FUNÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Já vimos o que são funções e como podemos descrevê-las. Mas até aqui, só trabalhamos com funções de **primeiro grau**. Agora, vamos voltar nossa atenção para as funções de segundo grau, que definimos abaixo:

> Chamamos de função polinomial de segundo grau a toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Uma função polinomial de segundo grau também pode ser chamada de **função quadrática**. No caso dessas funções, uma pequena variação em x gera uma variação maior em y do que a que vimos nas funções afins. O exemplo a seguir ilustra essa alteração:

Exemplo: $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$

Vamos considerar três valores de x, cada qual obtido adicionando uma unidade no anterior, e analisar como se comportam os valores de y:

Para x = 0, temos $y = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 2 = 2$

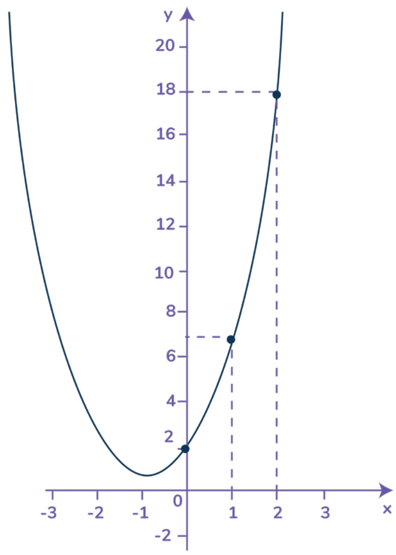
Para x = 1, temos $y = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 7$

Para x = 2, temos $y = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 18$

Veja que a variação em x é constante e igual a 1, mas a variação em y não é constante e fica maior conforme x aumenta.

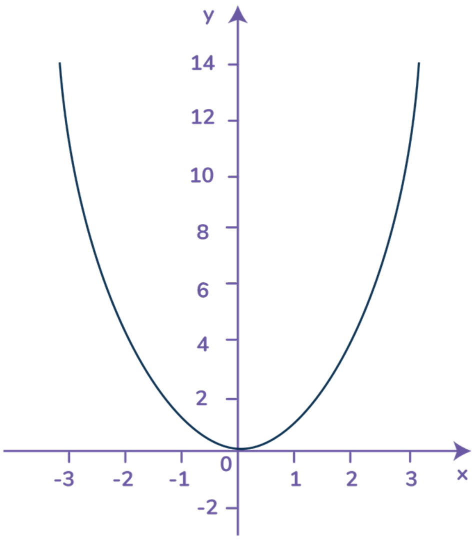
O gráfico de uma função polinomial de segundo grau é uma **parábola**. Esboçando o gráfico da função acima, temos:

x	y
0	2
1	7
2	18

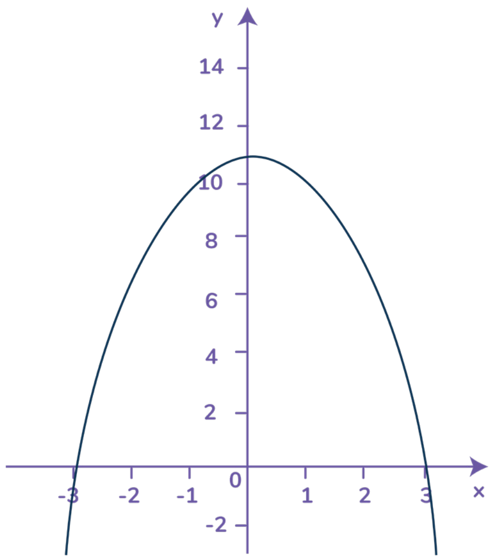


As parábolas possuem diversas propriedades que permitem caracterizá-las, como a **concavidade**, que é determinada pelo valor de **a** na lei de formação da função. Mas afinal, o que é a concavidade de uma parábola? Essa definição ficará clara logo!

Se o valor de **a** for positivo, temos uma parábola com **concavidade para cima**. Nesse caso dizemos que a parabola é côncava para cima, como na figura:



Por outro lado, se o valor de **a** for negativo, temos uma parábola com **concavidade para baixo**. Nesse caso dizemos que a parabola é côncava para baixo, como na figura:



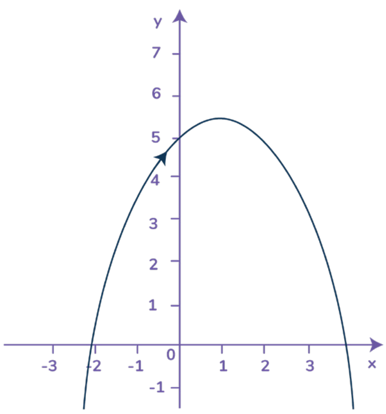
Agora, é mais fácil ver o que é a concavidade da parábola! Ela é a propriedade que nos diz se a parábola está virada "para cima" ou "para baixo".

