12{,}3}$.
Ⓒ $10^{13{,}1}$.
Ⓓ $10^{19{,}1}$.
Ⓔ $10^{26{,}3}$.

Questão 137

(UPE-SSA_2022)

Uma residência conta com 8 cômodos, cada um com uma lâmpada em perfeito estado de funcionamento. A depender da necessidade, as lâmpadas podem estar ligadas ou não.

De quantas maneiras distintas as lâmpadas dessa residência podem ser utilizadas, desde que, pelo menos, uma esteja acesa?

Ⓐ 16 Ⓑ 56 Ⓒ 128 Ⓓ 255 Ⓔ 256

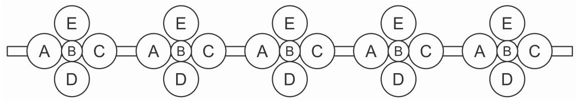
Questão 138

(EPCAR)

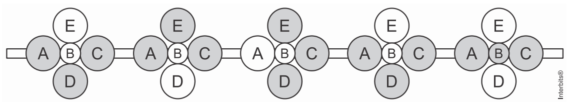
Um pisca-pisca usado em árvores de natal é formado por um fio com lâmpadas acopladas, que acendem e apagam sequencialmente.

Uma pessoa comprou um pisca-pisca, formado por vários blocos, com lâmpadas em formato de flores, com o seguinte padrão:

- Cada bloco é composto por 5 flores, cada uma com 5 lâmpadas circulares, de cores distintas (A, B, C, D, E), como na figura:



- Em cada flor, apenas 3 lâmpadas quaisquer acendem e apagam juntas, por vez, ficando as outras duas apagadas.
- Todas as 5 flores do bloco acendem e apagam juntas.
- Em duas flores consecutivas, nunca acendem e apagam as mesmas 3 cores da anterior. Assim, considere que uma composição possível para um bloco acender e apagar corresponde à figura abaixo:



O número de maneiras, distintas entre si, de contar as possibilidades de composição para um bloco desse pisca-pisca é

Ⓐ 10^5.
Ⓑ $9^4 \cdot 10$.
Ⓒ 9^5.
Ⓓ $9^5 \cdot 10$.
Ⓔ 9^6.

Questão 139

(USCS_2022)

As carteiras em uma sala de aula são todas iguais e estão dispostas em 5 filas e 5 colunas, de maneira que cada coluna contém 5 carteiras. Um professor vai escolher 5 das carteiras para a realização de um exame, de maneira que em cada coluna só 1 carteira seja escolhida e em cada fila só 1 carteira seja escolhida. O número de maneiras diferentes de esse professor escolher as carteiras é

Ⓐ 80.
Ⓑ 50.
Ⓒ 120.
Ⓓ 25.
Ⓔ 125.

Questão 140

(Ronaebson)

Uma chocolataria vende três tipos de chocolates: ao leite, amargo e meio amargo. Uma pessoa deseja comprar 20 chocolates, de modo que sejam levados pelo menos dois de cada tipo.

De quantas maneiras essa compra pode ser feita?

Ⓐ 60
Ⓑ 120
Ⓒ 231
Ⓓ 240
Ⓔ 1140

Questão 141

(Ronaebson)

Tia Gó dispõe em sua cantina de cinco tipos de biscoitos e sete tipos de salgados. Um aluno deseja comprar ou dois biscoitos distintos ou três salgados distintos.

De quantas formas ele pode fazer essa compra?

Ⓐ 10
Ⓑ 35
Ⓒ 45
Ⓓ 350
Ⓔ 792

Questão 142

(Ronaebson)

Samuel tem 17 caixas cúbicas decorativas de mesmo tamanho, diferenciadas apenas pela cor. Dez dessas caixas são pretas e sete são brancas.

De quantos modos essas caixas podem ser enfileiradas de modo que duas caixas brancas não fiquem juntas?

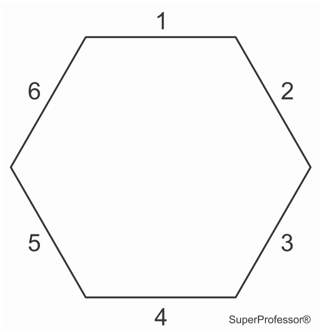
Ⓐ 165
Ⓑ 330
Ⓒ 660
Ⓓ 19283
Ⓔ 19448

ANOTAÇÕES:

Questão 143

(UFPR_2023)

(Ana, Beatriz e Carlos escolhem lugares para se sentar em uma mesa hexagonal regular. Cada lugar corresponde a um dos lados do hexágono, que estão numerados de 1 a 6, conforme a figura ao lado. Os lados 1 e 4 são considerados lados opostos na mesa, assim como 2 e 5, e 3 e 6. De quantas formas diferentes Ana, Beatriz e Carlos podem escolher os lugares numerados de modo que nenhum deles fique sentado ao lado oposto do outro?



Ⓐ 48.
Ⓑ 36.
Ⓒ 24.
Ⓓ 12.
Ⓔ 8.

Questão 144

(UNICHRISTUS-MEDICINA_2023)

O Conselho Fiscal da Petrobras é composto por cinco membros, com mandato de um ano, permitida reeleição, sendo um indicado pelos acionistas minoritários, um indicado pelos acionistas titulares de ações preferenciais e três indicados pela União.

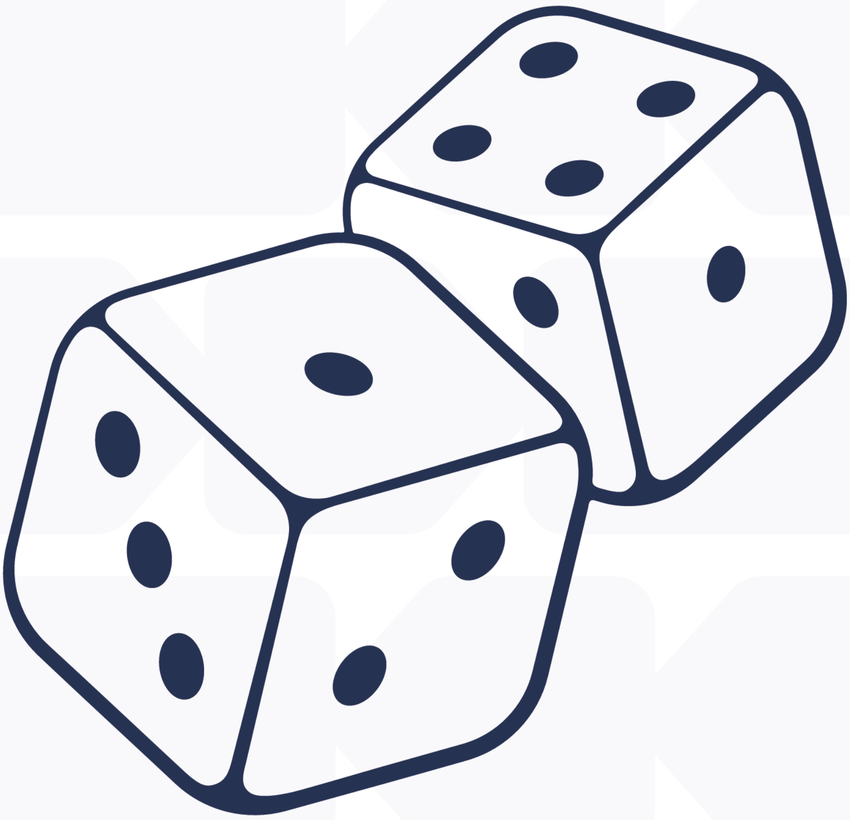
Disponível em: https://www.investidorpetrobras.com.br/.Acesso em: 23 set. 2022 (adaptado).

Considerando-se que os acionistas minoritários dispõem de 3 pessoas para indicar, os acionistas titulares de ações dispõem de outras 4 pessoas para serem indicadas e a União dispõe de mais outras 6 pessoas para indicação, depreende-se que a quantidade de maneiras distintas de que pode ser feita a escolha para a composição do Conselho Fiscal é

Ⓐ 240.
Ⓑ 20.
Ⓒ 60.
Ⓓ 1400.
Ⓔ 80.

Gabarito _ Análise Combinatória			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	E	73	B
02	A	74	C
03	E	75	C
04	B	76	E
05	B	77	B
06	D	78	E
07	B	79	D
08	B	80	C
09	A	81	D
10	D	82	B
11	D	83	B
12	B	84	C
13	C	85	E
14	E	86	D
15	A	87	B
16	A	88	B
17	B	89	A
18	C	90	B
19	D	91	D
20	C	92	B
21	C	93	E
22	E	94	C
23	D	95	E
24	A	96	C
25	D	97	C
26	E	98	A
27	D	99	D
28	C	100	D
29	A	101	D
30	C	102	C
31	D	103	A
32	A	104	C
33	B	105	A
34	A	106	D
35	C	107	D
36	D	108	B
37	E	109	A
38	A	110	B
39	D	111	B
40	C	112	D
41	D	113	E
42	A	114	A
43	C	115	A
44	A	116	A
45	C	117	B
46	B	118	B
47	D	119	C
48	C	120	C
49	C	121	E
50	B	122	D
51	B	123	B
52	C	124	A
53	A	125	B
54	B	126	C
55	C	127	C
56	C	128	E
57	A	129	D
58	E	130	C
59	E	131	A
60	C	132	B
61	A	133	C
62	A	134	C
63	A	135	C
64	C	136	D
65	E	137	D
66	A	138	B
67	E	139	C
68	E	140	B
69	C	141	C
70	A	142	B
71	B	143	A
72	D	144	A

PROBABILIDADE



RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

PROBABILIDADE

"As questões mais importantes da vida são em sua maioria problemas de probabilidade! Nós podemos mesmo dizer, falando rigorosamente, que quase todos os nossos conhecimentos só são prováveis; e no pequeno número das coisas que nós podemos saber com certeza, nas próprias ciências matemáticas, os principais meios de chegar à verdade, à indução e à analogia são fundados sobre as probabilidades, de sorte que o sistema inteiro dos conhecimentos humanos se liga a esta teoria"

"A Teoria da Probabilidade nada mais é do que o cálculo do bom senso".

Pierre Simon Laplace
Théorie Analytique des Probabilités

Como motivação para o nosso estudo das probabilidades, começamos com o seguinte problema:

Problema de Motivação

Dois jogadores apostaram R$ 10,00 cada um em um jogo de cara-ou-coroa, combinando que o primeiro a conseguir 6 vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem 5 vitórias e o outro tem 3. Qual é a divisão justa da quantia apostada?

Será que a maneira mais justa de efetuar essa divisão é meio a meio, uma vez que o jogo não acabou? Se assim for feito, ambos os jogadores sairão satisfeitos? Poderíamos também pensar em dividir a quantia em partes proporcionais aos resultados que já ocorreram, isto é, em partes proporcionais a quantidade de vitórias de cada um. Mas ainda sim, será que o jogador que estava com mais chances de ganhar ficaria satisfeito com a partilha?

Na verdade, a maneira mais justa de dividir esse valor apostado é em partes proporcionais às probabilidades (às chances) que cada um tinha de ganhar o jogo. De modo que ao longo desse texto aprenderemos argumentos suficientes para resolver esse problema.

A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e, em geral, pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios, assim, entendemos que o objetivo dela é modelar matematicamente conceitos como incerteza, risco, chance, possibilidade, verossimilhança, perspectiva e, até mesmo, sorte. Seguem aqui duas interpretações comuns do conceito de probabilidade, ambas levando à mesma concepção matemática, apenas as maneiras de expressar e interpretar os resultados mudam com o ponto de vista escolhido:

☞ **Interpretação Frequentista:**

A interpretação frequentista imagina um grande número de situações semelhantes à apresentada e tenta descobrir em quantas delas o evento em questão realmente acontece; esta proporção seria a probabilidade do evento. Assim, "dividindo o número de coroas obtidas pelo número de lançamentos, a proporção se aproximará de 50% à medida que o número de lançamentos cresce". Em algumas situações esta interpretação pode precisar de um pouco de imaginação, por exemplo: "chove em 30% dos dias com características climáticas semelhantes às de amanhã".

☞ **Interpretação Subjetiva:**

A interpretação subjetiva ou epistemológica (ou Bayesiana) diz que a probabilidade de um evento é apenas uma medida da fé que temos sobre sua ocorrência, isto é, do quanto acreditamos que algo possa ocorrer. Desta forma, a probabilidade de um evento varia de indivíduo para indivíduo, dependendo das experiências, informações e crenças que ele tenha. Esta interpretação "flexível" nos permite discutir conceitos como a probabilidade de um evento passado ter ocorrido, por exemplo, a probabilidade de uma pessoa ter cometido um crime. Citando o matemático e mágico Persi Warren Diaconis[1] *"probabilidades não fazem parte das moedas; probabilidades fazem parte das pessoas"*.

[1] Professor de Estatística e Matemática da Universidade Stanford.

A Teoria da Probabilidade é apenas um *modelo*, de modo que modelos não são a "realidade" ou mesmo a "verdade", eles apenas tentam representá-la. Modelos são úteis exatamente porque simplificam a realidade para que possamos entendê-la. É claro que o modelo matemático utilizado para estudar um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática, dependendo do fenômeno estudado, das múltiplas variáveis a ele relacionadas. Sendo assim, o que vamos fazer agora é estudar uma série de fenômenos aleatórios relativamente "simples" e interessantes e fixar uma série de ideias e noções que são totalmente gerais.

"A experiência não permite nunca atingir a certeza absoluta. Não devemos procurar obter mais que uma probabilidade."
Bertrand Russel

Experimento Aleatório

Diremos que um experimento é **determinístico** quando, repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos. Por sua vez, chamemos de **experimentos aleatórios** aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza.

As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos *acaso*.

São exemplos de experimentos aleatórios:

1. Lançar um dado e observar o número da face de cima.
2. Lançar uma moeda e observar a face de cima.
3. Lançar dois dados e observar a soma dos números das faces voltadas para cima.
4. Selecionar ao acaso, 3 peças de um lote que tem 10 boas e 4 defeituosas e observar o número de peças defeituosas.
5. De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar o seu naipe.

Espaço Amostral

Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral, conseguimos descrever o conjunto de todos os possíveis resultados que podem ocorrer. Assim, chamamos de espaço amostral, e indicamos por $\boldsymbol{\Omega}$, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

1. Lançar um dado e observar o número da face de cima.
   $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{C}\}$, em que K representa cara e C, coroa.
2. Lançar um dado e observar o número da face de cima.
   $$\boldsymbol{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
3. Lançar dois dados e observar a soma dos números das faces voltadas para cima.
   $$\boldsymbol{\Omega} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Evento

Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω. Chamamos de evento todo subconjunto de Ω. Diremos que um evento A ocorre se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. Os eventos que possuem um único elemento são ditos eventos elementares.

Exemplo: Um dado é viciado e observa-se o número da face de cima.
$$\boldsymbol{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
Segue alguns eventos:
A: ocorrência de um número par. $\boldsymbol{A} = \{2, 4, 6\}$
B: ocorrência de um número primo. $\boldsymbol{B} = \{2, 3, 5\}$
C: ocorrência do número 1. $\boldsymbol{C} = \{1\}$

Considerando um experimento aleatório de espaço amostral Ω, temos que o conjunto vazio e o próprio espaço amostral são subconjuntos de Ω, ou seja, são eventos desse experimento, denominados, respectivamente, **evento impossível** e **evento certo**.

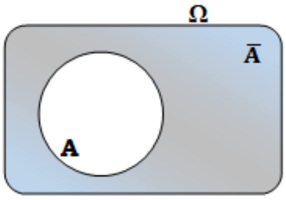
Combinações de Eventos

Ao usarmos certas operações entre conjuntos, poderemos combinar dois ou mais eventos para gerarmos novos eventos.

A) **União:**
Sejam A e B dois eventos; então $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem.

B) **Interseção:**
Sejam A e B dois eventos; então $A \cap B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem simultaneamente.
Se A e B não possuírem elementos em comum, diremos que os eventos são mutuamente exclusivos. Em outras palavras, dois eventos são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um implica a não ocorrência do outro.

C) **Complementar de um evento:**
Seja A um evento; então $\overline{\mathrm{A}}$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer. Nesse caso, $\overline{\mathrm{A}}$ é o evento complementar de A.



Distribuição de Probabilidade

Podemos entender a probabilidade como um número associado a um evento que busca quantificar o quão provável é a sua ocorrência, ou seja, esse número nos dá a noção (ou estimativa) da frequência com que o evento pode ser observado.

Consideremos um experimento aleatório de espaço amostral finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. A cada evento elementar $\{\omega_i\}$ vamos associar um número real, indicado por $p(\{\omega_i\})$ ou simplesmente p_i, chamado probabilidade do evento $\{\omega_i\}$, satisfazendo as seguintes condições:

$$i)\ 0 \le p_i \le 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$ii)\ \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Dizemos que os números $p_1, p_2, \ldots, p_n$ definem uma distribuição de probabilidades sobre Ω.

Em seguida, seja A um evento qualquer de Ω. Definimos probabilidade do evento A (e indicamos por $P(A)$) da seguinte forma:

$$a)\ Se\ A = \varnothing,\ P(A) = 0$$

$$b)\ Se\ A \neq \varnothing,\ P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

Assim, a probabilidade de um evento formado por certa quantidade de elementos é a soma das probabilidades dos resultados individuais que constituem o evento A.

Problema 01: Seja $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}}$ um espaço amostral de um dado experimento aleatório. Consideremos a seguinte distribuição de probabilidades sobre Ω:

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$p_1 = 0,2$	$p_2 = 0,1$	$p_3 = 0,05$	$p_4 = 0,25$	$p_5 = 0,4$

Sendo o evento $\boldsymbol{A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5\}}$, Qual a probabilidade de A?

Solução:

A probabilidade do evento A é dada por:

$$\boldsymbol{P(A) = p_1 + p_2 + p_5 = 0,2 + 0,1 + 0,4 = 0,7.}$$

Problema 02: (Ronaebson) O número de filhos que um casal de uma determinada espécie de animal pode ter ao longo de sua vida é dado de acordo com a distribuição de probabilidades apresentadas na tabela a seguir:

Número de filhos	Probabilidade
0	0,05
1	0,15
2	0,25
3	0,30
4	0,15
5 ou mais	0,10

Qual a probabilidade de que um casal da referida espécie de animal tenha ao longo de sua vida pelo menos três filhos?

Solução:

Observe que ter pelo menos três filhos significa ter três filhos ou mais, isto é, queremos que o casal tenha 3 filhos, ou 4 filhos, ou 5 filhos ou mais, logo a probabilidade pedida é

$$p_3 + p_4 + p_{5+} = 0,30 + 0,15 + 0,10 = 0,55,$$

ou seja, a probabilidade de que um casal da referida espécie de animal tenha ao longo de sua vida pelo menos três filhos é de 55%.

Talvez a grande questão que você esteja levantando ao ler essas notas é a de quais devem ser os critérios para obtermos os números $p_1, p_2, \ldots, p_n$ numa distribuição de probabilidade sobre o espaço amostral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$?

A ideia é que devemos fazer com que cada número p_i esteja "próximo" da frequência relativa da ocorrência do referido evento elementar quando o experimento é repetido muitas vezes. De modo que isso pode ser feito levantando hipóteses acerca do experimento em questão; é fato que se torna fundamental um pouco de experiência e bom senso de quem vai atribuir as probabilidades para cada evento elementar. Por exemplo, ao lançarmos uma moeda para observarmos a face voltada para cima, é razoável aceitar que a probabilidade de dar cara é igual a de dar coroa que é 50%, isto é, $p_K = p_C = 0,5$. Por outro lado, ao lançarmos um dado "honesto" (alguns também chamam de "não viciado") de seis faces numeradas de 1 a 6, não temos razões para pensar que o número 6 tenha mais chances de sair que o número 2, por exemplo, sendo assim, aceitamos que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$, ou seja, que todas as faces têm iguais probabilidades de ocorrer e, no caso, 1/6, isso por razões de simetria.

Agora pense um pouco, se uma turma tem dez alunos, dos quais 8 são homens e 2 são mulheres, ao serem sorteados dois alunos para uma dada atividade e considerando o sexo masculino (M) ou feminino (F) dos participantes, não é plausível especular que as probabilidades dos eventos unitários {M,M}, {M, F} e {F, F} sejam iguais, pois, intuitivamente, percebemos que é muito mais provável que o par escolhido seja formado por dois homens do que por duas mulheres, por exemplo. Do mesmo modo, por mais que ao jogar na mega-sena, tenhamos duas possibilidades de resultado, ganhar ou perder, nenhuma pessoa de bom senso diria que a probabilidade de ganhar é 50% e a de perder é de 50%.

Problema 04: Três cavalos $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$ e $\boldsymbol{C_3}$ disputam um páreo, onde só se permitirá um vencedor. Um conhecedor dos 3 cavalos afirma que as "chances" de $\boldsymbol{C_1}$ vencer são o dobro das de $\boldsymbol{C_2}$, e que $\boldsymbol{C_2}$ tem o triplo das "chances" de $\boldsymbol{C_3}$. Calcule as probabilidades de cada cavalo vencer o páreo.

Solução:

Denotando por p_1, p_2 e p_3 as chances dos cavalos C_1, C_2 e C_3, respectivamente, ganharem o páreo, temos que:

$$p_1 = 2 \cdot p_2 \text{ e } p_2 = 3 \cdot p_3$$

Se fizermos $p_3 = x$, teremos $p_2 = 3x$ e $p_1 = 2 \cdot 3x = 6x$.
É claro que um dos cavalos tem de ganhar o páreo, daí, se somamos as probabilidades de cada um ganhar obtemos 100%, logo,

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \implies 6x + 3x + x = 1 \implies 10x = 1$$

$$x = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Portanto, temos $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}3$ e $p_3 = 0{,}1$.

Problema 05: Temos duas moedas, das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomada ao acaso, é lançada. Qual é a probabilidade de se obter cara?

Solução:

Chamemos de P a moeda perfeita, a qual possui uma cara (K) e uma coroa (C), e de D a moeda defeituosa, a qual possui duas caras K e K'. Assim, para o experimento em questão temos o espaço amostral

$$\Omega = \{(P,C);\ (P,K);(D,K);(D,K')\}.$$

O evento A: ocorrer cara é tal que $A = \{(P,K);(D,K);(D,K')\}$. Logo,

$$P(A) = \frac{3}{4}.$$

Teoremas

T1: A probabilidade de um evento certo é 100%.

$$P(\Omega) = 1$$

T2: A probabilidade de um evento impossível é nula.

$$P(\phi) = 0$$

T3: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

T4: Se A é um evento, então $0 \leq P(A) \leq 1$.

T5: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

T6: Se A e B são mutuamente exclusivos, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

T7: Se A é um evento e $\bar{A}$ seu complementar, então

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Espaços Amostrais Equiprováveis

"A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é, portanto, uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis."

Pierre Simon Laplace
Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades

Definição: *Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Diremos que uma distribuição de probabilidade sobre Ω é equiprovável, se $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$, isto é, se todos os eventos elementares de Ω tiverem a mesma probabilidade.*

Assim, se denotarmos $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \implies n \cdot p = 1 \implies p = \frac{1}{n}$$

Daí,

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$$

Logo, sendo n(A) o número de elementos do evento A, temos que:

$$P(A) = \sum_{a_i \in A} p_i = n(A) \cdot \frac{1}{n}$$

Portanto

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}}}$$

Em outras palavras,

$$P(A) = \frac{\textit{Número de Casos Favoráveis}}{\textit{Número de Casos Possíveis}}$$

Obs.: *Em geral, as características do experimento é que nos levam a supor uma distribuição equiprovável.*

CUIDADO !!!

Um erro muito comum é usar essa fórmula para modelos não-equiprobabilísticos, isto é, considerar que os eventos elementares de um dado espaço amostral não-equiprovável são igualmente possíveis. Por exemplo, só porque seu espaço amostral Ω = {ganho na loteria, não ganho na loteria} não significa dizer que você tem 50% de chance de ganhar na loteria. Cuidado com a intuição!

Problema 06: Qual é a probabilidade de sair um "sete" ao retirar, ao acaso, uma carta de um baralho de 52 cartas?

Solução:

Num baralho, há 4 "setes" (copas, ouros, paus e espadas). Como há um total de 52 cartas, temos $n(\Omega) = 52$ e $n(E) = 4$, onde E é o evento ocorrer "sete".

Daí,

$$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \cong 7{,}7\%.$$

A probabilidade de sair um "sete" é 1/13 ou, aproximadamente, 7,7%.

Problema 07: Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior do que quatro ao se lançar um dado honesto?

Solução:

O conjunto dos possíveis resultados para esse experimento é

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

assim, o número de elemento do espaço amostral é

$$n(\Omega) = 6.$$

Queremos que o resultado obtido seja maior do que quatro, logo, nosso evento será dado por

$$A = \{5, 6\}$$

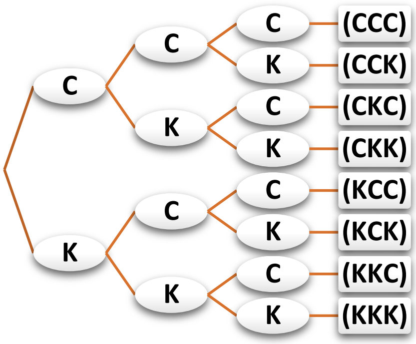
e o número de elementos do evento é $n(A) = 2$.
Como o espaço amostral é equiprovável, temos que a probabilidade pedida é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Problema 08: No lançamento de três moedas, determine a probabilidade de serem obtidas:

a) exatamente duas coroas;
b) pelo menos duas coroas.

Solução:



Assim, o espaço amostral é dado por:

$$\Omega = \{(CCC), (CCK), (CKC), (CKK), (KCC), (KCK), (KKC), (KKK)\}$$

Onde, n(Ω)=8.

a) A: evento "obter exatamente duas coroas"

$$A = \{(CCK), (CKC), (KCC)\}$$

Daí, n(A) = 3 e

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

b) B: evento "obter pelo menos duas coroas"

$$B = \{(CCC), (CCK), (CKC), (KCC)\}$$

Daí, n(B) = 4 e

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Problema 09: Samuel e Renan combinaram de lançar uma moeda 4 vezes. Samuel apostou que, nestes 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas; Renan aceitou a aposta. Quem tem maior chance de ganhar a aposta?

Solução:

Um espaço amostral apropriado para a situação é formado por todas as sequências possíveis de cara ou coroa. Assim, para cada lançamento, temos duas possibilidades, logo o total de sequências é $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, a saber:

Ω = {(KKKK), (KKKC), (KKCK), (KKCC), (KCKK), (KCKC), (KCCK), (KCCC), (CKKK), (CKKC), (CKCK), (CKCC), (CCKK), (CCKC), (CCCK), (CCCC)}

Todas as sequências têm a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa. Vejamos agora quais sequências dão vitória a Samuel:

(CCCC), (KCCC), (CKCC), (CCKC), (CCCK), (CKCK), (KCKC), (KCCK)

Logo, o número de sequências favoráveis a Samuel é 8 e sua probabilidade de vitória é igual a 8/16 = 0,5. Portanto, Samuel e Renan têm a mesma probabilidade de vencer.

Problema 10: Dois dados são jogados simultaneamente. Qual é probabilidade de se obter soma 5 nos números mostrados nas faces de cima?

Solução:

O espaço amostral Ω consiste de todos os pares *(i, j)* onde *i* e *j* são inteiros positivos de 1 a 6. Veja a tabela

Número do primeiro dado \ Número do segundo dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Perceba que o número de resultados possíveis (número de eventos elementares) é 36, resultado esse que poderíamos ter encontrado usando o PFC, pois temos 6 possibilidades de resultados para o primeiro dado e 6 para o segundo, assim, temos $6 \times 6 = 36$ resultados distintos.
O que queremos é que a soma dos números das faces voltadas para cima seja 5, em outras palavras, queremos os pares *(i, j)* para os quais $i + j = 5$. Logo, nosso evento E será dado por

$$E = \{(1,4);\ (2,3);\ (3,2);\ (4,1)\},$$

como destacado na tabela acima, daí temos que o número de casos favoráveis (número de elementos do evento) é $n(E) = 4$.
Portanto, a probabilidade de que a soma dos números mostrados na face de cima seja 5 é

$$P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Diante desse problema, chamo a atenção para alguns pontos. Na construção do espaço amostral, poderíamos olhar exclusivamente para as possíveis somas, isto é,

$$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Evidentemente, esse também é um espaço amostral para o referido problema e assim, o número de casos possíveis para esse experimento seria $n(\Omega') = 11$. Entretanto, você não pode afirmar que a probabilidade da soma ser 5 é 1/11, pois essa distribuição não é equiprovável. De fato, é razoável perceber que é bem mais provável que a soma seja 7 do que 2, por exemplo, basta observar a tabela inicial, uma vez que há 6 formas de obter soma 7, enquanto há apenas uma de obter soma 2.

Sendo assim, tomando como base a tabela referente ao primeiro espaço amostral escolhido, temos que uma distribuição de probabilidade para Ω' é

SOMA	PROBABILIDADE P(S)
S=2	$\frac{1}{36}$
S=3	$\frac{2}{36}$
S=4	$\frac{3}{36}$
S=5	$\frac{4}{36}$
S=6	$\frac{5}{36}$
S=7	$\frac{6}{36}$
S=8	$\frac{5}{36}$
S=9	$\frac{4}{36}$
S=10	$\frac{3}{36}$
S=11	$\frac{2}{36}$
S=12	$\frac{1}{36}$

Problema 11: (UFRN) É comum, em aeroportos, a utilização de detectores de metais para vistoriar as bagagens dos passageiros. Em certo aeroporto, ao ser vistoriado um lote de 10 malas, o detector de metais acusou a presença de objetos metálicos em apenas duas. Um funcionário do aeroporto, que não estava presente no momento da vistoria dessas malas pelo detector, escolheu aleatoriamente duas delas e resolveu abri-las para fazer uma vistoria mais apurada. Com base nessas informações, qual a probabilidade de ser encontrado objeto metálico em, pelo menos, uma das duas malas escolhidas por esse funcionário do aeroporto?

Solução:

Número de maneiras de escolher duas malas quaisquer entre as 10 dadas:

$$n(\Omega) = C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Número de possibilidades que o funcionário tem de escolher duas malas sem objetos metálicos:

$$n(E) = C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Consequentemente, o número de maneiras que o funcionário tem de escolher duas malas com objeto metálico em pelo menos uma delas é

$$n(\bar{E}) = 45 - 28 = 17.$$

Logo, a probabilidade de, ao escolher duas malas ao acaso, pelo menos uma das escolhidas apresentar objetos metálicos é

$$P(\bar{E}) = \frac{17}{45}.$$

Problema 12: Em uma urna há sete bolas azuis e quatro vermelhas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas azuis?

Solução:

Diante desse problema, a primeira coisa que devemos fazer é determinar um espaço amostral adequado que descreva todos os possíveis resultados do experimento. Assim, podemos pensar o espaço amostral como o conjunto de todos os pares de bolas distintas, de modo que, considerando, individualmente as 11 bolas presentes na urna, temos $11 \times 10 = 110$ elementos, isto é, $n(\Omega) = 110$. Como todas as bolas são idênticas (a menos da cor), todos esses pares tem a mesma probabilidade de sair. Para determinar o número desses pares em que ambas as bolas são azuis, devemos notar que a primeira bola azul pode ser escolhida de 7 modos, enquanto a segunda pode ser qualquer uma das 6 restantes, logo, o número de casos favoráveis ao que queremos é igual a $7 \times 6 = 42$. Portanto, a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas azuis é

$$P = \frac{42}{110} = \frac{21}{55}.$$

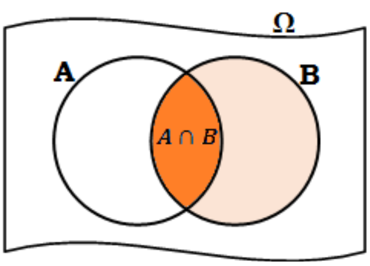
Observe que, como estávamos interessados, basicamente, nas cores das bolas, poderíamos ser tentados a escolher o espaço amostral formado pelos pares de cores observadas

$$\boldsymbol{\Omega = \{aa, av, va, vv\}}.$$

Essa escolha não está errada, só não é conveniente para solucionar nosso problema, uma vez que o modelo escolhido não é equiprovável, de fato, é razoável percebermos que é muito mais provável que saiam duas bolas azuis do que duas bolas vermelhas, já que há mais bolas azuis do que vermelhas.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Seja Ω um espaço amostral e consideremos dois eventos, A e B. Com o símbolo *P(A|B)* indicamos a probabilidade do evento A, dado que o evento B ocorreu, isto é, *P(A|B)* é a probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido. Quando calculamos *P(A|B)*, tudo se passa como se B fosse o novo espaço amostral "reduzido" dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A.



Assim, se P(B) > 0, temos:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

Problema 13: Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um Ás de copas, sabendo que a carta escolhida é vermelha?

Solução:

Como já sabemos que a carta escolhida é vermelha, temos que ela é de copas ou de ouro, logo, nosso espaço amostral terá 26 cartas. Entre elas, apenas uma nos interessa, que é o Ás de copas. Logo a probabilidade de sair um Ás de copas, sabendo que a carta escolhida é vermelha é

$$P = \frac{1}{26}.$$

Observe que quando encaramos um baralho completo, nos deparamos com 52 cartas, mas de posse da informação de que a carta escolhida era vermelha, não mais olhamos para todas as 52 cartas, e sim, apenas para as 26 vermelhas que o baralho tem, ou seja, nosso espaço amostral ficou reduzido. Note também que para resolvermos o problema, dispensamos o uso da fórmula supracitada.

Problema 14: Uma família planeja ter três filhos. Sabendo que o primeiro filho já nasceu e é homem, qual é a probabilidade de que todos sejam homens?

Solução:

Observe que os resultados possíveis para três filhos são oito, a saber:

Ω = {(hhh), (hhm), (hmh), (hmm),
(mhh), (mhm), (mmh), (mmm)}

Entretanto, de posse da informação de que o primeiro filho é homem, nosso espaço amostral fica reduzido a

Ω' = {(hhh), (hhm), (hmh), (hmm)}

E apenas uma das possibilidades nos interessa, que é (hhh). Logo, a probabilidade de que todos os filhos sejam homens, dado que o primeiro já é, é igual a

$$P = \frac{1}{4}.$$

ANOTAÇÕES:

Teorema da Multiplicação

Uma consequência importante da definição formal de probabilidade condicional é a seguinte:

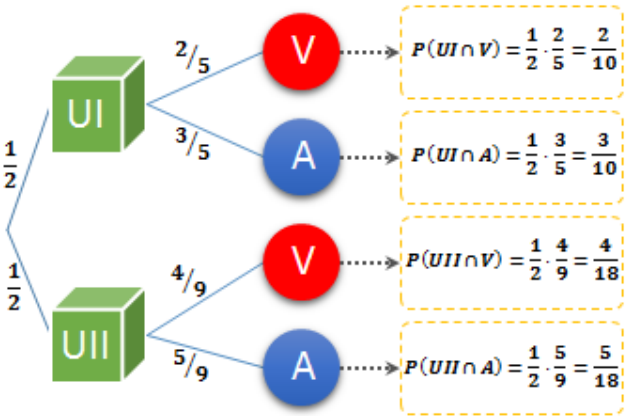
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro.

Problema 15: Uma urna I contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas azuis, a urna II contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha?

Solução:



Note a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha é dada por:

$$P(UI \cap V) = P(UI) \cdot P(V|UI) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Problema 16: Um lote contém 50 peças boas (B) e 10 defeituosas (D). Uma peça é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra peça é escolhida ao acaso. Determine a probabilidade de ambas serem defeituosas.

Solução:

Se quisermos que ambas as peças retiradas sejam defeituosas, isso quer dizer que a primeira peça deve ser defeituosa e a segunda peça também deve ser defeituosa, logo a probabilidade disso ocorrer é

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \cdot P(D_2|D_1) = \frac{10}{60} \cdot \frac{9}{59} = \frac{3}{118}.$$

Claro que para uma melhor visualização do problema, você pode construir uma árvore de possibilidades, como feito no exemplo anterior.

Problema 17: Seja $\boldsymbol{P_x}$ a probabilidade de que uma pessoa com x anos sobreviva mais um ano e $\boldsymbol{P_x^n}$ a probabilidade de que uma pessoa com x anos sobreviva mais n anos ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$).

a) O que significa $\boldsymbol{P_{70}}$?
b) O que significa $\boldsymbol{P_{70}^2}$?
c) Escreva uma relação entre $\boldsymbol{P_{70}^2}$, $\boldsymbol{P_{70}}$ e $\boldsymbol{P_{71}}$?

Solução:

a) P_{70}: probabilidade de que uma pessoa com 70 anos sobreviva mais um ano.

b) P_{70}^2: probabilidade de que uma pessoa com 70 anos sobreviva mais dois anos.

c) Para que uma pessoa com 70 anos sobreviva mais dois anos é necessário que ela sobreviva um e complete 71 anos e, tendo 71 anos ela sobreviva outro ano. Sendo assim

$$P_{70}^2 = P_{70} \cdot P_{71}$$

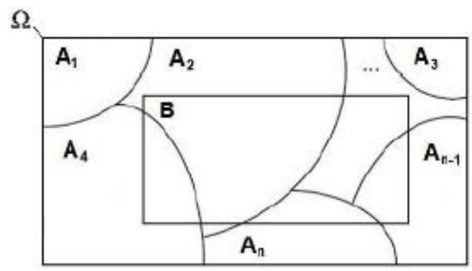
Teorema da Probabilidade Total

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que constituem uma partição do espaço amostral Ω, isto é,

$$i.\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$$

$$ii.\ A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j$$

$$iii.\ P(A_i) > 0 \ com\ i = 1, 2, \ldots, n$$



Observe que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente exclusivos e exaustivos.

Assim, se B representa um evento, temos:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$
$$\Updownarrow$$
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que constituem uma partição do espaço amostral Ω, seja $B \subset \Omega$ um evento, com $P(B) > 0$, então, para i, com $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

Esse resultado pode ser provado a partir dos resultados envolvendo probabilidade condicional, pois

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

Daí, pelo Teorema da Probabilidade Total, temos:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

com $j = 1, 2, \ldots, n$.

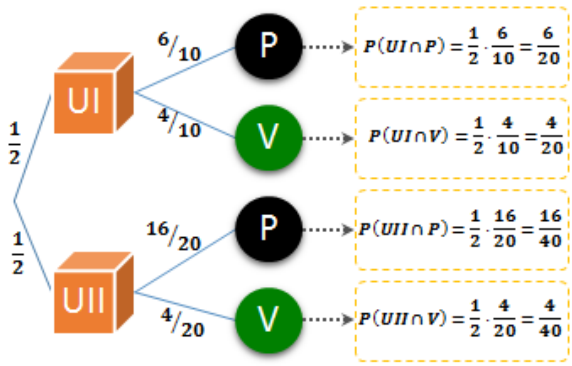
É claro que esses resultados nos assustam quando olhamos para eles fora de um contexto, mas vamos tentar elucidá-los melhor com os exemplos a seguir.

Problema 18: Uma urna I contém 6 bolas pretas e 4 bolas verdes, a urna II contém 16 bolas pretas e 4 bolas verdes. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída ao acaso.

a) Qual a probabilidade de observarmos bola verde?

b) Qual a probabilidade de termos escolhido urna I, dado que a bola extraída foi verde?

Solução:



Com base na árvore de possibilidades criada, temos que

a) a probabilidade de observarmos bola verde é

$$P(V) = P(UI \cap V) + P(UII \cap V) = \frac{4}{20} + \frac{4}{40} = \frac{3}{10} = 30\%.$$

b) a probabilidade de termos escolhido urna I, dado que a bola extraída foi verde é

$$P(UI|V) = \frac{P(UI \cap V)}{P(V)} = \frac{4/20}{3/10} = \frac{2}{3} \cong 66{,}6\%$$

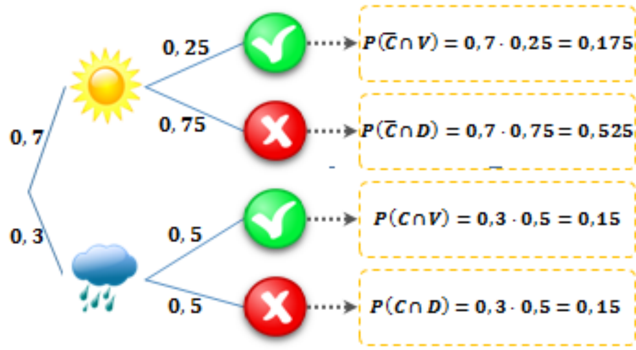
Na prática utilizamos os dois últimos teoremas (o teorema da probabilidade ttal para o item *a* e o teorema de Bayes para o item *b*) sem que fosse necessário decorar as respectivas expressões.

Problema 19: Um piloto de Fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual a probabilidade desse piloto ganhar a corrida?

Solução:

Consideremos os eventos:
C: ocorrer chuva durante a corrida;
$\bar{C}$: não ocorrer chuva durante a corrida;
V: vitória do piloto;
D: derrota do piloto.

Assim:



Queremos que o piloto vença a corrida, seja debaixo de chuva ou não. Assim, tomando como referência os valores obtidos a partir da árvore de possibilidades construída, temos que a probabilidade do piloto vencer a corrida é igual a

$$P(V) = P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V) = 0{,}15 + 0{,}175 = 32{,}5\%.$$

Outra abordagem para esse mesmo problema seria através de um diagrama matricial (tabela).
Consideremos, sem perda de generalidade, um total de 1000 corridas e que as proporções (probabilidades) sugeridas no texto sejam preservadas. Assim:

	Chove C	Não Chove $\bar{C}$	Total
Vence (V)	150	175	325
Perde (D)	150	525	675
Total	300	700	1000

Logo, a probabilidade de vitória é igual a

$$P(V) = \frac{150 + 175}{1000} = 32{,}5\%.$$

Independência de Eventos

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω, diremos que A independe de B se:

$$\boldsymbol{P(A|B) = P(A)},$$

isto é, A independe de B se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A.

Observemos que, se A independe de B $(P(A) > 0)$, então B independe de A, pois:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{PA} = P(B).$$

Assim, dois eventos A e B são ditos independentes quando a ocorrência de um não afeta a probabilidade do outro, mais ainda, se A independe de B, então B independe de A. Além disso:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B).$$

Dessa forma, podemos dizer que dois eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Observações:

- O resultado supracitado pode ser generalizado para mais de dois eventos.
- Do ponto de vista prático, nós admitimos a independência de eventos baseados nas particularidades do experimento.

Problema 20: Em uma fábrica de calçados constata-se que:

A: 4% dos pares de sapatos apresentam defeito de colagem;
B: 3% dos pares de sapatos apresentam defeito no couro.

Admitindo-se que os acontecimentos A e B são independentes, determine a probabilidade de um par de sapatos apresentar os dois defeitos.

Solução:

Como os eventos A e B são independentes, a probabilidade de um sapato apresentar ambos os defeitos é de

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 4\% \cdot 3\% = 0{,}12\%.$$

Problema 20: Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade de a primeira atingir o alvo é $\boldsymbol{P(A)} = {}^{1}/_{3}$ e a probabilidade de a segunda atingir o alvo é $\boldsymbol{P(B)} = {}^{2}/_{5}$. Admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

a) ambos atingirem o alvo?
b) ambos errarem o alvo?

Solução:

$P(A) = {}^{1}/_{3}$: probabilidade de A acertar o alvo.
$P(\bar{A}) = {}^{2}/_{3}$: probabilidade de A errar o alvo.
$P(B) = {}^{2}/_{5}$: probabilidade de B acertar o alvo.
$P(\bar{B}) = {}^{3}/_{5}$: probabilidade de B errar o alvo.

a) A probabilidade de ambos acertarem o alvo nada mais é que a probabilidade de A acertar **e** B acertar, daí, como os eventos são independentes, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

b) A probabilidade de ambos errarem o alvo nada mais é que a probabilidade de A errar **e** B errar, daí, como os eventos são independentes, temos:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Problema 21: A probabilidade de certo homem sobreviver mais 10 anos, a partir de certa data, é 40%, e de que sua esposa sobreviva mais 10 anos a partir da mesma data é 50%. Qual é a probabilidade de:

a) ambos sobreviverem mais 10 anos a partir daquela data?
b) ao menos um deles sobreviver mais 10 anos a partir daquela data?

Solução:

$P(H) = 0{,}4$: probabilidade do homem sobreviver mais de 10 anos a partir de certa data;
$P(\bar{H}) = 0{,}6$: probabilidade do homem não sobreviver mais de 10 anos a partir de certa data;
$P(M) = 0{,}5$: probabilidade da mulher sobreviver mais de 10 anos a partir de certa data;
$P(\bar{M}) = 0{,}5$: probabilidade da mulher não sobreviver mais de 10 anos a partir de certa data;

a) A probabilidade de ambos sobreviverem mais de 10 anos a partir daquela data nada mais é que a probabilidade do homem sobreviver e da mulher sobreviver, daí, admitindo a independência dos eventos, temos:

$$P(H \cap M) = P(H) \cdot P(M) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 = 20\%.$$

b) A probabilidade de ao menos um deles sobreviver mais 10 anos a partir daquela data é a probabilidade do homem sobreviver e da mulher não ou do homem não sobreviver e a mulher sobreviver ou de ambos sobreviverem, ou seja:

$$P(H \cup M) = P(H \cap \bar{M}) + P(\bar{H} \cap M) + P(H \cap M)$$
$$\Downarrow$$
$$P(H \cup M) = P(H) \cdot P(\bar{M}) + P(\bar{H}) \cdot P(M) + P(H) \cdot P(M)$$
$$\Downarrow$$
$$P(H \cup M) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}7 = 70\%$$

Outro modo de pensarmos é usando o fato de que

$$P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M),$$

daí,

$$P(H \cup M) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7 = 70\%.$$

É claro que ainda poderíamos pensar no evento complementar, ou seja, se queremos que ao menos um deles sobreviva mais de 10 anos, podemos calcular primeiro a probabilidade de que nenhum sobreviva, isto é, a probabilidade de que o homem e a mulher não sobrevivam mais de 10 anos que é

$$P(\overline{H} \cap \overline{M}) = P(\overline{H}) \cdot P(\overline{M}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3 = 30\%$$

e depois subtraí-la de 100%. Sendo assim, a probabilidade de que ao menos um sobreviva é

$$P(H \cup M) = 1 - P(\overline{H} \cap \overline{M}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 = 70\%.$$

Voltemos agora ao problema que abriu este capítulo:

PROBLEMA DE MOTIVAÇÃO

Dois jogadores apostaram R$ 10,00 cada um em um jogo de cara-ou-coroa, combinando que o primeiro a conseguir 6 vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem 5 vitórias e o outro tem 3. Qual é a divisão justa da quantia apostada?

Como já havíamos discutido no início do texto, poderíamos dividir o prêmio meio a meio, uma vez que o jogo não terminou. Mas isso geraria uma insatisfação clara no jogador que já havia conseguido cinco vitórias, uma vez que ele estava na eminência de ganhar (coloque-se no lugar dele).

Doutro modo, poderíamos dividir o prêmio em partes proporcionais às vitórias já conquistadas por cada um, ou seja, como um teve 5 vitórias e o outro 3, poderíamos dividir os R$ 20,00 em 8 partes, sendo cada uma de ${}^{20}/_{8} = R\$\,2{,}50$. E assim, o jogador com mais vitórias receberia $5 \times 2{,}50 = R\$\,12{,}50$ e o outro receberia $3 \times 2{,}50 = R\$\,7{,}50$. Mas pense um pouco... Será mesmo essa a forma mais justa? Será que o sentimento de estar praticamente ganho do primeiro jogador diante da remota chance de vitória do segundo jogador está numa proporção de 5 para 3?

Observe que o jogador I tem 5 vitórias, faltando apenas uma para vencer o jogo, enquanto o jogador II tem apenas 3 vitórias, necessitando de mais 3 para ganhar. Portanto, para que o segundo jogador vença o jogo, ele tem de vencer três partidas seguidas, de modo que a probabilidade de que isso ocorra é

$$P(II) = P(V_{II} \cap V_{II} \cap V_{II}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%,$$

logo, a probabilidade de vitória do primeiro jogador é

$$P(I) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87{,}5\%.$$

Obs.: *Você pode fazer essa investigação usando uma árvore das possibilidades e atentando ao fato de que os resultados em cada um dos lançamentos são independentes.*

Assim, a maneira mais justa de dividir esse prêmio é em partes proporcionais às chances que cada um tem de ganhar, isto é, o jogador I receberá $\frac{7}{8} \cdot 20 = R\$\,17{,}50$, enquanto o jogador II receberá $\frac{1}{8} \cdot 20 = R\$\,2{,}50$.

LEI BINOMIAL DAS PROBABILIDADES

Consideremos um experimento que consiste em uma sequência de ensaios ou tentativas independentes, isto é, ensaios nos quais a probabilidade de um resultado em cada ensaio não depende dos resultados ocorridos nos ensaios anteriores, nem dos resultados dos ensaios posteriores. Em cada ensaio[2] admite-se apenas dois resultados possíveis, aqui denotados por *SUCESSO* e *FRACASSO*. Chamaremos de *p* a probabilidade de SUCESSO e *q = 1 – p* a probabilidade de FRACASSO em cada ensaio.

Teorema: Consideremos então uma sequência de n ensaios de Bernoulli, como descrito anteriormente, a probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos e, consequentemente, $n-k$ fracassos nesses n ensaios é

$$\boldsymbol{P_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Demonstração:

A probabilidade de nessas n provas obtermos k sucessos e, em consequência, $n-k$ fracassos em uma ordem predeterminada, por exemplo, os sucessos nas k primeiras provas e os fracassos nas demais:

$$\underbrace{SS\cdots S}_{k\ vezes}\ \underbrace{FF\cdots F}_{n-k\ vezes}$$

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k\ vezes} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k\ vezes} = p^k \cdot q^{n-k} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

pois os ensaios são independentes.

Obviamente, em outra ordem, a probabilidade seria a mesma, pois a única alteração seria a da ordem dos fatores. Assim basta multiplicar o resultado obtido pelo número de ordens possíveis, que é dada por $C_{n,p} = \binom{n}{k}$, pois, para escolher uma ordem, basta escolher em quais das n provas ocorrerão os k sucessos, ou mesmo efetuar uma permutação das k letras S e das $n-k$ letras F. E isto encerra nossa demonstração.

[2]Tal tipo de experimento recebe o nome de ensaio de Bernoulli, pois os primeiros estudos a esse respeito devem-se a Jacques Bernoulli, matemático do século XVII.

Problema 22: Jogando uma moeda não viciada dez vezes, qual é a probabilidade de obtermos exatamente quatro caras?

Solução:

Pondo sucesso = cara e fracasso = coroa, temos $p = 1/2$ em cada prova e elas são independentes. Queremos achar a probabilidade de $k = 4$ sucesso nas 10 provas. Logo, pelo Teorema Binomial, temos:

$$P_4 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{210}{1024} = \frac{105}{512}.$$

Problema 23: Um aluno que nada estudou marca ao acaso as respostas de um teste de múltipla-escolha com dez questões e cinco alternativas por questão, sendo apenas uma correta. Qual é a probabilidade dele acertar exatamente cinco questões?

