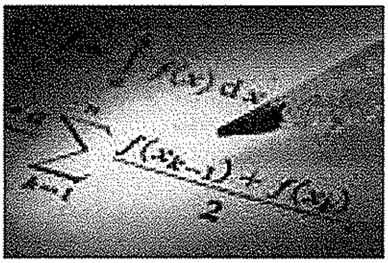
EsPCEx

CURSO PREPARATÓRIO
CIDADE
www.cursocidade.com.br

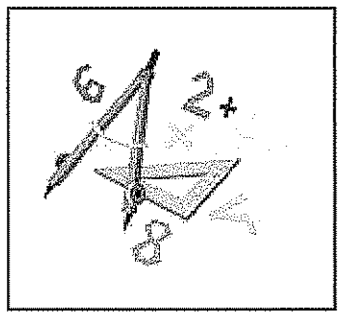
SCLN 113, Bloco "C" - Salas 207 a 210 - Telefones: (61) 3340-0433 / 8175-4509 / 9975-4464 - E-mail: cursocidade@iic.pro.br

ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO EXÉRCITO

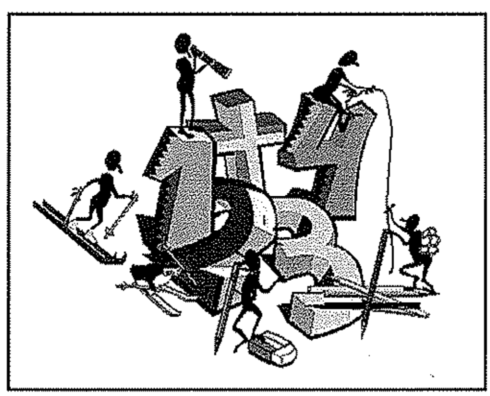
MATEMÁTICA



MATEMÁTICA 1



CADERNO 1



Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

EQUIPE

Diretor Geral
Luiz Alberto Tinoco Cidade

Diretora Executiva
Clara Marisa May

Diretor de Artes
Fabiano Rangel Cidade

Coordenação Geral dos Cursos Preparatórios
Francisco Gerden

Coordenação dos Cursos de Idiomas EAD
Dr. Daniel Soares Filho

Secretaria
Mariana Ramos

Editoração Gráfica
Edilva de Lima

Fonoaudióloga e Psicopedagoga
Mariana Fernandes Ramos – CRFa 12482-RJ/T-DF

Assessoria Jurídica
Luiza May Schmitz – OAB/DF – 24.164

Assessoria de Línguas Extrangeiras
Cleide Thieves (Poliglota-EEUU)
João Jorge Gonçalves (Poliglota-Europa)

Equipe de Professores

Idiomas
Luiz Cidade – Espanhol
Daniel Soares Filho – Espanhol (EAD)
Cleide Thieves – Inglês, Francês, Espanhol, Alemão (EAD)
João Jorge Gonçalves – Inglês, Francês Espanhol e Português
Leonardo dos Santos – Espanhol
Diego Fernandes – Espanhol
Márcia Mattos da Silva – Francês (EAD)
Marcos Henrique – Francês
Maristella Mattos Silva – Espanhol (EAD)
Monike Rangen Cidade – Espanhol (EAD)
Cacilda Leal do Nascimento – Espanhol
Mariana Ramos – Inglês (EAD)

Concursos
Cassia Braga – Portugês
Maria Antônia – Redação
Murilo Roballo – Matemática
Sormany Fernandes – História do Brasil
Francisco Roges – Geografia
Gerdean – Química
Gustavo Porto – História
Luiz Fernando – Português
Thiago Magalhães – Física

Agradecimentos

Em primeiro lugar, meu agradecimento especial e minha consideração a dois professores extraordiários – aqueles que me levaram a gostar de ensinar com excelência - Tide e Euzébio Cidade. (Olá, Mamãe e Papai!)

Um agradecimento sincero aos meus queridos alunos e minha excelente e dedicada equipe de professores, profissionais de qualidade ímpar que reúnen as qualidades de verdadeiros líderes na arte de educar, com desempenhos de incomensuráveis valores pedagógicos, reconhecidos por todos os alunos que passaram por nossa escola.

Finalizando um agradecimento muito especial a professora Márcia Mattos, que com dedicação e esmero auxiliou na confecção deste caderno de Prática Auditiva em Francês que apresenta as questões necessárias e fundamentais para um adestramento simples, rápido e eficaz para a prova de Credenciamento Linguístico. Esperamos que utilize esta obra, exercitando com dedicação cada item apresentado e pesquisando àqueles que apresentaram maior grau de dificuldade. Traga para a aula as questões cuja resposta não consiga encontrar ou envie-as por e-mail para seu tutor, caso seja aluno do curso presencial.

Aceite nossa companhia nesta viagem de treinamento rumo à seu Credenciamento Linguístico.

Bons Estudos!!

Luiz Cidade
Diretor

ÍNDICE

1 - Potências e Raízes

1. 1 Potenciação

Sendo um número real α e um número natural n, com $n \geq 2$, $\underbrace{a.\, a.\, ...\, a}_{n\, fatores} = a^n$ em que, a é a base e n é o expoente o resultado é a potência e a operação é a potenciação.

1. 2 Propriedades da potenciação.

a) $a^0 = 1\ (a \neq 0)$

b) $a^1 = a$

c) $1^n = 1$

d) $0^n = 0\ (a \neq 0)$

e) $a^m .\ a^n = a^{m+n}\ (m, n \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0)$

f) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ (a \neq 0)$

g) $(a.b)^n = a^n.b^n$

h) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}\ (b \neq 0)$

i) $(a^m)^n = a^{m.n}$

j) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\ \ (a \neq 0)$

1. 3 Raíz n - ésima

A raíz n - ésima de umnúmero x, é definido com um número a, tal que $a^n = x$ em que $n \geq 1$ e natural,

$\sqrt[n]{x} = a \Leftrightarrow a^n = x$.

O número x é o radiacado, n é o, indice, x e o valor da raiz e a operação é a radiciação.

exs:

$\sqrt{121} = 11$

$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$

$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

1. 4 Propriedades da radiciação.

a) $\sqrt[n]{a^n} \begin{cases} a, se\ \text{n é impar} \\ |a|, se\ n\ é\ par \end{cases}$

ex: $\sqrt{a^2} = |a|$

b) $\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a}\ .\ \sqrt[n]{b}$

c) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0,\ a > 0\ e\ b > 0$

d) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

e) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{m}} = \sqrt[n.m]{a}$

f) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Exercícios Comentados

01 Calcule o valor da expressão

$$E = \frac{3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 + 3^{-1}}{(-3)^3 + (-3)^2 + (-3)^1 + (-3)^0 + (-3)^{-1}}$$

Resolução:

$$E = \frac{27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3}}{-27 + 9 - 3 + 1 - \frac{1}{3}}$$

$$E = \frac{40 + \frac{1}{3}}{-20 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{120 + 1}{3}}{\frac{-60 - 1}{3}} = \frac{\frac{121}{3}}{\frac{-61}{3}}$$

$$E = -\frac{121}{61}$$

02 Sendo n inteiro, calcule o valor da expressão:
$E = (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+3} + (-1)^{n(n+1)}$

Resolução:

2n é par: 2n + 1 e 2n + 3 são ímpares e n(n+1) é par pois é o produto de dois inteiros consecutivos (um dos fatores é par) e todo produto de inteiros que tem pelo menos um fato par é par.

$$E=(-1)^{par}+(-1)^{ímpar}+(-1)^{ímpar}+(-1)^{par}$$
$$E=1-1-1+1$$
$$E=0$$

03 **(Ibmec-SP)** Os astrônomos estimam que, no universo visível, existem aproximadamente 100 bilhões de galáxias, cada uma com 100bilhões de estrelas. De acordo com estes números, se cada estrelas tiver, em média, 10 planetas a sua volta, então existem no universo visível aproximadamente

a) 10^{12} planetas
b) 10^{17} planetas
c) 10^{23} planetas
d) 10^{121} planetas
e) 10^{220} planetas

Resolução:

De acordo com o enuciado, o número visível de planetas no universo é aproximadamente 10 vezes 100 bilhões vezes 100 bilhões =

$$=10\cdot10^2\cdot10^9\cdot10^2\cdot10^9=10^{23}$$

04 **(Fuvest-SP)** Calcule $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28}+2^{30}}{10}}$

Resolução:

$$\sqrt[3]{\frac{2^{28}+2^{28}\cdot2^2}{10}}=\sqrt[3]{\frac{2^{28}(1+4)}{10}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2^{28}\cdot5}{10}}=\sqrt[3]{\frac{2^{28}}{2}}$$

$$=\sqrt[3]{2^{27}}=2^9=512$$

05 Calcule a quantidade de algarismo do número $2^{100}\cdot5^{96}$

Resolução: $2^{96}\cdot2^4\cdot5^{96}$

$$2^4\cdot2^{96}\cdot5^{96}$$
$$16\cdot10$$
$$16\underbrace{00....0}_{96\ zero\ s}$$

Logo, o número possui 98 algarismos.

Exercícios de Sala

01 Simplificar a expressão:

$$É=\frac{x^{3^2}-x^{2^3}+(x^2)^3+(x^3)^2}{x^3-x^2+2}$$

02 Qual dentre os números a seguir é o maior?

a) 3^{45}
b) 9^{20}
c) 27^{14}
d) 243^9
e) 81^{12}

03 **(Uneb-BA)** O diâmetro de certa bactéria é $2\ .\ 10^{-6}$ metros. Enfileirando-se x dessas bactérias, obtém-se o comprimento de 1 mm. O número x é igual a:

a) 10.000
b) 5.000
c) 2.000
d) 1.000
e) 500

04 Se x e y são dois números inteiros, estritamente positivo e consecutivos, qual dos números abaixo é necessariamente um inteiro ímpar?

a) $2x+3y$
b) $3x+2y$
c) $xy+1$
d) $2xy+2$
e) $x+y+1$

05 **(Mackenzie-SP)** Qualquer que seja o natural n, $(2^{n+1}+2^n)\cdot(3^{n+1}-3^n)\div6^n$ é sempre igual a:

a) 6^n
b) 6^{n+1}
c) $\dfrac{1}{6}$
d) 1
e) 6

06 **(FGV -SP)** Sendo $a^{2x} = 3$, o valor da expressão

$A = \dfrac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{x} + a^{-x}}$ é:

a) $\frac{7}{5}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{3}{2}$

07 **(UFPB)** A expressão $2\sqrt{27} - \sqrt{75} + 3\sqrt{12}$ é igual a:

a) $2\sqrt{3}$
b) $4\sqrt{12}$
c) $4\sqrt{27}$
d) $7\sqrt{3}$
e) nenhuma das respostas

08 **(Vunesp)** A expressão $\sqrt{0,25} + 16^{-\frac{3}{4}}$ equivale a:

a) 1,65
b) 1,065
c) 0,825
d) 0,625
e) 0, 255

09 **(Fuvest - SP)**

a) Qual a metade de 2^{22}?

b) Calcule $8^{\frac{2}{3}} + 9^{0,5}$.

10 **(Fuvest - SP)** $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ é igual a:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$
d) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$
e) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$

Exercícios de Casa

01 Escreva numa só potência:

a) $5^2 \cdot 5^7 \cdot 5^4$

b) $\dfrac{3^{12}}{3^{17}}$

c) $(2^2)^3$

d) 2^{2^3}

e) $(2^3)^2$

f) 2^{3^2}

g) $\dfrac{3^5 \cdot 3^7}{2 \cdot 2^{11}}$

h) $\dfrac{4^5 \cdot 8^5}{16^3}$

i) $\dfrac{(3a^2)^5 \cdot (9a^4)^2 \cdot (b^3)^5}{(27a^2)^3 \cdot (b^5)^3}$

02 **(F.Osvaldo Cruz - SP)** Se k é um número inteiro e positivo, então $y = (-1)^k + (-1)^{k+1}$ é:

a) 2
b) 1
c) 0
d) -1
e) dependente de k

03 **(UFPel - RS)** Simplificando-se $(2^4)^{3^2}$ obtém-se:

a) 8^6
b) 2^{24}
c) 16^8

d) 2^{36}

e) 2^{12^2}

04 **(PUC - SP)** O número de elementos distintos na sequência (2^4; 4^2; 4^{-2};$(-4)^2$; $(-2)^4$;$(-2)^{-4}$) é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

05 Simplificando expressas $\frac{2^{21}+2^{18}}{9}$, obtemos:

a) $2^{39} . 3^{-2}$
b) 6^{37}
c) $4^{18} . 3^{-2}$
d) 2^{21}
e) 2^{18}

06 Simplificando a expressão

$$E = \frac{(4a^2)^3(32a^3)^2(b^3)^7}{a^{2^3}(16a^2)^3(a^{-2})^2(b^7)^3}$$

a) 1
b) ab
c) $16a^2$
d) $8a^2$
e) $32a^4$

07 **(FGV - SP)** Se x = 3.200.000 e y = 0,00002, então x . y vale:

a) 0,64
b) 6,4
c) 64
d) 640
e) 6.400

08 **(PUC - SP)** Se N é o número que resulta do cálculo de $2^{19} . 5^{15}$, então o total de algarismo que compõem N é:

a) 17
b) 19
c) 25
d) 27
e) > 27

09 (Enem) Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Especiais mostram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20.000 quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticioi o tato com o seguinte texto:

O assustador ritimo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos.

Considerando que um ano tem aproximadamente 32 x 10^6 s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km² (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de:

a) 10.000 km², e a comparação dá a idéia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.
b) 10.000 km², e a comparação dá a idéia de que a devastação é mais grave do que o dado númérico nos indica.
c) 20.000 km², e a comparação retratada exatamente o ritmo da destruição.
d) 40.000 km², e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.
e) 40.000 km2 e, ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

10 **(UFF - RJ)** A expressão:

$\frac{10^{10}+10^{20}+10^{30}}{10^{20}+10^{30}+10^{40}}$ é equivalente a:

a) $1 + 10^{10}$
b) $\frac{10^{10}}{2}$
c) 10^{-10}
d) 10^{10}
e) $\frac{10^{10}-1}{2}$

11 Calcule o valor de

a) $\sqrt{16}+\sqrt[1]{5}-\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{-1}$

b) $\left(\sqrt[5]{2^{22}}-\sqrt[5]{128}\right):\sqrt[5]{4}$

12 O valor da expressão $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}}$ é:

a) $\sqrt{\frac{68}{8}}$
b) 4
c) 6
d) 8
e) $\sqrt{18}$

13 A expreção $E=\frac{\sqrt{128}+\sqrt{50}-2\sqrt{18}}{\sqrt{2^{13}}+\sqrt{8}-\sqrt{162}}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$
b) 13
c) $\frac{5}{8}$
d) $\frac{7}{57}$
e) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

14 O valor da expressão $\frac{2^{n+4}+2^{n+2}+2^{n-1}}{2^{n-2}+2^{n-1}}$ é,

a) 1
b) 2^{n+1}
c) $\frac{3}{83}$
d) $\frac{82}{3}$
e) n

15 **(Fuvest - SP)** O valor da expresão $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ é:

a) $\sqrt{2}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
c) 2
d) $\frac{1}{2}$
e) $\sqrt{2}+1$

16 **(UFC-CE)** Seja $A=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $B=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, então, A+B é igual a:

a) $-2\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $-2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{3}$

17 **(Fuvest - SP)** Qual é o valor da expressão

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

a) $\sqrt{3}$
b) 4
c) 3
d) 2
e) $\sqrt{2}$

18 Se m = $\sqrt[5]{9}$ então m^{-1} corresponde a:

a) $-\sqrt[5]{9}$
b) $\frac{2}{3^5}$
c) $\frac{\sqrt[5]{27}}{3}$
d) $\frac{\sqrt[5]{3}}{3}$
e) $\frac{\sqrt[5]{9}}{9}$

19 **(Vune - SP)** Se $m=\frac{0,00001.(0,01)^2.1.000}{0,001}$, então:

a) m = 0,1
b) m = $(0,1)^2$
c) m = $(0,1)^3$
d) m = $(0,1)^4$
e) m = $(0,1)^5$

20 **(Unifor - CE)** Seja x, y e z números reais tais que $x=\frac{0,3}{0,025}$, $y=\sqrt[3]{\sqrt{512}}$ e $z=8^{-0,666...}$. É correto afirmar que:

a) x < y < z.
b) z < y < x.
c) x é um número racional não-inteiro.
d) y é um número irracional maior que 3.
e) z é um número racional negativo.

2 - Fatoração

2. 1. Produtos notáveis

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

d) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

e) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

f) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

g) $(x+a)(x+b) = x^2 + Sx + P$, em que S = a+b
P = ab

2. 2. Casas de fatoração

a) Fator comum (colocar em evidência)

ex: $x^3 + x^4 + x^5 = x^3\ (1 + x + x^2)$

b) Agrupamento

ex: $ax + bx - ay - by$

$x(a+b) - y(a+b)$

$(a+b)(x-y)$

c) Diferença de quadrados

ex: $9x^4 - 1 = (3x^2 - 1)(3x^2 + 1)$

d) Trinômio quadrado perfeito

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$ex:\ 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$

e)Trinômio do 2° grau

$x^2 - Sx + P = (x-a)(x-b)$ em que

$S = a + b$

$P = a\ b$

ex: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

f) Soma de cubos.

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

ex: $27x^3 + 1 = (3x+1)(9x^2 - 3x + 1)$

g) Diferença de cubos

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

ex: $8a^3 + 121- = (2a-5)(4a^2 + 10a + 25)$

Exercícios Comentados

01 Calcule o valor da expressão $\dfrac{a^3 - ab^2}{b-a}$ para a = 3, 8 e b = 1,2.

Resolução:

$$\frac{a^3 - ab^2}{b-a} = \frac{a(a^2-b^2)}{b-a} = \frac{a(a+b)(a-b)}{b-a} = -a(a+b)$$

para os valores de a e b dados, temos:

$$-a(a+b) = -3,8\overbrace{(3,8+1,2)}^{5} = -19$$

02 **(Fuvest-SP)** A diferença entre os quadrados de dois números naturais é 21. Um dos possíveis valores da soma dos quadrados desses dois números é:

a) 29
b) 97
c) 132
d) 184
e) 252

Resolução:
Seja a e b números naturais tais que $a^2 - b^2 = 21$.
Temos então (a+b) (a-b) = 21.
Como a e b são naturais, há duas possibilidades: a + b = 21
e a - b = 1 ou a + b = 7 e a - b = 3 e portanto:
a = 11 e b = 10 $\Rightarrow a^2 + b^2 = 221$ ou
a = 5 e b = 2 $\Rightarrow a^2 + b^2 = 29$

03 **(Vunesp)** Se $x + \dfrac{1}{x} = \lambda$, calcule, em função de λ:

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

b) $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

Resolução:

a) $x + \dfrac{1}{x} = \lambda$ (elevando ao quadrado)

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \lambda^2$$

Curso Preparatório CIDADE

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \lambda^2$$

$$x2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \lambda^2 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \lambda^2 - 2$$

b) (elevando ao cubo)

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \lambda^3$$

$$x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \lambda^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\frac{\left(x + \frac{1}{7}\right) = \lambda^3}{\lambda}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \lambda^3 - 3\lambda$$

04 **(Fuvest - SP)** A diferençs entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Resolução:

$(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3 =$
$= 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a + b)$

Conclusão: o resultado é necessariamente múltiplo de 3 (pois a e b são inteiros), logo, letra c

05 Calcule o valor da expressão $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2 + 3ab}$ para $a = 2{,}136 \; e \; b = -1{,}864$.

Resolução:

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2 + 3ab} = \frac{(a-b)(a2 + ab + b^2)}{a^2 - 2ab + b^2 + 3ab} =$$

$$= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = a - b$$

$$para \; a = 2{,}136 \; e \; b = -1{,}864$$

$$a - b = 4$$

Exercícios de Sala

01 Fatore as expressões:

a) $ax^2 + bx^2 + cx^2$

b) $2x^4 + 4x^2 + 6x$

c) $3a^2b^3 + 6a^3b - 12a^2b^4$

02 Transforme em produto:

a) $ax^3 + bx^2 + ax + b$

b) $2x^3 + 5x^2 + 4x + 10$

03 a) Fatore o polinômio

$p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

b) Resolva a equação cúbica $p(x) = 0$

04 Fatore:

a) $x^6 - y^6$

b) $x^4 - 9$

c) $(a+b)^2 - c^2$

d) $a^{2m} - b^{2n}$

05 Fatore:

a) $x^2 - y^2 - x - y$

b) $2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$

06 O valor da expressas (99999^2-99998^2) é

a) 1
b) 0
c) 199997
d) 199999
e) 399997

07 **(Cesgranrio - RJ)** O valor de

$$\frac{3,135^3 - 1,635^3}{3,135^2 + 3,135 \cdot 1,635 + 1,635^2}$$

a) 4,77
b) 5,13
c) 7,16
d) 1,50
e) 2,39

08 **(Fuvest - SP)** Se (x, y) é a solução do sistema

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2 + \dfrac{1}{y^2} = 4 \end{cases}$$ então $\left(\dfrac{x}{y}\right)$ é igual a:

a) 1
b) -1
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{-3}{2}$
e) $\frac{2}{3}$

09 **(Fuvest - SP)** A soma dos quadrados de dois números positivos é 4 e a soma dos inversos de seus quadrados é 1. Determine:

a) o produto dos números;
b) a soma dos dois números.

10 **(ITA - SP)** Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:

a) $x \in]0, 2[$
b) x é racional
c) $\sqrt{2x}$ é irracional
d) x^2 é irracional
e) $x \in]2, 3[$

Exercícios de Casa

01 Fatore cada expressão:

a) $a^2 + 6a + 9$
b) $x^2 - 2x + 1$
c) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
d) $-3x^2 + 6x - 3$
e) $a^4 - 2a^2b + b^2$
f) $x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}$
g) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

02 Fatore as expressões:

a) $x^2 - 5xy - 6y^2$
b) $x^4 + 4x^2 + 4$
c) $x^4 + 4$

03 **(UEL-PR)** A expressão $\frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} - 1$ é equivalente a:

a) -1
b) $\sqrt{2} - 2$
c) $\sqrt{2} + 2$
d) $\sqrt{2} - 1$
e) $\sqrt{2} + 1$

04 Simplicicando a expressão $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{4}{x-1}$, com x > 1, econtramos:

a) $x + 1$
b) $\sqrt{x} - 1$
c) 1
d) 2
e) x

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

05 **(Fatec - SP)** Se a, x, y, z são números reais tais que $z = \frac{2x-2y+ax-ay}{a^3-a^2-a+1} : \frac{2+a}{a^2-1}$, então z é igual a:

a) $\frac{x-y}{a-1}$

b) $\frac{x-y}{a^2-1}$

c) $\frac{x+y}{a+1}$

d) $\frac{x+y}{a-1}$

e) $\frac{(x-y)(a+1)}{a-1}$

06 **(Fatec - SP)** A expressão $\frac{2+2y-x-xy}{4-x^2}$ para $x \neq \pm 2$ é equivalente a:

a) $\frac{y-1}{2-x}$

b) $\frac{y-1}{x+2}$

c) $\frac{y}{x}$

d) $\frac{y+1}{x+2}$

e) $\frac{y-1}{2-x}$

07 Utilize a fatoração e demonstre que $2^{32} - 1$ é divisível por 3; 5 e 17.

08 **(U. São Francisco - SP)** O valor da

$\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{x-y}$, para x =1,25 e $y = -0,75$

a) – 0,25
b) – 0,125
c) 0
d) 0,125
e) 0,25

09 (PUC-Campinas-SP) Simplificando a expressão

$\frac{1}{1+\frac{1}{a}} - \frac{1}{1-\frac{1}{a}}$, com $a \in \mathbb{R} - \{-1;0;1\}$, obtém-se:

a) $\frac{-2a}{1-a^2}$

b) $\frac{2a}{1-a^2}$

c) $\frac{-2}{1-a}$

d) $\frac{2}{1-a}$

e) $\frac{-2a}{1+a^2}$

10 **(FGV - SP)** Sabendo-se que $x + \frac{1}{x} = 3$, então pode-se afirmar que $x^2 + \frac{1}{x^2}$ vale:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

11 A diferença entre o quadrado da soma e a soma dos quadrados de dois números naturais a e b, sendo $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $a \neq b$ é:

a) zero
b) um número impar.
c) 1.
d) um número par > 2.
e) um Número primo

12 **(PUC - Campinas - SP)** Fatorando -se a expressão $9x^2 - 16y^2 - 8y - 1$, obtém -se:

a) $(3x-4y+1)(3x+4y-1)$

b) $(3x-4y+1)(3x-4y+1)$

c) $(3x-4y-1)(3x+4y-1)$

d) $(3x-4y-1)(3x-4y+1)$

e) $(3x+4y+1)(3x-4y-1)$

13 **(UFC - CE)** O valor exato de

$\sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}}$ é:

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

14 **(UEL - PR)** Se o polinômio $f = 2x^2 - 12\sqrt{2}\,x + 4\,\mathbb{k}$ é um quadrado perfeito, então a constante real $\mathbb{k}$ é um número:

a) quadrado perfeito
b) cubo perfeito.
c) irracional.
d) divisível por 8.
e) primo.

15 **(PUC/Campinas - SP)** Seja x um número real diferente de 2 e de -2. Efetuando-se $\frac{x+1}{x-2} + \frac{2-7x}{x^2-4}$, obtém-se:

a) $\frac{x+1}{2(x-2)}$

b) $\frac{x+1}{x-2}$

c) $\frac{x-2}{x+2}$

d) $-4x-1$

e) $\frac{x^2-7x+4}{x^2+4}$

16 **(Mackenzie-SP)** Se $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$, então $a + a^{-1}$ vale:

a) $\frac{82}{9}$

b) $\frac{100}{82}$

c) $\frac{16}{9}$

d) $\frac{100}{9}$

e) $\frac{82}{3}$

17 Calcule o valor da expressão A = $\frac{a^{3x} + a}{a^x + a^{-x}}$ sendo $a^{2x} = 3$

a) 7/5
b) 5/3
c) 7/3
d) 4/3
e) 3/2

18 **(F. M. Itajubá - MG)** Simplificando a expresão $\frac{(9-x^2)}{(x^2-5x+6)}$, com $x \neq 2$, obtém-se:

a) $-\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$

b) $\left(\frac{3+x}{x-2}\right)$

c) 1

d) $\left(\frac{3-x}{x-2}\right)$

19 **(PUC/Campinas-SP)** Se os números reais x e y são tais que y = $\frac{x^4-16x^2}{x^2+10x+24}$, então y é equivalente a:

a) $\frac{x^2(x-4)}{x+6}$

b) $\frac{x^2(x+2)}{x-1}$

c) $\frac{x-2}{x+1}$

d) $\frac{x^2(x-4)}{x-5}$

e) $\frac{(x+4)}{x-6}$

20 **(U. São Francisco-SP)** O valor da expressão $\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{x-y}$ para $x = 1,25$ e $y = -0,75$ é:

a) -0,25
b) -0,125
c) 0
d) 0,125
e) 0,25

3 - Conjuntos

A- Representação de um conjunto:

Os conjuntos são representados por letras de forma maiúsculas (A, B, C, D, ...)

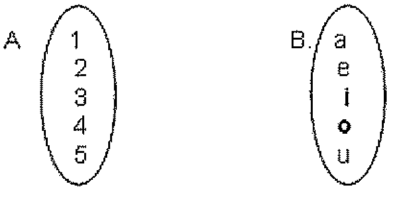
I- Tabular: os elementos são representados entre chaves e separados por vírgulas.

Ex: A={a, e, i, o, u}

B={1, 2, 3, 4, 5}

II-Diagrama de Venn: os elementos são representados por pontos interiores a uma região plana, limitada por uma linha fechada simples.

Ex:



III- Através de uma Propriedade: Que é comum a todos os elementos de um conjunto e somente esses elementos possuem essa propriedade.

Ex: A={ x / x é país da Europa}

B={ x / x é mamífero}

B- Relação de Pertinência:

$\in \Rightarrow$ pertence

$\notin \Rightarrow$ não pertence

É utilizado para relacionar elemento com conjunto.

Ex: Dados A={a, e, i, o, u} e B={1, 2, 3, 4, 5}

$e \in A$
$e \notin B$

C- Tipos de Conjuntos:

I- Conjunto unitário: formado por um único elemento.

Ex: A={2}

II-Conjunto vazio: não possui nenhum elemento.

Ex: { } ou Ø

III- Conjunto finito: formado por um número de elementos que se pode contar.

IV- Conjunto infinito: formado por um número de elementos que não se pode contar.

D- Conjunto Universo: (U)

É o conjunto ao qual pertencem todos os elementos em estudo.

E- Subconjuntos:

Sendo A e B dois conjuntos, diz-se que A é subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A pertence a B.

A é subconjunto de B
$A \subset B$ (A está contido em B)
$A \supset B$ (B contém A)

É utilizado para relacionar conjunto com conjunto.

Propriedade:
a)O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
$\emptyset \subset A, \forall A.$

F- União de Conjuntos:

$A \cup B=\{x / x \in a \text{ ou } xB\}$

Propriedades:

a)$B \subset A \Leftrightarrow A \cup B=A$
b)$A \cup B=B \cup A$
c)$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$
d) $n(A \cup B)= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

G- Intersecção de Conjuntos:

$A \cap B=\{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$

Dois conjuntos são disjuntos quando a intersecção entre eles for o conjunto vazio.

Propriedades:

a)$B \subset A \Leftrightarrow A \cap B=B$
b)$A \cap B=B \cap A$
c)$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$

H- Conjunto Diferença:

$A-B=\{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Propriedades:

a) $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \varnothing$
b) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$
c) $A \neq B \Leftrightarrow A - B \neq B - A$

I-Conjunto Complementar:

$\underset{B}{C} A \Rightarrow$ Complementar de A com relação a B.

$A \subset B \Leftrightarrow \underset{B}{C} A = \{x \,/\, x \in B \text{ e } x \notin A\} = B - A$

Propriedades:

a) $\underset{A}{C} A = \varnothing$

b) $\underset{A}{C} \varnothing = A$

c) $\underset{U}{C} A = \overline{A} = A^C$

d) $(A \cup B) \subset A^C \cap A^C$

e) $(A \cap B) \subset A^C \cup B^C$

Leis de morgan:

a) $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$

b) $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$

Exercícios Comentados

01 **(PUC)** Para os conjuntos A = {a} e B = {a, {a { { podemos afirmar:

a) $B \not\subset A$
b) $A = B$
c) $A \notin B$
d) $A \in B$
e) $\phi \in A$

Resolução:

Como o conjunto A é um elemento do conjunto B, a opção correta é a D.

02 Um crime o correu e a polícia prendeu 5 suspeitos. O delegado irá interrogá-los de todas as formas possíveis individualmente ou em grupos, quantos interrogatátório poderão ser feitas?

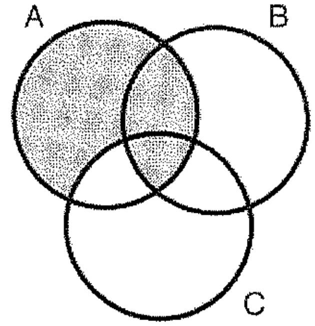
a) 10
5) 16
c)31
d) 32
e) 64

Resolução:

Os elementos do conjunto A = {a, b, c, d, e } representa as pessoas a serem interrogadas. Logo é necessário calcular o número de subconjuntos de A e subtraír 1, pois o conjunto vazio não significa nenhum interogatório.

$2^5 - 1 = 31.$

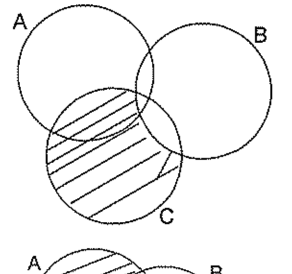
03 **(F.M. Itajubá- MG)** Com relação à parte sombreada da do diagrama, é correto afirmar que:



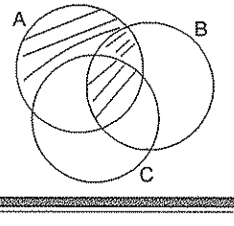
a) $A - (B - C)$
b) $A - (B \cup C)$
c) $A - (B \cap C)$
d) $A - (C - B)$

Resolução:

C - B



A - (C-B)

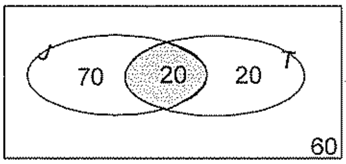


04 Num grupo de 170 pessoas, 90 usam calça jeans e 40 usam tênis, determine:

a) Quantos usam tênis e não usam calça jeans?
b) Quanto não usam jeans nem tênis?

Resolução:

Vamos montar o diagrama (começando pela intersecção).



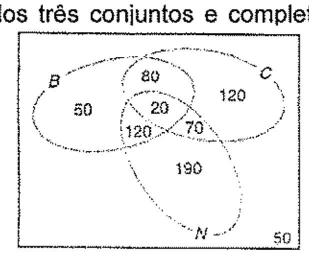
Com base no diagrama, temos: 20 pessoas usam tênis e não usam calça jeans.

05 Numa enquete sobre atividades aeróbicas realizada com 700 pessoas, constatou-se que:
- 400 pessoas praticam natação;
- 270 praticam ciclismo;
- 290 praticam corrida;
- 140 praticam natação e ciclismo;
- 90 praticam natação e corrida;
- 100 praticam ciclismo e corrida;
- 20 praticam os três esportes pesquisados.

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas praticam somente natação?
b) Quantas pessoas não praticam nenhum dos esportes citados?

Resolução:
Inicialmente, vamos montar o diagrama a partir da intersecção dos três conjuntos e completar "de dentro para fora".



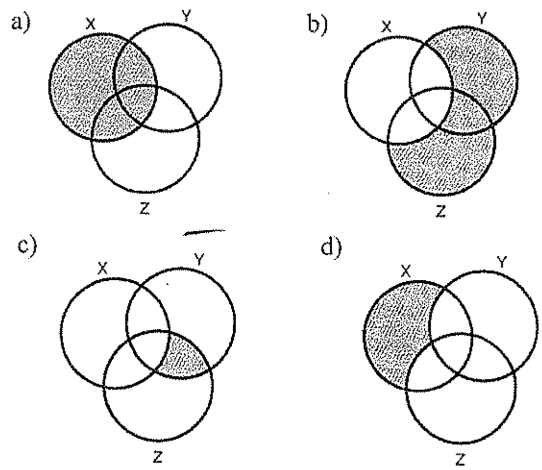
Com base no diagrama, respondemos:
190 pessoas praticam somente natação.

Exercícios de Sala

01 **(F.I. Anápolis –GO)** Dados os conjuntos:
$A = \{0; 1; 3; 5\}$, $B = \{1;3;5;7\}$ e $C = \{3;8;9\}$, o conjunto $M = B - (A \cup C)$ é:

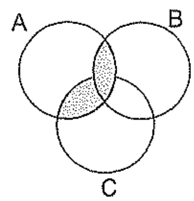
a) $\{1;3;5\}$
b) $\{7\}$
c) $\{7;58;9\}$
d) $\{0;8;9\}$
e) $\{1;5;7\}$

02 **(UFRN)** As figuras seguintes representam diagramas de Venn dos conjuntos X, Y e Z. Marque a opção em que a região destacada representa o conjunto $Y \cap Z - X$.



03 A parte hachurada da figura abaixo, onde U é o conjunto universo e A, B, C são conjuntos, representa:

a) $A \cup B \cup C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
d) $(A \cup B) \cup (A \cup C)$
e) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$



04 Sejam A, B e C subconjunto do números reais. Então podemos afirmar que:

a) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$
b) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$
c) Se $A \subset B$ então $A^c \subset B^c$
d) $(A \cap B) \cup C^c = (A^c \cup C)^c \cap (B^c \cup C)^c$
e) $A \cup (B \cup C)^c = (A \cup B^c) \cap (A \cup C^c)$

05 Se 70% da população gostam de samba, 75% de choro, 80% de bolero e 85% de rock, quantos por cento da população no mínimo, gostam de samba, choro, bolero e rock?

a) 5%.
b) 10%.
c) 20%.
d) 45%.
e) 70%.

06 Os alunos de uma escola foram convocados a responder duas perguntas. As únicas respostas possíveis eram *sim* ou *não* para cada pergunta. Sabendo-se que 128 alunos responderam pelo menos um *sim*, 75 alunos responderam *sim* às duas perguntas, 137 alunos responderam pelo menos um *não* e 99 alunos responderam *não* à segunda pergunta, é válido afirmar-se que:

a) 212 alunos foram consultados.
b) 64 alunos responderam *sim* à primeira pergunta.
c) 54 alunos responderam *sim* à segunda pergunta.
d) 84 alunos responderam *não* à primeira pergunta.
e) 49 alunos responderam *sim* à primeira pergunta.

07 Sejam A, B e C conjuntos com exatamente 4 elementos cada um e, sabendo-se que $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ tem, respectivamente, 7, 3, 2 e 1 elementos, então o número de elementos de $(A \cap B) \cup C$ é igual a

a) 5.
b) 8.
c) 6.
d) 7.

08 **(AFA)** Assinale a afirmativa correta.

a) A intersecção de conjuntos infinitos pode ser finita.
b) A intersecção infinita de conjuntos não vazios é vazia.
c) A reunião infinita de conjuntos não vazios tem infinitos elementos.
d) A intersecção dos conjuntos A e B possui sempre menos elementos do que o A e do que o B.

09 Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram – se os resultados tabelados abaixo.

Marca	Número de consumidores
A	105
B	200
C	160
A e B	25
B e C	40
A e C	25
A, B e C	5
Nenhuma das 3	120

Determine o número de pessoas consultadas.

10 **(UF - Uberlândia)** Num grupo de estudantes, 80% estudam Inglês, 40% estudam Francês e 10% não estudam nenhuma dessas duas línguas. Nesse grupo, a porcentagem de alunos que estudam ambas as línguas é:

a) 25%
b) 50%
c) 15%
d) 33%
e) 30%

Exercícios de Casa

01 **(FEI)** Se **n** é o número de subconjuntos não-vazios do conjunto formado pelos **múltiplos estritamente positivos de 5**, **menores do que 40**, então o valor de **n** é:

a) 127
b) 125
c) 124
d) 120
e) 110

02 No último clássico Corinthians x Flamengo, realizado em São Paulo, verificou-se que só foram ao estádio paulistas e cariocas e que todos eles eram só corintianos ou só flamenguistas. Verificou-se também que, dos 100.000 torcedores, 85.000 eram corintianos, 84.000 eram paulistas e que apenas 4.000 paulistas torciam para o Flamengo. Pergunta-se:

a) Quantos paulistas corintianos foram ao estádio?
b) Quantos cariocas foram ao estádio?
c) Quantos não-flamenguistas foram ao estádio?
d) Quantos flamenguistas foram ao estádio?
e) Dos paulistas que foram ao estádio, quantos não eram flamenguistas?
f) Dos cariocas que foram ao estádio, quantos eram corintianos?
g) Quantos eram flamenguistas ou cariocas?
h) Quantos eram corintianos ou paulistas?
i) Quantos torcedores eram não-paulistas ou não-flamenguistas?

03 **(ESAL)** Foi consultado um certo número de pessoas sobre as emissoras de TV que habitualmente assistem. Obteve-se o resultado seguinte: 300 pessoas assistem ao canal A, 270 pessoas assistem o canal B, das quais 150 assistem ambos os canais A e B e 80 assistem outros canais distintos de A e B. O número de pessoas consultadas foi:

a) 800
b) 720
c) 570
d) 500
e) 600

04 **(VUNESP)** Uma população utiliza 3 marcas diferentes de detergente: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado colheram-se os resultados tabelados abaixo:

Marcas	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C	Nenhuma delas
Número de Consumidores	109	203	162	25	28	41	5	115

Pode-se concluir que o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas é:

a) 99
b) 94
c) 90
d) 84
e) 79

05 **(UF - Viçosa)** Fez-se em uma população, uma pesquisa de mercado sobre o consumo de sabão em pó de três marcas distintas A, B e C. Em relação à população consultada e com o auxílio dos resultados da pesquisa tabelados abaixo:

Marcas	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C	Nenhuma delas
Número de Consumidores	109	203	162	25	28	41	5	115

Determine:

a) O número de pessoas consultadas.
b) O número de pessoas que não consomem as marcas A ou C.
c) O número de pessoas que consomem pelo menos duas marcas.
d) A porcentagem de pessoas que consomem as marcas A e B mas não consomem a marca C.
e) A porcentagem de pessoas que consomem apenas a marca C.

06 Numa pesquisa, realizada em alguns colégios, sobre a preparação dos alunos para o vestibular, foram obtidos os seguintes resultados:

Tipo de preparação	Número de alunos
Cursoi pré vestibular	3.580
Contratou professor particular	1.100
Ambas as situações anteriores	540
Nenhuma das situações anteriores	360

Com base nesses dados, o número de alunos consultados foi:

a) 3.780
b) 4.140
c) 4.500
d) 5.100
e) 5.140

07 **(Cesgranrio)** Em uma universidade são lodos dos jornais, A e B; exatamente 80% dos alunos lêem o jornal A e 60%, o jornal B. Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, qual é o percentual de alunos que lêem ambos?

08 **(PUC-MG)** Em uma clase de 45 meninas, cada uma delas ou tem cabelos pretos ou olhos castanhos, 35 têm cabelos pretos e 20 tem olhos castanhos. O números de meninas que têm cabelos pretos e olhos castanhos é:

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e 25

09 Uma editora estuda a possibilidade de lançar novamente as publicações: Helena, Senhora e A Moreninha. Para isso, efetuou uma pesquisa de mercado e concluiu que em cada 1.000 pessoas consultadas:

__ 6000 leram A Moreninha;
__ 400 leram Helena;
__ 300 leram Senhora;
__ 200 leram a Moreninha e Helena;
__ 150 leram a Moreninha e Senhora;
__ 100 leram Senhora e Helena;
__ 20 leram as três obras

Com base nessa pesquisa, responda:

a) Qual é o número de pessoas que não leu nenhuma das três obras?
b) Qual é o número de pessoas que leu apenas uma das três obras?
c) Qual é o número de pessoas que leu duas ou mais obras?

10 Numa prova constituída de dois problemas, 300 alunos acertaram somente um dos problemas, 260 acertaram o segundo, 100 alunos acertaram os dois e 210 erraram o primeiro. Quantos alunos fizeram a prova?

11 Considere os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \le x < 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{N}^* / x \le 4\}$

Determine o conjunto $A \cap B$.

12 **(UFU)** Seja X o subconjunto dos números inteiros dado por {0,1,2,3,4,5}. Quantos pares distintos (A,B) de subconjuntos A e B de X existem tais que $A^c - B = \{0,1\}$, em que A^c denota o complementar de A em X?

a) 16
b) 14
c) 10
d) 12
e) 18

13 **(UFU)** Considere dois conjuntos de números A e B com 12 e 15 elementos, respectivamente. Então, sempre se pode afirmar que

a) A∩B terá, no mínimo, 12 elementos.
b) A∪B terá, no mínimo, 15 elementos.
c) o número máximo de elementos de A∪B é igual ao número máximo de elementos de A∩B.
d) o número mínimo de elementos de A∪B é igual ao número máximo de elementos de A∩B.

14 **(FUVEST)** Durante uma viagem choveu 5 vezes. A chuva caia pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve 6 manhãs e 3 tardes sem chuvas. Quantos dias durou a viagem:

a)6
b)7
c)8
d)9
e)10

15 **(ITA)** Sejam **A** um conjunto com 8 elementos e **B** um conjunto tal que **A∪B** contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B-A) \cup P(\varnothing)$ é igual a

a)8
b)16
c)20
d)17
e)9

16 **(FMTM)** Em uma amostra de indivíduos, 40% foram afetados pela doença **A**, 20% foram afetados pela doença **B** e 5% foram afetados por ambas as doenças. Dos indivíduos da amostra que não foram afetados nem por **A** nem por **B**, 2% morreram. A porcentagem de indivíduos da amostra que morreram sem terem sido afetados por quaisquer das duas doenças analisadas é de

a)0,7%.
b)0,8%.
c)0,9%.
d)1,0%.
e)1,1%.

17 **(UNIP)** O número dos conjuntos X que satisfazem: $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ é:

a)3
b)4
c)5
d)6
e)7

18 **(OSEC)** Dados os conjuntos A = {a, b, c}, B = {b, c, d} e C = {a, c, d, e}, o conjunto $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$ é:

a){a, b, c, e}
b){a, c, e}
c)A
d){b, d, e}
e){a, b, c, d}

19 **(UFJF)** Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U.
Assinale a afirmativa **correta**:

a)Se $A \cap B = A \cap C$, então B = C.
b)Se A possui m elementos e B possui n elementos, então $A \cup B$ possui m + n elementos;
c)Se $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, então $\varnothing \in A$ e $\varnothing \subset A$;
d)$C_U (A - B) = (C_U A) \cup B$, onde $C_U X$ é o complementar do conjunto X em relação a U;
e)Se A possui 7 elementos, então o conjunto formado por todos os subconjuntos não vazios de A possui 128 elementos.

20 **(EFOA)** Em uma cidade com 40.000 habitantes há três clubes recreativos: Colina, Silvestre e Campestre. Feita uma pesquisa, foram obtidos os seguintes resultados: 20% da população freqüenta o Colina; 16% o Silvestre; 14% o Campestre; 8% o Colina e o Silvestre; 5% o Colina e o Campestre; e 4% o Silvestre e o Campestre.

Somente 2% frequentam os três clubes. O número de habitantes que não freqüentam nenhum destes três clubes é:

a) 26000
b) 30000
c) 28000
d) 32000
e) 34000

4 - CONJUNTO NUMÉRICOS

1-Conjunto dos Números Naturais (*N*):

N={0, 1, 2, 3, 4,...}

$N^* = N - \{0\}$

Propriedades:

a) A soma de dois números naturais é um número natural;
b) O produto de dois números naturais é um número natural;
c) Se ***k*** é um número natural, então ***k+1*** é um número natural tal que:

- ***k*** e ***k+1*** são números naturais consecutivos;
- ***k*** é o antecessor de ***k+1***;
- ***k+1*** é o sucessor de ***k***.

2-Conjunto dos Números Inteiros (*Z*):

Z={..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}
Z^*=***Z***-{0} (inteiros não-nulos)
Z_+^* (inteiros positivos)
Z_+ (inteiros não-negativos)
Z_-^* (inteiros negativos)
Z_- (inteiros não-positivos)

Propriedades:

a)Todo número natural é inteiro (***N*** $\subset$ ***Z***)
b)A soma de dois números inteiros é um número inteiro
c)A diferença entre dois números inteiros é um número inteiro
d)O produto de dois números inteiros é um número inteiro;
e)Se ***k*** é um número inteiro, então ***k+1*** é um número inteiro tal que:

- ***k*** e ***k+1*** são números inteiros consecutivos;
- ***k*** é o antecessor de ***k+1***;
- ***k+1*** é o sucessor de ***k***.

e)Todo número inteiro possui sucessor e antecessor;
f) Para todo número inteiro ***x*** existe o inteiro ***y*** denominado "oposto de ***x***", tal que: y+x=x+y=0

Indica-se o oposto de ***x*** por ***-x***.

3-Conjunto dos Números Racionais (*Q*):

Pode ser representado pela razão entre dois números inteiros.

$$Q=\left\{\frac{a}{b} / a \in Z \text{ e } b \in Z^*\right\}$$

Q^* (racionais não-nulos)

Q_+^* (racionais positivos)

Q_+ (racionais não-negativos)

Q_-^* (racionais negativos)

Q_- (racionais não-positivos)

Propriedades:

a)Todo número inteiro é racional (***Z*** $\subset$ ***Q***);
b)A soma de dois números racionais é um número racional;
c)A diferença entre dois números racionais é um número racional;
d)O produto de dois números racionais é um número racional;
e)O quociente de dois números racionais, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional;
f) Dados dois números racionais p e q, com ***p<q***, existe um número racional ***m*** tal que ***p<m<q***.
g)Para todo número racional ***x*** existe o racional ***y*** denominado "oposto de ***x***", tal que ***y+x=x+y=0***.
Indica-se o oposto de ***x*** por ***-x***.
h)Para todo número racional ***r***, ***r*** $\neq$ 0, existe o racional ***s***, denominado "inverso ou recíproco de ***r***", tal que $r \cdot s = s \cdot r = 1$.

Indica-se o inverso de r por $\frac{1}{r}$.

4-Conjunto dos Números Irracionais (*Q*ᶜ):

Os números irracionais não podem ser representados como a razão entre dois números inteiros. Portanto são as dízimas não-periódicas.

Propriedades:

a)Se o número $\sqrt[n]{a}$, com $n \in N^*$ e $a N$, não é inteiro, então é irracional;

b)A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional;

c)A diferença entre um número racional e um número irracional é um número irracional;

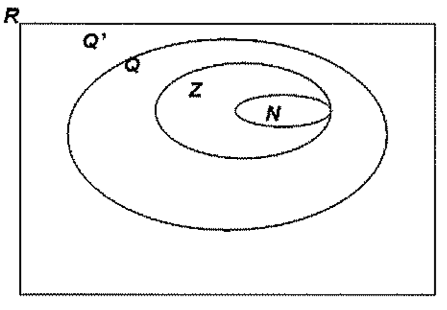
d)O produto de um número racional, não-nulo, por um número irracional é um número irracional;

e)O quociente de um número racional, não nulo, por um número irracional é um número irracional.

5-Conjunto dos Números Reais (*R*):

É qualquer número racional ou irracional.

R=Q $\cup$ Q'



Propriedades:

a) A soma de dois números reais é um número real;

b) A diferença entre dois números reais é um número real;

c) O produto de dois números reais é um número real;

d) O quociente entre dois números reais quaisquer, com divisor diferente de zero, é um número real;

e) Para todo número real ***x***, existe o real ***y***, denominado "oposto de ***x***", tal que ***y+x=x+y=0.***

Indica-se o oposto de ***x*** por ***-x***.

f) Para todo número real não-nulo ***r***, existe o real ***s***, denominado "inverso ou recíproco de ***r***", tal que $r \cdot s = s \cdot r = 1$.

Indica-se o inverso de r por $\frac{1}{r}$.

g) Se ***n*** é natural ímpar e $a \in R$, então $\sqrt[n]{a} \in R$;

h) Sendo ***n*** um número natural par diferente de zero e ***a*** um número real, tem-se que.

K-Quantidade de elementos de conjuntos finitos:

1-Dados dois conjuntos A e B:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dados três conjuntos A, B e C:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$
$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Intervalos

Usaremos com frequência alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$ chamados intervalos, que podem ser escritos de três maneiras:

Por compreensão

Por exemplo: $\{\in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$

Representação gráfica

A bolinha cheia (•) no extremo de um intervalo sigunifica que o número associado a esse extremo pertence ao intervalo, e a bolinha vazia (◦) indica que o número associado a esse extremo não pertence ao intervalo.

Notação de intervalo

No exemplo: [3; 7[

O colchete voltado para o número significa que esse número pertence ao intervalo __ o intervalo é fechado nesse extremo. Acompanhe osexemplo:

Representação por compreensão	Representação gráfica	Notação de intervalo	Leitura
$\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$	3 7	[3;.7[	itervalo de extremos 3 e 7 fechado em 3 e aberto em 7,
$\{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 10\}$	2 10	]2;10]	Intervalo de extremos 2 e 10, aberto em 2 e fechado em 10
$\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 3\}$	1 3	[1;3]	intervalo de extremos 1 e 3, fechado nos dois extremos.
$\{x \in \mathbb{R} / 7 < x < 12\}$	7 12	]7;12[	intervalo de extremos 7 e 12, aberto nos dois extremos.
$\{\in \mathbb{R} / x \geq 4\}$	4	[4;+ ∞ [	intervalo infinito à direita e de origem fechada em 4.
$\{x \in \mathbb{R} / x < 13\}$	13	] - ∞ ;13[	intervalo infinito à esquerda e de origem aberta em 13.

Exercícios Comentados

01 Classifique as sentenças a seguir em verdadeira (V) ou falsa (F):

a) ( ) $-4 \in \mathbb{N}$ (F)

b) ( ) $-5 \in \mathbb{Z}$ (V)

c) ( ) $0 \in \mathbb{R}^*$ (F)

d) ( ) $\frac{3}{5} \in \varnothing$ (V)

e) ( ) $1{,}23 \in \varnothing$ (V)

f) ( ) $-\frac{1}{7} \in \mathbb{Z}-$ (F)

g) ( ) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}^*_+$ (V)

h) ( ) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (V)

i) ( ) $\sqrt{9} \notin \mathbb{Q}$ (F)

j) ( ) $0{,}222... \in \mathbb{Q}$ (V)

Resolução:

j) x = 0, 222... (.10)

$$\begin{array}{r} 10x = 2{,}000... \\ \hline 9x = 2 \end{array} \quad (-)$$

$$x = \frac{2}{9}$$

Assim, 0,222... = $x = \frac{2}{9} \in \mathbb{Q}$

02 Sejam: $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 7\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 10\}$

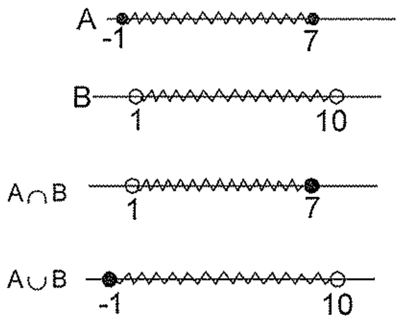
a) Escreva A e B utilizando a notação de intervalo:

b) Determine $A \cap B$ e $A \cup B$:

Resolução:

a) $A = [-1; 7]$
$B =]1; 10[$

b)



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 7\}$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 10\}$

03 **(Fuvest - SP)** Os números x e y são tais que $5 \leq x \leq 10$ e $20 \leq y \leq 30$. O maior valor possível de $\frac{x}{y}$ é:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

Resolução:

Se x = 5, y = 20: $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$

Se x = 5, y = 30: $\frac{x}{y} = \frac{1}{6}$

Se x = 10, y = 20: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

Se x = 10, y = 30: $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

Logo, o maior valor é $\frac{1}{2}$

04 Sendo $A=\{x\in\mathbb{Z}/\frac{30}{x}=n$, com $n\in\mathbb{N}\}$ e $B=\{x\in\mathbb{N}^*/x=3m$, com $m\in\mathbb{N}^*\}$, determine o conjunto $A\cap B$.

Resolução:

A = D (30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
B = M (3) = {3, 6, 9, 12, 15,...}

$A\cap B$ = {3, 6, 15, 30}

05 **(EspCEx)** Quaisquer que sejam o número irracional ***a*** e o número racional ***b***, pode-se afirmar que, sempre:

a) $a\cdot a$ é irracional.

b) a^2+b é racional.

c) $a\cdot b$ é racional.

d) $b-a+\sqrt{2}$ é irracional.

e) $b+2a$ é irracional.

Resolução:

$a\in I$ e $b\in Q$

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\in Q$ (errado)

b) $a^2+b\in Q$
a^2 pode ser irracional, logo,
$a^2+b\in I$ (errado)

c) $a\cdot b\in Q$
Como $a\in I$, $a\cdot b\in I$ (errado)

d) $\left(b-a+\sqrt{2}\right)\in I$

Se $a=\sqrt{2}$, $b-a+\sqrt{2}=b\in Q$ (errado)

e) $b+2a\in I$
Como $a\in I$, $(2a)\in I$, logo, sempre
$b+2a\in I$

Exercícios de Sala

01 **(EsPCEx)** É correto afirmar que:

a) A soma e a diferença de dois números naturais é sempre um número natural.
b) O produto e o quociente de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
c) A soma de dois números racionais é sempre um número racional.
d) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
e) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

02 **(EsPCEx)** Se $A=[-5,1]$ e $B=\left]-\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{5}\right[$, então os conjuntos ***A-B*** e ***A*** $\cap$ ***B*** são, respectivamente:

a) $\left[-5,-\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ e $\left]-\frac{\sqrt{2}}{3},1\right[$

b) $\left[-5,-\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ e $\left]-\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{5}\right[$

c) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3},1\right[$ e $\left]-\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{5}\right[$

d) $\left[1,\sqrt{5}\right]$ e $\left]-5,-\frac{\sqrt{2}}{3}\right[$

e) $\left]-\frac{\sqrt{2}}{3},1\right[$ e $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3},1\right]$

03 **(EsPCEx)** Dados os conjuntos:

R={***x*** / ***x*** é um número real}
Q={***x*** / ***x*** é um número racional}
N={***x*** / ***x*** é um número natural}
P={***x*** / ***x*** é um número primo}

E considerando as afirmações:

(I) $P \subset Q$
(II) $R \subset Q$
(III) $P \supset Q$
(IV) $6 \in (R \cap Q \cap N \cap P)$
(V) $5 \in (Q \cap P)$

Estão corretas as afirmações:

a) I e III
b) II e V
c) III e IV
d) IV e V
e) I e V

04 **(EsPCEx)** Seja ***f*** uma função real, de variável real, definida por $f(x)=\begin{cases}1, se\ x\ for\ racional\\ 0, se\ x\ for\ irracional\end{cases}$. Assim, pode-se afirmar que:

a) $f(\sqrt{2})=f(2)$
b) $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})=f(1)$
c) $f(3{,}14)=0$
d) $f(\pi)$ é irracional
e) $\sqrt{f(x)}$ é racional para todo x real

05 **(EsPCEx)** Dados os números $a=\sqrt{3}-1$, $b=\sqrt{3}+1$ e $c=0{,}1333....$, pode-se afirmar que:

a) $a \cdot b$ é um número irracional.
b) $(a-b)\cdot c$ é um número irracional.
c) $(a+b)\cdot c$ é um número racional.
d) $b \cdot c$ é um número racional.
e) $a \cdot b \cdot c$ é um número racional.

06 **(UNESP)** Uma faixa retangular de tecido deverá ser totalmente recortada em quadrados, todos de mesmo tamanho e sem deixar sobras. Esses quadrados deverão ter o maior tamanho (área) possível. Se as dimensões da faixa são 105 cm de largura por 700 cm de comprimento, o perímetro de cada quadrado, em centímetros, será:

a) 28.
b) 60.
c) 100.
d) 140.
e) 280.

07 **(UFMG)** No sítio de Paulo, a colheita de laranjas ficou entre 500 e 1500 unidades. Se essas laranjas fossem colocadas em sacos com 50 unidades cada um, sobrariam 12 laranjas e, se fossem colocadas em sacos com 36 unidades cada um, também sobrariam 12 laranjas. Assim sendo, quantas laranjas sobrariam se elas fossem colocadas em sacos com 35 unidades cada um?

a) 4
b) 6
c) 7
d) 2

08 **(UERJ) -** Ao analisar as notas fiscais de uma firma, o auditor deparou-se com a seguinte situação:

Quantidade	Mercadoria	Preço unitário(R$)	Total (R$)
☆ Metros	Cetim	21,00	☆ 56,00

Não era possível ver o número de metros vendidos, mas sabia-se que era um número inteiro. No valor total, só apareciam os dois últimos dos três algarismos da parte inteira.

Com as informações acima, o auditor concluiu que a quantidade de cetim, em metros, declarada nessa nota foi:

a) 16
b) 26
c) 36
d) 46

09 **(UFMG) -** Três fios têm comprimentos de 36 m, 48 m e 72 m. Deseja-se cortá-los em pedaços menores, cujos comprimentos sejam iguais, expressos em números inteiros de metros e sem que haja perda de material. O menor número total possível de pedaços é:

a) 7
b) 9
c) 11
d) 13
e) 20

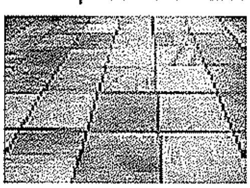
10 **(UnB)** - Um investigador, em busca de informações precisas, encontrou uma velha nota fiscal, na qual estava registrada a aquisição de 72 itens de uma mesma mercadoria por um valor total de R$ x67,9y, sendo que o primeiro e o último algarismos x e y estavam ilegíveis. Sabendo que é possível achar o valor exato da nota fiscal, determine o produto xy.

Exercícios de Casa

01 **(UERJ)** - Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 30 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:

a) 150
b) 160
c) 190
d) 200

02 **(Fuvest)** - Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2m e 5m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras. Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?



03 **(UFU)** - Os irmãos José e Maria visitam regularmente seu avô Pedro. José visita-o a cada 8 dias e Maria a cada 6 dias, ambos, rigorosamente, sem nunca falharem. Se José e Maria visitaram simultaneamente o avô no primeiro dia do ano de 2004, quantas vezes mais eles fizeram a visita simultânea até o dia 31 de dezembro de 2006?

Obs.: Considere cada ano com 365 dias.

a) 48
b) 44
c) 46
d) 45

04 As cidades do porto Seguro, Blumenau e Dourados realizaram grandes festas periódicas, sendo a de Porto Seguro de 9 em 9 meses, a de Blumenau de 12 em 12 meses e a Dourados de 20 em 20 meses. Se em janeiro de 2007 as festa coincidiram, quando será a próxima vez que irão coincidir?

05 **(Vunesp)** Três viajantes partem num mesmo dia de uma cidade A exatamente a cada 30, 48 e 72 dias, respectivamente. O número mínimo de dias transcorridos para que os três viajantes estejam juntos novamente na cidade A é:

a)144
b)240
c)360
d)480
e)720

06 **(PUC-RJ)** A editora de livro como ser aprovado no vestibular recebeu os seguintes pedidos, de três livrarias:

Livraria	Número de exemplares
A	1.300
B	1.950
C	3.900

A editora deseja os três pedidos em n pacotes iguais de tal forma que n seja o menor possível.
Calcule o número n.

07 **(Vunesp)** Sejam x = 180 e y = 100.

a)Descomponha x e y em fatores primos.
b)Determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de x e y.

08 **(Mackenzie- SP)** Se um número natural n é múltiplo de 9 e de 15, então, certamente, n é:

a)Múltiplo de 27
b)Múltiplo de 30
c)Múltiplo de 27
d)Múltiplo de 90
e)Múltiplo de 135

Curso Preparatório CIDADE

09 **(Fuvest-SP)** Duas rodas-gigantes começam a girar, num mesmo instante, com uma. A primeira dá uma volta em 30 segundos e a segunda dá uma volta em 35 segundos. As duas pessoas estarão ambas novamente na posição mais baixa após:

a)1 minuto e 10 segundos
b)3 minutos
c)3 minutos e 30 segundos
d)4 minutos e 30 segundos

10 **(Vunesp)** Uma concessionária vendeu no mês de outubro n carros do tipo A e M carros do tipo B, totalizado 216 carros.

Sabendo-se que o número de carros vendidos de cada tipo foi maior do que 20, que foram vendidos menos carros do tipo A do que do tipo B, isto é, n < m, e que MDC(n,m) = 18, os valores de n e m são, respectivamente:

a)18,198.
b)36,180.
c)90, 126.
d)126, 90.
e)162, 54.

11 **(UFMG)** Em relação aos números naturais, a única alternativa falsa é:

a) Todo número divisível pelo produto de dois outros é divisível por qualquer um deles.
b) Se um número divide o produto de dois outros, ele divide um deles.
c) Um divisor comum de dois números divide a soma deles.
d) Se um número didide dois outros, ele divide o máximo divisor comum deles.
e) Se um número múltiplo comum deles.

12 **(UFRN)** Duas escolas, X e Y, descidiram organizar uma gincana estudantil na qual os alunos devem formar todas as equipes com o mesmo número de componentes. Foram selecionados 49 alunos da escola X e 63 alunos da escola Y. Cada aluno deve participar de apenas uma equipe.

Assim o número de equipe participantes das escolas X e Y será, respectivamente,

a) 7 e 9
b) 6 e 9
c) 8 e 9
d) 7 e 8

13 **(Unicamp-SP)** Uma sala retangular medindo 3m por 4,25 m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados iguais. supondo que não haja espaço entre ladrilhos vizinhos, pergunta-se:

a) Qual deve ser a dimensão máxima, em centímetros, de cada um desses ladrilhos para que a sala possa ser ladrilhada sem cortar nenhum ladrilho?
b) Quantos desses mesmos ladrilhos são necessários?

14 **(UFSC-SP)** Considere as seguintes informações:
♦ O máximo divisor comum entre dois números também é um divisor da diferença entre esses números;
♦ Se o máximo divisor comum entre dois números *a* e *b* é igual a 1, M. D. C. (*a*,*b*) = *ab*.

a) prove que o máximo divisor comum entre dois números consecutivos é igual a 1;
b) determine dois números consecutivos, sabendo que positivos e o mínimo múltiplo comum entre eles é igual a 156.

15 **(Unirio)** Considerando que: $A=[a;b]$ e $B=[c;d[$, em que $a<c<b<d$, assinale a opção correta.

a) $A\cap B]c;b]$
b) $B\subset \complement_R^A \cup [c;b]$
c) $c\subset A\cap B$
d) $[a;c[\in \complement_R^B$
e) $b\in A-B$

16 **(U.F. Juiz de Fora-MG)** Dados os intervalos:
$A=[-1;3), B=[1;4], C=[2;3), D=(1;2]$ e $E=(0;2]$,
considerando o conjunto $P=[(A\cup B)-(C\cap D)]-E$. Marque a alternativa incorreta:

a) $P\subset[-1;4]$
b) $(3;4]\subset P$
c) $2\in P$
d) $0\in P$

17 Dados os conjuntos:

$A=\{x\in\mathbb{Z}/-1<x\leq 17\}$

$B=\{x\in\mathbb{N}/x\ \acute{e}\ \acute{i}mpar\}$

$C=\{x\in\mathbb{N}/9\leq x\leq 18\}$

Determine a soma dos elementos que formam o conjunto $(A\cap B)-C$.

18 **(UFF-RJ)** Em relação aos conjuntos:`

$P=\left\{x\in\mathbb{Z}/\,|x|\leq\sqrt{7}\right\}$

$Q=\left\{x\in\mathbb{Z}/x^2\leq 0{,}333...\right\}$ afirma-se:

I. $P\cup Q=P$

II. $Q-P=\{0\}$

III. $P\subset Q$

IV. $P\cap Q=Q$

Somente são verdadeiras as afirmativas:

a) I e III
b) I e IV
c) II e III
d) II e IV
e) III e IV

19 **(U. E. Santa Cruz-BA)** Sejam *A* e *B* conjuntos tais que:

$A=\{x;x=3n$, com $n\in\mathbb{N}\ e\ x\leq 0\}$ e

$B=\{x;x\in\mathbb{N}\ e\ x\ \acute{e}\ \acute{i}mpar\}$.

Se o conjunto X é tal que

$X\subset A\cap B\ e\ A\cap B-X=\{3;15;21\}$, Então *X* é igual a:

a) $\varnothing$
b) {3; 15;21}
c) {9;27}
d) {0; 6; 12; 18; 24; 27; 30}
e) {0; 1; 5; 6; 7; 11; 12; 13; 18; 23; 24; 25; 27; 29; 30}

20 **(UFMS)** Quantos são os elementos do conjunto $\{x\in\mathbb{N}/10\pi<x<\pi+30\}$?

a) 2
b) 1
c) 3
d) infinitos
e) o conjunto é vazio

5- Funções

5.1 Relações

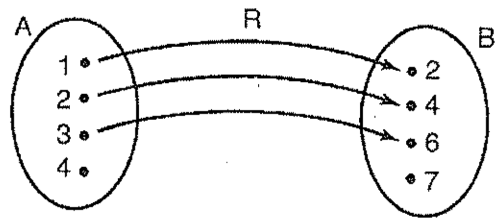
Dados dois conjuntos, A e B, denomina-se relação R de A em B qualquer subconjunto de A x B.

Exemplo:

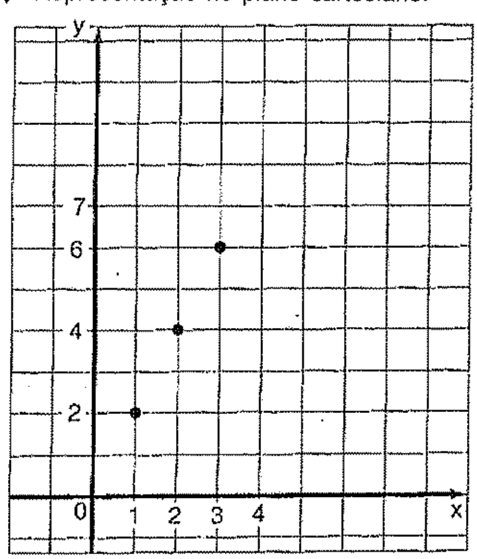
Sejam A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 7} e a relação R = {(x, y) $\in A\ x\ B\mid y=2x\}$. Então, temos:

♦ Representação na forma de conjunto:
R = {(1, 2), (2, 4), (3,6)}

♦ Representação por flechas (diagrama de Euler-Venn):



♦ Representação no plano cartesiano:

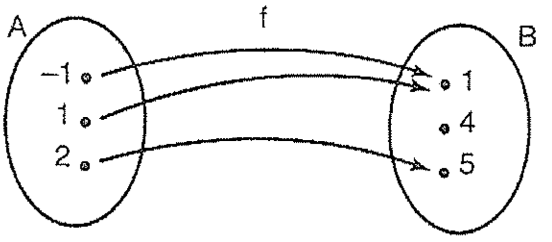


DOMÍNIO	IMAGEM
Domínio da relação R é o conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par da relação.	Imagem da relação R é o conjunto formado pelos segundos elementos de cada par da relação.
D(R) = {1, 2, 3}	Im(R) = {2, 4, 6}

5.2 Funções

Dados dois conjuntos, A e B, denomina-se aplicação òu função f de A em B toda relação que a cada elemento de A associa um é um só elemento de B.

Exemplo:



Numa função f de a em B, temos os conjuntos:

♦ Domínio
D (f) = { - 1, 1, 2}: o conjunto A

♦ Imagem
Im (f) = {1, 4}

♦ Contradomínio
CD(f) = {1, 4, 5}: o conjunto B

Representado por x e y, respectivamente, os elementos de A e B, podemos escrever:

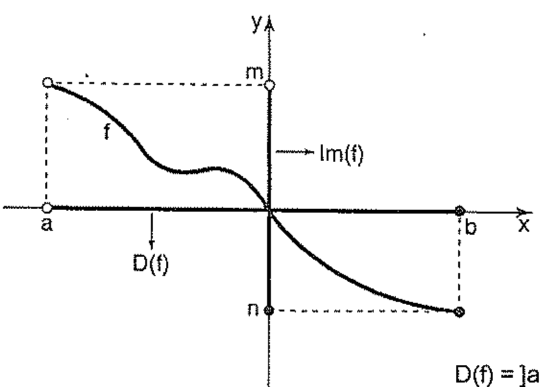
f: A → B ou y = f(x).

Em que:

x é a variável independente
y é a variável dependente

5.3 Cálculo do domínio e da imagem através do gráfico

Observe o gráfico da função f.



D(f) =]a, b]
Im(f) = [n,m[

Dado o gráfico de uma função, podemos achar o domínio e a imagem da seguinte forma:

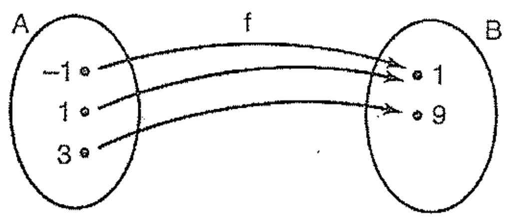
♦ O domínio da função é o conjunto de todos os pontos do eixo das abscissas, que são obtidos pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.

♦ A imagem da função é o conjunto de todos os pontos do eixo das ordenadas, que são obtidas pelas projeção dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.

5. 4 Classificação das funções

a) Função sobrejetora

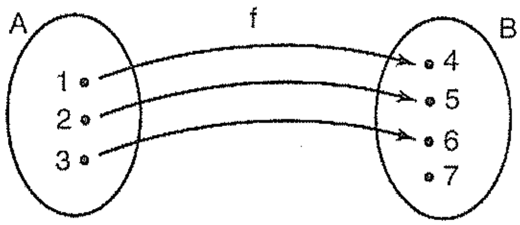
Dizemos que uma função f de A em B é sobrejetora, quando o conjunto imagem for igual ao contradomínio da função.



Im(f) = CD(f) = {1,g]

b) Função injetora

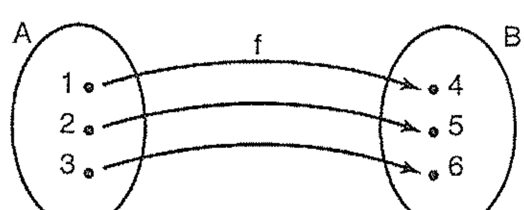
Dizemos que uma função f de A em B é injetora se quaisquer dois elementos diferentes do seu domínio têm imagens diferentes.



$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

c) Função bijetora

É toda função f de A em B que é simultaneamente injetora e sobrejetora.



5.5 Função crescente e função decrescente

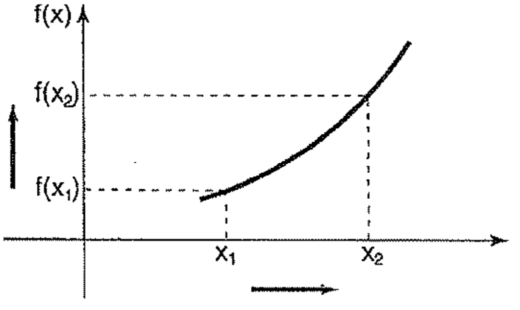
a) Função crescente

Se $A \subset D(f)$

$\boxed{f \text{ é crescente em A}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1),\ \forall\, x_1, x_2 \in A}$

Isto é, a um maior valor de x corresponde um maior valor de f(x).

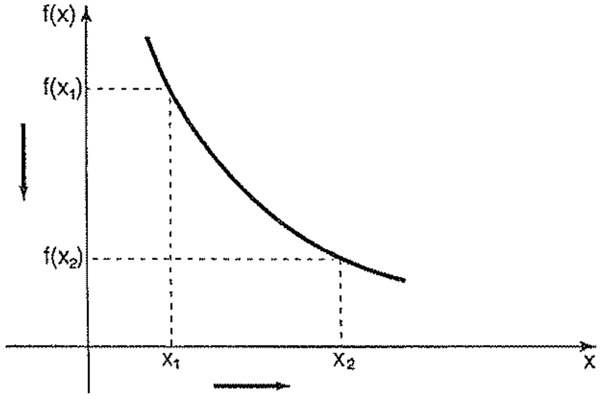


b) Função decrescente
Se $A \subset D(f)$

$\boxed{f \text{ é decrescente em A}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1),\ \forall\, x^1, x_2 \in A}$

Isto é, um maior valor da variável x corresponde um menor valor de f(x).



5.6 Função par

Dizemos que uma função f: A $\rightarrow$ B é par se, e somente se:

$$\boxed{\forall x \in A \Rightarrow f(x) = f(-x)}$$

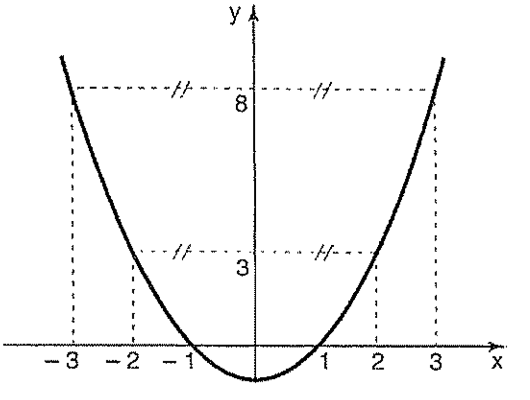
Isto é, elementos opostos quaisquer de A têm imagens iguais.

Obsrvação:

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo vertical.

Note que:

f(2) = f(-2) = 3



5. 7 Função ímpar

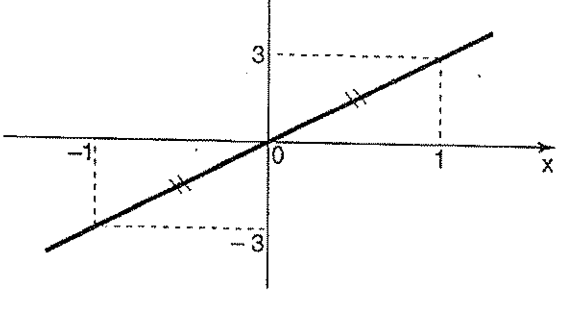
Dizemos que uma função f: A $\rightarrow$ B é ímpar se, e somente se:

$$\boxed{\forall x \in A \Rightarrow f(x) = -f(-x)}$$

Isto é, elemento oposto quaisquer de A têm imagens opostas.

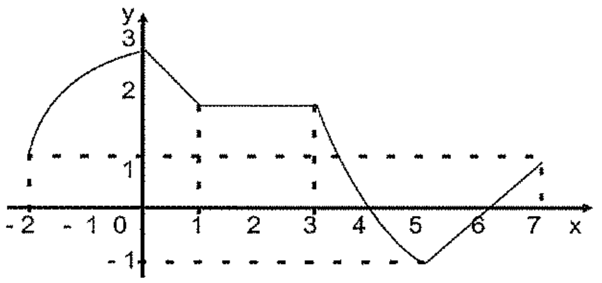
Observação:

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano.



Exercícios Comentados

01 O gráfico abaixo representa a função $y = f(x)$.



Determine:

a) $f(-2)$

b) $f(0)$

c) $f(\sqrt{2})$

d) x, de modo que $f(x) = -1$

e) o conjunto- solução da inequação $f(x) > 0$

f) o conjunto-solução da inequação $f(x) \leq 0$

g) o domínio dessa função

h) o conjunto-imagem

Resolução

a) = 1
b) = 3
c) = 2
d) $\Rightarrow x = 5$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 4$ ou $6 < x \leq 7\}$

f) S = $\{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x \leq 6\}$

g) D =[-2;7]

h) $Im = [-1;3]$

02 Sendo $f(x+3) = x^2 - 3x$ então $f(7)$ é igual a:

a) 28
b) 18
c) 10
d) 4
e) 0

Resolução:

$$x+3 = 7 \Rightarrow x = 4$$
$$f(4+3) = 4^2 - 3 \cdot 4$$
$$f(7) = 4$$

03 O gráfico da função $f(x) = x^2 + mx + n$ passa pelos pontos (−1, 6) e (3,2). Calcule o valor de $f(4)$

Resolução:

$$(-1,6) \Rightarrow (-1)^2 + m \cdot (-1) + n = 6$$
$$\Rightarrow -m + n = 5 \Rightarrow n = 5 + m (I)$$
$$(3,2) \Rightarrow 3^2 + m \cdot 3 + n = 2$$
$$\Rightarrow 3m + n = -7 (II)$$
Substituindo (I) em (II), temos:
$$3m + 5 + m = -7 \Rightarrow m = -3$$
$$Em (I): n = 5 - 3 \Rightarrow n = 2$$
$$Logo, f(x) = x2 - 3x + 2$$
$$\therefore f(4) = 6$$

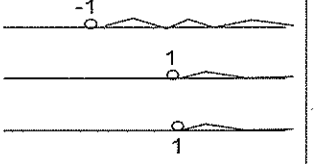
04 O domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ é

a) (1, + ∞)
b) (-1,+ ∞)
c) (-1,1)
d) $\varnothing$
e) (- ∞ ,-1) $\cup$ (1,+ ∞)

Resolução:

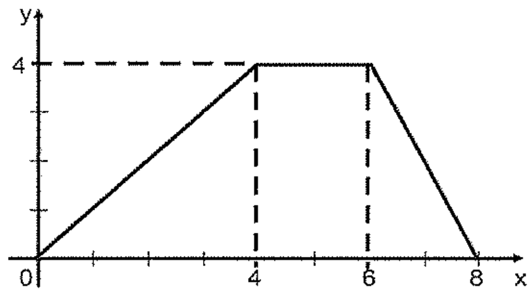
Condições: x + 1 > 0 e + - 1 >0
+ > - 1   x > 1

Fazendo a interseção



D = (1 , + ∞) Letra A.

05 O gráfico da funçãof está representado na figura:



Sobre a função f é falso afirmar que:

a) $f(1)+f(2)=f(3)$
b) $f(2)=f(7)$
c) $f(3)=3f(1)$
d) $f(4)-f(3)=f(1)$
e) $f(2)+f(3)=f(5)$

Resolução:

$f(1)=1 \qquad f(4)=4$
$f(2)=2 \qquad f(5)=4$
$f(3)=3 \qquad f(7)=2$

Logo, a opção errada é E.

Exercícios de Sala

01 Sendo $f(x)=\begin{cases} x^3-1 \; se \; x\leq -1 \\ 2x+3 \; se -1<x\leq 2 \\ 10 \; se \; x>2 \end{cases}$

Calcule o valor de expressão

E = f(-2) + f(-1) + f(1) + f(2) + f(267)

02 Dê o domínio da função:

a) $f(x)=5x+7$

b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+5}$

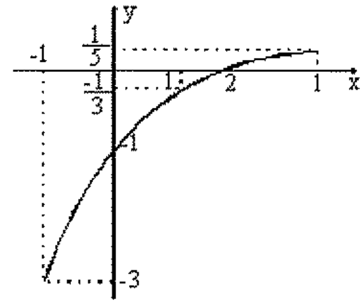
c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

d) $f(x)=\sqrt{x+3}$

e) $f(x)=\sqrt[3]{x+4}$

f) $f(x)=\sqrt{13-x}+\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+5}}$

03 **(FUVEST)** A figura abaixo representa o gráfico de uma função da forma $f(x)=\dfrac{x+a}{bx+c}$, para $-1\leq x\leq 3$.

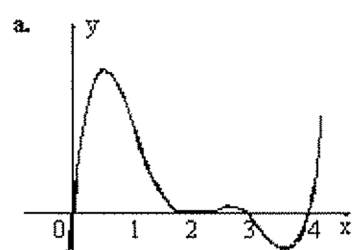


Pode-se concluir que o valor de ***b*** é:

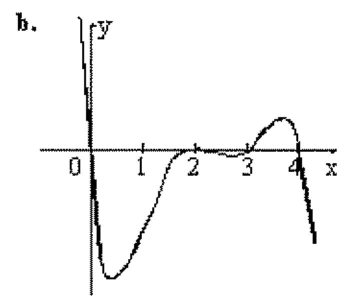
a)– 2
b)– 1
c)0
d)1
e)2

04 **(FUVEST)** Dado o polinômio $p(x)=x^2(x-1)(x^2-4)$, o gráfico da função $y=p(x-2)$ é melhor representada por:

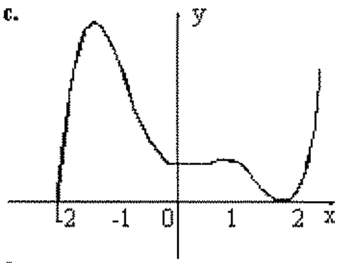
a.



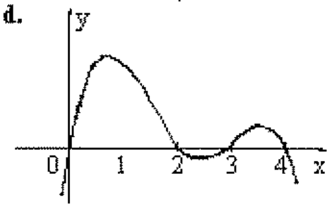
b.



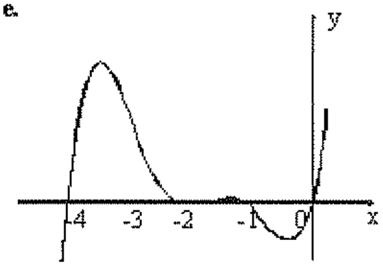
c.



d.



e.



05 **(MACK)** Se [-1; 2] é o conjunto imagem de uma função $f(x)$, então o conjunto imagem de $g(x)=2f(x)+1$ é:

a)[-1; 2]
b)[-2; 1]
c)[-1; 5]
d)[0; 4]
e)[-4; -1]

06 **(MACK)** Considere as funções $f(x)=3x-5$, $g(x)=3x^2+2x-4$, $h(x)=x-x^2$ e o número real $A=\left|\dfrac{\frac{f(0)}{g(-1)}}{h(2)}\right|$. Então $5.A^{-1}$ vale:

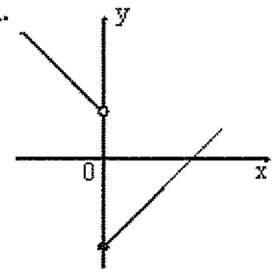
a) $\frac{1}{6}$
b)6
c)– 6
d)5
e) $\frac{1}{5}$

07 **(MACK)** Seja a função f definida por

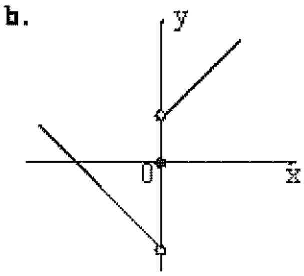
$$f(x)=\begin{cases}1, & se\ x>0\\ 0, & se\ x=0\\ -1, & se\ x<0\end{cases}$$

. O melhor esboço gráfico da função $g(x)=(x+1).f(x)$ é:

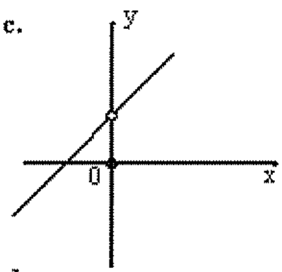
a.



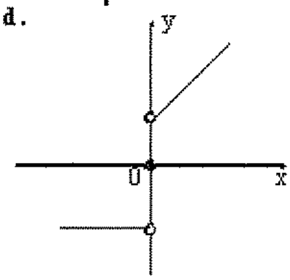
b.



c.



d.



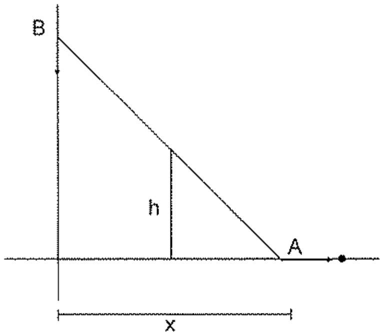
08 Considerando os conjuntos A = {-2, -1, 0, 1} e B = {0, 2, 3}:

a) Determine os pares ordenados da seguinte relação: R1 = $\{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 - 1\}$

b) Calcule o domínio e o conjunto imagem de R_1

09 Um homem sobe numa escada de 5 metros de comprimento, encostada em um muro vertical. Quando ele está num degrau que dista 3 metros do pé da escada, esta escorrega, de modo que a extremidade A se desloca para a direita, conforme a seta da figura, e a extremidade B desliza para baixo, mantendo-se aderente ao muro.

Encontre a fórmula que expressa a distância h, do degrau em que está o homem até o chão, em função da distância x, do pé da escada ao muro.



10 **(PUC-SP)** A produção diária de um certo produto, realizado por um determinado operário, é avaliada por Produção = $8 \cdot x + 9 \cdot x^2 - x^3$ unidades, x horas após as 8 horas da manhã, quando começa o seu turno.

a) Qual é a sua produção até o meio-dia?

b) Qual é a sua produção durante a quarta hora de trabalho?

11 Durante um percuso de x km, um veículo faz cinco paradas de 10 minutos cada uma. Se a velocidade média desse veículo em movimento é de60 km/h, a expressão que permite calcular o tempo, em horas, que ele leva para percorrer os x km é:

a) $\frac{6x+5}{6}$

b) $\frac{x+50}{60}$

c) $\frac{6x+5}{120}$

d) $\frac{x}{60}+50$

e) $x+\frac{50}{6}$

12 Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+1)=2f(x)-5$ e $f(0)=6$. O valor de $f(2)$ é:

a) 0
b) 3
c) 8
d)9
e) 12

13 Uma função real de variável real f é tal que $f\left(\frac{7}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ e $f(x+1)=x\cdot f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. O valor de $f\left(\frac{7}{2}\right)$ é:

a) π

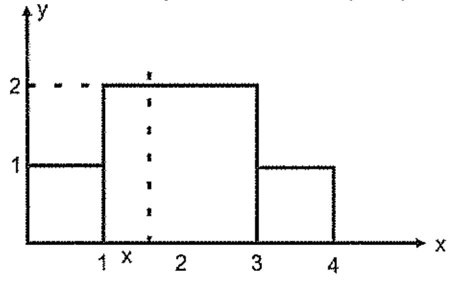
b) $7\sqrt{\pi}$

c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

d) $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

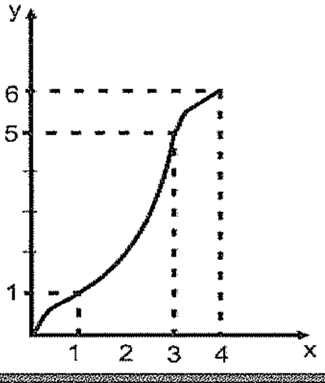
e) $\frac{\pi\sqrt{7}}{15}$

14 Considere, na figura seguinte, a área A(x) da região interior à figura formada pelos três quadrados e compreendida entre o eixo 0y e a reta vertical pelo ponto (x;0)

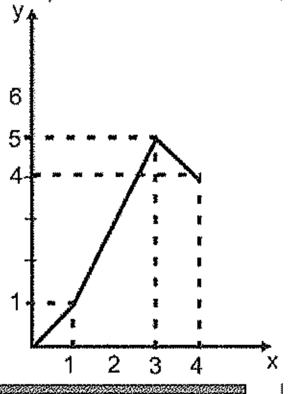


Então o gráfico da função y = A(x), para $0 \le x \le 4$, é:

a)

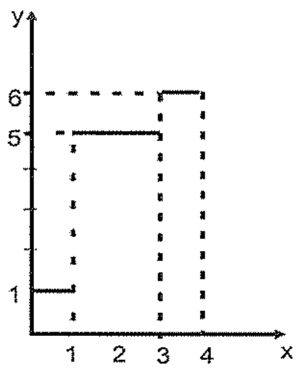


b)

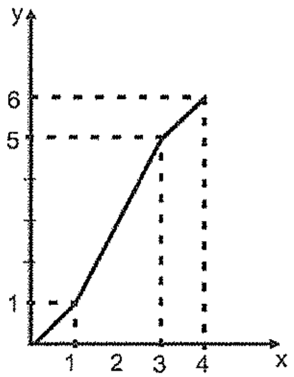


Curso Preparatório Cidade
SCL 113 - Bloco C - Salas 207 / 210 - Tel.: 3340-0433 / 9975-4464 / 8175-4509
www.iic.pro.br / cursocidade@gmail.com

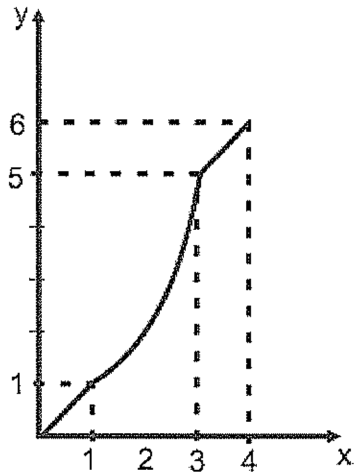
c)



d)



e)



15 Sobrea função real, de variável real, $f(x)=\frac{x^2-1}{x+3}$, pode-se afirmar corretamente:

(01) O domínio da f é R.

(02) O domínio da f intercepta o eixo Ox no ponto (-1;0).

(04) $\frac{2f(-2)}{f(1)}=6$

(08) Se $f(x)=3$, então $x\in\{-2;2;5\}$.

(16) $f(x)$ e $g(x)=\frac{x^3-x}{x^2+3x}$ são funções iguais.

Dê, como resposta, a soma dos números dos itens corretos.

Exercícios de Casa

01 Considere as funções $f(x)=x^3-1$ e $g(x)=2x+3$. Calcule $f(g(1))$.

02 Considere a função $f(x)=ax+b$. Determine as constantes a e b sabendo que $f(2)=-2$ e que 3 é raiz de $f(x)$.

03 De acordo com a Lei de poiserville, a velocidade do sangue num ponto a r cm do eixo central de um vaso sanguíneo é dada pela função: $v(r) = C(R^2-r^2)$ em cm/s, onde C é uma constante e R é o raio do vaso. Supondo para um determinado vaso que $C = 1{,}8 \cdot 10^4$ e $R = 10^{-2}$ cm, calcule

a)a velocidade do sangue no eixo central do vaso sanguíneo;

b)a velocidade do sangue no ponto médio entre a parede do vaso e o eixo central.

04 Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 2x + 1$, resolva a equação: $\frac{f(1)-g(x)}{f[g(2)]}=\frac{f(2)}{f(0)}$

05 Considerando a função f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x + 2$, calcule *a* e *b* sabendo que $f(a) = b$ e $f(b) = 36a+ 1$.

06 **(UFSC)** Considere a função f(x) real, definida por $f(1) = 43$ e $f(x + 1) = 2f(x) - 15$. Determine o valor de f(0).

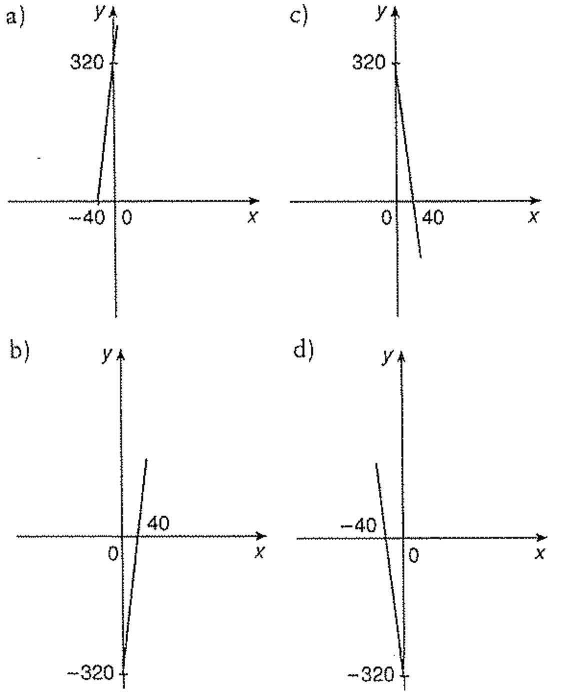
07 **(PUC-RS)** Se $f(x+1)=x^2+2$, então $f(3)$ é igual a:

a)2
b)4
c)6
d)11
e)18

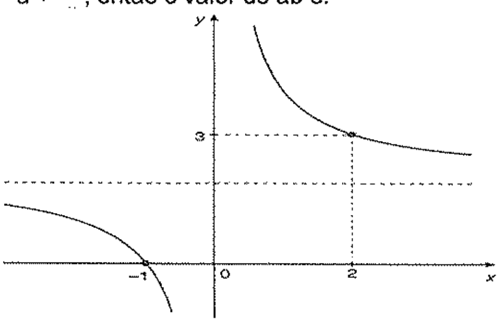
08 **(Fuvest-SP)** A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor de x de uma mercadoria é:

a)f(x)=x-3
b) f(x)=0,97x
c)f(x)=1,3x
d)f(x)=-3x
e)f(x)=1,03x

09 **(UFRN)** Um comerciante decidiu fabricar camisetas de malha para vendê-las na praia, ao preço de R$8,00 a unidade. Investiu no negócio R$320,00. Sabendo que o lucro (y) obtido é função da quantidade de unidades vendidas (x), o gráfico que mais se aproxima da representação dessa função é



10 **(Mackenzie-SP)** Se a curva dada é o gráfico da função $y = a + \frac{b}{x}$, então o valor de ab é:



a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $\sqrt{3}$
c) 2
d) 4
e) $\frac{1}{4}$

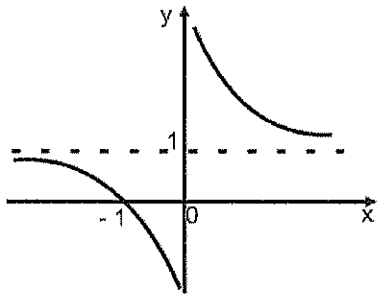
11 **(Faap-SP)** Durante um mês, o número y de unidade produzidas de um determinado bem em função do número x de funcionários empregados de acordo com a lei $y = 50\sqrt{x}$. Sabendo que 121 funcionários estão empregados, o acréscimo de produção com a admissão de 48 novas funcionários é:

a)550
b)250
c)100
d)650
e)200

12 Se $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ e $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ são funções definidas, respectivamente, por:

$f(x) = \frac{1}{x} + 1$ e $g(x) = x^2$, Julgue verdadeiro (V) ou falso (F) os itens.

( ) $gof(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1$.
( ) A função g admite inversa.
( ) O esboço do gráfico de f é:



13 Seja f (x) Uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros e que associa a todo inteiro impar o valor zero e a todo inteiro par o triplo de seu valor.

O valor da soma $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2k-1)$ é:

a) k^2
b) $3k\ (k-1)$
c) $2k - 1$
d) $3k - 3$
e) $3k^2$

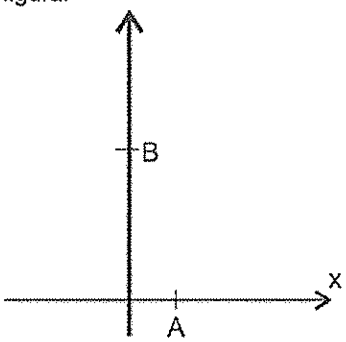
14 A função $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}$

a) é sempre positiva.

b) nunca assume o valor $-\dfrac{1}{2}$

c) apresenta gráfico que não intercepta o eixo dos x.
d) é sempre crescente.
e) assume todos os valores reais.

15 (Observe esta figura:



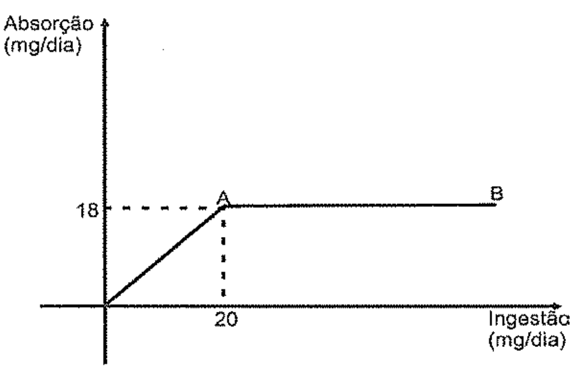
Nessa figura estão representados o ponto A, cuja abscissa é 1, e o ponto B, cuja ordenada é 5. Esses dois pontos pertencem ao gráfico da função

$f(x)=(x+1)(x^3+ax+b)$, em que *a* e *b* são números reais.

Assim sendo, o valor de f (4) é:

a) 65
b) 115
c) 170
d) 225

16 Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscisasa.



Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo coposto, em mg/ dia, e sua absorvição pelo organismo, também em mg/dia.

A única afirmativa falsa relativa ao gráfico é:

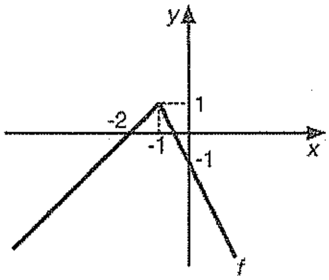
a) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.

b) A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/ dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/ dia

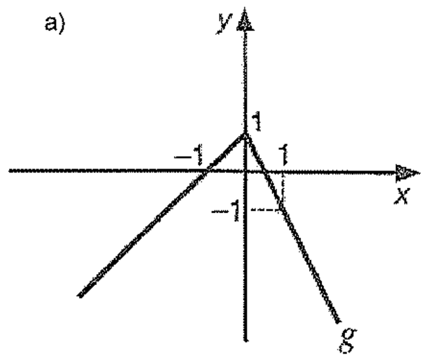
c) Para ingestão acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.

d) Para ingestões de até 20 mg/ dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

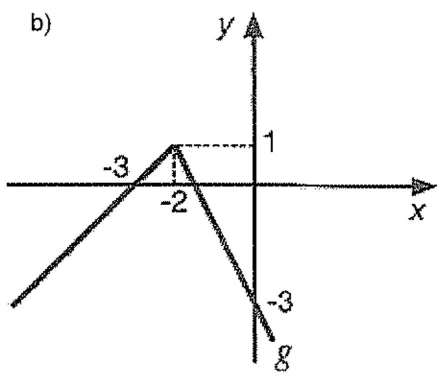
17 Se f é uma função cujo gráfico é dado abaixo, então o gráfico da função g, tal que g(x) = f (x - 1) será dado por:



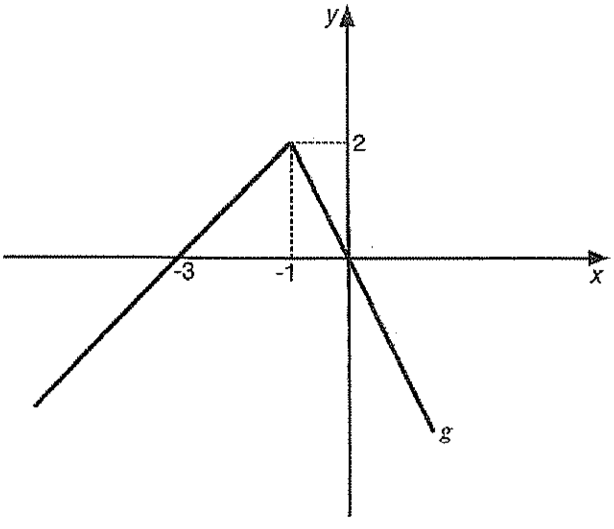
a)



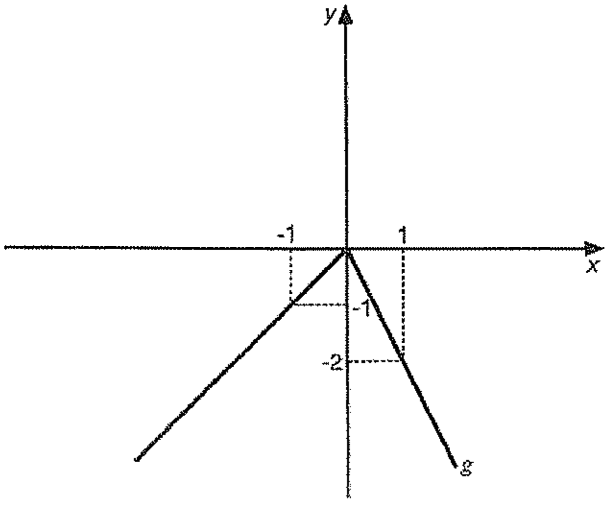
b)



c)



d)



18 Considere as afirmações seguintes:

I. A função f, de R* em R*, dada por f (x) = $\frac{1}{x}$ é igual à sua inversa.

II. O domínio da função real definida por f (x) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ é o intervalo $[1;+\infty[$.

III. A função f, de R em R dada por f (x) = x^3, é ímpar. É verdade que somente:

a) I é verdadeira.
b) II é verdadeira.
c) III é verdadeira.
d) I e III são verdadeiras.
e) II e III são verdadeiras.

19 Considere a função de domínio R $-\{-3\}$ dada por $f(x)=\frac{3-x}{x+3}$. Essa função tem apenas valores positivos se x pertence ao intervalo:

a) $]-3;3[$
b) $]-\infty,-3[$
c) $]3;+\infty[$
d) $]-\infty;3[$
e) $]0;+\infty[$

20 Considere a função $f(x)=x-\frac{1}{x}$. Podemos afirmar que:

(01) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

(02) O domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de zero.

(04) $f(x)>0$ se x < - 1

(08) O gráfico de $f(x)$ é uma reta que passa ponto de coordenadas (1;0).

(16) Se - 1 < x <0, então $f(x)>0$

Dê, como resposta, a soma dos números dos itens corretos.

21 Sendo $f(x)=3x+\sqrt{-(x^2-5x+6)^2}$, então a imagem da função é:

a) {6; 9}
b) {2; 3}
c) {0; 2}
d) {0; 3}
e) {3; 0}

22 O domínio da função $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{4+x}}+\frac{\sqrt{x-1}}{x^3}$ é igual a:

a) $\{x\in\mathbb{R} / x\leq 0\}$
b) $\{x\in\mathbb{R} / x\geq 0\}$
c) $\{x\in\mathbb{R} / x\leq -1\}$
d) $\{x\in\mathbb{R} / x\geq 1\}$

23 Considere a função $f: R \to R$ tal que para todo x real se tem $f(5x) = 5f(x)$. Se $f(15) = 20$, então o valor de $f(75)$ é igual a:

a) 50
b) 100
c) 150
d) 200
e) 250

24 A função $f: R \to R$ satisfaz a igualdade de $f:(2x+1) = 10 \cdot f(x) - 3$, para todo x real.
Se $f(31) = 0$, então o valor de $f(0)$ é igual a:

a) 0,33333
b) 0,3333
c) 0,333
d) 0,33

25 Sejam f e g funções de R em R definidas por:
$f(x) = -x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$.

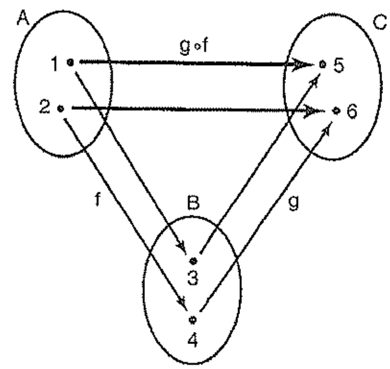
Determine a soma dos números associados à (s) proposição(ões) verdadeiras(s).

(01) A reta que representa a função f intercepta o eixo das ordenadas em (0;3).
(02) f é uma função crescente.
(04) - 1 e + 1 são os zeros da função g.
(08) $im(g) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}$.
(16) A função inversa da f é definida por $f^{-1}(x) = -x + 3$.
(32) O valor de $g(f(1))$ é 3.
(64) O vértice do gráfico de g é o ponto (0;0).
Dê, como resposta, a soma dos números dos itens corretos.

6. Composição de Funções

Dadas duas funções, f e g, podemos obter uma outra função, que se representa por $g \circ f$ (lê-se g após f) e se chama função composta de g com f.

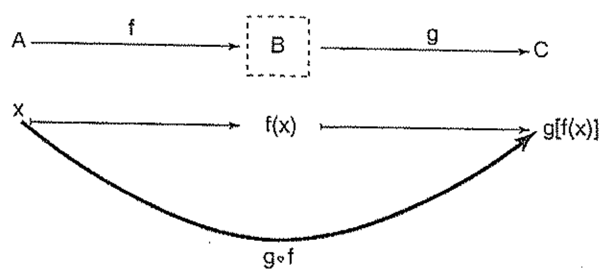
Em que: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$



A imagem de um elemento qualquer x de A por meio da função composta $g \circ f$ é determinada em duas etapas:

♦ a primeira tranforma o elemento x de A no elemento f(x) de B;

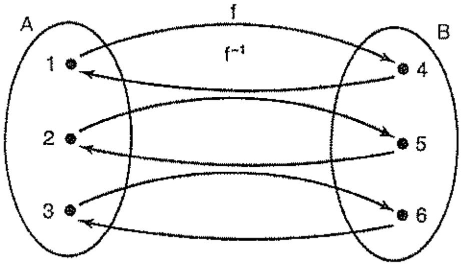
♦ a segunda transforma o elemento f(x) de B no elemento g [f (x)] de C.



A função composta faz sozinha o que f e g fazem juntas.

6.2 Função inversa

Denomina-se função inversa da função bijetora $f: A \rightarrow B$ a função $f^{-1}: B \rightarrow A$ que se obt´rm trocando de posição os elementos de todos os pares ordenados da funcão f.



f = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)}
f^{-1} = {(4, 1), (5, 2), (6, 3)}

Observação:

Para se obter a inversa de uma função, devemos proceder da seguinte forma:

1°.) troca-se x por y e y por x;
2°.) coloca-se o novo y em função do novo x.

Exercícios Comentados

01 Dados as funções: $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 = 4x$ e $h(x) = \sqrt{x}$, determine

a) go f

b) $f\left(g(x)\right)$

c) g o f h(4)

d) o domínio de h(g(x))

Resolução:

a) gof = g(f(x)) = $(2x + 3)^2 - 4(2x + 3)$
$= 4x^2 + 12x + 9 - 8x - 12$
$= 4x^2 + 4x - 3$

b) f(g(x)) = $2(x^2 - 4x) + 3$

c) g o fo h (4) = 21

h(4) = $\sqrt{4} = 2$

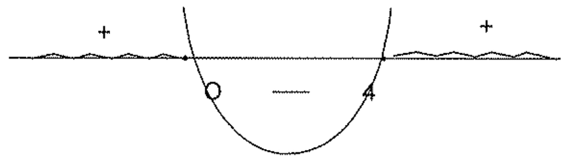
f(2) = 2 . 2 + 3 = 7

g(7) = $7^2 - 4 . 7 = 21$

d) h (g(x)) = $\sqrt{x^2 - 4x}$

Dom: $x^2 - 4x \geq 0$

x = 0 ou x = 4



Dom = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4\}$.

02 Dada a função $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, determine:

a) $f^{-1}(x)$

b) $f^{-1}(3)$

Resolução:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$
$$x = \frac{2y-1}{x+3}$$
$$xy + 3x = 2y - 1$$
$$2y - xy = 3x + 1$$
$$y = \frac{3x+1}{2-x} \qquad f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$$

b) $f^{-1}(3): x = 3, y = ?$

Na função $f(x): y = 3 \; e \; x = ?$

Logo, $\dfrac{2x-1}{x+3} = 3$ 3 x + 9 = 2x - 1

x = - 10 $\therefore$ $f - 1(3) = -10$.

03 Sejam as funções $f(x) = 2x - 3 \; e \; f(g(x)) = \dfrac{x-1}{x+2}$. Determine g(x)

Resolução: $f(g(x)) = 2g(x) - 3 = \dfrac{x-1}{x+2}$

$$2g(x) = \frac{x-1}{x+2} + 3$$
$$g(x) = \frac{4x+5}{2x+4}$$

04 Sejam as funções g(x) $=\dfrac{x+1}{1-2x}$ e $f(g(x))=2x^2-3x+5$. Calcule $f(1)$

Resolução

$$f(g(x))=f(1)\Rightarrow g(x)=1\ \frac{x+1}{1-2x}=1\Rightarrow x=0$$

Logo, $\begin{array}{l} f(g(0)=2.0^2-3.0+5 \\ f(1)=5 \end{array}$

05 Determine a inversa em cada caso:

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

Resolução:

$$x=\frac{2y-1}{yx2}\therefore xy+2x=2y-1$$
$$2y-xy=2x+1$$
$$y=\frac{2x+1}{2-x}f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{2-x}$$

b) $f:R\{x\geq-2\}\rightarrow\{y\geq-7\}f(x)=x^2+4x-3$

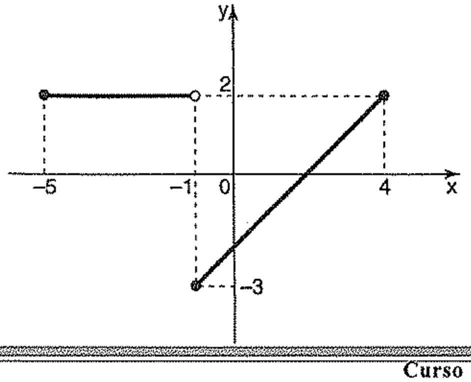
Resolução:

$$x=y^2+4y-3$$
$$y^2+4y+4-4=x+3$$
$$(y+2)^2=x+7$$
$$y=\pm\sqrt{x+7}-2$$

Im $f-1=Df=y\geq-2$. Logo, $f^{-1}(x)=\sqrt{x+7}-2$

Exercícios de Sala

01 Seja y = f(x) uma função definida no intervalo [-5,4] pelo gráfico dado. Então o valor de $f(f(-3))$ é:



a) -2
b)0
c) -1
d) 1
e) 2

02 A função real definida por f (x) = kx + m é ímpar, tal que k $\in\mathbb{R}^*$, m $\in\mathbb{R}$ e f (-1) = 3.

Então, a soma das raízes da equação

$f(f(x))=f\left(\dfrac{-x^2}{3}\right)$ é:

a) 3
b) -3
c) 0
d) -9
e) 9

03 Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ uma função definida por y = $f(x)$. Sabendo-se que $f(0)=3$, $f(1)=2$ e $f(3)=0$, o valor de x tal que $f(f(x+2))=3$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

04 Dadas as funções reais f(x) = 1 - 2x e g(x) = 2 x + k, o valor de k, de modo que $f[g(x)]=g[f(x)]$, é:

a) -3
b) -1
c) $-\dfrac{1}{3}$
d) $\dfrac{1}{3}$
e) 1

05 Dadas as funções $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere h = $f\circ$g. Então, podemos afirmar que:

a) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente;
b) h é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente;

c) h é estritamente crescente mas não é necessariamente inversível;

d) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente;

e) n. d. a.

06 Se f^{-1} é a função inversa da função f, com $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por f (x) = 3x - 2, então f^{-1} (-1) é igual a:

a) -1

b) $-\frac{1}{3}$

c) $-\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{3}$

07 Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=2x+1$. Se f^{-1} é a função inversa de f, então

$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)-f^{-1}(5)$ é igual a:

a) $f(1)$

b) $f(-2)$

c) $2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $3\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)$

e) $\frac{1}{2}\cdot f(-1)$

08 Sejam as funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por f (x) = 2x - 1 e g(x) = kx + t. A função g será a inversa de f se, e somente se:

a) $k:t=\frac{1}{4}$

b) $k-t=1$

c) $k=2t$

d) $k+t=0$

e) $k=t=\frac{1}{2}$

09 Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função da forma $f(x)=ax+b$ e $(f\circ f)(x)=x+4$ para todo x real, então a inversa de f é:

a) $f^{-1}(x)=-x-2$

b) $f^{-1}(x)=x+2$

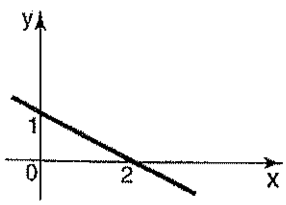
c) $f^{-1}(x)=x^2+8x+16$

d) $f^{-1}(x)=x-8$

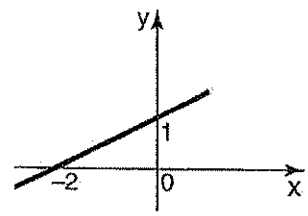
e) $f^{-1}(x)=x-2$

10 Dada a função $f(x)=\frac{x}{2}x\,1$, o gráfico de sua inversa $f^{-1}(x)$ é

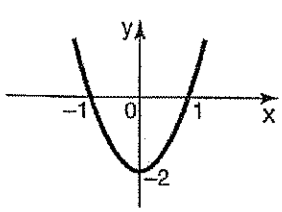
a)



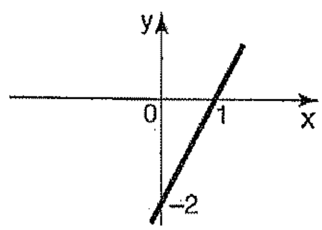
d)



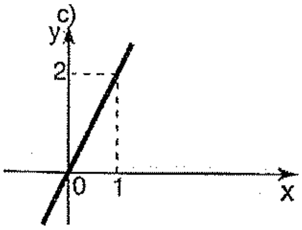
b)



e)



c)



Curso Preparatório CIDADE

Exercícios de Casa

01 Considerando as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 3 - x$, determine:

a) f(g(x))
b) g(f(x))
c) g(f(h(x)))

02 Sejam f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^2 - x - 10$ e $g(x) = 3x - t$. Sabendo que f(g(1)) = 2, calcule t.

03 Sabendo que $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = f(x + 1) - f(x)$, calcule g(f(x)).

04 **(UFU-MG)** Se f(x) = 2x + k e g(x) = mx + 1, $\forall x \in \mathbb{R}$, determine os valores de k e m para que $g \circ f$ seja a função identidade.

05 Determine a inversa das funções:

a) f(x) = 4x - 1

b) $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$, com $x \neq 5$

06 Determine a inversa:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

07 Se $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ calcule $f^{-1}(3)$

08 Se $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é a inversa de $g(x) = \dfrac{3x+4}{x-1}$ calcule g(a + b + c + d).

09 Dada a função $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3} (x \neq 3)$, determine:

a) f(f(f(x)))
b) x para que f(f(f(x))) = 1

10 As funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, são definidas por $f(x) = 2x + 3$ e g(x) = 3x + m. Se $f(g(x)) = g(f(x))$, então $f(m)$ é um número:

a) primo;
b) negativo;
c) cubo perfeito;
d) menor que 18;
e) múltiplo de 12.

