



Luiz Roberto Dante

# Matemática

## Contexto & Aplicações

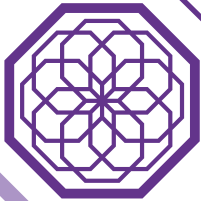
Manual do  
Professor

1

**ea**  
editora ática

Matemática - Ensino Médio





# Luiz Roberto Dante

# Matemática

## Contexto & Aplicações

Manual do  
Professor

## Luiz Roberto Dante

Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp-SP, *campus* Rio Claro).

Pesquisador em Ensino e Aprendizagem da Matemática pela Unesp-SP, *campus* Rio Claro.

Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio – São Paulo.

Autor de vários livros, entre os quais:

- *Formulação e resolução de problemas de Matemática: teoria e prática;*
- *Didática da Matemática na pré-escola;*
- *Projeto Ápis: Natureza e Sociedade, Linguagens e Matemática* (Educação Infantil – 3 volumes);
- *Projeto Ápis Matemática* (1º ao 5º ano);
- *Projeto Teláris Matemática* (6º ao 9º ano);
- *Projeto Voaz Matemática* (Ensino Médio – volume único);
- *Projeto Múltiplo Matemática* (Ensino Médio – 3 volumes).

3ª EDIÇÃO  
SÃO PAULO • 2016

ea  
editora ática

Matemática - Ensino Médio

1





**editora ática**

**Diretoria editorial**  
Lidiane Vivaldini Olo

**Gerência editorial**  
Luiz Tonolli

**Editoria de Matemática e Física**  
Ronaldo Rocha

**Edição**  
André Luiz Ramos de Oliveira

**Gerência de produção editorial**  
Ricardo de Gan Braga

**Arte**  
Andréa Dellamagna (coord. de criação),  
Erik TS (progr. visual de capa e miolo),  
André Gomes Vitale (coord.),  
Claudemir Camargo Barbosa (edição)  
e DIGKIDS (diagram.)

**Revisão**  
Hélia de Jesus Gonsaga (ger.),  
Rosângela Muricy (coord.), Ana Curci,  
Célia da Silva Carvalho, Claudia Virgílio  
e Vanessa de Paula Santos;  
Brenda Morais e Gabriela Miragaia (estagiárias)

**Iconografia**  
Sílvio Klugin (superv.), Denise Durand Kremer (coord.),  
Fernanda Regina Sales Gomes (pesquisa), Cesar Wolf e  
Fernanda Crevin (tratamento de imagem)

**Ilustrações**  
Dam d'Souza e Paulo Manzi

**Cartografia**  
Alexandre Bueno, Eric Fuzii, Márcio Souza

**Foto da capa:** Fractal de Mandelbrot.  
Iter9 LLC/ALFRED PASIEKA/Getty Images

**Protótipos**  
Magali Prado

Direitos desta edição cedidos à Editora Ática S.A.  
Avenida das Nações Unidas, 7221, 3ª andar, Setor A  
Pinheiros – São Paulo – SP – CEP 05425-902  
Tel.: 4003-3061  
www.atica.com.br / editora@atica.com.br

**2016**

ISBN 9788508 17937 4 (AL)  
ISBN 9788508 17938 1 (PR)  
Cód. da obra CL 713346  
CAE 566 661 (AL) / 566 662 (PR)

3ª edição  
1ª impressão  
Impressão e acabamento



**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dante, Luiz Roberto  
Matemática : contexto & aplicações : ensino  
médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. --  
São Paulo : Ática, 2016.

Obra em 3 v.

1. Matemática (Ensino médio) I. Título.

16-02955

CDD-510.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Matemática : Ensino médio 510.7



# APRESENTAÇÃO

*A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos.*

Aristóteles

*Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.*

Lobachevsky

**A**o elaborar esta coleção para o Ensino Médio, levamos em conta as ideias que abrem esta apresentação. Isso porque nosso objetivo é criar condições para que você, aluno, possa compreender as ideias básicas da Matemática desse nível de ensino atribuindo significado a elas, além de saber aplicá-las na resolução de problemas do mundo real.

Todos os conceitos básicos próprios do Ensino Médio foram explorados de maneira intuitiva e compreensível. As receitas prontas e o formalismo excessivo foram evitados, porém mantivemos o rigor coerente com o nível para o qual a coleção está sendo proposta.

Na abertura de cada capítulo apresentamos uma imagem relacionada com um dos conteúdos que o compõem; ela dará a você uma ideia de um dos temas que será estudado. Durante o capítulo apresentamos textos que abordam fatos históricos e/ou contextualizam a construção de algum assunto que será discutido.

Antes de resolver os exercícios, é absolutamente necessário que você estude a teoria, analise os exemplos e refaça os exercícios resolvidos. Na seção *Resolvido passo a passo*, comentamos e explicitamos as fases da resolução de um problema.

A seção *Outros contextos* foi criada para formular, resolver e interpretar situações-problema que estão relacionadas a situações reais e/ou relacionadas com outras disciplinas.

Cada Unidade contém ainda as seções *Pensando no Enem* e *Vestibulares de Norte a Sul*, com questões que abrangem algumas habilidades exploradas no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) e de vestibulares de todas as regiões do país, destinadas a revisar, fixar e aprofundar os conteúdos estudados. E no fim de cada volume, na seção *Caiu no Enem*, foram incluídas questões do Enem relacionadas a cada Unidade.

A coleção engloba, desse modo, todos os assuntos costumeiramente trabalhados no Ensino Médio, além de auxiliá-lo em sua preparação para os processos seletivos de ingresso nos cursos de Educação Superior.

As sugestões e críticas que visem ao aprimoramento deste trabalho serão sempre bem-vindas.

O autor

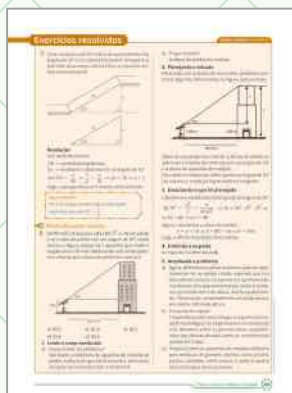


# Conheça seu livro

Cada volume da coleção é dividido em quatro Unidades nas quais você encontrará os seguintes boxes e seções:

## Abertura de Unidade e abertura de capítulo

Imagens de impacto abrem o capítulo introduzindo direta ou indiretamente o tema proposto.



## Exercícios resolvidos

Apresenta a resolução detalhada de uma questão ou problema. Não são modelos a serem seguidos, mas visam inspirar e indicar estratégias de resolução.



## Matemática e tecnologia

Sugestões de atividades em que o computador é utilizado para visualizar e manipular gráficos e tabelas. Uma oportunidade de trabalhar com a Matemática dinâmica.

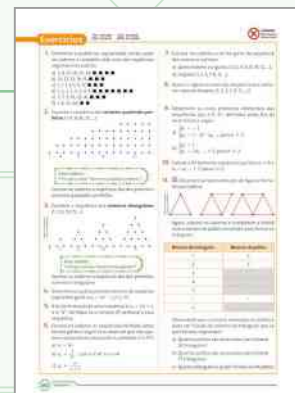
## Para refletir, Fique atento! e Você sabia?

Pequenos boxes que trazem questões para reflexão ou dicas importantes para o estudo.



## Exercícios

Essenciais para a aprendizagem. Ajudam a fixar e a aprofundar os conteúdos estudados.

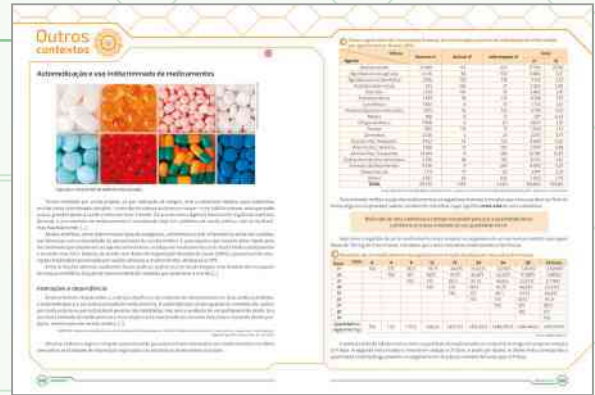






## Outros contextos

Temas interessantes e curiosos que tratam de situações práticas, articulando a Matemática com outras disciplinas e com temas como Arquitetura, Saúde, Sociedade, entre outros.



## Leitura(s)

Textos que visam ampliar e enriquecer o conteúdo estudado no capítulo.

## Vestibulares de Norte a Sul

Questões de vestibulares, de todas as regiões geográficas do Brasil, relacionadas aos conteúdos estudados.

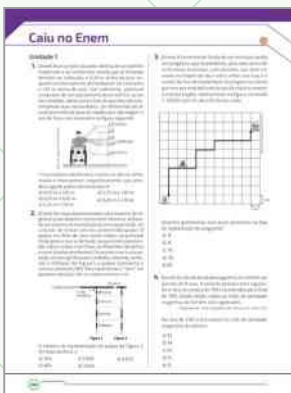


## Um pouco mais...

Textos e exercícios que ajudam a aprofundar o conteúdo do capítulo.

## Pensando no Enem

Questões contextualizadas que visam ao desenvolvimento das competências e habilidades previstas na Matriz do Enem.



## Caiu no Enem

Questões extraídas do Enem classificadas de acordo com as Unidades.



**ATENÇÃO!**  
Não escreva no seu livro!

Ao ver este selo, lembre-se de registrar todas as respostas no caderno.

# Sumário

## Unidade 1: Números e Funções

### CAPÍTULO 1

#### Conjuntos numéricos

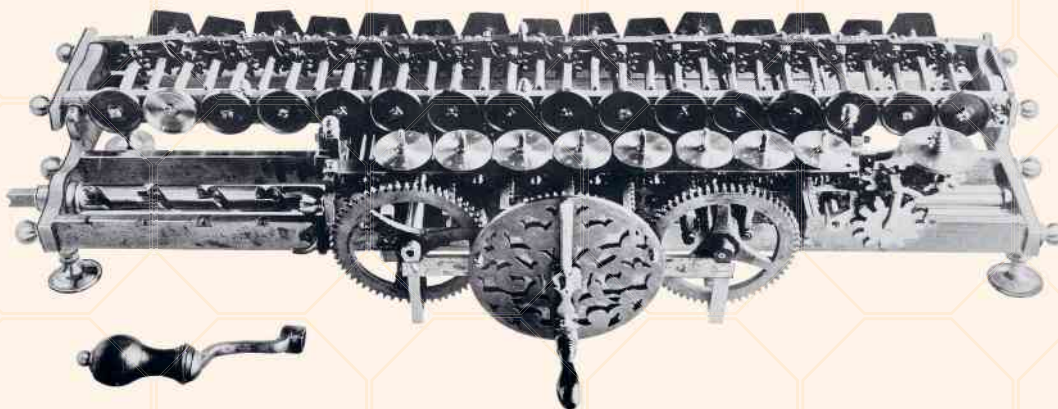
1	Números	12
2	A noção de conjunto	13
3	Conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ )	14
4	Conjunto dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ )	15
5	Conjunto dos números racionais ( $\mathbb{Q}$ )	16
	Representação decimal dos números racionais	17
	Obtenção da fração geratriz de um decimal exato	17
	Obtenção da fração geratriz de um decimal periódico	18
	Números racionais e medidas de grandezas	19
	Os números racionais na reta numerada	19
6	Números irracionais	20
	$\pi$ (Pi) é irracional	21
	O número de ouro dos gregos, $\phi$ (Fi), é irracional	21
7	Conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ )	24
	Desigualdades entre números reais	25
	Módulo ou valor absoluto de um número real	26
	Distância entre dois pontos na reta real orientada	26
8	A linguagem de conjuntos	28
	Relação de inclusão entre conjuntos	28
	Propriedades	28
	Complementar de um conjunto	28
	Propriedades	29
	Operações entre conjuntos	29
	Reunião ou união de conjuntos	29
	Intersecção de conjuntos	29
	Propriedades da união e da intersecção	30
	Diferença entre conjuntos	30
	Número de elementos da união de conjuntos	33
9	Intervalos reais	34
	Operações com intervalos	36
10	Situações-problema envolvendo números reais, grandezas e medidas	37

### CAPÍTULO 2

#### Funções

1	Um pouco da história das funções	41
	Quando aparecem as funções?	41
	Gottfried Leibniz	43
2	Explorando intuitivamente a noção de função	45
3	A noção de função por meio de conjuntos	48
	Definição e notação	49
4	Domínio, contradomínio e conjunto imagem	50
5	Estudo do domínio de uma função real	51
6	Coordenadas cartesianas	52
	Sistema de eixos ortogonais	52
	Distância entre dois pontos	53
	Equação de uma circunferência	54
7	Gráfico de uma função	55
	Determinando se um conjunto de pontos é gráfico de uma função	55
	Construção de gráficos de funções	56
	Determinação do domínio e da imagem de uma função, conhecendo o gráfico	57
8	Função crescente e função decrescente: analisando gráficos	58
9	Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva	62
	Função injetiva ou injetora	62
	Função sobrejetiva ou sobrejetora	63
	Função bijetiva ou correspondência biunívoca	64
10	Função e seqüências	66
	Progressão aritmética	66
	Progressão geométrica	66

© Ciência Museum, London/Diomedes/Arquivo da Biblioteca Estadual de Hanover, Alemanha.





# Unidade 2: Função afim e função quadrática

## CAPÍTULO 3

### Função afim e função modular

<b>1</b> Situações iniciais.....	<b>74</b>
<b>2</b> Definição de função afim.....	<b>75</b>
<b>3</b> Valor de uma função afim.....	<b>75</b>
Valor inicial.....	<b>75</b>
<b>4</b> Taxa de variação média da função afim $f(x) = ax + b$ .....	<b>76</b>
Propriedade.....	<b>76</b>
<b>5</b> Determinação de uma função afim.....	<b>78</b>
<b>6</b> Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ .....	<b>79</b>
Traçado de gráficos de funções afins.....	<b>79</b>
<b>7</b> Conexão entre função afim e Geometria analítica.....	<b>84</b>
Equação da reta.....	<b>84</b>
<b>8</b> Zero da função afim.....	<b>85</b>
Interpretação geométrica.....	<b>85</b>
<b>9</b> Estudo do sinal da função afim e de inequações do 1º grau.....	<b>85</b>
Sistema de inequações do 1º grau.....	<b>87</b>
Inequações-produto e inequações-quociente.....	<b>87</b>
<b>10</b> Outras conexões.....	<b>90</b>
Função afim e progressão aritmética (PA).....	<b>90</b>
Função afim e a Física.....	<b>90</b>
Função linear e proporcionalidade.....	<b>93</b>
Função linear e escalas.....	<b>96</b>
<b>11</b> Funções poligonais ou afins por partes.....	<b>97</b>
Função módulo.....	<b>97</b>
Gráfico da função modular.....	<b>97</b>
Outros gráficos de funções modulares.....	<b>99</b>

## CAPÍTULO 4

### Função quadrática

<b>1</b> Definição de função quadrática.....	<b>102</b>
<b>2</b> Situações em que aparece a função quadrática.....	<b>103</b>
Geometria.....	<b>103</b>
Fenômenos físicos.....	<b>103</b>
Esportes.....	<b>104</b>
<b>3</b> Valor ou imagem da função quadrática em um ponto.....	<b>104</b>
A equação do 2º grau.....	<b>106</b>
<b>4</b> Zeros da função quadrática.....	<b>107</b>
Determinação dos zeros da função quadrática.....	<b>107</b>
Usando fórmula.....	<b>107</b>
Usando a fatoração.....	<b>110</b>
Isolando o $x$ .....	<b>111</b>
Por soma e produto.....	<b>112</b>
<b>5</b> Gráfico da função quadrática.....	<b>113</b>
Gráfico da função definida por $f(x) = x^2$ .....	<b>113</b>
Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2, a \neq 0$ .....	<b>114</b>
Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + k, \text{ com } a \neq 0$ .....	<b>115</b>
Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2, \text{ com } a \neq 0$ .....	<b>116</b>
Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2 + k, \text{ com } a \neq 0$ .....	<b>117</b>
Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ .....	<b>118</b>
Parâmetro $a$ .....	<b>118</b>
Parâmetro $b$ .....	<b>118</b>
Parâmetro $c$ .....	<b>119</b>
A parábola.....	<b>120</b>
<b>6</b> Determinação algébrica das intersecções da parábola com os eixos.....	<b>124</b>
<b>7</b> Vértice da parábola, imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática.....	<b>126</b>
<b>8</b> Estudo do sinal da função quadrática e inequações do 2º grau.....	<b>130</b>
1º caso: $\Delta > 0$ .....	<b>130</b>
2º caso: $\Delta = 0$ .....	<b>131</b>
3º caso: $\Delta < 0$ .....	<b>131</b>
Outros tipos de inequações.....	<b>133</b>
<b>9</b> Conexão entre função quadrática e Física.....	<b>134</b>
Movimento Uniformemente Variado (MUV).....	<b>134</b>
<b>10</b> Conexão entre função quadrática e progressão aritmética.....	<b>137</b>

Olesky Makeymenko/ImageBroker/EasyPix Brasil



# Unidade 3: Função exponencial e função logarítmica

## CAPÍTULO 5

### Função exponencial

1 Situações iniciais.....	148
2 Revisão de potenciação.....	150
Potência com expoente natural.....	150
Potência com expoente inteiro.....	151
Inverso de um número $a \neq 0$ .....	151
Potência com expoente racional.....	152
Potência com expoente irracional.....	153
Potência com expoente real.....	154
Notação científica.....	155
3 Revisão de radiciação.....	156
Definição.....	156
Propriedades.....	156
4 Função exponencial.....	159
Definição.....	159
Gráfico da função exponencial.....	159
5 Conexão entre funções exponenciais e progressões.....	164
6 Equações exponenciais.....	165
Resolução de equações exponenciais simples.....	165
Raízes da equação $2x = x^2$ .....	166
7 Inequações exponenciais.....	167
8 O número irracional e a função exponencial $e^x$ .....	169
Função exponencial natural.....	169
O problema de Bernoulli.....	169
Jacques Bernoulli.....	170
9 Aplicações da função exponencial.....	171

## CAPÍTULO 6

### Logaritmo e função logarítmica

1 Logaritmo.....	176
Definição de logaritmo de um número.....	177
Consequências da definição de logaritmo.....	178
Propriedades operatórias dos logaritmos.....	179
Mudança de base do logaritmo.....	180
Cálculo de logaritmos.....	183
Aplicação dos logaritmos na resolução de equações exponenciais e de problemas.....	185
Antes dos logaritmos.....	187
Depois dos logaritmos.....	188
John Napier (ou Neper).....	188
2 Função logarítmica.....	189
Função inversa.....	189
Definição de função inversa.....	190
Função logarítmica.....	191
Definição da função logarítmica.....	191
Gráfico da função logarítmica.....	192
Uma relação importante.....	194
Caracterização das funções logarítmicas.....	194
3 Equações logarítmicas.....	197
Inequações logarítmicas.....	199





# Unidade 4: Sequências e Trigonometria

## CAPÍTULO 7

### Sequências

<b>1 Sequências</b> .....	<b>208</b>
Definição .....	208
Determinação de uma sequência por recorrência .....	209
<b>2 Progressão aritmética (PA)</b> .....	<b>213</b>
Definição .....	213
Representações especiais .....	214
Classificação das progressões aritméticas .....	214
Fórmula do termo geral de uma PA .....	215
Soma dos termos de uma PA finita .....	218
Fórmula da soma dos termos de uma PA finita .....	218
Conexão entre progressão aritmética e função afim .....	219
<b>3 Progressão geométrica (PG)</b> .....	<b>221</b>
Definição .....	221
Fórmula do termo geral de uma PG .....	222
Fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma PG finita .....	225
A progressão geométrica mais antiga .....	226
Problema 79 do Papiro de Rhind .....	227
Soma dos termos de uma PG infinita .....	228
Conexão entre progressão geométrica e função exponencial .....	229
<b>4 Problemas envolvendo PA e PG</b> .....	<b>231</b>

## CAPÍTULO 8

### Trigonometria no triângulo retângulo

<b>1 Semelhança de triângulos</b> .....	<b>236</b>
Feixe de retas paralelas .....	236
Teorema de Tales .....	237
Figuras semelhantes .....	239
Semelhança de triângulos .....	240
Casos de semelhança .....	241
Propriedade (teorema fundamental da semelhança) .....	242
Uso de semelhança para medir distâncias inacessíveis .....	244
Polígonos semelhantes .....	245
<b>2 Relações métricas no triângulo retângulo</b> .....	<b>246</b>
O triângulo retângulo .....	246
Elementos do triângulo retângulo .....	246
Relações métricas .....	246
Triângulos semelhantes .....	246
As relações métricas .....	247
Outra demonstração do teorema de Pitágoras .....	247
<b>3 Relações trigonométricas no triângulo retângulo</b> .....	<b>249</b>
Definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos .....	249
Seno, cosseno e tangente só dependem do ângulo .....	250
Relações entre seno, cosseno e tangente .....	251
Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis .....	254
"Resolvendo" triângulos retângulos .....	254
As distâncias da Terra ao Sol e à Lua .....	255
A evolução do cálculo dos senos e cossenos .....	256

<b>Caiu no Enem</b> .....	<b>264</b>
<b>Respostas</b> .....	<b>268</b>
<b>Sugestões de leituras complementares</b> .....	<b>283</b>
<b>Significado das siglas de vestibulares</b> .....	<b>285</b>
<b>Bibliografia</b> .....	<b>286</b>
<b>Índice remissivo</b> .....	<b>287</b>



Stefen Gohring/lens flare del Getty Images

UNIDADE

1

# Números e Funções



# Conjuntos numéricos

Ingo Arndt/Minden Pictures/Glow Images



O caramujo *Nautilus* apresenta a razão áurea em seu corpo segmentado em forma de espiral. Pode-se construir essa espiral a partir de retângulos cujas medidas dos lados estejam na razão áurea.

Veja um pouco mais sobre a razão áurea na página 21.

# 1 Números

Os dois principais objetos de estudo da Matemática são os números e as figuras geométricas.

**Grandeza:** algo que pode ser medido.

Quando comparamos uma **grandeza** e uma unidade obtemos um número. Se a grandeza é discreta, a comparação é uma **contagem** e o resultado, um número natural. Desse modo, quando contamos o número de selos de uma coleção, a unidade é 1 selo e dizemos que a coleção tem, por exemplo, 200 selos (número seguido da unidade).

Se a grandeza é contínua, a comparação é uma **medição** e o resultado é um número real. Assim, quando medimos a distância em quilômetros (km) entre duas cidades, a unidade é 1 quilômetro e dizemos que a distância entre essas cidades é, por exemplo, de 150 km (número seguido da unidade).

- *Os números estão presentes em muitos momentos do nosso dia a dia. Junte-se a um colega, analisem e resolvam as seguintes situações envolvendo números que vocês já estudaram no Ensino Fundamental.*



Detalhe de calendário, destacando os meses de julho a outubro.

Quantas semanas completas temos de 27/7 a 15/10 do mesmo ano, incluídos esses dois dias?  
**11 semanas completas.**



Plato com 12 biscoitos.

Em uma receita para 12 biscoitos são necessários 2 copos de leite.

Se Laura pretende fazer 36 biscoitos, que quantidade de leite vai usar? **6 copos.**



Termômetro de rua em Urubici (SC).  
Fotografia de 2013.

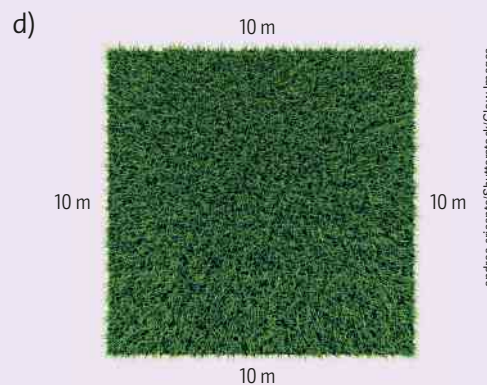
Na cidade de Urubici, a temperatura às 7h era  $-3^{\circ}\text{C}$ .

Das 7h às 10h houve uma variação de  $+3^{\circ}\text{C}$ .

Das 10h às 13h a variação foi de  $+4^{\circ}\text{C}$ .

Das 13h às 16h a variação foi de  $-2^{\circ}\text{C}$ .

Qual foi a temperatura registrada às 16h nessa cidade?  **$+2^{\circ}\text{C}$**



Terreno de forma quadrada.

Qual é a área, em  $\text{m}^2$ , desse terreno?

**$100 \text{ m}^2$**

Em cada uma dessas situações usamos os números para contar ou medir. Neste capítulo, vamos recordar e aprofundar o que você já estudou sobre os importantes conjuntos numéricos: o dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ), o dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ), o dos números racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e o dos números reais ( $\mathbb{R}$ ). Você também conhecerá um pouco sobre a linguagem dos conjuntos.

## Para refletir

Em quais outras situações você usa números? Troque ideias com seu colega.



## 2 A noção de conjunto

A noção de conjunto é simples e fundamental na Matemática, pois a partir dela podem ser expressos todos os conceitos matemáticos.

Um **conjunto** é uma coleção qualquer de objetos, chamados **elementos**. Podemos representar um conjunto colocando seus elementos entre chaves, separados por vírgula. Por exemplo:

- conjunto  $C$  das unidades federativas da região Centro-Oeste do Brasil:  $C = \{\text{Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Goiás e Distrito Federal}\}$ ;
- conjunto  $B$  dos números primos:  $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ ;
- conjunto  $Q$  dos quadriláteros:  $Q = \{\text{quadriláteros}\}$ .

Comente com os alunos que se os elementos do conjunto são números decimais, podemos separá-los com ponto e vírgula para não haver confusão com a vírgula do número decimal.

Um objeto  $a$  qualquer pode ser elemento de determinado conjunto  $A$ .

- Nesse caso, dizemos que  $a$  pertence a  $A$  e escrevemos  $a \in A$ .
- Caso contrário, dizemos que  $a$  não pertence a  $A$  e escrevemos  $a \notin A$ .

Nos exemplos acima, temos:

- $\text{Mato Grosso} \in C$  e  $\text{Paraná} \notin C$ ;
- $2 \in B$  e  $9 \notin B$ ;
- $\text{retângulo} \in Q$  e  $\text{triângulo} \notin Q$ .

Outra maneira de representar um conjunto é por meio de uma **propriedade** ou **condição**.

Por exemplo, consideremos a propriedade:

$p$ :  $x$  é um número natural ímpar.

Essa propriedade pode ser expressa pelo conjunto  $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ . Assim, é indiferente dizer que  $x$  possui a propriedade  $p$  ou que  $x$  pertence a  $I$  ( $x \in I$ ).

Consideremos agora a condição  $c$ :

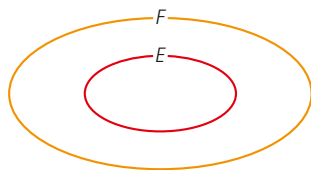
$c$ :  $x$  é um número natural que satisfaz a condição  $x > 5$ .

Essa condição pode ser expressa pelo conjunto  $A = \{6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ . Nesse caso, também é indiferente dizer que  $x$  satisfaz a condição  $c$  ou que  $x \in A$ .

Agora, consideremos dois conjuntos,  $E$  e  $F$ . Se todos os elementos de  $E$  forem também elementos de  $F$ , dizemos que  $E$  é um **subconjunto** de  $F$  ou que  $E$  **está contido** em  $F$  ou, ainda, que  $E$  é **parte** de  $F$ . Indicamos esse fato por  $E \subset F$ , que pode ser lido das seguintes maneiras:

- $E$  é subconjunto de  $F$ ;
- $E$  está contido em  $F$ ;
- $E$  é parte de  $F$ .

Podemos representar esse subconjunto em um diagrama:

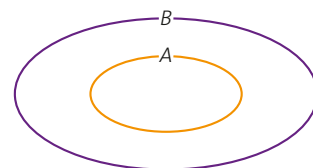


Banco de imagens/Arquivo da editora

Se  $E$  não for subconjunto de  $F$ , escrevemos  $E \not\subset F$ . Nesse caso, existe pelo menos um elemento de  $E$  que não pertence a  $F$ .

Exemplos:

- Se  $A$  é o conjunto dos retângulos e  $B$  é o conjunto dos quadriláteros, então  $A \subset B$ , pois todo retângulo é um quadrilátero.
- Se  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{1, 2, 4\}$ , então  $C \not\subset D$ , pois  $3 \in C$  e  $3 \notin D$ . Nesse caso, também  $D \not\subset C$ .



Banco de imagens/Arquivo da editora

### 3 Conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ )

O conjunto dos números naturais é representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

O primeiro elemento desse conjunto é o zero. O **sucessor** do zero é o 1, o sucessor do 1 é o 2, e assim por diante. Representa-se o sucessor de um número natural qualquer  $n$  por  $n + 1$ . Como sempre podemos obter o sucessor de um número natural, dizemos que o conjunto dos números naturais é **infinito**. Tal fato é representado pelas reticências (...) no final.

Os números naturais são usados:

- nas contagens – por exemplo, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) estima que a população brasileira em 2020 será de aproximadamente 212 milhões de habitantes;
- nos códigos – por exemplo, o Código de Endereçamento Postal (CEP) da cidade de Bujari, no Acre, é 69926-000;
- nas ordenações – por exemplo, segundo o IBGE, o 1º estado brasileiro em superfície é o Amazonas e o 2º é o Pará.
- e também para expressar medidas de grandezas – por exemplo, 8 horas, 10 centímetros, 3 litros, 50 kg, 100 km/h, 1 570 745 km<sup>2</sup>, etc.

Um subconjunto importante de  $\mathbb{N}$  é o conjunto  $\mathbb{N}^*$ , obtido excluindo-se o zero de  $\mathbb{N}$ :

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

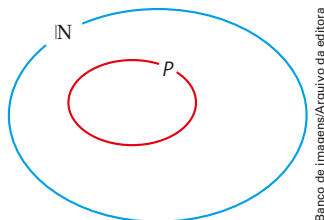
Um subconjunto de  $\mathbb{N}$  ou parte de  $\mathbb{N}$  é o conjunto dos números naturais pares ( $P$ ):

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

ou

$$P = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$$

Indicamos assim:  $P \subset \mathbb{N}$ . (Lê-se “ $P$  é um subconjunto de  $\mathbb{N}$ ”, ou “ $P$  está contido em  $\mathbb{N}$ ”, ou “ $P$  é parte de  $\mathbb{N}$ ”.)



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Em  $\mathbb{N}$  é sempre possível efetuar a adição e a multiplicação, ou seja, a soma e o produto de dois números naturais sempre resultam em um número natural. Já a subtração  $3 - 4$ , por exemplo, não é possível em  $\mathbb{N}$ . Daí a necessidade de ampliar o conjunto  $\mathbb{N}$  introduzindo-se os números negativos.

#### Você sabia?

- $\mathbb{N}$  representa o conjunto dos números naturais, pois a letra **N** é a inicial das palavras ‘número’ e ‘natural’.
- Os números naturais constituem o modelo matemático para a contagem.

#### Para refletir

- Qualquer número natural tem um único sucessor? **Sim**.
- Números naturais diferentes têm sucessores diferentes? **Sim**.
- O zero é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro? **Sim**.
- Existe um número natural que é maior do que todos os outros? **Não**.

#### Fique atento!

Sempre que queremos excluir o zero de um conjunto, colocamos o asterisco (\*) no símbolo que o representa, por exemplo,  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}^*$ , etc.

#### Você sabia?

- Todo número par  $p$  pode ser escrito na forma  $p = 2n$ , em que  $n$  é natural.
- Se  $m$  e  $n$  são naturais, então  $m + n$  e  $m \cdot n$  também serão sempre naturais.

## 4 Conjunto dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ )

Reunindo os números naturais e os números inteiros negativos, obtemos o conjunto dos **números inteiros**, que é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

As medidas de algumas grandezas, como a temperatura, são indicadas por números inteiros.

### Você sabia?

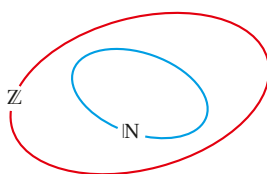
A letra  $Z$  é inicial da palavra 'Zahl', que significa 'número' em alemão.



Termômetro de rua na cidade de São Joaquim (SC) indicando temperatura negativa. Fotografia de 2014.

Destacamos os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{Z}$ :

- $\mathbb{N}$ , pois  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . Veja a representação no diagrama.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$  ou  $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Observe que na figura a seguir há uma simetria em relação ao zero.



O oposto ou simétrico de 3 é  $-3$ , bem como o oposto de  $-3$  é 3, valendo:

$$3 + (-3) = -3 + 3 = 0$$

No conjunto  $\mathbb{Z}$  é sempre possível efetuar a adição, a multiplicação e a subtração, ou seja, a soma, o produto e a diferença de dois números inteiros resultam sempre em um número inteiro. E todas as propriedades das operações em  $\mathbb{N}$  continuam válidas em  $\mathbb{Z}$ .

Já da divisão de dois números inteiros nem sempre resulta um número inteiro. Veja exemplos:

- $(-8) : (+2) = -4 \rightarrow$  é possível em  $\mathbb{Z}$
- $(-7) : (+2) = ? \rightarrow$  não é possível em  $\mathbb{Z}$

Assim, foi necessário ampliar o conjunto  $\mathbb{Z}$ .

### Para refletir

- Existe número natural que não é inteiro?
- Existe número inteiro que não é natural?

- Não, todo número natural é inteiro.
- Sim, os números inteiros negativos.



## 5 Conjunto dos números racionais ( $\mathbb{Q}$ )

Ao acrescentarmos as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto  $\mathbb{Z}$ , obtemos o **conjunto dos números racionais** ( $\mathbb{Q}$ ). Assim, por exemplo, são números racionais:

$$-2, \quad -\frac{3}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1, \quad \frac{5}{3}, \quad 2, \text{ etc.}$$

Observe que todo número racional pode ser escrito na forma  $\frac{a}{b}$ , com  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  e  $b \neq 0$ . Por exemplo,

$$-2 = -\frac{6}{3}, \quad 1 = \frac{2}{2}, \quad 2 = \frac{10}{5}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad 0 = \frac{0}{2}, \text{ etc.}$$

Podemos, então, escrever:

O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

Simbolicamente, indicamos assim:

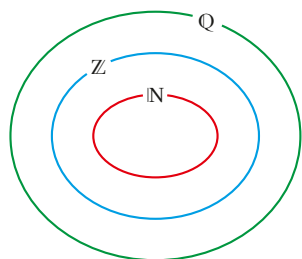
$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

lê-se “tal que”

A restrição  $b \neq 0$  é necessária, pois  $\frac{a}{b}$ , divisão de  $a$  por  $b$ , só tem significado se  $b$  não for zero.

Se  $b = 1$ , temos  $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$ , o que implica que  $\mathbb{Z}$  é subconjunto de  $\mathbb{Q}$ . Como  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ , temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, com os números racionais, podemos efetuar divisões que eram impossíveis só com números inteiros. Exemplos:

a)  $17 : 9 = \frac{17}{9}$ , ou  $1\frac{8}{9}$ , ou 1,8888...

b)  $(-7) : (+2) = \frac{-7}{+2} = \frac{-35}{+10} = -3,5$

### Você sabia?

Fração aparente é aquela que indica um número inteiro:

$$\frac{12}{4} = 3; \quad -\frac{8}{2} = -4; \text{ etc.}$$

A aparência é de fração, mas representa um número inteiro.

Estimule os alunos a relacionar a linguagem usual com a linguagem simbólica. Por exemplo,  $a \in \mathbb{Z}$  significa ‘ $a$  é um número inteiro’.

### Você sabia?

A designação “racional” surgiu porque  $\frac{a}{b}$  pode ser vista como uma razão entre os inteiros  $a$  e  $b$ . A letra  $\mathbb{Q}$ , que representa o conjunto dos números racionais, é a primeira letra da palavra ‘quociente’.

Verifique se os alunos compreenderam a linguagem matemática:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ , então  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ , ou seja, “se  $\mathbb{N}$  é parte de  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z}$  é parte de  $\mathbb{Q}$ , então  $\mathbb{N}$  é parte de  $\mathbb{Q}$ ”. O diagrama ao lado ajuda a visualizar essa sentença.

## Representação decimal dos números racionais

Dado um número racional  $\frac{a}{b}$ ,  $b \neq 0$ , sua representação decimal é obtida dividindo-se  $a$  por  $b$ , podendo resultar em:

- decimais exatos, finitos, quando o denominador contiver apenas os fatores primos de 10 (2 e/ou 5). Exemplos:

$$\text{a) } \frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\text{b) } \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$\text{c) } \frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\text{d) } \frac{13}{20} = \frac{13}{2^2 \times 5} = \frac{13 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{65}{100} = 0,65$$

- decimais periódicos ou dízimas periódicas, infinitas, quando o denominador da fração na forma irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5. Exemplos:

a) Dízimas periódicas simples: o período apresenta-se logo após a vírgula. Exemplos:

$$\text{i) } \frac{5}{9} = \frac{5}{3 \cdot 3} = 0,5555\dots = 0,5\bar{5} \text{ (período igual a 5)}$$

$$\text{ii) } \frac{7}{3} = 2,33333\dots = 2,3\bar{3} \text{ (período igual a 3)}$$

$$\text{iii) } \frac{4}{33} = \frac{4}{3 \cdot 11} = 0,121212\dots = 0,1\bar{2} \text{ (período igual a 12)}$$

b) Dízimas periódicas compostas: entre o período e a vírgula existe uma parte não periódica. Exemplos:

$$\text{i) } \frac{1}{45} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5} = 0,022222\dots = 0,0\bar{2} \text{ (período igual a 2 e parte não periódica igual a 0)}$$

$$\text{ii) } \frac{61}{90} = \frac{61}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = 0,677777\dots = 0,6\bar{7} \text{ (período igual a 7 e parte não periódica igual a 6)}$$

Um número decimal exato pode ser representado na forma  $\frac{a}{b}$ ; essa fração é chamada **fração geratriz de um decimal exato**. Analogamente, um decimal periódico pode ser representado pela fração  $\frac{a}{b}$ , e esta se chamará **fração geratriz de um decimal periódico**.

## Obtenção da fração geratriz de um decimal exato

Exemplo:

$$2,12 = \frac{212}{100} = \frac{53}{25} \rightarrow \text{fração geratriz}$$

### Fique atento!

A fração geratriz de um decimal exato será uma fração em que o numerador é o decimal sem a vírgula e o denominador é o algarismo 1 acompanhado de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte decimal.

### Fique atento!

A representação decimal tem um grande valor prático comparado com a representação em forma de fração. Foi o matemático holandês do século XVI Simon Stevin (1548-1620) quem a sistematizou em seu livro *A dízima*, publicado em 1585.

### Para refletir

Por que o nome “fração geratriz”?

Porque é a fração que gera, dá origem ao número decimal.

## Obtenção da fração geratriz de um decimal periódico

### Dízima periódica simples

Exemplos:

$$\text{a) } 0,222\dots \Rightarrow \begin{cases} x = 0,222\dots \\ 10x = 2,222\dots \\ 10x = 2 + 0,222\dots \\ 10x = 2 + x \\ 9x = 2 \\ x = \frac{2}{9} \rightarrow \text{fração geratriz} \end{cases}$$

$$\text{b) } 0,414141\dots \Rightarrow \begin{cases} N = 0,414141\dots \\ 100N = 41,414141\dots \\ 100N = 41 + 0,414141\dots \\ 100N = 41 + N \\ 99N = 41 \\ N = \frac{41}{99} \rightarrow \text{fração geratriz} \end{cases}$$

### Dízima periódica composta

Exemplo:

$$x = 0,1787878\dots$$

$$10x = 1,787878\dots$$

$$10x = 1 + 0,787878\dots$$

$$10x = 1 + \frac{78}{99}$$

$$10x = \frac{177}{99} \Rightarrow x = \frac{177}{990} \rightarrow \text{fração geratriz}$$

### Observações:

1ª) O número  $0,999\dots$  é igual a 1. Vejamos por quê.

$$a = 0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

Os valores aproximados de  $a$  são: 0,9; 0,99; 0,999; etc.

Note que:  $1 - 0,9 = 0,1$ ;  $1 - 0,99 = 0,01$ ;  $1 - 0,999 = 0,001$ ; etc.

Se tomarmos  $a$  com  $n$  dígitos após a vírgula:  $0,\underbrace{999\dots 9}_n$  para um  $n$  suficientemente grande, a diferença:

$1 - 0,\underbrace{999\dots 9}_n$  pode tornar-se tão pequena quanto quisermos.

Assim, a sequência 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; ... tem como elementos números cada vez mais próximos de 1, isto é, tem 1 como limite. Logo,  $0,9999\dots = 1$ .

2ª) Como  $0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = 1$ , temos que:

$$0,111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \frac{1}{9} \text{ (dividimos a expressão acima por 9).}$$

$$0,666\dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \dots = \frac{6}{9} \text{ (multiplicamos a expressão obtida acima por 6).}$$

De modo geral, podemos escrever que:

$$0,jjj\dots = \frac{j}{10} + \frac{j}{10^2} + \frac{j}{10^3} + \dots = 0,\bar{j}$$

#### Fique atento!

A fração geratriz de uma dízima periódica simples sem parte inteira será uma fração em que o numerador é o período e o denominador é formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período.

#### Fique atento!

Se o decimal periódico apresentar uma parte inteira, o procedimento é o mesmo com a parte decimal (nas dízimas simples ou compostas) e ao final acrescentamos a parte inteira. Exemplo:

$$2,33333\dots = 2 + 0,\bar{3} = 2 + \frac{3}{9} = \frac{18 + 3}{9} = \frac{21}{9} \rightarrow \text{fração geratriz}$$

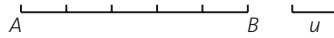


## Números racionais e medidas de grandezas

Historicamente, os números racionais estão associados a resultados de medições empíricas de grandezas. Por exemplo, ao medir o comprimento de um **segmento de reta** com uma unidade de medida  $u$ , podem ocorrer duas possibilidades:

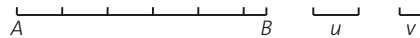
**Segmento de reta:** parte da reta compreendida entre dois de seus pontos distintos, denominados extremos.

1ª) A unidade  $u$  **caibe** um número inteiro de vezes em  $\overline{AB}$ :



Vamos supor que  $u$  caiba exatamente  $p$  vezes em  $\overline{AB}$ . Então  $\overline{AB} = p$  unidades, em que  $p$  é um número natural. Na representação acima, a medida de  $\overline{AB}$  é  $5u$ .

2ª) A unidade  $u$  **não caibe** um número inteiro de vezes em  $\overline{AB}$ :



Nesse caso, procuramos um segmento de reta  $v$  que caiba  $q$  vezes em  $u$  e  $p$  vezes em  $\overline{AB}$ . A medida de  $v$  será a fração  $\frac{1}{q}$ , e, conseqüentemente, a medida de  $\overline{AB}$  será  $p$  vezes  $\frac{1}{q}$ , ou seja, igual a  $\frac{p}{q}$ . Quando tal segmento de reta  $v$  existe, dizemos que os segmentos de reta  $u$  e  $\overline{AB}$  são **comensuráveis**, e a medida de  $\overline{AB}$  é o número racional  $\frac{p}{q}$ .

Na segunda possibilidade, temos que  $AB = 5\frac{1}{2}u$ , ou  $5,5u$ . Se tomássemos a unidade  $u$  como sendo 1 centímetro (1 cm), teríamos que  $AB = 5,5$  cm.

**Observação:** Nem sempre existe o segmento de reta  $v$  nas condições acima, ou seja, nem sempre dois segmentos de reta são comensuráveis. Estudaremos isso ainda neste capítulo.

## Os números racionais na reta numerada

Imaginemos uma reta na qual foram fixados um ponto  $O$ , chamado de origem, e um ponto  $U$ , diferente de  $O$ . Tomamos o segmento de reta  $OU$  como unidade de comprimento (de medida 1). Escolhemos também um sentido para ser o positivo. Agora, podemos localizar na reta numerada qualquer número racional.

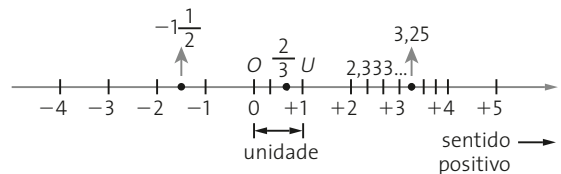
Por exemplo, veja a localização dos números racionais  $\frac{2}{3}$ ;  $-1\frac{1}{2}$ ;  $3,25$  e  $2,333\dots$ , além dos inteiros  $-4$ ,  $-3$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$  e  $5$ .

•  $\frac{2}{3}$  fica entre 0 e 1: dividimos o intervalo em 3 partes iguais e tomamos duas no sentido de 0 para 1.

•  $-1\frac{1}{2}$  fica entre  $-2$  e  $-1$ , no ponto médio do intervalo.

•  $3,25 = 3\frac{25}{100} = 3\frac{1}{4}$  fica entre 3 e 4: dividimos o intervalo em 4 partes iguais e tomamos uma no sentido de 3 para 4.

•  $2,333\dots = 2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$  fica entre 2 e 3: dividimos o intervalo em 3 partes iguais e tomamos uma no sentido de 2 para 3.



### Para refletir

- Entre dois números inteiros, sempre há outro número inteiro?
  - Entre dois números racionais sempre há outro número racional?
- Converse com um colega sobre isso.

Veja as respostas na seção Respostas.

Todo número racional tem um ponto correspondente na reta numerada. Mas nem todo ponto da reta numerada corresponde a um número racional. Assim, o conjunto  $\mathbb{Q}$  não “preenche” toda a reta numerada. É como se existissem “buracos” a serem completados com outro tipo de número: os **números irracionais**.

## 6 Números irracionais

Por muito tempo, acreditou-se que os números racionais eram suficientes para medir todos os segmentos de reta, ou seja, que todos os segmentos de reta eram comensuráveis. Os discípulos de Pitágoras também acreditavam nisso, mas foram eles próprios que descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado são **segmentos de reta incomensuráveis** (veja a página 22).

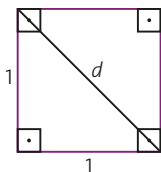
Ao medir a diagonal de um quadrado, que é um polígono convexo, cujo lado mede uma unidade de comprimento, chegamos a um número que **não** é racional. Acompanhe:

Usando a relação de Pitágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$



Estimule os alunos a ler, interpretar e debater o texto da página 22. Se necessário, recorde com eles a relação de Pitágoras.

### Fique atento!

Diagonal de um polígono convexo: segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos de um polígono convexo.

A pergunta é: que número, elevado ao quadrado, resulta em 2? Com o uso de uma calculadora, podemos obter parte da representação decimal do número fazendo **aproximações sucessivas**.

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} 1^2 = 1 \text{ (menor do que 2)} \\ 2^2 = 4 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1 e 2}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1,4)^2 = 1,96 \text{ (menor do que 2)} \\ (1,5)^2 = 2,25 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,4 e 1,5}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1,41)^2 = 1,9881 \text{ (menor do que 2)} \\ (1,42)^2 = 2,0164 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,41 e 1,42}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1,414)^2 = 1,999396 \text{ (menor do que 2)} \\ (1,415)^2 = 2,002225 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,414 e 1,415}$$

Se continuarmos esse processo, não chegaremos nem a uma representação decimal exata nem a uma dízima periódica. Portanto,  $\sqrt{2}$  não é um número racional (veja a demonstração desse fato na página 23).

Os números que não admitem uma representação decimal exata nem uma representação na forma de dízima periódica chamam-se **números irracionais**. Assim,  $\sqrt{2}$  é um número irracional, pois a representação decimal de  $\sqrt{2}$  possui infinitas casas decimais não periódicas.

O número irracional  $\sqrt{2}$  tem por valores aproximados, por falta (ou seja, menores que  $\sqrt{2}$ ), os números racionais:

$$1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421$$

Dessa forma, temos a sequência não decrescente de números racionais:

$$1 \leq 1,4 \leq 1,41 \leq 1,414 \leq 1,4142 \leq 1,41421 \leq \dots$$

que são valores racionais cada vez mais próximos do número irracional  $\sqrt{2}$ . Dizemos então que o número irracional  $\sqrt{2}$  é o limite dessa sequência de números racionais.

**Observação:** Para fazer cálculos, usamos valores racionais aproximados de  $\sqrt{2}$ , como  $\sqrt{2} = 1,41$  ou  $\sqrt{2} = 1,4142$ .

Há infinitos números irracionais; veja alguns:

a)  $\pi, \pi + 1, \pi + 2, \pi + 3, \dots$

b) A raiz quadrada de um número natural não quadrado perfeito:  $\sqrt{3}; \sqrt{5}; -\sqrt{8}; -\sqrt{10}$ .

c) A raiz cúbica de um número natural não cúbico perfeito:  $\sqrt[3]{7}; \sqrt[3]{11}; -\sqrt[3]{15}; -\sqrt[3]{25}$ .

d)  $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660254\dots$

e)  $\frac{3}{\sqrt{5}} = 1,3416408\dots$

O conjunto dos números irracionais é denotado por  $\mathbb{I}$ .

## $\pi$ (Pi) é irracional

$\pi$  é um número que, por definição, é a área de um círculo de raio 1. Quando escrevemos  $\pi = 3,14159265\dots$ , entendemos que o segundo membro dessa igualdade representa uma sequência infinita de decimais exatos finitos:

3 3,1 3,14 3,141 3,1415 3,14159 3,141592 etc.

em que cada elemento da sequência representa um valor racional aproximado de  $\pi$ .

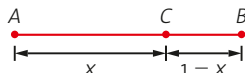
Os matemáticos já provaram que  $\pi$  não é um número racional e, portanto, não há periodicidade na sequência acima.

### Você sabia?

O número irracional  $\pi$  foi calculado com o auxílio de um computador, obtendo-se 1,2 trilhão de casas decimais sem que tenha surgido uma decimal exata ou uma dízima. A demonstração feita pelos matemáticos é o único modo que temos de saber que nenhum computador vai encontrar periodicidade no cálculo dos algarismos decimais do  $\pi$ , mesmo que se examinem alguns trilhões de dígitos.

## O número de ouro dos gregos, $\Phi$ (Fi), é irracional

Considere um segmento de reta  $AB$  cuja medida  $AB$  é de 1 unidade de comprimento. Nele podemos localizar um ponto  $C$ , de tal modo que  $C$  divide  $\overline{AB}$  na seguinte proporção: a razão entre o segmento de reta todo e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a parte menor.



Assim,  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ , ou seja:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 = 1-x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo essa equação, o valor positivo de  $x$  é  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Consideremos a razão:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

Estimule os alunos a pesquisar sobre o número de ouro/número áureo dos gregos.

Esse número irracional,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , cujo **valor aproximado** racional é 1,618034, é conhecido como **número de ouro**, **razão de ouro** ou ainda **razão áurea**.

Para os gregos, o número de ouro representava harmonia, equilíbrio e beleza. Por esse motivo, muitas construções gregas tinham como base esse número. Mas foi no século XIII que o matemático Fibonacci constatou que o número de ouro está presente também na natureza. De acordo com alguns historiadores, no Renascimento, a revalorização dos conceitos estéticos gregos levou grandes pintores, como Leonardo da Vinci (1452-1519), a utilizar o número de ouro em suas pinturas, como na obra *Mona Lisa*. [O número de ouro será retomado no Capítulo 7, que aborda sequências.](#)



*Mona Lisa*, óleo sobre tela de Leonardo da Vinci (entre 1503 e 1505). 76,8 cm x 53 cm. Museu do Louvre, Paris (França).

NYT/The New York Times/Latinstock





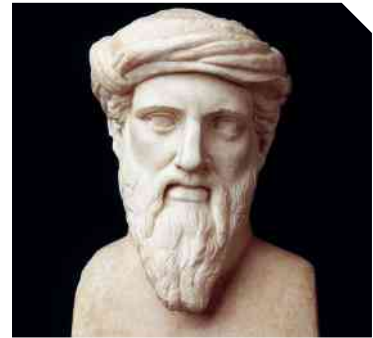
## Pitágoras

Pitágoras nasceu por volta de 580 a.C. na ilha de Samos, que fica do lado leste do mar Egeu. Conta-se que ele viajou bastante, visitando o Egito e a Babilônia, e que fundou, em Crotona, uma escola dedicada principalmente ao estudo da Matemática e Filosofia. Não era uma escola como as atuais, mas, sim, uma sociedade cujos membros se empenhavam em estudar e descobrir coisas novas.

Como todos os documentos da época se perderam, tudo o que conhecemos sobre Pitágoras veio de referências séculos depois. Não conhecemos a demonstração original do teorema de Pitágoras nem sabemos se foi ele mesmo que chegou a esse teorema, pois na escola de Crotona as descobertas dos seus membros levavam o nome do “diretor” da escola, ou seja, Pitágoras.

Foi nessa época que surgiu o problema da incomensurabilidade, ou seja, o fato de que dados dois segmentos de reta é possível que nenhuma fração do primeiro segmento de reta caiba um número inteiro de vezes no segundo segmento de reta. O teorema de Pitágoras mostrou concretamente que, dada uma unidade, a medida de um segmento de reta nem sempre pode ser representada por uma fração. Como vimos na página 20, a diagonal de um quadrado não pode ser medida por uma fração tomando-se o lado do quadrado como unidade.

A partir desse fato, os matemáticos perceberam que existiam os números que chamamos de irracionais.



Araldo de Luca/Corbis/Latinstock

Busto de Pitágoras de Samos (c. 580-500 a.C.). Escultura grega. Mármore, 49,3 cm. Museu Capitolini, Roma (Itália).

### Localização da antiga cidade de Crotona e da Ilha de Samos



Adaptado de: SIMIELLI, Maria Elena. *Geoatlas*. 34. ed. São Paulo: Ática, 2013. p. 77.

## Prova de que $\sqrt{2}$ é irracional

Para provar que  $\sqrt{2}$  é um número irracional, vamos supor que ele seja um número racional, ou seja, que possa ser escrito na forma  $\frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  e  $q \neq 0$  e chegaremos a um absurdo.

Supomos que  $\sqrt{2}$  é racional, ou seja,  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ . Consideramos  $\frac{p}{q}$  fração irredutível, ou seja,  $p$  e  $q$  são primos entre si, isto é,  $\text{mdc}(p, q) = 1$ .

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \textcircled{I}$$

Como todo número par pode ser escrito na forma  $2k$ , em que  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que  $p^2 = 2q^2$  é par  $\textcircled{II}$ .

Assim,  $p^2$  é par  $\Rightarrow p$  é par  $\Rightarrow p = 2m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$   $\textcircled{III}$ .

Observe que:

$$p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 \xrightarrow{\textcircled{I}} 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \xrightarrow{\textcircled{II}} q^2 \text{ é par} \Rightarrow q \text{ é par} \quad \textcircled{IV}$$

As conclusões  $\textcircled{III}$ , de que “ $p$  é par”, e  $\textcircled{IV}$ , de que “ $q$  é par”, são contraditórias, já que  $p$  e  $q$  foram supostos primos entre si. Chegamos a um absurdo. Assim, não podemos supor que  $\sqrt{2}$  é racional. Logo,  $\sqrt{2}$  é irracional.

Portanto,  $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$  não é uma decimal exata nem periódica.

## George Cantor

Em geral, as teorias matemáticas surgem do trabalho de vários matemáticos de uma mesma época, em conjunto ou mesmo separadamente. Não foi o caso da Teoria dos Conjuntos. A criação dessa teoria deve-se a um único homem: George Cantor.

Cantor nasceu em 1845 em São Petersburgo, na Rússia, mas passou a maior parte de sua vida na Alemanha. Quando jovem interessou-se pela Teoria dos Números, e esse foi, inclusive, o tema da sua tese de doutorado obtido em Berlim em 1867.

Em seguida, Cantor investigou séries trigonométricas, mas, ao mesmo tempo, começou a pensar nos conjuntos, nas suas operações e, sobretudo, nos conjuntos com infinitos termos.

Em 1874, publicou um artigo revolucionário no *Jornal de Crelle*, que marcou o nascimento da Teoria dos Conjuntos. Nesse artigo Cantor afirma que os conjuntos infinitos não são todos iguais, e isso causou enorme controvérsia. Muitos matemáticos defenderam as novas ideias, mas outros matemáticos famosos e tradicionais as atacaram fortemente.

Nos 10 anos seguintes, a discussão sobre a moderna Teoria dos Conjuntos foi intensa, e ela acabou por se tornar universalmente aceita. Cantor, mesmo sem ter sido na época muito aclamado pela sua teoria, teve um período de certa tranquilidade. Entretanto, em 1901 essa tranquilidade foi perturbada por uma afirmação de outro grande matemático, chamado Bertrand Russel (1872-1970). Esse matemático enunciou um problema que, aparentemente, colocava em dúvida a Teoria dos Conjuntos. Esse problema foi chamado de “o paradoxo do barbeiro” e conduziu Cantor a um total esgotamento nervoso por não conseguir argumentos para explicá-lo. Cantor morreu em um hospital psiquiátrico em 1918.

As ideias de Cantor possibilitaram o desenvolvimento de novos ramos da Matemática, como a topologia, a teoria da medida e outras que, talvez, um dia você vai estudar.



Interfoto.Lafinstock

Fotografia de George Cantor (1845-1918).  
Biblioteca do Congresso, Washington,  
D.C. (EUA).

## Saiba mais

### 1. Os infinitos

O conjunto dos números naturais é infinito, e o conjunto dos números reais também é infinito. Cantor demonstrou que o infinito dos números reais é “maior” que o dos números naturais. Além disso, existem infinitos ainda “maiores” que o dos números reais.

### 2. O *Jornal de Crelle*

O *Jornal de Crelle*, no qual Cantor publicou seu primeiro trabalho, existe até hoje. Seu fundador foi um alemão chamado August Crelle, e o nome oficial do jornal é *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Jornal para a Matemática Pura e Aplicada).

### 3. O paradoxo do barbeiro

Em uma pequena cidade há apenas uma barbearia, e a população da cidade pode ser dividida em dois grupos: os que se barbeiam sozinhos e os que são barbeados pelo barbeiro.

A pergunta é: quem faz a barba do barbeiro?

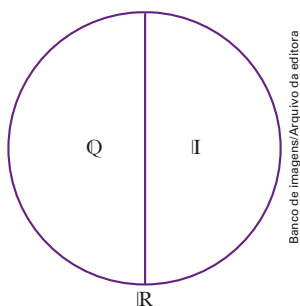


Capa do *Jornal de Crelle*. Edição de março de 2016.

Reprodução De Gruyter

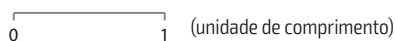
## 7 Conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ )

Da reunião do conjunto dos números racionais com os números irracionais obtemos o **conjunto dos números reais** ( $\mathbb{R}$ ). Veja o diagrama.



Como constatamos, os números racionais não são suficientes para preencher todos os pontos da reta numerada. O conjunto  $\mathbb{R}$  pode ser visto como modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de  $\mathbb{R}$ . Por exemplo, os pontos da reta correspondentes aos números  $-\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}$ , etc. não são alcançados com os números racionais. Já os números reais esgotam todos os pontos da reta, ou seja, a cada ponto da reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta.

Por isso, dizemos que existe uma **correspondência biunívoca** entre os números reais e os pontos da reta. Temos assim a **reta real orientada**, que é construída desta forma: em uma reta, escolhemos uma origem (e associamos a ela o zero), um sentido de percurso e uma unidade de comprimento, por exemplo:

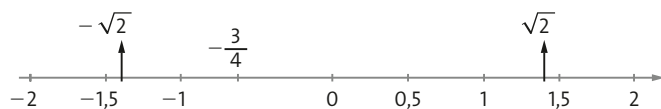


### Fique atento!

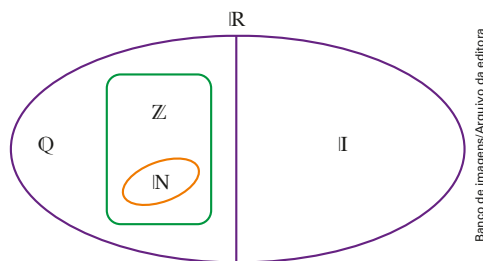
A possibilidade de relacionar pontos e números foi responsável por grandes progressos na Matemática.



Observe alguns números reais colocados na reta real:



O diagrama abaixo relaciona os conjuntos numéricos estudados até aqui.



- $\mathbb{N}$  é parte de  $\mathbb{Z}$ ;  $\mathbb{Z}$  é parte de  $\mathbb{Q}$ ;  $\mathbb{Q}$  é parte de  $\mathbb{R}$ .

Indicamos essas relações por:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- $\mathbb{I}$  é parte de  $\mathbb{R}$ . Indicamos essa relação assim:

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

- $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$  não têm elementos comuns.

**Observação:** Com os números reais, toda equação do tipo  $x^2 = a$ , com  $a \in \mathbb{N}$ , pode ser resolvida e todos os segmentos de reta podem ser medidos.

## Desigualdades entre números reais

Dados dois números reais quaisquer,  $a$  e  $b$ , ocorre uma e somente uma das seguintes possibilidades:

$$a < b \quad \text{ou} \quad a = b \quad \text{ou} \quad a > b$$

**Geometricamente**, a desigualdade  $a < b$  significa que  $a$  está à esquerda de  $b$  na reta real orientada:



A desigualdade  $a > b$  significa que  $a$  está à direita de  $b$  na reta real orientada:



**Aritmeticamente**, vamos analisar alguns exemplos:

- $2,195... < 3,189...$ , pois  $2 < 3$ ;
- $4,128... < 4,236...$ , pois  $4 = 4$  e  $0,1 < 0,2$ ;
- $3,267... < 3,289...$ , pois  $3 = 3$ ;  $0,2 = 0,2$  e  $0,06 < 0,08$ ;
- $5,672... < 5,673...$ , pois  $5 = 5$ ;  $0,6 = 0,6$ ;  $0,07 = 0,07$  e  $0,002 < 0,003$ , e assim por diante.

**Algebricamente**,  $a < b$  se, e somente se, a diferença  $d = b - a$  é um número positivo, ou seja, vale  $a < b$  se, e somente se, existe um número real positivo  $d$  tal que  $b = a + d$ .

Uma vez definida essa relação de ordem dos números reais, dizemos que eles estão ordenados. Usamos também a **notação**  $a \leq b$  para dizer que  $a < b$  ou  $a = b$ . Assim:

$a \leq b$  lê-se  $a$  é menor do que ou igual a  $b$ .

$b \geq a$  lê-se  $b$  é maior do que ou igual a  $a$ .

### Fique atento!

São reais:

- os números naturais;
- os números inteiros;
- os números racionais;
- os números irracionais.

Os números reais constituem o modelo matemático para as medidas.

### Você sabia?

Ordenar os números reais aritmeticamente é como ordenar as palavras em um dicionário.

**Notação:** conjunto de sinais com que se faz uma representação ou designação convencional.

## Módulo ou valor absoluto de um número real

O **módulo** ou **valor absoluto** de um número real  $r$ , que representamos por  $|r|$ , é considerado igual a  $r$  se  $r \geq 0$  e igual a  $-r$  se  $r < 0$ . Por exemplo:

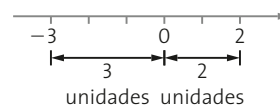
- a)  $|2| = 2$ , porque, neste caso,  $r = 2$  e  $2 > 0$
- b)  $|0| = 0$ , porque, neste caso,  $r = 0$
- c)  $|-2| = -(-2) = 2$ , porque  $r = -2$  e  $-2 < 0$

Resumindo, podemos escrever:

$$|r| = r, \text{ se } r \geq 0 \quad \text{e} \quad |r| = -r, \text{ se } r < 0$$

Geometricamente, o módulo de um número indica, na reta real orientada, a distância desse número ao zero.

- distância do 2 ao 0: 2 unidades  $\rightarrow |2| = 2$
- distância do  $-3$  ao 0: 3 unidades  $\rightarrow |-3| = 3$



Veja outros exemplos:

- a)  $|3| = 3$
- b)  $|-6| = -(-6) = 6$
- c)  $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$
- d)  $|0| = 0$

Observe que o módulo de um número real qualquer nunca é negativo, ou seja, é sempre positivo ou zero.

Exemplos:

- a)  $2 \cdot |5| = 2 \cdot 5 = 10$
- b)  $|-7| + |-2| = 7 + 2 = 9$
- c)  $|-3| - |+8| = 3 - 8 = -5$
- d)  $|-5 + 3| = |-2| = 2$
- e)  $|-5| + |3| = 5 + 3 = 8$
- f)  $|(-5)(-4)| = |20| = 20$
- g)  $|3 - x|$  quando  $x = 7$   
 $|3 - x| = |3 - 7| = |-4| = 4$
- h)  $|x^2 - 3x - 10|$  quando  $x = 2$   
 $|x^2 - 3x - 10| = |4 - 6 - 10| = |-12| = 12$
- i)  $|x^2|$  com  $x \in \mathbb{R}$   
Como  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$  e, pela definição,  $|x^2| = x^2$ .
- j)  $|x - 2| = x - 2$  se  $x \geq 2$  e  
 $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$  se  $x < 2$

## Distância entre dois pontos na reta real orientada

Considerando a reta real orientada representada por:



podemos determinar, pelo módulo, a distância entre dois pontos dessa reta orientada fazendo a correspondência entre os pontos da reta e números reais:

- a distância entre A e B é  $AB = |5 - 2| = |3| = 3$
- a distância entre C e D é  $CD = |(-4) - (-5)| = |1| = 1$
- a distância entre D e A é  $DA = |2 - (-4)| = |6| = 6$
- a distância entre B e C é  $BC = |(-5) - 5| = |-10| = 10$

Observe que:

- a distância entre A e B é  $AB = |5 - 2| = |3| = 3$
- a distância entre B e A é  $BA = |2 - 5| = |-3| = 3$

Logo,  $AB = BA$ .

Verifique outros exemplos e veja que essa desigualdade ocorre sempre.

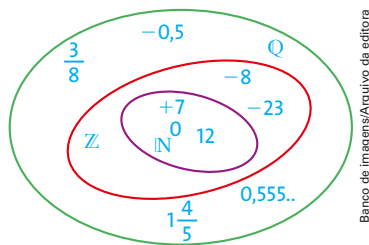
De modo geral, é possível demonstrar que:

Na reta real orientada, se  $a$  é a coordenada do ponto A e  $b$  é a coordenada do ponto B, então a distância entre A e B pode ser escrita por  $|a - b|$  ou  $|b - a|$ , que são iguais.

# Exercícios

Veja a resolução do exercício 11 no Manual do Professor.

- Escreva no caderno, usando chaves, os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{N}$ .  
 $M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots\}$   
 a)  $M(6)$ : conjunto dos múltiplos de 6.  
 b)  $D(6)$ : conjunto dos divisores de 6.  $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$   
 c)  $A$ : conjunto dos números primos menores do que 20.  
 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$   
 d)  $C$ : conjunto dos números naturais quadrados perfeitos.  $C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$   
Chame a atenção dos alunos para o fato de que as reticências (...) dos itens a e d significam que há infinitos elementos nesses subconjuntos.
- Represente no caderno o conjunto formado pelos possíveis valores de  $x$  em cada item.  
 a)  $x \in \mathbb{N}$  e  $x < 3$   $\{0, 1, 2\}$   
 b)  $x \in \mathbb{Z}$  e  $x \geq -2$   $\{-2, -1, 0, 1, \dots\}$   
 c)  $x \in \mathbb{N}$  e  $x \leq +1$   $\{0, 1\}$   
 d)  $x \in \mathbb{Z}$  e  $-2 < x \leq 3$   
 e)  $x \in \mathbb{N}$  e  $x < 0$  **Não existe valor para  $x$ .**  
 f)  $x \in \mathbb{Z}$  e  $x < 0$   $\{\dots, -3, -2, -1\}$
- Formule uma situação-problema que envolva números inteiros e dê para um colega resolver.  
Resposta pessoal.
- Copie e complete o diagrama a seguir no caderno, colocando nele os símbolos dos conjuntos numéricos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  de forma adequada.

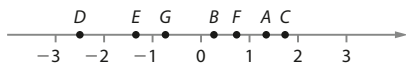


Banco de imagens/Arquivo da editora

Depois distribua os seguintes números nos locais adequados:

$-8$     $+7$     $\frac{3}{8}$     $-0,5$     $12$     $0$     $-23$     $1\frac{4}{5}$     $0,555\dots$

- Associe no caderno cada número racional abaixo à letra correspondente marcada na reta numerada.



- $1\frac{4}{5}$  **C**    •  $\frac{4}{3}$  **A**    •  $-\frac{7}{10}$  **G**    •  $-\frac{5}{4}$  **E**
- $-2,5$  **D**    •  $0,181818\dots$  **B**    •  $0,7$  **F**

- Dê a representação decimal dos seguintes números racionais:  
 $0,555\dots = 0,\bar{5}$   
 a)  $\frac{7}{8}$  **0,875**    b)  $\frac{5}{9}$     c)  $\frac{7}{5}$  **1,4**    d)  $1\frac{2}{3}$   **$1,\bar{6}$**
- Determine a geratriz  $\frac{a}{b}$  das seguintes dízimas periódicas:  
 a)  $0,333\dots$   $\frac{1}{3}$     c)  $0,242424\dots$   $\frac{8}{33}$   
 b)  $0,1666\dots$   $\frac{1}{6}$     d)  $0,125777\dots$   $\frac{283}{2250}$
- Coloque em ordem crescente os números reais:

$\frac{6}{10}$ ;  $0,\bar{5}$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{4}{5}$ ;  $0,\bar{52}$ ;  $0,25$

$$0,25 < \frac{1}{2} < 0,\bar{52} < 0,\bar{5} < \frac{6}{10} < \frac{4}{5}$$

- Identifique, sem fazer as contas, se a representação decimal dos números dados será exata, infinita periódica ou infinita não periódica.

- a)  $\frac{5}{7}$  **infinita periódica**
- b)  $\frac{171}{40}$  **exata**
- c)  $\sqrt{17}$  **infinita não periódica**
- d)  $\frac{23}{90}$  **infinita periódica**
- e)  $\sqrt{101} + 5$  **infinita não periódica**
- f)  $\frac{1}{125}$  **exata**

- Entre os números reais  $-\sqrt{3}$  e  $+\sqrt{5}$ :  
 a) quantos números naturais existem? E números inteiros? **3; 4**  
 b) quantos números racionais existem? E números irracionais? **Infinitos; infinitos.**

- Fazendo conjecturas com o uso da calculadora**  
 Use a calculadora, substituam  $x$  e  $y$  por números reais quaisquer várias vezes e verifiquem se as afirmações abaixo são verdadeiras:

- a)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$  **V**
- b)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$  **F**

**Você sabia?**

Conjecturar é levantar hipóteses, é inferir que algo é provável.

Agora, elevem ambos os membros ao quadrado nos itens **a** e **b** e verifiquem se suas conjecturas estavam corretas.

- Façam o que se pede.  
 a) Efetuem cada operação:  
  - $2 + 4$  **6**    •  $10 + 12$  **22**    •  $26 + 60$  **86**
  - $2 + 6$  **8**    •  $6 + 10$  **16**    •  $8 + 8$  **16**
  - $4 + 8$  **12**    •  $100 + 200$  **300**
 b) Notem que só foram usados **números pares** nas operações acima. E sobre os resultados obtidos? Há algum padrão que pode ser percebido em todos esses resultados? **Todos os resultados são números pares.**  
 c) Conjecturem uma regra para esse padrão (uma hipótese sobre o padrão observado). Algo do tipo: "sempre que..." ou "toda...".  
Veja a resolução dos itens c e d no Manual do Professor.  
 d) Lembrando que qualquer número par  $p$  sempre pode ser escrito na forma  $p = 2n$ , em que  $n$  é natural, tentem provar a conjectura obtida no item c.

- Calcule:  
 a)  $|-7|$  **7**    e)  $|-9| + |-7|$  **16**  
 b)  $|\pi - 3|$   **$\pi - 3$**     f)  $-|-7|$  **-7**  
 c)  $|\pi - 5|$   **$5 - \pi$**     g)  $|-2 + 5|$  **3**  
 d)  $(-3) \cdot |-5|$  **-15**    h)  $|2x - 1|$  quando  $x = -5$  **11**

- Se  $P$  corresponde ao número  $-127$ ,  $Q$  corresponde ao número  $238$  e  $M$  corresponde ao número  $-31$ , calcule  $PQ$ ,  $PM$  e  $MQ$ .  **$PQ = 365$ ;  $PM = 96$ ;  $MQ = 269$**

## 8 A linguagem de conjuntos

### Relação de inclusão entre conjuntos

Dados os conjuntos  $A$  e  $B$ , se todo elemento de  $A$  for também elemento de  $B$ ,  $A$  está contido em  $B$  e escrevemos  $A \subset B$ , como já estudamos na página 13.

A relação  $A \subset B$  chama-se **relação de inclusão**.

### Propriedades

A relação de inclusão possui três propriedades básicas. Dados os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  quaisquer de um determinado universo  $U$ , temos:

1ª)  $A \subset A$  (propriedade reflexiva).

2ª) Se  $A \subset B$  e  $B \subset A$ , então  $A = B$  (propriedade antissimétrica).

3ª) Se  $A \subset B$  e  $B \subset C$ , então  $A \subset C$  (propriedade transitiva).

A propriedade antissimétrica é sempre usada quando se quer provar que dois conjuntos são iguais. Para provar que  $A = B$ , basta provar que  $A \subset B$  (todo elemento de  $A$  pertence a  $B$ ) e que  $B \subset A$  (todo elemento de  $B$  pertence a  $A$ ).

A propriedade transitiva é fundamental nas deduções. Na lógica, ela é conhecida como uma forma de raciocínio chamada **silogismo**. Por exemplo:

$P$ : conjunto dos piauienses

$B$ : conjunto dos brasileiros

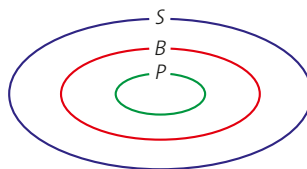
$S$ : conjunto dos sul-americanos

Todo piauiense é brasileiro.

Todo brasileiro é sul-americano.

Então, todo piauiense é sul-americano.

Se  $P \subset B$  e  $B \subset S$ , então  $P \subset S$ .



Acompanhe outro exemplo:

$\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais

$\mathbb{Q}$ : conjunto dos números racionais

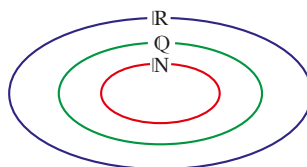
$\mathbb{R}$ : conjunto dos números reais

Todo número natural é racional.

Todo número racional é real.

Então, todo número natural é real.

Se  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , então  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ .



### Complementar de um conjunto

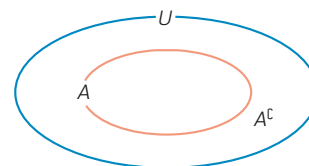
Dado o universo  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e o conjunto  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $A \subset U$ , dizemos que o **complementar de  $A$  em relação a  $U$**  é  $\{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$ , ou seja, é o conjunto formado pelos elementos de  $U$  que não pertencem a  $A$ .

De modo geral, dado um conjunto  $A$ , subconjunto de um universo  $U$ , chama-se complementar de  $A$  em relação a  $U$  o conjunto formado pelos elementos de  $U$  que não pertencem a  $A$ ; indica-se  $C_U^A$  ou  $A^c$  ou  $\bar{A}$  (lê-se complementar de  $A$  em relação a  $U$ ).

Logo,  $A^c = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$ .

#### Fique atento!

O complementar de um conjunto só tem sentido quando fixamos um conjunto universo  $U$ .





## Propriedades

É possível demonstrar a validade das seguintes propriedades:

1ª)  $(A^c)^c = A$  para todo  $A \subset U$  (o complementar do complementar de um conjunto  $A$  é o próprio conjunto  $A$ ).

2ª) Se  $A \subset B$ , então  $B^c \subset A^c$  (se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém esse outro).

Escrevendo de outra forma, temos:

$$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$$

De 1ª) e 2ª), conclui-se que:

3ª)  $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$  Ao final deste capítulo existem alguns assuntos opcionais relacionados a esse tema. É a parte que envolve as relações lógicas (implicações, contrapositiva, etc.).

## Exercícios

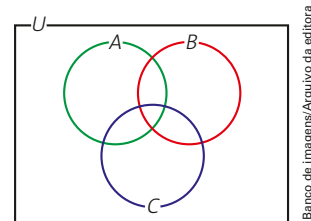
15. Escreva no caderno três conjuntos  $X$  tal que  $A \subset X$ , sendo  $A = \{2, 4, 6\}$ . Exemplos:  $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ;  $X = \{2, 4, 6, 8\}$ ;  $X = \{0, 2, 4, 6\}$ ;  $X = \{2, 4, 6\}$ ;  $X = \{2, 4, 6, \dots\}$ ;  $X = \mathbb{N}$ .

16. Dados  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $C = \{2, 4\}$ , determine:

- $C_U^A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $C_U^B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $C_U^C = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $C_A^C = \{0, 6, 8\}$

Veja a resolução do exercício 17 no Manual do Professor.

17. Copie o diagrama abaixo no caderno e hachure os conjuntos fazendo uma figura para cada item.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

a)  $C_U^A$

b)  $B^c$

c)  $C_U^C$

## Operações entre conjuntos

### Reunião ou união de conjuntos

Dados dois conjuntos,  $A$  e  $B$ , a reunião  $A \cup B$  é o conjunto formado pelos elementos de  $A$  mais os elementos de  $B$ :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Por exemplo, se  $A = \{3, 6\}$  e  $B = \{5, 6\}$ , então  $A \cup B = \{3, 5, 6\}$ .

**Observação:** Este “ou” da reunião não é o “ou” de exclusão da linguagem usual “vamos ao cinema ou ao teatro”. Ele significa: se  $x \in A \cup B$ , então  $x \in A$  ou  $x \in B$  ou  $x$  pertence a ambos, isto é,  $x \in A \cup B$  quando pelo menos uma das afirmações,  $x \in A$  ou  $x \in B$ , é verdadeira.

### Intersecção de conjuntos

Dados dois conjuntos,  $A$  e  $B$ , a intersecção  $A \cap B$  é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a  $A$  e a  $B$ :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Por exemplo, se  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \{2, 3, 4, 5\}$ , então  $A \cap B = \{2, 4\}$ .

### Observações:

1ª)  $x \in A \cap B$  quando as duas afirmações,  $x \in A$  e  $x \in B$ , são simultaneamente verdadeiras.

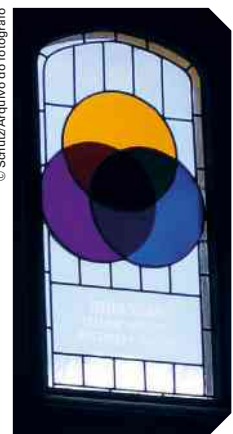
2ª) Se  $A \cap B = \emptyset$ , então os conjuntos  $A$  e  $B$  são chamados **disjuntos**.

### Você sabia?

Essa maneira de representar conjuntos usando curvas fechadas não entrelaçadas chama-se **diagrama de Venn** em homenagem ao seu criador, o matemático John Venn (1834-1923).

Uma das janelas da Faculdade de Gonville e Caius (Universidade de Cambridge, situada na Inglaterra) homenageia John Venn, estudante e professor dessa instituição. Fotografia de 2006.

© Schuz/Arquivo do fotógrafo



## Propriedades da união e da intersecção

Dados três conjuntos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , valem as propriedades:

1ª)  $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$  (comutativa)

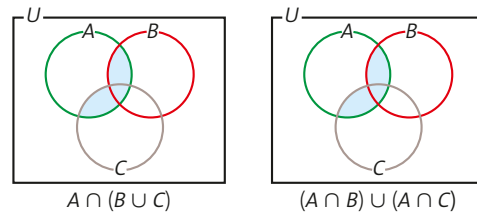
2ª)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (associativa)

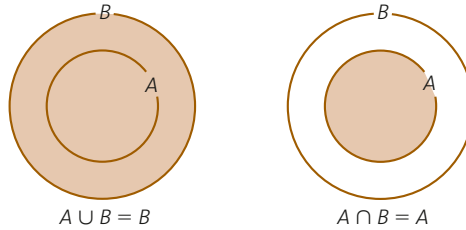
3ª)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (distributiva)

4ª)  $A \subset B$  é equivalente a  $A \cup B = B$  e também é equivalente a  $A \cap B = A$



3ª propriedade, 1º item



☞ Constate a veracidade dessas propriedades representando os conjuntos por diagramas, como foi feito com a 3ª e a 4ª propriedades.

## Diferença entre conjuntos

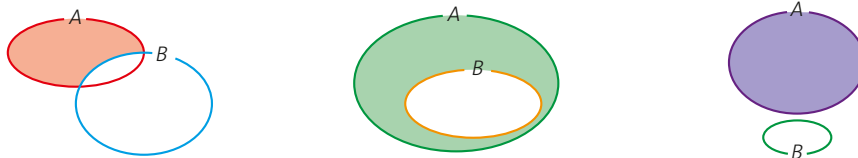
Dados os conjuntos  $A = \{0, 1, 3, 6, 8, 9\}$  e  $B = \{1, 4, 9, 90\}$ , podemos escrever o conjunto  $C$  formado pelos elementos que pertencem a  $A$ , mas que não pertencem a  $B$ . Assim,  $C = \{0, 3, 6, 8\}$ .

O conjunto  $C$  é chamado **diferença** entre  $A$  e  $B$  e é indicado por  $A - B$  (lê-se  $A$  menos  $B$ ).

De modo geral, escrevemos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Nos diagramas abaixo, a diferença  $A - B$  está preenchida.



### Fique atento!

Se  $B \subset A$ , então  $A - B = C_A^B$ , em que  $C_A^B$  significa o complementar de  $B$  em relação a  $A$ .

Ilustrações: imagens desta página:  
Banco de imagens/Arquivo da editora

## Exercício resolvido

passo a passo: exercício 1

### Resolvido passo a passo

1. (Uepa) De acordo com a reportagem da Revista VEJA (edição 2341), é possível fazer gratuitamente curso de graduação pela Internet. Dentre os ofertados temos os cursos de Administração (bacharelado), Sistemas de Computação (tecnólogo) e Pedagogia (licenciatura). Uma pesquisa realizada com 1800 jovens brasileiros sobre quais dos cursos ofertados gostariam de fazer constatou que 800 optaram pelo curso de Administração; 600 optaram pelo

curso de Sistemas de Computação; 500 optaram pelo curso de Pedagogia; 300 afirmaram que fariam Administração e Sistemas de Computação; 250 fariam Administração e Pedagogia; 150 fariam Sistemas de Computação e Pedagogia e 100 dos jovens entrevistados afirmaram que fariam os três cursos. Considerando os resultados dessa pesquisa, o número de jovens que não fariam nenhum dos cursos elencados é:

- a) 150                      c) 350                      e) 500  
b) 250                      d) 400

## 1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

A quantidade de jovens que participaram da pesquisa, os cursos ofertados gratuitamente e as escolhas feitas entre os três cursos ofertados, sendo possível que cada jovem escolhesse mais de um curso.

b) O que se pede?

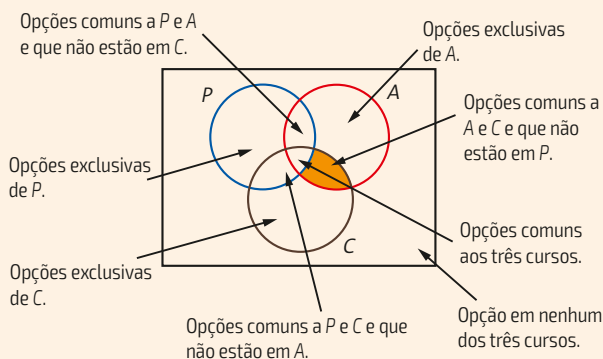
A quantidade de jovens, entre os entrevistados, que não optaram por nenhum dos três cursos ofertados.

## 2. Planejando a solução

É importante fazer uma nova leitura do problema, organizando as informações para determinar a quantidade de escolhas comuns e as exclusivas de cada curso. Depois, adicionar o valor total de escolhas de cada opção (comum ou exclusiva) e subtrair essa soma do total de jovens entrevistados. Para isso, o uso do diagrama de Venn é uma ótima ferramenta, pois auxilia na organização e obtenção das informações.

## 3. Executando o que foi planejado

Para representar a situação por meio de um diagrama de Venn, desenhamos um retângulo representando o conjunto universo (total de 1 800 jovens) e dentro dele três círculos representando cada um dos três cursos. As regiões comuns entre os círculos representam as opções de curso em comum entre os ofertados. Dessa forma, teremos oito regiões distintas, conforme mostrado a seguir. Sendo Pedagogia (P), Administração (A) e Sistemas de Computação (C), temos:



1º passo – A intersecção dos 3 conjuntos, alunos que optaram pelos 3 cursos: 100

2º passo – Alunos que optaram por apenas 2 cursos:

a) Administração e Pedagogia:  $250 - 100 = 150$

b) Administração e Sistemas de Computação:  
 $300 - 100 = 200$

c) Pedagogia e Sistemas de Computação:  
 $150 - 100 = 50$

3º passo – Alunos que optaram por apenas 1 curso:

a) Pedagogia:  $500 - (150 + 100 + 50) = 200$

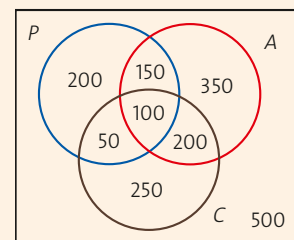
b) Administração:  $800 - (150 + 100 + 200) = 350$

c) Sistemas de Computação:  
 $600 - (50 + 100 + 200) = 250$

4º passo – Alunos que não optaram por nenhum dos três cursos ofertados: A soma de todos os números das sete regiões dos círculos representa a quantidade de jovens que optaram por pelo menos um curso:  $200 + 50 + 250 + 150 + 100 + 200 + 350 = 1300$ .

Dessa forma, a quantidade de jovens que foram entrevistados e não optaram por nenhum dos três cursos é obtida por:  $1800 - 1300 = 500$ .

Observe o diagrama ao lado com os valores encontrados já dispostos nas respectivas regiões dos círculos e universo.



## 4. Verificando

Do diagrama de Venn, percebemos que são  $250 + 200 + 350 + 500 = 1300$  jovens que não optaram por Pedagogia.

Como Pedagogia teve 500 escolhas, então o número de entrevistados confirma-se como sendo 1800. Partindo desse valor e subtraindo  $1300$  – quantidade de jovens que escolheram pelo menos um curso – temos que 500 não o fizeram.

a) 500 panfletos de Pedagogia, 600 panfletos de Sistemas de Computação e 800 panfletos de Administração.

## 5. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa e.

## 6. Ampliando o problema

a) Se cada jovem, ao fazer uma opção, a partir da pesquisa, recebesse um panfleto falando sobre o curso optado na pesquisa, quantos panfletos teriam que ser feitos para cada curso, objetivando suprir todas as necessidades?

b) Determinada empresa especializada foi contratada para realizar tal pesquisa. No contrato foi estabelecido que ela recebesse 10 reais por jovem que optasse pelos três cursos concomitantemente, 5 reais por jovem que optasse por exatamente dois cursos e 2 reais por jovem que optasse por somente um dos cursos. Seria descontado 1 real por jovem que não optasse por qualquer curso. Quanto a empresa que realizou a pesquisa recebeu?

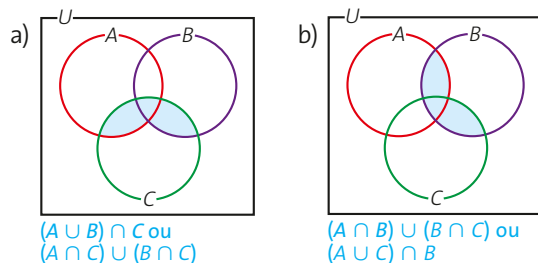
c) *Discussão em equipe*  $R\$ 4 100,00 (100 \cdot 10 + 400 \cdot 5 + 800 \cdot 2 - 500 \cdot 1 = 4 100)$   
Troque ideias com seus colegas sobre a facilidade de acesso a cursos de graduação via internet, ou seja, a distância. Conversem também sobre mudanças de hábito causadas pela internet e pelas novas tecnologias, discutindo possíveis vantagens e desvantagens do ensino a distância.



Veja a resolução dos exercícios 23 e 26 no Manual do Professor.

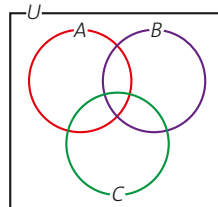
- 18.** Dados os conjuntos  $A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $B = \{2, 4, 5, 6, 9\}$  e  $C = \{0, 3, 6, 9, 10\}$ , determine:
- a)  $A \cup B$       c)  $A \cup C$       e)  $A \cap (B \cap C)$   
 $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$        $\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$   
 b)  $A \cap B$       d)  $(A \cap B) \cup C$   
 $\{4, 5, 6\}$        $\{0, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$
- 19.** Dados os conjuntos  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ,  $B = \{b, d, g, h, i\}$  e  $C = \{e, f, m, n\}$ , determine:
- a)  $A - B$   $\{a, c, e, f\}$       c)  $B - A$   $\{h, i\}$   
 b)  $B - C$       d)  $(A - B) \cup (B - A)$   
 $\{a, c, e, f, h, i\}$
- 20.** Com os conjuntos numéricos dados, efetuem as operações de união e intersecção:
- a)  $\mathbb{Z} \text{ e } \mathbb{Q}$       b)  $\mathbb{Q} \text{ e } \mathbb{R}$   
 $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$        $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$
- 21.** Determinem:
- a)  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$       c)  $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$   
 b)  $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z}$       d)  $(\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}) \cap \mathbb{Q}$

- 22.** Indique no caderno, simbolicamente, a parte colorida em cada diagrama:



- 23.** Copie o diagrama ao lado no caderno e hachure os conjuntos, fazendo uma figura para cada item.

- a)  $A - B$       c)  $B - C$   
 b)  $A - C$       d)  $B - A$



- 24.** Um professor de Língua Portuguesa sugeriu em uma sala de aula a leitura dos livros *Helena*, de Machado de Assis, e *Iracema*, de José de Alencar. Vinte alunos leram *Helena*, 15 leram só *Iracema*, 10 leram os dois livros e 15 não leram nenhum deles.

- a) Quantos alunos leram *Iracema*? **25 alunos.**  
 b) Quantos alunos leram só *Helena*? **10 alunos.**  
 c) Qual é o número de alunos nessa sala? **50 alunos.**

- 25.** Uma pesquisa mostrou que 33% dos entrevistados leem o jornal A, 29% leem o jornal B, 22% leem o jornal C, 13% leem A e B, 6% leem B e C, 14% leem A e C e 6% leem os três jornais.

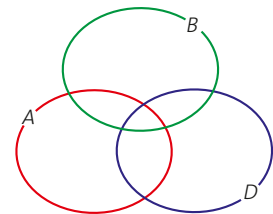
- a) Quanto por cento não lê nenhum desses jornais? **43%**  
 b) Quanto por cento lê os jornais A e B e não lê C? **7%**  
 c) Quanto por cento lê pelo menos um jornal? **57%**

- 26.** Na internet, *sites* de busca permitem que o internauta faça combinações entre as palavras que devem ser pesquisadas para obter os resultados desejados. Em geral, as regras de procura são as seguintes:

- Quando as palavras são digitadas com um espaço entre elas, a busca é feita por uma palavra e a outra palavra. Por exemplo, digitando **amor esperança** serão procurados apenas os *sites* que contenham ao mesmo tempo as palavras “amor” e “esperança”.
- Quando se usa um sinal de – (menos) na frente de determinada palavra, a busca é feita excluindo-se os *sites* que contenham tal palavra. Por exemplo, digitando **amor –esperança** serão procurados os *sites* que contenham a palavra “amor”, mas que não contenham a palavra “esperança”.

Com base nessas palavras, considere que um rapaz tenha feito a seguinte pesquisa: **amor beleza–desespero**.

No diagrama de Venn abaixo, considere que os *sites* com as palavras **Amor, Beleza e Desespero** estão representados como conjuntos com a inicial da palavra, ou seja, ao conjunto A pertencem todos os tipos de *sites* que contêm a palavra **Amor**, e assim por diante. Copie o diagrama em seu caderno e pinte as regiões que representam corretamente o resultado da busca feita pelo rapaz.



- 27.** Em uma pesquisa feita com 1 000 famílias para verificar a audiência dos programas de televisão, foram obtidos os seguintes resultados: 510 famílias assistem ao programa A, 305 assistem ao programa B e 386 assistem ao programa C. Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas A e B, 60 assistem aos programas B e C, 25 assistem a A e C e 10 famílias assistem aos três programas.

- a) Quantas famílias não assistem a nenhum desses programas? **54 famílias.**  
 b) Quantas famílias assistem somente ao programa A? **315 famílias.**  
 c) Quantas famílias não assistem nem ao programa A nem ao programa B? **365 famílias.**

- 28.** Em um levantamento entre 100 estudantes sobre o estudo de idiomas, foram obtidos os seguintes resultados: 41 estudam inglês, 29 estudam francês e 26 estudam espanhol; 15 estudam inglês e francês, 8 estudam francês e espanhol, 19 estudam inglês e espanhol; 5 estudam os três idiomas.

- a) Quantos estudantes não estudam nenhum desses idiomas? **41 estudantes.**  
 b) Quantos estudantes estudam apenas um desses idiomas? **27 estudantes.**



Oriente as duplas a tentar encontrar a solução dessas situações. Para isso, disponibilize alguns minutos de troca de ideias. Depois, pergunte os resultados obtidos e, principalmente, como chegaram a eles. Caso alguns alunos não encontrem a solução, resolva as situações no quadro de giz. Depois, peça que tentem generalizar a situação, criando uma “fórmula” para ela.

## Número de elementos da união de conjuntos

Vamos estudar como obter o número de elementos da união de conjuntos. Para isso, forme uma dupla com um colega e tentem resolver as duas situações propostas a seguir:

1ª) Em uma sala de aula com 50 alunos foi feita a seguinte pergunta: “Quem gosta de futebol?” e 40 alunos levantaram o braço. Depois de abaixados os braços, perguntou-se: “Quem gosta de vôlei?” e 30 alunos levantaram o braço. Nenhum aluno deixou de levantar o braço.

a) Como é possível 40 alunos gostarem de futebol e 30 alunos de vôlei ( $40 + 30 = 70$ ) se apenas 50 pessoas estavam na sala? **Alguns alunos levantaram o braço duas vezes.**

b) Quantos responderam que gostam dos dois esportes? **20 alunos.**

2ª) Em outra classe com  $x$  alunos repetiu-se a pergunta: “Quem gosta de futebol?” e 30 alunos levantaram o braço. Depois de abaixados os braços, também se perguntou: “Quem gosta de vôlei?” e 25 alunos levantaram o braço. Nenhum aluno deixou de levantar o braço e 10 levantaram o braço duas vezes.

De acordo com essas informações, determine quantos alunos estavam na sala. **45 alunos.**

Agora, consideremos  $A$  o conjunto dos números ímpares de 0 a 10 e  $B$  o conjunto dos números primos de 0 a 10. Então:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow n(A) = 5 \text{ (} n(A) \text{ significa “número de elementos do conjunto } A \text{”)}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 4$$

$$A \cap B = \{3, 5, 7\} \neq \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 3 \text{ (número de elementos da intersecção } A \cap B \text{ é igual a 3)}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow n(A \cup B) = 6$$

Observe que  $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$ , pois há três elementos comuns a ambos os conjuntos [ $n(A \cap B) = 3$ ].

Assim:

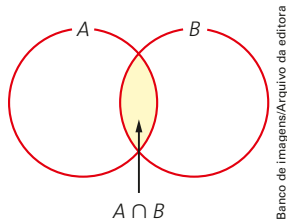
$$\begin{array}{ccccccc} 6 & = & 5 & + & 4 & - & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n(A \cup B) & = & n(A) & + & n(B) & - & n(A \cap B) \end{array}$$

De modo geral, quando  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos, tem-se:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

*Demonstração:*

Observe que  $n(A)$  inclui  $n(A \cap B)$  e  $n(B)$  também inclui  $n(A \cap B)$ :



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= [n(A) - n(A \cap B)] + n(A \cap B) + [n(B) - n(A \cap B)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

No caso particular de  $A \cap B = \emptyset$ , temos:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ , pois  $n(A \cap B) = 0$ .

**Observação:** No caso de três conjuntos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , é possível provar que a fórmula que indica o número de elementos da união  $A \cup B \cup C$  é:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Agora, usando as fórmulas, verifique se a sua dupla acertou as respostas das situações propostas acima.

## Exercícios resolvidos

2. Em uma sala de aula, 10 alunos gostam de Matemática, 16 gostam de Arte, 5 gostam das duas disciplinas e 8 não responderam. Quantos alunos há nessa sala?

**Resolução:**

A: alunos que gostam de Matemática

B: alunos que gostam de Arte

$A \cap B$ : alunos que gostam de ambas as matérias

$A \cup B$ : alunos que gostam de Matemática ou Arte

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = 10 + 16 - 5 = 21$$

Então, os alunos que gostam de Matemática ou de Arte são 21. Com os 8 que não responderam, temos 29 alunos nessa sala.

3. Das 40 pessoas que participaram de uma pesquisa, 30 gostam do jornal A, 20 gostam do jornal B e 5 não gostam de nenhum jornal. Qual é a quantidade de pessoas que gostam dos dois jornais?

**Resolução:**

A: pessoas que gostam do jornal A

B: pessoas que gostam do jornal B

$A \cap B$ : pessoas que gostam de ambos os jornais

$A \cup B$ : pessoas que gostam do jornal A ou do jornal B

$$n(A \cup B) = 40 - 5 = 35$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$35 = 30 + 20 - x \Rightarrow x = 15$$

Então, são 15 pessoas que gostam dos dois jornais.

## Exercícios



29. Se  $n(A \cup B) = 14$ ,  $n(A) = 10$ ,  $n(B) = 9$ , determine  $n(A \cap B)$ . 5

30. Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de 40 alunos. Dez alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira questão e 20 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões? 5 alunos.

31. Se  $n(A) = 18$ ,  $n(B) = 23$ ,  $n(A \cap B) = 7$ , determine  $n(A \cup B)$ . 34

32. Em uma pesquisa com 83 pessoas sobre programas de televisão, 41 responderam que gostam do programa A, 56 que gostam do programa B e 7 que não gostam de nenhum deles. Quantos pesquisados gostam de ambos os programas? 21 pesquisados.

## 9 Intervalos reais

Certos subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , determinados por desigualdades, têm grande importância na Matemática: são os **intervalos**. Assim, dados dois números reais,  $a$  e  $b$ , com  $a < b$ , tem-se:

a) Intervalo aberto



$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

b) Intervalo fechado



$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

c) Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita



$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

**Você sabia?**

- A bolinha vazia ( $\circ$ ) indica que o extremo não pertence ao intervalo.
- A bolinha cheia ( $\bullet$ ) indica que o extremo pertence ao intervalo.

d) Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

e) Semirreta esquerda, fechada, de origem  $b$



$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

f) Semirreta esquerda, aberta, de origem  $b$



$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

g) Semirreta direita, fechada, de origem  $a$



$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

h) Semirreta direita, aberta, de origem  $a$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

i) Reta real



$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

### Você sabia?

O "oito deitado" é o símbolo que representa o infinito ( $\infty$ ). Esse símbolo foi proposto pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703) em 1655, em seu tratado *De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus* (Estabelecendo um novo método de tratamento de seções cônicas), no qual o autor declara: "Isto, pois, denota o número infinito". O símbolo matemático que representa o infinito tem a forma de uma curva chamada *lemniscata* de Bernoulli. Não sabemos ao certo de onde Wallis obteve essa ideia, porém alguns pesquisadores acreditam que tenha sido inspirada em uma antiga notação romana para o número 1 000 (CI), ou em uma variante da letra grega ômega minúscula ( $\omega$ ).

### Observações:

- 1ª)  $-\infty$  e  $+\infty$  **não** são números reais; apenas fazem parte das notações de intervalos ilimitados.
- 2ª) Qualquer intervalo de extremos  $a$  e  $b$ , com  $a \neq b$ , contém números racionais e irracionais.
- 3ª) Há outras formas de representar intervalos abertos, usando colchetes em vez de parênteses. Por exemplo:
  - $(a, b] = ]a, b]$
  - $(a, b) = ]a, b[$

## Exercícios

33. Escreva no caderno os intervalos representados graficamente:

- a)  $[-4, 2]$
- b)  $(1, +\infty)$
- c)  $(-\infty, 1)$
- d)  $(\frac{1}{2}, 3]$
- e)  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
- f)  $(0,75; 0,90)$

Veja a resolução do exercício 34 no Manual do Professor.

34. No caderno, represente graficamente na reta real os seguintes intervalos:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$
- b)  $(-\infty, 2]$
- c)  $[-3, \frac{1}{2}]$
- d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$
- e)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\}$
- f)  $[0, 6)$

35. Classifique as seguintes afirmações em verdadeiras ou falsas:

- a)  $2 \in [2, 6]$  **V**
- b)  $-1 \in (-5, -1)$  **F**
- c)  $0 \in \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$  **V**
- d)  $3 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$  **V**
- e)  $\{2, 5\} \subset [0, +\infty)$  **V**

$\{3, 5\}$  representa o conjunto dos elementos 3 e 5.  
 $(3, 5)$  representa o conjunto dos números reais entre 3 e 5 e também  
representa o par ordenado de abscissa 3 e ordenada 5.  
 $[3, 5]$  representa o conjunto dos números reais de 3 até 5.

## Operações com intervalos

Como intervalos são subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , é possível fazer operações com eles. As operações de **intersecção**, **união**, **diferença** e **complementar** serão apresentadas por meio de exercícios resolvidos.

### Para refletir

Analise os possíveis significados de  $\{3, 5\}$ ,  $(3, 5)$  e  $[3, 5]$ .

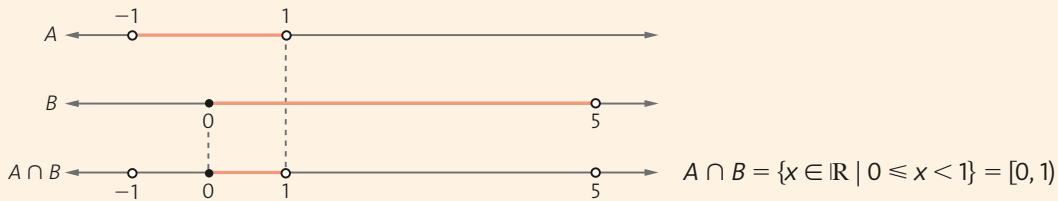
## Exercício resolvido

4. Dados  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$  e  $B = [0, 5]$ , determine:

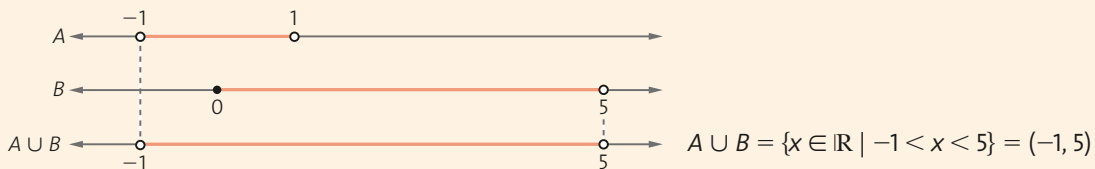
- a)  $A \cap B$       b)  $A \cup B$       c)  $A - B$       d)  $\mathbb{C}_B^A$

**Resolução:**

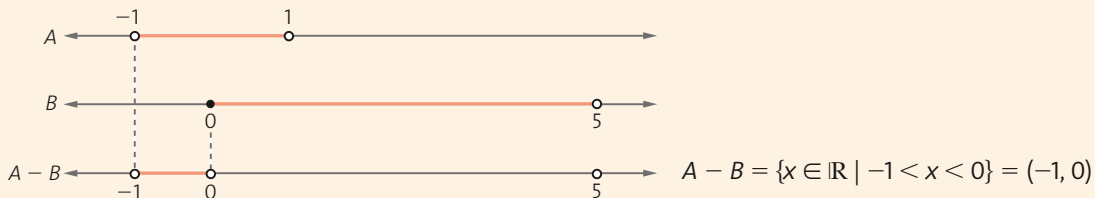
a)  $A \cap B$



b)  $A \cup B$



c)  $A - B$



d)  $\mathbb{C}_B^A$

$\mathbb{C}_B^A$  não se define, pois  $A \not\subset B$ .

## Exercícios

36. Dados os conjuntos a seguir, determine o que se pede:

$A \cap B = [3, 4]; A \cup B = [2, 6] \text{ e } A - B = [2, 3]$

- a)  $A = [2, 4]$  e  $B = [3, 6]$ :  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  e  $A - B$   
b)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ :  $A \cup B$  e  $B \cap A$   $A \cup B = (-\infty, 4)$  e  $A \cap B = (-\infty, 1)$   
c)  $A = [-2, 0)$  e  $B = [-1, +\infty)$ :  $A \cup B$  e  $A \cap B$   
 $A \cup B = [-2, +\infty)$  e  $A \cap B = [-1, 0)$

37. Dados  $A = (-5, 2]$ ,  $B = [-6, 6]$  e  $C = (-\infty, 2]$ , calcule:

- a)  $A \cup B \cup C$   $(-\infty, 6]$       c)  $(A \cup B) \cap C$   $[-6, 2]$   
b)  $A \cap B \cap C$   $(-5, 2]$       d)  $A \cap (B \cup C)$   $(-5, 2]$

38. Dados os intervalos  $A = [-1, 4]$ ,  $B = [1, 5]$ ,  $C = [2, 4]$  e  $D = (1, 3]$ , verifique se 1 pertence ao conjunto  $(A \cap B) - (C - D)$ . **Sim.**

39. **Veja a resolução do exercício 39 no Manual do Professor.** O diagrama de Venn para os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  decompõe o plano em oito regiões. Desenhem o diagrama, numerem as regiões e expressem cada um dos conjuntos abaixo como reunião de algumas dessas regiões.

- a)  $(A^c \cup B)^c$   
b)  $(A^c \cup B) \cup C^c$



# 10 Situações-problema envolvendo números reais, grandezas e medidas

Os números estão presentes em praticamente todas as situações de nossa vida. A seguir, apresentamos alguns exercícios e situações-problema que ilustram isso. Eles podem ser resolvidos em duplas.

## Exercícios

### 40. Arredondamento, cálculo mental e resultado aproximado

Em uma fazenda, foram colhidas 1 123 caixas de laranjas em um mês e 783 caixas no mês seguinte. Nesses dois meses, aproximadamente, quantas caixas de laranjas foram colhidas? Como se quer **aproximadamente** o número de caixas, podemos arredondar os números e somar.

$$\begin{array}{r} 1\ 123 \xrightarrow{\text{arredondamos}} 1\ 100 \\ +\ 783 \xrightarrow{\text{arredondamos}} +\ 800 \\ \hline 1\ 900 \end{array} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{resultado} \\ \text{aproximado} \end{array}$$

Nesses dois meses foram colhidas, aproximadamente, 1 900 caixas de laranjas. Arredonde, encontre o resultado aproximado e indique a resposta que você acha mais provável. Em seguida, confira o resultado com os de seus colegas.

- |                   |   |                |  |
|-------------------|---|----------------|--|
| a) $48 + 71$      | $\begin{cases} 130 \\ 120 \times \\ 110 \end{cases}$        | e) $95 - 39$   | $\begin{cases} 55 \times \\ 45 \\ 65 \end{cases}$    |
| b) $3 \times 297$ | $\begin{cases} 300 \\ 600 \\ 900 \times \end{cases}$        | f) $402 : 5$   | $\begin{cases} 8 \\ 80 \times \\ 800 \end{cases}$    |
| c) $908 : 201$    | $\begin{cases} 5 \times \\ 10 \\ 50 \end{cases}$            | g) $79 + 122$  | $\begin{cases} 220 \\ 210 \\ 200 \times \end{cases}$ |
| d) $39 \times 41$ | $\begin{cases} 160 \\ 1\ 600 \times \\ 16\ 000 \end{cases}$ | h) $502 - 149$ | $\begin{cases} 350 \times \\ 450 \\ 400 \end{cases}$ |

### 41. Arredondamentos

Faça arredondamentos e identifique apenas o valor mais adequado a cada questão.

- |   |   |
|---|---|
| a) Desconto de 9% em R\$ 298,00                             | $\begin{cases} \text{R\$ } 20,00 \\ \text{R\$ } 30,00 \times \\ \text{R\$ } 40,00 \end{cases}$                            |
| b) 49% de uma população de 141 200 habitantes               | $\begin{cases} 70\ 000 \text{ habitantes} \times \\ 50\ 000 \text{ habitantes} \\ 80\ 000 \text{ habitantes} \end{cases}$ |
| c) 22% de um percurso de 503 km                             | $\begin{cases} 50 \text{ km} \\ 100 \text{ km} \times \\ 20 \text{ km} \end{cases}$                                       |
| d) Preço de um produto que custava R\$ 80,50 e aumentou 11% | $\begin{cases} \text{R\$ } 180,00 \\ \text{R\$ } 95,00 \\ \text{R\$ } 88,00 \times \end{cases}$                           |

### 42. As calculadoras são usadas para auxiliar a fazer cálculos complexos mais rapidamente do que utilizando caneta e papel.

Quando a calculadora tem teclas de memória, os números podem ser armazenados para serem usados posteriormente.

Examine o significado de algumas teclas:

**M+** : coloca um número na memória

**M-** : retira um número da memória

**MR** : busca um número na memória

**MC** : apaga a memória

Vamos calcular o valor desta expressão usando as teclas de memória:  $(2\ 496 : 32) + (6\ 298 : 94)$ .

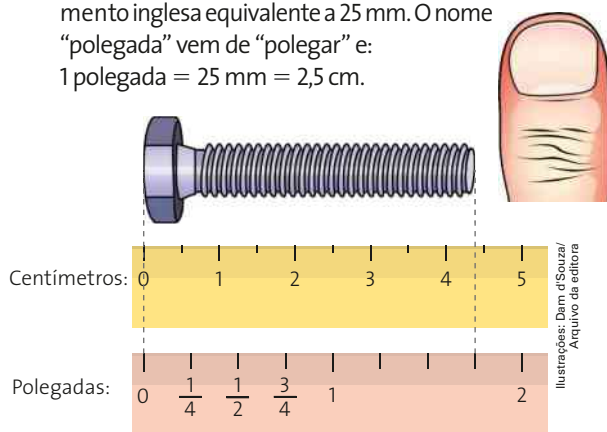
$$2496 \div 32 = 78 \quad \text{M+} \quad 6298 \div 94 = 67 \quad \text{M+} \quad \text{MR} \quad 78 \div 67 = 1,145$$

Agora, use a calculadora para determinar o valor de:

- $(3\ 612 : 86) \cdot (1\ 377 : 51)$  **1134**
- $(712 \cdot 34) + (3\ 455 - 219)$  **27 444**
- $(756 + 24) \cdot (912 : 304)$  **2 340**

### 43. A polegada é uma unidade de medida de comprimento inglesa equivalente a 25 mm.

O nome "polegada" vem de "polegar" e: 1 polegada = 25 mm = 2,5 cm.



Observe as figuras acima e responda no caderno:

- Qual é a medida do parafuso da figura em polegadas? **1,75 polegada**
- Um parafuso com  $2\frac{1}{4}$  polegadas mede mais ou menos do que 6 cm? **Menos.**
- Em 1 metro há quantas polegadas? **40 polegadas**
- Qual é o diâmetro, em milímetros, de um cano de  $\frac{3}{4}$  de polegada? **18,75 mm**



## Relação de inclusão e implicação lógica

Estudamos que uma propriedade pode ser expressa por um conjunto. Vamos considerar  $A$  o conjunto dos elementos de um certo universo  $U$  que possuem a propriedade  $p$ , e  $B$  o conjunto dos elementos desse mesmo universo que possuem a propriedade  $q$ . Quando dizemos que:

$$p \Rightarrow q \text{ (} p \text{ implica } q \text{ ou } p \text{ acarreta } q\text{),}$$

estamos dizendo que  $A \subset B$ .

Exemplos:

a) No universo dos números naturais, vamos considerar as propriedades:

- $p$ :  $n$  é um número natural que termina com 3;
- $q$ :  $n$  é um número natural ímpar.

Então  $A = \{3, 13, 23, 33, \dots\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$  e  $p \Rightarrow q$  ou  $A \subset B$ .

b) Consideremos, no universo dos quadriláteros, as propriedades:

- $p$ : ser quadrilátero com quatro lados de mesma medida;
- $q$ : ser quadrilátero com lados opostos paralelos.

Nesse caso,  $A$  é o conjunto dos losangos e  $B$  é o conjunto dos paralelogramos e, portanto,  $A \subset B$ . Logo,  $p \Rightarrow q$ , ou seja, ser losango implica ser paralelogramo, ou, ainda, **se** um quadrilátero é losango, **então** ele é paralelogramo.

c) **Se** dois números inteiros,  $a$  e  $b$ , são pares, **então** seu produto é par.

Nesse caso, temos um teorema (proposição que devemos demonstrar) em que a **hipótese** é “ $a$  e  $b$  são dois números pares inteiros quaisquer” e a **tese** é “o produto  $a \cdot b$  é par”.

Vamos fazer a **demonstração** ou **prova**, que consiste em uma sequência finita de passagens lógicas que permite, a partir da hipótese ( $p$ ), chegar à tese ( $q$ ).

Hipótese  $p$ :  $a$  e  $b$  são números pares inteiros quaisquer

Tese  $q$ :  $a \cdot b$  é par

Vamos demonstrar que  $p \Rightarrow q$ .

*Demonstração:*

Como  $a$  é um número inteiro par, é da forma  $a = 2n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

Como  $b$  é um número inteiro par, é da forma  $b = 2m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

Assim,

$$a \cdot b = 2n \cdot 2m = 4nm = 2 \cdot \underbrace{2nm}_k = 2 \cdot k \text{ (} k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

$$a \cdot b = 2k \text{ (} k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

Logo,  $a \cdot b$  é par, como queríamos demonstrar.

⊕ Agora é com você. Demonstre que, se dois números inteiros  $a$  e  $b$  são ímpares, então seu produto  $a \cdot b$  é ímpar. Lembre-se de que um número inteiro ímpar qualquer pode ser escrito na forma  $a = 2n + 1$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

Trabalhe com os alunos o fato de que, para mostrar que uma afirmação é falsa, basta dar um contraexemplo. Por exemplo: A soma de dois números ímpares é ímpar? Não:  $\underset{\text{ímpar}}{3} + \underset{\text{ímpar}}{5} = \underset{\text{par}}{8}$

## Recíproca de uma implicação lógica e equivalência

Dada a implicação  $p \Rightarrow q$ , chamamos de sua **recíproca** a implicação  $q \Rightarrow p$ . Observe que nem sempre a recíproca de uma implicação verdadeira é também verdadeira. No exemplo **b**, dado anteriormente, temos que  $p \Rightarrow q$  é verdadeira, pois todo losango é um paralelogramo, mas sua recíproca  $q \Rightarrow p$  é falsa, pois nem todo paralelogramo é um losango.

Quando a implicação  $p \Rightarrow q$  e sua recíproca  $q \Rightarrow p$  são ambas verdadeiras, escrevemos  $p \Leftrightarrow q$  e lemos:  $p$  é equivalente a  $q$  ou  $p$  se, e somente se,  $q$  ou  $p$  é condição necessária e suficiente para  $q$ .

Por exemplo:

$p$ : propriedade de um número natural  $x$  ser igual a 2 ( $x = 2$ )

$q$ : propriedade de o dobro desse  $x$  ser igual a 4 ( $2x = 4$ )

- $p \Rightarrow q$ , pois, se  $x = 2$ , multiplicamos ambos os membros da igualdade por 2 e obtemos  $2x = 4$ .
- $q \Rightarrow p$ , pois, se  $2x = 4$ , dividimos ambos os membros da igualdade por 2 e obtemos  $x = 2$ .

Assim,  $p \Rightarrow q$  e  $q \Rightarrow p$  são verdadeiras.

Logo,  $p \Leftrightarrow q$  e podemos escrever  $x = 2 \Leftrightarrow 2x = 4$ .

## Contrapositiva

Já estudamos que, se  $p$  é a propriedade que define o conjunto  $A$  e  $q$  é a propriedade que define o conjunto  $B$ , dizer que  $A \subset B$  é o mesmo que dizer que  $p \Rightarrow q$  ( $p$  implica  $q$ ).

Vamos representar por  $p'$  a negação de  $p$  e por  $q'$  a negação de  $q$ . Assim, dizer que um objeto  $x$  goza da propriedade  $p'$  significa afirmar que  $x$  **não** goza da propriedade  $p$  (isso vale também para  $q'$  em relação a  $q$ ). Dessa forma, podemos escrever a equivalência:

$$A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$$

da seguinte maneira:

$$p \Rightarrow q \text{ se, e somente se, } q' \Rightarrow p'$$

ou seja, a implicação  $p \Rightarrow q$  ( $p$  implica  $q$ ) é equivalente a esta outra implicação:  $q' \Rightarrow p'$  (a negação de  $q$  implica a negação de  $p$ ).

A implicação  $q' \Rightarrow p'$  chama-se **contrapositiva** da implicação  $p \Rightarrow q$ .

Por exemplo, consideremos o universo  $U$  o conjunto dos quadriláteros convexos,  $p$  a propriedade de um quadrilátero  $x$  ser losango e  $q$  a propriedade de um quadrilátero  $x$  ser paralelogramo. Assim,  $p'$  é a propriedade de um quadrilátero convexo não ser losango, e  $q'$  é a propriedade de um quadrilátero convexo não ser paralelogramo.

Logo:

(1)  $p \Rightarrow q$ : se  $x$  é losango, então  $x$  é paralelogramo.

(2)  $q' \Rightarrow p'$ : se  $x$  não é paralelogramo, então  $x$  não é losango.

As afirmações (1) e (2) são equivalentes, isto é, são duas maneiras diferentes de dizer a mesma coisa.

### Para refletir

O que é um polígono convexo?

Polígono convexo é um polígono cujos ângulos internos são todos menores que  $180^\circ$ .





Tábua com escrita cuneiforme, feita no século XIX a.C., medindo 7,8 cm × 4,7 cm × 1,8 cm. Representa a tabela de multiplicação por 72, uma evidência de que os babilônios já utilizavam a ideia de função.



# 1 Um pouco da história das funções

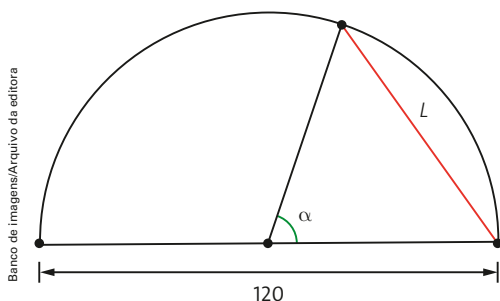
O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar de destaque em vários de seus campos, bem como em outras áreas do conhecimento. É muito comum e conveniente expressar **fenômenos** físicos, biológicos, sociais, etc. por meio de funções.

Os números naturais (inteiros positivos) e as razões entre eles (rationais) eram os únicos tipos de números trabalhados pelos gregos até o século V a.C. Eles acreditavam que esses números fossem suficientes para comparar duas grandezas quaisquer de mesma espécie – comprimentos, áreas, volumes, etc.

## Quando apareceram as funções?

O conceito de função aparece, de forma intuitiva, desde a Antiguidade. De fato, qualquer tabela que relaciona os valores de duas grandezas variáveis é uma função. Um dos melhores exemplos de uma função no período antigo deve-se a Cláudio Ptolomeu, cientista do século II que viveu em Alexandria durante o período romano. Ptolomeu elaborou a famosa Tabela de Cordas, que foi um instrumento fundamental para cálculos de astronomia e de navegação.

Essa tabela foi construída considerando uma semicircunferência com diâmetro de 120 unidades e que, para cada ângulo central  $\alpha$ , associava o comprimento  $L$  da corda correspondente, como na figura a seguir.



Retrato de Cláudio Ptolomeu, cientista grego (90-168).

## Tabela de cordas

$\alpha$ (°)	$L$ (unidades)
...	...
18,5	19,27
...	...
70	68,86
...	...
114	100,67
...	...

Fonte: Dados experimentais.

Na tabela de cordas de Ptolomeu, os ângulos são expressos em graus, com variação de meio grau de um valor para o seguinte, e o comprimento da corda é determinado na semicircunferência em função de um ângulo entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Veja alguns valores na tabela acima.

Hoje, sabemos que existe uma fórmula que permite calcular para cada valor de  $\alpha$  o comprimento  $L$  da corda, mas naquele tempo não estava bem definido o conceito de “fórmula”.

A palavra função, no sentido que usamos hoje, aparece pela primeira vez em correspondências entre dois grandes matemáticos: o suíço Jean Bernoulli e o alemão Gottfried Leibniz. Inicialmente Leibniz dizia, falando de um problema de geometria, que certos elementos devem ter alguma função. As cartas continuaram e, em uma carta de Bernoulli para Leibniz no ano de 1698, aparece a frase:

“... função é uma quantidade que de alguma maneira é formada por quantidades indeterminadas e quantidades constantes”.

E Leibniz responde:

“... e eu estou contente em ver que você usou o termo função de acordo com o meu sentido”.

É interessante observar que a frase de Bernoulli de mais de 400 anos atrás exprime muito bem o que nós entendemos como uma função atualmente.

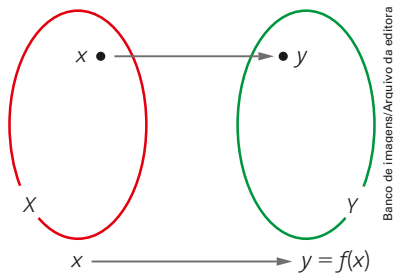
Nos anos posteriores à conversa de Bernoulli e Leibniz, as funções tornaram-se objetos comuns em toda a Matemática.

- No século XVIII, o matemático suíço Leonard Euler deu grandes contribuições para que esse conceito ficasse bem definido e fosse utilizado de forma precisa. É atribuída a Euler a representação de uma função pela notação  $f(x)$  (lê-se:  $f$  de  $x$ ).
- No século XIX, o matemático alemão Lejeune Dirichlet escreveu uma primeira definição de função muito semelhante àquela que usamos atualmente:

“Uma variável  $y$  se diz função de uma variável  $x$  se, para todo valor atribuído a  $x$ , corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de  $y$ . Nesse caso,  $x$  denomina-se variável **independente**, e  $y$ , variável **dependente**”.

- No fim do século XIX, com a disseminação da linguagem dos conjuntos, tornou-se possível a definição formal do conceito de função por meio de conjuntos:

“Dados os conjuntos  $X$  e  $Y$ , uma função  $f: X \rightarrow Y$  (lê-se: uma função de  $X$  em  $Y$ ) é uma regra que determina como associar a cada elemento  $x \in X$  um único  $y = f(x) \in Y$ ”.

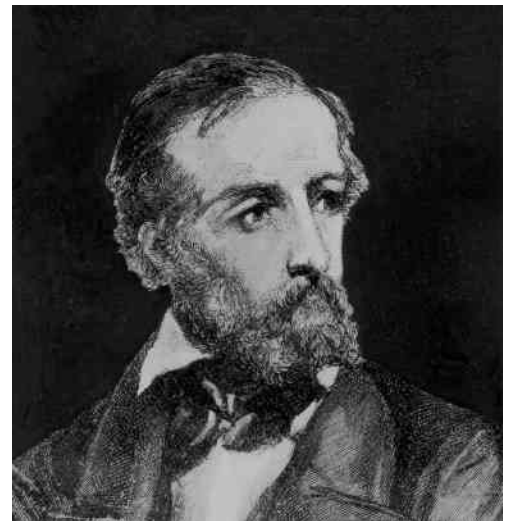


☞ Junte-se com um colega e tentem responder às seguintes questões.

- Qual é a variável independente e qual é a variável dependente quando representamos a velocidade alcançada por  $v = f(t)$ ?  $t$  é a variável independente e  $v$  é a variável dependente.
- Qual é a variável independente e qual é a variável dependente em  $m = f(n)$ ?  $n$  é a variável independente e  $m$  é a variável dependente.
- Na função  $f: A \rightarrow B$ , em que  $a \in A$  e  $b \in B$ , qual é a variável independente e qual é a variável dependente?  $a$  é a variável independente e  $b$  é a variável dependente.
- Existe diferença em escrever  $a = f(b)$  e  $b = f(a)$ ? Justifique. Sim, no primeiro caso,  $a$  varia em função de  $b$  ( $b$  é variável independente) e, no segundo caso, é o contrário,  $b$  varia em função de  $a$  ( $a$  é variável independente).



Retrato de Leonhard Euler, matemático suíço (1707-1783). Pastel sobre papel, 47 cm × 44 cm.



Retrato de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemão (1805-1859).



Retrato de Jean Bernoulli, matemático suíço (1667-1748). Oléo sobre tela, 82,5 cm × 65 cm.

## Gottfried Leibniz

Leibniz nasceu em Leipzig (Alemanha), em 1646, e desde cedo mostrou grande capacidade para aprender coisas muito diferentes. Entrou para a escola aos 7 anos e em pouco tempo aprendeu a ler, escrever e falar latim e, aos 12 anos, também lia e falava grego. Em casa lia os livros de seu pai (falecido quando ele tinha 6 anos), que tinha sido professor de Filosofia e teve despertado grande interesse por essa matéria. Entrou para a universidade aos 14 anos, estudou Direito, Teologia, Filosofia e, aos 17 anos, obteve o título de bacharel em Direito.

Leibniz recusou o convite para ser professor de Direito na sua cidade, mudou-se para Nuremberg (Alemanha) e, aos 21 anos, tinha obtido o grau de doutor em Filosofia na universidade de Altdorf.

Até aí percebemos em Leibniz um grande interesse e envolvimento com o estudo das ciências humanas; então, como ele desenvolveu suas habilidades em Matemática, as quais o levariam a se tornar um grande matemático?

A resposta é que Leibniz estudou Matemática na universidade e sempre esteve aprendendo coisas novas durante o tempo em que cursava o doutorado, tendo, inclusive, publicado seu primeiro livro (*Dissertação sobre a arte da combinatória*) um ano antes de obter seu grau de doutor. Em seguida, Leibniz entrou para o serviço diplomático e por isso viajou muito. Uma vez em Paris (França), Leibniz encontrou o matemático e físico holandês Christiaan Huygens, manifestou a ele o seu desejo de tornar-se matemático e logo começou a estudar com ele, o que foi muito importante para o seu desenvolvimento na área. Veja na página 141 um dos trabalhos matemáticos de Huygens.



Roger Voller/Getty Images

Gravura de Gottfried Wilhelm von Leibniz, matemático alemão (1646-1716). Técnica de litografia.



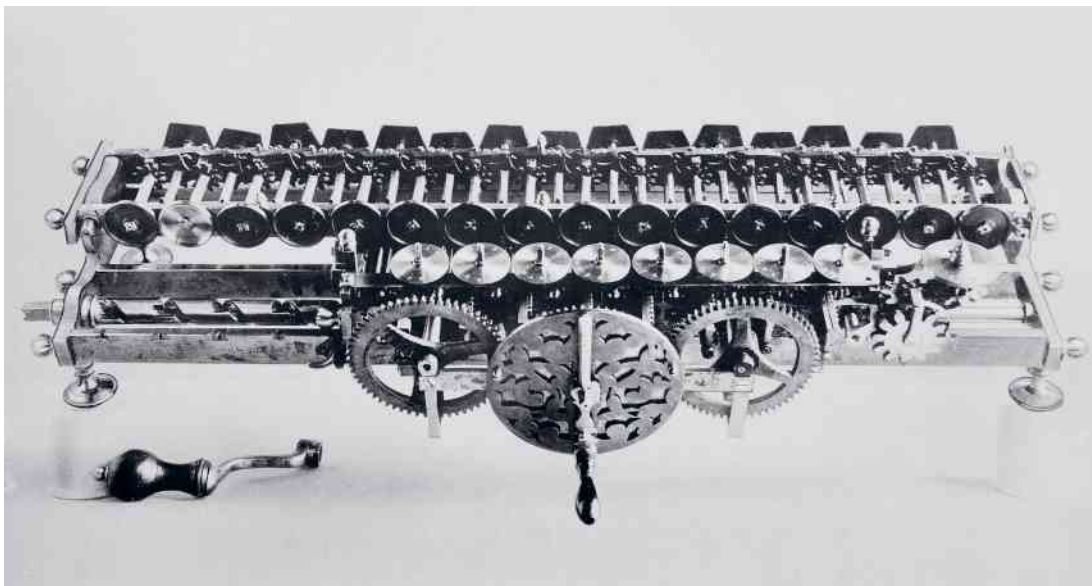
Reprodução/KRD - Instituto de Arte e História da Holanda.

Retrato de Christiaan Huygens, matemático holandês (1629-1695). Óleo sobre papel em painel, 30 cm x 24 cm.



Leibniz tornou-se muito conhecido pela descoberta do Cálculo Diferencial e Integral, que realizou alguns anos depois de Newton, mas de forma totalmente independente. Também tornou-se conhecido por inventar uma máquina de calcular. O projeto e o desenho foram feitos em 1671, e dois anos depois ela estava construída, fazendo enorme sucesso, pois efetuava as quatro operações com números grandes e bem rápido.

Veja abaixo uma fotografia da máquina de calcular desenvolvida por Leibniz.



© Science Museum London/Diomedes/Aervo da Biblioteca Estadual de Hanover, Alemanha.

Máquina de calcular desenvolvida por Leibniz. Acervo Biblioteca Estadual de Hanover, Alemanha. Fotografia de 1894.

Huygens, o professor de Leibniz, tinha proposto a ele calcular a seguinte soma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$

Leibniz já tinha desenvolvido sua máquina de calcular; mesmo assim, daria um enorme trabalho calcular  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{9900}$ .

Entretanto, Leibniz deu a resposta rapidamente, porque foi muito esperto. Veja o que ele pensou:

Cada fração é do tipo  $\frac{1}{n(n+1)}$ .

Porém,  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . (Verifique isso reduzindo ao mesmo denominador.)

Portanto, a soma que o professor Huygens pediu é igual a:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

Logo, podemos eliminar as frações opostas:

$$\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \dots - \cancel{\frac{1}{99}} + \cancel{\frac{1}{99}} - \frac{1}{100}$$

Simplificando o resultado, temos:  $1 - \frac{1}{100} = \frac{100}{100} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0,99$ .

Que ideia genial, não?

Provavelmente você já estudou noções de funções no Ensino Fundamental. Em razão da importância do conceito de função, faremos um estudo mais detalhado no Ensino Médio. Inicialmente, estudaremos as ideias intuitivas ligadas à noção de função e, em seguida, vamos aprofundar e estudar formalmente esse importante conceito.

## 2 Explorando intuitivamente a noção de função

A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis. Acompanhe alguns exemplos.

### a) Número de litros de gasolina e preço a pagar

A tabela abaixo relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles.

#### Relação entre o número de litros de gasolina e o preço a pagar

Número de litros	Preço a pagar (R\$)
1	3,00
2	6,00
3	9,00
4	12,00
⋮	⋮
40	120,00
$x$	$3,00x$

Fonte: Dados fictícios.

Observe que o preço a pagar é dado **em função** do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar **depende** do número de litros comprados.

preço a pagar ( $p$ ) = R\$ 3,00 vezes o número de litros ( $x$ ) comprados

ou

$p = 3,00x \rightarrow$  **lei da função**, ou **fórmula matemática da função**, ou regra da função, ou, ainda, representação analítica da função

#### Fique atento!

Podemos usar a notação  $f(x)$  no lugar de  $p$ . Assim, nesse caso, teríamos  $f(x) = 3,00x$ .

### Agora, responda:

a) Qual é o preço de 10 litros de gasolina? **R\$ 30,00**

b) Quantos litros de gasolina podem ser comprados com R\$ 39,00? **13 litros**

### b) Lado do quadrado e perímetro

A tabela a seguir relaciona a medida do lado de um quadrado ( $\ell$ ), em centímetros, e o seu perímetro ( $P$ ), também em centímetros.

#### Relação entre a medida do lado de um quadrado e o seu perímetro

Medida do lado ( $\ell$ em cm)	Perímetro ( $P$ em cm)
1	4
2	8
2,5	10
3	12
4,1	16,4
⋮	⋮
$\ell$	$4\ell$

Fonte: Dados reais.

Observe que o perímetro do quadrado é dado em função da medida do seu lado, isto é, o perímetro depende da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado corresponde um único valor para o perímetro.

perímetro ( $P$ ) = 4 vezes a medida do lado ( $\ell$ ) ou

$P = 4\ell \rightarrow$  lei da função

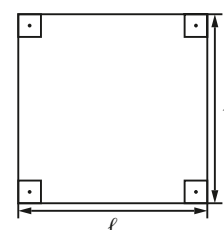
Como o perímetro depende da medida do lado, ele é a **variável dependente**, e a medida do lado é a chamada **variável independente**.

### Agora, responda:

a) Qual é o perímetro de um quadrado cuja medida do lado é 3,5 cm? **14 cm**

b) Qual é a medida do lado de um quadrado cujo perímetro é de 22 cm? **5,5 cm**

**Perímetro:** medida do contorno de uma figura geométrica plana.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesses exemplos, a função está sendo representada por uma tabela ou por uma lei de função.

#### Fique atento!

- Como não existe um símbolo para perímetro, algumas vezes ele é representado por  $2p$  (já que  $p$  é o símbolo de semiperímetro). Neste livro, no entanto, usaremos  $P$  para indicá-lo.
- Podemos usar  $f(\ell)$  no lugar de  $P$ . Assim,  $f(\ell) = 4\ell$ .



c) A “máquina” de dobrar

Observe a seguir a representação de uma “máquina” de dobrar números.



Os números que saem são dados **em função** dos números que entram na “máquina”, ou seja, os números que saem dependem dos números que entram.

Representando o número de saída por  $n$  e o número de entrada por  $x$ , temos:

$$n = 2x \rightarrow \text{fórmula matemática da função}$$

**Fique atento!**

Podemos usar  $f(x)$  no lugar de  $n$ . Assim,  $f(x) = 2x$ .

Invente uma “máquina” de triplicar e somar 1, baseada no exemplo acima, e escreva no caderno a fórmula matemática dessa função.  $y = 3x + 1$  ou  $f(x) = 3x + 1$

d) Imagine que, em uma rodovia, um motorista mantenha uma velocidade constante de 90 km/h por algum tempo. Veja a tabela que relaciona o tempo  $t$  (em horas) e a distância  $d$  (em quilômetros):

**Relação entre tempo e distância**

Tempo ( $t$ em h)	Distância ( $d$ em km)
0,5	45
1	90
1,5	135
2	180
$t$	$90t$



Fonte: Dados fictícios. Carro em rodovia.

Observe que a distância percorrida é dada **em função** do tempo, isto é, a distância percorrida **depende** do intervalo de tempo. A cada intervalo de tempo considerado corresponde um único valor para a distância percorrida. Dizemos, então, que a **distância percorrida ( $d$ ) é função do tempo ( $t$ )** e escrevemos:

$$\text{distância} = 90 \cdot \text{tempo}$$

$$d = 90t \rightarrow \text{representação analítica da função}$$

→ variável independente

→ variável dependente

**Você sabia?**

Este exemplo aborda um conteúdo estudado em Física: **velocidade média**.

**Fique atento!**

Podemos usar  $f(t)$  no lugar de  $d$ . Assim,  $f(t) = 90t$ .

Agora, é com você. Ainda considerando a velocidade constante de 90 km/h, faça o que se pede.

a) Determine a distância quando o tempo é igual a 1,8 h. **162 km**

b) Calcule o tempo quando a distância é 81 km. **54 min**

c) Nesse caso, a distância percorrida é diretamente proporcional ao intervalo de tempo?

Sim, porque duplicando uma grandeza a outra também duplica; triplicando uma a outra também triplica; etc., ou seja, a razão entre a distância e o tempo é sempre constante.

- Observe na tabela a medida do lado (em cm) de um quadrado e sua área  $A$  (em  $\text{cm}^2$ ).

**Relação entre a medida do lado e a área de um quadrado**

Medida do lado ( $\ell$ em cm)	1	3	4	5,5	10	...	$\ell$
Área ( $A$ em $\text{cm}^2$ )	1	9	16	30,25	100	...	$\ell^2$

Fonte: Dados experimentais.

- O que é dado em função do quê? **A área é dada em função da medida do lado.**
- Qual é a variável dependente? **A área  $A$ .**
- Qual é a variável independente? **O lado  $\ell$ .**
- Qual é a lei da função que associa a medida do lado com a área?  **$A = \ell^2$**
- Qual é a área do quadrado cujo lado mede 12 cm?  **$A = 12^2 = 144$ ; 144  $\text{cm}^2$**
- Qual é a medida do lado do quadrado cuja área é de 169  $\text{cm}^2$ ?  **$169 = \ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{169} = 13$ ; 13 cm**

- Responda às seguintes questões.

- A medida da diagonal ( $d$ ) de um quadrado é dada em função da medida do seu lado ( $\ell$ ). Qual é a fórmula matemática que indica essa função?  **$d = \ell\sqrt{2}$**
- O comprimento ( $C$ ) da circunferência é dado em função do seu raio ( $r$ ). Qual é a expressão que indica essa função?  **$C = 2\pi r$**

- Formule no caderno um exemplo de função e indique a variável dependente e a variável independente.

Resposta pessoal.

- Observe a tabela abaixo.

**Custo de produção de certo número de peças para informática**

Número de peças	1	2	3	4	5	6	7	8
Custo (R\$)	1,20	2,40	3,60	4,80	6,00	7,20	8,40	9,60

Fonte: Dados fictícios.

- A cada número de peças corresponde um único valor em reais? **Sim.**
- O que é dado em função do quê? **O custo de produção ( $c$ ) é dado em função do número de peças ( $x$ ).**
- Qual é a fórmula matemática que indica o custo ( $c$ ) em função do número de peças ( $x$ )?  **$c = 1,20x$**
- Qual é o custo de 10 peças? E de 20 peças? E de 50 peças? **R\$ 12,00; R\$ 24,00; R\$ 60,00**
- Com R\$ 120,00, quantas peças dá para produzir? **100 peças.**

- Expresse no caderno, por meio de uma fórmula matemática, a função que a cada número real  $x$  associa:

- a sua terça parte;  **$f(x) = \frac{x}{3}$**
- o seu dobro diminuído de 3;  **$f(x) = 2x - 3$**
- a sua metade somada com 3;  **$f(x) = \frac{x}{2} + 3$**
- o seu cubo somado com o seu quadrado.  **$f(x) = x^3 + x^2$**

- Escreva no caderno a fórmula matemática que expressa a lei de cada uma das funções a seguir.

- Um fabricante produz objetos a um custo de R\$ 12,00 a unidade, vendendo-os por R\$ 20,00 a unidade. Portanto, o lucro  $y$  do fabricante é dado em função do número  $x$  de unidades produzidas e vendidas.  **$y = 8x$**
- A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda que cada cidade tenha no mínimo 14  $\text{m}^2$  de área verde por habitante. A área verde mínima  $y$  que deve ter uma cidade é dada em função do número  $x$  de habitantes.  **$y = 14x$**

- Um cabeleireiro cobra R\$ 12,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R\$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável  $x$  de clientes sem hora marcada.

- Escreva no caderno a fórmula matemática que fornece a quantia  $Q$  arrecadada por dia em função do número  $x$ .  **$Q = 72 + 10x$**
- Qual foi a quantia arrecadada em um dia em que foram atendidos 16 clientes? **R\$ 172,00**
- Qual foi o número de clientes atendidos em um dia em que foram arrecadados R\$ 212,00? **20 clientes.**
- Qual é a expressão que indica o número  $C$  de clientes atendidos por dia em função de  $x$ ?  **$C = x + 6$**

- Física**

Um motorista, saindo de um terminal A, viaja por uma estrada e observa que a distância percorrida, a partir do ponto inicial, pode ser calculada por  $d(x) = 50x + 6$ , sendo  $d$  em quilômetros e  $x$  em horas. Façam uma tabela listando as distâncias percorridas após cada intervalo de uma hora desde  $x = 1$  até  $x = 5$ .

Veja resolução no Manual do Professor.

- Um fabricante vende um produto por R\$ 0,80 a unidade. O custo total do produto consiste em uma taxa fixa de R\$ 40,00 mais o custo de produção de R\$ 0,30 por unidade.

- Qual é o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo? **80 unidades.**
- Se vender 200 unidades desse produto, o comerciante terá lucro ou prejuízo? **Lucro.**

- Examinem e depois copiem e completem esta tabela no caderno.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y$	-9	-4	1	6				

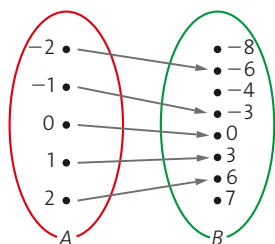
Descubram o padrão e escrevam a lei da função que representa os dados da tabela.  **$y = 5x + 1$**

### 3 A noção de função por meio de conjuntos

Vamos, agora, estudar essa mesma noção de função usando a nomenclatura de conjuntos. Considere os exemplos a seguir.

a) Observe os conjuntos  $A$  e  $B$  relacionados da seguinte forma: em  $A$  estão alguns números inteiros e em  $B$ , outros.

Podemos associar cada elemento de  $A$  ao seu triplo em  $B$ .



$x \in A$	$y \in B$
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6

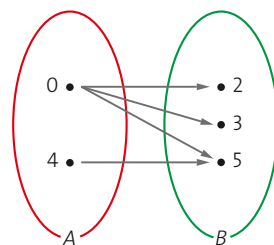
Note que:

- todos os elementos de  $A$  têm correspondente em  $B$ ;
- a cada elemento de  $A$  corresponde um único elemento de  $B$ .

Nesse caso, **temos uma função de  $A$  em  $B$** , expressa pela fórmula  $y = 3x$ .

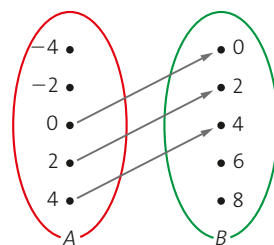
b) Dados  $A = \{0, 4\}$  e  $B = \{2, 3, 5\}$ , relacionamos  $A$  e  $B$  da seguinte forma: cada elemento de  $A$  é menor do que um elemento de  $B$ .

Nesse caso, **não temos uma função de  $A$  em  $B$** , pois ao elemento 0 de  $A$  correspondem três elementos de  $B$  (2, 3 e 5, pois  $0 < 2$ ,  $0 < 3$  e  $0 < 5$ ) e não apenas um único elemento de  $B$ .



c) Dados  $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$  e  $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ , associamos os elementos de  $A$  aos elementos de igual valor em  $B$ .

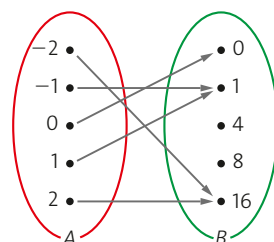
Observe que há elementos em  $A$  (os números  $-4$  e  $-2$ ) que não têm correspondente em  $B$ . Nesse caso, **não temos uma função de  $A$  em  $B$** .



d) Dados  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  e  $B = \{0, 1, 4, 8, 16\}$  e a correspondência entre  $A$  e  $B$  dada pela fórmula  $y = x^4$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ , temos:

- todos os elementos de  $A$  têm correspondente em  $B$ ;
- a cada elemento de  $A$  corresponde um único elemento de  $B$ .

Assim, a correspondência expressa pela fórmula  $y = x^4$  **é uma função de  $A$  em  $B$** .



e) Sejam  $P$  o conjunto das regiões poligonais do plano e  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais. A cada região poligonal do plano fazemos corresponder a sua área em  $\mathbb{R}$ . Essa correspondência **é uma função de  $P$  em  $\mathbb{R}$** .

Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da Editora

## Definição e notação

Dados dois conjuntos não vazios,  $A$  e  $B$ , uma função de  $A$  em  $B$  é uma regra que indica como associar cada elemento  $x \in A$  a um único elemento  $y \in B$ .

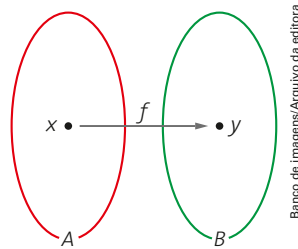
Usamos a seguinte notação:

$$f: A \rightarrow B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B \text{ (lê-se: } f \text{ é uma função de } A \text{ em } B)$$

A função  $f$  transforma  $x$  de  $A$  em  $y$  de  $B$ , ou seja,  $f: x \rightarrow y$ .

Escrevemos isso assim:

$$y = f(x) \text{ (lê-se: } y \text{ é igual a } f \text{ de } x)$$

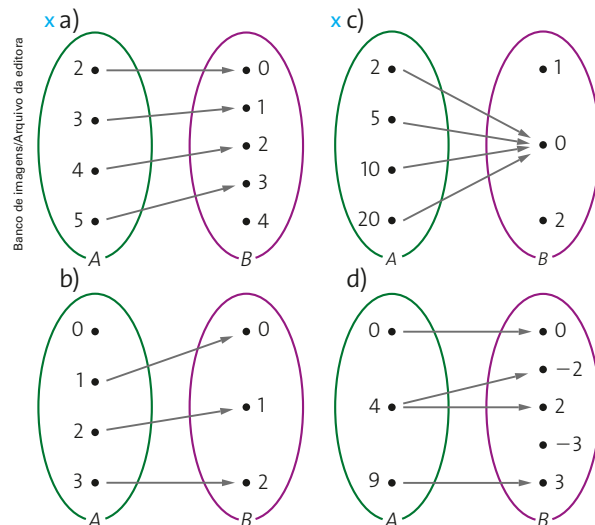


$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y$$

## Exercícios

11. Quais dos seguintes diagramas representam uma função de  $A$  em  $B$ ?



12. Dados  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$  e a correspondência entre  $A$  e  $B$  dada por  $y = x^2$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ , faça um diagrama no caderno e diga se  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$ . **É função.**

13. Dados  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$  e a correspondência entre  $A$  e  $B$  dada por  $y = x - 2$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ , faça um diagrama no caderno e diga se  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$ . **Não é função, pois  $0 \in A$  e não tem correspondente em  $B$ .**

14. Dados  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 6, 8\}$  e a correspondência entre  $A$  e  $B$  dada por  $y = 2^x$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ , essa correspondência é uma função de  $A$  em  $B$ ? **Sim.**

15. Formule um exemplo de função, inventando os conjuntos  $A$  e  $B$  e a correspondência entre  $A$  e  $B$ . **Resposta pessoal.**

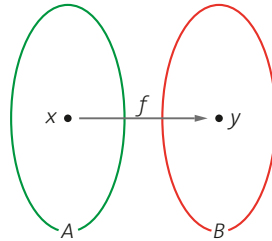
16. Observe a tabela abaixo.

A	B
x	y
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5

- a) Verifique se a correspondência de  $A$  em  $B$  pode ser uma função. Em caso afirmativo, determine a fórmula matemática dessa função. **Sim.  $f(x) = \sqrt{x}$**
- b) Verifique se a correspondência de  $B$  em  $A$  pode ser uma função. Em caso afirmativo, determine a fórmula matemática dessa função. **Sim.  $f(x) = x^2$**

## 4 Domínio, contradomínio e conjunto imagem

Dada uma função  $f$  de  $A$  em  $B$ , o conjunto  $A$  chama-se **domínio (D)** da função e o conjunto  $B$ , **contradomínio (CD)** da função. Para cada  $x \in A$ , o elemento  $y \in B$  chama-se **imagem** de  $x$  pela função  $f$  ou o valor assumido pela função  $f$  para  $x \in A$ , e o representamos por  $f(x)$ . Assim,  $y = f(x)$ .



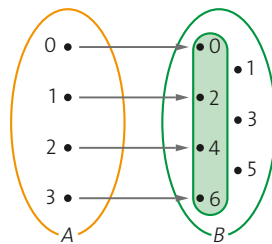
O conjunto de todos os  $y$  assim obtidos é chamado **conjunto imagem** da função  $f$  e é indicado por  $\text{Im}(f)$ . Observe os exemplos:

a) Dados os conjuntos  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , vamos considerar a função  $f: A \rightarrow B$  que transforma  $x \in A$  em  $2x \in B$ .

Dizemos que  $f: A \rightarrow B$  é definida por  $f(x) = 2x$  ou por  $y = 2x$ . A indicação  $x \xrightarrow{f} 2x$  significa que  $x$  é transformado pela função  $f$  em  $2x$ .

### Fique atento!

Em toda função  $f$  de  $A$  em  $B$ ,  $\text{Im}(f) \subset B$ .



Veja que, para caracterizar uma função, é necessário conhecer seus três componentes: o domínio ( $A$ ), o contradomínio ( $B$ ) e uma regra que associa cada elemento de  $A$  a um único elemento  $y = f(x)$  de  $B$ . Nesse exemplo o domínio é  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ , o contradomínio é  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , a regra é dada por  $y = 2x$  e o conjunto imagem é dado por  $\text{Im}(f) = \{0, 2, 4, 6\}$ .

b) Vamos considerar a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que leva  $x$  em  $x + 1$ , definida por  $f(x) = x + 1$ .

Nesse caso, a função  $f$  transforma todo número natural  $x$  em outro número natural  $y$ , que é o sucessor de  $x$ , indicado por  $x + 1$ .

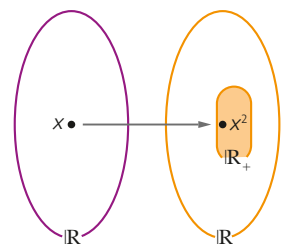
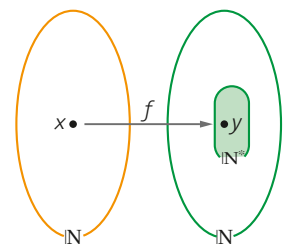
- A imagem de  $x = 0$  é  $f(0) = 0 + 1 = 1$ .
- A imagem de  $x = 1$  é  $f(1) = 1 + 1 = 2$ .
- A imagem de  $x = 2$  é  $f(2) = 2 + 1 = 3$ .

E assim por diante.

Portanto, o domínio é  $\mathbb{N}$  ( $D = \mathbb{N}$ ), o contradomínio é  $\mathbb{N}$  ( $CD = \mathbb{N}$ ), a regra é  $y = x + 1$  e o conjunto imagem é  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ , isto é,  $\text{Im}(f) = \mathbb{N}^*$ .

c) Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = x^2$ .

Nesse caso, a função  $f$  transforma cada número real  $x$  em outro número real  $y$ , que é o quadrado de  $x$ . Como todo número real maior ou igual a zero possui raiz quadrada real, então o conjunto imagem é  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ , o domínio é  $\mathbb{R}$  ( $D = \mathbb{R}$ ), o contradomínio é  $\mathbb{R}$  ( $CD = \mathbb{R}$ ), e a regra que associa todo  $x \in \mathbb{R}$  a um único  $y$  de  $\mathbb{R}$  é dada por  $y = x^2$ .



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora



## 5 Estudo do domínio de uma função real

Estudamos que toda função tem domínio, contradomínio e lei de correspondência. Quando é citada uma função  $f$  de  $A$  em  $B$ , já ficam subentendidos o domínio ( $A$ ) e o contradomínio ( $B$ ).

Às vezes, é apresentada apenas a lei da função  $f$ , sem que  $A$  e  $B$  sejam citados. Nesses casos, consideramos o contradomínio  $B = \mathbb{R}$  e o domínio  $A$  como o “maior” subconjunto de  $\mathbb{R}$  ( $A \subset \mathbb{R}$ ) tal que a lei dada defina uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Exercício resolvido

1. Explícite o domínio das seguintes funções reais:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = \sqrt{3-x}$

c)  $f(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}}$

**Resolução:**

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}$  só é possível em  $\mathbb{R}$  se  $x \neq 0$  (não existe divisão por 0).

Para cada  $x \neq 0$ , o valor  $\frac{1}{x}$  sempre existe e é único (o inverso de  $x$ ). Logo,  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ .

b)  $f(x) = \sqrt{3-x}$

$\sqrt{3-x}$  só é possível em  $\mathbb{R}$  se  $3-x \geq 0$  (em  $\mathbb{R}$  não há raiz quadrada de número negativo).  
 $3-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3$

Para cada  $x \leq 3$ ,  $f(x)$  existe e é único, pois é a raiz quadrada de um número real maior ou igual a zero.

Portanto,  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ .

c)  $f(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}}$

Nesse caso, devemos ter:

$7-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7$

$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

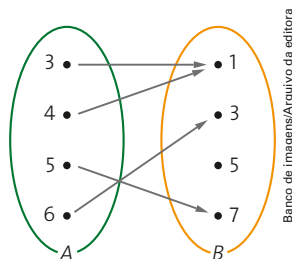
Ou seja,  $x \in (2, 7]$ .

Para cada  $x \in (2, 7]$ ,  $f(x)$  existe e é único, pois é a divisão de um número real positivo ou nulo por outro positivo.

Logo,  $D(f) = (2, 7]$ .

### Exercícios

17. Considere a função  $A \xrightarrow{f} B$  dada pelo diagrama e determine:



a)  $D(f)$ ;  $D(f) = \{3, 4, 5, 6\}$

b)  $\text{Im}(f)$ ;  $\text{Im}(f) = \{1, 3, 7\}$

c)  $f(4)$ ;  $f(4) = 1$

d)  $y$ , quando  $x = 5$ ;  $y = 7$

e)  $x$ , quando  $y = 3$ ;  $x = 6$

f)  $x$ , quando  $f(x) = 1$ ;

g)  $f(x)$ , quando  $x = 6$ ;

h)  $y$ , quando  $x = 3$ ;

i)  $x$ , quando  $y = 7$ .  $x = 5$

18. Considere  $A \xrightarrow{g} B$  a função para a qual  $A = \{1, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 9, 12\}$  e  $g(x)$  é o triplo de  $x$ , para todo  $x \in A$ .

a) Construa no caderno o diagrama de flechas da função. [Veja diagrama no Manual do Professor.](#)

b) Determine  $D(g)$ ,  $\text{CD}(g)$  e  $\text{Im}(g)$ .  $D(g) = \{1, 3, 4\}$ ;

$\text{CD}(g) = \{3, 9, 12\}$ ;  $\text{Im}(g) = \{3, 9, 12\}$

c) Determine  $g(3)$ .  $g(3) = 9$

d) Determine  $x$  para o qual  $g(x) = 12$ .  $x = 4$

19. Explícite no caderno o domínio das funções reais definidas por:

a)  $f(x) = \frac{1}{x-6}$   
 $D(f) = \mathbb{R} - \{6\}$

b)  $f(x) = \frac{x-1}{4}$   
 $D(f) = \mathbb{R}$

c)  $f(x) = \sqrt{x-7}$   
 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

d)  $y = \sqrt[3]{x}$   $D(f) = \mathbb{R}$

e)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$   
 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$

## 6 Coordenadas cartesianas

Antes de estudarmos os gráficos das funções, vamos rever o conceito de coordenadas cartesianas, que você já deve ter estudado no Ensino Fundamental.

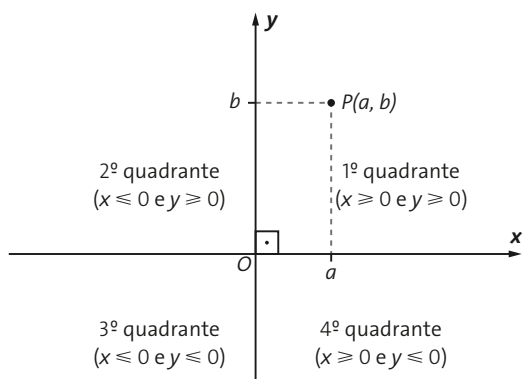
A notação  $(a, b)$  é usada para indicar o **par ordenado** de números reais  $a$  e  $b$ , no qual o número  $a$  é a primeira coordenada e o número  $b$  é a segunda coordenada. Observe que os pares ordenados  $(3, 4)$  e  $(4, 3)$  são diferentes, pois a primeira coordenada de  $(3, 4)$  é 3, enquanto a primeira coordenada de  $(4, 3)$  é 4.

### Sistema de eixos ortogonais

Um **sistema de eixos ortogonais** é constituído por dois eixos perpendiculares,  $Ox$  e  $Oy$ , que têm a mesma origem  $O$ .

O sistema de eixos ortogonais é denominado **plano cartesiano**, em homenagem a Descartes.

Os eixos ortogonais dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas **quadrantes**, na ordem indicada a seguir:



Usamos esse sistema para localizar pontos no plano. Dado um ponto  $P$  desse plano, dizemos que os números  $a$  e  $b$  são as **coordenadas cartesianas** do ponto  $P$ , em que  $a$  é a **abscissa** e  $b$  é a **ordenada**.

Veja que a cada par ordenado de números reais corresponde um ponto do plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto do plano corresponde um par ordenado de números reais. Essa correspondência biunívoca entre pares de números reais e pontos do plano permite escrever conceitos e propriedades geométricas em uma linguagem algébrica e, de modo recíproco, interpretar geometricamente relações entre números reais. Isso culminou em um grande progresso na Matemática.

Observe ao lado como localizar no plano cartesiano os pontos  $A(4, 1)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(-2, -3)$ ,  $D(2, -2)$ ,  $E(-1, 0)$ ,  $F(0, 3)$  e  $O(0, 0)$ , por exemplo.

Ponto  $A(4, 1) \rightarrow$  ponto  $A$  de coordenadas cartesianas 4 e 1  $\begin{cases} \text{a abscissa é 4.} \\ \text{a ordenada é 1.} \end{cases}$

Ponto  $B(1, 4) \rightarrow$  ponto  $B$  de coordenadas cartesianas 1 e 4  $\begin{cases} \text{a abscissa é 1.} \\ \text{a ordenada é 4.} \end{cases}$

Pergunte aos alunos quais são as coordenadas dos demais pontos representados no plano cartesiano.

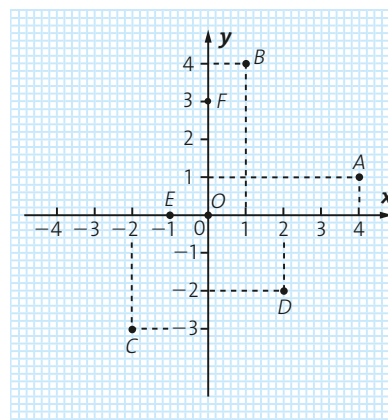
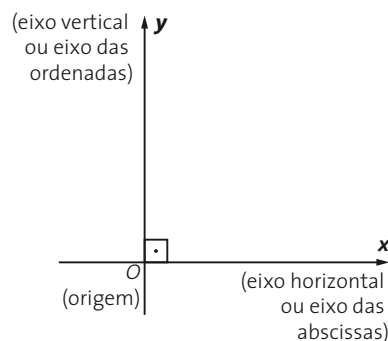
#### Você sabia?

René Descartes formalizou o conceito de coordenadas em sua obra *La Géométrie* (1637), conectando a Álgebra com a Geometria, o que posteriormente seria denominado Geometria Analítica.



Retrato de René Descartes (1596-1650). Óleo sobre tela, 77,5 cm  $\times$  68,5 cm. (Detalhe)

Paula D.Stewart/Science Photo Library/Latinstock



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## Distância entre dois pontos

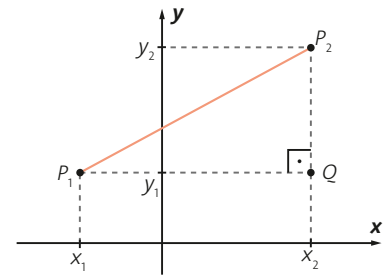
A pergunta fundamental é: Se  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  são dois pontos de um plano, como se pode exprimir a distância do ponto  $P_1$  ao ponto  $P_2$  em termos dessas coordenadas?

Dados dois pontos,  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ , queremos obter a expressão da distância  $d(P_1, P_2)$  em termos das coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$ . Para isso, é preciso introduzir um novo ponto  $Q(x_2, y_1)$ .

O triângulo  $P_1P_2Q$  é retângulo em  $Q$ , e o segmento de reta  $P_1P_2$  é a sua hipotenusa. Seus catetos medem  $(x_2 - x_1)$  e  $(y_2 - y_1)$ , tomados em valores absolutos. Usando a relação de Pitágoras, temos:

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \text{ ou seja:}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Banco de Imagens/Arquivo da editora

### Fique atento!

Essa expressão geral obtida não depende da localização dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

## Exercício resolvido

2. Calcule a distância entre os pontos  $A(1, -4)$  e  $B(-3, 2)$ .

### Resolução:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

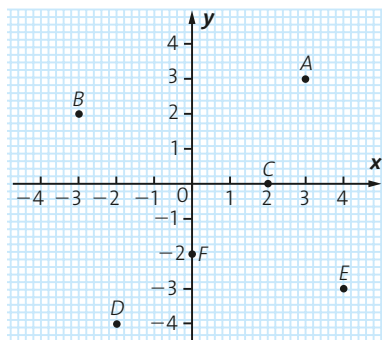
( $\sqrt{52}$  é pouco mais do que 7, pois sabemos que  $\sqrt{49} = 7$ .)

Logo,  $d(A, B) = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$  unidades de comprimento, ou aproximadamente 7,211 unidades de comprimento.

## Exercícios

$A(3, 3)$ ;  $B(-3, 2)$ ;  $C(2, 0)$ ;  $D(-2, -4)$ ;  $E(4, -3)$ ;  $F(0, -2)$

20. Escreva no caderno as coordenadas cartesianas de cada ponto do plano cartesiano ao lado.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

21. Dê as coordenadas de um ponto  $H$  localizado no 3º quadrante e de um ponto  $J$  localizado no 2º quadrante. **Respostas pessoais.**
22. Construa no caderno um sistema cartesiano ortogonal e marque nele os pontos  $X(-2, 2)$ ,  $Y(2, 2)$ ,  $Z(-2, -2)$  e  $W(2, -2)$ . Determine a área da região limitada pelo polígono  $XYWZ$ . **16 unidades de área.**  
Veja gráfico no Manual do Professor.
23. Determine a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  nos seguintes casos: a)  $d(A, B) = 5$  unidades de comprimento  
a)  $A(3, 5)$  e  $B(-1, 2)$       b)  $A(0, 0)$  e  $B(3, -1)$   
b)  $d(A, B) = \sqrt{10}$  unidades de comprimento
24. Demonstrem que a distância de um ponto  $P(x, y)$  à origem  $O(0, 0)$  é igual a  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

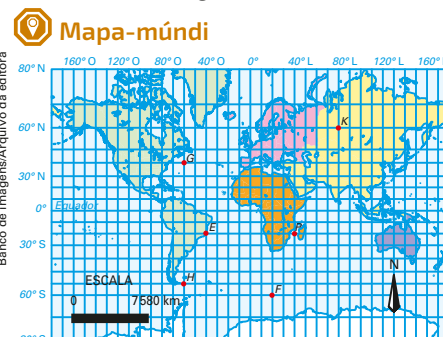
$$d(P, O) = \sqrt{(0 - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Este exercício aborda conhecimentos cartográficos, estudados em Geografia.

### 25. Mapa-múndi

$E(-20^\circ, -40^\circ)$        $H(-50^\circ, -60^\circ)$   
 $F(-60^\circ, 20^\circ)$        $K(60^\circ, 80^\circ)$   
 $G(40^\circ, -60^\circ)$

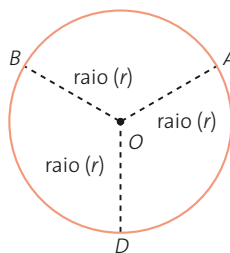
O mapa-múndi é um mapa que representa no plano todo o globo terrestre, tendo os dois hemisférios projetados lado a lado. O ponto  $P$  está localizado a uma latitude de  $20^\circ$  S e a uma longitude de  $40^\circ$  L. Indicamos esse ponto assim:  $P(20^\circ$  S,  $40^\circ$  L) ou  $P(-20^\circ, +40^\circ)$ . Estimem a latitude e a longitude de cada um dos pontos a seguir. **Observação:** Mantivemos aqui o que se faz em Cartografia: primeiro escrevemos a latitude, depois a longitude. Mas não se esqueça de que nas coordenadas cartesianas é o inverso: a primeira coordenada está sempre na horizontal, e a segunda, na vertical.



Adaptado de: CHARLIER, Jacques (Dir.). *Atlas du 21º siècle* édition 2012. Groningen: Wolters-Noordhoff; Paris: Éditions Nathan, 2011, p. 8.

## Equação de uma circunferência

A **circunferência** é o conjunto de todos os pontos de um plano **equidistantes** de um ponto fixo que é o centro dela. A distância constante de qualquer ponto da circunferência ao seu centro é denominada **raio** da circunferência (na figura,  $OA = OB = OD = r$ ).



Banco de imagens/Arquivo da editora

**Equidistante:** o prefixo *equi-* indica igual. Assim, equidistante significa 'igualmente distante de'.

### Fique atento!

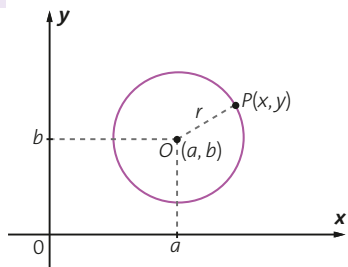
Às vezes nos referimos ao raio como o segmento de reta e, às vezes, como sua medida.

Assim, se o centro de uma circunferência  $C$  é o ponto  $O(a, b)$  e o raio é o número real positivo  $r$ , então um ponto  $P(x, y)$  pertence a  $C$  se, e somente se,  $d(O, P) = r$ .

Pela fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d(O, P) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \text{ ou seja, } r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \text{ ou ainda:}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \rightarrow \text{equação da circunferência de centro } O(a, b) \text{ e raio } r$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caso particular em que o centro da circunferência estiver na origem, ou seja,  $(a, b) = (0, 0)$ , verifique que a equação da circunferência passa a ser  $x^2 + y^2 = r^2$ .

## Exercícios resolvidos

3. Determine a equação da circunferência com centro  $O(-3, 1)$  e raio 3.

**Resolução:**

Nesse caso,  $a = -3$ ,  $b = 1$  e  $r = 3$ . Usando a equação da circunferência, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

Logo, a equação dessa circunferência é  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ .

4. Escreva a equação da circunferência de centro  $O(0, 0)$  e raio 5.

**Resolução:**

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Logo, a equação dessa circunferência é  $x^2 + y^2 = 25$ .

## Exercícios



26. Determinem as coordenadas do centro e o raio das circunferências representadas pelas equações:

a)  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1$   $O(5, 3); r = 1$

b)  $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$   $O(-2, -1); r = 3$

c)  $x^2 + y^2 = 16$   $O(0, 0); r = 4$

d)  $x^2 + (y - 2)^2 = 25$   $O(0, 2); r = 5$

27. Determinem uma equação da circunferência que tem:

a) centro em  $O(1, 4)$  e raio 2;  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$

b) centro em  $O(-2, -5)$  e raio 3;  $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$

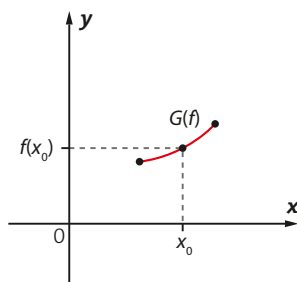
c) centro em  $O(0, 0)$  e raio 6;  $x^2 + y^2 = 36$

d) centro em  $O(0, 1)$  e raio 2.  $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

## 7 Gráfico de uma função

Dada uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o seu gráfico é o conjunto formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , para  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$  e  $y = f(x)$ , ou seja:

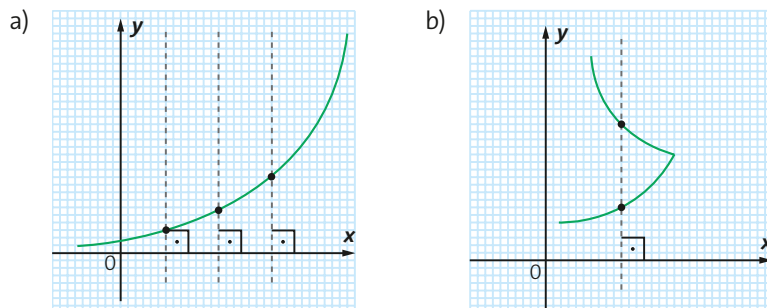
$$G(f) = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = f(x)\}$$



$(x_0, f(x_0))$  é um ponto do gráfico

### Determinando se um conjunto de pontos é gráfico de uma função

Já estudamos que, para ter uma função de  $A \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , a cada  $x \in A$  deve corresponder um único  $y \in \mathbb{R}$ . Geometricamente, isso significa que qualquer reta perpendicular ao eixo  $Ox$  que intersecta o gráfico deve fazê-lo em um único ponto. Por exemplo:

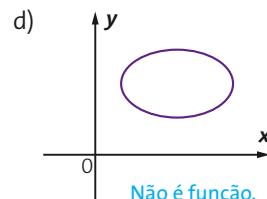
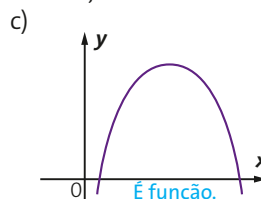
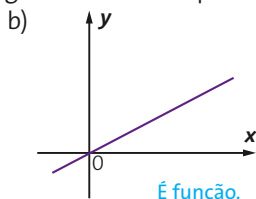
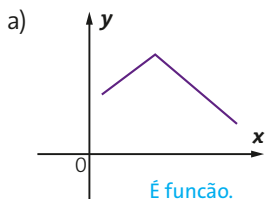


O gráfico do item **a** é de uma função, pois qualquer reta perpendicular ao eixo  $Ox$  intersecta-o em um único ponto.

O gráfico do item **b** não é de uma função, pois existem retas perpendiculares ao eixo  $Ox$  intersectando-o em mais de um ponto.

## Exercícios

28. Determine se cada um dos gráficos abaixo representa uma função.



29. Invente um gráfico que represente uma função. Resposta pessoal.





## Construção de gráficos de funções

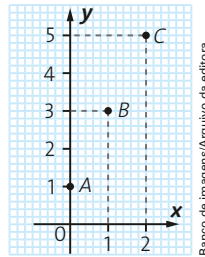
Para construir o gráfico de uma função dada por  $y = f(x)$ , com  $x \in D(f)$ , no plano cartesiano, devemos:

- construir uma tabela com valores de  $x$  escolhidos convenientemente no domínio  $D$  e com valores correspondentes para  $y = f(x)$ ;
- associar um ponto do plano cartesiano a cada par ordenado  $(x, y)$  da tabela;
- marcar um número suficiente de pontos até que seja possível esboçar o gráfico da função.

Acompanhe alguns exemplos de construção de gráficos de função.

- a) Gráfico da função dada por  $f(x) = 2x + 1$ , sendo o domínio  $D = \{0, 1, 2\}$ .

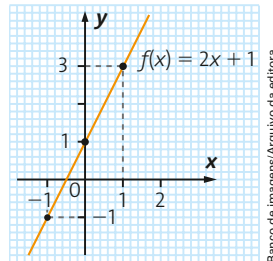
$x$	$y = f(x) = 2x + 1$
0	1
1	3
2	5



Nesse caso, o gráfico da função é o conjunto dos pontos A, B e C.

- b) Gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x + 1$ . Como, nesse caso,  $D = \mathbb{R}$ , vamos escolher alguns valores arbitrários de  $x$  e determinar  $y$ .

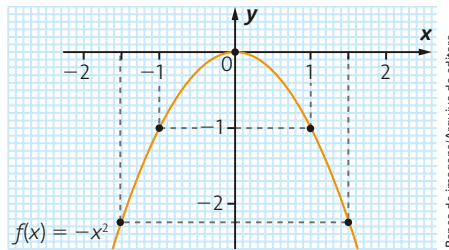
$x$	$y = f(x) = 2x + 1$
-1	-1
0	1
1	3



O gráfico é o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$ , com  $x$  real e  $y = 2x + 1$ , resultando na reta representada acima.

- c) Gráfico da função  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -x^2$ .

$x$	$y = f(x) = -x^2$	$(x, y)$
-1,5	-2,25	$(-1,5; -2,25)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	0	$(0, 0)$
1	-1	$(1, -1)$
1,5	-2,25	$(1,5; -2,25)$



A curva que contém todos os pontos obtidos com  $y = -x^2$  é o gráfico da função dada. Essa curva é chamada de parábola.

### Fique atento!

Você verá no próximo capítulo que, quando temos  $y$  igual a um polinômio do 1º grau da forma  $ax + b$ , o gráfico é sempre uma reta. Como dois pontos determinam uma reta, basta marcar apenas dois pontos para traçá-la.

Porque, no exemplo a,  $D(f) = \{0, 1, 2\}$  e, no b,  $D(f) = \mathbb{R}$ .

### Para refletir

Por que os gráficos dos exemplos a e b são diferentes se a lei das duas funções é  $f(x) = 2x + 1$ ?

Comente com os alunos que uma função pode ser representada por uma tabela, pela lei da função ou por um gráfico.

### Para refletir

Como saber que é uma curva, e não um segmento de reta, que liga esses pontos? Os matemáticos já provaram que, quando temos  $y$  igual a um polinômio do 2º grau da forma  $ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , o gráfico é uma curva chamada parábola. Estudaremos isso mais adiante, no Capítulo 4, sobre função quadrática.

## Exercício

30. Construa no caderno o gráfico de cada uma das seguintes funções  $y = f(x)$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = x - 2$

c)  $y = 2x$

e)  $f(x) = x^2$

g)  $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

b)  $f(x) = x$

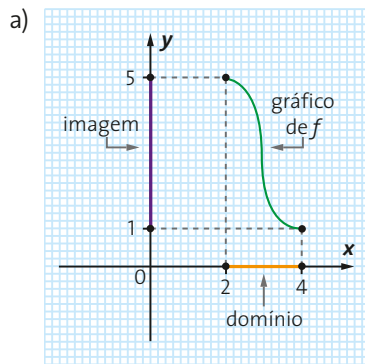
d)  $y = -2x$

f)  $f(x) = 2^x$

Veja os gráficos no Manual do Professor.

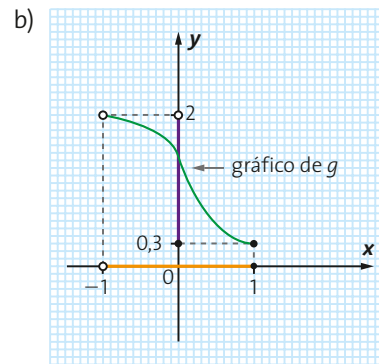
## Determinação do domínio e da imagem de uma função, conhecendo o gráfico

Observando o gráfico de uma função no plano cartesiano podemos determinar o domínio  $D$  e o conjunto imagem  $Im$  da função, projetando o gráfico nos eixos. Veja:



$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$$

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\} = [1, 5]$$

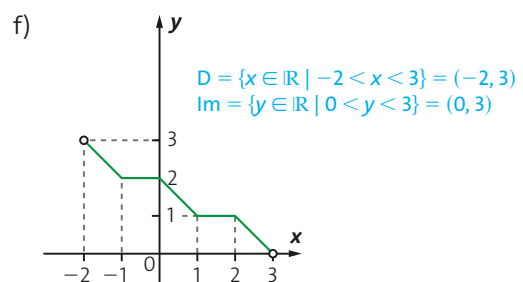
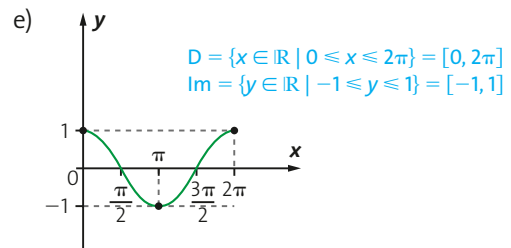
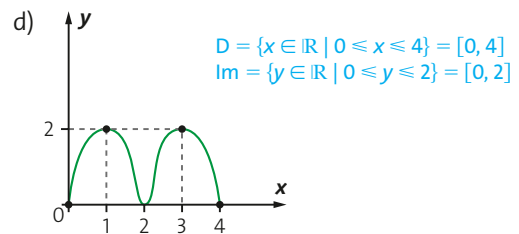
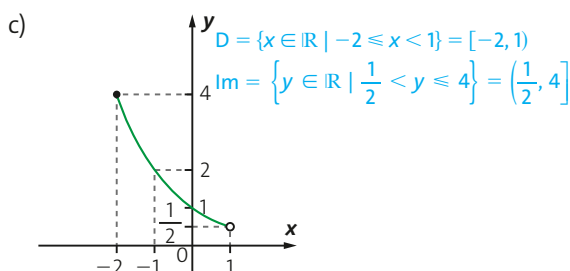
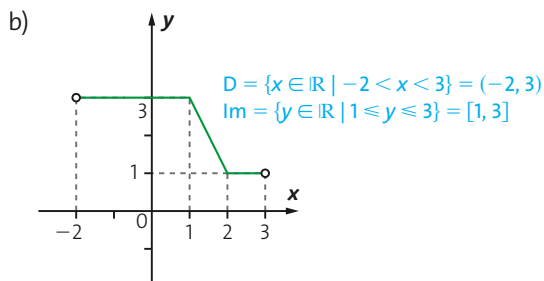
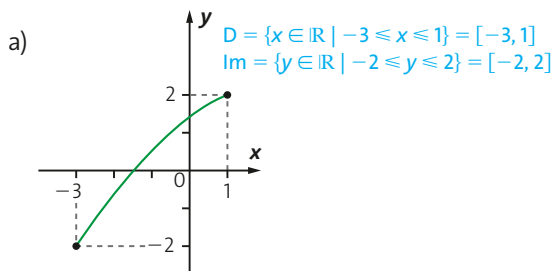


$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\} = (-1, 1]$$

$$Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0,3 \leq y < 2\} = [0,3, 2)$$

## Exercícios

31. Os seguintes gráficos representam funções. Determine o domínio  $D$  e o conjunto imagem  $Im$  de cada uma delas.



32.  $D(f) = \mathbb{R}$ ;  $Im(f) = \mathbb{Z}$

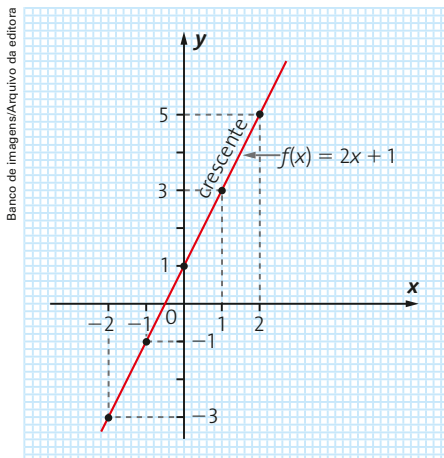
Veja o gráfico no Manual do Professor.

32. Tracem no caderno o gráfico da função definida por  $f(x) = n$ , se  $n < x \leq n + 1$ , sendo  $n$  um número inteiro. Qual é o domínio e a imagem da função?

## 8 Função crescente e função decrescente: analisando gráficos

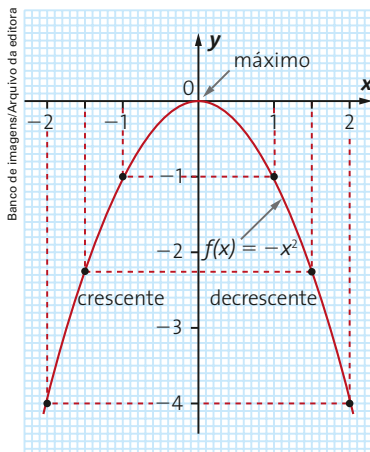
Vamos analisar alguns dos gráficos que já construímos.

a) Observe que o gráfico da função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x + 1$  é uma reta.



Dizemos que essa função é **crescente**, pois, quanto maior o valor dado a  $x$ , maior será o valor correspondente  $y = f(x) = 2x + 1$ .

b) Agora, observe que o gráfico da função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -x^2$  é uma parábola.



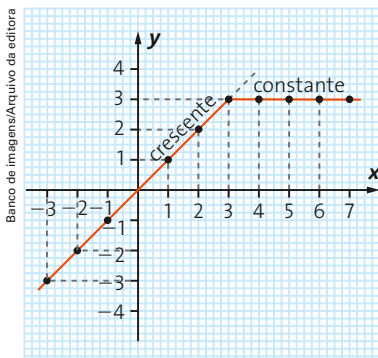
Veja que:

- para  $x \leq 0$ , essa função é **crescente**.
- para  $x \geq 0$ , essa função é **decrescente**.
- para  $x = 0$ , temos  $f(x) = 0$ ; para  $x \neq 0$ , temos  $f(x) < 0$ . Por isso, dizemos que  $x = 0$  é o **ponto de máximo da função**.
- geometricamente, o gráfico é **simétrico** em relação ao eixo  $Oy$ .

### Fique atento!

Nesse caso, representar a função pelo gráfico facilitou muito a visualização da simetria em relação ao eixo  $Oy$ .

c) Por fim, observe o gráfico da função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 3 \\ 3, & \text{se } x > 3 \end{cases}$ .

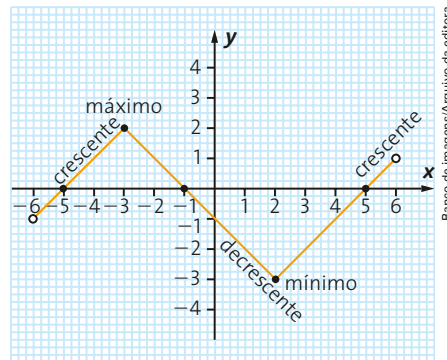


Veja que:

- para  $x \leq 3$ , essa função é **crescente**.
- para  $x > 3$ , essa função é **constante** (para qualquer valor de  $x$ ,  $x > 3$ ,  $f(x) = 3$ ).
- para  $x < 0$ ,  $f(x) < 0$ .
- para  $x = 0$ ,  $f(x) = 0$ .
- para  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$ .

**Conclusões:** De modo geral, analisando o gráfico de uma função, podemos observar propriedades importantes dela, como:

- 1ª) Onde a função é positiva ( $f(x) > 0$ ), onde é negativa ( $f(x) < 0$ ) e onde se anula ( $f(x) = 0$ ). Os valores  $x_0$  nos quais a função se anula ( $f(x_0) = 0$ ) são chamados **zeros** da função  $f$ .
- 2ª) Onde a função é crescente (se  $x_1 < x_2$ , então  $f(x_1) < f(x_2)$ ), onde é decrescente (se  $x_1 < x_2$ , então  $f(x_1) > f(x_2)$ ) e onde assume um valor máximo ou um valor mínimo, se existirem. Por exemplo, considere o gráfico abaixo, que representa uma função definida no intervalo  $(-6, 6)$ :



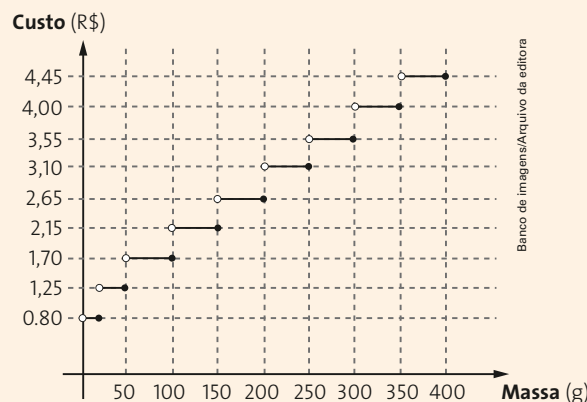
- $f$  é positiva em  $(-5, -1)$  e em  $(5, 6)$ ;
- $f$  é negativa em  $(-6, -5)$  e em  $(-1, 5)$ ;
- $f$  é nula em  $x = -5$ ,  $x = -1$  e  $x = 5$ . Esses são os zeros ou raízes da função;
- $f$  é crescente em  $(-6, -3]$  e em  $[2, 6)$ ;
- $f$  é decrescente em  $[-3, 2]$ ;
- o ponto com  $x = -3$  é um ponto de máximo, e  $f(x) = 2$  é o valor máximo de  $f$ ;
- o ponto com  $x = 2$  é um ponto de mínimo, e  $f(x) = -3$  é o valor mínimo de  $f$ .

## Exercício resolvido

passo a passo: exercício 5

### Resolvido passo a passo

5. (Enem) Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Disponível em: <www.correios.com.br>. Acesso em: 2 ago. 2012. (Adaptado).

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de:

- a) 8,35
- b) 12,50
- c) 14,40
- d) 15,35
- e) 18,05

## 1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dado um gráfico que informa o custo de envio de uma carta não comercial pelos Correios de acordo com sua respectiva massa.

b) O que se pede?

O gasto total para postar as cartas relatadas no enunciado.

## 2. Planejando a solução

Devemos usar as informações contidas no gráfico para identificar o valor cobrado por cada carta citada no enunciado e calcular o gasto total de acordo com a quantidade de cada tipo de carta.

## 3. Executando o que foi planejado

De acordo com a nossa estratégia, obtemos o valor de postagem das cartas comerciais de acordo com suas respectivas massas, chegando à seguinte tabela:

### Custo de envio de uma carta não comercial pelos Correios

Massa (g)	Custo (R\$)
(0, 25]	0,80
(25, 50]	1,25
(50, 100]	1,70
(100, 150]	2,15
(150, 200]	2,65
(200, 250]	3,10
(250, 300]	3,55
(300, 350]	4,00
(350, 400]	4,45

Fonte: Dados coletados no enunciado.

A partir da tabela e do enunciado verificamos que se deseja postar:

- 2 cartas no valor de R\$ 1,70;
- 3 cartas no valor de R\$ 2,65;
- 1 carta no valor de R\$ 4,00.

Assim, para obtermos o resultado final basta efetuar a multiplicação do valor de cada tipo de carta pela quantidade, e posteriormente adicionar os valores obtidos.

$$2 \times 1,70 = 3,40 \quad 3 \times 2,65 = 7,95 \quad 1 \times 4,00 = 4,00$$

$$\text{Custo total: R\$ } 3,40 + \text{R\$ } 7,95 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 15,35$$

## 4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa d.

## 5. Ampliando o problema

a) Os Correios de uma cidade receberam em um dia 50 cartas de 100 g, 20 cartas de 58 g, 5 cartas de 225 g e 2 cartas de 227 g, todas não comerciais. De acordo com os dados fornecidos anteriormente, qual o valor arrecadado pelos Correios dessa cidade nesse dia com esse tipo de carta? **R\$ 140,70**

b) Observe a tabela a seguir.

### Relação entre a dimensão da embalagem e a massa da carta

Massa (g)	Dimensões da embalagem (cm)
(0, 100]	1 × 10 × 15
(100, 200]	3 × 15 × 25
(200, 300]	5 × 20 × 35
(300, 400]	8 × 25 × 45

Fonte: Dados fictícios.

A partir dessa tabela, qual é o volume ocupado por todas as cartas postadas, de acordo com os tipos e quantidades de cartas indicadas na questão base? **12 675 cm<sup>3</sup> ou 0,012675 m<sup>3</sup>**

c) *Discussão em equipe*

Troque ideias com seus colegas sobre o envio de cartas, encomendas e informações na atualidade e faça uma ponte com a realização dos mesmos processos antigamente. A partir daí, tentem abordar os possíveis malefícios dessa evolução entre os inúmeros benefícios. **Resposta pessoal.**



Agência de Correios e Telégrafos em sobrado histórico. Codó-MA. Fotografia de 2014.

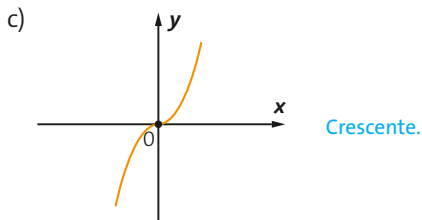
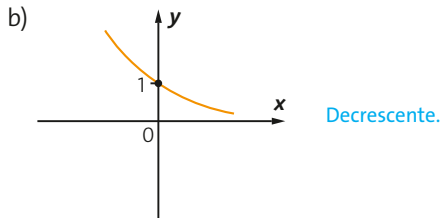
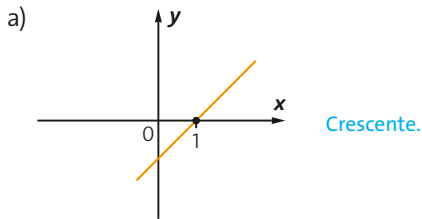
Cesar Diniz/Pulsar/Imagens



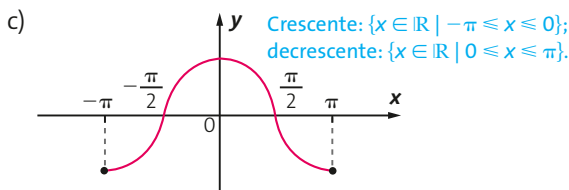
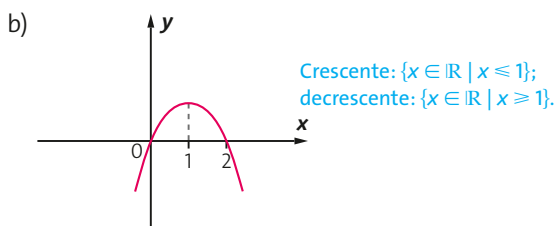
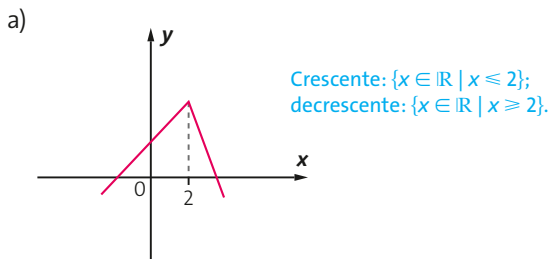
# Exercícios



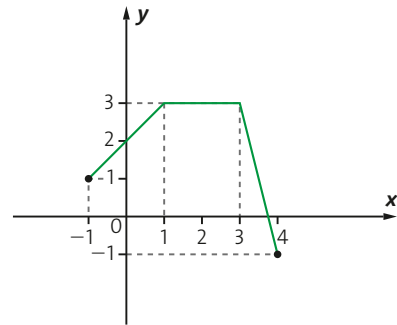
33. Os gráficos seguintes representam funções. Identifique se cada função é crescente ou decrescente.



34. Considerando os gráficos a seguir, que representam funções, verifique para que valores reais de  $x$  a função é crescente e para que valores é decrescente.



35. Responda no caderno às questões a partir do gráfico da função  $f$ :

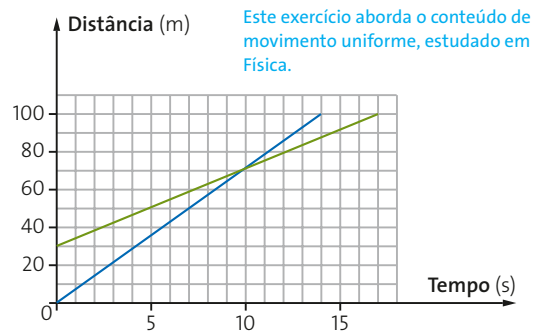


- Qual é o domínio e qual é a imagem de  $f$ ?  
 $D(f) = [-1, 4]$ ;  $Im(f) = [-1, 3]$
- Em quantos pontos o gráfico corta o eixo  $x$ ? E o eixo  $y$ ?  
Corta o eixo  $x$  em um ponto;  
corta o eixo  $y$  em um ponto.
- $f(1,7)$  é maior, menor ou igual a  $f(2,9)$ ? Igual.
- Qual é o valor máximo de  $f(x)$ ? E o valor mínimo?  
Valor máximo de  $f(x)$  é 3; valor mínimo de  $f(x)$  é -1.
- Qual ponto do gráfico tem abscissa -1?  
O ponto (-1, 1).
- O ponto (4, -1) pertence ao gráfico de  $f$ ? Sim.
- Qual é o valor de  $x$  quando  $f(x) = 3$ ?  
 $f(x) = 3$  para  $1 \leq x \leq 3$

36. Física

Um rapaz desafia seu pai para uma corrida de 100 metros. O pai permite que o filho comece a corrida 30 metros à sua frente. Um gráfico bastante simplificado dessa corrida é dado a seguir.

## Corrida entre pai e filho



Fonte: Dados fictícios.

- O pai ganhou a corrida, pois ele chegou aos 100 m em 14 s e o filho, em 17 s; a diferença de tempo foi de 3 s.
- Pelo gráfico, como é possível dizer quem ganhou a corrida e qual foi a diferença de tempo?
- A que distância do início o pai alcançou seu filho?  
Cerca de 70 m.
- Em que momento depois do início da corrida ocorreu a ultrapassagem?  
Cerca de 10 s.

