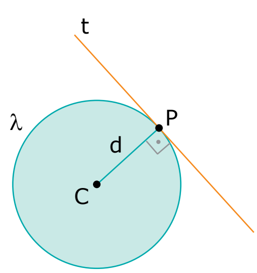
Posições Relativas à Circunferência

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

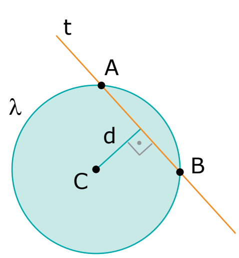
Considere, num plano, uma reta **t** e uma circunferência λ de centro **C** e raio **r**. Seja **d** a distância de **C** até a reta **t**. Em relação a λ, a reta **t** ocupa uma das três posições:

1ª) **t** é tangente a λ se, e somente se, d = r.



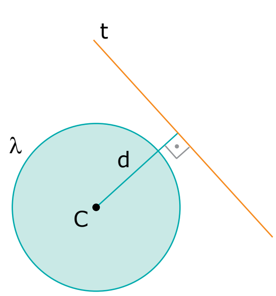
d = r

2ª) **t** é secante a λ se, e somente se, d < r.



d < r

3ª) **t** é exterior a λ se, e somente se, d > r.



d > r

Caso a reta **t** seja tangente ou secante à circunferência λ, obtemos os pontos de interseção resolvendo o sistema formado pelas equações de **t** e λ.

Assim, sendo Ax + By + C = 0 a equação de **t** e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ a equação de λ, temos o sistema:

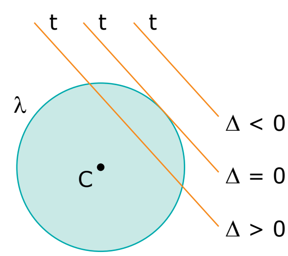
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & \text{(I)} \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Esse sistema pode ser resolvido facilmente pela substituição de (I) em (II), chegando-se a uma equação do 2º grau de uma incógnita. Sendo Δ o discriminante dessa equação, temos que:

i) Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e distintas (**t** é secante a λ).

ii) Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais e iguais (**t** é tangente a λ).

iii) Se $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais (**t** é exterior a λ).



Exemplos:

1º) Qual é a posição relativa entre a reta (t) y = x + 1 e a circunferência (λ) $x^2 + y^2 = 2$?

1º modo

Comparar o raio **r** com a distância **d** do centro da circunferência até a reta.

λ: $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow C(0, 0)$ e $r = \sqrt{2}$

t: x − y + 1 = 0

Logo:

$$d(C, t) = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \Rightarrow d(C, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(C, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, d < r. Portanto, **t** é secante a λ.

2º modo

Resolver o sistema formado pelas equações de **t** e λ.

$$\begin{cases} y = x + 1 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$x^2 + (x + 1)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = (2)^2 - 4.(2).(-1) = 12 \Rightarrow \Delta > 0$

Portanto, $\Delta > 0$. Então, **t** é secante a λ.

2º) Obter a equação da circunferência do centro C(1, 2), tangente à reta t: 3x + 4y + 4 = 0.

O raio da circunferência é igual à distância do centro até a reta.

$$r = d(C, t) = \frac{|3.1 + 4.2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

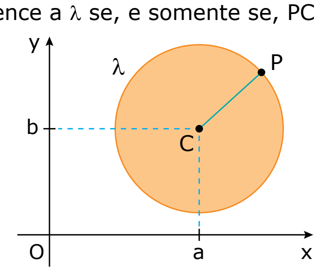
Portanto, a equação da circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UM PONTO E UMA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos, num plano cartesiano, uma circunferência λ: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Em relação a λ, um ponto $P(x_0, y_0)$ do plano ocupa uma das três posições:

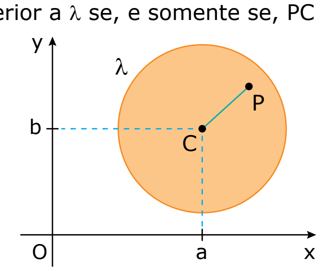
i) **P** pertence a λ se, e somente se, PC = r.



Logo, $PC^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0}$$

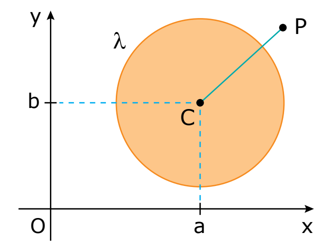
ii) **P** é interior a λ se, e somente se, PC < r.



Logo, $PC^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0}$$

iii) **P** é exterior a λ se, e somente se, PC > r.



Logo, $PC^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0}$$

Exemplos:

1º) Dada a circunferência λ: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$, qual é a posição, em relação a λ, do ponto A(3, 1)?