11 Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3$. É correto afirmar que a função $f \circ g$, composta de g e f, é:

a) bijetora;
b) ímpar;
c) par;
d) decrescente, para todo $x \in \mathbb{R}$;
e) injetora e não sobrejetora.

12 Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = 3x + 6$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Então o valor de f em zero é:

a) -1
b) 0
c) 3
d) 2
e) 1

13 Considereremos as seguintes afirmações sobre uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq f(-x)$, então f não é ímpar.
2. Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(-x) = -f(x)$, então f não é ímpar.
3. Se f é par e ímpar, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$.
4. Se f é ímpar, então $f \circ f$ (f composta com f) é ímpar.

Podemos afirmar que estão corretas as afirmações de números:

a) 1 e 4
b) 1, 2 e 4

c) 1 e 3
d) 3 e 4
e) 1, 2 e 3

14 Dados as funções a seguir: g(x) = 3x + 2

$(g \circ f)(x) = 6x - 4$

h(x+1) = h(x) + x

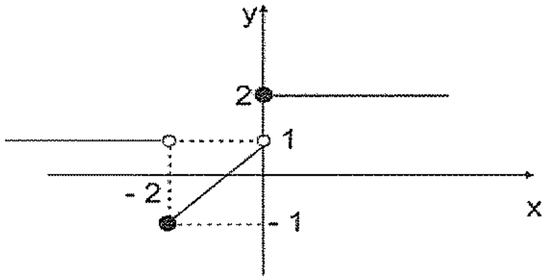
t(2x) = 2t(x)

t(6) = 18

Calcular o valor da expressão f(4) + h(6) - h(4) + t(3)

a) 18
b) 24
c) 22
d) 16

15 Com respeito a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado a seguir, é correto afirmar:



a) $(f \circ f)(-2) = 1$

b) $(f \circ f)(-1) = 2$

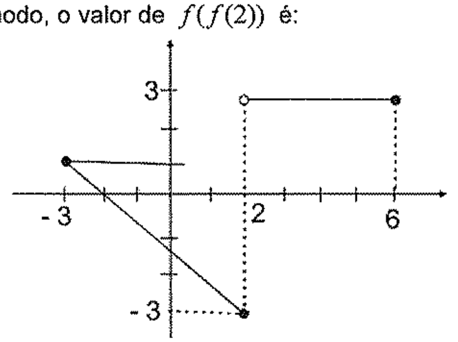
c) $(f \circ f)(-2) = -2$

d) $(f \circ f)(-1) = 0$

e) $f(-2) = 1$

16 Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo $[-3;6]$ conforme indicado no gráfico.

Desde modo, o valor de $f(f(2))$ é:



a) -3

b) $-\frac{1}{2}$ d) 3

c) 1 e) 0

17 Dadas as funções reais:

$f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$,

se $f[g(x)] = 8x + 7$, o valor de a + b é:

a) 13
b) 12
c) 15
d) 6
e) 5

18 Dadas as funções:

$f(x) = \frac{2x - 3}{5}$

$g(x) = x^2 + 4x - 8$, e $h(x) = 2x$, a alternativa incorreta é:

a) $f^{-1}(x) = \frac{5x + 3}{5}$

b) As três funções são crescente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

c) O vértice de g(x) é ponto V(-2;-12).

d) A imagem de h(x) é $\mathbb{R} > 0$.

e) O domínio das três funções é $\mathbb{R}$

19 Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) verdadeira(s).

(01) O domínio da função $f : \to \mathbb{R}$, definida por:

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x - 6}$ é

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \text{ ou } x \geq 5\} - \{6\}$.

(02) A função inversa da função $g(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$ é definida por $g^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$.

(04) Sejam h e k duas funções, dadas por h(x) = 2x - 1 e k(x) = 3x + 2. Então h(k(1)) é igual a 9.

(08) A função $f : R \to R$, definida por $f(x) = x + 2$, é uma função decrescente.

(16) A função g: $R \to R$, definida por g(x) = x² + 1, é uma função par.

(32) O conjunto-imagem da função h: $R \to R$, definida por h(x) = |x2 - 4x + 3 | é *Im(h)* = $\{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}$.

Dê, como resposta, a soma dos números dos itens corretos.

20 Determine o valor real de a para que

$f(x) = \frac{x+1}{2x+a}$ possua como inversa a função

$f^{-1}(x) = \frac{1 - 3x}{2x - 1}$

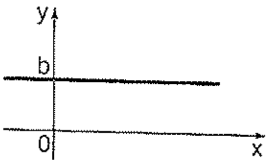
7 - Função Afim

7.1 Função constante

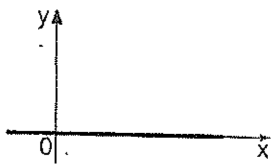
Denomina-se função constante toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$ com $b \in \mathbb{R}$ pra todo x real. O gráfico da função constante é uma reta paralela ou coicidente com o eixo x.

Podemos ter os casos:

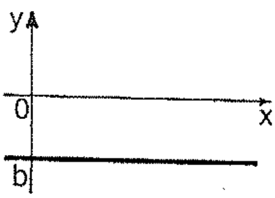
a) $b > 0$



b) $b = 0$



c) $b < 0$



7.2 Função do 1° grau

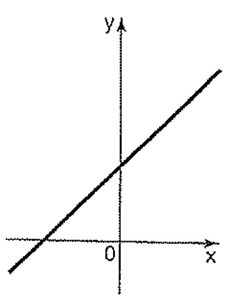
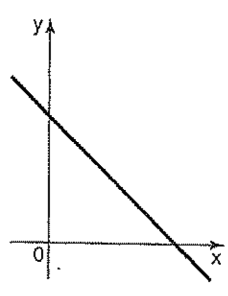
a) Definição

Denomina-se função d o 1° grau toda funcão $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

b) Gráfico

O gráfico da função do 1° grau éuma reta.

Podemos ter os casos:

$a > 0$	$a < 0$
 função crescente	 função decrescente

c) Raiz ou zero

A raiz de uma função do 1° grau é o valor de x que torna $f(x) = 0$.

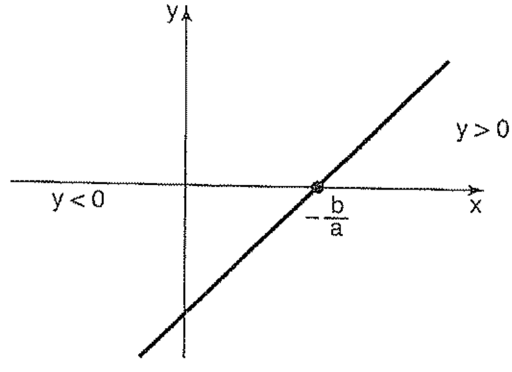
$f(x) = ax + b \Rightarrow 0 = ax + b$

$$x = -\frac{b}{a}$$

└→ raiz de f(x)

d) Estudo do sinal

1° caso: $a>0$

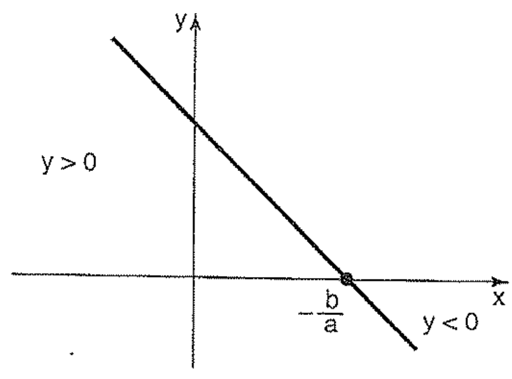


$x > -\frac{b}{a} \Rightarrow y > 0$

$x >= \frac{b}{a} \Rightarrow y = 0$

$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow y < 0$

2° caso: $a < 0$



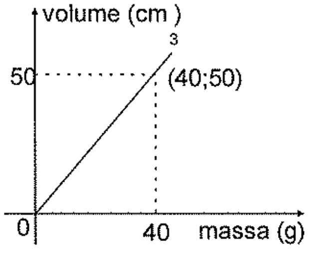
$x > -\frac{b}{a} \Rightarrow y<$

$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow y = 0$

$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow y > 0$

Exercícios Comentados

01 **(Vunesp)** Apresetamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.



Baseando-se nos dados do gráfico, determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico.

Resolução:

a) O gráfico da função é, $x > 0$, uma reta que pasa pelos pontos (0;0) e (40; 50).

Temos: $y = ax + b$

$(0;0) \Rightarrow a \cdot 0 + b = 0 \Rightarrow b=0$

$(40;\ 50) \Rightarrow a \cdot 40 + b = 50$

$40a = 50 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

Logo: $y = \frac{5}{4}x$

a) A massa (em grama) de 30 cm^3 de álcool.

b) Para um volume $y = 30\ cm^3$ de álcool, temos:

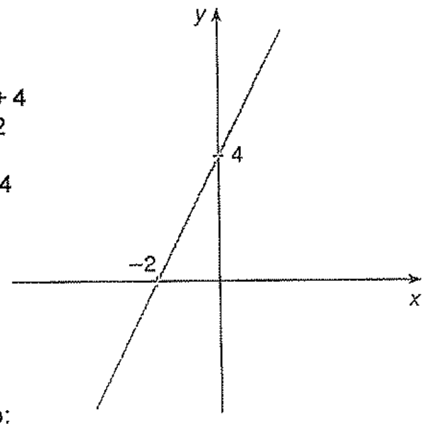
$30 = \frac{5}{4}x \Rightarrow x=24$

Logo, a massa para um volume igual a 30 cm^3 de álcool é 24 g.

02 A função representada pelo gráfico

é:

a) $y = -2x + 4$
b) $y = 4x - 2$
c) $y = 2x$
d) $y = 2x + 4$
e) $y = 2x - 4$



Resolução:

O gráfico da função é uma reta que passa pelos pontos(–2,0) e (0,4).

$f(x) = ax + b$

$(0,\ 4) \Rightarrow a \cdot 0 + b = 4 \Rightarrow b = 4$

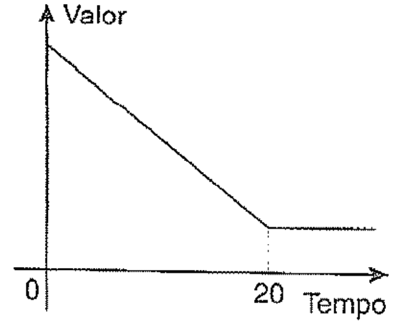
$(-2,\ 0) \Rightarrow a \cdot (-2) + b = 0 \Rightarrow -2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$

Logo, $f(x) = 2x + 4$.

03 **(Vunesp)** Um operário ganha 3,00 por hora de trabalho de sua jornada semanal regular de trabalho, que é de 40 horas. Eventuais horas extras são pagas com um acréscimo de 50%. Encontre uma forma algébrica para expressar seu salário bruto semanal S, para as semanas em que trabalhar h horas, com $h \geq 40$.

Resolução: $S = 3 \times 40 + 3 \times 1,5 \times (h-40)$
$S = 120 + 4,5\ (h-40)$
$S = 120 + 4,5\,h - 180$
$S = 4,5h - 60$

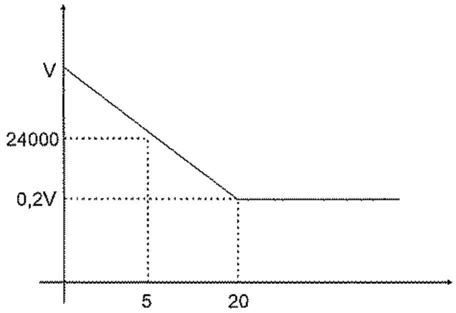
04 **(PUC-SP)** Um veículo de transporte de passageiros tem seu valor comercial depreciado linearmente, isto é, seu valor comercial sofre desvalorização constante por ano. Veja a figura:



Esse veículo foi vendido pelo seu primeiro dano, após 5 anos de uso, R$ 24.000,00. Sabendo-se que o valor comercial do veículo atinge seu valor mínimo após 20 anos de uso e que ese valor mínimo corresponde a 20% do valor que tinha quando era novo, então qual é esse valor minimo?

a) R$ 3.000,00
b) R$ 12.000,00
c) R$ 7.500,00
d) R$ 6.000,00
e) R$4.500,00

Resolução:



Por semelhanca de triângulos:

$$\frac{20}{5} = \frac{v - 0,2v}{v - 24.000}$$

4(v-24.000)
v - 24.000 = 0,2v
0,8 v = 24.000

$$v = \frac{24.000}{0,8}$$

v = 30,00 mínimo: 0,2 30.000 = 6000

05 **(Fuvest)** A tabela abaixo mostra a temperatura das águas do oceano Atlântico (ao nível do Equador) em função da profundidade:

Profundidade	Temperatura
superfície	27 °C
100 m	21 °C
500 m	7 °C
1,000 m	4 °C
3,000 m	2,8 °C

Admitindo que variação de temperatura seja aproximadamente linear entre cada duas medições feitas para a profundidade, a temperatura prevista para a profundidade de 400 m é:

a) 16 °C
b) 14 °C
c) 12,5 °C
d) 10,5 °C
e) 8 °C

Resolução: y = a x + b

x = profundidade
y = temperatura

$$\begin{matrix}(100,21) \Rightarrow \\ (500,7) \Rightarrow\end{matrix} \begin{cases}100\,a + 6 = 21 \; (-1) \\ 500\,a + b = 7\end{cases}$$

- 100 a - b = - 21

$$\frac{500\,a + b = 7}{400a = -14}$$

$$a = -\frac{7}{200}$$

$$b = 21 - 100\left(\frac{-7}{200}\right)$$

$$b = 21 + \frac{7}{5} = 24,5$$

$$y = \frac{7}{200}\,x + 24,5$$

$$\text{p1 } x = 400\; y = \frac{-7}{200}\,,400 + 24,5$$

y = 10,5

Exercícios de Sala

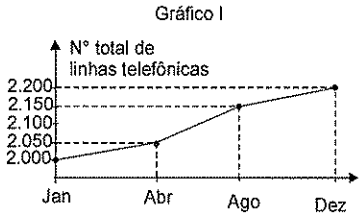
01 **(UFMG)** Determine m e n, de modo que pontos (−2; −1) e (−1; −2) pertençam ao gráfico da função definida por y = nx + m.

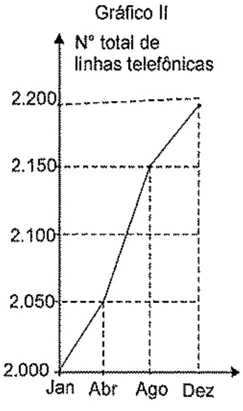
02 **(Unicamp-SP)** O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeira custaR$0,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule:

a) o preço de uma corrida de 11 km.
b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.

03 **(UFMG)** Para alimentar seus pássaros um criador compra, mensalmente, ração e milho num total de 1.000 kg. A ração custa R$ 40,00 o quilo, e o milho R$ 25,00. Se x (sendo 0< x < 1.000) representa a quantidade, em quilograma, de ração comprada, determie a expressão da função-gasto (g(x)) em reais.

04 **(Enem-MEC)** Para convecer a populaçao local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de inhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, representado a seguir. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, com o qual pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 nova linhas telefônicas.



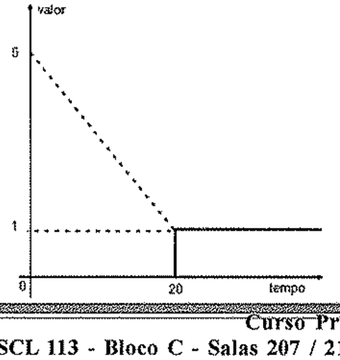


Analizando os gráficos, pode-se concluir corretamente que:

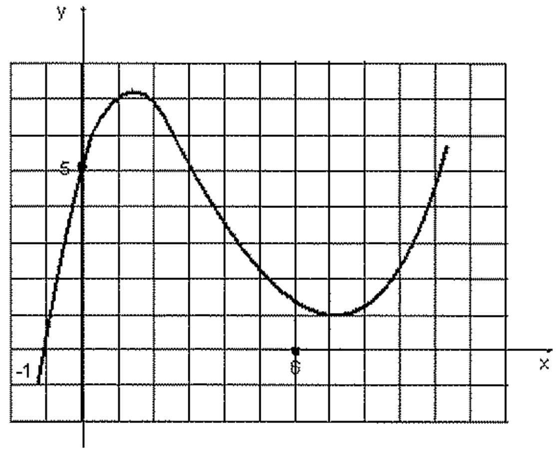
a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.
b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.
c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.
d) a aparente diferença de crescimeno bos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.
e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

05 (PUC) Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo [-3;6] conforme indicado no gráfico. Desde modo, o valor de $f(f(2))$ é:

a)-3
b) $-\frac{1}{2}$
c)1
d)3
e)0



06 (UFMG) Nesse plano cartesiano, está representado o gráfico do polinômio
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Sendo a, b, c e d número reais.



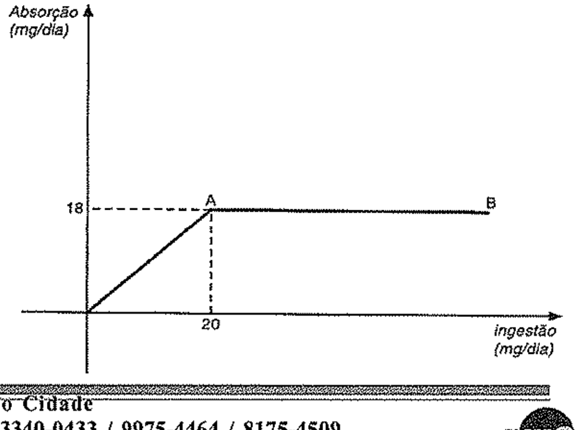
Considere as afirmativas referentes a esse polinômio:
I. $A - b + c - 5 = 0$; e
II. $P(p(6)) > p(6)$
Então, é correto afirmar que:

a)Nenhuma das afirmativas é verdadeira.
b)Apenas a afirmativa I é verdadeira.
c)Apenas a afirmativa II é verdadeira
d)Ambas as afirmativas são verdadeiras.

07 (Unifei) Dadas as funções reais:
$F(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$, se $f[g(x)] = 8x + 7$, o valor de a+b é:

a)13
b)12
c)15
d)6
e)5

08 (UFMG) Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.



Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia .

A única afirmativa falsa relativa ao gráfico é:

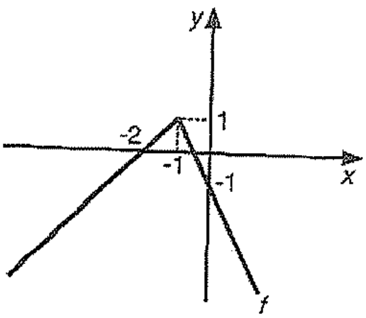
a)A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.

b)A absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.

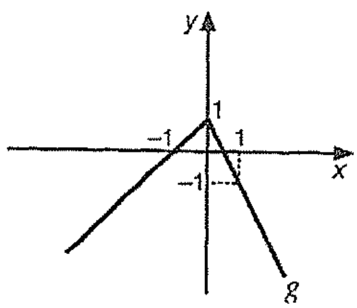
c)Para ingestão acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.

d)Para ingestão de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

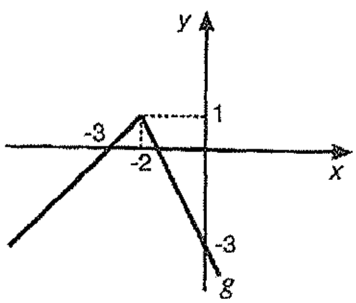
09 (U.F. Uberlândia) Se f é uma função cujo gráfico é dado abaixo, então o gráfico da função g, tal que g(x) = f(x – 1) será dado por:



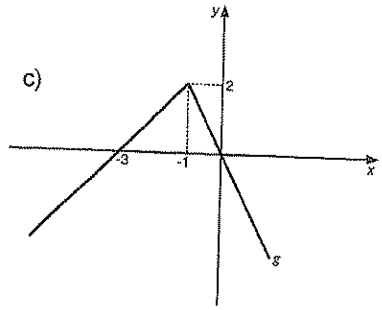
a)



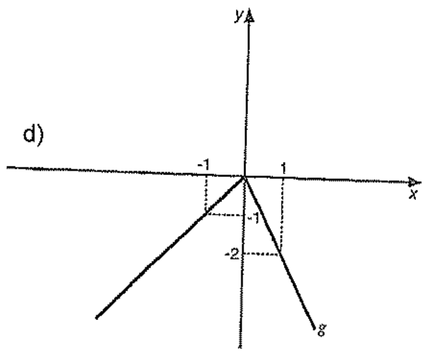
b)



c)



d)

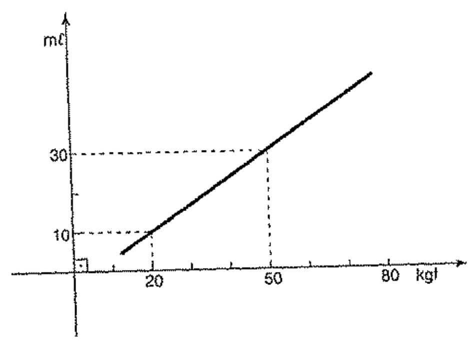


10 A reta do gráfico abaixo indica a quantidade de soro (em mℓ) que uma pessoa deve tomar, em função de seu peso (dado em kgf), num tratamento de imunização.

A quantidade total de soro a ser tomada será dividida em dez injeções idênticas.

Quantos mℓ de soro receberá em cada aplicação um indivíduo de 80 kgf?

a) 40
b) 45
c) 50
d) 55
e) 60



Exercícios de Casa

01 Se $f(x+1)=\dfrac{3x+5}{2x+1}$, calcule $f(x)$.

02 (UFC) Seja f uma função real, de variável real, definida por

$f(x) = ax + b$. Se $f(1) = -9$ e $b^2 - a^2 = = 54$, calcule o valor de $a - b$.

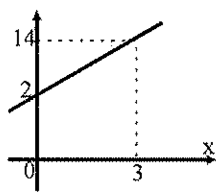
03 (UFSC) Sabendo que a função $f(x) = mx + n$ admite 5 como raiz e $f(-2) = -63$, o valor de $f(16)$ é:

04 Uma função f real, do 1° grau, é tal que $f(0) = 1 + f(1)$ e $f(-1) = 2 - f(0)$.

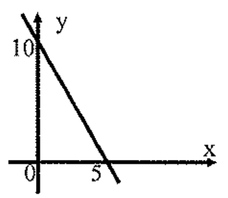
Determine $f(3)$.

05 Determine a função correspondente aos gráficos:

a)



b)



06 **(Fatec- SP)** Para uma certa máquina, o custo total na produção de um lote de x peças é de y unidades monetárasa, com $y = 100 + 0{,}01\,x + 0{,}001\,x^2$. A diferença de custo entre a produção de um lote de 500 peças e um de 498 peças, em unidades monetárias, é de:

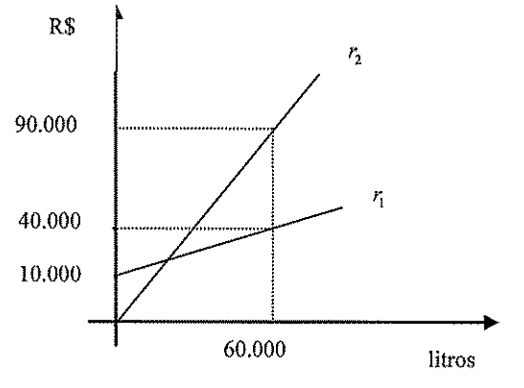
a) 0,024
b) 2,016
c) 100,024
d) 129, 7804
e) 507,984

07 Uma pessoa vai trocar o óleo de seu carro e encher o tanque de álcool. O custo de troca de óleo é R$ 60,00 e o preço do litro de álcool é R$ 2,19. Sendo g(x) o gasto dessa pessoa para trocar o óleo e encher o tanque com x litros de álcool,

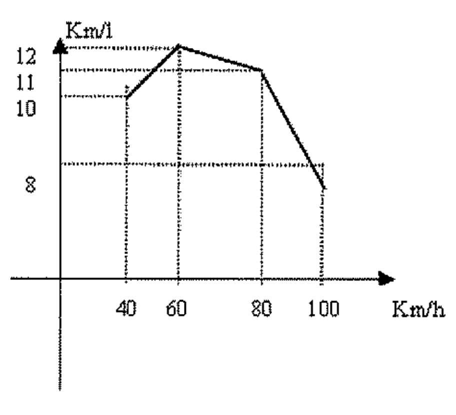
a) escreva g(x).
b) calcule g(50).

08 **(EspCEx)** Uma fábrica produz óleo sob encomenda, de modo que toda produção é comercializada. O custo da produção é composto de duas parcelas. Uma parcela fixa, independente do volume produzido, correspondente a gastos com aluguel, manutenção de equipamentos, salários, etc; a outra parcela é variável, depende da quantidade de óleo fabricado. No gráfico abaixo, fora de escala, a reta r_1 representa o custo de produção, e a reta r_2 descreve o faturamento da empresa, ambos em função do número de litros comercializados. O valor da parcela fixa do custo e o volume mínimo de óleo a ser produzido para que a empresa não tenha prejuízo são, respectivamente:

a) R$ 10.000,00 , 10.000 litros
b) R$ 15.000,00 , 18.000 litros
c) R$ 15.000,00 , 15.000 litros
d) R$ 20.000,00 , 10.000 litros
e) R$ 10.000,00 , 15.000 litros



09 **(EsPCEx)** Os dados obtidos nas pesquisas de desempenho de um determinado automóvel foram organizados segundo o gráfico a seguir, que relaciona o número de quilômetros rodados por litro de combustível, com a velocidade desenvolvida por esse automóvel. Com base nas informações acima pode se concluir que:



a) maior consumo de combustível por quilômetro rodado se dá aos 60 km/h.

b) para velocidade entre 40 km/h e 60 km/h, o aumento da velocidade implica aumento do combustível.

c) para velocidade entre 60 km/h e 100 km/h, o aumento do consumo de combustível é diretamente proporcional ao aumento da velocidade.

d) Na velocidade de 100 km/h o automóvel consome menos combustível que a 40 km/h.

e) Para velocidade acima de 60 km/h o consumo de combustível aumenta sempre que a velocidade aumenta.

10 **(EsPCEx)** Sejam as funções reais $f(x)$ e $g(x)$. Se $f(x)=x+2$ e $f(g(x))=\frac{x}{2}$, pode-se afirmar que a função inversa de g(x) é:

a) $g^{-1}(x)=\frac{f(x)}{2}$

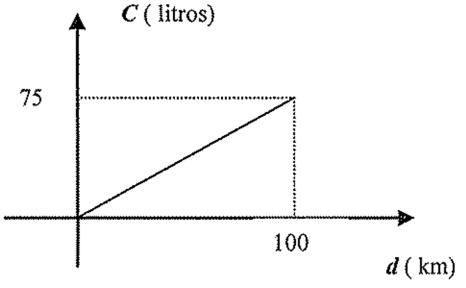
b) $g^{-1}(x)=\frac{x+4}{2}$

c) $g^{-1}(x)=f(x)$

d) $g^{-1}(x)=2f(x)$

e) $g^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}$

11 **(EsPCEx)** A quantidade de combustível gasto por um veículo blindado, por quilômetro rodado, está indicada pelo gráfico abaixo. Qual a função que representa o consumo *C(d)* em relação à distância *d* percorrida?



a) $C(d)=0{,}75d$

b) $C(d)=0{,}25d$

c) $C(d)=1{,}75d$

d) $C(d)=0{,}25d$

e) $C(d)=1{,}20d$

12 **(EsPCEx)** A análise do solo de certa região revelou a presença de 37,5*ppm* (partes por milhão) de uma substância química. Se a densidade do solo analisado é de 1,2 toneladas por metro cúbico, então a quantidade dessa substância, presente em1 *ha* do solo, considerando uma camada de 30 *cm* de profundidade é:

Dados:

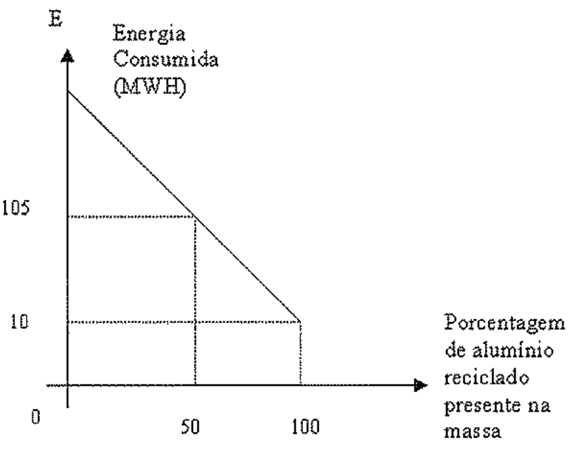
1 tonelada vale 1000 *kg*

1*ha* (hectare) é 10000 m^2

$$densidade=\frac{massa}{volume}$$

a) 125 *kg*
b) 135 *kg*
c) 1250 *kg*
d) 1350 *kg*
e) 3750 *kg*

13 **(EsPCEx)** A questão da reciclagem de alumínio ganha cada vez mais importância nos dias atuais, principalmente pelo fato de que a quantidade de energia necessária para se produzir 1 ***kg*** de alumínio por meio de reciclagem corresponde a apenas ***5%*** da energia necessária para obter-se esse mesmo ***kg*** de alumínio a partir do minério. O gráfico a seguir mostra a quantidade de energia necessária para obter-se certa massa de alumínio em função do percentual de alumínio reciclado existente nessa massa. Identificando a energia consumida por ***E*** e a porcentagem de alumínio reciclado por ***P***, pode-se afirmar que a função que representa esse processo, seu domínio e sua imagem são, respectivamente:



a) $E=-\frac{19}{10}P+200;\ [0,\ 100];[10,\ 200]$

b) $E=-\frac{21}{10}P+200;\ [0,\ 100];[10,\ 200]$

c) $E=-\frac{19}{10}P+200;\ [0,\ 100];[10,\ 210]$

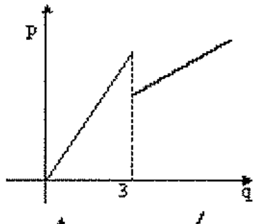
d) $E=-\frac{21}{10}P+200;\ [0,\ 100];[10,\ 210]$

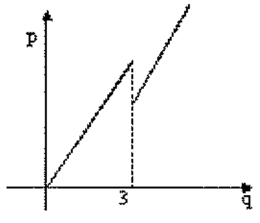
e) $E=-\frac{21}{10}P+200;\ [0,\ 210];[0,\ 100]$

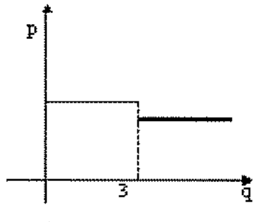
14 **(EsPCEx)** Dada uma função do 1º grau $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=ax+b;\ a\neq 0;\ a,b\in R$. A função f é decrescente e seu gráfico corta o eixo das ordenadas no ponto (0, 4). Sabendo-se que a região delimitada pelos eixos coordenados e a representação gráfica de f tem área igual a 20 unidades de área, a soma de a + b é igual a:

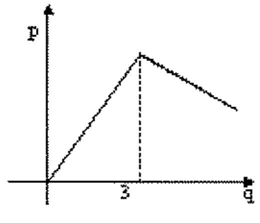
a) $-\frac{2}{5}$
b) 0
c) $\frac{12}{5}$
d) $\frac{16}{5}$
e) $\frac{18}{5}$

15 **(UFJF)** Um açougue está fazendo a seguinte promoção na venda de alcatra: 25% de desconto sobre o preço total da compra de 3 quilos ou mais. O esboço de gráfico que melhor representa o total pago (p) em função da quantidade comprada (q) é:

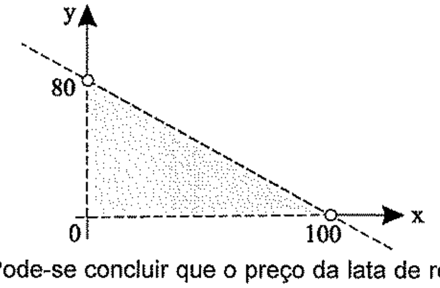
a.


b.


c.


d.


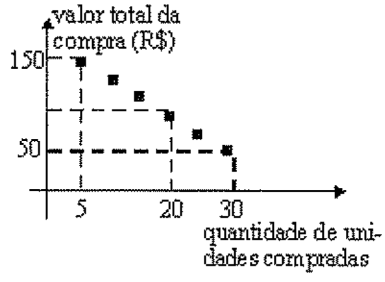
16 **(FMTM)** João gasta exatamente R$ 100,00 na compra de x latas de refrigerante Kigelo e y latas de refrigerante Kissabor em um supermercado onde o preço da lata de refrigerante Kigelo é R$ 1,00. Sabe-se que o par ordenado (x,y) que define a compra feita por João pertence à região sombreada do gráfico



Pode-se concluir que o preço da lata de refrigerante Kissabor nesse supermercado, necessariamente,

a)é menor do que R$ 0,80.
b)é igual a R$ 0,80.
c)está entre R$ 0,80 e R$ 1,25.
d)é igual a R$ 1,25.
e)é maior do que R$ 1,25.

17 **(UERJ)** A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta.

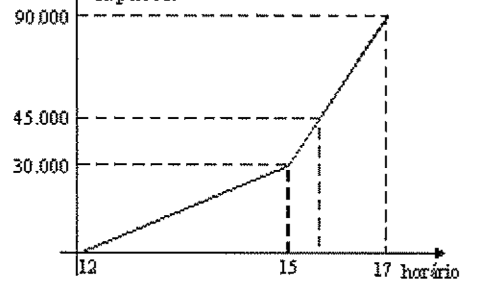


Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará por unidade, em reais, o equivalente a:

a)4,50
b)5,00
c)5,50
d)6,00

18 **(UERJ)** Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até as 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou.

Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico abaixo:



Quando o número de torcedores atingiu 45.000, o relógio estava marcando 15 horas e:

a)20 min
b)30 min
c)40 min
d)50 min

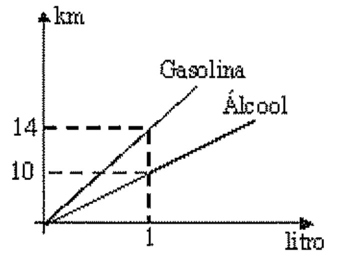
19 **(UERJ)** Observe o gráfico:

(Veja, 01/09/99)

Se o consumo de vinho branco alemão, entre 1994 e 1998, sofreu um decréscimo linear, o volume total desse consumo em 1995, em milhões de litros, corresponde a:

a)6,585
b)6,955
c)7,575
d)7,875

20 **(UERJ)** Analise o gráfico e a tabela:



COMBUSTÍVEl	PREÇO POR LITRO (em Reais)
Gasolina	1,50
Álcool	0,75

De acordo com esses dados, a razão entre o custo do consumo, por km, dos carros a álcool e a gasolina é igual a:

a)4/7
b)5/7
c)7/8
d)7/10

8 - Função Quadratica

8. 1Definição

Chama-se função do 2° grau, ou função quadrática, toda função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

com a, b, c $\in \mathbb{R}$ e a $\neq 0$.

Os números reais a, b e c são os coeficientes do trinômio $ax^2 + bx + c$. Observe que:

♦ o coeficiente a tem que ser diferente de zero para garantir que $ax^2 + bx + c$. seja do 2° grau.

8.2 Raízes da função do 2° grau

As raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x que satisfazem a euação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$. Como já vimos anteriormente:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$

♦ $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ A função admie duas raízes reais e distintas.

♦ $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ A função admie duas raízes reais e iguais (uma raiz dupla ou de multiplicidade dois).

♦ $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ A função não admite raízes reais.

Além disso, se x_1 e x_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

♦ $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

♦ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

♦ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

8. 3 Gráfico da função do 2° grau

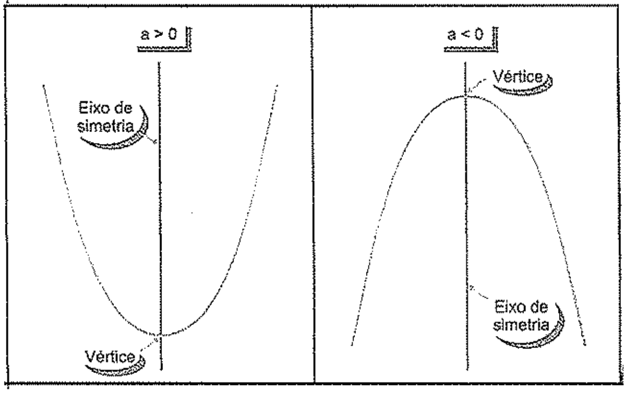
Demonstra-se que o gráfico da função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ é uma parábola.

Essa curva pode ser observada, por exemplo, quando lançamos uma pedra obliquamente para cima: sua trajetória é *parabólica*. Quando acendemos o farol do carro, os raios de luz provenientes da lâmpada incidem num espelho *parabólico* e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria.

A definição e o estudo analítico detalhado da curva denominada *parábola* serão estudados em Geometria Analítica.

Por enquanto, é importante saber que o gráfico $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola que pode ter sua concavidade voltada para cima $(a > 0)$ ou para baixo $(a > 0)$ e apresenta um eixo de simetria paralelo ao eixo de simeria é denominado vértice.

Veja as figuras:



Como o gráfico de uma função real interceppta o eixo Ox nos pontos cujas abscissas são as raízes reais desa função, no caso da função do 2° gráu, há três situações possíveis:

♦ $\boxed{a > 0}$

A parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos.

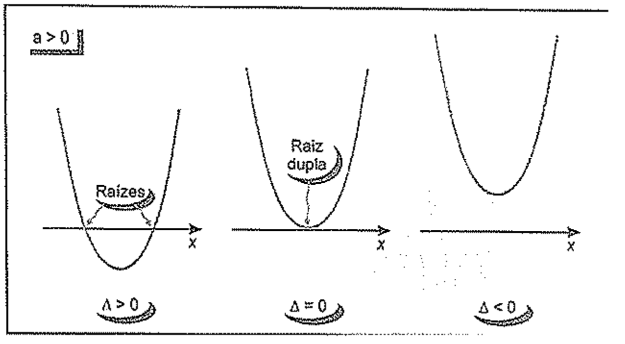
♦ $\boxed{a = 0}$

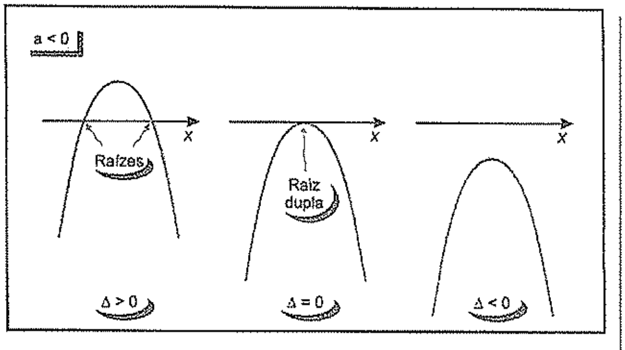
A parábola tangencia o eixo Ox.

♦ $\boxed{a < 0}$

A parábola não intercepta o eixo Ox.

Considerando os sinais de a e Δ, e desenhado somente o eixo Ox, são estas asposibilidades para o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$





8.4 Vértice

Em todos os casos, o vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto V de

abscissa $\boxed{x_v = -\dfrac{b}{2a}}$ e ordenada $\boxed{y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}}$

Observe que $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ é consequência direta da simetria da parábola e, para obter y_v, basta lembrar que $y_v = f(x_v)$:

$$y_v = a \cdot x_v^2 + bx_v + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{b^2 + 4ac}{4a}$$

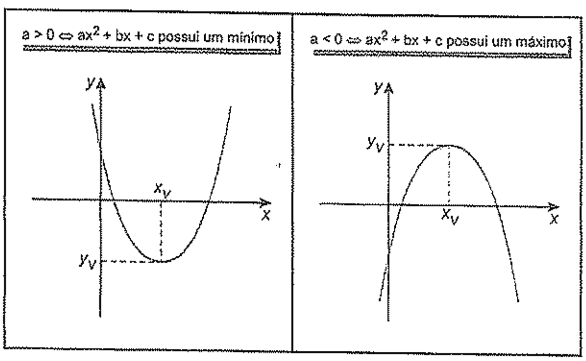
$$\therefore \boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

8.5 Intersecção com o eixo Oy

A parábola $y = ax^2 + bx + c$ intercepta o eixo Oy no ponto (0,c).

8.6 Máximo e Mínimo

Toda função do 2° grau, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, possui um máximo ou um mínimo, dependendo do sinal do coeficiente a. o vértice da parábola.



Observeções

♦ Se $a > 0$, então, para $x = x_v = -\dfrac{b}{2a}$, a função assume seu valor mínimo, dado por: $y_v = f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

♦ Se $a < 0$, então para $x = x_v = -\dfrac{b}{2a}$, a função assume seu valor máximo, dado por: $y_v = f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Exercícios Comentados

01 Faça o gráfico e determine o conjunto imagem da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Resolução:

Inicialmente, repare que a concavidade da parábola estará voltada para cima, pois $a > 0$. Além disso, a parábola "corta" o eixo Oy no ponto de ordenada 8.

Raízes: $x^2 - 6x + 8 = 0$

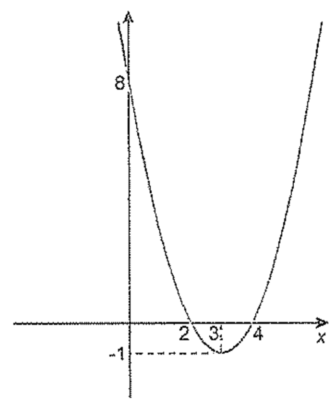
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Vértice: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-6)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_v = 3$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{4}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_v = -1$

Gráfico:



Conjunto imagem: Im $= \{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}$.

02 Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a função do 2° grau, $y = (m-5)x^2 + (m+1)x + m - 3$, admita valor máximo igual a 2.

Resolução:

Para que uma função do 2° grau admita um valor máximo, o coeficiente do termo em x^2 deve ser negativo. Devemos ter $m-5<0 \Rightarrow m<5$. Como o valor máximo é 2, termos:

$$y_v = 2 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 2$$

$$-\frac{[(m+1)^2-4(m-5)(m-3)]}{4(m-5)} = 2$$

$$-(m^2+2m+1-4m^2+32m-60) = 8(m-5)$$

$$m^2-14m+33=0$$

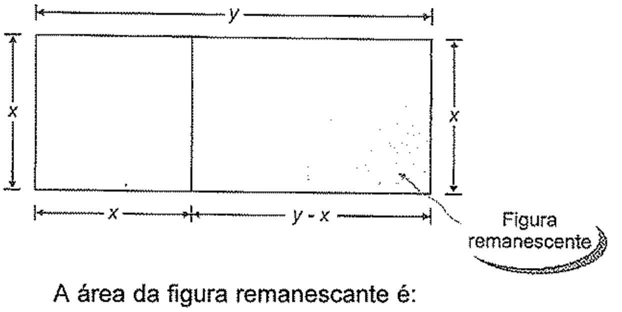
Resolvendo a equação, econtramos m = 3 ou m = 11. Como m < 5, temos m = 3.

03 **(Fuvest-SP)** De um retângulo de perímetro 31 e lados x e y, com y>x, retira-se um quadrado do lado x.

a) Calcule a área da figura remanescente em função de x.
b) Determine x para essa área seja a maior possível.

Resolução:

a) Perímetro = 32 $\Rightarrow$ ($\div$ 2) x + y = 1+$\Rightarrow$ y = 16 - x



A área da figura remanescante é:

S = x(y - x) = x (16 - x - x)

S = x(16 - 2x)

$S = -2x^2 + 16x$.

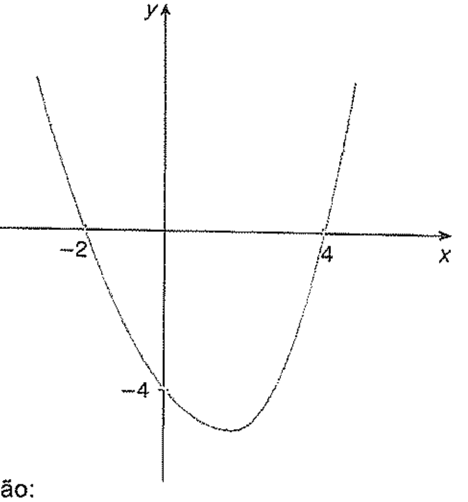
b) A função que representaa área em função de x é do 2° grau. Como $a<0$, essa função admite um máximo, que ocorre para x = xv = $-\dfrac{b}{2a}$ = 4.

Observe que a área máxima da figura é obtida substituido x por 4:

$S_{máx} = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32$

04 Determine a função representada pelo gráfico a seguir:

a)



Resolução:
$y = ax^2 + bx + c$
É imediato concluir que c = - 4 e as raízes da função são - 2 e 4.

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow -2+4 -\dfrac{b}{a} \Rightarrow b = -2a$

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow -2 \cdot 4 = \dfrac{-4}{a} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = -1$

$\therefore f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 4$

05 Um professor o ferece aulas particulares de redação e dispõe de uma sala com 20 lugares para essa função. Um grupo de estudantes pretende contratar os serviços da professora e combina que cada um pagará, por aula, R$ 8,00 e mais R$2,00 por cada lugar não preenchido pelo grupo. Por exemplo, se o grupo tiver 17 alunos, elém dos R$8.00, cada um pagará mais R$ 6,00 por aula, pois haverá 3 vagas não preebchidas. Essa é uma forma que a professora utiliza para estimular os estudantes a formar grupos que preencham as 20 vagas. Sendo n o número de alunos no grupo, e V a quantia (em reais) que a professora receberá por aula.

a) Escreva V em função de n.

Resolução:
a) O valor que a professora deverá receber por aula dada é:

$V = 8n + n \cdot 2 \cdot (20 - n)$
$V = 8n + 40n - 2n^2$
$V = 48n - 2n^2 \ (0 \leq n \leq 20)$

b) Para que número de alunos essa quantia será máxima?

Resolução:

b) $n = x_v = -\dfrac{48}{2 \cdot (-2)} = 12$

Assim, com 12 alunos a quantia recebida pela professora será a maior possível.

Exercícios de Sala

01 **(Cesganrio - RJ)** Uma conta perfurada de um colar é enfiada em um arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 6$.

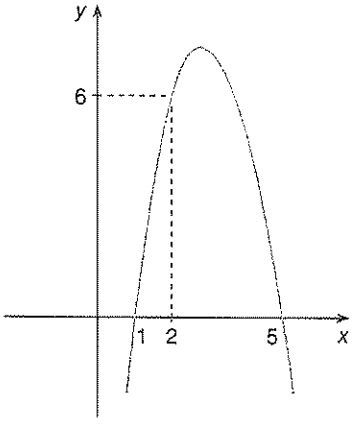
Do ponto p de coordenadas (4, 10) deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto Q de ordenada -6. A distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de p e Q) é:

a) 12
b) 4
c) 6
d) 3
e) 5

02 **(IME - RJ)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são as raízes e que $f(1) = -8$.

a) Determinar a, b e c.
b) Calcule f(0).
c) Verificar se f(x) apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta.
d) Determinar as coordenadas do ponto extremo.

03 Determine a função representada pelo gráfico a seguir:



04 **(Fuvest - SP)** Os pontos (0, 0) e (2, 1) estão no gráfico de uma função quadrática f. O mínimo valor de f é assumido no ponto de abscissa $x = -\dfrac{1}{4}$. Logo, o valor de f(1) é:

a) $\dfrac{1}{10}$

b) $\dfrac{2}{10}$

c) $\dfrac{3}{10}$

d) $\dfrac{4}{10}$

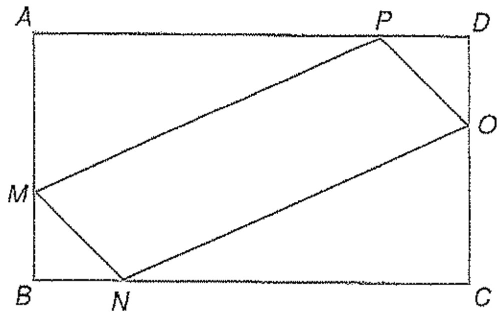
e) $\dfrac{5}{10}$

05 Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por

$h = -2t^2 + 14t$, onde h é a altura atingida pela bola (em metros) e t é o tempo (em segundo).

a) Esboce um gráfico que represente a situação descrita.
b) Após quantos segundos a bola atinge a altura máxima?
c) Qual a altura máxima atingida pela bola?
d) Após quantos segundos a bola retorna ao chão?

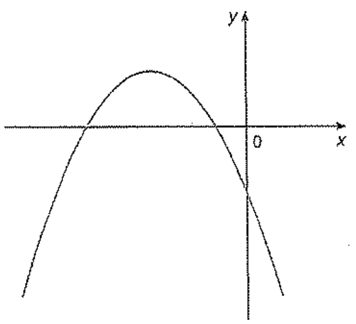
06 **(PUC-SP)** Na figura abaixo tem-se o retângulo ABCD, cujas dimensões são AB = 6 cm e BC = 10 cm. Tomando-se sobre os seus lados os pontos M, N, o e p, distintos dos vértices e tais que MB = BN = OD = DP = x.



a) Escreva a área do quadrilátero MNOP em função de x.

b) Detrmine x de modo que essa área seja máxima.

07 **(UFMG)** O trinômio $y = ax^2 + bx + c$ está representado na figura.



A afirmativa certa é:

a) $a>0, b>0, c<0$

b) $a<0, b<0, c<0$

c) $a<0, b>0, c<0$

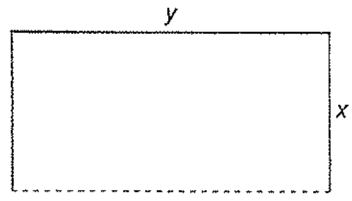
d) $a<0, b>0, c>0$

e) $a<0, b<0, c>0$

08 **(Unifor-CE)** O consumo de combustível de um autómovel é função da sua velocidade média. Para certo autom óvel, essa fınção é dada por $y=0{,}03x^2-2x+20$, segundo y o consumo de combustível, em mililitros por quilômetro, e x a velocidade média, em quilômetro por hora. Nessas condições, qual das velocidades médias dadas abaixo corresponde a um consumo de 120 ml/km?

a) 50 km/h
b) 60 km/h
c) 80 km/h
d)90 km/h
e) 100 km/h

09 **(Vunesp)** Em um acidente automobilístico, foi isolada uma região retangular, como mostrado na figura.

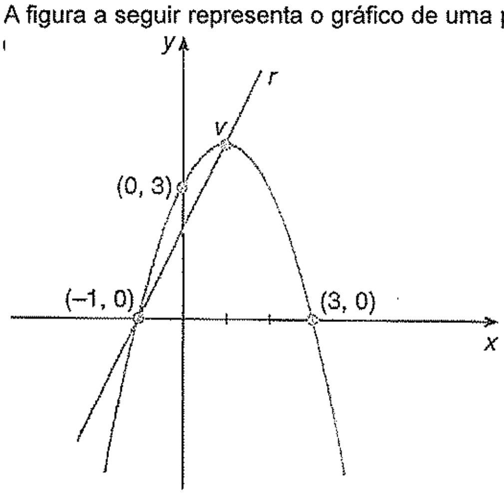


Se 17 m de corda (esticada e sem sobras) foram suficientes para cercar 3 lados da região, a saber, os dois lados menores de medida x e um lado maior de medida y, dados em metros, determine:

a) A área (em m²) da região isolada, em função do lado menor.

b) A medida dos lados x e y da região retangular, sabendo-se que a área da região era de 36 m² éa medida do lado menor era um número inteiro.

10 **(UFSC, adaptada)** Assinale a única proposição correta. A figura a seguir representa o gráfico de uma parábola (



A equação da reta r é:

a) $y=-2x+2$

b) $y=x+2$

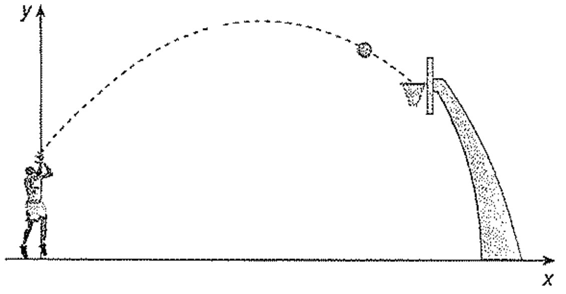
c) $y=2x+1$

d) $y=2x+2$

e) $y=-2x-2$

Exercícios de Casa

01 **(UFRJ)** Oscar arremessa uma bola de basquete cujo centro segue uma trajetória plana vertical de equação $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{8}{7}x+2$, na qual os valores de x e y são dados em metros. Oscar acerta o arremesso, e o centro da bola passa pelo centro da cesta, que está a 3 m de altura. Determine a distância do centro da cesta ao eixo y.



02 **(UFPE)** Na (s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses (V) se for verdadeira ou (F) se for falso. Identifique cada afirmativa como verdadeira ou falsa.

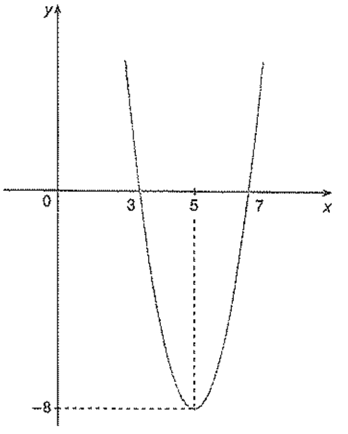
Se a é um número real positivo, então o gráfico de $y=a(x^2+2x), x\in\mathbb{R}$:

( ) É uma parábola que pasa pela origem (0,0).
( ) É simétrico em relação à reta x = – 1.
( ) É uma parábola cujo vértice é o ponto (–1, a).
( ) Está contido na reunião dos 3 (três) primeiros quadrantes.
( ) Não intercepta a reta y = – a.

03 **(Unirio-RJ)** Em uma fábrica, o custo de produção de x produtos é dado por $c(x) = -x^2 + 22x + 1$. Sabendo-se que cada produto é vendido por R$ 10,00, o número de produtos que devem ser vendidos para se ter um lucro de R$ 44,00 é:

a) 3
b) 10
c) 12
d) 13
e) 2

04 Parte do gráfico do trinômio do 2° grau $ax^2 + bx + c$ é o da figura a seguir:

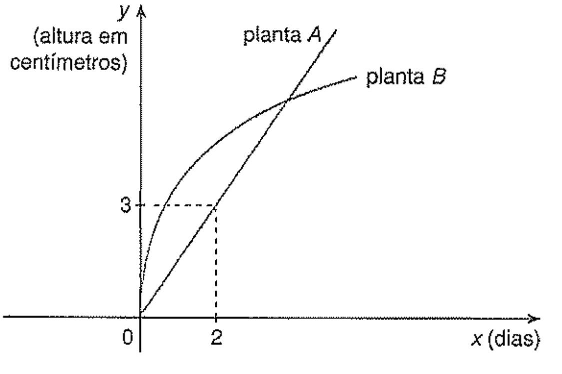


O valor de a + b + c é:

a) 6
b) 12
c) 24
d) –6
e) –12

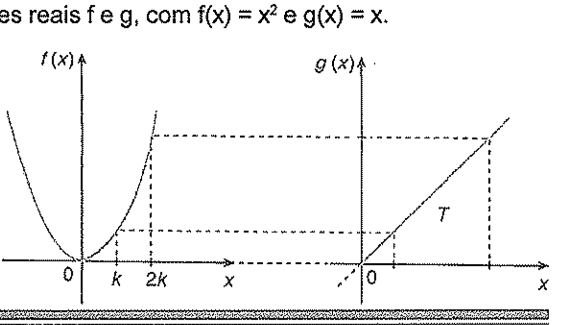
05 **(Vunesp)** Duas plantas de mesma espécie, A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2,3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pela lei matemática

$y=\frac{24x-x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está apresentado na figura abaixo.



a) A equação da reta.
b) O dia em que as plantas A e B atingeram a mesma altura e qual foi essa altura.

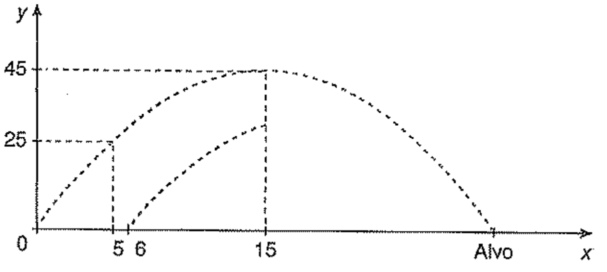
06 **(UFSCar-SP)** A figura representa, em sistemas coordenados com a mesma escala, os gráficos das funções reais f e g, com $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.



Sabendo que a região poligonal T demarca um trapézio de área igual a 120, o número real k é:

a) 0,5
b) 1
c) $\sqrt{2}$
d) 1,5
e) 2

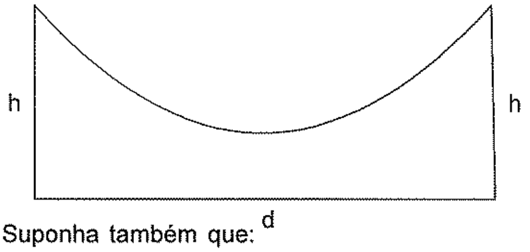
07 **(Vunesp)** Suponha que um projétil de ataque partiu da origem do sistema de coodenadas cartesianas descrevendo uma parábola, conforme a figura.



a) Sabendo-se que o vértice da parábola do projétil de ataque é dado pelas coordenadas (15, 45) e baseado nos dados da figura, calcule a equação da parábola do projétil de ataque.

b) Um projétil de defesa é lançado a partir das coordenadas (6, 0) e sua trajetória também descreve uma parábola segundo a equação $y = -0{,}25x^2 + 9x - 45$. Considerando-se que o projétil de defesa atingirá o projétil de ataque, calcule as coordenadas onde isso ocorrerá e diga se o alvo estará a salvo do ataque.

08 **(Fuvest-SP)** Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h, situadas à distância d (ver figura), assuma a forma de uma parábola.



Suponha também que:

(I) A altura mínima do fio ao solo seja igual a 2.
(II) A altura do fio sobre um ponto no solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$. Se $h = \frac{3}{8}d$, então d vale:

a) 14
b) 16
c) 18
d) 20
e) 22

09 **(U.Caxias do Sul)** Ao preço de R$1,50 uma loja tem como vender por mês 500 unidades de uma mercadoria que custa 70 centavos cada. Para cada centavos que a loja reduz no preço, pode aumentar a quantidades a ser vendida em 25 unidades. Dessa forma, o lucro mensal total em função do número x de centavos reduzidos no preço é dado por L(x) = (80 – x) (500 + 25 x).

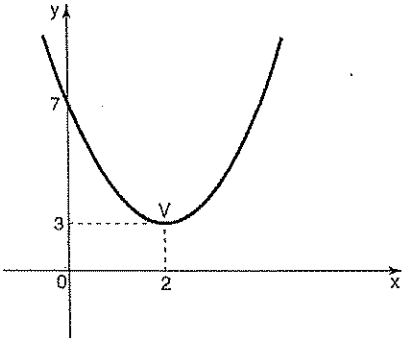
O preço por unidade que maximizaria o lucro mensal com a venda dessa mercadoria é, em reais, igual a:

a) 1,20
b) 1,50
c) 3,00
d) 12,00
e) 30,00

10 Dada a função $y = 16 - x^2$, determine:

a) Os valores de x que anulam y;
b) O ponto de máximo de y;
c) Os valores de x para os quais a função é crescente.

11 Determine a função correspondente ao gráfico. O ponto V representa o vértice da parábola.



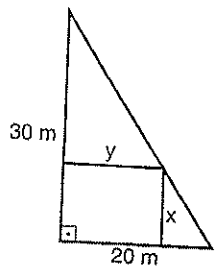
12 Seja a função f: $\mathbb{R} \to B$ dada pela expressão $f(x) = -3x^2 + 7x + 6$. Determine B para que ela seja sobrejetora e diga se ela é bijetora.

13 **(Unicamp)** Determine o número m de modo que a gráfico da função $y = x^2 + mx + 8 - m$ seja tangente ao eixo dos x. Faça o gráfico da função (ou das soluções) que você encontrar par O problema.

14 **(Fuvest)** Num terreno, na forma de um triângulo com catetos de medidas 20 e 30 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y, como indicado na figura.

a) Exprima y em função de x.

b) Para que valores de x e de y a área ocupada pela casa será máxima?



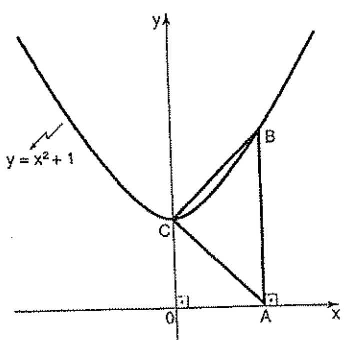
15 **(UFGO)** Um homem-bala é lançado de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola. Considerando que no instante do lançamento (t=0) ele está a 2 metros do solo, 1 segundo após ele atinge a altura de 5 metros e 2 segundos após o lançamento ele atinge o solo, pede-se:

a) a equação h(t) da altura em relação ao tempo, descrita pela sua trajetória;

b) o espaço do gráfico de h(t);

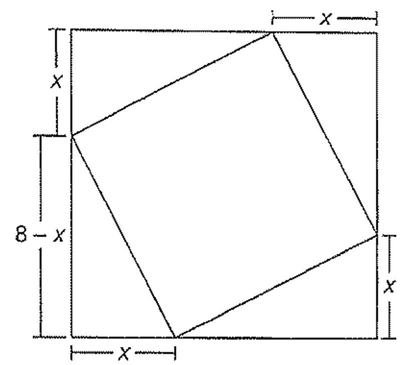
c) quais os instantes após o lançamento ele atinge $\frac{9}{2}$ metros?

16 Na figura abaixo, a área do trapézio OABC é 11 vezes a área do triângulo OAC. Determine a abscissa do ponto OAC. Determine a abscissa do ponto A.



17 Dada a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, definida para $x \geq 1$, obtenha a expressão da sua função inversa e faça um gráfico de ambas.

18 **(PUC-Campinas-SP)** Na figura a seguir tem-se um quadrado inscrito em outro quadrado. Pode-se calcular a área do quadrado interno, subtraindo-se da área do quadrado externo as áreas dos 4 triângulos. Feito isso, verifica-se que A é uma função da medida x .



O valor mínimo de A é:

a) 16 cm²
b) 24 cm²
c) 28 cm²
d) 32 cm²
e) 48 cm²

19 **(Covest-PE)** Uma malharia familiar fabrica camisetas a um custo de R$ 2,00 por peças e tem umadespesa fixa semanal de R$ 50,00. Se são vendidas a camisetas por semana ao preço de $\left(\frac{22}{3} - \frac{x}{30}\right)$ reais a unidade, quantas camisetas devem ser vendidas por semana para obter o maior lucro possível?

a) 50
b) 60
c) 65
d) 90
e) 80

20 Ao fretar um ônibus, um grupo de romeiros e uma empresa de transportes combinaram que cada passageiros pagaria R$ 80,00 e mais uma taxa de R$ 3,00 para cada lugar desocupado, sendo que no ônibus havia 50 lugares.

a) Quanto a empresa de ônibus receberia se houvesse 50 pasageiros?

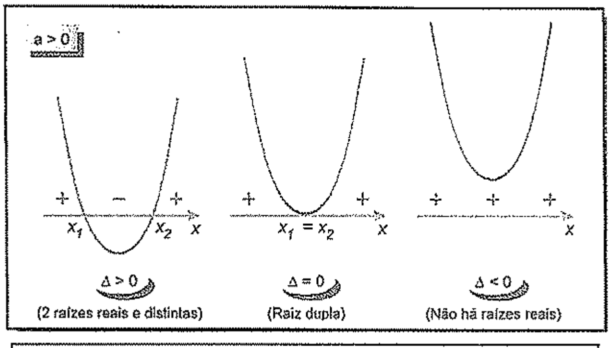
b) e se houvesse 44?

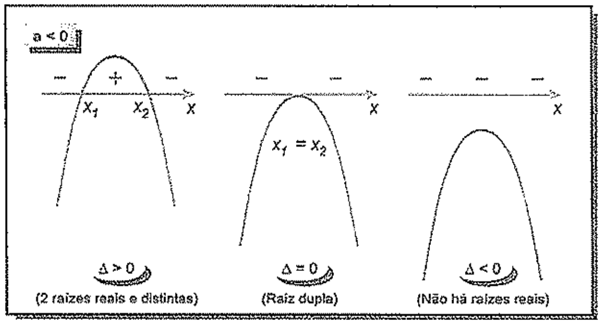
c) Com que número de pasageiros a empresa teria uma receita máxima?

9 - Inequações

Sinais de f(x) = αx^2 + bx + c (a $\neq$ 0)

Para estudar os sinais da função do 2° grau, basta fazer um esboço de seu gráfico (desenhado apenas o eixo Ox). Devemos observar o coeficiente a (que deterina se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo) e verificar quantas raízes reais ela admite (0 ou 1 ou 2), sabendo assim o número de vezes que a parábola intercepta o eixo Ox. Se houver raízes reais, devemos indicá-las.





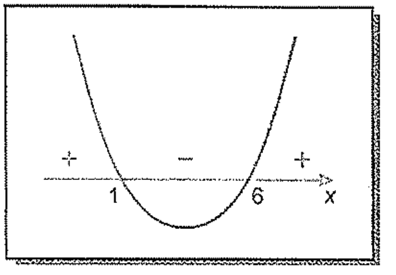
Vamos, por exemplo, estudar os sinais da função $f(x) = x^2 - 7x + 6$

Resolução

Raízes: $x^2 - 7 + 6 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$ $x = \dfrac{7 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$

Como $a > 0$, o gráfico é assim:



Conclussão:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ ou \ x = 6$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \ ou \ x > 6$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6$

9. 1 Inequações do 2° grau

São do tipo:

$f(x) > 0$ $\qquad f(x) < 0$

$f(x) \geq 0$ $\qquad f(x) \leq 0$

com $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Para resolvê-las, basta estudar os sinais de $f(x)$.

Exercícios resolvidos

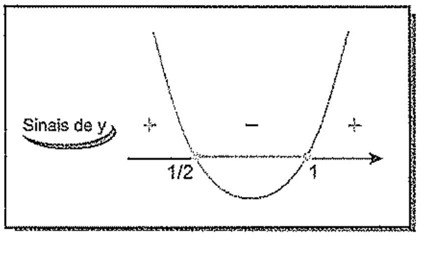
1. Resolva a inequação 2x² -3x + 1 $\leq$ 0.

Resolução

$y = 2x^2 - 3x + 1$

Queremos $\boxed{y \leq 0}$

Raízes: 2x² - 3x + 1 = 0 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$



Resposta: $\left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\}$

2. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que tenhamos x²- 2x $m > 0$, para todo x real.

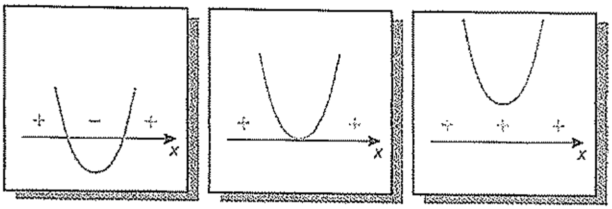
Resolução

$y = x^2 - 2x + m$

Queremos $\boxed{y > 0}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Sinais de y:

(I) Se $\Delta > 0$ (II) Se $\Delta > 0$ (III) Se $\Delta > 0$



Como queremos $y > 0$ para todo x real, deve ocorrer (III).

$\Delta < 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1$

Resolução $m > 0$.

9. 2 Sistema de Inequações

Para resolver um sistema formado por duas ou mais inequações, devemos proceder da seguinte forma:

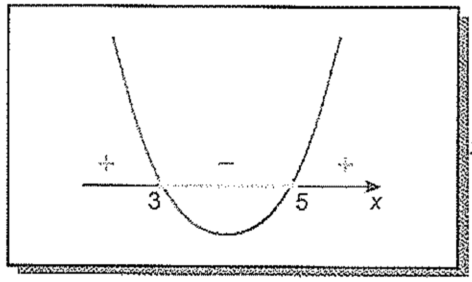
1) Resolver cada inequação separadamente.
2) Fazer a intersecção das soluções encontradas. Essa intersecção é a solução do sistema.

Exercício resolvido

a) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \leq 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$

Resolução

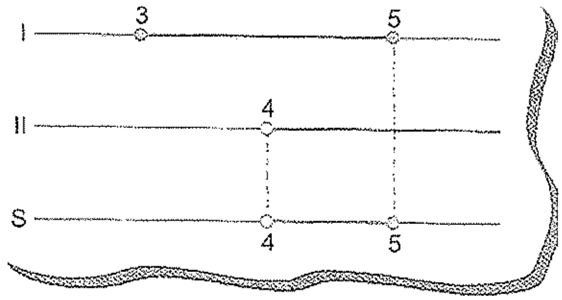
(I) $x^2 - 8x + 15 \leq 0$ $\qquad x - 4 > 0$



$x > 4$

Fazendo a intersecção:

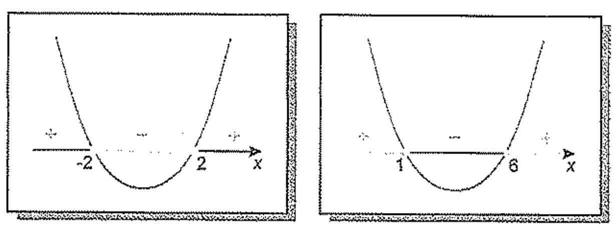
Resposta: S = $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 4 < x \leq 5\}$



b) $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ 7 - x < 0 \end{cases}$

Resolução

(I) $x^2 - 4 < 0$ $\qquad$ (II) $x^2 - 7x + 6 \geq 0$

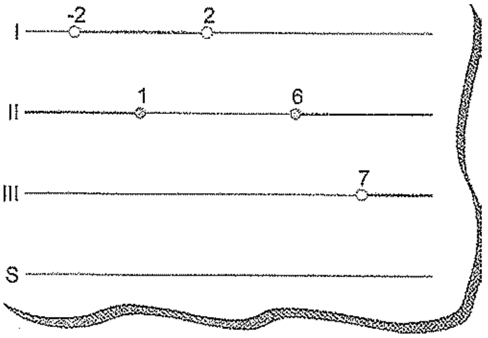


(III) $7 - x < 0$

$-x < -7$

$x > 7$

Fazendo a intersecção



Resposta: S = $\varnothing$.

9- 3 Inequações-produto

Dadas duas funções $f(x)\ e\ g(x)$, chama-se inequação-produto toda inequação definida por

$$f(x)\cdot g(x) > 0\ ou\ f(x)\cdot g(x) < 0$$
ou
$$f(x)\cdot g(x) \geq 0\ ou\ f(x)\cdot g(x) \leq 0$$

Para resolver tais inequações, estudaremos os sinais de $f(x)\ e\ g(x)$, determinando, a partir desse estudo, os sinais do produto $f(x)\ \cdot\ g(x)$

9. 4 Inequações-quociente

Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, chama-se inequação-quociente toda inequação do tipo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0\ ou\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

ou

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\ ou\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Para resolvê-las, usamos o mesmo procedimento usado em inequações-produto, tomando o cuidado de lembrar que o denominador deve ser diferente de zero.

Exercício resolvido

Resolver a inequação:

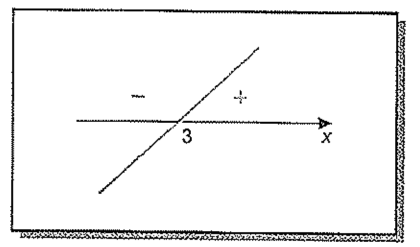
a) $(x-3)(x^2-6x+8) > 0$

Resolução

Inicialmente, vamos estudar os sinais de cada um dos fatores do produto.

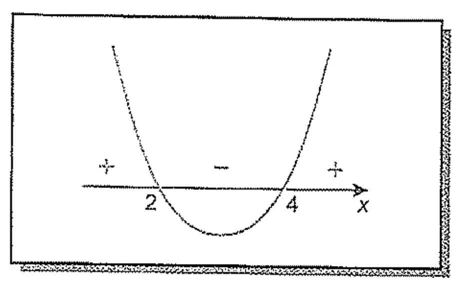
$$y_1 = x-3$$

Raiz: x - 3 = 0 $\Rightarrow$ x = 3



$y2 = x^2 - 6x + 8$

Raízes: $x^2 - 6x + 8 = 0$ → x = 2; x = 4



Colocando as raízes em ordem crescente, montamos o quadro de sinais:

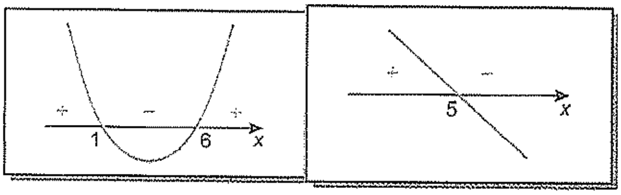
		2		3		4	
y_1	−		−	○	+		+
y_2	+	○	−		−	○	+
$y_1 \cdot y_2$	−	○	+		−	○	+
		2		3		4	

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3 \ ou \ x > 4\}$

b) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{5 - x} \leq 0$

Resolução

$y_1 = x^2 - 7x + 6$ $\qquad\qquad$ $y_2 = 5 - x$



Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 5 \ ou \ x \geq 6\}$.

Sinais de $[f(x)]^n$

Dada a função f(x) e o número natural n ($n \geq 2$), então:

♦ $[f(x)]^n$ tem a mesma variação de sinais de f(x), se n é IMPAR.

♦ $[f(x)]^n$ é sempre maior ou igual a zero, se n é PAR.

		1		5		6	
y_1	+	○	−		−	○	+
y_2	+		+	○	−		−
y_1/y_2	+	○	−	∄	+	○	−
		1		5		6	

OUTRO MÉTODO

Multiplicidade

Considere a equação $(x - 3)^4 = 0$.

Podemos reescrevê-la assim:

$$(x-3)(x-3)(x-3)(x-3) = 0$$

Como um produto vale zero se um de seus fatores for igual a zero e os fatores são iguais,

$$(x-3)^4 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Logo, 3 é raiz da equação $(x - 3)^4 = 0$.

Como o fator (x - 3) aparece 4 vezes, dizemos que 3 é raiz de multiplicidade 4 da equação.

A equação $(x + 3) \cdot (x-5)^2 \cdot (x - 7)^5 = 0$ apresenta as raízes:

- - 3 (raiz simples ou multiplicidade 1)
- 5 (Multiplicidade 2)
- 7 (multiplicidade 5)

Um outro modo de resolver uma inequação-produto (quociente)

Podemos determinar os sinais de um produto (ou quociente) de funções polinomiais baseando-nos nas seguintes propriedades:

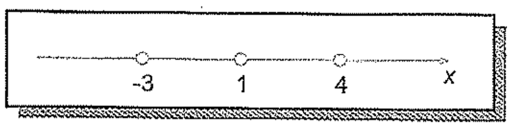
- Se α é raiz de multiplicidade *ímpar*, ao "passar" por α o produto muda de sinal

- Se α é raiz de multiplicidade par, ao "passar" por α o produto *não* muda de sinal.

Vamos, por exemplo, determinar os sinais de $y = (x-1)(x+3)(x-4)$.

Raízes: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$
$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Todas as raízes são simples (multiplicidade 1). Colocando as raízes em ordem crescente:



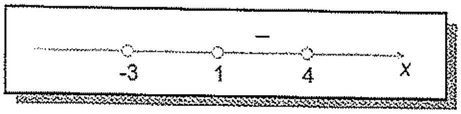
Observe que temos quatro intervalos, e que, ao "passar" por cada uma das raízes, mudando de um intervalo para outro, y muda de sinal.

Assim, para determinar a variação de sinais de y, basta deterinar o seu sinal em um dos intervalos.

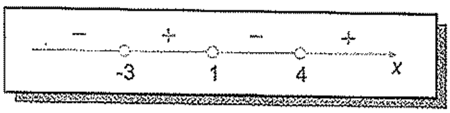
Para isso, vamos atribuir um valor arbitrário para x (diferente das raízes)

$x = 2 \Rightarrow y = (2-1)(2+3)(2-4) \Rightarrow y$ é negativo

Como 2 está entre 1 e 4, temos:



Completando os sinais de y:



Conclusão

- $y = 0 \Rightarrow x = -3 \; ou \; x = 1 \; ou \; x = 4$
- $y > 0 \Rightarrow -3 < x < 1 \; ou \; x > 4$
- $y < 0 \Rightarrow x < -3 \; ou \; 1 < x < 4$

Exercício resolvido

Resolva a inequação:

a) $(x+5)(x^2-9)(x-2) > 0$

Resolução

$y = (x+5)(x^2-9)(x-2)$

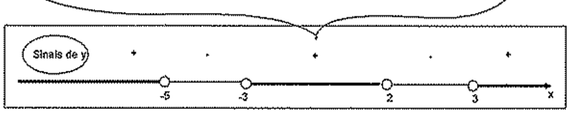
Queremos $\boxed{y > 0}$

Raízes: $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

$x^2 - 9 = 0 \; \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\boxed{x = 0} \Rightarrow y = (0+5)(0^2-9)(0-2) \Rightarrow \boxed{y \text{ é } positivo}$



Resposta:

$S = \{x \in \mathbb{R} \, / \, x < -5 \; ou -3 < x < 2 \; ou \; x > 3\}$

b) $(x+3)(x^2-7x+6)(x-7)^2 \leq 0$

Resolução

$y = (x+3)(x^2-7x+6)(x-7)^2$

Queremos $\boxed{y \leq 0}$

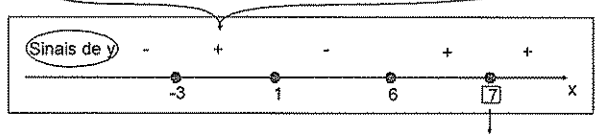
Raízes: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$x^2 - 7x + 6 = 0 \; \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$

$(x-7)^2 = 0 \Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

(raiz de multiplicidade 2)

$\boxed{x = 0} \Rightarrow y = (0+3)(0^2 - 7 \cdot 0 + 6)(0-7)2 \Rightarrow \boxed{y \text{ é } positivo}$



Resposta:

$S = \{x \in \mathbb{R} \, / \, x \leq -3 \; ou \; 1 \leq x \leq 6 \; ou \; x = 7\}$

Exercícios Comentados

01 Resolver em $\mathbb{R}$:

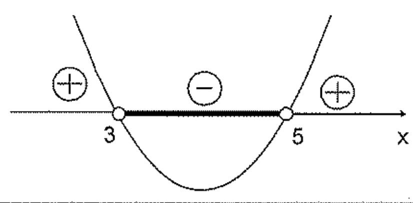
a) $x^2 - 8x + 15 < 0$

b) $x^2 - 6x + 9 > 0$

Resolução

a) Seja $y = x^2 - 8x + 15$ queremos $y < 0$.

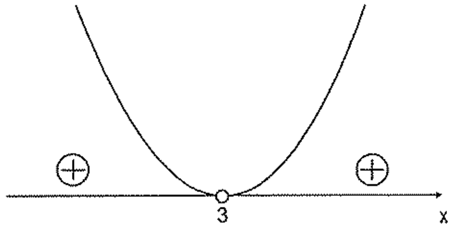
Raízes: $x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 5$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$

b) Seja y = x² - 6x + 9, queremos y > 0.

Raízes: x² - 6x + 9 = 0 $\Rightarrow$ x = 3 (raiz dupla)



S = $\mathbb{R} - \{3\}$

02 **(Vunesp)** Os valoes $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem o sistema:

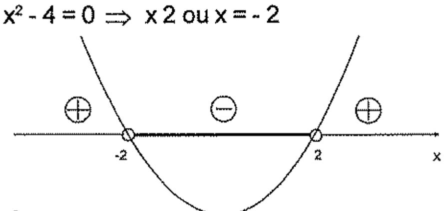
$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 3x < 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

São tais que:

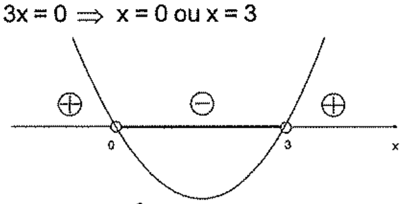
a) 1 < x < 2
b) - 3 < x < - 2
c) 0 < x < 2
d) 2 < x < 3
e) - 2 < x < 0

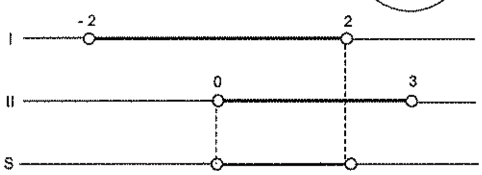
Resolução

(I) x² - 4 < 0
Raízes: x² - 4 = 0 $\Rightarrow$ x 2 ou x = - 2



(II) x² - 3x < 0
Raízes: x² - 3x = 0 $\Rightarrow$ x = 0 ou x = 3





$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

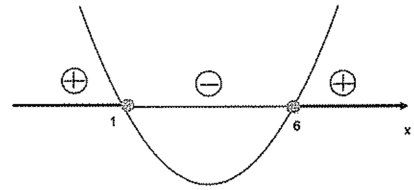
03 Determine o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 8} + \frac{x^3 + 7}{\sqrt{9 - x}}$$

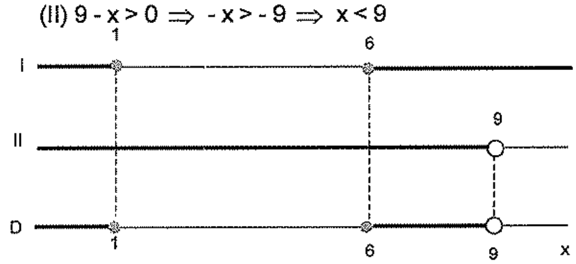
Resolução

C. E.: x² - 7 x + 6 $\geq$ 0 (I)
9 - x > 0 (II)

(I) x2 - 7 x + 6 $\geq$ 0
Seja y = x² - 7 x + 6 queremos y $\geq$ 0
Raízes: x² - 7x + 6 = 0 $\Rightarrow$ x = 1 ou x = 6



(II) 9 - x > 0 $\Rightarrow$ - x > - 9 $\Rightarrow$ x < 9

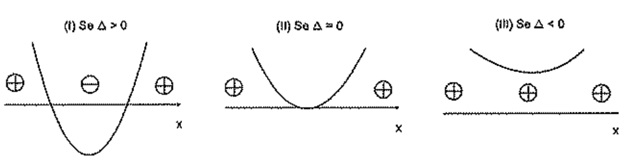


$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \ ou \ 6 \leq x < 9\}$

04 Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais temos x² - 4x + m >0, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Resolução

Seja y = x² - 4x + m
Queremos y >0, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Há três possibilidades para a variação de sinais de y:



Como queremos y > 0 para todo x real, deve ocorrer (III):

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0 \Rightarrow 16 - 4m < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4m < -16 \Rightarrow 4m > 16 \Rightarrow m > 4$$

05 Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $(x - 3)(x^2 - 6x + 5) < 0$

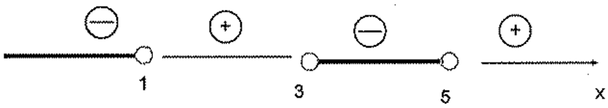
Resolução

Seja $y = (x - 3)(x^2 - 6x + 5)$: queremos $y < 0$.

Raízes: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 5 \end{cases}$$

$\boxed{x = 0} \Rightarrow y = (0 - 3)(0^2 - 6 \cdot 0 + 5) \Rightarrow \boxed{\text{y é negativo}}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \ ou \ 3 < x < 5\}$

b) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 3} \leq 0$

Resolução

C. E.: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

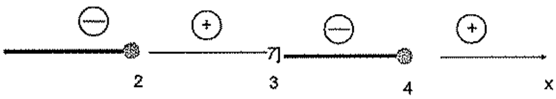
Satisfeita condição de existência a inequação acima é equivalente a $(x - 3)(x^2 - 6x + 8) = 0$

Seja $y = (x - 3)(x^2 - 6x + 8)$; queremos $y = 0$.

Raízes: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$$x^2 - 6x + 8 \begin{cases} x = 2 \\ ou \\ x = 4 \end{cases}$$

$\boxed{x = 0} \Rightarrow y = (0 - 3)(0^2 - 6 \cdot 0 + 8) \Rightarrow \boxed{\text{y é negativo}}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \ ou \ 3 < x \leq 4\}$

c) $\dfrac{2x - 7}{x - 2} > 1$

Resolução

C. E.: $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$$\frac{2x-7}{x-2} > 1 \Rightarrow \frac{2x-7}{x-2} - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 7 - (x-2)}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{x-5}{x-2} > 0$$

Satisfeita a condição de existência, a inequação acima é equivalente a $(x - 2)(x - 5) > 0$.

Seja $y = (x - 2)(x - 5)$; queremos $y > 0$

Raízes: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

$\boxed{x = 0} \Rightarrow y = (0 - 2)(0 - 5) \Rightarrow \boxed{\text{y é positivo}}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \ ou > 5\}$

Exercícios de Sala

01 Sejam f e g funções definidas em $\mathbb{R}$, tais que: $f(x) = \frac{x}{2}(8 - x)$ e $g(x) = \frac{x}{8}(8 - x)$.

a) Determine o subconjunto A de $\mathbb{R}$, no qual $f(x) \geq g(x)$.

b) Esbose o gráfico da função h: $A \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = f(x) - g(x)$

02 Determine m para que o trinômio $y = (1 - m)x^2 - (1 + m)x + 2(m - 4)$ seja negativo, qualquer que seja o valor de x.

03 Trace o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela seguinte lei: $f(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x < -1 \\ x + 1, \text{ se } -1 \leq x < 4 \\ x^2 - 4x, \text{ se } x \geq 4 \end{cases}$

04 (Mackenzin-SP) A soma dos valores inteiros pertencentes ao domínio da função real definida por:

$$a(x) = \frac{2x}{\sqrt{2 - \sqrt{x^2 - 3x}}} \text{ é:}$$

a) 1
b)2
c) 3
d) -1
e) -2

05 a) Construa sobre o mesmo sistema cartesiano ortogonal os gráficos das funções:
$f(x) = -x^2 - 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$

b) Calcule as coordenadas dos seus pontos de intersecção A e B.

c) Mostre que, qualquer que seja m $\neq$ - 1 A e B pertencem à curva representativa da função:

$$y = -\frac{(m-1)x^2 + 2mx - 3m + 1}{m+1}$$

06 (Fuvest-SP) Para que a parábola $y = 2x^2 + mx + 5$ não intercepta a reta y = 3, devemos ter:

a) $-4 < m < 4$
b) $m < -3$ ou $m > 4$
c) $m > 5$ ou $m < -5$
d) $m = -5$ ou $m = 5$
e) $m \neq 0$

07 Considerando a parábola da equação

$y = x^2 + mx + 4m$:

a)Ache a intersecção da parábola com o eixo x, quando m = –2;

b)Determine o conjunto dos valores de m para os quais a parábola não o eixo x.

08 (FGV-SP) Quantos números inteiros satisfazem a inequação $x^2 - 10x < -16$?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

09 (UFPE) Se a equação y = $\sqrt{2x^2 + px + 32}$ define uma função real y = f(x) cujo domínio é o conjunto dos reais, encontre o maior vaor que *p* pode assumir.

10 Determine o domínio de

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{4 - x^2}$$

Exercícios de Casa

01 Resolva em $\mathbb{R}$

a) $x^2 - 9x + 8 \geq 0$
b) $x^2 - 2x + 10 \geq 0$
c) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
d) $x^2 < 25$
e) $x^2 + 1 \geq 0$
f) $x^2 - 5x + 6 > x - 2$

02 **(UFMG)** O conjunto solução da desigualdade $(x-2)^2 > x - 2$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \ ou \ x > 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

03 **(UFPB)** O domínio da função

$f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ é:

a) $\mathbb{R} - \{0\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 0\}$
e) $\mathbb{R}$

04 **(Fatec-SP)** A função f do 2° grau, definida por $f(x) = 3x^2 + mx + 1$, não admite raízes reais se, e somente se, o número real m for tal que:

a) $-12 < m < 12$
b) $-3\sqrt{2} < m < 3\sqrt{2}$
c) $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$
d) $m < -3\sqrt{2}$ ou $m > 3\sqrt{2}$
e) $x > -1$ ou $m > 2\sqrt{3}$

05 **(Vunesp)** Todos os possíveis valores de m que satisfazem a desigualdade $2x^2 - 20x + 2m > 0$, para todo x pertencente ao conjunto dos reais, são dados por

a) $m > 10$
b) $m > 25$
c) $m > 30$
d) $m > 5$
e) $m > 30$

06 Quantos números inteiros satisfazem o sistema de inequações a seguir?

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ 2x + 1 > x + 5 \end{cases}$$

07 **(UFU-MG)** O conjunto de todos os números reais m, diferentes de zero, para os quais a parábola y = m x² - x+1 intercepta a reta y = 3 x + m em dois pontos é:

a) $\left\{m \in \mathbb{R} \mid m > \dfrac{1}{8}\right\}$
b) $\{m \in \mathbb{R} \mid m > 3\}$
c) $\{m \in \mathbb{R} \mid m \neq 0\}$
d) $\left\{m \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{8} < m < 3\right\}$
e) $\{m \in \mathbb{R} \mid m > 0\}$

08 **(Unitau-SP)** A inequação $(x -^{2})(x - 5) > 0$ é satisfeita para:

a) $\mathbb{R}$
b) $x < 5$
c) $2 < x < 5$
d) $x > 5$
e) $x < 5 \; e \; x \neq 2$

09 **(Cesgranrio-RJ)** A solução da inequação $x > \dfrac{1}{x}$ é:

a) $-1 < x < 0$ ou $x > 1$
b) $x < -1$ ou $x > 1$
c) $x > 1$
d) $x < 1$
e) $x > -1$

10 **(PUC-Campinas-SP)** Considere as funções reais, de variáveis reais, dadas por

$f(x) = x, g(x) = x^2 - 2x \; e \; h(x) = f(x) \cdot g(x)$. A função h tem valores positivos para todos os valores de x tais que:

a) $x > 0$
b) $x > 2$
c) $x < 0$
d) $0 < x < 2$
e) $-2 < x < 0$

11 **(Unip-SP)** O conjunto verdade da inequação

$\dfrac{(x^2+1)(x^2-5x+6)}{x^2+x+1} \leq 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 x \leq 2 \; ou \; x \geq 3\}$

12 **(Fuvest-SP)** O conjunto das soluções, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, da inequação $\dfrac{x}{x+1} > x$ é:

a) vazio
b) $\mathbb{R}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

13 **(UEL-PR)** O conjunto solução da inequação

$\dfrac{(x+3)^4(x^3-2x^2)}{x^2-1} \geq 0$, no universo $\mathbb{R}$, é:

a) $[-1,3]$
b) $]-1,+\infty[$
c) $]-1,0[\cup]0,3]$
d) $[-1,3]\cup[2,+\infty[$
e) $]-1,1[\cup[2,+\infty[$

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

14 **(FGV-SP)** O maior número inteiro que satisfaz a inequação $\frac{5}{x-3} > 3$ é:

a) Um múltiplo de 2.
b) Um múltiplo de 5.
c) Um número primo.
d) Divisível por 3.
e) divisível por 7.

15 **(UFMG)** O conjunto solução da inequação $\frac{1}{x(1-x)} > \frac{1}{x}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \ e \ x \neq 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

16 **(Mackenzie-SP)** Se tem-se $f(x) = \frac{3x-2}{4x-3}, x \neq \frac{3}{4}$, tem-se $f(x) \geq f(1)$ para:

a) $-2 < x < -1$
b) $-3 \leq x < -2$
c) $-1 \leq x < -\frac{3}{4}$
d) $x > 1$
e) $\frac{3}{4} < x \leq 1$

17 **(Mackenzie-SP)** No intervalo $[-5,5]$, os valores inteiros pertencentes ao domínio da função real definida por $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}}$, são em número de:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

18 **(UCSal-BA)** Considere a inequação $\frac{x-2}{x^2 - 4x} \leq 0$. Considerando os números inteiros que a satisfazem, é correto concluir que:

a) Só dois deles são positivos.
b) Um deles é zero.
O produto de todos eles é 6.
d) O menor deles é - 2
e) O maior deles é 4.

19 **(FGV-SP)**

a) Dê o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 7x + 12}}$.

b) Resolva a inequação: $\frac{2+3x}{1-x} \geq 4$.

20 **(FEQ-CE)** Sejam f e g função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(x) = -2x + 3$ e $g(f(x)) = 4x$. Nessas condições, a função inversa de g é dada por:

a) $g^{-1}(x) = \frac{6+x}{2}$

b) $g^{-1}(x) = \frac{6-x}{2}$

c) $g^{-1}(x) = \frac{6+x}{4}$

d) $g^{-1}(x) = \frac{2}{6-2x}$

e) $g^{-1}(x) = \frac{2}{6+2x}$

Curso Preparatório CIDADE

Gabarito

1. Potencia e Raízes

Exercícios de sala

01. x^6
02. e
03. e
04. c
05. e
06. c
07. d
08. d
09. a) 2^{21} b) 7
10. d

Exercícios de casa

01. a) 5^{13} b) 3^5 c) 2^6 d) 2^8 e) 2^6 f) 2^9 g) $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ h) 2^{15} i) a^{12}

02. c
03. d
04. b
05. e
06. c
07. c
08. a
09. e
10. c
11. a) 7 b) 14
12. b
13. d
14. d
15. a
16. e
17. b
18. c
19. c
20. b

2. Fatoração

Exercícios de sala

01. a) $x^2(a + b + c)$
    b) $2x(x^3 + 2x + 3)$
    c) $3a^2b(b^2 + 2a - 4b^3)$

02. a) $(ax + b)(x^2 + 1)$
    b) $(2x + 5)(x^2 + 2)$

03. a) $x - 3)(x^2 - 4)$
    b) {-2, 2, 3}

04. a) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$
    b) $(x^2 - 3)(x^2 + 3)$
    c) $(a + b + c)(a + b - c)$
    d) $(a^m + b^m)(a^m - b^n)$

05. a) $(x + y)(x - y - 1)$
    b) $(2x - 3)(x^2 - 2)$

06. c
07. d
08. d
09. a) 2 b) $2\sqrt{2}$
10. b

Exercícios de sala

01. $(a + 3)^2$

02.) $(x - 6y)(x + y)$

03. d
04. d
05. a
06. d
07. Demontração (lembre-se que $2^{32} - 1$ é diferença de dois quadrados).
08. e
09. b
10. c
11. d
12. e
13. c
14. a
15. c
16. a
17. c
18. a
19. a
20. e

3. Conjuntos

Exercícios de sala

01. b
02. c
03. c
04. e
05. b
06. a
07. c
08. a
09. 500
10. e

Exercícios de casa

01. a
02. a) 80.000
b) 16.000
c) 85.000
d) 15.000
e) 80.000
f) 5.000
g) 20. 000
h) 89.000
i) 96. 000

03. d
04. d
05. a) 500
b) 257
c) 84
d) (4%)
e) 19,6%
06. c
07. (40%)
08. b
09. a) 130 b) 460 c) 410
10. (450)
11. {1,2}
12. a
13. b
14. d
15. b
19. c
20. a

4. Conjuntos númericos

Exercícios de sala

01. c
02. a
03. e
04. e
05. e
06. d
07. d
08. c
09. d
10. b

Exercícios de casa

01. d
02.{1,2,4,5,10,20,50,100}
03. b
04. 2022
05. e
06. 143
07. a) $x = 2^2.3^2.5$ $y = 2^2.5^2$
b) MDC = 20
MMC = 900
08. c
09. c
10. c
11. b
12. a
13. a) 25 cm
b) 204
14. a) demonstre
b) 12 e 13
15. b
16. c
17. (16)
18. b
19. c
20. a

5. Função

Exercícios de sala

01. 11

02. a) D = $\mathbb{R}$
b) $\{x \neq -5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$
d) $x \geq -3$
e) $\mathbb{R}$
f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 13\}$

03. c
04. b
05. b
06. a
07. e
08. a) {(-213),(-1,0),(1,0)}
b) D= {-2,-1,1}
I m = {0,3}

09. $h = \dfrac{3}{5\sqrt{25-x^2}}$
10. a) 113 b) 34
11. b
12. d
13. a
14. d
15. 42

Exercícios de casa

01. 124
02. (a = 2 b = -6)
03. a) 1,8 b) 1,35

Curso Preparatório CIDADE

04. 1/2
05. a = 1 b = 7
06. 29
07. c
08. b
09. b
10. d
11. c
12. V.V.V.
13. b
14. b
15.d
16. d
17. a
18. d
19. a
20. 17
21. a
22. d
23. b
24. a
25. 61

6. Composição de funções

Exercícios de sala

01. b
02. e
03. b
04. c
05. a
06. e
07. a
08. e
09. e
10. e

Exercícios de casa

01. $2x^2 - 2x+5$
$4x^2 + 2x+2$
02. t = - 1 cm 6
03. $2x^2+3$
04. m = 1 /2 k = -2
05. a) x + 1/4
b) $\frac{5x+3}{x-2}$

06. a) $\frac{=2x-1}{x-2}$

b) $\frac{=x^3-5}{2}$

c) $\frac{x^2+1}{2x^2}$

07. = - 7

08. $\frac{5}{4}$ ou $\frac{13}{2}$

09. $\frac{9x+8}{8x-31}$
10. d
11. c
12. c
13. a
14. b
15. b
16. c
17. d
18. b
19. 23
20. (a = 3

7. Função afim

Exercícios de sala

01. (m = - 3 n = - 1)
02. a) 12,90 b) 21 km
3. g (x) = 15 x + 25.000
04. d
05. b
06. c
06. d
08. a
09. a
10. x - 1 0 =40

Exercícios de casa

01. $f(x)=\frac{3x+2}{2x-1}$
02. 6
03. 99
04. 5/2
05. y = 4x + 2
y = - 2x + 10
06. b
07. a) g(x) = 2,19x + 60 b) 106,5
08. e
09. c
10. d
11. a
12. c
13. a
14. e
15. a
16. e
17. a
18. b
19.d
20. d

8. Função quadratica

Exercícios de sala

01. b
02. a) = -5

b) = -5

03. $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$

04. c

05. a) = 24,5

b) A bola atinge a altura máxima após 3,5 segundos.

c) A altura máxima atingeda pela bola é de 24,5 metros.

d) A bola retorna ao chão 7 segundos após ser chutada.

06. a) S = $-2x^2 + 16x$ (0< x , 6)

b) = 4

07. b

08. e

09. a) A = $17x - 2x^2$

b) x = 4m y = 9 m

10. d

Exercícios de casa

01. 7m

02. v-v-f-v-f

03. e

04. c

05. a) y = $\frac{3}{2}$x

b) 6° dia

06. e

07. a) y = $-0,2x^2 + 6x$

b) (30,00) , nos.

08. b

09. a

10. a) - 4 ou 4

b) 16

c) $x \leq 0$

11. a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$

b) (0,2)

c) não

d) I cm = y>,7/4

12 . $y \leq \frac{121}{12}$ não

13. m = 4 cm m = - 8

14. a) y = $-^2$ x + 20

15. $-4t^2 + 7t + 2$

16. 3

17. 1 + $\sqrt{x+4}$

18. d

19. e

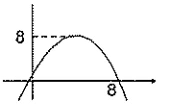
20. a) 4000

b) 4312

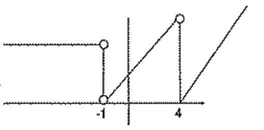
c) 38

9. Inequações

Exercícios de sala

01. a) $0 \leq x \leq 8$ b) 

02. $\frac{11}{9} < m < 3$

03. 

04. c

05. (- 2,3), (1, 0)

06. a

07.a) (-2,0), (4,0) b) 0 <m <16

08.c

09.16

10. $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 0$ ou x = 2$\}$

Exercícios de casa

01. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1$ ou $x \geq 8\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5$ ou $x \geq 2\}$

c) S = {1}

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \leq -5 < x < 5\}$

e) $S = \mathbb{R}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \; ou \; x > 4\}$

02. c

03. e

04. c

05. b

06. 2

07. b

08. d

09. a

10. b

11. a

12. e

13. e

14. a

15. b

16. e

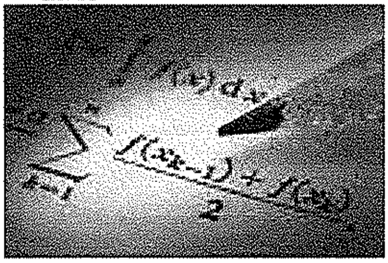
17. e

18. a

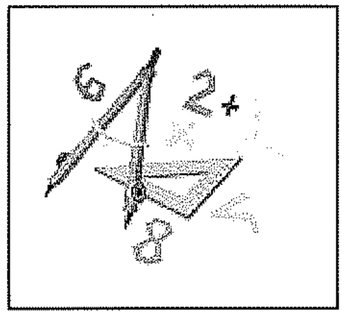
19. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3 \; ou \; x > 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{7} \leq x < 1\}$

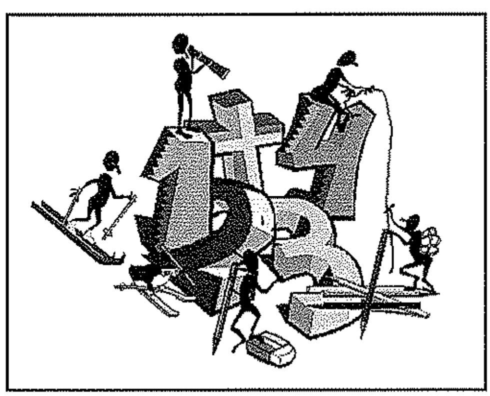
20. b



MATEMÁTICA 2



CADERNO 1



10 - Porcentagem

Em nosso cotidiano, ao ler jornais, revistas ou assistir a um programa de TV, frequentimente nos deparamos com notícias tais como: "O segmento de carros populares é responsável po 70% das vendas de veículos"; "A Aids cresceu cerca de 200% entre adolescentes na década de 1990"; "O volume do reservatório atingiu 16% de sua capacidade total". Em todas as frases citadas aparece o símbolo %. Qual é o seu significado?

Matematicamente o símbolo p% é utilizado para representar a fração $\frac{p}{100}$, ou seja:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Na primeira frase, o símbolo 70% pode ser interpretado como se a cada 100 veículos vendidos, 70 delas fossem do segmento dos chamados carros populares.

Quando se anuncia que a Aids cresceu 200% entre adolescentes, pode-se inferir que o número de casos triplicou na referida década.

Em outros casos, a porcentagem é usada para comparar dois números, por meio de um quociente. Veja este exemplo: "Após a liberação dos preços, os com bustíveis sofreram um reajuste médio de 12%". Podemos concluir que o quociente o valor do aumento e o preço anterior, em média, é igual a 0,12; ou seja, 12%.

Exercícios Comentados

01 Um carnê de IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano) informa: "os pagamentos efetuados após a data de vencimento sofrerão acréscimo de 20%". E depois: "os pagamentos feitos até a data do vencimento receberão um desconto de 5%". Se o valor nominal da conta mensal é de R$60,00, calcule os valores a serem pago se:

a) o pagamento for feito até o dia do pagamrnto.
b) o pagamento for feito após a data do vencimento.

Resolução:

a) O valor nominal é R$ 60,00. Assim, se o pagamento for feito até a data do vencimento, sobre esse valor será aplicado um desconto de 5%. Ou seja:

$$60 - \overbrace{\frac{5}{100} \cdot 60}^{desconto} = (1 - 0,05) \cdot 60 = 0,95 \cdot 60 = R\$\ 57,00$$

b) Se o pagamento for feito após a data do vencimento, haverá um acréscimo de 20%. Assim, temos:

$$60 + \overbrace{\frac{20}{100} \cdot 60}^{acréscimo} = (1 + 0,20) \cdot 60 = 1,20 \cdot 60 = R\$\ 72,00$$

02 Após o anúncio da liberação dos preços doscombustíveis, notou-se que, de imediato, houve um aumento médio de 20% sobre os preços reajustados, que ficaram estabilizados nesse patamar.

Qual foi o reajuste efetivamente praticado?

Resolução:

Sendo x o valor inicial de referência, temos:

Valor após o primeiro reajuste

$$x \cdot (+\ 0,2) = 1,2x$$

O preço reajustado sofreu um recuo de 5%, assim:

$$x \cdot 1,2 \cdot (-0,05) =$$
$$= x \cdot 1,2 \cdot 0,95 =$$
$$= x \cdot 1,14$$

Concluímos, portanto, que o reajuste efetivo foi de 14%.

03 **(Fuvest - SP)** Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou por ela. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em porcentagem, seria:

a) 40%
b) 45%
c) 50%
d) 55%
e) 60%

Resolução:

Seja: *pv*: Preço de venda nominal
pc: Preço de custo

De acordo com o enunciado, o preço de venda efetivo foi 0,80 . pv (desconto de 20%) e houve um lucro de 20% sobre o preço de custo(*pc*).

pv = *pc* + L
pv - 0,20*pv* = *pc* + 0,20*pc*
0,80*pv* = 1,20*pc*

$$pv = \frac{1,20}{0,80} pc = 1,50 pc$$

Se o desconto não fosse dado o lucro seria de 50% (sobre o custo).

04 Um comerciante aumenta seu produtos em 30%. Diante da queda acentuada das vendas, anuncia um desconto de 25% sobre os preços majorados. Explique qual foi a variação percentual devida aos dois reajustes, em relação ao valor anterior.

Resolução:

Sendo x um valor de referência, após o aumento de 30% temos $x \cdot (1 + 0{,}3) = 1{,}3x$

Com o desconto de 25% (sobre o preço majorado) $1{,}3x\,(1 - 0{,}25) = 1{,}3 \cdot 0{,}75x = 0{,}975x$ (97,5% de x)

Houve uma queda de 2,5% sobre o valor anterior aos reajustes

05 **(Vunesp)** o preço de tabela de um determinado produto é de R$ 1.000,00. O produto tem um desconto de 10% para pagamento à vista e um desconto de 7,2% para pagamento em 30 dias. Admitindo que o valor a ser desembolsado no pagamento à vista passa ser aplicado pelo comprador em uma aplicação de 30 dias com um rendimento de 3%, determine:

a) quanto o comprador teria ao final da aplicação?

b) Qual é a opção mais vantajosa para o comprador - pagar à vista ou aplicar o dinheiro e pagar em 30 dias? Justifique matematicamente sua resposta.

Resolução:

a) O preço à vista é:

$(1 - 0{,}1) \cdot 1.000 = 0{,}9 \cdot 1.000 = 900{,}00$

Aplicando 900,00 por 30 dias com remuneração de 3%, teremos:

$900(1 + 0{,}03) = 900 \cdot 1{,}03 = 927{,}00$

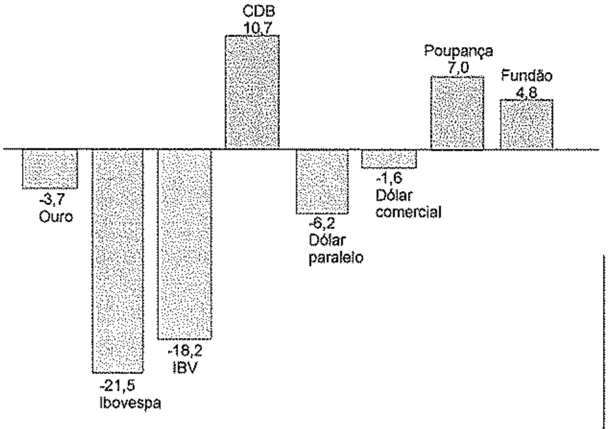
b) Para pagamento em 30 dias, o desconto é de 7,2%. O preço fica então em:

$1.000(1 - 0{,}072) = 928{,}00$

Como o valor resgatado na aplicação de 30 dias é de R$927,00, concluímos que é melhor pagar à vista.

Exercícios de Sala

01 **(Vunesp)** O quadro reproduzido na revista Veja (07/06/95) mostra quanto renderam os investimentos do início de 1995 a 31 de maio desse ano.



Considerando esses dados, suponhamos que uma pessoa, no primeiro dis útil de 1995, tenha investido na poupança metade das economias que posuía e investido no dólar paralelo a outra metade. Se o rendimento global obtido por ela no período for de R$ 400,00, quanto investiu ao todo?

02 **(UFMS)** Em um determinado mês o dólar estava sendo cotado a R$ 3,50 no mercado de câmbio, ou seja U$1,00 = R$ 3,50. Se houver uma desvalorização do real em relação ao dólar de 25%, então pode-se afirmar que

a) o dólar sofrerár uma desvalorização de 25%
b) o dólar sofrerá uma desvalorização de 20%
c)o dólar sofrerá uma desvalorização de 30%
d) a cotaçaõ do dólar pasará a ser de R$2,62
e) a cotação do dólar passará a ser de R$ 3,00

03 **(Enem-MEC)** Nas últimas eleições presidenciais de um determinado país, em que 9% dos eleitores votaram em branco e 11% anularam o voto, o vencedor obteve 51% dos votos válidos. Não são considerados válidos os votos brancos e nulos. É correto afirmar que o cencedor, de fato, obteve de todos os eleitores um percentual de votos da ordem de:

a) 38%
b) 41%
c) 44%
d) 47%
e) 50%

04 **(Unicamp - SP)** Uma pessoa investiu R$ 3.000,00 em ações. No primeiro mês, ela perdeu 40% do total investido e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido.

a) Com quanto reais ela ficou após os dois meses?
b) Qual foi o prejuízo após os dois meses, em percentual, sobre o valor do investimeno inicial?

05 **(Fuvest - SP)** Um comerciante compra calça, camisetas e saias e as revende com lucro de 20%, 40% e 30% respectivamente. O preço x que o comerciante paga por uma calça é três vezes o que ele paga por uma camisa e duas vezes o que ele paga por uma saia. Um certo dia, um cliente comprou duas calças, duas camisetas e duas saias e obteve um desconto de 10% sobre o preço total.

a) Quanto esse cliente pagou por sua compra em função de x?
b) Qual o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda?

06 **(PUC-SP)** Desconto sucessivos de 20% e 30% são equivalente a um único desconto de:

a) 25%
b) 26%
c) 44%
d)45%
e)50%

07 **(UEMA)** Uma geladeira foi comprada a prazo em 3 prestações iguais de 238.00 após sofrer um aumento de 5% sobre seu preço para pagamento à vista. O preço dessa geladeira para pagamento à vista era:

a) R$ 720,00
b) R$ 680,00
c) R$ 560,00
d) R$ 714,00
e) R$749,00

08 **(UFLA-MG)** Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: à vista com 20% de desconto sobre o preço de tabela ou pelo cartão de crédito com 10% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um artigo que à vista curta R$ 6.000,00, pelo cartão custará:

a) R$ 10.100,00
b) R$ 4.800,00
c) R$7.700,00
d) R$ 8.250,00
e) R$ 6.600,00

09 **(UFGO)** O senhor José gasta hoje 25% do seu salário no pagamento da prestação de sua casa. Se a prestação for reajustada em 26%, e o salário somente em 5%, qual será a porcentagem do salário que ele deverá gastar no pagamento da prestação, após os reajustes?

10 **(FUVEST - SP)** A cada ano que passa, o valor de um carro diminui de 30% em relação ao seu valor no ano anterior. Se **v** for o valor do carro no primeiro ano, então, seu valor no oitavo ano será de:

a) $(0,7)^7v$
b) $(0,)^7v$
c) $(0,7)^8v$
d) $(0,3^8v$
e) $(0,3)^9v$

Exercícios de Casa

01 **(Unesp)** O lucro líquido mensal de um produtor rural com a venda de leite é de R$ 2.580,00. O custo de produção de cada litro de leite, vendido por R$ 0,52, eé de R$0,32. Para aumentar em eatamente 30% o seu lucro líquido mensal, considerando que os valores do custo de produção é do lucro, por litro de leite, permaneçam os mesmos, quantos litros a mais de leite o produtor precisa vender mensalmente?

a) 16.770
b) 12. 900
c) 5.700
d) 3.870
e) 3270

02 **(Unifor-CE)** Uma indústria tinha 2.625 funcionário. Em virtude de contenção de despesas, o número de funcionários de sexo masculino foi reduzido à metade e, assim, o número de mulheres passou a representar 60% do total de funcionários. Nessas condições, após as dispensas, o número de homens que continuaram a trabalhar nessa indústria era

a) 1.680
b) 1.500
c) 920
d) 840
e) 750

03 **(UFC - GO)** A tabela abaixo descreve os valores gastos, no primeiro ano de vida, com cachrros e gatos.

O custo de dedicação

Preço do animal*	Consulta veterinária	Vacinas	Ração	Higiene	Acessóris	Total do 1° ano**
Cachorro 900 reais	80 reais	180 reais	1.080 reais	650 reais	130 reais	2.120 reais
Gato 1.000 reais	95 reais	150 reais	630 reais	630 reais	175 reais	1.230 reais

* preço das raças mais vendidas, com pedigree

** sem o preço do animal

Veja, São paulo, 27 jul. 2005, p. 118 {Adaptado}.

De acordo com a tabela, para um cachorro é um gato, o gasto com ração, no primeiro ano, representa em relação ao custo total, incluindo o preço dos animais, a porcentagem de:

a) 24%
b) 32%
c) 42%
d) 48%
e) 52%

04 **(Fuvest - SP)** Produção e vendas, em setembro, de três montadoras de automóveis:

Montadora	Unidades produzidas	Porcentagem vendida da produção
A	3.000	80%
B	2.000	60%
C	5.000	x%

Sabendo que neste mês as três montadoras venderam 7.000 dos 10.000 carros produzidos, o valor de x é:

a) 30
b) 50
c) 65
d) 68
e) 100

05 **(UFC - CE)** Numa sala há 100 pesoas, das quais 97 são homens. Para que os homens representem 96% das pessoas contidas na sala, deverá sair que número de homens?

a) 2
b) 5
c) 10
d) 15
e) 25

06 **(Vunesp)** Os dados publicados na revista Veja de 12/4/2000 mostram que, cada 100 pessoas com o ensino médio, apenas 54 conseguem emprego. Se num determinado grupo de 3.000 pessoas 25% têm ensino médio, o número provável de pessoas do grupo com ensino médio que, de acordo com os dados da pesquisa, irão conseguir emprego, é:

a) 375
b) 405
c) 450
d) 750
e) 1.620

07 **(PUC/Campinas-SP)** Um vendedor tem um salário fixo mensal de R$ 300,00 e uma comissão de 7% sobre o total de x reais de suas vendas no mês. Seu salário mensal total, em reais pode ser expresso por:

a) 300 + 7x
b) 300 + 0,07x
c) 307 + x
d) 300,07x
e) 307x

08 **(UFRS)** Numa competição esportiva, uma delegação de atletas obteve 37 medalhas. Sendo o número de medalhas de prata 20% superior ao das de ouro e o das de bronze 25% superior ao das de prata, o número de medalhas de bronze obtido por essa delegação foi de:

a) 12
b) 13
c) 15
d) 17
e) 20

09 **(U. F. São Carlos-SP, adaptada)** Nas eleições de um certo ano, dos eleitores que compareceram às urnas em uma determinada cidade, 29% delas votaram, para prefeito, no candidato *U*, 36% no candidato *V*, 25% no candidato *W* e os 20.000 eleitores restante votaram em branco ou alularam seu votos. Com base nesses dados, pode-se afirmar corretamente que o número de eleitores que votou no candidato *V* foi:

a) 50.000
b) 58.000
c) 72.000
d) 180.000
e) 200.000

10 **(Vunesp)** Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente desse banco deposita 1.000 reais nessa aplicação. Ao final de n anos, o capital em que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, é:

a) 1.000 + 0, 15 .n
b) 1.000 . 0,15 . n
c) $1.000 . 0,15^n$
d) $1.000 + 1,15^n$
e) $1.000 . 115^n$

11 **(FGV-SP)** Carlos adquiriu um aparelho de TV em cores pagando uma entrada de R$ 200,00 mais uma parcela de R$ 450,00 dois meses após a compra. Sabendo -se que o preço à vista do aparelho é de R$600,00, qual foi a taxa mensal de juros simples do financiamento?

12 **(UFMT)** Seis migos almoçaram em um restaurante e a despesa total foi de R$ 1320,00. Sabendo que nessa despesa estão incluído os 10% da gorjeta do garçom, em que a mesma foi dividida igualmente pelos seis amigo, quantos reais cada um deu de gorjeta?

13 **(Fuvest-SP)** A diferença entre $\frac{1}{3}$ e seu valor aproximado 0,333 é igual a x% do valor exato. Então o valor de x é:

a) 0,0001
b) 0,001
c) 0,01
d) 0,1
e) 0,3

14 **(Fuvest-SP)** Numa certa população 18% das pessoas são gordas, 30% dos homens são gordos e 10% das mulheres são gordas. Qual é a porcentagem de homens na população?

15 **(UFRJ)** A organização de uma festa distribuiu gratuitamente 200 ingressos para 100 casais. Outros 300 ingressos foram vendidos, 30% dos quais para mulheres. As 500 pessoas com ingresso foram à festa.

a) Determine o percentual de mulheres na festa.
b) Se os organizadores quisessem ter igual número de homens e mulheres na festa, quantos ingressos a mais eles deveriam distribuir apenas para pessoas do sexo feminino?

16 **(Fuvest-SP)** Sobre o preço de um carro importado incide um imposto de importação de 30%. Em função disso, o seu preço para o importador é de R$ 19.500,00. Supondo que tal imposto passe de 30% para 60%, qual será, em reais, o novo preço do carro, para o importador

a) R$ 22.500,00
b) R$24.000,00
c) R$ 25.350,00
d) R$31.200,00
e) R$39.000,00

17 **(FUV-SP)** Um indivíduo, ao ongordar, passou a ter 38% a mais em seu peso. Se tivesse engordado de tal maneira a aumentar seu peso em apenas 15%, estaria pesando 18,4 kg a menos. Qual era seu peso original?

a) 50 kg
b) 60 kg
c) 70 kg
d) 80 kg
e0 40 kg

18 **(U. Santa Úrsula - RJ)** Seja $W = \frac{xy}{z}$. Se x sofre um aumento de 25% e y um aumento de 40%, a alteração que sofre z para que W não se altere é:

a) aumentar de 65%.
b) diminuir de 65%.
c) aumentar de 75%.
d) diminuir de 75%.
e) z não deve sofre nenhuma alteração.

19 **(UFMG)** Uma empresa dispensou 20% de seus empregados e aumentou o salário dos restantes, fazendo que o valor de sua folha de pagamento diminuísse 10%. O salário médio da empresa - valor da folha de pagamentos dividido pelo número de empregados - teve um aumento percentual de:

a) 12,5%
b) 10%
c) 17,5%
d) 15%

20 **(F. I. Vitória - ES)** O salário mensal de um vendedor consiste em R$ 150,00 mais a comissão de 6% sobre suas vendas. Se no mês de novembro ele teve um ganho total de 600,00, qual foi o valor de suas vendas nesse mês?

a) R$ 12.000,00
b) R$10.000,00
c) R$ 8.200,00

d) R$ 7.500,00
e) R$4.500,00

11 - Equações e problemas

a) Equação do 1° grau.

$a\,x + b = 0 \therefore x = -\frac{b}{a}$ (equação determinada)

Caso $x = \frac{n}{o}$ equação impossível ($S = \varnothing$)

$x = \frac{o}{o}$ equação indeterminada ($S = \mathbb{R}$)

b) Equação do 2° grau.

$a\,x^2 + b\,x + c = o \; x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$

$x^2 - S\,x + P = 0$, em que $S = -\frac{b}{a}$ (soma de raízes)

e $P = \frac{c}{a}$ (produto da raízes)

Forma fatorada: $\boxed{a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = 0}$ em que x_1 e x_2 são as raízes.

Número de raízes reais;
$\Delta > o$: duas raízes reais distintos
$\Delta = o$: duas raízes reais iguais
$\Delta < o$: não possui raízes reais.
$\Delta \geq o$: possui raízes reais.

Exercícios Comentados

01 Na equação do 2° grau $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, os números **a** e **c** têm sinais contrários. Pode-se afirmar que:

a) A equação tem duas raízes reais de sinais contrários.
b) A equação tem duas raízes reais positivas.
c) A equação tem duas raízes reais negativas.
d) A equação pode não ter raízes reais.
e) n. d. a.

Resolução:

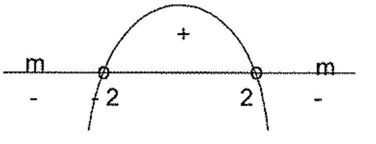
Como $\rho = \frac{c}{a}$, logo P < 0. Como o produto é negativo, as raízes devem ter sinais contrárias.

02 A equação $mx^2 + 4x + m = 0$ não admite raízes reais se:

a) m = 0
b) $-2 < m < 2$
c) $-4 < m < 4$
d) $m < -2$ e $m > 2$
e) $m < -2$ ou $m > 2$

Resolução:

$\Delta < 0$:
$16 - 4\,m^2 < 0$ (inequação do 2° grau)
$4\,m^2 - 16 > 0$
$m^2 = 4$
$m = \pm 2$



sc $\{m \in \mathbb{R} \,/\, m < -2$ ou $\in \mathbb{R} \,/\, m > 2\}$

03 **(PUC)** Um professor propôs aos seus alunos a resposta de certa equação do 2° grau. Um dos alunos copiou errado apenas o coeficiente do termo do 1° grau e encontrou as raízes 1 e -3; outro, copiou errado apenas o termo constante, encontrando as raízes -2 e 4. Resolva a equação original, proposta por aquele professor.

Resolução:

1° aluno errou o coeficiente b, logo, acertou o produto das raízes: p = - 3.

2° aluno errou o coeficiente c, logo acertou a soma das raízes:S = 2.
Então a equaçaõ correta é:

$x^2 - S\,x + \rho = o$, $x^2 - 2x - 3 = 0$.
Resolvendo por S e P encontram - 1 e 3.

04 **(PUCCAMP)** Se **v** e **w** são as raízes da equação $\mathbf{x^2 + ax + b = 0}$, onde a e b são coeficientes reais, então $\mathbf{v^2 + w^2}$ é igual a:

a) $a^2 - 2b$
b) $a^2 + 2b$

c) $a^2 - 2b^2$
d) $a^2 + 2b^2$
e) $a^2 - b^2$

Resolução:
Sabe-se que: $v + \omega = -a$
$v \cdot \omega = b$

Logo, $(v + m)^2 = (-a)^2$
$v^2 + 2vm + m^2 = a2$
$v^2 + m^2 = a^2 - 2b$

05 **(EPCAR)** Uma aeronave voou no primeiro dia de uma viagem $\frac{3}{5}$ do percurso. No segundo dia, voou $\frac{2}{3}$ do que faltava e, no 3º dia, completou a viagem voando 800 km. O percurso total, em km, é um número:

a) divisor de 12.10^3
b) múltiplo de 10^4
c) divisor de 10^3
d) múltiplo de 20.10^3

Resolução:

1° dia $= \frac{3}{5}x$

2° dia $= \frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{3x}{5}\right)$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{5} = \frac{4x}{15}$

3° dia = 800

$$Logo, \frac{3x}{5} + \frac{4x}{5} + 800 = +$$

$$\frac{9x + 4x + 12000 = 15x}{15}$$

2 x = 12.000
x = 6.000. Esse n° é divisor de 12.10^3

Exercícios de Sala

01 A idade de dona Helena é igual à soma dos números de filhos e netos que ela tem. Cada um de seus filhos tem tantos filhos quantos são seus irmãos. Sabendo-se que dona Helena tem entre 70 e 85 anos, podemos concluir que sua idade, em anos, é:

a) 72
b) 75
c) 78
d) 80
e) 81

02 Uma pessoa colocou, em três montes alinhados, a mesma quantidade de bolinhas. Em seguida, fez as seguintes operações: retirou de cada um dos montes laterais 3 bolinhas e colocou-as no monte do meio. Depois, retirou do monte do meio tantas bolinhas quantas ficaram no monte da esquerda. Desse modo, o monte do meio ficou com:

a) 9 bolinhas;
b) 15 bolinhas;
c) um número par de bolinhas;
d) tantas quantas em cada monte lateral;
e) não se pode determinar a quantidade, pois faltam dados.

03 Um estudante precisa de **n** dias para ler um livro de 270 páginas, lendo **p** páginas por dia. Se ele ler **p + 15** páginas por dia, levará **n – 3** dias na leitura. O valor de n + p é:

a) 35
b) 39
c) 54
d) 42
e) 72

04 **(UNICID)** O valor de **m**, para que uma das raízes da equação $x^2 + mx + 27 = 0$ seja o quadrado da outra é:

a) -3
b) -9
c) -12
d) 3
e) 6

05 **(EsSA)** A soma dos inversos das raízes da equação $x^2 - 36x + 180 = 0$ é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{30}$

d) $\frac{1}{36}$

e) $\frac{2}{15}$

06 **(EsPCEx)** Sejam **m** e **n** dois números inteiros positivos tais que **m** e **n** são ímpares consecutivos, com $m.n = 483$. Nestas condições, o valor de $m+n$ é igual a:

a) 64
b) 52
c) 46
d) 44
e) 32

07 **(EPCAR)** Numa prova de Matemática, havia dois problemas. Ao corrigi-la, o professor responsável determinou que não consideraria questões meio certas. Assim a cada prova só poderia ser atribuído ***zero***, ***5*** ou ***10***. Dos alunos, 25 obtiveram nota 5, 10 alcançaram nota 10, 25 acertaram o segundo problema e 20 erraram o primeiro problema. O número de alunos que tiraram nota zero é

a) 0
b) 5
c) 10
d) 15

08 Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a equação do segundo grau $x^2 - 4x + m = 0$ não admita raízes reais.

09 Determine $k \in \mathbb{R}$ sabendo que uma das raízes de equação do segundo grau $x^2 - 8x + k = 0$ é igual ao triplo da outra.

10 **(Fuvest-SP)** Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $10x^2 + 33x - 7 = 0$. O número inteiro mais próximo do número $5x_1x_2 + 2(x_1+x_2)$ é:

a) - 33
b) - 10
c) -7
d) 10
e) 33

Exercícios de Casa

01 Resolva as equações:

a) $(x + 3)(x + 1)(2x - 3) = 0$
b) $x(x + 7)(x^2 - 5x + 6) = 0$
c) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$
d) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

02 **(Fuvest-SP)** Resolva a equação:

$$\frac{x+2}{2} + \frac{2}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

03 **(Fuvest-SP)** Resolver a equação:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+2} = -1$$

04 **(UniFEI-SP)** Sendo *a* e *b* as raízes da equação $2x^2 - 5x + m = 3$, então, se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{3}$, o valor de m é:

a) $\frac{3}{4}$

b) $-\frac{4}{3}$

c) $\frac{27}{4}$

d) 2
e) 1

05 **(Fuvest-SP)** A equação $x^2 - x + c = 0$, para um conveniente valor de c, admite raízes iguais a:

a) – 1 e 1
b) 0 e 2
c) – 1 e 0
d) 1 e – 3
e) – 1 e 2

06 Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $3x^2 - 11x + 5 = =0$, calcule o valor de $(x_1 + 3) . (x_2 + 3)$.

07 **(Fuvest-SP)** A equação do 2° grau $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raíz cujo valor é 4. A outra raiz é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) -1
e) -2

08 **(Vunesp)** Um valor de m para o qual uma das raízes da equação $x^2 - 3mx + 5m = 0$ é o dobro da outra é:

a) $-\frac{5}{2}$
b) 2
c) -2
d) 5
e) $\frac{5}{2}$

09 **(UFMG)** Considere a equação $(x^2 - 14x + 38)^2 = 11^2$. O número de raízes reais distintoas dessa equação é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

10 **(Unifor-CE)** No universo $\mathbb{R}$, a equação

$\sqrt{2-x} = \frac{x-2}{2}$ admite:

a) uma única raiz, inteira e positiva
b) uma única raiz, inteira e negativa
c) uma única raiz,irracional e positiva.
d)duas raízes opostas.
e) duas raízes positivas.

11 Resolver em $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$$

12 **(Unifor-CE)** Um professor colocou no quadro negro uma equação do 2° grau e pediu que os alunos a resolvessem. Um aluno copiou errado o termo constante da equação e achou as raízes -3 e -2. Outro aluno copiou errado o coeficiente do termo do primeiro grau e achou as raízes 1 e 4. A diferença positiva entre as raízes da equação correta é:

a) 1
b)2
c) 3
d) 4
e) 5

13 Resolver em $\mathbb{R}$:
$x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

14 Resolver em $\mathbb{R}$:
$(x^2 + x - 1)^2 - 6(x^2 + x - 2) - 1 = 0$

15 **(UFPE)** Em uma festa de aniversário cada convidado deveria receber o mesmo número de chocolates. Três convidados mais apressados se adiantaram e o primeiro comeu 2, o segundo 3 e o terceiro 4 chocolates além dos que lhe eram devidos, resultad no consumo da metade dos chocolates da festa. Os demais chocolates foram divididos igualmente entre os demais convidados e cada um reebeu um a menos do que lhe era devido. Quantos foram os chocolates distribuídos na festa?

a) 20
b) 24
c) 28
d) 32
e) 36

16 **(UFF-RJ)** Cada filha de Luiz Antônio tem o número de irmãs igual à quarta parte do número de irmãos. Cada filho de Luiz Antônio tem o número de irmãos igual ao tripplo do número do número de irmãs.

O total de filhas de Luiz Antônio é:

a) 5
b) 6
c) 11
d) 16
e) 21

17 **(U. E. Londrina - PR)** Em uma cantina há fichas de R$ 0,50 R$1,00 R$2,50. Amanda comprou 10 fichas e gastou R$ 20,00. Quantas fichas de R$ 1,00 Amanda comprou?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

18 **(PUC-RJ)** A soma de minha idade com as de minhas duas filhas é 64. Eu tenho trinta anos amais do que uma delas, e a diferença de idade entre as duas é de cinco anos. Sabendo que já fiz quarenta anos, qual a minha idade?

19 Uma torneira enche um tanque em 2 horas e outra enche o mesmo tanque em 3 horas. Estando o tanque vazio e abrindo as duas torneiras simultaneamente, após quanto tempo o tanque estará cheio?

20 **(F. I. Vitória-ES)** Uma prova que vale 10 pontos é composta de 64 questões de mesmo valor. Se um aluno acertou $\frac{2}{5}$ das questoes nessa prova, então, o número de pontos que obteve foi:

a) 2,5
b) 3,0
c) 4,0
d) 5,2
e) 6,4

12 - Progressão Aritimétrica (PA)

Vamos iniciar o estudo de um tipo particular de sequência, chamada progressão aritmética, que indicaremos P. A.

Chama-se **progressão aritmética** qualquer sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao seu antecessor uma constante **r**, chamada **razão** da P. A.

Assim, numa P. A.; temos:

$a_n = a_{n-1} + r$ (para $n \geq 2$)

Exemplos

a) (1; 4; 7; 10; 13;...) P.A. de razão r = 3
b) (12; 7; 2; -3;...) P.A. de razão r = - 5
c) (8; 8; 8; 8; ...) P.A. de razão r = 0

12. 1 Classificação

♦ Se r > 0 a P.A. é crescente
♦ Se r < 0 a P.A. é decrescente
♦ Se r = 0 a P.A. é cosntante

12.2 Fórmula do termo geral da P.A.

Seja a P.A. de razão r:

$$(a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...)$$

Da definição, resulta:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando-se, membro, essas n igualdades, obtemos:

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + ... + r}_{(n-1)\,parcelas}$$

$$\therefore \boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$$

Essa última igualdade é chamada **fórmula do termo geral da P.A.**

Se quisermos obter a_n a partir de um termo a_p quelquer da P.A., escrevemos:

$$a_n = a_p + (n-1) \cdot r$$

12.3 Uma propriedade importante

Se x, y e z são três termos consecutivos de uma P.A., então:

$$y = \frac{x+z}{2}$$

A demosntração é imediata, pois se (x; y;z) estão em P.A.. de razão r:

$$x + r = y \ (I)$$
$$y + r = z \ (II)$$

Efetuando -se (I) - (II), teremos:

x - y = y - z

ou ainda

2y = x +z

$$\therefore \ y = \frac{x+z}{2}$$

O termo central y é a média aritmética entre x e z.

12.4 Termos equidistantes dos extremos de uma P.A.

A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos dessa sequência.

Sabemos que a_p e aq são equidistantes dos extremos a_1 e an se o número de termos que antecedem a_p for igual ao número de elemento que sucedem a_q. Ou seja:

$$\underbrace{a_1;\ a_2;...;}_{(p-1)termos}\ a_p;...;a_q;\underbrace{...;a_{n-1};a_n}_{(n-q)termos}$$

$$p-1=n-q \Rightarrow$$

$$\boxed{p+q=n+1}$$

Vamos obter a_p e a_q :

$$a_p = a_1 + (p-1)r$$
$$a_q = a_1 + (q-1)r$$

Aomando, membro a membro, as duas igualdades, teremos:

$a_p + a_q = 2a_1 + (p+q-2)r$ mas p + q = n + 1, portanto:

$$a_p + a_q = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_p + a_q = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)r}_{a_n}$$

$$\therefore \boxed{a_p + a_q = a_1 + a_n}$$

12. 5Soma dos termos de uma P.A.

Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma P.A. finita.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$$

Vamos escrever S_n em ordem invertida.

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 \quad \text{(II)}$$

Somando, membro a membro, as igualdades (I) e (II), trtrmos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_1 + a_n)$$

Conforme visto anteriormente,

$$(a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = ... = (a_1 + a_n)$$

Podemos escrever:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n$$

e por fim:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

Note que a soma (a_1+a_n) pode ser subtituída pela soma $(a_p + a_q)$, sendo a_p e a_q equidistantes dos extremos.

Exercícios Comentados

01 Numa P.A. em que $a_1 = 3$ e r = 2, obtenha:

a) o décimo primeiro termo.
b) o trigésimo termo.
c) a fórmula do termo geral dessa sequência.

Resolução:

a) $a_{11} = a_1 + (11-1)\cdot r$

$a_{11} = 3 + 10\cdot 2$

$\boxed{\therefore a_{11} = 23}$

b) $a_{30} = a_1 + (30-1)\cdot r$

$a_{30} = 3 + 29\cdot 2$

$\boxed{\therefore a_{30} = 61}$

c) $a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_n = 3 + (n-1)\cdot 2$

$a_n = 3 + 2n - 2$

$\boxed{\therefore a_n = 1 + 2n}$

02 Calcule a razão de uma P.A. em que:
$a_{12} = 15$ $a_{21} = 60$

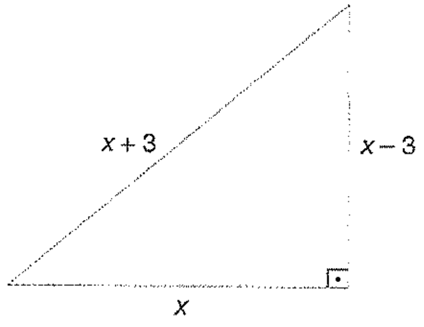
Resolução:

$$a_{21} = a_{12} + (21-12)\cdot r$$
$$60 = 15 + 9r$$
$$9r = 45 \qquad \boxed{\therefore r = 5}$$

03 Calcule as medidas dos lados de um triângulo retângulo sabendo que estão em P.A. de razão 3.

Resolução:

Vamos representar as medidas dos lados por x - 3; x + 3 (P.A. de razão r = 3)



Aplicando o teorema de pitágoras, teremos:

$$(x+2)^2 = (x-3)^2 + x^2$$
$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + x^2$$
$$x^2 - 12x = 0$$
$$x(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = 12 \end{cases}$$

Como devemos ter x >3, ficamos com x = 12.

$\boxed{\text{As medidas são 9, 12 e 15.}}$

04 A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = 2n^2 + 3n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
Calcule

a) a_1
b) S_{10}
c) a_{10}

Resolução:

a) $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$

$\boxed{a_1 = 5}$

b) $S_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 = 230$

$\boxed{S_{10} = 230}$

c) $a_{10} = S_{10} - S_9$
$S_9 = 2 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 = 189$
$\therefore a_{10} = 230 - 189 \Rightarrow \boxed{a_{10} = 41}$

05 Considere a sequência dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$$

a) Obtenha os 5 primeiros termos dessa sequência.
b) Obtenha a fórmula de a_n em função de n.
c) Obtenha seu 15° termo.

Resolução:

a) $a_2 = a_1 + 3 = 4$
$a_3 = a_2 + 3 = 7$
$a_4 = a_3 + 3 = 10$
$a_5 = a_4 + 3 = 13$
(1; 4; 7; 10; 13)

Obs.: Note que temos uma P.A. com $a_1 = 1$ e r = 3

b) $a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 1 + 3n - 3$
$a_n = 3n - 2$ com $n \in \mathbb{N}^*$

c) $a_{15} = 3 \cdot 15 - 2 = 43$

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

Exercícios de Sala

01 Seja uma P.A. em que $a_9 = 21$ e $a_{21} = 9$;

a) Calcule a razão da P.A.
b) obtenha a fórmula do termo geral dessa P.A.

02 Numa P.A. crescente a soma dos 3 primeiros termosé igual a 27 e o produto desses 3 termos vale 648. Determine-os:

03 Determine os valores de a de modo que a sequência $(a^2;\ 2a;\ 5-2a)$ seja uma P.A.

04 A soma dos n primeiros termos de uma P.A.. é dada por $S_n = 2n^2 - n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
Calcule, da P.A.:

a) o primeiro termo.
b) o sexto termo.
c) o sétimo termo.
d) o termo geral a_n.

05 (UFJF) Se os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritimética de razão 4, então o cosseno do maior ângulo agudo desse triângulo é:

a) 0,6
b) $\sqrt{3}/2$
c) 0,8
d) $\sqrt{2}/2$

06 (PUC) A soma de três números naturais em progresão aritmética é trinta; a diferença entre o maior e o menor destes números é doze. O menor termo dessa progressão é igual a:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

07 (EsPCEx) Na tabela a seguir, em que os números das linhas 1 e 2 encontram-se em progressão aritimética, seja n o número da coluna em que pela primeira vezo número bn da linha 2 é maior que o an da linha1.

	1	2	3	4	...	n
Linha 1	1000	1004	1008	1012	...	a_n
Linha 2	20	27	34	41	...	b_n

A soma dos algarismos de n é

a) 13
b) 12
c) 11
d) 10
e) 9

08 (EsPCEx) A sequência de números reais a, b, c d forma nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma de seus termos é 110, a sequência de números reais a, b, e, f forma nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2. A soma d + f é igual a:

a) 96
b) 102
c) 120
d) 142
e) 132

09 (EsPCEx) Numa modalidade de corrida, ganha a equipe que percorre uma determinada distância em menor tempo, revezando seus atletas a cada 800 metros. A equipe Verde utilizou a tática de organizar seus atletas na ordem crescente de seus atletas na ordem crescente de suas velocidades. Sabe-se que o atleta menor veloz dessa equipe gastou 5 minutos no revezamento e que a diferença de tempo entre dois atletas consecutivos foi sempre de 30 segundos. Sabendo que a equipe Verde realizou a prova em 26 minutos, a <u>distância total</u> percorrida foi de

a) 4000 metros.
b) 4160 metros.
c) 6400 metros.
d) 10400 metros.
e0 20800 metros.

10 (EsPCEx) Uma progressão aritmética tem razão r = - 10, sabendo que seu 100° (centésimo) termo é zero, pode-se afirmar que seu 14° (décimo quatro) termo vale:

a) 130
b) 870
c) 860
d) 990
e) 120

Exercícios de Casa

01 **(UFJF)** Se os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética de razão 4, então o cosseno do maior ângulo agudo desse triângulo é:

a) 0,6
b) $\sqrt{3/2}$
c) 0,8
d) $\sqrt{2/2}$

02 **(EsPCEx)** Sendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, uma função definida por $f(x)=2x-3$, então a soma

$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(100)$ é igual a:

a) 9700.
b) 9800.
c) 9900.
d) 9600.
e) 10000.

03 **(AFA)** Se a soma dos n primeiros termos de uma progrssão aritimética (PA) é dada pela fórmula $S_n=\dfrac{3n^2+n}{2}$, então a soma do quarto com o sexto termo dessa PA é

a) 25.
b) 28.
c) 31.
d) 34.

04 **(AFA)** A soma dos três algarismos de um número é 15. Somando-se 396 ao nímero, obtém-se um outro com os mesmos algarismos, mas em ordem inversa. Determinar o número sabendo-se que seus algarismos estão em PA.

a) par
b) primo
c) múltiplo de 7
d) divisível por 13

05 **(ITA)** O valor de n que torna a sequência 2 + 3n, -5n, 1 - 4n uma progressão aritimética pertence ao intervalo

a) $[-2,-1]$.
b) $[-1,0]$
c) $[0,1]$
d) $[1,2]$
e) $[2,3]$

06 **(AFA)** Os números inteiros positivos são agrupados em partes disjuntas, da seguinte maneira: {1}, {2,3}, {4,5,6}, {7,8,9,10}, {11,12,13,14,15}, ... Seja S a soma dos elementos que compõem o 12° conjunto desta sequência. A soma dos algarismos de S é um número

a) primo.
b) múltiplo de 7.
c) múltiplo de 5
d) quadrado perfeito menor que 36.

07 Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência $a_n=2n-1$ e $b_n=a_n-1$, sendo $n\in\mathbb{N}^*$.

08 **(PUC-SP)** Na sequência $(a_1;a_2...)$ têm-se $a_1=1$ e $a_{n+1}=\dfrac{2+a_n^2}{2a_n}$. Qual dos números a seguir está mais próxima de a_3?

a) 1
b) 2
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\sqrt{5}$

09 **(Mackenzie-SP)** O trigésimo primeiro termo de uma P.A. de primeiro termo 2 e razão 3 é:

a) 63
b) 65
c) 92
d) 95
e) 98

10 **(PUC-SP)** O número de termos de uma P.A., cujo primeiro termo é $a_1=10x-9y$, o último, $a_n=y$ e a razão $r=y-x$, é:

a) 11
b) 10
c) 9
d) 8
e) 7

11 Qual é o número de múltiplos de 7 com 2 ou 3 algarismos?

12 **(Mackenzie-SP)** As progressões aritiméticas (5; 8; 11;...) e (3; 7; 11;...) têm 100 termos cada um. O número de termos iguais nas duas progressões é:

a) 15
b) 25
c) 1
d) 38
e) 42

13 **(U.E. Londrina-PR)** Interpolano-se 7 termos aritmeticos entre os números 10 e 98, obtém-se uma P.A. cujo termo central é:

a) 45
b) 52
c) 54
d) 55
e) 57

14 (Mackenzie-SP) Se os ângulos inteiros de um triângulo estão em P.A., e o menor deles é a metade do maior, então o maior mede:

a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°

15 **(Fuvest-SP)** Em uma P.A. de termos positivos, os três primeiros termos são: $1-a; -a; \sqrt{11-a}$. O quarto termo dessa P.A. é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

16 **(FGV-SP)** Uma sequência é tal que $a_1 = 8 \; e \; a_n = a_{n-1} + 12$ (sendo $n \geq 2$). A soma dos 20 primeiros termos é:

17 **(PUC-SP)** Um teatro tem 18 poltronas na primeira fila, 24 na segunda, 30 na terceira e assim por diante na mesma sequência, até a vigésima fila, que é a última. O número de poltrona desse teatro é:

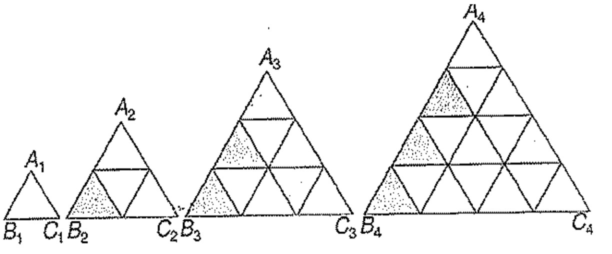
a) 92
b) 132
c) 150
d) 1.320
e) 1.500

18 **(FGV-SP)** Numa progressão aritmética, sabe-se que $a_{14} = 3$ e $a_{16} = 11$. Calcule a soma dos seu 30 primeiros termos.

19 **(Cesgranrio)** A soma dos primeiros n números ímpares positivos maiores que 10 é:

a) $n^2 + 10n$
b) $\frac{11}{4}(n+1)^2$
c) $n^2 + 11n$
d) $n^2 + 11n + 10$
e) n^2

20 **(U. Católica-DF)** Observe a sequência de triângulos $A_n B_n$, em que n = 1, 2, 3, ...



No vigésimo triângulo da sequência acima, triângulo $A_{20} B_{20} C_{20}$, termos x triângulos não hachurados. Com base

Nessas informações, determine o valor da expressão $\frac{x}{3} - 40$

13 - Progressão Geométrica

Neste capitulo iremos iniciar o estudo de um outro tipo de sequência, a **progressão geométrica**, que abreviaremos por **P.G.**

13. 1 Definição

Chama-se progressão geométrica toda seguência em que cada termo. a partir do segundo, é igual a seu antecessor multiplicado por um número constante q, chamamado razão da P.G.

Exemplos

(5; 10; 20; 40; ...) P.G. de razão 2

x2 x2 x2

(9; 3; 1; ...) P.G. de razão $\frac{1}{3}$

x $\frac{1}{3}$ x $\frac{1}{3}$

(5; -5; 5; -5; ...) P.G. de razão - 1

x(-1) x(-1) x(-1)

Observação

✓ Decorre da definição que em toda P.G. de razão q $\neq 0$, temos:

$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ (com $n \geq 2$) ou seja, o quociente entre um termo qualquer e o seu antecessor é uma constante q (razão da P.G.).

13. 2 Fórmula do Termo Geral da P.G.

Seja a P.G.:

(a_1; a_2; a_3; ...; a_n) com $a_1 \neq 0$ e q $\neq$ 0

Da definição, decorre que:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ a_4 = a_3 \cdot q \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n = a_n - 1 \cdot q \end{array}\right\} (n-1) \textit{ termos}$$

multiplicando essas igualdades, membro a membro, termos:

$a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = (a_1 \cdot q)(a_2 \cdot q) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} \cdot q)$

$$\cancel{a}_2 \cdot \cancel{a}_3 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot \cancel{a}_2 \cdot \cancel{a}_3 \cdot \ldots \cdot \cancel{a_{n-1}} \, q^{n-1}$$

simplificando, resulta:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Essa última igualdade é chamada **fórmula do termo geral da P.G.** e possibilita que se se obtenha um termo qualquer da sequência desde que se conheça a_1 e q.

Podemos também obter an a partir de um termo a_p qualquer ($p \neq n$) pela expressão:

$$\boxed{a_n = a_p \cdot q^{n-p}}$$

13.3 Uma propiedade importante

Se x, y e z são, nessa ordem, três termos consecutivos de uma P.G., então:

$$\boxed{y^2 = x \cdot z}$$

ou seja, o termo central y é a média geométrica entre x e y.

A demostração é imediata:

$x \cdot q = y$ e $y \cdot q = z$

Dividindo, membro a membro, as duas iguldades, termos:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$\therefore y^2 = x \cdot z$$

13. 4 Soma dos termos de uma P.G. finita

Seja (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) uma P.G. finita, de razão q.

Representa por Sn a soma de seus n termos.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Podemos escrever S_n na forma:

$S_n = a_1 + a_{1q} + a_{1q}{}^2 + ... + a_{1q}{}^{n-1}$ (I)

Multiplicando os dois membros da igualdade (I) pela razão q, teremos:

$q \cdot S_n = a_{1q} + a_{1q}{}^2 + a_{1q}{}^3 + ... + a_{1q}{}^n$ (II)

Subtraindo a igualdade (I) da igualdade (II), teremos:

$qS_n - S_n = a_{1q}{}^n - a_1$

$S_n(- 1) = a_1 \cdot (q_n - 1)$

E, portanto:

$\boxed{S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}}$ (para $q \neq 1$)

Note que se q = 1, a fórmula acima não pode ser aplicada.

Entretanto, se q = 1, todos os termos da P.G. sãp iguais ao primeiro. Assim, temos:

$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1}_{n\ parcelas}$. Ou seja:

$\boxed{S_n = n \cdot a_1}$ (para $q = 1$)

13. 5Limite da soma da P.G. infinita

Vamos, inicialmente, acompanhar um caso particular.

Seja a P.G. infinita $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; ...; \frac{1}{2^n}; ...\right)$.

Vamos obter a fórmula da soma dos n primeiros termos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = -\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$$

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{2^n}}$$

Se (a_1, a_2, a_3, ..., an, ...) é uma P.G. infinita com razão q, com -1 < q < 1, temos:

$S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ Se n tende a infinito, q^n tende a zero, assim:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow \boxed{S\infty = \frac{a_1}{1-q}}$$

Exercícios Comentados

01 Seja a P.G. (9; 3; 1; ...).

a) Calcule seu sexto termo.
b) Obtenha seu termo geral a_n em função de n.

Resolução:

a) (9; 3; 1; ...) e $q = \frac{1}{3}$

x $\frac{1}{3}$ x $\frac{1}{3}$

Vamos obter a_6

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$ $a_6 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{3^2}{3^5} = 3^{-3}$

$$\boxed{\therefore a_6 = \frac{1}{27}}$$

b) $a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\boxed{\therefore a_n = 3^{3-n}, com\ n \in \mathbb{N}^*}$$

02 Calcule a razão de uma P.G. sabendo que

$a_4 + a_6 = 160$ e $a_7 + a_9 = 1.280$

Resolução:

Vamos expresar os termos envolvidos em função de a_1 e q

$a_4 + a_6 = 160 \Rightarrow a_{1q}{}^3 + a_{1q}{}^6 = 160$
$a_1 \cdot q^3 (1 + q^2) = 160$ (I)
$a_7 + a_9 = 1.280 \Rightarrow a_{1q}{}^6 + a_{1q}{}^8 = 1.280$
$a_1 \cdot q^6(1 + q^2) = 1.280$ (II)

Dividindo-se a igualdade (II) pela (I), teremos:

$$\frac{a_{1q}{}^6(1+q^2)}{a_1 \cdot q^3(1+q^2)} = \frac{1.280}{160}$$

$q^3 = 8 \therefore \boxed{q = 2}$

03 **(FGV-SP)** Os números x, y, z formam, nessa ordem, uma P.G. de soma 15. Os números x, y + 1 e z + 5 formam, nessa ordem, uma P.G. de soma 21. Sendo $0 \le x \le 10$, o valor de 3z é:

a) 36
b) 9
c) -6
d) 48
e) 21

Resolução:

(x, y, z) é P.A. e x + y + z = 15
(x, y + 1, z + 5) é P.G. e
x + (y + 1) + (z + 5) = 21

Da P.A., temos: x + z = 2y
$\therefore$ y = 5 e x + z = 10
Da P.G., temos
$(y + 1)^2 = x(z+5)$
36 = (10-z) $\cdot$ (z + 5)
$36 = 10z + 50 - z^2 - 5z$

$$z^2 - 5z - 14 = 0 \begin{cases} 7 \\ \text{ou} \\ -2 \end{cases}$$

Se z = - 2 $\Rightarrow$ x = 12 (não convém)

Se z = 7 $\Rightarrow$ x = 3 (para $0 \le x \le 10$)

Portanto 3z = 21

04 Quantos termos da P.G. (1; 3; 9; ...) devem ser somados para que o resultado seja 3.280?

Resolução:

Na P.G., temos:

$a_1 = 1; q = 3\ e\ S_n = 3.280$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$3.280 = \frac{1(3_n - 1)}{3 - 1}$$

05 **(Fuvest-SP)** É dado um quadrado Q_1 cujo lado ℓ = 1. Considere a sequência infinita de quadrados ($Q1; Q2; Q3; ...$) em que cada quadrado é obtido unindo-se os pontos médios dos lados do quadrado anterior. A soma das áreas de todos os quadrados da sequência é:

a) 4

b) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$

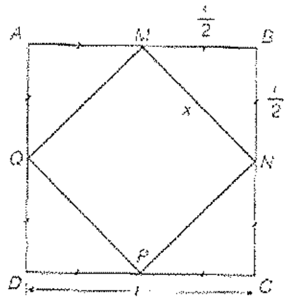
c) $\frac{4}{3}$

d) 2

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - 1}}$

Resolução:

inicialmente, observe que se um quadrado tem vértice nos pontos médios dos lados de um outro quadrado, sua área será igual `metade da área deste.



$S_{ABCD} = \ell^2$

$$S_{MNPQ} = x^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{\ell^2}{2}$$

Assim, na sequência de quadrados propostos na ploblema, as áreas formam a seguinte P.G.:

$\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; ...\right)$ A soma dos infinitos termos dessa P.G. é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore S = 2$$

Exercícios de Sala

01 Seja a P.G. (1; 2; 4; ...):

a) Calcule o 6° termo dessa sequência.

b) Obtenha a fórmula do termo geral dessa P.G.

c) Seja a_k, com $k \in \mathbb{N}^*$, o primeiro termo dessa P.G. tal que a_k> 1.000. Obtenha k e a_k:

02 Calcule a soma dos 10 primeiros termos da P.G (1; 2; 4; ...).

03 Calcule o limite da soma dos infinitos termos da P.G.

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; ...\right)$$

04 **(PUC-RJ)** Numa P.G., a diferença o2° e o 1° termo é 9 e a diferença entre o 5° e o 4° termo é 576. O 1° termo dessa progressão é:

a) 3
b) 4
c) 6
d) 8
e) 9

05 **(Vunesp)** No dia 1° de dezembro de certo ano, uma pessoa enviou pela internet uma mensagem para x pessoas. No dia 2, cada uma das x pessoas que recebeu a mensagem no dia 1° a enviou para outras duas novas pessoas. No dia 3, cada pessoa que recebeu a mensagem no dia 2 também enviou a mesma mensagem para outrad duas novas pessoas e, assim, sucessivamente. Se, do dia 1° até o final do dia 6 de dezembro, 756 pessoas haviam recebido a mensagem, o valor de x é:

a) 12
b) 24
c) 52
d) 63
e) 126

06 **(Fuvest-SP)** É dado um quadrado Q_1 cujo lado $\ell = 1$. Considere a sequência infinita de quadrados $(Q_1; Q_2; Q_3; ...)$ em que cada quadrado é obtido unindo-se os pontos médios dos lados do quadrado anterior. A soma das áreas de todos os quadrados da sequência é:

a) 4

b) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

c) $\frac{4}{3}$

d) 2

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

07 **(EsPCEx)** Os números ***a***, ***b*** e ***c*** determinam, nessa ordem, uma progressão aritmética (PA) de razão r (r $\neq$ 0). Na ordem b, a, c determinam uma progressão geométrica (PG). Então a razão da PG é

a) – 3.
b) – 2.
c) – 1.
d) 1.
e) 2.

08 **(EsPCEx)** O sexto termo de uma progressão geométrica é igual a b, e o sétimo termo é igual a c. Se o primeiro termo desta progressão é diferente de zero e a razão maior que um, então o primeiro termo é igual a:

a) $\frac{c}{b}$.

b) $\frac{b^3}{c^4}$.

c) $\frac{b}{c}$.

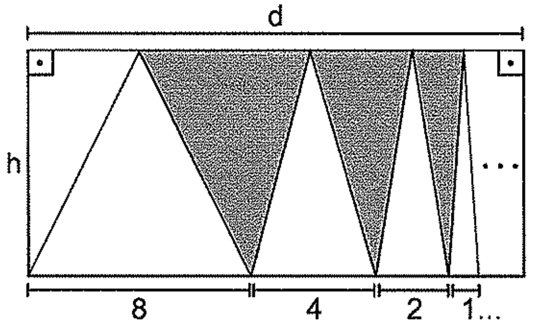
d) $\frac{b^6}{c^5}$

e) $\frac{b^4}{c^3}$.

09 **(EsPCEx)** O valor de *x* que satisfaz a equação $x+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x+\frac{8}{27}x+\ldots=243$, em que o primeiro membro é uma P.G. infinita, é

a) 27.
b) 30.
c) 60.
d) 81.
e) 90.

10 **(FGV)** A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetros, 8, 4, 2, 1, ...



Sabendo que a soma da área dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados h e d é igual a:

a)68.
b)102.
c)136.
d)153.
e)192.

Exercícios de Casa

01 **(Mackenze-SP)** Se o oitavo termo de uma P.G. é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$, o primeiro termo dessa progressão é:

a) 2^{-1}
b) 2
c) 2^6
d) 2^8
e) $\sqrt[8]{\frac{1}{2}}$

02 **(U. F. São Carlos-SP)** Uma bola cai de uma altura de 30 m e salta, cada vez que toca o chão, dois terços da altura da qual caiu. Seja h(n) a altura da bola no salto de número n. A expressão matemática para h(n) é:

a) $30\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $\frac{2}{3}(30)^n$

c) $20\cdot n$

d) $\frac{2}{3}\cdot n$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

03 **(Fesp-SP)** A soma do segundo, quarto e sétimo termos de uma P.G. é 370; a soma do terceiro, quinto e oitavo termo é 740. Podemos afirmar corretamente que o primeiro termo e a razão da P.G. são:

a) 3 e 2
b) 4 e 2
c) 5 e 2
d) 6 e 1,5

04 **(Fuvest-SP)** Uma P.A. e uma P.G. têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se, ainda, que o segundo termo da P.A. excede o segundo termo da P.G. em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

Curso Preparatório CIDADE

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

05 A população atual de uma cidade é de 100.000 habitantes e tem sido observada uma taxa de crescimento anual de 3%. Se for mantida essa taxa, a expressão que permite estimar a população dessa cidade daqui a t anos é:

a) 100.000 + 1,03t
b) $100.000 \cdot 0,03^t$
c) 100.000 + 1,03t
d) $100.000 \cdot (1,03)^t$
e) 100.000 + 3t

06 **(Cesgranrio)** A soma $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{500}$ é igual a:

a) $2^{500} + 1$
b) $2^{501} - 1$
c) $2(2^{500} - 1)$
d) $2^{501} + 1$
e) $2(2^{500} + 1)$

07 A soma dos n termos de uma P.G. cujos termos extremos são 1 e 243 vale 364. O quociente entre o número de termos e a razão dessa P.G. vale:

a) 2
b) 6
c) 3
d) 1
e) 4

08 **(Fuvest-SP)** Uma P.G. tem primeiro termos igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é:

a) 12
b) 13
c) 14
d) 15
e) 16

09 **(FGV-SP)** Em um certo tipo de jogo, o prêmio pago a cada acertador é 18 vezes o valor de sua aposta. Certo apostador resolve manter o seguinte esquema de jogo: aposta R$ 1,00 na 1ª tentativa e, nas sequintes, aposta sempre o dobro do valor anterior. Na 11ª tentativa ele acerta. Assinale a alternativa que completa a frase: "O apostador...

a) nessa tentativa apostou R$ 1.000,00".
b) investiu no jogo R$ 2.048,00".
c) recebeu de prêmio R$ 18.430,00".
d) obteve um lucro de R$ 16.385,00".
e) teve um prejuízo de R$ 1.024,00".

10 **(Vunesp)** Seja $Sn = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$, com n natural diferente de zero. O menor número n tal que $S_n > 0,99$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

11 **(Mackenzie-SP)** A soma dos termos da progressão (3^{-1}; 3^{-2}; 3^{-3};...) é:

a) $\frac{1}{2}$
b) 2
c) $\frac{1}{4}$
d) 4

12 **(Fuvest-SP)** Três números distintos formam uma P.A. cuja a soma é 3. Seus quadrados formam uma P.G. quais são esses números?

13 **(Fuvest-SP)** Seja S_n a soma dos n primeiros termos da sequência infinita 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3};...

a) Calcule S_5.
b) Qual é o limite de S_n quando n tende a ∞?

14 **(AFA)** Uma P.A. cujo primeiro termo é zero e uma P.G. cujo primeiro termo é 1 possuem a mesma razão. O nono termo da P.G. é igual ao quadrado do nono termo da P.A.. Então

a) uma das razões comum é –2.
b) a razão comum é –1.
c) a razão comum é 1.
d) não existem as duas progressões.

15 **(AFA)** Quanto devemos adicionar a cada um dos números $k+3$, k, $k-2$ para que, nesta ordem, formem uma Progressão Geométrica?

a) $6-k$.
b) $6+k$.
c) $1-6k$.
d) $1+6k$.

16 **(AFA)** Se a seqüência de inteiros positivos $(2,\ x,\ y)$ é uma Progressão Geométrica e $(x+1,\ y,\ 11)$ uma Progressão Aritmética, então, o valor de $x+y$ é

a) 11.
b) 12.
c) 13.
d) 14.

17 **(FMTM)** Durante os dois primeiros minutos do lançamento de um foguete, ele consome 2% do combustível remanescente no tanque a cada 15 segundos. Se esse foguete foi lançado com q litros de combustível, após 2 minutos a quantidade de combustível em seu tanque, em litros, será igual a:

a)q $0,02^{0,125}$.
b)q $0,02^{8}$.
c)q $0,98^{8}$.
d)q $0,98^{15}$.
e)q 0,84.

18 **(UFOP)** A seqüência (x, xy, 2x), $x \neq 0$, é uma progressão geométrica. Então, necessariamente:

a)x é um número racional.
b)x é um número irracional.
c)y é um número racional.
d)y é um número irracional.
e)y/x é um número racional.

19 **(Integrado)** O valor de mercado de um apartamento é alterado a cada mês com um acréscimo de 10% em relação ao mês anterior. A seqüência de valores do apartamento, a cada mês , forma uma progressão ...

a)aritmética de razão 0,1
b)aritmética de razão 1,1
c)geométrica de razão 0,1
d)geométrica de razão 1,1
e)geométrica de razão 10

20 **(FGV)** Na equação $1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+\ldots=2$ o 1º membro é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. A soma das raízes da equação é:

a)0
b)1
c)2
d)3
e)4

14 - Matrizes

14. 1 Introdução

Neste capitolo, iremos estudar as matrizes, ou seja, tabelas numéricas cujos elementos serão dispostos em linhas w colunas. Acompanhe um exemplo:

Considere a tabela a seguir, onde estão registradas as médias bimestrais de um estudante em algumas disciplinas do curso colegial.

	Matemática	Biologia	História
1º bimestre	7,0	8,0	7,0
2º bimestre	8,0	9,0	7,0
3º bimestre	6,0	9,0	8,0
4º bimestre	7,0	8,0	9,0

Essa tabela apresenta 4 filas horizontais (linhas) e 3 filas verticais (colunas) e um total de 4 . 3 = 12 elementos. Tal tabela pode ser apresentada de forma simplificada, resultando na matriz M.

$$M=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

14. 2 Definição: Sejam m, n $\in \mathbb{N}^*$. Chama-se matriz do tipo m x n (lê-se m por n) qualquer tabela com m . n elementos dispostos em m linhas e n cilunas.

No exemplo que apresentamos no início, temos uma matriz do tipo (4 x 3), onde os 12 elementos estão dispostos em 4 linhas e 3 colunas.

As matrizes podem ser representados por uma destas três formas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \ ou \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ \text{ou} \ \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

Um elemento qualquer de uma matriz A será indicado por a_{ij}, onde:

- o índice i indica a linha;
- o índice j indica a coluna do elemento considerado.

Assim, por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

temos:

$a_{11} = 2; a_{12} = 4; a_{13} = -5$

$a_{21} = \sqrt{3}; a_{22} = 1; a_{23} = 0$

14. 3Representação genérica de uma matriz

Uma matriz A, do tipo (mxn), srá representada por:

$$A = \begin{cases} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{cases}$$

ou de forma implícita:

$$A = (aij)m\ x\ rv \begin{matrix} 1 \le i \le m\ e \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

14. 4 Matrizes Notáveis

Algumas matrizes têm nomenclatura própria. Veja algumas delas:

- **Matriz linha**

É toda matriz do tipo (1 x n)
$A = [12 - 1]_{(1 \times 3)}$

- **Matriz coluna**

É toda matriz do tipo (n x 1)

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}_{4x1}$$

- **Matriz nula**

É toda a matriz em que todos os elementos são nulos. Será denotada por $O_{m\ x\ n}$.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$$

- **Matriz quadrada**

É toda matriz do tipo (n x n)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & \sqrt{3} & 10 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Em relação a uma matriz quadrada A, de ordem n, definimos:

- diagonal principal de A é formada pelos elementos a_{ij} tais que i = j.
- diagonal secundária de A é formada pelos elementos aij de A tais que: i + j = n + 1.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

- **Matriz diagonal**

É toda matriz quadrada na qual $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}..$$

- **Matriz identidade**

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1. Será denotada por I_n.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Transposta**

Chama-se transposta de A e indica-se por A^6 ou A^t a matriz obtida, transformando-se, ordenadamente, cada linha de A em coluna.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Observação

✓ Se $A = A^t$, dizemos que A é simétrica.

- **Matriz oposta**

Chama-se oposta de A e indica-se por - A a matriz obtida, trocando-se o sinal de cada um dos elementos de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Observaçaõ

✓ Se A = - At, dizemos que A é anti-simétrica.

14. 5 Igualdade de Matrizes

Definição: Sejam A e B duas matrizes de mesmo tipo (m x n). A e B são iguais se, e somente se, cada elemento de A for igual ao elemento correspondente de B.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1;\ b = 0;\ c = 2\ e\ d = -1$$

14. 6 Operações com Matrizes

Adição de matrizes

Definição: Seja A e B matrizes quaisquer do mesmo tipo m x n. Chama-se soma de A com B e indica-se por A + B a matriz C do tipo (mxn) em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes de A e B.

A + B = C

$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

- Comutativa: A + B = B + A
- Associativa: A + (B + C) = = (A + B) + C
- Elemento neutro: A + 0 = A
- Elemento oposto: A + (-A) = 0

Subtração de matrizes

A - B = A + (-B)

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma mariz

O produto de um número real r por uma matriz A (n x m) é a matriz rA (n x m), obtida multiplicando-se cada elemento de A por r.

Exemplo:

$$2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriedades

$1 \cdot A = A$

$0 \cdot A = 0$

$r(A + B) = rA + rB$

$r(sA) = (rs)A$

14. 7Produto de matrizes

Definição: Dadas duas matrizes $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$, o produto da matriz A pela matriz B, nessa ordem, é uma matriz $C_{m \times n}$ na qual cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se cada da linha i da matriz A pelo "correspondente" elemento da coluna j da matriz B e somando-se os produtos assim obtidos.

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$$
$$C_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Observações

Dos exemplos dados, pode-se inferir que:

✓ Os produtos A · B e B · A são, em geral, distintos e, portanto, **não vale a propriedade comutativa**;

✓ A existência do produto A · B não implica a existência de B · A e vice-versa.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Supondo A, B e C matrizes compatíveis para as operações indicadas, são válidas as propriedades:

- Associativa

(AB) · C = A(BC)

- Distributiva à esquerda

A · (B + C) = AB + AC

- Distributiva à direita

(B + C) · A = BA + CA

- Elemento neutro

$A \cdot I_n = I_m \cdot A = A_{m \times n}$

Observação

Da definição de produto e das propriedades vistas, decorre que, para matrizes, em geral, temos:

- $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
- $(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$
- $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

ou seja, as identidades usuais da álgebra que utilizam a propriedade **comutativa na multiplicação não pode ser usadas em matrizes.**

Embora a multilicação de matrizes não possua a propriedade comutativa, podem existir matrizes A e B tais que A · B = B · A . Nesse caso, dizemos que A e B comutam entre si para a multiplicação.

14. 8Matriz inversa

Definição: Dada uma matriz A, quadrada, de ordem n, se existir a matriz B, de ordem n tal que:

A · B = B · A = I_n, então dizemos que a matriz A é inversível e que a matriz B é a inversa de A.

Observação

✓ A inversa de A será denotada por A^{-1}.

✓ Nem toda matriz A é inversível. Se não existtira a inversa de A, dizemos que A é uma matriz singular.

✓ Demonstra-se que, se existir, a inversa de A é única.

✓ São válida, as propriedades:

$(A^{-1})^{-1} = A$
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$*

* Supondo existentes as matrizes envolvidas e compatíveis para as operações indicadas.

Exercícios Comentados

01 **(PUC-SP)** Se

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e\ C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então a matriz X, de ordem 2 tal que: $\frac{X-A}{2} = \frac{B+X}{3} + C$, é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 24 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 25 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 30 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 22 & 3 \end{pmatrix}$

Resolução:

Isolando a matriz x na equação:
3 (x - A = 2 (B + x) + 6 C
3 x - 3 A = 2 B + 2 x + 6 C
x = 3 A = 2 B + 6 C

$$x = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & -6 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$$

02 Determine os valores de a, b e c modo que a matriz M seja simétrica.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & b+1 \\ a & 2 & c-1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Para que seja simétrica é necessário que
A = -1
b + 1 = 3 ∴ b = 2   C - 2 = 5
C = 6

03 Seja as matrizes:

$A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, $a_{ij} = i - j$
$B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, $b_{ij} = 2^{i+j}$

Calcule:

a) A · B

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-8 & 0-16 \\ 4+0 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

04 Determine os valores de x e y de modo que as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} e\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ sejam comutativa em relação ao produto.

Resolução:

A B = BA

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ xy & 0 \end{pmatrix}$$

y = 1
x = x y   x(1-y) = 0
x = 0 ou y = 1

05 Calcule a inversa da matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Resolução: A . A^{-1} = I

$$\begin{cases} 2a + 7c = 1 \\ a + 4\,c = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2b + 7d = 0 \\ b + 4d = 1 \end{matrix}$$ resolvendo os sistemas obtemos:
a = 4, c = - 1 , d = 2 e b = - 7

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Exercícios de Sala

01 **(FEI-SP)** Se as matrizes A = (a_{ij}) e B (b_{ij}) estão assim definidas:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, se\ i = j \\ a_{ij} = 0, se\ i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{ij} = 1, se\ i + j = 4 \\ b_{ij} = 0, se\ i + j \neq 4 \end{cases}$$

onde $1 \leq i, j \leq 3$, então a matriz A + B é:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

02 **(Unirio)** Seja X = (x_{ij}) a matriz quadrada de ordem 2, em que

$$x_{ij} = \begin{cases} i+j, se\ i=j \\ 1-j, se\ i>j \\ 1, \quad \text{se i} < \text{j} \end{cases}$$

A soma de seus elementos vale:

a) - 1
b) 1
c) 6
d) 7
e) 8

03 **(UFPA)** A matriz A = $(a_{ij})_{3\times3}$ é definida de tal modo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, se\ i \neq j \\ 0, se\ i = j \end{cases}$$

Então A é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

04 **(Cesgranrio)** Multiplicando

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, obtemos $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

O produto dos elementos a e b da primeira matriz é:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 6

05 **(FEI-SP)** Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. A matriz X de ordem 2 tal que A + BX = A^{-1}, onde A^{-1} é a inversa de A, é:

a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Curso Preparatório CIDADE

10 **(UFRGS)** A matriz A = (a_{ij}), de segunda ordem, é definida por a_{ij} = 2i - j. então, A - A^t é:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

11 **(PUC-SP)** Dadas as matriz A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ e

B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então AB - BA é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

12 **(UFPR)** Dada a equação matricial

$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ y & z \end{bmatrix}$, o valor do produto xyz é igual a:

a) 80
b) 150
c) 120
d) 60
e) 32

13 **(FAAP-SP)** Determine x e y de modo que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ comutem.

14 **(MACK-SP)** Dada a matriz A = $(a_{ij})_{2x2}$ tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = sen\frac{\pi}{2}i, se\ i = j \\ a_{ij} = \cos \pi j, se\ i \neq j \end{cases}$$

Então, A^2 é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

15 Determine a e y de modo que o produto das matrizes

$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} e\ B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{bmatrix}$ seja uma matriz identidade

16 **(FAAP-SP)** Sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$, calcule a e b, sabendo que $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$.

17 **(PUC-RJ)** Sejam A e B matrizes 2x2. Se o produto A · B é nulo, então:

a) A = 0
b) B = 0
c) A = B = 0
d) A = 0 ou B = 0
e) não se pode garantir que A = 0 ou B = 0

18 Sendo P = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, obtenha as matrizes P^4 e P^{17}.

19 Em cada uma das afirmações a seguir, assinale verdadeira (V) ou falsa (F).

a) ( ) Se A e B são matrizes do mesmo tipo, então existe AB e existe BA.
b) ( ) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então existe AB e existe BA.
c) ( ) Se A e B são matrizes tais que existe AB e existe BA, então AB = BA.
d) ( ) Se A e B são matrizes, podemos ter AB = 0 com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
e) Se A, B e C são matrizes, então pose-se ter AB = AC sem que B e C sejam iguais.

20 **(VUNESP-SP)** Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido em cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pelas lojas L_j, i, j = 1, 2, 3.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

a) a quantidade deprodutos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.
b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.
c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.
d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pela loja L_i, i = 1 . 2. 3 é 52.
e) A soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

15 - Determinantes

1. Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem

Seja a matriz quadrada de 2ª ordem $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Denomina-se determinante associado à matriz A o número obtido pela diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária.

Representa-se um determinante de 2ª ordem por:

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

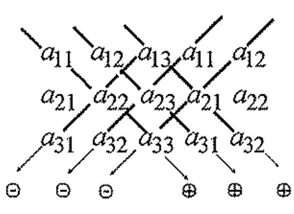
diagonal secundária

diagonal principal

15. 2 Determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem (regra de Sarrus)

Sejam a amatriz a = $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Anote-se a matriz dada e repete-se, à direita, a 1ª e 2ª coliunas, conforme o esquema abaixo:



Multiplicando os elementos segundo cada diagonal e associando aos produtos o sinal indicado, temos:

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Observação:

Esta regra prática muito simples só se aplica a determinantes de 3ª ordem.

15. 3 Menor complementar e co-fator

Menor complementar

Chama-semenor complementar D_{ij} relativo a uma elemento a_{ij} da matriz A o determinante associado à matriz quadrada de 2ª ordem obtida em A, e que se obtém aliminando, em A, a linha e a coluna em que se encontra o elemento considerado.

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \text{elininamos a 1ª linha e a 1ª coluna} \\ D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \text{elininamos a 2ª linha e a 3ª coluna} \end{cases}$$

Co-fator

Chama-se co-fator de a_{ij} o número real que se obtém multiplicando $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar de a_{ij}.

$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij} \text{ em que } A_{ij} \text{ é co-fator}}$

Da matriz anterior temos:

1ª linha 1ª coluna

$$A_{11} = (-1)^{1+1} . D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} . D_{12} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

15. 4 teorema de Laplace

Seja a matriz quadrada de ordem n indicanda a seguir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é dado por:

$$\boxed{\det = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}$$

Em que $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots A_{1n}$ são os co-fatores.

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, n ≥ 2, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qual quer pelos respectivos co-fatores.

15.5 Combinações lineares

Quandi tomamos duas ou mais filas (linhas ou colunass) paralelas de um determinantes e, por exemplo, somamos essas filas multiplicadas, respectivamente, por dois ou mais números reais, estamos efetuando uma **combinação linear** dessas filas.

Exemplos:

1°) $\begin{vmatrix} a & 2a+4x & x \\ b & 2b+4y & y \\ c & 2c+4z & z \end{vmatrix}$ Observe que $C_2 = 2C_1 + 4C_3$, isto é: C_2 é combinação linear de C_1 e C_3.

2°) $\begin{vmatrix} a & a-x & x \\ b & b-y & y \\ c & c-z & z \end{vmatrix}$ Observe que $C_2 = C_1 - C_3$, isto é: C_2 é combinação linear de C_1 e C_3.

3°) $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+5 \\ x+3 & x+6 & x+9 \\ x+2 & x+4 & x+7 \end{vmatrix}$

Observe que

$L_3 = \dfrac{L_1 + L_2}{2}$.

15.6 Propriedades dos determinantes

1°) Casos em que um determinantes é igual a zero.

- Quando todos os elementos de uma de suas filas são nulos.
- Quando possui duas filas paralelas proporcionais ou iguais.
- Quando uma de suas filas é uma combinação linear de outras filas paralelas.

2°) Transformações que não alteram um determinante.

Um determinante não se altera quando se trocam ordenadamente as linhas pelas co-lunas.

Um determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma fila os correspondentes elementos de uma fila paralela multiplicados por uma constante.

3°) Transformações que alteram um determinantes.

Um determinante muda de sinal quando se trocam as posições de duas filas paralelas.

Quando se multiplica (ou se divide) uma fila de um determinante por um número, o novo determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.

15. 7 Propriedades complementares

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{3n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária   diagonal principal

- Se numa matriz quadrada forem nulos todos os elementos situados em um mesmo lado da diagonal principal, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

$$\boxed{\det A = a_{11} \cdot a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}}$$

- Se numa matriz quadrada forem nulo todos os elementos situados em um mesmo lado da diagonal secundária, o determinante da matriz será:

$$\boxed{\det A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \ldots a_{n1}}$$

- Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n, então:

$$\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

15. 8 Diagonalização

O cálculo de um determinante de ordem maior que três, pelo teorema de Laplace, é muito trabalho.

Por isso, podemos transformá-lo em outro de mesmo valor utilizando as propriedades:

- multiplicar ou dividir uma linha ou uma coluna qualquer por um número real diferente de zero,
- trocar de posiçã duas linhas ou colunas paralelas,
- adicionar a uma linha ou coluna o produto de uma linha ou coluna paralela por uma constante.

Para diagonalizar um determinante, devemos proceder da seguinte forma:

- obter 1 no primeiro elemento da primeira linha;
- obter 0 nos elementos das linhas abaixo da primeira;
- obter 1 no segundo elemento da segunda linha;
- obter 0 nos elementos das linhas abaixo; e assim, sucessivamente, até se obter 0 em todos os elementos abaixo da diagonal principal.

15. 9 Determinante de vandermonde

Matriz de Vandermonde é uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ formada por potências sucessivas de 0 a n - 1.

$$\begin{array}{r} \\ \text{base} \rightarrow \\ V = \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & \cdots & a_n^0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

O determinante de Vendarmonde é igual ao produto de todas as diferenças que são obtidas subtraindo-se de cada elemento característico os elememntos precedentes, isto é:

$$\boxed{\det V = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})}$$

15. 10 Os determinantes no cálculo da matriz inversa

Matriz dos co-fatores

Denomina-se matriz dos co-fatores M' de uma matriz quadrada M, de ordem n, a matriz que se obtém de m, substituindo-se cada elemento aij de M pelo seu cofator A_{ij} isto é:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta

Denomina -se matriz ajunta $\overline{M}$ de uma matriz quadrada M, de ordem n, a transposta da matriz dos cofatores M'

$$\overline{M} = (M')^t$$

Se M é uma matriz quadrada de ordem n e det M $\neq$ 0, então a inversa de M é dada por:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \overline{M}$$

Observações:

Se det M $\neq$ 0, então existe M^{-1} e a matriz M é dita inversível.

Se det M = 0, então M^{-1} não existe, isto é, a matriz M não é inversível.

Neste caso a matriz M é dita matriz singular.

Exercícios Comentados

01 **(Mackenzie)** Na função real definida por $f(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ x & 3 & 9 \\ x & 4 & 16 \end{vmatrix}$, f(0,001) vale:

a) 0,02
b) 1000^{-1}
c) 10^{-2}
d) 500^{-1}
e) 0,5

Resolução:

$$\begin{bmatrix} x & 2 & 4 \\ x & 3 & 9 \\ x & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} x & 2 \\ x & 3 \\ x & 4 \end{matrix} =$$

= 48 x + 18 x + 16 x - 12x - 36 x 32 x
= 82 x - 80 x = 2 x

$$f(x) = 2x$$

$$f(0,001) = 0,0002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500} = 500^{-1}$$

02 **(Mackenzie)** Se **A** é o conjunto de soluções reais da inequação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x+1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} + 1 \le 0$, então IR - A é o conjunto:

a) $\varnothing$
b)]– 2, - 1]
c)]– 1, 0]
d)]– 3, 0]
e)]– 3, - 2]

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x+1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)^3 \qquad (x+2)^3 + 1 \leq 0$$

$$(x+2)^3 \leq -1$$

$$x+2 \leq -1 \quad x \leq -3$$

03 **(FGV)** A é uma matriz quadrada de ordem 2 e det(A) = 7. Nessas condições, det(3A) e det(A^{-1}) valem respectivamente:

a)7 e – 7.

b)21 e $\frac{1}{7}$

c)21 e – 7.

d)63 e – 7.

e)63 e

Resolução:

det (3A) = 3^2. det A

= 9 . 7 = 63

det (A^{-1}) = $\frac{1}{\det A} = \frac{1}{7}$

04 **(EsPCEx)** O conjunto solução da inequação

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -30 & -29 \\ 0 & x & -6 & 5 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$$

a) [2, 4].

b) [1, 3].

c) [1, 2].

d) [2, 3].

e) [1, 4].

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -30 & -29 \\ 0 & x & -6 & 5 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} x & -6 & 5 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

5S = 5 ⟩ 2
P = 6 ⟩ 3

05 Se $\begin{bmatrix} P & 2 & 2 \\ P & 4 & 4 \\ P & 4 & 1 \end{bmatrix} = -18$ então $\begin{bmatrix} P & -1 & 2 \\ P & -2 & 4 \\ P & -2 & 1 \end{bmatrix}$ vale;

a -9

b) -6

c) 3

d) 6

e) 9

Resolução:

$$\underset{\div 2}{\begin{bmatrix} P & 2 & 2 \\ P & 2 & 4 \\ P & 2 & 1 \end{bmatrix}} = 2, \underset{x(-1)}{\begin{bmatrix} P & 1 & 2 \\ P & 2 & 4 \\ P & 2 & 1 \end{bmatrix}} = -2\begin{bmatrix} P & -1 & 2 \\ P & -2 & 4 \\ P & -2 & 1 \end{bmatrix} = -18$$

$$\begin{bmatrix} P & -1 & 2 \\ P & -2 & 4 \\ P & -2 & 1 \end{bmatrix} = 9$$

Exercícios de Sala

01 **(Uniform)** Sejam as matrizes

A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz A . B é:

a) 64

b) 8

c) 0

d) -8

e) -64

02 Sabendo-se que o determinante associado à matriz $\begin{pmatrix} 1 & -11 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ é nulo, concluímos que essa matriz tem:

a) duas linhas proporcionais;

b) duas colunas proporcionais;

c) elementos negativos;

d) uma fila combinação linear das outras duas filas paralelas;

e) duas filas paralelas iguais.

03 **(UESP)** Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ é igual a 10, então o determinante da matriz

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k+4 & k+3 & k-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

04 Para que $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32$, devemos ter:

a) $x > 2$
b) $0 < x < 5$
c) $x < -2$
d) $x > 5$
e) $1 < x < 2$

05 **(MACK)** O valor de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ é:

a) -4
b) -2
c) 0
d) 1
e) 1131

06 **(UFU)** Se A e B são matrizes inversíveis de mesma ordem, então $\frac{\det(A^{-1}BA)}{\det B}$ é igual a

a) 1
b) –1
c) det A + det B
d) det (AB)

07 **(EsPCEx)** Para todo x e y reais, com $x \neq \pm y$, o quociente entre os determinantes

$$\frac{\begin{vmatrix} x+y & x-y & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & x & x^2+y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}}$$ é equivalente a:

a) $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$

b) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

c) $\frac{x^2-xy-y^2}{x-y}$

d) $\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}$

e) $\frac{x^2-xy-y^2}{x+y}$

08 **(EsPCEx)** Sendo $\{a,b\} \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ e o determinante

$\begin{vmatrix} a^2 & -4b & b^2 \\ a & 2 & a \\ b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = 128a - 128b$, pode-se dizer que:

a) $a+b=4$
b) $a+b=8$
c) $a+b=2\sqrt{2}$
d) $a+b=4\sqrt{2}$
e) $a+b=2$

09 **(AFA)** É dada a matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, onde *a* e *b* são números reais. Se $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix}$, então o determinante de A vale

a) $2a^2$.
b) $-2a^2$.
c) zero.
d) $2a+2b$.

10 **(Mackenzie)** Se $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, o triplo do determinante da matriz A é igual a

a) 3
b) 6
c) 9
d) 12
e) 15

Exercícios de Casa

01 **(PUC)** A matriz A = (a_{ij}) é quadrada de ordem 2

com $\begin{cases} a_{ij} = 2i - j \text{ para } i = j \\ a_{ij} = 3i - 2j \text{ para } i \neq j \end{cases}$

O determinante de A é igual a:
a)1
b)2
c)4
d)5
e)6

02 **(Med. Santo André)** Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se o deteminante de AB é igual a zero, então, necessariamente, devemos ter:

a)ab + cd = 0
b)a = 0 e b = 0
c)ad – bc = 0
d)a + c = 0 e b + d = 0
e)a = b = c = d = 0

03 **(Osec)** O determinante $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

a)só é estritamente positivo se x <1
b)só é estritamente positivo se x > 0
c)é estritamente positivo para $\{x \mid x \in R, 0 < x < 1\}$
d)é estritamente positivo para $\{x \mid x \in R, x < 0\} \cap \{x \mid x \in R, x > 1\}$
e)é estritamente positivo para $\{x \mid x \in R, x < 0\} \cup \{x \mid x \in R, x > 1\}$

04 **(Mackenzie)** Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -4 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que $A \cdot B = I$, então o determinante da matriz A^2 é

a)1
b)4
c)9
d)16
e)25

05 **(UFU)** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$$

Se o determinante da matriz A é K ≠ 0, então det (B) + det (C) + det (D) é igual a:

a)10 K
b)8 K
c)6 K
d)4 K
e)2 K

06 **(UFU)** Dada as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$. Se det A = 5, considere as matrizes C = 3A e D = B^{-1}. Então, det C + det $(CD)^t$ é:

a)90
b)18
c)210
d)162
e)54

07 **(UFES)** Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, com $k \notin \{-1, 0, 1\}$, então o determinante da matriz BAB^{-1} é

a)-1
b)0
c)1
d)k
e)1/k

08 **(Unifesp)** Dada a matriz, 3x3, $A=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, a distância entre as retas r e s de equações, respectivamente, $\det(A)=0$ e $\det(A)=1$ vale:

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\sqrt{2}$
c)2
d)3
e) $3\sqrt{2}$

09 **(MACK-SP)** A soma das raízes de equação

$\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 2 & -1 & x+1 \end{bmatrix} = 2$ é:

a) -2
b) 0
c) -1
d0 1
e) 2

10 **(PUC-SP)** Seja a matriz A = $(a_{ij})_{2x2}$, tal que `

$$a_{ij}\begin{cases} \cos\frac{7\pi}{i} \text{sei} = j \\ \text{sen}\frac{7\pi}{j} \text{se } i \neq j \end{cases}$$

O determinante da matriz A é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) -1
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11 **(UFBA)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 13 & x \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & x \end{vmatrix}$ para todo x pertencente a:

a) {1, 6}
b) {1, 7}
c) {1, -7}
d) {-1,7}
e) {-1, -7}

12 **(UFRGS)** Na equação seguinte

$\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \text{sen } x \\ 0 & \text{sen } x & \cos x \\ \cos^2 x + \text{sen}^2 x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ um possível valor x é:

a) 0
b) $\frac{\pi}{6}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{2}$

13 **(MACK-SP)** Dada a matriz A = $(a_{ij})_{2\times 2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} \cos x, \text{se } i = j \\ 1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, o determinante da matriz A é sempre igual a:

a) 2 sen^2x
b) cos x
c) sen x
d) $-\text{cox}^2x$
e) $-\text{sen}^2x$

14 **(MACK-SP)** A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ k & 3 \end{bmatrix}$ é igual à transposta.

Então, o det (k^2 . A) é igual a:

a) 64
b) 32
c) 16
d) 8
e) 4

15 **(UFRGS)** O determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ b+1 & b+2 & b+3 \end{pmatrix}$$ é nulo

a) Para qualquer valor de a e b.
b) apenas se a = 0
c) apenas se b = 0
d) somente se a = b
e) somente quando 1 + 2a + (b + 3) = 0

16 **(FATEC-SP)** Os valores reais de x que satisfazem a equação $\begin{vmatrix} 2^x & 4^x & 8^x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ são números:

a) pares.
b) irracionais.
c) inteiros consecutivos.
d) inteiros nagativos.
e) racionais não inteiros.

17 **(MACK-SP)** Para que a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ seja inversível, devemos ter:

a) x = 1
b) x ≠ 1
c) x = 2
d) x ≠ 2
e) x ≠ 0

18 **(Fuvest-SP)** O determinante da inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{pmatrix}$$, é:

a) $-\frac{52}{5}$

b) $-\frac{48}{5}$

c) $-\frac{5}{48}$

d) $-\frac{5}{52}$

e) $-\frac{5}{48}$

19 **(MACK-SP)** Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & k \\ -k & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, se $M^{-1} = M^t$, então k pode ser:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

20 **(Fuvest-SP)** Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que AB = BA, pode-se afirmar que:

a) A é inversível
b) det A = 0
c) c = 0
d) c = 0
e) a = d = 1

16 - SISTEMA LINEARES

16. 1 Sistema linear

Um conjunto ordenado de m(m ≥ 1) equações lineares a n incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ formam o que denominamos sistema linear.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Se o conjunto ordenado de números $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ satisfize todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

16. 2 Classificação

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções, da seguinte forma:

$$\text{SISTEMA LINEAR} \begin{cases} \textit{POSSÍVELA ou COMPATÍVEL} \\ \textit{(quando admite solução)} \end{cases} \begin{cases} \textit{DETERMINADO} \\ \textit{(admite uma única solução)} \\ \textit{INDETERMINADO} \\ \textit{(admite infinitas solução)} \end{cases} \\ \qquad \begin{cases} \textit{IMPOSSÍVELou INCOMPATÍVEL} \\ \textit{(quando não admite solução)} \end{cases}$$

16. 3 Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas de equações lineares, S_1 e S_2, são ditos equivalentes se e somente se admitirem a mesma solução, isto é, toda solução de S_1 é solução de S_2 e vice-versa.

16. 4 Expressão matricial de um sistema linear

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos associar ao sistema linear dado as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

16.5 Regra de Cramer

Seja o sistema linear de n equações a n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema será possível e determinado se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes das incógnistas for diferente de zero, isto é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$

Neste caso, o sistema S tem uma única solução dada por:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D}}$$

Em que:

$D_1, D_2, ..., D_n$ são os determinantes que se obtém da matriz dos coeficientes das incógnitas, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita procurada pelos termos independentes $b_1, b_2 ..., b_n$.

16.6 Discussão de um sistema linear de n equações a n incógnitas

Discutir um sistema quer dizer verificar se o sistema é **possível, impossível** ou **indeterminado**.

Utilizando a regra de Cramer, temos:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D}}$$

Possível e determinado (admite uma única solução)

$\Downarrow$
$D \neq 0$
possível e indeterminada (admite infinitas soluções)

$\Downarrow$
$D = 0 \ e \ D_1 = D_2 = ... = D_n = 0$
impossível
(não admite solução)
$\Downarrow$
D = 0 e pelo menos um
D_i diferente de zero ($i \in \{1, 2, ..., n\}$)

16. 7 Discussão de um sistema de equações lineares homogêneo

Um sistema de equações lineares é dito homogêneo quando os termos independentes são todos nulos.`

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Todo sistema linear homogêneo é sempre possível, pois admite a solução (0, 0, ..., 0), chamada solução trivial. As soluções não triviais são chamadas **soluções próprias**.

Portanto, para a discussão de um sistema linear homogêneo, é suficiente o estudo do determinante dos coeficientes das incógnitas:

Determinado $\Rightarrow D \neq 0$
indeterminado $\Rightarrow D = 0$

16.8 Sistema escalonado

Denomina-se sistema escalonado o sistema que tem uma **matriz completa** da forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & 0 & 0 & & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Observe que os coeficientes aij, com i > j, são nulos.

16. 9 Resolução de sistemas lineares (método do escalonamento)

Para determinar o conjunto verdade de um sistema de equações lineares, podemos utilizar as seguintes transformaões elementares:

- troca de posição duas equações quaisquer do sistema.
- multiplicar ou dividir uma equaçaõ do sistema por um número diferente de zero.
- efetuar uma combinação linear entre as equações para obter outra equivalente.

Com a matriz completa, podemos escalonar um sistema linear por meio das transformações elementares.

Exercícios Comentados

01 **(Fuvest)** Carlos e sua irmã Andréia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andréia pesam 123 kg e
- Andréia e Bidu pesam 66 kg.

Podemos afirmar que:

a) Cada um deles pesa menos que 60 kg.
b) Dois deles pesam mais de 60 kg.
c) Andréia é a mais pesada dos três.
d) O peso de Andréia é a média aritmética dos pesos de Carlos e Bidu.
e) Carlos é mais pesado que Andréia e Bidu juntos.

Curso Preparatório CIDADE

Resolução:

Carlos: x
Andreia: y
cos: z

$$\begin{cases} x+y=87\ (I) \\ x+y=123 \\ y+z=66 \end{cases}$$

x + y = 123 ⇒ x = 123 - y
y + z = 66 ⇒ z = 66 - y substituido em (I)

123 - y + 66 - y = 87
- 2y = 87 - 189
-y = - 102
y = 51   x = 123 - 51 = 72
z = 66 - 51 = 15

02 **(EsPCEx)** Num curso de Matemática, cada bimestre teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Alves, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 6 na terceira, obteve, no final, um total de 57 pontos. Tadeu acertou 3, 6 e 6 questões, respectivamente na 1ª, 2ª e 3ª provas, totalizando 54 pontos. Por sua vez, João acertou 2, 7 e 3 questões, respectivamente na 1ª, 2ª e 3ª provas, atingindo a soma de 40 pontos no final. Sabendo que Xavier fez 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira, o total de pontos de Xavier foi

a) 49
b) 50
c) 51
d) 52
e) 53

Resolução:

$$\begin{cases} 6x+5y+6z=57 \\ 3x+6y+6z=54\ \div 3 \\ 2x+7y+3z=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+5y+6z=57(I) \\ x+2y+2z=18\ (II) \\ 2x+7y+3z=40\ (III) \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{matrix} \begin{matrix} =36+20+42-24-84-15 \\ =-25 \end{matrix}$$

$$Dx=\begin{bmatrix} 57 & 5 & 6 \\ 18 & 2 & 2 \\ 40 & 7 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 57 & 5 \\ 18 & 2 \\ 40 & 7 \end{matrix} \begin{matrix} =342+400+756-480- \\ 798-270=-50 \end{matrix}$$

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{-50}{-25}=2$$

Substituido em (II) e (III)

2 + 2 y + 2 z = 18 ⇒ 2y+2z = 16 ⇒ y+z = 8 (-3)
4 + 7 y + 3 z = 40 ⇒ 7y + 3z = 36 ∅

$$\begin{array}{l} -3y-\cancel{3z}=-24 \\ 7y+\cancel{3z}=36 \\ \hline 4y=12 \Rightarrow y=3 \text{ e } z=5 \end{array}$$

Logo, xavier fez: 2 x 5 + 8 x 3 + 3 + 5
10 + 25 + 15 = 49

03 **(Ufscar)** Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja

a) R$ 30,50.
b) R$ 31,40.
c) R$ 31,70.
d) R$ 32,30.
e) R$ 33,20.

Resolução:

$$\begin{cases} 3x+7y+z=42,1\ (-1)\ (I) \\ 4x+10y+z=47,3\ (-1)+(II) \end{cases}$$

x + 3 y = 5,2
x = 5,2 - 3 y substituido em (I)

3(5,2 - 3y) + 7y + z = 42, 1
15,6 - 9y + 7 y + z = 42, 1
z = 2y + 26,5

Logo : x + y +z = 5,2 - 3y + y + 2 y + 26,5 = 31,7

04 **(Fei)** Se as retas de equações:

$$\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ ax-y-3z=0 \\ 2x-2y-z=0 \end{cases}$$

São concorrentes em um mesmo ponto, então:
a) a ≠ 4 ou a ≠ 2/3
b) a ≠ -3/2 ou a ≠ 2/3
c) a ≠ 2 ou a ≠ -3/2
d) a ≠ 1 ou a ≠ 4
e) a ≠ 0 ou a ≠ 5

Curso Preparatório CIDADE

Resolução:

Logo, o sistema deve ser determinado, ou seja, D $\neq$ 0:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2a \\ a & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -a \end{vmatrix} = a - 12 + 4a^2 - 4a - 6 + 2a^2 = 6a^2 - 3a - 18$$

$6a^2 - 3a - 18 \neq 0$

$2a2 - a - 6 \neq 0 \therefore a \neq 2$ ou $a \neq -\frac{3}{2}$

05 **(EsPCEx)** Dado o sistema linear $\begin{cases} a^2x + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$, onde **a** é uma constante real, pode-se afirmar que:

a) o sistema é possível e determinado para a = -1
b) um único valor de **a** que torna o sistema possível e indeterminado
c) existe o sistema é possível e determinado somente se $a \neq -1$
d) o sistema é possível e determinado $\forall a \in \Re$
e) o sistema é impossível $\forall a \in \Re$

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 1$$

SPI $\Rightarrow$ $D \neq 0$
$a^2 - 1 \neq 0 \therefore a \neq 1$ ou $a \neq -1$
SPF $\Rightarrow D = 0$ $Dx = 0$ e $Dy = 0$
$a = 1$
SI $\Rightarrow$ $Dx \neq 0$ ou $Dy \neq 0$ e $D = 0$
$a \neq 1$ e $a = -1$

Exercícios de Sala

01 **(PUC-MG)** Todos os alunos de uma turma vão ao laboratório de informática. Se em cada computador ficarem 2 alunos, 8 ficarão sem computador. Porém, se em cada computador ficarem 3 alunos, haverá 4 computadores sobrando. O número de alunos dessa turma é:

a) 42
b) 48
c) 54
d) 60

02 **(UFPB)** Fernando foi a um caixa eletrônico e fez um saque em cédulas de três tipos diferentes: R$ 20,00, R$ 10,00 e R$ 5,00. Sabe-se que ele retirou 14 cédulas e que a quantia retirada foi a mesma para cada tipo de cédula. A quantia sacada por Fernando foi:

a) R$ 120,00
b) R$ 150,00
c) R$ 180,00
d) R$ 210,00
e) R$ 240,00

03 **(ITA)** Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 quatro números reais (com a_1 "' 0), formando nessa ordem uma progressão geométrica. Então, o sistema em x e y

$$\begin{cases} a_1x + a_3y = 1 \\ a_1a_2x + a_1a_4y = a_1 \end{cases}$$

é um sistema
a) impossível.
b) possível determinado.
c) possível indeterminado.
d) possível determinado apenas para $a_1 > 1$.
e) possível determinado apenas para $a_1 < -1$.

04 **(Fei)** Se o sistema linear a seguir, é impossível,

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

então:
a) a = 0
b) a = -14/3
c) a = 3/4
d) a = 1
e) a = 28

05 **(Fuvest)** Existem dois valores de **m** para os quais tem solução única o sistema:

$$\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

A soma desses dois valores de m é:
a) -2
b) $-2\sqrt{2}$
c) 0
d) 2
e) $2\sqrt{2}$

06 **(Unesp)** Seja (1, 1, 1) uma solução particular do sistema linear

$$\begin{cases} x+ay=2 \\ 2x+by-az=0 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y e z. Nessas condições, o conjunto solução do sistema é;

a) $\{(x, -x+2, 3x-2) \mid x \in IR\}$.
b) $\{(1, 1, 1)\}$.
c) $\{(x, x-2, 3x-2) \mid x \in IR\}$.
d) $\{(-y+2, y, 5y-4) \mid y \in IR\}$.
e) $\{(z, z, z) \mid z \in IR\}$.

07 **(Faap)** Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} k & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A única alternativa correta é;

a) se k = 1 a única solução é x = y = z = 0
b) o sistema é impossível
c) o sistema tem infinitas soluções para qualquer k
d) somente se k = 0 o sistema é impossível
e) não é possível investigar o sistema com os dados disponíveis

08 **(Pucsp)** Considere o seguinte sistema de equações de incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 6x+2y=4 \\ 3x+5y=6 \\ kx+2y=5 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma única solução para certo número real k que é um

a) quadrado perfeito.
b) número primo.
c) número racional não inteiro.
d) número negativo.
e) múltiplo de 5.

09 **(EsPCEx)** Os valores de **K** para que o sistema linear $\begin{cases} Kx+2y+2z=5 \\ 2x+Ky+z=3 \\ 2x+3y+z=8 \end{cases}$ seja possível e tenha uma única solução são
a) **K** = $\Re$ - {-1, 2 }
b) **K** = $\Re$- {-2, 2 }
c) **K** = $\Re$ - {1, 2 }
d) **K** = $\Re$ - {3, 4 }
e) **K** = $\Re$ - {1, -2 }

10 **(EsPCEx)** Sabendo que (x, y, z) é solução do sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$, o valor de $x^2+y^2+z^2$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 9
e) 10

Exercícios de Casa

01 **(Pucmg)** Para atender uma encomenda de fantasias, certa costureira comprou 3 m do tecido A e 2 m do tecido B, pagando R$ 25,50; depois, pagou R$ 46,50 na compra de 5 m do tecido A e 4 m do tecido B. Finalmente, para retocar a costura, comprou mais 1 m de cada um desses tecidos. Sabendo-se que, pela mão-de-obra,

essa costureira cobrou a mesma quantia gasta na compra dos tecidos, pode-se afirmar que o valor a ser pago pela encomenda, em reais, foi:

a) 144,00
b) 151,00
c) 165,00
d) 172,00

02 **(Ufes)** Por ocasião do Natal, uma empresa gratificará seus funcionários com um certo número de cédulas de R$ 50,00. Se cada funcionário receber 8 cédulas, sobrarão 45 delas; se cada um receber 11 cédulas, faltarão 27.

O montante a ser distribuído é

a) R$ 9.600,00
b) R$ 10.550,00
c) R$ 11.850,00
d) R$ 13.250,00
e) R$ 15.000,00

03 **(Ufpe)** Perguntado sobre a idade de seu filho Júnior, José respondeu o seguinte: "Minha idade quando somada à idade de Júnior é igual a 47 anos; e quando somada à idade de Maria é igual a 78 anos. As idades de Maria e Júnior somam 39 anos." Qual a idade de Júnior?

a) 2 anos
b) 3 anos
c) 4 anos
d) 5 anos
e) 10 anos

04 **(Uel)** Considere o seguinte sistema de equações nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 3kx + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma e uma só solução se o número real k for diferente de

a) 1/5
b) 1/4
c) 2/5
d) 1/3
e) 3/2

05 **(Fgv)** Se a terna ordenada (a, b, c), de números reais, é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

então a soma **a + b + c** é igual a

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

06 **(Uel)** Numa loja, os artigos A e B, juntos, custam R$ 70,00, dois artigos A mais um C custam R$ 105,00 e a diferença de preços entre os artigos B e C, nessa ordem, é R$ 5,00. Qual é o preço do artigo C?

a) R$ 20,00
b) R$ 25,00
c) R$ 30,00
d) R$ 35,00
e) R$ 40,00

07 **(Unaerp)** Dado o sistema:

$$\begin{cases} mx + 3y - mz = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

para m = 3, o sistema é:

a) determinado
b) possível
c) possível e determinado
d) impossível
e) indeterminado

08 **(UFOP)** Dado o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=3 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$, então $x^2+y^2+z^2$ vale:

a)2
b)3
c)4
d)5
e)6

09 **(EsPCEx)** Na resolução do sistema

$$\begin{bmatrix} matriz \\ dos \\ coeficientes \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ sabe-se que a matriz

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz dos coeficientes. Nessas condições, os valores de x, y e z são, respectivamente

a) 1, 2, 3.
b) 1, 3, 2.
c) 2, 1, 3.
d) 3, 2, 1.
e) 2, 3, 1.

10 **(EsPCEx)** O valor de m, para que o sistema $\begin{cases} -x-2y+3z=0 \\ 2x+y-4z=0 \\ 4x+my-10z=0 \end{cases}$ admita soluções além da solução trivial, é:

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

11 **(EsPCEx)** A soma dos valores de **x**, **y** e **z** que tornam o sistema $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x-2y+z=-2 \\ x+z=0 \end{cases}$

verdadeiro é:

a) 1
b) 3
c) 2
d) 5
e) 4

12 **(EsPCEx)** Dado o sistema linear $\begin{cases} a^2x+y=1 \\ x+y=a \end{cases}$, onde **a** é uma constante real, pode-se afirmar que:

a) o sistema é possível e determinado para a = -1
b) um único valor de **a** que torna o sistema possível e indeterminado
c) existe o sistema é possível e determinado somente se $a \neq -1$
d) o sistema é possível e determinado $\forall a \in \Re$
e) o sistema é impossível $\forall a \in \Re$

13 **(EsPCEx)** O sistema $\begin{cases} 3x+ky+z=0 \\ 5x+4y+5z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases}$

admite mais de uma solução se, e somente se:

a) $k=\frac{7}{6}$
b) $k=\frac{7}{5}$ ou $k=2$
c) k = 7 ou k = -2
d) $k=\frac{2}{3}$ ou $k=\frac{1}{2}$
e) k = 0

14 **(EsPCEx)** A soma das soluções do sistema $\begin{cases} x-y+z=8 \\ 2x+y+z=5 \\ x+2y-z=-8 \end{cases}$ é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

15 **(EsPCEx)** A soma dos valores reais de *a* que tornam o sistema $\begin{cases} 3^{2a+1}x+y=1 \\ x+y=0 \\ (10\cdot 3^a-3)x+y=1 \end{cases}$ possível e determinado é:

a) 0.
b) 2.
c) 3.
d) 5.
e) 6.

16 **(Fuvest)** Um caminhão transporta maçãs, pêras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, pêras e laranjas, tem, respectivamente 50 maçãs, 60 pêras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, pêras e laranjas estão sendo transportadas.

17 **(UnB)** Para que valor inteiro de λ o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda z = 0 \\ (\lambda+1)x + y - z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Admite solução própria (não nula).

18 **(Cesgranrio)** Calcule **a** para que o sistema a seguir seja determinado.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + ay + az = a^2 \end{cases}$$

a) $a \neq -1$
b) $a = -2$
c) $a \neq 1 \ e \ a \pm -1$
d) $a = 1 \ \ ou \ \ a = -2$
e) $a = 1$

19 Se S é o conjunto dos valores de a para os quais o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + \log_3 a^2 y + z = 0 \\ 2x + 2y + \left(\log 3 \dfrac{27}{a}\right) z = 0 \end{cases}$$

é indeterminado, então

a) $S \subset [-3,3]$
b) S é vazio
c) $S \subset [2,4]$
d) $S \subset [1,3]$
e) $S \subset [0,1]$

20 **(Unesp-SP)** Seja (1, 1, 1) uma solução particular do sistema linear

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ 2x + by - az = 0 \end{cases}$$, nas incógnitas x, y e z. Nessas condições, o conjunto solução do sistema é:

a) $\{(x, -x+2, 3x-2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
b) $\{(1, 1, 1)\}$
c) $\{(x, x-2, 3x-2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
d) $\{(-y+2, y, 5y-4) \mid y \in \mathbb{R}\}$
e) $\{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

GABARITO

10. PORCENTAGEM

Exercícios de sala

01. R$ 100.000,00
02. b
03. b
04. a) R$ 2.160,0
    b) 28%
05. a) 4,17x
    b) 14%
06. c
07. b
08. d
09. 30%
10. a

Exercícios de casa

01. d
02. e
03. a
04. d
05. e
06. b
07. b
08. c
09. c
10. e
11. 6,25%
12. 02
13. d
14. 40%
15. a) 38%
    b) 120
16. b
17. d
18. c
19. a
20. d

11. EQUAÇÕES E PROBLEMAS

Exercícios de sala

01 . e
02. a
03. b
04. c
05. a
06. d
07. b
08. m>4
09. 12
10. b

Exercícios de casa

01.a) $S = \left\{-3; -1; \frac{3}{2}\right\}$

b) $S = \{0; 3; 4\}$

c) S = {0; 3; 4}

d) S = {1; - 3, 3}

02. S = {-2; 1}
03. S = {0}
04. c
05. e
06. $\frac{65}{3}$
07. e
08. e
09. c
10. a
11. {5}
12. c
13. {-1, 1, $\sqrt{6}$, - $\sqrt{6}$}
14. {-3, -2, 1, 2}
15. e
16. a
17. c
18. 43
19. 1h 12 min
20. c

12. PROGRESSÃO ARITIMETICA

Exercícios de sala

01. a) $a_{21} = a_9 + (21-9)r$

$9 = \cap = -1 + 12r$

$\therefore r = -1$

b) $a_1 = 29$

$a_n = 30 - n$

02. (6; 9; 12)
03. a = 1 ou a = 5
04. a) $S_1 = a_1 = 2 \,.\, 1^2 - 1 = 1$

b) $a_6 = S_6 - S_5$

$S_6 = 2 \,.\, 6^2 - 6 = 66$

$S_5 = 2 \,.\, 5^2 - 5 = 45$

$a_6 = 66 - 45 = 21$

c) $a_7 = S_7 - S_6$

$a_7 = (2 \,.\, 7^2 - 7) - 21$

$a_7 = 91 - 21 = 70$

d) $a_n = S_n - S_{n-1}$

$a_n = 2n^2 - n - [2(n-1)^2 - (n-1)]$

$a_n = 4_n - 3$, com $n \in \mathbb{N}^*$

05. c
06. c

07. c
08. d
09. b
10. a

Exercícos de casa

01. a
02. b
03. b
04. a
05. b
06. d
07. (1; 3; 5; 7; 9)
(; 2; 4; 6; 8)
08. c
09. c
10. a
11. 141
12. b
13. c
14. e
15. b
16. e
17. e
18. 270
19. a
20. 87

13. PROGRESSÃO GEOMETRICA

Exercícios de sala

01. a) (1; 2; 4; ...) $a_1 = 1$ e $q = 2$
$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 1 \cdot 2^5 = 32$

b) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$
c) $a_k = 2^{k-1}$
$a_k > 1.000$
$2^{k-1} > 1.000$
Como $2^9 < 1.000 < 210$
Concluímos que o menor k, para $k \in \mathbb{N}^*$, é tal que:
$2^{k-1} = 2^{10} \therefore k = 11$
e então: $a_k = 2^{11-1} = 1.024$

02. $\therefore S_{10} = 1.023$

03. $S = \dfrac{1}{2}$
04. a
05. a
06. $n = 9$ e $a_n = 256$
07. a
08. c
09. b
10. c

Exercícios de casa

01. c
02. a
03. c
04. d
05. d
06. c
07. a
08. b
09. d
10. c
11. a
12. $(1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2})$
13. a) 0,11111
b) 0,11
14. b
15. c
16. b
17. c
18. d
19. d
20. a

14. MATRIZES

Exercícios de sala

01. d
02. d
03. a
04. c
05. a
06. e
07. $m = \begin{bmatrix} 10 & 110 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$
08. d
09. d
10. a

Exercícios de casa
01. b
02. e
03. c
04. c
05. d
06. b
07. b
08. b
09. d
10. b
11. b
12. c
13. x = 4 y = 0
14. e

15. x = 1 y = 0
16. a = 4 b = -3
17. e
18. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e p
19.FVFVV
20. e

15. DETERMINANTES

Exercícios de sala

01. d
02. d
03. c
04. c
05. c
06. c
07. a
08. b
09. b
10. b

Exercícios de casa

01. e
02. c
03. e
04. a
05. a
06. b
07. e
08. a
09. c
10. a
11. d
12. a
13. e
14. b
15. a
16. c
17. b
18. c
19. e
20. d

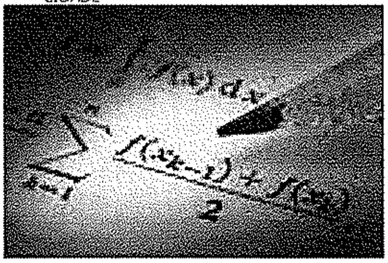
16. SISTEMA LINEARES

Exercícios de sala

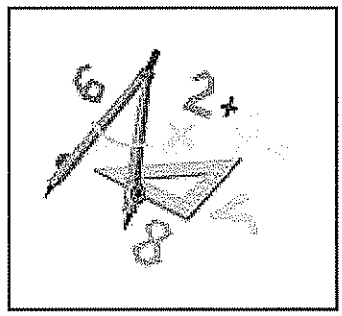
01. b
02. a
03. a
04. b
05. c
06. a
07. a
08. a
09. c
10. d

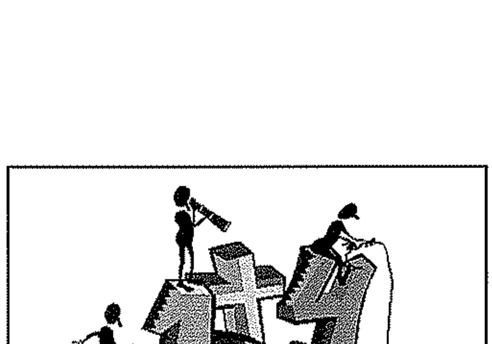
Exercícios de casa

01. c
02. c
03. c
04. d
05. a
06. b
07. d
08. c
09. e
10. c
11. a
12. b
13. d
14. c
15. d
16. (2000,03000 e 6000)
17. $\lambda = 2$ e $\lambda = -\frac{5}{3}$
18. c
19. a
20. d



MATEMÁTICA 2 - 1





EQUIPE

Diretor Geral
Luiz Alberto Tinoco Cidade

Diretora Executiva
Clara Marisa May

Diretor de Artes
Fabiano Rangel Cidade

Coordenação Geral dos Cursos Preparatórios
Luiz Alberto Tinoco Cidade

Coordenação dos Cursos de Idiomas EAD
Dr. Daniel Soares Filho

Secretaria
Priscilla Teotônio

Editoração Gráfica
Edilva de Lima

Fonoaudióloga e Psicopedagoga
Mariana Fernandes Ramos – CRFa 12482-RJ/T-DF

Assessoria Jurídica
Luiza May Schmitz – OAB/DF – 24.164

Assessoria de Línguas Extrangeiras
Cleide Thieves (Poliglota-EEUU)
João Jorge Gonçalves (Poliglota-Europa)

Equipe de Professores

Idiomas
Luiz Cidade – Espanhol
Daniel Soares Filho – Espanhol (EAD)
Cleide Thieves – Inglês, Francês, Espanhol, Alemão (EAD)
João Jorge Gonçalves – Inglês, Francês Espanhol e Português
Leonardo dos Santos – Espanhol
Diego Fernandes – Espanhol
Márcia Mattos da Silva – Francês (EAD)
Marcos Henrique – Francês
Maristella Mattos Silva – Espanhol (EAD)
Monike Rangen Cidade – Espanhol (EAD)
Cacilda Leal do Nascimento – Espanhol
Mariana Ramos – Inglês (EAD)

Concursos
Albert Eglésia – Portugês
Maria Antônia – Redação
Murilo Roballo – Matemática
Sormany Fernandes – História do Brasil
Francisco Roges – Geografia
Francisco Gerdean – Química
Gustavo Porto – História Geral
Luís Kleber Neves – Física
Thiago Magalhães – Física

ÍNDICE

Apostila 2 parte 1

1. Função Modular

1.1 Conceito de módulo:

Sejam **A** e **B** dois pontos do eixo real com abscissas x_A e x_B, respectivamente, tal que $x_B \geq x_A$. Chama-se distância entre os pontos **A** e **B** e indica-se por d_{AB} ou d_{BA}, a diferença $x_B - x_A$.

Considerando-se no eixo real de origem **O** um ponto **A** de abscissa **x**, chama-se módulo de **x** a distância entre os pontos **A** e **O**:

$$|x| = d_{OA}$$

1. 2Propriedades:

1) $|x| \geq 0, \forall x, x \in R$

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) Sendo $d \in R_+$, tem-se $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$

4) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|, \forall \{x,y\}, \{x,y\} \subset R$

5) $|x|^n = x^n \Leftrightarrow n\, é\, par, \forall x, x \in R\, e\, \forall n, n \in N$

6) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right| \;\forall \{x,y\}, \{x,y\} \subset R\, e\, y \neq 0$

7) $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a,\; \forall \{x,a\}, \{x,a\} \subset R$

8) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \forall a, a \in R_+$

9) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,\; \forall a,\; a \in R_+$

10) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a\; ou\; x \geq a,\; \forall a, a \in R_+$

11) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a\; ou\; x > a,\; \forall a, a \in R_+$

Definição f(x) = |x| = $\begin{cases} x\; se\; x \geq 0 \\ -x \text{ se x} < 0 \end{cases}$

Exs: | 5 | = 5

| - 3| = 3

|1 - $\sqrt{3}$ | = $\sqrt{3}$ -1

f(x) = | x - 3| = $\begin{cases} x - 3se\; x \geq 3 \\ -x + 3 \text{ se x} < 3 \end{cases}$

f(x) = | x²-x|+6 = $\begin{cases} x^2 - x + 6\; se\; x^2 - x \geq 0 \\ -x^2 + x + 6\; se\; x^2 - x < 0 \end{cases}$

f(x) = 2 - | 1 - x| = $\begin{cases} 2 - 1 + x\; se\; 1 - x \geq 0 \\ 2 + 1 - x\; se\; 1 - x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 + x\; se\; x \leq 1 \\ 3 - x\; se\; x > 1 \end{cases}$

Exercícios Comentados

01 (EsPCEx) O valor da soma entre o menor e o maior valor assumido pela expressão $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{2xy}{|xy|}$, quando x e y variam no conjunto de todos os números reais não nulos, é:

a) -6
b) -2
c) 2
d) 4
e) 6

Resolução:

Sabe-se que

$|x| = \begin{cases} x \ se \ x \geq 01 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$

$|y| = \begin{cases} y \ se \ y \geq 0 \\ -y \ se \ y < 0 \end{cases}$

$|xy| = \begin{cases} xy \ se \ xy \geq 0 \\ -xy \ se \ xy < 0 \end{cases}$

Logo:

$\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x}$ ou $\frac{x}{-x}$ = 1 ou -1

$\frac{y}{|y|} = \frac{y}{y}$ ou $\frac{y}{-y} = 1 \ ou -1$

$\frac{2xy}{|xy|} = \frac{2xy}{xy} \ ou \ \frac{2xy}{-xy}$ = 2 ou -2

O maior valor da expressão será: 1 + 1 + 2 = 4
O menor valor será quando x > 0 e y < 0 (x y < 0)

+ 1 - 1 - 2 = - 2

Eutes: 4 -2 = 2.

02 (EsPCEx) Dada a equação $|2x-3|+|x|-5=0$ a soma de todas as suas soluções é igual a:

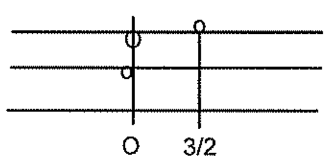
a) 3
b) $\frac{8}{3}$
c) 2
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{2}{3}$

Resolução:

$|2x - 3| = \begin{cases} 2x-3 \ se \ x \geq 3/2 \\ -2x+3 \ se \ x < 3/2 \end{cases}$

$|x| = \begin{cases} x \ se \ x \geq 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$

$-2x \quad +3 \quad 3/2 \quad 2x-3$
$-x \qquad\qquad x$
$-3x+3 \quad -x+3 \quad 3x-3$



Logo:

$\begin{cases} -3x+3-5 \ se \ x < 0 \\ -x+3-5 \text{ se } 0 \leq x < 3/2 \\ 3x - 3 - 5 \text{ se } x \geq 3/2 \end{cases}$

1) Q^{do} x < 0

Curso Preparatório Cidade
SCLN 113 - Bloco C - Salas 207 / 210 - Tel.: 3340-0433 / 9975-4464 / 8175-4509
www.iic.pro.br / cursocidade@gmail.com

$-3x+3-5=0$

$$x=\frac{-2}{3}\ \left(-\frac{2}{3}<0\right)$$

2) $Q^{\underline{do}}\ 0 \le x < 3/2$

$-x+3-5=0$

x = – 2 (não convém)

3) $Q^{\underline{do}}\ \ x \ge 3/2$

$3x-3-5=0$

$$x=\frac{8}{3}\left(\frac{8}{3}>\frac{3}{2}\right)$$

Logo: $\frac{-2}{3}+\frac{8}{3}=2.$

03 (EsPCEx) O número de raízes reais distintas da equação $x|x|-3x+2=0$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução:

$$|x| = \begin{cases} x \ se \ x \ge 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$$

1) Se X ≥ 0

x - x - 3 x + 20 = 0

x^2 - 3 x + 2 = 0

S = 3 ⟩ 2
P = 2 ⟩ 1

2) Se x < 0

x (-x) - 3 x + 2 =0

$-x^2 - 3x + 2 = 0$

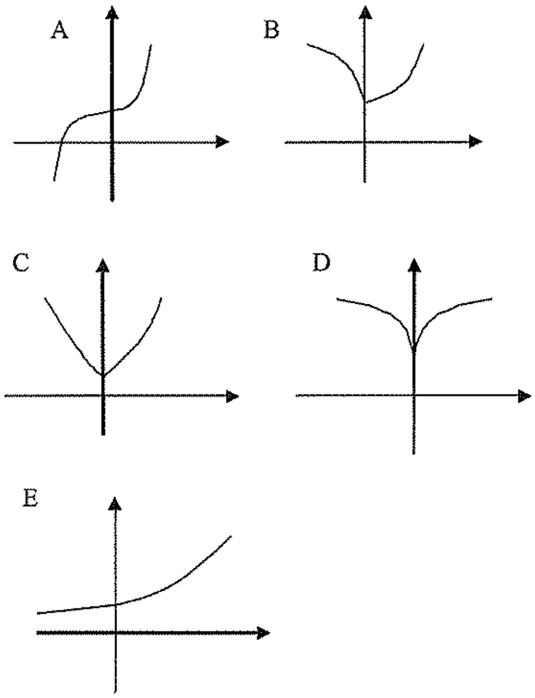
$x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-2) = 17$

$$\frac{-3 \neq \sqrt{17}}{2} \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{17}}{2} > 0 \ \text{(não contém)} \\ \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$s = \{\ 1, 2, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\}$$

04 (EsPCEx) O gráfico que melhor representa a função $f: R \to R$, definida por $f(x)=2^{|x|}$ é:



Resolução:

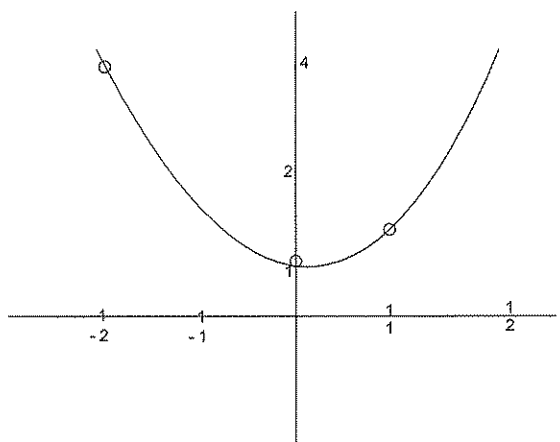
$f(x) = 2^{|x|}$

1) Se x ≥ 0 f(x) = 2^x

x	y
0	1
1	2
2	4

2) Se x < 0 f(x) = 2^{-x}

x	y
-1	2
-2	4
-3	8

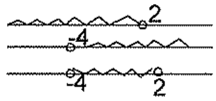


05 Resolva: |2 x - 1| < 5 - x

Resolução: $\begin{cases} 2x - 1 < 5 - x & ① \\ 2x - 1 > -5 + x & ② \end{cases}$

① 3 x < 6   x < 2

② x > - 4



Logo: $S = S_1 \cap S_2$

S= {x ∈ ℝ / – 4 < x < 2}

Exercícios de Sala

01 (Ufsc) Considere a função f : ℝ dada por f(x) = |2x + 5|

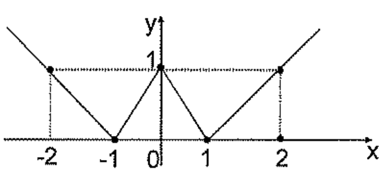
Julgue os itens:

a) f é injetora.
b) o valor mínimo assumido por f é zero.
c) o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto de coordenadas (0,5).
d) o gráfico de f é uma reta.
e) f é uma função par.

02 (Fgv) Relativamente a função f, de ℝ em ℝ, dada por f(x) = |x|+| x - 1|, é correto afirmar que:

a) o gráfico de f é a reunião de duas semi-retas.
b) o conjunto imagem de f é o intervalo [1,+ ∞ [.
c) f é crescente para todo x ε IR .
d) f é decrescente para todo x ε IR e x ≥ 0.
e) o valor mínimo de f é 0.

03 (Ufes)



O gráfico acima representa a função

a) f(x) = | | x | - 1 |
b) f(x) = | x- 1|+|x+1| - 2
c) f(x) = | | x |+ 2| - 3
d) f(x) = | x- 1|
e) f(x) = | | x |+1| -2

04 (EsPCEx) A soma dos quadrados de todas as raízes da equação $x^2 + 4x - 2|x+2| + 4 = 0$ é igual a:

a) 16
b) 20
c) 24
d) 28
e) 36

05 (EsPCEx) Analise os itens abaixo para a função $f: R \to R$:

I - Se $f(x) + f(-x) = 0$, então *f* é uma função par.

II - Se $f(x)$ é uma função constante, então *f* é uma função par.

III - Se $|f(x)| = f(x)$, então $\mathrm{Im}(f) \subset R_+$.

IV - Se $|f(x)| = f(x)$, então é função bijetora.

São corretas as afirmativas:

a) I e II
b) II e IV
c) II e III
d) I e III
e) III e IV

06 (EsPCEx) Sejam *x* e *y* números reais não nulos. Das seguintes afirmações:

I - Se $|x| = |y|$ então $x = y$

II - $|x+y| \geq |x| + |y|$

III - Se $0 < x < 1$ então $x^2 < x$

IV - Se $x < 0$ então $x = \sqrt{x^2}$

Pode-se concluir que:

a)todas são verdadeiras
b)somente a IV é falsa
c)somente I e III são verdadeiras
d)somente II e IV são falsas
e)somente a III é verdadeira

07 Resolva a equação: $|x^2 - 4x - 1| = 4$

Curso Preparatório Cidade
SCLN 113 - Bloco C - Salas 207 / 210 - Tel.: 3340-0433 / 9975-4464 / 8175-4509
www.iic.pro.br / cursocidade@gmail.com

08 (UFGO) Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = x+ |x| e faça o que se pede:

a)Mostre que $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ 2x \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

b)Resolva a equação: f(x + 2) – x = 3

09 Resolva a inequação: $|x^2 - x| \geq 2$

10 Resolva em $\mathbb{R}$: |x – 1 | + |x – 2|> 1

Exercícios de Casa

01 (Vunesp) Resolva a equação $x^2 - 3|x| + 2 = 0$, tomando como universo o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

02 Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação: $|x^2 + 2x - 3| + 1 - x = 0$

03 Resolva a equação: |x – 1| + |x + 5| = 6

04 (FUV) Seja $f(x) = |2x^2 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Determinar os valores de x para os quais f(x) < 1.

05 Resolva a inequação: $|x^2 - 4| < x + 2$

06 Determine o conjunto solução da inequação: $|x+3| - |x-2| \geq 9$

07 Considere em $\mathbb{R}$ a função: f(x) = |4x-7| -3
Determine os valores de x, tais que:

a)f(x) = f(x -2)
b)f(x) < f(2)
c)f(x) $\geq$ f(x + 1)

08 Sendo 3 < x < 7, simplifique a expressão:

$$E = \sqrt{(x^2+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$$

09 Faça o gráfico da função:

a) f(x) = |x|

b) f(x) = x + |x| + 1

c) f(x) = | x| + 2

d) f(x) = |x| - 3

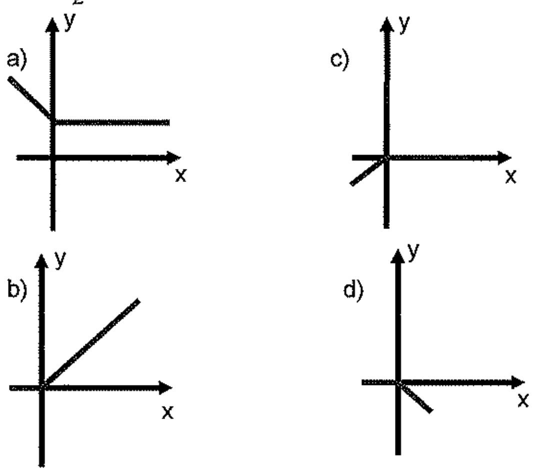
e) f(x) = - |x| + 1

f) $f(x) = \sqrt{(x-5)^2}$

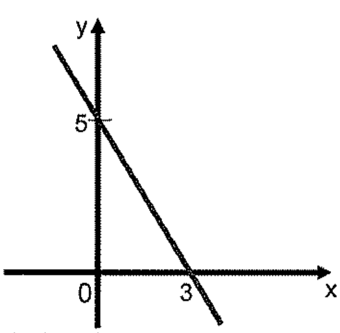
g) $f(x) = |x^2 - 9|$

10 (AFA-SP) O gráfico que melhor representa a função

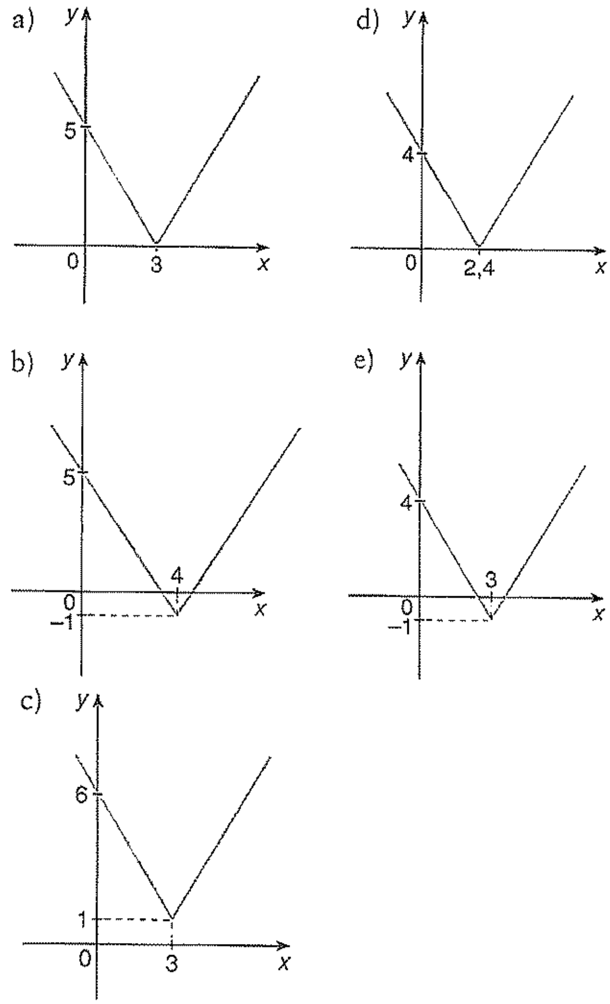
$f(x) = \frac{1}{2}(x - |x|)$ é:



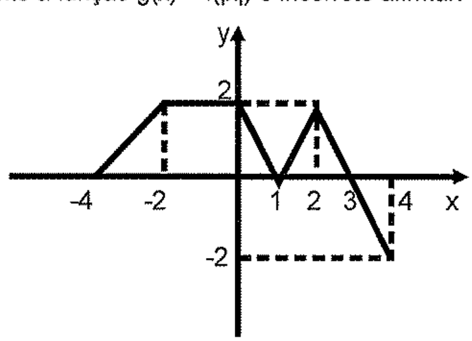
11 (Unificado-RJ)



No gráfico dado está representada a função do 1° grau f(x). O gráfico que melhor representa g (x) = |f(x)| - 1 é:



12 (UFPE) Na figura a seguir temos o gráfico de uma função f(x) definida no intervalo fechado [-4,4]. Com respeito à função g(x) = f(|x|) é incorreto afirmar:



a) O ponto (-4, -2) pertence ao gráfico de g.

b) O gráfico de g é simétrico com relação ao eixo 0y das ordenadas.

c) g(x) se anula para x igual a - 3, -1, 1 e 3.

d) g(-x) = g(x) para todo x no intervalo [-4, 4].

e) $g(x) \geq 0$ para todo x no intervalo [-4, 4].

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

13 Sabendo que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que:

a) a = 1 e b = 6
b) a = 0 e b = -6
c) a = 1 e b = -6
d) a = 0 e b = -9
e) não existem a e b tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

14 (Cesgranrio-RJ) O número de raízes reais da equação $|2x - 1| = |1-x|$ é:

a) 0
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

15 (Fatec- SP) O conjunto solução $|3x^2 - 4| = x^2 - 4$, em $\mathbb{R}$, é:

a) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
b) {0}
c) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$
d) $\mathbb{R}$
e) $\varnothing$

16 (PUC - SP) O número de soluções da equação $||x| - 1| = 1$, no universo $\mathbb{R}$, é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

17 (Concurso de Ingresso ao Magistério-SP) O número de soluções inteiras do sistema de inequações

$$\begin{cases} |x-2| \geq 3 \\ |2x+3| < 5 \end{cases}$$

a) 5
b) 3
c) 1
d) 0

18 (UFC - CE) O valor mínimo da função $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{3}{2}$
d) 2

19 (Fuvest - SP) Sendo x um número real, $(1 + x)(1 - |x|) \geq 0$ se, e somente se:

a) $|x| \leq 1$
b) $x \leq 1$
c) $|x| \geq 1$
d) $x \geq 1$
e) $x \leq -1$

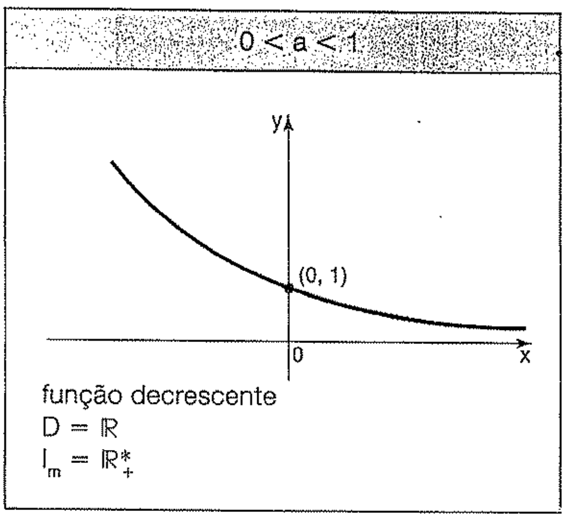
20 (UFGO) O conjunto solução da inequação $\left|\frac{2x+4}{x-2}\right| \leq 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R}, x = 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R}, x = 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\}$

2. Função Exponencial

2.1 Função esponencial

Toda função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por f(x) = a^x, com a $\in\mathbb{R}, 0<a\neq 1\ e\ x\in\mathbb{R}$, é denominada função exponencial de base a.



2. 2 Equação Exponencial

Uma equação é denomonada equação exponencial quando a incógnita aparece no expoente.

Exemplo: $2^{x+1} = 128$

Em alguns casos a resolução de uma equação exponencial é baseada na propriedade:

$$\boxed{a^x = a^y \Leftrightarrow x = y}$$

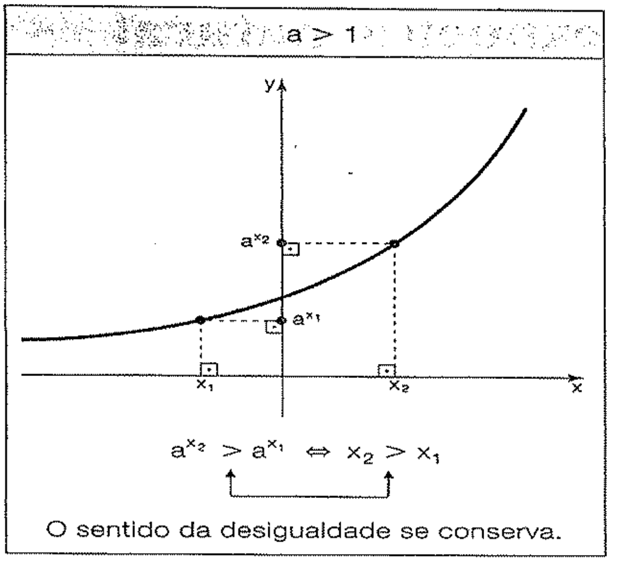
Com $1\neq a>0$

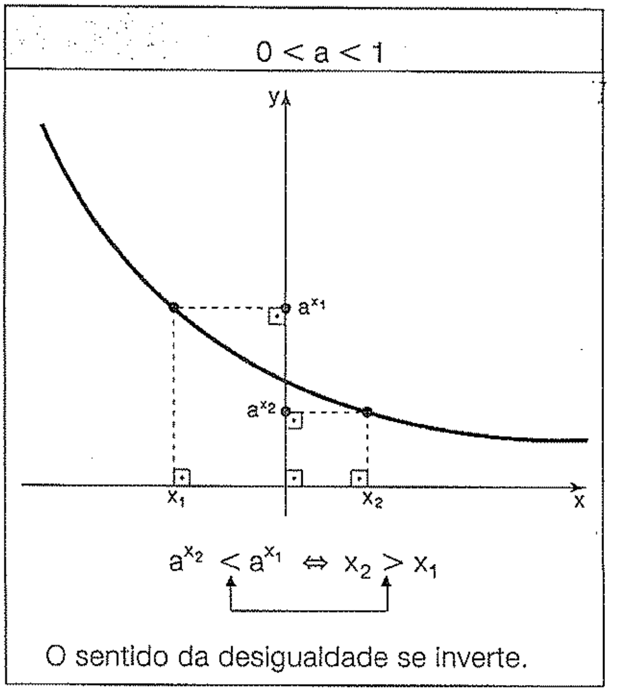
2. 3 Inequação exponencial

Denominamos inequação exponencial toda desigualdade que possui variável no expoente.

Exemplo: $3^{x^2-1} > 27$

A resolução de uma inequação exponencial é baseada nas propriedades:





Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

Exercícios Comentados

01 (EsPCEx) Uma pequena empresa expande suas vendas em 20% ao ano. Se num determinado ano ela vendeu 500 unidades, t anos após, era vendido:

a) $500 \cdot (0,2)^t$

b) $500 \cdot (1,2)^t$

c) $500 \cdot (0,02)^t$

d) $500 \cdot 2^t$

e) $500 \cdot (1,02)^t$

Resolução

Hoje $\rightarrow$ 500
t = 1 $\rightarrow$ 500 x 1,2
t = 2 $\rightarrow$ 500 x 1,2 x 1,2 = 500 x$(1,2)^2$
t = 3 $\rightarrow$ 500 x $(1,2)^3$
.
.
.
t $\rightarrow$ 500 a (1,2) t

02 (EsPCEx) O produto dos elementos do conjunto solução da equação exponencial $2^{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1024}{2^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$ é:

a) 1
b) 2
c)3
d)4
e) 5

Resolução

Chamando-se $x + \dfrac{1}{x} = a$ (I)

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

Então: $2^{a^2-2} = \dfrac{1024}{2^a}$. Igualando-se as base:

$2^{a^2-2} = 2^{10-a}$

$a^2 - 2 = 10 - a$

$a^2 + a - 12 = 0$

a = 3 ou a = -4
voltando em (I)

$x + \dfrac{1}{x} = 3$

$x^2 + 1 = 3x$

$x^2 - 3x + 1 = 0$, logo, o produto de raízes é 1

$x + \dfrac{1}{x} = 14$

$x^2 + 1 = -4x$

$x^2 + 4x + 1 = 0$, logo o produto de raízes é 1

Então, 1 . 1 = 1

03 Suponha que o crescimento de uma cultura de bactérias obedece à lei

$n(t) = m \cdot 2^{\frac{t}{2}}$,

na qual N representa o número de bactérias no momento t, medido em horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, ao fim de 8 horas o número delas era
a) 3 600
b) 3 200
c) 3 000
d) 2 700
e) 1 800

Resolução

momento

inicial: t = 0 $\rightarrow$ n(0) = 200
n(0) =m . 2o = m
m = 200

t = 8; n(8) = 200, $2^{\frac{8}{2}}$
= 200. 16
= 3200

04 (UFV) Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^x$. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x+1) + f(-x+4) = 36$.

Resolução

$3^{x+1} + 3^{-x+4} = 36$
$3^x . 3 + 3^{-x} . 3^4 = 36$

Colocando-se $3^x = a$

$3a + \frac{81}{a} = 36$
$3a^2 + 81 = 36a$
$3a^2 - 36a + 81 = 0 \div 3$
$a^2 - 12a + 27 = 0$
$a = 3$ ou $a = 9$
$3^x = 3 \therefore x = 1$ S = {1, 2}
$3^x = 9 \therefore x = 2$

05 (Vunesp) Seja a, $0 < a < 1$, um número real dado. Resolver a inequação exponencial.

$$a^{2x+1} > \left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}.$$

Resolução

$$a^{2x+1} > \left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$$
$$a^{2x+1} > a^{-x+3}$$

Como $0 < a$, $1 = 2x + 1 < -x+3$
$3x < 2$
$x < 2/3$

$$S = (-\infty, \frac{2}{3})$$

Exercícios de Sala

01 (Fuvest)
a) Qual a metade de 2^{22}?

b) Calcule $8^{\frac{2}{3}} + 9^{0,5}$.

02 Calcule o valor de A, sabendo que

$$A = \frac{0,0001 \cdot (0,01)^3 \cdot 100}{0,0001}$$

03 Sabendo que $2^x = a$ e $2^y = b$, determine o valor de $(0,25)^{-3x+y}$ em função de a e b

04 *Simplifique a expressão:* $\dfrac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}$

05 *(Fuvest)*

a) Esboce, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(g) = 2x$.

b) Baseado nos gráficos da parte a, resolva a inequação $2x \leq 2x$.

c) Qual é o maior: $2^{\sqrt{2}}$ ou $2\sqrt{2}$? Justifique brevemente sua resposta.

06 Resolva as equações

a) $27^x = \sqrt{3}$

b) $(0,5)^{x^2+x-12} = 1$

07 Ache as raízes da equação: $\sqrt[x-1]{3^{2x+1}} = 3^{3x-1}$

08 Resolva a equação: $16^x \cdot 4^{x+3} - 8^{x+2} = 0$

09 Resolva a equação: $\sqrt[x]{3^{x+1}} \cdot \sqrt[x+2]{3^{x-1}} = \sqrt[4]{2\,187}$

10 Determine o conjunto solução da inequação:
$(64^{a+1})^{a-2} \geq (16^{a-3})^{a+1}$

11 Devido à desintegração radioativa, uma massa m_0 de carbono14 é reduzida a uma massa m em t anos. As duas massa estão relacionadas pela fórmula $m = m_0 \cdot 2^{\left(\frac{-t}{5400}\right)}$. Nestas condições, em quantos anos 5 g da substância serão reduzidos a 1,25 g?

12 O número N de decibéis e a potência I de um som medio em watts por centímetro quadrado estão relacionados pela fórmula $I = 10^{-16} \cdot 10^{\frac{N}{10}}$. Determine o número de decibéis correspondente ao som provocado por tráfego pesado de veículos, cuja potência é estimada em 10^{-8} watts por centímetro quadrado.

13 A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita or um observador por meio do seguinte modelo matemático

$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2 \cdot t}$,

com t em segundos, h(t) em metros e $0 \leq t \leq T$. Qual o intervalo de tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto?

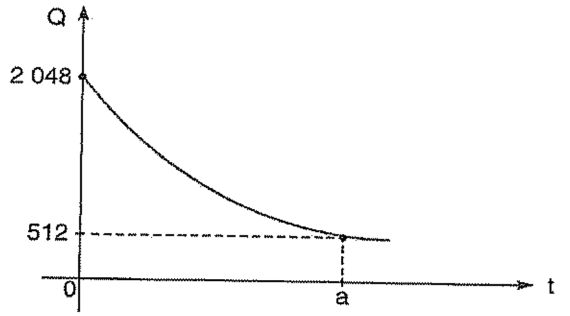
14 O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$, onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a - 16 °C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente.

15 Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K \cdot 2^{-0,5t}$, onde K é uma constante, t indica o tempo (em gramas) no instante t.

Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e a.



Exercícios de Casa

01 Ache o conjunto solução da equação: $4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x = 0$

02 Resolva a equação: $2 \cdot {}^{4x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 4^x = 20$

03 Resolva a equação: $3^x + 3^{1-x} = 4$l

04 Resolva a equação: $\dfrac{6^{x-1}+6^{x-2}}{6^{1-x}+6^{2-x}} = 1$

05 Ache o conjunto verdade da equação: $2^{8x} - 4 \cdot 2^{4x} - 32 = 0$

06 Determine o conjunto solução da equação: $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 4^{x+1} = 92$

07 Determine os valores de *a* e *b* no sistema:

$$\begin{cases} 4^{a+b} = \dfrac{1}{16} \\ 2^{a+2} + 2^{b-1} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

08 Resolva a inequação: $(0,1)^{x^2-x} \geq 1$

09 Ache o conjunto solução da inequação: $2^{x+2} + 2^{x-1} > 3^{x-1} + 3^x$

10 Resolva a inequação: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{x-1}{x-2}} \geq 8^{\frac{x-1}{x}}$

11 Determine o conjunto solução da inequação: $\sqrt[x-1]{5^{x+1}} \cdot \sqrt[x]{5^{x-1}} \geq \sqrt{125}$

12 (Pucmg 2004) Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função

$n(t) = 100.2^{\frac{t}{3}}$

Nessas condições, pode-se afirmar que a população será de 51.200 bactérias depois de:

a) 1 dia e 3 horas.
b) 1 dia e 9 horas.
c) 1 dia e 14 horas.
d) 1 dia e 19 horas.

13 (Pucmg) Uma cultura tem, inicialmente, 125 bactérias. Sabendo-se que essa população dobra a cada 2 horas, o tempo necessário, em horas, para que o número de bactérias chegue a 256.000, é igual a:
a) 14
b) 18
c) 22
d) 26

14 (EsPCEx) O conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 4x + 3\right) > -1$ é:

a) $S = \{x \in R / x < 1 \ ou \ x > 3\}$

b) $S = \{x \in R / x < 0 \ ou \ x > 4\}$

c) $S = \{x \in R / o < x < 1 \ ou \ 3 < x < 4\}$

d) $S = \{x \in R / x < 1 \ ou \ x > 3\}$

e) $S = \{x \in R / 0 < x < 1 \ ou \ 4 < x < 5\}$

15 (EsPCEx) A soma das soluções reais de $x^{x^2+2x-8} = 1$ é:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

16 (EsPCEx) Se os números inteiros x e y satisfazem a equação $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, então x+y é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

17 (EsPCEx) Supondo $x \in R$, com $x > 0$ e $x \neq 1$, a inequação $x^{2x-1} < x^3$ tem como solução:

a) $0 < x < 1$

b) $x > 2$

c) $x > 1$

d) $1 < x < 2$

e) $2 < x < 3$

18 (EsPCEx) Se n é um número inteiro positivo, então o valor de $(-2)^n + (-2)^{n+1}$ será sempre igual a:

a)zero
b)2
c) 2^n, para todo *n*
d) $(-2)^n$, se *n* for ímpar
e) -2^n, se n for par

19 (EsPCEx) A quantidade de números inteiros ímpares que pertencem ao intervalo que satisfaz a inequação exponencial $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+5} > 4$ é de:

a)um número ímpar
b)dois números ímpares
c)três números ímpares
d)quatro números ímpares
e)cinco números ímpares

20 (EsPCEx) O valor de revenda de um carro é dado por $V(t) = V_0(0{,}8)^t$, em que V_0 é o valor inicial de $V(t)$ é o valor após t anos de uso. A alternativa que mais se aproxima do percentual de desvalorização desse carro, em relação ao valor inicial, após 3 anos exatos de uso, é:

a) 24%
b) 47%
c) 49%
d) 50%
e) 51%

21 Chama-se meio-vida de uma subtância radioativa o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Tomemos hoje 16 gramas de uma substância radioativa, cuja meia-vida é de 5 anos. A massa dessa substância é uma função do tempo, contado a partir de hoje, dada por M(n) $= 16 . 2^{-\frac{n}{5}}$ .Se daqui a n anos sua massa for 2^{-111} gramas, qual o valor de n?

22 Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência posuída or este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dada pela expressão

$Q = 700 - 400e^{-0,5t}$, onde

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário;

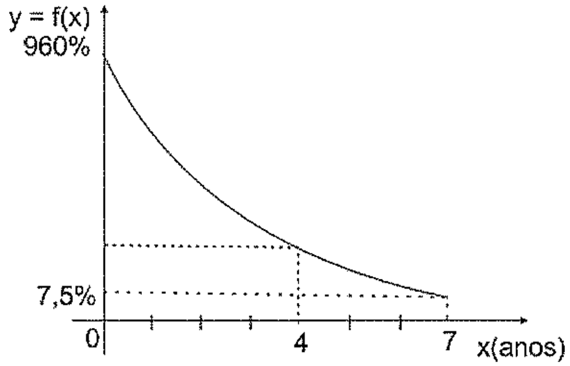
t = meses de experiência;

e = 2,7183.

a) De acordo com esta expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir mensalmente

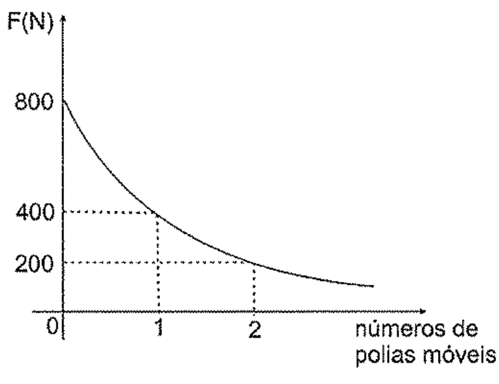
b) E um funcionário sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente? Compare este resultado com o resultado do item a. Há coerência entre eles?

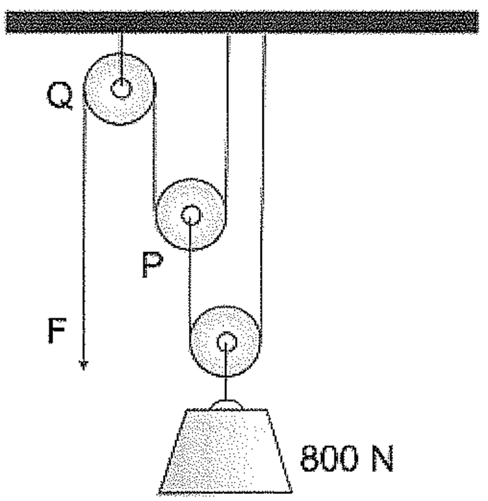
23 A inflação anual de um país decreceu no período de sete anos. esse fenômeno pode ser representado por uma função exponencialdo tipo $f(x) = a\ .b^x$, conforme o gráfico abaixo.



Determine a taxa de inflação desse país no quarto ano de declínio.

24 A figura a seguir mostra uma associação de polias, chamada "Talha Exponencial", que facilita o representa a força $F = a \cdot b^n$ necessária para suspender uma carga de 800N de peso, em função do número de polias móveis n utilizadas.





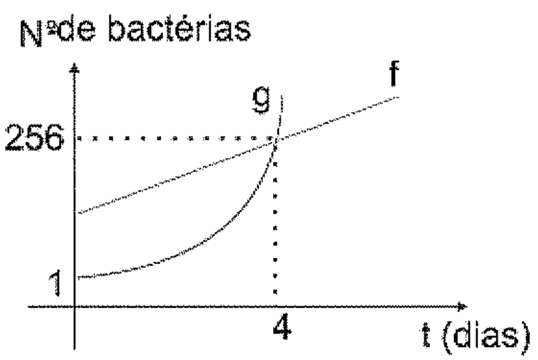
a) Determine os valores de *a* e *b*.

b) Quantas polias móveis devemos usar para levantar essa carga exercendo uma força F = 25N?

25 Durante a ocorrência de um surto de dengue em certo Estado, notou-se que o número P(t), de pessoas infectadas t dias após a primeira observação (t = 0), poderia ser obtido pela expressão $P(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$. Quantos dias , no mínimo, serão necessários, até que o número de pessoas infectadas ultrapasse 32 000?

26 Um cientista está estudando um determinado tipo de doença provocada or bactérias. O cientista percebe que se o crescimento no número de bactéria for exponencial, ele será representado pela função $g(t) = a^t + b$ e se o crescimento for linear, ele será representado pela função $f(t) = at + c$, onde t é o tempo de observação. Através do grafico, pode-se afirmar que, para que o crescimento seja linear, o número inicial de bactérias deve ser de:

a) 240
b) 242
c) 244
d) 246
e) 248



27 Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, que decresce em função do tempo t, em horas, de acordo com a fórmula $m = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$. Assim sendo, qual o tempo máximo de que os cientistas dispõem para ultilizar este material antes que ele se volatilize totalmente?

Curso Preparatório CIDADE

3 - Função Logarítmica

1 Definição

Denomina-se logaritimo do número b na base a o expoente x ao qual se deve elevar a para se obter b.

$b = a^x$ forma exponencial	$\Leftrightarrow$	$\log_a b = x$ forma logarítmica

A operação por meio da qual obtemos x é chamada de logaritmação.

Nomenclatura

Elementos \ Operação	Potenciação	Logaritmação
a	base	base do logaritmo
b	potência	logaritmando ou antilogaritmo
x	expoente	logaritmo

Ao escrevermos log b fica subntendido que a base é 10. Oslogaritmos de base 10 são chamados logaritmos decimais.

2. Consequências da definição

A partir da definição, sempre que existirem os logsritmos envolvidos, temos:

1°.) $\log_a 1 = 0$
2°.) $\log_a a = 1$
3°.) $\log_a a^n = n$
4°.) $a^{\log_a b} = b$
5°.) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

3. Condição de existência (equações logarítmicas)

Na definição de logaritmo aparecem restrições para os valores de a e b.

Lembre-se de que:

$$\exists \log_a b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ e \\ 1 \neq a > 0 \end{cases}$$

4. Propriedades dos logaritmos

Sempre que existirem os logaritmos envolvidos, temos:

♦ logaritmo de um produto

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

♦ logaritmo de um potência

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

♦ logaritmo de um quociente

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

♦ logaritmo de uma raiz

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

6. Mudança de base

Efetuamos a mudança de um logaritmo de base a para um logatimo de base c, através da fórmula:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Em que:
b> 0
$0 < a \neq 1$
$0 < c \neq 1$

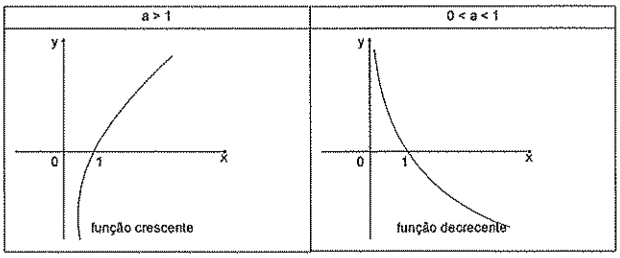
Consequências:

1°.) $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

2°.) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

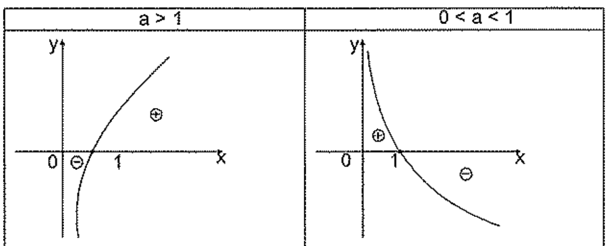
7. Função logarítmica

Toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$ é denominada função logarítmica de base a. Gráficos



8. Sinal do logaritmo

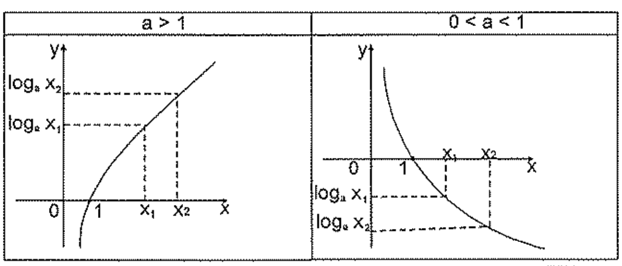
O estudo do sinal do logaritmo de um número numa certa base é feito através dos gráficos:



$x > 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0$ $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0$ $x = 1 \Leftrightarrow \log_a x = 0$	$x > 1 \Leftrightarrow \log\ x < 0$ $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log\ x > 0$ $x = 1 \Leftrightarrow \log\ x = 0$

9. Comparação de logaritmos (inequações logarítmicas

Podemos comparar dois logaritmos indicados numa base através dos seguintes gráficos:



$\boxed{x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1}$

(O sentido da desigualdade se conserva.)

$\boxed{x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1}$

(O sentido da desigualdade se inverte.)

Exercícios Comentados

01 (Fei) Considere a > 1 e a expressão

$x = \log_{a^2} a + \log_a a^2$

então o valor de x é:

a) 2
b) 3/2
c) 5/2
d) 2/5
e) 1

Resolução:

$x = \log_{a^2} a + \log_a a^2$

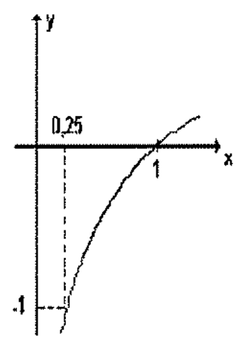
$x = \frac{1}{2} \log_a a + 2 \log_a a$

$x = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

02 (Fuvest) A figura a seguir mostra o gráfico da função logaritmo na base b.

O valor de b é:

a) 1/4.
b) 2.
c) 3.d) 4.
d) 4
e) 10.



Resolução

$f(x) = \log_b +$

como a funçãção passa pelo ponto (0,25 ; - 1)
$\log_b 0,25 = -1$

$b - 1 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{4} \therefore b = 4$

03 (Uece) Seja k um número real positivo e diferente de 1. Se

$(2^{k-1})^3 = (\log_{\sqrt{5}} k)\log_k 5),$

então 15k + 7 é igual a:

a) 17
b) 19
c) 27
d) 32

Resolução

$\log_{\sqrt{5}} k = \log_{5^{1/2}} k = 2\log_5 k$

$\left(2^{k-1}\right)^3 = 2\ \log_5 k \cdot \log_k 5$. como $(\log_5 k = \dfrac{1}{\log_k 5}$

$\left(2^{k-1}\right)^3 = 2$

3k - 3 = 1

k = $\frac{4}{3}$; Então $15 \cdot \frac{4}{3} + 7 = 27$

04 (EsPCEx) A equação $5^{2x+1} = 15$ pode ser resolvida dispondo-se de uma tabela de logaritmos decimais. O valor de *x* que a satisfaz é:

a) $\dfrac{2\log 5}{\log 3}$

b) $\dfrac{\log 5}{2\log 3}$

c) $\dfrac{2\log 3}{\log 5}$

d) $\dfrac{\log 15}{\log 3}$

e) $\dfrac{\log 3}{2\log 5}$

Resolução

$5^{2x+1} = 15$
$5^{2x} \cdot 5 = 15$
$5^{2x} = 3$
$\log 5^{2x} = \log 3$

$2x \log 5 = \log 3$

$x = \dfrac{\log 3}{2\log 5}$

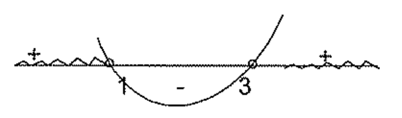
05 (EsPCEx) O conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 4x + 3\right) > -1$ é:

a) $S = \{x \in R \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
b) $S = \{x \in R \mid x < 0 \text{ ou } x > 4\}$
c) $S = \{x \in R \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
d) $S = \{x \in R \mid x < 1 \text{ ou } 3\, x > 3\}$
e) $S = \{x \in R \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 4 < x < 5\}$

Resolução

Condição de existência:

$x^2 - 4x + 3 > 0$
$x = 1$ ou $x = 3$

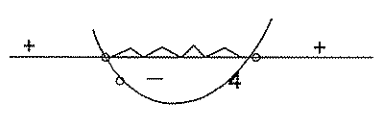


$x < 1$ ou $+ > 3$

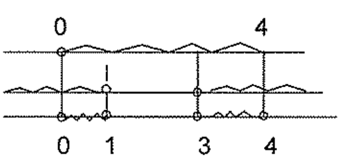
$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 4x + 3) > -1$

$x^2 - 4x + 3 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$x^2 - 4x + 3 < 3$
$x^2 - 4x < 0$



$0 < x < 4$



Curso Preparatório Cidade
SCLN 113 - Bloco C - Salas 207 / 210 - Tel.: 3340-0433 / 9975-4464 / 8175-4509
www.iic.pro.br / cursocidade@gmail.com

Curso Preparatório CIDADE

Exercícios de Sala

01 (EsPCEx) A função $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$ tem por domínio:

a) $]-2,1[$
b) $R - \{-2\}$
c) $R - \{-2, 1\}$
d) $]-\infty,-2[\cup [1,+\infty[$
e) R

02 (EsPCEx) Há números reais para os quais o quadrado do seu logaritmo decimal é igual ao logaritmo decimal de seu quadrado. A soma dos números que satisfazem essa igualdade é:

a) 90
b) 99
c) 100
d) 101
e) 201

03 (EsPCEx) Acrescentando 48 unidades a um número, seu logaritmo na base 5 aumenta de 2 unidades. Esse número é:

a)1
b)2
c) 3
d)6
e) 12

04 (EsPCEx) O número real x que satisfaz a equação $\log_2(12 - 2^x) = 2x$ é:

a) $\log_3 2$
b) $\log_2 3$
c) $\log_3 4$
d) $\log_4 3$
e) $\log_4 2$

05 (EsPCEx) O logaritmo de um número natural n, n > 1, coincidirá com o próprio n se a base for:

a) n^n
b) $\frac{1}{n}$
c) n^2
d) n
e) $n^{\frac{1}{n}}$

06 (EsPCEx) Se $\log_3 4 = a$ e $\log_4 5 = b$, então o valor de $\log_3 5$ em função de *a* e *b* é:

a) $\frac{1}{a+b}$
b) $\frac{b}{a}$
c) $\frac{1}{ab}$
d) $\frac{a}{b}$
e) ab

07 (EsPCEx) O conjunto solução da equação $\frac{1}{2}\log_{10}(x+2) + \log_{100}(x-2) = 1$ é:

a) $S = \{2\sqrt{6}\}$
b) $S = \{-2\sqrt{26}\}$
c) $S = \{-2\sqrt{6}\}$
d) $S = \{2\sqrt{26}\}$
e) $S = \{2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}\}$

08 (EsPCEx) Se o gráfico da função $f(x) = \log_b x$ passa pelo ponto $\left(\frac{1}{8}, -3\right)$, então o valor da expressão

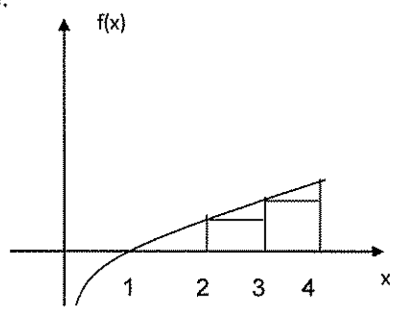
$$\frac{1}{\frac{3}{b^2} - 1}$$ é igual a:

a) 3
b) 2
c) $\frac{1}{3}$
d) $-\frac{1}{2}$
e) -4

09 (EsPCEx) Um satélite será levado ao espaço por um foguete que tem seu consumo de combustível calculado pela função $C(t) = \log_2 (t^2 + 7)^2 + 2\log_2 \frac{1}{7}$, em que C é o consumo em toneladas e t é o tempo em horas. Para colocar o satélite em órbita, o foguete deverá percorrer uma distância de 56.000 Km a uma velocidade média de 8.000Km/h. Com base nessas informações, o físico responsável pelo calculo chegou a conclusão de que o foguete, para cumprir a missão, terá um consumo de combustível igual a:

a) 1 tonelada
b) 2 toneladas
c) 6 toneladas
d) 7 toneladas
e) 8 toneladas

10 (EsPCEx) A curva da figura representa o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$. Dados: $\log_{10} 2 \cong 0,30$ e $\log_{10} 12 \cong 1,08$. Com base nesses dados, a soma das áreas dos dois retângulos hachurados é, aproximadamente:



a) 1,60
b) 2,10
c) 2,08
d) 2,60
e) 3,60

11 Numa plantação de espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas até completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:

altura: H(t) = 1 + (0,8) . $\log_2$ (t + 1) diâmetro do tronco: D(t) = (0,1) . $2^{\frac{t}{7}}$ com H(t) e D(t) em metros e t em anos.

a) Determine a medidas aproxomadas da altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das árvores no momento em que são plantadas.

b) a altura de uma árvore é 3,4 m. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore, em centímetros.

12 Suponha que o total de sapatos produzidos por uma pequena indústria é dado, aproximadamente, pela função S(t) = 1 000 $\log_2$ (1 + t), onde t é o número de anos e S o número de sapatos produzidos, contados a partir do início de atividade da indústria. Determine:

a) o número de sapatos produzidos no primeiro ano de atividades da indústria;

b) o tempo necesário para que a produção total seja o triplo da produção do primeiro ano.

13 Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $4^{\log x} = 1$

b) $3^{2 + \log_5 x} = 81$

14 Segundo a lei do resfriamento de Newton, a temperatura T de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_0 obedece à seguinte relação:

$$T = T_0 + k e^{-ct}$$

Nesta relação, T é medida na escola Celsius, t é o tempo medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e k e c são constante a serem determinadas. Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100 °C, colocada numa sala de temperatura 20 °C vinte minutos depois, a temperatura do café passa de 40 °A.

a) calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

b) Considerando $\ln 2 = 0{,}7$ e $\ln 3 = 1{,}1$, estabelça o tempoo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu à metade.

15 Estudos de demografia indicam que se a população de um país no ano zero é P_o, decorridos t anos a população será aproximadamente $P(t) = P_o \cdot e^{kt}$, sendo o número e a base dos logaritmos neperianos e k uma constante real. Numa população para a qual $K = \frac{3}{100}$, quantos anos devem decorrer até que ela duplique (ou seja, até que $P(t) = 2P_o$)?

Nos seus cálculos, use $\log_e 2 = 0{,}69$.

16 Um grupo de estudantes resolveu repetir a medição da altura do Pico da Neblina feita na décasa de 60. Para isso, escalaram essa montanha e levaram um barômetro. chegando ao cume da montanha, efetuaram várias medições da pressão atmosférica no local e obtiveram o valor médio de 530 mmHg. A pressão atmosférica P(h) a uma dada altura h (em metros, em relação ao nível do mar) é fornecida pela função

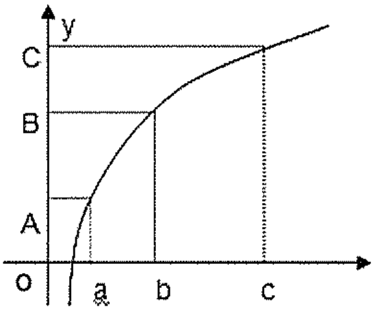
$$P(h) = P_0 \cdot e^{\alpha h}$$

sendo e a base do sistema de logaritmos neperianos, P_0 = 760 mmHg a pressão atmosféra no nível do mar, e α um número que depende principalmente da temperatura média no local de medição.

Sabendo-se que, nas condiçoes desse experimento, $\alpha = -0{,}00012$ e que os estudantes usaram os valores aproximados $\ln(760) = 6{,}63$ e $\ln(530) = 6{,}27$, qual foi a altura que encontraram para o Pico da Neblina?

Exercícios de Casa

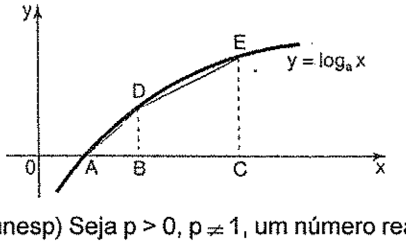
01 (EsPCEx) A figura abaixo representa o gráfico $f: R_+^* \to R$ tal que $f(x) = \log_a x$, onde $a > 1$.



estão locados no gráfico os logaritimos de três abscisas: "a"(que é a própria base), "b" e "c". Sabendo que AO = BC ,podemos afirmar que:

a)$\log_a b$
b)$a^c=b$
c)$ab=c$
d)$a+b=c$
e)$10^a+10^b=10^c$

02 (Unesp) A curva da figura representa o gráfico da função $y = \log_a x$ ($a > 1$). Dos pontos B = (2, 0) e C = (4, 0) saem perpendiculares ao eixo das abscissas, as quais interceptam a curva em D e E, respectivamente. Se a área do trapézio retangular BCED vale 3, prova que a área so triangulo ABD, onde A = (1,0), vale $\frac{1}{2}$.



03 (Vunesp) Seja $p > 0$, $p \neq 1$, um número real. Dada a reação $\frac{p^{-y}}{1+p^{-y}} = x$ determinar y em função de x e o domínio da função assim definida.

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

04 (Unicamp) Calcule o valor da expressão $\log_n(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}})$, onde n é um número inteiro, $n \geq 2$. Ao fazer o cálculo, você verá que esse valor é um número que não depende de n.

05 Calcule o valor da expressão: $\log_5 1 + 4^{\log_4 5} + \log_3(\log_5 125)$

06 Calcule A, sendo $A = 49^{\log_7 2} - 25^{\log_5 3}$

07 Determine o domínio da função $y = \log_{x-1}(x^2 - 5x)$

08 Resolva a equação: $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0$

09 Calcule $x \in \mathbb{Z}$, tal que: $\dfrac{\log x}{\log x + 1} + \dfrac{\log x + 4}{\log x - 2} = \dfrac{24}{5}$

10 Ache o conjunto verdade da equação:

$\log_4[\log_2(\log_3 x)] = \dfrac{1}{2}$

11 Sabendo que log a = 2, log b = 3 e log c = - 6,

Calcule: $\log \sqrt[5]{\dfrac{a^2b^2}{c^3}}$

12 Sabendo que $\log_a x = 2$, $\log_b x = 4$ e $\log_c x = 5$. calcule $\log_{abc} x$.

13 Resolva a equação:
$\log_{10} x + 2 \log_x 10 = 3$

14 Resolva a equação:
$\log x\, 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$

15 Resolva a equação:
$\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$

16 Resolva as inequações:

a) $\log_5(4x - 1) < \log_5 3$
b) $\log_{\frac{1}{2}}(-x + 4) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x - 2)$

17 Ache o conjunto da inequação:
$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x) \geq -3$

18 Resolva a inequação:
$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) < 1$

19 Determine o conjunto verdade da desiguladade:
$\log_2[\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 1)] < 0$

20 Resolva as inequações:

a) $2(\log x)^2 - \log x > 6$
b) $(\log_x 5x^2) - (\log_5 x)^2 \geq 1$
c) $(16 - x^2). \log_3(x - 2) > 0$

21 O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão

pH = - log [H⁺],

em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/l, de íons de Hidrogênio na solução e log, o logaritmo nabase 10.

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de Hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mil/l.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3. dessa solução foi:

a) 7,26
b) 7,32
c) 7,58
d) 7,74

22

Um petroleiro encalhou em um recife e sofreu uma avaria no casco. Em função disso, começou a derramar petróleo. Admita que às t horas do dia seguinte ao do acidente, a área, em km², da mancha do óleo espalhado sobre o oceano é dada por:

$A(t) = 16 \cdot e^{0{,}1t}$; $t \in [0,24]$

Admita que a mancha do óleo é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou e que este local encontra-se a 4 km da costa, então a mancha de óleo atingirá a costa no dia seguinte ao do acidente a que horas? Adote $\ell n\, \pi = 1{,}1$.

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

23 Um pesquisador constata que, em um dado instante, existem 400 tartarugas da espécie A e 200 tartarugas da espécie B em uma reserva marinha. nessa reserva, a população de tartarugas da espécie A diminui a uma taxa de 20% ao ano, enquanto a poulação da espécie B aumenta a uma taxa de 10% também ao ano.

Determine, usando duas casas instante, para que as populações sejam iguais. (Considere: $\log_{10}11 = 1,04$ e $\log_{10} 2 = 0,30$)

24 Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e p(t), o preço após t anos, pede-se:

a) A expressão para p(t).

b) O tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. Se necessário, use $\log 2 \simeq 0,301$ e $\log 3 \simeq 0,477$.

25 As populações de duas cidades A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8(1 + t)_6$ e $B(t) = \log_2(4t + 4)$, onde a variável t representa o tempo em anos.

a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes t = 1 e t = 7?

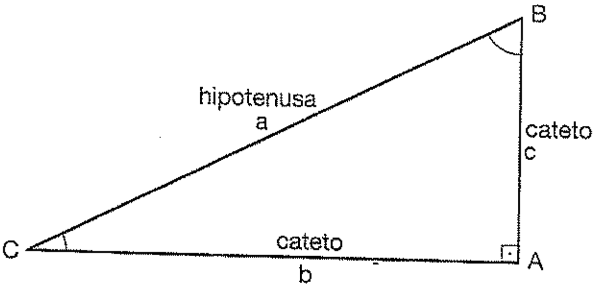
b) Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante t e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

4. Trigonometria 1

4. 1Triângulo retângulo e qualquer

1. Razões trigonometricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo da figura:



$$sen\ \widehat{B} = \frac{b}{a} \qquad \cos\widehat{B} = \frac{c}{a} \qquad tg\ \widehat{B} = \frac{b}{a}$$

$$sen\ \widehat{C} = \frac{c}{a} \qquad \cos\widehat{C} = \frac{b}{a} \qquad tg\ \widehat{C} = \frac{c}{a}$$

Seno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Cosseno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

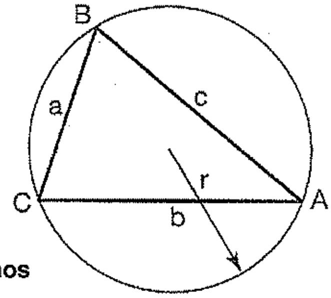
Tangente de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente.

Uma tabela importante:

Ângulos	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4. 2 Relações trigonométricas num triângulo qualquer

Considere o triângulo da figura:



4. 3 Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$$

Num triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado.

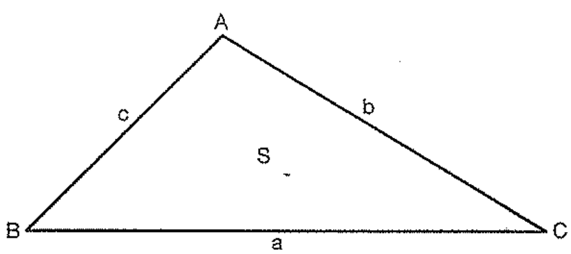
4. 4 Lei dos senos

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} = 2r$$

Em todo triângulo, as medidas dos seus lados são proporcionais aos senos dos lados opostos.

4. 5 Área de um triângulo

Num triângulo qualquer, a área é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado por esses lados.



$$S = \frac{a.b.\,sen\,\hat{C}}{2}$$

ou

$$S = \frac{a.c.\,sen\,\hat{B}}{2}$$

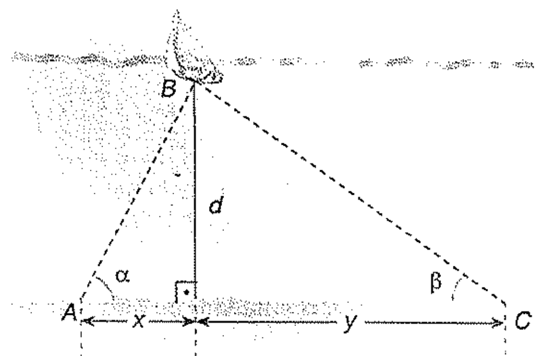
ou

$$S = \frac{b.c.\,sen\,\hat{A}}{2}$$

Exercícios Comentados

01 Na figura a seguir, no ponto B há um barco de pescadores atracado próximo à praia, percorrer a distância AC = 260 m e mede os ângulos

$B\hat{A}C = \alpha$ e $B\widehat{C}A = \beta$.



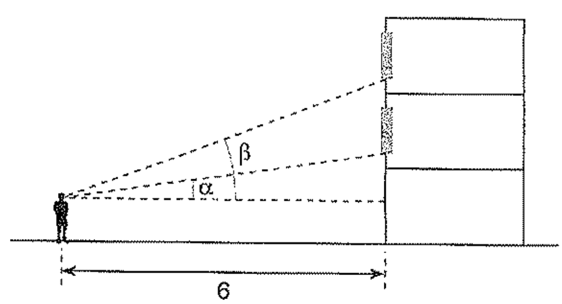
Se $tg\ \alpha = \dfrac{5}{2}$ e $tg\ \beta = \dfrac{3}{4}$, qual é a distância do barco à praia?

Resolução:
A distância é igual a 150 m.

$$tg\ \alpha = \frac{d}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{2d}{5}$$
$$tg\beta = \frac{d}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{4d}{3}$$

Como x+y =260, temos:

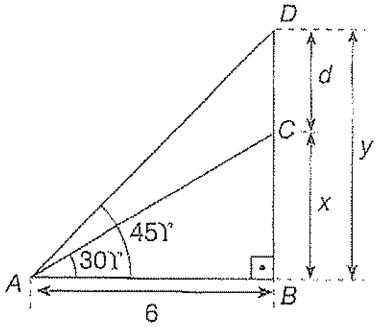
02 (UFC-CE) Parada a uma distância de 6 m de um prédio, uma pessoa observa os parapeitos de duas janelas, respectivamente sob os ângulos $\alpha = 30°$ e $\beta = 45°$, conforme a figura a seguir:



Considerando $\sqrt{3}=1,7$ a distância entre os parapeitos das janelas é de:

a) 2,4 m
b) 2,6 m
c) 2,8 m
d) 3,0 m
e) 3,4 m

Resolução:



$\cdot\ \Delta ABC : tg\ 30° = \dfrac{x}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \therefore x = 2\sqrt{3}$

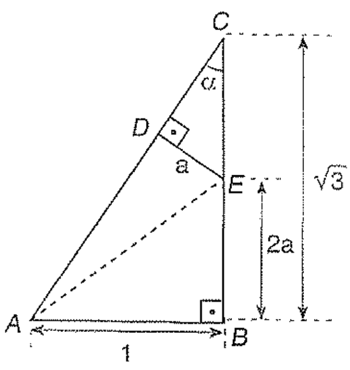
Ou seja, $x = 2.1,7 \Rightarrow x = 3,4\ m$

$\cdot\ \Delta ABD : tg\ 45° = \dfrac{y}{6} = 1 \therefore y = 6\ m$

Por fim,

$d = 6\ m - 3,4\ m \therefore d = 2,6\ m$

03 (Fuvest-SP) Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, $BC = \sqrt{3}$ e BE = 2DE. Logo, a medida de $\overline{AE}$ é:



a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Resolução:

$\cdot\ \Delta ABC : tg\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \therefore \alpha = 30°$

$\cdot\ \Delta CDE : sen\ \alpha = \dfrac{a}{EC} \Rightarrow sen\ 30° \dfrac{a}{EC} = \dfrac{1}{2} \therefore EC = 2a$

Logo, EC= BE, isto é, E é o ponto médio de $\overline{BC}$. Portanto,

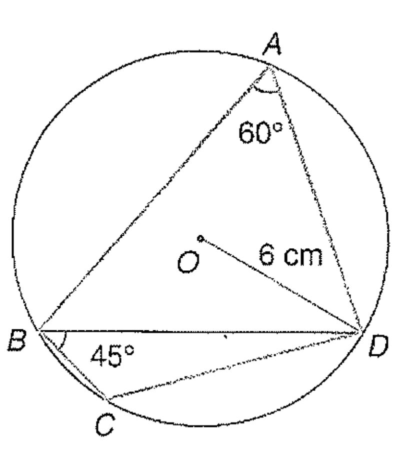
$BC = \sqrt{3} \Rightarrow BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Por fim, no triângulo ABE, temos

$(AE)^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$(AE)^2 = \dfrac{7}{4} \therefore AE = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

04 A figura abaixo mostra um quadrilátero inscrito numa circunferência de raio R= 6 cm. Se Â= 60° e $C\hat{B}D = 45°$, calcule BD e CD.



Curso Preparatório CIDADE

Resolução:

A circunferência circunscrita ao quadrilátero é também a circunferência circunscrita aos triângulos ABC e BCD. Então, pela lei dos cossenos, temos:

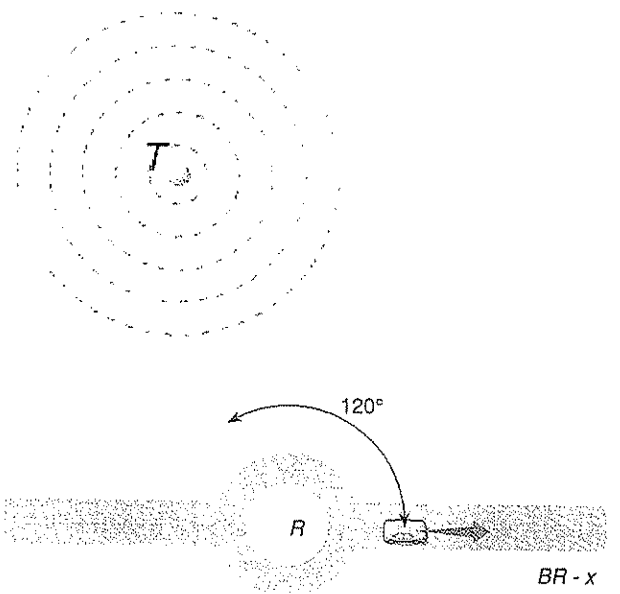
ΔABD:

$$\frac{BD}{sen\ 60^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{BD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12 \Rightarrow BD = 6\sqrt{3}\ cm$$

ΔBCD:

$$\frac{CD}{sen\ 45^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{CD}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12 \Rightarrow CD = 6\sqrt{2}\ cm$$

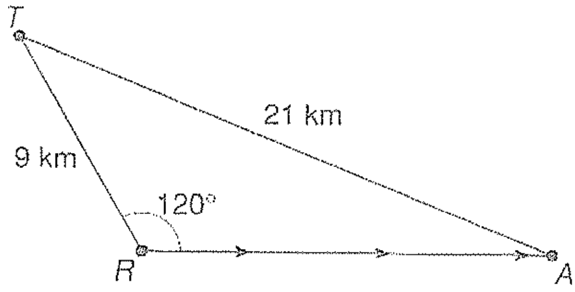
05 A figura a seguir mostra um trecho da planta de uma cidade. No ponto T, há uma torre de transmissão da rádio Lúpus, que pode ser captada com nitidez num raio de 21 km. Um automóvel segue pela rodovia BR-x, no sentido indicado, e sintoniza a rádio Lúpus no momento em que passa pela rotatória situada em R. A distância TR é igual a 9 km e a rodovia pode ser considerada retilínea.



Qual é a distância, a partir de R, que o automóvel pode percorrer sintonizando com nitidez a rádio Lúpus?

a) 13 km
b) 14 km
c) 15 km
d) 16 km
e)17 km

Resolução:



$$21^2 = d^2 + 9^2 - 2.d.9.\cos 120^\circ$$

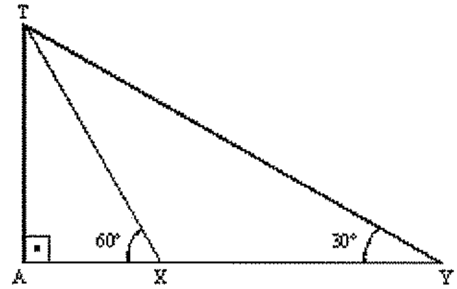
$$441 = d^2 + 81 - 18.d.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore d^2 + 9d - 360 = 0 \begin{cases} d = 15 \\ ou \\ d = -24 (não convém) \end{cases}$$

$$d = 15\ km$$

Exercícios de Sala

01 **(PUC)** Em uma rua plana, uma torre AT é vista por dois observadores X e Y sob ângulos de 30° e 60° com a horizontal, como mostra a figura abaixo:



Se a distância entre os observadores é de 40m, qual é aproximadamente a altura da torre? (Se necessário, utilize $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$).

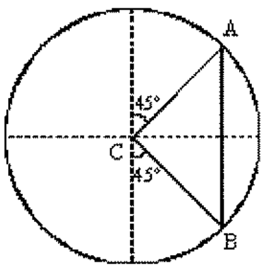
a)30m
b)32m
c)34m
d)36m
e)38m

Curso Preparatório CIDADE

02 **(PUC MG)** Quando $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$, a igualdade $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{m\sqrt{2}}{9}$ é verdadeira. Nessas condições, o valor de m é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

03 **(PUC MG)** Na figura, o raio da circunferência mede r. A função f que expressa a medida da área do triângulo de vértices A, B e C em função de r é:



a) $f(r) = \frac{1}{4}r^2$

b) $f(r) = \frac{1}{3}r^2$

c) $f(r) = \frac{1}{2}r^2$

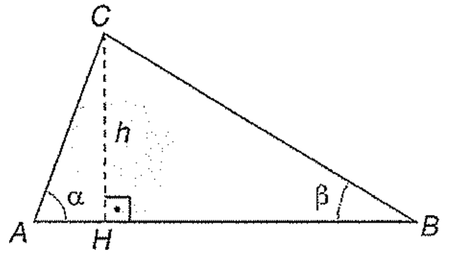
d) $f(r) = r^2$

e) $f(r) = 2r^2$

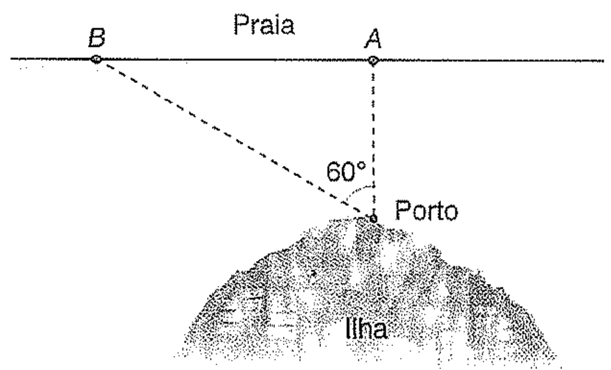
04 Se α e β são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então a expressão $\frac{sen^2\alpha + \cos^2\beta}{sen\,\alpha\cos\beta}$ equivale a:

a) 1
b) 2
c) $sen\,\alpha + sen\beta$
d) $sen\,\alpha - sen\beta$
e) $\frac{sen\,\alpha}{\cos\beta}$

05 Calcule a altura h do triângulo ABC, sabendo que AB = 20, $tg\ \alpha = \frac{3}{4}$, $tg\ \beta = \frac{1}{2}$.



06 Uma lancha parte de um ponto situado numa ilha e segue uma trajetória retilínea e perpendicular à praia, dirigindo-se a um ponto A da mesma. Ela navega à velocidade constante de 20 km/h e leva 15 min para chegar ao seu destino. Uma segunda lancha parte do mesmo porto e segue também uma trajetória retilínea, a qual forma um ângulo de 60° com a que a primeira lancha percorreu (veja a figura). A segunda chega a um ponto B da praia após 20 min da partida. Nesse trcho, a praia pode ser considerada retilínea.



Calcule:

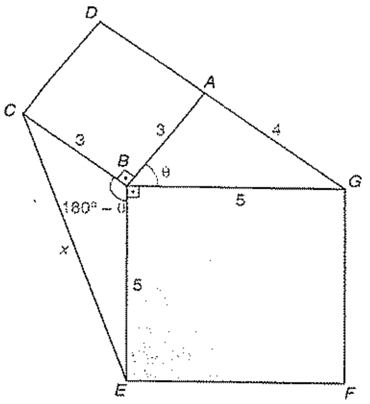
a) a distância percorrida pela primeira lancha.
b) a distância entre A e B.
c) a velocidade média da segunda lancha.

07 Num triângulo ABC, tem-se AB = 6 cm, $BC = 6\sqrt{3}\ cm$ e $\hat{C} = 30°$. Pode-se concluir corretamente que ABC é:

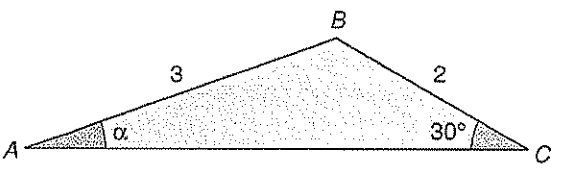
a) retângulo.
b) acutângulo.
c) isóceles.
d) retângulo ou isóseles.
e) acutângulo ou retângulo.

08 O triângulo ABG desta figura é retângulo em A, AB = 3 cm, AG = 4 cm e BG = 5 cm.

Além disso, ABCD e BEFG são quadrados. Calcule CE.



09 (UFRS) Na figura, AB = 3 e BC = 2. A cossec α é:



a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

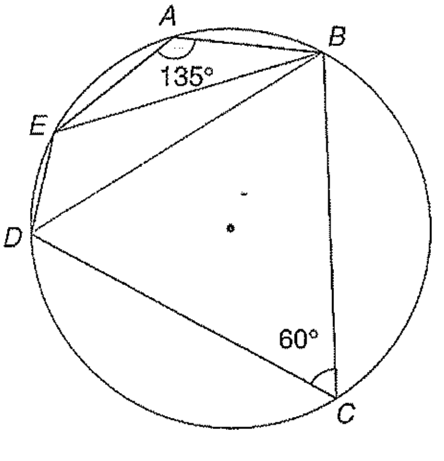
b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) 2

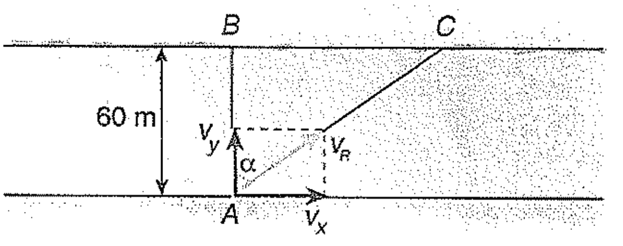
e) 3

10 O pentágono ABCDE da figura seguinte está inscrito na circunferência. Calcule o comprimento da diagonal BE, sabendo que $BD = 5\sqrt{3}\ cm$, A = 135 $\hat{C} = 60°$



Exercícios de Casa

01 (Unesp) Um rio de largura 60 m, cuja velocidade da correnteza é $v_x = 5\sqrt{3}\ m/s$, é atravessado por um barco, de velocidade $v_y = 5\ m/s$, perpendicular às margens do rio, conforme a figura.



O ângulo α do movimento em relação à perpendicular da correnteza, a velocidade resultante V_R e a distância CB do ponto de chegada em relação ao ponto onde o barco chegaria caso não houvesse correnteza são, respectivamente:

a) 30°, 5 m/s, $20\sqrt{3}\ m/s$.

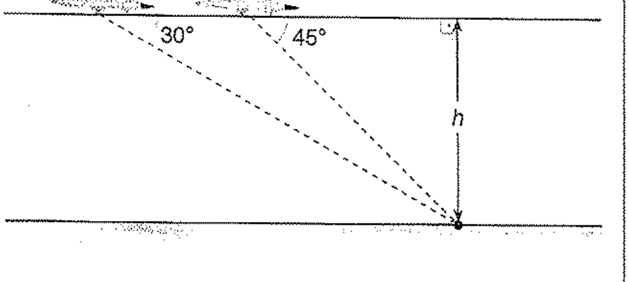
b) 30°, 5 m/s, $60\sqrt{3}\ m/s$.

c) 45°, $10\sqrt{3}\ m/s$, $60\sqrt{3}\ m/s$.

d) 60°, 10 m/s, $60\sqrt{3}\ m/s$.

e) 60°, $10\sqrt{3}\ m/s$, $60\sqrt{2}\ m/s$.

02 (UFPB) Um caça localiza, por meio de seu radar, um alvo no solo que forma um ângulo de visão de 30° com a horizontal. Passados 2,5 segundos, o piloto do caça nota que este ângulo passa para 45°.



Considerando constantes a altura e a velocidade, a que altura está o caça se sua velocidade é de 400 m/s?

a) $500\left(\sqrt{3}+1\right)m$

b) $600\left(\sqrt{3}-1\right)m$

c) $750\sqrt{3}\ m$

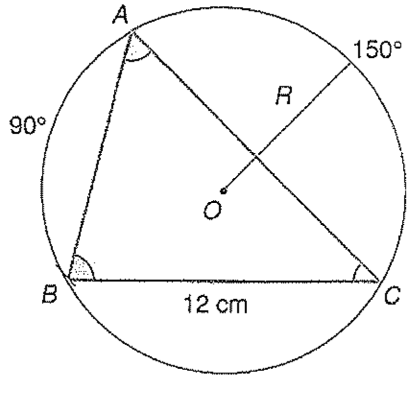
d) 1.500 m

e) 2.000 m

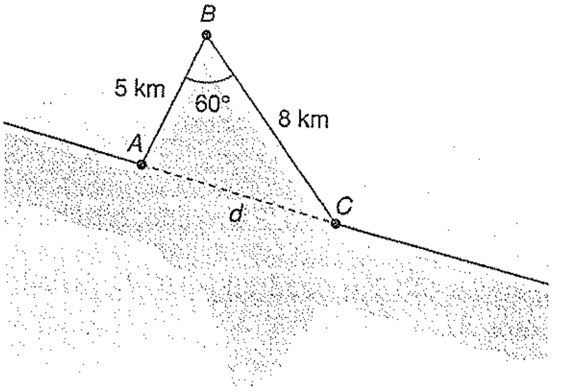
03 (Unesp) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30°. Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45°. A altura aproximada da torre, em metros, é:

a) 44,7
b) 48,8
c) 54,6
d) 60,0
e) 65,3

04 ABC é um triângulo inscrito numa circunferência de raio R. Se $\widehat{AB}=90°$, $\widehat{AC}=150°$ e $\widehat{BC}=12\ cm$, calcule AB e R.



05 As águas de um rio alagam uma região, como mostra a figura seguinte. Cortornando as águas por uma trilha pela margem esquerda, percorrem-se 5 km no trecho AB e 8 km em BC, sendo $A\hat{B}C=60°$.



Com uma lancha percorre-se a distância AC, em linha reta, que equivale a:

a) 5 km
b) 6 km
c) 7 km
d) 9 km
e)10 km

06 Os quadrados Q_1 e Q_2 da figura ao lado têm Áreas iguais a $8\ cm^2$ e $16cm^2$, respectivamente. A área do quadrado Q_3 é:

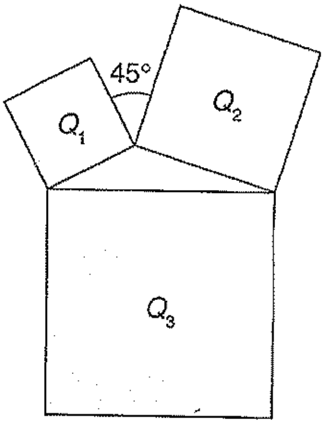
a) $24\ cm^2$

b) $28\ cm^2$

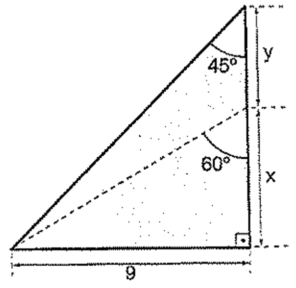
c) $32\ cm^2$

d) $36\ cm^2$

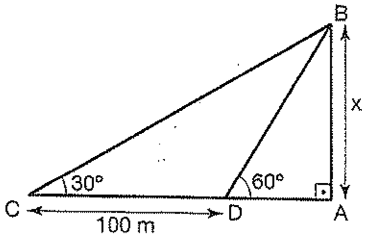
e) $40\ cm^2$



07 Calcule x e y da figura a seguir.

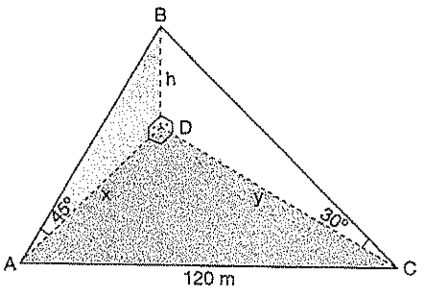


08 Calcule o valor de x, indicado na figura a seguir.



09 Para calcular a altura de uma montanha B desde um plano horizontal que passa por A, um observador mede o ângulo α = 45°, se desloca depois para C, distante 120 m de A,obtendo o ângulo β = 30°.

Calcule a altura h da montanha.



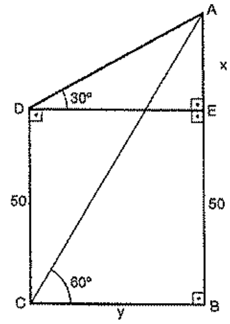
10 (Unicamp) Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto A a um ponto B, cobrindo a distância AB = 1200 m. Quando em A, ele avista um navio parado em N de tal maneira que o ângulo NÂB é de 60°; quando em B, verifica que o ângulo N$\hat{B}$A é de 45°.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

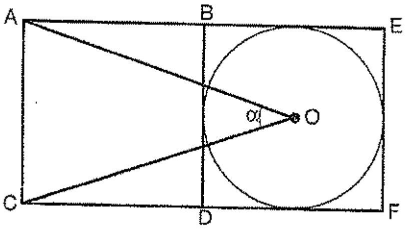
b) Calcule a distância a que se encontra o navio da praia.

11 Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandande, quando o navio está em A, observa um farol L e calcula o ângulo $L\hat{A}C$ =30°. Após navegar 4 milhas até B, verifica que o ângulo $L\hat{B}C$ = 75°. Quantas milhas separam o farol do ponto B?

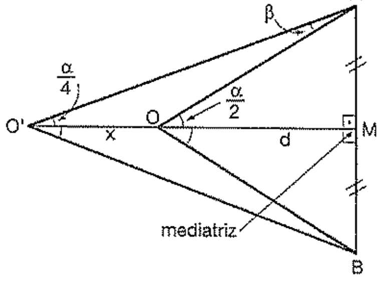
12 Determine o valor de $\overline{AB}$, indicado na figura ao lado.



13 Na figura a seguir os quadrados ABDC e ABEFD são iguais e a circunferência de centro O está inscrita no quadrado BEFD. Calcule o valor da tg α.



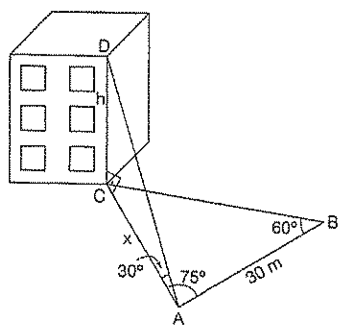
14 Um observador O, na mediatriz de um segmento $\overline{AB}$, vê esse segmento sob um ângulo α. O observador afasta-se do segmento ao longo da mediatriz até uma nova posição O', de onde ele vê o segmento sob o ângulo $\frac{\alpha}{2}$. Expresse a distância x = OO' em termo de α e d.



15 No triângulo ABC, reto em A, os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $2 + \sqrt{3}$ e 1, respectivamente. Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$. Calcule tg ($\alpha + \beta$), onde α e β são, respectivamente, as medidas dos ângulos $A\hat{D}C$ e $A\hat{B}C$.

16 O ângulo sob o qual um observador vê uma torre duplica quando ele se aproxima 110 m e triplica quando se aproxima mais 50 m. Determine a altura da torre.

17 (UnB) Um observador, situado no ponto A, distante 30 m do ponto B, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura abaixo. Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$.



Dados:

$\overline{AB} = 30m$

$C\hat{A}D = 30°$

$C\hat{A}B = 75°$

$A\hat{B}C = 60°$

$D\hat{C}A = 90°$

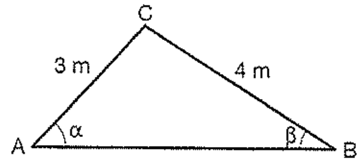
18 Os lodos de um triângulo medem $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $3 + \sqrt{3}$. Determine o ângulo oposto ao lado que mede $\sqrt{6}$.

19 (Unicamp) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa d'água-bomba e caixa d'água-casa é de 60°. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captção até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

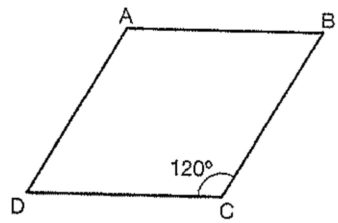
20 Num triângulo ABC temos $\overline{AC} = 3$ m, $\overline{BC} = 4$ m e $\alpha = B\hat{A}C$.

a) Se $\overline{BC} = 3$ m, calcule cos α.

b) Se $\beta = B\hat{A}C$, oposto ao lado $\overline{AC}$, for 60°, calcule sen α.



21 Um terreno tem a forma de figura a seguir, onde os quatro lados têm o mesmo comprimento de 40 m. O proprietário irá cercá-lo com uma cerca de dois fios e tembém irá dividi-lo, construindo outra cercado de dois fios unindo os pontos A e C. Quanto irá gastar de arame?



22 O triângulo isósceles ABC tem área de 36 m² e dois ângulo de medida α, para os quais cos $\alpha = \frac{3}{5}$.

Calcule:
a) o comprimento da base BC;
b) o comprimento da altura relativa a esta base.

23 Num triângulo retângulo ABC os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são agudos. Se a hipotenusa mede 3 cm e sen $\hat{C} = \frac{1}{2}$ sen $\hat{B}$, calcule as medidas dos catetos.

24 As diagonais de um parelegromo medem 10 m e 20 m e formam um ângulo de 60°. Ache a área do paralelogramo.

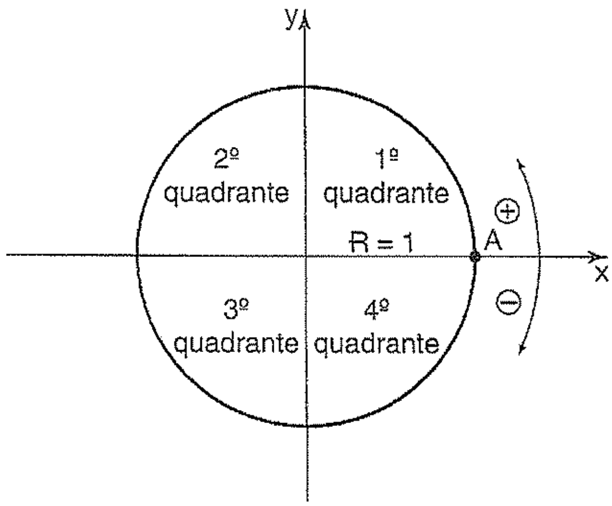
5 Trigonometria 2

Arcos e Ângulos, Ciclo trigonométrico e Relações Circulares no Ciclo

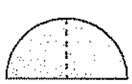
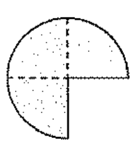
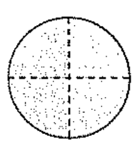
5. Ciclo (círculo) trigonométrico

Denomina-se **ciclo trigonométrico** uma circunferência de raio unitário, sobre a qual marcamos um ponto A (origem), e adotamos um sentido positivo de percurso (anti-horário).

Os eixos x e y dividem o círculo trigonométrico em quatro partes iguais denominados **quadrantes**.



5. 2. Medidas de ângulos e arcos

	Grau (°)	Radiano (rad)
	90	$\frac{\pi}{2}$
	180	π
	270	$\frac{3\pi}{2}$
	360	2π

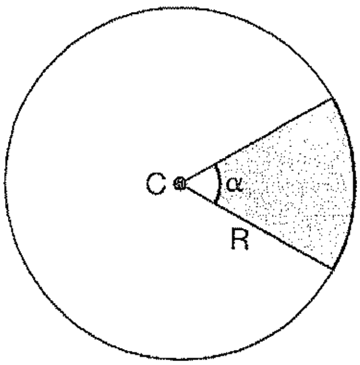
- Sistema sexagesimal: **graus**
- Sistema circular: **radianos**

As convenções entre os sistemas são feitas por meio de uma regra de três, utilizando-se os pares:

$\boxed{\pi\ rad \leftrightarrow 180°}$

3. Comprimento de um arco

Da circunferência da figura, obtemos a relação:



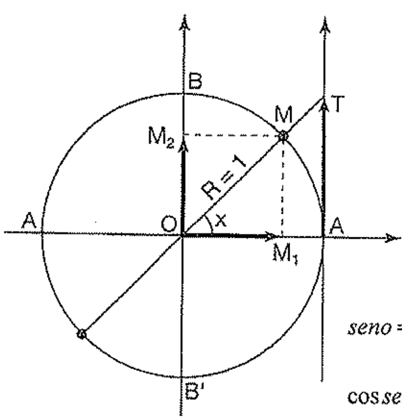
$\alpha = \dfrac{s}{R} \Rightarrow \boxed{s = \alpha R}$

Com α em radianos.

5. 4. Relações trigonométricas

Definições

Do ciclo trigonométrico da figura, definimos:



$$\boxed{\begin{array}{l} sen\ x = \overline{OM_2} \\ \cos x = \overline{OM_1} \\ tg\ x = \overline{AT} \end{array}}$$

Observação:

$$seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$\cos seno = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$\tan gente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Exercícios Comentados

01 Um ciclista utiliza nos seus treinos uma pista circular de raio igual a 100 m. Calcule:

a) o comprimento aproximado da pista em metros.

Resolução:

$C = 2\pi.R = 2\pi.100 = 200\pi$

$C \simeq 200.3{,}14 \cong 628\ m$

b) O comprimento aproximado em metros de um arco de $\dfrac{2\pi}{5} radianos$.

Resolução:

$\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\ell}{100} \Leftrightarrow \ell = \dfrac{100.2\pi}{5}$

$\ell = 40\pi\ m$

$\ell \simeq 125{,}6\ m$

c) O número de voltas completas que deve percorrer para atingir uma distância superior a 10 km. Adote $\pi \cong 3{,}14$.

Resolução:

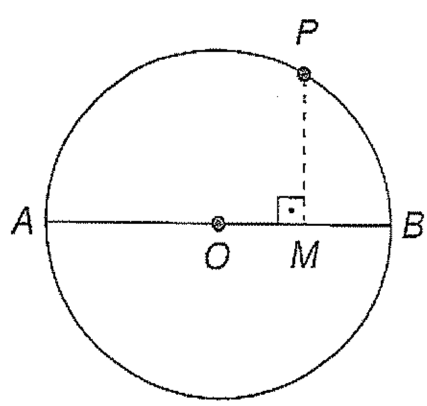
A cada volta são 628 m (aproximadamente) sendo n o número de voltas.

$n.628 > 10.000$

$n > 15{,}9$

Portanto, deve dar 16 voltas completas, no mínimo.

02 Na figura, temos uma circunferência de centro O e raio r= 10 cm. Se M é o ponto médio de OB, qual é o comprimento do arco AP, em centímetros?



$$\cos\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\left(sendo\ 0 < \alpha < 90°\right)$$
$$\alpha = 60°$$
$$P\hat{O}A = 180° - \alpha = 120°$$
$$P\hat{O}A = \frac{2\pi}{3} rad$$
$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\overparen{AP}}{10} \therefore \overparen{AP} = \frac{20\pi}{3} cm$$
$$resposta: \overparen{AP} = \frac{20\pi}{3} cm$$

03 Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2h e 18 min?

Resolução:

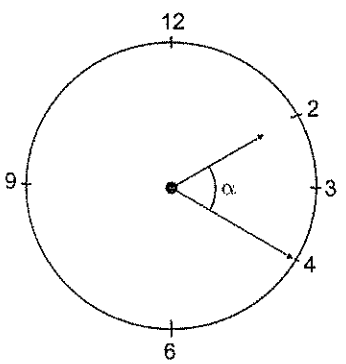
Nos 18 min decorridos entre 2 h e 2h e 18 min o ponteiro das horas percorre um ângulo de 9°.

30° em 60 min

9° em 18 min

Da figura, tiramos:

$$9° + \alpha + \overbrace{12°}^{2\,min} = 60°$$
$$\therefore \alpha = 39°$$
$$resposta: 39°$$



04 (Uece) Se $n = \dfrac{\frac{1}{2} sen\frac{\pi}{6} + \left(1 - sen\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6} - \left(1 - sen\frac{\pi}{3}\right) sen\frac{\pi}{6}}$ en-

tão $n^2 + 1$ é igual a:

a) 2

b) $\dfrac{7}{3}$

c) 4

d) $\dfrac{19}{3}$

Resolução:
$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{1}{2}} \qquad n = \frac{\frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}-3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$n = \frac{\frac{1}{4} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right).\frac{1}{2}} \qquad n = \frac{2\sqrt{3}-2}{4}.\frac{4}{2\sqrt{3}-2}$$

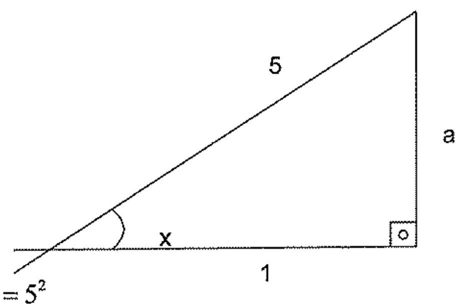
$$n = 1$$

Logo, $n^2 + 1 = 2$

$resposta: A$

05 Sabendo-se que $\cos x = \dfrac{1}{5}$, $x \in 4°Q$, calcule $sen\ x + tg\ x - \sec x$.

Resoluçaõ:



$$a^2 + 1^2 = 5^2$$
$$a = 2\sqrt{6}$$
$$sen\ x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$tg\ x = -2\sqrt{6}$$
$$\sec x = 5$$
Logo,
$$-\frac{2\sqrt{6}}{5} - 2\sqrt{6} + 5 = \frac{25 - 11\sqrt{6}}{5}$$

Exercícios de Sala

01 (PUC-MG) Ao projetar muito altos, os engenheiros devem ter em mente o mevimento da oscilação, que é típico de estruturas de arranha-céus. Se o ponto mais alto de um edifício de 400 m descreve em arco de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$, a medida do arco descrito por esse ponto, em metros, é:

a) π

b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{4\pi}{3}$

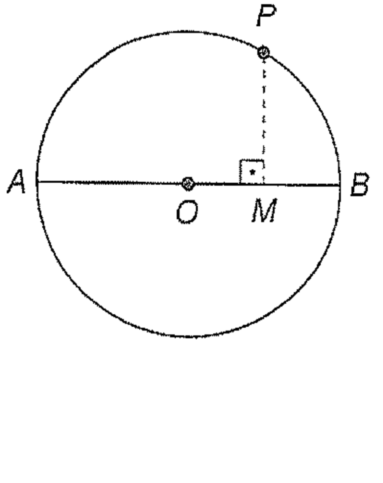
d) $\frac{10\pi}{9}$

e) $\frac{11\pi}{10}$

02 (Fuvest-SP) Quantos graus mede aproximadamente um ângulo de 0,105 rad?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

03 Na figura, temos uma circunferência de centro O e raio r = 10 cm. Se M é o ponto médio de OB, Qual é o comprimento do arco AP, em centímetros?



04 (Fuvest-SP) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

a) 27°
b) 30°
c) 36°
d) 42°
e) 72°

05 (Faap-SP) Dois ciclistas percorrem, no mesmo sentido, uma pista circular de 50 m de diâmetro. A cada volta, o primeiro percorre 2,5 m a mais que o segundo. Supondo que mantenham o mesmo ritmo, após quantas voltas o primeiro ciclista terá percorrido 1 radiano a mais do que o segundo?

a) 20
b) 15
c) 10
d) 5
e) 2,5

06 (UFJF-MG) Um ângulo do segundo quadrante tem seno igual a $\frac{12}{13}$. O cosseno desse ângulo é igual a:

a) $\frac{5}{13}$

b) $\frac{1}{13}$

c) $-\frac{5}{13}$

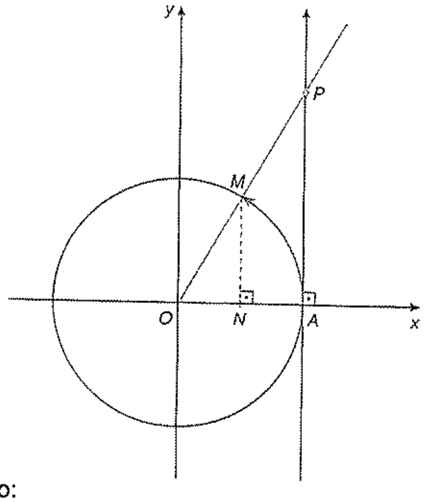
d) $-\frac{1}{13}$

e) $-\frac{12}{13}$

07 (PUC-SP) Na sequência de termo geral $a_n = 5n + sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, com $n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos 20 primeiros termos de ordem ímpar é igual a:

a) 1.800
b) 1.874
c) 1.896
d) 2.000
e) 2.024

08 (Fatec-SP) Na circunferência trigonométrica abaixo considere o arco AM, de medida $\frac{\pi}{3}$ radianos.



Então:

a) AP = 1
b) $MN = \sqrt{3}$
c) $ON = \sqrt{2}$
d) $AN = \frac{1}{3}$
e) OP = 2

09 (Mackenzie-SP) Se cotg x = 2 e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então seu x vale:

a) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
c) $\sqrt{5}$
d) $2\sqrt{5}$
e) $3\sqrt{5}$

10 (UFF-RJ) Para $\theta = 89°$, conclui-se corretamente que:

a) $tg\ \theta < sen\ \theta < \cos\theta$
b) $\cos\theta < sen\ \theta < tg\ \theta$
c) $sen\ \theta < \cos\ \theta < tg\ \theta$
d) $\cos\ \theta < tg\ \theta < sen\ \theta$
e) $sen\ \theta < tg\ \theta < \cos\ \theta$

Exercícios de Casa

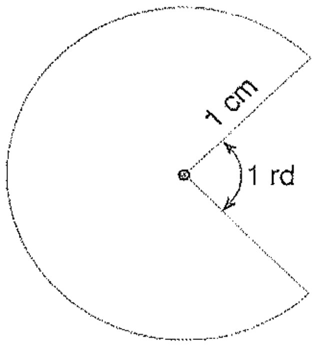
01 (Cesgranrio-RJ) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km sobre uma pista circular de raio 200 m. O número aproximado de voltas que ele deve dar é:

a) 100
b) 200
c) 300
d) 400
e) 500

02 (UFPA) Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio de 50 minutos.

a) $\frac{16\pi}{9}$
b) $\frac{5\pi}{3}$
c) $\frac{4\pi}{3}$
d) $\frac{4\pi}{2}$
e) $\frac{3\pi}{3}$

03 (Vunesp) Em um jogo eletrônico o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro" e o ângulo de abertura mede 1 radiano.



O perímetro do "monstro" em cm é:

a) $\pi - 1$
b) $\pi + 1$
c) $2\pi - 1$
d) 2π
e) $2\pi + 1$

04 (Fuvest-SP) O perímetro de um setor circular de raio r e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado r. Então α é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$
b) 2
c) 1
d) $\frac{2\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{2}$

05 (UFC-CE) Um relógio marca que faltam 15 minutos para as duas horas. Então, o ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos mede:

a) 142°30'
b) 150°
c) 157°30'
d) 135°
e) 127°30'

06 (UFRGS-RS) Os ponteiros de um relógio marcam duas horas e vinte minutos. O ângulo entre os ponteiros é:

a) 45°
b) 50°
c) 55°
d) 60°
e) 65°

07 (Unifor-CE) Em uma circunferência de raio 6 cm, um ângulo central de medida 15°, determina um arco cujo comprimento em centímetros é aproximadamente:

a) 1,75
b) 1,68
c) 1,57
d) 1,05
e) 0,78

08 (UEL-PR) Seja x um número real pertencente ao intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ se $\sec x = \frac{3}{2}$, então tg x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

09 (Vunesp) Se $\cos x . sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{3} e\ tg\ x = \sqrt{2}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine o único valor de:

a) cos x
b) sen x + cos x

10 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio que marca 13h 15 min.

11 Determine a extremidade do arco de medida:

a) 800°
b) -01150°
c) $\frac{25\pi}{4} rad$
d) $-\frac{9\pi}{2} rad$

12 Represente no ciclo trigonométrico as extremidade dos arcos de medidas expressas em radianos por:

$$x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}, K\in\mathbb{Z}$$

13 Numa circunferência de raio igual a 18 cm, qual o comprimento de um arco determinado por um ângulo central de 120°?

14 **(MACK SP)** Num retângulo de lados 1 cm e 3 cm, o seno do menor ângulo formado pelas diagonais é:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{2}{3}$

15 **(MACK SP)** I. cos 225° < cos 215°

II. $tg\frac{5\pi}{12}>\text{sen}\frac{5\pi}{12}$

III. sen 160° > sen 172°

Das afirmações acima:

a)todas são verdadeiras
b)todas são falsas
c)somente II e III são verdadeiras
d)somente II é verdadeira
e)somente I e II são verdadeiras

16 **(EsPCEx)** Sendo $sen\alpha=3\cos\alpha$ e $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, o valor de $\text{cossec}\,\alpha$ é:

a) $\frac{-\sqrt{10}}{3}$

b) $\frac{-\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{-3\sqrt{10}}{10}$

d) $\sqrt{10}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

17 **(EsPCEx)** O valor de $sen\frac{53\pi}{6}$ é igual ao de:

a) $\cos 225°$

b) $\cos 150°$

c) $\cos 60°$

d) $sen 210°$

e) $sen 120°$

18 **(EsPCEx)** Os catetos de um triângulo retângulo medem $sen\varphi$ e $\cos\varphi$, respectivamente. Se o perímetro do triângulo vale $1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, o menor ângulo do triângulo mede:

a)15°
b)25°
c)30°
d)22°30'
e) 27°30'

19 **(EsPCEx)** O número de arcos existentes entre 0° e 1560° cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

20 **(EsPCEx)** Se y é a medida de um ângulo $0°<y<30°$, o maior dentre os números $sen\,y$, $\cos y$, $sen^2 y$, $\cos^2 y$ e $sen\,y\cdot\cos y$ é:

a) $sen\,y$

b) $\cos y$

c) $sen^2 y$

d) $\cos^2 y$

e) $sen\,y\cdot\cos y$

21 **(EsPCEx)** Se $sen\alpha=\frac{5}{13}$ e $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$, então o valor de $tg\alpha$ é igual a:

a) $-\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{12}{13}$

d) $\frac{12}{5}$

e) $-\frac{12}{13}$

22 **(EsPCEx)** São arcos côngruos:

a) -730° e $-\frac{\pi}{12}rad$

b) 1640° e $-\frac{7\pi}{6}rad$

c) 350° e $-\frac{\pi}{18}rad$

d) 1235° e $\frac{5\pi}{6}rad$

e) -2000° e $\frac{4\pi}{3}rad$

23 **(EsPCEx)** Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w, ambos pertencentes ao 1° quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertence ao intervalo:

a) $[0°, 15°]$

b) $[15°, 30°]$

c) $[30°, 45°]$

d) $[45°, 60°]$

e) $[60°, 90°]$

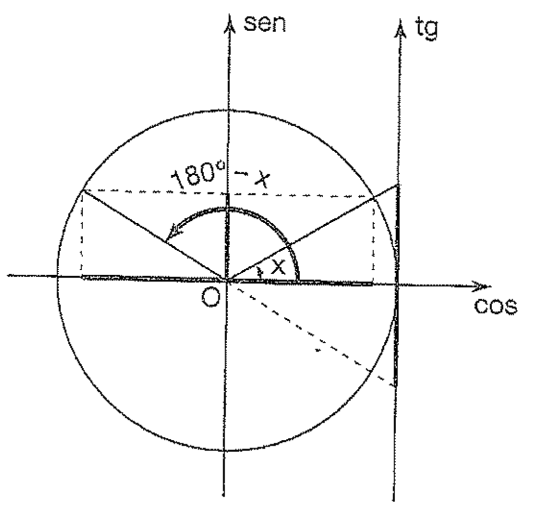
24 **(EsPCEx)** O produto $\cot g\, x \cdot \cos x$ é positivo, portanto x pertence ao:

a) 1° ou 2° quadrantes.
b) 1° ou 4° quadrantes.
c) 2° ou 3° quadrantes.
d) 2° ou 4° quadrantes.
e) 3° ou 4° quadrantes.

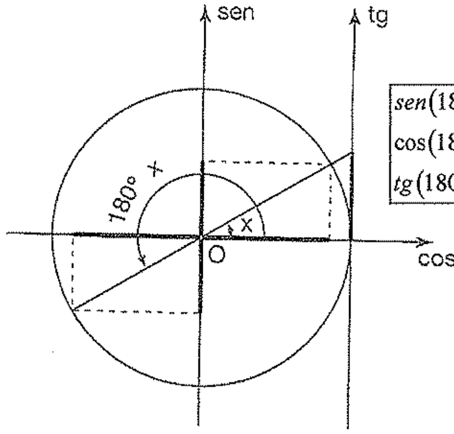
6. Trigonometria 3 Redução ao 1° quadrante, Relações fundamentais e Transformações trigonométricas

6. 1 Redução ao primeiro qradrante

Ângulos suplementares



$$\begin{aligned} sen(180° - x) &= sen\, x \\ \cos(180° - x) &= -\cos x \\ tg(180° - x) &= -tg\, x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} sen(180° + x) &= -sen\, x \\ \cos(180° + x) &= -\cos x \\ tg(180° + x) &= tg\, x \end{aligned}$$

6.2 Relações fundamentais e auxiliares

$$\bullet sen^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\bullet tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$$
$$\bullet cotg\ x = \frac{1}{tgx} = \frac{\cos x}{sen\ x}$$
$$\bullet \sec^2 x = 1 + tg^2 x$$
$$\bullet cossec^2 x = 1 + cotg^2 x$$

6.3 Fórmulas da adição e da subtração

Dados dois arcos a e b, valem para eles as seguintes identidades:

$$sen(a+b) = sen\ a.\cos b + sen\ b.\cos a$$
$$sen(a-b) = sen\ a.\cos b - sen\ b.\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - sen\ a.sen\ b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + sen\ a.sen\ b$$
$$tg(a+b) = \frac{tg\ a + tg\ b}{1 - tg\ a.tg\ b}$$
$$tg(a-b) = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tg\ a.tg\ b}$$

6.4 Arco duplo

$$\cos(2a) = \cos^2 a - sen^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2sen^2 a$$
$$sen(2a) = 2.sen\ a.\cos a$$
$$tg(2a) = \frac{2.tg\ a}{1 - tg^2 a}$$

6.5 Transformação em produto

Dados dois arcos de medidas p e q, valem para eles as seguintes identidades:

$$sen\ p + sen\ q = 2.sen\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$sen\ p - sen\ q = 2.sen\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$
$$\cos p + \cos q = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2.sen\left(\frac{p+q}{2}\right).sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercícios Comentados

01 Sendo dados

$$sen\ \alpha = \frac{12}{13}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\ sen\ \beta = \frac{4}{5}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

calcula:

a) $sen(\alpha+\beta)$

Resolução:

$$sen\ \alpha = \frac{12}{13}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$
$$sen\ \beta = \frac{4}{5}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$
$$\cos^2 \alpha = 1 - sen^2\alpha = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169}$$
$$\cos \alpha = \frac{5}{13}$$
$$sen(\alpha+\beta) = sen\ \alpha.\cos\beta + sen\ \beta.\cos\alpha$$
$$sen(\alpha+\beta) = \frac{12}{13}.\frac{3}{5} + \frac{4}{5}.\frac{5}{13} = \frac{36+20}{65} = \frac{56}{65}$$

b) $\cos(\alpha+\beta)$

Resolução:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\ \alpha.sen\ \beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{5}{13}.\frac{3}{5} - \frac{12}{13}.\frac{4}{5} = -\frac{33}{65}$$

c) $tg(\alpha+\beta)$

Resolução:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha.tg\ \beta}$$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = \frac{12}{5} \\ tg\ \beta = \frac{4}{3} \end{array}\right\} tg(\alpha-\beta) = \frac{\frac{12}{5} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{12}{5}.\frac{4}{3}} = \frac{16}{63}$$

02 Calculando o valor numérico da expressão $E = \dfrac{sen\ 80°.\cos 35° - sen\ 35°.\cos 80°}{sen\ 65°.sen\ 35° + \cos\ 65°.\cos 35°}$ encontramos:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

e) $\dfrac{3}{2}$

Resolução: $E = \dfrac{sen\ 80°.\cos 35° - sen\ 35°.\cos 80°}{sen\ 65°.sen\ 45° + \cos\ 65°.\cos 35°} = \dfrac{sen(80° - 35°)}{\cos(65° - 35°)}$

$$E = \frac{sen\ 45°}{\cos 30°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

03 Seja

$$f(x) = sen\ x + sen\ 2x + sen\ 3x + sen\ 4x + sen\ 5x$$

.Calcule $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Resolução:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\frac{\pi}{3} + sen\frac{2\pi}{3} + sen\frac{3\pi}{3} + sen\frac{4\pi}{3} + sen\frac{5\pi}{3}$$

Considerando que:

$$sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\frac{2\pi}{3} = sen\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sen\frac{\pi}{3}$$

$$sen\frac{3\pi}{3} = sen\ \pi = 0$$

$$sen\frac{4\pi}{3} = sen\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sen\frac{\pi}{3}$$

$$sen\frac{5\pi}{3} = sen\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -sen\frac{\pi}{3}$$

Temos:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\frac{\pi}{3} + sen\frac{\pi}{3} + sen\ \pi - sen\frac{\pi}{3} - sen\frac{\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\ \pi = 0$$

04 Sendo sen x = a, cos (-x) = b com a $\neq$ b, a expressão

$$y=\frac{sen(\pi+x)+\cos(-x)+\cos(2\pi-x)+sen(-x)}{sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$ é igual a:

a) a+b
b) 2a+2b
c) 0
d) $\frac{a+b}{a-b}$
e) 2

Resolução:

$sen(\pi+x)=-sen\ x=-a$ $\quad\cos(2\pi-x)=\cos x=b$

$sen(-x)=-sen\ x=-a$ $\quad\cos(-x)=\cos x=b$

$sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x=b$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sen\ x=a$

substituindo na expressão:

$$y=\frac{-a+b+b-a}{b-a}=\frac{2b-2a}{b-a}=2$$

05 Resolva:

a)Se sen x + cos x = a, calcule sen 2x.

Resolução:

$$sen\ x+\cos x=a$$
$$(sen\ x+\cos x)^2=a^2$$
$$sen^2x+\cos^2x+2\ sen\ x\ .\ \cos x=a^2$$
$$1+sen\ 2x=a^2$$
$$sen\ 2x=a^2-1$$

b)Se $\cos^4 x-sen^4x=b$, calcule cos 2x.

Resolução:

$$\cos^4 x-sen^4x=b$$
$$(\cos^2 x+sen^2x)(\cos^2 x-sen^2x)=b$$
$$1.\cos 2x=b$$

06 Transforme em produto

a) sen 35° + sen 25°

Resolução:

$$2.sen\left(\frac{35+25}{2}\right).\cos\left(\frac{35-25}{2}\right)=$$
$$=2\ sen\ 30°.\cos 5° = \cos 5°$$

b) sen 65° - sen 15°

Resolução:

$$2.sen\left(\frac{65-15}{2}\right).\cos\left(\frac{65+15}{2}\right)=$$
$$=2\ sen\ 25°.\cos 40°$$

c) cos 40° + cos 10°

Resolução:

$$2.\cos\left(\frac{40+10}{2}\right).\cos\left(\frac{40-10}{2}\right)=$$
$$=2\ \cos 25°.\cos 15°$$

d) cos 20° - cos 12°

Resolução:

$$-2.sen\left(\frac{20+12}{2}\right).sen\left(\frac{20-12}{2}\right)=$$
$$=-2\ \text{sen}\ 16°.sen\ 4°$$

Exercícios de Sala

01 Dado $sen\,x=\frac{\sqrt{15}}{4},\frac{\pi}{2}<x<\pi$. Calcule o valor da expressão $\cos^2 x-\cos x$.

02 Determine $m\in\mathbb{R}$ de modo que tenhamos simultaneamente $sen\,x=m\ e\cos x=\frac{m+1}{3}$.

03 (Esan-SP) Simplificando a expressão

$$y=\frac{\cos(2\pi-x).\cos(\pi-x)}{sen(\pi+x).sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

a) $y=\frac{sen\,x}{\cos x}$

b) $y=\frac{\cos x}{sen\,x}$

c) $y=sen\,x.\cos x$

d) $y=sen\,x$

e) $y=\cos x$

04 Calculando $\sum_{i=1}^{5} tg\frac{(\pi i)}{3}$, encontramos:

a) 5
b) 0
c) $5\sqrt{3}$
d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
e) 1

05 (Ufam) Quando simplificamos a expressão $\frac{\cos x}{1+sen\,x}+\frac{1+sen\,x}{\cos x}$, vamos obter:

a) 2 sec x
b) 2 cossec x
c) $2\sec^2 x$
d) 2 cos x
e) cox

06 (UFSCar-SP) O valor da expressão

$$\frac{2-sen^2x}{\cos^2 x}-tg^2x \text{ é:}$$

a) -1
b) -2
c) 2
d) 1
e) 0

07 Se tg x = 3, o valor da expressão $\frac{sen\ 2x}{1+\cos 2x}$ é:

a) 3
b) 2
c) 1
d) 0
e) $\frac{1}{2}$

08 (Ufam) Dado $tg\frac{x}{2}=2$, então tg x é igual a:

a) $-\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{4}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $-\frac{5}{3}$

09 Se $\lambda = sen\ 75° - sen\ 15°$, então λ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

e) 0

10 Simplifique a expressão: $\frac{sen\ 3x - sen\ x}{\cos 3x + \cos x}$

Exercícios de Casa

01 Calcule o valor de x que verifica, simultaneamente, as iguldades:

Sem a = x + 2 a cos a = $\sqrt{1-x^2}$

02 Calcule os valores de m que verificam, simultaneamente, as seguintes igualdades.

a) cos x = $\frac{m-1}{2}$ e cossec x = $\frac{4}{3m+3}$

b) tg y = $\frac{1+m}{2}$ e sec y = $\sqrt{m+2}$

03 (Unirio) As medidas dos ângulos A, B, c e D de um quadrilátero convexo estão em P. A. Sabendo se que o menor ângulo é A = 30°:

a) encontre o maior ângulo;
b) calcule o valor da expressão:

04 Simplifique a expressão: A = $\frac{cec\ x + sen\ x}{\cos\ \sec\ x + \cos\ x}$

05 Sabendo que cosx = $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e 0 ≤ x ≤ $\frac{\pi}{2}$, calcule:

$$A=\frac{sen\ x\cdot\cos x - tg\ x}{1-\text{cossec}\, x}$$

06 (UFSC) Conhecendo o valor de sem x = $\frac{3}{5}$ e $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, Calcule o valor numérico da expressão:

$$\left(\frac{\sec^2 x.\cot gx - \text{cossec}\, x.tgx}{6.sen\ x.\text{cossec}^2 x}\right)^{-1}.$$

Curso Preparatório Cidade
SCLN 113 - Bloco C - Salas 207 / 210 - Tel.: 3340-0433 / 9975-4464 / 8175-4509
www.iic.pro.br / cursocidade@gmail.com

Curso Preparatório CIDADE

07 a) Demonstre a identidade: sec² x . cossec² x = tg² x + cotg²x + 2

b) Demonstre a identidade (tg x - sem x)² + (1 - cós x)² = (sec x - 1)²

08 Calcule o valor da expressão:

sen $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ + 2 cos $\left(\frac{9\pi}{4}\right) - tg\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

09 Calcule:

a) tg 855°

b) sen $\frac{19\pi}{6}$

10 Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\cos(3\pi - x) \cdot sen(3\pi - x) \cdot tg(6\pi - x)}{sen(\pi + x).\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot tg(\pi + x)}$$

11 Sabendo que sen (90° - x) - $\frac{1}{4}$ e que x pertence ao terceiro quadrane, calcule o valor da expressão:

$$\frac{2tg(1260° - x}{\cos(-x) + 4\cos(180° + x)}$$

12 (UFMS) Dado cos x = $\frac{4}{5}$ e 0 < x < $\frac{\pi}{2}$, calcule o valor de y = $12\left(\frac{\sec x - \operatorname{cossec} x}{1 - \cot gx}\right)$.

13 (PUC) Dado sen $\theta = \frac{3}{5} e\ \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ calcule:

a) cos θ

b) sen (θ +30°)

14 Sabendo que cos x = - $\frac{4}{5}$ e π < x < $\frac{3\pi}{2}$, calcule:

a) sen (x - 180°)

b) $\frac{sen\ x + \cos x}{tg^2 x + sec^2 x}$

15 (UEL-PR) Seja x a medida de um arco em radianos. O número real *a* que satisfaz as sentenças $sen\ x = \sqrt{3 - a}\ e \cos x = \frac{a-2}{3}$ é tal que:

a) $a \geq 7$

b) $5 \leq a < 7$

c) $3 \leq a < 5$

d) $0 \leq a < 3$

e) $a < 0$

16 (Fesp-Pe) Se sen x + cos x = a e sen x . cos x = b, podemos afirmar corretamente que:

a) a+b=1

b) $a^2 + b^2 = 1$

c) $a^2 - 2b^2 = 1$

d) $a^2 - 2b = 1$

e) $b^2 - 2a = 1$

17 (FGV-SP) A expressão $\frac{sen^3 x + cox^3 x}{sen\ x + \cos x}$ é igual a:

a) 1

b) sen x + cos x

c) 1 – sen x . cos x

d) 2

e) $\frac{2}{sen\ x}$

18 Se $\sec^2 x + tg\ x = 7$, quais são os possíveis valores para $\cos^2 x$?

19 (PCU-MG) O arco que tem a medida x em radianos é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi\ e\ tg\ x = -\sqrt{2}$. O valor do seno de x é:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

20 (Unifor-CE) Para todo $x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ a expressão $\dfrac{\cos\sec\theta + \cos\theta}{\sec\theta + sen\ \theta}$ é equivalente a:

a) $-\ tg\ \theta$

b) $tg\ \theta$

c) $-\ cotg\ \theta$

d) $cotg\ \theta$

e) $\sec\ \theta .\ tg\ \theta$

21 (Ufla-MG) Sabendo-se que $sen\ x = \dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, o valor de $\dfrac{\cos\sec x - \sec x}{\text{cotg } x - 1}$ é:

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $\dfrac{-3\sqrt{2}}{4}$

d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{2}$

e) 3

22 (Fuvest-SP) Se α é um ângulo tal que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ e $sen\ \alpha = a$, então $tg(\pi - \alpha)$ é igual a:

a) $\dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$

b) $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

d) $\dfrac{-\sqrt{1-a^2}}{a}$

e) $-\dfrac{1+a^2}{a}$

23 (Fuvest-SP) Se α está no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz a equação $sen^4\alpha - \cos^4\alpha = \dfrac{1}{4}$, então o valor de tangente de α é:

a) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

b) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

c) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

d) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

e) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$

24 (Unifor- CE) Se cos $\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = a$, então o valor de sen (3π + x) é:

a) - a

b) $-\dfrac{a}{2}$

c) $-\sqrt{a^2+1}$

d) $\dfrac{a}{2}$

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

25 (Unifesp) A expressão
sen (x - y) cos y + cos (x - y) sen y é equivalente a:

a) sen (2x + y)
b) cos 2x
c) sen x
d) sen 2x
e) cos (2x + 2y)

26 (Uece) Se P = $\dfrac{sen\ 40°}{sen\ 20°} - \dfrac{\cos 40°}{\cos 20°}$ então p² - 1 é igual a:

a) $sen^2\ 20°$
b) $\cos^2 20°$
c) $tg^2\ 20°$
d) $cotg^2\ 20°$

27 (FGV-SP) A expressão sen x - cos x é idêntica a:

a) $\sqrt{2}$ sen $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $2\ sen\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

d) $\sqrt{2}\ sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $\sqrt{3}\ sen\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

28 (UFJF-MG, adaptada) Sendo x + y = 60°, o valor de $(\cos x + \cos y)^2 + (sen\ x - sen\ y)^2$ é:

a) - 2
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

29 (UFPA) Sendo *a* e *b* dois ângulos tais que tg *a* = $\dfrac{1}{2}$ e tg *b* = $\dfrac{1}{3}$, encontre, em graus, o valor de ângulo *a* + *b*.

30 (Mackenzie-SP) Se sec x = 4, com $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ então tg (2x) é igual a:

a) $-\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$

b) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

c) $-\dfrac{2\sqrt{15}}{7}$

d) $\dfrac{\sqrt{15}}{16}$

e) $-\dfrac{\sqrt{15}}{7}$

31 (UEL-PR) Se sen x = $\dfrac{1}{2}$ e x é um arco do 2° quadrante, então cos 2x é igual a:

a) 1

b) $\dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $-\dfrac{1}{2}$

e) $-\dfrac{3}{4}$

32 (Vunesp) Se cos x = *a* para x $\in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ e assumindo que $a \neq 0$ e $a \neq 1$, o valor de tg 2 x é:

a) $\dfrac{2a^2 - 1}{2a\sqrt{1-a^2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

c) $2a\sqrt{1-a^2}$

Curso Preparatório CIDADE

d) $\dfrac{2a\sqrt{1-a^2}}{2a^2-1}$

e) $2a^2-1$

33 (Mackenzie-SP) Se tg $\alpha = 2$, então cos 2 α é igual a:

a) $-\dfrac{3}{5}$

b) $-\dfrac{2}{5}$

c) $-\dfrac{1}{5}$

d) $\dfrac{1}{5}$

e) $\dfrac{2}{5}$

34 (UFF-RJ) Simplificando a expressão $\dfrac{sen3x}{senx} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$, para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, obtém -se:

a) sen x
b) 2
c) 1
d) 0
e) cos x

35 (Mackenzie-SP) O valor de $sen\dfrac{\pi}{12}.\cos\dfrac{23\pi}{12}$ é:

a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{1}{2}$

ESPCEX

36 Se cos 36°= k, $sen^2 42° - sen^2 12°$ é igual a:

a) k
b) – k
c) 2k
d) $\dfrac{k}{2}$

37 (Unifei-SP) Simplificando-se $\dfrac{\cos x - \cos 5x}{sen\ 5x - sen\ x}$ tem-se:

a) tg3 x
b) sen x
c) cos x
d) – tg 3x

38 (Mackenzie-SP) Simplificando-se cos 80° + cos 40° - cos 20° tem-se:

a) 0
b) sen 20°
c) 1
d) $\dfrac{1}{2}$

39 (FGV-SP) Sabendo-se que

$x + y = \dfrac{\pi}{3}$ e $x - y = \dfrac{\pi}{2}$, então, sen x + sen y é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) 1

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{1}{2}$

e) $\sqrt{2}$

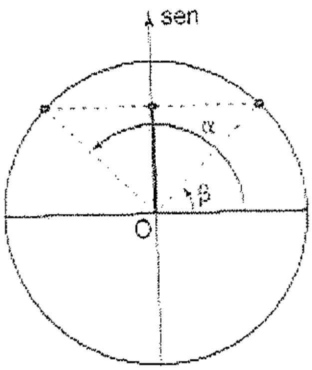
40 (PUC-Campinas) Simplifique:

a) $\dfrac{\cos a - \cos b}{sen\ a - sen\ b}$

b) $\dfrac{\cos 6x - \cos 2x}{sen\ 6x - sen\ 2x}$

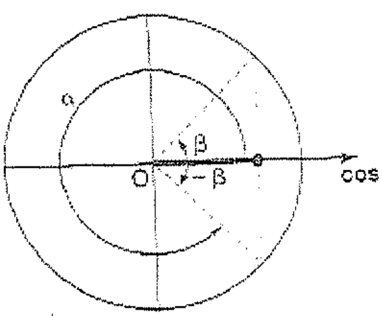
7. Trigonometria 4
Equações e Inequações Trigonométricas

1° Caso: sen α = sen β



$$sen\ \alpha = sen\ \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2K\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2K\pi \end{cases}$$

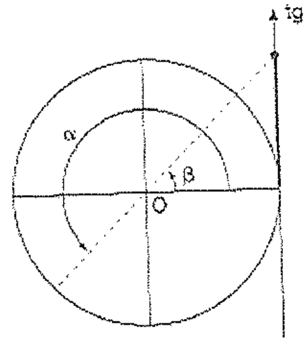
2° Caso: cos α = cos β



$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2K\pi \\ \alpha = -\beta + 2K\pi \end{cases}$$

Observação: $\alpha = 2\pi - \beta = -\beta$

3° Caso: $tg\ \alpha = tg\ \beta$

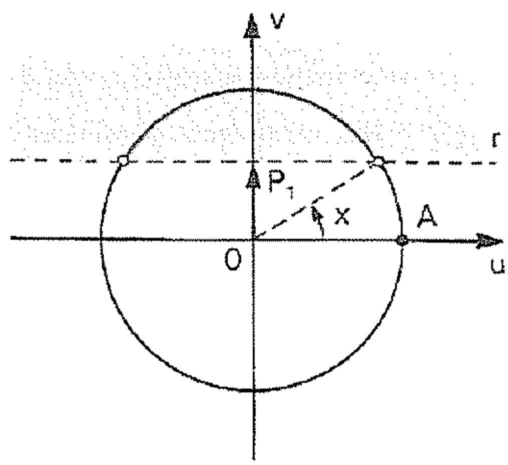


$$tg\alpha = tg\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2K\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2K\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta + K\pi$$

4° Caso: sen x > m

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal que $OP_1 = m$. Traçamos por a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que sen x > m estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de r.

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais x pode pertencer, tomando o cuidado de partir de A e percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.



Exemplo

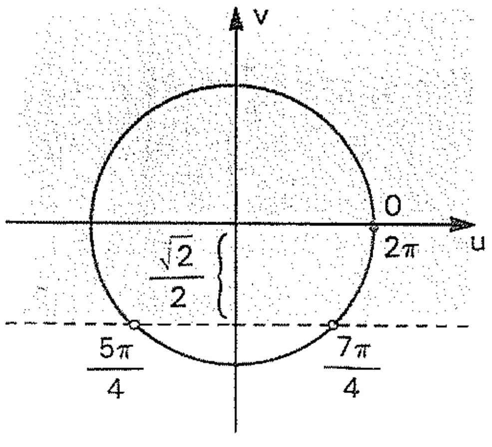
Resolver a inequação $sen\ x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em $\mathbb{R}$:

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2K\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2K\pi$$

ou

$$\frac{7\pi}{4} + 2K\pi < x < 2\pi + 2K\pi$$



$$S=\left\{x\in\mathbb{R} / 0+2K\pi \le x\frac{5\pi}{4}+2K\pi \ ou\ \frac{7\pi}{4}+2K\pi<x<2\pi+2K\pi\right\}$$

Notemos que escrever

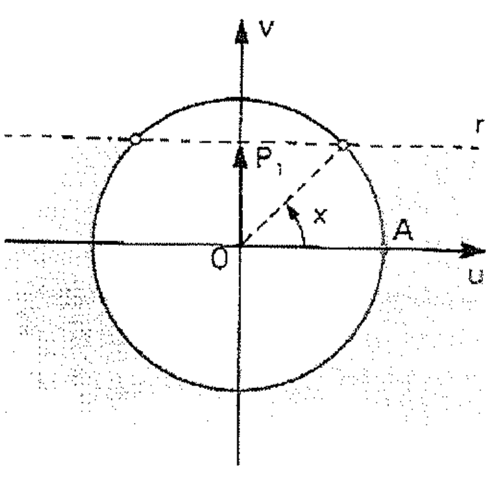
$\frac{7\pi}{4}+2K\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2K\pi$ estaria errado pois,

como $\frac{7\pi}{4}>\frac{5\pi}{4}$, não existe x algum neste intervalo.

5° Caso: sen x < m

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal que $OP_1=m$. Traçamos por a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que sen x < m estão na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de r.

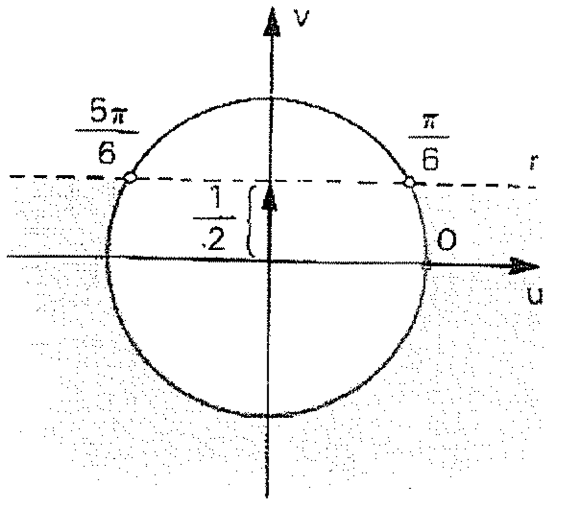
Finalmente, partindo de A e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convém ao problema.



Exemplo

Resolver a inequação $sen\,x<\frac{1}{2}, em\ \mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:



$$0+2K\pi\le x<\frac{\pi}{6}+2K\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6}+2K\pi<x<2\pi+2K\pi$$

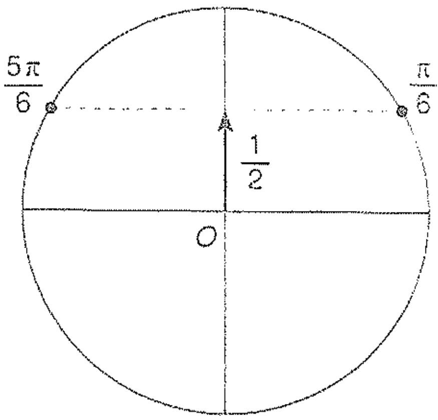
$$S=\left\{x\in\mathbb{R} / 0+2K\pi\le x<\frac{\pi}{6}+2K\pi \ ou\ \frac{5\pi}{6}+2K\pi<x<2\pi+2K\pi\right\}$$

Exercícios Comentados

01 Resolva em $\mathbb{R}$ cada equação:

a) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

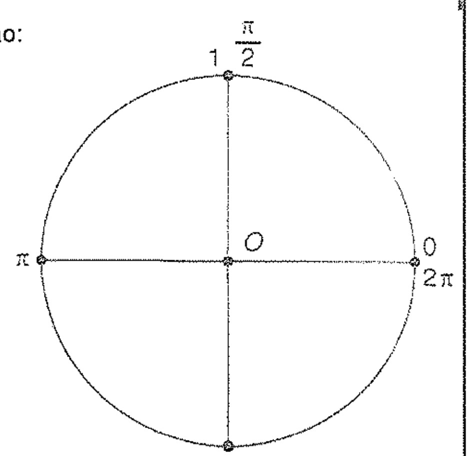
Resolução



$$s = \left\{ x = \frac{\pi}{6} + K2\pi \ ou \ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $sen^2\, x - sen\, x = 0$

Resolução:



$$\text{sen x} \,.\, (\text{sen x} - 1) = 0$$

$$sen\, x = 0 \Rightarrow K\pi$$

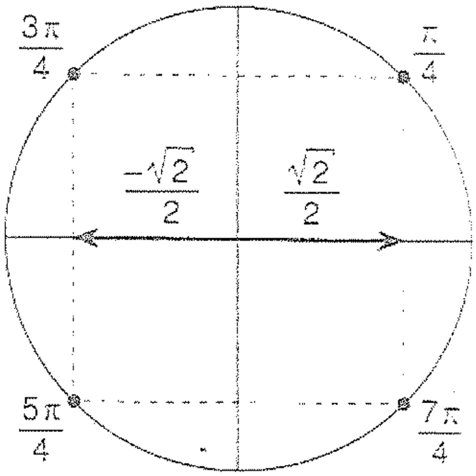
$$\text{sen x} = 0 \text{ ou sen x} = 1$$

$$sen\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + K.2\pi$$

$$S = \left\{ x = K\pi \ oux = \frac{\pi}{2} + K2\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $2.\cos^2 x = 1$

Resolução:



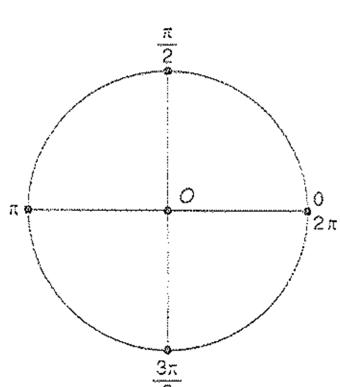
$$2.\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \frac{K\pi}{2}; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

d) $3.\, sen\, x.\cos\, x = 0$

Resolução:



$sen\, x = 0$

ou

$\cos x = 0$

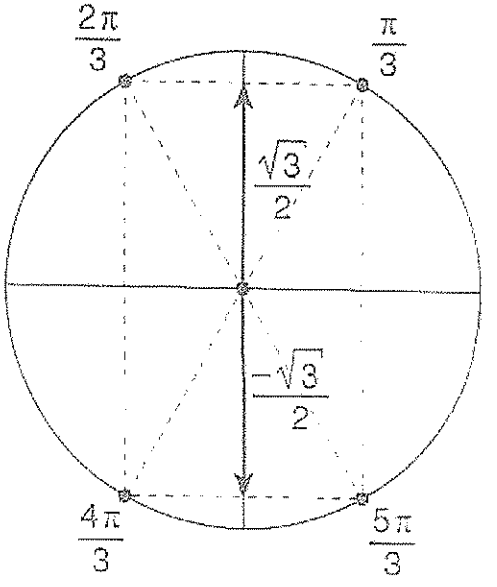
$$x = \frac{K\pi}{2}$$

$$s = \left\{ x = \frac{K\pi}{2}; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

02 Resolver a equação: $\cos 2x = 2.sen^2x - 2$

a)no intervalo $[0,3\pi]$

Resolução:



$$1 - 2.sen^2x = 2.sen^2x - 2$$

$$4.sen^2x = 3$$

$$sen^2x = \frac{3}{4} \Rightarrow sen\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x \in [0,3\pi]$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right\}$$

b) $\mathbb{R}$

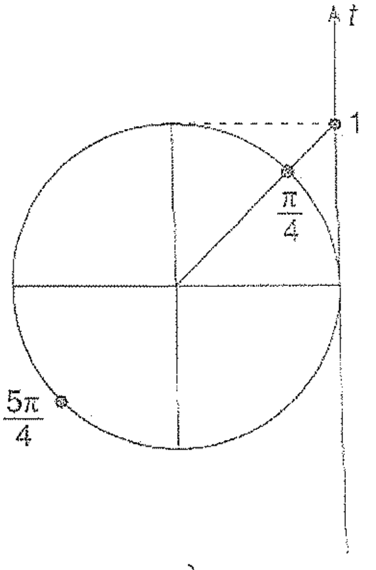
$$x \in \mathbb{R}$$

$$S = \left\{x = \pm\frac{\pi}{3} + K\pi; K \in \mathbb{Z}\right\}$$

03 Resolva em $\mathbb{R}$

a)tg x= 1

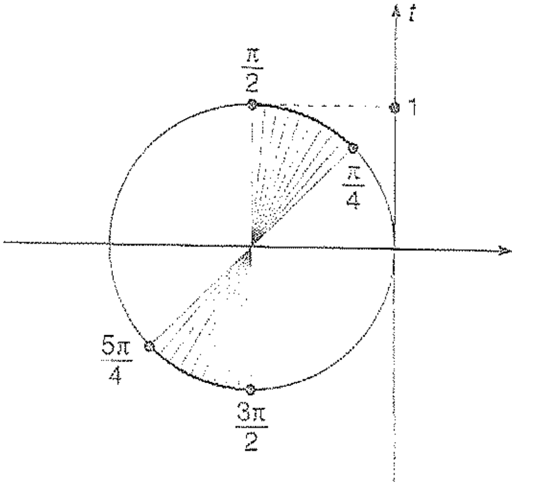
Resolução:



$$S = \left\{x = \frac{\pi}{4} + K\pi; K \in \mathbb{Z}\right\}$$

b)tg x >1

Resolução:



$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + K\pi < x > \frac{\pi}{2}K\pi; K \in \mathbb{Z}\right\}$$

04 Encontrar as soluções reais da equação:

a) $sen\,x+\sqrt{3}\cos x=1$

$$sen\,x+\sqrt{3}\cos x=1(\div 2)$$

$$\frac{1}{2}\cdot sen\,x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\overbrace{\cos\frac{\pi}{3}}\,sen\,x+\overbrace{sen\frac{\pi}{3}}\,\cos x=\frac{1}{2}$$

$$sen\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+K2\pi\rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+K2\pi$$

ou

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+K2\pi\rightarrow x=\frac{\pi}{2}+K2\pi$$

$$S=\left\{x=-\frac{\pi}{6}+K2\pi\ ou\ x=\frac{\pi}{2}+K2\pi, K\in\mathbb{Z}\right\}$$

b) $4\cos^2 x\,sen\,x+2\cos^2 x-2sen\,x-1=0$ para $x\in[-\pi,\pi]$

$$4\cos^2 x\,sen\,x+2\cos^2 x-2sen\,x-1=0$$

$$2\cos^2 x(2sen\,x+1)-(2sen\,x+1)=0$$

$$(2sen\,x+1).(2\cos^2)x-1=0$$

$$2sen\,x+1=0\Leftrightarrow sen\,x=-\frac{1}{2}$$

ou

$$2\cos^2 x-1=0\Leftrightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

No intervalo $[-\pi,\pi]$

$$S=\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$$

No intervalo $[-\pi,\pi]$

$$S=\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$$

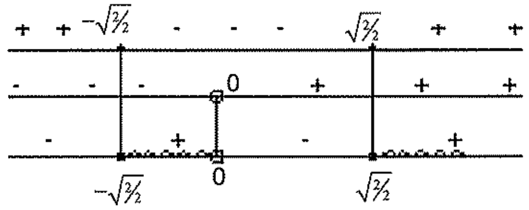
05 Determine o domínio da função real

$f(x)=\sqrt{\dfrac{\cos 2x}{\cos x}}$, em $\mathbb{R}$:

Resolução:

Deve-se ter $\dfrac{\cos 2x}{\cos x}\geq 0$ e $\dfrac{2\cos^2 x-1}{\cos x}\geq 0$. Fazendo $\cos x = a$, $\dfrac{2a^2-1}{a}\geq 0$

Fazendo o quadro de sinais



Logo: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq a<0\ em\ a\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}, ou\ seja, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos x<0(I)$

ou

$\cos x\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}(II)$

Resolvendo (I) obtemos S_1 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2K\pi<x\leq\dfrac{3\pi}{4}+2K\pi\\ \dfrac{5\pi}{4}+2K\pi\leq x<\dfrac{3\pi}{2}+2K\pi\end{cases}$

Resolvendo (II) obtemos S_2 $\begin{cases}2K\pi\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}+2K\pi\\ ou\\ \dfrac{7\pi}{4}+2K\pi\leq x\leq 2\pi+2K\pi\end{cases}$

Como ,

$$S=S_1\cup S_2\ S=\left\{\begin{array}{l}x\in\mathbb{R}\,/\,\dfrac{\pi}{2}+2K\pi<x\leq\dfrac{3\pi}{4}+2K\pi\\ ou\\ \dfrac{5\pi}{4}+2K\pi\leq x<\dfrac{3\pi}{2}+2K\pi\\ ou\\ 2K\pi\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}+2K\pi\\ ou\\ \dfrac{7\pi}{4}+2K\pi\leq x\leq 2\pi+2K\pi\end{array}\right\}$$

Curso Preparatório CIDADE

Exercícios de Sala

01 Resolva em $\mathbb{R}$ cada equação:

a) $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

b) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1$

c) $\text{tg}^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\cdot \text{tg}\, x + \sqrt{3} = 0$

02 No intervalo $[0, 3\pi]$ a soma de todas as soluções da equação $(\text{sen}\, x + \cos x)^2 = 1$ é igual a:

a) 2π

b) $\frac{11\pi}{2}$

c) 7π

d) $\frac{21\pi}{2}$

e) 5π

03 (UFS) No universo $[-2\pi, 2\pi]$, conjunto solução da equação $\text{sen}\, x - \cos x = 0$ é:

a) $\left\{-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

b) $\left\{-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

c) $\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

e) $\left\{-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

ESPCEX

04 (Uece) A soma das soluções da equação $2\cos^2 x - 2\text{sen}^2 x - 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) $\frac{11\pi}{6}$

b) 3π

c) 4π

d) $\frac{23\pi}{6}$

05 (UFPI) O número de solução da equação $\text{sen}^2 x + \cos^2 2x = 1$, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

06 (UFRGS-RS) O conjunto solução da equação $\text{sen}\, x + \cos x = 0$ é:

a) $\left\{k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{2k\pi + \frac{3\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{2k\pi - \frac{3\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{\frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

07 (Unifei-SP) Se $0 < x < 2\pi$ e $\text{sen}\, x > \cos x$, então:

a) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$

d) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$

Curso Preparatório CIDADE

08 (Fuvest-SP)

a) Expresse sen 3α em funçaõ de sen α.
b) Resolva a inequação sen 3α > 2sen α, para 0 < α < π

09 Resolva sen +cos x < 1, x π [0, 2π]

10 Resolva o sistema $\begin{cases} sen\, x > \frac{1}{2} \\ \cos x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, em $\mathbb{R}$.

Exercícios de Casa

01 **(MACK SP)** A soma dos valores inteiros de **k** para que a equação $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \cos x = k - 3$ apresente soluções reais é:

a)7
b)10
c)13
d)15
e)20

02 (FMTM MG) No intervalo [0, 2π], a equação $|\cos x| = \frac{1}{2}$ tem um número de raízes igual a:

a)0.
b)1.
c)2.
d)3.
e)4.

03 **(MACK SP)** Se sen (x + π) = cos (π - x), então x pode ser:

a)π
b) $\frac{\pi}{2}$
c) $\frac{3\pi}{4}$
d) $\frac{5\pi}{4}$
e) $\frac{7\pi}{4}$

04 **(EsPCEx)** Se $sen^4 x = 1 + \cos^2 x$, então x pode pertencer ao intervalo:

a) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
b) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$
c) $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$
d) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$
e) $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

05 **(EsPCEx)** O número de soluções da equação $sen^4 x + cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \leq x < 2\pi$, é:

a)infinito
b) 4
c) 2
d) 1
e) 0

06 Resolva as equações:

a) sen x = $\frac{1}{2}$

b) sen $\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) cos (2x) = -1

07 Sabendo que (2x - y) e (3x + y) são arcos do primeiro quadrante, calcule x e y em graus, de modo que:

$$\begin{cases} sen(2x - y) = \frac{1}{2} \\ tg(3x + y) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

08 Resolva a equação: $sen\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

09 Determine o conjunto-solução da equação: $sen^2 x - 3$ sen x = - 2 no intervalo $0 \le x < 2\pi$

10 (Vunesp) Determine todos os valores de x, $0 \le x \le 2\pi$, para os quais se verifica a iguadade: $(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1$

11 Resolva a equação: 3 tg x - 2 cos x = 0.

12 Resolva a equação: $tg^4 x - 4\, tg^2 x + 3 = 0$ no intervalo $0 \le x < 2\pi$

13 (UFGO) Encontre todos os valores de x tais que: $\log(2^{2\text{sen } x} - 3 \cdot 2^{\text{sen } x} + 3) = 0$

14 Resolva a equação: $cotg^2 (3x) + 4 \cos^2 (3x) = 3$

15 Resolva a equação: sen x = sec x - cos x.

16 Resolva a equação: $\sqrt{1-\cos^2 x} + sen\, x = 1$

17 Determine o conjunto solução da equação: $cossec^2 x - sec^2 x - cotg^2 x - tg^2 x = -2$ no intervalo $[0; 2\pi]$

18 Calcule a e b pertencentes ao intervalo $[0; 2\pi]$, de modo que:

$$\begin{cases} 2sen\, a + 6\cos b = 1 \\ 4sen\, a - 2\cos b = -5 \end{cases}$$

19 Determine o conjunto verdade da equação: cos x + $\sqrt{3}$ sen x = 1

20 Determine no intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, as raízes da equação:
$4(sen^3 x - \cos^3 x) = 5(\text{sen } x - \cos x)$

21 Resolva o sistema: $\begin{cases} sen\, x + sen\, y = \sqrt{2} \\ sen^2 x + sen^2 y = 1 \end{cases}$

22 Resolva a equação: $2\, sen^2 x + |\text{sen } x| - 1 = 0$ no intervalo $0 < x < 2\pi$.

23 Resolva em $\mathbb{R}$

a) $-\frac{1}{2} \le \text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $|\text{sen } x| \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x < - -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $4\cos^2 x < 3$

e) $tg\, x \ge \sqrt{3}$

e) $2\, sen^2\, x < \text{sen } x$

24 Resolva para x $\in [0, 2\pi]$

a) $\cos 2x + \cos x \le -1$

b) $\cos 2x \ge \cos x$

c) $\text{sen } x + \cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\sqrt{3} < tg\, x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$

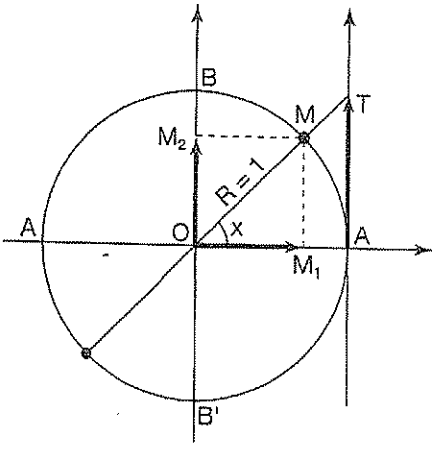
25 Resolva

a) $tg(2x + 30) \le \sqrt{3}$

b) $\cos(3x - 15) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Trigonometria 5
Funções Trigonométricas e Funções Trigonométricas Inversas

Definições: Do ciclo trigonométrica da figura, definimos:



$$\operatorname{sen} x = \overline{OM_2}$$
$$\cos x = \overline{OM_1}$$
$$tg\ x = \overline{AT}$$

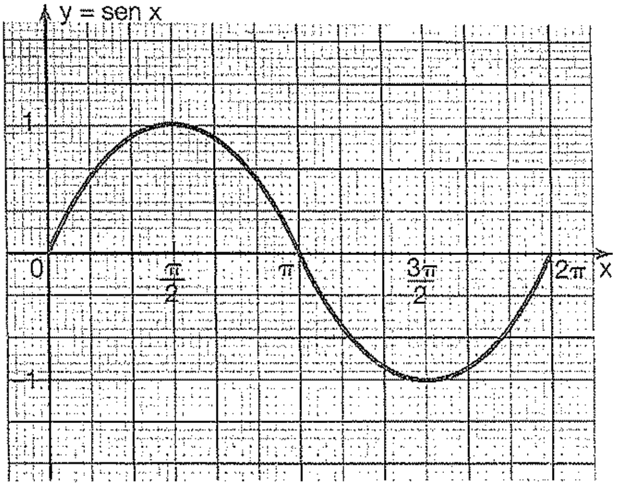
Observação:

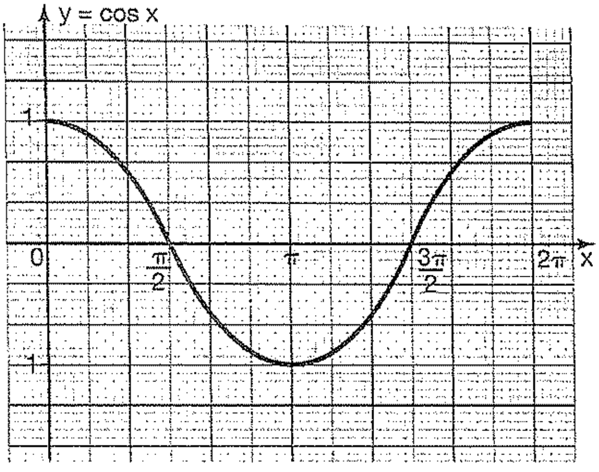
$$seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

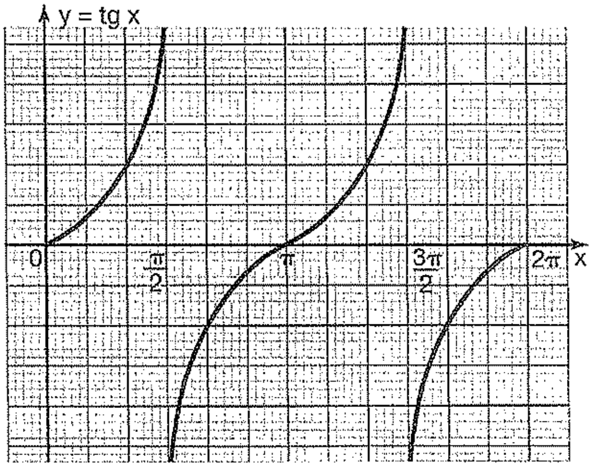
$$\cos seno = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

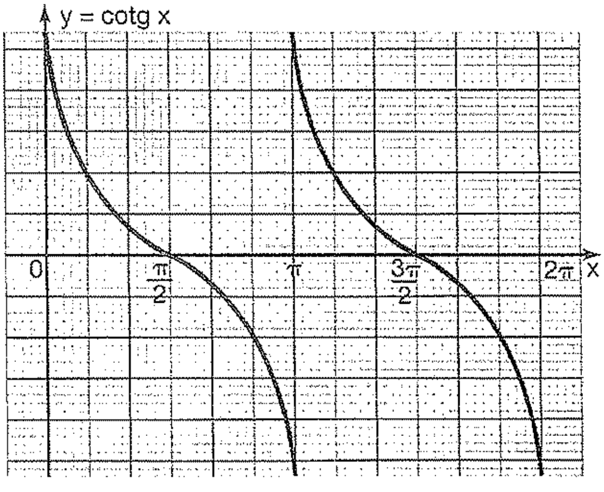
$$\tan gente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Gráficos









Paridade e periocidade

Função	Par ou Ímpar	Período	Sinais	Domínio	Imagem
senx	ímpar sen (−x) = −sen x	2π	+ + / − −	$\mathbb{R}$	[−1; 1]
cos x	par cos x = cos (−x)	2π	− + / − +	$\mathbb{R}$	[−1; 1]
tg x	ímpar tg (−x) = −tg x	π	− + / + −	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\mathbb{R}$

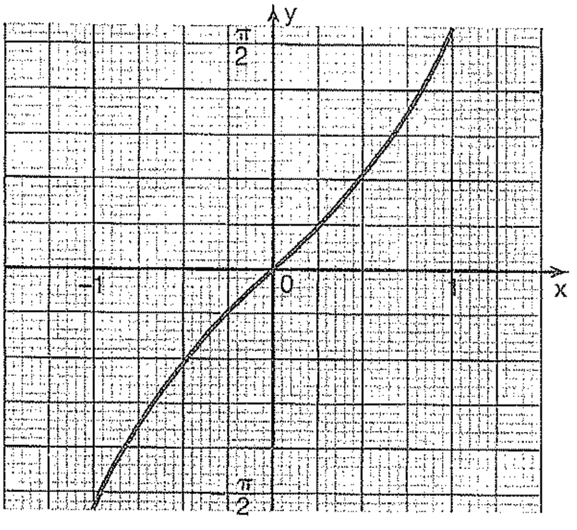
Funções Inversas

Função arco-seno

- Definição

$$\boxed{y = arc\ sen\ x \Rightarrow sen\ y = x}$$

- Gráfico



$Domínio \Rightarrow x \in [-1;1]$

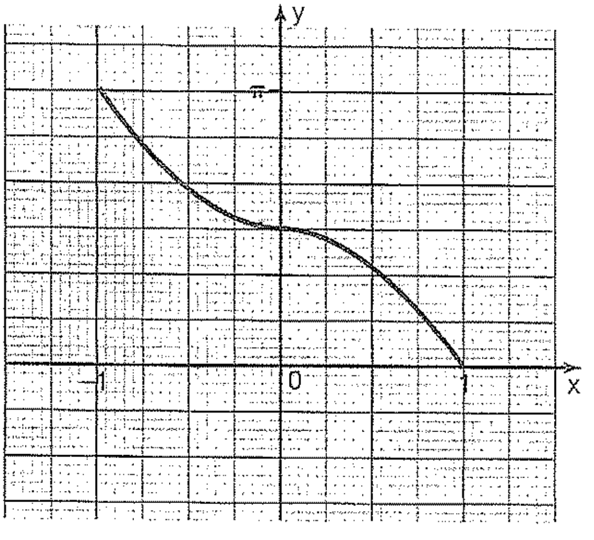
$imagem \Rightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Função arco-cosseno

- Definição

$$\boxed{y = \text{arc}\ \cos x \Rightarrow \cos y = x}$$

- Gráfico



$Domínio \Rightarrow x \in [-1;1]$

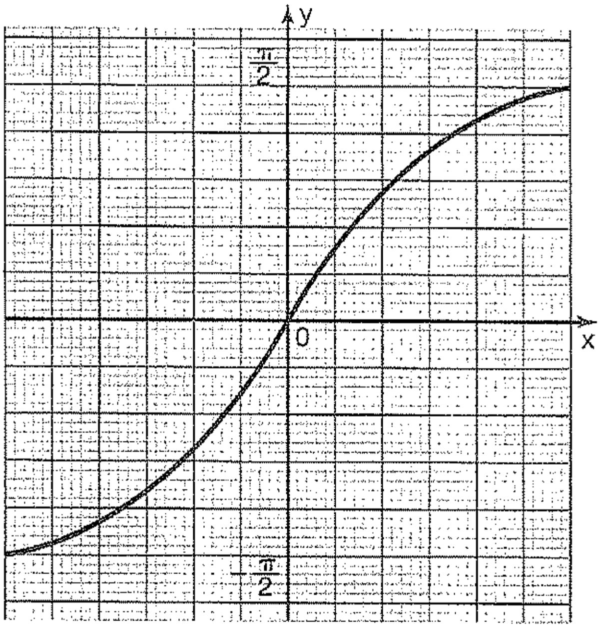
$imagem \Rightarrow y \in [0;\pi]$

Função arco-tangente

- Definição

$$\boxed{y = \text{arc tg } x \Longrightarrow tg\ y = x}$$

- Gráfico



$Domínio \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

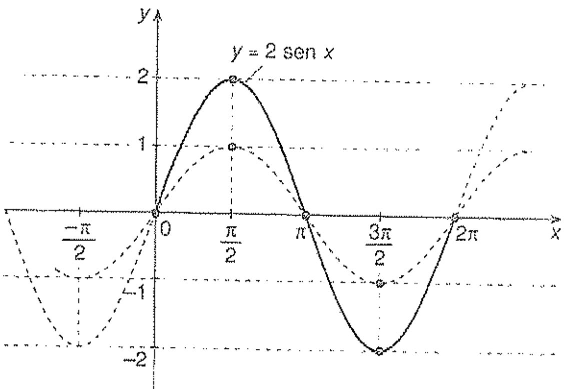
$imagem \Rightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Exercícios Comentados

01 Esboce o gráfico de cada função e indique seu conjunto-imagem e período:

construa o gráfico de cada função e indique sua imagem e período:

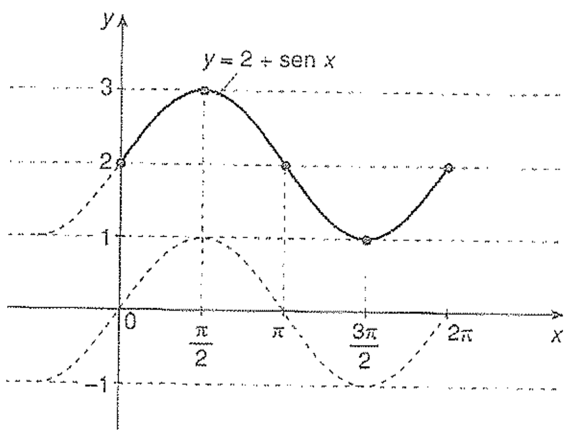
a) y = 2 · sen x



$Im = [-2, 2]$

$P = 2\pi$

b) y = 2 + sen x



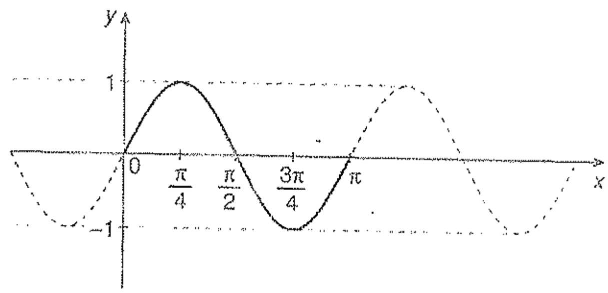
$Im = [1, 3]$

$P = 2\pi$

c) y = sen (2x)

$0 \leq 2x \leq 2\pi$

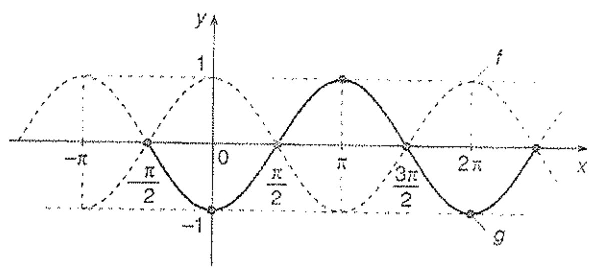
$0 \leq x \leq \pi$



$Im = [-1, 1]$

$P = \pi$

d) y = - cos x



$P = 2\pi$

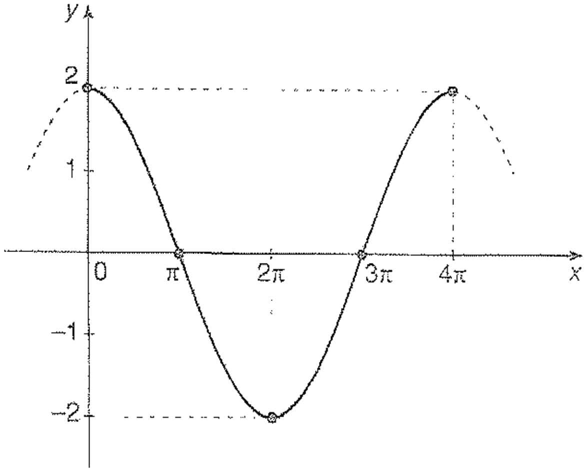
$Im = [-1, 1]$

e) $y = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Se $0 < \dfrac{x}{2} < 2\pi \Rightarrow 0 < x < 4\pi$

Podemos construir a tabela:

$\dfrac{x}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$\cos\dfrac{x}{2}$	1	0	−1	0	1
$2\cos\dfrac{x}{2}$	2	0	−2	0	2



$P = 4\pi$

$Im = [-2, 2]$

02 Determine o conjunto imagem e o período da função f cada por

$$f(x) = (3\cos 2x + 3\,sen\,2x)(2\cos 2x - 2\,sen\,2x)$$

Resolução:

$$f(x) = 3\cdot 2(\cos 2x + sen\,2x)\cos 2x - sen\,2x)$$
$$f(x) = 6\,(\cos^2 2x - sen^2 2x)$$
$$f(x) = 6\cos 4x$$

Assim, temos

$$P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

03 Indique os valores máximo de cada função:

a) $f(x) = 5\cos^2 x - 3sen^2 x$

Resolução
$f(x) = 5\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x)$
$f(x) = 8\cos^2 x - 3$
Como $0 \le \cos^2 x \le 1$, $-3 \le f(x) \le 5$
Portanto:
· valor mínimo: -3
· valor máximo: 5

b) $f(x) = 4^{sen\,x\,\cos x}$
$f(x) = 2^{2\,sen\,x\cos x}$
$f(x) = 2^{sen\,2x}$

Como $-1 \le sen\,2x \le 1$, $2^{-1} \le f(x) \le 2^{1}$

$$\frac{1}{2} \le f(x) \le 2$$

Portanto,

· valor mínimo: $\frac{1}{2}$

· valor máximo: 2

04 (Vunesp) No hemocentro de um certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, neste hospital, no ano de 2001, este número, de janeiro (t = 0) a dezembro (t = 11), seja dado aproximadamente pela expressão $S(t) = \lambda - \cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right]$ com λ uma constante positiva, S(t) em milhares e t em meses, $0 \le t \le 11$. Determine:

a) A constante λ, sabendo que no mês de fevereiro hove duas mil doações de sangue.

Resolução:

2 mil doações → S(t) = 2 (para t = 1)
Substituindo na expressão,

$$2 = \lambda - \underbrace{\cos 0}_{1}$$
$$\therefore \lambda = 3$$

b) Em que meses hove três mil doações de sangue.

Resolução:

Para S(t) = 3, temos:

$$3 = 3 - \left[t - 1\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right] = 0$$

$$\frac{(t-1)\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, 0 \le t \le 11\ e\ k \in \mathbb{Z}$$

se k = 0 → t = 4 (maio)
se k = 1 → t = 10 (novembro)
Portanto, hove três mil doações nos meses de maio e novembro.

05 Calcule cos (arc sen $\frac{3}{5}$ + arc sen $\frac{5}{13}$)

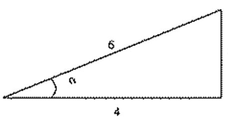
Resolução:

α = arc sen $\frac{3}{5}$ $\rightarrow$ sen x = $\frac{3}{5}$

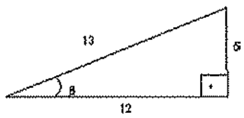
β = arc sen $\frac{5}{13}$ $\rightarrow$ sen β = $\frac{5}{13}$

Temos:

cos ($\alpha + \beta$) = cos α cos β - sen x sen β.



cos α = $\frac{4}{5}$



cos β = $\frac{12}{13}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{33}{65}.$$

Exercícios de Sala

01 (Ufes) O período e a imagem da função

f(x) = 5 - 3cos$\left(\frac{x-2}{\pi}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, são, respectivamente:

a) $2\pi \ e[-1,1]$

b) $2\pi \ e[2,8]$

c) $2\pi^2 \ e[2,8]$

d) $2\pi \ e[-3,3]$

e) $2\pi^2 \ e[-3,3]$

02 (Ufam) A função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é definida por $f:(x)=$ cos 2x + sen 4x sen 2x. Seu período em radianos é:

a) $\frac{3\pi}{2}$

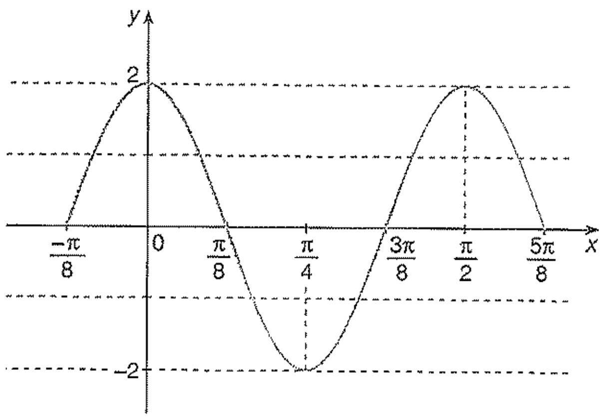
b) $\frac{\pi}{2}$

c) 2π

d) π

e) $\frac{\pi}{3}$

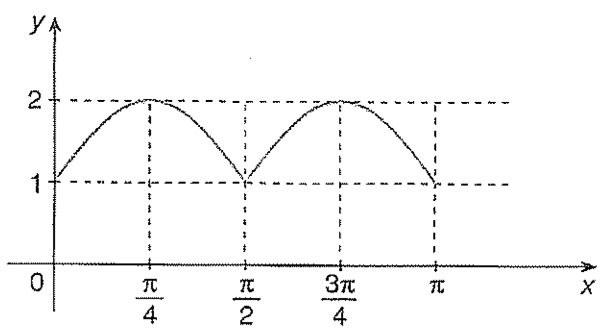
03 (FCC-SP) Na figura seguinte tem-se parte do gráfico da função definida por y = α . cos bx.



Os números a e b são tais que:

a) $|b| = 2a$
b) $a = 2b$
c) $a + b = 3$
d) $a \cdot b = 6$
e) $a - b = 1$

04 (Fuvest - SP) A função que melhor se adaptar ao gráfico é:



a) $y = |1 + sen\, x|$

b) $y = \left|\cos\frac{x}{2}\right|$

c) $y = 1 + \cos 2x$

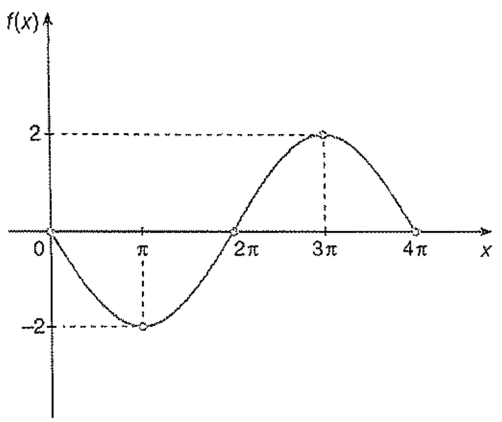
d) $y = \text{sen } x + \cos x$

e) $y = 1 + |\text{ sen } 2x|$

05 (Uece) O conjunto imagem da função $f = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3sen^2x - 5\cos^2 x$, isto é, o conjunto $\{y \in \mathbb{R} = y = f(\lambda)$, para algum $x \in \mathbb{R}\}$, é o intervalo:

a) [- 6, 2]
b) [- 5, 3]
c) [-5, 5]
d) [-2, 4]

06 (UFRRJ) Analise o gráfico abaixo.



A função $f : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ter como gráfico o desenho acima é $f(x)$ igual a:

a) – 2sen (2x)
b) 4 sen (3x)
c) – 3sen (2x)
d) – 2sen$\left(\frac{x}{2}\right)$
e) 2sen$\left(\frac{x}{2}\right)$

07 (Mackenzie-SP) O menor valor que y pode assumir na igualdade y = cos x + cos 2x é:

a) $-\frac{3}{4}$

b) $-\frac{7}{8}$

c) -1

d) $-\frac{9}{8}$

e) $-\frac{7}{4}$

08 (Uerj) O preço dos produtos agrícolas oscila de acordo com a safra de cada um: mais baixo no período de colheita, mais alto na entressafra. Suponha que o preço aproximado *p*, em reais, do quilograma de tomates seja dado pela função

$P(t) = 0,8 \cdot sen\left[\frac{2\pi}{360}(t - 101)\right] + 2,7$, na qual t é o número de dias contados de 1 de janeiro até 31 de dezembro de um determinado ano. Para esse período, calcule:

a) O maior e o menor preço do quilograma de tomates.
b) Os valores de t para os quais p seja igual a R$ 3,10.

09 (Vunesp) A temperatura, em graus Celsius (°C) de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, é dada aproximadamente pela função

$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right), 0 \leq t \leq 24,$ com t dado em horas. Determine:

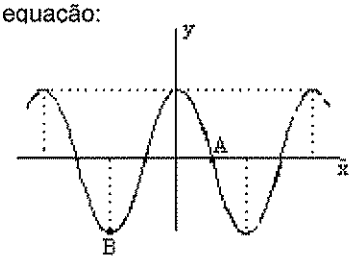
a) A temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e As 9 horas. (Use as aproximações $\sqrt{2} \approx 1,4$ *e* $\sqrt{3} \approx 1,7$.)
b) Em quais horários do dia a temperatura atingiu 0°C.

10 (Cefet-PR) A função real $f(x) = a + b$ sen cx tem imagem igual a $[-7, 9]$ e seu período é $\frac{\pi}{2}$ rad. Assim. $a + b + c$ vale:

a) 8
b) -4
c) 10
d) 13
e) 9

Exercícios de Casa

01 **(PUC SP)** Na figura a seguir tem-se parte do gráfico da função f, de IR em IR, definida por $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, no qual estão destacados os pontos A e B. Os pontos A e B pertencem à reta de equação:



a) $x - 3\pi y - \pi = 0$
b) $x + 3\pi y - \pi = 0$
c) $x - 3\pi y + \pi = 0$
d) $2x + 3\pi y - \pi = 0$
e) $2x - 3\pi y - \pi = 0$

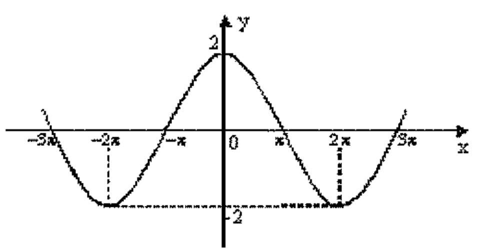
02 **(MACK SP)** Relativamente à função real definida por f(x) = 3 + 2 sen 3x, considere as afirmações:

I. Não existe **x** tal que f(x) < 0
II. O maior valor que f(x) pode assumir é 5.
III. O seu período é $\frac{2\pi}{3}$.
IV. Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a soma das soluções reais da equalção $f(x) = 3$ é $\frac{\pi}{3}$.

O número de afirmações corretas é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

03 **(PUCCampinas SP)** Na figura abaixo tem-se parte do gráfico da função f, de IR em IR, dada por f(x) = k.cos tx.



04 Nessas condições, calculando-se k – t obtém-se:

a) $-\frac{3}{2}$
b) –1
c) 0
d) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{2}$

05 **(EsPCEx)** O domínio e a imagem da função $f(x) = \frac{1}{5 - sen x}$ são, respectivamente:

a) $R - \{5\}$ e $[-1,1]$
b) R e $\left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$
c) R e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$
d) R^* e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$
e) $R - \{5\}$ e $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$

06 **(EsPCEx)** Se $z = \frac{2 - 3sen x}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em:

a) $-2 \leq z \leq -1$
b) $-1 \leq z \leq -\frac{1}{4}$
c) $-\frac{1}{4} \leq z \leq \frac{5}{4}$
d) $0 \leq z \leq \frac{3}{2}$
e) $\frac{1}{4} \leq z \leq 2$

07 **(UNIUBE)** Medindo-se t em horas e $0 \leq t < 24$, a sirene de uma usina está programada para soar em cada instante t, em que $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ é um número inteiro. De quantas em quantas horas a sirene da fábrica soa?

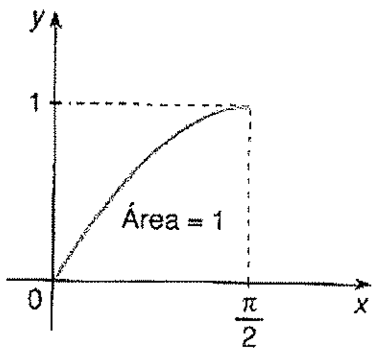
a)De seis em seis horas.
b)De quatro em quatro horas.
c)De três em três horas.
d)De oito em oito horas.

07 **(ITA)** Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação $\sec\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{1+e^x}-\operatorname{arctg}(1-e^x)\right]=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Então:

a)S = ∅
b)S = R
c)S ⊂ [1, 2]
d)S ⊂ [-1, 1]
e)S = [-1, 2[

08 (Uerj) O aluno que estudar cálculo poderá provar com facilidade, que a área da superfície plana limitada pelo ráficos de f(x) = sen x e f(x) = 0, no intervalo 0 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, como ilustra o gráfico abaixo, é igual a 1

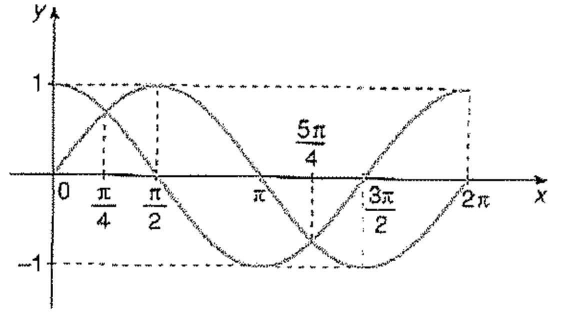


A partir dessa informação, pode-se concluir corretamente que a área limitada pelos gráficos de f(x) = cos x e f(x) = 0, no intervalo

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, é:$

a) 0
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

09 (UEPB) As funções seno e cosseno são representadas, respectivamente, por duas curvas chamadas de senóide e cossenóide. De acordo com o gráfico abaixo, os valores de x que satisfazem a desigualdade sen x > cos x são:



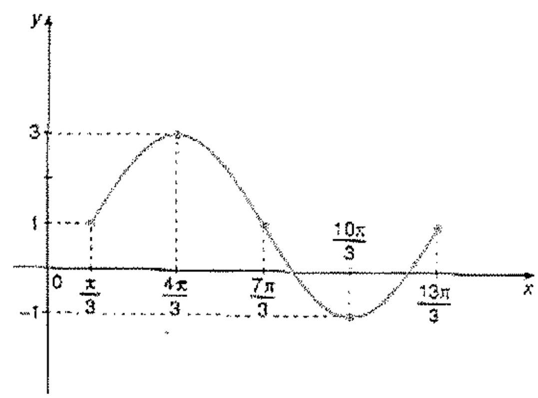
a) $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$

b) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

c) x < π
d) x > π

e) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

10 (PUC-PR) A figura a seguir mostra parte de uma onda senoidal que foi isolada para uma pesquisa:



Qual das alternativas melhor representa a equação da onda para o período apresentado?

a) y = 1 + 2sen$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}$

b) $y = 1 + 2\,sen\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = 1 + 2sen\left(\frac{x}{3}\right)$

e) $y = 1 + 2sen\left(\frac{x}{6}\right)$

11 (UFPB) O período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos 7x \cdot \cos 3x + sen\ 7x \cdot sen\ 3x$ é:

a) $\frac{2\pi}{7}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{8}$

12 (Mackenzie-SP) O período da função $y = (\cos\ 2x + sen\ 2x)\cos\ 2x - sen\ 2x)$ é:

a) 2π
b) π

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{8}$

13 Calcule o domínio da função $y = arc\ sen\ \frac{x^2 - 1}{2}$.

14 (PUC-SP) Se $x = arc\ \text{tg}\ -\frac{\sqrt{3}}{3}$, então:

a) $x = \frac{11\pi}{6}$

b) $x = \frac{11\pi}{3}$

c) $x = -\frac{\pi}{6}$

d) $x = -\frac{\pi}{3}$

15 (Mack-SP) O valor de

$tg\left(5\ arc\ tg\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}arc\ sen\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pode ser dado por:

a) 0
b) 1
c) -1

d) $-\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

16 (FEI-SP) oO valor de

$\cos\left(arc\ sen\frac{1}{4} + arc\ \cos\frac{1}{2}\right)$ é:

a) $\frac{2\sqrt{15} - \sqrt{13}}{16}$

b) $\frac{16 - \sqrt{3}}{2\sqrt{15}}$

c) $\frac{\sqrt{15} - 16}{2\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$

e) n.r.a

17 (PUC-PR) Se $arc\ tg(x+2) + arc\ tg\ x = \frac{3\pi}{4}$,

então x^2 vale:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

18 (UEPG-PR) Os valores de x que satisfazem a igualdade $arc\ sen\left(\frac{\sqrt{3x-1}}{2}\right) = arc\ tg\ x$ são:

a) 1 e 3
b) -1 e 2
c) 1 e 2
d) 1 e -2

19 (Unifor-CE) Se $\alpha = 2\text{arc}\ \ \cos\left(-\frac{1}{2}\right)$,então tg α é igual a:

a) $-\sqrt{3}$
b) -1
c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\sqrt{3}$

20 A função real, definida por f(x) = k cos (px). K > 0 e p > 0. tem período 7π e conjunto-imagem [-7.7]. então, k . p vale:

a) 2
b) $\frac{2}{7}$
c) 14
d) 7
e) $\frac{7}{2}$

21 Seja a função definida por $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. tal que f(x) = sen x cos x. O conjunto-imagem de f é o intervalo:

a) $[-1,1]$
b) $[-2,2]$
c) $\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]$
d) $\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right]$
e) $\left[\frac{1}{2}\cdot 1\right]$

22 Relativamente à função real definida por f(x) = 3 + 2 sen 3x, considere as afirmações:

I) Não existe x, tal que f(x) < 0

II) O seu período é $\frac{2\pi}{3}$

IV) Em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, a soma das soluções reais da equação f(x) = 3 é $\frac{\pi}{3}$

O número de afirmações corretas é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

23 Um objeto desloca-se de tal modo que sua posição x em função do tempo t é dada pela função

x(t) = 4 cos $\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$, onde t é dado em segundos e x, em metros. Acerca desse movimento são feitas as seguintes afirmações:

I) No instante t = 0 o objeto ocupa a posição x = 4 m
II) O valor máximo que a posição x pode assumir é 5 m
III) O valor mínimo que a posição x pode assumir é -4 m
IV) O móvel passa pela posição x = 4 nos tempos

$t = h\pi - \frac{\pi}{4}$, com h = 1, 2, 3,...

Estão corretas:

a) I e III
b) II e IV
c) I e II
d) II e III
e) III e IV

24 Dada a função real de variável real definida por

$f(x) = \frac{\pi}{3} - 2\ \text{arc}\ \ \cos\ (x+1)$

a) determine o domínio e a imagem da função;
b) resolva a equação f(x) = 0

25 Dado y = cos $\left[2\ arc\ sen\left(\frac{3}{5}\right)\right]$, calcule o valor de 25 y.

Gabarito

1. Função Modelar

Sala

01. F V F V F
02. b
03. a
04. b
05. c
06. e
07. {-1,1,3,5}
08. a) se x < 10 = f(x) = 0
    se x $\geq$ 0 j(x) = 2x
    {-1,-3}
09. x $\leq$ - 1 em x $\geq$ 2
10. 1 < x < 3

Casa

01. {-2, -1, 1, 2}
02. {1}
03. {1}
04. -1 2 x < 0 ou 0 < x < 1
05. 1 < x < 3
06. S = $\varnothing$
07. a) {11/4} b) $\frac{3}{2} < x < 2$ c) $x \leq 5/4$
08. E = $x^2 + 8$
09. a) $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$

    b) Se x $\geq$ 0, f(x) = x + x + 1 = 2x + 1
    Se x $\leq$ 0, f(x) = x -x + 1 = 1

Portanto, f(x) = $\begin{cases} 2x + 1 \text{ se } x \geq \\ 1 \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$

c)
d)
e)

f)

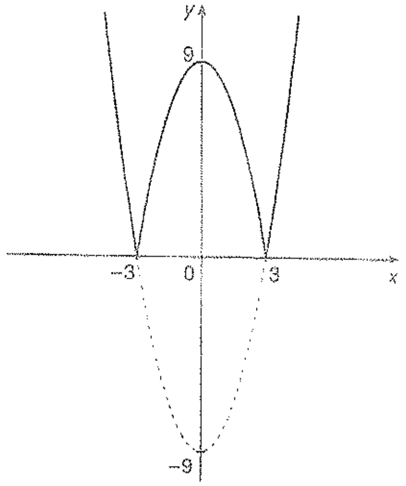
x	y = x - 5
0	-5
5	0

f(x) = |x - 5|

inicialmente vamos fazer o gráfico de y = x - 5 e depois basta "rebater" com simetria as partes do gráficos que estão abaixo do eixo Ox.

g)

Inicialmente, vamos fazer o gráfico de $y = x^2 - 9$.
Raízes: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$
Vértice: $x_V = 0$
$y_V = f(x_V) = f(0) = -9$



Depois de feito o gráfico de $y = x^2 - 9$ é só "rebater" com simetria as partes do gráfico que estão abaixo do eixo Ox.

10. c
11. e
12. e
13. d
14. b
15. a
16. d
17. b
18. d
19. b
20. a

2. Função Exponencial

Sala
01. a) 2^4 b) 7
02. 10-5
03. $\frac{a^6}{b^2}$
04. $\frac{82}{3}$
05. a) $1 \leq x \leq 2$ b) $2\sqrt{2}$
06. a) 1/6 b) -4,3
07. 0,2
8. 0
09. 2,4
10. $a \leq -1$ *ou* $a \geq 0$

11. 10800
12. 80
13. 10
14. a) $\alpha = 54$ $\beta = \frac{-1}{90}$
    b) 360
15. a = 4
    k = 2048

Casa

01. 0
02. 1
03. 0,1
04. 3/2
05. 384
06. 1
07. (-3,1), (-2,0)
08. $0 \leq x \leq 1$
09. x < 3
10. $0 < x \leq 1$ ou $\frac{12}{7} \leq x < 2$
11. x > 1
12. a
13. c
14. a
15. b
16. d
17. d
18. e
19. b
20. c
21. 575
22. a) 552
    b) 300, sim
23. 60%
24. a) a = 800
       b = 1/2
    b) 5
25. 25
26. a
27. 2h

3. Função Logaritima

Sala
01. a
02. d
03. b
04. b
05. e
06. e
07. d
08. e
09. c
10. d
11. a) 1m, 10 cm
    b) 20 cm
12. a) 1000
    b) 7 anos
13. a) 22,5 °C
    b) 15 min
14. 23 anos
15. 3000 m

Casa

01. c
02. cqd
03. $y = \log_p \frac{1-x}{x}$
04. -2
05. 6
06. -5
07. x > 5
08. 1,3
09. {10,000}
10. {81}
11. 28/5
12. $\frac{20}{19}$
13. {10,100}
14. $\varnothing$
15. {16}
16. a) $\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4}$
    b) $1 < x \leq 2$
17. $-2 \leq x < 0$ ou $0 < x \leq 4$
18. $3 < x < 4$
19. $0 < x < \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2} < x < 2$
20. a) $0 < x < \frac{\sqrt{10}}{100}$ ou x > 100
    b) $1 \leq x \leq 25$
    c) $2 < x < 4$
21. a
22. b
23. 15/7
24. a) (t) = = F. $(0,8)^t$
    b) 15
25. a) t = 1 → A: 2000; B: 3000
       t = 7 → A: 6000; B: 5000
    b) t = 3 . cidade A

4. Trigonometria 1

01. c
02. c

Curso Preparatório CIDADE

03. c
04. b
05. 6
06. a) 5 km b) $5\sqrt{3}$ km c) 30km/h
07. d
08. $2\sqrt{13}$
09. e
10. 5 $\sqrt{2}$

Casa

01. d
02. a
03. c
04. AB = 4 $\sqrt{6}$
    R = 4 $\sqrt{3}$
05. c
06. e
07. x = $3\sqrt{3}$
    y = 9 - $3\sqrt{3}$
08. 50 $\sqrt{3}$
09. h = 60
10. 600(3- $\sqrt{3}$)
11. 2 $\sqrt{2}$
12. 75
13. $\frac{3}{4}$
14. x = $\frac{d}{\cos\frac{x}{2}}$
15. $\sqrt{3}$
16. 88
17. 15
18. 30°
19. 10 $\sqrt{129}$ ou 70
20. a) 1/9 b) Não existe
21. 400
22. a) 6 $\sqrt{3}$
    b) 4 $\sqrt{3}$
23. $\frac{3\sqrt{5}}{5} e \frac{6\sqrt{5}}{5}$
24. 50 $\sqrt{3}$

5. Trigonometria 2

Sala

01. $\frac{10\pi}{9} m$
02. c
03. c
04. c
05. c
06. c
07. d
08. e
09. b
10. b

Casa
01. d
02. b
03. e
04. b
05. a
06. b
07. c
08. d
09. a) $\sqrt{3}/3$
    b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$
10. 52°30
11. a) 80 b) -70 c) π/4 d) - π/2
12. π/3, 5 π/6, $\frac{4\pi}{3}$ 4 π/6
13. 12 π
14. b
15. c
16. a
17. c
18. a
19. d
20. b
21. a
22. c
23. e
24. a

6. Trigonometria 3

Sala

01. 5/16
02. m = 4/5 ou -1
03. b
04. b
05. a
06. c
07. a

08. c
09. b
10. tg x

Casa

01. x = - 1
02. a) 3/1 3
    b) -1 ou 3
03. a) 150°
    b) -1/4
04. tg x
05. $\dfrac{\sqrt{2}}{72}$
06. 12
07. a) c7d
    b) c 7 d
08. $\dfrac{1+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$
09. a) -1
    b) -1/2
10. - co tg x
11. $\dfrac{-8\sqrt{15}}{3}$
12. 15
13. a) 4/5
    b) $\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}$
14. a) 3/5
    b) -56/85
15. d
16. d
17. c
18. 1/5 e 1/10
19. d
20. d
21. c
22. a
23. b
24. a
25. c
26. c
27. a
28. e
29. $\pi+\dfrac{\pi}{4}, k$
30. e
31. c
32. d
33. a
34. b
35. d
36. d
37. d
38. a
39. a
40. a) - tg $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
    b) - tg 4x

7. Trigonometria 4

Sala

01. c
02. c
03. d
04. c
05. a
06. a
07. d
08. b
09. $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi \; ou \; \dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$
10. 2k $\pi + \dfrac{\pi}{6} < x \leq \dfrac{\pi}{3} x \; 2\, k\pi$

Casa

01. b
02. a
03. c
04. c
05. b
06. b
07. a) $\dfrac{\pi}{6}$ + 2 k$_{\overline{n}}$ ou $\dfrac{S\pi}{2}+k\pi$
    b) $\dfrac{3\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2}$ ou $\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2}$
    c) $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
08. a) 15 + 90k
    b) 20+ 120k ou -10 + 120k
09. $\dfrac{\pi}{84}+\dfrac{2k\pi}{7} \; ou \; \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2k\pi}{5}$
10. $\pi / 2$

Curso Preparatório CIDADE

11.0, $\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$

12. $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

13. $\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{1},\frac{7\pi}{4}$

14. $\frac{\pi}{23}+2k\pi \ ou\ k\pi$

15. $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}$

16. $k\pi \ ou \frac{\pi}{4}+k\pi$

17. $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

18. $\varnothing$

19. a = 3 π /2
    b = π /3 ou 2 π /3

20. $2k\pi \ ou\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi$

21. $\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4},\frac{54}{12}$

22.

23. $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}$

24. $2k\pi < x < \frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou

$\frac{3\pi}{4}+2k\pi < x \leq \frac{7\pi}{6}+2k\pi$ ou

$\frac{11\pi}{6}+2k\pi \leq x \leq 2\pi+2k\pi$

25.

26.

8. Trigonometria 5
Função Trigonométrica e Função Trigonométrica Inversas

Sala

01. c
02. d
03. a
04. e
05. b
06. d
07. c
08. a) R$1,90 e R$3,50
    b) 131 ou 251 dias
09. a) 0,35 e -0,7 °C respec. às 2h e 9h
    b) 0,8,16 e 24h
10. d

Casa

01. c
02. c
03. c
04.c
05. c
06. c
07. c
08. b
09. c
10. b
11. a
12. c
13. c
14. $D=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$
15. c
16. c
17. d
18. c
19. c
20. d

20. a
21. c
22. e
23. e

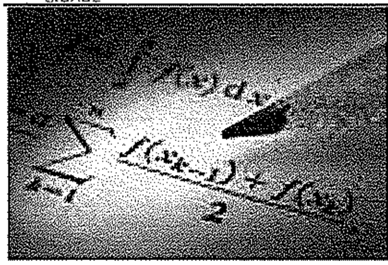
24. a) $\frac{-2\pi}{3},-\pi$

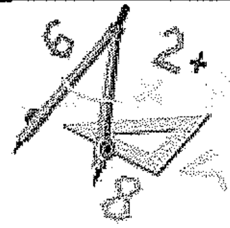
$D=[-2,0]$

b) $\mathrm{Im}=\left[\frac{-5\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$

c) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

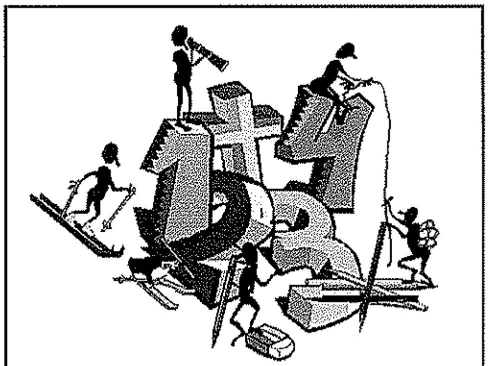
25. 7





MATEMÁTICA 2

CADERNO 2



1. Fatorial

Define-se fatorial de n através da expressão:

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Em que: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \; e \; n > 1 \\ n! \text{ lê - se: n fatorial ou fatorial de n} \end{cases}$

Adotam-se as seguintes definições especiais:
0! = 1
1! = 1

2. Número binomial

Denomina-se **número binomial** todo número definido por: $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Em que: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \; e \; p \in \mathbb{N} \\ n \geq p \end{cases}$

Se n < p, então, por definição $\binom{n}{p} = 0$.

3. Princípio fundamental da contagem

> Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:
>
> p_1 é o número de possibilidades da 1ª etapa
> p_2 é o número de possibilidades da 2ª etapa
> .
> .
> .
> pk é o número de possibilidades de k-ésima etapa, então: $p_1 . p_2 \ldots p_k$ é o número total de possibilidades de o acontecimento occorrer.

4. Arranjos simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ um conjunto com n elementos $(n \in \mathbb{N})$.

Denomina-se **arranjo simples** dos n elementos de B, tomados p a p, qualquer agrupamento de p elementos distintos,escolhidos entre os elementos de B $(p \in \mathbb{N} \; e \; p \leq n)$.

Indica-se:

$A_{n,p}$ ou A_n^p

Observação:

Arranjo é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro pela **natureza** dos elementos componentes.

Fórmula do número de arranjos

$$\boxed{A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}$$

Ou

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

5. Combinações simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ um conjunto com n elementos $(n \in \mathbb{N})$.

Denomina-se **combinação simples** dos n elementos de B,tomados p a p, qualquer subconjunto de p elementos do conjunto B.

Indica-se:

$C_{n,p}$ ou C_n^p

Observação:

Combinação é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro apenas pela **natureza** dos elementos componentes.

Fórmula das combinações simples

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

6. Permutações simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ um conjunto com n elementos $(n \in \mathbb{N})$.

Denomina-se **permutação simples** dos n elementos de B,todo arranjo dos n elementos de B tomados n a n.

Indica-se:

$$P_n = A_{n,n}$$

Observação:

Permutação é o tipo de agrupamento ordenado no qual,em cada grupo, **entram todos** os elementos.

Fórmula das permutações simples

$$\boxed{P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!}$$

7. Permutações com elementos repetidos

O número de permutações possíveis com n elementos, dentre os quais um certo elemento se repete α vezes, é igual ao fatorial de n dividido pelo fatorial de α.

$$\boxed{p_n^{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!}}$$

Se tivermos n elementos,dos quais:

α são iguais a A

β são iguais a B

γ são iguais a C

O número de permutações distintas dos n elementos será

$$\boxed{p_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}}$$

Exercícios Comentados

01 De um grupo de 12 presidentes de clubes de futebol de um certo estado,3 serão escolhidos para representar esse estado junto à federação nacional.

a)De quantas maneiras diferentes pode ser escolhida a comissão?

b)De quantas maneiras diferentes pode ser escolhida essa comissão, se houver um presidente,um vice-presidente e um secretário?

Resolução:

a)Nesse caso,os elementos da comissão não têm cargos. Portanto, escolhidos 3 elementos, eles formam uma única comissão. Trata-se, portanto, de um problema de combinações.

O número de maneiras de serem escolhidas as comissões será dado por:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12.11.10}{3.2.1} = 220$$

a)Nesse caso, os ocupantes da comissão têm cargos diferentes.Com as mesmas três pessoas podem ser formadas comissões distintas.Veja:

Presidente	Vice	Secretário
A	B	C
B	A	C
C	B	A

Logo, a ordem dos elementos deve ser levada em conta.Trata-se de um problema de arranjos.O número de situações distintas será dado por:

$$A_{12,3} = \frac{12!}{9!} = 12.11.10 = 1320$$

02 Um grupo de 10 rapazes deve ser dividido em dois grupos de 5 para disputar uma partida de futebol de salão.Se, entre os 10 jogadores,há dois craques que devem pertencer ao mesmo time,de quantas maneiras diferentes pode ser feita a separação? Suponha que cada jogador possa atuar em qualquer situação.

Resolução:

Como os jogadores são polivalentes (jogam em qualquer posição),podemos considerar um time como sendo um subconjunto com 5 elementos.Logo,Trata-se de um problema de combinações.Coloquemos então cada um dos dois craques em cada time:

A — — — — B

Para completar o primeiro time,devemos escolher 4 jogadores entre os 8 restantes,sem se importar a ordem.O número de maneiras diferentes de se fazer tal escolha é:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

Para cada subconjunto de 4 jogadores que completar o 1° time, restam, automaticamente,4 para completar o 2° time. Portanto, o número de maneiras de se fazer a separação do grupo em dois times, nas condições propostas, é: $C_{8,4} = 70$.

03 **(Mackenzie)** 6 refrigerantes diferentes devem ser distribuídos entre 2 pessoas, de modo que cada pessoa receba 3 refrigerantes. O número de formas de se fazer isso é:

a)12
b)18
c)24
d) 15
e) 20

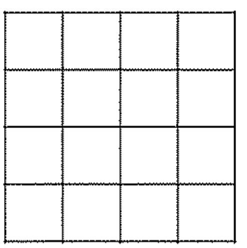
Resolução

$$\underset{C_{6,3}}{\_\_\ \_\_\ \_\_} \quad \Big| \quad \underset{C_{3,3}}{\_\_\ \_\_\ \_\_} = 20 \cdot 1 = 20$$

04 **(EsPCEx)** Um tabuleiro possui 16 casas dispostas em 4 linhas e 4 colunas. De quantas maneiras diferentes é possível colocar 4 peças iguais nesse tabuleiro de modo que, em cada linha e em cada coluna, seja colocada apenas uma peça?

a) 4096.
b) 576.
c) 256.
d) 64.
e) 16.

Resolução



$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

05 **(EsPCEx)** – Um gerente de hotel, após fazer alguns cálculos, chegou à conclusão de que, para atingir a meta de economia de energia elétrica, bastava apagar 2 lâmpadas de um corredor com 8 lâmpadas alinhadas. Para manter um mínimo de claridade ao longo do corredor, o gerente determinou que 2 lâmpadas adjacentes não poderiam ficar apagadas ao mesmo tempo, e as duas lâmpadas da extremidade deveriam ficar acesas. Sendo assim, o número de maneiras que este gerente pode apagar 2 lâmpadas é:

a) 24.
b) 10.
c) 15.
d) 12.
e) 6.

Resolução

A — — — — — — A

$C_{6,2}$ - 5 (número de maneiras de se apagar duas lâmpadas consecutivas).

= 15 - 5 = 10

Exercícios de Sala

01 **(Mackenzie)** Um professor deve ministrar 20 aulas em 3 dias consecutivos, tendo, para cada um dos dias, as opções de ministrar 4, 6 ou 8 aulas. O número de diferentes distribuições possíveis dessas 20 aulas, nos 3 dias, é:

a) 7
b) 6
c) 4
d) 10
e) 8

02 **(PUC)** O número total de inteiros positivos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4, se nenhum algarismo é repetido em nenhum inteiro, é:

a)54
b)56
c)58
d)60
e)64

03 **(PUC)** O campeonato brasileiro tem, em sua primeira fase, 28 times que jogam todos entre si. Nesta primeira etapa, o número de jogos é de:

a)376
b)378
c)380
d)388
e)396

04 **(PUC)** A senha de acesso a um jogo de computador consiste em quatro caracteres alfabéticos ou numéricos, sendo o primeiro necessariamente alfabético. O número de senhas possíveis será, então:

a) 36^4.
b) 10×36^3.
c) 26×36^3.
d) 26^4.
e) 10×26^4.

05 **(Mackenzie)** Um juiz dispõe de **10** pessoas, das quais somente **4** são advogados, para formar um único júri com **7** jurados. O número de formas de compor o júri, com pelo menos **1** advogado, é:

a)120
b)108
c)160
d)140
e)128

06 **(Mackenzie)** Numa empresa existem 10 diretores, dos quais 6 estão sob suspeita de corrupção. Para que se analisem as suspeitas, será formada uma comissão especial com 5 diretores, na qual os suspeitos não sejam maioria. O número de possíveis comissões é:

a)66
b)72
c)90
d)120
e)124

07 **(EsPCEx)** Entre duas cidades A e B há dois postos de pedágio, sendo o primeiro com 5 cabines e o segundo com 4 cabines. Há também 10 pontos de abastecimento. Um viajante realizará o percurso entre as duas cidades passando pelos dois pedágios e parando três vezes para abastecer. Entendendo por "formas diferentes de realizar o percurso" cada uma das opções de passar pelas cabines de pedágio e parar nos postos de abastecimento, o número de formas de realizar o percurso da cidade A para a cidade B é:

a) 60.
b) 600.
c) 1200.
d) 2400.
e) 14400.

08 **(EsPCEx)** A equipe de professores de uma escola possui um banco de questões de matemática composto de 5 questões sobre parábolas, 4 sobre circunferências e 4 sobre retas. De quantas maneiras distintas a equipe pode montar uma prova com 8 questões, sendo 3 de parábolas, 2 de circunferências e 3 de retas?

a) 80.
b) 96.
c) 240.
d) 640.
e) 1280.

09 **(EsPCEx)** Um conjunto contém ***5*** números inteiros positivos e ***6*** números inteiros negativos. Os valores absolutos destes ***11*** números são primos distintos. A quantidade de números positivos distintos que podem ser formados pelo produto de *3* destes números é

a) 25.
b) 70.
c) 85.
d) 120.
e) 210.

10 **(EsPCEx)** Uma prova de um concurso público engloba as disciplinas Matemática e Inglês, contendo dez questões de cada uma. Segundo o edital, para ser aprovado, o candidato precisa acertar, no mínimo, *70%* das questões da prova, além de obter acerto maior do que ou igual a *60%* em cada disciplina. Em relação às questões da prova, quantas possibilidades diferentes terá um candidato de alcançar, exatamente, o índice mínimo de aprovação?

a) *18 900.*
b) *33 300.*
c) *38 760.*
d) *77 520.*
e) *125 970.*

11 O número de inteiros ímpares compreendidos entre 10.000 e 20.000, nos quais o terceiro algarismo é 5, é igual a:

a) 400
b) 500
c) 600
d) 800
e) 900

12 Um número capícua é aquele que não se altera quando lido da direita para esquerda ou da esquerda para direita, 1.331, 404 e 87.678 são alguns exemplos. O número de números capícuas de três algarismo que podemos conseguir com os algarismos significativos é:

a) 30
b) 81
c) 90
d) 100
e) n. d. a.

13 Para identificar os canais de um sistema de televisão o cabo, usam-se siglas de 3 (três) letras, escolhidas no conjunto {A, C, R, T, V}, podendo, cada sigla, ter, no máximo, 2 (duas) letras iguais. Assim, por exemplo, TVB, TVT, CBB são siglas possíveis. O número de siglas diferentes que podemos formar é:

a) 180
b) 190
c) 196
d) 210
e) 216

14 Uma fila deve ser formada por 3 estudantes de Medicina, 4 de Engenharia e 2 de Direito. De quantos modos podemos organizar essa fila de maneira que estudantes de mesmo curso permaneçam sempre juntos?

15 Listando-se em ordem crescente todos os números de quatro algarismos distintos formados com os elementos do conjunto {2, 4, 6, 8}, o número 6.428 ocupa o n-ésimo lugar. Então, **n** é igual a:

a) 12
b) 13
c) 14
d) 15
e) 16

16 Um professor propôs, para uma de suas turmas, uma prova com 7 questões, das quais cada aluno deveria escolher 5 questões para responder. Sabe-se que não houve duas escolhas das mesmas 5 questões entre todos os alunos da turma. Logo, o número máximo de alunos que essa turma poderia ter era:

a) 17
b) 19
c) 21
d) 22

17 Numa reunião definida como "Queijos e Vinhos", estavam disponíveis no buffet 8 tipos de queijos e 6 tipos de vinhos. Sabendo que Jaime se serve de dois tipos diferentes de queijo e um tipo de vinho cada vez que vai ao buffet, o número total de opções distintas para servir-se é:

a) 34
b) 62
c) 42
d) 168
e) 336

18 Você faz parte de um grupo de 12 pessoas, das quais 5 derão ser selecionadas para formar um grupo de trabalho. De quantos modos você poderá fazer parte do grau a ser formado?

a) 182
b) 330
c) 462
d) 782
e) 7.920

19 De um grupo de 5 homens e 5 mulheres, quantas comissões de 4 elementos podem ser formados de modo que 3 elementos dessas comissões tenham o mesmo sexo?

a) 50
b) 100
c) 200
d) 400
e) 25

20 O mapa de uma cidade é formado por 6 bairros distintos. Deseja-se pintar este mapa com as cores vermelho, azul e verde do seguinte modo: um bairro deve ser vermelho, dois bairros, azuis e os demais, verdes. De quantas maneiras distintas isso pode ser faito?

Exercícios de Casa

01 **(EsPCEx)** Num determinado setor de um hospital, trabalham 4 médicos e 8 enfermeiras. O **número de equipes distintas,** constituídas cada uma de 1 médico e 3 enfermeiras, que podem ser formadas nesse setor é de

a) 60
b) 224
c) 495
d) 1344
e) 11880

02 **(Mackenzie)** 12 professores, sendo 4 de matemática, 4 de geografia e 4 de inglês, participam de uma reunião com o objetivo de formar uma comissão que tenha 9 professores, sendo 3 de cada disciplina. O número de formas distintas de se compor essa comissão é:

a)36
b)108
c)12
d)48
e)64

03 **(PUC)** O número de anagramas da palavra EXPLODIR, nos quais as vogais aparecem juntas, é:

a)360
b)720
c)1 440
d)2 160
e)4 320

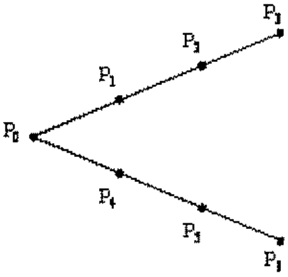
04 **(UFU)** Considere A, B, C, D, E, F e G pontos num mesmo plano, tais que dentre esses pontos não existam três que sejam colineares. Quantos triângulos podem ser formados com vértices dados por esses pontos, de modo que não existam triângulos de lado AB, nem de lado BC?

a)34
b)35
c)26
d)25

05 **(UFJF)** Cinco amigos vão viajar utilizando um carro com cinco lugares. Sabendo-se que apenas dois deles podem dirigir, o número de maneiras que os cinco amigos podem se acomodar para viagem é:

a)12
b)24
c)48
d)120

06 **(UFU)** Na figura abaixo, o maior número de triângulos que podem sr formados tendo como vértices três dos pontos P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 indicados é



a)33
b)27
c)56
d)18
e)35

07 **(Fuvest)** Numa primeira fase de um campeonato de xadrez cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

08 **(PUC)** Se, em um encontro de n pessoas, todas apertarem as mãos entre si, então o número de apertos de mão será:

a)n^2
b)$n(n – 1)$
c) $\frac{n.(n-1)}{2}$
d)n
e)2n

09 **(Uniube)** Com os algarismos do conjunto {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9} serão formados números pares de três algarismos distintos e maiores que 400. A quantidade de números assim formada é:

a)45
b)60
c)85
d)90
e)95

10 **(FGV)** No estoque de uma loja há 6 blusas pretas e 4 brancas, todas de modelos diferentes. O número de diferentes pares de blusas, com cores diferentes que uma balconista pode pegar para mostrar a uma cliente, pode ser calculado assim:

a) $A_{10,2} - (C_{6,2} + C_{4,2})$.
b) $C_{10,2} - (C_{6,2} + C_{4,2})$.
c) $A_{10,2} - A_{6,4}$.
d) $C_{10,2} - C_{6,4}$.
e) $C_{10,2} - A_{6,4}$.

11 **(UFMG)** O número de múltiplos de 10, compreendidos entre 100 e 9999 e com todos os algarismos distintos, é:

a)250
b)321
c)504
d)576

12 **(UFOP)** De quantas maneiras podemos distribuir 10 alunos em 2 salas de aula com 7 e 3 lugares, respectivamente?

a)120
b)240
c)14.400
d)86.400
e)3.608.800

13 **(UFOP)** Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}?

a)60
b)120
c)45
d)70
e)90

14 **(UFOP)** Quantos são os números de 7 algarismos distintos, formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, que têm 1 e 7 nas extremidades?

a)21
b)42
c)120
d)240
e)2520

15 **(Fgv)** Três números inteiros distintos de -20 a 20 foram escolhidos de forma que seu produto seja um número negativo. O número de maneiras diferentes de se fazer essa escolha é

a) 4.940.
b) 4.250.
c) 3.820.
d) 3.640.
e) 3.280.

16 **(Uel)** Antônio e Bruno são membros atuantes do Grêmio Estudantil e estão se formando numa turma de 28 alunos. Uma comissão de formatura, com 5 membros, deve ser formada para a organização dos festejos. Quantas comissões podem ser formadas de modo que Antônio e Bruno sejam membros?

a) 2600
b) 9828
c) 9288
d) 3276
e) 28

17 (Uerj) Numa cidade, os números telefônicos não podem começar por zero e têm oito algarismos, dos quais os quatro primeiros constituem o prefixo.

Considere que os quatro últimos dígitos de todas as farmácias são 0000 e que o prefixo da farmácia Vivavida é formado pelos dígitos 2, 4, 5 e 6, não repetidos e não necessariamente nesta ordem.

O número máximo de tentativas a serem feitas para identificar o número telefônico completo dessa farmácia equivale a:

a) 6
b) 24
c) 64
d) 168

18 **(Ufrn)** Em virtude de uma crise financeira, uma fábrica dispõe de apenas quatro vigilantes para ocuparem sete postos de vigilância.

Considerando que, em cada posto, fica, no máximo, um vigilante e que o posto da entrada principal não pode ficar desguarnecido, indique a opção correspondente ao número de maneiras distintas de que o chefe de segurança pode dispor para distribuir os vigilantes.

Obs.: Duas maneiras são ditas idênticas se, em ambas, os vigilantes ocupam os mesmos postos e cada posto é ocupado pelo mesmo vigilante; caso contrário, são ditas distintas.

a) 35
b) 80
c) 480
d) 840

19 **(Fgv)** Um fundo de investimento disponibiliza números inteiros de cotas aos interessados nessa aplicação financeira. No primeiro dia de negociação desse fundo, verifica-se que 5 investidores compraram cotas, e que foi vendido um total de 9 cotas. Em tais condições, o número de maneiras diferentes de alocação das 9 cotas entre os 5 investidores é igual a

a) 56.
b) 70.
c) 86.
d) 120.
e) 126.

20 (Unesp) O número de maneiras que 3 pessoas podem sentar-se em uma fileira de 6 cadeiras vazias de modo que, entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre tenha exatamente uma cadeira vazia, é

a) 3.
b) 6.
c) 9.
d) 12.
e) 15.

2. Probabilidade

1. Introdução

Experimentos que ao serem realizados repetidas vezes nas mesmas condições apresentarem resultados variados, não sendo possível portanto a previsão lógica dos resultados,são denominados **experimentos aleátorios.**

· Espaço amostral- é o conjunto de **todos** os resultados possíveis de um experimento aleatório.Indicaremos o espaço amostral por U.

· Evento – é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplo: Seja uma urna, contendo 3 bolas pretas e 3 bolas vermerlhas. Dessa urna são retiradas,sucessivamente, 3 bolas.

$$1^a\,bola \quad 2^a\,bola \quad 3^a\,bola$$

$$P \_\_ \begin{cases} P \_\_ \begin{cases} P & PPP \\ V & PPV \end{cases} \\ V \_\_ \begin{cases} P & PVP \\ V & PVV \end{cases} \end{cases}$$

$$V \_\_ \begin{cases} P \_\_ \begin{cases} P & VPP \\ V & VPV \end{cases} \\ V \_\_ \begin{cases} P & VVP \\ V & VVV \end{cases} \end{cases}$$

O espaço amostral será:

U={(PPP),(PPV),(PVP),(PVV),(VPP),(VPV),(VVP),(VVV)}
Alguns eventos:

Evento 1 : as três bolas têm a mesma cor $\rightarrow$ {(PPP),(VVV)}
Evento 2 :2 das bolas são pretas $\rightarrow$ {(PPV),(PVP),(VPP)}
Evento 3 : as três bolas são vermelhas $\rightarrow$ {(VVV)}
Evento 4 : o número de bolas pretas é igual ao número de bolas vermelhas $\rightarrow$ { }

2. Definição

Seja U um espaço amostral equiprovável e A um de seus eventos.Denomina-se **probabilidade** do evento A o número P(A) tal que:

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}}$$

Em que:
nA)=n° de elementos do evento A.
nU)=n° de elementos do espaço amostral.

3. Adição de probabilidades

Se A e B são dois eventos do mesmo espaço amostral,podemos escrever:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

Obeservação:

$Se\ A\cap B=\varnothing\Rightarrow$

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

4. Probabilidade do evento complementar

Sejam
A= evento de um espaço amostral U.
$\overline{A}$ = evento complementar de A.
Então:

$$\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1}$$

5. Multiplição de probabilidades

Se um acontecimento é composto por vários eventos sucessivos e independentes, de tal modo que:

O primeiro evento é A e sua probabilidade é p_1

O segundo evento é B e sua probabilidade é p_2

O terceiro evento é C e sua probabilidade é p_3

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

O K-ésimo é K e sua probabilidade é p_K, então a probabilidade de que os eventos A,B,C,...,K ocorra nessa ordem é:

$$\boxed{p_1.p_2.p_3.\ \cdots\ .p_K}$$

6. Probabilidade condicional

Denomina-se probabilidade de **A condicionada a B** a probabilidade de ocorrência do evento A, sabendo-se que vai ocorrer ou já ocorreu o evento B.

$$\boxed{PA/B=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}}$$

7. Lei binomial das probabilidades

Seja uma experiência realizada com n tentativas independentes e com dois resultados possíveis em cada tentativa: **sucesso** ou **fracasso** (falha).

Seja p a probabilidade de ocorrência do evento E (**sucesso**) e **q =1- p** a probabilidade de ocorrência do evento $\overline{E}$ (**fracasso**).

A probabilidade de obtermos r vezes o resultado desejado é dado por:

$$\boxed{P=\binom{n}{y}p^r.q^{n-r}}$$

Exercícios Comentados

01 Numa sala de aula com 25 alunos, cada aluno recebeu um número de 1 a 25 para concorrer ao sorteio de um ingresso para um show.Qual é a probabilidade de:
a)ser sorteado o aluno que tem o número 25?
b)Ser sorteado um aluno com número ímpar?
c) Ser sorteado um aluno cujo número é múltiplo de 7?

Resolução:
O espaço amostral do experimento é:
S={1;2;3;...;25} > n(S)=25

a)seja A o evento: ser sorteado o número 25

$$A=\{25\}\Rightarrow n(A)=1$$

$$P=\left(\frac{n(A)}{n(S)}\right)=\frac{1}{25}$$

b)Seja B o evento: ser sorteado um aluno com número ímpar

$$B=\{1;3;5;...;25\}\Rightarrow n(B)=13$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{13}{25}$$

c) Seja D o evento: ser sorteado um número múltiplo de 7

$$D=\{7;14;21\} \Rightarrow n(D)=3$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{3}{25}$$

02 Estudos realizados numa certa comunidade indicam que a probabilidade de nascer uma criança do sexo feminino é o dobro da probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino.Qual é a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino nessa comunidade?

Resolução:

O espaço amostral tem apenas duas possibilidades,que representaremos por:

M: criança do sexo masculino
F: criança do sexo feminino
S={M;F}
Os eventos elementares são:
{M}:nascer criança do sexo masculino
{F}:nascer criança do sexo feminino
As probabilidades associados a esses eventos elementares podem ser apresentadas na forma:

$$\{M\} \Rightarrow P_1 = x$$
$$\{F\} \Rightarrow P_2 = 2x$$
$$como: P_1 + P_2 = 1$$
$$x+2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

A probabilidade de nascer criança do sexo masculino é $\frac{1}{3}$

03 Considere um baralho de 52 cartas.

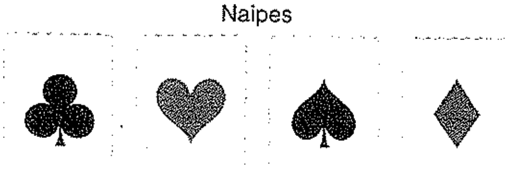
a)Retirando-se aleatoriamente uma carta, qual é a probabilidade de que esta carta seja uma dama ou uma carta de paus?

b)Escolhendo-se 3 cartas ao acaso,qual é a probabilidade de que dentre as cartas escolhidas tenhamos pelo menos uma carta de copas?

Resolução:

As 52 catas são distribuídas em 4 naipes,sendo 13 de cada naipe.

Naipes



Paus Copas Espadas Ouros

Cada naipe apresenta 1 ás,3 figuras (valete, dama e rei) e 9 cartas numeradas (de 2 a 10).

a)Considere os eventos:
A: retirar uma dama
B: retirar uma carta de paus
Logo, $A \cap B$ equivale a retirar a dama de paus.

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B)=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}-\frac{1}{52}$$

$$P(A \cup B)=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$$

b)Seja o evento:
A: “pelo menos” uma das 3 cartas é copas
Então temos:

$\overline{A}$: nenhuma das 3 cartas é de copas
Temos:

$$n(S)=C_{52,3}=\frac{52!}{3!49!}\left(\begin{array}{l}\textit{Número de maneiras}\\ \textit{de escolher 3 cartas}\\ \textit{dentre as 52.}\end{array}\right)$$

$$n(\overline{A})=C_{39,3}=\frac{39!}{3!36!}\left(\begin{array}{l}\textit{Número de maneiras}\\ \textit{de escolher 3 cartas}\\ \textit{dentre as cartas que}\\ \textit{não são de copas.}\end{array}\right)$$

$$Logo: P(\overline{A})=\frac{n(\overline{A})}{n(S)}=\frac{\frac{39!}{3!36!}}{\frac{52!}{3!49!}}=\frac{27.417}{66.300}$$

$$Mas: P(A)+P(\overline{A})=1$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

$$P(A)=1-\frac{27.417}{66.300}$$

$$P(A)=\frac{38.883}{66.300}=\frac{997}{1700}$$

04 Numa sala de aula com 30 alunos,cada aluno recebeu um número de 1 ao 30 para concorrer ao sorteio de um livro.

Suponha que, para manter a expectativa, em vez de divulgar de imediato o número sorteado, o professor anunciou: "O número sorteado é primo".

Pergunta-se: qual é a probabilidade de ter saído um número maior que 15?

Para o experimento "sortear" um número natural entre 1 e 30,há 30 resultados possíveis:

$$S=\{1;2;3;...;30\}\Rightarrow n(S)=30$$

Sejam os eventos:

A: sair um número primo

$$A=\{2;3;5;7;11;13;17;19;23;29\}\Rightarrow n(A)=10$$

B: sair um número maior que 15

$$B=\{16;17;...;19;29;30\}\Rightarrow n(B)=15$$

Devemos calcular a probabilidade de ocorrer B (número maior que 15), mas sabemos de antemão que ocorreu o evento A (números primo). Devemos então destacar,dentre os elementos de A, aqueles que são favoráveis à ocorrência do evento B,ou seja, os elementos de $A\cap B$.

$$A\cap B=\{17;19;23;29\}\Rightarrow n(A\cap B)=4$$

Assim, entre os 10 números primos possíveis de ocorrer,há 4 casos favoráveis.

Então, a probabilidade de ocorrer um número maior que 15, tendo sido sorteado um número primo,será dada por:

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

05 Num grupo de funcionários de uma empresa, há 4 rapazes e 6 moças e dois deles serão sorteados para fazer uma viagem. Calcule a probabilidade de que:

a)as duas pessoas sorteadas sejam moças.

b)As duas pessoas sorteadas sejam rapazes.

c)As duas pessoas soreteadas sejam do mesmo sexo.

d)Pelo menos ema pessoa sorteada seja do sexo feminino.

Resolução:

a)Sejam os eventos:

A: a 1ª pessoa sorteada é uma moça.

B: a 2ª pessoa sorteada é uma moça.

$$P(A\cap B)=P(A).P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{10}.\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

b)A: a 1ª pessoa sorteada é um rapaz

B: a 2ª pessoa sorteada é um rapaz

c)Duas pessoas de mesmo sexo:

A: sejam sorteadas duas moças

B: sejam soteados dois rapazes

d)Pelo menos uma moça ser sorteada é o evento complementar de serem sorteados 2 rapazes.

Exercícios de Sala

01 Uma uma contém 4 bolas brancas e 5 bolas pretas. Duas bolas, escolhidas ao acaso, são sacadas dessa uma, sucessivamente e sem reposição. A probabilidade de que ambas sejam brancas vale:

a)1/6
b)2/9
c)4/9
d)16/81
e)20/81

02 Considere todos os números de cinco algarismos distintos obtidos pela permutação dos algarismos 4,5,6, 7 e 8. Escolhendo-se um desses números, ao acaso, a probabilidade dele ser um número ímpar é

a)1
b)1/2
c)2/5
d)1/4
e)1/5

03 Uma caixa contém 3 bolas verdes, 4 bolas amarelas e 2 bolas pretas. Duas bolas são retiradas ao acaso e sem reposição. A probabilidade de ambas serem da mesma cor é:

a)13/72
b)1/18
c)5/18
d)1/9
e)1/4

04 Uma uma contém apenas cartões marcados com números de três algarismos distintos, escolhidos de 1 a 9. Se, nessa uma, não há cartões com números repetidos, a probabilidade de ser sorteado um cartão com um número menor que 500 é:

a)3/4.
b)1/2.
c)8/21.
d)4/9.
e)1/3.

05 Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, a probabilidade de que suas faces superiores exibam soma igual a 7 ou 9 é:

a) 1/6
b) 4/9
c) 2/11
d) 5/18
e) 3/7

06 (Unirio) Considerando-se um hexágono regular e tomando-se ao acaso uma de suas diagonais, a probabilidade de que ela passe pelo centro do hexágono é de:

a) 1/9
b) 1/6
c) 1/3
d) 2/9
e) 2/3

07 (Fuvest) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de freqüência da face 1, e que as outras faces saíam com a freqüência esperada em um dado não viciado.
Qual a freqüência da face 1?

a) 1/3.
b) 2/3.
c) 1/9.
d) 2/9.
e) 1/12.

08 (Fuvest) Escolhe-se ao acaso três vértices distintos de um cubo. A probabilidade de que estes vértices pertençam a uma mesma face é:

a) 3/14
b) 2/7
c) 5/14
d) 3/7
e) 13/18

09 (Fuvest) No jogo da sena seis números distintos são sorteados dentre os números 1, 2,....., 50. A probabilidade de que, numa extração, os seis números sorteados sejam ímpares vale aproximadamente:

a) 50 %
b) 1 %
c) 25 %
d) 10 %
e) 5 %

10 (Uel) De um total de 500 estudantes da área de exatas, 200 estudam Cálculo Diferencial e 180 estudam Álgebra Linear. Esses dados incluem 130 estudantes que estudam ambas as disciplinas. Qual é a probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente esteja estudando Cálculo Diferencial ou Álgebra Linear?

a) 0,26
b) 0,50
c) 0,62
d) 0,76
e) 0,80

11 Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de:

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{2}$

12 Uma clase possui 12 alunos, sendo 7 meninas e 5 meninos. São sorteados, ao acaso, dois alunos. A probabilidade de saírem dois meninos é:

a) $\frac{5}{33}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{7}{33}$

e) $\frac{1}{4}$

13 Dois prêmios iguais são sorteados entre 6 pessoas, sendo 4 homens e 2 mulheres. Supondo que uma mesma pessoa não possa ganhar os 2 prêmios, a probabilidade de pelo menos um homem ser sorteado é:

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{7}{8}$

c) $\frac{14}{15}$

d) $\frac{13}{14}$

e) $\frac{8}{9}$

14 Contra certa doença podem ser aplicadas as vacinas I ou II. A vacina I falha em 10% dos casos e a vacinaII, em 20% dos casos, sendo esses eventos totalmente independentes. Nessas condições, se todos os habitantes de uma cidade receberam doses adequadas da s duas vacinas, a probabilidade de um indivíduo **não** estar imunizado contra a doença é:

a) 30%
b) 10%
c) 3%
d) 2%
e) 1%

15 Um jogador de basquete, cuja média de aproveitamento nos lances livres é 60%, está posicionado paea a cobrança de dois lances livres. Qual a probabilidade de o jogador acertar somente o primeiro lance?

a) 40%
b) 36%
c) 32%
d) 28%
e) 24%

16 Sabe-se que o "cestinha" da seleção mariliense de basquete acerta 80% dos lances livres que executa numa partida. A probabilidade de ele acertar pelo menos um dos lances livres ao sofrer uma falta é:

a) 64%
b) 76%
c) 80%
d) 96%
e) 100%

Exercícios de Casa

01 (Ufpa) De um refrigerador que tem em seu interior 3 refrigerantes da marca A, 4 refrigerantes da marca B e 5 refrigerantes da marca C, retiram-se dois refrigerantes sem observar a marca. A probabilidade de que os dois retirados sejam da mesma marca é:

a) 1/6
b) 5/33
c) 19/66
d) 7/22
e) 3/11

02 (Unesp) Após uma partida de futebol, em que as equipes jogaram com as camisas numeradas de 1 a 11 e não houve substituições, procede-se ao sorteio de dois jogadores de cada equipe para exame anti-doping. Os jogadores da primeira equipe são representados por 11 bolas numeradas de 1 a 11 de uma urna A e os da segunda, da mesma maneira, por bolas de uma urna B. Sorteia-se primeiro, ao acaso e simultaneamente, uma bola de cada urna. Depois, para o segundo sorteio, o processo deve ser repetido com as 10 bolas restantes de cada urna. Se na primeira extração foram sorteados dois jogadores de números iguais, a probabilidade de que aconteça o mesmo na segunda extração é de:

a) 0,09.
b) 0,1.
c) 0,12.
d) 0,2.
e) 0,25.

03 (Unesp) Numa certa região, uma operadora telefônica utiliza 8 dígitos para designar seus números de telefones, sendo que o primeiro é sempre 3, o segundo não pode ser 0 e o terceiro número é diferente do quarto. Escolhido um número ao acaso, a probabilidade de os quatro últimos algarismos serem distintos entre si é

a) 63/125
b) 567/1250
c) 189/1250
d) 63/1250
e) 7/125

04 (Fgv) Uma urna contém cinco bolas numeradas com 1, 2, 3, 4 e 5. Sorteando-se ao acaso, e com reposição, três bolas, os números obtidos são representados por x, y e z. A probabilidade de que xy + z seja um número par é de

a) 47/125.
b) 2/5.
c) 59/125.
d) 64/125.
e) 3/5.

05 (Ita) Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

a) 1/21
b) 1/8
c) 3/21
d) 5/21
e) 1/4

06 (Pucmg) Numa disputa de robótica, estão participando os quatro estados da Região Sudeste, cada um deles representado por uma única equipe. No final, serão premiadas apenas as equipes classificadas em primeiro ou em segundo lugar. Supondo-se que as equipes estejam igualmente preparadas, a probabilidade de Minas Gerais ser premiada é:

a) 0,3
b) 0,5
c) 0,6
d) 0,8

07 (Pucsp) Os 36 cães existentes em um canil são apenas de três raças: poodle, dálmata e boxer. Sabe-se que o total de cães das raças poodle e dálmata excede o número de cães da raça boxer em 6 unidades, enquanto que o total de cães das raças dálmata e boxer é o dobro do número dos de raça poodle. Nessas condições, escolhendo-se, ao acaso, um cão desse canil, a probabilidade de ele ser da raça poodle é

a) 1/4
b) 1/3
c) 5/12
d) 1/2
e) 2/3

08 (Pucsp) Um marceneiro pintou de azul todas as faces de um bloco maciço de madeira e, em seguida, dividiu-o totalmente em pequenos cubos de 10 cm de aresta. Considerando que as dimensões do bloco eram 140 cm por 120 cm por 90 cm, então a probabilidade de escolher-se aleatoriamente um dos cubos obtidos após a divisão e nenhuma de suas faces estar pintada de azul é

a) 1/3
b) 5/9
c) 2/3
d) 5/6
e) 8/9

09 (Ufmg) Considere uma prova de Matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta.

Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão.

Então, é correto afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é:

a) 27/64
b) 27/256
c) 9/64
d) 9/256

10 (Fatec) Numa eleição para prefeito de uma certa cidade, concorreram somente os candidatos A e B. Em uma seção eleitoral votaram 250 eleitores. Do número total de votos dessa seção, 42% foram para o candidato A, 34% para o candidato B, 18% foram anulados e os restantes estavam em branco. Tirando-se, ao acaso, um voto dessa urna, a probabilidade de que seja um voto em branco é:

a) 1/100
b) 3/50
c) 1/50
d) 1/25
e) 3/20

11 (Fei) Uma urna contém 3 bolas numeradas de 1 a 3 e outra urna contém 5 bolas numeradas de 1 a 5. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola de cada urna, a probabilidade da soma dos pontos ser maior do que 4 é:

a) 3/5
b) 2/5
c) 1/2
d) 1/3
e) 2/3

12 (Mackenzie) Dois rapazes e duas moças ocupam ao acaso os quatro lugares de um banco. A probabilidade de não ficarem lado a lado duas pessoas do mesmo sexo é:

a) 1/3.
b) 2/3.
c) 1/2.
d) 3/4.
e) 1/4.

13 (Mackenzie) Num grupo de 12 professores, somente 5 são de matemática. Escolhidos ao acaso 3 professores do grupo, a probabilidade de no máximo um deles ser de matemática é:

a) 3/11.
b) 5/11.
c) 7/11.
d) 8/11.
e) 9/11.

14 (Mackenzie) A probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino é 0,25. Então a probabilidade do casal ter dois filhos de sexos diferentes é:

a) 1/16
b) 3/8
c) 9/16
d) 3/16
e) 3/4

15 (Mackenzie) Escolhe-se, ao acaso, um número de três algarismos distintos tomados do conjunto {1; 2; 3; 4; 5}. A probabilidade de nesse número aparecer o algarismo 2 e não aparecer o algarismo 4 é:

a) 3/5
b) 4/5
c) 3/10
d) 5/10
e) 7/10

16 (Mackenzie) Numa urna são colocadas 60 bolas iguais, numeradas de 1 a 60. A probabilidade de sortearmos, sucessivamente, com reposição, 3 bolas com números que são múltiplos de 5, é:

a) 8%
b) 0,8%
c) 0,08%
d) 0,008%
e) 0,0008%

17 (Pucsp) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 5. Sorteia-se uma bola, verifica-se o seu número e ela é reposta na urna.

Num segundo sorteio, procede-se da mesma forma que no primeiro sorteio. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior que o da primeira é

a) 4/5
b) 2/5
c) 1/5
d) 1/25
e) 15/25

18 (Vunesp) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R não ser escalado é 0,2 e a probabilidade de o jogador S ser escalado é 0,7.

Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:

a)0,06
b)0,14
c)0,24
d)0,56
e)0,72

19 (Vunesp) Sabe-se que os pênaltis a favor de certa equipe de futebol são batidos pelos dois melhores cobradores da equipe, A e B, cujos índices de aproveitamento (conversão de gols) são, respectivamente, 85% e 90%.

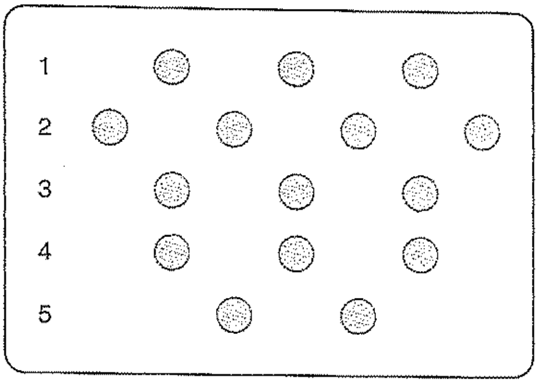
Sabe-se ainda que B cobra 75% dos pênaltis a favor da equipe. Acaba de ser marcado um pênalti a favor dessa equipe e, nesse momento, os jogadores A e B estão em campo.

a)Qual é a probabilidade de que o pênalti seja cobrado por B e não seja convertido em gol?

b)Qual é a probabilidade de o pênalti ser convertido em gol?

20 (Enem-MEC) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens em cartão de apostas do seguinte tipo:

Frente do cartão



Verso do cartão

— Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
— Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas.
Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
— Se encontrar um X em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
— Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de X distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal modo que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero.

Em determinado cartão existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é:

a) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{1}{36}$

c) $\frac{1}{54}$

d) $\frac{1}{72}$

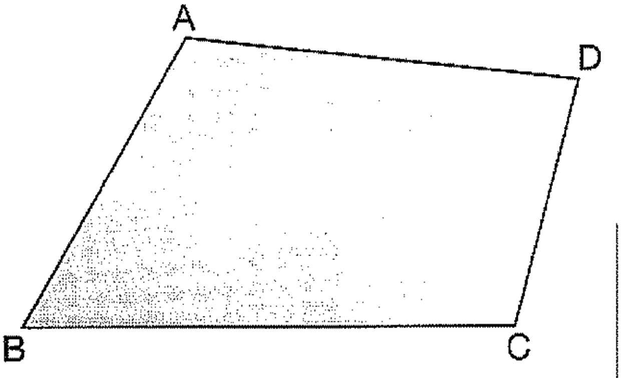
e) $\frac{1}{108}$

3. GEOMETRIA PLANA E DE POSIÇÃO

Polígonos

3. 1. Nomenclatura

Seja o polígono da figura:



Em que:

A,B,C e D são vértices do polígono;

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são lados do polígono.

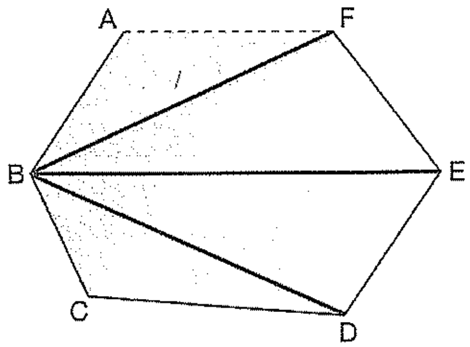
Quando todo e qualquer par de pontos R e S, tomados na região poligonal, determinar um segmento $\overline{RS}$ completamente interno à região, o polígono é **convexo.** Caso contrário, o polígono é **não-convexo** ou **côncavo.**

Tipos de polígonos convexos:

Triângulo – 3 lados
Quadrilátero – 4 lados
Pentágono – 4 lados
Hexágono – 6 lados
Heptágono – 7 lados
Octógono – 8 lados
Eneágono – 9 lados
Decágono – 10 lados
Undecágono – 11 lados
Dodecágono – 12 lados
Pentadecágono – 15 lados
Icoságono – 20 lados

3. 2. Número de diagonais de um polígono

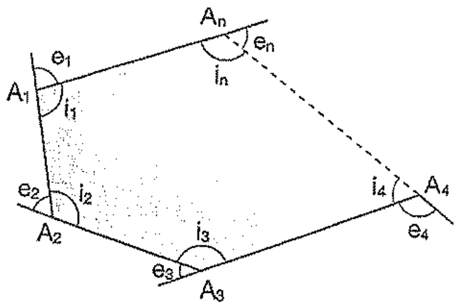
O número de diagonais d de um polígono de n lados é dado por:



$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

3. 3. Soma das medidas dos ângulos internos e externos

Considere o polígono de n lados da figura:



$$S_i = i_1 + i_2 + ... + i_n \Rightarrow \boxed{S_i = (n-2).180°}$$

$$S_e = e_1 + e_2 + ... + e_n \Rightarrow \boxed{S_e = 360°}$$

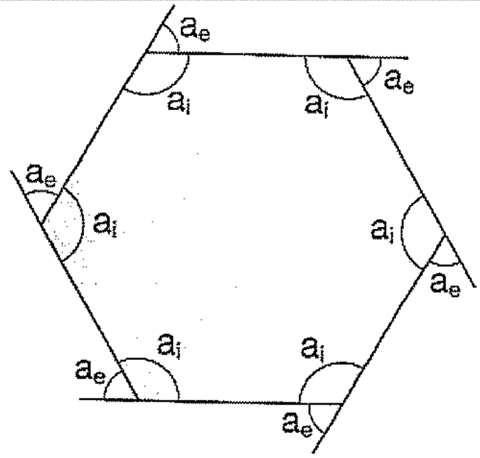
Em que:

S_i é a soma dos ângulos internos;

S_e é a soma dos ângulos externos.

Observações:

1ª) Se o polígono for regular, ele tem todos os lados e os ângulos congruentes; logo:



Ângulo interno $\Rightarrow \boxed{a_i = \frac{S_i}{n}}$

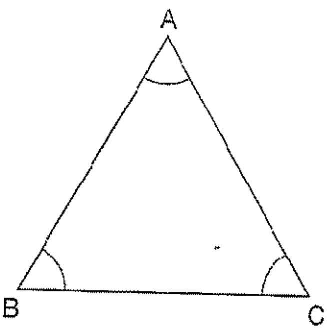
Ângulo externo $\Rightarrow \boxed{a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}}$

2ª) Todo polígono regular é inscrítivel e circunscrítivel.

Triângulos

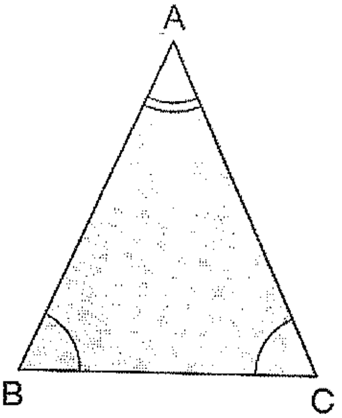
3. 4. Classifição

Equilátero



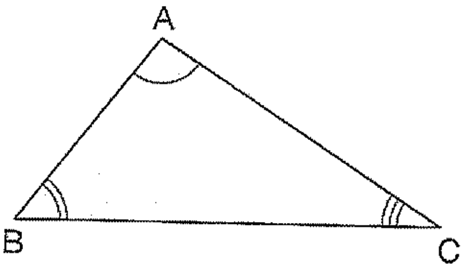
$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$$
$$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$$

Isóceles



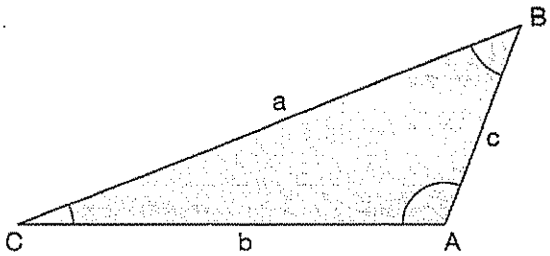
$$\overline{AB} \cong \overline{AC}$$
$$\widehat{B} \cong \widehat{C}$$

Escaleno



$$\overline{AB} \ncong \overline{AC} \ncong \overline{BC}$$
$$\widehat{A} \ncong \widehat{B} \ncong \widehat{C}$$

3. 5Relações



1ª) Qualquer lado é menor que a soma dos outros dois.

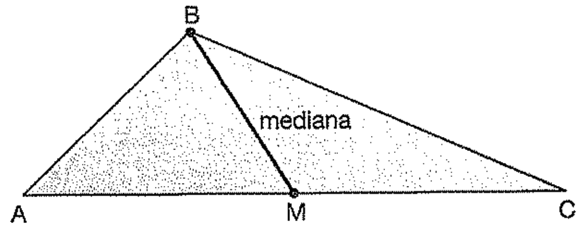
$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

2ª) A soma dos ângulos internos é 180°.

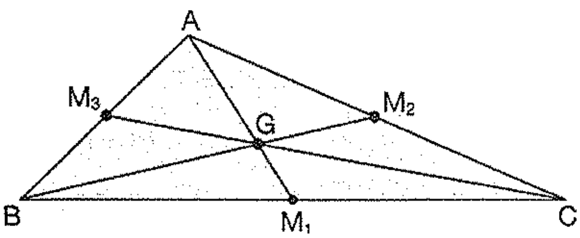
$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

3.6. Mediana

É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.



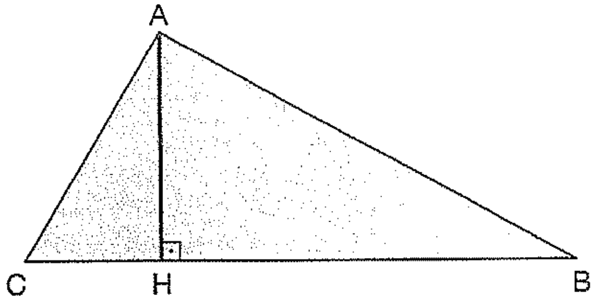
As três medianas de um triângulo cruzam-se num ponto G, determinado **baricentro** do triângulo.

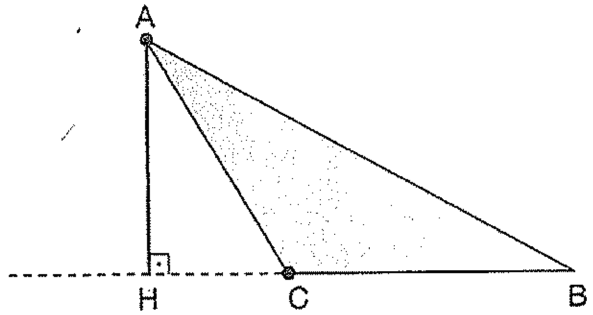


$$AG = 2GM_1 \Rightarrow \begin{cases} AG = \dfrac{2}{3} AM_1 \\ GM_1 = \dfrac{1}{3} AM_1 \end{cases}$$

3.7. Altura

É o segmento que parte de um vértice e é perpendicular ao lado oposto.

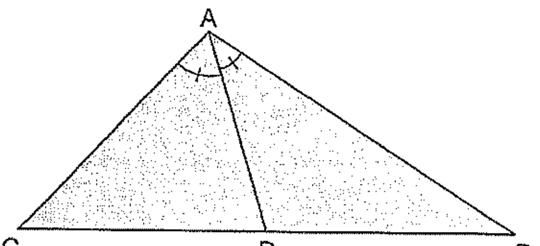




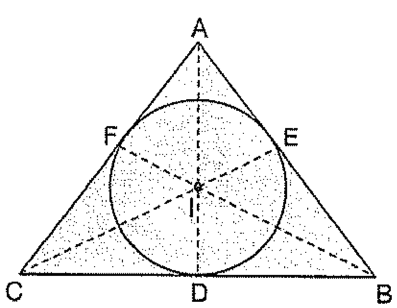
As três alturas de um triângulo cruzam-se num mesmo ponto,denominado **ortocentro** do triângulo.

3.8. Bissetriz

A bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ intercepta o lado oposto no ponto D. O segmento $\overline{AD}$ denomina-se **bissetriz interna** relativa ao vértice A.



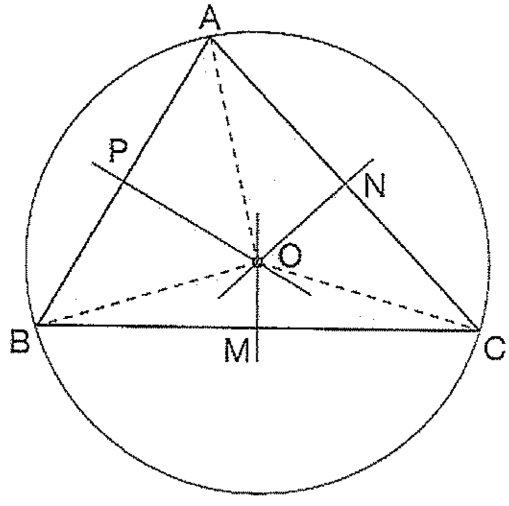
As três bissetrizes de um triângulo cruzam-se num mesmo ponto I, denominado **incentro** do triângulo.



O ponto I é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

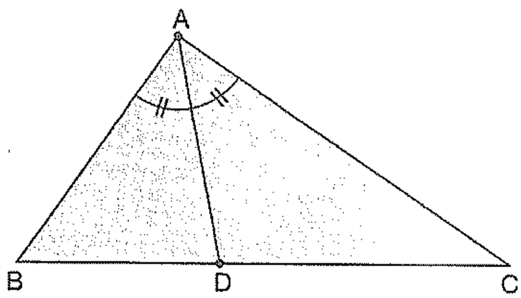
Observação:

O centro da circunferência circunscrita a um triângulo é o **circuncentro,** isto é, o ponto de encontro das mediatrizes.



3.9 . Teorema da bissetriz interna

Considere o triângulo ABC e a bissetriz interna relativa ao vértice A.



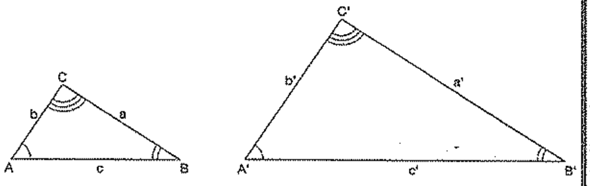
Da figura, temos: $\boxed{\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}}$

A bissetriz do ângulo interno de um triângulo determina sobre o lado oposto dois segmentos proporcionais aos outros dois lados.

3.10. Semelhança de triângulos

Dois triângulos ABC e A' B' C' são ditos semelhantes, se:

- Os ângulos correspondentes forem congruentes;
- Os lados correspondentes (ou homólogos) forem proporcionais.



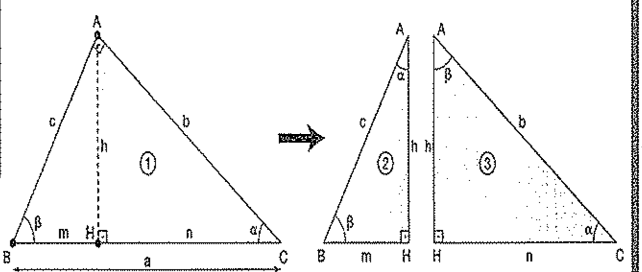
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A'} \\ \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \hat{C} \cong \hat{C'} \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Em que k é a constante de proporcionalidade.

Observação:

Figuras que têm a mesma forma mas medidas lineares diferentes são denominadas **figuras semelhantes.**

3.11. Relações métricas no triângulo retângulo



Em que:

a – hipotenusa;
b e c – catetos;
h – altura relativa à hipotenusa;
m e n – projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} ah = bc \\ c^2 = a.m \end{array}}$$

$$\Delta_1 \sim \Delta_3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow \boxed{b^2 = a.n}$$

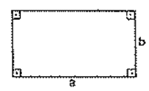
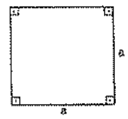
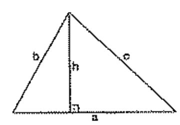
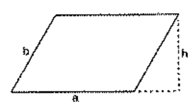
$$\Delta_2 \sim \Delta_3 \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{n} \Rightarrow \boxed{h^2 = m.n}$$

- **Teorema de Pitágoras**

Do Δ_1, obtemos $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

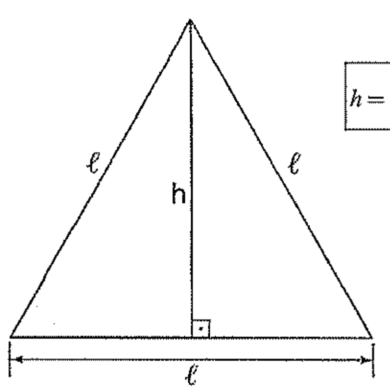
O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Área das figuras planas
Área dos quadriláteros

	Figura	Perímetro	Área
retângulo		2(a + b)	S = a · b
quadrado		4a	$S = a^2$
triângulo		a + b + c $p = \frac{a+b+c}{2}$ semiperímetro	$S = \frac{a \cdot h}{2}$ ou $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
paralelogramo		2(a + b)	S = a · h

Observações:

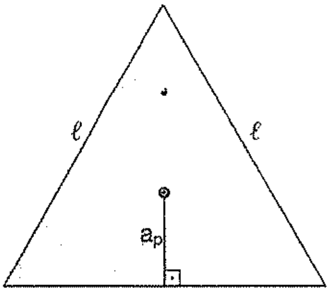
1ª) No caso do triângulo equilátero, temos:



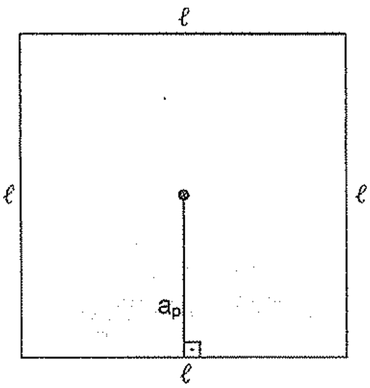
$$\boxed{h = \frac{l\sqrt{3}}{2}} \qquad \boxed{S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$$

2ª) O apótema de um polígono regular é a distância do centro do polígono a qualquer um dos lados; logo:

Triângulo equilátero

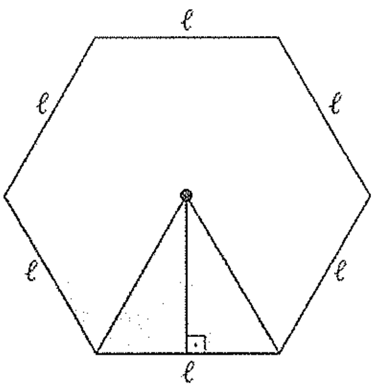


$$\boxed{a_p = \frac{l\sqrt{3}}{6}}$$



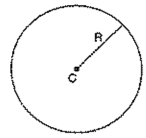
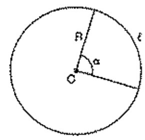
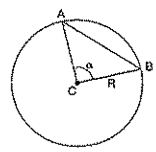
$$\boxed{a_p = \frac{l}{2}}$$

Hexágono regular



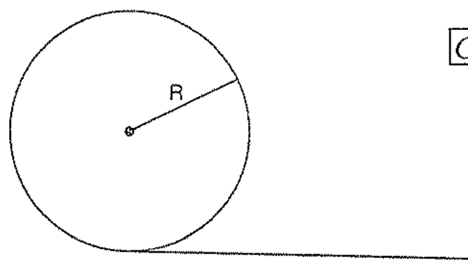
$$\boxed{a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

3.12. Áreas do cícurlo e suas partes

	Figura	Área
círculo		$S = \pi R^2$
setor circular		α em graus: $S = \frac{\alpha \pi R^2}{360°}$ α em radianos: $S = \frac{\alpha R^2}{2}$
segmento circular		$S = S_{setor} - S_{\Delta ACB}$

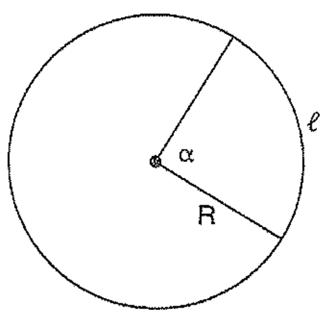
Observações:

1ª) O comprimento de uma circunferência de raio R é dado por:



$$\boxed{C = 2\pi R}$$

2ª) A medida de um arco de circunferência é dada por:



$$\boxed{l = \alpha . R}$$

$(\alpha \ em \ radianos)$

4. Geometria Espacial de Posição

Ponto, **reta** e **plano** são considerados noções primitivas na Geometria.

Espaço é o conjunto de todos os pontos.

Postulados são proposições aceitas e ultilizadas sem demonstração.

P1. Uma reta possui infinitos pontos e existem infinirtos pontos fora dela.

P2. Por um ponto passam infinitas retas.

P3. Dois pontos distintos determinam uma reta.

P4. Um plano possui infinitos pontos e existem infinitos pontos fora dele.

P5. Se dois pontos distintos pertecem a uma reta e a um plano, então esta reta está contida neste plano.

P6. Três pontos não-colineares determinam um plano.

P7. A intersecção de dois planos distintos que tenham um ponto em comum é uma reta.

P8. A paralela a uma reta por um ponto é única.

1. Posições relativas de duas retas

I- Retas coplanares: concorrentes, paralelas e coincidentes.

II- Retas reversas: são retas que não estão contidas num mesmo plano.

Observações:

1ª) Quando duas retas concorrentes formam entre si um ângulo de 90°, são chamadas retas **perpendiculares.**

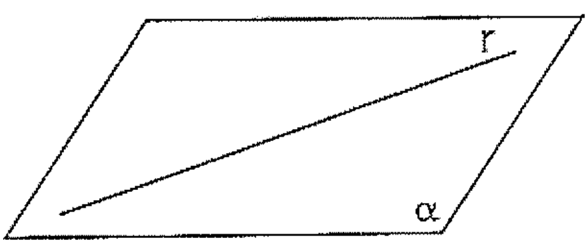
2ª) Quando duas retas reversas formam um ângulo de 90°, são chamadas retas **ortogonais.**

2. Determinação de planos

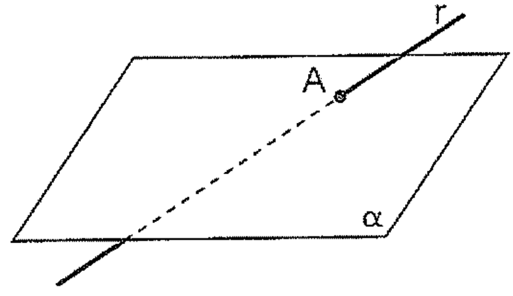
Um plano fica determinado por: três pontos não-collineares, duas retas paralelas, duas retas concorrentes ou uma reta e um ponto fora dela.

3. Posições relativas entre uma reta e um plano

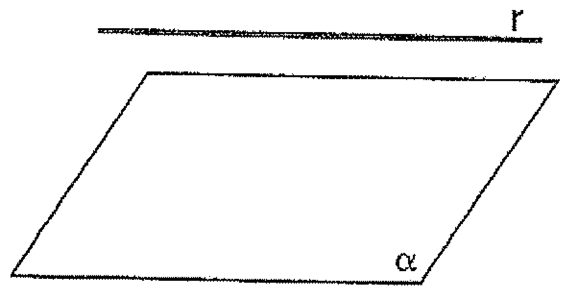
a)A reta está contida no plano.



b)Reta concorrente ou secante: a reta "fura" o plano.

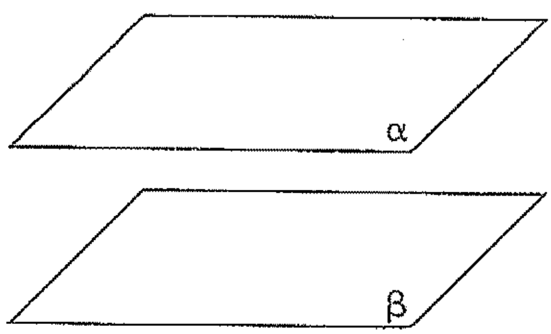


c) A reta é paralela ao plano.

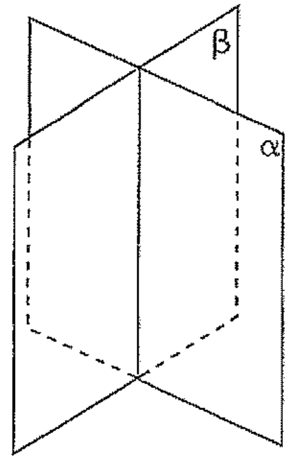


4. Posições relativas entre dois planos

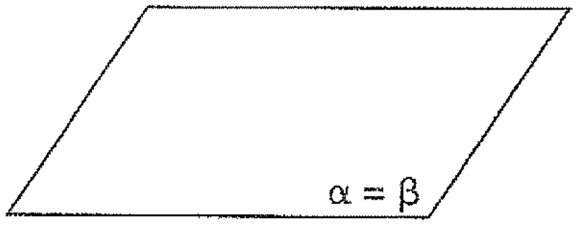
a)Planos paralelos.



b)Planos secantes: a intersecção é uma reta.



c) Planos coincidentes.



5. Principais teoremas

T1. Se uma reta r é perpendicular a um plano α num ponto A, ela é perpendicular a todas as retas do plano α que passam por este ponto.

T2. Se um reta r, não contida num plano α, é pararela a uma reta s de α, então r e α são paralelos.

T3. Se uma reta r é paralela a um plano α e se existe um plano β que contém r e é secante a α segundo uma reta s, então r//s.

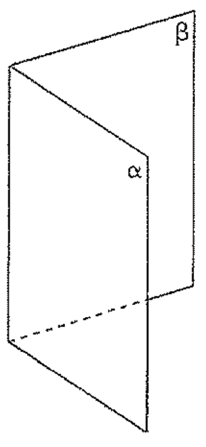
T4. Se dois planos α e β são paralelos, então qualquer reta de um plano é paralela ao outro plano.

T5. Teorema das três perpendiculares: se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto A, e se uma reta s de α passa por A e uma reta t de α não passa por A mas é perpendicular a s no ponto B, então qualquer reta que passe por B e por um ponto de r é perpendicular à reta t.

T6. Duas retas distintas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si.

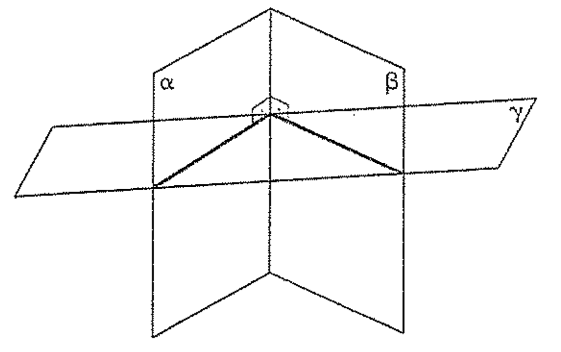
6. Diedro

Diedro é a região formada por dois semiplanos de origem comum.



aresta: reta comum
α e β : faces

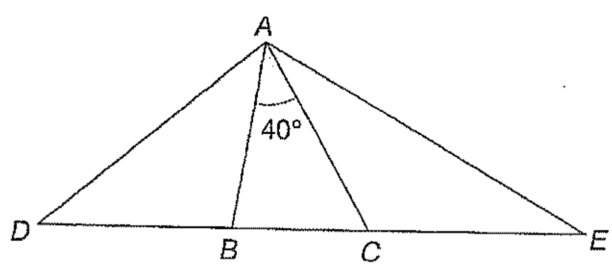
Secção de um diedro é a intersecção do diedro com o plano γ secante à aresta. Quando este plano é perpendicular à aresta, a secção é denominada normal ou reta do diedro.



A medida de um diedro é a medida de sua secção normal.

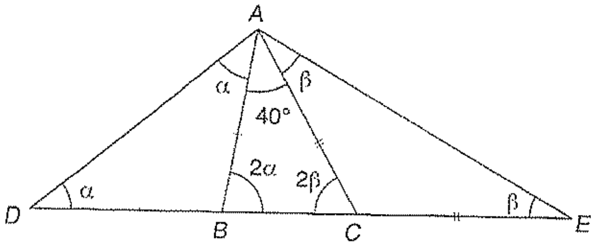
Exercícios Comentados

01 Na figura. AB=BD,AC = CE e BÂC=40°. O ângulo DAE mede.



a) 110°
b) 114°
c) 118°
d) 120°
e) 125°

Resolução:



· Nos triângulos isóceles BAD e CAE, BÂD = B$\widehat{D}$A = α e CÂE = CÊA = β (ângulos das bases).

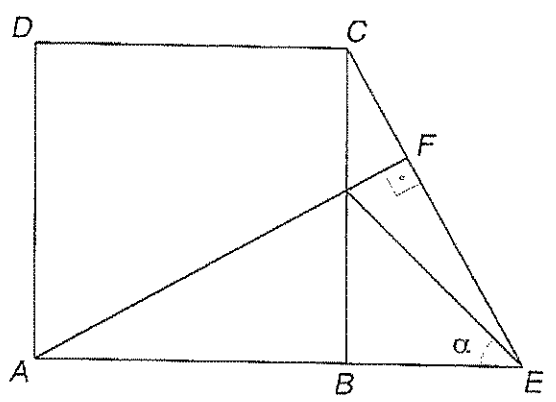
· $A\widehat{B}C = \alpha + \alpha = 2\alpha$ (ângulo externo do triângulo ABD)

· $A\widehat{C}B = \beta + \beta = 2\beta$ (ângulo externo do triângulo ACE).

· Por fim, no triângulo ABC,

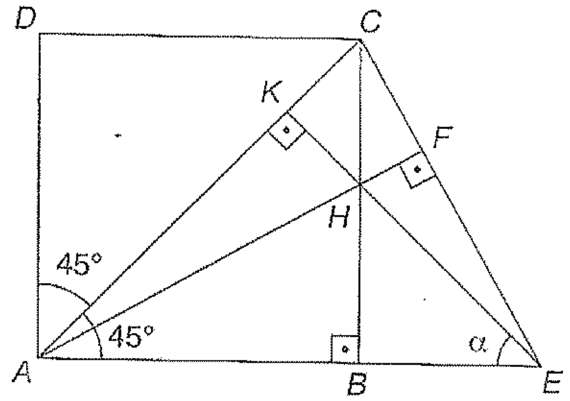
$$2\alpha + 2\beta + 40° = 180°$$
$$2\alpha + 2\beta = 140° \div (2)$$
$$\alpha + \beta = 70°$$
$$\therefore D\hat{A}E = \alpha + \beta + 40° \Rightarrow D\hat{A}E = 110°$$

02 Nesta figura,ABCD é um quadrado, E é um ponto qualquer do prolongamento do lado AB e $\overline{AF} \perp \overline{EC}$. Calcule α .



Resolução:

Traçando a diagonal $\overline{AC}$, obtemos o triângulo ACE no qual $\overline{CB}$ e $\overline{AF}$ são alturas.



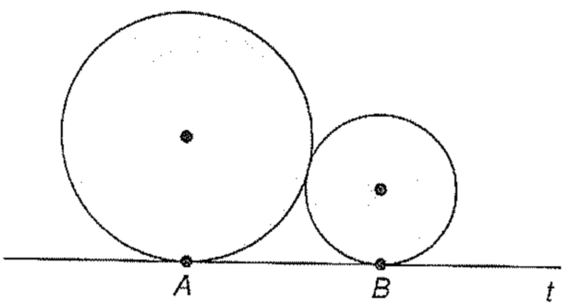
Então, H é o ortocentro do triângulo ACE e, consequentemente, o segmento $\overline{EK}$ é a terceira altura desse triângulo.

Finalmente,como a diagonal do quadrado é bissetriz de seus ângulos internos, no triângulo AEK temos:

$$\alpha + 90° + 45° = 180°$$
$$\therefore \alpha = 45°$$

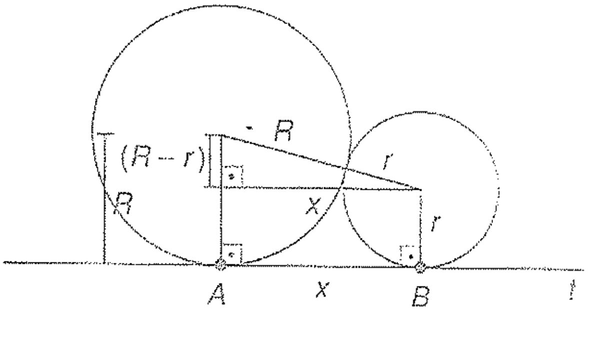
Resposta: $\alpha = 45°$

03 As circunferências da figura têm raios R e r, são tangentes entre si e tangenciam a reta t nos pontos A e B.



Calcule AB em função de R e r.

Resolução:



04 Calcule os raios das circunferências inscrita e circunscrita num triângulo equilátero de lado $\ell = 12\ cm$.

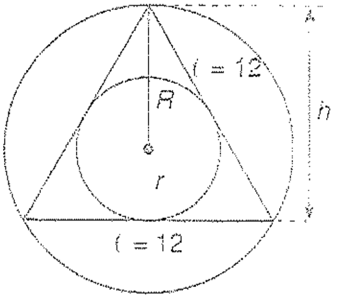
Resolução:

Obeservação: as medidas da altura do triângulo equilátero e da diagonal do quadrado.Tais resultados foram deduzidos na primeira aula deste curso (trigonometria do triângulo retângulo).

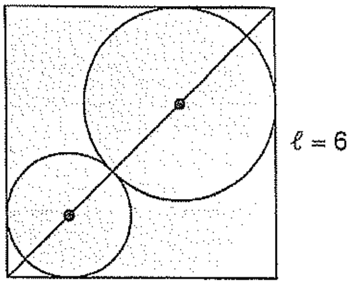
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 6\sqrt{3}\ cm$$

$$r = \frac{1}{3}h \Rightarrow r = 2\sqrt{3}\ cm$$

$$R = \frac{2}{3}h \Rightarrow R = 4\sqrt{3}\ cm$$



05 As duas circunferências da figura são tangentes e cada uma delas tangencia dois lados do quadrado de lado $\ell = 6$.



Se R=2 é o raio da circunferência maior, o raio da menor é igual a:

a) 1

b) $\sqrt{2} - 1$

c) $\frac{3}{4}$

d) $2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

Observando os dois quadrados sombreados na figura, temos:

$AO' = r\sqrt{2}$ e $OC = 2\sqrt{2}$

Como $AC = 6\sqrt{2}$, podemos escrever:

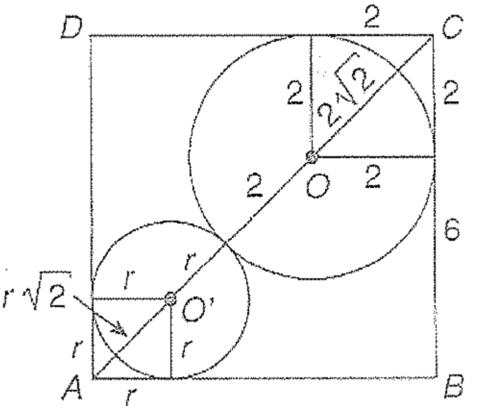
$$r\sqrt{2} + r + 2 + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$r\left(\sqrt{2} + 1\right) = 4\sqrt{2} - 2$$

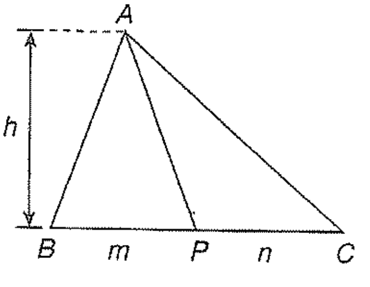
$$r = \frac{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\sqrt{2} + 1}$$

Racionalizando o denominador, obtemos:

$$r = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$



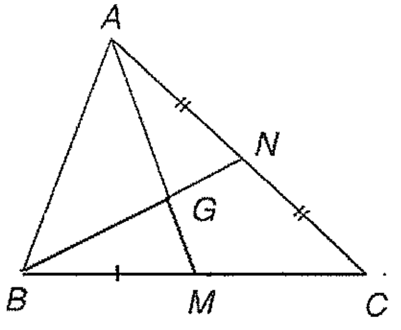
06 Na figura a seguir $\overline{AP}$ é uma ceviana qualquer do triângulo ABC. Se BP= m e PC= n, prove que as àreas dos triângulos ABP e APC são proporcionais a m e n.



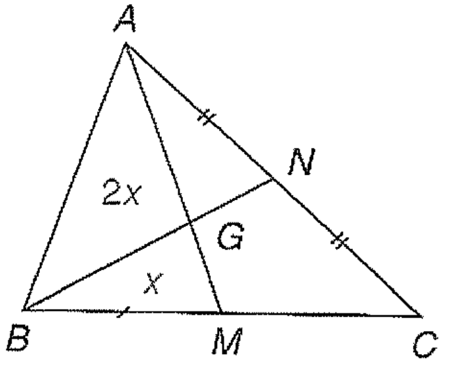
Resolução:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{\frac{mh}{2}}{\frac{nh}{2}}\Rightarrow\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{m}{n}$$

b) Prove que,se G é o baricentro de um triângulo ABC de área S, então $S_{ABG}=S_{BCG}=S_{ACG}=\frac{S}{3}$.



Resolução:



· $\overline{AM}$ é uma mediana de triângulo ABC.Assim, $S_{ABM}=\frac{S}{2}$

· Como G é o baricentro do triângulo ABC,AG e GM são proporcionais 2 e 1.Logo, as áreas dos triângulos ABG e BMG são também proporcionais a 2 e 1(item a).

Façamos então $S_{BMG}=x$ e $S_{ABG}=2x$.

Então, temos:

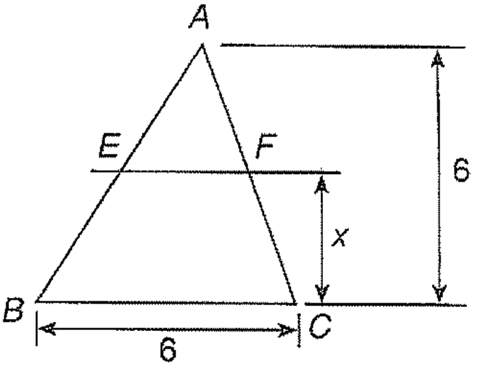
$$2x+x=\frac{S}{2}\Rightarrow 3x=\frac{S}{2}\Rightarrow x=\frac{S}{6}$$

Logo,

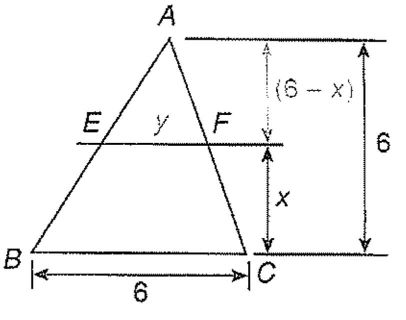
$$S_{ABG}=2x\Rightarrow S_{ABG}=\frac{S}{3}$$

Analogamente prova-se que $S_{BCG}=\frac{S}{3}$ e $S_{ACG}=\frac{S}{3}$.

07 Nesta figura, EF//BC. Calcular x para que a área do trapézio EBCF seja igual a 10.



Resolução:



$$(\Delta\, AEF\sim\Delta\, ABC)\Rightarrow\frac{y}{6}=\frac{6-x}{6}$$

$\therefore y=6-x$

A área do trapézio EBCF será dada por:

$$S=\frac{(6+y)x}{2}=\frac{(6+6-x)x}{2}=\frac{-x^2+12x}{2}$$

Logo:

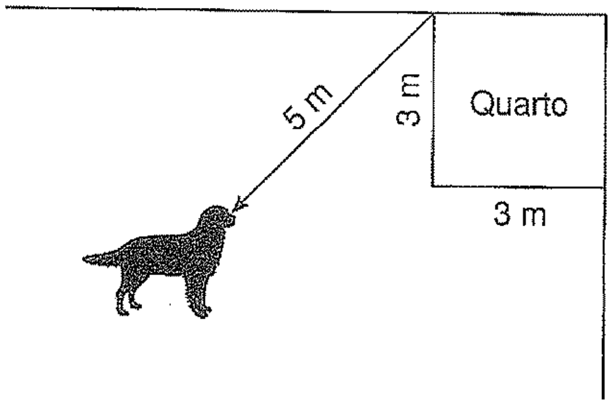
$$S=10\Rightarrow\frac{-x^2+12x}{2}=10$$

$$-x^2+12x=20$$

$$x^2-12x+20=0\Rightarrow(x=2\ ou\ x=10)$$

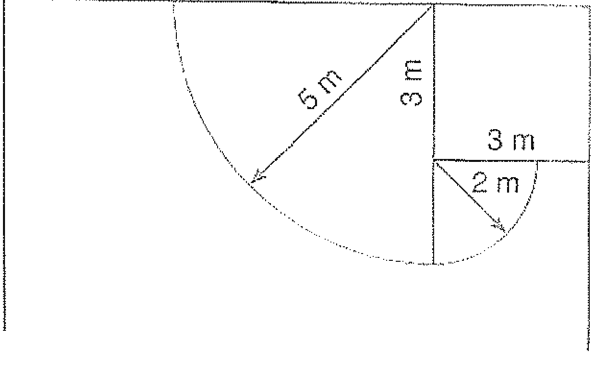
Como $x<6$, *temos* $x=2$.

08 No quintal de sua casa, Francisco possui um pequeno quarto de 3m por 3m, conforme mostra a figura. No canto, entre o muro dos fundos e uma parede do quarto, Francisco fixa uma corrente de 5m de comprimento na qual prende seu cão durante o dia.



1. Fazer uma figura ilustrativa, desenhando a linha limite onde o cão pode circular.

Resolução:



2. Calcular a área dessa região.

A área procurada é:

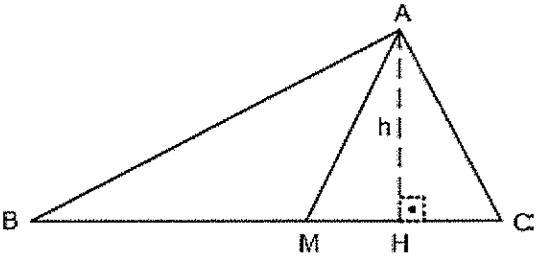
$$S = \frac{1}{4}.\ \pi.\ 5^2 + \frac{1}{4}.\ \pi.\ 2^2$$

$$S = \frac{29\pi}{4} m^2$$

Exercícios de Sala

01 **(Unicamp)** É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

02 **(EsPCEx)** No triângulo ABC, **a base** BC **mede 8 cm, o ângulo** $\hat{B}$ **mede 30° e o segmento** AM **é congruente ao segmento** MC , sendo **M o ponto médio de** BC . A medida, em centímetros, da **altura h**, relativa ao lado BC do triângulo ABC, é de



a) $\sqrt{2}$ cm.

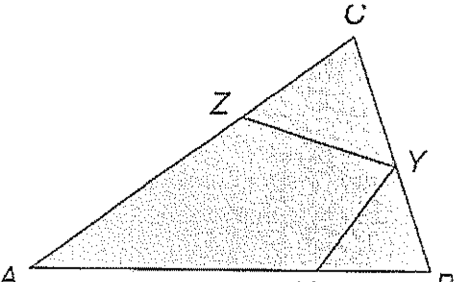
b) $2\sqrt{2}$ cm.

c) $\sqrt{3}$ cm.

d) $2\sqrt{3}$ cm.

e) $3\sqrt{3}$ cm.

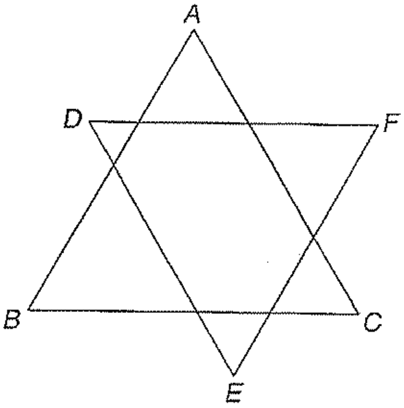
03 (Fuvest) Na figura, AB= AC, BX= BY e CZ= CY.



Se o ângulo A mede 40°, então o ângulo XYZ mede:

a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 90°

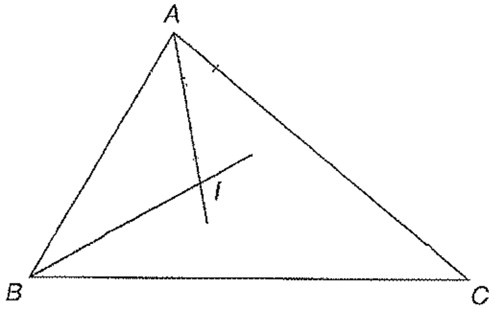
04 Nesta figura, ABC e DEF dão triângulos equiláteros de perímetros iguais a 30 cm e 24 cm, respectivamente. Além disso, cada lado de um triângulo é paralelo a um lado do outro.



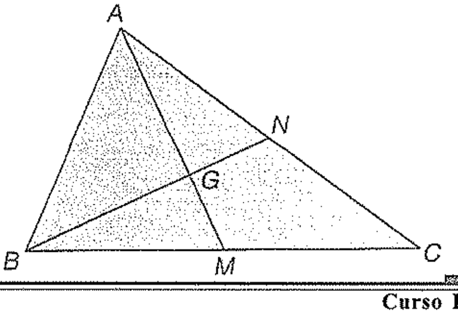
O perímetro do hexágono determinado pela intersecção dos dois triângulos é:

a) 24 cm
b) 20 cm
c) 18 cm
d) 16 cm
e) 15 cm

05 Na figura seguinte I é o incentro do triângulo ABC. Calcule AÎB, sabendo que $\widehat{C} = 40°$.



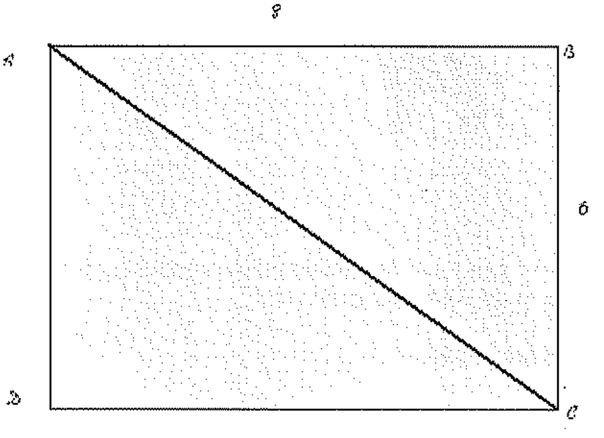
06 No triângulo ABC a seguir, M e N são os pontos médios de $\overline{BC}$ e de $\overline{AC}$.



Se AM = 12 cm e BN = 15 cm, conclui-se corretamente que AG + GN é igual a:

a) 14 cm
b) 13 cm
c) 12 cm
d) 11 cm
e) 10 cm

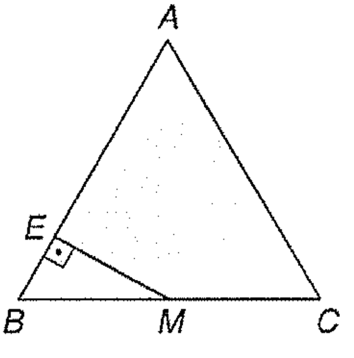
07 ABCD é um retângulo em que AB = 8 cm e BC = 6 cm.



A distância do vértice B à diagonal AC é igual a:

a) 4,2 cm
b) 4,4 cm
c) 4,6 cm
d) 4,8 cm
e) 5,0 cm

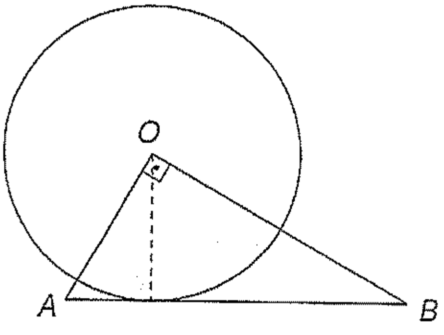
08 No triângulo isósceles seguinte, AB = AC = 10 cm, BC = 12 cm e M é o ponto médio de $\overline{BC}$. Então, ME é igual, em cm, a:



a) 4

b) 4,2
c) 4,4
d) 4,6
e) 4,8

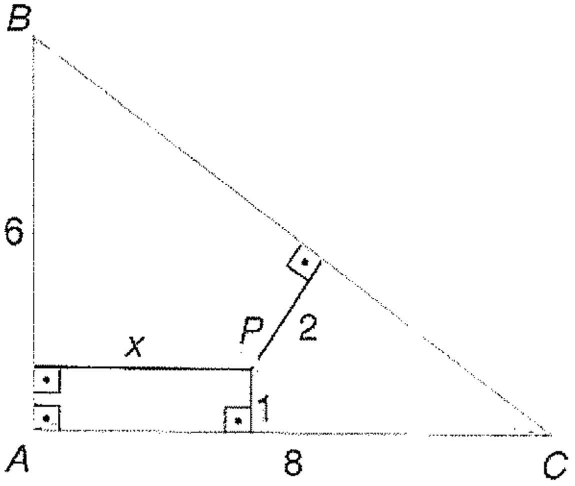
09 Seja AOB um triângulo retângulo em O, no qual $AO = \sqrt{10}\ cm$ e $OB = 3\sqrt{10}\ cm$. Com centro em O, descreve-se a circunferência que tangencia a hipotenusa.



O raio dessa circunferência mede, em cm:

a) $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$
b) 3
c) $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$
d) 3,2
e) 2,8

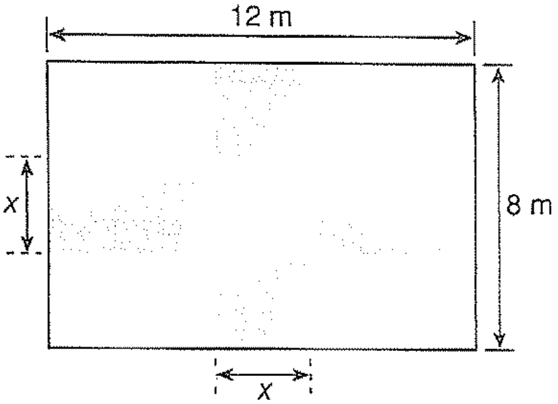
10 ABC é um triângulo retângulo em A, AB= 6 cm e AC= 8 cm. O ponto P, situado no interior do triângulo, dista 1 cm de AC e 2 cm de BC. Qual a distância de P a AB?



11 Os lados de um triângulo medem 5 cm, 6 cm, e 7 cm. Calcular, desse triângulo:

a) A área.
b) A maior altura.

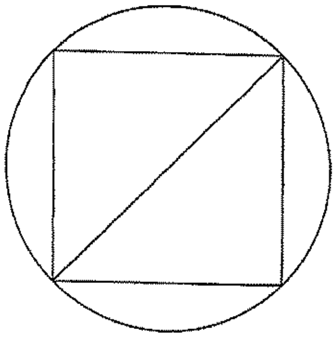
12 Numa área retangular de 8 m por 12m, será implantado um jardim, dividido como mostra a figura a seguir, a partir de um quadrado de x metros de lado centralizado no retângulo.



Na região em amarelo serão plantadas margaridas e na região em laranja serão plantadas sálvias.

a)Calcular, em função de x, a área reservada para as margaridas.
b)Calcular x para que as duas flores ocupem áreas iguais.

13 Um quadrado está inscrito numa circunferência de comprimento igual a 8π cm. A área da região interna à circunferência e externa ao quadrado, em cm^2, é igual a:



a) $8(\pi - 1)$

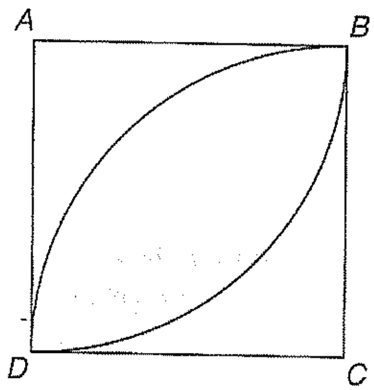
b) $8(2\pi - 1)$

c) $16(2\pi - 1)$

d) $16(\pi - 2)$

e) $32(\pi - 1)$

14 (PUC-PR) No quadrado ABCD de lado 2, traçam-se dois arcos com centro nos vértices A e C e raio igual ao lado do quadrado.



A área delimitada por estes dois arcos é:

a) $(\pi - 1)$

b) $(\pi - 4)$

c) $2(\pi - 1)$

d) $(\pi - 2)$

e) $2(\pi - 2)$

15 (PUC-SP) Se é a área de um triângulo ABC e M, N e P são os pontos médios dos lados do triângulo ABC, então a área do triângulo MNP é:

a) $\frac{S}{5}$

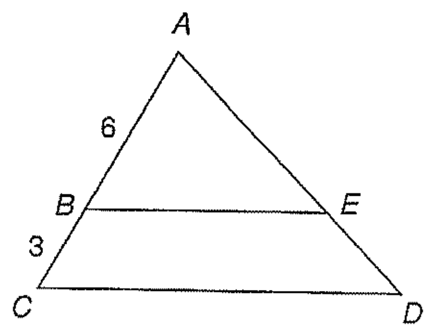
b) $\frac{S}{4}$

c) $\frac{S}{3}$

d) $\frac{S}{2}$

e) S

16 Na figura seguinte, $\overline{BE} // \overline{CD}$ AB = 6 e BC = 3. A razão entre as áreas do triângulo ABE é do trapézio BCDE é:



a) $\frac{4}{5}$

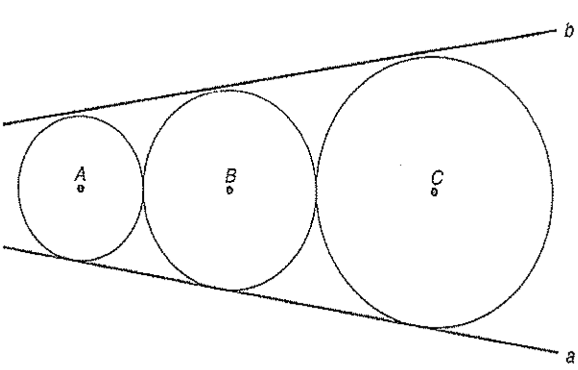
b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{2}{3}$

d) 1

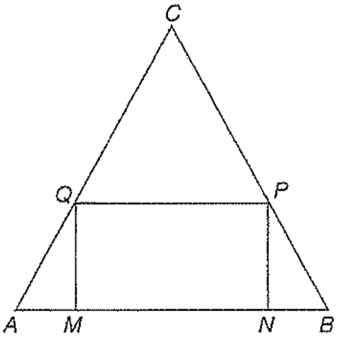
e) 2

17 A circunferência de centro B tem raio r e tangencia externamente as circunferências de centros A e C, cujos raios são iguais a 1 e 2, respectivamente. As retas a e b tangenciam as três circunferências. Calcule r.



18 (Fuvest-SP) No triângulo acutângulo ABC, a base AB mede 4 cm e a altura relativa a essa base também mede 4 cm. MNPQ é um retângulo cujos vértices M e N pertecem ao lado AB, P pertence ao lado BC e Q ao lado AC. O perímetro desse retângulo, em cm, é:

a) 4
b) 8
c) 12
d) 14
e) 16



19 (Mack-SP) Considere as afirmações.

I. Três retas paralelas distintas podem determinar 1 ou 3 planos.
II. Duas retas s e t distintas são paralelas a um plano α ;então elas podem ser reversas.
III. Se uma reta é perpendicular a uma reta paralela a um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Então:

a) todas são verdadeiras;
b) todas são falsas;
c) somente I e II são verdadeiras;
d) somente I e III são verdadeiras;
e) somente II e III são verdadeiras.

20 (PUCCAMP-SP) Considere as afirmações abaixo.

I. Duas retas distintas determinam um plano.
II. Se duas retas disitintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
III. Se doi planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

É correto afirmar que:

a) apenas II é verdadeira.
b) apenas III é verdadeira.
c) apenas I e II são verdadeiras.
d) apenas I e III são verdadeiras.
e) I,II e III são verdadeiras.

21 (UFF-RJ) Considere um plano , uma reta r concorrente com ,um ponto P que não pertença nem a r nem a ,e as seguintes afirmações.

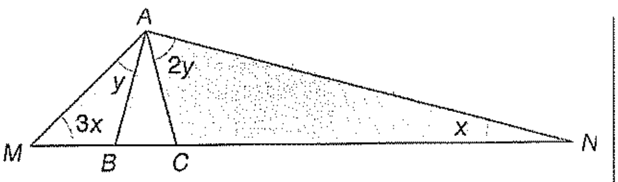
I. A reta s que passa por P, intercepta r e é paralela a , é única.
II. O plano que contém P e r intercepta .
III. Qualquer reta que passe por P e seja paralela a intercepta r.

Pode-se concluir que:

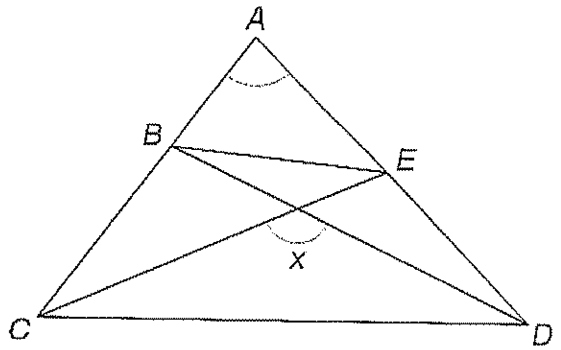
a) as afirmações I e III são verdadeiras.
b) as afirmações I e II são verdadeiras.
c) as afirmações II e III são verdadeiras.
d) todas as afirmações são verdadeiras.
e) todas as afirmações são falsas.

Exercícios de Casa

01 Calcule x e y, sabendo que $x + y = 42°$ e que $AB = AC$.



02 Na figura,$\hat{A} = 80°$, $BC = BE = ED$.

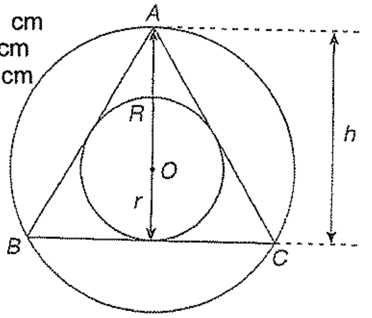


A medida x do ângulo indicado é:

a) 100°
b) 110°
c) 120°
d) 130°
e) 135°

03 Nesta figura, ABC é um triângulo equilátero, R e r são os raios das circunferências circunscrita e inscrita e h é sua altura.

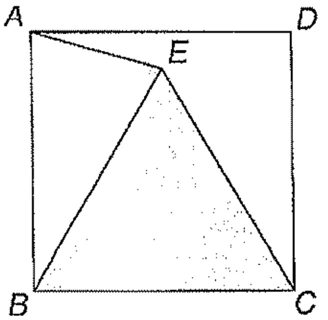
Calcule:
a) R e r se h= 21 cm
b) R e r se r = 5 cm
c) r e h se R = 8 cm



04 (Cesgranrio-RJ) Assinale a alternativa que contém a propriedade diferenciadora do quadrado em relação aos demais quadriláteros:

a) Todos os ângulos são retos.
b) Os lados são todos iguais.
c) As diagonais são iguais e perpendiculares entre si.
d) As diagonais se cortam ao meio.
e) Os lados opostos são paralelos e iguais.

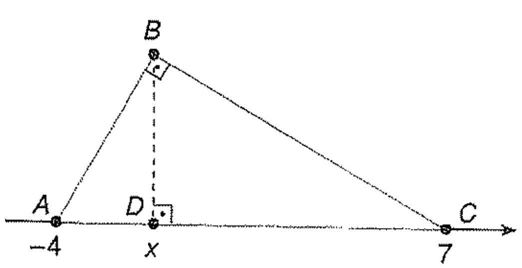
05 Na figura, ABCD é um quadrado e BCE é um triângulo equilátero.



A medida do ângulo AEB, em graus, é:

a) 30
b) 49
c) 60
d) 75
e) 90

06 (UFSCar-SP) A hipotenusa do triângulo retângulo ABC está localizada sobre a reta real, conforme indica a figura.

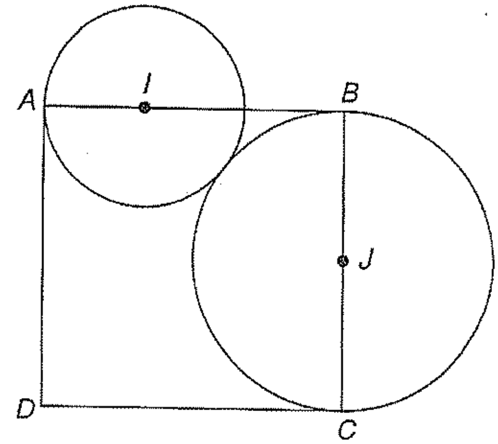


Se x > 0 e a medida da altura BD relativa ao lado AC do triângulo ABC é $2\sqrt{6}$,

Então x é o número real:

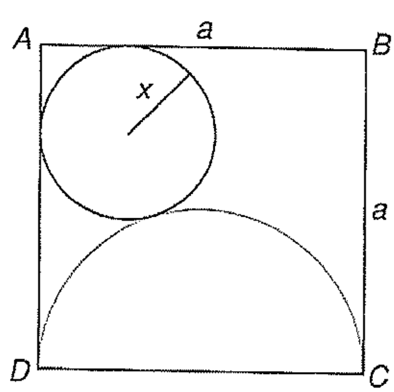
a) $2\sqrt{3}$
b) 4
c) $3\sqrt{2}$
d) 5
e) $3\sqrt{3}$

07 Na figura a seguir,ABCD é um quadrado de lado unitário.As circunferências de centros I e J são tangentes entre si e seus raios são IA = x e JC = y, com 0 < x < 1.



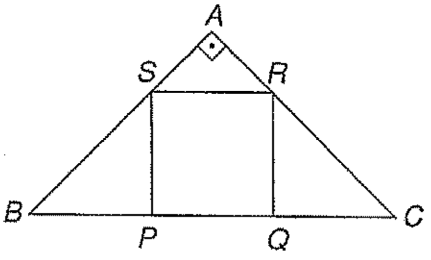
a)Determine y em função de x.
b)Determine x para que se tenha y = x.

08 Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado a. A circunferência de raio x tangencia os lados AB e AD e a semicircunferência de diâmetro CD.



Calcule x em função de a.

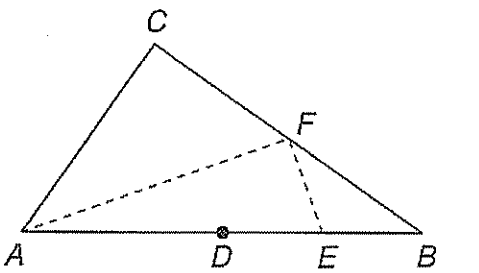
09 (Fuvest-SP) Na figura a seguir, ABC é um triângulo isóceles e retângulo em A, e PQRS é um quadrado de lado $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



Então, a medida do lado AB é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

10 (Cesgranrio-RJ) Seja D o ponto médio do lado AB do triângulo ABC. Sejam E e F os pontos médios dos segmentos DB e BC, respectivamente, conforme se vê na figura.

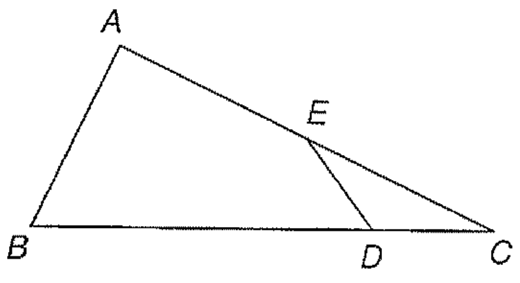


Se a área do triângulo ABC vale 96, então a área do triângulo AEF vale:

a) 42
b) 36
c) 32
d) 30
e) 28

11 Na figura seguinte sabe-se que BC = 10 cm, AC = 6 cm, CD = 3 cm e CE = 4 cm. Se a área do triângulo CDE é igual a 3 cm^2, a área do quadrilátero ABCDE é igual a:

a) $18\ cm^2$
b) $15\ cm^2$
c) $12\ cm^2$
d) $10\ cm^2$
e) $9\ cm^2$



12 (ITA) Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado AB e E um ponto do lado AC. Se AB = 8 cm, AC = 10 cm, AD = 4 cm e AE = 6 cm, a razão entre as áreas dos triângulos ADE e ABC é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{5}$

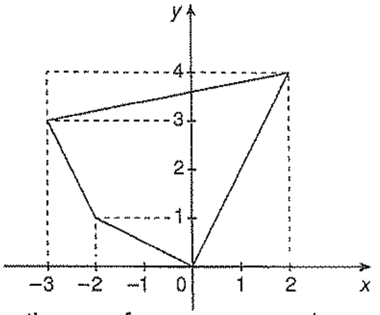
c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{10}$

e) $\frac{3}{4}$

f) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

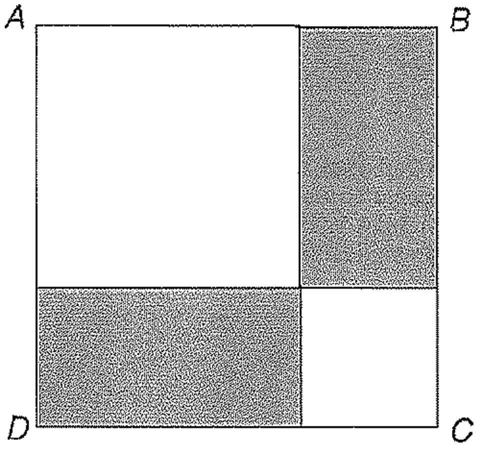
13 (UFMS) A figura mostra, no sistema cartesiano, um terreno retangular onde a região sombreada representa uma construção.



Assinale a alternativa que fornece a porcentagem da área do terreno ocupada pela construção.

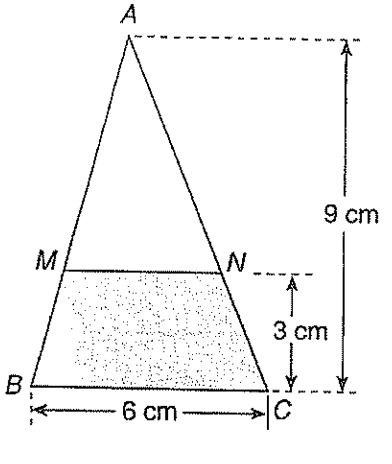
a) 45,5%
b) 46,5%
c) 47%
d) 47,5%
e) 52,5%

14 O quadrado ABCD da figura está decomposto em dois quadrados de tamanhos diferentes e em dois retângulos. A soma das áreas dos dois quadrados menores é igual a $1.000\ cm^2$, e a diferença entre as medidas dos lados desses dois quadrados é igual a 8 cm.



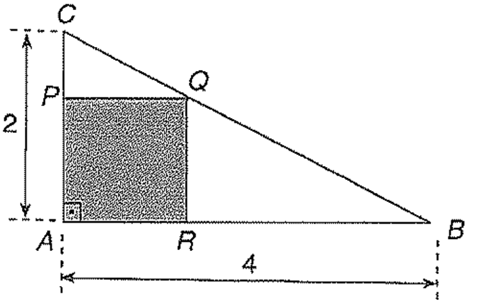
Calcule a área de um dos retângulos sombreados.

15 Na figura seguinte, sabe-se que $\overline{MN} // \overline{BC}$. Calcule a área do quadrilátero BMNC.

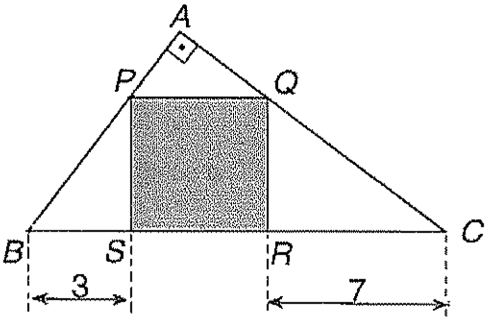


16 Calcule a área do quadrado inscrito no triângulo retângulo dado nos seguintes casos:

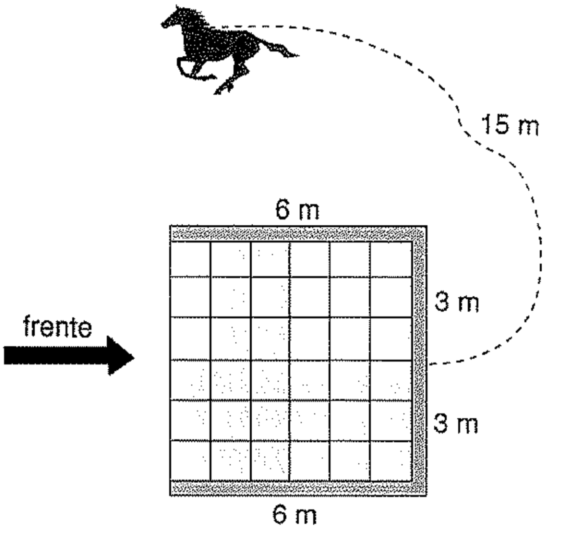
a)



b)



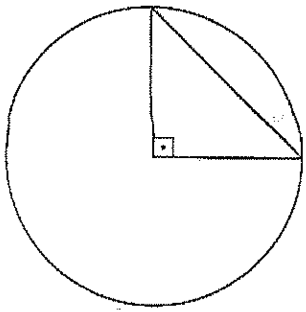
17 Em seu sítio, Dona Júlia construiu um galpão de 6 m por 6 m, aberto na frente, como mostra a figura.



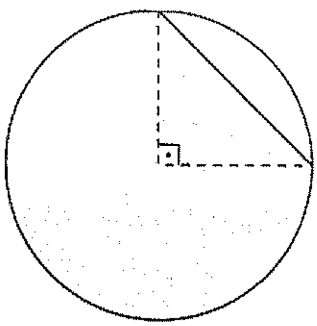
Do lado de fora do galpão, exatamente no centro da parede dos fundos, Dona Júlia amarra uma extremidade de uma corda de 15 m de comprimento e na outra extremidade prende seu cavalo. Qual é a área da região interna do galpão à qual o cavalo te acesso?

18 Calcule a área de cada um seguinte segmentos circulares, para r=6.

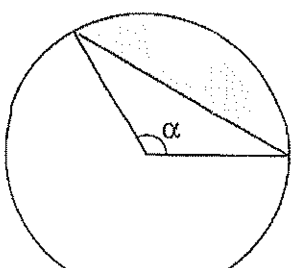
a)



b)

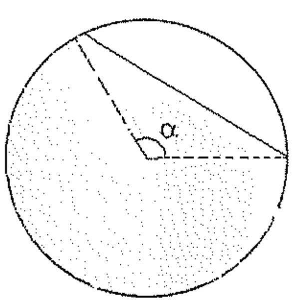


c)



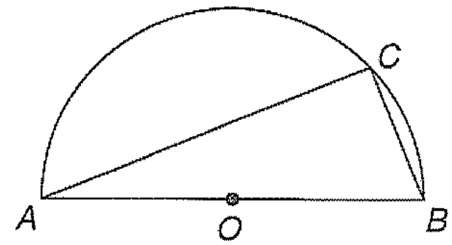
(α = 120°)

d)



(α = 120°)

19 (Cesgranrio-RJ) O triângulo ABC está inscrito no semicírculo de centro O e diâmetro AB = 2.



Se o ângulo CÂB = 30°, a área da região sombreada é:

a) $\dfrac{\pi}{3}$

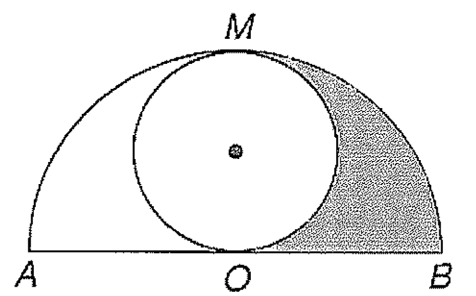
b) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

d) $\pi-2$

e) $\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

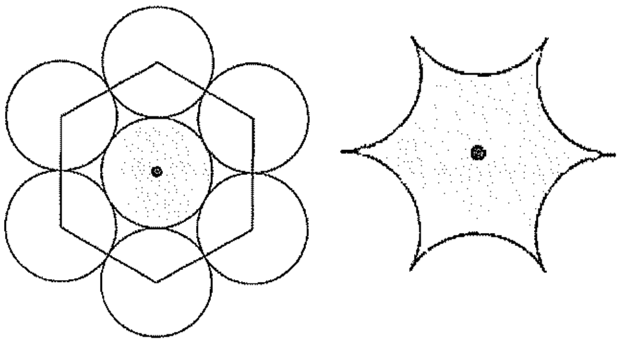
20 A figura seguinte apresenta uma semicircunferência de diâmetro AB e centro O, e uma circunferência tangente a $\overline{AB}$ em O e tangente à semicircunferência em M.



Se a área da região sombreada é igual a $8\pi\ cm^2$, o raio da semicircunferência mede:

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 12 cm

21 (Unesp) Na figura, são exibidas sete circunferências. As seis exteriores, cujos centros são vértices de um hexágono regular de lado 2, são tangentes à interna. Além disso, cada circunferência externa é também tangente às outras duas que lhe são contíguas.



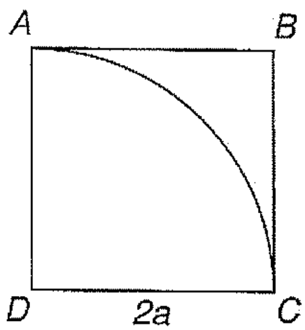
Nestas condições, calcule:

a)A área da região sombreada, apresentada em destaque à direita.

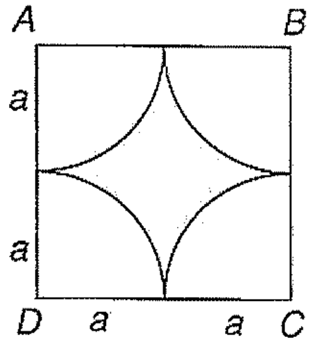
b)O perímetro da figura que delimita a região sombreada.

22 Sendo ABCD um quadrado de lado igual a 2ª, calcule a área da região sombreada em cada um destes casos:

a)

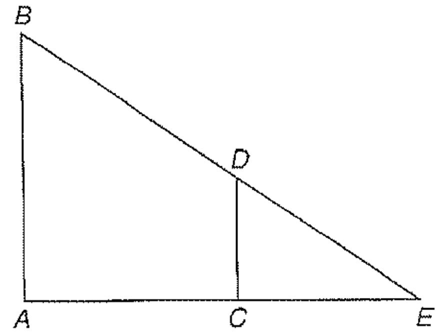


b)

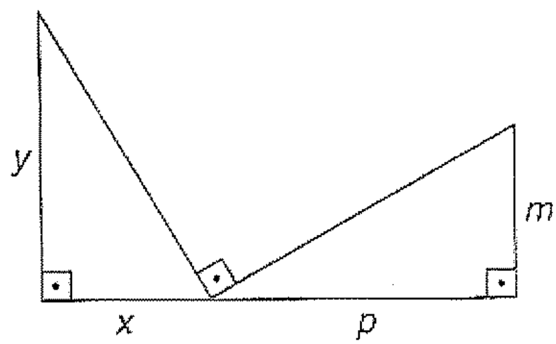


23 (PUC-SP) Na figura, as retas AB e CD são paralelas. AB = 136, CE = 75 e CD = 50. Quanto mede o segmento AE?

a) 136
b) 306
c) 204
d) 163
e) 122



24 (Fuvest-SP) Na figura, se os ângulos assinalados são retos, temos necessariamente:



a) $\frac{x}{y}=\frac{p}{m}$

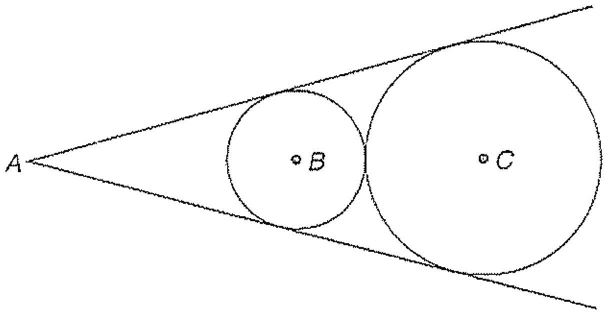
b) $\frac{x}{y}=\frac{m}{p}$

c) xy=pm

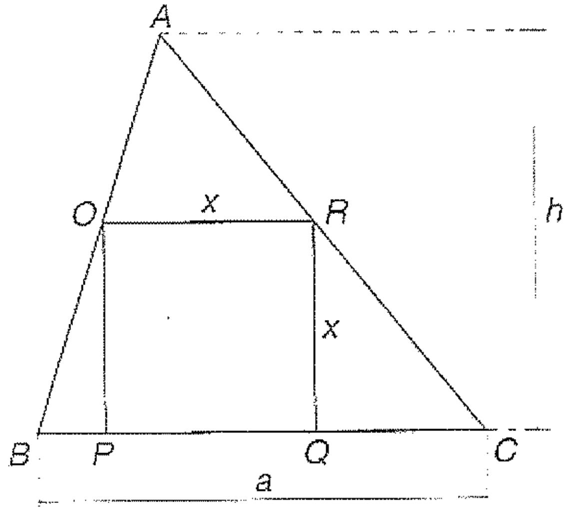
d) $x^2+y^2=p^2+m^2$

e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{m}+\frac{1}{p}$

25 As circunferências de centros B e C têm raios r = 2 e R = 3, respectivamente, são tangentes entre si e tangenciam os lados do ângulo de vértice A. Calcule AB.



26 Na figura a seguir, OPQR é um quadrado inscrito no triângulo ABC. Calcule o lado desse quadrado em função da base a e da altura h do triângulo.



27 (FAMECA) Assinale a afirmação verdadeira.

a)Por um ponto fora de um plano existe uma só reta paralela a este plano.
b)Por um ponto fora de um plano existe uma só reta perpendicular a este plano.
c)Se uma reta é paralela a dois planos, então estes planos são paralelos.
d)Se uma reta é perpendicular a uma reta do plano, então é perpendicular a este plano.
e)Três pontos distintos determinam um e um só plano.

28 (UEL-PR) A reta r é a intersecção dos planos perpendiculares α e β. Os pontos A e B são tais que $A \in \alpha,\ A \notin \beta,\ B \in \beta,\ B \notin \alpha$. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e r:

a)são reversas;
b)são coincidentes;
c)podem ser concorrentes;
d)podem ser paralelas entre si;
e)podem ser perpendiculares entre si.

29 Os planos α e β são paralelos. A reta r é perpendicular a α e a reta s é perpendicular a β. Pode-se concluir que r e s:

a)se interceptam em um único ponto;
b)são coplanares;
c)são perpendiculares;
d)são ortogonais;
e)são reversas.

30 (Vunesp-SP) Sejam α e β planos perpendiculares, $\alpha \cap \beta = r$. Em α considera-se uma reta s perpendicular a r, $S \cap r = \{A\}$, e em β considera-se t oblíqua a r, $t \cap r = \{A\}$. Dentre as afirmações:

I. s é perpendicular a β;
II. t é perpendicular a s;
III. o plano determinado por s e t é perpendicular a β;
IV. todo plano perpendicular a s e que não contém A é paralelo a β;

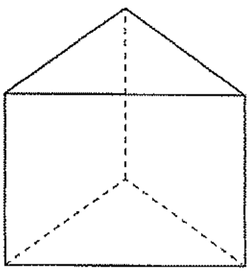
Pode-se garantir que:

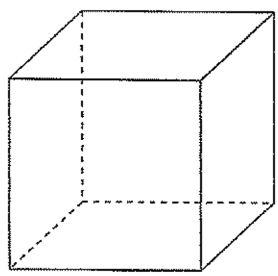
a)Somente I é falsa.
b)Somente II é falsa.
c)Somente III é falsa.
d)Somente IV é falsa.
e)Nenhuma é falsa.

5. Poliedros e Prisma

5. 1Poliedros

Denomina-se poliedro o sólido limitado por polígonos planos que têm, dois a dois, um lado comum. Exemplos:

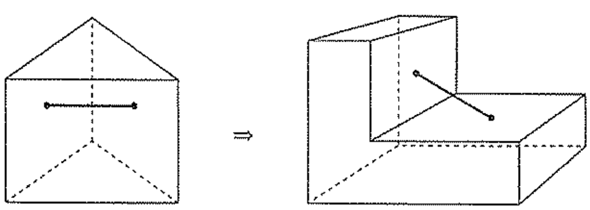

prisma triangular


cubo

Os polígonos são denominados **faces** do poliedro. Os lados e os vértices dos polígonos denominam-se, respectivamente, **arestas** e **vértices** do poliedro.

5.2. Poliedros convexos e nã-convexos

Um poliedro é dito convexo quando o segmento de reta que une dois quaisquer de seus pontos está contido no poliedro. Em caso contrário, é não-convexo.


poliedro convexo ⇒ poliedro não-convexo

De acordo com o número de faces temos os seguintes poliedros:

Tetraedro $\Rightarrow$ poliedro convexo com quatro faces;
Pentaedro $\Rightarrow$ poliedro convexo com cinco faces;
Hexaedro $\Rightarrow$ poliedro convexo com seis faces;
Dodecaedro $\Rightarrow$ poliedro convexo com dez faces;
Octaedro $\Rightarrow$ poliedro convexo com oito faces;
Icosaedro $\Rightarrow$ poliedro convexo com vinte faces.

5.3 Relação de Euler

Em todo poliedro convexo, vale a relação:

$\boxed{V - A + F = 2}$ V = número de vértices F = número de faces A = número de arestas

· **Propriedade**

Num poliedro convexo, a soma dos ângulos de todas as faces é dada por:

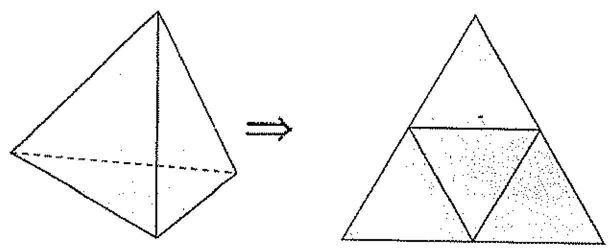
$$\boxed{S = (V-2).360°}$$

5.4 Poliedros regulares ou poliedros de Platão

Um poliedro convexo é dito regular quando as suas faces são polígonos regulares e congruentes, e todos os ângulos poliédricos são congruentes.

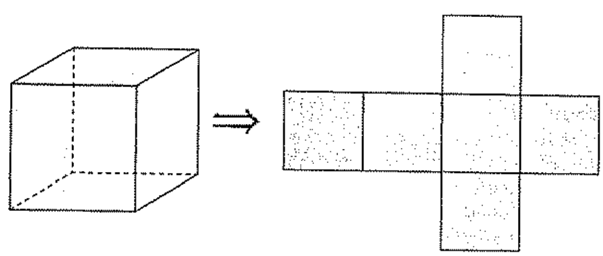
Há somente cinco poliedros regulares, que são:

Tetraedro regular



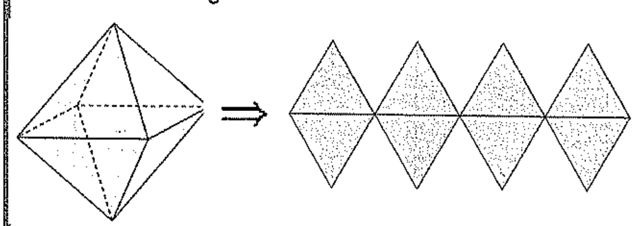
Faces: triângulos equiláteros

Hexaedro regular (cubo)



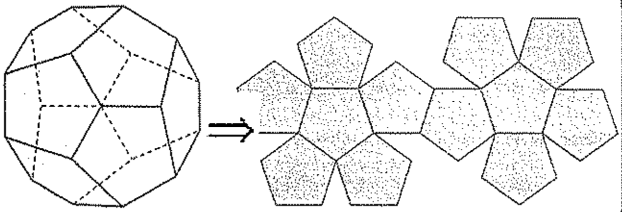
Faces: quadrados

Octaedro regular



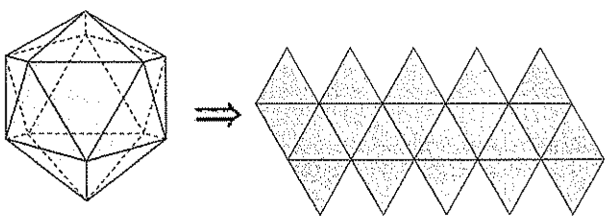
Faces: triângulos equiláteros

Dodecaedro regular



Faces: pentágonos regulares

Icosaedro regular



Faces: triângulos equiláteros

Chamando de:
m = número de arestas concorrentes em cada vértice
n = número de lados em cada face
V = número de vértices do poliedro
A = número de arestas do poliedro
F = número de faces do poliedro
S = soma dos ângulos de todas as faces do poliedro

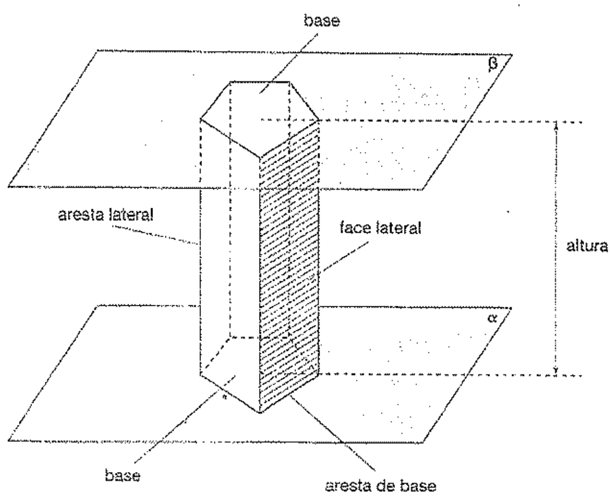
Temos:

Nome	m	n	V	A	F	S
tetraedro	3	3	4	6	4	720°
hexaedro	3	4	8	12	6	2 160°
octaedro	4	3	6	12	8	1 440°
dodecaedro	3	5	20	30	12	6 480°
icosaedro	5	3	12	30	20	3 600°

PRISMA

5.5. Elementos e classificação

Considere o prisma:



As bases são polígonos congruentes.

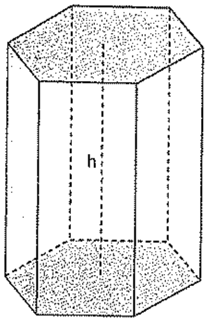
Os prismas são designados de acordo com o número de lados dos polígonos das bases.

Bases	Prisma
triângulos	triangular
quadriláteros	quadrangular
pentágonos	pentagonal
hexágonos	hexagonal
e assim por diante	

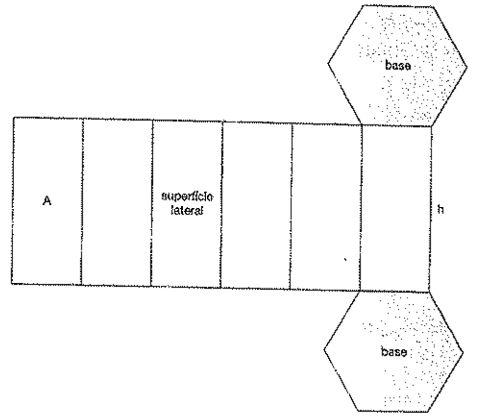
Se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, o prisma é dito **reto**.
Se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases, o prisma é dito **oblíquo**.
O prisma será **regular** quando for reto e sua base for um polígono regular.

5.6 Áreas e volume

Considere o prisma:



$\Rightarrow$



· **Área**

Área de uma face lateral – é a área A de uma das faces laterais (paralelogramo) que constituem o prisma.
Área lateral – adicionando todas as áreas das faces laterais, encontramos a área lateral A_ℓ do prisma:

$$\boxed{A_\ell = n.A}$$

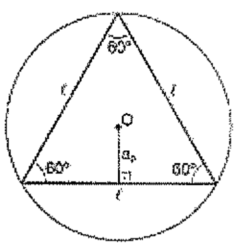
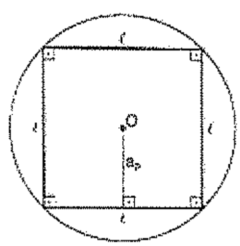
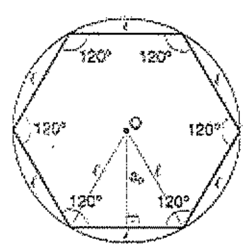
· **Volume**

O volume V de um prisma é dado pelo produto da área da base pela altura h:

$$\boxed{V = A_\ell.h}$$

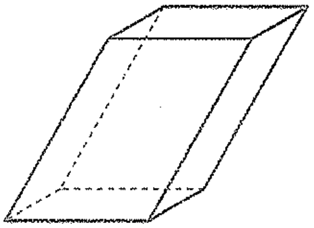
5.7 Apótema de um polígono regular

É o segmento cujas extremidades são o centro e o ponto médio do lado do polígono.

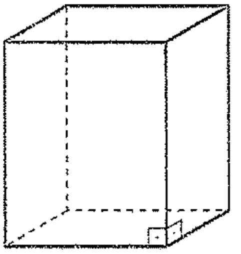
Triângulo eqüilátero	Quadrado	Hexágono regular
		
$a_p = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$	$a_p = \frac{\ell}{2}$	$a_p = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

5.8. Paralelepípedo

Denomina-se paralelepípedo o prisma no qual as seis faces são paralelogramos.



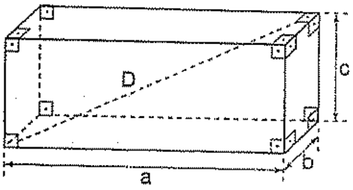
paralelepípedo obliquo



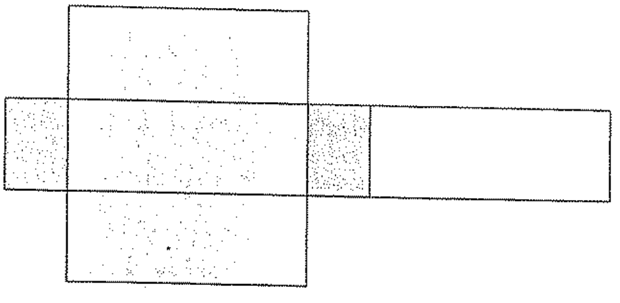
paralelepípedo reto

· **Paralelepípedo retângulo ou ortoedro**

É um paralelepípedo reto cujas faces são retângulos.



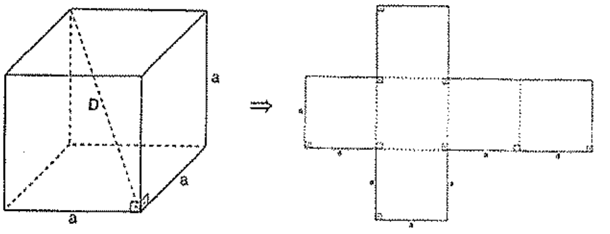
a = comprimento
b = laargura
c = altura
D = diagonal



Diagonal	$D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Área total	$A_t=2(ab+ac+bc)$
volume	$V=abc$

5.9 **Cubo**

Quando as três dimensões são iguais, ou seja, a = b = c, o paralelepipedo é denominado cubo.



Diagonal	$D=a\sqrt{3}$
Área total	$A_t=6a^2$
volume	$V=a^3$

Exercícios Comentados

01 A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo vale 720°. Sabendo-se que o número de faces vale 2/3 do número de arestas, pode-se dizer que o número de faces vale.

a) 6.
b) 4.
c) 5.
d) 12.
e) 9.

Resolução:

Se = 720
(V -2) 360 = 720
V = 4

Como F = $\frac{2}{3}$ A e substituíndo em

V + F = A + 2

$4+\frac{2A}{3}=A+2 \rightarrow A=6$

$F=\frac{2}{3}\cdot 6=4$

02 (Cesgranrio) Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. O número de vértices desse poliedro é de:

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

Resolução:

N° de faces = $\begin{cases} 4f_3 \therefore\ n=3 \\ 2f_4 \therefore n=4 \\ 1f_6 \therefore\ n=6 \end{cases}$,logo

F = 7
Substituindo em n F = 2 A,
3 + 4 + 4+2 + 6+1 + 2A
A = 13
Como V + F = A + 2
V + 7 = 13 + 2; . V = 8

03 (Fuvest) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6cm são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8cm, 8cm e ***x*** cm. O valor de ***x*** é:

a) 16.
b) 17.
c) 18.
d) 19.
e) 20.

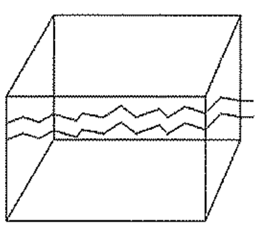
Resolução $V_{par} = V_{cubo\ 1} + C_{cubo\ 2}$

8, 8 x = $10^3 + 6^3$
64 x = 12 16
x = 19

04 (Unicamp) Ao serem retirados 128 litros de água de uma caixa d'água de forma cúbica, o nível da água baixa 20 centímetros.

a) Calcule o comprimento das arestas da referida caixa.
b) Calcule sua capacidade em litros (1 litro equivale a 1 decímetro cúbico).

Resolução:



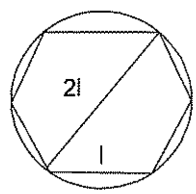
128L= 128 dum^3 = 128000 cm^3
$V_{retinado}$ = x . x . 20 = 128. 000
x = 80 cm = 8 dm

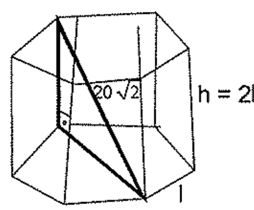
a) 80 cm
b) V = 83 = 512 dm^3 = 512 L.

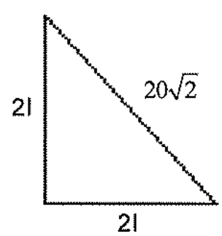
05 (EsPCEx) Sabe – se que um prisma hexagonal regular te por altura o diâmetro da circunferência circunscrita à base, e que a maior de suas diagonais mede $20\sqrt{2}$ cm. Sua área total e seu volume valem, respectivamente:

a) 1200 cm^2 e $300\sqrt{3}$ cm^3.
b) $3\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3.
c) $3\left(4+\sqrt{3}\right)$ cm^2 e $3\sqrt{3}$ cm^3.
d) $1500\sqrt{3}$ cm^2 e $3000\sqrt{3}$ cm^3.
e) $1200\sqrt{3}$ cm^2 e 3000 cm^3.

Resolução:







2 l = 20
l = 10

$A_T = A_L + 2A_b$
A_L = 6· 10 20 = 1200

$A_B = 6\ \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}$

$A_T = 1200 + 300\sqrt{3}$
V = AB . H
= 150 $\sqrt{3}$. 20 = 3000 $\sqrt{3}$

Exercícios de Sala

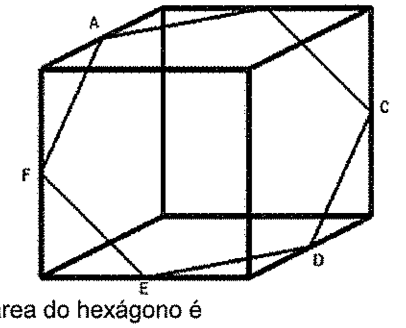
01 **(Cesgranrio)** Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:

a) 16.
b) 18.
c) 24.
d) 30.
e) 44.

02 **(Unirio)** Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

a) 35.
b) 34.
c) 33.
d) 32.
e) 31.

03 **(EsPCEx)** O hexágono regular *ABCDEF* é uma secção plana de um cubo de aresta $2a\sqrt{3}$. Cada vértice do polígono divide ao meio a aresta na qual está apoiado.



A área do hexágono é

a) $9a^2\sqrt{3}$.

b) $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

c) $\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

d) $4a^2\sqrt{3}$.

e) $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{4}$.

04 **(EsPCEx)** Um prisma reto com 5cm de altura e base retangular com dimensões de 4 cm e 6 cm contém água até uma altura de 3 cm. Um cubo maciço de aresta igual a 2 cm é colocado dentro deste prisma, ficando totalmente submerso. A partir de então, a altura do nível da água, em cm, passa a ser de:

a) $\dfrac{13}{4}$.

b) $\dfrac{10}{3}$.

c) $\dfrac{15}{4}$.

d) $\dfrac{13}{3}$.

e) $\dfrac{14}{4}$.

05 **(EsPCEx)** Dispondo de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo, com as dimensões da figura, preenchido com água até o nível indicado, um aluno fez o seguinte experimento:

· Mergulhou na água um cubo maciço, com 1cm³ de volume;

· Mergulhou, sucessivamente, novos cubos, cada vez maiores, cujos volumes formam, a partir do cubo de 1cm³ de volume, uma progressão aritmética de razão 2 cm³.

Após mergulhar certo número de cubos, que ficaram completamente submersos, verificou que a altura do nível da água passou para 39 cm.

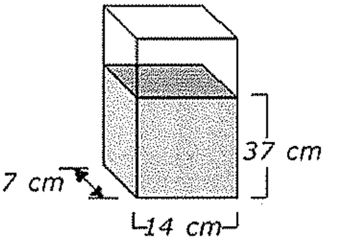


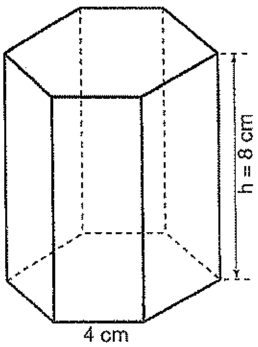
Figura fora de escala

Com base nas informações, a área total do último cubo colocado é de

a) 54 cm².
b) 42 cm².
c) 24 cm².
d) 150 cm².
e) 216 cm².

06 Dado o prisma hexagono regular da figura, calcule:

a) o apótema da base
b) a área total
c) o volume



07 (PUC-MG) As bases de um prisma reto de altura 16 são trapézios isóceles de bases 4 e 6. Calcule a área total do prisma, sabendo que seu volume é 160.

08 Considere um prisma hexagonal regular tal que a razão entre a aresta da base a e a aresta lateral ℓ é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Sabendo que, se a aresta da base for aumentada 2 cm, o volume V do prisma ficará aumentado $108\ cm^3$, permanecendo a aresta lateral a mesma, calcule o volume do prisma.

09 Calcule, em litros, o volume de uma caixa–d' água em forma de um prisma reto, de aresta lateral 6 m, sabendo que a base é um losango cujas medidas das diagonais são 7 m e 10 m.

10 As medidas das três dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em P.G. Sabendo que a área total e o volume deste paralelepípedo são, respectivamente, $112\ cm^2$ e $64\ cm^3$, calcule as medidas das suas dimensões.

11 Uma caixa te m 1 m de comprimento, 2 m de largura e 3 m de altura. Uma segunda caixa, de mesmo volume, tem comprimento **x** metros maior do que a anterior, largura **x** metros maior do que a da aanterior a altura **x** metros menor do que a da anterior. o valor de **x** é:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{6}$
e) $\sqrt{7}$

12 A água de um reservatório com a forma de um paralelepípedo retângulo de comprimento 30 m e largura 20 m atingia a altura de 10 m. Com a falta de chuvas e o calor, 1.800 metros cúbicos de água do reservatório avaporaram. A água restante no reservatório atingiu a altura de

a) 2 m
b) 3 m
c) 7 m
d) 8 m
e) 9 m

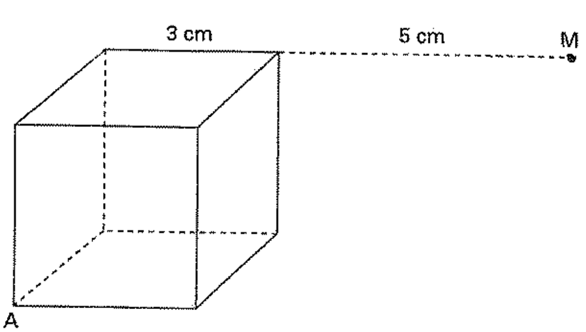
13 Uma formiga mora na superfície de um cubo de aresta **a**. O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice ao vértice oposto tem comprimento

a) $a\sqrt{2}$
b) $a\sqrt{3}$
c) 3a
d) $a\sqrt{5}$
e) $(1+\sqrt{2})a$

14 Se a, B, C e D são os centros das faces laterais de um cubo de volume 8, então a a área do polígono cujos vértices são A, B, C e D é:

a) 2
b) $\sqrt{2}$
c) 4
d) $2\sqrt{2}$
e) $8\sqrt{2}$

15 Na figura, cada aresta do cubo mede 3 cm. Prolongando-se uma delas em 5 cm, obtemos o panto M. A distância, em centímetros, de M ao vértice A é:



a) $2\sqrt{21}$
b) $\sqrt{82}$
c) $8\sqrt{3}$

d) $8\sqrt{2}$
e) 9

16 Na figura abaixo, X e Y são, respectivamente, os pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do cubo. A razão entre o volume do prisma AXFEDYGH e o cubo é:

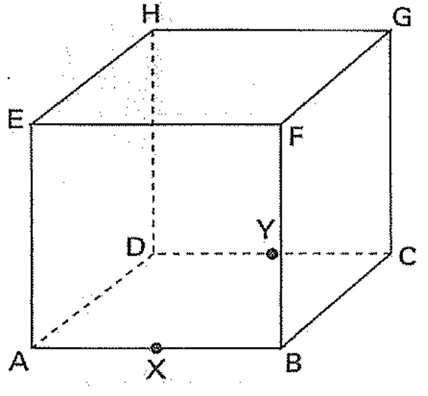
a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{6}$



17 Um prisma hexagonal regular tem como altura a diagonal de um cubo de aresta **a**. Se o volume do cubo é igual ao do prisma, a aresta da base do prisma mede:

a) $a\sqrt{3}$
b) $a\sqrt{2}$
c) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$
e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

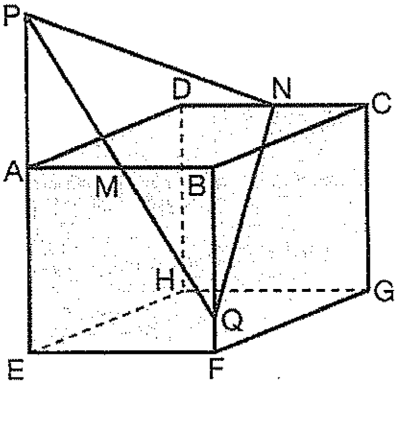
Exercícios de Casa

01 (EFEI-MG) A área de um paralelepípedo retângulo é $720\ m^2$. A diagonal de uma de suas faces mede 20 m e a soma das suas dimensões é 34 m. Calcule as dimensões deste paralelepípedo.

02 (Vunesp-SP) Uma piscina de forma retangular tem 8 m de largura, 15 m de comprimento, 0,9 m de profundidade num de seus extremos e 2,7 m de profundidade no outro extremo, sendo seu fundo um plano inclinado. Calcule o volume de água da piscina quando a altura do nível da água é de 0,6 m na extremidade mais funda.

03 Um reservatório tem a forma de um paralelepípedo reto cuja base (que está assentada no solo) é um retângulo de 3 m por 2 m e cuja altura é 1 m (medidas internas) e contém 60 cm de altura de água. Um escoadouro localizado na sua base escoa a água (quando ligado) na razão de $0{,}02\ m^3$ por minuto. A parti de um certo instante, quanto tempo este escoadouro deve permanecer funcionando para que o volume ocupado pelo líquido seja exatamente a metade da capacidade do reservatório?

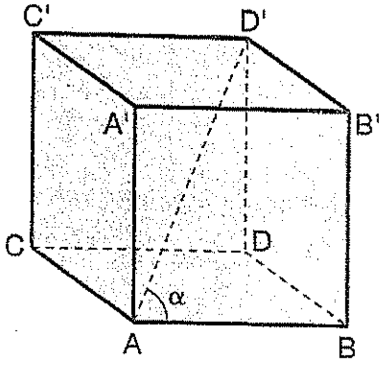
04 (Fuvest-SP) Considere um cubo ABCDEFGH de lado 1 unidade de comprimento, como na figura. M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Para cada ponto P da reta $\overleftrightarrow{AE}$ seja Q o ponto de intersecção das retas $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{BF}$.



a)Prove que o ΔPQN é isóceles.

b)A que distância do ponto A deve estar o ponto P para que o ΔPQN seja retângulo?

05 (Vunesp-SP) Sendo ABCDA'B'C'D' um cubo, calcular o seno do ângulo α.

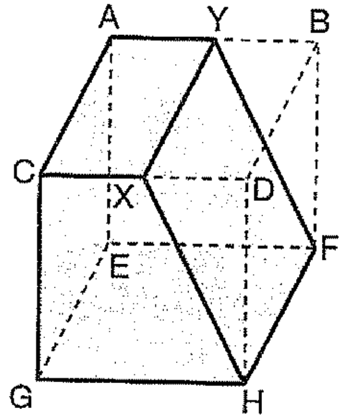


06 (Unicamp-SP) Procura-se construir um cubo grande empilhando cubos pequenos e todos iguais. Quando se coloca um certo número de cubos pequenos em cada aresta, sobram cinco; se tentasse acrescentar um cubo a mais em cada aresta, ficariam faltando trinta e dois. Quantos são os cubos pequenos?

07 Quanto se deve aumentar a medida das arestas de um cubo cujas diagonais medem $\sqrt{6}\ cm$ a fim de que seu volume duplique?

08 Qual deve ser a altura de um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de lado a, para que seu volume seja igual ao volume de um cubo de aresta a?

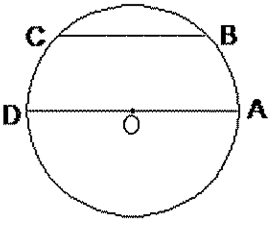
09 A figura abaixo destaca o sólido que restou de um cubo de aresta a, após retirar-se dele o prisma XDHYBF, sendo $\overline{XY}$ paralelo a $\overline{CA}$. Se o volume do sólido restante é $\frac{4}{7}$ do volume do cubo, ache a fração de a que expressa a medida de $\overline{CX}$.



10 (Vunesp-SP) Uma caixa-d' água com forma de um paralelepípedo reto de 1 m $\times$ 1 m de base e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m de altura está sobre uma laje horizontal com água até a altura h. Suponhamos que a caixa fosse erguida lateralmente, apoiada sobre uma das arestas da base (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim sendo, a água começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da base da caixa com a laje medisse 30°. Calcular a altura h.

11 **(EsPCEx)** Na figura abaixo, o segmento BC, paralelo ao segmento AD, representa o lado do hexágono regular inscrito na circunferência de centro O. O comprimento do arco ABC é de $\frac{20}{3}\pi$ cm. Nestas condições, a medida, em cm, do raio da circunferência é de:

a) $\frac{5\pi}{3}$.
b) $\frac{10\pi}{3}$.
c) 20.
d) 15.
e) 10.



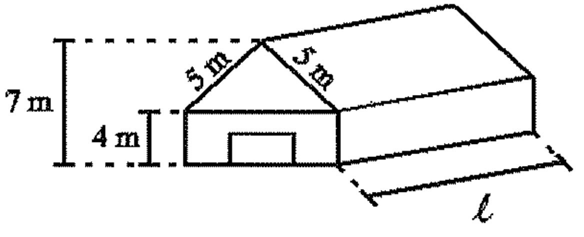
12 **(EsPCEx)** Pedro construiu um aquário em forma cúbica. Enquanto o enchia, notou que, colocando 64 litros de água, o nível subia 10 cm. O volume máximo, em litros, que comporta esse aquário é de

a) 216.
b) 343.
c) 512.
d) 729.
e) 1024.

13 **(EsPCEx)** Uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo tem largura de 6 metros, diagonal do fundo com 10 metros e diagonal da face que contém o comprimento igual a $4\sqrt{5}$ metros. Para enchê-la com água será utilizado um caminhão tanque com capacidade de 6000 litros. O número de cargas completas, desse mesmo caminhão, necessárias para que a piscina fique completamente cheia é:

a) 24.
b) 28.
c) 32.
d) 54.
e) 80.

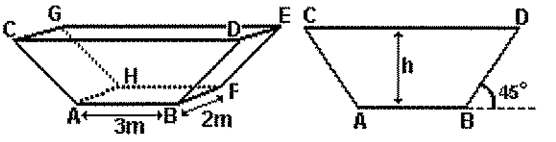
14 **(EsPCEx)** Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até 200m³. Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento (λ) que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3 (três) aparelhos de ar condicionado é:



(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)

a) 13m.
b) 20 m.
c) 5 m.
d) 25 m.
e)15m.

15 **(UNB)** Na figura abaixo, à esquerda, representa-se um reservatório de altura h e base retangular de 2 m de largura e 3 m de comprimento e, à direita, representa-se uma das paredes frontais desse reservatório. As paredes laterais (BDEF e ACGH) são inclinadas em 45° com relação ao plano da base e as paredes frontais são perpendiculares à base do reservatório. Calcule, em decímetros, o valor da altura h necessária para que a capacidade do reservatório seja de 8.000 L. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.



16 (Acafe-SC) Um poliedro convexo tem 15 faces triângulares, 1 face quadrangular, 7 faces pentagonais e 2 faces hexagonais. O número de vértices desse polidro é:

a) 25
b) 48
c) 73
d) 96
e) 71

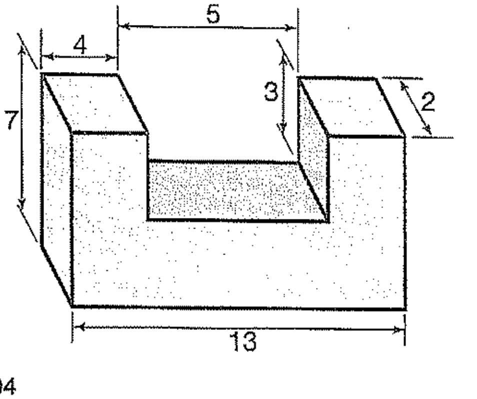
17 (UCRS) Se a soma dos ângulos das faces de um poliedro regular é 1440°, então o número de vértices desse poliedro é:

a) 12
b) 8
c) 6
d) 20
e) 4

18 (Fatec-SP) Se considerarmos as retas suportes das arestas de um cubo, então o número de pares de retas reversas que podemos formar é:

a) 8
b) 16
c) 24
d) 32
e) 40

19 (Marck-SP) A área total do solído abaixo é:



a) 204
b) 206
c) 222
d) 244
e) 262

20 (Cescea-SP) O volume do prisma hexagonal regular, de altura $\sqrt{3}$ cm e cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm, é:

a) $18\ cm^3$

b) $6\sqrt{3}\ cm^3$

c) $3\ cm^3$

d) $\sqrt{3}\ cm^3$

6. Pirâmides e Cones

Pirâmide:

6.1 Classificação e elementos

Uma pirâmide é dita **regular** quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base.

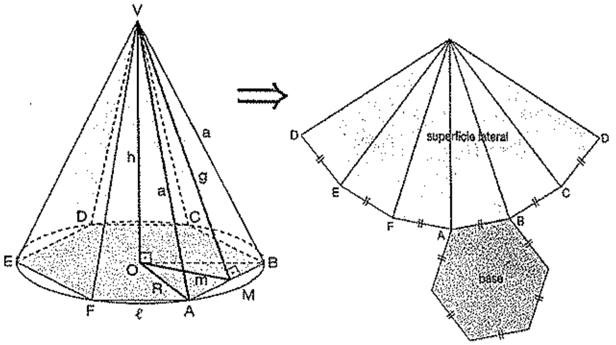
As pirâmides são classificadas de acordo com o número de lados dos polígonos da base:

Pirâmide triangular $\Rightarrow$ a base é um triângulo;

Pirâmide quadrangular $\Rightarrow$ a base é um quadrilátero;

Pirâmide pentagonal $\Rightarrow$ a base é um pentágono;

Pirâmide hexagonal $\Rightarrow$ a base é um hexágono;



Numa pirâmide regular, convém destacar:

1°) O polígono da base é regular, de lado ℓ, e, portanto, inscrítivel numa circunferência de raio $\overline{OA} = R$, chamado **raio da base**.

2°) O apótema do polígono regular da base é chamado **apótema da base** e sua medida será indicada por m.

3°) As arestas laterais são congruentes e sua medida será indicada por a.

4°) As faces laterais são triângulos isóceles congruentes.

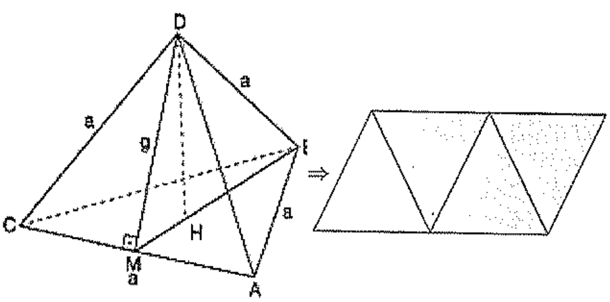
5°) A altura de uma face lateral (é a altura relativa à base de um triângulo isóceles) é chamada **apótema da pirâmide** e sua medida será indicada por g.

6.2 Área e volume

Área total	$A_t = A_\ell + A_b$
volume	$V = \frac{1}{3}.A_b.h$

6.3 Tetraedro regular

É uma pirâmide em que todas as faces são triângulos equiláteros.



Considerando a figura:

1°) O apótema lateral do tetraedro é a altura de um triângulo equilátero, ou seja, $g = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2°) O ponto H, sendo o centro de um triângulo equilátero, é o baricentro; logo:

$$\overline{MH} = \frac{1}{3}g$$

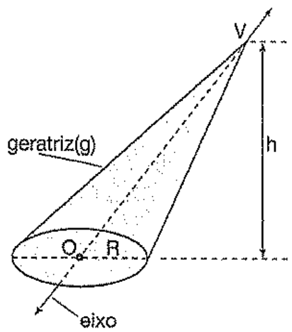
$$\overline{HB} = \frac{2}{3}g$$

Área da base	$A_b = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Área total	$A_t = a^2\sqrt{3}$
volume	$V = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$

Cone:

6.4 Classificação e elementos

Um cone pode ser classificado em:
Cone oblíquo: quando o eixo é oblíquo à base.
Cone reto: quando o eixo é perpendicular à base.
Considerando a figura:



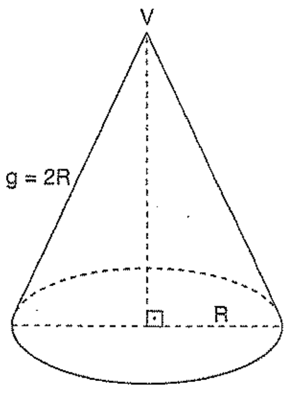
O círculo C é a **base** do cone e seu raio R é chamado **raio** do cone.

A distância entre o vértice V e o plano α é a **altura** do cone e sua medida é expressa por h.

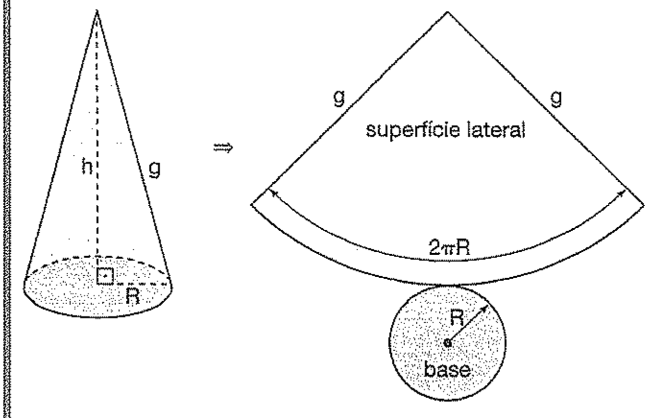
A reta que passa pelo vértice V e o centro O da base chama-se **eixo** do cone.

Se P é um ponto da circunferência da base, então o segmento VP é chamado **geratriz**.

Se a secção meridiana de um cone for um triângulo equilátero, ou seja, g = 2R, então, o cone é dito **cone equilátero**.



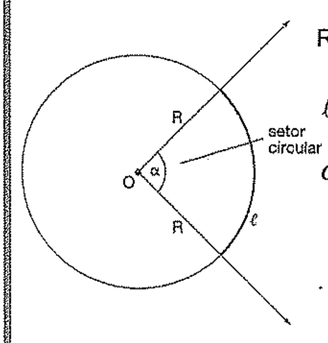
6.5. Áreas e volume



área da base	$A_b = \pi R^2$
área lateral	$A_\ell = \pi R g$
área total	$A_t = \pi R(g+R)$
volume	$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

6.6 Setor circular

Seja o setor circular da figura:



R = raio

ℓ = comprimento do arco

α = medida do ângulo central

- **Comprimento do arco de circunferência**

$$\alpha \text{ em graus} \begin{cases} \text{ângulo} & \text{comprimento} \\ 360° & \text{------} \quad 2\pi R \\ \alpha & \text{------} \quad \ell \end{cases} \qquad \boxed{\ell = \frac{\alpha . R . \pi}{180°}}$$

$$\alpha \text{ em radianos} \begin{cases} \text{ângulo} & \text{comprimento} \\ 2\pi & \text{------} \quad 2\pi R \\ \alpha & \text{------} \quad \ell \end{cases} \qquad \boxed{\ell = \alpha . R}$$

- **Área do setor circular**

$$\begin{cases} \textit{comprimento do arco} & & \textit{área} \\ 2\pi R & ------ & \pi R^2 \\ \ell & ------ & A_{setor} \end{cases} \qquad \boxed{A_{setor} = \frac{\ell . R}{2}}$$

Exercícios Comentados

01 **(EsPCEx)** Uma pirâmide de base hexagonal e altura $h = 2\sqrt{3}$ cm é seccionada por um plano perpendicular à sua base, de tal modo que a secção gerada tem a maior área possível. Sabendo – se que a área de secção é $5\sqrt{3}$ cm², o volume da pirâmide, em cm³, é:

a) $\frac{25}{2}$.

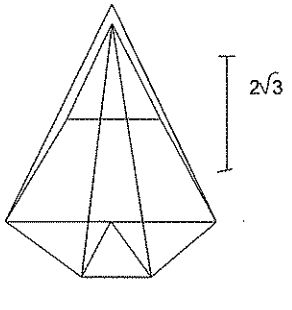
b) $\frac{50}{3}$.

c) $\frac{75}{4}$.

d) $\frac{125}{3}$

e) $\frac{70}{3}$.

Resolução:



$As = \frac{bh}{2} = 5\sqrt{3}$

$b.2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$b = 5$

Como a base da piramide é formada por triângulos e quiláteros, 2 l = 5 $\rightarrow l = \frac{5}{2}$

$V_{pin} = \frac{A_B . H}{3}$

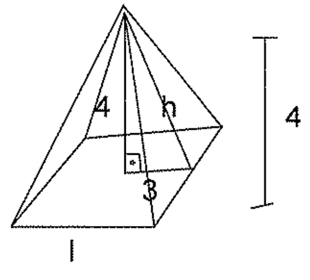
$A_B = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 25\sqrt{3}}{4 \cdot 4} = \frac{75\sqrt{3}}{8}$

$N_{pin} = \frac{75\sqrt{3}}{8} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{75}{4}$

02 **(EsPCEx)** A área da base de uma pirâmide quadrangular regular é 36 m². Se a altura da pirâmide me 4 m, sua área total, em m², é igual a:

a) 48.
b) 54.
c) 96.
d) 120.
e) 144.

Resolução:



$A_B = 36$

$l_2 = 36 : l = 6$

$A_l = A_B + A_L$

$A_L = 4 \cdot \frac{bh}{2} = 4.\frac{6.5}{2} = 60$

$A_T = 36 + 60 = 96$

03 Calcule a área e o volume de um tetraedro regular de altura 12 cm.

Resolução:

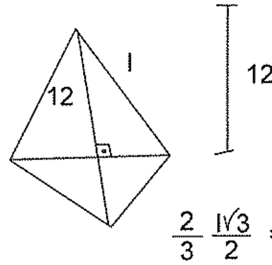
$l^2 = 12^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$l^2 = 144 + \frac{l^2}{3}$

$3l^2 = 432 + l^2$

$l^2 = 216$

$l = 6\sqrt{6}$



$\frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

Pelo triângulo retângulo da figura:

$$A_l = 4.A_d \qquad V = \frac{A_b.H}{3}$$

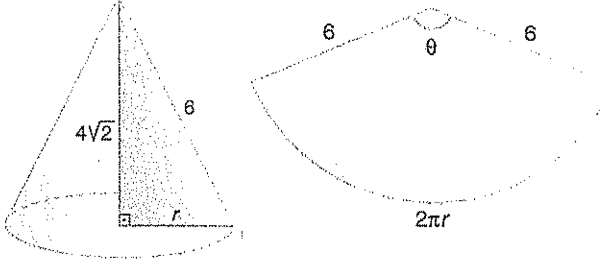
$$A_l = 4.\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \qquad V = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{3}.12$$

$$A_l = \left(6\sqrt{6}\right)^2.\sqrt{3} \qquad V = \frac{216\sqrt{3}}{4}.4$$

$$A_l = 216\sqrt{3}\ cm^2 \qquad V = 216\sqrt{3}\ cm^3$$

04 A altura e a geratriz de um cone reto medem $4\sqrt{2}$ e 6, resspectivamente. A planificação da superfície lateral desse cone resulta num setor circular cujo ângulo mede θ. Calcule θ em radianos e em graus.

Resolução:



Pelo teorema de Pitágoras:

$$r^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 6^2$$

$$r^2 = 4 \therefore r = 2$$

A medida θ, em radianos, é:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Convertendo em graus, obtemos:

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2.180°}{3} \Rightarrow \theta = 120°$$

05 (ITA-SP) Qual é o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é $24\pi\ cm^2$ e o raio da base é 4 cm?

a) $\frac{16\sqrt{20}\pi}{3} cm^3$

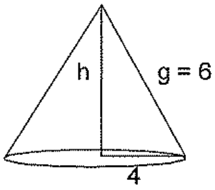
b) $6\pi\ cm^3$

c) $\frac{\sqrt{24}\pi}{3} cm^3$

d) $\frac{8\sqrt{24}\pi}{3} cm^3$

e) $\frac{\sqrt{20}\pi}{3} cm^3$

Resolução:



$6^2 = h^2 + 4^2$

$h = 2\sqrt{5}$

$$A_l = 24\pi \qquad V = \frac{A_b.H}{3} \qquad V = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$$

$$\pi R g = 24\pi \qquad V = \frac{16\pi.2\sqrt{5}}{3} \qquad V = \frac{16\pi\sqrt{20}}{3}$$

$$g = 6$$

Exercícios de Sala

01 **(EsPCEx)** Uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base, determinando um tronco de pirâmide cuja altura é $\frac{1}{3}$ da altura da pirâmide. Sabendo – se que a base da pirâmide tem área igual a 225 m², a área da secção do plano na pirâmide, em m², vale:

a) 36.
b) 64.
c) 150.
d) 25.
e) 100.

02 **(EsPCEx)** Uma pirâmide tem por base um triângulo eqüilátero de lado ***a*** e a razão entre sua aresta lateral e sua altura é ***k***. Seu volume é:

a) $\frac{a^3}{\sqrt{k^2+1}}$.

b) $\frac{a^3}{4\sqrt{k^2-1}}$.

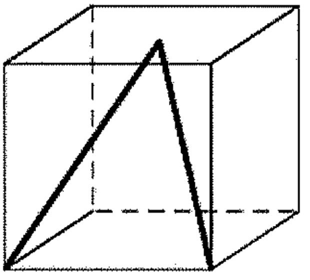
c) $\frac{a^3}{8\sqrt{k^2+1}}$.

d) $\frac{a^3}{12\sqrt{k^2-1}}$.

e) $\frac{a^3}{6\sqrt{k^2+1}}$.

03 **(EsPCEx)** Em um cubo de **aresta medindo 4 cm**, forma-se um triângulo VEF, conforme figura abaixo, em que **V é o centro do quadrado ABCD**. A área, em cm², do triângulo VEF é igual a

a) $4\sqrt{5}$.
b) $4\sqrt{6}$.
c) $5\sqrt{5}$.
d) $5\sqrt{6}$.
e) $6\sqrt{6}$.

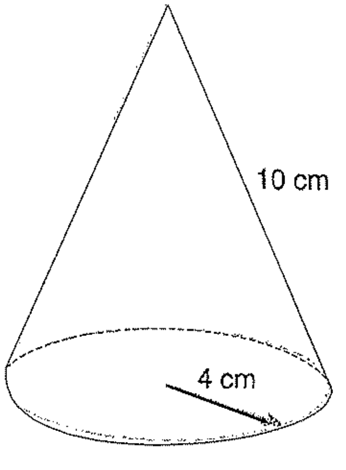


04 **(EsPCEx)** Uma pirâmide hexagonal regular tem área da base igual a $18\sqrt{3}$ m². Sabendo-se que sua altura é igual ao triplo do apótema da base, então seu volume é:

a) 36 m³.
b) $27\sqrt{3}$ m³.
c) $36\sqrt{3}$ m³.
d) $54\sqrt{3}$ m³.
e) $81\sqrt{3}$ m³.

05 **(UNB)** Considere um tetraedro regular com vértices A, B, C e D e arestas de comprimento igual a 17 cm, no qual M, N, O e P são pontos médios das arestas AB, BC, CD, e DA, respectivamente. Calcule, em centímetros, o perímetro do quadrilátero com vértices M, N, O e P, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

06 Um cone circular reto cujo raio da base é igual a 4 cm tem sua geratriz igual a 10 cm.



Planificando-se a superfície lateral desse cone obtém-se um setor circular cujo ângulo central mede:

a) 115°
b)120°
c) 144°
d) 150°
e) 162°

07 O raio da base e a altura de um cone circular reto medem 8 cm e 15 cm, respectivamente. Desse cone, determine os valores:

a) da área lateral.
b) da área total.
c) do volume.

08 Planificando-se a superfície lateral de um cone reto, obtém-se um setor circular cujo ângulo central mede θ. Se o raio da base do cone é r = 6 cm e sua altura é H = 8 cm, então θ é igual a:

a) 180°
b) 196°
c) 200°
d) 216°
e) 236°

09 (Fuvest-SP) Um pedaço de cartolina te a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Com essa cartolina, um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre uma mesa. Qual é a distância do bico do chapéu à mesa?

a) $10\sqrt{3}\ cm$
b) $3\sqrt{10}\ cm$
c) $20\sqrt{2}\ cm$
d) $20\ cm$
e) $10\ cm$

10 Um cálice cônico tem 4 cm de diâmetro na boca e 6 cm de profundidade. Um outro cálice, este cilíndrico, tem 3 cm de diâmetro na boca e 5 cm de profundidade. Enche-se completamente o primeiro cálice com licor e despeja-se esse conteúdo no segundo cálice. Pode-se concluir que o líquido, no segundo cálice:

a) transbordará.
b) atingirá exatamente a metade da profundidade.
c) ultrapassará a metade da profundidade, sem transbordar.

d) ficará abaixo da metade da profundidade.

e) atingirá exatamente $\frac{1}{3}$ da profundidade.

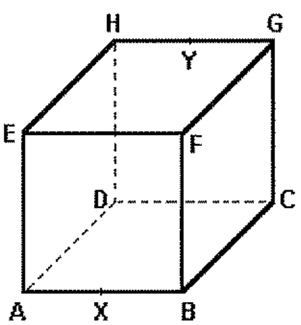
Exercícios de Casa

01 **(Fuvest)** Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é:

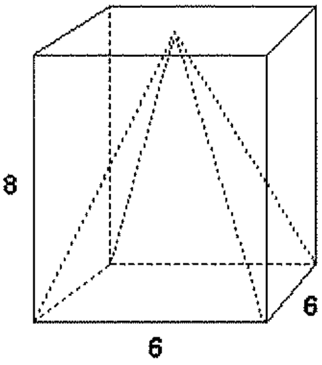
a) 144°.
b) 192°.
c) 240°.
d) 288°.
e) 336°.

02 **(Fuvest)** No cubo de aresta 'a' mostrado na figura adiante, X e Y são pontos médios das arestas AB e GH respectivamente. Considere a pirâmide de vértice F e cuja base é o quadrilátero XCYE. Calcule, em função de a,

a) o comprimento do segmento XY.
b) a área da base da pirâmide.
c) o volume da pirâmide.



03 **(Fuvest)** Considere uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo reto de altura 8 m e base quadrada de lado 6 m. Apoiada na base, encontra-se uma pirâmide sólida reta de altura 8 m e base quadrada com lado 6 m. O espaço interior à caixa e exterior à pirâmide é preenchido com água, até uma altura h, a partir da base ($h \leq 8$). Determine o volume da água para um valor arbitrário de h, $0 \leq h \leq 8$.



04 **(Unicamp)** Cada aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Para este tetraedro, calcule:

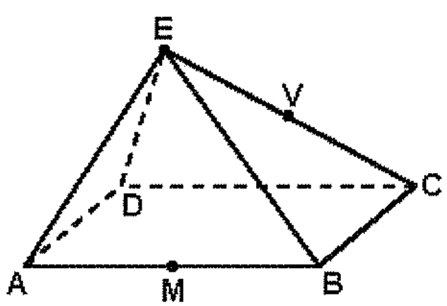
a) a distância entre duas arestas opostas, isto é, entre duas arestas que não têm ponto comum;
b) o raio da esfera inscrita no tetraedro.

05 **(Fuvest)** Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8m e a altura da pirâmide 3m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1m². Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

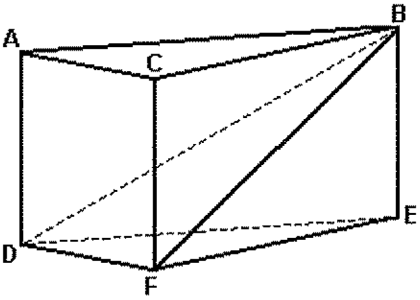
a) 90.
b) 100.
c) 110.
d) 120.
e) 130.

06 **(Fuvest)** A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

a) 1.
b) 1,5.
c) 2.
d) 2,5.
e) 3.



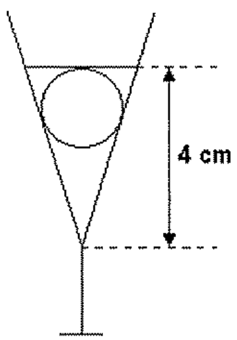
07 **(Ufmg)** Observe a figura.



Essa figura representa um prisma reto de base triangular. O plano que contém os vértices B, D e F divide esse prisma em dois sólidos: DACFB, de volume V_1, e DEFB, de volume V_2. Assim sendo, a razão $\frac{V_1}{V_2}$, é

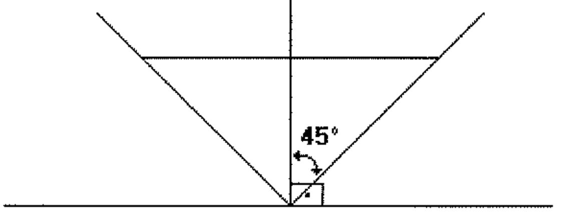
a) 1.
b) 3/2.
c) 2.
d) 5/2.

08 **(Fuvest)** Um cálice com a forma de cone contém Vcm^3 de uma bebida. Uma cereja de forma esférica com diâmetro de 2 cm é colocada dentro do cálice. Supondo-se que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4cm a partir do vértice do cone, determinar o valor de V.



09 **(Fuvest)** Uma caixa d' água tem a forma de um cone circular reto como ilustrado na figura a seguir. 7329 litros de água foram retirados da caixa ocasionando um abaixamento de um metro no nível da água. Quantos litros de água existiam inicialmente na caixa?

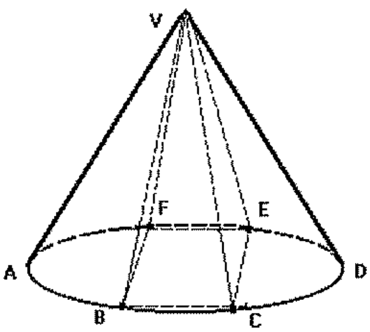
Para os cálculos use $\pi = 3{,}141$.



10 **(Ufmg)** Um reservatório de água tem forma de um cone circular reto, de eixo vertical e vértice para baixo. Quando o nível de água atinge a metade da altura do tanque, o volume ocupado é igual a π. A capacidade do tanque é

a) 2.
b) 8/3.
c) 4.
d) 6.
e) 8.

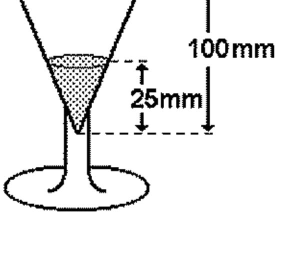
11 **(Ufmg)**



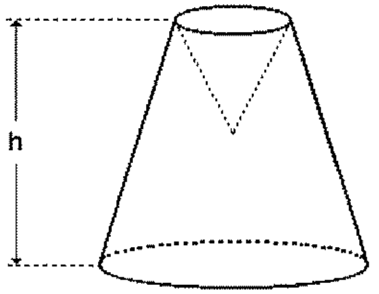
Nessa figura, a base da pirâmide VBCEF é um quadrado inscrito no círculo da base do cone de vértice V. A razão entre o volume do cone e o volume da pirâmide, nesta ordem, é

a) $\pi/4$.
b) $\pi/2$.
c) π.
d) 2π.
e) $2\pi/3$.

12 **(UNB)** Um cálice tem a forma de um cone reto de revolução, de altura igual a 100 mm e volume V_1. Esse cálice contém um líquido que ocupa um volume V_2, atingindo a altura de 25 mm, conforme mostra a figura adiante. Calcule o valor do quociente $\frac{V_1}{V_2}$.



13 **(UnB)** Um cone circular reto de sinalização de rodovias, que é oco e feito de plástico, tem altura de 60 cm e raio da base igual a 15 cm. Durante um acidente, a extremidade superior do cone foi afundada, como ilustra a figura abaixo.

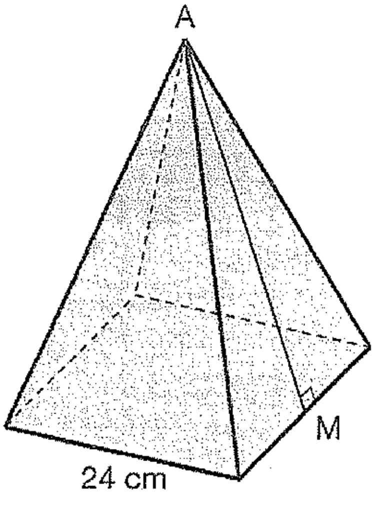


Calcule, em centímetros, a altura h do sólido resultante, sabendo que, após o acidente, o espaço interno do sinalizador foi reduzido em exatamente 25%. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

14 Calcule o volume e a área total de uma pirâmide hexagonal regular, cuja aresta lateral tem 10 m e o raio da circunferência circunscrita à base mede 6 m.

15 Calcule a área total e o volume da pirâmide quadrangular regular indicada na figura.

Dados: $\overline{AM}$ = 20 cm e aresta da base = 24 cm.

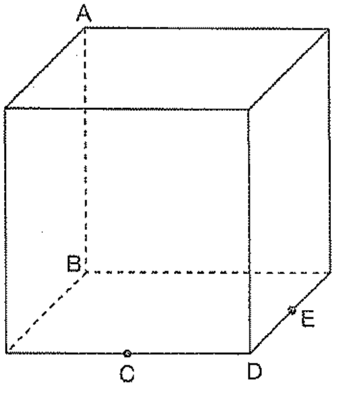


16 (Fuvest-SP) A base de uma pirâmide regular é um quadrado ABCD de lado 6 e diagonais $\overline{AC}\ e\ \overline{BD}$. A distância de seu vértice E ao plano que contém a base é 4.

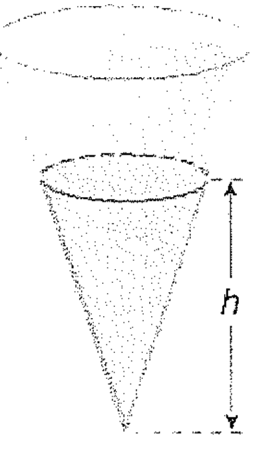
a) Determine o volume do tetraedro ABCDE.

b) Determine a distância do ponto B ao plano que contém a face ADE.

17 Considerando, a figura abaixo, um cubo de aresta 4 cm, calcule o volume do sólido ABCDE, sabendo que E e C são pontos médios das arestas do cubo.



18 (UFMG) Um tanque de água tem a forma de um cone circular reto, com seu vértice apontando para baixo. O raio do topo é igual a 9 m e a altura do tanque é de 27 m.



Pode-se afirmar que o volume V da água no tanque, como função da altura h da água, é:

a) $V = \dfrac{\pi h^3}{27}$

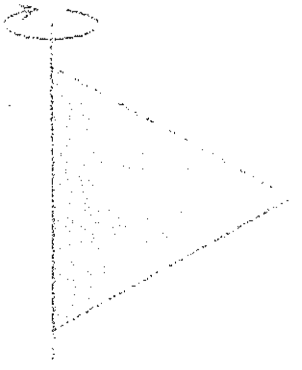
b) $V = \dfrac{\pi h^3}{9}$

c) $V = \dfrac{\pi h^3}{3}$

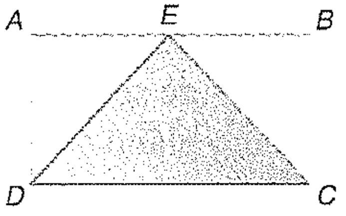
d) $V = 3\pi h^3$

e) $V = 9\pi h^3$

19 Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um triângulo equilátero, de lado $\ell = 18\ cm$, em torno de um de seus lados.



20 (Fuvest-SP)



Na figura, ABCD é um retângulo, sendo BC = BE = EA = r. Ache, em função de r, o volume do sólido gerado pelo triângulo EDC, quando o retângulo der uma volta completa em torno de $\overline{AB}$.

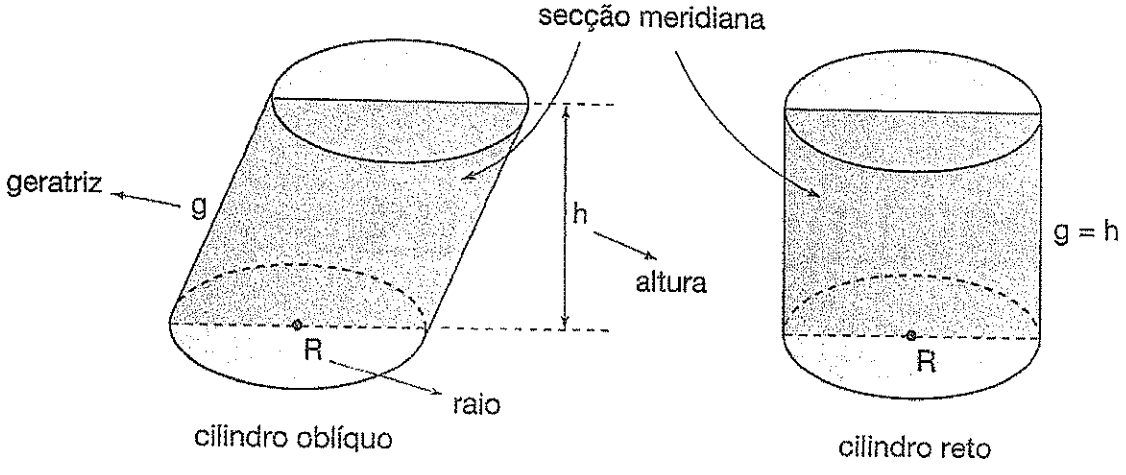
Cilindro

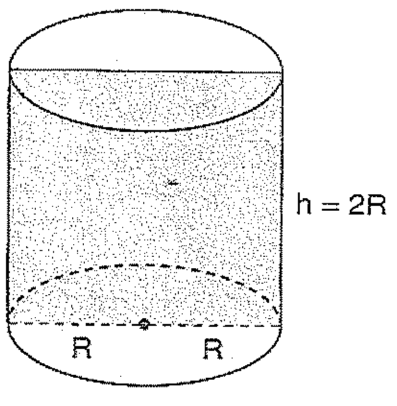
7.1 Classificação e elementos

Um cilindro pode ser classificado em:

Cilindro oblíquo: quando as geratrizes são oblíquas às bases. Nesse caso, a secção meridiana é um paralelogramo.

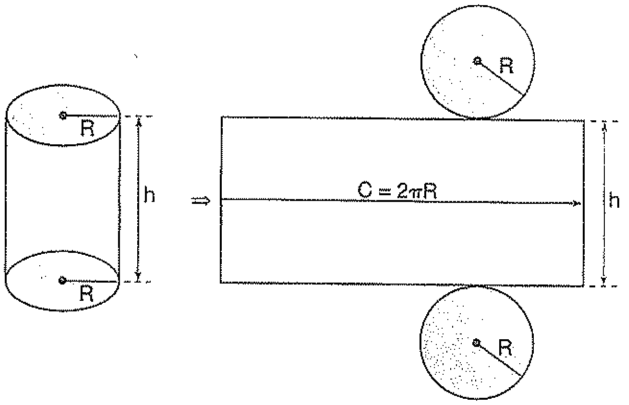
Cilindro reto: quando as geratrizes são perpendiculares às bases. Nesse caso, a secção meridiana é um retângulo. Num cilindro reto, a geratriz e a altura são iguais (g = h).





Se a altura do cilindro for igual ao diâmetro da base, ou seja, h = 2R, então a secção meridiana éum quadrado e o cilindro é chamado **cilindro equilátero**.

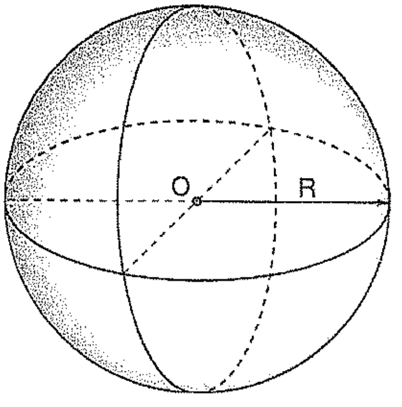
7.2 Áreas e volume



Área da base	$A_b = \pi R^2$
Área lateral	$A_l = 2\pi Rh$
Área total	$A_t = 2\pi R(h+R)$
volume	$V = \pi R^2 h$

7.3 Esfera

É o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a R O conjunto de todos os pontos P do espaço cujas distâncias ao ponto O são iguais a R é denominado **superfície esférica** de centro O e raio R.



área	$A = 4\pi R^2$
volume	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

7.3 <u>Fuso esférico</u>

É a parte da superfície esférica compreendida entre dois semicírculos máximos com o mesmo diâmetro.

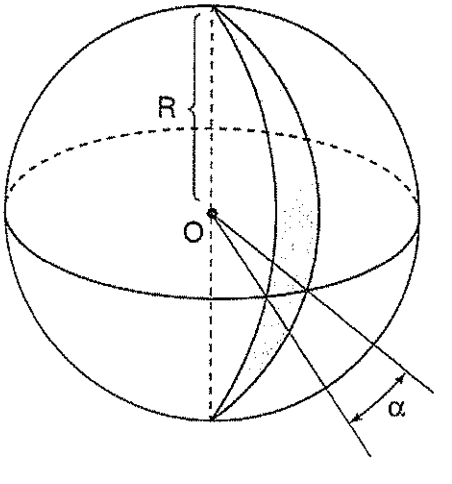
· **Área do fuso esférico**

$$\alpha \text{ em graus} \Rightarrow \begin{cases} \text{ângulo} & \text{área} \\ 360° & ------4\pi R^2 \\ \alpha & ------A_{fuso} \end{cases}$$

$$\boxed{A_{fuso} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90°}}$$

$$\alpha \text{ em radianos} \Rightarrow \begin{cases} \text{ângulo} & \text{área} \\ 2\pi \text{rad} & -----4\pi R^2 \\ \alpha & -----A_{fuso} \end{cases}$$

$$\boxed{A_{fuso} = 2R^2\alpha}$$



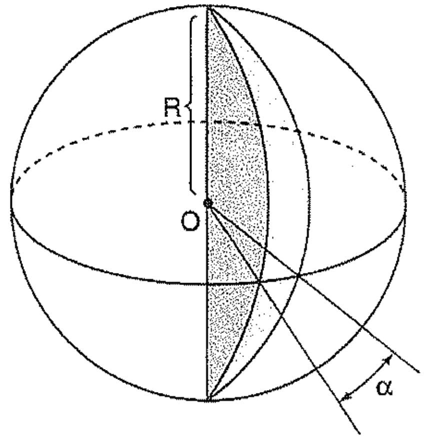
7.3 Cunha esférica

É o sólido limitado por dois semicírculos e pela superfície do fuso.

· **Volume da cunha esférica**

$$\alpha \text{ em graus} \Rightarrow \begin{cases} \text{ângulo} & \text{área} \\ 360° & \text{------} \ \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & \text{------} \ V_{cunha} \end{cases}$$

$$\boxed{V_{cunha} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°}}$$

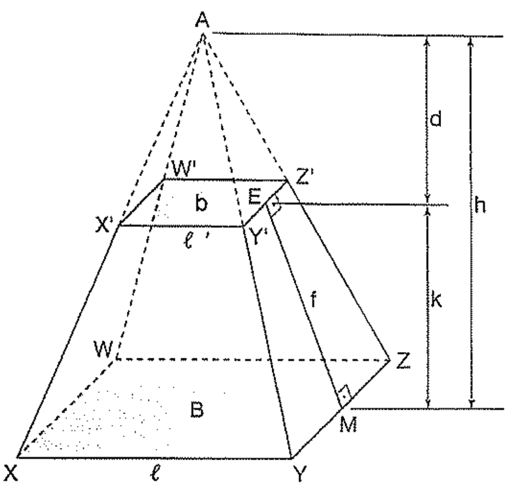


$$\alpha \text{ em radianos} \Rightarrow \begin{cases} \text{ângulo} & \text{área} \\ 2\pi \text{rad} & \text{------} \ \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & \text{------} \ V_{cunha} \end{cases}$$

$$\boxed{V_{cunha} = \frac{2R^3 \alpha}{3}}$$

7.4 Tronco da pirâmide

Considere o tronco de pirâmide da figura:

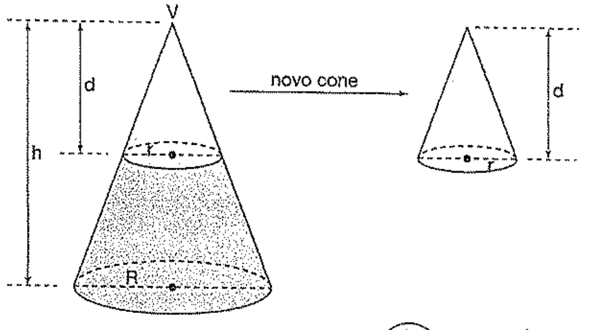


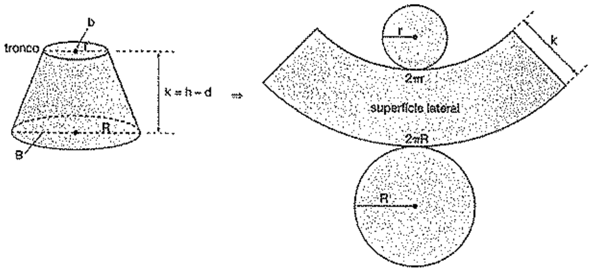
B = área da base maior
B = área da base menor
h = altura da pirâmode AXYZW
d = altura da pirâmide AX'Y'Z'W'
k = altura do tronco
V_2 = volume da pirâmide AX'Y'Z'W'
V_1 = volume da pirâmide AXYZW
f = apótema do tronco

A_B	l^2
A_b	l'^2
A_L	$\frac{n.(l + l'), f}{2}$
A_T	$A_L + A_B + A_b$

Propriedades	$\frac{\ell}{\ell'} = \frac{d}{h}$
	$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{h}\right)^2$
	$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{d}{h}\right)^3$
volume	$V = \frac{k}{3}\left[B + \sqrt{B.b} + b\right]$

7.5 Tronco de cone





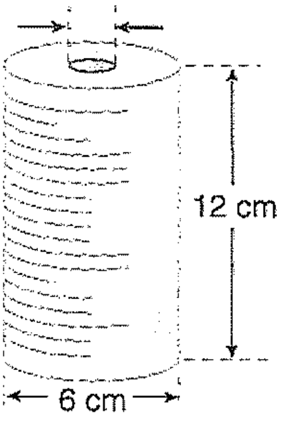
Área lateral	$A_l = \pi k(r+R)$
Área total	$A_t = A_l + b + B$
volume	$V = \frac{k\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$

A_B	πR^2
A_b	πr^2

Exercícios Comentados

01 Um carretel de linha de náilon, de 1 mm de espessura, tem a forma de um cilindro circular reto de 6 cm de diâmetro por 12 cm de altura. A linha está firmemente enrolada sobre um tubo cilíndrico de 2 cm de diâmetro, de modo que o espaço vazio entre duas camadas de linha é desprezível. Qual é, aproximadamente, o comprimento do fio contido no carretel?

a) 528 m
b) 496 m
c) 472 m
d) 384 m
e) 270 m



Resolução:

O volume ocupado pela linha é a diferença entre os volumes de dois cilindros de 12 cm de altura e raios de bases iguais a 3 cm e 1 cm.

$$V = \pi.3^2.12 - \pi.1^2.12$$
$$V = 96\pi$$

Podemos considerar o fio de náilon como sendo um longo cilindro, cujo raio da base é igual a 0,5 mm e cuja altura h é o comprimento de fio contido no carretel. O volume desse cilindro é igual a $96\pi\ cm^3$. Então, temos:

$$V = 96\pi$$
$$\pi.(0,05)^2.h = 96\pi$$

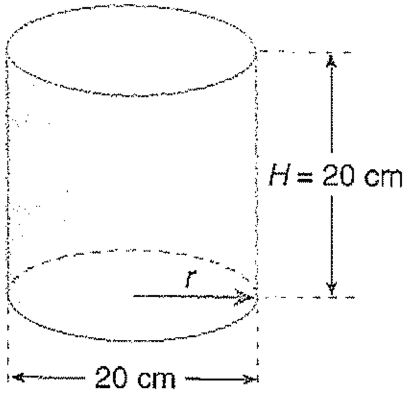
$$h = \frac{96}{0,0025}$$
$$h = 38.400\ cm$$

$$\therefore h = 384\ m$$
alternativa d

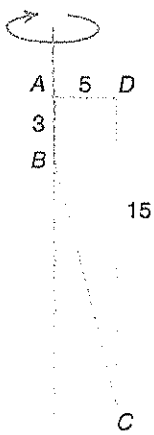
02 O raio da base de um cilindro equilátero é r= 10 cm. Calcular a área lateral e a área total desse cilindro.

Resolução:
No cilindro equilátero, a altura é igual ao diâmetro da base. Além disso, o cilindro equilátero é reto por definição.
Assim:

$$S_L = 2\pi r H$$
$$S_L = 2.\pi.10.20 = 400\pi$$
$$S_L = 400\pi\ cm^2$$
$$S_T = S_L + 2.S_B$$
$$S_T = 400\pi + 2.\pi.10^2 = 600\pi \Rightarrow S_T = 600\pi\ cm^2$$

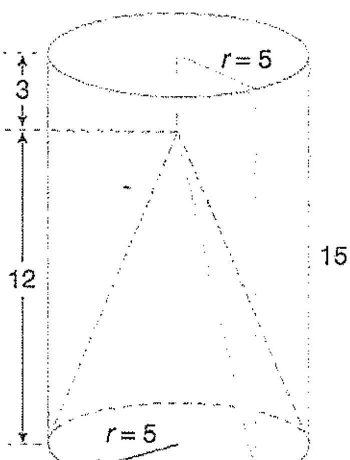


03 A figura seguinte mostra um trapézio retângulo de altura AD = 5 e bases AB = 3 e CD = 15. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse trapézio em torno de sua base menor.



Resolução:

O sólido gerado pela rotação é um cilindro reto com um rebaixo cônico em uma de suas bases.



Assim, o volume procurado é a diferença entre os volumes do cilindro e do cone.

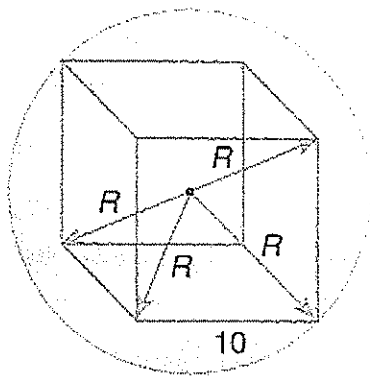
$$V = V_{cilindro} - V_{cone}$$

$$V = \pi.5^2.15 - \frac{1}{3}.\pi.5^2.12 \Rightarrow V = 275\pi$$

04 Calcular a área da superfície esférica circunscrita a um cubo de 10 cm de aresta.

Resolução:

O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo nela inscrito.



Então ....

$D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 10\sqrt{3}$

$\therefore R = 5\sqrt{3}$

Logo, a área da superfície esférica é:

$$S_E = 4\pi R^2 \Rightarrow S_E = 4\pi\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 300\pi$$

$$\therefore S_E = 300\pi\ cm^3$$

05 A base de uma pirâmide tem área igual a $125\ cm^2$, e sua altura é de 10 cm. Um plano paralelo à base e distante 6 cm do vértice dessa pirâmide determina uma secção de área:

a) $75\ cm^2$

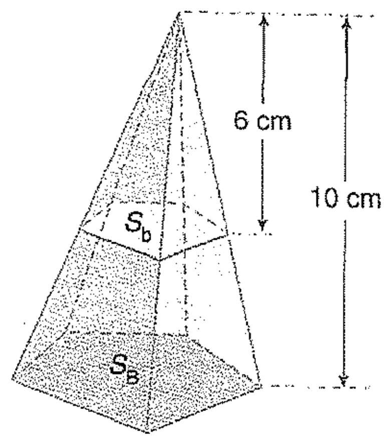
b) $45\ cm^2$

c) $60\ cm^2$

d) $36\sqrt{3}\ cm^2$

e) $9\sqrt{5}\ cm^2$

Resolução:



A razão de semelhança entre as pirâmides é dada por:

$$k=\frac{6}{10}\Rightarrow k=\frac{3}{5}$$

Então, sendo S_b e S_B as áreas das bases das pirâmides, temos:

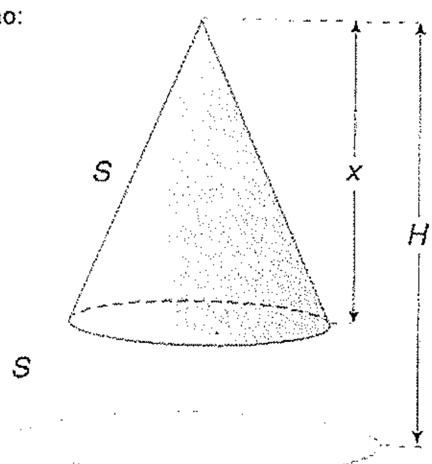
$$\frac{S_b}{S_B}=k^2\Rightarrow\frac{S_b}{125}=\frac{9}{25}$$

$$\therefore S_b=45\Rightarrow S_b=45\ cm^2$$

Alternativa b

06 Um cone tem altura H. A que distância do vértice deve-se conduzir um plano paralelo à base desse cone, para decompô-lo em dois sólidos de áreas laterais iguais?

Resolução:



Sendo S a área lateral do cone menor e S a área lateral do tronco do cone, a área lateral do cone original será igual a 2S. Então, da semelhança dos cones, temos:

$$k^2=\frac{S}{2S}\Rightarrow k^2=\frac{1}{2}\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo:

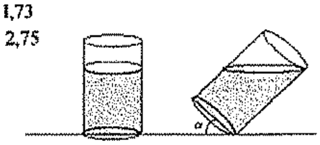
$$\frac{x}{H}=k\Rightarrow\frac{x}{H}=\frac{\sqrt{2}}{2}\therefore x=\frac{H\sqrt{2}}{2}$$

Exercícios de Sala

01 **(EsPCEx)** num recipiente em forma de cilindro circular reto, com raio da base 2cm e altura $6\sqrt{3}$ cm (dimensões internas), há um volume de água de $16\sqrt{3}\,\pi cm^3$. O maior ângulo α que o plano da base do cilindro pode fazer com a horizontal para que a água não derrame ao se inclinar o cilindro é de, aproximadamente,

a) 30º
b) 40º
c) 50º
d) 60º
e) 70º

Dados (aproximados)
tg30º = 0,58 tg60º = 1,73
tg40º = 0,84 tg70º = 2,75
tg50º = 1,19



02 **(EsPCEx)** Uma lata cilíndrica está completamente cheia de um líquido que deve ser distribuído totalmente em potes iguais entre si, também cilíndricos. A altura de cada pote é igual a $\frac{2}{5}$ da altura da lata e o diâmetro de sua base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. Para tal distribuição, a quantidade mínima de potes a serem utilizados é

a) 22.
b) 23.
c) 24.
d) 25.
e) 26.

03 **(EsPCEx)** Se a área lateral e área total de um cilindro reto são $2\pi A$ e $2\pi S$, então, o volume deste sólido é igual a:

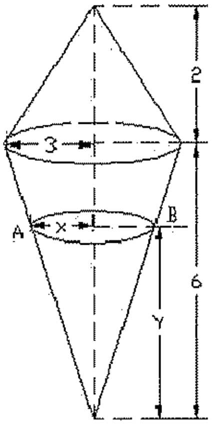
a) $\pi A\sqrt{S-A}$.
b) $\pi S\sqrt{S-A}$.
c) $\pi A\sqrt{S+A}$.
d) $\pi S\sqrt{S+A}$.
e) $\pi\sqrt{S+A}$.

04 **(EsPCEx)** O volume de um tronco de pirâmide, obtido a partir de uma pirâmide de base quadrada inscrita numa semi – esfera de raio R e um plano paralelo à base, distante $\frac{R}{2}$ da mesma vale:

a) $\frac{1}{2}$ do volume da pirâmide.
b) $\frac{7}{8}$ do volume da pirâmide.
c) $\frac{2}{3}$ do volume da pirâmide.
d) $\frac{7}{12}$ do volume da pirâmide.
e) $\frac{5}{9}$ do volume da pirâmide

05 **(EsPCEx)** O sólido geométrico abaixo é formado por dois cones circulares retos de mesma base. Sabendo-se que a seção que contém os pontos A e B é paralela à base comum dos cones e divide todo o sólido em duas partes de igual volume, então o valor de $x^3 + y^3$ é:

a) 96.
b) 128.
c) 144.
d) 162.
e) 248.



07 **(EsPCEx)** O volume da esfera, em cm³, da esfera inscrita em um cone de revolução, cujo raio da base é 5 cm e cuja altura é 12 cm, é:

a) $\frac{1000\pi}{162}$.
b) $\frac{2000\pi}{27}$.
c) $\frac{3000\pi}{108}$.
d) $\frac{4000\pi}{81}$.
e) $\frac{5000\pi}{9}$.

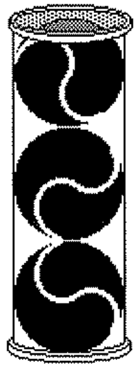
08 **(EsPCEx)** Um trapézio isósceles, cujas bases medem 2 cm e 4 cm e cuja altura é 1 cm, sofre uma rotação de 180° em torno do eixo que passa pelos pontos médios das bases. O volume, em cm³, do sólido gerado por essa rotação é

a) $\frac{4\pi}{3}$.
b) $\frac{5\pi}{3}$.
c) 2π.
d) $\frac{7\pi}{3}$.

09 **(EsPCEx)** Um plano corta uma esfera de raio R de modo que a área da menor calota formada seja igual a ***m*** vezes a área lateral do cone cujo vértice é o centro da esfera e cuja base é o círculo que serve de base à calota. A distância ***d*** do centro da esfera ao plano é dada por:

a) $d = R\frac{4-m^2}{4+m^2}$.
b) $d = R\left(\frac{4-m}{4+m}\right)^2$.
c) $d = R\frac{4+m^2}{4-m^2}$.
d) $d = R\left(\frac{4+m}{4-m}\right)^2$.
e) $d = R\frac{m^2-4}{m^2+4}$.

10 **(Uerj)** Três bolas de tênis, idênticas, de diâmetro igual a 6 cm, encontram-se dentro de uma embalagem cilíndrica, com tampa. As bolas tangenciam a superfície interna da embalagem nos pontos de contato, como ilustra a figura a seguir.

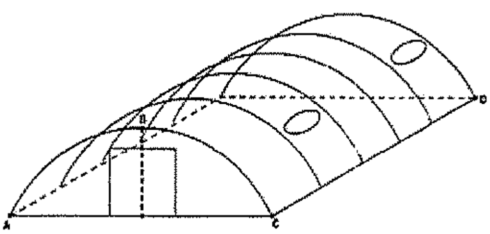


Calcule:

a) a área total, em cm², da superfície da embalagem;
b) a fração do volume da embalagem ocupado pelas bolas.

Exercícios de Casa

01 **(EsPCEx)** Uma barraca de campanha militar possui o formato apresentado no desenho abaixo



A curva ABC é um **arco de 90°** de uma circunferência com **10 metros de raio**. O segmento CD mede **20 metros. Admitindo** $\pi = 3{,}14$, podemos concluir que o volume do interior da barraca é de aproximadamente:

a) 480 m³
b) 570 m³
c) 618 m³
d) 1140 m³
e) 2880 m³

02 **(EsPCEx)** Considere as proposições abaixo:

I) O volume **V** de um cilindro eqüilátero de raio **r** é $V = 4\pi r^3$.
II) O volume de um cubo de área total 600 cm² é 1000 cm³.
III) Quando o raio de uma esfera aumenta 100%, o volume da esfera aumenta 700%.
IV) Uma reta **r** e um plano a são perpendiculares a uma outra reta **t**, em pontos distintos, então **r** e a são paralelos.

Dentre as proposições acima somente é/são falsa(s) a(s):

a) I.
b) II.
c) I e III.
d) I e IV.
e) III e IV.

03 **(EsPCEx)** O volume de uma lata cilíndrica é 4p cm³. O custo de fabricação das bases é R$ 0,04 por cm² e o custo de fabricação da superfície lateral é de R$ 0,02 por cm². O custo de fabricação da lata (em R$) em função do raio R (em cm) das bases é:

a) $0{,}04\pi\left(R^2 + \frac{1}{R}\right)$.

b) $0{,}06\pi\left(R^2 + \frac{1}{R}\right)$.

c) $0{,}06\pi\left(R^2 + \frac{2}{R}\right)$.

d) $0{,}08\pi\left(R^2 + \frac{2}{R}\right)$.

e) $0{,}08\pi\left(R^2 + \frac{1}{R}\right)$.

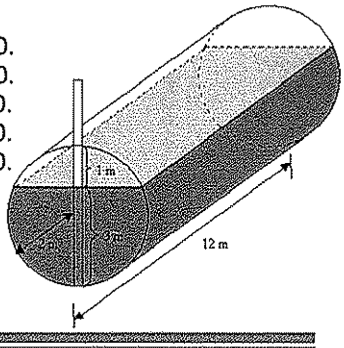
04 **(EsPCEx)** O volume de um cilindro eqüilátero de 1metro de raio é, aproximadamente, igual a:

a) 3,1 m³.
b) 6,3 m³.
c) 9,4 m³.
d) 12,6 m³.
e) 15,7 m³.

05 **(EsPCEx)** Deseja-se estimar a quantidade de combustível existente em um tanque cilíndrico disposto horizontalmente, medindo-se a parte molhada de uma régua, conforme a figura abaixo. Sabendo que o tanque tem 2m de raio e 12m de comprimento, e que a parte molhada da régua tem 3m de comprimento, pode-se concluir que o volume de combustível, em litros, existente no tanque está compreendido entre

Dados: utilizar $\pi = 3{,}1$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$

a) 145000 e 155000.
b) 135000 e 145000.
c) 125000 e 135000.
d) 115000 e 125000.
e) 105000 e 115000.



06 **(EsPCEx)** Dois recipientes, um em forma de cilindro e o outro, de paralelepípedo, cujas bases estão num mesmo plano, são unidos por uma tubulação com uma válvula no meio. Inicialmente, a válvula está fechada, o paralelepípedo está vazio e o cilindro é ocupado, em parte, por um líquido cujo volume é de 2000π litros, atingindo uma altura de 2 metros. A válvula é aberta e, após certo tempo, verifica-se que os dois recipientes têm o mesmo nível do líquido. Considerando desprezível o volume da tubulação que une os dois reservatórios e sabendo que a área da base do paralelepípedo é de $1{,}5\pi$ m², o volume final, em litros, de líquido no paralelepípedo é

a) 600π.
b) 800π.
c) 1000π.
d) 1200π.
e) 1500π.

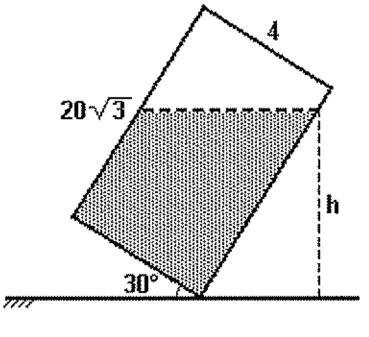
07 **(EsPCEx)** A razão entre a altura de um cilindro circular reto e a altura de um cone circular reto, de mesmo volume, é igual a $\frac{1}{3}$. Sendo "R" o raio do cilindro e "r" o raio do cone, pode-se afirmar

a) $R = \frac{r}{3}$.

b) $R = \frac{r}{9}$.

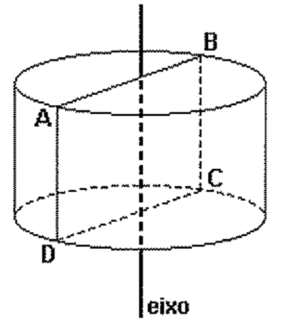
c) $R = 3r$.
d) $R = r$.
e) $R = 2r$.

08 **(Fuvest)** Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4cm e altura $2\sqrt{3}$ cm, com 2/3 de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de 30° com o solo (ver seção lateral a seguir). Determine a altura h do nível da água em relação ao solo.



09 **(Ufmg)** Num cilindro de 5 cm de altura, a área da base é igual à área de uma seção formada por um plano que contém o eixo do cilindro, tal como a seção ABCD na figura a seguir.

O volume desse cilin



a) $\frac{250}{\pi}\text{cm}^3$.

b) $\frac{500}{\pi}\text{cm}^3$.

c) $\frac{625}{\pi}\text{cm}^3$.

d) $\frac{125}{\pi}\text{cm}^3$.

10 **(Ufrrj)** Carlos é um rapaz viciado em beber refrigerante diet. Um dia, voltando do trabalho, ele passou em frente a uma companhia de gás, onde viu um enorme reservatório cilíndrico de 3 metros de altura com uma base de 2 metros de diâmetro e pensou... "Em quanto tempo eu beberia aquele reservatório inteiro, se ele estivesse cheio de refrigerante diet?" Considerando $\pi = 3{,}14$ e sabendo-se que Carlos bebe 3 litros de refrigerante diet por dia, pode-se afirmar que ele consumirá todo o líquido do reservatório em um período de

a) 86 dias.
b) 86 meses.
c) 86 anos.
d) 8,6 anos.

11 **(Ufmg)** Um aquário cilíndrico, com 30 cm de altura e área da base igual a 1 200 cm², está com água até a metade de sua capacidade. Colocando-se pedras dentro desse aquário, de modo que fiquem totalmente submersas, o nível da água sobe para 16,5 cm. Então, o volume das pedras é

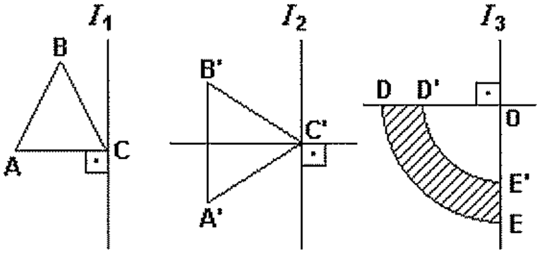
a) 1 200 cm³.
b) 2 100 cm³.
c) 1 500 cm³.
d) 1 800 cm³.

12 **(Fuvest)** Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

13 **(Unicamp)** Uma esfera de raio 1 é apoiada no plano xy de modo que seu pólo sul toque a origem desse plano. Tomando a reta que liga o pólo norte dessa esfera a qualquer outro ponto da esfera, chamamos de "projeção estereográfica" desse outro ponto ao ponto em que a reta toca o plano xy. Identifique a projeção estereográfica dos pontos que formam o hemisfério sul da esfera.

14 **(Ufpe)** Nas figuras a seguir, os triângulos ABC e A' B' C' são eqüiláteros com lados medindo 3cm, e DE e D' E' são arcos de circunferência com centro em O e raios iguais a 3cm e 2cm, respectivamente.



Seja S_1 o sólido obtido pela rotação de 360° do triângulo ABC em torno de I_1, S_2 pela rotação de 360° de A' B' C' em torno de I_2 e S_3 pela rotação de 360° da região hachureada em torno de I_3. Podemos afirmar que:

( ) S_1 é obtido de um cone circular reto retirando-se dois outros cones circulares retos.

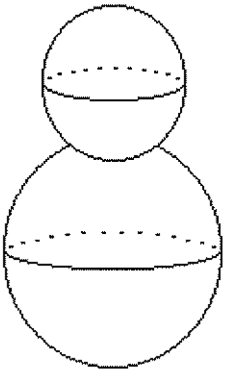
( ) O volume de S_1 é igual ao volume do cone com raio igual a $\frac{3}{2}$ cm e altura igual $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

( ) S_2 é obtido de um cilindro circular reto retirando-se dois cones circulares retos.

( ) A área da superfície de S_2 é igual à área de um cone circular reto de raio $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm e altura 3cm.

( ) S_4 é obtido de um hemisfério retirando-se outro hemisfério.

15 **(Ufrj)** Ping Oin recolheu 4,5m³ de neve para construir um grande boneco de 3m de altura, em comemoração à chegada do verão no Pólo Sul. O boneco será composto por uma cabeça e um corpo ambos em forma de esfera, tangentes, sendo o corpo maior que a cabeça, conforme mostra a figura a seguir. Para calcular o raio de cada uma das esferas, Ping Oin aproximou π por 3.



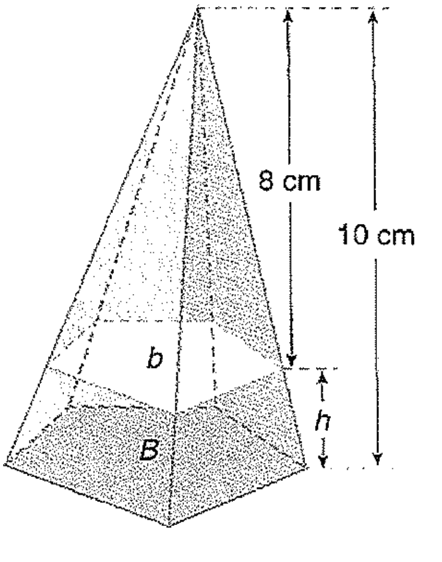
Calcule, usando a aproximação considerada, os raios das duas esferas.

16 **(Unicamp)** O volume V de uma bola de raio r é dado pela fórmula $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

a) Calcule o volume de uma bola de raio $r = \frac{3}{4}$ cm. Para facilitar os cálculos você deve substituir π pelo número $\frac{22}{7}$.

b) Se uma bola de raio $r = \frac{3}{4} cm$ é feita com um material cuja densidade volumétrica (quociente da massa pelo volume) é de 5,6g/cm³, qual será a sua massa?

17 Uma pirâmide, cuja área da base é $75\ cm^2$ e cuja altura é 10 cm, é seccionada por um plano paralelo à base, distante 8 cm do vértice.

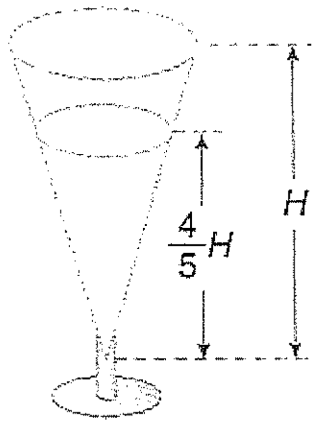


a)calcule a área da secção.

b)Calcule o volume do tronco da pirâmidepor diferença entre os volumes das pirâmides.

c)Calcule o volume do tronco pela fórmula $V_{TP} = \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right)$, em que B e b são as áreas das bases e h é a altura do tronco.

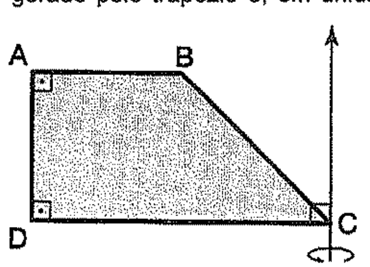
18 Uma bebida é servida num copo cônico. O líquido ocupa $\frac{4}{5}$ da profundidade do copo, sendo o restante ocupado pela espuma.



Da capacidade total do corpo, a porcentagem ocupada pelo líquido é aproximadamente igual a:

a) 80%
b) 75%
c) 72%
d) 64%
e) 50%

19 (Cefet-PR) O trapézio da figura a seguir gira em torno de um eixo do seu plano, que passa por C e é paralelo ao lado $\overline{AD}$. Se $\overline{AB} = \overline{AD} = \ell$ e $\overline{CD} = 2\ell$, o volume do sólido gerado pelo trapézio é, em unidades de volume:



a) $\frac{8\pi\ell^3}{3}$

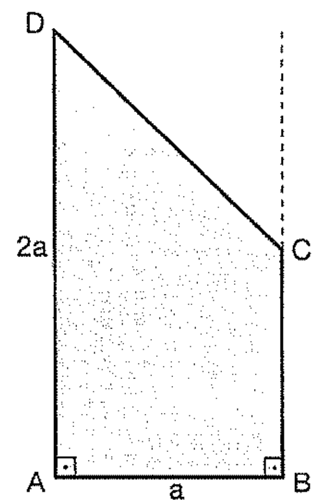
b) $\frac{11\pi\ell^3}{3}$

c) $\frac{14\pi\ell^3}{3}$

d) $\frac{17\pi\ell^3}{3}$

20 (Vunesp-SP) No trapézio ABCD da figura os ângulos internos em A e B são retos, e o ângulo interno em D é tal que sua tangente vale $\frac{5}{6}$. Se $\overline{AD} = 2.\overline{AB}$,

O volume do sólido obtido ao se girar o trapézio em torno da reta por B e C é dado por:



a) $\left(\frac{3}{4}\right)\pi\alpha^3$

b) $\left(\frac{5}{8}\right)\pi\alpha^3$

c) $\left(\frac{6}{5}\right)\pi\alpha^3$

d) $\left(\frac{20}{13}\right)\pi\alpha^3$

e) $\left(\frac{8}{5}\right)\pi\alpha^3$

Gabarito

1. Análise combinatória
Sala

01. e
02. e
03. c
04. e
05. b
06. d
07. a
08. e
09. c
10. d
11. b
12. c
13. d
14. 1,728
15. d
16. c
17. d
18. b
19. b
20. 60

casa

01. b
02. e
03. e
04. c
05. c
06. b
07. d
08. c
09. c
10. b
11. d
12. a
13. e
14. d
15. a
16. d
17.b
18. c
19. b
20. d

2. Probabilidade

sala
01. a
02. c
03. c
04. d
05. d
06. c
07. c
08. d
09. b
10. b
11. b
12. a
13. c
14. d
15. e
16. d

casa

01. c
02. b
03. a
04. c
05. a
06. b
07. b
08. b
09. a
10. b
11. a
12. a
13. c
14. b
15. c
16. b
17. b
18. d
19.
20.

3. Geometria plana, e Geometria Espacial de Posições

sala

01
02.
03. d
04. c
05. (110°)
06. b
07. d
08. e
09. b
10. (10/3)

11. $(a = 6\sqrt{6},\ b = \frac{12\sqrt{6}}{5}\ \ c)\frac{2\sqrt{6}}{3}$
12. a) $2x^2 - 20x + 96$
b) 6 ou 4
13. d
14. e
15. b
16. a
17.

18.
19. c
20. b
21. b

casa

01. (x = 14 y = 28)
02. d
03. a) $\mathbb{R} = 14\ h = 7$
b) $\mathbb{R} = 10\ h = 15$
c) $\mathbb{R} = 4\ h = 12$
04. c
05. d
06. b
07. a) $\dfrac{1-x}{1+x}$
b) x = $\sqrt{2}-1$
08. (x = a (2 - $\sqrt{3}$)
09. b
10. b
11. c
12. c
13. e
14. (468)
15. (15)
16. (a) $\dfrac{16}{9}$ b) 21)
17. (3 $(3\sqrt{3}+2\pi)$)
18. a) 9(π -2) c) 3(4 π -3 $\sqrt{3}$)
b) 9 (3 π +2) d) 3(8 π +3 $\sqrt{3}$)
19. c
20. d
21. a) 2($(3\sqrt{3}-\pi)$
b) 4 π
22. a) $a^2(4-\pi)$
b) a^2 (4- π)

23. c
24. b
25. 10
26. x = $\dfrac{ah}{a+h}$
27. b
28. a
29. b
30. e

5. Poliedros e Prismas

Parte 1

sala

01. 34 cm
02. d
03. 64
04. 30 cm
05. VFVFV
06. a) $2\sqrt{3}$
b) 48 (4 + $\sqrt{3}$)
c) 192 $\sqrt{3}$
07. 4(45+8 $\sqrt{5}$)
08. (36 cm^3)
09. (210000l)
10. (2,4 e 8)
1. e
12. b
13. d
14. a
15. b
16. d
17. d

casa

01. (16, 12 e 60
02. (12 cm^3)
03. 30 min
04. $\sqrt{3}/2$
05. $\sqrt{6}/2$
06. 32
07. $\sqrt{2}(\sqrt[3]{2}-1)$
08. $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$
09. a /7
10. $\sqrt{3}/3$
11.
12.
13.
14.
15. (10 dm)
16. a
17. c
18. c
19. d
20. a

6. Pirâmides e Cones

sala

01. b
02. d
03. a) 99/56 cm³ b) 9,9 g
04.
05. (34)
06.
07. a) 136 π
 b) 200 π
 c) 320 π
08. d
09. a
10. c

casa

01. d
02. a) $a\sqrt{2}$
 b) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$
 c) $\frac{a^3}{6}$
03. $\frac{3}{16}(8-h)^3+36h-96$
04. a) $3\sqrt{2}$
 b) $\sqrt{6}/2$
05. a
06. b
07. c
08. $\frac{4\pi}{3}$
09. (83 76)
10. e
11. b
12. (46)
13. (30 cm)
14.
15.
16.
17.
18. a
19. V = 14 58 π
 $A_T = 32\,4\,\pi\,\sqrt{3}$
20. $\frac{4}{3}\pi h^3$

7. Cilindro, Esfera e Troncos

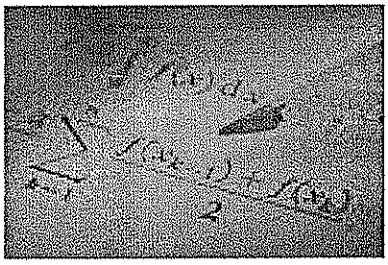
Sala

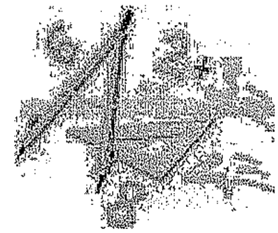
01. a) $3\sqrt{2}$ cm b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm
02. b
03. e
04. Circulo de raio = 2, com centro da esfera maior = 1
05. 8376 litros
06.
07. c
08 d
09. a
10. a) 126π cm². b) 2/3.

Casa

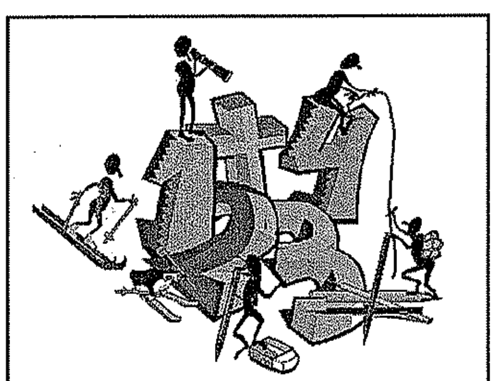
01.
02.
03.
04.
05.
06.
07.
08. 21
09. d
10. d
11. d
12. e
13. cilindro raio = 2
14. VFVFV
15. r = 1/2 R = 1
16. a) $\frac{99}{56}$ cm³ b) 9,9 g
17. a) 48 cm ²
 b) 122 cm ³
 c) 122 cm ³
18. e
19. b
20. e

Curso Preparatório CIDADE





MATEMÁTICA 1
CADERNO 3



Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

EQUIPE

Diretor Geral
Luiz Alberto Tinoco Cidade

Diretora Executiva
Clara Marisa May

Diretor de Artes
Fabiano Rangel Cidade

Coordenação Geral dos Cursos Preparatórios
Francisco Gerden

Coordenação dos Cursos de Idiomas EAD
Dr. Daniel Soares Filho

Secretaria
Mariana Ramos

Editoração Gráfica
Edilva de Lima

Fonoaudióloga e Psicopedagoga
Mariana Fernandes Ramos – CRFa 12482-RJ/T-DF

Assessoria Jurídica
Luiza May Schmitz – OAB/DF – 24.164

Assessoria de Línguas Extrangeiras
Cleide Thieves (Poliglota-EEUU)
João Jorge Gonçalves (Poliglota-Europa)

Equipe de Professores

Idiomas
Luiz Cidade – Espanhol
Daniel Soares Filho – Espanhol (EAD)
Cleide Thieves – Inglês, Francês, Espanhol, Alemão (EAD)
João Jorge Gonçalves – Inglês, Francês Espanhol e Português
Leonardo dos Santos – Espanhol
Diego Fernandes – Espanhol
Márcia Mattos da Silva – Francês (EAD)
Marcos Henrique – Francês
Maristella Mattos Silva – Espanhol (EAD)
Monike Rangen Cidade – Espanhol (EAD)
Cacilda Leal do Nascimento – Espanhol
Mariana Ramos – Inglês (EAD)

Concursos
Cassia Braga – Portugês
Maria Antônia – Redação
Murilo Roballo – Matemática
Sormany Fernandes – História do Brasil
Francisco Roges – Geografia
Gerdean – Química
Gustavo Porto – História
Luiz Fernando – Português
Thiago Magalhães – Física

Agradecimentos

Em primeiro lugar, meu agradecimento especial e minha consideração a dois professores extraordiários – aqueles que me levaram a gostar de ensinar com excelência - Tide e Euzébio Cidade. (Olá, Mamãe e Papai!)

Um agradecimento sincero aos meus queridos alunos e minha excelente e dedicada equipe de professores, profissionais de qualidade ímpar que reúnen as qualidades de verdadeiros líderes na arte de educar, com desempenhos de incomensuráveis valores pedagógicos, reconhecidos por todos os alunos que passaram por nossa escola.

Finalizando um agradecimento muito especial ao professor Murilo Roballo, que com dedicação e esmero comfeccionou esta apostila de matemática que apresenta além da teoria as questões necessárias e fundamentais para um adestramento simples, rápido e eficaz para a prova do concurso da EsPCEx. Esperamos que utilize esta obra, exercitando com dedicação cada item apresentado e pesquisando àqueles que apresentaram maior grau de dificuldade. Traga para a aula as questões cuja resposta não consiga encontrar ou envie-as por e-mail para seu tutor, caso seja aluno do curso presencial.

Aceite nossa companhia nesta viagem de treinamento rumo à EsPCEx / AMAN .

Bons Estudos!!

Luiz Cidade
Diretor

ÍNDICE

1 - BINÔMIO DE NEWTON

1. FATORIAL

Define-se fatorial de n através da expressão:

$$\boxed{n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3.2.1}$$

Em que $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \ e \ n > 1 \\ n! lê - se : n \ fatorial \ ou \ fatorial \ de \ n \end{cases}$

Adotam-se as seguintes definições especiais:
0!=1
1!=1

2. Número binomial

Denomina-se **número binomial** todo numero definido por:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Em que $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \ e \ p \in \mathbb{N} \\ n \geq p \end{cases}$

Se n<p, então, por definição $\binom{n}{p} = 0$.

3. Binomiais complementares

Dois números binomiais são chamados complementares quando a soma dos denominadores é igual ao numerador.

Os números $\binom{n}{p} e \binom{n}{n-p}$ são complementares, pois p+n-p=n.

4. Propriedades

1ª) Dois números binomiais complementares são iguais.

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

Observação:

Se $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$, então (p+q=n ou p=q).

2ª) Relação de Stiffel

$$\boxed{\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}}$$

5. Triângulo de Pascal

É um quadrado formado por números binomiais de tal forma que:

· Binomiais de mesmo **numerador** estão colocados na mesma linha;
· Binomiais de mesmo **denominador** estão colocados na mesma coluna;

$$\begin{array}{lcl}
\binom{0}{0} & & 1 \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} & & 1 \quad 1 \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} & & 1 \quad 2 \quad 1 \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} & \Rightarrow & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} & & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\ldots\binom{n}{n} & & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Propriedades do triângulo de Pascal

1ª) Todos os elementos da 1ª coluna são iguais a 1, pois $\binom{n}{0} = 1$.

2ª) O último elemento de cada linha é igual a 1, pois $\binom{n}{n} = 1$.

3ª) Numa linha qualquer, dois binomiais eqüidistantes dos extremos são iguais:

1 6 15 20 15 6 1

4ª) Cada binomial $\binom{n}{p}$ da linha n é igual à soma de dois binomiais da linha

(n-1): aquele que está na coluna p com aquele que está na coluna (p-1) (relação de Stiffel).

1

1 1

1 2 2

1 3 3

1 $\boxed{4 \pm 6}$ 4 1

1 5 $\boxed{10}$ $\boxed{10 \pm 5}$ 1

1 6 15 20 $\boxed{15}$ 6 1

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2}$$

$$\binom{5}{3}+\binom{5}{4}=\binom{6}{4}$$

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$$

5ª) A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2 cujo expoente é a ordem da linha (dada pelo numerador).

$$linha\ 0 \Rightarrow 1 \qquad 2^0=1$$
$$linha\ 1 \Rightarrow 1+1 \qquad 2^1=2$$
$$linha\ 2 \Rightarrow 1+2+1 \qquad 2^2=4$$
$$linha\ 3 \Rightarrow 1+3+3+1 \qquad 2^3=8$$
$$linha\ 4 \Rightarrow 1+4+6+4+1 \qquad 2^4=16$$
$$linha\ 5 \Rightarrow 1+5+10+10+5+1 \qquad 2^5=32$$

$$Em\ geral: \boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n}$$

6. Binômio de Newton

Sendo $x\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}\ e\ n\in\mathbb{N}$,demonstra-se que:

$$\boxed{(x+a)^n=\binom{n}{0}a^0.x^{n-1}+\binom{n}{1}a.x^{n-1}+\binom{n}{2}a^2.x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}a^n}$$

fórmula do binômio de Newton

Observe que:

- O desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui (n+1) temos;
- As potências de x decrescem de n até zero;
- As potências de *a* crescem de zero até n;
- Os coeficientes binomiais $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots\binom{n}{n}$ dos termos do desenvolvimento constituem uma linha do triângulo de Pascal.

No caso de $(x-a)^n$,temos:

$$\boxed{(x-a)^n=\binom{n}{0}x^n-\binom{n}{1}a.x^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a^n}$$

Os sinais de cada termo do desenvolvimento são alternados, isto é, os termos de ordem par (2°, 4°, 6°...) são negativos e os de ordem ímpar (1°,3°,5°,...) são positivos.

Essas fórmulas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{aligned}(x+a)^n&=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^px^{n-p}\\(x-a)^n&=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}a^px^{n-p}\end{aligned}}$$

7. Fórmula do termo geral

Qualquer termo de ordem (p+1) do binômio é dado por:

$$(x+a)^n \Rightarrow \boxed{T_{p+1}=\binom{n}{p}a^px^{n-p}}$$

$$(x-a)^n \Rightarrow \boxed{T_{p+1}=(-1)^p\binom{n}{p}a^px^{n-p}}$$

Exercícios Comentados

01 Resolva $\frac{(n+2)!\ +(n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!}=16$

Resolução:

$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!\ +(n+1)(n-1)}{(n+1)n(n-1)!}=16$$
$$\frac{(n+1)(n-1)![(n+2)n+1]}{(n+1)n(n-1)!}=16$$
$$n^2+2n+1=16$$
$$(n+1)^2=16$$
$$n+1=4\rightarrow n=3$$
$$ou$$
$$n+1=-4\rightarrow n-5(\textit{não convém pois},(n-1)!=(-6)!\textit{não existe})$$
$$S=\{3\}$$

02 Calcule p, p>3, sendo: $\frac{\binom{p-1}{2}+\binom{p-1}{3}}{\binom{p}{2}-\binom{p-1}{1}}=\frac{5}{3}$

Resolução:

$$\binom{p-1}{2}+\binom{p-1}{3}=\binom{p}{3}(\textit{relação de Stiffell})$$
$$\binom{p}{2}+\binom{p-1}{1}=\binom{p-1}{2}(\textit{relação de Stiffell})$$
$$Logo:\frac{\binom{p}{3}}{\binom{p-1}{2}}=\frac{5}{3}\therefore\frac{\frac{p!}{3!(p-3)!}}{\frac{(p-1)!}{2!(p-3)!}}=\frac{5}{3}$$
$$\frac{p!}{3!}.\frac{2!}{(p-1)!}=\frac{5}{3}$$
$$\frac{2p(p-1)!}{6(p-1)!}=\frac{5}{3}\therefore\frac{p}{3}=\frac{5}{3}\therefore p=5$$
$$S=\{5\}$$

03 Calcule o valor de m:

a) $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}=m$

Resolução:

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\ldots+\binom{6}{6}=m$$
$$m=2^6=64$$
$$\boxed{m=64}$$

b) $\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}2^p=729$

Resolução

Lembrem-se que:

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}.b^p$$
$$\text{logo}:\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}2^p=(1+2)^m=729$$
$$3^m=3^6$$
$$\boxed{m=6}$$

04 Calcule o 10° termo no desenvolvimento de $(2x^2-x)^{12}$.

Resolução:

$$T_{p+1}=\binom{n}{p}a^{n-p}\ .\ b^p.(-1)^p$$
$$T_{10}=\binom{12}{9}(2x^2)^{12-9}.\ x^9.(-1)^9$$
$$=\frac{12!}{9!3!}.8x^6.x^9(-1)$$
$$=\frac{12.11.10}{3.2}.8x^{15}(-1)$$
$$T_{10}=-1760x^{15}$$

05 Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

Resolução:

$$T_{p+1}=\binom{10}{p}\left(\sqrt{x}\right)^{10-p}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{p}.(-1)^{p}$$

$$=\binom{10}{p}.x^{\frac{10-p}{2}}.x^{-\frac{p}{2}}.(-1)^{p}$$

$$\frac{10-2p}{2}=0\rightarrow p=5$$

$$T_6=\binom{10}{5}(-1)^5.x^0$$

$$=\frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2}.(-1)=-252$$

$$\boxed{T_6=-252}$$

Exercícios de Sala

01 (V.UNIF.RS) A expressão $\frac{(n+1)!\ -n!}{(n-1)!\ +n!}$, com n natural estritamente positivo, vale:

a) $\frac{n^2+n}{1+n}$

b) $\frac{n^2-n}{1+n}$

c) $\frac{n}{1+n}$

d) $\frac{n^2+n-1}{2}$

e) $\frac{n^2}{1+n}$

02 (U.F.PA) A forma mais simples da expressão $\frac{(n+2)!+(n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!}$ é:

a)n(n+2)
b)n!
c) (n-1)!
d) n+1
e) $(n+1)^2$

03 (VUNESP) A soma $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+...+n\binom{n}{n}$ é igual a:

a) $n\ .\ 2^{n-1}$
b) 2^n
c) $n\ .\ 2^n$
d) $(n+1)\ .\ 2^{n+1}$
e) $n\ .\ 2^{n+1}$

04 (U.F.RN) No desenvolvimento de $(3+2x)^5$, o coeficiente de x^3 é igual a:

a)60
b)120
c)240
d)720
e)1440

05 (U.MACK) No desenvolvimento de $(2x+b)^5$, $b\neq 0$, o coeficiente numérico do termo em x^4 é oito vezes aquele do termo em x^3. Então b vale:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 32
e) 16

06 (U.C.SALVADOR) O 5° termo do desenvolvimento do binômio $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^n$, segundo as potências decrescentes de x, é $1.120x^4$. O número natural η η :

a)Primo.
b)Divisível por 3.
c)Múltiplo de 5.
d)Quadrado perfeito.
e)Cubo perfeito.

07 (U.C.SALVADOR) No desenvolvimento do binômio $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^8$, segundo as potências decrescentes de x, o coeficiente do quinto termo é:

a)1
b)448
c)1120
d)1440
e)1792

08 (U.E.BA) No desenvolvimento do binômio $\left(2x^2-\frac{y}{2}\right)^8$, o coeficiente do termo médio é:

a) -224
b) -70
c) -28
d) 28
e) 70

09 (U.F.SE) No desenvolvimento do binômio $(1+x)^8$, a soma dos coeficientes é:

a) 0
b) 9
c) 18
d) 64
e) 256

10 (U.F.RS) O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ é:

a) 5!

b) $\frac{10!}{5!5!}$

c) $\frac{10!}{5!}$

d) $\frac{5!}{10!}$

e) $\frac{5!5!}{10!}$

Exercícios de Casa

01 (FUEM-PR) Se $\binom{m-1}{m-2}=4$ e m>3, então o valor de $\left[\frac{m-1}{(m-3)}+0!\right]$ é:

02 Ache o conjunto solução da equação: $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{4n}$

03 Os números binomiais $\binom{n}{0}$, $\binom{n+1}{1}$ e $\binom{n+2}{2}$, $n\in\mathbb{N}$, nesta ordem, estão em progressão aritmética. Calcule n.

04 Calcule p na equação: $\binom{14}{3p}=\binom{14}{p+6}$

05 Resolva a equação: $\binom{12}{n+1}=\binom{12}{3n+3}$

06 Sabendo que

$$a^7+\binom{7}{1}a^6b+\binom{7}{2}a^5b^2+\ldots+\binom{7}{6}ab^6+b^7=128$$

e também que b = 2α, o valor de **a** é:

a)1

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{1}{2}$

07 Calcule $\sum_{p=0}^{6}\binom{6}{p}.3^{6-p}.(-1)^p$.

08 Calcule $\sum_{p=0}^{10}\binom{10}{p}.(-1)^p$.

09 O termo independente de **x** de $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 20
b) 60
c) 120
d) 160
e) 180

10 Qual é o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^5$?

a) 10
b) -10
c) 15
d) -15
e) 20

11 Se um dos termos do desenvolvimento do binômio $(2x+a)^6$, com $a \in \mathbb{R}$, é $2160x^4$, então o valor de **a** pode ser:

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

12 Desenvolvendo $\left(x^2+y^2\right)^8$ segundo potencias de expoentes decrescentes de **x**, o terceiro termo é igual a:

a) $14x^{12}y^2$
b) $28x^{12}y^2$
c) $56x^{10}y^4$
d) $28x^{14}y^4$
e) $56x^{10}y^6$

13 (U.F.BA) A soma do segundo e terceiro termos do desenvolvimento de $\left(\sqrt{2}+2x\right)^4$ é:

a) $32x(2+3x)$
b) $16x\left(\sqrt{2}+3x\right)$
c) $16x\left(\sqrt{2}+6x\right)$
d) $8x\left(\sqrt{6}+6x\right)$
e) $4x\left(\sqrt{6}+6x\right)$

14 (EAESP-FGV) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x+3y)^6$ é:

a) 15.625
b) 7.776
c) 6.225
d) 4.225
e) 2.048

15 (U.F.UBERLÂNDIA) Se n é o número de termos do desenvolvimento $\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[10]{y}\right)^{55}$ que não contenham radicais, então n é:

a) 8
b) 5
c) 6
d) 7
e) 4

16 (U.MAK) A soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(2x-5y)^n$ é 81. Ordenando os termos segundo potências decrescentes de x, o termo cujo módulo do coeficiente numérico é máximo é:

a) O segundo
b) O terceiro
c) O quarto
d) O quinto
e) O sexto

17 (U.F.PA) No desenvolvimento do binômio $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^5$, qual o termo independente?

a) 2°
b) 3°
c) 4°
d) 5°
e) 6°

18 (F.C.M.STA.CASA) A soma dos coeficientes do primeiro, segundo e terceiro termos do desenvolvimento de $\left(x^2+x^{-1}\right)^m$ é igual a 46. O termo independente de x vale:

a) 36
b) 126
c) 84
d) 168
e) N.d.a

Curso Preparatório CIDADE

19 (EAESP-FGV) Sabendo que $\binom{m}{p}=x$ e $\binom{m+1}{p+1}=y$, então $\binom{m}{p+1}$ é igual a:

a) x + y
b) x - y
c) y - x
d) x - p
e) y - p

20 (F.M.ABC) Assinale a verdadeira:

a) $(a+x)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{n-k}$

b) $p!A_n^p=C_n^p$

c) $p!=q!\Leftrightarrow p=q$

d) $\frac{(n+2)!}{n!}=n^2+3n+2$

e) $(2n)!=2!n!$

21 Calcule n

a) $\frac{(n+2)!+(n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!}=25$

b) $\frac{(n+2)!\,(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!}=4$

c) $\frac{(n+2)!+(n+1)!}{n!}=5(n+1)$

2 - NÚMEROS COMPLEXOS

1. Definição

Denomina-se **número complexo** toda expressão da forma a+bi, onde a e b são números reais, e $i^2=-1$.

Em que: i é a unidade imaginária.

2. Forma algébrica

Todo número complexo pode ser escrito na forma z=a+bi, denomina-se **forma algébrica.**

$$z=a+bi\Rightarrow\begin{cases}a=\mathrm{Re}(z)\in\mathbb{R}\\ b=\mathrm{Im}(z)\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Em que:
a é a parte real de z.
b é a parte imaginária de z.

3. Álgebra dos números complexos

Igualdade

Dois números complexos, z_1=a+bi e z_2=c+di, são iguais quando suas partes reais e imaginárias são respectivamente iguais, isto é:

$$z_1=z_2\Rightarrow a+bi=c+di\Rightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

Multiplicação

Multiplicando dois números complexos de acordo com a regra da multiplicação de binômios e sabendo que $i^2=-1$, temos:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Conjugação de z

Sendo z=a+bi, defina-se como complexo conjugado de z o complexo $\bar{z}=a-bi$, isto é:

$$z=a+bi\Rightarrow\bar{z}=a-bi$$

Divisão

A divisão de dois números complexos, z_1=a+bi e z_2=c+di, pode ser obtida escrevendo-se o quociente sob a forma de fração. A seguir, procedendo-se de modo análogo ao utilizado na racionalização do denominador de uma fração, multiplicam-se ambos os termos da fração pelo número complexo conjugado do denominador.

Isto é:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}}}$$

Potências de i

Geralmente, para todo $n \in \mathbb{N}$,temos:

$$i^{4n}=1$$
$$i^{4n+1}=i$$
$$i^{4n+2}=-1$$
$$i^{4n+3} -i$$

Então, para calcular o resultado de uma potência inteira de i, divide-se o expoente por 4 e, observando-se o valor do resto, obtém-se o resultado através da tabela ao lado:

Resto	i^{resto}	Valor da potência
0	i^0	1
1	i^1	i
2	i^2	-1
3	i^3	-i

4. Representação geométrica

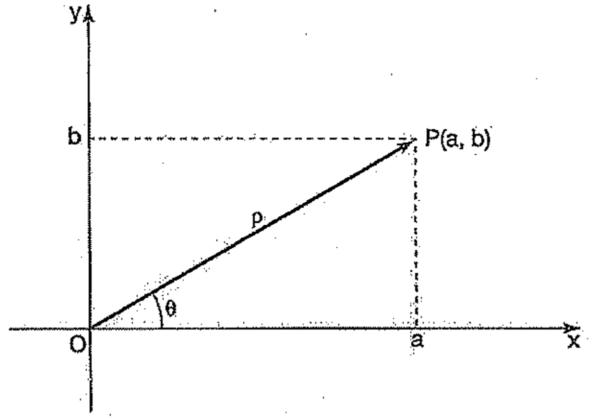
Todo número complexo z=a+bi pode ser associado a um ponto P(a,b) do plano cartesiano da seguinte forma:

O ponto P é denominado **afixo** ou **imagem** de z.

Assim, no eixo das **abscissas,** representa-se a **parte real** de z e, no eixo das **ordenadas**, a **parte imaginária** de z.

A distância ρ de P até a origem O é denominada **módulo** de z e indicamos:

$$\boxed{|z|=|a+bi|=\rho=\sqrt{a^2+b^2}}$$



Denomina-se **argumento** do complexo z a medida do ângulo θ, formado por $\overline{OP}$ com o eixo real Ox, medido no sentido anti-horário, conforme indica a figura.

$$\boxed{\theta=\arg(z)}$$

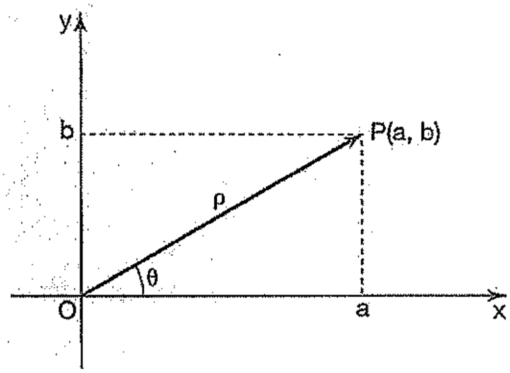
Esse ângulo θ deve satisfazer a condição $0 \leq \theta < 2\pi$.

Observe que:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{a}{\rho}} \text{ e } \boxed{sen\theta=\frac{b}{\rho}}$$

5. Forma trigonométrica ou polar

Considere o complexo z=a+bi, representado pelo ponto P(a,b), indicado na figura.



$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cos\theta$$

$$sen\ \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho\ sen\ \theta$$

Substituindo-se em z=a+bi:

$$\boxed{\begin{array}{l} z = \rho\cos\theta + \rho\ sen\ \theta.\ i \\ \therefore \\ z = \rho(\cos\theta + i.\ sen\ \theta) \end{array}}$$

6. Operações na forma trigonométrica

Considere dois números complexos z_1 e z_2, não-nulos, representados na forma trigonométrica $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i.\ sen\ \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i.\ sen\ \theta_2)$.

Multiplicação

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\ sen(\theta_1+\theta_2)\right]}$$

Observe que o módulo do produto é o produto dos módulos, e o argumento do produto é a soma dos argumentos dos complexos dos fatores.

$$\boxed{z = z_1.z_2.\cdots.z_n = \rho_1.\rho_2...\rho_n\left[\cos(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n) + i\ sen(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n)\right]}$$

Divisão

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\ sen(\theta_1-\theta_2)\right]}$$

Observe que o módulo do quociente é o quociente dos módulos, e o argumento do quociente é a diferença dos argumentos dos complexos dividendo e divisor.

Potenciação

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\ \theta + i\ sen\ n\ \theta)}$$

Observe que, para obter z^n, elevamos o módulo de z à potência n e multiplicamos o argumento θ *por* n.

Radiciação

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\ sen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

Observe que as raízes enésimas têm módulo igual a $\sqrt[n]{\rho}$ e seus argumentos são obtidos da expressão $\frac{\theta+2k\pi}{n}$, fazendo k= 0, 1, 2, 3, ..., n-1.

Exercícios Comentados

01 (MACK–SP) Com relação ao número complexo $z = \frac{3x-i}{1+3xi}$, **x** real, pode-se afirmar que se trata de um número:

a) Real, para qualquer valor de **x**.
b) Real, para um único valor de **x**.
c) Imaginário puro, para qualquer valor de **x**.
d) Imaginário puro, para um único valor de **x**.
e) De representação gráfica no 2° quadrante.

Resolução:

$$z = \frac{3x-i}{1+3xi}.\frac{1-3xi}{1-3xi} = \frac{3x-9x^2i-i+3x}{1+9x^2}$$

$$z = \frac{6x+i(-9x^2-1)}{1+9x^2} = \frac{6x}{1+9x^2} + i\frac{(-9x^2-1)}{1+9x^2}$$

$$Se\ \frac{6x}{1+9x^2} = 0, z\ é\ imaginário\ puro$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

$$Se\ \frac{(-9x^2-1)}{1+9x^2} = 0, z\ é\ real$$

$$-9x^2 - 1 = 0$$

$$9x^2 = -1$$

$$\nexists\ x\ para\ que\ z\ seja\ real$$

R = D

02 (FATEC-SP) Sejam os números complexos $z_1 = \frac{1}{2} + i$ e $z_2 = 1 - \frac{1}{2}i$. O argumento de $z_1 - \overline{z_2}$ é:

a) $\frac{3\pi}{4}$

b) $\frac{5\pi}{4}$

c) $\frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{8}$

Resolução:

$$\overline{z_2} = 1 + \frac{i}{2},$$

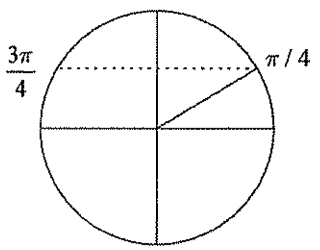
$$Logo: z_1 - \overline{z_2} = \frac{1}{2} + i - \left(1 + \frac{i}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + i - 1 - \frac{i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in 2^\circ quadrante$$

$$tg\theta = \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

Resposta:A



03 (IBMEC-SP) A quantidade de números complexos que têm o seu quadrado igual ao seu conjugado é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução:

$$z^2 = \overline{z}$$

$$Seja\ z = a + bi$$

$$(a+bi)^2 = a - bi$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = a - bi$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

$$1^\circ)\ Se\ b = 0$$

$$a^2 - b^2 = a$$

$$a^2 - a = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$2^\circ)\ Se\ a = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$$

$$1 - 4b^2 = -2$$

$$b^2 = \frac{3}{4}$$

$$b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2ab + b = 0$$

$$b(2a+1) = 0$$

$$b = 0$$

$$ou$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

logo *há* 4 *números*
resposta:E

04 (UEL-PR) Se $z = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{4}\right)$, então o conjugado de z^2 é igual a:

a) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
c) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
d) 4
e) -4i

Resolução:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z^2 = 2^2\left(\cos 2.\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ sen\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z^2 = 4(0 + i) = 4i$$

logo: $\overline{z^2} = -4i$

resposta:E

05 (IBMEC-SP) Os afixos (imagens) dos números complexos que são raízes da equação $z^4 - 81 = 0$ são vértices do polígono convexo de área igual a:

a) 36
b) 27
c) 25
d) 18
e) 16

Resolução:

$$z^4 = 81$$

$$z = \sqrt[4]{81}$$

logo: $z_1 = 3 = (3,0)$

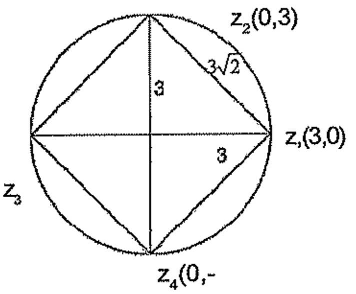
O poligono é um quadrado cujo lado mede $3\sqrt{2}$

$$A = \ell^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$$

resposta: D

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX



Exercícios de Sala

01 (UEL-PR) Seja o número complexo z=x+yi, no qual $x, y \in \mathbb{R}$. Se $z(1-i)=(1+i)^2$, então:

a) x=y
b) x-y=2
c) xy=1
d) x+y=0
e) y=2x

02 (UFV-MG) Os números complexos **z** e **w** são tais que w+iz=-2-i e z+iw=5+2i. Então **z** e **w** são respectivamente:

a) -2+2i e 3i
b) 2+2i e 3i
c) -2-2i e 3i
d) -2-2i e -3i
e) 2+2i e -3i

03 (MACK-SP) Considere os números complexos tais que $|z|=1$. O número imaginário puro **w**, quando $w=1+2z$, pode ser:

a) $\sqrt{3}\, i$
b) $\sqrt{2}\, i$
c) i
d) -2i
e) -3i

04 (MACK-SP) O valor de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102}$, $i^2=-1$, é:

a) i
b) –i
c) 1
d) 1+i
e) -1

05 (UFRN) Se $z=\frac{(1+i)^2}{1-i}$, então o argumento de **z** é:

a) $-\frac{3\pi}{4}$
b) $-\frac{\pi}{4}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{2}$
e) $\frac{3\pi}{4}$

06 (FGV-SP) Seja o número complexo $z=(x-2i)^2$, no qual **x** é um número real. Se o argumento de **z** é 90°, então $\frac{1}{z}$ é igual a:

a) $-\frac{i}{8}$
b) -8i
c) 4i
d) -1+4i
e) 4-i

07 (PUC-SP) $(1+i)^{12}-(1-i)^{12}$, onde $i^2=-1$, é igual a:

a) -128i
b) -128
c) 128
d) 128i
e) 0

08 (CESGRANRIO-90) O complexo $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right]^6$ equivale a:

a) 6i
b) I

c)–i
d)-6i
e)-1

09 (PUC-SP) Quantos são os números complexos z que satisfazem as condições $z^4 = 1$ e $z + \bar{z} = 0$? $\left(\bar{z} = conjugado\ de\ z\right)$

a)0
b)1
c)2
d)3
e)4

10 (U.F.BA) Sendo z=2-i, o inverso de z² é:

a) $\frac{5+4i}{41}$

b) $\frac{2+i}{5}$

c) $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

d) $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

e) $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

Exercícios de Casa

01 (CESGRANRIO) O complexo $\frac{1}{(1-i)^2}$ é igual a:

a) $-\frac{1}{64}$

b) $-\frac{1}{32}$

c) $(1+i)^2$

d) $\frac{1}{12}$

e) $\frac{1}{12i}$

02 (U.F.GO) Se i é a unidade imaginária, então $\frac{1}{i^{15}} + \frac{1}{i^{14}} + \frac{1}{i^{25}} + 1$ é igual a:

a)1+i
b) 0
c) 1-i
d) i
e)1

03 (U.F.PR) Dados os números complexos $z_1 = 4 + \sqrt{3}\, i$ e $z_2 = 1 + 3i$, efetuando-se $\frac{z_1}{z_2}$ obtemos:

a) $-\frac{8\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7}i$

b) $5 + \sqrt{3i}$

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{5} - \frac{(7-\sqrt{3})}{5}i$

d) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10} + \frac{(12+\sqrt{3})}{10}i$

e) $\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8}i$

04 (VUNESP) O número complexo $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1987}$ é igual a:

a) –i
b) i
c) -1
d) 1
e) 2i

05 (U.E.BA) O módulo do número complexo $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}}$ é:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{2}$

e)2

06 (F.C.M.STA.CASA) Os valores de w que satisfazem a igualdade $w^2+|w|=0$ são: (**obs.:** $|w|$ é o módulo do número complexo w.)

a) $\{-1,0,-i\}$
b) $\{0,i,-i\}$
c) $\{1,0,-i\}$
d) $\{0,-2,i\}$
e) n.d.a

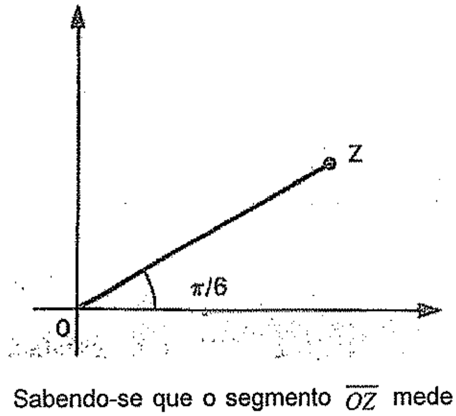
07 (U.F.SE) O módulo de um número complexo é $2\sqrt{2}$ e seu argumento principal é 45°. A sua forma algébrica é:

a) 4+4i
b) 2+2i
c) 2-2i
d) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
e) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

08 (U.MACK) A função f associa a cada complexo seu argumento. O valor de cotg(f(-1-i)) é:

a)-1
b)0
c)1
d) $\sqrt{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

09 (U.F.PE) Considere o seguinte gráfico que representa o número complexo z=a+bi.



Sabendo-se que o segmento $\overline{OZ}$ mede duas unidades de comprimento, assinale a alternativa correta:

a) $z=\sqrt{2}+i$
b) $z=\sqrt{3}+i$
c) $z=1+\sqrt{3}i$
d) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
e) $z=1-\sqrt{3}i$

10 (ITA) Considere a familia de curvas do plano complexo, definida por $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=C$, onde z é um complexo não nulo e C é uma constante real positiva. Para cada C temos uma:

a)Circunferência com centro no eixo real igual a C.
b) Circunferência com centro no eixo real e raio igual a $\frac{1}{C}$.
c) Circunferência tangente ao eixo real e raio igual a $\frac{1}{(2C)}$.
d)Circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a $\frac{1}{(2C)}$.
e)Circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a.

11 (FATEC) Se $z=\cos\theta+i.\,sen\,\theta$, então $\forall\theta\in\mathbb{R}$,

a) $\bar{z}=-\bar{z}$
b) $\bar{z}=\frac{1}{z}$
c) $|z^2|=2|z|$
d) $\arg z=\arg z^2$
e) $\frac{1}{z^2}=-z^2$

12 (U.C.MG) A forma trigonométrica do número complexo $y=4\sqrt{3}+4i$ é:

a)8 (cos 30° + i sen 30°)
b)8 (cos 45° + i sen 45°)
c)8 (cos 60° + i sen 60°)
d)8 (cos 120° + i sen 120°)
e)8 (cos 150° + i sen 150°)

13 (U.E.LONDRINA) Sejam z_1 e z_2 os números complexos $z_1 = 3.(\cos 30° + i.\ sen\ 30°)$ e $z_2 = 5.(\cos 45° + i.\ sen\ 45°)$. O produto de z_1 por z_2 é o número complexo:

a) $15.(\cos 1350° + i.\ sen\ 1350°)$

b) $8.(\cos 75° + i.\ sen\ 75°)$

c) $8.(\cos 1350° + i.\ sen\ 1350°)$

d) $15.(\cos 15° + i.\ sen\ 15°)$

e) $15.(\cos 75° + i.\ sen\ 75°)$

14 (F.C.M.STA.CASA) Seja o número complexo $z = (2-2i)^n$ onde $n \in \mathbb{N}^*$. Se z=512, então o número n é:

a)Primo
b)Quadrado perfeito
c)Divisível por 5
d)Múltiplo de 4
e)Divisível por 3

15 (VUNESP) A expressão $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{109}$, onde i é a unidade imaginária dos complexos, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

e)1

16 (F.C.M.STA.CASA) O menor valor de n inteiro e positivo para o qual $y^n = (2 + 2\sqrt{3}i)^n$ seja real e positivo é: (**Obs.:** $i = \sqrt{-1}$.)

a)3
b)12
c)6
d)9
e)n.d.a

17 (FATEC) Seja $i^2 = -1$. Se z é um número complexo tal que $z^3 = 1$, então z é igual a:

a) 1, i ou -i

b) 1, $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$

c) 1, $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

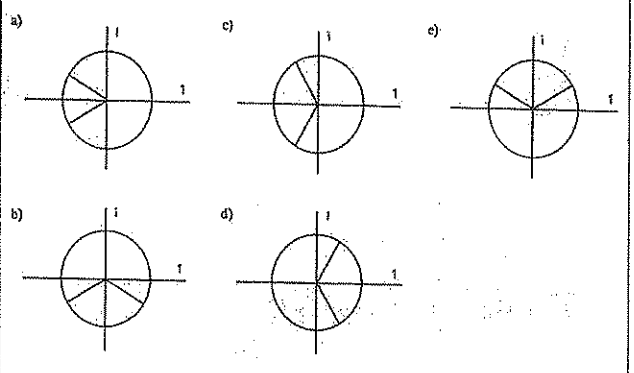
d) 1, $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$

e) 1, $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

18 (CESGRANRIO) Seja $z \neq 1$ uma das raízes cúbicas da unidade. Então $1 + z + z^2$ vale:

a) 0
b) 3
c) 1
d) 3
e) $1 + i\sqrt{3}$

19 (VUNESP) O O diagrama que melhor representa as raízes cúbicas de - i é:



20 (U. F. GO) As raízes quadradas do número complexo $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ i são:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

21 (U.F.BA) No plano cartesiano ao lado, os complexos z_1, z_2 e z_3 são as raízes cúbicas de um determinado complexo z, tal que $|z| = 8$, pode-se afirmar:

a) O argumento de z_2 é $\frac{\pi}{6}$.

b) $z_3^{987} = 2^{987}$.

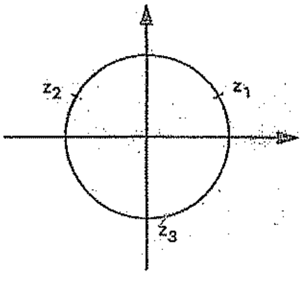
c) $\frac{iz_1}{\overline{z_1}} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$.

d) A distância entre z_1 e z_3 é $\sqrt{3}$.

e) $\overline{z_1}$ é simétricos de z_2 em relação à origem.

f) z_2 e i z_2 são simétricos em relação à 1ª bissetriz.

g) O lugar geométrico dos afixos dos complexos z para os quais $Re(z) = Im(z_1 + z_2)$ é a reta x = 2.



22 (U.C. SALVADOR) Considere o número complexo z tal que $z^6 = -64$. O número z pode ser:

a) $\sqrt{3}+i$

b) $1+\sqrt{3}\,i$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}-i$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

e) -i

23 (F. C. M. STA. CASA) O número complexo $z = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\,sen\,\frac{\pi}{16}\right)$ é uma das raízes quartas do número complexo:

a) 1 - i

b) 1 + i

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

d) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

24 (ITA) Seja w = a + bi com $b \neq 0$ e a, b, c $\in \mathbb{R}$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$ descreve:

a) Um par de retas paralelas.

b) Uma circunferência.

c) Uma elipse.

d) Uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$.

e) n.d.a.

3 - POLINÔMIOS

1. Definição

Denomina-se **função polinomial** ou **polinômio** toda função definida pela relação:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Em que:

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados **coeficientes**;

$n \in \mathbb{N}$;
$x \in \mathbb{C}$ é a variável.

Observações:

1ª) Se $a_n \neq 0$, o expoente máximo n é dito **grau** do polinômio e indicamos gr(P)=n.
2ª) Se P(x)=0, não se define o grau do polinômio.
3ª) P(a) é denominado **valor numérico** de P(x) para x=a.
4ª) Se P(a)=0, o número a é denominado **raiz** ou **zero** de P(x).

2. Polinômios idênticos

Dois polinômios A(x) e B(x) são iguais ou idênticos quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável x.

$$\boxed{A(x) \equiv B(x) \Rightarrow A(a) = B(a), \forall a \in \mathbb{C}}$$

Teorema

A condição necessária e suficiente para que dois polinômios A e B sejam idênticos é que os coeficientes dos termos semelhantes sejam dois a dois iguais.

Algebricamente:

$$A(x) \equiv B(x) \Rightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0,1,2,...,n\}$$

3. Polinômio identicamente nulo

Denomina-se polinômio identicamente nulo o polinômio que tem todos os seus coeficientes nulos.

Indicamos por $P(x) \equiv 0$ (lê-se: P(x) é idêntico a zero).

Seja o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

$$Se P(x) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ a_{n-1} = 0 \\ a_{n-2} = 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

4. Divisão de polinômios

Efetuar a divisão de um polinômio A(x) por outro B(x) é determinar dois polinômios Q(x) e R(x) que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 1^a) A(x) = Q(x).B(x) + R(x) \\ 2^a) gr(R) < gr(B) ou R(x) = 0 \end{array}$$

Em que:

A (x) é o dividendo;
B (x) é o divisor;
Q (x) é o quociente;
R (x) é o resto.

5. Divisão de um polinômio por um binômio da forma ax+b

O resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (ax+b) é igual ao valor numérico do polinômio P(x) se x for à raiz do divisor.,

$$\begin{array}{l|l} P(x) & ax+b \\ \hline r & Q(x) \end{array} \Rightarrow r = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) pela diferença $(x-\alpha)$ é igual a $P(\alpha)$.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-\alpha \\ \hline r & Q(x) \end{array} \Rightarrow r = P(\alpha)$$

Teorema de D' Alembert

Se r = 0, então $P(\alpha) = 0$, isto é, P(x) é divisível por $x - \alpha$ e α é raiz de P(x).

Teorema

> Se P(x) for divisível por $(x-\alpha)$ e por $(x-\beta)$, com $\alpha \neq \beta$, também será divisível por $(x-\alpha)(x-\beta)$.

Generalizando, temos:
Se P(x) é divisível por n fatores distintos $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$.

6. Dispositivo de Briot-Ruffini

É um dispositivo que permite determinar o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ por um binômio da forma $x-\alpha$ $(\alpha \text{ constante})$.

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
α		αq_0	αq_1	...	αq_{n-2}	αq_{n-1}
	$\underbrace{a_0}_{q_0}$	$\underbrace{a_1+\alpha q_0}_{q_1}$	$\underbrace{a_2+\alpha q_1}_{q_2}$	...	$\underbrace{a_{n-1}+\alpha q_{n-2}}_{q_{n-1}}$	$\underbrace{a_n+\alpha q_{n-1}}_{R}$

Quociente: $q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+...+q_{n-1}$

Resto: $a_n+\alpha\, q_{n-1}$

Exercícios Comentados

01 Seja f(x) um polinômio do 2° grau de coeficiente dominante igual a 2. Determine f(x) sabendo que f(1)=0 e f(-x)=f(x-1). Determine o resto da divisão de f(x) por x+2.

Resolução:

Coeficiente dominante a=2
f(x)=ax²+bx+c
f(1)=2+b+c=0 → b+c=-2
f(x-1)=a(x-1)²+b(x-1)+c
Como f(-x)=f(x-1):
ax²-bx+c=a(x²-2x+1)+bx-b+c
ax²-bx+c= ax²-2ax+a+bx-b+c
ax²-bx+c= ax²+x(-2a+b)+a-b+c

Então:
a=a
-b=-2a+b ∴ a=b ⇒ b=2
c=a-b+ca=b
como b+c=-2c=-4
Então:
f(x)=2x²+2x-4

R= f(-2)=2(-2)²+2(-2)-4
f(-2)=8-4-4=0

02 Dividindo-se o polinômio p(x)=x³-4x²+7x-3 por D(x), obtém-se quociente x-1 e resto 2x-1. Determine as raízes de D(x).

Resolução:

$$Como\ p(x)\underline{|D(x)} \Rightarrow D(x).Q+R=p(x)$$

$$R \quad Q \qquad D(x)=\frac{p(x)-R}{Q}$$

$$D(x)=\frac{x^3-4x^2+7x-3-2x+1}{x-1}$$

$$D(x)=\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x-1}$$

Dividindo por Ruffini:

1	1	−4	5	−2
	1	−3	2	0

$$D(x)=x^2-3x+2=0$$

$$\left.\begin{matrix}S=3\\P=2\end{matrix}\right\rangle 2\ e\ 1$$

Resposta: 2 *e* 1

03 Determine a+b de modo que $p(x)=ax^3+2x^2-bx+2$ seja divisível por $(x+1)^2$.

Resolução:

Como $(x+1)^2=(x+1)(x+1)$, a divisão pode ser feita por Ruffini:

-1	a	b	-b	2
-1	a	2 - a	-2 + a - b	4 - a + b
	a	2 - 2a	-4 + 3 a - b	

Logo: $\begin{matrix} 4-a+b=0 \rightarrow \\ -4+3a-b=0 \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} -a+b=4 \\ 3a-b=4 \end{cases}$ $\boxed{\text{a+b=12}}$

$$\begin{aligned} 2a &= 8 \\ a &= 4 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

04 Calcule o resto R(x) da divisão de p(x) por (x+1)(x-2) sabendo-se que o resto da divisão de p(x) por x+1 é 3 e por x-2 também é 3.

Resolução:

$$Se \;\; p(x) \,\underline{|x+1} \qquad e \;\; p(x)\underline{|x-2}$$
$$r=3 \Rightarrow p(-1)=3 \qquad r_2=3 \Rightarrow p(2)=3$$

$$então: \quad p(x) \quad \underline{|(x+1)(x-2)}$$
$$r(x)=ax+b \qquad Q(x)$$
$$p(x)=Q(x)(x+1)(x-2)+ax+b$$

$$como: p(-1)=Q(-1)\underbrace{(-1+1)}_{0}(-1-2)-a+b=3$$

e

$$p(2)=Q(2)(2+1)\underbrace{(2-2)}_{0}+2a+b=3$$

$$\begin{cases} 2a+b=3 \\ -a+b=3 \end{cases}$$
$$a=0 \; e \; b=3$$
$$R(x)=3$$

05 Calcule A+B em $\dfrac{1+x}{x-x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{1-x}$

Resolução:

$$\frac{1+x}{x-x^2}=\frac{A(1-x)+Bx}{x(1-x)}$$
$$A-Ax+Bx=1+x$$
$$x(-A+B)+A=1+x$$
$$-A+B=1$$
$$A=1 \rightarrow B=2$$
$$\boxed{A+B=3}$$

Exercícios de Sala

01 (Esan-SP) Sendo P(x)=Q(x)+x²+x+1 e sabendo-se que 2 é raiz de P(x) e 1 é raiz de Q(x), então P(1)-Q(2) vale:

a)0
b)2
c)3
d)6
e)10

02 (FGV-SP) Se o polinômio $P(X)=x^3-kx^2+6x-1$ for divisível por (x-1), ele também será divisível por:

a)x^2-5x+1
b)x^2-5x+3
c)x^2+5x+1
d)x^2+5x+3
e)x^2-5x+5

03 (PUC/Campinas-SP) Dado o polinômio $P(x)=x^n+x^{n-1}+...+x^2+x+3$, se n ímpar, então P(-1) vale:

a)-1
b)0
c)2
d)1
e)3

04 (U.E.Londrina-PR) Sejam os polinômios f e g, de graus 4 e 2, respectivamente. Se o polinômio $f+g^2$ é não-nulo, então seu grau será sempre:

a)8
b)6
c)4
d)Um número par.
e)Menor ou igual a 4.

05 (Mackenzie-SP) Seja P(x) um polinômio do primeiro grau tal que P(2x+1)=x. Então P(1)+P(2) é igual a:

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) 1
d) $\frac{3}{2}$
e) 2

06 (Fuvest-SP) Um polinômio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ satisfaz às seguintes condições: P(1)=0, P(x)+P(-x)=0, qualquer que seja x real. Qual o valor de P(2)?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

07 (PUC-SP) Os valores de m, n e p de modo que sejam idênticos os polinômios:

$$P_1(x)=(m+n+p)x^4-(p+1)x^3+mx^2+(n-p)x+n$$

e $P_2(x)=2mx^3+(2p+7)x^2+5mx+2m$ são respectivamente:

a) 1,2,-3
b) 2,3,1
c) -1,2,2
d) 2,1,-3
e) 1,-3,2

08 (PUC-SP) O valor de a para que o resto da divisão do polinômio $P(x)=ax^3-2x+1$ por x-3 seja 4 é:

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{2}$
e) 1

09 (Cesgranrio) O polinômio $P(x)=2x^3-9x^2+13x+k$ é divisível por x-2. Então, a constante k é:

a) -9
b) -6
c) 0
d) 2
e) 12

10 (Mackenzie-SP) Se $P(x)=x^3-8x+kx-m$ é divisível por (x-2) (x+1), então $\frac{k}{m}$, $(com\ m\neq 0)$, vale:

a) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{7}{2}$
d) $\frac{2}{1}$
e) $\frac{1}{2}$

Exercícios de Casa

01 (Mackenzie-SP) Se o polinômio $P(x)=x^5+4ax^4+3x^3+a^3$, com $a\in\mathbb{R}$, for divisível por x - a, então $\sqrt{a^2+1}$ será igual a:

a) $\sqrt{10}$
b) 1
c) 2
d) $\sqrt{2}$
e) $\sqrt{26}$

02 (U.E. Londrina-PR) Sabe-se que dividindo o polinômio $f=x^4+x^2$ por g, obtêm-se quociente x^2-x+2 e resto -2x. nessas condições, o polinômio *g* é:

a) x^2+x
b) x^2-x
c) x^2+x+1

d) $x^2 - x + 1$
e) $x^2 - x - 1$

03 (Fuvest-SP) Dividindo-se p polinômio P(x) por $2x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de P(x) por x - 1 é:

a) 2
b) 1
c) 0
d) -1
e) -2

04 (Fuvest-SP) Determinar um polinômio P(x) de grau 4, divisível por $Q(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$, sabendo que P(0) = 0 e que o resto dsa divisão de P(x) por x + 2 é 48.

05 (Vunesp) Considere a função polinomial de 3° grau, $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Calcule P(-2), P(0), P(1),P(2) e esboce o gráfico.
b) Com base no item a, determine, justificando sua resposta, quantas raízes reais e quantasraízes complexas (não-reais) têm P(x).

06 (Fuvest-SP) P(x) é um polinômio de grau ≥ 2 e tal queP(1) = 2 e P(2) = 1. Sejam D(x) = (x- 2)(x - 1) e $Q(x)$ o quociente da divisão P(X) por D(x).

a) Determine o resto da divisão de P(x) por D(x).
b) Sabendo que o termo independente de P(x) é 8, determineo termo independente de $Q(x)$.

07 (U. F. VIÇOSA) Para que o polinômio do segundo grau $P(x) = ax^2 - bx + c$ seja o quadrado do polinômio $Q(x)$ = dx + e é necessário que:

a) $b^2 = 4c$
b) $b^2 = 4ac$
c) $b^2 = 4a$
d) $b^2 = 4a^2c$
e) $b^2 = 4a2$

08 Dado o polinômio p(x) do 2° grau que admite 2 como raiz, p(1) = -2 e quando dividido por x - 3 apresenta resto igual a 4. Logo, p(-2).

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

09 (U. E. CE) Se $2x + 5 \equiv (x + m)^2 - (x - n)^2$, então $m^3 - n^3$ é igual a:

a) 19
b) 28
c) 35
d) 37

10 (U.C.SALVADOR) Sejam f,g e h polinômios de graus 2, 3 e 4, respectivamente. O grau do polinômio f. (g-h) é:

a)4
b)5
c)6
d)8
e)14

11 (PUC) Se p e q são polinômios de graus 4 e 5 respectivamente, então o grau de:

a)p+q é 5.
b)pq é 20.
c)p+q é 9.
d)pq é 10.
e)q-p é 4.

12 (U.F.MG) O quociente da divisão de $p(x) = 4x^4 - 4x^3 + x - 1$ por $q(x) = 4x^3 + 1$ é:

a)x-5
b)x-1
c)x+5
d)4x-5
e)4x+8

13 (FATEC) Se um fator do polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ é $q(x) = x^2 - 3x + 1$, então o outro fator é:

a) x-2
b) x+2
c) –x-2
d) –x+2
e) x+1

14 (U.F.GO) Se o polinômio $x^3 + kx^2 - 2x + 3$ é divisível pelo polinômio $x^2 - x + 1$, então o quociente é:

a) x-3
b) x+3
c) x-1
d) x+1
e) x+2

15 (F.C.M.STA.CASA) Dividindo-se um polinômio f por x^2-3x+1 obtém-se quociente x+1 e resto 2x+1. O resto da divisão de f por x+1 é:

a)-2
b)-1
c)3
d)2x-1
e)2x+1

16 (U.F.PA) O polinômio x^3-5x^2+mx-n é divisível por x^2-3x+6. Então, os números m e n são tais que m+n é igual a:

a)0
b)12
c)24
d)18
e)28

17 (CESGRANRIO) Se o polinômio x^3+2x^2-x+k é divisível por x-2, então o valor de k é:

a)0
b)8
c)-6
d)-8
e)-14

18 (U.E.CE) Seja o polinômio $p(x)=x^3-9x^2+mx+p$. Se p(x) é divisível por x-2 e $q(x)=x^2+nx+2$ é o quociente da divisão de p(x) por x-2, então m+p+n é igual a:

a)5
b)6
c)7
d)8

19 (U.F.R.PE) Seja p(x) um polinômio com coeficientes reais. Assinale a alternativa certa para o resto da divisão de p(x) por x^2-5x+6, sabendo-se que p(2)=2 e p(3)=3.

a)2x+1
b)x+1
c)x-3
d)x-2
e)x

20 (FGV) O polinômio x^3+2x^2-px+q é divisível por x^2-1. Podemos concluir que:

a)p=-2
b)q=1
c)p+q=0
d) $\frac{p}{q}=-\frac{1}{2}$
e) $p.q=\frac{7}{5}$

21 (FGV) Para que o polinômio $x^3-8x+mx-n$ seja divisível por (x+1)(x-2) o polinômio m.n deve ser igual a:

a)-8
b)10
c)-10
d)8
e)-6

22 (PUC-SP) Sejam -1 e 2,respectivamente, os restos das divisões de um polinômio f por x-1 e x-2. O resto da divisão de f por (x-1)(x-2) é:

a)0
b)-2
c)–x+2
d)x-1
e)3x-4

23 (U.E.CE) Um polinômio P(x) dividido por x-1 dá resto 3, dividido por x+1, dá resto 1. A soma dos coeficientes do resto deste mesmo polinômio quando dividido por (x-1) (x+1) é:

a)1
b)2
c)3
d)4

24 Quais devem ser os valores de A, B e C para que

$$\frac{2x^2-5x-1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

seja uma identidade?

25 Sabendo que:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

então A+B+C+D é:

a)-2
b)-1
c)0
d)1
e)2

4 - Equações Polinomiais

Uma equação polinomial é toda igualdade redutível à forma P(x) = 0, sendo P(x) um polinômio qualquer.

1. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Toda equação de grau n, com $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Desse teorema, apresentado por Gauss no final do século XVIII, decorre:

Toda equação de grau n, com $n \geq 1$, possui exatamente n raízes complexas.

Rebaixamento de ordem

O teorema de D' Alembert afirma que um polinômio P(x) é divisível por (x-r) se, e somente se, P(r)=0, ou seja, se r é raiz de P(x). Podemos, então, escrever:

$$\boxed{P(x) = (x - r).Q(x)}$$

2. TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, com $a_n \neq 0$. P(x) pode ser decomposto em n fatores do 1° grau na forma:

$\boxed{P(x) = a_n.(x - r_1)\cdot(x - r_2)\cdot ... \cdot(x - r_n)}$ em que $r_1, r_2, ..., r_n$ são as n raízes de P(x).

3. MULTIPLICIDADE

Dizemos que r é raiz com multiplicidade m, com $m \in \mathbb{N}^*$, de P(x) se:

$\boxed{P(x) = (x - r)^m \cdot Q(x)}$ e $\boxed{Q(r) \neq 0}$

4. PESQUISA DE RAÍZES

Teorema

Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$.

Se $\frac{p}{q}$ é uma **raiz racional** dessa equação $(com\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*)$ e p e q primos entre si, então:

p é divisor de a_0	q é divisor de a_n

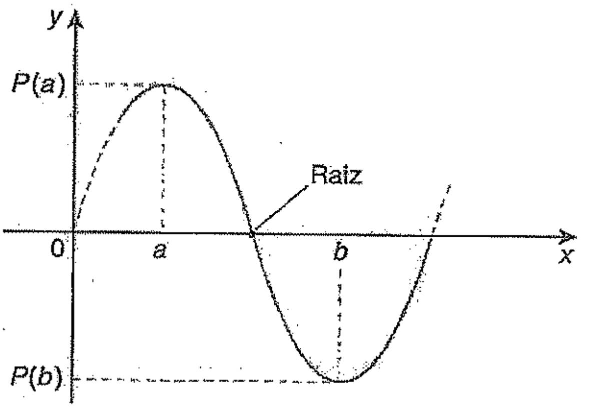
Observação:

Do teorema anterior, decorre que se $p \in \mathbb{Z}$ é **raiz inteira** da equação P(x)=0, então **p é divisor de a_0**.

5. EXISTÊNCIA DE RAÍZES REAIS

Sejam P(x)=0 uma equação polinomial com **coeficientes reais** e o intervalo real]a;b[.

Se $P(a) \cdot P(b) < 0$, há **ao menos uma raiz real** no intervalo]a; b[.

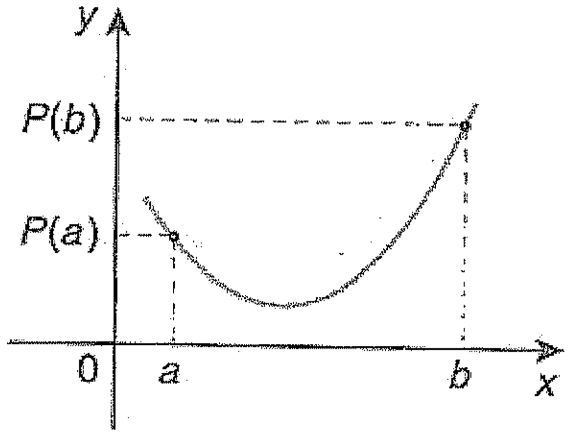


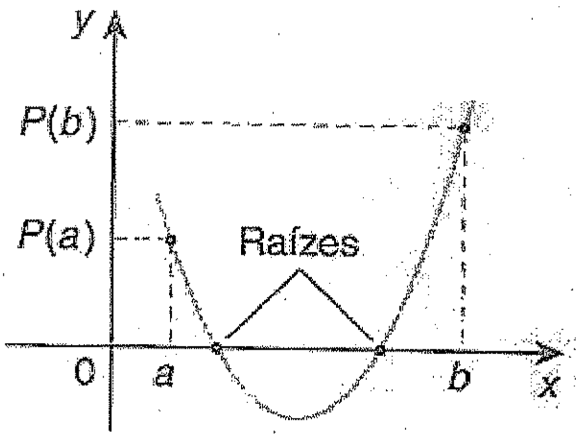
Tal proposição é conhecida como **teorema de Bolzano.**

Observações

Note que se $P(a) \cdot P(b) > 0$ não poderemos garantir nem descartar a existência de raízes reais nesse intervalo.

Veja essas situações:





Pode-se também dizer que se $P(a)\cdot P(b)>0$, há um número par (inclusive zero) de raízes no intervalo]a; b[.

6. RAÍZES COMPLEXAS IMAGINÁRIAS

Teorema

Seja P(x) um polinômio de grau n com coeficientes reais. Se o número imaginário z=a+bi, com $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}^*$, é uma raiz de equação P(x)=0, então o imaginário $\bar{z}=a-bi$ (conjugado de z) **também é raiz** dessa equação.

7. RELAÇÃO DE GIRARD

Equação quadrática

Seja a equação $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$, r_1 e r_2 suas raízes.

O teorema da decomposição permite-nos escrever:

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-r_1)(x-r_2)$$

$$ax^2+bx+c\equiv a\left[x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2\right]$$

Dividindo-se os dois membros por a:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\equiv x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2$$

Resulta, então, o sistema:

$$\boxed{\begin{cases} r_1+r_2=-\dfrac{b}{a} \\ r_1\cdot r_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}}$$

Com essas igualdades obtemos a **soma** e o **produto** das raízes diretamente dos coeficientes equação.

Equação cúbica

Seja a equação:

$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$

Desenvolvendo-se e agrupando-se o segundo membro, temos:

$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv a$$
$$\left[x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x-r_1r_2r_3\right]$$

Dividindo ambos os membros por a e identificando-se os coeficientes correspondentes, resulta o sistema:

$$\boxed{\begin{cases} r_1+r_2+r_3=-\dfrac{b}{a} \\ r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3+r_2r_3=\dfrac{c}{a} \\ r_1\cdot r_2\cdot r_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}}$$

Generalizando para uma equação de grau n, temos:

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0$ (com $a\neq 0$).

$$\boxed{\begin{cases} r_1+r_2+\dots+r_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3+\dots+r_{n-2}\cdot r_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1\cdot r_2\cdot r_3+r_1\cdot r_2\cdot r_4+\dots+r_{n-2}\cdot r_{n-1}\cdot r_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_n=(-1)^n\cdot\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}}$$

Exercícios Comentados

01 Sabendo que -1 é raiz de $P(x)=3x^3-4x^2-5x+2$ encontre as demais raízes e o decomponha em fatores do 1° grau.

Resolução

Se -1 for raiz, o polinômio P(x) é divisível por [x-(-1)]. Apliquemos o dispositivo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x+1 \\ \hline 0 & Q(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -4 & -5 & 2 & -1 \\ \hline 3 & -7 & 2 & 0 & \end{array}$$

Teremos: $Q(x)=3x^3-7x+2$ e

$P(x)=(x+1)(3x^2-7x+2)$

As outras raízes de P(x) serão as raízes da equação Q(x)=0.

$$3x^2-7x+2\left\langle \begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ ou \\ x=2 \end{array}\right.$$

Podemos escrever:

$$P(x)=(x+1)\left[3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)\right]$$

Ou ainda:

$$P(x)=\underbrace{(x+1)(3x-1)(x-2)}_{Fatores\ do\ 1^\circ grau}$$

As raízes são

$$-1,\frac{1}{3}\ e\ 2,\ e\ P(x)=(x+1)(3x-1)(x-2,)$$

02 Escreva um polinômio real P(x) de menor grau possível, com coeficientes predominantes igual a 2, que admita 1 e -2 como raízes simples e 3 como raiz dupla (multiplicidade 2).

Resolução:

1 e -2 são raízes simples. 3 é raiz com multiplicidade 2 (raiz dupla).

Podemos escrever:

$$P(x)=2(x-1)[x-(-2)](x-3)^2$$

Desenvolvendo e simplificando, vem:

$$P(x)=2x^4-10x^3+2x^2+42x-36$$

03 Resolva a equação $x^4+x^2-2x+6=0$, sabendo-se que 1+i é raiz.

Resolução:

Se 1+i é raiz, 1-i também será. Chamando as outras raízes de x_1 e x_2 e usando Girard:

$$\begin{array}{l} S=1+i+1-i+x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2=-2 \\ P=(1+i)(1-i)x_1x_2=6 \\ 2x_1x_2=6 \\ \begin{cases} x_1x_2=3 \\ x_1+x_2=-2 \end{cases} \end{array}$$

Resolvendo obtêm-se as outras raízes

$$-1\pm\sqrt{2}i \quad S=\{1+i,\ 1-i,\ -1+\sqrt{2}i,\ -1-\sqrt{2}i\}$$

04 Calcule a soma das inversas das raízes de $x^3-7x^2+4x-1=0$.

Resolução:

Chamando-se as raízes de a, b e c, têm-se:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{4}{(-1)^3(-1)}=4$$

05 Resolva a equação $x^3-9x^2+20x-12=0$ sabendo que uma raiz é o dobro da soma das outras duas.

Resolução:

Raízes: a, b, c

$$a=2(b+c)$$
$$S=a+b+c=9$$
$$a+\frac{a}{2}=9 \rightarrow a=6$$

Por Ruffini: $6\ \begin{array}{|rrrr} 1 & -9 & 20 & -12 \\ \hline 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$

$$x^2-3x+2=0$$
$$\left.\begin{array}{l} S=3 \\ P=2 \end{array}\right\rangle 2\ e\ 1$$
$$S=\{1,2,6\}$$

06 Resolva a equação $64x^3-56x^2+14x-1=0$ sabendo que as raízes estão em P.G.

Resolução:

$$\frac{x}{q}, x, xq$$
$$P=\frac{x}{q}\cdot x\cdot xq=(-1)^3\cdot\frac{(-1)}{64}$$
$$x^3=\frac{1}{64}$$
$$x=\frac{1}{4}$$

Por Ruffini:

$\frac{1}{4}\ \begin{array}{|rrrr} 64 & -56 & 14 & -1 \\ \hline 64 & -40 & 4 & 0 \end{array}$

$$64x^2-40x+4=0$$

resolvendo obtemos: $\frac{1}{2}\ e\ \frac{1}{8}$

$$S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right\}$$

Exercícios de Sala

01 (FGV-SP) A equação $x^3-3x^2+4x+28=0$ admite -2 como raiz. As outras raízes satisfazem à equação:

a) $x^2-4x+14=0$
b) $x^2-5x+14=0$
c) $x^2-6x+14=0$
d) $x^2-7x+14=0$
e) $x^2-8x+14=0$

02 (Vunesp) Uma das raízes da equação $2x^3+x^2-7x-6=0$ é 2. Pode-se afirmar que:

a)As outras raízes são imaginárias.
b)As outras raízes são 17 e -19.
c)As outras raízes são iguais.
d)As outras raízes estão entre -2 e 0.
e)Só uma das outras raízes é real.

03 (PUC/Campinas-SP) Considerando que algumas raízes reais do polinômio $f=x^5-x^4-3x^3+3x^2-4x+4$ pertencem ao conjunto {-2;-1;0;1}, é correto afirmar que esse polinômio admite:

a)cinco raízes reais.
b)cinco raízes não-reais.
c)três raízes reais e duas não-reais.
d)duas raízes reais e três não-reais.
e)uma raiz real e quatro não-reais.

04 (U.E.Londrina-PR) Sabe-se que a equação $2x^3+x^2-4x-2=0$ admite uma raiz racional. A maior das raízes é um número.

a)ímpar.
b)divisível por 4.
c)irracional.
d)quadrado perfeito.
e)não-real.

05 (Mackenzie-SP) Se k e p são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação $4x^5-2x^3+x^2-x+1=0$, então k+p vale:

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{5}{2}$

d)-4

e) $-\frac{2}{5}$

06 (Fuvest-SP) Se a equação:

$ax^4 + 8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ tem raízes reais 2 e –1, então o valor de k é:

a) $\frac{9}{4}$

b)-2

c) $-\frac{89}{4}$

d) $-\frac{3}{17}$

e) $-\frac{76}{9}$

07 (U.E.Londrina-PR) Seja a equação

$2x^3 + x^2 - 4x + k = 0$, cujas raízes são a, b e c na qual k é uma constante real. Se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -2$, então k é igual a:

a)-4
b)-2
c)-1
d)2
e)4

08 (Mackenzie-SP) Na equação $x^3 - 5x^2 + 5x + 2 = 0$, de raízes a, b, e c, o produto (a+2) (b+2) (c+2) vale:

a)35
b)30
c)25
d)45
e)40

09 (Fuvest-SP) Seja $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de P(x) são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares têm o polinômio P(x)?

a)0
b)1
c)2
d)3
e)4

10 (Vunesp) A equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 4 = 0$ tem raízes x_1, x_2 e x_3. Calcule valores numéricos para os coeficientes a, b, c e d, sabendo que as raízes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são x_1-2, x_2-2, x_3-2.

11 (ITA-SP) Sejam a, b e c raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, em que r é um número real. Podemos afirmar que o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:

a)-60
b)62+r
c)62+r^2
d)62+r^3
e)62-r

12 (Vunesp) Os coeficientes do polinômio

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ são números inteiros. Supondo que f(x) tenha duas raízes racionais positivas distintas:

a)Encontre todas as raízes desse polinômio.
b)Determine os valores de a e b.

13 (Fuvest-SP)

a)Quais são as raízes inteiras do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - 4$?

b)Decomponha o polinômio P(x) em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.

c)Resolva a inequação: P(x)<4(x-2)

14 (Unicamp-SP) Considere o polinômio:

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 26$

a)Verifique se o número complexo 2+3i é raiz desse polinômio.

b)Prove que P(x)>0, para todo número real x>-2.

15 (U.F.Uberaba-MG) Se a, b, c são raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$, então:

a)$a^2+b^2+c^2=9$

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

c) $a^2+b^2+c^2=6$

d) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$

16 (UFRJ) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio $3x^3-13x^2+7x-1$. Em relação a esse paralelepípedo, determine a razão entre a sua área total e o seu volume.

Exercícios de Casa

01 (U.F.RN) Uma das soluções da equação $x^4-8x^2+16=0$ é:

a)-1
b)-2
c)-3
d)-4
e)-5

02 (U.C.SALVADOR) É verdade que a equação $(x^3-4x)(x^2+2x+1)=0$, no universo $\mathbb{R}$,

a)Tem quatro soluções distintas.
b)Tem uma solução que é número irracional.
c)Tem cinco soluções distintas.
d)Não tem soluções.
e)Tem apenas duas soluções distintas.

03 (U.C.SALVADOR) Sabe-se que o polinômio $f=x^4-4x^3+4x^2-9$ é divisível por $g=x^2-2x+3$. Se q é o quociente da divisão de f por g, quais são as raízes de q?

a)1 e -1
b)3 e -3
c)1 e -3
d)-1 e 3
e)-1 e -3

04 (U.F.RS) Se os números -3, a e b são as raízes da equação $x^3+5x^2-2x-24=0$, então o valor de a+b é:

a)-6
b)-2
c)-1
d)2
e)6

05 (FATEC) Se a, b e $-\frac{1}{2}$ são as raízes da equação $2x^3+3x^2-3x-2=0$, então a^b é igual a:

a)-1 ou 0

b) $-\frac{1}{2}$ ou 2

c)2

d) $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$

e)-2 ou 1

06 (PUC-SP) Em relação ao polinômio $p(x)=(x-1)^2(x^2-1)$, o que se pode afirmar sobre o número 1?

a)É raiz simples.
b)É raiz dupla.
c)É raiz tripla.
d)É raiz quádrupla.
e)Não é raiz.

07 (U.MACK) A soma das raízes da equação $2^{3x}-7\cdot 2^{2x}+14\cdot 2^x-8=0$ é:

a)-1
b)0
c)0
d)2
e)3

08 (FGV) Dada a equação $x^3-7x+p=0$, determinar p de modo que uma das raízes seja o dobro da outra.

a) $p=\pm 6$

b) $p=\pm 3$

c) $p=\pm 5$

d) $p=10$

e)n.d.a

09 (U.F.PELOTAS) A soma dos inversos das raízes da equação $x^3-2x^2+3x-4=0$ é igual a:

a) $-\frac{3}{4}$

b) $-\frac{1}{2}$

Curso Preparatório CIDADE

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{3}$

e)2

10 (U.C.MG) O valor de m, para que a equação $x^3+mx-1=0$ tenha duas raízes iguais, é:

a) $-\sqrt{2}$

b) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

d) $-\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

e) $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

11 (U.Mack) Uma raiz da equação $x^3-4x^2+x+6=0$ é igual à soma das outras duas. As raízes dessa equação são:

a)2, -2, 1
b)2, -1, 3
c)3, -2, 1
d)1, -1, -2
e)Nenhuma das anteriores.

12 (EAESP-FGV) Determinar as raízes da equação: $x^3-12x^2+39x-28=0$, sabendo que uma das raízes é a média aritmética das outras duas.

a)3, 9, 6
b)1, 9, 5
c)0, 12, 6
d)1, 7, 4
e)3, 13, 8

13 (U.Mack) As raízes da equação $x^3+9x^2+nx+m=0$ formam uma P.A. de razão 3. Então:

a)n=3 e m=6
b)n=18 e m=0
c)n=3 e m=$\frac{1}{18}$
d)m+n=9
e) $n\neq 0$ e m.n=9

14 (U.F.PR) A condição para que as três raízes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$ estejam em progressão geométrica é:

a) $\frac{b}{c}=a$
b) $b^3c-a^3=0$
c) $ba=c^3$
d) $c^3a-b^3=0$
e) $a^3c-b^3=0$

15 (ITA) Os valores de m, de modo que a equação $x^3-6x^2-m^2x+30=0$ tenha duas raízes somando um, são:

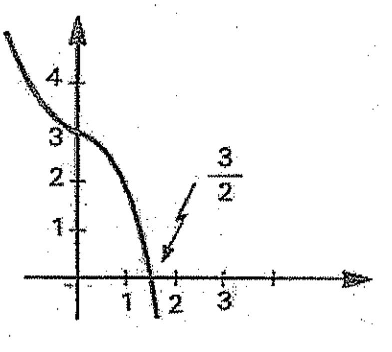
a)0
b) $\sqrt{3}$ e 3
c)1 e -1
d)2 e -2
e)n.d.a

16 (F.SANTANA) Se a equação $2x^3+11x^2+14x+8=0$ admite duas raízes recíprocas, a terceira raiz é um número:

a)ímpar
b)maior que 2
c)negativo
d)não real
e)não inteiro

17 (VUNESP) O gráfico da figura representa o polinômio real $f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$. Se o produto das raízes de f(x)=0 é igual à soma dessas raízes, então a+b+c é igual a:

a)4
b)5
c)6
d)3
e) $\frac{9}{2}$



18 (PUC-SP) Se o número complexo a+bi é raiz de uma equação algébrica com coeficientes reais, então a-bi também é raiz dessa equação. Qual é a raiz real de $3x^3-7x^2+8x-2=0$, se uma de suas raízes é 1-i?

a) $\frac{1}{3}$

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d)-3
e)-1

19 (U.F.RS) O módulo das raízes complexas não reais da equação $x^3-mx^2+9x-5=0$ é $\sqrt{5}$, com $m\in\mathbb{R}$. A soma de todas as raízes é:

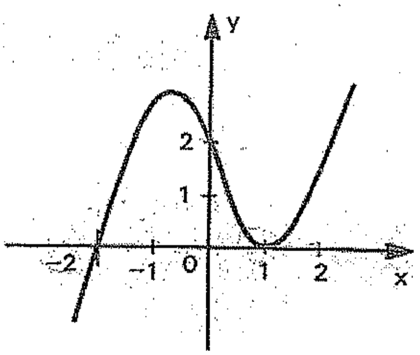
a)1
b)2
c)4
d)5
e)9

20 (PUC-RS) O gráfico na figura é de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ em que f(x) é um polinômio do 3° grau. Para a equação f(x)=0, afirmamos:

I) O termo independente de x é igual a 2.
II) Suas raízes são -2, 2 e 1.
III) Suas raízes são -2, -2 e 1.
IV) Suas raízes são -2, 1 e 1.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

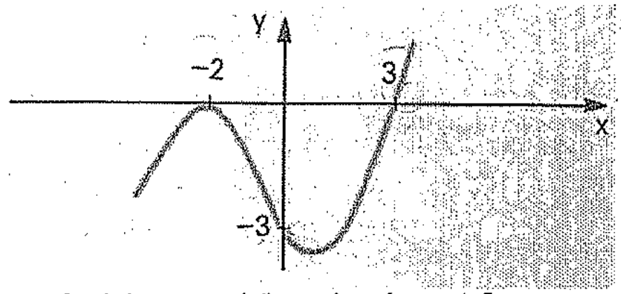
a)II
b)III
c)I e II
d)I e III
e)I e IV



21 Resolva a equação $x^4-4x^2+8x+35=0$, sabendo que uma das raízes é $2+i\sqrt{3}$.

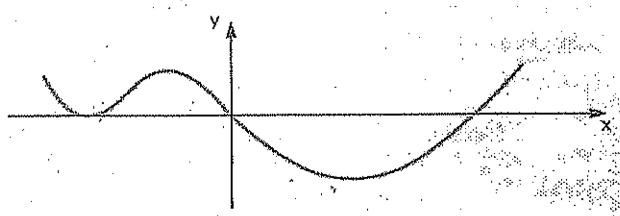
22 O polinômio de grau 3 cujo gráfico está esboçado na figura abaixo tem:

a)Uma raiz igual a -2, uma raiz igual a 3 e uma raiz complexa.
b)Termo independente igual a -3.
c)Uma raiz real e duas complexas.



Qual das proposições acima é correta?

23 O gráfico abaixo é o de um polinômio cujos zeros reais estão todos no trecho desenhado.



Qual das proposições abaixo, sobre o polinômio acima, é correta?

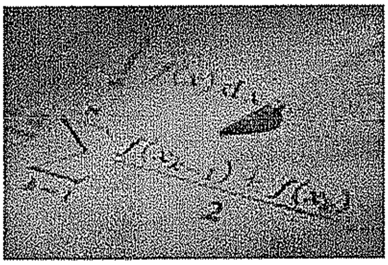
a)Pode ser do 3° grau.
b)Pode ser do 5° grau.
c)Pode ser do 6° grau.

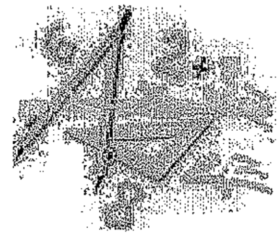
24 Resolva a equação $x^3-2x^2-x+2=0$.

25 Determine as raízes da equação
$x^5-8x^3-6x^2+7x-6=0$.

26 Resolva a equação $15x^3+7x^2-7x+1=0$.

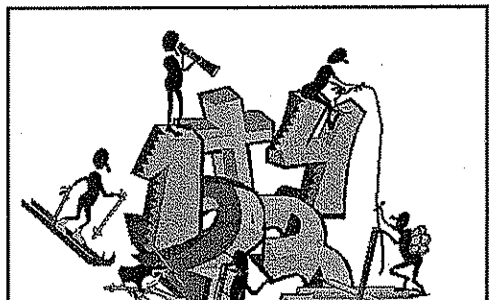
Curso Preparatório CIDADE





MATEMÁTICA 2

CADERNO 3

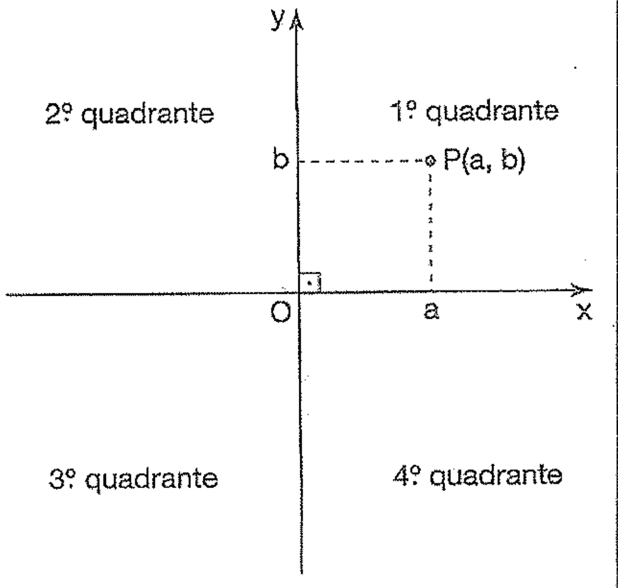


1 - GEOMETRIA ANALÍTICA

Parte I - Estudo de Ponto e Reta

1. Sistema cartesiano ortogonal

É constituído por duas retas, x e y, perpendiculares entre si.



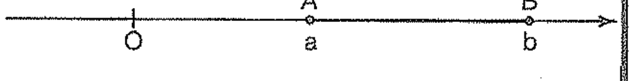
Em que:

A reta x é chamada *eixo das abscissas*;
A reta y é chamada *eixo das ordenadas*;

O ponto O é chamado *origem*;
O número real a é denominado abscissa de P;
O número real b é denominado ordenada de P;
O par ordenado (a,b) representa as coordenadas de P.

2. Distância entre dois pontos na reta

A distância entre os pontos A e B de coordenadas a e b, respectivamente, é dada por:

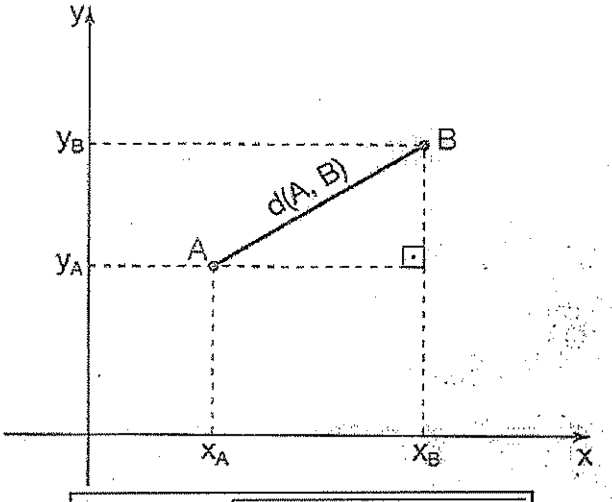


$$\boxed{d(A,B)=|b-a|}$$

Em que d(A,B) é a distancia entre A e B. O número real não-negativo d(A,B) é denominado, também, *comprimento* do segmento $\overline{AB}$.

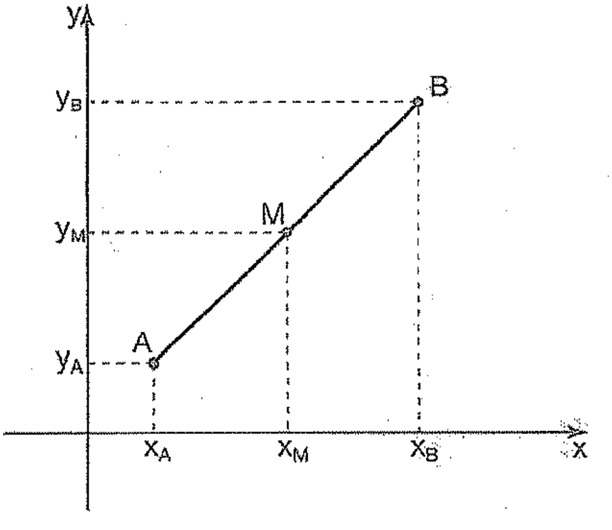
3. Distância entre dois pontos no plano

A distancia entre os pontos $A(x_A, y_a)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:



$$\boxed{d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

4. Ponto Médio



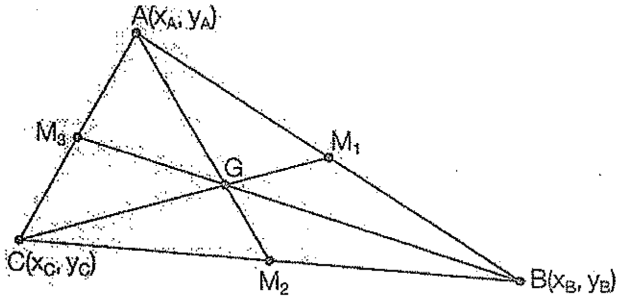
$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)\Rightarrow \boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{2}}$$

$$\boxed{y_M=\frac{y_A+y_B}{2}}$$

Em que x_M é a abscissa do ponto M e y_M é a ordenada do ponto M.

5. Baricentro de um triângulo

O baricentro G de um triângulo ABC de coordenadas $A(x_A, y_a)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dado por:



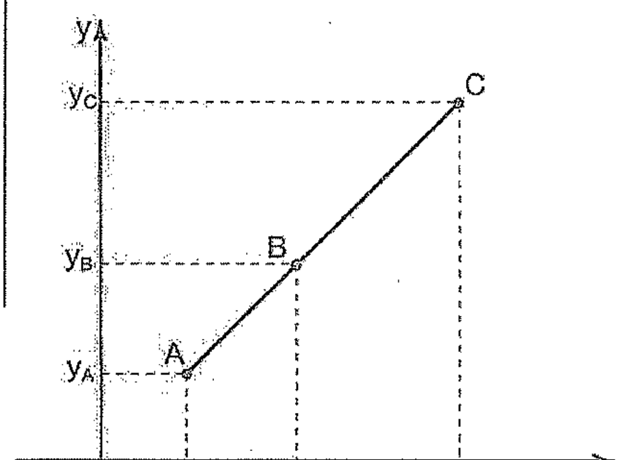
Baricentro é o ponto de encontro das medianas.

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) \Rightarrow \boxed{x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}}$$

$$\boxed{y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}}$$

6. Alinhamento de três pontos

Sejam os pontos da figura:



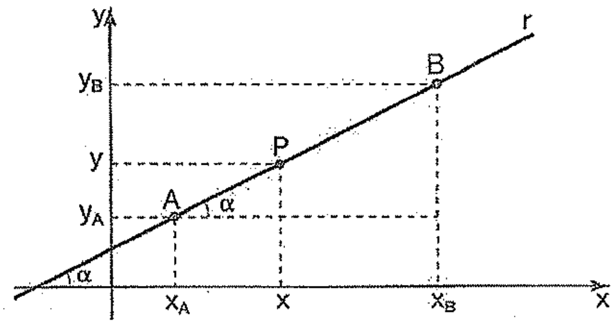
$$\begin{cases} A(X_A,Y_A) \\ B(X_B,Y_B) \\ C(X_C,Y_C) \end{cases} \quad \text{e} \quad D=\begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$D=0 \Rightarrow A, B$ e C são colineares, isto é, estão alinhados.
$D \neq 0 \Rightarrow A, B$ e C formam triângulo.

7. Estudo da reta

Equação geral

Se a reta r passa pelos pontos $A(x_A, y_a)$, $B(x_B, y_B)$ e $P(x, y)$, temos:



$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow ax+by+c=0$$

Em que:

$$\begin{cases} a=y_A-y_B \\ b=x_A-x_B \\ c=x_Ay_A-x_By_B \end{cases}$$

Observações:

$$a=0 \Rightarrow y=-\frac{c}{b} \text{ reta horizontal}$$

$$b=0 \Rightarrow x=-\frac{c}{a} \text{ reta vertical}$$

$$c=0 \Rightarrow ax+by=0 \text{ reta que passa pela origem}$$

O coeficiente angular ou declividade m da reta é dado por:

$$\boxed{tg\ \alpha=m \ \Rightarrow \ m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{a}{b}}$$

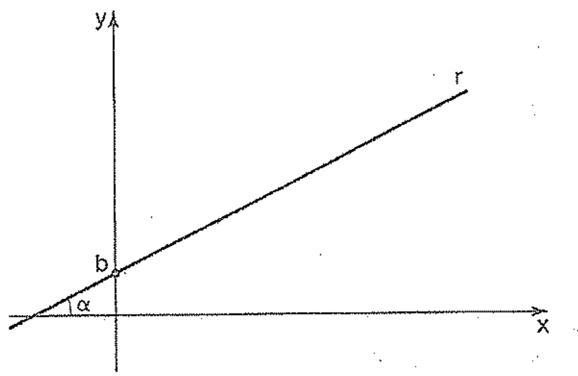
Reta que passa por um ponto dado e declividade conhecida

Seja a reta r que passa pelo ponto $A(x_A, y_a)$ e com declividade *m*; então:

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

Equação reduzida

A equação reduzida da reta r da figura é dada por:



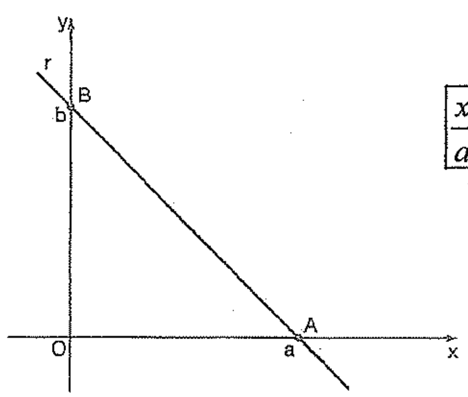
coeficiente linear

$$\boxed{y = mx + b}$$

coeficiente angular

Equação segmentária

A equação segmentária da reta r que passa pelos pontos A(a,0) e B(0,b) da figura é dada por:



$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Equações paramétricas

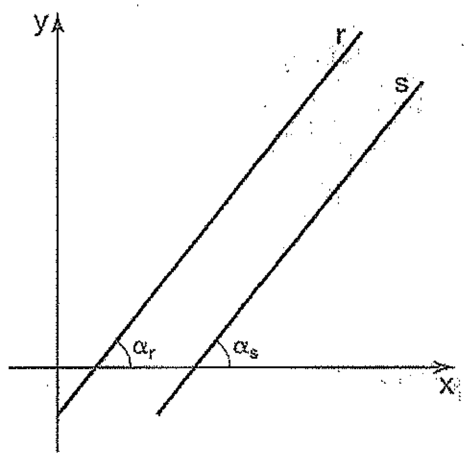
São equações que não relacionam diretamente entre si as coordenadas x e y.

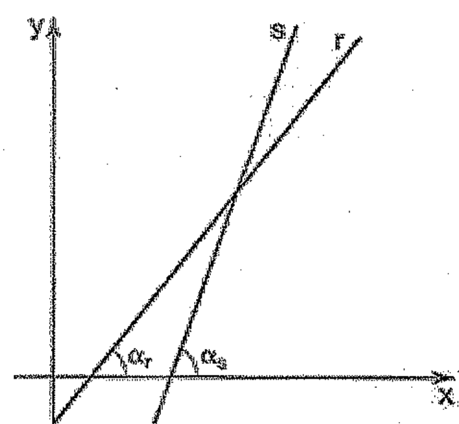
Essas equações são dadas em função de uma terceira variável, t, chamada *parâmetro*.

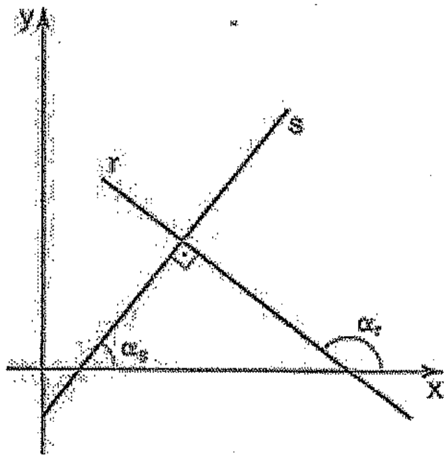
Exemplo: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$

8. <u>Posições relativas de duas retas</u>

Sejam as retas: $\begin{cases} reta\ r : y_r = m_r x + b_r \\ reta\ s : y_s = m_s x + b_s \end{cases}$



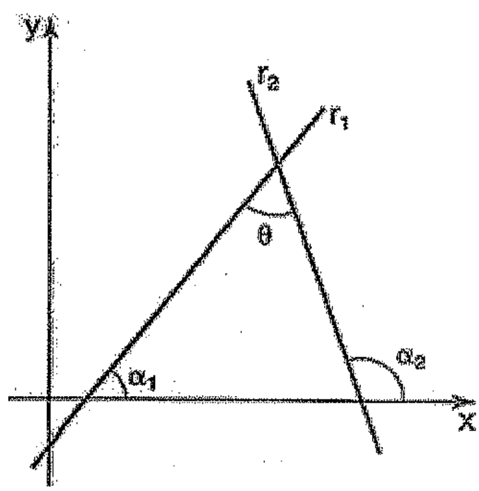


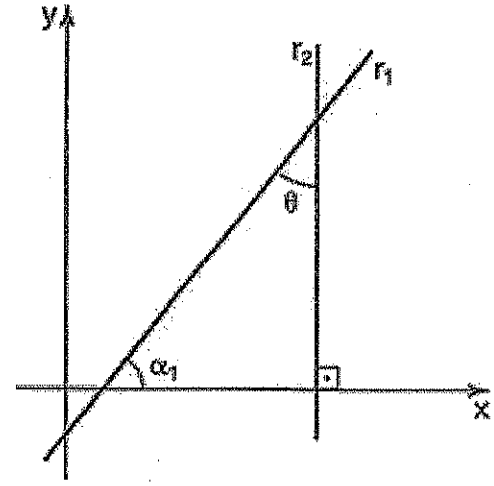


$m_r \neq m_s$
r e s são concorrentes.
$m_r = m_s$ e $b_r \neq b_s$
r e s são paralelas distintas.
$m_r = m_s$ e $b_r = b_s$
r e s são paralelas coincidentes.
$m_r = -\dfrac{1}{m_s}$
r e s são perpendiculares.

9. Ângulo entre duas retas

Sejam as retas r_1 e r_2 indicadas nas figuras. O ângulo agudo θ entre elas é tal que:

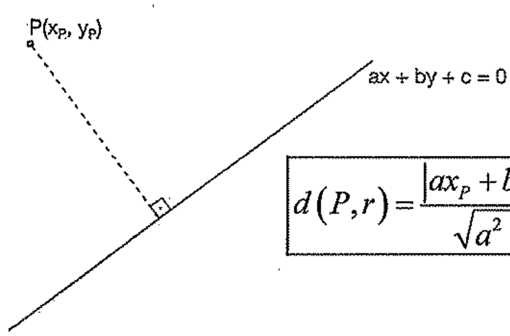




$$\boxed{tg\ \theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|} \qquad \boxed{tg\ \theta = \left|\frac{1}{m_1}\right|}$$

10. Distância entre ponto e reta

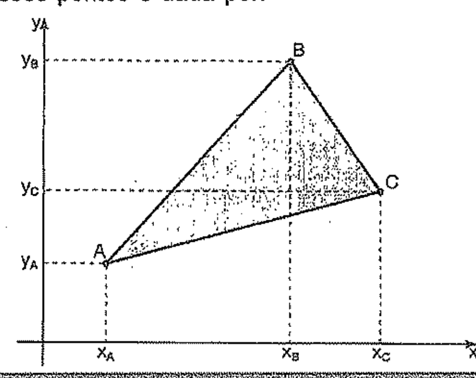
Dados um ponto $P(x_p, y_p)$ e uma reta r de equação ax+by+c=0, a distância entre P e r é dada por:



$$\boxed{d(P,r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

11. Área de um triângulo

Dados três pontos não-colineares A,B e C, indicados na figura, a área S do triângulo ABC formado por esses pontos é dada por:

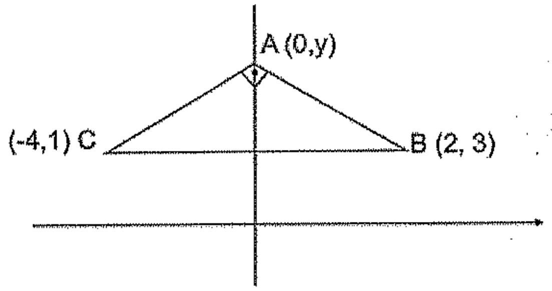


$$\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot |D|} \qquad \text{com} \quad D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Exercícios Comentados

01 Dado os pontos B(2,3) e C(-4,1) determinar o vértice A do triângulo ABC, sabendo que é o ponto do eixo das ordenadas do qual se vê BC sob ângulo reto.

Resulução:



$$d_{BC}^2 = d_{AC}^2 + d_{AB}^2$$

$$\left(\sqrt{(2+4)^2 + (3-1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{4^2 + (y-1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2^2 + (3-y)^2}\right)^2$$

$$16 + y^2 - 2y + 1 + 4 + 9 - 6y + y^2 = 36 + 4$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$y = -1$$

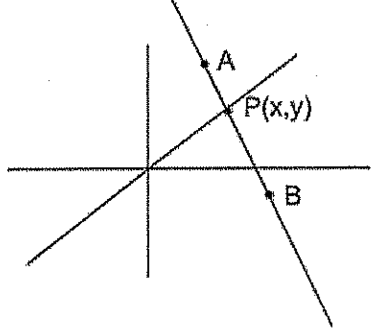
ou

$$y = 5$$

resposta: $A(0,-1)$ ou $(0,5)$

02 Dados A(1,5) e B(3,-1) obtenha o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução:



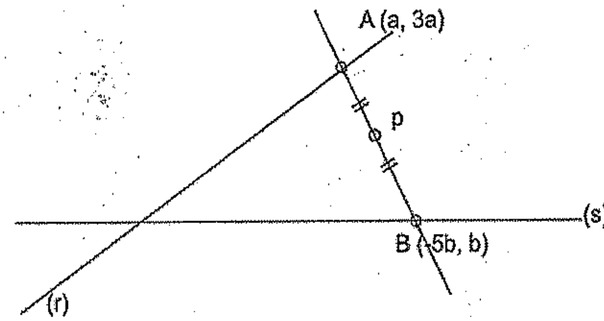
$x_p = y_p$

Pela condição de alinhamento:

$$\begin{array}{ll} x & y \\ 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ x & y \end{array} \qquad \begin{aligned} &5x - 1 + 3y - y - 15 + x = 0 \\ &6x + 2y - 16 = 0 \\ &8x = 16 \\ &x = 2 \text{ e } y = 2 \\ &P(2,2) \end{aligned}$$

03 Qual e a reta que passa por P(3,1) intercepta (r) 3x-y=0 em A e (s) x+5y=0 em B tais que P é médio de $\overline{AB}$.

Resolução:



$$X_P = \frac{X_A + X_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{a - 5b}{2} \Rightarrow a - 5b = 6$$

$$Y_P = \frac{Y_A + Y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3a + b}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 2 \\ a - 5b = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos: a=1 b=-1

Logo A(1,3) e B(5,-1)

Então a equação da reta $\overline{AB}$:

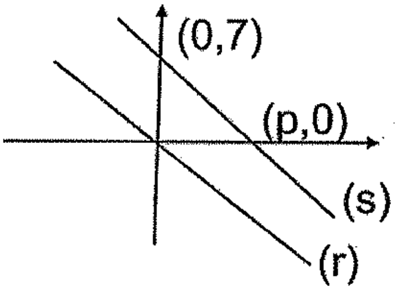
$$\begin{array}{ll} x & y \\ 1 & 3 \\ 5 & -1 \\ x & y \end{array} \qquad \begin{aligned} &3x - 1 + 5y - y - 15 + x = 0 \\ &\boxed{x + y - 4 = 0} \end{aligned}$$

Curso Preparatório CIDADE

ESPCEX

04 Obtenha uma reta paralela a (r) 2x+y=0 e que define com os eixos um triângulo cuja área é 16.

Resolução:



(s) 2x+y+c=0
(0,q) $\rightarrow$ q=-c

(p,0) $\rightarrow$ 2p=-c $\rightarrow p=-\frac{c}{2}$

Como:

$$A=\frac{bh}{2}=16$$

$$-\frac{c\cdot-\frac{c}{2}}{2}=16\rightarrow c=\pm 8$$

Resp: $2x+y+8=0$

$2x+y-8=0$

05 Qual a equação da reta que passa por A (1,1) e é paralela à reta (r) y = - 2 x + 1.

Resolução:
Reta procurada (s)
$m_r=m_s$
$m_r=-2$, logo

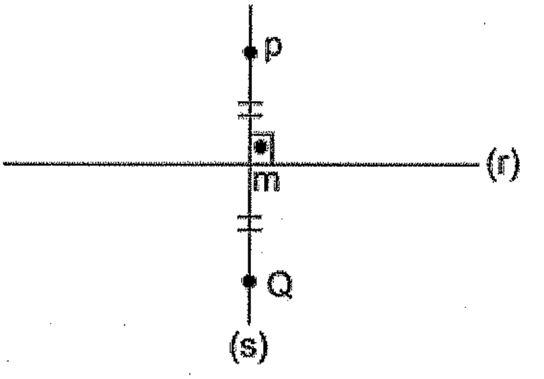
$$\left.\begin{matrix} m_s 2-2 \\ A(1,1) \end{matrix}\right\rangle y-y_o=m(x-x_o)$$

$$y-1=-(x-1)$$

$$\boxed{2x+y-3=0}$$

06 Determine o ponto Q, simétrico de P(-3,2) em relação à reta (r) x+y-1=0.

Resolução:



Reta (s):
$m_r=-1$

$m_s=-\frac{1}{m_r}=1$

$$(s)\left\{\begin{matrix} m_s=1 \\ (-3,2) \end{matrix}\right\rangle y-y_o=m(x-x_o)$$

$$y-2=1(x+3)$$

$$x-y+5=0\ (s)$$

$$Ponto\ m:\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}\Rightarrow x=-2 \text{ e } y=3$$

$$M(-2,3)$$

Como M é médio de PQ:

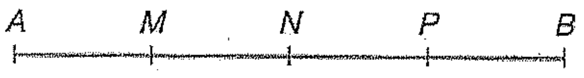
$$x_M=\frac{x_P+x_Q}{2}\Rightarrow x_Q=2(-2)+3=-1$$

$$y_M=\frac{y_P+y_Q}{2}\Rightarrow y_Q=2\cdot3-2=4$$

$$\boxed{Q(-1,4)}$$

Exercícios de Sala

01 Na figura, os pontos M, N e P dividem $\overline{AB}$ em quatro segmentos congruentes. Se A=(4,1) e B=(10,5), determine as coordenadas de M, N e P.



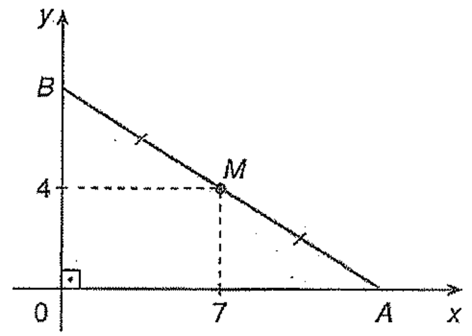
02 O ponto A pertence ao eixo Ox e B pertence ao eixo Ou. Se M=(4,1) é o ponto médio de $\overline{AB}$, determine as coordenadas de A e B.

03 Três vértices de um paralelogramo PQRS são P=(-3,-2), Q=(1,-5) e R=(9,-1), com P e R diagonalmente opostos. A soma das coordenadas do vértice S é:

a)13
b)12
c)11
d)10
e)9

04 As diagonais de um paralelogramo ABCD interceptam-se no ponto M. Determine as coordenadas de C e D, sabendo que A=(1,3), B=(5,5) e M=(2,-1).

05 Na figura seguinte, M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Obtenha as coordenadas do baricentro do triângulo OAB.



06 Num triângulo ABC, em que A=(-5,11), o baricentro é o ponto G=(2,6). As coordenadas do ponto médio de $\overline{BC}$ são:

a)(4,1)

b) $\left(\frac{11}{2},\frac{7}{2}\right)$

c)(-1,3)

d) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2},\frac{17}{2}\right)$

07 Sejam A=(3,2), B=(1,-5) e C(-7,-7) os vértices de um triângulo ABC. O comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ desse triângulo é:

a)5
b)10
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{10}$
e) 13

08 O ponto P pertence à reta bissetriz dos quadrantes ímpares e é eqüidistantes dos pontos Q=(3,1) e R=(-1,2). Quais são as coordenadas de P?

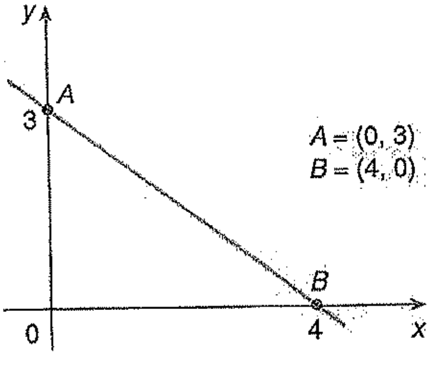
09 Determine x, para que o triângulo de vértices A=(x,2x), B=(2,1) e C=(4,5) seja retângulo em A.

10 Calcule, se existir, o coeficiente angular da reta AB nos seguintes casos:

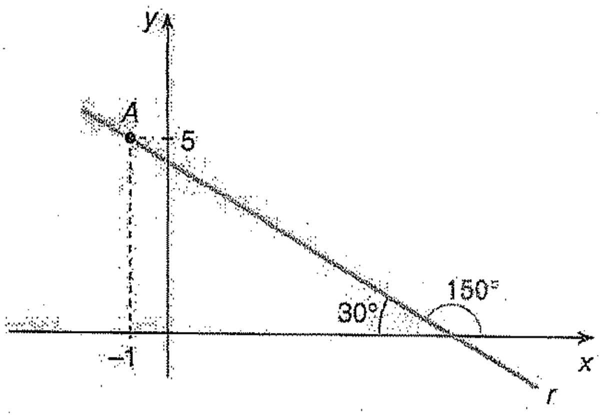
a)A=(4,1) e B=(4,5)

b)A=(2,-1) e B=(-2,-3)

c)



11 A equação da reta r desta figura é:



a) $y+5=-\sqrt{3}\left(x-1\right)$

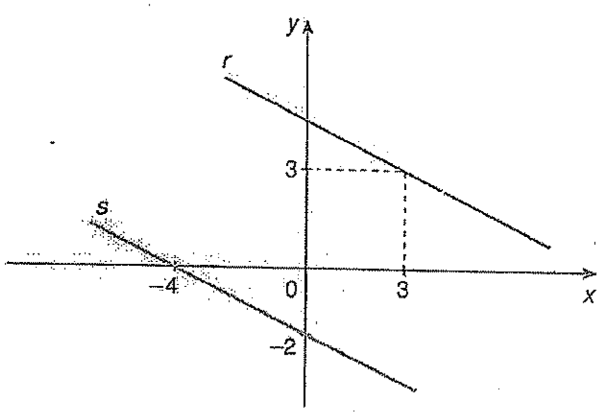
b) $y-5=\sqrt{3}\left(x+1\right)$

c) $3\left(y+5\right)=-\sqrt{3}\left(x-1\right)$

d) $3\left(y-5\right)=-\sqrt{3}\left(x+1\right)$

e) $3\left(y-5\right)=\sqrt{3}\left(x+1\right)$

12 As retas r e s desta figura são paralelas.



Obtenha uma equação de r.

Exercícios de Casa

01 Para que os pontos A=(2x,x), B=(2,2) e C=(3,-2) sejam os vértices de um triângulo ABC, devemos ter:

a) $x \neq \dfrac{10}{9}$

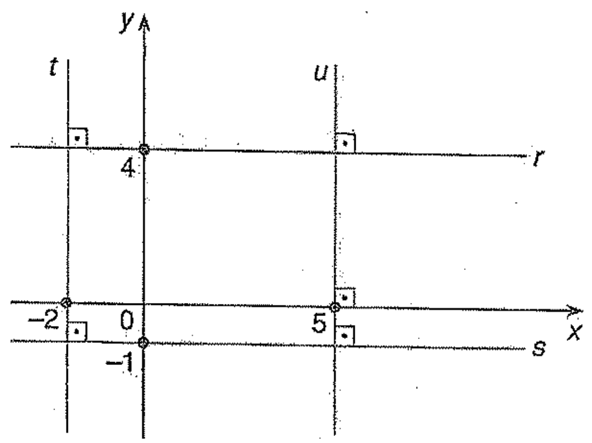
b) $x \neq 0$

c) $x \neq -\dfrac{1}{3}$

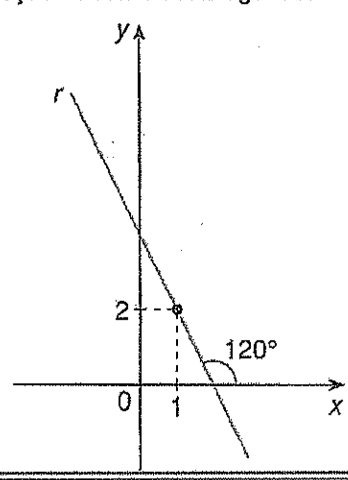
d) $x \neq 5$

e) $x \neq -\dfrac{4}{5}$

02 Dê as equações das retas, r, s, t e u da figura.



03 Uma equação da reta r desta figura é:



a) $y-2=\sqrt{3}(x-1)$

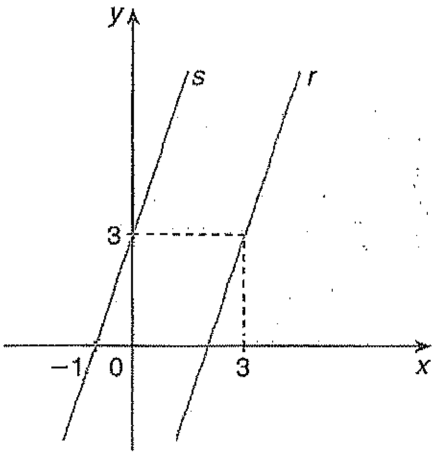
b) $y-1=\sqrt{3}(x-2)$

c) $y-2=-\sqrt{3}(x-1)$

d) $y-1=-\sqrt{3}(x-1)$

e) $y+1=-\sqrt{3}(x+2)$

04 As retas r e s da figura a seguir são paralelas.



Uma equação de r é:

a) $3x-y+3=0$

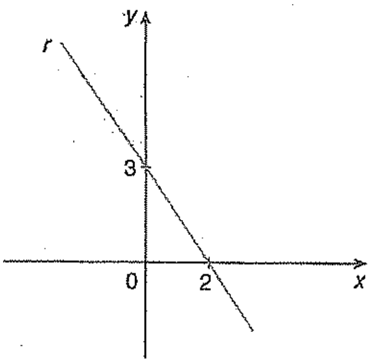
b) $3x-y-6=0$

c) $x-3y+6=0$

d) $x+3y-12=0$

e) $3x+3y-1=0$

05 Qual é a equação da reta r desta figura?



a) $3x+2y=6$

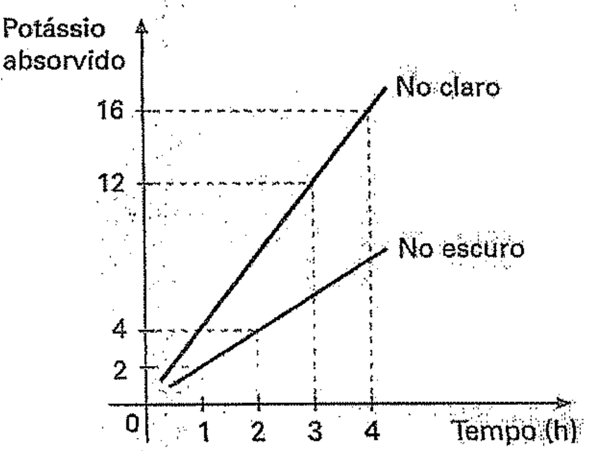
b) $3x-2y=-6$

c) $2x+3y=6$

d) $2x-3y=-6$

e) $6x+4y=5$

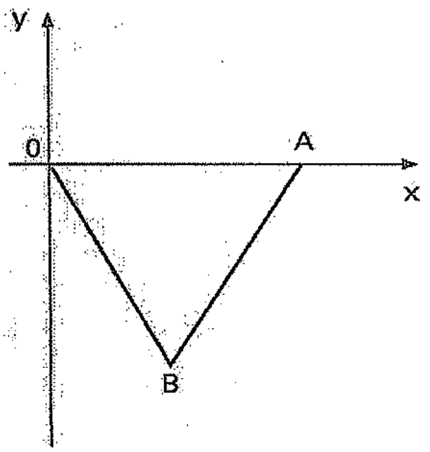
06 (VUNESP-SP) O gráfico mostra o resultado de uma experiência relativa à absorção de potássio pelo tecido da folha de um certo vegetal, em função do tempo e em condições diferentes de iluminosidade.



Nos dois casos, a função linear y=mx ajustou-se razoavelmente bem aos dados, daí a referencia a **m** como taxa de absorção (geralmente medida em μ moles por unidade de peso por hora). Com base no gráfico, sem m_1 é a taxa de absorção no claro, e m_2 a taxa de absorção no escuro, a relação entre duas taxas é:

a) $m_1=m_2$
b) $m_2=2m_1$
c) $m_1.m_2=1$
d) $m_1.m_2=-1$
e) $m_1=2\ m_2$

07 (VUNESP-SP) Os pontos O, A e B, do plano cartesiano da figura a seguir, são os vértices de um triângulo equilátero cuja medida dos lados é dada por $\sqrt{3}$. As equações da reta AB e OB são, respectivamente:



a) $y = \sqrt{2}x - 3$ e $y = -\sqrt{2}x$

b) $y = \sqrt{3}x - 2$ e $y = -\sqrt{3}x$

c) $y = \sqrt{3}x - 3$ e $y = -\sqrt{3}x$

d) $y = x + \sqrt{3}$ e $y = -x$

e) $y = 3x + \sqrt{3}$ e $y = -3x$

08 (UFMG) A relação entre **m** e **n**, para que as retas de equações $2x - my + 1 = 0$ e $nx + 3y + 5 = 0$ sejam paralelas é:

a) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{m}{n} = -\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2}{3}$

d) $m \cdot n = -6$

e) $m \cdot n = 6$

09 (CESGRANRIO-RJ) A reta **r** é perpendicular a $x + 3y - 5 = 0$ e contém o ponto (1,1). Então, uma equação de **r** é:

a) $x - y = 0$

b) $2x + y - 3 = 0$

c) $x - 4y + 3 = 0$

d) $2x - y - 1 = 0$

e) $3x - y - 2 = 0$

10 (FUVEST-SP) As retas **r** e **s** são perpendiculares e interceptam-se no ponto (2, 4). A reta **s** passa pelo ponto (0,5). Uma equação da reta **r** é:

a) $2y + x = 10$

b) $y = x + 2$

c) $2y - x = 6$

d) $2x + y = 8$

e) $y = 2x$

11 (MACK-SP) Uma reta **t** passa pelos pontos (1,4) e (6,0). A equação da reta **s**, simétrica de **t** em relação à reta $x - 6 = 0$, é:

a) $5x - 4y - 30 = 0$

b) $4x - 5y - 24 = 0$

c) $4x - y - 24 = 0$

d) $5x - y - 30 = 0$

e) $6x - y - 36 = 0$

12 (UFPR) Em um sistema cartesiano ortogonal, qual é a área do triângulo determinado pelas retas de equação $x - y - 1 = 0$, x=5, e pelo eixo das abcissas?

a)5 u.a
b)8 u.a
c)10 u.a
d)15 u.a
e)16 u.a

13 (MACK-SP) Os vértices de um triângulo são os pontos A=(1, k), B=(3,0) e C=(2,1); M é o ponto médio de AB, e N é o ponto médio de BC. Se a área do triângulo MCN é 0,20, então **k** pode ser:

a) $\dfrac{6}{5}$

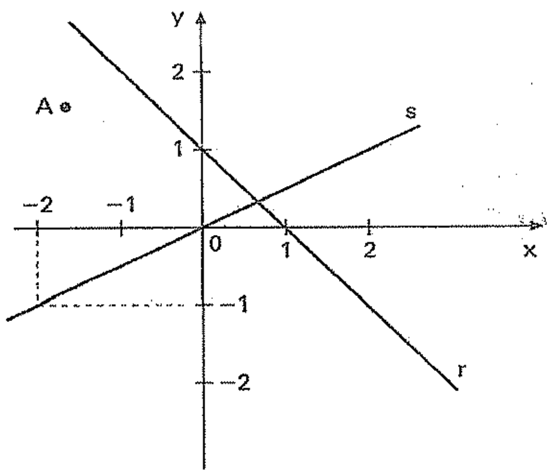
b) $\dfrac{12}{5}$

c) $\dfrac{18}{5}$

d) 4

e) 5

14 (FUVEST-SP) Na figura a seguir, A é um ponto do plano cartesiano , com coordenadas (x,y).



Sabendo que A está localizado abaixo da reta **r** e acima da reta **s**, tem-se:

a) $y < \dfrac{x}{2}$ e $y < -x+1$

b) $y < \dfrac{x}{2}$ e $y > -x+1$

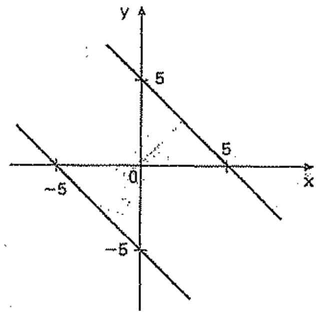
c) $\dfrac{x}{2} < y$ e $y > -x+1$

d) $-x+1 < y < \dfrac{x}{2}$

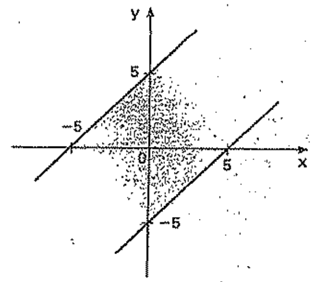
e) $\dfrac{x}{2} < y < -x+1$

15 (FGV-SP) A representação gráfica da sentença $|x|+|y| \leq 5$ é:

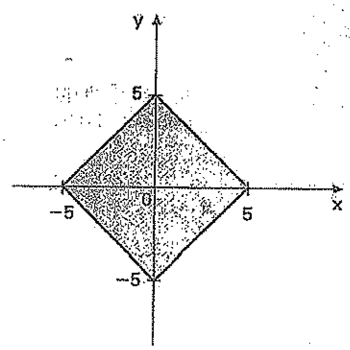
a)



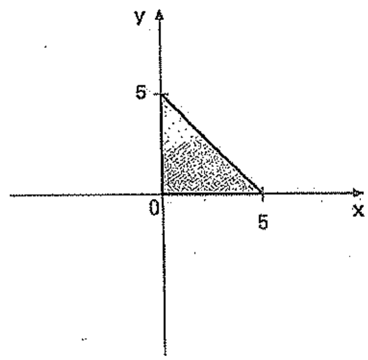
b)



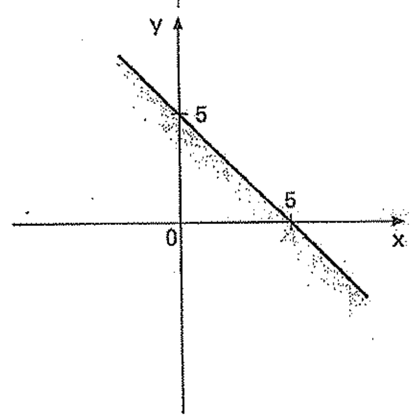
c)



d)



e)



16 (UFMG) A equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas de equações y=x e y=2x é:

a) $y=\frac{1+\sqrt{10}}{3}x$

b) $y=\frac{2+\sqrt{10}}{3}x$

c) $y=\frac{1+\sqrt{5}}{3}x$

d) $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$

e) $y=\frac{3}{2}x$

17 (U.F.RN) De acordo com a figura abaixo, a distancia entre os pontos A e B vale:

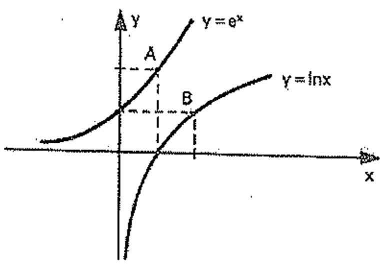
a) $\sqrt{2}\ e$

b) $2\sqrt{e}$

c) $\sqrt{2}\ (e-1)$

d) $\sqrt{2}\ (1-e)$

e) $\sqrt{2}\ e-1$



18 (U.F.MG) Seja P=(a,1) um ponto da reta r da equação $4x-2y-2=0$. A equação da reta s que passa por P e é perpendicular a r é:

a) $x+2y-3=0$

b) $x-2y+0=0$

c) $2x-y=0$

d) $2x+y-3=0$

e) $2x+y+3=0$

19 (U.E.CE) Se as alturas do triângulo de vértices nos pontos $p_1(6,-6), p_2(6,4)$

e $p_3(-10,2)$ se interceptam no ponto (n_1,n_2),

então n_1+n_2 é igual a:

a)6
b)7
c)8
d)9

20 (U.F.SE) A equação da mediatriz do segmento de extremos nos pontos (-2,1) e (0,-1) é:

a) $y=x-1$

b) $y=x+1$

c) $y=x$

d) $y=-x+1$

e) $y=-x-1$

21 (F.C.STA.CASA) O simétrico do ponto (-1,1), em relação à reta de equação y=2x, é o ponto:

a)(-7,1)

b) $\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$

c) $\left(-\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$

d) $\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)$

e)(7,-1)

22 (EAESP-FGV) Sabendo que o ΔABC é um triângulo retângulo (B=90°), calcular as coordenadas do vértice C.

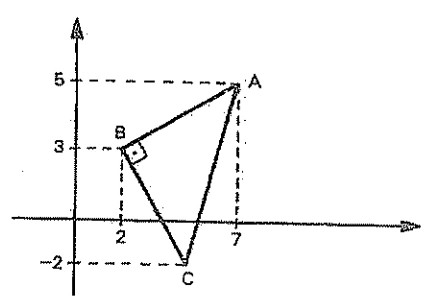
a)5,-2

b) $3\frac{1}{2},-2$

c)4,-2

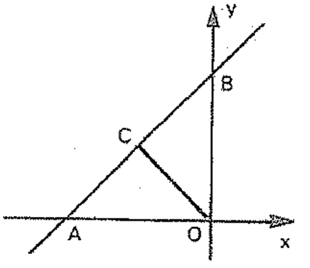
d) $4\frac{1}{2},-2$

e)n.d.a.



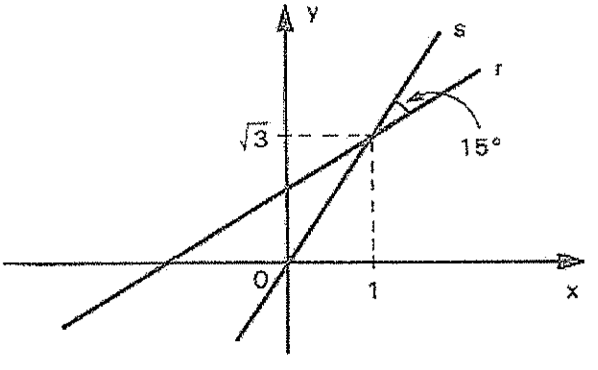
23 (FUVEST) Na figura abaixo o ângulo $O\hat{c}A$ mede 90°, o ângulo $C\hat{O}A$ mede 45° e o segmento OC mede $\sqrt{2}$.
A equação da reta AB é:

a) $x+y-2=0$
b) $x+y-1=0$
c) $x-y+2=0$
d) $x-y+1=0$



24 (U.F.MG) Observe o gráfico onde estão representadas as retas r e s.
A equação da reta r é:

a) $x-y+1-\sqrt{3}=0$
b) $\sqrt{3}x-3y=0$
c) $x-y+\sqrt{3}-1=0$
d) $\sqrt{2}x-2y+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=0$
e) $\sqrt{2}x-2y+\left(2-\sqrt{6}\right)=0$



25 (U.C.SALVADOR) Considere o triângulo de vértices A=(0;0), B=(1;4) e C=(4;1). Sua altura em relação à base $\overline{BC}$ mede:

a) $2\sqrt{2}$
b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
c) 4
d) $4\sqrt{2}$
e) $5\sqrt{2}$

26 (ITA) Considere a reta (r) mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta $2x-3y+7=0$ intercepta os eixos coordenados. Então a distancia do ponto $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right)$ à reta (r) é:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{4}{\sqrt{13}}$
c) $3\sqrt{13}$
d) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$
e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

27 (FGV) As retas cujas equações são $(r)\,x+3y=5$ e $(s)\,x+3y=0$ são paralelas. A distância entre elas vale:

a) $\frac{9\sqrt{2}}{8}$
b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\sqrt{10}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

28 (U.F.MG) As retas perpendiculares à reta de equação $3x+4y-9=0$ que distam 4 unidades da origem são:

a) $4x-3y=5$ e $4x-3y=-5$

b) $4x-3y=20$ e $4x-3y=-20$

c) $4x-3y=4$ e $4x-3y=-4$

d) $3x+4y=10$ e $3x+4y=-10$

e) $4x-3y=10$ e $4x-3y=-10$

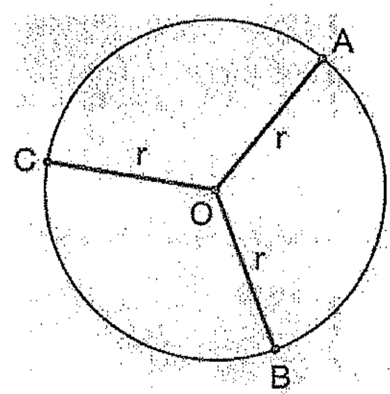
29 (U.F.MG) A área do triângulo limitado pelas retas $4x+5y-20=0, y=0$ e $x=0$ é:

a)4
b)5
c)10
d)16
e)20

2 - ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

1. DEFINIÇÃO

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano, equidistantes de um ponto fixo O chamado centro da circunferência.

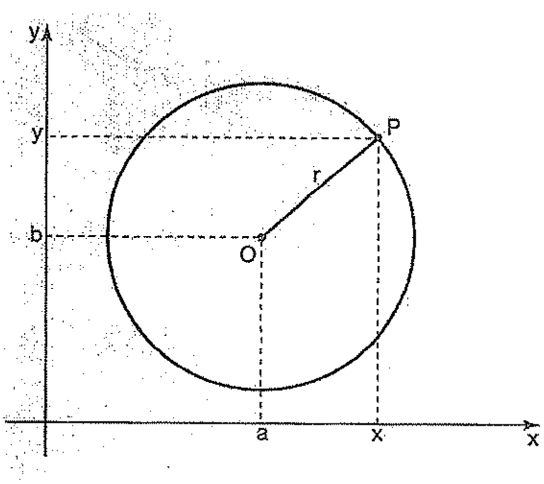


$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$ (raio da circunferência)

2. Equação reduzida

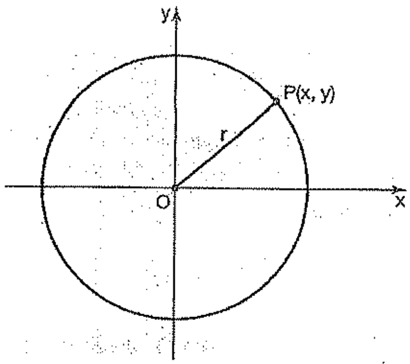
Uma circunferência de centro O (a, b) e raio r tem equação reduzida.

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$



Se o centro O coincidir com a origem, temos:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$



3. Equação geral ou equação normal

Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência, obtemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

Em que:

$$\begin{cases} A = -2a \\ B = -2b \\ C = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$$

Observação:

A equação do 2° grau

$$\boxed{x^2 + y^2 + k \cdot xy + Ax + By + C = 0}$$

Será a equação de uma circunferência de centro C (a, b) e raio r se, e somente se:

✓ Os coeficientes de x^2 e y^2 forem iguais e não-nulos;
✓ Não existir o termo em xy, isto é, k=O;

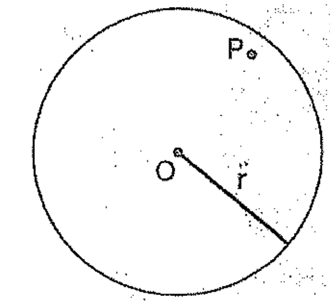
Se $A^2 + B^2 - 4C > O$, temo suma circunferência de raio r.

Se $A^2 + B^2 - 4C = O$, temo suma circunferência de raio nulo, isto é, um ponto.

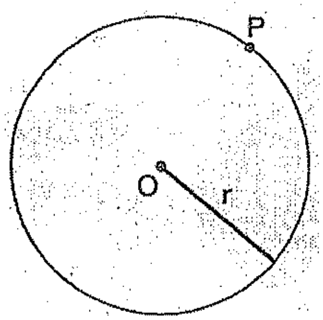
Se $A^2 + B^2 - 4C < O$, não existe circunferência, isto é, r < O.

4. Posições relativas

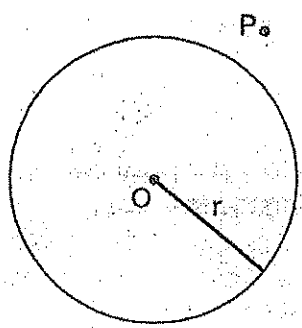
· **Ponto e circunferência**



$\boxed{d(P,O) < r}$
P é interno

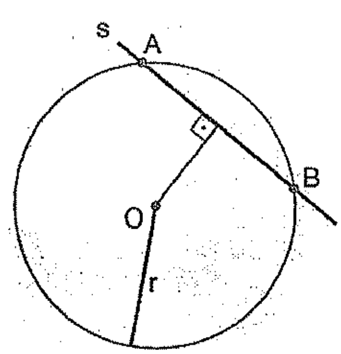


$\boxed{d(P,O) = r}$
P pertence à circunferência.

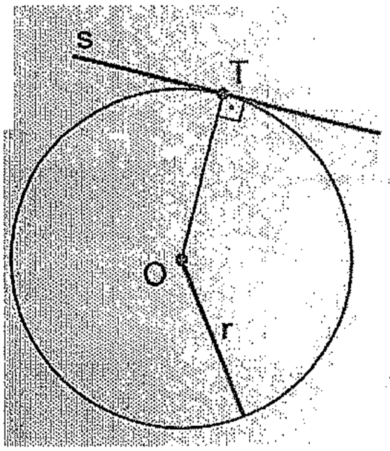


$\boxed{d(P,O) > r}$
P é externo.

· Reta e circunferência

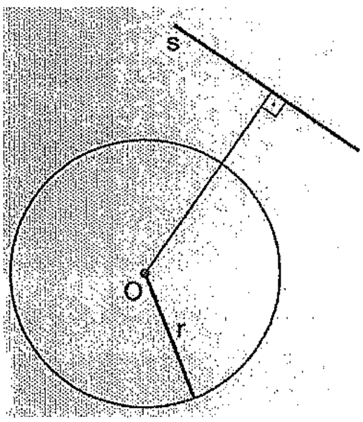


$\boxed{d(O,s) < r}$
s é secante



$\boxed{d(O,s)=r}$

s é tangente



$\boxed{d(O,s)>r}$

s é exterior

Observação:

Podemos, também, determinar a posição relativa de uma reta e uma circunferência procurando os pontos de intersecção da reta com a circunferência.

Isto se consegue resolvendo o sistema formado pelas equações da reta e da circunferência:

$$\begin{cases} ax+by+c=O \\ x^2+y^2+Ax+By+C=0 \end{cases}$$

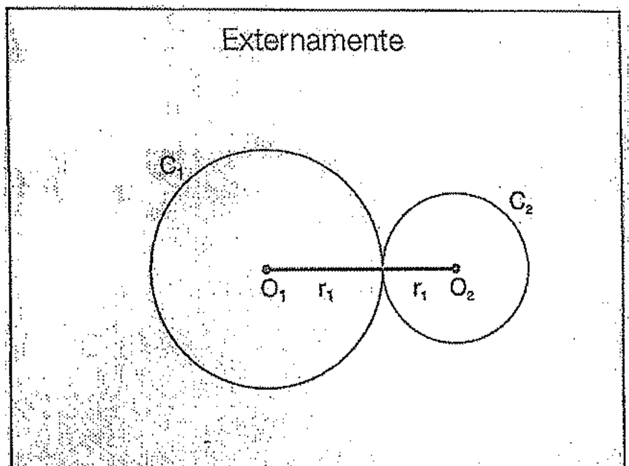
Como a resolução envolve uma equação do 2° grau, temos:

$$\Delta>0 \Rightarrow \text{secantes } (2 \text{ pontos comuns})$$
$$\Delta=0 \Rightarrow \text{tangentes}(1 \text{ ponto comum})$$
$$\Delta<0 \Rightarrow \text{exteriores}(\text{nenhum ponto comum})$$

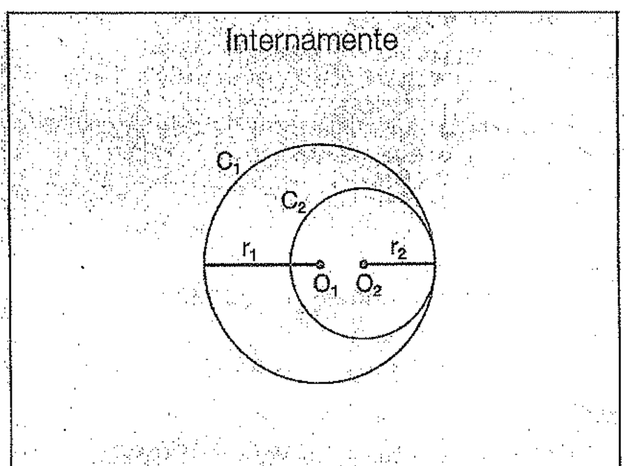
· **Duas circunferências**

Temos os seguintes casos:

1) C_1 e C_2 são tangentes.

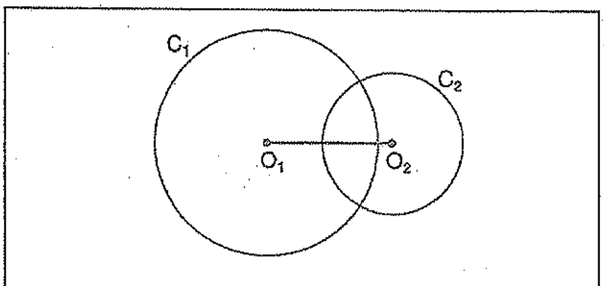


$d(O_1, O_2) = r_1 + r_2$



$d(O_1, O_2) = |r_1 - r_2|$

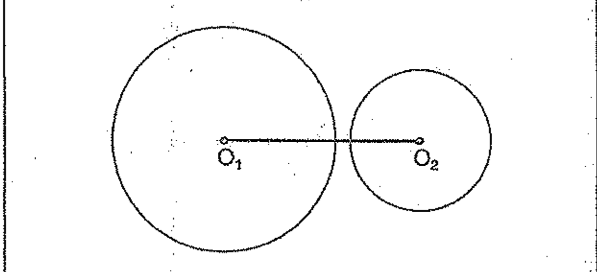
2) C_1 e C_2 são secantes



$$r_1 - r_2 < d(O_1, O_2) < r_1 + r_2$$

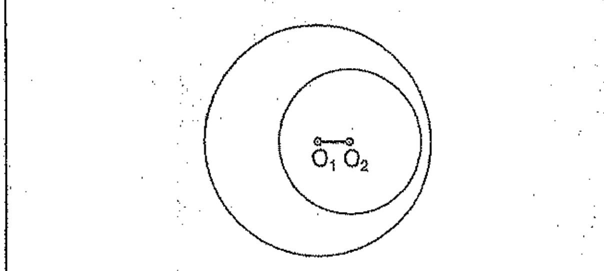
3) C_1 e C_2 não se interceptam.

Externamente



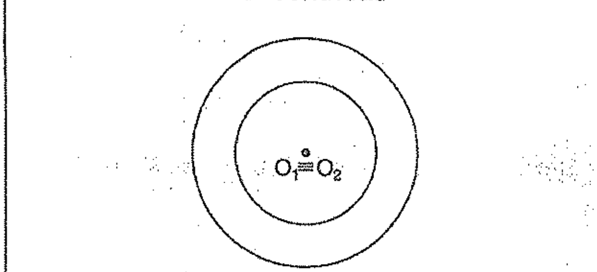
$$d(O_1, O_2) > r_1 + r_2$$

Internamente



$$d(O_1, O_2) < r_1 - r_2$$

Concêntricas



$$d(O_1, O_2) = 0$$

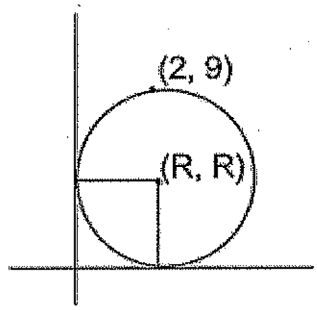
Observação:

Podemos determinar os pontos de intersecção de duas circunferências, C_1 e C_2, resolvendo o sistema formado pelas duas equações dessas circunferências.

Exercícios Comentados

01 Determine a equação da circunferência tangente aos eixos de que passa pelo ponto (2,9)

Resolução:



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$

Subistituindo o ponto (2,9) = $(2 - r)^2 + (9 - r)^2 = r^2$

Resolvendo a equação acima temos

$r = 5$ ou $r = 17$

Logo: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ ou
$(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 289$

02 Determine o centro e o raio de circunferência $x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$

Resolução: $-2a = -2 \rightarrow a = 1$

$-2b = 1 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$ logo $C\left(1, \frac{-1}{2}\right)$

Sabe-se que $a^2 + b^2 - r^2 = -1$

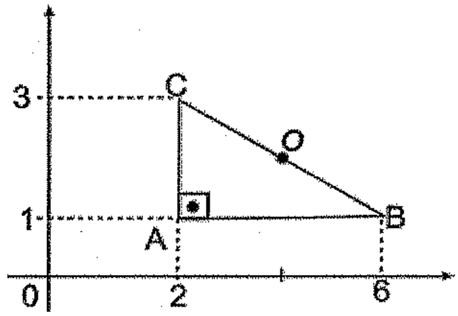
$(+\frac{1}{4}\ r^2 = -1$

$r = \frac{3}{2}$

03 Obtenha a equação de circunferência circunscrita ao triângulo de vértices A = (2, 1), B = (6,1) e C = (2,3).

Resolução:

Inicialmente devemos perceber que o triângulo ABC é retângulo em A.



Logo, ele inscritível numa circunferência de diâmetro BC.

♦ Ocentro O é ponto médio de $\overline{BC}$.

$\therefore\ O = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{1+3}{3}\right) \Rightarrow O = (4,2)$

♦ O raio é a distância OB.

r = OB

$r = \sqrt{(6-4)^2 + (2-1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{5}$

Assim, a equação procurada é:

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$

04 Considere um ponto P = (x,y) variável e os pontos fixos A = (2, 1) e B = (-4, 5) que satisfazem a condição:

$(PA)^2 + (PB)^2 = 40$

a) Obtenha a equação do lugar geométrica definido por essa condição.

b) Verifique que esse lugar geométrico é uma circunferência e determine seu cento e seu raio.

Resolução:

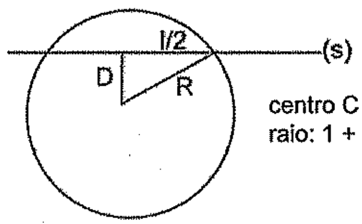
a) $[(x-2)^2 + y - 1)^2] + [(x+4)^2 + (y-5)^2] = 40$
$[x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1] +$
$+[x^2 + 8x + 16 + y^2 - 10y + 25] = 40$
$2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 6 = 0 :(2)$
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$

b) $(x2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -3 + 1 + 9$
$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 7$

A equação obitida representa a circunferência de centro (-1, 3) e raios igual a $\sqrt{7}$

05 Qual o compunente da corda qua a reta (s) 7x-24y - 8 = 0 determine na circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

Resolução:



centro C (1, - 3)
raio: $1 + 9 - r^2 = -15$
$r = 5$

$$D = \left|\frac{7(1) - 24(-3) - 4}{\sqrt{49+576}}\right| = 3$$

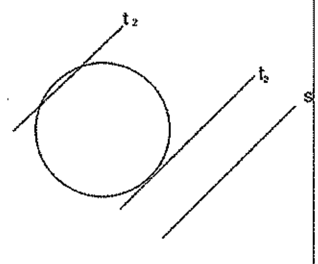
Por pitágora: $\frac{l^2}{4} + 9 = 25$

$\boxed{l = 8}$

06 Determinar as equações das reta t que são paralelas a (s) 12 x + 5y + 1 = 0 e tangentes a
$(\lambda)\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

Resolução:

Centro (1,2)
Raio: $1 + 4 - r^2 = -20$
R = 5



reta t: 12 x + 5y + c = 0

$$dct = r = \left|\frac{12.1 + 5.2 + c}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\right| = 5$$

$|c + 22| = 65$ ⟨ $c + 22 = 65 \longrightarrow c = 43$; $c + 22 = -65 \longrightarrow c = -87$

resp: 12 x + 5y + 43 = 0 ou 12x + 5y - 87 = 0

Exercícios de Sala

01 O centro de uma circunferência tangente ao eixo Ox tem abscissa 6. Determine a equação dessa circunferência sabendo que ela passa pelo ponto P = (4, 1).

02 Verifique, dentre as equações seguintes, quais representam uma circunferência. Em caso afirmativo, determine o centro e o raio dela.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$
d) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y - 11 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 3xy - 2x + 6y - 1 = 0$

03 (Cesgranrio-RJ) Uma equação de circunferência de centro (- 3, 4) e que tangencia o eixo Ox é:

a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$
b) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$
c) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$
d) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$
e) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$

04 O ponto P = (1, 2) pertence a uma circunferência de centro C = (4, - 2). Também pertence a essa circunferência o ponto:

a) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
b) (7,0)
c) (4, - 8)
d) (0, - 5)
e) $\left(4, \frac{7}{2}\right)$

05 Obtenha a equação da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, sendo A = (-5, 2) e B = (1, 6).

06 (ITA-SP) Uma circunferência passa pelos pontos A = (0, 2), B = (0, 8) e C = (8,8). Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são:

a) (0,5) e 6
b) (5, 4) e 5
c) (4, 8) e 5,5
d) (4, 5) e 5
e) (4,6) e 5

07 (FGV-SP) No plano cartesiano, a circunferência que passa pelo ponto P(1, 3) e é concêntrica com a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ tem a seguinte equação:

a) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 40 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 3x + 4y - 25 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 19 = 0$

08 Um triângulo equilátero está inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 10 = 0$.

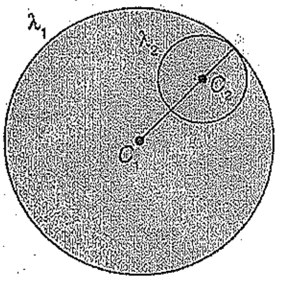
Obtenha a equação da circunferência iscrita nesse triângulo.

09 (Fuvest-SP) O segmento AB é diâmetro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10y$. Se A é o ponto (3, 1) então B é o ponto

a) (- 3, 9)
b) (3,9)
c) (0,10)
d) (-3, 1)
e) (1, 3)

10 A circunferência λ_1 tem equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 44 = 0$.

A circunferência λ_2 tem centro C_2 = (-1, - 3) e tangencia λ_1, internamente. Qual é a equação λ_2?



11 Determine k, para que a equação

$x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente uma circunferência de raio 7.

12 A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y + m = 0$ é tangente ao eixo Ox. Então m é igual a:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Curso Preparatório CIDADE

Exercícios de Casa

01 (VUNESP-SP) A equação da circunferência que tem centro no ponto C = (2, 1) e que passa pelo ponto P = (0, 3) é dada por:

a) $x^2 + (y - 3)^2 = 0$
b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
c) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$
d) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$
e) $x^2 + (y - 3)^2 = 8$

02 (MACK-SP) O raio da circunferência que passa pelos pontos (1, 3) e (3, 1) e que tem centro na reta x - 4 = 0, é:

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{10}$
d) $2\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{5}$

03 (FUVEST-SP) Os pontos A = (0,0) e B = (3, 0) são vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD situado no primeiro quadrante. O lado AD é perpendicular à reta y = - 2x, e o ponto D pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$. Então, as coordenadas de C são:

a) (6, 2)
b) (6, 1)
c) (5, 3)
d) (5, 2)
e) (5, 1)

04 (VUNESP-SP) O comprimento da corda que a reta y = x determina na circunferência $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$ é:

a) 4
b) $4\sqrt{2}$
c) 2
d) $2\sqrt{2}$
e) $\sqrt{2}$

05 (FUVEST-SP) Qual das equações a seguir representa a circunferência de centro (2, -1) tangente à reta de equação y = - x + 4?

a) $9(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 2$
b) $2(x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 9$
c) $2(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 = 9$
d) $4(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 9$
e) $4(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 9$

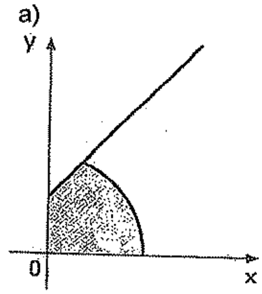
06 (CESGRANRIO-RJ A reta do plano xOy, que passa pela origem O e é tangente à circunferência $(x - 2)2 + y - 2)^2 = 8$, é:

a) y = x
b) y = - x
c) x = 0
d) y = 0
e) y = - 2x

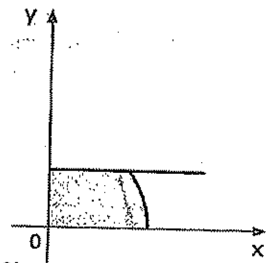
07 (FUVEST-SP) Das regiões hachuradas na sequência, a que melhor representa o conjunto dos pontos (x, y), do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto dos pontos (x,y), do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto das desigualdades

$x \geq 0, y \geq 0, x - y + 1 \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 9$ é:

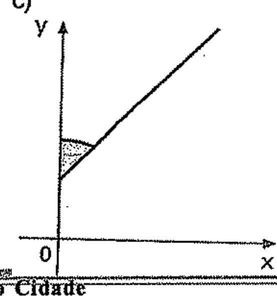
a)



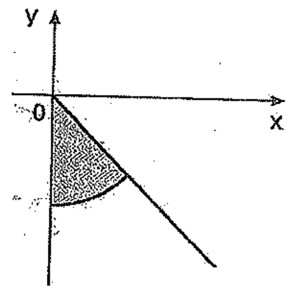
b)



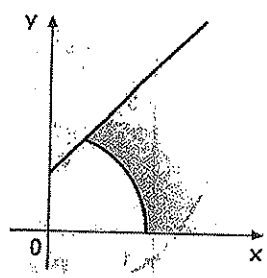
c)



d)



e)



08 (VUNESP-SP) Seja

$S = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 9\}$ uma região do plano. A área de S é:

a) 5
b) 7
c) 5π
d) 7π
e) $7\pi^2$

09 (MACK - SP) Supondo π = 3, os pontos (x, y) do plano tais que $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ x^2 + y^2 \leq 2y \end{cases}$ definem uma região cuja área é:

a) 2,5
b) 2,0
c) 1,5
d) 1,0
e) 0,5

10 (ITA-SP) As circunferências $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4y$ possuem em comum o ponto P, distinto da origem. Obtenha uma equação da reta tangente à primeira circunferência no ponto P.

a) $5x + 10y = 16$
b) $5x + 15y = 20$
c) $5x + 5y = 12$
d) $3x + 4y = 8$
e) $10x + 5y = 20$

11 (FGV-SP) Resolvendo o sistema de equações a seguir: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62 \\ x^2 - y^2 + x - y = 50 \end{cases}$ chegaremos a:

a) Infinitas soluções.
b) Um par (x,y) único de solução.
c) Dois pares (x,y) de solução.
d) Quatro pares (x,y) de solução.
e) Não tem solução.

12 (MACK - SP) Sendo t um número real, então o conjunto dos pontos (x, y) do plano, tais que $x = 2\cos^2 t$ e $y = 3\,\text{sen}^2 t$, é:

a) Um segmento de reta.
b) Uma circunferência.
c) Uma parábola.
d) Uma reta de coeficiente angular negativo.
e) Uma reta de coeficiente angular positivo.

13 (U. F. PA) Qual das equações abaixo é a equação de uma circunferência?

a) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 4y = 64$
d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -4$
e) $x^2 + 2xy + y^2 = 3^2$

14 (PUC-SP) A distância dos centros das circunferências de equações $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - y - 1 = 0$ é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

e) $\sqrt{5}$

15 (ITA) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 28 = 0$ que tem ordenada máxima é:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, -\frac{9}{2}\right)$

b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}, -1)$

c) $\left(-\frac{3}{10}, -1\right)$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, -2\right)$

e) (-2, -4)

16 (U. F. UBERLÂNDIA) A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ à bissetriz do 1° e 3° quadrantes vale:

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3/2}$

e) $\sqrt{2/2}$

17 (FATEC) Na figura abaixo, A e B são os pontos de interseção da reta de equação: $3y - x = 5$ com a circunferência de equação: $x^2 + y^2 = 25$. O ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$ é:

a) (-1, 2)

b) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

c) $\left(-1\frac{3}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

e) (-1, 1)

18 (FATEC) O quadrado ABCD está inscrito numa circunferência de centro na origem, seus lados são paralelos aos eixos coordenados, o vértice A pertence ao primeiro quadrante e o vértice C pertence à reta de equação $2y = -\sqrt{3}$. A equação da reta perpendicular à diagonal $\overline{AC}$ "pelo ponto A é:

a) $y + x - 3 = 0$

b) $y + x - \sqrt{3} = 0$

c) $y - x + 3\sqrt{2} = 0$

d) $2y + 2x - \sqrt{3} = 0$

e) $2y + x - 3\sqrt{3} = 0$

19 (U. F. BA) Na figura ao lado, C é a circunferência. Seja r a reta que passa pelo ponto P, formando um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ com o eixo das abscissas. Assim, pode-se afirmar que r:

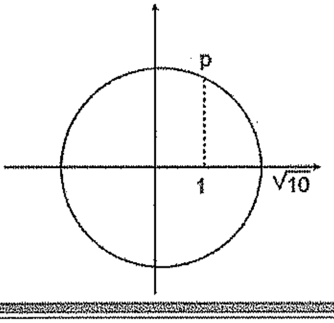
a) É tangente a C.

b) Intercepta C nos pontos P e (2, 2).

c) Intercepta C nos pontos P e (3, 1).

d) Intercepta o eixo das abscissas em $\sqrt{10}$.

e) Interceptao eixo das ordenadas em $\sqrt{10}$.



20 (U. C. SALVADOR) A circunferência λ tem equação $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$. A reta t é tangente a λ no ponto (1; 0). A equação de t é:

a) $x = 1$

b) $y = 1$

c) $x + y = 1$

d) $3x - y = 2$

e) $-x - y = 1$

21 (ITA) A equação da reta t, tangente à circunferência de raio r no ponto P, conforme figura abaixo é dada por:

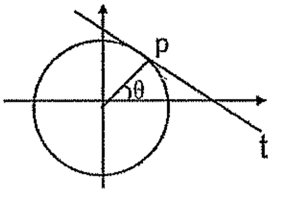
a) $x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta = r$

b) $x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta = -r$

c) $x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta = -r$

d) $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = r$

e) $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = -r$



22 (FUVEST) Qual das equações abaixo representa a circunferência de centro (2, -1) tangente à reta de equação $y = -x + 4$?

a) $9(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 2$

b) $2(x + 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 9$

c) $2(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 = 9$

d) $4(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 9$

e) $4(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 9$

23 (U. F. PR) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 25 = 0$, no ponto P(3, 4), é:

a) $-3x + 4y - 7 = 0$

b) $3x + 4y + 25 = 0$

c) $3x - 4y + 7 = 0$

d) $4x + 3y - 24 = 0$

e) $3x + 4y - 25 = 0$

24 (U. FORTALEZA) Considere as circunferências $x^2 + y^2 = 25$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Podemos afirmar que elas são:

a) Secantes.

b) Tangente interiores.

c) Concêntricas.

d) Tangentes exteriores.

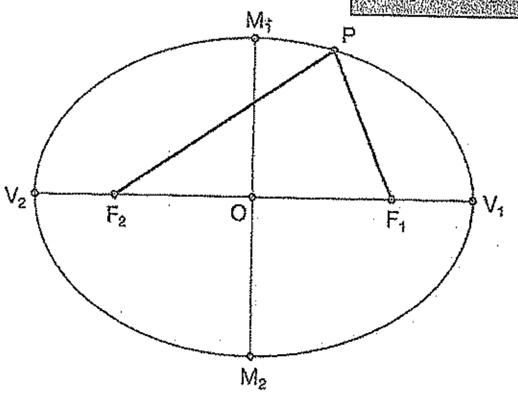
3- CÔNICAS

1. Estudo da elipse

1.1. Definição

Dados dos pontos F_1 e F_2 (focos) e um segmento de medida 2a, denomina-se elipse o lugar geométrico dos pontos do plano, tais que:

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}$$

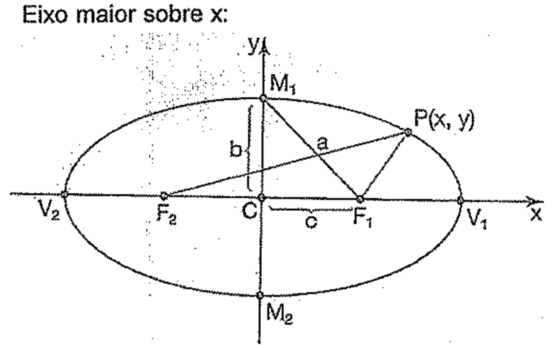


Em que:

Os pontos fixos F_1 e F_2 são os focos da elipse; o ponto O, ponto médio do segmento F_1F_2, é o centro da elipse; a distância de F_1 a F_2 chama-se distância focal; os ponto V_1 e V_2 são chamados vértices da elipse; o segmento $V_1 V_2$ é o eixo maior da elipse; o seguimento $M_1 M_2$ é o eixo menor da elipse.

1.2. Estudo analítico

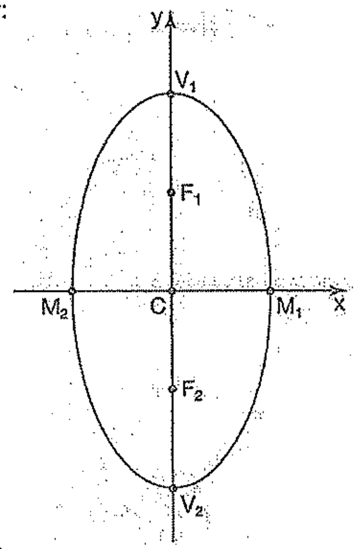
Eixo maior sobre x:



Equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ com a > b

Eixo maior sobre y:



Equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$ com a > b

Em qualquer caso a relação entre os coeficientes é:

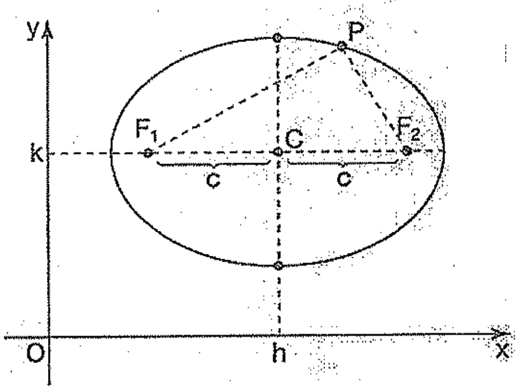
$$\left.\begin{array}{lll} \text{Eixo maior:} & \overline{V_1V_2} & = 2a \\ \text{Eixo menor} & \overline{M_1M_2} & = 2b \\ \text{Distância focal:} & \overline{F_1F_2} & = 2c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

A excentricidade da elipse é o número e, tal que:

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

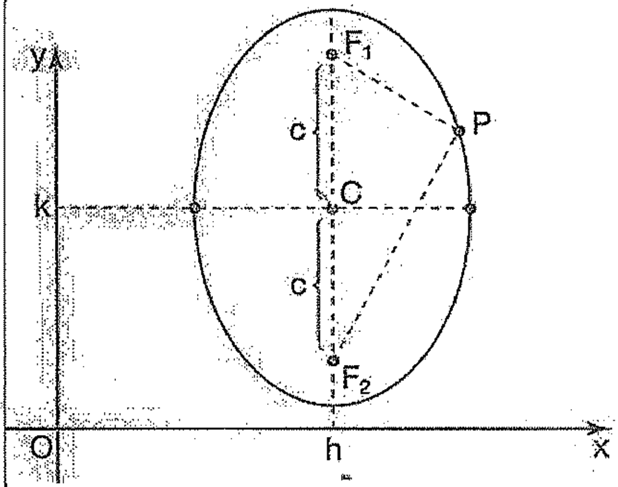
Observações:

1ª) Eixo maior da elipse paralelo ao eixo x:



$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ a > b}$$

2ª) Eixo maior da elipse paralelo ao eixo y:

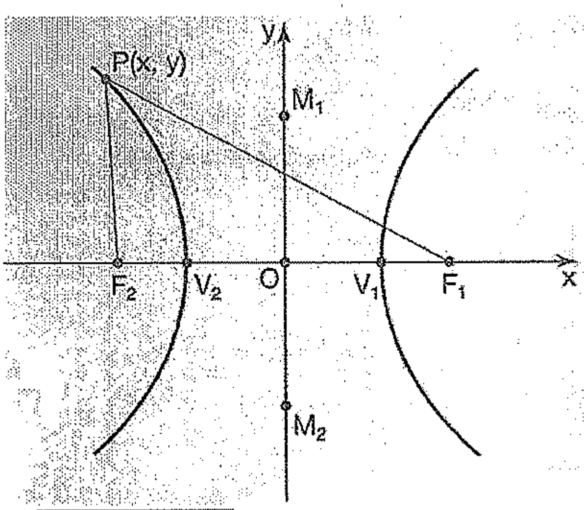


$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,\ a>b}$$

2. Estudo da hipérbole

2. 1 Definição

Dados dois pontos F_1 e F_2, denomina-se hipérbole o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença, em módulo, das distâncias a F_1 e a F_2, é constante e menor que a distância entre esses dois pontos dados:

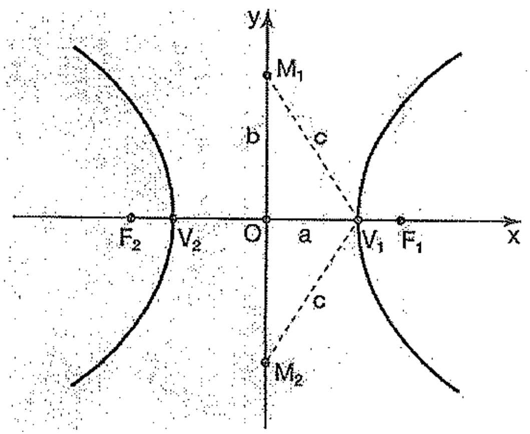


$$\boxed{|PF_1 - PF_2| = 2a}$$

Em que:os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole; o ponto O médio do segmento F_1F_2 é o centro da hipérbole; V_1 e V_2 são os vértices da hipérbole; o segmento V_1V_2 é chamado eixo imaginário.

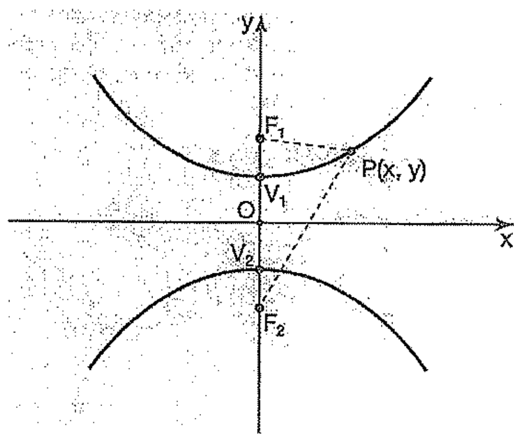
2. 2 Estudo analítico

Focos sobre o eixo x:



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Focos sobre o eixo y:



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

A relação entre os coeficientes é dada por:

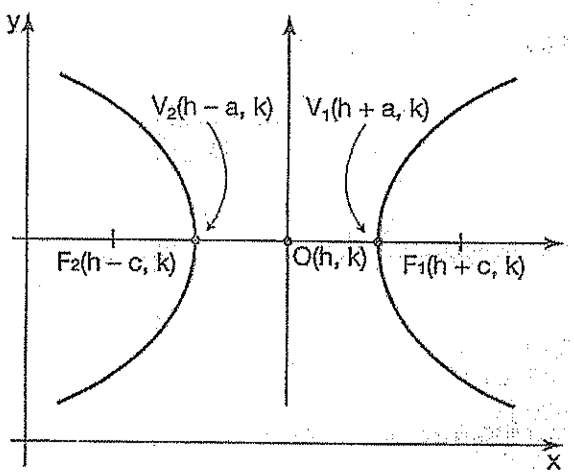
$$\left.\begin{aligned}\overline{F_1F_2} &= 2c\\ \overline{V_1V_2} &= 2a\\ M_1M_2 &= 2b\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

A excentricidade da hipérbole é dada por:

$$\boxed{c = \frac{c}{a}}$$

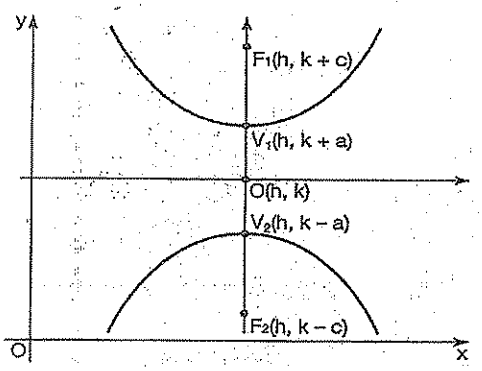
Observações:

1ª) Hipérbole de centro O(h, k) e eixo real paralelo ao eixo x:



$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

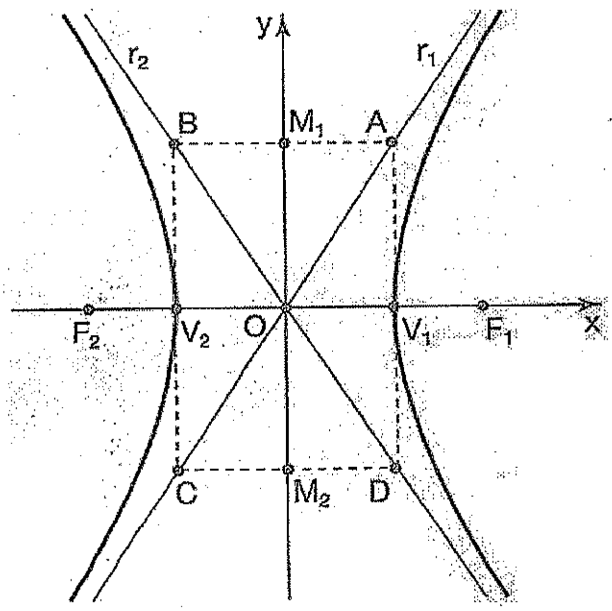
2ª) Hipérbole de centro (h,k) e eixo real paralelo ao eixo y:



$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$

2. 3 Assíntotas da hipérbole

As retas r_1 e r_2 que contêm as diagonais do retângulo da figura são denominadas assíntotas da hipérbole.



Equação de r1:

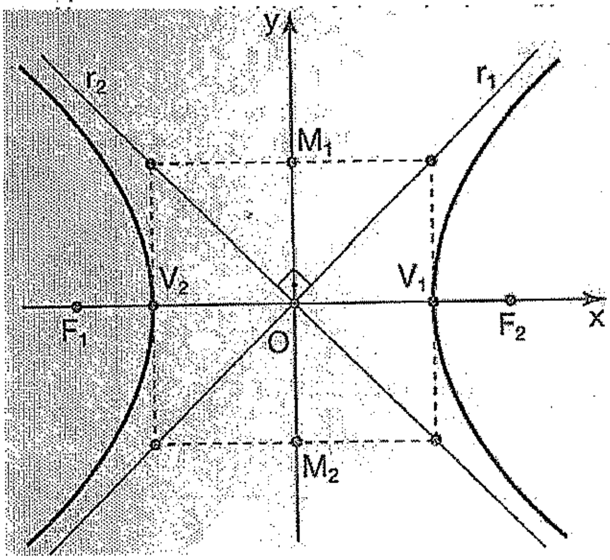
$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & b & 1\\ -a & -b & 1\end{vmatrix} = O$$

Equação de r2:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ -a & b & 1\\ a & -b & 1\end{vmatrix} = O$$

Observaçaõ:

Se tivermos a = b, o retângulo ABCD se transforma num quadrado e as assíntotas tornam-se perpendicula-



Equação de r_1: $\boxed{y = x}$

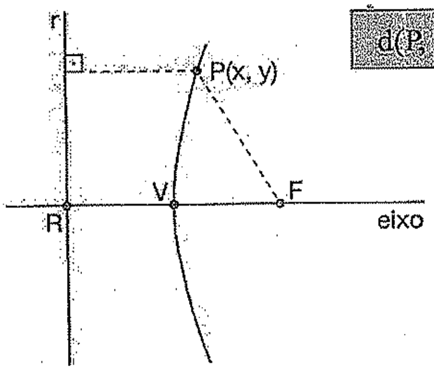
Equação de r_2: $\boxed{y = -x}$

15. Estudo da parábola

Definição

É o conjunto dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta r do plano.

$$\boxed{d(P, F) = d(P, r)}$$



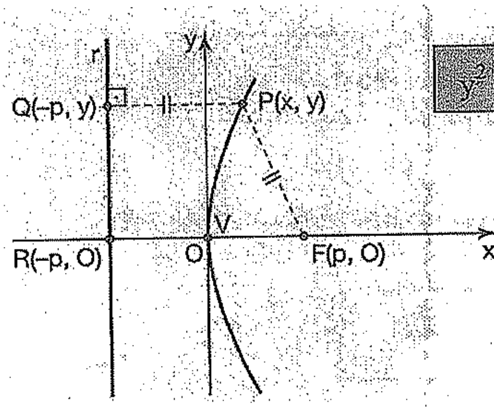
Em que:

o ponto fixo F é o foco da parábola; a reta fixa r é chamada diretriz da parábola; a reta que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz chama-se eixo ou eixo de simetria da parábola; o ponto V chama-se vértice da parábola; a distância do foco F ao vértice V é indicado por p; o ponto V é o ponto médio do segmento FR

3. 2Estudo analítico

Eixo de simetria sobre x:

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

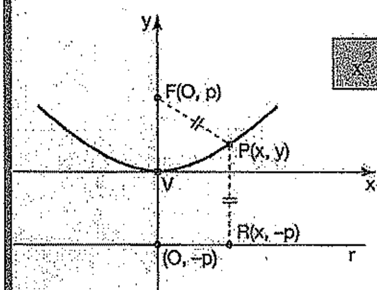


Se:

$p > 0 \Rightarrow$ concavidade para a direita
$p < 0 \Rightarrow$ concavidade para a esquerda

Eixo de simetria sobre y:

$$\boxed{x^2 = 4py}$$



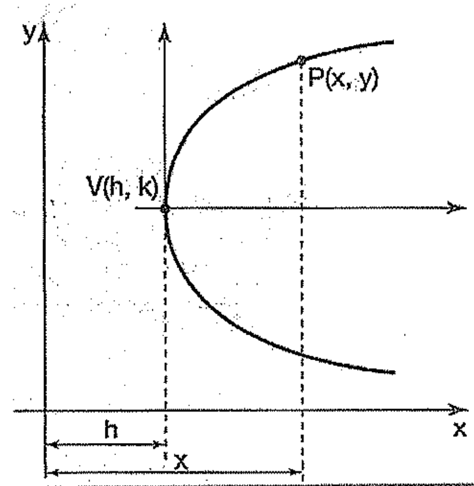
Se:

$p > 0 \Rightarrow$ concavidade para a direita
$p < 0 \Rightarrow$ concavidade para a esquerda

Observações:

1ª) Parábola de vértice V(h, k) e eixo de simetria horizontal:

Equação:



$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

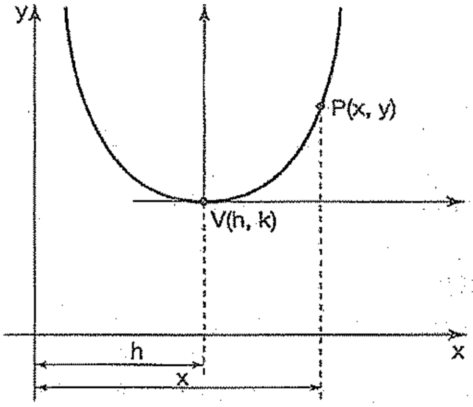
Diretriz:

$x = h - p$

Coordenadas do foco:

$F(h + p, k)$

2ª) Parábola de vértice V(h, k) e eixo de simetria vertical:



Equação:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Deretriz: $y = k - p$

Coordenadas do foco:

$F(h, k + p)$

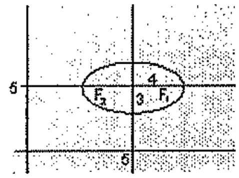
Exercícios Comentados

01 Determine o centro e focos de cônica $9x^2 + 16y^2 - 90x - 160y + 481 = 0$.

Resolução: Calculando na equação reduzida:

$9(x^2-10x) + 16(y^2-10y) = -481$
$9(x^2-10x) + 25 - 25) + 16(y^2-10y + 25 - 25) = -481$
$9(x-5)^2 - 22\,5 + 16(y-5)^2 - 400 = -481$
$9(x-5)^2 - 22\,5 + 16(y-5)^2 - 400 = -481$
$9(x-5)^2 + 16(y-5)^2 = 144$

$$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$$



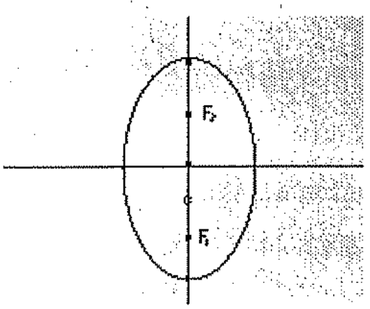
$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$
$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$
$a^2 = b^2 + c^2$

$c = \sqrt{7}$ $F_1(5 + \sqrt{7}, 5)$ e $F^2(5 - \sqrt{7}, 5)$

02 Qual é a equação do conjunto de pontos p(x,y) cuja soma das distâncias a $F_1(0, -5)$ e $F_2(0,5)$ é 68?

Resolução:

Esse conjunto de pontos é uma elipse de centro na origem.



Logo: $2a = 68 \rightarrow a = 34$ e $x = 5$

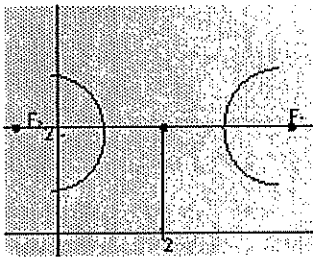
Então: $a^2 = b^2 + c^2$
$b = \sqrt{1131}$

A equação é: $\dfrac{x^2}{1131} + \dfrac{y^2}{1156} = 1$

03 Obter o centro os focos e a excentricidade da cônica:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

Resolução: Centro (2,2)



$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

$b^2 = 7 \rightarrow b = \sqrt{7}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = 4$

$F_1(6,2)$

$F_2(-2,2)$

$$C = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

04 Caracterize a cônica de equação $x = \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} + \frac{5}{4}$

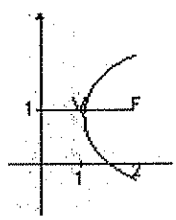
Resolução:

$4\,x = y^2 - 2y + 5$
$y^2 - 2y = 4\,x - 5$
$y^2 - 2\,y + 1 - 1 = 4\,x - 5$
$(y - 1)^2 = 4\,x - 4$
$(y - 1)^2 = 4\,(x - 1)$

Parábola de vertice V(1,1)

Parâmetro: 2 p = 4
p = 2

Foco: F(2,1)
Diretriz: x = 0

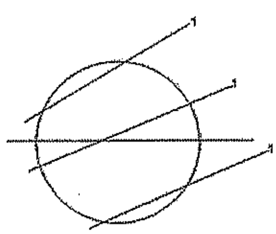


05 Obter os tangentes à elipse $2\,x^2 + 3y^2 = 6$ que são paralelas à reta $(r)\,y = x$

Resolução:

t: x - y + k = 0

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 6 \\ x - y + k = 0 \end{cases}$$



Resolvendo o sistema e fazendo $\Delta = 0$

$2\,x^2 + 3\,(x + k)^2 = 6$
$5\,x^2 + 6\,k\,x + 3k^2 - 6 = 0$
$\Delta = 36\,k^2 4,\ 5\,(3k^2 - 6) =$
$= -24\,k^2 + 120 = 0$
$k = \pm\sqrt{5}$

Resp: $x - y + \sqrt{5} = 0$ ou $x - y - \sqrt{5} = 0$

Exercícios de Sala

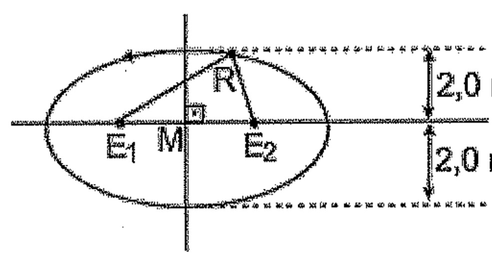
01 Considere a elipese de equação $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$ e seja p um ponto dessa elipse. A soma das distâncias de p aos focos vale:

a) 7
b) 6
c) $2\sqrt{13}$
d) 12
e) 14

02 A equação da circunferência com centro na origen e cujo raio é igual ao semi-eixo menor da alipse $x^2 + 4y^2 = 4$ é:

a) $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$
b) $x^2 + y^2 = 16$
c) $x^2 + y^2 = 4$
d) $x^2 + y^2 = 1$
e) n..r. a.

03 Haroldo, ao construir uma piscina, amarra as extremidades de uma corda de 6,0 m de comprimento nas estacas E_1 e E_2. Com o riscador R, estica a corda, de modo a obter o triângulo E_1RE_2. Deslizando o riscador R de forma que a corda fique sempre esticada e rente ao chão, obtém o contorno da piscina desenhado na figura abaixo:



Se M é o ponto médio de $\overline{E_1E_2}$, a distância entre as estacas é:

a) $\sqrt{5}$ m
b) $\sqrt{6}$ m
c) $2\sqrt{5}$ m
d) $2\sqrt{6}$ m
e) $6\sqrt{2}$

04 A equação 4x² + 16y² - 8x 64y + 4 = 0 representa uma elipse. As coordenadas de seus focos são:

a) $(1,2+2\sqrt{3})$ e $(1,2-2\sqrt{3})$
b) $(1,2\sqrt{3})$ e $(1,-2\sqrt{3})$
c) $(1,-2\sqrt{3},2)$ e $(1,+2\sqrt{3},2)$
d) $(2\sqrt{3},2)$ e $(-2\sqrt{3},2)$
e) n.r.a.

05 A equação da elipse que tem focos nos pontos (-1, 0) e (1,0) e contém o ponto $(1, \frac{15}{4})$ é:

a) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1$

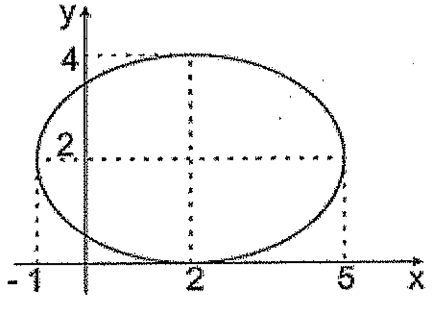
b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$

c) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{16}=1$

d) $\frac{64x^2}{17}+\frac{64y^2}{81}=1$

e) $\frac{12x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$

06 A equação da elipse da figura é:



a) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 36 = 0$
b) $9x^2 + 4y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$
c) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$
d) $4x^2 + 9y^2 - 36x - 16y + 16 = 0$
e) $4x^2 + 9y^2 - 18x - 8y + 8 = 0$

07 A reta $y = x + m$ intercepta a elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ se e somente se:

a) $m \geq \sqrt{5}$ *ou* $m \leq -\sqrt{5}$
b) $m \geq 0$
c) $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$
d) $-\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$
e) $m = \sqrt{5}$ *ou* $m = -\sqrt{5}$

08 Qual a distância entre os focos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$?

a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{7}$
e) $\sqrt{8}$

09 A equação de uma das assíntotas à hipérbole $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ *é*:

a) y = 2x - 1
b) y = 4
c) y = x
d) y = 2x +1
e) y = 2x

10 A cônica representada pela equação $3x^2 - 4y^2 + 8y - 16 = 0$ é:

a) parábola
b) hipérbole
c) elipse
d) circunferência
e) duas retas

11 O valor de b para o qual a reta y = x + b não intercepta os ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ é:

a) 2
b) $\sqrt{2}$
c) 1
d) 0
e) - 1

12 Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5},1)$; uma reta s tangente à hipérbole e paralela à y = 2x pode ser:

a) $y = 2x + 2\sqrt{3}$
b) $y = 2x - \sqrt{3}$
c) $y = 2x + 3\sqrt{3}$
d) y = 2x + 2
e) y = 2x + 3

Curso Preparatório CIDADE

13 A equação da parábola de foco F(0, 1) e diretriz de equação y + 1 = 0 é:

a) $y = ax^2$
b) $(y - 1)^2 = 4x^2$
c) $y = -\frac{1}{4}x^2$
d) $x^2 = 4y$
e) $y = -4x^2$

14 Num sistema cartesiano ortogonal, a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do eixo Oy e do ponto (4,0) é:

a) $y^2 = 8(x - 1)$
b) $y^2 = 4(x - 2)$
c) $y^2 = 4x - 2$
d) $y^2 = 8(x - 2)$
e) $y^2 = 2x - 1$

15 A distância do vértice da parábola $y = (x - 2)(x - 6)$ à reta $y = \frac{4}{3}x + 5$ é:

a) $\frac{72}{25}$
b) $\frac{29}{25}$
c) 43
d) $\frac{43}{25}$
e) $\frac{43}{5}$

16 Os valores de b para os quais a parábola $y = x^2 + bx$ tem um único ponto em comum com a reta $y = x - 1$ são:

a) - 1 e 3
b) - 1 e 2
c) - 3 e -1
d) 0 e - 3
e) 0 e 2

17 O lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias aos pontos fixos (-1, 0) e (1, 0) é sempre igual a 4, intercepta o eixo y em pontos de ordenadas:

a) 0 e 2
b) $\pm\sqrt{2}$
c) ± 3
d) $\pm\sqrt{5}$
e) $\pm\sqrt{3}$

18 As declividades das retas tangentes à parábola $y = x^2$ e que passam pelo ponto P(0, -2) são:

ESPCEX

a) $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$
c) $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{3}$ e $-2\sqrt{3}$

Exercícios de Casa

01 (CESESP) Dada a elipse de equação $25x^2 + 9y^2 - 90y = 0$, assinale a alternativa que nos indica corretamente as coordenada do centro, dos focos, as medidas do eixo maior e menor e a distância focal, respectivamente:

a) C(0, 0), F_1(0,-4), F_2(0, 4), 10, 6 8
b) C(0, 5), F_1(0, 1), F_2(0, 5), 4, 8, 6
c) C(3, 0), F_1(1, 0), F_2(5, 0), 10, 6, 3
d) C(5, 0), F_1(1,0), F_2(9, 0), 6, 8, 10
e) C(0, 5), F_1(0, 1), F_2(0, 9), 10, 6, 8

02 (F. C. M. STA. CASA) A equação $4x^2 + 16y^2 - 8x + 64y + 4 = 0$ representa uma elipse. As coordenadas de seus focos são:

a) (1, 2 + $\sqrt[2]{3}$) e (1, 2 - $\sqrt[2]{3}$)
b) 1, $\sqrt[2]{3}$) e (1, -$\sqrt[2]{3}$)
c) (1 - $\sqrt[2]{3}$,2) e (1 + $\sqrt[2]{3}$,2)
d) ($\sqrt[2]{3}$, 2) e (-$\sqrt[2]{3}$, 2)
e(n. d. a.

03 (PUC-SP) Um ponto *P* da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ dista 2 de um dos focos. Qual é a distância de *P* ao outro foco da elipse?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 7

04 (U. MACK) Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origen e passa pelo ponto $(\sqrt{5},1)$; uma reta s tangente à hipérbole e paralela a y = 2x pode ser:

a) $y = 2x + 2\sqrt{3}$
b) $y = 2x - \sqrt{3}$
c) $y = 2x + 3\sqrt{3}$
d) $y = 2x + 2$
e) $y = 2x + 3$

05 (CESESP) Considere o ramo da hipérbole

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, b < a$, no sistema xoy, com x > 0, e a reta r que contém ponto (a, 0) e é paralela à assíntota à hipérbole que tem inclinação positiva. Assinale, então, a única alternativa falsa.

a) A equação de r é dada por y = $\frac{b}{a}(x-a)$

b) A região compreendida por e e a assíntota considerada contêm todos os pontos (x,y) $\in R^2$ que satisfazem a equação do ramo da hipérbole considerado com y > 0.

c) A reta que contém o foco e é assintota considerada intercepta a hipérbole em apenas um ponto.

d) A elipse $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ tem apenas dois pontos em comum com a hipérbole dada.

e) A reta de equação y = - $\frac{a}{b}$ x é uma assíntota à hipérbole.

06 (U. E. LONDRINA) A distância do vértice da parábola de equação y = x² - 4x + 5 à reta de equação $y = \frac{3}{4}x - 3$ é:

a) 2
b) $2\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{5}$
d) 5
e) 6

07 (UNICAP) Assinale a única alternativa que corresponde à equação da parábola que tem por foco o ponto F(3,0) e por diretriz a reta x + 3 = 0.

a) $y - 12x^2 = 0$
b) $y^2 - 12x = 0$
c) $y^2 - 9x = 0$
d) $y - 9x^2 = 0$
e) $y^2 - 12x = 0$

08 (CESESP)Considere a parábola $2y - x^2 - 10x + 2 = 0$.
Assinale a única alternativa que representa as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz.

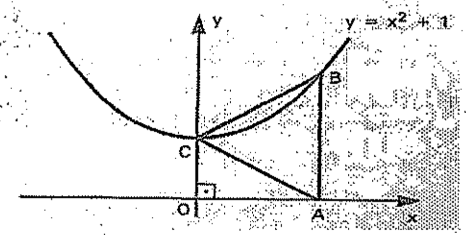
a) (-5, - 27/2) e y = 1/2
b) (-5, - 13) e y = - 1/2
c) (-2, 4) e y = 1/4
d) (-5, -13) e y = -14
e) (-5, -13) e y = x + 1

09 (FATEC) A equação $x^2 + y^2 = 2xy + 4$ representa, no sistema cartesiano ortogonal xOy,

a) Uma circunferência.
b) Uma parábola.
c) Uma elipse.
d) Uma reta.
e) duas retas paralelas.

10 (PUC-SP) A área do trapézio OABC é 11 vezes a área do triângulo OAC (veja a figura). A abscissa de A é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5



11 (PUC-SP) Os pontos A e B pertencem à elipse de foco F_1 e F_2 e distância focal igual a 1. Sabendo que o perimetro do triângulo AF_1F_2 vale 3 e que B pertence ao eixo menor da elipse, quanto vale a distância BF_1?

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{2}$
c) 1
d) 2
e) 3

12 (U. MACK) A equação da reta que passa pelo ponto A(3, -2) e pelo centro da elipse $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$ é dada por:

a) y + 2x - 4 = 0
b) y - 2x + 4 = 0
c) 2x + y + 4 = 0
d) 4x + y - 2 = 0
e) y - 4x + 2 = 0

Curso Preparatório CIDADE

13 (PUC-MG) Os gráficos de $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3x + m$ se interceptam em um ponto apenas. O gráfico de g(x) corta o eixo y no ponto de ordenada:

a) 1,5
b) 0,5
c) 0,0
d) -1,0
e) 1,0

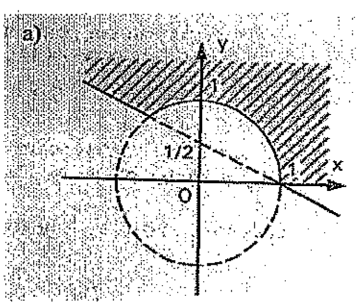
14 (U. F. PE) Um determinado fio é constituído de um material que, quando preso a dois pontos distantes um do outro de 20 m e ambos a 13 m do solo, toma a forma de uma parábola, estando o ponto mais baixo do fio a 3 m do solo.

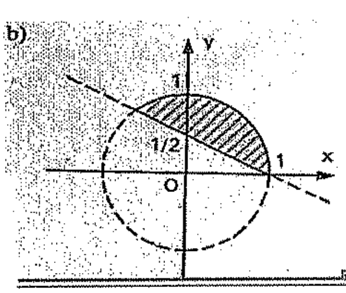
Assinale a alternativa que corresponde à parábola no sistema de coordenadas cartesianas xOy, onde o eixo Oy contém o ponto mais baixo do fio e o eixo Ox está sobre o solo.

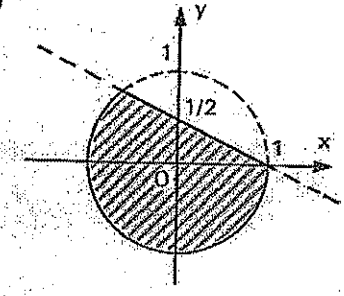
a) $y = x^2 + x + 3$
b) $10y = -x^2 + 30$
c) $y = x^2 + 30$
d) $5y = x^2 + 15$
e) $10y = x^2 + 30$

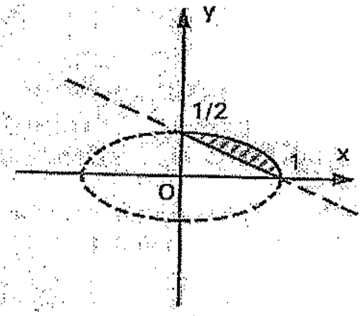
15 (U. F. PE-U. F. R. PE) Nas alternativas abaixo estão sombreadas algumas regiões do plano xy, limitadas por retas, circunferências e elipses. Indique qual delas representa o conjunto solução do sistema de inequações:

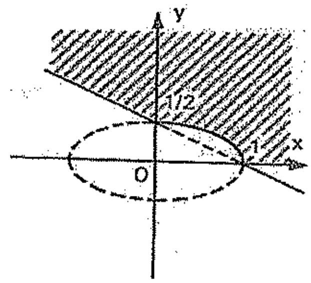
$$x + 2y \geq 1$$
$$x^2 + y^2 \geq 1$$

a)


b)


c)


d)


e)


16 (CESGRANRIO) A região hachurada de todos os pontos (x, y), tais que $y \geq x^2$ e $y \leq x + 1$, é mais bem representada por:

17 (U. E. CE) Se a reta (r) é o lugar geométrico dos pontos P(x, y) que são equidistantes dos pontos $P_1(2,3)$ e $P_2(0, -1)$, então a equação de (r) é:

a) $x + y - 2 = 0$
b) $x + 2y - 3 = 0$
c) $2x + y - 3 = 0$
d) $3x + y - 4 = 0$

19 (VUNESP) O gráfico de $y^2 = (2x - 1)^2$ é:

a) Um círculo.
b) Uma elipse que não é círculo.
c) Uma hipérbole.
d) Duas retas coocorrentes.
e) Duas retas paralelas.

Curso Preparatório CIDADE

19 (U. MACK) As retas dadas pela equação $2x^2 - 2y^2 + 3xy = 0$:

a) São paralelas.
b) Fazem um ângulo de 45°.
c) São perpendiculares.
d) Determinam com os eixos um triângulo de área 4.
e) Nenhuma das anteriores está correta.

GABARITO

1 Binomio de Newton

Exercícios de Aula
1. E
2. E
3. A
4. D
5. A
6. E
7. C
8. E
9. E
10. B

Exercícios de Casa
1. (9)
2. {3}
3. {0,1}
4. {2,3}
5. {-1,2}
6. C
7. 64
8. 0
9. D
10. A
11. C
12. B
13. B
14. A
15. C
16. C
17. B
18. C
19. C
20. D

2 Números Complexos

Exercícios de Aula
1. D
2. E
3. A
4. E
5. E
6. A
7. E
8. E
9. C
10. D

Exercícios de Casa
1. A
2. B
3. D
4. B
5. D
6. B

Curso Preparatório CIDADE

7. B
8. C
9. B
10. D
11. B
12. A
13. E
14. E
15. D
16. C
17. E
18. A
19. B
20. C
21. E
22. A
23. B
24. D

3 Polinômios

Exercícios de Aula
1. E
2. A
3. C
4. E
5. B
6. E
7. A
8. B
9. B
10. B

Exercícios de Casa
1. B
2. A
3. B
4. $2x^4-4x^3-2x^2+4x$
5. a) $p(-2)=-1$
   $p(0)=1$
   $p(1)=-1$
   $p(2)=3$
   b) 3 raízes reais e nenhuma complexa
6. a) $-x+3$
   b) 5/2
7. B
8. E
9. C
10. C
11. A
12. B
13. A
14. B
15. B
16. C
17. E
18. A
19. E
20. D
21. B
22. E
23. C
24. a= 1, b= -2, c= 3
25. C

4 Equações Polinomiais

Exercícios de Aula
1. B
2. D
3. C
4. C
5. B
6. C
7. B
8. E
9. D
10. $x^3+4x^2-x-6=0$ é *uma* equação que atende às condições.
11. A
12. a) {-1; 1; 3}
    b) a=-3 e b=-1
13. a) 2
    b) $(x-2)(x^2+x+2)$
    c) $x<-2$ ou $1<x<2$
14. a) $P(2+3i)=0$, logo, $2+3i$ é raiz.
    b) $2-3i$ e -2 são as outras raízes, então $P(x)$ é divisível por $(x+2)$:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x+2 \\ \hline 0 & \underbrace{x^2-4x+13}_{Q(x)} \end{array} \qquad Q(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}, \textit{ pois } \Delta<0.$$

$$Logo: P(x)>0 \textit{ se } x+2>0, \textit{ ou seja, se } x>-2 \ (c.d.q.)$$

16. $\frac{\overset{s}{T}}{V}=14$

Exercícios de Casa
1. B
2. C
3. D
4. B
5. E
6. C
7. E
8. A
9. C
10. E
11. B
12. D
13. B
14. E
15. C
16. C
17. A
18. A
19. D

20. E
21. $\{2+i\sqrt{3}, \ 2-i\sqrt{3}, \ -2+i, -2-i\}$
22. B
23. C
24. $\{1, -1, 2\}$
25. $\{1, -1, 2-3\}$
26. $\{ -1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \}$

5 Geometria Analítica

Parte I

Exercícios de Aula

1. $M(\frac{11}{2}, 2)$ $N(7, 3)$ $P(\frac{17}{2}, 4)$
2. A(8, 0) B(0, 2)
3. E
4. C(3, -5) D(-1, -7)
5. $G(\frac{14}{3}, \frac{8}{3})$
6. B
7. B
8. $P(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$
9. $x = 1$ ou $x = \frac{13}{5}$
10. a) $\nexists\, m$
    b) $\frac{1}{2}$
    c) $\frac{-3}{4}$
11. D
12. $x + 2y - 9 = 0$

Exercícios de Casa
1. A
2. (r) y=4 (s) y= -1 (t) y= -2 (u) y=5
3. C
4. B
5. A
6. E
7. C
8. D
9. E
10. E
11. B
12. B
13. C
14. E
15. C
16. A
17. C
18. A
19. B
20. B
21. D
22. C
23. C
24. D
25. B
26. B
27. E
28. B
29. C

Parte II Circunferência

Exercícios de Aula

1. $(x-6)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$
2. a) C(3, -4) R = 6
   b) C(-1, 0) $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$
   c) Não
   d) Não
   e) Não
3. E
4. D
5. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 13$
6. D
7. C
8. $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 9$
9. A
10. $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$
11. K = -8
12. D

Exercícios de Casa
1. C
2. C
3. E
4. B
5. C
6. B
7. A
8. D
9. E
10. D
11. D
12. A
13. D
14. B
15. E
16. E
17. D
18. B
19. C
20. A

21. B
22. C
23. E
24. B

Parte III Cônicas

Exercícios de sala

01. E
02. D
03. C
04. E
05. B
06. C
07. D
08. E
09. E
10. B
11. D
12. A
13. D
14. D
15. E
16. A
17. E
18. D

Exercícios de Casa
1. E
2. E
3. C
4. A
5. D
6. A
7. B
8. A
9. E
10. C
11. C
12. A
13. E
14. E
15. E
16. A
17. A
18. B
19. D
20. D