Assim como o coeficiente **a**, os coeficientes **b** e **c** trazem informações importantes a respeito da parábola.

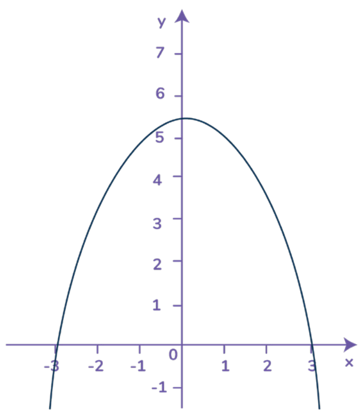
O sinal de **b** nos diz de que forma a parábola corta o eixo y:

- Quando b > 0, a parábola corta o eixo y subindo;
- Quando b = 0, a parábola tem o eixo de simetria no eixo y;
- Quando b < 0, a parábola corta o eixo y descendo.

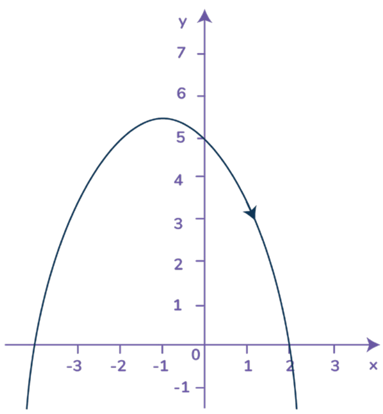
Considerando uma parábola côncava para baixo, por exemplo, temos a seguinte situação:



b > 0



b = 0

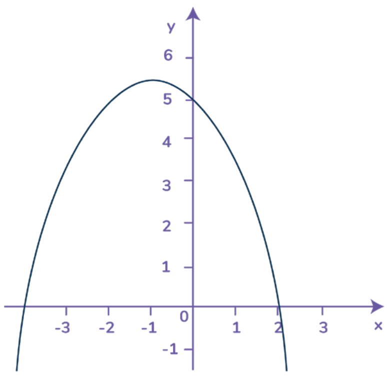


b < 0

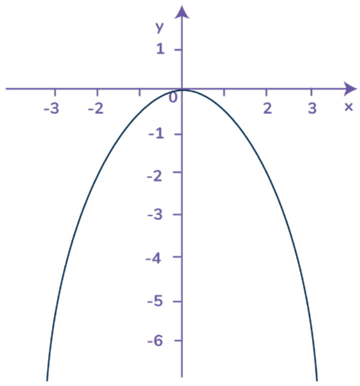
O sinal de **c** nos diz se a parábola corta o eixo y acima ou abaixo da origem ou, ainda, sobre o eixo x:

- Quando c > 0, a parábola corta o eixo y acima da origem;
- Quando c = 0, a parábola corta o eixo y na origem;
- Quando c < 0, a parábola corta o eixo y abaixo da origem.

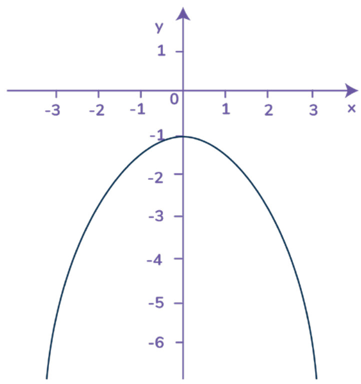
Se considerarmos novamente uma parábola côncava para baixo, temos a situação ilustrada a seguir:



c > 0



c = 0



c < 0

RAÍZES DE UMA FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

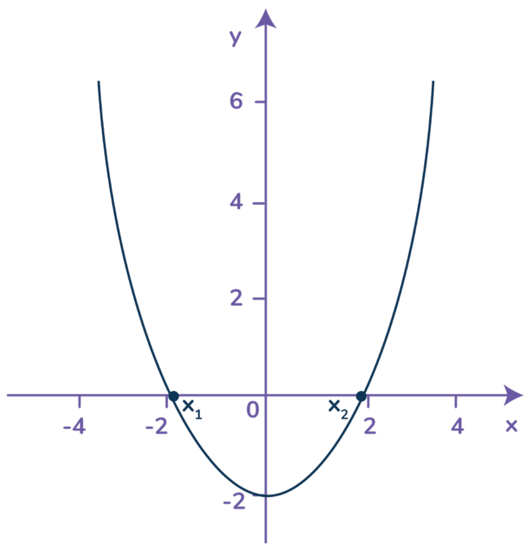
Agora, vamos estudar como encontrar as raízes de uma função quadrática. Se olharmos novamente para o gráfico da parábola, podemos identificar as raízes da função:

As raízes de uma função quadrática podem ser encontradas usando a **Fórmula de Bhaskara**, que é dada pela expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dizemos que $\Delta = b^2 - 4ac$ e tal Δ é chamado de **delta** ou **discriminante**. Assim, as duas raízes da função de segundo grau são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$



Exemplo: Encontre as raízes da função $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

Vamos primeiro calcular Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

Agora, usando a Fórmula de Bhaskara, as duas raízes da função são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

ESTUDO DO DELTA

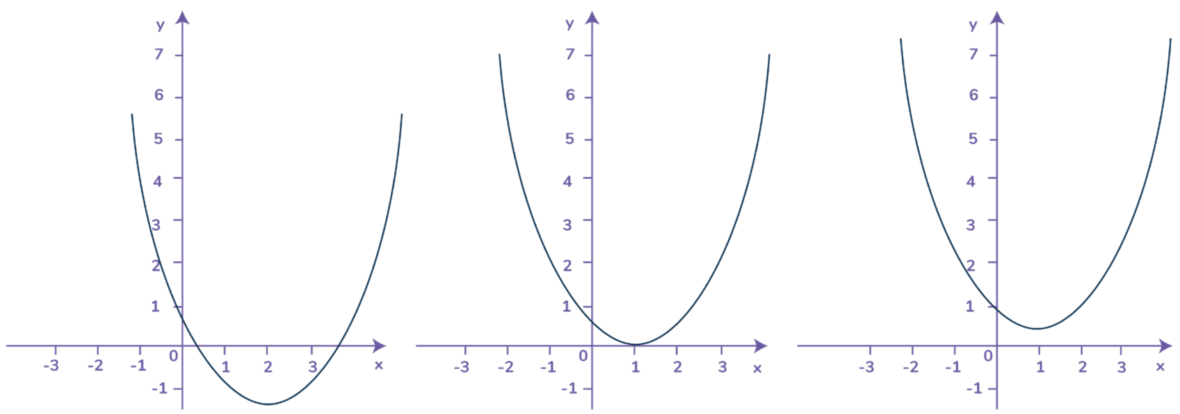
Agora, vamos realizar um estudo a respeito do sinal do Δ, que nos dirá se uma função quadrática admite raízes reais e, caso admita, quantas:

- Se $\Delta > 0$, a função admite duas raízes reais distintas;
- Se $\Delta = 0$, a função admite duas raízes reais, porém iguais;
- Se $\Delta < 0$, a função não admite raízes reais.

Observação:

- O sinal do Δ também nos traz informações a respeito da parábola correspondente à função em questão! Ele nos dirá se a parábola corta o eixo x e, caso corte, quantas vezes isto acontece:
  - Se $\Delta > 0$, a parábola cruza o eixo x em dois pontos distintos;
  - Se $\Delta = 0$, a parábola apenas tangencia o eixo x;
  - Se $\Delta < 0$, a parábola não cruza nem tangencia o eixo x.

Para uma parábola côncava para cima, as situações acima estão ilustradas nas imagens abaixo:



$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

Agora você pode tentar fazer a representação da parábola côncava para baixo, para cada caso acima.

Não foi fã da fórmula de Bhaskara? Não se aflita! Uma outra maneira de encontrar as raízes de uma função de segundo grau é utilizando o método de **soma e produto.**

Aqui, sendo S e P a soma e o produto das raízes respectivamente, temos que $S = \frac{-b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$. Por essa propriedade encontramos valores de x_1 e x_2, tais que $x_1 + x_2 = S$ e $x_1 . x_2 = P$.

Exemplo: Encontre as raízes da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Por soma e produto temos:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = -(-5) = 5 \text{ e}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

Procuramos dois valores x_1 e x_2 que somem 5 e multiplicados resultem em 6. Sendo assim, temos que $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$ são as raízes da função.

Esse método pode ser bastante vantajoso para alguns problemas, como no caso em que x_1 e x_2 são valores inteiros. No entanto, se a função tiver raízes racionais ou até mesmo irracionais, este método se torna pouco eficiente. Por isso, avalie bem o seu problema antes de decidir qual método utilizar para encontrar as raízes da função.

ANOTAÇÕES