Solução:

Pondo sucesso = acertar e fracasso = errar, temos $p = 1/5$ em cada prova e elas são independentes. Queremos achar a probabilidade dele acertar $k = 5$ questões das 10. Logo, pelo Teorema Binomial, temos:

$$P_5 = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{252 \cdot 1024}{9765625}$$

$$= \frac{258048}{9765625} \cong 2{,}64\%.$$

ANOTAÇÕES:

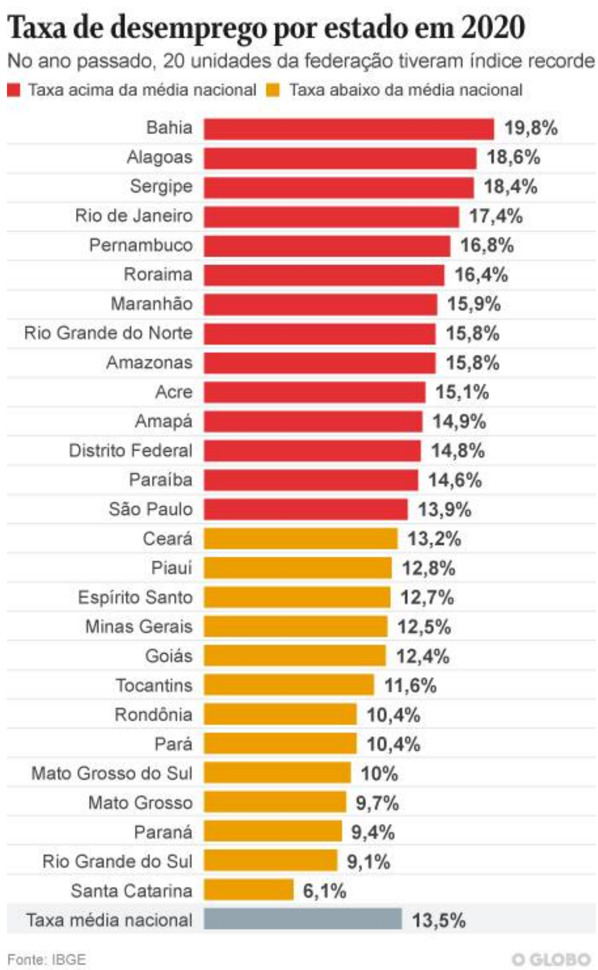
Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

No ano da pandemia, o desemprego foi recorde em 20 estados brasileiros, segundo dados da Pnad Contínua publicados hoje pelo IBGE, que também trazem detalhes sobre como a falta de vagas afetou de forma diferente homens e mulheres. O instituto já havia anunciado que a taxa média de desemprego em 2020 no país havia alcançado o maior patamar(13,5%) da série histórica, iniciada em 2012.
O impacto da crise foi maior no Nordeste e menor, no Sul do país. Os estados com maior índice de desemprego foram Bahia (19,8%), Alagoas (18,6%), Sergipe (18,4%) e Rio de Janeiro (17,4%).

Disponível em https://oglobo.globo.com/economia/emprego/desemprego-em-2020-recorde-em-20-estados-diz-ibge-24917748



Um estado brasileiro foi escolhido ao acaso para um estudo mais detalhado e verificou-se que a taxa de desemprego em 2020 era superior a 15%. A probabilidade do estado escolhido ser da região Nordeste é

- **A** 22,2%.
- **B** 33,3%.
- **C** 50,0%.
- **D** 60,0%.
- **E** 66,6%.

Questão 02

(Ronaebson)

Uma fábrica de vidros produz determinado tipo de painel em três máquinas diferentes, a saber, A, B e C. Alguns desses painéis produzidos podem apresentar algum tipo de defeito necessitando de algum tipo de reparo e acabamento extra.

A tabela a seguir mostra a distribuição da produção em cada máquina e o percentual médio de painéis que precisam passar por reparos.

Máquina	Fração da produção total	Percentual médio de reparos na produção
A	$^{3}/_{5}$	5%
B	$^{3}/_{20}$	1%
C	$^{1}/_{4}$	2%

Numa inspeção de rotina, um painel foi selecionado ao acaso e constatou-se que ele precisava de reparos e acabamento extra. A probabilidade desse painel ser oriundo da máquina C é

A 5/1000.
B 15/365.
C 50/365.
D 25/100.
E 2/100.

Questão 03

(Ronaebson)

Num determinado cassino nos Estados Unidos, para jogar na roleta descrita a seguir, o jogador deve pagar 800 dólares para ter direito a uma única jogada.

A probabilidade desse jogador, numa única jogada, não sair no prejuízo é

A 62,5%.
B 50,0%.
C 37,5%.
D 25,0%.
E 12,5%.

Questão 04

(Ronaebson)

Em uma avaliação com 8 problemas, cada um tem cinco alternativas, sendo apenas uma correta. Rebeca, que estava fazendo avaliação, ficou sem tempo para fazer o último problema. Desse modo, resolveu "chutar", ou seja, escolher aleatoriamente uma das alternativas.

A chance de Rebeca acertar essa última questão é de

A 5%.
B 20%.
C 25%.
D 50%.
E 75%.

Questão 05

(Ronaebson)

"Nunca tantos congressistas estiveram sob a mira da Justiça. De cada dez parlamentares, quatro estão pendurados no Supremo Tribunal Federal (STF) por suspeita de participação em crimes. É o que revela levantamento exclusivo, que ocupa 20 páginas da sétima edição da **Revista Congresso em Foco."**

http://congressoemfoco.uol.com.br/noticias/numero-de-parlamentares-investigados-bate-recorde/

Sorteando ao acaso um parlamentar brasileiro, a probabilidade de que o mesmo seja réu no Supremo Tribunal Federal (STF) é de

A 4%.
B 25%.
C 40%.
D 50%.
E 60%.

Questão 06

(Ronaebson)

Três homens deixam seus chapéus na chapelaria de um restaurante. No entanto, a atendente mistura os bilhetes que deve entregar aos homens para que eles possam buscar seus chapéus. Quando os três retornam, após terminarem de jantar, eles pegam, cada um, um bilhete.

Qual a probabilidade de que todos recebam o chapéu correto?

A 1/27
B 1/9
C 1/6
D 1/3
E 1/2

Questão 07

(Ronaebson)

Fonte: Internacional Air Transport Association (IATA); Internacional Civil Aviation Organization (ICAO)-ONU; Aviation Safety Network; National Safety Council (NSC).

Comparando os dados, tem-se que a probabilidade de uma pessoa morrer de ataque cardíaco é

Ⓐ 16 vezes maior do que a probabilidade de uma pessoa morrer de acidente de carro, enquanto essa é cerca de 75 vezes maior do que a de morrer num acidente de avião.
Ⓑ 16 vezes menor do que a probabilidade de uma pessoa morrer de acidente de carro, enquanto essa é cerca de 75 vezes menor do que a de morrer num acidente de avião.
Ⓒ 6,25 vezes maior do que a probabilidade de uma pessoa morrer de acidente de carro, enquanto essa é cerca de 13 vezes maior do que a de morrer num acidente de avião.
Ⓓ 16 vezes maior do que a probabilidade de uma pessoa morrer de acidente de carro, enquanto essa é cerca de 100 vezes maior do que a de morrer num acidente de avião.
Ⓔ 75 vezes maior do que a probabilidade de uma pessoa morrer de acidente de carro, enquanto essa é cerca de 16 vezes maior do que a de morrer num acidente de avião.

Questão 08

(Ronaebson)

Em fevereiro, a pedido do Fórum de Segurança Pública, o Datafolha ouviu mais de 1.000 mulheres sobre violência contra a mulher. Os dados mostram que 42% delas disseram já ter sofrido agressão dentro de casa. Os principais agressores: cônjuges e namorados, responsáveis por quase 24% dos casos.

Disponível em https://epoca.globo.com/a-violencia-contra-mulher-no-brasil-em-cinco-graficos-23506457
Acesso em 22/09/2019

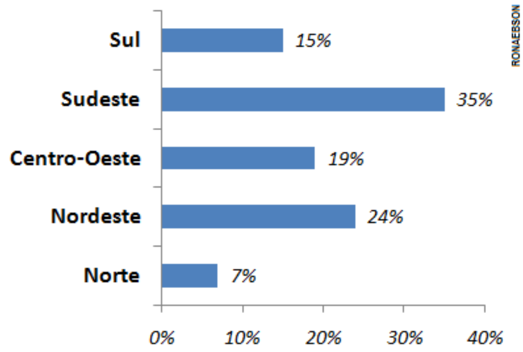
Uma mulher dentre as entrevistadas foi escolhida ao acaso, a probabilidade de que ela tenha sido agredida pelo cônjuge ou namorado é de

Ⓐ 66,00%.
Ⓑ 57,14%.
Ⓒ 42,00%.
Ⓓ 24,00%.
Ⓔ 10,08%

Questão 09

(Ronaebson)

A Mega-Sena paga milhões de reais para os acertadores das 6 dezenas sorteadas. Para um determinado sorteio da Mega-Sena foram feitas apostas nas cinco regiões do país, conforme mostra o gráfico.



Considere que todas as apostas são diferentes e que cada pessoa fez uma única aposta. Dado que houve uma única aposta vencedora, a probabilidade de que ela seja da região Norte ou da região Nordeste é

Ⓐ 0,07.
Ⓑ 0,24.
Ⓒ 0,31.
Ⓓ 0,69.
Ⓔ 0,70.

Questão 10

Em um programa de televisão, será sorteado um dos participantes para executar determinada tarefa. Sabe-se que, entre os participantes, 4 são homens, 6 são mulheres e uma mulher recebeu imunidade e não poderá participar do sorteio. Colocando-se os nomes dos participantes que serão sorteados em uma urna e retirando-se um deles ao acaso, a probabilidade de que seja uma mulher é de

Ⓐ 1/2.
Ⓑ 1/5.
Ⓒ 3/5.
Ⓓ 1/9.
Ⓔ 5/9.

Questão 11

Em uma cartela de rifa com números de 1 a 100, Marcelo comprou todos os números múltiplos de 2, e Peter todos os números múltiplos de 3, com exceção daqueles que já haviam sido comprados por Marcelo.

Desse modo, a probabilidade de que nenhum deles ganhe o prêmio é de

Ⓐ 25%.
Ⓑ 33%.
Ⓒ 48%.
Ⓓ 67%.
Ⓔ 72%.

Questão 12

(Ronaebson)

Os vingadores têm pouquíssimas chances de derrotar Thanos. Em uma das cenas de do filme *Vingadores: Gerra Infinita*, Dr. Stephen Strange utiliza a jóia do tempo para projetar todos os cenários possíveis que o conflito com Thanos pode trazer. São 14.000.605 situações possíveis e em apenas uma os Vingadores saem vitoriosos.

Para ganhar o prêmio principal da Mega-Sena, o apostador deve acertar os seis números sorteados dentre os 60 disponíveis. Assim, a chance que os vingadores têm de vencer Thanos quando comparada com a probabilidade de um apostador ganhar o prêmio dado que ele fez um único jogo, isto é, que escolheu apenas seis números dentre os 60 disponíveis no volante de apostas, é cerca de

Ⓐ 3,57 vezes maior.
Ⓑ 5,21 vezes maior.
Ⓒ 2674 vezes maior.
Ⓓ 9,32 vezes menor.
Ⓔ 14,1 vezes menor.

Questão 13

Um menino vai retirar ao acaso um único cartão de um conjunto de sete cartões. Em cada um deles está escrito apenas um dia da semana, sem repetições: segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo. O menino gostaria de retirar sábado ou domingo.

A probabilidade de ocorrência de uma das preferências do menino é:

Ⓐ 1/49.
Ⓑ 2/49.
Ⓒ 1/7.
Ⓓ 2/7.

Questão 14

(Ronaebson)

Sabe-se que 70% dos tiros livres marcados a favor do Los Angeles Lakers são arremessados por Lebron James. Além disso, sabe-se que a probabilidade do tiro ser convertido é de 90% se o jogador a cobrar for Lebron James e de 80% em caso contrário.

Um tiro livre a favor do Los Angeles Lakers acabou de ser marcado e foi desperdiçado. Qual a probabilidade de que ele tenha sido cobrado por Lebron James?

Ⓐ 7/100
Ⓑ 1/10
Ⓒ 13/100
Ⓓ 6/13
Ⓔ 7/13

Questão 15

(Ronaebson)

No dia 01 de abril de 2018 ocorreu a semifinal do The Voice Kids e os três talentos semifinalistas de cada um dos três times concorreriam entre si a uma vaga na final representando seus respectivos times.

TIME	SEMIFINALISTAS
BROWN	▪ Mariah Yohana **(PB)** ▪ Talita Cipriano **(SP)** ▪ Ranna Andrade **(PB)**
CLÁUDIA LEITTE	▪ Neto Junqueira **(SP)** ▪ Pedro Sousa **(PA)** ▪ Fabiana Moneró **(RJ)**
SIMONE & SIMARIA	▪ Eduarda Brasil **(PB)** ▪ Luis Henrique Shultz **(RS)** ▪ Lívia Bernarde **(SP)**

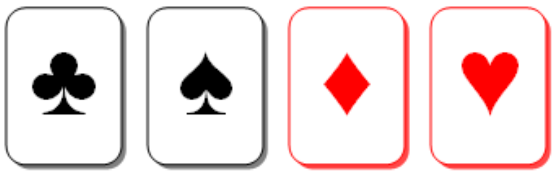
Sabendo que um único semifinalista de cada time passaria para a final, a probabilidade de que o campeão seja um representante do estado da Paraíba é

Ⓐ $\frac{1}{3}$.
Ⓑ $\frac{5}{27}$.
Ⓒ $\frac{4}{27}$.
Ⓓ $\frac{2}{9}$.
Ⓔ $\frac{1}{9}$.

Questão 16

(Ronaebson)

Denver pega quatro cartas, sendo duas pretas (paus e espadas) e duas vermelhas (ouros e copas), as embaralha sem que ele mesmo veja e as dispõe sobre uma mesa, todas viradas para baixo.



Escolhendo aleatoriamente duas dessas cartas, qual a probabilidade de que tenham cores iguais?

Ⓐ ${}^{1}/_{6}$
Ⓑ ${}^{1}/_{4}$
Ⓒ ${}^{1}/_{3}$
Ⓓ ${}^{1}/_{2}$
Ⓔ ${}^{2}/_{3}$

Questão 17

(Ronaebson)

Quando se faz um teste diagnóstico para detectar se um paciente possui ou não determinada doença, quatro situações distintas podem ocorrer no contexto desse teste:

- O paciente possui a doença e o resultado do teste é positivo;
- O paciente possui a doença e o resultado do teste é negativo (*Falso Negativo*);
- O paciente não possui a doença e o resultado do teste é positivo (*Falso Positivo*);
- O paciente não possui a doença e o resultado do teste é negativo.

Veja o quadro resumo:

	DOENTE (D)	SAUDÁVEL (S)
RESULTADO POSITIVO (+)	Verdadeiro Positivo	Falso Positivo
RESULTADO NEGATIVO (−)	Falso Negativo	Verdadeiro Negativo

Para analisar o desempenho de um teste diagnóstico, alguns índices são levados em consideração, vejamos:

- **Sensibilidade:** Probabilidade de um teste ser positivo dado que o paciente tem a doença;
- **Especificidade:** Probabilidade de um teste ser negativo dado que o paciente não tem a doença;
- **Valor Preditivo Positivo:** Probabilidade de um paciente ter a doença, uma vez que o teste deu positivo;
- **Valor Preditivo Negativo:** Probabilidade de um paciente não possuir a doença, uma vez que o teste deu negativo;

Outro dado importante que deve ser considerado é a *Prevalência* da doença na população que esta sendo testada, isto é, a proporção de pessoas na população que apresentam a doença.

Um paciente será submetido a um teste de diagnóstico de uma doença cujo resultado FALSO POSITIVO pode ser muito lesivo, trazendo transtornos psicológicos, danos morais e até físicos. Nesse caso, recomenda-se um teste de

Ⓐ maior especificidade.
Ⓑ maior sensibilidade.
Ⓒ menor valor preditivo positivo.
Ⓓ maior valor preditivo negativo.
Ⓔ menor prevalência.

Questão 18

(Ronaebson)

Um teste de raciocínio lógico foi aplicado num grupo de 460 pessoas numa seleção de novos membros para o quadro de funcionários de uma grande empresa. Os resultados do teste indicaram que das 250 mulheres que fizeram o teste, 150 foram aprovadas. Além disso, 160 pessoas foram reprovadas no teste.

Uma pessoa foi selecionada ao acaso, e verificou-se que ela foi aprovada nesse teste. A probabilidade de ser um homem é

Ⓐ 15%.
Ⓑ 33%.
Ⓒ 50%.
Ⓓ 71%.
Ⓔ 150%.

Questão 19

Gabriel precisava quitar uma dívida de R$ 5 mil e, para conseguir esse dinheiro, resolveu participar do quadro “Envelope premiado”, em um programa de auditório. O jogo consistia em escolher 1 dos 5 envelopes disponíveis, sendo que cada um deles possuía um prêmio diferente, nos valores de R$ 1 mil, R$ 2 mil, R$ 5 mil, R$ 10 mil e R$ 15 mil.

Assim, a probabilidade de Gabriel obter o dinheiro necessário para quitar sua dívida era de

Ⓐ 20%.
Ⓑ 30%.
Ⓒ 40%.
Ⓓ 50%.
Ⓔ 60%.

Questão 20

(Ronaebson)

Para as corridas de Fórmula 1, é de fundamental importância que os engenheiros saibam a previsão do tempo, pois, a partir dela, eles constroem as estratégias, tanto para a corrida em si, quanto para os treinos.
Para o GP de Mônaco, os treinos ocorrerão na sexta-feira e no sábado e a corrida será realizada no domingo. Dado que a previsão meteorológica indique 70% de chance de chuva para cada um dos dias de treino e 40% de chance de chuva para o dia da corrida. Estima-se que a probabilidade de chover em pelo menos um desses três dias é de

Ⓐ 5,4%
Ⓑ 19,6%.
Ⓒ 28,8%.
Ⓓ 80,4%.
Ⓔ 94,6%.

Questão 21

(Ronaebson)

O aneurisma da aorta é a dilatação anormal da parede da aorta, maior artéria do corpo e responsável por transportar sangue rico em oxigênio para todo o organismo. Ao se romper pode causar a morte. As estimativas apontam que o problema acomete 5% dos homens e 1% das mulheres acima de 55 anos.
É preciso verificar seus fatores de risco e realizar exames de diagnóstico, pois a doença é assintomática. Entre os fatores de risco estão: idade superior a 65 anos, tabagismo, hipertensão, aterosclerose (acúmulo de gordura e outras substâncias no vaso) e histórico familiar.

Disponível em http://www.sbacv.com.br/artigos/medicos/checkup-vascular
Acesso em 17/09/2017.

Considerando uma cidade em que 40% de seus habitantes são mulheres (percentual que se mantém para todas as faixas etárias), se uma pessoa com idade superior a 55 anos for selecionada ao acaso, a probabilidade de que ela venha a ter aneurisma da aorta é de

Ⓐ 0,4%.
Ⓑ 2,6%.
Ⓒ 3,0%.
Ⓓ 3,4%.
Ⓔ 6,0%.

Questão 22

(Ronaebson)

Em meses de férias é comum que o canal EDig-BiOW fique disponível para assinantes do pacote básico em alguns dias do mês. Um desses assinantes percebeu que a probabilidade desse canal está com sinal aberto num sábado é de 10%, enquanto que no domingo esse percentual é três vezes maior.

O Sr. Ferreira, assinante do pacote básico de TV, sempre assiste televisão nos finais de semana, ou no sábado ou no domingo, nunca em ambos os dias. Devido a outras atividades programadas pelo Sr. Ferreira, a probabilidade dele assistir televisão no sábado é de 60%.

Num dado final de semana, o Sr. Ferreira assistiu ao canal EDig-BiOW, pelo fato de que ele estava com sinal aberto. A probabilidade de que ele tenha assistido TV no sábado do referido final de semana é de aproximadamente

Ⓐ 6%.
Ⓑ 12%.
Ⓒ 18%.
Ⓓ 33%.
Ⓔ 50%.

Questão 23

A probabilidade de que um componente eletrônico não quebre é chamada de confiabilidade. Para aumentar a confiabilidade de um sistema, é comum que se instalem dois componentes eletrônicos de mesma confiabilidade em paralelo. Nesse caso, o sistema só irá falhar se ambos os componentes instalados falharem simultaneamente.

A probabilidade de que um sistema com dois componentes, cada um de confiabilidade 90%, não falhe é de

Ⓐ 99%.
Ⓑ 90%.
Ⓒ 81%.
Ⓓ 45%.
Ⓔ 1%.

Questão 24

(Ronaebson)

Uma competição acadêmica envolveu 15 escolas, onde cada escola tinha 8 estudantes que a representava. Esses estudantes correspondiam aos oito finalistas de um provão realizado. Entretanto uma denúncia à organização dizia que um dos estudantes havia filado, o que o tornaria inapto a fazer parte da equipe que representaria sua escola. Os organizadores, então, decidiram fazer um novo exame na tentativa de identificar o impostor. Todavia, por uma série de motivos, tal exame não poderia ser aplicado para todos os alunos, assim, foram propostos três modos diferentes para escolher os estudantes que irão realizá-lo:

- Modo I: Sortear três estudantes dentre todos os participantes.
- Modo II: Sortear primeiro uma das escolas e desta, sortear três estudantes.
- Modo III: Sortear primeiro três escolas e, então, sortear um estudante de cada uma dessas três escolas.

Sabendo que a comissão organizadora tem interesse de escolher o método que proporciona maior probabilidade de encontrar o estudante filão, eles devem optar

Ⓐ por qualquer um dos três modos, uma vez que eles proporcionam a mesma probabilidade de encontrar tal estudante.
Ⓑ pelo primeiro modo, uma vez que este proporciona maior probabilidade de encontrar o tal estudante.
Ⓒ pelo segundo modo, já que este fornece maior probabilidade de encontrar o referido estudante.
Ⓓ pelo terceiro modo, pois este apresenta maior chance de identificar o estudante que filou.
Ⓔ pelos modos I ou II e de forma alguma optar pelo III, uma vez que este último fornece menor probabilidade de descobrir o referido estudante.

Questão 25

(Ronaebson)

Um canal tem duas barragens, B1 e B2 dispostas em paralelo e transversalmente ao rio, que podem estar abertas ou fechadas e que funcional independentes uma da outra.

Quando uma das barragens está fechada a passagem de água pelo canal fica completamente interrompida. Sabendo que, para um determinado dia, a probabilidade de que a barragem B1 esteja fechada é de 10% e a probabilidade de que a barragem B2 esteja fechada é de 20%, qual é a probabilidade de o fluxo de água está interrompido nesse dia?

Ⓐ 28%.
Ⓑ 30%.
Ⓒ 32%.
Ⓓ 70%.
Ⓔ 72%.

Questão 26

(UNICAMP)

Pedra-papel-tesoura, também chamado *jankenpon* ou *jokempô*, é um jogo recreativo para duas pessoas. Nesse jogo, os participantes usam as mãos para representar os símbolos de pedra, papel e tesoura, conforme mostrado nos *emojis* a seguir:

Pelas regras do jogo, o participante que escolher “pedra” ganha do que escolher tesoura; o participante que escolher tesoura ganha do que escolher papel; por fim, o que escolher papel ganha do que escolher pedra. Se ambos escolherem os mesmos símbolos, eles empatam.

Admitindo que os participantes escolhem os símbolos com igual probabilidade, qual a chance de acontecer pelo menos um empate em três partidas?

Ⓐ 16/27
Ⓑ 17/27
Ⓒ 18/27
Ⓓ 19/27
Ⓔ 20/27

Questão 27

(Ronaebson)

Camile tem dois dados poliédricos com as faces pintadas nas cores vermelha ou azul. Um dos dados tem formato de um octaedro regular com seis faces vermelhas e duas azuis e o outro no formato de um cubo.

Camile joga esses dados e observa a cor das faces que ficam apoiadas no chão. Sabe-se que, se lançamos os dois dados simultaneamente, a probabilidade de observarmos faces de mesma cor é 1/3. Assim, o número de faces vermelhas que o dado cúbico tem é igual a

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 3.
Ⓓ 4.
Ⓔ 5.

Questão 28

(Ronaebson)

Os alunos do curso de informática do IFPB desenvolveram aplicativos compatíveis com pelo menos um dos três sistemas operacionais: IOS (I), Android (A) e Windows (W).

As quantidades de apps compatíveis com os sistemas operacionais estão descritos na tabela a seguir:

Sistema Operacional	Nº. de Apps
I	40
A	50
W	25
I e A	25
I e W	10
A e W	10
I, A e W	5

Um desses aplicativos foi sorteado ao acaso para análise, qual a probabilidade de que ele seja um app compatível com IOS e Android e não seja compatível com Windows?

Ⓐ 4/15
Ⓑ 11/15
Ⓒ 1/3
Ⓓ 2/5
Ⓔ 3/5

Questão 29

Uma urna possui 5 bolas verdes e 4 amarelas. São retiradas duas bolas aleatoriamente e sem reposição. A probabilidade de ter saído bolas de cores diferentes é

Ⓐ 5/9
Ⓑ 5/18
Ⓒ 5/12
Ⓓ 9/17
Ⓔ 20/17

Questão 30

(Vunesp)

Analise a tabela, que indica os resultados de um estudo para avaliação da relação entre o peso e a pressão arterial de um grupo de indivíduos.

Pressão arterial	Peso deficiente	Peso normal	Peso em excesso
Normal	20%	45%	15%
Elevada	1%	9%	10%

Renato fez parte desse estudo e sabe que está com excesso de peso. Ao ver a tabela com o resultado do estudo, calculou corretamente que a probabilidade da aferição da sua pressão arterial ter indicado valores elevados é de

Ⓐ 4%.
Ⓑ 10%.
Ⓒ 12%.
Ⓓ 40%.
Ⓔ 50%.

Questão 31

(Ronaebson)

A “raspadinha” é um jogo que consiste em a pessoa raspar algumas determinadas áreas e verificar se terá direito ao prêmio.

Uma cartela de raspadinha do Dia dos Namorados se apresenta da seguinte maneira:

1ª Linha	●	●	●	●	●
2ª Linha	●	●	●	●	●
3ª Linha	●	●	●	●	●

No verso do cartão tem as seguintes regras:
- Em cada uma das bolinhas cinzas há um coração ou um X, nunca ambos.
- Raspe apenas uma bolinha em cada linha.
- Você vencerá o jogo se obtiver um coração em cada uma das
- linhas. Caso encontre um X, a cartela estará automaticamente perdida.

Dado que em cada uma das linhas há apenas um coração e quatro X, a probabilidade de uma pessoa ganhar o prêmio será

Ⓐ 1/125.
Ⓑ 1/100.
Ⓒ 5/100.
Ⓓ 64/125.
Ⓔ 124/125.

Questão 32

(Ronaebson)

Um teste para Covid-19 foi aplicado num grupo de 500 pessoas, 10% das quais eram portadoras da doença. Quando a pessoa tem Covid-19, o teste detecta a doença em 92% dos casos, é inconclusivo em 6% dos casos e negativo em 2%. Quando a pessoa não está infectada pelo corona vírus, o teste indica a doença em 6% dos casos, é inconclusivo em 12% dos casos e negativo em 82%.

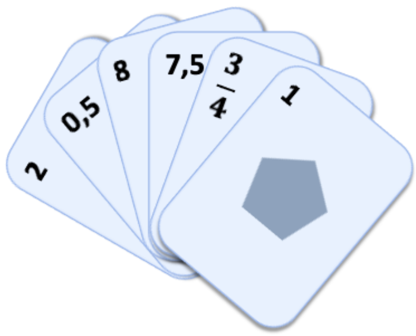
Se uma pessoa é selecionada ao acaso, qual a probabilidade dela ter Covid-19, dado que o resultado do teste foi inconclusivo?

Ⓐ $^{3}/_{54}$
Ⓑ $^{3}/_{57}$
Ⓒ $^{57}/_{500}$
Ⓓ $^{3}/_{50}$
Ⓔ $^{3}/_{500}$

Questão 33

(Ronaebson)

Um baralho tem seis cartas, cada uma delas com um número e polígono. Veja a figura a seguir:



Se todas as cartas estiverem voltadas para baixo, qual a probabilidade de, escolhendo aleatoriamente duas delas, o produto de seus números ser menor do que pelo menos um dos números presentes nas cartas escolhidas?

Ⓐ $^{2}/_{5}$
Ⓑ $^{7}/_{15}$
Ⓒ $^{8}/_{15}$
Ⓓ $^{3}/_{5}$
Ⓔ $^{2}/_{3}$

Questão 34

(Ronaebson)

Uma turma do 5º Ano de uma escola tem 20 alunos, dos quais, dois são irmãos. O professor de educação física fez uma atividade e colocou esses alunos, aleatoriamente, em fila.

A probabilidade de que os dois irmãos fiquem separados é igual a

A 10%.
B 20%.
C 50%.
D 75%.
E 90%.

Questão 35

(Ronaebson)

Existem 9 pedras sobressalentes e enfileiradas num lago. Uma rã está localizada na pedra central. Sabe-se que para cada salto, ele pode deslocar-se para a próxima pedra a direita ou para a pedra anterior à esquerda de onde ela estiver situada. Cada uma dessas possibilidades tem igual probabilidade.

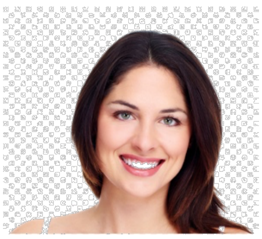
Qual a probabilidade de que após quatro saltos ela volte a posição inicial, ou seja, ela volte para a pedra central?

A 1/4
B 3/8
C 1/2
D 5/8
E 1/16

Questão 36

(Ronaebson)

“Covinhas são falhas genéticas causadas pela malformação de músculos. Estima-se que 20% da população mundial tenha.”



Se quatro pessoas são selecionadas ao acaso, qual a probabilidade de que duas delas tenham “covinhas”?

A $6 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2$
B $4 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2$
C $(0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^2$
D $(0{,}2)^4$
E $0{,}5$

Questão 37

(Ronaebson)

Messi e Aguero, os dois principais titulares, estão machucados e talvez não possam defender a seleção da Argentina em sua próxima partida contra o Brasil. A probabilidade de Messi jogar é 40% e a de Agüero jogar, 70%. Se ambos os jogadores jogam, a Argentina tem 60% de chances de vitória, caso nenhum deles jogue, apenas 30%. Se Messi jogar e Agüero não, a probabilidade de vitória é de 50%, caso Agüero jogue e Messi não, a chance será de 40%.

Qual a probabilidade da Argentina vencer a partida?

A 4,8%
B 22,8%
C 33,6%
D 45,0%
E 55,0%

Questão 38

(Ronaebson)

Considerando os alunos do 3º Ano do Ensino Médio de certa escola, sabe-se que o número de mulheres é o triplo do número de homens, 40% dos homens já fizeram o ENEM em outros anos e 30% das mulheres nunca fizeram o ENEM.

Um desses alunos do 3º Ano do Ensino Médio dessa escola é escolhido ao acaso para falar sobre a prova do ENEM. Qual a probabilidade desse aluno nunca ter feito a prova do ENEM?

A 15,0%
B 24,1%
C 25,0%
D 37,5%
E 50,0%

Questão 39

(Ronaebson)

Um novo estudo com base em dados coletados entre 1995 e 2022 apontou que um em cada três homens com mais de 15 anos está infectado com, ao menos, um tipo genital do papilomavírus humano, o HPV. O levantamento, publicado no periódico The Lancet Global Health e divulgado pela Organização Mundial da Saúde (OMS), mostrou ainda que 21% desses casos são portadores de tipos cancerígenos.

Adaptado de https://veja.abril.com.br/saude/hpv-um-em-cada-tres-homens-esta-infectado-pelo-virus-no-mundo

Escolhendo-se ao acaso quatro homens da população mundial, a probabilidade de que exatamente três deles sejam portadores do vírus HPV dos tipos cancerígenos é igual a

A $4 \cdot (0{,}07)^3 \cdot 0{,}93$.
B $(0{,}07)^3 \cdot 0{,}93$.
C $4 \cdot (0{,}21)^3 \cdot 0{,}79$.
D $(0{,}21)^3 \cdot 0{,}79$.
E $4 \cdot (0{,}33)^3 \cdot 0{,}67$.

Questão 40

(Ronaebson)

Um candidato a uma vaga de emprego da empresa Mercado Criativo é submetido a um teste com uma única questão de múltipla escolha com 5 alternativas, onde apenas uma está correta. A probabilidade de que o candidato saiba a resposta certa dessa questão é de 40%. Se ele não souber a resposta, existe a possibilidade de acertar no "chute", não havendo a possibilidade de ele obter a resposta correta filando.
Se o candidato acertou a questão, a probabilidade de ele realmente saber a resposta é

- Ⓐ 3/25.
- Ⓑ 13/100
- Ⓒ 2/5.
- Ⓓ 10/13.
- Ⓔ 13/25.

Questão 41

(Ronaebson)

Na plataforma do curso Matemática Criativa o aluno participa de um processo de "gameficação" onde ele acumulada pontos de experiência (xp) ao participar, interagir, responder aos questionários, assistir às vídeo aulas, baixar os materiais.

Nesse processo, o aluno é classificado em até 10 níveis de acordo com os pontos acumulados. A tabela a seguir trás a pontuação mínima necessária para cada nível como também o número de alunos que estão naquele nível.

Nível	xp Necessário	Número de Alunos que atingiram
1	0	5
2	120	5
3	276	15
4	479	29
5	743	73
6	1086	80
7	1532	145
8	2112	168
9	2866	272
10	3846	308

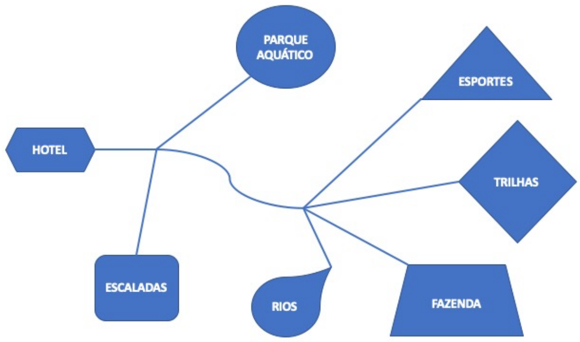
Um sorteio será realizado entre todos os alunos do curso, caso o aluno sorteado esteja num nível superior ou igual a 8, ele receberá um prêmio duplo. A probabilidade de que o sorteado receba o prêmio duplo é

- Ⓐ 13,6%.
- Ⓑ 32,0%.
- Ⓒ 33,3%.
- Ⓓ 68,0%.
- Ⓔ 74,8%.

Questão 42

(Ronaebson)

O mapa de um grande complexo de férias na Bahia está descrito a seguir com a localização do hotel, de todas as áreas de laser que os hóspedes podem fazer usufruto e também com os caminhos para se chegar a cada uma das áreas.



Uma família que está hospedada no Hotel desse complexo, deseja ir para área da fazenda. Por não ter conhecimento do mapa, ela sai caminhando da área do Hotel tentando chegar ao local desejado.

Sabe-se que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentam iguais chances de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que leve a uma área distinta da fazenda, a família necessariamente retorna.
Assim, qual a probabilidade de que a família chegue a Fazenda sem ter entrado em qualquer outra área?

- Ⓐ $1/2$
- Ⓑ $1/3$
- Ⓒ $1/4$
- Ⓓ $1/6$
- Ⓔ $1/12$

Questão 43

(Ronaebson)

O professor de atualidades passou uma avaliação para a uma de suas turmas, e cada pergunta tinha quatro alternativas, onde apenas uma era correta. Yanne, aluna da turma, sabe 20% das respostas da avaliação. Se ela deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que ela chutado essa a resposta para essa pergunta?

- Ⓐ 20%
- Ⓑ 25%
- Ⓒ 36%
- Ⓓ 40%
- Ⓔ 50%

Questão 44

(Ronaebson)

Foi feita uma pesquisa com um grupo de investidores conservadores de uma cooperativa de crédito sobre onde eles aplicavam o dinheiro e constatou-se que todos eles investem em pelo menos um dos três tipos, a saber: poupança, renda fixa ou tesouro direto. Além disso:

- 140 investem em apenas um desses fundos;
- 50 investem em renda fixa e poupança, mas não investem no tesouro direto;
- 60 investem em poupança e tesouro direto, mas não investem na renda fixa;
- 70 investem em renda fixa e tesouro direto, mas não investem na poupança;
- 100 investem nos três tipos de aplicações citadas.

Um sorteio foi realizado entre os investidores desse grupo e percebeu-se que a pessoa sorteada investe em pelo menos dois dos tipos de aplicação. Qual a probabilidade de que a pessoa escolhida invista na poupança?

Ⓐ 25%.
Ⓑ 30%.
Ⓒ 50%.
Ⓓ 70%.
Ⓔ 75%.

Questão 45

O sistema de segurança de um aeroporto consiste de duas inspeções. Na primeira delas, a probabilidade de um passageiro ser inspecionado é de 3/5. Na segunda, a probabilidade se reduz para ¼. A probabilidade de um passageiro ser inspecionado pelo menos uma vez é igual a

Ⓐ 17/20.
Ⓑ 7/10.
Ⓒ 3/10.
Ⓓ 3/20.

Questão 46

(Ronaebson)

Sr. Expedito fez um estudo fez um estudo acerca das sementes de quiabo e notou que, em média, 80% das sementes de quiabo germinam depois que foram plantadas.

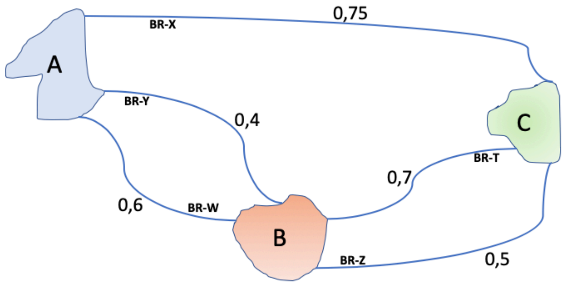
Sabendo que ele plantou sete dessas sementes, a probabilidade de que exatamente quadro delas germinem é de

Ⓐ $35 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^3$.
Ⓑ $35 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^3$.
Ⓒ $7 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^3$.
Ⓓ $0{,}8^4 \cdot 0{,}2^3$.
Ⓔ $35 \cdot 0{,}16^7$.

Questão 47

(Ronaebson)

Um aplicativo de mobilidade urbana mostra o mapa a seguir com as principais vias de ligação entre as cidades A, B e C. Cada número indicado no mapa indica a probabilidade de pegar engarrafamento quando se passa pelo trecho indicado, dessa forma, há um probabilidade de 75% de pegar engarrafamento quando se passa pela BR-X e de 70% quando se passa pela BR-T, por exemplo. Essas probabilidades são independentes umas das outras.



Antônio, experiente com questões ligadas a trânsito, decide se programar e avalia qual o trecho lhe oferece menor probabilidade de pegar congestionamento no trajeto da cidade A para a cidade C. Naturalmente, os cinco possíveis trajetos que ele pode traçar são:

- Trajeto A: BR-X
- Trajeto B: BR-Y e BR-T
- Trajeto C: BR-Y e BR-Z
- Trajeto D: BR-W e BR-T
- Trajeto E: BR-W e BR-Z

Levando em consideração apenas as chances de pegar engarrafamento, o trajeto que apresenta menor probabilidade de pegar engarrafamento é o trajeto

Ⓐ A.
Ⓑ B.
Ⓒ C.
Ⓓ D.
Ⓔ E.

Questão 48

(Ronaebson)

Cinco duplas disputam um torneio de Beach Tennis de modo que cada dupla enfrenta todas as outras exatamente uma vez, além disso, nessas partidas não há possibilidade de empate, ou seja, o jogo terá, obrigatoriamente, um vencedor.

Sabe-se que, em cada partida, as duplas têm a mesma probabilidade de ganhar e o resultado de uma partida não influencia o resultado das demais.

Qual a probabilidade de que alguma dupla vença todas as partidas?

Ⓐ 1/16
Ⓑ 5/32
Ⓒ 5/16
Ⓓ 5/8
Ⓔ 1/4

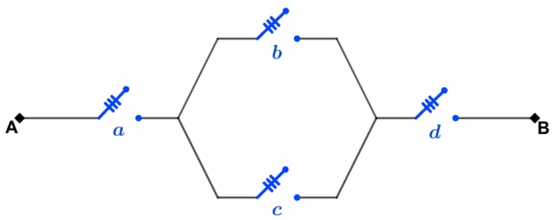
Questão 49

(Ronaebson)

O relé é um dispositivo eletromecânico, com inúmeras aplicações possíveis em comutação de contatos elétricos, servindo para ligar ou desligar dispositivos. É normal o relé estar ligado a dois circuitos elétricos. No caso do relé eletromecânico, a comutação é realizada alimentando-se a bobina do mesmo.

Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Relé
Acesso em 21/09/2019

Considere o circuito representado na figura a seguir, onde cada letra minúscula representa um relé e a probabilidade de fechamento de cada relé é 0,2.



Se todos os relés funcionam independentemente, qual é a probabilidade de que haja corrente circulando entre os terminais **A** e **B**?

Ⓐ 0,16%
Ⓑ 0,64%
Ⓒ 1,28%
Ⓓ 1,44%
Ⓔ 1,92%

Questão 50

Durante um determinado concurso, três jurados devem votar em apenas uma entre duas candidatas. A probabilidade de que cada uma delas receba pelo menos um voto é de

Ⓐ $\frac{1}{4}$

Ⓑ $\frac{2}{5}$

Ⓒ $\frac{3}{5}$

Ⓓ $\frac{3}{4}$

Ⓔ $\frac{5}{8}$

Questão 51

Considere uma urna contendo cinco bolas brancas, duas pretas e três verdes. Suponha que três bolas sejam retiradas da urna, de forma aleatória e sem reposição. Em valores aproximados, qual é a probabilidade de que as três bolas retiradas tenham a mesma cor?

Ⓐ 7,44%. Ⓑ 8,33%. Ⓒ 9,17%. Ⓓ 15,95%. Ⓔ 27,51%.

Questão 52

(Ronaebson)

Samuel comprou sete quadrinhos, sendo quatro de super-heróis, um de terror e dois de ficção científica. Esses quadrinhos são organizados lado a lado na prateleira de uma estante, além disso, Samuel prefere que eles fiquem organizados de modo que o quadrinho de terror separe os de super-heróis dos de ficção científica, não importando qual agrupamento ficasse à direita ou a esquerda.

Num dado dia, o pai de Samuel organizou esses quadrinhos lado a lado na prateleira numa sequência aleatória. Qual a probabilidade de que esses quadrinhos tenham sido organizados de acordo com a preferência de Samuel?

Ⓐ 1/105
Ⓑ 2/105
Ⓒ 2/35
Ⓓ 1/96
Ⓔ 1/48

Questão 53

(Ronaebson)

De notório sabor picante, utilizado para realçar receitas culinárias, a pimenta vermelha também está ganhando fama entre as plantas ornamentais. O brilho da pele colorida em contraste com o verde das folhas tem levado a pimenteira para dentro de casas, escritórios e outros ambientes. Cultivada em pequenos vasos, a planta tornou-se objeto de decoração de interiores muito apreciada.

Disponível em: https://revistagloborural.globo.com
Acesso em 26/09/2021.

Um experiente agricultor deseja avaliar o poder germinativo de duas culturas de pimenta. A tabela abaixo nos mostra os dados dessa avaliação.

Culturas	Germinação		Total
	Germinaram	Não germinaram	
A	682	18	700
B	688	12	700
Total	1370	30	1400

Escolhendo-se ao acaso uma amostra de uma dessas culturas e sabendo que ela não germinou, qual a probabilidade de ela ser da cultura B?

Ⓐ 1/2
Ⓑ 2/5.
Ⓒ 3/140.
Ⓓ 3/375.
Ⓔ 3/350.

Questão 54

Para manter o controle da reprodução do *Aedes aegypti*, 222 municípios paraibanos estão sendo acompanhados anualmente desde 2015. Alguns municípios apresentaram índice satisfatório por causa da baixa reprodução do mosquito. No entanto, os municípios que possuíam uma taxa representativa de reprodução ainda foram divididos em estado de alerta pela reprodução moderada e em estado de risco pela reprodução excessiva:

Ano	Municípios em risco	Municípios em alerta	Municípios com índice satisfatório
2015	57	111	54
2016	36	113	73

Disponível em:<http://correiodaparaiba.com.br/geral/mais-mosquito-do-que-se-pensa-transmitindo-dengue-zika-e-chikungunya/>

No dia 31 de dezembro de 2016, um casal visitou um município paraibano que não apresentava índice satisfatório de reprodução para o ano em questão. A probabilidade de que o local visitado estivesse em estado de risco é de

Ⓐ $\frac{36}{149}$
Ⓑ $\frac{6}{37}$
Ⓒ $\frac{19}{56}$
Ⓓ $\frac{19}{74}$
Ⓔ $\frac{31}{74}$

Questão 55

(FGV)

Uma loteria consiste no sorteio de três números distintos entre os 20 números inteiros de 1 a 20; a ordem deles não é levada em consideração. Ganha um prêmio de R$ 100.000,00 o apostador que comprou o bilhete com os números sorteados. Não existem bilhetes com a mesma trinca de números. O ganho esperado do apostador que comprou um determinado bilhete é igual ao prêmio multiplicado pela probabilidade de ganho.

Quem apostou na trinca {4, 7, 18} tem um ganho esperado de aproximadamente

Ⓐ R$ 88,00
Ⓑ R$ 89,00
Ⓒ R$ 90,00
Ⓓ R$ 91,00
Ⓔ R$ 92,00

Questão 56

(ESPCEX)

Em uma população de homens e mulheres, 60% são mulheres, sendo 10% delas vegetarianas. Sabe-se, ainda, que 5% dos homens dessa população também são vegetarianos. Dessa forma, selecionando-se uma pessoa dessa população ao acaso e verificando-se que ela é vegetariana, qual é a probabilidade de que seja mulher?

Ⓐ 50%
Ⓑ 70%
Ⓒ 75%
Ⓓ 80%
Ⓔ 85%

Questão 57

Em uma prova de múltipla escolha, cada questão tem cinco alternativas. Um aluno que realizava essa avaliação teve certeza da resposta de 60% das questões e assinalou a alternativa correta de cada uma destas. Para as demais questões, ele não sabia qual poderia ser a resposta correta e, por isso, chutou aleatoriamente uma alternativa. Considerando que ele acertou a primeira questão da prova, a probabilidade de que ele tenha assinalado com certeza essa alternativa correta, e não apenas chutado, é de

Ⓐ $\frac{5}{34}$
Ⓑ $\frac{2}{5}$
Ⓒ $\frac{1}{2}$
Ⓓ $\frac{3}{5}$
Ⓔ $\frac{15}{17}$

Questão 58

Em ciências atuariais, uma tábua da vida é uma tabela, construída a partir de censos populacionais, que mostra a probabilidade de morte de um indivíduo em uma determinada faixa etária. Por exemplo, a tábua da vida abaixo indica que um indivíduo que completou 21 anos tem 0,10% de chance de morrer antes de completar 22 anos.

Faixa etária $[x, x+1)$	$[20, 21)$	$[21, 22)$	$[22, 23)$	$[23, 24)$	$[25, 26)$
Probabilidade de morrer	0,09%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%

(Fonte: National Vital Statistics Reports, Vol. 54, No. 14, 2006.)

Considere um grupo de 1000000 pessoas que acabaram de completar 21 anos. Segundo esta tabela, qual é o número de pessoas deste grupo, em média, que se espera que faça aniversário de 23 anos?

Ⓐ 999900
Ⓑ 998001
Ⓒ 990000
Ⓓ 900001
Ⓔ 810000

Questão 59

(Ronaebson)

Do CEO da Apple, Tim Cook, que acorda as 3h45m da manhã para responder e-mails, à apresentadora americana Oprah Winfrey, que afirma se sentir bem com apenas 5 horas de sono, ser um chefe insone virou sinônimo de sucesso. O fenômeno levou o Wall Street Journal a cunhar uma expressão sleepless elite ("elite insone", numa tradução livre) para se referir a esse pessoal (3% da população que, segundo estudos, precisa de poucas horas de sono).

Disponível em https://sergiorodriguesblog.wordpress.com/category/produtividade/page/2/ Acesso em 19/08/2019.

Cinco pessoas são selecionadas ao acaso de uma população, a probabilidade de que exatamente duas delas sejam *"elite insone"* é

Ⓐ $(0{,}03)^3 \cdot (0{,}97)^2$.
Ⓑ $(0{,}03)^2 \cdot (0{,}97)^3$.
Ⓒ $2 \cdot (0{,}03)^2 \cdot (0{,}97)^3$.
Ⓓ $5 \cdot (0{,}03)^2 \cdot (0{,}97)^3$.
Ⓔ $10 \cdot (0{,}03)^2 \cdot (0{,}97)^3$.

Questão 60

(Ronaebson)

A Cafeína, uma cafeteria gourmet em João Pessoa, fez uma pesquisa entre seus clientes para saber seus gostos acerca de café, suco ou refrigerante e constatou que 82% gostam de café, 75% gostam de refrigerante e 80% gostam de suco.

Sabe-se também que 75% dos entrevistados indicaram gostar de pelo menos duas das opções e que todos os clientes indicaram gostar de ao menos um dos itens.

O percentual de clientes que indicaram gostar das três opções é

Ⓐ 40%.
Ⓑ 50%.
Ⓒ 54%.
Ⓓ 62%.
Ⓔ 70%.

Questão 61

(ACAFE_Adaptada)

Um casal que pretende ter 5 filhos descobre, ao fazer certos exames, que determinada característica genética tem a probabilidade de um terço de ser transmitida a cada de seus futuros filhos.

Nessas condições, a probabilidade de, exatamente, três dos cinco filhos possuírem essa característica é, aproximadamente,

Ⓐ 43,00%
Ⓑ 24,32%
Ⓒ 16,46%
Ⓓ 12,00%
Ⓔ 10,04%

Questão 62

(Ronaebson)

Ebson, Guga e Rona são finalistas de um programa de auditório e participarão de um sorteio onde cada um escolhe um número de 1 a 1000, depois um cartão é sorteado ao acaso de uma sacola escura com mil cartões numerados de 1 a 1000. Ganhará aquele que tiver escolhido o número mais próximo do sorteado; em caso de empate, ganhará quem tiver escolhido o menor número.
Sabe-se que:

- Ebson escolheu o número 300;
- Guga escolheu o número 500 e
- Rona o número 900.

Considere que todos os números têm iguais probabilidades de serem sorteados e que $P(E)$, $P(G)$ e $P(R)$ sejam as probabilidades de ganhar de Ebson, Guga e Rona, respectivamente.
Comparando essas probabilidades, obtém-se

Ⓐ $P(E) > P(G) > P(R)$.
Ⓑ $P(E) > P(G) = P(R)$.
Ⓒ $P(E) < P(G) = P(R)$.
Ⓓ $P(E) = P(G) > P(R)$.
Ⓔ $P(E) = P(G) = P(R)$.

Questão 63

É comum à maioria das vacinas deixar uma sensação dolorida na área de aplicação nas primeiras 24 horas, e cremes e pomadas anestésicos não impedirão essa dor de aparecer.

"Teoricamente, qualquer vacina pode provocar reações adversas, como febre, dor local ou irritabilidade, além de outros sintomas, mas isso tende a ocorrer mais com a tríplice bacteriana (DTP), a meningocócica e a pneumocócica", explica o pediatra Fábio Picchi Martins, integrante do Conselho Médico do BabyCenter.

Disponível em: <https://brasil.babycenter.com/x5000019/h%C3%A1-vacinas-que-doem-ou-d%C3%A3o-mais-rea%C3%A7%C3%A3o-no-beb%C3%AA-que-outras#ixzz4jknYsNc6>

Sabendo que um bebê que toma a vacina DTP tem 10% de chance de ter reação adversa. Quando cinco bebês tomarem a vacina em um dia, a probabilidade de exatamente dois terem a reação adversa é de

Ⓐ 72,9%
Ⓑ 7,29%
Ⓒ 0,729%
Ⓓ 0,0729%
Ⓔ 0,00729%

Questão 64

(Ronaebson)

Num estojo, foram colocados cinco cartões numerados de 3 a 7. Dois cartões serão sorteados simultaneamente.

Qual a probabilidade dos números presentes nos cartões sorteados serem consecutivos?

Ⓐ 50%
Ⓑ 40%.
Ⓒ 30%
Ⓓ 25%
Ⓔ 20%

Questão 65

(Ronaebson)

Uma urna contém cinco “dados poliédricos”, sendo cada um deles no formato de um dos poliedros regulares.

Um desses dados é extraído aleatoriamente dessa urna. Sabe-se que, para essa situação, a probabilidade de um desses dados ser sorteado é proporcional ao número de faces que ele possui.

A probabilidade de sortearmos um dado com menos de sete faces é igual a

Ⓐ 50%.
Ⓑ 40%.
Ⓒ 35%.
Ⓓ 20%.
Ⓔ 10%.

Questão 66

(FAMEMA)

Uma confecção de roupas produziu um lote com um total de 150 camisetas, distribuídas entre os tamanhos P e M, sendo 59 lisas e as demais estampadas. Nesse lote, havia 100 camisetas tamanho P, das quais 67 eram estampadas.

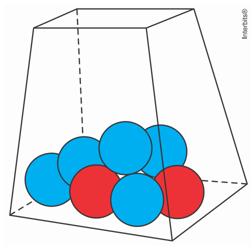
Retirando-se, ao acaso, uma camiseta desse lote e sabendo que seu tamanho é M, a probabilidade de que seja uma peça estampada é igual a

Ⓐ 36%
Ⓑ 24%
Ⓒ 48%
Ⓓ 60%
Ⓔ 72%

Questão 67

(UERJ)

Em uma urna há sete bolinhas, sendo duas delas vermelhas e cinco azuis. Quatro do total de bolinhas serão sorteadas ao acaso.



A probabilidade de pelo menos uma das bolinhas sorteadas ser vermelha é

Ⓐ 1/7
Ⓑ 2/7
Ⓒ 4/7
Ⓓ 5/7
Ⓔ 6/7

Questão 68

(UERJ)

Um jogo individual da memória contém oito cartas, sendo duas a duas iguais, conforme ilustrado a seguir.

Observe as etapas do jogo:

1. viram-se as figuras para baixo;
2. embaralham-se as cartas;
3. o jogador desvira duas cartas na primeira jogada.

O jogo continua se ele acertar um par de figuras iguais. Nesse caso, o jogador desvira mais duas cartas, e assim sucessivamente. Ele será vencedor se conseguir desvirar os quatro pares de cartas iguais em quatro jogadas seguidas. Se errar algum par, ele perde o jogo.

A probabilidade de o jogador perder nesse jogo é

Ⓐ 1/105
Ⓑ 35/105
Ⓒ 72/105
Ⓓ 85/105
Ⓔ 104/105

Questão 69

(Ronaebson)

A COVID-19 é uma doença infectocontagiosa extremamente transmissível e em muitos casos capaz de trazer sérios danos a saúde do indivíduo. Uma vacina com eficácia de 80% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção pelo Corona Vírus e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver essa doença.

Considera-se que, em uma população não vacinada, a COVID-19 acomete 60% desse público ao longo de suas vidas.

Num dado município, uma campanha de vacinação foi lançada e constatou-se que 75% da população foi vacinada.

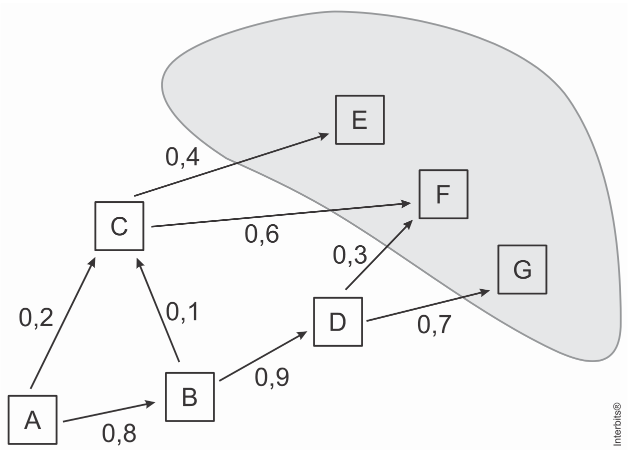
Uma pessoa desse município foi escolhida ao acaso, a probabilidade dessa pessoa vir a desenvolver essa doença é de

Ⓐ 9%.
Ⓑ 15%.
Ⓒ 24%.
Ⓓ 45%.
Ⓔ 60%.

Questão 70

(FUVEST_2022)

Carros que saem da cidade A rumo a alguma das cidades turísticas E, F e G fazem caminhos diversos, passando por pelo menos uma das cidades B, C e D. apenas no sentido indicado pelas setas, como mostra a figura. Os números indicados nas setas são as probabilidades, dentre esses carros, de se ir de uma cidade a outra.



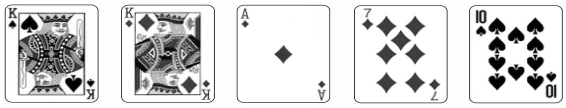
Nesse cenário, a probabilidade de um carro ir de A a F é

Ⓐ 0,120.
Ⓑ 0,216.
Ⓒ 0,264.
Ⓓ 0,336.
Ⓔ 0,384.

Questão 71

(UERJ)

Cinco cartas de um baralho estão sobre uma mesa; duas delas são Reis, como indicam as imagens.



Após serem viradas para baixo e embaralhadas, uma pessoa retira uma dessas cartas ao acaso e, em seguida, retira outra.

A probabilidade de sair Rei apenas na segunda retirada equivale a:

Ⓐ 1/2
Ⓑ 1/3
Ⓒ 2/5
Ⓓ 3/10
Ⓔ 5/7

Questão 72

(UEG)

Dois candidatos, A e B, disputam a presidência de uma empresa. A probabilidade de o candidato A vencer é de 0,70; ao passo que a de B vencer é de 0,30. Se o candidato A vencer essa disputa, a probabilidade de Heloísa ser promovida a diretora dessa empresa é de 0,80; já se o candidato B vencer, essa probabilidade será de 0,30.

A probabilidade de Heloísa, após a disputa da presidência dessa empresa, ser promovida a diretora, é de

Ⓐ 0,50
Ⓑ 0,45
Ⓒ 0,65
Ⓓ 0,56
Ⓔ 0,55

Questão 73

(FAMEMA)

Uma pessoa colocou em um frasco não transparente 21 comprimidos de um medicamento A e 15 comprimidos de um medicamento B. Todos os comprimidos possuem o mesmo formato e as mesmas dimensões, porém são de cores diferentes. Se essa pessoa retirar aleatoriamente 2 comprimidos desse frasco, um após o outro, sem reposição, a probabilidade de saírem 2 comprimidos do mesmo medicamento é

Ⓐ 1/5
Ⓑ 1/2
Ⓒ 2/5
Ⓓ 3/4
Ⓔ 1/4

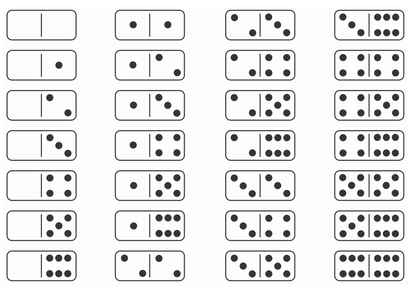
Questão 98

(EPCAR_ADAPTADA))

Você conhece o jogo chamado Dominó?

“Existem várias versões que tentam decifrar de onde veio o jogo, mas nenhuma delas até hoje pôde ser confirmada. Acredita-se, porém, que ele tenha surgido na China, inventado por um soldado chamado Hung Ming, que teria vivido de 243 a 181 a.C. (...) O nome dominó provavelmente deriva da expressão latina *domino gratias*, que significa “graças a Deus”, dita pelos padres europeus enquanto jogavam. Atualmente, o dominó é jogado em quase todos os países do mundo, mas é mais popular na América Latina.”

(Disponível em: <<https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-ea-origem-do-domino/>> Acesso em 26 de fevereiro de 2019.)



Disponível em: <<https://br.depositphotos.com/64902345/stock-illustration-domino-set.html>> Acesso em 26 de fevereiro de 2019.

As 28 peças de um dominó tradicional são divididas em duas metades. Nelas aparecem representados os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, geralmente pintados em quantidades de pontos tal como a figura anterior.

Dentre todas as peças do jogo, a probabilidade de se escolher uma peça em que os dois números representados são diferentes entre si é igual a

Ⓐ 75%
Ⓑ 42%
Ⓒ 28%
Ⓓ 25%
Ⓔ 21%

Questão 75

(FMP_2019)

Um médico está acompanhando um casal que deseja ter filhos. Segundo o médico, a esposa não tem chances de ter gêmeos, mas, se engravidar, a probabilidade de o neném ser do sexo masculino é de 40%. O casal deseja ter três nenéns e deseja que eles não sejam, todos, do mesmo sexo.

Confirmando-se o parecer do médico, a probabilidade de o casal conseguir o que deseja, ao final de três gravidezes bem-sucedidas, é

Ⓐ 50%.
Ⓑ 66%.
Ⓒ 40%.
Ⓓ 72%.
Ⓔ 24%.

Questão 76

(Ronaebson)

Um conjunto de dados honestos, cada um com o formato de um cubo e cujas faces são numeradas de 1 a 6, é lançado sucessivas vezes. Em cada lançamento, todos os dados cujas faces voltadas para cima resultam em um número menor ou igual a 4, e apenas estes, são retirados. Os demais dados permanecem para o próximo lançamento. O jogo termina quando todos os dados tiverem sido retirados.

Se o jogo for iniciado com três desses dados, a probabilidade de o jogo durar mais do que quatro rodadas é

Ⓐ $\dfrac{81^3 - 80^3}{81^3}$.
Ⓑ $\dfrac{27^4 - 26^4}{27^4}$.
Ⓒ $\dfrac{16^3 - 15^3}{16^3}$.
Ⓓ $\dfrac{80^3}{81^3}$.
Ⓔ $\dfrac{15^3}{16^3}$.

Questão 77

(Unioeste_2019)

Uma empresa possui 10 diretores, dos quais, 3 são suspeitos de corrupção. Foi resolvido se fazer uma investigação composta por uma comissão de 5 diretores da empresa. A única condição imposta é que a comissão de investigação selecionada tenha a maioria de diretores não suspeitos. Selecionada, ao acaso, uma comissão para apuração das suspeitas formada por diretores desta empresa, é CORRETO afirmar que a probabilidade de que esta comissão atenda à condição imposta está no intervalo:

Ⓐ (0,01; 0,50).
Ⓑ (0,50; 0,70).
Ⓒ (0,70; 0,80).
Ⓓ (0,80; 0,90).
Ⓔ (0,90; 0,99).

Questão 78

(Ronaebson)

Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a 30m de distância; o segundo, a 40m; o terceiro alvo, a 60m. Sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é 2/3, então a probabilidade de ele acertar pelo menos um dos alvos é

Ⓐ 120/160.
Ⓑ 119/154.
Ⓒ 110/144.
Ⓓ 105/135.
Ⓔ 119/144.

Questão 79

(Ronaebson)

Simões e Roberto decidiram premiar, através de um sorteio, dois dentre os 200 alunos das turmas de 3º Ano. Para o sorteio, 200 bolas com os números dos alunos foram colocadas em uma caixa. A primeira bola sorteada por eles, sem que ninguém visse seu número, caiu no chão e se perdeu. Eles decidiram fazer o sorteio com as bolas restantes.

Qual é a probabilidade de que Washington, aluno do 3º Ano, tenha sido um dos dois alunos sorteados?

Ⓐ 1/100
Ⓑ 2/199
Ⓒ 19/200
Ⓓ 39/380
Ⓔ 37/342

Questão 80

(ESPCEX_2020)

Numa sala existem duas caixas com bolas amarelas e verdes. Na caixa 1, há 3 bolas amarelas e 7 bolas verdes. Na caixa 2, há 5 bolas amarelas e 5 bolas verdes. De forma aleatória, uma bola é extraída da caixa 1, sem que se saiba a sua cor, e é colocada na caixa 2. Após esse procedimento, a probabilidade de extrair uma bola amarela da caixa 2 é igual a

Ⓐ 49/110.
Ⓑ 51/110.
Ⓒ 53/110.
Ⓓ 57/110.
Ⓔ 61/110.

Questão 81

(UFRGS_2022)

Antônia e Francisca fazem parte de um grupo de dez médicas que atuam no cuidado de pacientes com COVID-19, em um hospital de Porto Alegre. Um outro hospital no Rio Grande do Sul está convidando um quarteto de médicas do grupo, do qual Antônia e Francisca fazem parte, para organizar um evento científico sobre a COVID-19.

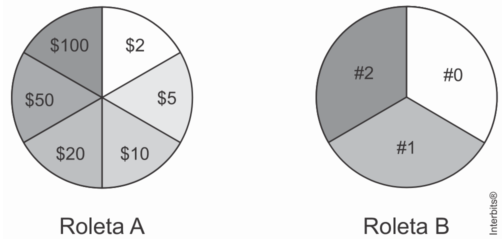
A probabilidade de Antônia e Francisca fazerem parte desse quarteto convidado é

Ⓐ $\frac{1}{5}$
Ⓑ $\frac{2}{5}$
Ⓒ $\frac{3}{14}$
Ⓓ $\frac{2}{15}$
Ⓔ $\frac{1}{35}$

Questão 82

(UEG)

Uma loja faz uma promoção: ao comprar qualquer produto, o cliente participa de um jogo, o qual consiste em girar duas roletas. A roleta A contém os valores e a B os multiplicadores desses valores. Por exemplo, se um cliente tirar $5 na roleta A e #2 na roleta B, ele ganha R$ 10,00 (5x2=10).



Dessa forma, considerando as roletas das figuras apresentadas, se um cliente participar dessa promoção, a probabilidade de ele ganhar R$ 5,00 ou menos é de

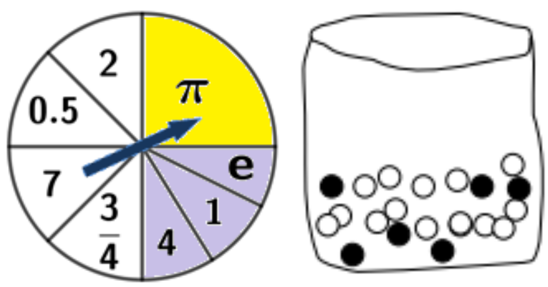
Ⓐ 5/6
Ⓑ 4/9
Ⓒ ½
Ⓓ 1/18
Ⓔ 1/3

Questão 83

(Ronaebson)

Em um jogo matemático realizado numa das barraquinhas de uma feira de ciências, o jogador deve utilizar primeiro uma roleta, em seguida, se a roleta parar em um número irracional, o jogador pega ao acaso uma bolinha de dentro de uma sacola que possui apenas bolas brancas ou pretas. Ganha um prêmio aquele que pegar uma bolinha preta,

A roleta e a sacola com bolinhas estão representadas nas figuras a seguir e sabe-se que setores da roleta com a mesma cor, possuem o mesmo ângulo central.



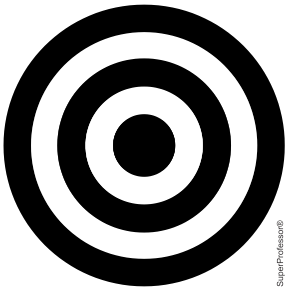
Rian joga uma vez, assim, com relação às chances dele ganhar um prêmio, temos que

Ⓐ é impossível.
Ⓑ é pouco provável
Ⓒ há cerca de 50% de probabilidade.
Ⓓ é muito provável.
Ⓔ é certo.

Questão 84

(UFRGS_2023)

Na construção de um alvo para ser usado em uma competição olímpica, são usadas circunferências concêntricas, cujos raios medem 2, 4, 6, 8 e 10, respectivamente, tal como mostrado na figura abaixo.



Após a confecção do alvo, é realizado um teste, em que uma máquina dispara de maneira aleatória um dardo em direção ao alvo.

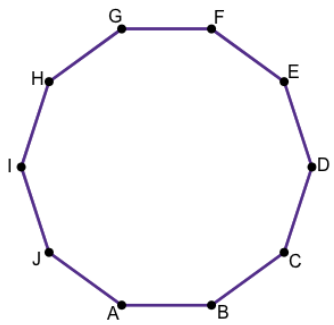
A probabilidade de o dardo lançado atingir, com a sua ponta, a parte sombreada do alvo é

A 20%.
B 30%.
C 40%.
D 50%.
E 60%.

Questão 85

(Ronaebson)

Uma professora dispõe de uma urna com 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos vértices do decágono regular, de modo que o número 1 está associado ao vértice A, o número 2 corresponde a letra B e assim por diante, até o número 10 que corresponde a letra J.



Três bolas foram retiradas simultaneamente e ao acaso dessa urna. Qual a probabilidade de que os pontos correspondentes às bolas retiradas sejam vértices de um triângulo isósceles?

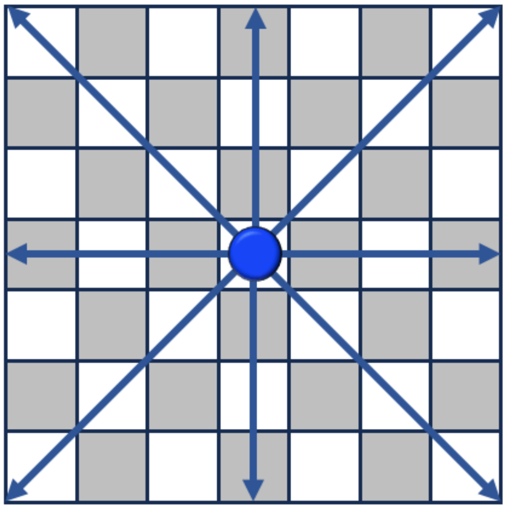
A 2/3
B 1/3
C 1/4
D 1/6
E 1/10

Questão 86

(Ronaebson)

Um jogo de computador é jogado num tabuleiro $n \times n$, com n ímpar e $n \geq 3$, onde cada jogador coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro, além disso, quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha, coluna ou diagonal é chamada de zona de ataque dessa peça. Uma das regras desse jogo é a de que a primeira peça a ser disposta no tabuleiro deve ser colocada na casa central.

A figura a seguir ilustra a zona de ataque da primeira peça colocada num tabuleiro de dimensão 7×7.



Para um tabuleiro $n \times n$, depois de posicionada a primeira peça, se a segunda peça for colocada aleatoriamente sobre uma das casas restantes, a probabilidade de a segunda peça não ficar na zona de combate da primeira é igual a

A $\frac{4}{n+1}$

B $\frac{n}{n+1}$

C $\frac{n-3}{n+1}$

D $\frac{4}{n^2-1}$

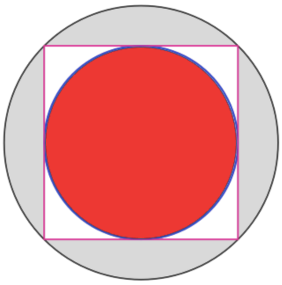
E $\frac{n^2-3}{n^2-1}$

Questão 87

(Ronaebson)

Vovô Expedito construiu para seus netos um jogo de dardos com todo alvo correspondendo a um círculo. Esse alvo ficou dividido em partes que gerariam pontuações diferentes, a saber:

Região A: corresponde ao círculo menor (vermelho) de raio 2 dm.
Região B: corresponde a região branca interna ao quadrado e externa ao menor círculo.
Região C: corresponde a região cinza interna ao círculo maior que circunscreve o quadrado e externa a esse mesmo quadrado.



Considere que, dentre as pessoas que acertam o alvo, a probabilidade de acertar o dardo em cada uma das regiões descritas é proporcional a área dessa região.

Dado que uma pessoa acertou o alvo (uma das regiões descritas), a probabilidade de que ela tenha acertado a região A é igual a

Ⓐ 33%.
Ⓑ 40%.
Ⓒ 50%.
Ⓓ 60%.
Ⓔ 75%.

Questão 88

(Ronaebson)

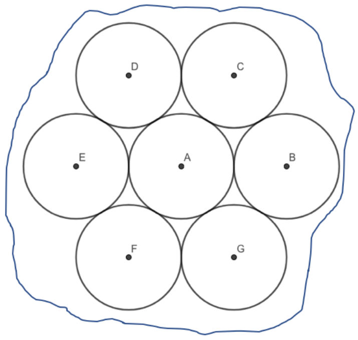
Uma brincadeira consiste em três crianças marcarem, cada uma, um ponto numa circunferência de raio 50 cm. A primeira marca um ponto A, a segunda marca um ponto B e a terceira marca um ponto C. Os pontos foram marcados de tal modo que a $m(B\hat{A}C) = 60^o$, $m(A\hat{B}C) = 80^o$ e $m(A\hat{C}B) = 40^o$.
Uma bolinha de gude é jogada, ao acaso, no interior da circunferência. Ganha a criança cujo ponto que ela marcou ficar mais distante da bolinha.
A probabilidade de que a criança vencedora seja a que marcou o ponto B é de

Ⓐ 2/9.
Ⓑ 4/9.
Ⓒ 7/9.
Ⓓ 5/18.
Ⓔ 13/18.

Questão 89

(Ronaebson)

Uma operadora de telefonia móvel instalou numa cidade sete torres de transmissão, cada uma com um raio de alcance de 2 km. Essas torres foram posicionadas de modo que seis delas (B, C, D, E, F e G) são vértices de um hexágono regular de lado medindo 4 km e a sétima (A) está equidistante das outras seis, como indica a figura.



Considerando $\pi = 3{,}14$ e sabendo que a área total da cidade é de $125{,}6\ km^2$, se uma pessoa está andando livremente pela cidade, a probabilidade de que ela esteja na área coberta pelo sinal dessa operadora é

Ⓐ 30%.
Ⓑ 46%.
Ⓒ 60%.
Ⓓ 70%.
Ⓔ 92%.

Questão 90

(FAc._Albert_Einstein-Medicina_2023)

Estudantes de uma classe composta por homens e mulheres tiveram o direito de escolher uma de duas opções para a data de uma prova. A tabela mostra alguns dados da apuração, em que os dados correspondentes às células pintadas foram omitidos.

Estudantes	Opção 1	Opção 2	Total
Mulheres	4		
Homens		10	
Total		19	30

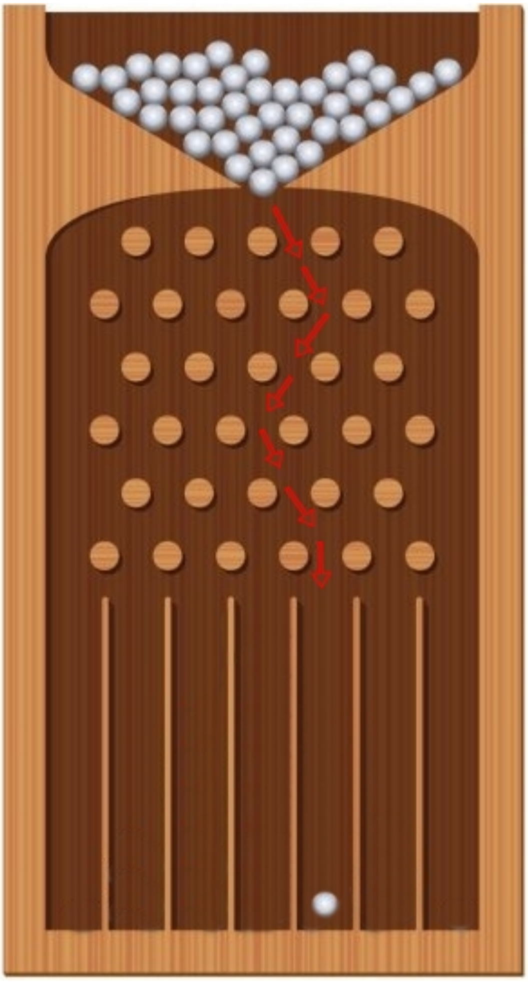
Sorteando-se ao acaso um estudante dessa classe, a probabilidade de que seja uma mulher ou que tenha votado na opção 1 é igual a

Ⓐ $^6/_5$
Ⓑ $^2/_3$
Ⓒ $^6/_{18}$
Ⓓ $^1/_2$
Ⓔ $^2/_5$

Questão 91

(Ronaebson)

Famosos *game shows* em cartaz nos últimos tempos no Brasil incluem o The Wall (do programa Caldeirão do Hulk/Globo) e o Jogo das Fichas (do programa Sílvio Santos/SBT). Ambos utilizam um mecanismo semelhante, chamado de *máquina de feijão* ou *quincunx,* que consiste em um tabuleiro vertical com filas intercaladas de pinos. No topo existem pequenas contas que caem e, quando o dispositivo está nivelado, ao atingir os pinos as contas podem seguir para a esquerda ou para a direita com a mesma chance. Eventualmente, eles são coletados em caixas na parte inferior. Abaixo temos um exemplo de percurso de uma conta numa máquina de feijão.



No exemplo considerado acima, onde o *quincunx* possui 7 caixas possíveis para uma conta se alocar, ao se derrubar uma única conta, a probabilidade dela se alocar na caixa central é de

Ⓐ 1/2.
Ⓑ 1/7.
Ⓒ 2/5.
Ⓓ 3/16.
Ⓔ 5/16.

Questão 92

(Ronaebson)

"Em setembro de 2020, a Caixa foi autorizada pelo Governo Federal a lançar um novo produto lotérico, o **Super Sete**. Um concurso que só passou a funcionar de fato no dia 02/10/22, quando os responsáveis pelo sorteio decidiram iniciar o jogo que tinha um prêmio estimado em R$1 milhão. [...] o resultado foi um sucesso e com o passar do tempo, a modalidade foi conquistando espaço em diferentes cidades do Brasil. O Super Sete contém algumas regras que precisam ser seguidas para que você possa participar, como por exemplo:

- O jogo possui sete colunas com 10 números (de 0 a 9) em cada uma e o apostador deve escolher no mínimo um número por coluna;
- Se preferir, o apostador pode fazer apostas múltiplas e optar por mais números por coluna, marcando até dois números, com 8 a 14 números;
- Isso pode se estender para no máximo três números por coluna, com 15 a 21 números marcados.
- Em cada aposta na Super Sete é exigida a indicação do total mínimo de sete números e permitida a indicação do total máximo 21, no conjunto das sete colunas.

Ganha quem acertar de três a sete colunas, independentemente de cada coluna. Portanto, o jogador que conseguir fechar três colunas, recebe um prêmio fixo de R$5,00. Já a pessoa que marcar entre quatro, cinco ou seis colunas, vai ganhar 15% entre os acertadores com prognósticos certos. Mas caso você seja o sortudo do dia e leve a combinação de sete colunas, vai adquirir 55% de todo valor estipulado."

Disponível em: https://www.intersena.com.br/dicas/como-funciona-loteria-super-sete. Acesso em 10/08/2022.

A probabilidade de uma pessoa, com a aposta mínima de 7 números, ganhar o prêmio fixo de R$ 5,00 é de:

Ⓐ $\frac{35 \cdot 9^4}{10^7}$

Ⓑ $\frac{35 \cdot 8}{10^7}$

Ⓒ $\frac{21 \cdot 8^4}{10^7}$

Ⓓ $\frac{21 \cdot 9^4}{10^7}$

Ⓔ $\frac{1}{10^7}$

Questão 93

(EPCAR_2023)

O mostruário de equipamento para treinamento físico esportivo, do catálogo *online*, de certa loja especializada, está organizado de maneira que os 99 itens disponíveis correspondem às modalidades para ou academias tradicionais ou aquelas da linha *cross fit*.

Além disso, cada uma dessas modalidades se subdivide em ou artigos importados ou artigos nacionais, os quais podem ser para o sexo ou masculino ou feminino.

O controle dos itens fica assim dividido:

- o número de itens importados para o sexo masculino da linha para academia tradicional é a metade daqueles da mesma linha e sexo, porém, nacionais;
- o número de itens do sexo masculino, importados e para academia tradicional é igual ao de nacionais, do mesmo sexo, para *cross fit*;
- o número de itens femininos para *cross fit* importados e nacionais é igual;
- o número de itens para academia tradicional, femininos e importados é o triplo daqueles importados, de mesmo sexo da linha *cross fit*;
- o número de itens que se destinam a academia tradicional, que são nacionais para o sexo feminino é a metade daqueles da mesma linha e sexo, mas importados;
- 50 itens são nacionais;
- 52 itens destinados ao sexo feminino; e
- 33 itens para a modalidade de *cross fit.*

Um item é escolhido aleatoriamente.

A probabilidade de ele ser importado, para o sexo masculino, na modalidade de *cross fit*, em relação ao total de itens importados é

Ⓐ menor que 10%
Ⓑ maior que 10% e menor que 20%
Ⓒ maior que 20% e menor que 30%
Ⓓ maior que 30%

Questão 94

(EPCAR_2024)

Considere todos os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra EXCELÊNCIA desprezando o acento circunflexo.

A probabilidade de se escolher um desses anagramas em que estão agrupadas todas as vogais e todas as consoantes é dada por

Ⓐ $\dfrac{5!}{10!}$
Ⓑ $\dfrac{(2!)^2 \cdot (5!)^2}{10!}$
Ⓒ $\dfrac{(5!)^2}{10!}$
Ⓓ $\dfrac{2 \cdot (5!)^2}{10!}$

Questão 95

(ESPCEX_2023)

Um grupo de alunos de Cálculo I da EsPCEx é constituído por 8 homens e 4 mulheres. Três desses alunos são selecionados ao acaso, sem reposição, para apresentarem um trabalho sobre aplicação da Integral. A probabilidade de que nessa escolha ao menos dois sejam homens é igual a

Ⓐ $\dfrac{7}{55}$
Ⓑ $\dfrac{13}{55}$
Ⓒ $\dfrac{14}{55}$
Ⓓ $\dfrac{36}{55}$
Ⓔ $\dfrac{42}{55}$

Questão 96

(ESA_2023)

Para avançar ao Rancho, 8 (oito) soldados, entre eles o Sd Alfa e o Sd Bravo, são colocados em fila. Pode-se afirmar que a probabilidade desses dois militares ficarem juntos é de:

Ⓐ 50%
Ⓑ 40%
Ⓒ 25%
Ⓓ 20%
Ⓔ 12,5%

Questão 97

(UFU)

As irmãs Ana e Beatriz e seus respectivos namorados vão sentar-se em um banco de jardim (figura) de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada.

A probabilidade de as irmãs sentarem-se uma ao lado da outra é igual a

Ⓐ 0,25.
Ⓑ 0,33.
Ⓒ 0,45.
Ⓓ 0,50.

Questão 98

(UERJ_2024)

Para fazer o sorteio de um livro, quatro amigos colocaram três bolas brancas e duas pretas em uma caixa. Decidiram que o primeiro a retirar uma bola preta ficará com o livro. Na ordem alfabética de seus nomes, cada um retira uma bola, ao acaso, sem devolvê-la à caixa.
A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é igual a:

Ⓐ 10%
Ⓑ 20%
Ⓒ 30%
Ⓓ 40%

Questão 99

(Mackenzie_2023)

Numa marcenaria, duas tupias T_1 e T_2 produzem juntas 5.000 peças em um dia. A tupia T_1 produz 2.000 peças, das quais 2% são defeituosas. A tupia T_2 produz as 3.000 peças restantes, das quais 3% são defeituosas. Da produção total diária, uma peça é escolhida ao acaso. Verificou-se que ela é defeituosa. A probabilidade de que essa peça escolhida tenha sido produzida pela tupia T_1 é

Ⓐ $\frac{9}{13}$
Ⓑ $\frac{3}{13}$
Ⓒ $\frac{4}{13}$
Ⓓ $\frac{2}{13}$
Ⓔ $\frac{1}{13}$

Questão 100

(UEA_2023)

Em um grupo de 20 pessoas, exatamente 6 tocam violão. Se 3 pessoas desse grupo forem sorteadas ao acaso, a probabilidade de, dentre as sorteadas, exatamente 2 tocarem vilão é

Ⓐ $\frac{8}{29}$
Ⓑ $\frac{12}{53}$
Ⓒ $\frac{5}{27}$
Ⓓ $\frac{3}{16}$
Ⓔ $\frac{7}{38}$

Questão 101

(FCMSCSP_2023)

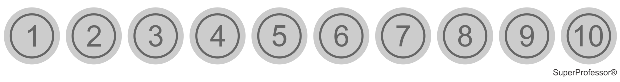
Uma urna contém cartões com as 26 letras do alfabeto. Retirando- se aleatoriamente 4 cartões de uma única vez dessa urna, a probabilidade de que com eles seja possível, em alguma ordem das letras, formar a palavra VIDA é igual a

Ⓐ $\frac{2}{7475}$
Ⓑ $\frac{1}{7475}$
Ⓒ $\frac{3}{1495}$
Ⓔ $\frac{1}{14950}$
Ⓓ $\frac{6}{7475}$

Questão 102

(PUCPR_2023)

Dez fichas idênticas e indistinguíveis pelo tato foram numeradas, conforme indicado na figura, e depositadas em uma urna que estava vazia. Após numeradas, as faces de uma mesma ficha permanecem idênticas.



Escolhe-se ao acaso apenas uma dessas fichas e verifica-se que o número nas suas faces é par. Qual a probabilidade de esse número ser divisor de ao menos um dos outros nove números registrados nas faces das demais fichas?

Ⓐ 10%
Ⓑ 20%
Ⓒ 40%
Ⓓ 50%
Ⓔ 80%

Questão 103

(UEG_2023)

No final de um campeonato de futebol, após o jogo terminar empatado, os times foram para a disputa de pênaltis. Sabendo-se que os 2 primeiros batedores de um dos times têm probabilidade 1/2 e 1/3 de fazer gol, respectivamente, constata-se que a probabilidade de os dois fazerem gol

Ⓐ é maior que 80%
Ⓑ é menor do que 40%
Ⓒ está entre 75% e 80%
Ⓓ está entre 45% e 55%
Ⓔ está entre 60 % e 75 %

Questão 104

(FMP_2023)

Em uma urna, há 4 plaquinhas com igual tamanho e forma, e, em cada uma, está escrita uma letra:

- Uma placa tem a letra C;
- Duas placas têm a letra A;
- Uma placa tem a letra S.

As placas serão retiradas aleatoriamente, uma por vez, sem reposição, e serão fixadas em um quadro, segundo a mesma ordem em que forem retiradas.

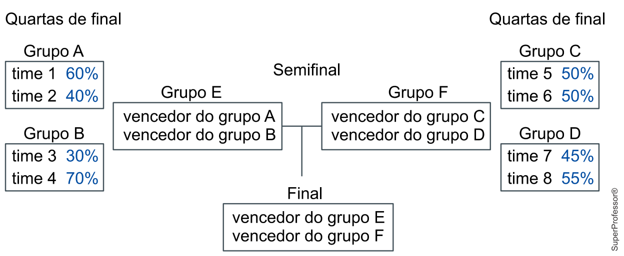
Qual é a probabilidade de, ao final, a palavra formada ser CASA?

Ⓐ $\frac{1}{24}$
Ⓑ $\frac{1}{12}$
Ⓒ $\frac{1}{6}$
Ⓓ $\frac{1}{4}$
Ⓔ $\frac{1}{3}$

Questão 105

(UNESP_2023)

A tabela indica o chaveamento de 8 times que chegaram às quartas de final de um torneio de futebol. Nos jogos de quartas de final, as porcentagens ao lado de cada time indicam sua probabilidade de seguir adiante no torneio. Nos jogos da semifinal, as probabilidades de cada time dos grupos E e F são iguais a 50%.



Qual é a probabilidade de o time 1 disputar a final desse torneio contra os times 5 ou 7?

Ⓐ 16,25%
Ⓑ 14,25%
Ⓒ 15,75%
Ⓓ 15,50%
Ⓔ 12,50%

Questão 106

(UERJ_2023)

Um restaurante oferece descontos sobre o total do consumo com base na sorte do cliente ao lançar um dado que possui uma face vermelha e cinco faces brancas.

Após lançar o dado duas vezes, um cliente receberá desconto se a face vermelha ficar voltada para cima pelo menos uma vez.

A probabilidade de um cliente receber um desconto na sua conta é igual a:

Ⓐ $\frac{7}{18}$
Ⓑ $\frac{11}{18}$
Ⓒ $\frac{7}{36}$
Ⓓ $\frac{11}{36}$

Questão 107

(FMJ_2023)

Um grupo de 8 turistas é formado por 4 homens e 4 mulheres. Sorteando-se 3 pessoas desse grupo, a probabilidade de exatamente um homem ser sorteado é

Ⓐ $\frac{3}{14}$
Ⓑ $\frac{9}{14}$
Ⓒ $\frac{9}{28}$
Ⓓ $\frac{15}{28}$
Ⓔ $\frac{3}{7}$

Questão 108

(UFGD_2023)

A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), realizada pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), no ano de 2019, estimou a quantidade de pessoas de 10 anos ou mais de idade, por situação de domicílio (área urbana e área rural) e de posse de telefone móvel celular para uso pessoal. A pesquisa revelou que 86% das pessoas residiam em domicílios situados na área urbana e desses 85% possuíam celular, revelando ainda que 60% dos residentes na área rural também possuíam telefone móvel. Após selecionar, aleatoriamente, um dos participantes dessa pesquisa, constatou-se que ele não possuía esse tipo de aparelho para uso pessoal. Diante disso, a probabilidade de que tal pessoa seja residente em domicílio situado na zona rural é de, aproximadamente,

Ⓐ 14,0%. Ⓑ 40,0%. Ⓒ 8,4%. Ⓓ 30,3%. Ⓔ 5,6%.

Questão 109

(IME_2023)

Dez números reais formam uma progressão geométrica (PG) com razão q > 1. Removem-se ao acaso cinco desses números. A probabilidade de que os cinco números restantes estejam em PG é

Ⓐ $\frac{1}{252}$
Ⓑ $\frac{1}{126}$
Ⓒ $\frac{3}{126}$
Ⓓ $\frac{2}{63}$
Ⓔ $\frac{3}{63}$

Questão 110

(UNIFOR)

Um atleta comprou barras de proteína para fazer seus lanches entre as refeições. Ele comprou barras de quatro sabores: doce de coco, pasta de amendoim, Romeu e Julieta, e trufa de maracujá. Ele colocou essas barras em quatro potes, cada pote contendo as barras de um mesmo sabor. No pote 1, colocou as com sabor de doce de coco; no pote 2, as com sabor de pasta de amendoim; no pote 3, as com sabor Romeu e Julieta; e, no pote 4, as com sabor de trufa de maracujá. Num certo dia, ele verificou que o pote 1 continha 12 barras das quais 3 haviam passado do prazo de validade; o pote 2 continha 8 barras das quais 2 haviam passado do prazo de validade; o pote 3 continha 9 barras das quais 3 haviam passado do prazo de validade; e o pote 4 continha 15 barras das quais 5 haviam passado do prazo de validade. Escolhendo aleatoriamente um dos potes e retirando-se ao acaso uma barra de proteína desse pote, a probabilidade de que essa barra esteja com prazo de validade vencido é de

Ⓐ 1/4.
Ⓑ 7/6.
Ⓒ 7/24.
Ⓓ 7/44.
Ⓔ 13/88.

Questão 111

(Ronaebson)

Sheldon, ao partir para uma viagem, ficou de enviar um cartão postal para sua mãe. A probabilidade de que ele envie o cartão é igual a 0,7. Por outro lado, a probabilidade de um cartão postal se extraviar é 0,1.

Qual é a probabilidade de que a mãe de Sheldon receba um cartão postal dele?

Ⓐ 6,3%
Ⓑ 7,0%
Ⓒ 8,0%
Ⓓ 16,0%
Ⓔ 90,0%

Questão 112

(Problema da Moeda de Bertrand)

Existem três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma moeda de ouro e outra de prata, e a terceira, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda também ao acaso. Se a moeda escolhida for de ouro, qual é a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

Ⓐ 1/4
Ⓑ 1/3
Ⓒ 1/2
Ⓓ 2/3
Ⓔ 3/4

Questão 113

(Ronaebson)

Wesh possui um dado na forma de um dodecaedro regular com quatro faces com o número 2, três faces com o número 3, três faces com o número 5 e duas faces com o número 7.

Uma brincadeira consiste em jogar o dado algumas vezes e anotar o número da face que fica apoiada sobre a mesa, depois multiplica-se esses números e observa-se o valor do produto, por exemplo, Wesh jogou o dado três vezes e os resultados foram 2, 5 e 5, nessa ordem, obtendo assim o produto 50.

Qual a probabilidade de Wesh obter o número 12600 como produto?

Ⓐ $\left(\frac{2}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)$
Ⓑ $\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)$
Ⓒ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)$
Ⓓ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$
Ⓔ $\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

Questão 114

(Ronaebson)

Ramon é um jovem de 15 anos que está no início de seu ensino médio e pensa na carreira profissional que deseja seguir. Das opções disponíveis, ele está mais inclinado a seguir a carreira militar. Ao buscar por editais de seleção de anos anteriores, analisou cuidadosamente e percebeu que os seguintes requisitos devem ser atendidos pelo candidato:
1) Ser maior de 18 anos;
2) Apresentar o diploma de nível médio;
3) Não ter apresentado histórico médico de virose no ano de seleção;
4) Passar nas provas de esforço físico e prova escrita.

Ramon percebeu que o item 3 precisaria de atenção para ser cumprido. Para verificar suas chances de cumprir esse requisito, ele fez um estudo completo do histórico de saúde de sua família e obteve os seguintes resultados:

- Quem teve virose em certo ano apresentou, em 30% dos casos, virose no ano posterior;
- Quem não teve virose em certo ano apresentou, em 50% dos casos, virose no ano posterior.

Sabendo que Ramon se enquadra no padrão genético da sua família, é correto afirmar que se ele teve virose agora em 2022, a probabilidade de Ramon **não** apresentar uma virose em 2025 e a atender o item 3 para inscrição no exame de seleção é de

Ⓐ 25,6%.
Ⓑ 36,4%.
Ⓒ 50%.
Ⓓ 58,8%.
Ⓔ 65,2%.

Questão 115

(Ronaebson)

Fantasia foi um *game show* do canal SBT que fez muito sucesso no fim dos anos 90 ao início dos anos 2000. A atração consistia num conjunto de apresentadores que se revezavam em brincadeiras e no intervalo de cada uma, as garotas cantavam e dançavam músicas em karaokê sucessos da época. Uma das brincadeiras feita com o telespectador ao telefone era o Jogo da Memória, composto por 20 cards, como mostra a figura abaixo:

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=fLDHKrPfiGo. Acesso em 12/08/2022.

Como visto acima, 10 pares de figuras iguais são dispostas, de maneira que o telespectador tem que adivinhar onde estão escondidos cada par.

Qual a probabilidade de um telespectador, já em sua primeira tentativa, virar todos os pares corretamente em sequência?

Ⓐ $\frac{10!\cdot 2^{10}}{20!}$

Ⓑ $\frac{2^{10}}{20!}$

Ⓒ $\frac{10!\cdot 2^{9}}{19!}$

Ⓓ $\frac{10!}{20!}$

Ⓔ $\frac{2^{9}}{19!}$

Questão 116

(Ronaebson)

A coordenação do Curso de Medicina, ao fazer o levantamento dos alunos de todas as turmas, obteve os seguintes dados:

- 80% dos alunos possuíam outro curso superior;
- 36% dos alunos são do sexo feminino;
- 1/4 dos homens não possuíam outro curso superior.

Um aluno desse curso é escolhido ao acaso. Sabendo que ele já possuía outro curso superior, qual a probabilidade de que seja uma mulher?

Ⓐ 4%
Ⓑ 16%
Ⓒ 20%
Ⓓ 25%
Ⓔ 40%

Questão 117

(Ronaebson)

Um nutricionista decidiu fazer uma classificação dos seus pacientes quanto a prática de exercícios e o fazer da dieta recomendada e obteve os dados expostos na tabela a seguir.

	Praticam exercícios	Não praticam exercícios
Fazem a dieta	80	10
Não fazem a dieta	60	50

Um de seus pacientes será escolhido ao acaso para ganhar um mês de marmitas fitness. Dado que o paciente escolhido segue a dieta recomendada, a probabilidade de que ele pratique exercícios é

Ⓐ 1/80.
Ⓑ 2/5.
Ⓒ 4/7.
Ⓓ 3/4.
Ⓔ 8/9.

Questão 118

(Ronaebson)

Três candidatos, Artmi, Daniel e Robert, disputam uma eleição para prefeito que deve ser decidida no primeiro turno. Considerando apenas os votos válidos, sabe-se que o candidato Artmi tem três vezes mais chance de ganhar do que o candidato Daniel e que por sua vez, o candidato Daniel tem duas vezes mais chance de ganhar do que o candidato Robert.

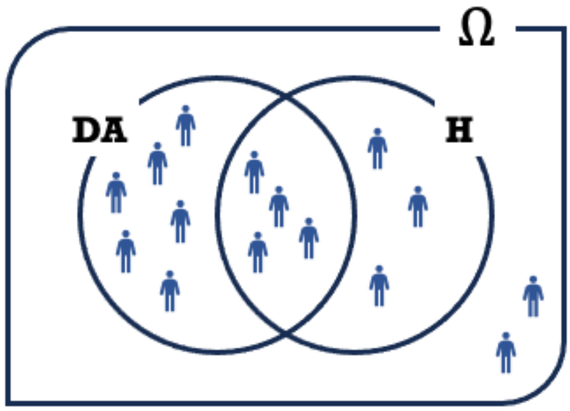
A probabilidade de que Artmi vença essa eleição é igual a

Ⓐ 1/9.
Ⓑ 1/3.
Ⓒ 1/2.
Ⓓ 2/3.
Ⓔ 3/4.

Questão 119

(Ronaebson)

A equipe de suporte socioemocional do Medway Campina Grande fez um estudo com um grupo de 15 alunos, que semanalmente fazem acompanhamento, para saber quais deles apresentavam laudos para Déficit de Atenção (DA) ou Hiperatividade (H). A diagrama a seguir ilustra o resultado obtido.



Um aluno desse grupo será selecionado ao acaso para ser submetido a uma avaliação de desempenho. Dado que ele apresenta laudo para Déficit de Atenção, a probabilidade de ele também apresentar o laudo para Hiperatividade é

- Ⓐ 3/10.
- Ⓑ 2/5.
- Ⓒ 4/15.
- Ⓓ 2/3.
- Ⓔ 7/10.

Questão 120

(Ronaebson)

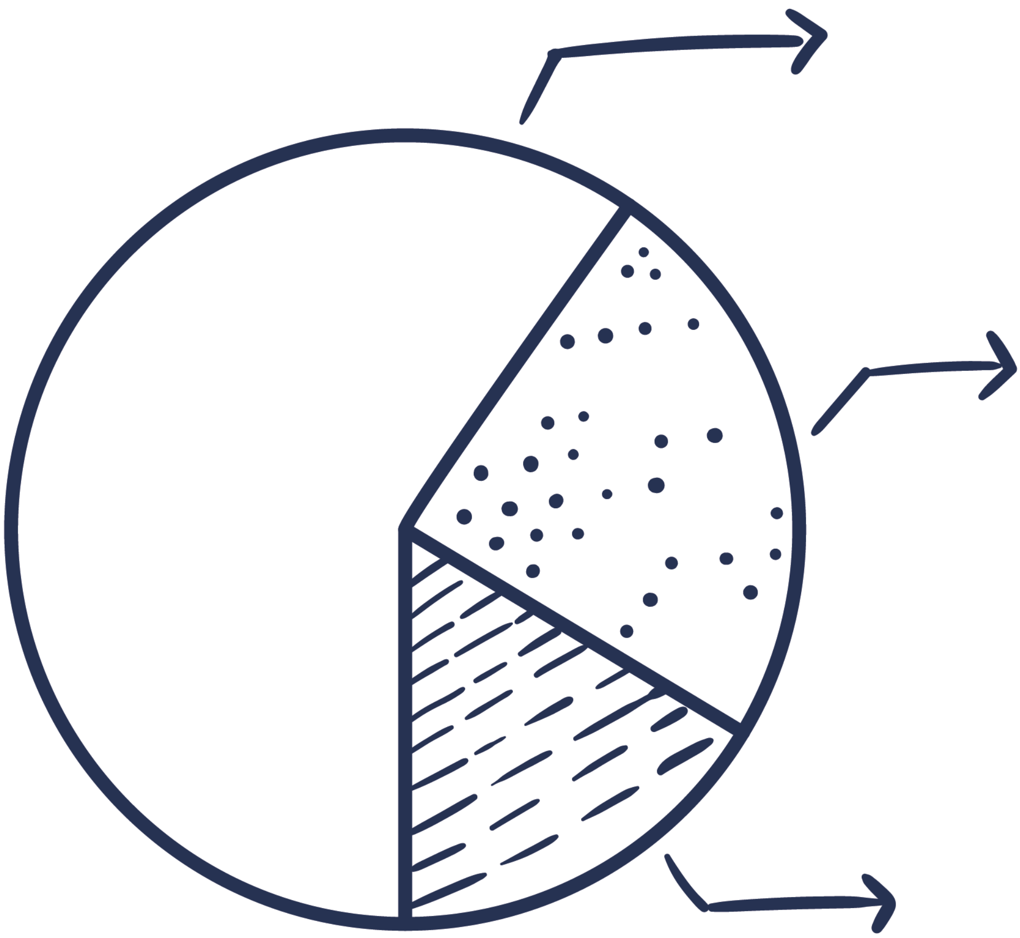
Num jogo entre dois competidores em que não pode haver empate, a probabilidade de um determinado jogador vencer é $\frac{x+1}{8}$ e de perder é $x/12$.

Sendo assim, a probabilidade de esse jogador perder esse jogo é igual a

- Ⓐ 20%.
- Ⓑ 33%.
- Ⓒ 35%.
- Ⓓ 40%.
- Ⓔ 42%.

Gabarito _ Probabilidade			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	D	61	D
02	C	62	C
03	A	63	B
04	B	64	B
05	C	65	B
06	C	66	D
07	A	67	C
08	E	68	E
09	C	69	E
10	E	70	C
11	B	71	E
12	A	72	D
13	D	73	C
14	E	74	B
15	A	75	C
16	C	76	D
17	A	77	A
18	C	78	E
19	E	79	E
20	E	80	A
21	D	81	C
22	D	82	D
23	A	83	C
24	A	84	B
25	A	85	E
26	D	86	B
27	A	87	C
28	A	88	C
29	D	89	D
30	D	90	D
31	A	91	B
32	B	92	E
33	D	93	A
34	E	94	B
35	B	95	D
36	A	96	E
37	D	97	C
38	D	98	A
39	A	99	B
40	D	100	C
41	D	101	E
42	E	102	D
43	E	103	C
44	E	104	B
45	B	105	B
46	A	106	B
47	C	107	D
48	C	108	E
49	D	109	D
50	D	110	D
51	C	111	C
52	B	112	A
53	B	113	D
54	A	114	E
55	A	115	D
56	C	116	A
57	E	117	E
58	B	118	E
59	E	119	D
60	D	120	B

ESTATÍSTICA



RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

ESTATÍSTICA

A Estatística pode ser encarada como uma ciência ou como um método de estudo.
A Estatística pode ser vista a partir de duas concepções:

- no plural (estatísticas), indica qualquer coleção consistente de dados numéricos, reunidos com a finalidade de fornecer informações acerca de uma atividade qualquer. Por exemplo, as estatísticas demográficas referem-se aos dados numéricos sobre nascimentos, falecimentos, matrimônios, desquites, etc.
- no singular, indica um corpo de técnicas, ou ainda uma metodologia técnica desenvolvida para a coleta, a classificação, a apresentação, a análise e a interpretação de dados quantitativos e a utilização desses dados para a tomada de decisões.

Qualquer ciência experimental não pode prescindir das técnicas proporcionadas pela Estatística, como por exemplo, a Física, a Biologia, a Administração, a Economia, etc. Todos esses ramos de atividades profissionais têm necessidade de um instrumento que se preocupa com o tratamento quantitativo dos fenômenos de massa ou coletivos, cuja mensuração e análise requerem um conjunto de observações de fenômenos ou particulares.

Assim, *Estatística* é a ciência fundamentada na teoria das probabilidades e em um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que abrange, entre outros temas: planejamento de experimentos, coleta e organização de dados, representação de dados numéricos por meio de tabelas e gráficos, análise de dados, previsões e tomadas de decisões em situações de incerteza com base na análise de dados. Tudo isso tendo como objetivo fundamental o estudo de uma população.
Esse estudo pode ser feito de duas maneiras:

- Investigando todos os elementos da população ou
- Por amostragem, ou seja, selecionando alguns elementos da população

A parte da Estatística que iremos utilizar para resolver os problemas do ENEM é a Estatística Descritiva. Ela se preocupa com a coleta, organização, classificação, apresentação, interpretação e análise de dados referentes ao fenômeno através de gráficos e tabelas, além de calcular medidas que permitam descrever o fenômeno.

CONCEITOS PRELIMINARES:

✧ **População:** Coleção de unidades individuais, que podem ser pessoas ou resultados experimentais, com uma ou mais características comuns, que se pretendem estudar.

✧ **Amostra:** Conjunto de dados ou observações, recolhidos a partir de um subconjunto da população, que se estuda com o objetivo de tirar conclusões para a população de onde foi recolhida.

✧ **Variáveis Estatísticas:** São atributos, numéricos ou não, pesquisados em cada elemento de uma população.

- ***Variáveis quantitativas:*** são expressas por números, ou seja, são características susceptíveis de serem medidas, apresentando-se com diferentes intensidades, que podem ser de natureza discreta ou contínua.
- ***Variáveis qualitativas:*** são aquelas expressas por qualidades não numéricas.

✧ **Censo:** É o exame completo de toda população.

Quanto maior a amostra, mais precisas e confiáveis deverão ser as induções feitas sobre a população. Logo, os resultados mais perfeitos são obtidos pelo Censo. Na prática, esta conclusão muitas vezes não acontece, pois, o emprego de amostras, com certo rigor técnico, pode levar a resultados mais confiáveis ou até mesmo melhores do que os que seriam obtidos através de um Censo.

As razões de se recorrer a amostras são: menor custo e tempo para levantar dados; melhor investigação dos elementos observados.

ORGANIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DOS DADOS:

Em uma pesquisa, a organização e a representação dos dados coletados são necessárias para que a leitura e a análise dos dados sejam facilitadas.

A seguir, veremos que, quando a variável é quantitativa discreta, seus valores podem ser organizados em sequências, tabelas ou gráficos.

✧ **Rol:** é toda sequência de dados numéricos tal que cada termo, a partir do segundo, é maior ou igual a seu antecessor, ou é menor ou igual a seu antecessor.

Conforme vamos fazendo uma pesquisa vamos tomando nota dos resultados (dados) na sequência em que eles aparecem. Essa relação de dados é chamada de DADOS BRUTOS.

Exemplo 1:
Notas de um grupo de 10 alunos em uma avaliação:

2, 5, 8, 9, 7, 4, 6, 6, 7, 6

Exemplo 2:
De um grupo de 50 pessoas. Perguntamos quantos filhos cada pessoa tem. O resultado foi o seguinte:

0, 1, 1, 4, 3, 1, 0, 3, 4, 1, 1, 0, 3, 3, 2, 5, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 0, 2, 0, 0, 3, 4, 5, 2, 3, 1, 4, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 1, 0, 3, 1, 2, 0, 3, 1, 4, 2

Em ambos os exemplos, os dados estão postos na forma bruta. Para facilitar a visualização e consulta, costuma-se organizar os dados quantitativos de uma maneira crescente.

Assim teremos:

Para as notas:
2, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9

Para o número de filhos:
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5.

Esse tipo de organização é chamado de **ROL.**

✧ **Tabela:** é um quadro que resume um conjunto de informações.

Atenção para os seguintes conceitos:

- *Frequência Absoluta* f_i é a quantidade de vezes que o dado aparece em determinada pesquisa.

- *Frequência Relativa* f_r é a quantidade de vezes que o dado aparece em determinada pesquisa dividido pelo total de elementos pesquisados.

$$f_r = \frac{f_i}{n}$$

A Frequência Relativa pode vir expressa em percentual. Para tal, basta multiplicar o resultado da Frequência Relativa por 100. Chamamos essa de *Frequência Relativa Percentual.*

O *Exemplo 2* poderia ser facilmente representado por uma tabela, vejamos:

Número de Filhos	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
0	9	*18%*
1	13	*26%*
2	9	*18%*
3	10	*20%*
4	6	*12%*
5	3	*6%*

✧ **Gráfico:** A apresentação gráfica é um complemento importante da apresentação tabular. A vantagem de um gráfico sobre a tabela está em possibilitar uma rápida impressão visual da distribuição dos valores ou das frequências observadas. Os gráficos propiciam uma ideia inicial mais satisfatória da concentração e dispersão dos valores, uma vez que através deles os dados estatísticos se apresentam em termos de grandezas visualmente interpretáveis.

Os requisitos fundamentais de um gráfico são:

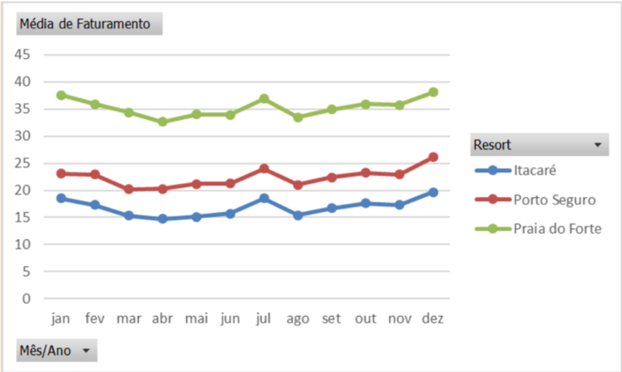
i) Simplicidade: possibilitar a análise rápida do fenômeno observado. Deve conter apenas o essencial.
ii) Clareza: possibilitar a leitura e interpretações correta dos valores do fenômeno.
iii) Veracidade: deve expressar a verdade sobre o fenômeno observado.

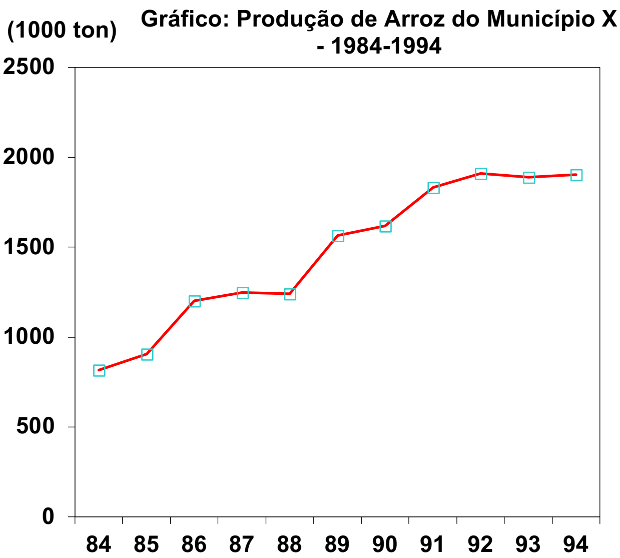
No que diz respeito aos tipos de gráficos, quanto a sua forma, temos:

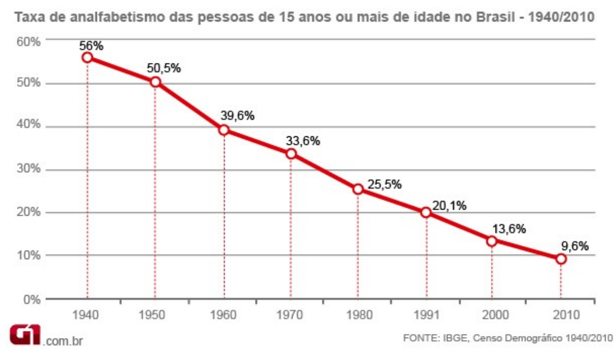
a) *Diagramas:* gráficos geométricos dispostos em duas dimensões. São mais usados na representação de séries estatísticas.
b) *Cartogramas:* é a representação sobre uma carta geográfica, sendo muito usado na Geografia, História e Demografia.
c) *Estereogramas:* representam volumes e são apresentados em três dimensões.
d) *Pictogramas:* a representação gráfica consta de figuras representativas do fenômeno. Desperta logo a atenção do público.

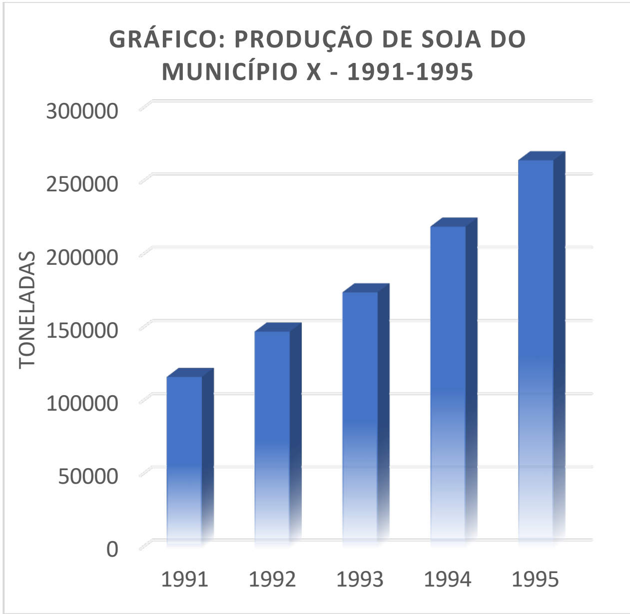
Vejamos então alguns principais tipos de gráficos:
Gráficos em Curvas ou em Linhas: é um tipo de gráfico que exibe informações com uma série de pontos de dados chamados de marcadores, ligados por segmentos reta. São usados para representar séries temporais, principalmente quando a série cobrir um grande número de períodos de tempo.
O gráfico de linha é composto por dois eixos, um vertical e outro horizontal, e por uma linha que mostra a evolução de um fenômeno ou processo.

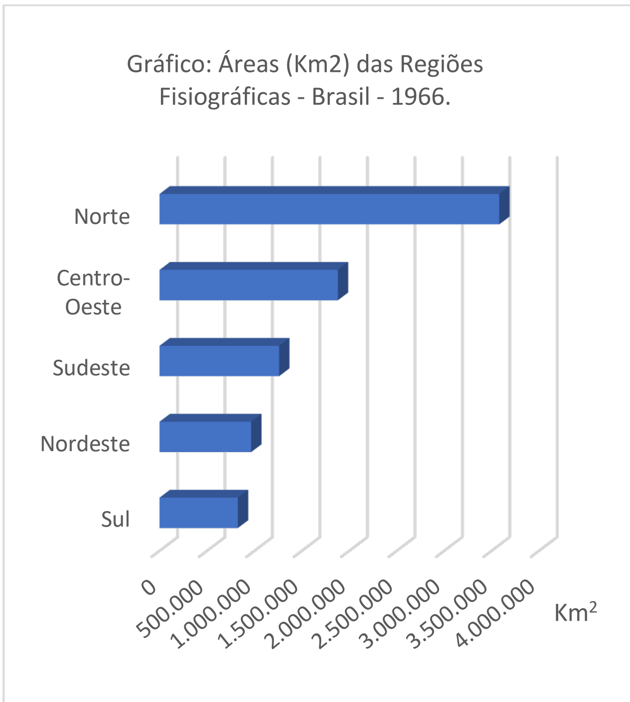
Vejamos alguns exemplos:











Gráficos de Barras: é a representação de uma série estatística através de retângulos, paralelepípedos ou cilindros, dispostos na vertical ou na horizontal. A ideia é estabelecer comparações quantitativas para diversas variáveis.

Quando as barras são representadas na vertical, esse gráfico também pode ser chamado de *Gráficos de Colunas*.

Alguns desses gráficos apresentam essas barras agrupadas (múltiplas barras), o que pode ser útil para estabelecer comparações entre as grandezas de cada categoria dos fenômenos estudados.

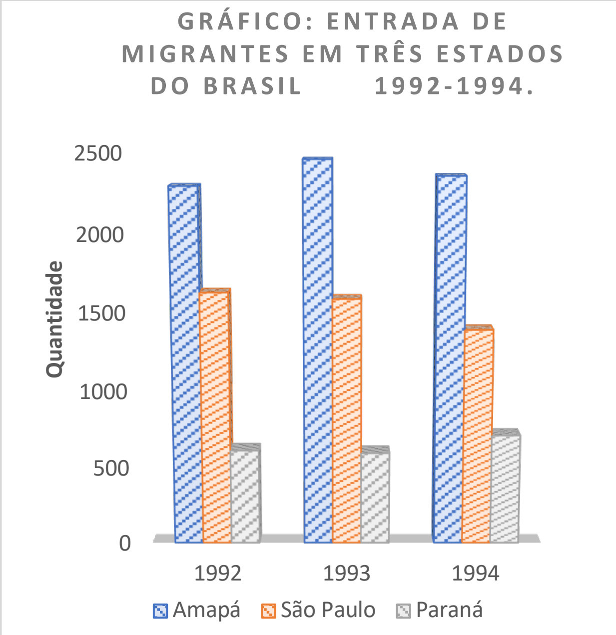
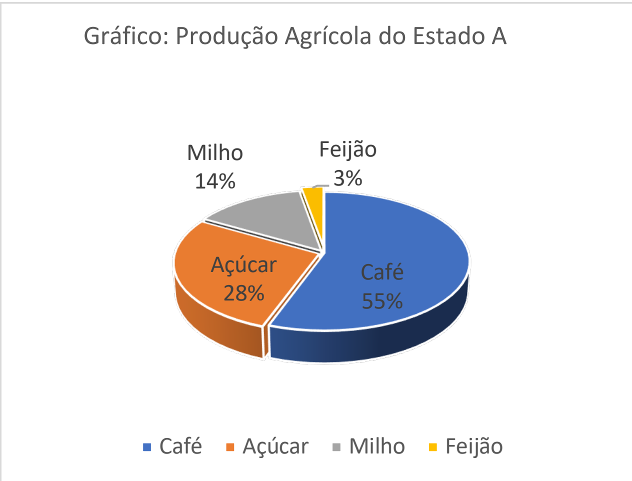


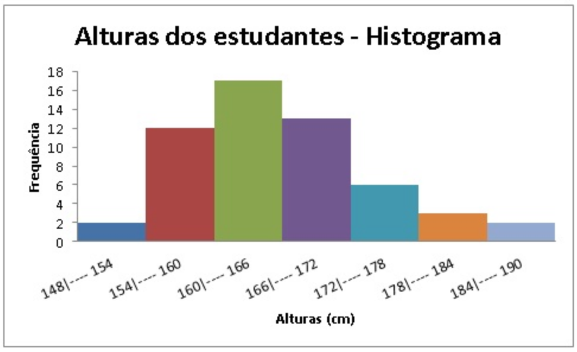
Gráfico em Setores: É a representação gráfica de uma série estatística em um círculo de raio qualquer, por meio de setores com ângulos centrais proporcionais às ocorrências.



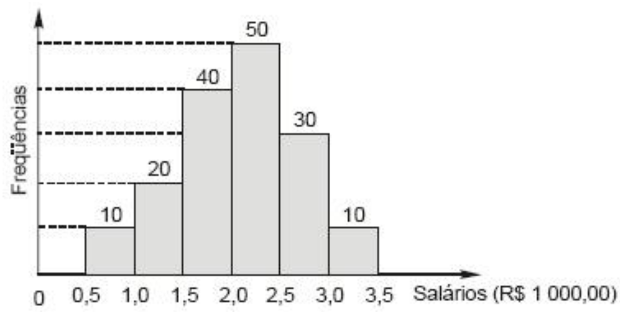
Observe, por exemplo, que o setor correspondente ao café tem ângulo central de

$$0{,}55 \times 360^o = 198^o.$$

Histograma: Para a representação gráfica de dados contínuos, usa-se um diagrama de áreas ou histograma, formado por uma sucessão de retângulos adjacentes, tendo cada um por base um intervalo de classe e por altura a frequência relativa (ou a frequência absoluta) daquela classe.



O histograma de frequências absolutas abaixo demonstra o comportamento dos salários dos 160 empregados de uma empresa em dezembro de 2005:



Medidas Estatísticas

Nem sempre é uma tarefa fácil estudar um conjunto de dados, principalmente quando ele é muito grande. Por isso que são feitos agrupamentos desses dados em tabelas e gráficos, de modo que a leitura fique mais fácil e prática, proporcionando uma visão melhor e panorâmica do que está acontecendo com a distribuição de frequência.

Outras ferramentas que dispomos na estatística que trazem indicativos de como a distribuição está se comportando são as medidas estatísticas, a saber: medidas de posição e as medidas de dispersão. Elas nos permitirão construir parâmetros que representem essa distribuição ou mesmo que nos permita ter referência para efetuarmos comparações com outras distribuições.

Medidas de Tendência Central

Diante uma distribuição de frequência, podemos encontrar valores que representem, de algum modo, todo o conjunto de dados. Quando esse valor tem um comportamento centralizador, diremos que ele é uma medida de tendência central.

✧ Média Aritmética

A média aritmética dos n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é o valor que substitui cada um dos termos da distribuição de modo a preservar a soma (total), ou seja, é valor $\overline{x}$ tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \overline{x} + \overline{x} + \cdots + \overline{x}$$

Daí,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \cdot \overline{x}$$

Logo, a média aritmética dos n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ indicada por $\overline{x}$, é dada por:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 + \ \ldots + x_n}}{\boldsymbol{n}}.$$

Em outras palavras, a média aritmética de um conjunto de dados é a soma de todos os valores dividido pela quantidade de parcelas.

Problema 01: Determine a média aritmética simples dos valores 1, 5, 10 e 12.

Solução:

$$\bar{x} = \frac{1 + 5 + 10 + 12}{4} = \frac{28}{4} = 7.$$

Problema 02 (Ronaebson): Quando Cláudio tocou na sua filha Ane, sentiu que ela estava um pouco quente, logo pegou um termômetro para medir a temperatura dela. Como ele havia dado uma queda no termômetro, desconfiou que ele pudesse estar marcando a temperatura de forma imprecisa. Para tanto decidiu aferir a temperatura da filha durante cinco momentos diferentes, dando intervalos de dois minutos entre uma aferição e outra.
O quadro a seguir mostra a temperatura de Ane indicada em cada uma das aferições do termômetro.

1ª Aferição	2ª Aferição	3ª Aferição	4ª Aferição	5ª Aferição
37,8°C	*38,3°C*	*38,0°C*	*37,9°C*	*38,5°C*

Cláudio decidiu então que tomaria como referência a temperatura da aferição que mais se aproximasse da temperatura média dentre as indicadas. Assim, a temperatura que ele tomou como referência foi a da

Ⓐ 1ª aferição.
Ⓑ 2ª aferição.
Ⓒ 3ª aferição.
Ⓓ 4ª aferição.
Ⓔ 5ª aferição.

Solução:

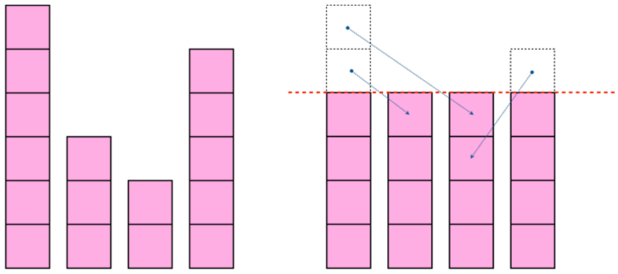
A temperatura média dentre as indicadas é

$$\frac{37{,}8 + 38{,}3 + 38{,}0 + 37{,}9 + 38{,}5}{5} = \frac{190{,}5}{5} = 38{,}1^{o}C.$$

Assim, como ele tomaria como referência a temperatura da aferição que mais se aproximasse da média, a temperatura que ele tomou como referência foi a da 3ª aferição.

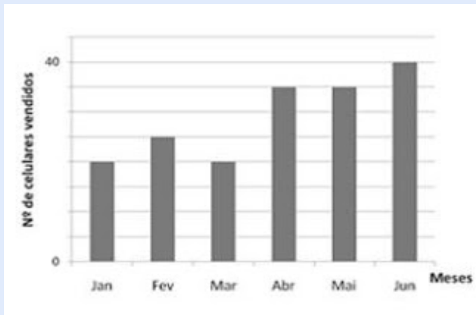
Resposta: [C]

Podemos encarar a média aritmética como uma maneira de *redistribuir* os valores igualmente.



Observe que o total de quadradinhos foi preservado.

Problema 03 (Prova Brasil _ Adaptada):
O gráfico abaixo representa as vendas de aparelhos celulares em uma loja no primeiro semestre do ano. Essa loja tinha uma meta de vender, no primeiro semestre, em média, 30 aparelhos celulares por mês.



A meta foi atingida?

Solução:

Primeiramente observe que cada espaçamento no gráfico corresponde a 5 unidades. Assim, a média mensal de vendas é dada por

$$\bar{x} = \frac{20 + 25 + 20 + 35 + 35 + 40}{6} = \frac{175}{6} \cong 29{,}17.$$

Assim, a meta de 30 aparelhos por mês *não* foi atingida.

Problema 04 (Ronaebson): Pedrito tem as notas 82, 74 e 90 nas etapas I, II e III, respectivamente. O ano letivo de Pedrito é dividido em quatro etapas e só será aprovado o aluno que conseguir média final superior ou igual a 70 nessas quatro etapas.

Qual deve ser a nota de Pedrito na Etapa IV para que ele seja aprovado?

Solução:

Denotando sua nota na Etapa IV por *x*, temos:

$$\frac{82+74+90+x}{4} \geq 70 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 34.$$

Assim, Pedrito precisará tirar no mínimo 34 para conseguir aprovação.

Ainda no que diz respeito à média aritmética, vale considerar os seguintes fatos:

☞ *A média aritmética "sofre" com valores extremos na distribuição.*

De fato, como a média aritmética leva em consideração todos os termos da distribuição, se um (ou alguns) deles são muito altos ou muito baixos, a média pode ficar muito afetada.

Num grupo de cinco primos que tem as idades 10, 11, 11, 12 e 6 anos, a média dessas idades é

$$\bar{x} = \frac{10+11+11+12+6}{5} = 10 \; anos,$$

valor esse que representa bem o grupo.

Entretanto, se colocarmos na conta o bisavô desses meninos, que tem 88 anos, a nova média do grupo será

$$\overline{x'} = \frac{10+11+11+12+6+88}{6} = 23 \; anos,$$

ou seja, um valor que não "condiz" com a realidade do grupo, de modo que se uma pessoa escuta que há um grupo de 6 pessoas cuja média de idades é de 23 anos, a expectativa dela será bem diferente da realidade.

☞ *A média aritmética está sempre entre o menor e o maior valor da distribuição.*

Mostremos esse fato para dois valores a e b, com $a \leq b$.

$$a+a \leq a+b \leq b+b$$

$$2a \leq a+b \leq 2b$$

Dividindo todo os membros por 2, temos

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b,$$

ou seja, a média aritmética entre dois números está sempre o menor e o maior desses números. Analogamente, você pode demonstrar o resultado para uma distribuição de frequência com mais elementos.

Propriedades:

P_1: *Se a cada x_i (i= 1, 2, ..., n) adicionarmos uma constante real c, a média fica adicionada de c unidades.*

Inicialmente, a média entre eles é

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ ...+x_n}{n}$$

Quando a constante *c* é adicionada a cada um dos valores da distribuição, temos:

$$\overline{x'} = \frac{(x_1+c)+(x_2+c)+(x_3+c)+\ ...+(x_n+c)}{n}$$

$$\overline{x'} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ ...+x_n}{n} + \frac{n \cdot c}{n}$$

$$\overline{x'} = \bar{x} + c.$$

Ou seja, a nova média será igual a anterior acrescida da constante c.

Por exemplo, se os cinco alunos de uma turma têm notas de uma prova iguais a 5, 7, 3, 8 e 2, a média dessa turma será

$$\bar{x} = \frac{5+7+3+8+2}{5} = 5.$$

Entretanto, o professor passou um trabalho valendo um ponto extra na prova e todos os cinco alunos conseguiram a pontuação. Com isso, a nova média da turma passou a ser

$$\overline{x'} = \frac{6+8+4+9+3}{5} = 6,$$

ou seja, um ponto a mais que a média anterior.

P_2: *Se multiplicarmos cada x_i (i= 1, 2, ..., n) por uma constante real c, a média aritmética fica multiplicada por c.*

Inicialmente, a média entre eles é

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ ...+x_n}{n}$$

Quando cada um dos valores da distribuição é multiplicado por *c*, temos:

$$\overline{x'} = \frac{(x_1 \cdot c) + (x_2 \cdot c) + (x_3 \cdot c) + \ldots + (x_n \cdot c)}{n}$$

$$\overline{x'} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}\right) \cdot c$$

$$\overline{x'} = \bar{x} \cdot c.$$

Por exemplo, se os quatro principais jogadores de um time, a saber, João, Caio, Lucas e Pedro fizeram 5, 2, 3 e 6 gols, respectivamente, no campeonato, a média de gols desses jogadores era de

$$\bar{x} = \frac{5+2+3+6}{4} = 4\ gols.$$

Entretanto, se ao longo do campeonato cada um deles dobrou o número de gols, então a nova média passou a ser

$$\overline{x'} = \frac{10+4+6+12}{4} = 8\ gols,$$

ou seja, o dobro da média anterior.

✧ Média Aritmética Ponderada

A média aritmética ponderada dos n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ com pesos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, respectivamente, indicada por $\bar{x}$, é dada por:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}}$$

Considere as notas de um aluno em cada uma das áreas da prova do ENEM e os respectivos pesos para um determinado curso numa das instituições.

	Nota	Peso
Linguagens	610	1
Ciências Humanas	680	1
Redação	940	3
Ciências da Natureza	760	2
Matemática	910	3

A média desse aluno para essa instituição será

$$\bar{x}_p = \frac{610 \cdot 1 + 680 \cdot 1 + 940 \cdot 3 + 760 \cdot 2 + 910 \cdot 3}{1+1+3+2+3}$$

$$\bar{x}_p = \frac{8360}{10} = 836.$$

Observe que essa distribuição de pesos traz a ideia de que a prova de matemática, por exemplo, vale por três provas, enquanto a prova de Linguagens vale apenas por uma. É como se estivéssemos dando importâncias diferentes a cada uma das áreas para o cálculo da média.

Veja que, se calculássemos uma média aritmética simples, sem os respectivos pesos, teríamos:

$$\bar{x} = \frac{610+680+940+760+910}{5} = 780.$$

Uma diferença considerável entre as duas médias, *não acha!?* Isso porque o aluno consegui mais pontos nas provas de maior peso, o que valorizou sua nota. Se ele tivesse logrado mais pontos nas provas com menor peso, naturalmente, sua média ficaria menor.

Problema 05 (Ronaebson): Uma indústria tem um total de 240 funcionários, dos quais 180 são homens e 60 são mulheres. Por uma política da empresa, tem-se que cada um dos homens tem um salário de R$ 2000,00, enquanto cada uma das mulheres tem salário de R$ 2400,00.

Qual a média dos salários dos funcionários dessa indústria?

Solução:

Observe que, como a frequência dos homens e das mulheres nessa distribuição é diferente, temos para o cálculo uma média aritmética ponderada. Assim, essa média salarial será

$$\overline{x_p} = \frac{180 \cdot 2000 + 60 \cdot 2400}{180 + 60} = R\$\ 2100{,}00.$$

Uma tentação muito grande que temos ao nos deparar com um problema como esse é que queremos calcular a média aritmética simples entre os dois salários, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{2000+2400}{2} = R\$\ 2200{,}00.$$

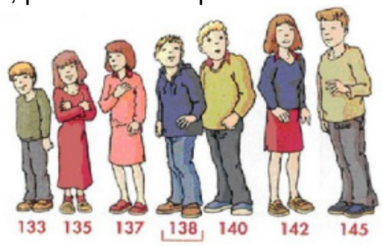
Muito cuidado, pois, ao fazer isso, você considerará que os salários dos homens e das mulheres "pesam" igualmente para o departamento financeiro dessa indústria, o que não é verdade, uma vez que a há muito mais homens do que mulheres, o que, naturalmente, fará com que a média salarial fique mais próxima dos salários dos homens do que das mulheres.

✧ Mediana

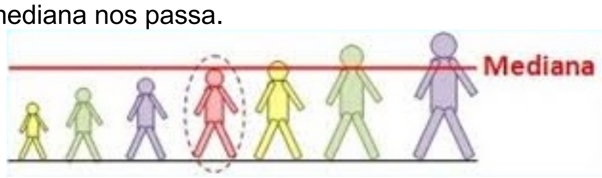
É uma medida de posição cujo número divide um conjunto de dados em duas partes iguais. Por esse motivo, a mediana é considerada uma medida separatriz. Portanto, a mediana se localiza no centro de um conjunto de números ordenados, ou seja, é o termo central de uma distribuição (em ROL). Assim, a mediana indica que 50% dos valores da distribuição são iguais ou maiores que ela e os outros 50% são iguais ou menores que ela.

Dessa forma, se o número de termos da distribuição for ímpar, a mediana, indicada por Md, será o termo central da distribuição. Entretanto, se o número de termos da distribuição for par, a mediana será a média aritmética entre os dois termos mais centrais.

Considerando sete pessoas e suas respectivas alturas, em centímetros, após colocarmos elas em ordem crescente de altura, percebemos que a altura da quarta pessoa corresponde a mediana da distribuição, pois ela corresponde ao termo central.

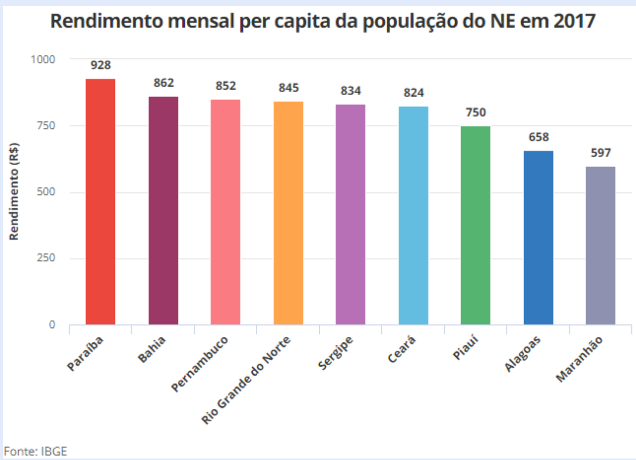


A imagem a seguir traz claramente a ideia que a mediana nos passa.



Problema 06 (Ronaebson): A população residente na Paraíba teve o maior rendimento mensal per capita entre os estados do Nordeste em 2017, conforme aponta o levantamento do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) divulgado nesta quarta-feira (28), calculado com base na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua) e enviados ao Tribunal de Contas da União (TCU).

Disponível em: https://g1.globo.com/pb/paraiba/noticia/populacao-da-pb-tem-maior-rendimento-mensal-per-capita-do-ne-diz-ibge.ghtml
Acesso em 19/08/2018.



Tomando como referência os valores correspondentes ao rendimento mensal per capita da população de cada um dos estados do Nordeste em 2017, o valor mediano corresponde ao estado de(o)

- **A** Alagoas.
- **B** Ceará.
- **C** Pernambuco.
- **D** Rio Grande do Norte
- **E** Sergipe.

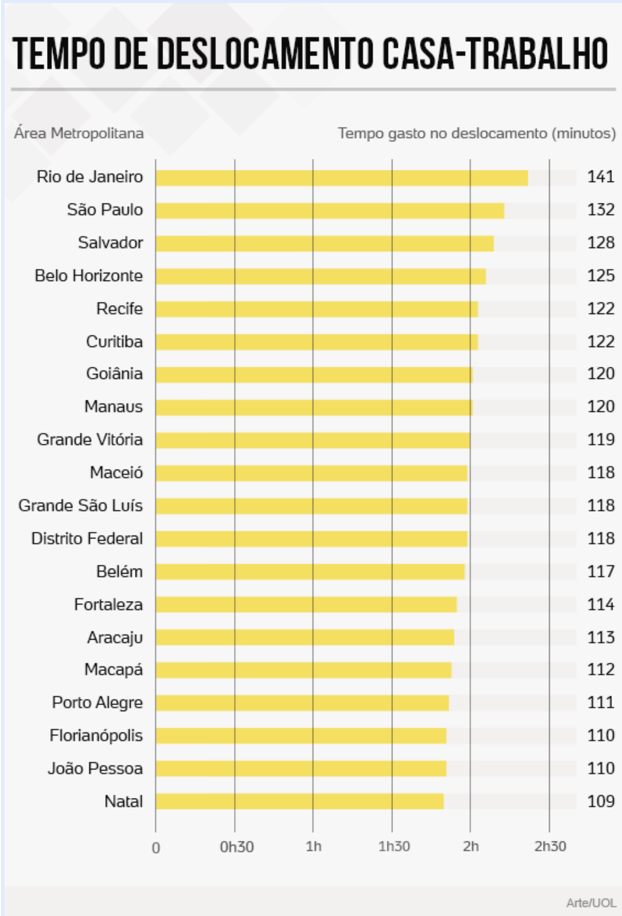
Solução:

Tomando como referência os valores correspondentes ao rendimento mensal per capita da população de cada um dos estados do Nordeste em 2017, como eles já estão ordenados, temos que o valor mediano corresponde ao termo central, ou seja, ao estado de Sergipe.

Resposta: [E]

Problema 07 (Ronaebson): A necessidades cada vez maior de aprimorar a mobilidade urbana se justifica principalmente pelos dados obtidos nas pesquisas que relacionam o tempo que um trabalhador leva para se deslocar entre sua casa e o seu local de trabalho. A mobilidade urbana impacta diretamente na qualidade de vida das pessoas.

A tabela a seguir mostra os maiores tempos de deslocamento casa-trabalho nas cidades brasileiras.



Disponível em https://noticias.uol.com.br/cotidiano/ultimas-noticias/2015/09/11/trajeto-casa-trabalho-leva-ao-menos-duas-horas-em-oito-capitais-diz-firjan.htm
Acesso em 26/05/2018.

De acordo com os dados, a mediana dos tempos apresentados na tabela é igual a

- **A** 122 min.
- **B** 120 min.
- **C** 118 min.
- **D** 117 min.
- **E** 110 min.

Solução:

O gráfico apresentado traz 20 valores referentes aos tempos gastos no deslocamento e esses valores já estão em ordem decrescente. Sendo assim, a mediana desses valores será a média aritmética dos dois valores mais centrais, isto é, será a média entre o 10º e o 11º termos dessa distribuição, ou seja,

$$Mediana = \frac{118 + 118}{2} = 118.$$

Resposta: [C]

✧ **Moda**

Em uma amostra cujas frequências dos elementos não são todas iguais, chama-se *moda* e indica-se por **Mo** o elemento de maior frequência, ou seja, é o elemento que mais aparece na distribuição.

Por exemplo, considerando a distribuição de valores

(1 – 2 – 2 – 2 – 2 – 3 – 3 – 4 – 7)

tem-se que o valor que aparece mais vezes é o 2, portanto, a moda dessa distribuição é 2.

Se todos os elementos de uma distribuição possuírem a mesma frequência, ou seja, aparecerem uma mesma quantidade de vezes, a distribuição é *amodal*, ou seja, não possui moda. Além disso, pode ocorrer, por exemplo, de dois valores distintos possuírem a mesma frequência e a maior da distribuição, sendo assim, a distribuição será dita *bimodal*.

Problema 08 (Ronaebson): As idades dos alunos da turma da segunda-feira a tarde do curso Matemática Criativa do ano 2019 são dadas na tabela a seguir:

Idades	Número de Alunos
16	17
17	18
18	17
19	17
20	19
21	10
22	13
23	6
24	9
25	3
26	2
27	1

De acordo com o exposto, qual a moda das idades dessa turma?

Solução:

Observe que a idade que apresenta a maior frequência é *20 anos* cuja frequência foi de 19 alunos.

Vale ressaltar que um erro comum que aqui pode ser cometido é, por uma distração, fazer a moda com os valores referentes as frequências, no caso, o aluno poderia pensar que a moda é 17 pois foi o número que mais apareceu na segunda coluna, *cuidado*, pois esses valores não correspondem as idades.

Problema 09 (Ronaebson): Instagram é uma rede social online de compartilhamento de fotos e vídeos entre seus usuários, que permite aplicar filtros digitais e compartilhá-los em uma variedade de serviços de redes sociais, como Facebook, Twitter, Tumblr e Flickr. Observe o infográfico a seguir para que se tenha ideia da força que o instagram tem nas redes sociais.

Dentre as faixas etárias expostas no infográfico que utilizam o instagram, aquela que representa a moda é

Ⓐ 12 – 17 anos.
Ⓑ 18 – 24 anos.
Ⓒ 25 – 34 anos.
Ⓓ 35 – 44 anos.
Ⓔ 45 – 54 anos.

Solução:

A classe modal numa distribuição é aquela que apresenta a maior frequência, sendo assim, a faixa etária que representa a moda é *18 – 24 anos*.

Resposta: [B]

Medidas de Dispersão

São medidas utilizadas para medir o grau de variabilidade ou dispersão dos valores observados em torno da média aritmética. Elas servem para medir a representatividade da média e proporcionam conhecer o nível de homogeneidade ou heterogeneidade dentro de cada grupo analisado, ela nos sugere o quanto a distribuição se comporta de maneira mais regular ou irregular.

✧ Amplitude

Amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor observado.

Considerando a distribuição de notas dos alunos de uma turma

(1 – 2 – 2 – 2 – 2 – 3 – 3 – 4 – 7),

temos que sua amplitude é $7 - 1 = 6$, ou seja, há uma diferença de 6 pontos entre o menor e o maior valor.

Observe que a amplitude indica o comprimento do intervalor em que os valores da distribuição estão confinados. Assim, dada uma distribuição cuja amplitude é pequena, é razoável dizer que os valores estão pouco dispersos, isto é, caracterizam um grupo mais homogêneo ou mais regular. Entretanto, devemos ter muito cuidado ao lidarmos com distribuições de amplitude muito grande, uma vez que somos levados a pensar que haveria uma variabilidade muito grande desses valores, mas é importante perceber que amplitude sofre muita influência de valores extremos, então poderíamos ter um caso de uma distribuição que de modo geral apresenta uma certa regularidade, mas um de seus valores é discrepante, o que nos forneceria uma amplitude muito grande não condizente com o grau de homogeneidade real apresentado pela distribuição, por exemplo, na distribuição

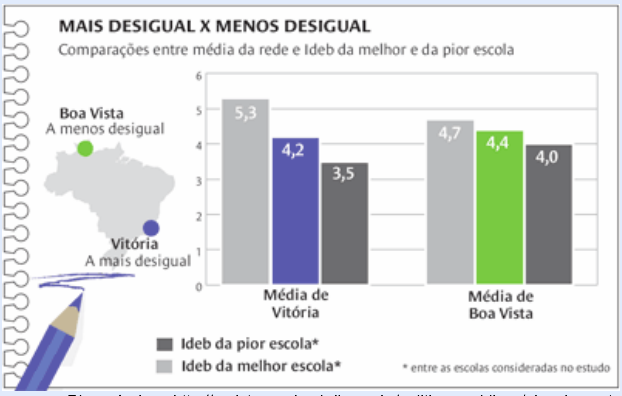
(1 – 2 – 2 – 2 – 2 – 3 – 3 – 4 – 4 – 91)

temos uma amplitude igual a $91 - 1 = 90$, mas apenas o número 91 destoa no conjunto, ou seja, se o retirássemos da distribuição, teríamos uma amplitude igual a 3 apenas.

Desta feita, a amplitude nem sempre será uma medida confiável.

Anotações:

Problema 10 (Ronaebson): Escolas de uma mesma cidade podem ter indicadores educacionais bastante diferentes. A conclusão é de uma pesquisa do movimento Todos Pela Educação divulgada em maio, que mostra uma grande variação no Índice de Desenvolvimento da Educação (Ideb) de instituições de ensino municipais de 12 capitais brasileiras. As cidades selecionadas tiveram notas iguais ou superiores à média nacional: 4,2. Os dados mostram que as escolas de Boa Vista apresentaram as menores variações entre as escolas, enquanto as de Vitória têm a maior disparidade (veja o gráfico acima). "Investir na formação de professores e aproveitar as boas experiências da rede é importante para reduzir a desigualdade", diz Mozart Neves, diretor-executivo do movimento.



Disponível em http://revistaescola.abril.com.br/politicas-publicas/planejamento-e-financiamento/ensino-fundamental-numero-professores-nao-formados-diminui-568127.shtml
Acesso em 10/08/2016

A maior desigualdade entre as escolas da cidade de Vitória é justificada no gráfico pela amplitude das distribuições das notas, sendo as amplitudes das distribuições das notas das cidades de Vitória e de Boa Vista, respectivamente, iguais a

Ⓐ 1,8 e 0,7.
Ⓑ 1,1 e 0,3.
Ⓒ 1,1 e 0,4
Ⓓ 0,7 e 0,4.
Ⓔ 0,7 e 0,3.

Solução:

Amplitude das notas de Vitória:

5,3 – 3,5 = 1,8.

Amplitude das notas de Boa Vista:

4,7 – 4,0 = 0,7.

Resposta: [A]

✧ Desvio médio

Chamamos de *desvio individual* o quanto cada valor da distribuição se afasta da média aritmética. Observe que o sinal desse desvio indica se aquele desvio foi para mais ou para menos em relação à média.

Se tomarmos o módulo desse valor, temos o *desvio absoluto*.

O desvio médio é a média aritmética entre os desvios absolutos, ou seja, o quanto, em média, os valores apresentados se distanciam da média.

Sendo $\overline{x}$ a média aritmética de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, chama-se *Desvio Médio*, e indica-se por D_m, o número

$$D_m = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + |x_3 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

Considere as notas dos cinco alunos de uma turma:

Aluno	Nota
Ana	7
Beto	5
Caio	8
Dilma	3
Edu	2

Primeiramente, calculemos a média aritmética dessas notas:

$$\overline{x} = \frac{7+5+8+3+2}{5} = 5.$$

Agora vamos determinar seus respectivos desvios individuais em relação à média:

Aluno	Nota	Desvio Individual $x_i - \overline{x}$	Desvio Individual Absoluto $|x_i - \overline{x}|$
Ana	7	$+2$	2
Beto	5	0	0
Caio	8	$+3$	3
Dilma	3	-2	2
Edu	2	-3	3

Para calcularmos o desvio médio, basta calcularmos a média aritmética dos desvios absolutos, assim:

$$D_m = \frac{2+0+3+2+3}{5} = 2,$$

isso significa dizer que, em média, essas notas deviam-se dois pontos para mais ou para menos em relação a média.

Um cuidado que devemos ter é que o desvio médio é calculado a partir dos desvios individuais absolutos. Se calcularmos a partir dos desvios individuais (sem o módulo), o resultado será sempre zero, veja:

$$\frac{(+2)+0+(+3)+(-2)+(-3)}{5} = \frac{(+5)+(-5)}{5} = 0,$$

isso ocorre em virtude de que se a média é nossa referência e ela está centralizada, a quantidade que desvia para mais deve ser a mesma que desvia para menos.

Propriedades:

P_1: *Se a cada x_i (i= 1, 2, ..., n) adicionarmos uma constante real c, a média também fica adicionada de c unidades e, consequentemente, o desvio médio não se altera.*

P_2: *Se multiplicarmos cada x_i (i= 1, 2, ..., n) por uma constante real c, a média ficará multiplicada por c e, consequentemente, o desvio médio também ficará multiplicado pela constante c.*

✧ Variância

A variância é outra medida que indica o afastamento de um conjunto de números em relação à média.

Define-se variância, e indica-se por σ^2, como a média aritmética entre os quadrados dos desvios dos elementos da amostra, isto é,

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

Considerando novamente as notas dos cinco alunos de uma turma, vamos agora, determinar os quadrados dos desvios individuais:

Aluno	Nota	Desvio Individual $x_i - \overline{x}$	Quadrados dos Desvios Individuais $(x_i - \overline{x})^2$
Ana	7	$+2$	4
Beto	5	0	0
Caio	8	$+3$	9
Dilma	3	-2	4
Edu	2	-3	9

Assim, para calcularmos a variância, basta fazer a média aritmética dos quadrados dos desvios, logo:

$$\sigma^2 = \frac{4+0+9+4+9}{5} = 5{,}2.$$

A variância tem o poder de detectar a existência de valores discrepantes, ou seja, a variância consegue nos dizer se na distribuição há valores que se afastam muito da média, pois quando elevamos um desvio muito grande ao quadrado, aquele valor fica muito, mas muito maior, por exemplo, se um valor está desviando 9 pontos em relação à média, para o cálculo da variância, esse desvio é elevado ao quadrado, logo, 81 (veja como aumentou). Além disso, a variância também consegue desvalorizar desvios pequenos em relação à média.

Vejamos:

- $0 < d_i < 1 \implies$ Quando elevamos o desvio individual ao quadrado, ele diminui.

$$0{,}4^2 = 0{,}16$$

- $d_i = 0 \; ou \; d_i = 1 \implies$ Quando elevamos o desvio individual ao quadrado, ele não se altera.

$$0^2 = 0$$
$$1^2 = 1$$

- $d_i > 1 \implies$ Quando elevamos o desvio individual ao quadrado, ele aumenta.

$$2{,}5^2 = 6{,}25$$

Propriedades:

P_1: *Se a cada x_i (i= 1, 2, ..., n) for adicionada uma constante real c, a variância não se altera.*

P_2: *Se multiplicarmos cada x_i (i= 1, 2, ..., n) por uma constante real c, a variância fica multiplicada por c^2.*

A desvantagem da variância é que por elevarmos ao quadrado cada um dos desvios, a unidade de medida também ficará ao quadrado, por exemplo, se estivermos trabalhando com distâncias (em *m*), quando calcularmos a variância a teremos em m^2, que corresponde a uma unidade de área (algo que soará bem estranho diante do contexto). De modo que quem corrigirá isso será a nossa próxima medida de dispersão, o desvio padrão.

✧ Desvio Padrão

Na interpretação da variância, como já foi dito, pode surgir alguma dificuldade em relação à unidade de medida dos elementos da amostra. Para corrigir isso, indicamos como o desvio padrão a raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Voltando ao exemplo das notas, se a variância foi igual a 5,2, o desvio padrão será

$$\sigma = \sqrt{5{,}2} \cong 2{,}28.$$

Mas tenha cuidado, isso não significa dizer que os valores desviam em média 2,28 para mais ou para menos, essa interpretação é exclusiva do desvio médio.

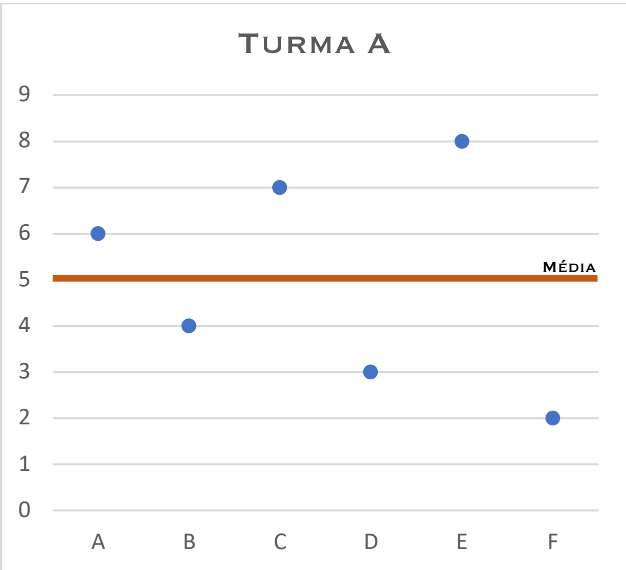
Apesar do desvio padrão não trazer uma interpretação tão prática como a do desvio médio, vale salientar que ele constitui uma medida muito mais refinada que o desvio médio, de modo que, poderemos comparar com mais precisão o grau de variabilidade de conjuntos distintos que apresentem a mesma média.

Vamos comparar duas turmas de seis alunos cada uma delas:

Turma A

Aluno	Nota	Desvio Individual $x_i - \overline{x}$	Desvio Individual Absoluto $\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	Quadrados dos Desvios Individuais $(x_i - \overline{x})^2$
Ana	6	+1	1	1
Beto	4	-1	1	1
Caio	7	+2	2	4
Dilma	3	-2	2	4
Edu	8	+3	3	9
Fábio	2	-3	3	9
Média	5	0	2	≅4,67

Agora observe como esses valores se distribuem num gráfico em torno da média:



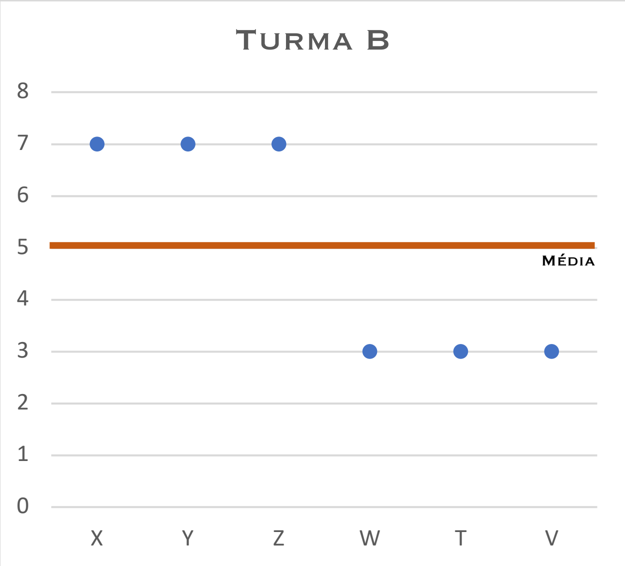
Para a Turma A, temos:

Média Aritmética:	$\overline{x} = 5$
Desvio Médio:	$D_m = 2$
Variância:	$\sigma^2 \cong 4{,}67$
Desvio Padrão:	$\sigma \cong 2{,}16$

Anotações:

Turma B

Aluno	Nota	Desvio Individual $x_i - \bar{x}$	Desvio Individual Absoluto $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	Quadrados dos Desvios Individuais $(x_i - \bar{x})^2$
Xavier	7	+2	2	4
Ydris	7	+2	2	4
Zamir	7	+2	2	4
Wall	3	-2	2	4
Ted	3	-2	2	4
Vlad	3	-2	2	4
Média	**5**	**0**	**2**	**4**



Para a Turma B, temos:

Média Aritmética:	$\bar{x} = 5$
Desvio Médio:	$D_m = 2$
Variância:	$\sigma^2 = 4$
Desvio Padrão:	$\sigma = 2$

Quando olhamos para ambos os gráficos, já percebemos uma sutil diferença de comportamento entre as duas distribuições, de modo que a Turma B apresenta uma regularidade ou homogeneidade maior que a Turma A, apesar de ambas apresentarem a mesma média e o mesmo desvio médio. Note que, quem vai diferenciar de fato as duas distribuições é a variância e o desvio padrão, sendo esses valores para a Turma B menores que os respectivos para a Turma A.

Assim, de maneira prática, você precisa saber que, para **"Médias Iguais"**:

☞ Quanto *menor* o desvio padrão, mais regular e homogênea é a distribuição.

☞ Quanto *maior* o desvio padrão, menos regular, mais heterogênea é a distribuição.

Propriedades:

P_1: *Se a cada x_i (i= 1, 2, ..., n) for adicionada uma constante real c, o desvio padrão não se altera.*

P_2: *Se multiplicarmos cada x_i (i= 1, 2, ..., n) por uma constante real c, o desvio padrão também fica multiplicado por c.*

Problema 11 (Ronaebson): Em uma fábrica de vidros, duas máquinas, A e B, fabricam bolas de gude, projetadas para ter 25 mm de diâmetro. Uma amostra de 10 bolinhas de cada máquina foi analisada para verificar se os inevitáveis erros de medida, produzidos no processo de fabricação, são aceitáveis. O engenheiro de materiais também determinou que a máquina que apresentar maior irregularidade, isto é, maior dispersão de medidas em relação ao diâmetro médio, será enviada para manutenção. A tabela a seguir contém a média, a moda, a mediana e o desvio padrão dos diâmetros anotados pelo engenheiro.

Estatística dos Diâmetros das Bolas de Gude

	Média	Moda	Mediana	Desvio Padrão
Máquina A	24,45	25,0	24,37	0,40
Máquina B	24,45	24,5	24,50	0,53

Assim, a máquina que será enviada para a manutenção será a máquina

Ⓐ A, pois apresenta a menor mediana.
Ⓑ A, pois apresenta o menor desvio padrão.
Ⓒ B, pois apresenta a menor moda.
Ⓓ B, pois apresenta a maior mediana.
Ⓔ B, pois apresenta o maior desvio padrão.

Solução:

A máquina que será enviada para a manutenção será a máquina B, pois apresenta o maior desvio padrão.

Resposta: [E]

✧ Coeficiente de Variação

É uma medida relativa de dispersão útil para a comparação em termos relativos do grau de concentração em torno da média de distribuições distintas. Nós recorreremos a ele, principalmente quando as médias das distribuições forem diferentes.

Também conhecido como Desvio Padrão Relativo, o Coeficiente de Variação é definido como a razão entre o desvio padrão e a média.

$$\boxed{C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}}}$$

Assim, de maneira prática, você precisa saber que:

- Quanto *menor* o *Coeficiente de Variação*, mais regular e homogênea é a distribuição.

- Quanto *maior* o *Coeficiente de Variação*, menos regular, mais heterogênea é a distribuição.

Problema 12 (Ronaebson): Em um supermercado, cinco produtos serão analisados para ver se realmente suas massas são condizentes com a média proposta na embalagem, de modo que serão tomadas quatro embalagens de cada um dos produtos para as devidas pesagens. O supermercado deixará de vender o produto com maior dispersão em relação à média. Os resultados e as informações sobre as massas de cada uma das embalagens dos respectivos produtos estão dispostos na tabela.

Produto	Emb. 1	Emb. 2	Emb. 3	Emb. 4	Média	Mediana	Desvio Padrão
Açúcar	1040	990	1010	960	1000	1000	29,15
Granola	520	510	491	479	500	500,5	15,98
Farinha Láctea	206	209	196	189	200	201,0	7,97
Leite Condensado	409	394	410	387	400	401,5	9,82
Molho Madeira	250	251	249	250	250	250,0	0,71

O produto que deixará de ser vendido pelo supermercado é o(a)

Ⓐ Açúcar.
Ⓑ Granola.
Ⓒ Farinha Láctea.
Ⓓ Leite Condensado.
Ⓔ Molho Madeira.

Solução:

O produto que deixará de ser vendido será o que apresentar o maior Coeficiente de Variação. Assim, basta calcular os Coeficientes de Variação de cada um dos itens.

$C_{V_A} = \frac{29,15}{1000} = 0,02915$ $\quad C_{V_G} = \frac{15,98}{500} = 0,03196$

$C_{V_F} = \frac{7,97}{200} = 0,03985$ $\quad C_{V_L} = \frac{9,82}{400} = 0,02455$

$C_{V_M} = \frac{0,71}{250} = 0,00284$

Logo, o produto que deixará de ser vendido é a Farinha Láctea.

Resposta: [C]

Hora de Praticar

::: Tratamento da Informação :::

Questão 01

(Ronaebson)

A taxa anual de desmatamento na área da Amazônia Legal – que abrange os estados do Acre, Amazonas, Amapá, Maranhão, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima e Tocantins – caiu 82% nos últimos 10 anos, informaram os ministérios da Ciência e Tecnologia e do Meio Ambiente.

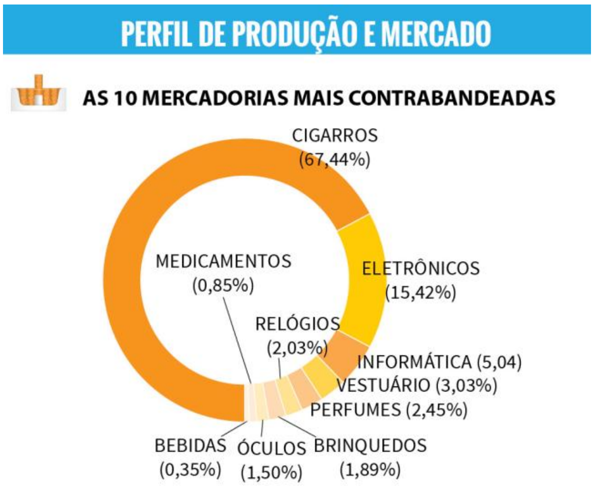
Disponível em http://g1.globo.com/natureza/noticia/2015/08/desmatamento-na-amazonia-legal-cai-82-em-10-anos-diz-governo.html
Acesso em 15/08/2018.

Considerando os valores apresentados no gráfico referentes às taxas de desmatamentos na Amazônia Lega, em km^2, tem-se que a área total desmatada no triênio *(2009 – 2010 – 2011)* foi de

Ⓐ 17989 km^2.
Ⓑ 20882 km^2.
Ⓒ 21882 km^2.
Ⓓ 27375 km^2.
Ⓔ 27772 km^2.

Questão 02

(Ronaebson)



PREÇO MÉDIO NO PARAGUAI

CIGARROS	R$ 0,70
ELETRÔNICOS	R$ 990,36
INFORMÁTICA	R$ 556,04
VESTUÁRIO	R$ 12,08
PERFUMES	R$ 94,88
RELÓGIOS	R$ 10,80
BRINQUEDOS	R$ 15,34
ÓCULOS	R$ 40,50
MEDICAMENTOS	R$ 19,09
BEBIDAS	R$ 32,59

LUCRO MÁXIMO

CIGARROS	231,15%
ELETRÔNICOS	19,66%
INFORMÁTICA	13,34%
VESTUÁRIO	72,36%
PERFUMES	101,12%
RELÓGIOS	101,80%
BRINQUEDOS	323,17%
ÓCULOS	246,38%
MEDICAMENTOS	901,85%
BEBIDAS	82,46%

Fonte: IDESF/EGOPE, 2015

Considerando o grupo das dez mercadorias mais contrabandeadas, aquela correspondente a moda da distribuição de frequência representada no gráfico é

Ⓐ cigarro.
Ⓑ perfume.
Ⓒ óculos.
Ⓓ bebidas.
Ⓔ medicamentos.

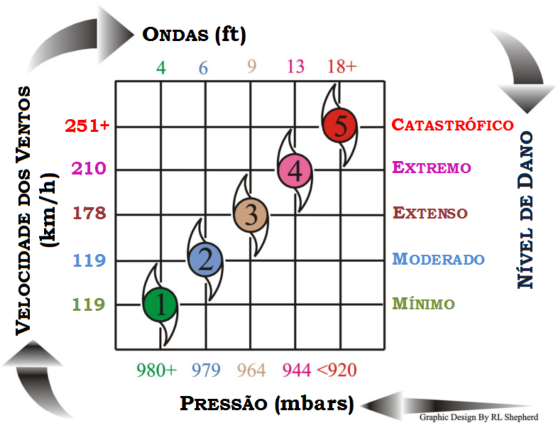
Questão 03

(Ronaebson)

A escala Saffir-Simpson vai de 1 a 5 e mede a intensidade dos ventos dos furacões, classificados por categorias. Foi criada em 1969 pelo engenheiro civil Herbert Saffir e pelo meteorologista Robert Simpson. A escala Saffir-Simpson é usada para dar a estimativa do potencial risco de danos e inundações esperados durante a passagem de um furacão.
A categoria é estimada através da velocidade do vento mantida durante 1 minuto, daí a expressão *"ventos sustentados"*, quando referem-se a furacões.

Disponível em http://www.apolo11.com/tema_furacoes_saffir_simpson.php
Acesso em 27/09/2017.

Observe o gráfico a seguir com relação à escala Sffir-Simpson de furacões.



O furacão Maria atingiu, por volta das 20h45min do dia 18 de setembro de 2017, ventos sustentados de 260 km/h o que o enquadra na categoria

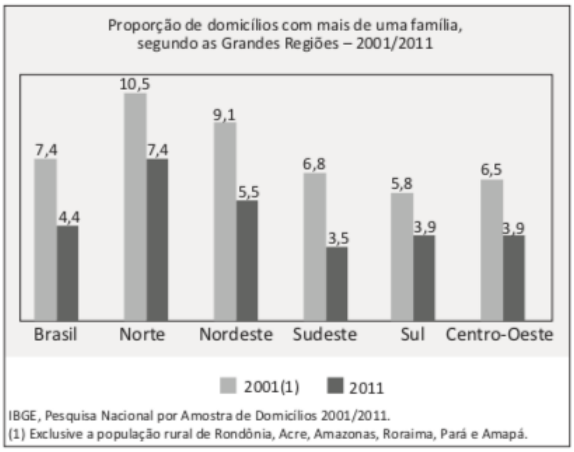
Ⓐ 1, provocando poucos danos.
Ⓑ 2, com danos de nível moderados.
Ⓒ 3, trazendo extensos danos.
Ⓓ 4, com danos extremos.
Ⓔ 5, provocando danos catastróficos.

Questão 04

(Ronaebson)

Quando há, na mesma unidade domiciliar (casa), mais de um núcleo familiar, estas famílias são classificadas como famílias conviventes. Segundo o IBGE, em 2011, 95,6% dos domicílios eram ocupados por apenas um núcleo familiar e 4,4%, por dois ou mais núcleos.

O gráfico a seguir apresenta o percentual de domicílios com mais de um núcleo familiar nos anos de 2001 e 2011 nas grandes regiões do Brasil.



De acordo com as informações apresentadas nesse gráfico, as regiões brasileiras que apresentaram o maior e menor percentuais, respectivamente, de domicílios com mais de uma família, em 2011, foram

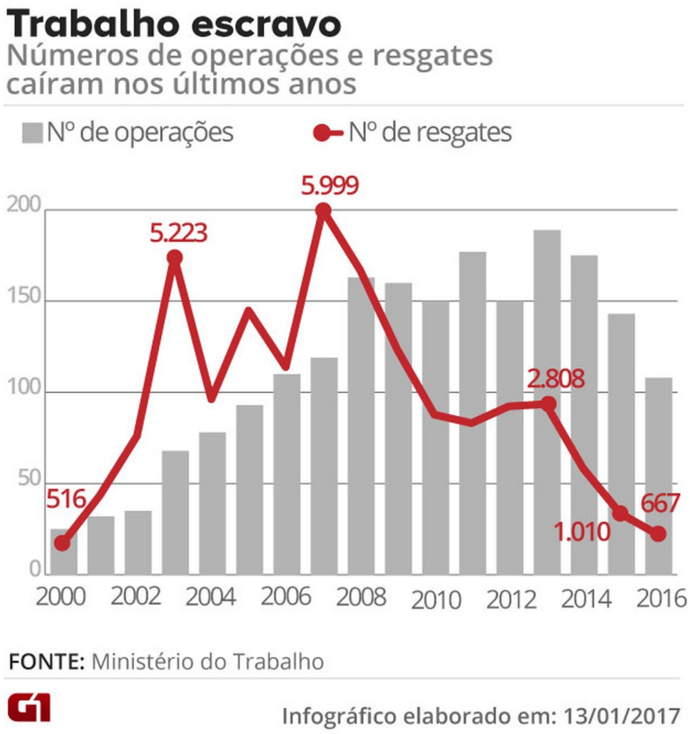
Ⓐ Nordeste e Sul.
Ⓑ Norte e Sul.
Ⓒ Norte e Sudeste.
Ⓓ Sul e Norte.
Ⓔ Sudeste e Nordeste.

Questão 05

(Ronaebson)

Mais de 660 trabalhadores foram resgatados pelos grupos móveis de combate ao trabalho escravo em 2016, segundo dados do Ministério do Trabalho. O número é o menor desde 2000, quando 516 pessoas foram resgatadas em trabalho análogo ao escravo. Em relação a 2015, cujo número de resgates foi de 1.010, a queda foi de 34%.

Disponível em https://g1.globo.com/economia/noticia/n-de-libertados-em-trabalho-analogo-ao-escravo-cai-34-em-1-ano-total-e-o-menor-desde-2000.ghtml Acesso em 10/09/2019.



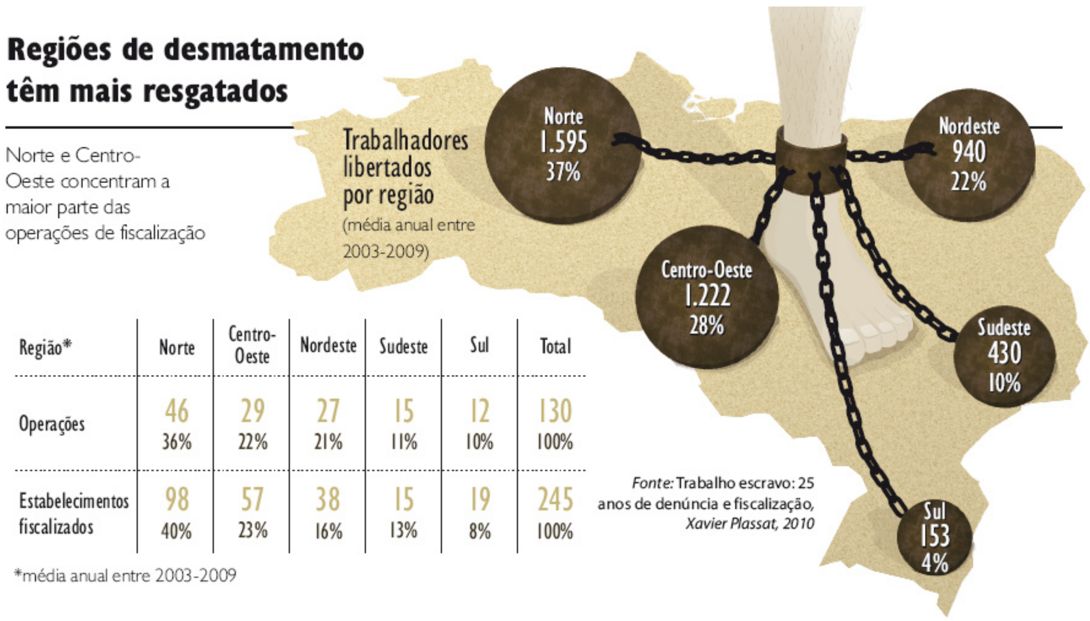
No período considerado no gráfico ao lado, a quantidade de anos em que o número de operações foi superior a 100 é igual a

Ⓐ 6.
Ⓑ 10.
Ⓒ 11.
Ⓓ 12.
Ⓔ 17.

Questão 06

(Ronaebson)

O agronegócio é o setor da economia que mais recruta pessoas para trabalhar em regime semelhante ao da escravidão. E entre as atividades rurais com maior número de trabalhadores resgatados, o desmatamento para expansão da fronteira agrícola, especialmente na Amazônia, figura em primeiro lugar no ranking.



Região*	Norte	Centro-Oeste	Nordeste	Sudeste	Sul	Total
Operações	46 36%	29 22%	27 21%	15 11%	12 10%	130 100%
Estabelecimentos fiscalizados	98 40%	57 23%	38 16%	15 13%	19 8%	245 100%

*média anual entre 2003-2009

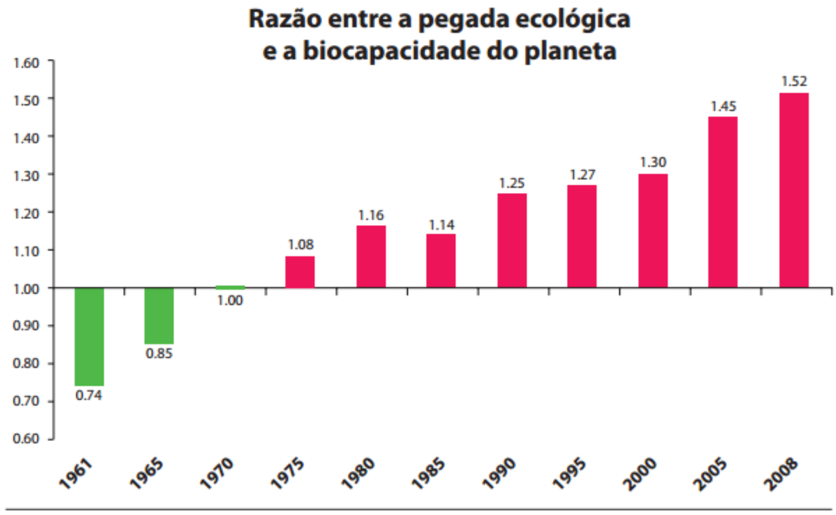
Considerando a distribuição do número de trabalhadores libertados no período de 2003 a 2009, a região que detém o maior número deles é a

Ⓐ Norte.
Ⓑ Nordeste.
Ⓒ Centro-Oeste.
Ⓓ Sudeste.
Ⓔ Sul.

Questão 07

(Ronaebson)

Pegada ecológica é um indicador que estima a demanda ou a exigência humana sobre o meio ambiente, considerando-se o nível de atividade para atender ao padrão de consumo atual (com a tecnologia atual). É, de certa forma, uma maneira de medir o fluxo de ativos ambientais de que necessitamos para sustentar nosso padrão de consumo. Esse indicador é medido em hectare global, medida de área equivalente a 10000 m^2.
Na medida hectare global, são consideradas apenas as áreas produtivas do planeta. A biocapacidade do planeta, indicador que reflete a regeneração (natural) do meio ambiente, é medida também em hectare global. Uma razão entre pegada ecológica e biocapacidade do planeta igual a 1 indica que a exigência humana sobre os recursos do meio ambiente é reposta na sua totalidade pelo planeta, devido à capacidade natural de regeneração. Se for maior que 1, a razão indica que a demanda humana é superior à capacidade do planeta de se recuperar e, se for menor que 1, indica que o planeta se recupera mais rapidamente.



Disponível em:<http://financasfaceis.wordpress.com>. Acesso em: 10 ago. 2014.

O aumento da razão entre a pegada ecológica e biocapacidade representado no gráfico evidencia

Ⓐ redução das áreas de plantio do planeta para valores inferiores a 10000 m^2 devido ao padrão atual de consumo de produtos agrícolas.
Ⓑ aumento gradual da capacidade natural de regeneração do planeta em relação às exigências humanas.
Ⓒ reposição dos recursos naturais pelo planeta em sua totalidade frente às exigências humanas.
Ⓓ incapacidade de regeneração natural do planeta ao longo do período 1961-2008.
Ⓔ tendência a desequilíbrio gradual e contínuo da sustentabilidade do planeta.

Questão 08

(Ronaebson)

O gráfico abaixo representa a previsão do tempo para a cidade de João Pessoa para o dia 02/03/2020. Os números distribuídos ao longo da curva gráfica representam a temperatura em Celsius (°C).

Disponível em climatempo.com.br.
Acesso em 07/09/2021

De acordo com o gráfico, nesse mesmo dia, a temperatura mínima foi atingida às

Ⓐ 02h.
Ⓑ 04h.
Ⓒ 10h.
Ⓓ 18h.
Ⓔ 20h.

::: Medidas de Tendência Central :::

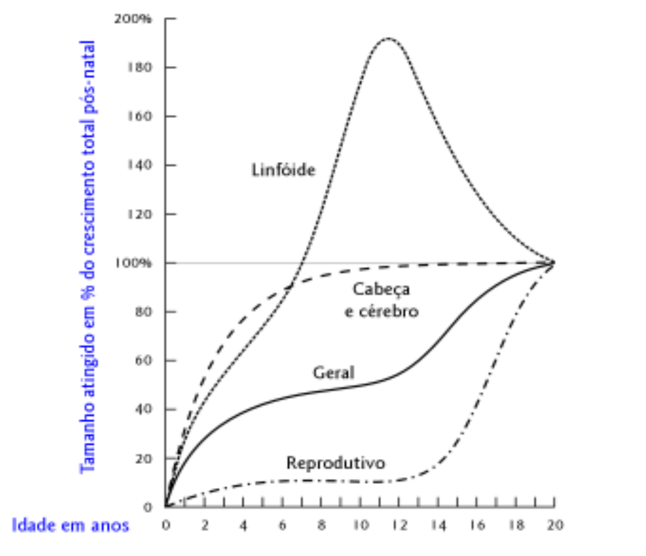
Questão 09

(Ronaebson)

O crescimento é um processo biológico, dinâmico e contínuo de multiplicação (hiperplasia) e aumento do tamanho (hipertrofia) celular, que ocorre desde a concepção até o final da vida, considerando-se os fenômenos de substituição e regeneração de tecidos e órgãos. De uma forma geral, o crescimento é entendido como o aumento do tamanho corporal, cessando com o término do aumento do crescimento linear (altura).

Existem também diferenças no crescimento de outros tecidos e partes do corpo, como mostra o gráfico a seguir.

Curvas de crescimento de diferentes partes e tecidos do corpo



Fonte: *Tanner*, 1962. (copiado da *Tanner*, J.M., 1978).

A partir do exposto, infere-se que, dos 14 anos aos 20 anos, a cabeça e o cérebro

- **A** praticamente não apresenta mais variação no crescimento, enquanto os órgãos reprodutivos apresentam sua maior taxa de crescimento.
- **B** praticamente não apresenta mais variação no crescimento, acontecendo o mesmo com a linfoide.
- **C** praticamente não apresenta mais variação no crescimento, acontecendo o mesmo com o restante do corpo.
- **D** continua crescendo de maneira significativa, enquanto os órgãos reprodutivos já estão com seu tamanho estabilizado.
- **E** continua crescendo de maneira significativa, enquanto a linfoide apresenta uma leve queda no seu tamanho.

Questão 10

(Ronaebson)

Globalização é o processo de aproximação entre as diversas sociedades e nações existentes por todo o mundo, seja no âmbito econômico, social, cultural ou político. Porém, um dos principais destaques dado pela **globalização** está na integração de mercado existente entre os países.

https://www.significados.com.br/globalizacao/
Acesso em 28/02/2019.

Analise os gráficos a seguir:

Folha de S.Paulo, 22 jan. 2018.

Outro traço da globalização é realçado nos dados dispostos acima e eles evidenciam

- **A** a crescente concentração de renda ao longo dos anos.
- **B** uma melhor distribuição de renda na sociedade.
- **C** uma diminuição da desigualdade social no mundo.
- **D** um crescimento equânime entre as rendas de pessoas ricas e pobres.
- **E** que, com a globalização, as classes mais baixas foram muito favorecidas.

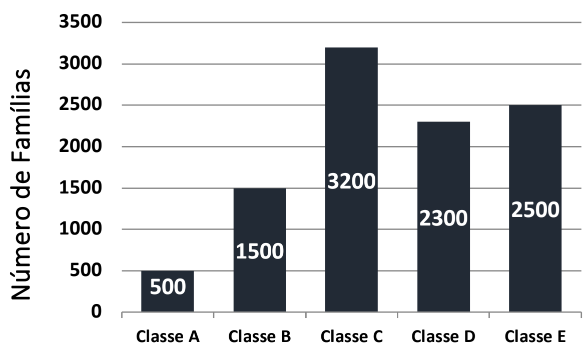
Questão 11

(Ronaebson)

Segundo dados dos IBGE, as classes sociais das famílias brasileiras são estabelecidas de acordo com a faixa de renda mensal total da família, conforme a tabela a seguir:

Classe	Faixa de Renda Salários Mínimos (s.m.)
A	acima de 20 s.m.
B	entre 10 e 20 s.m.
C	entre 4 e 10 s.m.
D	entre 2 e 4 s.m.
E	até 2 s.m.

Após um levantamento feito com as famílias de um município da Paraíba, foram obtidos os resultados expressos no gráfico a seguir:



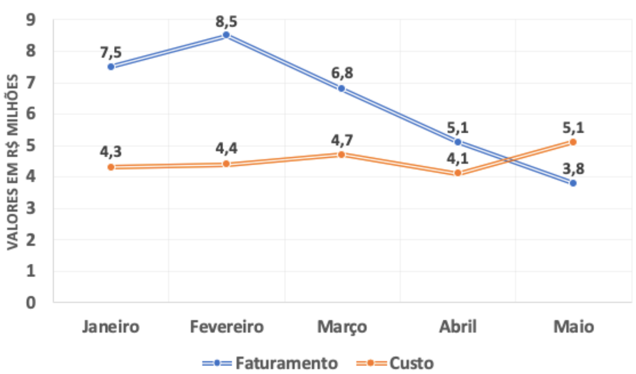
Com base nas informações contidas no gráfico e na tabela, o percentual das famílias que têm renda mensal abaixo de 10 salários mínimos é de

Ⓐ 20%.
Ⓑ 32%.
Ⓒ 52%.
Ⓓ 60%.
Ⓔ 80%.

Questão 12

(Ronaebson)

O gráfico a seguir traz o faturamento e as despesas de uma empresa ao longo dos cinco primeiros meses do ano, em milhões de reais.



Sabendo que o lucro mensal dessa empresa é calculado pela diferença entre o faturamento e o custo no referido mês, tem-se que o mês em que essa empresa apresentou o maior lucro foi

Ⓐ Janeiro.
Ⓑ Fevereiro.
Ⓒ Março.
Ⓓ Abril.
Ⓔ Maio.

Questão 13

(Ronaebson)

Taxa de fecundidade é uma estimativa do número médio de filhos que uma mulher tem ao longo da vida. Nesse sentido, esse indicador expressa a condição reprodutiva média das mulheres de um determinado local, sendo um dado importantíssimo para a análise da dinâmica demográfica.
O gráfico a seguir mostra a evolução da taxa de fecundidade no Brasil a partir da década de 40 até o ano de 2010.

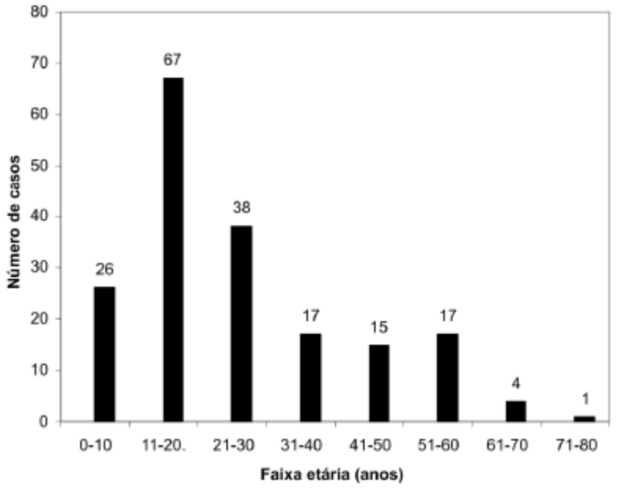
A partir da análise do gráfico, infere-se que

Ⓐ a redução das taxas de fecundidade contribuiu para o aumento da população brasileira nos últimos anos.
Ⓑ as mulheres brasileiras estão tendo cada vez mais filhos devido a sua maior participação no mercado de trabalho.
Ⓒ o aumento das taxas de fecundidade se deu, entre outros fatores, por causa de um melhor planejamento familiar.
Ⓓ a taxa de fecundidade vem diminuindo em nosso país, devido, entre outros fatores, ao uso de métodos contraceptivos.
Ⓔ a taxa de fecundidade teve valor máximo na década de 90, quando houve um maior índice de projetos de educação sexual.

Questão 14

(Ronaebson)

O gráfico a seguir traz uma distribuição de frequências de casos de apendicite segundo a faixa etária em anos.



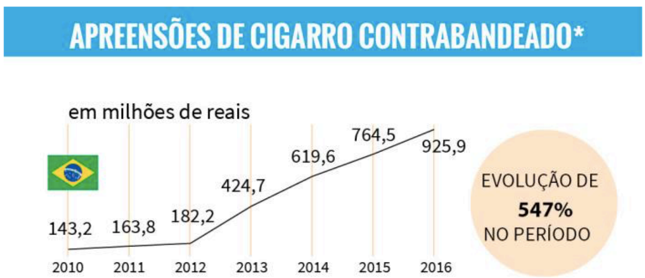
A faixa de idade, em ano, correspondente a moda desses casos é a

Ⓐ 11 - 20.
Ⓑ 21 - 20.
Ⓒ 31 - 40.
Ⓓ 41 - 50.
Ⓔ 71 - 80.

Questão 15

(Ronaebson)

Entidades defendem penas mais duras e maior fiscalização para frear o avanço do contrabando de cigarros no país. Hoje, a punição para quem é flagrado transportando maços do Paraguai varia de dois a cinco anos de reclusão, enquanto a pena para os casos de tráfico de drogas é de cinco a 15 anos de prisão.



Disponível em https://gauchazh.clicrbs.com.br/economia/campo-e-lavoura/noticia/2017/06/de-cada-10-cigarros-vendidos-no-brasil-4-5-sao-ilegais-9823481.html
Acesso em 10/10/2021.

Considerando os valores, em milhões de reais, de apreensões de cigarro contrabandeado em cada um dos anos no período de 2010 a 2016, o valor correspondente a mediana é

Ⓐ 182,2.
Ⓑ 404,4.
Ⓒ 424,7.
Ⓓ 460,5.
Ⓔ 619,6.

Questão 16

(Ronaebson)

Um aluno fez 30 simulados de matemática ao longo do ano e obteve uma média de 36 acertos por simulado. Sabe-se que tais simulados foram realizados em dois grandes blocos e que no primeiro bloco de simulados a média de acertos foi de 32 questões e no segundo bloco foi de 38 questões.

A quantidade de simulados do primeiro bloco foi

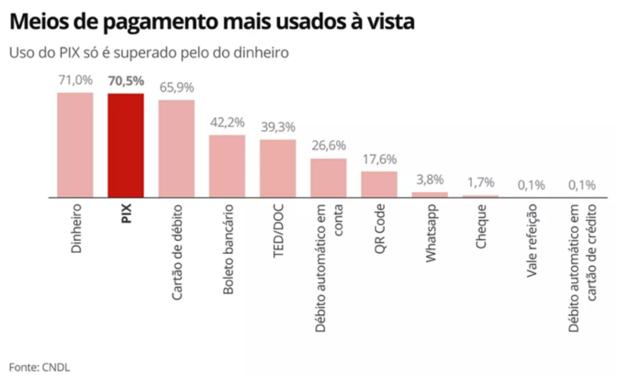
Ⓐ 10.
Ⓑ 12.
Ⓒ 15.
Ⓓ 18.
Ⓔ 20.

Questão 17

(Ronaebson)

Menos de um ano após começar a funcionar, o PIX já é o segundo meio de pagamento mais usado pelos brasileiros nas contas à vista, aponta pesquisa da Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas (CNDL), antecipada ao G1 – atrás apenas do dinheiro.

De acordo com o levantamento, as modalidades de pagamento mais utilizadas pelos brasileiros são dinheiro (71%), PIX (70%), cartão de débito (66%) e cartão de crédito (57%).



Disponível em https://g1.globo.com/economia/pix/noticia/2021/08/29/com-menos-de-um-ano-de-existencia-pix-e-o-2o-meio-de-pagamento-mais-usado-nas-contas-a-vista-diz-cndl.ghtml
Acesso em 29/08/2021.

De acordo com o infográfico, dentre os meios de pagamentos mais usados à vista, aquele correspondente a mediana é o(a)

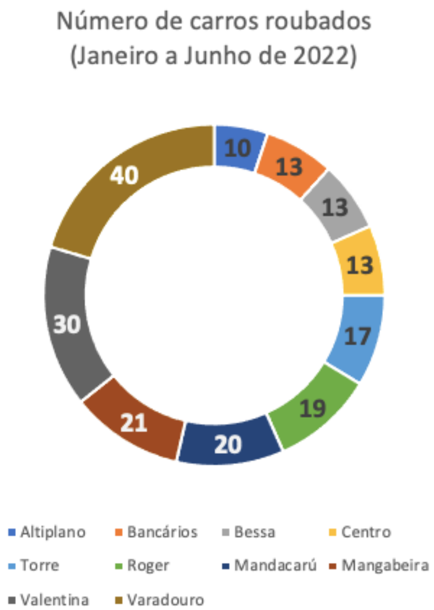
Ⓐ Dinheiro
Ⓑ PIX
Ⓒ TED/DOC
Ⓓ Débito automático em conta
Ⓔ QR Code

Questão 18

(Ronaebson)

Segundo matéria do *Jornal Notícias Criativas*, publicada em 13 de novembro de 2022, um relatório oficial de roubos de carros entre janeiro e junho de 2022 apontou os bairros de João Pessoa que mais sofreram esse tipo de crime no período citado.

Os números estão presentes no gráfico a seguir:



De acordo com o gráfico e considerando apenas os dez bairros estudados, a média e a mediana das quantidades de carros roubados por bairro são, respectivamente,

Ⓐ 19,6 e 17.
Ⓑ 19,6 e 18.
Ⓒ 19,6 e 19.
Ⓓ 18 e 18.
Ⓔ 20 e 19.

Questão 19

(Ronaebson)

Em um grupo de 10 lutadores a média de suas massas é igual a 80 kg. Entretanto, em virtude de uma lesão de última hora, Tarcísio que tinha 90 kg teve que ser substituído para um campeonato de equipe.

Dado que quem entrou no lugar de Tarcísio foi Chanxa, que tem 82 kg, a nova média das massas dos lutadores do time será igual a

Ⓐ 78,0 kg.
Ⓑ 79,2 kg.
Ⓒ 80,4 kg.
Ⓓ 82,0 kg.
Ⓔ 86,0 kg.

Questão 20

(COTIL)

Considerando que, em uma determinada oca, vivam 10 pessoas com idade de 4 anos, 8 pessoas com 25 anos e X com 40 anos, qual deve ser o valor de X para que a média de idade dos habitantes da oca seja de 20 anos?

Ⓐ 10
Ⓑ 8
Ⓒ 6
Ⓓ 4
Ⓔ 3

Questão 21

(Ronaebson)

Uma das principais funções do ecocardiograma é avaliar a fração de ejeção do ventrículo esquerdo. Este dado tem tanto informação prognóstica (quanto menor, pior o prognóstico) quanto para escolha terapêutica.

A fração de ejeção é o percentual de sangue que o ventrículo ejeta para a aorta na sístole. Assim, se no final da diástole o ventrículo tem 100 mL de sangue e no final da sístole tem 40mL, subentende-se que 60mL de sangue foram ejetados para a aorta. 60mL de 100mL indica 60% de fração de ejeção.

Dr. Rivaldo registrou na tabela a seguir a fração de ejeção dos últimos seis ecocardiogramas realizados num paciente em 2021.

Janeiro	45
Fevereiro	50
Março	55
Abril	50
Maio	58
Junho	57

O médico, tomando como base a média aritmética das frações de ejeção indicadas nos últimos seis ecocardiogramas, deve avaliar a possibilidade de uma das condutas a seguir:

(1) transplante cardíaco, se a média for no máximo 20%.
(2) troca da valva aórtica se a média for maior do que 20% e menor do que 50%.
(3) troca da valva mitral, se a média for maior do que 50% e menor do que 60%.
(4) tratamento medicamentoso, se a média for maior do que 60% e menor do que 65%.
(5) alta da cardiologia, se a média for no mínimo 65%.

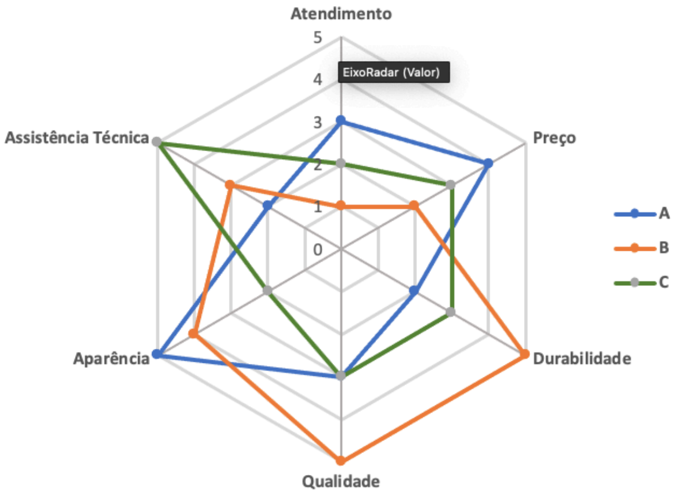
A conduta indicada como possibilidade pelo cardiologista foi a

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 3.
Ⓓ 4.
Ⓔ 5.

Questão 22

(Ronaebson)

Três marcas de aparelhos celulares (A, B e C) foram avaliadas pelos seus consumidores em relação a seis itens. Em cada um dos itens, as marcas receberam notas de 0 a 5, conforme indica o gráfico a seguir.



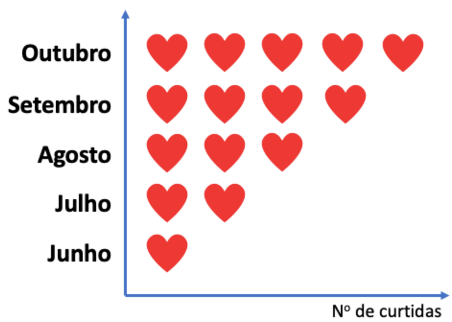
Dentre as marcas avaliadas, aquela que apresentou a maior média nas categorias analisadas, teve sua menor avaliação no quesito

Ⓐ Aparência.
Ⓑ Atendimento.
Ⓒ Durabilidade.
Ⓓ Preço.
Ⓔ Qualidade.

Questão 23

(Ronaebson)

O studygram @myroutineee_ tem crescido bastante de modo que o número de curtidas no mês de outubro superou em 6400 o número de curtidas no mês de agosto.



A média mensal de curtidas nos posts do referido instagram nos meses representados no gráfico foi de

Ⓐ 3200.
Ⓑ 4800.
Ⓒ 5000.
Ⓓ 7200.
Ⓔ 9600.

Questão 24

(Ronaebson)

O suicídio é a segunda causa de morte de jovens entre 15 e 29 anos e tem crescido exponencialmente na última década. O Rio Grande do Sul recebe uma atenção especial, pois, é o estado brasileiro com o maior número de casos. Segundo dados do Ministério da Saúde, a região Sul apresenta 23% dos casos de suicídio do país, embora responda por 14% da população brasileira.

Sabendo da importância do atendimento aos casos de suicídio e da responsabilidade dos profissionais da saúde nesse contexto, atentando para os números preocupantes do estado, os residentes desenvolveram um estudo, onde identificaram o número de pacientes atendidos na Emergência em decorrência de tentativa de suicídio no período de janeiro de 2017 a abril de 2018, bem como, a forma da tentativa, as épocas em que ocorreram os casos, o sexo e a faixa etária atingidas e as principais sequelas identificadas nos pacientes.

Disponível em https://hsvp.com.br/post/1874/residentesmultiprofissionais-realizam-pesquisa-sobre-suicidio
Acesso em 31/10/2021

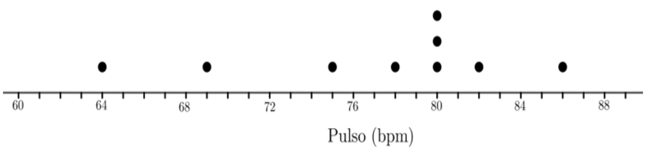
Diante dos motivos relatados expostos no gráfico, desconsiderando as pessoas que não souberam responder ou que não relataram, o que representa a moda deles é

Ⓐ Saudade de entes que já faleceram.
Ⓑ Solidão/abandono.
Ⓒ Conflitos familiares.
Ⓓ Problemas financeiros.
Ⓔ Exaustão/esgotamento emocional

Questão 25

(Ronaebson)

Nas últimas nove horas, a senhorita Avancini mediu nove vezes os batimentos cardíacos através do seu pulso e obteve os resultados apresentados em batimentos por minuto (bpm) no diagrama de pontos a seguir.



De acordo com os dados obtidos por Avancini, temos que a moda e mediana dessa distribuição de frequência são respectivamente iguais a

- Ⓐ 80 e 80.
- Ⓑ 80 e 79.
- Ⓒ 80 e 78.
- Ⓓ 78 e 80.
- Ⓔ 77 e 80.

Questão 26

(Unicamp_Adaptada)

Durante a pandemia de Covid-19, a imprensa tem utilizado a “média móvel” para divulgar a evolução do número de casos notificados da doença.

Para calcular a média móvel do dia d com respeito aos últimos k dias, somamos o número de casos do dia d com o número de casos registrados nos $k - 1$ dias anteriores e dividimos por k.

Na tabela abaixo, indicamos, para uma dada cidade, a quantidade de casos notificados em cada dia de um determinado mês, e também a média móvel de cada dia com respeito aos últimos 4 dias. Alguns dados foram perdidos, e não constam na tabela.

Dia do mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Casos notificados	16	18	22	24	24	26	22		32			28	32	30	30	28	28	26
Média móvel				20	22	24	24			28	31	32			30	30	29	

A média móvel do dia 18 é igual a

- Ⓐ 26.
- Ⓑ 27.
- Ⓒ 28.
- Ⓓ 29.
- Ⓔ 30.

Questão 27

(Encceja)

Em um colégio, para que o aluno seja aprovado, ele deve obter, como média aritmética simples das notas dos 4 bimestres, um valor igual ou superior a 60 pontos. Para compor a nota bimestral, são realizados dois trabalhos, cada um valendo T pontos, três provas, cada uma valendo P pontos, e um seminário valendo S pontos, totalizando 100 pontos essas seis avaliações. As notas obtidas por um aluno nos três primeiros bimestres estão indicadas no quadro.

Notas bimestrais				
Bimestre	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**
Nota (pontos)	55	53	52	

Esse aluno calculou a nota mínima necessária para que seja aprovado.

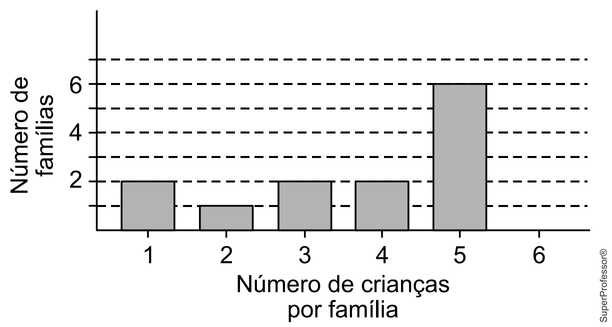
A expressão algébrica que relaciona os valores a serem obtidos nas avaliações do 4º bimestre, de forma a garantir a nota mínima necessária para que esse aluno seja aprovado, é

- Ⓐ T + P + S = 60
- Ⓑ T + P + S = 100
- Ⓒ 2T + 3P + S = 60
- Ⓓ 2T + 3P + S= 80
- Ⓔ 2T + 3P + S = 100

Questão 28

(Unichristus_2022)

Uma escola, para melhor avaliar o número médio de filhos por família, decidiu analisar estatisticamente uma turma. O gráfico mostra a distribuição do número de filhos nas famílias dos alunos da turma do Infantil II.



A partir dos dados do gráfico, conclui-se que a mediana do número de crianças, por família, para essa distribuição é

- Ⓐ 1.
- Ⓑ 2.
- Ⓒ 3.
- Ⓓ 4.
- Ⓔ 5.

Questão 29

(UFMS_2022)

A despesa mensal de uma família foi de R$ 6.240,00 durante os primeiros 3 meses, R$ 6.780,00 durante os próximos 4 meses e R$ 7.236,00 durante os últimos 5 meses de um ano. Se a economia total durante o ano foi de R$ 7.080,00, qual foi a renda média mensal da família?

A R$6.245,00.
B R$6.752,00.
C R$6.834,00.
D R$6.957,50.
E R$7.425,00.

Questão 30

(Ronaebson)

A diretora de uma escola realizou uma pesquisa acerca da idade dos alunos que integram a equipe de voleibol. Os dados coletados foram os seguintes: 5 alunos têm 17 anos, 4 alunos têm 18 anos, enquanto somente 3 alunos estão com 16 anos.

Os valores da moda e da mediana das idades dos alunos que integram a equipe de voleibol são, respectivamente,

A 17 e 18 anos.
B 16 e 17 anos.
C 17 e 17 anos.
D 18 e 18 anos.
E 18 e 16 anos.

Questão 31

(Ronaebson)

O percentual de gordura corporal de um atleta foi medido mensalmente ao longo dos 12 meses do ano. E indicaram um média mensal de 13,5% e mediana igual a 15%. Sabe-se ainda que essa distribuição com doze dados é unimodal, com moda igual a 16%, sendo esse percentual correspondente a moda sendo contabilizado exclusivamente no quarto bimestre do ano.

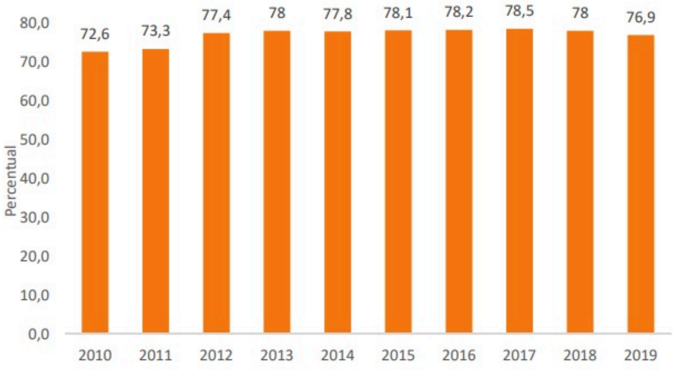
A média desse índice de gordura corporal calcula excluindo-se os meses de junho, julho e agosto é, aproximadamente, igual a

A 12,89%
B 13,50%
C 14,00%
D 15,00%
E 15,32%

Questão 32

(Ronaebson)

O gráfico a seguir traz a proporção de mulheres de 50 a 69 anos que realizaram mamografia pelo menos uma vez nos últimos dois anos, nas capitais brasileiras e no Distrito Federal.



Fonte: Ministério da Sáude. Vigitel Brasil

A mediana dos percentuais expostos no gráfico é igual a

A 76,88
B 77,80
C 77,90
D 78,00
E 78,10

Questão 33

(Ronaebson)

Uma escola tem 20 funcionários que estão divididos em três departamentos, a saber:

- Administrativo, com 8 funcionários;
- Pedagógico, com 9 funcionários;
- Marketing, com 3 funcionários.

Sabe-se ainda que:

- A média salarial de todos os funcionários é R$ 5.000,00;
- A média dos salários dos funcionários administrativos é igual a R$ 4.250,00;
- Os funcionários do setor pedagógico têm uma média salarial de R$ 6.000,00.

A média dos salarial dos funcionários do marketing é igual a

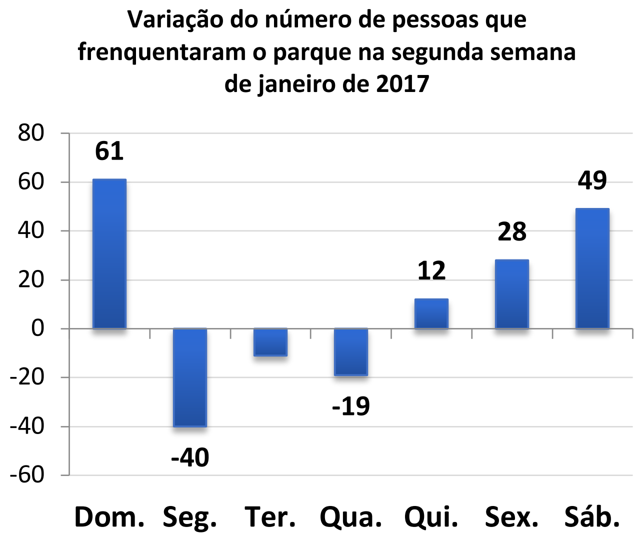
A R$ 4.000,00.
B R$ 4.500,00.
C R$ 4.750,00.
D R$ 5.000,00.
E R$ 5.250,00.

Questão 34

(Ronaebson)

O administrador do parque de diversões *Zezo Carneiro World*, fez um levantamento no número de pessoas que frequentou o parque na primeira e na segunda semana de janeiro de 2017 e na tabela a seguir registrou o número de pessoas presentes no parque em cada dia da primeira semana de janeiro e no gráfico, a variação absoluta do número de pessoas no parque em cada um dos dias da segunda semana quando comparado ao dia imediatamente anterior.

Número de pessoas presentes no parque na primeira semana de janeiro						
Dom.	**Seg.**	**Ter.**	**Qua.**	**Qui.**	**Sex.**	**Sáb.**
413	380	350	240	290	360	439



Relativamente ao número de pessoas que visitaram o parque na segunda semana do mês de janeiro, sabe-se ainda que o total de 1409 pessoas o frequentou até a terça feira (inclusive). Assim, o gerente apontou que o número de pessoas que frequentaram o parque no sábado da segunda semana foi igual a

Ⓐ 439.
Ⓑ 442.
Ⓒ 449.
Ⓓ 511.
Ⓔ 519.

Anotações:

Questão 035

(Ronaebson)

João Arthur queria vender seu smartphone pela internet. Consultando um portal de classificados *on-line*, ela encontrou cinco exemplares de smartphone da mesma marca e tempo de uso similares ao seu, cujos preços estão apresentados na tabela a seguir:

Exemplares	Preço (R$)
A	1.500,00
B	1.700,00
C	1.650,00
D	1.500,00
E	1.800,00

Após a pesquisa, João Arthur calculou a média aritmética dos valores dos cinco exemplares de smartphones que encontrou para determinar o preço do seu, que foi igual a

Ⓐ R$ 1.640,00.
Ⓑ R$ 1.630,00.
Ⓒ R$ 1.620,00.
Ⓓ R$ 1.610,00.
Ⓔ R$ 1.600,00.

Questão 36

(Ronaebson)

Os 200 médicos de um hospital recebem um salário médio de R$12000,00. Graças a uma ampliação nesse hospital, serão contratados 100 novos médicos, a um salário médio de R$9000,00. Com isso, a média salarial dos médicos desse hospital passará a ser de

Ⓐ R$10000,00.
Ⓑ R$10500,00.
Ⓒ R$11000,00.
Ⓓ R$12000,00.
Ⓔ R$22000,00.

Questão 37

Para calcular a média aritmética dos comprimentos dos pinos contidos em uma caixa, estes foram divididos em dois grupos, A e B. Assim, sabendo que o número de pinos do grupo A é igual ao triplo do número de pinos do grupo B, que a média dos comprimentos dos pinos do grupo A é 20 cm e que a média dos comprimentos dos pinos do grupo B é 40 cm, a média dos comprimentos de todos os pinos da caixa é

Ⓐ 25 cm.
Ⓑ 27 cm.
Ⓒ 30 cm.
Ⓓ 33 cm.
Ⓔ 35 cm.

Questão 38

(FGV))

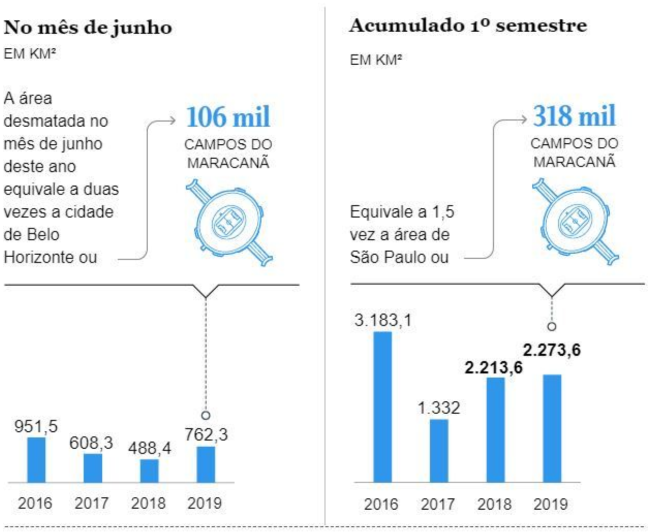
Um levantamento estatístico feita numa determinada empresa constatou que 70% dos funcionários eram do sexo masculino. Ainda de acordo com esse levantamento, a média salarial mensal dos funcionários do sexo masculino era R$ 3000,00 e a média salarial mensal dos funcionários do sexo feminino era de R$ 4500,00. Considerando todos os funcionários dessa empresa, a média salarial mensal é de

Ⓐ R$ 3400,00.
Ⓑ R$ 3450,00.
Ⓒ R$ 3700,00.
Ⓓ R$ 3750,00.
Ⓔ R$ 4050,00.

Questão 39

(Ronaebson)

OS NÚMEROS DO DESMATAMENTO



Disponível em https://www.saneamentobasico.com.br/desmatamento-amazonia-cresce/
Acesso em 21/08/2019

Na frieza dos números, uma triste realidade é posta em questão, algo urgente precisa ser feito, não adianta maquiar números ou sugerir erro nas informações dos satélites, pois diante da guerra ideológica entre o “progresso” e a “sustentabilidade” nota-se que já no mês de junho de 2019, a área desmatada já supera a média das áreas desmatadas dos cinco primeiros meses do mesmo ano em cerca de

Ⓐ 35,3 mil campos do Maracanã.
Ⓑ 42,4 mil campos do Maracanã.
Ⓒ 53,0 mil campos do Maracanã.
Ⓓ 63,6 mil campos do Maracanã.
Ⓔ 106 mil campos do Maracanã.

Questão 40

(Ronaebson)

O concurso para professor do IFPB é realizado em três fases, a saber:

1ª Fase: Prova Escrita
2ª Fase: Prova de Aula
3ª Fase: Prova de Títulos

Para o cálculo da média final do candidato, as notas obtidas nas 1ª, 2ª e 3ª fases desse concurso têm pesos 1, 3 e 2, respectivamente.

Apenas cinco candidatos foram classificados para a terceira fase e num dado momento, faltava apenas a pontuação obtida por Edna nessa última etapa. As notas dos candidatos classificados foram compiladas na tabela a seguir:

	1ª Fase	*2ª Fase*	*3ª Fase*
Aderbal	43	80	61
Betânia	39	80	90
Chianca	40	60	61
Dyjavan	40	80	90
Edna	45	75	

Sabendo que há apenas uma vaga e que, em caso de empate na média final, o critério de desempate será a nota obtida na 1ª Fase, a nota que Edna deve obter na Prova de Títulos para conseguir a vaga deve ser no mínimo

Ⓐ 90.
Ⓑ 91.
Ⓒ 95.
Ⓓ 96.
Ⓔ 99.

Questão 41

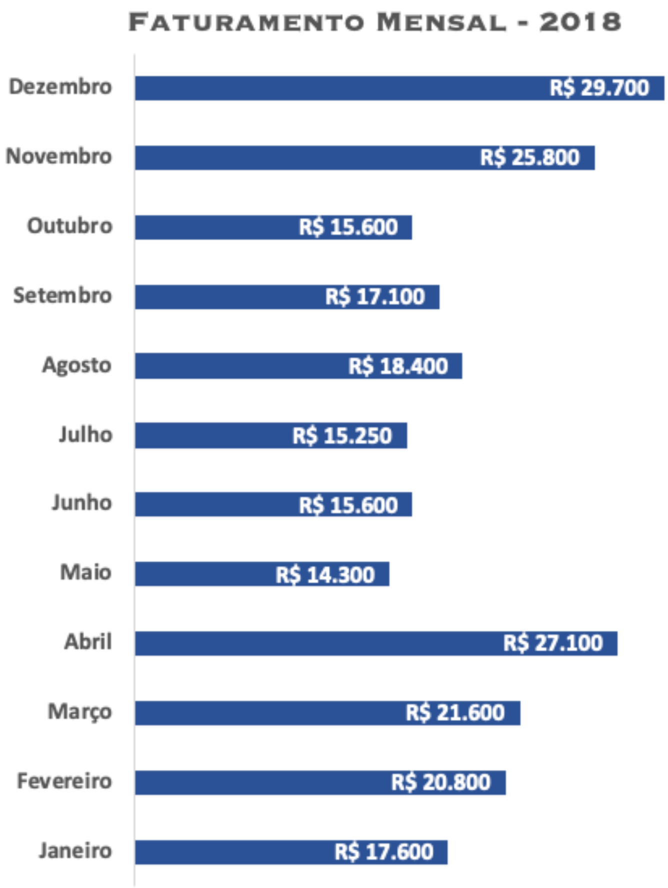
Em uma universidade, as mulheres representam 57% da totalidade dos estudantes. Sabendo que a média aritmética das idades das estudantes do sexo feminino dessa universidade é de 22 anos e que a dos estudantes do sexo masculino é de 24, pode-se afirmar que a idade média, considerando a totalidade dos alunos, dos estudantes dessas instituições é de:

Ⓐ 22,50.
Ⓑ 22,68.
Ⓒ 22,86.
Ⓓ 23,00.
Ⓔ 23,14.

Questão 42

(Ronaebson)

No dia 2 de janeiro de 2019, a livraria *Leitura Criativa* fez um balanço das vendas do ano 2018 e compilou os dados sobre as receitas mensais no gráfico a seguir:



Após analisar os dados, o administrador da livraria estipulou como meta de vendas para o mês de janeiro de 2020 um volume de vendas que proporcionasse um faturamento 28% superior à média dos cinco maiores faturamentos de 2018.

Para que a meta seja atingida, qual deve ser o faturamento mínimo no mês de janeiro de 2019?

Ⓐ R$ 7.000
Ⓑ R$ 25.000
Ⓒ R$ 27.800
Ⓓ R$ 32.000
Ⓔ R$ 35.000

Questão 43

(Ronaebson)

Uma multinacional tem exatamente dois tipos de programadores, o *programador júnior* e o *programador sênior*. O gerente do RH dessa empresa fez um levantamento financeiro do custo por hora de trabalho desses profissionais e obteve os seguintes dados:

	Salário Médio por Hora	Carga Horária Mensal	Número de Programadores
Programador Júnior	R$ 100	160 h	50
Programador Sênior	R$ 160	125 h	30

O salário médio mensal de um programador nessa empresa é igual a

Ⓐ R$ 16.000,00.
Ⓑ R$ 17.500,00.
Ⓒ R$ 18.000,00.
Ⓓ R$ 19.600,00.
Ⓔ R$ 20.000,00.

Questão 44

(Ronaebson)

Um feirante possuía 50 kg de pêra para vender em uma manhã de sábado. Começou a vender as frutas por R$ 7,50 o quilo e, com o passar das horas, reduziu o preço em duas ocasiões para não haver sobras. A tabela seguinte informa a quantidade de peras vendidas a cada período, bem como os diferentes preços cobrados pelo feirante.

Período	Preço por quilo (em reais)	Número de quilos de pêra vendidos
Até às 10h	7,50	32
Das 10h às 11h	6,00	13
Das 11h às 12h	4,20	5

Naquela manhã, o preço médio do quilo de pêra foi

Ⓐ R$ 5,90.
Ⓑ R$ 6,00.
Ⓒ R$ 6,78.
Ⓓ R$ 7,00.
Ⓔ R$ 7,20.

Anotações:

Questão 45

(Ronaebson)

200 metros rasos é uma modalidade olímpica de corrida no atletismo. A prova é provavelmente a mais antiga de todas as provas atléticas, já que a primeira corrida que se disputou nos jogos olímpicos da antiguidade, o *stadion*, media mais ou menos 600 pés gregos, cerca de 192m, uma volta inteira no estádio, o que equivale aos nossos modernos 200 metros.
Atualmente o recorde mundial de 19.19s e o recorde olímpico de 19.30s, nessa modalidade, pertence ao consagrado Usain Bolt, o qual na última olimpíada não consegui bater o próprio recorde, mas que ainda foi ouro.

Na final masculina dos 200 metros rasos dos Jogos Olímpicos Rio 2016, os atletas, em suas respectivas raias obtiveram os seguintes tempos:

POSIÇÃO	RAIA	PAÍS	ATLETA	TEMPO
1	6	JAM	BOLT Usain	19,78
2	4	CAN	DE GRASSE Andre	20.02
3	7	FRA	LEMAITRE Christophe	20.12
4	2	GBR	GEMILI Adan	20.12
5	8	NED	MARTINA Churandy	20.13
6	5	USA	MERRITT Lashawn	20.19
7	3	PAN	EDWARD Alonso	20.23
8	1	TUR	GULIYEV Ramil	20.43

A mediana dos tempos apresentados na tabela é igual a

(A) 20.020s.
(B) 20.120s.
(C) 20.125s.
(D) 20.130s.
(E) 20.160s.

Questão 46

(FGV)

Quatro amigos calcularam a média e mediana de suas alturas, tendo encontrado como resultado 1,72 m e 1,70 m, respectivamente. A média entre as alturas do mais alto e do mais baixo, em metro, é igual a

(A) 1,70.
(B) 1,71.
(C) 1,72.
(D) 1,73.
(E) 1,74.

Questão 47

(Ronaebson)

Na final feminina dos 100 metros livres de natação dos Jogos Olímpicos Rio 2016, as atletas, em suas respectivas raias obtiveram os seguintes tempos:

POSIÇÃO	RAIA	ATLETA	TEMPO
1	3	MANUEL Simone	52,70
1	5	OLEKSIAK Penny	52,70
3	6	SJOSTROM Sara	52,99
4	2	CAMPBELL Bronte	53,04
5	1	KROMOWIDJOJO Ramoni	53,08
6	4	CAMPBEL Cate	53,24
7	8	WEITZEIL Abbey	53,30
8	7	OTTESEN Jeanette	53,36

A moda e a mediana dos tempos apresentados na tabela são, respectivamente, iguais a

(A) 52,70 e 53,04.
(B) 52,70 e 53,06.
(C) 52,70 e 53,08.
(D) 53,00 e 53,06.
(E) 53,05 e 52,70.

Questão 48

(Ronaebson)

Na temporada 2016/2017, do campeonato espanhol, o Real Madrid foi o grande campeão, três pontos a frente do seu grande rival (o Barcelona), sendo esta a 33ª vez que o clube conquistou o torneio, e terminando com um jejum de 5 anos. A tabela a seguir mostra como foi o desfecho do campeonato.

POSIÇÃO	EQUIPE	PONTOS
1º	*Real Madrid*	93
2º	*Barcelona*	90
3º	*Atlético de Madrid*	78
4º	*Sevilla*	72
5º	*Villarreal*	67
6º	*Real Sociedad*	64
7º	*Athletic Bilbao*	63
8º	*Espanyol*	56
9º	*Alavés*	55
10º	*Eibar*	54
11º	*Málaga*	46
12º	*Valencia*	46
13º	*Celta de Vigo*	45
14º	*Las Palmas*	39
15º	*Betis*	39
16º	*La Coruña*	36
17º	*Leganés*	35
18º	*Sporting de Gijón*	31
19º	*Osasuna*	22
20º	*Granada*	20

A mediana dos pontos apresentados no quadro é

(A) 54.
(B) 53.
(C) 50.
(D) 46.
(E) 39.

Questão 49

(Ronaebson)

Uma prática comum das plataformas de streaming é oferecer pacotes de descontos baseados no tempo de assinatura que será escolhido pelo cliente. Desse modo, a empresa oferece o benefício do desconto caso o cliente se comprometa a manter fidelidade por determinado período de tempo.
Uma dessas plataformas tem assinatura mensal de R$ 40,00 e, além dessa modalidade, oferece aos clientes outros três planos de assinatura conforme a tabela:

Plano	Valor Mensal	Porcentagem de Assinantes
Trimestral	R$ 36,00	25%
Semestral	R$ 34,00	20%
Anual	R$ 30,00	40%

Considerando todos os assinantes dessa plataforma de streaming, o valor médio de uma parcela mensal paga por esses assinantes é

Ⓐ R$ 32,70.
Ⓑ R$ 33,33.
Ⓒ R$ 33,80.
Ⓓ R$ 34,00.
Ⓔ R$ 35,00.

Questão 50

(Ronaebson)

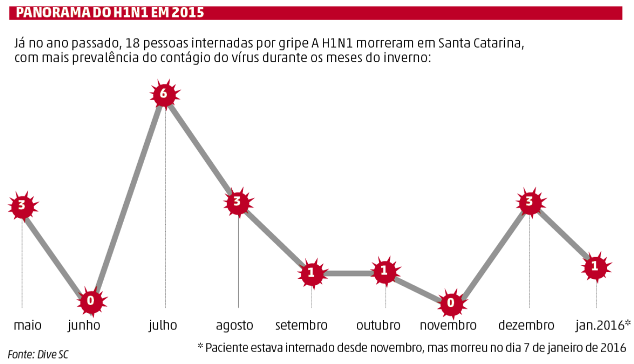
Dentre as aplicações financeiras apresentadas no infográfico, aquela que corresponde ao valor mediano das taxas de rendimento anual é o (a)

Ⓐ CDB.
Ⓑ Dolar.
Ⓒ Euro.
Ⓓ IGPM.
Ⓔ Poupança.

Questão 51

(Ronaebson)

A gripe que assustou os catarinenses principalmente em 2009, quando houve 3.198 casos e 160 mortes no Estado, voltou com força e mais cedo neste ano. Embora o vírus influenza A H1N1 circule o ano todo, é entre maio e junho que começa a ter mais prevalência. Em 2016, nos primeiros três meses, já foram pelo menos 22 casos e cinco mortes em Santa Catarina. Ontem foi confirmada mais uma em Blumenau. Especialistas ainda estudam as causas da circulação precoce do vírus, mas reforçam que medidas como vacinação, higienização e busca de ajuda médica são fundamentais.



Dentre os números de mortes causadas pela gripe A H1N1 nos meses citados no gráfico, o valor mediano é

Ⓐ 0.
Ⓑ 1.
Ⓒ 2.
Ⓓ 3.
Ⓔ 6.

Questão 52

(Ronaebson)

A pedido do seu assessor, Ana Beatriz anotou quantas horas estudou em cada um dos dias do mês de agosto e montou a seguinte tabela:

Horas de Estudo	4h	4,5h	5h	5,5h	6h	6,5h	7h
Número de dias	4	1	4	4	5	5	8

A moda do número de horas estudadas por dia é

Ⓐ 4.
Ⓑ 5.
Ⓒ 6.
Ⓓ 7.
Ⓔ 8.

Questão 53

(Ronaebson)

Com a finalidade de prestar cada vez mais um melhor serviço aos seus alunos, o Curso Matemática Criativa fez um levantamento estatístico do número de alunos presentes na sala de monitoria durante uma tarde. Também ficou decidido em reunião que se a moda do número de alunos na sala durante cada uma das horas de atendimento fosse igual ou superior a quatro, seria contratado mais um monitor para atendimento.

O monitor de plantão registrou o número de alunos que entram e o número de alunos que saem da sala no início de cada uma das 6 horas de atendimento naquela tarde.

NÚMERO DE ALUNOS	1ª HORA	2ª HORA	3ª. HORA	4ª. HORA	5ª. HORA	6ª. HORA
QUE ENTRAM NA SALA	6	2	1	1	3	2
QUE SAEM DA SALA	0	3	2	1	2	3

Com base no quadro, a moda do número de alunos presentes na sala durante cada hora de atendimento é igual a

- **A** 2, não sendo necessária a contratação de um novo monitor.
- **B** 3, não sendo necessária a contratação de um novo monitor.
- **C** 4, não sendo necessária a contratação de um novo monitor.
- **D** 4, sendo necessária a contratação de um novo monitor.
- **E** 5, não sendo necessária a contratação de um novo monitor.

Questão 54

(Ronaebson)

Um levantamento estatístico feita numa grande escola do país constatou que 60% dos funcionários eram do sexo masculino. Ainda de acordo com esse levantamento, a média salarial mensal dos funcionários do sexo masculino era R$ 2000,00 e a média salarial mensal dos funcionários do sexo feminino era de R$ 3500,00. Considerando todos os funcionários dessa escola, a média salarial mensal é de

- **A** R$ 1500,00.
- **B** R$ 2450,00.
- **C** R$ 2600,00.
- **D** R$ 2750,00.
- **E** R$ 2900,00.

Questão 55

(Ronaebson)

O Serviço de Atendimento ao Cliente (SAC) da loja VestFino recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de camisas sociais de cor rosa ou lilás e de numerações 1, 2, 3 ou 4. Os administradores da loja anotaram as numerações das camisas com algum tipo de defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com os fornecedores. A tabela a seguir contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pela administração.

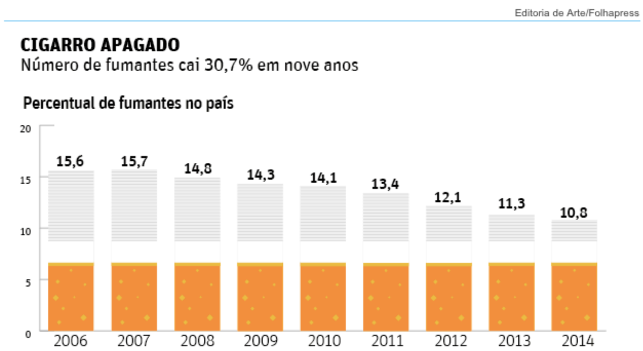
Estatística sobre as numerações das camisas com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numeração das camisas com defeito	2	2	1

Para quantificar as camisas pela cor, os administradores representaram a cor rosa pelo número 0 e a cor lilás pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,68. Os administradores da loja decidiram que a numeração das camisas com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.
A loja encaminhou um memorando ao fabricante das camisas sociais, explicando que não serão mais encomendadas as camisas de cor

- **A** rosa e as de número 1.
- **B** rosa e as de número 2.
- **C** lilás e as de número 1.
- **D** lilás e as de número 2.
- **E** lilás e as de número 3.

Questão 56

(Ronaebson)



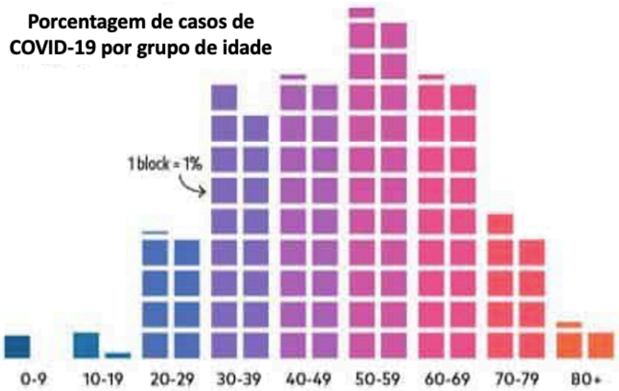
Em relação o percentual de fumantes no país no período considerado, o valor mediano é

- **A** 4,8.
- **B** 13,4.
- **C** 14,1.
- **D** 14,3.
- **E** 14,8.

Questão 57

(Ronaebson)

O Centro de Controle de Doenças da China (CCDC) divulgou o seguinte gráfico após a análise de pacientes infectados.



Com base no exposto, a faixa etária, dentre as apresentadas, que corresponde à moda dessa distribuição é

- **A** 30 – 39
- **B** 40 – 49
- **C** 50 – 59
- **D** 60 – 69
- **E** 70 – 79

Questão 58

(Ronaebson)

Terminada a apuração dos votos da eleição realizada em 05 de outubro de 2014, o TSE (Tribunal Superior Eleitoral) divulgou a seguinte lista com os nomes dos deputados federais eleitos pelo estado do Acre e suas respectivas votações.

Cargo: Deputado Federal	
Candidato:	***Número de Votos:***
Angelim (PT)	39844
César Messias (PSB)	26448
Major Rocha (PSDB)	23466
Léo do PT (PT)	20876
Jéssica Sales (PMDB)	20339
Sibá Machado (PT)	18395
Flaviano Melo (PMDB)	18372
Alan Rick (PRB)	17903

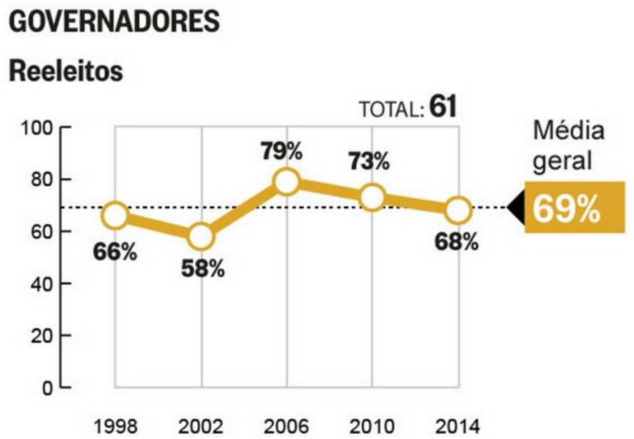
Diante do resultado final divulgado pelo TSE, tem-se que a mediana dos votos obtidos pelos deputados federais eleitos é igual a

- **A** 20876,00.
- **B** 20607,50.
- **C** 20339,00.
- **D** 23205,37.
- **E** 23466,00.

Questão 59

(Ronaebson)

A reeleição, instituída no país em 1998, é um instrumento poderoso para quem ocupa um cargo executivo e tenta um segundo mandato. Levantamento feito pelo GLOBO, com base nos registros oficiais do Tribunal Superior Eleitoral (TSE) desde aquele ano, revela que, tanto na disputa para as prefeituras quanto para os governos estaduais, a maioria dos prefeitos e governadores que tentou permanecer no cargo foi bem-sucedida.



http://oglobo.globo.com/brasil/maioria-dos-politicos-em-cargos-executivos-conseguiu-se-reeleger-no-pais-16372095#ixzz4KXqYWaPJ

Tomando como base os dados do gráfico e considerando o período de 1998 a 2014, o número de eleições em que o percentual de governadores reeleitos foi superior à media geral é

- **A** 1.
- **B** 2.
- **C** 3.
- **D** 4.
- **E** 5.

Questão 60

(Ronaebson)

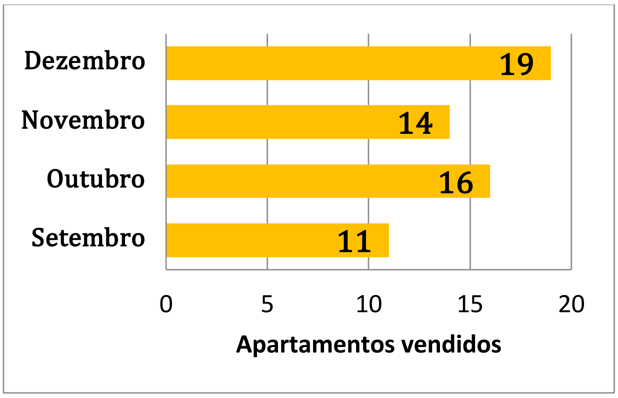
A média aritmética das massas de 30 pessoas é de 100 kg. Após seis meses de dieta e realização de atividades físicas, constatou-se que as mulheres emagreceram 20 kg cada uma e os homens, 10 kg cada um. Dessa forma, a média aritmética das massas das 30 pessoas passou a ser de 86 kg. Com base nessas informações, o número de mulheres no grupo é um número entre

- **A** 4 e 8.
- **B** 9 e 13.
- **C** 14 e 18.
- **D** 19 e 23.
- **E** 24 e 28.

Questão 61

(Ronaebson)

Após encerrar o período de vendas do ano 2014, uma imobiliária fez um levantamento das vendas de apartamentos nos últimos quatro meses. Os dados estão expressos no gráfico:



Ao fazer a apresentação dos dados aos corretores, o gerente estipulou como meta para o mês de janeiro de 2015 um volume de vendas 40% superior à média mensal de vendas do último quadrimestre de 2014.
Para atingir essa meta, a quantidade mínima de apartamentos que deveriam ser vendidos em janeiro de 2015 seria

- **A** 6.
- **B** 15.
- **C** 19.
- **D** 21.
- **E** 25.

Questão 62

Um professor, visando colocar em prática novas formas de ensino e avaliação, ouviu uma sugestão dos seus alunos: fazer a média da nota da P1 (primeira prova do bimestre) e da nota da P2 (segunda prova do bimestre) considerando a média geométrica, e não a tradicional média aritmética. Os alunos lhe disseram que, dados dois números x e y, a média geométrica entre eles é igual a $M_G = \sqrt{x \cdot y}$.

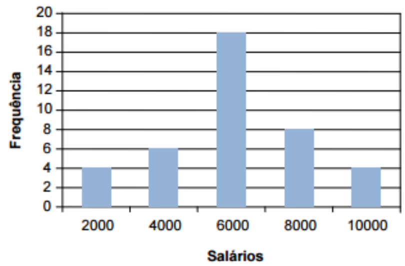
Um dos alunos da turma, que não tinha participado da sugestão, percebeu que ela não foi boa, pois eles não obteriam notas melhores com essa nova média. Isso fica ilustrado, por exemplo, caso o aluno tire nota 4,0 na P1 e 9,0 na P2.

Assim, se um aluno obtivesse nota 4,0 na P1 e nota 9,0 na P2, a média aritmética das notas superaria a média geométrica em

- **A** 0,25
- **B** 0,5
- **C** 1,0
- **D** 1,5
- **E** 2,5

Questão 63

O gráfico abaixo apresenta a distribuição de frequências dos salários (em reais) dos funcionários de certo departamento de uma empresa.



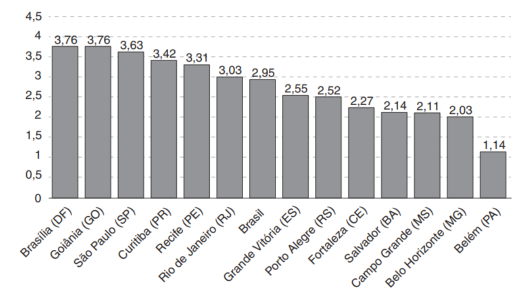
A média, a moda e a mediana desses salários são, respectivamente,

- **A** 6000, 6000 e 6000
- **B** 6000, 2000 e 6000
- **C** 6100, 6000 e 6000
- **D** 6100, 8000 e 7000
- **E** 6100, 6000 e 7000

Questão 64

[...] O gráfico mostra a variação da inflação no ano de 2017. Goiânia e Brasília registraram a mesma variação, dividindo a primeira posição entre as regiões pesquisadas. Enquanto Brasília liderou as variações de “Alimentação e bebidas”, “Transportes” e “Vestuário”, Goiânia liderou a inflação dos grupos “Habitação” e “Artigos de residência”. De outro lado, a menor inflação do país foi registrada em Belém, com 1,14%, que mostrou menor variação acumulada entre as regiões nos grupos “Alimentação e bebidas”, “Vestuário”, ”Saúde e cuidados pessoais” e “Educação”.

Gráfico – IPCA – Variação percentual (%) acumulada no ano – Brasil e regiões pesquisadas
Dezembro de 2017



"Índices de Preços ao Consumidor IPCA – INPC", dez. 2017. Disponível em: <https://www.agenciabrasilia.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/01/ipca_inpc_dezembro_2017.pdf>. Acesso em: 29 maio 2018. (Adapt.)

A mediana da variação percentual (%) do IPCA acumulada no ano nas regiões pesquisadas (incluindo o Brasil), em dezembro de 2017, é igual a

- **A** 1,55%.
- **B** 2,45%.
- **C** 2,75%.
- **D** 2,76%.
- **E** 3,76%.

Questão 65

(Ronaebson)

Brasileiro cresce em altura nos últimos cem anos, mas ainda é "baixinho"

Quando o assunto é altura, o homem da Holanda e a mulher da Letônia ficam acima de todas as outras nacionalidades. O holandês médio tem hoje 1,83 m e a mulher letã alcança 1,70 m. A pesquisa, publicada na revista científica *eLife*, mapeou tendências de crescimento em 187 países desde 1914. O homem do Irã e a mulher da Coreia do Sul registraram o maior salto na altura, crescendo uma média de 16 cm e 20 cm, respectivamente. O homem brasileiro tem, em média, 1,73 m, e a mulher, 1,60 m. Ambos registraram o mesmo crescimento desde 1914: 8,6 cm.

AMOS, Jonathan. Portal G1 News. Disponível em: https://goo.gl/PvoyBY. Acesso em: 2 set. 2017 (adaptado).

Ao ler a notícia anterior, Ana Maria, chefe do RH de certa empresa, resolveu calcular a média das alturas dos funcionários de sua seção, sendo todos brasileiros. Consultando o sistema informatizado da empresa, ela encontrou os dados expostos na tabela a seguir.

Funcionário	Sexo	Altura (m)
1	Masculino	1,70
2	Masculino	1,68
3	Masculino	1,72
4	Masculino	1,71
5	Masculino	1,72
6	Masculino	1,73
7	Feminino	1,55
8	Feminino	1,50
9	Feminino	1,70
10	Feminino	1,61

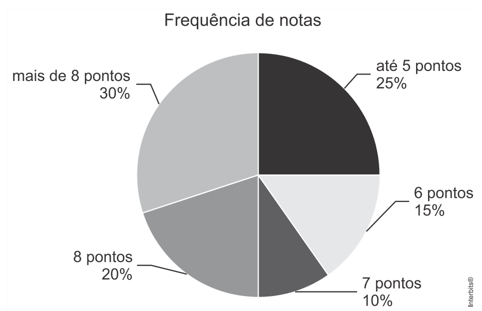
Desse modo, Ana Maria concluiu que, em relação às médias do Brasil, as alturas médias dos homens e das mulheres de sua seção eram, respectivamente,

Ⓐ 3 cm menor e igual.
Ⓑ 3 cm menor e 1 cm menor.
Ⓒ igual e 1 cm maior.
Ⓓ 2 cm menor e igual.
Ⓔ 2 cm menor e 1 cm menor.

Questão 66

(Escola_Naval_2021)

Após corrigir um teste formado por 10 questões de múltipla escolha, no qual cada questão valia 1 ponto, o professor divulgou o gráfico seguinte:



De acordo com o gráfico, a mediana da distribuição das notas obtidas nesse teste é

Ⓐ 6,5
Ⓑ 6,8
Ⓒ 7,0
Ⓓ 7,5
Ⓔ 8,0

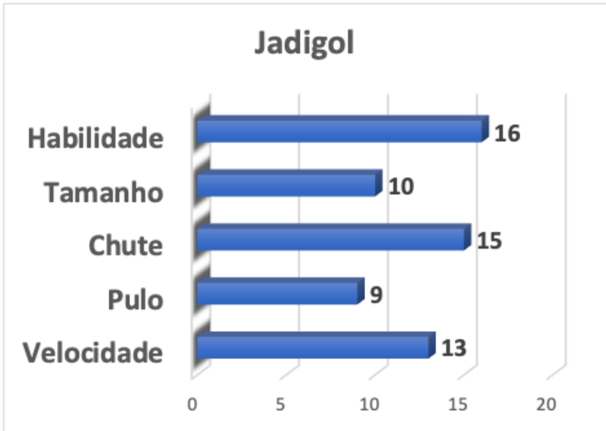
Questão 67

(Ronaebson)

Num jogo virtual de futebol, o poder de um jogador é medido em função dos critérios: velocidade, pulo, chute, tamanho e habilidade.
Esse poder será dado pela média ponderada desses critérios, obedecendo a seguinte tabela de pesos:

Critério	Peso
Velocidade	2
Pulo	1
Chute	3
Tamanho	1
Habilidade	3

Jadigol, tem seu gráfico nesse jogo virtual representado a seguir.



O poder de Jadigol é igual a

Ⓐ 13,8.
Ⓑ 13,5.
Ⓒ 13,0.
Ⓓ 12,6.
Ⓔ 12,4.

ANOTAÇÕES:

::: Medidas de Dispersão :::

Questão 68

(Ronaebson)

Em uma audição está sendo selecionada uma cantora para o papel principal de um musical. Nessa seleção, as candidatas são avaliadas em relação a técnica vocal, interpretação, performance, adequação da voz ao estilo requisitado. Em cada uma dessas categorias, as candidatas recebem notas de 0 a 100.

Será relacionada a cantora que tiver a maior média das notas. Se duas ou mais candidatas empatarem com a maior média, os jurados usarão como critério de desempate a regularidade das notas.

Usando esse critério, caso haja empate, deve ser escolhida a cantora cujas notas tiverem

A maior mediana.
B menor moda.
C maior amplitude.
D maior desvio padrão.
E menor desvio padrão.

Questão 69

(Ronaebson)

Um dos critérios para contratação de um caixa de supermercado está relacionado a quantidade de clientes que ele atende durante um dia de trabalho. Três pessoas se submeteram a um teste de admissão por um período de dois meses e como critério de escolha, o caixa que será contratado deverá ser aquele que apresentar média de atendimentos diários maior do que 30 e, dentre eles será escolhido o que apresentar maior regularidade.

Os resultados e as informações sobre o número de clientes atendidos por cada um dos caixas estão na tabela a seguir:

Caixa	Mediana	Média	Desvio Padrão
Fernanda	31	32	2,2
Thayse	33	32	3,1
Marcel	29	30	2,5

O caixa que será contratado é

A Fernanda, pois, além de ter a média acima de 30, tem a maior mediana.
B Fernanda, pois, além de ter a média acima de 30, tem menor desvio padrão.
C Thayse, pois a maior média.
D Thayse, pois, além de ter a média acima de 30, tem o maior desvio padrão.
E Marcel, pois tem a menor média.

Questão 70

(Ronaebson)

Uma padaria dispõe de três máquinas A, B e C para fatiar presunto. As máquinas foram programadas para fatiar o presunto com uma espessura de 2 mm e uma amostra de 40 fatias foi colhida de cada uma dessas máquinas para verificar se os possíveis erros de medida eram aceitáveis. O gerente da padaria determinou que a máquina que apresentar maior irregularidade, isto é, maior dispersão das medidas das espessuras de cada fatia em relação à espessura média, será enviada para manutenção.

A tabela a seguir contém a média, a moda, a mediana e o desvio padrão dos comprimentos anotados pelo gerente.

Estatística das espessuras das fatias

	Média	Moda	Mediana	Desvio Padrão
Máquina A	2,00 mm	2,000 mm	1,999 m	0,045
Máquina B	2,00 mm	1,990 mm	2,001 m	0,056
Máquina C	2,00 mm	2,010 mm	2,000 m	0,023

Assim, a máquina que será enviada para a manutenção será a máquina

A A, pois apresenta menor mediana.
B B, pois apresenta maior mediana.
C B, pois apresenta maior desvio padrão.
D C, pois apresenta maior moda.
E C, pois apresenta maior desvio padrão.

Questão 71

(Ronaebson)

Um dos critérios para contratação de um confeiteiro para uma boleria está relacionado a quantidade de bolos confeitados durante uma semana. Três confeiteiros se submeteram a um teste de admissão por um período de 3 meses e como critério de escolha, o confeiteiro que será contratado deverá ser aquele que apresentar média de bolos confeitados por semana maior do que 90 e, dentre eles será escolhido o que apresentar maior regularidade.

Os resultados e as informações sobre o número de bolos confeitados por cada um dos empregados estão na tabela a seguir:

Confeiteiro	Mediana	Média	Desvio Padrão
Clara	98	100	5,0
Letícia	88	110	6,6
João	91	88	8,8

O confeiteiro que será contratado é

A Clara, pois, além de ter a média acima de 90, tem a maior mediana.
B Clara, pois, além de ter a média acima de 90, tem menor coeficiente de variação.
C Letícia, pois a maior média.
D Letícia, pois, além de ter a média acima de 90, tem o maior desvio padrão.
E João, pois tem a menor média.

Questão 72

(UPE_SSA_2022)

O quadro a seguir apresenta o número de casos diários verificados de Covid-19 em cinco cidades A, B, C, D e E, de 19/04/2021 a 22/04/2021, assim como a média e o desvio padrão para cada uma dessas cidades.

Cidade	Número de casos 19/04/202	Número de casos 20/04/202	Número de casos 21/04/202	Número de casos 22/04/202	Média	Desvio padrão
A	135	148	176	141	150	15,70
B	138	144	121	197	150	28,42
C	170	149	183	98	150	32,38
D	175	146	161	118	150	21,13
E	173	139	144	144	150	13,44

Fonte: dados fictícios.

Como a média de casos foi a mesma para todas as cidades e nenhuma delas manteve um rigoroso decrescimento do número de casos nesse período, um veículo de comunicação deseja reportar qual dentre essas cinco cidades apresentou a distribuição mais regular do número de casos no período considerado.

Qual cidade deve ser reportada por esse veículo de comunicação?

Ⓐ A
Ⓑ B
Ⓒ C
Ⓓ D
Ⓔ E

Questão 73

(Ronaebson)

Em uma empresa, cinco pessoas disputam uma vaga para digitador, de modo que eles se submetem a uma avaliação feita durante quatro dias consecutivos. A empresa estará interessada em contratar o candidato mais regular nesses quatro dias. Os resultados e as informações sobre o número de palavras digitadas por cada um dos candidatos estão na tabela abaixo.

Candidato	1º Dia	2º Dia	3º Dia	4º Dia	Média	Mediana	Desvio Padrão
Ana	2900	3400	3100	3100	3125	3100	178,54
Bento	3300	2800	3600	3200	3225	3250	286,14
Carlos	3600	3300	3300	3400	3400	3350	122,47
Davi	2300	3300	3400	3000	3000	3150	430,12
Elaine	3700	3500	2200	3100	3125	3300	576,09

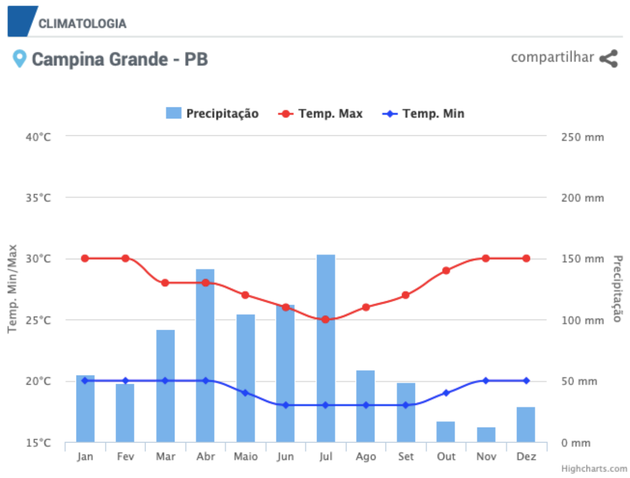
A vaga foi conquista por

Ⓐ Ana
Ⓑ Bento
Ⓒ Carlos
Ⓓ Davi
Ⓔ Elaine

Questão 74

(Ronaebson)

Os dados apresentados representam o comportamento da chuva e da temperatura ao longo do ano. As médias climatológicas são valores calculados a partir de uma série de dados de 30 anos observados. É possível identificar as épocas mais chuvosas/secas e quentes/frias de uma região.



Mês	Mínima (°C)	Máxima (°C)	Precipitação (mm)
Janeiro	20°	30°	55
Fevereiro	20°	30°	48
Março	20°	28°	92
Abril	20°	28°	142
Maio	19°	27°	105
Junho	18°	26°	113
Julho	18°	25°	154
Agosto	18°	26°	59
Setembro	18°	27°	49
Outubro	19°	29°	17
Novembro	20°	30°	13
Dezembro	20°	30°	29

Disponível em https://www.climatempo.com.br/climatologia/255/campinagrande-pb
Acesso em 19/05/2019

Do exposto, infere-se que o mês do ano que apresenta a menor amplitude térmica na cidade de Campina Grande é o mês de

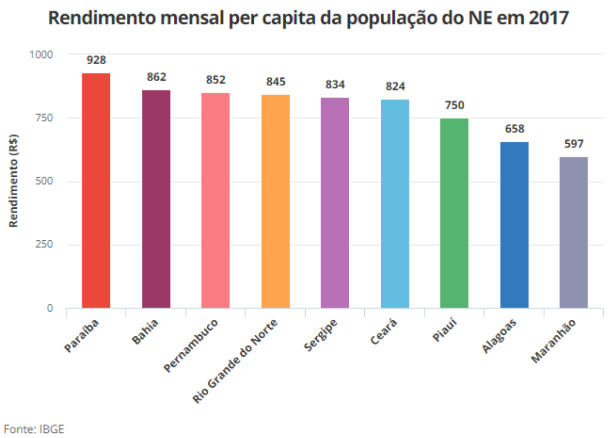
Ⓐ Julho, sendo ele também o que apresenta maior precipitação.
Ⓑ Novembro, sendo ele também o que apresenta menor precipitação.
Ⓒ Abril, pois a temperatura máxima é menor que a precipitação.
Ⓓ Fevereiro, uma vez que a temperatura mínima é maior que a precipitação.
Ⓔ Dezembro, pois houve um aumento na precipitação em relação ao mês anterior.

Questão 75

(Ronaebson)

A população residente na Paraíba teve o maior rendimento mensal per capita entre os estados do Nordeste em 2017, conforme aponta o levantamento do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) divulgado nesta quarta-feira (28), calculado com base na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua) e enviados ao Tribunal de Contas da União (TCU).

Disponível em https://g1.globo.com/pb/paraiba/noticia/populacao-da-pb-tem-maior-rendimento-mensal-per-capita-do-ne-diz-ibge.ghtml
Acesso em 19/08/2018.



Tomando como referência os valores correspondentes ao rendimento mensal per capita da população de cada um dos estados do Nordeste em 2017, a amplitude dessa distribuição é igual a

Ⓐ R$ 104,00.
Ⓑ R$ 133,55.
Ⓒ R$ 165,50.
Ⓓ R$ 197,44.
Ⓔ R$ 331,00.

Questão 76

(Ronaebson)

Muitos proprietários de postos de combustíveis e de distribuidoras fazem adulterações na gasolina, misturando-a com outros solventes mais baratos, com a finalidade de lucrar em cima do prejuízo dos donos dos veículos. Um dos solventes mais utilizados é o etanol, atualmente, segundo Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), o percentual obrigatório de álcool anidro na gasolina é de 27%. Um teste simples que o próprio consumidor pode fazer para verificar se está sendo enganado é o *teste da proveta*, ele permite detectar o percentual de álcool na mistura.

Suspeitando da qualidade da gasolina dos cincos postos de sua cidade, Antônio decidiu fazer uma série de cinco testes de proveta com a gasolina desses postos em semanas diferentes. Depois da análise, obteve os seguintes dados acerca do percentual de álcool na mistura:

	Média	Mediana	Desvio Padrão
Posto A	29%	30%	1,79%
Posto B	29%	29%	2,00%
Posto C	29%	29%	2,28%
Posto D	29%	29%	0,63%
Posto E	29%	28%	2,75%

Considerando os dados expostos, o posto que apresentou maior *regularidade* com relação ao percentual de álcool na mistura foi o posto

Ⓐ A.
Ⓑ B.
Ⓒ C.
Ⓓ D.
Ⓔ E.

Questão 77

(Ronaebson)

Quando estudamos estatística aprendemos que o desvio médio (d_m) de uma distribuição de frequência é a média aritmética dos desvios individuais absolutos e o desvio padrão (σ) é a média quadrática desses desvios individuais, ou seja, o desvio padrão é igual a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos desvios. Além disso, sendo A a amplitude da distribuição, vale a seguinte desigualdade:

$$\boldsymbol{d_m \leq \sigma \leq A.}$$

Sabe que a distribuição de frequências dos salários das pessoas que trabalham numa dada empresa satisfaz as seguintes condições:

- Maior salário: $ 1500
- Menor salário: $ 500
- Média salarial: $ 900
- Desvio Médio: $ 240

Cinco cartões, cada um com um valor, foram colocados sobre a mesa, a saber:

I. 200 **II. 230** **III. 300**

IV. 1040 **V. 1100**

O único cartão que *pode* representar o desvio padrão é o

Ⓐ I.
Ⓑ II.
Ⓒ III.
Ⓓ IV.
Ⓔ V.

Questão 78

(Ronaebson)

Um dos critérios para permanência de um designer de uma empresa de mídias digitais está relacionado a quantidade de artes feitas durante uma semana. Essa empresa precisará demitir um de seus três designers e como critério de escolha, o designer que será demitido será aquele que apresentar maior irregularidade.

Os resultados e as informações sobre o número de artes feitas por cada um dos empregados estão na tabela a seguir:

Candidato	Mediana	Média	Desvio Padrão
Geromy	40	40	4,0
Pietra	41	45	3,6
Cleiton	39	36	4,5

O designer que será demitido é

Ⓐ Geromy, pois a mediana é igual a média.
Ⓑ Pietra, pois tem o menor desvio padrão.
Ⓒ Pietra, pois a média é a maior que a mediana.
Ⓓ Cleiton, pois a média é menor que a mediana.
Ⓔ Cleiton, pois tem o maior coeficiente de variação.

Questão 79

(Ronaebson)

As notas dos alunos de duas turmas de um curso de francês foram computadas na tabela a seguir:

Turma A	
Aluno	**Nota**
Joseilton	6
Hernandes	7
Renata	3
Paula	4
Kaliana	5

Turma B	
Aluno	**Nota**
Pedro	6
Bruna	6
Wesley	5
João	2
Arthur	6

Existe uma leve diferença no grau de homogeneidade dessas duas turmas e esta diferença pode ser constatada a partir da comparação das(os)

Ⓐ médias.
Ⓑ medianas.
Ⓒ amplitudes.
Ⓓ desvios médios.
Ⓔ variâncias.

Questão 80

(Ronaebson)

Ivo, Pedro e Laura foram os três finalistas na disputa para melhor aluno da escola. Para a classificação para essa fase final, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação das etapas igual ou superior a 85. O melhor aluno será aquele que obtiver a maior média anual, mas em caso de empate na média, o desempate seria em favor do aluno com pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos em cada uma das três etapas do ano, a média, a mediana e o desvio padrão dos três finalistas.

	ETAPA I	ETAPA II	ETAPA III	Média	Mediana	Desvio Padrão
Ivo	94	95	96	*95*	*95*	*0,82*
Pedro	88	99	98	*95*	*98*	*4,97*
Laura	89	100	96	*95*	*96*	*4,55*

O aluno com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

Ⓐ Pedro, pois tem a maior mediana.
Ⓑ Pedro, pois tem o maior desvio padrão.
Ⓒ Laura, pois obteve nota 100 em uma das etapas.
Ⓓ Ivo, pois a média e a mediana são iguais.
Ⓔ Ivo, pois obteve menor desvio padrão.

Questão 81

(Ronaebson)

Os administradores de uma empresa fizeram um levantamento estatístico da folha de pagamento dos funcionários e obtiveram para o mês de setembro de 2019 os dados dispostos na tabela a seguir.

Estatística sobre os salários dos funcionários			
Média	**Mediana**	**Moda**	**Desvio Padrão**
R$ 2200,00	R$ 2000,00	R$ 2000,00	R$ 400,00

Um acordo coletivo prevê, para outubro de 2019, um aumento de 20% no salário acrescido de uma parte fixa de R$ 100,00. Desta forma, em outubro de 2019, os funcionários desta empresa terão uma distribuição salarial com

Ⓐ média igual a R$ 2640,00.
Ⓑ média igual a R$ 2300,00.
Ⓒ mediana igual a R$ 2100,00
Ⓓ moda igual a R$ 2200,00.
Ⓔ desvio padrão igual a R$ 480,00.

Questão 82

O quadro a seguir apresenta o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de certa escola de São José dos Campos.

Ano	IDEB
2007	5,1
2009	5,1
2011	5,1
2013	5,4
2015	5,1

De acordo com os dados apresentados, a média do IDEB e o desvio-padrão populacional são, respectivamente,

Ⓐ 6,45 e 0,300.
Ⓑ 5,40 e 0,010.
Ⓒ 5,40 e 0,012.
Ⓓ 5,16 e 0,010.
Ⓔ 5,16 e 0,120.

Questão 83

(Ronaebson)

As pesquisas utilizadas para trabalhar com opinião política trabalham com amostragem, cuja seleção é feita através de um protocolo científico baseado na teoria da probabilidade. A partir de um número pequeno, a pesquisa consegue expandir o resultado e ter uma estimativa do território. O tamanho da amostra apresentará diferente nível de confiança e margem de erro.

Disponível em https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/politica/2018/10/08/interna_politica,711021/por-que-as-pesquisas-eleitorais-erraram-tanto-entenda-a-diferenca.shtml Acesso em 22/05/2019

Em uma pesquisa eleitoral, é calculada a margem de erro das porcentagens de cada candidato. Por exemplo, se um candidato tem 31% das intenções de votos com margem de erro de 2 pontos percentuais para mais ou para menos, então ele deve receber entre 29% e 33% dos votos. Uma maneira para estimar o cálculo da margem de erro E para cada candidato é dada pela fórmula

$$E = Z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{N}},$$

onde:

- *N* é a quantidade de pessoas entrevistadas;
- *p* é porcentagem de entrevistados que são favoráveis ao candidato;
- *Z* é uma constante tabelada.

Uma pesquisa realizada na cidade de *Jhon Ressoa* entrevistou 2500 pessoas e o candidato Chicago Soltinho foi a opção de 64% desse total. Assumindo que o valor adotado pelos institutos de pesquisas para Z é 1,96, o qual assegura que, com 95% de certeza, a intenção de votos está dentro da margem de erro, o valor de *E* é igual a

Ⓐ 1,8816%
Ⓑ 1,9600%
Ⓒ 2,3520%
Ⓓ 2,5612%
Ⓔ 3,0018%

Questão 84

(Ronaebson)

Uma fábrica de parafusos possui três máquinas A, B e C projetadas para confeccionar parafusos de 30 mm de comprimento. Uma amostra de 20 parafusos de cada máquina foi analisada para verificar se os inevitáveis erros de medida, produzidos no processo de fabricação eram aceitáveis. O engenheiro de produção também determinou que a máquina que apresentar maior irregularidade, isto é, maior dispersão de medidas em relação ao comprimento médio, será enviada para a manutenção. A tabela a seguir contém a média, a moda, a mediana e o desvio padrão dos comprimentos anotados pelo engenheiro.

Estatística dos Comprimentos dos Parafusos				
	Média	Moda	Mediana	Desvio Padrão
Máquina A	30	30,10	30,05	0,051
Máquina B	30	30,04	29,90	0,062
Máquina C	30	29,95	30,04	0,038

Assim, a máquina que será enviada para a manutenção será a máquina

Ⓐ A, pois apresenta a maior média.
Ⓑ A, pois apresenta a menor média.
Ⓒ B, pois apresenta a menor mediana.
Ⓓ B, pois apresenta o maior desvio padrão.
Ⓔ C, pois apresenta o menor desvio padrão.

Questão 85

(Escola_Naval_2021)

Um corredor pretende tornar mais regular o tempo gasto para percorrer uma determinada distância. Ele anotou os tempos, em minutos, de cada vez que ele percorreu essa distância (tabela abaixo).

Tempo (min)	3	5	8	3	9	6	5	5

Percebendo a média x dos tempos observados, o corredor pretende realizar o percurso mais n vezes com o tempo exatamente igual à média, cada vez, para que o desvio padrão, de todos os tempos observados, diminua 1 unidade.

Dessa forma n deve ser igual a:

Ⓐ 16.
Ⓑ 20.
Ⓒ 24.
Ⓓ 28.
Ⓔ 32.

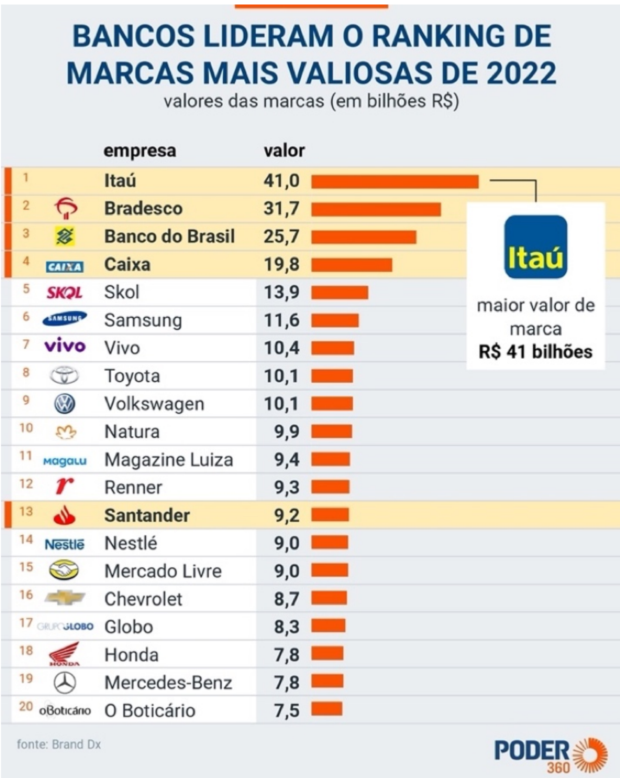
::: Miscelânia :::

Questão 86

(Ronaebson)

O ranking Brand Dx das marcas mais valiosas em 2022 mostra que os bancos ocupam o topo da lista. Itaú, Bradesco e Banco do Brasil são os 3 primeiros colocados. A soma das 100 maiores marcas atingiu R$ 457 bilhões, crescimento de 22% em relação ao ano anterior. O banco Itaú é o 1º da lista e tem um valor de mercado de R$ 41 bilhões. O banco Bradesco tem valor de R$ 31,7 bilhões. É seguido pelo Banco do Brasil, com R$ 25,7 bilhões de valor de mercado.

Disponível em https://www.poder360.com.br/economia/bancos-sao-as-marcas-mais-valiosas-do-brasil-em-2022/)



Considerando apenas os valores das 20 empresas listadas, o valor mediano é igual a

- Ⓐ R$ 9.400.000.000,00.
- Ⓑ R$ 9.650.000.000,00.
- Ⓒ R$ 9.900.000.000,00.
- Ⓓ R$ 16.750.000.000,00.
- Ⓔ R$ 19.300.000.000,00.

Questão 87

(Ronaebson)

Um estudante de concurso utilizava uma cabine de estudos numa biblioteca pública, entretanto, percebeu que não estava rendendo como gostaria, sobretudo, em virtude de barulhos que aconteciam em alguns dias. Ele decidiu então mapear o número de momentos de barulhos em cada um dos 25 dias subsequentes e obteve a tabela a seguir.

Número de momentos com barulho num dia	Número de dias
1	3
2	4
3	4
4	4
5	10
Total	**25**

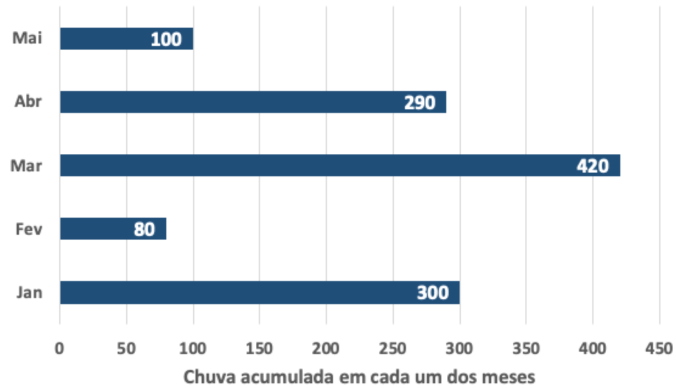
A moda do número de momentos de barulho num dia é

- Ⓐ 1.
- Ⓑ 2.
- Ⓒ 3.
- Ⓓ 4.
- Ⓔ 5.

Questão 88

(Ronaebson)

O município de Cajazeira-PB registrou nos cinco primeiros meses do ano de 2022 um total de 1190 mm de chuvas. O gráfico a seguir indica o total, em mm, de chuva em cada um dos cinco primeiros meses de 2022 e nesse período constatou-se que o desvio padrão foi aproximadamente igual a 129,36.



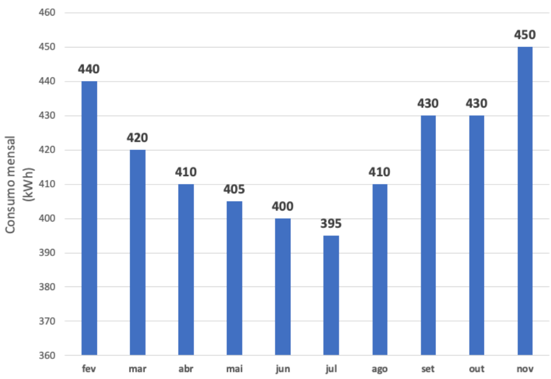
Um tempo depois, os técnicos perceberam que os pluviômetros estavam marcando errado, de modo que cada um dos valores correspondentes ao total de chuva em cada um desses cinco meses deveria ter 20 mm a mais. Nessas condições a variância correspondente aos cinco novos valores após as devidas correções será numericamente igual a

- Ⓐ 12936.
- Ⓑ 16736.
- Ⓒ 22311.
- Ⓓ 25000.
- Ⓔ 56644.

Questão 89

(Ronaebson)

O gráfico a seguir apresenta o consumo mensal de energia, em kWh, de certo apartamento ao longo dos meses de fevereiro a novembro de 2022.



Sabe-se que, nesse ano, o consumo médio mensal no período de janeiro a abril foi igual ao consumo médio mensal no período de agosto a dezembro e que o consumo no mês de dezembro foi 50 kWh superior ao do mês de janeiro.

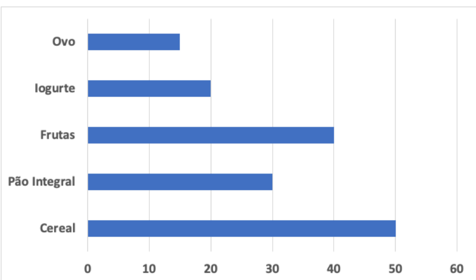
O consumo médio mensal em kWh no ano de 2022 foi igual a

- Ⓐ 419,0 kWh.
- Ⓑ 422,3 kWh.
- Ⓒ 447,5 kWh.
- Ⓓ 475,0 kWh.
- Ⓔ 570,0 kWh.

Questão 90

(Ronaebson)

Em uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de grandes empresários brasileiros, um grupo de pesquisadores questionou os participantes sobre suas escolhas de alimentos para o café da manhã. As opções de escolha eram cereal, pão integral, frutas, iogurte e ovo. Os resultados obtidos foram os seguintes:



Qual é a opção mais comum de alimento para o café da manhã entre os empresários pesquisados?

- Ⓐ Ovo
- Ⓑ Iogurte
- Ⓒ Frutas
- Ⓓ Pão Integral
- Ⓔ Cereal

Questão 91

(Ronaebson)

A verba para o combate ao trabalho escravo no Brasil teve uma redução expressiva no ano passado. Foi gasto R$ 1,3 milhão – uma diminuição na ordem de 41%. Trata-se do menor valor dos últimos 10 anos – isso mesmo sem descontar a inflação do período para os anos anteriores. É o que mostram dados do Ministério da Economia obtidos com exclusividade pelo G1.

Os dados obtidos via Lei de Acesso à Informação mostram como o dinheiro destinado a esse fim tem sofrido reduções ao longo do tempo. Em 2018, foram gastos R$ 2,6 milhões e em 2019, R$ 2,3 milhões. Em 2020, o valor foi a metade do despendido dois anos antes.

O valor compreende gastos com combustível, diárias, material para patrulhamento e passagens aéreas, por exemplo.

Disponível em https://g1.globo.com/economia/noticia/2021/02/21/em-ano-de-pandemia-verba-para-combate-ao-trabalho-escravo-encolhe-mais-de-40percent-e-e-a-menor-dos-ultimos-10-anos.ghtml

O valor total, em reais, destinado ao combate ao trabalho escravo na referida década, ou seja, de 2011 a 2020 foi

- Ⓐ 22,0 milhões.
- Ⓑ 20,9 milhões.
- Ⓒ 21,6 milhões.
- Ⓓ 23,6 milhões.
- Ⓔ 24,6 milhões.

Questão 92

(Ronaebson)

Uma empresa de tecnologia está realizando uma pesquisa de satisfação com seus clientes em relação ao desempenho de suas equipes de Suporte Técnico e de Desenvolvimento. Para avaliar a satisfação, foi utilizada uma escala de 1 a 10, onde 1 representa total insatisfação e 10 representa total satisfação. Foram coletadas as seguintes avaliações de um determinado produto:

Equipe de Suporte Técnico				
Cliente A	Cliente B	Cliente C	Cliente D	Cliente E
8	7	9	6	10
Média 8	Mediana 8	Amodal	Desvio Padrão 1,58	Amplitude 4

Equipe de Desenvolvimento				
Cliente A	Cliente B	Cliente C	Cliente D	Cliente E
6	9	10	5	10
Média 8	Mediana 9	Moda 10	Desvio Padrão 2,09	Amplitude 5

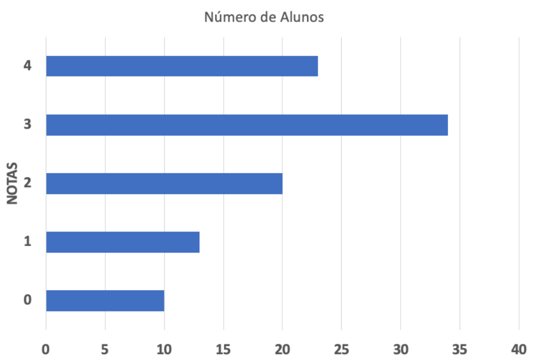
Com base nos dados, infere-se que, dentre as duas equipes, a mais regular é a de

Ⓐ Suporte Técnico, pois sua distribuição de notas foi amodal.
Ⓑ Suporte Técnico, pois possui menor desvio padrão.
Ⓒ Suporte Técnico, pois menor mediana.
Ⓓ Desenvolvimento, pois tem maior amplitude.
Ⓔ Desenvolvimento, pois tem maior desvio padrão.

Questão 93

(Ronaebson)

Um teste de quatro questões, cada uma valendo um ponto, foi aplicado num grupo de 100 alunos e as notas obtidas ficaram distribuídas de acordo com o gráfico a seguir.



A mediana das notas obtidas é igual a

Ⓐ 0.
Ⓑ 1.
Ⓒ 2.
Ⓓ 3.
Ⓔ 4.

Questão 94

(Ronaebson)

Uma consultoria empresarial teve sua distribuição de vendas ao longo dos meses de 2022 dada na tabela a seguir.

Mês	Número de consultorias vendidas
Janeiro	20
Fevereiro	20
Março	30
Abril	35
Maio	40
Junho	40
Julho	45
Agosto	50
Setembro	20
Outubro	32
Novembro	20
Dezembro	20

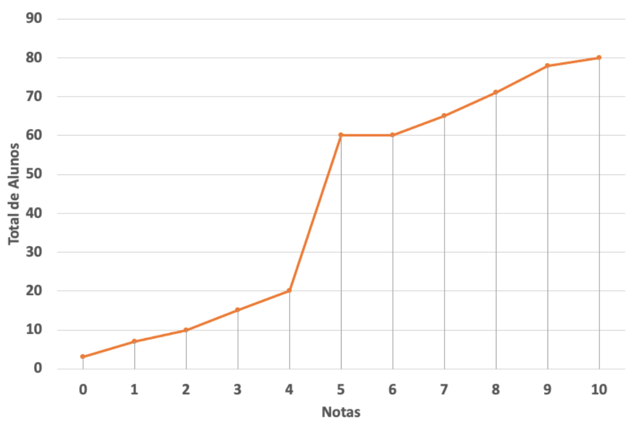
Com relação ao número de consultorias vendidas por mês, a moda para o ano de 2022 é

Ⓐ 20.
Ⓑ 30.
Ⓒ 45.
Ⓓ 40.
Ⓔ 45.

Questão 95

(Ronaebson)

O coordenador pedagógico de uma escola construiu um gráfico de frequências acumuladas para mostrar a performance de um grupo de 80 alunos do terceiro da escola na última avaliação aplicada. As notas são apenas números inteiros de 0 a 10.



Com base no gráfico, o número de alunos que tiraram nota 6 é igual a

Ⓐ 60.
Ⓑ 40.
Ⓒ 10.
Ⓓ 6.
Ⓔ 0.

Questão 96

(Ronaebson)

Num grupo de oito jogadores de futebol foram anotados o número de gols que cada um deles fez na primeira fase do campeonato. Sabe-se que a moda do número de gols anotados foi 7. Retirando-se desse grupo os jogadores que fizeram 7 gols, a moda do número de gols marcados pelos jogadores restantes passou a ser 9 e três desses jogadores marcaram 8, 11 e 14 gols, respectivamente.

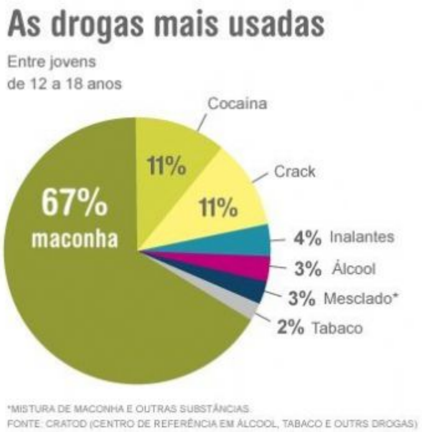
A média aritmética do número de gols marcados pelo grupo original de jogadores é igual a

- A 7.
- B 8.
- C 9.
- D 10.
- E 12.

Questão 97

(Ronaebson)

Uma pesquisa realizada com jovens entre 12 e 18 anos aponta que 67% dos adolescentes têm a maconha como droga mais consumida.
O crack e a cocaína aparecem em seguida, com 11%. Inalantes como lança-perfume ficaram em terceiro com 4%. O álcool e o mesclado – mistura de maconha com outras substâncias – foram citadas por 3% dos ouvidos e apenas 2% consideraram o tabaco como droga usada mais frequentemente.



Disponível em https://noticias.band.uol.com.br/noticias/207871/maconha-e-a-droga-mais-usada-por-jovem.html

Dentre as drogas citadas na pesquisa, aquela que representa a MODA entre os jovens de 12 a 18 anos é a (o)

- A Álcool.
- B Crack.
- C Cocaína.
- D Maconha.
- E Tabaco.

Questão 98

(Ronaebson)

Ariel, Lirany e Valente foram os três finalistas na disputa para melhor aluno da escola. Para a classificação para essa fase final, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação das etapas igual ou superior a 85. O melhor aluno será aquele que obtiver a maior média anual, mas em caso de empate na média, o desempate seria em favor do aluno com pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos em cada uma das três etapas do ano, a média, a mediana e o desvio padrão dos três finalistas.

	ETAPA I	ETAPA II	ETAPA III	Média	Mediana	Desvio Padrão
Ariel	94	95	96	*95*	*95*	*0,82*
Lirany	88	99	98	*95*	*98*	*4,97*
Valente	89	100	96	*95*	*96*	*4,55*

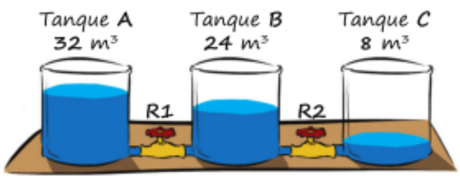
O aluno com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

- A Lirany, pois tem a maior mediana.
- B Lirany, pois tem o maior desvio padrão.
- C Valente, pois obteve 100 em uma das etapas.
- D Ariel, pois a média e a mediana são iguais.
- E Ariel, pois obteve menor desvio padrão.

Questão 99

(OBMEP)

Três tanques iguais contêm, inicialmente, 32, 24 e 8 metros cúbicos de água e estão ligados por registros, como na figura.



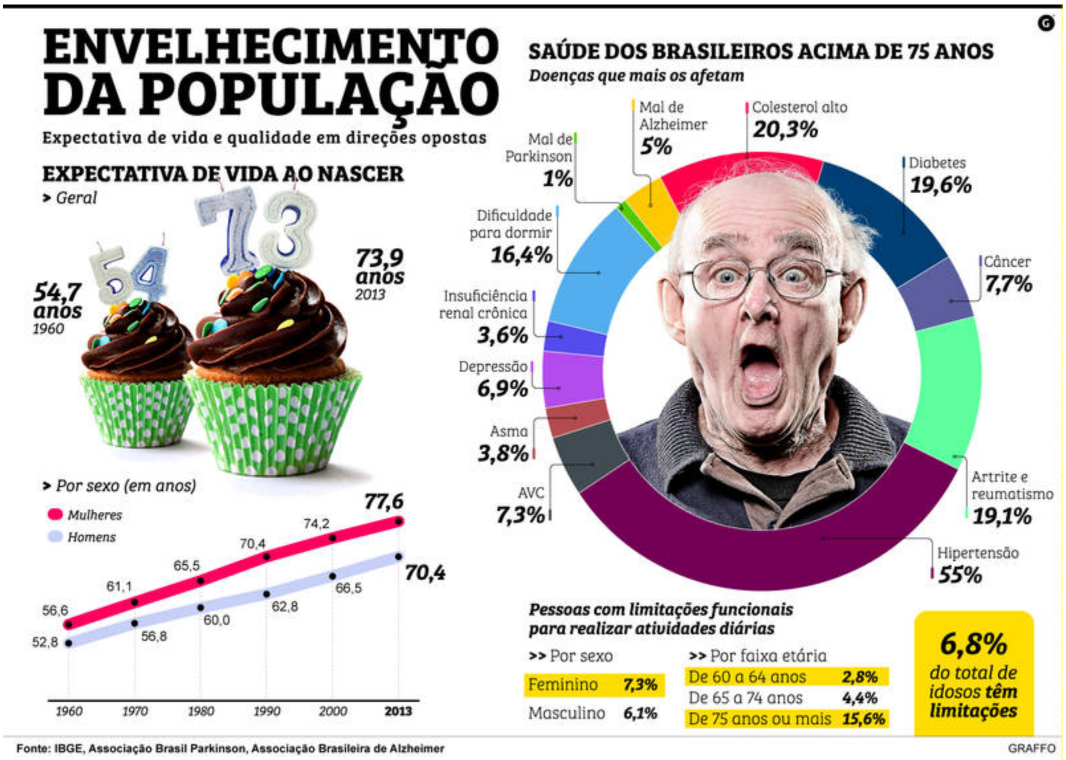
Estes registros servem para deixar a água passar de um tanque (mais cheio) para o outro (menos cheio) até que ambos fiquem com o mesmo volume de água. Só se pode abrir um registro de cada vez, e ele é fechado assim que os tanques que ele liga fiquem com o mesmo volume de água.

A partir da situação inicial, descrita na figura, o registro R2 é aberto até que os tanques B e C sejam equalizados, depois ele é fechado novamente para, então, o registro R1 ser aberto até que os tanques A e B atinjam o mesmo volume que é de

- A 16 m^3.
- B 20 m^3.
- C 21 m^3.
- D 24 m^3.
- E 28 m^3.

Questão 100

(Ronaebson)



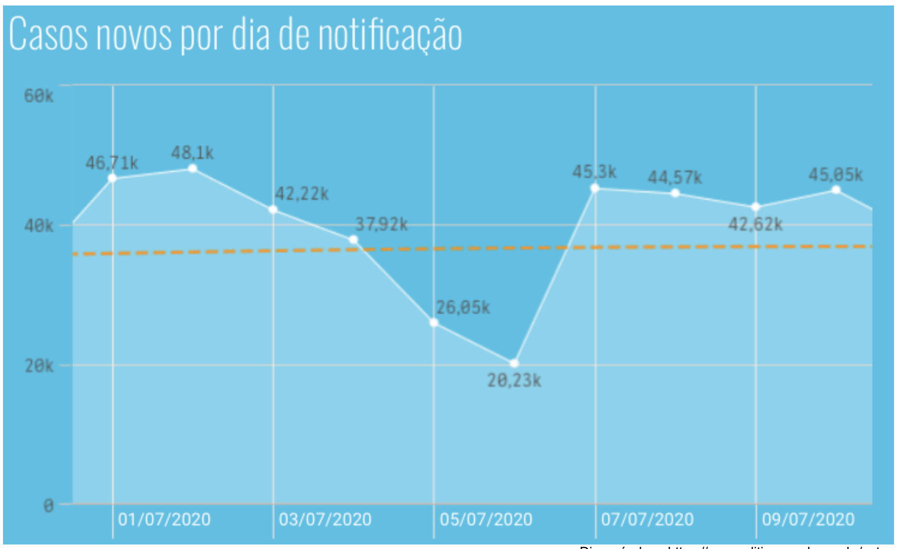
A partir do infográfico acima e considerando as doenças que mais afetam os idosos acima de 75 anos, aquela que representa a moda da distribuição é

Ⓐ Mal de Parkinson.
Ⓑ AVC.
Ⓒ Câncer.
Ⓓ Artrite e reumatismo.
Ⓔ Hipertensão.

Questão 101

(Ronaebson)

O número de casos novos por dia de notificação durante os primeiros 10 dias do mês de julho são dados no gráfico a seguir.



Disponível em https://susanalitico.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html Acesso em 19/07/2020.

A mediana desses números de novos casos no período considerado é igual a

Ⓐ 42,420k. Ⓑ 42,620k. Ⓒ 43,595k. Ⓓ 44,570k. Ⓔ 44,795k.

Questão 102

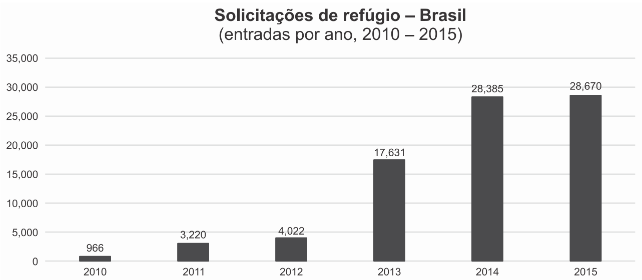
(Ronaebson)

Polícia Federal impede solicitantes de refúgio de retornar ao país

Estrangeiros de diversas nacionalidades e que portavam protocolo de solicitação de refúgio no Brasil foram impedidos de entrar no país pela Polícia Federal do Aeroporto de Cumbica, em Guarulhos, região metropolitana de São Paulo.

Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2016-09/policia-federal-impede-solicitantes-de-refugio-de-retornar-ao-pais>

O Departamento de Polícia Federal passou a controlar de perto as solicitações de refúgio no Brasil por causa o crescimento vertiginoso nos últimos anos, mostrado no gráfico a seguir:



Fonte: Departamento de Polícia Federal (até 20/03/2016). Adaptado de BRASIL. Ministério da Justiça. Comitê Nacional para os Refugiados (CONARE). *Sistema de refúgio brasileiro – desafios e perspectivas*. Disponível em: <http://www.acnur.org/t3/fileadmin/scripts/doc.php?file=t3/fileadmin/Documentos/portugues/Estatisticas/Sistema_de_Refugio_brasileiro_-_Refugio_em_numeros_-_05_05_2016>. Acesso em: 18 mai. 2016.

A média anual de solicitações de refúgio no Brasil de 2010 a 2015 é de aproximadamente

Ⓐ 966.
Ⓑ 13.816.
Ⓒ 16.579.
Ⓓ 17.631.
Ⓔ 28.670.

Anotações:

Gabarito _ Estatística			
Hora de Praticar			
Questão	**Resposta**	**Questão**	**Resposta**
01	B	51	D
02	A	52	D
03	E	53	C
04	C	54	C
05	C	55	C
06	A	56	C
07	E	57	B
08	B	58	B
09	A	59	B
10	A	60	D
11	E	62	B
12	B	63	C
13	D	64	C
14	A	65	E
15	C	66	D
16	A	67	A
17	D	68	E
18	B	69	B
19	B	70	C
20	C	71	B
21	C	72	E
22	B	73	C
23	E	74	A
24	C	75	E
25	A	76	D
26	C	77	C
27	D	78	E
28	D	79	E
29	E	80	E
30	C	81	E
31	A	82	E
32	C	83	A
33	A	84	D
34	E	85	E
35	B	86	B
36	C	87	E
37	A	88	B
38	B	89	D
39	D	90	E
40	C	91	D
41	C	92	B
42	D	93	D
43	B	94	A
44	C	95	E
45	C	96	C
46	E	97	D
47	B	98	E
48	C	99	D
49	C	100	E
50	D	101	C
51	B	102	B

MATRIZES

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

MATRIZES

UM POUCO DE HISTÓRIA

O início das matrizes e determinantes remontam ao século II a.C.. Embora alguns vestígios desse assunto tenham sido encontrados no século VI a.C., foi somente no final do século XVII que as ideias reapareceram e vem se desenvolvendo até os dias atuais.

Não é de estranhar que o início de matrizes e determinantes está intimamente relacionado com o estudo dos sistemas lineares. Os babilônios estudaram problemas que levam a resolução de um sistema linear de duas variáveis e duas equações, sendo que alguns destes problemas foram preservados em tabletas de argilas.

Os chineses, entre 200 a.C e 100 a.C chegou muito mais perto de matrizes que os babilônios. Na verdade, é justo dizer que o texto Nove Capítulos da Arte Matemática escrito durante a dinastia Han dá o primeiro exemplo conhecido de métodos de matriz. Vejamos um problema contido neste texto:

Existem três tipos de milho, dos quais três feixes são do primeiro tipo, dois do segundo, e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um pacote de cada tipo?

O autor desse problema faz algo bastante notável. Ele define os coeficientes de três equações lineares a três incógnitas com uma tabela abaixo:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

No referido texto, esse sistema foi resolvido manipulando os termos da tabela anterior.

Atualmente, essa tabela é chamada de matriz. Esse é um dos registros mais antigos sobre matrizes, o que nos leva a acreditar que o estudo das matrizes teve como motivação histórica inicial a necessidade de resolver sistemas de equações do 1º grau.

Somente no século XIX o inglês Arthur Cayley (1821-1895) sistematizou a teoria das matrizes, com base num estudo sobre transformações lineares.

DEFINIÇÃO

Uma matriz do tipo $m\ x\ n$ (lê-se: *m por n)* é uma tabela de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Essa tabela deve ser representada entre colchetes [ ] ou entre parênteses ( ).

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2, pois ela tem 3 linhas e 2 colunas.

$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×4, pois ela tem 2 linhas e 4 colunas.

REPRESENTAÇÃO

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ do tipo $m \times n$ pode ser representada genericamente da seguinte maneira:

$$\begin{array}{cc} & n\ colunas \longrightarrow \\ m\ linhas \downarrow & A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \end{array}$$

Observe que o tipo $m \times n$ da matriz indica que ela tem *m* linhas e *n* colunas. Além disso, cada elemento (entrada) dessa matriz foi representado genericamente por a_{ij}, onde o índice i indica a linha onde o elemento se encontra e o índice j indica a coluna em que o elemento está.

Tipo:

$$m \times n \rightarrow \begin{cases} m\text{: } número\ de\ Linhas \\ n\text{: } número\ de\ Colunas \end{cases}$$

Elemento:

$$a_{ij} \rightarrow \begin{cases} i\text{: } linha \\ j\text{: } colunas \end{cases}$$

Considere a matriz do tipo 2×3 a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

- o elemento da linha 1 e coluna 1 é igual a 5, ou seja, $a_{11} = 5$.
- o elemento que está na linha 1 e coluna 2 é igual a -2, daí $a_{12} = -2$.
- Analogamente, temos $a_{13} = 0$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 7$ e $a_{23} = 1$.

Problema 01: Uma confecção vai fabricar três tipos de roupas utilizando materiais diferentes. Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ a seguir, onde a_{ij} representa quantas unidades do material j serão empregados para fabricação de roupas do tipo i.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Quantas unidades do material 3 serão empregadas para fabricar roupas do tipo 2?
b) Calcule o total de unidades do material 1 que serão empregadas para fabricar 5 roupas do tipo 1, 4 roupas do tipo 2, e 2 roupas do tipo 3.

Solução:

A matriz em destaque pode ser representada e interpretada através da tabela:

	MATERIAL 1	MATERIAL 2	MATERIAL 3
ROUPA TIPO 1	5	0	2
ROUPA TIPO 2	0	1	3
ROUPA TIPO 3	4	2	1

Assim:

a) O número de unidades do material 3 que serão empregadas para fabricar roupas do tipo 2 é igual a 3.

b) O total de unidades do material 1 que serão empregadas para fabricar 5 roupas do tipo 1, 4 roupas do tipo 2 e 2 roupas do tipo 3 é igual a

$$5 \times 5 + 4 \times 0 + 2 \times 4 = 33.$$

Problema 02: Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$, tal que $a_{ij} = 2i + j$.

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \qquad a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$
$$a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \qquad a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$
$$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \qquad a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

Daí:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

CLASSIFICAÇÃO

- **MATRIZ LINHA:** é a matriz que possui uma única linha.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

- **MATRIZ COLUNA:** é a matriz que possui uma única coluna.

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

- **MATRIZ NULA:** é a matriz em que todos os elementos são iguais a zero.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

- **MATRIZ QUADRADA:** é a matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Dizemos que a matriz quadrada do exemplo anterior é uma matriz de ordem 3. De maneira genérica, se tivermos uma matriz quadrada do tipo $n \times n$, diremos que ela é de ordem n.

Observe também que, numa matriz quadrada de ordem n, os elementos a_{ij}, com $i = j$, pertencem a *Diagonal Principal* da matriz, e os elementos a_{ij}, com $i + j = n + 1$, formam a *Diagonal Secundária*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}$$

Diagonal Secundária **Diagonal Principal**

- **MATRIZ TRIANGULAR:** é a matriz quadrada em que os elementos situados acima ou abaixo da diagonal principal são todos iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz Diagonal:** é a matriz quadrada em que os elementos situados acima e abaixo da diagonal principal são todos iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz Identidade:** é a matriz quadrada em que os elementos pertencentes a diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais elementos são iguais a zero.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

No exemplo acima, temos uma matriz identidade de ordem 3.

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes do mesmo tipo são iguais quando seus elementos correspondentes forem ordenadamente iguais.

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \implies a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Problema 03: Determine os valores incógnitos para que se verifique a igualdade a seguir:

$$\begin{bmatrix} x & 4 & 0 \\ w+7 & -2 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 15 & -2 & z \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Solução:

Como as matrizes do mesmo tipo são iguais, basta igualar os elementos correspondentes, assim:

$$a_{11} = b_{11} \implies x = 5$$

$$a_{21} = b_{21} \implies w + 7 = 15 \implies w = 8$$

$$a_{23} = b_{23} \implies 6 = z$$

Matriz Transposta

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$, a transposta da matriz A, representada por A^t, é a matriz $n \times m$ que se obtém trocando, ordenadamente, cada linha por cada coluna de A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4} \implies A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Matriz Oposta

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$, a oposta da matriz A, representada por $-A$, é a matriz $m \times n$ que se obtém invertendo o sinal de cada elemento de A.

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \implies -A = (-a_{ij})_{m\times n}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \implies -A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Matriz Simétrica

Uma matriz quadrada é dita simétrica quando ela for igual a sua transposta.

$$A = A^t \implies a_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3} \implies A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Observe que, numa matriz simétrica, os elementos simétricos em relação a diagonal principal são iguais.

Matriz Antissimétrica

Uma matriz quadrada é dita antissimétrica quando ela for igual a oposta de sua transposta.

$$A = -A^t \implies a_{ij} = -a_{ji}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 5 \\ 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \implies A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \\ -6 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$-A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 5 \\ 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Observe que, numa matriz antisimétrica, os elementos da diagonal principal são todos iguais a zero e os elementos simétricos em relação a diagonal principal são opostos.

Operações com Matrizes

Adição de Matrizes:

Sejam as matrizes A e B, ambas do tipo $m \times n$. A matriz $A + B$ é uma matriz do tipo $m \times n$ que se obtém somando os elementos correspondentes nas matrizes A e B.

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \ \ e \ \ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$\Downarrow$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7+2 & -2+2 \\ 5+1 & 3+4 \\ -3+1 & 0+6 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 7 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Subtração de Matrizes:

Sejam as matrizes A e B, ambas do tipo $m \times n$. A matriz $A - B$ é uma matriz do tipo $m \times n$ que se obtém subtraindo os elementos correspondentes nas matrizes A e B, nessa ordem.

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \ \ e \ \ B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$\Downarrow$$

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 7-2 & -2-2 \\ 5-1 & 3-4 \\ -3-1 & 0-6 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Multiplicação de um Número Real por uma Matriz:

Ao multiplicarmos um número real k por uma matriz A, obteremos uma nova matriz, do mesmo tipo de A, em que cada elemento é o produto de seu correspondente em A pelo número k.

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m\times n}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot A = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 10 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Aplicações:

O dono de duas concessionárias de motos, A (matriz) e B (filial), fez um levantamento sobre o número de motos vendidas de cada um dos três modelos disponíveis durante os quatro primeiros meses do ano. Os resultados obtidos foram os seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 28 & 32 \\ 15 & 12 & 20 & 29 \\ 31 & 16 & 31 & 43 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 23 & 30 \\ 15 & 11 & 12 & 27 \\ 30 & 13 & 29 & 43 \end{pmatrix},$$

em que:

- a matriz $A = (a_{ij})$ descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo *i* no dia *j*.
- a matriz $B = (b_{ij})$ descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo *i* no dia *j*.

Se quisermos o desempenho de toda empresa durante esses quatro primeiros meses do ano, basta entender que ele se refere ao desempenho conjunto das concessionárias A e B, assim, esse desempenho pode ser representado por meio de uma matriz $S = (s_{ij})_{3\times 4}$ que é obtida pela soma das matrizes A e B, ou seja, de modo que cada elemento s_{ij} é a soma dos elementos correspondentes nas matrizes A e B. Logo:

$$S = \begin{pmatrix} 20+17 & 18+14 & 28+23 & 32+30 \\ 15+15 & 12+11 & 20+12 & 29+27 \\ 31+30 & 16+13 & 31+29 & 43+43 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 37 & 32 & 51 & 62 \\ 30 & 23 & 32 & 56 \\ 61 & 29 & 60 & 86 \end{pmatrix}$$

Agora, se quisermos uma matriz que compare o desempenho da concessionária A com o da concessionária B, em relação às vendas dos três novos modelos no período citado, podemos construir a matriz $D = (d_{ij})_{3\times 4}$, na qual cada elemento d_{ij} seja a diferença entre seus elementos correspondentes nas matrizes A e B, nessa ordem, ou seja, basta fazer $D = A - B$.

$$D = \begin{pmatrix} 20-17 & 18-14 & 28-23 & 32-30 \\ 15-15 & 12-11 & 20-12 & 29-27 \\ 31-30 & 16-13 & 31-29 & 43-43 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, analisando as matrizes S e D, temos, por exemplo, que, como $s_{23} = 32$, significa dizes que a empresa vendeu 32 motos do modelo 2 no mês de março, enquanto que, como $d_{23} = 8$, a loja A vendeu 8 unidades a mais do modelo2 do que a loja B no mês de março.

Imagine agora que queiramos triplicar as vendas mensais de cada um dos modelos disponíveis. A matriz M que representa essa meta é obtida multiplicando cada elemento da matriz A por 3, ou seja:

$$M = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 60 & 54 & 84 & 96 \\ 45 & 36 & 60 & 87 \\ 93 & 48 & 93 & 129 \end{pmatrix}.$$

♦ Multiplicação de Matrizes:

Diferentemente das operações anteriores, a multiplicação de matrizes não se comporta de maneira tão "bonitinha", a começar do fato de que, mesmo que as matrizes sejam do mesmo tipo, nem sempre poderemos multiplicar uma pela outra. Assim, primeiramente, vamos determinar a condição para que exista o produto de duas matrizes.

Condição de Existência

Para que duas matrizes possam ser multiplicadas é necessário que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda.

$$\underbrace{A_{m\times n} \times B_{n\times p}}_{m\times p} = C_{m\times p}$$

Além disso, a matriz produto terá o número de linhas igual ao dá primeira matriz e o número de colunas igual ao da segunda, nessa ordem.

Produto de uma linha por uma coluna

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, em que consideramos a linha *i* de A e a coluna *j* de B, isto é:

$$\begin{matrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}$$

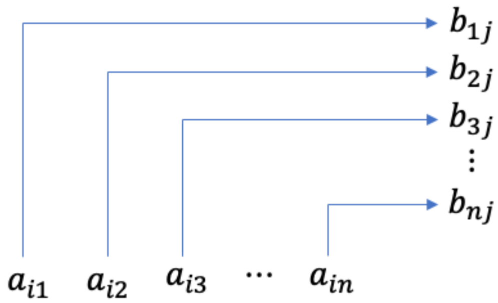
produto da linha *i* pela coluna *j* é definido por:

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Ou seja, multiplicamos, ordenadamente, os elementos da linha *i* pelos correspondentes na linha *j* e depois adicionamos os resultados.

Perceba que, para que seja possível realizar o produto entre uma linha e uma coluna, elas devem ter a mesma quantidade de elementos.

Para facilitar a visualização do processo, observe o esquema a seguir:



Produto Matricial

O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ em que cada elemento c_{ij} é o produto da linha *i* de A pela coluna *j* de B, ou seja, é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da *i*-ésima linha de A pelos elementos da *j*-ésima coluna de B.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4\cdot 1 + 5\cdot 4 + 0\cdot(-3) & 4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-3) & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 24 & 23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Observe nesse exemplo, que o produto $B \cdot A$ também irá existir, entretanto, a matriz resultante será do tipo 3×3.

Vale destacar também que *nem* sempre que existir o produto de A por B, o produto de B por A irá existir.

Aplicação

Na confecção de três modelos de jaquetas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (P). O número de botões por modelos é dado pela tabela:

	Jaqueta A	Jaqueta B	Jaqueta C
Botões P	3	1	3
Botões G	6	5	5

O número de jaqueta fabricadas, de cada modelo, nos meses de novembro e dezembro, é dado pela tabela:

	Novembro	Dezembro
Jaqueta A	100	50
Jaqueta B	50	100
Jaqueta C	50	50

Nestas condições, a tabela que nos dá o número de botões de cada um dos tipos utilizados em novembro e dezembro é dada por:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \\ 50 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 100 + 1 \cdot 50 + 3 \cdot 50 & 3 \cdot 50 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 50 \\ 6 \cdot 100 + 5 \cdot 50 + 5 \cdot 50 & 6 \cdot 50 + 5 \cdot 100 + 5 \cdot 50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 500 & 400 \\ 1100 & 1050 \end{bmatrix}.$$

Ou seja:

	Novembro	Dezembro
Botões P	500	400
Botões G	1100	1050

Exercícios de Fixação

F.01: Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, tal que

$$a_{ij} = i - j.$$

F.02: Construa a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 2}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2, & se\ i = j \\ j - i, & se\ i \neq j \end{cases}.$$

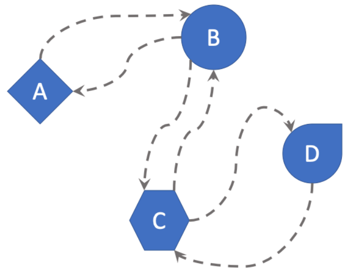
F.03: Construa a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j, & se\ i > j \\ 1 \quad , & se\ i = j \\ j - i, & se\ i < j \end{cases}.$$

F.04: Determine o valor de x tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3x & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

F.05: (Ronaebson) As cidades A, B, C e D, situadas numa mesma região, se comunicam exclusivamente por transporte ferroviário. No diagrama abaixo, as setas indicam quais cidades se comunicam diretamente com outra. Há, por exemplo, linhas de transporte regular entre A e B, nos dois sentidos.



Um engenheiro de tráfego decidiu representar essa situação numa matriz $T_{4\times 4}$, onde cada elemento a_{ij} é tal que, se $a_{ij} = 1$, então as cidades i e j se comunicam diretamente, se $a_{ij} = 0$, então não há comunicação direta entre as cidades i e j, além disso, considere $a_{ii} = 0$.

Sabendo que as linhas e colunas de T representem as cidades em ordem alfabética, qual a representação matricial mais adequada para a situação descrita?

F.06: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, determine:

a) A^t
b) $(A^t)^t$
c) $-A$

F.07: (Ronaebson) Uma rede comercial de material de construção no estado da Paraíba é formada por três lojas, numeradas de 1 a 3. A matriz a seguir mostra o faturamento, em milhares de reais, de cada uma das lojas nos cinco primeiros dias de agosto, de modo que cada elemento a_{ij} dessa matriz indica o faturamento da loja *i* no dia *j*.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Qual foi o faturamento da loja 1 no dia 2?
b) Qual o faturamento dessa rede de lojas no dia 2?
c) Qual o faturamento total da loja 1 nos cinco dias?

F.08: Considere a matriz $A = (a_{ij})_{10\times 10}$, tal que $a_{ij} = i + j$. Determine:

a) a soma dos elementos da diagonal principal.
b) a soma dos elementos da diagonal secundária.

F.09: Determine os valores incógnitos de modo que a matriz A a seguir seja simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ z & 4 & -7 \\ 1 & w & 8 \end{pmatrix}$$

F.10: Considere as matrizes a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Determine:

a) $A + B$
b) $B - A$
c) $3 \cdot A$

F.11: Considere as matrizes a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

Determine, caso exista:

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot A$
c) $B^t \cdot A$
d) $A \cdot I_2$

(I_2 é a matriz identidade de ordem 2).

F.12:(Ronaebson) Uma empresa do ramo de shampoo é formada por duas lojas A e B. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos, 1 e 2, nos três primeiros dias de abril, foram obtidos os seguintes resultados:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- a matriz $A = (a_{ij})$ descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j;
- a matriz B $= (b_{ij})$ descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j.

Qual seria a matriz C que representa o desempenho da empresa em relação à venda desses dois novos modelos em cada um dos três primeiros dias de abril?

Anotações:

Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Em uma competição de basquete, o técnico de um time registrou o total de pontos marcados por três de seus principais jogadores ao longo de cinco partidas. Os dados foram compilados numa matriz A do tipo 5 x 3, em que cada elemento a_{ij} indica a quantidade de pontos marcados pelo jogador j na partida i. Além disso, $j = 1$ indica o jogador Gabriel, $j = 2$, o jogador David e $j = 3$ indica o jogador Emanuel. Considere a matriz A computada pelo técnico.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 22 & 18 \\ 20 & 25 & 12 \\ 16 & 19 & 24 \\ 23 & 17 & 14 \\ 21 & 13 & 26 \end{pmatrix}$$

Qual a média de pontos marcados por Gabriel nessas cinco partidas?

- **A** 11
- **B** 19
- **C** 20
- **D** 55
- **E** 95

Questão 02

(Ronaebson)

Um grande grupo educacional fez uma avaliação dos seus cinco líderes a saber, Augusto (L1), Bianca (L2), Carol (L3), Débora (L4) e Elai (L5). As características avaliadas foram: Disciplina (C1), Assertividade (C2), Pontualidade (C3), Confiança (C4) e Motivação (C5).

Os entrevistados atribuíram notas de 0 a 10 para cada categoria avaliada para cada um dos líderes e essas notas foram compiladas numa matriz S, em que cada elemento s_{ij} significa a nota recebida pelo líder L_i na categoria C_j.

$$S = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 9 & 7 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 7 & 10 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

A nota final do líder é a média aritmética das notas recebidas em cada uma das categorias.

O líder que recebeu maior nota final foi

- **A** Augusto.
- **B** Bianca.
- **C** Carol.
- **D** Débora.
- **E** Elai.

Questão 03

(Ronaebson)

Num levantamento realizado com cinco monitores do MEDWAY, verificou-se a quantidade de dias em que eles trabalharam juntos no mês de outubro. Os resultados obtidos nesse levantamento estão dispostos na matriz $A = [a_{ij}]$ a seguir, com $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao número de dias em que o monitor i trabalhou com o monitor j. Quando $i = j$, o elemento a_{ij} é nulo, uma vez que somente são considerados trabalhos coletivos entre monitores distintos.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

De acordo com o levantamento, o monitor com mais dias em comum com os demais é o

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 3.
Ⓓ 4.
Ⓔ 5.

Questão 04

(Ronaebson)

A matriz $A_{4\times4}$ apresenta um comparativo do número de casos de COVID-19 na cidade de Coremas-PB entre o primeiro quadrimestre de 2021 e o primeiro quadrimestre de 2020.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -12 & -18 & -17 \\ -12 & -20 & -26 & -15 \\ -16 & -24 & -30 & -19 \\ -17 & -25 & -31 & -20 \end{pmatrix}$$

Nessa matriz, cada elemento a_{ij} indica a diferença entre o número de casos registrados no mês i de 2021 e o número de casos registrados no mês j de 2020, onde, tanto para i quando para j, temos: 1 para janeiro, 2 para fevereiro, 3 para março e 4 para abril.

Segundo essa matriz, o número de casos confirmados de COVID-19 na cidade de Coremas-PB no primeiro quadrimestre de 2021 comparado ao primeiro quadrimestre de 2020, apresentou uma redução de

Ⓐ 51.
Ⓑ 49.
Ⓒ 74.
Ⓓ 84.
Ⓔ 306.

Questão 05

(Ronaebson)

Um grupo de jovens estava inicialmente dividido em três equipes 1, 2 e 3. Entretanto, em virtude de afinidades que alguns possuíam entre si, alguns solicitaram transferência de uma equipe para outra. A matriz a seguir representa o resultado obtido após as transferências:

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & 4 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix},$$

onde cada entrada a_{ij} dessa matriz indica o número de jovens da equipe i que se transferiram para a equipe j, caso $i \neq j$. Se $i = j$, então a_{ij} indica o número de jovens da equipe i que permaneceram equipe i.

Admitindo que cada pessoa pode participar de apenas uma equipe, tem-se que o número de jovens que pertenciam a equipe 1 antes das transferências acontecerem era

Ⓐ 12.
Ⓑ 23.
Ⓒ 24.
Ⓓ 26.
Ⓔ 64.

Questão 06

(IMED_2018)

Em uma grande cidade, para estudar o nível de ruído a que estavam expostos os habitantes, a prefeitura realizou quatro medições diárias durante cinco dias em um cruzamento de grande movimento. Cada elemento a_{ij} da matriz a seguir representa o nível de ruído, em decibéis (dB), registrado na medição *i* do dia *j*.

$$\begin{bmatrix} 45 & 62 & 68 & 44 & 63 \\ 51 & 49 & 72 & 48 & 68 \\ 39 & 52 & 71 & 52 & 62 \\ 51 & 45 & 63 & 40 & 69 \end{bmatrix}$$

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), 50 dB é o nível máximo recomendável à exposição do ouvido humano.

Com as informações apresentadas, determine o nível médio de ruídos registrados no quarto dia e assinale a alternativa correta:

Ⓐ 46 dB
Ⓑ 46,5 dB
Ⓒ 52 dB
Ⓓ 65,5 dB
Ⓔ 68,5 dB

Questão 07

(IFPE_2017)

Anselmo (1), Eloi (2), Pedro (3) e Wagner (4) são matemáticos e, constantemente, se desafiam com exercícios. Com base na matriz D, a seguir, que enumera cada elemento a_{ij} representando o número de desafios que *"i"* fez a *"j"*, assinale, respectivamente, quem mais desafiou e quem foi mais desafiado.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Ⓐ Anselmo e Pedro.
Ⓑ Eloi e Wagner.
Ⓒ Anselmo e Wagner.
Ⓓ Pedro e Eloi.
Ⓔ Wagner e Pedro.

Questão 08

(UERJ)

Para combater a subnutrição infantil, foi desenvolvida uma mistura alimentícia composta por três tipos de suplementos alimentares: I, II e III. Esses suplementos, por sua vez, contêm diferentes concentrações de três nutrientes: A, B e C. Observe as tabelas a seguir, que indicam a concentração de nutrientes nos suplementos e a porcentagem de suplementos na mistura, respectivamente.

Nutriente	**Concentração dos Suplementos Alimentares (g/kg)**		
	I	II	III
A	0,2	0,5	0,4
B	0,3	0,4	0,1
C	0,1	0,4	0,5

Suplemeno Alimentar	**Quantidade na Mistura (%)**
I	45
II	25
III	30

A quantidade do nutriente C, em g/kg, encontrada na mistura alimentícia é igual a:

Ⓐ 0,235
Ⓑ 0,265
Ⓒ 0,275
Ⓓ 0,295
Ⓔ 0,298

Questão 09

(ESPECEX_2020)

Duas cidades A e B têm suas áreas urbanas divididas em regiões Comercial, Residencial e Industrial. A tabela 1 fornece as áreas dessas regiões em hectares para as duas cidades.

A tabela 2, por sua vez, fornece os valores anuais médios de arrecadação, em milhões de reais por hectare, referentes ao Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), ao fornecimento de energia elétrica e ao fornecimento de água.

Tabela 1

	Área Comercial	Área Residencial	Distrito Industrial
Cidade A	10	25	42
Cidade B	8	12	18

Tabela 2

	Área Comercial	Área Residencial	Distrito Industrial
IPTU	12	6	5
Energia Elétrica	25	12	60
Água	15	10	50

Considere as matrizes T_1 e T_2, associadas respectivamente às tabelas 1 e 2.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 10 & 25 & 42 \\ 8 & 12 & 18 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 5 \\ 25 & 12 & 60 \\ 15 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

Seja a_{ij} os elementos da matriz resultante do produto $T_1 \cdot T_2^t$. Nessas condições, a informação contida no termo de ordem a_{22} desse produto de matrizes é o valor total arrecadado com

Ⓐ fornecimento de energia elétrica nas áreas residenciais.
Ⓑ fornecimento da água da cidade A.
Ⓒ fornecimento da água nas áreas residenciais.
Ⓓ IPTU nos distritos industriais.
Ⓔ fornecimento de energia elétrica na cidade B.

ANOTAÇÕES:

Questão 10

(UEG_2019)

Em um torneio de vôlei, as equipes A, B, C e D obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipe	Vitórias por 3x0	Vitórias por 3x2 ou 3x1	Derrotas por 3x2 ou 3x1	Derrotas por 3x0
A	7	4	2	0
B	3	5	3	2
C	1	2	6	4
D	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada equipe é

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3x0	3
Vitórias por 3x2 ou 3x1	2
Derrotas por 3x2 ou 3x1	1
Derrotas por 3x0	0

A) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

ANOTAÇÕES:

Questão 11

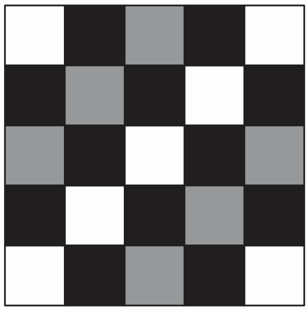
(FATEC_2017)

Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um [1]*pixel* na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada pixel, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255).

[1]Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Suponha que na figura estejam representados 25 *pixels* de uma tela.



A matriz numérica correspondente às cores da figura apresentada é dada por

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

Uma matriz $M = (a_{ij})$, quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i = j \\ 127, se\ i > j \\ 255, se\ i < j \end{cases}$$

A matriz M corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela. Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela

A) terá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.
B) terá o mesmo número de *pixels* brancos e pretos.
C) terá o mesmo número de *pixels* pretos e cinzas.
D) terá uma diagonal com cinco *pixels* brancos.
terá uma diagonal com cinco *pixels* cinzas.

Questão 12

(UNICAMP)

Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a

A 12.
B 15.
C 16.
D 20.
E 22.

Questão 13

(UEL)

O levantamento sobre a dengue no Brasil tem como objetivo orientar as ações de controle, que possibilitam aos gestores locais de saúde antecipar as prevenções a fim de minimizar o caos gerado por uma epidemia. O Ministério da Saúde registrou 87 mil notificações de casos de dengue entre janeiro e fevereiro de 2014, contra 427 mil no mesmo período em 2013. Apesar do resultado expressivo de diminuição da doença, o Ministério da Saúde ressalta a importância de serem mantidos o alerta e a continuidade das ações preventivas. Os principais criadouros em 2014 são apresentados na tabela a seguir.

Região	Armazenamento da água (%)	Depósitos domiciliares (%)	Lixo (%)
Norte	20,2	27,4	52,4
Nordeste	75,3	18,2	6,5
Sudeste	15,7	55,7	28,6
Centro-Oeste	28,9	27,3	43,8
Sul	12,9	37,0	50,1

(Adaptado de: BVS Ministério da Saúde. Disponível em: <www.brasil.gov.br/saude/2014>. Acesso em: 21 abr. 2015.)

Seja A a matriz formada pelos elementos a_{ij}, em que i são as regiões e j os tipos de criadouros apresentados na tabela. Considerando que cada região tenha seus tipos de criadouros aumentados em 10%, devido a um desequilíbrio ambiental, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a matriz B resultante.

A $B_{3\times5} = k \cdot A_{3\times5}$, em que $k = 10{,}0$
B $B_{3\times5} = (1+k) \cdot A_{3\times5}$, em que $k = 0{,}1$
C $B_{5\times3} = (1+k) \cdot A_{5\times3}$, em que $k = 0{,}1$
D $B_{5\times3} = (10+k) \cdot A_{5\times3}$, em que $k = 0{,}1$
E $B_{5\times3} = k \cdot A_{5\times3}$, em que $k = 0{,}1$

Questão 14

(UEL)

Conforme dados da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), no Brasil, existem 720 aeródromos públicos e 1814 aeródromos privados certificados. Os programas computacionais utilizados para gerenciar o tráfego aéreo representam a malha aérea por meio de matrizes. Considere a malha aérea entre quatro cidades com aeroportos por meio de uma matriz. Sejam as cidades A, B, C e D indexadas nas linhas e colunas da matriz 4 x 4 dada a seguir. Coloca-se 1 na posição X e Y da matriz 4 x 4 se as cidades X e Y possuem conexão aérea direta, caso contrário coloca-se 0. A diagonal principal, que corresponde à posição X = Y, foi preenchida com 1.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Considerando que, no trajeto, o avião não pode pousar duas ou mais vezes em uma mesma cidade nem voltar para a cidade de origem, assinale a alternativa correta.

A Pode-se ir da cidade A até B passando por outra(s) cidades.
B Pode-se ir da cidade D até B passando por outra(s) cidades.
C Pode-se ir diretamente da cidade D até C.
D Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e B.
E Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e C.

Questão 15

(ESPM)

A distribuição dos n moradores de um pequeno prédio de apartamentos é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 4 & x & 5 \\ 1 & 3 & y \\ 6 & y & x+1 \end{bmatrix}$, onde cada elemento a_{ij} representa a quantidade de moradores do apartamento j do andar i.

Sabe-se que, no 1º andar, moram 3 pessoas a mais que no 2º e que os apartamentos de número 3 comportam 12 pessoas ao todo. O valor de n é:

A 30
B 31
C 32
D 33
E 34

Questão 16

(UEM_2017)

Em uma região, populações de espécies de insetos pertencentes às ordens Hymenoptera (abelhas, E_1, e formigas, E_2) e Isoptera (cupins, E_3) vivem em três locais diferentes (1, 2 e 3), com os organismos de cada população mantendo algum grau de cooperação e de divisão de trabalho. Considere a matriz que representa o número de populações desses insetos, em que a entrada a_{ij} dessa matriz é a população da espécie E_j no local i, e assinale o que for **correto**.

$$\begin{bmatrix} 24 & 19 & 21 \\ 15 & 11 & 18 \\ 12 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

A quantidade de populações de cupins dessa região é

- A 42
- B 46
- C 49
- D 51
- E 53

Questão 17

(UNESP)

Uma fábrica produz dois tipos de peças, P1 e P2. Essas peças são vendidas a duas empresas, E1 e E2. O lucro obtido pela fábrica com a venda de cada peça P1 é R$ 3,00 e de cada peça P2 é R$ 2,00. A matriz abaixo fornece a quantidade de peças P1 e P2 vendidas a cada uma das empresas E1 e E2 no mês de novembro.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P1 & P2 \end{array} \\ \begin{array}{c} E1 \\ E2 \end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

A matriz, onde x e y representam os lucros, em reais, obtidos pela fábrica, no referido mês, com a venda das peças às empresas E1 e E2, respectivamente, é:

- A $\begin{bmatrix} 35 \\ 20 \end{bmatrix}$
- B $\begin{bmatrix} 90 \\ 48 \end{bmatrix}$
- C $\begin{bmatrix} 76 \\ 69 \end{bmatrix}$
- D $\begin{bmatrix} 84 \\ 61 \end{bmatrix}$
- E $\begin{bmatrix} 28 \\ 27 \end{bmatrix}$

Questão 18

(UFMS_2019)

Uma indústria farmacêutica produz 3 tipos de suplementos alimentares: X, Y e Z. Os suplementos são compostos de Vitamina B, Vitamina D e Vitamina E em miligramas por cápsula, com concentrações diferentes. A matriz M representa a quantidade de vitaminas em miligrama por cápsula de cada suplemento; a matriz P, a produção diária de cápsulas dos suplementos:

$$P = \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 300 \end{bmatrix} \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \qquad M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Vitamina B} \\ \text{Vitamina D} \\ \text{Vitamina E} \end{array} \end{array}$$

Qual matriz a seguir representa a quantidade, em gramas, de vitamina B, vitamina D e vitamina E utilizada na produção diária de cápsulas dos suplementos X, Y e Z pela indústria farmacêutica?

- A $\begin{bmatrix} 1{,}3 \\ 2{,}4 \\ 5{,}1 \end{bmatrix}$
- B $\begin{bmatrix} 16 \\ 45 \\ 27 \end{bmatrix}$
- C $\begin{bmatrix} 29 \\ 32 \\ 27 \end{bmatrix}$
- D $\begin{bmatrix} 13 \\ 24 \\ 51 \end{bmatrix}$
- E $\begin{bmatrix} 2{,}9 \\ 3{,}2 \\ 2{,}7 \end{bmatrix}$

ANOTAÇÕES:

Questão 19

(FMC)

Em certa clínica, a temperatura de um paciente, em graus Celsius, foi verificada três vezes ao dia durante três dias.

Cada elemento a_{ij} da matriz $\begin{pmatrix} 40 & 39 & 39 \\ 39 & 38 & 36 \\ 40 & 38 & 36 \end{pmatrix}$ corresponde à temperatura do paciente no instante i e no dia j.

A média aritmética das temperaturas do paciente, no terceiro dia de observação, foi de

Ⓐ 36ºC.
Ⓑ 37ºC.
Ⓒ 38ºC.
Ⓓ 39ºC.
Ⓔ 40ºC.

Questão 20

(Fatec)

João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}, \text{ em que:}$$

- a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018;
- na matriz B, as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana desse mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será

Ⓐ R$ 670,00
Ⓑ R$ 680,00
Ⓒ R$ 864,00
Ⓓ R$ 980,00
Ⓔ R$ 984,00

Gabarito _ Exercícios de Fixação Matrizes

Questão	Resposta
F.1	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
F.2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
F.3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
F.4	4
F.5	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
F.6	a) $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $(A^t)^t = A$ c) $\begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$
F.7	a) R$ 3000 b) R$ 5000 c) R$ 12000
F.8	a) 110 b) 110
F.9	$x = 1;\ w = -7\ e\ z = 3$
F.10	a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 3 \end{bmatrix}$
F.11	a) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 14 \\ 19 & 3 & 42 \end{bmatrix}$ b) Não existe. c) $\begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 2 & 1 \\ 26 & 34 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
F.12	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

Gabarito_Matrizes Hora de Praticar

Questão	Resposta
01	B
02	C
03	B
04	C
05	C
06	A
07	A
08	D
09	E
10	C
11	A
12	A
13	C
14	A
15	C
16	E
17	C
18	A
19	B
20	C

SISTEMAS LINEARES

$$\begin{cases} 3X+2Y=6 \\ 2X+3Y=5 \end{cases}$$

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

SISTEMAS LINEARES

Em várias situações do nosso cotidiano ou mesmo do meio científico, é comum nos depararmos com problemas que apresentem dois ou mais valores desconhecidos; a esses valores, chamamos de incógnitas. Naturalmente, essas incógnitas se relacionam através de equações e, para um dado problema, essas equações são interdependentes, ou seja, o valor de cada uma das incógnitas ou variáveis, caso exista, é o mesmo para todas as equações. A esse conjunto de equações, por haver uma inter-relação entre elas, chamamos de Sistema de Equações.

EQUAÇÕES LINEARES

Chama-se de equação linear nas incógnitas, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ toda equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são constantes reais chamadas de coeficientes das incógnitas, e b é uma constante real chamda de termo independente da equação.

São equações lineares:

$a)$ $3x + 4y = 10$

x *e* y são as incógnitas;
3 *e* 4 são os coeficientes;
10 é o termo independente.

$b)$ $2x - 3y + z = 7$

$x,\ y$ *e* z são as incógnitas;
$2,\ -3$ *e* 1 são os coeficientes;
7 é o termo independente.

Não são equações lineares:

$a)$ $2x^3 + 3y = 12$

$b)$ $2x^2 + 3y - \sqrt{z} = 12$

$c)$ $x - y + \dfrac{1}{z} = 12$

Solução de uma Equação Linear

Já estamos acostumados a resolver equações lineares de uma incógnita (variável), que são as equações de primeiro grau. Por exemplo: $2x + 8 = 22$ nos leva à solução única $x = 14$.

Já, se tivermos uma equação com duas incógnitas (variáveis), por exemplo, $x + y = 10$, a solução não é única, já que poderemos ter um número infinito de pares ordenados que satisfazem à equação, ou seja:

- $x = 1$ e $y = 9$ [par ordenado $(1,9)$],
- $x = 4$ e $y = 6$ [par ordenado $(4,6)$],
- $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{17}{2}$ [par ordenado $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right)$],
- ...

Consideremos agora, uma equação com 3 incógnitas, por exemplo: $x + y + z = 5$. As soluções serão

- $x = 1$, $y = 4$ e $z = 0$, pois $1 + 4 + 0 = 5$;
- $x = 3$, $y = 7$ e $z = -5$, pois $3 + 7 - 5 = 5$;
- $x = 10$, $y = -9$ e $z = 4$, pois $10 + (-9) + 4 = 5$;
- ...

Essas soluções são compostas por 3 elementos, o que nos leva a afirmar que as soluções são os ternos ordenados $(1, 4, 0)$, $(3, 7, -5)$, $(10, -9, 4)$, ..., ou seja, existem infinitas soluções (um número infinito de ternos ordenados) que satisfazem à equação dada. De uma forma geral, as soluções de uma equação linear de duas variáveis, são pares ordenados; de três variáveis, são ternos ordenados; de quatro variáveis, são quadras ordenadas; ... .

Generalizando:

“Dizemos que a ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ se, e somente se, a ela satisfizer a equação, isto é, se for verdadeira a igualdade

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b.$$

Se não existir ênupla nessas condições, diremos que a equação é impossível, ou seja, não tem solução.”

Assim, considerando a equação

$$x + 2y - 3z = 7,$$

temos que:

- o terno ordenado $(3, 4, 0)$ é solução, pois a sentença
$$3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 = 7$$
é verdadeira;

- já o terno ordenado $(7, 1, 1)$ não é solução, pois a sentença
$$7 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 7$$
não é verdadeira, ou seja, a equação não é satisfeita.

Problema 01: Entre bonecos e carrinhos, Carlos tem um total de seis brinquedos.

a) Sendo b a quantidade de bonecos e c a quantidade de carrinhos que Carlos possui, escreva uma equação que relacione b e c atendendo a condição inicialmente dada.
b) Quantas e quais são as soluções para a equação obtida no item anterior?

Solução:

a) $b + c = 6$

b) Sabendo que b e c representam quantidades de bonecos e carrinhos, devemos ter $b, c \in \mathbb{N}$, daí as possíveis soluções podem ser listadas na tabela a seguir:

b	c
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0

Ou seja, teremos sete soluções para essa equação linear.

♦ Equação Linear Homogênea

Toda equação linear cujo termo independente é zero é chamada de *equação linear homogênea*.

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0}$$

Observe que toda equação linear homogênea admite como solução a ênupla (0,0,0,...,0), chamada de solução trivial da equação homogênea, também conhecida como solução nula. Note também que, não necessariamente, ela será a única solução.

♦ Equações Lineares Equivalentes

Duas equações lineares são ditas equivalentes quando elas possuem o mesmo conjunto solução.

Naturalmente, dada uma equação linear qualquer, para obtermos uma equação linear equivalente a ela, podemos, por exemplo somar uma mesma constante a ambos os membros da equação, ou mesmo multiplicar ambos os membros da equação por um número real.

Exercícios de Fixação

F.01: Considerando a equação $x + 2y = 8$, responda:

a) Qual é o valor de y para $x = 6$?
b) Qual é o valor de x para $y = -1$?
c) Sempre existirá um valor de y para qualquer valor atribuído a x ?
d) Quantas soluções tem essa equação?

F.02: Esboce o conjunto solução para equação linear $x - 3y = 12$.

F.03: Determine o conjunto solução para a equação $x - y + 2z = 0$.

F.04: Entre as galinhas e os coelhos que Geovanna cria em seu quintal, ela contou 14 patas. Sendo g a quantidade de galinhas e c a quantidade de coelhos que Geovanna cria, escreva uma equação que relacione g e c, depois determine quantas são as possíveis soluções.

F.05: Ana Luiza adora fazer as anotações das aulas em três cores, a saber, azul, preto e vermelho. Sabe-se que ela pretende gastar exatamente R$ 8,00 na compra das canetas nas cores em questão e que a caneta preta custa R$ 1,00, a azul custa R$ 2,00 e a vermelha, R$ 3,00.

a) Indicando, respectivamente, por p, a e v as quantidades de canetas pretas, azuis e vermelhas que podem compor essa compra, esboce uma equação que relacione essas quantidades;
b) Considerando que ela comprará pelo menos uma caneta de cada cor, determine quantas são as possibilidades de compra.
c) Qual a maior quantidade possível de caneta azul que ela pode comprar?

F.06: A comissão organizadora de uma formatura é formada por homens e mulheres. O triplo do número de homens excede em 5 o dobro do número de mulheres. Qual é o menor número possível de homens dessa comissão?

F.07: Em uma caixa, há *bolas de gude* de massas iguais e *dados* de massas iguais. Três bolas de gude e dois dados, pesam tanto quanto duas bolas de gude e quatro dados. Escreva a massa da bola de gude em função da massa do dado.

Sistemas Lineares

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O sistema acima é dito $m \times n$ (m por n), ou seja, tem m equações e n incógnitas.

Vale salientar que o sistema linear representado acima, pode ser expresso na *forma matricial*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

♦ Solução de um Sistema Linear

Chama-se solução de um sistema linear toda ênupla (sequência de n elementos) de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que satisfaz a todas as equações do sistema.

Caso o sistema não tenha solução, diremos que o conjunto solução é vazio.

Exemplo: Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x - y + z = 9 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

Observe que o terno $(5, 2, 1)$ é solução do sistema, pois

$$\begin{cases} 5 + 2 \cdot 2 - 1 = 8 \\ 2 \cdot 5 - 2 + 1 = 9, \\ 5 + 2 - 7 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

ou seja, todas as equações foram satisfeitas.

Exemplo: Considere agora o sistema

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}.$$

Note que ele não tem solução, pois não existem dois números cuja diferença seja simultaneamente 3 e 5. Logo, $S = \varnothing$.

♦ Sistema Linear Homogêneo

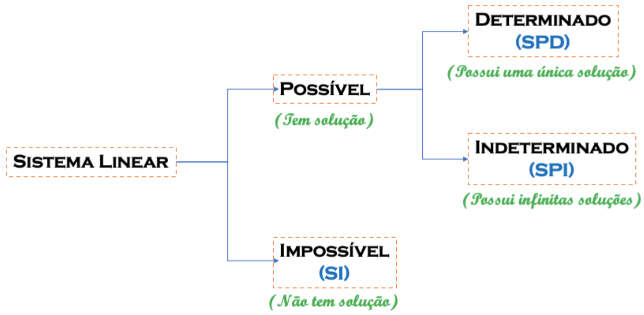
Um sistema linear é dito homogêneo quando todas as suas equações lineares forem homogêneas, ou seja, os termos independentes de todas elas são iguais a zero.

Naturalmente, o sistema linear homogêneo sempre terá solução, pois ele sempre admitirá a solução trivial como solução.

♦ Classificação

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que possui.

- **Sistema Possível Determinado (SPD):** é aquele que possui uma única solução.
- **Sistema Possível Indeterminado (SPI):** é aquele que admite mais de uma solução. Prova-se que se o sistema admite mais de uma solução, então ele terá infinitas soluções.
- **Sistema Impossível (SI):** é aquele que não possui solução.



Observe que, como um sistema linear homogêneo admite pelo menos a solução trivial, ele será SPD ou SPI, nunca será SI.

♦ Sistema Linear (2x2)

Um sistema linear 2×2 é um sistema formado por duas equações e duas incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = k_1 \\ cx + dy = k_2 \end{cases}$$

Podemos resolvê-lo de três formas diferentes, a saber:

- Método da Substituição;
- Método da Comparação;
- Método da Adição.

Método da Substituição:

Esse método consiste em você isolar uma das variáveis numa das equações e substituir na outra.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Isolando o y na segunda equação, temos:

$$y = 7 - 2x.$$

Basta agora substituir o y por $7 - 2x$ na primeira equação. Assim:

$$x + 3 \cdot (7 - 2x) = 6 \implies x = 3$$

Logo,

$$y = 7 - 2 \cdot 3 \implies y = 1.$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é

$$S = \{(3,1)\}$$

Método da Comparação:

O método da comparação consiste em você isolar uma das variáveis em ambas as equações e depois igualar as expressões.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

I

solando o y em ambas as equações, temos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{6-x}{3} \\ y = 7 - 2x \end{cases}.$$

Como o valor pra y numa equação deve ser o mesmo valor para outra, comparando, temos:

$$\frac{6-x}{3} = 7 - 2x \implies x = 3$$

Substituindo o valor de x encontrado em qualquer uma das equações, teremos $y = 1$.

Método da Adição:

Para utilizarmos o método da adição basta substituirmos uma equação pela soma dela com a outra previamente multiplicada por um número real. Claro que esse número será escolhido de forma conveniente. Podemos também multiplicarmos previamente a equação que iremos substituir por um número real convenientemente escolhido.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Para esse caso, podemos multiplicar a primeira equação por (-2) e somar com a segunda, vejamos:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \quad .(-2) \\ 2x + y = 7 \qquad + \end{cases}$$
$$\overline{\quad -5y = -5. \quad}$$

Daí, $y = 1$ e, consequentemente, $x = 3$.

Exercícios de Fixação

F.08: Numa granja, entre galinhas e coelhos, contou-se 100 cabeças e 252 patas desses animais. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos vivendo nessa granja?

F.09: Em um teste de 25 questões, para cada acerto o candidato ganha 4 pontos e para cada erro, perde 1. Quantas questões Larissa acertou, sabendo que ela respondeu a todas as questões e marcou 65 pontos?

F.10: Misturando álcool, que custa R$ 1,50 por litro, e gasolina, que custa R$ 2,70 por litro, produziu-se 100 litros de um combustível cujo preço é R$ 1,80 por litro. Quantos litros de gasolina há na mistura?

F.11: Eu tenho o dobra da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tiveres a idade que eu tenho, a soma de nossas idades será 45. Qual a minha idade?

F.12: Maria tem em sua bolsa R$ 15,60 em moedas de R$ 0,10 e de R$ 0,25. Dado que o número de moedas de 25 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos, qual o total de moedas na bolsa?

Sistema Escalonado

Dado um sistema linear *S* em que em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo, dizemos que *S* está na forma escalonada, se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Exemplo:

$$\begin{cases} \mathbf{x - y + 2z = 11} \\ \quad\ \mathbf{2y + 5z = 22} \\ \qquad\quad \mathbf{3z = 12} \end{cases}$$

Naturalmente, no que diz respeito a resolver um sistema escalonado, é imediato e bastante prático.

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando eles possuem o mesmo conjunto solução.

Escalonando um Sistema

A ideia é transformar um sistema linear qualquer num sistema equivalente na forma escalonada. E para tanto, você pode se utilizar dos seguintes fatos:

- Permutando entre si duas ou mais equações de um sistema linear, obtém-se um novo sistema equivalente ao primeiro.
- Multiplicando ou dividindo ambos os membros de uma equação de um sistema linear por uma constante não nula, obtém-se um novo sistema equivalente ao primeiro.

- Substituindo uma equação de um sistema linear pela soma dela, membro a membro, com outra desse sistema, obtém um sistema equivalente ao primeiro.
- Substituindo uma equação de um sistema linear pela soma dela, membro a membro, com outra desse sistema, previamente multiplicada por um número real, obtém um sistema equivalente ao primeiro.

Exemplo: Vamos resolver o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{x + 2y - z = 12} \\ \mathbf{2x + 3y + 5z = 26} \\ \mathbf{3x - y - 2z = 2} \end{cases}$$

Note, inicialmente, que o sistema escalonado. Assim, vamos escaloná-lo.

Vamos substituir a segunda equação pela soma dela com a primeira previamente multiplicada por (-2):

$$\begin{cases} x + 2y - z = 12 \\ \quad -y + 7z = 2 \\ 3x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

Agora vamos substituir a terceira equação pela soma dela com a primeira previamente multiplicada por (-3):

$$\begin{cases} x + 2y - z = 12 \\ -y + 7z = 2 \\ -7y + z = -34 \end{cases}$$

Nesse último sistema encontrado, vamos substituir a terceira equação pela soma dela com a segunda previamente multiplicada por (-7):

$$\begin{cases} x + 2y - z = 12 \\ -y + 7z = 2 \\ -48z = -48 \end{cases}$$

Observe que o sistema acima está escrito na forma escalonada, daí, da terceira equação temos:

$$-48z = -48 \implies z = 1$$

Da segunda equação:

$$-y + 7 \cdot 1 = 2 \implies y = 5$$

Por fim, da primeira equação, temos:

$$x + 2 \cdot 5 - 1 = 12 \implies x = 3$$

Sendo assim, a solução do sistema proposto é o terno ordenado $(3, 5, 1)$.

Exercícios de Fixação

F.13: Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 14 \end{cases}$$

F.14: O Ministério da Educação investiu 50 milhões de reais na construção de três Institutos Federais A, B e C. O custo do instituto B foi o dobro do custo do instituto C, e A custou 2 milhões de reais a mais que o custo dos outros dois institutos juntos. Calcule o valor gasto na construção de cada um dos institutos.

F.15: Em uma peça de teatro havia 300 espectadores. Uma parte deles pagou R$ 12,00 por ingresso, outra parte pagou R$ 3,00, e os espectadores restantes receberam os ingressos gratuitamente. Sabendo que a bilheteria arrecadou R$ 1200,00 com a venda dos ingressos e que havia na plateia pelo menos um espectador para cada tipo de ingresso, qual a quantidade máxima possível de pessoas não pagantes presentes na sessão?

Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson e Weslley)

Um grupo de amigos de um cursinho decide comemorar o "Pós ENEM" duas semanas depois do último dia de prova do ENEM 2023. Para tanto, um dos amigos fica responsável por encontrar uma casa na praia para alugarem, juntos, por uma semana. Ele encontra a casa ideal e, ao fazer os cálculos corretos, informa ao grupo que o custo individual do aluguel após o rateio seria de R$ 75,00 por pessoa.

Os amigos então concordam em fechar o contrato e alugar a casa. Contudo, o dono do imóvel, por saber da grande procura por casas nesse período, decide fazer um reajuste no valor inicialmente acordado, aumentando o aluguel em R$ 120,00. Por sorte, outros dois amigos se juntam ao grupo para participar da comemoração e assim um novo rateio foi feito e cada um dos participantes deverá pagar R$ 72,00 para alugar a casa.

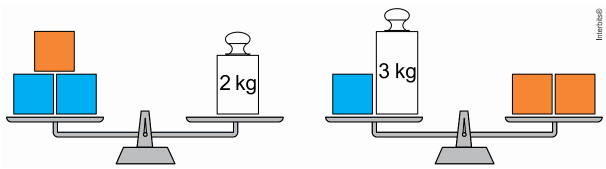
Qual o valor total, após o reajuste, do aluguel do imóvel que eles pagarão?

- Ⓐ R$ 600,00
- Ⓑ R$ 640,00
- Ⓒ R$ 680,00
- Ⓓ R$ 700,00
- Ⓔ R$ 720,00

Questão 02

(Ronaebson)

Três cubos laranjas idênticos e três cubos azuis idênticos estão equilibrados em duas balanças de pratos, também idênticas, conforme indicam as figuras.



Se colocássemos, exclusivamente, um cubo laranja em um prato da balança, quantos cubos azuis deveriam ser colocados no outro prato, para que a balança equilibrasse?

- Ⓐ 9
- Ⓑ 8
- Ⓒ 7
- Ⓓ 6
- Ⓔ 5

Questão 03

(Ronaebson)

Dayana e Irlanda colecionam canetinhas de colorir. Trocam, destrocam e a coleção vai sempre aumentando e se diversificando. Num dado momento, elas tiveram o seguinte diálogo:

Nesse momento, o total de cantetinhas que elas possuem juntas é

Ⓐ 15.
Ⓑ 25.
Ⓒ 30.
Ⓓ 36.
Ⓔ 40.

Questão 04

(Ronaebson)

Como motivação para sua aula sobre Sistemas Lineares, o professor de matemática chamou à frente da sala de aula três alunas: Camilly, Esther e Fernanda. Ele orienta que cada aluna revele para suas outras duas colegas os números correspondentes as suas respectivas massas corporais, em quilogramas, sem dizer ao professor. Em seguida, cada uma delas deve simultaneamente trocar o seu número pela soma dos números das outras duas. Por exemplo, Camilly passa a ter a soma dos números de Esther e Fernanda. O professor pede então que elas repitam esse processo mais uma vez.

Após concluírem a segunda troca, ele pede que elas falem os números obtidos. Camilly respondeu 216, Esther respondeu 220 e Fernanda respondeu 224.

As massas corporais, em quilogramas, de Camilly, Esther e Fernanda, respectivamente, foram

Ⓐ 51, 55 e 59.
Ⓑ 52, 56 e 61.
Ⓒ 52, 54 e 59.
Ⓓ 53, 55 e 58.
Ⓔ 53, 55 e 59.

Questão 05

(UPE-SSA_2018)

A loja *Bem Barato* está com a seguinte promoção: "Na compra de uma *geladeira*, uma *lava-roupa tanquinho* e um *forno de micro-ondas*, todos da marca Elizabeth III, o cliente paga R$ 1.530,00 em 8 vezes sem juros". Se a geladeira custa o triplo do forno de micro-ondas e custa 360 reais a mais que a *lava-roupa tanquinho*, quanto o cliente pagará se comprar apenas a *lava-roupa tanquinho* e *o forno de micro-ondas*?

Ⓐ 840 reais
Ⓑ 805 reais
Ⓒ 780 reais
Ⓓ 750 reais
Ⓔ 720 reais

Questão 06

(Ronaebson)

O coordenador de um aulão tenta dispor os ao longo do espaço reservado em um quadrado cheio, ou seja, número de linhas igual ao número de colunas, com os alunos colocados em filas paralelas aos lados e igualmente espaçados. Depois de um primeiro arranjo, sobram-lhe 326 alunos. Em seguida, experimenta colocar mais 3 alunos em cada fila, mas para completar o quadrado faltam-lhe 253 alunos.

Qual o número total de alunos que irão assistir a esse aulão?

Ⓐ 579
Ⓑ 8772
Ⓒ 9025
Ⓓ 9351
Ⓔ 9604

Questão 07

Uma casa de eventos tem capacidade para 300 pessoas e, em uma noite de espetáculo, todos os bilhetes, dos quais alguns eram meia-entrada, foram vendidos. Sabe-se que, se a apresentação tivesse ocorrido antes da existência de tal benefício, a renda obtida seria equivalente à renda de 260 bilhetes.

Quantas meias-entradas foram vendidas nessa noite de espetáculo?

Ⓐ 40
Ⓑ 60
Ⓒ 80
Ⓓ 100
Ⓔ 120

Questão 08

(Ronaebson)

Um grupo de amigos alugou um mini ônibus para uma excursão, acertando um valor total de R$ 342,00. Quando chegaram da viagem, três dos amigos não tinham dinheiro para pagar sua cota. Por isso, os outros amigos tiveram que completar o total, pagando, cada um deles, R$ 19,00 a mais.

Qual o número de pessoas do grupo (pagantes ou não)?

Ⓐ 6
Ⓑ 9
Ⓒ 12
Ⓓ 13
Ⓔ 18

Questão 09

(Ronaebson)

Expedito decidiu distribui R$ 221,00 para seus netos, dando a mesma quantia inteira (em reais) para cada um e percebeu que sobrariam R$ 11,00. Então, ele pensou em diminuir em R$ 2,00 a quantia de cada um e percebeu que sobrariam R$ 41,00. Por fim, ele distribuiu apenas R$ 195,00.

Quanto ganhou cada neto?

Ⓐ R$ 13,00
Ⓑ R$ 14,00
Ⓒ R$ 15,00
Ⓓ R$ 19,00
Ⓔ R$ 21,00

Questão 10

(Ronaebson)

Numa de suas viagens da sua casa a escola de Nergwarts, o jovem Perry Hotter fez uma parada depois de percorrer 2/3 do trajeto. Logo depois percorreu 1/5 do que faltava, parando pra fazer compras no Beco Poligonal. Nesse momento, ele percebeu que ainda restavam 88 km para chegar ao seu destino.

A distância total percorrida por Perry Hotter ao longo de todo esse trajeto foi

Ⓐ 660 km.
Ⓑ 480 km.
Ⓒ 420 km.
Ⓓ 330 km.
Ⓔ 165 km.

Questão 11

(Fuvest_2020)

Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

Ⓐ 26
Ⓑ 38
Ⓒ 42
Ⓓ 62
Ⓔ 68

Questão 12

(CMRJ_2020)

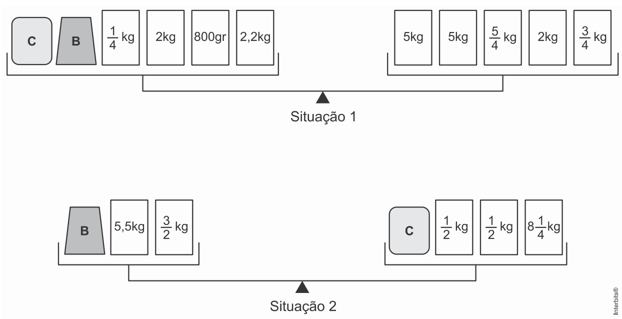
Um casal de feirantes está em sua barraca fazendo cálculos com o peso das frutas. Descobriram que 3 melões e 8 mangas pesam ao todo 5000 gramas. Admitindo-se que as frutas de mesmo tipo tenham o mesmo peso, se um melão pesa tanto quanto 4 mangas, quanto pesa cada melão?

Ⓐ 250 g
Ⓑ 1 kg
Ⓒ 0,85 kg
Ⓓ 900 g
Ⓔ 0,75 kg

Questão 13

(CFTMG_2019)

Considere duas situações distintas de equilíbrio entre os pratos de uma mesma balança, em que foram pesados um mesmo saco de cenouras e um mesmo saco de batatas, conforme representados abaixo.



A razão C/B entre o peso do saco de cenouras (C) e o peso do saco de batatas (B) é

Ⓐ 1.
Ⓑ 37/61.
Ⓒ 3/5.
Ⓓ 13/22.

Questão 14

(ESPM_2019)

Um menino possui 29 moedas de 10 centavos e 15 moedas de 25 centavos. O número de maneiras diferentes que ele tem para formar 5 reais é igual a:

A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

Questão 15

(CP2_2019)

Jorge, Marcos e Paulo são três irmãos que adoram colecionar figurinhas e também adoram charadas. Como eles têm uma prima, Lavínia, que também adora decifrar enigmas, propuseram a ela o seguinte problema:

- Jorge e Marcos têm, juntos, 110 figurinhas.
- Jorge e Paulo têm, juntos, 73 figurinhas.
- Marcos e Paulo têm, juntos, 65 figurinhas.
- Quem tem mais figurinhas e quantas são elas?

Se Lavínia conseguir decifrar o enigma, sua resposta será

A Paulo, com 14 figurinhas.
B Marcos, com 56 figurinhas.
C Jorge, com 59 figurinhas.
D Jorge e Marcos, ambos com 55 figurinhas.

Questão 16

(Ronaebson)

Foram enviados 12 caixas de livros com 36 livros cada uma para a biblioteca do curso Matemática Criativa. A secretária vai organizá-los numa estante que possui n prateleiras e foi recomendado a ela que, independente do número de prateleiras a serem usadas, os livros devem estar igualmente distribuídos entre as prateleiras, sem que haja sobras.

Durante o processo de organização, a secretária percebeu que se ela usasse todas as prateleiras, ela colocaria uma quantidade x de livros por prateleira. Entretanto, se ela usasse duas prateleiras a menos, ela deveria dispor 18 livros a mais por prateleira, ou seja, ela deveria colocar $x + 18$ em cada prateleira utilizada.

Qual a quantidade de prateleiras disponíveis nessa estante?

A 36
B 24
C 8
D 6
E 3

Questão 17

(IFPE_2019)

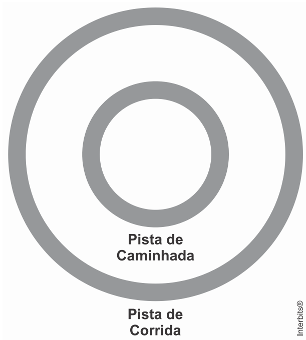
Adriano ganhou um pote de bombons. Ele quer separá-los em sacos com a mesma quantidade de bombons em cada um. Se Adriano colocar quatro bombons em cada saco, ele usará uma certa quantidade de sacos e sobrará um bombom. Se Adriano colocar cinco bombons em cada saco, ele usará quatro sacos a menos e sobrarão três bombons. O pote que Adriano ganhou tem, exatamente, a seguinte quantidade de bombons

A 73.
B 13.
C 52.
D 33.
E 93.

Questão 18

(COTIL_2019)

Em um dos parques da cidade existem duas pistas: uma de caminhada e outra de corrida. Elas possuem uma configuração circular e concêntrica (mesmo centro), como mostra a figura. O atleta Bira, diariamente, caminha e corre nessas pistas. Este, fazendo uso de um podômetro (aparelho utilizado para medir passos), notou, no primeiro dia, que, dando uma volta na pista de caminhada e três na pista de corrida, totalizou 2600 passos. No segundo dia, foram duas voltas na pista de caminhada e duas na pista de corrida, totalizando 2000 passos.



Sabendo que um passo de Bira mede 1,5 m, quanto mede a pista de corrida?

A 200 m.
B 300 m.
C 800 m.
D 1200 m.
E 1600 m.

Questão 19

(UNIOESTE_2019)

José precisa pesar três peças de metal A, B e C. Mas, a balança que ele dispõe não é precisa para pesos menores do que 1kg. José decide então pesar as peças de duas em duas. A e B juntas pesam 1600g, B e C juntas pesam 1400g e A e C juntas pesam 1700g.

Nestas condições, qual o peso da peça mais leve?

- A 550 g.
- B 650 g.
- C 700 g.
- D 950 g.
- E 1400 g.

Questão 20

(CFTMG_2019)

Uma coleção de doze livros foi distribuída entre Augusto e Bárbara. Se Augusto tivesse recebido três livros a mais do que recebeu dessa coleção, então a quantidade de livros recebida por ele seria igual ao dobro da quantidade de livros recebida por Bárbara. O número de livros que Bárbara recebeu é igual a

- A 8.
- B 7.
- C 5.
- D 4.

Questão 21

(PUCCamp_2018)

No início de um dia de coleta de lixo para *reciclagem,* foram usados quatro recipientes de coleta, todos vazios e de mesmo peso.

Ao final do dia, o recipiente com vidro pesava 3 kg, a soma do peso dos recipientes com metal e com plástico era igual ao peso do recipiente com papel e, por fim, o peso do recipiente com metal superava o peso do recipiente com plástico em 1,2 kg. Se a soma dos pesos dos quatro recipientes, ao final desse dia, era igual a 8 kg, então, a coleta de papel superou a de metal em

- A 500 g.
- B 450 g.
- C 1,45 kg.
- D 1,85 kg.
- E 650 g.

Questão 22

(ESPM_2018)

André comprou uma calça, três camisetas e duas cuecas por R$ 420,00. Se tivesse comprado duas calças e uma cueca teria gasto R$ 285,00. Se ele tivesse comprado apenas uma peça de cada tipo, teria pago a importância de:

- A R$ 195,00
- B R$ 200,00
- C R$ 215,00
- D R$ 220,00
- E R$ 235,00

Questão 23

(IFBA_2018)

Na Pizzaria “Massa Dez”, verificou-se que o valor financeiro que os amigos Kiko, Bené e Zazá tinham, em reais, dependia de resolver o seguinte problema:

- a média aritmética dos valores financeiros dos amigos citados era R$ 30,00;
- a média aritmética dos valores financeiros de Bené e Zazá era R$ 20,00;
- Kiko tinha R$ 30,00 a mais que Bené;

A partir dessas informações, podemos afirmar que

- A Kiko tem R$ 40,00 a mais que Zazá.
- B Bené tem R$ 10,00 a mais que Zazá.
- C Zazá tem o mesmo valor financeiro que Kiko.
- D O valor financeiro de Kiko corresponde à soma dos valores financeiros de Bené e Zazá.
- E Zazá tem o mesmo valor financeiro que Bené.

Questão 24

(IFSUL_2017)

O Brasil foi pioneiro na utilização de carros bicombustíveis, ou seja, veículos que podem ser abastecidos com gasolina ou com álcool.
Considere que, em um determinado posto de combustíveis, o preço de 2 litros de gasolina com mais 4 litros de álcool é R$ 20,00. Também sabe-se que 1 litro de gasolina juntamente com 12 litros de álcool é vendido por R$ 40,00.

É correto afirmar que, nesse posto, cada litro de álcool custa

- A R$ 2,50
- B R$ 3,00
- C R$ 3,50
- D R$ 4,00

Questão 25

(FAMEMA_2017)

Uma pessoa comprou 2 pacotes de algodão, 5 rolos de gaze e 3 rolos de esparadrapo. Na farmácia onde realizou a compra, o preço de um pacote de algodão mais um rolo de gaze e mais um rolo de esparadrapo é R$ 16,00. Um rolo de esparadrapo custa R$ 2,00 a menos que um pacote de algodão e R$ 1,00 a mais que um rolo de gaze. Sabendo que essa pessoa pagou a compra com uma nota de R$ 50,00, o valor do troco recebido foi

Ⓐ R$ 0,50.
Ⓑ R$ 1,00.
Ⓒ R$ 1,50.
Ⓓ R$ 2,50.
Ⓔ R$ 2,00.

Questão 26

(IFPE_2017)

Carlos e Renata estavam prestes a se casar e decidiram conversar com o gerente do banco em que ambos possuíam conta para ver a possibilidade de fazer o financiamento de um novo apartamento. Em uma conversa informal, o gerente lhes informou que, mesmo juntando o saldo dos dois, ainda seria necessário um valor de R$ 4100,00 para pagar a entrada no valor de R$ 12000,00. Renata não lembrava do valor que tinha na conta, mas sabia que possuía R$ 500,00 a mais que Carlos.

É CORRETO afirmar que Carlos possuía

Ⓐ R$ 3500,00 em sua conta.
Ⓑ R$ 4000,00 em sua conta.
Ⓒ R$ 4200,00 em sua conta.
Ⓓ R$ 3700,00 em sua conta.
Ⓔ R$ 2800,00 em sua conta.

Questão 27

(UPE-SSA_2017)

Márcia e Marta juntas “pesam” 115 kg; Marta e Mônica “pesam” juntas 113 kg; e Márcia e Mônica “pesam” juntas 108 kg. Qual é a soma dos “pesos” de Márcia, Marta e Mônica?

Ⓐ 205 kg
Ⓑ 195 kg
Ⓒ 187 kg
Ⓓ 175 kg
Ⓔ 168 kg

Questão 28

(IFSUL_2017)

As idades de um casal são caracterizadas por dois números naturais desconhecidos, x e y. A soma das idades desse casal é de 64 anos e a diferença das idades é de 2 anos.

Dessa forma, é correto afirmar que o produto das idades é

Ⓐ 1021.
Ⓑ 1022.
Ⓒ 1023.
Ⓓ 1024.
Ⓔ 1025.

Questão 29

(UFPB)

Marilei vende, em reais, sacolas descartáveis dos tipos I, II e II, a preços de x, y e z, respectivamente. Os resultados de suas vendas, ao longo de três dias consecutivos, estão representados na tabela a seguir:

Dias	Sacola Tipo I	Sacola Tipo II	Sacola Tipo III	Total (R$)
Primeiro	0	1	2	13,00
Segundo	5	2	1	21,00
Terceiro	5	1	1	18,00

Com base na tabela, o valor de $x + y + z$ é igual a

Ⓐ R$ 30,00.
Ⓑ R$ 25,00.
Ⓒ R$ 20,00.
Ⓓ R$ 15,00.
Ⓔ R$ 10,00.

Questão 30

(Ronaebson)

Diz a lenda que o grande geômetra Euclides compôs o seguinte problema:
“Uma mula e um burro estavam cambaleando pela estrada, cada qual carregando vários sacos pesados idênticos. O burro começou a reclamar, soltando um terrível grunhido, até que a mula se encheu.
– Do que você está reclamando? Se me der um saco, vou carregar o dobro de sacos que você! E se eu lhe der um saco, carregaremos a mesma carga.

Qual o total de sacos que o burro e a mula, juntos, carregavam?

Ⓐ 5.
Ⓑ 7.
Ⓒ 10.
Ⓓ 12.
Ⓔ 24.

Questão 31

(Ronaebson)

Yoqui leva suas atividades físicas muito a sério, ele tem uma rotina de treino muito bem definida e monitora sua dieta de perto. Em virtude do volume de treino e das metas estabelecidas, o seu nutricionista recomendou a ingestão de dois tipos específicos de proteínas, sendo 270 g de *inchoína* e 305 g de *muscolina* por mês. Para certificar-se de que segue corretamente o regime, Yoqui se ampara em dois suplementos alimentares, um sob a forma sólida cujo nome comercial é *Crescimentum* e outro sob a forma líquida, comercializado com o nome *Marombadum*.

As quantidades de cada tipo de proteína em cada um dos potes dos suplementos alimentares comercializados são dadas na tabela a seguir.

	Crescimentum	Marombadum
inchoína	30g	20g
musculina	25g	30g

Para atender as recomendações do nutricionista, Yoqui deverá comprar

Ⓐ 5 potes de Crescimentum e 6 potes de Marombadum.
Ⓑ 6 potes de Crescimentum e 5 potes de Marombadum.
Ⓒ 9 potes de Crescimentum e 4 potes de Marombadum.
Ⓓ 4 potes de Crescimentum e 9 potes de Marombadum.
Ⓔ 7 potes de Crescimentum e 5 potes de Marombadum.

Questão 32

(Ronaebson)

Lairton fez um simulado modelo ENEM, isto é, um simulado composto por uma prova de linguagens, ciências humanas, ciências da natureza, matemática e uma redação. Quando perguntou do seu resultado, o professor fez um pequeno suspense e disse:

- O número de questões erradas nas provas de matemática e de natureza juntas foi igual a 8.
- O número de questões erradas nas provas de matemática e de humanas juntas foi igual a 8.
- O número de questões erradas nas provas de linguagens e humanas juntas foi igual a 11.
- O número de questões erradas nas provas de linguagens e natureza juntas foi igual a 11.

Dado que a prova do ENEM tem 180 questões objetivas, o total que questões que Lairton acertou nessa prova foi

Ⓐ 19.
Ⓑ 40.
Ⓒ 152.
Ⓓ 159.
Ⓔ 161.

Questão 33

(Ronaebson)

Aciole, um pequeno comerciante de sua cidade, comprou n canecas térmicas por p reais cada, sendo p um número inteiro positivo.

Ele decidiu contribuir com uma campanha de arrecadação de fundos de uma igreja da comunidade vendendo para o bazar dessa igreja duas canecas pela metade do preço que comprou. As demais canecas ele vendeu no seu comércio com um lucro de 8 reais cada.

Dado que o lucro total foi de 72 reais, qual o menor valor possível para o custo que Aciole teve com a compra das canecas?

Ⓐ 88
Ⓑ 96
Ⓒ 108
Ⓓ 144
Ⓔ 216

Questão 34

(Ronaebson)

O restaurante público do campus do IFPB de Campina Grande distribui diariamente, na hora do almoço, 250 refeições contendo os ingredientes arroz, feijão e carne, os quais pesam juntos, em cada refeição, 500 gramas. Sabe-se ainda que em cada refeição servida:

- a quantidade de arroz é o dobro da quantidade de feijão;
- a quantidade de carne é 50g menor que a quantidade de arroz.

A quantidade de feijão utilizada por dia para preparar todas as refeições distribuídas é de

Ⓐ 27,5 kg.
Ⓑ 29,6 kg
Ⓒ 30,0 kg
Ⓓ 36,0 kg
Ⓔ 44,4 kg

ANOTAÇÕES:

Gabarito _ Exercícios de Fixação
Sistemas Lineares

Questão	Resposta
F.1	a) y=1 b) x=10 c) Sim d) infinitas
F.2	$S = \{(12 + 3y, y), y \in \mathbb{R}\}$
F.3	$S = \{(y + 2z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$
F.4	$g + 2c = 7$ 4 soluções
F.5	a) $p + 2a + 3v = 8$ b) 2 c) 4
F.6	3 homens
F.7	$b = 2d$
F.8	g =74 e c=26
F.9	a=18 e e=7
F.10	25 litros
F.11	20
F.12	78
F.13	$S = \{(0,5, -1)\}$
F.14	A = 26 milhões B = 16 milhões C = 8 milhões
F.15	197

Gabarito _ Sistemas Lineares			
Hora de Praticar			
Questão	**Resposta**	**Questão**	**Resposta**
01	E	**18**	D
02	B	**19**	B
03	E	**20**	C
04	A	**21**	E
05	E	**22**	E
06	D	**23**	E
07	C	**24**	B
08	B	**25**	B
09	A	**26**	D
10	D	**27**	E
11	D	**28**	C
12	B	**29**	E
13	D	**30**	D
14	B	**31**	A
15	C	**32**	E
16	C	**33**	B
17	A	**34**	A