Substituindo-se as coordenadas de **A** no 1º membro da equação de λ, temos:

$3^2 + 1^2 + 2 . 3 - 2 . 1 - 7 = 7 > 0$

Portanto, **C** é exterior a λ.

2º) Dada a circunferência λ: $x^2 + y^2 = 1$, qual é a posição, em relação a λ, do ponto A(0, –1)?

Substituindo as coordenadas de **A** no 1º membro da equação de λ, temos:

$0^2 + (-1)^2 - 1 = 0$

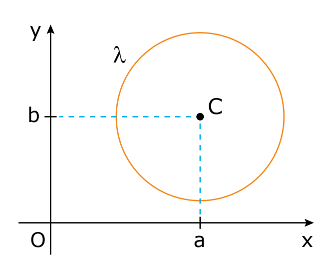
Portanto, **A** pertence a λ.

LUGARES GEOMÉTRICOS DE PONTOS

Considere uma circunferência λ de centro C(a, b) e raio **r**,

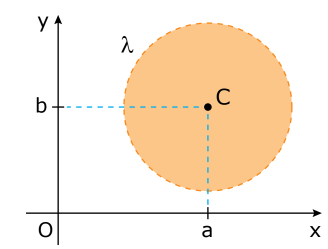
i) Os pontos que satisfazem a equação

$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ são os pontos de λ.



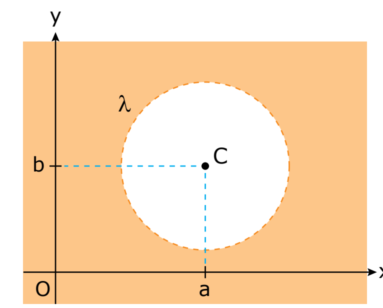
ii) Os pontos que satisfazem a inequação

$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ são os pontos interiores a λ.



iii) Os pontos que satisfazem a inequação

$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ são os pontos exteriores a λ.



Exemplos:

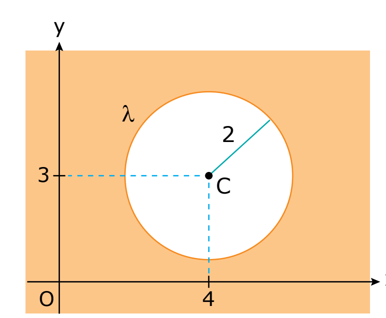
1º) Representar graficamente: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 \geq 0$

$(x^2 - 8x + ...) + (y^2 - 6y + ...) \geq -21 \Rightarrow$

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) \geq -21 + 16 + 9 \Rightarrow$

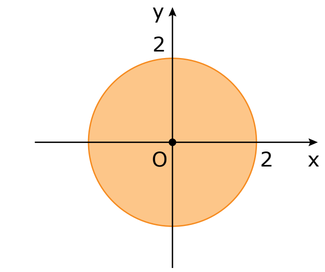
$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 \geq 4$

Essa inequação representa os pontos da circunferência de centro (4, 3) e raio 2 e os pontos exteriores a ela.

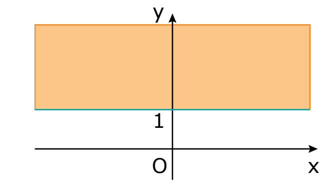


2º) Representar graficamente: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$

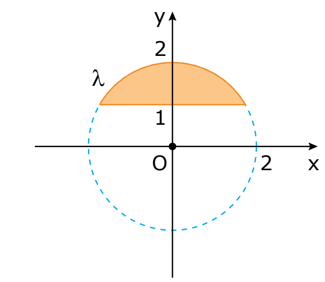
$x^2 + y^2 \leq 4$ é representada pelos pontos da circunferência de centro (0, 0) e raio 2 e pelos pontos interiores a ela.



$y \geq 1$ é representada pelos pontos de ordenada 1 e pelos pontos de ordenada maior que 1.



Portanto, o segmento circular λ a seguir é a representação dos pontos que satisfazem $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 1$.

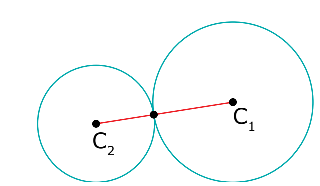


POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Dadas duas circunferências de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2 ($r_1 \geq r_2$), sabemos, da geometria plana, que:

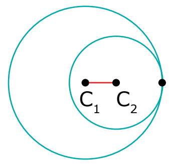
1º caso: Circunferências tangentes exteriormente

$$\boxed{d(C_1, C_2) = r_1 + r_2}$$



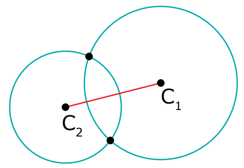
2º caso: Circunferências tangentes interiormente

$$\boxed{d(C_1, C_2) = r_1 - r_2}$$



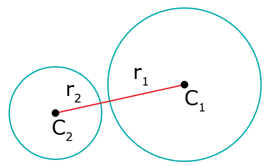
3º caso: Circunferências secantes

$$\boxed{r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2}$$



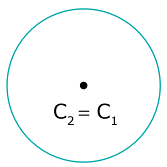
4º caso: Circunferências exteriores

$$\boxed{d(C_1, C_2) > r_1 + r_2}$$



Caso especial: Circunferências concêntricas

$$\boxed{d(C_1, C_2) = 0}$$



Exemplos:

1º) λ_1: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1(1, 0) \\ r_1 = 2 \end{cases}$

λ_2: $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_2(1, 1) \\ r_2 = \sqrt{2} \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = 1 \Rightarrow r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$

$\Rightarrow 2 - \sqrt{2} < 1 < 2 + \sqrt{2}$

(Circunferências secantes)

2º) λ_1: $(x - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} C_1(1, 0) \\ r_1 = 1 \end{cases}$

λ_2: $(x - 4)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} C_2(4, 0) \\ r_2 = 2 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = 3 \Rightarrow d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \Rightarrow 1 + 2 = 3$

$\Rightarrow 1 + 2 + 3$

(Circunferências tangentes exteriormente)

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UPF–2016) Considere, num referencial xy, a circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$. A equação que define uma reta tangente a essa circunferência é:

A) $x = 3$
B) $x = -3$
C) $y = 0$
D) $y = 5$
E) $x = 0$

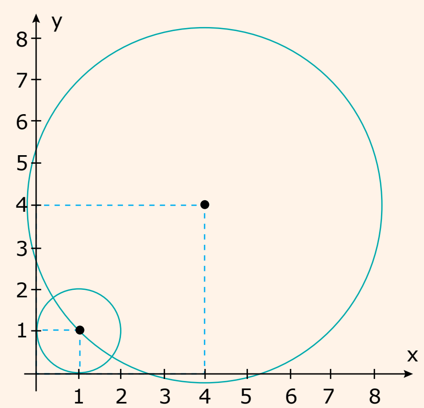
02. (PUC RS) O raio da circunferência centrada na origem que tangencia a reta de equação $y = x - 1$ é:

A) 1
B) $\frac{1}{2}$
C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
E) $\sqrt{2} - 1$

03. (UECE–2016) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, se a circunferência $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ possui **n** interseções com os eixos coordenados, então, o valor de **n** é:

A) 2.
B) 1.
C) 3.
D) 4.

04. (UEG-GO–2015) Observe a figura a seguir:



Sabendo-se que a circunferência de maior raio passa pelo centro da circunferência de menor raio, a equação da circunferência de maior raio é:

A) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 18 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 14 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 14 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 18 = 0$

05. (UECE–2016) No plano cartesiano usual, a equação da circunferência que contém os pontos (–4, 0), (4, 0) e (0, 8) é $x^2 + y^2 + my + n = 0$. O valor da soma $m^2 + n$ é:

A) 30.
B) 10.
C) 40.
D) 20.

06. (EEAR–2017) As posições dos pontos A(1, 7) e B(7, 1) em relação à circunferência de equação $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$ são, respectivamente,

A) interna e interna.
B) interna e externa.
C) externa e interna.
D) externa e externa.

07. (Fatec-SP) Considere que **R** é a região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem as sentenças $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$ e $x \leq y$. A área de **R**, em unidades de superfície, é:

A) π
B) 2π
C) π^2
D) 4π
E) $4\pi^2$

08. (IMED-SP–2015) No plano cartesiano Oxy, a circunferência **C** com centro no ponto P(4, –2) é tangente ao eixo das ordenadas. Nessa situação, a equação geral dessa circunferência corresponde a:

A) $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

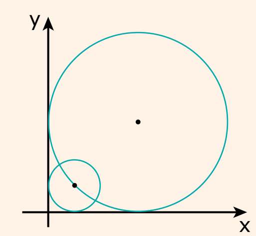
01. (Mackenzie-SP–2018) Os valores de **a** para os quais as circunferências de equações $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 16$ são tangentes exteriormente são

A) –2 e 8.
B) 2 e 8.
C) –8 e 2.
D) 0 e 6.
E) –6 e 0.

