DERIVAÇÃO

FUNÇÃO DERIVADA

Define-se função derivada de f no ponto x_0 o limite

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

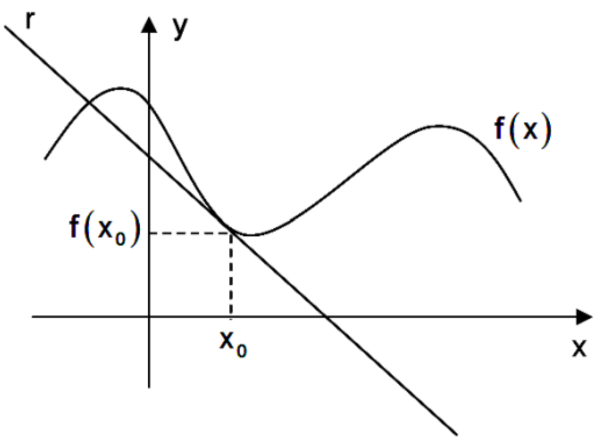
se este existir e for finito.

Notações

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\frac{\sigma y}{\sigma x}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A equação da reta r tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0;y_0)$, em que f derivável, é



$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- $v=\dfrac{dx}{dt}$
- $a=\dfrac{dv}{dt}$
- $F=\dfrac{dp}{dt}$

DERIVADAS DE FUNÇÕES ELEMENTARES

$f(x)=c\Rightarrow f'(x)=0$		
$f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$		
$f(x)=a^x\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\ln a$	**CONSEQUÊNCIA**	$f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x$
$f(x)=\text{sen}x\Rightarrow f'(x)=\cos x$		
$f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\text{sen}x$		

REGRAS DE DERIVADAS

SOMA	$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$ $f'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)$			
PRODUTO	$f(x)=u_1(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)$ $f'(x)=u_1'(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)\cdot u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots u_1(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n'(x)$			
CONSEQUÊNCIAS	$f(x)=c\cdot g(x)\Rightarrow f'(x)=c\cdot g'(x)$	$f(x)=\left[u(x)\right]^n\Rightarrow f'(x)=n\cdot\left[u(x)\right]^{n-1}\cdot u'(x)$		
DIVISÃO	$f(x)=\dfrac{u_1(x)}{u_2(x)}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u_1'(x)\cdot u_2(x)-u_1(x)\cdot u_2'(x)}{\left[u_2(x)\right]^2}$			
CONSEQUÊNCIA	$f(x)=\text{tg}x\Rightarrow f'(x)=\sec^2 x$			
CADEIA	$f(x)=g\left[h(x)\right]\Rightarrow f'(x)=g'\left[h(x)\right]\cdot h'(x)$			
FUNÇÃO INVERSA	$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$	**CONSEQUÊNCIA**	$f(x)=\log_a x$ $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	
CONSEQUÊNCIAS	$f(x)=\text{arcsen}x$ $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\arccos x$ $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\text{arc tg}x$ $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\text{arc cotg}x$ $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

DERIVADAS SUCESSIVAS

A derivada de ordem n de uma função f é representada por $f^{(n)}$

Ex.1 A derivada de ordem **n** da função $f(x)=x.e^x$ para x = 1 é:

$$f(x)=x.e^x\begin{cases}f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x\ \therefore\ f'(x)=e^x\cdot(1+x)\\ f''(x)=e^x\cdot(1+x)\ \therefore\ f''(x)=e^x(1+x)+e^x\cdot 1\ \therefore\ f''(x)=e^x(2+x)\Rightarrow \boxed{f^{(n)}=e\cdot(n+1)}\\ f^{(n)}=e^x(n+x)\end{cases}$$

DERIVADA E CONTINUIDADE

Se uma função f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0. Mas, nem todas as funções contínuas em x_0 são deriváveis em x_0.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\end{cases}$$

VARIAÇÕES DAS FUNÇÕES

I. Através do estudo do sinal da primeira derivada da função $f(x)$ conseguimos analisar:

○ **crescimento** $\left(f'(x) > 0\right)$ ou **decrescimento** $\left(f'(x) < 0\right)$

○ **máximo relativo** $\left(f'(x) = 0\right)$ ou **mínimo relativo** $\left(f'(x) = 0\right)$

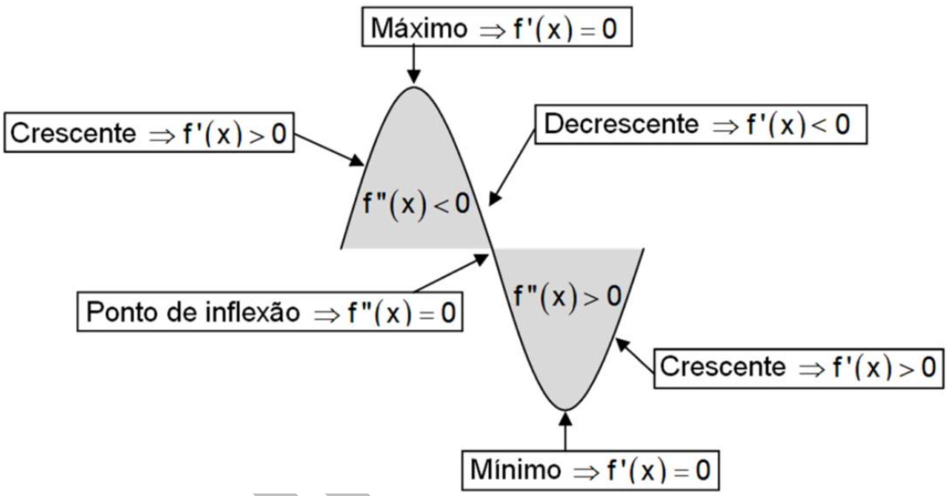
○ **extremantes** que são geralmente as raízes de $f'(x) = 0$

II. Através do estudo do sinal da segunda derivada da função $f(x)$ conseguimos analisar:

○ **a concavidade**

para cima $\left(f''(x) > 0\right)$ ou **para baixo** $\left(f''(x) < 0\right)$

○ **pontos de inflexão** (são pontos onde a curva muda de concavidade) que têm como abscissas as raízes da segunda derivada da função $f(x)$.



DERIVADA DE UMA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Seja uma função implícita do tipo:

$$f(x;y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y}$$

f_x : derivada parcial em relação a x. Deve – se, considerar $y = cte$

f_y : derivada parcial em relação a y. Deve – se, considerar $x = cte$

Ex. 1 - $f(x,y) = 2x^2 - 5y^3 + 2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = ?$

Ex. 2 - $f(x,y) = 4x^2 - 6xy = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = ?$

Ex. 3 - $f(x,y,z) = x^2 + y^3 - z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = ? \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = ? \end{cases}$

DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Se f é uma função de duas variáveis x e y, suas derivadas parciais são $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Se derivarmos essas derivadas mais uma vez, obteremos as derivadas parciais de segunda ordem, que são representadas por:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ex. 1 - $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ? \\ f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ? \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ? \\ f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ? \end{cases}$

Ex. 2 - $f(x,y) = e^{2x+5y} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ? \\ f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ? \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ? \\ f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ? \end{cases}$

T.01 (EFOMM) A razão da função $f(x)=a^{\frac{x}{2}}$ para a sua derivada de ordem n é:

a) $2^n \ln a$
b) $2^{-n} \ln a^n$
c) $2^n (\ln a)^{-n}$
d) $2^{n-1} \ln a$
e) $2^n \ln(a \cdot n)$

T.02 (EFOMM) A derivada primeira da função $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{9}(3\operatorname{sen}x-\cos x)$ tem a seguinte expressão:

a) $e^{3x}(\cos x+\operatorname{sen}x)$
b) $\dfrac{e^{3x}\cos x}{3}$
c) $\dfrac{4}{3}e^{3x}\operatorname{sen}x$
d) $\dfrac{10e^{3x}\operatorname{sen}x}{9}$
e) $\dfrac{e^{3x}\operatorname{sen}x}{3}$

T.03 (EFOMM) A reta tangente à curva $y=7x-3x^2$ no ponto P faz um ângulo de 45^o com o eixo x. O ponto P da curva tem coordenadas:

a) (0;0)
b) (3;6)
c) (2;2)
d) (1;4)
e) (-1;-10)

T.04 (EFOMM) A equação da reta normal do gráfico da função $y=e^{\operatorname{sen}(x^2-1)}$ no ponto (1;1) é:

a) $2y-x+3=0$
b) $y+2x-3=0$
c) $2y+x-3=0$
d) $y-2x+3=0$
e) $2y-x-3=0$

T.05 (EFOMM) As equações das retas tangentes à curva $y-2x+\dfrac{1}{x}=0$ que são paralelas à reta $y-3x+1=0$ são:

a) $y+3x+2=0$ e $y-3x-2=0$
b) $y-3x+2=0$ e $y-3x-2=0$
c) $y-3x+2=0$ e $y+3x-2=0$
d) $y+3x+2=0$ e $y+3x-2=0$
e) $y-3x-2=0$ e $y+3x-2=0$

T.06 (EFOMM) Sabendo que $f(x) = tg^2(3x+1)$, o valor de $f''\left(-\frac{1}{3}\right)$ é

a) 24
b) 20
c) 16
d) 22
e) 18

T.07 (EFOMM) Sabendo-se que $A = sen^2(2x)$ e $B = cos^2(2x)$, então, a derivada de $f(x) = 4A - 2A.B + \sqrt{B}$ no ponto $x = \frac{\pi}{6}$ rad vale

a) $3\sqrt{3}/2$
b) $\left(\sqrt{3}-1\right)/2$
c) $\left(\sqrt{3}+1\right)/2$
d) $4\sqrt{3}$
e) $-4\sqrt{3}$

T.08 (EFOMM) O gráfico de $f(x) = (x-3)^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$ tem uma assíntota horizontal r. Se o gráfico de f intercepta r no ponto $P = (a;b)$, então $a^2 + be^{sen^2 a} - 4a$ é igual a:

a) -3
b) -2
c) 3
d) 2
e) 1/2

T.09 (EFOMM) Sabendo que a velocidade de uma partícula é dada pela equação $v(t) = 2 + 3t + 5t^2$, pode-se afirmar que, no instante t = 5 s, sua aceleração é:

a) $28\ m/s^2$
b) $30\ m/s^2$
c) $36\ m/s^2$
d) $47\ m/s^2$
e) $53\ m/s^2$

T.10 (EFOMM) A deriva primeira da função $y = arctg\left[\frac{1-\cos x}{senx}\right]$ é

a) 1
b) $\cos x$
c) $senx$
d) $\sec x$
e) $1/2$

T.11 (EFOMM) Se $y = \log_e \sqrt{\frac{1+\text{sen}x}{1-\text{sen}x}}$. Determine a primeira derivada de y.

a) 1
b) $\cos x$
c) $\text{sen}x$
d) $\sec x$
e) $1/2$

T.12 (EFOMM) A derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\text{cossec}\, x - \text{sen}x}{\sec x - \cos x}}$ no ponto $x = -\pi/3$ é

a) -1
b) -3
c) $-1/3$
d) $-2/3$
e) $-4/3$

T.13 (EFOMM) Sendo $f(x) = \ln x$. Calcule $\left[f^{-1}(x)\right]'$.

a) x
b) e^x
c) ex
d) $1/e^x$
e) x^e

T.14 (EFOMM) Sabe-se que $f(x) = (x^2 - 1)^2$ e $g(x) = x \cdot \ln x$. É correto afirmar

I) $f'(1) = 0$

II) $g'(2) = \ln 2$

III) $f'(2) = g''(1/2) = -2$

IV) $f'(1) = f''(-1)$

V) $g'(2) = g''(2)$

a) apenas a firmação I é correta
b) todas as afirmações são incorretas
c) apenas I e III são afirmações corretas
d) todas as afirmações são corretas
e) apenas as afirmações I, II, IIII e IV

T.15 (EFOMM) A deriva de terceira ordem da função $f(x) = \text{tg}3x$ para $x = \pi/3$ é

a) 24
b) 34
c) 54
d) 64
e) 74

T.16 (EFOMM) Um carro em movimento obedece a seguinte função $S(t) = 5t^3 + 12t^2 - 8t$, t está em horas (h) e S está em quilômetros (km). Calcule a velocidade para t = 180 min.

a) 199 km/h
b) 299 km/h
c) 399 km/h
d) 499 km/h
e) 599 km/h

T.17 (EFOMM) Sabe-se que uma partícula move-se segundo a equação $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t - 2$, onde t é o tempo em segundos e S é a posição em metros. Pode-se afirmar que a aceleração da partícula, quando $t = 2s$, é

a) 3 m/s.
b) 5 m/s.
c) 7 m/s.
d) 8 m/s.
e) 10m/s.

T.18 (EFOMM) De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática L = R – C, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

a) 625
b) 781150
c) 1000
d) 250
e) 375

T.19 (EFOMM) Seja C uma circunferência de raio 2 centrada na origem do plano xy. Um ponto P do 1º quadrante fixado sobre C determina um segmento OP, onde O é a origem, que forma um ângulo de $\pi/4$ radianos com o eixo das abscissas. Pode-se afirmar que a reta tangente ao gráfico de C passando por P é dada por

a) $x + y - 2 = 0$.
b) $\sqrt{2}x + y - 1 = 0$.
c) $-\sqrt{2}x + y - 2 = 0$
d) $x + y - 2\sqrt{2} = 0$.
e) $x - y - 2\sqrt{2} = 0$.

T.20 (EFOMM) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 5^{\operatorname{sen} x}$ no ponto x = 0 é:

a) $y = (\ln 5)x + 1$
b) $y = (-\ln 5)x - 1$
c) $y = 5x + 1$
d) $y = x + 1$
e) $y = -x + 1$

T.21 (EFOMM) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x}$ no ponto de coordenadas $\left(5,\frac{1}{5}\right)$ será

a) $25y+x-10=0$
b) $25y+2x-10=0$
c) $25y-x+10=0$
d) $25y+x+10=0$
e) $25y-2x-10=0$

T.22 (EFOMM) Seja $C=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ com $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots\geq a_n$, o conjunto das n raízes da equação

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3-4\right)+\frac{5}{(x-2)^{-1}}=-4(x+1)+4x.$$

Determine o valor de $a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_n^n$.

a) -5
b) 7
c) 25
d) 36
e) 37

T.23 (EFOMM) Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a R$9,00, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento. Para cada redução de R$1,00 no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de

a) R$ 8,00.
b) R$ 7,00.
c) R$ 6,00.
d) R$ 5,00.
e) R$ 4,00.

GABARITO

01. c	**02. d**	**03. d**	**04. c**	**05. b**	**06. e**	**07. d**	**08. a**	**09. e**	**10. e**	**11. d**	**12. e**
13. b	**14. a**	**15. c**	**16. a**	**17. b**	**18. a**	**19. d**	**20. a**	**21. a**	**22. e**	**23. c**	