## 9 Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

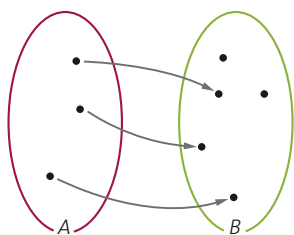
### Função injetiva ou injetora

Uma função  $f: A \rightarrow B$  é **injetiva** (ou **injetora**) quando elementos diferentes de  $A$  são transformados por  $f$  em elementos diferentes de  $B$ , ou seja, não há elemento em  $B$  que seja imagem de mais de um elemento de  $A$ . Assim:

$f$  é injetiva quando:  $x_1 \neq x_2$  em  $A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  em  $B$

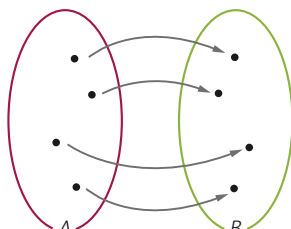
ou equivalentemente usando a contrapositiva (ver página 39):

$f$  é injetiva quando:  $f(x_1) = f(x_2)$  em  $B \Rightarrow x_1 = x_2$  em  $A$

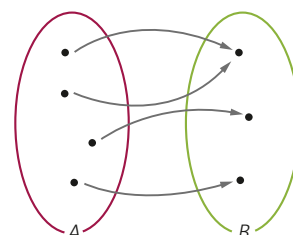


função injetiva

(Não há elemento em  $B$  que seja imagem de mais de um elemento de  $A$ .)



função injetiva



função não injetiva

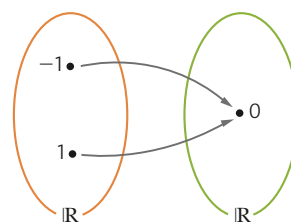
(Há um elemento em  $B$  que é imagem de dois elementos distintos de  $A$ .)

Exemplos:

a) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 - 1$  não é injetiva, pois:

- para  $x = 1$  corresponde  $f(1) = 0$ ;
- para  $x = -1$  corresponde  $f(-1) = 0$ .

Nesse caso, para dois valores diferentes de  $x$  encontramos um mesmo valor para a função.

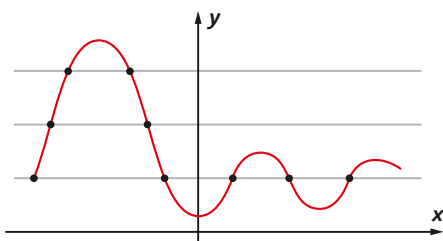


Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x$  é injetiva, pois faz corresponder a cada número real  $x$  o seu dobro  $2x$ , e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo dobro. Simbolicamente: Para quaisquer  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ .

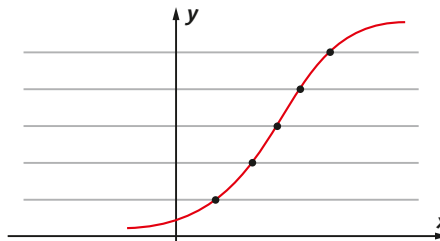
**Observação:** Podemos verificar se uma função é injetiva olhando seu gráfico. Sabemos que, se a função é injetiva, não há elemento do conjunto imagem que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Assim, imaginando linhas horizontais cortando o gráfico, essas linhas só podem cruzar o gráfico uma única vez para cada valor de  $y$ . Exemplos:

a) As linhas horizontais intersectam o gráfico mais de uma vez.



Então, a função não é injetiva.

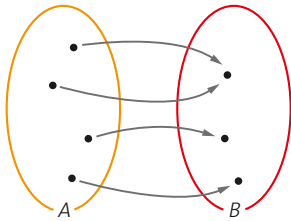
b) As linhas horizontais **nunca** intersectam o gráfico mais de uma vez.



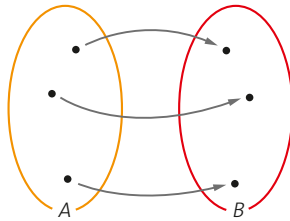
Então, a função é injetiva.

## Função sobrejetiva ou sobrejetora

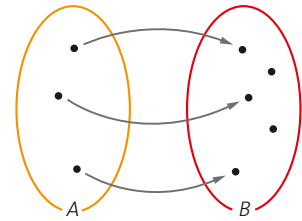
Uma função  $f: A \rightarrow B$  é **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) quando, para qualquer elemento  $y \in B$ , pode-se encontrar um elemento  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Ou seja,  $f$  é sobrejetiva quando todo elemento de  $B$  é imagem de pelo menos um elemento de  $A$ , isto é, quando  $\text{Im}(f) = B$ .



função sobrejetiva  
 $\text{Im}(f) = B$



função sobrejetiva  
 $\text{Im}(f) = B$



função não sobrejetiva  
(Há elementos em  $B$  sem correspondente em  $A$ ;  
logo,  $\text{Im}(f) \neq B$ )

Exemplos:

a) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x + 2$  é sobrejetiva, pois todo elemento de  $\mathbb{R}$  é imagem de um elemento de  $\mathbb{R}$  pela função  $[x = f(x) - 2]$ . Veja:

- $f(x) = 5$  é imagem de  $x = 3$ , pois  $5 - 2 = 3$ ;
- $f(x) = 0$  é imagem de  $x = -2$ , pois  $0 - 2 = -2$ .

b) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $f(x) = x^2$  é sobrejetiva, pois todo elemento de  $\mathbb{R}_+$  é imagem de pelo menos um elemento de  $\mathbb{R}$  pela função  $[x = \pm\sqrt{f(x)}]$ . Observe:

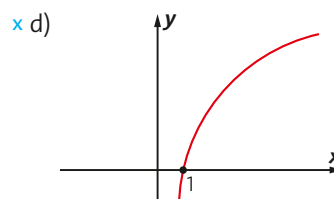
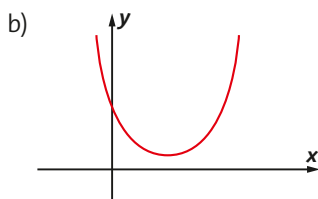
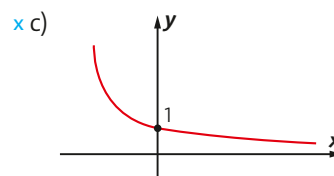
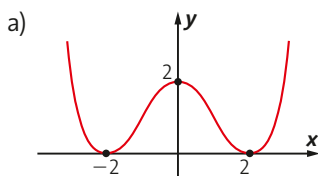
- $f(x) = 9$  é imagem de  $x = 3$  e de  $x = -3$  ( $\pm\sqrt{9}$ )
- $f(x) = 0$  é imagem de  $x = 0$  ( $\pm\sqrt{0}$ )
- $f(x) = 2$  é imagem de  $x = \sqrt{2}$  e de  $x = -\sqrt{2}$  ( $\pm\sqrt{2}$ )

c) A função sucessora  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(n) = n + 1$  **não** é sobrejetiva, pois  $\text{Im}(f) = \mathbb{N}^*$  e  $\mathbb{N}^* \neq \mathbb{N}$ . Em outras palavras, dado  $0 \in \mathbb{N}$ , não há natural algum que seja transformado em 0 pela função  $f$ , isto é, 0 não é sucessor de nenhum número natural.

## Exercícios



37. Analise os gráficos abaixo e identifique quais são funções injetivas.



38. Verifique se as seguintes funções são ou não sobrejetivas.

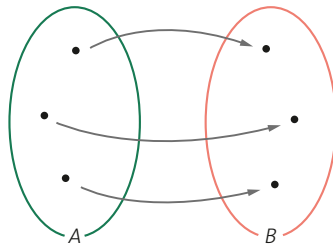
a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x - 1$  **É sobrejetiva.**

b)  $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 - 4$

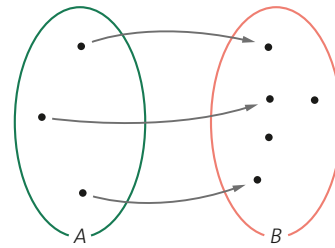
**Não é sobrejetiva.**

## Função bijetiva ou correspondência biunívoca

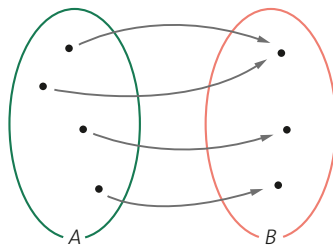
Uma função  $f: A \rightarrow B$  é **bijetiva** se ela for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre dizemos que há uma **bijeção** ou uma **correspondência biunívoca** entre  $A$  e  $B$ .



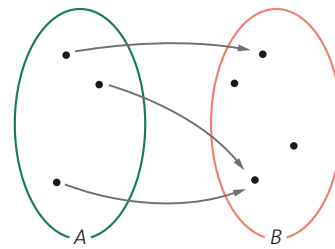
função bijetiva



não é bijetiva  
(É injetiva, mas não sobrejetiva.)



não é bijetiva  
(É sobrejetiva, mas não injetiva.)



não é bijetiva  
(Não é injetiva nem sobrejetiva.)

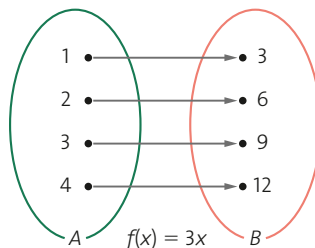
Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da Editora

Exemplos:

- A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 3x$  é bijetiva, pois ela é simultaneamente injetiva e sobrejetiva; cada número real do contradomínio  $\mathbb{R}$  tem como correspondente no domínio a sua terça parte, que sempre existe e é única.
- A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x + 1$  é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva; cada número real do contradomínio  $\mathbb{R}$  tem sempre um só correspondente no domínio  $\mathbb{R}$  (esse número menos 1).
- A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $f(x) = x^2$  não é bijetiva, pois, embora seja sobrejetiva, não é injetiva:  $3 \neq -3$ , mas  $f(3) = f(-3) = 9$ .
- A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2^x$  não é bijetiva; embora seja injetiva, não é sobrejetiva. Não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 0$  ou que  $f(x)$  seja negativo.

### Você sabia?

- Dois conjuntos,  $A$  e  $B$ , têm o mesmo **número cardinal** quando se pode definir uma correspondência biunívoca  $f: A \rightarrow B$ . Por exemplo, se  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{3, 6, 9, 12\}$  e  $f: A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = 3x$ , temos uma correspondência biunívoca. Os conjuntos  $A$  e  $B$  têm o mesmo número cardinal, que é igual a 4.

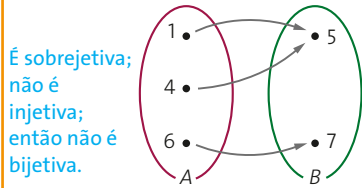


- Uma curiosidade, descoberta por Galileu Galilei, é que o conjunto dos números naturais pares  $P$  tem o mesmo cardinal que o conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$ , embora  $P$  seja subconjunto de  $\mathbb{N}$ . A correspondência biunívoca é dada por  $f: \mathbb{N} \rightarrow P, f(n) = 2n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



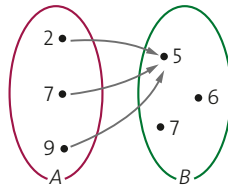
39. Verifique se as funções abaixo são sobrejetivas, injetivas ou bijetivas.

a)  $f: A \rightarrow B$



É sobrejetiva; não é injetiva; então não é bijetiva.

c)  $f: A \rightarrow B$



Não é sobrejetiva; não é injetiva; então não é bijetiva.

e) Não é sobrejetiva; não é injetiva; então não é bijetiva.

f) É injetiva; não é sobrejetiva; então não é bijetiva.

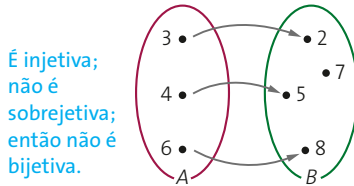
e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$

f)  $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(x) = x + 2$

g)  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x) = x^2$

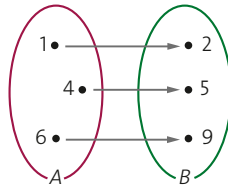
É injetiva; é sobrejetiva; então é bijetiva.

b)  $f: A \rightarrow B$



É injetiva; não é sobrejetiva; então não é bijetiva.

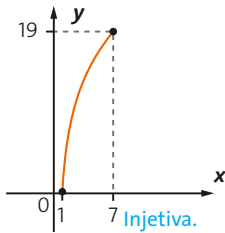
d)  $f: A \rightarrow B$



É sobrejetiva; é injetiva; então é bijetiva.

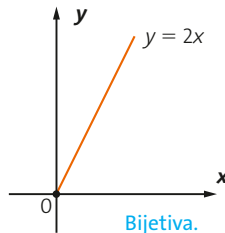
40. Analisando os gráficos abaixo, verifique se as funções são sobrejetivas, injetivas ou bijetivas.

a)  $g: [1, 7] \rightarrow [0, 19]$



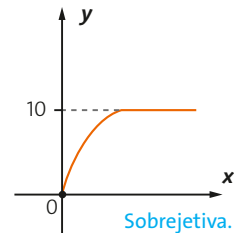
Injetiva.

b)  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$



Bijetiva.

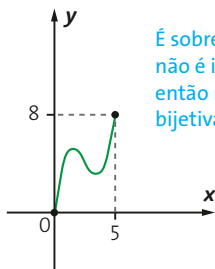
c)  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 10]$



Sobrejetiva.

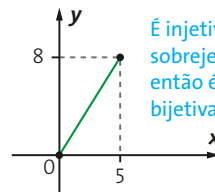
41. Analisando os gráficos a seguir, identifique quais funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas.

a)  $f: [0, 5] \rightarrow [0, 8]$



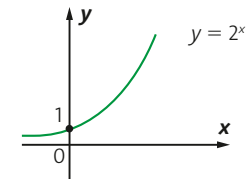
É sobrejetiva; não é injetiva; então não é bijetiva.

c)  $f: [0, 5] \rightarrow [0, 8]$



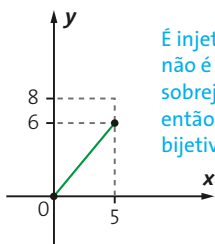
É injetiva, é sobrejetiva; então é bijetiva.

e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$



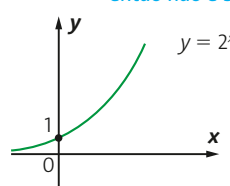
É sobrejetiva; não é injetiva; então não é bijetiva.

b)  $f: [0, 5] \rightarrow [0, 8]$



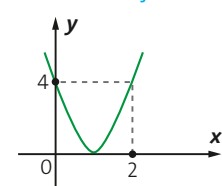
É injetiva, não é sobrejetiva; então não é bijetiva.

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



É injetiva; não é sobrejetiva; então não é bijetiva.

f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$





## 10 Função e seqüências

Os alunos precisarão de alguns minutos para discutir e chegar às conclusões. Evite ajudá-los neste momento; no máximo, dê dicas genéricas de procedimento. Depois de encontrados os valores, peça a eles que expliquem a lógica utilizada. Esse assunto será estudado mais profundamente no Capítulo 7.

🗨 Agora, vamos estudar um assunto bastante interessante que está relacionado com as funções. Antes disso, forme dupla com um colega e tentem descobrir qual número está faltando em cada item abaixo.

a) 2, 4, 6,  $\square$ , 10, 12, ... 8

c) 1, 2, 4, 8, 16,  $\square$ , 64 32

e) 2, 10, 50,  $\square$ , 1 250, ... 250

b) 1, 5, 9, 13,  $\square$ , 21, ... 17

d) 1, -2, 4, -8, 16,  $\square$ , 64 -32

f) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$  ...  
34, 55 e 89

Esses números estão dispostos de acordo com uma **seqüência**.

Uma seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{N}^*$ , conjunto dos números naturais sem o zero:  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Em uma seqüência, a cada número natural diferente de zero corresponde um único número real  $x_n$ :

$$1 \rightarrow x_1; 2 \rightarrow x_2; 3 \rightarrow x_3; \dots; n \rightarrow x_n; \dots$$

Uma seqüência é indicada por:  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  ou  $(x_n)$ .

Por exemplo, a função de  $\mathbb{N}^*$  em  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 3x$  determina a seqüência (3, 6, 9, 12, ...) dos múltiplos positivos de 3.

Dois importantes exemplos de seqüências são as progressões aritmética e geométrica. Você estudará outros exemplos de seqüências no Capítulo 7.

### Fique atento!

Podemos ter também seqüências finitas. Nesse caso, a função é  $f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ , e a seqüência  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tem  $n$  termos.

### Progressão aritmética

A seqüência (1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, ...) é uma **progressão aritmética (PA)**. Observe que cada termo, a partir do segundo, é a adição do termo anterior e 7. Nesse caso, essa constante 7 chama-se **razão** da PA.

Observe também que na PA (1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, ...) temos:

1º termo: 1

3º termo:  $15 = 8 + 7$

2º termo:  $8 = 1 + 7$

e assim por diante.

### Para refletir

Que número vem depois do 43 nessa PA? 50

### Progressão geométrica

A seqüência (2, 6, 18, 54, 162, 486, ...) é uma **progressão geométrica (PG)**. Observe que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por 3. Nesse caso, essa constante 3 chama-se **razão** da PG. Observe que:

1º termo: 2

4º termo:  $54 = 18 \cdot 3$

2º termo:  $6 = 2 \cdot 3$

5º termo:  $162 = 54 \cdot 3$

3º termo:  $18 = 6 \cdot 3$

e assim por diante.

### Para refletir

Que número vem depois do 486 nessa PG? 1458

## Exercícios



42. Escreva no caderno a seqüência determinada pela função  $f$  de  $\mathbb{N}^*$  em  $\mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = (x - 1)^2$ .  
(0, 1, 4, 9, 16, ...)

43. Quais das seqüências são PA ou PG? Nas que forem progressões, indique qual é a razão.

a) 10, 5, 0, -5, -10, -15, ... c) 2, 5, 8, 10, 13, 15, 18, ...

b) 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...  
PA de razão -5 Não é PA nem PG.

PG de razão 2

44. Qual é a lei da função  $f$  de  $\mathbb{N}^*$  em  $\mathbb{R}$  que determina a seqüência (1, 3, 5, 7, 9, ...)?  $f(x) = 2x - 1$

45. 🧑 O primeiro termo de uma PA é 6. A razão é 5. Qual é o 10º termo dessa PA? 51

46. 🧑 O primeiro termo de uma PG é 4. A razão é 3. Qual é o 6º termo dessa PG? 972

47. Invente uma PA. Resposta pessoal.

48. Invente uma PG. Resposta pessoal.

# Pensando no Enem



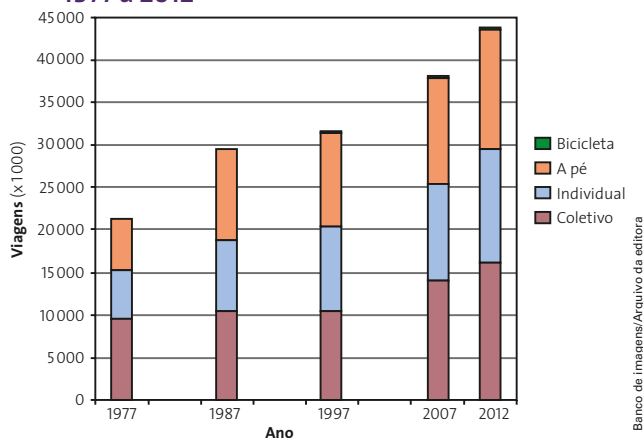
## 1. Leia o texto a seguir e observe o gráfico.

A Pesquisa Origem e Destino, conhecida também como Pesquisa OD, é um instrumento vital para o planejamento de transporte, pois fornece dados para o conhecimento da natureza dos deslocamentos da população em uma área urbana determinada. Com as informações coletadas nesta pesquisa é possível identificar as viagens realizadas em um dia útil pelas pessoas e os modos de transporte utilizados. [...]

A primeira pesquisa OD no Brasil foi realizada em 1967 na Região Metropolitana de São Paulo – RMSP para obtenção de dados para os estudos e projetos da rede básica do Metrô de São Paulo. A partir de então, foi feita a cada dez anos, tendo sua quinta edição em 2007 [...].

No entanto, em uma metrópole do dinamismo da RMSP, o período de dez anos é muito longo para acompanhar as mudanças nos padrões de deslocamento das pessoas. Assim, cinco anos após a pesquisa de 1997, foi feita, em 2002, uma aferição – denominada Pesquisa de Aferição 2002 [...] Esta mesma aferição [...] foi repetida em 2012 – com o nome de **Pesquisa de Mobilidade 2012** –, cinco anos após a pesquisa de 2007, com o mesmo objetivo daquela realizada em 2002. [...]

### Evolução das viagens diárias por modo principal Região metropolitana de São Paulo 1977 a 2012



Fonte: Metrô-Pesquisas OD 1977/1987/1997 e 2007 e Mobilidade 2012.

Fonte: Relatório Síntese da Pesquisa de Mobilidade Urbana de 2012.

Disponível em: <[www.metro.sp.gov.br/metro/numeros-pesquisa/pesquisa-mobilidade-urbana-2012.aspx](http://www.metro.sp.gov.br/metro/numeros-pesquisa/pesquisa-mobilidade-urbana-2012.aspx)>. Acesso em: 11 mar. 2016.

É possível afirmar que:

- I. O transporte coletivo revela-se como o principal modo de transporte na RMSP em todas as pesquisas realizadas desde 1977.
  - II. Houve redução no uso do transporte individual na RMSP ao longo dos anos de 1977 a 2012.
  - III. As bicicletas, que praticamente não eram utilizadas na RMSP em 1977, passam a integrar os possíveis modos de transporte, como revelam as pesquisas a partir de 1987.
- a) I e II estão corretas.
  - b) I e III estão corretas.
  - c) II e III estão corretas.
  - d) Somente I está correta.
  - e) Somente III está correta.

Matriz do Enem: H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

## 2. Ao realizar pesquisa semelhante em suas turmas de 1º ano de Ensino Médio, uma professora obteve os seguintes dados:

Observe com os alunos a pesquisa apresentada na questão 2 e verifique se eles identificam alguma diferença em relação à pesquisa apresentada na questão 1.

### Meios de transporte utilizados para ir à escola

Turma	A pé	Transporte escolar	Carro particular	Ônibus	Metrô	Total
1A	5	8	5	7	8	33
1B	7	7	6	9	9	38
1C	9	5	8	12	4	38
1D	6	6	9	8	9	38

Fonte: Dados fictícios.

Considerando a quantidade de alunos de cada turma que respondeu à questão como a indicada a seguir, assinale a alternativa correta:

### Quantidade de alunos por turma

	1A	1B	1C	1D
	30	35	38	36

Fonte: Dados fictícios.

- a) Na turma **A**, não há alunos que utilizam mais de um meio de transporte para ir à escola.
- b) Na turma **C**, nem todos os alunos utilizam apenas um meio de transporte para ir à escola.
- c) Na turma **D** pode haver um aluno que utilize 3 meios de transporte para ir à escola (por exemplo, ônibus, metrô, a pé).
- d) Na turma **B**, todos os alunos indicaram apenas um meio de transporte, à exceção de 2 alunos que utilizam 2 meios de transporte para ir à escola.
- e) Nas turmas **A** e **B**, podemos afirmar que há, em cada uma, exatamente 3 alunos que utilizam 2 meios de transporte para ir à escola.



## Obesidade

Quando comemos mais do que precisamos, o excesso é armazenado em forma de gordura. Em outras palavras, se o número de calorias que “entra” no corpo for maior que o de calorias que “sai”, engordamos. Esse desequilíbrio pode ser gerado por hábitos alimentares errados, pouca atividade física, fatores hereditários, problemas glandulares, etc. O armazenamento de gordura que se aproxima de um nível que compromete a saúde de uma pessoa é chamado de obesidade.

### Papel confuso da gordura na doença

Foi estabelecida uma nítida associação entre obesidade e várias enfermidades sérias, entre elas diabetes, hipertensão, doenças cardiovasculares e até alguns tipos de câncer, embora muitos aspectos dessa relação não tenham sido explicados. Ainda assim, a definição médica mais comum de obesidade baseia-se em evidências de efeitos adversos sobre a saúde em pessoas acima do peso.

O índice de massa corporal (IMC) é um dos parâmetros utilizados para identificar sobrepeso e obesidade. Esse índice é calculado com a massa de uma pessoa, em quilogramas, dividida pelo quadrado da sua altura, em metros. Já que uma maior mortalidade é encontrada em pessoas com IMC maior do que 30, esse número tornou-se um dos principais parâmetros para definir a obesidade. Um IMC entre 25 e 30 é chamado sobrepeso, refletindo já alguma conexão com efeitos adversos à saúde.

Essas relações epidemiológicas entre IMC e enfermidade, contudo, podem variar em diferentes subpopulações. E nenhum número preciso permite que os médicos determinem qual quantidade de gordura excedente causará uma doença. Algumas pessoas têm problemas de saúde com o IMC abaixo de 25, enquanto outras permanecem saudáveis com IMC maior do que 30.

### Aumento da obesidade

Brasileiros estão ficando mais pesados desde 2006

#### Alimentação

O que faz mal ao coração:



**32%** comem carne com excesso de gordura



**53%** tomam leite integral, que é mais gorduroso



**26%** bebem refrigerante cinco vezes por semana ou mais

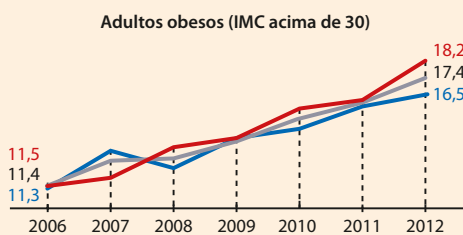
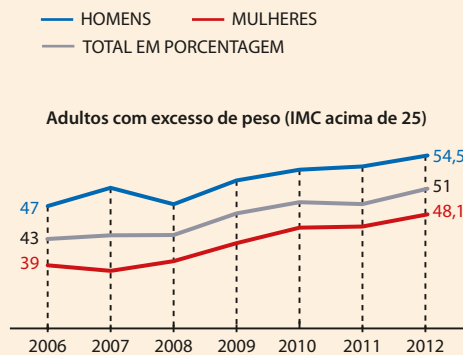
O que faz bem ao coração:



**22,7%** comem cinco ou mais porções de frutas e hortaliças por dia



**35,5%** comem feijão cinco vezes por semana ou mais



Fonte: Vigitel 2012 – Ministério da Saúde

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: G1. Disponível em: <http://g1.globo.com/bemestar/noticia/2013/08/mais-da-metade-dos-brasileiros-tem-excesso-de-peso-segundo-pesquisa.html>. Acesso em: 11 mar. 2016.

## Rotina mais saudável

Apesar do avanço de fatores de risco, como excesso de peso e colesterol alto, a população brasileira está mais atenta aos hábitos saudáveis, com crescimento do número de pessoas que se exercitam regularmente e daquelas que mantêm uma alimentação adequada, com maior presença de frutas e hortaliças e menos gordura. Atualmente, 35% da população são consideradas ativas. Isto é, esta parcela executa mais de 150 minutos de atividades físicas semanais no tempo livre (média de 30 minutos por dia). Os homens (42%) são mais assíduos que as mulheres (30%). O percentual de pessoas ativas aumentou 18% nos últimos seis anos. [...] Cerca de 50% dos entrevistados afirmaram não cumprir o tempo recomendado para a prática de exercícios e 16% não praticam atividades deste tipo. De acordo com dados da Organização Mundial da Saúde (OMS), 3,2 milhões de pessoas morrem no mundo, por ano, em decorrência da insuficiência na prática de atividades físicas. O sedentarismo é o quarto maior fator de risco da mortalidade global. A meta do Ministério da Saúde é reduzir para 10%, até 2025, a taxa de pessoas insuficientemente ativas. Outra boa notícia é que os brasileiros estão consumindo mais frutas e hortaliças: 42,5% dos entrevistados declararam consumir regularmente este tipo de alimento e 24,1% ingerem a quantidade recomendada pela OMS (cinco ou mais porções diárias, 400 g). Além disso, o consumo de carnes com excesso de gordura, refrigerantes e doces caiu. Entre 2007 e 2014, o percentual de entrevistados que declarou consumir carnes gordurosas passou de 32,3% para 29,4%. O índice de cidadãos que bebem refrigerantes cinco ou mais vezes por semana é 20,8%, menor taxa desde 2007 (30,9%). Já os alimentos doces estão na rotina: cinco ou mais dias da semana de 18,1% da população.

Fonte: Portal Planalto. Disponível em: <<http://www2.planalto.gov.br/noticias/2015/04/nivel-de-obesidade-no-brasil-e-estavel-mas-excesso-de-peso-aumenta>>. Acesso em: 11 mar. 2016.

## Trabalhando com o texto

1. Com base nas informações apresentadas, podemos dizer que o número de pessoas obesas no Brasil está aumentando ou diminuindo? Justifique sua resposta. **Está aumentando (de acordo com o gráfico *Adultos obesos (IMC acima de 30)*).**
2. O índice de massa corporal (IMC) é dado pela fórmula  $IMC = \frac{p}{h^2}$ , em que  $p$  é a massa, em quilogramas, e  $h$  é a altura, em metros, do indivíduo. A avaliação de um peso, se está normal, abaixo ou acima do peso ideal, é feita de acordo com a seguinte tabela:
  - a) Determine o IMC de Amanda, que tem 1,60 m de altura e 51,2 kg de massa. **IMC = 20**
  - b) Classifique o IMC de Amanda segundo a tabela ao lado. **Peso ideal.**
  - c) Qual é a altura mínima para que uma pessoa de massa 108,3 kg seja considerada com sobrepeso? **1,90 m**

### Classificação de peso pelo IMC

Classificação	IMC
Abaixo do peso	Abaixo de 18,5
Peso ideal	Entre 18,5 – 24,9
Sobrepeso	Entre 25,0 – 29,9
Obesidade moderada	Entre 30,0 – 34,9
Obesidade alta	Entre 35,0 – 39,9
Obesidade muito alta	Acima de 40,0

Fonte: <<http://scsaude.sea.sc.gov.br/web/prevencao/como-calcular-o-seu-imc>>. Acesso em: 11 mar. 2016.

## Pesquisando e discutindo

3. Muitas pessoas acreditam que um bebê ou uma criança “gordinha” é sinônimo de boa saúde. Você concorda com isso? **Espera-se que o aluno não concorde com essa afirmação, pois na verdade essa “crença” é equivocada. A obesidade tem se apresentado como um fator prejudicial à saúde.**
4. Quais medidas podem ser tomadas para evitar a obesidade?
5. Uma dieta equilibrada não significa eliminar o consumo total de gordura. Pesquise quais são os benefícios da ingestão de alguns tipos de gordura para o nosso organismo. **As gorduras, ou lipídeos, estão relacionadas ao crescimento, ajudam a dissolver vitaminas, agem na produção de espermatozoides e atuam como reserva de energia.**

## Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações sobre a obesidade em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acessos em: 15 jan. 2015)

- Artigo *Cinturas vantajadas* do Dr. Dráuzio Varella: <<http://drauziovarella.com.br/obesidade/cinturas-avantajadas/>>;
- Associação Brasileira para o Estudo da Obesidade e da Síndrome Metabólica: <[www.abeso.org.br](http://www.abeso.org.br)>.

# Vestibulares de Norte a Sul



## Região Norte

1. (UnirG-TO) Uma pesquisa a respeito da leitura das revistas **A** e **B** foi feita com os alunos de um colégio. Entre eles, 84 responderam que leem a revista **A**, 72 a revista **B**, 28 as revistas **A** e **B**, e 27 não leem nenhuma das duas revistas. De acordo com esses dados, conclui-se que o número de alunos desse colégio é:

- x a) 155
- b) 145
- c) 135
- d) 125

2. (UFPA) Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus  $n$  alunos, tendo chegado ao seguinte resultado:

- 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club;
- 23 alunos torcem pelo Clube do Remo;
- 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama;
- 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco;
- 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo.

Se designarmos por  $A$  o conjunto dos torcedores do Paysandu, por  $B$  o conjunto dos torcedores do Remo e por  $C$  o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, teremos, evidentemente,  $A \cap B = \emptyset$ . Concluímos que o número  $n$  de alunos desta turma é:

- a) 49
- b) 50
- c) 47
- d) 45
- e) 46

## Região Nordeste

3. (Unifor-CE) Na Universidade de Fortaleza, a Divisão de Assuntos Desportivos é responsável pelo planejamento e execução dos projetos desportivos, cuja participação é aberta para alunos de todos os cursos. Em um grupo de 100 alunos da Universidade de Fortaleza, 17 praticam futsal, 19 praticam voleibol, 21 praticam natação, 5 praticam futsal e voleibol, 2 praticam futsal e natação, 5 praticam voleibol e natação e 2 praticam os três esportes. Com base nos dados acima, qual o número de alunos desse grupo que praticam pelo menos um desses esportes?

- a) 37
- b) 40
- c) 47
- d) 50
- e) 57

4. (UFRN) O jogo da velha tradicional consiste em um tabuleiro quadrado dividido em 9 partes, no qual dois jogadores, alternadamente, vão colocando peças (uma a cada jogada). Ganha o jogo aquele que alinhar, na horizontal, na vertical ou na diagonal, três de suas peças. Uma versão chamada JOGO DA VELHA DE DESCARTES, em homenagem ao criador da Geometria Analítica, René Descartes, consiste na construção de um subconjunto do plano cartesiano, no qual cada jogador, alternadamente, anota as coordenadas de um ponto do plano. Ganha o jogo aquele que primeiro alinhar três de seus pontos. A sequência abaixo é o registro da sequência das jogadas de uma partida entre dois jogadores iniciantes, em que um anotava suas jogadas com a cor preta e o outro, com a cor cinza. Eles desistiram da partida sem perceber que um deles havia ganhado.

$((1, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2))$ .

Com base nessas informações, é correto afirmar que o jogador que ganhou a partida foi o que anotava sua jogada com a cor:

- x a) cinza, em sua terceira jogada.
- b) preta, em sua terceira jogada.
- c) cinza, em sua quarta jogada.
- d) preta, em sua quarta jogada.

## Região Centro-Oeste

5. (IFG-GO) De janeiro a novembro de 2013, foram registradas 314 mil multas nas ruas de Goiânia por excesso de velocidade, 46 mil multas foram por avançar o sinal vermelho e 45 mil por transitar na faixa exclusiva dos ônibus. Os dados são da Secretaria Municipal de Trânsito, Transportes e Mobilidade (SMT).

Disponível em: <<http://g1.globo.com/goias/noticia/2014/01/goianiaregistra-314-mil-multas-por-excesso-de-velocidade-em-11-meses.html>>. Acesso em: 9 fev. 2014. (Adaptado).

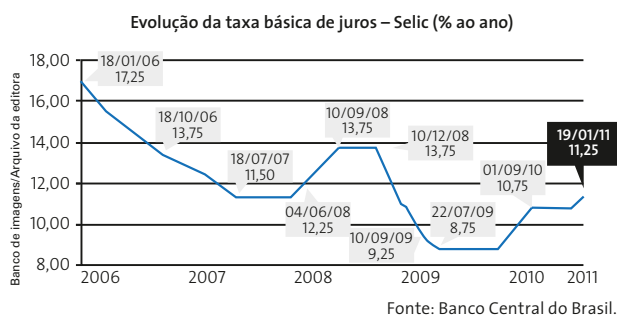
Considere que 11 mil motoristas foram multados por excesso de velocidade e por avançar o sinal vermelho, 10 mil por avançar o sinal vermelho e por transitar na faixa exclusiva dos ônibus, 12 mil por excesso de velocidade e por transitar na faixa exclusiva dos ônibus e 20 mil por excesso de velocidade, por avançar o sinal vermelho e por transitar na faixa exclusiva dos ônibus. De acordo com essas informações, o número de motoristas multados é de:

- x a) 332 mil
- b) 405 mil
- c) 383 mil
- d) 362 mil
- e) 352 mil





6. (UEG-GO) O gráfico a seguir apresenta a evolução da taxa básica de juros – Selic – no período de 18/01/2006 a 19/01/2011. Analisando esse gráfico, constata-se que durante esse período:



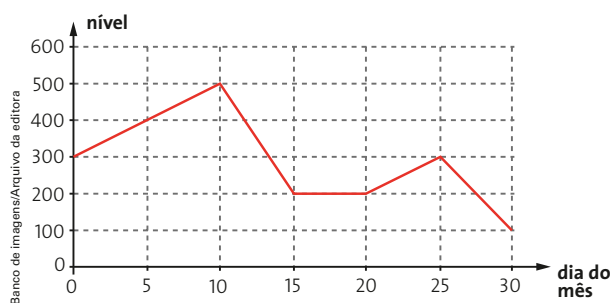
- x a) a menor Selic foi de 8,75% ao ano.  
 b) a maior Selic foi de 11,25% ao ano.  
 c) a menor Selic foi de 9,25% ao ano.  
 d) a maior Selic foi de 13,75% ao ano.  
 e) a maior Selic foi de 14,75% ao ano.

### Região Sudeste

7. (Mack-SP) Se  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar e } 1 \leq x \leq 7\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 = 0\}$ , então a única sentença falsa é:

- x a) O conjunto das partes da intersecção dos conjuntos  $A$  e  $B$  é  $P(A \cap B) = \{\{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$ .  
 b) O conjunto complementar de  $B$  em relação a  $A$  é  $\mathbb{C}_A^B = \{3, 7\}$ .  
 c) O conjunto das partes do complementar de  $B$  em relação a  $A$  é  $P(\mathbb{C}_A^B) = \{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{3, 7\}\}$ .  
 d) O conjunto  $A$  intersecção com o conjunto  $B$  é  $A \cap B = \{1, 5\}$ .  
 e) O número de elementos do conjunto das partes da união dos conjuntos  $A$  e  $B$  é  $n[P(A \cup B)] = 16$ .

8. (Insper-SP) O gráfico abaixo mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros.



O período do mês em que as variações diárias do nível do reservatório, independentemente se para enchê-lo ou esvaziá-lo, foram as maiores

- a) nos dez primeiros dias.  
 x b) entre o dia 10 e o dia 15.  
 c) entre o dia 15 e o dia 20.  
 d) entre o dia 20 e o dia 25.  
 e) nos últimos cinco dias.

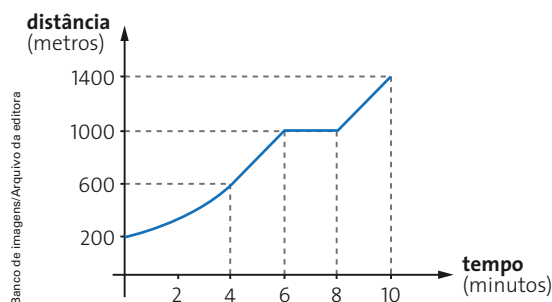
### Região Sul

9. (Ufpel-RS) O valor numérico da expressão

$$\frac{\frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$
, para  $x = 0,45222\dots$  e  $y = 0,31888\dots$ , é

- a)  $-\frac{493}{287}$       c) 1      e)  $-\frac{287}{493}$   
 b)  $\frac{287}{493}$       x d)  $\frac{493}{287}$

10. (UFPR) Num teste de esforço físico, o movimento de um indivíduo caminhando em uma esteira foi registrado por um computador. A partir dos dados coletados, foi gerado o gráfico da distância percorrida, em metros, em função do tempo, em minutos, mostrado abaixo.



De acordo com esse gráfico, considere as seguintes afirmativas:

1. A velocidade média nos primeiros 4 minutos foi de 6 km/h.  
 2. Durante o teste, a esteira permaneceu parada durante 2 minutos.  
 3. Durante o teste, a distância total percorrida foi de 1200 m.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.  
 b) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.  
 c) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.  
 d) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.  
 x e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

UNIDADE

2

# Função afim e função quadrática

## Função afim e função modular

Lucas Lacaz Ruiz/Fotoarena/Folhapress



Em uma situação cotidiana, como ir a uma feira livre, podemos observar a presença da Matemática. Por exemplo, durante a permanência da feira, o preço dos produtos nela vendidos sofre variações de acordo com a quantidade de produtos disponíveis e a movimentação de clientes. Para representar o valor a ser pago nos diferentes períodos, para diferentes quantidades de frutas adquiridas, podemos utilizar uma função afim por partes. Feira em São José dos Campos (SP). Fotografia de 2014.

## 1 Situações iniciais

Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes:

- uma parte fixa, no valor de R\$ 2 500,00;
- e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% (0,06) sobre o total das vendas que ele faz durante o mês.

Nessas condições, podemos dizer que:

$$\text{salário mensal} = 2\,500 + 0,06 \cdot (\text{total das vendas do mês})$$

Observe que o salário desse vendedor é dado **em função** do total de vendas que ele faz durante o mês. Representando o total de vendas por  $x$ , temos:

$$s(x) = 2\,500 + 0,06x$$

ou

$$s(x) = 0,06x + 2\,500$$

ou

$$y = 0,06x + 2\,500 \quad \textcircled{I}$$

Observe outros exemplos desse tipo de função:

- a) Uma pessoa tinha no banco um saldo positivo de R\$ 230,00. Após um saque no caixa eletrônico que fornece apenas cédulas de R\$ 50,00, o novo saldo é dado em função do número  $x$  de cédulas retiradas. A lei da função é dada por:

$$f(x) = 230 - 50x$$

ou

$$f(x) = -50x + 230$$

ou

$$y = -50x + 230 \quad \textcircled{II}$$

- b) Em um reservatório havia 50 L de água quando foi aberta uma torneira que o abastece com 20 L de água por minuto. A quantidade de água no reservatório é dada em função do número  $x$  de minutos em que a torneira fica aberta. A lei dessa função é:

$$f(x) = 20x + 50$$

ou

$$y = 20x + 50 \quad \textcircled{III}$$

O objetivo destas questões é mostrar aos alunos como é constituída uma função afim. Se desejar, peça a eles que digam outros exemplos de função afim.

☛ Agora, reúna-se com um colega, comparem as leis das funções  $\textcircled{I}$ ,  $\textcircled{II}$  e  $\textcircled{III}$  descritas acima e respondam às questões.

- a) Quais são as partes fixas (que não dependem do valor de  $x$ ) de cada uma das três funções?  $\textcircled{I}$  2 500;  $\textcircled{II}$  230;  $\textcircled{III}$  50
- b) Qual é a parte variável de cada uma das três funções?  $\textcircled{I}$   $0,06x$ ;  $\textcircled{II}$   $-50x$ ;  $\textcircled{III}$   $20x$
- c) Chamando de  $b$  a parte fixa e de  $a$  o coeficiente da parte variável, escreva no caderno uma fórmula geral para representar funções desse tipo.  $y = ax + b$



## 2 Definição de função afim Comente com os alunos que uma função afim também pode ser chamada de função polinomial do 1º grau.

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **função afim** quando existem dois números reais  $a$  e  $b$  tal que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Exemplos:

- a)  $f(x) = 2x + 1$  ( $a = 2$  e  $b = 1$ )                      d)  $f(x) = 4x$  ( $a = 4$  e  $b = 0$ )  
b)  $f(x) = -x + 4$  ( $a = -1$  e  $b = 4$ )                      e)  $f(x) = 6$  ( $a = 0$  e  $b = 6$ )  
c)  $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$  ( $a = \frac{1}{3}$  e  $b = 5$ )

Acompanhe a seguinte situação:

Determinado balão infla ou desinfla dependendo da temperatura a que é submetida uma solução gasosa em seu interior. A  $0^\circ\text{C}$ , o volume dessa solução é de  $20\text{ cm}^3$ , mas aumenta linearmente  $2\text{ cm}^3$  cada vez que a temperatura  $t$  ( $0 \leq t \leq 10$ ) sofre um aumento de  $1^\circ\text{C}$ . Assim, o volume do balão pode ser expresso, em centímetros cúbicos, por:

$$V(t) = 2t + 20$$

Se a temperatura sofrer um aumento de  $2,5^\circ\text{C}$ , seu volume será, em centímetros cúbicos:

$$V(2,5) = 2 \cdot (2,5) + 20 = 5 + 20 = 25 \Rightarrow V(2,5) = 25$$

De modo geral, se o volume a  $0^\circ\text{C}$  for  $b$  e se aumentar linearmente  $a\text{ cm}^3$  para cada  $1^\circ\text{C}$  a mais na temperatura, o volume em centímetros cúbicos desse balão poderá ser expresso pela função afim:

$$V(t) = at + b$$

## 3 Valor de uma função afim

O **valor numérico de uma função afim**  $f(x) = ax + b$  para  $x = x_0$  é dado por  $f(x_0) = ax_0 + b$ .

Por exemplo, na função afim  $f(x) = 5x + 1$ , podemos determinar:

- $f(1) = 5 \cdot 1 + 1 = 5 + 1 = 6$ . Logo,  $f(1) = 6$ .
- $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 1 = -15 + 1 = -14$ . Logo,  $f(-3) = -14$ .
- $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$ . Logo,  $f\left(\frac{1}{5}\right) = 2$ .
- $f(x + h) = 5 \cdot (x + h) + 1 = 5x + 5h + 1$ . Logo,  $f(x + h) = 5x + 5h + 1$ .

### Valor inicial

Em uma função afim  $f(x) = ax + b$ , o número  $b = f(0)$  chama-se **valor inicial** da função  $f$ .

Por exemplo, o valor inicial da função:

- a)  $f(x) = -2x + 3$  é 3, pois  $f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$ .  
b)  $f(x) = 5x + 1$  é 1, pois  $f(0) = 5 \cdot 0 + 1 = 1$ .  
c)  $f(x) = 7x$  é 0, pois  $f(0) = 7 \cdot 0 = 0$ .

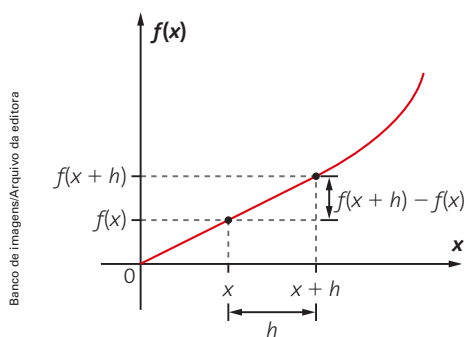


## 4 Taxa de variação média da função afim

### $f(x) = ax + b$

Em qualquer função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , quando acrescentamos  $h$  à variável  $x$ , passando de  $x$  para  $x + h$ , há, em correspondência, um acréscimo  $f(x + h) - f(x)$  no valor da função.

Dados  $x$  e  $x + h$  números reais, com  $h \neq 0$ , o número  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$  chama-se **taxa de variação média da função  $f$  no intervalo  $[x, x + h]$ .**



Dados  $x$  e  $x + h$  números reais, com  $h \neq 0$ , e a função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax + b$ , sua taxa de variação média em relação a  $x$  é dada pelo número:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{a(x + h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Portanto,  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a.$

Assim, a taxa de variação média, em relação a  $x$ , de uma função afim qualquer, definida por  $f(x) = ax + b$ , é  $a$ .

### Observações:

- 1ª) Como a taxa de variação média de uma função afim é constante, podemos dizer apenas **taxa de variação**.
- 2ª) A taxa de variação da função afim pode ser interpretada como a variação em  $f(x)$  causada por cada aumento de 1 unidade em  $x$ . Exemplo: a taxa de variação da função afim  $f(x) = 5x + 2$  é 5, ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em  $x$  faz  $f(x)$  aumentar 5 unidades; e a da função  $g(x) = -3x + 2$  é  $-3$ , ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em  $x$  faz  $g(x)$  diminuir 3 unidades.
- 3ª) A taxa de variação da função afim pode ser obtida conhecendo-se dois dos seus valores  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2.$$

### Propriedade

Este fato pode ser constatado nos exemplos apresentados nas Situações iniciais de funções afins.

Uma função afim é crescente ( $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ) quando sua taxa de variação  $a$  é positiva, e decrescente ( $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ) quando a taxa de variação  $a$  é negativa.

Se  $a = 0$ , a função  $f(x) = ax + b$  será equivalente a  $f(x) = b$  e será chamada de função constante.

# Exercícios



Atividade em dupla



Atividade em equipe



**ATENÇÃO!**  
Não escreva no seu livro!

- Determine o valor numérico da função afim  $f(x) = -3x + 4$  para:
  - $x = 1$   $f(1) = 1$
  - $x = \frac{1}{3}$   $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$
  - $x = 0$   $f(0) = 4$
  - $x = k + 1$   
 $f(k + 1) = -3k + 1$

2. Considere as funções afins:

a)  $f(x) = 3x + \frac{2}{3}$

b)  $g(x) = 2x + \frac{3}{4}$

Qual delas tem valor inicial maior? E qual tem taxa de variação maior?  $g(x)$  tem maior valor inicial e  $f(x)$  tem maior taxa de variação.

3. Escreva no caderno a lei da função afim em cada item sabendo que:

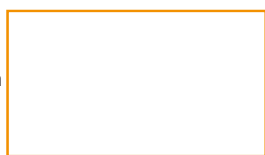
- a taxa de variação é 3 e o valor inicial é 1;  $f(x) = 3x + 1$
- a taxa de variação é  $-2$  e  $f(2) = 5$ ;  $f(x) = -2x + 9$
- para cada unidade aumentada em  $x$ , a função aumenta 2 unidades e o valor inicial é 10;  $f(x) = 2x + 10$
- para cada unidade aumentada em  $x$ , a função diminui 1 unidade e o valor inicial é 3.  $f(x) = -x + 3$

4. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R\$ 8,00 mais um custo variável de R\$ 0,50 por unidade produzida. Sendo  $x$  o número de unidades produzidas:

- escrevam no caderno a lei da função afim que fornece o custo total de  $x$  peças;  $f(x) = 8 + 0,50x$
- indiquem a taxa de variação dessa função e o seu valor inicial; A taxa de variação é 0,50. O valor inicial dessa função é  $f(0) = 8$ .
- calculem o custo de 100 peças. R\$ 58,00

5. Considerem o retângulo a seguir.

- a) largura = 1 cm, perímetro = 12 cm;  
largura = 1,5 cm, perímetro = 13 cm;  
largura = 2 cm, perímetro = 14 cm;  
largura = 3 cm, perímetro = 16 cm;



largura = 4 cm, perímetro = 18 cm.

Nessas condições:

- calculem o perímetro do retângulo quando a largura for 1 cm; 1,5 cm; 2 cm; 3 cm e 4 cm;
- construam uma tabela no caderno associando cada largura ao perímetro do retângulo; *Veja a tabela no Manual do Professor.*
- se  $x$  representa a largura, escrevam no caderno a lei da função que expressa o perímetro desse retângulo;  $f(x) = 10 + 2x$
- informem qual é a taxa de variação dessa função e qual é o seu valor inicial. A taxa de variação é 2 e o seu valor inicial é 10.

6. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções. Veja a seguir.

PLANO A	
INSCRIÇÃO	R\$ 100,00
CADA CONSULTA	R\$ 50,00

PLANO B	
INSCRIÇÃO	R\$ 180,00
CADA CONSULTA	R\$ 40,00

Banco de imagens/Arquivo da editora

O gasto total de cada plano é dado em função do número  $x$  de consultas.

Determinem:

- a lei da função correspondente a cada plano; Plano A:  $f(x) = 50x + 100$ ; plano B:  $g(x) = 40x + 180$ .
  - qual delas tem maior taxa de variação e como isso poderia ser interpretado; A taxa de variação correspondente ao plano A é a maior. O custo aumenta mais rapidamente no plano A.
  - em que condições é possível afirmar que: o plano A é mais econômico; o plano B é mais econômico; os dois planos são equivalentes. O plano A é mais econômico para  $x < 8$ ; o B, para  $x > 8$ ; e eles são equivalentes para  $x = 8$ .
7. O preço do aluguel de um carro popular é dado pelo quadro abaixo.

100 km	TAXA FIXA DE R\$ 50,00
300 km	TAXA FIXA DE R\$ 63,00
500 km	TAXA FIXA DE R\$ 75,00

Banco de imagens/Arquivo da editora

Em todos os casos, paga-se R\$ 0,37 por quilômetro excedente rodado.

- Escrevam no caderno a lei da função afim para cada caso, chamando de  $x$  o número de quilômetros excedentes rodados.  $f_1(x) = 50 + 0,37x$ ;  
 $f_2(x) = 63 + 0,37x$ ;  $f_3(x) = 75 + 0,37x$
  - Qual é a taxa de variação de cada função?  $f_1 \rightarrow a = 0,37$ ;  $f_2 \rightarrow a = 0,37$ ;  $f_3 \rightarrow a = 0,37$
8. Um tanque estava inicialmente com 10 litros de água. A torneira desse tanque foi aberta deixando sair a água na razão de 5 litros por segundo.
- Escrevam no caderno a função afim que representa a quantidade de água após  $t$  segundos.  $f(t) = 10 + 5t$
  - Qual é a taxa de variação da função afim assim obtida? 5
  - Qual é o valor inicial da função afim assim obtida? 10

## 5 Determinação de uma função afim

Uma função afim  $f(x) = ax + b$  fica inteiramente determinada quando conhecemos dois dos seus valores  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  para quaisquer  $x_1$  e  $x_2$  reais, com  $x_1 \neq x_2$ . Ou seja, com esses dados conseguimos determinar os valores de  $a$  e de  $b$ .

Acompanhe duas maneiras de determinar uma função afim, sabendo que  $f(2) = -2$  e  $f(1) = 1$ .

1ª maneira:

Vamos obter a taxa de variação  $a$  e o valor inicial  $b$  para determinar a função afim.

$$\text{Sabemos que: } a = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{-2 - 1}{2 - 1} = \frac{-3}{1} = -3.$$

$$\text{Assim, } f(x) = -3x + b.$$

Para obter  $b$ , escolhamos um dos valores conhecidos; por exemplo,  $f(1) = 1$ . Substituindo  $x$  por 1, temos:

$$1 = -3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 4.$$

$$\text{Então, } f(x) = -3x + 4.$$

2ª maneira:

- se  $f(2) = -2$ , então para  $x = 2$  tem-se  $f(x) = -2$ , ou seja,  $-2 = 2a + b$ ;
- se  $f(1) = 1$ , então para  $x = 1$  tem-se  $f(x) = 1$ , ou seja,  $1 = a + b$ .

Determinamos os valores de  $a$  e  $b$  resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ -2a - 2b = -2 \end{cases}$$
$$\underline{-b = -4} \Rightarrow b = 4$$

Como  $a + b = 1$ , então:  $a + 4 = 1 \Rightarrow a = -3$ .

Logo, a função afim  $f(x) = ax + b$  tal que  $f(2) = -2$  e  $f(1) = 1$  é dada por  $f(x) = -3x + 4$ .

## Exercícios



9. Determine a fórmula matemática da função afim tal que  $f(2) = 5$  e  $f(-1) = -4$  e depois responda: qual é a taxa de variação dessa função?  
 $f(x) = 3x - 1$ ; a taxa de variação é  $a = 3$ .
10. O proprietário de uma fábrica de chinelos verificou que, quando se produziam 600 pares de chinelos por mês, o custo total da empresa era de R\$ 14 000,00 e, quando se produziam 900 pares, o custo mensal era de R\$ 15 800,00. A função que representa a relação entre o custo mensal ( $C$ ) e o número de chinelos produzidos por mês ( $x$ ) é uma função afim.
- Obtenha  $C$  em função de  $x$ .  $C(x) = 6x + 10 400$
  - Se a capacidade máxima de produção da empresa é de 1200 chinelos/mês, qual o valor do custo máximo mensal? R\$ 17 600,00
11. Escreva no caderno a função afim  $f(x) = ax + b$ , sabendo que:
- $f(1) = 5$  e  $f(-3) = -7$ ;  $f(-1) = 7$  e  $f(2) = 1$ .  
 $f(x) = 3x + 2$   $f(x) = -2x + 5$
12. O valor ( $V$ ) de uma mercadoria decresce com o tempo ( $t$ ), em razão do desgaste. Por isso, a desvalorização que o preço dessa mercadoria sofre em razão do tempo de uso é chamada **depreciação**. A função depreciação pode ser uma função afim, como neste caso: o valor de uma máquina é hoje R\$ 1 000,00 e estima-se que daqui a 5 anos será R\$ 250,00.
- Qual será o valor dessa máquina em  $t$  anos?  
 $V = -150t + 1000$
  - Qual será o valor dessa máquina em 6 anos?  
R\$ 100,00
  - Qual será sua depreciação total após esse período de 6 anos? R\$ 900,00

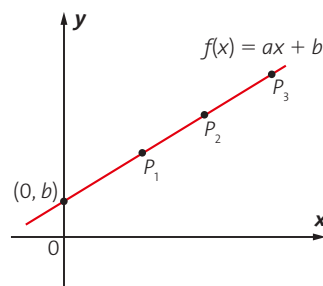
## 6 Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$

É possível demonstrar que o gráfico de uma função afim  $f(x) = ax + b$  é uma reta.

Geometricamente,  $b$  é a ordenada do ponto onde a reta, que é gráfico da função  $f(x) = ax + b$ , intersecta o eixo  $Oy$ , pois para  $x = 0$  temos  $f(0) = a \cdot 0 + b = b$ .

O número  $a$  chama-se taxa de variação da função  $f$ , mas também é conhecido como **declividade** ou **coeficiente angular** dessa reta em relação ao eixo horizontal  $Ox$ .

O número  $b$  chama-se **valor inicial** da função  $f$  ou **coeficiente linear** dessa reta.



### Traçado de gráficos de funções afins

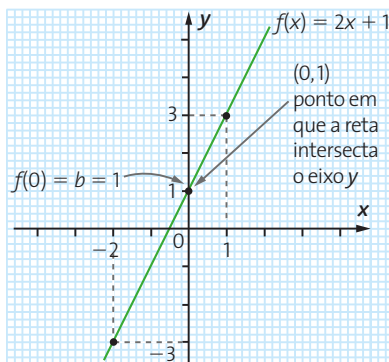
Vamos construir os gráficos de algumas funções afins  $f(x) = ax + b$  no plano cartesiano.

Como o gráfico da função afim  $f(x) = ax + b$  é uma reta e para traçar uma reta basta conhecermos dois pontos distintos pertencentes a ela, então determinamos dois pontos distintos da função e traçamos a reta.

Veja alguns exemplos:

a)  $f(x) = 2x + 1$

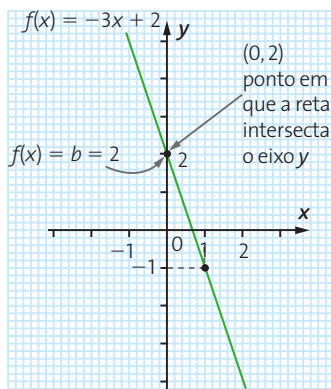
$x$	$f(x)$
-2	-3
1	3



Nesse caso, temos  $a = 2$  ( $a > 0$ ), então a reta é **ascendente** (“sobe” da esquerda para a direita).

b)  $f(x) = -3x + 2$

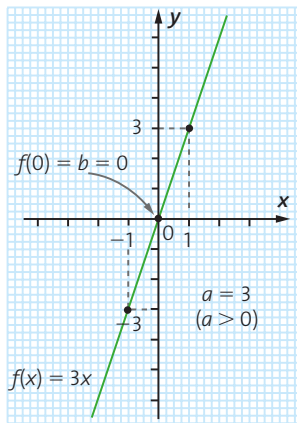
$x$	$f(x)$
0	2
1	-1



Nesse caso, temos  $a = -3$  ( $a < 0$ ), então a reta é **descendente** (“desce” da esquerda para a direita).

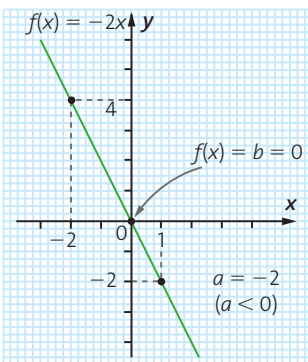
c)  $f(x) = 3x$

x	f(x)
-1	-3
1	3



d)  $f(x) = -2x$

x	f(x)
-2	4
1	-2

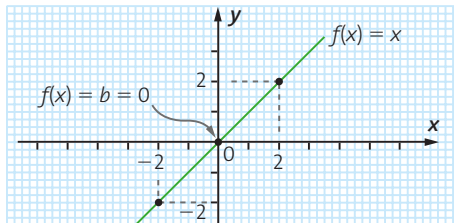


**Fique atento!**

- $f(x) = ax$  é denominada **função linear**.
- O gráfico dessa função é uma reta não vertical que **passa pela origem (0, 0)**.

e)  $f(x) = x$

x	f(x)
-2	-2
2	2



**Fique atento!**

- $f(x) = x$  é conhecida como **função identidade**, caso particular da função linear em que  $a = 1$ .
- O gráfico da função identidade  $f(x) = x$  é a bissetriz dos 1º e 3º quadrantes.

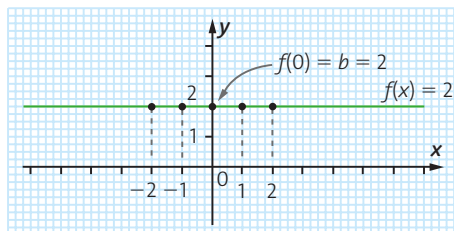
**Para refletir**

O que é a bissetriz de um ângulo?

É a semirreta que parte do vértice do ângulo e o divide em dois ângulos de mesma medida.

f)  $f(x) = 2$

x	f(x)
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2

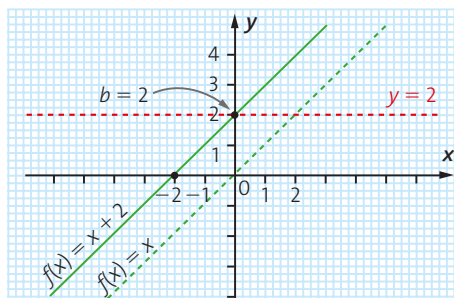


**Fique atento!**

- $f(x) = b$  (ou seja,  $a = 0$ ) recebe o nome de **função constante**.
- O gráfico dessa função é uma reta paralela ao eixo  $x$  que passa pelo ponto  $(0, b)$ . Nesse caso,  $\text{Im}(f) = \{b\}$ .

g)  $f(x) = x + 2$

x	f(x)
-2	0
0	2



**Fique atento!**

- A função  $f(x) = x + b$  recebe o nome de **translação** porque podemos “andar” (“transladar”) com a reta  $y = x + b$  paralelamente à reta  $y = x$  (bissetriz dos quadrantes ímpares).
- A translação transforma  $(x, y)$  em  $(x, y + z)$ , ou seja, leva o eixo  $Ox$  na reta  $y = z$ .
- O gráfico de  $f(x) = x + b$  é o resultado da translação do gráfico de uma função linear  $f(x) = x$ ,  $b$  unidades para cima, se  $b > 0$ , ou  $b$  unidades para baixo, se  $b < 0$ .



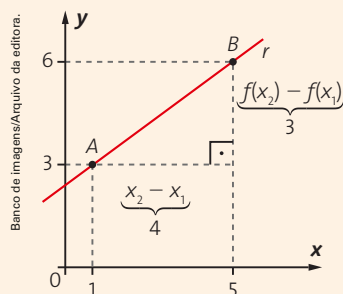
1. Calcule a taxa de variação da função cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos  $A(1, 3)$  e  $B(5, 6)$ . Verifique se essa função afim é crescente ou decrescente.

**Resolução:**

Sabemos que:  $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ,  $x_1 \neq x_2$ .

Em  $A(1, 3)$  temos  $f(1) = 3$ ; em  $B(5, 6)$  temos  $f(5) = 6$ .

$$\text{Assim, } a = \frac{6 - 3}{5 - 1} = \frac{3}{4}.$$



Portanto, a taxa de variação é igual a  $\frac{3}{4}$ . Em outras palavras, a razão entre a variação dos valores de  $f(x)$  e a correspondente variação dos valores de  $x$  no intervalo  $[1, 5]$  é  $\frac{3}{4}$ .

Como  $\frac{3}{4} > 0$ , a função afim é crescente.

## Resolvido passo a passo

2. (Uepa) Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU) a população da Terra atingiu a marca de **7,2 bilhões** de habitantes em **2013**, dados publicados no estudo “Perspectivas de População Mundial”. De acordo com as projeções de crescimento demográfico, seremos **8,1 bilhões** de habitantes em **2025** e **9,6 bilhões** de habitantes em **2050**. Supondo que a partir de **2025** a população mundial crescerá linearmente, a expressão que representará o total de habitantes ( $H$ ), em bilhões de pessoas, em função do número de anos ( $A$ ) é:

- $H = 0,060 \cdot A + 8,1$
- $H = 0,036 \cdot A + 7,2$
- $H = 0,060 \cdot A + 9,6$
- $H = 0,036 \cdot A + 8,1$
- $H = 0,060 \cdot A + 7,2$

## 1. Lendo e compreendendo

- O que é dado no problema?  
A população da Terra em 2013 e as projeções para 2025 e 2050.
- O que se pede?  
Uma expressão que represente o total de habitantes ( $H$ ) em função do número de anos ( $A$ ), a partir de 2025.

## 2. Planejando a solução

Devemos usar as informações do enunciado para montar a expressão solicitada. A população inicial, estimada para 2025, é de 8,1 bilhões de habitantes, e a partir desse ano a população mundial crescerá linearmente, decrescendo uma função afim. Partindo desse dado, o valor inicial da função é a população inicial (8,1), e devemos calcular a taxa de variação dos anos por meio de uma razão entre o aumento populacional e o tempo decorrido.

## 3. Executando o que foi planejado

Toda função afim é definida por:

$$f(A) = a \cdot A + b$$

$\downarrow$  taxa de variação       $\downarrow$  valor inicial

Como sabemos que o valor inicial é igual a 8,1, temos que  $b = 8,1$ . Para encontrarmos o valor da taxa de variação  $a$ , basta obter a razão entre o aumento populacional e os anos decorridos.

$$a = \frac{9,6 - 8,1}{2050 - 2025} = \frac{1,5}{25} = 0,06$$

Substituindo as duas variáveis obtidas, chegamos à expressão esperada:  $H = 0,060 \cdot A + 8,1$ .

## 4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa a.

## 5. Ampliando o problema

- Considere que a partir de 2050 a população mundial comece a decrescer linearmente 0,2 bilhão de habitantes por ano. Dessa forma, qual é a função que representa a população mundial ( $P$ ) em função do número de anos ( $A$ ) e em que ano a população mundial se igualará à população de 2013?  $P(A) = -0,2A + 9,6$ ; no ano de 2062
- Discussão em equipe*  
Troque ideias com seus colegas sobre o crescimento populacional nos últimos anos e quais as consequências desse evento para o planeta no que diz respeito ao suprimento das necessidades desse contingente populacional. Imaginem supostas realidades para o futuro e proponham alternativas viáveis para contornar a situação. **Resposta pessoal.**



# Exercícios

Veja os gráficos dos exercícios 13, 14, 15, 18, 20, 21 e 23 no Manual do Professor.

13. Construa no caderno, em um sistema de eixos ortogonais, o gráfico das seguintes funções:

- a)  $f(x) = 2x + 3$
- b)  $f(x) = x + 3$
- c)  $f(x) = -2x + 5$
- d)  $f(x) = -2 - 2x$

14. No caderno, em um mesmo sistema de eixos ortogonais, construa os gráficos das seguintes funções. Depois, observe a influência da taxa de variação na posição de cada reta. Existe algum padrão a ser notado?

- a)  $f(x) = \frac{1}{2}x$
- b)  $g(x) = x$
- c)  $h(x) = 2x$
- d)  $s(x) = -x$
- e)  $t(x) = -2x$

15. Física

Um corpo se movimenta em velocidade constante de acordo com a fórmula matemática  $s = 2t - 3$ , em que  $s$  indica a posição do corpo (em metros) no instante  $t$  (em segundos). Construa no caderno o gráfico de  $s$  em função de  $t$ .

16. Obtenha, em cada caso, a função  $f(x) = ax + b$ , cuja reta, que é seu gráfico, passa pelos pontos:

- a)  $(-1, 1)$  e  $(2, 0)$
  - b)  $(3, 0)$  e  $(0, 4)$
- $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$        $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$

17. Determine o valor de  $m$  para que o gráfico da função  $f(x) = 2x + m - 3$ :

- a) interseccione o eixo  $y$  no ponto  $(0, 5)$ ;  $m = 8$
- b) interseccione o eixo  $x$  no ponto  $(3, 0)$ .  $m = -3$

18. Sabendo que a função  $f(x) = ax + b$  é tal que  $f(1) = 5$  e  $f(-2) = -4$ , determinem:

- a) os valores de  $a$  e  $b$ ;  $a = 3$  e  $b = 2$
- b) o gráfico de  $f$ ;
- c) o valor de  $x$  para o qual  $f(x) = 0$ .  $x = -\frac{2}{3}$

19. Considerem a função afim dada por

$$f(x) = -3x + 4 \text{ e respondam:}$$

- a) Em que pontos a reta correspondente corta os eixos  $x$  e  $y$ ?  $f(x)$  corta o eixo  $x$  no ponto  $(\frac{4}{3}, 0)$  e o eixo  $y$  no ponto  $(0, 4)$ .
- b) A função é crescente ou decrescente?

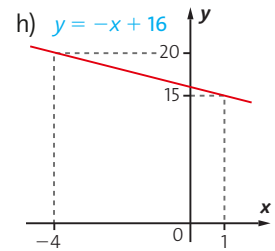
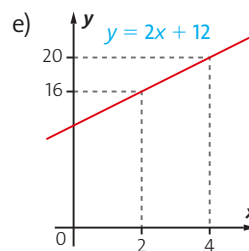
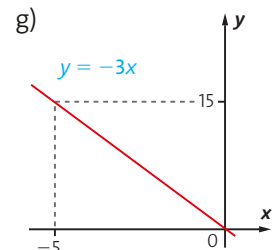
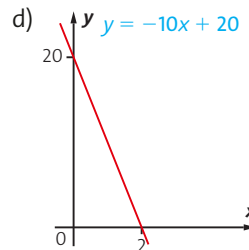
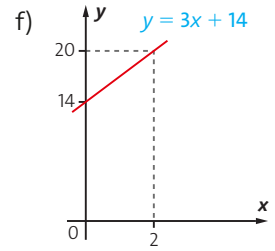
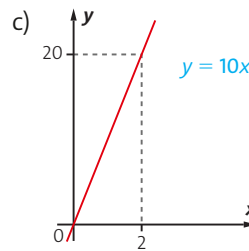
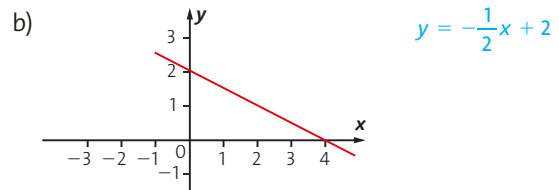
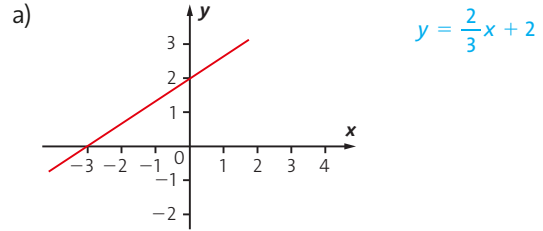
Decrescente.

20. As retas das funções afins  $f$  e  $g$  e da função constante  $h$  determinam um triângulo.

- a) Determinem os vértices desse triângulo, sabendo que as leis dessas funções são  $f(x) = x - 3$ ,  $g(x) = -x + 3$  e  $h(x) = 3$ .  $A(3, 0)$ ;  $B(0, 3)$  e  $C(6, 3)$ .
- b) Construa os três gráficos no caderno em um mesmo sistema de eixos.

21. A função afim  $f(x) = ax + b$  tem taxa de variação igual a  $-2$  e seu gráfico passa pelo ponto  $A(1, -3)$ . No caderno, escrevam a função afim e esbocem seu gráfico.  $f(x) = -2x - 1$

22. Dados os gráficos das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , escreva no caderno a função  $f(x) = ax + b$  correspondente a cada item.



23. Construam no caderno, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o gráfico das seguintes funções:

a)  $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \geq 0 \\ x + 2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 2 \\ -1, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Este *software* será usado como ferramenta para auxiliar na construção de gráficos ao longo deste e dos próximos volumes desta coleção.

## Construção do gráfico da função afim no computador

Acompanhe como construir o gráfico de funções importantes utilizando um *software* livre.

O LibreOffice (antigo BROffice) é um *software* livre que oferece seis aplicativos: editor de texto, planilha eletrônica, editor de apresentação de *slides*, editor de desenho, editor de fórmulas e banco de dados.

### Fique atento!

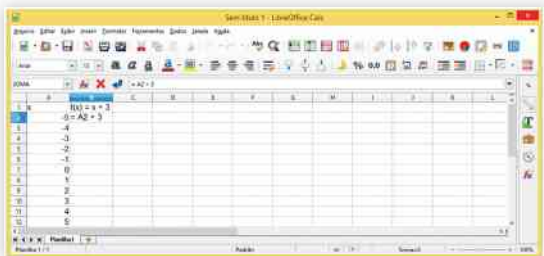
*Software* livre é uma expressão utilizada para designar qualquer programa de computador que pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente.

A instalação desse *software* é simples: acesse o site <<http://pt-br.libreoffice.org/>> (acesso em: 19 mar. 2016), clique em “BAIXE JÁ”, escolha a versão de acordo com o seu computador e siga os passos para finalizar a instalação do programa.

Ao abrir o LibreOffice, clique em “Planilha do Calc” e observe que a planilha eletrônica é formada por linhas (1, 2, 3, 4, ...) e colunas (A, B, C, D, ...).

Agora, siga os passos para construir o gráfico da função  $f(x) = x + 3$ .

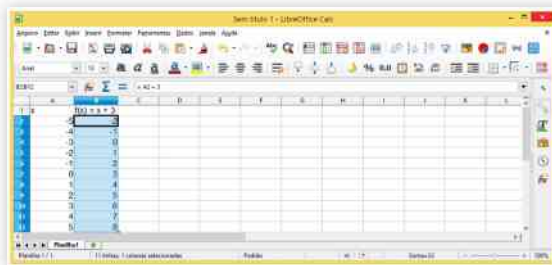
- **1º passo:** Vamos montar uma tabela com valores de  $x$  e  $f(x)$ . A coluna **A** será formada pelos valores da variável independente  $x$ , e a coluna **B**, pelos valores da variável dependente  $f(x)$ . Preencha as células A1 e B1 com  $x$  e  $f(x) = x + 3$ , respectivamente. Nas células A2, A3, A4, ..., A12 preencha com os valores  $-5, -4, -3, \dots, 4, 5$ . Na célula B2 digite “= A2 + 3”. Assim, o valor assumido na célula B2 será igual ao valor apresentado na célula A2 acrescido de 3 unidades. Em seguida tecle “Enter”.



Captura de tela do 1º passo.

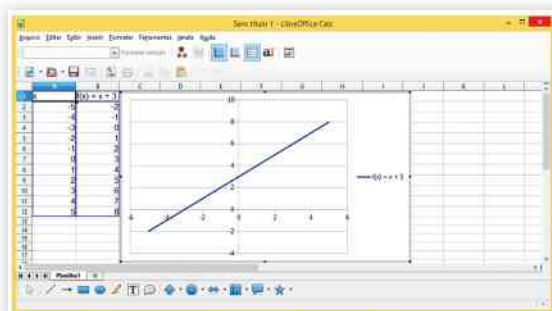
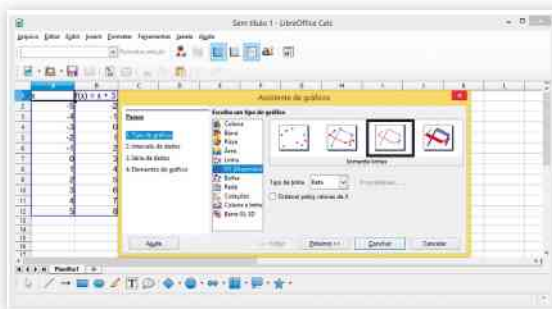
- **2º passo:** Clique com o botão esquerdo do *mouse* no canto inferior direito da célula B2 utilizando o recurso “Arrastar e soltar” e deslize até a célula B12.

Ao soltar o *mouse*, aparecerão na coluna **B** os valores que obedecem à lei de formação da função  $f$  com os valores indicados na coluna **A**. Observe na figura a seguir.



Captura de tela do 2º passo.

- **3º passo:** Selecione a tabela construída, clique na opção “Gráfico” (ícone na parte superior), selecione a opção “XY (Dispersão)” e “Somente linhas”, como apresentado nas imagens abaixo. Depois, clique em concluir, e o gráfico será construído automaticamente.



Capturas de telas do 3º passo.

Observe que o domínio da função são os valores colocados na coluna **A**, ou seja,  $[-5, 5]$  e a imagem é a variação do eixo das ordenadas  $[-2, 8]$ .

Repita a operação utilizando o mesmo domínio e as funções  $f(x) = x - 3$  e  $f(x) = 2x + 1$ .

Veja os gráficos no Manual do Professor.

## 7 Conexão entre função afim e Geometria analítica

No estudo da Geometria analítica, que provavelmente ocorrerá no 3º ano do Ensino Médio, os elementos geométricos são descritos por equações. Entre eles, a reta, que particularmente nos interessa, pois, como já estudamos, o gráfico de uma função afim  $f(x) = ax + b$  é uma reta.

Reciprocamente, toda reta não vertical  $r$  é o gráfico de uma função afim. De fato, se  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  são dois pontos distintos da reta  $r$ , não vertical, temos que  $x_1 \neq x_2$ . Assim, existe uma função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . O gráfico de  $f$  é uma reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . Logo, essa reta coincide com  $r$ .

### Equação da reta

Seja uma função afim  $f(x) = ax + b$ ; dizemos que  $y = ax + b$  é a equação da reta  $r$ , dada pela função. Assim,  $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , que na função afim é a taxa de variação, agora, na reta, recebe o nome de **coeficiente angular** da reta (ou declividade da reta).

A relação entre o coeficiente angular com o ângulo de inclinação  $\alpha$  que o eixo  $Ox$  forma com a reta  $r$  é dada por  $a = \tan \alpha$ .

Se  $P(x, y)$  é um ponto genérico de uma reta  $r$ , então o coeficiente angular  $a$  e um ponto  $P_0(x_0, y_0)$  dela determinam essa reta:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = a(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + a(x - x_0)$$

Essa é a equação da reta que passa pelo ponto  $P(x_0, y_0)$  e tem coeficiente angular  $a$ .

$$a = \frac{d(C, P)}{d(P_0, C)} = \tan \alpha$$

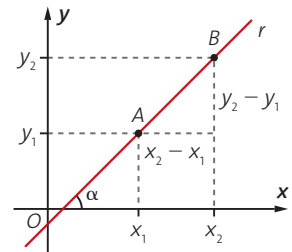
Por exemplo, a equação de uma reta que passa pelo ponto  $(5, -2)$  e tem coeficiente angular  $a = -3$  é dada por:

$$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = -2 + (-3)(x - 5) \Rightarrow y = -2 - 3x + 15 \Rightarrow y = -3x + 13$$

#### Para refletir

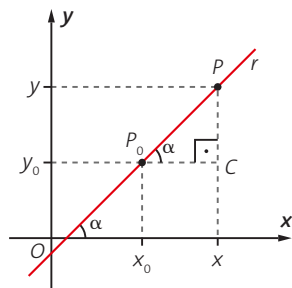
A reta vertical não é gráfico de uma função. Por quê?

Porque existem infinitos valores de  $y$  para um único valor de  $x$ , portanto, não é função.



#### Fique atento!

Os eixos  $Ox$  e  $Oy$  estão graduados na mesma unidade.

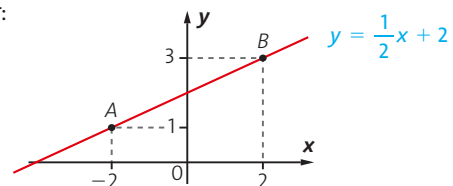


## Exercícios

24. Qual é a equação da reta que:

- passa pelo ponto  $A(4, 6)$  e tem coeficiente angular  $a = 3$ ?  $y = 3x - 6$
- passa pelo ponto  $B(-4, 0)$  e tem coeficiente angular  $a = -2$ ?  $y = -2x - 8$
- passa pelos pontos  $D(0, 4)$  e  $E(-2, -6)$ ?  $y = 5x + 4$

25. Escreva no caderno a equação da reta representada por:



## 8 Zero da função afim

O valor de  $x$  para o qual a função  $f(x) = ax + b$  se anula, ou seja, para o qual  $f(x) = 0$ , denomina-se **zero da função afim**. Para determinar o zero de uma função afim basta resolver a equação  $ax + b = 0$ .

### Fique atento!

Zero de uma função  $f$  significa raiz da equação  $f(x) = 0$ .

Exemplos:

- a) O zero da função  $f(x) = 2x + 5$  é  $-\frac{5}{2}$ , pois  $2x + 5 = 0$ , ou seja,  $2x = -5$  ou, ainda,  $x = -\frac{5}{2}$ .
- b) O zero da função  $f(x) = 2x - 4$  é  $x = 2$ .
- c) O zero da função  $y = x - 8$  é 8.

### Para refletir

Confira o valor do zero das funções dos itens b e c.

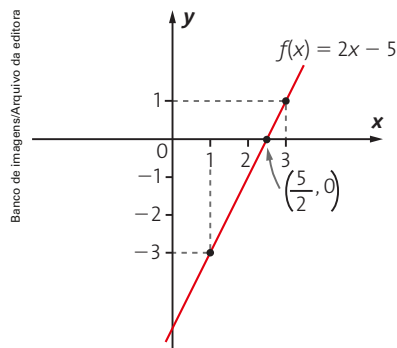
## Interpretação geométrica

Geometricamente, o zero da função afim  $f(x) = ax + b$  é a **abscissa** do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo  $x$ .

Por exemplo, dada a função afim definida por  $f(x) = 2x - 5$ , temos:

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (zero da função).}$$

$x$	$y$
1	-3
3	1



### Para refletir

O que acontece com o valor de  $f(x)$  quando  $x > \frac{5}{2}$ ?  
E quando  $x < \frac{5}{2}$ ?

$f(x) > 0$ ;  $f(x) < 0$

Logo, a reta, gráfico dessa função, intercepta o eixo  $x$  no ponto  $(\frac{5}{2}, 0)$ .

## 9 Estudo do sinal da função afim e de inequações do 1º grau

Analise a seguinte situação:

Um comerciante gastou R\$ 300,00 na compra de um lote de maçãs. Como cada maçã será vendida a R\$ 2,00, ele deseja saber quantas maçãs devem ser vendidas para que haja lucro no fim da venda.

Observe que o resultado final (**receita** menos despesa) é dado em função do número  $x$  de maçãs vendidas, e a lei da função é  $f(x) = 2x - 300$ . Para resolver a questão do comerciante, devemos determinar os valores reais de  $x$  tais que  $f(x) > 0$  ou, de modo equivalente, resolver a inequação  $2x - 300 > 0$ .

**Receita:** quantia recebida ou obtida com a venda de um ou mais produtos. Se a receita é maior que o custo, há lucro. Se é menor, há prejuízo.



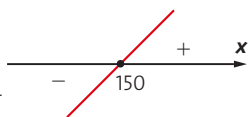
**Estudando o sinal:**  $\underbrace{2x - 300}_{f(x)} > 0$

$a = 2; a > 0 \rightarrow$  a função é crescente

$2x - 300 = 0 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = 150$  (zero da função)

**Dispositivo prático:**

Banco de imagens/  
Arquivo da editora



$x > 150 \Rightarrow f(x) > 0$  (haverá lucro)

$x = 150 \Rightarrow f(x) = 0$  (não haverá lucro nem prejuízo)

$x < 150 \Rightarrow f(x) < 0$  (haverá prejuízo)

Se  $S$  representa o conjunto solução, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 150\}$$

De modo equivalente, resolvendo a inequação, temos:

$$2x - 300 > 0 \text{ em } \mathbb{N}$$

$$2x > 300 \Rightarrow x > 150$$

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 150\}$$

Assim, o comerciante deve vender mais de 150 maçãs para que tenha lucro no fim da venda.

**Para refletir**

Qual é o significado dos sinais + e - nesse dispositivo?

O sinal + significa  $f(x) > 0$ , e o sinal - significa  $f(x) < 0$ .

**Fique atento!**

Como se trata de número de maçãs, o domínio é  $\mathbb{N}$ .

## Exercício resolvido

3. Determine os valores reais de  $x$  tais que  $f(x) = -2x + 5$  seja negativa, ou, de modo equivalente, resolva a inequação  $-2x + 5 < 0$ .

**Resolução:**

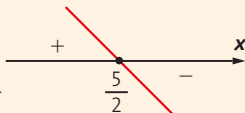
Estudando o sinal:  $\underbrace{-2x + 5}_{f(x)} < 0$

$a = -2; a < 0 \rightarrow$  a função é decrescente

$-2x + 5 = 0 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$  (zero da função)

**Dispositivo prático:**

Banco de imagens/  
Arquivo da editora



$$x > \frac{5}{2} \Rightarrow f(x) < 0$$

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x < \frac{5}{2} \Rightarrow f(x) > 0$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$$

De modo equivalente, resolvendo a inequação:  
 $-2x + 5 < 0$

$$-2x < -5 \cdot (-1) \Rightarrow 2x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$$

## Exercícios



26. Sem construir gráficos, descubra os pontos em que as retas, gráficos das funções abaixo, cortam os eixos  $x$  e  $y$ .

a)  $f(x) = x - 5$   
eixo  $x$ : (5, 0); eixo  $y$ : (0, -5)

b)  $f(x) = -x + 4$   
eixo  $x$ : (4, 0); eixo  $y$ : (0, 4)

c)  $f(x) = -2x$   
eixo  $x$ : (0, 0); eixo  $y$ : (0, 0)

d)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$   
eixo  $x$ : (2, 0); eixo  $y$ : (0, -1)

27. Estude a variação do sinal das seguintes funções afins:

a)  $f(x) = x + 4$

c)  $f(x) = 3x - 5$

b)  $f(x) = -2x + 1$

d)  $f(x) = -1 + \frac{1}{2}x$

Veja a resolução no Manual do Professor.

28. Para que valores reais de  $x$  a função:

a)  $f(x) = 1 - x$  é positiva?  $f(x) > 0$  para  $x < 1$

b)  $f(x) = 3x + 12$  é negativa?  $f(x) < 0$  para  $x < -4$

29. Determine os valores reais de  $x$  para que ambas as funções,  $f(x) = -2x + 8$  e  $g(x) = 3x - 6$ , sejam negativas. Não existe valor real de  $x$  que satisfaça as duas condições simultaneamente.

30. Qual é o zero da função afim cujo gráfico, que é uma reta, passa pelos pontos (2, 5) e (-1, 6)?  $x = 17$

## Sistema de inequações do 1º grau

Utilizamos o estudo do sinal para resolver sistemas de inequações do 1º grau em  $\mathbb{R}$ . Por exemplo:

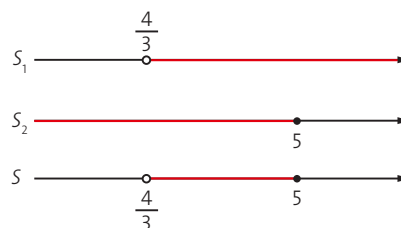
$$\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ -x + 5 \geq 0 \end{cases} \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

Devemos resolver simultaneamente as inequações  $3x - 4 > 0$  e  $-x + 5 \geq 0$ . Assim, a solução do sistema será dada pela intersecção das soluções dessas duas inequações:

$$3x - 4 > 0 \Rightarrow S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4}{3} \right\}$$

$$-x + 5 \geq 0 \Rightarrow S_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5 \}$$

$$S_1 \cap S_2 = S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < x \leq 5 \right\} \text{ ou } \left( \frac{4}{3}, 5 \right]$$



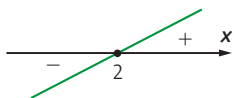
## Inequações-produto e inequações-quociente

Acompanhe a resolução de uma inequação-produto e de uma inequação-quociente:

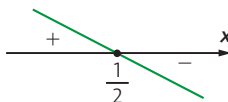
a) Inequação-produto:  $(x - 2)(1 - 2x) \leq 0$ , para  $x \in \mathbb{R}$

Primeiro, estudamos os sinais das funções separadamente. Então, se  $(x - 2)$  for positivo,  $(1 - 2x)$  deverá ser negativo. Se  $(x - 2)$  for negativo,  $(1 - 2x)$  deverá ser positivo. Podemos verificar isso estudando os sinais de cada função separadamente:

•  $f(x) = x - 2$



•  $g(x) = 1 - 2x$



$$f(x) \geq 0 \text{ para } x \geq 2 \quad \quad \quad g(x) \leq 0 \text{ para } x \geq \frac{1}{2}$$

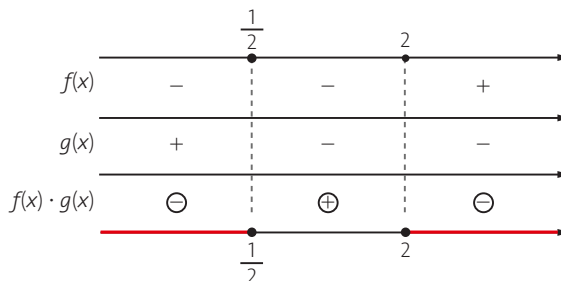
precisam ocorrer simultaneamente

$$f(x) \leq 0 \text{ para } x \leq 2 \quad \quad \quad g(x) \geq 0 \text{ para } x \leq \frac{1}{2}$$

precisam ocorrer simultaneamente

Assim, para ocorrer  $x - 2 \geq 0$  e  $1 - 2x \leq 0$ , devemos ter  $x \geq 2$ . Para ocorrer  $x - 2 \leq 0$  e  $1 - 2x \geq 0$ , devemos ter  $x \leq \frac{1}{2}$ . Portanto,  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}$ .

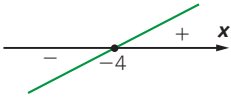
Podemos determinar o conjunto solução usando um quadro de sinais. Veja:



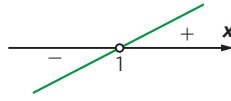
Logo,  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}$ .

b) Inequação-quociente:  $\frac{x+4}{x-1} \geq 0$ , com  $x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq 1$

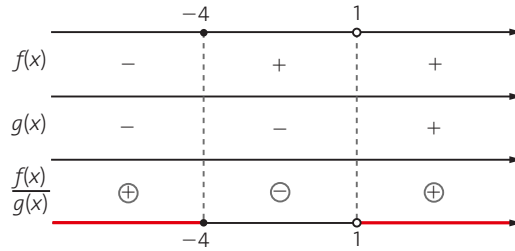
•  $f(x) = x + 4$   
 zero da função:  $x = -4$   
 sinal de  $a$ :  $a = 1 > 0$



•  $g(x) = x - 1$   
 zero da função:  $x = 1$   
 sinal de  $a$ :  $a = 1 > 0$



No quadro de sinais temos:



Logo,  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x > 1\}$ .

**Fique atento!**

Nas inequações-quociente precisamos ficar atentos às condições de existência. Neste caso temos  $x \neq 1$  e, portanto, devemos colocar "bolinha vazia" na representação.

## Exercício resolvido

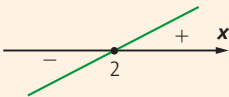
4. Explícite o domínio da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$ .

**Resolução:**

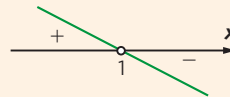
Sabemos que  $\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$  só é possível em  $\mathbb{R}$  se  $\frac{x-2}{1-x} \geq 0$  e  $x \neq 1$ . Portanto, vamos resolver a inequação

$$\frac{x-2}{1-x} \geq 0:$$

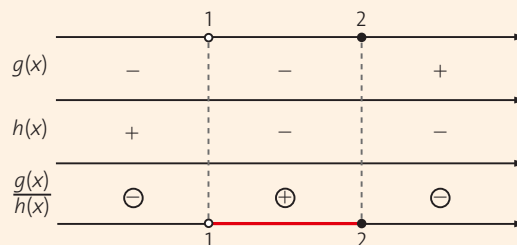
•  $g(x) = x - 2$   
 zero da função:  $x = 2$   
 $a = 1 > 0$



•  $h(x) = 1 - x$   
 zero da função:  $x = 1$   
 $a = -1 < 0$



No quadro de sinais temos:



Logo,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ .

## Exercícios



**31.** Resolva no caderno, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes inequações usando o processo que julgar mais conveniente:

a)  $3 - 4x > x - 7$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

b)  $\frac{x}{4} - \frac{3(x-1)}{10} \leq 1$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$

**32.** Resolva no caderno os sistemas de inequações em  $\mathbb{R}$ .

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\}$   $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 3\right\}$

a)  $1 \leq x + 1 < 5$

b)  $\begin{cases} 5 - 2x \leq 4 \\ x - 5 < 1 - x \end{cases}$

**33.** Um comerciante teve uma despesa de R\$ 230,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade por R\$ 5,00, o lucro final será dado em função das  $x$  unidades vendidas. Responda:

a) Qual a lei dessa função  $f$ ?  $f(x) = 5,00x - 230,00$

b) Para que valores de  $x$  temos  $f(x) < 0$ ? Como  $x$  pode ser interpretado nesse caso?  $x < 46$ ;

**O comerciante terá prejuízo se vender menos de 46 unidades.**

c) Para que valor de  $x$  haverá um lucro de R\$ 315,00?  $x = 109$

d) Para que valores de  $x$  o lucro será maior que R\$ 280,00?  $x > 102$

e) Para que valores de  $x$  o lucro estará entre R\$ 100,00 e R\$ 180,00?  $66 < x < 82$

**34.** Resolva no caderno, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes inequações-produto:

a)  $(2x + 1)(x + 2) \leq 0$   $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

b)  $(x - 1)(2 - x)(-x + 4) < 0$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

**35.** Resolva no caderno, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes inequações-quociente:

a)  $\frac{2x - 3}{1 - x} \geq 0$  b)  $\frac{(x + 1)(x + 4)}{(x - 2)} > 0$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq \frac{3}{2}\right\}$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1 \text{ ou } x > 2\}$

**36.** Um rapaz, ao pesquisar na internet o preço de alguns livros, encontrou os produtos que queria em duas lojas virtuais distintas. O valor dos livros era o mesmo, porém em cada loja o cálculo do valor do frete era diferente. Na loja **A**, pagava-se um fixo de R\$ 5,00 mais R\$ 3,00 por livro comprado. Na loja **B** pagava-se um fixo de R\$ 10,00 mais R\$ 2,00 por livro.

a) Para comprar 4 livros, qual preço do frete era mais barato: na loja **A** ou na loja **B**? **Na loja A.**

b) Qual é a função que relaciona o preço do frete, em reais, com o número de livros adquiridos em cada uma das lojas? **Loja A:  $f(x) = 3x + 5$ ;**  
**loja B:  $f(x) = 2x + 10$ .**

c) Faça no caderno o gráfico das duas funções em um mesmo plano cartesiano e interprete o significado do ponto de intersecção dessas duas retas conforme o contexto do enunciado.

Veja a resolução deste item no Manual do Professor.

**37.** Explícite o domínio  $D$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = \sqrt{(x-1)(3x+5)}$   $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{3} \text{ ou } x \geq 1\right\}$

b)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x}} - 1$   $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geq 3\}$

c)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-5}}$   $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x > 5\}$

**38.** (Unicamp-SP) Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
<b>A</b>	R\$ 35,00	R\$ 0,50
<b>B</b>	R\$ 20,00	R\$ 0,80
<b>C</b>	0	R\$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês? **O plano C.**

b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano **A** é mais vantajoso do que os outros dois? **A partir de 50 minutos.**

**39.** (UFC-CE) Uma cidade é servida por duas empresas de telefonia. A empresa **X** cobra, por mês, uma assinatura de R\$ 35,00 mais R\$ 0,50 por minuto utilizado. A empresa **Y** cobra, por mês, uma assinatura de R\$ 26,00 mais R\$ 0,65 por minuto utilizado. A partir de quantos minutos de utilização o plano da empresa **X** passa a ser mais vantajoso para os clientes do que o plano da empresa **Y**?

**A partir de 60 minutos.**

**40.** (EEM-SP) Uma empresa produz trufas de chocolate cujo custo de fabricação pode ser dividido em duas partes: uma, independente da quantidade vendida, de R\$ 1 500,00 mensais; outra, depende da quantidade fabricada, de R\$ 0,50 por unidade. Escreva no caderno a(s) expressão(ões) que permita(m) determinar o número de trufas que devem ser vendidas num mês para que a empresa não tenha prejuízo, sabendo-se que o preço de venda de cada unidade é de R\$ 1,50.  $x - 1500 \geq 0$

**41.** (Vunesp-SP) Duas pequenas fábricas de calçados, **A** e **B**, têm fabricado, respectivamente, 3 000 e 1 100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica **A** aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica **B** aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica **B** superará a produção de **A** a partir de:

a) março. c) julho. e) novembro.

b) maio. x d) setembro.

## 10 Outras conexões

### Função afim e progressão aritmética (PA)

Há um relacionamento muito importante entre a função afim e uma **progressão aritmética** (ver página 219).

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior mais uma constante, chamada **razão** da progressão aritmética.

Por exemplo, a sequência:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$$

é uma progressão aritmética de razão 3.

Consideremos agora a função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x + 1$ .

Vamos constatar que:

$$f(1), f(4), f(7), f(10), f(13), f(16), f(19), \dots$$

é também uma progressão aritmética.

Assim:

$$f(x) = 2x + 1, f(1) = 3, f(4) = 9, f(7) = 15, f(10) = 21, f(13) = 27, f(16) = 33, f(19) = 39, \text{ etc.}$$

Observe que:

$$3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, \dots$$

é uma progressão aritmética e sua razão é 6 ( $2 \cdot 3$ ).

**Observação:** Esse resultado pode ser provado de modo geral:

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função afim definida por  $f(x) = ax + b$  e  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$  é uma progressão aritmética de razão  $r$ , então  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_i), \dots$  também é uma progressão aritmética e sua razão é  $a \cdot r$ .

Reciprocamente, se uma função crescente ou decrescente,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , transforma qualquer progressão aritmética  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$ , em outra progressão aritmética  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_i), \dots$ , então  $f$  é uma função afim.

### Função afim e a Física

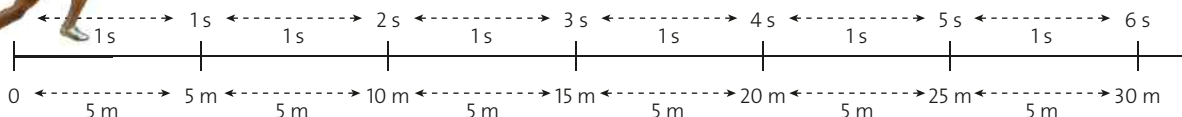
Consideremos um ponto que se movimenta sobre um eixo. Em cada instante  $t$ , sua posição é dada por  $S(t)$ . Um movimento é chamado **movimento uniforme** quando o ponto se desloca sempre no mesmo sentido e, além disso, em tempos iguais percorre espaços iguais. Logo,  $S$  é uma função afim dada por  $S(t) = vt + b$ , em que a constante  $v = S(t + 1) - S(t)$ , espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se **velocidade** do ponto móvel e  $b = S(0)$  é a posição inicial.

A **posição** do ponto no eixo é dada por  $S(t) = vt + b$ , mas o espaço ( $S$ ) que ele percorreu é dado por  $S = vt$ . Por exemplo, observe a representação de um atleta correndo:

#### Fique atento!

A função afim constitui o modelo matemático para o movimento uniforme.

Paulo Manz/Arquivo da editora



Esta imagem não está representada em proporção.



Ele desenvolve um movimento uniforme. Durante todo o trajeto percorre 5 metros a cada 1 segundo, ou seja, sua velocidade é de 5 m/s. Então, a função que descreve esse movimento é:  $S(t) = 5t$ , sendo  $b = 0$ .

Como vimos na página 80, a função afim é uma função linear que sofreu uma translação vertical. A função afim sempre foi usada (mesmo que de forma não declarada) para descrever a posição de um objeto em movimento uniforme. Vejamos um exemplo.

Imagine que Cláudio more em uma pequena cidade localizada no quilômetro 102 de uma estrada. Ele vai com seu caminhão entregar uma carga em um ponto localizado no quilômetro 217 dessa estrada. Se trafegar com velocidade constante de 50 km/h, quanto tempo levará para completar a viagem?

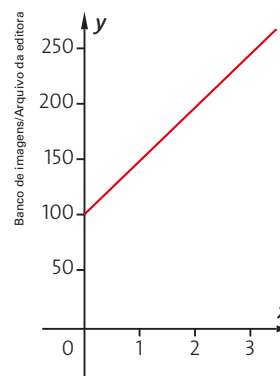
Podemos determinar a posição de Cláudio na estrada em função do tempo decorrido depois que iniciou a viagem. Se  $x$  é o tempo em horas a partir do início da viagem e  $y$  é a sua posição na estrada, então  $y = 102 + 50x$ . Observe o gráfico dessa função.

Responder à pergunta é fácil. Se  $y = 217$ , então  $x = \frac{217 - 102}{50} = 2,3$  horas, ou seja, 2 horas e 18 minutos.

Entretanto esse mesmo problema poderia ter ocorrido há mais de 2000 anos, e a solução seria a mesma de hoje.

No ano de 190 a.C. Claudius mora na pequena cidade de Terracina, que fica à margem da Via Appia a 64 milhas de Roma. Ele vai com sua carroça entregar uma carga na cidade de Pastorano, também à margem da Via Appia, que está a 130 milhas de Roma. Se ele trafega com velocidade constante de 3,4 milhas por hora, em quanto tempo de viagem (desconsiderando as paradas) ele atingirá seu destino? **Aproximadamente 19,4 horas.**

Deixamos para o leitor a resposta à mesma pergunta. Para que se possa avaliar o tempo de viagem de Terracina a Pastorano pela Via Appia, informamos que a milha usada na época era equivalente a 1,48 quilômetro.



### Trajeto entre as cidades de Terracina e Pastorano pela Via Appia



Fonte: GOOGLE MAPS. Disponível em: <<https://www.google.com.br/maps/dir/Terracina+LT,+Italy/Pastorano+CE,+Italy/@41.1574849,13.4636249,74112m/data=!3m1!1e3!4m1!1e4m1!1e5!1m1!1s0x132522f268f0d987:0x71b0c09381c3fd5512m2!1d13.233265712d41.296372811m5!1m1!1s0x133af9f60cdc18bf:0x37e8178258ad6280!2m2!1d14.200180212d41.182586513e2>>. Acesso em: 13 abr. 2016.

## Exercícios resolvidos

5. Um motociclista percorre uma estrada movimentando-se de acordo com a função horária  $S(t) = 100t - 50$ , em que  $S(t)$  representa sua posição (em km) e  $t$  representa o tempo (em h). Depois de quanto tempo o motociclista passa pelo marco quilômetro zero (km 0)?



Whisson/Jordan/Corbis/Latinstock

Motociclista.

### Resolução:

Para que o motociclista passe pelo marco km 0, temos que  $S(t) = 0$  km. Logo:

$$0 = 100t - 50 \Rightarrow 100t = 50 \Rightarrow t = \frac{50}{100} \Rightarrow t = 0,5 \text{ h}$$

O motociclista passa pelo quilômetro zero depois de 0,5 h.

### Interpretação:

A função  $S(t) = 100t - 50$  é uma função afim do tipo  $S(t) = vt + S(0)$ .

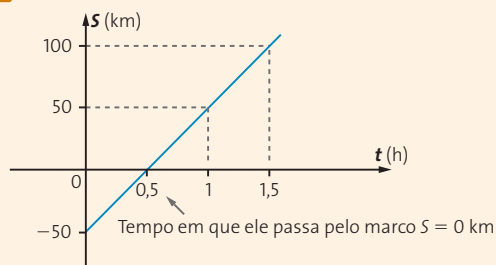
Quando  $t = 0$ , temos  $S(0) = -50$  km, que representa a posição inicial que o motociclista ocupava no início do movimento (estava 50 km antes do marco km 0). Ele se movimentava com velocidade constante de 100 km/h para a frente (velocidade positiva), isto é,  $v = 100$  km/h.

Para que ele chegue ao marco km 0 partindo do marco -50 km, ele precisa percorrer uma distância de 50 km. Como se desloca com velocidade constante de 100 km/h, temos:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ km} \text{ ————— } 1 \text{ h} \\ 50 \text{ km} \text{ ————— } t \end{array} \Rightarrow t = 0,5 \text{ h}$$

Graficamente temos:

### Deslocamento do motociclista



Fonte: Dados fictícios.

6. A tabela abaixo fornece a posição  $S(t)$ , em km, ocupada por um veículo, em relação ao km 0 da estrada em que se movimenta, para vários instantes  $t$  (em h):

### Deslocamento de um veículo

$t$ (h)	0,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
$S(t)$ (km)	50	100	150	200	250	300

Fonte: Dados fictícios.

- a) Qual é a função horária que descreve a posição desse veículo em função do tempo?  
 b) Em que instante o veículo ocupará a posição  $S = 500$  km?

### Resolução:

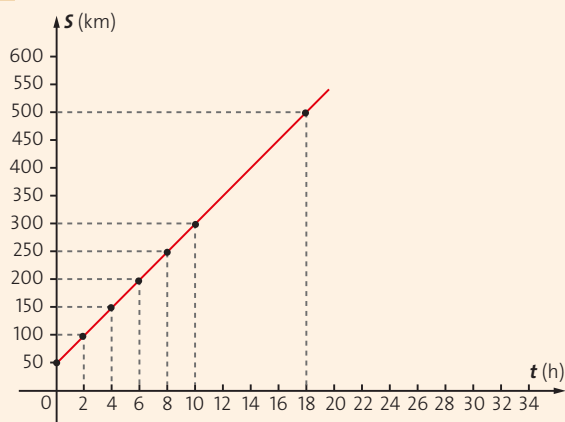
a) Analisando a tabela, percebemos que a velocidade do veículo é constante, pois ele percorre 50 km a cada 2 h, aumentando o espaço (velocidade positiva). Como  $v = \frac{S}{t}$ , temos  $v = \frac{50 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 25 \text{ km/h}$ . No início ( $t = 0$ ), o veículo ocupa a posição inicial  $S(0) = 50$  km. Como a velocidade é constante (movimento uniforme), podemos descrever o movimento por uma função afim  $S(t) = vt + S(0)$ . Assim,  $S(t) = 25t + 50$ . Basta substituir  $t$  por alguns valores da tabela para verificar se a posição  $S$  corresponde ao valor calculado.

b) Para encontrar o instante em que o veículo ocupa a posição  $S = 500$  km, fazemos:

$$\begin{aligned} S(t) &= 25t + 50 \Rightarrow 500 = 25t + 50 \Rightarrow 25t = 450 \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{450}{25} = 18 \text{ h. Logo, } S = 500 \text{ km após } 18 \text{ h} \end{aligned}$$

do início do movimento. Graficamente temos:

### Deslocamento de um veículo



Fonte: Dados fictícios.

O gráfico da função afim  $S(t) = vt + S(0)$  é uma reta que intersecta o eixo  $S$  em  $(0, S(0)) = (0, 50)$ :  $S(t) = 25t + 50$ . Prolongando a reta até a posição  $S = 500$  km, obtemos  $t = 18$  h.



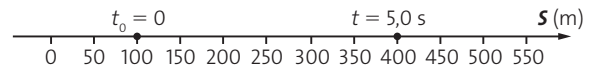
- 42.** Dada a progressão aritmética  $-2, 3, 8, 13, 18, 23, \dots$  e a função afim  $f(x) = 3x - 1$ :
- determine a razão dessa progressão aritmética;  $r = 5$
  - verifique que  $f(-2), f(3), f(8), f(13), f(18), f(23), \dots$  é também uma progressão aritmética (PA);  $-7, 8, 23, 38, 53, 68$  é uma PA.
  - determine a razão dessa nova progressão aritmética.  $r = 15$

- 43.** Se tivermos uma PA  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  de razão 3 que é levada a outra PA  $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$  pela função afim  $f(x) = 4x + 1$ , qual é a razão dessa segunda PA?  
 $r = 12$  ( $4 \cdot 3 = 12$ )

- 44.** Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função afim que transforma a PA  $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots$  em outra PA  $9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, \dots$ , qual é a lei dessa função afim?  $f(x) = 4x + 1$

## 45. Física

Um ponto material percorre um trajeto retilíneo com velocidade constante. A posição desse ponto material no instante  $t_0 = 0$  s é  $S_0 = 100$  m e, no instante  $t = 5,0$  s, é  $S = 400$  m.



Nessas condições, determine:

- a velocidade desse ponto material;  $v = 60$  m/s
- a função da posição em relação ao tempo;  $S = 60t + 100$
- a posição no instante  $t = 10$  s;  $S = 700$  m
- o instante em que a posição  $S$  é  $1000$  m.  $t = 15$  s

## Função linear e proporcionalidade

Como observado na página 80, uma função linear é uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax$  para todo  $x$  real. Seu gráfico é uma reta não vertical que passa pela origem  $(0, 0)$ . Os problemas que envolvem proporcionalidade, em geral, podem ser resolvidos por meio de uma função linear, e por isso afirmamos que a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Vamos supor que uma grandeza  $y$  seja função da grandeza  $x$ , ou seja,  $y = f(x)$ . Dizemos que  $y$  é **diretamente proporcional** a  $x$  se as seguintes condições forem satisfeitas:

- $y$  é uma função crescente de  $x$ ;
- se multiplicarmos  $x$  por um número natural  $n$ , o valor correspondente de  $y$  também ficará multiplicado por  $n$ , ou seja:

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x), \text{ para todo valor de } x \text{ e todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Do mesmo modo, dizemos que  $y$  é **inversamente proporcional** a  $x$ :

- quando  $y$  é uma função decrescente de  $x$ ;
- se multiplicarmos  $x$  por um número natural  $n$ , o valor correspondente de  $y$  ficará dividido por  $n$ , ou seja:

$$f(n \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(x), \text{ para todo valor de } x \text{ e todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemplos:

- Se 1 quilograma de feijão custa R\$ 6,00, então  $x$  quilogramas custarão  $y = f(x) = 6x$  reais. Note que  $f(x) = 6x$  é uma função crescente ( $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ ). E também que 1 kg custa R\$ 6,00, 2 kg custam R\$ 12,00, 3 kg custam R\$ 18,00, e assim por diante. Duplicando a quantidade de quilogramas duplicamos o preço, triplicando a quantidade de quilogramas triplicamos o preço, etc., ou seja, o preço a pagar é diretamente proporcional à quantidade de quilogramas que compramos.

Nesse caso, o coeficiente de proporcionalidade é  $6: \frac{6}{1}, \frac{12}{2}, \frac{18}{3}, \dots$ , etc.

Observe também que, nesse caso,  $f(1) = 6; f(2) = 12; f(3) = 18; f(4) = 24$ , etc. e que, por exemplo:

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= f(3 \cdot 1) = 18 \\ 3 \cdot f(1) &= 3 \cdot 6 = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1)$$

b) Um motorista mantém seu carro em uma rodovia a uma velocidade constante de 90 km/h no piloto automático.

A tabela que representa essa situação é dada por:

 **Deslocamento de um veículo**

<b>t</b> (em horas)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$t$
<b>d</b> (em km)	30	45	90	180	$d = 90t$

Fonte: Dados fictícios.

O modelo matemático dessa situação é a função linear  $d = 90t$ . Note que a função  $d = 90t$  é crescente e que, duplicando o tempo, duplica a distância, triplicando o tempo, triplica a distância, e assim sucessivamente, ou seja, a distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo.

Para determinar em quanto tempo o motorista percorrerá 126 km, fazemos:

$$d = 90t \Rightarrow 126 \text{ km} = 90 \text{ km/h} \cdot t \Rightarrow t = \frac{126 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} \Rightarrow t = 1,4 \text{ h}$$

Assim, o motorista percorrerá 126 km em 1 hora e 24 minutos.

E, para determinar quantos quilômetros ele percorrerá em 1,5 hora, fazemos:

$$d = 90t \Rightarrow d = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5 \text{ h} \Rightarrow d = 135 \text{ km}$$

Então, ele percorrerá 135 km em 1,5 hora.

Nesse caso o coeficiente de proporcionalidade é 90.

Observe que, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc} d(2) = d(2 \cdot 1) = 2 \cdot d(1) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ 180 & & 90 \end{array}$$

**Fique atento!**

$0,4 \text{ h} \Rightarrow \frac{4}{10} \text{ de } 60 \text{ min} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{4}{10} \cdot 60 = \frac{240}{10} = 24 \text{ min}$

c) O tempo necessário para ir, em linha reta, de um ponto A para um ponto B, com velocidade constante, é inversamente proporcional a essa velocidade, pois o tempo diminui quando se aumenta a velocidade (função decrescente) e reduz-se à metade (à terça parte, à quarta parte...) quando se duplica (triplica, quadruplica...) a velocidade.

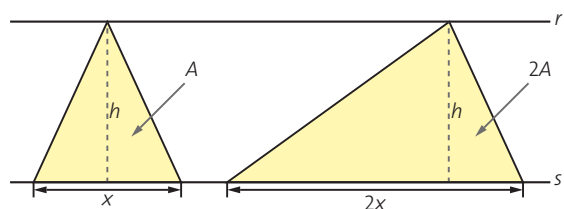
$$d = vt \Rightarrow t = \frac{d}{v}$$

d) Consideremos  $r$  e  $s$  retas paralelas e um triângulo que tenha um vértice em uma dessas retas e o lado oposto contido na outra.

Quando a altura ( $h$ ) relativa a um lado de uma região triangular é fixada, sua área ( $A$ ) é proporcional a esse lado ( $x$ ):  $A = \frac{h}{2} \cdot x$  ( $\frac{h}{2}$  é o coeficiente de proporcionalidade), que representa uma função linear

$$A(x) = ax, \text{ em que } a = \frac{h}{2}.$$

Dobrando-se (triplicando-se, quadruplicando-se...)  $x$ , duplica-se (triplica-se, quadruplica-se...) a área  $A$ .



Banco de imagens/Arquivo de editora

e) Ao ser aplicada uma quantia  $x$  em uma caderneta de poupança, após 1 mês é obtido um montante  $y$ . Vamos verificar se a correspondência  $x \rightarrow y$  é uma proporcionalidade, isto é, se o montante no fim do mês é proporcional à quantia aplicada.

Podemos notar que as duas condições da proporcionalidade estão satisfeitas:

- quanto maior a quantia investida, maior será o montante (função crescente);
- ao ser dobrada (triplicada...) a quantia  $x$ , duplicado (triplicado...) será o montante.

Por exemplo, uma aplicação de R\$ 1 000,00 que rende 0,7% ao mês resulta em um montante de R\$ 1 007,00 no fim de um mês:

### Rendimento de duas aplicações em 1 mês

Capital inicial ( $C$ )	Juros ( $j$ )	Montante ( $M = C + j$ )
R\$ 1 000,00	R\$ 7,00	R\$ 1 007,00
R\$ 2 000,00	R\$ 14,00	R\$ 2 014,00

Fonte: Dados fictícios.

#### **Fique atento!**

Dobrando-se o capital, dobra-se o montante no fim de um mês.

Observe, porém, que no segundo mês calculamos 0,7% de R\$ 1 007,00 (e não de R\$ 1 000,00), sendo obtido um montante de R\$ 1 014,05:

### Rendimento de uma aplicação em 2 meses

Tempo (em meses)	Capital	Juros	Montante
1	R\$ 1 000,00	R\$ 7,00	R\$ 1 007,00
2	R\$ 1 007,00	R\$ 7,05	R\$ 1 014,05

Fonte: Dados fictícios.

#### **Fique atento!**

Quando se dobra o tempo de investimento não se dobram os juros, pois a cada mês aplica-se uma quantia maior.

**Conclusão:** Em um período fixo, o retorno é proporcional ao capital inicial investido, mas não é proporcional ao tempo de investimento. [Retomaremos este assunto no Capítulo 5, que trata de função exponencial.](#)

## Exercícios

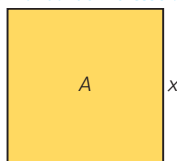


**46.** Sejam  $\ell$  a medida do lado de um quadrado e  $P$  o seu perímetro. Verifique se a correspondência  $\ell \rightarrow P$  é uma proporcionalidade.

*Sim, é uma proporcionalidade direta.*

**47.** Consideremos  $x$  a medida do lado e  $A$  a área de uma região quadrada. A correspondência  $x \rightarrow A$  é uma proporcionalidade? Justifique. *Não.*

*Veja a justificativa no Manual do Professor.*

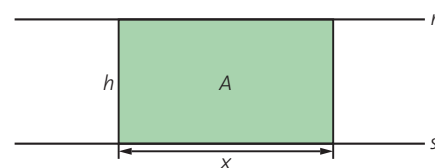


**48.** Se  $x$  é o volume e  $y$  é a massa de uma porção de um líquido homogêneo, a correspondência  $x \rightarrow y$  é uma proporcionalidade? Justifique. *Sim.*

*Veja a justificativa no Manual do Professor.*

**49.** O comprimento  $C$  de uma circunferência é dado em função  $D$  do diâmetro, pois  $C = \pi \cdot D$ , que é uma função linear. Então o comprimento  $C$  é proporcional à medida  $D$  do diâmetro. Determine o coeficiente de proporcionalidade.  $\pi$

**50.** Consideremos as retas  $r$  e  $s$  paralelas. Dado qualquer retângulo que tenha dois lados contidos nessas retas, vamos chamar de  $x$  a medida de um desses lados e de  $A$  a área da região retangular. Verifique se a correspondência  $x \rightarrow A$  é uma proporcionalidade. *Sim.*



## Função linear e escalas

A tabela abaixo apresenta a distância real, em quilômetros, e a distância no mapa, em centímetros, entre algumas cidades.

### Distância entre algumas cidades

<b>x: distância real (km)</b>	0	5	7,5	12,5
<b>y: distância no mapa (cm)</b>	0	2	3	5

Fonte: Dados fictícios.

Usando uma escala de 0,5 cm para representar 2 km no eixo horizontal e uma escala de 0,5 cm para representar 1 cm no eixo vertical, chegamos ao gráfico de uma função linear (veja ao lado).

Observando o gráfico, acompanhe como calcular:

- a) a distância no mapa entre duas cidades que distam 9 km uma da outra. A reta passa pelos pontos (5, 2) e (7,5; 3).

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{7,5 - 5} = \frac{1}{2,5} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} \text{ (coeficiente angular da reta)}$$

$$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 2 + \frac{2}{5}(x - 5) \Rightarrow y = \cancel{2} + \frac{2}{5}x - \cancel{2} \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$$

Para  $x = 9$ , temos  $y = \frac{2}{5} \cdot 9 = \frac{18}{5} = 3,6$ . Portanto, a distância no mapa é de 3,6 cm.

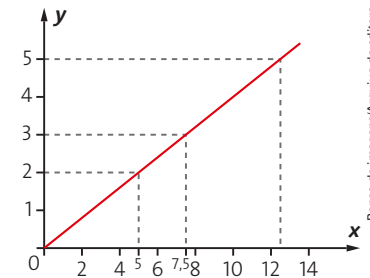
- b) a distância real entre duas cidades que, no mapa, distam 2,5 cm.

$$y = \frac{2}{5}x \Rightarrow 2,5 = \frac{2}{5}x \Rightarrow 2x = 12,5 \Rightarrow x = 6,25$$

Portanto, a distância real é de 6,25 km.

Apenas observando o gráfico, poderíamos determinar, aproximadamente, os pontos: (9; 3,6) e (6,25; 2,5).

### Distância entre algumas cidades



Fonte: Dados fictícios.

## Exercício

51. Observe a escada representada ao lado e a tabela a seguir.

### Altura de alguns degraus acima do piso

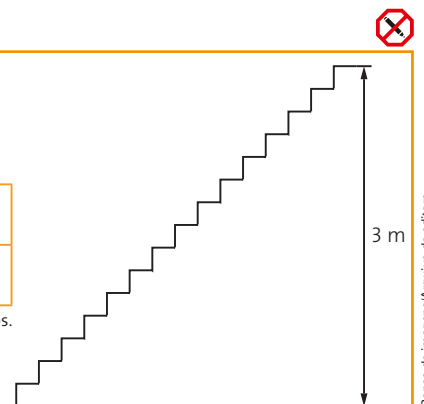
<b>Número de degraus</b>	2	4	5	10	13	15
<b>Altura acima do piso (cm)</b>	40	80	100	200	260	300

Fonte: Dados fictícios.

Construa no caderno um gráfico usando, no eixo horizontal, uma escala de 1 cm para 1 degrau e, no eixo vertical, uma escala de 1 cm para 20 cm.

$$y = 20x \text{ (reta)}$$

- a) Determine a altura acima do piso do:
- terceiro degrau; 60 cm
  - sétimo degrau; 140 cm
  - décimo primeiro degrau; 220 cm
- b) A partir do gráfico, determine em qual degrau você está se seu pé está:
- 120 cm acima do piso; 6º degrau.
  - 160 cm acima do piso; 8º degrau.
  - 280 cm acima do piso; 14º degrau.



Banco de imagens/Arquivo da editora

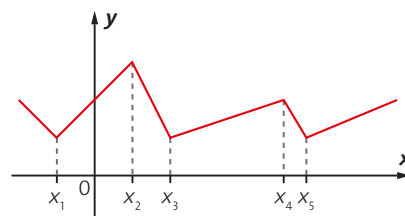


# 11 Funções poligonais ou afins por partes

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal.

Recorde com os alunos o que é uma linha poligonal.

Observe que cada trecho do gráfico de uma função poligonal coincide com o gráfico de uma função afim, que é uma reta; por isso essa função também é chamada **função afim por partes**.



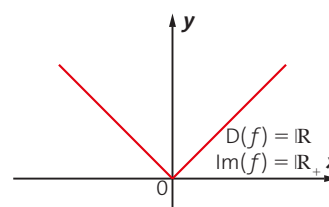
## Função módulo

Podemos dizer que o exemplo básico de função poligonal é a função

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = |x|$ , em que  $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ , cujo gráfico é dado ao lado.

Essa função recebe o nome de **função módulo** ou **função modular**.

Observe que, para  $x < 0$ , temos o gráfico da função afim  $f(x) = -x$  e, para  $x \geq 0$ , temos o gráfico da função afim  $f(x) = x$ .

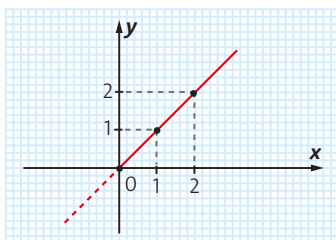


## Gráfico da função modular

Vamos construir o gráfico da função  $f(x) = |x|$ :

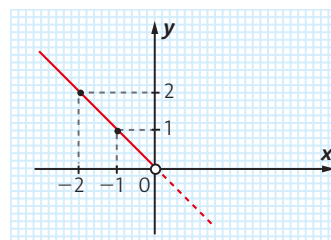
• se  $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |x| = x$

x	y = f(x)
0	0
1	1
2	2

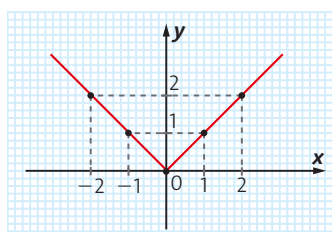


• se  $x < 0 \Rightarrow f(x) = |x| = -x$

x	y = f(x)
-1	1
-2	2

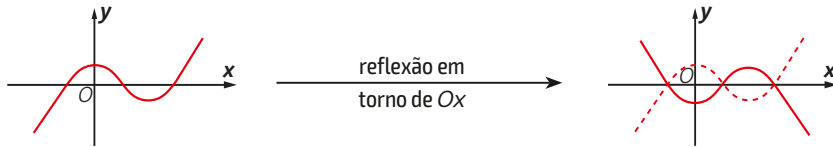


Colocando as duas condições em um só gráfico, temos o gráfico de  $f(x) = |x|$ :



$D(f) = \mathbb{R}$   
 $Im(f) = \mathbb{R}_+$

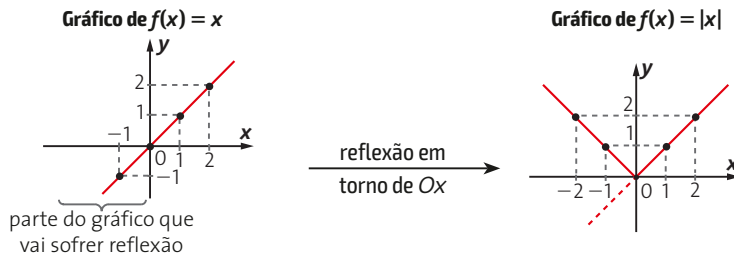
**Observação:** Podemos construir o gráfico de  $f(x) = |x|$  a partir do gráfico de  $g(x) = x$  usando o conceito de reflexão. A reflexão de um ponto  $(x, y)$  em torno do eixo  $Ox$  é o ponto  $(x, -y)$ . Assim, a reflexão de um gráfico em torno do eixo  $Ox$  é:



ou seja, os valores de  $f(x)$  negativos tornam-se positivos, e vice-versa.

No caso dos gráficos de funções modulares do tipo  $f(x) = |g(x)|$ , podemos obtê-los fazendo a reflexão da parte do gráfico de  $g(x)$  cujas imagens sejam negativas.

Assim:



## Exercícios resolvidos

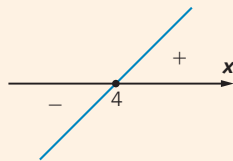
7. Dada a função  $f(x) = |2x - 8|$ :
- calcule  $f(0), f(3), f(4), f(5)$  e  $f(8)$ ;
  - escreva  $f(x)$  com sentenças que não têm módulo;
  - use os resultados do item **a** e desenhe o gráfico de  $f(x)$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned} \text{a) } f(0) &= |2 \cdot 0 - 8| = |-8| = 8 \\ f(3) &= |2 \cdot 3 - 8| = |-2| = 2 \\ f(4) &= |2 \cdot 4 - 8| = |0| = 0 \\ f(5) &= |2 \cdot 5 - 8| = |2| = 2 \\ f(8) &= |2 \cdot 8 - 8| = |8| = 8 \end{aligned}$$

**Fique atento!**  
O módulo de um número real qualquer é sempre positivo ou zero.

$$\text{b) } 2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

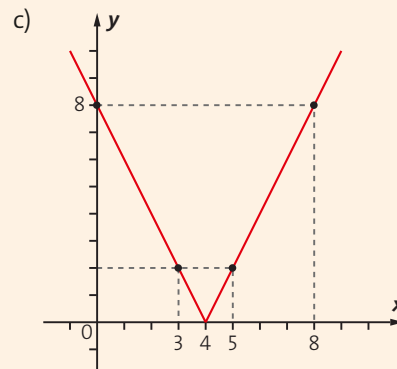


$$\begin{aligned} x \geq 4 &\rightarrow 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow f(x) = |2x - 8| = 2x - 8 \\ x < 4 &\rightarrow 2x - 8 < 0 \Rightarrow f(x) = |2x - 8| = -(2x - 8) = -2x + 8 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 8, & \text{para } x \geq 4 \\ -2x + 8, & \text{para } x < 4 \end{cases}$$

**Para refletir**

Confira o valor do zero das funções dos itens **b** e **c**.



8. Resolva as equações:

$$\begin{aligned} \text{a) } |x - 5| &= 3 \\ \text{b) } |x^2 - x - 1| &= 1 \end{aligned}$$

**Resolução:**

$$\text{a) } |x - 5| = 3 \Leftrightarrow x - 5 = 3 \text{ ou } x - 5 = -3$$

Resolvendo as equações obtidas, temos:

$$x - 5 = 3 \Rightarrow x = 8$$

$$x - 5 = -3 \Rightarrow x = 2$$

$$S = \{2, 8\}$$

$$\text{b) } |x^2 - x - 1| = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 1 \text{ ou } x^2 - x - 1 = -1$$

$$\bullet x^2 - x - 1 = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x' = 2 \text{ e } x'' = -1$$

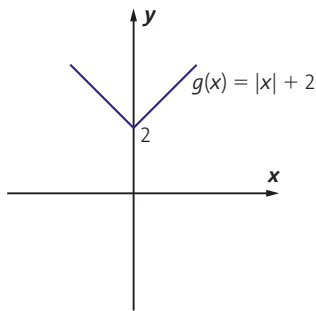
$$\bullet x^2 - x - 1 = -1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$$

$$x' = 0 \text{ e } x'' = 1$$

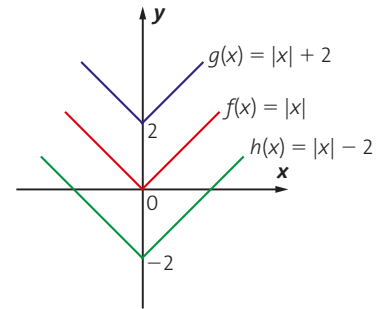
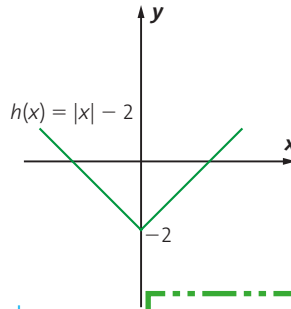
$$S = \{-1, 0, 1, 2\}$$

## Outros gráficos de funções modulares

Observe estes gráficos e tente estabelecer relações entre eles e o gráfico de  $f(x) = |x|$  dado anteriormente.

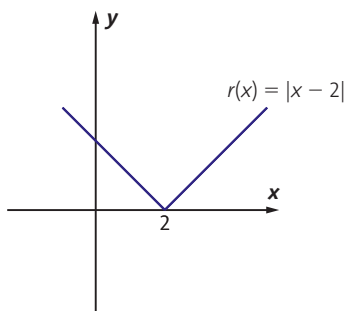


Em  $g(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram duas unidades para cima. Em  $h(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram duas unidades para baixo.

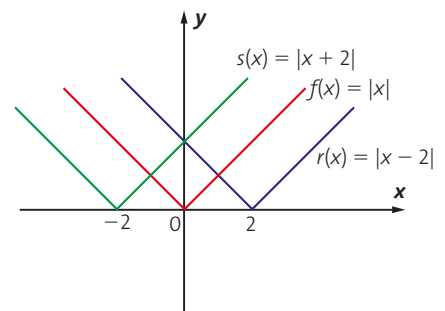
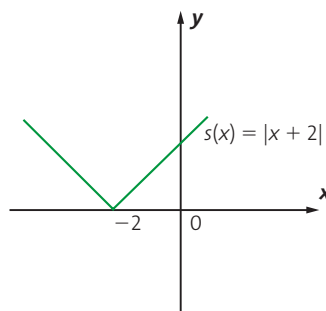


### Para refletir

Analise a sentença e o gráfico de  $g(x)$  e de  $h(x)$  em relação a  $f(x) = |x|$ .

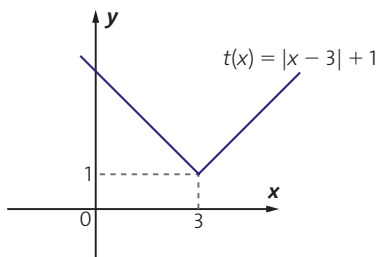


Em  $r(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram duas unidades para a direita. Em  $s(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram duas unidades para a esquerda.

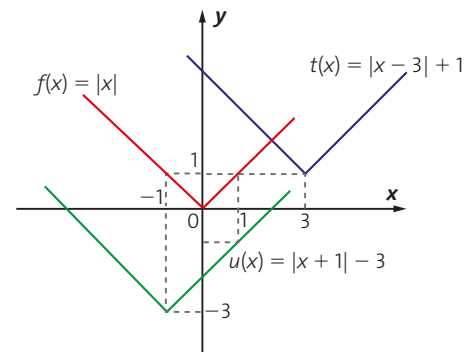
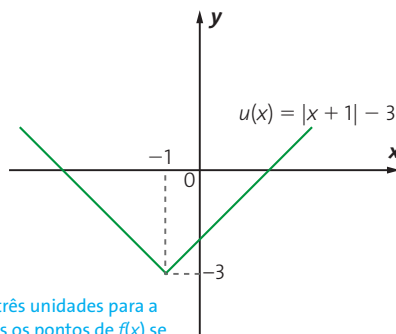


### Para refletir

Analise a sentença e o gráfico de  $r(x)$  e de  $s(x)$  em relação a  $f(x) = |x|$ .



Em  $t(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram três unidades para a direita e uma unidade para cima. Em  $u(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram uma unidade para a esquerda e três unidades para baixo.



### Para refletir

Analise a sentença e o gráfico de  $t(x)$  e de  $u(x)$  em relação a  $f(x) = |x|$ .

De modo geral podemos perceber que:

- o gráfico de uma função  $p(x) = |x - m| + k$  é congruente ao de  $f(x) = |x|$ , porém transladado para a direita (quando  $m > 0$ ) ou para a esquerda (quando  $m < 0$ ) e para cima (quando  $k > 0$ ) ou para baixo (quando  $k < 0$ ). O número de unidades dos deslocamentos são os valores absolutos de  $m$  e de  $k$ , respectivamente;
- o gráfico de uma função  $g(x) = |x| + k$  é congruente ao de  $f(x) = |x|$ , porém transladado para cima (quando  $k > 0$ ) ou para baixo (quando  $k < 0$ ). O número de unidades do deslocamento é o valor absoluto de  $k$ ;
- o gráfico de uma função  $h(x) = |x - m|$  é congruente ao de  $f(x) = |x|$ , porém transladado para a direita (quando  $m > 0$ ) ou para a esquerda (quando  $m < 0$ ). O número de unidades do deslocamento é o valor absoluto de  $m$ .



# Exercícios

52. Calcule:

- a)  $|-7| + 714$
- b)  $|-1| - |-1|$  0
- c)  $|2x - 1|$  quando  $x = -5$  11
- d)  $(-3) \cdot |-5|$  -15

53. Determine os possíveis valores reais de  $x$  nos seguintes casos:

- a)  $x = |-6|$   $x = 6$
- b)  $|x| = -6$  Não existe valor real para  $x$ .
- c)  $|x| = 6$   $x = 6$  ou  $x = -6$
- d)  $x = |6|$   $x = 6$
- e)  $x = \sqrt{25}$   $x = 5$
- f)  $x^2 = 25$   $x = 5$  ou  $x = -5$
- g)  $|x| = |3|$   $x = 3$  ou  $x = -3$
- h)  $|x| = |-4|$   $x = 4$  ou  $x = -4$

54. Dada a função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = |3 - x| + 4$ , faça no caderno o que se pede:

- a) Determine  $f(8), f(-1), f(3)$  e  $f(0)$ .  $f(8) = 9; f(-1) = 8; f(3) = 4; f(0) = 7$
- b) Escreva  $f(x)$  usando sentenças sem módulo.
- c) Construa o gráfico de  $f$ .  $f(x) = \begin{cases} 7 - x, & \text{se } x < 3 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$   
Veja o gráfico no Manual do Professor.
- d) Determine  $D(f)$  e  $\text{Im}(f)$ .  
 $D(f) = \mathbb{R}$  e  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 4\}$

55. Resolva as equações:

- a)  $|x - 6| = 10$   $S = \{-4, 16\}$
- b)  $|3x - 1| = 5$   $S = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$
- c)  $\left|\frac{x-1}{4}\right| = 2$   $S = \{-7, 9\}$
- d)  $5 + |-2x + 4| = 11$   $S = \{-1, 5\}$

56. Determine os valores reais de  $x$  que satisfazem:

- a)  $|x^2 + 6x - 1| = 6$   $S = \{-7, -5, -1, 1\}$
- b)  $|x^2 - 5x| = 6$   $S = \{-1, 2, 3, 6\}$

57. Analisando a definição e o gráfico da função modular  $f(x) = |x|$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , faça no caderno o que se pede:

- a) Determine  $D(f)$  e  $\text{Im}(f)$ .  $D(f) = \mathbb{R}; \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$
- b)  $f$  é crescente ou decrescente?  $f(x)$  é crescente para  $x \geq 0$ .
- c)  $f$  é injetiva? E sobrejetora?  $f(x)$  é decrescente para  $x \leq 0$ .
- d) Faça o estudo de sinal da função  $f$ .  
 $f(x)$  não é injetiva nem sobrejetora.  
 $f(x) > 0$  para  $x \neq 0; f(x) = 0$  para  $x = 0$

58. Seja  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = |-3x + 15|$ .

- a) Escreva no caderno  $f(x)$  sem utilizar módulo nas sentenças.  $f(x) = \begin{cases} -3x + 15, & \text{se } x < 5 \\ 3x - 15, & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$
- b) Calcule  $f(2), f(7), f(-1)$  e  $f(5)$  usando a definição dada ou a resposta obtida no item a.  
 $f(2) = 9; f(7) = 6; f(-1) = 18; f(5) = 0$

59. Esboce no caderno o gráfico de cada uma das seguintes funções: [Veja os gráficos no Manual do Professor.](#)

- a)  $f(x) = |x - 3|$
- b)  $f(x) = |x + 1|$
- c)  $f(x) = |x| + 1$
- d)  $f(x) = |x| - 3$
- e)  $f(x) = |x - 3| + 2$
- f)  $f(x) = |x + 3| - 1$

60. Algumas pesquisas constataam que, no início de cada mês, quando recebe o salário, o brasileiro visita o supermercado para abastecer sua despensa. Depois, a quantidade de pessoas que vão às compras passa a diminuir, até aproximar-se o dia 20, quando então ocorre uma ligeira alta em função dos adiantamentos salariais que muitas empresas realizam por volta desse dia. Uma expressão que retrata essa situação pode ser dada pela função  $f(x) = 500 + |100 - 5x|$ , para  $1 \leq x \leq 30$ , em que  $x$  representa o dia do mês e  $f(x)$  a quantidade de pessoas que visitam o supermercado nesse dia. Considere um supermercado que permanece aberto das 7h até as 22h todos os dias do mês.

Monkey Business Images/Shutterstock



Pessoa realizando compras em supermercado.

Analise as afirmações e indique qual delas é a verdadeira.

- x a) O maior número de pessoas no supermercado ocorre no dia primeiro de cada mês.
- b) No dia 19 de cada mês apenas 40 pessoas vão ao supermercado.
- c) Pelo menos em um dia de cada mês ninguém vai ao supermercado.
- d) A quantidade de pessoas que vão ao supermercado no dias 10 e 20 é igual.
- e) A quantidade de pessoas que vão ao supermercado diminuiu do dia 20 ao dia 30.



Behemoth, montanha-russa no parque Canada's Wonderland, em Ontário, Canadá. Parte deste brinquedo lembra um arco de parábola. Fotografia de 2013.

Sugira aos alunos que construam uma tabela para organizar os dados. Deixe-os trabalhar por alguns minutos e depois promova um rápido debate em sala para obter a opinião dos vários grupos. Não é o momento de resolver o problema analiticamente, mas é uma ótima oportunidade para aguçar a curiosidade dos alunos, pois o conhecimento necessário para resolver essa situação de maneira direta será estudado neste capítulo.

# 1 Definição de função quadrática

Reúna-se com um colega, considerem um retângulo de perímetro 20 cm e tentem responder às questões a seguir.

- Todos os retângulos de mesmo perímetro têm a mesma área? Não.
- Caso não tenham a mesma área, existem algumas dimensões do retângulo que resultem em uma área máxima? Sim.

### Fique atento!

Para chegar às suas conclusões, testem diversas dimensões possíveis para o retângulo considerado (por exemplo, ele pode ter 8 cm de comprimento e 2 cm de largura, ou 7 cm de comprimento e 3 cm de largura, etc.) e calculem o perímetro e a área.

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **quadrática** quando existem números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tal que  $f$  leva  $x$  em  $ax^2 + bx + c$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Escrevemos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow ax^2 + bx + c$$

Comente com os alunos que a função quadrática também recebe o nome de “função polinomial do 2º grau”.

Podemos facilitar a escrita de  $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$  escrevendo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , mas sempre atentos para não confundir a função  $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$  com o número real  $f(x)$ , que é o valor assumido pela função no ponto  $x$ .

Exemplos:

- $f(x) = -x^2 + 100x$ , em que  $a = -1, b = 100$  e  $c = 0$ .
- $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ , em que  $a = 3, b = -2$  e  $c = 1$ .
- $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ , em que  $a = -4, b = 4$  e  $c = -1$ .
- $f(x) = x^2 - 4$ , em que  $a = 1, b = 0$  e  $c = -4$ .
- $f(x) = 20x^2$ , em que  $a = 20, b = 0$  e  $c = 0$ .

Observe que **não** são funções quadráticas:

- $f(x) = 2x$  É função linear.
- $f(x) = 2^x$  É função exponencial.
- $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$  É função do 3º grau.

### Para refletir

- Por que o nome “quadrática”?

Por causa do expoente 2 do  $x$  (ou seja,  $x$  está elevado ao quadrado).

Veja a resposta na seção Respostas.

### Para refletir

- Por que as funções dos itens  $f, g$  e  $h$  não são quadráticas?



## Exercícios

- Escreva no caderno um exemplo de função quadrática, indicando os valores dos coeficientes  $a, b$  e  $c$ .  
*Resposta pessoal.*
- Quais das seguintes funções são quadráticas?
  - $f(x) = 2x^2$
  - $f(x) = 2x + 1$
  - $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$
  - $f(x) = 3x(x - 1)$
- Para que valores de  $t$  as seguintes funções são quadráticas?
  - $f(x) = tx^2 + 2x + 5$  Para todos os números reais diferentes de zero.
  - $f(x) = -5x^t + 2x + 5$  Para  $t = 2$ .

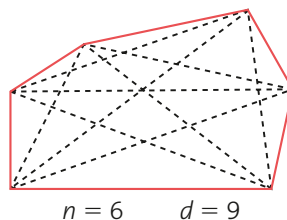
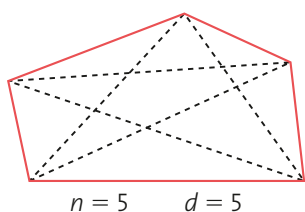
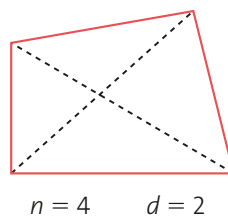
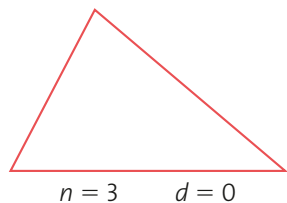
- As funções abaixo são equivalentes à função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Determine, em cada uma delas, os valores de  $a, b$  e  $c$ .
  - $f(x) = 2x^2$   $a = 2, b = 0$  e  $c = 0$
  - $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$   $a = 2, b = -12$  e  $c = 23$
  - $f(x) = (x + 2)(x - 3)$   $a = 1, b = -1$  e  $c = -6$
  - $f(x) = (4x + 7)(3x - 2)$   $a = 12, b = 13$  e  $c = -14$
  - $f(x) = (2x + 3)(5x - 1)$   $a = 10, b = 13$  e  $c = -3$
  - $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$   $a = 2, b = -12$  e  $c = 23$



## 2 Situações em que aparece a função quadrática

### Geometria

Você provavelmente estudou, no Ensino Fundamental, que o número de diagonais ( $d$ ) em um polígono convexo de  $n$  lados é dado por  $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ . Vamos relembrar.



Ilustrações técnicas: Banco de imagens/Arquivo da editora

Um polígono de  $n$  lados tem  $n$  vértices. De cada vértice partem  $(n-3)$  diagonais, e, para não considerarmos duas vezes a mesma diagonal, dividimos  $n(n-3)$  por 2. Assim, temos  $d$  em função de  $n$  dado por:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} \text{ ou } d(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n,$$

que é uma função quadrática em  $n$ , com  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{3}{2}$  e  $c = 0$ .

#### Fique atento!

Neste caso, o domínio da função quadrática é  $\{n \in \mathbb{N}; n \geq 3\}$ .

### Fenômenos físicos

O cientista italiano Galileu Galilei (1564-1642) analisou o movimento de objetos em queda no campo gravitacional da Terra e concluiu que, se não fosse a resistência do ar, o espaço percorrido por esses corpos seria diretamente proporcional ao quadrado do tempo de percurso. Isso significa que, se um corpo cai, abandonado de sua posição de repouso, percorrendo os espaços  $s_1, s_2, s_3$ , etc. nos tempos de  $t_1, t_2, t_3$ , etc., temos:

$$\frac{s_1}{t_1^2} = \frac{s_2}{t_2^2} = \frac{s_3}{t_3^2} = \dots$$

No caso em que o espaço  $s$  é medido em metros e o tempo  $t$  em segundos, o valor comum dessas razões é aproximadamente 4,9 (metade da aceleração da gravidade:  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ ). Dessa forma, a lei de Galileu pode ser expressa por:

$$\frac{s}{t^2} = \frac{g}{2} \Rightarrow s = \frac{gt^2}{2} \approx 4,9t^2 \Rightarrow s \approx 4,9t^2$$

Observe que  $s = 4,9t^2$  é uma função quadrática com  $a = 4,9$ ;  $b = 0$  e  $c = 0$ .

#### Fique atento!

O símbolo  $\approx$  significa aproximadamente.

## Esportes

Em um campeonato de futebol, cada clube vai jogar duas vezes com outro, em turno e retorno (o time **A** joga primeiro no campo do time **B**, e depois o contrário). Assim, o número  $p$  de partidas do campeonato é dado em função do número  $n$  de clubes participantes, conforme vemos na tabela seguinte (cada time joga com todos os outros, menos com ele mesmo):

### Campeonato de futebol (turno e retorno)

Número de clubes ( $n$ )	2	3	4	5	...	$n$
Número de partidas ( $p$ )	$2(2-1) = 2$	$3(3-1) = 6$	$4(4-1) = 12$	$5(5-1) = 20$	...	$n(n-1)$

Fonte: Dados experimentais.

Observe, pela tabela, que o número  $p$  de partidas é dado por  $p(n) = n(n-1) = n^2 - n$ .

#### Para refletir

Quais são os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  nessa função  $p(n)$ ?

$$a = 1, b = -1 \text{ e } c = 0$$

## 3 Valor ou imagem da função quadrática em um ponto

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , duas situações são importantes:

- dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , calcular  $f(x_0)$ ;
- dada  $f(x_0)$ , calcular  $x_0$ .

Por exemplo, se  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ , para calcular o valor dessa função no ponto  $x = 2$ , ou seja,  $f(2)$ , fazemos:  $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$ . Logo,  $f(2) = 0$ .

Agora, se  $f(x) = 0$ , temos  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , que é uma equação do 2º grau, que já estudamos no Ensino Fundamental. Os valores que satisfazem essa equação do 2º grau, ou seja, as raízes dessa equação, são 2 e 3. Verifique.

## Exercício resolvido

1. Dada a função quadrática  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ , determine:

- os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ ;
- $f(1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-2)$  e  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ;
- se existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 3$ . Se existir, calcule  $x$ ;
- se existe  $x \in \mathbb{R}$  para que se tenha  $f(x) = -3$ . Se houver, calcule  $x$ ;
- se existe  $x \in \mathbb{R}$  para que se tenha  $f(x) = 0$ . Se existir, calcule  $x$ .

#### Resolução:

a) Em  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ , temos  $a = 1$ ,  $b = -6$  e  $c = 8$ .

$$b) f(1) = 1^2 - 6(1) + 8 = 1 - 6 + 8 = 3$$

$$f(0) = 0 - 0 + 8 = 8$$

$$f(-2) = 4 + 12 + 8 = 24$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 3 + 8 = \frac{1 - 12 + 32}{4} = \frac{21}{4}$$

$$c) f(x) = 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x' = 5 \text{ e } x'' = 1$$

Existem dois valores de  $x$  para os quais

$$f(x) = 3: x = 5 \text{ e } x = 1.$$

$$d) f(x) = -3 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = -3 \Rightarrow x^2 - 6x + 11 = 0$$

$$\Delta = 36 - 44 = -8$$

Não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -3$ .

$$e) f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4$$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = 4 \text{ e } x'' = 2$$

Existem dois valores para  $x$ :  $x' = 4$  e  $x'' = 2$ .

#### Para refletir

Analise os itens **c** e **d** para responder se essa função é injetiva e sobrejetiva.

A função não é injetiva nem sobrejetiva.

# Exercícios

Atividade em dupla

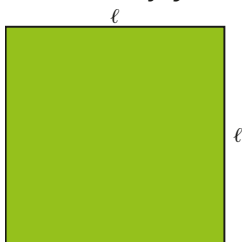
Atividade em equipe



5. A área de um círculo é dada em função da medida  $r$  do raio, ou seja,  $S = f(r) = \pi r^2$ , que é uma função quadrática. Calcule:

- a)  $S$  quando  $r = 5$  cm;  $S = 25\pi$  cm<sup>2</sup>  
 b)  $r$  quando  $S = 64\pi$  m<sup>2</sup>.  $r = 8$  m

6. Quando variamos a medida  $\ell$  do lado de um quadrado, sua área também varia. Então, a área é dada em função da medida  $\ell$  do lado, ou seja,  $f(\ell) = \ell^2$ .



Faça, então, o que se pede:  $f(10) = 100$ ;  $f(1,5) = 2,25$ ;

- a) calcule  $f(10)$ ,  $f(1,5)$  e  $f(2\sqrt{3})$ ;  $f(2\sqrt{3}) = 12$   
 b) calcule  $\ell$  tal que  $f(\ell) = 256$ ;  $\ell = 16$   
 c) determine qual é o domínio e qual é a imagem dessa função.  $D(f) = \mathbb{R}^+$ ;  $Im(f) = \mathbb{R}^+$

7. Dada a função quadrática  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ , determine:

- a)  $f(1)$   $f(1) = 0$   
 b)  $f(2)$   $f(2) = 5$   
 c)  $f(0)$   $f(0) = 1$   
 d)  $f(\sqrt{2})$   $f(\sqrt{2}) = 7 - 4\sqrt{2}$   
 e)  $f(-2)$   $f(-2) = 21$   
 f)  $f(h + 1)$   $f(h + 1) = 3h^2 + 2h$   
 g)  $x$  de modo que  $f(x) = 1$ .  $x = 0$  ou  $x = \frac{4}{3}$   
 h)  $x$  de modo que  $f(x) = -1$ . Não existe  $x$  real.

8. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$ . Determine  $x$ , se houver, para que se tenha:

- a)  $f(x) = 2$   $x = \frac{1}{2}$   
 b)  $f(x) = 3$   $x' = 0$  ou  $x' = 1$   
 c)  $f(x) = -1$  Não existe.

9. (Fuvest-SP) Seja  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ .

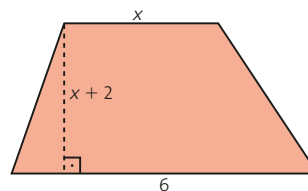
Calcule  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ .  $\frac{13 - 9\sqrt{2}}{9}$

10. Dada a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{para } x < 5 \\ 3x - 20, & \text{para } 5 \leq x < 9 \\ -x^2 + 4x - 2, & \text{para } x \geq 9 \end{cases}, \text{ determine:}$$

- a)  $f(6)$ ;  $-2$     c)  $f(10)$ ;  $-62$     e)  $f(5)$ ;  $-5$     g)  $f(4)$ .  $8$   
 b)  $f(-1)$ ;  $3$     d)  $f(9)$ ;  $-47$     f)  $f(0)$ ;  $0$

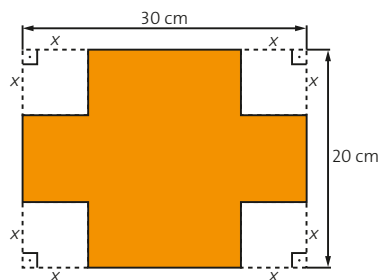
11. A área da região em forma de trapézio é dada por  $A = \frac{(B + b)h}{2}$ , em que  $B$  é a base maior,  $b$  é a base menor e  $h$  é a altura. Nesse trapézio, a área pode ser dada em função da base menor por uma lei do tipo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .



a) Determinem a lei dessa função de acordo com as informações da figura acima.

b) Identifiquem os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .  
 $f(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 6$   
 $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 4$  e  $c = 6$

12. De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado  $x$ .



Determinem a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de  $x$ .  $A = 600 - 4x^2$

13. Em um campeonato de futebol, cada time vai jogar duas vezes com outro. Então:

- a) Se o número de clubes é 10, qual é o número de jogos? **90 jogos.**  
 b) Se o número de jogos é 42, qual é o número de times? **7 times.**

14. Física

Gerador é um aparelho que transforma qualquer tipo de energia em energia elétrica. Se a potência  $\mathcal{P}$  (em watts) que certo gerador lança em um circuito elétrico é dada pela relação  $\mathcal{P}(i) = 20i - 5i^2$ , em que  $i$  é a intensidade da corrente elétrica que atravessa o gerador, determine o número de watts que expressa a potência  $\mathcal{P}$  quando  $i = 3$  ampères.  
**15 watts**



A pilha é um tipo de gerador.

James Hoenesine/Shutterstock/Glow Images

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## A equação do 2º grau

São conhecidos problemas que recaem em equações de grau 2 desde a época dos babilônios, há quase 4 mil anos. Os antigos babilônios gravavam seus textos e cálculos em placas de barro usando cunhas de madeira para imprimir os símbolos em relevo. Esse tipo de escrita foi chamado de escrita cuneiforme.

A imagem ao lado mostra uma placa (*tablet* em inglês), em escrita cuneiforme, que descreve um problema cujo enunciado transcrito para linguagem atual seria o equivalente a: encontrar o lado de um quadrado cuja área, somada com o lado, é igual a  $\frac{3}{4}$ .

Muitos dos problemas que foram encontrados nos tabletes dos babilônios consistiam em determinar dois números conhecendo a soma e o produto deles; ou em encontrar os lados de um retângulo conhecendo o perímetro e a área. Da mesma forma, podemos perguntar aos alunos de hoje quais seriam as medidas (aproximadas) de um retângulo de 40 cm de perímetro e 100 cm<sup>2</sup> de área.

Os babilônios, naturalmente, não tinham fórmulas para solucionar esses problemas, mas conheciam “receitas” para resolvê-los. Essas receitas conhecidas pelos babilônios são equivalentes à fórmula de resolução da equação do 2º grau que conhecemos hoje, mas não sabemos como eles as descobriram.



Tablete de argila BM 13 901. Museu Britânico, Londres (Inglaterra). Comprimento: 11,7 cm; largura: 19,4 cm.



Ilustração de François Viète, advogado e matemático francês (1540-1603), a partir de litografia que se encontra na Biblioteca do Congresso em Washington (Estados Unidos).

Desde cerca de 1800 a.C. até o século XVI todos os matemáticos resolviam as equações do 2º grau seguindo as “receitas” iguais ou semelhantes às dos antigos babilônios. O administrador público e advogado francês, François Viète, tinha como passatempo a dedicação à Matemática. Apesar de não ser sua ocupação principal, Viète desenvolveu muitos trabalhos matemáticos relacionados à Trigonometria e à Álgebra. Em uma de suas célebres frases, Viète diz: “Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.” Essa frase expressa um pouco a ideia que ele teve no final do século XVI, de representar por letras do início do alfabeto os coeficientes da equação do 2º grau. Somente depois disso, apareceu a fórmula que conhecemos hoje para a resolução desse tipo de equação.



## 4 Zeros da função quadrática

O estudo da função quadrática tem sua origem na resolução de equações do 2º grau.

Um problema muito antigo que recai em uma equação do 2º grau é este:

“Determinar dois números conhecendo sua soma  $s$  e seu produto  $p$ .”

Chamando de  $x$  um dos números, o outro será  $s - x$ . Assim,  $p = x(s - x)$  ou  $p = sx - x^2$ , ou, ainda:

$$x^2 - sx + p = 0$$

Para determinar  $x$  (e, portanto,  $s - x$ ), basta resolver a equação do 2º grau  $x^2 - sx + p = 0$ , ou seja, determinar os valores de  $x$  para os quais a função quadrática  $f(x) = x^2 - sx + p$  se anula. Esses valores são chamados **zeros** da função quadrática ou **raízes** da equação do 2º grau correspondente a  $f(x) = 0$ .

Por exemplo, os dois números cuja soma é 7 e cujo produto é 12 são 3 e 4, que são as raízes da equação  $x^2 - 7x + 12 = 0$  ou zeros da função quadrática  $f(x) = x^2 - 7x + 12$ .

### Observações:

1ª) Dados quaisquer  $s$  e  $p$ , nem sempre existem dois números reais cuja soma seja  $s$  e cujo produto seja  $p$ .

Por exemplo, não existem dois números reais cuja soma seja 3 e cujo produto seja 7.

2ª) O número  $\Delta = b^2 - 4ac$  é chamado **discriminante** da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

3ª) Quando  $\Delta > 0$ , a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem **dois zeros reais diferentes**.

Quando  $\Delta < 0$ , a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  **não tem zeros**.

4ª) Quando  $\Delta = 0$ , a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  **tem dois zeros reais iguais**.

### Determinação dos zeros da função quadrática

Vamos ver algumas maneiras de determinar os zeros da função quadrática.

#### Usando fórmula

Para usar a fórmula da resolução de equações do 2º grau  $\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ , que você provavelmente estudou no 9º ano do Ensino Fundamental, basta conhecer os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Como  $\Delta = b^2 - 4ac$ , se  $\Delta > 0$  ou  $\Delta = 0$ , então as raízes serão:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se  $\Delta < 0$ , a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  não tem raízes reais.

### Observações:

1ª) Relação entre coeficientes e raízes da equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$

Existindo zeros reais tais que  $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ , obtemos:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b + \sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Logo:  $x'' + x' = -\frac{b}{a}$  (soma das raízes)

$$x' \cdot x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo:  $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$  (produto das raízes)

#### Você sabia?

Este problema aparece em registros cuneiformes feitos pelos babilônios por volta do ano 1700 a.C.; eles já conheciam regras para solucioná-lo.

#### Para refletir

Justifique por que não existem dois números reais cuja soma seja 3 e cujo produto seja 7.

Se existirem, os números serão raízes da equação  $x^2 - 3x + 7 = 0$ . Essa equação tem  $\Delta < 0$ , então não existe valor real para  $x$ .

Caso você considere necessário, demonstre essa fórmula com os alunos (ver página 140).

2ª) Forma **fatorada** do trinômio  $ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$

Quando  $\Delta \geq 0$ , ou seja, quando a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  possui as raízes reais  $x'$  e  $x''$ , podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = a[x^2 - x'x - x''x + x'x''] = a(x - x')(x - x'')$$

Logo:  $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$  (forma fatorada do trinômio do 2º grau)

De agora em diante, você poderá escolher a maneira pela qual determinará os zeros da função quadrática.

**Fatorar:** escrever em forma de produto, ou seja, com fatores.

## Exercícios resolvidos

2. Determine, se existirem, os zeros da função quadrática  $f(x) = x^2 - 12x + 35$ .

**Resolução:**

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$a = 1, b = -12 \text{ e } c = 35$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35$$

$$\Delta = 144 - 140 = 4$$

$$\Delta = 4 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ (há 2 raízes reais e diferentes)}$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{4}}{2} = \frac{12 + 2}{2} = 7$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - \sqrt{4}}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

Logo, os zeros da função  $f(x) = x^2 - 12x + 35$  são 7 e 5, ou seja,  $f(7) = 0$  e  $f(5) = 0$ .

3. Determine, se existirem, os zeros da função quadrática  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ .

**Resolução:**

$$2x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$a = 2, b = -3 \text{ e } c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(5) = 9 - 40 = -31 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta < 0$$

Logo, a equação não tem raízes reais; consequentemente a função  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$  não tem zeros reais.

4. Determine o valor de  $k$  positivo para que a equação  $x^2 - 2kx + (k + 1) = 0$  tenha uma raiz igual ao triplo da outra.

**Resolução:**

$$\begin{cases} x' = 3x'' \\ x' + x'' = -\frac{b}{a} = 2k \\ x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = k + 1 \end{cases}$$

$$3x'' + x'' = 2k \Rightarrow 4x'' = 2k \Rightarrow x'' = \frac{1}{2}k$$

$$x' + \frac{1}{2}k = 2k \Rightarrow x' = 2k - \frac{1}{2}k \Rightarrow x' = \frac{3}{2}k$$

Assim:

$$x' \cdot x'' = k + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}k \cdot \frac{1}{2}k = k + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}k^2 = k + 1 \Leftrightarrow 3k^2 - 4k - 4 = 0$$

$$a = 3, b = -4 \text{ e } c = -4$$

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow k = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 + 48}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \frac{4+8}{6} = 2 \\ \text{ou} \\ k = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3} \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Portanto, quando  $k = 2$ , a equação

$x^2 - 2kx + (k + 1) = 0$  se transforma na equação  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

**Para refletir**

Comprove que a equação  $x^2 - 4x + 3 = 0$  tem uma raiz igual ao triplo da outra.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = 1.$$

Logo,  $x' = 3x''$ .



5. Para que valores de  $k$  a função  $f(x) = x^2 - 2x + k$  tem zeros reais e diferentes?

**Resolução:**

• Condição:  $\Delta > 0$

•  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(k) = 4 - 4k$

Assim:

$$4 - 4k > 0 \Leftrightarrow -4k > -4 \Leftrightarrow 4k < 4 \Leftrightarrow k < 1$$

Portanto, a função  $f(x) = x^2 - 2x + k$  terá zeros reais e diferentes para quaisquer  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $k < 1$ .

6. Escreva na forma fatorada as funções:

a)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b)  $g(x) = 5x^2 + 10x + 5$

**Resolução:**

- a) A forma fatorada é  $f(x) = a(x - x')(x - x'')$ , em que  $x'$  e  $x''$  são as raízes da equação  $f(x) = 0$ .

Assim:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = 2$$

Então:

$$f(x) = (x - 3)(x - 2)$$

(Note que  $a = 1$  não precisa ser escrito.)

- b) Fazendo  $g(x) = 0$ , vem:  $5x^2 + 10x + 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 5} = \frac{-10}{10} \Rightarrow x' = x'' = -1$$

Então:

$$g(x) = 5(x + 1)(x + 1) = 5(x + 1)^2$$

**Fique atento!**

Se  $\Delta = 0$ , a função quadrática é um trinômio quadrado perfeito.

7. Escreva a função quadrática que tem como zeros os números 2 e 5 e cujo gráfico passa pelo ponto (1, 4).

**Resolução:**

Usando a forma fatorada, podemos escrever  $f(x) = a(x - 2)(x - 5)$ . E, se (1, 4) pertence à função, então  $f(1) = 4$ , portanto:

$$f(1) = a(1 - 2)(1 - 5) \Rightarrow 4 = a \cdot (-1) \cdot (-4) \Rightarrow 4 = a \cdot 4 \Rightarrow a = 1$$

Dessa forma:

$$f(x) = 1 \cdot (x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10$$

## Exercícios

15. Determine, se existirem, os zeros das funções quadráticas usando a fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

a)  $f(x) = x^2 - 3x + 3 \text{ e } 0$

b)  $f(x) = x^2 + 4x + 5$  Não tem zeros reais.

c)  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$  -2 e 4

d)  $f(x) = x^2 + 10x + 25$  -5

e)  $f(x) = x^2 - 8x + 16$  4

f)  $f(x) = 25x^2 + 9x + 1$  Não tem zeros reais.

16. Para que valores reais de  $m$  a função:

$$f(x) = (m - 1)x^2 - 4x - 1$$

não admite zeros reais?  $m \in \mathbb{R} \mid m < -3$

17. Para que valores reais de  $k$  a função:

$$f(x) = kx^2 - 6x + 1$$

admite zeros reais e diferentes?  $k \in \mathbb{R} \mid k < 9 \text{ e } k \neq 0$

18. Para que valores de  $m$  a função:

$$f(x) = (m - 2)x^2 - 2x + 6$$

admite valores reais?  $m \in \mathbb{R} \mid m \leq \frac{13}{6} \text{ e } m \neq 2$

19. Determine o valor de  $k$  para que a equação:

$$x^2 - (k + 1)x + (10 + k) = 0 \quad k' = 8 \text{ e } k'' = -\frac{11}{2}$$

tenha uma raiz igual ao dobro da outra.

20. Escreva no caderno a função quadrática  $f(x)$  em cada item, de acordo com as informações dadas.

- a) Zeros de  $f(x)$ :  $x = 1$  e  $x = 3$ ;

$$f(x) \text{ passa por } (0, -6). \quad f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

- b) Zeros de  $f(x)$ :  $x = 2$  e  $x = -3$ ;

$$f(x) \text{ passa por } (0, 4). \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 4$$

- c) Zeros de  $f(x)$ :  $x = 5$  (duplo);

$$f(x) \text{ passa por } (2, -9). \quad f(x) = -x^2 + 10x - 25$$

21. Os 180 alunos de uma escola estão dispostos de forma retangular, em filas, de tal modo que o número de alunos de cada fila supera em 8 o número de filas. Quantos alunos há em cada fila? 18 alunos

## Usando a fatoraço

A fatoraço é um processo útil em equaçoes quadráticas incompletas, ou seja, quando  $b = 0$  ou  $c = 0$  (principalmente nesse caso). Acompanhe os exercícos resolvidos a seguir.

## Exercícos resolvidos

8. Determine os zeros das seguintes funçoes quadráticas:

a)  $f(x) = x^2 - 5x$       b)  $f(x) = x^2 + 2x$

**Resoluço:**

a) A equaço do 2º grau correspondente é  $x^2 - 5x = 0$ . Colocando  $x$  em evidência no 1º membro, temos:

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0$$

Logo:

$$x = 0 \text{ ou } x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Assim, os zeros da funço são 0 e 5.

b) A equaço do 2º grau correspondente é

$x^2 + 2x = 0$ . Fatorando o 1º membro da equaço, temos:

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0$$

Logo:

$$x = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Assim, os zeros da funço são 0 e  $-2$ .

### Fique atento!

A fatoraço também pode ser usada com funçoes quadráticas completas, ou seja, que possuem  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ , embora perca um pouco da praticidade.

9. Determine os zeros das seguintes funçoes quadráticas:

a)  $f(x) = x^2 - 4$       c)  $f(x) = x^2 - 6x + 9$

b)  $f(x) = x^2 + 2x$       d)  $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

**Resoluço:**

a) A equaço do 2º grau correspondente é  $x^2 - 4 = 0$ .

Fatorando o 1º membro da equaço, temos:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$$

Para que um produto seja zero, pelo menos um dos fatores precisa ser zero.

Logo:

$$(x - 2) = 0 \text{ ou } (x + 2) = 0$$

$$\text{Se } x - 2 = 0, \text{ ent\~ao } x = 2.$$

$$\text{Se } x + 2 = 0, \text{ ent\~ao } x = -2.$$

Assim, as raízes da equaço  $x^2 - 4 = 0$  são  $-2$  e  $2$  ou os zeros da funço quadrática  $f(x) = x^2 - 4$  são  $-2$  e  $2$ .

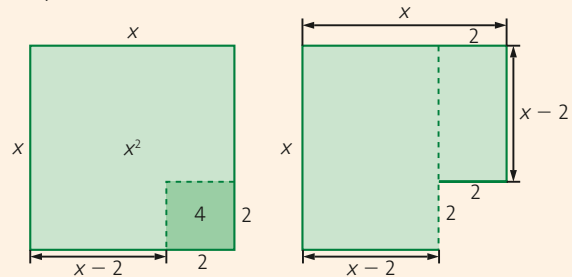
**Verificaço:**

$$f(x) = x^2 - 4$$

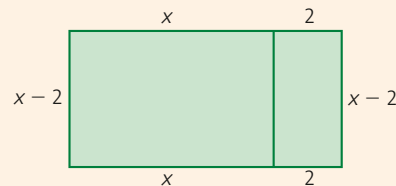
$$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$f(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Geometricamente, podemos representar essa fatoraço assim:



Assim:



A área dada por  $x^2 - 4$  é a mesma que a área dada por  $(x - 2)(x + 2)$ . Logo,  $(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$ .

Constata isso recortando adequadamente uma folha de papel.

b)  $f(x) = x^2 + 2x$

A equaço do 2º grau correspondente é  $x^2 + 2x = 0$ .

Fatorando o 1º membro da equaço, temos:

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0$$

Logo:

$$x = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Assim, os zeros da funço são 0 e  $-2$ .

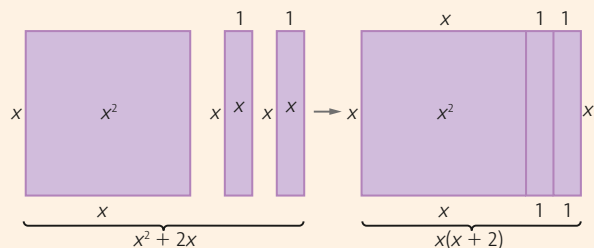
**Verificaço:**

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) = 4 - 4 = 0$$

Geometricamente, temos:



A área dada por  $x^2 + 2x$  é a mesma que a dada por  $x(x + 2)$ . Constata isso recortando adequadamente uma folha de papel.

Portanto,  $x^2 + 2x = x(x + 2)$ .

c)  $f(x) = x^2 - 6x + 9$

Equação do 2º grau correspondente:

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Fatorando o 1º membro, temos:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x^2 & 2 \cdot 3 \cdot x & 3^2 \end{array}$$

Logo:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

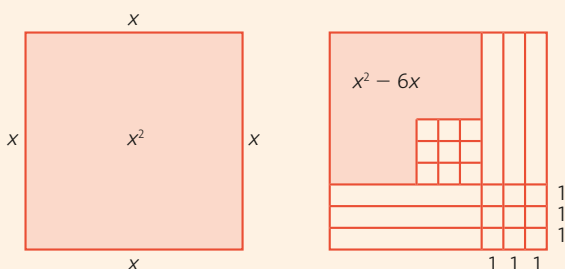
Nesse caso,  $x = 3$  é um zero “duplo” da função quadrática  $f(x) = x^2 - 6x + 9$ .

Verificação:

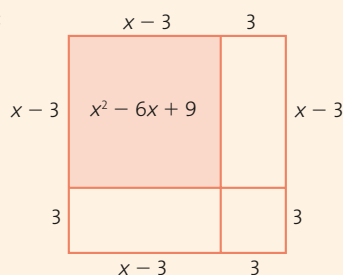
$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$$

Geometricamente, temos:



Assim:



A área dada por  $x^2 - 6x + 9$  é a mesma que a dada por  $(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$ .

Portanto,  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$ .

d)  $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

Equação do 2º grau correspondente:  $(x - 3)^2 - 4 = 0$ .

Fatorando, temos:

$$(x - 3)^2 - 4 = 0 \Rightarrow [(x - 3) - 2][(x - 3) + 2] = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0$$

Logo:

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Zeros da função: 1 e 5.

Verificação:

$$f(x) = (x - 3)^2 - 4$$

$$f(1) = (1 - 3)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$f(5) = (5 - 3)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

## Isolando o x

Isolar o  $x$  é um processo útil em funções quadráticas que não possuem termo em  $x$ , ou seja, quando  $b = 0$ .

## Exercício resolvido

10. Determine, se existirem, os zeros das seguintes funções quadráticas:

a)  $f(x) = x^2 - 9$

c)  $f(x) = 2x^2 - 14$

b)  $f(x) = x^2 + 25$

Resolução:

a) A equação do 2º grau correspondente é  $x^2 - 9 = 0$ . Isolando  $x$  no 1º membro, temos:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9$$

Logo:

$$x = \pm \sqrt{9} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Assim, os zeros da função são 3 e  $-3$ .

b) A equação do 2º grau correspondente é  $x^2 + 25 = 0$ . Isolando  $x$  no 1º membro, temos:

$$x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -25$$

Porém, não existe número real cujo quadrado seja negativo. Assim, essa função não tem zeros reais.

c) A equação do 2º grau correspondente é  $2x^2 - 14 = 0$ . Isolando  $x$  no 1º membro, temos:

$$2x^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{14}{2} \Leftrightarrow x^2 = 7$$

Logo:

$$x = \pm \sqrt{7} \Rightarrow x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7}$$

Assim, os zeros da função são  $\sqrt{7}$  e  $-\sqrt{7}$ .

## Exercício

22. Determine, se existirem, os zeros das seguintes funções quadráticas:

a)  $f(x) = x^2 - 2x$  **0 e 2**

c)  $f(x) = x^2 - 16$  **-4 e 4**

e)  $f(x) = x^2 + 14x$  **-14 e 0**

g)  $f(x) = 2x^2 - 8$  **-2 e 2**

b)  $f(x) = 2x^2 + 8x$  **-4 e 0**

d)  $f(x) = x^2 - 11$   **$-\sqrt{11}$  e  $\sqrt{11}$**

f)  $f(x) = 3x^2 + 3x$  **-1 e 0**

h)  $f(x) = -x^2 + 36$  **-6 e 6**

Na seção *Um pouco mais...* presente no final deste capítulo, apresentamos os assuntos: Determinação dos zeros por completamento de quadrado, Forma canônica da função quadrática e Decorrências da forma canônica. Eles podem ser abordados para aprofundar o que foi estudado até aqui.

## Por soma e produto

Como já estudamos, a soma e o produto das raízes da equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  são dados respectivamente por  $-\frac{b}{a}$  e  $\frac{c}{a}$ .

$$\text{Soma: } S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

e

$$\text{Produto: } P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Sendo possível determinar dois números cuja soma e cujo produto sejam os valores obtidos na equação quadrática, esses números serão as raízes.

Esse processo é mais indicado para equações quadráticas mais simples, cujas raízes sejam números inteiros.

## Exercício resolvido

11. Determine, se existirem, os zeros das seguintes funções quadráticas:

a)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$       b)  $f(x) = x^2 + 3x - 28$

**Resolução:**

a) A equação do 2º grau correspondente é  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . A soma das raízes é então dada por  $S = -\frac{-5}{1} = 5$  e o produto é dado por  $P = \frac{6}{1} = 6$ .

Ou seja, procuramos um par de números cuja soma seja 5 e cujo produto seja 6. Esses números são 2 e 3.

Assim, os zeros da função são 2 e 3.

b) A equação do 2º grau correspondente é  $x^2 + 3x - 28 = 0$ . A soma das raízes é então dada por  $S = -\frac{3}{1} = -3$  e o produto é dado por  $P = \frac{-28}{1} = -28$ . Ou seja, procuramos um par de números cuja soma seja  $-3$  e cujo

produto seja  $-28$ . Esses números são 4 e  $-7$ .

Assim, os zeros da função são 4 e  $-7$ .

## Exercícios



23. O polígono tem 20 lados e se chama icoságono. Quantos lados tem um polígono convexo que possui 170 diagonais? Qual é o nome dele?

24. Uma caixa sem tampa tem a base quadrática com lado medindo  $x$  dm e altura 1 dm. Sabendo que a área total de sua superfície é de  $5 \text{ m}^2$ , calcule a medida  $x$ .  $x = 1 \text{ dm}$

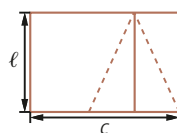
25. Renata tem 18 anos e Lígia, 15. Daqui a quantos anos o produto de suas idades será igual a 378? **Daqui a 3 anos.**

26. Um trem percorreu 200 km em certo tempo com velocidade constante. Para percorrer essa distância em uma hora a menos, a velocidade deveria ser de 10 km/h a mais. Qual era a velocidade do trem? **40 km/h**

**Fique atento!**

O espaço percorrido por um objeto em movimento retilíneo uniforme (com velocidade constante) é igual ao deslocamento inicial do objeto mais a velocidade de deslocamento vezes o tempo de deslocamento ( $S = s_0 + v \cdot t$ ).

27. **DESAFIO** O retângulo áureo, ou de ouro, grego, é um retângulo especial em que valem as relações entre comprimento ( $c$ ) e largura ( $\ell$ ): A proporção áurea, citada no Capítulo 1 deste volume, pode ser observada na natureza, nas artes e nas construções.



$$\frac{c}{\ell} = \frac{\ell}{c - \ell}$$

↑ proporção áurea

Se considerarmos  $c = 1$ , a proposta será:  $\frac{1}{\ell} = \frac{\ell}{1 - \ell} \Rightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0$ .

A raiz positiva dessa equação é chamada **número de ouro**. Qual é esse número?  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

## 5 Gráfico da função quadrática

Consideremos um ponto  $F$  e uma reta  $d$  que não o contém. Chamamos **parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$**  o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de  $F$  e de  $d$ .

A reta perpendicular à diretriz que contém o foco chama-se **eixo da parábola**. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se **vértice ( $V$ )** é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o foco ( $F$ ) e a intersecção do eixo com a diretriz ( $D$ ).

É possível provar que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Acompanhe alguns exemplos.

### Gráfico da função definida por $f(x) = x^2$

Como já sabemos que é uma parábola, para construir o gráfico, fazemos uma tabela com um número suficiente de valores que permita visualizar a parábola.

$x$	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2
$f(x) = x^2$	4	2,25	1	0	1	2,25	4

Marcamos esses pontos no gráfico e desenhamos uma linha contínua passando por eles, pois estamos trabalhando com números reais.

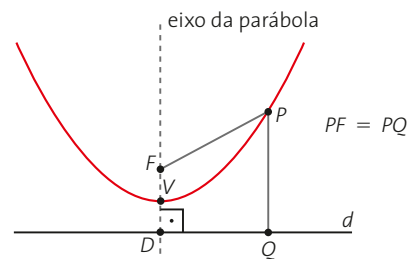
Note que  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ . Assim,

- $f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1)$
- $f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2)$

A curva é **simétrica** em relação ao eixo  $y$ , ou seja, se  $(a, b)$  pertence à curva, o mesmo ocorre com  $(-a, b)$ . Isso decorre do fato de que  $f(x) = x^2$  é uma **função par**, isto é, é uma função que tem a propriedade  $f(-x) = f(x)$  para qualquer  $x$  do domínio.

O domínio dessa função é todo o eixo real e a imagem dessa função é o conjunto dos números reais  $y$ , tal que  $y \geq 0$ .

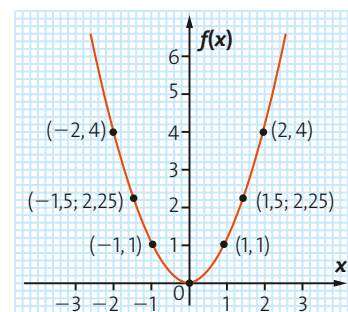
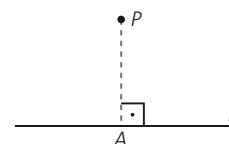
Observe que os pontos  $(0,5; 0,25)$  e  $(-1,5; 2,25)$ , por exemplo, também pertencem à parábola.



#### Você sabia?

A distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento de reta perpendicular baixado do ponto sobre essa reta.

A distância de  $P$  a  $r$  é igual à medida de  $\overline{PA}$ .



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

#### Para refletir

Encontre outro ponto que pertença à parábola acima.

Resposta pessoal.

## Exercícios

28. Trace, no caderno, o gráfico de  $f(x) = x^2$  e determine os valores  $f(x)$  para  $x$  igual a:

a)  $-\frac{1}{2}$   $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

b)  $\frac{5}{2}$   $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$

c)  $-\frac{3}{2}$   $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

Verifique esses valores no gráfico.

Veja os gráficos dos exercícios 28 e 29 no Manual do Professor.

29. Como seria o gráfico de  $f(x) = x^2$  se considerássemos:

- somente os pontos cujas coordenadas são números inteiros?
- somente os pontos cujas coordenadas são números racionais?

## Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2$ , $a \neq 0$

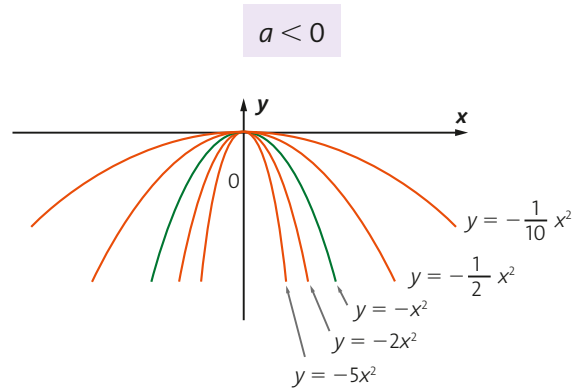
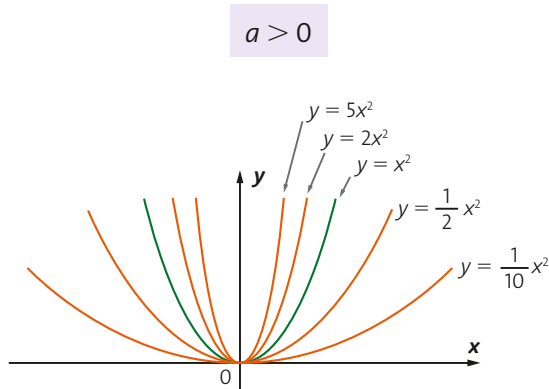
No final do capítulo, na seção *Um pouco mais...*, apresentamos assuntos para aprofundar e complementar esta abordagem.

Examine os gráficos da função definida por  $f(x) = ax^2$ , para  $a = \frac{1}{10}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $a = 1$ ,  $a = 2$  e  $a = 5$ , e para  $a = -5$ ,  $a = -2$ ,  $a = -1$ ,  $a = -\frac{1}{2}$  e  $a = -\frac{1}{10}$ .

### Para refletir

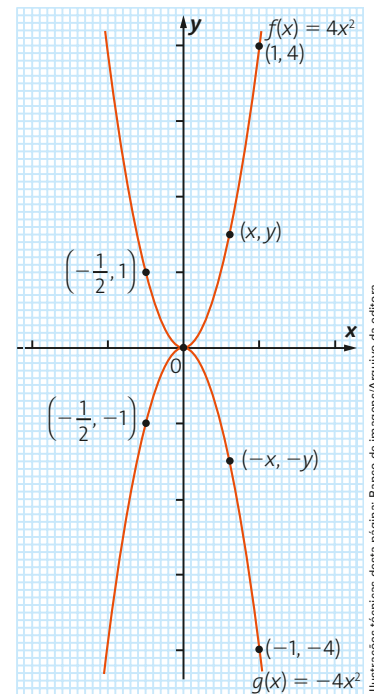
Como são as abscissas e as ordenadas de dois pontos, um em cada parábola e simétricos em relação ao eixo  $x$ ?

Abcissas iguais, ordenadas opostas.



Observe que:

- quando  $a > 0$ , a concavidade está voltada para cima, o menor valor assumido por  $f(x) = ax^2$  é zero, não assume valor máximo, ou seja, é ilimitada superiormente;
- quando  $a < 0$ , a concavidade está voltada para baixo, o maior valor assumido por  $f(x) = ax^2$  é zero, não assume valor mínimo, ou seja, é ilimitada inferiormente;
- todas as parábolas têm o mesmo vértice  $(0, 0)$  e o mesmo eixo de simetria  $x = 0$ ;
- quanto menor o valor absoluto de  $a$ , maior será a abertura da parábola;
- quanto maior o valor absoluto de  $a$ , menor será a abertura da parábola;
- os gráficos das funções quadráticas  $f(x) = ax^2$  e  $g(x) = a'x^2$ , em que  $a$  e  $a'$  são números opostos, são simétricos em relação ao eixo  $x$ . Há uma reflexão em torno do eixo horizontal, ou seja, uma transformação que leva  $(x, y)$  em  $(x, -y)$ . Veja ao lado, por exemplo, os gráficos de  $f(x) = 4x^2$  e  $g(x) = -4x^2$ .



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## Exercício

Veja os gráficos no Manual do Professor.

30. Trace no caderno o gráfico de cada uma das seguintes funções quadráticas em um mesmo sistema de eixos:

a)  $f(x) = 2x^2$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

b)  $f(x) = -2x^2$

d)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

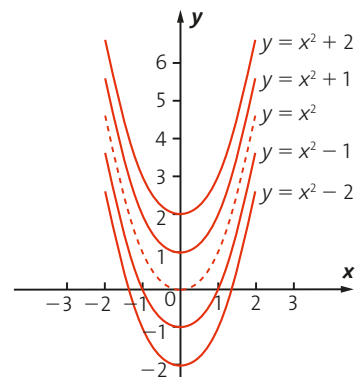


## Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + k$ , com $a \neq 0$

Examine os gráficos das funções quadráticas definidas por:

- $f(x) = x^2 + 2$
- $g(x) = x^2 + 1$
- $h(x) = x^2 - 1$
- $\varphi(x) = x^2 - 2$

Compare-os com o gráfico da função  $f(x) = x^2$  que está tracejado. O eixo de todas as parábolas é  $x = 0$ . O **ponto mínimo** de  $f(x) = x^2 + 2$  é  $(0, 2)$ ; o de  $g(x) = x^2 + 1$  é  $(0, 1)$ ; o de  $h(x) = x^2 - 1$  é  $(0, -1)$  e o de  $\varphi(x) = x^2 - 2$  é  $(0, -2)$ .

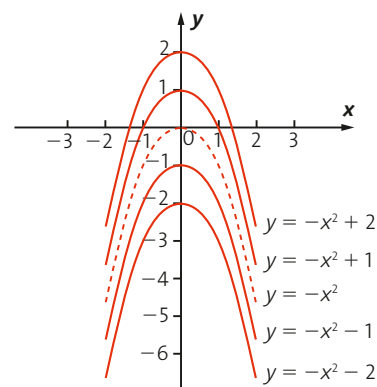


De modo geral, para  $a > 0$ , o **ponto mínimo** de  $f(x) = ax^2 + k$  é  $(0, k)$ .

Observe agora os gráficos das funções quadráticas definidas por:

- $f(x) = -x^2 + 2$
- $g(x) = -x^2 + 1$
- $h(x) = -x^2 - 1$
- $\varphi(x) = -x^2 - 2$

Compare-os com o gráfico de  $f(x) = -x^2$  que está tracejado. O **ponto máximo** de  $f(x) = -x^2 + 2$  é  $(0, 2)$ ; o de  $g(x) = -x^2 + 1$  é  $(0, 1)$ ; o de  $h(x) = -x^2 - 1$  é  $(0, -1)$  e o de  $\varphi(x) = -x^2 - 2$  é  $(0, -2)$ .



De modo geral, para  $a < 0$ , o **ponto máximo** de  $f(x) = ax^2 + k$  é  $(0, k)$ .

Repare que o gráfico de  $f(x) = ax^2 + k$  é congruente ao gráfico de  $f(x) = ax^2$ , porém sua posição é, em valores absolutos,  $k$  unidades acima ou abaixo, conforme  $k$  seja positivo ou negativo. Dizemos que o gráfico de  $f(x) = ax^2 + k$  é o gráfico de  $f(x) = ax^2$  transladado de  $k$  unidades para cima ou para baixo. É uma translação vertical que leva  $(x, y)$  em  $(x, y + k)$ , segundo o eixo  $y$ . A parábola intersecta o eixo  $y$  no ponto  $(0, k)$ .

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## Exercícios



**31.** Escreva no caderno as coordenadas do vértice e o eixo da parábola para cada uma das funções quadráticas:

- |   |  |
|---|--|
| a) $f(x) = 3x^2 + 1$<br>$V(0, 1); x = 0$  | c) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1;$<br>$V(0, -1); x = 0$ |
| b) $g(x) = -3x^2 + 2$<br>$V(0, 2); x = 0$ | d) $\varphi(x) = 3x^2 - 1$<br>$V(0, -1); x = 0$      |

**32.** Quais das funções do exercício anterior possuem um valor mínimo e quais têm um valor máximo? Quais são esses valores? Valor mínimo:  $f(x) \rightarrow 1, h(x) \rightarrow -1,$   
 $\varphi(x) \rightarrow -1;$  valor máximo:  $g(x) \rightarrow 2.$

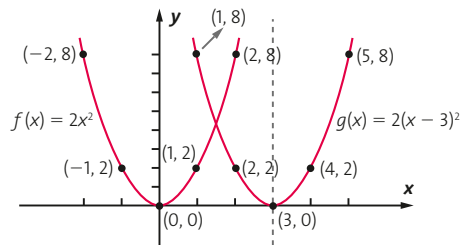
Veja o gráfico no Manual do Professor.

**33.** Esboce no caderno o gráfico de uma parábola dada por  $f(x) = ax^2 + m$ , com  $a$  e  $m$  positivos.

## Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2$ , com $a \neq 0$

Observe a tabela e os gráficos das funções definidas por  $f(x) = 2x^2$  e  $g(x) = 2(x - 3)^2$  traçados em um mesmo sistema de eixos:

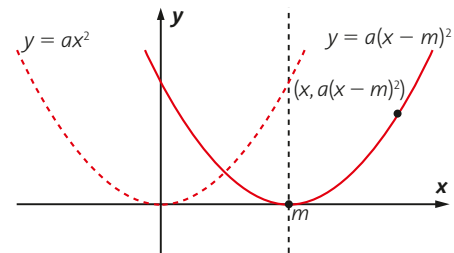
<b>x</b>	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
<b><math>f(x) = 2x^2</math></b>	...	8	2	0	2	8	18	...	...	...
<b><math>g(x) = 2(x - 3)^2</math></b>	...	...	...	18	8	2	0	2	8	...



O eixo da parábola  $f(x) = 2x^2$  é  $x = 0$  e o eixo da parábola  $g(x) = 2(x - 3)^2$  é  $x = 3$ . A parábola é simétrica em relação a esse eixo. A parábola  $g(x) = 2(x - 3)^2$  é congruente à parábola  $f(x) = 2x^2$ , mas sua posição é 3 unidades à direita do gráfico de  $f(x) = 2x^2$ .

De modo geral:

- o gráfico de  $f(x) = a(x - m)^2$  é congruente ao gráfico de  $g(x) = ax^2$ , porém sua posição, em valores absolutos, é  $m$  unidades à direita ou à esquerda do gráfico de  $g(x) = ax^2$ , conforme  $m$  seja positivo ( $m > 0$ ) ou negativo ( $m < 0$ ), respectivamente. Dizemos que o gráfico de  $f(x) = a(x - m)^2$  é o gráfico de  $f(x) = ax^2$  transladado  $m$  unidades à esquerda ou à direita, conforme  $m$  seja negativo ou positivo, respectivamente. É uma translação horizontal que leva  $(x, y)$  em  $(x + m, y)$ .
- se  $a > 0$ , a concavidade da parábola é para cima e ela tem um ponto mínimo  $(m, 0)$ ; se  $a < 0$ , a concavidade é para baixo e a parábola tem um ponto máximo  $(m, 0)$ .
- o gráfico é simétrico em relação à reta  $x = m$  e essa reta é o eixo da parábola.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

## Exercícios

Veja os gráficos no Manual do Professor.

- 34.** Desenhe no caderno o gráfico de cada uma das funções quadráticas abaixo, indicando o eixo da parábola e o ponto máximo ou mínimo da função.

a)  $f(x) = (x - 2)^2$

d)  $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)^2$

b)  $f(x) = -2(x + 1)^2$

e)  $f(x) = 3(x - 2)^2$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$

f)  $f(x) = -5(x - 1)^2$

- 35.** Observando as funções quadráticas do exercício anterior, responda:

- a) Quais delas possuem um ponto máximo? a) Ponto máximo: b(-1, 0); d(-2, 0); f(1, 0).  
 b) Ponto mínimo: a(2, 0); c(1, 0); e(2, 0).  
 c) Esses pontos são os vértices das parábolas.
- b) Quais delas têm um ponto mínimo?
- c) Quais são esses pontos?

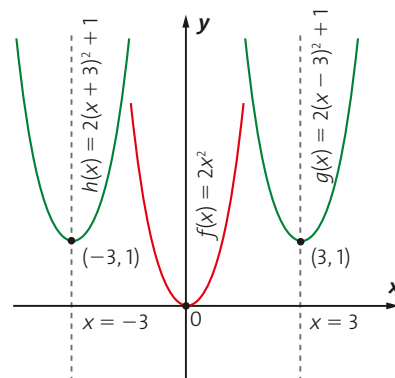
## Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2 + k$ , com $a \neq 0$

O gráfico de  $f(x) = a(x - m)^2 + k$  é congruente ao gráfico de  $f(x) = ax^2$ , tendo  $x$  uma posição que está, em valores absolutos,  $m$  unidades à direita ( $m > 0$ ) ou à esquerda ( $m < 0$ ) do gráfico de  $f(x) = ax^2$  e  $k$  unidades acima ( $k > 0$ ) ou abaixo ( $k < 0$ ) do gráfico de  $f(x) = ax^2$ . O eixo de simetria da parábola dada por  $f(x) = (x - m)^2 + k$  é  $x = m$ .

Observe, por exemplo, os gráficos das funções quadráticas  $f(x) = 2x^2$ ,  $g(x) = 2(x - 3)^2 + 1$  e  $h(x) = 2(x + 3)^2 + 1$ .

A parábola dada por  $g(x) = 2(x - 3)^2 + 1$  está 3 unidades à direita e 1 unidade acima da parábola dada por  $f(x) = 2x^2$  e é simétrica em relação ao eixo  $x = 3$ .

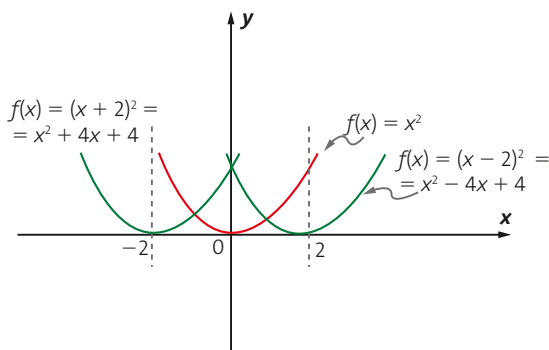
A parábola dada por  $h(x) = 2(x + 3)^2 + 1$  está 3 unidades à esquerda e 1 unidade acima da parábola dada por  $f(x) = 2x^2$  e é simétrica ao eixo  $x = -3$ .



**Observação:** A função  $f(x) = a(x - m)^2 + k$ , com  $a \neq 0$ , é equivalente à função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), em que  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = -\frac{\Delta}{4a}$ . Essa forma é chamada de forma canônica da função quadrática (ver página 139). O vértice da parábola dada por  $f(x) = a(x - m)^2 + k$  é  $V(m, k)$  e sabendo que as coordenadas do vértice são  $(x_v, y_v)$ , então também podemos reescrevê-la como  $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ . O vértice da parábola  $g(x) = 2(x - 3)^2 + 1$  é  $V(3, 1)$  e o vértice da parábola  $h(x) = 2(x + 3)^2 + 1$  é  $V(-3, 1)$ .

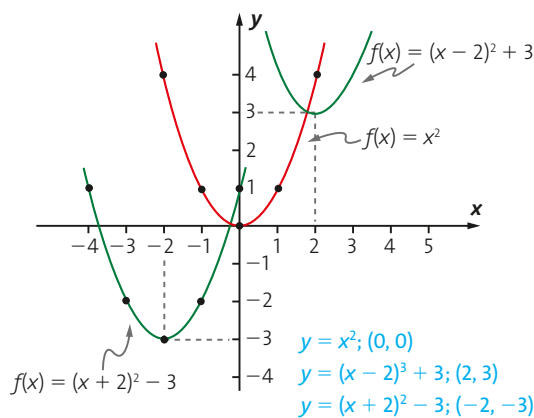
## Exercícios

- 36.** Observe os gráficos das funções quadráticas  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = (x - 2)^2$  e  $f(x) = (x + 2)^2$  e responda:



- Como é o gráfico da função  $f(x) = (x - 2)^2$  em relação ao gráfico de  $f(x) = x^2$ ?  
Ele é deslocado duas unidades para a direita.
- E o da função  $f(x) = (x + 2)^2$  em relação ao gráfico de  $f(x) = x^2$ ?  
Ele é deslocado duas unidades para a esquerda.
- Quais são as coordenadas dos vértices das parábolas  $y = x^2$ ,  $y = (x - 2)^2$  e  $y = (x + 2)^2$ ?  
 $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  e  $(-2, 0)$
- E as do vértice da parábola  $y = (x - m)^2$ ? E a parábola  $y = (x + m)^2$ ?  $(m, 0)$ ;  $(-m, 0)$

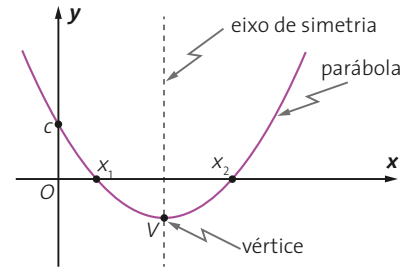
- 37.** Observe os gráficos das funções a seguir:



- Escreva no caderno as coordenadas do vértice de cada parábola.
- Como é o gráfico da função  $f(x) = (x - 2)^2 + 3$  em relação ao gráfico de  $f(x) = x^2$ ? Ele é deslocado duas unidades para cima e duas unidades para a direita.
- E o de  $f(x) = (x + 2)^2 - 3$  em relação ao gráfico de  $f(x) = x^2$ ? Ele é deslocado três unidades para baixo e duas unidades para a esquerda.
- E o de  $f(x) = (x - m)^2 - k$  em relação ao gráfico de  $f(x) = x^2$ ? Ele é deslocado  $k$  unidades para baixo e  $m$  unidades para a direita, se  $k > 0$  e  $m > 0$ .
- Quais são as coordenadas dos vértices da parábola  $y = (x - m)^2 + k$ ?  $(m, k)$

## Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

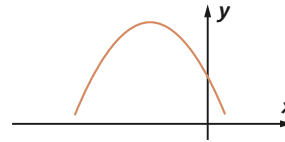
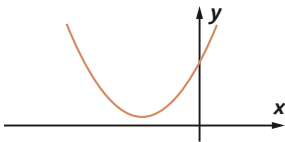
Vamos estudar os efeitos dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  na parábola que é gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .



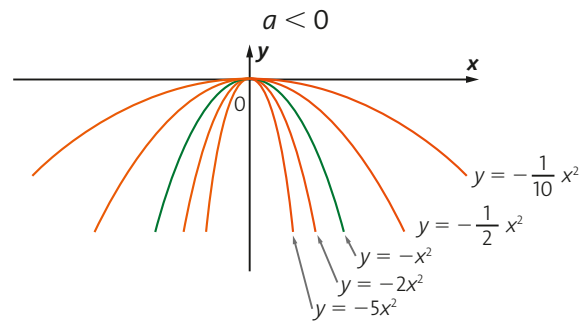
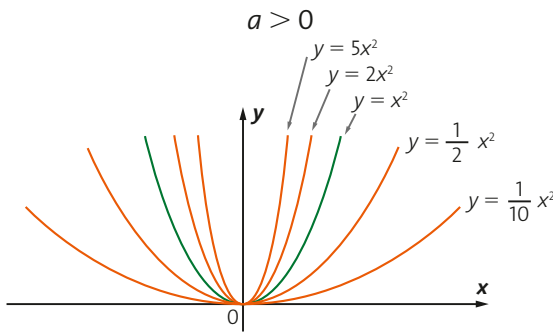
### Parâmetro $a$

O parâmetro  $a$  é responsável pela concavidade e abertura da parábola.

- Se  $a > 0$ , a concavidade é para cima.
- Se  $a < 0$ , a concavidade é para baixo.



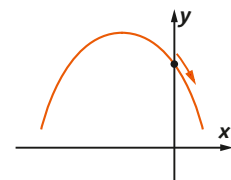
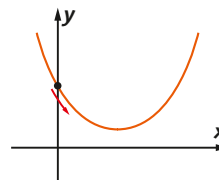
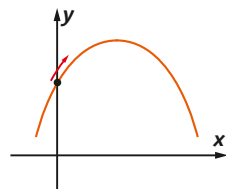
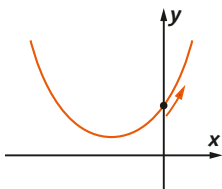
Além disso, como dito na página 114, quanto maior o valor absoluto de  $a$ , menor será a abertura da parábola (parábola mais “fechada”), independentemente da concavidade ser para cima ou para baixo.



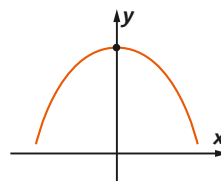
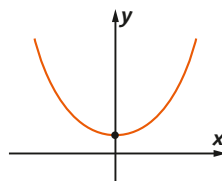
### Parâmetro $b$

O parâmetro  $b$  indica se a parábola intersecta o eixo  $y$  no ramo crescente ou decrescente da parábola.

- Se  $b > 0$ , a parábola intersecta o eixo  $y$  no ramo crescente.
- Se  $b < 0$ , a parábola intersecta o eixo  $y$  no ramo decrescente.

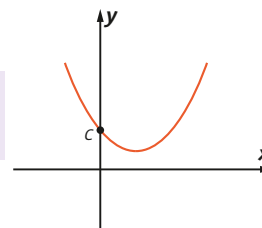


- Se  $b = 0$ , a parábola intersecta o eixo  $y$  no vértice.



## Parâmetro c

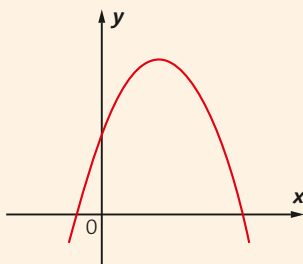
O parâmetro  $c$  indica o ponto onde a parábola intersecta o eixo  $y$ .



A parábola intersecta o eixo  $y$  no ponto  $(0, c)$ , ou seja,  $f(0) = c$ .

## Exercício resolvido

12. Quais são os sinais de  $a$ ,  $b$  e  $c$  no gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  dado abaixo?



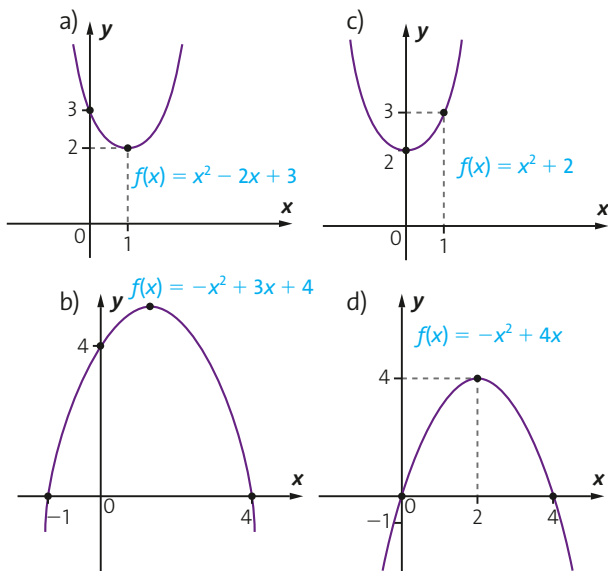
**Resolução:**

- $a < 0$ , pois a concavidade está para baixo.
- $c > 0$ , pois  $f(0) = c$  e a parábola corta o eixo vertical em sua parte positiva.
- A abscissa do vértice é dada por  $-\frac{b}{2a}$ . Portanto,  $a$  e  $b$  têm sinais iguais quando a abscissa do vértice é negativa e têm sinais diferentes quando a abscissa do vértice é positiva. Logo, neste exemplo,  $a$  e  $b$  têm sinais contrários, pois a abscissa do vértice é positiva. Como  $a < 0$ , então  $b > 0$ .

## Exercícios



38. Escreva no caderno a lei da função correspondente a cada gráfico dado, na forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . (Dica: Comece usando a forma canônica e/ou fatorada.)

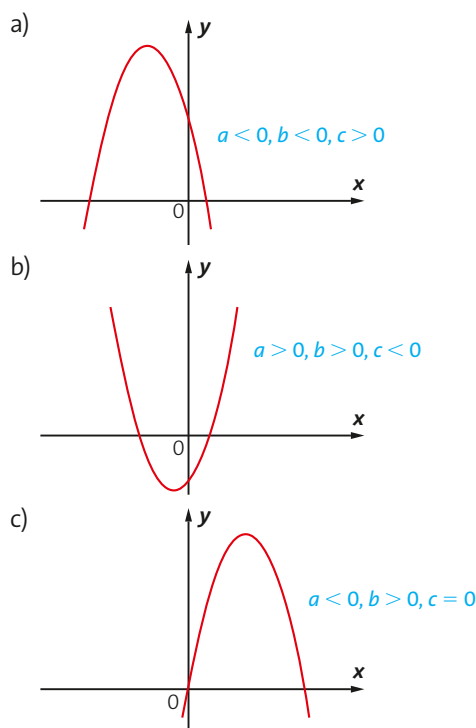


**Fique atento!**

Forma canônica:  $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

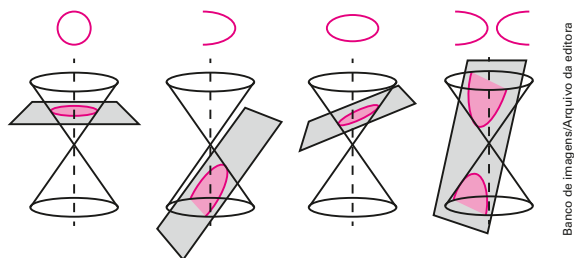
Forma fatorada:  $f(x) = a(x - x') (x - x'')$

39. Quais são os sinais de  $a$ ,  $b$  e  $c$  nos gráficos da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  dados abaixo?



## A parábola

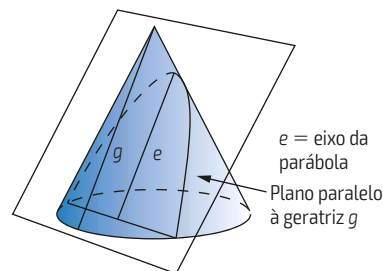
Durante o século IV a.C. os matemáticos gregos descobriram e passaram a estudar as curvas resultantes da seção de um plano em uma superfície cônica de revolução. Nas figuras a seguir aparecem, da esquerda para a direita, os esboços dessas famosas curvas: a circunferência, a parábola, a elipse e a hipérbole.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A descrição completa dessas curvas e suas propriedades foi obtida pelo matemático grego Apolônio, que nasceu em Perga (atualmente, localiza-se próxima da região metropolitana de Antália, Turquia) e viveu no período de 262 a.C. a 190 a.C., aproximadamente. Nesse período, que foi chamado de “idade áurea” da matemática grega, viveram também outras pessoas importantíssimas para a Matemática, das quais duas merecem destaque por suas contribuições: Euclides e Arquimedes.

Apolônio estudou em Alexandria (Egito) e também em Pérgamo (atualmente, localiza-se na região noroeste da cidade de Bergama, Turquia), um importante centro de cultura em sua época, com uma universidade e uma biblioteca que parece ter sido similar à famosa Biblioteca de Alexandria. Durante o período em que esteve em Pérgamo, Apolônio escreveu uma coleção de oito livros chamados de “As Cônicas” e, felizmente, os sete primeiros resistiram ao tempo e podem ser consultados ainda hoje.

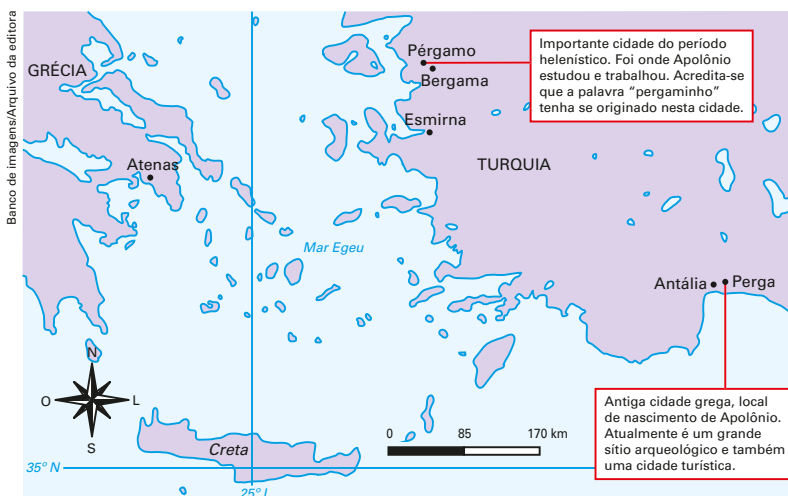


Banco de imagens/Arquivo da editora

Na figura acima, observe com mais detalhes parte do esboço de uma parábola obtida da seção de um plano em uma superfície cônica de revolução e note que o plano corta uma parte da superfície cônica paralelamente a uma geratriz dessa superfície.

Quando você desenha o gráfico de uma função do tipo  $y = ax^2$ , essa curva é exatamente a curva resultante do corte de um cone por um plano paralelo à sua geratriz e, dependendo do ângulo que a geratriz do cone faz com o seu eixo, a parábola será mais aberta ou mais fechada. Portanto, quando a função quadrática foi “inventada” o seu gráfico era uma curva que já era conhecida quase 2 000 anos antes!

### Localização das antigas cidades gregas de Perga e Pérgamo



Fonte: GOOGLE MAPS. Disponível em: <www.google.com.br/maps/@37.3623961,26.1912803,7z>. Acesso em: 13 abr. 2016.





## Gráfico da função quadrática no computador

Agora, vamos aprender a construir gráficos de funções quadráticas usando outro *software* livre, o **GeoGebra**.

Este é um *software* matemático, criado por Markus Hohenwarter, que reúne Álgebra e Geometria. Ele pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e já recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

A instalação desse *software* é simples:

- Acesse o *site* <[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)> e clique em “Baixe agora” para tê-lo instalado no computador, ou em “Comece a criar”, para usá-lo *on-line*.

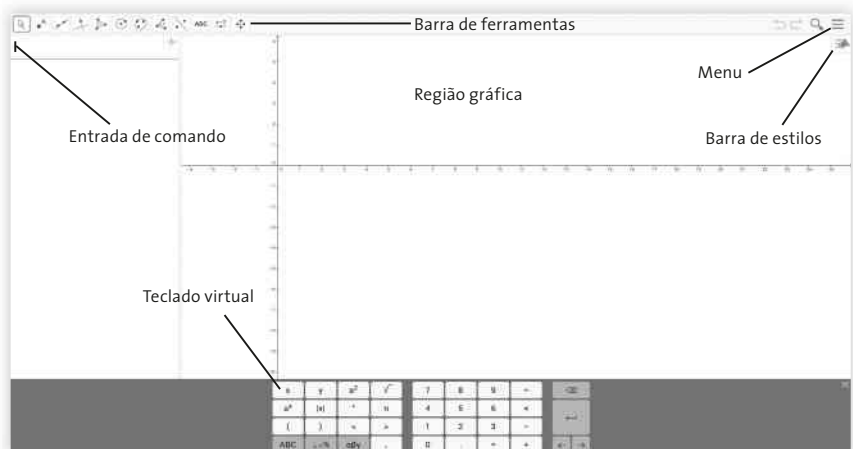
Veja a reprodução da tela a seguir.



Reprodução/Arquivo da editora

Captura de tela do *site* do *software*.

Optando por utilizar a versão *on-line*, você deve clicar no botão “Álgebra”; a tela que abrirá é bem parecida com a reproduzida abaixo.



Reprodução/Arquivo da editora

Captura de tela do *software* no modo Álgebra.

Observe que destacamos o nome das partes que compõem a tela inicial do *software*. Agora, faça o que se pede.

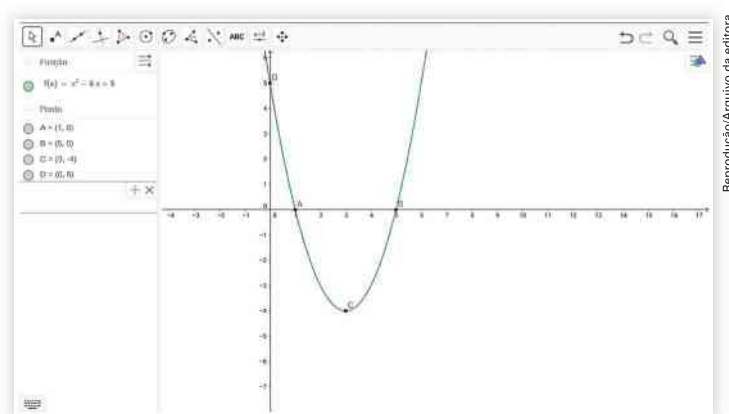
1. Construa o gráfico da função quadrática  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  e destaque alguns pontos importantes. Para isso, realize os passos a seguir.

**1º passo:** No campo Entrada de comando (situado na parte esquerda da tela) digite a função  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  e tecla “Enter”.

**2º passo:** Para obter as raízes da função  $f$ , ainda no campo Entrada de comando, digite **Raiz [f]** e tecla “Enter”. Veja que foram destacados os pontos  $A = (1, 0)$  e  $B = (5, 0)$ , que são as raízes da função.

**3º passo:** Para obter o vértice da parábola, digite **Extremo[f]** e tecla “Enter”. Assim, foi destacado o ponto  $C = (3, -4)$ , que corresponde ao vértice da parábola.

**4º passo:** Agora, vamos determinar o ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas (eixo  $y$ ). Para isso, digite no campo de entrada **Intersecção[f, x = 0]** e tecla “Enter”. Observe que o ponto de intersecção com o eixo  $y$ , ponto  $D = (0, 5)$ , tem como ordenada o valor do termo independente ( $c$ ) da função quadrática.



Captura de tela do 4º passo.

#### Fique atento!

Você pode mover, ampliar ou reduzir a sua imagem utilizando da Barra de ferramentas. Outra opção para aumentar ou diminuir o zoom é utilizar o *scroll* do mouse (aquela “rodinha” que fica na parte superior da maioria dos mouses).

Agora, determine as raízes e o vértice da função utilizando as fórmulas que você já conhece e, em seguida, compare os resultados obtidos no GeoGebra. **Os resultados são os mesmos.**

2. Clique em “Menu”, “Arquivo”, depois em “Novo” e grave o gráfico construído. Para isso você deverá criar uma conta no próprio *site* (para criar uma conta, você já precisa possuir uma conta de *e-mail*). Para realizar a segunda etapa da atividade, siga os passos abaixo.

**1º passo:** Na Barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, inicialmente na opção “Controle Deslizante” , e, em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (Região gráfica); automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”. Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$  (com valor inicial igual a 1). Veja:



Repita a operação e insira novos parâmetros ( $b$  e  $c$ ).

**2º passo:** No campo Entrada de comando digite a função:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

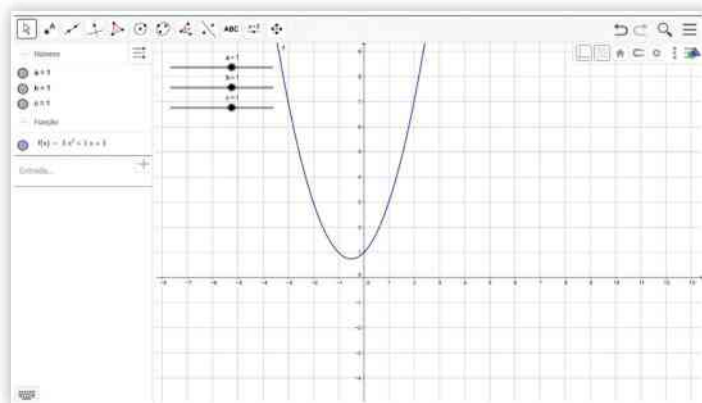
e tecla “Enter”. Observe que \* significa a operação de multiplicação.

Dessa forma, você terá o gráfico da função:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

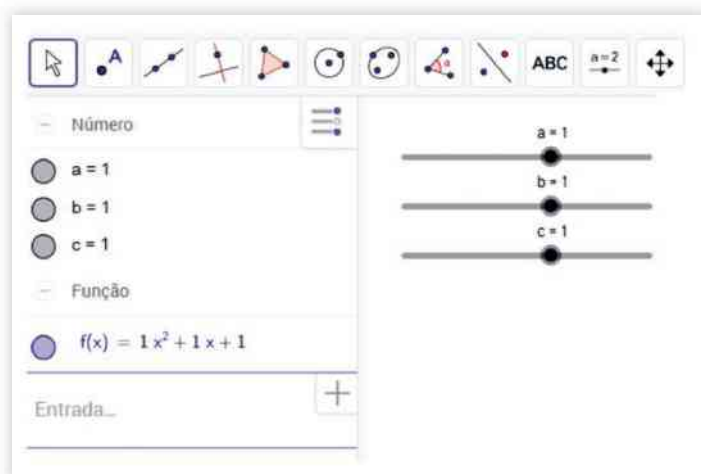
**3º passo:** Do lado direito da Barra de ferramentas clique na Barra de estilos e, depois, em “Exibir ou esconder a malha”. Selecione a malha quadriculada.

Você agora deverá ter uma imagem igual à apresentada abaixo.



Captura de tela do 3º passo.

**4º passo:** Agora você poderá observar significados importantes para os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Clique na bolhinha do controle deslizante de  $a$  e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolhinha para um dos lados).



Captura de tela do 4º passo.

Observe o que acontece com o gráfico da parábola. Repita a operação para os controles deslizantes de  $b$  e  $c$  (utilize um controle deslizante por vez).

Agora, responda:

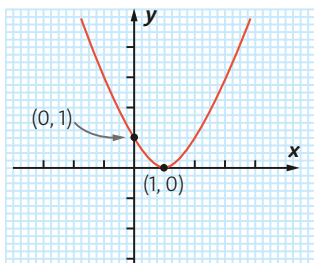
- Qual o efeito do parâmetro  $a$  no gráfico da função? [Altera a abertura e a concavidade da parábola.](#)
- Qual o efeito do parâmetro  $b$  no gráfico da função? [Altera a posição do vértice.](#)
- Qual o efeito do parâmetro  $c$  no gráfico da função? [Altera o ponto onde a parábola cruza o eixo  \$y\$ .](#)

## 6 Determinação algébrica das intersecções da parábola com os eixos

Nos gráficos seguintes, de funções quadráticas, estão indicados os pontos de intersecção de cada parábola com os eixos.

Veja como são determinados algebricamente esses pontos de intersecção a partir da lei da função.

a)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$



*Intersecção com o eixo y:*

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

A parábola intersecta o eixo y em (0, 1).

*Intersecção com o eixo x:*

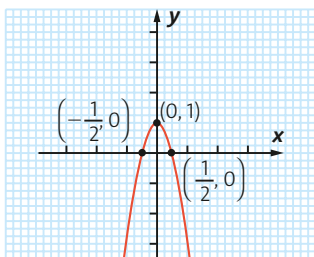
$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \text{ (a equação admite uma raiz dupla)}$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

A parábola intersecta o eixo x em um só ponto: (1, 0). Isso significa que a função possui um zero duplo: 1.

b)  $f(x) = -4x^2 + 1$



*Intersecção com o eixo y:*

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -4 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

A parábola intersecta o eixo y em (0, 1).

*Intersecção com o eixo x:*

$$f(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -4x^2 = -1 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow$$

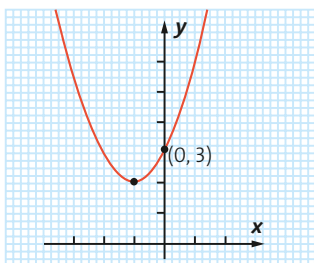
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \text{ (a equação admite duas raízes diferentes)}$$

Observe que, nesse caso,  $\Delta = 0 + 16 = 16$ , ou seja,  $\Delta > 0$ .

A parábola intersecta o eixo x em dois pontos:  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(-\frac{1}{2}, 0)$ .

Isso significa que os zeros da função  $f(x) = -4x^2 + 1$  são  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ .

c)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$



*Intersecção com o eixo y:*

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

A parábola intersecta o eixo y em (0, 3).

*Intersecção com o eixo x:*

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 \text{ ou } \Delta < 0 \text{ (a equação não tem raízes reais)}$$

A parábola não intersecta o eixo x.

A função  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  não admite zeros reais.

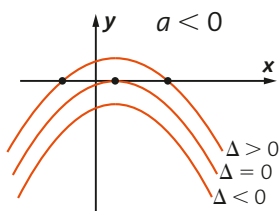
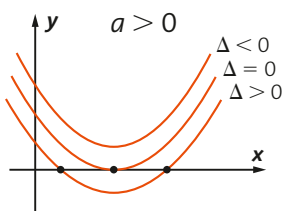
## Conclusões:

- Como já estudado na página 119, a parábola, gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , intersecta o eixo  $y$  sempre no ponto  $(0, c)$ , pois  $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ .
- Essa parábola pode intersectar o eixo  $x$  em um ou dois pontos ou pode não intersectar o eixo  $x$ , dependendo do valor de  $\Delta = b^2 - 4ac$  da equação correspondente.

Veja:  $f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

- $$\begin{cases} \Delta = 0 \rightarrow \text{uma raiz real dupla (a parábola intersecta o eixo } x \text{ em um só ponto)} \\ \Delta > 0 \rightarrow \text{duas raízes reais diferentes (a parábola intersecta o eixo } x \text{ em dois pontos)} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{nenhuma raiz real dupla (a parábola não intersecta o eixo } x \text{)} \end{cases}$$

Graficamente, temos:



### Para refletir

Por que a parábola sempre intersecta o eixo  $y$  em um só ponto?

Porque é o valor da função quando  $x$  vale 0.

44.

- a) Eixo  $x$ :  $(5, 0)$  e  $(6, 0)$ ; eixo  $y$ :  $(0, 30)$ .  
 b) Eixo  $x$ :  $(3, 0)$  e  $(-7, 0)$ ; eixo  $y$ :  $(0, -21)$ .  
 c) Eixo  $x$ :  $(6, 0)$  e  $(-6, 0)$ ; eixo  $y$ :  $(0, -36)$ .  
 d) Eixo  $x$ :  $(\frac{1}{3}, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, 0)$ ; eixo  $y$ :  $(0, 1)$ .

## Exercícios

40. Esboce no caderno o gráfico da função quadrática  $f$  cuja parábola passa pelos pontos  $(3, -2)$  e  $(0, 4)$  e tem vértice no ponto  $(2, -4)$ ; em seguida, verifique qual das seguintes sentenças corresponde a essa função:

- a)  $f(x) = -2x^2 - 8x + 4$   
 x b)  $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$   
 c)  $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$

Veja o gráfico no Manual do Professor.

41. Verifique quais dos seguintes pontos pertencem à parábola que representa graficamente a função  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ :

- x a)  $A(2, 0)$   
 x b)  $B(4, 2)$   
 c)  $C(-1, 10)$

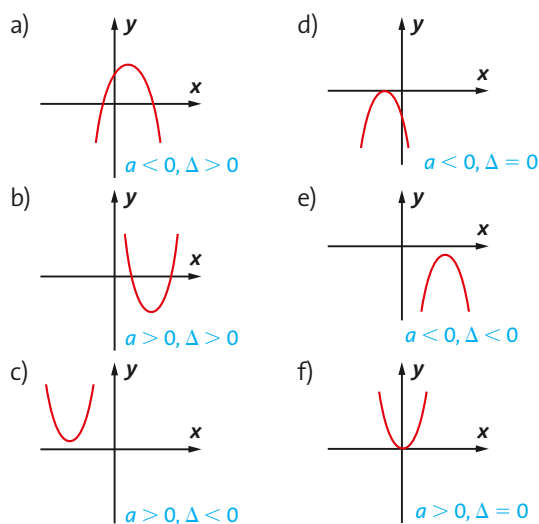
42. Determine o valor de  $m$  para que o ponto  $A(2, 1)$  pertença à parábola que representa graficamente a função dada por  $f(x) = (m + 1)x^2 - 1$ .  $m = -\frac{1}{2}$

43. Determine os zeros das seguintes funções quadráticas:

- a)  $f(x) = x^2 - 11x + 30$   $x' = 6$  e  $x'' = 5$   
 b)  $f(x) = x^2 + 4x - 21$   $x' = 3$  e  $x'' = -7$   
 c)  $f(x) = x^2 - 36$   $x' = 6$  e  $x'' = -6$   
 d)  $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$   $x' = \frac{1}{2}$  e  $x'' = \frac{1}{3}$

44. Em que pontos a parábola de cada função do exercício anterior intersecta os eixos  $x$  e  $y$ ?

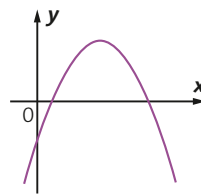
45. Em cada gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $\Delta = b^2 - 4ac$ , descubra se  $a < 0$  ou  $a > 0$  e se  $\Delta > 0$ ,  $\Delta < 0$  ou  $\Delta = 0$ .



46. O gráfico abaixo representa uma função do tipo  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .

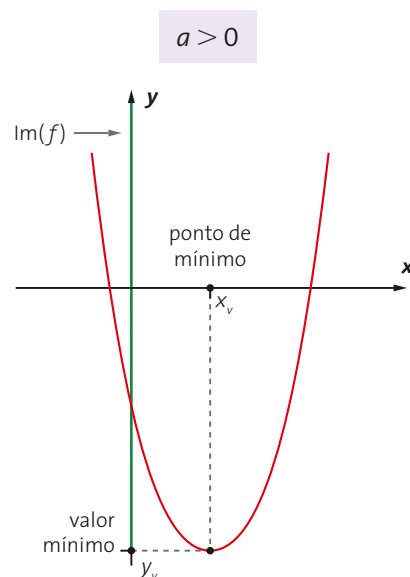
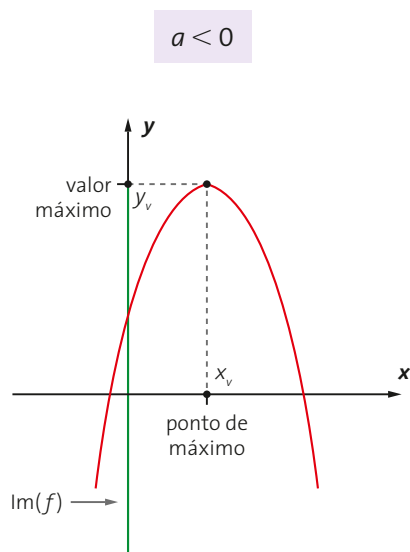
Então, podemos afirmar que:

- a)  $a > 0, b^2 = 4ac, c > 0$  e  $b < 0$ .  
 x b)  $a < 0, b^2 > 4ac, c < 0$  e  $b > 0$ .  
 c)  $a < 0, b^2 < 4ac, c < 0$  e  $b > 0$ .  
 d)  $a < 0, b^2 > 4ac, c > 0$  e  $b > 0$ .  
 e)  $a < 0, b^2 < 4ac, c < 0$  e  $b < 0$ .



## 7 Vértice da parábola, imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática

A determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a **imagem da função**, bem como seu **valor máximo** ou **mínimo**.



Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola, que representa uma função quadrática, é simétrica em relação a um eixo vertical. Determinando a posição desse eixo, encontraremos a abscissa do vértice, e com a abscissa do vértice obteremos a ordenada (veja exemplo *a*). Opcionalmente, podemos usar fórmulas para obter o vértice (veja exemplo *b*).

Examine os exemplos:

a)  $f(x) = 2x^2 - 8x$

1º modo:

Obtendo as raízes, teremos  $x' = 0$  e  $x'' = 4$ . Dada a simetria das parábolas, o

eixo de simetria terá abscissa  $x_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$ .

Substituindo  $x = 2$  na função, obtemos a ordenada do vértice

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -8.$$

Então, o vértice é o ponto  $(2, -8)$ .

2º modo:

Escrevendo na forma canônica, ou seja, determinando  $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ ,

$$\text{temos: } f(x) = 2(x^2 - 4x) = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) = 2(x^2 - 2)^2 - 8$$

Assim,  $x_v = 2$  e  $y_v = -8$ .

A função assume valor mínimo  $-8$  quando  $x = 2$ .

**Observação:** Se o valor mínimo é  $y = -8$ , então  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -8\}$ .

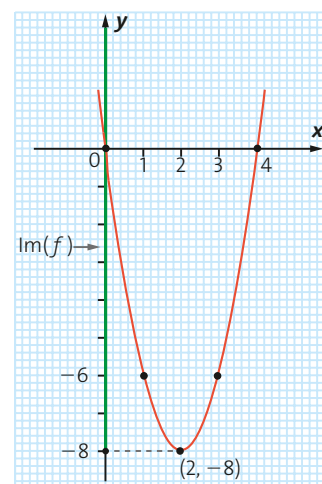
Valor mínimo da função:  $-8$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -8\}$$

Essa função não tem valor máximo. É ilimitada superiormente.

### Fique atento!

Se 2 é a abscissa do vértice, os pontos de abscissas 1 e 3 são simétricos na parábola. Os de abscissas 0 e 4 também.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora



b)  $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

Na forma canônica é possível determinar que  $x_v = -\frac{b}{2a}$  e  $y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$  (veja mais detalhes na página 139); então, o vértice de uma parábola dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  também pode ser calculado assim:  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .

Nesse caso, temos:

$$f(x) = -4x^2 + 4x + 5$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 + 80)}{-16} = \frac{-96}{-16} = 6$$

Então,  $V\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ .

A função assume valor máximo 6 quando  $x = \frac{1}{2}$ .

Logo,  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 6\}$ .

Valor máximo da função: 6

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 6\}$

Essa função não tem valor mínimo. É ilimitada inferiormente.

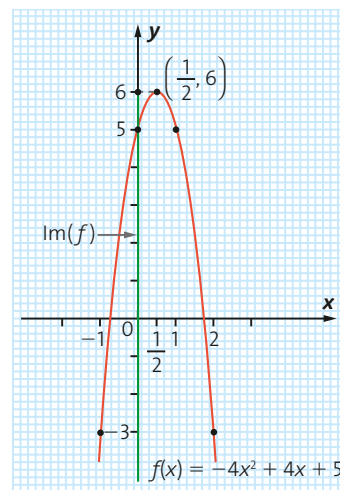
De modo geral, dada a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , se  $V(x_v, y_v)$  é o vértice da parábola correspondente, temos então:

$$a > 0 \Leftrightarrow y_v \text{ é o valor mínimo de } f \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$$

$$a < 0 \Leftrightarrow y_v \text{ é o valor máximo de } f \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$$

**Para refletir**

$x_v$  é a média aritmética dos zeros da função quadrática (se estes existirem). Comprove!



Banco de Imagens/Arquivo da editora

## Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 16

### 13. Física

A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura  $h$ , em metros,  $t$  segundos após o chute, seja dada por  $h = -t^2 + 6t$ , responda:

- Em que instante a bola atinge a altura máxima?
- Qual é a altura máxima atingida pela bola?



Dartfish Solutions/Arquivo da editora

Representação da trajetória da bola em um chute a gol.

**Resolução:**

$$h = -t^2 + 6t$$

Ponto de máximo:  $V(t_v, h_v)$

a) A bola atinge a sua altura máxima quando:  $t_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$

Logo, a bola atinge a altura máxima 3 segundos após o chute.

b) A altura máxima atingida pela bola é:

$$h_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4(-1)} = -\frac{36}{-4} = 9 \text{ ou } h(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 18 = 9$$

A altura máxima atingida pela bola é 9 metros.

14. Determine a  $\text{Im}(f)$  e o valor máximo ou mínimo da função quadrática  $f(x) = x^2 + 4x - 2$ .

**Resolução:**

$$f(x) = x^2 + 4x - 2$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 + 8)}{4} = -6$$

$a > 0$ , então a concavidade é para cima.

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -6\}$$

Valor mínimo de  $f$ :  $-6$

15. Determine  $m$  de modo que a função  $f(x) = (3m - 1)x^2 - 5x + 2$  admita valor máximo.

**Resolução:**

Para que a função  $f(x) = (3m - 1)x^2 - 5x + 2$  admita valor máximo, devemos ter  $a < 0$  (concavidade para baixo).

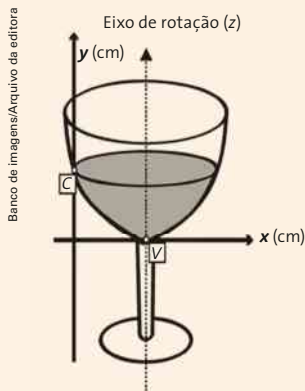
$$\text{Condição: } a < 0 \Leftrightarrow 3m - 1 < 0$$

$$3m - 1 < 0 \Rightarrow 3m < 1 \Rightarrow m < \frac{1}{3}.$$

Logo,  $m$  pode ser qualquer número real menor do que  $\frac{1}{3}$ .

### Resolvido passo a passo

16. (Enem) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo  $z$ , conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei:  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$ , onde  $C$  é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto  $V$ , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo  $x$ .

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

- a) 1.      b) 2.      c) 4.      d) 5.      e) 6.

### 1. Lendo e compreendendo

- a) O que é dado no problema?

É dada a lei da função real que expressa a parábola, a qual forma a parte interior da taça, e a projeção da taça em um plano cartesiano, informando que o vértice da parábola intersecta o eixo  $x$  e o ponto  $C$  intersecta o eixo  $y$ .

- b) O que se pede?

A altura do líquido dentro da taça, em centímetros.

### 2. Planejando a solução

Observando a projeção da taça no plano cartesiano, verifica-se que o vértice da parábola tem como coordenadas  $(x_v, 0)$ , ou seja, o  $y_v = 0$ . A partir dessa informação é possível calcular o valor de  $C$  utilizando as coordenadas do vértice da parábola  $\left[ \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right]$ , chegando a uma equação do 1º grau em que a incógnita será  $C$ , que é a altura do líquido na taça.

### 3. Executando o que foi planejado

$$\text{Se } y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\left[6^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot C\right]}{4 \cdot \frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{-[36 - 6C]}{6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-36 + 6C}{6} = 0 \Rightarrow -6 + C = 0 \Rightarrow C = 6$$

### 4. Verificando

A partir da lei da função  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6$ , calculamos o valor de  $y_v$ :

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-\left[(-6)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 6\right]}{4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-[36 - 36]}{6} = 0$$

que corresponde ao valor obtido a partir do enunciado. Assim, fica verificado que o valor de  $C$  (altura do líquido na taça) é 6 cm.

### 5. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa e.

### 6. Ampliando o problema

- a) Determine o valor de  $V$  demarcado na figura. (2, 0)

- b) *Discussão em equipe*

Troque ideias com seus colegas sobre a importância da Matemática na determinação de medidas para as indústrias, como a altura, o comprimento, o volume, etc., e como elas as utilizam para ter o maior rendimento possível na produção.



47. Determine o vértice  $V$  da parábola que representa a função quadrática:

- a)  $f(x) = x^2 - 2x - 3$   $V(1, -4)$  d)  $y = x^2$   $V(0, 0)$   
 b)  $f(x) = -x^2 + 3x - 5$   $V(1, -4)$  e)  $y = (x - 2)^2 + 3$   $V(2, 3)$   
 c)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$   $V(2, -1)$  b)  $V(\frac{3}{2}, -\frac{11}{4})$

48. Determine o valor de  $k$  para que a função  $f(x) = (2 - k)x^2 - 5x + 3$  admita valor máximo.  
 $k > 2$

49. Qual o valor de  $m$  para que a função  $f(x) = (4m + 1)x^2 - x + 6$  admita valor mínimo?  
 $m > -\frac{1}{4}$

50. Faça no caderno o esboço do gráfico das seguintes funções quadráticas e determine o conjunto imagem de cada uma delas:

- a)  $f(x) = x^2 + 4x + 3$   $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$   
 b)  $f(x) = -x^2 + 6x - 9$   $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$

Veja os gráficos no Manual do Professor.

51. **DESAFIO** A reta, gráfico da função  $f(x) = 3x - 1$ , e a parábola, gráfico da função  $g(x) = x^2 - x + 2$ , têm pontos comuns? Se tiverem, descubra quais são.  
 $\text{Sim, } (1, 2) \text{ e } (3, 8)$

Dois pontos, um ponto ou nenhum ponto.

### Para refletir

Quantos pontos comuns podem ter uma reta e uma parábola?

52. Dada a função quadrática  $f(x) = 2x^2 - x - 3$ , determine:

- a) se a concavidade da parábola definida pela função está voltada para cima ou para baixo;  $\text{Para cima.}$   
 b) os zeros da função;  $x' = \frac{3}{2}$  e  $x'' = -1$  c)  $V(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8})$   
 c) o vértice da parábola definida pela função;  
 d) a intersecção com o eixo  $x$ ;  $(-1, 0)$  e  $(\frac{3}{2}, 0)$   
 e) a intersecção com o eixo  $y$ ;  $(0, -3)$   
 f) o eixo de simetria;  $x = \frac{1}{4}$   
 g)  $\text{Im}(f)$ ;  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{25}{8}\}$   
 h) o esboço do gráfico no caderno.

Veja o gráfico no Manual do Professor.

53. **DESAFIO** Sabe-se que o custo  $C$  para produzir  $x$  unidades de certo produto é dado por  $C = x^2 - 80x + 3\,000$ . Nessas condições, calculem:

- a) a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo; **40 unidades.**  
 b) o valor mínimo do custo. **1400**

54. **DESAFIO** Uma bola é lançada ao ar. Suponham que sua altura  $h$ , em metros,  $t$  segundos após o lançamento, seja  $h = -t^2 + 4t + 6$ . Determinem:

- a) o instante em que a bola atinge a sua altura máxima; **2 s**  
 b) a altura máxima atingida pela bola; **10 m**  
 c) quantos segundos depois do lançamento ela toca o solo. **310 s**

55. **DESAFIO** Determine o conjunto  $A$  para que a função  $f: A \rightarrow [3, 7]$ , definida por  $f(x) = x^2 - 4x + 7$ , seja bijetiva e crescente.  $A = [2, 4]$

56. **DESAFIO** Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R\$ 20,00 mais R\$ 2,00 por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? **15 passageiros.**

57. **DESAFIO** (Faap-SP) Supondo que no dia 5 de dezembro de 1995 o Serviço de Meteorologia do Estado de São Paulo tenha informado que a temperatura na cidade de São Paulo atingiu o seu valor máximo às 14h, e que nesse dia a temperatura  $f(t)$  em graus é uma função do tempo  $t$  medido em horas, dada por  $f(t) = -t^2 + bt - 156$ , quando  $8 < t < 20$ . Obtenha o valor de  $b$ .

- a) 14                      x c) 28                      e) 42  
 b) 21                      d) 35

58. **DESAFIO** (UFPE) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R\$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R\$ 4,00 por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 10 lugares não ocupados o preço de cada passagem será R\$ 240,00). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo? **25 lugares.**

59. **DESAFIO** (Vunesp) Suponha que um grilo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) pela expressão  $h(t) = 3t - 3t^2$ , em que  $h$  é a altura atingida em metros.

- a) Em que instante  $t$  o grilo retorna ao solo? **1 s**  
 b) Qual a altura máxima em metros atingida pelo grilo? **0,75 m**



Dr. John Breckenbury/SP/Latinstock

Grilo. Comprimento: 2,5 cm a 5 cm.

## 8 Estudo do sinal da função quadrática e inequações do 2º grau

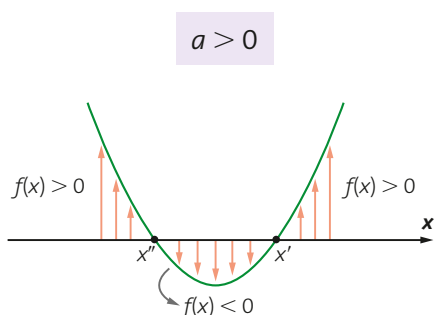
Estudar o sinal da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , significa determinar os valores reais de  $x$  para os quais  $f(x)$  se anula ( $f(x) = 0$ ),  $f(x)$  é positiva ( $f(x) > 0$ ) e  $f(x)$  é negativa ( $f(x) < 0$ ), ou, de modo equivalente, significa resolver inequações do tipo  $f(x) \geq 0$  e  $f(x) < 0$ . Esse estudo vai depender do discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ , da equação do 2º grau correspondente  $ax^2 + bx + c = 0$ , do coeficiente  $a$  e dos zeros da função (se existirem).

Dependendo do discriminante, podem ocorrer três casos e, em cada caso, de acordo com o coeficiente  $a$ , podem ocorrer duas situações:

### 1º caso: $\Delta > 0$

Neste caso:

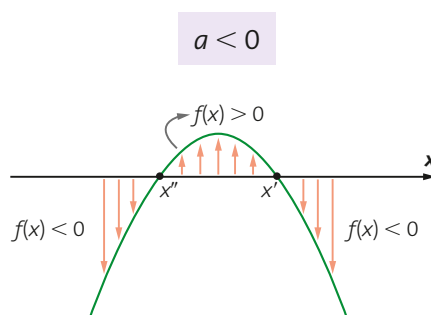
- a função admite dois zeros reais diferentes:  $x'$  e  $x''$ ;
- a parábola, que representa a função, intersecta o eixo  $x$  em dois pontos.



$$f(x) = 0 \text{ para } x = x'' \text{ ou } x = x'$$

$$f(x) > 0 \text{ para } x < x'' \text{ ou } x > x'$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x'' < x < x'$$

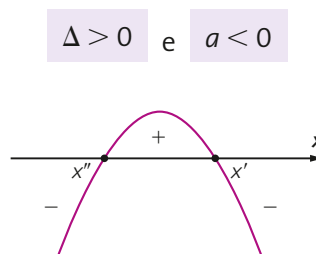
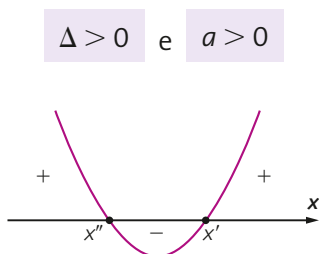


$$f(x) = 0 \text{ para } x = x'' \text{ ou } x = x'$$

$$f(x) > 0 \text{ para } x'' < x < x'$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x < x'' \text{ ou } x > x'$$

Dispositivo prático:



Assim, quando  $\Delta > 0$ ,  $f(x)$  tem o sinal oposto ao de  $a$  quando  $x$  está entre as raízes da equação e tem o sinal de  $a$  quando  $x$  está fora do intervalo das raízes.

#### Para refletir

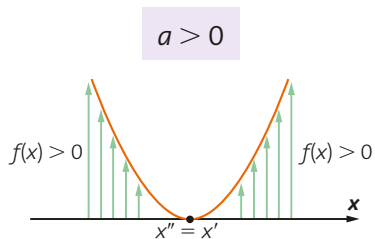
O que significam os sinais + e - no dispositivo prático?

Eles indicam os intervalos nos quais a função assume valores positivos ou negativos.

## 2º caso: $\Delta = 0$

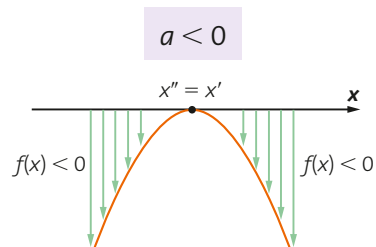
Neste caso:

- a função admite um zero real duplo  $x' = x''$ ;
- a parábola que representa a função tangencia o eixo  $x$ .



$$f(x) = 0 \text{ para } x = x' = x''$$

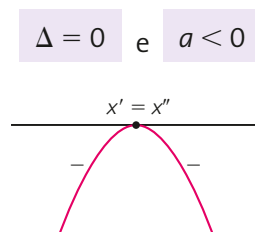
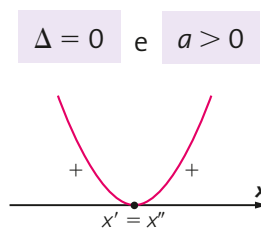
$$f(x) > 0 \text{ para } x \neq x'$$



$$f(x) = 0 \text{ para } x = x' = x''$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x \neq x'$$

Dispositivo prático:

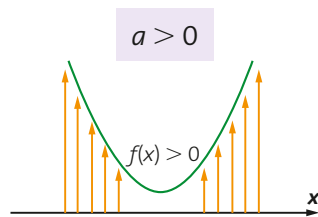


Assim, quando  $\Delta = 0$ ,  $f(x)$  tem o sinal de  $a$  para  $x$  diferente da raiz dupla da equação.

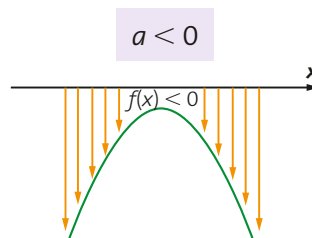
## 3º caso: $\Delta < 0$

Neste caso:

- a função não admite zeros reais;
- a parábola que representa a função não intersecta o eixo  $x$ .

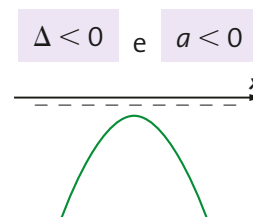
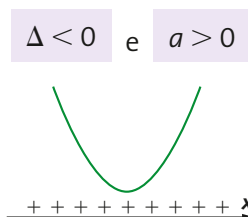


$$f(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ real}$$



$$f(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ real}$$

Dispositivo prático:



Assim, quando  $\Delta < 0$ ,  $f(x)$  tem o sinal de  $a$  para qualquer valor real de  $x$ .

Ilustrações técnicas desta página:  
Banco de Imagens/Arquivo da Editora

## Exercícios resolvidos

17. Resolva as inequações:

a)  $x^2 - 3x + 2 < 0$       b)  $-x^2 + 9 \geq 0$

**Resolução:**

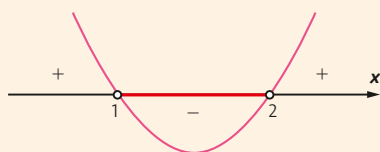
a) Resolver a inequação  $x^2 - 3x + 2 < 0$  significa determinar os valores reais de  $x$  para os quais a função  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  assume valores negativos.

$a = 1 > 0; a > 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1 > 0; \Delta > 0$

As raízes da equação  $x^2 - 3x + 2 = 0$  são  $x' = 1$  e  $x'' = 2$ .

*Dispositivo prático:*



Como devemos ter  $f(x) < 0$ , então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$  é a solução da inequação.

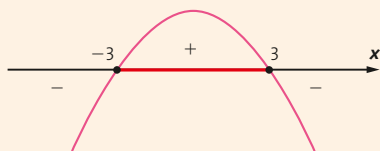
b)  $-x^2 + 9 \geq 0$

$a = -1 < 0; a < 0$

$\Delta = (0)^2 - 4(-1)(9) = 36 > 0; \Delta > 0$

As raízes da equação  $x^2 - 9 = 0$  são  $x' = -3$  e  $x'' = 3$ .

*Dispositivo prático:*



Como devemos ter  $f(x) \geq 0$ , então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$  é a solução da inequação.

18. Resolva a inequação  $-x^2 + 6x - 9 > 0$  ou, de modo equivalente, determine os valores reais para os quais a função  $f(x) = -x^2 + 6x - 9$  é positiva.

**Resolução:**

$-x^2 + 6x - 9 > 0$

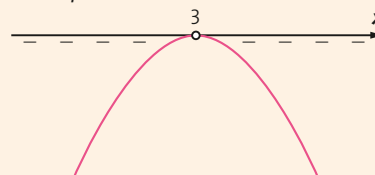
$a = -1 < 0; a < 0$

$\Delta = (6)^2 - 4(-1)(-9) = 36 - 36 = 0; \Delta = 0$

A inequação  $-x^2 + 6x - 9 > 0$  tem uma raiz dupla:

$x' = x'' = 3$

*Dispositivo prático:*



Como devemos ter  $f(x) > 0$ , então  $S = \{ \} = \emptyset$ .

19. Resolva a inequação  $2x^2 - 2x + 5 > 0$  ou, de modo equivalente, determine os valores reais para os quais a função  $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$  é positiva.

**Resolução:**

$2x^2 - 2x + 5 > 0$

$a = 2 > 0; a > 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(2)(5) = 4 - 40 = -36 < 0; \Delta < 0$

A equação  $2x^2 - 2x + 5 = 0$  não tem raízes reais.

*Dispositivo prático:*



Como devemos ter  $f(x) < 0$ , então  $S = \mathbb{R}$ .

## Exercícios

60. a)  $f(x) = 0$  para  $x = -1$  ou  $x = 4$ ;  $f(x) > 0$  para  $x < -1$  ou  $x > 4$ ;  $f(x) < 0$  para  $-1 < x < 4$

b)  $f(x) = 0$  para  $x = -2$  ou  $x = 2$ ;  $f(x) > 0$  para  $x < -2$  ou  $x > 2$ ;  $f(x) < 0$  para  $-2 < x < 2$

60. Estude o sinal das seguintes funções quadráticas:

a)  $f(x) = x^2 - 3x - 4$       b)  $f(x) = x^2 - 4$

61. Para que valores reais de  $x$  a função  $f(x) = x^2 + 7x + 10$  é positiva?  $x < -5$  ou  $x > -2$

62. Para que valores reais de  $x$  a função  $f(x) = x^2 - 2x + 6$  é negativa? Para nenhum valor real de  $x$ .

63. Para quais valores de  $m$  a função  $f(x) = x^2 + 5x + 5m$  assume valores positivos para todo  $x$  real?

$m \in \mathbb{R} \mid m > \frac{5}{4}$

64. Resolva as seguintes inequações do 2º grau em  $\mathbb{R}$ :

a)  $3x^2 - 10x + 7 < 0$       b)  $-4x^2 + 9 \geq 0$

65. Considere a função  $f(x) = x^2 + 1$ . Calculem os valores reais de  $x$  para que se tenha  $f(x+2) < f(2)$ .

$x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0$

66. Resolvam as seguintes inequações do 2º grau em  $\mathbb{R}$ :  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 5\}$

a)  $3(x-1) - 6x \geq 2 - 2x(x-3)$

b)  $2(x-1)^2 < x$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$

c)  $-2x^2 - x + 1 \leq 0$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\}$

67. Qual é o menor número inteiro positivo que satisfaz a condição  $3x \leq \frac{1}{2}x(x-1)$ ? 7

64. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{7}{3}\}$       b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$





## Outros tipos de inequações

Veja como resolver algumas inequações mais complexas.

### Exercícios resolvidos

**20.** Resolva a inequação simultânea  $-8 \leq x^2 - 2x - 8 \leq 0$  em  $\mathbb{R}$ .

**Resolução:**

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 8 \geq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

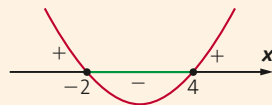
$$x^2 - 2x - 8 \leq 0 \text{ (I)}$$

$$a = 1 > 0$$

$$\Delta = 36 > 0$$

$$x' = 4 \text{ e } x'' = -2$$

$$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$$



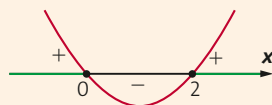
$$x^2 - 2x \geq 0 \text{ (II)}$$

$$a = 1 > 0$$

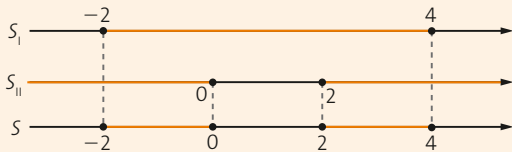
$$\Delta = 4 > 0$$

$$x' = 2 \text{ e } x'' = 0$$

$$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$$



Como temos duas condições que devem ser satisfeitas simultaneamente, vamos determinar a intersecção  $S = S_I \cap S_{II}$ :



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 4\}$$

**21.** Resolva a inequação-produto  $(x - 3)(x^2 + 3x - 4) > 0$ .

**Resolução:**

$$f(x) = x - 3$$

$$a = 1 > 0; a > 0$$

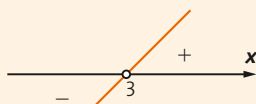
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ (raiz)}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 4$$

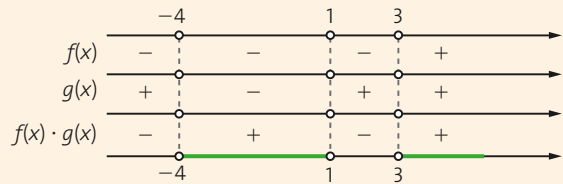
$$a = 1 > 0; a > 0$$

$$\Delta = 25; \Delta > 0$$

$$x' = -1 \text{ e } x'' = -4 \text{ (raízes da equação)}$$



Quadro de resolução:



De acordo com a inequação dada, devemos ter

$f(x) \cdot g(x) > 0$ . Então: **Pelo mesmo processo da multiplicação de números reais: sinais iguais, produto positivo; sinais diferentes, produto negativo.**

**Para refletir**

Como são obtidos os sinais de  $f(x) \cdot g(x)$ ?

**22.** Resolva a inequação-quociente  $\frac{-x + 3}{x^2 - 4x - 5} > 0$  em  $\mathbb{R}$ .

**Resolução:**

$$f(x) = -x + 3$$

$$a = -1; a < 0$$

$$\text{raiz: } x = 3$$

$$g(x) = x^2 - 4x - 5$$

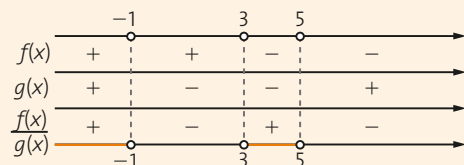
$$a = 1; a > 0$$

$$\Delta = 36 > 0$$

$$\text{raízes: } x' = 5 \text{ e } x'' = -1$$

$$\text{Restrição: } x^2 - 4x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \text{ e } x \neq -1$$

Quadro de resolução:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 3 < x < 5\}$$

**Fique atento!**

Analise com atenção o significado das flechas, das bolinhas vazias (O), das bolinhas cheias (●) e do traço mais forte nos dispositivos práticos.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## Exercícios

69. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$  c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

68. Resolva no caderno em  $\mathbb{R}$ : b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$  d)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x < 4\}$

a)  $-6 < x^2 - 5x < 6$  b)  $\begin{cases} x^2 + 6x + 8 \geq 0 \\ x + 5 < 0 \end{cases}$  c)  $7 \leq x^2 + 3 < 4x$  d)  $\begin{cases} x^2 - 6 \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$

69. Resolva no caderno as seguintes inequações em  $\mathbb{R}$ :

a)  $(x - 3)(-x^2 + 3x + 10) < 0$  b)  $(x^2 - 3x)(-x + 2) \geq 0$  c)  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} > 0$  d)  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} \leq 0$

70. Para quais valores reais de  $x$  o produto  $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 16)$  é positivo?  $x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 4$

## 9 Conexão entre função quadrática e Física

### Movimento Uniformemente Variado (MUV)

O Movimento Uniformemente Variado (MUV) é caracterizado pela função quadrática:

$$f(t) = \frac{1}{2} at^2 + bt + c$$

**Fique atento!**

Dizemos que a função quadrática constitui o modelo matemático para o Movimento Uniformemente Variado.

que fornece a posição de um objeto em certo instante  $t$ .

Nesse caso,  $a$  é a **aceleração**,  $b$  é a **velocidade inicial** (quando  $t = 0$ ) e  $c$  é a **posição inicial** do objeto.

A representação gráfica do Movimento Uniformemente Variado é uma parábola. Se a aceleração for positiva, a concavidade da parábola será voltada para cima; se a aceleração for negativa, a concavidade será voltada para baixo.

Sabemos que velocidade escalar média ( $v$ ) em um intervalo de tempo é igual a:

$$\frac{\text{variação do espaço } (\Delta s)}{\text{tempo de percurso } (\Delta t)}$$

No caso do movimento de um objeto dado por uma função  $f$ , temos que sua velocidade média no intervalo  $[t, t + h]$  é dada por:

$$v = \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

Para  $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$ , temos:

$$f(t + h) = \frac{1}{2} a(t + h)^2 + b(t + h) + c = \frac{1}{2} at^2 + ath + \frac{1}{2} ah^2 + bt + bh + c$$

e

$$f(t + h) - f(t) = \cancel{\frac{1}{2} at^2} + ath + \frac{1}{2} ah^2 + \cancel{bt} + bh + \cancel{c} - \cancel{\frac{1}{2} at^2} - \cancel{bt} - \cancel{c} = ath + \frac{1}{2} ah^2 + bh$$

Assim:

$$\frac{f(t + h) - f(t)}{h} = \frac{ath + \frac{1}{2} ah^2 + bh}{h} = at + \frac{1}{2} ah + b$$

Se tomarmos  $h$  cada vez menor, o valor da velocidade média se aproximará de  $at + b$ . Daí dizermos que  $v(t) = at + b$  é a velocidade do ponto (no MUV) no instante  $t$ .

Observe que, se  $t = 0$ ,  $v(0) = b$ . É por isso que chamamos  $b$  de velocidade inicial.

Na função acima  $v(t) = at + b$ , a constante  $a$  (aceleração) é a taxa de variação da velocidade. Como ela é constante, o movimento chama-se uniformemente variado.

**Fique atento!**

Um movimento é uniforme quando a velocidade média tem o mesmo valor, qualquer que seja o intervalo de tempo considerado.

## Exercícios resolvidos

- 23.** Um automóvel viaja com velocidade de 108 km/h (ou seja, 30 m/s) em um trecho retilíneo de uma estrada quando, subitamente, o motorista vê um acidente na pista. Entre o instante em que o motorista avista o acidente e aquele em que começa a frear, o carro percorre 20 m. Se o motorista frear o carro à taxa constante de  $5,0 \text{ m/s}^2$  mantendo-o em sua trajetória retilínea, ele só evitará o acidente se o tiver percebido a, no mínimo, qual distância?

**Resolução:**

*1ª maneira:*

Como o carro freia com aceleração constante de  $5 \text{ m/s}^2$ , podemos escrever sua aceleração como sendo  $a = -5 \text{ m/s}^2$ . Assim, o tempo de frenagem será dado por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{-30}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{-30}{-5} = 6 \text{ s}$$

Logo,  $\Delta t = 6 \text{ s}$

Como a distância percorrida é dada por

$$S = \frac{at^2}{2} + v_0t + s_0 \text{ e temos que } s_0 = 20 \text{ m,}$$

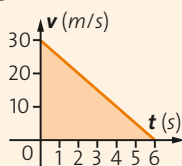
$v_0 = 30 \text{ m/s}$ ,  $t = 6 \text{ s}$ ,  $a = -5 \text{ m/s}^2$ , calculamos  $S$ :

$$S = \frac{(-5)6^2}{2} + 30 \cdot 6 + 20 = -90 + 180 + 20 = 110$$

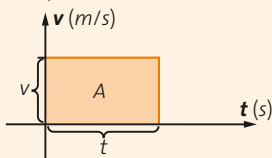
Logo,  $S = 110 \text{ m}$ .

*2ª maneira:*

Construímos o gráfico da velocidade  $\times$  tempo.



É possível provar que a superfície compreendida entre o gráfico e os eixos coordenados tem **área A numericamente igual ao deslocamento S** (basta observar que  $A = vt$ , mas  $v = \frac{S}{t}$ . Assim,  $\frac{S}{t} \cdot t$ , ou seja,  $A = S$ ).



Nesse caso,

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{60 \cdot 30}{2} = 90. \text{ Logo, } S = 90 \text{ m.}$$

Como o automóvel percorre uma distância de 20 m, antes de acionar os freios, a distância total percorrida será de  $D = 20 \text{ m} + 90 \text{ m} = 110 \text{ m}$ .

Portanto, o motorista só evitará o acidente caso o tenha avistado a pelo menos 110 m de distância.

- 24.** Um automóvel, partindo do repouso, mantém aceleração constante de  $4 \text{ m/s}^2$  durante 5 s. A partir daí, mantém velocidade constante durante 10 s, quando começa a frear, variando sua velocidade em  $4 \text{ m/s}$  a cada segundo, até parar. Calcule:

- a distância total percorrida pelo automóvel durante todo o seu percurso;
- a velocidade média desse automóvel durante esse intervalo de tempo.

**Resolução:**

a) *1ª maneira:*

Neste caso temos três tipos de movimentos independentes: na primeira parte, o automóvel mantém velocidade variável com aceleração constante (MUV – Movimento Uniformemente Variado). Na segunda parte ele mantém velocidade constante (MU – Movimento Uniforme). E, finalmente, na terceira parte ele volta a acelerar (MUV). Assim, temos:

*Parte 1: Movimento Uniformemente Variado (acelerado)*

Temos:

$$v_0 = 0$$

$$t = 5 \text{ s}$$

$$a = 4 \text{ m/s}^2$$

$$s_0 = 0$$

Então:

$$S_1(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + s_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1(5) = \frac{4 \cdot 5^2}{2} + 0 \cdot 5 + 0 = \frac{4 \cdot 25}{2} = 50$$

Assim,  $S_1 = 50 \text{ m}$ .

Como  $v = v_0 + at$ , temos  $v_1 = 0 + 4 \cdot 5 = 20$ . Logo,  $v_1 = 20 \text{ m/s}$ .

*Parte 2: Movimento Uniforme*

Temos:

$$v = \text{constante}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$s_0 = 0$$

$$\text{Mas, } S_2(t) = s_0 + vt.$$

Como  $v = v_1 = 20 \text{ m/s}$ , vem:

$$S_2 = 0 + 20 \cdot 10 = 200$$

Logo,  $S_2 = 200 \text{ m}$ .

*Parte 3: Movimento Uniformemente Variado (retardado)*

Temos:

$$a = -4 \text{ m/s}^2 \text{ (movimento retardado)}$$

$$v_0 = 20 \text{ m/s}$$

$$v = 0 \text{ m/s}$$

$$s_0 = 0$$

Então:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow -4 = \frac{-20}{t} \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

$$S_3(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + s_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3(5) = \frac{-4 \cdot 5^2}{2} + 20 \cdot 5 + 0 = -50 + 100 = 50$$

Logo,  $S_3 = 50 \text{ m}$ .

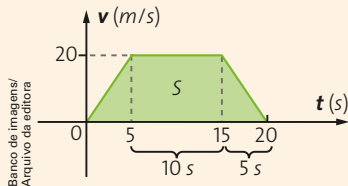
Para calcular a distância total percorrida, devemos somar todos os deslocamentos:

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\text{Logo, } S = 50 + 200 + 50 = 300, \text{ ou seja, } S = 300 \text{ m.}$$

*2ª maneira:*

Da Física temos que em um gráfico da velocidade por tempo a área da superfície compreendida entre o gráfico e os eixos coordenados é numericamente igual ao deslocamento. Neste caso:



$$\text{Área do trapézio: } A = \frac{(B + b)a}{2};$$

$$B = 20, b = 10 \text{ e } a = 20.$$

$$A = \frac{(20 + 10)20}{2} = \frac{600}{2} = 300.$$

Portanto,  $S = 300 \text{ m}$ .

- b) Vamos calcular a velocidade média desse automóvel durante esse intervalo de tempo.

*1ª maneira:*

$$v_m = \frac{S}{t} = \frac{300 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 15 \text{ m/s, ou seja,}$$

$$v_m = 15 \text{ m/s.}$$

*2ª maneira:*

$$v_m = \frac{300 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 15 \text{ m/s, ou seja, } v_m = 15 \text{ m/s.}$$

- 25.** Uma partícula está em movimento sobre um eixo a partir do ponto de abscissa  $-12$ , com velocidade inicial de  $7 \text{ m/s}$  e aceleração constante de  $-2 \text{ m/s}^2$ . Em quanto tempo a trajetória mudará de sentido?

**Resolução:**

*1ª maneira:*

A trajetória da partícula é dada em função do tempo por:

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$$

Nesse caso,  $a = -2$ ,  $b = 7$  e  $c = -12$ .

Assim, temos:

$$f(t) = -t^2 + 7t - 12$$

Ponto de máximo:

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{-7}{-2} = 3,5$$

*2ª maneira:*

Nesse instante, a velocidade é zero, ou seja,  $v(t) = 0$ .

Então:

$$v(t) = at + b \Rightarrow 0 = -2t + 7 \Rightarrow t = 3,5 \text{ s}$$

Portanto, depois de  $3,5 \text{ s}$  a partícula mudará de sentido.

## Exercícios

- 71.** Uma partícula é colocada em movimento sobre um eixo. Calcule em quanto tempo a trajetória mudará de sentido nos seguintes casos:

- a) a posição inicial é igual a  $-3$ , a velocidade inicial é de  $4 \text{ m/s}$  e a aceleração constante é de  $-2 \text{ m/s}^2$ ;  $t = 2 \text{ s}$
- b) a posição inicial é igual a  $-16$ , a velocidade inicial é de  $12 \text{ m/s}$  e a aceleração constante é de  $-4 \text{ m/s}^2$ ;  $t = 3 \text{ s}$
- c) a posição inicial é igual a  $15$ , a velocidade inicial é de  $-8 \text{ m/s}$  e a aceleração constante é de  $2 \text{ m/s}^2$ ;  $t = 4 \text{ s}$
- d) a posição inicial é igual a  $-36$ , a velocidade inicial é de  $-18 \text{ m/s}$  e a aceleração constante é de  $4 \text{ m/s}^2$ .

- 72.** Um carro de Fórmula 1, partindo do repouso, mantém aceleração constante de  $5 \text{ m/s}^2$  durante  $8 \text{ s}$ . A partir daí, mantém velocidade constante durante  $20 \text{ s}$ , quando começa a acelerar novamente, variando sua velocidade em  $5 \text{ m/s}$ , a cada segundo, até atingir a velocidade de  $80 \text{ m/s}$ . Calcule a distância total percorrida pelo carro durante todo o seu percurso. **1440 m**

- 73.** Partindo do repouso, um avião percorre a pista de decolagem com aceleração constante e atinge a velocidade de  $360 \text{ km/h}$  ( $100 \text{ m/s}$ ) em  $20 \text{ s}$ . Calcule:
- a) o valor da aceleração desse avião ( $\text{m/s}^2$ );  $a = 5 \text{ m/s}^2$
  - b) o comprimento mínimo da pista de decolagem para que o avião consiga decolar.

$$t = 4,5 \text{ s}$$

Comprimento mínimo da pista: **3 km**

## 10 Conexão entre função quadrática e progressão aritmética

Já estudamos no capítulo anterior que uma função afim  $f(x) = ax + b$  transforma uma progressão aritmética em outra progressão aritmética. Estudamos também que essa propriedade caracteriza a função afim, ou seja, se uma função tem essa propriedade, ela é considerada afim e, reciprocamente, se ela for afim, terá essa propriedade.

Vejam agora o que ocorre com a função quadrática.

Consideremos a função quadrática  $f(x) = x^2$  e a progressão aritmética:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n + 1, \dots$$

e vejamos o que ocorre com:

- |               |                 |                               |
|---------------|-----------------|-------------------------------|
| • $f(1) = 1$  | • $f(7) = 49$   | • ...                         |
| • $f(3) = 9$  | • $f(9) = 81$   | • $f(2n - 1) = 4n^2 - 4n + 1$ |
| • $f(5) = 25$ | • $f(11) = 121$ | • $f(2n + 1) = 4n^2 + 4n + 1$ |

Assim, obtemos a sequência:

$$1, 9, 25, 49, 81, 121, \dots, 4n^2 - 4n + 1, 4n^2 + 4n + 1, \dots$$

Essa nova sequência não é uma progressão aritmética, pois a diferença entre dois termos consecutivos não é constante. Mas, se tomarmos as diferenças entre os termos consecutivos dessa nova sequência, teremos:

$$8, 16, 24, 32, 40, \dots, 8n, \dots$$

que é uma progressão aritmética de razão 8.

É possível provar que isso ocorre não só com a função quadrática mais simples,  $f(x) = x^2$ , mas com qualquer função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Essa propriedade caracteriza a função quadrática, ou seja, se  $f$  é uma função quadrática, então ela transforma uma PA em uma sequência cujas diferenças dos termos consecutivos formam uma PA. E, reciprocamente, se uma função transforma uma PA em uma sequência cujas diferenças dos termos consecutivos também formam uma PA, então essa função é uma função quadrática.

### Exercícios

76. Exercício 74: razão da primeira PA: 1; razão da última PA: 2;  $a = 1$ ;  $2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = 2$  (correto)

Exercício 75: razão da primeira PA: 2; razão da última PA: 8;  $a = 1$ ;  $2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = 8$  (correto)



**74.** Dada a progressão aritmética  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n + 1, \dots$  e a função quadrática  $f(x) = x^2 + 1$ , verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots, f(n), f(n + 1), \dots$  é uma PA. **É uma PA de razão 2.**

**75.** Dada a progressão aritmética  $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n + 1, \dots$  e a função quadrática  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ , verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de  $f(1), f(3), f(5), f(7), f(9), f(11), \dots, f(2n - 1), f(2n + 1), \dots$  é uma PA. **É uma PA de razão 8.**

**76.** É possível provar que, se  $r$  é a razão da primeira PA, então a razão da última PA será  $2ar^2$ . Constate esse fato nos dois exercícios anteriores.

**77.** Dada a progressão aritmética  $1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots, 3n + 1, \dots$  e a função quadrática  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ :

- verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de  $f(1), f(4), f(7), f(10), f(13), f(16), \dots, f(3n + 1), \dots$  é uma PA; **É uma PA de razão 72.**
- determine as razões da primeira e da última PA. Constate que, se  $r$  é a razão da primeira PA, a razão da última pode ser encontrada por  $2ar^2$ . **Razão da primeira PA: 3; razão da última PA: 72;  $a = 4$ ;  $2ar^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3^2 = 72$  (correto).**



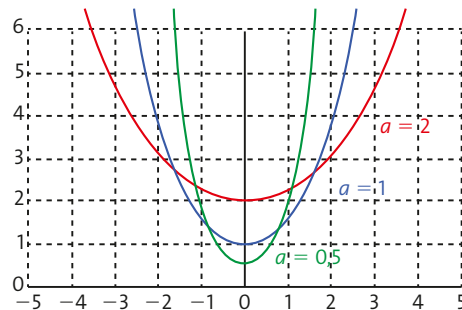
## As curvas que confundiram os matemáticos

É muito comum nos depararmos com situações (mesmo em vestibulares) envolvendo certas curvas que são tratadas como parábolas.

Galileu Galilei (1564-1642) propôs a conjectura de que um fio flexível suspenso entre dois pontos sob a ação exclusiva da gravidade descreveria uma parábola. A situação suposta por Galileu gera uma curva muito parecida com parábola, mas não é parábola.

Em 1646, aos 17 anos, o matemático Christiaan Huygens mostrou que esse tipo de curva não era uma parábola, mas outra curva com uma equação um pouco complicada para o Ensino Médio, pois envolve o conceito de relações trigonométricas hiperbólicas. Em todo caso, são curvas de equações do tipo  $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ .

Leibniz (1646-1716) batizou essa curva com o nome de **catenária** (derivada do latim: cadeia). Veja a representação da catenária e de seu parâmetro  $a$ :



O cosseno hiperbólico ou  $\cosh$  e o seno hiperbólico ou  $\sinh$  são funções que originam hipérbolas. Suas leis de formação são expressas por:

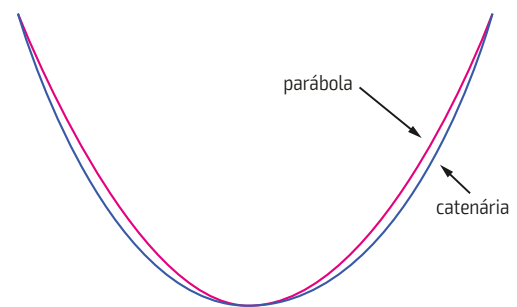
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ e } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Estas funções são obtidas da representação de

$$f(x) = e^x, \text{ uma vez que: } e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \text{ com } a = 0,5, a = 1, a = 2, \dots$$

Para melhor compreensão, diríamos que a catenária é a forma de uma corda de suspensão ideal para dois pontos. A expressão “corda de suspensão ideal” significa que a corda é perfeitamente flexível e não extensível e com uma densidade uniforme. A catenária (em azul) e a parábola (em rosa) são quase coincidentes, e por isso é compreensível o erro de Galileu. No entanto, as duas curvas são diferentes.



Corrente suspensa.

Uma corrente presa a dois postes de mesma altura descreve uma curva. Se nenhuma outra força atuar sobre essa corrente além da força da gravidade, ela estará descrevendo uma catenária e não uma parábola ou outra curva qualquer.



## Uma catenária pode se transformar em parábola?

Parece incrível, mas pode. Quando se aplicam cargas distribuídas em intervalos iguais, a catenária assume a configuração de uma parábola. Um exemplo é a ponte 25 de Abril, em Lisboa, que podemos ver na fotografia a seguir.



Ponte 25 de Abril em Lisboa, Portugal. Fotografia de 2012.

A catenária tem grande aplicação na arquitetura, na engenharia de um modo geral e até nas artes.

Vamos conhecer a *Gaudí Chair*, uma cadeira que pesa apenas 1 kg e foi projetada pelo designer Bram Geenen. A peça é feita com fibras de carbono, náilon e vidro, unidas por um jato de *laser*. Seu projeto foi desenvolvido com a ajuda de um *software* que distribuiu linhas verticais e horizontais ao longo da superfície do objeto, formando um feixe de grades. É na construção do “esqueleto” que entra a teoria da catenária, curva muito explorada pelo arquiteto catalão Antoni Gaudí (1852-1926), homenageado no nome da obra de arte. O modo de fabricar a estrutura que sustenta a cadeira é obtido por um raciocínio análogo ao de suspender o conjunto de grades no teto e deixar que a gravidade atue sobre ele, adquirindo o formato mais lógico e a força máxima necessária, como acontece com estruturas suspensas como as descritas pela equação de uma catenária.



*Gaudí Chair*, cadeira projetada pelo designer Bram Geenen, 2010.

### Trabalhando com o texto

1. Observando a representação da catenária, presente no texto, é correto afirmar que essa curva possui um eixo de simetria? *Sim, assim como a parábola, a catenária possui um eixo de simetria que passa pelo seu vértice.*
2. Observe o gráfico da página 141 e responda: quanto maior for o parâmetro  $a$  na equação da catenária, a curva se aproxima ou se afasta do eixo de simetria? *Afasta-se.*
3. Na brincadeira de “pular corda”, se a extremidade dessa corda está presa a uma mesma altura e a corda não toca o solo, qual a curva que ela descreve? *Catenária.*

### Pesquisando e discutindo

4. Pesquise outras obras arquitetônicas nas quais apareçam arcos descritos que podem ser relacionados a uma catenária.
5. Pesquise a obra do arquiteto Antoni Gaudí e exemplos de como ele empregava a catenária em suas obras.

### Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações e curiosidades sobre parábolas e catenárias em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acessos em: 21 mar. 2016)

- SOS Matemática: <[sosmatematica.com.sapo.pt/mundomatematico/catenaria.htm](http://sosmatematica.com.sapo.pt/mundomatematico/catenaria.htm)>.
- Apresentação de dissertação de mestrado em ensino de ciências e matemática. “*Parábola e catenária: histórias e aplicações*”: <[www.nilsonjosemachado.net/sema20081125.pdf](http://www.nilsonjosemachado.net/sema20081125.pdf)>.
- *A Arte de construir pontes*. TV escola: <[www.tvescola.org.br/matematica-em-toda-parte-2/fasciculos/transporte/](http://www.tvescola.org.br/matematica-em-toda-parte-2/fasciculos/transporte/)>.
- *Parábola e catenária: histórias e aplicações*. Talavera, Leda Maria Bastoni; orientação Antonio Carlos Brolezzi. São Paulo: s.n., 2008.
- *Manual do Engenheiro*. (Vários autores). Rio de Janeiro: Globo, 1964.



## Determinação dos zeros por completamento de quadrado

Assunto  
opcional

O completamento de quadrado é um procedimento muito útil no estudo da função quadrática. Analise alguns exemplos:

$$a) x^2 + 6x = \underbrace{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2}_{(x+3)^2} - 3^2 = (x+3)^2 - 9$$

(somamos e subtraímos  $3^2$ )

Logo,  $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$ . (Veja a figura ao lado.)

$$b) x^2 - 10x = \underbrace{x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2}_{(x-5)^2} - 5^2 = (x-5)^2 - 25$$

(somamos e subtraímos  $5^2$ )

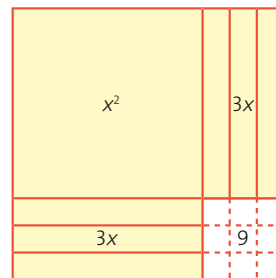
Assim,  $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$ .

$$c) x^2 - \frac{5}{2}x = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}$$

$$d) x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$$

$$e) x^2 - \frac{4}{3}x = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$$

$$f) 2x^2 + 8x + 3 = 2(x^2 + 4x) + 3 = 2[(x+2)^2 - 4] + 3 = 2(x+2)^2 - 8 + 3 = 2(x+2)^2 - 5$$



Faltam 9 regiões quadradas de área 1. Por isso somamos e subtraímos 9 para "completar o quadrado".

De modo geral, temos que:

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} \quad \left(\text{somamos e subtraímos } \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$$

### Fique atento!

Somar e subtrair um mesmo número em uma expressão não altera seu valor.

## Exercício resolvido

**26.** Determine os zeros das seguintes funções quadráticas, usando completamento de quadrados.

a)  $f(x) = x^2 + 6x + 5$       b)  $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

**Resolução:**

a)  $f(x) = x^2 + 6x + 5$

Equação do 2º grau correspondente:

$$x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9 \Rightarrow (x+3)^2 = 4$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, temos:

$$(x+3) = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 2 \Rightarrow x = -1 \\ \text{ou} \\ x+3 = -2 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

Zeros da função:  $-1$  e  $-5$ .

*Verificação:*

$$f(x) = x^2 + 6x + 5$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 6(-1) + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-1) = 1 - 6 + 5 = 0$$

$$f(-5) = (-5)^2 + 6(-5) + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-5) = 25 - 30 + 5 = 0$$

b)  $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

Equação do 2º grau correspondente:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0.$$

Essa equação é equivalente a outra em que dividimos todos os termos por 2:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = -\frac{3}{2}$$

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{25}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x - \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Zeros da função:  $\frac{3}{2}$  e  $1$ .

*Verificação:*

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 3 = 0$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 \Rightarrow f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$$

## Forma canônica da função quadrática

Dada a função quadrática  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$$

As duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas duas parcelas do desenvolvimento do quadrado:

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \cancel{2} \cdot x \cdot \frac{b}{\cancel{2}a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Completando o quadrado, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \text{ (forma canônica)}$$

ou ainda:

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Chamando de  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , concluímos que  $k = f(m)$ .

Assim, para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , podemos escrever qualquer função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  da seguinte maneira:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k, \text{ em que } m = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = f(m)$$

(outra maneira de escrever a forma canônica)

Por exemplo, vamos escrever a função  $f(x) = x^2 - 4x - 6$  na forma canônica.

*1ª maneira:*

Completando o quadrado:

$$x^2 - 4x - 6 = (x^2 - 4x) - 6 = (x^2 - 4x + 4) - 4 - 6 = (x - 2)^2 - 10$$

$$\text{Logo, } f(x) = x^2 - 4x - 6 = (x - 2)^2 - 10.$$

*2ª maneira:*

Calculando  $m = -\frac{b}{2a}$ ,  $k = f(m)$  e substituindo em  $f(x) = a(x - m)^2 + k$ :

$$f(x) = x^2 - 4x - 6 \rightarrow a = 1, b = -4, c = -6$$

$$m = \frac{4}{2} = 2$$

$$k = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 6 = 4 - 8 - 6 = -10$$

$$\text{Portanto, } f(x) = (x - 2)^2 - 10.$$

## Decorrências da forma canônica

### 1ª) Valor mínimo e valor máximo da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

Consideramos a função quadrática  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ .

Nesse caso, temos:

$$m = \frac{5}{6} \text{ e } k = f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6}\right) + 2 = -\frac{1}{12}$$

e a forma canônica é dada por  $f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$ .

Analisando essa forma canônica, podemos concluir que o menor valor de  $f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  é  $-\frac{1}{12}$ . Isso ocorre quando  $x = \frac{5}{6}$ .

#### Fique atento!

De modo geral, da forma canônica  $f(x) = a(x - m)^2 + k$ , concluímos que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ :

- a) se  $a > 0$ , o menor valor de  $f(x)$  é  $k = f(m)$ ;
- b) se  $a < 0$ , o maior valor de  $f(x)$  é  $k = f(m)$ .
- c) Assim,  $x_v = m$  e  $y_v = k$ .

### 2ª) Zeros da função quadrática e raízes da equação correspondente

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} \text{ (forma canônica)}$$

$$3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 1 \\ x - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, os zeros de  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$  são 1 e  $\frac{2}{3}$ , que são também as raízes da equação  $3x^2 - 5x + 2 = 0$ .

#### Fique atento!

De modo geral, da forma canônica de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , que é  $a(x - m)^2 + k$  com  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = f(m)$ , podemos chegar à fórmula que fornece os zeros da função e, portanto, às raízes da equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Observe as equivalências:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - m)^2 + k = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (fórmula que fornece as raízes da equação do 2º grau } ax^2 + bx + c = 0).$$

## Exercícios adicionais

1. Faça o completamento de quadrado em:

a)  $x^2 - 2x$   
 $(x - 1)^2 - 1$

b)  $x^2 + 6x - 16$   
 $(x + 3)^2 - 25$

2. Usando o completamento de quadrado, determine os zeros das seguintes funções quadráticas:

a)  $f(x) = x^2 + 10x + 21$   
 $-3 \text{ e } -7$

b)  $f(x) = x^2 - 2x - 3$   
 $3 \text{ e } -1$


3. Escreva no caderno na forma canônica as seguintes funções quadráticas:

a)  $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b)  $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$


$$f(x) = (x + 1)^2 - 4$$


$$f(x) = 2(x + 2)^2 - 13$$

4.  Determinem, se existirem, os zeros das funções quadráticas:

a)  $f(x) = (x - 2)^2 - 9$   
 $-1 \text{ e } 5$

b)  $f(x) = -(x + 1)^2 + 4$   
 $-3 \text{ e } 1$

5.  Determinem o menor valor que a função  $f(x) = 2(x - 1)^2 + 10$  pode assumir para todo  $x \in \mathbb{R}$ . **10**

6.  Qual é o maior valor que a função  $f(x) = -3x^2 - x + 1$  pode assumir para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ? (Dica: Usem a forma canônica.)  $x = -\frac{1}{6}$

# Pensando no Enem



Matriz do Enem: H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

1. Leia o texto a seguir e observe o quadro que apresenta alguns serviços de transporte particular na cidade de São Paulo em maio de 2015 e os seus respectivos preços de operação.

“[...] O Uber não é consenso. Desde sua chegada ao Brasil, em junho de 2014, o aplicativo que conecta motoristas de veículos de alto padrão a passageiros provoca reações fortes.

O serviço de transporte funciona por meio de um aplicativo no qual passageiro e motorista se cadastram. O primeiro recruta o segundo pelo smartphone, assim como acontece com os aplicativos de táxi. [...]”

SERVIÇO	BANDEIRADA	PREÇO/KM
Uber	R\$ 5*	R\$ 2,50
Táxi (bandeira 1)	R\$ 4,50	R\$ 2,75
Táxi** (bandeira 2)	R\$ 4,50	R\$ 3,25
Táxi luxo	R\$ 6,75	R\$ 4,15

\*Preço pode subir se houver grande demanda no momento. Além da distância, é cobrado R\$ 0,40 por minuto de viagem. \*\*Tarifa das 20h às 6h em dias úteis, além de domingos e feriados.

Folha de S.Paulo. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/saopaulo/2015/05/1629339-conflito-entre-uber-e-taxis-em-sp-leva-prefeitura-a-estudar-regulacao-do-app.shtml>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Indique a alternativa com a função que permite determinar o preço a ser pago por uma corrida em horário de demanda normal, realizada entre 6h e 20h, em dias úteis, pelo Uber.

Considere:

$P$ , o preço final a ser pago pela corrida;  
 $k$ , a quilometragem rodada;  
 $m$ , o número de minutos da viagem.

- a)  $P = 5 + 2,50k$   
b)  $P = 4,50 + 2,75k$   
c)  $P = 6,75 + 4,15k$   
x d)  $P = 5 + 2,50k + 0,40m$   
e)  $P = 4,50 + 3,25k$  Matriz do Enem: H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
2. Uma viagem de táxi [comum] da esquina da av. Paulista com a rua da Consolação até o Shopping Anália Franco – 12,7 km ao todo – no dia 07/09, iniciada às 15h, custaria:
- I. R\$ 6,35 a mais do que em um dia comum.  
II. R\$ 2,98 a mais do que pelo Uber, sendo uma viagem de 30 minutos.

III. R\$ 13,68 mais barata do que em táxi de luxo.

IV. R\$ 6,35 a mais do que em bandeira 1.

É possível, utilizando as informações do quadro da questão 1, afirmar que estão corretas:

- a) I, II e IV.  
b) I, II e III.  
c) I, II, III e IV.  
d) II, III e IV.  
x e) I, III e IV.

3. Leia o trecho de uma reportagem e o texto a seguir:

## Casas noturnas enfrentam crise após incêndio na Boate Kiss

Magaléa Mazziotti

Matriz do Enem: H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

Clima de fim de festa paira sobre o setor de bares e restaurantes. Os custos do negócio, segundo a Associação Brasileira de Bares e Casas Noturnas (Abrabar) do Paraná, aumentaram 30% desde a tragédia na boate Kiss, em Santa Maria (RS), que motivou investimentos em qualificação e segurança dos estabelecimentos. Ao mesmo tempo, movimento e faturamento caíram em torno de 20%, por vários motivos: falta de segurança e infraestrutura de transporte público e táxis em horários e na quantidade compatíveis às necessidades dos frequentadores que respeitam a Lei Seca.

[...] Matriz do Enem: H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Paraná Online. Disponível em: <www.parana-online.com.br/editoria/cidades/news/664166/?noticia=CASAS+NOTURNAS+ENFRENTAM+CRISE+APOS+INCENDIO+NA+BOATE+KISS>. Acesso em: 21 mar. 2016.

O proprietário de uma casa noturna no Paraná conduziu uma pesquisa entre os frequentadores e concluiu que, se o preço da entrada fosse R\$ 100,00, não haveria público, e, a cada 2 reais de desconto na entrada, mais uma pessoa se interessaria em frequentar a casa. Considere que o preço da entrada ( $p$ ) seja uma função de 1º grau do número de possíveis frequentadores ( $x$ ).

Depois da pesquisa, o proprietário da casa noturna decidiu lançar a seguinte promoção: “Acompanhante paga meia”.

Agora, este mesmo proprietário quer saber qual o número de frequentadores, todos com acompanhantes, que maximiza o lucro da casa? Considere que o custo com cada cliente é de R\$ 15,00 e que o lucro é dado pelo total arrecadado menos o custo.

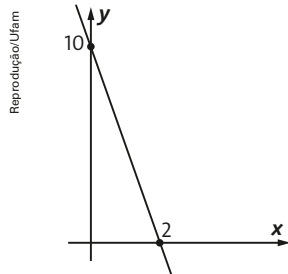
- x a) 30  
b) 20  
c) 10  
d) 60  
e) 25

# Vestibulares de Norte a Sul



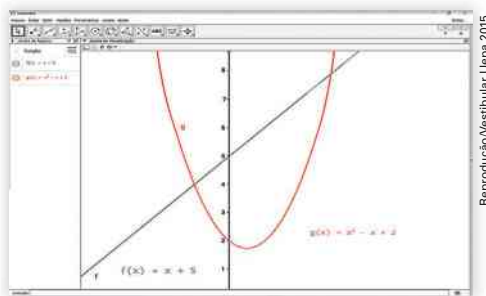
## Região Norte

1. (Ufam) A lei que melhor representa a função afim expressa pelo gráfico a seguir é dada por:



- a)  $f(x) = 10 - 2x$                       d)  $f(x) = 5x + 10$   
 b)  $f(x) = 10x + 10$                       e)  $f(x) = 5 - 10x$   
 x c)  $f(x) = 10 - 5x$
2. (Uepa) A utilização de computadores como ferramentas auxiliares na produção de conhecimento escolar tem sido uma realidade em muitas escolas brasileiras. O GeoGebra é um *software* educacional utilizado no ensino de Matemática (geometria dinâmica). Na ilustração abaixo se tem a representação dos gráficos de duas funções reais a valores reais, definidas por  $g(x) = x^2 - x + 2$  e  $f(x) = x + 5$ .

Fonte: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula-53900>>.



Construção dos gráficos das funções no GeoGebra.

Nestas condições, a soma das ordenadas dos pontos de interseção dos gráficos que representam as duas funções polinomiais acima ilustradas é:

- a) 2.                      c) 7.                      x e) 12.  
 b) 5.                      d) 11.

## Região Nordeste

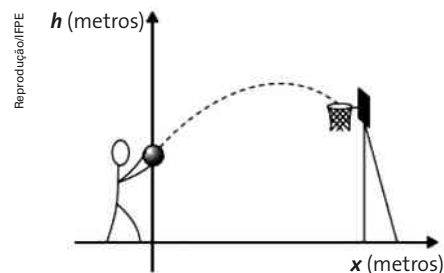
3. (UFRN) Uma empresa de tecnologia desenvolveu um produto do qual, hoje [em 2012], 60% das peças são fabricadas no Brasil, e o restante é importado de outros países. Para aumentar a participação brasileira, essa empresa investiu em pesquisa, e sua meta é,

daqui a 10 anos, produzir, no Brasil, 85% das peças empregadas na confecção do produto.

Com base nesses dados e admitindo-se que essa porcentagem varie linearmente com o tempo contado em anos, o percentual de peças brasileiras na fabricação desse produto será superior a 95% a partir de:

- x a) 2027.                      c) 2028.  
 b) 2026.                      d) 2025.

4. (IFPE) A figura a seguir ilustra o momento do lançamento de uma bola de basquete para a cesta. Foi inserido o sistema de coordenadas cartesianas para representar a trajetória da bola, de modo que a altura  $h$  da bola é dada em função da distância horizontal  $x$  pela equação  $h = -0,1x^2 + 1,2x + 2,5$ , com  $h$  e  $x$  medidos em metros. Determine a altura máxima atingida pela bola.



- x a) 6,1 metros.                      d) 7,5 metros.  
 b) 6,3 metros.                      e) 8,3 metros.  
 c) 7,2 metros.

## Região Centro-Oeste

5. (UEG-GO) O celular de Fabiano está com 50% de carga na bateria. Quando está completamente carregado, ele demora exatamente 20 horas para descarregar toda bateria em modo *stand by*, supondo-se que essa bateria se descarregue de forma linear. Ao utilizar o aparelho para brincar com um aplicativo a bateria passará a consumir 1% da carga a cada 3 minutos. Quantas horas Fabiano poderá brincar antes que a bateria descarregue completamente?

- a) Três horas.                      c) Duas horas.  
 x b) Duas horas e meia.                      d) Uma hora e meia.

6. (ESCS-DF) A globalização também ocorre no aspecto linguístico, de forma que palavras estrangeiras são frequentemente incluídas em nosso vocabulário. Hoje, dizemos corriqueiramente que vamos a um restaurante *self-service*, que estamos *on-line*, que precisamos fazer um *download* e que postamos uma *selfie*.

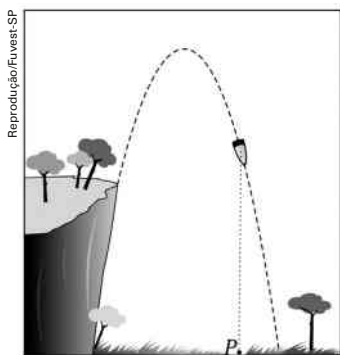


Considere que seja de  $P(t)\%$  o percentual de palavras estrangeiras no total de palavras utilizadas diariamente na língua portuguesa, em que  $P(t) = \frac{1}{100} (64 + 88t - t^2)$ ,  $t=0$  representa o tempo presente,  $t = 1$  representa uma estimativa para daqui a 1 ano, e assim sucessivamente até os próximos 85 anos ( $t = 85$ ). Nessa situação, é correto afirmar que a referida porcentagem chegará a 20% para:

- x a)  $35 < t < 45$ .      c)  $t > 55$ .  
 b)  $45 < t < 55$ .      d)  $t < 35$ .

### Região Sudeste

7. (Cefet-MG) Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R\$ 5,00 e mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado ( $R$ ) num dia é função da quantidade total ( $x$ ) de quilômetros percorridos e calculado por meio da função  $R(x) = ax + b$ , em que  $a$  é o preço cobrado por quilômetro e  $b$ , a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R\$ 410,00, então a média de quilômetros rodados por corrida foi de:
- a) 14.      b) 16.      x c) 18.      d) 20.
8. (Fuvest-SP) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto  $P$  sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por  $P$ , a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



- a) 60.      c) 120.      e) 180.  
 b) 90.      x d) 150.

### Região Sul

9. (UFPR) O ângulo de visão de um motorista diminui conforme aumenta a velocidade de seu veículo. Isso pode representar riscos para o trânsito e os pedestres, pois o condutor deixa de prestar atenção a veículos e pessoas fora desse ângulo conforme aumenta sua velocidade. Suponha que o ângulo de visão  $A$  relaciona-se com a velocidade  $v$  através da expressão  $A = kv + b$ , na qual  $k$  e  $b$  são constantes. Sabendo que o ângulo de visão a 40 km/h é de  $100^\circ$ , e que a 120 km/h fica reduzido a apenas  $30^\circ$ , qual o ângulo de visão do motorista à velocidade de 64 km/h?
- a)  $86^\circ$ .  
 b)  $83^\circ$ .  
 x c)  $79^\circ$ .  
 d)  $75^\circ$ .  
 e)  $72^\circ$ .

10. (Acafe-SC) O vazamento ocorrido em função de uma rachadura na estrutura da barragem de Campos Novos precisa ser estancado. Para consertá-la, os técnicos verificaram que o lago da barragem precisa ser esvaziado e estimaram que, quando da constatação da rachadura, a capacidade  $C$  de água no lago, em milhões de metros cúbicos, poderia ser calculada por  $C(t) = -2t^2 - 12t + 110$ , onde  $t$  é o tempo em horas.

Com base no texto, analise as afirmações:

- I. A quantidade de água restante no lago, 4 horas depois de iniciado o vazamento, é de 30 milhões de metros cúbicos.  
 II. A capacidade desse lago, sabendo que estava completamente cheio no momento em que começou o vazamento, é de 110 milhões de metros cúbicos.  
 III. Os técnicos só poderão iniciar o conserto da rachadura quando o lago estiver vazio, isto é, 5 horas depois do início do vazamento.  
 IV. Depois de 3 horas de vazamento, o lago está com 50% de sua capacidade inicial.

Todas as afirmações **corretas** estão em:

- x a) I – II – III.  
 b) I – III – IV.  
 c) III – IV.  
 d) I – II – III – IV.

**Função  
exponencial  
e função  
logarítmica**



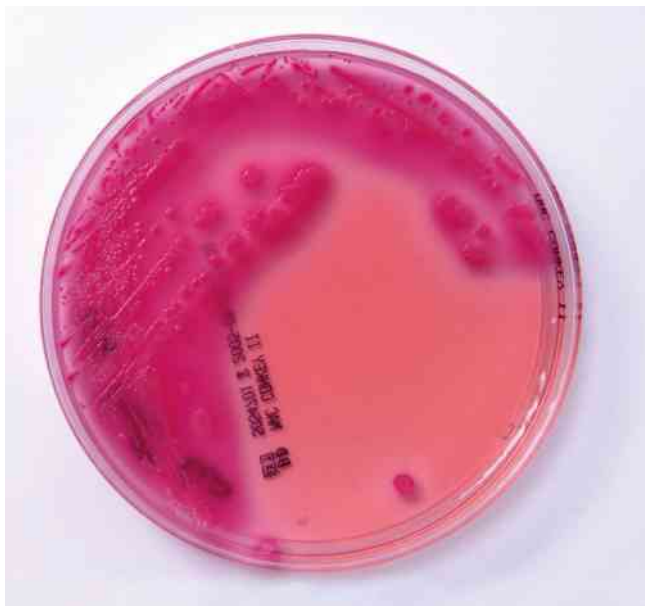
Túmulo Samnita, do século IV a.C., com o esqueleto de uma mulher e alguns vasos de origem grega, descobertos dentro de antigas ruínas na cidade de Pompeia (Itália). A datação de fósseis pelo elemento radioativo carbono-14 pode ser descrita por uma função exponencial. Fotografia de 2015.

Os Samnitas eram um povo indo-europeu seminômade que habitava o centro da península itálica entre os séculos VI e III a.C.



# 1 Situações iniciais

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Reúna-se com um colega e montem no caderno uma tabela com o número de bactérias nas 10 primeiras horas, considerando que há 1000 bactérias no início da pesquisa.



Cultura de bactéria *Escherichia coli* em placa de Petri.

CC Studio/SPL/Latinstock

Estimule os alunos a preencher a tabela corretamente, explicando-lhes, caso necessário, o que deve ser colocado em cada coluna. Se eles quiserem, podem até usar calculadora (a maioria dos celulares tem uma, por exemplo). Depois, confira com eles oralmente e passe a questioná-los sobre as questões propostas. No item a, a ideia é que essa percepção ajude depois a entender intuitivamente que o gráfico da função exponencial não será uma reta. Nos itens b, c e d, a ideia é chegar intuitivamente à lei da função exponencial que descreve a situação proposta.

Veja um exemplo de tabela, com as primeiras linhas preenchidas.

## Dados de uma cultura de bactérias

Horas após o início	Número de bactérias	Proporção entre a quantidade de bactérias atual e a quantidade inicial
0	1000	1
1	2000	2

Fonte: Dados fictícios.

Depois que a tabela estiver totalmente preenchida, reflitam sobre as seguintes questões:

- Na 1ª hora, a quantidade de bactérias aumentou em 1 000 (era 1000, foi para 2000). E na 2ª hora? E na 3ª hora? Por que esse valor não é sempre o mesmo? **4 000 bactérias; 8 000 bactérias; porque o número de bactérias está aumentando em função do tempo.**
- Existe uma lógica na sequência de valores que indicam a proporção entre a quantidade de bactérias em determinada hora e o valor inicial? Qual é essa lógica? **Sim; a cada hora que passa o número de bactérias é o dobro do que o número de bactérias da hora anterior.**
- Usando a lógica interpretada no item anterior, qual deve ser a proporção entre a quantidade de bactérias após 20 horas e a quantidade inicial? E qual deve ser a quantidade de bactérias após 20 horas? **2<sup>20</sup>; 1000 · 2<sup>20</sup>**
- Qual deve ser a quantidade de bactérias após x horas? **1000 · 2<sup>x</sup>**

### Você sabia?

Na prática, as bactérias podem desenvolver-se sobre uma camada de alimentos, e sua população é medida pela área que ocupam.

De modo geral, o modelo matemático usado para resolver situações como essa é dado pela **função de tipo exponencial**  $f(x) = b \cdot a^x$ . No caso dessa situação,  $f(x) = 1000 \cdot 2^x$  é a lei da função que descreve o número de bactérias após x horas,  $b = 1000$  representa a população de bactérias existentes no início da pesquisa ( $f(0) = b$ ),  $a = 2$  representa a proporção entre as quantidades de bactérias em horas consecutivas (por exemplo,  $\frac{f(1)}{f(0)}$  ou  $\frac{f(2)}{f(1)}$ ) e x é o tempo decorrido, em horas.

Acompanhe outra situação em que temos uma função exponencial:

☞ Uma pessoa fez um empréstimo em um banco no valor de R\$ 10 000,00 para pagar depois de 3 meses, à taxa de juros de 3% ao mês no regime de **juros compostos**.

a) Qual será o montante a pagar no fim do:

• 1º mês?

$$10\,000 + \frac{0,03 \cdot 10\,000}{3\% \text{ de } 10\,000} = \mathbf{10\,300}$$

Sendo  $M$  o montante,  $C$  o capital e  $i$  a taxa de juros, temos:

$$M_1 = C + iC = C(1 + i)$$

• 2º mês?

$$10\,300 + \frac{0,03 \cdot 10\,300}{3\% \text{ de } 10\,300} = \mathbf{10\,609}$$

$$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

• 3º mês?

$$10\,609 + \frac{0,03 \cdot 10\,609}{3\% \text{ de } 10\,609} = \mathbf{10\,927,27}$$

$$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$$

b) Qual seria o montante a pagar no fim de  $n$  meses?

$M = C(1 + i)^n$  em que  $M$  é o montante,  $C$  o capital,  $n$  o período de tempo e  $i$  a taxa de juros.

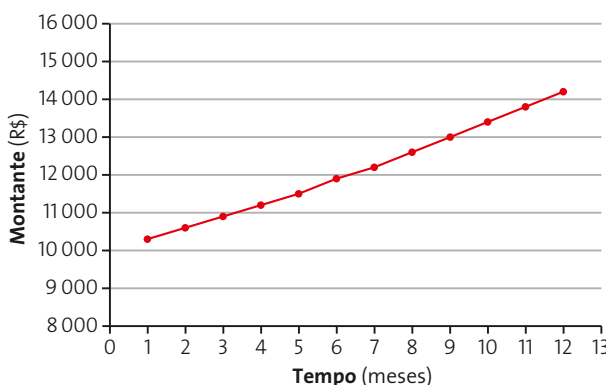
Veja o gráfico dessa situação nos 12 primeiros meses:

**Juros compostos:** os juros são compostos quando, depois de cada período de tempo do investimento, os juros são somados ao montante do período anterior (juros sobre juros).

**Fique atento!**

Observe que  $M$  é dado em função de  $n$ . Esse é mais um exemplo de função exponencial.

☞ **Evolução da dívida nos 12 primeiros meses**

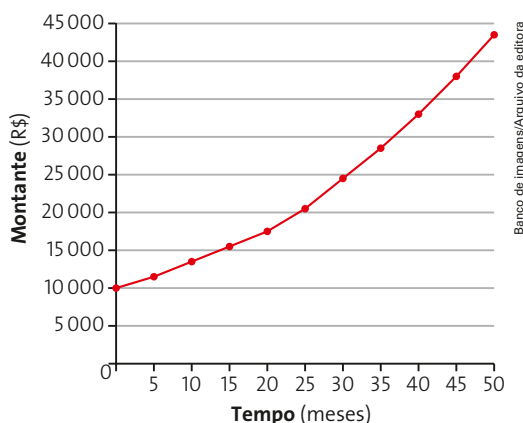


Comente com os alunos que, no início, este gráfico parece uma reta, mas que a partir de certo número de meses seu crescimento se acentua exponencialmente. Aproveite para relacionar isso ao fato discutido no item a da situação das bactérias da página anterior.

Fonte: Dados fictícios.

Agora, verifique uma projeção dessa dívida durante os próximos 50 meses:

☞ **Evolução da dívida nos próximos 50 meses**



**Para refletir**

- Faça uma estimativa do número inteiro mais próximo do valor da dívida, em milhares de reais, após 30 meses e após 50 meses.
- Quanto tempo se passou para que o montante da dívida fosse aproximadamente de R\$ 32 500,00?

• 40 meses.

Fonte: Dados fictícios.

## 2 Revisão de potenciação

Será que a expressão  $a^x$  tem sentido para todo número real  $x$ ? Vamos descobrir retomando o que é estudado no Ensino Fundamental sobre **potenciação**.

### Potência com expoente natural

Dados um número real positivo  $a$  e um número natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , chama-se **potência de base  $a$  e expoente  $n$**  o número  $a^n$ , que é igual ao produto de  $n$  fatores iguais a  $a$ :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

#### Fique atento!

Pode-se definir que o valor de  $a^n$  é dado por:

$$\bullet a^1 = a \qquad \bullet a^{n+1} = a^n \cdot a$$

Por exemplo:

$$\bullet a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a \qquad \bullet a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

Para  $n = 1$  considera-se, por definição, que  $a^1 = a$ , uma vez que não há produto com um único fator.

Acompanhe alguns exemplos:

a)  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

c)  $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

b)  $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

d)  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Dados dois números reais,  $a$  e  $b$ , e dois números naturais não nulos,  $m$  e  $n$ , valem as propriedades a seguir:

1ª) Propriedade fundamental:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Essa igualdade é verdadeira, pois em ambos os membros da igualdade temos o produto de  $m + n$  fatores iguais a  $a$ .

Exemplo:  $2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{3+2}$

Essa propriedade continua válida para um número qualquer de fatores. Para  $m_1, m_2, \dots, m_p$  quaisquer pertencentes a  $\mathbb{N}$ , temos:

$$\underbrace{a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_p}}_{p \text{ fatores}} = a^{m_1 + m_2 + \dots + m_p}$$

Exemplo:  $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 = 2^{2+3+5} = 2^{10}$

Se todos os expoentes forem iguais ( $m_1 = m_2 = \dots = m_p = m$ ), temos a 2ª propriedade: potência de potência. Logo, a 2ª propriedade é consequência direta da 1ª propriedade.

2ª) Potência de potência:  $(a^m)^p = a^{mp}$

Exemplo:  $\underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 3^2}_{7 \text{ fatores}} = (3^2)^7 = 3^{14}$

3ª)  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  ( $a \neq 0$  e  $m > n$ )

Exemplo:  $\frac{7^5}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7^3 = 7^{5-2}$

4ª)  $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Exemplo:  $(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3^2 \cdot 5^2$

5ª)  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$  ( $b \neq 0$ )

Exemplo:  $\left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9 \cdot 9}{5 \cdot 5} = \frac{9^2}{5^2}$

#### Para refletir

Observe os valores da sequência e complete-a:

$$\begin{array}{ccccccc} 2^4, & 2^3, & 2^2, & 2^1, & 2^0 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 16, & 8, & 4, & 2, & ? & 1 & \end{array}$$



E qual deve ser o valor de  $a^0$ ?

Sendo  $a \neq 0$ , vamos definir  $a^0$  de modo que a propriedade  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  continue válida quando  $m$  ou  $n$  (ou ambos) sejam iguais a zero.

Para que  $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$  é preciso definir  $a^0 = 1$ .

Exemplo:  $5^0 = 1$ .

## Potência com expoente inteiro

Como atribuir um significado à potência  $a^n$  ( $a$  real positivo), quando  $n \in \mathbb{Z}$  é um número inteiro que pode ser negativo ou zero?

Isso precisa ser feito de modo que seja mantida a propriedade fundamental  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .

Dado qualquer  $n \in \mathbb{N}^*$ , devemos ter, para  $a \neq 0$ :

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Portanto,  $a^{-n} \cdot a^n = 1$ , ou seja,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

Com isso, estendemos o conceito de potência do número real positivo  $a$ , com expoentes inteiros quaisquer, mantendo a propriedade fundamental.

Exemplos:

a)  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$

c)  $(\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$

## Inverso de um número $a \neq 0$

Observe que  $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$ , ou seja,  $a \cdot a^{-1} = 1$ , com  $a \neq 0$ .

$a^{-1} = \frac{1}{a}$  é chamado o **inverso de  $a$** .

### Para refletir

O número zero não tem inverso. Por quê?

Porque não existe divisão por zero.

## Exercício resolvido

1. Calcule o valor de  $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + [2^{-1} - (-2)^{-1}]^{-1}$ .

**Resolução:**

$$a = \left(\frac{2}{1}\right)^2 + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{-2}\right]^{-1} = \frac{4}{1} + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]^{-1} = 4 + 1^{-1} = 4 + 1 = 5$$

Logo,  $a = 5$ .

## Potência com expoente racional

Veremos agora que significado pode ser dado à potência  $a^r$ , com  $a$  positivo, quando  $r = \frac{m}{n}$  é um número racional (em que  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{Z}^*$ ), de modo que continue válida a propriedade fundamental  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ .

Inicialmente, vejamos como podemos definir, por exemplo,  $2^{\frac{1}{2}}$ , mantendo a propriedade fundamental:

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

Assim,  $2^{\frac{1}{2}}$  é um número positivo cujo quadrado é igual a 2. Portanto, pela definição de raiz quadrada:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \text{ pois } \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

De modo geral, partindo da propriedade fundamental ou da potência de potência:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \text{ ou } (a^r)^n = a^{r \cdot n}$$

e fazendo  $r = \frac{1}{n}$ , teremos:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

ou seja,  $a^{\frac{1}{n}}$  é o número real positivo cuja  $n$ -ésima potência é igual a  $a$ . Pela definição de raiz, esse número é  $\sqrt[n]{a}$ , a raiz  $n$ -ésima de  $a$ . Logo:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ com } a \text{ real e } n = 2, 3, 4, \dots$$

Exemplos:

a)  $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = \sqrt[3]{8} = 2$

b)  $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9^1} = \sqrt{9} = 3$

c)  $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d)  $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

Podemos observar também que:

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{2}) (\sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2^2}$$

Portanto,  $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$ .

De modo geral, preservando a propriedade fundamental ou a propriedade potência de potência:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \text{ ou } (a^r)^n = a^{r \cdot n}$$

e fazendo  $r = \frac{m}{n}$ , teremos:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}} = a^{n \cdot \left(\frac{m}{n}\right)} = a^m$$

ou seja,  $a^{\frac{m}{n}}$  é um número real positivo cuja enésima potência é igual a  $a^m$ .

Pela definição de raiz, esse número é  $\sqrt[n]{a^m}$ , a raiz enésima de  $a^m$ . Logo:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a \text{ real positivo e } m, n = 2, 3, 4, \dots$$

#### Para refletir

Constata, com exemplos, esta igualdade:  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ .

Exemplos:

a)  $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

c)  $(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{5}$

d)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

## Potência com expoente irracional

Vamos agora dar uma ideia de como caracterizar, por exemplo,  $2^{\sqrt{2}}$ . Tomamos as aproximações racionais do número irracional  $\sqrt{2}$ , que são:

$$1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots,$$

e temos definidas as potências com expoente racional:

$$2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \dots,$$


que são valores aproximados de  $2^{\sqrt{2}}$ .

À medida que:

$1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots$  se aproxima de  $\sqrt{2}$ ,

$2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \dots$  se aproxima de  $2^{\sqrt{2}}$ .

Quanto mais próximo estiver o número racional  $r$  de  $\sqrt{2}$ , mais próximo estará  $2^r$  de  $2^{\sqrt{2}}$ .

 Usando a calculadora, obtemos:

$$2^1 = 2; 2^{1,4} = 2,639015; 2^{1,41} = 2,657371\dots; 2^{1,414} = 2,664749; \dots 2^{\sqrt{2}} = 2,665144\dots$$

Obtemos assim, por aproximações de racionais, a potência  $a^x$ , com  $x$  irracional e  $a$  real positivo.

#### Fique atento!

Observe que  $a^x$  é sempre um número real positivo.

## Potência com expoente real

Lembrando que a união dos números racionais com os irracionais resulta nos números reais, chegamos às potências com expoentes reais mantendo as propriedades já mencionadas. Observe algumas potências com expoente real:

$$3^{\frac{5}{6}} \quad 2^{\sqrt{3}} \quad 7^{\pi} \quad (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{5}} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}} \quad 5^4 \quad 7^{-2} \quad 8^0 \quad \left(-\frac{2}{3}\right)$$

**Observação:** Quando  $a = 0$  ou  $a < 0$ , algumas potências de base  $a$  estão definidas em  $\mathbb{R}$  e outras não. Por exemplo:

a)  $0^3 = 0$

c)  $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

b)  $0^{-2} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$

d)  $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

## Exercícios



Atividade em dupla



Atividade em equipe



**ATENÇÃO!**  
Não escreva no seu livro!

1. Calcule as potências com expoentes inteiros em  $\mathbb{R}$ .

a)  $3^4$  81      d)  $0^5$  0      g)  $(\sqrt{7})^3$   $7\sqrt{7}$   
 b)  $(-2)^3$  -8      e)  $5^0$  1      h)  $6^{-2}$   $\frac{1}{36}$   
 c)  $(-2)^6$  64      f)  $(\sqrt{2})^2$  2      i)  $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}$   $-\frac{2}{3}$

2. Calcule o valor de:

a)  $x = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-2}$   $x = \frac{239}{108}$   
 b)  $y = \frac{2^{-2} + 2^2 - 2^{-1}}{2^{-2} - 2^{-1}}$   $y = -15$

3. Calcule:

a)  $10^6$  1 000 000      c)  $10^{-4}$  0,0001  
 b)  $10^9$  1 000 000 000      d)  $10^{-6} \cdot 10^4$  0,01

4. Escreva no caderno como potência de base 10:

a) 10 000  $10^4$       c) 0,0001  $10^{-4}$   
 b)  $\frac{100\,000}{100}$   $10^3$       d) 0,000001  $10^{-6}$

5. Calcule as potências em  $\mathbb{R}$  quando definidas:

a)  $5^{\frac{2}{7}}$   $\sqrt[7]{25}$       d)  $(\sqrt{3})^{\frac{4}{5}}$   $\sqrt[5]{9}$       g)  $2^{\frac{4}{3}}$   $2\sqrt[3]{2}$   
 b)  $2^{\frac{3}{4}}$   $\sqrt[4]{8}$       e)  $9^{\frac{1}{2}}$  3      h)  $8^{0,666\dots}$  4  
 c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$   $\frac{\sqrt{2}}{2}$       f)  $0^{\frac{3}{8}}$  0      i)  $7^{0,4}$   $\sqrt[5]{49}$

6. Reduza a uma única potência:

a)  $7^4 \cdot 7^2$   $7^6$       c)  $5^9 : 5^2$   $5^7$       e)  $5^{(2^3)}$   $5^8$   
 b)  $3 \cdot 3^8$   $3^9$       d)  $(2^5)^3$   $2^{15}$

7. Calcule o valor de:

a)  $\left(27^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$  3  
 b)  $\frac{3^0 + (-2)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$   $\frac{1}{2}$

8. **DESAFIO** A potência  $3^{\sqrt{20}}$  é maior, menor ou igual a 250? (Dica:  $4 < \sqrt{20} < 5$ ) **Menor.**

9. Reduza a uma única potência:

a)  $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^2$   $2^{12}$       d)  $(2^6)^x$   $2^{6x}$   
 b)  $\frac{3^{10}}{3^4}$   $3^6$       e)  $7^{3^2}$   $7^9$   
 c)  $\frac{a^6}{a}$ , com  $a \neq 0$   $a^5$       f)  $\frac{2^7 \cdot 2^3}{2^{-2}}$   $2^{12}$

10. Escreva no caderno na forma de um produto de potências, de um quociente de potências ou de uma potência de potência:

a)  $5^{x+y}$   $5^x \cdot 5^y$       c)  $7^{3x}$   $(7^3)^x$  ou  $(7^x)^3$   
 b)  $4^{x-3}$   $\frac{4^x}{4^3}$       d)  $(5x)^4$   $5^4 \cdot x^4$

11. Escreva no caderno como potência de base 3:

a) 2 187  $3^7$       c)  $13^0$       e)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   $3^{-\frac{1}{2}}$   
 b)  $\frac{1}{9}$   $3^{-2}$       d)  $\sqrt[5]{81}$   $3^{\frac{4}{5}}$       f)  $27^5$   $3^{15}$

12. Determinem o valor das seguintes expressões:

a)  $E = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}$  2      b)  $E = 1^\pi + 0^{\sqrt{5}}$  1

## Notação científica

A notação científica permite escrever números usando potências de base 10. Sua principal utilidade é a de fornecer, em um relance, a ideia da ordem de grandeza de um número que, se fosse escrito por extenso, não daria essa informação de modo tão imediato. E sua maior aplicação é representada pelos valores muito grandes (na Astronomia, por exemplo) ou muito pequenos (na Química, por exemplo).

Um número expresso em notação científica está escrito como o produto de dois números reais: um número real pertencente ao intervalo  $[1, 10)$  e uma potência de 10.

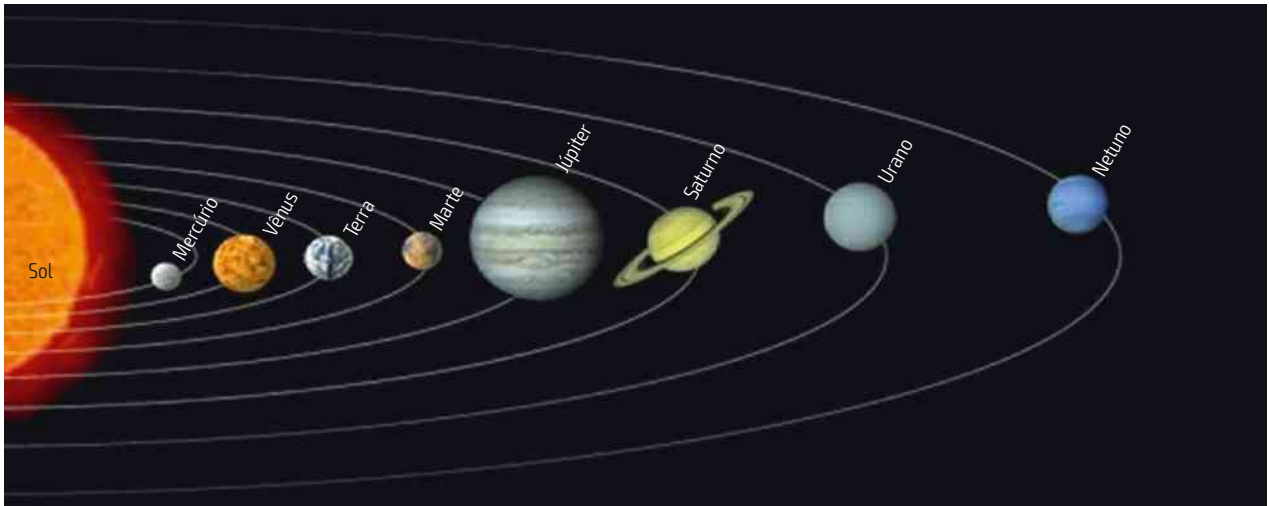
Veja exemplos de como escrever um número em notação científica:

- a)  $300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10^2$
- b)  $0,0052 = 5,2 \cdot 0,001 = 5,2 \cdot 10^{-3}$
- c)  $32,45 = 3,245 \cdot 10 = 3,245 \cdot 10^1$
- d)  $5\,249 = 5,249 \cdot 1\,000 = 5,249 \cdot 10^3$

Agora, veja exemplos em informações científicas:

- a) a distância média da Terra ao Sol:  $149\,600\,000\text{ km} = 1,496 \cdot 10^8\text{ km}$ ;

Esta imagem está representada fora de proporção e em cores fantasia.



Topham Picturepoint/Top Foto/Grupo Keystone

Representação do Sol e dos planetas do Sistema Solar.

- b) a velocidade da luz:  $300\,000\text{ km/s} = 3 \cdot 10^5\text{ km/s}$ ;
- c) a distância em torno da Terra no equador:  $40\,075\text{ km} \approx 4 \cdot 10^4\text{ km}$  (aproximadamente);
- d) a massa de um átomo de oxigênio:  $0,0000000000000000000000027 = 2,7 \cdot 10^{-23}\text{ g}$ ;
- e) a massa de um átomo de hidrogênio:  $0,000000000000000000000000166 = 1,66 \cdot 10^{-24}\text{ g}$ .

## Exercícios



**13.** Escreva no caderno em notação científica os seguintes números:

- |                                     |                                 |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) 500 $5 \cdot 100 = 5 \cdot 10^2$ | g) 20,39 $2,039 \cdot 10^1$     |
| b) 0,0006 $6 \cdot 10^{-4}$         | h) 0,000008 $8 \cdot 10^{-6}$   |
| c) 0,00000025 $2,5 \cdot 10^{-7}$   | i) 48 000 $4,8 \cdot 10^4$      |
| d) 0,02 $2 \cdot 10^{-2}$           | j) 7 000 000 000 $7 \cdot 10^9$ |
| e) 0,034 $3,4 \cdot 10^{-2}$        | k) 923,1 $9,231 \cdot 10^2$     |
| f) 0,8 $8 \cdot 10^{-1}$            | l) 40 400 $4,04 \cdot 10^4$     |

**14.** Dê o valor de cada número escrito em notação científica:

- |                             |                              |                                 |                                  |
|-----------------------------|------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| a) $8 \cdot 10^4$<br>80 000 | b) $5 \cdot 10^{-2}$<br>0,05 | c) $3,52 \cdot 10^5$<br>352 000 | d) $1,6 \cdot 10^{-3}$<br>0,0016 |
|-----------------------------|------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|

**15.** Escreva no caderno em notação científica:

- a) a distância média do Sol a Marte:  $227\,900\,000\text{ km}$ ;  
 $2,279 \cdot 10^8\text{ km}$
- b) a distância média do Sol a Júpiter:  $778\,300\,000\text{ km}$ ;  
 $7,783 \cdot 10^8\text{ km}$
- c) a massa de um elétron, aproximadamente  
 $0,000000000000000000000000000911\text{ g}$ .  
 $9,11 \cdot 10^{-28}\text{ g}$

### 3 Revisão de radiciação

Vamos retomar o que é estudado no Ensino Fundamental sobre **radiciação**.

#### Definição

Dados um número real  $a$  não negativo e um número natural  $n, n \geq 1$ , chama-se **raiz enésima aritmética de  $a$**  o número real e não negativo  $b$ , tal que  $b^n = a$ :

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ é equivalente a } b^n = a$$

Em que:

- $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  é o símbolo que indica a operação radiciação e é chamado **radical**;
- $a$  é um número real chamado **radicando**;
- $n$  é um número natural diferente de zero chamado **índice**;
- $b$  é um número real, resultado dessa operação, chamado **raiz aritmética**.

Em particular, se  $a < 0$ ,  $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$ , quando  $n$  for par.

Exemplos:

- a)  $\sqrt[3]{8} = 2$ , pois  $2^3 = 8$ .                      c)  $\sqrt[4]{625} = 5$ , pois  $5^4 = 625$ .  
b)  $\sqrt[2]{9} = 3$ , pois  $3^2 = 9$ .                      d)  $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$

Vamos considerar dois casos:

- **1º caso:  $n$  é par**

Para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ , temos  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ .

Exemplos:

- a)  $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$     b)  $\sqrt{(2-\pi)^2} = |2-\pi| = -2+\pi$ , pois  $2-\pi < 0$ .

- **2º caso:  $n$  é ímpar**

$\sqrt[n]{a^n} = a$ , para qualquer  $a \in \mathbb{R}$

Exemplos:

- a)  $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$     b)  $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$     c)  $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

#### Propriedades

Considerando  $a$  e  $b$  reais não negativos,  $m$  inteiro,  $n$  e  $p$  naturais não nulos, temos as seguintes propriedades:

1ª) A raiz aritmética de um produto é igual ao produto das raízes aritméticas dos fatores.

Observe que  $\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ . Portanto:  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Exemplos:

- a)  $\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$     b)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$

#### Fique atento!

Como a base é obrigatoriamente positiva na função exponencial (que estudaremos na página 159), essa revisão vai abordar apenas as propriedades e os exemplos de radicais com radicandos positivos.

#### Fique atento!

- Lembre-se de que não é necessário escrever o índice quando se tratar da raiz quadrada, ou seja,  $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$ .
- A simbologia  $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$  significa que em  $\mathbb{R}$  não existe número que elevado ao quadrado resulte em um número negativo.



2ª) A raiz aritmética de um quociente  $\frac{a}{b}$ , com  $a \geq 0$  e  $b > 0$ , é igual ao quociente das raízes de  $a$  e  $b$ .

Para  $a \geq 0$  e  $b > 0$ , temos  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ . Portanto:  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Veja exemplos:

a)  $\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

b)  $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$

3ª) A potência de uma raiz aritmética é obtida elevando-se o radicando ao referido expoente.

Observe que  $(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ . Então:  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Veja exemplos:

a)  $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

b)  $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

4ª) Podemos alterar o índice de um radical sem alterar o valor numérico da raiz aritmética, multiplicando ou dividindo o expoente do radicando e o índice pelo mesmo número inteiro e positivo.

Considerando o número natural  $p$ , temos:

•  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$       •  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

Dessa maneira:  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$  e  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

Veja exemplos:

a)  $\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4 \cdot 5]{3^{3 \cdot 5}} = \sqrt[20]{3^{15}}$

b)  $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6 \div 3]{5^{3 \div 3}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

5ª) Podemos calcular a raiz de uma raiz aritmética multiplicando os índices das raízes e mantendo inalterado o radicando. Considerando o número natural positivo  $p$ , podemos afirmar que:

$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a^1} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n \cdot p}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

Portanto:  $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p \cdot n]{a^m}$

Veja exemplos:

a)  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5 \cdot 3]{2} = \sqrt[15]{2}$

b)  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{2} = \sqrt[8]{2}$

É bom lembrar que essas propriedades não são válidas para a adição e para a subtração de raízes aritméticas com o mesmo índice. Por exemplo:

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{2+3}$

b)  $\sqrt{6} - \sqrt{3} \neq \sqrt{6-3}$

## Exercícios resolvidos

2. Simplifique:

a)  $\sqrt{32}$

b)  $\sqrt[4]{2592}$

c)  $\sqrt{0,01}$

d)  $\sqrt[3]{-125}$

**Resolução:**

a)  $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2^1} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2^1} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

b)  $\sqrt[4]{2592} = \sqrt[4]{2^5 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^1 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2^1} = 2^1 \cdot 3^1 \sqrt[4]{2} = 6\sqrt[4]{2}$

c)  $\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$

d)  $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

3. Resolva as operações a seguir:

a)  $\sqrt{32} + \sqrt{48} - \sqrt{8} - \sqrt{108}$

b)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

**Resolução:**

a)  $\sqrt{32} + \sqrt{48} - \sqrt{8} - \sqrt{108} = \sqrt{2^5} + \sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^3} - \sqrt{2^2 \cdot 3^3} =$

$= \sqrt{2^4 \cdot 2^1} + \sqrt{2^4 \cdot \sqrt{3}} - \sqrt{2^2 \cdot 2^1} - \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^1} =$

$= \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2^1} + 2^2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^1} - \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3^1} =$

$= 2^2 \sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2^1 \sqrt{2} - 2^1 \cdot 3^1 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 6\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

b)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

4. Qual o maior valor entre  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[6]{7}$  e  $\sqrt[4]{5}$ ?

**Resolução:**

Vamos deixar todos os radicais com o mesmo índice:

$\sqrt[4]{2} = \sqrt[2 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}} = \sqrt[2]{2^2} = \sqrt[2]{4}$

$\sqrt[6]{7} = \sqrt[6 \cdot 2]{7^{1 \cdot 2}} = \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[12]{49}$

$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

O maior valor é  $\sqrt[4]{5}$ .

## Exercícios



16. Verifique se cada sentença abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F).

a)  $\sqrt{x^2} = x$  F

e)  $\sqrt{49} = \pm 7$  F

b)  $\sqrt{x^2} = x$ , se  $x > 0$  V

f)  $\sqrt{(-3)^2} = -3$  F

c)  $\sqrt{x^2} = |x|$  V

g)  $\sqrt{(-5)^2} = 5$  V

d)  $\sqrt{x^3} = x$  F

h)  $\sqrt{-5^2} \in \mathbb{R}$  F

17. Simplifique cada item a seguir:

a)  $\sqrt{8}$   $2\sqrt{2}$

c)  $\sqrt{60}$   $2\sqrt{15}$

b)  $\sqrt[3]{16}$   $2\sqrt[3]{2}$

d)  $\sqrt{200}$   $10\sqrt{2}$

18. Simplifique:

a)  $\sqrt[4]{1250}$   $5\sqrt[4]{2}$

b)  $\sqrt[3]{0,125}$   $\frac{1}{2}$

19. Escreva no caderno usando um só radical:

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$   $\sqrt{10}$

d)  $\sqrt{2\sqrt{3}}$   $\sqrt[4]{12}$

b)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$   $\sqrt{\frac{5}{2}}$

e)  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$   $\sqrt[12]{128}$

c)  $\sqrt{\sqrt{5}}$   $\sqrt[4]{5}$

f)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$   $\sqrt[12]{2^{13}}$

20. Escrevam no caderno cada item usando um só radical:

a)  $\frac{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[5]{3^4}}$   $\sqrt[60]{3^{37}}$

b)  $\sqrt[3]{\sqrt{x}\sqrt{x}}$   $\sqrt[12]{x^3}$

21. Efetue as operações a seguir:

a)  $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$   $4\sqrt{2}$

b)  $\sqrt{125} + 3\sqrt{5} - \sqrt{20}$   $6\sqrt{5}$

22. Efetuem as operações a seguir:

a)  $2\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{3})$  18

b)  $(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$   $3 + \sqrt{3}$

c)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2 - 2\sqrt{3})$   $2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 6$

d)  $(2\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$   $-4 - 3\sqrt{35}$

23. Simplifiquem cada expressão:

a)  $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$  1

c)  $(1 - \sqrt{2})^2$   $3 + 2\sqrt{2}$

b)  $(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$  5

d)  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$   $8 - 2\sqrt{15}$

24. Simplifiquem as expressões:

a)  $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}}$  2

b)  $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$  5

25. Coloque as raízes  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt[4]{17}$  e  $\sqrt[6]{40}$  em ordem crescente.  $\sqrt{2} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{17} < \sqrt[6]{40}$

26. Simplifiquem:

a)  $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}$   $2 + \sqrt{3}$

b)  $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$   $2 - \sqrt{3}$

27. Resolva no caderno as operações a seguir:

a)  $\sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$   $4\sqrt[3]{5}$

b)  $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{21} \cdot \sqrt{7}$   $11\sqrt{3}$

c)  $\sqrt{\sqrt{128}} + \sqrt[3]{\sqrt{1458}}$   $5\sqrt[4]{2}$

d)  $\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{18})$   $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

## 4 Função exponencial

Vamos agora estudar a **função exponencial** definida por  $f(x) = a^x$ .

### Definição

Dado um número real  $a$  ( $a > 0$  e  $a \neq 1$ ), denomina-se função exponencial de base  $a$  a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  representada por  $f(x) = a^x$  para todo  $x$  real.

#### Fique atento!

$\mathbb{R}_+^*$  é o símbolo que indica o conjunto dos números reais positivos:  $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ .

Exemplos:

a)  $f(x) = 3^x$

c)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e)  $f(x) = (\sqrt{2})^x$

b)  $y = 5^x$

d)  $f(x) = (0,4)^x$

f)  $f(x) = 10^x$

### Exercícios

**28.** Verifique quais das sentenças dadas correspondem à lei de uma função exponencial.

- x a)  $f(x) = 9^x$
- x b)  $f(x) = (0,666\dots)^x$
- c)  $y = x^2$
- x d)  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

**29.** Dada a função exponencial  $f(x) = 4^x$ , determine:

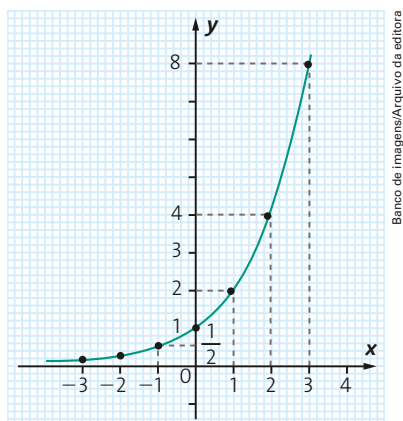
- a)  $f(0)$ ; 1
- b)  $f(3)$ ; 64
- c)  $f(-1)$ ;  $\frac{1}{4}$
- d)  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ; 2
- e)  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ;  $\frac{1}{2}$
- f)  $m$  tal que  $f(m) = 1$ . 0

### Gráfico da função exponencial

Vamos analisar os gráficos de duas funções exponenciais  $f(x) = a^x$ , a primeira com  $a > 1$  e a segunda com  $0 < a < 1$ .

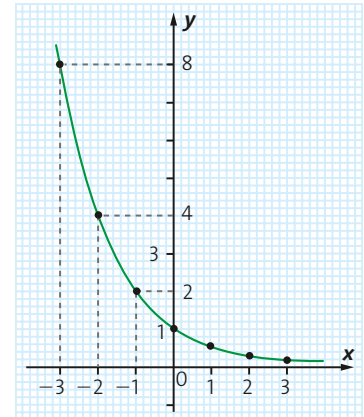
a)  $f(x) = 2^x$  ou  $y = 2^x$ , ou seja,  $a > 1$ . Neste caso, a função é crescente ( $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ ).

<b>x</b>	-3	-2	-1	0	1	2	3
<b>2<sup>x</sup></b>	2 <sup>-3</sup>	2 <sup>-2</sup>	2 <sup>-1</sup>	2 <sup>0</sup>	2 <sup>1</sup>	2 <sup>2</sup>	2 <sup>3</sup>
<b>y = 2<sup>x</sup></b>	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

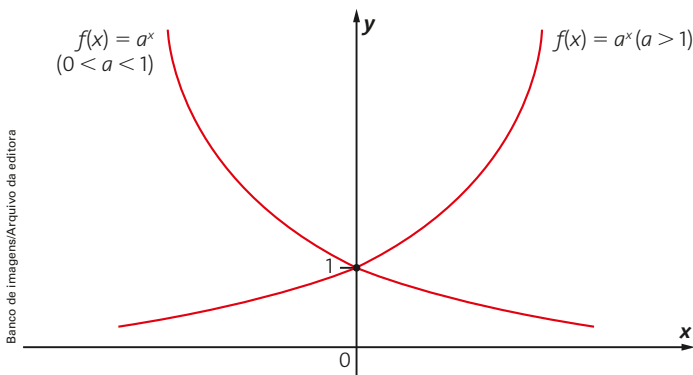


b)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  ou  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , ou seja,  $0 < a < 1$ . Neste caso, a função é decrescente ( $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ ).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



De modo geral, observe o gráfico de  $f(x) = a^x$  nos casos em que  $a > 1$  e  $0 < a < 1$ .



**Fique atento!**

- A função exponencial está definida para todo  $x$  real e tem por imagem o semieixo  $y > 0$ .
- Os gráficos são simétricos em relação ao eixo  $y$  quando as bases são  $a$  e  $\frac{1}{a}$ .
- O gráfico da função exponencial é uma figura chamada **curva exponencial**.

Observando essas tabelas e esses gráficos, concluímos que:

- o gráfico da função exponencial não toca o eixo das abscissas, ou seja,  $f(x) = a^x$  não assume o valor zero (não existe  $x$  real tal que  $f(x) = 0$ ) e intersecta o eixo das ordenadas no ponto  $(0, 1)$ ;
- o gráfico de  $f(x) = a^x$  não tem pontos nos quadrantes III e IV;
- quando  $a > 1$  e  $x$  varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um crescimento lento enquanto  $x$  é negativo. À medida que  $x$  cresce, o crescimento de  $y$  se torna cada vez mais acentuado;
- a função exponencial é definida de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+^*$ , logo o seu domínio é  $\mathbb{R}$  e o seu contradomínio é  $\mathbb{R}_+^*$ . Como o conjunto imagem também é  $\mathbb{R}_+^*$ , a função exponencial é sobrejetiva [ $CD(f) = Im(f)$ ]. Então, temos  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$  e  $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ ;
- elementos diferentes do domínio de  $f$  têm imagens diferentes no contradomínio de  $f$  [ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ]. Logo, a função exponencial é injetiva;
- como a função exponencial é sobrejetiva e injetiva ela é bijetiva;
- por ser injetiva,  $f(x_1) = f(x_2)$  somente se  $x_1 = x_2$ , isto é, se  $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ ;
- a função exponencial pode ser crescente ou decrescente;
- valem as seguintes propriedades para a função exponencial:

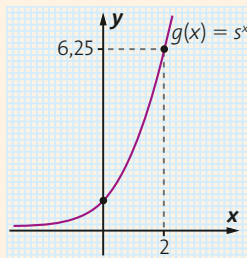
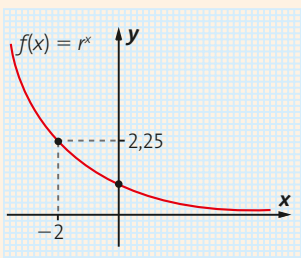
$$f(1) = a^1 = a$$

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2), \text{ ou seja, } f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

$$f(nx) = a^{nx} = (a^x)^n = (f(x))^n, \text{ ou seja, } f(nx) = (f(x))^n$$

## Exercício resolvido

5. A seguir temos os gráficos das funções exponenciais  $f$  e  $g$  definidas por  $f(x) = r^x$  e  $g(x) = s^x$ .



Com base nos gráficos, responda:

- $r > 1$  ou  $0 < r < 1$ ?
- $s > 1$  ou  $0 < s < 1$ ?
- $f$  é crescente ou decrescente? E  $g$  é crescente ou decrescente?
- $f(7)$  é maior, menor ou igual a  $f(3)$ ?
- $g(5)$  é maior, menor ou igual a  $g(4)$ ?

- f) Traçando os gráficos de  $f$  e  $g$  no mesmo sistema de eixos, em que ponto os gráficos vão se intersectar?

- g) Entre as sentenças seguintes, identifique as verdadeiras de  $f$  e  $g$ :

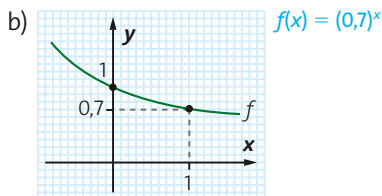
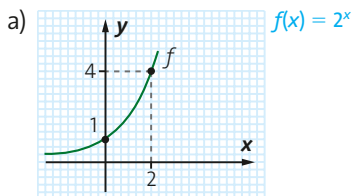
- $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
- $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$
- $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
- $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

**Resolução:**

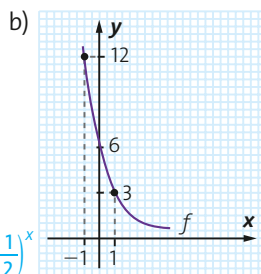
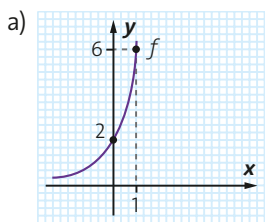
- $0 < r < 1$
- $s > 1$
- $f$  é decrescente e  $g$  é crescente.
- $f(7) < f(3)$
- $g(5) > g(4)$
- No ponto  $(0, 1)$ .
- $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ;  $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ .

## Exercícios

30. Cada gráfico abaixo representa uma função exponencial do tipo  $f(x) = a^x$ . Escreva no caderno a lei de formação de cada uma delas.



31. Cada gráfico abaixo representa uma função exponencial do tipo  $f(x) = b \cdot a^x$ . Escreva no caderno a lei de formação de cada uma delas.



32. Construa no caderno os gráficos das funções:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  dada por  $f(x) = 3^x$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  dada por  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

33. Classifique as seguintes funções como crescente ou decrescente:

- $f(x) = \pi^x$  **Crescente.**
- $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$  **Decrescente.**
- $f(x) = (\sqrt{3})^x$  **Crescente.**
- $f(x) = (0,01)^x$  **Decrescente.**
- $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$  **Decrescente.**
- $f(x) = 2^{-x}$  **Decrescente.**

34. Copie no caderno e compare as potências, colocando entre elas o símbolo de maior ou de menor:

- $(0,9)^8 \blacksquare (0,9)^5 <$
- $47^5 \blacksquare 47^3 >$
- $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^9 \blacksquare \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^8 <$
- $(\sqrt{3})^{\sqrt{5}} \blacksquare (\sqrt{3})^2 >$

35.  $f, g$  e  $h$  são funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = 2 \cdot 3^x$ ,  $g(x) = 5^x - 2$  e  $h(x) = 5^{x-2}$ . Determine:

- $f(2)$ ;  $f(2) = 18$
- $g(2)$ ;  $g(2) = 23$
- $h(2)$ ;  $h(2) = 1$
- $f(-1)$ ;  $f(-1) = \frac{2}{3}$
- $g(0)$ ;  $g(0) = -1$
- $h(0)$ ;  $h(0) = \frac{1}{25}$
- $x$  tal que  $h(x) = \frac{125}{5}$ ;  $x = 5$
- $x$  tal que  $g(x) = 3$ ;  $x = 1$

36. Construa no caderno o gráfico da função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+^*$  definida por  $f(x) = 2^{x-1}$  e determine  $\text{Im}(f)$ .  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$



## Construção do gráfico de uma função exponencial

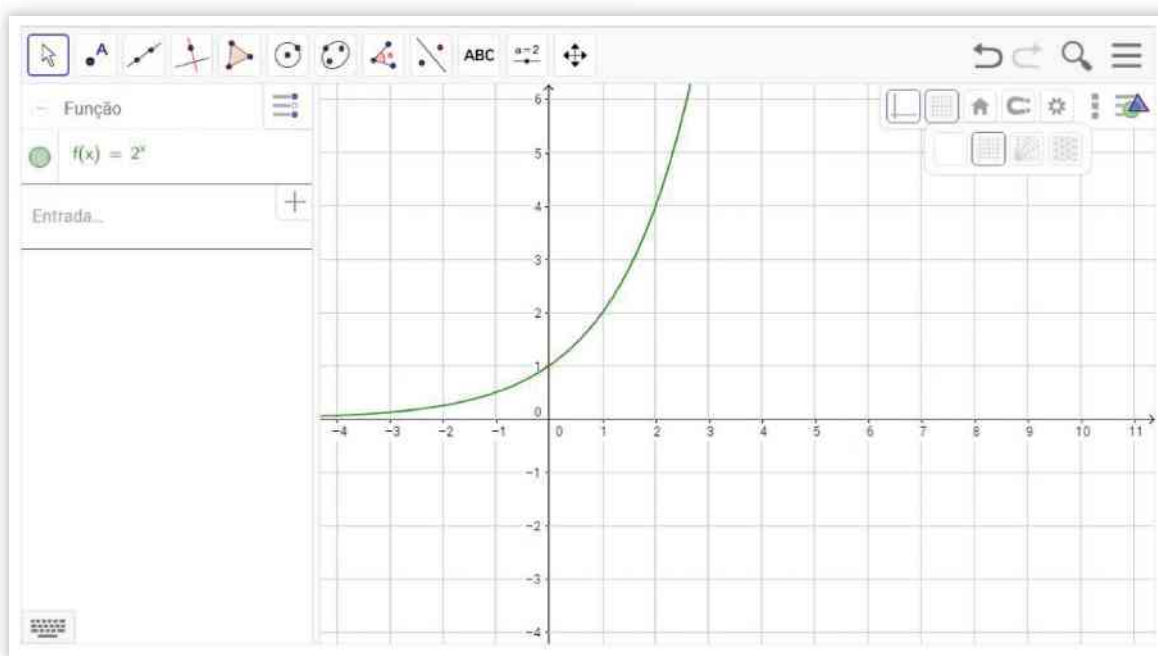
Vamos construir o gráfico da função exponencial  $f(x) = 2^x$  no *software* GeoGebra e destacar alguns pontos importantes. Para isso siga os passos a seguir.

**1º passo:** No campo Entrada de comando (situado na parte esquerda da tela) digite a função:  $f(x) = 2^x$  e tecla “Enter”. Observe que “^” significa a operação de potenciação.

### Fique atento!

Não se esqueça de salvar suas construções.

**2º passo:** Do lado direito da Barra de ferramentas (parte superior da tela), clique em “Alternar Barra de estilos”, depois em “Exibir ou esconder a malha”, e selecione a malha quadriculada. Você deverá ter uma imagem igual à apresentada abaixo.




Reprodução/Arquivo da editora

Captura de tela do 2º passo.

**3º passo:** Agora, vamos determinar o ponto em que a curva intersecta o eixo das ordenadas (eixo  $y$ ). Para isso, digite no campo de entrada: **Interseção [f, x = 0]**. Tecla “Enter”. Observe que o ponto de intersecção com o eixo  $y$  é o ponto  $A = (0, 1)$ .

**4º passo:** No campo Entrada de comando digite as coordenadas dos pontos  $B = (1, 2)$ ,  $C = (2, 4)$ ,  $D = (-1, 1/2)$  e  $E = (-2, 1/4)$  (a cada ponto inserido tecla “Enter”). Verifique que todos pertencem ao gráfico da função. Observe ainda que o gráfico da função não intersecta o eixo das abscissas, ou seja, a função não tem raiz. O eixo das abscissas será uma **assíntota** do gráfico da função.

### Fique atento!

Você pode mover, ampliar ou reduzir a sua imagem utilizando  da Barra de ferramentas. Outras opções para aumentar ou diminuir o **zoom** é utilizar o *scroll* do *mouse* (aquela “rodinha” que fica na parte superior da maioria dos *mouses*).

1. Repita os passos anteriores e construa no *software* os gráficos das funções:  $f(x) = 3^x$ ,  $g(x) = 10^x$  e  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .


[Veja os gráficos no Manual do Professor.](#)




## Influência dos parâmetros $a$ , $b$ e $c$ em funções do tipo $f(x) = a \cdot b^x + c$

Agora, abra um novo documento, siga os passos dados e observe a influência dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  em funções do tipo  $f(x) = a \cdot b^x + c$ .

**1º passo:** Na Barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do *mouse* inicialmente na opção “Controle


Deslizante” ; em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização. Uma janela com as configurações do comando deslizante será aberta, então: selecione “Aplicar”; nesse instante aparecerá o

parâmetro  $a$  (com valor inicial igual a 1) .

Repita a operação e insira novos parâmetros ( $b$  e  $c$ ).

**2º passo:** No campo Entrada de comando insira a função  $f(x) = a \cdot b^x + c$  e tecla “Enter”. Lembre-se de que \* significa a operação de multiplicação. Repita o procedimento para que as malhas apareçam na tela.

**3º passo:** Agora, vamos observar significados importantes para os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Clique na bolinha do

controle deslizante de  $b$   e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados).

Arraste a bolinha até obter  $b = 2$ . Repita a operação para o controle deslizante  $c$ , fazendo  $c = 0$ . Dessa forma você terá o gráfico obtido anteriormente, ou seja, da função  $f(x) = 2^x$ .

### Fique atento!

Na relação  $f(x) = a \cdot b^x + c$ , se  $a = 0$ ,  $b = 1$  ou  $b \leq 0$  não teremos uma função do tipo exponencial.

**4º passo:** Repita a operação para os controles deslizantes de  $a$  e  $b$  (utilize um controle deslizante por vez). Observe o que acontece com o gráfico da função.

Resolva os exercícios a seguir com base na função  $f(x) = a \cdot b^x + c$ . (Utilize o gráfico obtido acima.)

**2.** Classifique as funções abaixo como crescente ou decrescente:

a)  $f(x) = 4^x$  Crescente.

b)  $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2$  Decrescente.

c)  $h(x) = -2 \cdot 3^x + 1$  Decrescente.

d)  $i(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$  Decrescente.

**3.** Determine a imagem das funções a seguir:

a)  $f(x) = 4^x$   $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$

b)  $g(x) = 3 \cdot 2^x + 1$   $\text{Im}(g) = (1, +\infty)$

c)  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$   $\text{Im}(h) = (2, +\infty)$

d)  $i(x) = -2 \cdot 3^x - 1$   $\text{Im}(i) = (-\infty, -1)$

**4.** Qual é o número de soluções da equação  $2^x = x + 2$ ?

(Sugestão: Construa no *software* os gráficos de  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = x + 2$ .) [Duas soluções.](#)  
[Veja o gráfico no Manual do Professor.](#)

## 5 Conexão entre funções exponenciais e progressões

Já estudamos, na página 90 do Capítulo 3, que uma função afim  $f(x) = ax + b$  transforma uma progressão aritmética (PA) em outra progressão aritmética. E, na página 137 do Capítulo 4, que uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  transforma uma PA em uma sequência cujas diferenças dos termos consecutivos formam outra PA.

Também estudamos, na página 66 do Capítulo 2, que uma progressão geométrica (PG) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante diferente de zero, chamada razão da PG. Por exemplo, a sequência 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... é uma PG de razão 3.

Agora, veremos o que ocorre com uma função do tipo exponencial  $f(x) = b \cdot a^x$ .

Consideremos uma função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 3 \cdot 2^x$  e a PA 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., de razão 2. Vamos constatar que  $f(1), f(3), f(5), f(7), f(9), f(11), f(13), \dots$  é uma PG. Assim, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \cdot 2^x & f(7) &= 3 \cdot 2^7 = 384 \\ f(1) &= 3 \cdot 2^1 = 6 & f(9) &= 3 \cdot 2^9 = 1536 \\ f(3) &= 3 \cdot 2^3 = 24 & f(11) &= 3 \cdot 2^{11} = 6144 \\ f(5) &= 3 \cdot 2^5 = 96 & f(13) &= 3 \cdot 2^{13} = 24576 \end{aligned}$$

Observe que 6, 24, 96, 384, 1536, 6144, 24576, ... é uma PG de razão 4, ou seja, de razão  $2^2$ .

É possível provar que isso ocorre com qualquer função do tipo exponencial  $f(x) = b \cdot a^x$  e essa propriedade caracteriza a função do tipo exponencial, ou seja, se  $f$  é uma função exponencial do tipo  $f(x) = b \cdot a^x$ , ela transforma uma PA de razão  $r$  em uma PG de razão  $a^r$ . E, reciprocamente, se uma função transforma uma PA de razão  $r$  em uma PG de razão  $a^r$ , então essa função é do tipo exponencial  $f(x) = b \cdot a^x$ , com  $b = f(0)$  e  $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ .

### Exercícios



**37.** Dadas a PA  $-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots$  e a função exponencial  $f(x) = 2 \cdot 3^x$ :

- determine a razão dessa PA; **2**
- verifique que a sequência  $f(-2), f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), \dots$  é uma PG; **É uma PG.**
- determine a razão dessa PG.  **$q = 9$**

**38.** Se tivermos uma PA  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$  de razão 3 que é levada a uma PG  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots$  pela função exponencial  $f(x) = 4 \cdot 5^x$ , qual é a razão dessa PG? **125**

**39.** Um pesquisador encontrou em suas investigações a seguinte relação entre os valores de  $x$  e  $y$ :

<b>x</b>	1	3	5	7
<b>y</b>	4	8	16	32

Uma função exponencial, pois os valores de  $x$  formam uma PA e os de  $y$ , uma PG.

Que tipo de função expressa  $y$  em função de  $x$ ? Justifique.

**40.** Seja  $f$  uma função que leva a PA 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...,  $n, n + 1, \dots$  a uma PG 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ..., escreva no caderno a função exponencial do tipo  $f(x) = ba^x$ , determinando os valores de  $a$  e  $b$ .  **$f(x) = 3 \cdot 3^x; a = 3$  e  $b = 3$**

## 6 Equações exponenciais

Equações exponenciais são aquelas em que a incógnita aparece nos expoentes. Veja alguns exemplos:

a)  $4^x = 32$

c)  $25^{x+1} = \sqrt{5^x}$

b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

d)  $2^{2x} = 2^x + 12$

### Resolução de equações exponenciais simples

Vamos primeiro resolver equações exponenciais que podem ser transformadas em uma igualdade de potências de mesma base.

Para resolvê-las, usamos o fato de que a função exponencial é injetiva, ou seja, para  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , temos:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

## Exercícios resolvidos

6. Resolva as equações:

a)  $3^{x-1} = 81$

d)  $9^{x+1} = \frac{1}{27}$

b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$

e)  $2^{x^2-3x-4} = 1$

c)  $0,75^x = \frac{9}{16}$

**Resolução:**

a) Vamos transformar a equação dada em uma igualdade de potências de mesma base:

$$3^{x-1} = 81 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^4$$

Como a função exponencial é injetiva, podemos igualar os expoentes e teremos uma equação do 1º grau em  $x$ :

$$x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

*Verificação:*

$$x = 5 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^{5-1} = 3^4 = 81$$

$$S = \{5\} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \Rightarrow (2^{-1})^x = 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2^{-x} = (2^2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow -x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

**Para refletir**

Faça a verificação do item b.

c)  $0,75^x = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{75}{100}\right)^x = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3^2}{4^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow x = 2$$

$$S = \{2\}$$

d)  $9^{x+1} = \frac{1}{27} \Rightarrow (3^2)^{x+1} = \frac{1}{3^3} \Rightarrow 3^{2x+2} = 3^{-3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x + 2 = -3 \Rightarrow 2x = -3 - 2 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$

e) Como  $1 = 2^0$ , podemos escrever  $2^{x^2-3x-4} = 2^0$ . Igualando os expoentes, temos uma equação do 2º grau em  $x$ :

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x' = 4 \text{ e } x'' = -1$$

$$S = \{-1, 4\}$$

7. Calcule  $x$  e  $y$  no sistema de equações:  $\begin{cases} 5^{x+y} = 1 \\ 3^x \cdot 9^y = \frac{1}{9} \end{cases}$

**Resolução:**

$$5^{x+y} = 1 \Rightarrow 5^{x+y} = 5^0 \Rightarrow x + y = 0$$

$$3^x \cdot 9^y = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x \cdot 3^{2y} = 3^{-2} \Rightarrow 3^{x+2y} = 3^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2y = -2$$

Os valores de  $x$  e  $y$  serão obtidos resolvendo-se o sistema do 1º grau:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = -2$$

$$S = \{(2, -2)\}$$

## Raízes da equação $2^x = x^2$

Quantas raízes tem a equação  $2^x = x^2$ ?

É fácil observar que 2 e 4 são duas raízes, pois:

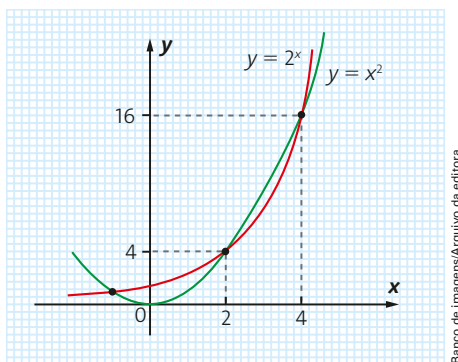
$$x = 2 \Rightarrow 2^2 = 2^2$$

e

$$x = 4 \Rightarrow 2^4 = 4^2$$

Para saber se há mais alguma raiz, podemos utilizar os gráficos das funções  $y = 2^x$  e  $y = x^2$  e verificar quantos são seus pontos comuns.

Além dos valores  $x = 2$  e  $x = 4$ , podemos verificar que existe mais um valor de  $x$ , negativo, para o qual se tem  $2^x = x^2$ .



Esse problema mostra que, em alguns casos, o processo gráfico é mais vantajoso que o algébrico.

## Exercícios



**41.** Resolva no caderno as seguintes equações exponenciais na variável  $x$ :

a)  $2^x = 64$   $S = \{6\}$

b)  $3^{x-2} = 9$   $S = \{4\}$

c)  $5^{x^2-2x} = 125$   $S = \{-1, 3\}$

d)  $10^{1-x} = \frac{1}{10}$   $S = \{2\}$

e)  $2^{4x-x^2} = 8$   $S = \{1, 3\}$

f)  $(10^x)^{1-x} = 0,000001$   $S = \{-2, 3\}$

g)  $3^{2-x} = \frac{1}{27}$   $S = \{5\}$

h)  $3^{x-5} = 27^{1-x}$   $S = \{2\}$

**42.** Resolva no caderno as equações exponenciais:

a)  $2 \cdot 3^{x-2} = 162$   $S = \{6\}$     c)  $5 \cdot 2^{x^2-4} = 160$   $S = \{-3, 3\}$

b)  $3 \cdot 5^{x-1} = 75$   $S = \{3\}$     d)  $10 \cdot 2^{x+3} = 10$   $S = \{-3\}$

**43.** Resolva no caderno as seguintes equações:

a)  $2^{x+1} + 2^x = 48$   $S = \{4\}$     c)  $7^x + 7^{x-1} = 8$   $S = \{1\}$

b)  $2^{x+3} + 2^{x+1} + 2^x = 88$   $S = \{3\}$     d)  $4 \cdot 2^x + 2^{x-1} = 72$   $S = \{4\}$

**44.** Resolva no caderno estas equações:

a)  $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 15 = 0$   $S = \{1\}$

b)  $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$   $S = \{0, 3\}$

c)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$   $S = \{0, 1\}$

**45.** Sabe-se que  $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{4x^2-x}$  e

$g(x) = (0,8)^{3(x+1)}$ . Calcule os valores de  $a$  para que se tenha  $f(a) = g(a)$ .  $a = \frac{3}{2}$  ou  $a = -\frac{1}{2}$

**46.** Se  $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$ , qual é o valor de  $x - y$ ?  $-2$

**47.** Descubram qual par  $(x, y)$  é solução do sistema:

$$\begin{cases} 4^x \cdot 8^y = \frac{1}{4} \\ 9^x \cdot 27^{2y} = 3 \end{cases} \quad \left(-\frac{5}{2}, 1\right)$$

**48.** Qual é o ponto comum aos gráficos de  $f(x) = 4^{x-1}$  e  $g(x) = 2^{\left(\frac{3}{2}, 1\right)}$

## 7 Inequações exponenciais

Desigualdades como as seguintes são chamadas inequações exponenciais:

a)  $3^{x-1} \geq 27$

b)  $25^x < \sqrt{5}$

c)  $8^{x-1} \leq \frac{1}{16^x}$

Para resolvê-las devemos lembrar que a função exponencial  $f(x) = a^x$  é crescente para  $a > 1$  e decrescente para  $0 < a < 1$ , ou seja:

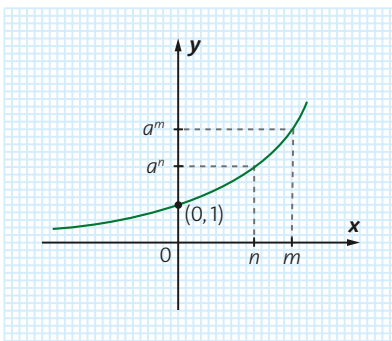
$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ (para } a > 1\text{)}$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 \text{ (para } 0 < a < 1\text{)}$$

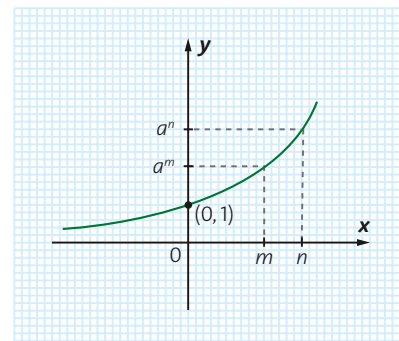
Vamos analisar cada um desses casos:

1º)  $f(x) = a^x$  com  $a > 1$

### Função crescente



$$a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$$

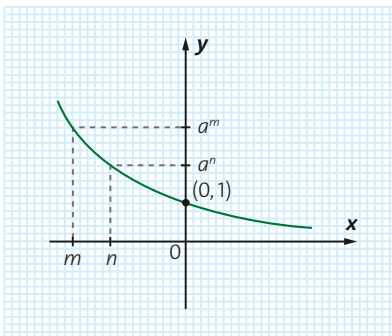


$$a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$$

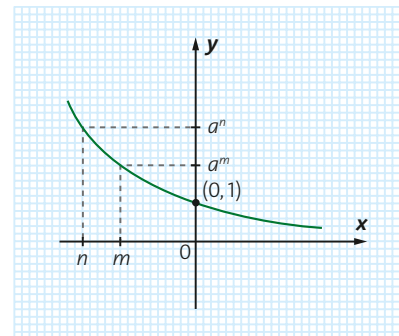
Nesse caso de  $a > 1$ , o sentido da desigualdade foi conservado.

2º)  $f(x) = a^x$  com  $0 < a < 1$

### Função decrescente



$$a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$$



$$a^m < a^n \Leftrightarrow m > n$$

Nesse caso de  $0 < a < 1$ , o sentido da desigualdade foi trocado.

## Exercícios resolvidos

8. Resolva as inequações:

a)  $2^{x+7} < 32$

b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \geq 4^{x+3}$

c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$

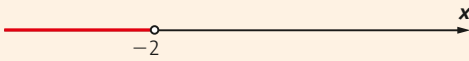
d)  $4 < 2^{x+1} \leq 32$

**Resolução:**

a)  $2^{x+7} < 32 \Rightarrow 2^{x+7} < 2^5 \rightarrow$  desigualdade de potências de mesma base

$a = 2 \Rightarrow a > 1$  (mantém-se o sentido da desigualdade)

$$x + 7 < 5 \Rightarrow x < 5 - 7 \Rightarrow x < -2$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

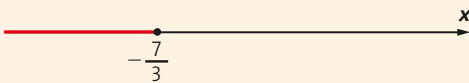
b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \geq 4^{x+3} \Rightarrow (2^{-1})^{x+1} \geq (2^2)^{x+3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{-x-1} \geq 2^{2x+6}$$

$a = 2 \Rightarrow a > 1$  (mantém-se o sentido da desigualdade)

$$-x - 1 \geq 2x + 6 \Rightarrow -x - 2x \geq 6 + 1 \Rightarrow -3x \geq 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x \leq -7 \Rightarrow x \leq -\frac{7}{3}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{7}{3}\right\}$$

**Para refletir**

Resolva o item **b** escrevendo  $4^{x+3}$  em potência de base  $\frac{1}{2}$  e verifique se obtém o mesmo resultado. **Sim.**

c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Como já temos uma desigualdade com potências de mesma base, podemos escrever:

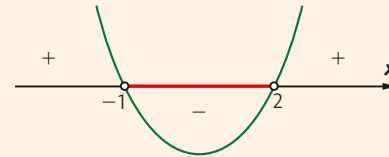
$a = \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < a < 1$  (troca-se o sentido da desigualdade)

$$x^2 - x < 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

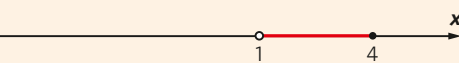
$$\Delta = 9 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = -1$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$$

d)  $4 < 2^{x+1} \leq 32 \Rightarrow 2^2 < 2^{x+1} \leq 2^5 \Rightarrow 2 < x + 1 \leq 5 \Rightarrow$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$$

9. Determine o domínio D das seguintes funções:

a)  $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$

b)  $g(x) = \frac{10}{\sqrt{16 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}}$

**Resolução:**

a) Para que exista  $f(x)$  devemos ter  $3^x - 9 \geq 0$ .  
Então:  $3^x \geq 9 \Rightarrow 3^x \geq 3^2 \Rightarrow x \geq 2$

Logo,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ .

b) Para que exista  $g(x)$  devemos ter  $16 - \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ .

$$16 > \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} > \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow -4 < x$$

Logo,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$ .

## Exercícios

49. Resolva no caderno as inequações exponenciais:

a)  $2^{5x} > 2^{3x+10}$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$  c)  $3^{x-2} > 9$

b)  $3^{5-x^2} < 3^{-4}$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$  d)  $3^{x+1} + 3^{x+2} < 108$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

50. Resolva no caderno os sistemas de inequações:

a)  $1 < 2^x < 16$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$$

b)  $\frac{1}{4} \leq 2^{x-3} \leq \frac{1}{2}$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

51. Dados  $f(x) = 3^{x-1}$ ,  $g(x) = 3^x$  e  $h(x) = 4$ , determine os valores de  $x$  para os quais  $f(x) + g(x) \geq h(x)$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

52. Expresse o domínio D das funções:

a)  $f(x) = \sqrt{2^x - 16}$   $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

b)  $f(x) = \sqrt{(7^x)^x - 7^{2x}}$   $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$





## 8 O número irracional $e$ e a função exponencial $e^x$

### Função exponencial natural

A base de uma função exponencial  $y = a^x$  é o número  $a$ , que deve ser positivo e não pode ser igual a 1. Existem, portanto, infinitas funções exponenciais, de acordo com sua base, mas uma delas tem propriedades especiais. Acompanhe a história que contaremos a seguir.

Imagine um capital  $C$  que sofre um aumento de uma porcentagem  $i$ . Qual será o seu novo valor? (Reveja a página 149.)

Veja: o novo valor desse capital é igual a  $C + Ci$ , ou seja, é igual a  $C(1 + i)$ . Por exemplo, se um capital de 4 600 reais sofrer um aumento de 12%, o seu novo valor será de 5 152 reais ( $4\,600 \cdot (1 + 0,12) = 4\,600 \cdot 1,12 = 5\,152$ ).

Imagine agora que esse capital  $C$  sofra  $n$  aumentos sucessivos da mesma porcentagem  $i$  e que cada aumento incida sobre o valor anterior atualizado. Qual será o valor final desse capital?

A resposta é que o valor final do capital inicial  $C$  é igual a  $C(1 + i)^n$ , que é a fórmula dos juros compostos. A fórmula é moderna, mas o procedimento para fazer esses mesmos cálculos é conhecido desde a Antiguidade. Os povos da Mesopotâmia já faziam esses cálculos de forma bastante aproximada em suas transações comerciais há mais de 3 000 anos.

Entretanto, um personagem do século XVII chamado Jacques (ou Jacob) Bernoulli imaginou um problema curioso com os juros compostos.

### O problema de Bernoulli

Jacques imaginou que um banco empreste a uma pessoa X a quantia igual a 1 cobrando juros de 100% ao ano. No final de um ano, quanto a pessoa X deve pagar?

A resposta é: como  $i = 100\% = \frac{100}{100} = 1$ , a pessoa X deve pagar  $(1 + 1)^1 = 2$ .

Entretanto, Jacques começou a pensar em uma forma de manter aparentemente o mesmo contrato de empréstimo, todavia ganhando mais. Ele pensou então em dividir o juro pela metade, mas cobrar a cada semestre. Assim, a pessoa X deverá pagar, pela fórmula dos juros compostos,  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,5$ . Dando sequência a essa ideia, os juros de 100% ao ano poderiam ser divididos em partes menores e cobrados em períodos de tempo também menores. Observe na tabela abaixo a relação entre o período de tempo de incidência dos juros e o valor a ser pago durante 1 ano.

### Diferentes períodos de incidência de juros compostos ao longo de 1 ano e o valor a ser pago

Período de incidência de juros	Fórmula	Valor a ser pago
Ano	$(1 + 1)^1$	2
Semestre	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$	2,5
Mês	$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$	2,613...
Dia	$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$	2,71457...
Hora	$\left(1 + \frac{1}{8\,760}\right)^{8\,760}$	2,718126...
Minuto	$\left(1 + \frac{1}{525\,600}\right)^{525\,600}$	2,7182792...
Infinitamente pequeno	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \rightarrow \infty$	2,718281828459...

Fonte: Dados experimentais.

O último número da tabela, 2,718281828459..., foi chamado de “número **e**”.

Ele representa o valor a pagar de 1 unidade de dinheiro com juros de 100% contabilizados continuamente, ou seja, em períodos de tempo infinitesimais (minúsculos e cada vez menores).

A partir dessas conclusões, tornou-se conhecida a função exponencial de base **e**, também chamada de função exponencial natural. Ela é representada por  $y = e^x$  e apresenta propriedades especiais, fundamentais para o estudo das equações diferenciais e integrais.

Funções que envolvam a função exponencial  $e^x$ , como  $f(x) = b \cdot e^{ax}$ , aparecem com muita frequência nas aplicações da Matemática e na descrição de fenômenos naturais. Algumas calculadoras possuem uma tecla com o número irracional **e**, cujo valor aproximado é 2,718.

**Para refletir**

A função  $f(x) = e^x$  é crescente. Justifique.

$e = 2,718281... \Rightarrow e > 1 \Rightarrow f(x) = e^x$  é crescente.

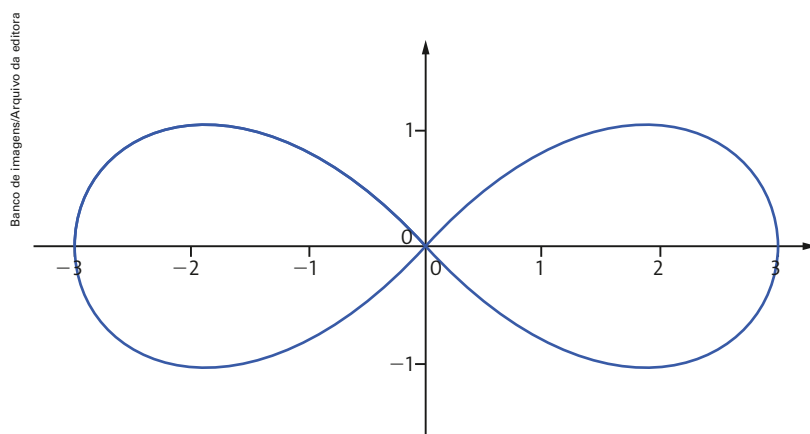
## Jacques Bernoulli

Jacques Bernoulli nasceu em Basel (Suíça) e foi o primeiro matemático de uma família que produziu mais de 10 matemáticos famosos durante os dois séculos seguintes. O pai de Jacques tinha traçado planos para o futuro de seus filhos e, para Jacques, estava destinado o estudo da religião (católica) para tornar-se um “ministro religioso”. Não deu certo. Jacques e também seu irmão mais novo Jean tornaram-se matemáticos famosos. Ambos viajaram bastante pela Europa e mantiveram contato com diversos cientistas e matemáticos da época. Jacques voltou a Basel e tornou-se professor da universidade local, mas manteve intensa correspondência com muitos outros matemáticos do seu tempo. Em seus estudos, não se fixou em um tema específico, mas deu importantes contribuições em assuntos como lógica, álgebra, teoria dos números, análise combinatória, probabilidades, curvas planas, séries, cálculo, equações diferenciais.



Gravura de Jacques Bernoulli, matemático suíço (1655-1705).

Uma interessante contribuição de Jacques para a Matemática foi a descrição da famosa curva algébrica de quarto grau, chamada de “lemniscata de Bernoulli”. O desenho a seguir mostra o gráfico da curva de equação  $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$ .



## Exercício



53. Considere as funções  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = e^{-x}$ . Usando os valores da tabela abaixo, determine:

$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$
0	1,0000	1,00000	3,0	20,086	0,04979
1,0	2,7183	0,36788	4,0	54,598	0,01832
2,0	7,3891	0,13534	5,0	148,41	0,00674

a)  $f(1), f(3), g(2)$  e  $g(4)$ ;  $f(1) = 2,7183; f(3) = 20,086;$   
 $g(2) = 0,13564; g(4) = 0,01832$

c)  $x$  tal que  $g(x) = 0,368$ .  $x = 1$

b)  $x$  tal que  $f(x) = 7,389$ ;  $x = 2$

Agora, construa no caderno no mesmo sistema de eixos os gráficos de  $f$  e  $g$ . [Veja os gráficos no Manual do Professor.](#)

## 9 Aplicações da função exponencial

O crescimento exponencial é característico de certos fenômenos naturais. No entanto, de modo geral não se apresenta na forma  $a^x$ , mas sim modificado por constantes características do fenômeno, como em:

$$f(x) = C \cdot a^{kx}$$

Acompanhe os exercícios resolvidos a seguir.

## Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 11

10. (UCS-RS) A quantidade de certa substância decresce com o passar do tempo a uma taxa proporcional à quantidade restante. Se inicialmente havia 300 mg da substância e a cada hora há um decréscimo de 25% da quantidade restante, a função que representará a quantidade restante após  $t$  horas será:

a)  $Q(t) = 300 \cdot (0,25)^t$ .

b)  $Q(t) = 300 \cdot (0,75)^t$ .

c)  $Q(t) = 300 - 0,25t$ .

d)  $Q(t) = 300 - 0,75t$ .

e)  $Q(t) = 300 - 25t$ .

**Resolução:**

Dizer que a quantidade de certa substância decresce 25% a cada hora é o mesmo que multiplicar essa quantidade por  $(0,75)^t$ , sendo  $t$  o tempo decorrido em horas. Como essa quantidade, segundo o enunciado, é 300 mg, a função que representa a quantidade restante da substância é  $Q(t) = 300 \cdot (0,75)^t$ .

Tirando a prova, temos:

$$t = 1 \Rightarrow Q(1) = 300 \cdot (0,75)^1 \Rightarrow Q(1) = 225$$

A razão entre  $Q(1)$  e  $Q(2)$  é dada por:

$$\frac{225}{300} = 0,75$$

Isso indica que houve uma redução de 25% em uma hora decorrida, ou seja,  $Q(t) = 300 \cdot (0,75)^t$ .

Resposta: alternativa b.



**54. Química**

A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis por emitirem partículas e radiações. A medida de tempo na qual metade da quantidade do material radioativo se desintegra é denominada meia-vida ou período de semidesintegração ( $P$ ). A cada período de tempo  $P$  a quantidade de material radioativo cai à metade da anterior, sendo possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer tempo com a quantidade inicial por meio de uma função exponencial:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}$$

em que  $N_0$  é a quantidade inicial

do material radioativo,  $t$  é o tempo decorrido e  $P$  é o valor da meia-vida do material radioativo considerado. A radioatividade faz parte de nossa vida, como quando se faz uma tomografia. Um dos isótopos mais usados nos radiofármacos injetados nos pacientes submetidos à tomografia é o carbono-11, cuja meia-vida é de 20 minutos. O tempo necessário, em minutos, para que uma amostra de carbono-11 se reduza a  $\frac{1}{4}$  do que era quando foi obtida é:

- a) 5. x d) 40.  
 b) 10. e) 80.  
 c) 20.

**55. DESAFIO Química**

O carbono-14 é um isótopo raro do carbono presente em todos os seres vivos. Com a morte, o nível de C-14 no corpo começa a decair. Como é um isótopo radioativo de meia-vida de 5 730 anos, e como é relativamente fácil saber o nível original de C-14 no corpo dos seres vivos, a medição da atividade de C-14 em um fóssil é uma técnica muito utilizada para datações arqueológicas. A atividade radioativa do C-14 decai com o tempo pós-morte segundo a função exponencial

$$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

em que  $A_0$  é a atividade natural do C-14 no organismo vivo e  $t$  é o tempo decorrido em anos após a morte. Suponha que um fóssil encontrado em uma caverna foi levado ao laboratório para ter sua idade estimada. Verificou-se que emitia 7 radiações de C-14 por grama/hora. Sabendo que o animal vivo emite 896 radiações por grama por hora, então a idade aproximada desse fóssil, em anos, seria:

- a) 400 mil anos.  
 b) 200 mil anos.  
 c) 80 mil anos.  
 x d) 40 mil anos.  
 e) 20 mil anos.

**56. Biologia**

Em uma certa cultura, há 1000 bactérias em determinado instante. Após 10 minutos, existem 4000. Quantas bactérias existirão em 1 hora, sabendo que elas aumentam segundo a fórmula  $P = P_0 \cdot e^{kt}$ , em que  $P$  é o número de bactérias,  $t$  é o tempo em horas e  $k$  é uma constante?

Aproximadamente 4 447 022 bactérias.

**57. Biologia**

Os biólogos afirmam que, sob condições ideais, o número de bactérias em uma certa cultura cresce de tal forma que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo de tempo considerado. Suponhamos que 2000 bactérias estejam inicialmente presentes em uma certa cultura e que 4000 estejam presentes 30 minutos depois. Quantas bactérias estarão presentes no fim de 2 horas? 32 000 bactérias.

**58. Química**

Os átomos de um elemento químico radioativo têm uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico acetilcefuroxima apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:

- a) após 12 horas de sua ingestão? 3,125 mg  
 b) após  $t$  horas de sua ingestão?  $f(t) = 50 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

**59. Biologia**

O modelo Jenss-Bayley é uma fórmula usada para avaliar a altura de uma criança em idade pré-escolar. Se  $h(x)$  denota a altura (em centímetros) na idade  $x$  (em anos) para  $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$ , então  $h(x)$  pode ser aproximado por  $h(x) = 79,041 + 6,39x - e^{3,261 - 0,993x}$ . Temos que a taxa de crescimento  $v(x)$  (em cm/ano) de uma criança na mesma faixa de idade é dada por  $v(x) = 6,39 + 0,993 \cdot e^{3,261 - 0,993x}$ . (Considere a aproximação  $e^{2,268} = 9,7$ .) Com base no exposto, quais seriam a altura e a taxa de variação de crescimento de uma criança quando esta atingisse a idade de 1 ano?

- x a) 75,7 cm e 16 cm/ano  
 b) 74,1 cm e 10,93 cm/ano  
 c) 84,3 cm e 11,08 cm/ano  
 d) 80,4 cm e 14,89 cm/ano  
 e) 82,3 cm e 15,01 cm/ano



## Césio-137 – o maior acidente radioativo do Brasil



João Ramid/Arquivo da editora

Técnicos orientando o carregamento de lixo radioativo depois do acidente com o césio-137. Goiânia-GO. Fotografia de 1987.

Em um acidente radioativo ocorrido no dia 13 de setembro de 1987, em Goiânia, Goiás, foram contaminadas centenas de pessoas acidentalmente por meio das radiações emitidas por uma cápsula que continha césio-137. Foi o maior acidente radioativo do Brasil e o maior do mundo ocorrido fora das usinas nucleares. Tudo teve início com a curiosidade de dois catadores de lixo que vasculhavam as antigas instalações do Instituto Goiano de Radioterapia (também conhecido como Santa Casa de Misericórdia), no centro de Goiânia.

No local eles encontraram um aparelho de radioterapia. Removeram a máquina e levaram-na até a casa de um deles. Estavam interessados nas partes de metal e chumbo, que podiam ser vendidas em ferros-velhos da cidade; desconheciam completamente aquela máquina e o que havia em seu interior.

No período da desmontagem da máquina, foram expostos ao ambiente 19,26 g de cloreto de césio-137 ( $\text{CsCl}$ ). Tal substância é um pó branco parecido com o sal de cozinha, mas que no escuro brilha com uma coloração azul. Após cinco dias, a peça foi vendida a um proprietário de ferro-velho, que se encantou com o brilho azul emitido pela substância. Crendo estar diante de algo sobrenatural, o dono do ferro-velho passou quatro dias recebendo amigos e curiosos interessados em conhecer o pó brilhante. Muitos levaram para casa pedrinhas da substância. Parte do equipamento de radioterapia foi para outro ferro-velho, de forma que gerou uma enorme contaminação com o material radioativo.

Os primeiros sintomas da contaminação (vômito, náusea, diarreia e tontura) surgiram algumas horas após o contato com a substância, o que levou um grande número de pessoas à procura de hospitais e farmácias, sendo medicadas apenas como portadoras de uma doença contagiosa. Mais tarde descobriu-se que se tratava de sintomas de uma síndrome aguda de radiação. Somente no dia 29 de setembro de 1987 é que os sintomas foram qualificados como contaminação radioativa.

Os médicos que receberam o equipamento solicitaram a presença de um físico, pois tinham a suspeita de que se tratava de material radioativo. Então o físico nuclear Valter Mendes, de Goiânia, constatou que havia índices de radiação. Por suspeitar da gravidade do acidente, ele acionou a então Comissão Nacional Nuclear (CNEN).

Uma das primeiras medidas foi separar todas as roupas das pessoas expostas ao material radioativo e lavá-las com água e sabão para a descontaminação externa. Após essa medida, as pessoas tomaram um quelante (substância que elimina os efeitos da radiação). Com ele, as partículas de césio saem do organismo através da urina e das fezes.

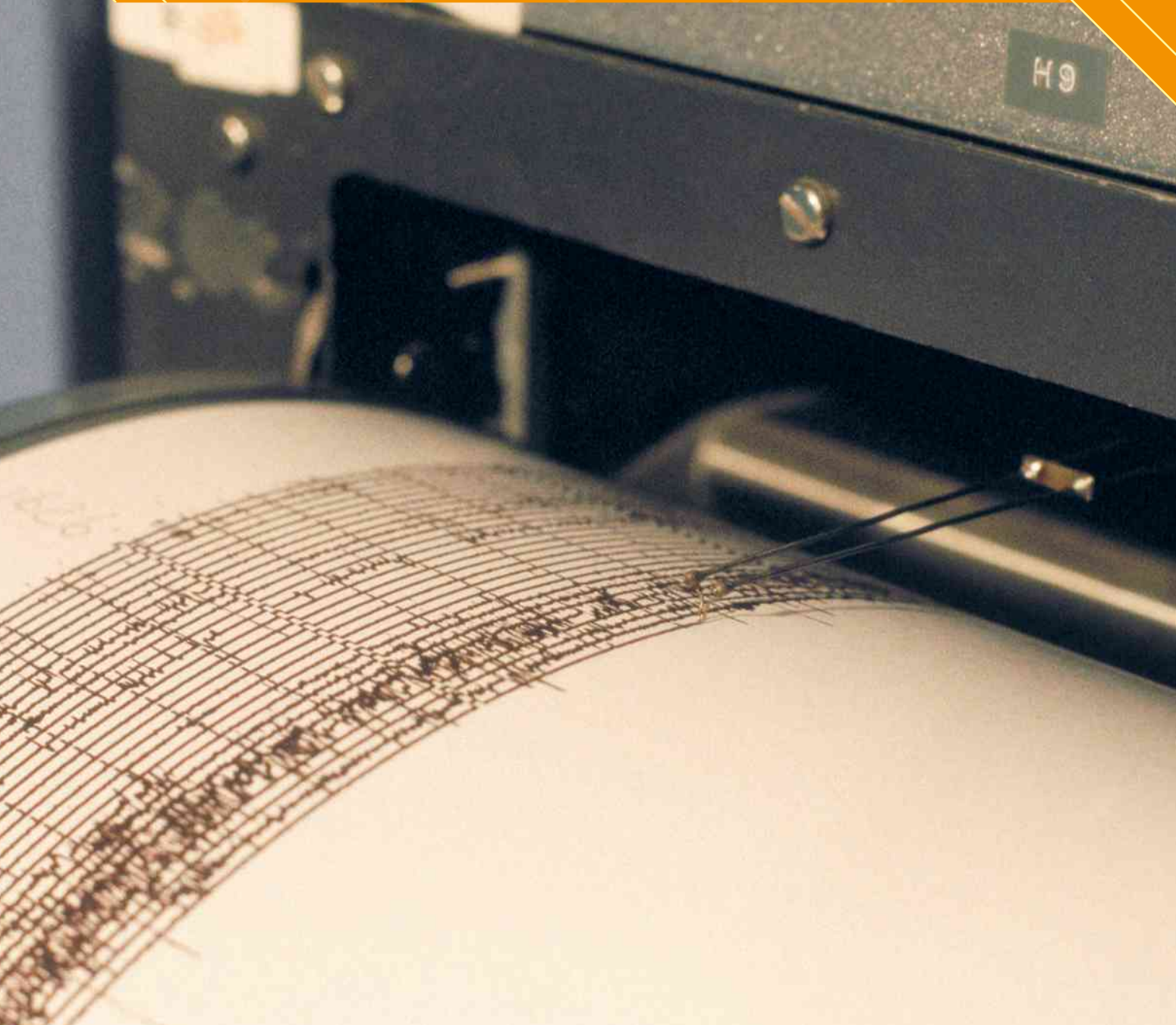
Cerca de um mês após o acidente quatro pessoas já haviam morrido. O trabalho de descontaminação dos locais atingidos gerou cerca de 13,4 toneladas de lixo (roupas, utensílios, material de construção, etc.) contaminado.

Após o acidente, cerca de 60 pessoas morreram vítimas da contaminação, entre elas funcionários que realizaram a limpeza do local. O Ministério Público reconhece apenas 628 vítimas contaminadas diretamente, mas a Associação das Vítimas do Césio-137 calcula um número superior a 6 mil pessoas atingidas pela radiação.

### Para refletir

Sabendo que o acidente radioativo foi em 1987 e que o local do acidente só poderá ser habitado novamente quando a quantidade de césio-137 se reduzir, por desintegração, a  $\frac{1}{32}$  da quantidade inicialmente presente, então o local poderá ser reabitado a partir de que ano? **2137**





Parte do mostrador de um sismógrafo, no laboratório sismológico da Universidade de Nevada (EUA). O sismógrafo é um instrumento utilizado para medir a magnitude de um terremoto, que é calculada por meio de logaritmos.

A magnitude de um terremoto é avaliada pela quantidade de energia liberada durante um abalo sísmico (tremor de terra), e uma das formas de quantificar esta energia é utilizar a escala Richter, que é expressa por uma equação logarítmica.

# 1 Logaritmo

Formem duplas e tentem resolver no caderno as seguintes equações:

- a)  $2^x = 4$                       c)  $10^x = 1000$                       e)  $10^x = 8000$   
 b)  $2^x = 8$                       d)  $2^x = 5$                       f)  $10^x = 990$

O objetivo deste questionamento é que os alunos percebam que a dificuldade decorre do fato de 5 não ser potência inteira de 2, nem 8 000 e 990 serem potências inteiras de 10.

Vocês encontraram alguma dificuldade ao tentar resolver os itens **d**, **e** e **f**?

Tentem descobrir alguns detalhes sobre a solução das equações **d**, **e** e **f**; por exemplo, perto de que valor inteiro ela está, ou entre quais valores inteiros devemos buscar tais soluções. No item **d** o esperado é que os alunos percebam que  $x$  deve estar entre 2 e 3. É possível que alguns sugiram que esteja mais perto do 2 do que do 3. No **e**, o esperado é que eles percebam que  $x$  deve estar entre 3 e 4. É possível que alguns sugiram que esteja mais perto do 4 do que do 3. No **f**, o esperado é que eles sugiram que  $x$  deve ser bem próximo de 3. Agora, acompanhe esta situação:

Em julho de 2015, o Banco Central do Brasil classificou 12 instituições bancárias em relação às taxas de juros ao ano oferecidas para financiamento de imóveis a pessoas físicas. A taxa média de juros dessas instituições nesse período foi de 12,13% ao ano. Se a taxa permanecer a mesma, o valor a ser pago ao banco dobrará caso o financiamento seja pago em quantos anos?

Explique aos alunos que "pessoa física" diz respeito a um cidadão comum, identificado pelo seu Cadastro de Pessoa Física (CPF). O cidadão é todo aquele que exerce seus direitos e deveres em uma sociedade legitimada pelo Estado. Também se diferencia de pessoa jurídica, que é uma entidade organizada, podendo exercer diversas finalidades e que também detém direitos e deveres para com o Estado, por exemplo: uma empresa, uma organização não governamental (ONG), etc.

Fonte dos dados: Banco Central do Brasil. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/pt-br/sfn/infopban/txcred/txjuros/Paginas/RelTxJurosMensal.aspx?tipoPessoa=1&modalidade=903&encargo=201x>>. Acesso em: 21 ago. 2015.

Se forem mantidas essas condições, podemos organizar a seguinte tabela:

## Financiamento imobiliário em julho de 2015

Tempo	Valor a ser pago
início	$F_0$
1 ano	$F_1 = F_0 \cdot 1,1213$
2 anos	$F_2 = (F_0 \cdot 1,1213) \cdot 1,1213 = F_0 (1,1213)^2$
3 anos	$F_3 = F_0 (1,1213)^3$
⋮	⋮
$x$ anos	$F_x = F_0 (1,1213)^x$

Fonte: Dados experimentais.

### Fique atento!

$$100\% + 12,13\% = 112,13\% = \frac{112,13}{100} = 1,1213.$$

Supondo que o valor a ser pago ao banco dobrará caso o financiamento seja pago em  $x$  anos, temos:

$$F_x = 2F_0$$

Daí:

$$F_0(1,1213)^x = 2F_0 \Leftrightarrow (1,1213)^x = 2$$

Não é possível resolver essa equação usando os conhecimentos adquiridos até aqui.

Com o objetivo de transformar uma equação exponencial como essa em uma igualdade entre potências de mesma base, vamos desenvolver a noção de **logaritmo**.

## Definição de logaritmo de um número

Considere as seguintes questões. A que número  $x$  se deve elevar:

- a) o número 2 para se obter 8?  
 b) o número 3 para se obter  $\frac{1}{81}$ ?

Acompanhe as resoluções:

a)  $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

Esse valor 3 denomina-se **logaritmo** do número 8 **na base** 2 e é representado por  $\log_2 8 = 3$ . Assim:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

b)  $3^x = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

O valor  $-4$  chama-se **logaritmo** do número  $\frac{1}{81}$  **na base** 3 e é representado por:

$$\log_3 \frac{1}{81} = -4$$

**Fique atento!**

Perceba que o logaritmo é um expoente.

Dados os números reais positivos  $a$  e  $b$ , com  $a \neq 1$ , se  $b = a^c$ , então o expoente  $c$  chama-se **logaritmo de  $b$  na base  $a$** . Podemos representar esta definição em símbolos:  **$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$** , com  $a$  e  $b$  positivos e  $a \neq 1$ .

Nessa equivalência temos:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c$ $\begin{cases} c: \text{logaritmo} \\ a: \text{base de logaritmo} \\ b: \text{logaritmando} \end{cases}$	$a^c = b$ $\begin{cases} b: \text{potência} \\ a: \text{base da potência} \\ c: \text{expoente} \end{cases}$

**Fique atento!**

Quando dizemos **logaritmo**, estamos nos referindo a um número.

Veja mais alguns exemplos:

a)  $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

c)  $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$

b)  $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

d)  $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

### Observações:

1ª) *Condições de existência do logaritmo*

Pela definição,

$$\log_a N \text{ existe quando e somente quando } \begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

Veja que, de acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo:  $\log_3 (-81)$ ,  $\log_{10} 0$ ,  $\log_0 3$ ,  $\log_{-2} 8$  e  $\log_1 6$ . Experimente aplicar a definição nesses casos.

2ª) Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. Assim,  $\log 2$  é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de **logaritmos decimais** ou de **Briggs**. Por exemplo,  $\log 100 = \log 10^2 = 2$ .

## Consequências da definição de logaritmo

- 1ª)  $\log_a 1 = 0$ , pois  $a^0 = 1$ , qualquer que seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .
- 2ª)  $\log_a a = 1$ , pois  $a^1 = a$  para todo  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .
- 3ª)  $\log_a a^n = n$ , pois  $a^n = a^n$  para todo  $a > 0$  e  $a \neq 1$  e para todo  $n$ .
- 4ª)  $a^{\log_a N} = N$ , com  $N > 0$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

Justificativa:  $\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$

Substituindo  $x$ :  $a^{\log_a N} = a^x = N$

- 5ª)  $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$ , com  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

Justificativa: se  $\log_a x = r$  e  $\log_a y = s$ , isto é,  $a^r = x$  e  $a^s = y$ , temos:

- $x = y \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow r = s \Rightarrow \log_a x = \log_a y$
- $\log_a x = \log_a y \Rightarrow r = s \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow x = y$

## Exercícios resolvidos

1. Determine o valor de:

- a)  $\log_2 128$ ;  
 b)  $\log_{\sqrt{3}} 9$ ;  
 c)  $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$ .

### Resolução:

Representando por  $x$  os valores procurados, temos:

a)  $\log_2 128 = x \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$

Portanto,  $\log_2 128 = 7$ .

b)  $\log_{\sqrt{3}} 9 = x \Rightarrow (\sqrt{3})^x = 9 \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$

Logo,  $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ .

c)  $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = \log_{3^{-2}} \left(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_{3^{-2}} 3^{\frac{3}{2}} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow (3^{-2})^x = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Portanto,  $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = -\frac{3}{4}$ .

2. Determine os valores reais de  $x$  para os quais existe:  $\log_2 (x - 3)$ .

### Resolução:

Como a base é 2 (positiva e diferente de 1), devemos impor que  $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ .

Logo,  $x \in \mathbb{R} \mid x > 3$ .

3. Determine o conjunto dos valores reais de  $x$  para os quais é possível determinar  $\log_{x-2} (x^2 - 4x - 5)$ .

### Resolução:

- Pelas condições de existência, temos:

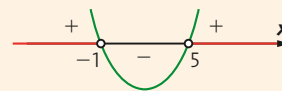
$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$a = 1 > 0$$

$$\Delta = 36 > 0$$

$$x' = 5 \text{ e } x'' = -1$$

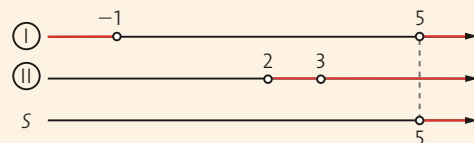
Estudo do sinal:



$$x < -1 \text{ ou } x > 5 \quad \textcircled{I}$$

- $\begin{cases} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{cases} \quad \textcircled{II}$

Satisfazendo simultaneamente as condições, estabelecemos o quadro de resolução:



Logo, o conjunto é  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$ .

4. Calcule:

a)  $2^{\log_5 10 \cdot \log_2 5}$

b)  $2^{\frac{\log_2 3}{3}}$

c)  $3^{1 + \log_3 5}$

### Resolução:

a)  $2^{\log_5 10 \cdot \log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{\log_5 10} = 5^{\log_5 10} = 10$

propriedade das potências

b)  $2^{\frac{\log_2 3}{3}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \log_2 3} = (2^{\log_2 3})^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

c)  $3^{1 + \log_3 5} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 5} = 3 \cdot 5 = 15$



## Propriedades operatórias dos logaritmos

Para  $a$ ,  $M$  e  $N$  números reais positivos e  $a \neq 1$ , temos:

### 1ª) Logaritmo de um produto

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

*Demonstração:*

Consideramos  $\log_a (M \cdot N) = p$ ;  $\log_a M = m$  e  $\log_a N = n$ .

Dessas igualdades, tiramos  $a^p = M \cdot N$ ;  $a^m = M$  e  $a^n = N$ . Então:

$$a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Se  $a^p = a^{m+n}$ , então  $p = m + n$ , ou seja:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

*Conclusão:*

Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

Exemplos:

a)  $\log_7 (2 \cdot 5) = \log_7 2 + \log_7 5$

b)  $\log 300 = \log (3 \cdot 100) = \log 3 + \log 100 = \log 3 + \log 10^2 = \log 3 + 2$

### 2ª) Logaritmo de um quociente

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

*Demonstração:*

Consideramos  $\log_a \frac{M}{N} = q$ ;  $\log_a M = m$  e  $\log_a N = n$ .

Daí tiramos  $a^q = \frac{M}{N}$ ;  $a^m = M$  e  $a^n = N$ . Então:

$$a^q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Se  $a^q = a^{m-n}$ , então  $q = m - n$ , ou seja,  $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ .

*Conclusão:*

Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

Exemplos:

a)  $\log_5 \left(\frac{2}{3}\right) = \log_5 2 - \log_5 3$

b)  $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 1 - \log_2 8 = 0 - 3 = -3$

#### Você sabia?

Essa propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no século XVII, com o objetivo de simplificar os trabalhos cálculos, principalmente dos astrônomos.

#### Fique atento!

$\log 3 \cdot 2$  não é o mesmo que  $\log (3 \cdot 2)$ .

#### Fique atento!

Caso particular:

$$\log_a \frac{1}{N} =$$

$$= \log_a 1 - \log_a N =$$

$$= 0 - \log_a N, \text{ ou seja,}$$

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N.$$

### 3ª) Logaritmo de uma potência

$$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$$

*Demonstração:*

Consideramos  $\log_a M^N = r$  e  $\log_a M = m$ .

Daí tiramos:  $a^r = M^N$  e  $a^m = M$ .

Então:

$$a^r = M^N = (a^m)^N = a^{Nm}$$

Se  $a^r = a^{Nm}$ , então  $r = Nm$ , ou seja,  $\log_a M^N = N \cdot \log_a M$ .

*Conclusão:*

Em uma mesma base, o logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Podemos aplicar essa propriedade no logaritmo de uma raiz (quando existir):

$$\log_a \sqrt[N]{M} = \log_a M^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{N} \cdot \log_a M$$

Exemplos:

a)  $\log_3 8^4 = 4 \cdot \log_3 8$

b)  $\log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$

c)  $\log_7 5^3 = 3 \cdot \log_7 5$

d)  $\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 (4)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

### Mudança de base do logaritmo

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \text{ para } N > 0, b > 0, a > 0; b \neq 1 \text{ e } a \neq 1$$

*Demonstração:*

Consideramos  $\log_b N = p$ ;  $\log_a N = q$  e  $\log_a b = r$ .

Daí tiramos:  $b^p = N$ ;  $a^q = N$  e  $a^r = b$ .

Fazendo substituições:  $N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$ .

Se  $a^q = a^{rp}$ , então  $q = rp$  e daí  $p = \frac{q}{r}$  ou  $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ .

*Conclusão:*

Para escrever o  $\log_b N$  usando logaritmos na base  $a$ , realizamos a mudança de base:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

#### Para refletir

Como garantir que  $r \neq 0$ ?

$r = \log_a b$ ,  $a$  e  $b$  são números reais positivos e  $a \neq 1$  e  $b \neq 1$ . Então  $a^r \neq 1 \Rightarrow r \neq 0$ .



**Observação:** Nessa propriedade, fazendo  $N = a$ , temos um caso importante:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

Então podemos escrever que, quando existirem os logaritmos envolvidos:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \text{ ou } \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

**Fique atento!**

Quando existirem,  $\log_b a$  e  $\log_a b$  são números inversos.

Exemplos:

a)  $\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7}$  (na base 2)

b)  $\log_7 5 = \frac{\log 5}{\log 7}$  (na base 10)

c)  $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

d)  $\log_b a = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_a b = -\frac{4}{3}$

O desenvolvimento logarítmico utiliza as propriedades para expandir uma expressão, de maneira que nos permite calcular o logaritmo de um produto, quociente ou potência, conhecendo apenas os logaritmos dos fatores do produto, dos termos do quociente ou da base da potência.

## Exercícios resolvidos

5. Determine o desenvolvimento logarítmico da expressão  $\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right)$ .

**Resolução:**

$$\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right) = \log\left(\frac{a \cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^3}\right) = \log a \cdot b^{\frac{1}{2}} - \log c^3 =$$

$$= \log a + \log b^{\frac{1}{2}} - \log c^3 =$$

$$= \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b - 3 \cdot \log c$$

Portanto,  $\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right) = \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b - 3 \cdot \log c$ .

**Para refletir**

O que significa desenvolvimento logarítmico?

6. Se  $\log 2 = a$  e  $\log 3 = b$ , expresse  $\log 72$  em função de  $a$  e  $b$ .

**Resolução:**

$$\log 72 = \log(2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 =$$

$$= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 3a + 2b$$

Então,  $\log 72 = 3a + 2b$ .

7. Escreva  $\log_2 8$  usando logaritmos na base 10.

**Resolução:**

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \Rightarrow \log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2}$$

8. Dados  $\log_a m = 11$  e  $\log_a n = 6$ , qual é o valor de  $\log_a(m^3 n^2)$ ?

**Resolução:**

$$\log_a(m^3 n^2) = \log_a m^3 + \log_a n^2 =$$

$$= 3 \cdot \log_a m + 2 \cdot \log_a n = 3 \cdot 11 + 2 \cdot 6 = 45$$

Então,  $\log_a(m^3 n^2) = 45$ .

9. Dado  $\log_b a = 6$ , calcule  $\log_a b^3$ .

**Resolução:**

$$\log_a b^3 = \frac{\log_b b^3}{\log_b a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

10. Escreva as expressões a seguir por meio de um único logaritmo:

a)  $3 \cdot \log_4 7$ ;

b)  $\log_3 x - \log_3 2$ ;

c)  $\log_{\frac{1}{2}} 6 + \log_{\frac{1}{2}} 3$ ;

d)  $\log_5 4 + \log_5 x - \log_5 3$ .

**Resolução:**

a)  $3 \cdot \log_4 7 = \log_4 7^3 = \log_4 343$

b)  $\log_3 x - \log_3 2 = \log_3 \frac{x}{2}$

c)  $\log_{\frac{1}{2}} 6 + \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} (6 \cdot 3) = \log_{\frac{1}{2}} 18$

d)  $\log_5 4 + \log_5 x - \log_5 3 = \log_5 (4x) - \log_5 3 =$   
 $= \log_5 \frac{4x}{3}$

# Exercícios



1. Usando a definição de logaritmo, calcule:

- a)  $\log_3 27$  3      d)  $\log_{\frac{1}{2}} 32$  -5      g)  $\log_2 \sqrt{8}$   $\frac{3}{2}$   
 b)  $\log_5 125$  3      e)  $\log_{10} 0,01$  -2      h)  $\log_4 \sqrt{32}$   $\frac{5}{4}$   
 c)  $\log 10\,000$  4      f)  $\log_2 0,5$  -1      i)  $\log_{\frac{1}{4}} 16$  -2

2. Determine o valor da base  $a$  nas igualdades a seguir:

- a)  $\log_a 8 = 3$   $a = 2$       c)  $\log_a 1 = 0$   $\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$   
 b)  $\log_a 81 = 4$   $a = 3$       d)  $\log_a \frac{1}{16} = 2$   $a = \frac{1}{4}$

3. Determine  $x$  nas igualdades:

- a)  $\log_2 64 = x$   $x = 6$       c)  $2 = \log_x 625$   $x = 25$   
 b)  $\log_x 126 = 3$   $x = \sqrt[3]{126}$       d)  $\log x = 0$   $x = 1$

4. Indique os valores reais de  $x$  para os quais é possível determinar:

- a)  $\log_5 x$   $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$       c)  $\log_4 (x^2 - 16)$   
 b)  $\log_{10} (x - 3)$   $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 4\}$   
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

5. Determine os valores de  $x$  para que exista:

- a)  $\log_{x-5} 10$   $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$       b)  $\log_{2x-1} \sqrt{3}$   $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1\}$

6. Determinem o conjunto dos valores reais de  $x$  para que seja possível definir:

- a)  $\log_x (x - 3)$   $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$       b)  $\log_{x-1} (x + 4)$   $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq 2\}$

7. Classifiquem em verdadeiro ou falso:

- a)  $\log_3 1 = 1$  Falso.      e)  $\log_7 3^7 = 3$  Falso.  
 b)  $\log_1 5 = 5$  Falso.      f)  $\log_3 3^7 = 7$  Verdadeiro.  
 c)  $\log_5 5 = 1$  Verdadeiro.      g)  $2^{\log_2 5} = 5$  Verdadeiro.  
 d)  $\log_5 1 = 0$  Verdadeiro.      h)  $2^{\log_5 2} = 5$  Falso.

8. Calculem o valor das expressões:

- a)  $10^{\log_{10} 3}$  3      d)  $3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2}$  7  
 b)  $2^{\log_2 5}$  5      e)  $2^{1 + \log_2 3}$  6  
 c)  $2^{\log_2 6 \cdot \log_6 10}$  10      f)  $2^{2 + 3 \log_2 5}$  500

9. Determine o desenvolvimento logarítmico das expressões:

- a)  $\log (x^3 y)$   $3 \cdot \log x + \log y$   
 b)  $\log \left( \frac{\pi r^3 h}{3} \right)$   $\log \pi + 3 \cdot \log r + \log h - \log 3$   
 c)  $\log_3 \left( \frac{\sqrt{x}}{y^2} \right)$   $\frac{1}{2} \cdot \log_3 x - 2 \cdot \log_3 y$

10. No caderno, escreva na forma de um único logaritmo.

- a)  $\log_5 6 + \log_5 11$   $\log_5 66$   
 b)  $\log_7 28 - \log_7 4$  1  
 c)  $4 \cdot \log 3$   $\log 81$   
 d)  $\frac{\log_2 3}{\log_8 7}$   $\log_7 27$   
 e)  $\frac{1}{3} \cdot \log_3 7 - \log_3 2$   $\log_3 \left( \frac{\sqrt[3]{7}}{2} \right)$   
 f)  $1 + \log_5 4$   $\log_5 20$

11. Dados  $\log 2 = a$  e  $\log 3 = b$ , determine:

- a)  $\log 6$   $a + b$       d)  $\log 1,5$   $b - a$   
 b)  $\log 24$   $3a + b$       e)  $\log 16$   $4a$   
 c)  $\log 300$   $2 + b$       f)  $\log_3 2$   $\frac{a}{b}$

12. Dados  $\log 2 = x$  e  $\log 3 = y$ , determine:

- a)  $\log 5$   $1 - x$       d)  $\log \frac{1}{3}$   $-y$   
 b)  $\log \sqrt{3}$   $\frac{y}{2}$       e)  $\log 0,06$   $x + y - 2$   
 c)  $\log \sqrt[3]{12}$   $\frac{2x + y}{3}$       f)  $\log_4 27$   $\frac{3y}{2x}$

13. Dados  $\log a = 5$ ,  $\log b = 3$  e  $\log c = 2$ , calcule o valor de  $\log \left( \frac{ab^2}{c} \right)$ . 9

14. Sendo  $\log_a 2 = 20$  e  $\log_a 5 = 30$ , calculem o valor de  $\log_a 100$ . 100

15. Determinem a expressão  $P$  sabendo que:

- a)  $\log P = 2 \cdot \log a + 5 \cdot \log b$   $P = a^2 b^5$   
 b)  $\log_2 P = 3 \cdot \log_2 a + \log_2 b - 2 \cdot \log_2 c$   $P = \frac{a^3 b}{c^2}$

16. Sabendo que  $x = \log_{10} 5 + \log_{10} 8 - \log_{10} 4$ , calculem o valor de  $x$ .  $x = 1$

17. Escrevam no caderno usando logaritmos de base 10:

- a)  $\log_2 5$   $\frac{\log 5}{\log 2}$       b)  $\log_x 2$   $\frac{\log 2}{\log x}$

18. Determinem o número cujo logaritmo na base  $a$  é 4 e na base  $\frac{a}{3}$  é 8.  $3^8$

19. Calculem  $\log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$ .  $\frac{3}{8}$

20. Sabendo que  $\log_{20} 2 = a$  e  $\log_{20} 3 = b$ , calculem o valor de  $\log_6 5$ .  $\frac{1 - 2a}{a + b}$

## Cálculo de logaritmos

Acompanhe a seguinte situação:

Em Química, define-se o pH de uma solução como o logaritmo decimal (base 10) do inverso da respectiva concentração de  $\text{H}_3\text{O}^+$  (ion hidroxônio). O cérebro humano contém um líquido cuja concentração de  $\text{H}_3\text{O}^+$  é  $4,8 \cdot 10^{-8}$  mol/L (em média). Qual será o pH desse líquido?

De acordo com a definição e os dados do problema, temos:

$$\text{pH} = \log_{10} \left( \frac{1}{4,8 \cdot 10^{-8}} \right) = \log_{10} 1 - \log_{10} (4,8 \cdot 10^{-8}) = \log_{10} 1 - \log_{10} 4,8 - \log_{10} 10^{-8} =$$
$$= 0 - \log_{10} 4,8 - (-8) = 8 - \log_{10} 4,8$$

Portanto,  $\text{pH} = 8 - \log_{10} 4,8$ .

Para logaritmos como esse, existem três formas de cálculo, que serão estudadas a seguir:

- com o auxílio da calculadora;
- com a aplicação de tabelas de valores (tabelas de logaritmos);
- por meio de alguns logaritmos dados.

Com a difusão do uso da calculadora científica, a utilização das tabelas de logaritmos, muito úteis no passado, hoje está praticamente abolida.

Algumas calculadoras possuem duas teclas com as seguintes funções:

- tecla **log**: permite calcular o logaritmo decimal de um número  $N$ , inteiro ou decimal;
- tecla **10<sup>x</sup>**: permite calcular o número  $N$  quando se conhece  $\log N = x$ .

Usando essas teclas, as propriedades dos logaritmos e as quatro operações fundamentais, é possível realizar os seguintes cálculos:

a)  $\log 36$

tecla-se **log** → digita-se 36 = 1,556303

$$\log 36 \approx 1,556303$$

b)  $\log \sqrt[3]{4,57} = \frac{1}{3} \cdot \log 4,57$

tecla-se **log** → digita-se 4,57 = 0,659916 → divide-se por 3 = 0,219972

$$\log \sqrt[3]{4,57} \approx 0,219972$$

c)  $\log_2 997 = \frac{\log 997}{\log 2}$  (realizamos a mudança de base)

Usando a tecla **log**, calcula-se  $\log 997 \approx 2,998695$  e  $\log 2 \approx 0,301030$ .

$$\log_2 997 \approx \frac{2,998695}{0,301030} \approx 9,961449$$

d)  $\log_{10} x = 0,72342$

tecla-se **10<sup>x</sup>** → digita-se 0,72342 = 5,289566

$$\log 5,289566 \approx 0,72342$$

e) Podemos resolver o problema do líquido cerebral usando a calculadora, obtemos  $\log 4,8 \approx 0,681241$ .

Assim,  $\text{pH} = 8 - 0,681241 \approx 7,3$ .

### Fique atento!

Aqui temos uma conexão com Química.



Detalhe de uma calculadora científica.

### Fique atento!

A maioria dos celulares tem um aplicativo de calculadora com a função **log**.

Em algumas calculadoras, para obter  $\log N$  digita-se primeiro  $N$  e depois **log**.

### Você sabia?

Existem calculadoras com a tecla **ln**, que permite calcular os logaritmos naturais dos números reais positivos. Os logaritmos naturais têm a base **e**, ou seja,  $\ln x = \log_e x$  (logaritmo natural de  $x$ ). O número **e**, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de seu logaritmo natural ser igual a 1, ou seja,  $\ln e = 1$ . O número **e** é irracional. Um valor aproximado de **e** é: 2,718281828459 (veja a página 169). Os logaritmos naturais podem ser observados em muitas aplicações da Matemática.

A partir de um ou mais logaritmos dados, podemos obter o valor aproximado de uma infinidade de logaritmos, usando as propriedades conhecidas. Por exemplo:

Dados  $\log 2 \approx 0,301$  e  $\log 3 \approx 0,477$ , podemos calcular:

- $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,301 + 0,477 = 0,778$
- $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0,301 = 0,903$
- $\log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \log 3 = \frac{1}{2} \cdot 0,477 = 0,239$
- $\log 5 = \log (10 : 2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301 = 0,699$
- $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,477}{0,301} = 1,585$
- $\log_9 32 = \frac{\log 32}{\log 9} = \frac{\log 2^5}{\log 3^2} = \frac{5 \cdot \log 2}{2 \cdot \log 3} = \frac{5 \cdot 0,301}{2 \cdot 0,477} = \frac{1,505}{0,954} = 1,578$

Também podemos aplicar o conceito de logaritmo para resolver problemas que envolvem potências. Acompanhe:

Sabendo que  $\log 2 = 0,301$ , vamos calcular o número de algarismos da potência  $5^{100}$ .

$$x = 5^{100} \Rightarrow \log x = 100 \cdot \log 5 \Rightarrow \log x = 100 \cdot \log \frac{10}{2} = 100(1 - 0,301) = 69,9$$

Então, se  $\log x = 69,9$ , pela definição temos  $x = 10^{69,9}$ .

Como  $10^{70}$  é o primeiro número com 71 algarismos ( $10^{70} = 1$  seguido de 70 zeros), então necessariamente  $10^{69,9}$  tem 70 algarismos.

## Exercícios



**21.** Com o auxílio de uma calculadora, calcule utilizando as teclas das quatro operações fundamentais, a tecla **log** e a **10<sup>x</sup>** (caso não tenha uma calculadora à disposição, indique o roteiro para efetuar o cálculo):

- a)  $\log 64,3$ ; Aproximadamente 1,808.
- b)  $\log 0,00196$ ; Aproximadamente -2,708.
- c)  $x$  tal que  $\log x = 1,35$ ; Aproximadamente 22,387.
- d)  $\log 914$ ; Aproximadamente 2,961.
- e)  $\log 0,820$ ; Aproximadamente -0,086.
- f)  $x$  tal que  $\log x = -1,155$ .  $x = 0,07$

**22.** Sem usar calculadora, determine entre quais inteiros consecutivos fica cada logaritmo:

- a)  $\log 279$ ; Entre 2 e 3.
- b)  $\log 6$ ; Entre 0 e 1.
- c)  $\log 0,071$ ; Entre -2 e -1.
- d)  $\log_7 2$ . Entre 0 e 1.

**23.** Calcule:

- a)  $\log 100$ ; 2
- b)  $\log 0,00001$ ; -5
- c)  $\log 0,001$ ; -3
- d)  $\log 10\ 000\ 000$ . 7

**24.** Dados  $\log 2 = 0,30$ ;  $\log 3 = 0,48$  e  $\log 5 = 0,70$ , calcule:

- a)  $\log 20$ ; 1,30
- b)  $\log 0,0002$ ; -3,70
- c)  $\log 0,3$ ; -0,52
- d)  $\log 18$ ; 1,26
- e)  $\log 45$ ; 1,66
- f)  $\log 250$ . 2,40

**25.** Dados  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 7 = 0,85$ , determinem:

- a)  $\log 14$ ; 1,15
- b)  $\log 50$ ; 1,70
- c)  $\log 3,5$ ; 0,55
- d)  $\log 70$ . 1,85

**26.** Calcule, com aproximação de duas casas decimais e usando mudança de base, os logaritmos:

- a)  $\log_2 3$ ; 1,60
- b)  $\log_5 3$ ; 0,69
- c)  $\log_8 9$ ; 1,07
- d)  $\log_{100} 5$ . 0,35

**Fique atento!**

Se não tiver uma calculadora, use  $\log 2 = 0,3$  e  $\log 3 = 0,48$ .

**27.** Sabendo que  $\log 52 = 1,7160$ , determinem o número de algarismos da potência  $52^{1000}$ .

1717 algarismos.

**28.** Química

O pH de uma solução é o logaritmo decimal do inverso da concentração de  $\text{H}_3\text{O}^+$ . Qual é o pH de uma solução cuja concentração de  $\text{H}_3\text{O}^+$  é  $4,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol/L}$ ?  
pH = 4,347

## Exercícios resolvidos

11. Dados  $\log 2 = 0,30$ ;  $\log 3 = 0,48$  e  $\log 5 = 0,70$ , resolva a equação  $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 12 = 0$ .

**Resolução:**

$$5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 12 = 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 7(5^x) + 12 = 0$$

Fazendo  $5^x = y$ , temos:

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(1)(12) = 1$$

$$y' = 4 \text{ e } y'' = 3$$

Daí:

$$\bullet 5^x = 4 \Rightarrow \log 5^x = \log 4 \Rightarrow x \cdot \log 5 = \log 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 5 = 2 \cdot \log 2 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 5} = \frac{0,60}{0,70} \approx 0,86$$

$$\bullet 5^x = 3 \Rightarrow \log 5^x = \log 3 \Rightarrow x \cdot \log 5 = \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{0,48}{0,70} \approx 0,69$$

$$S = \{0,69; 0,86\}$$

12. Sabemos que o número de bactérias em uma cultura, depois de um tempo  $t$ , é dado por  $N = N_0 \cdot e^{rt}$ , em que  $N_0$  é o número inicial (quando  $t = 0$ ) e  $r$  é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de 5% por minuto?

**Fique atento!**

Se a taxa é de 5% por minuto, o tempo  $t$  é dado em minutos.

**Resolução:**

Pelos dados do problema, a pergunta é: Em quanto tempo  $N = 2N_0$ ?

Assim, temos:

$$N = N_0 \cdot e^{rt} \Rightarrow 2N_0 = N_0 \cdot e^{0,05t} \Rightarrow 2 = e^{0,05t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \ln e^{0,05t} \Rightarrow \ln 2 = 0,05t \cdot \underbrace{\ln e}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = 0,05t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,05}$$

Calculando  $\ln 2$ , obtemos  $\ln 2 = 0,6931$ ; portanto:

$$t = \frac{0,6931}{0,05} \approx 13,8$$

$$13,8 \text{ min} = 13 \text{ min e } \frac{8}{10} \text{ min} = 13 \text{ min } 48 \text{ s}$$

O número de bactérias dobrará em 13 minutos e 48 segundos.

**Fique atento!**

O tempo não depende do número inicial de bactérias.

13. Resolva a equação  $3^x = 5$ , dados  $\log 3 = 0,48$  e  $\log 5 = 0,70$ .

**Resolução:**

$$3^x = 5 \Rightarrow \log 3^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3} \Rightarrow x = \frac{0,70}{0,48} \approx 1,46.$$

$$\text{Conjunto solução: } S = \{1,46\}$$

14. Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirão a 100 g? Use  $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$ , em que  $Q$  é a massa da substância,  $r$  é a taxa e  $t$  é o tempo em anos.

**Resolução:**

Sabemos que:  $Q = Q_0 \cdot e^{-rt} \Rightarrow 100 = 500 \cdot e^{-0,03t}$ , que é equivalente a:

$$\frac{1}{5} = e^{-0,03t} \Rightarrow \ln \left( \frac{1}{5} \right) = \ln e^{-0,03t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln 1}_0 - \ln 5 = -0,03t \cdot \underbrace{\ln e}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln 5 = -0,03t \Rightarrow t = \frac{\ln 5}{0,03} = \frac{1,6094}{0,03} \approx 53,6$$

Aproximadamente 53,6 anos.

15. (Situação-problema do começo do capítulo)

Em julho de 2015, o Banco Central do Brasil classificou 12 instituições bancárias em relação às taxas de juros ao ano oferecidas para financiamento de imóveis a pessoas físicas. A taxa média de juros dessas instituições nesse período foi de 12,13% ao ano. Se a taxa permanecer a mesma, o valor a ser pago ao banco dobrará caso o financiamento seja pago em quantos anos?

**Resolução:**

Valor inicial do financiamento =  $F_0$

Valor a ser pago pelo financiamento, após um ano =  $F_0 \cdot 1,1213 = F_1$

Valor a ser pago pelo financiamento, após dois anos =  $F_0 \cdot (1,1213)^2 = F_2$

⋮

Valor a ser pago pelo financiamento, após  $x$  anos =  $F_0 \cdot (1,1213)^x = F_x$

Supondo que o valor a ser pago ao banco dobrará caso o financiamento seja pago em  $x$  anos, temos:

$$F_x = 2F_0$$

Substituindo os dados e aplicando logaritmos, temos:

$$F_x = 2F_0 \Rightarrow F_0(1,1213)^x = 2F_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 1,1213 = \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1,1213} \approx \frac{0,3010}{0,0497} \approx 6$$

O valor a ser pago ao banco dobrará caso o financiamento seja pago em aproximadamente 6 anos.



**29.** Dados  $\log 2 = 0,30$ ;  $\log 3 = 0,48$ ;  $\log 5 = 0,70$  e  $\log e = 0,43$ , resolva as equações:



- a)  $2^x = 5$ ;  $S = \{2,33\}$
- b)  $e^x = 3$ ;  $S = \{1,12\}$
- c)  $5^x = e$ ;  $S = \{0,61\}$
- d)  $e^x - 6 = 0$ .  $S = \{1,81\}$

**30.** Calcule (com duas casas decimais) o valor de  $x$  da equação  $3 \cdot 2^x = 10$ , dados  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,48$ .  $x \approx 1,73$



**31.** Dados  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,48$ , resolva a equação  $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ .  $S = \{0,63; 1\}$



**32.** Determine o valor de  $x$  da equação  $(1,12)^x = 3$ , sendo dados  $\log 2 = 0,30$ ,  $\log 3 = 0,48$  e  $\log 7 = 0,85$ .  $x = 9,60$



**33.** A expressão  $M = C(1 + i)^n$  nos permite calcular o montante  $M$ , resultante da aplicação do capital  $C$  a juros compostos, à taxa anual  $i$ , ao completar um período de  $n$  anos. Nessas condições, se o capital de R\$ 800 000,00 for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R\$ 700 000,00? **Aproximadamente 5 anos e meio.**



**34.** Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica? **56 meses.**



**35.** Uma pessoa coloca R\$ 1 000,00 em um fundo de aplicação que rende, em média, 1,5% ao mês. Em quantos meses essa pessoa terá no mínimo R\$ 1 300,00? **18 meses.**



**36.** Um cartão de crédito cobra juros de 9% a.m. sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de R\$ 505,00. Em quanto tempo essa dívida chegará a R\$ 600,00 se não for paga? (Dados:  $\log 2 = 0,3$ ;  $\log 3 = 0,48$ ;  $\log 1,01 = 0,004$ ;  $\log 1,09 = 0,038$ .) **2 meses.**

## Texto para as questões 37 e 38

### Física

A lei de resfriamento de Newton afirma que a diferença de temperatura entre um corpo e o meio que o contém decresce a uma taxa de variação proporcional à diferença de temperatura. Considerando  $\Delta T_0$  a diferença de temperatura no instante  $t = 0$  e  $\Delta T(t)$  a diferença em um instante  $t$  qualquer, essa lei se traduz pela expressão  $\Delta T(t) = \Delta T_0 \cdot e^{-\alpha t}$ , em que a constante  $\alpha$  depende do corpo.

**37.** Suponham que, em determinado local, cuja temperatura ambiente é de 30 °C, exista uma panela de água fervente no fogo. Em  $t = 0$ , o fogo é desligado e 5 minutos depois a temperatura da água é de 65 °C. Depois de quanto tempo, a partir do desligamento do fogo, a água atingirá a temperatura de 37 °C? (Considere  $\log 2 = 0,3$ .)

- a) 20 minutos e 40 segundos
- x** b) 16 minutos e 40 segundos
- c) 12 minutos e 40 segundos
- d) 8 minutos e 40 segundos
- e) 4 minutos e 40 segundos

**38.** Em um trecho de mata próximo à cidade, a polícia encontrou, por volta das 17 horas, um cadáver. O médico legista chegou às 17h20min e imediatamente mediu a temperatura do corpo, que era de 32,5 °C. Uma hora mais tarde, ele mediu novamente a temperatura e verificou que era de 31,5 °C. A temperatura ambiente (na mata) se manteve constante, a 16,5 °C. O legista considera que a temperatura normal de uma pessoa viva é 36,5 °C. De acordo com as temperaturas coletadas, e usando a lei do resfriamento de Newton, o horário da morte pode ser estimado por volta de: (Dados:  $\log 2 = 0,3$  e  $\log 3 = 0,47$ )

- a) 13h40min.
- x** b) 14h.
- c) 14h40min.
- d) 15h.
- e) 14h50min.

**Para os exercícios de 39 a 41 use a fórmula  $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$ , em que  $Q$  representa a massa da substância ou o número de bactérias,  $r$  a taxa e  $t$  o tempo.**

**39. Química**

Uma substância radioativa se desintegra a uma taxa de 8% ao ano. Em quantos anos 50 g dessa substância se reduzirão a 5 g?

**Aproximadamente 28 anos, 9 meses e 18 dias.**

**40. Química**

Em um laboratório, uma pessoa verifica que a taxa de crescimento relativo contínuo de bactérias em uma cultura é de 2,5% por minuto. Nessas condições, em quantos minutos o número de bactérias passará de 4 000 para 6 000?

**Aproximadamente 16 minutos e 12 segundos.**

**41. Química**

Calcule a meia-vida de uma substância radioativa que se desintegra a uma taxa de 4% ao ano. (Lembre-se: meia-vida é o tempo que deve decorrer para que, em certo momento, metade dos átomos de uma substância radioativa se desintegre.)

**Aproximadamente 17 anos, 3 meses e 18 dias.**



## Antes dos logaritmos

Em todo o mundo antigo, as ideias matemáticas evoluíram mais rapidamente do que a forma de efetuar os cálculos que essas ideias exigiam. Fazer multiplicações e divisões com números grandes demandava tempo e, sobretudo, para calcular uma potência racional de um número racional, o tempo necessário era enorme.

Muito antes da invenção dos logaritmos, os árabes aprenderam e desenvolveram diversas partes da matemática com base no que aprenderam com os gregos e com os hindus e, no século X, um matemático e astrônomo chamado Ibn Yunus encontrou uma fórmula de trigonometria que ficou famosa:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

Essa é uma das fórmulas que ficaram conhecidas como “Fórmulas de Prostaferese”. Veja a definição e algumas relações envolvendo o cosseno (cos) de um ângulo ( $x, y, \alpha, \dots$ ) nas páginas 249 a 256.

Essa fórmula chegou ao Ocidente e passou a ser muito utilizada nos séculos XV e XVI para substituir uma operação de multiplicação por uma adição. De fato, se imaginarmos dois números de sete algarismos, por exemplo, é muitíssimo mais fácil encontrar a soma deles do que o produto deles.

Naquela época já havia tabelas bem construídas de senos e cossenos, então a fórmula acima passou a ser usada para fazer contas de multiplicação de forma mais rápida. Veja a seguir como era realizado esse processo.

Para multiplicar dois números “grandes”, inicialmente dividíamos cada um por alguma potência de 10 de forma que ficassem no intervalo (0, 1). Dados os números 7137584 e 9266713, dividíamos ambos por  $10^7$ , obtendo  $A = 0,7137584$  e  $B = 0,9266713$ . E, para encontrar o produto de 7137584 e 9266713, a solução “rápida” aplicada no início do século XVI era a seguinte (os números A e B são cossenos de ângulos e, consultando uma tabela de cossenos, encontramos os ângulos correspondentes):

$$A = \cos x = 0,7137584 \rightarrow x = 44,45846^\circ$$

$$B = \cos y = 0,9266713 \rightarrow y = 22,07826^\circ$$

Com esses valores, calculamos a soma e a diferença dos ângulos:

$$x + y = 66,53672^\circ \text{ e } x - y = 22,3802^\circ$$

Consultando novamente a tabela de cossenos, encontramos:

$$\cos(x + y) = 0,39816126 \text{ e } \cos(x - y) = 0,92467767$$

Dessa forma, o produto  $A \cdot B$  deve ser igual a:

$$\frac{1}{2}(0,39816126 + 0,92467767) = 0,6614194$$

Logo, o produto de 7137584 e 9266713 é equivalente a  $0,6614194 \cdot 10^7 \cdot 10^7$ , que é igual a  $6,614294 \cdot 10^{13}$ .

Essa era uma das formas consideradas mais “práticas” para se encontrar o produto de dois números “grandes”, utilizando apenas as operações de adição, subtração e divisão por 2. A técnica, apoiada no manuseio das tabelas trigonométricas, foi um grande avanço para a época.

Para você conferir, pegue uma calculadora científica, faça o produto dos números 7137584 e 9266713 e considere as sete primeiras casas decimais do resultado. O que você observa?

Considerando as sete primeiras casas decimais do resultado, obtemos  $0,6614294 \cdot 10^{14}$  como resultado do produto.

## Depois dos logaritmos

As antigas tabelas de cossenos tinham, naturalmente, pouca precisão para as exigências do século XVII, e a invenção dos logaritmos veio substituir com enorme vantagem as Fórmulas de Prostaferese. A teoria dos logaritmos proporcionou o desenvolvimento de uma metodologia para a construção de tabelas com grande precisão, que passaram a conter os logaritmos dos senos, cossenos e tangentes. A nova tecnologia foi imediatamente adotada e mesmo os cálculos mais complicados já tinham à disposição tabelas com até catorze decimais. Observe na foto ao lado uma tabela de logaritmos do século XVII.

### John Napier (ou Neper)

Durante o século XVII vários matemáticos estudaram métodos para criar tabelas que permitiam transformar produtos em somas. Um desses matemáticos foi John Napier, que era escocês, tinha título de barão, administrava suas terras e propriedades e também escrevia sobre muitas coisas. Não era matemático profissional, mas tinha grande interesse por cálculos e trigonometria.

Napier conheceu John Craig, o médico do rei James VI da Escócia, que lhe falou que tinha encontrado o famoso astrônomo dinamarquês Tycho Brahe e que ele usava em seus cálculos as Fórmulas de Prostaferese. Napier, que já tinha ideias de como construir sua tabela, redobrou seus esforços e, em 1614, publicou seu primeiro livro sobre os logaritmos: *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), cuja capa pode ser vista abaixo.

Napier não tinha o conceito da base de um sistema de logaritmos, mas, pelo seu método de construção, a base implícita em sua tabela é muito próxima de  $\frac{1}{e}$ .

Tabela de logaritmos feita pelo matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), com os logaritmos de 1 a 67 na base 10 e catorze casas decimais. Microfilme do Museu Britânico, Londres (Inglaterra).



Retrato de John Napier, matemático escocês (1561-1630). Óleo, 110,7 cm x 99,5 cm.



Capa do livro *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio* (Napier, 1614).

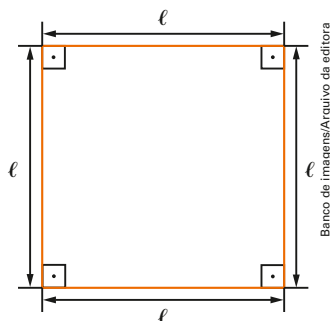
## 2 Função logarítmica

### Função inversa

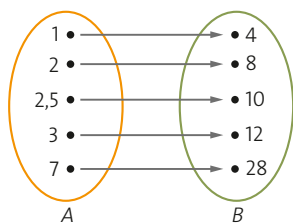
Antes de estudarmos a função logarítmica, vejamos o que é uma função inversa de outra função.

Quando relacionamos a medida do lado de um quadrado com o seu perímetro, podemos pensar em duas funções bijetivas:

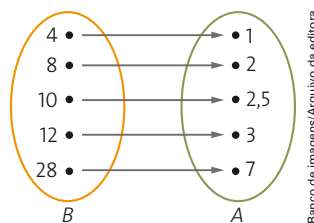
- uma que a cada valor da medida do lado associa o perímetro:  $P(\ell) = 4\ell$ ;
- outra que a cada valor do perímetro associa a medida do lado:  $\ell(P) = \frac{P}{4}$ .



Chamando de  $f$  e  $g$  as funções acima, temos, respectivamente:



$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ f(x) &= 4x \\ D(f) &= \{1; 2; 2,5; 3; 7\} \\ \text{Im}(f) &= \{4; 8; 10; 12; 28\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} g: B &\rightarrow A \\ g(x) &= \frac{x}{4} \\ D(g) &= \{4; 8; 10; 12; 28\} \\ \text{Im}(g) &= \{1; 2; 2,5; 3; 7\} \end{aligned}$$

Temos que:

- $D(f) = \text{Im}(g)$ ;
- $D(g) = \text{Im}(f)$ ;
- $f$  e  $g$  são bijetivas.

Em casos assim, dizemos que uma função é a **inversa** da outra. É comum indicar a função  $g$ , inversa de  $f$ , por  $f^{-1}$ :

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B & f^{-1}: B &\rightarrow A \\ f(x) &= 4x & f^{-1}(x) &= \frac{x}{4} \end{aligned}$$

**Fique atento!**

$$f^{-1} \text{ não é o mesmo que } \frac{1}{f}.$$

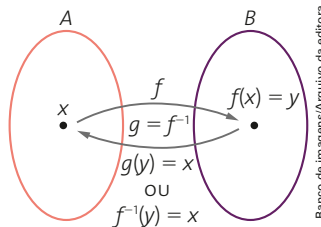
## Definição de função inversa

Dada uma função  $f: A \rightarrow B$ , bijetiva, denomina-se **função inversa** de  $f$  a função  $g: B \rightarrow A$  tal que, se  $f(a) = b$ , então  $g(b) = a$ , com  $a \in A$  e  $b \in B$ .

Ou, de modo equivalente:

A função  $g: B \rightarrow A$  é a inversa da função  $f: A \rightarrow B$  quando se tem  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$  para todo  $x \in A$  e  $y \in B$ .

De modo geral, se  $f$  é bijetiva, temos a situação do diagrama abaixo:



**Fique atento!**  
Só existe função inversa de uma função bijetiva.

em que  $g: B \rightarrow A$  é a função inversa da função  $f: A \rightarrow B$ , uma vez que se tem:

$$g(y) = g(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A \text{ e } f(g(y)) = y, \text{ para todo } y \in B.$$

Exemplo:

Considere a função  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $f(x) = x^2$ . Como ela é bijetiva, sua inversa é a função  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $g(y) = \sqrt{y}$ , uma vez que:

$$g(f(x)) = g(x^2) = (\sqrt{x^2})^2 = x$$

e

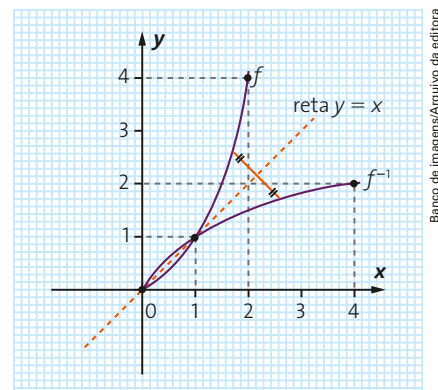
$$f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

**Você sabia?**  
 $\mathbb{R}_+$  significa  $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ .

Observe a representação gráfica dessas funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos:

$f$	
$x$	$y = f(x)$
0	0
1	1
2	4

$f^{-1} = g$	
$x$	$y = f(x)$
0	0
1	1
4	2



A função  $f$  e a função inversa  $g = f^{-1}$  são simétricas em relação à reta  $y = x$ , que representa a bissetriz dos quadrantes ímpares. É possível provar que isso ocorre em todos os casos de duas funções inversas.

**Fique atento!**  
 $(a, b)$  e  $(b, a)$  são pontos simétricos em relação à reta  $y = x$ .  
Observe no gráfico os pontos  $(2, 4)$  e  $(4, 2)$ .

## Função logarítmica

No capítulo anterior estudamos a função exponencial, na qual vimos que, para todo número real positivo  $a \neq 1$ , a função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = a^x$  é uma correspondência biunívoca entre  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}_+^*$ . Ela é crescente se  $a > 1$ , decrescente se  $0 < a < 1$  e tem a seguinte propriedade:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

Essas considerações garantem que  $f$  possui uma função inversa.

### Fique atento!

Dizer que  $f(x)$  é uma correspondência biunívoca é o mesmo que dizer que  $f$  é uma função bijetiva.

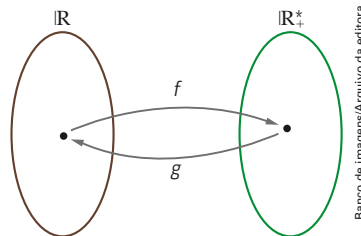
## Definição da função logarítmica

A inversa da função exponencial de base  $a$  é a função  $\log_a: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada número real positivo  $x$  o número real  $\log_a x$ , chamado logaritmo de  $x$  na base  $a$ , com  $a$  real positivo e  $a \neq 1$ .

### Fique atento!

A função logarítmica é a inversa da função exponencial de mesma base.

Observe que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , dada por  $f(x) = a^x$ , tem a propriedade  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ . A sua inversa  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = \log_a x$ , tem a propriedade  $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ .



Domínio da função logarítmica:  $\mathbb{R}_+^*$   
Imagem da função logarítmica:  $\mathbb{R}$

Dadas as funções  $f(x) = a^x$  e  $g(x) = \log_a x$ , vemos que  $g$  é a inversa de  $f$ , pois:

- $f(g(x)) = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x$
- $g(f(x)) = \log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1 = x$

como estudamos na página anterior.

As funções logarítmicas mais usadas são aquelas cuja base  $a$  é maior do que 1. Particularmente, as de base 10 (logaritmos decimais), as de base 2 (logaritmos binários) e as de base  $e$  (logaritmos naturais).

São exemplos de função logarítmica as funções de  $\mathbb{R}_+^*$  em  $\mathbb{R}$  definidas por:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = \log_2 x$             | c) $h(x) = \log_e x = \ln x$     |
| b) $g(x) = \log_{10} x = \log x$ | d) $i(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ |

## Exercícios

**42.** As funções logarítmicas  $f$  e  $g$  são dadas por  $f(x) = \log_3 x$  e  $g(x) = \log_4 x$ . Determinem:

- |                              |                                  |                        |
|------------------------------|----------------------------------|------------------------|
| a) $f(9)$ ; 2                | d) $\text{Im}(f)$ ; $\mathbb{R}$ | g) $g^{-1}(x)$ ; $4^x$ |
| b) $g(4)$ ; 1                | e) $x$ tal que $g(x) = 4$ ; 256  | h) $f^{-1}(1)$ ; 3     |
| c) $D(f)$ ; $\mathbb{R}_+^*$ | f) $f^{-1}(x)$ ; $3^x$           | i) $g(f(81))$ ; 1      |

**43.** Dados  $f(x) = \log_3(x + 1)$ ,  $g(x) = 4 + \log_2 x$  e  $h(x) = \log 2x$ , determine:

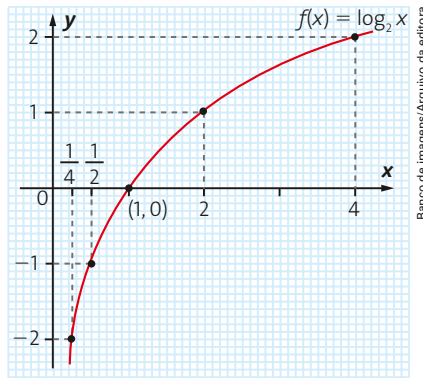
- |               |                |
|---------------|----------------|
| a) $f(2)$ ; 1 | d) $h(50)$ ; 2 |
| b) $g(2)$ ; 5 | e) $g(1)$ ; 4  |
| c) $h(5)$ ; 1 | f) $f(0)$ ; 0  |

## Gráfico da função logarítmica

Observe os seguintes gráficos de funções logarítmicas:

a)  $f(x) = \log_2 x$

$x$	$y = f(x)$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

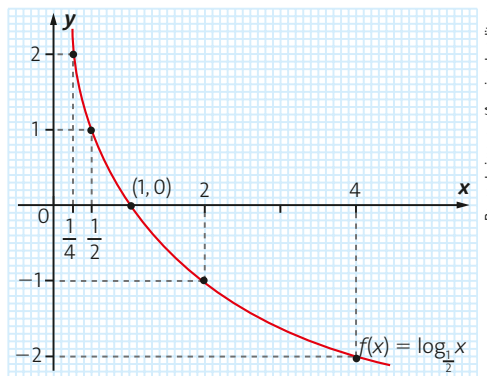


### Fique atento!

Os gráficos de  $y = \log_a x$  e  $y = \log_b x$ , com  $a > 1$  e  $0 < b < 1$  quaisquer, têm o mesmo aspecto dos gráficos desta página, respectivamente.

b)  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$x$	$y = f(x)$
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2

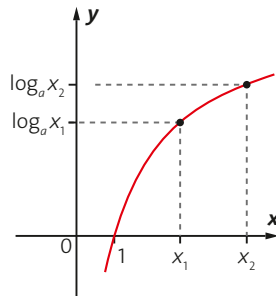


Como consequência da definição de função logarítmica e da análise dos gráficos, podemos concluir que:

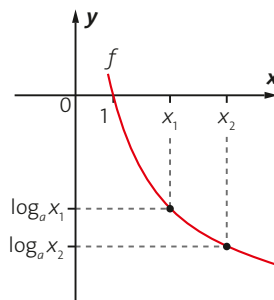
- o gráfico da função logarítmica passa pelo ponto  $(1, 0)$ , ou seja,  $f(1) = 0$ , ou, ainda,  $\log_a 1 = 0$ ;
- o gráfico nunca toca o eixo  $y$  nem ocupa pontos dos quadrantes II e III;
- somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função  $x \rightarrow a^x$  assume somente valores positivos;
- se  $a > 1$ , os números maiores do que 1 têm logaritmo positivo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo;
- se  $0 < a < 1$ , os números maiores do que 1 têm logaritmo negativo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo positivo;
- a função logarítmica é ilimitada, superior e inferiormente. No caso de  $a > 1$  ser ilimitada superiormente, pode-se dar a  $\log_a x$  um valor tão grande quanto se queira, desde que tomemos  $x$  suficientemente grande;



- quando  $a > 1$ , a função logarítmica é crescente ( $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$ );



- quando  $0 < a < 1$ , a função logarítmica é decrescente ( $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$ );



**Para refletir**

No caso de  $a > 1$ , o que significa ser ilimitada inferiormente?

Significa que, dado  $B > 0$ , tem-se  $\log_a x < -B$ , desde que  $x$  seja um número positivo suficientemente pequeno.

- ao contrário da função exponencial  $f(x) = a^x$  com  $a > 1$ , que cresce rapidamente, a função logarítmica  $\log_a x$  com  $a > 1$  cresce muito lentamente. Veja, por exemplo, que, se  $\log_{10} x = 1000$ , então  $x = 10^{1000}$ . Assim, se quisermos que  $\log_{10} x$  seja maior do que 1000, será preciso tomar um número  $x$  que tenha pelo menos 1001 algarismos;
- a função logarítmica é injetiva, pois números positivos diferentes têm logaritmos diferentes. Ela é também sobrejetiva, pois, dado qualquer número real  $b$ , existe sempre um único número real positivo  $x$  tal que  $\log_a x = b$ . Portanto, ela é bijetiva (há uma correspondência biunívoca entre  $\mathbb{R}_+^*$  e  $\mathbb{R}$ );
- na função logarítmica  $f(x) = \log_a x$  ( $a > 0$  e  $a \neq 1$ ), sendo ela crescente ou decrescente, o eixo das ordenadas é uma assíntota vertical do gráfico, isto é, à medida que  $x$  tende para zero, o valor da função cresce ou decresce ilimitadamente.

## Exercícios



44. Construa no caderno os gráficos das funções logarítmicas e confirme neles as conclusões obtidas:

a)  $f(x) = \log_3 x$                       b)  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Veja os gráficos no Manual do Professor.

45. Observando a base, identifique as seguintes funções como crescentes ou decrescentes:

a)  $f(x) = \log_3 x$                       d)  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

b)  $f(x) = \log x$                         e)  $f(x) = \log_{0,1} x$

c)  $f(x) = \log_{0,5} x$                     f)  $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

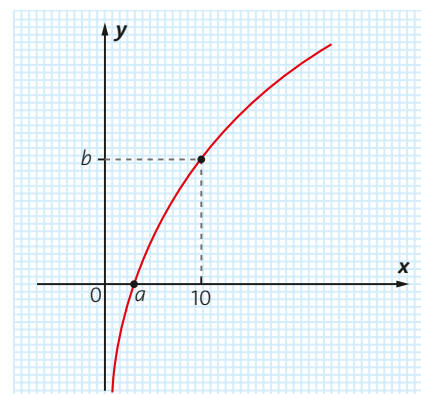
Crescentes: a, b, f; decrescentes: c, d, e.

46. Construa no caderno os gráficos das funções:

Veja os gráficos no Manual do Professor.

a)  $f(x) = \log_2 \left( \frac{x}{2} \right)$                       b)  $f(x) = \log_2 (x - 1)$

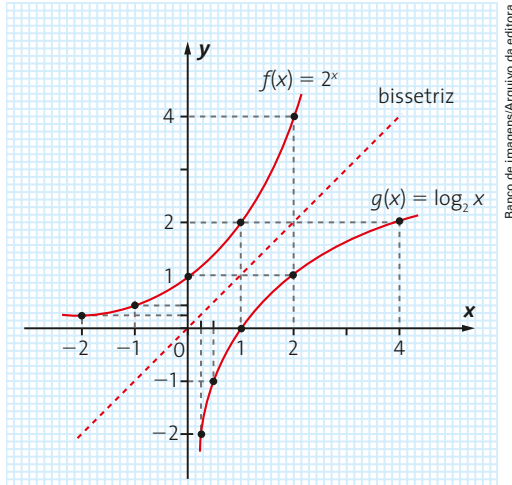
47. Sabendo que o gráfico abaixo é da função  $f(x) = \log x$ , determine os valores de  $a$  e  $b$ .  $a = 1$  e  $b = 1$



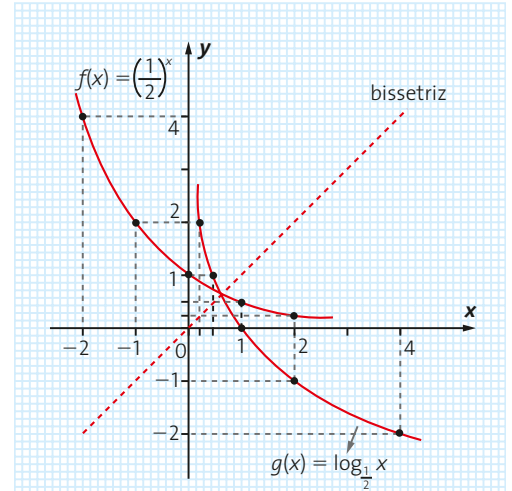
## Uma relação importante

Já estudamos, na página 190, que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta  $y = x$  (bissetriz dos quadrantes I e III). Observe os gráficos das funções inversas  $f(x) = a^x$  e  $g(x) = \log_a x$  a seguir:

a)  $a > 1$



b)  $0 < a < 1$



**Observação:** Veja no gráfico do item a ( $a > 1$ ) que a função exponencial cresce rapidamente, enquanto a função logarítmica cresce muito lentamente.

### Para refletir

Indique as coordenadas de alguns pontos simétricos em cada um dos gráficos.

$a > 1$ : (1, 2); (2, 1); (4, 2) e (2, 4)

$0 < a < 1$ : (-1, 2); (2, -1); (-4, 4) e (4, -2)

## Caracterização das funções logarítmicas

Como saber se para resolver determinado problema devemos usar as funções logarítmicas?

A resposta é: quando estivermos diante de uma função  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , crescente ou decrescente, tal que  $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  para quaisquer  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ , pois nesse caso é possível provar que existe  $a > 0$  tal que  $f(x) = \log_a x$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

### Fique atento!

Sempre que multiplicarmos  $x$  por uma mesma constante positiva obteremos acréscimos iguais a  $f(x)$ .

## Exercícios

48. Construa no caderno, no mesmo sistema de eixos, os gráficos de  $f(x) = 3^x$  e  $g(x) = \log_3 x$ .

Veja os gráficos no Manual do Professor.

49. Sejam as funções  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = \log_2 x$ . Mostre que:

a)  $f(g(x)) = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ;  $f(g(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}_+^*$

b)  $g(f(x)) = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  $g(f(x)) = g(2^x) = \log_2 2^x = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$



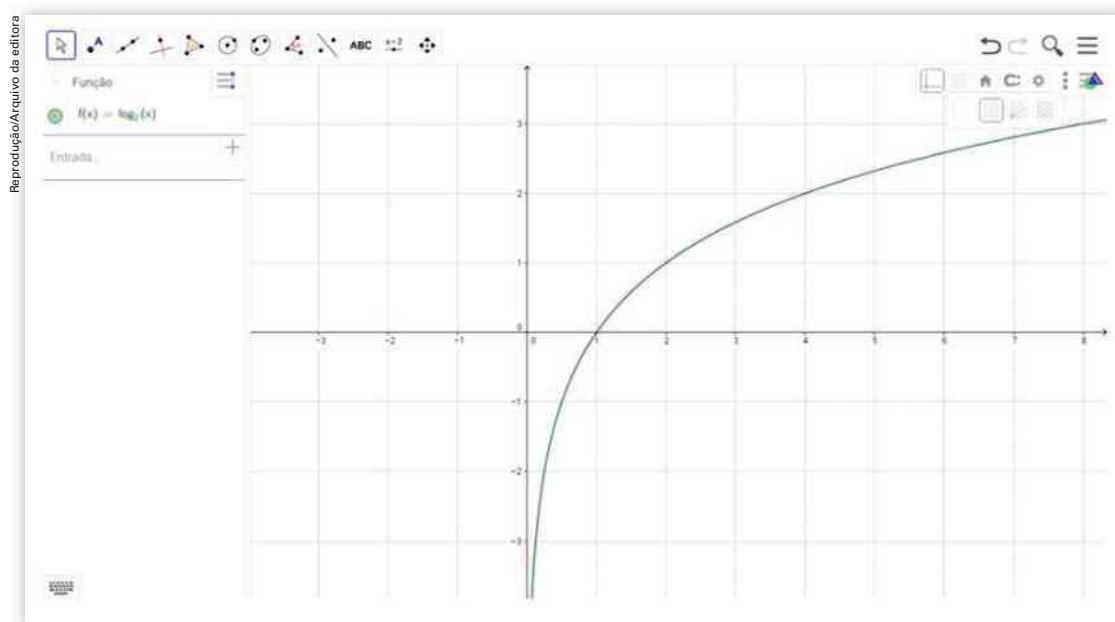
Para construir gráficos de funções logarítmicas vamos novamente utilizar o *software* GeoGebra.

## Construção do gráfico de funções logarítmicas

Vamos construir o gráfico da função logarítmica  $f(x) = \log_2 x$  e destacar alguns pontos importantes. Para isso, siga os passos a seguir.

**1º passo:** No campo Entrada de comando (situado na parte esquerda da tela), digite a função  $f(x) = \log(2, x)$  e tecle “Enter”. No GeoGebra,  $f(x) = \log(2, x)$  é a notação de  $f(x) = \log_2(x)$ .

**2º passo:** Do lado direito da Barra de ferramentas (parte superior da tela), clique na Barra de estilos e depois em “Exibir ou esconder a malha”; selecione a malha quadriculada. Você agora deverá ter uma imagem igual à apresentada abaixo.



Captura de tela do 1º passo.

**3º passo:** Para obter a raiz da função  $f$ , ainda no campo de entrada, digite **Raiz [ f, 0, 100]** e tecle “Enter”. Como a função não é polinomial, o GeoGebra analisa as raízes dentro de um intervalo. Nesse caso, estamos utilizando o intervalo  $[0, 100]$ . Veja que foi criado o ponto  $A = (1, 0)$ , logo  $x = 1$  é raiz de  $f$ .

**4º passo:** No campo Entrada de comando, insira os pontos  $B = (2, 1)$ ,  $C = (4, 2)$ ,  $D = (1/2, -1)$  e  $E = (1/4, -2)$  e verifique que todos pertencem ao gráfico da função. (A cada ponto inserido tecle “Enter”).

Observe ainda que o gráfico da função não intersecta o eixo das ordenadas. O eixo das ordenadas será uma assíntota do gráfico da função.

### Fique atento!

Você pode mover, ampliar ou reduzir a sua imagem utilizando  da Barra de ferramentas.

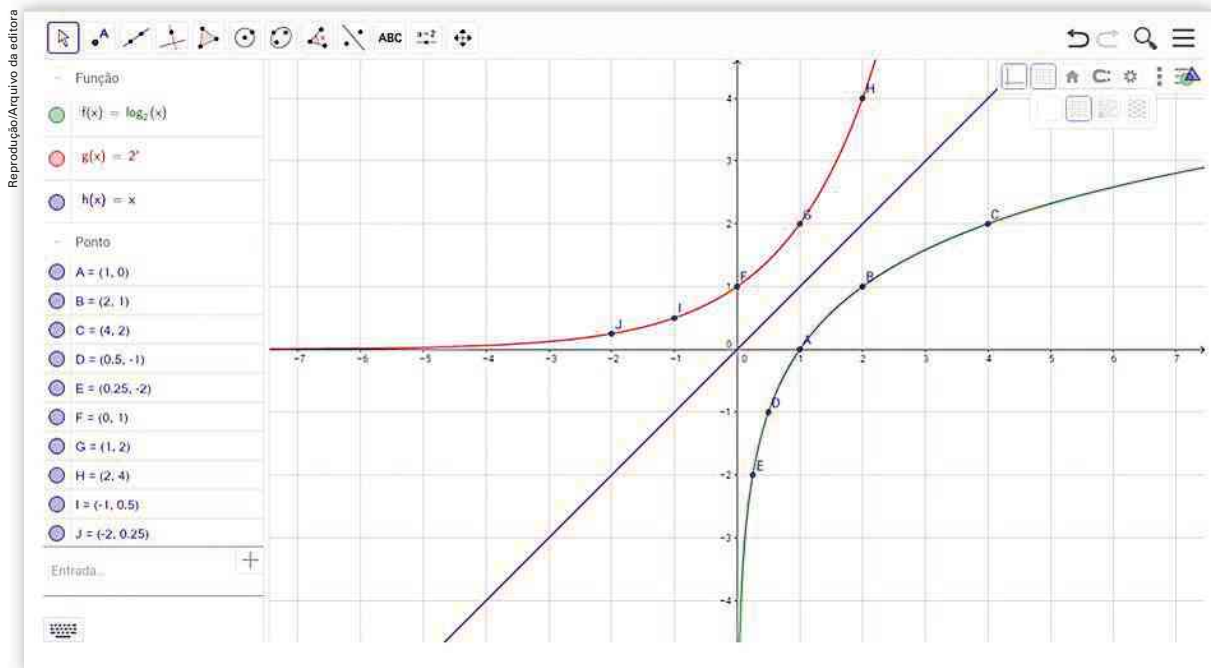
Outra opção para aumentar ou diminuir o *zoom* é utilizar o *scroll* do *mouse* (aquela “rodinha” que fica na parte superior da maioria dos *mouses*).

## Relação entre o gráfico de uma função logarítmica e de uma função exponencial de mesma base

Estudamos que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ( $y = x$ ). Agora, teremos a oportunidade de verificar melhor essa relação com funções logarítmicas e exponenciais.

**1º passo:** Repita os mesmos passos da construção do gráfico da função  $f(x) = \log_2(x)$ . Em seguida, digite no campo Entrada de comando  $g(x) = 2^x$  e tecla “Enter” e  $h(x) = x$  e tecla “Enter”.

**2º passo:** No campo Entrada de comando digite os pontos (um de cada vez):  $A = (1, 0)$ ,  $B = (2, 1)$ ,  $C = (4, 2)$ ,  $D = (1/2, -1)$ ,  $E = (1/4, -2)$ ,  $F = (0, 1)$ ,  $G = (1, 2)$ ,  $H = (2, 4)$ ,  $I = (-1, 1/2)$  e  $J = (-2, 1/4)$ . Observe que os pontos de  $A$  a  $E$  pertencem à função logarítmica, enquanto os pontos de  $F$  a  $J$  pertencem à função exponencial.



Captura de tela do 2º passo.

### Fique atento!

Não se esqueça de salvar cada uma das construções.

1. Repita os passos anteriores e construa os gráficos das funções a seguir:

a)  $f(x) = \log_{10}(x)$

[Veja os gráficos no Manual do Professor.](#)

b)  $g(x) = \log_2(x + 1)$

c)  $h(x) = \log_2(x)$

d)  $j(x) = \log_{10}(x + 1)$

2. A abscissa do primeiro ponto é igual à ordenada do segundo, a ordenada do primeiro é igual à abscissa do segundo. Exemplo:  $A = (1, 0)$  e  $F = (0, 1)$ . Os pontos pertencem a funções inversas.

2. Qual é a relação entre as coordenadas de dois pontos simétricos em relação à reta  $y = x$ ?

3. Represente as funções  $f(x) = \log_{10} x$ ,  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  e suas respectivas funções inversas.

[Veja os gráficos no Manual do Professor.](#)

4. Existe uma função logarítmica muito importante: trata-se de  $f(x) = \log_e x$ , em que  $e$  representa o número de Euler. Construa o gráfico da função  $f(x) = \ln(x)$ , determine sua imagem e sua raiz.

[Veja o gráfico no Manual do Professor. Im\(f\) = R; raiz:  \$x = 1\$](#)

## 3 Equações logarítmicas

Vamos agora estudar as equações logarítmicas, ou seja, aquelas nas quais a incógnita está envolvida no logaritmando ou na base do logaritmo.

Exemplos:

- a)  $\log_3 x = 5$       b)  $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 1$       c)  $\log_{x-1} 3 = 2$       d)  $2 \cdot \log x = \log 2x - \log 3$

### Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 17

16. Resolva a equação  $\log_3 (x^2 - 3x - 1) = 1 + \log_3 (x - 2)$ .

**Resolução:**

• Condição de existência:  $x^2 - 3x - 1 > 0$  e  $x - 2 > 0$

$$\begin{aligned} \bullet \log_3 (x^2 - 3x - 1) &= 1 + \log_3 (x - 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3 (x^2 - 3x - 1) &= \log_3 3 + \log_3 (x - 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3 (x^2 - 3x - 1) &= \log_3 [3(x - 2)] \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 1 &= 3x - 6 \Rightarrow x^2 - 6x - 5 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 16$$

$$x' = 5 \text{ e } x'' = 1$$

• Verificação:

$$x = 5 \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x - 1 = 25 - 15 - 1 = 9 > 0 \\ x - 2 = 5 - 2 = 3 > 0 \end{array} \right.$$

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x - 1 = 1 - 3 - 1 = -3 < 0 \end{array} \right.$$

Portanto,  $5 \in S$  e  $1 \notin S$ .  
 $S = \{5\}$

Porque foi obtida uma sentença matemática falsa na primeira condição, não havendo a necessidade de se verificar a segunda.

**Para refletir**

Por que não houve necessidade de calcular  $x - 2$  para  $x = 1$ ?

**Fique atento!**

Veja a 5ª consequência na página 178.

### Resolvido passo a passo

17. (ESPM-SP) Em 1997 iniciou-se a ocupação de uma fazenda improdutivo no interior do país, dando origem a uma pequena cidade. Estima-se que a população dessa cidade tenha crescido segundo a função  $P = 0,1 + \log_2 (x - 1996)$ , onde  $P$  é a população no ano  $x$ , em milhares de habitantes. Considerando  $\sqrt{2} = 1,4$ , podemos concluir que a população dessa cidade atingiu a marca dos 3 600 habitantes em meados do ano:

- a) 2005.      c) 2011.      e) 2004.  
b) 2002.      d) 2007.

#### 1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

A função do crescimento da população de uma cidade.

b) O que se pede?

O ano em que a população de uma cidade atingiu a marca dos 3 600 habitantes.

#### 2. Planejando a solução

A função dada relaciona a população  $P$  da cidade, em milhares de habitantes, ao ano  $x$ . Devemos igualá-la a 3,6 mil habitantes e, com isso, encontraremos o ano  $x$ , que é a informação procurada.

#### 3. Executando o que foi planejado

Igualando a função a 3,6, temos:

$$3,6 = 0,1 + \log_2 (x - 1996) \Rightarrow 3,5 = \log_2 (x - 1996) \Rightarrow 2^{3,5} = x - 1996$$

Sabendo que  $\sqrt{2} = 1,4 = 2^{\frac{1}{2}}$ , temos que

$$2^{3,5} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 8 \cdot 1,4 \approx 11,2$$

$$\text{Logo, } 11,2 = x - 1996 \Rightarrow x = 11,2 + 1996 \Rightarrow x = 2007,2$$

Analisando as alternativas, verificamos que o evento ocorre em meados do ano de 2007.

#### 4. Verificando

Vamos verificar se em 2007 a população  $P$  é aproximadamente igual a 3,6 mil habitantes:

$$P = 0,1 + \log_2 (2007 - 1996) \Rightarrow P = 0,1 + \log_2 11$$

Realizando os cálculos na calculadora, temos que  $\log_2 11 \approx 3,5$ ; assim,  $P \approx 0,1 + 3,5 \approx 3,6$ . Logo, fica verificado que o evento ocorreu por volta do ano de 2007.

#### 5. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa d.

#### 6. Ampliando o problema

a) Uma cidade, para ser classificada em crescimento considerável, deve atingir a marca de 5 000 habitantes em 5 anos. Utilizando os dados da questão-base, em que ano a cidade, formada por uma ocupação de uma fazenda, atingirá esse contingente populacional? Julgue se essa mesma cidade apresentou crescimento considerável. Dado:  $2^{4,9} \approx 29,9$ .

Atingirá no ano de 2025; e não é classificada como uma cidade em crescimento considerável.

b) *Discussão em equipe*

Troque ideias com seus colegas sobre a invasão de fazendas, propriedades privadas improdutivas e levante as possíveis causas. Deem suas opiniões sobre o papel do governo na resolução desse tipo de problema. **Resposta pessoal.**

18. Resolva as equações:

a)  $\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$

b)  $\log_9 x + \log_{27} x - \log_3 x = -1$

**Resolução:**

a)  $\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$

• Condição de existência:  $x-3 > 0$  e  $x > 0 \Rightarrow x > 3$  e  $x > 0 \Rightarrow x > 3$

• Há dois modos diferentes de resolução:

I)  $\log_2(x-3) + \log_2 x = 2 \Rightarrow \log_2[(x-3)x] = 2$

Usando a definição de logaritmo:

$(x-3)x = 2^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x' = 4$  e  $x'' = -1$

ou

II)  $\log_2(x-3) + \log_2 x = \log_2 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2[(x-3)x] = \log_2 4$

Usando o fato de que a função logarítmica é injetiva:

$(x-3)x = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = 25$

$x' = 4$  e  $x'' = -1$

• Verificação: como a condição de existência é  $x > 3$ , então  $4 \in S$  e  $-1 \notin S$   
 $S = \{4\}$

b)  $\log_9 x + \log_{27} x - \log_3 x = -1$

• Condição de existência:  $x > 0$

•  $\log_9 x + \log_{27} x - \log_3 x = -1$

Vamos escrever os logaritmos na base 3:

$\frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \frac{\log_3 x}{\log_3 27} - \log_3 x = -1$

Como  $\log_3 9 = 2$  e  $\log_3 27 = 3$ , temos:

$\frac{\log_3 x}{2} + \frac{\log_3 x}{3} - \log_3 x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3 \cdot \log_3 x + 2 \cdot \log_3 x - 6 \cdot \log_3 x}{6} = -\frac{6}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \log_3 x + 2 \cdot \log_3 x - 6 \cdot \log_3 x = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\log_3 x = -6 \Rightarrow \log_3 x = 6 \Rightarrow 3^6 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 729$

• Verificação:  $729 > 0 \Rightarrow 729 \in S$

$S = \{729\}$

## Exercícios

50. Resolva no caderno as equações:

a)  $\log_2(x+1) = 4$   $S = \{15\}$  c)  $\log_4(\log_2 x) = 1$   $S = \{16\}$

b)  $\log_2(x^2 + x + 2) = 3$   $S = \{-3, 2\}$  d)  $\log_{x+1}(x^2 + 7) = 2$   $S = \{3\}$

51. Calcule  $x$  sabendo que:

a)  $\log_x x(x-6) = 1$   $S = \{7\}$  b)  $2^{\log_2(x+1)} = 3$   $S = \{2\}$

52. Resolva no caderno as seguintes equações:

a)  $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$   $S = \left\{\frac{1}{9}, 27\right\}$

b)  $\log_2^2 x - 2 \cdot \log_2 x + 1 = 0$   $S = \{2\}$

53. Resolva no caderno as equações a seguir:

a)  $\log_2 3 + \log_2(x-1) = \log_2 6$   $S = \{3\}$

b)  $\log_3 2 + \log_3(x+1) = 1$   $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

54. Dados  $A = \log_{10} x$ ,  $B = \log_{10}(x+2)$  e  $C = \log_{10} 3$ , calculem  $x$  para que se tenha  $A + B = C$ .  $x = 1$

55. Qual é o conjunto solução da equação  $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1 + \log_2(2x-7)$ ? (Lembre que:  $1 = \log_2 2$ ).  $S = \{4, 5\}$

56. Determinem  $x$  de modo que  $\log_{10}(1000)^x - \log_{10}(0,001)^x = 1$ .  $x = \frac{1}{6}$

57. Resolvam no caderno as equações:

a)  $\log_4 x - \log_8 x = 1$   $S = \{64\}$  b)  $\log_{10} x + \log_{100} x = 3$   $S = \{100\}$

58. (Unesp-SP) O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude. Suponha que a altitude  $h$  acima do nível do mar, em quilômetros, detectada pelo altímetro de um avião, seja dada, em função da pressão atmosférica  $p$ , em atm, por  $h(p) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$ .

Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação  $\log_{10} 2 = 0,3$ , a altitude  $h$  do avião nesse instante, em quilômetros, era de:

a) 5. x b) 8. c) 9. d) 11. e) 12.



Altímetro de avião.

Peter Dabzely/Getty Images



## Inequações logarítmicas

Observe as inequações:

a)  $\log_2(x + 1) > \log_2 6$

b)  $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 5$

c)  $\log x + \log 3 \geq \log 2x$

Esses são alguns exemplos de inequações logarítmicas. Para resolvê-las, usamos várias informações já estudadas sobre logaritmos e função logarítmica. Vamos recordar:

- A função  $f(x) = \log_a x$  é crescente quando  $a > 1$ . Nesse caso, conserva-se o sentido da desigualdade. Por exemplo: para  $x > 0$ , temos  $\log_{\frac{7}{4}} x > \log_{\frac{7}{4}} 3 \Leftrightarrow x > 3$ .
- A função  $f(x) = \log_a x$  é decrescente quando  $0 < a < 1$ . Nesse caso, troca-se o sentido da desigualdade. Por exemplo: para  $x > 0$ , temos  $\log_{\frac{3}{5}} x > \log_{\frac{3}{5}} 3 \Leftrightarrow x < 3$ .

## Exercício resolvido

19. Resolva as inequações:

a)  $\log_2(x + 1) > \log_2 6$ ;

b)  $\log_{49} 2x - \log_{49} 3 \geq \log_7 x + \log_{49} 2$ .

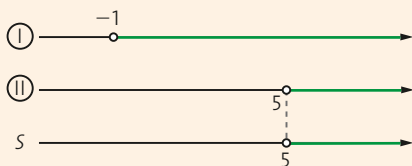
**Resolução:**

a) • Condição de existência:  $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$  (I)

• base  $a = 2$  ( $a > 1$ )  $\rightarrow$  mantém-se o sentido da desigualdade:

$$\log_2(x + 1) > \log_2 6 \Rightarrow x + 1 > 6 \Rightarrow x > 5 \text{ (II)}$$

• Quadro de resolução (as condições (I) e (II) devem ser satisfeitas simultaneamente):



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

b)  $\log_{49} 2x - \log_{49} 3 \geq \log_7 x + \log_{49} 2$

• Condição de existência:  $2x > 0$  e  $x > 0 \Rightarrow x > 0$

Para que todos os logaritmos tenham a mesma base, podemos substituir  $\log_7 x$  por  $\log_{49} x^2$ .

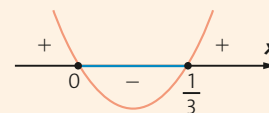
A inequação fica assim:

$$\log_{49} 2x - \log_{49} 3 \geq \log_{49} x^2 + \log_{49} 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{49} \frac{2x}{3} \geq \log_{49} (2x^2) \Rightarrow \frac{2x}{3} \geq 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 2x \leq 0$$

$$x' = 0 \text{ e } x'' = \frac{1}{3}$$



• Verificação:  $x > 0$  e  $0 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{3}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{3}\right\}$$

Veja a resolução no Manual do Professor.

### Para refletir

Construa no caderno o quadro de resolução para confirmar a resposta.

## Exercícios

59. Resolva no caderno as inequações:

a)  $\log_5(x - 1) > 0$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

b)  $\log_3(2x + 6) < \log_3 4$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1\}$

c)  $\log_2(2 - x) > \log_2 3$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

d)  $\log_{0,3}(x^2 - 1) < \log_{0,3} 8$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

60. Resolva no caderno:

a)  $\log_{\frac{1}{2}}(3 - x) - \log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} x$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

b)  $\log_4(2x + 1) < \log_4 x + \log_4 3$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

c)  $\log_2(x - 5) + \log_2(x - 4) < 1$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$

61. Determine os valores reais de  $x$  que satisfazem:

a)  $2^{\log_{10}(x - 4)} > 1$   $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b)  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) \geq -1$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0 \text{ ou } 2 < x \leq 3\}$



## Logaritmos e funções logarítmicas

Vários conceitos básicos da Matemática, criados para atender a certas necessidades e resolver problemas específicos, revelaram posteriormente uma utilidade bem mais ampla do que a inicialmente pensada, e vieram, com a evolução das ideias e o desenvolvimento das teorias, a adquirir uma posição definitiva de grande relevância nessa ciência. Em alguns casos, a utilidade original foi, com o tempo, superada por novas técnicas, mas a relevância teórica se manteve. [...]

Os logaritmos foram inventados no início do século XVII, a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos para a elaboração de tabelas de navegação.

Com efeito, a regra  $\log(xy) = \log x + \log y$  e suas consequências, tais como  $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ ,

$\log(x^n) = n \cdot \log x$ , permitem reduzir cada operação aritmética (exceto, naturalmente, a adição e a subtração) a uma operação mais simples, efetuada com os logaritmos. Essa maravilhosa utilidade prática dos logaritmos perdurou até recentemente, quando foi vastamente superada pelo uso das calculadoras eletrônicas.

A função logarítmica, entretanto, juntamente com sua inversa, a função exponencial, permanece como uma das mais importantes na Matemática, por uma série de razões que vão muito além da sua utilidade como instrumento de cálculo aritmético. [...]

LIMA, Elon Lages. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Impa-Vitae, 1991. p. 28-30 *passim*.

### O logaritmo na era da informática

Quando um evento tem probabilidade  $p$  de ocorrer, sua ocorrência fornece uma quantidade de informações  $I$  dada por uma expressão que envolve logaritmos, que é  $I = \log_2 \frac{1}{p}$ , ou seja, 1 *bit* de informação.

### A lei de Weber e as escalas de Fechner

A lei de Weber (Ernst Heinrich Weber, 1795-1878, fisiologista alemão), para resposta de seres humanos

a estímulos físicos, declara que diferenças marcantes na resposta a um estímulo ocorrem para variações da intensidade do estímulo proporcionais ao próprio estímulo. Por exemplo, um homem que sai de um ambiente iluminado para outro, só percebe uma variação da luminosidade se esta for superior a 2%; só distingue entre soluções salinas se a variação da salinidade for superior a 25%, etc.

Fechner (Gustav Theodor Fechner, 1801-1887, físico e filósofo alemão) propôs um método de construção de escalas baseado na lei de Weber.

Seja  $i$  a taxa de variação da intensidade do estímulo que permite discriminação da resposta. Associemos ao estímulo  $x_0$  o nível de resposta 0. Então, a cada variação de taxa  $i$  no nível do estímulo, aumentamos uma unidade na medida do nível de resposta. Sejam  $y$  a resposta e  $x$  a intensidade do estímulo.

a)  $x = x_0(1 + i)^y$

b)  $y = a \cdot \log x + b$ , com

$$a = \frac{1}{\log(1 + i)} \text{ e } x_0 = \frac{1}{(1 + i)^b}.$$

c) O brilho de uma estrela é uma sensação, ou seja, é uma resposta a um estímulo que é a energia luminosa recebida pelo olho. Os astrônomos medem o brilho por intermédio de uma escala de Fechner,  $m = c - 2,5 \cdot \log_{10} I$ , onde  $m$  é a medida do brilho, chamada de magnitude aparente,  $I$  é a energia luminosa recebida pelo olho e  $c$  é uma constante.

d) Uma escala de Fechner muito conhecida é a escala Richter, que mede a intensidade de terremotos. Ela é definida por  $R = a + \log_{10} I$ , em que  $R$  é a intensidade do terremoto (em graus Richter) e  $I$  é a energia liberada por ele.

e) Outra escala de Fechner também muito conhecida é a que mede ruídos, definida por  $R = 12 + \log_{10} I$ , em que  $R$  é a medida do ruído em bels (essa designação é em homenagem a Alexander Graham Bell, 1847-1922, físico escocês e inventor do telefone) e  $I$  é a intensidade sonora, medida em watts por metro quadrado. Na realidade, a unidade legal no Brasil é um submúltiplo do bel, o decibel.

MORGADO, Augusto Cesar et al. *Progressões e Matemática financeira*. Rio de Janeiro: SBM, 1993. p. 40-41 *passim*. (Coleção do Professor de Matemática).

# Pensando no Enem

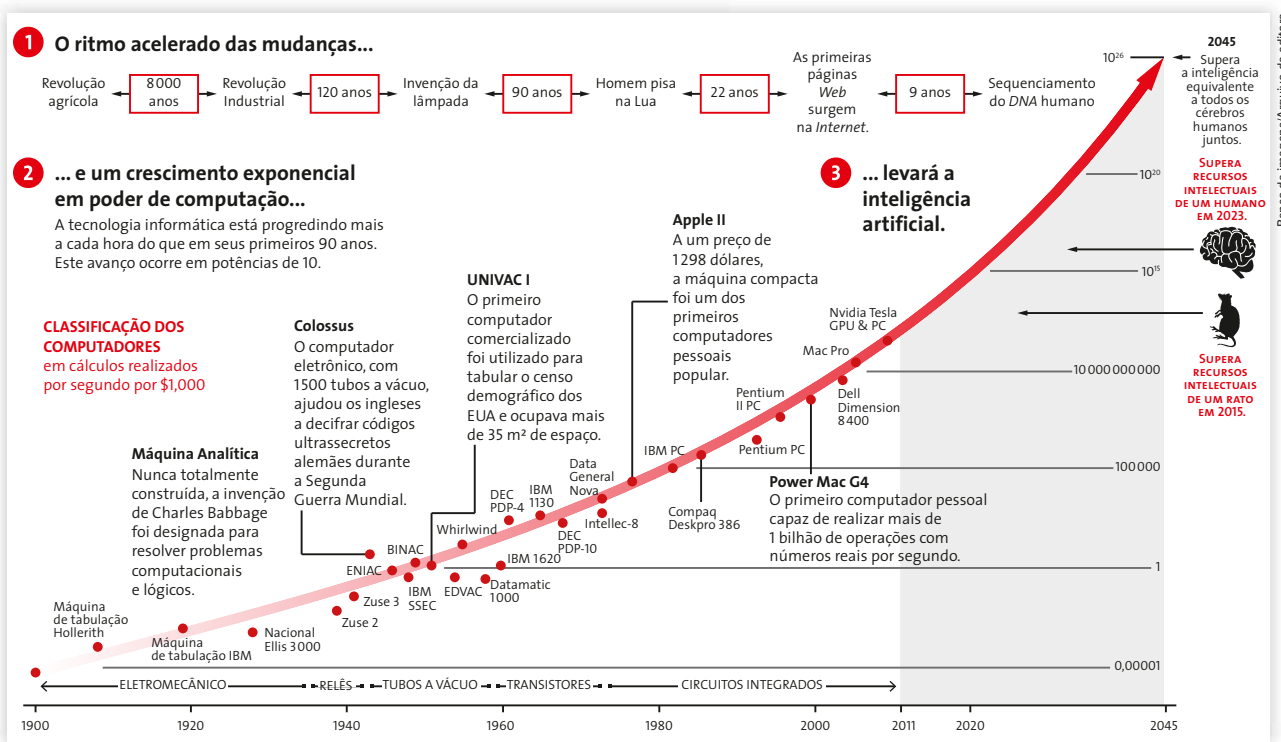


Matriz do Enem: H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

- Leia o texto e observe o gráfico.

[...] fato é que a tecnologia avança a passos largos, na verdade em passos **exponenciais**.

Um exemplo clássico de tecnologia exponencial é expresso pela lei de Moore, que em termos gerais mostra que a quantidade de transistores nos circuitos integrados dobra aproximadamente a cada um ano e meio com o mesmo custo de produção. Isso pode ser apresentado por um gráfico exponencial de crescimento, daí o nome de tecnologia exponencial.



[...] O crescimento destas tecnologias passa pela digitalização das mesmas, pelo crescimento exponencial do desempenho e a redução também exponencial nos custos.

Exemplo é o sequenciamento de DNA, que era tão caro há algumas décadas e hoje pode ser feito por menos de 1 dólar [...]

Fonte: EXAME.com. Disponível em: <<http://exame.abril.com.br/rede-de-blogs/ceos-do-futuro/2015/06/10/de-marty-mcfly-as-tecnologias-exponenciais-faca-parte-do-futuro/>>. Acesso em: 22 mar. 2016.

## Fique atento!

Relês são dispositivos que atuam como interruptores eletromecânicos. O tubo a vácuo, também conhecido como válvula, era utilizado como amplificador de sinais. Transistores são componentes eletrônicos que atuam como interruptores, amplificadores e retificadores de sinais elétricos. Circuitos integrados (CIs) são circuitos eletrônicos miniaturizados, compostos basicamente de material semicondutor.

Considerando os valores à direita, na vertical, no gráfico acima – que indicam o número de cálculos realizados por um computador por segundo por 1000 dólares (\$1000,00) –, podemos afirmar que a função do tipo exponencial que melhor representa esse crescimento é:

- a)  $N(x) = 0,00001 \cdot 10^{5x-1}, 1 \leq x \leq 6$
- b)  $N(x) = 10^{-4} \cdot 10^{5(x-1)}, 1 \leq x \leq 6$
- x c)  $N(x) = 0,00001 \cdot 10^{5(x-1)}, 1 \leq x \leq 6$
- d)  $N(x) = 10^{-5} \cdot x, 1 \leq x \leq 6$
- e)  $N(x) = 10^{-5+5x}, 1 \leq x \leq 6$



## O que é poluição sonora?



Dem d' Souza/Arquivo da editora

Poluição sonora é todo ruído que pode causar danos à saúde humana ou animal. Existem diversas situações que causam desconforto acústico, como uma pessoa falando alto ao celular e um indivíduo ouvindo música sem fones. Mas, se não tiver potencial para causar dano, não é poluição sonora.

Embora não se acumule no meio ambiente, como outros tipos de poluição, ela é considerada um dos principais problemas ambientais das grandes cidades e uma questão de saúde pública.

Uma pessoa exposta a ruídos muito altos pode sofrer de insônia, depressão, perda de memória, gastrite, doenças cardíacas e, claro, surdez. Por isso, existem leis e normas para evitar altos níveis de ruídos. Entre os especialistas, o consenso é que o limite seguro é de 80 dB.

## Inimigos do ouvido

A orelha (ou ouvido) é responsável pela capacidade de ouvir e também pelo equilíbrio do corpo. É composta por três estruturas: orelha interna, orelha média e orelha externa.

Conheça algumas das fontes mais nocivas [...] ao seu redor:

- |  |                             |                              |
|--|-----------------------------|------------------------------|
| - Trânsito congestionado: 80 a 90 dB       | - Latidos: 95 dB            | - Liquidificador: 85 dB      |
| - Avenida em obras com britadeiras: 120 dB | - Secador de cabelos: 95 dB | - Fogos de artifício: 125 dB |
| - Feira livre: 90 dB                       | - Bronca: 84 dB             | - Avião decolando: 140 dB    |
| - Trios elétricos: 110 dB                  | - Banda de rock: 100 dB     |                              |

Fonte: SAHD, Luiza. O que é poluição sonora? Mundo Estranho. Ed. 02/2014. Disponível em: <<http://planetasustentavel.abril.com.br/noticia/ambiente/o-que-e-poluicao-sonora-mundo-estranho-777867.shtml>>. Acesso em: 8 abr. 2016.

## Audição e os logaritmos

Os sons que chegam às nossas orelhas são ondas sonoras produzidas por vibrações de partículas do meio. Quando essas ondas sonoras atingem a orelha, ocorre a conversão da variação de pressão no ar em estímulo nervoso, que, ao alcançar o cérebro, passa uma sensação auditiva, o som.

O nível de intensidade sonora de uma onda ( $I_{dB}$ ) é uma grandeza medida em **decibels** (dB). A  $I_{dB}$  é igual a 10 vezes o logaritmo decimal da razão entre duas quantidades de energia. A primeira delas é definida como quantidade de energia, chamada intensidade sonora ( $I$ ), e representa a razão entre a potência sonora e a área da superfície considerada:  $I = \frac{P}{A}$ . Essa unidade é dada em  $W/m^2$  e nos fornece dados que nos permitem avaliar se o som é forte ou fraco; por meio dela podemos classificar se o som emitido é suportável ou não. A segunda é uma constante:  $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ .

O cálculo do nível de uma intensidade sonora é dado pela fórmula:  $I_{dB} = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$ .



© David J. Green/Alamy Stock Photo/Latinstock

Medidor de nível de intensidade sonora, indicando 75,7 decibels.

A audição humana pode perceber uma extensa faixa de intensidade de ondas sonoras, desde  $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  até  $1 \text{ W/m}^2$ . O limiar da audição humana, o mínimo de intensidade sonora que ativa nossa percepção, ocorre quando  $I_{\text{dB}} = 0$ . Veja:

$$I_{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow 0 = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow 0 = \log I - \log 10^{-12} \Rightarrow \log I = -12 \log 10 \Rightarrow \log I = -12 \Rightarrow I = 10^{-12}$$

Quando  $I = 1 \text{ W/m}^2$ , tem-se o que se chama limiar da dor. Vejamos nessa escala a partir de quantos decibels uma onda sonora pode provocar dor em nossas orelhas.

$$I_{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 10(\log 1 - \log 10^{-12}) = 10 \cdot 12 = 120$$

Uma onda sonora provoca dor a partir de 120 dB.

Observe a tabela a seguir que apresenta os limites de tolerância para ruído contínuo ou intermitente; esses valores foram propostos pelo Ministério do Trabalho.

### Limites de tolerância para ruído contínuo ou intermitente

Nível de ruído (dB)	Máxima exposição diária permissível
85	8 horas
90	4 horas
95	2 horas
100	1 hora
105	30 minutos
110	15 minutos
115	7 minutos

#### **Fique atento!**

Entende-se por Ruído Contínuo ou Intermitente, para os fins de aplicação de Limites de Tolerância, o ruído que não seja ruído de impacto.

Fonte dos dados: NR-15 Atividades e operações insalubres. Ministério do Trabalho e Emprego. Disponível em: <www.010.dataprev.gov.br/sislex/paginas/05/mtb/15.htm>. Acesso em: 14 jan. 2016.

A exposição excessiva a níveis sonoros superiores ao recomendado levam progressivamente à perda da audição. Portanto, devemos evitar exposição demorada a sons com nível de intensidade sonora muito alta, pois os sons a partir de 130 dB podem causar danos permanentes à audição.

## Trabalhando com o texto

- Um avião decolando precisaria produzir um nível de intensidade de quantos decibels a menos para que seu ruído não provocasse danos na audição de um controlador de pista em aeroportos?  
*20 dB a menos, porém o ideal seria diminuir 60 dB.*
- Quanto tempo você poderia ficar exposto aos ruídos de um trio elétrico sem causar danos a sua audição?  
*15 minutos.*
- Tomando como referência os dados apresentados, quanto tempo deveria durar um *show de rock*?  
*No máximo 1 hora.*
- Um piano pode chegar a 92 dB. Qual é a intensidade sonora ( $\text{W/m}^2$ ) correspondente aos 92 dB emitidos pelo piano?  $I = 10^{-2,8} \text{ W/m}^2$ .

## Pesquisando e discutindo

- Pesquise e anote no caderno os níveis de ruídos dos eletrodomésticos da sua casa, por exemplo, aspirador de pó, secador de cabelo e liquidificador. Depois, escreva o tempo máximo de exposição aos ruídos emitidos por esses eletrodomésticos. *Resposta pessoal.*
- Pesquise em quais profissões podem ocorrer danos à audição e a média de decibels que esses profissionais estão expostos. *Resposta pessoal.*

## Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações sobre a poluição sonora em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acesso em: 22 mar. 2016)

- BRASIL. Ministério da Saúde. *Perda auditiva induzida por ruído (Pair)*. Secretaria de Atenção à Saúde, Departamento de Ações Programáticas Estratégicas. Brasília: Editora do Ministério da Saúde, 2006.
- Inmetro. Selo ruído: <www.inmetro.gov.br/imprensa/releases/seloRuido.asp>.
- Saúde auditiva Brasil: <www.saudeauditivabrasil.org.br/>.



# Vestibulares de Norte a Sul



## Região Norte

1. (Uepa) Os dados estatísticos sobre violência no trânsito nos mostram que é a segunda maior causa de mortes no Brasil, sendo que 98% dos acidentes de trânsito são causados por erro ou negligência humana e a principal falha cometida pelos brasileiros nas ruas e estradas é usar o celular ao volante. Considere que em 2012 foram registradas 60 000 mortes decorrentes de acidentes de trânsito e destas, 40% das vítimas estavam em motos.

Texto adaptado: *Revista Veja*,  
19/08/2013.

A função  $N(t) = N_0(1,2)^t$  fornece o número de vítimas que estavam de moto a partir de 2012, sendo  $t$  o número de anos e  $N_0$  o número de vítimas que estavam em moto em 2012. Nessas condições, o número previsto de vítimas em moto para 2015 será de:

- x a) 41 472.
- b) 51 840.
- c) 62 208.
- d) 82 944.
- e) 103 680.

2. (Unifap) Ezequiel e Marta, estudando problemas que envolvam logaritmos, se depararam com uma questão envolvendo logaritmo, onde dois terremotos, com  $R_1$  e  $R_2$  pontos na escala Richter, estão relacionados por:  $R_1 - R_2 = \log_{10} \left( \frac{M_1}{M_2} \right)$

onde  $M_1$  e  $M_2$  medem a energia liberada pelos respectivos terremotos. Usando a fórmula acima, se  $M_1 = 10^3 M_2$ , então  $R_1 - R_2$  é igual a:

- a) 0.
  - b) 1.
  - c) 2.
  - x d) 3.
  - e) 4.
- Este exercício envolve a soma de uma PG finita, porém este tópico será estudado apenas no próximo capítulo. Permita aos alunos tentar resolver este exercício com o auxílio de uma calculadora ou de uma planilha de cálculo. Depois que completarem o estudo do Capítulo 7, pode-se propor aos alunos resolvê-lo novamente, utilizando a fórmula geral da soma dos termos de uma PG finita. Veja no Manual do Professor a resolução deste exercício.*

## Região Nordeste

3. (UFPB) O diretor de uma fábrica de parafusos estabeleceu para o ano de 2013 a seguinte meta mínima de produção:
- Em janeiro, devem ser produzidos 20 000 parafusos;
  - Nos meses subsequentes, a produção de cada mês deverá exceder 20% da produção do mês anterior.

Considerando que as metas mensais de produção sejam todas cumpridas, é correto afirmar que, no final de 2013, o número de parafusos produzidos será, no mínimo, de:

Use:  $1,2^{12} = 8,916$ .

- a) 491 600.
- b) 591 600.
- c) 691 600.
- x d) 791 600.
- e) 891 600.

4. (Uneb-BA) A magnitude aparente de um astro de brilho  $B$  é definida a partir de uma referência  $B_0$  por meio da fórmula  $M = \log_a \left( \frac{B}{B_0} \right)$ , com a seguinte convenção: “a magnitude aumenta em 5 quando o brilho é dividido por 100”.

Nessas condições, considerando-se  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,48$ , pode-se afirmar que a magnitude aparente da Lua, em que  $B = 1,2 \times 10^5 B_0$ , é igual a:

- 01)  $-12,9$ .
- x 02)  $-12,7$ .
- 03)  $-12,5$ .
- 04)  $-12,3$ .
- 05)  $-12,1$ .

## Região Centro-Oeste

5. (IFG-GO) As manifestações populares no Brasil, iniciadas em junho de 2013, colocaram milhares de brasileiros nas ruas, reivindicando melhorias no transporte público, educação, saúde, segurança e o combate à corrupção.

Considerando que uma manifestação iniciada às 17 horas tenha 100 participantes e que esse número triplica em relação à hora anterior, o número de participantes na manifestação às 21 horas é de:

- a) 1 200.
- b) 2 700.
- c) 24 300.
- x d) 8 100.
- e) 12 000.





6. (Uneb-DF) *Danos de alimentos ácidos*  
O esmalte dos dentes dissolve-se prontamente em contato com substâncias cujo pH (medida da acidez) seja menor do que 5,5. Uma vez dissolvido, o esmalte não é repostado, e as partes mais moles e internas do dente logo apodrecem. A acidez de vários alimentos e bebidas comuns é surpreendentemente alta; as substâncias listadas a seguir, por exemplo, podem causar danos aos seus dentes com contato prolongado.

(BREWER. 2013, p. 64).

Comida/bebida	pH
Suco de limão/lima	1,8–2,4
Café preto	2,4–3,2
Vinagre	2,4–3,4
Refrigerantes de cola	2,7
Suco de laranja	2,8–4,0
Maçã	2,9–3,5
Uva	3,3–4,5
Tomate	3,7–4,7
Maionese/molho de salada	3,8–4,0
Chá preto	4,0–4,2

A acidez dos alimentos é determinada pela concentração de íons de hidrogênio  $[H^+]$  em  $\text{molL}^{-1}$ . Em Química, o pH é definido por

$$\text{pH} = \text{colog}[H^+] = -\log[H^+].$$

Sabendo-se que uma amostra de certo alimento apresentou concentração de íons de hidrogênio igual a  $0,005 \text{ molL}^{-1}$  e considerando que  $\text{colog } 2 = -0,3$ , pode-se afirmar que, de acordo com a tabela ilustrativa, a amostra corresponde a:

- x a) suco de limão/lima.  
b) café preto.  
c) maçã.  
d) maionese/molho de salada.  
e) chá preto.

A designação graus centígrados foi abolida na Conferência Geral de Pesos e Medidas de 1948, a partir da qual passou a usar-se apenas a designação graus Celsius.

### Região Sudeste

7. (PUC-MG) Segundo dados do fabricante, a temperatura  $T$  de certo forno, medida em graus centígrados, aumenta em relação ao tempo  $t$ , contado em

minutos, de acordo com a função  $T(t) = T_0 \cdot 2^{0,75t}$ . Sendo  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  a temperatura inicial desse forno, pode-se estimar que o tempo necessário para que sua temperatura atinja  $240^\circ\text{C}$ , em minutos, é aproximadamente igual a:

- a) 3.                    x b) 4.                    c) 6.                    d) 7.

8. (Insper-SP) Para combater um incêndio numa floresta, um avião a sobrevoa acima da fumaça e solta blocos de gelo de uma tonelada. Ao cair, cada bloco se distancia da altitude em que foi solto pelo avião de acordo com a lei  $d = 10t^2$ , em que  $t$  é o tempo em segundos. A massa  $M$  do bloco (em quilogramas) varia, em função dessa distância de queda  $d$  (em metros), conforme a expressão  $M = 1\,000 - 250 \log d$ . Se o bloco deve chegar ao chão totalmente derretido, a altitude mínima em que o avião deve soltá-lo e o tempo de queda nesse caso devem ser:

- x a) 10 000 metros e 32 segundos.  
b) 10 000 metros e 10 segundos.  
c) 1 000 metros e 32 segundos.  
d) 2 000 metros e 10 segundos.  
e) 1 000 metros e 10 segundos.

### Região Sul

9. (UEL-PR) A mitose é uma divisão celular, na qual uma célula duplica o seu conteúdo, dividindo-se em duas, ditas células-filhas. Cada uma destas células-filhas se divide, dando origem a outras duas, totalizando quatro células-filhas e, assim, o processo continua se repetindo sucessivamente. Indique a alternativa que corresponde, corretamente, à função que representa o processo da mitose.

- a)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ , dada por  $f(x) = x^2$ .  
b)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , dada por  $f(x) = 2^x$ .  
x c)  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ , dada por  $f(x) = 2^x$ .  
d)  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dada por  $f(x) = 2^x$ .  
e)  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dada por  $f(x) = 2x$ .

Para se obter o plural das grandezas físicas geralmente deve-se apenas acrescentar "s" no final da unidade. Por exemplo, o plural de decibel é decibels, de pascal é pascals, de mol é mols, e assim por diante.

10. (UCS-RS) O nível  $\beta$ , em decibels, de um som que tem intensidade  $I$ , é dado pela fórmula  $\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ , em que  $I_0 = 10^{-12}$ . Se a intensidade  $I$  for multiplicada por 100, em quantos decibels aumenta  $\beta$ ?
- a) 2                    c) 100                    e) 140  
x b) 20                    d) 120

UNIDADE

4

# Sequências e Trigonometria



As margaridas geralmente têm 13, 21 ou 34 pétalas. Os números 13, 21 e 34 fazem parte de uma sequência de números conhecida como **sequência de Fibonacci**. Esses e outros números dessa sequência podem ser relacionados a elementos presentes na natureza.

# 1 Sequências

Em muitas situações cotidianas aparece a ideia de **sequência** ou **sucessão**. Assim, por exemplo, temos:

- a sequência dos dias da semana (domingo, segunda-feira, ..., sábado);
- a sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., dezembro);
- a sequência dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, ...);
- a sequência dos anos, a partir de 2002, nos quais a Copa do Mundo de Futebol foi ou será realizada (2002, 2006, 2010, 2014, 2018, 2022, ...). *Peça aos alunos que citem outros exemplos de sequências.*

☞ Junte-se com um colega e faça o que se pede.

Determinem qual é o próximo elemento em cada sequência abaixo, se possível:

- |  |  |
|--|--|
| a) Março, abril, maio, ... <b>junho</b>  | f) 1, 2, 4, 8, 16, ... <b>32</b>   |
| b) Janeiro, março, maio, ... <b>julho</b>  | g) 1, ... <i>Impossível determinar, pois não há características suficientes para determinar o próximo termo.</i> |
| c) Sábado, sexta-feira, quinta-feira, quarta-feira, ... <b>terça-feira</b>   | h) 240, -120, 60, -30, 15, ... <b>-7,5</b>   |
| d) Domingo, ... <i>Impossível determinar, pois não há características suficientes para determinar o próximo termo.</i> | i) 1, 4, 9, 16, ... <b>25</b>  |
| e) 1, 2, 3, 4, ... <b>5</b>  |  |

Em todas essas situações observamos certa ordem nos elementos da sequência. Esses elementos são também chamados **termos** da sequência. Na sequência dos meses do ano, temos: 1º termo: janeiro; 2º termo: fevereiro; ...; 12º termo: dezembro.

Se representarmos o 1º termo por  $a_1$  (lê-se *a índice um*, ou *a um*), o 2º termo por  $a_2$ , o 3º por  $a_3$  e assim por diante, até o termo de ordem  $n$ , ou enésimo termo ( $a_n$ ), essa sequência pode ser representada por  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ .

Nesse exemplo, temos:

- |                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| • $a_1 =$ janeiro | • $a_{10} =$ outubro  |
| • $a_7 =$ julho   | • $a_{12} =$ dezembro |

## Definição

Vamos retomar a definição de sequência que estudamos no Capítulo 2.

Uma **sequência** ou sucessão de números reais é uma **função** definida em  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  e tomando valores no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais.

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

### Fique atento!

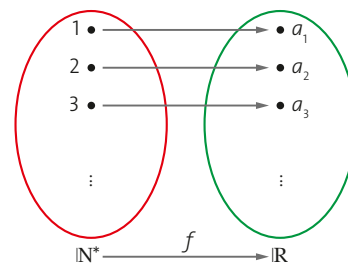
Consideraremos apenas sequências de números reais, ou seja, funções de  $\mathbb{N}^*$  em  $\mathbb{R}$ .

Assim, a cada elemento  $n \in \mathbb{N}^*$  corresponde um único número real  $a_n$ . Os elementos  $a_n$  são os termos da sequência, e as notações para a sequência são:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) \text{ ou } (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ ou } (a_n)$$

Dessa forma,  $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$

O índice  $n$  indica a posição do elemento na sequência. Desse modo, o primeiro termo é indicado por  $a_1$ , o segundo é indicado por  $a_2$  e assim por diante.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Exemplos:

- a) A sequência dos números ímpares positivos é **infinita**: (1, 3, 5, 7, 9, ...), na qual  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9$ , etc.
- b) A sequência dos quatro primeiros múltiplos de 5 é **finita**: (0, 5, 10, 15). Nesse caso,  $a_1 = 0, a_2 = 5, a_3 = 10$  e  $a_4 = 15$ .
- c) (17, 12, 7, 2, -3, -8) é uma sequência finita de 6 termos.
- d) Ao lançarmos uma moeda, temos dois resultados possíveis: cara ou coroa. Se lançarmos duas moedas diferentes, por exemplo, uma de R\$ 0,10 e outra de R\$ 0,50, teremos quatro possibilidades: (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara) e (coroa, coroa). Se lançarmos três moedas diferentes, serão oito resultados possíveis, e assim por diante. Confira:  
A relação entre o número de moedas e o número de resultados mostrada na tabela abaixo é uma função: a cada número de moedas corresponde um único número de resultados.

**Fique atento!**

Indicamos que a sequência é **infinita** colocando reticências (...) no final.



Moedas.

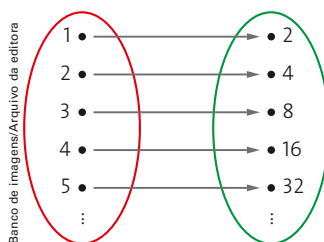
Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

**Lançamento de moedas**

<b>Número de moedas</b>	1	2	3	4	5	⋮
<b>Número de resultados</b>	2	4	8	16	32	⋮

Fonte: Dados experimentais.

Observe o diagrama abaixo. Nesse caso,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $f(1) = a_1 = 2, f(2) = a_2 = 4, f(3) = a_3 = 8$ , etc., e a sequência é representada por (2, 4, 8, 16, 32, ...).



**Para refletir**

Explicita os oito resultados no caso de três moedas.

- (ca, ca, ca); (ca, ca, co);
- (ca, co, ca); (ca, co, co);
- (co, ca, ca); (co, ca, co);
- (co, co, ca); (co, co, co).

Nesse exemplo observe que  $2 = 2^1; 4 = 2^2; 8 = 2^3; 16 = 2^4; 32 = 2^5$ , etc. Então, se  $n$  é o número de moedas, o número de resultados é dado por  $2^n$ . Nesse caso, temos  $f(n) = a_n = 2^n$ . Essa expressão,  $a_n = 2^n$ , é chamada **lei de formação** ou **termo geral** da sequência (2, 4, 8, 16, 32, ...), pois fazendo  $n = 1, 2, 3, \dots$  obtemos os termos  $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8$ , etc., da sequência.

**Determinação de uma sequência por recorrência**

Quando conhecemos o primeiro termo de uma sequência e uma regra que permite determinar cada termo  $a_n$  a partir dos seus anteriores, dizemos que explicitamos a sequência por **recorrência**.

Exemplos:

- a) Vamos explicitar a sequência dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 1, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

$a_1 = 1$

$n = 1 \rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

$n = 2 \rightarrow a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

$n = 3 \rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 13 + 1 = 40$

$n = 4 \rightarrow a_5 = 3a_4 + 1 = 3 \cdot 40 + 1 = 121$

Portanto, a sequência é dada por: (1, 4, 13, 40, 121, ...).

**Fique atento!**

Recorremos ao valor do termo anterior para obter o próximo.

- b) A sequência  $a_n$  dos números naturais ímpares (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...) pode ser definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$





## A sequência de Fibonacci

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, contribuiu com diversas pesquisas para o desenvolvimento da Matemática.

Em 1202, em seu livro intitulado *Liber Abaci*, apresentou o problema que o consagrou. Acompanhe:

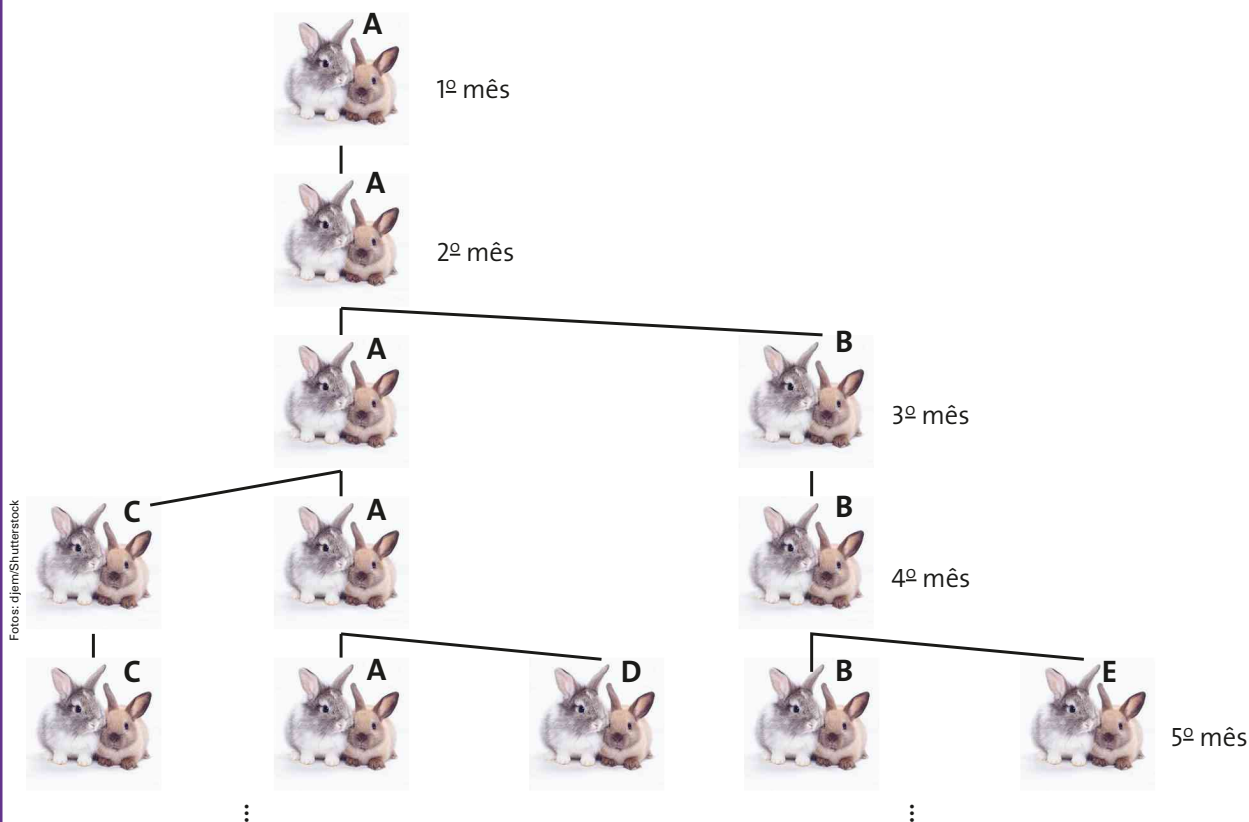
Supondo que um coelho tenha vida eterna e que cada casal gere um novo casal, que dará origem a um novo par no segundo mês de vida, e assim sucessivamente, de mês em mês, fica formada uma sequência especial com números naturais. Assim:

- no 1º mês temos um casal de coelhos, que chamaremos de **A**;
- no 2º mês o casal acasala. Continuamos com um par de coelhos;
- no 3º mês, **A** gera um par **B** e passamos a contar com 2 casais;
- no 4º mês teremos três pares, e o novo casal é uma cria de **A**; passamos assim a ter **A, B e C**;
- no 5º mês teremos, além da cria de **A**, uma cria de **B**, e então ficamos com 5 casais de coelhos: **A, B, C, D e E**;
- no 6º mês, além das crias de **A e B**, também teremos uma de **C** e então contaremos com 8 casais: **A, B, C, D, E, F, G e H**;
- no 7º mês teremos crias de **A, B, C, D e E** e obteremos 13 casais: **A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L e M**; e assim sucessivamente.



Stefano Bianchetti/Corbis/Latinstock

Gravura de Fibonacci.





Em forma de tabela, temos:

### Geração de coelhos

Mês	Casais	Número de casais	Casais que dão cria
1º	A	1	
2º	A	1	A
3º	A, B	2	A
4º	A, B, C	3	A
5º	A, B, C, D, E	5	A e B
6º	A, B, C, D, E, F, G, H	8	A, B e C
7º	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M	13	A, B, C, D e E
etc.			

Fonte: Dados fictícios.

Ampliando mais ainda essa tabela, temos:

Número do mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	etc.
Número de casais	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	etc.

Podemos formar uma sequência em que cada termo determina o número de casais de coelhos:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...) → **sequência de Fibonacci**

Cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois que o precedem imediatamente.

1. A fórmula por recorrência da sequência de Fibonacci é dada por:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \text{ e } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Determine, por recorrência, os três próximos termos, depois do 144 e 233. **377, 610, 987**

2. Divida cada termo dessa sequência, a partir de 21, pelo seu precedente:



a) 21 : 13 **1,61538**

c) 55 : 34 **1,61764**

e) 144 : 89 **1,61798**

b) 34 : 21 **1,61904**

d) 89 : 55 **1,61818**

f) 233 : 144 **1,61806**

Observe que os quocientes são próximos do número 1,618: o “número de ouro” dos gregos, que abordamos no Capítulo 1,  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$ ; ele é um número irracional, cujo valor aproximado racional com três casas decimais é 1,618.

## Curiosidade



Miguel Schincario/AFP PHOTO/Agência France-Press

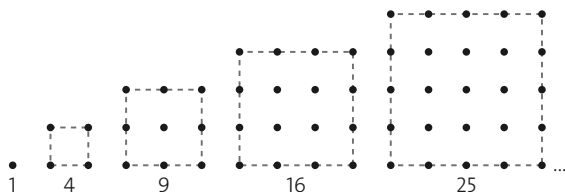
A sequência de Fibonacci também é usada na Bolsa de Valores para tentar prever os preços futuros. Essa mesma sequência aparece em uma parte do filme *O código Da Vinci*, baseado no livro de Dan Brown.

Acesse o [link](http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=12085) <[www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=12085](http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=12085)> (acesso em: 23 mar. 2016) para saber mais sobre o assunto e assistir ao trecho do filme em que é citada a sequência de Fibonacci.

Salão comercial na Bolsa de Valores de São Paulo. Fotografia de 2015.

- Determine o padrão ou regularidade; então, copie no caderno e complete cada uma das seqüências seguindo esse padrão.
  - 3, 8, 13, 18, 23, 28, ■, ■, ■, ■ 33, 38, 43, 48
  - 31, 27, 23, 19, 15, ■, ■, ■ 11, 7, 3
  - 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, ■, ■, ■ 31, 57, 105
  - 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, ■, ■, ■, ■, ■, ■ 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5
  - 2, 7, 9, 16, 25, 41, ■, ■, ■ 66, 107, 173
  - 1, 8, 27, 64, ■, ■ 125, 216

- Examine a seqüência dos **números quadrados perfeitos** (1, 4, 9, 16, 25, ...):



Porque os números são quadrados perfeitos, ou seja, têm raiz quadrada exata. Além disso, os pontos podem ser dispostos de modo a formar um quadrado.

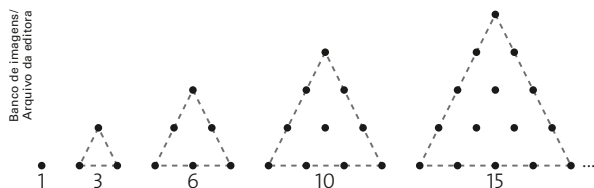
**Para refletir**

- Por que o nome “números quadrados perfeitos”?

Escreva no caderno a seqüência dos dez primeiros números quadrados perfeitos.

(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100)

- Examine a seqüência dos **números triangulares** (1, 3, 6, 10, 15, ...).



Porque os pontos podem ser dispostos de modo a formar um triângulo.

**Para refletir**

- Por que o nome “números triangulares”?

Escreva no caderno a seqüência dos dez primeiros números triangulares. (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55)

- Determine os quatro primeiros termos da seqüência cujo termo geral é  $a_n = 2n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . (1, 3, 5, 7, ...)
- A lei de formação de uma seqüência é  $a_n = 2n + 5$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Verifique se o número 47 pertence a essa seqüência. *Sim,  $a_{21} = 47$ .*
- Escreva no caderno as seqüências definidas pelos termos gerais a seguir (nos casos em que não aparece o conjunto de variação de  $n$ , considere  $n \in \mathbb{N}^*$ ):
  - $a_n = 5n$  (5, 10, 15, 20, ...)
  - $a_n = \frac{1}{3^n}$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $n \leq 4$  ( $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ )
  - $a_n = \frac{n}{n+1}$  ( $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ )

- Escreva no caderno o termo geral da seqüência dos números naturais:

$$a_n = 2n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- pares maiores ou iguais a 2 (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...);
- ímpares (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...).  $a_n = 2n - 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

- Qual é o vigésimo termo da seqüência dos números naturais ímpares (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...)?

$$a_{20} = 39 \quad (2 \cdot 20 - 1 = 39)$$

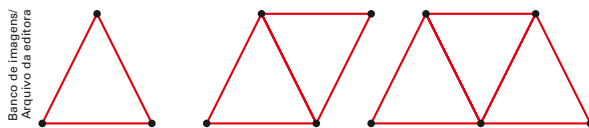
- Determine os cinco primeiros elementos das seqüências  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , definidas pelas leis da recorrência a seguir:

$$a) \begin{cases} a_1 = -2 & (-2, -2, 2, 2, -2, \dots) \\ a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a_1 = 1 & (1, 5, 13, 29, 61, \dots) \\ a_n = 2a_{n-1} + 3, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

- Calcule o 8º termo da seqüência que tem  $a_1 = 6$  e  $a_n = a_{n-1} + 3$ , para  $n \geq 2$ . 7

- Observe as representações de figuras formadas por palitos:



Agora, copiem no caderno e completem a tabela com o número de palitos necessário para formar os triângulos:

Número de triângulos	Número de palitos
1	3
2	5
3	
4	
5	
⋮	⋮
x	

$$2x + 1$$

Observando que o número necessário de palitos é dado em função do número de triângulos que se quer formar, respondam:

- Quantos palitos são necessários para formar 20 triângulos? 41
- Quantos palitos são necessários para formar 77 triângulos? 155
- Quantos triângulos se podem formar com 41 palitos? 20

## 2 Progressão aritmética (PA)

Situações envolvendo grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais são muito comuns. Acompanhe uma delas:

Uma empresa produziu, em 2012, 100 000 unidades de certo produto. Quantas unidades deveria ter produzido, anualmente, de 2012 a 2017, se o aumento anual de produção fosse estabelecido em 20 000 unidades?

Esquematizamos da seguinte forma:

- produção de 2012: 100 000

- produção de 2013:

$$(\text{produção de 2012}) + 20\,000 = 100\,000 + 20\,000 = 120\,000$$

- produção de 2014:

$$(\text{produção de 2013}) + 20\,000 = 120\,000 + 20\,000 = 140\,000$$

- produção de 2015:

$$(\text{produção de 2014}) + 20\,000 = 140\,000 + 20\,000 = 160\,000$$

- produção de 2016:

$$(\text{produção de 2015}) + 20\,000 = 160\,000 + 20\,000 = 180\,000$$

- produção de 2017:

$$(\text{produção de 2016}) + 20\,000 = 180\,000 + 20\,000 = 200\,000$$

Nessas condições, a produção anual desse período pode ser representada pela sequência:

$$(100\,000, 120\,000, 140\,000, 160\,000, 180\,000, 200\,000)$$

Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido por meio da adição do termo anterior a este e um número fixo (20 000, nesse caso). Ou seja, a produção sofreu aumentos iguais de 20 000 unidades, em intervalos de tempo iguais (1 ano, nesse caso).

Sequências desse tipo são chamadas **progressões aritméticas (PAs)**. Observe que a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante (20 000 unidades, nessa sequência).

### Fique atento!

Já estudamos alguns aspectos da PA relacionados a funções nos capítulos anteriores. Agora, vamos formalizar o conceito.

A sequência (100 000, 120 000, 140 000, 160 000, 180 000, 200 000) é um exemplo de progressão aritmética. O aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo e é chamado **razão** da progressão. A razão dessa progressão é 20 000. Dizemos que os termos dessa sequência estão em progressão aritmética.

## Definição

**Progressão aritmética** é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada **razão** da progressão e é representada pela letra  $r$ .

Exemplos:

- a) A sequência (2, 7, 12, 17, ...) é uma progressão aritmética infinita de razão 5, em que  $a_1 = 2$  e  $r = 5$ .
- b) A sequência (20, 10, 0, -10, -20) é uma PA de cinco termos, em que o 1º termo é  $a_1 = 20$  e a razão é  $r = -10$ .
- c) A sequência (4, 4, 4) é uma PA de três termos, em que o 1º termo é  $a_1 = 4$  e a razão é  $r = 0$ .
- d) A sequência (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...) **não** é uma progressão aritmética, pois as diferenças entre termos sucessivos são alternadamente -2 e 2.

**Observação:** No exemplo **a** temos a PA (2, 7, 12, 17, ...). Observe que  $7 = \frac{2 + 12}{2}$ ,  
 $12 = \frac{7 + 17}{2}$ , etc. De modo geral, em uma PA dada por  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  temos que  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ . Confira isso nos demais exemplos.

## Representações especiais

Eventualmente podemos recorrer a algumas representações especiais para uma PA, principalmente quando a soma dos termos for conhecida. A vantagem das representações especiais é diminuir a quantidade de cálculos exigidos em algumas situações.

As principais representações especiais são:

- três termos em PA:  $(x - r, x, x + r)$ ;
- cinco termos em PA:  $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$ .

## Classificação das progressões aritméticas

Dependendo da razão  $r$ , uma PA pode ser:

- **Crescente:** se cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior, isto é, quando a razão  $r$  é positiva.

Exemplo:

(3, 7, 11, 15, 19, ...) é uma PA crescente, pois  $r = 4 > 0$ .

- **Decrescente:** se cada termo, a partir do segundo, é menor que o seu anterior, isto é, quando a razão  $r$  é negativa.

Exemplo:

(16, 10, 4, -2, -8, ...) é uma PA decrescente, pois  $r = -6 < 0$ .

- **Constante:** se todos os seus termos são iguais, isto é, a razão  $r$  é nula.

Exemplo:

(5, 5, 5, 5, 5, ...) é uma PA constante, pois  $r = 0$ .

## Fórmula do termo geral de uma PA

Em uma progressão aritmética  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  de razão  $r$ , partindo do 1º termo, para avançar um termo basta somar  $r$  ao 1º termo ( $a_2 = a_1 + r$ ); para avançar dois termos basta somar  $2r$  ao 1º termo ( $a_3 = a_1 + 2r$ ); para avançar três termos basta somar  $3r$  ao 1º termo ( $a_4 = a_1 + 3r$ ); e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem  $n$ , denominado **termo geral da PA**, que é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

(ao passar de  $a_1$  para  $a_n$ , avançamos  $(n - 1)$  termos, ou seja, basta somar  $(n - 1)$  vezes a razão ao 1º termo)

Nessa fórmula temos:

$a_n$  = termo geral

$n$  = número de termos (até  $a_n$ )

$a_1$  = 1º termo

$r$  = razão da PA

**Observação:** Algumas vezes é conveniente indicar o 1º termo por  $a_0$  e não por  $a_1$ , ficando o termo geral da PA dado por  $a_n = a_0 + nr$ . Observe isso no seguinte problema:

Se o preço de um carro novo é R\$ 40 000,00, e esse valor diminui R\$ 1200,00 a cada ano de uso, qual será o seu preço com 5 anos de uso?

Temos uma PA com  $a_0 = 40\,000$ , razão  $r = -1200$ , e queremos determinar  $a_5$ :

$$a_5 = a_0 + 5r = 40\,000 + 5(-1200) = 40\,000 - 6\,000 = 34\,000$$

Assim, após 5 anos, o carro custará R\$ 34 000,00.

### Fique atento!

• Note que  $a_9 = a_4 + 5r$ , pois, ao passar de  $a_4$  para  $a_9$ , avançamos cinco termos;  $a_3 = a_{15} - 12r$ , pois retrocedemos 12 termos ao passar de  $a_{15}$  para  $a_3$ ; e assim por diante.

• Qualquer PA  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  de razão  $r$  e primeiro termo  $a_1$  pode ser definida por recorrência por: 
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}, \text{ para } n \geq 1.$$

É importante ressaltar que não existe  $a_0$  em seqüências (o índice pertence ao conjunto dos números naturais não nulos), mas às vezes é conveniente considerarmos um termo fictício  $a_0$  que seria anterior ao  $a_1$ . Esse termo nunca faz parte da seqüência, é apenas uma técnica de cálculo que permite associar uma PA de forma imediata à equação de uma reta (e aos dados de alguns exercícios).

## Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 5

1. Qual é a razão da PA que se obtém inserindo 5 termos entre 2 e 38?

**Resolução:**

Temos  $a_1 = 2$  e  $a_7 = 38$ .

Como  $a_7 = a_1 + 6r$ , temos que:

$$38 = 2 + 6r \Rightarrow 6r = 36 \Rightarrow r = 6$$

Logo, a razão da PA é 6.

2. O cometa Halley orbita em torno do Sol. Ele pode ser visto da Terra a olho nu quando está na parte de sua órbita que fica mais próxima do Sol. Isso ocorre, em média, de 76 em 76 anos. Sabendo que após o descobrimento do Brasil, a terceira vez que ele foi visto da Terra a olho nu foi em 1683 e a sétima vez foi em 1986, responda:

- a) Quando foi a quinta vez, após o descobrimento do Brasil, que ele foi visível da Terra a olho nu?

- b) Quais foram (ou serão) todos os anos em que o cometa foi (ou será) visto a olho nu da Terra, desde 1500 até o ano 2200?

**Resolução:**

- a) Temos  $a_3 = 1683$ ,  $a_7 = 1986$  e  $r = 76$ .

Como  $a_5 = a_3 + 2r$ , temos que

$$a_5 = 1683 + 2 \cdot 76 = 1683 + 152 = 1835$$

Portanto, o quinto ano após o descobrimento do Brasil que ele foi visto da Terra a olho nu foi em 1835.

- b) Temos  $a_3 = 1683$  e  $r = 76$ .

Como  $a_3 = a_1 + 2r$ :

$$1683 = a_1 + 2 \cdot 76 \Rightarrow 1683 = a_1 + 152 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 1683 - 152 = 1531 \Rightarrow a_1 = 1531$$

Conhecendo  $a_1$  basta ir adicionando a razão  $r = 76$  para obter os demais anos:

$$1531, 1607, 1683, 1759, 1835, 1910, 1986, 2062 \text{ e } 2138.$$

### 3. Qual é o 20º termo da PA (2, 8, ...)?

**Resolução:**

$$\text{Dados: } \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 6 \\ n = 20 \end{cases}$$

$$a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19 \cdot 6 = 116$$

Logo,  $a_{20} = 116$ .

### 4. Em uma PA, o 5º termo vale 30 e o 20º vale 50. Quanto vale o 8º termo dessa progressão?

**Resolução:**

$$a_{20} = a_5 + 15r \Rightarrow 50 = 30 + 15r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$a_8 = a_5 + 3r \Rightarrow a_8 = 30 + 3 \cdot \frac{4}{3} = 34$$

Logo,  $a_8 = 34$ .

## Resolvido passo a passo

### 5. (UFSM-RS) As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte em todo mundo. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde, 17,3 milhões de pessoas morreram em 2012, vítimas dessas doenças. A estimativa é que, em 2030, esse número seja de 23,6 milhões.

Suponha que a estimativa para 2030 seja atingida e considere  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas) por doenças cardiovasculares no mundo, com  $n = 1$  correspondendo a 2012, com  $n = 2$  correspondendo a 2013 e assim por diante.

Se  $(a_n)$  é uma progressão aritmética, então o 8º termo dessa sequência, em milhões de pessoas, é igual a:

- a) 19,59.
- b) 19,61.
- c) 19,75.
- d) 20,10.
- e) 20,45.

#### 1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

Informa-se o número de mortes em 2012 ocasionadas por doenças cardiovasculares e a estimativa para 2030. Também é dado que a sequência tem como primeiro termo o número de mortes no ano de 2012.

b) O que se pede?

Dada a informação de que a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas) por doenças cardiovasculares no mundo é uma progressão aritmética, pede-se o 8º termo dessa sequência.

#### 2. Planejando a solução

De acordo com as informações do enunciado, podemos concluir que o número de mortes em 2030 representa o 19º termo da sequência. Assim, a partir da fórmula geral do termo de uma PA, devemos calcular a razão da progressão dada e, consequentemente, encontrar o valor do 8º termo dessa sequência referente ao ano de 2019.

#### 3. Executando o que foi planejado

Dados  $a_1 = 17,3$  e  $a_{19} = 23,6$ :

$$a_{19} = a_1 + (19 - 1)r \Rightarrow 23,6 = 17,3 + 18r \Rightarrow \frac{6,3}{18} = r \Rightarrow r = 0,35$$

$$a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot 0,35 \Rightarrow a_8 = 17,3 + 7 \cdot 0,35 \Rightarrow a_8 = 17,3 + 2,45 = 19,75$$

Logo,  $a_8 = 19,75$ .

#### 4. Verificando

A partir do valor obtido para o 8º termo ( $a_8$ ), vamos verificar se o valor encontrado para a razão da progressão está correto.

$$a_8 = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 19,75 = 17,3 + 7r \Rightarrow \frac{2,45}{7} = r \Rightarrow r = 0,35$$

Com isso, fica verificado que os valores encontrados estão corretos.

#### 5. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **c**.

#### 6. Ampliando o problema

a) Levando em consideração que o número de mortos vitimados por doenças cardiovasculares representa apenas 15% das pessoas diagnosticadas com a enfermidade, qual é a quantidade de pessoas diagnosticadas em uma década com tal enfermidade a partir de 2012? **Aproximadamente 1 258,33 milhões de pessoas.**

b) Considere que 30% dos enfermos de doenças cardiovasculares tenham acesso a medicamentos gratuitamente, os quais custam em média R\$ 52,75. De quanto será o subsídio com esses medicamentos na próxima década (a partir de 2012)? Que contingente populacional não terá acesso aos medicamentos de forma gratuita?

c) *Discussão em equipe*

Troque ideias com seus colegas sobre as possíveis razões de as doenças cardiovasculares serem a principal causa de morte em todo o mundo. Debatam sobre a atuação do governo, a eficácia dessa atuação e lancem outras possíveis propostas que possam ser consideradas viáveis para a realidade vivenciada pela maioria da população. **Resposta pessoal.**

6. b) O subsídio será de R\$ 19 913 130 000,00; em torno de 880,83 milhões de pessoas não terão acesso aos medicamentos de forma gratuita.





- 12.** Verifique se a sequência dada é uma PA e, se for, dê o valor da razão  $r$ .
- a) (2, 5, 8, 11, 14) PA;  $r = 3$   
 b) (15, 10, 5, 0, -5) PA;  $r = -5$   
 c) (2, 3, 5, 7) Não é PA.
- 13.** Escreva no caderno a PA de:
- a) cinco termos, em que o 1º termo é  $a_1 = 7$  e a razão é  $r = 4$ ; PA (7, 11, 15, 19, 23)  
 b) quatro termos, em que o 1º termo é  $a_1 = -6$  e a razão é  $r = 8$ . PA (-6, 2, 10, 18)
- 14.** Determine a fórmula do termo geral de cada PA:
- a) (2, 7, ...);  $a_n = 5n - 3$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$   
 b) (-1, 5, ...).  $a_n = 6n - 7$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$
- 15.** Determine o 15º termo da PA (6, 10, ...). 62
- 16.** Qual é o 50º número ímpar positivo? 99
- 17.** Calcule o 1º termo da PA:
- a) da razão  $r = 3$ , sabendo que  $a_7 = 21$ ;  $a_1 = 3$   
 b) em que  $a_{12} = -29$  e  $r = -4$ .  $a_1 = 15$
- 18.** Sabe-se que, em uma PA de 12 termos,  $a_1 = -8$  e  $a_{12} = 36$ . Calcule a razão dessa PA.  $r = 4$
- 19.** Na PA em que  $a_1 = 6$  e  $r = 8$ , qual é o lugar ocupado na sequência pelo termo igual a 62? 8º termo.
- 20.** Qual é a razão da PA que se obtém inserindo 8 termos entre 5 e 68?  $r = 7$
- 21.** Em uma PA, o 3º termo vale 20 e o 14º vale 75. Quanto vale o 7º termo dessa progressão? 40
- 22.** Quantos números inteiros compreendidos entre 1 e 5 000 são divisíveis por 9? 555
- 23.** O preço de um carro novo é de R\$ 45 000,00 e diminui R\$ 1 500,00 a cada ano de uso. Qual será o preço dele após 5 anos de uso? R\$ 37 500,00
- 24.** A produção de uma indústria cresceu em PA nos meses de janeiro a dezembro. A produção no mês de outubro foi de 190 máquinas, e a diferença de produção entre os meses de agosto e março foi de 50 máquinas. Quantas máquinas foram produzidas em novembro? 200 máquinas.
- 25.** Suponha que, em 2018, um determinado cometa tenha passado pela Terra. Se esse cometa faz uma passagem pela Terra a cada 34 anos, então quantas vezes ele teria passado pela Terra de 1500 até 2018? 16 vezes.
- 26.** Sabe-se que três números inteiros estão em PA. Se esses números têm por soma 24 e por produto 120, calcule os três números. 1, 8, 15 ou 15, 8, 1
- 27.** Marcelo criou uma conta em uma rede social. Nesse mesmo dia, três pessoas começaram a segui-lo. Após 1 dia, ele já tinha 20 seguidores e após 2 dias, já eram 37 seguidores. Marcelo percebeu que, a cada novo dia, ele ganhava 17 seguidores. Considerando que o crescimento dos seguidores permaneça constante, após quantos dias ele ultrapassará 1 000 seguidores? Após 60 dias.
- 28.** No Rio de Janeiro existe a Escadaria do Convento de Santa Teresa (ou Escadaria do Selarón), que liga a rua Joaquina Silva, no bairro da Lapa, à Ladeira de Santa Teresa, no bairro de Santa Teresa. Essa escadaria, com 215 degraus, é uma atração turística carioca. Jorge estava no 5º degrau dessa escada quando decidiu subir com “passadas largas”, de 3 em 3 degraus. Assim, do 5º degrau, ele foi para o 8º, depois para o 11º, e assim por diante. Quantas “passadas largas” Jorge deu até chegar ao fim da escada? 71 “passadas largas”.

Ale Ruzaro/Pulsar Imagens



Escadaria do Convento de Santa Teresa, Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2010.

- 29.** Se os quadrados dos números  $x - 2$ ,  $x + 4$  e  $x + 6$  são, nessa ordem, termos consecutivos de uma PA, calculem o valor de  $x$  e a razão dessa PA.  $x = 1$  e  $r = 24$
- 30.** Dada uma PA na qual  $a_3 + a_7 = 2$ , qual é o valor de  $a_1 + a_9$ ? 2

## Soma dos termos de uma PA finita

Observe a tabela abaixo:

 **Produção anual de uma empresa de 2010 a 2017**

Ano	Produção (em unidades)
2010	10 000
2011	12 000
2012	14 000
2013	16 000
2014	18 000
2015	20 000
2016	22 000
2017	24 000

Fonte: Dados fictícios.

Quantas unidades a empresa produziu de 2010 a 2017?

De acordo com os dados da tabela, nesse período a empresa produziu 136 000 unidades:

$$10\,000 + 12\,000 + 14\,000 + 16\,000 + 18\,000 + 20\,000 + 22\,000 + 24\,000 = 136\,000$$

Observamos que:

- as parcelas formam uma PA finita de razão  $r = 2\,000$ :

$$(10\,000, 12\,000, 14\,000, 16\,000, 18\,000, 20\,000, 22\,000, 24\,000)$$

- o número 136 000 representa a soma dos termos dessa PA.

É possível obter esse mesmo resultado generalizando a soma dos termos da PA e usando a fórmula obtida. Essa fórmula será especialmente útil quando forem muitos os termos a serem somados.

## Fórmula da soma dos termos de uma PA finita

Carl Friedrich Gauss é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Nascido em Brunswick, Alemanha, de família muito simples, foi uma criança prodígio.

Conta-se que antes de completar 10 anos de idade, em uma aula, seu professor, querendo manter os alunos por um bom tempo em silêncio, pediu que somassem todos os números de 1 a 100, isto é,  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$ . Para surpresa do professor, depois de alguns minutos Gauss disse que a soma era 5 050. Para descobrir o resultado tão rapidamente, Gauss utilizou o seguinte raciocínio:

Ao agrupar os termos dessa adição de forma conveniente, o resultado dá sempre 101.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ \hline & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & & & & & \\ & & 50 \text{ parcelas de } 101 & & & & & & & & & & \\ & & 50 \cdot 101 = 5\,050 & & & & & & & & & & \end{array}$$

Assim,  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 = 5\,050$ .

Verdadeira ou não, essa história ilustra uma característica muito importante das PAs, que usaremos a seguir na demonstração da fórmula geral da soma dos termos de uma PA.



Gravura de Gauss (1777-1855), matemático alemão.

Photoresearchers/Latinstock

### Você sabia?

Gauss contribuiu grandemente nas áreas de Astronomia, Geodesia e Eletricidade.

Depois de sua morte, o rei de Hannover ordenou que se cunhasse uma medalha em sua homenagem. Nessa medalha, havia uma inscrição que se referia a Gauss como o "Príncipe da Matemática", como ele é conhecido até hoje.

Agora, acompanhe como obter a fórmula geral da soma de todos os termos de uma PA.

Considere a PA finita de razão  $r$  ( $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ ) cuja soma dos seus  $n$  termos pode ser escrita por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ (I)}$$

ou

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \text{ (II)}$$

**Fique atento!**

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_{n-1} = a_n - r$$

Adicionando membro a membro (I) e (II), temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

É possível mostrar que  $(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \dots = (a_{n-2} + a_3) = (a_{n-1} + a_2) = (a_n + a_1)$ . Assim, todas as  $n$  parcelas têm o mesmo valor.

Portanto, como temos  $n$  parcelas, escrevemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n, \text{ ou seja, } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Essa fórmula nos permite calcular a soma dos  $n$  primeiros termos de uma PA em que:

- $a_1$  é o primeiro termo;
- $a_n$  é o  $n$ ésimo termo;
- $n$  é o número de termos;
- $S_n$  é a soma dos  $n$  termos.

## Conexão entre progressão aritmética e função afim

Consideremos a PA  $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ . Como já estudamos, essa PA é uma função de domínio  $\mathbb{N}^*$ , cujo gráfico é o conjunto de pontos representado ao lado.

**Fique atento!**

Não podemos traçar uma reta contínua unindo esses pontos, pois o domínio é  $\mathbb{N}^*$  e não  $\mathbb{R}$ .

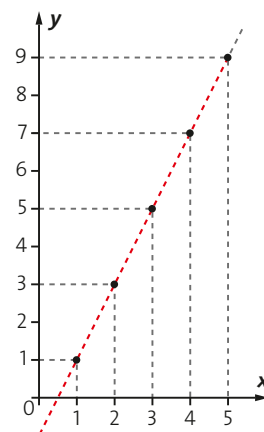
O termo geral dessa PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n - 1$$

Essa função é afim do tipo  $f(x) = ax + b$ , com  $a = 2$  e  $b = -1$ , mas restrita aos naturais positivos.

**Fique atento!**

Bastam dois pontos para determinar uma reta e bastam dois termos de uma PA para determinar a PA toda.



Banco de imagens/Arquivo da editora

De modo geral, se considerarmos uma PA  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  de razão  $r$ ,  $r \neq 0$ , cujo termo geral é  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ , a representação geométrica dessa PA é formada por pontos do gráfico da função afim  $f(x) = a_1 + (x - 1)r$ , dados por  $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$

## Exercícios resolvidos

6. Retome o problema sobre a produção de uma empresa dado no início deste tópico (*Soma dos termos de uma PA finita*) e resolva aplicando a fórmula da soma dos termos de uma PA finita.

**Resolução:**

Sabemos que a produção anual nesse período é uma PA na qual  $a_1 = 10\,000$ ,  $r = 2\,000$ ,  $n = 8$  e  $a_n = a_8 = 24\,000$ .

Aplicando a fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{8(10\,000 + 24\,000)}{2} = 136\,000$$

Logo, no período de 2010 a 2017 a empresa produziu 136 000 unidades.

7. Calcule a soma dos primeiros  $n$  números ímpares  $(1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Resolução:**

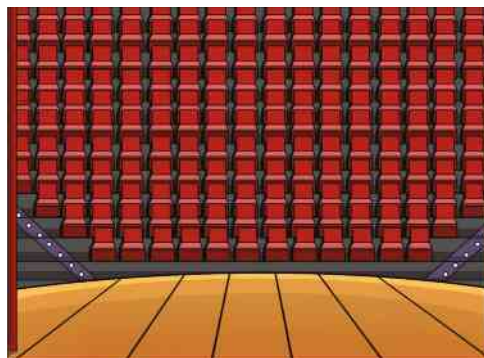
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Portanto, a soma dos  $n$  primeiros números ímpares é igual a  $n^2$ , ou seja,  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ .

## Exercícios



31. Dada a PA  $(5, 8, \dots)$ , determine a soma de seus 4 primeiros termos. **38**
32. Uma PA tem  $a_1 = -9$  e  $r = 7$ . Determine seus 6 primeiros termos e calcule a soma deles. **51**
33. Uma PA tem  $a_1 = 1$  e  $r = 1$ . Determine a soma dos seus:
- 10 primeiros termos; **55**
  - 20 primeiros termos. **210**
34. Calcule a soma:
- dos 30 primeiros termos da PA  $(4, 10, \dots)$ ; **2730**
  - dos 20 primeiros termos de uma PA em que o 1º termo é  $a_1 = 17$  e  $r = 4$ ; **1100**
  - dos 200 primeiros números pares positivos. **40 200**
35. A soma dos 20 termos de uma PA finita é 710. Se o 1º termo dessa PA é  $a_1 = 7$ , calcule o 10º termo. **34**
36. Ao se efetuar a soma das 50 primeiras parcelas da PA  $(202, 206, \dots)$ , por distração não se somou a 35ª parcela. Qual foi a soma obtida? **14 662**
37. Calcule o valor de  $x$  na igualdade  $x + 2x + \dots + 20x = 6\,300$ , sabendo que os termos do 1º membro da igualdade estão em PA.  **$x = 30$**
38. *Física*  
Um corpo em queda livre percorre 3 metros no primeiro segundo, 12 metros no segundo, 21 metros no terceiro segundo, e assim por diante. Continuando nessa sequência, quantos metros terá percorrido após 10 segundos? **435 metros**
39. Um ciclista percorre 20 quilômetros na primeira hora; 17 quilômetros na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas? **70 quilômetros**
40. Uma escada maciça possui 10 degraus. Cada degrau é um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 50 centímetros de comprimento, 20 centímetros de largura e 10 centímetros de altura. Qual é o volume dessa escada? **550 dm³**
41. Um teatro possui 12 poltronas na primeira fileira, 14 na segunda e 16 na terceira; as demais fileiras se compõem na mesma sequência. Quantas fileiras são necessárias para o teatro ter um total de 620 poltronas? **20 fileiras.**



Dam d Souza/Arquivo da editora

42. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ . Em um triângulo, as medidas dos ângulos estão em PA e o menor desses ângulos mede  $40^\circ$ . Calcule as medidas dos outros dois ângulos.  **$40^\circ, 60^\circ$  e  $80^\circ$**



### 3 Progressão geométrica (PG)

A taxa de crescimento relativo de uma grandeza é dada pela razão entre seu aumento e seu valor inicial. Assim, uma grandeza que passa do valor  $a$  para o valor  $b$  tem taxa de crescimento relativo igual a  $\frac{b - a}{a}$ .

Por exemplo, a taxa de crescimento relativo da produtividade de uma usina de açúcar, cuja produção semanal passa de 5 toneladas para 8 toneladas, é de 60%, pois  $\frac{8 - 5}{5} = \frac{3}{5} = 0,60 = 60\%$ .

Usina de cana-de-açúcar na cidade de Cerqueira César (SP). Fotografia de 2014.



Paulo Fridman/Pulsar Images

Agora, estudaremos as sequências que variam com taxa de crescimento relativo constante. Examine, por exemplo, a seguinte situação-problema:

Em 2017 uma usina produziu 200 000 kg de açúcar. Quantos quilogramas essa usina produzirá no período de 2017 a 2022 se o aumento de produção anual for sempre de 10% em relação ao ano anterior?

Esquematizamos o problema da seguinte forma:

- produção em 2017 = 200 000
- produção em 2018 = produção em 2017  $\cdot 1,10 = 200\ 000 \cdot 1,10 = 220\ 000$
- produção em 2019 = produção em 2018  $\cdot 1,10 = 220\ 000 \cdot 1,10 = 242\ 000$
- produção em 2020 = produção em 2019  $\cdot 1,10 = 242\ 000 \cdot 1,10 = 266\ 200$
- produção em 2021 = produção em 2020  $\cdot 1,10 = 266\ 200 \cdot 1,10 = 292\ 820$
- produção em 2022 = produção em 2021  $\cdot 1,10 = 292\ 820 \cdot 1,10 = 322\ 102$

#### Fique atento!

Se uma grandeza tem taxa de crescimento relativo igual a  $i$ , o novo valor é obtido fazendo  $(1 + i)$  vezes o valor anterior. No exemplo,  $(1 + i) = (1 + 0,10) = 1,10$  ou  $1,1$ .

Nessas condições, a produção anual, nesse período, será representada pela sequência (200 000, 220 000, 242 000, 266 200, 292 820, 322 102).

Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número fixo (no caso, 1,10), ou seja, a produção anual teve uma taxa de crescimento relativo constante de 10% em relação ao ano anterior.

Sequências com esse tipo de lei de formação são chamadas **progressões geométricas (PGs)**. Nesse exemplo, o valor 1,10 é chamado **razão** da progressão geométrica e indicado por  $q$  (no exemplo,  $q = 1,10$ ). Dizemos que os termos dessa sequência estão em progressão geométrica (PG).

#### Fique atento!

Também já estudamos alguns aspectos das PGs em capítulos anteriores.

## Definição

**Progressão geométrica** é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado **razão ( $q$ )** da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Exemplos de progressões geométricas:

a) A sequência (2, 10, 50, 250) é uma PG de quatro termos, em que o 1º termo é  $a_1 = 2$  e a razão  $q = 5$ . Observe que:

$$250 : 50 = 5$$

$$50 : 10 = 5$$

$$10 : 2 = 5 \rightarrow \text{quociente constante} = 5 \text{ (razão)}$$

A taxa de crescimento relativo de  $a$  para  $b$  é dada por  $\frac{b-a}{a}$ . Nesse exemplo,

$$i = \frac{10-2}{2} = \frac{8}{2} = 4 = 400\%.$$

$$\text{Logo, } q = 1 + i = 1 + 4 = 5.$$

b) A sequência (6, -12, 24, -48, 96) é uma PG de cinco termos, na qual  $a_1 = 6$  e  $q = -2$ , pois:

$$-12 : 6 = -2$$

$$24 : (-12) = -2$$

$$-48 : 24 = -2$$

$$96 : (-48) = -2 \rightarrow \text{quociente constante} = -2 \text{ (razão)}$$

$$\text{Taxa de crescimento relativo: } i = \frac{-12-6}{6} = -\frac{18}{6} = -3 = -300\%.$$

$$\text{Logo, } q = 1 + i = 1 + (-3) = -2.$$

#### Fique atento!

Aumentar uma vez é aumentar 100% (duplicar), aumentar 2 vezes é aumentar 200% (triplicar), e assim por diante.

#### Para refletir

Podemos dizer que progressões geométricas são sequências nas quais a taxa de crescimento relativo ( $i$ ) de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

## Fórmula do termo geral de uma PG

Em uma progressão geométrica ( $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ) de razão  $q$ , partindo do 1º termo, para avançar um termo, basta multiplicar o 1º termo pela razão  $q$  ( $a_2 = a_1q$ ); para avançar dois termos, basta multiplicar o 1º termo pelo quadrado da razão  $q$  ( $a_3 = a_1q^2$ ); para avançar três termos, basta multiplicar o 1º termo pelo cubo da razão  $q$  ( $a_4 = a_1q^3$ ); e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem  $n$ , denominado **termo geral da PG**, que é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

(ao passar de  $a_1$  para  $a_n$ , avançamos  $(n - 1)$  termos)

Nessa fórmula:

- $a_n$  = termo geral;
- $n$  = número de termos (até  $a_n$ );
- $a_1$  = 1º termo;
- $q$  = razão.

**Observação:** Algumas vezes é conveniente colocar o 1º termo como  $a_0$  e não  $a_1$ , ficando o termo geral da PG dado por  $a_n = a_0 \cdot q^n$ . Por exemplo, se o número de sócios de um clube hoje é 2 000 e cresce 5% ao ano, quantos sócios esse clube terá em 3 anos?

Temos uma PG com  $a_0 = 2\,000$  e razão  $q = 1 + i = 1 + 0,05 = 1,05$ .

Após 3 anos, o clube terá aproximadamente 2 315 sócios ( $a_3 = a_0 \cdot q^3 = 2\,000(1,05)^3 \approx 2\,315$ ).

#### Fique atento!

- Note que  $a_{10} = a_3 \cdot q^7$ , pois ao passar de  $a_3$  para  $a_{10}$  avançamos 7 termos;  $a_5 = \frac{a_9}{q^4}$ , pois ao passar de  $a_9$  para  $a_5$  retrocedemos 4 termos; e assim por diante.
- Qualquer PG ( $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ) de razão  $q$  e primeiro termo  $a$  pode ser definida por recorrência por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = q \cdot a_n \end{cases}, \text{ para } n \geq 1.$$



## Exercícios resolvidos

8. Em uma PG de termos positivos, o terceiro termo é 18 e o sétimo é 1 458. Qual é o quinto termo dessa progressão?

**Resolução:**

$a_7 = a_3 \cdot q^4$  (do terceiro para o sétimo termo avançamos 4 termos)

$$1\,458 = 18 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1\,458}{18} = 81 \Rightarrow q = 3$$

$$a_5 = a_3 \cdot q^2 = 18 \cdot 3^2 = 18 \cdot 9 = 162$$

Portanto, o quinto termo é 162.

9. Qual é a razão da PG que se obtém inserindo quatro termos entre os números 5 e 5 120?

**Resolução:**

São dados:  $a_1 = 5$  e  $a_6 = 5\,120$ .

Como  $a_6 = a_1 q^5$ :

$$5\,120 = 5q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{5\,120}{5} = 1\,024 \Rightarrow q = 4$$

Logo, a razão dessa PG é  $q = 4$ .

10. A sequência  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots\right)$  é uma PG infinita. Determine a razão dessa PG e a taxa de crescimento relativo dos seus termos.

**Resolução:**

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ e } a_2 = \frac{1}{6}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow q = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Taxa de crescimento relativo:

$$i = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} = -0,66\dots \approx -66,66\%$$

11. A população de um país é atualmente igual a  $P_0$  e cresce 3% ao ano. Qual será a população desse país daqui a  $t$  anos?

**Resolução:**

Como a população cresce 3% ao ano, em cada ano a população é 103% a do ano anterior.

Logo, a cada ano a população é multiplicada por  $103\% = 1,03$ .

Após  $t$  anos, a população será  $P_0 \cdot (1,03)^t$ .

Nesse caso, temos a PG:

$P_0, P_0 \cdot (1,03), P_0 \cdot (1,03)^2, P_0 \cdot (1,03)^3, \dots, P_0 \cdot (1,03)^t, \dots$  de razão 1,03.

12. Dê a fórmula do termo geral da PG (2, 4, ...).

**Resolução:**

Na PG dada, temos  $a_1 = 2$  e  $q = 2$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^{1+n-1} \Rightarrow a_n = 2^n$$

Logo, o termo geral da PG dada é  $a_n = 2^n$ .

13. Qual é o 7º termo da PG (2, 6, ...)?

**Resolução:**

$$\text{Dados: } \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 3 \\ n = 7 \end{cases}$$

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow a_7 = 2 \cdot 3^6 \Rightarrow a_7 = 1\,458$$

Logo,  $a_7 = 1\,458$ .

14. Calcule o 1º termo de uma PG em que  $a_4 = 375$  e  $q = 5$ .

**Resolução:**

$$\text{Dados: } \begin{cases} a_4 = 375 \\ q = 5 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow 375 = a_1 \cdot 5^3 \Rightarrow 125 a_1 = 375 \Rightarrow a_1 = 3$$

Portanto,  $a_1 = 3$ .

15. Quantos elementos tem a PG (8, 32, ...,  $2^{31}$ )?

**Resolução:**

$$\text{Dados: } \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = 2^{31} \\ q = 4 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2^{31} = 8 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 2^{31} = 2^3 \cdot 2^{2n-2} \Rightarrow 2^{31} = 2^{3+2n-2} \Rightarrow 2^{31} = 2^{2n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n + 1 = 31 \Rightarrow 2n = 30 \Rightarrow n = 15$$

Logo, a PG tem 15 elementos.

16. Determine o valor de  $x$  de modo que os números  $x + 1, x + 4$  e  $x + 10$  formem, nessa ordem, uma PG.

**Resolução:**

Como os números dados são três termos consecutivos de uma PG, pela definição temos:

$$\frac{x+4}{x+1} = \frac{x+10}{x+4} \Rightarrow (x+4)^2 = (x+1)(x+10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = x^2 + 11x + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 11x = 10 - 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

Logo, o valor procurado é  $x = 2$ , e os números são 3, 6 e 12.



- 43.** Verifique se cada sequência dada é uma PG. Em caso positivo, dê o valor da razão  $q$ .
- (1, 3, 9, 27, 81) É PG e  $q = 3$ .
  - (2, 4, 6, 8, 10, 12) Não é PG.
  - (400, 200, 100, 50) É PG e  $q = \frac{1}{2}$ .
- 44.** As sequências a seguir são PGs. Determine a razão de cada uma delas.
- (2, 8, ...)  $q = 4$
  - $(3, \frac{3}{2}, \dots)$   $q = \frac{1}{2}$
- 45.** Escreva no caderno uma PG:
- de 5 termos em que  $a_1 = 7$  e  $q = 3$ ; PG (7, 21, 63, 189, 567)
  - de 4 termos em que  $a_1 = -5$  e  $q = 2$ . PG (-5, -10, -20, -40)
- 46.** Nas progressões geométricas abaixo, qual é a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte?
- (5, 15, 45, 135, ...) 200%
  - (1 000, 800, 640, 512, ...) -20%
- 47.** Uma população de bactérias é atualmente dada por  $B_0$  e cresce 5% por minuto. Qual será essa população daqui a  $n$  minutos?  $B_0 \cdot (1,05)^n$
- 48.** A torcida de determinado clube é atualmente dada por  $P_0$ , mas está diminuindo 3% ao ano. Se esse fato continuar a ocorrer, qual será a torcida desse clube daqui a  $t$  anos?  $P_0 \cdot (0,97)^t$
- 49.** Determine a fórmula do termo geral de cada PG:
- (2, 8, ...);  $a_n = 2^{n-1}$
  - (3, 9, ...).  $a_n = 3^n$
- 50.** Calcule:
- o 5º termo da PG (1, 5, ...); 625
  - o 10º termo da PG (9, 27, ...). 177 174
- 51.** Em uma PG o quarto termo é 24 e o oitavo, 384. Quanto vale o sexto termo dessa progressão? 96
- 52.** Qual é a razão da PG que se obtém inserindo cinco termos entre os números 3 e 2 187? 3
- 53.** A produção de uma empresa nos meses de janeiro, fevereiro e março, respectivamente, forma uma PG. Se a produção em janeiro foi de 3 000 unidades e em março foi de 27 000 unidades, quantas unidades foram produzidas em fevereiro? 9 000 unidades.
- 54.** Calcule o 1º termo da PG ( $a_1, a_2, a_3, \dots$ ) em que:
- $a_4 = 128$  e  $q = 4$ ; 2
  - $a_6 = 10^3$  e  $q = 10 \cdot 10^{-2}$
- 55.** Sabe-se que, em uma PG de números reais,  $a_2 = 48$  e  $a_7 = \frac{3}{2}$ . Qual é o 1º termo dessa PG? 96
- 56.** Determine  $x$  para que as seguintes sequências sejam PG:
- (4,  $x$ , 9)  $x = \pm 6$
  - ( $x - 3$ ,  $x$ ,  $x + 6$ )  $x = 6$
- 57.** Qual é o número  $x$  que se deve adicionar a 2, 6 e 14 para que os números assim obtidos sejam, nessa ordem, termos consecutivos de uma PG? 2
- 58.** Um tanque tem capacidade  $C_0$  de água e está cheio. Abre-se o tampão e essa capacidade decresce 4% por minuto. Qual será a capacidade desse tanque daqui a  $t$  minutos?  $C_0 \cdot 0,96^t$
- 59.** Uma indústria produziu 30 000 unidades de certo produto no primeiro trimestre de 2015. Supondo que a produção tenha dobrado a cada trimestre, quantas unidades desse produto foram produzidas no último trimestre de 2015? 240 000 unidades.
- 60.** (UFPE) Suponha que o preço de um automóvel se desvaloriza 10% ao ano nos seus 5 primeiros anos de uso. Se esse automóvel novo custou R\$ 10 000,00, qual será o seu valor em reais após os 5 anos de uso?
- 5 550,00.
  - 5 804,00.
  - 6 204,30.
  - x d) 5 904,90.
  - 5 745,20.
- 61.** A população de uma cidade é hoje de 200 000 habitantes e cresce 2% ao ano. Qual será a população dessa cidade daqui a 10 anos? 243 800 habitantes.
- 62.** No estudo de uma nova variedade de bactérias, um cientista estimou que no início das observações havia 500 bactérias. A cada 40 minutos, a quantidade de bactérias parecia triplicar. Supondo corretas as observações do cientista, quantas bactérias haveria após 4 horas de observação? 364 500 bactérias.

## Fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma PG finita

A soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão geométrica finita ( $a_n$ ) de razão  $q \neq 1$  é  $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

**Demonstração:**

Consideremos a PG finita ( $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ ) e seja  $S_n$  a soma de seus termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad \textcircled{I}$$

Multiplicamos os dois membros dessa igualdade pela razão  $q$  ( $q \neq 0$ ) e obtemos:

$$qS_n = \underbrace{a_1q}_{a_2} + \underbrace{a_2q}_{a_3} + \underbrace{a_3q}_{a_4} + \dots + \underbrace{a_{n-1}q}_{a_n} + a_nq$$

OU

$$qS_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_nq \quad \textcircled{II}$$

Fazendo a subtração  $\textcircled{I} - \textcircled{II}$ , obtemos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_nq$$

Como  $a_n = a_1q^{n-1}$ , então  $a_nq = a_1q^{n-1}q = a_1q^n$ , daí:

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Portanto,  $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ , para  $q \neq 1$ .

### Fique atento!

- Se fizéssemos  $\textcircled{II} - \textcircled{I}$ , obteríamos:  $S_n(q - 1) = a_nq - a_1$ , ou seja,  $S_n = \frac{a_nq - a_1}{q - 1}$ .
  - Essa fórmula também pode aparecer assim:  
 $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$ .
- Escolha a maneira que preferir quando for usá-la.

## Exercícios resolvidos

- 17.** Uma empresa produziu 10 000 unidades de certo produto em 2017. A cada ano seguinte produzirá 20% a mais desse produto em relação ao ano anterior. Quantas unidades desse produto a empresa produzirá no período de 2018 a 2022?

**Resolução:**

1ª maneira:

### Produção da empresa de 2018 a 2022

Ano	2018	2019	2020	2021	2022
Produção (em unidades)	10 000	12 000	14 400	17 280	20 736

$$120\% \text{ de } 10\,000 = 12\,000$$

Fonte: Dados fictícios.

$$120\% \text{ de } 12\,000 = 14\,400, \text{ etc.}$$

No período de 2018 a 2022 a empresa produzirá:

$$10\,000 + 12\,000 + 14\,400 + 17\,280 + 20\,736 = 74\,416$$

As parcelas formam uma PG finita de razão  $q = 1,20$ . Assim, a soma dos cinco primeiros termos é 74 416.

2ª maneira: Usando a fórmula

Como temos uma PG na qual  $a_1 = 10\,000$ ,  $q = 1,20$  e  $n = 5$ , temos:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow S_5 = 10\,000 \cdot \frac{1 - (1,20)^5}{1 - 1,20} = \\ &= 10\,000 \cdot \frac{-1,48832}{-0,20} = 74\,416 \end{aligned}$$

Logo, no período de 2018 a 2022 a empresa produzirá 74 416 unidades desse produto.

- 18.** Determine a soma:

- dos 10 primeiros termos da PG (3, 6, 12, ...);
- dos termos da PG (2, 2<sup>2</sup>, ..., 2<sup>10</sup>).

**Resolução:**

- a) Nessa PG, conhecemos:  $a_1 = 3$ ,  $q = 2$  e  $n = 10$ . Aplicando a fórmula:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow S_{10} = 3 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \\ &= 3 \cdot \frac{1 - 1\,024}{-1} = 3\,069 \end{aligned}$$

- b) Nessa PG, temos:  $a_1 = 2$ ;  $q = 2$  e  $n = 10$ .

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2 \cdot \frac{1 - 1\,024}{-1} = 2\,046$$



## A progressão geométrica mais antiga

O papiro de Rhind é um dos mais antigos documentos de Matemática, ele permanece praticamente intacto ainda hoje. Foi escrito em cerca de 1560 a.C. pelo escriba egípcio Ahmes, que copiou nas partes deste papiro, outros textos ainda mais antigos. O escriba usou a escrita hierática (da direita para a esquerda), reservada às coisas sagradas e religiosas, bastante diferente da escrita popular dos hieróglifos. Também é um importante documento histórico, uma vez que o escriba deixou registrado que estava escrevendo no ano 33 do reinado de Apophis.

Veja um pedaço original dele e uma parte copiada e restaurada.



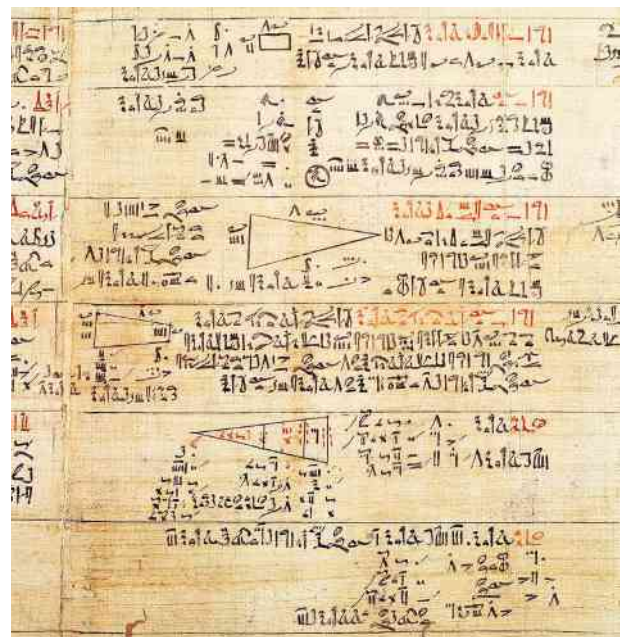
Papiro de Rhind. Museu Britânico de Londres (Inglaterra). Comprimento: 319 cm e altura: 34,3 cm.

Em 1850 o advogado e antiquário escocês Alexander Rhind encontrou esse papiro na cidade de Luxor (Egito). Comprou o papiro da pessoa que o possuía e que, provavelmente, não tinha a mínima ideia do seu valor, levou-o para a Inglaterra e fez a doação dessa preciosidade ao Museu Britânico, onde está até hoje.

O papiro de Rhind contém 84 problemas de matemática com suas soluções. Os temas dos problemas são muito diversos passando por frações, divisão proporcional, divisão em alguma progressão, áreas, volumes, etc.

Por exemplo, o problema 79, apresentado na página seguinte, mostra uma progressão geométrica e sua soma.

Réplica do papiro de Rhind restaurado. (Detalhe.)



## Problema 79 do Papiro de Rhind

Há sete casas; em cada casa há sete gatos; cada gato mata sete ratos; cada rato comeu sete grãos de cevada; cada grão teria produzido sete "hekats" de cevada. Qual é a soma de todas as coisas enumeradas?

Em primeiro lugar, o enunciado fala em "hekats de cevada". Não sabemos exatamente o que era isso. No Egito antigo, um "hekat" era uma porção de alguma coisa que era referida, ora ao peso, ora ao volume. Estima-se que 1 hekat de cevada seja uma porção de um pouco mais do que 3 kg de farinha de cevada.

Em segundo lugar, o que surpreende é o cálculo que o escriba mostra para calcular a soma de todas as coisas. Em notação moderna Ahmes escreve que a soma de todas as coisas enumeradas é:

$$\frac{7 \cdot 16\ 806}{6} = 19\ 607$$

O que significa esse cálculo?

Pelo enunciado, o número total de coisas envolvidas é igual a:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7 + 49 + 343 + 1\ 401 + 16\ 807 = 19\ 607$$

O resultado está certo, mas como o escriba Ahmes fez outra conta que resultou no mesmo valor?

Imagine calcular essa soma pela fórmula da soma dos termos da PG que você aprendeu neste

livro:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

Com essa fórmula temos que:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = \frac{7(7^5 - 1)}{7 - 1} = \frac{7(16\ 807 - 1)}{6} = \frac{7 \cdot 16\ 806}{6} = 19\ 607$$

Observe agora que esse é o mesmo cálculo que aparece no papiro com mais de 3 500 anos de idade. Com isso, tudo indica que, pelo menos um egípcio antigo conhecia um cálculo equivalente à fórmula da soma dos termos de uma PG que conhecemos hoje.

## Curiosidade



Uma lenda conta que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa pela invenção. E o inventor respondeu: "1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa".

Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o inventor pediu a soma dos primeiros 64 termos da PG: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., de razão  $q = 2$ :

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$$

Fazendo esse cálculo, encontramos o gigantesco número de vinte algarismos:

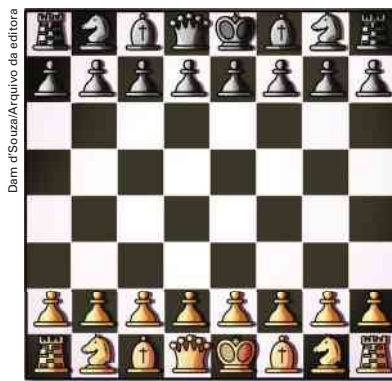
18 446 744 073 709 551 615

Coitado do rei! Para cultivar tal quantidade de trigo, ele precisaria de 16 milhões de planetas iguais à Terra.

Dezoito quintilhões, quatrocentos e quarenta e seis quadrilhões, setecentos e quarenta e quatro trilhões, setenta e três bilhões, setecentos e nove milhões, quinhentos e cinquenta e um mil seiscentos e quinze.

### Para refletir

Como se lê este número?



Dan e Souza/Arquivo da editora



**63.** Calcule a soma dos termos da PG finita:

- a) (1, 2, ..., 512); **1023**
- b) (5, 20, ..., 1280); **1705**
- c) (1, 2<sup>2</sup>, ..., 2<sup>10</sup>). **1365**

**64.** Seja uma PG na qual o 1º termo é 2, o último é 256 e a soma dos termos é 510. Qual é o valor da razão dessa PG? **2**

**65.** Quantos termos devemos considerar na PG (3, 6, ...) para obter uma soma igual a 765? **8 termos.**

**66.** Calculem o valor do número  $x$  sabendo que  $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \cdot \frac{63}{32}$

**67.** Uma pessoa aposta na loteria durante cinco semanas, de tal forma que, em cada semana, o valor da aposta é o dobro do valor da aposta da semana anterior. Se o valor da aposta da primeira semana é R\$ 60,00, qual o total apostado após as cinco semanas? **R\$ 1860,00**

**68.** Clodoaldo criou um *blog* sobre futebol. Na 1ª semana, houve 4 visitas ao *blog*, na 2ª semana, 20 visitas e na 3ª semana, 100 visitas. Supondo que o número de visitantes ao *blog* de Clodoaldo continue crescendo, semana a semana, nesse mesmo ritmo, qual será o total de visitantes do *blog* no 1º trimestre de sua existência? Suponha mês de 4 semanas. **48 828 124 visitantes.**

## Soma dos termos de uma PG infinita

Considerando a sequência  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ , que é uma PG infinita na qual  $a_1 = 1$  e  $q = \frac{1}{2}$ , vamos calcular a soma  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Aplicando a fórmula da soma  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ , vamos calcular:

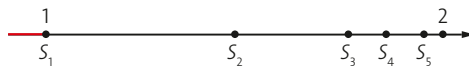
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$S_4 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{14 + 1}{8} = \frac{15}{8} = 1,875$$

$$S_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6 + 1}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$S_5 = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{30 + 1}{16} = \frac{31}{16} = 1,9375$$

Localizando os valores de  $S_1, S_2, S_3, S_4$  e  $S_5$  na reta numerada, temos:



Se calcularmos  $S_6$ , verificaremos que  $S_6$  fica mais próximo de 2 que  $S_5$ ; o mesmo irá acontecer, sucessivamente, com  $S_7, S_8, S_9, S_{10}, \dots$ , etc. Assim,  $S_n$  vai se aproximando do valor 2 tanto quanto quisermos, à medida que  $n$  vai tomando valores suficientemente grandes. Quando isso ocorre, dizemos que

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  converge e tem soma igual a 2.

De modo geral, nas progressões geométricas infinitas em que a razão  $q$  é, em valor absoluto, menor do que 1, a soma dos  $n$  primeiros termos tem um valor finito quando  $n$  é suficientemente grande. Nesse caso,  $q^n = 0$ . Escrevemos assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ ou seja: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ lê-se como limite de } S_n \text{ quando } n \text{ tende ao infinito.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

No exemplo acima, temos:

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$



Veja outro exemplo. Vamos calcular o limite da soma quando o número de parcelas tende a infinito:

$$0,5 + 0,05 + 0,005 + 0,0005 + \dots$$

Neste caso,  $a_1 = 0,5$  e  $q = 0,1 = \frac{1}{10}$ , então:

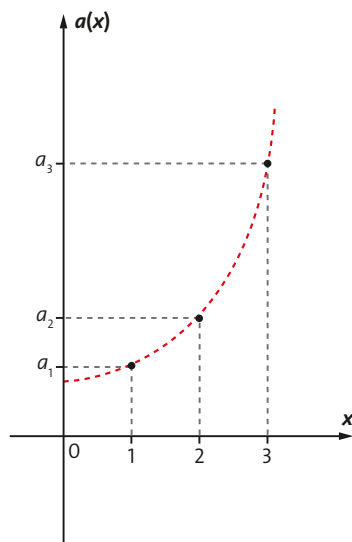
$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{0,5}{1-0,1} = \frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}$$

**Observação:** Uma progressão geométrica pode ser considerada um caso particular de uma função exponencial  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  de domínio  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ . O gráfico dessa função é formado pelos pares ordenados  $(n, a_n)$ .

## Conexão entre progressão geométrica e função exponencial

Já vimos que o termo geral de uma progressão geométrica é dado por  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ . Nesse caso, podemos pensar em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural positivo  $n$  o valor dado por  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ . Essa função é a restrição aos números naturais positivos da função do tipo exponencial  $a(x) = aq^{x-1}$ .

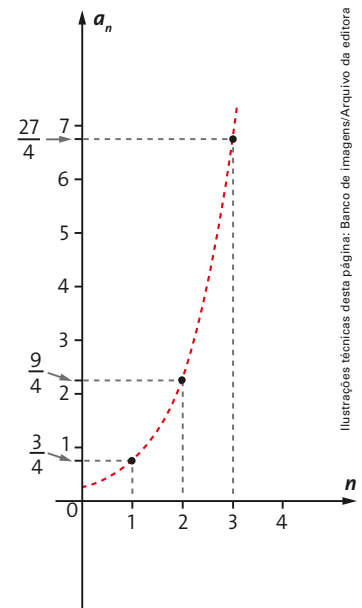
O gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.



### Fique atento!

Observe que não traçamos a curva contínua passando pelos pontos, pois o domínio é  $\mathbb{N}^*$  e não  $\mathbb{R}$ .

Por exemplo, veja ao lado o gráfico de  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , com  $a_1 = \frac{3}{4}$  e  $q = 3$ , ou seja,  $a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^{n-1}$ . O gráfico é formado pelos pontos  $(1, \frac{3}{4})$ ,  $(2, \frac{9}{4})$ ,  $(3, \frac{27}{4})$ , etc. e a PG é dada por  $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4}, \dots)$ .



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## Exercícios resolvidos

19. Mostre que o limite da soma  $0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots$  quando o número de parcelas tende a infinito é igual a  $\frac{2}{3}$ , ou seja, mostre que a fração geratriz da dízima  $0,666\dots$  é  $\frac{2}{3}$ .

**Resolução:**

Devemos calcular a soma dos termos da PG infinita  $(0,6; 0,06; 0,006; 0,0006; \dots)$ . Vamos calcular o limite.

Nesse caso,  $a_1 = 0,6$  e  $q = \frac{1}{10}$ . Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0,6}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}$ .

20. Determine o limite da soma da PG infinita  $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$

**Resolução:**

As parcelas formam uma PG infinita na qual

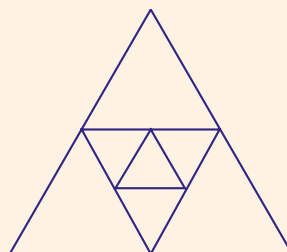
$$a_1 = \frac{1}{3} \text{ e } q = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Como  $\frac{2}{3} < 1$ , podemos usar a fórmula  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

Logo, o valor procurado é 1.

21. A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtêm-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo equilátero obtêm-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

**Resolução:**

Perímetro do 1º triângulo: 30

Perímetro do 2º triângulo: 15

Perímetro do 3º triângulo:  $\frac{15}{2}$

:

Devemos calcular a soma dos termos da PG infinita  $(30, 15, \frac{15}{2}, \dots)$  na qual  $a_1 = 30$  e  $q = \frac{1}{2}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{30}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60$$

Portanto, a soma dos perímetros é 60.

**Fique atento!**

Nessas condições, os perímetros sempre formam uma PG infinita de razão  $\frac{1}{2}$ .

## Exercícios



69. Determine o valor de  $20 + 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \dots$  25

70. Determine o valor dos limites das seguintes somas:

a)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$   $\frac{2}{3}$

b)  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots$   $\frac{3}{8}$

71. Determine o valor de  $x$  na igualdade

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \dots = 12, \text{ na qual o primeiro membro}$$

é o limite da soma dos termos de uma PG infinita. 8

72. Seja um triângulo de área 40. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos um segundo triângulo; unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos um terceiro e assim por diante, indefinidamente. Calculem o limite da soma das áreas de todas essas regiões triangulares, sabendo que elas formam uma PG.  $\frac{160}{3}$

73. Calculem a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas, usando soma de PG.

a)  $0,777\dots$   $\frac{7}{9}$

b)  $0,515151\dots$   $\frac{9}{33}$   $\frac{17}{33}$

c)  $0,4333\dots$   $\frac{13}{30}$

## 4 Problemas envolvendo PA e PG

Para completar o capítulo sobre progressões, estudaremos e resolveremos problemas que envolvem PA e PG ao mesmo tempo.

### Exercícios resolvidos

- 22.** São dados quatro números,  $x, y, 6, 4$ , nessa ordem. Sabendo que os três primeiros estão em PA e os três últimos estão em PG, determine  $x$  e  $y$ .

**Resolução:**

Se  $x, y$  e  $6$  estão em PA, temos  $y = \frac{x+6}{2}$ .

Se  $y, 6$  e  $4$  estão em PG, temos  $6^2 = 4y$ .

Devemos resolver o sistema formado por essas duas equações:

$$\begin{cases} y = \frac{x+6}{2} \\ 4y = 36 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

$$9 = \frac{x+6}{2} \Rightarrow x+6 = 18 \Rightarrow x = 12$$

Então,  $x = 12$  e  $y = 9$ .

- 23.** A sequência  $(a, b, c)$  é uma PG crescente e a sequência  $(a-1, b, c)$  é uma PA. Sabendo que  $a+b+c = 19$ , determine os valores de  $a, b$  e  $c$ .

**Resolução:**

Se  $(a, b, c)$  é uma PG, então  $b^2 = ac$ .

Se  $(a-1, b, c)$  é uma PA, temos:

$$b = \frac{a-1+c}{2} \Rightarrow 2b = a-1+c$$

Devemos, então, resolver o sistema:

$$\begin{cases} b^2 = ac & \text{Ⓘ} \\ 2b = a-1+c & \text{Ⓜ} \\ a+b+c = 19 & \text{Ⓝ} \end{cases}$$

De Ⓜ, temos:

$$2b = a-1+c \Rightarrow a+c = 2b+1 \quad \text{Ⓥ}$$

De Ⓝ, temos:

$$a+b+c = 19 \Rightarrow a+c = 19-b \quad \text{Ⓦ}$$

Comparando Ⓥ e Ⓦ, temos:

$$2b+1 = 19-b \Rightarrow 2b+b = 19-1 \Rightarrow 3b = 18 \Rightarrow b = 6$$

Conhecido  $b = 6$ , temos um novo sistema:

$$\begin{cases} 36 = ac \\ a+c = 13 \end{cases}$$

$$a+c = 13 \Rightarrow a = 13-c$$

$$36 = (13-c)c \Rightarrow 36 = 13c - c^2 \Rightarrow c^2 - 13c + 36 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$c' = 9 \text{ e } c'' = 4$$

$$\bullet c = 9 \Rightarrow a = 13 - 9 = 4$$

$$\bullet c = 4 \Rightarrow a = 13 - 4 = 9$$

Como a PG  $(a, b, c)$  é crescente, temos  $a = 4, b = 6$  e  $c = 9$ .

### Exercícios



- 74.** Calcule  $x$  e  $y$  sabendo que a sequência  $(x, y, 9)$  é uma PA e a sequência  $(x, y, 12)$  é uma PG crescente, ou seja,  $a_3 > a_2 > a_1$ .  $y = 18$  ou  $y = 6; x = 3$
- 75.** A sequência  $(a, b, c)$  é uma PA e a sequência  $(a, b, c+1)$  é uma PG. Se  $a+b+c = 18$ , escreva no caderno a PA sabendo que ela é crescente.  $(4, 6, 8)$
- 76.** A sequência  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  é uma PA de razão 4 e a sequência  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  é uma PG de razão 4. Sabendo que  $a_4 = b_3$  e  $a_1 = b_2$ , escreva no caderno a PA e a PG. PA  $(4, 8, 12, 16)$ ; PG  $(1, 4, 16, 64)$
- 77.** Sabendo que os números  $2, \log x, \log y$ , nessa ordem, estão simultaneamente em PA e em PG, calcule  $x$  e  $y$ .  $x = 100$  e  $y = 100$
- 78.** (Ufscar) A condição para que três números  $a, b$  e  $c$  estejam, simultaneamente, em progressão aritmética e em progressão geométrica é que:
- a)  $ac = b^2$ .      b)  $a+c = 2$ .      c)  $a+c = b^2$ .      x d)  $a = b = c$ .      e)  $ac = 2b$ .



## Automedicação e uso indiscriminado de medicamentos



FotografiaBasica/Stock.com/Getty Images

Cápsulas e comprimidos de medicamentos variados.

Tomar remédios por conta própria, ou por indicação de amigos, sem a prescrição médica, para problemas muitas vezes considerados simples – como dor de cabeça ou dores no corpo – é um hábito comum, mas que pode causar grandes danos à saúde e inclusive levar à morte. De acordo com a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa), o uso indevido de medicamentos é considerado hoje um problema de saúde pública, não só no Brasil, mas mundialmente. [...]

Muitos remédios, como determinados tipos de analgésicos, antitérmicos e anti-inflamatórios ainda são vendidos nas farmácias sem a necessidade de apresentação da receita médica. E, para aqueles que buscam alívio rápido para um incômodo que consideram ser apenas momentâneo, a compra de medicamentos sem receita médica pode parecer o caminho mais fácil. Todavia, de acordo com dados da Organização Mundial da Saúde (OMS), o percentual de internações hospitalares provocadas por reações adversas a medicamentos ultrapassa os 10%.

Entre as reações adversas resultantes dessas práticas, podem ocorrer desde alergias mais brandas até um quadro de choque anafilático (reação de hipersensibilidade imediata que pode levar à morte). [...]

### Interações e dependência

Embora tenham relação entre si, a Anvisa classifica o uso indevido de medicamentos em duas práticas distintas: a automedicação e o uso indiscriminado de medicamentos. A automedicação ocorre quando os remédios são usados por conta própria ou por indicação de pessoas não habilitadas, mas sem a avaliação de um profissional de saúde. Já o uso indiscriminado de medicamentos é mais amplo e está relacionado ao consumo excessivo e constante destes produtos, mesmo que com receita médica. [...]

CARDOSO, Naiara. *Automedicação e o uso indiscriminado de medicamentos*. Núcleo Estadual no Rio de Janeiro. Disponível em: <[www.nerj.rj.saude.gov.br/internet/?p=2663](http://www.nerj.rj.saude.gov.br/internet/?p=2663)>. Acesso em: 23 mar. 2016.

Observe a tabela a seguir e compare o percentual de pessoas e animais intoxicados com medicamentos e também com outras modalidades de intoxicação registradas nas estatísticas do Ministério da Saúde.

**Casos registrados de intoxicação humana, de intoxicação animal e de solicitação de informação por agente tóxico. Brasil, 2012.**

Agente	Vítima	Homens nº	Animal nº	Informações nº	Total	
					nº	%
Medicamentos		27 008	133	627	27 768	27,00
Agrotóxicos/uso agrícola		4 656	84	100	4 840	4,71
Agrotóxicos/uso doméstico		2 146	150	118	2 414	2,35
Produtos veterinários		835	164	27	1 026	1,00
Raticidas		2 291	156	35	2 482	2,41
Domissanitários		7 987	78	133	8 198	7,97
Cosméticos		1 467	6	37	1 510	1,47
Produtos Químicos Industriais		5 015	53	125	5 193	5,05
Metais		288	8	51	347	0,34
Drogas de Abuso		7 998	9	30	8 037	7,81
Plantas		1 185	113	71	1 369	1,33
Alimentos		2 228	2	23	2 253	2,19
Animais Peç./Serpentes		4 532	34	123	4 689	4,56
Animais Peç./ Aranhas		3 768	13	166	3 947	3,84
Animais Peç./ Escorpiões		12 494	8	283	12 785	12,43
Outros Animais Peç./venenosos		5 796	38	187	6 021	5,85
Animais não Peçonhentos		4 238	9	249	4 496	4,37
Desconhecido		2 711	77	29	2 817	2,74
Outros		2 392	64	206	2 662	2,59
<b>TOTAL</b>		<b>99 035</b>	<b>1 199</b>	<b>2 620</b>	<b>102 854</b>	<b>100,00</b>

Fonte: Ministério da Saúde/Sinitox. Disponível em: <www.fiocruz.br/sinitox/media/Tabela%204\_2012.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2016.

Para entender melhor a ação dos medicamentos no organismo humano e ressaltar que o seu uso deve ser feito de forma segura e responsável, vamos inicialmente lembrar o que significa **meia-vida** de uma substância:

Meia-vida de uma substância é o tempo necessário para que a quantidade dessa substância se reduza à metade de sua quantidade inicial.

Veja como a ingestão de certo medicamento deixa resíduos no organismo de um ser humano adulto que ingere doses de 750 mg de 4 em 4 horas. Considere que a meia-vida desse medicamento é de 4 horas.

**Resíduos de um medicamento no organismo em função da dose em intervalos de 4 horas**

Dose	Hora	0	4	8	12	16	20	24	28	32 horas
1ª		750	375	187,5	93,75	46,875	23,4375	11,71875	5,85937	2,92969
2ª			750	375	187,5	93,75	46,875	23,4375	11,71875	5,85937
3ª				750	375	187,5	93,75	46,875	23,4375	11,71875
4ª					750	375	187,5	93,75	46,875	23,4375
5ª						750	375	187,5	93,75	46,875
6ª							750	375	187,5	93,75
7ª								750	375	187,5
8ª									750	375
9ª										750
Quantidade no organismo (mg)		750	1 125	1 312,5	1 406,25	1 453,125	1 476,5625	1 488,28125	1 494,14062	1 497,07031

Fonte: Dados fictícios.

A primeira linha da tabela mostra como a quantidade de medicamento se comporta ao longo do tempo em relação à 1ª dose. A segunda linha mostra o mesmo em relação à 2ª dose, e assim por diante. A última linha corresponde à quantidade total da droga presente no organismo em função do número de horas após a 1ª dose.

A quantidade de medicamento acumulado no organismo depois de 9 doses de 750 mg pode ser calculada por meio da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica.

Como a meia-vida do medicamento é de 4 horas, de 4 em 4 horas a quantidade de medicamento fica reduzida à metade, assim temos uma PG de razão  $\frac{1}{2}$  e, nesse caso, o número de termos é 9.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_9 = \frac{750 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^9 \right]}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{750(1 - 0,001953125)}{\frac{1}{2}} = 1500 \cdot (0,998046875) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \approx 1497,1$$

1497,1 representa a quantidade residual aproximada do medicamento, em miligramas, no organismo após 9 doses de 4 em 4 horas.

#### Fique atento!

Por mais que pareça inofensivo, **todo medicamento deve ser usado somente mediante prescrição médica**. A medicação não é prejudicial à saúde se o uso for adequado e efetuado segundo receituário médico.

Hora	Doses	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
0 h		400	100	25	6,25	1,5625
4 h			400	100	25	6,25
8 h				400	100	25
16 h					400	100
						400
Quantidade no organismo (mg)		400	500	525	531,25	532,8125

### Trabalhando com o texto

- Qual é a principal causa de internação por intoxicação, segundo dados do Ministério da Saúde? **Medicamentos.**
- De acordo com os dados apresentados, qual é a segunda maior causa de intoxicação em humanos? Qual é o seu percentual diante do total de intoxicações? **Animais peçonhentos/escorpiões; 12,43%.**
- Uma pessoa ingere 256 mg de um medicamento. Depois de quantas horas o medicamento se reduzirá a 16 mg no organismo dessa pessoa? Considere que a meia-vida desse medicamento é de 8 horas. **32 horas.**
- Construa no caderno uma tabela para 5 doses, de 4 em 4 horas, de certo medicamento que tem 2 horas de meia-vida cuja drágea contém 400 mg. Nessa tabela deve constar a quantidade de substância acumulada em cada dose e ao final do tratamento.

**Domissanitário** é um termo utilizado para identificar produtos destinados à higienização, desinfecção ou desinfestação domiciliar. São exemplos: os detergentes, alvejantes, amaciantes de tecido, ceras, limpa-móveis, limpa-vidros, polidores de sapatos, removedores, sabões, saponáceos, desinfetantes, produtos para tratamento de água para piscina, água sanitária, inseticidas, raticidas, repelentes, entre outros.

### Pesquisando e discutindo

- Pesquise o que são “domissanitários” e “drogas de abuso”. **Droga de abuso** é qualquer substância que modifica, aumenta, inibe ou reforça as funções fisiológicas, psicológicas ou imunológicas do organismo de maneira transitória ou permanente.
- De acordo com a tabela os domissanitários representam quase 8% do total de casos de intoxicação. Pesquise medidas de segurança que devem ser tomadas para evitar essas intoxicações. **Resposta pessoal.**
- Converse com seus colegas sobre meios de conscientizar as pessoas sobre os riscos da automedicação. Em seguida, montem uma campanha de conscientização para toda a escola. **Sugerimos a leitura da seguinte dissertação de mestrado: KROPF, Marcelo Albuquerque Lemgruber. Aplicações dos logaritmos na área de saúde. Rio de Janeiro, 2014. Dissertação de Mestrado (Opção profissional) – Profmat – Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Disponível em: <www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho\_conclusao\_curso/2014/marcelo\_kropf.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2016.**

### Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações sobre a automedicação e o uso indiscriminado de medicamentos em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acessos em: 23 mar. 2016)

*Drogas de abuso.* Portal Educação: <www.portaleducacao.com.br/farmacia/artigos/519/drogas-de-abuso>.

*O perigo do uso inadequado de medicamentos.* Agência Nacional de Vigilância Sanitária: <www.anvisa.gov.br/divulga/reportagens/060707.htm>.

*Orientações de consumo.* Procon-SP: <www.procon.sp.gov.br/texto.asp?id=412>.

Portal da saúde: <portalsaude.saude.gov.br>.

Sinitox (Sistema Nacional de Informações Tóxico Farmacológicas): <www.fiocruz.br/sinitox/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?tpl=home>.



# Trigonometria no triângulo retângulo

Rodrigo Silva/Acervo do fotógrafo

Pico da Neblina, na serra do Imeri, no norte do Amazonas. Obter a altura de picos e montanhas não é uma tarefa simples por medição direta, porém os conceitos de trigonometria podem facilitar a obtenção desses valores. Fotografia de 2014.

# 1 Semelhança de triângulos

Neste capítulo retomaremos o que você provavelmente estudou no 9º ano do Ensino Fundamental: o estudo da Trigonometria (do grego: *trigōnos* + *métron*, que significa ‘medida dos triângulos’), revendo e aprofundando a Trigonometria no triângulo retângulo. O conceito de proporcionalidade é questão central nesse processo, portanto faremos uma revisão de tópicos relevantes da Geometria plana.

A proporcionalidade, principalmente na forma do teorema de Tales ou de semelhança de triângulos, foi um dos conhecimentos geométricos mais úteis ao longo dos tempos. Foi por meio da semelhança de triângulos que Aristarco (310 a.C.-230 a.C.) comparou as distâncias da Terra e os matemáticos árabes estabeleceram as razões trigonométricas.

Tales de Mileto (624 a.C.-547 a.C.), considerado um dos mais versáteis gênios da Antiguidade, levou para a Grécia a Geometria dos egípcios e começou a aplicar a ela os procedimentos da Filosofia grega. Com seu método de comparar sombras, hoje conhecido como teorema de Tales, realizou muitos cálculos até então inéditos. O mais famoso deles foi o método para obter a medida de distâncias inacessíveis.

Uma das aplicações mais conhecidas do método que Tales desenvolveu é a determinação da altura de uma pirâmide sem precisar escalá-la. Pesquisem, em grupos, sobre esse método e exponham para a turma.

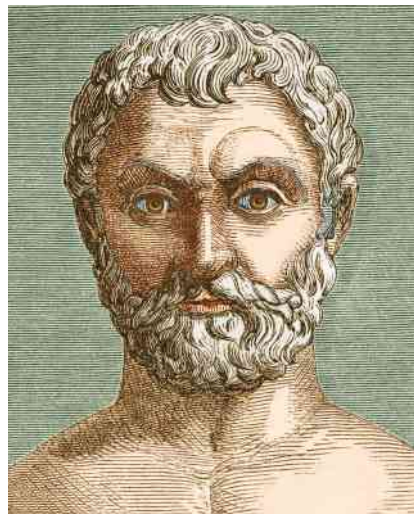
## Você sabia?

Tales é considerado um dos sete sábios da Antiguidade. Formem trios e pesquisem quem são os outros seis.



Gravura de Aristarco de Samos. Xilogravura.

Periandro de Corinto, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleóbulo de Lindos, Sólon de Atenas e Quílon de Esparta.

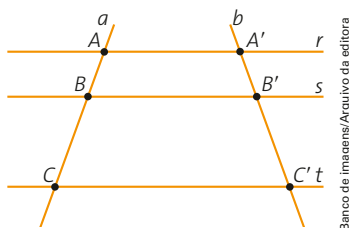


Retrato de Tales de Mileto.

## Feixe de retas paralelas

**Feixe de retas paralelas** é um conjunto de retas distintas de um plano, paralelas entre si.

As retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  da figura abaixo constituem um feixe de retas paralelas.



**Transversal ao feixe de retas paralelas** é uma reta do plano do feixe que intersecta todas as retas do feixe.

Na figura, as retas  $a$  e  $b$  são transversais ao feixe.

$A$  e  $A'$  são **pontos correspondentes**. Também são correspondentes os pontos  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ .  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são **segmentos de reta correspondentes**. Igualmente,  $\overline{BC}$  e  $\overline{B'C'}$ , assim como  $\overline{AC}$  e  $\overline{A'C'}$ .

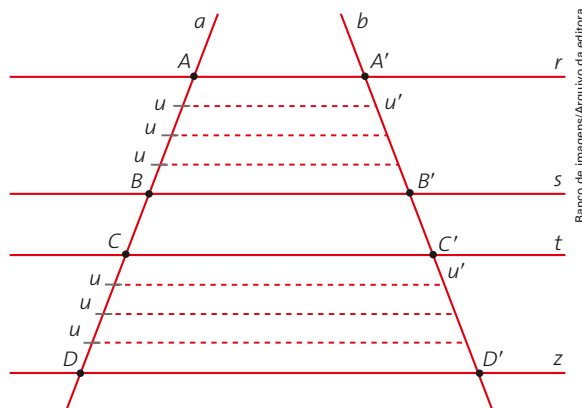


## Teorema de Tales

Se duas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos de reta quaisquer de uma transversal é igual à razão entre os segmentos de reta correspondentes da outra.

Vamos comprovar esse teorema, para o caso em que os segmentos de reta são comensuráveis (o feixe de paralelas divide as transversais em segmentos de reta cujas medidas podem ser expressas por uma quantidade inteira de uma certa unidade).

Considere um feixe de paralelas e duas transversais, como indica a figura abaixo.



Vamos supor que exista um segmento de reta  $u$  de modo que  $AB = mu$  e  $CD = nu$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ), ou seja, que  $AB$  e  $CD$  são números racionais. Estabelecendo a razão  $\frac{AB}{CD}$ , obtemos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n} \text{ ①}$$

Pelos pontos que dividem  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  em  $m$  e  $n$  partes congruentes ao segmento de reta de medida  $u$ , traçamos retas paralelas ao feixe. Desse modo, os segmentos de reta  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{C'D'}$  ficam divididos em  $m$  e  $n$  partes iguais a  $u'$ , respectivamente.

Temos:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{mu'}{nu'} = \frac{m}{n} \text{ ②}$$

Das relações ① e ②, concluímos que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Podemos também enunciar o teorema de Tales assim:

Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos de reta proporcionais.

Em decorrência das propriedades das proporções, valem também as igualdades:

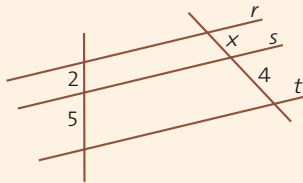
$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ ou } \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Se necessário, recorde com os alunos as propriedades de uma proporção.

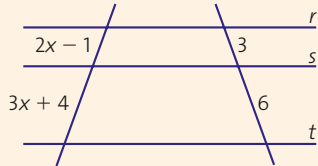
# Exercícios resolvidos

1. Nas figuras, as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são paralelas. Determine o valor de  $x$ .

a)



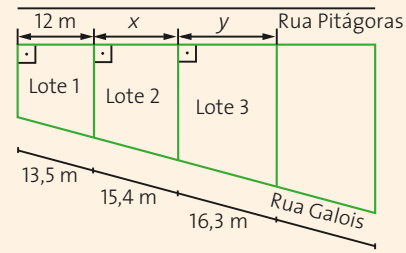
b)



**Resolução:**

- a)  $\frac{2}{5} = \frac{x}{4} \Rightarrow 5x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$
- b)  $\frac{2x-1}{3x+4} = \frac{3}{6} \Rightarrow 6(2x-1) = 3(3x+4) \Rightarrow 12x-6 = 9x+12 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

2. Observe a planta de um loteamento:



Quais são as medidas aproximadas das frentes dos lotes 2 e 3 em metros?

**Resolução:**

Este problema pode ser resolvido usando-se o teorema de Tales, como segue:

$$\frac{12}{x} = \frac{13,5}{15,4} \Rightarrow 13,5x = 184,8 \Rightarrow x \approx 13,7$$

$$\frac{12}{y} = \frac{13,5}{16,3} \Rightarrow 13,5y = 195,6 \Rightarrow y \approx 14,5$$

O lote 2 tem aproximadamente 13,7 metros de frente e o lote 3 tem aproximadamente 14,5 metros.

# Exercícios



Atividade em dupla



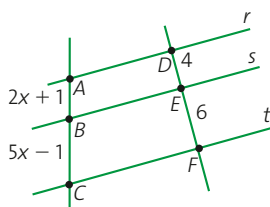
Atividade em equipe



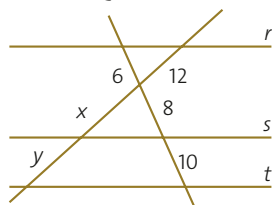
**ATENÇÃO!**  
Não escreva  
no seu livro!

1. Na figura,  $r \parallel s \parallel t$ . Determine a medida do segmento de reta  $AB$ .

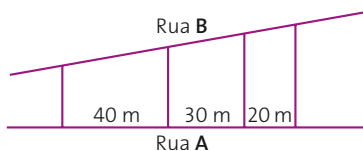
$$x = \frac{5}{4}$$



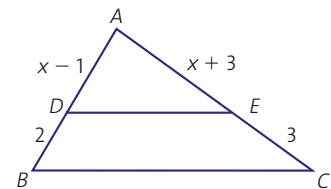
2. Na figura,  $r \parallel s \parallel t$ . Qual é o valor de  $xy$ ? 320



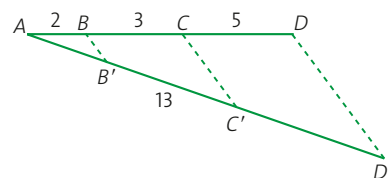
3. Três terrenos têm frente para a rua **A** e para a rua **B**, como representa a figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua **A**. Qual é a medida de frente para a rua **B** de cada lote sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m? 80 m; 60 m; 40 m



4. Na figura, a reta  $DE$  é paralela ao lado  $BC$  do triângulo  $ABC$ . Calcule o valor de  $x$ .  $x = 9$



5. (Fuvest-SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. A altura do poste é:
- a) 6 m.                      c) 12 m.                      e) 72 m.  
b) 7,2 m.                    x d) 20 m.
6. (Unicamp-SP) A figura mostra um segmento  $AD$  dividido em três partes:  $AB = 2$  cm,  $BC = 3$  cm e  $CD = 5$  cm.



O segmento  $AD'$  mede 13 cm e as retas  $BB'$  e  $CC'$  são paralelas a  $DD'$ . Determine os comprimentos dos segmentos  $AB'$ ,  $B'C'$  e  $C'D'$ .

$$AB' = 2,6 \text{ cm}, B'C' = 3,9 \text{ cm}, C'D' = 6,5 \text{ cm}$$

Ilustrações desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## Figuras semelhantes

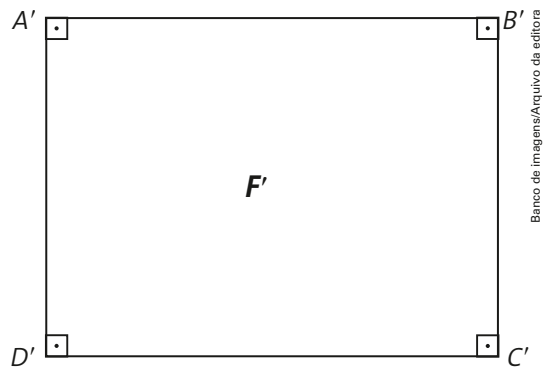
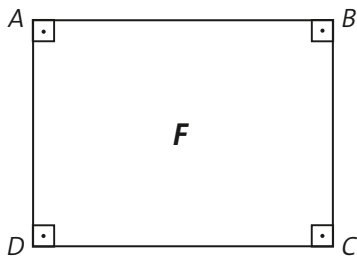
A ampliação, a redução ou a reprodução de fotografias; a visualização de imagens na tela do celular, que podem ser aumentadas ou diminuídas com o movimento dos dedos; a representação gráfica de continentes, países ou cidades por meio de mapas; a representação gráfica de casas e prédios por meio de plantas; os aeromodelos; as maquetes de edifícios; etc. são exemplos concretos de **figuras semelhantes** em nosso cotidiano.

Por exemplo, quando ampliamos, reduzimos ou reproduzimos uma fotografia, as medidas dos seus ângulos correspondentes não mudam, e as medidas dos seus lados mantêm proporcionalidade com as medidas dos lados correspondentes da fotografia ampliada, reduzida ou reproduzida. Então, dizemos que a fotografia original e a fotografia obtida são figuras semelhantes.



Em relação às medidas dos lados das fotografias, podemos escrever a proporção  $\frac{4}{6} = \frac{3}{4,5}$ , pois  $4 \cdot 4,5 = 6 \cdot 3$ . Simplificando  $\frac{4}{6}$ , obtemos  $\frac{2}{3}$ .

Agora, observe as figuras:



A figura  $F$  é semelhante a figura  $F'$ , pois:

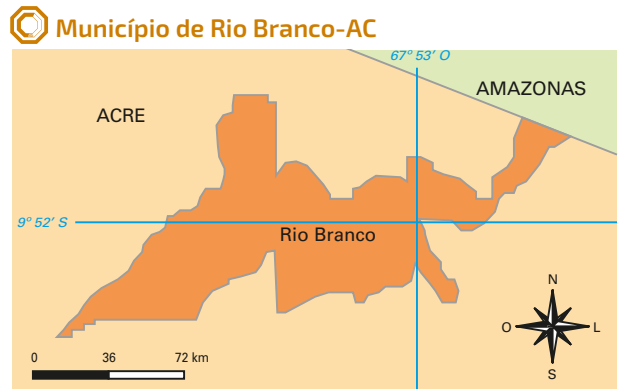
- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = k$  (constante) → **razão de semelhança**

- os ângulos de  $F$  são congruentes aos ângulos de  $F'$ .

No exemplo das fotografias acima, a fração  $\frac{2}{3}$  é a razão de semelhança entre  $A$  e  $B$ .

Nos mapas e nas plantas de construções, as dimensões no desenho e na realidade mantêm uma proporcionalidade que é definida por uma **escala**.

No mapa ao lado, a escala utilizada ou a razão de semelhança é de  $\frac{1}{3\,600\,000}$  ou  $1 : 3\,600\,000$ ; isso significa que 1 cm no mapa corresponde a 3 600 000 cm (36 km) na realidade.



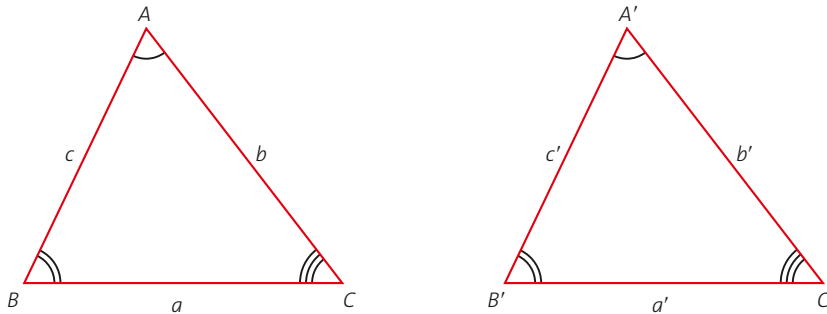
Fonte: Tribunal de Contas do Estado do Acre. Disponível em: <www.tce.ac.gov.br/portal/index.php/bem-vindo-ao-acre/77-rio-branco>. Acesso em: 13 abr. 2016.

## Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados **homólogos** proporcionais.

**Homólogos:** que têm a mesma posição relativa; correspondentes.

Observe os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ :



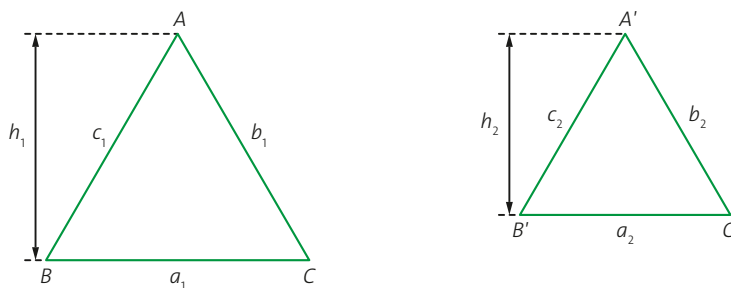
$\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são semelhantes. Indicamos assim:  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .  
 Recorde com os alunos o significado da expressão “se, e somente se”, indicada por  $\Leftrightarrow$ .

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = (\text{razão de semelhança})$$

### Fique atento!

- o símbolo  $\cong$  significa congruente.
- $a$  é a medida do lado  $BC$ ,  $b$  é a medida do lado  $AC$  e  $c$  é a medida do lado  $AB$ .

Se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança  $k$  (ou seja, a razão entre dois lados homólogos quaisquer é  $k$ ), então quaisquer outros elementos lineares homólogos desses triângulos (alturas, perímetros, medianas, etc.) também serão proporcionais com razão  $k$ .



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{a_2 + b_2 + c_2} = k$$

### Fique atento!

$a_1 + b_1 + c_1$  e  $a_2 + b_2 + c_2$  são os perímetros de cada triângulo.

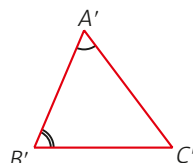
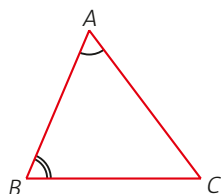
Para saber se dois triângulos são semelhantes, basta verificar alguns de seus elementos específicos, ou seja, ao verificar apenas algumas informações sobre dois triângulos podemos garantir a semelhança entre eles. Esses são os chamados **casos de semelhança de triângulos**, que estudaremos a seguir.



## Casos de semelhança

### 1º caso: critério AA (Ângulo, Ângulo)

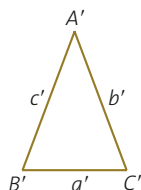
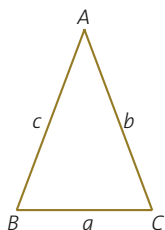
Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

### 2º caso: critério LLL (Lado, Lado, Lado)

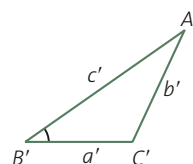
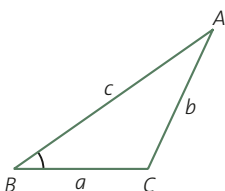
Dois triângulos são semelhantes se os lados de um são proporcionais aos lados do outro.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

### 3º caso: critério LAL (Lado, Ângulo, Lado)

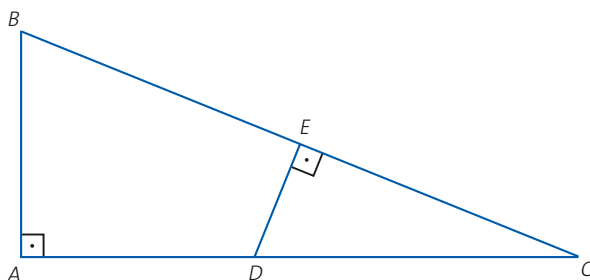
Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Por exemplo, considere o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , e seja  $D$  um ponto de  $\overline{AC}$  e  $\overline{DE}$  perpendicular ao lado  $BC$ .

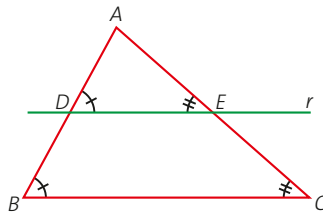
Vamos verificar se  $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ :



$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} \cong \hat{A} \text{ (retos)} \\ \hat{C} \text{ é comum} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EDC \sim \triangle ABC \text{ (caso AA)}$$

## Propriedade (teorema fundamental da semelhança)

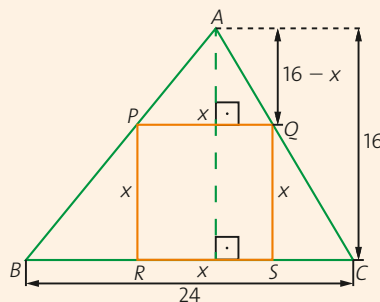
Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro.



$$\left. \begin{array}{l} r \parallel \overline{BC} \\ r \cap \overline{AB} = \{D\} \\ r \cap \overline{AC} = \{E\} \end{array} \right\} \text{ Assim, } \hat{B} \cong \hat{D} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{E}. \text{ Logo, } \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

## Exercícios resolvidos

3. A figura abaixo representa um quadrado PQSR inscrito em um triângulo ABC. Sendo  $BC = 24$  cm e a altura relativa a essa base igual a 16 cm, calcule a medida do lado desse quadrado.



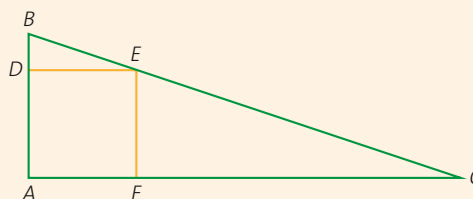
### Resolução:

No quadrado PQSR, o lado PQ é paralelo ao lado BC do  $\triangle ABC$ . Como  $\triangle APQ$  é semelhante ao  $\triangle ABC$ , temos:

$$\frac{x}{24} = \frac{16 - x}{16} \Rightarrow x = \frac{48}{5} = 9,6$$

Logo, o lado do quadrado mede 9,6 cm.

4. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado,  $AB = 1$  e  $AC = 3$ . Quanto mede o lado do quadrado?



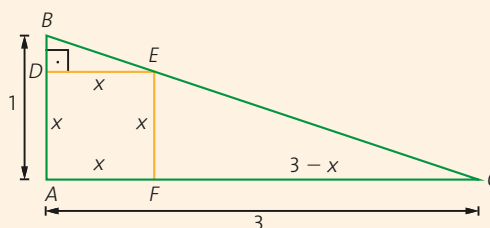
### Resolução:

Como  $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ , então:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{3 - x} \Rightarrow 3x = 3 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4} = 0,75$$

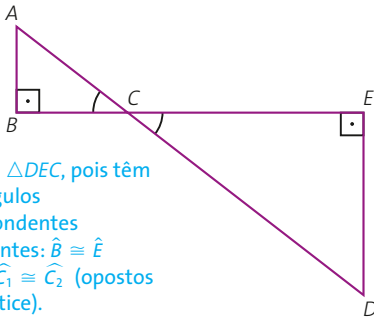
O lado do quadrado mede 0,75.



# Exercícios



7. Justifique a semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $DEC$ .

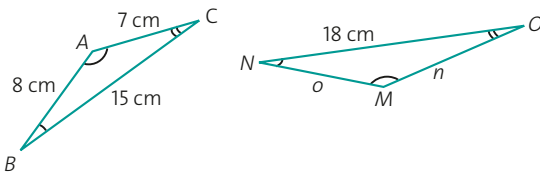


$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ , pois têm dois ângulos correspondentes congruentes:  $\hat{B} \cong \hat{E}$  (retos);  $\hat{C}_1 \cong \hat{C}_2$  (opostos pelo vértice).

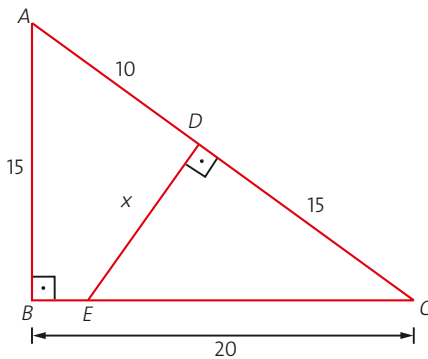
8. Dados os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , isósceles de bases  $\overline{BC}$  e  $\overline{EF}$ , e sabendo que  $\hat{A} \cong \hat{D}$ , mostrem que tais triângulos são semelhantes.  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ;  $\hat{B} \cong \hat{E}$ ;  $\hat{C} \cong \hat{F}$

Pelo caso (AA) temos que os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes.

9. Os triângulos  $ABC$  e  $MNO$  são semelhantes. Determine as medidas  $n$  e  $o$ .  $n = 8,4 \text{ cm}$  e  $o = 9,6 \text{ cm}$

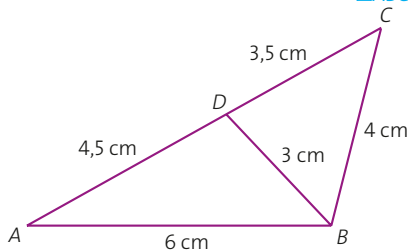


10. Determine o valor de  $x$ :  $x = 11,25$

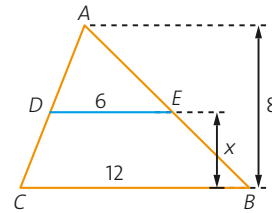


11. Dois triângulos são semelhantes. O perímetro de um dos triângulos é de 35 cm e o do outro, de 105 cm. Qual é a razão de semelhança entre os triângulos?  $\frac{1}{3}$  ou 3

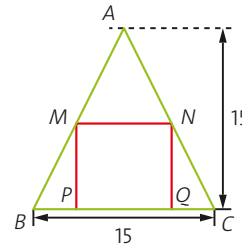
12. Dos três triângulos desta figura ( $\triangle ABC$ ,  $\triangle BCD$  e  $\triangle ABD$ ), há dois que são semelhantes. Quais são eles?  $\triangle ABC$  e  $\triangle ABD$



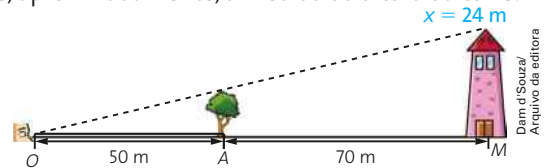
13. Determine o valor de  $x$  na figura abaixo:  $x = 4$



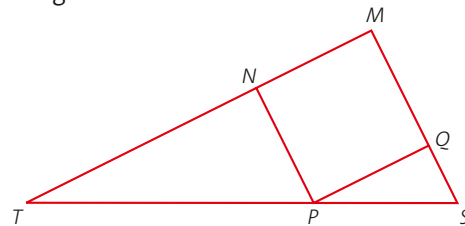
14. Determine o valor do maior lado do retângulo  $MNPQ$  abaixo, sabendo que a base do retângulo mede o dobro da sua altura. 10



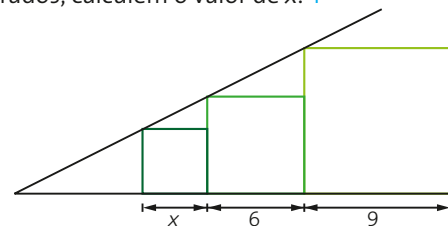
15. Na figura abaixo considere que a medida da altura da árvore é 10 m, a distância entre ela e o observador é de 50 m e a distância da árvore ao ponto  $M$  é de 70 m. Considerando que o olho do observador, o topo da árvore e o topo da torre estão alinhados, qual é, aproximadamente, a medida da altura da torre?  $x = 24 \text{ m}$



16. (Mack-SP) Na figura abaixo,  $MNPQ$  é um losango. Se  $MT = 12$  e  $MS = 6$ , quanto mede cada lado do losango? 4



17. Sabendo que na figura abaixo temos três quadrados, calcule o valor de  $x$ . 4



Demétrio Souza/Arquivo da editora

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## Uso de semelhança para medir distâncias inacessíveis

Como medir a altura de um prédio, de uma árvore, de um poste?

Neste capítulo aprenderemos que há muitas maneiras. Por exemplo, poderíamos medir essas alturas indiretamente usando semelhança de triângulos e proporção.

Mais adiante, veremos que também seria possível usar a Trigonometria. Como fazer isso? Examine este exemplo:

Um jogador de basquete deseja saber a altura em que se encontra uma cesta de basquete oficial em relação ao piso de uma quadra. Como calcular essa altura com o auxílio de um triângulo de papel  $DFG$ ?

Para isso, ele poderia usar a metade de uma folha de papel quadrada, como indicado nos procedimentos abaixo. Observe que  $DG = FG$ .

1º) Mirar o topo da cesta conservando a parte inferior da folha ( $\overline{DG}$ ) paralela ao chão. Talvez ele precise afastar-se ou aproximar-se da cesta para que isso ocorra.

2º) Medir a distância entre ele e a perpendicular ao chão que passa pela cesta:  $AB = 130$  cm na figura abaixo.

Observe que  $AB = DC$ . Logo,  $DC = 130$  cm.

3º) Medir a distância do chão aos seus olhos, na figura:

$$AD = 175 \text{ cm}$$

Veja que  $AD = BC$ . Logo,  $BC = 175$  cm.

$\triangle DCE \sim \triangle DGF$  (dois ângulos correspondentes congruentes)

Da semelhança dos triângulos  $DCE$  e  $DGF$ , concluímos que:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$$

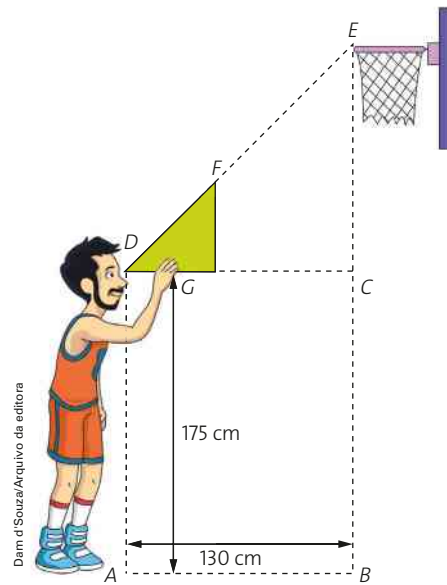
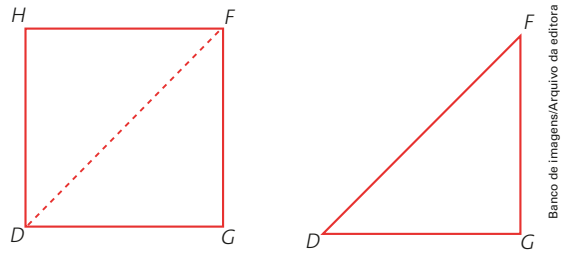
Observando a última igualdade  $\frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$  e sabendo

que  $DG = FG$ , concluímos que  $DC = EC$ .

Assim, a altura da cesta de basquete é dada por:

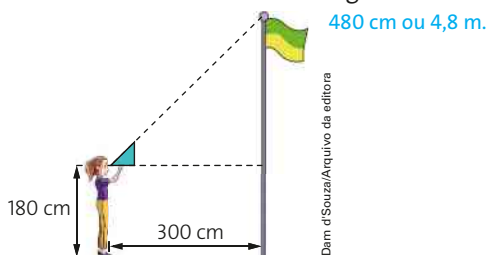
$BC + CE$  na figura:

$$175 \text{ cm} + 130 \text{ cm} = 305 \text{ cm} = 3,05 \text{ m}$$



## Exercícios

18. Conforme o método usado com a metade de uma folha de papel quadrada, determine a altura do mastro da bandeira do desenho a seguir.



19. Use o método do exercício anterior e determinem as medidas de algumas alturas (casa, edifício, poste, árvore, etc.). Em seguida, copiem o quadro a seguir no caderno e completem-no.

Respostas pessoais.

Objeto	Distância até o objeto	Distância do chão aos olhos	Altura do objeto

# Polígonos semelhantes

Quando dois polígonos têm todos os lados correspondentes proporcionais e todos os ângulos correspondentes congruentes, eles são chamados **polígonos semelhantes**.

## Exercícios



20. Observe estes dois hexágonos regulares e responda:

20. b) **Sim.** Como os hexágonos são regulares, seus ângulos são congruentes: todos os ângulos internos de ambos os hexágonos medem  $120^\circ$ .

Logo, os ângulos correspondentes são congruentes.

- Os lados correspondentes são proporcionais? Justifique sua resposta. **Sim.** Constante de proporcionalidade ou razão de semelhança 2.
- Os ângulos correspondentes são congruentes? Justifique sua resposta.
- Esses hexágonos regulares são semelhantes?

**Sim.** Os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

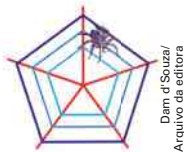
### Para refletir

Polígonos regulares com o mesmo número de lados são sempre semelhantes. Por quê?

Porque os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

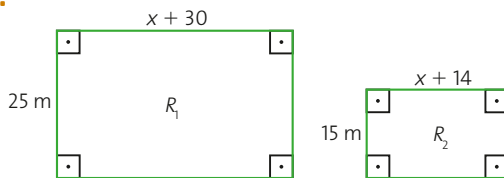
21. Examine esta figura e responda: todos os pentágonos regulares são semelhantes?

**Sim.** Os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.



Daivm d'Souza/  
Arquivo da editora

22.

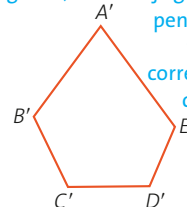
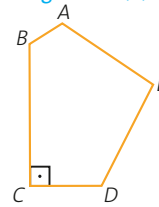


Sabendo que  $R_1$  e  $R_2$  são retângulos semelhantes, calcule:

- as medidas de seus comprimentos;  **$R_1: 40 \text{ m}; R_2: 24 \text{ m}$**
- a razão entre as medidas das larguras ( $R_1$  por  $R_2$ );  $\frac{5}{3}$
- a razão entre as medidas dos comprimentos ( $R_1$  por  $R_2$ );  $\frac{5}{3}$
- a razão entre os perímetros ( $R_1$  por  $R_2$ );  $\frac{5}{3}$
- a razão entre as áreas das regiões retangulares ( $R_1$  por  $R_2$ );  $\frac{25}{9}$

23. Verifique se estes pentágonos são semelhantes.

Explique sua resposta. **Não.** No primeiro pentágono há um ângulo reto ( $\hat{C}$ ) e no segundo, não. Isso já garante que os



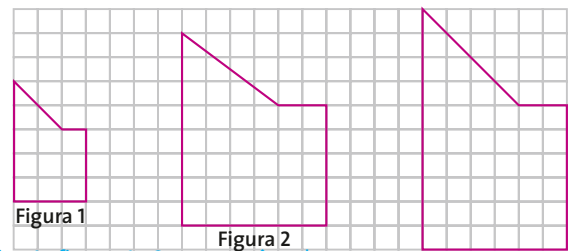
pentágonos não têm ângulos correspondentes congruentes.

24. Verifique se cada uma das frases abaixo é verdadeira ou falsa, justificando suas respostas.

- Todos os quadrados são semelhantes. **Verdadeira.**
- Todos os retângulos são semelhantes. **Falsa.**

Veja as justificativas no Manual do Professor.

25. Verifique se há duas figuras semelhantes abaixo. Em caso positivo, justifique sua escolha.



**Sim.** As figuras 1 e 3 possuem ângulos correspondentes congruentes e lados de medidas proporcionais, pois da figura 1 para a figura 3 todas as medidas dos lados dobraram.

26. Dois formatos predominam como padrão em telas e monitores de TV. O "4:3" e o "16:9" (widescreen). Esses valores se referem à proporção das dimensões da largura com a da altura da tela (ou, de forma equivalente, à proporção das colunas com as linhas das imagens).

As imagens (tanto fotografias como vídeos) costumam seguir um desses dois padrões, sendo que quanto maior a resolução da imagem, mais linhas e colunas serão exibidas e, portanto, maior o nível de detalhe exibido. Por exemplo,  $640 \times 480$  (VGA),  $800 \times 600$  (SVGA),  $1024 \times 768$  (XGA) e  $1280 \times 960$  são alguns dos formatos mais comuns do padrão 4:3.

- Todos os formatos do padrão 4:3 representam retângulos semelhantes? Justifiquem. **Sim, os ângulos correspondentes são todos retos e os lados estão na mesma b) Uma imagem no formato UXGA tem dimensões  $1600 \times 1200$ . Essa imagem é padrão 4:3 ou 16:9? Justifiquem. É 4:3, pois  $\frac{1600}{4} = \frac{1200}{3}$**

Ilustrações desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

## 2 Relações métricas no triângulo retângulo

### O triângulo retângulo

O triângulo retângulo é um dos mais importantes tipos de triângulo, pela utilidade que ele tem em Matemática e na vida cotidiana. Pelo fato de possuir um ângulo reto, o triângulo retângulo é muito usado em Engenharia, em construções de todos os tipos.

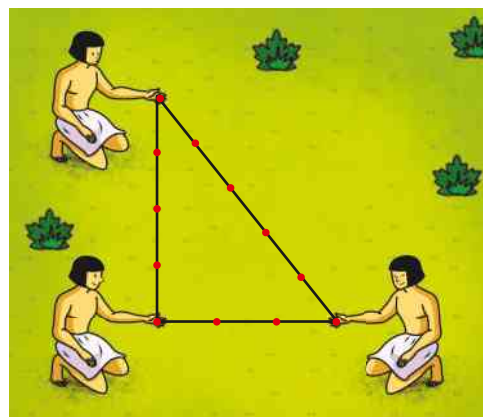
Há mais de 5 mil anos, os egípcios já utilizavam triângulos de lados proporcionais a 3, 4 e 5, feitos de corda, para obter ângulos retos.

#### Para refletir

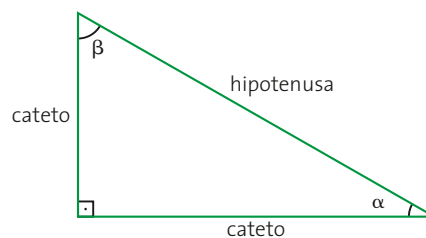
Formem duplas e pesquisem quem eram os “esticadores de cordas” no antigo Egito e o que eles faziam.

Veja a resposta no Manual do Professor.

Em um triângulo retângulo, o maior lado é a **hipotenusa** (lado oposto ao ângulo reto). Os outros dois lados, perpendiculares entre si, são os **catetos**. Os ângulos agudos são complementares ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ).



Representação de egípcios obtendo triângulo retângulo com nós em cordas.

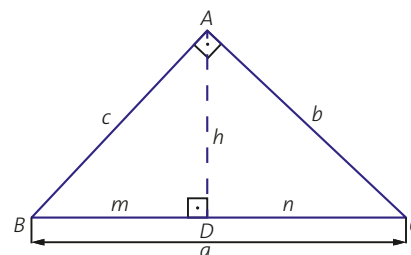


### Elementos do triângulo retângulo

Consideremos um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , e o segmento de reta  $AD$  perpendicular ao lado  $BC$ , com  $D$  em  $\overline{BC}$ .

Ficam definidos os seguintes elementos do  $\triangle ABC$ :

- $\overline{BC}$  → hipotenusa (medida  $a$ )
- $\overline{AC}$  → cateto (medida  $b$ )
- $\overline{AB}$  → cateto (medida  $c$ )
- $\overline{BD}$  → projeção do cateto  $\overline{AB}$  sobre a hipotenusa (medida  $m$ )
- $\overline{CD}$  → projeção do cateto  $\overline{AC}$  sobre a hipotenusa (medida  $n$ )
- $\overline{AD}$  → altura relativa à hipotenusa (medida  $h$ )

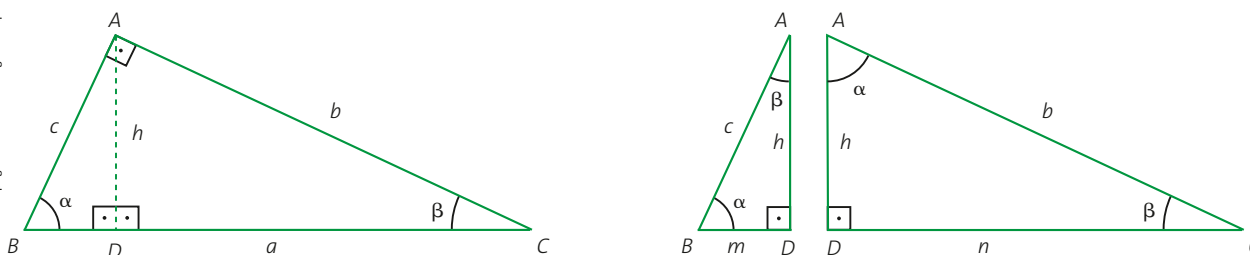


### Relações métricas

Uma importante aplicação da semelhança de triângulos são as relações métricas no triângulo retângulo: fórmulas que relacionam entre si as medidas dos lados e das alturas do triângulo.

### Triângulos semelhantes

A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo  $ABC$  divide-o em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si. Observe:



Como os três triângulos têm todos os ângulos congruentes, pelo 1º caso de semelhança, temos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$



## As relações métricas

Da semelhança entre  $\triangle ABC$  e  $\triangle DBA$ , segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BA}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am \quad \textcircled{I}$$

Da semelhança entre  $\triangle ABC$  e  $\triangle DAC$ , temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow ah = bc \quad \textcircled{II}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an \quad \textcircled{III}$$

Da semelhança entre  $\triangle DBA$  e  $\triangle DAC$ , segue que:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad \textcircled{IV}$$

Somando membro a membro  $\textcircled{I}$  e  $\textcircled{III}$ , temos:

$$\begin{array}{r} c^2 = am \\ + b^2 = an \\ \hline b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \quad \textcircled{V} \end{array}$$

A relação  $\textcircled{V}$  é o famoso **teorema de Pitágoras**: em um triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

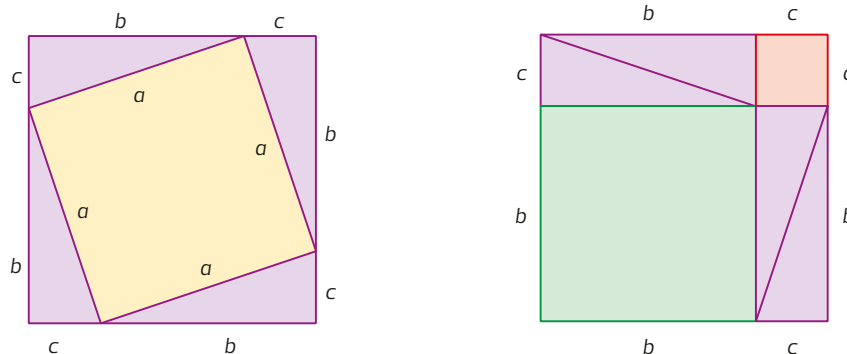
### Fique atento!

Você reparou que as relações  $\textcircled{I}$  e  $\textcircled{III}$  são as mesmas, apenas mudam do lado esquerdo para o lado direito do triângulo  $ABC$ ? Ambas podem ser generalizadas como:  
**cateto<sup>2</sup> = hipotenusa · projeção**

## Outra demonstração do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras também pode ser demonstrado por comparação de áreas (segundo os historiadores, a demonstração de Pitágoras deve ter sido uma demonstração geométrica semelhante à que segue).

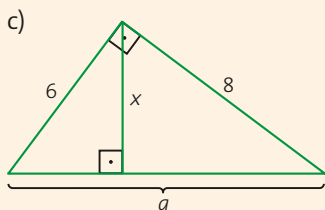
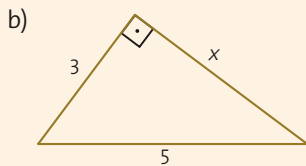
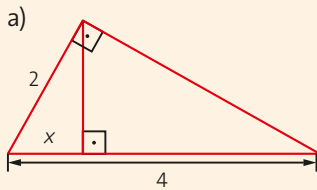
As duas regiões quadradas a seguir têm lados de medidas  $(b + c)$ . Logo, têm a mesma área. Retirando das duas as quatro regiões triangulares congruentes, o que sobra na primeira ( $a^2$ ) é igual ao que sobra na segunda ( $b^2 + c^2$ ). Então:  $a^2 = b^2 + c^2$ .



Observe agora a aplicação dessas relações métricas na resolução de problemas.

## Exercícios resolvidos

5. Calcule o valor de  $x$  em cada uma das figuras.



**Resolução:**

a)  $c^2 = am \Rightarrow 2^2 = 4x \Rightarrow 4 = 4x \Rightarrow x = 1$

b) Pelo teorema de Pitágoras:

$$3^2 + x^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

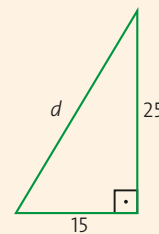
c)  $a^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$$ah = bc \Rightarrow 10x = 6 \cdot 8 \Rightarrow x = 4,8$$

6. Uma rodovia cruza uma hidrovía perpendicularmente por meio de uma ponte. Ambas podem ser consideradas retilíneas. No mesmo instante em que um carro cruza a ponte, a uma velocidade constante de 100 km/h, uma barcaça passa sob a ponte a 60 km/h e prossegue a viagem a essa velocidade. Após 15 minutos, qual será a distância aproximada entre o automóvel e a barcaça supondo que ambos estejam no mesmo plano horizontal?

**Resolução:**

A velocidade do carro é 100 km/h; logo, em 15 minutos terá percorrido 25 km. Por sua vez, a barcaça está a 60 km/h; logo, terá percorrido 15 km nesses 15 minutos.



$$d^2 = 15^2 + 25^2 \Rightarrow d^2 = 225 + 625 \Rightarrow$$

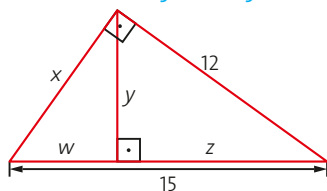
$$\Rightarrow d^2 = 850 \Rightarrow d = 5\sqrt{34}$$

Portanto,  $d \approx 29,15$  km.

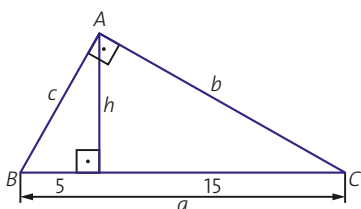
## Exercícios

27. Determine o valor de  $x, y, z$  e  $w$  no triângulo retângulo abaixo.

$$x = 9; y = \frac{36}{5}; z = \frac{48}{5}; w = \frac{27}{5}$$



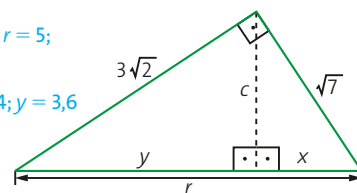
28. Calcule as medidas  $b, c$  e  $h$  indicadas no triângulo retângulo a seguir.  $b = 10\sqrt{3}$ ;  $c = 10$ ;  $h = 5\sqrt{3}$



29. Calcule os valores de  $c, r, x$  e  $y$  do triângulo abaixo.

$$c = \frac{3\sqrt{14}}{5}; r = 5;$$

$$x = \frac{7}{5} \text{ ou } 1,4; y = 3,6$$



30. Em um triângulo retângulo, a razão entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa é  $\frac{9}{16}$ . Sabendo que a hipotenusa mede 10 cm, calcule a medida dos catetos. **6 cm e 8 cm.**

31. Durante um treinamento, dois maratonistas partem de uma mesma cidade em direção reta; um em sentido leste e outro, em sentido norte. Determine a distância que os separa depois de 2 horas sabendo que as velocidades dos atletas são de 20 km/h e 25 km/h respectivamente.  **$10\sqrt{41}$  km (aproximadamente 64 km).**

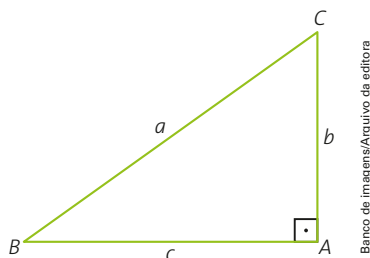
### 3 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Já estudamos como a proporcionalidade das medidas dos lados homólogos de triângulos semelhantes possibilita a obtenção de medidas inacessíveis. No exemplo dado com a cesta de basquete usamos um triângulo retângulo de catetos iguais feito de papel.

Imagine agora que é possível usar qualquer triângulo retângulo para isso, e, melhor ainda, nem é preciso construir um modelo de papel. Basta saber um de seus ângulos agudos e usar as relações trigonométricas adequadas. É isso que estudaremos a seguir.

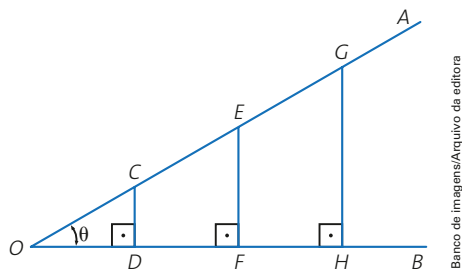
#### Definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos

Se  $ABC$  é um triângulo retângulo em  $A$ , temos:



- $a$  é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- $b$  e  $c$  são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são ângulos agudos;
- $\overline{AC}$  é o cateto oposto ao ângulo  $B$ ;
- $\overline{AB}$  é o cateto adjacente ao ângulo  $B$ .

Consideremos agora um ângulo  $\widehat{AOB} = \theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) e tracemos, a partir dos pontos  $C, E, G$ , etc. da semirreta  $OA$ , as perpendiculares  $CD, EF, GH$ , etc., à semirreta  $OB$ .



#### Fique atento!

Usaremos  $\hat{a}$  ora para designar ângulo  $a$ , ora para designar medida do ângulo  $a$ . Pelo contexto, saberemos quando terá um significado e quando terá o outro.

Os triângulos  $OCD, OEF, OGH$ , etc. são semelhantes por terem os mesmos ângulos. Podemos, portanto, escrever:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \dots (\text{constante})$$

Essa relação depende apenas do ângulo  $\theta$  (e não do tamanho do triângulo retângulo do qual  $\theta$  é um dos ângulos agudos). Ela é chamada **seno de  $\theta$**  e escrevemos:

$$\text{sen } \theta = \frac{CD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

De modo **análogo**, da semelhança de triângulos obtemos as relações:

Análogo: da mesma forma.

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \dots (\text{constante})$$

$$\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \dots (\text{constante})$$

que também dependem apenas do ângulo  $\theta$  e que definimos, respectivamente, como **cosseno do ângulo  $\theta$**  e **tangente do ângulo  $\theta$** :

Usaremos nesta coleção a notação  $\tan x$  no lugar de  $\text{tg } x$ ,  $\cot x$  no lugar de  $\text{cotg } x$  e  $\text{csc } x$  no lugar de  $\text{cossec } x$ , pois seguiremos as normas da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas-ISO 80000-2, válida a partir de 17/8/2012), em que na parte de Grandezas e unidades (Parte 2: Sinais matemáticos e símbolos a serem utilizados nas Ciências Naturais e tecnologia, p. 17) está escrito que convém que  $\text{tg } x$  não seja utilizado.

$$\cos \theta = \frac{OD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{OD} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

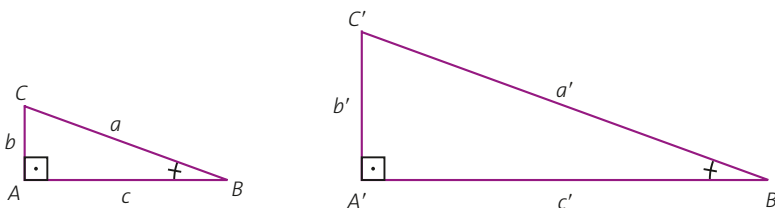
As razões  $\sin \theta = \frac{CD}{OC}$ ,  $\cos \theta = \frac{OD}{OC}$ ,  $\tan \theta = \frac{CD}{OD}$  são chamadas **razões trigonométricas** em relação ao ângulo  $\theta$ .

### Seno, cosseno e tangente só dependem do ângulo

É importante salientar que  $\sin \hat{B}$ ,  $\cos \hat{B}$  e  $\tan \hat{B}$  dependem apenas do ângulo  $B$ , mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual  $\hat{B}$  é um dos ângulos agudos. Vamos provar isso.

Consideremos dois triângulos retângulos,  $ABC$  e  $A'B'C'$ , que tenham um ângulo agudo de mesma medida ( $\hat{B} = \hat{B}'$ ). Nesse caso, eles são semelhantes, pois têm dois ângulos correspondentes,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$  (retos):

Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora



Dessa semelhança, temos:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$$

ou seja,  $\sin \hat{B}' = \sin \hat{B}$ ;  $\cos \hat{B}' = \cos \hat{B}$ ;  $\tan \hat{B}' = \tan \hat{B}$ .

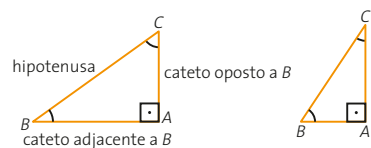
Portanto, o seno, o cosseno e a tangente dizem respeito apenas ao ângulo, e não ao triângulo que os contém.

#### Para refletir

Com um colega, procurem justificar as seguintes afirmações:

Se  $\hat{B}$  é um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então:

- $\sin \hat{B}$  é um número entre 0 e 1;
- $\cos \hat{B}$  é um número entre 0 e 1;
- $\tan \hat{B}$  é um número maior do que 0 e pode ser menor do que, igual a ou maior do que 1.



Todos são maiores do que zero porque são a razão de valores positivos (lados do triângulo). Seno e cosseno são menores do que 1 porque a hipotenusa é sempre maior do que o cateto. Já no caso da tangente, podemos ter qualquer tipo de resultado porque os catetos podem ser iguais ou diferentes entre si.

## Relações entre seno, cosseno e tangente

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se relacionam de várias formas, como veremos a seguir:

### 1ª) Relação fundamental do triângulo retângulo

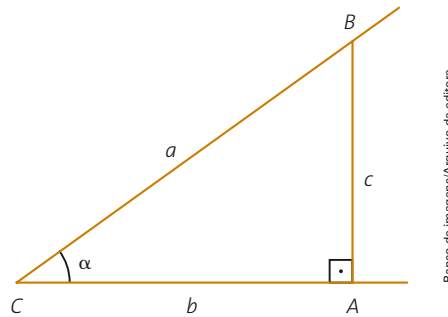
$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

#### Fique atento!

Usamos a notação  $\text{sen}^2 \alpha$  para indicar  $(\text{sen } \alpha)^2$ .

*Demonstração:*

Consideremos um ângulo  $\alpha$  de vértice C e um triângulo CAB, retângulo em A, como mostra a figura abaixo.



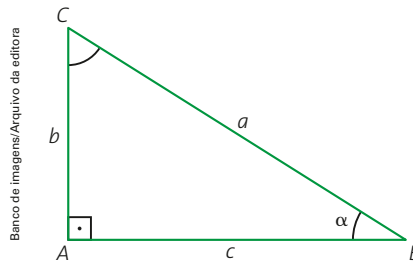
Lembrando o teorema de Pitágoras,  $a^2 = b^2 + c^2$ , temos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Assim,

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

### 2ª) $\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$



*Demonstração:*

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \tan \alpha$$

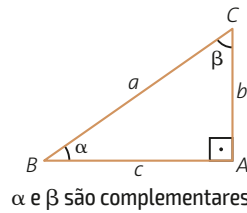
ou

$$\tan \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad (\text{dividimos ambos os termos da razão por } a \neq 0)$$

$$\text{Portanto, } \tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

3ª) Se dois ângulos,  $\alpha$  e  $\beta$ , são complementares ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ), então  $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$  (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar, e vice-versa).

Demonstração:



Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente nesse triângulo anterior, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \text{cos } \beta; \text{ portanto } \text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{c}{a} = \text{sen } \beta; \text{ portanto } \text{cos } \alpha = \text{sen } \beta$$

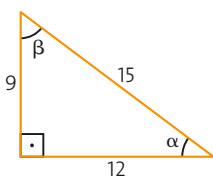
### Observações:

1ª) Dessa propriedade surgiu o nome **cosseno** – “seno do complemento”.

2ª) Com essa propriedade, conhecendo as razões trigonométricas de ângulos  $\alpha$  passamos a conhecer imediatamente as razões trigonométricas dos ângulos complementares  $\beta$  e vice-versa. Por exemplo, sabendo que  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ , já sabemos que  $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$ , pois  $30^\circ$  e  $60^\circ$  são complementares.

## Exercícios

32. Examine o triângulo retângulo representado abaixo e calcule o valor destas razões:

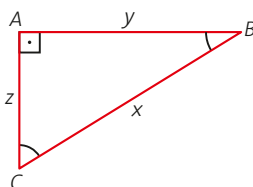


- a)  $\text{sen } \alpha$ ;  $\frac{3}{5}$
- $\frac{4}{5}$  b)  $\text{cos } \alpha$ ;
- c)  $\text{tan } \alpha$ ;  $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{5}$  d)  $\text{sen } \beta$ ;
- e)  $\text{cos } \beta$ ;  $\frac{3}{5}$
- $\frac{4}{3}$  f)  $\text{tan } \beta$ .

33. Os resultados do exercício anterior são coerentes com as afirmações do boxe *Para refletir* da página 250?

Sim.

34. Responda com base na análise do triângulo retângulo representado a seguir.

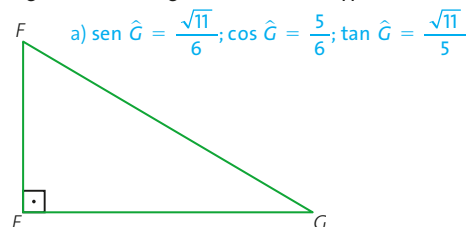


- a) Qual é o valor da soma  $\hat{B} + \hat{C}$ ?  $90^\circ$
- b) Indique as frações correspondentes a  $\text{sen } \hat{B}$ ,  $\text{cos } \hat{B}$ ,  $\text{tan } \hat{B}$ ,  $\text{sen } \hat{C}$ ,  $\text{cos } \hat{C}$  e  $\text{tan } \hat{C}$ .

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{z}{x}; \text{cos } \hat{B} = \frac{y}{x}; \text{tan } \hat{B} = \frac{z}{y}; \text{sen } \hat{C} = \frac{y}{x}; \text{cos } \hat{C} = \frac{z}{x}; \text{tan } \hat{C} = \frac{y}{z}$$

35. Em um triângulo  $EFG$ , retângulo em  $E$ , temos

$$\text{sen } \hat{F} = \frac{5}{6}, \text{cos } \hat{F} = \frac{\sqrt{11}}{6} \text{ e } \text{tan } \hat{F} = \frac{5\sqrt{11}}{11}.$$



- a) Calculem  $\text{sen } \hat{G}$ ,  $\text{cos } \hat{G}$  e  $\text{tan } \hat{G}$ .
- b) Se a hipotenusa do  $\triangle EFG$  mede 30 cm, quanto medem os catetos?  $EG = 25$ ;  $EF = 5\sqrt{11}$
- c) Calculem o valor das expressões:

- $(\text{sen } \hat{F})^2 + (\text{cos } \hat{F})^2$ ; 1
- $\text{sen}^2 \hat{G} + \text{cos}^2 \hat{G}$ ; 1
- $\frac{\text{sen } \hat{F}}{\text{cos } \hat{F}}$ ;  $\frac{5\sqrt{11}}{11}$
- $\frac{\text{sen } \hat{G}}{\text{cos } \hat{G}}$ ;  $\frac{\sqrt{11}}{5}$

### Fique atento!

$\text{sen}^2 \hat{G}$  é o mesmo que  $(\text{sen } \hat{G})^2$ .  
Usa-se com mais frequência  $\text{sen}^2 \hat{G}$ .



- 36.** Use transferidor e régua para construir um triângulo retângulo que tenha um ângulo de  $40^\circ$ . Meçam os lados e calculem  $\tan 40^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$  e  $\cos 40^\circ$ , com aproximação de três casas decimais. (No fim deste capítulo temos uma tabela com valores de seno, cosseno e tangente que poderão ser usados em alguns exercícios.)

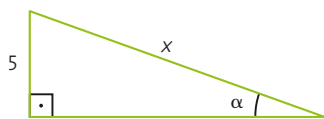
Verifiquem se os valores encontrados para  $\tan 40^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$  e  $\cos 40^\circ$  estão próximos dos valores da tabela.

Resposta pessoal.

**Você sabia?**

$\cos 40^\circ$ , por exemplo, significa cosseno do ângulo cuja medida é  $40^\circ$ , ou seja, identificamos o ângulo com sua medida.

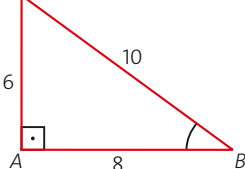
- 37.** No triângulo retângulo da figura, temos  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ .



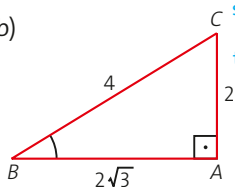
- a) Calcule  $\sin \alpha$  e  $\tan \alpha$ .  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ;  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$   
 b) Determine a medida da hipotenusa.  $x = 13$

- 38.** Nos triângulos retângulos abaixo, determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo  $\hat{B}$ ; depois use uma calculadora científica ou consulte a tabela e determine a medida aproximada de  $\hat{B}$  em graus.

- a)  $\sin \hat{B} = 0,6$ ;  $\cos \hat{B} = 0,8$ ;  $\tan \hat{B} = 0,75$ ;  $\hat{B} \approx 37^\circ$



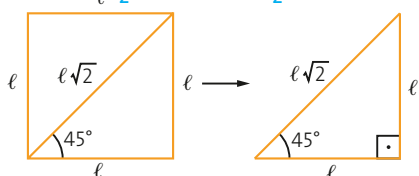
- b)  $\sin \hat{B} = \frac{1}{2}$ ;  $\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  
 $\tan \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $\hat{B} = 30^\circ$



- 39.** Vocês vão construir uma tabela de valores muito importantes; para isso:

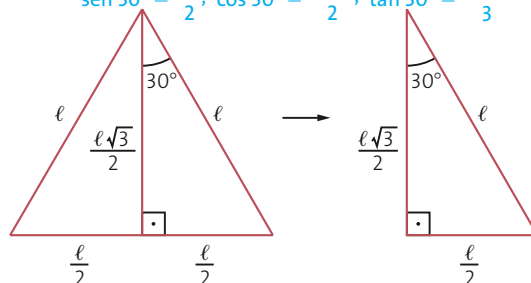
- a) calculem  $\sin 45^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$  e  $\tan 45^\circ$  utilizando o triângulo retângulo destacado do quadrado representado abaixo;

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\tan 45^\circ = 1$



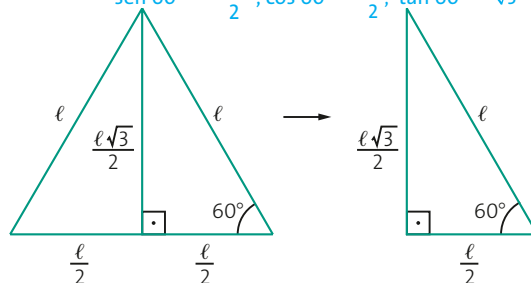
- b) calculem  $\sin 30^\circ$ ,  $\cos 30^\circ$  e  $\tan 30^\circ$  utilizando o triângulo retângulo destacado do triângulo equilátero representado a seguir;

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ;  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$



- c) calculem  $\sin 60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$  e  $\tan 60^\circ$  utilizando o triângulo retângulo destacado do triângulo equilátero representado abaixo;

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ;  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$



- d) com os valores que vocês encontraram, copiem no caderno e completem a tabela.

**Razões trigonométricas**

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

**Fique atento!**

- Em um triângulo retângulo com ângulos de  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $45^\circ$ , os catetos são iguais.
- Em um triângulo retângulo com ângulos de  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $30^\circ$ , o cateto menor, oposto ao ângulo de  $30^\circ$ , é a metade da hipotenusa.

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

- 40.** Se  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ , calcule  $\sin \alpha$  ( $\hat{\alpha}$  é ângulo agudo.)

- 41.** Sabendo que  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , qual é o valor de  $\cos \alpha$ ? ( $\hat{\alpha}$  é ângulo agudo.)

$\cos \alpha = \frac{3}{5}$

- 42.** Quanto vale  $\tan \alpha$  se  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ ? ( $\hat{\alpha}$  é ângulo agudo.)

$\tan \alpha = \sqrt{15}$

## Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

Os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  são chamados **ângulos notáveis**, ou seja, ângulos que merecem atenção especial. No exercício 39, você pôde perceber como eles são obtidos (no quadrado e no triângulo equilátero).

Para os estudos de Trigonometria, é essencial que tais valores sejam memorizados. A tabela a lado apresenta esses valores:

Observe na tabela que a sequência de valores da linha do seno aparece invertida na linha do cosseno. Isso não é coincidência. Ocorre porque  $30^\circ$  e  $60^\circ$  são complementares, e  $45^\circ$  é complementar a si mesmo.

Assim:

- $\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ$  ( $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ )
- $\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ$  ( $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ )
- $\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ$  ( $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ )

Além disso, os valores da linha da tangente equivalem à razão dos valores do seno e do cosseno, pois  $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ . Por exemplo, na coluna do  $45^\circ$ , temos:

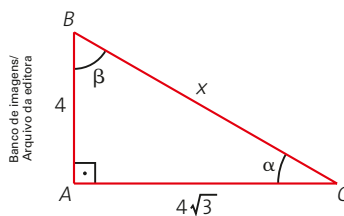
$$\bullet \text{ sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \bullet \text{ cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \bullet \text{ tan } 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

Dessa forma, nos exercícios que envolvem ângulos notáveis, você deve usar os valores memorizados e, nos demais exercícios, usar uma calculadora científica (lembre-se de que muitos modelos de celulares possuem esse tipo de calculadora) ou consultar a tabela do fim deste capítulo.

## “Resolvendo” triângulos retângulos

“Resolver” um triângulo retângulo é determinar as medidas não conhecidas de todos os seus seis elementos (3 lados e 3 ângulos) quando se conhece algumas delas.

Vamos “resolver” o triângulo retângulo a seguir usando a tabela da página 260 ou uma calculadora científica.



Conhecemos  $AB$  (4),  $AC$  ( $4\sqrt{3}$ ) e  $\hat{A}$  ( $90^\circ$ ), então devemos descobrir  $BC$  ( $x$ ),  $\hat{C}$  ( $\alpha$ ) e  $\hat{B}$  ( $\beta$ ).

$$\bullet x^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 48 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$$\bullet \text{ sen } \alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\bullet \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \beta + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

Nesse caso, temos:  $BC = 8$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  e  $\hat{C} = 30^\circ$ .

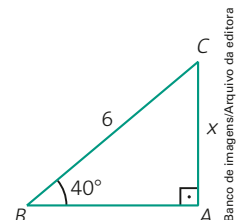
Já no triângulo retângulo da figura ao lado vamos calcular a medida  $x$  indicada.

Sendo  $\text{sen } 40^\circ = 0,64$ ,  $\text{cos } 40^\circ = 0,76$  e  $\text{tan } 40^\circ = 0,84$ , temos:

6: medida da hipotenusa

$x$ : medida do cateto oposto ao ângulo de  $40^\circ$

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{x}{6} \Rightarrow 0,64 = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 0,64 \cdot 6 = 3,84$$



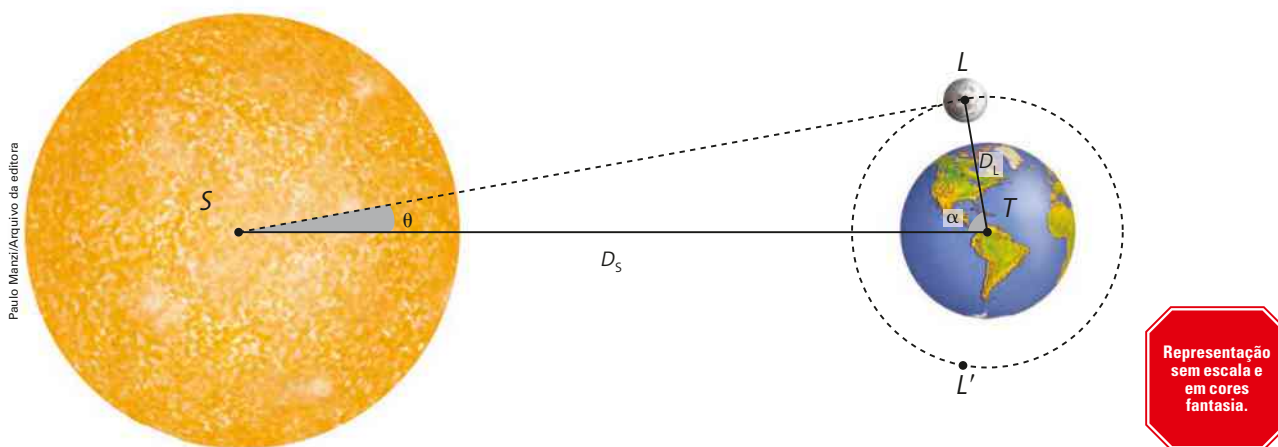
## Razões trigonométricas

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

## As distâncias da Terra ao Sol e à Lua

Desde a Antiguidade as pessoas têm curiosidade de saber o quão distantes estão o Sol e a Lua da Terra. Nos eclipses solares o disco lunar encobre o Sol, o que nos leva à conclusão de que o Sol está muito mais distante da Terra do que a Lua. Porém, quantas vezes mais distante? Para tentar responder a essa pergunta, Aristarco de Samos, que viveu entre 310 a.C. e 230 a.C., teve algumas boas ideias.

Aristarco observou a Lua nos momentos em que ela está metade iluminada e metade escura, ou seja, nas posições de quarto minguante e quarto crescente. A figura abaixo mostra o Sol ( $S$ ), a Terra ( $T$ ) e a Lua ( $L$ ), representados com tamanhos e órbitas fora de proporção, com fins meramente ilustrativos.



Imaginando na figura acima que a Lua gire em torno da Terra no sentido horário, a posição  $L$  indica o quarto minguante e nesse momento o ângulo  $TL S$  é reto. Na posição  $L'$ , simétrica de  $L$  em relação à reta  $ST$ , a Lua está em quarto crescente e o ângulo  $TL'S$  é também reto. Ocorre que o tempo que a Lua leva para ir de  $L$  até  $L'$  é menor do que o tempo em que ela leva para ir de  $L'$  até  $L$ , e isso fica bem claro na representação acima.

Considerando o ciclo lunar de 29,5 dias e o tempo em que a Lua passa de minguante para crescente, Aristarco estimou o ângulo  $\alpha = \hat{S}TL$  em cerca de  $87^\circ$ . Dessa forma  $\theta = \hat{T}SL = 3^\circ$ , sendo  $D_L$  e  $D_S$  as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol. Então, teremos em notação moderna  $\frac{D_L}{D_S} = \text{sen } 3^\circ = 0,05234$ . Portanto, pela observação de Aristarco,  $D_S = \frac{1}{0,05234} D_L \approx 19D_L$ , e o Sol estaria 19 vezes mais distante da Terra do que a Lua.

A ideia de Aristarco foi boa, porém ele cometeu erros muito grandes nas medidas dos ângulos, uma vez que era muito difícil saber exatamente quando a Lua estava em quarto minguante ou quarto crescente.

No século XX, com instrumentos mais precisos, foi possível determinar que o ângulo  $\theta$  é equivalente a  $0,15^\circ$  e, usando o mesmo método de Aristarco mais de 2 200 anos atrás, chegamos ao seguinte resultado:

$$D_S = \frac{1}{\text{sen}(0,15^\circ)} D_L = \frac{1}{0,002618} D_L \approx 382D_L$$

A estimativa é excelente e próxima da real; entretanto, atualmente sabemos que um valor ainda mais preciso seria  $D_S = 390D_L$ , ou seja, comparando a distância entre a Lua e a Terra com a distância entre o Sol e a Terra, temos que a distância entre o Sol e a Terra é 390 vezes maior do que a distância entre a Lua e a Terra.

## A evolução do cálculo dos senos e cossenos

Com uma calculadora científica você obtém facilmente senos e cossenos de qualquer ângulo. Por exemplo, para saber o cosseno do ângulo de  $20^\circ$  apertamos a tecla “cos” da calculadora, digitamos o número “20”, depois a tecla “=” e aparece o número 0,93969...

### Fique atento!

Observe se a calculadora científica está aceitando valores de graus; geralmente essa função já está selecionada. Caso o valor obtido para  $\cos 20^\circ$  não seja igual ao indicado, verifique no modo (*mode*) de funcionamento da calculadora se a opção grau (*degree*) está selecionada.

No século XVIII, com o Cálculo de Newton e Leibniz em pleno desenvolvimento, um matemático inglês chamado Brook Taylor descobriu que funções podem ser aproximadas por polinômios. Por exemplo, para calcular  $\cos x$  quando  $x$  é um número real relativamente pequeno usamos o Polinômio de Taylor, que para a função cosseno é:



Detalhe de uma calculadora científica.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Quanto maior o número de parcelas, maior a precisão obtida.

Na fórmula acima, aparece o símbolo de **fatorial** que quer dizer:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

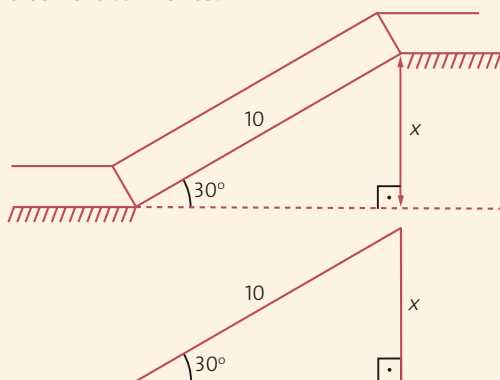
No nosso exemplo, para calcular (de forma aproximada) o cosseno de  $20^\circ$ , primeiro transformamos a medida do ângulo de graus para radianos:

$$\begin{cases} 180^\circ = \pi \text{ radianos} \\ 20^\circ = x \text{ radianos} \end{cases} \Rightarrow 180x = 20\pi \Rightarrow x = \frac{20\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{45} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} \approx 0,3491$$

Tomando  $20^\circ$  como 0,3491 radianos, substituímos esse valor de  $x$  no Polinômio de Taylor, e, realizando os cálculos apenas até  $-\frac{x^6}{6!}$ , encontramos o valor do cosseno de  $20^\circ$ , que é igual a 0,93968, já com quatro casas decimais corretas.

A calculadora científica calcula as funções trigonométricas no momento em que você digita usando métodos desenvolvidos no século XVIII, mas com tecnologia moderna, que permite que cálculos pesados sejam feitos em um tempo ínfimo.

7. Uma rampa lisa de 10 metros de comprimento faz ângulo de  $30^\circ$  com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se quantos metros verticalmente?



### Resolução:

Pelo desenho, temos:

$$\begin{cases} 10 \rightarrow \text{medida da hipotenusa} \\ x \rightarrow \text{medida do cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ \end{cases}$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

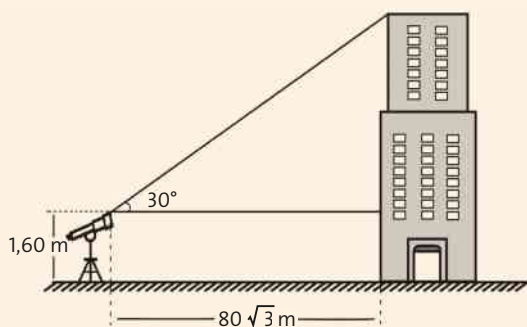
Logo, a pessoa eleva-se 5 metros verticalmente.

### Fique atento!

$30^\circ$  é um ângulo notável; logo, é importante memorizar que  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ .

## Resolvido passo a passo

8. (Unifor-CE) Uma pessoa está a  $80\sqrt{3}$  m de um prédio e vê o topo do prédio sob um ângulo de  $30^\circ$ , como mostra a figura abaixo. Se o aparelho que mede o ângulo está a 1,6 m de distância do solo, então podemos afirmar que a altura do prédio em metros é:



- a) 80,2                      c) 82,0                      e) 83,2  
b) 81,6                      d) 82,5

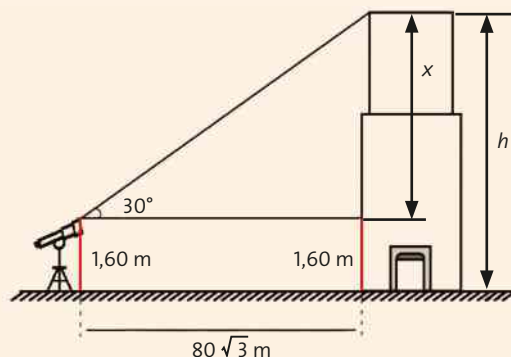
### 1. Lendo e compreendendo

- a) O que é dado no problema?  
São dados a distância do aparelho de medida ao prédio, a altura em que ele se encontra, bem como seu grau de inclinação com a horizontal.

- b) O que se pede?  
A altura do prédio em metros.

### 2. Planejando a solução

De acordo com os dados do enunciado, podemos completar algumas informações na figura apresentada:



Observe que podemos calcular a altura do prédio ao adicionar a medida do cateto oposto ao ângulo de  $30^\circ$  e a altura do aparelho de medição.

Para obter a medida do cateto oposto ao ângulo de  $30^\circ$  ( $x$ ), usaremos a relação trigonométrica tangente.

### 3. Executando o que foi planejado

Calculamos a medida do cateto oposto ao ângulo de  $30^\circ$ :

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{80\sqrt{3}} \Rightarrow 3x = 80 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow 3x = 80 \cdot 3 \Rightarrow x = 80$$

Agora, calculamos a altura do prédio:

$$h = x + 1,6 \Rightarrow h = 80 + 1,6 \Rightarrow h = 81,6$$

Logo, a altura do prédio é 81,6 metros.

### 4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa b.

### 5. Ampliando o problema

- a) Agora, determine quantos andares e quantos apartamentos há no prédio citado, sabendo que nos dois últimos andares há apenas um apartamento, nos demais dois apartamentos por andar e no térreo, que mede 4,6 m de altura, não há apartamentos. Observação: comercialmente um andar possui, em média, 3,85 m de altura. **O prédio possui 20 andares, além do térreo; 38 apartamentos.**
- b) *Discussão em equipe*  
Troque ideias com seus colegas a respeito da evolução tecnológica na engenharia e na construção civil. Debatam sobre as grandes obras arquitetônicas das últimas décadas como os monumentais prédios de Dubai. **Resposta pessoal.**
- c) Pesquise sobre os aparelhos de medidas utilizados para medição de grandes objetos, como prédios, pontes, avenidas, entre outros, e sobre o auxílio das tecnologias nesse processo. **Resposta pessoal.**

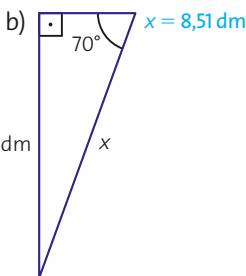
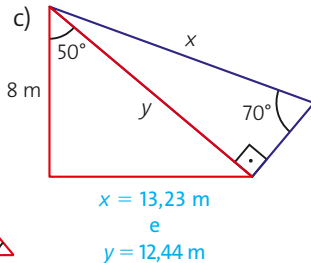
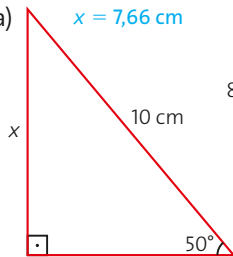
# Exercícios



### Fique atento!

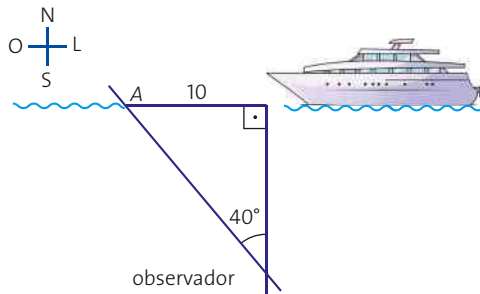
Nos exercícios a seguir, use sua calculadora (ou a tabela trigonométrica do fim deste capítulo) apenas quando os ângulos não forem notáveis. Caso contrário, procure fazê-los usando os valores memorizados para  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

43. Determine o valor das incógnitas em cada figura.



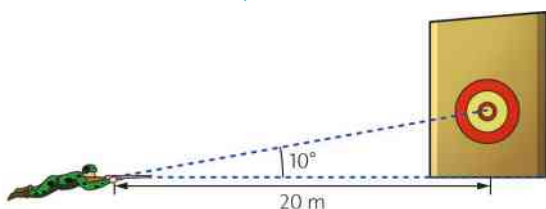
Ilustrações: Banco de Imagens/Arquivo da editora

44. Um navio está situado exatamente 10 milhas a leste de um ponto A. Um observador, situado exatamente ao sul do navio, vê o ponto A sob um ângulo de  $40^\circ$ . Calcule a distância entre o observador e o navio. **12,05 milhas**



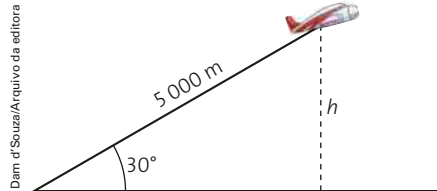
Dam d'Souza/Arquivo da editora

45. Em um exercício de tiro esportivo, o alvo se encontra em uma parede e sua base está situada a 20 metros do atirador. Sabendo que o atirador vê o alvo sob um ângulo de  $10^\circ$  em relação à horizontal, calcule a que distância o centro do alvo se encontra do chão. **3,6 m**



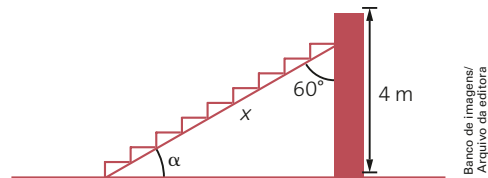
Dam d'Souza/Arquivo da editora

46. Na figura abaixo, qual é a altura do avião em relação ao chão? **2 500 m**



Dam d'Souza/Arquivo da editora

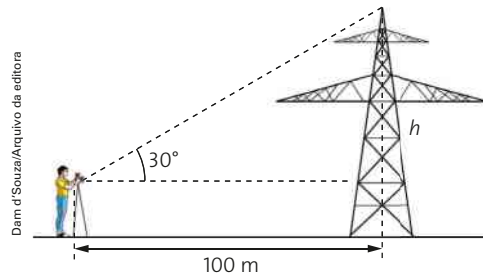
47. Observe a figura a seguir e responda às questões:



Banco de Imagens/Arquivo da editora

- Qual é o comprimento da escada? **8 m**
- Qual é o ângulo formado pela escada e o chão?  **$30^\circ$**

48. Para determinar a altura de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 100 m da base e obtém um ângulo de  $30^\circ$ , conforme mostra a figura. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,70 m do solo, qual é aproximadamente a altura da torre?  **$h = 59,7$  m**



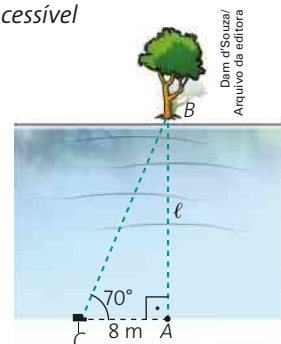
Dam d'Souza/Arquivo da editora

49. *Medição de distância inacessível*



Queremos saber a largura  $\ell$  de um rio sem atravessá-lo. Para isso, adotamos o seguinte processo:

- marcamos dois pontos, A (uma estaca) e B (uma árvore), um em cada margem;
  - marcamos um ponto C, distante 8 m de A, onde fixamos o aparelho para medir ângulos (teodolito), de tal modo que o ângulo no ponto A seja reto;
  - obtemos uma medida de  $70^\circ$  para  $\hat{C}$ .
- Nessas condições, qual é a largura  $\ell$  do rio?  **$\ell = 22$  m**



Dam d'Souza/Arquivo da editora

50. Um arame de 120 m de comprimento é esticado do topo de um prédio até o solo. Calcule a altura do prédio sabendo que o arame forma com o solo um ângulo de  $25^\circ$ . **50,4 m**



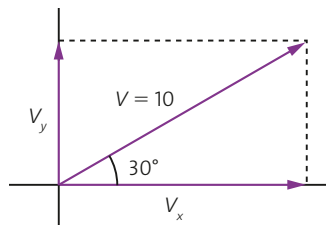


**51. Física**

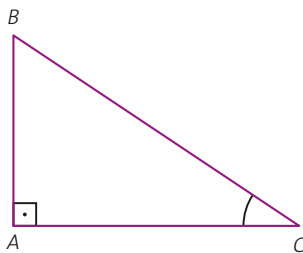
Em Física muitas grandezas são representadas por vetores, que são segmentos de reta orientados que possuem um tamanho (diz-se “módulo” do vetor), uma direção e um sentido (indicado pela flecha na ponta do vetor). Quando a direção desses vetores não é nem horizontal nem vertical, eles podem ser decompostos em outros dois vetores, sendo um horizontal e outro vertical. Na figura a seguir, observa-se um vetor  $V$ , de módulo (tamanho) 10, cuja direção está inclinada  $30^\circ$  em relação à horizontal. Use seus conhecimentos de Trigonometria para calcular qual é o módulo (tamanho) do vetor  $V_x$  na horizontal e do vetor  $V_y$  na vertical.

(Observação: As linhas tracejadas são perpendiculares aos eixos horizontal e vertical.)

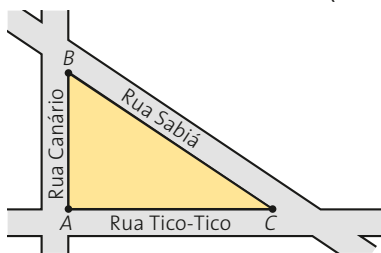
$V_x = 5\sqrt{3}; V_y = 5$



**52.** No triângulo retângulo da figura a hipotenusa mede 4 cm e o seno do ângulo  $\hat{C}$  é 0,6. Calcule o perímetro e a área da região determinada por esse triângulo. **24 cm e 24 cm<sup>2</sup>**

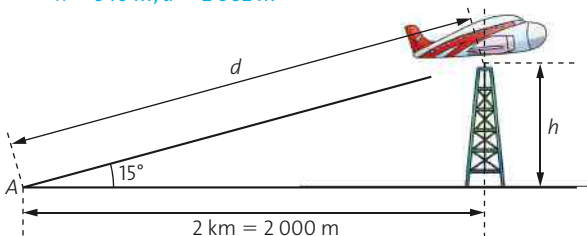


**53.** As ruas Canário e Tico-Tico são perpendiculares. A distância entre os pontos A e B é de 50 m. As ruas Canário e Sabiá cruzam-se em B formando um ângulo de  $60^\circ$ . Qual é o perímetro do triângulo ABC determinado pelos cruzamentos dessas três ruas? (Use  $\sqrt{3} = 1,7$ ) **235 m**



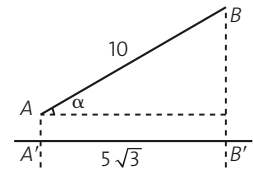
**54.** Um avião levanta voo em A e sobe fazendo um ângulo constante de  $15^\circ$  com a horizontal. A que altura estará e qual a distância percorrida quando sobrevoar uma torre situada a 2 km do ponto de partida?

$h = 540 \text{ m}; d = 2\ 062 \text{ m}$

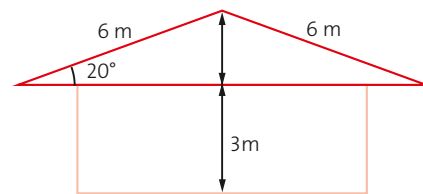


Dem d'Souza/Arquivo da editora

**55.** Um segmento de reta AB de 10 cm faz um ângulo agudo  $\alpha$  com a horizontal. Sua projeção  $A'B'$  na horizontal mede  $5\sqrt{3}$  cm. Qual é o valor do ângulo  $\alpha$ ?  **$\alpha = 30^\circ$**

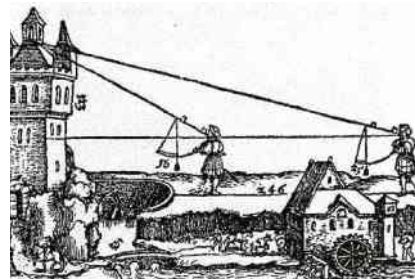


**56.** Na construção de um telhado foram usadas telhas francesas e o “caimento” do telhado é de  $20^\circ$  em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da casa, foram construídos 6 m de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa. **5,04 m**



**57.** A figura abaixo, encontrada no livro de Apianus, *Quadrans astronomicus*, de 1535, mostra a medição da altura de uma torre.  **$h \approx 188$  unidades de comprimento**

<http:alunos.cc.fc.ul.pt/Arquivo da editora

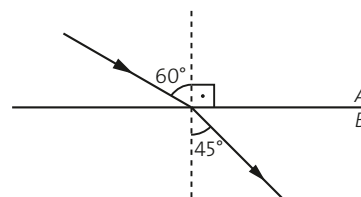


Como se pode observar na figura, aparentemente o homem viu a torre sob um ângulo de  $50^\circ$ , andou 246 unidades de comprimento para trás e novamente viu a torre, agora sob um ângulo de  $25^\circ$ . Supondo esses dados, qual seria a altura da torre, na unidade de medida de comprimento adotada e sem considerar a altura da pessoa que mede?

$h \approx 188$  unidades de comprimento

**58. Física**

Um raio luminoso monocromático passa de um meio A para um meio B de acordo com a figura:



O meio A é o ar, em que  $n_A = 1$ . Determinem o índice de refração absoluto do meio B. Usem a lei de Snell-Descartes:  $n_A \cdot \sin \hat{i} = n_B \cdot \sin \hat{r}$ .  **$n_B = \frac{\sqrt{6}}{2}$**

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

 Tabela de razões trigonométricas

Ângulo	sen	cos	tan	Ângulo	sen	cos	tan
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

# Pensando no Enem



Matriz do Enem H2: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

1. Leia o texto a seguir e observe as ilustrações.

“[...] Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro.

[...] Começando com um triângulo retângulo de catetos de comprimento  $L$  e dividindo seus lados ao meio, obtemos quatro triângulos congruentes que são semelhantes ao original, com razão de semelhança igual a  $\frac{1}{2}$ .

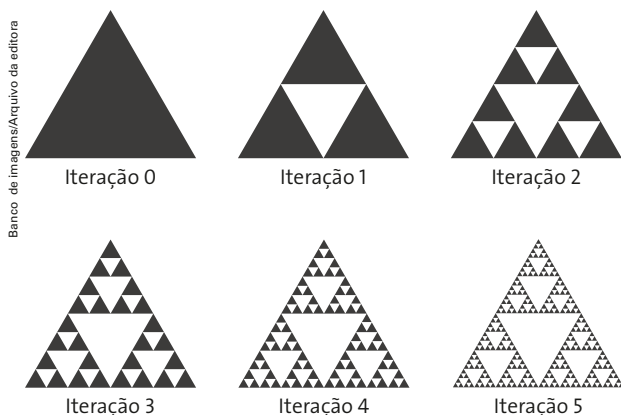
Retirando o interior do triângulo central e repetindo sucessivamente o processo nos triângulos restantes, obtemos como limite um fractal chamado triângulo de Sierpinski.”



Fonte: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Fractais no Ensino Médio. Revista do Professor de Matemática, n. 57. 2º quadrimestre de 2005. p. 1-8.

Esse procedimento é uma descrição da construção iterativa do fractal denominado Triângulo de Sierpinski partindo de um triângulo retângulo, mas podemos partir de um triângulo equilátero (como abaixo).

Iteração	0	1	2	3	...	$n$
Número de triângulos	1	3	$3^2$	$3^3$	...	$3^n$



A afirmação correta é:

- a) O número de triângulos cresce linearmente a cada iteração.
- x b) A sequência formada pelas áreas totais de cada figura a cada iteração é uma progressão geométrica de razão  $\frac{3}{4}$ .
- c) A sequência formada pelas áreas de cada triângulo, a cada iteração, é uma progressão geométrica de razão  $\frac{3}{4}$ .
- d) A sequência formada pelo número de triângulos a cada iteração é uma progressão aritmética de razão 3.
- e) A área de cada triângulo tende a infinito.

Matriz do Enem H7: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

2. Leia o texto a seguir e considere as afirmações.

“[...]

## AS TERNAS PITAGÓRICAS

Os indianos védicos estavam familiarizados com ternas pitagóricas, isto é, números satisfazendo a relação  $a^2 + b^2 = c^2$ . É interessante observar que desde antes de 1943 já se tinha conhecimento de que os *Sulbasutras* continham ternas pitagóricas. Além disso, algumas das ternas lá encontradas, por exemplo a (8, 15, 17), satisfazem a propriedade básica das ternas pitagóricas, mas não estão entre aquelas relacionadas aos pitagóricos – essas últimas [as relacionadas aos pitagóricos] têm a propriedade de que, **após todos os fatores comuns terem sido removidos, a diferença entre os dois maiores números é igual a 1**.

Devido ao uso frequente do teorema de Pitágoras, encontramos nos *Sulbasutras* muitos exemplos de ternas pitagóricas:

- no Apastamba *Sulbasutra* encontramos as ternas pitagóricas (15, 36, 39), (3, 4, 5), (5, 12, 13) e (12, 15, 37);
- no Baudahayana *Sulbasutra* a terna (7, 24, 25);
- no Mãnava *Sulbasutra*, (72, 96, 120) e (40, 96, 104).”

Fonte: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. O Teorema de Pitágoras na Antiguidade: um olhar sobre a história da matemática indiana. Revista do Professor de Matemática, n. 87. Seção História & Histórias. 2º quadrimestre de 2015. p. 2-8.

- I. Todas as ternas do Apastamba *Sulbasutra* mencionadas têm a propriedade daquelas relacionadas aos pitagóricos.
- II. Ambas as ternas do Mãnava *Sulbasutra* mencionadas têm a propriedade daquelas relacionadas aos pitagóricos.
- III. A única terna do Baudahayana *Sulbasutra* mencionada não é pitagórica porque  $25^2 \neq 24^2 + 7^2$ .

Podemos dizer que:

- a) I e II são verdadeiras.
- b) II e III são verdadeiras.
- c) I e III são verdadeiras.
- d) I, II e III são verdadeiras.
- x e) II é verdadeira.

Organize uma pesquisa com os alunos sobre o que eram os *Sulbasutras*, e a sua importância matemática na Índia antiga.

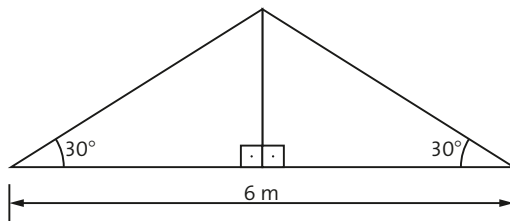
# Vestibulares de Norte a Sul



## Região Norte

1. (Ufam) Uma empresa contratou um empregado para trabalhar de segunda a sexta durante duas semanas. O dono da empresa pagou R\$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ele recebeu no dia anterior. Quanto o empregado recebeu pelos 10 dias que trabalhou?  
a) R\$ 511,00.  
b) R\$ 660,00.  
c) R\$ 830,00.  
d) R\$ 941,00.  
 e) R\$ 1 023,00.
2. (UFT-TO) Para que o telhado de uma casa possa ser construído deve-se levar em consideração alguns fatores de dimensionamento, dentre os quais as especificações relacionadas com a largura e o ângulo de elevação do telhado. Conforme exemplo ilustrado na figura a seguir:

Banco de imagens/Arquivo da editora



De acordo com as informações anteriormente indicadas no exemplo ilustrado, a medida da elevação do telhado é: (considere duas casas decimais após a vírgula e  $\tan 30^\circ = 0,58$ )

- a) 0,90 m.
- b) 1,74 m.
- c) 1,80 m.
- d) 3,00 m.
- e) 3,48 m.

## Região Nordeste

3. (Uneb-BA) Evite o excesso de álcool, pois ele aumenta os efeitos do estrogênio. Algumas pesquisas sugerem que beber apenas uma unidade de álcool por dia aumenta o risco de câncer de mama em 11%, aumentando para 24% com duas unidades e 38% com três unidades diárias. (BREWER. 2013, p. 75). Se as diferenças entre os percentuais que indicam o risco de câncer de mama informados no texto crescessem formando uma progressão aritmética, à medida que o número de unidades de álcool ingeridas por dia aumentassem, então uma pessoa que inge-

risse cinco unidades de álcool, diariamente, teria um risco de desenvolver câncer de mama de:

- |  |          |
|--|----------|
| 01) 72%.                                     | 04) 65%. |
| <input checked="" type="checkbox"/> 02) 69%. | 05) 63%. |
| 03) 67%.                                     |          |
4. (UFRN) Numa escola, o acesso entre dois pisos desnivelados é feito por uma escada que tem quatro degraus, cada um medindo 24 cm de comprimento por 12 cm de altura. Para atender à política de acessibilidade do Governo Federal, foi construída uma rampa, ao lado da escada, com mesma inclinação, conforme mostra a foto abaixo.



Reprodução/Vestibular UFRN

Com o objetivo de verificar se a inclinação está de acordo com as normas recomendadas, um fiscal da Prefeitura fez a medição do ângulo que a rampa faz com o solo.

O valor encontrado pelo fiscal:

- a) estava entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ .
- b) era menor que  $30^\circ$ .
- c) foi exatamente  $45^\circ$ .
- d) era maior que  $45^\circ$ .

## Região Centro-Oeste

5. (Univag-MT) Dois irmãos decidiram ler um livro de 903 páginas. Um irmão irá ler 37 páginas por dia e o outro irá ler 3 páginas no primeiro dia, 7 páginas no segundo, 11 páginas no terceiro e assim sucessivamente, lendo a cada dia 4 páginas a mais do que no dia anterior. A diferença, em dias, entre o tempo de leitura desse livro por cada um dos irmãos será:  
 a) 4.  
b) 5.  
c) 1.  
d) 2.  
e) 3.

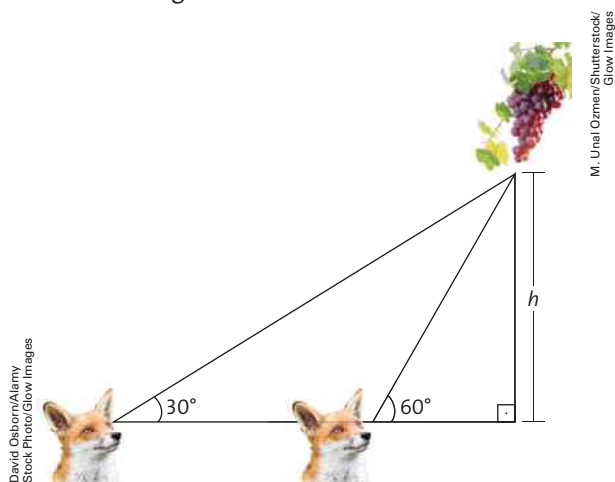


6. (UEG-GO) Do alto de um edifício de 24 metros de altura, um engenheiro vê o topo de um outro edifício mais alto, observando-o sob um ângulo de  $30^\circ$ . Sabendo que a distância entre os dois edifícios é de  $100\sqrt{3}$  metros, a altura do edifício mais alto é:
- a)  $100\sqrt{3}$  m.                      x c) 124 m.  
b) 100 m.                              d)  $124\sqrt{3}$  m.

### Região Sudeste

7. (Unicamp-SP) O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a:
- a)  $3,0 \text{ m}^2$ .  
b)  $2,0 \text{ m}^2$ .  
x c)  $1,5 \text{ m}^2$ .  
d)  $3,5 \text{ m}^2$ .

8. (Cefet-MG) Uma raposa avista um cacho de uvas em uma parreira sob um ângulo de  $30^\circ$  formado com a horizontal. Então, preguiçosamente ela se levanta, anda  $\sqrt{3}$  m em direção à base da parreira e olha para as uvas sob um ângulo de  $60^\circ$ , como mostra a figura abaixo.



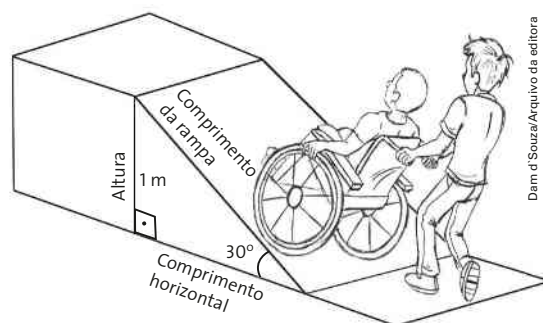
Nessas condições, a altura  $h$  do cacho de uvas, em metros, é:

- a) 1,0.  
x b) 1,5.  
c) 1,7.  
d) 3,4.

### Região Sul

9. (Unisc-RS) A meia-vida de um elemento radioativo é o intervalo de tempo em que uma amostra deste elemento se reduz à metade. O Cobalto-60, usado na medicina como fonte de radiação, tem meia-vida de 5 anos. A porcentagem de sua atividade original que permanecerá no fim de 25 anos é:
- a) 50%.                                      d) 6,25%.  
b) 25%.                                      x e) 3,125%.  
c) 12,5%.

10. (UEL-PR) Analise a figura a seguir.



A questão da acessibilidade nas cidades é um desafio para o poder público. A fim de implementar as políticas inclusivas, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) criou normas para acessibilidade arquitetônica e urbanística. Entre elas estão as de construção de rampas de acesso, cuja inclinação com o plano horizontal deve variar de 5% a 8,33%. Uma inclinação de 5% significa que, para cada metro percorrido na horizontal, a rampa sobe 0,05 m. Recorrentemente, os acessos por rampas não respeitam essas normas, gerando percursos longos em inclinações exageradas. Conforme a figura, observou-se uma rampa de acesso, com altura de 1 metro e comprimento da rampa igual a 2 metros.

Se essa rampa fosse construída seguindo as normas da ABNT, com inclinação de 5%, indique a alternativa que apresenta, corretamente, a diferença de comprimento dessas rampas, em metros.

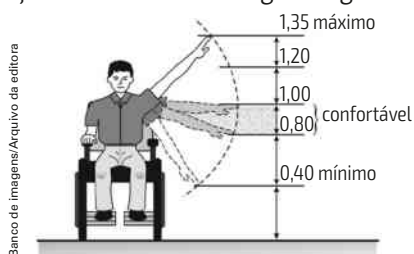
- a) 5.  
b) 20.  
c)  $2 + \frac{1}{20}$ .  
x d)  $\sqrt{401} - 2$ .  
e)  $\sqrt{4,01} + \frac{1}{20}$ .





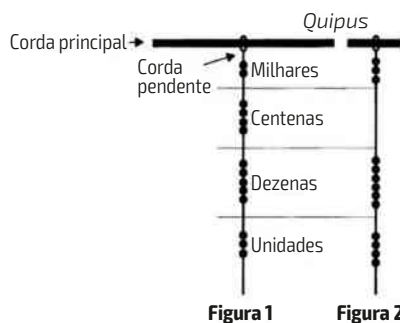
## Unidade 1

1. (Enem) Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas, alerta para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades. Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é

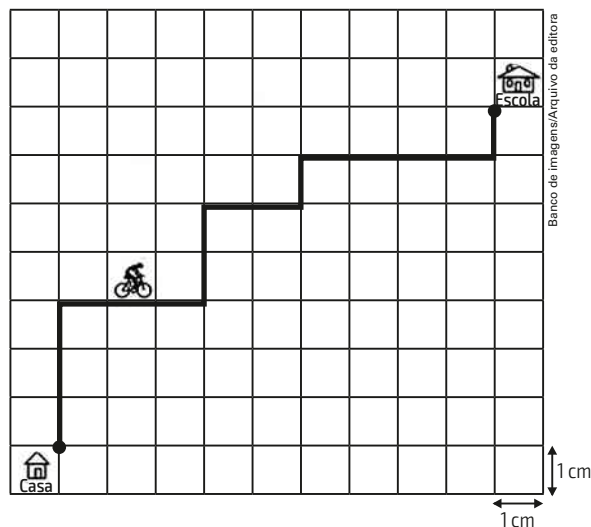
- a) 0,20 m e 1,45 m.                      d) 0,25 m e 1,30 m.  
 b) 0,20 m e 1,40 m.                      x e) 0,45 m e 1,20 m.  
 c) 0,25 m e 1,35 m.
2. (Enem) Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus*. O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o *quipus* representa o número decimal 2 453. Para representar o “zero” em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.



O número da representação do *quipus* da Figura 2, em base decimal, é

- a) 364.                      x c) 3 064.                      e) 4 603.  
 b) 463.                      d) 3 640.

3. (Enem) A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1 : 25 000, por um período de cinco dias.



Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

- a) 4.  
 b) 8.  
 c) 16.  
 d) 20.  
 x e) 40.
4. (Enem) O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: <<http://g1.globo.com>>. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

- x a) 32.  
 b) 34.  
 c) 33.  
 d) 35.  
 e) 31.



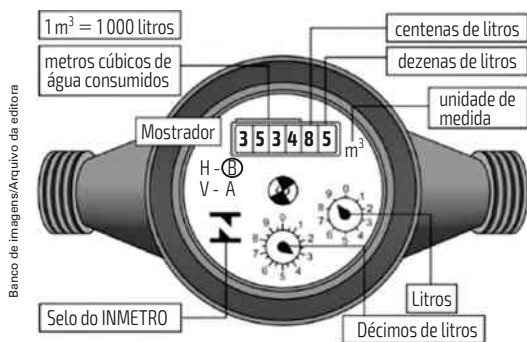
5. (Enem) Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a aproximadamente 2,95 centilitros (cL).

Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.

Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de

- a) 0,83.
- b) 1,20.
- x c) 12,03.
- d) 104,73.
- e) 120,34.

6. (Enem) Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em  $m^3$ , e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir.



Disponível em: <www.aguasearacoiba.com.br>(adaptado)

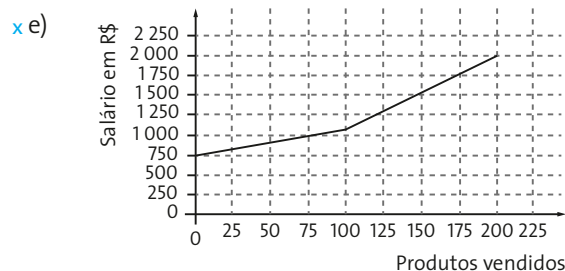
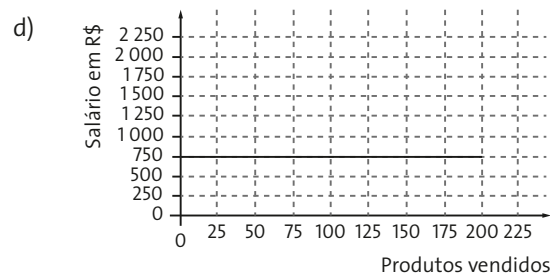
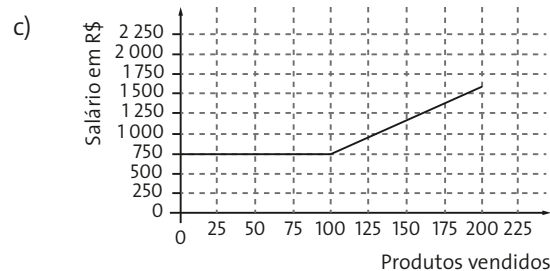
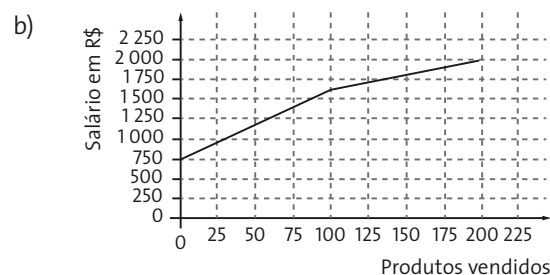
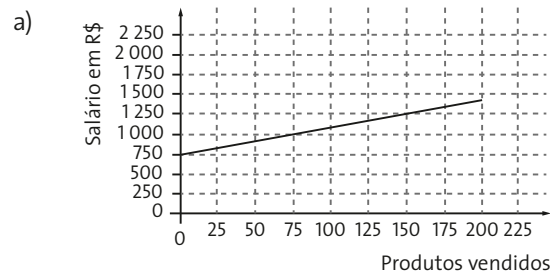
Considerando as informações indicadas na figura, o consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a

- a) 3 534,85.
- b) 3 544,20.
- c) 3 534 850,00.
- x d) 3 534 859,35.
- e) 3 534 850,39.

## Unidade 2

7. (Enem) Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R\$ 750,00, mais uma comissão de R\$ 3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R\$ 9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido.

Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é



Gráficos: Banco de imagens/Arquivo da editora

8. (Enem) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$$Q_o = -20 + 4P$$

$$Q_d = 46 - 2P$$

em que  $Q_o$  é a quantidade de oferta,  $Q_d$  é a quantidade de demanda e  $P$  é o preço do produto.

A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando  $Q_o$  e  $Q_d$  se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

- a) 5.       b) 11.      c) 13.      d) 23.      e) 33.

9. (Enem) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial  $f$ , de grau menor que 3, para alterar as notas  $x$  da prova para notas  $y = f(x)$ , da seguinte maneira:

– A nota zero permanece zero.

– A nota 10 permanece 10.

– A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função  $y = f(x)$  a ser utilizada pelo professor é

a)  $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$ .      d)  $y = \frac{4}{5}x + 2$ .

b)  $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$ .      e)  $y = x$ .

c)  $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$ .

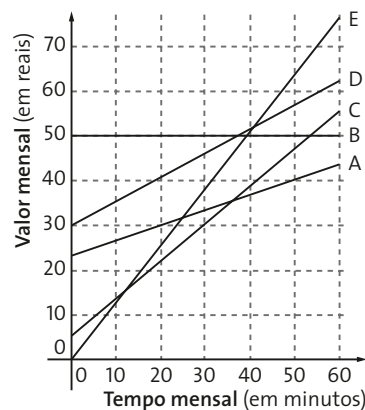
10. (Enem) A temperatura  $T$  de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ( $t = 0$ ) e varia de acordo com a expressão  $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$ , com  $t$  em minutos.

Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de  $39^\circ\text{C}$ .

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

- a) 19,0.       d) 38,0.  
b) 19,8.      e) 39,0.  
c) 20,0.

11. (Enem) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.

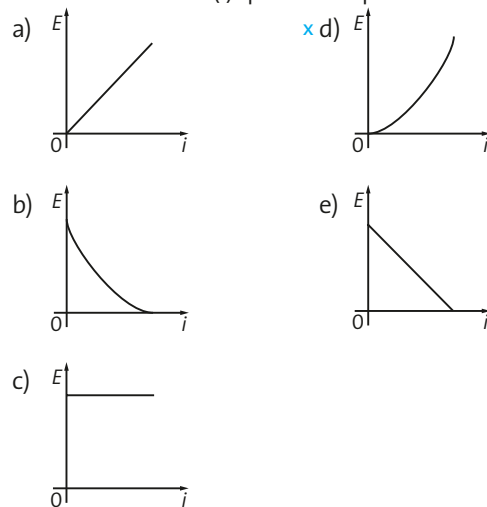


Essa pessoa pretende gastar exatamente R\$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

- a) A.      b) B.       c) C.      d) D.      e) E.

12. (Enem) Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência ( $P$ ) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica ( $R$ ) e o quadrado da corrente elétrica ( $i$ ) que por ele circula. O consumo de energia elétrica ( $E$ ), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho. Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida ( $E$ ) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica ( $i$ ) que circula por ele?



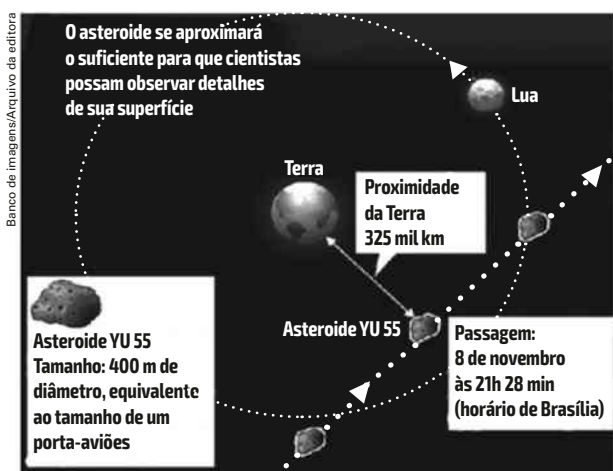
## Unidade 3

13. (Enem) Entre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área  $A$  da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa  $m$  pela fórmula

$$A = k \times m^{\frac{2}{3}},$$
 em que  $k$  é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

- a)  $\sqrt[3]{16}$ .  
x b) 4.  
c)  $\sqrt{24}$ .  
d) 8.  
e) 64.
14. (Enem) A Agência Espacial Norte-Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Fonte: NASA. Disponível em: <<http://noticias.terra.com.br>> (adaptado).

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

- a)  $3,25 \times 10^2$  km.  
b)  $3,25 \times 10^3$  km.  
c)  $3,25 \times 10^4$  km.  
x d)  $3,25 \times 10^5$  km.  
e)  $3,25 \times 10^6$  km.

## Unidade 4

15. (Enem) As projeções para a produção de arroz no período de 2012–2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

- a) 497,25.  
b) 500,85.  
c) 502,87.  
x d) 558,75.  
e) 563,25.
16. (Enem) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.

A quantidade de cartas que forma o monte é

- a) 21.  
x b) 24.  
c) 26.  
d) 28.  
e) 31.

# Respostas

## UNIDADE 1 • Números e funções

### Capítulo 1 • Conjuntos numéricos

1. a)  $M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots\}$   
b)  $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$   
c)  $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$   
d)  $C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$
2. a)  $\{0, 1, 2\}$   
b)  $\{-2, -1, 0, 1, \dots\}$   
c)  $\{0, 1\}$   
d)  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$   
e) Não existe valor para  $x$ .  
f)  $\{\dots, -3, -2, -1\}$
5. A:  $\frac{4}{3}$ ; B: 0,181818...; C:  $1\frac{4}{5}$ ; D: -2,5; E:  $-\frac{5}{4}$ ; F: 0,7; G:  $-\frac{7}{10}$
6. a) 0,875  
b)  $0,555\dots = 0,\bar{5}$   
c) 1,4  
d)  $1,\bar{6}$
7. a)  $\frac{1}{3}$   
b)  $\frac{1}{6}$   
c)  $\frac{8}{33}$   
d)  $\frac{283}{2250}$
8.  $0,25 < \frac{1}{2} < 0,5\bar{2} < 0,5 < \frac{6}{10} < \frac{4}{5}$
9. Exata: **b, e**; infinita periódica: **a, d**; infinita não periódica: **c, e**.
10. a) 3; 4  
b) Infinitos; infinitos.
11. a) V  
b) F
12. a) • 6 • 16  
• 8 • 300  
• 12 • 86  
• 22 • 16  
b) Todos os resultados são números pares.
13. a) 7  
b)  $\pi - 3$   
c)  $5 - \pi$   
d) -15  
e) 16  
f) -7  
g) 3  
h) 11
14.  $PQ = 365$ ;  $PM = 96$ ;  $MQ = 269$
16. a)  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$  c)  $\{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
b)  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$  d)  $\{0, 6, 8\}$

### Resolvido passo a passo

6. a) 500 panfletos de Pedagogia, 600 panfletos de Sistemas da Computação e 800 panfletos de Administração.  
b) R\$ 4 100,00

18. a)  $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
b)  $\{4, 5, 6\}$   
c)  $\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$   
d)  $\{0, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$   
e)  $\{6\}$
19. a)  $\{a, c, e, f\}$   
b) B  
c)  $\{h, i\}$   
d)  $\{a, c, e, f, h, i\}$
20. a)  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$   
b)  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$
21. a)  $\mathbb{Z}$  d)  $\mathbb{Q}$   
b)  $\mathbb{Z}$  e)  $\mathbb{N}$
22. a)  $(A \cup B) \cap C$  ou  $(A \cap C) \cup (B \cap C)$   
b)  $(A \cap B) \cup (B \cap C)$  ou  $(A \cup C) \cap B$
24. a) 25 alunos.  
b) 10 alunos.  
c) 50 alunos.
25. a) 41 estudantes.  
b) 27 estudantes.
27. a) 54 famílias.  
b) 315 famílias.  
c) 365 famílias.
28. a) 43%  
b) 7%  
c) 57%
29. 5
30. 5 alunos.
31. 34
32. 21 pesquisados.
33. a)  $[-4, 2]$   
b)  $(1, +\infty)$   
c)  $(-\infty, 1]$   
d)  $(\frac{1}{2}, 3]$   
e)  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$   
f)  $(0,75; 0,90)$
35. a) V d) V  
b) F e) V  
c) V

36. a)  $A \cap B = [3, 4]$ ;  $A \cup B = [2, 6]$  e  $A - B = [2, 3]$   
 b)  $A \cup B = (-\infty, 4)$  e  $A \cap B = (-\infty, 1)$   
 c)  $A \cup B = [-2, +\infty)$  e  $A \cap B = [-1, 0)$

37. a)  $(-\infty, 6]$   
 b)  $(-5, 2]$   
 c)  $[-6, 2]$   
 d)  $(-5, 2]$

38. Sim.

40. a) 120  
 b) 900  
 c) 5  
 d) 1600  
 e) 55  
 f) 80  
 g) 200  
 h) 350

41. a) R\$ 30,00  
 b) 70 000 habitantes.  
 c) 100 km  
 d) R\$ 88,00

42. a) 1 134  
 b) 27 444  
 c) 2 340

43. a) 1,75 polegada  
 b) Menos.  
 c) 40 polegadas  
 d) 18,75 mm

#### Para refletir

Página 14.

- Sim.
- Sim.
- Sim.
- Não.

Página 15.

- Não, todo número natural é inteiro.
- Sim, os números inteiros negativos.

Página 17.

Porque é a fração que dá origem ao número decimal.

Página 19.

- Nem sempre.
- Sim.

Página 36.

$\{3, 5\}$  representa o conjunto dos elementos 3 e 5.  
 $(3, 5)$  representa o conjunto dos números reais entre 3 e 5 e também representa o par ordenado de abscissa 3 e ordenada 5.  
 $[3, 5]$  representa o conjunto dos números reais de 3 até 5.

Página 39.

Polígono convexo é um polígono cujos ângulos internos são todos menores do que  $180^\circ$ .

## Capítulo 2 • Funções

1. a) A área é dada em função da medida do lado.

- b) A área A.  
 c) O lado  $\ell$ .  
 d)  $A = \ell^2$   
 e)  $144 \text{ cm}^2$   
 f) 13 cm

2. a)  $d = \ell\sqrt{2}$   
 b)  $C = 2\pi r$

4. a) Sim.

b) O custo de produção (c) é dado em função do número de peças (x).

- c)  $c = 1,20x$   
 d) R\$ 12,00; R\$ 24,00; R\$ 60,00  
 e) 100 peças.

5. a)  $f(x) = \frac{x}{3}$   
 b)  $f(x) = 2x - 3$   
 c)  $f(x) = \frac{x}{2} + 3$   
 d)  $f(x) = x^2 + x^2$

6. a)  $y = 8x$   
 b)  $y = 14x$

7. a)  $Q = 72 + 10x$   
 b) R\$ 172,00  
 c) 20 clientes.  
 d)  $C = x + 6$

9. a) 80 unidades.  
 b) Lucro.

10.  $y = 5x + 1$

11. a e c.

12. É função.

13. Não é função.

14. Sim.

16. a) Sim.  $f(x) = \sqrt{x}$   
 b) Sim.  $f(x) = x^2$

17. a)  $D(f) = \{3, 4, 5, 6\}$   
 b)  $\text{Im}(f) = \{1, 3, 7\}$   
 c)  $f(4) = 1$   
 d)  $y = 7$   
 e)  $x = 6$   
 f)  $x = 3$  ou  $x = 4$ .  
 g)  $f(6) = 3$   
 h)  $y = 1$   
 i)  $x = 5$

18. b)  $D(g) = \{1, 3, 4, \dots\}$ ;  $CD(g) = \{3, 9, 12\}$ ;  $\text{Im}(g) = \{3, 9, 12\}$   
 c)  $g(3) = 9$   
 d)  $x = 4$

19. a)  $D(f) = \mathbb{R} - \{6\}$   
 b)  $D(f) = \mathbb{R}$   
 c)  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$   
 d)  $D(f) = \mathbb{R}$   
 e)  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$
20.  $A(3, 3); B(-3, 2); C(2, 0); D(-2, -4); E(4, -3); F(0, -2)$
23. 16 unidades de área.
24. a)  $d(A, B) = 5$  unidades de comprimento.  
 b)  $d(A, B) = \sqrt{10}$  unidades de comprimento.
25.  $d(P \cdot O) = \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$
26.  $E(-20^\circ, -40^\circ)$   
 $F(-60^\circ, 20^\circ)$   
 $G(40^\circ, -60^\circ)$   
 $H(-50^\circ, -60^\circ)$   
 $K(60^\circ, 80^\circ)$
27. a)  $O(5, 3); r = 1$   
 b)  $O(-2, -1); r = 3$   
 c)  $O(0, 0); r = 4$   
 d)  $O(0, 2); r = 5$
28. a)  $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$   
 b)  $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 9$   
 c)  $x^2 + y^2 = 36$   
 d)  $x^2 + (y-1)^2 = 4$
29. a) É função.  
 b) É função.  
 c) É função.  
 d) Não é função.
32. a)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\} = [-3, 1]$   
 $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\} = [-2, 2]$   
 b)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\} = (-2, 3)$   
 $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\} = [1, 3]$   
 c)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\} = [-2, 1)$   
 $\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < y \leq 4\right\} = \left(\frac{1}{2}, 4\right]$   
 d)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\} = [0, 4]$   
 $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\} = [0, 2]$   
 e)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\pi\} = [0, 2\pi]$   
 $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\} = [-1, 1]$   
 f)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\} = (-2, 3)$   
 $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < 3\} = (0, 3)$
33.  $D(f) = \mathbb{R}; \text{Im}(f) = \mathbb{Z}$ .

### Resolvido passo a passo

5. a) R\$ 140,70  
 b)  $12\,675 \text{ cm}^3$  ou  $0,012675 \text{ m}^3$ .

34. a) Crescente.  
 b) Decrescente.  
 c) Crescente.

35. a) Crescente:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ ;  
 decrescente:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$   
 b) Crescente:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ ;  
 decrescente:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$   
 c) Crescente:  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x \leq 0\}$ ;  
 decrescente:  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\}$
36. a)  $D(f) = [-1, 4]; \text{Im}(f) = [-1, 3]$   
 b) Corta o eixo  $x$  em um ponto; corta o eixo  $y$  em um ponto.  
 c) Igual.  
 d) Valor máximo de  $f(x)$  é 3; valor mínimo de  $f(x)$  é -1.  
 e) O ponto  $(-1, 1)$ .  
 f) Sim.  
 g)  $f(x) = 3$  para  $1 \leq x \leq 3$
37. a) O pai ganhou a corrida, pois ele chegou aos 100 m em 14 s e o filho, em 17 s; a diferença de tempo foi de 3 s.  
 b) Cerca de 70 m.  
 c) Cerca de 10 s.
38. As funções dos itens c e d são injetivas.
39. a) É sobrejetiva.  
 b) Não é sobrejetiva.
40. a) É apenas sobrejetiva.  
 b) É apenas injetiva.  
 c) Não é injetiva nem sobrejetiva.  
 d) É bijetiva.  
 e) Não é injetiva nem sobrejetiva.  
 f) É apenas injetiva.  
 g) É bijetiva.
41. a) Injetiva.  
 b) Bijetiva.  
 c) Sobrejetiva.
42. a) É apenas sobrejetiva.  
 b) É apenas injetiva.  
 c) É bijetiva.  
 d) É apenas injetiva.  
 e) É bijetiva.
43.  $(0, 1, 4, 9, 16, \dots)$
44. a) PA de razão -5.  
 b) PG de razão 2.  
 c) Não é PA nem PG.
45.  $f(x) = 2x - 1$
46. 51
47. 972

### Pensando no Enem

1. b  
 2. c

### Outros contextos

1. Está aumentando (de acordo com o gráfico *Adultos obesos* - IMC acima de 30).  
 2. a) IMC = 20      b) Peso ideal.      c) 1,90 m



## Vestibulares de Norte a Sul

- |      |       |
|------|-------|
| 1. a | 6. a  |
| 2. c | 7. a  |
| 3. c | 8. b  |
| 4. a | 9. d  |
| 5. a | 10. e |

Para refletir

Página 56.

• Porque, no exemplo **a**,  $D(f) = \{0, 1, 2\}$  e, no **b**,  $D(f) = \mathbb{R}$ .

Página 66.

- 50
- 1458

## UNIDADE 2 • Função afim e função quadrática

### Capítulo 3 • Função afim e função modular

- a)  $f(1) = 1$   
b)  $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$   
c)  $f(0) = 4$   
d)  $f(k+1) = -3k + 1$
- $g(x)$  tem maior valor inicial e  $f(x)$  tem maior taxa de variação.
- a)  $f(x) = 3x + 1$   
b)  $f(x) = -2x + 9$   
c)  $f(x) = 2x + 10$   
d)  $f(x) = -x + 3$
- a)  $f(x) = 8 + 0,50x$   
b) A taxa de variação é 0,50. O valor inicial dessa função é  $f(0) = 8$ .  
c) R\$ 58,00.
- a) largura = 1 cm; perímetro = 12 cm; largura = 1,5 cm; perímetro = 13 cm; largura = 2 cm; perímetro = 14 cm; largura = 3 cm; perímetro = 16 cm; largura = 4 cm; perímetro = 18 cm  
c)  $f(x) = 10 + 2x$   
d) A taxa de variação é 2 e o seu valor inicial é 10.
- a) Plano A:  $f(x) = 50x + 100$ ; plano B:  $g(x) = 40x + 180$ .  
b) A taxa de variação correspondente ao plano A é a maior. O custo aumenta mais rapidamente no plano A.  
c) O plano A é mais econômico para  $x < 8$ ; o B para  $x > 8$ ; e eles são equivalentes para  $x = 8$ .
- a)  $f_1(x) = 50 + 0,37x$ ;  $f_2(x) = 63 + 0,37x$ ;  $f_3(x) = 75 + 0,37x$   
b)  $f_1 \rightarrow a = 0,37$ ;  $f_2 \rightarrow a = 0,37$ ;  $f_3 \rightarrow a = 0,37$
- a)  $f(t) = 10 + 5t$ .  
b) 5  
c) 10
- $f(x) = 3x - 1$ ; a taxa de variação é  $a = 3$ .
- a)  $C(x) = 6x + 10400$   
b) R\$ = 17 600,00

- a)  $f(x) = 3x + 2$   
b)  $f(x) = -2x + 5$
- a)  $V = -150t + 1000$   
b) R\$ 100,00  
c) R\$ 900,00

### Resolvido passo a passo

- a)  $P(A) = -0,2A + 9,6$ ; no ano de 2062.
- a)  $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$   
b)  $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$
- a)  $m = 8$   
b)  $m = -3$
- a)  $a = 3$  e  $b = 2$   
c)  $x = -\frac{2}{3}$
- a)  $f(x)$  corta o eixo  $x$  no ponto  $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$  e o eixo  $y$  no ponto  $(0, 4)$ .  
b) Decrescente.
- a)  $A(3, 0)$ ;  $B(0, 3)$  e  $C(6, 3)$
- $f(x) = -2x - 1$
- a)  $y = \frac{2}{3}x + 2$   
b)  $y = -\frac{1}{2}x + 2$   
c)  $y = 10x$   
d)  $y = -10x + 20$   
e)  $y = 2x + 12$   
f)  $y = 3x + 14$   
g)  $y = -3x$   
h)  $y = -x + 16$
- a)  $y = 3x - 6$   
b)  $y = -2x - 8$   
c)  $y = 5x + 4$
- $y = \frac{1}{2}x + 2$
- a) eixo  $x$ :  $(5, 0)$ ; eixo  $y$ :  $(0, -5)$   
b) eixo  $x$ :  $(4, 0)$ ; eixo  $y$ :  $(0, 4)$   
c) eixo  $x$ :  $(0, 0)$ ; eixo  $y$ :  $(0, 0)$   
d) eixo  $x$ :  $(2, 0)$ ; eixo  $y$ :  $(0, -1)$
- a)  $f(x) = 0$  para  $x = -4$   
 $f(x) > 0$  para  $x > -4$   
 $f(x) < 0$  para  $x < -4$   
b)  $f(x) = 0$  para  $x = \frac{1}{2}$   
 $f(x) > 0$  para  $x < \frac{1}{2}$   
 $f(x) < 0$  para  $x > \frac{1}{2}$   
c)  $f(x) = 0$  para  $x = \frac{5}{3}$   
 $f(x) > 0$  para  $x > \frac{5}{3}$   
 $f(x) < 0$  para  $x < \frac{5}{3}$   
d)  $f(x) = 0$  para  $x = 2$   
 $f(x) > 0$  para  $x > 2$   
 $f(x) < 0$  para  $x < 2$

28. a)  $f(x) > 0$  para  $x < 1$   
b)  $f(x) < 0$  para  $x < -4$
29. Não existe valor real  $x$  que satisfaça as duas condições simultaneamente.
30.  $x = 17$
31. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$   
b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$
32. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$   
b)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 3\right\}$
33. a)  $f(x) = 5,00x - 230,00$   
b)  $x < 46$ . O comerciante terá prejuízo se vender menos de 46 unidades.  
c)  $x = 109$   
d)  $x > 102$   
e)  $66 < x < 82$
34. a)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}\right\}$   
b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$
35. a)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq \frac{3}{2}\right\}$   
b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1 \text{ ou } x > 2\}$
36. a) Na loja **A**.  
b) Loja **A**:  $f(x) = 3x + 5$ ; loja **B**:  $f(x) = 2x + 10$ .
37. a)  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{2} \text{ ou } x \geq 1\right\}$   
b)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geq 3\}$   
c)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x > 5\}$
38. a) O plano  $C$ .  
b) A partir de 50 minutos.
39. A partir de 60 minutos.
40.  $x - 1500 \geq 0$
41. **d**
42. a)  $r = 5$   
b)  $-7, 8, 23, 38, 53, 68$  é uma PA.  
c)  $r = 15$
43.  $r = 12$
44.  $f(x) = 4x + 1$
45. a)  $v = 60 \text{ m/s}$   
b)  $S = 60t + 100$   
c)  $S = 700 \text{ m}$   
d)  $t = 15 \text{ s}$
46. Sim, é uma proporcionalidade direta.
47. Não.
48. Sim.
49.  $\pi$
50. Sim.
51.  $y = 20x$   
a) 60 cm; 140 cm; 220 cm  
b) 6<sup>a</sup> degrau; 8<sup>a</sup> degrau; 14<sup>a</sup> degrau.

52. a) 14  
b) 0  
c) 11  
d)  $-15$
53. a)  $x = 6$   
b) Não existe valor real para  $x$ .  
c)  $x = 6$  ou  $x = -6$   
d)  $x = 6$   
e)  $x = 5$   
f)  $x = 5$  ou  $x = -5$ .  
g)  $x = 3$  ou  $x = -3$ .  
h)  $x = 4$  ou  $x = -4$ .
54. a)  $f(8) = 9; f(-1) = 8; f(3) = 4; f(0) = 7$   
b)  $\begin{cases} 7 - x, & \text{se } x < 3 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$   
d)  $D(f) = \mathbb{R}$  e  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$
55. a)  $S = \{-4, 16\}$  c)  $S = \{-7, 9\}$   
b)  $S = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$  d)  $S = \{-1, 5\}$
56. a)  $S = \{-7, -5, -1, 1\}$   
b)  $S = \{-1, 2, 3, 6\}$
57. a)  $D(f) = \mathbb{R}$  e  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$ .  
b)  $f(x)$  é crescente para  $x \geq 0$ ;  $f(x)$  é decrescente para  $x \leq 0$   
c)  $f(x)$  não é injetiva nem sobrejetora.  
d)  $f(x) > 0$  para  $x \neq 0$ ;  $f(x) = 0$  para  $x = 0$
58. a)  $f(x) = \begin{cases} -3x + 15, & \text{se } x < 5 \\ 3x - 15, & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$   
b)  $f(2) = 9; f(7) = 6; f(-1) = 18; f(5) = 0$
60. **a**

#### Para refletir

Página 80.

É a semirreta que parte do vértice do ângulo e o divide em dois ângulos de mesma medida.

Página 84.

Porque existem infinitos valores de  $y$  para um único valor de  $x$  e, portanto, não é função.

Página 85.

$f(x) > 0$ ;  $f(x) < 0$

Página 86.

O sinal  $+$  significa  $f(x) > 0$ , e o sinal  $-$  significa  $f(x) < 0$ .

Página 99.

- Em  $g(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram duas unidades para cima. Em  $h(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram duas unidades para baixo.
- Em  $r(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram duas unidades para a direita. Em  $s(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram duas unidades para a esquerda.
- Em  $t(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram três unidades para a direita e uma unidade para cima. Em  $u(x)$  todos os pontos de  $f(x)$  se deslocaram uma unidade para a esquerda e três unidades para baixo.

## Capítulo 4 • Função quadrática

2. a e d.

3. a) Para todos os números reais diferentes de zero.

b) Para  $t = 2$ .

4. a)  $a = 2, b = 0$  e  $c = 0$       d)  $a = 12, b = 13$  e  $c = -14$

b)  $a = 2, b = -12$  e  $c = 23$       e)  $a = 10, b = 13$  e  $c = -3$

c)  $a = 1, b = -1$  e  $c = -6$       f)  $a = 2, b = -12$  e  $c = 23$

5. a)  $S = 25\pi \text{ cm}^2$

b)  $r = 8 \text{ m}$

6. a)  $f(10) = 100; f(1,5) = 2,25; f(2\sqrt{3}) = 12$

b)  $\ell = 16$

c)  $D(f) = \mathbb{R}^+ \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$

7. a)  $f(1) = 0$

b)  $f(2) = 5$

c)  $f(0) = 1$

d)  $f(\sqrt{2}) = 7 - 4\sqrt{2}$

e)  $f(-2) = 21$

f)  $f(h+1) = 3h^2 + 2h$

g)  $x = 0$  ou  $x = \frac{4}{3}$

h) Não existe  $x$  real.

8. a)  $x = \frac{1}{2}$

b)  $x' = 0$  ou  $x' = 1$ .

c) Não existe.

9.  $\frac{13 - 9\sqrt{2}}{9}$

10. a) -2

b) 3

c) -62

d) -47

e) -5

f) 0

g) 8

11. a)  $f(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 6$

b)  $a = \frac{1}{2}, b = 4$  e  $c = 6$

12.  $A = 600 - 4x^2$

13. a) 90 jogos.

b) 7 times.

14. 15 watts.

15. a) 3 e 0.

b) Não tem zeros reais.

c) -2 e 4.

d) -5

e) 4

f) Não tem zeros reais.

16.  $m < -3$

17.  $k < 9$  e  $k \neq 0$ .

18.  $m \leq \frac{13}{6}$  e  $m \neq 2$ .

19.  $k' = 8$  e  $k'' = -\frac{11}{2}$ .

20. a)  $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

b)  $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 4$

c)  $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

21. 18 alunos.

22. a) 0 e 2.

b) -4 e 0.

c) -4 e 4.

d)  $-\sqrt{11}$  e  $\sqrt{11}$ .

e) -14 e 0.

f) -1 e 0.

g) -2 e 2.

h) -6 e 6.

23. O polígono tem 20 lados e se chama icosaágono.

24.  $x = 1 \text{ dm}$

25. Daqui a 3 anos.

26. 40 km/h

27.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

28. a)  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

b)  $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$

c)  $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

31. a)  $V(0,1); x = 0$

b)  $V(0,2); x = 0$

c)  $V(0,-1); x = 0$

d)  $V(0,-1); x = 0$

32. Valor mínimo:  $f(x) \rightarrow 1, h(x) \rightarrow -1, \phi(x) \rightarrow -1$ ;  
valor máximo:  $g(x) \rightarrow 2$ .

33. a) Eixo:  $x = 2; V(2, 0); F\left(2, \frac{1}{4}\right); y = -\frac{1}{4}$

b) Eixo:  $x = -1; V(-1, 0); F\left(-1, -\frac{1}{8}\right); y = \frac{1}{8}$

c) Eixo:  $x = 1; V(1, 0); F\left(1, \frac{1}{2}\right); y = -\frac{1}{2}$

d) Eixo:  $x = -2; V(-2, 0); F\left(-2, -\frac{3}{4}\right); y = \frac{3}{4}$

e) Eixo:  $x = 2; V(2, 0); F\left(2, \frac{1}{12}\right); y = -\frac{1}{12}$

f) Eixo:  $x = 1; V(1, 0); F\left(1, -\frac{1}{20}\right); y = \frac{1}{20}$

35. a) Ponto máximo: **b** (-1, 0), **d** (-2, 0) e **f** (1, 0).

b) Ponto mínimo: **a** (2, 0), **c** (1, 0) e **e** (2, 0).

c) Esses pontos são os vértices das parábolas.

36. a) Ele é deslocado duas unidades para a direita.

b) Ele é deslocado duas unidades para a esquerda.

c) (0, 0); (2, 0) e (-2, 0).

d) (m, 0) e (-m, 0).

37. a) (0, 0); (2, 3); (-2, -3).

b) Ele é deslocado três unidades para cima e duas unidades para a direita.

c) Ele é deslocado três unidades para baixo e duas unidades para a esquerda.

d) Ele é deslocado  $k$  unidades para baixo e  $m$  unidades para a direita, se  $k > 0$  e  $m > 0$ .

e) (m, k)

38. a)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$       c)  $f(x) = x^2 + 2$   
 b)  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$       d)  $f(x) = -x^2 + 4x$
39. a)  $a < 0, b < 0, c > 0$   
 b)  $a > 0, b > 0, c < 0$   
 c)  $a < 0, b > 0, c = 0$

### Matemática e tecnologia

- a) Altera a abertura e a concavidade da parábola.  
 b) Altera a posição do vértice.  
 c) Altera o ponto onde a parábola cruza o eixo  $y$ .

40. b

41. a e b.

42.  $m = -\frac{1}{2}$

43. a)  $x' = 6$  e  $x'' = 5$ .      c)  $x' = 6$  e  $x'' = -6$ .  
 b)  $x' = 3$  e  $x'' = -7$ .      d)  $x' = \frac{1}{2}$  e  $x'' = \frac{1}{3}$ .

44. a) Eixo  $x$ : (5, 0) e (6, 0); eixo  $y$ : (0, 30).  
 b) Eixo  $x$ : (3, 0) e (-7, 0); eixo  $y$ : (0, -21).  
 c) Eixo  $x$ : (6, 0) e (-6, 0); eixo  $y$ : (0, -36).  
 d) Eixo  $x$ :  $(\frac{1}{3}, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, 0)$ ; eixo  $y$ : (0, 1).

45. a)  $a < 0, \Delta > 0$       d)  $a < 0, \Delta = 0$   
 b)  $a > 0, \Delta > 0$       e)  $a < 0, \Delta < 0$   
 c)  $a > 0, \Delta < 0$       f)  $a > 0, \Delta = 0$

46. b

### Resolvido passo a passo

6. a) (2, 0)

47. a)  $V(1, -4)$   
 b)  $V(\frac{3}{2}, -\frac{11}{4})$   
 c)  $V(2, -1)$   
 d)  $V(0, 0)$   
 e)  $V(2, 3)$

48.  $k > 2$

49.  $m > -\frac{1}{4}$

50. a)  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$   
 b)  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$

51. Sim, (1, 2) e (3, 8).

52. a) Para cima.  
 b)  $x' = \frac{3}{2}$  e  $x'' = -1$ .  
 c)  $V(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8})$   
 d)  $(-1, 0)$  e  $(\frac{3}{2}, 0)$ .  
 e) (0, -3)  
 f)  $x = \frac{1}{4}$

g)  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{25}{8}\}$

53. a) 40 unidades.  
 b) 1400

54. a) 2 s  
 b) 10 m  
 c) 310 s

55.  $A = [2, 4]$

56. 15 passageiros.

57. c

58. 25 lugares.

59. a) 1 s  
 b) 0,75 m

60. a)  $f(x) = 0$  para  $x = -1$  ou  $x = 4$ ;  
 $f(x) > 0$  para  $x < -1$  ou  $x > 4$ ;  
 $f(x) < 0$  para  $-1 < x < 4$   
 b)  $f(x) = 0$  para  $x = -2$  ou  $x = 2$ ;  
 $f(x) > 0$  para  $x < -2$  ou  $x > 2$ ;  
 $f(x) < 0$  para  $-2 < x < 2$

61.  $x < -5$  ou  $x > -2$ .

62. Para nenhum valor real de  $x$ .

63.  $m \in \mathbb{R} \mid m > \frac{5}{4}$

64. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{7}{3}\}$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$

65.  $x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0$

66. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 5\}$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$

c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\}$

67. 7

68. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 6\}$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$

c)  $S = \{-2 \leq x < 3\}$

d)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}$

69. a)  $S = \{-2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$

c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

d)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x < 4\}$

70.  $x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 4$

71. a) 2 s

b) 3 s

c) 4 s

d) 4,5 s

72. 1400 m

73. a)  $a = 5 \text{ m/s}^2$

b) 3 km

74. É uma PA de razão 2.

75. É uma PA de razão 8.

76. Exercício 74: a razão da primeira PA é 1; a razão da última PA é 2;  
 $a = 1; 2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = 2$  (correto).  
Exercício 75: a razão da primeira PA é 2; a razão da última PA é 8;  
 $a = 1; 2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = 8$  (correto).

77. a) É uma PA de razão 72.

b) Razão da primeira PA: 3; razão da última PA: 72;  
 $a = 4; 2ar^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3^2 = 72$  (correto).

### Outros contextos

1. Sim.
2. Afasta-se.
3. Catenária.

### Exercícios adicionais

1. a)  $(x - 1)^2 - 1$   
b)  $(x + 3)^2 - 25$
2. a)  $-3$  e  $-7$ .  
b)  $3$  e  $-1$ .
3. a)  $f(x) = (x + 1)^2 - 4$   
b)  $f(x) = 2(x + 2)^2 - 13$
4. a)  $-1$  e  $5$ .  
b)  $-3$  e  $1$ .
5. 10
6.  $x = -\frac{1}{6}$

### Pensando no Enem

1. d
2. e
3. a

### Vestibulares de Norte a Sul

- |      |       |
|------|-------|
| 1. c | 6. a  |
| 2. e | 7. c  |
| 3. a | 8. d  |
| 4. a | 9. c  |
| 5. b | 10. a |

### Para refletir

Página 102.

- Por causa do expoente 2 do  $x$  ( $x$  está ao quadrado).
- No item  $f, f(x) = 2x$  é uma função afim.  
No item  $g, f(x) = 2^x$  é uma função exponencial.  
No item  $h, f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$  é uma função do terceiro grau.

Página 104.

- $a = 1, b = -1$  e  $c = 0$
- A função não é injetiva nem sobrejetiva.

Página 107.

Se existirem, os números serão raízes da equação  $x^2 - 3x + 7 = 0$ . Essa equação tem  $\Delta = 9 - 28 = -19 < 0$ . Para  $\Delta < 0$ , não existe valor real para  $x$ .

Página 108.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = 1.$$

Logo,  $x' = 3x''$ .

Página 114.

Abcissas iguais, ordenadas opostas.

Página 125.

Porque é o valor da função quando  $x$  vale 0.

Página 129.

Dois pontos, um ponto ou nenhum ponto.

Página 130.

Eles indicam os intervalos nos quais a função assume valores positivos ou negativos.

Página 133.

Pelo mesmo processo da multiplicação de números reais: sinais iguais, produto positivo; sinais diferentes, produto negativo.

## UNIDADE 3 • Função exponencial e função logarítmica

### Capítulo 5 • Função exponencial

1. a) 81  
b)  $-8$   
c) 64  
d) 0  
e) 1  
f) 2  
g)  $7\sqrt{7}$   
h)  $\frac{1}{36}$   
i)  $-\frac{2}{3}$
2. a)  $x = \frac{239}{108}$   
b)  $y = -15$
3. a) 1 000 000  
b) 1 000 000 000  
c) 0,0001  
d) 0,01
4. a)  $10^4$   
b)  $10^3$   
c)  $10^{-4}$   
d)  $10^{-6}$

5. a)  $\sqrt[3]{25}$   
 b)  $\sqrt[4]{8}$   
 c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 d)  $\sqrt[5]{9}$   
 e) 3  
 f) 0  
 g)  $2\sqrt[3]{2}$   
 h) 4  
 i)  $\sqrt[3]{49}$
6. a)  $7^6$   
 b)  $3^9$   
 c)  $5^7$   
 d)  $2^{15}$   
 e)  $5^8$
7. a) 3  
 b)  $\frac{1}{2}$
8. Menor.
9. a)  $2^{12}$   
 b)  $3^6$   
 c)  $a^5$   
 d)  $2^{6x}$   
 e)  $7^9$   
 f)  $2^{12}$
10. a)  $5^x \cdot 5^y$   
 b)  $\frac{4^x}{4^3}$   
 c)  $(7^3)^x$  ou  $(7^x)^3$   
 d)  $5^4 \cdot x^4$
11. a)  $3^7$   
 b)  $3^{-2}$   
 c)  $3^0$   
 d)  $3^{\frac{4}{5}}$   
 e)  $3^{\frac{1}{2}}$   
 f)  $3^{15}$
12. a) 2  
 b) 1
13. a)  $5 \cdot 10^2$   
 b)  $6 \cdot 10^{-4}$   
 c)  $2,5 \cdot 10^{-7}$   
 d)  $2 \cdot 10^{-2}$   
 e)  $3,4 \cdot 10^{-2}$   
 f)  $8 \cdot 10^{-1}$   
 g)  $2,039 \cdot 10^1$   
 h)  $8 \cdot 10^{-6}$   
 i)  $4,8 \cdot 10^4$   
 j)  $7 \cdot 10^9$   
 k)  $9,231 \cdot 10^2$   
 l)  $4,04 \cdot 10^4$
14. a) 80 000  
 b) 0,05  
 c) 352 000  
 d) 0,0016
15. a)  $2,279 \cdot 10^8$  km  
 b)  $7,783 \cdot 10^8$  km  
 c)  $9,11 \cdot 10^{-28}$  g
16. a) F  
 b) V  
 c) V  
 d) F  
 e) F  
 f) F  
 g) V  
 h) F
17. a)  $2\sqrt{2}$   
 b)  $2\sqrt[3]{2}$   
 c)  $2\sqrt{15}$   
 d)  $10\sqrt{2}$
18. a)  $5\sqrt[4]{2}$   
 b)  $\frac{1}{2}$
19. a)  $\sqrt{10}$   
 b)  $\sqrt{\frac{5}{2}}$   
 c)  $\sqrt[5]{5}$   
 d)  $\sqrt[4]{12}$   
 e)  $\sqrt[3]{128}$   
 f)  $\sqrt[3]{2^{13}}$
20. a)  $\sqrt[60]{3^{37}}$   
 b)  $\sqrt[12]{x^3}$
21. a)  $4\sqrt{2}$   
 b)  $6\sqrt{5}$
22. a) 18  
 b)  $3 + \sqrt{3}$   
 c)  $2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 6$   
 d)  $-4 - 3\sqrt{35}$
23. a) 1  
 b) 5  
 c)  $3 + 2\sqrt{2}$   
 d)  $8 - 2\sqrt{15}$
24. a) 2  
 b) 5
25.  $\sqrt{2} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{17} < \sqrt[6]{40}$
26. a)  $2 + \sqrt{3}$   
 b)  $2 - \sqrt{3}$
27. a)  $4\sqrt[3]{5}$   
 b)  $11\sqrt{3}$   
 c)  $5\sqrt[6]{2}$   
 d)  $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$
28. a, b, d
29. a) 1  
 b) 64  
 c)  $\frac{1}{4}$   
 d) 2  
 e)  $\frac{1}{2}$   
 f) 0
30. a)  $f(x) = 2^x$   
 b)  $f(x) = (0,7)^x$
31. a)  $f(x) = 2 \cdot 3^x$   
 b)  $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
33. Crescente: a, c; decrescente: b, d, e, f.
34. a) <  
 b) >  
 c) <  
 d) >



35. a)  $f(2) = 18$   
 b)  $g(2) = 23$   
 c)  $h(2) = 1$   
 d)  $f(-1) = \frac{2}{3}$
- e)  $g(0) = -1$   
 f)  $h(0) = \frac{1}{25}$   
 g)  $x = 5$   
 h)  $x = 1$

36.  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$

### Matemática e tecnologia

2. a) Crescente.  
 b) Decrescente.  
 3. a)  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$   
 b)  $\text{Im}(f) = (1, +\infty)$   
 4. Duas soluções.
- c) Decrescente.  
 d) Decrescente.  
 c)  $\text{Im}(f) = (2, +\infty)$   
 d)  $\text{Im}(f) = (-\infty, -1)$

37. a) 2  
 b) É uma PG.  
 c)  $q = 9$
38. 125
39. Uma função exponencial, pois os valores de  $x$  formam uma PA e os de  $y$ , uma PG.

40.  $f(x) = 3 \cdot 3^x$ ;  $a = 3$  e  $b = 3$ .

41. a)  $S = \{6\}$   
 b)  $S = \{4\}$   
 c)  $S = \{-1, 3\}$   
 d)  $S = \{2\}$
- e)  $S = \{1, 3\}$   
 f)  $S = \{-2, 3\}$   
 g)  $S = \{5\}$   
 h)  $S = \{2\}$

42. a)  $S = \{6\}$   
 b)  $S = \{3\}$   
 c)  $S = \{-3, 3\}$   
 d)  $S = \{-3\}$

43. a)  $S = \{4\}$   
 b)  $S = \{3\}$   
 c)  $S = \{1\}$   
 d)  $S = \{4\}$

44. a)  $S = \{1\}$   
 b)  $S = \{0, 3\}$   
 c)  $S = \{0, 1\}$

45.  $a = \frac{3}{2}$  ou  $a = -\frac{1}{2}$ .

46.  $-2$

47.  $(-\frac{5}{2}, 1)$

48.  $(\frac{3}{2}, 2)$

49. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$   
 b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$   
 c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$   
 d)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

50. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$   
 b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

51.  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

52. a)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$   
 b)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
53. a)  $f(1) = 2,7183$   
 $f(3) = 20,086$   
 $g(2) = 0,13564$   
 $g(4) = 0,01832$   
 b)  $x = 2$   
 c)  $x = 1$

### Resolvido passo a passo

5. a) Aproximadamente 31 min.

54. d

55. d

56. Aproximadamente 4 447 022 bactérias.

57. 32 000 bactérias.

58. a) 3,125 mg

b)  $f(t) = 50 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

59. a

### Para refletir

Página 149.

- 30 meses: R\$ 25 000,00; 50 meses: R\$ 45 000,00
- 40 meses.

Página 150.

•  $2^0 = 1$

Página 151.

- Porque não existe divisão por zero.

Página 165.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

Página 168.

Sim.

Página 170.

$e = 2,718281... \Rightarrow e > 1 \Rightarrow f(x) = e^x$  é crescente.

Página 174.

2137

## Capítulo 6 • Logaritmo e função logarítmica

1. a) 3  
 b) 3  
 c) 4  
 d)  $-5$   
 e)  $-2$   
 f)  $-1$   
 g)  $\frac{3}{2}$   
 h)  $\frac{5}{4}$   
 i)  $-2$

2. a)  $a = 2$   
 b)  $a = 3$   
 c)  $\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$   
 d)  $a = \frac{1}{4}$
3. a)  $x = 6$   
 b)  $x = \sqrt[3]{126}$   
 c)  $x = 25$   
 d)  $x = 1$
4. a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$   
 b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$   
 c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 4\}$
5. a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$   
 b)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1\right\}$
6. a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$   
 b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq 2\}$
7. a) Falso. e) Falso.  
 b) Falso. f) Verdadeiro.  
 c) Verdadeiro. g) Verdadeiro.  
 d) Verdadeiro. h) Falso.
8. a) 3 d) 7  
 b) 5 e) 6  
 c) 10 f) 500
9. a)  $3 \cdot \log x + \log y$   
 b)  $\log \pi + 3 \cdot \log r + \log h - \log 3$   
 c)  $\frac{1}{2} \cdot \log_3 x - 2 \cdot \log_3 y$
10. a)  $\log_5 66$  d)  $\log_7 27$   
 b) 1 e)  $\log_3 \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)$   
 c)  $\log 81$  f)  $\log_5 20$
11. a)  $a + b$  d)  $b - a$   
 b)  $3a + b$  e)  $4a$   
 c)  $2 + b$  f)  $\frac{a}{b}$
12. a)  $1 - x$  d)  $-y$   
 b)  $\frac{y}{2}$  e)  $x + y - 2$   
 c)  $\frac{2x + y}{3}$  f)  $\frac{3y}{2x}$
13. 9
14. 100
15. a)  $P = a^2 b^5$   
 b)  $P = \frac{a^3 b}{c^2}$
16.  $x = 1$
17. a)  $\frac{\log 5}{\log 2}$   
 b)  $\frac{\log 2}{\log x}$
18.  $3^8$
19.  $\frac{3}{8}$
20.  $\frac{1-2a}{a+b}$
21. a) Aproximadamente 1,808.  
 b) Aproximadamente  $-2,708$ .  
 c) Aproximadamente 22,387.  
 d) Aproximadamente 2,961.  
 e) Aproximadamente  $-0,086$ .  
 f)  $x = 0,07$
22. a) Entre 2 e 3.  
 b) Entre 0 e 1.  
 c) Entre  $-2$  e  $-1$ .  
 d) Entre 0 e 1.
23. a) 2  
 b)  $-5$   
 c)  $-3$   
 d) 7
24. a) 1,30 d) 1,26  
 b)  $-3,70$  e) 1,66  
 c)  $-0,52$  f) 2,40
25. a) 1,15  
 b) 1,70  
 c) 0,55  
 d) 1,85
26. a) 1,60  
 b) 0,69  
 c) 1,07  
 d) 0,35
27. 1717 algoritmos.
28. pH = 4,347
29. a)  $S = \{2,33\}$   
 b)  $S = \{1,12\}$   
 c)  $S = \{0,61\}$   
 d)  $S = \{1,81\}$
30. Aproximadamente 1,73.
31.  $S = \{0,63; 1\}$
32.  $x = 9,60$
33. Aproximadamente 5 anos e meio.
34. A quantia depositada triplica após 56 meses.
35. Após 18 meses.
36. Em 2 meses.
37. b
38. b
39. Aproximadamente 28 anos, 9 meses e 18 dias.

40. Aproximadamente 16 min e 12 s.

41. Aproximadamente 17 anos, 3 meses e 18 dias.

42. a) 2  
b) 1  
c)  $D(f) = \mathbb{R}^+$   
d)  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$   
e) 256  
f)  $3^x$   
g)  $4^x$   
h) 3  
i) 1

43. a) 1  
b) 5  
c) 1  
d) 2  
e) 4  
f) 0

45. Crescentes: **a, b, f**; decrescentes: **c, d, e**.

47.  $a = 1$  e  $b = 1$

49.  $f(g(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ .  
 $g(f(x)) = g(2^x) = \log_2 2^x = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Matemática e tecnologia

2. A abscissa do primeiro ponto é igual à ordenada do segundo, a ordenada do primeiro é igual à abscissa do segundo. Exemplo:  $A = (1, 0)$  e  $F = (0, 1)$ . Os pontos pertencem a funções inversas.  
3.  $f^{-1}(x) = 10^x$ ;  $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}^x$   
4.  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ ; raiz:  $x = 1$

### Resolvido passo a passo

6. a) Atingirá no ano de 2025; e não é classificada como uma cidade em crescimento considerável.

50. a)  $S = \{15\}$   
b)  $S = \{-3, 2\}$   
c)  $S = \{16\}$   
d)  $S = \{3\}$   
51. a)  $S = \{7\}$   
b)  $S = \{2\}$   
52. a)  $S = \left\{\frac{1}{9}, 27\right\}$   
b)  $S = \{2\}$   
53. a)  $S = \{3\}$   
b)  $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$   
54.  $x = 1$   
55.  $S = \{4, 5\}$   
56.  $x = \frac{1}{6}$

57. a)  $S = \{64\}$   
b)  $S = \{100\}$

58. b

59. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$   
b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1\}$   
c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$   
d)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

60. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$   
b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$   
c)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$

61. a)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$   
b)  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0 \text{ ou } 2 < x \leq 3\}$

### Pensando no Enem

• c

### Outros contextos

- 20 dB a menos, porém o ideal seria diminuir 60 dB.
- 15 minutos
- No máximo 1 hora.
- $I = 10^{-2,8} \text{ W/m}^2$

### Vestibulares de Norte a Sul

- |       |       |
|-------|-------|
| 1. a  | 6. a  |
| 2. d  | 7. b  |
| 3. d  | 8. a  |
| 4. 02 | 9. c  |
| 5. d  | 10. b |

### Para refletir

Página 180.

$r = \log_a b$ ,  $a$  e  $b$  são números reais positivos e  $a \neq 1$  e  $b \neq 1$ . Então  $a^r \neq 1 \Rightarrow r \neq 0$ .

Página 181.

O desenvolvimento logarítmico utiliza as propriedades para expandir uma expressão de maneira que nos permite calcular o logaritmo de um produto, quociente ou potência, conhecendo apenas os logaritmos dos fatores do produto, dos termos do quociente ou da base da potência.

Página 193.

Significa que, dado  $B > 0$ , tem-se  $\log_a x < -B$ , desde que  $x$  seja um número positivo suficientemente pequeno.

Página 194.

$a > 1$ :  $(1, 2)$ ;  $(4, 2)$  e  $(2, 4)$

$0 < a < 1$ :  $(-1, 2)$ ;  $(2, -1)$ ;  $(-4, 4)$  e  $(4, -2)$

Página 197.

Porque foi obtida uma sentença matemática falsa na primeira condição, não havendo necessidade de se verificar a segunda.

# UNIDADE 4 • Sequências e Trigonometria

## Capítulo 7 • Sequências

### Leitura

1. 377, 610, 987

2. a) 1,61538

b) 1,61904

c) 1,61764

d) 1,61818

1. a) 33, 38, 43, 48

b) 11, 7, 3

c) 31, 57, 105

d) 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5

e) 66, 107, 173

f) 125, 216

2. (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100)

3. (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55)

4. (1, 3, 5, 7, ...)

5. Sim,  $a_{21} = 47$ .

6. a) (5, 10, 15, 20, ...)

b)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$

c)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$

7. a)  $a_n = 2n$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$

b)  $a_n = 2n - 1$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$

8.  $a_{20} = 39$

9. a)  $(-2, -2, 2, 2, -2, \dots)$

b) (1, 5, 13, 29, 61, ...)

10. 27

11. a) 41

b) 155

c) 20

### Resolvido passo a passo

6. a) Aproximadamente 1258,33 milhões de pessoas.

b) O subsídio será de R\$ 19 913 130 000,00; em torno de 880,83 milhões de pessoas não terão acesso aos medicamentos de forma gratuita.

12. a) PA;  $r = 3$

b) PA;  $r = -5$

c) Não é PA.

13. a) PA (7, 11, 15, 19, 23)

b) PA (-6, 2, 10, 18)

14. a)  $a_n = 5n - 3$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$

b)  $a_n = 6n - 7$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$

15. 62

16. 99

17. a)  $a_1 = 3$

b)  $a_1 = 15$

18.  $r = 4$

19. 8º termo.

20.  $r = 7$

21. 40

22. 555

23.  $x = 1$  e  $r = 24$

24. R\$ 37 500,00

25. 2

26. 16 vezes.

27. 1, 8, 15 ou 15, 8, 1

28. 200 máquinas.

29. Após 60 dias.

30. 71 "passadas largas".

31. 38

32. 51

33. a) 55

b) 210

34. a) 2730

b) 1100

c) 40200

35. 34

36. 14662

37.  $x = 30$

38. 435 metros

39. 70 quilômetros

40. 550 dm<sup>3</sup>

41. 20 fileiras.

42. 40°, 60° e 80°.

43. a) É PG e  $q = 3$ .

b) Não é PG.

c) É PG e  $q = \frac{1}{2}$ .

44. a)  $q = 4$

b)  $q = \frac{1}{2}$

45. a) PG (7, 21, 63, 189, 567)

b) PG (-5, -10, -20, -40)

46. a) 200%

b) -20%

47.  $B_0 \cdot (1,05)^n$

48.  $P_0 \cdot (0,97)^n$

49. a)  $a_n = 2^{n-1}$

b)  $a_n = 3^n$

50. a) 625

b) 117174

51. 96

52. 3

53. 9 000 unidades.

54. a) 2

b)  $10^{-2}$

55. 96

56. a)  $x = \pm 6$

b)  $x = 6$

57. 2

58.  $C_0 \cdot 0,96^t$

59. 240 000 unidades.

60. d

61. 243 800 habitantes.

62. 364 500 bactérias.

63. a) 1 023

b) 1 705

c) 1 365

64. 2

65. 8 termos.

66.  $\frac{63}{32}$

67. R\$ 1860,00

68. 48 828 124 visitantes.

69. 25

70. a)  $\frac{2}{3}$

b)  $\frac{3}{8}$

71. 8

72.  $\frac{160}{3}$

73. a)  $\frac{7}{9}$

b)  $\frac{17}{33}$

c)  $\frac{13}{30}$

74.  $y = 18$  ou  $y = 6$ ;  $x = 3$

75. (4, 6, 8)

76. PA (4, 8, 12, 16); PG (1, 4, 16, 64)

77.  $x = 100$  e  $y = 100$ .

78. d

### Outros contextos

1. Medicamentos

2. Animais peçonhentos/escorpiões; 12,43%.

3. 32 horas.

### Para refletir

Página 209.

(ca, ca, ca); (ca, ca, co); (ca, co, ca); (ca, co, co);  
(co, ca, ca); (co, ca, co); (co, co, ca); (co, co, co)

Página 212.

• Porque os números são quadrados perfeitos, ou seja, têm raiz quadrada exata, e os pontos podem ser dispostos de modo que formem um quadrado.

• Porque os pontos podem ser dispostos de modo que formem um triângulo.

Página 227.

Dezoito quintilhões, quatrocentos e quarenta e seis quatrilhões, setecentos e quarenta e quatro trilhões, setenta e três bilhões, setecentos e nove milhões, quinhentos e cinquenta e um mil seiscentos e quinze.

## Capítulo 8 • Trigonometria no triângulo retângulo

1.  $x = \frac{5}{4}$

2. 320

3. 80 m; 60 m; 40 m

4.  $x = 9$

5. d

6.  $AB' = 2,6$  cm,  $B'C' = 3,9$  cm,  $C'D' = 6,5$  cm

9.  $n = 8,4$  cm e  $o = 9,6$  cm.

10.  $x = 11,25$

11.  $\frac{1}{3}$  ou 3

12.  $\triangle ABC$  e  $\triangle ABD$ .

13.  $x = 4$

14. 10

15. 4

16.  $x = 24$  m

17. 4

18. 480 cm, ou 4,8 m.

20. a) Sim. Constante de proporcionalidade ou razão de semelhança 2.

b) Sim.

c) Sim.

21. Sim.

22. a)  $R_1$ : 40 cm;  $R_2$ : 24 m

b)  $\frac{5}{3}$

c)  $\frac{5}{3}$

d)  $\frac{5}{3}$

e)  $\frac{25}{9}$

23. Não.

24. a) Verdadeira.

b) Falsa.

25. Sim.

26. a) Sim.

b) É 4:3 pois  $\frac{1600}{4} = 1200$

27.  $x = 9$ ;  $y = \frac{36}{5}$ ;  $z = \frac{48}{5}$ ;  $w = \frac{27}{5}$

28.  $b = 10\sqrt{3}$ ;  $c = 10$ ;  $h = 5\sqrt{3}$

29.  $c = \frac{3\sqrt{14}}{5}$ ;  $r = 5$ ;  $x = \frac{7}{5}$  ou 1,4;  $y = 3,6$

30. 6 cm e 8 cm.

31.  $10\sqrt{41}$  km ( $\approx 64$  km).

32. a)  $\frac{3}{5}$  d)  $\frac{4}{5}$   
b)  $\frac{4}{5}$  e)  $\frac{3}{5}$   
c)  $\frac{3}{4}$  f)  $\frac{4}{3}$

33. Sim.

34. a)  $90^\circ$

b)  $\text{sen } \hat{B} = \frac{z}{x}$ ;  $\text{cos } \hat{B} = \frac{y}{x}$ ;  $\text{tan } \hat{B} = \frac{z}{y}$

$\text{sen } \hat{C} = \frac{y}{x}$ ;  $\text{cos } \hat{C} = \frac{z}{x}$ ;  $\text{tan } \hat{C} = \frac{y}{z}$

35. a)  $\text{sen } \hat{G} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ ;  $\text{cos } \hat{G} = \frac{5}{6}$ ;  $\text{tan } \hat{G} = \frac{\sqrt{11}}{5}$

b)  $EG = 25$ ;  $EF = 5\sqrt{11}$

c)  $\cdot 1$   $\cdot 1$   
 $\cdot \frac{5\sqrt{11}}{11}$   $\cdot \frac{\sqrt{11}}{5}$

37. a)  $\text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$ ;  $\text{tan } \alpha = \frac{5}{12}$

b)  $x = 13$

38. a)  $\text{sen } \hat{B} = 0,6$ ;  $\text{cos } \hat{B} = 0,8$ ;  $\text{tan } \hat{B} = 0,75$ ;  $\hat{B} = 37^\circ$

b)  $\text{sen } \hat{B} = \frac{1}{2}$ ;  $\text{cos } \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\text{tan } \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $\hat{B} = 30^\circ$

39. a)  $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\text{tan } 45^\circ = 1$

b)  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ ;  $\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\text{tan } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c)  $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$ ;  $\text{tan } 60^\circ = \sqrt{3}$

40.  $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

41.  $\text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$

42.  $\text{tan } \alpha = \sqrt{15}$

#### Resolvido passo a passo

5. a) O prédio possui 20 andares, além do térreo; 38 apartamentos.

43. a) 7,66 cm

b) 8,51 dm

c)  $x = 13,23$  m e  $y = 12,44$  m.

44. 12,05 milhas

45. 3,6 m

46. 2500 m

47. a) 8 m

b)  $30^\circ$

48.  $h = 59,7$  m

49.  $\ell = 22$  m

50. 50,4 m

51.  $V_x = 5\sqrt{3}$ ;  $V_y = 5$

52. 24 cm e  $24 \text{ cm}^2$ .

53. 235 m

54.  $h = 540$  m;  $d \approx 2062$  m

55.  $\alpha = 30^\circ$

56.  $x = 50\sqrt{3}$

57. 5,04 m

58.  $h \approx 188$  unidades de comprimento

59.  $n_B = \frac{\sqrt{6}}{2}$

#### Pensando no Enem

1. b

2. e

#### Vestibulares de Norte a Sul

1. e

6. c

2. b

7. c

3. 02

8. b

4. b

9. e

5. a

10. d

#### Para refletir

Página 245.

Porque os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

#### Caiu no Enem

1. e

9. b

2. c

10. a

3. e

11. d

4. a

12. d

5. c

13. b

6. d

14. d

7. e

15. d

8. c

16. b



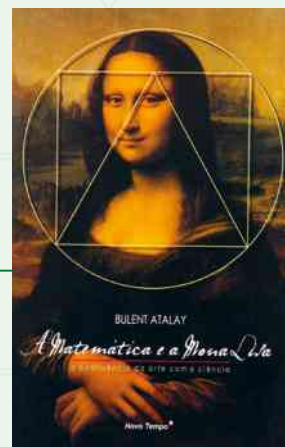
# Sugestões de leitura



ALVAREZ, Maria Terezinha Seordamoglio. *Seu problema é dinheiro?* São Paulo: Ed. do Brasil, 2001. (Coleção PEC – Projeto Escola e Cidadania).

A obra trata de cálculo de juros e mostra como esse conhecimento pode ajudar o aluno a tomar decisões na vida pessoal e profissional.

ATALAY, Bulent. *A Matemática e a Mona Lisa: a confluência da arte com a ciência.* São Paulo: Mercuryo Novo Tempo, 2007. Neste livro o autor apresenta a ciência por meio da arte e a arte por meio da ciência.

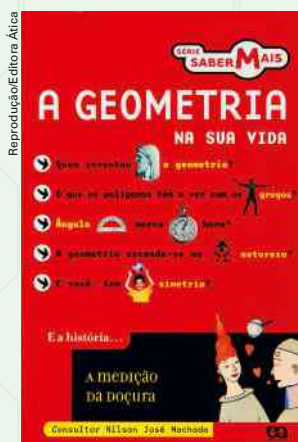
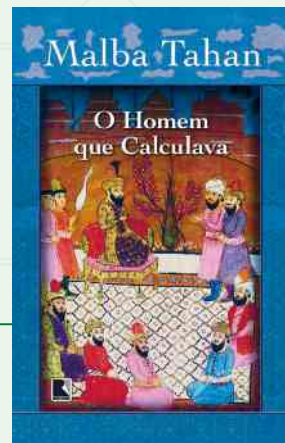


BALL, Johnny. *Pense em um número.* Tradução de Percival de Carvalho. São Paulo: Caramelo, 2009.

Uma viagem fascinante ao mundo dos números. O livro apresenta exemplos, ilustrações, quebra-cabeças e truques em quase todas as áreas da Matemática. São tratados assuntos como a divina proporção, a 3ª dimensão, fractais e o número pi.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava.* Rio de Janeiro: Record, 2015.

Tahan narra a história do calculista persa Beremiz Samir – o homem que calculava. As proezas desse viajante tornaram-se lendárias na antiga Arábia, encantando reis, poetas, xeques e sábios. Problemas aparentemente sem solução tornam-se de uma transparente simplicidade quando expostos por ele.



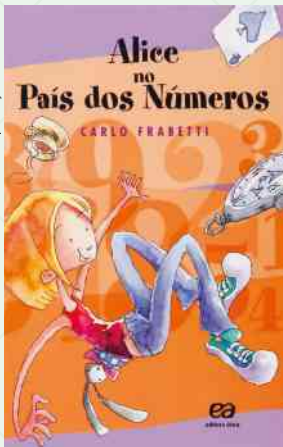
MERINO, Rosa María Herrera; FRABETTI, Carlo. *A Geometria na sua vida. E a história... A medição da doçura.* Série Saber Mais. Nilson José Machado (Consultor). São Paulo: Ática, 2003.

Simulando uma conversa com o leitor, com uma linguagem fácil, o livro mostra como os conhecimentos geométricos podem solucionar uma série de problemas e que podemos encontrar a Geometria na natureza, nas artes, na tecnologia da vida moderna. Completando a diversão, a obra possui alguns desafios e a história “A medição da doçura”.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina Ashton. *Fazendo arte com a matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2005.

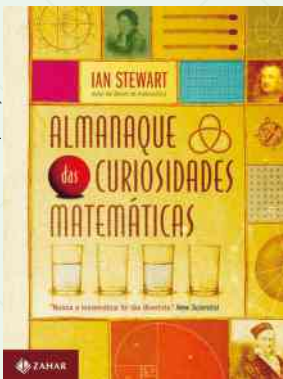
O livro relaciona a beleza da arte com a Matemática. Analisa obras de artistas como Alfredo Volpi, Lygia Clark e outros.





FRABETTI, Carlo. *Alice no País dos Números*. Tradução de Maria Dolores Prades. São Paulo: Ática, 2009. Alice, uma menina que odeia Matemática, encontra personagens da história de outra Alice, a do País das Maravilhas, e descobre que a Matemática, além de útil, também é divertida. São tratados temas como o zero, fatorial de um número, número primo, sequência de Fibonacci, etc.

TAHAN, Malba. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2004. Conteúdos matemáticos abordados de maneira intuitiva e acessível por meio de problemas numéricos, anedotas, contos, frases célebres e outros.

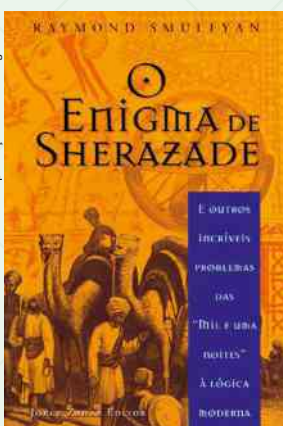
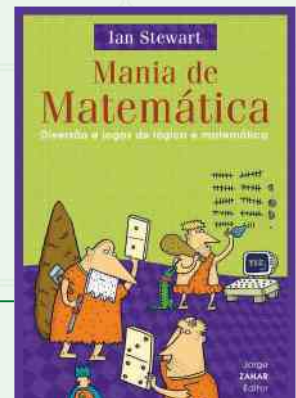


STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Quebra-cabeças lógicos, geométricos, numéricos e probabilísticos, esquisitices da cultura matemática, coisas para fazer e construir.

STEWART, Ian. *Mania de Matemática*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2005.

Um livro com uma grande variedade de desafios, importantes problemas matemáticos e personagens curiosos apresentados por meio de divertidas histórias.



SMULLYAN, Raymond. *O enigma de Sherazade* e outros incríveis problemas das mil e uma noites à lógica moderna. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

Uma paródia do clássico *As Mil e uma Noites*, em que Sherazade, em apuros, precisa solucionar problemas matemáticos e lógicos.

GUELLI, Oscar. *Contando a história da Matemática*. Dando corda na Trigonometria. São Paulo: Ática, 2002. v. 6. O livro acompanha um pouco da história desse importante ramo da Matemática, fazendo um passeio pela Grécia, pelo Egito e pela Índia. Com uma linguagem simples, mostra as origens e o desenvolvimento da Trigonometria.



# Significado das siglas de vestibulares

**Acafe-SC:** Associação Catarinense das Fundações Educacionais (Santa Catarina)

**Cefet-MG:** Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

**EEM-SP:** Escola de Engenharia Mauá (São Paulo) [atual IMT-SP]

**Enem:** Exame Nacional do Ensino Médio

**ESCS-DF:** Escola Superior de Ciências da Saúde (Distrito Federal)

**Fuvest-SP:** Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)

**IFG-GO:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

**IFPE:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco

**Inspere-SP:** Instituto de Ensino e Pesquisa (São Paulo)

**Mack-SP:** Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo) [atual UPM-SP]

**PUC-MG:** Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

**UCS-RS:** Universidade de Caxias do Sul (Rio Grande do Sul)

**UEG-GO:** Universidade Estadual de Goiás

**UEL-PR:** Universidade Estadual de Londrina (Paraná)

**Uepa:** Universidade do Estado do Pará

**Ufam:** Universidade Federal do Amazonas

**UFC-CE:** Universidade Federal do Ceará

**Ufpel-RS:** Universidade Federal de Pelotas (Rio Grande do Sul)

**UFPR:** Universidade Federal do Paraná

**UFRN:** Universidade Federal do Rio Grande do Norte

**UFSM-RS:** Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)

**UFT-TO:** Universidade Federal do Tocantins

**Uneb-BA:** Universidade do Estado da Bahia

**Uneb-DF:** União Educacional de Brasília (Distrito Federal)

**Unesp-SP:** Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (São Paulo)

**Unicamp-SP:** Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)

**Unifap:** Universidade Federal do Amapá

**Unifor-CE:** Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)

**UnirG-TO:** Fundação UnirG Centro Universitário (Tocantins)

**Unisc-RS:** Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)

**Univag-MT:** Faculdades Unidas de Várzea Grande (Mato Grosso)

**UPE:** Universidade de Pernambuco

**Vunesp-SP:** Fundação para o Vestibular da Unesp (São Paulo)

# Bibliografia

- ÁVILA, G. *Cálculo 1: funções de uma variável*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1982.
- \_\_\_\_\_. *Introdução às funções e à derivada*. São Paulo: Atual, 1995.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian de Godói. *Informática e educação*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1974.
- CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa: Brás Monteiro, 1951.
- COLEÇÃO do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1993. 14 v.
- D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre Educação Matemática*. Campinas: Ed. da Unicamp, 1986.
- DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de Matemática: Teoria e prática*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.
- DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Ed. da Unicamp, 1997.
- KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (Org.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Cobro. São Paulo: Atual, 1997.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1997. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1 e 2).
- LOURENÇO, Marcos. *Cabri-Geomètre: introdução e atividades*. Catanduva: Fafica, 2000.
- MIORIN, M. Â. *O ensino de Matemática: evolução e modernização*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Educação Unicamp, 1998.
- PERELMANN, J. *Aprenda Álgebra brincando*. Tradução de Milton da Silva Rodrigues. São Paulo: Hemus, 1970.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1986.
- \_\_\_\_\_. *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons, 1981. 2 v.
- REVISTA do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 1982/2013. v. 1 a 80.



# Índice remissivo

## A

abscissa 52  
ângulos notáveis 254

## B

base do logaritmo 177

## C

coeficiente  
angular 79, 84  
linear 79  
comensuráveis 19  
complementar de um conjunto 28  
completamento de quadrado 138  
concavidade da parábola 116, 134  
conjunto 12  
dos números inteiros 15  
dos números irracionais 20  
dos números naturais 14  
dos números racionais 16  
dos números reais 24  
imagem 50  
contradomínio 50  
coordenadas cartesianas 52  
cosseno 249

## D

decimais  
exatos 17  
periódicos 17  
diagonal de um polígono convexo 20  
diferença entre conjuntos 30  
discriminante 107  
distância entre dois pontos 53  
na reta real 26  
dízima periódica 18  
domínio 50

## E

equação  
da circunferência 54  
da reta 84  
exponencial 176

escala 96  
Richter 201

## F

feixe de retas paralelas 236  
forma canônica 117, 139  
fração geratriz 17  
função 40, 41, 45  
afim 73, 219  
bijetiva 64  
constante 76  
crescente 58  
decrescente 58  
exponencial 147, 159, 229  
exponencial  $e^x$  169  
identidade 80  
injetiva 62  
inversa 189  
linear 80  
logarítmica 189  
modular 97  
quadrática 102  
sobrejetiva 63

## G

gráfico 52  
da função afim 79  
da função exponencial 159  
da função logarítmica 192  
da função modular 97  
da função quadrática 113

## I

inequações  
do 1º grau 85  
do 2º grau 130  
exponenciais 167  
logarítmicas 199  
intersecção de conjuntos 29  
intervalos reais 34

## L

logaritmando 177

logaritmo 176  
  decimal 183  
  natural 183

## M

módulo de um número real 26  
movimento uniforme 90  
movimento uniformemente variado 134

## N

notação científica 155  
número de ouro 21, 112

## O

operações com intervalos 36  
operações entre conjuntos 29  
ordenada 52

## P

parábola 56, 113  
plano cartesiano 52  
polígonos semelhantes 245  
potenciação 150  
produto das raízes da equação quadrática 112  
progressão  
  aritmética 66, 90, 137, 164, 213  
  geométrica 66, 164, 221  
proporcionalidade 93  
propriedades  
  da união e da intersecção 30

## Q

quadrantes 52

## R

radiciação 156  
radioatividade 173  
relação de inclusão entre conjuntos 28  
relações métricas no triângulo retângulo 246  
reta numerada 19

reta real 24

reunião ou união de conjuntos 29

## S

segmentos de reta 19  
  incomensuráveis 20  
semelhança de triângulos 236

seno 249

sequência 18, 66, 208

  de Fibonacci 210

  finita 38, 209

  infinita 21

sinal

  da função afim 85

  da função quadrática 130

sistema de inequações do 1º grau 87

soma das raízes 107, 112

## T

tangente 249

teorema de Tales 236, 237

translação 80

## V

variável

  dependente 42

  independente 42

valor

  de uma função afim 75

  ou imagem da função quadrática 104

  máximo ou mínimo da função quadrática 126

vértice da parábola 117, 126

## Z

zero da função afim 85

zeros da função quadrática 107



**Manual  
do Professor**

**Matemática**

**VOLUME 1**

# Sumário

1	Conversa com o professor .....	291
2	Apresentação da coleção .....	291
3	Um pouco da história do ensino da Matemática no Brasil .....	292
4	Pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino da Matemática .....	295
5	Características da coleção .....	301
6	Orientações metodológicas e o conteúdo digital na prática pedagógica .....	305
7	O novo Enem .....	310
8	Avaliação em Matemática .....	312
9	Texto complementar: Por que se deve avaliar? .....	317
10	Sugestões complementares: leituras, recursos digitais e passeios .....	319
11	Observações e sugestões para as Unidades e os capítulos	
	<b>Unidade 1 – Números e funções</b> .....	325
	Capítulo 1 • Conjuntos numéricos .....	325
	Capítulo 2 • Funções .....	328
	Atividades complementares à Unidade 1 .....	330
	<b>Unidade 2 – Função afim e função quadrática</b> .....	332
	Capítulo 3 • Função afim e função modular .....	333
	Capítulo 4 • Função quadrática .....	335
	Atividades complementares à Unidade 2 .....	338
	<b>Unidade 3 – Função exponencial e função logarítmica</b> .....	343
	Capítulo 5 • Função exponencial .....	343
	Capítulo 6 • Logaritmo e função logarítmica .....	345
	Atividades complementares à Unidade 3 .....	346
	<b>Unidade 4 – Sequências e Trigonometria</b> .....	350
	Capítulo 7 • Sequências .....	350
	Capítulo 8 • Trigonometria no triângulo retângulo .....	353
	Atividades complementares à Unidade 4 .....	355
12	Resolução dos exercícios .....	359
	Capítulo 1 .....	359
	Capítulo 2 .....	361
	Capítulo 3 .....	365
	Capítulo 4 .....	372
	Capítulo 5 .....	383
	Capítulo 6 .....	389
	Capítulo 7 .....	397
	Capítulo 8 .....	402
	Caiu no Enem .....	408

## 1 Conversa com o professor

Este Manual foi escrito especialmente para você, professor. Sei que nem sempre temos condições e oportunidades de ler revistas, livros e acessar *sites* especializados em Educação Matemática, de participar de encontros e congressos ou de frequentar cursos de especialização ou mestrado. Mas, com base no trabalho que desenvolvo há décadas com professores de Matemática como você, sei da grande vontade que todos têm de estar atualizados e de ter acesso às mais recentes informações sobre aprendizagem e ensino da Matemática.

Estou certo de que este Manual vai ajudá-lo nessa procura. Você será convidado a refletir comigo sobre questões como: a história do ensino da Matemática no Brasil, os pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino da Matemática, o novo Enem, algumas estratégias didáticas, os conteúdos digitais, os temas interdisciplinares e a avaliação em Matemática, além de outras.

Reconhecer o caminho trilhado pelo ensino da Matemática no Brasil e buscar respostas para as questões presentes no dia a dia do professor constituíram os primeiros suportes para a elaboração desta coleção. Outros pressupostos que dão sustentação às propostas apresentadas dizem respeito aos aspectos presentes na Lei de Diretrizes

e Bases da Educação Nacional (LDB), nº 9.394/96, e na Resolução nº 2, de 30 de janeiro de 2012, que define as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio.

No item *Sugestões complementares: leituras, recursos digitais e passeios*, procuro estimulá-lo a estar sempre atualizado, aperfeiçoando e aprofundando continuamente sua formação em Matemática, em Metodologia do Ensino de Matemática e em Educação. Fazendo parte desse movimento nacional em prol da melhoria da qualidade da aprendizagem e do ensino de Matemática, certamente você se sentirá mais seguro e motivado nessa difícil, mas gratificante, tarefa diária de criar condições para que seus alunos aprendam Matemática com significado e prazer, para poderem usá-la naturalmente em sua vida como cidadãos. Com isso, estará auxiliando seus alunos na concretização dos princípios gerais da educação: aprender a conhecer, a fazer, a conviver e a ser.

Bom trabalho! Compartilhe comigo suas vitórias, seus sucessos, suas dúvidas e suas dificuldades enviando sugestões para melhorar este trabalho.

Um abraço.

O Autor.

## 2 Apresentação da coleção

A educação brasileira, de maneira geral, passa por uma fase de grandes mudanças, sendo elas de recursos didáticos, de currículo, de expectativas de aprendizagem, de perfil cultural e cognitivo de nossos jovens, entre outras. Essas mudanças geram impactos no trabalho do profissional da educação, podendo até mesmo causar desconforto ou insegurança. Assim, um dos objetivos desta coleção, composta de livro do aluno e Manual do Professor, é fornecer elementos que ajudem a atender às necessidades desse novo cenário educacional.

Esta coleção apresenta uma metodologia que procura atribuir ao aluno o papel central no processo de ensino-aprendizagem, como agente da sua aprendizagem em constante interação com o texto. O aluno é solicitado a responder perguntas, confrontar soluções, verificar regularidades, refletir e tirar conclusões. Para isso, grande parte do conteúdo é introduzida por situações-problema e depois sistematizada.

São abordados os principais conteúdos nos campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, das Grandezas e Medidas, da Estatística, da Combinatória e da Probabilidade – sempre que possível, integrados entre si e com as demais áreas do conhecimento. A maioria desses temas é trabalhada a partir de situações-problema contextualizadas ou interdisciplinares.

Os conteúdos são trabalhados de maneira diferenciada. Por exemplo: tópicos de Grandezas e Medidas aparecem

como aplicações dos números reais; aborda taxa de variação da função afim; *não* introduz função como caso particular de relação, como é tradicionalmente feito; trabalha as progressões como caso particular de função; explora a proporcionalidade na função linear; explora a Geometria analítica da parábola na função quadrática; relaciona a função quadrática a uma progressão aritmética; apresenta caracterização da função exponencial por meio da progressão geométrica; abrevia o cálculo com logaritmos e dá lugar ao uso da calculadora; apresenta a interpretação geométrica de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica; apresenta as posições relativas dos três planos no espaço ao estudar os sistemas lineares  $3 \times 3$ ; apresenta uma introdução à programação linear; apresenta o método binomial para o cálculo de probabilidade; apresenta as aplicações de Probabilidade à Genética, etc.

A distribuição dos conteúdos, ao longo da coleção, não esgota um assunto em um único capítulo e aborda um mesmo conceito em vários dos campos mencionados anteriormente, bem como sob diferentes pontos de vista dentro de um mesmo campo. É o caso das funções e progressões, da função afim e da Geometria analítica da reta, da função quadrática e da Geometria analítica da parábola, das grandezas e medidas e dos números, etc.

### 3 Um pouco da história do ensino da Matemática no Brasil

A história da humanidade traz as marcas do desenvolvimento de todas as ciências, e a Matemática, como tal, apresenta grande evolução nos seus métodos, processos e técnicas; na sua organização; na sua relação com outras áreas da atividade humana e no alcance e na importância das suas aplicações.

No campo educacional, o ensino da Matemática também passou por evoluções na organização de sua estrutura como componente curricular e no alcance e na importância de sua função no desenvolvimento do pensamento dos indivíduos.

Essas transformações estão intimamente ligadas às mudanças políticas e sociais ocorridas historicamente. Fiorentini (1995) destaca que não é simples descrever os diferentes modos de ensinar Matemática ao longo do desenvolvimento da educação no Brasil, pois em cada um deles há a influência da concepção de ensino, de aprendizagem, de Matemática e de Educação; dos valores e das finalidades atribuídos ao ensino da Matemática; da relação professor-aluno e da visão que se tem de mundo, de sociedade e de ser humano que se percebe em cada período histórico.

No período colonial, os jesuítas eram responsáveis pela escolarização e tinham o propósito de oferecer uma cultura geral básica, ou seja, relevante para a formação do ser humano. Segundo o educador Valente (1999) “as ciências, e em particular a Matemática, não constituíram, ao longo dos duzentos anos de escolarização jesuítica no Brasil, um elemento integrante da cultura escolar”.

A pouca atenção dada à Matemática pelos jesuítas em seus colégios no Brasil foi fruto do pensamento corrente da época. A Companhia de Jesus contava com homens de ciências entre os seus, mas mesmo entre eles a Matemática nunca foi considerada ciência autônoma, abstrata e geral. Para eles o ensino das Letras era mais importante, pois era visto como o verdadeiro formador do ser humano.

Valente (1999) afirma que essa postura perante a Matemática mudou no Brasil com a independência de Portugal da dominação espanhola, a que esteve submetido de 1580 a 1640. Com o restabelecimento de sua soberania, o rei português dom João IV buscou reorganizar seu Exército nacional e trazer para o país os avanços realizados na arte da guerra.

Esse movimento influenciou a educação em Portugal e, conseqüentemente, no Brasil. O rei precisava de engenheiros aptos aos novos métodos de construção de fortificações e à arte de trabalhar o aço e a pólvora, para a criação e o manuseio de canhões de artilharia. Esses profissionais foram peças fundamentais das novas Forças Armadas, pois eram especialistas nas “artes mecânicas” e matemáticos hábeis, capazes de usar geometria e aritmética em múltiplos campos de trabalho. Para esse fim o rei criou as “aulas

de artilharia e fortificação”. A primeira dessas aulas no Brasil foi criada em 1699, no Rio de Janeiro, com a intenção de ensinar a desenhar fortificações. Assim, o Brasil começava a formar seus próprios engenheiros com ensino baseado na filosofia racionalista cartesiana, com o intuito de assegurar e registrar as fronteiras da colônia portuguesa.

No século XVIII, com a “febre” do ouro no Brasil, os militares portugueses eram responsáveis pela organização, fundação das vilas e construção da vida civil nas regiões de mineração, o que levou à criação de uma escola militar no ano de 1738.

No final do século XIX e começo do século XX, o Brasil passou por uma transformação em suas estruturas de poder, deixando para trás uma sociedade latifundiária e escravocrata, caminhando para um modelo urbano-industrial. O ensino da Matemática, que ainda mantinha muitas das características do proposto pelos jesuítas, resumia-se a uma apresentação seca, abstrata e lógica, que não atendia a essa nova sociedade emergente.

A instalação do Governo Provisório em 1930, com uma nova proposta política e econômica, colocou em destaque a necessidade de infraestrutura adequada à nova realidade, provocando as reformas de ensino de Francisco Campos, na década de 1930, e a de Gustavo Capanema, na década de 1940.

Esses dois políticos tomaram emprestadas muitas ideias desenvolvidas entre os anos 1929 e 1937 pelo professor de matemática Euclides Roxo. Discípulo do alemão Felix Klein, um matemático que propôs o que se chamava “Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática”, Roxo acreditava que o ensino da Matemática de forma fragmentada, como era feito até então, não estava de acordo com o desenvolvimento psicológico do aluno.

A nova proposta curricular de Matemática foi implantada pela primeira vez em 1929 no Colégio Pedro II, onde Roxo era professor catedrático. De acordo com o próprio Roxo (1929), a reforma na cadeira da disciplina foi uma completa renovação e fazia com que os alunos não tivessem provas distintas de Aritmética, Álgebra e Geometria, mas sim um exame único de Matemática. Isso permitia que o conteúdo das três áreas citadas fosse espalhado e dividido ao longo dos quatro anos de educação no colégio. Ele ainda explicou que tal proposta estava resguardada pelas recentes correntes pedagógicas do mundo civilizado.

Roxo (1890-1950) acreditava que a Matemática abstrata ensinada nos colégios já não fazia sentido em uma sociedade de demandas comerciais e industriais como a que existia então no Brasil e queria apresentar conceitos matemáticos de forma viva e concreta, respondendo às mudanças culturais do país, mais uma vez influenciado por Felix Klein.

De acordo com Dassie e Rocha (2003), influenciado por essa nova proposta, Francisco Rocha, o então ministro da Educação e da Saúde do Governo Provisório de Getúlio Vargas, buscou reformar a educação brasileira com ideais escolanovistas. Em um esforço para criar uma educação secundária com finalidade própria, e não mais um simples preparatório para cursos das universidades, ele instituiu o Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931, conhecido como Reforma Francisco Rocha. Nesse documento estava previsto o ensino da Matemática de forma muito similar ao que pensara Euclides Roxo para o Colégio Pedro II, ou seja, prevendo o ensino simultâneo dos diferentes campos da disciplina, porém sem o preciosismo das instruções metodológicas apresentadas no programa de Roxo.

Tais mudanças não foram recebidas com facilidade pelos professores do país, notadamente pelo Exército brasileiro e pela Igreja católica, que apresentaram críticas severas ao plano do ministro e levaram para a mídia um extenso debate sobre as metodologias do ensino matemático; o professor Euclides Roxo participou como defensor da reforma.

Em 1939, o então ministro da Educação e da Saúde, Gustavo Capanema, começou uma série de estudos e consultas para a elaboração de uma nova reforma. Entre os documentos analisados estavam os relatórios do Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos, a proposta do Colégio Pedro II, as legislações educacionais vigentes em diversos países europeus, as cartas enviadas pelo próprio Euclides Roxo e seus opositores às instituições de ensino do Exército e da Igreja.

Assim, a Lei Orgânica do Ensino Secundário foi promulgada em 9 de abril de 1942 e foi fruto de um trabalho de escrita, revisão e crítica do qual participaram todos os principais envolvidos nos recentes debates sobre Educação Matemática. O objetivo da nova reforma era criar um ensino secundário capaz de “formar a personalidade integral dos adolescentes; acentuar e elevar, na formação espiritual dos adolescentes, a consciência patriótica e a consciência humanística; e dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial”. Ela dividia o ensino secundário em dois ciclos: o ginasial, com duração de quatro anos, e os cursos clássico e científico no segundo momento, ambos com duração de três anos.

Esse processo de reestruturação ocorrido no início da década de 1940 ficou conhecido como Reforma Capanema.

Fiorentini (1995) classificou o ensino da Matemática presente até o final da década de 1950 como sendo de tendência *formalista clássica*, na qual o ensino era “acentuadamente livresco e centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo” por meio de explicações orais e apresentação teórica na lousa. Ao aluno cabia apenas o papel de reproduzir exatamente o raciocínio e os procedimentos realizados pelo professor ou presentes no livro didático. Essa tendência recebeu o nome de formalista clássica porque em relação ao seu ensino a Matemática era apresentada como reprodução do modelo euclidiano, isto é, como uma organiza-

ção lógica a partir de conhecimentos primitivos, axiomas, definições e teoremas para, depois, serem apresentados os exercícios. A concepção de Matemática subjacente era a platônica, na qual se considera que as ideias matemáticas existem independentemente do ser humano e, portanto, não são construídas por ele, o que justifica a postura determinada aos estudantes de apenas reproduzir o que era apresentado.

Do ponto de vista social e político, Fiorentini destaca que nessa época a aprendizagem da Matemática era para poucos “bem dotados” intelectualmente e financeiramente. Garantia-se na escola um ensino mais racional e rigoroso à elite dirigente e aos membros da Igreja e, para as classes menos favorecidas que frequentavam a escola técnica, prevalecia o cálculo e a abordagem mais mecânica com uma coleção de regras e fórmulas.

Outro marco da década de 1950 foi a derrota dos americanos no início da corrida espacial para os soviéticos, o que colocou em destaque a necessidade de se investir em avanço tecnológico. A partir daí, enormes quantias foram dispensadas pelas associações científicas para promover a reunião de especialistas de renome em Educação, Psicologia e diferentes campos das ciências exatas e naturais. Em relação ao ensino da Matemática, ocorreu na França o Seminário de Royaumont, cuja proposta era a de discutir novas perspectivas, tendo em vista uma formação matemática voltada ao pensamento científico e tecnológico. Esse seminário deu origem ao movimento chamado Matemática moderna, consolidado pelo grupo Bourbaki.

No Brasil, de 1955 a 1966, foram realizados cinco Congressos de Professores de Matemática com a preocupação de discutir conteúdos e metodologias de ensino. Esses encontros inspiraram a criação de grupos importantes para o cenário da Educação Matemática no país nas décadas de 1960 e 1970. Dentre eles destacam-se, em São Paulo, o Geem (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática), liderado por Oswaldo Sangiorgi e Renata Watanabe; em Porto Alegre, o Geempa (Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação), com Ester Pilar Grossi como líder desde sua criação; no Rio de Janeiro, o Gemeg, que foi substituído pelo Gepem (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), tendo como presidente Maria Laura Mouzinho Leite Lopes; desse grupo também participou José Carlos de Mello e Souza (Malba Tahan) e, posteriormente, em Rio Claro (SP), o Sapo (Serviço Ativador em Pedagogia e Orientação), que foi o embrião do primeiro Mestrado em Educação Matemática do país.

Segundo Fiorentini (1995), os principais propósitos do Movimento da Matemática Moderna foram:

- integrar os três campos fundamentais da Matemática com a introdução de elementos unificadores, como a teoria dos conjuntos, estruturas algébricas e relações e funções;
- substituir o caráter mecanizado, não justificado e regrado presente na Matemática escolar por outro com mais ênfase nos aspectos estruturais e lógicos da Matemática;

- fazer com que o ensino de 1º e 2º graus refletisse o espírito da Matemática contemporânea, que, graças ao processo de algebrização, tornou-se mais poderosa, precisa e fundamentada logicamente.

Com a aprovação, em 1961, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, esse movimento ganhou força nas décadas de 1960 e 1970. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998 destacam que, com base nesse movimento, a Matemática era concebida como lógica e que deveria ser compreendida a partir de suas estruturas, conferindo um papel fundamental à linguagem matemática. O ensino passou a ter excessiva preocupação com abstrações internas à própria Matemática, em uma tentativa de aproximar a Matemática pura da Matemática escolar.

Para Fiorentini (1995), esse movimento promovia o retorno ao formalismo matemático, só que tendo como fundamento as estruturas algébricas e a linguagem formal da Matemática contemporânea. Enfatizava o uso preciso da linguagem matemática, o rigor e as justificativas das transformações algébricas por meio das propriedades estruturais.

No entanto, destaca esse autor que não ocorreram muitas mudanças em relação ao ensino-aprendizagem, pois o ensino continuou acentuadamente autoritário e centrado no professor, que permaneceu desenvolvendo sua aula na lousa, onde demonstrava tudo rigorosamente. O aluno continuou sendo considerado aquele que deve receber passivamente o apresentado pelo professor, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados por ele.

Nessa linha, as finalidades do ensino da Matemática estariam voltadas mais a formar um especialista em Matemática do que um cidadão, pois a Matemática escolar perdeu tanto seu papel de formadora da disciplina mental quanto seu emprego como ferramenta para a resolução de problemas. A formação matemática assumiu uma perspectiva em que era mais importante a apreensão da estrutura, que capacitaria o aluno a aplicar essas formas de pensamento aos mais variados domínios, do que a aprendizagem de conceitos e aplicações da Matemática.

Florentini (1995) sintetiza dizendo que o ensino da Matemática nesse contexto pode ser considerado de tendência *formalista moderna* e, tal como a tendência formalista clássica, “pecou pelo reducionismo à forma de organização/sistematização dos conteúdos matemáticos, uma vez que em ambos se relega a segundo plano sua significação histórico-cultural e a essência das ideias e conceitos matemáticos”. Destaca, porém, que uma diferença fundamental entre essas duas tendências está no fato de que, enquanto a clássica enfatiza e valoriza o encadeamento lógico do raciocínio matemático e as formas perfeitas e absolutas das ideias matemáticas, a moderna busca os desdobramentos lógico-estruturais das ideias matemáticas, tendo por base as estruturações algébricas mais atuais, considerando estar aí expressada a qualidade do ensino.

De acordo com os PCN, em 1980, nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) divulgou o documento “Agenda para Ação”, no qual apresentou recomendações para o ensino da Matemática, destacando a resolução de problemas como foco. Imprimiu novos rumos às discussões curriculares ao destacar a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos e linguísticos na aprendizagem da Matemática. As reformas educacionais foram fortemente influenciadas por esse documento, de modo que propostas elaboradas em diferentes países, nas décadas de 1980 e 1990, apresentam pontos em comum no que diz respeito a:

- direcionamento do Ensino Fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
- importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no Ensino Fundamental, elementos de Estatística, Probabilidade e Combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordagem desses assuntos;
- necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação (PCN Matemática, 1997, p. 21).

Esses aspectos apontados foram os norteadores das indicações e propostas apresentadas para o ensino da Matemática pelos PCN, válidas até hoje.

Esse documento destaca a Etnomatemática com suas propostas alternativas para a ação pedagógica. Tal programa contrapõe-se às orientações que desconsideram qualquer relacionamento mais íntimo da Matemática com aspectos socioculturais e políticos — o que a mantém intocável por fatores outros a não ser sua própria dinâmica interna. Do ponto de vista educacional, procura compreender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro do contexto cultural do próprio indivíduo. A Etnomatemática procura partir da realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural.

O mesmo documento, ao apresentar “caminhos para se ‘fazer Matemática’ em sala de aula”, dá ênfase à resolução de problemas como um recurso a ser utilizado em seu ensino. Apoiar-se na história da Matemática para justificar sua aplicação, considerando que a própria Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. Assim, defende uma proposta com os seguintes princípios:



- o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino-aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; em outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se observa na história da Matemática;
- o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido em um campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (PCN Matemática, 1997, p. 32-33).

A década de 1980 foi decisiva para a Educação Matemática no Brasil, pelo início da expansão, em praticamente todo o país, de programas de pós-graduação em Educação Matemática. Em 1984, inicia-se formalmente o primeiro Mestrado

em Educação Matemática do país, na Unesp de Rio Claro (SP). Destacamos também a influência dos trabalhos desenvolvidos na Faculdade de Educação da Unicamp, a linha de pesquisa 'Educação Matemática' existente no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRN, o Programa de Pós-Graduação em Psicologia da UFPE, etc. Acrescenta-se ainda o SPEC (Subprograma Educação para a Ciência), da UFRJ.

Em fevereiro de 1987 aconteceu o I Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), realizado no Centro de Ciências Matemáticas, Físicas e Tecnológicas da PUC-SP. Ao todo já aconteceram onze ENEMs. Nesses encontros têm sido apresentados os últimos trabalhos e pesquisas em Educação Matemática. São oferecidos minicursos, palestras, conferências, mesas redondas, oficinas, com o objetivo de divulgar e socializar os conhecimentos sobre o tema, trocar experiências de ensino de Matemática em todos os níveis e promover o intercâmbio de ideias. Esse evento é realizado a cada três anos.

Todos os esforços dos precursores do movimento da Educação Matemática no Brasil resultaram na criação da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, durante o II ENEM, em janeiro de 1988, na Universidade Estadual de Maringá (PR). A SBEM tem como finalidade congregar profissionais da área de Educação Matemática e de áreas afins e cumpre um importante papel na formação da comunidade de professores de Matemática no Brasil.

O Movimento de Educação Matemática acontece em âmbito internacional, em várias instâncias e em todos os níveis de ensino. O Brasil tem sido até mesmo palco de encontros internacionais de Educação Matemática, a exemplo do Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM). Ao todo já aconteceram seis SIPEM's.

## 4 Pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino da Matemática

### Ensino Médio

Na organização da educação escolar brasileira, determinada pela LDB, o Ensino Médio constitui a última etapa da Educação Básica e é considerado um momento de consolidação e aprofundamento dos conhecimentos básicos do Ensino Fundamental. De acordo com ela, nessa fase promover-se-á uma preparação básica para o trabalho e a cidadania da pessoa, que permita que esta continue aprendendo e se adaptando a uma sociedade em constante mudança, isto é, nesse nível de escolaridade deve-se visar ao aprimoramento da ética, da autonomia intelectual e do pensamento crítico do estudante, promovendo o relacionamento entre teoria e prática, possibilitando a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos que orientam os processos produtivos da sociedade.

Mais detalhadamente, a Resolução nº 2, de 30 de janeiro de 2012, emitida pela Câmara de Educação Básica do Con-

selho Nacional de Educação, ao definir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, agrega a essa etapa do processo educacional maior presença dos desenvolvimentos sociais e tecnológicos e enfoque interdisciplinar, com intuito de garantir uma relação mais ampla entre o aprendido na escola e os acontecimentos cotidianos da sociedade em que estão inseridos. Assim, são essenciais a participação e a iniciativa dos alunos, que devem trazer seu mundo à escola para que possam compreendê-lo e mudá-lo com o exercício de sua cidadania.

Para Angela Maria Martins (2000), estudiosa e pesquisadora de políticas de Educação Básica e Educação Profissional, essas resoluções oficiais estão promovendo um processo de modernização do Ensino Médio, que tem como principal motivo a necessidade de readequação da educação brasileira às mudanças do mercado de trabalho e da nova realidade econômica que começou a se impor a partir

da década de 1980, época da revolução tecnológica e início do declínio da concentração de capital nos meios de produção industriais.

Segundo ela, essa modernização torna-se emergencial neste momento histórico de computadores conectados a redes globais, gerando um imenso volume de informação. Momento que mostra ser inegável a importância do conhecimento e raciocínio matemático. O próprio Ministério da Educação, em suas publicações recentes, reconhece que a Matemática deve ser hoje compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, capaz de contribuir para a construção de uma visão de mundo, essencial para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que serão exigidas na vida social e profissional das pessoas.

Nesse contexto, a Matemática supera o caráter instrumental e deve ser apresentada como ciência, com características próprias de investigação e de linguagem, e papel integrador importante ao lado das Ciências da Natureza. Essa nova percepção da Matemática como ciência deve permitir ao aluno perceber sua dimensão histórica e a estreita relação que possui com a sociedade e a cultura em diferentes épocas, ampliando e aprofundando o espaço de conhecimento que existe nessas inter-relações.

Sua inserção no Ensino Médio, no entanto, deve ser adequada ao desenvolvimento e à promoção de seu valor entre os alunos, tendo em mente que existem diferentes motivações, interesses e capacidades.

Levando em conta ainda as resoluções do governo federal, há que se destacar a proposta do Ensino Médio Inovador, motivada, segundo a revista *Educação* (Edição 172. São Paulo: Segmento) de agosto de 2011, pela percepção em todo o mundo de um clima de desinteresse dos adolescentes pela vida escolar. A partir daí, muitas reflexões têm sido feitas sobre os possíveis caminhos para que o Ensino Médio seja vivido e percebido como significativo. Nessa perspectiva, o desafio dos sistemas de ensino nos últimos anos tem sido a busca da organização de um programa curricular que consiga, ao mesmo tempo, formar os jovens para continuar os estudos no Ensino Superior e prepará-los para o mercado de trabalho.

No Brasil, para melhorar o cenário, o governo federal aposta, desde 2004, em propostas que apontem para um programa curricular mais flexível. Uma das principais medidas foi a possibilidade de integrar o ensino regular e a educação profissional, sacramentada pelo Decreto nº 5.154/04. A Portaria nº 971, de outubro de 2009, instituiu o Programa Ensino Médio Inovador (ProEMI) como parte das ações do Plano de Desenvolvimento da Educação, em uma tentativa de induzir, por meio de parcerias com municípios e estados, a reestruturação do currículo do Ensino Médio brasileiro.

Essa iniciativa tem como preocupação os recentes números levantados por pesquisas oficiais que mostram a desaceleração ou a queda no ingresso de alunos no Ensino

Médio em todo o território brasileiro. No documento orientador (Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/documento\\_orientador.pdf](http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/documento_orientador.pdf)>. Acesso em: 13 maio 2016), o Ministério da Educação reconhece que um dos fatores possíveis para essas estatísticas problemáticas, nessa etapa do sistema educacional, seja exatamente a falta de sensibilidade e de objetivos para o currículo do Ensino Médio.

Assim, o Ensino Médio deixa de ser simplesmente preparatório para o Ensino Superior ou estritamente profissionalizante para assumir necessariamente a responsabilidade de completar a educação básica, preparando para a vida, qualificando para a cidadania e capacitando para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho.

Essa implantação implicará um aumento de 600 horas na formação do aluno, passando a carga horária de 2400 horas anuais para 3000 horas anuais. Esse aumento será gradativo, à razão de 200 horas por ano. A grade horária sofrerá uma flexibilização e o aluno terá a possibilidade de escolher 20% da sua carga horária, em um conjunto de atividades oferecidas pela escola. Além dessas mudanças, o Ensino Médio Inovador estabelece como referencial as seguintes proposições curriculares e condições básicas para os projetos das escolas:

- a) centralidade na leitura, como elemento básico de todas as disciplinas; utilização, elaboração de materiais motivadores e orientação docente voltadas para essa prática;
- b) estímulo a atividades teórico-práticas apoiadas em laboratórios de Ciências, Matemática e outros que auxiliem os processos de aprendizagem nas diferentes áreas do conhecimento;
- c) fomento de atividades de Arte, com o objetivo de promover a ampliação do universo cultural do aluno;
- d) atividade docente com dedicação exclusiva à escola;
- e) projeto político-pedagógico implementado com a participação efetiva da comunidade escolar e a organização curricular articulada com os exames do Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Médio.

Em apoio à estratégia do redesenho curricular, encontra-se o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio no Brasil (PNEM), instituído pela Portaria nº 1.140, de 22 de novembro de 2013, visando elevar o padrão de qualidade nesse nível de ensino, em suas diferentes modalidades, orientado pela perspectiva de inclusão de todos que a ele têm direito. (PNEM. Disponível em: <<http://pactoensinomedio.mec.gov.br/>>. Acesso em: 4 fev. 2016.)

No momento da reformulação deste Manual, encontra-se em discussão a Base Nacional Comum Curricular (BNC), que, quando aprovada, será o principal documento norteador da educação básica no Brasil. Até março de 2016, cidadãos, organizações e profissionais da educação puderam, por meio do *site* da BNC, conhecer a sua proposta, dar contribuições às discussões e acessá-las, verificar os números da consulta pública realizada, além de acessar relatórios do MEC. (BNC.

Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>>. Acesso em: 14 mar. 2016.)

Tendo esses elementos como pressupostos é que podemos agora considerar os objetivos específicos do ensino de Matemática no Ensino Médio.

## Objetivos gerais do ensino da Matemática no Ensino Médio

Vivemos em uma sociedade tecnológica, informatizada, globalizada e é fundamental que se desenvolva nos alunos do Ensino Médio a capacidade de: comunicar-se em várias linguagens; investigar, resolver e elaborar problemas; tomar decisões, fazer conjecturas, hipóteses e inferências; criar estratégias e procedimentos; adquirir e aperfeiçoar conhecimentos e valores; trabalhar solidária e cooperativamente; e estar sempre aprendendo.

No Ensino Fundamental os alunos tiveram um primeiro contato com vários campos da Matemática, como números e operações, formas geométricas planas e espaciais, grandezas e medidas, iniciação à Álgebra, aos gráficos e às noções de probabilidade. Agora, no Ensino Médio, é o momento de ampliar e aprofundar tais conhecimentos, estudar outros temas, desenvolver ainda mais a capacidade de raciocinar, de resolver problemas, generalizar, abstrair e de analisar e interpretar a realidade que nos cerca, usando para isso o instrumental matemático.

Mas a Matemática tem características próprias, tem uma beleza intrínseca que deve ser ressaltada na importância dos conceitos, das propriedades, das demonstrações dos encadeamentos lógicos, do seu aspecto dedutivo, fundamentando seu caráter instrumental e validando ou não intuições e conjecturas. Assim, no Ensino Médio é importante trabalhar gradativamente a Matemática também como um sistema abstrato de ideias.

## Objetivos específicos do ensino da Matemática no Ensino Médio

As propostas e atividades matemáticas devem possibilitar aos estudantes:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticos e planejar soluções para problemas novos, que exijam iniciativa e criatividade;
- aplicar conhecimentos matemáticos para compreender, interpretar e resolver situações-problema do cotidiano ou do mundo tecnológico e científico;
- desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas por escrito ou oralmente, promovendo sua capacidade de argumentação;
- estabelecer relações, conexões e integração entre os diferentes campos da Matemática para resolver problemas, interpretando-os de várias maneiras e sob diferentes pontos de vista;
- interpretar e validar os resultados obtidos na solução de situações-problema;

- fazer arredondamentos e estimativas mentais de resultados aproximados;
- desenvolver atitudes positivas em relação à Matemática, como autonomia, confiança em relação às suas capacidades matemáticas, perseverança na resolução de problemas, gosto pela Matemática e pelo trabalho cooperativo;
- analisar e interpretar criticamente dados provenientes de problemas matemáticos, de outras áreas do conhecimento e do cotidiano.

Em relação aos campos da Matemática, os objetivos específicos do ensino devem ser os de capacitar o estudante para:

- saber utilizar o sistema de numeração, as operações, suas propriedades e suas regularidades nos diversos conjuntos numéricos;
- empregar corretamente os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do importante conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas, etc.);
- conhecer as propriedades geométricas das figuras planas e sólidas e suas representações gráfica e algébrica, bem como reconhecer regularidades nelas;
- compreender os conceitos fundamentais de grandezas e medidas e saber usá-los na formulação e resolução de problemas;
- utilizar os conceitos e procedimentos da Estatística e da Probabilidade, valendo-se para isso da Combinatória, entre outros recursos.

## Temas transversais e a Matemática

Na escola, professores e alunos muitas vezes são confrontados por questões que envolvem assuntos atuais e urgentes que precisam ser tratados por toda a comunidade escolar, para atender às demandas da sociedade ou da própria escola. Os temas transversais trazem ao currículo escolar a possibilidade de abordar essas questões por todas as áreas e disciplinas.

É importante destacar que os temas transversais não são novas disciplinas ou novos componentes curriculares a serem acrescentados aos já existentes, mas sim objetos de conhecimento cuja complexidade demanda as perspectivas teóricas e práticas de todos os componentes curriculares, além de incluir saberes extraescolares.

É uma proposta que deve buscar construir uma articulação das diversas áreas de conhecimento, o envolvimento de toda a comunidade escolar, desenvolver as relações interpessoais democráticas, o pensamento crítico e a disposição para intervir na realidade e transformá-la.

Os PCN do Ensino Fundamental apresentam quatro critérios a serem adotados para a seleção de temas transversais:

urgência social, abrangência nacional, possibilidade de ensino e aprendizagem e favorecimento da compreensão da realidade e da participação social.

O critério da urgência social aponta para a preocupação de se ter como tema transversal questões que se apresentem como obstáculos ao exercício pleno da cidadania, afrontem a dignidade das pessoas e deteriorem sua qualidade de vida.

O critério da abrangência nacional indica a necessidade de se tratar de questões pertinentes a todo o país.

O critério da possibilidade de ensino e aprendizagem procura nortear a escolha de temas ao alcance da aprendizagem, alicerçada nas experiências pedagógicas, no caso específico da Matemática, nas propostas da Educação Matemática.

O último critério, favorecimento da compreensão da realidade e da participação social, aponta para a importância de os temas transversais possibilitarem aos alunos uma visão ampla e consistente da realidade brasileira de modo que possam assumir atitudes responsáveis, sem excluir a possibilidade de que cada localidade apresente temas relevantes às suas necessidades específicas.

Com base nesses princípios, os PCN sugerem alguns temas amplos a serem considerados geradores de discussões na comunidade escolar. A Matemática tem muitas contribuições a dar nesse trabalho conjunto e muitas delas já permeiam os assuntos desta coleção.

Os temas transversais podem ser apresentados por meio de situações-problema e trabalhos em equipe. Esses temas aparecem ao longo de toda a coleção, tendo um destaque especial na seção *Outros contextos*. O professor poderá enriquecer suas atividades com esses temas seguindo as orientações dos PCN e dos PCN+. (PCN+. Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 28 mar. 2016.)

A seguir, discutiremos algumas dessas orientações.

## Ética

Com atividades apropriadas, é possível desenvolver no aluno **atitudes** como:

- confiança na própria capacidade de construir e adquirir conhecimentos matemáticos e resolver problemas com eles;
- empenho em participar ativamente das atividades na sala de aula;
- respeito à maneira de pensar dos colegas.

Para isso, é preciso que o professor:

- valorize a troca de experiências entre os alunos;
- promova o intercâmbio de ideias;
- respeite o pensamento, a produção e a maneira de se expressar do aluno;
- deixe claro que a Matemática é para todos e não apenas para alguns mais talentosos;

- estimule a solidariedade entre os alunos, superando o individualismo.

O trabalho em duplas ou em equipes é próprio para o desenvolvimento de tais atitudes.

## Orientação Sexual

Não cabe ao professor de Matemática dar orientação sexual aos alunos, mas, de modo transversal, poderá propor situações-problema, principalmente envolvendo tabelas e gráficos, a respeito de temas sobre os quais os alunos possam refletir.

Veja alguns exemplos que podem ser explorados:

- estatísticas sobre a incidência de gravidez prematura entre jovens e adolescentes;
- evolução da Aids em diferentes grupos (jovens, idosos, homens, mulheres, etc.);
- estatísticas sobre doenças sexualmente transmissíveis;
- estatísticas sobre prevenção de doenças sexualmente transmissíveis.

É possível também trabalhar com estatísticas e situações-problema que não reafirmem preconceitos em relação à capacidade de aprendizagem de alunos de sexos diferentes, bem como mostrar a diferença de remuneração e de cargos de chefia entre homens e mulheres.

## Meio Ambiente

Esse tema pode e deve ser trabalhado em vários momentos na aula de Matemática. Veja alguns exemplos:

Coleta, organização e interpretação de dados estatísticos, formulação de hipóteses, modelagem, prática da argumentação, etc. são **procedimentos** que auxiliam na tomada de decisões sobre a preservação do meio ambiente.

A **quantificação** permite tomar decisões e fazer investigações necessárias (por exemplo, reciclagem e aproveitamento de materiais).

Áreas, volumes, proporcionalidade e porcentagem são **conceitos** utilizados para abordar questões como poluição, desmatamento, camada de ozônio, etc.

## Saúde

Dados estatísticos sobre vários fatores que interferem na saúde do cidadão, quando trabalhados adequadamente na sala de aula, podem conscientizar o aluno e, indiretamente, sua família. Alguns contextos apropriados para a aprendizagem de conteúdos matemáticos são:

- índices da fome, da subnutrição e da mortalidade infantil em várias regiões do país e, em particular, naquela em que vive o aluno;
- médias de desenvolvimento físico no Brasil e em outros países;
- razão médico/população e suas consequências;
- estatísticas sobre várias doenças (dengue, malária, etc.) e como preveni-las;
- levantamento de dados sobre saneamento básico, condições de trabalho, dieta básica, etc.



## Pluralidade Cultural

A Matemática foi e é construída por todos os grupos sociais (e não apenas por matemáticos) que desenvolvem habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses. Valorizar esse saber matemático-cultural e aproximá-lo do saber escolar em que o aluno está inserido é de fundamental importância para o processo de ensino-aprendizagem. A Etnomatemática dá grande contribuição a esse tipo de trabalho.

No estudo comparativo dos sistemas de numeração, por exemplo, os alunos poderão constatar a supremacia do sistema indo-arábico e concluir que a demora de sua adoção pelos europeus se deveu também ao preconceito contra os povos de tez mais escura e que não eram cristãos. Outros exemplos poderão ser encontrados ao se pesquisar a produção de conhecimento matemático em culturas como a chinesa, a maia e a romana. Nesse momento entra o recurso da história da Matemática e da Etnomatemática.

## Trabalho e Consumo

Situações ligadas ao tema trabalho podem se tornar contextos interessantes a ser explorados na sala de aula: o estudo de causas que determinam aumento/diminuição de empregos; pesquisa sobre oferta/procura de emprego; previsões sobre o futuro mercado de trabalho em função de indicadores atuais; pesquisas dos alunos dentro da escola ou na comunidade a respeito dos valores que os jovens de hoje atribuem ao trabalho.

Às vezes o consumo é apresentado como forma e objetivo de vida, transformando bens supérfluos em vitais e levando ao consumismo. É preciso mostrar que o objeto de consumo – um tênis ou uma roupa “de marca”, um produto alimentício ou um aparelho eletrônico, etc. – é fruto de um tempo de trabalho.

Aspectos ligados aos direitos do consumidor também necessitam da Matemática para ser mais bem compreendidos. Por exemplo, para analisar a composição e a qualidade de produtos e avaliar seu impacto sobre a saúde e o meio ambiente, ou para analisar a razão entre menor preço/maior quantidade. Nesse caso, situações de oferta como “compre 3 e pague 2” nem sempre são vantajosas, pois geralmente são feitas para produtos que não estão com muita saída – portanto, não há, muitas vezes, necessidade de comprá-los em grande quantidade – ou que estão com o prazo de validade próximo do vencimento.

## Interdisciplinaridade e contextualização

O atual mundo globalizado apresenta muitos desafios ao ser humano, e a educação manifesta a necessidade de romper com modelos tradicionais para o ensino. Essa ne-

cessidade foi expressa no relatório da Comissão Internacional sobre a Educação para o Século XXI, no texto “Educação: um tesouro a descobrir”, publicado em 1998 por Edições Unesco Brasil. As considerações desse importante documento passaram a integrar os eixos norteadores da política educacional. Os quatro pilares da educação contemporânea citados pela Unesco são: aprender a ser, aprender a fazer, aprender a viver juntos e aprender a conhecer. Esses eixos devem constituir ações permanentes que visem à formação do educando como pessoa e como cidadão. Na relação entre esses quatro pilares é que a interdisciplinaridade e a contextualização se inserem na ousadia de novas abordagens de ensino na Educação Básica.

## Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade, como a própria palavra recomenda, não anula as disciplinas, mas sugere que elas dialoguem entre si. O caráter puramente disciplinar do ensino formal tem dificultado a aprendizagem do aluno e não tem estimulado o desenvolvimento de seu pensamento, a habilidade de resolver problemas e de estabelecer conexões entre os fatos e conceitos, isto é, de “pensar” sobre o que está sendo estudado. De acordo com Edgar Morin (2001), “o parcelamento e a compartimentação dos saberes impedem o aluno de apreender o que está tecido junto”.

É importante considerar que a interdisciplinaridade supõe um eixo integrador com as disciplinas de um currículo para que os alunos aprendam a olhar o mesmo objeto sob diferentes perspectivas. Os PCN destacam que:

*O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com os outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, [...].*

PCNEM (2000, p. 75).

Dessa forma, trabalhando de modo interdisciplinar, propõe-se que a organização e o tratamento dos conteúdos do ensino e as situações de aprendizagem sejam feitos destacando-se as múltiplas interações entre as várias disciplinas do currículo, superando sempre que possível a fragmentação entre elas. É sabido que algumas disciplinas se identificam, se aproximam, têm muitas afinidades (como, por exemplo, a Matemática e a Física), enquanto outras se diferenciam em vários aspectos: pelos métodos e procedimentos que envolvem, pelo objeto que pretendem conhecer ou ainda pelo tipo de habilidade que mobilizam naquele que as investiga, conhece, ensina ou aprende.

Os professores de uma mesma classe podem promover um ensino interdisciplinar por meio de um projeto de investigação, um plano de intervenção ou mesmo de uma atividade. Nesse caso, são identificados os conceitos e procedimentos de cada disciplina que podem contribuir nessa tarefa, descrevendo-a, explicando-a, prevendo soluções e executando-a. Os conceitos podem ser formalizados,

sistematizados e registrados no âmbito das disciplinas que contribuem para o seu desenvolvimento, ou seja, a interdisciplinaridade não pressupõe a diluição das disciplinas. A tarefa a ser executada é que é interdisciplinar na sua concepção, execução e avaliação.

A linguagem matemática é comum às demais áreas do currículo. Por exemplo, os conceitos das Ciências Naturais (Física, Química e Biologia) e as leis naturais geralmente são expressos pela linguagem matemática.

Esta coleção procura dar relevo a vários modelos matemáticos que favorecem a interdisciplinaridade, tais como: a função linear e as situações de proporcionalidade direta; a função quadrática e o movimento uniformemente variado; a função exponencial e vários fenômenos naturais; a Probabilidade e a Genética; as Grandezas e Medidas e as práticas científicas, tecnológicas e sociais; as funções trigonométricas e os fenômenos periódicos, etc.

## Contextualização

Tratar os conteúdos de ensino de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal ou social do aluno, dando significado ao que está sendo aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Assim, a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a articular a Matemática com os temas atuais da ciência e da tecnologia, bem como a fazer conexões dentro da própria Matemática.

A história da Matemática é também uma importante ferramenta de contextualização ao focar a evolução e as crises pelas quais determinados conceitos matemáticos passaram ao longo da História. Grande parte das situações-problema desta coleção é contextualizada.

A contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada em uma abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial, forçado e restrito. Não se pode entender a contextualização como banalização do conteúdo, mas como recurso pedagógico para tornar a constituição de conhecimentos um processo permanente de formação de capacidades intelectuais superiores. Capacidades que permitem transitar inteligentemente do mundo da experiência imediata e espontânea para o plano das abstrações. Assim, contextualizar é situar um fato dentro de uma teia de relações possíveis em que se encontram os elementos constituintes da própria relação considerada.

Ao assumir essa concepção de contextualização, toma-se a posição de que um trabalho em Matemática, com esse propósito, não tem sua ênfase apenas voltada a situações aplicadas ao cotidiano ou a outras disciplinas, mas também a situações puramente matemáticas. Nesses casos, são propostas investigações que podem ser efetuadas a partir de conhecimentos mais simples que evoluem para situações e

conhecimentos mais complexos. Esse tipo de contextualização atende às perspectivas de formação de alunos mais curiosos, estimulando a criatividade e o espírito inventivo.

## Etnomatemática e modelagem

### O que é Etnomatemática?

O prefixo *etno* tem significado muito amplo, referente ao contexto cultural e, portanto, inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; *matema* é uma raiz difícil, que vai na direção de explicar, de conhecer, de entender; *tica*, sem dúvida, vem de *techne*, que é a mesma raiz de arte e de técnica. Assim, *Etnomatemática* é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais. Ela procura compreender o saber/fazer matemático ao longo da História da humanidade, contextualizando, em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações.

As práticas matemáticas de feirantes, comerciantes, borracheiros, cirurgiões cardíacos, vendedores de suco de frutas, bicheiros, indígenas e de grupos africanos enquadram-se, por exemplo, nos estudos e nas pesquisas da Etnomatemática.

Para se inteirar sobre Etnomatemática, recomendamos a leitura dos livros *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, de Ubiratan D'Ambrósio, editora Autêntica; e *Etnomatemática*, de Ubiratan D'Ambrósio, editora Ática; e da revista *Educação Matemática em Revista*, da SBEM, ano 1, n. 1, 1993, inteiramente dedicada a esse tema.

### O que é modelagem?

Diante de uma realidade complexa, global, podemos reduzir esse grau de complexidade isolando algumas variáveis. Temos, assim, uma representação da realidade sobre a qual refletimos e procuramos construir estratégias de ação. De posse dos resultados obtidos nessa representação, voltamos ao global.

Esse processo de passagem do global para o local e do local para o global, a partir de representações, é geralmente chamado *modelagem*.

Acompanhe esta explicação apresentada por Ubiratan D'Ambrósio:

*O esforço de explicar, de entender, de manejar uma porção da realidade, um sistema, normalmente se faz isolando esse sistema e escolhendo alguns parâmetros nos quais concentraremos nossa análise. Com isso, o sistema, com toda a complexidade que ele oferece, fica aproximado por um sistema artificial, no qual se destacam somente alguns parâmetros (algumas qualidades) e se ignoram suas interações com o todo. Dessa maneira considera-se um modelo e passa-se a analisar e refletir sobre o modelo. Este é o processo de modelagem, na sua essência, uma forma de abstração. São exemplos históricos de modelagem em Matemática a Geometria euclidiana, a Mecânica newtoniana, a Óptica geométrica.*



A modelagem, visando aplicações, que é mais comum, faz sempre apelo à realidade na qual está inserido o sistema que deu origem ao modelo com o qual trabalhamos, sempre procurando verificar a adequação dos parâmetros selecionados e as implicações dessa seleção no inter-relacionamento desse sistema com a realidade como um todo, isto é, procurando recuperar o sentido holístico que permeia o matema. Não é possível explicar, conhecer, entender, manejar, lidar com a realidade fora do contexto holístico. Têm-se não mais que visões parciais e incompletas da realidade.

A modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da situação real, que, na verdade, estamos elaborando sobre representações. Assim, a modelagem pode

ser uma metodologia de ensino muito útil e se enquadra no Programa Etnomatemática, que inclui a crítica, também de natureza histórica, sobre representações, que deve estar subjacente ao processo de modelagem.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática: um programa. *Educação Matemática em Revista*, Blumenau, n. 1, p. 5-11, 1993.

Para saber mais sobre modelagem, recomendamos a leitura de: *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, de Rodney Carlos Bassanezi, editora Contexto; e *Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de Matemática*, de Maria Salett Biembengut, Editora da Universidade Regional de Blumenau (Furb). Veja também um modelo para racionamento de energia elétrica na revista *Educação Matemática em Revista*, da SBM, ano 8, n. 11, p. 41-50, dez. 2001.

## 5 Características da coleção

Nesta coleção procuraram de forma ativa a recordação, a ampliação, o aprofundamento de conceitos e procedimentos já explorados durante o Ensino Fundamental, apresentando-os sob diversos pontos de vista e linguagens: natural, gráfica, em tabelas e simbólica.

Deu-se preferência ao longo da obra para atividades realizadas em dupla ou em equipe, com o intuito de valorizar a iniciativa e a capacidade de decisão dos estudantes, reforçando a ajuda mútua, a ética e a solidariedade.

As situações e os problemas apresentados ao longo da coleção têm como pressuposto que as discussões a serem realizadas em sala de aula e os recursos de que o professor pode lançar mão, a partir das resoluções propostas pelos alunos, são os geradores de uma visão de Matemática e de ensino e aprendizagem dessa disciplina como as consideradas até aqui, tanto do ponto de vista dos pesquisadores como das leis e propostas governamentais.

As propostas da coleção visam possibilitar aos jovens alunos a compreensão e a interpretação do mundo ao seu redor por meio da ampliação de suas capacidades analíticas e críticas, necessárias para a tomada de decisões em benefício próprio, de sua comunidade e da sociedade, no complexo processo de participação e cidadania.

Como qualquer outro material didático, o livro deve ser visto como mais um (e não o único) importante auxiliar do professor que busca ensinar Matemática de modo mais significativo para o aluno, com assuntos da vivência dele, desenvolvendo conceitos por meio da compreensão de situações-problema interessantes, contextualizadas ou interdisciplinares.

Em geral, os conceitos são desenvolvidos a partir de uma situação-problema, como é recomendado hoje pelos educadores matemáticos que trabalham com resolução de problemas; a modelagem matemática é feita pela procura de modelos matemáticos com base em problemas reais (por exemplo, os números reais como modelo para as medidas; a função linear como modelo dos problemas de proporcionalidade; a função quadrática como modelo do movimento uniformemente va-

riado; a função exponencial como modelo dos juros compostos, da desintegração radioativa, do aumento do número de bactérias em uma cultura, etc.); as abordagens da história da Matemática, ora feitas como introdução de um assunto, ora como leitura para complementação; e o uso da tecnologia de informação, como calculadoras e *softwares*, é realizado em vários momentos da coleção, principalmente nos problemas que envolvem funções, Trigonometria e números reais.

Procurou-se colocar em cada volume conteúdos de diferentes blocos curriculares, permitindo alternância de temas. A organização das atividades foi feita com o objetivo de proporcionar a construção de conceitos, procedimentos e algoritmos, de modo equilibrado e sem descuidar das aplicações.

Sempre que possível, valorizaram-se diferentes enfoques e articulações com diversos campos da Matemática e de outras ciências.

Procurou-se um equilíbrio no emprego da linguagem usual e da linguagem matemática, evitando exacerbar esta última e tornando a comunicação clara e adequada ao nível do aluno a que se destina esta coleção. A coleção introduz o método axiomático dedutivo de forma criativa, utilizando-se de retículas coloridas para identificar as definições (em retículas rosa), axiomas ou postulados (em retículas azuis) e teoremas (em retículas laranja), assim, intuitivamente, o aluno poderá compreender como a Matemática se estrutura. O objetivo é que o aluno perceba por si próprio que, na Matemática, algumas afirmações (proposições) são admitidas como verdadeiras por terem um caráter aparente (definições) ou por serem tomadas inicialmente como verdade, sem que seja necessário demonstrá-las (axiomas ou postulados), e, com base nelas, por meio de um encadeamento lógico (prova/demonstração), pode-se chegar a outras afirmações mais gerais; algumas dessas afirmações têm maior importância para a Matemática (teoremas). Destaques, quadros-resumos, resultados que antecedem diretamente um teorema e/ou consequências diretas de um teorema são expressos em retículas roxas.

A tônica desta coleção é ajudar o aluno a construir e desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que ele está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. E tudo isso valendo-se de situações-problema contextualizadas e, posteriormente, aplicando os conceitos em situações cotidianas, na própria Matemática ou em outras áreas do conhecimento.

As atividades propiciam, em muitos momentos, fazer a articulação entre os grandes campos temáticos, bem como entre o conhecimento novo e o já abordado. Para exemplificar, citamos funções e progressões, funções (afim e quadrática) e Geometria analítica, sistemas lineares e Geometria analítica, etc.

As retomadas frequentes de conceitos e procedimentos, seguidas de aprofundamento, são outra forma de articulação.

Por exemplo, números reais e números complexos, a equação da reta na função afim e na Geometria analítica, a parábola na função quadrática e na Geometria analítica, os sistemas lineares  $2 \times 2$  estudados no Ensino Fundamental e os sistemas lineares  $3 \times 3$  com suas interpretações geométricas, etc.

Sempre que possível, o desencadeamento de novos conceitos e a apresentação de exercícios e problemas são feitos por meio de situações-problema contextualizadas.

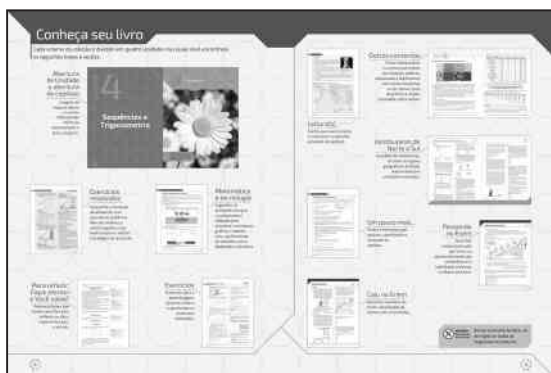
É grande o número de exercícios e problemas desta coleção em que se procurou aplicar conceitos matemáticos na solução de situações de outros componentes curriculares, como Física, Química, Geografia, Biologia e outras áreas do conhecimento. Em especial na seção *Outros contextos*.

O enfoque metodológico da coleção, em geral, foi feito por meio da formulação e resolução de problemas, quer desencadeando um novo conceito, quer aplicando os conceitos e procedimentos estudados em situações contextualizadas e/ou interdisciplinares ou mesmo em problemas da própria Matemática.

## Seções: definições e algumas sugestões de abordagem

### Conheça seu livro

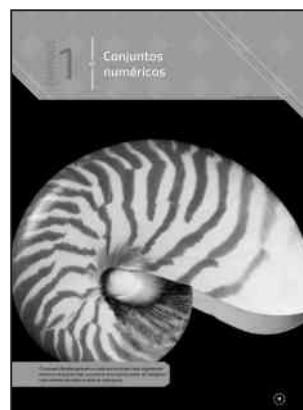
Seção destinada ao aluno, estimulando-o a conhecer os recursos disponíveis em seu material.



## Sumário

Enumeração dos capítulos e das demais seções do volume. Dá ao aluno uma visão geral da obra.

## Abertura de capítulo



Na abertura de cada capítulo, apresenta-se uma imagem de impacto, ligada a algum contexto relacionado aos conteúdos trabalhados no capítulo.

*Para refletir, Fique atento! e Você sabia?*

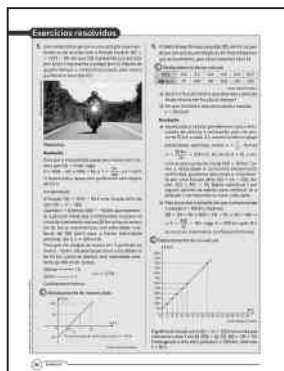
Seções que são dispostas nas laterais das páginas.

*Para refletir* apresenta questões que visam destacar algo que merece reflexão. São indicadores de investigação a ser realizada de modo que os alunos percebam alguma propriedade ou fato, ou que constatem, descubram, ou provem algo. Pode representar uma complementação do estudo do tópico que está sendo abordado.

*Fique atento!* apresenta conteúdos que o aluno já estudou e devem ser lembrados ou relacionados com o assunto que está sendo representado ou detalhes importantes que devem ser ressaltados.

*Você sabia?* apresenta informações interessantes que ampliam o tema em estudo.

## Exercícios resolvidos



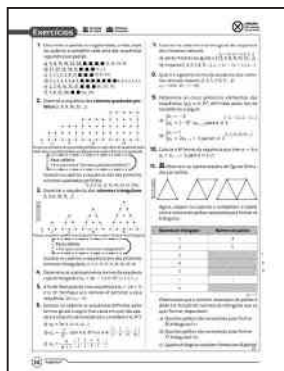
Mostram as várias formas de resolução de uma questão ou problema. **Não** devem ser vistos como modelos que os alunos apenas imitam e dos quais repetem estratégias. Servem para inspirar e indicar possíveis estratégias.

Podem ser resolvidos pelo aluno, como experiência de verificação da compreensão do conteúdo já desenvolvido pelo professor, e comparados com a resolução apresentada no livro. Esse trabalho pode ser realizado em duplas, visando à discussão e ao intercâmbio de experiências.

Também podem ser explorados como um momento de desenvolvimento da leitura e interpretação em Matemática se for pedido ao aluno que explique, com suas próprias palavras, o que está expresso ali, tanto do ponto de vista da solução dada como do ponto de vista da linguagem matemática empregada e do tratamento dado a ela.

Em alguns exercícios resolvidos, explicitamos as fases da resolução de um problema (compreender, planejar, executar, verificar e emitir a resposta); eles são destacados como **passo a passo**. Também mostramos em que direções a questão pode ser ampliada, apresentando em geral uma proposta de discussão em equipe sobre o assunto.

## Exercícios



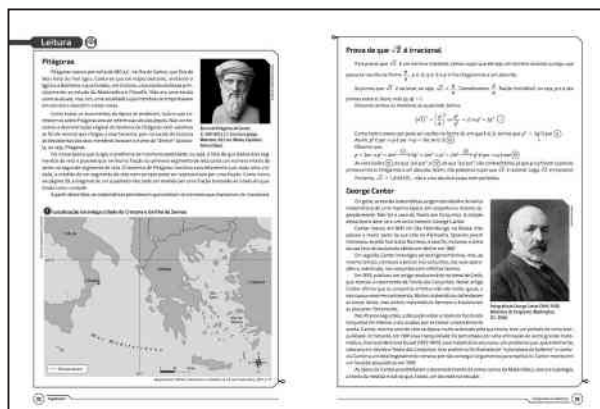
Grande variedade de exercícios e situações-problema para o aluno checar, consolidar e aplicar os conhecimentos recentes. Eles são apresentados com diferentes graus de dificuldade e, sempre que possível, contextualizados com exploração interdisciplinar.

Podem ser trabalhados em sala de aula, dando continuidade ao processo de fixação dos conceitos, ou como tarefa de casa, para sedimentação da aprendizagem.

Alguns exercícios são classificados como desafios. A fim de estimular os alunos durante as tentativas de resolução, quando necessário, promova discussões e sugira algumas pistas para que os alunos se sintam motivados a continuar.

Também temos exercícios com indicação para serem realizados em duplas ou em equipe, por terem um grau de complexidade maior ou cuja discussão ajudará no entendimento do conceito em estudo.

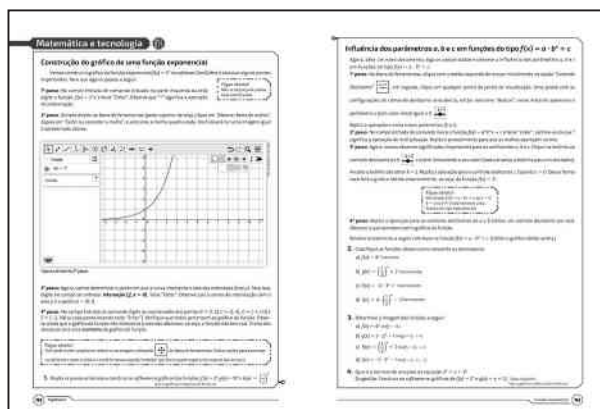
## Leitura(s)



Textos que ampliam e enriquecem o conteúdo. Podem ter uma abordagem interdisciplinar.

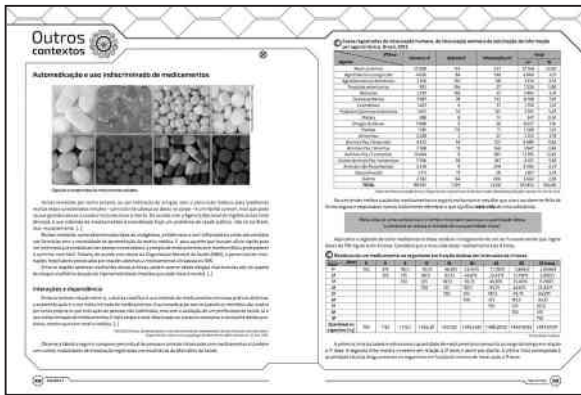
## Matemática e tecnologia

Nesta seção apresentamos atividades em que o recurso do computador é utilizado para auxiliar na manipulação e visualização de gráficos e tabelas.



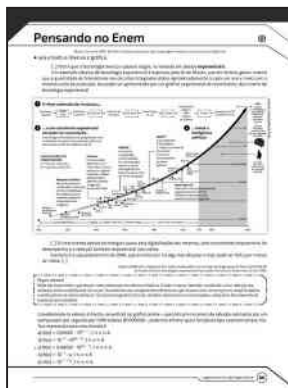
## Outros contextos

O foco da seção é colocar o aluno em contato com vários tipos de textos favorecendo a interdisciplinaridade, a experimentação de conteúdos matemáticos e o desenvolvimento da competência leitora. Ela destaca os assuntos ao relacioná-los com situações em que a Matemática estudada tem presença significativa. Embora essas discussões sejam muito mais proveitosas quando feitas em conjunto pela comunidade escolar, o professor poderá promover interessantes investigações matemáticas nos contextos considerados.




## Pensando no Enem

Questões direcionadas ao desenvolvimento das habilidades da Matriz de Referência desse exame. As questões propostas são contextualizadas, muitas vezes tratando de fenômenos naturais ou sociais.



## Um pouco mais...

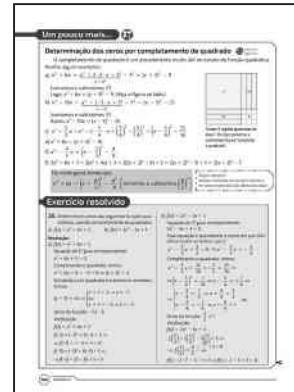
Essa seção aparece no final de alguns capítulos tratando de assuntos adicionais. O objetivo é abordar, de forma breve, alguns conteúdos matemáticos que exigem uma fundamentação mais criteriosa. Apesar do maior rigor matemático, tal fundamentação é apresentada de forma didática. Fica a critério do professor abordá-la ou não.

Ao longo dos capítulos indicaremos ao professor, por meio do ícone , alguns outros assuntos que acreditamos ser opcionais, pois muitos deles não estão relacionados à Matriz do Enem.

A opção de manter esses assuntos no livro se faz necessária para atender alunos que desejem aprofundar conteúdos

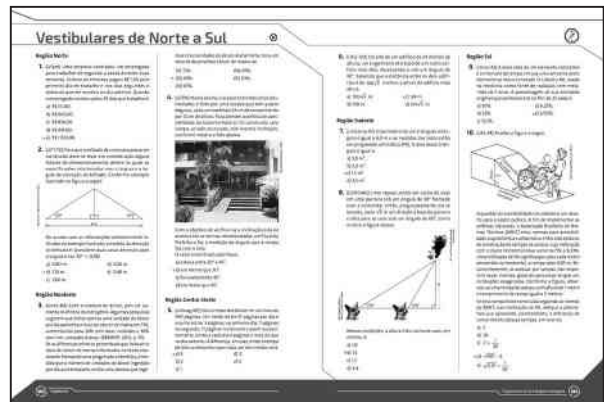
matemáticos ou se preparar para algum exame específico de acesso ao Ensino Superior.

Ao professor, cabe a responsabilidade de adequar o conteúdo disponível no livro didático à sua realidade. Algumas vezes, “pular” assuntos que não serão obstáculos na aprendizagem do aluno para dedicar mais tempo ao trabalho com temas que serão fundamentais na formação do estudante pode ser mais proveitoso. Além disso, nem todos os alunos precisam de um alto grau de aprofundamento, visto que não seguirão carreiras associadas à Matemática.



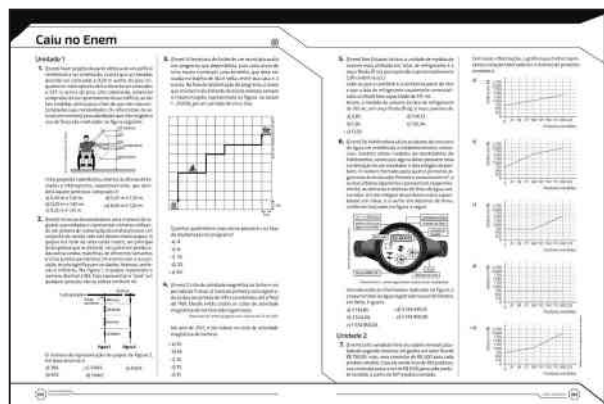
## Vestibulares de Norte a Sul

Questões de vestibular, relacionadas ao conteúdo da unidade, separadas por região geográfica.



## Caiu no Enem

Questões do Enem classificadas de acordo com as unidades de cada livro.



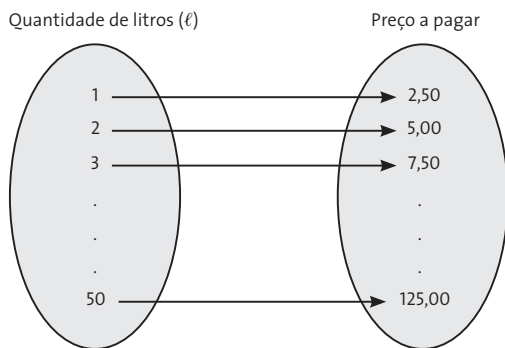


## 6 Orientações metodológicas e o conteúdo digital na prática pedagógica

### Orientações metodológicas

Os avanços conquistados pela Educação Matemática indicam que, para que o aluno aprenda Matemática com significado, é fundamental:

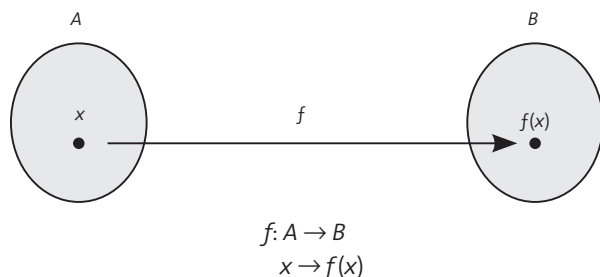
- **trabalhar as ideias, os conceitos matemáticos intuitivamente, antes da simbologia, antes da linguagem matemática.** Por exemplo, antes de ser apresentada em linguagem matemática, a ideia de função deve ser trabalhada de forma intuitiva com o aluno. Uma situação-problema que torna isso possível é: “Considere a quantidade de litros de gasolina e o respectivo preço a pagar:



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da Editora

O preço a pagar é dado em função da quantidade de litros que se coloca no tanque, portanto, depende do número de litros comprados”.

Depois desse trabalho intuitivo calcado na elaboração de conceitos é que, pouco a pouco, vamos introduzindo a linguagem matemática:



“Cada  $x$  de  $A$  corresponde a um único  $f(x)$  de  $B$ , levado pela função  $f$ .”

- **que o aluno aprenda por compreensão.** O aluno deve atribuir significado àquilo que aprende. Para isso, deve saber o porquê das coisas, e não simplesmente mecanizar procedimentos e regras. Por exemplo, não basta dizer que o número racional  $0,3333\dots$  é igual a  $\frac{3}{9}$  ou  $\frac{1}{3}$ ; é preciso, para a sua compreensão, saber por que isso ocorre, fazendo, por exemplo:

$$x = 0,3333\dots \Rightarrow 10x = 3,333\dots = 3 + 0,333\dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x = 3 + 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- **estimulá-lo a pensar, raciocinar, criar, relacionar ideias, descobrir e ter autonomia de pensamento.** Em lugar de simplesmente imitar, repetir e seguir o que o professor fez e ensinou, o próprio aluno **pode e deve fazer Matemática**, descobrindo ou redescobrindo por si só ideias, propriedades, maneiras diferentes de resolver uma questão, etc. Para que isso ocorra, é preciso que o professor crie oportunidades e condições para que o aluno descubra e expresse suas descobertas. Por exemplo, desafios, jogos, quebra-cabeças, problemas curiosos, etc. auxiliam o aluno a pensar logicamente, a relacionar ideias e a realizar descobertas;

- **trabalhar a Matemática por meio de situações-problema que o façam realmente pensar, analisar, julgar e decidir-se pela melhor solução.** Vamos destacar o que consideramos ser um problema matemático. Para alguns autores é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. Outros o definem como uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação. Outros ainda destacam que problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para isso alguma estratégia em particular. De modo geral, podemos afirmar que existe um problema quando há um objetivo a ser alcançado e não sabemos como atingi-lo, isto é, existe um problema quando há um resultado – conhecido ou não – a ser demonstrado utilizando conhecimentos matemáticos.

No plano didático, há a hipótese de que determinados problemas permitam a aquisição de conceitos novos e se inscrevam em uma organização de ensino-aprendizagem eficaz para a maioria dos alunos. Uma organização assim foi apresentada por Douady (1984) em sua teoria conhecida como *Dialética Ferramenta-Objeto*. Conforme essa teoria, em atividades matemáticas, quando um problema é proposto, podemos considerá-lo resolvido se pudermos fundamentar suas explicações de acordo com um sistema de validação próprio dos matemáticos. Nessa tentativa, criamos conceitos que atuam como ferramentas que possibilitarão a resolução do problema. Ao serem descontextualizados, de modo que possam ser reutilizados, esses conceitos tornam-se objeto do saber.

Douady chama de dialética ferramenta-objeto o processo de resolução de problemas, no qual temos as seguintes fases: Fase 1: Antigo – Mobilização de conhecimentos antigos, que funcionam como ferramentas, para resolver, ao menos em parte, o problema.

Fase 2: Pesquisa – Dificuldade em resolver o problema por completo, e novas questões são colocadas e levam à procura de novos meios para a resolução do problema.

Fase 3: Explicitação – Exposição dos trabalhos realizados, das dificuldades e dos resultados obtidos, sendo as produções discutidas coletivamente com a classe. Essa explicitação possibilita ao professor criar debates sobre os conhecimentos antigos, que estão sendo mobilizados, e sobre os novos, que estão sendo gerados implicitamente, sem que se crie uma situação de bloqueio. Esses debates são úteis na validação de alguns conhecimentos produzidos nessa fase e permitem aos alunos reconhecer procedimentos corretos e diagnosticar procedimentos incorretos.

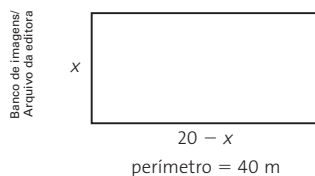
Fase 4: Institucionalização – Institucionalizam-se os novos conhecimentos como objetos de saber matemático. O professor resalta os conhecimentos que devem ser retidos e explicita as convenções de uso. Trata-se de um meio de constituição de um saber coletivo. Para cada aluno, constitui uma maneira de estabelecer pontos de referência para seu próprio saber e, dessa forma, assegurar o progresso de seus conhecimentos.

Fase 5: Familiarização – É o momento de resolver exercícios utilizando as noções recentemente institucionalizadas como ferramentas explícitas. Esses exercícios, simples ou complexos, tratam apenas do que é conhecido. Os problemas propostos nessa fase destinam-se, segundo Douady, a desenvolver hábitos e práticas, a integrar o saber social com o saber do aluno, que ainda precisa ser testado em novas experiências, eventualmente sozinho, os conhecimentos que julga ter alcançado e esclarecer para si mesmo o que realmente sabe.

Fase 6: Novo problema – Os alunos são instigados a utilizar os novos conhecimentos em situações mais complexas que envolvam outros conceitos, sejam eles conhecidos ou visados pela aprendizagem. Os conhecimentos novos adquirem, agora, o estatuto de antigos, em um novo ciclo da dialética ferramenta-objeto. De acordo com Douady, para a aprendizagem de um conceito ou propriedade, muitos ciclos podem ser necessários.

Por exemplo, o estudo da função quadrática poderá ser desenvolvido a partir da seguinte situação-problema: “Se quisermos cercar um terreno retangular com uma tela de 40 m de comprimento, a fim de cercar a maior área possível, quais devem ser as dimensões do terreno?”.

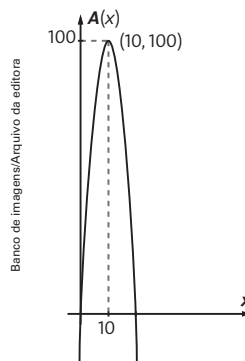
Como o perímetro é de 40 m, as dimensões do terreno são:



Área:

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2 = -x^2 + 20x \Rightarrow A(x) = -x^2 + 20x \text{ (modelo matemático para esta situação)}$$

Nesse caso, temos a função quadrática  $f(x) = 2x^2 + 20x$ , cujo gráfico é dado a seguir.



O ponto de máximo da parábola  $(10, 100)$  dará a solução do problema. Assim, o terreno que satisfaz às condições impostas é de forma quadrada (o quadrado é um caso particular de retângulo), de lado igual a 10 m e área igual a 100 m<sup>2</sup>. É consenso entre os educadores matemáticos que a capacidade de pensar, de raciocinar e de **resolver problemas** deve constituir um dos principais objetivos do estudo da Matemática;

- **trabalhar o conteúdo com significado, levando o aluno a compreender que aquele conhecimento é importante para sua vida em sociedade e/ou que o conteúdo trabalhado lhe será útil para entender o mundo em que vive.** Por exemplo, ao trabalhar as diversas funções e seus gráficos relacionando-os com o cotidiano e com os fenômenos das Ciências Naturais, ao resolver problemas de juros compostos usando logaritmos, ao coletar dados, fazer tabelas, gráficos e interpretá-los, ao estudar Probabilidade com a Genética da Biologia, etc., o aluno percebe que tudo isso tem sentido em sua vida presente e futura. Para que o aluno veja a Matemática como um assunto útil e prático e possa apreciar o seu poder, precisa perceber que ela está presente em praticamente tudo e é aplicada para resolver problemas do mundo real e entender uma grande variedade de fenômenos;
- **valorizar a experiência acumulada pelo aluno dentro e fora da escola.** É preciso lembrar que, quando o aluno chega ao Ensino Médio, ele já acumulou experiências pelo menos até seus 14 anos de idade. A partir dessa vivência, o professor deve iniciar o trabalho de construir e aplicar novos conceitos e procedimentos matemáticos, dando continuidade ao que o aluno já aprendeu no Ensino Fundamental e na vida. Detectar os conhecimentos prévios dos alunos para, com base neles, desenvolver novos conhecimentos contribui para uma aprendizagem significativa;
- **estimular o aluno a fazer cálculo mental, estimativas e arredondamentos, obtendo resultados aproximados.** Por exemplo, quando o aluno efetua a divisão  $306 \div 3$  e coloca 12 como resultado, ele evidencia que não tem sentido numérico, não sabe arredondar ( $300 \div 3 = 100$ ;  $6 \div 3 = 2$  e, portanto,  $306 \div 3 = 102$ ), enfim, falta-lhe a habilidade de cálculo mental. Muitas vezes, em situações cotidianas, mais



vale saber qual é o resultado aproximado do que o resultado correto propriamente dito;

- **considerar mais o processo do que o produto da aprendizagem – “aprender a aprender” mais do que levar em conta resultados prontos e acabados.** É muito mais importante valorizar a maneira como o aluno resolveu um problema, principalmente se ele o fez de maneira autônoma, original, em vez de simplesmente verificar se acertou a resposta. O mesmo se pode dizer sobre o modo de realizar operações, medições, resolver equações e sobre as maneiras de observar e descobrir propriedades e regularidades em algumas formas geométricas. Sempre que possível, devemos analisar diferentes resoluções de um mesmo problema;
- **compreender a aprendizagem da Matemática como um processo ativo.** Os alunos são pessoas ativas que observam, constroem, modificam e relacionam ideias, interagindo com outros alunos e outras pessoas, com materiais diversos e com o mundo físico. O professor precisa criar um ambiente de busca, de construção e de descoberta e encorajar os alunos a explorar, desenvolver, levantar hipóteses, testar, discutir e aplicar ideias matemáticas. As salas de aula deveriam ser verdadeiras salas-ambiente de Matemática, equipadas com grande diversidade de materiais instrucionais que favorecessem a curiosidade, a aprendizagem matemática e o “fazer Matemática”. Esse “fazer Matemática” pode ser estimulado apresentando-se atividades investigativas ao aluno. Uma atividade de investigação matemática diferencia-se das demais por ser uma situação-problema desafiadora e aberta, permitindo aos alunos mobilizarem sua intuição e conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade de ensino e aprendizagem:

[...] ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor [...]

PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23.

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, em suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem estar presentes em todos os eixos de conteúdos, contribuindo para um trabalho mais dinâmico e significativo. Levar o aluno a agir como um matemático não implica obrigatoriamente trabalhar com problemas muito difíceis. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que, pelo contrário, investigar significa trabalhar com questões que nos cercam e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes que ela.

Em toda atividade de investigação o professor deve dispor de tempo e oportunidade ao aluno para organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los aos colegas e ao professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Dessa forma, espera-se que o aluno adquira confiança na sua capacidade de “fazer Matemática” e torne-se apto a resolver problemas matemáticos, porque aprendeu a pensar e a se comunicar matematicamente.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas dos alunos se restrinjam apenas às investigativas; as fases da dialética ferramenta-objeto de Douady já indicam que depois dos problemas de investigação o professor deve abordar problemas de familiarização do novo conhecimento, em diferentes domínios matemáticos e contextos. Assim, o tempo didático do professor acaba por se tornar pequeno, exigindo que outras atividades e problemas sejam desenvolvidos como tarefa de casa, a fim de que ocorram a fixação e a manutenção dos conhecimentos construídos;

- **utilizar a história da Matemática como um excelente recurso didático.** Comparar a Matemática de diferentes períodos da história ou de diferentes culturas (Etnomatemática). Por exemplo, pode-se contar a época na qual os pitagóricos só conheciam os números racionais e acreditavam apenas na existência dos segmentos comensuráveis (um pode ser medido pelo outro e a medida é expressa por um número racional). Ao medir a diagonal do quadrado de lado igual a uma unidade, usando esse lado como unidade de medida, surgem os números irracionais ( $\sqrt{2}$ , no caso) e os segmentos incomensuráveis:  $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$ . O lado e a diagonal desse quadrado são segmentos incomensuráveis entre si;
- **trabalhar o desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à Matemática.** Reforçar a autoconfiança do aluno na resolução de problemas e aumentar o interesse por diferentes maneiras de solucionar um problema; conduzir o aluno à observação de características e regularidades de números, funções, figuras geométricas, etc. Sensibilizá-lo para organizar, argumentar logicamente e perceber a beleza intrínseca da Matemática (simetrias, regularidades, logicidade, encadeamentos lógicos, etc.);
- **utilizar jogos.** Os jogos constituem outro excelente recurso didático, pois podem possibilitar a compreensão de regras, promover interesses, satisfação e prazer, formar hábitos e gerar a identificação de regularidades. Além disso, facilitam o trabalho com símbolos e o raciocínio por analogias;
- **ênfatisar igualmente os grandes eixos temáticos da Matemática – Números e Funções (Álgebra), Espaço e Forma (Geometria), Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação (Estatística e Probabilidade) – e, de preferência, trabalhá-los de modo integrado;**
- **trabalhar os temas transversais (Ética, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo) de modo integrado com as atividades de Matemática, por meio de situações-problema.**

## Recursos digitais na prática pedagógica

Atualmente já não há dúvidas sobre a necessidade do uso das novas tecnologias em sala de aula. Novas que já estão ficando velhas, de acordo com o pesquisador de processos de ensino-aprendizagem por meio do computador, José Armando Valente. Para ele, a possibilidade de junção de diferentes mídias em um só artefato (TV, vídeo, computador, internet) poderá ter um impacto ainda maior no processo de ensino-aprendizagem, causando uma revolução a ser enfrentada pelos educadores.

Nessa revolução, Valente considera que dois aspectos devem ser considerados na implantação desses recursos na educação. O primeiro é que os conhecimentos técnicos e pedagógicos devem crescer simultaneamente, um demandando novas ideias do outro. O outro é que o educador precisa ponderar sobre o que cada uma dessas facilidades tecnológicas tem a oferecer e como pode ser explorada em diferentes situações educacionais. Ora a televisão pode ser mais apropriada, ora o computador pode ser mais interessante, dependendo dos objetivos que se deseja atingir ou do que esteja sendo explorado. Mesmo o uso do computador permite uma grande variação nas atividades que professores e alunos podem realizar. No entanto, ressalta que:

*[...] essa ampla gama de atividades pode ou não estar contribuindo para o processo de construção de conhecimento. O aluno pode estar fazendo coisas fantásticas, porém o conhecimento usado nessas atividades pode ser o mesmo que o exigido em uma outra atividade menos espetacular. O produto pode ser sofisticado, mas não ser efetivo na construção de novos conhecimentos.*

VALENTE, [s.d.], p. 23.

Esse mesmo autor destaca que situações vividas com o emprego de recursos digitais contribuem para que o cotidiano escolar não seja visto como espaço de rotina e de repetição, mas como espaço de reflexão, crítica e autoexpressão, promovendo assim um novo sentido para a aprendizagem escolar.

Cada vez mais, cientistas e outros profissionais estão implantando sistemas colaborativos baseados em conexões via internet. Esse meio de comunicação vem ganhando força e importância no mundo profissional. O trabalho cooperativo é fundamental para a solução de problemas complexos, por conseguinte a aprendizagem colaborativa é um passo determinante no sentido de preparar o jovem estudante para a futura realidade profissional.

O uso de recursos digitais passa a ser parte integrante do trabalho de investigação, pois muitos dos problemas podem ser abordados com o apoio de *softwares* e objetos educacionais digitais especialmente elaborados para isso. A seguir indicamos um dos *softwares* que estão sendo alvo

de pesquisas bem-sucedidas em Educação Matemática com dois *sites* em que há exemplos de utilização em sala de aula.

### • GeoGebra

Criado por Markus Hohenwarter, é um *software* de Geometria dinâmica e álgebra gratuito e desenvolvido para o ensino-aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino. Ele reúne recursos de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Probabilidade, Estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, ele permite apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Disponível em português, o GeoGebra é uma multiplataforma e, portanto, pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou MacOS. No livro do aluno apresentamos algumas atividades com esse *software*. Os *sites* <[www.pucsp.br/geogebra](http://www.pucsp.br/geogebra)>, do Instituto GeoGebra de São Paulo, e <[www.geogebra.im-uff.mat.br/bib.html](http://www.geogebra.im-uff.mat.br/bib.html)>, do Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro, fornecem os *links* para *downloads* tanto do *software* como dos tutoriais de uso, além de exemplos de aplicações para sala de aula. Acesso em: 13 maio 2016.

Outros exemplos de uso podem ser encontrados em: <[http://pt.wikibooks.org/wiki/Aplicações\\_do\\_GeoGebra\\_ao\\_ensino\\_de\\_Matemática/Atividades](http://pt.wikibooks.org/wiki/Aplicações_do_GeoGebra_ao_ensino_de_Matemática/Atividades)>. Acesso em: 13 maio 2016.

## Linguagem digital

A linguagem digital voltada ao ensino utiliza três termos correntes. Apesar de não haver muito rigor a respeito de seus significados, convém fazer a distinção entre eles: conteúdo digital, ferramenta digital e tecnologia digital. Conteúdo digital é o correspondente ao conteúdo escolar, mas que é disponibilizado na rede, como textos, hipertextos, figuras, gráficos, entre outros. Ferramenta digital é o meio pelo qual o conteúdo digital é disponibilizado na rede, como filmes, áudios, jogos, animações, simuladores, hipertextos, *sites*, redes sociais, fóruns, *blogs*, entre outros. Tecnologia digital é o instrumento que permite a conexão dessas ferramentas e o respectivo acesso ao conteúdo digital, como computadores, *tablets*, telefones, lousas digitais, entre outros.

A utilização de todos esses recursos digitais no ensino é cada vez mais frequente e facilita a comunicação entre os agentes do processo didático, além de ampliar as possibilidades pedagógicas.

Animação, por exemplo, é uma representação dinâmica de um processo qualquer, como um fenômeno natural ou outro evento, mas que não admite a interação com o usuário, pois ela funciona como um filme feito em linguagem computacional. Já os simuladores admitem a interatividade com o usuário, que pode alterar parâmetros e então modificar a dinâmica em curso.

Vídeoaulas não interativas, dirigidas tanto a alunos do ensino básico quanto à formação docente, também

ajudam a compor o conteúdo digital voltado ao ensino que pode ser encontrado na rede. Grandes universidades, nacionais e internacionais, disponibilizam gratuitamente, ou não, cursos inteiros pela internet. Alguns deles são oficiais e atribuem titulação de graduação para o aluno, os conhecidos cursos de Ensino a Distância (EAD). Universidades públicas e outras instituições públicas e privadas ainda se valem dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) para divulgar calendários, disponibilizar recursos didáticos digitais, além de organizar debates e discussões via fóruns síncronos ou assíncronos para seus alunos. Além disso, professores e alunos contam com um grande acervo de demonstrações experimentais gravadas em vídeo e disponibilizadas de forma gratuita pelos canais da rede, além de enciclopédias virtuais, dicionários *on-line*, entre tantos outros recursos.

As vantagens e prejuízos dos recursos digitais são causados pelo uso que se faz deles, ou seja, devemos evitar a noção ilusória de que a simples presença do recurso digital garante melhores resultados de aprendizagem. Em contrapartida, o seu uso planejado e apropriado tem se mostrado eficiente em melhorar o ensino em vários cenários educacionais.

## O uso da calculadora

A presença de telefones celulares na sala de aula, principalmente no Ensino Médio, tem se tornado um problema para as escolas, mesmo considerando sua proibição por leis estaduais. No entanto, em vez de lutarmos contra eles podemos buscar desenvolver propostas em que eles sejam usados pelos alunos em suas atividades investigativas. É preciso considerar que os celulares estão cada vez mais equipados, contando com recursos como: câmeras, que fotografam e filmam com boa qualidade de som e imagem; gravadores de áudio; calendários; comunicadores instantâneos; calculadoras e tantas outras ferramentas que precisam ser aproveitadas na escola.

Não existem ainda modelos de sua utilização, mas atividades geralmente propostas com calculadoras podem ser realizadas nos celulares. Exemplos de utilização de calculadoras no Ensino Médio:

- *Quando os cálculos numéricos são apenas auxiliares.*  
A calculadora é recomendada quando os cálculos numéricos são apenas auxiliares na questão a ser resolvida, liberando mais tempo para o aluno pensar, criar, investigar, conjecturar, relacionar ideias, descobrir regularidades, etc. O tempo gasto desnecessariamente com cálculos longos e enfadonhos pode ser usado na busca de novas estratégias para a resolução de problemas, na busca de soluções de um desafio, de um jogo, etc.
- *Para melhorar a estimativa dos alunos por meio de jogos.*  
A calculadora é recomendada também para aguçar a capacidade de estimativa do aluno. Há várias possibilidades de jogos do tipo “estime e confira”. Por exemplo, de um conjunto de 15 a 20 números de três algarismos, um aluno escolhe três deles e estima sua soma. Outro aluno escolhe mais três

e também estima sua soma. Em seguida, conferem seus cálculos com a calculadora. Quem se aproximar mais do resultado correto marca um ponto. Vence quem fizer 5 pontos primeiro. Algo semelhante pode ser feito com as demais operações, usando números naturais inteiros, racionais e irracionais.

- *Para investigar propriedades matemáticas.*  
Analisando padrões ou regularidades que ocorrem em situações ou em tabelas com muitos dados, o aluno pode levantar hipóteses, fazer conjecturas, testá-las e descobrir propriedades. Por exemplo, ao preencher tabelas usando calculadora, os alunos podem descobrir propriedades da multiplicação e da divisão, que, depois, poderão ser provadas pelo professor, generalizando.

Por exemplo:

<b>Fator</b>	15	15	15
<b>Fator</b>	12	24	48
<b>Produto</b>	?	?	?

<b>Dividendo</b>	13	26	52
<b>Divisor</b>	5	10	20
<b>Quociente</b>	?	?	?

“Quando se dobra um fator, o produto também dobra.”  
“Quando se dobram o dividendo e o divisor, o quociente permanece o mesmo.”

Outro exemplo é quando os alunos trabalham com operações de radicais usando calculadora:

<i>a</i>	<i>b</i>	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
5	3	?	?	?	?
7	10	?	?	?	?
3	1	?	?	?	?

<i>a</i>	<i>b</i>	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a-b}$
5	3	?	?	?	?
7	10	?	?	?	?
3	1	?	?	?	?

Eles poderão conjecturar que, por exemplo,

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$  e  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ . Em seguida, o professor poderá demonstrar que essas conjecturas estão corretas.

- *Para trabalhar com problemas da realidade.*  
Ao trabalhar com problemas que apresentam dados reais, em geral os números são muito “grandes” ou “pequenos” e, às vezes, são muitos itens e muitas operações a serem realizadas. Isso torna a calculadora um instrumento fundamental para diminuir o trabalho manual e mecânico do aluno, e permitir que ele se concentre no essencial, que são o raciocínio, as estratégias e as descobertas.

Por exemplo, o índice de massa corpórea (IMC) de uma pessoa é dado pela fórmula  $IMC = \frac{m}{h^2}$ , em que  $m$  é a massa (em quilogramas) e  $h$  é a altura (em metros). Outro exemplo: Gastam-se 11,2 cm de arame de aço galvanizado para fabricar um clipe de papel. Com 100 m desse arame, quantos cliques serão fabricados aproximadamente?

Mais alguns exemplos poderão ser encontrados em: <[http://www.univates.br/ppgece/docs/PT\\_leda.pdf](http://www.univates.br/ppgece/docs/PT_leda.pdf)> e <<http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/medio/>

## 7 O novo Enem

As exigências presentes no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) se constituem em uma das demandas de nossa sociedade para a continuidade dos estudos.

O Enem foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica, cuja ideia central considera os princípios da LDB (Lei nº 9.394/96), que preconiza, dentre as funções do Ensino Médio, o domínio dos princípios científicos, tecnológicos que orientam a produção moderna, bem como a compreensão do conhecimento das formas contemporâneas de uso e aplicação das linguagens, da utilização dos códigos e o domínio e a aquisição da organização da reflexão filosófica e sociológica para a vida em sociedade.

O pressuposto desse modelo de avaliação representa uma tentativa de análise da qualidade da oferta de Ensino Médio, considerando as expectativas presentes na LDB. Desse modo, a princípio, podiam participar do exame os alunos que estavam cursando ou que tinham concluído o Ensino Médio em anos anteriores, independentemente da idade ou do ano de término do curso. Já nos primeiros anos de aplicação, diversas instituições de Ensino Superior começaram a utilizar o Enem como uma alavanca para a pontuação obtida por aqueles que prestavam vestibular.

Em 2009, o Ministério da Educação (MEC) alterou de forma significativa a proposta do exame: ele passou a ser um instrumento de política pública para conduzir e alinhar o currículo de Ensino Médio em todo o país.

O MEC considera que os vestibulares de ingresso para a maioria das instituições de Ensino Superior, apesar de bem-sucedidos na seleção dos melhores para ingressar em seus quadros discentes, acabam por criar disparidades no sistema de Ensino Médio nacional e na sociedade. As exigências feitas por esses concursos de mérito exercem uma influência indesejada sobre os currículos das instituições de Ensino Médio, que acabam por submeter-se a esses requisitos, sem oferecer sentido ao que se ensina.

Outro fator negativo apontado pelo Ministério foi a falta de mobilidade de estudantes que resulta da descentralização dos vestibulares das diversas instituições pú-

matematica-atividades-com-calculadoras.htm>. Acesso em: 29 mar. 2016.

Outras ideias de emprego dos celulares podem ser consideradas, por exemplo, o uso de fotografias para explorar aspectos geométricos de vistas possíveis de sólidos (é possível fotografar um cubo de modo que a vista seja um hexágono?), no uso de torpedos para a troca de informações entre grupos de trabalho para compartilhamento de pesquisas pela internet ou no acesso a vídeos disponíveis na internet.

blicas de Ensino Superior. A mudança realizada no Enem visa corrigir algumas dessas deficiências, oferecendo um vestibular unificado criado pelo governo federal e obedecendo a suas diretrizes e seus parâmetros curriculares.

O novo Enem tem como fim avaliar o aspecto cognitivo, mas enfatizando a capacidade de autonomia intelectual e o pensamento crítico dos alunos.

As instituições de Ensino Superior podem usar esse novo exame de diferentes modos, seja considerando-o uma fase única de avaliação, como uma primeira fase do processo de ingresso, utilizando sua nota em conjunto com um exame da própria instituição, seja como critério de seleção para vagas remanescentes.

Com a adoção do Sistema de Seleção Unificado (Sisu), o exame possibilita aos alunos escolher a instituição em que desejam estudar, sem terem de prestar vestibular em vários lugares, favorecendo assim a mobilidade estudantil e o intercâmbio entre jovens de todo o país.

Por fim, o Enem se propõe a melhorar a qualidade do Ensino Médio, uma vez que avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos, não isoladamente, mas de forma conjunta. Assim, o conteúdo ministrado no Ensino Médio passa a ser determinado pelos professores, coordenadores e diretores e não exclusivamente ditado pelas universidades. Desse modo, é importante que os docentes compreendam e discutam a proposta integralmente, pois a execução desses pressupostos em sala de aula poderá contribuir para uma reorientação nas concepções e nas práticas, já que não se trata de mera revisão de conteúdos a ensinar, mas de redimensionar o papel da escola e seus atores.

Características do novo Enem:

- 180 questões divididas em 4 áreas de conhecimento e uma redação;
- a prova é realizada em 2 dias;
- além da contextualização e interdisciplinaridade, é exigido praticamente todo o conteúdo do Ensino Médio;
- serve também como forma de ingresso em diversas instituições de Ensino Superior.



**Site oficial do Enem:** <<http://portal.inep.gov.br/web/enem/>>. Acesso em: 13 maio de 2016.

Contém informações sobre o exame, edições anteriores, legislação, documentos, resultados por escola, etc.

**Hora do Enem:** <<http://horadoenem.mec.gov.br/>>. Acesso em: 13 maio de 2016.

O *Hora do Enem* é um projeto pensado para quem vai fazer o Exame Nacional do Ensino Médio. Pode-se escolher: acompanhar o programa de TV, fazer simulados *on-line*, criar um plano de estudos adequado às suas próprias necessidades e baixar vídeos. Também é possível acessar notícias, receber orientações de como se preparar para a prova e ver questões que já caíram nos anos anteriores comentadas por professores. O objetivo do projeto é ajudar o aluno a se preparar para o Enem.

As questões do novo Enem são elaboradas com base na Matriz de Referência divulgada pelo MEC.

Nessa matriz estão descritas as competências e habilidades que se esperam do aluno do Ensino Médio e que estão fundamentadas em cinco eixos cognitivos:

- I. **Domínio das linguagens (DL):** dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
- II. **Compreensão dos fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
- III. **Enfrentamento das situações-problema (SP):** selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
- IV. **Construção da argumentação (CA):** relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
- V. **Elaboração de propostas (EP):** recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

A prova do novo Enem abrange uma redação e 180 questões objetivas, sendo 45 questões para cada uma das áreas de conhecimento em que está dividido o exame:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (Língua Portuguesa, Literatura e Língua Estrangeira).
- Matemática e suas Tecnologias (Álgebra e Geometria).
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Física, Química e Biologia).
- Ciências Humanas e suas Tecnologias (Geografia, História, Filosofia e Sociologia).

As competências e as habilidades (indicadas por **H**) da Matriz de Referência para a prova de Matemática e suas Tecnologias são:

- **Competência de área 1** – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

**H1** – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

**H2** – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

**H3** – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

**H4** – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

**H5** – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

- **Competência de área 2** – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**H6** – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**H7** – Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**H8** – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**H9** – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

- **Competência de área 3** – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

**H10** – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

**H11** – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

**H12** – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

**H13** – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

**H14** – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

- **Competência de área 4** – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

**H15** – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

**H16** – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

**H17** – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

**H18** – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

- **Competência de área 5** – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**H19** – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

**H20** – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

- H21** – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- H22** – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- H23** – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
- **Competência de área 6** – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
  - **H24** – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
  - **H25** – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
  - **H26** – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
  - **Competência de área 7** – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
  - **H27** – Calcular medidas de tendência central ou de dis-

persão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

**H28** – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de Estatística e Probabilidade.

**H29** – Utilizar conhecimentos de Estatística e Probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

**H30** – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de Estatística e Probabilidade.

Além disso, cada área possui objetos de conhecimento que fazem parte do currículo do Ensino Médio atual e que o aluno precisa dominar.

## Esta coleção e o Enem

Na seção 11. *Observações e sugestões para as Unidades e os capítulos* deste Manual, em que comentamos cada capítulo, apresentamos uma tabela que relaciona os objetos de conhecimento associados à Matriz de Referência para Matemática e suas Tecnologias aos conteúdos abordados no capítulo.

É importante ressaltar que nem todos os assuntos da nossa coleção estão relacionados com a Matriz de Referência do MEC.

## 8 Avaliação em Matemática

### Aspectos legais da avaliação no Ensino Médio

Como destaca o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio<sup>1</sup>, a avaliação educacional no contexto do Ensino Médio deve estar integrada ao projeto político-pedagógico da escola, tanto na concepção como na implementação, considerando estudantes e professores como sujeitos históricos e de direitos, participantes ativos e protagonistas na sua diversidade e singularidade. Deve, também, estar articulada com a proposta de ensino médio integral, de qualidade social, e em consonância com as novas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), que reforçam o compromisso da “avaliação da aprendizagem, com diagnóstico preliminar, e entendida como processo de caráter formativo, permanente e cumulativo” (BRASIL, 2012).

As DCNEM (BRASIL, 2012, pág. 7), em consonância com as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica (DCNEB), indicam três dimensões de avaliação: avaliação da aprendizagem, avaliação institucional e avaliação externa, esta, também, apresentada algumas vezes como avaliação de redes de escolas ou avaliação em larga escala.

A avaliação da aprendizagem, conforme a Lei de Diretrizes de Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 9.394,

de 20 de dezembro de 1996, pode ser adotada, tendo como objetivo a promoção, aceleração de estudos e classificação, e deve ser desenvolvida pela escola refletindo a proposta expressa em seu projeto político-pedagógico.

A avaliação institucional interna é realizada com base na proposta pedagógica da escola, assim como no seu plano de trabalho, que devem ser avaliados sistematicamente, de maneira que a instituição possa analisar seus avanços e localizar aspectos que merecem reorientação.

A avaliação externa de escolas e redes de ensino é responsabilidade do Estado, seja realizada pela União, seja pelos demais entes federados. No Ensino Médio, em âmbito nacional, ela está contemplada no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb). Os resultados de Matemática têm foco na resolução de problemas e, juntamente com as taxas de aprovação, são utilizados no cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), instituído com o propósito de medir a qualidade de cada escola, no caso do Ensino Fundamental público, e externamente, também é apresentada como avaliação de redes de escolas ou avaliação em larga escala.

### O que avaliar? Como avaliar?

A avaliação é um instrumento fundamental para fornecer informações sobre como está se realizando o processo de ensino-aprendizagem como um todo – tanto para o professor e a equipe escolar conhecerem e analisarem

<sup>1</sup> Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de Professores do Ensino Médio*, Etapa I – Caderno VI: Avaliação no Ensino Médio.



os resultados de seu trabalho, como para o aluno verificar seu desempenho. Ela não deve simplesmente focalizar o aluno, seu desempenho cognitivo e o acúmulo de conteúdos para classificá-lo em “aprovado” ou “reprovado”.

Uma função crucial da avaliação é a de desencadear ações que promovam tanto a evolução do aluno como a do professor para que ambos possam superar os desafios pedagógicos que enfrentam.

Nessa visão, a avaliação é concebida como um processo que implica uma reflexão crítica sobre a prática, no sentido de captar seus avanços, suas resistências, suas dificuldades e possibilitar a tomada de decisão sobre o que fazer para superar os obstáculos.

Esse movimento traz consigo a necessidade de o professor dominar o que ensina para reconhecer qual a relevância social e cognitiva do ensinado e, então, definir o que vai se tornar material a ser avaliado.

A mudança das práticas de avaliação é então acompanhada por uma transformação do ensino, uma vez que essa tomada de posição em relação ao que é realmente importante é que vai orientar a organização do tempo didático em sala de aula e definir o que deve ser avaliado e as formas a serem adotadas para avaliar.

Na busca de exercer a educação de modo justo e eficiente é preciso garantir a coerência entre as metas planejadas, o que se ensina e o que se avalia.

Assim, a definição clara sobre o que ensinar permitirá, em cada etapa ou nível de ensino, delimitar as expectativas de aprendizagem, das quais dependem tanto os critérios de avaliação quanto o nível de exigência.

A clareza sobre o que ensinar e o que avaliar deve estar explicitada em objetivos observáveis que “traduzem” os conteúdos formulados, geralmente de modo muito amplo, nos documentos curriculares ou planos de curso. Tendo isso em mente, a avaliação deve ser considerada em seus três aspectos: diagnóstico, formativo ou processual e acreditativo ou certificativo.

- Em seu aspecto diagnóstico, a avaliação permite detectar os conhecimentos, formais ou informais, que os alunos já possuem, contribuindo para a estruturação do processo de ensino-aprendizagem, pois esses conhecimentos são tomados como base.

Com a avaliação diagnóstica inicial, o professor pode obter evidências sobre as formas de aprender dos alunos, seus conhecimentos e experiências prévios, seus erros e concepções. A interpretação dessas evidências deve ser feita, se possível, em conjunto com o aluno, buscando perceber seu ponto de vista, o significado de suas respostas, as possibilidades de estabelecimento de relações e os níveis de compreensão que possui dos objetos a serem estudados. Os instrumentos utilizados

nesse tipo de avaliação, conjugados entre si ou não, podem ser: perguntas orais, realização de um microprojeto ou tarefa.

- Em seu aspecto formativo, a avaliação permite acompanhar a evolução dos alunos em seu processo de aprendizagem, por isso também é chamada avaliação processual. Os resultados sobre essa evolução implicam, para os professores, em tarefa de ajuste entre o processo de ensino e o de aprendizagem, a fim de se adequar à evolução dos alunos e estabelecer novos esquemas de atuação.
- Para diagnosticar os avanços, assim como as lacunas na aprendizagem, pode-se tomar para análise tanto as produções escritas e orais diárias dos estudantes quanto alguns instrumentos específicos, como tarefas, fichas, portfólios, etc., que forneçam dados mais controlados e sistemáticos sobre o domínio dos saberes a que se referem os objetivos e as metas de ensino. A análise dos trabalhos pode ser feita levando-se em conta a exigência cognitiva das tarefas propostas, a detenção de erros conceituais observados e as relações não previstas. Dessa forma, são levantados subsídios para o professor e para o aluno que podem ajudar no progresso do processo de apreensão dos conhecimentos, desenvolvimento e aprimoramento de destrezas, construção de valores e qualidades pessoais.
- O aspecto acreditativo ou certificativo da avaliação é o de obter dados que permitam determinar se os estudantes desenvolveram as capacidades esperadas ao final de um processo. Esses dados devem possibilitar que se conclua, em conjunto com os resultados das avaliações processuais, as condições de desempenho do aluno segundo as normas especificadas, tanto internamente à escola como as requeridas em avaliações externas.

A elaboração de escalas indicando as capacidades esperadas de desenvolvimento no processo de aprendizagem, graduadas em diferentes níveis, de acordo com aspectos observáveis nas produções orais e escritas dos alunos, são instrumentos essenciais tanto para o aspecto formativo como para o certificativo da avaliação.

Os alunos devem ter conhecimento da escala utilizada pelo professor, por uma questão de transparência na avaliação, e também para apoiar-se nela ao fazerem sua autoavaliação.

O quadro da página seguinte é um exemplo de escala<sup>2</sup> que pode ser empregada para avaliação em Matemática.

<sup>2</sup> Fonte dos dados: PONTE, BROCARD e OLIVEIRA (2006), p. 121-123.

Nível	Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
V	Mostra compreender os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.  Executa completa e adequadamente os algoritmos.	Usa informação exterior relevante de natureza formal ou informal.  Identifica todos os elementos importantes do problema e mostra compreensão da relação entre eles.  Indica estratégia apropriada e sistemática para a resolução do problema e mostra adequadamente o processo de solução.	Usa terminologia e notação apropriadas.  Apresenta resposta completa e não ambígua.  Inclui diagramas ou representações apropriados, exemplos ou contraexemplos.  Apresenta como suportes argumentos coerentes e completos.
IV	Mostra compreender, quase completamente, os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.  Executa completamente os algoritmos.  Os cálculos em geral estão corretos, contendo eventualmente pequenos erros.	Usa informação exterior relevante de natureza formal ou informal.  Identifica todos os elementos importantes do problema e mostra compreensão da relação entre eles.  O processo de solução é completo ou quase completo.	Usa terminologia e notação parcialmente corretas.  Apresenta resposta completa com explicação razoável.  Inclui diagramas ou representações, exemplos ou contraexemplos de modo ainda incompleto.  Apresenta como suportes argumentos logicamente corretos, mas insuficientes.
III	Mostra compreender alguns dos conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.  A resposta tem erros de cálculo.	Identifica alguns elementos importantes do problema e mostra compreensão limitada da relação entre eles.  Mostra alguma evidência do processo de solução, mas ele está incompleto ou pouco sistematizado.	Mostra progresso significativo na direção de completar o problema, mas a explicação é ambígua.  Inclui diagramas ou representações pouco claras e imprecisas.  Apresenta como suportes argumentos incompletos ou baseados em premissas pouco importantes.
II	Mostra compreensão muito limitada dos conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.  A resposta tem graves erros de cálculo.	Usa informação exterior irrelevante.  Falha na identificação, quase por completo, de aspectos importantes ou coloca muita ênfase em elementos pouco importantes.  Reflete uma estratégia inadequada para resolver o problema.  O processo de solução não existe, é de difícil identificação ou não está sistematizado.	Falha no uso dos termos matemáticos.  Apresenta alguns elementos satisfatórios, mas omite partes significativas do problema.  Inclui diagramas ou representações de forma incorreta.  Não apresenta argumentos logicamente corretos.
I	Mostra não compreender os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.	Tenta usar informação exterior irrelevante.  Falha na identificação de quais elementos do problema são apropriados para a resolução.  Copia partes do problema, sem procurar a solução.	Comunica de forma ineficaz.  Integra desenhos que não representam a situação.  As palavras que emprega não refletem o problema.

## Indicadores para a avaliação em Matemática

Como já dissemos, esta coleção contemplou algumas das atuais tendências em Educação Matemática. Elas dizem respeito ao desenvolvimento de um ensino que aumente a capacidade matemática do aluno por intermédio da resolução de problemas, valorizando a comunicação matemática, a construção e a compreensão de conceitos e procedimentos. Passamos, então, a exemplificar como avaliar tais capacidades.

## Avaliando a capacidade matemática do aluno

É preciso avaliar a capacidade matemática do aluno, ou seja, a sua capacidade de usar a informação para raciocinar, pensar criativamente e para formular problemas, resolvê-los e refletir criticamente sobre eles.

A avaliação deve analisar até que ponto o aluno integrou e deu sentido à informação, se consegue aplicá-la em situações que requeiram raciocínio e pensamento criativo e se é capaz de utilizar a Matemática para comunicar ideias.

Além disso, a avaliação deve analisar a predisposição do aluno em face dessa ciência, em particular a sua confiança em fazer Matemática e o modo como a valoriza.

Por exemplo, em uma situação-problema aberta como esta: “Elabore a maquete da escola com base na sua planta”, o aluno pode revelar a sua capacidade matemática.

## Avaliando a resolução de problemas

Como a resolução de problemas deve constituir o eixo fundamental da Matemática escolar, o mesmo deve ocorrer com a avaliação. A capacidade dos alunos para resolver problemas desenvolve-se ao longo do tempo, como resultado de um ensino prolongado, de várias oportunidades para a resolução de muitos tipos de problemas e do confronto com situações do mundo real.

Ao avaliar essa capacidade do aluno, é importante verificar se ele é capaz de resolver problemas não padronizados, de formular problemas a partir de certos dados, de empregar várias estratégias de resolução e de fazer a verificação dos resultados, bem como a generalização deles. Identificar lacunas é muito importante na elaboração de problemas. Por exemplo, em um problema do tipo: “Você vai comprar 10 itens no supermercado. Na fila do caixa rápido (para 10 itens ou menos) estão 6 pessoas. O caixa 1 tem uma pessoa na fila e o caixa 3 tem 2. Os outros caixas estão fechados. Para qual dos caixas você se dirigirá?”, qual é a informação necessária para responder à pergunta? (É preciso saber o número de mercadorias que cada pessoa está comprando e a velocidade dos caixas.) Generalizar soluções de problemas é outro ponto fundamental. Por exemplo, peça aos alunos que determinem qual é o valor de  $1 + 3 + 5 + 7 + 9$  (é 25); depois, proponha ao aluno que formule uma expressão que forneça a soma dos  $n$  primeiros números ímpares. A solução seria:

1 parcela: 1

2 parcelas:  $1 + 3 = 4$  ( $2^2$ )

3 parcelas:  $1 + 3 + 5 = 9$  ( $3^2$ )

4 parcelas:  $1 + 3 + 5 + 7 = 16$  ( $4^2$ )

5 parcelas:  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$  ( $5^2$ )

:

$n$  parcelas:  $n^2$

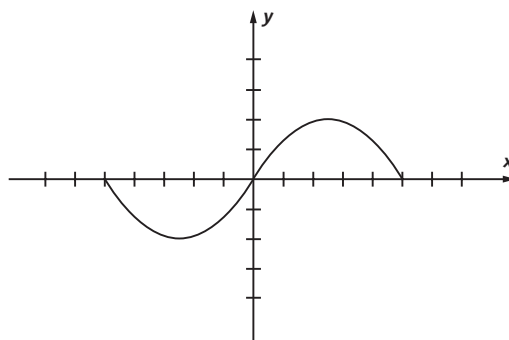
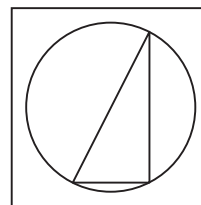
## Avaliando a comunicação do aluno

Na sala de aula discutem-se ideias e conceitos matemáticos, partilham-se descobertas, confirmam-se hipóteses e adquire-se conhecimento matemático pela escrita, pela fala e pela leitura. O próprio ato de comunicar clareia e organiza o pensamento e leva o aluno a se envolver na construção

da Matemática. Como a Matemática utiliza símbolos e, portanto, tem uma linguagem própria, específica, às vezes a comunicação fica dificultada.

Ao avaliar a comunicação de ideias matemáticas pelos alunos, é preciso verificar se ele é capaz de expressar-se oralmente, por escrito, de forma visual ou por demonstrações com materiais pedagógicos; se compreende e interpreta corretamente ideias matemáticas apresentadas de forma escrita, oral ou visual e se utiliza corretamente o vocabulário matemático e a linguagem matemática para representar ideias, descrever relações e construir modelos da realidade. Veja a seguir um problema que envolve esses aspectos:

“Suponha que você esteja ao telefone falando com um colega de turma e quer que ele desenhe algumas figuras. Escreva instruções que lhe permitam desenhar a figura e o gráfico exatamente como estão desenhados abaixo.”



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

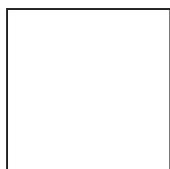
## Avaliando o raciocínio do aluno

Para avaliar a capacidade de raciocínio matemático do aluno, é preciso verificar se ele identifica **padrões**, formula **hipóteses** e faz **conjecturas**. Por exemplo, peça a ele que descubra como começaram e como continuam as seqüências:

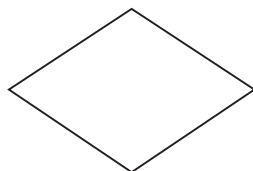
$0, 3, 8, 15, 24, \underline{(35)}, \underline{(48)}, \underline{(63)} \rightarrow (n^2 - 1; n = 1, 2, 3, \dots)$

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \underline{\left(\frac{1}{16}\right)}, \underline{\left(\frac{1}{32}\right)}, \underline{\left(\frac{1}{64}\right)}$$

É preciso verificar ainda se ele **analisa** situações para identificar **propriedades comuns**. Por exemplo, o que há de comum entre o losango e o quadrado? E no que eles diferem?



quadrado



losango

E se ele utiliza o raciocínio espacial ou **proporcional** para resolver problemas.

Por exemplo, peça ao aluno que desenhe um cubo planejado, ou que desenhe um cone montado a partir de uma planificação. Para verificar o uso do raciocínio proporcional, pergunte: “Quantos alunos da escola usam óculos?”. Isso leva o aluno a desenvolver um processo que permite identificar os que usam óculos de uma amostra de alunos e a utilizar raciocínio proporcional para determinar o número de alunos que usam óculos em toda a escola. Para aferir o raciocínio dedutivo, peça ao aluno que justifique por que, se somarmos o mesmo número de pontos à porcentagem de acertos no teste de cada aluno, a média das classificações aumentará na mesma quantidade.

### Avaliando a compreensão de conceitos

A essência do conhecimento matemático são os conceitos. O aluno só pode dar significado à Matemática se compreender os seus conceitos e significados.

A avaliação do conhecimento de conceitos e da compreensão deles pelo aluno deve indicar se é capaz de verbalizá-los e defini-los; identificá-los e produzir exemplos e contraexemplos; utilizar modelos, diagramas e símbolos para representar conceitos; passar de uma forma de representação para outra; reconhecer vários significados e interpretações de um conceito; comparar conceitos e integrá-los.

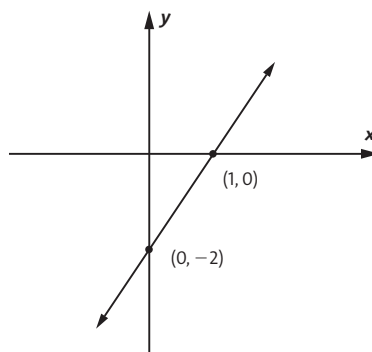
Para identificar exemplos e contraexemplos de conceitos, apresente uma questão como esta:

“Quais das seguintes expressões representam números racionais?”

- |               |                      |                |            |
|---------------|----------------------|----------------|------------|
| $\frac{2}{3}$ | $\sqrt{\frac{4}{5}}$ | 0              | $\sqrt{5}$ |
| 1,3434        | -5,6                 | 1,121121112... |            |
| $\sqrt{-16}$  | $\frac{-6}{-6}$      | 25%            |            |

Para reconhecer condições que determinam um conceito, proponha ao aluno que faça uma classificação dos quadriláteros (4 lados). Ao separar os paralelogramos (2 pares de lados paralelos) dos trapézios (apenas 1 par de lados paralelos), o aluno demonstra que sabe identificar essas formas geométricas pelas suas propriedades. Na continuação, pode separar os retângulos (4 ângulos retos) dos losangos (4 lados de mesma medida) e incluir os quadrados (4 ângulos retos e 4 lados de mesma medida) nos losangos, demonstrando compreensão dos conceitos de quadrado, losango, retângulo, paralelogramo e quadrilátero.

Para passar de uma representação de um conceito para outra, peça ao aluno, por exemplo, que escreva a equação da reta:



A integração de conceitos pode ser trabalhada com atividades do tipo: “Una os pontos médios dos lados de um trapézio isósceles. Qual figura se obtém? Justifique sua resposta.”.

### Avaliando procedimentos matemáticos

Procedimentos matemáticos são, por exemplo, os **algoritmos** ou as **técnicas de cálculo**, são as maneiras de traçar retas paralelas, perpendiculares, ângulos, etc.

A avaliação do conhecimento de procedimentos do aluno deve indicar se é capaz de executar uma atividade matemática com confiança e eficiência; de justificar os passos de um procedimento, reconhecer se ele é adequado ou não a determinada situação e se funciona ou não; e, sobretudo, se é capaz de criar novos procedimentos corretos e simples.

Para verificar se o aluno conhece as razões dos passos de um procedimento, peça-lhe, por exemplo, que justifique cada passagem da multiplicação  $(x + 3)(x + 2)$ :

$$(x + 3)(x + 2) = x(x + 2) + 3(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + (2 + 3)x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

Para verificar se o resultado de um procedimento está correto, proponha, por exemplo, que o aluno inverta a matriz

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  e verifique se o resultado é realmente a inversa dela.

## 9 Texto complementar: Por que se deve avaliar?

A função social do ensino não consiste apenas em promover e selecionar os “mais aptos” para a universidade. Ela abarca outras dimensões da personalidade.

*Habitualmente, quando se fala de avaliação, logo se pensa, de forma prioritária ou mesmo exclusiva, nos resultados obtidos pelos alunos. Hoje em dia, este continua sendo o principal alvo de qualquer aproximação ao fato avaliador. Os professores, as administrações, os pais e os próprios alunos referem-se à avaliação como o instrumento ou processo para avaliar o grau de alcance em relação a determinados objetivos previstos nos diversos níveis escolares. A avaliação é basicamente considerada como um instrumento sancionador e qualificador, em que o sujeito da avaliação é o aluno e somente o aluno, e o objeto da avaliação são as aprendizagens realizadas segundo certos objetivos mínimos para todos.*

*Mesmo assim, já faz muito tempo que, a partir da literatura pedagógica, as declarações de princípios das reformas educacionais empreendidas em diferentes países e grupos de educadores mais inquietos propõem formas de entender a avaliação que não se limitam à valoração dos resultados obtidos pelos alunos. O processo seguido por eles, o progresso pessoal e o processo coletivo de ensino-aprendizagem aparecem como elementos ou dimensões da avaliação.*

*Desse modo, é possível encontrar definições de avaliação bastante diferentes e, em muitos casos, bastante ambíguas, cujos sujeitos e objetos de estudo aparecem de maneira confusa e indeterminada. Em alguns casos, o sujeito da avaliação é o aluno; em outros, é o grupo/classe e, inclusive, o professor ou a equipe docente. Quanto ao objeto da avaliação, às vezes é o processo de aprendizagem seguido pelo aluno ou os resultados obtidos, enquanto outras vezes se desloca para a própria intervenção do professor.*

*As definições mais habituais da avaliação remetem a um todo indiferenciado que inclui processos individuais e grupais, os alunos e os professores. Esse ponto de vista é plenamente justificável, já que os processos que têm lugar na aula são processos globais em que é difícil – e certamente desnecessário – separar os diferentes elementos que os compõem. Nossa tradição avaliadora tem-se centrado exclusivamente nos resultados obtidos pelos alunos. Assim, é conveniente dar-se conta de que, ao falar de avaliação na sala de aula, pode-se aludir em particular a algum dos componentes do processo de ensino-aprendizagem, como também a todo o processo em sua globalidade.*

*Talvez a pergunta que nos permita esclarecer em cada momento qual deve ser o objeto e o sujeito da avaliação seja aquela que corresponde aos próprios fins do ensino: por que temos que avaliar? Sem dúvida, a partir da resposta a esta pergunta surgirão outras, por exemplo, o que se deve*

*avaliar, a quem se deve avaliar, como se deve avaliar, como devemos comunicar o conhecimento obtido através da avaliação, etc.*

### Os sujeitos e os objetos da avaliação

*Como em outras variáveis do ensino, muitos dos problemas de compreensão do que acontece nas escolas não são devidos tanto às dificuldades reais, mas sim aos hábitos e costumes acumulados de uma tradição escolar cuja função básica sempre foi seletiva e propedêutica. Em uma concepção do ensino centrado na seleção dos alunos mais preparados para continuar a escolarização até os estudos universitários, é lógico que o sujeito da avaliação seja o aluno e que se considerem como objeto da avaliação as aprendizagens alcançadas em relação às necessidades futuras que foram estabelecidas – as universitárias. Dessa forma, dá-se prioridade a uma clara função sancionadora: qualificar e sancionar desde pequenos aqueles que podem triunfar nessa carreira até a universidade.*

*No entanto, podemos entender que a função social do ensino não consiste apenas em promover e selecionar os “mais aptos” para a universidade, mas que abarca outras dimensões da personalidade. Quando a formação integral é a finalidade principal do ensino e, portanto, seu objetivo é o desenvolvimento de todas as capacidades da pessoa e não apenas as cognitivas, muitos dos pressupostos da avaliação mudam. Em primeiro lugar, e isto é muito importante, os conteúdos de aprendizagem a serem avaliados não serão unicamente conteúdos associados às necessidades do caminho para a universidade. Será necessário também levar em consideração os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais que promovam as capacidades motoras, de equilíbrio e de autonomia pessoal, de relação interpessoal e de inserção social.*

*Uma opção dessa natureza implica uma mudança radical na maneira de conceber a avaliação, uma vez que o ponto de vista já não é seletivo, já não consiste em ir separando os que não podem superar distintos obstáculos, mas em oferecer a cada um dos alunos a oportunidade de desenvolver, no maior grau possível, todas as suas capacidades. O objetivo do ensino não centra sua atenção em certos parâmetros finalistas para todos, mas nas possibilidades pessoais de cada um.*

*O problema não está em como conseguir que o máximo de alunos tenham acesso à universidade, mas em como conseguir desenvolver ao máximo todas as suas capacidades e, entre elas, evidentemente aquelas necessárias para que cheguem a ser bons profissionais. Tudo isso envolve mudanças substanciais tanto nos conteúdos da avaliação quanto no caráter e na forma das informações que devem ser proporcionadas sobre o conhecimento que se tem das aprendizagens*



realizadas, considerando as capacidades previstas. Por enquanto, digamos apenas que se trata de informações complexas, que não combinam com um tratamento estritamente quantitativo; elas se referem a valorações e indicadores personalizados que raramente podem ser traduzidos em notas e qualificações clássicas.

## Avaliação formativa: inicial, reguladora e final integradora

A tomada de posição em relação às finalidades do ensino, relacionada a um modelo voltado à formação integral da pessoa, implica mudanças fundamentais, especialmente nos conteúdos e no sentido da avaliação. Além disso, quando na análise da avaliação introduzimos a concepção construtivista do ensino e da aprendizagem como referencial psicopedagógico, o objeto da avaliação deixa de se focar exclusivamente nos resultados obtidos para se situar prioritariamente no processo de ensino-aprendizagem, tanto do grupo/classe quanto de cada um dos alunos. Por outro lado, o sujeito da avaliação não apenas se centra no aluno, como também na equipe que intervém no processo.

Como pudemos observar, procedemos de uma tradição educacional prioritariamente uniformizadora, que parte do princípio de que as diferenças entre os alunos da mesma faixa etária não são motivo suficiente para mudar as formas de ensino, mas que constituem uma evidência que valida a função seletiva do sistema e, por conseguinte, sua capacidade para escolher os melhores. A uniformidade é um valor de qualidade do sistema, pois é o que permite reconhecer e validar os que servem. Quer dizer, são bons alunos aqueles que se adaptam a um ensino igual para todos; não é o ensino que deve adaptar-se às diferenças dos alunos.

O conhecimento que temos sobre como as aprendizagens são produzidas revela a extraordinária singularidade desses processos, de tal maneira que cada vez é mais difícil estabelecer propostas universais que vão além da constatação dessas diferenças e singularidades. O fato de que as experiências vividas constituam o valor básico de qualquer aprendizagem obriga a levar em conta a diversidade dos processos de aprendizagem e, portanto, a necessidade de que os processos de ensino – e sobretudo os avaliadores – não apenas os observem, mas também os tomem como eixo vertebrador.

Sob uma perspectiva uniformizadora e seletiva, o que interessa são determinados resultados em conformidade com certos níveis predeterminados. Quando o ponto de partida é a singularidade de cada aluno, é impossível estabelecer níveis universais. Aceitamos que cada aluno chega à escola com uma bagagem determinada e diferente em relação às experiências vividas, conforme o seu ambiente sociocultural e familiar, sendo condicionado por suas características pessoais. Essa diversidade óbvia implica a relativização de duas das invariáveis das propostas uniformizadoras – os objetivos, os

conteúdos e a forma de ensinar – e a exigência de serem tratadas em função da diversidade dos alunos.

Então, a primeira necessidade do educador é responder às seguintes perguntas: que sabem os alunos em relação ao que eu quero ensinar? Que experiências tiveram? O que são capazes de aprender? Quais são seus interesses? Quais são seus estilos de aprendizagem? Nesse âmbito, a avaliação já não pode ser estática, baseada na análise de resultado, porque se torna um processo. E uma das primeiras fases do processo consiste em conhecer o que cada um dos alunos sabe, sabe fazer e é, juntamente com o que pode chegar a saber, saber fazer ou ser e como aprendê-lo. A avaliação é um processo cuja primeira fase denomina-se avaliação inicial.

O conhecimento do que cada aluno sabe, sabe fazer e como é, torna-se o ponto de partida que nos permite, em relação aos objetivos e conteúdos de aprendizagem previstos, estabelecer o tipo de atividades e tarefas que devem favorecer a aprendizagem de cada um. Isso nos proporciona referências para definir uma proposta hipotética de intervenção, a organização de uma série de atividades de aprendizagem que, dada nossa experiência e nosso conhecimento pessoais, suportes que possibilitará o progresso dos alunos. Porém, não é mais do que uma hipótese de trabalho, já que dificilmente a resposta a nossas propostas será sempre a mesma, nem a que nós esperamos.

A complexidade do fato educacional impede dar, como respostas definitivas, soluções que tiveram bom resultado anteriormente. Não só os alunos são diferentes em cada ocasião, como as experiências educacionais também são diferentes e não se repetem. Isso supõe que, no processo de aplicação do plano de intervenção previsto em sala de aula, será necessário adequar às necessidades de cada aluno as diferentes variáveis educativas: as tarefas e as atividades, seu conteúdo, as formas de agrupamento, os tempos, etc.

Conforme se desenvolvam o plano previsto e a resposta dos alunos a nossas propostas, haveremos de ir introduzindo atividades novas que comportem desafios mais adequados e ajudas mais contingentes. O conhecimento de como cada aluno aprende ao longo do processo de ensino-aprendizagem, para se adaptar às novas necessidades que se colocam, é o que podemos chamar de avaliação reguladora.

Alguns educadores, e o próprio vocabulário da reforma educacional, utilizam o termo avaliação formativa. Pessoalmente, para designar esse processo, prefiro usar o termo avaliação reguladora, já que explica melhor as características de adaptação e adequação. Ao mesmo tempo, essa opção permite reservar o termo formativo para uma determinada concepção da avaliação em geral, entendida como aquela que tem como propósito a modificação e a melhora contínua do aluno que se avalia, ou seja, que entende que a finalidade da avaliação é ser um instrumento educativo que informa e faz uma valoração do processo de aprendizagem seguido pelo



aluno, com o objetivo de lhe oportunizar, em todo momento, as propostas educacionais mais adequadas.

O conjunto de atividades de ensino-aprendizagem realizadas permitiu que cada aluno atingisse os objetivos previstos em determinado grau. A fim de validar as atividades realizadas, conhecer a situação de cada aluno e poder tomar as medidas educativas pertinentes ajudará a sistematizar o conhecimento do progresso seguido. Isso requer, por um lado, apurar os resultados obtidos (as competências alcançadas em relação aos objetivos previstos); por outro, implica analisar o processo e a progressão que cada aluno seguiu, com vistas a continuar sua formação levando em conta suas características específicas.

Muitas vezes, o conhecimento dos resultados obtidos é designado com o termo avaliação final ou avaliação somativa. Pessoalmente, penso que a utilização conjunta dos dois termos é ambígua e não ajuda a identificar ou diferenciar essas duas necessidades: o conhecimento do resultado obtido e a análise do processo que o aluno seguiu. Prefiro utilizar o termo avaliação final para me referir aos resultados obtidos e aos conhecimentos adquiridos e reservar o termo avaliação somativa ou integradora para o conhecimento e a avaliação de todo o percurso do aluno. Assim, a avaliação somativa ou integradora é entendida como um informe global do processo que, a partir do conhecimento inicial (avaliação inicial), manifesta a trajetória seguida pelo aluno, as medidas espe-

cíficas que foram tomadas, o resultado final de todo o processo e, em especial, a partir desse conhecimento, as previsões sobre o que é necessário continuar fazendo ou o que é necessário fazer de novo.

Por que avaliar? O aperfeiçoamento da prática educativa é o objetivo básico de todo educador. E entende-se esse aperfeiçoamento como meio para que todos os alunos atinjam o maior grau de competências, conforme suas possibilidades reais. O alcance dos objetivos por parte de cada aluno é um alvo que exige conhecer os resultados e os processos de aprendizagem que os alunos seguem. E, para melhorar a qualidade do ensino, é preciso conhecer e poder avaliar a intervenção pedagógica dos professores, de modo que a ação avaliadora observe simultaneamente os processos individuais e grupais. Refiro-me tanto aos processos de aprendizagem quanto aos de ensino, já que, de uma perspectiva profissional, o conhecimento relativo a como os alunos aprendem é, em primeiro lugar, um meio para ajudá-los em seu crescimento e, em segundo lugar, o instrumento que nos permite melhorar nossa atuação em aula.

Esse texto foi publicado originalmente no livro *A prática educativa: como ensinar*, de Antoni Zabala. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Antoni Zabala é licenciado em Pedagogia.

Fonte: Grupo A. Disponível em: <[www.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/5937/por-que-se-deve-avaliar.aspx](http://www.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/5937/por-que-se-deve-avaliar.aspx)>. Acesso em: 29 mar. 2016.

## 10 Sugestões complementares: leituras, recursos digitais e passeios

### A importância da atualização

Já falamos anteriormente sobre as mudanças que estão revolucionando a economia e a sociedade, e como a Matemática tem um importante papel na formação e preparação dos alunos para as novas demandas. É importante que o professor esteja devidamente informado e seja capaz de lidar com essas expectativas e novos anseios dos alunos.

Além das novas exigências que são trazidas para a sala de aula pela sociedade, teorias e práticas de Educação Matemática passam por debates, discussões, atualizações e alterações que são fruto do trabalho de grupos de estudo e de aplicação. O professor é parte desse processo de renovação, sendo ele o responsável por apresentar situações aos alunos, debater alternativas e soluções para os problemas que surgirem e, finalmente, aplicar o que foi proposto em seu espaço de trabalho, chegando a novos resultados.

Atualmente temos a facilidade da internet, que é capaz de reunir em portais, fóruns de discussão, blogs, artigos e listas de e-mails, uma comunidade de profissionais competentes e dispostos a manter ativo o debate entre professores e pesquisadores.

Também não faltam oportunidades de cursos oferecidos por instituições de ensino, centros de pesquisa, e até mesmo pelo poder público, que podem aprofundar certos aspectos da atividade de docência e oferecer a chance de trocar conhecimentos e experiências com outros professores e pesquisadores.

Tudo isso é o que podemos chamar de **formação continuada** do professor, esse aperfeiçoamento constante que coloca o docente no tempo presente, pronto para atender às demandas sociais que são impostas a ele e a seus alunos.

Em seguida oferecemos informações de locais onde os professores poderão encontrar recursos para dar continuidade à sua formação e orientações para o dia a dia do seu trabalho.

### Sites

- <<http://m3.ime.unicamp.br/>>. Acesso em: 13 maio 2016.
- Coleção M<sup>3</sup> Matemática Multimídia:** portal que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp para o Ensino Médio de Matemática no Brasil.

- <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>>. Acesso em: 13 maio 2016.  
**Portal do Professor:** espaço para acessar sugestões de planos de aula, mídias de apoio, notícias sobre educação e iniciativas do MEC, e também para compartilhar um plano de aula, participar de uma discussão ou fazer um curso.
- <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12583%3Aensino-medio&Itemid=859](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12583%3Aensino-medio&Itemid=859)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Coleção Explorando o Ensino – Matemática – Ensino Médio:** coletânea de artigos extraídos da *Revista do Professor de Matemática* (RPM) – uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio da Universidade de São Paulo.
- <<http://matematica.com.br/site/index.php>>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Portal Matemática:** provas de vestibulares e concursos, simulados *on-line*, curiosidades matemáticas, dicas, biografia de matemáticos, dicionário da Matemática, vídeos e desafios, *link* para universidades e faculdades do Brasil.
- <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/medio.htm>>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Matemática essencial:** conteúdos de Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior.
- <[www.aprendiz.com.br](http://www.aprendiz.com.br)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Projeto Aprendiz:** *site* destinado a professores e alunos.
- <[www.inep.gov.br](http://www.inep.gov.br)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira):** *site* do órgão que responde pelas avaliações do Sistema Educacional Brasileiro (todos os níveis e modalidades), com todas as informações relativas ao Enem (Exame Nacional de Ensino Médio).
- <[www.fc.up.pt/cmup/polya/polya\\_home.html](http://www.fc.up.pt/cmup/polya/polya_home.html)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Projeto Polya:** *site* especializado na resolução de problemas matemáticos.
- <[www.obm.org.br](http://www.obm.org.br)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Olimpiada Brasileira de Matemática (OBM):** informações, provas e gabaritos.
- <<http://cmais.com.br/educacao>>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Cmais:** *site* da TV Cultura com informações e notícias sobre educação.
- <[www.uol.com.br/cienciahoje](http://www.uol.com.br/cienciahoje)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
Publicações como: revista *Ciência Hoje das Crianças*, *Alô, Professor*, etc.
- <<http://revistaescola.abril.com.br>>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Revista Escola:** apresenta diversos materiais sobre educação e mantém *blogs* e fóruns de discussão.
- <[www.planetaeducacao.com.br](http://www.planetaeducacao.com.br)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Planeta Educação:** portal educacional que tem como objetivo disseminar o uso pedagógico e administrativo das novas tecnologias da informação e da comunicação nas escolas públicas brasileiras de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio.

- <<http://educador.brasilescola.com/>>. Acesso em: 14 maio 2016.  
Orientações para pais e educadores sobre vários aspectos do Ensino.
- <[www.somatematica.com.br](http://www.somatematica.com.br)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
**Portal Só Matemática:** apresenta conteúdos matemáticos e sugestões de uso de tecnologias e jogos em sala de aula.  
Alguns desses *sites* podem ser trabalhados com os alunos; fica a seu critério selecioná-los.

## Vídeos

- As séries do **TV Escola** disponíveis no *site* <<http://tvescola.mec.gov.br/tve/home>> possuem diversos vídeos que apresentam variadas aplicações dos conteúdos em situações simples do dia a dia. Acesso em: 14 maio 2016.
- O *site* <[https://pt.wikiversity.org/wiki/Portal:Matem%C3%A1tica\\_e\\_Estat%C3%ADstica/Videoteca](https://pt.wikiversity.org/wiki/Portal:Matem%C3%A1tica_e_Estat%C3%ADstica/Videoteca)> apresenta uma lista de vídeos de matemática da **Videoteca do Instituto de Matemática e Estatística**. Entre os vídeos existem documentários, séries educativas e teleaulas. Acesso em: 14 maio 2016.
- No *site* **Domínio Público** <[www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp](http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp)> são disponibilizados vários vídeos que auxiliam o professor no seu trabalho em sala de aula, principalmente no que diz respeito ao Programa de Formação de Professores em Exercício. Acesso em: 14 maio 2016.

## Jogos

Os jogos são ótimos recursos para o ensino de Matemática. Tanto os conhecidos jogos de tabuleiro ou cartas como os eletrônicos, que podem ser propostos no laboratório de Informática ou para serem explorados em casa com roteiros de observação e discutidos depois, em sala de aula.

Existem poucos jogos eletrônicos voltados para os temas de Matemática do Ensino Médio. Abaixo e na próxima página seguem *links* para jogos que podem estimular a familiaridade dos alunos com a disciplina, mas também encorajamos os professores a desvendar os processos matemáticos que estão contidos nos diversos contatos que os estudantes têm com os jogos. Entre os jogos eletrônicos adequados para o Ensino Médio sugerimos os que se encontram em:

- **Jogos de Matemática no site da Unesp** <[www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/ensino-medio/](http://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/ensino-medio/)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
Nesse *site* serão encontrados diversos jogos matemáticos para o Ensino Médio, com objetivos, regras e até tabuleiros e peças para impressão.
- **MathPlayground** <[www.mathplayground.com/game\\_directory.html](http://www.mathplayground.com/game_directory.html)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
O *site* em inglês contém uma série de jogos matemáticos que abarcam diferentes disciplinas. Os jogos são simples e trabalham com conhecimentos específicos. Para o professor

de Ensino Médio recomendamos explorar as seções de Geometria (Geometry), jogos lógicos (Logic Games) e de contextualização do uso da Matemática no mundo real (Real World Math Connections).

- **Power My Learning** <<http://powermylearning.com/>>. Acesso em: 14 maio 2016.  
*Site* em inglês criado pela organização americana CFY. Dedicada à modernização do ensino, oferece jogos e atividades em diversas áreas, como Tecnologia, Matemática, Ciências e Arte, disponibilizando conteúdo específico para Ensino Médio.

## Softwares

Existem *softwares* que podem ser usados especificamente para explorar determinados conceitos matemáticos. Abaixo listamos algumas sugestões de aplicativos e repositórios que podem ser explorados.

- **Wolfram Alpha** <[www.wolframalpha.com/](http://www.wolframalpha.com/)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
Similar a uma ferramenta de busca, o *site* oferece um campo de entrada simples que deve ser preenchido com o “nome” do que se pretende encontrar. O que embasa esse sistema é o Mathematica, de Stephen Wolfram. O *site* oferece soluções para problemas matemáticos complexos, porém toda a linguagem é em inglês.
- Lista de *softwares* do *site* da UFF <[www.uff.br/cdme/](http://www.uff.br/cdme/)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
A seção de conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística ligada ao Instituto de Matemática da UFF disponibiliza *softwares* educacionais, experimentos educacionais e atividades em áudio relacionadas à Matemática do Ensino Médio.
- Lista de *softwares* do portal Só Matemática <[www.somatematica.com.br/softwares.php](http://www.somatematica.com.br/softwares.php)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
Esse portal de ensino de Matemática oferece para professores e alunos uma seleção de aplicativos que podem ser úteis em atividades diárias de sala de aula. A lista é grande e o professor deve pesquisar quais *softwares* são adequados para as suas necessidades.

## Passeios para aprender Matemática

- **Planetários**  
Visitas a planetários são ótimas como geradoras de investigações sobre o uso da Trigonometria e dos logaritmos para diversos cálculos envolvendo grandes distâncias e números muito longos, além de aspectos de interdisciplinaridade com a Física e a Biologia. Há planetários importantes em todo o território nacional e seus endereços e contatos podem ser encontrados em: <[www.uranometrianova.pro.br/planetarios/planbrasil.htm](http://www.uranometrianova.pro.br/planetarios/planbrasil.htm)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- Museus e programas de visitas científicas podem ser encontrados no catálogo *Centros e Museus de Ciência do Brasil 2015* elaborado pela Associação Brasileira de Centros e Museus de Ciência (ABCMC), pelo Centro Cultural de Ciência e Tecnologia da UFRJ (Casa da Ciência) e pela Casa

de Oswaldo Cruz/Fiocruz (Museu da Vida). Além dos centros e museus de ciência, podem ser consultados zoológicos, jardins botânicos, parques, jardins zoobotânicos, aquários, planetários e observatórios presentes em todas as regiões do Brasil. Disponível em: <[www.mcti.gov.br/documents/10179/472850/Centros+e+Museus+de+Ci%C3%A7%C3%A2ncia+do+Brasil+2015++pdf/667a12b2-b8c0-4a37-98f5-1cbf51575e63](http://www.mcti.gov.br/documents/10179/472850/Centros+e+Museus+de+Ci%C3%A7%C3%A2ncia+do+Brasil+2015++pdf/667a12b2-b8c0-4a37-98f5-1cbf51575e63)>. Acesso em: 14 maio de 2016.

## Revistas e boletins de Educação Matemática

- **Bolema** – Boletim de Educação Matemática publicado pelo Departamento de Matemática, IGCE – Unesp – Rio Claro (SP). *site*: <[www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema](http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- **Boletim Gepem** – Série Reflexão em Educação Matemática. Publicações do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e do Mestrado em Educação Matemática da Universidade de Santa Úrsula (RJ). Para ter acesso, é necessário cadastro no *site*.  
*site*: <[www.ufrj.br/SEER/index.php?journal=gepem](http://www.ufrj.br/SEER/index.php?journal=gepem)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- **Educação Matemática em Revista** – Temas e Debates publicações da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).  
*site*: <[www.sbem.com.br/revista/index.php/emr](http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- **Educação Matemática Pesquisa**, revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC (SP).  
*site*: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp>>. Acesso em: 14 maio 2016.
- **Revista Brasileira de História da Matemática (SBHMat)**.  
*site*: <[www.sbhmat.org](http://www.sbhmat.org)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- **Revista do Professor de Matemática**, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).  
*site*: <[www.rpm.org.br](http://www.rpm.org.br)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- **Zetetiké** – Publicações do Cempem – Unicamp.  
*site*: <[www.cempem.fae.unicamp.br/zetetike.htm](http://www.cempem.fae.unicamp.br/zetetike.htm)>. Acesso em: 14 maio 2016.

## Alguns órgãos governamentais

- **Fundação Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)**  
Tel.: 0800-616161  
*site*: <[www.fnde.gov.br](http://www.fnde.gov.br)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
O FNDE mantém o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).
- **Secretaria de Educação Básica (SEB)**  
Tel.: 0800-616161  
*site*: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=293&Itemid=809](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=293&Itemid=809)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
Informações sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, sobre o Guia do Livro Didático e todas as questões relacionadas ao Ensino Médio.

- Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão (Secadi)  
Tel.: 0800-616161  
site: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=290&Itemid=816](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=290&Itemid=816)>. Acesso em: 14 maio 2016.  
Implementa políticas educacionais nas áreas de alfabetização e educação de jovens e adultos, educação ambiental, educação em direitos humanos, educação especial, do campo, escolar indígena, quilombola e educação para as relações étnico-raciais.
- Secretarias de Educação estaduais e municipais  
Provavelmente a Secretaria de Educação do estado em que você mora e também a do seu município mantenham equipes pedagógicas, publicações e ofereçam cursos de Matemática a professores. Procure se informar e participar.

## Programas de acesso ao Ensino Superior

Com o intuito de auxiliar o ingresso de jovens ao Ensino Superior, o Ministério da Educação (MEC) oferece programas como o Fies, o Prouni e o Sisu.

O Fundo de Financiamento Estudantil (Fies) é um programa que financia a graduação de estudantes em instituições privadas de Ensino Superior. Os estudantes que pretendem ingressar em cursos superiores particulares cadastrados no programa e os que tenham avaliação positiva nos processos conduzidos pelo MEC podem recorrer ao financiamento. É obrigatória a participação no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e os candidatos precisam, após se inscreverem, ser aprovados por uma Comissão Permanente de Seleção, conforme cronograma definido pelo MEC. O pagamento do financiamento deve ser iniciado um ano e meio depois da graduação do estudante, e o prazo final dependerá do curso escolhido.

O Programa Universidade para Todos (Prouni) tem como finalidade a concessão de bolsas de estudos integrais e parciais (50%) a estudantes de cursos de graduação e de cursos sequenciais de formação específica em instituições privadas.

Essas bolsas são destinadas a alunos selecionados com base nas notas do Enem e também em critérios e condições estabelecidos em regulamentação específica. Para os estudantes que receberem bolsas parciais, há a possibilidade de acesso ao Fies para financiar o restante do estudo.

O Sistema de Seleção Unificada (Sisu) é gerenciado pelo MEC. Nesse sistema são oferecidas vagas em instituições públicas de Ensino Superior para candidatos participantes do Enem. A seleção dos candidatos é realizada de acordo com a nota obtida no exame, dentro do número de vagas em cada curso, por modalidade de concorrência.

Para maiores informações sobre esses programas, acesse o portal do Ministério da Educação: <<http://portal.mec.gov.br/index.php>> (acesso em: 2 maio 2016).

## Curso para a formação do professor

- <[www.profmt-sbm.org.br/](http://www.profmt-sbm.org.br/)>. Acesso em: 2 maio 2016.  
Pós-graduação *stricto sensu* para aprimoramento da for-

mação profissional de professores da Educação Básica, da Sociedade Brasileira de Matemática.

Programa semipresencial, com bolsas Capes para professores em exercício na rede pública.

## Referências bibliográficas para o professor

### Aprofundando os conhecimentos matemáticos

*A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.*

George Polya.

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrimos a Geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1989.
- COLEÇÃO do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Vários autores. 12 volumes, 2006.
- LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. 3 v.
- ROXO, E. *Curso de Matemática Elementar*, vol. 1. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1929.
- TINOCO, Lúcia A. A. *A Geometria euclidiana por meio de resolução de problemas*. Rio de Janeiro: UFRJ (Instituto de Matemática), 1999. (Projeto Fundação).

### História da Matemática

- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.
- CARVALHO, Dione Lucchesi de; MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu; BRITO, Arlete de Jesus. *História da Matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- CARVALHO, Luiz Mariano et al (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.
- COLEÇÃO *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*. Vários autores. São Paulo: Atual, 1993.
- DASSIE, Bruno Alves; ROCHA, José Lourenço da. *O ensino de Matemática no Brasil nas primeiras décadas do século XX*. Caderno Dá-Licença, n. 4, ano 5, p. 65-73, dez. 2003. Disponível em: <[www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume4/da\\_Licena\\_Bruno.pdf](http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume4/da_Licena_Bruno.pdf)>. Acesso em: 13 maio 2016.
- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.
- FIORENTINI, Dario. "Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil". *Zetetiké*, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-16, 1995.
- GARBI, Gilberto Geraldo. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 2007.



- GUELLI, Oscar. Coleção *Contando a história da Matemática*. Vários volumes. São Paulo: Ática, 1998.
- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na educação matemática: propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SINGH, Simon. *O enigma de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.
- TENÓRIO, R. M. (Org.). *Aprendendo pelas raízes. Alguns caminhos da Matemática na História*. Salvador: Centro Editorial e Didático da Universidade Federal da Bahia, 1995.
- VALENTE, Wagner Rodrigues. *Uma história da Matemática escolar do Brasil, 1730-1930*. São Paulo: Annablume, 1999. Abordagem sobre a importância e a rapidez da circulação das ideias, dos métodos e das publicações em Matemática no decorrer dos séculos XVIII a XX.

## Educação Matemática

- BORBA, Marcelo de Carvalho. *Tendências internacionais em formação de professores de Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e Matemática*. São Paulo/Campinas: Summus/Unicamp, 1986.
- \_\_\_\_\_. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papyrus, 2002.
- \_\_\_\_\_. *Etnomatemática*. São Paulo: Ática, 1998.
- \_\_\_\_\_. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- DANTE, Luiz Roberto. *Criatividade e resolução de problemas*. São Paulo: Unesp (mimeog.). Tese de Livre-Docência, 1998.
- \_\_\_\_\_. *Incentivando a criatividade através da educação matemática*. São Paulo: PUC-SP (mimeog.). Tese de Doutorado, 1980.
- \_\_\_\_\_. *Formulação e resolução de problemas de Matemática: teoria e prática*. São Paulo: Ática, 2011.
- Douady, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* (Jogos executivos e dialética ferramenta-objeto na educação Matemática). Paris: Universidade Paris VII. Tese de doutorado, 1984.
- LINS, Romulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papyrus, 1997.
- NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). *A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

- \_\_\_\_\_. *A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades*. Campinas: Papyrus, 2006.
- POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. *A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades*. Campinas: Papyrus, 2006.
- POZO, Juan Ignacio. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

## Metodologia do ensino de Matemática

- BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2006.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; SILVA, Viviane Clotilde da; HEIN, Nelson. *Ornamentos × criatividade: uma alternativa para ensinar Geometria plana*. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 1996.
- BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio*. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.
- DANTE, Luiz Roberto. Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática*, n. 6. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1985.
- HUETE, J. C. Sánchez; BRAVO, J. A. Fernández. *O ensino da Matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.
- LIMA, Elon Lages. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2001. Capítulos 1, 15, 16, 17 e 18. (Coleção do Professor de Matemática).
- MONTEIRO, Alexandria; POMPEU JUNIOR, Geraldo. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001.
- PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- \_\_\_\_\_. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

## Educação

- MARTINS, Angela Maria. Diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio: avaliação de documento. *Cadernos de Pesquisa*, n. 109, p. 67-87, 2000. Disponível em: <[www.scielo.br/pdf/%0D/cp/n109/n109a04.pdf](http://www.scielo.br/pdf/%0D/cp/n109/n109a04.pdf)>. Acesso em: 13 maio 2016.
- MORIN, Edgar. *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. Brasília/São Paulo: Unesco/Cortez, 2001.
- PERRENOUD, Philippe. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- \_\_\_\_\_. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- \_\_\_\_\_. *Ensinar: agir com urgência, decidir na incerteza*. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- ZABALA, Antoni. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

## Informática e Educação Matemática

- BONGIOVANNI, Vincenzo et al. *Descobrimo o Cabri-Géomètre*. Caderno de Atividades. São Paulo: FTD, 1997.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.
- PONTE, João Pedro da; OLIVEIRA, Hélia; VARANDAS, José Manuel. *O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional*. Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2003.
- RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho do. *Matemática*. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 1997.
- VALENTE, José Armando. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: *Tecnologia, currículo e projetos*. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/1sf.pdf>>. Acesso em: 14 maio 2016.

## Documentos oficiais

- BRASIL. Ministério da Educação. *Melhores práticas em escolas de Ensino Médio no Brasil*. Brasília, 2010. Disponível em: <[http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/melhores\\_praticas\\_ensino\\_medio.pdf](http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/melhores_praticas_ensino_medio.pdf)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio, Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. *Ensino Médio Noturno: Democratização e Diversidade*. Coordenação nacional Sandra Zákia Lian Sousa, Romualdo Luiz Portela de Oliveira, Valéria Virgínia Lopes. Brasília: MEC, SEB, 2006. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=7609-emnot-relatorio-nacional-completo-final-pdf&category\\_slug=fevereiro-2011-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7609-emnot-relatorio-nacional-completo-final-pdf&category_slug=fevereiro-2011-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação*

*Básica*. Brasília: DICEI, 2013. Disponível em: <[http://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2014/07/diretrizes\\_curriculares\\_nacionais\\_2013.pdf](http://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2014/07/diretrizes_curriculares_nacionais_2013.pdf)>. Acesso em: 14 maio 2016.

- \_\_\_\_\_. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Resolução CMN/CEB nº 2, de 30 de janeiro de 2012* (define as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio – DCNEM). Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=9864-rceb002-12&category\\_slug=janeiro-2012-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=9864-rceb002-12&category_slug=janeiro-2012-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Gabinete do Ministro. *Portaria nº 1.140, de 22 de novembro de 2013* (institui o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio e define suas diretrizes gerais). Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=15069-pacto-dou-1-2&category\\_slug=janeiro-2014-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15069-pacto-dou-1-2&category_slug=janeiro-2014-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, Etapa II – Caderno I: Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Médio*. Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio [autores: Erisevelton Silva Lima et al.]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2014. Disponível em: <[http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web\\_caderno\\_2\\_1.pdf](http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web_caderno_2_1.pdf)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, Etapa II – Caderno V: Matemática*. Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio [autores: Ana Paula Jahn et al.]. Curitiba UFPR/ Setor de Educação, 2014. Disponível em: <[http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web\\_caderno\\_2\\_5.pdf](http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web_caderno_2_5.pdf)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Coordenação Geral do Ensino Médio. *Programa Ensino Médio Inovador*. Documento Orientador Brasília, 2013. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=13249-doc-orientador-proemi-2013-novo-pdf&category\\_slug=junho-2013-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13249-doc-orientador-proemi-2013-novo-pdf&category_slug=junho-2013-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 14 maio 2016.
- \_\_\_\_\_. Undime. Consed. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2015. Documento em discussão durante a reformulação deste Manual para o Professor. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documents/bncc-2versao.revista.pdf>>. Acesso em: 14 maio 2016.



## 11 Observações e sugestões para as Unidades e os capítulos

Nesta seção do Manual do Professor apresentamos comentários e sugestões didáticas para cada capítulo que compõe o volume 1 desta coleção.

Também fornecemos a resolução dos exercícios e atividades propostos no livro do aluno, com exceção das resoluções já contempladas nas páginas do próprio livro e de exercícios e atividades cujas respostas são diretas.

Ressaltamos que fica a critério do professor a escolha da ordem de abordagem dos conteúdos, que pode ser diferente da apresentada nesta obra. Cabe ao professor considerar o projeto político-pedagógico da escola para planejar suas aulas.

### Unidade 1 – Números e funções

Nesta Unidade apresentamos um capítulo sobre conjuntos numéricos e um capítulo de introdução ao estudo de funções.

#### Capítulo 1 – Conjuntos numéricos

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Números	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos	C1	H1
A noção de conjunto	–	–	–
Conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ )	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos	C1	H1/H3
Conjunto dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ )	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos	C1	H1/H3
Conjunto dos números racionais ( $\mathbb{Q}$ )	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos, Desigualdades	C1	H1/H3
Números irracionais	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos, Desigualdades	C1	H1/H3
Conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ )	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos, Desigualdades	C1	H1/H3/H5
A linguagem de conjuntos	–	–	–
Intervalos reais	–	–	–
Situações-problema envolvendo números reais, grandezas e medidas	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos/Conhecimentos geométricos: Grandezas, Unidades de medida.	C1/C3	H3/H10/H12

A linguagem dos conjuntos não tem mais o caráter central no ensino de Matemática que teve durante o Movimento da Matemática Moderna, porém seu estudo continua fundamental. Ela unifica praticamente todas as áreas da Matemática.

Os alunos chegam ao Ensino Médio, mesmo sem perceber, já com vivências e noções intuitivas sobre conjuntos. Por exemplo, usam a nomenclatura: conjunto dos números naturais, conjunto solução de uma equação, etc. Neste capítulo o aluno será apresentado a conceitos e

ferramentas novas (relações de pertinência e inclusão, operações com conjuntos, conjuntos complementares, intervalos, etc.) e revisará e formalizará a utilização de ferramentas que, de tão corriqueiras, passavam quase despercebidas (conjuntos numéricos, reta numérica, valores absolutos, etc.).

Este capítulo está dividido em duas partes principais. Começa com a noção de conjunto e dos conjuntos numéricos, apresentando-os numa evolução lógica. Essa apresentação é complementada pelas motivações históricas. Nessa parte,

existem várias oportunidades para a revisão das operações básicas, como as operações com frações, com números decimais e desigualdades. A associação dos números com a reta numerada, os conceitos de grandezas comensuráveis e incomensuráveis são temas que incentivam a discussão e motivam o aluno a estabelecer relações mais elaboradas das que já conheciam.

O capítulo oferece algumas seções especiais, que complementam e ampliam os conteúdos estudados. Cabe ao professor selecionar, de acordo com seu planejamento, quais e quando utilizá-las.

A seção **Leitura** oferece duas oportunidades: trabalhar em conjunto com o professor de Filosofia e apresentar o que é uma prova por absurdo.

A incomensurabilidade da diagonal do quadrado é considerada por muitos historiadores das ciências como a primeira revolução científica. O dogma pitagórico de que “tudo é número” não se restringia à Matemática, estruturava todo o pensamento filosófico. E o desconforto causado por essa descoberta foi tão grande que os pitagóricos nunca conseguiram encontrar uma solução satisfatória para essa crise. Esse problema aparece em um diálogo de Platão intitulado “Ménon”.

Os exercícios contemplam diversos aspectos da aprendizagem: fixação do uso da linguagem (do 1 ao 7 e o 11), identificação e classificação (9 e 10), ordenação (5 e 8) e fixação do conteúdo (do 12 ao 14).

No exercício 12, a equipe deverá explorar uma série de exemplos, procurando um padrão que possa ser inferido. Em seguida, deverá conjecturar uma regra para aquele padrão e, por fim, tentar provar que a conjectura é correta. Uma conjectura demonstrada passa a ser um teorema. É bastante provável que as equipes não consigam demonstrar sozinhas a conjectura, já que em geral não têm experiência em fazê-lo. Não há problema algum nisso, é esperado que o professor assuma nesse momento e faça a demonstração na lousa para os alunos verem como é. O importante nessa atividade é que eles entendam que a observação de padrões pode levar a conjecturas; que as conjecturas devem ser provadas para ter validade. Além disso, é importante que eles tomem contato com a demonstração, mesmo que não haja muito rigor envolvido nesse primeiro momento. Na seção **Atividades complementares à Unidade 1**, apresentamos outra atividade desse tipo.

A segunda parte do capítulo é dedicada à linguagem dos conjuntos propriamente dita. As relações de inclusão, pertinência e complementaridade e as operações de interseção, união e diferença são trabalhadas e ilustradas com exercícios. Sua aplicação prática fica evidenciada nos exercícios: relação de inclusão e conjuntos complementares (do 15 ao 17), fixação do uso da linguagem (do 18 ao 23, 33, 34, do 37 ao 43) e aplicação (24 a 28). O exercício 26

apresenta um exemplo de aplicação real utilizada pelos buscadores de informações na internet.

Em relação à prova por absurdo, é uma ótima oportunidade para esclarecer alguns pontos importantes, como o conceito de prova, de implicação, o princípio da exclusão, a utilização do sinal de igual e a definição de número par. A abordagem da seção **Um pouco mais...** pode ajudar o professor que escolher aprofundar esses temas.

Ninguém melhor do que o professor para conhecer a maturidade da turma e seus conhecimentos prévios. Todos esses assuntos podem ser tratados em níveis básicos, quase meramente ilustrativos, ou desafiadores, gerando discussões e demandando pesquisas.

Os **exercícios resolvidos** sensibilizam os alunos sobre quais são os passos necessários para solucionar um problema. Nem sempre a pergunta está evidente. O primeiro passo é identificá-la. Depois encontrar e organizar os dados, planejar, executar e verificar a solução. Boa parte dos alunos não foi apresentada a esses hábitos simples e nem imagina como eles facilitam o trabalho.

Na parte final do capítulo são apresentadas situações-problema que incentivam o cálculo mental e o raciocínio lógico, relacionando o conteúdo estudado com questões de saúde, ciências naturais e sociais. O professor deve avaliar a estratégia de não deixar para utilizar esses exercícios apenas no final, mas ao longo do capítulo.

Na seção **Um pouco mais...**, a relação de implicação lógica foi separada como um assunto que fica a critério do professor incluí-lo ou não no curso. Se, ao longo do curso, o professor planeja fazer uma abordagem mais formal das funções e inequações, pode ser bastante proveitoso dedicar algumas aulas para esse assunto. Se a opção for por uma abordagem mais intuitiva ou aplicada, essa seção pode ser suprimida em benefício de uma atenção maior aos exercícios propostos nas situações-problema. A seguir apresentamos algumas atividades que podem enriquecer o trabalho com essa seção.

1. Escreva como se lê a implicação  $p \Rightarrow q$  sabendo que:

$p$ :  $n$  é um número natural par;

$q$ :  $n$  é um número escrito na forma  $n = 2m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:**

- Ser um número par implica ser um número escrito na forma  $n = 2m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ .
- Ser um número par acarreta ser um número escrito na forma  $n = 2m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ .
- Se  $x$  é um número par, então  $x$  é um número escrito na forma  $n = 2m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ .
- Ser um número par é condição suficiente para ser um número escrito na forma  $n = 2m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ .
- Ser um número escrito na forma  $n = 2m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ , é condição necessária para ser um número par.
- Todo número par é escrito na forma  $n = 2m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ .

2. No exercício anterior, a recíproca  $q \Rightarrow p$  é verdadeira? Em caso positivo, como se escreve a equivalência das duas propriedades?

**Resolução:**

A recíproca  $q \Rightarrow p$  é verdadeira. Então:

- ser um número par é equivalente a escrever o número na forma  $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ .
  - $x$  é um número par se, e somente se,  $x$  é escrito na forma  $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ .
  - ser um número par é condição necessária e suficiente para ser escrito na forma  $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ .
- Simbolicamente,  $p \Leftrightarrow q$ .

3. Escreva, na forma de conjuntos, os silogismos:

- a) Todo retângulo é paralelogramo.  
Todo paralelogramo é quadrilátero.  
Então, todo retângulo é quadrilátero.
- b) Todo aluno pertence a uma classe.  
Toda classe pertence a uma escola.  
Então, todo aluno pertence a uma escola.
- c) Todo recifense é pernambucano.  
Todo pernambucano é brasileiro.  
Então, todo recifense é brasileiro.

**Resolução:**

- a)  $R \subset P$  e  $P \subset Q \Rightarrow R \subset Q$   
b)  $a \in C$  e  $C \in E \Rightarrow a \in E$   
c)  $r \in P$  e  $P \in B \Rightarrow r \in B$

4. Escreva os conjuntos definidos pelas propriedades, a implicação lógica e a inclusão de conjuntos:

- a) Considerando o universo dos números reais:  
 $p$ :  $n$  é um número natural par;  
 $q$ :  $n$  é um número natural.
- b) Considerando o universo dos polígonos:  
 $p$ :  $x$  é um trapézio;  
 $q$ :  $x$  é um quadrilátero.

**Resolução:**

- a)  $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}; B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}; p \Rightarrow q; A \subset B$   
b)  $A = \{\text{trapézio}\}; B = \{\text{quadrilátero}\}; p \Rightarrow q; A \subset B$

5. Formule um silogismo envolvendo os conjuntos numéricos  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ .

**Resolução:**

Exemplo: Todo número natural é inteiro. Todo número inteiro é racional. Portanto, todo número natural é racional.

6. Escreva a contrapositiva da implicação  $p \Rightarrow q$  em que:

- $p$ : número natural maior do que 2 primo.  
 $q$ : número natural maior do que 2 ímpar.  
 $p \Rightarrow q$ : se um número natural maior do que 2 é primo, então ele é ímpar.

**Resolução:**

- $q'$ : número natural maior do que 2, par.  
 $p'$ : número natural maior do que 2, não primo.  
 $q' \Rightarrow p'$ : se um número natural maior do que 2 é par, então ele não é primo.

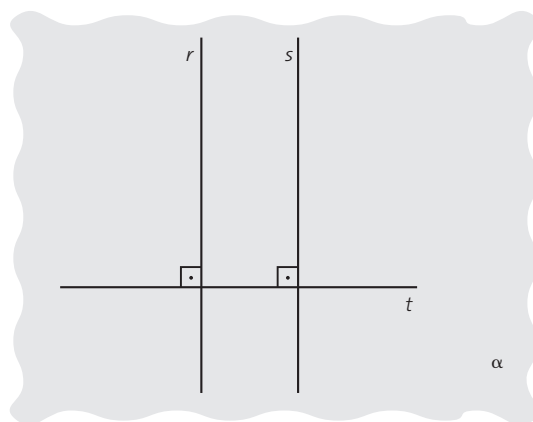
7. Escreva a contrapositiva das implicações:

- a) “Se um número quadrado perfeito é par, então sua raiz quadrada é par.”  
b) “Se um número é par, então esse número é divisível por 2.”

**Resolução:**

- a)  $p$ : número quadrado perfeito par.  
 $q$ : a raiz quadrada desse número é par.  
 $p \Rightarrow q$   
 $p'$ : número quadrado perfeito ímpar.  
 $q'$ : a raiz quadrada desse número é ímpar.  
 $q' \Rightarrow p'$ : se a raiz quadrada de um número é ímpar, então esse número é quadrado perfeito ímpar.
- b)  $p$ : número par.  
 $q$ : número divisível por 2.  
 $p \Rightarrow q$   
 $q'$ : número não divisível por 2.  
 $p'$ : número ímpar.  
 $q' \Rightarrow p'$ : se um número não é divisível por 2, então ele é um número ímpar.

8. Escreva a contrapositiva da implicação:



“Se duas retas distintas ( $r$  e  $s$ ) de um plano  $\alpha$  são perpendiculares a uma terceira reta ( $t$ ) desse plano, então elas ( $r$  e  $s$ ) são paralelas.”

**Resolução:**

- $p$ : duas retas distintas ( $r$  e  $s$ ) de um plano  $\alpha$  são perpendiculares a uma terceira reta ( $t$ ) desse plano.  
 $q$ : as retas distintas ( $r$  e  $s$ ) do plano  $\alpha$  são paralelas.  
 $p \Rightarrow q$ : se duas retas distintas ( $r$  e  $s$ ) de um plano  $\alpha$  são perpendiculares a uma terceira reta ( $t$ ) desse plano, então elas ( $r$  e  $s$ ) são paralelas.  
 $p'$ : as retas distintas ( $r$  e  $s$ ) do plano  $\alpha$  não são, simultaneamente, perpendiculares a uma terceira reta  $t$  desse plano  $\alpha$ .  
 $q'$ : duas retas distintas ( $r$  e  $s$ ) de um plano  $\alpha$  não são paralelas.  
 $q' \Rightarrow p'$ : se duas retas distintas ( $r$  e  $s$ ) de um plano  $\alpha$  não são paralelas, então elas ( $r$  e  $s$ ) não são, simultaneamente, perpendiculares a uma terceira reta ( $t$ ) desse plano.

Banco de Imagens/Arquivo da editora

## Capítulo 2 – Funções

Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Um pouco da história das funções	Conhecimentos numéricos: Relações de dependência entre grandezas	C4	H15
Explorando intuitivamente a noção de função	Conhecimentos numéricos: Relações de dependência entre grandezas	C4	H15
A noção de função por meio de conjuntos	Conhecimentos numéricos: Relações de dependência entre grandezas	C4	H15
Domínio, contradomínio e conjunto imagem	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos, Desigualdades, Relações de dependência entre grandezas	C1/C4	H1/H3/H15
Estudo do domínio de uma função real	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos, Desigualdades, Relações de dependência entre grandezas	C1/C4	H1/H3/H15
Coordenadas cartesianas	Conhecimentos algébricos/geométricos: Plano cartesiano	C5	H21
Gráfico de uma função	Conhecimentos algébricos: Gráficos e funções	C5	H20
Função crescente e função decrescente: analisando gráficos	Conhecimentos algébricos: Gráficos e funções	C5	H20/H21/H22
Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva	–	–	–
Função e sequências	Conhecimentos numéricos: Sequências e progressões/Conhecimentos algébricos: Gráficos e funções	C1/C5	H2/H3/H21/H22/H23

Associar dois eventos distintos em uma relação de causa e efeito é a base de todas as ciências. Todo ser vivo, intuitivamente, utiliza-se o tempo todo das funções para tomar suas decisões. Em Matemática, as funções ocupam papel central e estruturador.

Uma maneira de começar a abordar o tema é brincar com a ideia de “máquina”. Sem avisar aos alunos do que se trata, o professor pensa em alguma função simples, por exemplo  $f(x) = 3x$ , pede a algum aluno que diga um número, faz a “conta de cabeça” e fala o resultado para os alunos. O processo se repete até que os alunos descubram qual é a regra de formação, qual é a lei usada para associar os números.

Inicialmente é natural que os alunos digam números aleatórios e não consigam perceber o padrão das respostas. O professor pode mostrar as vantagens de, em vez de chutar números sem critério, investigar o que acontece quando se escolhe uma variação controlada, seguindo a ordem dos números naturais, por exemplo.

Conforme os alunos forem compreendendo a brincadeira, as funções podem ir se sofisticando aos poucos; por exemplo,  $f(x) = 5x$ ,  $f(x) = -2x$ ,  $f(x) = x + 2$ ,  $f(x) = 3x + 2$ ,  $f(x) = x^2$ , etc. Quando a brincadeira começar a perder a graça, será hora de formalizar os conceitos envolvidos.

Após esta primeira exploração do tema, realizada de forma interativa, propõe-se iniciar o estudo do capítulo, abordando o tópico **Um pouco da história das funções**, contendo textos muito interessantes sobre o desenvolvimento desse

conceito, tais como retratar os principais personagens inseridos nesse contexto.

Os dois primeiros tópicos de conteúdo e os exercícios de 1 a 10 ajudarão os alunos a compreender o que são grandezas variáveis, o que são variáveis independentes e dependentes, a relação entre elas e como representá-las por uma fórmula matemática. O exercício 2 retoma conceitos fundamentais da geometria.

Uma fonte comum de confusão é a nomenclatura das funções nas fórmulas matemáticas; por exemplo, qual é a diferença de escrever  $f(x) = 2x$  e  $y = 2x$ ? É importante deixar claro que as letras utilizadas são arbitrárias e podemos utilizar as que quisermos. Em geral, utilizam-se as letras  $x$  e  $y$ , mas podemos utilizar letras que nos ajudem a lembrar do que se trata a função. Por exemplo, se quisermos representar o perímetro em função do lado, é natural que utilizemos  $P(\ell) = 4\ell$ , já que  $P$  é a inicial da palavra “perímetro” e  $\ell$  é a inicial de “lado”. Mas nada nos impediria de utilizar  $f(x) = 4x$  para representar exatamente a mesma situação. E por que, nesta última equação, o  $x$  aparece dos dois lados? Não poderíamos utilizar simplesmente  $f = 4x$  ou  $y = 4x$ ? Sim, em muitas situações utilizaremos essa nomenclatura, mas a notação  $f(x) = 4x$  tem uma vantagem importante: ela ressalta quem é a variável da função. Imagine se nos fosse apresentada a função  $y = abc$ . Apenas com essa informação é impossível determinar qual é a variável inde-

pendente da função  $y$ . Agora, se nos for apresentada a função  $y(a) = abc$ , já sabemos que  $a$  é a variável e  $b$  e  $c$  são coeficientes constantes.

Depois de formalizar a noção intuitiva e apresentar as primeiras características da linguagem, as próximas quatro seções ajudarão os alunos a construir, a partir da linguagem dos conjuntos, uma base para o estudo das funções.

A função é um tipo especial de correspondência entre dois conjuntos. Quando conseguimos uma lei que associa cada um dos elementos de um conjunto (que chamamos domínio) a um único elemento de outro conjunto (que chamamos contradomínio), temos uma função.

A seguir, apresentamos uma atividade sobre domínio:

Observe as funções:

a)  $f: A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = x + 2$

b)  $g: A \rightarrow B$  definida por  $g(x) = x - 2$

c)  $h: A \rightarrow B$  definida por  $h(x) = 2x$

d)  $j: A \rightarrow B$  definida por  $j(x) = \frac{x}{2}$

Essas funções estão bem definidas se  $A = B = \mathbb{N}$ ? E se  $A = B = \mathbb{R}$ ?

#### Resolução:

Esse exercício visa mostrar que as operações de subtração e divisão nem sempre estão definidas para o conjunto dos números naturais, reforçando a necessidade histórica do surgimento dos outros conjuntos numéricos, em especial o conjunto dos números reais, estudado no Capítulo 1. Nos itens **a** e **c**, não faz diferença se a função está definida de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{N}$  ou de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Já nos itens **b** e **d** as funções não estão bem definidas de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{N}$ , pois, por exemplo,  $g(0) = 0 - 2 = -2 \notin \mathbb{N}$  e  $j(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ .

No estudo do domínio de uma função real é importante destacar que, caso não se diga nada sobre o domínio da função, existem duas possibilidades de restrições a ele: denominador igual a zero e raiz de índice par de um número negativo.

Caso a função apresente a variável no denominador é preciso garantir que esse nunca seja igual a zero. Não é a variável que não pode ser zero, é o denominador. Quando  $f(x) = \frac{1}{x}$  basta que  $x \neq 0$ . Caso a função seja um pouco mais complexa, por exemplo,  $f(x) = \frac{1}{x+6}$ , é preciso garantir que  $x + 6 \neq 0$ , ou seja,  $x \neq -6$ .

A mesma coisa acontece quando a variável se encontra dentro de uma raiz de índice par ( $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt[4]{x-5}$ ,  $\sqrt[6]{2x+1}$ , ...). Não basta ter  $x \geq 0$ , o radicando inteiro tem que ser maior ou igual a zero; é preciso garantir que  $x - 5 \geq 0$  e que  $2x + 1 \geq 0$ , ou seja,  $x \geq 5$  e  $x \geq \frac{-1}{2}$ .

Antes de entrar nos estudos dos gráficos das funções, é preciso ter certeza de que os alunos já tenham familiaridade com o sistema de coordenadas cartesianas. Caso não tenham, existem vários jogos que podem ajudar. O principal

e mais simples é o jogo de batalha-naval, que pode ser improvisado com papel quadriculado. Jogos de tabuleiro, como o xadrez, também podem ser utilizados para mostrar ao aluno como funciona o posicionamento baseado em dois eixos de referência.

Os exercícios 20 a 22 são simples, mas exigem muita atenção. É importante que os alunos adquiram confiança e clareza ao lidar com os sistemas de coordenadas para prosseguir nos estudos das funções. Se sentir necessidade, amplie os exercícios, criando outros pontos. Uma proposta de atividade em duplas é um aluno escolher as coordenadas dos pontos e o outro encontrá-los no gráfico. Ou, de maneira complementar, um aluno desenha os pontos no gráfico, enquanto o outro encontra as coordenadas.

Os tópicos Distância entre dois pontos e Equação de uma circunferência apresentam dois conceitos simples da geometria que podem ser abordados de forma analítica. Esse assunto será tratado com maior riqueza de detalhes no Volume 3, mas sua apresentação neste ponto é útil para estabelecer conexões entre os conteúdos e ampliar a percepção dos alunos.

O estudo da dupla gráfico-equação de uma função nos fornece praticamente toda a informação que precisamos saber sobre a função. Da mesma forma que nos diagramas do tópico **A noção de função por meio de conjuntos** podíamos determinar se a correspondência entre os conjuntos era uma função, poderemos fazer essa análise partindo do gráfico. A ideia de cada elemento do domínio ter apenas uma imagem fica fácil de verificar. Basta traçar retas paralelas ao eixo  $y$ . Se existir alguma dessas retas que “cruze” (intersecte) mais de uma vez o gráfico, ele não representa uma função.

Na abordagem da Construção de gráficos de funções, alguns detalhes são fundamentais. O primeiro deles é o tamanho da tabela e a quantidade de pontos necessários. No exemplo **a**, o domínio da função tem apenas três números, ou seja, ao encontrar os três pares ordenados, determinamos a função. No exemplo **b** é simplesmente impossível encontrar todos os pares ordenados que compõem a função, pois o domínio é o conjunto dos números reais, que é infinito. Em geral, costuma-se escolher alguns pontos em torno do eixo  $y$ . Mas é importante ficar claro que essa escolha é arbitrária. Nada nos impede de escolher os valores 9, 81, 729, 6561 para fazer o gráfico, que seria uma escolha absurda para a função  $f(x) = 2x + 1$ , mas uma escolha natural para a função  $f(x) = \log_9 x$ . Essa questão será bastante trabalhada e ficará mais clara nos capítulos seguintes.

Quando estão fazendo gráficos, os alunos tendem a ligar os pontos, mas isso só pode ser feito caso o domínio da função permita. Se o domínio é o conjunto dos números naturais, não faz sentido que ao valor 1,5 seja associado a algum outro valor, pois 1,5 não é um elemento de  $\mathbb{N}$ . Então, na reta paralela ao eixo  $y$  que passa por  $x = 1,5$ , não pode haver nenhum ponto marcado.



Em qualquer exercício que envolva a construção de gráficos, grande atenção deve ser dada às escalas, pois pode haver um descaso, gerando espaçamentos variados entre os números. É importante que os alunos percebam que os eixos coordenados são duas retas numeradas e que é preciso manter sempre a regularidade entre as distâncias. O erro que pode surgir pelo excesso de preciosismo é o aluno acreditar que os dois eixos devem ter sempre a mesma escala (escala 1 : 1). Acontece que, na grande maioria dos casos, o gráfico fica mais “bonito” e compreensível quando se escolhe escalas diferentes. Os exemplos do começo do capítulo deixam isso bem claro. No exemplo do preço do combustível é até possível manter os dois eixos com a mesma escala. Mas, no exemplo do carro no piloto automático, se for usada a mesma escala, o desenho do gráfico será uma linha quase sobreposta ao eixo  $y$ , que mais confundirá do que esclarecerá como se comporta a função.

Por último, quando o domínio for o conjunto dos números reais, o desenho do gráfico tem que ir até o limite dos eixos. Se imaginarmos que os eixos formam uma tela, o gráfico tem que ir até as bordas dessa tela. Se não for, significa que o domínio da função também só vai até aquele ponto. Essa questão fica clara nos exercícios 31 e 32.

O estudo do comportamento das funções, que é feito no tópico **Função crescente e função decrescente: analisando gráficos**, é fundamental para vários desdobramentos. A função representada pela lei  $f(x) = 2x + 1$  vale 1 quando a variável  $x$  vale 0. O valor dela muda conforme  $x$  vai variando. Se  $x$  for igual a 5, a função passa a valer 11. Determinar onde a função é crescente significa encontrar os intervalos do domínio onde, conforme o valor de  $x$  cresce, o valor de  $y$  também cresce. Saber encontrar os zeros e os pontos de máximo e de mínimo das funções facilitará bastante na resolução de problemas que envolvam funções, como no exercício 36.

Um complemento importante para o estudo do comportamento das funções é o estudo das taxas de variação. A ideia é muito simples: quanto a função muda se aumentarmos um tanto o valor de  $x$ ?

O tópico **Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva** formaliza conceitos fundamentais, vistos de forma intuitiva no começo do capítulo. Cabe ao professor escolher qual nível de profundidade trabalhará com sua turma. De qualquer forma, os exercícios 37 a 39 são simples e podem ajudar os alunos a sedimentar o que foi aprendido.

Durante o estudo das funções, principalmente no estudo das funções afins, é comum que alguns alunos procurem outras estratégias para chegar aos resultados. Frases como “eu resolvi por lógica” ou “eu prefiro regra de três” são comuns. Não há problema nenhum nisso, exceto quando serve de desculpa para não aprender as novas ferramentas que estão sendo oferecidas.

O último tópico do capítulo antecipa o estudo das sequências, que será desenvolvido no Capítulo 7. Muitos dos problemas que podem ser resolvidos com funções afins

também podem ser resolvidos com as ferramentas das progressões aritméticas. O mesmo acontece em relação às funções exponenciais e logarítmicas e as progressões geométricas. É importante que os alunos percebam que as ferramentas não são excludentes. Pelo contrário, dominar mais de uma ferramenta é fundamental para poder escolher qual é a melhor para cada situação.

A seção **Pensando no Enem** apresenta dois exercícios que ajudam a desenvolver a interpretação de texto e a interpretação de dados contidos em tabelas, habilidades tão importantes para o aluno.

A seção **Outros contextos** apresenta um assunto relacionado à saúde e propõe atividades que exemplificam como as ferramentas matemáticas ajudam a compreender um assunto e a tomar decisões. É um momento de interdisciplinaridade com Biologia.

A seção **Vestibulares de Norte a Sul** objetiva trazer para os alunos amostras de exercícios dos vestibulares de todo o Brasil. É importante que eles testem o conhecimento adquirido no capítulo com os mais variados tipos de exercícios, e nesta seção apresentamos exercícios relevantes para esse fim.

## Atividades complementares à Unidade 1

A seguir apresentamos duas atividades de exploração e investigação que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos. Esse tipo de atividade deve ser feito em equipe, geralmente de 2 a 4 alunos. Por falta de hábito, os alunos em geral não gostam de explorar e investigar, desistem logo ou não se interessam, por demandarem um tempo maior na resolução, como na atividade 2, ou exigir concentração, como na atividade 1. Dessa forma, é importante que o professor esteja presente atendendo às equipes, validando ideias ou ajudando para que elas apareçam. Caso a maioria das equipes apresente dificuldade em algum ponto, é adequado ir à lousa e dar uma dica de resolução.

### 1. Dessas 10 afirmações:

- I. A afirmação II é falsa
- II. A afirmação III é falsa.
- III. A afirmação IV é falsa.
- :
- IX. A afirmação X é falsa.
- X. A afirmação I é falsa.

Investigue e descubra: Quantas afirmações são verdadeiras? E quantas são falsas?

### Resolução:

Suponha que a afirmação I seja verdadeira; então a II é falsa. Mas, então, a III é verdadeira, e assim por diante. Suponha agora que I seja falsa; então a II é verdadeira. Mas, então, a III é falsa, e assim por diante. Portanto, são 5 verdadeiras e 5 falsas, mas não sabemos quais são verdadeiras e quais são falsas.

2. Seja  $S_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ . Investigue e descubra para que tipos de números naturais  $n$  pode-se efetuar uma



partição em  $S_n$ , em dois subconjuntos, de modo que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma. Por exemplo,  $S_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  pode ser separado em  $\{1, 6, 7\}$  e  $\{2, 3, 4, 5\}$ , pois em ambos a soma dos elementos é 14.

**Resolução:**

$S_1 = \{1\}$  e  $S_2 = \{1, 2\} \rightarrow$  não é possível

$S_3 = \{1, 2, 3\} \rightarrow$  é possível:  $\{1, 2\}$  e  $\{3\}$

$S_4 = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow$  é possível:  $\{1, 4\}$  e  $\{2, 3\}$

$S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow$  não é possível

$S_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$  não é possível

$S_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow$  é possível:  $\{1, 6, 7\}$  e  $\{2, 3, 4, 5\}$

$S_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow$  é possível:  $\{1, 2, 4, 5, 6\}$  e  $\{3, 7, 8\}$

E assim por diante.

O aluno deve perceber que quando o índice do  $S$  é  $4n$  ou  $4n - 1$  para  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , ou seja,  $S_{32}, S_{41}, S_{71}, S_{81}, S_{111}, S_{121}, S_{151}, S_{161}$ , etc. é possível essa partição.

A atividade 3 deve ser desenvolvida em equipe (2, 3 ou 4 alunos); o objetivo dela é levar o aluno a explorar, inferir, conjecturar e provar. Nessa atividade, a equipe deverá explorar uma série de exemplos, procurando um padrão que possa ser inferido (concluído, deduzido). Em seguida, deverá conjecturar uma regra para aquele padrão e tentar provar que a conjectura é correta. Uma conjectura demonstrada passa a ser um teorema.

3. Efetue cada operação abaixo:

- $3 + 5$
- $9 + 23$
- $5 + 7$
- $101 + 201$
- $1 + 9$
- $25 + 69$
- $13 + 13$
- $9 + 11$

- a) Note que só foram usados números ímpares nas operações acima. E sobre os resultados obtidos? Há algum padrão que possa ser percebido em todos esses resultados?
- b) Conjecture uma regra para esse padrão (uma hipótese sobre o padrão observado). Algo do tipo: "sempre que ..." ou "toda ...".
- c) Lembrando que qualquer número ímpar  $p$  sempre pode ser escrito na forma  $p = 2n + 1$ , em que  $n$  é natural, tente provar a conjectura acima.

**Resolução:**

$3 + 5 = 8$	$9 + 23 = 32$
$5 + 7 = 12$	$101 + 201 = 302$
$1 + 9 = 10$	$25 + 69 = 94$
$13 + 13 = 26$	$9 + 11 = 20$

- a) Todos os resultados são números pares.
- b) Sempre que se soma dois números ímpares, o resultado é par ou toda soma de dois números ímpares resulta em um número par.
- c) Se  $p$  e  $q$  são ímpares, então podemos escrever  $p = 2n + 1$  e  $q = 2m + 1$ , em que  $n$  e  $m$  podem assumir qualquer valor natural  $0, 1, 2, 3, \dots$

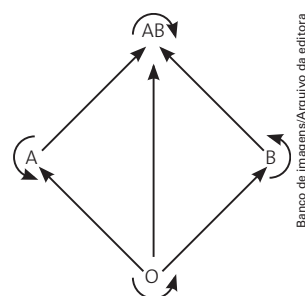
Assim,  $p + q = 2n + 1 + 2m + 1 = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1) = 2k$ , pois a soma de 3 números naturais ( $n, m$  e  $1$ ) é ainda um natural  $k$ . Como  $p + q$  está representado por  $2k$ ,  $k$  assumindo valores  $0, 1, 2, 3, \dots$ , concluímos que  $p + q$  é um número par, como queríamos demonstrar.

A atividade a seguir deve ser desenvolvida em equipe e relaciona conteúdos de Matemática e Biologia. Ela pode ser proposta como um miniprojeto interdisciplinar.

4. No início do século XX o cientista austríaco Karl Landsteiner, com amostras de sangue de diversas pessoas, isolou as hemácias (glóbulos vermelhos) e fez com elas diversas combinações envolvendo o plasma. Verificou com isso a aglutinação dos glóbulos em alguns desses casos e, com base nesses resultados, classificou os seres humanos em grupos sanguíneos e criou o sistema ABO.

Tipo sanguíneo	Aglutinogênio (na membrana das hemácias)	Aglutinina (no plasma das hemácias)
A	A	Anti-B
B	B	Anti-A
AB	AB	Ausência
O	Ausência	Anti-A e Anti-B

Essas informações são muito importantes, pois permitem saber quais tipos sanguíneos podem ser doados ou recebidos por um paciente que necessite de transfusão de sangue. Pessoas do grupo A têm aglutinogênio A, e pessoas do grupo O não possuem aglutinogênio. Ter a aglutinina apenas anti-B, por exemplo, significa que o paciente não pode receber sangue do tipo B, mas pode receber dos tipos A e O. Abaixo temos um esquema que fornece a informação de quem um indivíduo pode receber sangue.



Parte I: Com base no texto e nos seus conhecimentos, responda o que se pede:

- a) Um indivíduo que tem sangue do tipo A pode receber sangue de que tipos? E um indivíduo que tem sangue do tipo O?

- b) Um indivíduo com sangue do tipo B pode doar sangue para quais grupos sanguíneos?
- c) Construa um diagrama de Venn utilizando as aglutininas e o tipo sanguíneo. Se necessário, faça uma tabela para facilitar a sua visualização.
- d) Existe um tipo sanguíneo que é conhecido como receptor universal, ou seja, pode receber qualquer um dos tipos sanguíneos. Qual o tipo de sangue do receptor universal? E qual o tipo do doador universal?

Parte II: Faça uma pesquisa em sua sala de aula e preencha a tabela abaixo:

Tipo sanguíneo	Quantidade de alunos
A	
B	
AB	
O	
Não sabe	

- e) Qual o tipo sanguíneo mais frequente na sua sala?
- f) Faça um gráfico de setores com os tipos sanguíneos da classe.
- g) Determine o número de colegas para quem cada integrante da equipe poderia doar sangue.
- h) Determine o número de colegas de quem cada integrante da equipe poderia receber sangue.
- i) Pesquise dois casos em que uma pessoa não pode doar sangue?

Parte III: Resolva a situação-problema a seguir:

- j) André, Bia, Carlos, Denise e Eduardo são amigos e estavam discutindo a respeito de quem poderia doar sangue para quem. Bia é receptora universal. Carlos não possui aglutinogênio. Denise só pode doar sangue para Carlos. Eduardo tem sangue tipo A. André pode doar sangue para apenas uma pessoa e receber apenas de Carlos e Denise. Qual é o tipo sanguíneo de André?

O ato de doar sangue é uma prova de amor e solidariedade. Entre diversos requisitos, para doar sangue é necessário ter mais de 18 anos e pesar mais de 50 quilos.

#### Resolução:

Os alunos podem ser solicitados a montar uma tabela com base no diagrama que indica as relações de doação e recebimento de sangue, como a seguir:

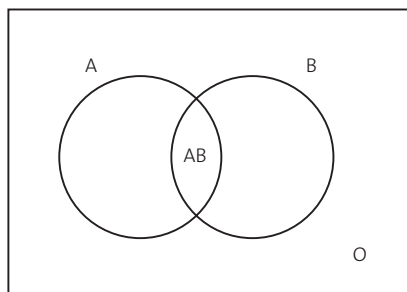
Tipo sanguíneo	Para quem pode doar	De quem pode receber
A	A e AB	A e O
B	B e AB	B e O
AB	AB	todos
O	todos	O

É importante comentar com os alunos que a *tipagem sanguínea* estará completa com o fator Rh, que pode ser positivo ou negativo, porém não será discutido nesse trabalho.

a) A e O. Somente O.

b) B e AB.

c) Aglutinina



d) AB. O.

e); f); g); h) e i): Respostas pessoais.

j) Bia, receptora universal → AB

Carlos, sem aglutinogênio → O

Denise só pode receber sangue de Carlos → O

Eduardo → A

André pode doar sangue para apenas uma pessoa e receber de Carlos e Denise; então seu tipo sanguíneo é B, pois se seu sangue fosse O ou A ele poderia doar para 3 pessoas. Se seu sangue fosse A poderia doar para 2 pessoas. E se seu sangue fosse AB, ele poderia receber de Bia. Logo, seu sangue é do tipo B.

## Unidade 2 – Função afim e função quadrática

Nesta Unidade abordaremos a função afim, a função modular e a função quadrática. A função modular é apresentada como uma função afim por partes, o que acreditamos facilitar o entendimento desse conteúdo.

## Capítulo 3 – Função afim e função modular

Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Situações iniciais	Conhecimentos algébricos: Funções algébricas do 1º grau	C5	H19/H20/H21/H22/H23
Definição de função afim	Conhecimentos algébricos: Funções algébricas do 1º grau		
Valor de uma função afim	Conhecimentos algébricos: Funções algébricas do 1º grau		
Taxa de variação média da função afim $f(x) = ax + b$	–	–	–
Determinação de uma função afim	Conhecimentos algébricos: Funções algébricas do 1º grau	C5	H19/H20/H21/H23
Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$	Conhecimentos algébricos: Funções algébricas do 1º grau	C5/C6	H19/H20/H21/H24/H24/H25
Conexão entre função afim e Geometria analítica	Conhecimentos algébricos/geométricos: Plano cartesiano, Retas	C5	H22/H23
Zero da função afim	Conhecimentos algébricos/geométricos: Plano cartesiano, Retas	C5	H20/H22
Estudo do sinal da função afim e de inequações do 1º grau	Conhecimentos algébricos/geométricos: Plano cartesiano, Retas	C5	H19/H20/H21/H22
Outras conexões	Conhecimentos numéricos: Razões e proporções/Conhecimentos algébricos: Relações de dependência entre grandezas	C4/C3	H2/H15/H16/H17/H18/H11/H21
Funções poligonais ou afins por partes	–	–	–

Neste e nos próximos três capítulos, estudaremos cinco tipos especiais de funções, evoluindo em complexidade. Esse estudo forma um conjunto de conhecimentos a respeito das características e da utilização das funções. Espera-se que os alunos compreendam e sejam capazes de reconhecer quando e qual tipo de função melhor se adequa a cada situação. O primeiro tipo de função que estudaremos é a função afim.

As funções afins são funções polinomiais de grau um, ou seja, a variável se encontra em um polinômio, sendo que o maior expoente encontrado é o um. Por isso, elas também são conhecidas como funções polinomiais de primeiro grau. Na prática, toda função afim pode ser escrita na forma reduzida  $f(x) = ax + b$ , um binômio, em que  $a$  e  $b$  são números reais, conhecidos como coeficientes.

As funções afins modelam situações em que as variáveis se associam de forma linear: variações constantes em  $x$  causam variações constantes em  $y$ . Na situação inicial do capítulo, se o representante conseguir aumentar suas vendas em R\$ 1000,00, seu salário aumentará R\$ 60,00. Não importa se anteriormen-

te ele tinha vendido R\$ 1000,00 e passou a vender R\$ 2 000,00 ou se ele tinha vendido R\$ 50 000,00 e passou a vender R\$ 51 000,00, a variação final no salário é a mesma. Esse acréscimo é a taxa de variação. Nas funções afins essa taxa é sempre constante e seu valor é o valor do coeficiente  $a$ .

Os alunos poderiam analisar alguns gráficos para perceber a relação entre a taxa de variação e o coeficiente  $a$ , por exemplo, os gráficos das funções  $f(x) = x$ ,  $g(x) = 2x$ ,  $h(x) = 3x$ ,  $i(x) = 0,5x$ ,  $j(x) = -x$ ,  $k(x) = -2x$ .

Todas as funções afins que não são funções lineares apresentam uma parte fixa e outra variável. Em um táxi, por exemplo, existe a bandeirada, que é um valor fixo que se paga independente do quanto se anda, e um valor que varia de acordo com a quilometragem percorrida. Esse valor fixo é o valor inicial, valor da função quando  $x = 0$ . Ele aparece na função como o coeficiente  $b$ .

Também seria interessante que os alunos analisassem alguns gráficos, por exemplo,  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x + 2$ ,  $h(x) = x + 3$ ,  $i(x) = x - 2$ ,  $j(x) = x - 4$ , etc., para eles perceberem que o coeficiente  $b$  determina onde o gráfico intersecta o eixo  $y$ .

Como na brincadeira da “máquina”, é possível escrever a lei da função a partir de valores conhecidos. Nas funções afins isso é bem simples, pois, como o gráfico é uma reta, bastam dois pontos. Esse é o passo que completa o conhecimento sobre o funcionamento dos coeficientes. Os exercícios 3, 4 e 8 contribuem para isso. Os exercícios 6 e 7 ampliam o conhecimento propondo comparações entre funções diferentes. No tópico **Determinação de uma função afim** são apresentadas duas técnicas simples e eficientes para determinar qualquer função afim a partir de apenas dois pontos. Os exercícios 9 até 12 são indispensáveis.

Em o **Gráfico da função afim**  $f(x) = ax + b$ , o aluno terá a oportunidade de institucionalizar os conceitos aprendidos sobre funções afins. Além da taxa de variação (coeficiente angular da reta) e do valor inicial (coeficiente linear da reta), é importante verificar a compreensão que eles têm da utilização dos termos: reta ascendente, reta descendente, origem, identidade, bissetriz e constante.

Uma função ser crescente, decrescente ou constante depende exclusivamente do coeficiente  $a$ . Pode ser uma boa ideia reforçar a utilização da linguagem matemática para justificar a argumentação. Podemos dizer que a função  $f(x) = 2x + 1$  é crescente, pois se  $a > 0$ , a função é crescente; se  $a = 0$ , a função é constante e, se  $a < 0$ , a função é decrescente. Como  $a = 2 > 0$ , a função é crescente.

O conceito de bissetriz é emprestado da geometria e será importante no estudo de funções inversas, como a relação existente entre as funções exponenciais e as logarítmicas.

Os **exercícios resolvidos** são uma ótima oportunidade de mostrar para os alunos como a argumentação na matemática funciona e é simples. É bastante comum os alunos argumentarem que, ao invés de usar o aparato das funções para encontrar a solução de um problema, usaram a lógica. Essa lógica costuma ser o conhecimento adquirido no estudo das proporções, principalmente a famosa regra de três. Esse desvio no caminho acaba dificultando o aprendizado das funções, e o aluno só perceberá que “plantou” dificuldades quando essa lógica não funcionar mais no estudo das funções quadráticas. Por isso se justifica um especial destaque para o exercício resolvido 2, que, além de relacionar praticamente todos os conceitos estudados até o momento, ainda apresenta uma aplicação de fácil contextualização, que abrange um tema que pode ser tratado de maneira interdisciplinar.

Na seção **Matemática e tecnologia** os alunos aprenderão como construir um gráfico de uma função com o auxílio do computador. O programa utilizado é a planilha eletrônica do *software* livre LibreOffice. A atividade também pode ser adaptada para qualquer outro *software* que ofereça um aplicativo de planilha.

Construir gráficos à mão, utilizando lápis e régua, sempre será muito importante, mas, principalmente para aqueles que têm dificuldades para desenhar, a facilidade do

computador pode proporcionar uma visualização do comportamento das funções que os alunos não conseguiram com lápis e papel.

É possível, com algumas adaptações, refazer praticamente todas as atividades do capítulo com o auxílio do computador. Além de importante por si só, esse aprendizado com as funções afins facilitará aos alunos usar o auxílio eletrônico no estudo de funções mais complexas.

No tópico **Conexão entre função afim e Geometria analítica** é apresentado um elo importante com a Geometria analítica. Embora esse assunto só seja objeto de estudo detalhado no Volume 3, é importante mostrar para os alunos como o mesmo assunto pode ser abordado de diversas maneiras. Além do mais, esse tópico e seus dois exercícios ajudam a fixar o conhecimento.

Em **Zero da função afim e Estudo do sinal da função afim e de inequações do 1º grau** são trabalhados um dos aspectos práticos de maior importância no estudo das funções: o zero da função e o estudo dos sinais.

A função afim, por ter expoente ímpar, necessariamente terá valores positivos e negativos. A função crescente  $f(x) = x + 2$  começa no  $-\infty$  e vai até o  $+\infty$ . A função  $f(x) = -3x + 5$ , por ser decrescente ( $a < 0$ ), faz o caminho contrário. Ambas, para passar de valores positivos para negativos (ou vice-versa) têm que passar pelo zero da função.

Uma confusão muito comum deve ser evitada: o zero da função não é quando  $x = 0$ . Na verdade isso é o valor inicial; o zero da função é o valor de  $x$  que faz com que  $f(x)$  se torne nula, ou seja,  $f(x) = 0$ .

A situação apresentada no começo do tópico **Estudo do sinal da função afim e de inequações do 1º grau** é bastante próxima da realidade e motiva o estudo dos sistemas de inequações. Este é um momento importante, em que podem ressurgir dificuldades e aparecer os problemas conceituais dos alunos. O método de resolução de uma inequação é muito parecido com o método de resolução de uma equação, mas não é igual. A solução de uma inequação é um conjunto contínuo de valores. Quando as inequações aparecem ligadas, em um sistema, o conjunto solução desse sistema é formado apenas pelos valores que solucionam todas as inequações simultaneamente. Os valores que solucionam apenas uma não servem como resposta.

Os exercícios 36, 38, 39, 40 e 41 apresentam situações em que a Matemática auxilia as escolhas. Essas situações são típicas de um ramo importante da Matemática aplicada chamado pesquisa operacional. Os demais são para fixação dos conhecimentos estudados.

Em **Outras conexões** são ressaltadas as relações entre o estudo das funções afins com outras áreas da Matemática e da Física. Essa abordagem ajuda a fixar e ampliar o conhecimento.

Antes de começar a trabalhar com funções modulares, verifique se a ideia de módulo está clara para seus alunos.

O módulo, também conhecido como valor absoluto, pode ser entendido como a distância da abscissa do ponto até a origem do sistema. E, por ser uma distância, o módulo de um número é sempre positivo. Assim, o módulo de 5 é 5, pois ele está a cinco unidades de distância do zero, que é a origem da reta numerada. O módulo de  $-5$  também é 5, pois, apesar de estar do lado esquerdo (negativo) da reta numerada, ele também está a cinco unidades de distância do zero. Escrevemos esses dois exemplos assim  $|5| = 5$  e  $|-5| = 5$ .

É fácil perceber que o módulo de um número é o próprio número, quando ele é positivo ou zero, ou é o oposto dele, quando ele é negativo. De uma forma geral, o módulo de qualquer  $x \in \mathbb{R}$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \text{se } x \geq 0, \text{ então } |x| = x \\ \text{se } x < 0, \text{ então } |x| = -x \end{cases}$$

Trocar o sinal é a maior fonte de erros e confusões. Na segunda linha, não é intuitivo que  $-x$  seja um número positivo. Como é positivo se tem um “menos” na frente? É preciso lembrar que esse sinal de menos só aparece na frente do número quando ele é negativo. Assim, o oposto desse número negativo é o número positivo que estamos buscando.

A complicação aumenta quando, ao invés do módulo de um número, estamos procurando o módulo de uma expressão. Por exemplo,  $|3 - \pi|$  ou  $|x + 2|$ .

No primeiro exemplo, como  $\pi > 3$ , então, mesmo que não saibamos o valor exato, sabemos que  $3 - \pi < 0$ , portanto temos que trocar o sinal da expressão dentro das barras:  $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = -3 + \pi > 0$ .

No segundo exemplo,  $x$  pode ter qualquer valor. Então certamente ele pode ter valores que façam a expressão

$x + 2$  ser positiva e valores que a façam ser negativa. Assim, como nas funções afins, é preciso encontrar o valor que faz a expressão se anular e estudar seus sinais. Então,  $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$  e como  $f(x) = x + 2$  é uma função crescente, temos:

$$\begin{cases} \text{se } x \geq -2, \text{ então } |x + 2| = x + 2 \\ \text{se } x < -2, \text{ então } |x + 2| = -(x + 2) = -x - 2 \end{cases}$$

Essa é a ideia fundamental para o estudo das funções modulares.

Os exercícios resolvidos 7 e 8 e os exercícios 52 a 56 são fundamentais para essas dúvidas aparecerem e serem resolvidas.

Em relação à construção de gráficos de funções modulares, deve ser dada uma atenção especial às translações causadas pelo acréscimo de constantes. Não vale a pena ficar buscando pontos aleatoriamente. É melhor, antes, descobrir qual é o valor que faz a expressão dentro das barras se anular e construir o gráfico a partir desse ponto. Como esse gráfico é composto de dois “pedaços” de funções afins, depois de encontrado o ponto onde o gráfico “faz bico”, basta encontrar mais um ponto de cada lado.

Por exemplo, o zero da função  $f(x) = |x - 3|$  é  $x = 3$ . Essa função pode ser dividida em duas partes:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, \text{ para } x \geq 3 \\ -x + 3, \text{ para } x < 3 \end{cases}$$

Para desenhar o gráfico basta encontrar um ponto à esquerda e outro à direita do 3. Por exemplo,  $f(0)$  e  $f(5)$ .

Fazendo os exercícios 57 a 60, os alunos poderão perceber por conta própria as características desse tipo de função.

## Capítulo 4 – Função quadrática

Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Definição de função quadrática	Conhecimentos algébricos: Funções algébricas do 2º grau, Funções polinomiais	C5	H19/H20/H21/H22/H23
Situações em que aparece a função quadrática			
Valor ou imagem da função quadrática em um ponto			
Zeros da função quadrática	Conhecimentos algébricos: Funções algébricas do 2º grau/ Conhecimentos numéricos: Fatoração	C5/C1	H19/H4
Gráfico da função quadrática	Conhecimentos algébricos: Funções algébricas do 2º grau, Funções polinomiais, Equações/Conhecimentos algébricos/geométricos: Plano cartesiano	C5	H19/H20/H21/H22/H23
Determinação algébrica das intersecções da parábola com os eixos			
Vértice da parábola, imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática			



Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Estudo do sinal da função quadrática e inequações do 2º grau	Conhecimentos algébricos/geométricos: Plano cartesiano/Conhecimentos algébricos: Inequações	C5	H19/H20/H21
Conexão entre função quadrática e Física	Conhecimentos algébricos	C5	H19/H21
Conexão entre função quadrática e progressão aritmética	Conhecimentos numéricos/Conhecimentos algébricos	C1/C5	H2/H21

O ser humano tem uma tendência a buscar linearidade em tudo que observa. De fato, a grande maioria dos problemas enfrentados pelos matemáticos envolve relações lineares. E, quando não envolvem, eles tentam transformar ou adaptar o problema para que ele possa ser tratado como linear.

O estudo das funções quadráticas é o primeiro momento em que o aluno vai entrar em contato com um outro tipo de relação. É o primeiro passo para perceber que existem outras possibilidades. A taxa de variação deixa de ser constante. A função não será mais simplesmente crescente ou decrescente, será importante distinguir onde ela se comporta de cada maneira. Não será mais possível resolver os problemas “pela lógica”, usando intuitivamente as ideias de proporção e regra de três.

O exercício do perímetro do retângulo (**Definição de função quadrática**) é um bom exemplo para começar a apresentar situações que devem ser modeladas pelas funções quadráticas.

Os quatro primeiros exercícios ajudam na compreensão das definições. É muito importante que os alunos percebam que sempre existirão três coeficientes, mesmo quando os coeficientes  $b$  e  $c$  sejam nulos ou a função esteja escrita de outra forma (forma canônica, por exemplo).

Ainda no primeiro tópico aparece um texto com o qual pretende-se contextualizar historicamente o início do conhecimento humano relativo às equações do segundo grau.

Nas funções afins, a imagem não recebia muito destaque, pois ela geralmente era o próprio conjunto dos números reais. Agora, nas funções quadráticas, isso muda de figura. A imagem está intimamente ligada com o vértice, que pode ser considerado o ponto essencial da parábola. Se não houver nenhuma restrição ao domínio, o vértice sempre será o ponto de máximo ou de mínimo da função. A partir dele o gráfico apresenta um eixo de simetria. Essa simetria faz com que todos os elementos da imagem se liguem a dois elementos do domínio, de modo que a função não seja injetiva nem sobrejetiva, como mostra o exercício resolvido 1.

Os exercícios 5 a 14 apresentam aplicações simples, porém importantes, para que essa base inicial do assunto fique firme e facilite os próximos passos.

No texto A equação do 2º grau é apresentada uma possível origem da utilização de fórmulas na Matemática; pro-

vavelmente, estas eram vistas antigamente como um tipo de “receita” matemática.

O tópico **Zeros da função quadrática** apresenta a ligação entre as funções quadráticas e as equações de segundo grau. Os alunos terão dificuldade de seguir adiante no conteúdo se não dominarem as técnicas para a resolução de equações de segundo grau. Eles devem perceber que toda função quadrática pode ser associada a uma equação de segundo grau e que as soluções dessa equação são os valores de  $x$  que fazem com que a função seja nula, ou, em outras palavras, são os valores de  $x$  em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas. Também é importante que eles percebam a utilidade do discriminante ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ) e da relação dele com os zeros da função. Esse assunto ficará mais claro durante o estudo dos gráficos.

Se os alunos já dominam a resolução de equações do segundo grau, recomendamos que façam os exercícios de 15 a 21. Destaque para os exercícios 16 a 19, em que o que se pede não é a solução da equação, mas que se estude os efeitos causados por condições existentes nos coeficientes. Os exercícios resolvidos 4 e 5 ajudarão na compreensão dos problemas. O exercício resolvido 7 e o exercício 20 são importantíssimos para que os alunos compreendam o caminho inverso, de encontrar a lei da função a partir de pontos dados.

Se os alunos não estão seguros na resolução de equações, esse é um bom momento para retomar o assunto e eliminar dificuldades no aprendizado. O exercício 22 apresenta a solução de equações de segundo grau incompletas. Os exercícios 23 a 27 propõem a resolução por soma e produto. Esses exercícios também podem ser resolvidos pela fórmula resolvente (também conhecida como fórmula de Bhaskara, embora provavelmente ela não tenha sido desenvolvida por Bhaskara).

A vantagem de retomar a fórmula resolvente é que ela será muito útil para o estudo e a construção dos gráficos. É com uma parte dela que se encontra o  $x$  do vértice. Compare as duas fórmulas:

Fórmula resolvente	Fórmula para encontrar o $x$ do vértice ( $x_v$ )
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_v = \frac{-b}{2a}$

Depois de descoberta a primeira coordenada do vértice, existem duas opções para se encontrar a segunda. Pode-se



simplesmente substituir o valor encontrado na equação da função ou pode-se usar a fórmula  $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ .

Antes de abordar o tópico **Gráfico da função quadrática**, seria interessante pedir aos alunos que construíssem o gráfico da função  $f(x) = x^2$ .

É impossível prever o que eles perceberão, quais serão as dificuldades e a quais conclusões chegarão. Mas, de uma forma geral, é importante se atentar aos seguintes pontos:

- O gráfico não é uma reta nem vários segmentos de reta ligando os pontos. Toda vez que o domínio for o conjunto dos números reais é necessário conectar os pontos, pois o gráfico é contínuo. Mas entre um ponto e outro o gráfico não apresenta comportamento linear. É preciso ligar os pontos com uma curva suave, que não é fácil de desenhar à mão. É importante lembrar que o desenho é apenas um esboço do gráfico. Ele serve para termos uma ideia de como a função se comporta. Não é preciso, nem possível, desenhar um gráfico perfeito. Na seção **Matemática e tecnologia** apresentamos o programa GeoGebra, que auxiliará nessa tarefa.
- Se  $a > 0$ , o gráfico tem um ponto mínimo, chamado vértice, que é o ponto “mais baixo” do gráfico e representa o menor valor da função. Se a função tiver o coeficiente  $a$  negativo, ela não teria um ponto mínimo, mas sim um ponto máximo.
- Existe uma simetria a partir do vértice. O gráfico se espelha em relação ao eixo vertical que passa pelo vértice. Dois pontos que estão à mesma distância do vértice, no eixo das abscissas, possuem a mesma altura. Por exemplo, na função  $f(x) = x^2$ , temos  $f(-1) = f(1) = 1$ ,  $f(-4) = f(4) = 16$ , etc., porque 1 e  $-1$ , 4 e  $-4$ , estão à mesma distância do zero, que é o  $x$  do vértice. Assim, reconhecer essa simetria e encontrar o vértice facilita muito a construção do gráfico, pois, a cada conta que se faz, se obtém dois pontos. O exercício 28 se aplica a essa situação.

O exercício 29 contribui para a discussão da necessidade ou não de se desenhar a parábola. A discussão do item **b** retoma o estudo de conjuntos numéricos feito no Capítulo 1.

O exercício 30 ajuda o aluno a perceber a importância do estudo dos coeficientes, para variações no coeficiente  $a$ , que transforma o gráfico da função.

Essas alterações também ocorrem nos outros coeficientes. No exercício 31 podem-se observar variações no coeficiente  $c$ , que deslocam o gráfico para cima ou para baixo.

No tópico Gráfico da função definida por  $f(x) = a(x - m)^2$ , com  $a \neq 0$ , é importante que os alunos percebam que tipo de funções apresentam esse formato. No exemplo dado, a função  $g(x) = 2(x - 3)^2$  pode ser reescrita assim:

$$g(x) = 2(x - 3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18$$

Algumas questões podem ser feitas aos alunos, por exemplo: O que essa função tem em comum com a função  $f(x) = 2x^2$ ? Qual outra função faria parte dessa “família”?

Uma possibilidade de aproximação para essas questões é substituir o  $-3$  por algum outro valor, por exemplo,  $-2$ :

$$h(x) = 2(x - 2)^2 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2x^2 - 8x + 8$$

cujo gráfico é o mesmo dos anteriores, deslocado duas unidades para a esquerda. Aqui o estudo do assunto opcional, disposto no final do capítulo, Determinação dos zeros por completamento de quadrado pode auxiliar bastante.

As funções  $f(x) = a(x - m)^2 + k$  seguem a mesma lógica, com  $m$  deslocando o gráfico na horizontal e  $k$  deslocando o gráfico na vertical.

O tópico se encerra com um estudo das funções que têm os três coeficientes explicitados. O exercício 38, mais uma vez, oferece o desafio de fazer o caminho contrário, encontrar a equação a partir do gráfico. Esse exercício é importante porque faz com que os alunos articulem os conhecimentos recém-adquiridos sobre as propriedades. É um exercício de modelagem, em que é dada uma situação e é preciso aplicar as ferramentas que se tem para resolvê-la. O exercício 39 complementa o estudo conceitual.

Repare que os exercícios 32 e 35, de tópicos diferentes, perguntam quais funções possuem ponto de máximo e quais têm ponto de mínimo. Essas questões podem ser respondidas por vários caminhos diferentes, e a essa altura se espera que os alunos consigam perceber isso.

Além do vértice, outros pontos importantes são os lugares onde a parábola encontra os eixos. O eixo  $y$  é formado por pontos que têm a forma  $(0, y)$  de abscissa zero; substituindo esse valor na função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , temos  $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$ . Portanto, o ponto onde qualquer função quadrática intersecta o eixo  $y$  tem a forma  $(0, c)$ .

Para encontrar a intersecção com o eixo  $x$ , basta igualar a equação da função a zero e resolver, pois os pontos do eixo  $x$  têm o formato  $(x, 0)$ . Caso a equação de segundo grau não tenha soluções reais, então o gráfico não cruza o eixo das abscissas. Nesse caso, se  $a > 0$ , a função é inteira positiva. Se  $a < 0$ , ela é inteira negativa. Os exercícios 43 e 44 tratam dessa questão. Os exercícios 45 e 46 ajudam os alunos a relacionarem os coeficientes com o formato da função.

A parábola, identidade gráfica mais forte de uma equação do segundo grau, é abordada por meio de um texto. Os objetivos desse texto são: contextualizar historicamente sua origem como objeto matemático; apresentar como podemos obter uma parábola utilizando a geometria espacial, que será estudada com mais ênfase em algumas partes específicas dos Volumes 2 e 3.

No texto A parábola esta curva é apresentada como uma resultante da seção de um plano em uma superfície cônica de revolução. Além disso, é feita uma breve explanação sobre a vida e a obra do matemático grego Apolônio, que teve as seções cônicas (entre elas a parábola) como objetos de estudo.

Na seção **Matemática e tecnologia** o aluno aprenderá como construir gráficos usando o *software* livre GeoGebra.

Mais uma vez o computador auxilia a visualizar o que fica difícil ver em um desenho feito à mão. Fazer o desenho de uma parábola não é simples. É difícil, por exemplo, conseguir representar corretamente o que acontece com as funções nas “beiradas” do gráfico. É muito comum o gráfico terminar como uma reta. Todos os estudos dos coeficientes podem ser feitos ou refeitos com o auxílio do GeoGebra.

O exercício resolvido 13 apresenta uma situação interessante, que ajuda a explicar o porquê de as funções quadráticas apresentarem crescimento e decréscimo. É fácil visualizar mentalmente o movimento realizado por uma bola, em um chute a gol, por exemplo. Pelo senso comum, seria natural pensar que a bola tende a subir até determinada altura, após um chute, por exemplo. Tendo o momento exato do chute como o instante inicial ( $t_i = 0$  e  $h_i = 0$ ), a bola alcançará uma altura máxima para algum  $t > 0$ . Porém, conhecendo o conceito intuitivo do efeito da gravidade, sabemos que a partir de dado instante, após a bola atingir sua altura máxima, começará a perder altura até voltar à sua altura inicial ( $h_f = 0$  para um  $t_f > 0$ ). Logo, a força aplicada ao chute e a aceleração da gravidade trabalham simultaneamente, ocasionando o aumento ou a diminuição da altura da bola em determinado período de tempo. Assim, com a mesma velocidade que a bola é elevada após um chute, a partir do momento em que a força aplicada se equilibra com a força da gravidade, a bola começa a cair. É interessante abordar que a velocidade relaciona-se com a taxa de variação da função quadrática, uma vez que a velocidade média é expressa pelo espaço percorrido em determinado período de tempo.

Os exercícios 47 a 52 são exercícios de aplicação. O exercício 51 exige que se revise as técnicas para solucionar sistemas de equações de segundo grau. O exercício 55 envolve conceitos fundamentais das funções. Os exercícios 53 a 59 apresentam enunciados mais elaborados e exigem mais interpretação de texto. Todos apresentam a aplicação da Matemática a situações reais.

O tópico **Estudo do sinal da função quadrática e inequações do 2º grau** é fundamental para os estudos posteriores de Matemática. A primeira parte mostra como realizar o estudo dos sinais das funções quadráticas, analisando separadamente cada possibilidade para o discriminante. A segunda, apresenta um estudo das inequações que é equivalente a estudar o sinal da função. Nesse estudo costuma ficar evidente onde estão as dificuldades dos alunos no cálculo algébrico. Eles costumam estranhar quando encontram um intervalo como solução de uma inequação, já que a ideia de “chegar à resposta” está fortemente associada à ideia de “chegar a um número”.

Em seguida apresentamos relações importantes entre a Matemática e a Física e a própria Matemática.

A seção **Outros contextos** apresenta informações interessantes sobre um tipo de curva muito parecida com a parábola, a catenária. Além da contextualização histórica e da representação gráfica da catenária, apresenta-se em que situações é possível observar esse tipo de curva no dia a dia.

Os exercícios da seção **Pensando no Enem** são de aplicação a situações reais.

A seção **Vestibulares de Norte a Sul** apresenta exercícios de vestibulares de todas as regiões do país. Os exercícios 1 e 2 pedem aplicações conceituais. Os exercícios 8 e 9 são mais desafiadores e possuem temáticas que conversam com a Física. Os exercícios 3, 5 e 6 reforçam a capacidade de interpretar e extrair dos enunciados as informações importantes para a resolução dos problemas.

## Atividades complementares à Unidade 2

Geralmente, no primeiro contato com as chamadas funções elementares (afim, quadrática, exponencial, logarítmica, etc.) nos prendemos muito à fórmula matemática que define a lei da função. Mesmo em questões contextualizadas, com alguma situação modelada, em geral, a lei da função é fornecida no próprio enunciado. Porém, uma habilidade que devemos buscar desenvolver em nossos alunos é, dada uma situação prática (vivenciada por alguém ou por nós mesmos), eles conseguirem saber qual a função matemática que pode ser usada para modelar adequadamente aquela situação. Para isso, é preciso saber o que caracteriza cada tipo de função.

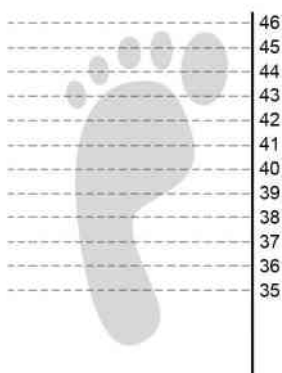
Para ilustrar, no caso da função afim, para que duas variáveis  $x$  e  $y$  se relacionem é preciso verificar que acréscimos iguais em uma das variáveis,  $x$  por exemplo, sempre produzem acréscimos iguais da outra variável,  $y$  nesse caso. Matematicamente falando, toda vez que o valor de  $x$  variar de uma quantidade  $h$ , o valor do  $y$  varia de uma mesma quantidade  $z$ .

Uma situação interessante em que podemos notar a presença de uma função afim é na relação que existe, aqui no Brasil, entre o tamanho do pé e o número do sapato que a pessoa usa. O fato de a função afim ser a função que relaciona o tamanho do pé com o número do sapato é caracterizado pelo fato de que acréscimos iguais no tamanho do pé implicam acréscimos iguais para o número do sapato. Assim, por exemplo, se um dado pé precisar aumentar  $h$  centímetros para mudar do sapato de número 37 para o de número 38, ele precisará crescer os mesmos  $h$  centímetros para mudar do sapato de número 40 para o de número 41. Veja uma sugestão de atividade a seguir.

### 1. O tamanho do seu pé, o número do seu sapato e a função afim

A figura abaixo ilustra uma “régua” utilizada por alguns vendedores em sapatarias (aqui no Brasil) para descobrir o número apropriado para os sapatos dos seus clientes.

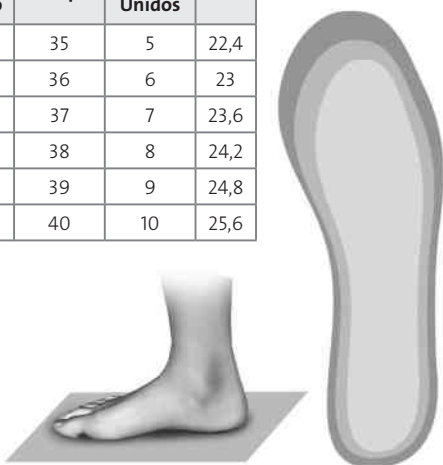
Ilustrações: Paulo Manz/Arquivo da editora



Para descobrir o tamanho apropriado para o sapato, a pessoa deve pôr o calcanhar alinhado com a linha grossa que existe na parte inferior da régua e olhar em qual das linhas tracejadas (que são igualmente espaçadas) fica a outra extremidade do seu pé e, em seguida, observar a que número essa linha corresponde na escala localizada do lado direito da figura.

- Que característica presente na régua acima assegura que a função apropriada para relacionar o comprimento do seu pé em centímetros e o número do seu sapato é a função afim?
- A tabela abaixo ilustra algumas numerações de sapatos no Reino Unido, na Europa e nos Estados Unidos.

Reino Unido	Europa	Estados Unidos	cm
3	35	5	22,4
4	36	6	23
5	37	7	23,6
6	38	8	24,2
7	39	9	24,8
8	40	10	25,6



Observando as informações da tabela acima, podemos concluir que mesmo nesses países a função afim é a função apropriada para relacionar o comprimento do pé com o número do sapato adequado para uma pessoa? Justifique.

- De acordo com as informações da tabela do item **b**, qual seria o número do sapato adequado no Reino Unido, na Europa e nos Estados Unidos para uma pessoa cujo pé mede 28 cm? E se o pé da pessoa medisse 26,6 cm?

- Consultando a régua apresentada anteriormente, aqui no Brasil, verificou-se que uma pessoa cujo pé mede 20 cm calça sapatos número 32, e uma pessoa cujo pé mede 28 cm calça sapatos número 42. Diante dessas informações, deduza que a função afim que relaciona o número  $f(x)$  do sapato de uma pessoa cujo pé mede  $x$  cm é dada por  $f(x) = \frac{5x + 28}{4}$ .

- Na sua sala de aula, realize uma pesquisa com seus colegas, completando a tabela abaixo e a partir dela deduza a função afim que relaciona o comprimento, em centímetros, do pé de um indivíduo com o número do sapato que ele calça aqui no Brasil.

Nome	Comprimento do pé (em cm)	Número do sapato

Depois de preenchida a tabela, escolha aleatoriamente os dados de dois alunos e a partir daí deduza a função afim que relaciona o comprimento do pé em centímetros com o número do sapato utilizado. Além disso verifique se as demais informações estão de acordo com a função que você determinou. Caso não estejam, sugira os motivos pelos quais esta discrepância está ocorrendo.

- Compare a fórmula obtida a partir dos dados da sua pesquisa com a fórmula  $f(x) = \frac{5x + 28}{4}$ , que deduzimos no item **d**. Caso sejam diferentes, sugira os motivos pelos quais a discrepância está ocorrendo.

#### Resolução:

- O fato de as linhas pontilhadas serem igualmente espaçadas e os números dos sapatos apresentados na régua também serem igualmente espaçados significa que acréscimos iguais no comprimento dos pés implicam acréscimos iguais nos números dos sapatos, que é a característica marcante de uma função afim.
- Sim, pois acréscimos iguais no comprimento dos pés correspondem a acréscimos iguais nos números dos sapatos, tanto no Reino Unido como na Europa e nos Estados Unidos. Na tabela proposta, cada aumento de 0,6 cm no comprimento dos pés sempre implica um aumento fixo nos números dos sapatos nas três localidades.
- Como já discutimos, a função apropriada que relaciona o comprimento  $x$  dos pés, em centímetros, com o número apropriado dos seus sapatos  $f(x)$  é a função afim. Assim existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = ax + b$ . Vamos então determinar as constantes  $a$  e  $b$  em cada uma das três localidades.

No Reino Unido, sendo  $x$  o comprimento dos pés e  $f(x)$  o correspondente número dos sapatos, temos, por exemplo:

$$x = 23,6 \text{ cm} \rightarrow f(x) = 5$$

$$x = 25,6 \text{ cm} \rightarrow f(x) = 8$$

Assim:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 5 = 23,6a + b \\ 8 = 25,6a + b \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 1,5 \text{ e } b = -30,4 \rightarrow f(x) = 1,5x - 30,4$$

Para  $x = 28$  cm o número apropriado dos sapatos é  $f(28) = 1,5 \cdot 28 - 30,4 = 11,6$ . Portanto, o número apropriado do sapato para essa pessoa é o 12 (o 11 fica pequeno). Se o pé medisse 26,6 cm, o número apropriado dos sapatos seria  $f(26,6) = 1,5 \cdot 26,6 - 30,4 = 9,5$ , o que faz com que neste caso o tamanho apropriado do sapato seja o número 10 (o número 9 ficaria pequeno).

Na Europa, sendo  $x$  o comprimento dos pés e  $f(x)$  o correspondente número dos sapatos, temos, por exemplo:

$$x = 23,6 \text{ cm} \rightarrow f(x) = 37$$

$$x = 25,6 \text{ cm} \rightarrow f(x) = 40$$

Assim:

$$f(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} 37 = 23,6a + b \\ 40 = 25,6a + b \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 1,5 \text{ e } b = 1,6 \rightarrow f(x) = 1,5x + 1,6$$

Para  $x = 28$  cm o número apropriado dos sapatos é  $f(28) = 1,5 \cdot 28 + 1,6 = 43,6$ . Portanto, o número apropriado do sapato para essa pessoa é o 44 (o 43 fica pequeno). Se o pé medisse 26,6 cm, o número apropriado dos sapatos seria  $f(26,6) = 1,5 \cdot 26,6 + 1,6 = 41,5$ , o que faz com que neste caso o tamanho apropriado do sapato seja o número 42 (o número 41 ficaria pequeno).

Nos Estados Unidos, sendo  $x$  o comprimento dos pés e  $f(x)$  o correspondente número dos sapatos, temos, por exemplo:

$$x = 23,6 \text{ cm} \rightarrow f(x) = 7$$

$$x = 25,6 \text{ cm} \rightarrow f(x) = 10$$

Assim:

$$f(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} 7 = 23,6a + b \\ 10 = 25,6a + b \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 1,5 \text{ e } b = -28,4 \rightarrow f(x) = 1,5x - 28,4$$

Para  $x = 28$  cm o número apropriado dos sapatos é  $f(28) = 1,5 \cdot 28 - 28,4 = 13,6$ . Portanto, o número apropriado do sapato para essa pessoa é o 14 (o 13 fica pequeno). Se o pé medisse 26,6 cm, o número apropriado dos sapatos seria  $f(26,6) = 1,5 \cdot 26,6 - 28,4 = 11,5$ , o que faz com que neste caso o tamanho apropriado do sapato seja o número 12 (o número 11 ficaria pequeno).

- d) No Brasil, sendo  $x$  o comprimento dos pés e  $f(x)$  o correspondente número dos sapatos, temos, por exemplo:

$$x = 20 \text{ cm} \rightarrow f(x) = 32$$

$$x = 28 \text{ cm} \rightarrow f(x) = 42$$

Assim:

$$f(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} 32 = 20a + b \\ 42 = 28a + b \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \frac{5}{4} \text{ e } b = 7 \rightarrow f(x) = \frac{5}{4}x + 7 = \frac{5x + 28}{4}$$

e) As respostas dependem dos dados coletados.

f) As respostas dependem dos dados coletados. Alguns fatores que podem causar discrepâncias são medidas tomadas erradas durante a fase de pesquisa e preenchimento da tabela, arredondamentos inapropriados, etc.

A atividade a seguir representa um momento de interdisciplinaridade com Química e Física; ela pode ser abordada como um miniprojeto interdisciplinar. Após a leitura do texto inicial da atividade, é importante acontecer uma discussão com os alunos sobre o uso de protetores solares, exposição ao sol, etc.

## 2. Atividade em grupo

Chamamos de radiação solar a energia radiante emitida pelo Sol. Cerca de 45% do total da radiação solar que chega ao limite superior da atmosfera consegue atingir a superfície do globo. O restante é absorvido, difundido ou refletido através das nuvens e da superfície da Terra. A atmosfera funciona, então, como um filtro protetor da Terra, sem o qual a vida seria impossível. O limite inferior da atmosfera corresponde ao nível médio das águas do mar – superfície da Terra –, e o seu limite superior, embora seja difícil determinar, oscila entre os 800 km e os 1000 km de altitude.

A exposição frequente e prolongada ao sol pode causar: eritemas (queimaduras solares e lesões bolhosas na pele); envelhecimento precoce; melasmas (manchas marrons que conferem à pele um aspecto envelhecido); dermatopatias (doenças da pele); desidratação; câncer de pele, inclusive o melanoma (tumor maligno que mais frequentemente acomete a pele e os olhos); doenças degenerativas; lesões, catarata e outros problemas oculares. Não se deve olhar diretamente para o sol, pois os olhos são sensíveis e suscetíveis à ação dos radicais livres e da radiação solar, que predis põem a lesões, doenças degenerativas e até cegueira.

O Fator de Proteção Solar (FPS), ou simplesmente Fator Solar (FS), é o índice que determina o tempo máximo que uma pessoa pode permanecer exposta ao sol sem que a pele fique vermelha (sem produzir eritema). De outro modo, é o número que indica o nível de proteção que determinado produto oferece contra os raios ultravioletas (UV). Por exemplo, quando se usa um filtro solar com FS 15, a pele pode levar 15 vezes mais tempo para ficar vermelha. Da mesma forma, se for usado FS 30, significa que, para cada minuto com o protetor, a proteção duraria 30 min. Assim, deve-se multiplicar o tempo, em minutos, pelo fator de proteção solar, para se obter o tempo

máximo de exposição ao sol. Uma opção para calcular o FS da pele de uma pessoa é a seguinte: a pessoa deve ficar exposta ao sol, sem proteção alguma, até aparecer as primeiras manchas avermelhadas na pele. Por exemplo, se esse tempo for de 12 min, para um protetor solar com FS 15, a pessoa poderá ficar exposta ao sol durante  $12 \text{ min} \times 15 = 180 \text{ min} = 2 \text{ horas}$ . Bem, para a pessoa não precisar expor a sua pele, basta ver o quadro abaixo.

Tipos de pele e FS					
Tipo	Indivíduos	Inverno (FS)	Verão (FS)	t (min)	Observações
A	Ruivos e louros	15	30	15-24	Nunca se bronzeiam mas sempre se queimam.
B	Morenos claros	5-10	20-25	31	Sempre se queimam e às vezes se bronzeiam.
C	Morenos escuros	–	10-15	48	Às vezes se queimam e em geral se bronzeiam.
D	Mulatos e negros	–	5-10	66	Sempre se bronzeiam e raramente se queimam.

t é o tempo estimado, em minutos, para uma pessoa começar a se queimar quando exposta ao sol, sem proteção alguma.

O quadro abaixo mostra quanto a luz solar (UVB) é absorvida pelos protetores solares:

Proteção dos filtros solares	
FS	Proteção (%)
2	50
4	75
8	87
16	94
32	96
64	99

Fonte de pesquisa: Disponível em: <[www.ufrj.br/institutos/it/de/acidentes/sol.htm](http://www.ufrj.br/institutos/it/de/acidentes/sol.htm)>. Acesso em: 4 abr. 2016.

- Com relação à radiação solar, qual é a importância da atmosfera para o planeta?
- Cite três problemas que a exposição excessiva ao sol pode causar em uma pessoa.
- Suponha que uma pessoa loura, em pleno verão, possua tempo mínimo, sem proteção contra os raios solares, igual a 15 min. Calcule o tempo que essa pessoa poderia ficar exposta com os fatores FS 30, FS 35, FS 40, FS 45 e FS 50 e organize os valores obtidos em uma tabela.
- Seja x o número do fator solar usado por uma pessoa morena clara (de acordo com a primeira tabela dada) e y o tempo máximo de exposição ao sol quando faz uso do protetor, indique a relação entre as grandezas y e x.
- Faça o esboço de um gráfico cartesiano indicando a relação do item anterior.
- Pesquise como deve ser feita a aplicação do protetor solar. Existe algum fator que protege 100%?

g) De acordo com a segunda tabela, você percebe que um fator acima do FS 15 pouco aumenta a proteção aos raios solares? Qual seria a vantagem de usar, por exemplo, um protetor com fator FS 50?

h) Faça uma pesquisa em sua sala e monte uma tabela indicando quantos alunos têm tipo de pele A, B, C, D ou E e associe um valor de FS para cada tipo de pele.

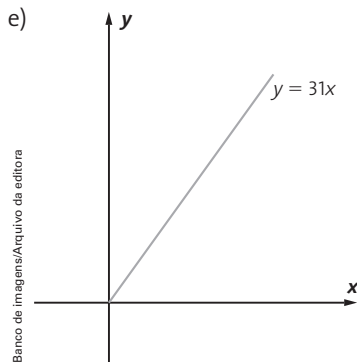
#### Resolução:

- A atmosfera funciona como um filtro protetor da Terra.
- Sugestão de resposta: envelhecimento precoce, câncer de pele, queimaduras, etc.
- Para FS 30, temos um tempo de  $15 \times 30 = 450 \text{ min} = 7 \text{ h } 30 \text{ min}$   
Para FS 35, temos um tempo de  $15 \times 35 = 525 \text{ min} = 8 \text{ h } 45 \text{ min}$   
Para FS 40, temos um tempo de  $15 \times 40 = 600 \text{ min} = 10 \text{ h } 00 \text{ min}$   
Para FS 45, temos um tempo de  $15 \times 45 = 675 \text{ min} = 11 \text{ h } 15 \text{ min}$   
Para FS 50, temos um tempo de  $15 \times 50 = 750 \text{ min} = 12 \text{ h } 30 \text{ min}$

Fator FS	Tempo de exposição ao sol
30	450 min
35	525 min
40	600 min
45	675 min
50	750 min

d) O tempo máximo de exposição aos raios solares sem proteção alguma para uma pessoa morena clara é de 31 min. Assim, a relação desejada é  $y = 31x$ .





Em relação a esse gráfico, destacamos que é uma reta que passa pela origem, o valor de  $x$  deve ser positivo e a inclinação é bem acentuada.

- f) O protetor solar deve ser aplicado com grande intensidade e, dependendo da pele, repetir a aplicação periodicamente a cada 2 h ou 3 h. De acordo com a segunda tabela do enunciado, podemos concluir que não existe um fator que proteja 100%.
- g) Sim, a diferença entre um fator e outro pouco muda em relação à proteção aos raios solares. Na verdade, quanto maior o fator, maior o tempo de proteção, ou

seja, evita-se a reaplicação em um intervalo de tempo menor.

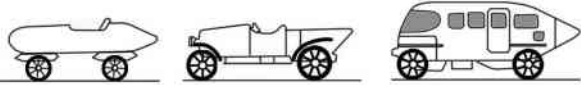
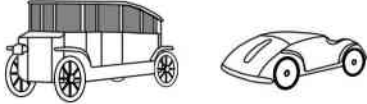





h) Resposta pessoal.

A atividade a seguir representa um momento de interdisciplinaridade com a disciplina de Física. Nessa atividade, é importante discutir com os alunos questões como o preço dos combustíveis, o consumo exagerado de combustível e os riscos de dirigir em alta velocidade.

### 3. Atividade em grupo

Força de arrasto é a força gerada pela resistência do ar; por exemplo, a força que se opõe ao movimento dos veículos. Sua intensidade cresce fortemente à medida que a velocidade do veículo aumenta. Para se ter uma ideia precisa, quando o carro se encontra acima de 80 km/h, a resistência do ar responde por mais da metade do consumo do combustível.

A aerodinâmica veicular tem evoluído bastante ao longo dos anos na intenção de aumentar ao máximo o espaço interno do veículo e, ao mesmo tempo, diminuir ao máximo o impacto da resistência do ar. Veja o quadro a seguir.

<b>Formas básicas</b>	1900 a 1925	
<b>Formas aerodinâmicas</b>	1921 a 1923	
	1922 a 1939	
	1939 a 1955	
	Desde 1955	
<b>Otimização de detalhes</b>	Desde 1974	
<b>Otimização de forma</b>	Desde 1983	

Ilustrações: Paulo Manzi/Arquivo da editora

Fonte dos dados: HUCHO, Wolf-Heinrich et al. (Ed.). *Aerodynamics of Road Vehicle*. 4. ed. Warrendale: SAE Internacional, 1998. p. 918.



Reduzir a força de arrasto interessa muito ao proprietário exatamente devido à economia de combustível. Assim, com a minimização da força de arrasto o proprietário poderia desenvolver velocidades maiores (claro, respeitando os limites de velocidade) gastando a menor quantidade de combustível possível. Outro desafio hoje é para os veículos de grande porte, como ônibus e caminhões, já que formatos de paralelepípedos longos prejudicam sua aerodinâmica. Melhorar o arrasto para ônibus e caminhões reduz o consumo de *diesel* nas estradas, onde as velocidades médias são elevadas. Essa seria uma forma bastante rápida e de baixo custo para o Brasil atingir a meta de redução de emissões, comprometidas internacionalmente, pois cerca de 65% do *diesel* usado em transportes é para fins rodoviários.

- A força de arrasto atua na mesma direção do movimento do veículo ou na direção contrária?
- Além do formato do objeto, a resistência do ar depende de qual grandeza?
- Seja  $y$  a força da resistência do ar,  $v$  a velocidade do carro e  $k$  uma constante real, que depende do ar e da aerodinâmica do carro, qual é a equação que relaciona essas grandezas:  $y$  e  $v$ ?
- Considere um carro que se movimenta em uma via extensa e retilínea, e sendo a constante da força de arrasto  $k = 2,4 \text{ kg/m}$ . Determine a força de arrasto quando a velocidade do carro for 72 km/h, depois 90 km/h, 108 km/h e, por fim, 126 km/h.
- Faça um esboço do gráfico da função determinada no item c, sendo  $y$  a força de arrasto e  $v$  a velocidade do objeto, e discuta o crescimento da função dependendo da constante  $k$ .
- Sabe-se que a constante que acompanha o quadrado da velocidade é chamada de “coeficiente de arrasto”. Tal coeficiente, em geral, é obtido em túneis de vento (câmaras com potentíssimos ventiladores que mostram como o ar se desloca pela carroceria do veículo). Pesquise junto com seu grupo como dois veículos diferentes que possuem o mesmo coeficiente de arrasto apresentam diferentes eficiências.

**Resolução:**

- No sentido contrário do movimento do veículo.

b) A resistência do ar depende do quadrado da velocidade do objeto.

c)  $y = kv^2$

d) Primeiro, notemos que as velocidades estão em km/h e devemos transformá-las em m/s. Para isso, lembre-se de que basta dividi-la por 3,6. Assim, teremos:

72 km/h =  $72 : 3,6 = 20 \text{ m/s}$

90 km/h =  $90 : 3,6 = 25 \text{ m/s}$

108 km/h =  $108 : 3,6 = 30 \text{ m/s}$

126 km/h =  $126 : 3,6 = 35 \text{ m/s}$

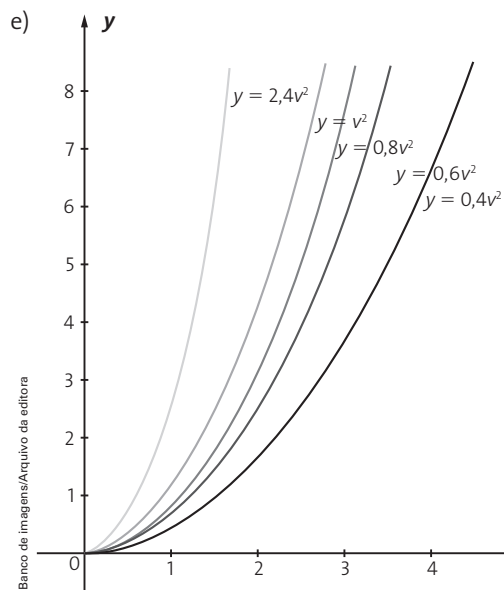
Feito isso, temos, para cada caso:

Para  $v = 20 \text{ m/s}$ , temos  $y = 2,4v^2 = 2,4 \cdot 20^2 = 960 \text{ N}$

Para  $v = 25 \text{ m/s}$ , temos  $y = 2,4v^2 = 2,4 \cdot 25^2 = 1500 \text{ N}$

Para  $v = 30 \text{ m/s}$ , temos  $y = 2,4v^2 = 2,4 \cdot 30^2 = 2160 \text{ N}$

Para  $v = 35 \text{ m/s}$ , temos  $y = 2,4v^2 = 2,4 \cdot 35^2 = 2920 \text{ N}$



À medida que o valor de  $k$  aumenta, conservando a velocidade  $v$ , a força de arrasto também aumenta.

- A eficiência aerodinâmica depende, na prática, da área frontal. Assim, dois veículos podem apresentar o mesmo coeficiente de arrasto, mas com áreas frontais diferentes e, quanto menor a área frontal, menor o esforço (potência) necessário para o deslocamento do carro contra a massa de ar à sua frente.

## Unidade 3 – Função exponencial e função logarítmica

### Capítulo 5 – Função exponencial

Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Situações iniciais	Conhecimentos algébricos/geométricos	C5	H19/H20

Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Revisão de potenciação	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos	C1	H1/H2/H3
Revisão de radiciação			
Função exponencial	Conhecimentos algébricos: Funções exponenciais	C5	H19
Conexão entre funções exponenciais e progressões	Conhecimentos numéricos/ Conhecimentos algébricos	C5	H19/H21
Equações exponenciais	Conhecimentos algébricos: Equações e inequações	C5	H19/H21/H22
Inequações exponenciais			
O número irracional $e$ e a função exponencial $e^x$	–	–	–
Aplicações da função exponencial	Conhecimentos algébricos	C5	H21/H22/H23

Neste e no próximo capítulo abordaremos algumas funções que, apesar de serem rotuladas como difíceis pela maioria dos alunos, talvez por não serem funções polinomiais e apresentarem novas formas de raciocínio, representam uma grande quantidade de situações reais, tais como o fenômeno da radioatividade e a meia-vida de elementos radioativos.

A situação da bactéria e a do empréstimo a juros compostos (**Situações iniciais**) são bons exemplos para apresentar situações que devem ser modeladas pelas funções exponenciais.

Os tópicos **Revisão de potenciação** e **Revisão de radiciação** devem ser trabalhados com cuidado, pois representam as bases de cálculo usadas no conteúdo do capítulo. Os alunos terão dificuldade de seguir adiante no conteúdo se não dominarem as propriedades de potenciação e de radiciação, sendo importante que todos os exercícios propostos no tópico sejam resolvidos e discutidos, eliminando assim quaisquer dificuldades no aprendizado.

Uma vez dominados os cálculos com potências e radicais, recomendamos que prossigam para o tópico **Função exponencial** e sua parte Gráfico da função exponencial, com destaque para os exercícios 30 e 31, em que a interpretação do gráfico se faz necessária, e para os exercícios 33 e 35, que ajudarão a compreender o comportamento da função mesmo sem a presença do gráfico. Os exercícios 32 e 36 podem ser resolvidos usando a ferramenta proposta na seção **Matemática e tecnologia**, Construção do gráfico de uma função exponencial, lembrando que o uso de programas de construção de gráficos ajudam o aluno a visualizar os gráficos e os diferentes comportamentos das funções.

Alguns cuidados devem ser tomados no estudo das **Equações exponenciais**, pois muitas vezes os alunos eliminam as bases nas equações exponenciais da mesma forma que eliminam os denominadores em equações fracionárias. É importante destacar que o procedimento de igualar bases e expoentes é bem diferente do processo de eliminação. Os exercícios resolvidos auxiliam na resolução dos exercícios 41 a 44, e o estudo do gráfico auxilia na resolução do exercício 48. Já as **Inequações exponenciais** representam um desafio adicional, uma vez que os alunos costumam ter muita dificuldade na visualização das solicitações. O uso de representações gráficas das funções e delimitação das regiões solicitadas pode auxiliar a minimizar essa dificuldade, em conjunto com os exercícios resolvidos 8 e 9, base para os exercícios propostos 49 a 52. Destaque que o número irracional  $e$  é utilizado em muitas aplicações da Matemática e na descrição de fenômenos naturais, usando o exercício 53 como exemplo. Os textos do tópico **O número irracional e a função exponencial  $e^x$**  utilizam-se da História da Matemática não apenas como um registro de datas; diferente disso, relacionam problemas reais e a busca por soluções com o desenvolvimento da Matemática.

Uma situação envolvendo crescimento populacional de uma cultura de bactérias é apresentada no exercício resolvido 11, sendo essas situações muito representativas das **Aplicações da função exponencial**. O modelo de Jentsch-Bayley para avaliar a altura de crianças em idade pré-escolar é sugerido no exercício 59. O decaimento e a meia-vida de elementos radioativos (Química), também representado por funções exponenciais, é apresentado nos exercícios 54 e 55 e deve ser discutido com maior profundidade na **Leitura** sobre o Césio-137 – o maior acidente radioativo do Brasil.

## Capítulo 6 – Logaritmo e função logarítmica

Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Logaritmo	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos	C1	H1/H3/H4/H5
Função logarítmica	Conhecimentos algébricos	C5	H19
Equações logarítmicas	Conhecimentos algébricos: Equações e inequações	C5	H19/H21/H22

A criação de novas tecnologias sempre está associada a avanços em pesquisas científicas e ampliação de conhecimentos, com o intuito de resolver problemas da sociedade. Hoje possuímos “supercomputadores”, calculadoras científicas e muitos equipamentos que simplificam diversos cálculos que seriam impossíveis de efetuar há um século. Os progressos relacionados ao estudo dos logaritmos permitiram o avanço em áreas como Astronomia e navegação, bem como a compreensão de diversos fenômenos físicos.

O tema **Logaritmo** é iniciado com uma apresentação da definição de logaritmo a partir da resolução de equações exponenciais, pois dessa forma os alunos percebem com naturalidade a relação entre logaritmo e expoente. Os exercícios resolvidos de 1 a 4 auxiliam na fixação do conceito e na resolução dos exercícios 1 a 8 também. Destacamos os exercícios de 1 a 3, como atividade de fixação na qual os alunos usarão as propriedades de potência e radiciação estudadas no capítulo anterior.

As Propriedades operatórias dos logaritmos costumam causar muita confusão entre os alunos, uma vez que são muito similares às propriedades operatórias de potência. Os exemplos sugeridos devem ser apresentados e discutidos para facilitar a compreensão. Os exercícios resolvidos 5 e 6 trabalham com as propriedades algebricamente e auxiliam na resolução dos exercícios 9 a 13; já os exercícios resolvidos 7 a 9 apresentam situações envolvendo mudança de base, e estão associados aos exercícios 17 a 20, e o exercício resolvido 10 auxilia na resolução do exercício 15.

Uma das aplicações de logaritmo se encontra no cálculo do pH de uma solução (conexão com Química) e representa uma situação em que não necessariamente conseguiremos calcular o logaritmo a partir da definição (precisaremos do auxílio de uma tabela ou de uma calculadora científica, sendo um bom momento para orientá-los no uso da calculadora, destacando a importância da fórmula de mudança de base nesses casos e aproveitando para apresentar o logaritmo na base  $e$  ( $\ln$ )). A situação apresentada em Cálculo de logaritmos serve de referência para a resolução dos exercícios 21 a 28, observando-se que em alguns deles os valores aproximados de alguns logaritmos são apresentados como sugestão. Outra importante aplicação dos logaritmos aparece na resolução de equações exponenciais e de problemas. Os exercícios resolvidos 11 e 12 mostram duas situações envolvendo equações exponenciais

que devem ser resolvidas com o uso de logaritmos e auxiliam na resolução dos exercícios 29 a 32. Por outro lado, os exercícios resolvidos 13 e 14 apresentam problemas envolvendo crescimento de bactérias e radioatividade, cuja solução também depende do uso de logaritmos e são referência para os exercícios 33 a 41, destacando-se os exercícios 37 e 38, que abordam a lei de resfriamento de Newton (conexão com a Física).

Os textos Antes dos logaritmos e Depois dos logaritmos abordam um tipo de “simplificação” utilizada pelos matemáticos dos séculos XV e XVI, as “Fórmulas de Prostaférese”. Sendo estas “simplificações” ainda bastante trabalhosas, a invenção dos logaritmos facilitou os mais diversos cálculos. É aconselhável aguardar o estudo da relação trigonométrica cosseno (trabalhada nas páginas 249 a 256) e então retornar a este interessante retrato da História da Matemática.

O tópico **Função logarítmica** se inicia com a definição de função inversa, tendo como objetivo estabelecer a correlação entre as funções exponencial e logarítmica, especialmente na identificação e interpretação gráfica das funções. Os exercícios 42 e 43 exercitam o cálculo das funções inversas e logarítmicas, e os exercícios 44 a 49 trabalham a construção e interpretação dos gráficos das funções logarítmicas. Sugerimos o uso de programas de construção gráfica como ferramenta auxiliar, e as orientações para a construção de funções logarítmicas com o uso do *software* GeoGebra se encontram na seção **Matemática e tecnologia**. Aproveite para identificar o domínio de algumas funções, destacando a inexistência da função para valores que não pertençam a ele.

Na resolução das **Equações logarítmicas** é importante destacar a necessidade da determinação e verificação do domínio da função, usando os exercícios resolvidos 16 e 18 como referência e trabalhando na sequência os exercícios 50 a 57. O exercício resolvido 17 apresenta uma situação-problema envolvendo crescimento populacional de uma cidade. O tema, muito familiar ao estudo de funções exponenciais e logarítmicas, pode ser usado para discutir questões importantes relacionadas a Geografia, tais como demografia, distribuição de terras, desenvolvimento rural e urbanização. Aproveitando o enfoque interdisciplinar, pode-se discutir a questão 58, que fala sobre determinação da altura em aviões, em função da pressão atmosférica (Física).

O entendimento das inequações logarítmicas também costuma ser fonte de desconforto para os alunos. Procure

trabalhar com calma os diferentes exemplos, representando, se possível, graficamente as soluções com o intuito de facilitar a compreensão. O exercício resolvido 19 serve de base para os exercícios 59 a 61, que podem ser realizados em dupla, como atividade complementar.

O exercício 1 da seção **Pensando no Enem** cria um espaço para interdisciplinaridade com a Física abordando uma breve discussão sobre a importância dos semicondutores para o avanço da tecnologia, principalmente vinculando seu uso à computação por meio de notícias, revistas científicas e sites de curiosidades. O exercício 2 relaciona-se com a Física e a Química, utilizando a mesma metodologia para despertar a curiosidade dos alunos ao tratar de assuntos ligados a energia nuclear, radiação, isótopos do elemento césio, etc.

A seção **Leituras**, que apresenta um texto muito interessante abordando aplicações históricas das funções logarítmicas e algumas de suas aplicações atuais, e a seção **Outros contextos**, que discute sobre poluição sonora e saúde auditiva, representam parte importante do capítulo, por sua contextualização e interdisciplinaridade.

As questões da seção **Vestibulares de Norte a Sul** também apresentam interdisciplinaridade. A seção tem caráter avaliativo e, ao mesmo tempo, desafiador, uma vez que o aluno poderá se aventurar na resolução de exercícios de vestibulares das cinco regiões do país. Especificamente no exercício 3, o professor deve propor a resolução do exercício como um grande desafio, permitindo a utilização de recursos, como calculadora e/ou planilha de cálculo. Após o término do estudo do Capítulo 7, deve-se voltar a este exercício e propor aos alunos uma nova tentativa de resolução, agora, sem dispor de recursos adicionais.

### Atividades complementares à Unidade 3

A atividade a seguir envolve Matemática e Biologia. Ela pode ser desenvolvida com o professor de Biologia por meio de um projeto interdisciplinar.

1. Leia os textos e faça o que se pede.

O que pode favorecer (ou atrapalhar) o desenvolvimento de crianças e adolescentes	
Alimentação	<p><b>Quantidade e qualidade interferem de maneira significativa</b></p> <p>Erros comuns:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• crianças precisam de dietas específicas de acordo com seu ritmo de crescimento: dietas de adultos não são indicadas para menores de 2 anos, por exemplo;</li> <li>• baixo consumo de cálcio, componente essencial para as crianças.</li> </ul>
Fatores ambientais	<p><b>Restrições da moradia podem provocar diminuição da atividade física</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Crianças devem ser expostas ao sol em horários adequados: os raios solares produzem vitamina D, que promove a absorção de cálcio, crucial para a formação dos ossos.</li> <li>• Exposição a agentes contaminados, como água, solo e ar poluídos.</li> </ul>

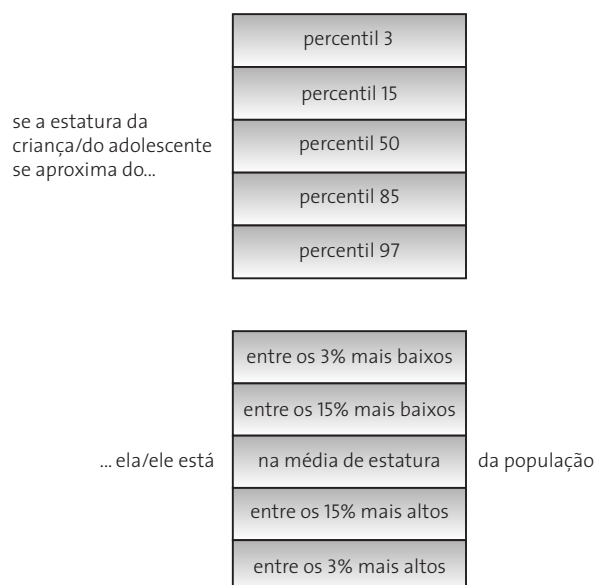
O que pode favorecer (ou atrapalhar) o desenvolvimento de crianças e adolescentes	
Sono	<p><b>O sono é fundamental para o organismo da criança recuperar energia</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Crianças entre 0 e 2 anos, que dormem muito, não devem ter o tempo entre as mamadas muito espaçado.</li> <li>• Entre 2 e 4 anos, o sono da tarde também é benéfico, mas não deve ser muito prolongado.</li> <li>• Após os 5 anos, recomenda-se 8 horas de sono noturno.</li> <li>• A dinâmica da família também pode ser responsável por um distúrbio do sono na infância.</li> </ul>
Fatores emocionais	<p><b>Estímulos positivos podem facilitar a produção de hormônios responsáveis pelo crescimento</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se a criança não recebe os cuidados necessários, pode reagir diminuindo a quantidade de produção de hormônio de crescimento.</li> <li>• Um exemplo de estímulo negativo dos pais é depositar uma expectativa em relação a um objetivo que está fora do alcance da criança.</li> </ul>

Disponível em: <[http://veja.abril.com.br/especiais\\_online/crescimento-saudavel/fatores.shtml](http://veja.abril.com.br/especiais_online/crescimento-saudavel/fatores.shtml)>. Acesso em: 4 abr. 2016.

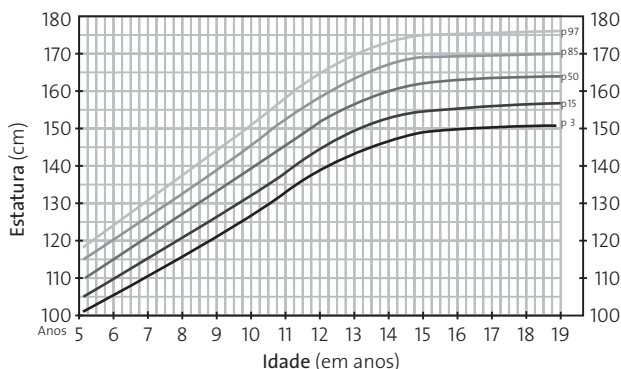
#### Crescimento saudável

As curvas dos gráficos da página seguinte mostram padrões de crescimento infantil estabelecidos pela Organização Mundial de Saúde (OMS). Os dados estão separados por faixas etárias e sexo. Para comparar o desenvolvimento de uma criança com os modelos, é necessário encontrar o ponto de intersecção entre a altura (eixo vertical, em centímetros) e a idade da criança (eixo horizontal, em meses e anos).

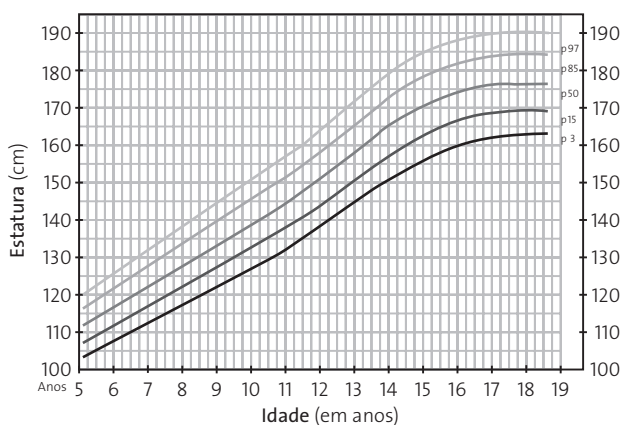
O resultado da comparação:



Meninas:  
Dos 5 aos 19 anos (percentis)



Meninos:  
Dos 5 aos 19 anos (percentis)



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: <[http://veja.abril.com.br/especiais\\_online/crescimento-saudavel/curvas-crescimento.shtml](http://veja.abril.com.br/especiais_online/crescimento-saudavel/curvas-crescimento.shtml)>. Acesso em: 4 abr. 2016.

a) Responda:

- Qual é a quantidade recomendada de horas de sono, por semana, para uma criança com mais de cinco anos?
- No gráfico (percentis dos 5 aos 19 anos) referente às meninas, qual, aproximadamente, o domínio e a imagem da função representada por **p 97**? E por **p 3**?
- Ainda observando os gráficos de crescimento, o que você pode deduzir quanto ao crescimento dos jovens ao completarem 18 anos?
- De acordo com a OMS, qual a idade média de uma menina de altura 1,45 m? E de um menino de 1,55 m?

b) O modelo Jentsch permite estimar aproximadamente a altura de uma criança a partir da função  $H(x) = 79 + 6,4x - e^{3,2-x}$ , em que  $e$  representa uma constante positiva,  $H(x)$  representa a altura da criança (em centímetros) e  $x$  representa a idade (em anos), para  $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$ . Já a velocidade de crescimento, em centímetro por ano, pode ser estimada para uma criança na mesma faixa etária pela função  $V(x) = 6,4 - e^{3,2-x}$ .

De acordo com esse modelo, qual a estimativa de altura (em centímetros) de uma criança de 3 anos? E qual a velocidade de crescimento (em centímetro por ano) dessa criança? Adote  $e^{0,2} = 1,2$ .

c) O exame de raios X de punho busca relacionar a idade óssea com a idade cronológica. No final da puberdade os hormônios sexuais (testosterona e estrógeno) fazem com que as extremidades ósseas (epífises) se fechem e a partir daí o jovem pare de crescer. Estima-se que um menino aumente seu tamanho entre 27 e 30 centímetros entre o início e o fim da puberdade. Estime a altura, no início da puberdade, de um garoto que chega ao fim dela com 1,80 m.

d) *Pesquise e discuta*

Relativo aos percentis de altura, faça uma pesquisa na sua sala e preencha a tabela abaixo:

Percentil	Número de alunos
p 3	
p 15	
p 50	
p 85	
p 97	

- Qual o percentil de altura mais frequente na sua sala?
  - Faça um gráfico de setores com os percentis de altura da sua sala.
- e) O hormônio de crescimento é secretado com mais intensidade no período noturno; já os raios solares são uma excelente fonte de vitamina D, fundamental para a absorção de cálcio. Pesquise e discuta com seus colegas quais os horários não indicados para tomar sol. Quais as consequências imediatas e futuras de uma exposição inadequada ao sol?

**Resolução:**

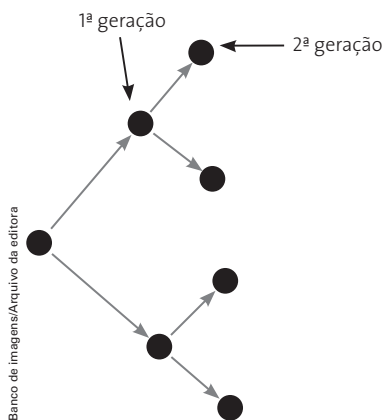
- a)  $8 \cdot 7 = 56$ ; 56 horas
- $D(p 97) = [5, 19]$  e  $Im(p 97) = [118, 175]$   
 $D(p 3) = [5, 19]$  e  $Im(p 3) = [100, 150]$
  - O crescimento tende a parar. A função nesse instante passa a ser considerada constante.
  - Respectivamente 11 e 13 anos.
- b)  $H(3) = 79 + 6,4 \cdot 3 - e^{3,2-3} = 79 + 19,2 - e^{0,2} = 79 + 19,2 - 1,2 = 97$  cm  
 $V(3) = 6,4 - e^{3,2-3} = 6,4 - e^{0,2} = 6,4 - 1,2 = 5,2$  cm/ano
- c) A altura máxima será  $1,80 \text{ m} - 0,27 \text{ m} = 1,53 \text{ m}$  e a altura mínima será  $1,80 \text{ m} - 0,30 \text{ m} = 1,50 \text{ m}$ .
- d) Respostas de acordo com a realidade da turma.
- e) O horário não indicado é entre as 10h e as 16h.  
Consequências imediatas: vermelhidão, queimaduras, manchas, etc.  
Consequências futuras: câncer de pele.

A atividade a seguir aborda uma aplicação de função exponencial.



## 2. Correntes de mercado

Há alguns anos começaram a se difundir no Brasil as chamadas correntes de mercado, em que determinada pessoa inicia a venda de certo produto para duas outras pessoas (que chamaremos de filhas da primeira pessoa) e convida essas duas outras pessoas para que também vendam esse produto (cada uma) para duas novas pessoas (essas quatro novas pessoas são chamadas de netos da pessoa que iniciou o processo de venda e assim por diante). Cada vez que novas pessoas entram nessa “corrente” dizemos que nasce uma nova “geração”, conforme ilustra a figura abaixo:



Cada participante dessa corrente ganha um percentual sobre as vendas dos seus descendentes: filhos, netos e assim por diante. Portanto, a pessoa que iniciou a corrente ganha uma porcentagem das vendas efetuadas por todos os indivíduos a partir da sua geração, os indivíduos da 1ª geração ganham porcentagens sobre todos os seus descendentes e assim sucessivamente, fazendo com que aqueles indivíduos que estão no início da corrente ganhem valores bem significativos.

A tabela a seguir ilustra o número de pessoas participantes da corrente em função do número de gerações existentes:

Geração	Número total de participantes
1	$1 + 2$
2	$1 + 2 + 4$
3	$1 + 2 + 4 + 8$
4	$1 + 2 + 4 + 8 + 16$
$\vdots$	$\vdots$
$n$	$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$

Chamando de  $Q_n$  a quantidade total de pessoas participantes da corrente na geração  $n$ , temos:

$$Q_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2_n \Rightarrow \\ \Rightarrow 2Q_n = 2 + 4 + 8 + \dots + 2_n + 1$$

Subtraindo membro a membro as duas últimas igualdades acima, obtemos  $Q_n = 2^{n+1} - 1$ , que é a quantidade total de pessoas presentes na corrente após a formação de  $n$ -ésima geração.

Se, por exemplo, essa corrente ocorrer em uma cidade de médio porte, com cerca de 1 000 000 de habitantes, supondo que a cada semana seja formada uma nova geração de indivíduos na corrente, após 19 semanas a corrente estará totalmente estagnada, visto que  $2^{19+1} - 1 = 1\,048\,575$ , o que já é bem maior que a população da cidade. Diante do exposto, percebe-se que este tipo de atividade é bastante lucrativa para os primeiros indivíduos da corrente, mas pouco lucrativa para aqueles que estão no final da corrente.

Agora, faça o que se pede:

- Seja  $n$  o número de gerações formadas, podemos dizer que a função dada pela lei  $Q_n = 2^{n+1} - 1$  é uma função exponencial, conforme é definida no Capítulo 5 do livro?
- Como seria a representação gráfica da função  $Q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida pela lei  $Q(n) = 2^{n+1} - 1$ ?
- Qual é a diferença marcante entre a representação gráfica que você esboçou no item **b** e a representação gráfica da função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = a^x$ , com  $0 < a \neq 1$ , que foi estudada no Capítulo 5 do livro?
- Investigue quantos alunos estudam na sua escola e, a partir daí, supondo que você iniciasse uma destas correntes hoje e que a cada dia fosse formada uma nova geração de indivíduos pertencentes à corrente, estime o número de dias necessários para que a corrente na sua escola ficasse estagnada.
- Estime o número de dias necessários para que metade dos alunos da sua escola esteja na corrente, supondo mais uma vez que a cada dia fosse formada uma nova geração da corrente.
- Supondo que a população brasileira seja de 200 000 000 de habitantes e que você iniciasse uma destas correntes hoje e que a cada dia fosse formada uma nova geração de indivíduos pertencentes à corrente, estime o número de dias necessários para que a corrente ficasse estagnada em todo o Brasil.

### Resolução:

- Não, pois neste caso  $n$  varia no conjunto dos números naturais e não no dos reais, como na definição clássica da função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = a^x$ , com  $0 < a \neq 1$ .
- A representação gráfica da função  $Q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida pela lei  $Q(n) = 2^{n+1} - 1$  não é como de costume uma curva contínua e sim um conjunto discreto de pontos, visto que  $n$  varia no conjunto dos números naturais; observe:





c) A diferença mais marcante entre a representação gráfica do item anterior e a representação gráfica da tradicional exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = a^x$ , com  $0 < a \neq 1$ , é que a representação gráfica apresentada é composta de um conjunto discreto de pontos, ao contrário da curva contínua que representa graficamente a função exponencial tradicional. Além disso, a representação gráfica exponencial clássica não passa pela origem.

d) A resposta depende do número de alunos da escola.

e) A resposta depende do número de alunos da escola.

f) Devemos impor a condição

$$Q_n = 2^{n+1} - 1 \geq 200\,000\,000 \text{ para estimarmos o número } n \text{ de dias.}$$

Sabemos que  $2^{10} = 1024 > 10^3$ . Assim:

$$(2^{10})^2 > (10^3)^2 \Rightarrow 2^{20} > 10^6 = 1\,000\,000$$

Como  $2^8 > 200$ , segue que:

$$2^8 > 200 \Rightarrow 2^8 \cdot 2^{20} > 200 \cdot 10^6 \Rightarrow 2^{28} > 20\,000\,000$$

Portanto, para  $n = 27$ , teremos:

$$Q_n = 2^{n+1} - 1 \geq 200\,000\,000$$

Diante do exposto, em 27 dias a corrente estaria estagnada no Brasil, supondo que seja formada uma nova geração a cada dia.

A atividade a seguir representa uma aplicação de logaritmos à matemática financeira. Ela é importante, pois coloca o aluno para pensar na responsabilidade e nas metas que deve ter em sua vida financeira.

3. Quando uma pessoa pega um empréstimo no sistema financeiro oficial (bancos), geralmente são cobradas taxas que variam, em média, de 1% a 2% ao mês, o que a longo prazo representa um valor significativo.

Na outra ponta do mercado existem as cadernetas de poupança, que, apesar de serem seguras do ponto de vista da garantia, pois não há perdas, apresentam o fator de correção mensal bem menor que os praticados no caso dos empréstimos.

Apenas para termos uma ideia do efeito dos juros ao longo do tempo, se uma pessoa tomasse R\$ 1 000,00 emprestados a uma taxa de juros (compostos) mensal de 2%, após 24 meses a sua dívida seria de:

$$1,02^{24} \times 1\,000,00 = 1\,608,44$$

Agora, se essa pessoa depositasse R\$ 1 000,00 em uma caderneta de poupança e deixasse o dinheiro lá sem mexer, após 24 meses o seu saldo seria (supondo um rendimento mensal de 0,5%, que é o geralmente praticado):

$$1,005^{24} = 1\,000,00 = 1\,127,16$$

Observe que esse valor é menor do que o obtido no caso do empréstimo.

Mesmo com essa baixíssima taxa de rendimento da poupança, o fator  $1,005^n$  pode superar qualquer número real dado quando o tempo é suficientemente longo. Por exemplo, quanto tempo demoraria para que um depósito inicial de R\$ 1 000,00 se transformasse em

um saldo de R\$ 2 000,00 em uma caderneta de poupança que rende 0,5% ao mês?

Após  $n$  meses, o saldo da conta da poupança seria  $1,005^n = 2\,000,00$ . Ora, como queremos que ele seja de R\$ 2 000,00, basta impor que:

$$1,005^n \cdot 1\,000 = 2\,000 \Rightarrow 1,005^n = 2$$

Para determinarmos o valor de  $n$  que cumpre a última igualdade acima é preciso recorrermos aos logaritmos. Como as calculadoras científicas dispõem de uma tecla com logaritmos decimais, vamos então usá-los neste caso. Vejamos:

$$1,005^n = 2 \Rightarrow \log 1,005^n = \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot \log 1,005 = \log 2 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,005} \approx 138$$

Ou seja, serão necessários cerca de 138 meses (aproximadamente 11,5 anos) para que o dinheiro depositado dobre de valor.

a) Imagine que você desejasse ter um saldo final que fosse 10 vezes o valor do depósito inicial de R\$ 1 000,00, ou seja, ter um saldo final de R\$ 10 000,00. Quanto tempo isso demoraria?

b) E se você quisesse obter um saldo final de R\$ 1 000 000,00, partindo de um mesmo depósito inicial de R\$ 1 000,00, quanto tempo demoraria?

c) Pense e pesquise maneiras alternativas de acelerar o processo de chegar aos R\$ 1 000 000,00, propondo alternativas possíveis no mercado financeiro e ao alcance ao longo da vida de um cidadão comum da nossa sociedade. Justifique matematicamente suas sugestões.

#### Resolução:

a) Para calcular o número  $n$  de meses necessários para que R\$ 1 000,00 seja transformado em R\$ 10 000,00, fazemos:

$$1\,000 \times 1,005^n = 10\,000 \Rightarrow 1,005^n = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 1,005^n = \log 10 \Rightarrow n = \frac{\log 10}{\log 1,005} = 461$$

Assim, são necessários cerca de 461 meses, ou 38 anos, para que os R\$ 1 000,00 sejam transformados em R\$ 10 000,00.

b) Para calcular o número  $n$  de meses necessários para que R\$ 1 000,00 seja transformado em R\$ 1 000 000,00, com uma taxa de rendimento de 0,5%, fazemos:

$$1\,000 \times 1,005^n = 1\,000\,000 \Rightarrow 1,005^n = 1\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 1,005^n = \log 1\,000 \Rightarrow \frac{\log 1\,000}{\log 1,005} = 1381$$

Assim, são necessários cerca de 1381 meses, ou 115 anos, para que os R\$ 1 000,00 sejam transformados em R\$ 1 000 000,00.

c) Algumas sugestões são procurar no mercado financeiro investimentos cujo percentual de rendimento seja superior ao da poupança; fazer depósitos periódicos ao longo do tempo, etc.

## Unidade 4 – Sequências e Trigonometria

### Capítulo 7 – Sequências

Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Sequências	Conhecimentos numéricos: Sequências e progressões/Conhecimentos algébricos	C1/C5	H2/H3/H4/H21/H22/H23
Progressão aritmética (PA)			
Progressão geométrica (PG)			
Problemas envolvendo PA e PG			

Essencialmente, uma sequência numérica é um conjunto de números colocados em uma certa ordem. Por exemplo, a sequência dos múltiplos de 7 é dada por  $(0, 7, 14, 21, 28, 35, \dots)$ . Outra sequência é esta  $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$ , que começa com 1, e os próximos números são obtidos multiplicando-se o anterior por 3.

Sequências numéricas são muito importantes em aplicações práticas. Desde a Antiguidade elas serviam como ferramenta de modelagem, ajudando a prever o comportamento de variáveis. A sequência de Fibonacci ficou famosa não só pelas várias características interessantes que apresenta, mas também pela sua utilização bem-sucedida na previsão do crescimento de populações. A conclusão apocalíptica de Malthus sobre os problemas gerados pelo crescimento populacional também se baseou em sequências numéricas. Muitos aspectos relacionados à segurança de bancos de dados, ligados à internet, utilizam-se de sequências de números primos gigantesco, difíceis de visualizar.

No primeiro tópico do capítulo apresentamos a definição formal de sequência. É fundamental que os alunos percebam a importância da ordem. Escrever uma sequência como uma função que leva números naturais não nulos em números reais é colocar essa sequência em ordem. O primeiro número que aparecer estará ligado ao número 1, o próximo número ligado ao 2, e assim por diante. Para facilitar, utiliza-se outro tipo de escrita. No exemplo anterior, em vez de se escrever  $f(1) = 1$ , escreve-se  $a_1 = 1$ . Da mesma forma,  $f(2) = a_2 = 3, f(3) = a_3 = 9, \dots$  O índice determina a posição ocupada por aquele valor. É muito comum os alunos confundirem o índice com o próprio valor.

É interessante pedir aos alunos que criem exemplos de sequências, utilizando essa nova linguagem para representá-la. Incentive-os a criar tanto sequências finitas como infinitas. Pergunte se eles conseguem escrever uma frase ou uma fórmula que ajude a encontrar todos os termos que pertencem a essa sequência. Essa pergunta retoma, do estudo da linguagem de conjuntos, a ideia de buscar a caracte-

terística comum ao conjunto, a característica que dá a identidade ao conjunto. No exemplo **d** (lançamento das moedas) essa ideia fica bem clara. A expressão  $a_n = 2^n$  é a lei que nos permite encontrar todos os termos que pertencem a essa sequência; ela define quem faz parte e quem não faz parte dela. O número 8 faz parte, pois  $8 = 2^3 = a_3$ . Além disso, descobrimos que o número 8 ocupa a terceira posição na sequência.

Depois que os alunos tiveram contato com os fundamentos da sequência, a seção **Leitura** explica como surgiu a sequência de Fibonacci. Esse pode ser um bom momento para uma pequena pesquisa histórica, já que Fibonacci foi um dos primeiros pensadores do Renascimento. Devido ao trabalho de seu pai, ele passou muito tempo no Egito e teve a oportunidade de aprender uma Matemática muito mais avançada do que a que existia na Europa da época e, com isso, teve papel importante na transformação cultural, econômica e política que ocorreu no Ocidente. Além disso, ainda há muito o que se discutir sobre o número áureo ( $\phi$ ), que, assim como o pi ( $\pi$ ), teve papel importantíssimo no desenvolvimento da Matemática e da Filosofia grega.

O exercício 1 apresenta diversas possibilidades de leis de formação. Existem leis lógicas (item **d**), leis que dependem das operações de soma, multiplicação e potência (itens **a**, **b** e **f**) e leis de recorrência (itens **c** e **e**). Os exercícios 2 a 8 trabalham o reconhecimento da lei de formação da sequência e a descoberta de mais informação. Os exercícios 4, 5 e 6 partem da forma matemática da lei.

Os exercícios 9 e 10 apresentam um tipo especial de sequências determinadas por recorrência. Isto é, cada elemento da sequência depende dos seus anteriores para se formar. O exemplo mais conhecido desse tipo de sequência é a de Fibonacci, onde qualquer número, exceto os dois primeiros, é formado pela soma dos dois anteriores. É importante destacar que esse tipo de sequência necessita de um ponto de partida. É preciso determinar um ou mais valores iniciais. O professor pode pedir aos alunos que criem sequências por recorrência.

O exercício 11 é um problema aberto em que o aluno é convidado a desenvolver a modelagem necessária para encontrar a solução. Pode ser interessante ressaltar as semelhanças dessa situação com o que foi estudado no capítulo de funções afins.

No restante do capítulo estudaremos dois tipos específicos de sequências, as progressões aritméticas e as geométricas. Chamamos de progressões as sequências em que, para chegar de um elemento ao seu próximo, se repete sempre a mesma operação. Progressões são diferentes de sequências recursivas, pois basta um elemento e a regra de formação para se encontrar qualquer outro elemento da sequência.

Nas progressões aritméticas (PA) as diferenças entre termos sucessivos são sempre constantes. Nas progressões geométricas (PG) as razões entre termos sucessivos é que são sempre constantes. Assim, na PA basta somar e, na PG, basta multiplicar por um valor constante para encontrar o próximo termo. Em ambos os casos, esse número que é somado ou multiplicado chama-se razão. As PAs apresentam semelhanças importantes com as funções afins e com os juros simples, e as PGs, com as funções exponenciais e os juros compostos.

Tradicionalmente se trabalha primeiro com as PAs, em que os alunos já familiarizados com a ideia de sequências numéricas entram em contato com o aparato matemático necessário para trabalhar com as progressões, que são mais simples nas PAs. Depois, aproveitando as analogias entre as duas, avançam com as PGs, que exigem mais destreza com cálculos.

Outra abordagem possível é apresentar as duas progressões ao mesmo tempo. A vantagem dessa opção está na comparação constante entre elas e suas simetrias. Os alunos aprendem comparando as diferenças.

Para começar a abordagem intuitiva de PA é recomendável apresentar situações simples e fazer perguntas diversas, abrangendo os vários conceitos que serão utilizados.

No exemplo do início do tópico **Progressão aritmética (PA)**, em que a produção inicial é de 100 000 unidades de certo produto, foi destacado o aumento de 20 000 unidades ao ano. Pela apresentação da situação, fica fácil prever quanto se espera produzir em 2020 ou 2030: basta ir somando as 20 000 unidades que se espera para o crescimento, ano a ano, até chegar ao ano que se quer saber. Mas como chegar nesses resultados sem ter que fazer tantas contas? Certamente surgirá a ideia de contar quantos anos são e multiplicar esse número pelo aumento anual.

É importante também inverter a pergunta, indagando quando se atingirá determinado valor. Por exemplo, quando a produção atingirá 400 000 unidades? Ou quando a produção dobrará/triplicará/aumentará? Também podem ser feitas perguntas que antecipem a ideia de soma dos elementos da progressão: quantas unidades serão produ-

zidas, no total, até 2020? Quando será produzida a milionésima unidade?

Ao criar um exemplo que apresente uma progressão decrescente, outras perguntas surgem. Imagine que um garoto ganhou um pacote com 40 balas. Muito disciplinado, ele planeja comer apenas três balas por dia. Quando ele comerá a última bala? Quando terá comido metade do pacote? Quantas balas ele terá daqui a uma semana? E se ele comesse quatro balas por dia? O professor e os alunos podem criar exemplos.

Quando chegar o momento da formalização, o primeiro conceito será o do termo geral. Como uma PA apresenta regularidade, fica fácil encontrar qualquer termo que pertença a ela. O primeiro termo de uma progressão é usualmente conhecido como  $a_1$ .

Se para encontrarmos o segundo termo basta somar a razão ao primeiro, temos:

$$a_2 = a_1 + r$$

A mesma coisa acontece para se chegar no terceiro termo:

$$a_3 = a_2 + r$$

Só que, como já sabemos escrever  $a_2$  em função de  $a_1$ , podemos reescrever a expressão acima como:

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

Portanto:

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_1 + 4r$$

e, naturalmente, os alunos vão perceber que é fácil encontrar a fórmula de qualquer termo. Para isso, basta pegar o  $a_1$  e somar a razão uma vez a menos do que a posição do termo que se quer:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Os exercícios resolvidos 1 e 2 e os exercícios propostos 12 a 22 ajudam a fixar o conhecimento. Os exercícios resolvidos 3 e 4 e os exercícios propostos 23 a 30 exigem um pouco mais de álgebra, raciocínio lógico e interpretação de texto. O exercício resolvido 5 mostra passo a passo como resolver uma situação-problema que envolve progressão aritmética.

Em vez de pedir, como o professor de Gauss, aos seus alunos que somem os 100 primeiros números naturais, peça a eles que somem os dez primeiros. Uma tarefa simples, em que eles podem conferir o resultado. Escreva os números de 1 a 10 na lousa e mostre que, somando os números que estão à mesma distância das extremidades, o resultado é constante ( $1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 11$ ). E qual é a relação desse resultado com a soma total da PA? A soma dos 10 primeiros números naturais é 55 ( $S_{10} = 55$ ), que é 5 vezes o 11. O número 5, não por acaso, é metade de 10, que é a quantidade de números que foram somados.

$$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot 11$$

Já o 11 é o resultado constante que apareceu anteriormente. Poderíamos utilizar qualquer uma das somas, mas a que tem como fatores as extremidades da sequência parece a mais indicada.

$$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot (1 + 10)$$

Pois, sendo  $n$  o número total de elementos somados, podemos reescrever a fórmula que nos dá a soma dos termos de uma PA finita assim:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Os exercícios propostos 31 a 34 são de aplicação direta. Os exercícios 35 a 37 são mais desafiadores e dialogam com outros temas da Matemática. Os exercícios 38 a 42 são problemas que exigem interpretação de texto.

Com algumas alterações, os exemplos usados para introduzir o estudo de PA servem para o estudo de PG. É importante ressaltar que agora o intervalo entre os números não é mais constante, mas a razão entre um número e seu antecessor é.

Os exercícios 43 e 44 ajudam a reconhecer esses elementos e a começar a compreender as semelhanças e diferenças entre PA e PG.

A ideia de taxa de crescimento é uma ideia fundamental para a Economia. O exercício resolvido 11 mostra como é simples encontrá-la, e o exercício proposto 61 ajuda a fixar essa ideia. Esse comportamento é idêntico ao das funções exponenciais. Pode ser interessante buscar algum exercício feito anteriormente, durante os estudos sobre funções exponenciais, e refazê-lo com essa nova ferramenta.

Uma diferença importante entre as progressões aritméticas e geométricas é que as geométricas, além de poderem ser crescentes, decrescentes ou constantes, ainda podem ser alternadas. Isso acontecerá quando a razão for negativa.

Para encontrar o termo geral de uma PG, o procedimento é parecido com o da PA. A letra  $q$  é usada para representar a razão da PG, ela foi escolhida por ser a primeira letra da palavra *quociente*. Os próximos termos podem ser escritos em função de  $a_1$  e  $q$ .

$$a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

E seguindo a mesma lógica:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$

Chegamos à fórmula geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

É interessante destacar a simetria que existe entre as duas fórmulas. No lugar da soma, a multiplicação. No lugar da multiplicação, a potenciação.

Os exercícios resolvidos 12 a 16 e os exercícios propostos 45 a 62 oferecem a oportunidade de praticar o conhecimento recém-adquirido. Os exercícios propostos 54 a 56

exigem mais álgebra. Os exercícios propostos 57 a 62 envolvem a interpretação de situações-problema.

Para somar os termos de uma PG primeiro é preciso identificar se ela é finita ou infinita. Essa questão não se apresentava no estudo de PA, pois elas são infinitas e nunca convergem para algum valor específico, ou seja, elas tendem ao infinito. Se a PG for finita, a fórmula para encontrar a soma de seus termos é  $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ . A demonstração dessa fórmula é um belo exemplo de argumentação matemática.

Se a PG tiver infinitos termos, a princípio pode parecer impossível calcular sua soma. Afinal, são infinitos números. Mas, e se os números forem ficando cada vez menores, não chega uma hora em que o resultado dessa soma para de crescer? A soma de uma PG infinita, com  $-1 < q < 1$ , é dada pela fórmula  $S = \frac{a_1}{1 - q}$ .

Os exercícios resolvidos 17 e 18 e os propostos 63 a 68 tratam de somas de sequências finitas. Os exercícios resolvidos 19 e 20 e os propostos 69 a 73 tratam de somas de sequências infinitas.

Provavelmente, o problema mais antigo, registrado em forma escrita, envolvendo progressão geométrica, está descrito em um papiro egípcio, o papiro de Rhind. Esse problema é abordado em A progressão geométrica mais antiga, uma interessante fonte de leitura, que poderá servir como base para a exploração de outros problemas encontrados nesse mesmo documento antigo, ou em outros documentos históricos nos quais problemas matemáticos são retratados. O problema 79 do papiro de Rhind é apresentado e deve ser relacionado à soma dos  $n$  termos de uma PG.

Não deixe de trabalhar com seus alunos o tópico **Problemas envolvendo PA e PG**, pois ele apresenta exercícios desafiadores, que vão ajudar os alunos a desenvolver suas habilidades algébricas e o raciocínio lógico. O exercício 74, por exemplo, é um bom teste para verificar se seus alunos conseguem articular os conceitos, pois, se eles tentarem resolver a questão só com a álgebra, a tarefa se tornará muito complicada. Mas, se eles perceberem que todos os termos das duas sequências podem ser escritos em função de uma única incógnita, o exercício será resolvido rapidamente.

A seção **Outros contextos** fornece material para uma interessante discussão interdisciplinar. Um tema de extrema importância social, direcionado à saúde, é a discussão sobre a automedicação e o uso indiscriminado de medicamentos. Por meio de textos e tabelas será possível embasar um debate dirigido sobre intoxicações ocasionadas por ingestão de medicamentos e sobre o tempo de ingestão de um medicamento, utilizando-se o conceito de meia-vida de uma substância. O debate dirigido ou outra atividade correlata são uma ótima oportunidade para o desenvolvimento de projetos em conjunto com os professores de Química, Biologia e Educação Física.

## Capítulo 8 – Trigonometria no triângulo retângulo

Tópico	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Semelhança de triângulos	Conhecimentos geométricos: Posições de retas, Teorema de Tales, Semelhança de triângulos	C2	H7/H8/H9
Relações métricas no triângulo retângulo	Conhecimentos geométricos	C2	H7/H8/H9
Relações trigonométricas no triângulo retângulo	Conhecimentos geométricos: Trigonometria do ângulo agudo	C2	H7/H8/H9

A Trigonometria é um assunto interdisciplinar por si só. Ela nasceu de necessidades práticas de medição. Primeiramente, possibilitando a medição indireta de objetos distantes, como morros, pirâmides ou pontes. Depois, extrapolando seu alcance, possibilitou a determinação das posições relativas das estrelas, o que auxiliou na navegação e ajudou a melhorar a precisão dos calendários e das estações. Ainda hoje a Trigonometria é fundamental para a Astronomia, a Engenharia, a Medicina, a Agricultura, a Física, etc.

Algumas escolhas precisam ser feitas na abordagem deste tópico. Se os seus alunos iniciaram o trabalho com a trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental, o professor pode avaliar se vale a pena focar na resolução de exercícios. Neste caso, uma boa seleção de exercícios poupará tempo. Porém, para os alunos que não estudaram o conceito de semelhança (ou aprenderam de fato) é fundamental que ele seja trabalhado neste momento. Os estudos posteriores de geometria ficariam muito prejudicados ou até mesmo impossibilitados sem esse conhecimento.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), pela Norma ABNT NBR ISO 80000-2, válida a partir de 17 de agosto de 2012, recomenda o uso da notação  $\tan x$ ,  $\cot x$  e  $\csc x$ , por isso fizemos essa alteração em nossa coleção.

Nesta coleção, a trigonometria será retomada no Volume 2, aprofundando as técnicas de cálculos, ampliando suas aplicações, culminando no estudo das funções trigonométricas e, no Volume 3, abordando algumas equações e relações trigonométricas.

As ideias básicas da Trigonometria surgem das aplicações de conceitos como o teorema de Tales e a ideia de semelhança de polígonos.

Tales é considerado por muitos o primeiro filósofo da História, e seu teorema é uma das primeiras grandes descobertas científicas. Ele formaliza a ideia de proporção e com ela define um conceito fundamental: o de semelhança.

A forma mais usual de se apresentar o teorema de Tales é com um diagrama de feixes de retas paralelas intersectados por duas retas transversais. Embora ele seja muito simples, duas ideias costumam gerar confusão na cabeça dos

alunos. A primeira confusão está no fato de que, quando o teorema enuncia que “a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra”, não está óbvio que os segmentos da mesma transversal podem estar parcialmente sobrepostos. Essa situação aparece no exercício 3, em que a razão precisa ser encontrada entre o tamanho total dos três terrenos com o tamanho de cada um deles. A ideia de segmentos correspondentes é bastante intuitiva. Uma maneira direta de definir essa relação é que segmentos correspondentes são limitados pelas mesmas duas retas paralelas.

A outra confusão costuma aparecer quando as transversais se cruzam, como no exercício 2. Os alunos têm a tendência de considerar os valores da direita como pertencentes à mesma classe, e os valores da esquerda como pertencentes à outra classe, estabelecendo razões entre segmentos contidos em retas diferentes.

O exercício 5 apresenta o problema da projeção de uma sombra. Essa técnica de comparar a sombra de um objeto com sua altura está na origem do surgimento da trigonometria e também pode motivar o estudo da semelhança em triângulos. A figura do exercício 6 ajuda a reforçar que não importa a posição do feixe de paralelas nem os ângulos formados pelas transversais. É importante destacar que é possível traçar no ponto  $A$  uma paralela às retas  $BB'$ ,  $CC'$  e  $DD'$ .

Os exercícios sobre semelhança de triângulos em geral não apresentam dificuldades na parte algébrica. O que é importante ressaltar é a argumentação. No exercício resolvido 3, por exemplo, a primeira frase é muito mais importante para a solução do problema do que as equações, pois ela apresenta a justificativa lógica para o que será feito. Os exercícios 7, 8 e 12 exigem essa argumentação. Nos demais exercícios os alunos deverão reconhecer o que torna os triângulos semelhantes, encontrar os lados homólogos, montar a equação e resolvê-la. Destaque para o exercício 12, que exigirá que o aluno perceba que, apesar de semelhantes, os triângulos não estão na mesma posição, portanto os lados homólogos



não estão sobre a mesma reta. Os exercícios 14 e 16 exigirão um pouco mais de álgebra, e o exercício 15 exigirá uma abstração que será muito útil quando começar o estudo da trigonometria. Pelo mesmo motivo, é importante dar destaque à situação e aos exercícios apresentados na parte de Uso de semelhança para medir distâncias inacessíveis.

Os exercícios 20 a 26 expandem o conceito de semelhança para polígonos quaisquer. Uma maneira de justificar a possibilidade de usar a semelhança em polígonos é que qualquer polígono pode ser dividido em triângulos. Se os triângulos de um polígono forem semelhantes aos triângulos do outro polígono, esses polígonos só podem ser semelhantes. O exercício 26 é muito útil para exemplificar a presença da Matemática no dia a dia. Nele se explica os diferentes tipos de monitores de computador e TV. É uma questão cotidiana, mas que pouca gente entende.

Terminado o estudo das semelhanças, o próximo passo é estudar o triângulo retângulo. Antes de entrar na Trigonometria propriamente dita, estudaremos suas relações métricas.

O triângulo retângulo é uma escolha natural. Ele possui um ângulo reto e é muito simples de construir. Se o aluno olhar a sua volta, certamente encontrará centenas (ou milhares) de ângulos retos. Os agrimensores egípcios já sabiam que bastava marcar doze partes iguais em uma corda para conseguir o triângulo retângulo mais simples de todos, com lados medindo 3, 4 e 5 unidades.

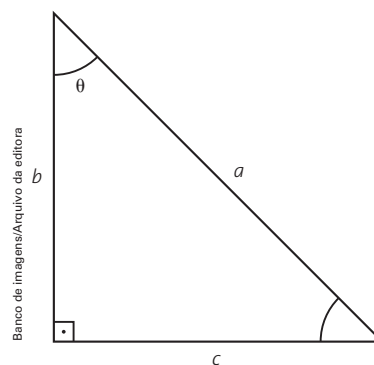
As relações métricas são um conjunto de relações específicas entre os elementos do triângulo retângulo que valem sempre, independente do formato do triângulo, bastando que seja retângulo. A mais conhecida de todas é o Teorema de Pitágoras.

As relações apresentadas são uma seleção das expressões que apresentam alguma facilidade de cálculo ou alguma relação especial entre seus elementos. Um exercício interessante pode ser apresentar os elementos do triângulo para os alunos e pedir a eles que procurem essas relações.

O exercício resolvido 5 e os exercícios 27, 28, 29 e 30 apresentam aplicações diretas das relações métricas. O exercício resolvido 6 e o exercício 31 apresentam aplicações práticas e interdisciplinares.

Todo esse estudo das semelhanças e das relações métricas no triângulo retângulo fornece a base para iniciarmos o estudo da Trigonometria.

Com os três lados do triângulo, temos seis razões possíveis. Considerando um triângulo retângulo qualquer, com hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , temos as raízes:

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \text{ e } \frac{c}{b}.$$


Ao longo da História, cada uma delas recebeu um nome. Considerando o ângulo  $\theta$  entre o cateto  $b$  e a hipotenusa  $a$ , esses nomes são:  $\frac{c}{a} = \text{seno } \theta$ ,  $\frac{b}{a} = \text{cosseno } \theta$ ,  $\frac{c}{b} = \text{tangente } \theta$ ,  $\frac{b}{c} = \text{cotangente } \theta$ ,  $\frac{a}{b} = \text{secante } \theta$  e  $\frac{a}{c} = \text{cossecante } \theta$ .

Algumas questões podem surgir: Para que essas relações servem? Por que não continuamos usando apenas os ângulos? Medir um ângulo não é uma das coisas mais fáceis. Medir uma linha reta, que é uma coisa simples, já envolve algum erro. Agora, medir um ângulo, um espaço vazio entre duas retas, pode ser muito complicado. Cometer um erro de um centímetro na largura ou comprimento de uma estrada é praticamente insignificante. Cometer um erro de 1 grau na construção dessa mesma estrada pode fazer com que ela chegue a um destino totalmente errado.

Dessa forma, a Trigonometria oferece a enorme vantagem de medir ângulos por meio de comparação entre as medidas de segmentos de retas. Com o seno, o cosseno e a tangente, duas medidas quaisquer de um triângulo retângulo bastam para se obter a medida do ângulo.

Os exercícios 32 a 35 ajudam a fortalecer essa ideia de que as razões trigonométricas servem para comparar e medir ângulos. Os exercícios 36 a 42 introduzem a associação entre ângulos e os valores das relações trigonométricas. Os exercícios 37, 40, 41 e 42 apresentam uma importante ferramenta: usar as relações entre as razões trigonométricas para, de um valor, encontrar outros.

O exercício 39 antecipa o assunto do próximo tópico: os ângulos notáveis. Nele há a explicação para esses ângulos serem notáveis: a diagonal do quadrado forma um ângulo de  $45^\circ$  com a base, o triângulo equilátero é formado por três ângulos de  $60^\circ$ , sendo que, quando o dividimos ao meio, obtemos dois triângulos retângulos semelhantes com ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ . Outro motivo para esses três ângulos se destacarem é que eles representam as divisões mais simples de um ângulo reto: um terço, metade e dois terços. Essa ideia será muito importante no Volume 2, quando será estudado o círculo trigonométrico.



Depois de ter sido trabalhado ao longo do capítulo o problema de medir distâncias inacessíveis, em As distâncias da Terra ao Sol e à Lua é problematizado o questionamento humano sobre o quão distantes estão o Sol e a Lua do planeta Terra. A contextualização histórica é feita de forma detalhada no que diz respeito ao pensamento matemático utilizado para se chegar à conclusão desse problema. Sugere-se que o professor dê uma atenção especial a ele; este pode ser explorado de diversas formas, por exemplo, em conjunto com os professores das outras disciplinas pode-se propor a organização de uma feira cultural, com a seguinte temática: Os questionamentos do homem – problemas de ontem e de hoje.

O exercício resolvido 7 apresenta o tipo de modelagem mais simples possível usando trigonometria. Esse tipo de problema é muito frequente em Engenharia e nos Esportes. No ciclismo de estrada, por exemplo, as montanhas são classificadas de acordo com inclinação média de suas subidas. Para isso, encontra-se a razão entre o quanto se sobe em altura (cateto oposto) e a distância percorrida (hipotenusa), obtendo-se assim o seno do ângulo de inclinação da montanha. O exercício resolvido 8 mostra todas as passagens necessárias para a resolução de um problema de medição de altura inacessível.

Os exercícios propostos 43 a 58 apresentam grande variedade de dificuldade e temas, possibilitando ao aluno praticar todos os assuntos estudados no capítulo. Destaque: o exercício 49 apresenta uma técnica muito antiga, motivadora do uso da trigonometria; o exercício 51 relaciona a Trigonometria com conteúdos estudados pela Física.

A seção **Pensando no Enem** apresenta exercícios desafiadores e que estão direcionados para alguma habilidade da Matriz de Referência do Enem para o campo de Matemática e suas tecnologias. O primeiro exercício apresenta brevemente o conceito de fractal, relacionando as interações do fractal com o número de triângulos formados, tornando-se perceptível a formação de uma sequência. O exercício 2 apresenta indicações históricas envolvendo ternas pitagóricas.

Na seção **Vestibulares de Norte a Sul**, o aluno tem a oportunidade de autoavaliar-se em relação ao conteúdo estudado na unidade e também de conhecer os principais vestibulares que existem nas cinco regiões do Brasil, podendo verificar no final do livro, na seção **Significado das siglas de vestibulares**, o nome da instituição na qual a questão foi aplicada.

## Atividades complementares à Unidade 4

A atividade a seguir deve ser feita em trios de alunos. O objetivo dela é levar os alunos a conjecturar e demonstrar.

1. Considerem as funções quadráticas  $f(x) = \frac{x^2 + x}{2}$ ,

$g(x) = x^2 + x$  e  $h(x) = \frac{x^2 + 3x}{2}$ . Cada aluno deve

escolher uma das funções e com ela:

a) determinar as imagens dos valores inteiros consecutivos  $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5$  e  $x = 6$ ,

escrevendo as 7 imagens obtidas em sequência, como no exemplo:  $(0, 3, 7, 12, 18, 25, 33)$ . Vamos chamar essa sequência de  $I$ , letra inicial de imagem.

- b) efetuar as diferenças entre os valores consecutivos dessa sequência  $(i_2 - i_1, i_3 - i_2, i_4 - i_3, \text{etc.})$  criando uma nova sequência chamada  $D$  (diferença). Tomando por base o exemplo do item **a** e fazendo as diferenças consecutivas da sequência  $(0, 3, 7, 12, 18, 25)$ , teríamos:  $3 - 0 = 3; 7 - 3 = 4; 12 - 7 = 5; 18 - 12 = 6$  e  $25 - 18 = 7$ . Assim, a sequência obtida seria  $D = (3, 4, 5, 6, 7, 8)$ .
- c) Terminada essa etapa, o trio deve analisar conjuntamente as três sequências  $D$  obtidas e tentar perceber uma característica interessante comum a elas.
- d) Conjecturem uma regra para essa propriedade observada. Por exemplo: “Em uma função quadrática, a diferença entre as imagens de valores inteiros consecutivos é sempre ...”.
- e) Será que isso é sempre verdadeiro? Testem a conjectura com mais uma função quadrática qualquer, calculando suas imagens para alguns valores inteiros consecutivos.
- f) Demonstrem essa conjectura. Dica: Refaçam o processo anterior, usando uma função quadrática genérica, ou seja,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Então, se  $n$  for um inteiro qualquer, seu consecutivo é...

### Resolução:

a) Sequência de  $f$ :  $I_f = (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21)$

Sequência de  $g$ :  $I_g = (0, 2, 6, 12, 20, 30, 42)$

Sequência de  $h$ :  $I_h = (0, 2, 5, 9, 14, 20, 27)$

b) Diferença de  $f$ :  $D_f = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

Diferença de  $g$ :  $D_g = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$

Diferença de  $h$ :  $D_h = (2, 3, 4, 5, 6, 7)$

- c) Deve-se perceber que as três sequências são PAs.
- d) Em uma função quadrática, a diferença entre as imagens de valores inteiros consecutivos é sempre uma PA.
- e) Sim, parece verdadeiro, pois o teste funcionará, se as contas foram feitas corretamente. A certeza só pode ser dada se demonstrarmos.
- f) Seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Calculamos a imagem de dois inteiros consecutivos,  $n$  e  $n+1$ :

$$f(n) = an^2 + bn + c$$

$$f(n+1) = a(n+1)^2 + b(n+1) + c =$$

$$= an^2 + 2an + a + bn + b + c$$

A diferença  $D(n)$  entre as duas imagens calculadas é  $D(n) = f(n+1) - f(n) = 2an + a + b$

Reescrevendo  $a$  como  $3a - 2a$ , temos:

$$D(n) = 2an - 2a + 3a + b = 2a(n-1) + (3a + b)$$

ou seja,  $D(n)$  é uma PA de  $a_1 = 3a + b$  e razão  $2a$ .

Assim, demonstramos que, em uma função quadrática, a diferença entre as imagens de valores inteiros consecutivos é sempre uma PA.

A atividade a seguir é de exploração e de investigação, e contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos.

2. Doze números naturais estão escritos em uma linha. O quarto número é 4 e o décimo é 12. A soma de quaisquer três números vizinhos é 333. Investigue, descubra e escreva os doze números.

**Resolução:**

Possível solução: chamando de  $x$  o quinto número, o sexto será  $329 - x$  (pois,  $4 + x + 329 = 333$ ) e, assim, escrevemos a sequência:

\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, 4,  $x$ ,  $329 - x$ , 4,  $x$ ,  $329 - x$ , 4,  $x$ ,  $329 - x$

Logo:

$$329 - x = 12 \Rightarrow x = 317$$

Então, a sequência de números é dada por:

4, 317, 12, 4, 317, 12, 4, 317, 12, 4, 317, 12

A atividade a seguir representa uma aplicação das progressões (geométricas e aritméticas) a uma situação real. Essa situação é importante, pois contribui para o desenvolvimento da educação financeira do aluno, que será útil tanto na vida pessoal quanto profissional.

3. Os principais tipos de conta são a conta de depósito à vista, a conta de depósito de poupança e a “conta-salário”. A conta de depósito à vista é o tipo mais usual de conta bancária. Nela, o dinheiro do depositante fica à disposição do cliente para ser sacado a qualquer momento. A poupança foi criada para estimular a economia popular e permite a aplicação de pequenos valores, que passam a gerar rendimentos mensalmente. A “conta-salário” é um tipo especial de conta de registro e controle de fluxo de recursos, destinada a receber salários, proventos, soldos, vencimentos, aposentadorias, pensões e similares. A “conta-salário” não admite outro tipo de depósito além dos créditos da entidade pagadora e não é movimentável por cheques.

Disponível em: <[www.bcb.gov.br/?CONTASFAQ](http://www.bcb.gov.br/?CONTASFAQ)>. Acesso em: 4 abr. 2016.

João e Maria resolveram abrir duas contas bancárias: Maria abriu uma conta poupança e João, uma conta corrente. Considerando que no país onde moram a unidade monetária seja o “Taco” (\$T), que a inflação é tal e que todo final de mês o banco corrija o saldo depositado na poupança em 10% e que cada um abriu sua conta com \$T 1 000,00, faça o que se pede e, quando necessário, utilize a tabela a seguir:

$1,1^2 = 1,21$	$1,1^3 = 1,33$	$1,1^4 = 1,46$	$1,1^5 = 1,61$	$1,1^6 = 1,77$
$1,1^7 = 1,95$	$1,1^8 = 2,14$	$1,1^9 = 2,36$	$1,1^{10} = 2,59$	$1,1^{11} = 2,85$

- I. Supondo que o casal não fez nenhum outro depósito depois da abertura de conta:

- a) preencha a tabela com os valores que cada um tem em conta no dia primeiro de cada mês a seguir:

Saldo em \$T	1º de jan.	1º de fev.	1º de mar.	1º de abr.
<b>João</b>	1 000,00			
<b>Maria</b>	1 000,00			

- b) A sequência de valores que representam o saldo da conta de João pode ser classificada como uma progressão aritmética? E como uma progressão geométrica? Se sim, qual é a razão?
- c) A sequência de valores que representam o saldo da conta de Maria pode ser classificada como uma progressão aritmética? E como uma progressão geométrica? Se sim, qual é a razão?
- d) Se João depositar todo início de mês \$T 1000,00, quanto terá no final de dezembro desse mesmo ano?
- e) Qual será a soma dos 12 termos da sequência de valores obtidos no item anterior?
- f) No caso de Maria, se ela fizesse apenas o primeiro depósito, \$T 1000,00 no início de janeiro, quanto ela teria no final de novembro?

- II. Faça um diagrama cartesiano dos saldos ao final de cada mês nas contas de João e Maria para o caso de um único depósito de \$T 1000,00 no início de janeiro. Considere apenas os 6 primeiros meses.

- III. Faça um diagrama de barras para a situação descrita no item d.

**Resolução:**

- I. a) João: (1000,00; 1000,00; 1000,00; 1000,00)  
 Maria: (1000,00; 1100,00; 1210,00; 1330,00; 1460,00)

- b) Tanto pode ser uma PA como uma PG, ambas constantes. No caso de PA, a razão é zero e, no caso de PG, a razão é 1.

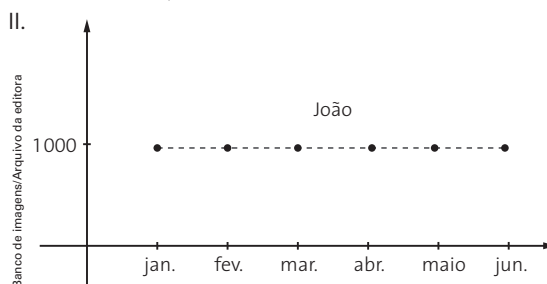
- c) No caso de Maria, a sequência é uma PG de razão:  
 $q = \frac{1100}{1000} \Rightarrow q = 1,1$

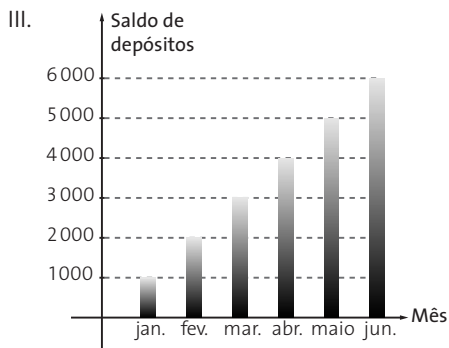
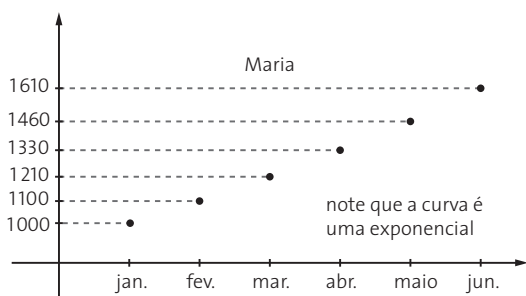
- d) O saldo da conta de João no final de janeiro será \$T 1000,00, 2 000,00 no final de fevereiro; 3 000,00 no final de março, e assim sucessivamente, ou seja, uma sequência na forma de uma PA de primeiro termo igual a 1000 e razão também igual a 1000. Assim, o 12º termo dessa PA é 12 000,00.

e)  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow S_{12} = \frac{(1000 + 12000) \cdot 12}{2} = 78000$

- f) Para Maria temos uma sequência na forma de PG (1000,00; 1210,00; ...) da qual queremos o 11º termo, assim:

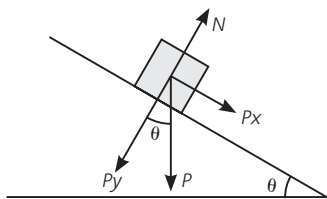
$$a_{12} = a_1 \cdot q^{(n-1)} \Rightarrow a_{12} = 1000 \cdot 1,1^{(12-1)} = 1000 \cdot 2,85 = 2850$$





A atividade a seguir representa um momento de interdisciplinaridade com Física.

4. Quando um objeto se encontra sobre um plano inclinado, sofre a ação de uma força de reação normal ao apoio, conforme figura abaixo. (Neste caso foi desprezada a força de atrito.)



A força peso age na vertical, dirigida para o centro da Terra (de cima para baixo). Fixemos um plano cartesiano com o eixo  $x$  paralelo ao plano inclinado e o eixo  $y$  apontando para a direção da força normal, perpendicular a esse plano. A força resultante na direção  $x$  é  $P_x$  e pode ser escrita em função do ângulo  $\theta$ . A força normal tem o mesmo módulo de  $P_y$ :  $N = P_y$ . No sistema de referência adotado, a força peso é representada por duas componentes:  $P_x$  na direção  $x$  ou horizontal, e  $P_y$  na direção  $y$ , ou vertical.

Qualquer uma das componentes pode ser calculada por expressões simples da Matemática.

Veja na figura acima que a força peso é dividida em duas componentes,  $P_x$  e  $P_y$ , e que a componente  $P_y$  é neutralizada pela reação normal. Dessa forma, fica a componente  $P_x$  para ser vencida.

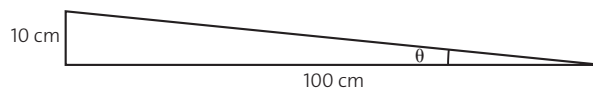
A ideia de plano inclinado é muito utilizada em arquitetura e na construção civil. Um bom exemplo disso é o cálculo da inclinação dos telhados de um modo geral. O objetivo de calcular a inclinação do telhado é determinar a altura da cumeeira ou o comprimento do pendural, no caso de telhados de madeira.

A inclinação dos telhados é medida em porcentagem ou percentual, e geralmente ouvimos: “O telhado tem inclinação de 10%”, ou “O telhado tem inclinação de 30%”. Mas o que significa isso?

10% é igual a  $\frac{10}{100}$ . Colocando-se a unidade centímetro (cm), temos:

10% =  $\frac{10 \text{ cm}}{100 \text{ cm}}$ , ou seja, a cada 100 cm (1 metro) na horizontal, o telhado sobe 10 cm na vertical.

Podemos observar que a inclinação é igual ao valor numérico da tangente do ângulo  $\theta$ . Veja a figura:

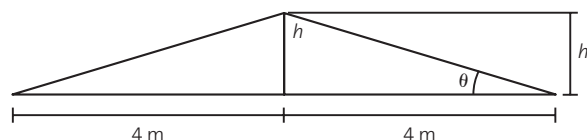


Agora, faça o que se pede:

- Calcule a altura da cumeeira (parte mais alta) de um telhado de duas águas com 8 m de largura e inclinação de 30%.
- No item **a**, qual é o significado da taxa de inclinação dada?
- Considere um plano inclinado formando um ângulo  $\theta$  com a horizontal e um bloco de massa  $m$  em sua superfície. Despreze o atrito e encontre a expressão de suas componentes  $P_x$  e  $P_y$  em função desse ângulo. Considere também a aceleração da gravidade no local igual a  $g$  e lembre-se de que força peso ( $P$  em Newton, N) é igual a  $mg$ .
- Considere um plano inclinado com um ângulo de 30° em relação à horizontal e sobre esse plano um bloco de 40 kg.
  - Faça um desenho ilustrando a situação e destaque o triângulo de forças.
  - Calcule o valor das componentes  $P_x$  e  $P_y$ .
  - Qual deverá ser o valor do ângulo de inclinação nesta situação se a força normal for de 200 N?
- Na China ou no Japão, os telhados são bem curvados, já na Suíça e em alguns outros países que nevam os telhados são altos e bem inclinados. Pesquise o porquê.

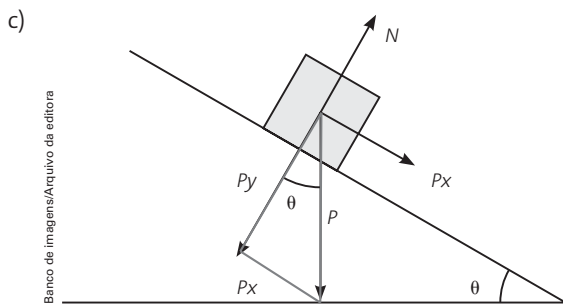
**Resolução:**

- Se o telhado terá 8 m de largura e é duas águas, sua cumeeira estará no meio, a 4 m da largura. Como o telhado tem inclinação de 30%, então:



$$\tan \theta = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{30}{100} = \frac{h}{4} \Rightarrow 0,3 = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 1,2 \text{ m}$$

- Significa que a cada metro horizontal de telhado a altura devida elevar-se em 30 cm.

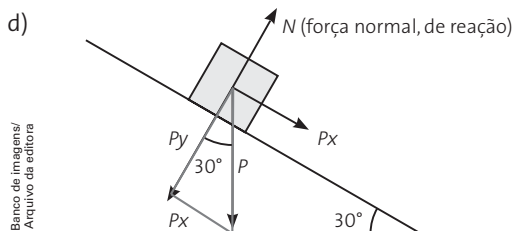


A força peso será  $P = mg$ ; logo,  $\sin \theta = \frac{P_x}{P}$  e

$$P_x = P \cdot \sin \theta, \text{ ou } P_x = mg \cdot \sin \theta.$$

Para a componente  $P_y$ , vem que  $\cos \theta = \frac{P_y}{P}$  e

$$P_y = P \cdot \cos \theta \text{ ou } P_y = mg \cdot \cos \theta$$



$$\begin{aligned} P_x &= mg \sin \theta \Rightarrow P_x = 40 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = \\ &= 40 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 200 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_y &= mg \cos \theta \Rightarrow P_y = 40 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ = \\ &= 40 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3} \text{ N} \end{aligned}$$

A força normal é uma reação da componente  $P_y$ , portanto queremos  $P_y = 200 \text{ N}$ . Logo, teremos:

$$\begin{aligned} P_y &= mg \cos \theta \Rightarrow 200 = 40 \cdot 10 \cdot \cos \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{200}{400} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \end{aligned}$$

e) Telhados curvos jogam a água da chuva para longe do “pé” da casa e telhados com alta inclinação possibilitam um escorregamento natural da neve acumulada.

**Atividade prática:** uma atividade prática ajuda a tornar a aula mais atraente, diversificada, ilustrada e, consequentemente, mais produtiva. Embora nos últimos anos tenha ocorrido uma melhora considerável no processo de ensino da Matemática, a sua aprendizagem tem representado ainda um obstáculo para grande parte dos alunos, e por essa razão é necessário que o ideal da clareza, da motivação e da fácil compreensão da disciplina seja perseguido, procurando minimizar os entraves do seu ensino. É nessa direção que propomos a construção de um material concreto. Essa atividade pode ser feita em forma de projeto.

A construção de um teodolito, junto com a sua utilização, tem por objetivo cristalizar o conteúdo aprendido em sala de aula. Também visa tornar a Matemática mais significativa para o aluno, contextualizando e relacionando a teoria com a prática. Dessa forma, o aluno poderá utilizar as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) para resolver situações-problema.

O teodolito é um instrumento muito utilizado para medir ângulos verticais e horizontais. É basicamente um telescópio, montado sobre um tripé e usado em redes de triangulação. Os alunos precisarão, além do teodolito que será

construído, de uma trena ou uma fita métrica e da tabela com as razões trigonométricas apresentadas no livro.

Materiais necessários:

- pote plástico com tampa (por exemplo, copo de requeijão)
- xerox de um transferidor de  $360^\circ$
- pedaço de arame de 15 cm a 20 cm
- canudo ou tubo de caneta
- cartolina grossa, isopor grosso ou base de madeira de aproximadamente 20 cm por 20 cm
- cola

Procedimento para a montagem:

- Recorte o xerox do transferidor e cole na base de madeira, cartolina ou isopor.
- Cole a tampa do pote no centro do transferidor; ela servirá como base para a rotação do conjunto que formará o teodolito.
- Fure diametralmente o copo com o arame, próximo à maior base (boca do copo).
- Cole em cima da menor base o canudo ou tubo de caneta na mesma direção do arame. O arame será o ponteiro do teodolito, e o canudo ou tubo de caneta será a luneta do teodolito.

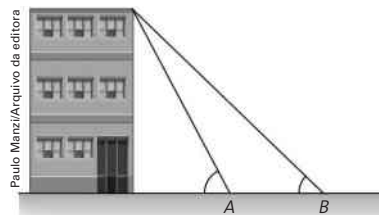


Agora, de posse do teodolito, peça aos grupos que determinem:

- a) a altura da sala (pé-direito);
- b) a altura de uma árvore;
- c) a distância até um determinado ponto. Pode ser uma distância inacessível, por exemplo, a altura de uma torre ou de um prédio em que não seja possível chegar à base.

Nas duas primeiras medições o aluno precisará conhecer a distância no chão, ou seja, a distância horizontal do teodolito à parede (cateto oposto) e o ângulo (usando o teodolito). Dessa forma, basta utilizar o cosseno do ângulo. É importante lembrar de levar em consideração a altura em que o teodolito será utilizado.

Na terceira medição o aluno deverá fazer duas medições com o teodolito e verificar a distância entre as duas medições. Após as medições, basta aplicar a tangente usando cada um dos triângulos retângulos.



O professor deve usar livremente a imaginação e propor outros exemplos para incentivar os alunos na realização dessa atividade. É importante lembrar os alunos de que a altura em relação ao solo em que for colocado o teodolito também deve ser levada em consideração.

## Caiu no Enem

Nesta seção o aluno encontra as questões das últimas provas do Enem que estão relacionadas aos conteúdos abordados neste volume. Essas questões estão classificadas de acordo com as unidades.

# 12 Resoluções dos exercícios

**Observação:** As resoluções que não estiverem nesta seção aparecem ao lado do respectivo exercício no livro do professor.

## Unidade 1

### CAPÍTULO 1

7. a)  $N = 0,333... \Rightarrow 10N = 3,333... = 3 + 0,333... = 3 + N \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 9N = 3 \Rightarrow N = \frac{1}{3}$

b)  $N = 0,1666... \Rightarrow 10N = 1,666... = 1 + 0,666... =$   
 $= 1 + \frac{6}{9} = \frac{15}{9} \Rightarrow 90N = 15 \Rightarrow N = \frac{1}{6}$

c)  $N = 0,242424... \Rightarrow 100N = 24,2424... = 24 + 0,2424... =$   
 $= 24 + N \Rightarrow 99N = 24 \Rightarrow N = \frac{8}{33}$

d)  $N = 0,12577... \Rightarrow 1000N = 125,77... = 125 + 0,77... =$   
 $= 125 + \frac{7}{9} \Rightarrow 9000N = 1132 \Rightarrow N = \frac{283}{2250}$

8.  $\frac{6}{10} = 0,6$        $\frac{1}{2} = 0,5$        $0,5\bar{2} = 0,5252...$

$0,5\bar{5} = 0,555...$        $\frac{4}{5} = 0,8$        $0,25$

$0,25 < \frac{1}{2} < 0,5\bar{2} < 0,5\bar{5} < \frac{6}{10} < \frac{4}{5}$

11. a)  $(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x \cdot y})^2$   
 $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = \sqrt{x \cdot y^2}$   
 $x \cdot y = x \cdot y$

b)  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x+y})^2$   
 $\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y^2} = \sqrt{x+y^2}$   
 $x + 2\sqrt{xy} + y = x + y$  se, e somente se,  $x$  e  $y$  forem iguais a 0.  
 Para  $x$  e  $y$  quaisquer,  $x + 2\sqrt{xy} + y \neq x + y$ .

12. c) Toda soma de dois números pares resulta em um número par.  
 d) Se  $p$  e  $q$  são números pares, então podemos escrever:  $p = 2n$  e  $q = 2m$ , em que  $n$  e  $m$  podem assumir qualquer valor natural (0, 1, 2, 3, ...). Assim,  $p + q = 2n + 2m = 2(n + m) = 2k$ , pois a soma de dois números naturais,  $n$  e  $m$ , resulta em um número natural  $k$ . Como  $p + q$  está representado por  $2k$ , sendo  $k$  um número natural, concluímos que  $p + q$  é um número par, como queríamos demonstrar.

13. a) 7

b)  $|\pi - 3| = \pi - 3$

c)  $|\pi - 5| = -(\pi - 5) = 5 - \pi$

d)  $-3 \cdot 5 = -15$

e)  $9 + 7 = 16$

f) -7

g)  $|3| = 3$

h)  $|2x - 1| = |2(-5) - 1| = |-10 - 1| = |-11| = 11$

14.  $PQ = |238 + 127| = 365$

$MQ = |238 + 31| = 269$

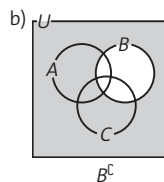
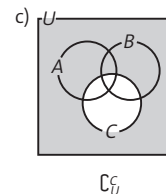
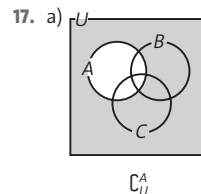
$PM = |-31 + 127| = 96$

16. a)  $C_U^A = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b)  $C_U^B = \{x | x \in U \text{ e } x \notin B\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

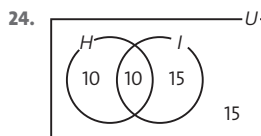
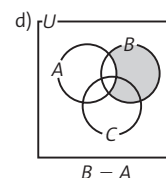
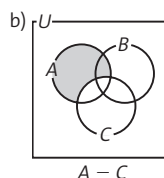
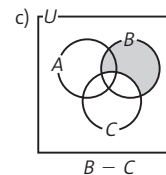
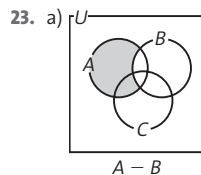
c)  $C_U^C = \{x | x \in U \text{ e } x \notin C\} = \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$

d)  $C_A^C = \{x | x \in A \text{ e } x \notin C\} = \{0, 6, 8\}$

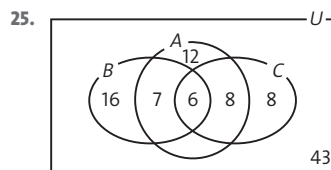


#### Resolvido passo a passo

6. a)  $200 + 150 + 100 + 50 = 500$ ; 500 panfletos de Pedagogia.  
 $350 + 200 + 100 + 150 = 800$ ; 800 panfletos de Administração.  
 $250 + 50 + 100 + 200 = 600$ ; 600 panfletos de Sistemas da Computação.

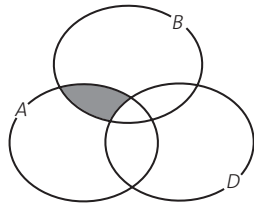


- a) Vinte e cinco alunos leram *Iracema*.  
 b) Dez alunos leram só *Helena*.  
 c)  $10 + 10 + 15 + 15 = 50$   
 Portanto, a classe tem 50 alunos.



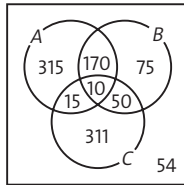
- a)  $100 - (16 + 7 + 6 + 12 + 8 + 8) = 100 - 57 = 43$   
 Assim, 43% não leem nenhum desses jornais.  
 b)  $13 - 6 = 7$ ; 7% leem os jornais A e B e não leem C.  
 c)  $16 + 7 + 6 + 8 + 8 + 12 = 57$ ; 57% leem pelo menos um jornal.

26. Conjunto A: sites que contêm a palavra AMOR  
 Conjunto B: sites que contêm a palavra BELEZA  
 Conjunto D: sites que contêm a palavra DESESPERO  
 $\text{amor beleza} - \text{desespero} = (A \cap B) - D$



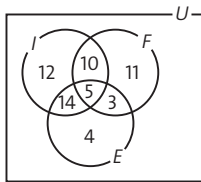
27. Consideremos:

A: famílias que assistem ao programa A  
 B: famílias que assistem ao programa B  
 C: famílias que assistem ao programa C



- a)  $1000 - (315 + 170 + 10 + 15 + 50 + 75 + 311) = 1000 - 946 = 54$   
 54 famílias  
 b) Trezentas e quinze famílias assistem somente ao programa A.  
 c)  $311 + 54 = 365$   
 365 famílias

- 28.



- a)  $100 - (12 + 11 + 4 + 10 + 14 + 3 + 5) = 100 - 59 = 41$   
 41 estudantes  
 b)  $12 + 11 + 4 = 27$   
 27 estudantes

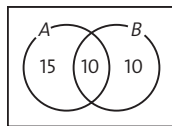
29.  $14 = 10 + 9 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 5$

30. Consideremos:

A: os que acertaram a primeira questão  
 B: os que acertaram a segunda questão  
 Como a classe tinha quarenta alunos, o número de alunos que não acertou nenhuma das questões é dado por:

$$40 - 15 - 10 - 10 = 5$$

Portanto, cinco alunos erraram as duas questões.



31.  $n(A \cup B) = 18 + 23 - 7 \Rightarrow n(A \cup B) = 34$

32. A: pessoas que gostam do programa A.

B: pessoas que gostam do programa B.

$A \cap B$ : pessoas que gostam de ambos os programas.

$A \cup B$ : pessoas que gostam do programa A ou do programa B.

Temos:

$$n(A \cup B) = 83 - 7 = 76$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Assim:

$$76 = 41 + 56 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 21$$

21 pesquisados

34. a)

- b)

- c)

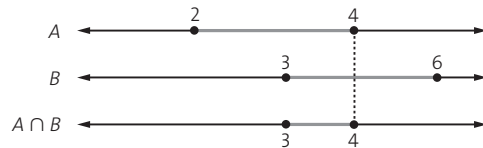
- d)

- e)

- f)

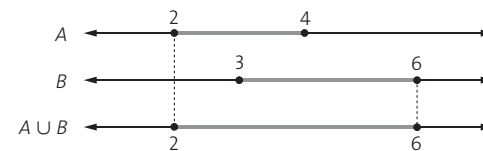
36. a)  $A = [2, 4]$  e  $B = [3, 6]$

$A \cap B$



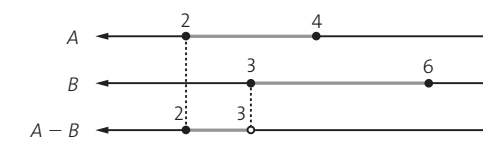
$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\} = [3, 4]$$

$A \cup B$



$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\} = [2, 6]$$

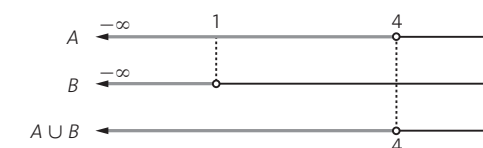
$A - B$



$$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\} = [2, 3)$$

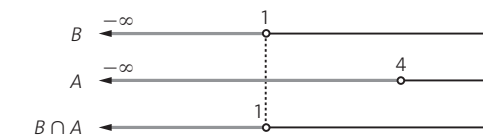
- b)  $A = (-\infty, 4)$  e  $B = (-\infty, 1)$

$A \cup B$



$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} = (-\infty, 4)$$

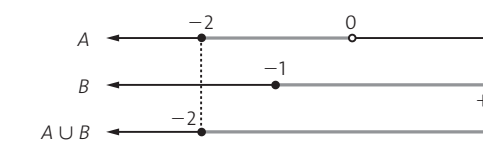
$B \cap A$



$$B \cap A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} = (-\infty, 1)$$

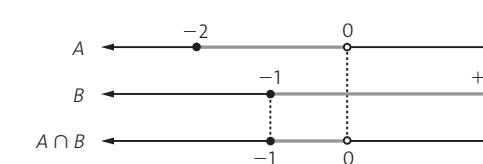
- c)  $A = [-2, 0)$  e  $B = [-1, +\infty)$

$A \cup B$



$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\} = [-2, +\infty)$$

$A \cap B$

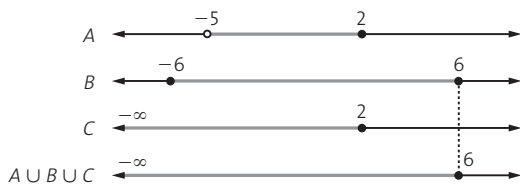


$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0\} = [-1, 0)$$



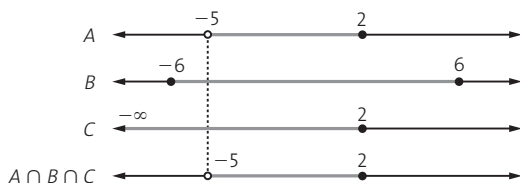
37. Dados  $A = (-5, 2]$ ,  $B = [-6, 6]$  e  $C = (-\infty, 2]$

a)  $A \cup B \cup C$



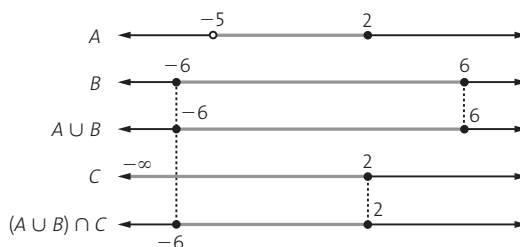
$$A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} = (-\infty, 6]$$

b)  $A \cap B \cap C$



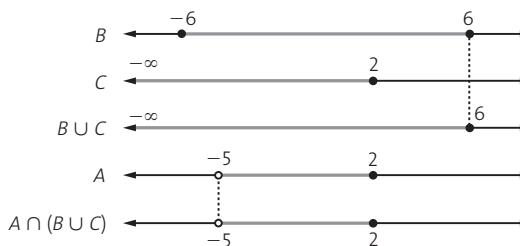
$$A \cap B \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 2\} = (-5, 2]$$

c)  $(A \cup B) \cap C$



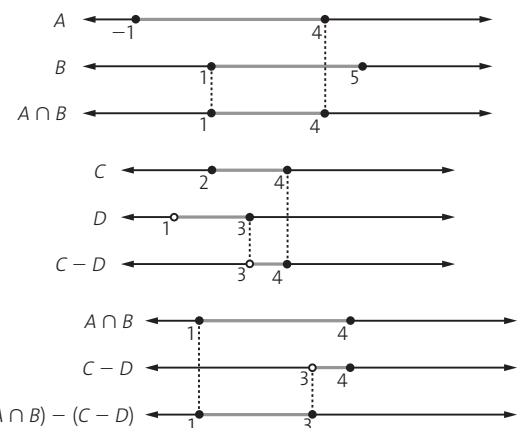
$$(A \cup B) \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 2\} = [-6, 2]$$

d)  $A \cap (B \cup C) = (B \cup C) \cap A$



$$A \cap (B \cup C) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 2\} = (-5, 2]$$

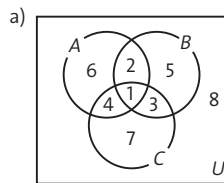
38.



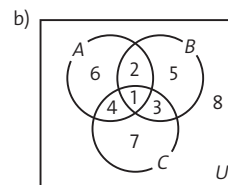
Logo,  $1 \in (A \cap B) - (C - D)$ .

39. Por exemplo, poderíamos numerar assim:

Banco de imagens/Arquivo da editora



$$(A^c \cup B)^c = \text{região 4} \cup \text{região 6}$$



$$(A^c \cup B) \cup C^c = (\text{região 4})^c$$

41. a)  $0,09 \cdot 298 = 26,82$ ; Resposta: R\$ 30,00  
 b)  $0,49 \cdot 141200 = 69188$ ; Resposta: 70 000 habitantes  
 c)  $0,22 \cdot 503 = 110,66$ ; Resposta: 100 km  
 d)  $1,1 \cdot 80,50 = 88,55$ ; Resposta: R\$ 88,00

43. a)  $1 \frac{3}{4}$  polegada ou 1,75 polegada

b)  $2 \frac{1}{4} \cdot 2,5 = 2,25 \cdot 2,5 = 5,625$  cm (menos)

c)  $100 \text{ cm} : 2,5 \text{ cm} = 40$  polegadas

d)  $\frac{3}{4}$  de 25 mm =  $\frac{3 \cdot 25}{4} = 18,75$  mm

### Para refletir

Página 19

• Nem sempre. Por exemplo, entre os números inteiros 6 e 7 não há outro número inteiro.

• Entre dois números racionais,  $x$  e  $y$ , sempre há outro número racional  $z$ .

Basta fazer:  $z = \frac{x+y}{2}$ .

## CAPÍTULO 2

4. d) Para  $x = 10$ , temos:  
 $c = 1,20 \cdot 10 = 12$  (R\$ 12,00)  
 Para  $x = 20$ , temos:  
 $c = 1,20 \cdot 20 = 24$  (R\$ 24,00)  
 Para  $x = 50$ , temos:  
 $c = 1,20 \cdot 50 = 60$  (R\$ 60,00)  
 e)  $c = 120 \Rightarrow 1,20x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{1,20} = 100$ ; 100 peças
6. a) Lucro por unidade = Preço de venda - Preço de custo  
 $L = 20 - 12 = 8$   
 Logo a função é:  $y = 8x$
7. a)  $Q = 12 \cdot (6) + 10x \Rightarrow Q = 72 + 10x$   
 b)  $16 = x + 6 \Rightarrow x = 10$   
 $Q = 72 + 10 \cdot (10) = 172$  (R\$ 172,00)  
 c)  $Q = 212 \Rightarrow 72 + 10x = 212 \Rightarrow 10x = 140 \Rightarrow x = 14$   
 Foram atendidos 20 clientes ( $14 + 6 = 20$ ).  
 d)  $C = x + 6$ ;  $x$  sem hora marcada e 6 fixos com hora marcada.

8. Este exercício está relacionado com o conteúdo de velocidade média, estudado em Física.

$x$ (h)	$d$ (km)
1	$50 \cdot 1 + 6 = 56$
2	$50 \cdot 2 + 6 = 106$
3	$50 \cdot 3 + 6 = 156$
4	$50 \cdot 4 + 6 = 206$
5	$50 \cdot 5 + 6 = 256$

9. Sejam  $V(x) = 0,80x$  a função que define o valor recebido pela venda de  $x$  unidades do produto e  $C(x) = 40,00 + 0,30x$  a função que define o custo de  $x$  unidades do produto:

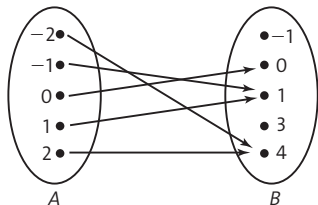
a)  $V(x) = C(x) \Rightarrow 0,80x = 40,00 + 0,30x \Rightarrow 0,50x = 40,00 \Rightarrow x = 80$

b)  $V(200) = 0,80(200) = 160,00$

$C(200) = 40,00 + 0,30 \cdot 200 = 40,00 + 60,00 = 100,00$

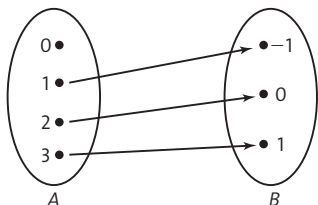
O comerciante terá lucro de R\$ 60,00 ( $160 - 100 = 60$ ), pois vendeu 200 unidades do produto por R\$ 160,00, e o custo de fabricação dessas 200 unidades foi de R\$ 100,00.

12.



É função.

13.

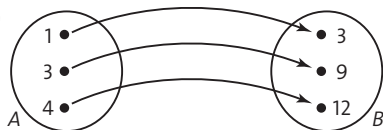


Não é função, pois  $0 \in A$  e não tem correspondente em  $B$ .

16. a)  $y = \sqrt{x}$ , então  $f(x) = \sqrt{x}$

b)  $y = x^2$ , então  $f(x) = x^2$

18. a)



d)  $g(x) = 12 \Rightarrow x = 4$

19. a)  $x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 6$

$D(f) = \mathbb{R} - \{6\}$

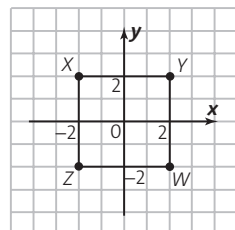
c)  $x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

e)  $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$

22.



$A = 4^2 = 16$

23. a)  $d(A, B) = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} =$

$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

b)  $d(A, B) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} =$   
 $= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

26. Compare com a equação da circunferência de centro  $O(a, b)$  e raio  $r$ , expressa por:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

a)  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1 \Rightarrow O(5, 3)$  e  $r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$

b)  $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Rightarrow O(-2, -1)$  e  $r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

c)  $x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow O(0, 0)$  e  $r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$

d)  $x^2 + (y - 2)^2 = 25 \Rightarrow O(0, 2)$  e  $r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

27. Substituir as coordenadas de  $O$  e o valor de  $r$  na equação da circunferência, expressa por:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

a)  $O(1, 4)$  e  $r = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$

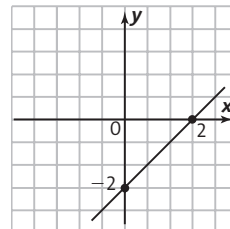
b)  $O(-2, -5)$  e  $r = 3 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$

c)  $O(0, 0)$  e  $r = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36$

d)  $O(0, 1)$  e  $r = 2 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4$

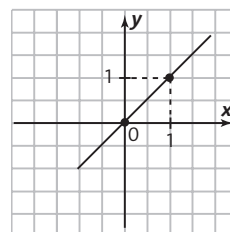
30. a)

$x$	$y = f(x) = x - 2$
0	-2
2	0



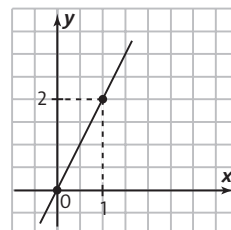
b)

$x$	$y = f(x) = x$
0	0
1	1



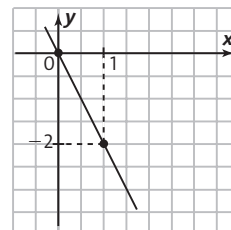
c)

$x$	$y = 2x$
0	0
1	2



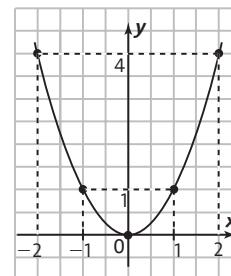
d)

$x$	$y = -2x$
0	0
1	-2



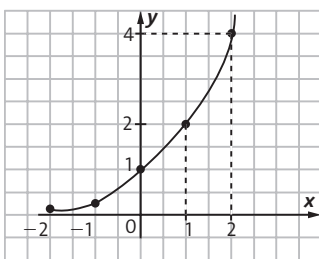
e)

$x$	$y = f(x) = x^2$
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4



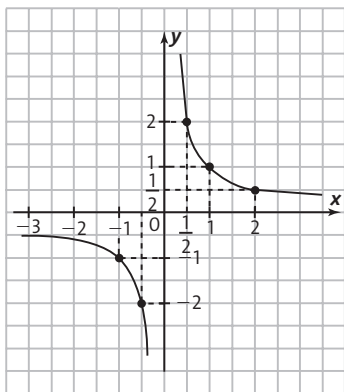
f)

x	y = f(x) = 2 <sup>x</sup>
0	1
1	2
-1	0,5
2	4
-2	0,25

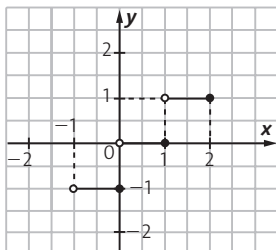


g)

x	y = 1/x
-3	-1/3
-2	-1/2
-1	-1
1/2	2
1	1
2	1/2
3	1/3



32. Se  $n = -1$ , então  $f(x) = -1$ , para  $-1 < x \leq 0$ .  
 Se  $n = 0$ , então  $f(x) = 0$ , para  $0 < x \leq 1$ .  
 Se  $n = 1$ , então  $f(x) = 1$  para  $1 < x \leq 2$ .  
 Assim, o esboço do gráfico pedido é dado por:



O domínio e a imagem da função são dados, respectivamente, por  $D(f) = \mathbb{R}$  e  $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$ .

**Resolvido passo a passo**

5. a) 50 cartas de 100 g  $\rightarrow 50 \times 1,70 = 85,00$   
 20 cartas de 58 g  $\rightarrow 20 \times 1,70 = 34,00$   
 5 cartas de 225 g  $\rightarrow 5 \times 3,10 = 15,50$   
 2 cartas de 227 g  $\rightarrow 2 \times 3,10 = 6,20$   
 Valor arrecadado: R\$ 140,70  
 $(85,00 + 34,00 + 15,50 + 6,20 = 140,70)$
- b) 2 de 100 g  $\rightarrow 2 \cdot (1 \times 10 \times 15) = 2 \cdot 150 = 300 \text{ cm}^3$   
 3 de 58 g  $\rightarrow 3 \cdot (3 \times 15 \times 25) = 3 \cdot 1125 = 3\,375 \text{ cm}^3$   
 1 de 350 g  $\rightarrow 1 \cdot (8 \times 25 \times 45) = 1 \cdot 9\,000 = 9\,000 \text{ cm}^3$   
 Volume total:  $12\,675 \text{ cm}^3$   
 $(300 + 3\,375 + 9\,000 = 12\,675) = 0,012675 \text{ m}^3$

37. a) Não é injetiva, pois linhas horizontais interceptam o gráfico mais de uma vez.  
 b) Não é injetiva, pois linhas horizontais interceptam o gráfico mais de uma vez.  
 c) É injetiva, pois linhas horizontais interceptam o gráfico uma única vez.  
 d) É injetiva, pois linhas horizontais interceptam o gráfico uma única vez.

38. b) Não é sobrejetiva, pois existem elementos de  $\mathbb{R}$  que não são imagens de nenhum elemento do domínio.  
 Por exemplo,  $12 \in \mathbb{R}$  e não é imagem de nenhum elemento do domínio.
45. 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51  
 Logo, o 10º termo é 51.
46. 4, 12, 36, 108, 324, 972  
 Logo, o 6º termo é 972.

**Pensando no Enem**

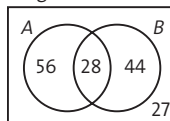
1. A afirmação está correta. O transporte individual está indicado, ao longo dos anos, pela barra azul que se mantém estável ou aumenta a cada pesquisa realizada; assim a afirmação II é falsa. A afirmação III está correta.  
**Resposta:** alternativa b.
2. a) Como o número de alunos que respondeu à questão da pesquisa na turma A é 30 e esse número é menor do que o total da 1ª tabela para a turma A, um ou mais alunos escolheram mais de um meio de transporte, por exemplo, ônibus e a pé.  
 b) Como o número de alunos que respondeu à questão da pesquisa na turma C é 38 e esse número coincide com o total da 1ª tabela para a turma C, então, cada aluno da turma C escolheu apenas um meio de transporte.  
 c) Como o número de alunos que respondeu à questão da pesquisa na turma D é 36 e esse número é menor do que o total da 1ª tabela para a turma D (38 alunos), então, um aluno pode ter escolhido 3 meios de transporte:  $35 + (1 + 1 + 1)$ .  
 d) Como o número de alunos que respondeu à questão da pesquisa na turma B é 35, se apenas 2 alunos tivessem escolhido 2 meios de transporte, teríamos  $33 + (1 + 1) + (1 + 1) = 37$  e não 38 que é o total da 1ª tabela para a turma B.  
 e) Embora os totais das turmas A e B na 1ª tabela superem em 3 unidades os totais de alunos correspondentes de cada turma na 2ª tabela, algum aluno pode utilizar 3 meios de transporte (por exemplo: ônibus, metrô e a pé) e um outro 2 meios de transporte, assim teríamos, por exemplo:  
 Turma A:  $28 + (1 + 1 + 1) + (1 + 1)$   
 Turma B:  $33 + (1 + 1) + (1 + 1 + 1)$ .  
**Resposta:** alternativa c.

**Outros Contextos**

2. a)  $\text{IMC} = \frac{51,2}{(1,6)^2} = 20$
- c)  $\text{IMC} = \frac{p}{h^2} \Rightarrow 30 = \frac{108,3}{h^2} \Rightarrow h^2 = 3,61 \Rightarrow h = 1,90 \text{ m}$

**Vestibulares de Norte a Sul**

1. 1ª maneira:  
 Diagrama de Euler-Venn:

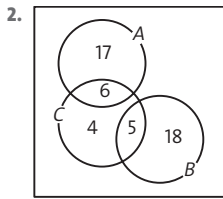


Número de alunos do colégio:  $56 + 28 + 44 + 27 = 155$

2ª maneira:

- Número de alunos que leem as revistas A ou B.  
 $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 84 + 72 - 28 = 128$
- Número de alunos do colégio = número de alunos que não leem as revistas A ou B + número de alunos que leem as revistas A ou B =  $27 + 128 = 155$

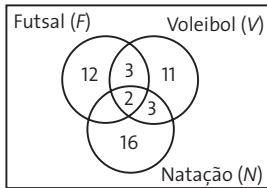
**Resposta:** alternativa a.



$$n = 4 + 5 + 6 + 17 + 18 = 50$$

**Resposta:** alternativa b.

3. 1ª maneira:



Número de alunos que praticam pelo menos um dos esportes:  
 $12 + 11 + 16 + 3 + 2 + 3 = 47$

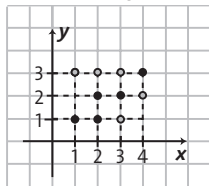
2ª maneira:

$$n(F \cup V \cup N) = n(F) + n(V) + n(N) - n(F \cap V) - n(F \cap N) - n(V \cap N) + n(F \cap V \cap N) = 17 + 19 + 21 - 5 - 2 - 5 + 2 = 47$$

**Resposta:** alternativa c.

4. 1ª maneira:

Considere a figura.



De acordo com a sequência de jogadas apresentada, podemos concluir que o jogador que ganhou a partida foi o que anotava sua jogada com a cor cinza, em sua terceira jogada, ou seja, na jogada (1, 3).

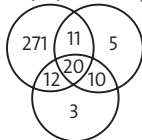
2ª maneira:

Para um jogador ganhar, é preciso que seus pontos estejam em diagonal ou em uma mesma linha paralela ao eixo  $x$  ou  $y$ . Para que os pontos estejam em diagonal os pontos devem ter  $x = y$  ou  $x = y + 1$  ou  $x = y - 1$ , ou seja,  $(y, y)$  ou  $(y + 1, y)$  ou  $(y - 1, y)$ . Tal fato ocorre com o jogador com a cor preta na sua 5ª jogada. No entanto, o jogador também ganha quando alinha 3 pontos na horizontal ou na vertical. Isso ocorre quando temos três pontos com mesma abscissa e três ordenadas subsequentes ou quando temos 3 pontos com mesma ordenada e três abscissas subsequentes. Tal fato ocorre com o jogador da cor cinza na sua 3ª jogada, tornando-se o ganhador.

**Resposta:** alternativa a.

5. Considere que os dados no diagrama de Venn estão em milhares.

Excesso de velocidade (EV)    Avançaram o sinal (AS)



Transitar em faixa exclusiva de ônibus (TF)

$$\text{Número de motoristas multados: } 271 + 5 + 3 + 11 + 10 + 12 + 20 = 332; 332 \text{ mil.}$$

**Resposta:** alternativa a.

6. a) Verdadeiro. Basta analisarmos os valores percentuais fornecidos no gráfico.  
 b) Falso. Pois, ao analisarmos o gráfico fornecido, a maior taxa Selic verificada no período foi de 17,25%.  
 c) Falso. Analisando o gráfico verifica-se que a menor Selic é de 8,75% ao ano.

d) Falso. Já que a maior taxa identificada no gráfico, no dado período fornecido, é de 17,25%.

e) Falso. Uma vez que a maior taxa apresentada no gráfico, no período fornecido, é de 17,25%.

**Resposta:** alternativa a.

7.  $A = \{1, 3, 5, 7\}$

Resolvendo a equação do 2º grau  $x^2 - 6x + 5 = 0$ , temos:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 20 = 16$$

$$\text{Portanto, } x = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{10}{2} = 5 \\ x'' = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$B = \{1, 5\}$

a) Falsa, pois  $P(A \cap B) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$ .

b)  $C_A^B$  é possível, já que  $B \subset A$ . Assim,  $C_A^B = A - B = \{3, 7\}$ .

c)  $C_A^B = \{3, 7\}$ , logo,  $P(C_A^B) = \{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{3, 7\}\}$ .

d)  $A \cap B = \{1, 5\}$ , que são os elementos de ambos os conjuntos.

e) O número de elementos do conjunto das partes da união é  $2^n$ , com  $n$  sendo o número de elementos do conjunto  $A \cup B$ . Assim,  $2^4 = 16$ .

**Resposta:** alternativa a.

8. As variações diárias do nível do reservatório serão obtidas pela razão entre a variação do período e o número de dias.

Durante os 10 primeiros dias, teremos:  $\frac{500 - 300}{10 - 0} = 20 \text{ cm/dia}$

Do dia 10 ao dia 15:  $\frac{200 - 500}{15 - 10} = -60 \text{ cm/dia}$

Do dia 15 ao dia 20: 0 cm/dia

Do dia 20 ao dia 25:  $\frac{300 - 200}{25 - 20} = 20 \text{ cm/dia}$

Do dia 25 ao dia 30:  $\frac{100 - 300}{30 - 25} = -40 \text{ cm/dia}$

A maior variação (para enchê-lo ou secá-lo) ocorreu entre o dia 10 e o dia 15.

**Resposta:** alternativa b.

9. Geratriz de  $x = 0,45222... = \frac{407}{900}$

Geratriz de  $y = 0,31888... = \frac{287}{900}$

Substituindo  $x$  e  $y$  por suas geratrizes na expressão, teremos:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{\frac{287}{900}}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{407}{900}}}} = \frac{\frac{900}{287}}{1 - \frac{1}{\frac{900}{407}}} = \frac{\frac{900}{487}}{1 + \frac{407}{498}} = \frac{\frac{900}{287}}{\frac{900}{493}} = \frac{900}{287} \cdot \frac{493}{900} = \frac{493}{287}$$

**Resposta:** alternativa d.

10. De acordo com o enunciado, uma das formas de solucionar o problema é através da análise das afirmativas, uma a uma. No entanto, é importante realizarmos as transformações de unidades:

m para km e minutos para hora

1. (verdadeira) Velocidade média =  $\frac{0,6}{\frac{4}{60}} = 6 \text{ km/h}$ ;

2. (verdadeira) Analisando o gráfico, temos que o instante em que não há variação da distância percorrida é o que compreende de 6 a 8 min.;

3. (verdadeira) Distância percorrida =  
 $= S - S_0 = 1400 - 200 = 1200 \text{ m} = 1,2 \text{ km}$   
 Sendo assim, todas as afirmativas são verdadeiras, ou seja, a resposta é a alternativa e.

### Para refletir

Página 66

- Na PA, (1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, ...), de razão  $r = 7$ , o número que vem depois de 43 é dado por:  
 $43 + 7 = 50$
- Na PG, (2, 6, 18, 54, 162, 486, ...), de razão  $q = 3$ , o número que vem depois de 486 é dado por:  
 $486 \cdot 3 = 1458$

## Unidade 2

### CAPÍTULO 3

- a)  $f(1) = -3 \cdot 1 + 4 = -3 + 4 = 1$   
 b)  $f\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{3} + 4 = -1 + 4 = 3$   
 c)  $f(0) = -3 \cdot 0 + 4 = 4$  (valor inicial)  
 d)  $f(k+1) = -3(k+1) + 4 = -3k - 3 + 4 = -3k + 1$
- Maior valor inicial:  $g(x)$ , pois  $f(0) = 3 \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  e

$$g(0) = 2 \cdot 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ e } \frac{3}{4} > \frac{2}{3}.$$

Temos, para  $h \neq 0$ , que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h) + \frac{2}{3} - \left(3x + \frac{2}{3}\right)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

Assim, a taxa de variação da função  $f$  é igual a 3.

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{2(x+h) + \frac{3}{4} - \left(2x + \frac{3}{4}\right)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

Assim, a taxa de variação da função  $g$  é igual a 2.

Portanto,  $f(x)$  tem maior taxa de variação. Note que a taxa de variação da função afim  $f(x) = ax + b$  é sempre  $a$ .

- a)  $f(x) = ax + b$ , onde  $a$  é a taxa de variação e  $b$  é o valor inicial, então  $f(x) = 3x + 1$   
 b)  $a = -2$  e  $f(2) = 5$ ; se  $a = -2 \Rightarrow f(x) = -2x + b$ ; se  $f(2) = 5 \Rightarrow -2 \cdot (2) + b = 5 \Rightarrow b = 9$ , logo  $f(x) = -2x + 9$   
 c)  $f(x) = ax + b$ , onde  $a = 2$  e  $b = 10$ , logo  $f(x) = 2x + 10$   
 d)  $f(x) = ax + b$ , onde  $a = -1$  e  $b = 3$ , logo  $f(x) = -x + 3$
- a)  $f(x) =$  custo fixo + custo variável  
 $f(x) = 8 + 0,50x$   
 c)  $f(100) = 8 + 0,50 \cdot 100 = 8 + 50 = 58$   
 O custo de 100 peças é de R\$ 58,00.

- a) • largura = 1 cm  
 perímetro =  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 10 + 2 = 12 \text{ cm}$   
 • largura = 1,5 cm  
 perímetro =  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 1,5 = 10 + 3 = 13 \text{ cm}$   
 • largura = 2 cm  
 perímetro =  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 10 + 4 = 14 \text{ cm}$   
 • largura = 3 cm  
 perímetro =  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16 \text{ cm}$   
 • largura = 4 cm  
 perímetro =  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 10 + 8 = 18 \text{ cm}$

Largura (cm)	Perímetro (cm)
1	12
1,5	13
2	14
3	16
4	18

- c)  $f(x) = 2 \cdot 5 + 2x = 10 + 2x$   
 d) Como  $f(x) = 10 + 2x$ , temos que a taxa de variação dessa função é 2 e o seu valor inicial é  $f(0) = 10 + 2 \cdot 0 = 10$ .

- c) Para que o plano A seja mais econômico, devemos ter:  
 $f(x) < g(x) \Rightarrow 50x + 100 < 40x + 180 \Rightarrow 10x < 80 \Rightarrow x < 8$   
 Para que o plano B seja mais econômico, devemos ter:  
 $f(x) > g(x) \Rightarrow 50x + 100 > 40x + 180 \Rightarrow 10x > 80 \Rightarrow x > 8$   
 Para que os dois planos sejam equivalentes, devemos ter:  
 $f(x) = g(x) \Rightarrow 50x + 100 = 40x + 180 \Rightarrow 10x = 80 \Rightarrow x = 8$   
 Assim, o plano A é mais econômico para  $x < 8$ ; o B, para  $x > 8$ ; e eles são equivalentes para  $x = 8$ .

- a)  $f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 50 + 0,37x \\ f_2(x) = 63 + 0,37x \\ f_3(x) = 75 + 0,37x \end{cases}$  onde  $x$  é o excedente.

b) A taxa de variação de  $f(x) = ax + b$  é  $a$ , portanto todas possuem a mesma taxa de variação, 0,37.

- a)  $f(x) = ax + b$ , usando a variável  $(t)$ ,  $f(t) = at + b$  onde  $a = 5$  e  $b = 10$ , portanto  $f(t) = 5t + 10$   
 b) taxa de variação:  $a = 5$   
 c) valor inicial:  $b = 10$

- $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 5 = a \cdot 2 + b \\ -4 = a(-1) + b \end{cases} \Rightarrow a = 3$

$$-a + b = -4 \Rightarrow b = a - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Então, } f(x) = 3x - 1.$$

Como a função é afim, a taxa de variação é  $a = 3$ .

- a) Como o gráfico é formado por pontos de uma reta, temos que  $C(x) = ax + b$ . Então:  
 $C(600) = a \cdot 600 + b = 14000$   
 $C(900) = a \cdot 900 + b = 15800$   
 Resolvendo o sistema formado pelas equações acima, obtemos  $a = 6$  e  $b = 10400$ . Assim, a função é  $C(x) = 6x + 10400$ .  
 b)  $C(1200) = 6 \cdot 1200 + 10400 = 17600$

- a)  $f(1) = 5 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 5 \Rightarrow a + b = 5$   
 $f(-3) = -7 \Rightarrow a(-3) + b = -7 \Rightarrow -3a + b = -7$

Então:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -3a + b = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 3a - b = 7 \end{cases} +$$

$$4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

$$a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - 3 = 2$$

$$\text{Logo, } f(x) = 3x + 2.$$

- $f(-1) = 7 \Rightarrow -a + b = 7$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 2a + b = 1$$

Então:

$$\begin{cases} -a + b = 7 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -7 \\ 2a + b = 1 \end{cases} +$$

$$3a = -6 \Rightarrow a = -2$$

$$-a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - 2 = 5$$

$$\text{Logo, } f(x) = -2x + 5.$$

- a) Função de depreciação:  $V(t) = at + b$   
 $V(0) = a \cdot 0 + b = 1000 \Rightarrow b = 1000$   
 $V(5) = a \cdot 5 + 1000 = 250 \Rightarrow 5a = -750 \Rightarrow a = -150$   
 Portanto, a função afim tal que  $V(0) = 1000$  e  $V(5) = 250$  é dada por:  
 $V = -150t + 1000$   
 b) Para  $t = 6$ , temos:  
 $V(6) = -150 \cdot (6) + 1000 = -900 + 1000 = 100$   
 c)  $V(0) - V(6) = 1000 - 100 = 900$

**Resolvido passo a passo**

5. a)  $P(A) = a \cdot (A) + b$

Se decresce linearmente 0,2 então  $a = -0,2$ .

Em 2050  $\rightarrow$  população de 9,6 bilhões

Logo,  $P(A) = -0,2A + 9,6$

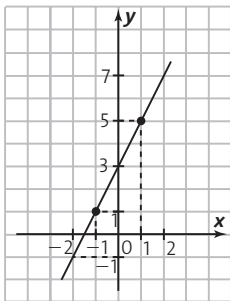
Em 2013,  $P(A) = 7,2$ , portanto  $-0,2A + 9,6 = 7,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -0,2A = -2,4 \Rightarrow A = 12$

Logo,  $2050 + 15 = 2062$

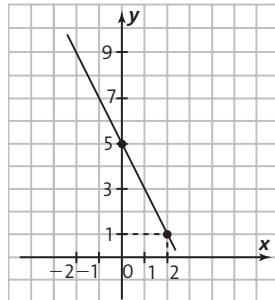
13. a)  $f(x) = 2x + 3$

x	f(x)
-1	1
1	5



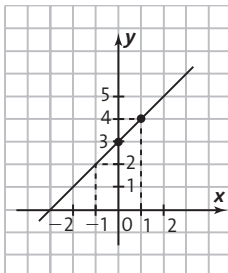
c)  $f(x) = -2x + 5$

x	f(x)
0	5
2	1



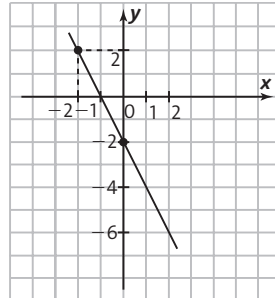
b)  $f(x) = x + 3$

x	f(x)
0	3
1	4



d)  $f(x) = -2 - 2x$

x	f(x)
-2	2
0	-2



14. a)

x	$f(x) = \frac{1}{2}x$
0	0
2	1

b)

x	$g(x) = x$
0	0
2	2

c)

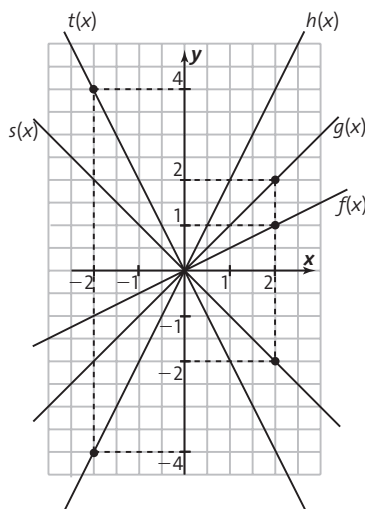
x	$h(x) = 2x$
-2	-4
0	0

d)

x	$s(x) = -x$
0	0
2	-2

e)

x	$t(x) = -2x$
-2	4
0	0

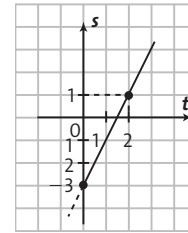


Observa-se que:

- quando a taxa de variação,  $a$ , é positiva, a reta é **ascendente** e quanto maior o valor de  $a$ , mais a reta se afasta da posição horizontal.
- quando a taxa de variação,  $a$ , é negativa a reta é **descendente** (e quanto maior o valor absoluto de  $a$ , mais a reta se afasta da posição horizontal).

15.

t	$s = 2t - 3$
0	-3
2	1



16. a)  $(-1, 1)$  e  $(2, 0)$

$f(-1) = -a + b = 1$

$f(2) = 2a + b = 0$

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} +$$

$3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$-a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Então,  $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ .

b)  $(3, 0)$  e  $(0, 4)$

$f(3) = 3a + b = 0$

$f(0) = b = 4$

$3a + b = 0 \Rightarrow 3a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$

Então,  $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$ .

17. a)  $f(0) = 2 \cdot 0 + m - 3 = 5 \Rightarrow m = 8$

b)  $f(3) = 2 \cdot 3 + m - 3 = 0 \Rightarrow 6 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = -3$

18. a)  $f(1) = a + b = 5$

$f(-2) = -2a + b = -4$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -2a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a - b = 4 \end{cases} +$$

$3a = 9 \Rightarrow a = 3$

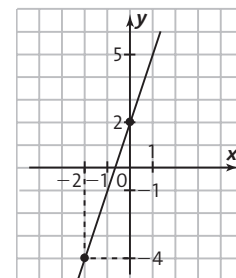
$a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - 3 = 2$

Então,  $f(x) = 3x + 2$ .

$a = 3$  e  $b = 2$

b)

x	$f(x) = 3x + 2$
-2	-4
0	2



c)  $f(x) = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

19. a)  $f(x) = -3x + 4 \Rightarrow f(0) = 4 \rightarrow$  corta o eixo  $y$  no ponto  $(0, 4)$

$-3x + 4 = 0 \Rightarrow -3x = -4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \rightarrow$  corta o eixo  $x$  no ponto

$(\frac{4}{3}, 0)$



20. a) 
$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = -3 \end{cases} +$$
  

$$2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$x + y = 3 \Rightarrow x + 0 = 3 \Rightarrow x = 3$

A(3, 0)

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

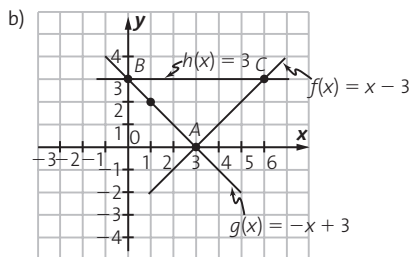
$3 = -x + 3 \Rightarrow x = 0$

B(0, 3)

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$3 = x - 3 \Rightarrow x = 6$

C(6, 3)



21. Temos que:

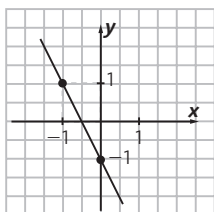
- $f(x) = -2x + b$
- $f(1) = -3$

Assim:

$-2 \cdot 1 + b = -3 \Leftrightarrow -2 + b = -3 \Leftrightarrow b = -1$

Portanto,  $f(x) = -2x - 1$ .

x	f(x) = -2x - 1
0	-1
-1	1



22. a)

x	f(x)
-3	0
0	2

$y = ax + b$

$$\begin{cases} 0 = a(-3) + b \\ 2 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$-3a + b = 0 \Rightarrow -3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

Então,  $y = \frac{2}{3}x + 2$ .

b)

x	f(x)
0	2
4	0

$y = ax + b$

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 4 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

$4a + b = 0 \Rightarrow 4a + 2 = 0 \Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Então,  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ .

c)  $b = 0$ , pois o gráfico corta o eixo  $y$  no ponto  $(0, 0)$ .

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{20 - 0}{2 - 0} = \frac{20}{2} = 10$$

Então:

$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = 10x + 0 = 10x$

Outra resolução possível:

Para  $f(0) = 0$ , temos  $b = 0$ .

Para  $f(2) = 20$ , temos  $20 = 2a + b$ .

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2a + b = 20 \end{cases}$$

$2a + b = 20 \Rightarrow 2a + 0 = 20 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10$

Assim,  $f(x) = 10x$ .

d)  $b = 20$ , pois o gráfico corta o eixo  $y$  no ponto  $(0, 20)$ .

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{20 - 0}{0 - 2} = \frac{20}{-2} = -10$$

Então,  $f(x) = -10x + 20$ .

Outra resolução possível:

Para  $f(0) = 20$ , temos:  $b = 20$ .

Para  $f(2) = 0$ , temos:  $2a + b = 0$ .

$$\begin{cases} 20 = b \\ 0 = 2a + b \end{cases}$$

$0 = 2a + b \Rightarrow 0 = 2a + 20 \Rightarrow -20 = 2a \Rightarrow a = -10$

Assim,  $f(x) = -10x + 20$ .

e) Para  $f(2) = 16$ , temos:  $16 = 2a + b$ .

Para  $f(4) = 20$ , temos:  $20 = 4a + b$ .

$$\begin{cases} 2a + b = 16 \\ 4a + b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = -16 \\ 4a + b = 20 \end{cases} +$$
  

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$2a + b = 16 \Rightarrow 2 \cdot 2 + b = 16 \Rightarrow 4 + b = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 16 - 4 \Rightarrow b = 12$

Assim,  $f(x) = 2x + 12$ .

f)  $b = 14$ , pois o gráfico corta o eixo  $y$  no ponto  $(0, 14)$ .

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{20 - 14}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3$$

Então,  $f(x) = 3x + 14$ .

Outra resolução possível:

Para  $f(0) = 14$ , temos:  $0a + b = 14$ .

Para  $f(2) = 20$ , temos:  $2a + b = 20$ .

$$\begin{cases} b = 14 \\ 2a + b = 20 \end{cases}$$

$2a + 14 = 20 \Rightarrow 2a = 20 - 14 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

Assim,  $f(x) = 3x + 14$ .

g)  $b = 0$ , pois o gráfico corta o eixo  $y$  no ponto  $(0, 0)$ .

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15 - 0}{-5 - 0} = \frac{15}{-5} = -3$$

Então,  $f(x) = -3x$ .

Outra resolução possível:

Para  $f(-5) = 15$ , temos:  $-5a + b = 15$ .

Para  $f(0) = 0$ , temos:  $b = 0$ .

$$\begin{cases} -5a + b = 15 \\ b = 0 \end{cases}$$

$-5a + 0 = 15 \Rightarrow -5a = 15 \Rightarrow a = -3$

Assim,  $f(x) = -3x$ .

h) Para  $f(1) = 15$ , temos:  $a + b = 15$ .

Para  $f(-4) = 20$ , temos:  $-4a + b = 20$ .

$$\begin{cases} a + b = 15 \\ -4a + b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -15 \\ -4a + b = 20 \end{cases} +$$
  

$$-5a = 5 \Rightarrow a = -1$$

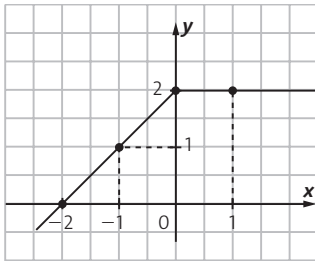
$a + b = 15 \Rightarrow -1 + b = 15 \Rightarrow b = 16$

Assim,  $f(x) = -x + 16$ .

23. a)

x	f(x) = x + 2
-1	1
-2	0

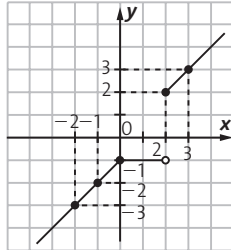
x	f(x) = 2
0	2
1	2



b)

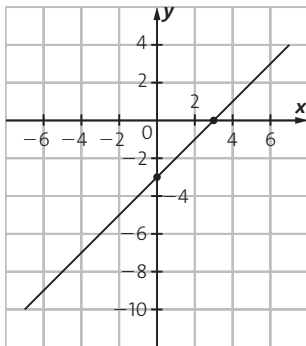
x	f(x) = x
2	2
3	3

x	f(x) = x - 1
-1	-2
-2	-3

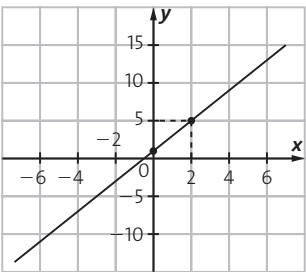


### Matemática e tecnologia

x	f(x) = x - 3
-5	-8
-4	-7
-3	-6
-2	-5
-1	-4
0	-3
1	-2
2	-1
3	0
4	1
5	2



x	f(x) = 2x + 1
-5	-9
-4	-7
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11



24. a)  $y = y_0 + a \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = 6 + 3(x - 4) \Rightarrow y = 3x - 6$   
 b)  $y = 0 + (-2) \cdot [x - (-4)] \Rightarrow y = -2x - 8$   
 c) Temos que o coeficiente angular da reta é dado por:

$$a = \frac{-6 - 4}{-2 - 0} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Assim:

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = 4 + 5 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 5x + 4$$

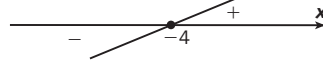
25. Coeficiente angular:  $a = \frac{3 - 1}{2 - (-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = 3 + \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

26. a)  $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \rightarrow$  corta o eixo x no ponto (5, 0)  
 $0 - 5 = -5 \rightarrow$  corta o eixo y no ponto (0, -5)

- b)  $-x + 4 = 0 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4 \rightarrow$  corta o eixo x no ponto (4, 0)  
 $0 + 4 = 4 \rightarrow$  corta o eixo y no ponto (0, 4)  
 c)  $-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow$  corta o eixo x em (0, 0) e corta o eixo y em (0, 0)  
 d)  $\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 \rightarrow$  corta o eixo x em (2, 0)  
 $\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1 \rightarrow$  corta o eixo y em (0, -1)

27. a)  $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$   
 $a = 1 > 0 \rightarrow f(x)$  é crescente

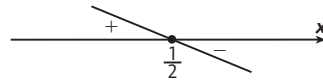


$$f(x) = 0 \text{ para } x = -4$$

$$f(x) > 0 \text{ para } x > -4$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x < -4$$

- b)  $-2x + 1 = 0 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$   
 $a = -2 < 0 \rightarrow f(x)$  é decrescente

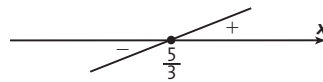


$$f(x) = 0 \text{ para } x = \frac{1}{2}$$

$$f(x) > 0 \text{ para } x < \frac{1}{2}$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x > \frac{1}{2}$$

- c)  $3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$   
 $a = 3 > 0 \rightarrow f(x)$  é crescente

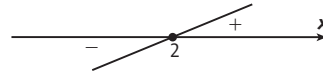


$$f(x) = 0 \text{ para } x = \frac{5}{3}$$

$$f(x) > 0 \text{ para } x > \frac{5}{3}$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x < \frac{5}{3}$$

- d)  $-1 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow x = 2$   
 $a = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow f(x)$  é crescente



$$f(x) = 0 \text{ para } x = 2$$

$$f(x) > 0 \text{ para } x > 2$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x < 2$$

28. a)  $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$   
 $a = -1 < 0 \rightarrow f(x)$  é decrescente  
 $f(x) > 0$  para  $x < 1$   
 b)  $3x + 12 = 0 \Rightarrow 3x = -12 \Rightarrow x = -4$   
 $a = 3 > 0 \rightarrow f(x)$  é crescente  
 $f(x) < 0$  para  $x < -4$

29.  $-2x + 8 = 0 \Rightarrow -2x = -8 \Rightarrow x = 4$   
 $a < 0 \rightarrow f(x)$  é decrescente  $\rightarrow f(x) < 0$  para  $x > 4$   
 $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$   
 $a > 0 \rightarrow g(x)$  é crescente  $\rightarrow g(x) < 0$  para  $x < 2$   
 Portanto, não existe valor real de x que satisfaça as duas condições simultaneamente.

$$30. y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ -a + b = 6 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - b = -6 \end{cases} +$$

$$3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$a - b = -6 \Rightarrow -\frac{1}{3} - b = -6 \Rightarrow b = -\frac{1}{3} + 6 = \frac{17}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} = \frac{-x + 17}{3}$$

$$\frac{-x + 17}{3} = 0 \Rightarrow x = 17$$

$$31. a) 3 - 4x > x - 7 \Rightarrow -4x - x > -7 - 3 \Rightarrow -5x > -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x < 10 \Rightarrow x < 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

$$b) \frac{x}{4} - \frac{3(x-1)}{10} \leq 1 \Rightarrow \frac{5x}{20} - \frac{6(x-1)}{20} \leq \frac{20}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 6x + 6 \leq 20 \Rightarrow -x \leq 20 - 6 \Rightarrow -x \leq 14 \Rightarrow x \geq -14$$

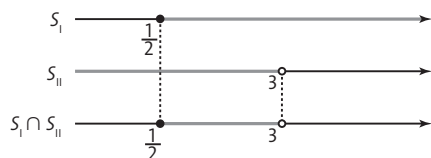
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$$

$$32. a) 1 \leq x + 1 < 5 \Rightarrow 1 - 1 \leq x < 5 - 1 \Rightarrow 0 \leq x < 4$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\}$$

$$b) \begin{cases} 5 - 2x \leq 4 \\ x - 5 < 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x \leq 1 \\ 2x < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ x < 3 & \text{(II)} \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 3\right\}$$

$$33. b) 5x - 230 < 0 \Rightarrow 5x < 230 \Rightarrow x < 46$$

Então, o comerciante terá prejuízo se vender menos de 46 unidades.

$$c) 5x - 230 = 315 \Rightarrow 5x = 545 \Rightarrow x = 109$$

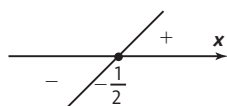
$$d) 5x - 230 > 280 \Rightarrow 5x > 510 \Rightarrow x > 102$$

$$e) 100 < 5x - 230 < 180 \Rightarrow 330 < 5x < 410 \Rightarrow 66 < x < 82$$

$$34. a) (2x + 1)(x + 2) \leq 0$$

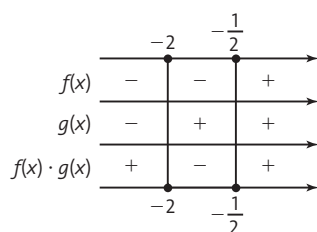
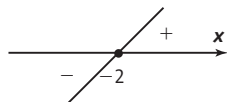
$$f(x) = 2x + 1 \quad (a = 2: \text{função crescente})$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$



$$g(x) = x + 2 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

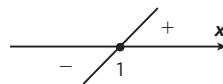


$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$b) (x - 1)(2 - x)(-x + 4) < 0$$

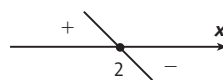
$$f(x) = x - 1 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$



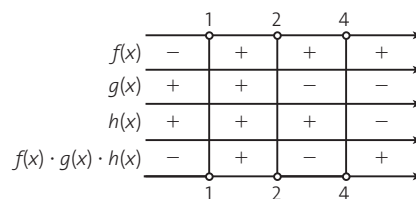
$$g(x) = 2 - x \quad (a = -1: \text{função decrescente})$$

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$



$$h(x) = -x + 4 \quad (a = -1: \text{função decrescente})$$

$$-x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

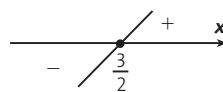


$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$$

$$35. a) \frac{2x - 3}{1 - x} \geq 0$$

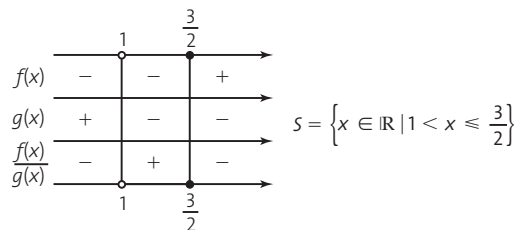
$$f(x) = 2x - 3 \quad (a = 2: \text{função crescente})$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



$$g(x) = 1 - x \quad (a = -1: \text{função decrescente})$$

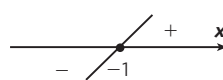
$$1 - x = 0 \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$$



$$b) \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 2)} > 0$$

$$f(x) = x + 1 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$



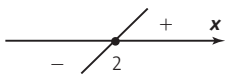
$$g(x) = x + 4 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$



$$h(x) = x - 2 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

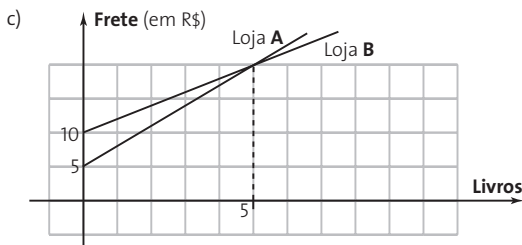
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$



	-4	-1	2	
$f(x)$	-	-	+	+
$g(x)$	-	+	+	+
$h(x)$	-	-	-	+
$f(x) \cdot g(x)$	-	+	-	+
$h(x)$	-4	-1	2	

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1 \text{ ou } x > 2\}$$

36. a) Loja A: R\$ 17,00; Loja B: R\$ 18,00  
Portanto, para comprar 4 livros o frete é mais barato na loja A.  
b) Loja A:  $f(x) = 3x + 5$ ; Loja B:  $f(x) = 2x + 10$



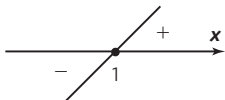
O ponto de encontro mostra a quantidade de livros na qual o preço do frete é o mesmo nas duas lojas. Analisando o gráfico, percebe-se que para menos de 5 livros, o preço do frete é menor na loja A, para 5 livros, o valor do frete é o mesmo nas duas lojas, e para mais de 5 livros, o valor do frete é menor na loja B.

37. a)  $f(x) = \sqrt{(x-1)(3x+5)}$

$$(x-1)(3x+5) \geq 0$$

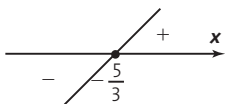
$$g(x) = x - 1 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$



$$h(x) = 3x + 5 \quad (a = 3: \text{função crescente})$$

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$



	$-\frac{5}{3}$	1	
$g(x)$	-	-	+
$h(x)$	-	+	+
$g(x) \cdot h(x)$	+	-	+
	$-\frac{5}{3}$	1	

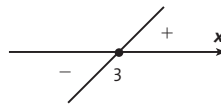
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{3} \text{ ou } x \geq 1\right\}$$

b)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x}} - 1$

$$\frac{2x-3}{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-3-x}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x} \geq 0$$

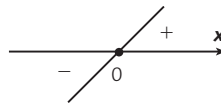
$$g(x) = x - 3 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



$$h(x) = x \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x = 0$$



	0	3	
$g(x)$	-	-	+
$h(x)$	-	+	+
$g(x)$	+	-	+
$h(x)$	0	3	

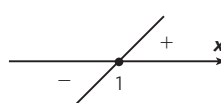
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geq 3\}$$

c)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-5}}$

$$\frac{x-1}{x-5} \geq 0$$

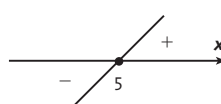
$$g(x) = x - 1 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$



$$h(x) = x - 5 \quad (a = 1: \text{função crescente})$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$



	1	5	
$g(x)$	-	+	+
$h(x)$	-	-	+
$g(x)$	+	-	+
$h(x)$	1	5	

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x > 5\}$$

38. Plano A:  $A(t) = 35 + 0,50t$ ; Plano B:  $B(t) = 20 + 0,80t$ ;

Plano C:  $C(t) = 1,20t$

a) Para 25 min  $\Rightarrow t = 25 \Rightarrow$

$$\begin{cases} A(25) = 35 + 0,50 \cdot (25) = 47,50 \\ B(25) = 20 + 0,80 \cdot (25) = 40,00 \\ C(25) = 1,20 \cdot (25) = 30,00 \end{cases}$$

O plano mais vantajoso para quem utiliza 25 minutos por mês é o C.

b) Para que o plano A seja mais vantajoso é preciso que

$$A(t) < B(t) \text{ e } A(t) < C(t)$$

$$A(t) < B(t) \Rightarrow 35 + 0,50t < 20 + 0,80t \Rightarrow 15 < 0,30t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,30t > 15 \Rightarrow t > \frac{15}{0,30} \Rightarrow t > 50$$

$$A(t) < C(t) \Rightarrow 35 + 0,50t < 1,20t \Rightarrow 35 < 0,70t \Rightarrow 0,70t > 35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t > \frac{35}{0,70} \Rightarrow t > 50$$

O plano A passa a ser o mais vantajoso a partir da utilização de 50 minutos por mês.

39. Empresa x:  $x(t) = 35 + 0,50t$   
 Empresa y:  $y(t) = 26 + 0,65t$   
 $35 + 0,50t < 26 + 0,65t \Rightarrow 9 < 0,15t \Rightarrow 0,15t > 9 \Rightarrow t > \frac{9}{0,15} \Rightarrow t > 60$   
 A partir de 60 minutos.

40. Custo:  $C(x) = 0,50x + 1500$   
 Receita:  $R(x) = 1,50x$   
 Lucro:  $L(x) = R(x) - C(x) = x - 1500$   
 A expressão necessária é  $L(x)$  que não deve ser menor que 0:  
 $x - 1500 \geq 0$ .

41. Fábrica A:  $A(t) = 3000 + 70t$   
 Fábrica B:  $B(t) = 1100 + 290t$   
 $1100 + 290t > 3000 + 70t \Rightarrow 220t > 1900 \Rightarrow t > \frac{1900}{220} \Rightarrow t > 8,63$

A partir do mês 9, isto é, a partir de setembro.

**Resposta:** alternativa d.

42. b)  $f(-2) = 3(-2) - 1 = -6 - 1 = -7$   
 $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 9 - 1 = 8$   
 $f(8) = 3 \cdot 8 - 1 = 24 - 1 = 23$   
 $f(13) = 3 \cdot 13 - 1 = 39 - 1 = 38$   
 $f(18) = 3 \cdot 18 - 1 = 54 - 1 = 53$   
 $f(23) = 3 \cdot 23 - 1 = 69 - 1 = 68$

Portanto, -7, 8, 23, 38, 53, 68 é uma PA.

c)  $r = 3 \cdot 5 = 15$

44.  $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 9 = 2a + b \\ 17 = 4a + b \end{cases} \Rightarrow a = 4 \text{ e } b = 1$

Logo, a lei é  $f(x) = 4x + 1$ .

45. Como a trajetória é retilínea e a velocidade é constante, o movimento é retilíneo e uniforme.

a)  $v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{400 - 100}{5,0 - 0} = \frac{300}{5} = 60$

Assim,  $v = 60$  m/s.

- b) Como  $t_0 = 0$ ,  $S_0 = 100$  m e  $v = 60$  m/s, então a função é dada por  $S = vt + S_0$ , ou seja,  $S = 60t + 100$  (função afim).

c)  $S = 60t + 100 \Rightarrow S = 60 \cdot 10 + 100 \Rightarrow S = 700$  m

d)  $S = 60t + 100 \Rightarrow 1000 = 60t + 100 \Rightarrow t = 15$  s

46.  $P = 4\ell$

A correspondência  $\ell \rightarrow P$  é uma proporcionalidade direta (dobrando, triplicando, etc. a medida do lado, o perímetro dobra, triplica, etc.).

47. Não é uma proporcionalidade.

Contraexemplo:

Para  $x = 1$  cm, temos  $A = 1$  cm<sup>2</sup>.

Para  $x = 2$  cm, temos  $A = 4$  cm<sup>2</sup>.

Dobrando  $x$  (1 para 2), A quadruplica (1 para 4), ou seja, A não dobrou nem ficou metade.

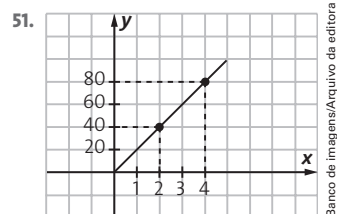
48. Sim; dobrando, triplicando, etc. o volume de um líquido homogêneo, seu peso correspondente dobra, triplica, etc.

50. Sim. Considerando  $h$  a distância entre as retas (largura do retângulo), temos:

<b>x</b>	1	2	3	...	c
<b>A</b>	1h	2h	3h	...	ch

$$\frac{1h}{1} = \frac{2h}{2} = \frac{3h}{3} = \dots = \frac{ch}{c} = h$$

Logo,  $x \rightarrow A$  é uma proporcionalidade direta.



A reta construída passa pelos pontos (2, 40) e (4, 80).

Assim:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{80 - 40}{4 - 2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ (coeficiente angular)}$$

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = 40 + 20(x - 2) \Rightarrow y = 40 + 20x - 40 \Rightarrow y = 20x$$

- a) Assim, as alturas, em centímetros, pedidas são:

- 3ª degrau:  $20 \cdot 3 = 60$
- 7ª degrau:  $20 \cdot 7 = 140$
- 11ª degrau:  $20 \cdot 11 = 220$

- b) Assim, os degraus procurados são dados por:

- $120 = 20x \Rightarrow x = 6$  (6ª degrau)
- $160 = 20x \Rightarrow x = 8$  (8ª degrau)
- $280 = 20x \Rightarrow x = 14$  (14ª degrau)

53. f)  $x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow x = 5$  ou  $x = -5$

g)  $|x| = |3| \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = 3$  ou  $x = -3$

h)  $|x| = |-4| \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow x = 4$  ou  $x = -4$

54. a)  $f(8) = |3 - 8| + 4 = 9$

$$f(-1) = |3 + 1| + 4 = 8$$

$$f(3) = |3 - 3| + 4 = 4$$

$$f(0) = |3 - 0| + 4 = 7$$

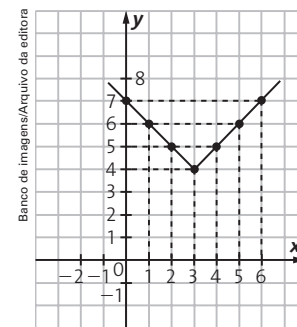
b)  $x < 3 \rightarrow f(x) = 3 - x + 4 = 7 - x$

$x \geq 3 \rightarrow f(x) = -3 + x + 4 = x + 1$

$$\text{Então, } f(x) = \begin{cases} 7 - x, & \text{se } x < 3 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

c)

x	y	x	y
1	6	3	4
2	5	4	5



- d)  $D(f) = \mathbb{R}$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$$

55. a)  $|x - 6| = 10 \Rightarrow x - 6 = 10$  ou  $x - 6 = -10 \Rightarrow x = 16$  ou  $x = -4$   
 $S = \{-4, 16\}$

- b)  $|3x - 1| = 5 \Rightarrow 3x - 1 = 5$  ou  $3x - 1 = -5 \Rightarrow x = 2$  ou

$$x = -\frac{4}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$$

- c)  $\left|\frac{x-1}{4}\right| = 2 \Rightarrow \frac{x-1}{4} = 2$  ou  $\frac{x-1}{4} = -2 \Rightarrow x - 1 = 8$  ou

$$x - 1 = -8 \Rightarrow x = 9$$
 ou  $x = -7$

$$S = \{-7, 9\}$$

- d)  $5 + |-2x + 4| = 11 \Rightarrow |-2x + 4| = 6 \Rightarrow -2x + 4 = 6$  ou

$$-2x + 4 = -6 \Rightarrow -2x = -10 \Rightarrow x = -1$$
 ou  $x = 5$

$$S = \{-1, 5\}$$

56. a)  $|x^2 + 6x - 1| = 6 \Rightarrow x^2 + 6x - 1 = 6$  ou  $x^2 + 6x - 1 = -6 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$  ou  $x^2 + 6x + 5 = 0$

①  $\Delta = 36 - 4(1)(-7) = 64$

$x = \frac{-6 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 1$  ou  $x = -7$

②  $\Delta = 36 - 4(1)(5) = 16$

$x = \frac{-6 \pm 4}{2} \Rightarrow x = -1$  ou  $x = -5$

$S = \{-7, -5, -1, 1\}$

b)  $|x^2 - 5x| = 6 \Rightarrow x^2 - 5x = 6$  ou  $x^2 - 5x = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$  ou  $x^2 - 5x + 6 = 0$

①  $\Delta = 25 - 4(1)(-6) = 49$

$x = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow x = 6$  ou  $x = -1$

②  $\Delta = 25 - 4(1)(6) = 1$

$x = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 3$  ou  $x = 2$

$S = \{-1, 2, 3, 6\}$

58. Se  $f(x) = |-3x + 15|$ , então

$f(x) = \begin{cases} -3x + 15, & \text{para } -3x + 15 \geq 0 \quad x \leq 5 \\ -(-3x + 15) = 3x - 15, & \text{para } 3x - 15 > 0 \quad x > 5 \end{cases}$

a)  $f(x) = \begin{cases} -3x + 15, & \text{se } x \leq 5 \\ 3x - 15, & \text{se } x > 5 \end{cases}$

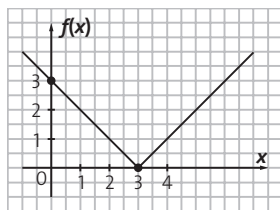
b)  $f(2) = -3(2) + 15 = 9$

$f(7) = 3(7) - 15 = 6$

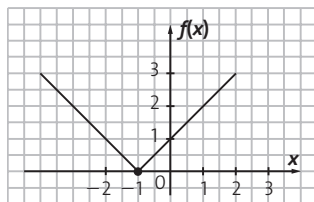
$f(-1) = -3(-1) + 15 = 18$

$f(5) = -3(5) + 15 = 0$

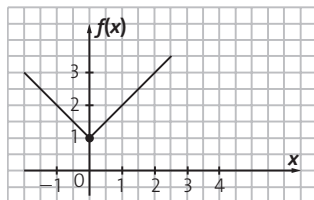
59. a)  $f(x) = |x - 3|$



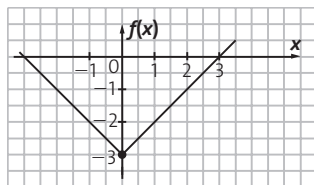
b)  $f(x) = |x + 1|$



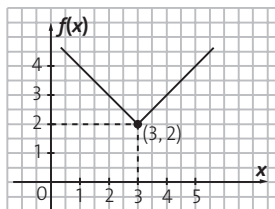
c)  $f(x) = |x| + 1$



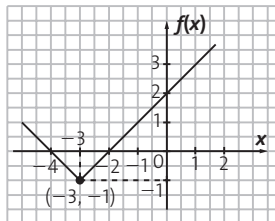
d)  $f(x) = |x| - 3$



e)  $f(x) = |x - 3| + 2$



f)  $f(x) = |x + 3| - 1$



60. Resolvendo  $100 - 5x \geq 0$ , temos  $x \leq 20$ . Portanto:

$$f(x) = \begin{cases} 500 + (100 - 5x), & \text{se } 1 \leq x \leq 20 \\ 500 + (-100 + 5x), & \text{se } 20 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

Logo, a função é decrescente para  $1 \leq x \leq 20$ , e seu máximo no trecho ocorre em  $x = 1$  (menor  $x$ ):

$f(1) = 500 + |100 - 5 \cdot 1| = 500 + 95 = 595$

A função é crescente para  $20 < x \leq 30$ , e seu máximo no trecho ocorre em  $x = 30$  (maior  $x$ ):

$f(30) = 500 + |100 - 5 \cdot 30| = 500 + 50 = 550$

Ou seja, o maior número de pessoas ocorre no primeiro dia de cada mês.

**Resposta:** alternativa a.

### Para refletir

Página 85

• b)  $2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

c)  $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

• Quando  $x > \frac{5}{2}$ ,  $f(x) > 0$ ; quando  $x < \frac{5}{2}$ ,  $f(x) < 0$ .

Página 98

Temos que:

•  $2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

$-2x + 8 = 0 \Rightarrow -2x = -8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

•  $f(4) = 2 \cdot 4 - 8 = 0$

## CAPÍTULO 4

4. b)  $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23$

$a = 2, b = -12$  e  $c = 23$

c)  $f(x) = (x + 2)(x - 3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$

$a = 1, b = -1$  e  $c = -6$

d)  $f(x) = (4x + 7)(3x - 2) = 12x^2 - 8x + 21x - 14 = 12x^2 + 13x - 14$

$a = 12, b = 13$  e  $c = -14$

e)  $f(x) = (2x + 3)(5x - 1) = 10x^2 - 2x + 15x - 3 = 10x^2 + 13x - 3$

$a = 10, b = 13$  e  $c = -3$

f)  $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5 = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 =$

$= 2x^2 - 12x + 23$

$a = 2, b = -12$  e  $c = 23$

5. a)  $S = f(5) = \pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 = 25\pi \text{ cm}^2$

b)  $S = 64\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8 \text{ m}$

6. a)  $f(10) = 10^2 = 100$

$f(1,5) = (1,5)^2 = 2,25$

$f(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^2 = 12$

b)  $\ell^2 = 256 \Rightarrow \ell = 16$



7. a)  $f(1) = 3(1)^2 - 4(1) + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$   
 b)  $f(2) = 3(2)^2 - 4(2) + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$   
 c)  $f(0) = 3(0)^2 - 4(0) + 1 = 1$   
 d)  $f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{2}) + 1 = 6 - 4\sqrt{2} + 1 = 7 - 4\sqrt{2}$   
 e)  $f(-2) = 3(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 12 + 8 + 1 = 21$   
 f)  $f(h+1) = 3(h+1)^2 - 4(h+1) + 1 =$   
 $= 3(h^2 + 2h + 1) - 4h - 4 + 1 =$   
 $= 3h^2 + 6h + 3 - 4h - 4 + 1 = 3h^2 + 2h$   
 g)  $3x^2 - 4x + 1 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = 0$  ou  $x = \frac{4}{3}$   
 h)  $3x^2 - 4x + 1 = -1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 0$   
 $\Delta = 16 - 4(3)(2) = 16 - 24 = -8$   
 $\nexists x$  real  $| f(x) = -1$

8. a)  $4x^2 - 4x + 3 = 2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$   
 $\Delta = 0$   
 $x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$   
 b)  $4x^2 - 4x + 3 = 3 \Rightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x' = 0$  e  $x'' = 1$   
 c)  $4x^2 - 4x + 3 = -1 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$   
 $\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3$   
 $\nexists x$  real  $| f(x) = -1$

9.  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + 1 = \frac{4}{9} - \sqrt{2} + 1 =$   
 $= \frac{4 - 9\sqrt{2} + 9}{9} = \frac{13 - 9\sqrt{2}}{9}$

10. a)  $f(6) = 3 \cdot 6 - 20 = -2$   
 b)  $f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$   
 c)  $f(10) = -100 + 40 - 2 = -62$   
 d)  $f(9) = -81 + 36 - 2 = -47$   
 e)  $f(5) = 3 \cdot 5 - 20 = 15 - 20 = -5$   
 f)  $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$   
 g)  $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 16 - 8 = 8$

11. a)  $f(x) = \frac{(6+x)(x+2)}{2} = \frac{6x + 12 + x^2 + 2x}{2} =$   
 $= \frac{x^2 + 8x + 12}{2} = \frac{x^2}{2} + 4x + 6$

12.  $A_r = 30 \cdot 20$   
 $A_q = x^2$   
 $A = A_r - 4A_q = 600 - 4x^2$

13. a)  $P(n) = n^2 - n \Rightarrow P(10) = 10^2 - 10 = 100 - 10 = 90$ ; 90 jogos  
 b)  $P(n) = n^2 - n = 42$

$n^2 - n = 42 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0$   
 $\Delta = 1 - 4(1)(-42) = 169$

$n = \frac{1 \pm 13}{2} \Rightarrow n' = 7$  e  $n'' = -6$  (não convém)

Portanto, são 7 times.

14.  $\mathcal{P}(3) = 20(3) - 5(3)^2 = 60 - 45 = 15$  watts

15. a)  $x^2 - 3x = 0$   
 $a = 1, b = -3, c = 0$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 3}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3+3}{2} = 3 \\ x'' = \frac{3-3}{2} = 0 \end{cases}$

Zeros da função: 3 e 0.

b)  $x^2 + 4x + 5 = 0$   
 $a = 1, b = 4, c = 5$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$   
 Logo, a equação não tem raízes reais; consequentemente, a função  $f(x) = x^2 + 4x + 5$  não tem zeros reais.

c)  $-x^2 + 2x + 8 = 0$   
 $a = -1, b = 2, c = 8$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 6}{-2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-2+6}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \\ x'' = \frac{-2-6}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \end{cases}$

Zeros da função: -2 e 4.

d)  $x^2 + 10x + 25 = 0$   
 $a = 1, b = 10, c = 25$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 + 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$   
 Zeros da função: -5 (duplo).

e)  $x^2 - 8x + 16 = 0$   
 $a = 1, b = -8, c = 16$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$   
 zeros da função: 4 (duplo)

f)  $25x^2 + 9x + 1 = 0$   
 $a = 25, b = 9$  e  $c = 1$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 81 - 100 = -19$   
 Logo, a equação não tem raízes reais e, consequentemente, a função não tem zeros reais.

16.  $(m-1)x^2 - 4x - 1 = 0$   
 $a = m-1$  ( $m \neq 1$ ),  $b = -4$ ,  $c = -1$   
 $\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(m-1)(-1) < 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 16 + 4m - 4 < 0 \Rightarrow 4m < -12 \Rightarrow m < -3$   
 Para todo  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $m < -3$ .

17.  $kx^2 - 6x + 1 = 0$   
 $a = k$  ( $k \neq 0$ ),  $b = -6$ ,  $c = 1$   
 $\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot k \cdot 1 > 0 \Rightarrow 36 - 4k > 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow -4k > -36 \Rightarrow k < 9$   
 Para todo  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $k < 9$  e  $k \neq 0$ .

18.  $(m-2)x^2 - 2x + 6 = 0$   
 $a = m-2$  ( $m \neq 2$ ),  $b = -2$ ,  $c = 6$   
 $\Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4(m-2) \cdot 6 \geq 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4 - 24m + 48 \geq 0 \Rightarrow -24m \geq -52 \Rightarrow m \leq \frac{52}{24} \Rightarrow m \leq \frac{13}{6}$   
 Para todo  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq \frac{13}{6}$  e  $m \neq 2$

19.  $x^2 - (k+1)x + (10+k) = 0$   
 $\begin{cases} x' = 2x'' \\ x' + x'' = -\frac{b}{a} = +\frac{k+1}{1} = k+1 \\ x'x'' = \frac{c}{a} = +\frac{10+k}{1} = 10+k \end{cases}$   
 $2x'' + x'' = (k+1) \Rightarrow 3x'' = k+1 \Rightarrow x'' = \frac{k+1}{3}$   
 $x' = \frac{2(k+1)}{3}$   
 $x' \cdot x'' = 10+k \Rightarrow \frac{2(k+1)}{3} \cdot \frac{k+1}{3} = 10+k \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{2k^2 + 2k + 2k + 2}{9} = 10+k \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2k^2 + 4k + 2 = 90 + 9k \Rightarrow 2k^2 - 5k - 88 = 0$   
 $a = 2, b = -5, c = -88$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-88) = 25 + 704 = 729$   
 $k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{729}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 27}{4} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} k' = \frac{5+27}{2} = 8 \\ k'' = \frac{5-27}{2} = -\frac{22}{2} = -11 \end{cases}$

20. a) Usando a forma fatorada, podemos escrever  $f(x) = a(x-1)(x-3)$ .

E, se  $(0, -6)$  pertence à função, então  $f(0) = -6$ , portanto:

$$f(0) = a(0-1)(0-3) \Rightarrow -6 = a \cdot 3 \Rightarrow a = -2$$

Dessa forma:

$$f(x) = -2(x-1)(x-3) = -2(x^2 - 3x - x + 3) = -2(x^2 - 4x + 3) = -2x^2 + 8x - 6$$

- b)  $f(x) = a(x-2)(x+3)$

$f(0) = 4$ , portanto:

$$f(0) = a(0-2)(0+3) \Rightarrow 4 = a(-2)(3) \Rightarrow 4 = a(-6) \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

Dessa forma:

$$f(x) = -\frac{2}{3}(x-2)(x+3) = -\frac{2}{3}(x^2 + x - 6) =$$

$$= -\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 4$$

- c)  $f(x) = a(x-5)(x-5)$

$f(2) = -9$ , portanto:

$$f(2) = a(2-5)(2-5) \Rightarrow -9 = a(-3)(-3) \Rightarrow -9 = a(9) \Rightarrow a = -1$$

Dessa forma:

$$f(x) = -1(x-5)(x-5) = -1(x^2 - 10x + 25) = -x^2 + 10x - 25$$

21.  $x(x+8) = 180 \Rightarrow x^2 + 8x - 180 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 1 \cdot (-180) = 64 + 720 = 784$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{784}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 28}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-8 + 28}{2} = 10 \\ x'' = \frac{-8 - 28}{2} = -18 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Número de alunos em cada fila:  $10 + 8 = 18$ .

22. a)  $f(x) = x^2 - 2x$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Assim, os zeros da função são 0 e 2.

- b)  $f(x) = 2x^2 + 8x$

$$2x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 2x(x+4) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

Assim, os zeros da função são -4 e 0.

- c)  $f(x) = x^2 - 16$

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$$

Assim, os zeros da função são -4 e 4.

- d)  $f(x) = x^2 - 11$

$$x^2 - 11 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$$

Assim, os zeros da função são  $-\sqrt{11}$  e  $\sqrt{11}$ .

- e)  $f(x) = x^2 + 14x$

$$x^2 + 14x = 0 \Rightarrow x(x+14) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x + 14 = 0 \Rightarrow x = -14$$

Assim, os zeros da função são -14 e 0.

- f)  $f(x) = 3x^2 + 3x$

$$3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow 3x(x+1) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Assim, os zeros da função são -1 e 0.

- g)  $f(x) = 2x^2 - 8$

$$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

Assim, os zeros da função são -2 e 2.

- h)  $f(x) = -x^2 + 36$

$$2x^2 + 36 = 0 \Rightarrow -x^2 = -36 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

Assim, os zeros da função são -6 e 6.

23.  $d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 170 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n - 340 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-340) = 9 + 1360 = 1369$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1369}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 37}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n' = \frac{3 + 37}{2} = 20 \\ n'' = \frac{3 - 37}{2} = -17 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Portanto, o polígono tem 20 lados e se chama icosagono.

24.  $x^2 + x + x + x + x = 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \\ x'' = \frac{-4 - 6}{2} = -5 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Logo,  $x = 1$  dm.

25.  $(18+x)(15+x) = 378 \Rightarrow 270 + 18x + 15x + x^2 - 378 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 33x - 108 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 33^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 1089 + 432 = 1521$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-33 \pm \sqrt{1521}}{2 \cdot 1} = \frac{-33 \pm 39}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-33 + 39}{2} = 3 \\ x'' = \frac{-33 - 39}{2} = -36 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Logo, daqui a 3 anos, o produto de suas idades será igual a 378.

26. Considerando que o deslocamento inicial é igual a zero, temos

que  $S = v \cdot t$ .

O trem percorre 200 km em certo tempo, ou seja,  $200 = v \cdot t$ .

$$\text{Logo } t = \frac{200}{v}.$$

Para percorrer 200 km em uma hora a menos, a velocidade deveria

ser de 10 km/h a mais, ou seja,  $200 = (v+10) \cdot (t-1)$ . Substituindo

$t$  por  $\frac{200}{v}$ , temos:

$$200 = (v+10) \cdot \left( \frac{200}{v} - 1 \right) \Rightarrow 200 = 200 - v + \frac{2000}{v} - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v - \frac{2000}{v} + 10 = 0 \Rightarrow v \cdot \left( v - \frac{2000}{v} + 10 \right) = v \cdot (0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 + 10v - 2000 = 0$$

Para encontrarmos as raízes da equação de 2º grau, temos que:

$$v = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 8000}}{2} = \frac{-10 \pm 90}{2} =$$

$$= \begin{cases} v' = \frac{80}{2} = 40 & \text{(a velocidade não pode ser} \\ v'' = \frac{-100}{2} = -50 & \text{negativa, pois o movimento é} \\ & \text{retilíneo e progressivo)} \end{cases}$$

Logo, a velocidade do trem era de 40 km/h.

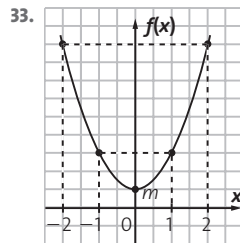
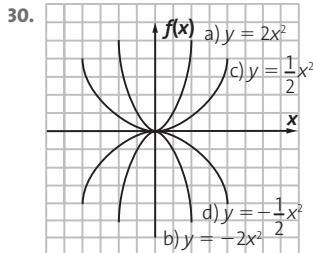
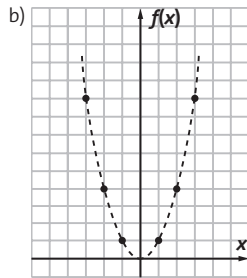
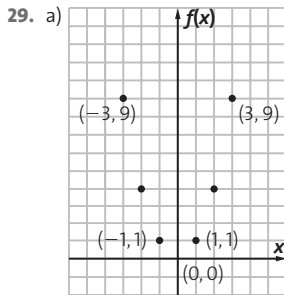
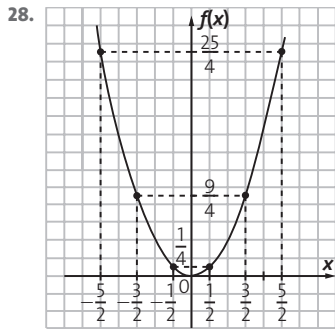
27.  $\ell^2 + \ell - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

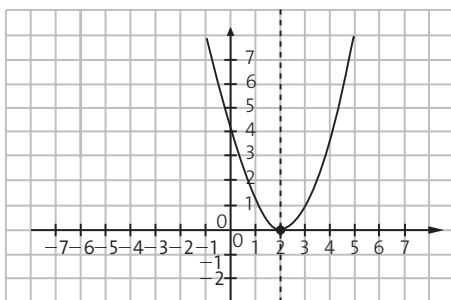
$$\ell = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \ell'' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (não serve)} \end{cases}$$

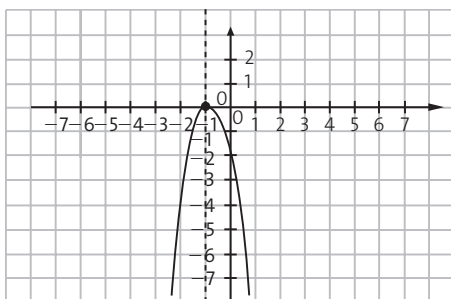
O número é  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .



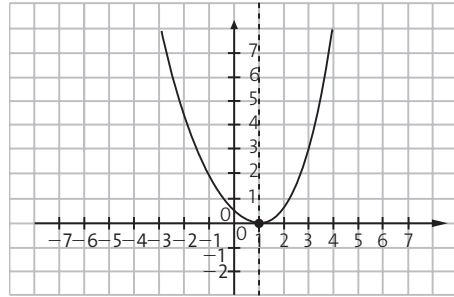
34. a)  $f(x) = (x - 2)^2$



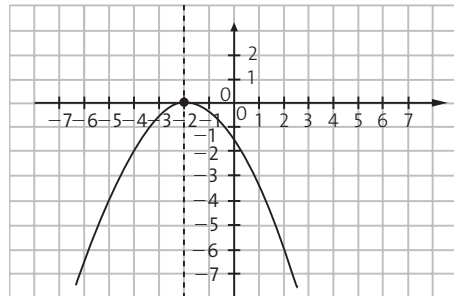
b)  $f(x) = -2(x + 1)^2$



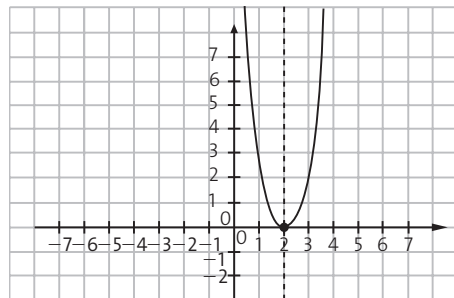
c)  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$



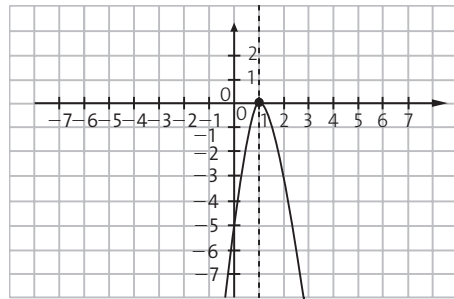
d)  $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)^2$



e)  $f(x) = 3(x - 2)^2$



f)  $f(x) = -5(x - 1)^2$



38. a)  $c = 3$  é onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas. O vértice tem coordenadas  $(1, 2)$  então  $x_v = 1$  e  $y_v = 2$ .

Forma canônica:  $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

$f(x) = a(x - 1)^2 + 2 = a(x^2 - 2x + 1) + 2 = ax^2 - 2ax + a + 2$

Como  $c = 3$ , temos:

$a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$

Logo,  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ .

b)  $c = 4$  é onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas.

Zeros da função:  $x' = -1$  e  $x'' = 4$

Forma fatorada:  $f(x) = a(x - x')(x - x'')$

Então,  $f(x) = a(x + 1)(x - 4) = a(x^2 - 4x + x - 4) = ax^2 - 3ax - 4a$

Como  $c = 4$ , temos:

$-4a = 4 \Rightarrow a = -1$

Logo,  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ .

c)  $c = 2$  é onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas. Temos que  $f(1) = 3$  e o vértice tem coordenadas  $(0, 2)$ .

Forma canônica:  $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

Substituindo o vértice, temos:

$$f(x) = a(x - 0)^2 + 2 = ax^2 + 2$$

Mas:

$$f(1) = 3 \Rightarrow a \cdot 1^2 + 2 = 3 \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Logo, } f(x) = x^2 + 2.$$

d)  $c = 0$ , é onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas.

Zeros da função:  $x' = 0$  e  $x'' = 4$  vértice  $(2, 4)$

Forma canônica:  $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 4 = a(x^2 - 4x + 4) + 4 = ax^2 - 4ax + 4a + 4$$

Como  $c = 0$ , temos:

$$4a + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{4} = -1$$

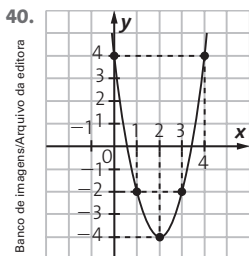
Substituindo  $a$ :

$$f(x) = -1x^2 - 4 \cdot (-1)x + 4 \cdot (-1) + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 4x - 4 + 4$$

$$\text{Logo, } f(x) = -x^2 + 4x.$$

39. a)  $a < 0$ , concavidade para baixo.  
 $b < 0$ , intersecta o eixo  $y$  no ramo descendente.  
 $c > 0$ , intersecta o eixo  $y$  em sua parte positiva.  
 b)  $a > 0$ , concavidade para cima.  
 $b > 0$ , intersecta o eixo  $y$  no ramo ascendente.  
 $c < 0$ , intersecta o eixo  $y$  em sua parte negativa.  
 c)  $a < 0$ , concavidade para baixo.  
 $b > 0$ , intersecta o eixo  $y$  no ramo ascendente.  
 $c = 0$ , intersecta o eixo  $y$  em sua origem.



Como a concavidade da parábola é para cima,  $a > 0$ .

Como a parábola intersecta o eixo  $y$  no ramo decrescente,  $b < 0$ .

Como a parábola intersecta o eixo  $y$  em  $(0, 4)$ ,  $c = 4$ .

Portanto, a função correta é

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 4$$

**Resposta:** alternativa b.

40. Banco de imagens/Arquivo da editora
41. a)  $2^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$   
 $A(2, 0)$  pertence à parábola.  
 b)  $4^2 - 5(4) + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$   
 $B(4, 2)$  pertence à parábola.  
 c)  $(-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$   
 $C(-1, 10)$  não pertence à parábola.
42.  $(m + 1)(2)^2 - 1 = 1 \Rightarrow 4m + 4 - 1 = 1 \Rightarrow 4m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$
43. a)  $x^2 - 11x + 30 = 0$   
 $\Delta = 121 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 121 - 120 = 1$   
 $x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 1}{2} \Rightarrow x' = 6$  e  $x'' = 5$
- b)  $x^2 + 4x - 21 = 0$   
 $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$   
 $x = \frac{-4 \pm 10}{2} \Rightarrow x' = 3$  e  $x'' = -7$
- c)  $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x' = 6$  e  $x'' = -6$
- d)  $6x^2 - 5x + 1 = 0$   
 $\Delta = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1$   
 $x = \frac{5 \pm 1}{12} \Rightarrow x' = \frac{1}{2}$  e  $x'' = \frac{1}{3}$
45. a)  $a < 0$ , concavidade para baixo.  
 $\Delta > 0$ , intersecta o eixo  $x$  em dois pontos.

- b)  $a > 0$ , concavidade para cima.  
 $\Delta > 0$ , intersecta o eixo  $x$  em dois pontos.  
 c)  $a > 0$ , concavidade para cima.  
 $\Delta < 0$ , não intersecta o eixo  $x$ .  
 d)  $a < 0$ , concavidade para baixo.  
 $\Delta = 0$ , intersecta o eixo  $x$  em um só ponto.  
 e)  $a < 0$ , concavidade para baixo.  
 $\Delta < 0$ , não intersecta o eixo  $x$ .  
 f)  $a > 0$ , concavidade para cima.  
 $\Delta = 0$ , intersecta o eixo  $x$  em um só ponto.

46.  $a < 0$  (concavidade voltada para baixo)

$$\Delta > 0 \text{ (2 zeros da função diferentes)} \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

$c < 0$  (valor de  $y$  em que a parábola intercepta o eixo  $y$ )

$b > 0$  (a parábola cruza o eixo  $y$  no ramo crescente da parábola)

**Resposta:** alternativa b.

#### Resolvido passo a passo

6. a)  $V$  representa o vértice da parábola  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot \frac{3}{2}} = 2$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{0}{6} = 0$$

Logo,  $V(2, 0)$ .

47. a)  $f(x) = x^2 - 2 - 3 \rightarrow a = 1, b = -2$   
 $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$   
 $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$   
 $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4} = -4$   
 $V(1, -4)$
- b)  $f(x) = 2x^2 + 3x - 5 \rightarrow a = 2, b = 3$   
 $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29$   
 $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}$   
 $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-29}{4 \cdot 2} = -\frac{29}{8}$   
 $V(-\frac{3}{4}, -\frac{29}{8})$
- c)  $f(x) = x^2 - 4x + 3 \rightarrow a = 1, b = -4$   
 $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$   
 $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$   
 $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4 \cdot 1} = -1$   
 $V(2, -1)$
- d)  $y = x^2 \rightarrow a = 1, b = 0$   
 $\Delta = 0$   
 $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$   
 $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{0}{4} = 0$   
 $V(0, 0)$
- e)  $y = (x - 2)^2 + 3$   
 Forma canônica:  $y = (x - x_v)^2 + y_v$   
 Logo,  $x_v = 2$  e  $y_v = 3$ .  
 $V(2, 3)$
48.  $a < 0 \Rightarrow 2 - k < 0 \Rightarrow -k < -2 \Rightarrow k > 2$

49.  $a > 0 \Rightarrow 4m + 1 > 0 \Rightarrow 4m > -1 \Rightarrow m > -\frac{1}{4}$

50. a)  $x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot (1) \cdot (3) = 4$

$x = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = -1 \text{ e } x'' = -3$

Eixo x:  $(-1, 0)$  e  $(-3, 0)$

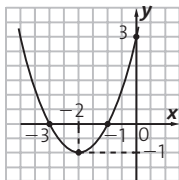
Eixo y:  $(0, 3)$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4} = -1$

$V(-2, -1)$

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$



b)  $-x^2 + 6x - 9 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0$

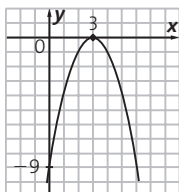
$x = \frac{-6 \pm 0}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$  (duplo)

Eixo x:  $(3, 0)$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3 \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-0}{4 \cdot (-1)} = 0$

$V(3, 0)$

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$



51.  $x^2 - x + 2 = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = 4 \text{ e } x'' = 1$

Substituindo  $x$  na equação da reta ou da parábola:

$x = 1 \rightarrow y = 2$

$x = 3 \rightarrow y = 8$

Logo, há dois pontos comuns, que são  $(1, 2)$  e  $(3, 8)$ .

52. a) Para cima, pois  $a > 0$ .

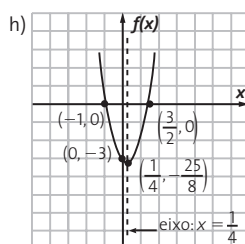
b)  $2x^2 - x - 3 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$

$x = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow x' = \frac{3}{2} \text{ e } x'' = -1$

c)  $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-25}{4 \cdot 2} = -\frac{25}{8}$

$V\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$



53. a)  $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{80}{2} = 40$  unidades

b)  $C_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{5600}{4} = 1400$

54. a)  $t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$  s

b)  $h_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-40}{-4} = 10$  m

c)  $-t^2 + 4t + 6 = 0$

$\Delta = 16 - 4(-1)6 = 40$

$t = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{-2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow t' = 2 - \sqrt{10}$  (não convém)

e  $t'' = 2 + \sqrt{10} \approx 5,16 \approx 5$  min  $10$  s = 310 s

55. Para a função  $f: A \rightarrow [3, 7]$ , dada por  $f(x) = x^2 - 4x + 7$  ser bijetiva é necessário ser:

• sobrejetiva:  $\text{Im}(f) = [3, 7]$

• injetiva:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Como  $f$  tem a concavidade voltada para cima ( $a > 0$ ) e  $f$  deve ser

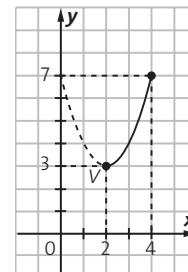
crescente, temos:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2 \\ y_v &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-12)}{4 \cdot 1} = 3 \end{aligned} \right\} V(2, 3)$$

Para  $y = 7$ :

$x^2 + 4x + 7 = 7 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x = 4$

Logo, o conjunto  $A$ , domínio da função, é  $A = [2, 4]$ .



56. Seja  $x$  o número de lugares vazios ( $0 \leq x \leq 40$ ). O lucro da empresa é dado pela função  $L(x) = (40 - x)(20 + 2x)$ . Para determinar o lucro máximo, basta determinar a abscissa do vértice da parábola  $L(x) = -x^2 + 30x + 400$ . Assim:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2(-1)} = 15$

Portanto, temos o lucro máximo da empresa quando 15 passageiros forem transportados.

57.  $f(t) = -t^2 + bt - 156$

$t_v = 14 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 14 \Rightarrow \frac{-b}{2 \cdot (-1)} = 14 \Rightarrow \frac{b}{2} = 14 \Rightarrow b = 28$

**Resposta:** alternativa c.

58. Seja  $x$  o número de lugares não ocupados ( $0 \leq x \leq 100$ ), o faturamento da empresa é dado pela função  $F(x) = (100 - x)(200 + 4x)$ . Para obter o faturamento máximo, basta determinar a abscissa do vértice da parábola  $F(x) = (100 - x)(200 + 4x)$ . Assim:

$F(x) = 20000 + 400x - 200x - 4x^2 \Rightarrow F(x) = 5000 + 50x - x^2$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \cdot (-1)} = \frac{50}{2} = 25$

Portanto, temos o faturamento máximo quando 25 lugares não estiverem ocupados.

59. a) O grilo retorna ao solo quando  $h(t) = 0$ . Assim:

$3t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t(3 - 3t) = 0 \Rightarrow t = 0$  (não saiu do solo) ou

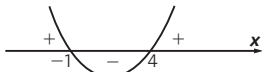
$3 - 3t = 0 \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$

Portanto,  $t = 1$  s.

b)  $y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-9}{4 \cdot (-3)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$

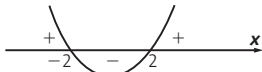
Portanto, altura máxima = 0,75 m.

60. a)  $x^2 - 3x - 4 = 0$   
 $\Delta = 9 - 4(1)(-4) = 25$   
 $x = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x' = 4 \text{ e } x'' = -1$



$f(x) = 0$  para  $x = -1$  ou  $x = 4$   
 $f(x) > 0$  para  $x < -1$  ou  $x > 4$   
 $f(x) < 0$  para  $-1 < x < 4$

b)  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$



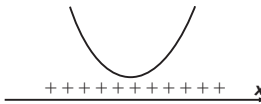
$f(x) = 0$  para  $x = -2$  ou  $x = 2$   
 $f(x) > 0$  para  $x < -2$  ou  $x > 2$   
 $f(x) < 0$  para  $-2 < x < 2$

61.  $x^2 + 7x + 10 = 0$   
 $\Delta = 49 - 4(1)(10) = 9$   
 $x = \frac{-7 \pm 3}{2} \Rightarrow x' = -2 \text{ e } x'' = -5$



$f(x) > 0$  para  $x < -5$  ou  $x > -2$

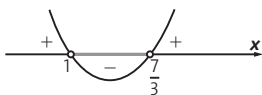
62.  $x^2 - 2x + 6 = 0$   
 $\Delta = 4 - 4(1)(6) = -20$



$S = \emptyset$

63.  $x^2 + 5x + 5m = 0$   
 $\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 5m = 25 - 20m < 0 \Rightarrow -20m < -25 \Rightarrow m > \frac{5}{4}$   
 $S = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m > \frac{5}{4} \right\}$

64. a)  $3x^2 - 10x + 7 = 0$   
 $\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 16$   
 $x = \frac{10 \pm 4}{6} \Rightarrow x' = 1 \text{ e } x'' = \frac{7}{3}$



$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{7}{3} \right\}$

b)  $-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow -4x^2 = -9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow x' = -\frac{3}{2} \text{ e } x'' = \frac{3}{2}$



$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$

65.  $f(x+2) = (x+2)^2 + 1 \text{ e } f(2) = 2^2 + 1 = 5$   
 $(x+2)^2 + 1 < 5 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + 1 < 5 \Rightarrow x^2 + 4x < 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$   
 Raízes:  $x' = 0 \text{ e } x'' = -4$



$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0 \}$

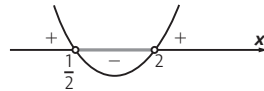
66. a)  $3x - 3 - 6x \geq 2 - 2x^2 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 9x - 5 \geq 0$   
 $\Delta = 81 - 4(2)(-5) = 121$

$x = \frac{9 \pm 11}{4} \Rightarrow x' = 5 \text{ e } x'' = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 5 \right\}$

b)  $2(x^2 - 2x + 1) - x < 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 < 0$   
 $\Delta = 25 - 4(2)(2) = 9$

$x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = \frac{1}{2}$



$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 2 \right\}$

c)  $-2x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9$

$x = \frac{1 \pm 3}{-4} \Rightarrow x' = -1 \text{ e } x'' = \frac{1}{2}$



$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2} \right\}$

67.  $3x \leq \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \Rightarrow 6x \leq x^2 - x \Rightarrow x^2 - 7x \geq 0$

$x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(x-7) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$   
 Raízes:  $x' = 0 \text{ e } x'' = 7$



Portanto, o menor número inteiro positivo que satisfaz a inequação é o número 7.

68. a) (I)  $x^2 - 5x < 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 < 0$   
 $\Delta = 25 - 4(1)(-6) = 49$

$x = \frac{-5 \pm 7}{2} \Rightarrow x' = 6 \text{ e } x'' = -1$



$S_I = \{ -1 < x < 6 \}$

(II)  $x^2 - 5x > 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 > 0$

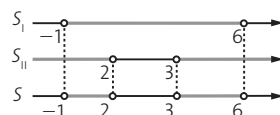
$\Delta = 25 - 4(1)(6) = 49$

$x = \frac{-5 \pm 7}{2} \Rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = 2$



$S_{II} = \{ x < 2 \text{ ou } x > 3 \}$

Logo:



$S = \{ -1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 6 \}$



b) (I)  $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

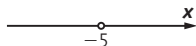
$\Delta = 36 - 4(1)(8) = 4$

$x = \frac{-6 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = -2 \text{ e } x'' = -4$



$S_I = \{x \leq -4 \text{ ou } x \geq -2\}$

(II)  $x + 5 < 0 \Rightarrow x < -5$



$S_{II} = \{x < -5\}$

Logo:



$S = \{x < -5\}$

c) (I)  $x^2 + 3 < 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\Delta = 16 - 4(1)(3) = 4$

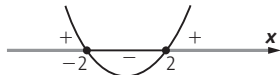
$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = 1 \text{ e } x'' = 3$



$S_I = \{1 < x < 3\}$

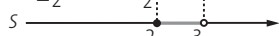
(II)  $x^2 + 3 \geq 7 \Rightarrow x^2 - 4 \geq 0$

$x' = -2 \text{ e } x'' = 2$



$S_{II} = \{x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$

Logo:



$S = \{-2 \leq x < 3\}$

d) (I)  $x^2 - 6x \geq 0$

Raízes:  $x' = 0 \text{ e } x'' = 6$

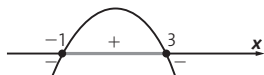


$S_I = \{x \leq 0 \text{ ou } x \geq 6\}$

(II)  $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

$\Delta = 4 - 4(-1)(3) = 16$

$x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x' = -1 \text{ e } x'' = 3$



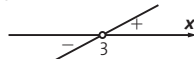
$S_{II} = \{-1 \leq x \leq 3\}$

Logo:

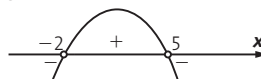


$S = \{-1 \leq x \leq 0\}$

69. a) I)  $f(x) = x - 3 \rightarrow \text{raiz} = 3$



II)  $g(x) = -x^2 + 3x + 10 \rightarrow \text{raízes: } x' = -2 \text{ e } x'' = 5$

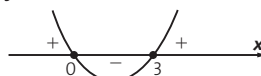


Quadro de resolução:

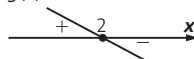
	-2	3	5	
$f(x)$	-	-	+	+
$g(x)$	-	+	+	-
$f(x) \cdot g(x)$	+	-	+	-
	-2	3	5	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

b) I)  $f(x) = x^2 - 3x \rightarrow \text{raízes: } x' = 0 \text{ e } x'' = 3$



II)  $g(x) = -x + 2 \rightarrow \text{raiz} = 2$

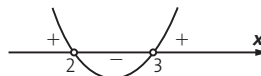


Quadro de resolução:

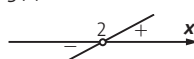
	0	2	3	
$f(x)$	+	-	-	+
$g(x)$	+	+	-	-
$f(x) \cdot g(x)$	+	-	+	-
	0	2	3	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$

c) I)  $f(x) = x^2 - 5x + 6 \rightarrow \text{raízes: } x' = 2 \text{ e } x'' = 3$



II)  $g(x) = x - 2 \rightarrow \text{raiz: } x = 2$

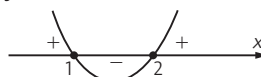


Quadro de resolução:

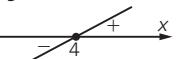
	2	3	
$f(x)$	+	-	+
$g(x)$	-	+	+
$f(x) \cdot g(x)$	-	-	+
	2	3	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

d) I)  $f(x) = x^2 - 3x + 2 \rightarrow \text{raízes: } x' = -1 \text{ e } x'' = 3$



II)  $g(x) = x - 4 \rightarrow \text{raiz: } x = 4$



O denominador de uma fração real deve ser sempre diferente de zero.

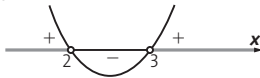
Logo,  $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ , e conseqüentemente 4 não pertence ao domínio da função.

Quadro de resolução:

	1	2	4	
$f(x)$	+	-	+	+
$g(x)$	-	-	-	+
$f(x) \cdot g(x)$	-	+	-	+
	1	2	4	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x < 4\}$

70. I)  $f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow$  raízes:  $x' = 2$  e  $x'' = 3$



II)  $g(x) = x^2 - 16 \Rightarrow$  raízes:  $x' = 4$  e  $x'' = -4$



Quadro de resolução:

	-4	2	3	4	
$f(x)$	+	-	-	+	+
$g(x)$	+	-	-	-	+
$f(x) \cdot g(x)$	+	-	+	-	+
	-4	2	3	4	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 4\}$

71. a)  $f(t) = -t^2 + 4t - 3$

Ponto máximo:

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow a(t) + b = 0 \Rightarrow -2t + 4 = 0 \Rightarrow -2t = -4 \Rightarrow t = 2$$

Portanto, depois de 2 s a partícula mudará de sentido.

b)  $f(t) = \frac{1}{2} \cdot (-4)t^2 + 12t + c \Rightarrow f(t) = -t^2 + 12t - 16$

Ponto máximo:

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12}{-2} = 6$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow a(t) + b = 0 \Rightarrow -4t + 12 = 0 \Rightarrow -4t = -12 \Rightarrow t = 3$$

Portanto, depois de 3 s a partícula mudará de sentido.

c)  $f(t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 - 8t + c \Rightarrow f(t) = t^2 - 8t + 15$

Ponto máximo:

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow a(t) + b = 0 \Rightarrow 2t - 8 = 0 \Rightarrow 2t = 8 \Rightarrow t = 4$$

Portanto, depois de 4 s a partícula mudará de sentido.

d)  $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 - 18t - 36 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(t) = 2t^2 - 18t - 36$$

Ponto máximo:

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2 \cdot 2} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow a(t) + b = 0 \Rightarrow 4t - 18 = 0 \Rightarrow 4t = 18 \Rightarrow t = 4,5$$

Portanto, depois de 4,5 s a partícula mudará de sentido.

72. 1ª maneira:

Temos três tipos de movimentos independentes.

1ª parte: O automóvel mantém velocidade variável com aceleração constante (MUV).

$$\begin{cases} a = 5 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 0 \\ \Delta t = 8 \text{ s} \\ S_n = 0 \end{cases}$$

$$S_1 = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = 0 + 0t + \frac{5 \cdot 8^2}{2} = 160 \Rightarrow S_1 = 160 \text{ m}$$

$$v = v_0 + at \Rightarrow v_1 = 0 + 5 \cdot 8 = 40 \Rightarrow v_1 = 40 \text{ m/s}$$

2ª parte: O automóvel mantém velocidade constante (MU).

$$\begin{cases} v = \text{constante} = v_1 = 40 \text{ m/s} \\ \Delta t = 20 \text{ s} \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

$$S_2 = S_0 + vt = 0 + 40 \cdot 20 = 800 \Rightarrow S_2 = 800 \text{ m}$$

3ª parte: O automóvel volta a acelerar (MUV).

$$\begin{cases} a = 5 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 40 \text{ m/s} \\ v = 80 \text{ m/s} \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{40}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 8 \text{ s}$$

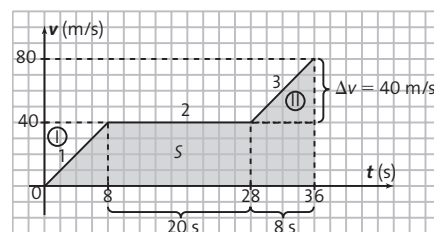
$$S_3 = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = 0 + 40 \cdot 8 + \frac{5 \cdot 8^2}{2} = 320 + 160 = 480 \Rightarrow S_3 = 480 \text{ m}$$

Assim, a distância percorrida é a soma das distâncias percorridas nas três partes.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 160 + 800 + 480 = 1440 \Rightarrow S = 1440 \text{ m}$$

2ª maneira:

Construindo um gráfico da velocidade do automóvel em função do tempo, temos:

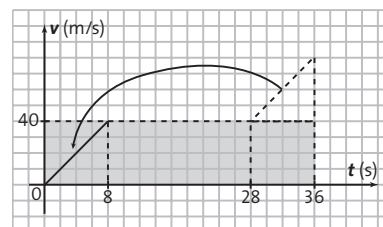


Parte 1:  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{\Delta v}{8} \Rightarrow \Delta v = 40 \text{ m/s}$

Parte 2:  $v = \text{constante}$  durante 20 s

Parte 3:  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{40}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 8 \text{ s}$

Como a área do triângulo 1 é igual à área do triângulo 3, podemos transladar o triângulo 3 para o local do triângulo 1, obtendo um retângulo.



Área da região retangular:  $A = 36 \cdot 40 = 1440$

Logo,  $S = 1440 \text{ m}$ .

73. a)  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}^2$

b) 1ª maneira:

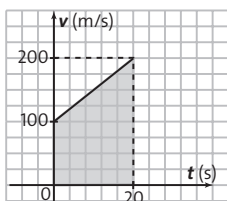
$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow S - S_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 100 \cdot 20 + \frac{5 \cdot 20^2}{2} = 2000 + 1000 = 3000$$

Logo,  $\Delta S = 3000 \text{ m} = 3 \text{ km}$  (comprimento mínimo da pista para que o avião consiga decolar).

2ª maneira: (graficamente):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{v - 100}{20} \Rightarrow v = 200 \text{ m/s (velocidade após 20 s)}$$



$$\text{Área} = \text{deslocamento} = \frac{(B+b)a}{2} = \frac{(200+100)20}{2} = 3000 \text{ m} = 3 \text{ km}$$

Portanto, o valor da aceleração é de  $5 \text{ m/s}^2$  e o comprimento mínimo da pista é de 3 km.

74.  $f(1) = 2, f(2) = 5, f(3) = 10, f(4) = 17, f(5) = 26, \dots, f(n) = n^2 + 1,$   
 $f(n+1) = n^2 + 2n + 2, \dots$   
 $2, 5, 10, 17, 26, \dots, n^2 + 1, n^2 + 2n + 2, \dots$   
 Sequência formada pelas diferenças de termos consecutivos: 3, 5, 7, 9, ...,  $2n + 1, \dots$ , que é uma PA de razão 2.
75.  $f(1) = 0, f(3) = 4, f(5) = 16, f(7) = 36, f(9) = 64, f(11) = 100, \dots,$   
 $f(2n-1) = 4n^2 - 8n + 4, f(2n+1) = 4n^2, \dots$   
 $0, 4, 16, 36, 64, 100, \dots, 4n^2 - 8n + 4, 4n^2, \dots$   
 Sequência formada pelas diferenças de termos consecutivos: 4, 12, 20, 28, 36, ...,  $8n - 4, \dots$ , que é uma PA de razão 8.
77. a)  $f(1) = 1, f(4) = 49, f(7) = 169, f(10) = 361, \dots,$   
 $f(3n+1) = 36n^2 + 12n + 1, \dots$   
 $1, 49, 169, 361, \dots, 36n^2 + 12n + 1, \dots$   
 Sequência formada pelas diferenças de termos consecutivos:  
 $48, 120, 192, \dots, 72n - 16, \dots$ , que é uma PA de razão 72.  

$$\frac{f(3n+1) - f(3n-2)}{3}$$
- b) Razão da primeira PA: 3 ( $r = 3$ )  
 Razão da última PA: 72  
 $a = 4$   
 $2ar^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3^2 = 72$  (correto)  
 Realmente, se  $r = 3$  é a razão da primeira PA,  $2ar^2 = 72$  é a razão da última PA.

### Exercícios adicionais

1. a)  $x^2 - 2x = \frac{x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2}{(x-1)^2} - 1^2 = (x-1)^2 - 1$
- b)  $x^2 + 6x - 16 = \frac{x^2 + 2 \cdot 3x + 9}{(x+3)^2} - 9 - 16 = (x+3)^2 - 25$
2. a)  $x^2 + 10x + 21 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2}{(x+5)^2} - 5^2 + 21 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x+5)^2 - 25 + 21 = 0 \Rightarrow (x+5)^2 - 4 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x+5)^2 = 4 \Rightarrow x+5 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x+5 = 2 \Rightarrow x = -3 \\ \text{ou} \\ x+5 = -2 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$   
 Zeros da função: -3 e -7.
- b)  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2}{(x-1)^2} - 1^2 - 3 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x-1)^2 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow x-1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \Rightarrow x = 3 \\ \text{ou} \\ x-1 = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$   
 Zeros da função: 3 e -1.

3. a)  $x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x) - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 =$   
 $= (x+1)^2 - 4$   
 Logo,  $f(x) = (x+1)^2 - 4$ .
- b)  $2x^2 + 8x - 5 = 2\left[(x^2 + 4x) - \frac{5}{2}\right] =$   
 $= 2\left[(x^2 + 2 \cdot 2x + 4) - 4 - \frac{5}{2}\right] = 2\left[(x+2)^2 - \frac{13}{2}\right] =$   
 $= 2(x+2)^2 - 13$   
 Logo,  $f(x) = 2(x+2)^2 - 13$ .
4. a)  $f(x) = (x-2)^2 - 9$   
 $(x-2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{9} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x-2 = \pm 3$   
 $x-2 = -3 \Rightarrow x = -1$  ou  $x-2 = 3 \Rightarrow x = 5$   
 Assim, os zeros da função são -1 e 5.
- b)  $f(x) = -(x+1)^2 + 4$   
 $-(x+1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow -(x+1)^2 = -4 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x+1 = \pm 2 \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = -3$  ou  $x+1 = 2 \Rightarrow x = 1$   
 Assim, os zeros da função são -3 e 1.
5. Se,  $f(x) = a(x-m)^2 + k$  e  $a > 0$ , então o menor valor de  $f(x)$  é  $k = f(m)$ .  
 Portanto, para  $f(x) = 2(x-1)^2 + 10$ , o menor valor de  $f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  é 10. Isso ocorre para  $x = 1$ .
6.  $-3x^2 - x + 1 = 0$   
 $a = -3, b = -1, c = 1$   
 $m = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(-3)} = -\frac{1}{6}$   
 $k = f\left(-\frac{1}{6}\right) = -3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right) + 1 =$   
 $= -3 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + 1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 1 = \frac{-1+2+12}{12} = \frac{13}{12}$   
 $-3x^2 - x + 1 = -3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{13}{12} = 0$   
 Logo, o maior valor (pois  $a < 0$ ) de  $f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  é  $\frac{13}{12}$ . Isso ocorre quando  $x = -\frac{1}{6}$ .

### Pensando no Enem

1. a) A letra **a** desconsidera a tarifa cobrada por minuto de viagem no Uber, indicada abaixo da tabela.  
 b) Por meio dessa função determinamos o preço final a ser pago por uma viagem de táxi, nas condições indicadas.  
 c) Por meio dessa função determinamos o preço final a ser pago por uma viagem de táxi de luxo, nas condições indicadas.  
 d) Por meio dessa função determinamos o preço final a ser pago por uma viagem pelo Uber, nas condições indicadas.  
 e) Por meio dessa função determinamos o preço final a ser pago por uma viagem de táxi, em bandeira 2.  
**Resposta:** alternativa d.
2. Uma viagem como essa sairia por:  
 R\$ 48,75 pelo Uber  
 R\$ 39,43 em táxi bandeira 1  
**R\$ 45,78 em táxi bandeira 2**  
 R\$ 59,46 em táxi de luxo
- Assim:  
 I) R\$ 6,35 a mais do que em um dia comum. (V)  
 II) R\$ 2,98 a mais do que pelo Uber, sendo uma viagem de 30 minutos. (F)  
 São R\$ 2,98 a menos do que pelo Uber.  
 III) R\$ 13,68 mais barata do que em táxi de luxo. (V)  
 IV) R\$ 6,35 a mais do que em bandeira 1. (V)  
**Resposta:** alternativa e.

3. a) Considerando que o preço da entrada ( $p$ ) seja uma função de 1ª grau do número de possíveis frequentadores ( $x$ ), temos:  
 $p = -2x + 100$ .

Assim, o faturamento ou receita ( $R$ ) com a promoção seria dado por:

$$R(x) = x \cdot p + x \cdot \frac{p}{2} = x(-2x + 100) + x \cdot \frac{(-2x + 100)}{2} =$$

$$= -2x^2 + 100x - x^2 + 50x = -3x^2 + 150x$$

E o custo, considerando frequentadores e acompanhantes, seria:  
 $C(x) = 15 \cdot 2x = 30x$

Então, para o lucro, temos uma função de 2ª grau:

$$R(x) - C(x) = -3x^2 + 150x - 30x = -3x^2 + 120x$$

O número de frequentadores que maximiza o lucro é calculado por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-120}{-6} = 20$$

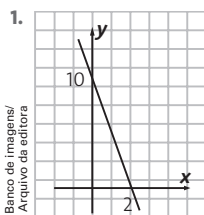
O número de frequentadores e acompanhantes que maximiza o lucro da casa é:

$$20 + 10 = 30$$

- b) 20 é o número de frequentadores que maximiza o lucro.  
 c) 10 é o número de acompanhantes quando o lucro é maximizado.  
 d) 60 é o preço da entrada  $p$  ( $22 \cdot 20 + 100$ ) para o número de frequentadores que maximiza o lucro.  
 e) 25 é o número de frequentadores que maximiza a receita (o faturamento) sem considerar a promoção.

**Resposta:** alternativa a.

## Vestibulares de Norte a Sul



Toda função afim é definida por:

$$f(x) = ax + b$$

A partir do gráfico, concluímos que a função passa pelos pontos (0, 10) e (2, 0).

Então, temos que:

$$f(0) = a \cdot (0) + b = 10 \Rightarrow b = 10$$

$$f(2) = a \cdot (2) + 10 = 0 \Rightarrow 2a = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-10}{2} \Rightarrow a = -5$$

$$\text{Logo, } f(x) = -5x + 10 = 10 - 5x$$

**Resposta:** alternativa c.

2. Fazendo  $f(x) = g(x)$  encontraremos as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos representados.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x + 5 = x^2 - x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - x + 2 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Resolvendo  $x^2 - 2x - 3 = 0$  encontramos as raízes  $x' = 3$  e  $x'' = -1$ .

$x' = 3$	$x'' = -1$
$f(x') = y' = 3 + 5 = 8$	$f(x'') = y'' = -1 + 5 = 4$
$g(x') = y' = 3^2 - 3 + 2 = 8$	$g(x'') = y'' = (-1)^2 - (-1) + 2 = 4$

$$\therefore y' + y'' = 8 + 4 = 12$$

**Resposta:** alternativa e.

3. Como a função é linear, pode ser definida por  $f(x) = ax + b$  onde a taxa de variação é dada por:  $a = \frac{85 - 60}{10 - 0} = \frac{5}{2}$

$$\text{Logo, } f(x) = \frac{5}{2}x + 60.$$

Os valores de  $x$ , para serem superiores a 95%, devem satisfazer a seguinte condição:

$$f(x) > 95 \Rightarrow \frac{5}{2}x + 60 > 95 \Rightarrow \frac{5}{2}x > 35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x > 70 \Rightarrow x > 14$$

Sendo  $x > 14$  a quantidade de anos, a partir de 2012, para superar a marca de 95% das peças sendo fabricadas no Brasil, então,  $2012 + 15 = 2027$ , indica o ano em que os 95% de peças fabricadas no Brasil serão superados, ou seja, em 2027.

**Resposta:** alternativa a.

4. Como na função  $h(x) = -0,1x^2 + 1,2x + 2,5$ , a altura é representada pelo eixo das ordenadas, temos que o  $y_v$  ( $y$  do vértice) representará a altura máxima atingida.

$$h(x) = -0,1x^2 + 1,2x + 2,5 \Rightarrow y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{2,44}{0,4} = 6,1$$

Logo, a altura máxima atingida é de 6,1 metros.

**Resposta:** alternativa a.

5. A equação da porcentagem de carga da bateria do celular ( $P$  em %) em função do tempo ( $t$  em minutos), será de:

$$P(t) = \frac{50}{100} - \frac{t}{300}, \text{ para } 1\% \text{ de carga consumida a cada 3 minutos.}$$

Terminando a carga da bateria  $P(t) = 0$ .

$$\text{Logo, } \frac{50}{100} - \frac{t}{300} = 0 \Rightarrow \frac{t}{300} = \frac{50}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{15000}{100} \Rightarrow t = 150$$

Fabiano poderá brincar 150 minutos ou 2,5 horas até que a bateria se descarregue completamente.

**Resposta:** alternativa b.

6. Se  $P(t) = 20\%$ , temos que:

$$20 = \frac{1}{100}(64 + 88t - t^2) \Rightarrow 100 \cdot 20 = 64 + 88t - t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 88t + 2000 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 88t + 1936 = 0$$

Resolvendo a equação de 2ª grau, encontramos as raízes  $t'$  e  $t''$ .

$$t' = t'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-88) \pm 0}{2 \cdot (1)} = \frac{88}{2} = 44$$

Assim,  $35 < 44 < 45$ .

**Resposta:** alternativa a.

7. Extraindo as informações do enunciado, temos que  $b = 50$ , já que foram dadas 10 corridas e cada taxa fixa custa R\$ 5,00.

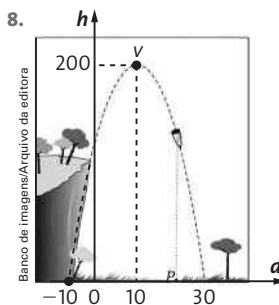
Dessa forma, temos:

$$R(x) = ax + b \Rightarrow 410 = 2x + 50 \Rightarrow x = \frac{410 - 50}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

O motorista percorreu um total de 180 km nas 10 corridas realizadas.

Assim, como foram realizadas 10 corridas, a média de quilômetros rodados por corrida é de  $\frac{180 \text{ km}}{10 \text{ corridas}} = 18 \text{ km/corrida}$ .

**Resposta:** alternativa c.



As coordenadas do vértice da parábola são  $V(10, 200)$ . Como uma das raízes da equação que representa a função é  $d' = 30$ , analogamente, a outra raiz seria  $d'' = -10$ , devido ao eixo de simetria.

A equação da parábola pode ser representada por:

$$h(d) = a(d - d')(d - d'').$$

$$\text{Substituindo, temos } h(d) = a(d - 30)(d + 10).$$

Utilizando  $h(10) = 200$ , temos:

$$h(10) = 200 \Rightarrow 200 = a(10 - 30)(10 + 10) \Rightarrow a(-20)(20) = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -400a = 200 \Rightarrow a = \frac{200}{-400} \Rightarrow a = -0,5.$$

Então, a equação da parábola é  $h(d) = -0,5(d - 30)(d + 10) \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(d) = -0,5d^2 + 10d + 150$$

Logo, como no ponto de lançamento o

$$d = 0 \text{ é } h(0) = -0,5 \cdot (0)^2 + 10 \cdot (0) + 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0) = 150$$

$\therefore$  A altura no ponto de lançamento é de 150 metros.

**Resposta:** alternativa d.

9. Montando um sistema, temos: 
$$\begin{cases} 100 = k \cdot 40 + b \\ 30 = k \cdot 120 + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$100 = k \cdot 40 + b \Rightarrow b = 100 - 40k \Rightarrow b = 100 - 40 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 100 + 35 \Rightarrow b = 135$$

$$30 = k \cdot 120 + b \Rightarrow 30 = k \cdot 120 + (100 - 40k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 = 120k + 100 - 40k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 = 80k + 100 \Rightarrow 80k = -70 \Rightarrow k = -\frac{70}{80} = -\frac{7}{8}$$

$$\text{Assim, } A = k \cdot v + b \Rightarrow A = -\frac{7}{8}v + 135$$

Substituindo  $v = 64$  km/h, conseguimos chegar ao seguinte resultado:

$$A = -\frac{7}{8} \cdot (64) + 135 = 256 + 135 = 79$$

O ângulo de visão do motorista à velocidade de 64 km/h é de  $79^\circ$ .

**Resposta:** alternativa c.

10. I. **Verdadeiro.** Substituindo  $t = 4$  horas, temos:

$$C(4) = -2 \cdot (4)^2 - 12 \cdot 4 + 110 \Rightarrow C(4) = -2 \cdot (16) - 48 + 110 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(4) = -32 - 48 + 110 \Rightarrow C(4) = -80 + 110 \Rightarrow C(4) = 30$$

II. **Verdadeiro.** No início do vazamento  $t = 0$ . Assim, substituindo temos:

$$C(0) = -2(0)^2 - 12 \cdot 0 + 110 \Rightarrow C(0) = 0 - 0 + 110 \Rightarrow C(0) = 110$$

III. **Verdadeiro.** O lago fica vazio quando  $C(t) = 0$ . Assim, encontrando o "zero" da função, temos:

$$0 = -2t^2 - 12t + 110$$

Resolvendo a equação temos:  $t' = -11$  e  $t'' = 5$ . Como não existe tempo negativo, a afirmativa se torna correta.

IV. **Falso.** Nesse caso,  $t = 3$ ; substituindo-o na função, temos:

$$C(3) = -2 \cdot (9) - 12 \cdot (3) + 110 \Rightarrow C(3) = -18 - 36 + 110 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(3) = -54 + 110 = 56$$

Como a capacidade do lago é de 110 milhões de metros cúbicos, 56 milhões representa mais de 50% da capacidade do lago.

**Resposta:** alternativa a.

### Para refletir

#### Página 104

• A função não é injetiva nem sobrejetiva.

A função não é injetiva, pois existem dois valores de  $x$  para os quais

$f(x) = 3$  ( $x = 1$  e  $x = 5$ ). Portanto, há elemento em  $B$  que é imagem de dois elementos distintos em  $A$ .

A função não é sobrejetiva, pois não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -3$ . Portanto, há elemento em  $B$  que não é imagem de nenhum elemento em  $A$ . ( $\text{Im}(f) \neq B$ ).

#### Página 127

$$f(x) = -4x^2 + 4x + 5$$

$$\Delta = 16 + 80 = 96$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{96}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{6}}{-8} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{-4}$$

$$\text{Logo, } x' = \frac{-1 + \sqrt{6}}{-4} = \frac{1 - \sqrt{6}}{4} \text{ e } x'' = \frac{-1 - \sqrt{6}}{-4} = \frac{1 + \sqrt{6}}{4}$$

Como  $x_v = \frac{x' + x''}{2}$ , temos:

$$x_v = \frac{1 - \sqrt{6}}{4} + \frac{1 + \sqrt{6}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

## Unidade 3

### CAPÍTULO 5

1. b)  $(-2)^3 = (-1)^3 \cdot 2^3 = -8$       h)  $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$   
 c)  $(-2)^6 = (-1)^6 \cdot 2^6 = 64$   
 f)  $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = 2$       i)  $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}$   
 g)  $(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7^3} = \sqrt{7^2 \cdot 7} = 7\sqrt{7}$
2. a)  $x = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-2} = -\frac{1}{27} + \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^{-2} =$   
 $= -\frac{1}{27} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right]^{-2} = -\frac{1}{27} + \left[\frac{2}{3}\right]^{-2} = -\frac{1}{27} + \frac{9}{4} =$   
 $= \frac{-4 + 243}{108} = \frac{239}{108}$
- b)  $y = \frac{2^{-2} + 2^2 - 2^{-1}}{2^{-2} - 2^{-1}} = \frac{\frac{1}{4} + 4 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1 + 16 - 2}{4}}{\frac{1 - 2}{4}} =$   
 $= \frac{15}{-1} = -15$
3. c)  $\frac{1}{10\,000} = 0,0001$   
 d)  $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$
4. b)  $\frac{10^5}{10^2} = 10^3$   
 c)  $\frac{1}{10\,000} = 10^{-4}$   
 d)  $\frac{1}{1\,000\,000} = 10^{-6}$
5. a)  $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$   
 b)  $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$   
 c)  $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 d)  $(\sqrt{3})^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(\sqrt{3})^4} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$   
 ou  
 $(\sqrt{3})^{\frac{4}{5}} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{\frac{4}{5}} = 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} = 3^{\frac{4}{10}} = 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$   
 e)  $\sqrt{9} = 3$   
 f)  $0^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{0^3} = 0$   
 g)  $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$   
 h)  $8^{\frac{6}{9}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4$   
 i)  $7^{0,4} = 7^{\frac{4}{10}} = 7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$

6. a)  $7^4 \cdot 7^2 = 7^{4+2} = 7^6$   
 b)  $3 \cdot 3^8 = 3^{1+8} = 3^9$   
 c)  $5^9 : 5^2 = 5^{9-2} = 5^7$   
 d)  $(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$   
 e)  $5^{(2^3)} = 5^8$

7. a)  $(27^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} =$   
 $= (\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8^2} + \sqrt[3]{4})^{\frac{1}{2}} = (3 + 8 - 4 + 2)^{\frac{1}{2}} =$   
 $= 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

b)  $\frac{3^0 + (-2)^2 - (\frac{1}{3})^{-1}}{(\frac{1}{2})^{-2}} = \frac{1 + 4 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

8.  $\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{20} < 5 \Rightarrow 3^4 < 3^{\sqrt{20}} < 3^5 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 81 < 3^{\sqrt{20}} < 243$

Logo,  $3^{\sqrt{20}}$  é menor que 250.

9. a)  $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^2 = 2^{3+7+2} = 2^{12}$

b)  $\frac{3^{10}}{3^4} = 3^{10-4} = 3^6$

c)  $\frac{a^6}{a} = a^{6-1} = a^5$

d)  $(2^6)^x = 2^{6x}$

e)  $7^{(2^2)} = 7^9$

f)  $\frac{2^7 \cdot 2^3}{2^{-2}} = 2^{7+3-(-2)} = 2^{12}$

10. a)  $5^x + y = 5^x \cdot 5^y$

b)  $4^{x-3} = \frac{4^x}{4^3}$

c)  $7^{3x} = (7^3)^x = (7^x)^3$

d)  $(5x)^4 = 5^4 \cdot x^4$

11. a)  $2187 = 3^7$

b)  $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

c)  $1 = 3^0$

d)  $\sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$

e)  $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} = 3^{\frac{1}{2}-1} = 3^{-\frac{1}{2}}$

f)  $27^5 = (3^3)^5 = 3^{3 \cdot 5} = 3^{15}$

12. a)  $E = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$

b)  $E = 1^\pi + 0^{\sqrt{5}} = 1 + 0 = 1$

14. a)  $8 \cdot 10000 = 80000$

b)  $5 \cdot 0,01 = 0,05$

c)  $3,52 \cdot 100000 = 352000$

d)  $1,6 \cdot 0,001 = 0,0016$

16. a)  $F, \sqrt{x^2} = |x|$

d)  $F, \sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = x\sqrt{x}$

e)  $F, \sqrt{49} = 7$

f)  $F, \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

h)  $F, \sqrt{-5^2} = \sqrt{-25} \notin \mathbb{R}$

17. a)  $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

b)  $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

c)  $\sqrt{60} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{15}$

d)  $\sqrt{200} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

18. a)  $\sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{2 \cdot 5^4} = 5\sqrt[4]{2}$

b)  $\sqrt[3]{0,125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

19. a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$

b)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

c)  $\sqrt{\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5}$

d)  $\sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = 2 \cdot \sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{12}$

e)  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt{2\sqrt[4]{8}} = \sqrt{\sqrt[4]{2^4 \cdot 8}} = \sqrt[4]{128}$

f)  $\sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^{13}}$

20. a)  $\text{mmc}(3, 4, 5) = 60$

$$\frac{\sqrt[60]{3^{40}} \cdot \sqrt[60]{3^{45}}}{\sqrt[60]{3^{48}}} = \frac{\sqrt[60]{3^{85}}}{\sqrt[60]{3^{48}}} = \sqrt[60]{3^{37}}$$

b)  $\sqrt{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^2 \cdot x}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}} =$   
 $= \sqrt{\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{x^{\frac{3}{6}}} = x^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{x^3}$

21. a)  $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

b)  $\sqrt{125} + 3\sqrt{5} - \sqrt{20} = \sqrt{5^3} + 3\sqrt{5} - \sqrt{2^2 \cdot 5} =$   
 $= \sqrt{5^2 \cdot 5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

22. a)  $2\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{3}) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{36} + 2\sqrt{9} =$   
 $= 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18$

b)  $(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 6 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 3 + \sqrt{3}$

c)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2 - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 6$

d)  $(2\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - 2\sqrt{7}) = 10 - 4\sqrt{35} + \sqrt{35} - 14 =$   
 $= -4 - 3\sqrt{35}$

23. a)  $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$

b)  $(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2 = 7 - 2 = 5$

c)  $(1 + \sqrt{2})^2 = (1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

d)  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3 =$   
 $= 8 - 2\sqrt{15}$

24. a)  $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} =$   
 $= \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$

b)  $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(7 + 2\sqrt{6})(7 - 2\sqrt{6})} =$   
 $= \sqrt{7^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{49 - 2^2 \cdot 6} = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25} = 5$



25.  $\text{mmc}(2, 3, 4, 6) = 12$

$$\sqrt[2]{2^1} = 2 \cdot \sqrt[6]{2^1 \cdot 6} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{4^1} = 3 \cdot \sqrt[4]{4^1 \cdot 4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$\sqrt[4]{17^1} = 4 \cdot \sqrt[3]{17^1 \cdot 3} = \sqrt[12]{17^3} = \sqrt[12]{4913}$$

$$\sqrt[6]{40^1} = 6 \cdot \sqrt[4]{40^1 \cdot 2} = \sqrt[12]{40^2} = \sqrt[12]{1600}$$

Em ordem crescente, temos:

$$\sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{256} < \sqrt[12]{1600} < \sqrt[12]{4913}$$

Logo:

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{17} < \sqrt[6]{40}$$

26. a)  $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$ , pois  $2 + \sqrt{3} > 0$

b)  $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$ , pois  $2 - \sqrt{3} > 0$

27. a)  $\sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{5^4} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} =$

$$= \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} =$$

$$= \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$$

b)  $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{21} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{48} + \sqrt{147} = \sqrt{2^4 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 7^2} =$

$$= \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{7^2} = 2^2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

c)  $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{1458} = \sqrt[3]{2^7} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^6} =$

$$= \sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{2} + \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{3^6} = 2\sqrt[6]{2} + 3\sqrt[6]{2} = 5\sqrt[6]{2}$$

d)  $\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{18}) = \sqrt{6 \cdot 3} + \sqrt{6 \cdot 2} - \sqrt{6 \cdot 18} =$

$$= \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2} - \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 3^2} =$$

$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$$

29. a)  $f(0) = 4^0 = 1$

b)  $f(3) = 4^3 = 64$

c)  $f(-1) = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

d)  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

e)  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$

f)  $4^m = 1 \Rightarrow m = 0$

30. a) Pelo gráfico, temos:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2^x$$

b) Pelo gráfico, temos:

$$a^1 = 0,7 \Rightarrow f(x) = (0,7)^x$$

31. a)  $f(x) = b \cdot a^x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow b \cdot a^0 = 2 \Rightarrow b = 2 \\ f(1) = 6 \Rightarrow b \cdot a^1 = 6 \Rightarrow 2 \cdot a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{cases} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x) = 2 \cdot 3^x$

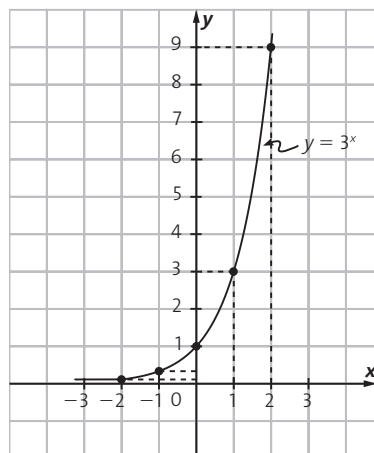
b)  $f(x) = b \cdot a^x \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow b \cdot a = 3 \Rightarrow b \cdot a = 3 \\ f(-1) = 12 \Rightarrow b \cdot a^{-1} = 12 \Rightarrow \frac{b}{a} = 12 \Rightarrow b = 12a \Rightarrow \\ \Rightarrow 12a \cdot a = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 6$$

Logo,  $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

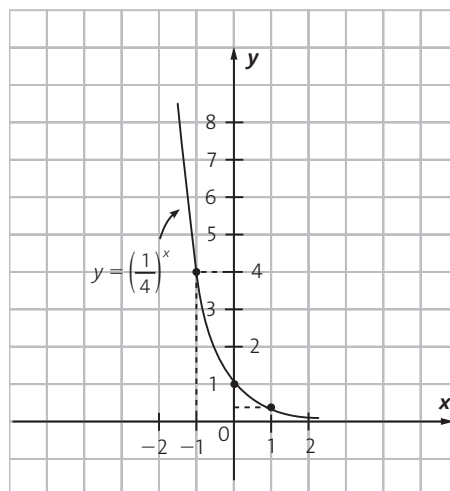
32. a)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



b)

x	-2	-1	0	1	2
y	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da Editora

33. Crescente: **a e c**; pois  $\pi$  e  $\sqrt{3}$  são maiores do que 1.

Decrescente: **b, d, e e f**, pois  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $0,01$ ,  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{2}$  são menores que 1 e maiores que zero.

35. a)  $f(2) = 2 \cdot 3^2 = 18$

b)  $g(2) = 5^2 - 2 = 23$

c)  $h(2) = 5^{2-2} = 1$

d)  $f(-1) = 2 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

e)  $g(0) = 5^0 - 2 = -1$

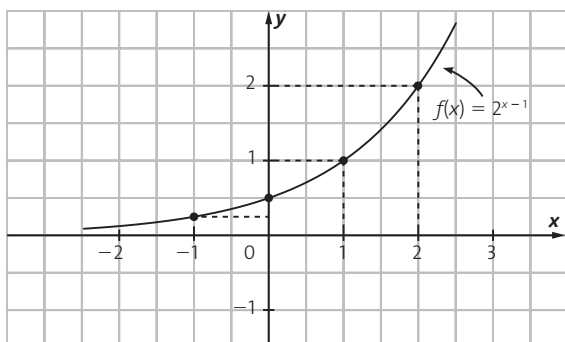
f)  $h(0) = 5^{0-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$

g)  $5^x - 2 = 125 \Rightarrow 5^x - 2 = 5^3 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$

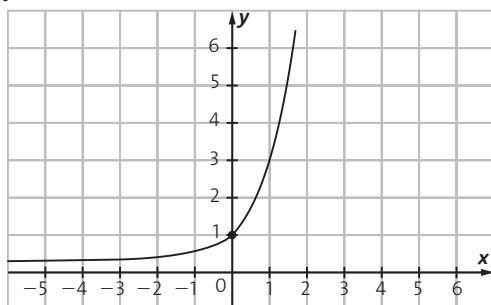
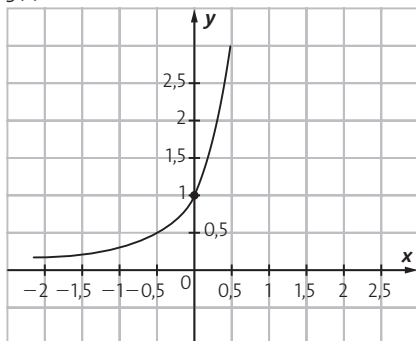
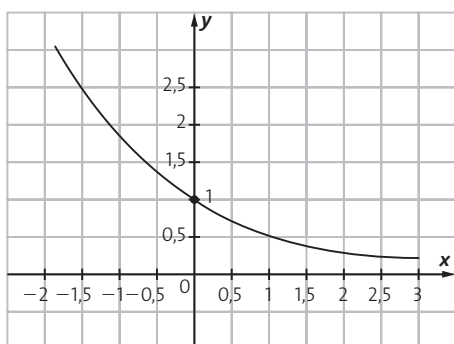
h)  $5^x - 2 = 3 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow x = 1$

36.

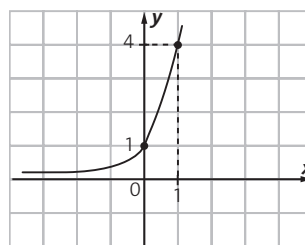
y	x
$\frac{1}{4}$	-1
$\frac{1}{2}$	0
1	1
2	2


 $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$ 

### Matemática e tecnologia

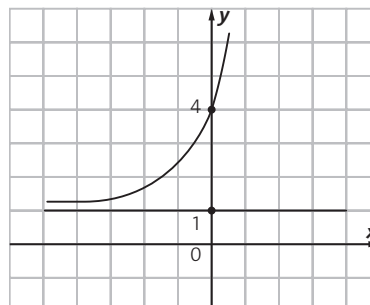
1.  $f(x) = 3^x$  $g(x) = 10^x$  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 

2. a) Crescente, pois a base é 4, logo, maior que 1.  
 b) Decrescente, pois a base é  $\frac{1}{4}$ , logo, entre 0 e 1.  
 c) Decrescente, pois a base é 3, logo, maior que 1, mas multiplicada por  $-2$  resulta em simetria em relação ao eixo  $x$ , o que faz com que ela fique decrescente.  
 d) Decrescente, pois a base é  $\frac{1}{2}$ , logo, entre 0 e 1. E, multiplicada por 4, mantém o seu comportamento, que é decrescente.
3. a) Para determinar a imagem, observaremos qual o "valor limite" da função.  
 Sabemos que a função exponencial  $f(x) = a^x$  está definida para  $a > 0$ , pois não há  $x \in \mathbb{R}$  que faça  $a^x$  ser nulo, nem menor que zero e, a partir desse dado, obtemos a imagem da função. Assim, a função  $f(x) = 4^x$ , cujo gráfico é:



Nunca cruzará o eixo  $x$ , sendo, portanto, sua imagem, o conjunto  $\mathbb{R}_+^*$ .

- b) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior: se  $2^x$  nunca chegará a ser igual a zero, então  $g(x)$  nunca chegará a ser igual a 1. O gráfico de  $g(x)$  é:



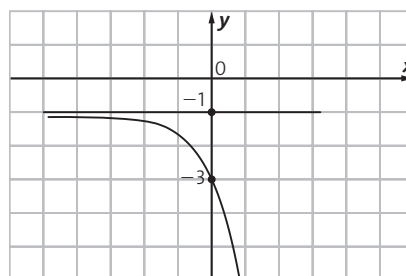
A imagem de  $g$  é:  $y \in \mathbb{R} \mid y > 1$  ou  $(1, +\infty)$ .

c)  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

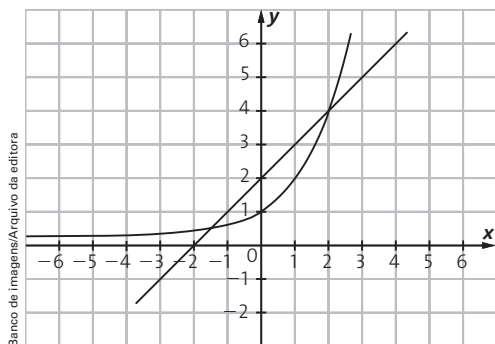
Agora é fácil perceber que  $h(x)$  nunca chegará a valer 2 e, portanto,  $\text{Im}(h) = (2, +\infty)$ .

d)  $i(x) = -2 \cdot 3^x - 1$

Neste caso, teremos  $3^x$  crescente, mas multiplicada por  $(-2)$  fica simétrica a  $2 \cdot 3^x$  em relação ao eixo  $x$ , o que a torna decrescente. E, como a cada valor da imagem subtrairemos 1, a função nunca chegará a ter o valor  $-1$ , sendo o seu conjunto imagem:  $(-\infty, -1)$ . Veja o gráfico:



4. Duas soluções.



37. a)  $r = 2$

b)  $f(-2) = \frac{2}{9}; f(0) = 2; f(2) = 18; f(4) = 162; \dots$

Logo,  $(\frac{2}{9}, 2, 18, 162, \dots)$  é uma PG de razão 9.

c)  $q = 9$

38.  $a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{20}{4} = 5$

Logo, a razão da PG é:

$a^r = 5^3 = 125$

40.  $f(1) = 9, f(2) = 27$

$q = b \cdot a \Rightarrow 27 = b \cdot a^2$

Logo:

$27 = 9 \cdot a \Rightarrow a = 3$

$9 = b \cdot 3 \Rightarrow b = 3$

Portanto  $f(x) = 3 \cdot 3^x$ .

41. a)  $2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b)  $3^{x-2} = 3^2 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

c)  $5^{x^2-2x} = 5^3 \Rightarrow x^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 16$

$x = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1$

$S = \{-1, 3\}$

d)  $10^{1-x} = 10^{-1} \Rightarrow 1 - x = -1 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

e)  $2^{4x-x^2} = 2^3 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Delta = 4$

$x = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$

$S = \{1, 3\}$

f)  $10^{x-x^2} = 10^{-6} \Rightarrow x - x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 25$

$x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$

$S = \{-2, 3\}$

g)  $3^{2-x} = 3^{-3} \Rightarrow 2 - x = -3 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$

$S = \{5\}$

h)  $3^{x-5} = (3^3)^{1-x} \Rightarrow x - 5 = 3 - 3x \Rightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

42. a)  $3^{x-2} = 81 \Rightarrow 3^{x-2} = 3^4 \Rightarrow x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b)  $5^{x-1} = 25 \Rightarrow 5^{x-1} = 5^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

c)  $2^{x^2-4} = 32 \Rightarrow 2^{x^2-4} = 2^5 \Rightarrow x^2 - 4 = 5 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$

$S = \{-3, 3\}$

d)  $2^{x+3} = 1 \Rightarrow 2^{x+3} = 2^0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$S = \{-3\}$

43. a)  $2^{x+1} + 2^x = 48 \Rightarrow 2^x \cdot 2 + 2^x = 48 \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 48 \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

b)  $2^{x+3} + 2^{x+1} + 2^x = 88 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2 + 2^x = 88 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x \cdot 8 + 2^x \cdot 2 + 2^x = 88 \Rightarrow 2^x \cdot 11 = 88 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

c)  $7^x + 7^{x-1} = 8 \Rightarrow 7^x + 7^x \cdot 7^{-1} = 8 \Rightarrow 7^x + 7^x \cdot \frac{1}{7} = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 \cdot 7^x + 7^x = 56 \Rightarrow 8 \cdot 7^x = 56 \Rightarrow 7^x = 7 \Rightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

d)  $4 \cdot 2^x + 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 4 \cdot 2^x + 2^x \cdot \frac{1}{2} = 72 \Rightarrow 8 \cdot 2^x + 2^x = 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 \cdot 2^x = 72 \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

44. a)  $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 15 = 0 \Rightarrow 3^x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow 3^x = -5 \Rightarrow \nexists x$  nestas condições

$S = \{1\}$

b)  $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

$S = \{0, 3\}$

c)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$S = \{0, 1\}$

45.  $(\frac{4}{5})^{4a^2-a} = (\frac{4}{5})^{3a+3} \Rightarrow 4a^2 - a = 3a + 3 \Rightarrow 4a^2 - 4a - 3 = 0$

$\Delta = 64$

$a = \frac{4 \pm 8}{8} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ ou } a = -\frac{1}{2}$

46.  $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^0 \\ 2^{x+2y} = 2^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=1 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow \begin{cases} -x-y=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x-y=-1-1=-2$

47.  $\begin{cases} 2^{2x} \cdot 2^{3y} = 2^{-2} \\ 3^{2x} \cdot 3^{6y} = 3^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 2x+6y=1 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow \begin{cases} -2x-3y=2 \\ 2x+6y=1 \end{cases}$

$3y=3 \Rightarrow y=1$

$2x+6=1 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$

$S = \{(-\frac{5}{2}, 1)\}$

48.  $4^{x-1} = 2^1 \Rightarrow 2^{2(x-1)} = 2^1 \Rightarrow 2x-2=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$f(\frac{3}{2}) = 4^{\frac{3}{2}-1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

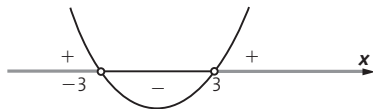
O ponto comum é  $(\frac{3}{2}, 2)$ .

49. a)  $5x > 3x + 10 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > 5$



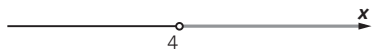
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b)  $5 - x^2 < -4 \Rightarrow -x^2 < -9 \Rightarrow x^2 > 9$   
 $x' = 3$  e  $x'' = -3$



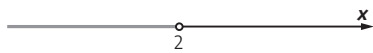
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

c)  $3^{x-2} > 3^2 \Rightarrow x - 2 > 2 \Rightarrow x > 4$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

d)  $3^x \cdot 3^1 + 3^x \cdot 3^2 < 108 \Rightarrow 3^x(3 + 9) < 108 \Rightarrow 3^x < \frac{108}{12} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3^x < 9 \Rightarrow 3^x < 3^2 \Rightarrow x < 2$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

50. a)  $1 < 2^x < 16 \Rightarrow 2^0 < 2^x < 2^4 \Rightarrow 0 < x < 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

b)  $2^{-2} \leq 2^{x-3} \leq 2^{-1} \Rightarrow -2 \leq x - 3 \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

51.  $3^{x-1} + 3^x \geq 4 \Rightarrow 3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \geq 4 \Rightarrow 3^x(3^{-1} + 1) \geq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x \left(\frac{1}{3} + 1\right) \geq 4 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{4}{3} \geq 4 \Rightarrow 3^x \geq 4 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow 3^x \geq 3^1 \Rightarrow$

$x \geq 1$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

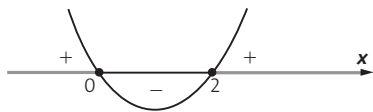
52. a)  $2^x - 16 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 16 \Rightarrow 2^x \geq 2^4 \Rightarrow x \geq 4$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

b)  $(7^x)^x - 7^{2x} \geq 0 \Rightarrow 7^{x^2} \geq 7^{2x} \Rightarrow x^2 \geq 2x \Rightarrow x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x - 2) \geq 0$

$x' = 0$  e  $x'' = 2$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$

53. Consultando a tabela, obtemos:

a)  $f(1) = e^1 = 2,7183$

$f(3) = e^3 = 20,086$

$g(2) = e^{-2} = 0,13564$

$g(4) = e^{-4} = 0,01832$

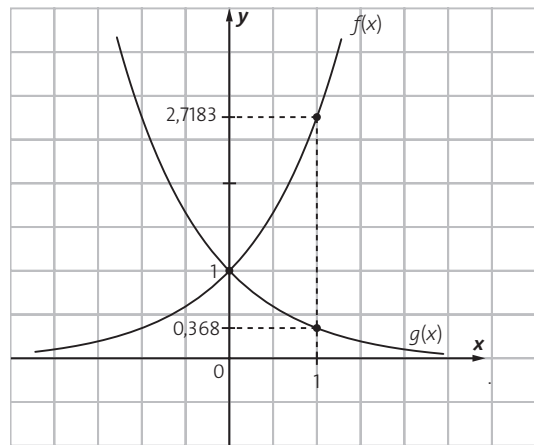
b)  $e^x = 7,389$

Consultando a tabela, obtemos  $x = 2$ .

c)  $e^{-x} = 0,368$

$x = 1$

A partir dos pontos da tabela, construímos o gráfico de  $f$  e  $g$ :



### Resolvido passo a passo

5. a) De acordo com os dados do problema 11

$Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt} \Rightarrow Q(20) = 6000 \cdot e^{20k}$  como  $e^{20k} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q(20) = 6000 \cdot 2$

Para  $t = 20n$ , temos que  $Q(20n) = 6000 \cdot e^{20nk} \Rightarrow$

$\Rightarrow Q(20n) = 6000 \cdot (e^{20k})^n \Rightarrow Q(20n) = 6000 \cdot 2^n$

$6000 \cdot 2^n \geq 1000000 \Rightarrow 2^n \geq 166,66$ , como  $n$  tem que ser

inteiro,  $n = 8 \Rightarrow 2^8 = 256$  (uma vez que  $2^7 \leq 166,66 \leq 2^8$ ).

Logo,  $Q(20 \cdot 8) = Q(160) = 6000 \cdot 2^8 = 6000 \cdot 256 = 1536000$ .

A população da cultura de bactérias atinge 1 536 000 em 160 minutos.

Após observar a quantidade, aplica-se a função linear:

$f(t) = at + b$ , onde  $b = 1536000$  e  $a = -50000$ , pois se, em 30 segundos, reduz 25000, em 60 s, ou seja, 1 min, reduzirá 50000.

Logo:  $f(t) = -50000t + 1536000 \Rightarrow f(t) = 0$  para  $t = 30,72$  ou aproximadamente 31 minutos.

54. A função que relaciona a quantidade de carbono-11 presente em

função do tempo é  $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ .

Segundo o enunciado, devemos ter  $N(t) = 0,25N_0$ . Então:

$0,25N_0 = \frac{1}{4}N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow 2 = \frac{t}{20} \Rightarrow t = 40$  min

**Resposta:** alternativa d.

55. A função que relaciona a atividade de C-14 no fóssil em função do

tempo é  $A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ . Segundo o enunciado,  $A(t) = 7$  e

$A_0 = 896$ . Então:

$7 = 896 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{7}{896} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow 7 = \frac{t}{5730} \Rightarrow t = 40110 \approx 40$  mil anos

**Resposta:** alternativa d.

56.  $P = P_0 \cdot e^{kt} \Rightarrow 4000 = 1000 \cdot e^{\frac{k}{6}} \Rightarrow e^{\frac{k}{6}} = 4 \Rightarrow e^{\frac{k}{6}} = e^{1,4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{k}{6} \approx 1,4 \Rightarrow k \approx 8,4$

$P = 1000e^{8,4 \cdot 1} = 1000(e^{8,4})^2 = 1000(66,686)^2 \approx 4447022$  bactérias

**Observação:** os valores usados foram obtidos em calculadoras.

57. O número de bactérias no instante  $t$  é  $f(t) = C \cdot a^t$ . Como  $f(0) = 2000$ , temos que  $C = 2000$ . Como  $30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}$ , temos  $f(0,5) = 4000$ . Logo:  
 $4000 = 2000a^{0,5} \Rightarrow 2 = a^{0,5} \Rightarrow a = 4$   
 Portanto,  $f(t) = 2000 \cdot 4^t$ . Assim, após 2 h temos  $f(2) = 32000$  bactérias.

58. a) Após 3 horas, temos  $\frac{1}{2}$  de 50 = 25 mg.  
 Após 6 horas, temos  $\frac{1}{2}$  de 25 = 12,5 mg.  
 Após 9 horas, temos  $\frac{1}{2}$  de 12,5 = 6,25 mg.  
 Após 12 horas, temos  $\frac{1}{2}$  de 6,25 = 3,125 mg.

b) É importante observar que, nesse caso, não podemos utilizar uma função afim para modelar a variação da medição, pois essa levaria à conclusão de que, ao final de 6 horas, não haveria mais antibiótico presente no organismo, o que é falso. O processo de eliminação do antibiótico do organismo apresenta o seguinte comportamento: à medida que a água é ingerida, ela é adicionada à corrente sanguínea e o excesso é eliminado por meio dos órgãos excretórios. A quantidade de antibiótico eliminada é maior quando a quantidade de antibióticos presente é maior. Assim, é razoável adotar como modelo uma função exponencial  $f(t) = C \cdot a^t$ , pois a taxa de variação em intervalos de tempo de mesma duração é sempre a mesma. Utilizando  $f(0) = 50$ , obtemos  $C = 50$ . Utilizando agora  $f(3) = 25$ , temos:

$$f(t) = 50a^t \Rightarrow f(3) = 50a^3 \Rightarrow 25 = 50a^3 \Rightarrow a = 2^{-\frac{1}{3}}$$

Portanto,  $f(t) = 50 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$ .

59.  $h(1) = 79,041 + 6,39 \cdot 1 - e^{(3,261 - 0,993 \cdot 1)} = 79,041 + 6,39 - e^{2,268} = 85,431 - 9,7 = 75,731 \text{ cm}$   
 $v(x) = 6,39 + 0,993 \cdot e^{(3,261 - 0,993 \cdot 1)} = 6,39 + 0,993 \cdot 9,7 = 16,0221 \text{ cm/ano}$

Resposta: alternativa a.

### Para refletir

Página 149

- $M = C(1 + i)^n \Rightarrow M = 10000(1,03)^n$   
 30 meses  $\rightarrow M = 10000(1,03)^{30} \approx 25000,00$   
 50 meses  $\rightarrow M = 10000(1,03)^{50} \approx 45000,00$
- $32500 = 10000(1,03)^n \Rightarrow 3,25 = (1,03)^n \Rightarrow n = \log_{1,03} 3,25 = 39,87 \Rightarrow$  Aproximadamente 40 meses.

Página 174

$\frac{1}{32}Q_0 = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow 5 = \frac{t}{30} \Rightarrow t = 150$   
 $1987 + 150 = 2137$   
 Portanto, o local só poderá ser reabitado a partir de 2137.

## CAPÍTULO 6

- $\log_3 27 = x \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$
- $\log_5 125 = x \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$
- $\log 10000 = x \Rightarrow 10^x = 10^4 \Rightarrow x = 4$
- $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \Rightarrow 2^{-x} = 2^5 \Rightarrow x = -5$
- $\log_{10} 0,01 = x \Rightarrow 10^x = 0,01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$
- $\log_2 0,5 = x \Rightarrow 2^x = 0,5 \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$
- $\log_2 \sqrt{8} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{8} \Rightarrow 2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- $\log_4 \sqrt{32} = x \Rightarrow 4^x = \sqrt{32} \Rightarrow (2^2)^x = (2^5)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

i)  $\log_{\frac{1}{4}} 16 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 16 \Rightarrow 4^{-x} = 4^2 \Rightarrow x = -2$

- $a^3 = 8 \Rightarrow a^3 = 2^3 \Rightarrow a = 2$
  - $a^4 = 81 \Rightarrow a^4 = 3^4 \Rightarrow a = 3$
  - $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
  - $a^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow a^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
- a)  $2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$
  - $x^3 = 126 \Rightarrow x = \sqrt[3]{126}$
  - $x^2 = 625 \Rightarrow x^2 = 25^2 \Rightarrow x = 25$
  - $10^0 = x \Rightarrow x = 1$

- a)  $x > 0$   
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$   
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c)  $x^2 - 16 > 0$

$x' = 4 \text{ e } x'' = -4$



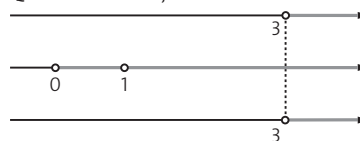
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 4\}$

- $\begin{cases} x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5 \\ x - 5 \neq 1 \Rightarrow x \neq 6 \end{cases}$   
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$

- $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ 2x - 1 \neq 1 \Rightarrow 2x \neq 2 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$   
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1\}$

- $\begin{cases} x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

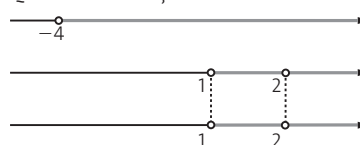
Quadro de resolução:



$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

- $\begin{cases} x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4 \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$

Quadro de resolução:



$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq 2\}$

- $\log_5 1 = 1$  (F) pois  $5^1 \neq 1$
- $\log_5 5 = 5$  (F) pela definição a base tem que ser diferente de 1.
- $\log_5 5 = 1$  (V) pois  $5^1 = 5$
- $\log_5 1 = 0$  (V) pois  $5^0 = 1$
- $\log_5 3^7 = 3$  (F) pois  $7^3 \neq 3^7$
- $\log_3 3^7 = 7$  (V) pois  $3^7 = 3^7$
- $2^{\log_2 5} = 5$  (V) atende a propriedade  $a^{\log_a N} = N$
- $2^{\log_5 2} = 5$  (F) da propriedade  $\log_a(a^n) = n$  e multiplicando  $\log_2$  dos dois lados, temos que:  $\log_2(2^{\log_5 2}) = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 \neq \log_2 5$ .

8. a) 3  
b) 5  
c)  $(2^{\log_2 6})^{\log_6 10} = 6^{\log_6 10} = 10$   
d)  $(3^{\log_3 2})^{\log_2 7} = 2^{\log_2 7} = 7$   
e)  $2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6$   
f)  $2^2 \cdot 2^{3 \log_2 5} = 4 \cdot (2^{\log_2 5})^3 = 4 \cdot 5^3 = 500$
9. a)  $\log(x^3 y) = \log x^3 + \log y = 3 \cdot \log x + \log y$   
b)  $\log\left(\frac{\pi r^3 h}{3}\right) = \log(\pi r^3 h) - \log 3 = \log \pi + \log r^3 + \log h - \log 3 =$   
 $= \log \pi + 3 \cdot \log r + \log h - \log 3$   
c)  $\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right) = \log_3 \sqrt{x} - \log_3 y^2 = \log_3 x^{\frac{1}{2}} - \log_3 y^2 =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \log_3 x - 2 \cdot \log_3 y$
10. a)  $\log_5(6 \cdot 11) = \log_5 66$   
b)  $\log_7\left(\frac{28}{4}\right) = \log_7 7 = 1$   
c)  $\log 3^4 = \log 81$   
d)  $\frac{\log_8 27}{\log_8 7} = \log_7 27$   
e)  $\log_3 7^{\frac{1}{3}} - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{7^{\frac{1}{3}}}{2}\right) = \log_3\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)$   
f)  $\log_5 5 + \log_5 4 = \log_5(5 \cdot 4) = \log_5 20$
11.  $\log 2 = a$  e  $\log 3 = b$   
a)  $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$   
b)  $\log 24 = \log(8 \cdot 3) = \log 8 + \log 3 = \log 2^3 + \log 3 =$   
 $= 3 \log 2 + \log 3 = 3a + b$   
c)  $\log 300 = \log(100 \cdot 3) = \log 100 + \log 3 = \log 10^2 + \log 3 =$   
 $= 2 \log 10 + \log 3 = 2 + b$   
d)  $\log 1,5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = b - a$   
e)  $\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4a$   
f)  $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{a}{b}$
12.  $\log 2 = x$  e  $\log 3 = y$   
a)  $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - x$   
b)  $\log \sqrt{3} = \log 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 3 = \frac{1}{2} y = \frac{y}{2}$   
c)  $\log \sqrt[3]{12} = \log 12^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log 12) = \frac{1}{3} (\log(4 \cdot 3)) =$   
 $= \frac{1}{3} (\log 4 + \log 3) = \frac{1}{3} (\log 2^2 + \log 3) = \frac{1}{3} (2 \log 2 + \log 3) =$   
 $= \frac{1}{3} (2x + y) = \frac{2x + y}{3}$   
d)  $\log \frac{1}{3} = \log 3^{-1} = -1 \log 3 = -1y = -y$   
e)  $\log 0,06 = \log \frac{6}{100} = \log 6 - \log 10 = (\log(2 \cdot 3)) - \log 10^2 =$   
 $= \log 2 + \log 3 - 2 \log 10 = x + y - 2$   
f)  $\log_4 27 = \log_{2^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_2 3 = \frac{3}{2} \left(\frac{\log 3}{\log 2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{3y}{2x}$
13.  $\log\left(\frac{ab^2}{c}\right) = \log a + \log b^2 - \log c = \log a + 2 \cdot \log b - \log c =$   
 $= 5 + 6 - 2 = 9$

14.  $\log_a 100 = \log_a(2^2 \cdot 5^2) = \log_a 2^2 + \log_a 5^2 = 2 \cdot \log_a 2 + 2 \cdot \log_a 5 =$   
 $= 2 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 100$
15. a)  $\log P = \log a^2 + \log b^5 = \log(a^2 \cdot b^5) \Rightarrow P = a^2 b^5$   
b)  $\log_2 P = \log_2 a^3 + \log_2 b - \log_2 c^2 = \log_2\left(\frac{a^3 \cdot b}{c^2}\right) \Rightarrow P = \frac{a^3 b}{c^2}$
16.  $x = \log_{10}\left(\frac{5 \cdot 8}{4}\right) = \log_{10} 10 = 1$
18.  $\log_a x = 4 \Rightarrow x = a^4$   
 $\log_{\frac{a}{3}} x = 8 \Rightarrow x = \left(\frac{a}{3}\right)^8$   
 $a^4 = \frac{a^8}{3^8} \Rightarrow a^4 = 3^8$   
 $x = a^4 = 3^8$
19.  $\frac{\log_4 5}{\log_4 3} \cdot \log_4 3^3 \cdot \frac{\log_4 \sqrt{2}}{\log_4 25} = \frac{\log_4 5}{\log_4 3} \cdot 3 \log_4 3 \cdot \frac{\log_4 2^{\frac{1}{2}}}{\log_4 5^2} =$   
 $= 3 \log_4 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
20.  $\log_6 5 = \frac{\log_{20} 5}{\log_{20} 6} = \frac{\log_{20} \frac{20}{4}}{\log_{20} (2 \cdot 3)} = \frac{\log_{20} 20 - \log_{20} 4}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3} =$   
 $= \frac{1 - 2 \cdot \log_{20} 2}{a + b} = \frac{1 - 2a}{a + b}$
21. c)  $\log x = 1,35 \Rightarrow x = 10^{1,35} \approx 22,387$
22. a)  $\log 100 < \log 279 < \log 1000 \Rightarrow 2 < \log 279 < 3$   
b)  $\log 1 < \log 6 < \log 10 \Rightarrow 0 < \log 6 < 1$   
c)  $\log 0,01 < \log 0,071 < \log 0,1 \Rightarrow -2 < \log 0,071 < -1$   
d)  $\log_7 1 < \log_7 2 < \log_7 7 \Rightarrow 0 < \log_7 2 < 1$
23. a)  $\log 100 = \log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$   
b)  $\log 0,00001 = \log 10^{-5} = -5 \cdot \log 10 = -5 \cdot 1 = -5$   
c)  $\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3 \cdot 1 = -3$   
d)  $\log 10\,000\,000 = \log 10^7 = 7 \cdot \log 10 = 7 \cdot 1 = 7$
24. a)  $\log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0,30 + 1 = 1,30$   
b)  $\log(2 \cdot 10^{-4}) = \log 2 + \log 10^{-4} = 0,30 - 4 = -3,70$   
c)  $\log(3 \cdot 10^{-1}) = \log 3 + \log 10^{-1} = 0,48 - 1 = -0,52$   
d)  $\log(2 \cdot 3^2) = \log 2 + \log 3^2 = 0,30 + 2 \cdot 0,48 = 1,26$   
e)  $\log(3^2 \cdot 5) = \log 3^2 + \log 5 = 2 \cdot 0,48 + 0,70 = 1,66$   
f)  $\log(25 \cdot 10) = \log 5^2 + \log 10 = 2 \cdot 0,70 + 1 = 1,40 + 1 = 2,40$
25. a)  $\log(2 \cdot 7) = \log 2 + \log 7 = 0,30 + 0,85 = 1,15$   
b)  $\log(2 \cdot 5^2) = \log 2 + 2 \cdot \log 5 = \log 2 + 2 \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) =$   
 $= \log 2 + 2(\log 10 - \log 2) = \log 2 + 2 \cdot \log 10 - 2 \cdot \log 2 =$   
 $= 2 \cdot \log 10 - \log 2 = 2 \cdot 1 - 0,30 = 1,70$   
c)  $\log(35 \cdot 10^{-1}) = \log 35 + \log 10^{-1} = \log(5 \cdot 7) - 1 =$   
 $= \log 5 + \log 7 - 1 = \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 7 - 1 =$   
 $= \log 10 - \log 2 + \log 7 - 1 = 1 - 0,30 + 0,85 - 1 = 0,55$   
d)  $\log(7 \cdot 10) = \log 7 + \log 10 = 0,85 + 1 = 1,85$
26. a)  $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,48}{0,30} = 1,60$   
b)  $\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{0,48}{0,70} = 0,69$   
c)  $\log_8 9 = \frac{\log 9}{\log 8} = \frac{\log 3^2}{\log 2^3} = \frac{2 \cdot 0,48}{3 \cdot 0,30} = \frac{0,96}{0,90} = 1,07$



$$d) \log_{100} 5 = \frac{\log 5}{\log 100} = \frac{\log 5}{\log 10^2} = \frac{0,70}{2} = 0,35$$

$$27. x = 52^{1000} \Rightarrow \log x = 1000 \cdot \log 52 \Rightarrow \log x = 1716 \Rightarrow x = 10^{1716}$$

Portanto,  $52^{1000}$  tem 1717 algarismos.

$$28. \text{pH} = \log \left( \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-5}} \right) = \log \left( \frac{10^5}{4,5} \right) = \log 10^5 - \log 4,5 =$$

$$= 5 - \log 4,5 \approx 5 - 0,653 = 4,347$$

$$29. a) \log 2^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0,70}{0,30} \approx 2,33$$

$$S = \{2,33\}$$

$$b) \log e^x = \log 3 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log e} = \frac{0,48}{0,43} \approx 1,12$$

$$S = \{1,12\}$$

$$c) \log 5^x = \log e \Rightarrow x \cdot \log 5 = \log e \Rightarrow x = \frac{\log e}{\log 5} = \frac{0,43}{0,70} \approx 0,61$$

$$S = \{0,61\}$$

$$d) e^x = 6 \Rightarrow \log e^x = \log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log e = \log 2 + \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 2 + \log 3}{\log e} = \frac{0,30 + 0,48}{0,43} \approx 1,81$$

$$S = \{1,81\}$$

$$30. \log (3 \cdot 2^x) = \log 10 \Rightarrow \log 3 + \log 2^x = \log 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 10 - \log 3 \Rightarrow x = \frac{1 - 0,48}{0,30} \approx 1,73$$

$$31. 3^x = y \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$y = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow y' = 3 \text{ e } y'' = 2$$

$$3^x = y \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$3^x = y \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow \log 3^x = \log 2 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,30}{0,48} \approx 0,63$$

$$S = \{0,63; 1\}$$

$$32. \log (1,12)^x = \log 3 \Rightarrow x \cdot \log (1,12) = \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log (2^4 \cdot 7 \cdot 10^{-2})} = \frac{\log 3}{\log 2^4 + \log 7 + \log 10^{-2}} =$$

$$= \frac{0,48}{4 \cdot 0,30 + 0,85 - 2} = \frac{0,48}{0,05} = 9,60$$

$$33. 1500000 = 800000(1 + 0,12)^n \Rightarrow (1,12)^n = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \left( \frac{112}{100} \right)^n = \log \left( \frac{15}{8} \right) \Rightarrow n \cdot \log \left( \frac{112}{100} \right) = \log \left( \frac{15}{8} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 15 - \log 8}{\log 112 - \log 100} = \frac{1,176091 - 0,903090}{2,049218 - 2} =$$

$$= \frac{0,273001}{0,049218} \approx 5,547 \approx 5 \text{ anos, 6 meses e 18 dias}$$

34. Início:  $x$

$$1^{\text{a}} \text{ mês: } x + 0,02x = 1,02x$$

$$2^{\text{a}} \text{ mês: } 1,02x + 0,02(1,02x) = (1,02)^2 x$$

Após  $n$  meses, a quantia depositada terá sido multiplicada por  $(1 + 0,02)^n = (1,02)^n$ . Para que a quantidade triplique, devemos ter  $(1,02)^n = 3$ .

Logo:

$$\log 1,02^n = \log 3 \Rightarrow n \cdot \log 1,02 = \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 3}{\log 1,02} = \frac{0,4771212}{0,0086} \approx 55,48$$

Assim, a quantia depositada triplica após 56 meses.

35. A função que relaciona o montante da aplicação em determinado tempo  $t$  é  $M(t) = C_0(1 + i)^t$ , em que  $M(t)$  é o montante no tempo  $t$ ,  $C_0$  é o capital inicial e  $i$  é a taxa decimal de juros. Segundo o enunciado, obtém-se  $t$  quando  $M(t) = 1300$ . Então:

$$1300 = 1000(1 + 0,015)^t \Rightarrow \frac{1300}{1000} = 1,3 = 1,015^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 1,3 = \log 1,015^t \Rightarrow t = \frac{\log 1,3}{\log 1,015} \approx 17,6 \text{ meses}$$

Portanto, após 18 meses.

36. A função que relaciona o montante da dívida em determinado tempo  $t$  é  $M(t) = C_0(1 + j)^t$ , em que  $M(t)$  é o montante no tempo  $t$ ,  $C_0$  é o capital inicial e  $j$  é a taxa decimal de juros. Segundo o enunciado, queremos  $t$  quando  $M(t) = 600$ . Então:

$$600 = 505(1 + 0,09)^t \Rightarrow 120 = 101 \cdot 1,09^t \Rightarrow \frac{120}{101} = 1,09^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \frac{120}{101} = \log 1,09^t \Rightarrow \log 120 - \log 101 = t \cdot \log 1,09 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 120 - \log 101}{\log 1,09} =$$

$$= \frac{\log 12 + \log 10 - (\log 1,01 + \log 100)}{\log 1,09} =$$

$$= \frac{\log (2^2 \cdot 3) + 1 - (0,004 + 2)}{0,038} =$$

$$= \frac{2 \cdot \log 2 + \log 3 + 1 - (0,004 + 2)}{0,038} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,3 + 0,48 + 1 - (0,004 + 2)}{0,038} = \frac{2,08 - 2,004}{0,038} = \frac{0,076}{0,038} = 2$$

Portanto, em 2 meses.

37. Considerando que a temperatura da água fervente é de  $100^\circ\text{C}$ , temos:

$$\Delta T_0 = 100 - 30 = 70^\circ\text{C}$$

Após 5 minutos:

$$\Delta T(5) = 65 - 30 = 35^\circ\text{C}$$

Mas,  $\Delta T(5) = \Delta T_0 \cdot e^{-\alpha \cdot 5}$ , então:

$$35 = 70 \cdot e^{-5\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-5\alpha}$$

Poderíamos também calcular  $\alpha$  aplicando  $\ln$  nos dois membros, com auxílio da calculadora.

Aplicando logaritmo de base 10 nos dois membros, vem:

$$\log \left( \frac{1}{2} \right) = \log e^{-5\alpha} \Rightarrow \log 2^{-1} = \log (e^{-\alpha})^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log 2 = 5 \cdot \log e^{-\alpha} \Rightarrow \log e^{-\alpha} = \frac{-0,3}{5} = 20,06$$

Após  $t$  minutos:

$$\Delta T(t) = 37 - 30 = 7$$

Então:

$$7 = 70 \cdot e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{1}{10} = e^{-\alpha t}$$

Aplicando logaritmo de base 10 nos dois membros, encontramos:

$$\log \left( \frac{1}{10} \right) = \log e^{-\alpha t} \Rightarrow -1 = \log (e^{-\alpha})^t \Rightarrow -1 = t \cdot \log e^{-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = t \cdot (-0,06) \Rightarrow t = \frac{-1}{-0,06} = 16,66\dots$$

**Resposta:** alternativa b.

38. Considerando  $t = 0$  o instante da morte, temos:

$$\Delta T_0 = 36,5 - 16,5 = 20^\circ\text{C}$$

Então:

$$\Delta T(t) = 20 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

Sendo  $t$  o instante da primeira medição e  $(t + 1)$  o instante da segunda medição, temos:

$$\bullet \Delta T(t) = 32,5 - 16,5 = 16^\circ\text{C}$$

$$16 = 20 \cdot e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{16}{20} = e^{-\alpha t} \Rightarrow \log \left( \frac{8}{10} \right) = \log e^{-\alpha t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 8 - \log 10 = \log (e^{-\alpha})^t \Rightarrow \log 2^3 - 1 = t \cdot \log (e^{-\alpha}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \log 2 - 1 = t \cdot \log (e^{-\alpha}) \Rightarrow \frac{3 \cdot 0,3 - 1}{t} = \log (e^{-\alpha}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log (e^{-\alpha}) = \frac{-0,1}{t} \text{ (D)}$$

•  $\Delta T(t+1) = 31,5 - 16,5 = 15^\circ\text{C}$

$15 = 20 \cdot e^{-\alpha \cdot (t+1)} \Rightarrow \frac{15}{20} = e^{-\alpha \cdot (t+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\left(\frac{3}{4}\right) = \log(e^{-\alpha(t+1)}) \Rightarrow \log 3 - \log 4 = \log(e^{-\alpha})^{t+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,47 - \log 2^2 = (t+1) \cdot \log(e^{-\alpha}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,47 - 2 \cdot \log 2 = (t+1) \cdot \log(e^{-\alpha}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,47 - 2 \cdot 0,3 = (t+1) \cdot \log(e^{-\alpha}) \Rightarrow \log(e^{-\alpha}) = \frac{-0,13}{t+1} \text{ ⑩}$

Igualando ⑩ e ⑪, temos:

$\frac{-0,1}{t} = \frac{-0,13}{t+1} \Rightarrow -0,1t - 0,1 = -0,13t \Rightarrow 0,03t = 0,1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{0,1}{0,03} = 3,333 \text{ horas}$

Como  $t = 3$  horas e 20 minutos, a morte ocorreu 3 horas e 20 minutos antes da primeira medição, ou seja, às 14 horas.

**Resposta:** alternativa b.

39.  $Q = Q_0 \cdot e^{-rt} \Rightarrow 5 = 50e^{-0,08t} \Rightarrow \frac{1}{10} = e^{-0,08t} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-0,08t} = 10^{-1} \Rightarrow \ln e^{-0,08t} = \ln 10^{-1} \Rightarrow -0,08t = -1 \cdot \ln 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\ln 10}{0,08} = \frac{2,3026}{0,08} \approx 28,78 \approx 28 \text{ anos, 9 meses e 18 dias}$

40.  $Q = Q_0 \cdot e^{-rt} \Rightarrow 6000 = 4000e^{-(0,025t)} \Rightarrow e^{0,025t} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln e^{0,025t} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,025t = \ln 3 - \ln 2 = 1,0986 - 0,6932 = 0,4054 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{0,4054}{0,025} \approx 16,2 \approx 16 \text{ min e 12 s}$

41.  $Q = Q_0 \cdot e^{-rt} \Rightarrow \frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{-0,04t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-0,04t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln e^{-0,04t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -0,04t = -0,6931 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \approx 17,3 \approx 17 \text{ anos, 3 meses e 18 dias}$

42. a)  $f(9) = \log_3 9 = 2$

b)  $g(4) = \log_4 4 = 1$

c)  $D(f) = \mathbb{R}_+^*$

d)  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

e)  $\log_4 x = 4 \Rightarrow x = 4^4 = 256$

f)  $f^{-1}(x) = 3^x$

g)  $g^{-1}(x) = 4^x$

h)  $f^{-1}(1) = 3^1 = 3$

i)  $(g \circ f)(81) = g(f(81)) = g(\log_3 81) = g(4) = \log_4 4 = 1$

43. a)  $f(2) = \log_3 3 = 1$

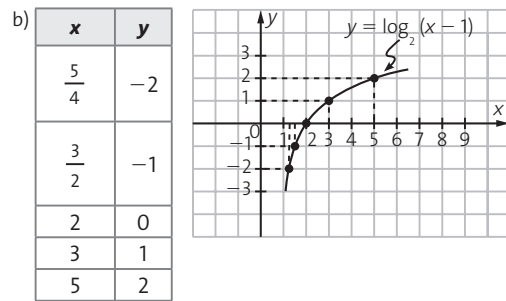
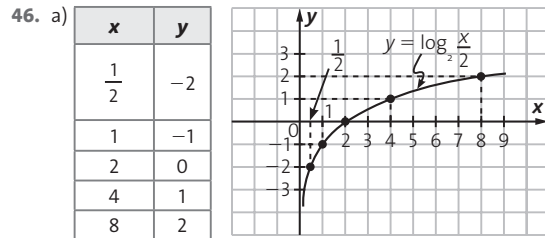
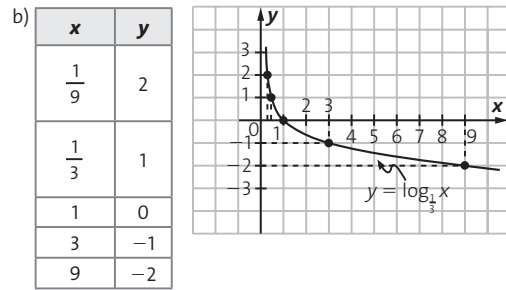
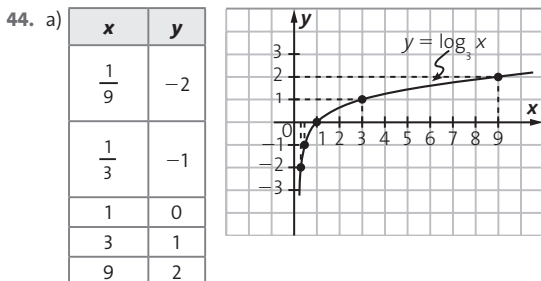
b)  $g(2) = 4 + \log_2 2 = 4 + 1 = 5$

c)  $h(5) = \log 10 = 1$

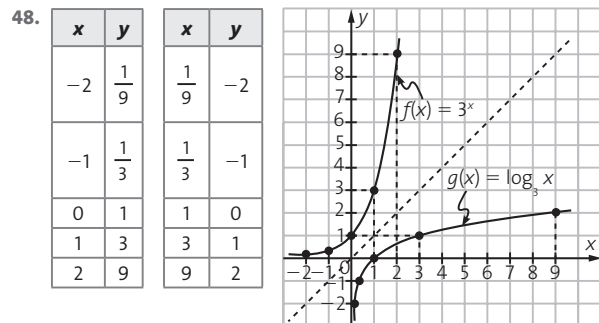
d)  $h(50) = \log 100 = 2$

e)  $g(1) = 4 + \log_2 1 = 4 + 0 = 4$

f)  $f(0) = \log_3 1 = 0$

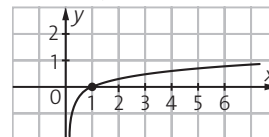


47.  $f(a) = 0 \Rightarrow \log a = 0 \Rightarrow a = 10^0 = 1$   
 $f(10) = b \Rightarrow \log 10 = b \Rightarrow b = 1$

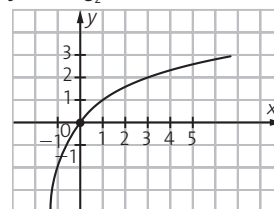


### Matemática e tecnologia

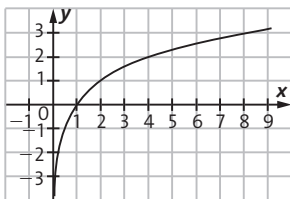
1. a)  $f(x) = \log_{10} x$



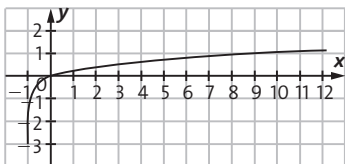
b)  $f(x) = \log_2 (x+1)$



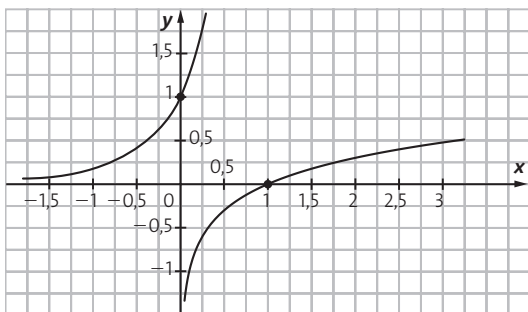
c)  $\log_2(x)$



d)  $\log_{10}(x+1)$

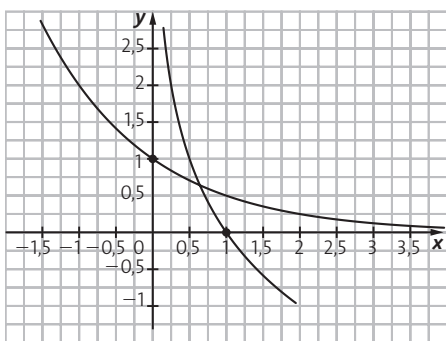


3.  $f(x) = \log_{10} x$   
 $f^{-1}(x) = 10^x$

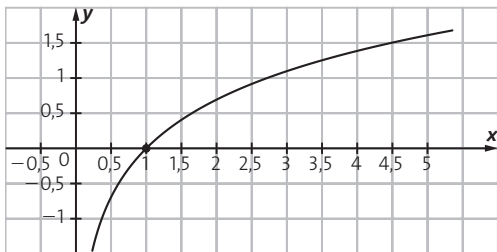


$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$g^{-1}(x) = \frac{1}{2}^x$



4.  $f(x) = \ln x$



$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Raiz:  $x = 1$

**Resolvido passo a passo**

6. a) Dados da questão base:  $P = 0,1 + \log_2(x - 1996)$   
Atingirá 5 mil habitantes em:

$$5 = 0,1 + \log_2(x - 1996) \Rightarrow 4,9 = \log_2(x - 1996) \Rightarrow x - 1996 = 2^{4,9} \Rightarrow x - 1996 = 29,9 \Rightarrow x = 2025,9$$

A cidade formada por uma ocupação de uma fazenda atingirá em 2025 a marca de 5 mil habitantes, mas não pode ser classificada como uma cidade em crescimento considerável, uma vez que demorou mais de 5 anos para atingir essa marca.

50. a) • condição de existência:  $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

•  $2^4 = x + 1 \Rightarrow x + 1 = 16 \Rightarrow x = 15$

• verificação:  $15 > -1$  (V)

$S = \{15\}$

b) • condição de existência:  $x^2 + x + 2 > 0$

•  $2^3 = x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 8 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 25$

$x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = -3$

• verificação: para  $x = 2$ :  $4 + 2 + 2 > 0 \Rightarrow 8 > 0$  (V)

para  $x = -3$ :  $9 - 3 + 2 > 0 \Rightarrow 8 > 0$  (V)

$S = \{-3, 2\}$

c) • condição de existência:  $x > 0$  e  $\log_2 x > 0$

•  $4^1 = \log_2 x \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$

• verificação: para  $x = 16$ :  $16 > 0$  e

$\log_2 16 > 0 \Rightarrow 4 > 0$  e  $4 > 0$  (V)

$S = \{16\}$

d) • condição de existência:  $x^2 + 7 > 0$ ,  $x + 1 > 0$  e  $x + 1 \neq 1$

•  $(x + 1)^2 = x^2 + 7 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 - 7 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

• verificação: para  $x = 3$ :  $9 + 7 > 0$  e  $3 + 1 > 0$  e  $3 + 1 \neq 1$  (V)

$S = \{3\}$

51. a) • condição de existência:  $x(x - 6) > 0$ ,  $x > 0$  e  $x \neq 1$

•  $x^1 = x(x - 6) \Rightarrow x^2 - 6x = x \Rightarrow x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(x - 7) = 0 \Rightarrow x' = 0$  e  $x'' = 7$

• verificação: para  $x = 0$ :  $0(0 - 6) > 0$  (F)

para  $x = 7$ :  $7 \cdot (7 - 6) > 0$  e  $7 > 0$  e  $7 \neq 1$  (V)

$S = \{7\}$

b) • condição de existência:  $x + 1 > 0$

•  $2^{\log_2(x+1)} = 3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

• verificação: para  $x = 2$ :  $2 + 1 = 3 > 0$  (V)

$S = \{2\}$

52. a) • condição de existência:  $x > 0$

• Fazendo  $\log_3 x = y$ , temos:

$y^2 - y - 6 = 0$

$\Delta = 25$

$y = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow y' = 3$  e  $y'' = -2$

Como  $\log_3 x = y$ , então:

$\log_3 x = 3 \Rightarrow 3^3 = x \Rightarrow x = 27$

$\log_3 x = -2 \Rightarrow 3^{-2} = x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

• verificação: para  $x = 27$ :  $27 > 0$  (V)

para  $x = \frac{1}{9}$ :  $\frac{1}{9} > 0$  (V)

$S = \left\{ \frac{1}{9}, 27 \right\}$

b) • condição de existência:  $x > 0$

• Fazendo  $\log_2 x = y$ , temos:

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$\Delta = 0$

$y = \frac{2}{2} = 1$

$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$

• verificação: para  $x = 2$ :  $2 > 0$  (V)

$S = \{2\}$

53. a) • condição de existência:  $x - 1 > 0$   
 •  $\log_2 [3(x - 1)] = \log_2 6 \Rightarrow 3x - 3 = 6 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$   
 • verificação: para  $x = 3$ :  $3 - 1 > 0 \Rightarrow 2 > 0$  (V)  
 $S = \{3\}$

- b) • condição de existência:  $x + 1 > 0$   
 •  $\log_3 2(x + 1) = 1 \Rightarrow 3^1 = 2x + 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$   
 • verificação: para  $x = \frac{1}{2}$ :  $\frac{1}{2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} > 0$  (V)  
 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

54. • condição de existência:  $x > 0$  e  $x + 2 > 0$   
 •  $\log_{10} x + \log_{10} (x + 2) = \log_{10} 3 \Rightarrow \log_{10} x(x + 2) = \log_{10} 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x(x + 2) = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$   
 $\Delta = 16$   
 $x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x' = 1$  e  $x'' = -3$   
 • verificação: para  $x = 1$ :  $1 > 0$  e  $1 + 2 > 0 \Rightarrow 1 > 0$  e  $3 > 0$  (V)  
 para  $x = -3$ :  $-3 > 0$  e  $-3 + 2 > 0 \Rightarrow -3 > 0$  e  $-1 > 0$  (F)  
 Logo,  $x = 1$ .

55. • condição de existência:  $x - 2 > 0$ ,  $x - 3 > 0$  e  $2x - 7 > 0$   
 •  $\log_2 (x - 2) + \log_2 (x - 3) = \log_2 2 + \log_2 (2x - 7) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_2 (x - 2)(x - 3) = \log_2 2(2x - 7) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 2(2x - 7) \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 4x - 14 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$   
 $\Delta = 1$   
 $x = \frac{9 \pm 1}{2} \Rightarrow x' = 5$  e  $x'' = 4$   
 • verificação: para  $x = 5$ :  $3 > 0$ ,  $2 > 0$  e  $3 > 0$  (V)  
 para  $x = 4$ :  $2 > 0$ ,  $1 > 0$  e  $1 > 0$  (V)  
 $S = \{4, 5\}$

56.  $\log_{10} (10^{3x}) - \log_{10} (10^{-3x}) = \log_{10} 10 \Rightarrow \log_{10} \left( \frac{10^{3x}}{10^{-3x}} \right) = \log_{10} 10 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 10^{6x} = 10 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

57. a) • condição de existência:  $x > 0$   
 •  $\log_4 x - \frac{\log_4 x}{\log_4 8} = \log_4 4 \Rightarrow \log_4 x - \frac{\log_4 x}{\frac{3}{2}} = \log_4 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_4 x - \frac{2}{3} \cdot \log_4 x = \log_4 4 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \log_4 x = \log_4 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_4 x^{\frac{1}{3}} = \log_4 4 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 4 \Rightarrow x = 4^3 = 64$   
 • verificação: para  $x = 64$ :  $64 > 0$  (V)  
 $S = \{64\}$

- b) • condição de existência:  $x > 0$   
 •  $\log_{10} x + \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 100} = 3 \Rightarrow \log_{10} x + \frac{\log_{10} x}{2} = 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_{10} x + \frac{1}{2} \cdot \log_{10} x = 3 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \log_{10} x = 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_{10} x = 2 \Rightarrow 10^2 = x \Rightarrow x = 100$   
 • verificação: para  $x = 100$ :  $100 > 0$  (V)  
 $S = \{100\}$

58. Temos:

$$h(0,4) = h\left(\frac{4}{10}\right) = 20 \cdot \log_{10} \frac{1}{4} = 20 \cdot \log_{10} \frac{10}{4} =$$

$$= 20 \cdot (1 - \log_{10} 4) = 20 \cdot (1 - \log_{10} 2^2) = 20 \cdot (1 - 2 \log_{10} 2) =$$

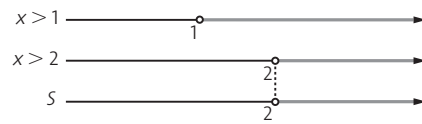
$$= 20 \cdot (1 - 2 \cdot 0,3) = 20 \cdot (1 - 0,6) = 20 \cdot 0,4 = 8$$

Assim, a altitude pedida é de 8 quilômetros.

**Resposta:** alternativa b.

59. a) • condição de existência:  $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$   
 •  $\log_5 (x - 1) > 0 \Rightarrow \log_5 (x - 1) > \log_5 5^0 \Rightarrow x - 1 > 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x > 2$

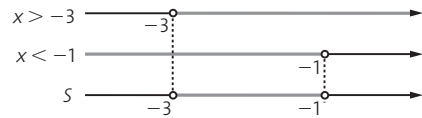
• quadro de resolução:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

- b) • condição de existência:  $2x + 6 > 0 \Rightarrow 2x > -6 \Rightarrow x > -3$   
 •  $\log_3 (2x + 6) < \log_3 4 \Rightarrow 2x + 6 < 4 \Rightarrow 2x < -2 \Rightarrow x < -1$

• quadro de resolução:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1\}$$

- c) • condição de existência:  $2 - x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2$   
 •  $\log_2 (2 - x) > \log_2 3 \Rightarrow 2 - x > 3 \Rightarrow -x > 1 \Rightarrow x < -1$

• quadro de resolução:

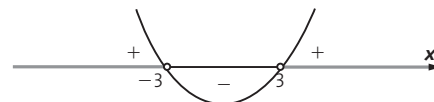


$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$$

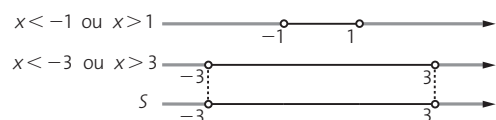
- d) • condição de existência:  $x^2 - 1 > 0$   
 $x' = 1$  e  $x'' = -1$



- $\log_{0,3} (x^2 - 1) < \log_{0,3} 8 \Rightarrow x^2 - 1 > 8 \Rightarrow x^2 - 9 > 0$   
 $x' = 3$  e  $x'' = -3$



• quadro de resolução:

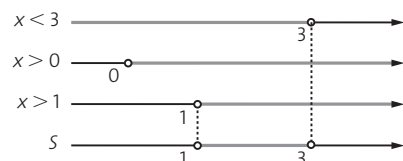


$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$$

60. a) • condição de existência:  $3 - x > 0$  e  $x > 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x < 3$  e  $x > 0$

- $\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{3 - x}{2} \right) > \log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow \frac{3 - x}{2} < x \Rightarrow 3 - x < 2x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow -3x < -3 \Rightarrow x > 1$

• quadro de resolução:



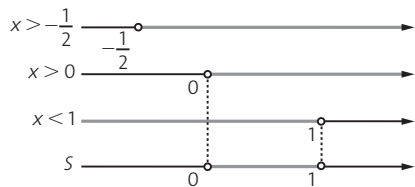
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$$

b) • condição de existência:  $2x + 1 > 0$  e  $x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x > -\frac{1}{2} \text{ e } x > 0$$

•  $\log_4(2x + 1) > \log_4(3x) \Rightarrow 2x + 1 > 3x \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$

• quadro de resolução:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

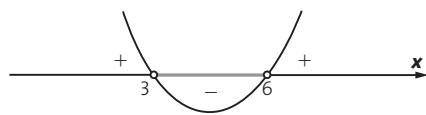
c) • condição de existência:  $x - 5 > 0$  e  $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 5$  e  $x > 4$

•  $\log_2(x - 5)(x - 4) < 1 \Rightarrow \log_2(x - 5)(x - 4) < \log_2 2 \Rightarrow$

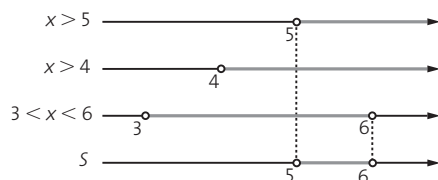
$$\Rightarrow x^2 - 9x + 20 < 2 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 < 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{9 \pm 3}{2} \Rightarrow x' = 6 \text{ e } x'' = 3$$



• quadro de resolução:



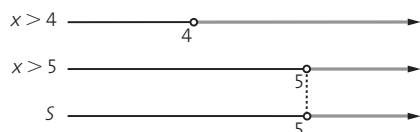
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$$

61. a) • condição de existência:  $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$

•  $2^{\log_{10}(x-4)} > 1 \Rightarrow 2^{\log_{10}(x-4)} > 2^0 \Rightarrow \log_{10}(x-4) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x - 4 > 1 \Rightarrow x > 5$$

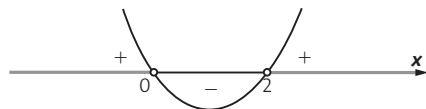
• quadro de resolução:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

b) • condições de existência:  $x^2 - 2x > 0$

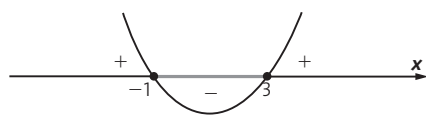
$$x' = 0 \text{ e } x'' = 2$$



•  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) \geq \log_{\frac{1}{3}} 3 \Rightarrow x^2 - 2x \leq 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0$

$$\Delta = 16$$

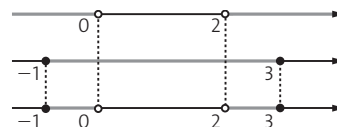
$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x' = -1 \text{ e } x'' = 3$$



• quadro de resolução:

$$x < 0 \text{ ou } x > 2$$

$$-1 \leq x \leq 3$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0 \text{ ou } 2 < x \leq 3\}$$

## Pensando no Enem

1. a)  $N(x) = 0,00001 \cdot 10^{5x-1}$ ,  $1 \leq x \leq 6$

Para  $x = 1$ , temos  $N(1) = 0,00001 \cdot 10^4 \neq 0,00001$

b)  $N(x) = 10^{-4} \cdot 10^{5(x-1)}$ ,  $1 \leq x \leq 6$

Para  $d = 1$ , temos  $N(1) = 10^{-4} \cdot 10^0 = 0,00001$

Para  $d = 2$ , temos  $N(2) = 10^{-4} \cdot 10^5 = 10 \neq 1$

c)  $N(x) = 0,00001 \cdot 10^{5(x-1)}$ ,  $1 \leq x \leq 6$

Para  $x = 1$ , temos  $N(1) = 0,00001 \cdot 10^0 = 0,00001$

Para  $x = 2$ , temos  $N(2) = 0,00001 \cdot 10^5 = 1$

Para  $x = 3$ , temos  $N(3) = 0,00001 \cdot 10^{10} = 100\,000$

Para  $x = 4$ , temos  $N(4) = 0,00001 \cdot 10^{15} = 10\,000\,000\,000$

Para  $x = 5$ , temos  $N(5) = 0,00001 \cdot 10^{20} = 10^{15}$

Para  $x = 6$ , temos  $N(6) = 0,00001 \cdot 10^{25} = 10^{20}$

Logo, esta função é a que melhor representa o crescimento exponencial do gráfico.

d)  $N(x) = 10^{-5} \cdot x$ ,  $1 \leq x \leq 6$

Não se trata de uma função de 1ª grau.

e)  $N(x) = 10^{-5+5x}$ ,  $1 \leq x \leq 6$

Para  $x = 1$ , temos  $N(1) = 10^0 = 1 \neq 0,00001$

**Resposta:** alternativa c.

## Outros contextos

1. Um avião decolando emite 140 dB de nível de ruído, a partir de 120 dB uma onda sonora provoca dor em nossos ouvidos, apesar disso, os especialistas acreditam que o limite seguro seria de 80 dB. Logo, o nível de intensidade sonora produzido por um avião decolando deve diminuir de 20 dB a 60 dB para que um controlador de pista tenha sua audição protegida.

2. De acordo com as tabelas apresentadas na seção, um trio elétrico emite cerca de 110 dB. Assim, diariamente, é permissível estar exposto a esse nível de ruído, no máximo, por 15 minutos.

3. De acordo com as tabelas apresentadas na seção, um *show de rock* emite cerca de 110 dB. Assim, diariamente, é permissível estar exposto a esse nível de ruído, no máximo, por 1 hora. Logo, um *show de rock*, deveria durar no máximo 1 hora.

4. Como um piano pode chegar a 92 dB, então  $I_{dB} = 92$ .

$$I_{dB} = 10 \log \left( \frac{I}{10^{-12}} \right) \Rightarrow 92 = 10 \log \left( \frac{I}{10^{-12}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 92 = 10(\log I - \log 10^{-12}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \log I = 9,2 + \log 10^{-12} \Rightarrow \log I = 9,2 - 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log I = -2,8 \Rightarrow I = 10^{-2,8}$$

A intensidade sonora correspondente aos 92 dB emitidos pelo piano é de  $10^{-2,8} \text{ W/m}^2$ .

## Vestibulares de Norte a Sul

1. Em 2012, 40% das vítimas, que é 60 000, estavam em motos, assim:  $N_0 = 0,4 \cdot 60\,000 = 24\,000$

Em 2015,  $t = 3$ , desse modo:

$$N(3) = 24\,000 \cdot (1,2)^3 \Rightarrow N(3) = 24\,000 \cdot 1,728 \Rightarrow N(3) = 41\,472 \rightarrow$$

→ número de vítimas de trânsito em motos.

**Resposta:** alternativa a.

2. Sabendo que  $M_1 = 10^3 M_2$ , temos que (fazendo a substituição)

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left( \frac{10^3 M_2}{M_2} \right) \Rightarrow R_1 - R_2 = \log_{10} 10^3 \Rightarrow R_1 - R_2 = 3$$

**Resposta:** alternativa d.

3. **Resolvendo com o auxílio da calculadora ou de uma planilha de cálculo.**

Cumprindo todas as metas, teremos a seguinte produção mês a mês:

Janeiro →  $a_1 = 20\,000$  parafusos

Fevereiro →  $a_2 = 20\,000 \cdot 1,2 = 24\,000$  parafusos

Março →  $a_3 = 24\,000 \cdot 1,2 = 28\,800$  parafusos

Abril →  $a_4 = 28\,800 \cdot 1,2 = 34\,560$  parafusos

Mai →  $a_5 = 34\,560 \cdot 1,2 = 41\,472$  parafusos

Junho →  $a_6 = 41\,472 \cdot 1,2 = 49\,766,4 \approx 49\,766$  parafusos

Julho →  $a_7 = 49\,766,4 \cdot 1,2 = 59\,719,68 \approx 59\,719$  parafusos

Agosto →  $a_8 = 59\,719,68 \cdot 1,2 = 71\,663,616 \approx 71\,663$  parafusos

Setembro →  $a_9 = 71\,663,616 \cdot 1,2 = 85\,996,3392 \approx$

$\approx 85\,996$  parafusos

Outubro →  $a_{10} = 85\,996,3392 \cdot 1,2 = 103\,195,60704 \approx$

$\approx 103\,195$  parafusos

Novembro →  $a_{11} = 103\,195,60704 \cdot 1,2 = 123\,834,728448 \approx$

$\approx 123\,834$  parafusos

Dezembro →  $a_{12} = 123\,834,728448 \cdot 1,2 = 148\,601,674138 \approx$

$\approx 148\,601$  parafusos

$S_{12} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$

Somando o total produzido em cada um dos meses, teremos o total produzido durante 1 ano, que é o equivalente a aproximadamente 791 606 parafusos.

Logo, o número aproximado de parafusos produzidos será, de no mínimo, 791 600 parafusos.

**Resolvendo como a soma de uma PG finita.**

Extraindo as incógnitas, temos:

$$\begin{cases} q = 1,2 \\ n = 12 \\ a_1 = 20\,000 \text{ (produção em janeiro de 2013)} \end{cases}$$

Como a fórmula geral da soma dos termos de uma PG finita é

$$S_n = a_1 \cdot \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right), \text{ substituindo os termos, temos:}$$

$$S_{12} = 20\,000 \cdot \left( \frac{1 - (1,2)^{12}}{1 - 1,2} \right) \Rightarrow S_{12} = 20\,000 \cdot \left( \frac{1 - 8,916}{-0,2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{12} = 20\,000 \cdot \left( \frac{-7,916}{-0,2} \right) \Rightarrow S_{12} = 20\,000 \cdot (39,58) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{12} = 791\,600$$

**Resposta:** alternativa d.

4. Segundo informações extraídas do exercício, a magnitude aumenta em 5 quando o brilho é dividido por 100. Assim, temos as duas expressões abaixo:

$$5 \cdot M = \log_a \frac{B}{B_0 \cdot 100} \Rightarrow 5 \cdot M = \log_a \frac{B}{B_0 \cdot 100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \log_a \frac{B}{B_0} = \log_a \frac{B}{B_0 \cdot 100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \log_a \frac{B}{B_0 \cdot 100} \Rightarrow 5 \cdot \log_a \frac{1}{100} \Rightarrow 5 \cdot \log_a 10^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^5 = 10^{-2} \Rightarrow a = 10^{-0,4}$$

Após encontrar a base  $a$ , podemos usar os dados do exercício. O exercício pede o valor de  $M$  quando  $B = 1,2 \cdot 10^5 \cdot B_0$ .

$$\text{Assim, } M = \log_a \left( 1,2 \cdot 10^5 \cdot \frac{B_0}{B_0} \right) \Rightarrow M = \log_a (1,2 \cdot 10^5)$$

Substituindo o valor de  $a$ , temos:

$$M = \log_{10^{-0,4}} (1,2 \cdot 10^5)$$

Usando a regra logarítmica do “tombo”, temos:

$$\log_{a^n} K = \frac{1}{n} \log_a K$$

$$\therefore M = \frac{1}{-0,4} \log_{10} (1,2 \cdot 10^5) = \frac{1}{-0,4} \log (1,2 \cdot 10^5)$$

Desenvolvendo o log, e fatorando 1,2, temos:

$$M = \frac{1}{-0,4} (\log \frac{12}{10} + \log 10^5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{-0,4} (\log 12 - \log 10 + 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{-0,4} [\log (2^2 \cdot 3) - 1 + 5] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{-0,4} (\log 2^2 + \log 3 + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{-0,4} (2 \cdot \log 2 + \log 3 + 4)$$

Logo, usando os dados fornecidos pelo exercício, temos:

$$M = \frac{1}{-0,4} [2 \cdot (0,30) + (0,48) + 4] \Rightarrow M = \frac{1}{-0,4} (5,08) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 22,5 \cdot 5,08 \Rightarrow M = -12,7$$

**Resposta:** alternativa 02.

5. Uma questão que trabalha com o termo geral de uma PG. A partir do enunciado, podemos extrair os seguintes dados:

$$\begin{cases} q = 3 \\ n = 5 \\ a_1 = 100 \end{cases}$$

A partir dessas informações, substituindo os dados, temos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = 100 \cdot q^{5-1} \Rightarrow a_5 = 100 \cdot 3^4 \Rightarrow a_5 = 100 \cdot 81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_5 = 8100$$

**Resposta:** alternativa d.

6. A concentração de  $H^+$  da amostra do alimento é de  $0,005 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ou  $0,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , e  $\text{colog } 2 = -0,3 \Rightarrow \log 2 = 0,3$ .

Assim,

$$\text{pH} = -\log [0,5 \cdot 10^{-2}] \Rightarrow \text{pH} = -\log 0,5 + (-\log 10^{-2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{pH} = \log \left( \frac{1}{2} \right)^{-1} + (-(-2) \log 10) \Rightarrow \text{pH} = \log 2 + 2 \log 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{pH} = 0,3 + 2 = 2,3$$

Esse valor de pH compreende ao intervalo de pH do suco de limão/lima.

**Resposta:** alternativa a.

7. Sabendo que  $T_0 = 30^\circ \text{C}$ , substituindo na função, temos

$$T(t) = 30 \cdot 2^{0,75t}$$

Como a questão pede  $T(t) = 240^\circ \text{C}$ , faz-se

$$240 = 30 \cdot 2^{0,75t} \Rightarrow \frac{240}{30} = 2^{0,75t} \Rightarrow 8 = 2^{0,75t} \Rightarrow 2^3 = 2^{0,75t} \Rightarrow 3 = 0,75t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{0,75} = 4 \text{ minutos}$$

**Resposta:** alternativa b.

8. Como ao chegar ao chão o bloco de gelo está totalmente derretido,  $M = 0$ . Assim,  $0 = 1\,000 - 250 \log_{10} d \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1\,000 = -250 \log_{10} d \Rightarrow 4 = \log_{10} d \Rightarrow d = 10^4$$

Substituindo  $d$  na outra lei, fornecida pela questão, temos:

$$d = 10t^2 \Rightarrow 10^4 = 10 \cdot t^2 \Rightarrow 10^3 = t^2 \Rightarrow t = 32 \text{ s}$$

**Resposta:** alternativa a.

9. Mesmo sem analisar as funções das alternativas, os intervalos fornecidos já diz qual a alternativa correta. Sendo  $x$  a quantidade de mitoses que ocorre, e levando em consideração que a cada mitose duas novas células-filhas são produzidas, a alternativa fica ainda mais clara.

O intervalo se dá de  $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ , pois o evento só faz aumentar a quantidade de células-filhas, é um evento quantizado, e quando  $x$  for zero é indicativo de que o evento mitose não ocorreu.

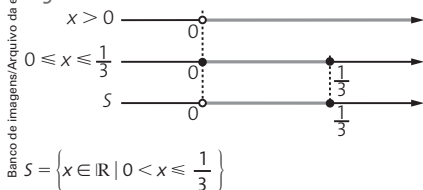
**Resposta:** alternativa c.



10. Sabendo que  $l_0 = 10^{-12}$ , substituindo na função, temos:
- $$\beta = 10 \log \left( \frac{l}{10^{-12}} \right) = 10 [\log l - (\log 10^{-12})] = 10 [\log l + 12] = 10 \log l + 120$$
- Como a questão informa que  $l$  é multiplicada por 100, temos:
- $$\beta' = 10 \left[ \log \left( \frac{10^2 l}{10^{-12}} \right) \right] = 10 [\log 10^2 l - (\log 10^{-12})] = 10 [\log 10^2 + \log l - (2 \log 10)] = 10(2 + \log l + 12) \Rightarrow \Rightarrow 20 + 10 \log l + 120 = 20 + \beta$$
- Assim, concluímos que os decibels aumentam em 20.  
**Resposta:** alternativa b.

### Para refletir

Página 199



## Unidade 4

### CAPÍTULO 7

4. Para  $a_n = 2n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , teremos:
- $$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_1 = 2 \cdot (1) - 1 = 1 \\ n = 2 &\Rightarrow a_2 = 2 \cdot (2) - 1 = 3 \\ n = 3 &\Rightarrow a_3 = 2 \cdot (3) - 1 = 5 \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = 2 \cdot (4) - 1 = 7 \end{aligned}$$
- Resposta:** (1, 3, 5, 7)
5. Neste caso,  $a_n = 47$ . Assim:
- $$47 = 2n + 5 \Rightarrow 2n = 42 \Rightarrow n = 21$$
- Como  $21 \in \mathbb{N}^*$ , podemos afirmar que 47 pertence à sequência e é o seu 21º termo ( $a_{21}$ ).
6. a)  $n = 1 \rightarrow a_1 = 5 \cdot 1 = 5$   
 $n = 2 \rightarrow a_2 = 5 \cdot 2 = 10$   
 $n = 3 \rightarrow a_3 = 5 \cdot 3 = 15$   
 $n = 4 \rightarrow a_4 = 5 \cdot 4 = 20$   
 etc.  
 A sequência é (5, 10, 15, 20, ...).
- b)  $n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$   
 $n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$   
 $n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$   
 $n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$   
 A sequência é  $\left( \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \right)$ .
- c)  $n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$   
 $n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$   
 $n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$   
 $n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$   
 A sequência é  $\left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right)$ .

7. a) Temos que:
- $$\begin{aligned} a_1 &= 2 = 2 \cdot 1 \\ a_2 &= 4 = 2 \cdot 2 \\ a_3 &= 6 = 2 \cdot 3 \\ &\vdots \\ a_n &= \dots = 2 \cdot n, \text{ com } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

- b) Temos que:
- $$\begin{aligned} a_1 &= 1 = 2 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 \\ a_2 &= 3 = 4 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 \\ a_3 &= 5 = 6 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 \\ &\vdots \\ a_n &= \dots = 2 \cdot n - 1, \text{ com } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

8. Utilizando o termo geral obtido no item b do exercício anterior, temos que:

$$a_{20} = 2 \cdot 20 - 1 = 39$$

9. a)  $n = 1 \rightarrow a_1 = -2$   
 $n = 2 \rightarrow a_2 = (-1)^2 \cdot a_1 = 1(-2) = -2$   
 $n = 3 \rightarrow a_3 = (-1)^3 \cdot a_2 = -1(-2) = 2$   
 $n = 4 \rightarrow a_4 = (-1)^4 \cdot a_3 = 1 \cdot 2 = 2$   
 $n = 5 \rightarrow a_5 = (-1)^5 \cdot a_4 = -1 \cdot 2 = -2$   
 etc.

A sequência é (-2, -2, 2, 2, -2, ...).

- b)  $n = 1 \rightarrow a_1 = 1$   
 $n = 2 \rightarrow a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$   
 $n = 3 \rightarrow a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$   
 $n = 4 \rightarrow a_4 = 2a_3 + 3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$   
 $n = 5 \rightarrow a_5 = 2a_4 + 3 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$   
 etc.

A sequência é (1, 5, 13, 29, 61, ...).

10.  $n = 1 \rightarrow a_1 = 6$   
 $n = 2 \rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 6 + 3 = 9$   
 $n = 3 \rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 9 + 3 = 12$   
 $n = 4 \rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 12 + 3 = 15$   
 etc.

A sequência é (6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...).

Logo, o 8º termo é 27.

11. a)  $2x + 1 = 2 \cdot 20 + 1 = 41$   
 b)  $2x + 1 = 2 \cdot 77 + 1 = 155$   
 c)  $2x + 1 = 41 \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20$

### Resolvido passo a passo

6. a) Sabe-se que  $a_1 = 17,3$ , ano 2012 e vamos calcular

$$a_{10} = a_1 + 9r = 17,3 + 9(0,35) = 20,45.$$

$$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$S_{10} = 17,30 + 17,65 + 18,00 + 18,35 + 18,70 + 19,05 + 19,40 + 19,75 + 20,10 + 20,45$$

$$S_{10} = 188,75$$

188,75 milhões de pessoas, correspondem a 15% das pessoas diagnosticadas com doenças cardiovasculares.

milhões de pessoas	%
188,75	15
x	100

$$15x = 18\,875$$

$$x = \frac{18\,875}{15} \approx 1258,33$$

Em uma década, a partir de 2012, estima-se que aproximadamente 1258,33 milhões de pessoas no mundo serão diagnosticadas com alguma doença cardiovascular.

b) Subsídio de R\$ 52,75 para 30% dos enfermos de doenças cardiovasculares.

30% dos enfermos em uma década, a partir de 2012, equivalem a:  $1258,33 \cdot (0,30) \approx 377,50$  milhões de pessoas.

Logo, o valor do subsídio será de:  $377,50 \cdot 52,75 \approx 19913,13$  milhões de reais, ou seja, R\$ 19 913 130 000,00 (19,91 bilhões de reais).

O contingente populacional que não terá acesso aos medicamentos de forma gratuita será equivalente a 70% das pessoas diagnosticadas com doenças cardiovasculares, em uma década, a partir de 2012, ou seja, o equivalente a:  $1258,33 \cdot 0,70 \approx 880,83$  milhões de pessoas.

12. a)  $5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3$

É PA e  $r = 3$ .

b)  $10 - 15 = 5 - 10 = 0 - 5 = -5 - 0 = -5$

É PA e  $r = -5$ .

c)  $3 - 2 \neq 5 - 3 \Rightarrow 1 \neq 2$

Não é PA.

13. a)  $a_2 = a_1 + r = 7 + 4 = 11$

$a_3 = 11 + 4 = 15$

$a_4 = 15 + 4 = 19$

$a_5 = 19 + 4 = 23$

PA (7, 11, 15, 19, 23)

b)  $a_2 = a_1 + r = -6 + 8 = 2$

$a_3 = 2 + 8 = 10$

$a_4 = 10 + 8 = 18$

PA (-6, 2, 10, 18)

14. a)  $a_1 = 2$  e  $r = 5$

$a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1)5 = 2 + 5n - 5 = 5n - 3$

b)  $a_1 = -1$  e  $r = 6$

$a_n = a_1 + (n-1)r = -1 + (n-1)6 = -1 + 6n - 6 = 6n - 7$

15.  $a_1 = 6$ ;  $r = 4$ ;  $n = 15$

$a_{15} = a_1 + 14r = 6 + 14 \cdot 4 = 6 + 56 = 62$

16.  $a_1 = 1$ ;  $r = 2$ ;  $n = 50$

$a_{50} = a_1 + 49r = 1 + 49 \cdot 2 = 99$

17. a) Temos que:

$a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 21 = a_1 + 6 \cdot 3 \Rightarrow 21 - 18 = a_1 \Rightarrow 3 = a_1$

b) Temos que:

$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow -29 = a_1 + 11 \cdot (-4) \Rightarrow -29 = a_1 - 44 \Rightarrow$

$\Rightarrow -29 + 44 = a_1 \Rightarrow 15 = a_1$

18.  $n = 12$ ;  $a_1 = -8$ ;  $a_{12} = 36$

$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow 36 = -8 + 11r \Rightarrow 11r = 44 \Rightarrow r = 4$

PA (-8, -4, 0, 4, ...)

19.  $a_1 = 6$ ;  $r = 8$ ;  $a_n = 62$

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 62 = 6 + (n-1)8 \Rightarrow 62 = 6 + 8n - 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8n = 64 \Rightarrow n = 8$

62 é o oitavo termo.

20. Inserir 8 termos entre 5, ..., 68, significa formarmos uma PA de 10 termos.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 68 = 5 + (10-1) \cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow 68 - 5 = 9r \Rightarrow 9r = 63 \Rightarrow r = 7$

21. Sendo  $a_3 = 20$  e  $a_{14} = 75$ , podemos escrever que:

$a_{14} = a_3 + 11r \Rightarrow 75 = 20 + 11r \Rightarrow 55 = 11r \Rightarrow r = 5$

Como  $a_7 = a_3 + 4r \Rightarrow a_7 = 20 + 4 \cdot (5) \Rightarrow a_7 = 40$

22. PA (9, ..., 4995)

$a_1 = 9$ ;  $a_n = 4995$ ;  $r = 9$

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 4995 = 9 + (n-1)9 \Rightarrow 4986 = (n-1)9 \Rightarrow$

$\Rightarrow n-1 = 554 \Rightarrow n = 555$

23. Como a desvalorização é constante, temos uma PA em que

$a_0 = 45000$ ,  $a_n = a_5 = ?$  e  $r = -1500$ . Então:

$a_5 = a_0 + 5r = 45000 + 5(-1500) = 37500$

O preço do carro será de R\$ 37500,00 após 5 anos de uso.

24. Seja a progressão aritmética de razão  $r$ , ( $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ ), correspondente à produção da indústria ao longo do ano, ou seja,  $a_1$  é a produção ao longo do ano, assim,  $a_1$  é a produção em janeiro,  $a_2$  é a produção em fevereiro, e assim por diante, até  $a_{12}$  que é a produção em dezembro.

Temos que:

•  $a_{10} = 190 \Rightarrow a_1 + 9r = 190$

•  $a_8 - a_3 = 50 \Rightarrow a_1 + 7r - (a_1 + 2r) = 50 \Rightarrow a_1 + 7r - a_1 - 2r = 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5r = 50 \Rightarrow r = 10$

Assim:

$a_1 + 9r = 190 \Rightarrow a_1 + 9 \cdot 10 = 190 \Rightarrow a_1 = 190 - 90 \Rightarrow a_1 = 100$

Então:

$a_{11} = a_1 + 10r = 100 + 10 \cdot 10 = 200$

200 máquinas.

25. Pelo termo geral da PA:  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ , temos que:

$2018 = a_1 + (n-1) \cdot 34$

Vamos considerar inicialmente que  $a_1 = 1500$ .

Então:

$2018 = 1500 + (n-1) \cdot 34 \Rightarrow 2018 = 1466 + 34n \Rightarrow 34n = 552 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{552}{34} \approx 16,24$

Logo, o cometa passou pela Terra 16 vezes.

$2018 = a_1 + (16-1) \cdot 34 \Rightarrow 2018 = a_1 + 510 \Rightarrow a_1 = 1508$

A primeira vez que o cometa passou após 1500 foi em 1508.

26. PA ( $x - r, x, x + r$ )

$x - r + x + x + r = 24 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$

$(8 - r)8(8 + r) = 120 \Rightarrow 64 - r^2 = 15 \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r' = 7$  e  $r'' = -7$

PA (1, 8, 15) ou PA (15, 8, 1)

27. Do enunciado, percebe-se que a quantidade de seguidores a cada dia é uma PA (3, 20, 37, 54...).

O termo geral da PA é  $a_n = 3 + (n-1) \cdot 17 = 3 + 17n - 17 = 17n - 14$

Então, se  $17n - 14 > 1000 \Rightarrow 17n > 1014 \Rightarrow n > 59,64$

Assim, após 60 dias ultrapassará 1000 seguidores.

28. Os degraus pisados nas "pisadas largas" formam a PA (5, 8, 11, 14...).

O termo geral é:

$a_n = a_1 + (n-1)r = 5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 2 + 3n$

Fazendo  $3n + 2 = 215$ , temos:

$3n = 213 \Rightarrow n = 71$  passadas largas

29.  $(x+4)^2 = \frac{(x-2)^2 + (x+6)^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2 + 8x + 16) = x^2 - 4x + 4 + x^2 + 12x + 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 16x + 32 = 2x^2 + 8x + 40 \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1$

PA (... , 1, 25, 49, ...)

$r = 24$

30. Temos, sendo  $r$  a razão da PA, que:

$a_3 + a_7 = 2 \Rightarrow a_1 + 2r + a_1 + 6r = 2 \Rightarrow 2a_1 + 8r = 2$

Assim:

$a_1 + a_9 = a_1 + a_1 + 8r = 2a_1 + 8r = 2$

31. PA (5, 8, ...)  
 $a_1 = 5; a_2 = 8; r = 3$   
 $a_3 = 11$   
 $a_4 = 14$   
 Portanto, a soma é:  
 $5 + 8 + 11 + 14 = 38$
32. PA (-9, -2, 5, 12, 19, 26, ...)  
 Portanto, a soma é:  
 $-9 - 2 + 5 + 14 + 19 + 26 = 51$
33. PA (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ...)  
 a)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$   
 b)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$
34. a) PA (4, 10, ...)  
 $a_1 = 4$  e  $r = 6$   
 $a_{30} = a_1 + 29r = 4 + 29 \cdot 6 = 178$   
 $S_{30} = \frac{30(4 + 178)}{2} = 2730$
- b)  $n = 20; a_1 = 17; r = 4$   
 $a_{20} = a_1 + 19r = 17 + 19 \cdot 4 = 93$   
 $S_{20} = \frac{20(17 + 93)}{2} = 1100$
- c) PA (2, 4, ...)  
 $a_1 = 2; r = 2; n = 200$   
 $a_{200} = 2 + 199 \cdot 2 = 400$   
 $S_{200} = \frac{200(2 + 400)}{2} = 40200$
35. PA (7, ...,  $a_{20}$ )  
 $S_{20} = \frac{10 \cdot 20(7 + a_{20})}{2} = 710 \Rightarrow 7 + a_{20} = 71 \Rightarrow a_{20} = 64$   
 $64 = 7 + 19r \Rightarrow 19r = 57 \Rightarrow r = 3$   
 $a_{10} = a_1 + 9r = 7 + 9 \cdot 3 = 34$
36. PA (202, 206, ...)  
 $a_1 = 202$  e  $r = 4$   
 $a_{35} = 202 + 34 \cdot 4 = 338$   
 $a_{50} = 202 + 49 \cdot 4 = 398$   
 $S_{50} = \frac{50(202 + 398)}{2} = 15000$   
 soma encontrada =  $15000 - 338 = 14662$
37. PA ( $x, 2x, \dots, 20x$ )  
 $a_1 = x; a_n = 20x; r = x$   
 $20x = x + (n-1)x \Rightarrow 19x = nx - x \Rightarrow 20x = nx \Rightarrow n = 20$   
 $S_{20} = \frac{10 \cdot 20(x + 20x)}{2} = 6300 \Rightarrow 21x = 630 \Rightarrow x = 30$
38. PA (3, 12, 21, ...,  $a_{10}$ )  
 $a_1 = 3; r = 9; n = 10$   
 $a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9 \cdot 9 = 84$   
 $S_{10} = \frac{10(3 + 84)}{2} = 435$  m
39. PA (20, 17, ...,  $a_5$ )  
 $a_1 = 20$  e  $r = -3$   
 $a_5 = 20 + 4(-3) = 8$   
 $S_5 = \frac{5(20 + 8)}{2} = 70$  km

40.  $V_{1^\circ \text{ degrau}} = 10 \cdot 20 \cdot 50 = 10000 \text{ cm}^3 = 10 \text{ dm}^3$   
 $V_{2^\circ \text{ degrau}} = 2 \cdot V_{1^\circ} = 20 \text{ dm}^3$   
 $V_{3^\circ \text{ degrau}} = 3 \cdot V_{1^\circ} = 30 \text{ dm}^3$   
 $\vdots$   
 $V_{10^\circ \text{ degrau}} = 10 \cdot V_{1^\circ} = 100 \text{ dm}^3$   
 $S_{10} = \frac{10(10 + 100)}{2} = 550 \text{ dm}^3$
41. PA (12, 14, 16, ...)  
 $a_1 = 12$  e  $r = 2$   
 $a_n = 12 + (n-1)2 = 12 + 2n - 2 = 2n + 10$   
 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow \frac{n(12 + 2n + 10)}{2} = 620 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{n(2n + 22)}{2} = 620 \Rightarrow n(n + 11) = 620 \Rightarrow n^2 + 11n - 620 = 0$   
 $\Delta = 2601$   
 $n = \frac{-11 \pm 51}{2} \Rightarrow n' = 20$  e  $n'' = -31$  (não convém)  
 São necessárias 20 fileiras.
42. PA ( $x - r, x, x + r$ )  
 $x - r + x + x + r = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$   
 $x - r = 40^\circ \Rightarrow 60^\circ - r = 40^\circ \Rightarrow r = 20^\circ$   
 PA ( $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ )
43. a)  $\frac{3}{1} = 3$   $\frac{27}{9} = 3$   
 $\frac{9}{3} = 3$   $\frac{81}{27} = 3$   
 Logo, a sequência é PG e  $q = 3$ .
- b)  $\frac{4}{2} = 2$   $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$   $2 \neq \frac{3}{2}$   
 Logo, a sequência não é PG.
- c)  $\frac{200}{400} = \frac{1}{2}$   $\frac{100}{200} = \frac{1}{2}$   $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$   
 Logo, a sequência é PG e  $q = \frac{1}{2}$ .
44. a)  $q = \frac{8}{2} = 4$   
 b)  $q = \frac{3}{2} : 3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
45. a)  $a_1 = 7$  e  $q = 3$   
 $a_2 = 7 \cdot 3 = 21$   
 $a_3 = 21 \cdot 3 = 63$   
 $a_4 = 63 \cdot 3 = 189$   
 $a_5 = 189 \cdot 3 = 567$   
 PG (7, 21, 63, 189, 567)
- b)  $a_1 = -5$  e  $q = 2$   
 $a_2 = (-5)2 = -10$   
 $a_3 = (-10)2 = -20$   
 $a_4 = (-20)2 = -40$   
 PG (-5, -10, -20, -40)
46. a)  $i = \frac{15 - 5}{5} = \frac{10}{5} = 2 = 200\%$   
 b)  $i = \frac{800 - 1000}{1000} = -\frac{200}{1000} = -0,2 = -20\%$
47. Como a população cresce 5% por minuto, em cada minuto a população é de 105% da população do minuto anterior. Logo, a cada minuto a população é multiplicada por  $105\% = 1,05$ .  
 Após  $n$  minutos, a população será  $B_0 \cdot (1,05)^n$ .

48. Como a torcida diminui 3% ao ano, em cada ano a torcida é de 97% da torcida do ano anterior. Logo, a cada ano a torcida é multiplicada por 97% = 0,97.

Após  $t$  anos, a torcida será  $P_0 \cdot (0,97)^t$ .

49. a)  $q = \frac{8}{2} = 4$  e  $a_1 = 2$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 4^n \cdot 4^{-1} = 2 \cdot 2^{2n} \cdot 2^{-2} = 2^{2n-1}$$

b)  $q = \frac{9}{3} = 3$  e  $a_1 = 3$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^1 \cdot 3^n \cdot 3^{-1} = 3^n$$

50. a)  $q = \frac{5}{1} = 5$  e  $a_1 = 1$

$$a_5 = a_1 \cdot q_4 = 1 \cdot 5^4 = 625$$

b)  $q = \frac{27}{9} = 3$  e  $a_1 = 9$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 9 \cdot 3^9 = 3^2 \cdot 3^9 = 3^{11} = 177147$$

51.  $a_4 = 24$  e  $a_8 = 384$ ,  $a_6 = ?$

Temos que  $a_8 = a_4 \cdot q^4 \Rightarrow 384 = 24 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{384}{24} = 16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2, \text{ então } a_6 = a_4 \cdot q^2 \Rightarrow a_6 = 24 \cdot (\pm 2)^2$$

$$\Rightarrow a_6 = 24 \cdot 4 \Rightarrow a_6 = 96$$

52. Inserir 5 termos entre 3 e 2 187, implica numa PG onde  $a_1 = 3$  e  $a_7 = 2187$

Então,  $a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow 2187 = 3 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = \frac{2187}{3} = 729 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q = \pm \sqrt[6]{729} = \pm 3$$

53. PG (3 000,  $x$ , 27 000)

$$x^2 = 3\,000 \cdot 27\,000 = 81\,000\,000 \Rightarrow x = 9\,000 \text{ unidades}$$

54. a)  $a_4 = 128$  e  $q = 4$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow 128 = a_1 \cdot 4^3 \Rightarrow a_1 = \frac{128}{64} = 2$$

b)  $a_6 = 10^3$  e  $q = 10$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 10^3 = a_1 \cdot 10^5 \Rightarrow a_1 = \frac{10^3}{10^5} = 10^{-2}$$

55.  $a_2 = 48$  e  $a_7 = \frac{3}{2}$

$$a_7 = a_2 \cdot q^5 \Rightarrow \frac{3}{2} = 48q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{\frac{3}{2}}{48} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{32} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{48}{\frac{1}{2}} = 96$$

56. a)  $x^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow x = 6$  ou  $x = -6$

b)  $x^2 = (x-3)(x+6) \Rightarrow x^2 = x^2 + 3x - 18 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

57. PG ( $x+2$ ,  $x+6$ ,  $x+14$ )

$$(x+6)^2 = (x+2)(x+14) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x + 36 = x^2 + 16x + 28 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

58. Como a capacidade diminui 4% por minuto, em cada minuto a capacidade equivalerá a 96% da capacidade do minuto anterior. Assim, a cada minuto que passa, a capacidade é multiplicada por 96% = 0,96. Depois de  $t$  minutos, a capacidade do tanque será de  $C_0 \cdot 0,96^t$ .

Nesse caso, temos a PG:  $C_0, C_0 \cdot (0,96), C_0 \cdot (0,96)^2, C_0 \cdot (0,96)^3, \dots, C_0 \cdot (0,96)^t$ , de razão 0,96.

59.  $a_1 = 30\,000$  e  $q = 2$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 30\,000 \cdot 2^3 = 240\,000 \text{ unidades}$$

60.  $a_1 = 10\,000$

$$q = 0,9$$

$$a_6 = 10\,000 \cdot 0,9^5 = 10\,000 \cdot 0,590490 = 5\,904,90$$

Resposta: alternativa d.

61. Em cada ano a população é de 102% a do ano anterior. Ou seja, a cada ano a população é multiplicada por 102% = 1,02. Logo,  $q = 1,02$ . Neste caso, temos a PG:

$$P_0, P_0 \cdot (1,02), P_0 \cdot (1,02)^2, P_0 \cdot (1,02)^3, \dots, P_0 \cdot (1,02)^{10}$$

Assim,  $P_{10} = P_0 \cdot (1,02)^{10} = 200\,000 \cdot (1,02)^{10} \approx 243\,800$  habitantes.

62. A quantidade de bactérias, a partir do 1º intervalo de 40 minutos, é a PG (1500, 4500...).

4 h são 240 minutos, portanto equivalem a 6 intervalos de 40 minutos. Assim, queremos obter o 6º termo da PG:

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = 1500 \cdot 3^5 \Rightarrow a_6 = 364\,500 \text{ bactérias}$$

63. a)  $a_1 = 1, a_n = 512, q = 2$

$$S_n = \frac{512 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 1023$$

b)  $a_1 = 5, a_n = 1280, q = 4$

$$S_n = \frac{1280 \cdot 4 - 5}{4 - 1} = 1705$$

c)  $a_1 = 1, a_n = 2^{10}, q = 2^2$

$$S_n = \frac{2^{10} \cdot 2^2 - 1}{2^2 - 1} = \frac{1\,024 \cdot 4 - 1}{3} = 1365$$

64.  $a_1 = 2, a_n = 256, S_n = 510$

$$510 = \frac{256q - 2}{q - 1} \Rightarrow 510(q - 1) = 256q - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 510q - 510 = 256q - 2 \Rightarrow 254q = 508 \Rightarrow q = 2$$

65.  $a_1 = 3, q = 2, S_n = 765$

$$765 = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

66.  $a_1 = 1, a_6 = \frac{1}{2^5}, q = \frac{1}{2}$

$$S_6 = \frac{\frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \left( \frac{1}{64} - \frac{64}{64} \right) : \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{-63}{64} : \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{63}{32}$$

$$x = \frac{63}{32}$$

67.  $n = 5, q = 2, a_1 = 60$

$$S_5 = \frac{60(2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{60 \cdot 31}{1} = \text{R\$ } 1860,00$$

68. O número de visitas do *blog*, a partir da 1ª semana, é a PG (4, 20, 100...).

O total de visitantes no trimestre é a soma dos visitantes das 12 semanas do trimestre. Então:

$$S_{12} = \frac{a_1(q^{11} - 1)}{q - 1} = \frac{4(5^{11} - 1)}{5 - 1} = 5^{11} - 1 = 48\,828\,124 \text{ visitantes}$$

69.  $a_1 = 20, q = \frac{1}{5}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{20}{1 - \frac{1}{5}} = 20 : \frac{4}{5} = 20 \cdot \frac{5}{4} = 25$$

70. a)  $a_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 : \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

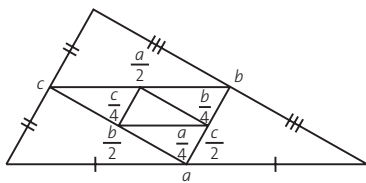
b)  $a_1 = 2, q = \frac{1}{4}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = 2 : \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

71.  $a_1 = x, q = \frac{1}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = x : \frac{2}{3} = \frac{3x}{2} = 12 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

72.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

$$\text{Área do } \Delta_1 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 40$$

$$\text{Área do } \Delta_2 = \sqrt{\frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - \frac{a}{2} \right) \left( \frac{p}{2} - \frac{b}{2} \right) \left( \frac{p}{2} - \frac{c}{2} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{2} \cdot \frac{1}{2}(p-a) \cdot \frac{1}{2}(p-b) \cdot \frac{1}{2}(p-c)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16} p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10$$

PG (40, 10, ...)

$$a_1 = 40, q = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{40}{1 - \frac{1}{4}} = 40 : \frac{3}{4} = 40 \cdot \frac{4}{3} = \frac{160}{3}$$

73. a)  $0,777... = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ... =$

$$= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$$

$$a_1 = \frac{7}{10}, q = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{10} : \frac{9}{10} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\text{Então, } 0,777... = \frac{7}{9}.$$

b)  $0,515151... = 0,51 + 0,0051 + 0,000051 + ... =$

$$= \frac{51}{100} + \frac{51}{10000} + \frac{51}{1000000} + ...$$

$$a_1 = \frac{51}{100}, q = \frac{1}{100}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{51}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{51}{100} : \frac{99}{100} = \frac{51}{100} \cdot \frac{100}{99} =$$

$$= \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$$

$$\text{Então: } 0,515151... = \frac{17}{33}.$$

c)  $0,4333... = 0,4 + 0,03 + 0,003 + ... =$

$$= \frac{4}{10} + \left( \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ... \right)$$

$$a_1 = \frac{3}{100}, q = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{100} : \frac{9}{10} = \frac{3}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{12+1}{30} = \frac{13}{30}$$

$$\text{Então: } 0,4333... = \frac{13}{30}.$$

74. PA  $(x, y, 9)$  e PG  $(x, y, 12)$

$$\begin{cases} y = \frac{x+9}{2} \\ y^2 = 12x \end{cases}$$

$$x+9 = 2y \Rightarrow x = 2y - 9$$

$$y^2 = 12(2y - 9) \Rightarrow y^2 = 24y - 108 \Rightarrow y^2 - 24y + 108 = 0$$

$$\Delta = 144$$

$$y = \frac{24 \pm 12}{2} \Rightarrow y' = 18 \text{ (não convém, pois a PG é crescente) e } y'' = 6$$

$$x' = 27 \text{ (não convém, pois a PG é crescente) e } x'' = 3$$

$$\text{PA } (3, 6, 9) \text{ e PG } (3, 6, 12)$$

75. PA  $(a, b, c)$  e PG  $(a, b, c+1)$

$$\begin{cases} a + b + c = 18 \\ b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow c = 18 - a - b \\ b^2 = a(c+1) \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} b = \frac{a+18-a-b}{2} \Rightarrow b = \frac{18-b}{2} \\ b^2 = a(18-a-b+1) \Rightarrow b^2 = a(19-a-b) \end{cases}$$

$$2b = 18 - b \Rightarrow 3b = 18 \Rightarrow b = 6$$

$$6^2 = a(19-a-6) \Rightarrow 36 = a(13-a) \Rightarrow 36 = 13a - a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 13a + 36 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$a = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow a' = 9 \text{ e } a'' = 4$$

$$c' = 18 - 9 - 6 = 3 \text{ e } c'' = 18 - 4 - 6 = 8$$

$$\text{PA } (9, 6, 3) \text{ (não, pois PA é crescente) ou PA } (4, 6, 8).$$

$$\text{Logo, PA } (4, 6, 8).$$

76.  $\begin{cases} a_4 = b_3 \\ a_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = b_1 \cdot q^2 \\ a_1 = b_1 \cdot q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 12 = 16b_1 \\ a_1 = 4b_1 \end{cases}$

$$4b_1 + 12 = 16b_1 \Rightarrow b_1 = 1$$

$$\text{PG } (1, 4, 16, 64)$$

$$a_1 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\text{PA } (4, 8, 12, 16)$$

77. PA  $(2, \log x, \log y)$

$$\log x = \frac{\log y + 2}{2} \Rightarrow 2 \cdot \log x = \log y + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log y = 2 \cdot \log x - 2$$

$$\text{PG } (2, \log x, \log y)$$

$$(\log x)^2 = 2 \cdot \log y \Rightarrow (\log x)^2 = 2(2 \cdot \log x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = 4 \cdot \log x - 4$$

$$t^2 = 4t - 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$t = \frac{4}{2} = 2$$

$$\log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

$$\log y = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \Rightarrow y = 100$$

78. A condição para que  $a$ ,  $b$  e  $c$  sejam ao mesmo tempo uma PA de razão  $r$  e uma PG de razão  $q$  é:

$$b = a + r = aq \Rightarrow r = a(q - 1) \quad (1)$$

$$c = b + r = bq \Rightarrow r = b(q - 1) \quad (2)$$

De (1) e (2) temos que:

$$a(q - 1) = b(q - 1) \Rightarrow (a - b)(q - 1) = 0$$

Para que o produto seja igual a zero, então  $(a - b = 0)$  ou  $(q - 1 = 0)$  ou  $(a - b = 0 \text{ e } q - 1 = 0) \Rightarrow (a = b)$  ou  $(q = 1)$  ou  $(a = b \text{ e } q = 1)$ .

Como se trata de uma PG, se  $a$  é igual a  $b$ , necessariamente  $q = 1$ .

A recíproca também é verdadeira, isto é, se  $q = 1$  então  $a = b$ . Logo  $a = b$  e  $q = 1$ . Substituindo  $a = b$  e  $q = 1$  em (1) e (2), chegamos à conclusão de que  $r = 0$  e que  $a = b = c$ .

**Resposta:** alternativa d.

### Outros contextos

3. A meia-vida do medicamento ingerido é de 8 horas.

Então, após 8 horas, a massa do medicamento ingerido vai de 256 mg para 128 mg, passando-se mais 8 horas, a massa do medicamento ingerido vai de 128 mg para 64 mg.

Da mesma forma, passando-se mais 8 horas, a massa será de 32 mg, e, após mais 8 horas, a massa será de 16 mg.

Logo, passaram-se 32 horas ( $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ ) até a massa do medicamento ingerido ser reduzida a 16 mg.

## CAPÍTULO 8

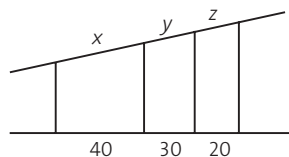
1.  $\frac{2x + 1}{5x - 1} = \frac{4}{6} \Rightarrow 12x + 6 = 20x - 4 \Rightarrow 8x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

2.  $\frac{6}{8} = \frac{12}{x} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{12}{x} \Rightarrow 3x = 48 \Rightarrow x = 16$

$$\frac{6}{10} = \frac{12}{y} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{12}{y} \Rightarrow 3y = 60 \Rightarrow y = 20$$

$$xy = 16 \cdot 20 = 320$$

3.



$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30} \Rightarrow \frac{z}{20} = \frac{x + y + z}{40 + 30 + 20} = \frac{180}{90} = 2$$

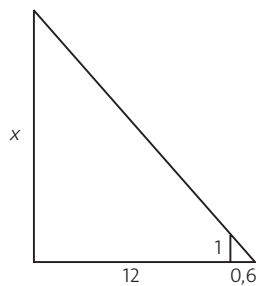
$$\frac{x}{40} = 2 \Rightarrow x = 80 \text{ m}$$

$$\frac{y}{30} = 2 \Rightarrow y = 60 \text{ m}$$

$$\frac{z}{20} = 2 \Rightarrow z = 40 \text{ m}$$

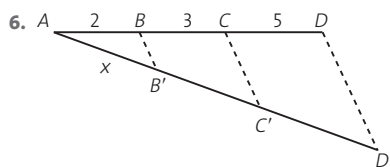
4.  $\frac{x - 1}{2} = \frac{x + 3}{3} \Rightarrow 3x - 3 = 2x + 6 \Rightarrow x = 9$

5.



$$\frac{x}{12} = \frac{1}{0,6} \Rightarrow 0,6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{0,6} = 20$$

**Resposta:** alternativa d.



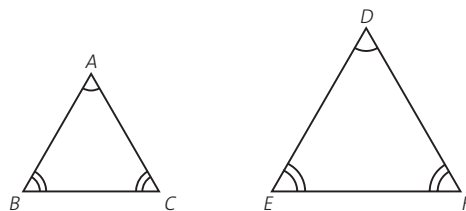
$$\frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{5}{z} = \frac{2 + 3 + 5}{x + y + z}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{10}{13} \Rightarrow 10x = 26 \Rightarrow x = 2,6$$

$$\frac{3}{y} = \frac{10}{13} \Rightarrow 10y = 39 \Rightarrow y = 3,9$$

$$\frac{5}{z} = \frac{10}{13} \Rightarrow 10z = 65 \Rightarrow z = 6,5$$

8.



$$\hat{A} \cong \hat{D}$$

$$\hat{B} \cong \hat{E}$$

$$\hat{C} \cong \hat{F}$$

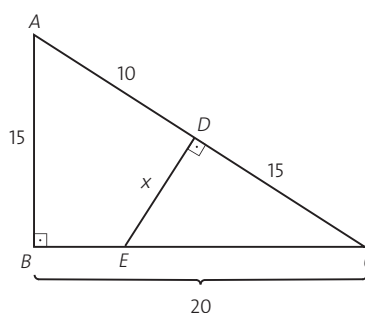
Pelo caso (AA) temos que os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes.

9.  $\frac{15}{18} = \frac{8}{o} = \frac{7}{n}$

$$n = \frac{18 \cdot 7}{15} = 8,4 \text{ cm}$$

$$o = \frac{8 \cdot 18}{15} = 9,6 \text{ cm}$$

10.



Como  $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ , então:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DC} \Rightarrow \frac{15}{20} = \frac{x}{15} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x}{15} \Rightarrow 4x = 45 \Rightarrow x = 11,25$$

11.  $\frac{35}{105} = \frac{1}{3}$  ou  $\frac{105}{35} = \frac{3}{1}$

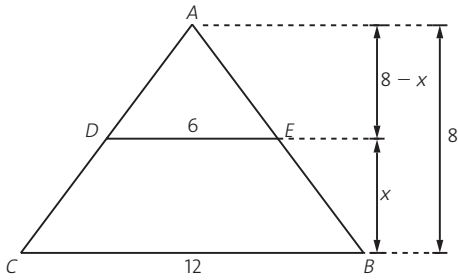
12.  $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ , pois  $\frac{6}{4,5} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ .

$$\triangle ABC \text{ e } \triangle CBD \text{ não são semelhantes: } \frac{6}{3,5} \neq \frac{8}{6} \neq \frac{4}{3}$$

$$\triangle CBD \text{ e } \triangle ADB \text{ não são semelhantes: } \frac{6}{4} \neq \frac{4,5}{3,5} \neq \frac{3}{3}$$



13.

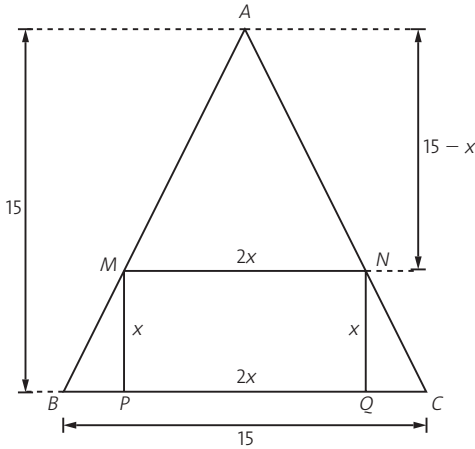


$$\frac{8}{12} = \frac{8-x}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{8-x}{6} \Rightarrow 2 \cdot 6 = 3(8-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24 - 3x = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x = 12 - 24 \Rightarrow -3x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-3} \Rightarrow x = 4$$

14.

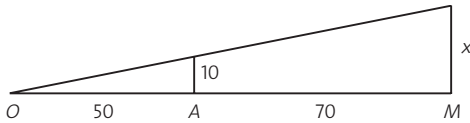


$$\frac{2x}{15} = \frac{15-x}{15} \Rightarrow 30x = 225 - 15x \Rightarrow 45x = 225 \Rightarrow x = 5$$

Logo:

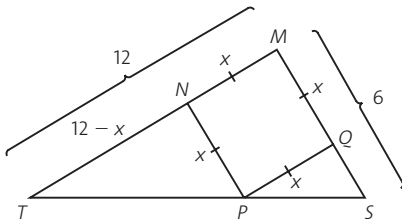
$$2x = 2 \cdot 5 = 10$$

15.



$$\frac{10}{50} = \frac{x}{120} \Rightarrow 50x = 1200 \Rightarrow x = 24$$

16.



$$MN = MQ = PQ = NP = x$$

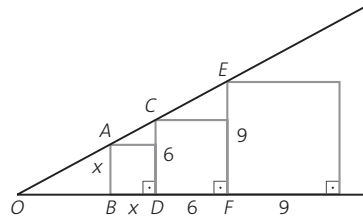
Como  $\triangle MTS \sim \triangle NTP$ , então:

$$\frac{12}{12-x} = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{2}{12-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x = 12-x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Cada lado do losango mede 4.

17.



Os triângulos  $OBA$ ,  $ODC$  e  $OFE$  são semelhantes pelo caso (AA).

Logo:

$$\frac{9}{6} = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

18.  $180 + 300 = 480 \text{ cm} = 4,8 \text{ m}$

20. a) Sim.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'F'}{EF} = 2$$

constante de proporcionalidade = 2

22. a)  $\frac{x+30}{25} = \frac{x+14}{15} \Rightarrow 25(x+14) = 15(x+30) \Rightarrow x = 10$

$$x + 30 = 10 + 30 = 40$$

$$x + 14 = 10 + 14 = 24$$

$$R_1: 40 \text{ m}; R_2: 24 \text{ m}$$

b)  $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

c)  $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$

d)  $\frac{130}{78} = \frac{65}{39} = \frac{5}{3}$

e)  $\frac{1000}{360} = \frac{25}{9}$

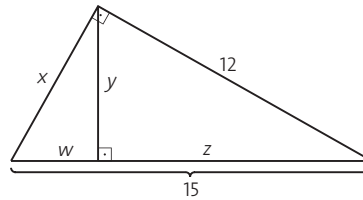
Note que a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre as

medidas dos lados:  $\frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ .

24. a) Verdadeira, pois as medidas dos lados serão sempre proporcionais, e os ângulos, iguais a  $90^\circ$ .

b) Falsa. Contraexemplo:  $\frac{1}{4,5}$  e  $\frac{1}{3}$ , 1,5

27.



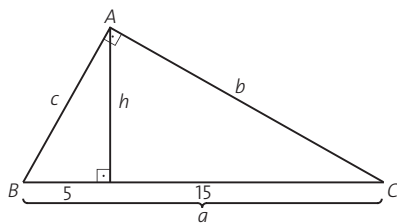
$$15^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 225 - 144 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$$

$$x^2 = 15w \Rightarrow 9^2 = 15w \Rightarrow w = \frac{81^3}{15^3} = \frac{27}{5}$$

$$12^2 = 15z \Rightarrow z = \frac{144}{15} = \frac{48}{5}$$

$$15y = 9 \cdot 12 \Rightarrow y = \frac{9 \cdot 12^4}{5 \cdot 15} = \frac{36}{5}$$

28.



$$a = 5 + 15 = 20$$

$$b^2 = 15a \Rightarrow b^2 = 15 \cdot 20 \Rightarrow b^2 = 300 \Rightarrow b = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$$c^2 = 5a \Rightarrow c^2 = 5 \cdot 20 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10$$

$$ah = bc \Rightarrow 20h = 10\sqrt{3} \cdot 10 \Rightarrow h = \frac{100\sqrt{3}}{20} = 5\sqrt{3}$$

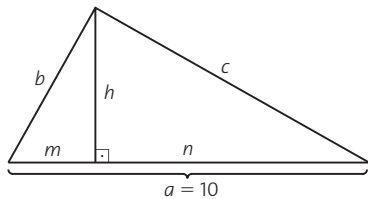
29.  $r^2 = (\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{7})^2 = 7 + 18 = 25 \Rightarrow r = 5$

$$5c = 3\sqrt{14} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{14}}{5}$$

$$(\sqrt{7})^2 = 5x \Rightarrow 7 = 5x \Rightarrow x = \frac{7}{5} \text{ ou } 1,4$$

$$y + 1,4 = 5 \Rightarrow y = 5 - 1,4 = 3,6$$

30.



$$\frac{m}{n} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{m+n}{n} = \frac{9+16}{16} \Rightarrow \frac{10}{n} = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{2}{n} = \frac{5}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5n = 32 \Rightarrow n = \frac{32}{5}$$

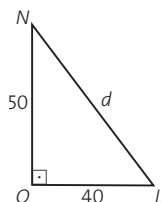
$$m + n = 10 \Rightarrow m + \frac{32}{5} = 10 \Rightarrow m = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$$

$$b^2 = am \Rightarrow b^2 = 10 \cdot \frac{18}{5} \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$c^2 = an \Rightarrow c^2 = 10 \cdot \frac{32}{5} \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow c = 8$$

Os catetos medem 6 cm e 8 cm.

31.



$$d^2 = 50^2 + 40^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 2500 + 1600 \Rightarrow d^2 = 4100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 10\sqrt{41}$$

A distância que os separa após duas horas é  $10\sqrt{41}$  km (aproximadamente 64 km).

32. a)  $\text{sen } \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$

b)  $\text{cos } \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$

c)  $\text{tan } \alpha = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$

d)  $\text{sen } \beta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$

e)  $\text{cos } \beta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$

f)  $\text{tan } \beta = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

34. a)  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

35. a)  $\text{sen } \hat{G} = \frac{EF}{FG} = \text{cos } \hat{F} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$$\text{cos } \hat{G} = \frac{EG}{FG} = \text{sen } \hat{F} = \frac{5}{6}$$

$$\text{tan } \hat{G} = \frac{EF}{EG} = \frac{1}{\frac{EG}{EF}} = \frac{1}{\text{tan } \hat{F}} = \frac{1}{\frac{5\sqrt{11}}{11}} = \frac{11}{5\sqrt{11}} =$$

$$= \frac{11}{5\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

b)  $\text{sen } \hat{F} = \frac{EG}{30} = \frac{5}{6} \Rightarrow EG = 25$

$$\text{cos } \hat{F} = \frac{EF}{30} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow EF = 5\sqrt{11}$$

$$c) \cdot (\text{sen } \hat{F})^2 + (\text{cos } \hat{F})^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} + \frac{11}{36} =$$

$$= \frac{36}{36} = 1$$

$$\cdot \frac{\text{sen } \hat{F}}{\text{cos } \hat{F}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$\cdot \text{sen}^2 \hat{G} + \text{cos}^2 \hat{G} = (\text{sen } \hat{G})^2 + (\text{cos } \hat{G})^2 = \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{11}{36} + \frac{25}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

$$\cdot \frac{\text{sen } \hat{G}}{\text{cos } \hat{G}} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

37. a)  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} \Rightarrow \text{tan } \alpha = \frac{5}{12}$$

b)  $\text{sen } \alpha = \frac{5}{x} \Rightarrow \frac{5}{13} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 13$

38. a)  $\text{sen } \hat{B} = \frac{6}{10} = 0,6$

$$\text{cos } \hat{B} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\text{tan } \hat{B} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\hat{B} \approx 37^\circ$$

b)  $\text{sen } \hat{B} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\text{cos } \hat{B} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan } \hat{B} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\hat{B} = 30^\circ$$

39. a)  $\text{sen } 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tan } 45^\circ = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

$$b) \sin 30^\circ = \frac{\ell}{\frac{\ell}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

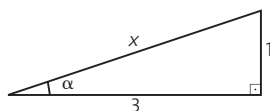
$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c) \sin 60^\circ = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3}$$

40.



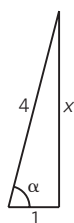
$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = 1^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 1 + 9 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$41. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

42.



$$\cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$4^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow 16 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 16 - 1 \Rightarrow \Rightarrow x^2 = 15 \Rightarrow x = \sqrt{15}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{\sqrt{15}}{1} = \sqrt{15}$$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

### Resolvido passo a passo

5. a) Altura do prédio: 81,6 m  
 Altura do térreo: 4,6 m  
 Altura de um andar: 3,85 m  
 Número de andares:  $\frac{81,6 - 4,6}{3,85} = \frac{77}{3,85} = 20$   
 Número de apartamentos:  
 Últimos dois andares:  $2 \times 1 = 2$   
 Demais andares:  $2 \times 18 = 36$   
 Total de apartamentos:  $2 + 36 = 38$   
 O prédio possui 20 andares, além do térreo; 38 apartamentos.

$$43. a) \sin 50^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow 0,766 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 7,66 \text{ cm}$$

$$b) \tan 70^\circ = \frac{8}{x} \Rightarrow 2,747 = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 8,51 \text{ dm}$$

$$c) \cos 50^\circ = \frac{8}{y} \Rightarrow 0,643 = \frac{8}{y} \Rightarrow y = 12,44 \text{ m}$$

$$\sin 70^\circ = \frac{y}{x} \Rightarrow 0,940 = \frac{12,44}{x} \Rightarrow x = 13,23 \text{ m}$$

$$44. \tan 40^\circ = \frac{10}{d} = 0,83 \Rightarrow d \approx 12,05 \text{ milhas}$$

$$45. \tan 10^\circ = \frac{h}{20} = 0,18 \Rightarrow h = 3,6 \text{ m}$$

$$46. \sin 30^\circ = \frac{h}{5000} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 2500 \text{ m}$$

$$47. a) \cos 60^\circ = \frac{4}{x} = \frac{1}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 8 \text{ m}$$

A escada tem 8 m de comprimento.

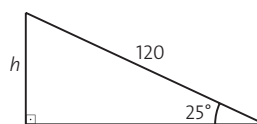
$$b) \alpha + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$48. \tan 30^\circ = \frac{x}{100} = 0,58 \Rightarrow x = 58 \text{ m}$$

$$h = 58 + 1,70 = 59,7 \text{ m}$$

$$49. \tan 70^\circ = \frac{\ell}{8} = 2,75 \Rightarrow \ell = 22 \text{ m}$$

50.



$$\sin 25^\circ = \frac{h}{120} \Rightarrow 0,42 = \frac{h}{120} \Rightarrow h = 50,4 \text{ m}$$

$$51. V_x = 10 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$V_y = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$52. \sin \hat{C} = \frac{x}{x+4} \Rightarrow 0,6 = \frac{x}{x+4} \Rightarrow 0,6x + 2,4 = x \Rightarrow$$

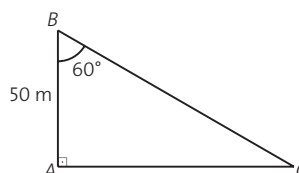
$$\Rightarrow 0,4x = 2,4 \Rightarrow x = 6$$

$$(x+4)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (6+4)^2 = 6^2 + y^2 \Rightarrow 100 = 36 + y^2 \Rightarrow y^2 = 64 \Rightarrow y^2 = 64 \Rightarrow y = 8$$

$$\text{Perímetro: } x + y + x + 4 = 6 + 8 + 6 + 4 = 24 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } \frac{x \cdot y}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

53.



$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{50} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{50} \Rightarrow 1,7 = \frac{AC}{50} \Rightarrow AC = 85 \text{ cm}$$

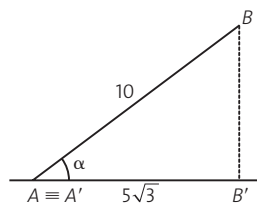
$$\cos 60^\circ = \frac{50}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{50}{BC} \Rightarrow BC = 100$$

$$\text{Perímetro: } 50 + 85 + 100 = 235 \text{ m}$$

$$54. \tan 15^\circ = \frac{h}{2000} = 0,27 \Rightarrow h = 540 \text{ m}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{2000}{d} = 0,97 \Rightarrow d \approx 2062 \text{ m}$$

55.



Pelas condições do problema, devemos ter  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Logo:

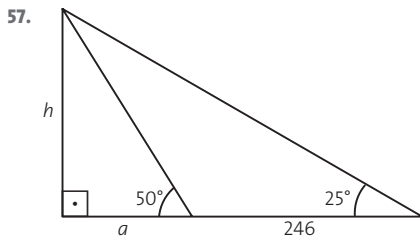
$$A'B' = AB \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{3} = 10 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

56.  $\text{sen } 20^\circ = \frac{x}{6} = 0,34 \Rightarrow x = 2,04$

$h = 3 + 2,04 = 5,04 \text{ m}$



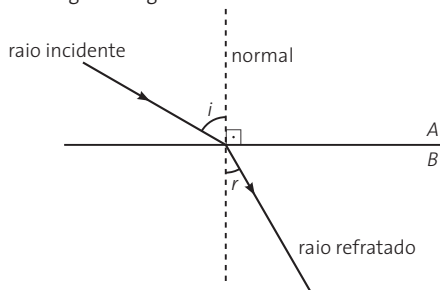
$\tan 50^\circ = \frac{h}{a} = 1,192 \Rightarrow h = 1,192a$

$\tan 25^\circ = \frac{h}{246 + a} = 0,466 \Rightarrow h = 0,466(246 + a) = 1,192a$

$114,6 + 0,466a = 1,192a \Rightarrow 0,726a = 114,6 \Rightarrow a = 157,9 \Rightarrow h \approx 188$

A altura da torre mede aproximadamente 188 unidades de comprimento.

58. Observe a figura a seguir:



$\hat{i}$  = ângulo de incidência

$\hat{r}$  = ângulo de refração

$n_A$  = índice de refração do meio A

$n_B$  = índice de refração do meio B

Podemos relacionar esses elementos pela lei de Snell-Descartes:

$n_A \cdot \text{sen } \hat{i} = n_B \cdot \text{sen } \hat{r}$ . Assim:

$n_A \cdot \text{sen } \hat{i} = n_B \cdot \text{sen } \hat{r} \Rightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = n_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n_B = \frac{\sqrt{6}}{2}$

### Pensando no Enem

1. Analisando as alternativas:

- a) O número de triângulos cresce **exponencialmente** a cada iteração. (F)
- b) A sequência formada pelas áreas totais de cada figura a cada iteração é uma progressão geométrica de razão  $\frac{3}{4}$ . (V)
- c) A sequência formada pelas áreas de cada triângulo a cada iteração é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{4}$ . (F)
- d) A sequência formada pelo número de triângulos, a cada iteração, é uma **progressão geométrica** de razão 3. (F)
- e) A área de cada triângulo tende a **zero**. (F)

Iteração	0	1	2	3	...	n
Número de triângulos	1	3	$3^2$	$3^3$	...	$3^n$
Área de cada triângulo	A	$\frac{1}{4}A$	$(\frac{1}{4})^2 A$	$(\frac{1}{4})^3 A$	...	$(\frac{1}{4})^n A$
Área total	A	$\frac{3}{4}A$	$(\frac{3}{4})^2 A$	$(\frac{3}{4})^3 A$	...	$(\frac{3}{4})^n A$

Resposta: alternativa b.

2. Apenas II é verdadeira:

- I. Para as ternas (3, 4, 5), (5, 12, 13) e (15, 36, 39)  $\equiv$  (5, 12, 13), a diferença entre os dois maiores números, removendo-se todos os fatores comuns, é igual a 1, mas para (12, 15, 37) do Apastamba *Sulbasutra* (37 é um número primo), a diferença entre os dois maiores números não é igual a 1. (F)
- II. Ambas as ternas (72, 96, 120)  $\equiv$  (3, 4, 5) e (40, 96, 104)  $\equiv$  (5, 12, 13) mencionadas do Mânava *Sulbasutra* têm a propriedade daquelas relacionadas aos pitagóricos, pois  $5 - 4 = 1$  e  $13 - 12 = 1$ . (V)
- III. A única terna do Baudahayana *Sulbasutra* mencionada é pitagórica porque  $25^2 = 24^2 + 7^2$  ou  $625 = 576 + 49$ . (F)

Resposta: alternativa e.

### Vestibulares de Norte a Sul

1. A forma de pagamento do empregado é um exemplo básico de uma PG de razão 2, e  $a_1 = 1,00$ . Desse modo, o valor que ele receberá pelos 10 dias trabalhados é uma soma finita de termos de uma PG.

Regra geral:  $S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$

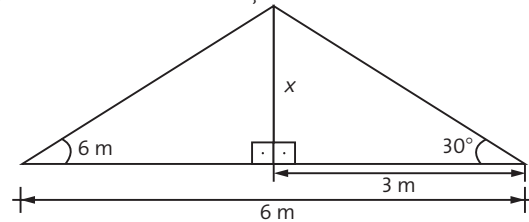
Substituindo os valores, temos

$S_{10} = 1 \cdot \left(\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}\right) \Rightarrow S_{10} = 1 \cdot \left(\frac{1 - 1024}{-1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{10} = 1 \cdot \left(\frac{-1023}{-1}\right) \Rightarrow S_{10} = 1023$

Resposta: alternativa e.

2.  $x \rightarrow$  elevação do telhado



Para encontrarmos o valor de  $x$ , que representa a elevação do telhado temos que executar uma operação trigonométrica, a tangente, mais especificamente a de  $30^\circ$ . Assim,  $\text{tg } 30^\circ = 0,58 = \frac{x}{3}$   
 $\therefore x = 3 \cdot 0,58 = 1,74$ ;  $x = 74 \text{ m}$ .

Resposta: alternativa b.

3. Levando em consideração que

- uma unidade de álcool  $\rightarrow a_1$
- duas unidades de álcool  $\rightarrow a_2$
- três unidades de álcool  $\rightarrow a_3$
- quatro unidades de álcool  $\rightarrow a_4$
- cinco unidades de álcool  $\rightarrow a_5$

$a_2 - a_1 = 24 - 11 = 13$

$a_3 - a_2 = 38 - 24 = 14$

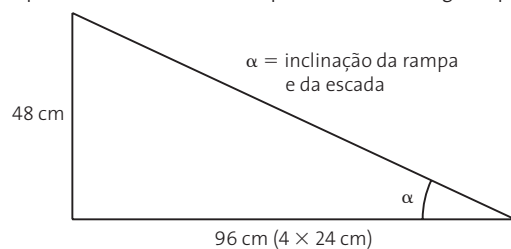
$a_4 - a_3 = a_4 - 38 = 15 \Leftrightarrow a_4 = 15 + 38 = 53$

$a_5 - a_4 = 16 \Leftrightarrow a_5 = 16 + a_4 = 16 + 53 = 69$

Logo, o risco de desenvolver câncer de mama ao ingerir cinco unidades de álcool, diariamente, é de 69%.

Resposta: alternativa 02.

4. A partir dos dados do enunciado, podemos montar a seguinte projeção:



Sendo assim,  $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$

Levando em consideração os ângulos contidos nas alternativas, temos:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$$

Logo,  $\alpha < 30^\circ$ , já que sua tangente é menor.

**Resposta:** alternativa b.

5. Calculemos o tempo, em dias, de leitura dos dois irmãos:

$$\text{Irmão I: } t_1 = \frac{\text{total de páginas}}{\text{páginas lidas por dia}} = \frac{903}{37} \approx 24,5 \text{ dias}$$

Irmão II: O irmão II faz a leitura das páginas obedecendo a uma sequência de razão 4, assim, o total de páginas lidas por ele é definido por uma soma de uma PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{[3 + 3 + (n-1) \times 4]n}{2} \Rightarrow S_n = 903$$

O valor de  $n$  representa o total de dias gasto para o irmão II fazer a leitura do livro.

$$\therefore 903 = \frac{(6 + 4n - 4n)}{2} \Rightarrow 1806 = (2 + 4n)n \Rightarrow$$

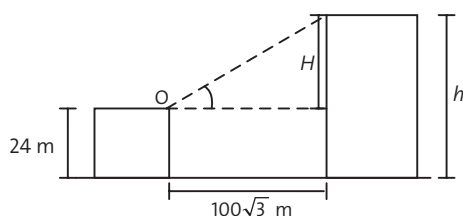
$$\Rightarrow 1806 = 2n + 4n^2 \Rightarrow 4n^2 + 2n - 1806 = 0$$

$$\begin{cases} n' = +21 \\ n'' = -\frac{172}{8} \end{cases} \text{ (não nos interessa, pois não existe tempo negativo)}$$

Assim, com o tempo do irmão I e do irmão II, há, aproximadamente, uma diferença de 4 dias.

**Resposta:** alternativa a.

6. Segundo o enunciado, temos



A altura do prédio mais alto pode ser definida pela soma da altura do mais baixo, com a medida  $H$  da figura acima, que é definida pela razão trigonométrica tangente.

$$\therefore \frac{H}{100\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3H = 100\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{100 \cdot 3}{3} \Rightarrow H = 100 \text{ m}$$

Logo,  $h = H + 24 = 100 + 24 \Rightarrow h = 124$ ;  $h = 124$  m.

**Resposta:** alternativa c.

7. Tomando como parâmetro que os lados estão em progressão aritmética, ou seja, são  $(x)$ ,  $(x - r)$  e  $(x + r)$ , temos:

$$(x - r) + (x + r) + (x) = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \text{ m}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$(r + 2)^2 = (r - 2)^2 + (2)^2 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = r^2 - 4r + 4 + 4 \Rightarrow 8r = 4 \Rightarrow r = 1/2$$

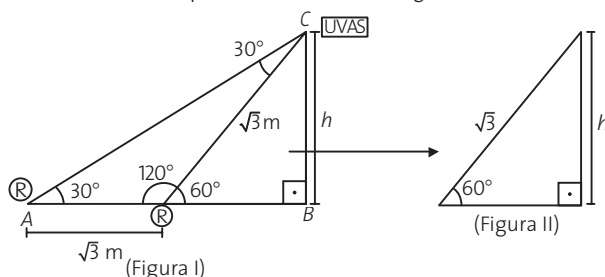
Assim, como a área do triângulo é definida por

$$\left( \frac{\text{produto dos catetos}}{2} \right), \text{ realizando os cálculos, verificamos que a}$$

área é igual a  $1,5 \text{ m}^2$ .

**Resposta:** alternativa c.

8. Tomando como parâmetro os dados das figuras.

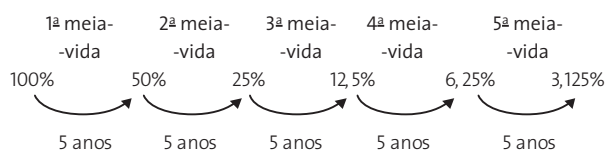


A partir da figura II, podemos encontrar o valor da medida  $h$  fazendo uso da razão trigonométrica seno, mais especificamente de  $60^\circ$ , logo

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore h = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 1,5; h = 1,5 \text{ m.}$$

**Resposta:** alternativa b.

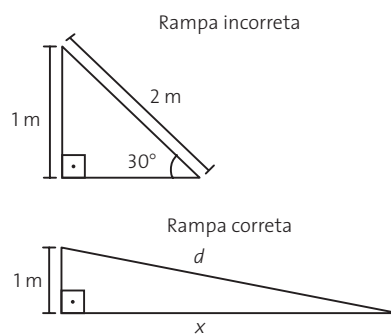
9. Tomando por base a sequência.



Como em 25 anos ocorrem cinco meias-vidas, tem-se que a porcentagem da atividade do cobalto-60, ao final desse período, é de 3,125%.

**Resposta:** alternativa e.

10. Levando em consideração as duas projeções das rampas, temos



Segundo os dados do enunciado, temos que a proporção entre 1 e  $x$  é de 5% (0,05), assim, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{100} \Rightarrow 100 = 5x \Rightarrow x = \frac{100}{5} \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

Obtendo o valor de  $x$ , para obter o valor de  $d$ , basta utilizar o Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = 1^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 1^2 + 20^2 \Rightarrow d^2 = 1 + 400 \Rightarrow d^2 = 401 \Rightarrow d = \sqrt{401}$$

Logo, a diferença entre os comprimentos das rampas é  $(\sqrt{401} - 2)$  m.

**Resposta:** alternativa d.

### Você sabia?

Página 236

Periandro de Corinto, Pitaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleóbulo de Lindos, Sólon de Atenas e Quilon de Esparta.

### Para refletir

Página 246

Os agrimensores – também conhecidos como “esticadores de corda” – eram pessoas que trabalhavam para o Faraó avaliando os prejuízos das cheias do Nilo e restabelecendo as fronteiras entre posses.

## Caiu no Enem

1. Menor altura possível para a tomada: 0,40 m.  
 Maior altura possível para o interruptor: 1,35 m.  
 De posse desses valores e realizando uma análise de intervalos, obtemos a resposta, já que as únicas medidas que obedecem simultaneamente às duas condições citadas são as da alternativa e (0,40 m  $\rightarrow$  0,45 m e 1,35 m  $\rightarrow$  1,20 m).

**Resposta:** alternativa e.

2. Tem-se três nós nos milhares, zero nós nas centenas, seis nós nas dezenas e quatro nós nas unidades. Portanto, a resposta é 3 064.
- Resposta:** alternativa c.
3. A distância total percorrida pelo aluno no mapa foi de  $5 \cdot 2 \cdot (7 + 9) = 160$  cm. Sendo  $d$  a distância real percorrida e 1:25 000 a escala, temos:

$$\frac{160}{d} = \frac{1}{25000} \Leftrightarrow d = 4 \cdot 10^6 \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{4 \cdot 10^6}{10^5} \text{ km}$$

$$\Leftrightarrow d = 40 \text{ km}$$

**Resposta:** alternativa e.

4. A duração de cada ciclo é igual a  $(1765 - 1755) + 1 = 11$  anos. Como de 1755 a 2101 se passaram  $(2101 - 1755) + 1 = 347$  anos e  $347 = 11 \cdot 31 + 6$ , segue-se que em 2101 o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número 32. Tendo o valor de 347 poderia se fazer também uma divisão por 11, o que daria como resposta 31,54, logo, por dedução, temos que o 31º ciclo foi concluído e está ocorrendo o 32º.

**Resposta:** alternativa a.

5. Efetuando as conversões de unidade, tomando como base as informações que a questão traz, obtemos:

$$355 \text{ mL} = 35,5 \text{ cL} = \frac{35,5}{2,95} \text{ fl oz} \approx 12,03 \text{ fl oz}$$

**Resposta:** alternativa c.

6. De acordo com o hidrômetro, foram consumidos  $3\,534 \text{ m}^3 = 3\,534\,000 \text{ L}$ . Além disso, o hidrômetro aponta 859,35 L. Portanto, o consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a  $3\,534\,000 + 859,35 = 3\,534\,859,35$ .

**Resposta:** alternativa d.

7. A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que descreve a relação entre o salário  $f(x)$  e o número  $x$  de produtos vendidos, é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 750, & \text{se } 0 \leq x \leq 100 \\ 9 \cdot (x - 100) + 300 + 750, & \text{se } x > 100 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x + 750, & \text{se } 0 \leq x \leq 100 \\ 9x + 150, & \text{se } x > 100 \end{cases}$$

Logo, como  $f(0) = 750$ ,  $f(100) = 3 \cdot 100 + 750 = 1050$  e  $f(200) = 9 \cdot 200 + 150 = 1950$  assim, de posse desses valores, segue que o gráfico que melhor representa a função  $f$  é o da alternativa e.

**Resposta:** alternativa e.

8. O preço de equilíbrio é aquele resultante da igualdade entre quantidade de oferta e demanda, tal que:

$$Q_o = Q_d \Rightarrow -20 + 4P = 46 - 2P$$

$$\Rightarrow 6P = 66$$

$$\Rightarrow P = 11$$

**Resposta:** alternativa b.

9. Seja  $f: [0, 10] \rightarrow [0, 10]$ , com  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Desse modo, temos:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(5) = 6 \\ f(10) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 25a + 5b = 6 \\ 100a + 10b = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{25} \\ b = \frac{7}{5} \\ c = 0 \end{cases}$$

Portanto, segue que  $f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$ .

**Resposta:** alternativa a.

10. Queremos calcular o valor de  $t$  para o qual se tem  $T(t) = 39$ . Desse modo:

$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400 \Leftrightarrow \frac{t^2}{4} = 361$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{4 \cdot 361}$$

$$\Leftrightarrow t = 38 \text{ min}$$

**Resposta:** alternativa d.

11. Quando vamos realizar um contrato com uma empresa de telefonia, buscamos os valores de maior vantagem custo-benefício. Assim, de acordo com a questão, o plano mais vantajoso é aquele que permite o maior tempo mensal de chamada pelo valor de R\$ 30,00. Portanto, do gráfico, é imediato que a resposta é proposta na alternativa c.

**Resposta:** alternativa c.

12.  $P = r \times i^2$   
 $P = k \times E$

$$k \cdot E = r \cdot i^2 \Rightarrow E = \frac{r \cdot i^2}{k} \quad (\text{como } r \text{ e } k \text{ são constantes reais, temos uma função do segundo grau na variável } i).$$

Portanto, o melhor gráfico para que representa a relação pedida é o da alternativa d.

**Resposta:** alternativa d.

13. Tomando por base o que a questão nos fornece, temos que:

$$k \cdot (8m)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} k \cdot m^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 \cdot k \cdot m^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot k$$

Logo, a área ficará multiplicada por 4.

**Resposta:** alternativa b.

14. Utilizando a ideia de notação científica, temos:

$$325 \text{ mil km} = 325 \cdot 10^3 \text{ km} = 3,25 \cdot 10^5 \text{ km}$$

**Resposta:** alternativa d.

15. Como  $51,50 - 50,25 = 52,75 - 51,50 = 54 - 52,75 = 1,25$ , podemos concluir que a sequência 50,25; 51,50; 52,75; 54,00; ... é uma progressão aritmética de primeiro termo  $a_1 = 50,25$  e razão  $r = 1,25$ . Portanto, queremos calcular a soma dos 10 primeiros termos dessa progressão aritmética, ou seja, lançando os valores de  $a_1$  e  $r$  na fórmula geral de soma de termos em sequência aritmética, temos:

$$S_{10} = \left( \frac{2a_1 + 9r}{2} \right) \cdot 10 = \left( \frac{2 \cdot 50,25 + 9 \cdot 1,25}{2} \right) \cdot 10 = 558,75$$

**Resposta:** alternativa d.

16. Essa questão trabalha com o conceito de progressões bem básico e que, na verdade, não necessita de seu conhecimento para resolver tal problema, já que, uma simples soma de valores baixos pode ser realizada à mão, seguida de uma subtração, da qual obtemos a resposta.

Logo, a quantidade de cartas que forma o monte é dada por  $52 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 24$

**Resposta:** alternativa b.



ISBN 978-850817938-1



9 788508 179381