02. (FGV) No plano cartesiano, uma circunferência tem centro C(5, 3) e tangencia a reta de equação $3x + 4y - 12 = 0$. A equação dessa circunferência é:

A) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 36 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 49 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 16 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 9 = 0$

03. (UNIFESP) Duas circunferências são tangentes aos eixos coordenados: o centro da circunferência menor pertence à circunferência maior, como mostra a figura a seguir:



Se o raio da maior é 2 cm, a medida, em centímetros, do raio da menor é:

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) $2 - \sqrt{2}$
C) $\sqrt{2} - 1$
D) $\frac{3}{5}$
E) $\frac{2}{3}$

04. (UNIFESP) Determine a área da região do plano cartesiano definida pelo sistema de inequações:

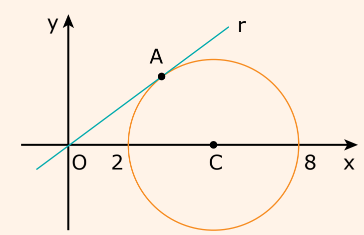
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq x \end{cases}$$

A) $3\pi + 2$
B) 2π
C) $2\pi - 1$
D) π
E) $\pi - 2$

05. (UFOP-MG) A equação da circunferência de centro P(3, 1) e tangente à reta **r**: $3x + 4y + 7 = 0$ é:

A) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 2y - 6x - 6 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

06. (Umesp) Na figura a seguir, a circunferência λ, com centro **C**, e a reta **r** são tangentes no ponto **A**.



As coordenadas do ponto **A** são, respectivamente,

A) 3 e 4.
B) 4 e 3.
C) $\frac{16}{5}$ e $\frac{12}{5}$.
D) $\frac{5}{2}$ e $\frac{15}{8}$.
E) $\frac{8}{3}$ e 2.

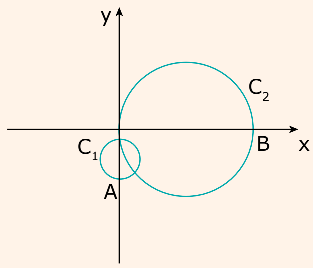
07. (UFPR) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 25 = 0$, no ponto P(3, 4), é:

A) $-3x + 4y - 7 = 0$
B) $3x + 4y + 25 = 0$
C) $3x - 4y + 7 = 0$
D) $4x + 3y - 24 = 0$
E) $3x + 4y - 25 = 0$

08. (UERN) Sejam duas circunferências C_1 e C_2, cujas equações são, respectivamente, iguais a

$$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 - 12x = 0.$$

A distância entre os pontos **A** e **B** dessas circunferências, conforme indicada na figura, é



A) 13.
B) 14.
C) 17.
D) 19.

09. (UFJF-MG) Considere, no plano cartesiano, uma circunferência de raio 3, interceptando o eixo x, tangente à reta y = 4 e cujo centro pertence à reta x = 5. A soma das abscissas dos pontos de interseção dessa circunferência com o eixo x é igual a:

A) 6
B) $5 + \sqrt{8}$
C) 10
D) $10 + 2\sqrt{8}$
E) 12

10. (UDESC–2015) Considerando que as retas $y = -x + 4$, $y = -x$, $y = x - 2$ e $y = x + 2$ e tangenciam a circunferência **C**. É correto afirmar que a equação de **C** é:

A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$
B) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
E) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$

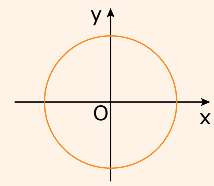
SEÇÃO ENEM

01. Um emblema de uma bandeira de uma escola de samba é uma figura geométrica definida por $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 \leq 0$ quando projetada em um plano cartesiano com **x** e **y** dados em metros. Esse emblema será pintado em duas cores separadas pela reta y = x. A região acima da reta será pintada de verde, e a região abaixo será pintada de rosa. Considerando que a escola de samba pretende confeccionar 100 dessas bandeiras e que uma lata de tinta cobre 4 m² do emblema, determine a quantidade mínima de latas de tinta rosa a serem utilizadas. Adote $\pi = 3{,}14$.

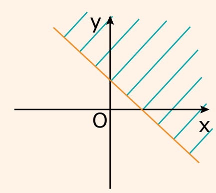
A) 225
B) 320
C) 354
D) 450
E) 500

02. Um ex-marido foi proibido pela Justiça de se aproximar da ex-mulher, devendo manter uma distância fixa mínima de sua residência, localizada na origem do sistema cartesiano. A região que melhor representa os pontos proibidos para o ex-marido se localizar é:

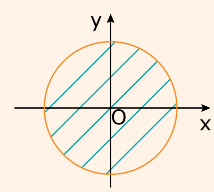
A)



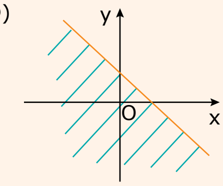
B)



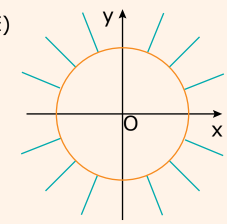
C)



D)



E)



GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. D
- 03. B
- 04. C
- 05. D
- 06. C
- 07. B
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. A
- 03. B
- 04. E
- 05. B
- 06. C
- 07. E
- 08. A
- 09. C
- 10. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %