Aula 06 – Trigonometria II

IME 2021

Professor Victor So

Sumário

Introdução

Olá!

Vamos continuar o estudo de trigonometria. Nessa aula, veremos como resolver equações e inequações trigonométricas. Também estudaremos o valor de algumas razões trigonométricas não triviais que podem ser cobradas na prova.

Se você já possui um bom conhecimento de trigonometria, vá direto para a lista de questões e treine!

Sempre que você tiver dúvidas, críticas ou sugestões nos procure no fórum de dúvidas ou entre em contato comigo:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

1. Alguns Arcos Importantes

Vamos estudar o valor do seno e cosseno de alguns ângulos que podem ser cobradas nas provas.

I) $\pi/8$ $(22,5°)$

Esse arco é o arco metade de $\pi/4$. Vamos usar as fórmulas de arco metade:

$$sen\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cosA}{2}}$$

Sabemos que o seno do primeiro quadrante é positivo. O arco $\pi/8$ está localizado no primeiro quadrante. Assim, podemos escrever:

$$sen\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

Para a tangente, podemos usar a relação fundamental:

$$tg\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{sen\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Simplificando essa razão, obtemos:

$$tg\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1}$$

II) $\boldsymbol{\pi/12\ (15°)}$

Decore os valores de seno e cosseno para esse ângulo. Ela já foi cobrada na prova do ITA!

$\pi/12$ é o arco metade de $\pi/6$. Assim, usando as seguintes transformações, podemos escrever:

$$sen\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cosA}{2}}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{sen\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Simplificando a tangente, temos:

$$tg\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$$

Podemos também escrever seno, cosseno e tangente de outra forma para esse ângulo. Usando a subtração de arcos, temos:

$$45°-30°=15°$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+sen\left(\frac{\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

III) $\boldsymbol{\pi/10}$ $(\mathbf{18°})$

$$2\cdot 18°+3\cdot 18°=90°$$

Usando a propriedade de arco complementar, podemos escrever:

$$sen\left(2\cdot\frac{\pi}{10}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}-3\cdot\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{10}\right)$$

Aplicando as fórmulas de arco duplo e triplo:

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

Como $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\neq 0$, podemos simplificar:

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-3$$

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\left(1-sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)-3$$

$$4sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)-1=0$$

Encontrando as raízes da equação de segundo grau:

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Como $18°$ pertence ao primeiro quadrante, podemos afirmar:

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$

Para o cosseno, podemos usar a relação fundamental:

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{1 - sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$$

IV) $\boldsymbol{\pi/5}$ $(\mathbf{36°})$

$36°$ é arco duplo de $18°$, usando a fórmula de arco duplo, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}}$$

Usando a relação fundamental:

$$sen\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}}$$

1. (ITA/2016)

Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$. Determine todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - sen\ y = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\ x + \sqrt{3}\cos y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comentários

Se $x, y \in [0, \pi]$, temos $0 < senx < 1$ e $0 < seny < 1$.

Isolando $senx$ e $cosx$:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = sen\ y + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Elevando as equações ao quadrado e somando, temos:

$$2\left(\underbrace{\cos^2 x + sen^2 x}_{1}\right) = \left(sen^2 y + seny + \frac{1}{4}\right) + \left(3\cos^2 y + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{4}\right)$$

$$2 = \underbrace{sen^2 y + 3\cos^2 y}_{1+2\cos^2 y} + seny + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{2}$$

$$2 = 1 + 2\cos^2 y + seny + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{2}$$

$$seny = \frac{1}{2} - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy$$

*Sempre que elevamos uma equação trigonométrica ao quadrado, devemos tomar o cuidado de verificar se as raízes encontradas satisfazem ao problema.

Elevando a equação ao quadrado:

$$sen^2 y = \left(\frac{1}{2} - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy\right)^2$$

$$1 - \cos^2 y = \frac{1}{4} + 4\cos^4 y + 3\cos^2 y - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy + 4\sqrt{3}\cos^3 y$$

$$4\cos^4 y + 4\sqrt{3}\cos^3 y + 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy - \frac{3}{4} = 0$$

$$16\cos^4 y + 16\sqrt{3}\cos^3 y + 8\cos^2 y - 4\sqrt{3}cosy - 3 = 0$$

Substituindo $a = \cos y$, temos:

$$16a^4 + 16\sqrt{3}a^3 + 8a^2 - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

Nesse momento, podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini para simplificar a equação. Mas, perceba os termos coloridos:

$$16a^4 + 16\sqrt{3}a^3 + \underbrace{8a^2}_{12a^2 - 4a^2} - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

$$16a^4 + +16\sqrt{3}a^3 + 12a^2 - 4a^2 - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

Podemos fatorar:

$$4a^2\left(4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3\right) - \left(4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3\right) = 0$$

$$(4a^2 - 1)\left(4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3\right) = 0$$

Com isso, basta resolver as duas equações quadráticas:

$$4a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

$$4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ (raiz\ dupla)$$

Agora, devemos testar os valores para encontrar x e y.

Para $a = 1/2$:

$$cosy = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2}sen\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$
$$senx = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Mas $senx > 0$, então, não convém.
Para $a = -1/2$:

$$cosy = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3}$$
$$\sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{2}sen\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$
$$senx = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}\ ou\ x = \frac{11\pi}{12}$$

Para $x = \frac{\pi}{12}$:

$$cosx = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$seny = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$cosy = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = sen\ y + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow OK!$$

Logo, o par $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{2\pi}{3}\right)$ é solução do sistema.
Para $x = \frac{11\pi}{12}$:

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \neq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Como a primeira equação não foi satisfeita, $x = \frac{11\pi}{12}$ não é solução do sistema.
Para $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$cosy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{5\pi}{6}$$
$$\sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{2}senx = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$
$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\ ou\ x = \frac{3\pi}{4}$$

Testando os valores:
Para $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = sen\ y + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow OK!$$

Portanto, $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{5\pi}{6}$ é solução.

Para $x = \frac{3\pi}{4}$:

$$\sqrt{2}\cos x = sen\ y + \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Não convém, devido a primeira equação.

Dessa forma, temos apenas dois pares ordenados que satisfazem ao sistema:

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right)\ ou\ (x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right)\ ou\ (x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)}$

2. Lei dos senos e cossenos

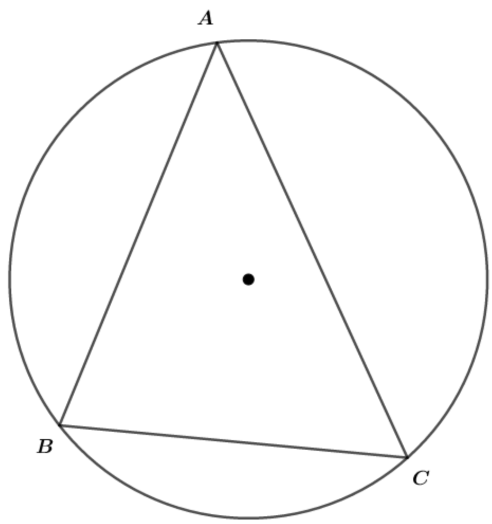
2.1. Lei dos senos

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

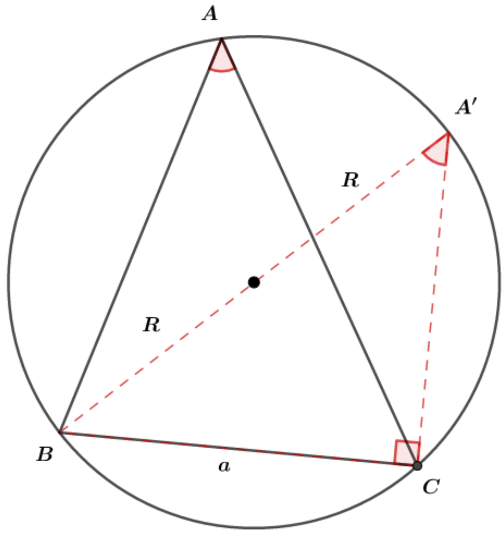
A lei dos senos afirma que a razão entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual à $2R$, sendo R o raio da circunferência que a circunscreve.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer representado pela seguinte figura:



Podemos traçar um triângulo $A'BC$ tal que A' seja a o ponto da intersecção da reta que passa pelo centro da circunferência:



Perceba que o triângulo $A'BC$ é retângulo em C, essa é uma propriedade do triângulo inscrito em uma semicircunferência. Ainda pela figura, como os ângulos A e A' enxergam a mesma corda BC, podemos afirmar que elas são iguais $A = A'$. Aplicando o seno no triângulo $A'BC$, encontramos:

$$senA' = \frac{a}{2R}$$

$$A' = A \Rightarrow \frac{a}{senA} = 2R$$

Analogamente para os outros lados.

2.2. Lei dos cossenos

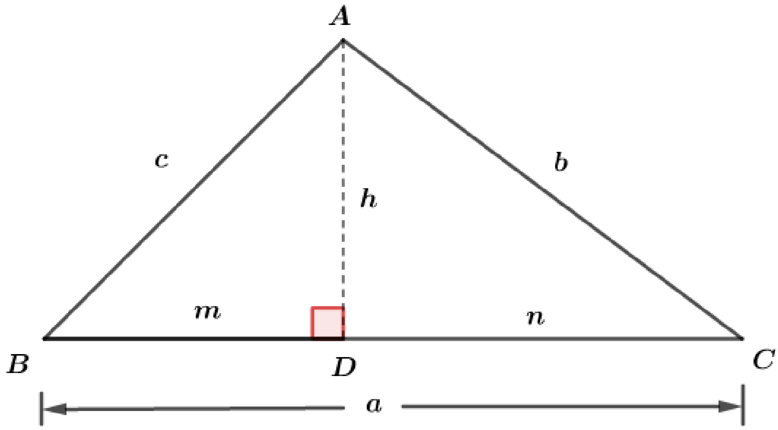
Seja ABC um triângulo qualquer e a, b, c são seus lados. A lei dos cossenos afirma que:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cosA} \\ \boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cosB} \\ \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cosC} \end{aligned}}$$

Demonstração:

Devemos dividir em dois casos, um para o triângulo com ângulo agudo e outro para o triângulo com ângulo obtuso.

1) Considere o triângulo ABC dado pela figura abaixo:



Podemos ver que o triângulo ADC é retângulo, então podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + n^2 \quad (I)$$

Analogamente para o triângulo ADB:

$$c^2 = m^2 + h^2 \quad (II)$$

Também, de acordo com a figura, temos:

$$n = a - m \quad (III)$$

De (II), temos $h^2 = c^2 - m^2$. Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$b^2 = c^2 - m^2 + (a - m)^2$$

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \quad (IV)$$

Observando o triângulo ADB, podemos escrever a seguinte relação:

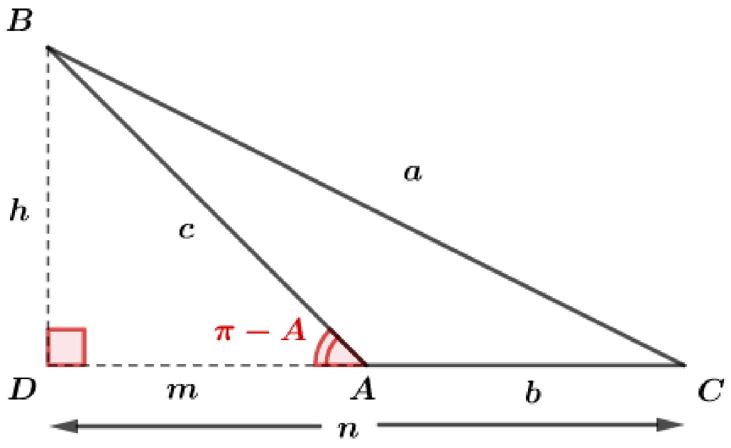
$$m = c\, cosB$$

Substituindo em (IV), obtemos a lei dos cossenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cosB$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

2) Seja ABC um triângulo dado pela figura abaixo:



Os triângulos BAD e BCD são retângulos, desse modo, podemos escrever:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (I)$$

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (II)$$

Observando o triângulo BCD, temos a seguinte relação:

$$n = m + b \quad (III)$$

Substituindo (III) e (I) em (II), obtemos:

$$a^2 = (m+b)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = m^2 + 2bm + b^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \quad (IV)$$

No triângulo BAD, temos:

$$m = c\cos(\pi - A) = -c\cos A$$

Substituindo essa identidade em (IV):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

3. Equações Trigonométricas

3.1. Equações Fundamentais

Vamos aprender a resolver equações trigonométricas. A maioria das equações trigonométricas podem ser resolvidas se conhecermos as equações fundamentais. Vamos apresentá-las:

Equações Fundamentais

(I)	$sen\alpha = sen\beta$
(II)	$cos\alpha = cos\beta$
(III)	$tg\alpha = tg\beta$

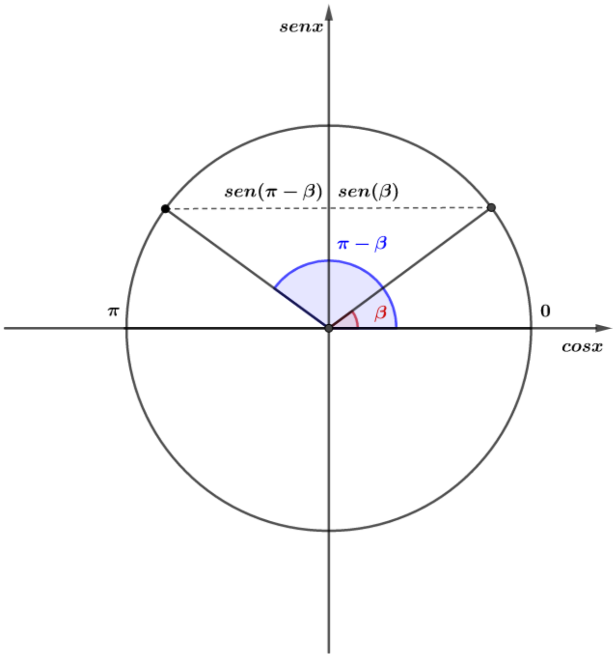
$(I)\ sen\alpha = sen\beta$

Para resolver essa equação, temos que considerar dois casos:

1) α e β são congruentes, então $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Perceba que temos que somar o termo $2k\pi$ para encontrar todos os ângulos que tornam essa igualdade verdadeira. $2k\pi$ é o termo que representa k voltas completas na circunferência trigonométrica.

2) α e β são suplementares, então $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, devemos lembrar que a função seno repete seu valor no primeiro e segundo quadrantes e, por isso, temos que considerar o caso desses ângulos serem suplementares um do outro.

Vamos usar o ciclo trigonométrico para melhor visualização:



$(II)\ cos\alpha = cos\beta$

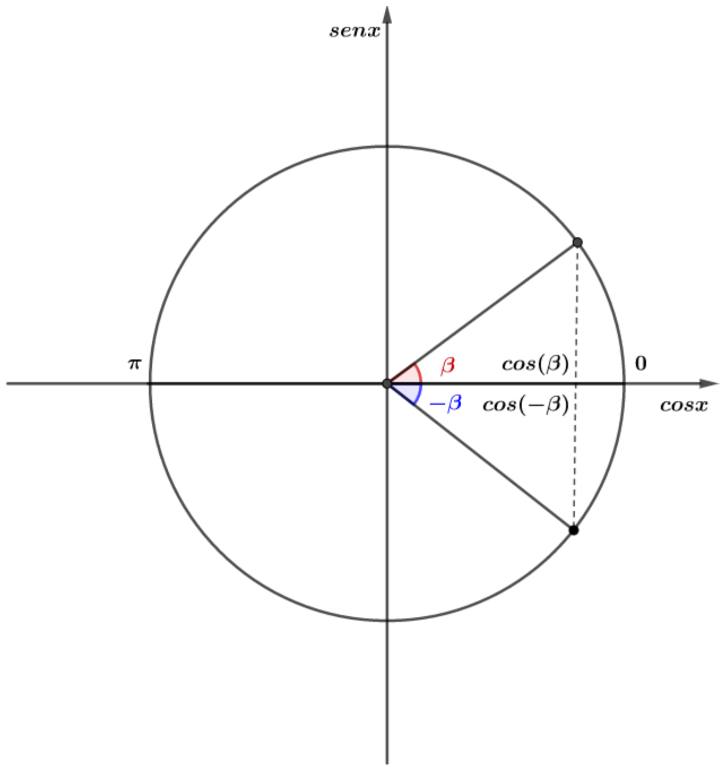
Nesse caso, também temos duas possibilidades:

1) α e β são congruentes, então $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2) α e β são replementares (replementares são ângulos que a relação $\alpha = 2\pi - \beta$). Assim, temos $\alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Perceba que podemos incluir o termo 2π em $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma:

$$\alpha = -\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ciclo trigonométrico dos casos:



$(III)\ tg\alpha = tg\beta$

A função tangente repete seu valor para dois casos:

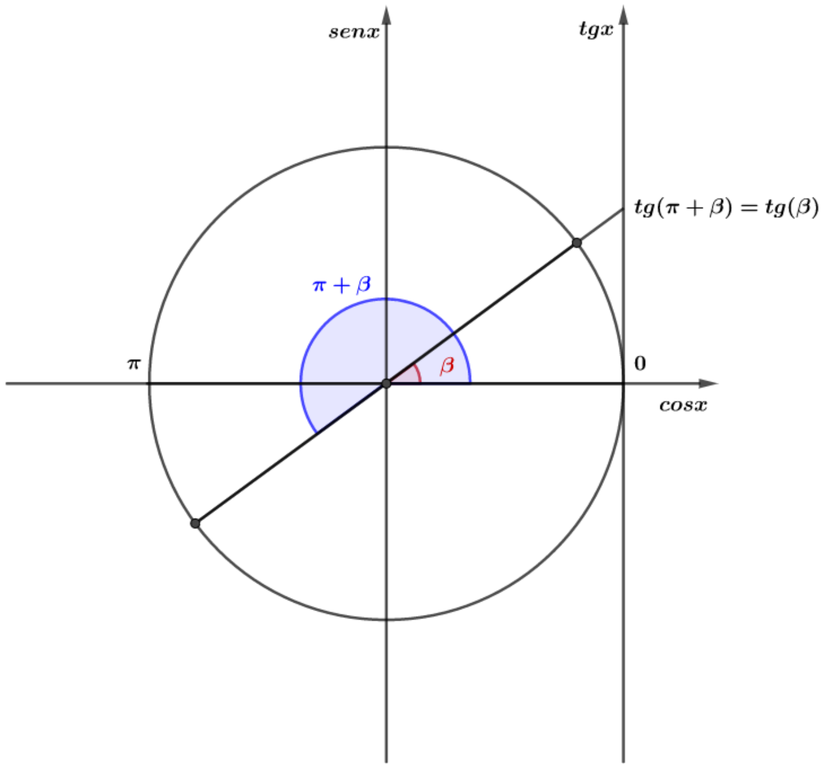
1) α e β são congruentes, então, $\alpha = \beta + 2k\pi$

2) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, então, $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Essas duas soluções podem ser escritas em uma só:

$$x = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ciclo trigonométrico dos casos:



RESUMINDO

Equações Fundamentais	Solução
$sen\alpha = sen\beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$cos\alpha = cos\beta$	$\alpha = \pm\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$tg\alpha = tg\beta$	$\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3.2. Equações Clássicas

Além das equações fundamentais, temos as equações clássicas. Vamos aprender a resolvê-las.

Equações Clássicas	
(I)	$asenx + bcosx = c \ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$
(II)	$a(senx + cosx) + bsenxcosx = c \ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$

(III)	$sen^4 x + \cos^4 x = a\ (a \in \mathbb{R})$
(IV)	$sen^6 x + \cos^6 x = a\ (a \in \mathbb{R})$

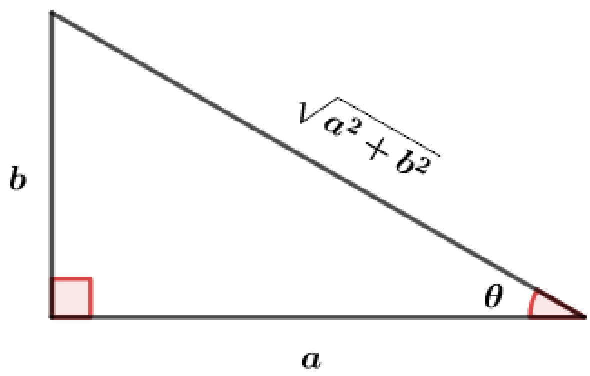
$(I)\ asenx + bcosx = c$

Método 1:

Se $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$, podemos dividir essa equação por $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{asenx}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{bcosx}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Essa divisão se baseia no seguinte triângulo retângulo:



Assim, podemos escrever:

$$sen\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$cos\theta senx + sen\theta cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A expressão à esquerda é a fórmula da soma do seno, assim, temos:

$$sen(x+\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Com essa equação, basta encontrar o valor dos ângulos que satisfazem essa equação.

A solução é dada por:

$$x + \theta = arcsen\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$x+\theta=\pi-arcsen\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Para usar esse método, devemos nos atentar à condição de existência:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$$

Que é o mesmo que dizer:

$$-1\leq\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1$$

Método 2:

Podemos usar as seguintes identidades:

$$senx=\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$cosx=\frac{\left(1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Fazendo $t=tg\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$senx=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Substituindo na equação:

$$a\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=c$$

$$2at+b-bt^2=c+ct^2$$

$$(b+c)t^2-2at+c-b=0$$

Para encontrar as soluções, basta resolver a equação do segundo grau acima.

$(II)\ a(senx+cosx)+bsenxcosx=c$

Podemos fazer $z=senx+cosx$ e, assim, obtermos:

$$z=senx+cosx$$

Elevando ao quadrado:

$$z^2 = sen^2x + 2senxcosx + \cos^2 x \Rightarrow z^2 = 1 + 2senxcosx \Rightarrow senxcosx = \frac{z^2 - 1}{2}$$

Substituindo na equação:

$$az + \frac{b(z^2 - 1)}{2} = c$$

$$bz^2 + 2az - b - 2c = 0$$

Dessa forma, a solução é dada pelas raízes da equação do segundo grau acima.

Para encontrar a solução em x, devemos resolver $sen(2x) = z^2 - 1$.

A solução é dada por:

$$2x = arcsen(z^2 - 1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen(z^2 - 1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$(III)\ sen^4x + cos^4x = a$

Podemos fatorar essa equação:

$$\left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)^2 - 2sen^2xcos^2x = a$$

$$1 - 2(senxcosx)^2 = a$$

$$\left[\frac{sen(2x)}{2}\right]^2 = \frac{1-a}{2}$$

$$|sen(2x)| = \sqrt{2(1-a)}$$

$$sen(2x) = \pm\sqrt{2(1-a)}$$

Devemos analisar a condição de existência:

Condição do radical:

$$1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

Condição do seno:

$$0 \leq \sqrt{2(1-a)} \leq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$$

Intersecção das condições:

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

A solução é dada por:

$$2x = arcsen\left(\pm\sqrt{2(1-a)}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen\left(\pm\sqrt{2(1-a)}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$(IV)\ sen^6x + \cos^6 x = a$

Podemos usar a seguinte identidade:

$$sen^6x + \cos^6 x = \Big(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\Big)(sen^4x - sen^2xcos^2x + \cos^4 x)$$

$$sen^6x + \cos^6 x = \underbrace{sen^4x + \cos^4 x}_{1-2sen^2xcos^2x} - sen^2xcos^2x$$

$$sen^6x + \cos^6 x = 1 - 3sen^2xcos^2x$$

Assim, substituindo na equação, obtemos:

$$1 - 3sen^2xcos^2x = a$$

$$1 - a = 3\left(\frac{sen(2x)}{2}\right)^2$$

$$sen^2(2x) = \frac{4(1-a)}{3}$$

$$|sen(2x)| = \sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}$$

$$sen(2x) = \pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}$$

Devemos analisar a condição de existência:

$$1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{\frac{4(1-a)}{3}} \leq 1$$

$$4(1-a) \leq 3 \Rightarrow 1 - a \leq \frac{3}{4} \Rightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

Intersecção das condições:

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 1$$

A solução é dada por:

$$2x = arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Resolva as seguintes equações:

a) $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $cosx = 1$

c) $tgx = \sqrt{3}$

d) $cossecx = 2$

e) $tg(5x) = tg\left(\frac{\pi}{5}\right)$

f) $sen^2x = 1 + cosx$

g) $4cosx + 3secx = 8$

h) $2 - 2cosx = senx \cdot tgx$

i) $1 + 3tg^2x = 5secx$

j) $cos3x - cosx = 0$

l) $sen3x + cos3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

a) $\boldsymbol{senx = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Sabemos que $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então a solução é dada por:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\boldsymbol{cosx = 1}$

Sabemos que $\cos(0) = 1$, então:

$$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\boldsymbol{tgx = \sqrt{3}}$

Sabemos que $tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, desse modo:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $\boldsymbol{cossecx = 2}$

$$cossecx = 2 \Rightarrow \frac{1}{senx} = 2 \Rightarrow senx = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e) $\boldsymbol{tg(5x) = tg\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

$$5x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{25} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

f) $\boldsymbol{sen^2x = 1 + cosx}$

$$1 - \cos^2 x = 1 + cosx$$
$$\cos^2 x + cosx = 0$$
$$cosx(cosx + 1) = 0$$
$$cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

g) $\boldsymbol{4cosx + 3secx = 8}$

Condição de existência: $cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$4cosx + \frac{3}{cosx} = 8$$
$$4\cos^2 x - 8cosx + 3 = 0$$
$$cosx = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{3}{2}\ ou\ \frac{1}{2}$$

Sabemos que $-1 \leq cosx \leq 1$, então:

$$cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

h) $\boldsymbol{2 - 2cosx = senx \cdot tgx}$

Condição de existência: $cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$2 - 2cosx = senx \cdot \frac{senx}{cosx}$$
$$2 - 2cosx = \frac{sen^2x}{cosx}$$
$$(2 - 2cosx)cosx = 1 - \cos^2 x$$
$$2cosx - 2\cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$
$$-\cos^2 x + 2cosx - 1 = 0$$
$$\cos^2 x - 2cosx + 1 = 0$$
$$(cosx - 1)^2 = 0$$
$$cosx = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

i) $\boldsymbol{1 + 3tg^2x = 5secx}$

Podemos usar a identidade:

$$\sec^2 x = 1 + tg^2x$$
$$1 + 3(\sec^2 x - 1) = 5secx$$
$$3\sec^2 x - 5secx - 2 = 0$$
$$secx = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = 2\ ou\ -\frac{1}{3}$$

Como $secx \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$secx = 2 \Rightarrow cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

j) $\boldsymbol{cos3x - cosx = 0}$

Usando a fórmula do arco triplo do cosseno, temos:

$$cos3x = 4\cos^3 x - 3cosx$$
$$4\cos^3 x - 3cosx - cosx = 0$$
$$4\cos^3 x - 4cosx = 0$$
$$cosx(\cos^2 x - 1) = 0$$
$$cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$\cos^2 x = 1 \Rightarrow cosx = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

l) $\boldsymbol{sen3x + cos3x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Essa é uma equação clássica. Vamos multiplicá-la por $\sqrt{2}/2$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}sen3x + \frac{\sqrt{2}}{2}cos3x = \frac{1}{2}$$

$$sen3xcos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right)cos3x = \frac{1}{2}$$

$$sen\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

e) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{25} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}}$

f) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ou \ x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

g) $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

h) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

i) $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

j) $\boldsymbol{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

l) $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \ ou \ x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

4. Inequações Trigonométricas

Para resolver inequações trigonométricas, devemos aprender a resolver os 6 tipos diferentes de inequações.

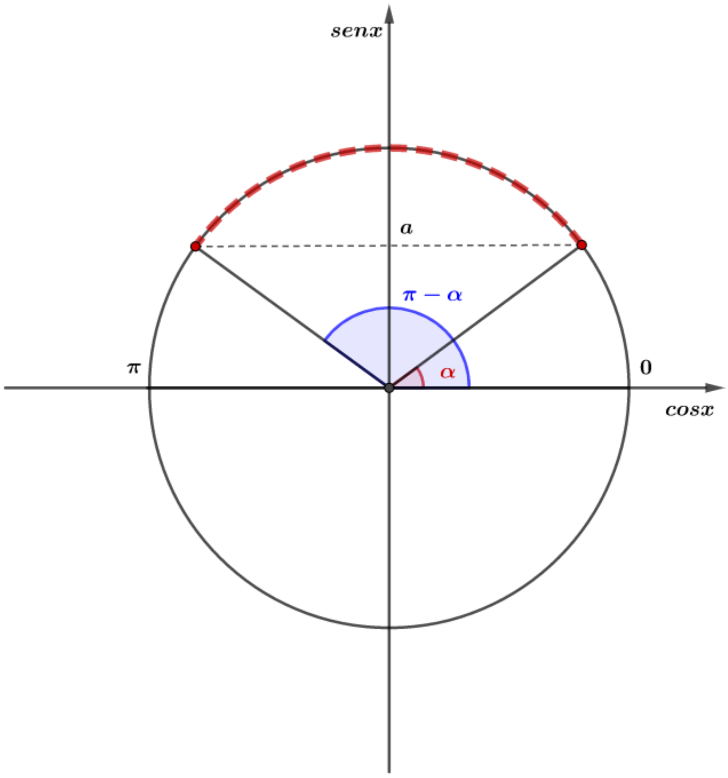
Seja a um número real dado:

Inequações Fundamentais	
(I)	$senx \geq a$
(II)	$senx \leq a$
(III)	$cosx \geq a$

(IV)	$cosx \leq a$
(V)	$tgx \geq a$
(VI)	$tgx \leq a$

$(I)\ senx \geq a$

Sempre que resolvemos inequações, podemos usar o gráfico para nos ajudar a ver o resultado. Vamos usar o ciclo trigonométrico e inserir $sen\alpha = a$:

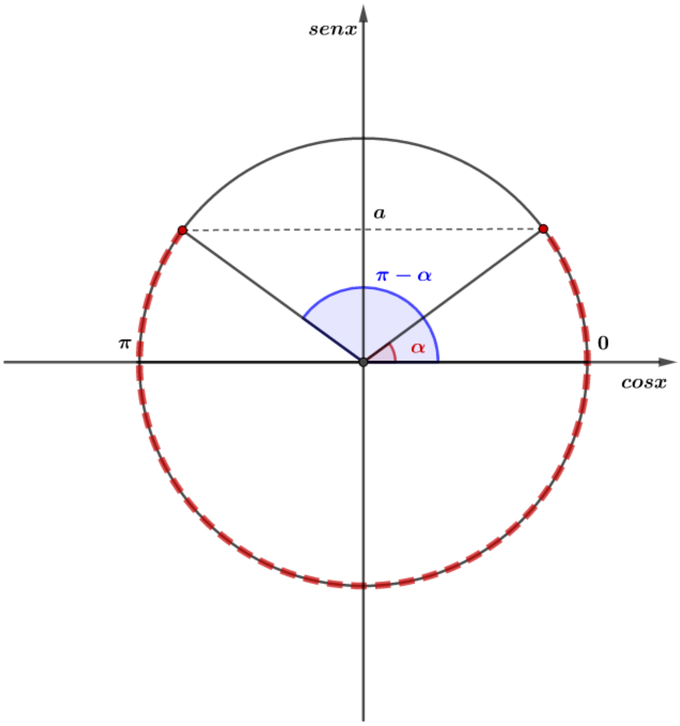


Observando o ciclo, podemos afirmar que os valores do seno que são maiores ou iguais a a devem pertencer ao intervalo:

$$\boldsymbol{arcsen(a) + 2k\pi \leq x \leq \pi - arcsen(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(II)\ senx \leq a$

Sendo $sen\alpha = a$, podemos usar o ciclo trigonométrico:



Observando a figura, podemos afirmar que os valores de x que satisfazem a inequação são dados por:

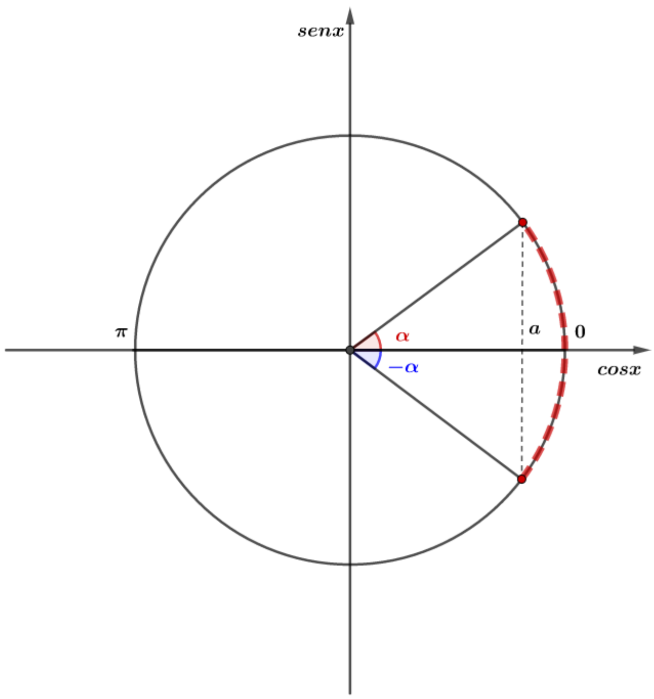
$$\boldsymbol{0 + 2k\pi \leq x \leq arcsen(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Ou

$$\boldsymbol{\pi - arcsen(a) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(III)\ cosx \geq a$

Usando o ciclo trigonométrico e considerando $cos\alpha = a$, temos:

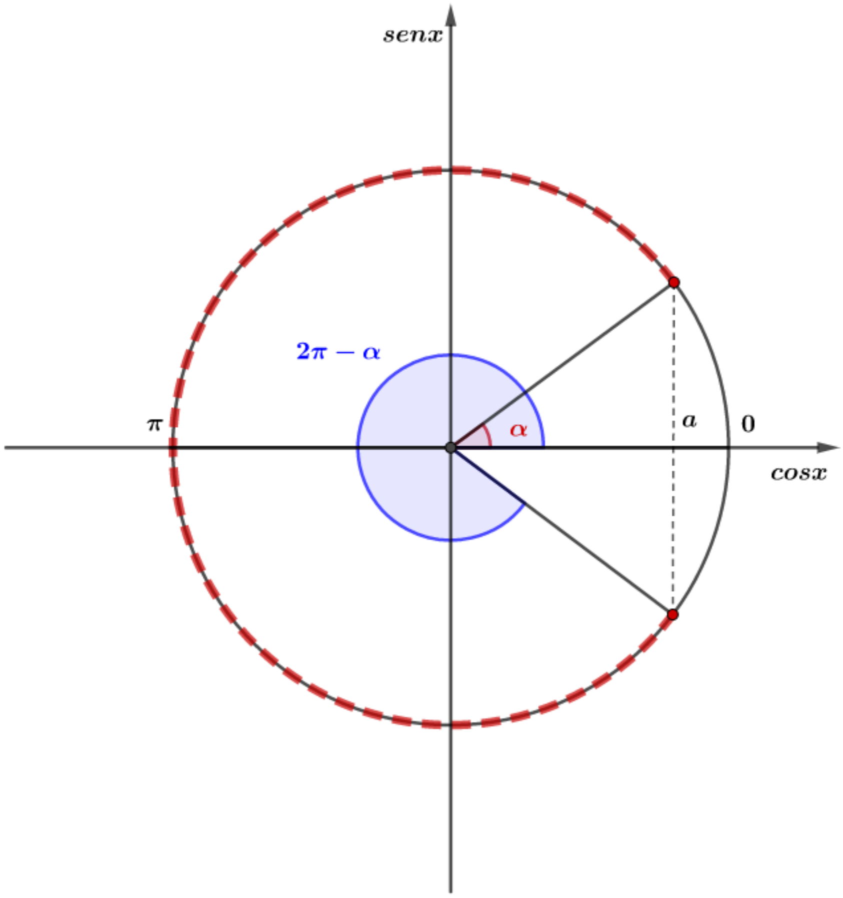


Pela figura, podemos ver que as soluções em x são dadas por:

$$-\boldsymbol{arccos(a) + 2k\pi \leq x \leq arccos(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(IV)\ cosx \leq a$

Usando o ciclo trigonométrico e considerando $cos\alpha = a$:

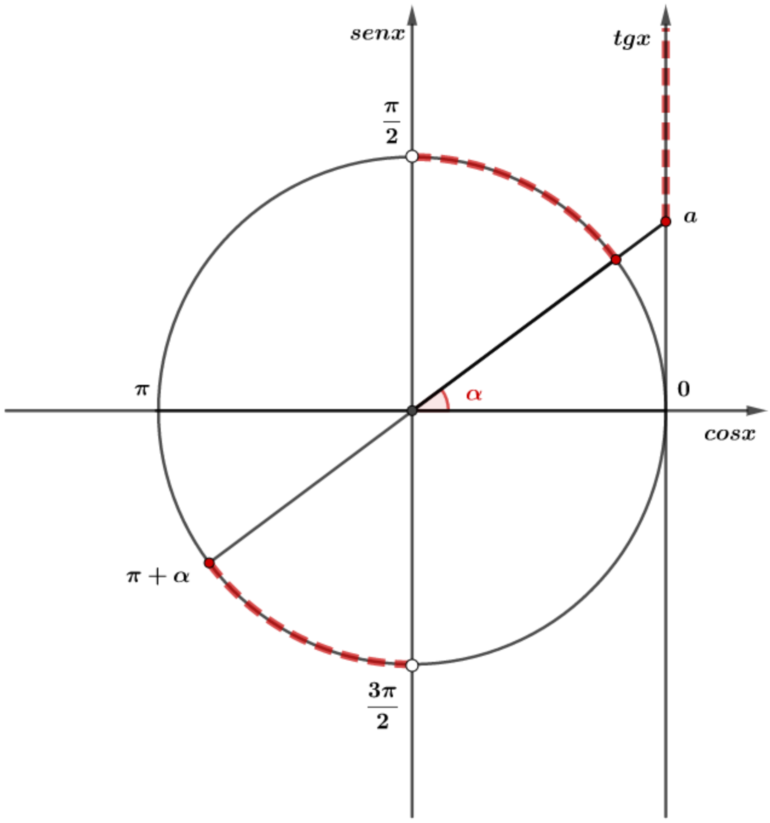


Podemos ver que a solução é dada por:

$$\boldsymbol{arccos(a) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - arccos(a) + 2k\pi}$$

$(V)\ tgx \geq a$

Fazendo $tg\alpha = a$ e usando o ciclo trigonométrico, temos:



Analisando a figura, podemos ver que as soluções são dadas por:

$$arctg(a) + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

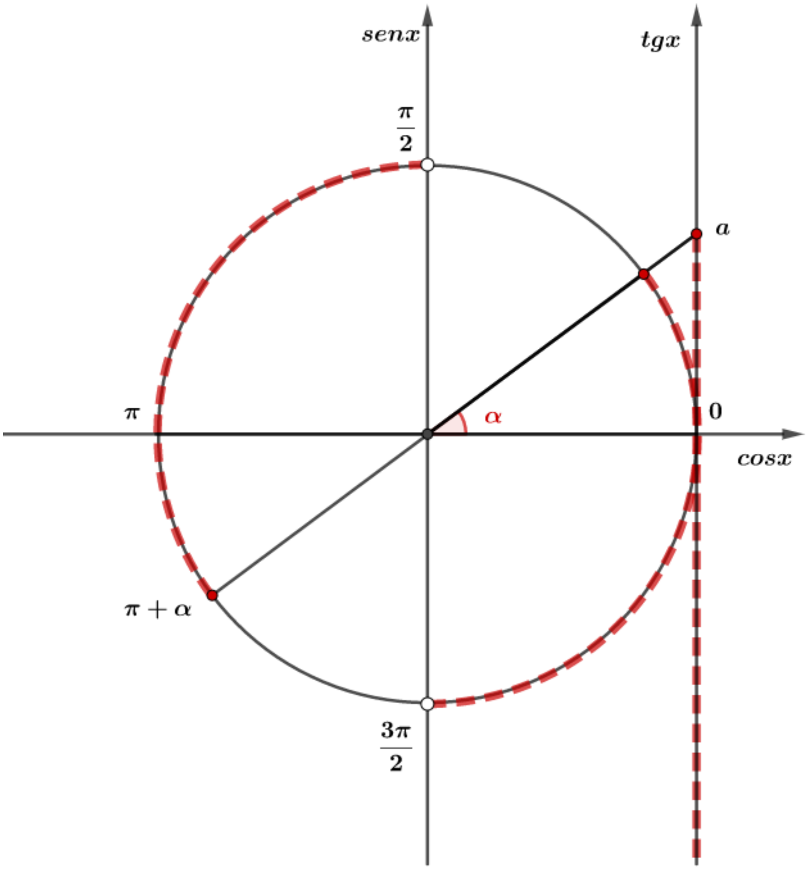
$$\pi + arctg(a) + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Podemos resumir essas duas soluções:

$$\boldsymbol{arctg(a) + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(VI)\ tgx \leq a$

Fazendo $tg\alpha = a$ e usando o ciclo trigonométrico:



Pela figura, podemos ver que a solução é dada por:

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+k\pi < x \leq \pi + arctg(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

3. Resolva as seguintes inequações:

a) $|senx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $senx + cosx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos^2 x \geq \frac{1}{2}$

d) $tg^3x + 3 > 3tgx + tg^2x$

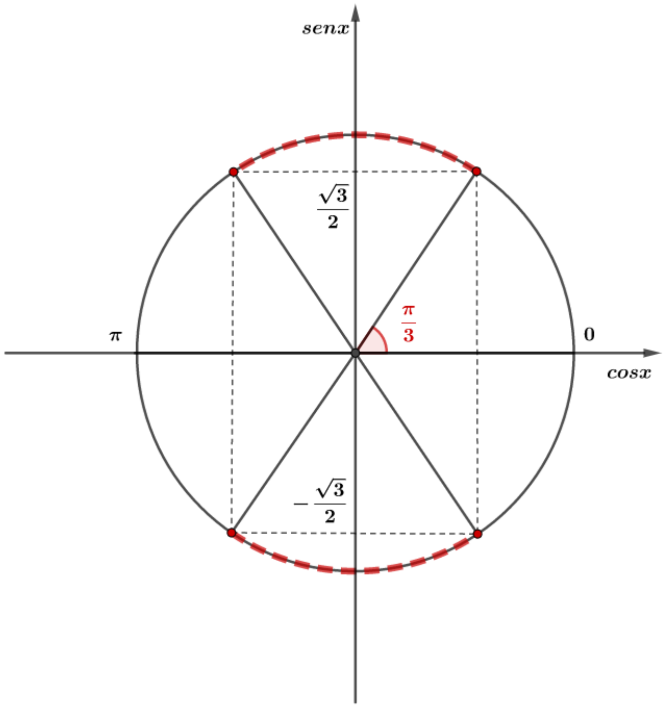
e) $sen^6x + \cos^6 x < \frac{7}{16}$

Resolução:

a) $\boldsymbol{|senx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Vamos usar o círculo trigonométrico para nos auxiliar:

Sabemos que $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então, temos:



Podemos ver que os valores de x que satisfazem essa inequação é:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\boldsymbol{senx + cosx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}}$

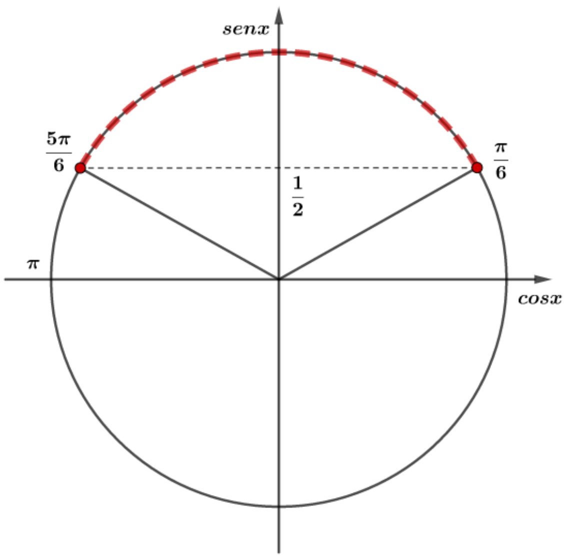
Vamos multiplicar a inequação por $\sqrt{2}/2$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} senx + \frac{\sqrt{2}}{2} cosx \geq \frac{1}{2}$$

$$senxcos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cosx \geq \frac{1}{2}$$

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Assim, a solução é dada por:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{12}+2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

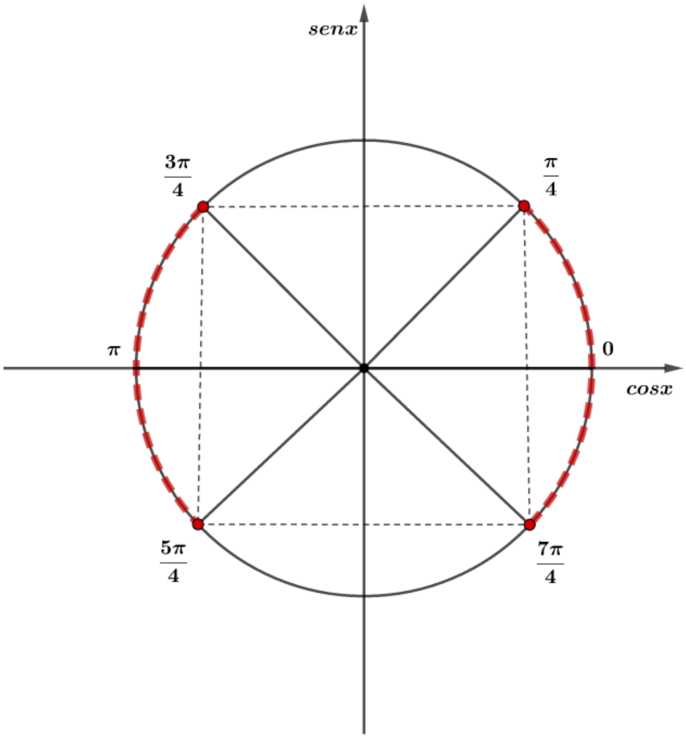
c) $\cos^2 x \geq \frac{1}{2}$

Como ambos os lados são positivos, podemos escrever:

$$\sqrt{\cos^2 x} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$cosx \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \ ou \ cosx \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esboçando o ciclo trigonométrico:



A solução é dada por:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$\frac{3\pi}{4}+2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Podemos resumir essa solução em uma única:

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $tg^3x+3>3tgx+tg^2x$

Vamos fatorar as expressões:

$$tg^3x-tg^2x+3-3tgx>0$$
$$tg^2x(tgx-1)+3(1-tgx)>0$$
$$(tgx-1)(tg^2x-3)>0$$

Possibilidades:

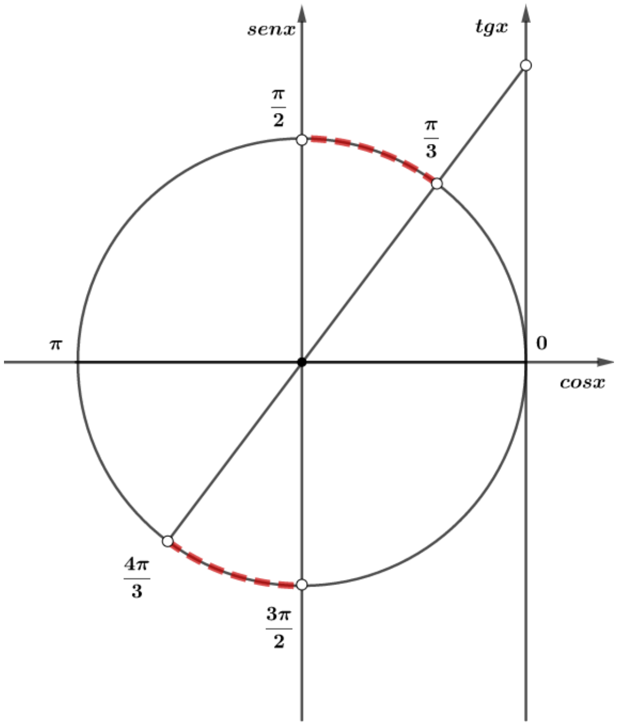
$$\begin{cases} tgx-1>0 \\ tg^2x-3>0 \end{cases} ou \begin{cases} tgx-1<0 \\ tg^2x-3<0 \end{cases}$$

Para o primeiro caso:

$$tgx-1>0 \Rightarrow tgx>1$$
$$tg^2x-3>0 \Rightarrow tgx>\sqrt{3} \ ou \ tgx<-\sqrt{3}$$

Fazendo a intersecção das condições, temos:

$$tgx > \sqrt{3}$$



A solução é dada por:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o segundo caso:

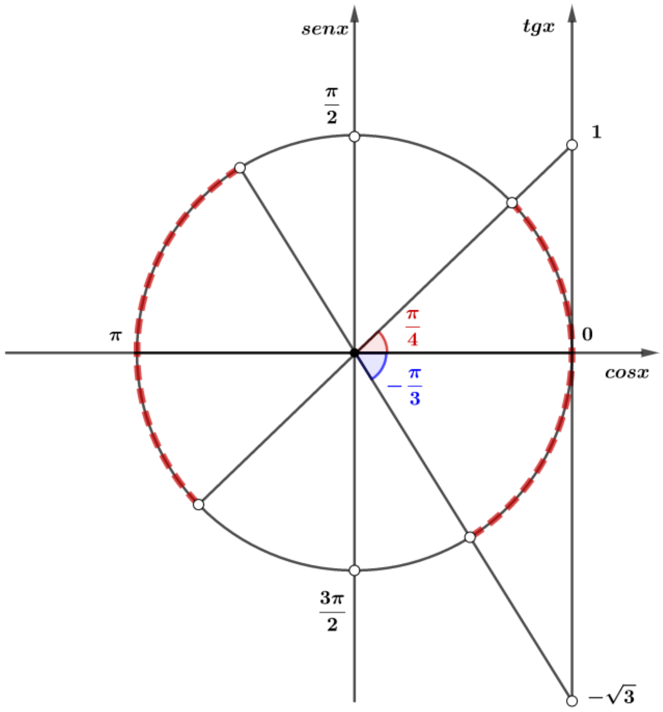
$$tgx < 1$$

E

$$-\sqrt{3} < tgx < \sqrt{3}$$

Fazendo a intersecção:

$$-\sqrt{3} < tgx < 1$$



A solução é dada por:

$$-\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a solução completa é:

$$\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi \ ou \ -\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e) $\boldsymbol{sen^6 x + \cos^6 x < \frac{7}{16}}$

Vamos usar a identidade:

$$sen^6 x + \cos^6 x = 1 - 3sen^2 x cos^2 x$$

$$1 - 3sen^2 x cos^2 x < \frac{7}{16}$$

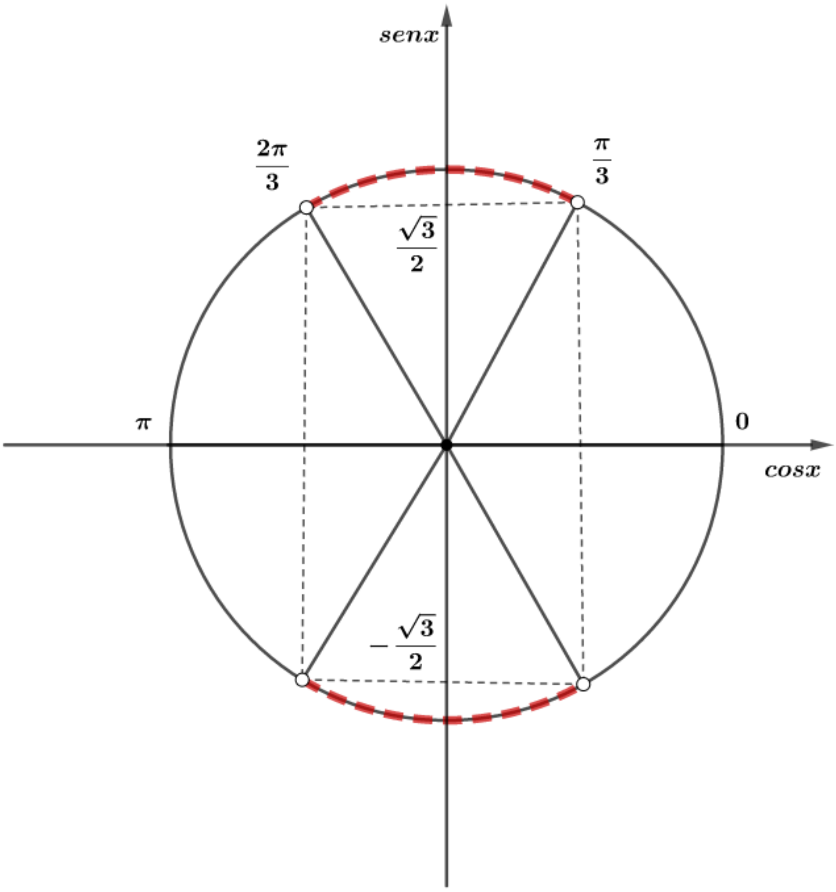
$$\frac{9}{16} < 3\left(\frac{sen(2x)}{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{16} < \frac{sen^2(2x)}{4}$$

$$sen^2(2x) > \frac{3}{4}$$

$$sen(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \ ou \ sen(2x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico para visualizar a solução:



Assim, podemos concluir:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ ou \ -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

e) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$

5. Somatório Trigonométrico

Uma questão que é passível de cair no IME é o somatório trigonométrico. Vamos aprender a resolvê-la.

Veja o seguinte somatório:

$$S = \sum_{i=1}^{n} sen(A + ri)$$

A é um ângulo dado e r é a razão do somatório.

Para resolver essa soma, devemos usar a seguinte fórmula de Werner:

$$\boxed{-2senAsenB = \cos(A+B) - \cos(A-B)}$$

Então, o bizu é multiplicar o somatório por $2 \cdot sen\left(\frac{r}{2}\right)$:

$$S = \frac{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{i=1}^{n} sen(A+ri)$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{2sen\left(\frac{r}{2}\right) sen(A+ri)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Assim, transformamos a soma em uma soma telescópica:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{cos\left(A+ri-\frac{r}{2}\right) - \cos\left(A+ri+\frac{r}{2}\right)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Organizando os termos, encontramos a soma telescópica:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{cos\left(A+\frac{(2i-1)r}{2}\right) - \cos\left(A+\frac{(2i+1)r}{2}\right)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}$$

$$S = \frac{1}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)} \left[\cos\left(A+\frac{r}{2}\right) - \cos\left(A+\frac{3r}{2}\right) + \cos\left(A+\frac{3r}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \cos\left(A+\frac{5r}{2}\right) + \cdots + \cos\left(A+\frac{(2n-1)r}{2}\right) - \cos\left(A+\frac{(2n+1)r}{2}\right)\right]$$

$$S = \frac{1}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)} \left[\cos\left(A+\frac{r}{2}\right) \cancel{-cos\left(A+\frac{3r}{2}\right)} + \cancel{cos\left(A+\frac{3r}{2}\right)}\right.$$

$$\left. \cancel{-cos\left(A+\frac{5r}{2}\right)} + \cdots + \cancel{cos\left(A+\frac{(2n+1)r}{2}\right)} - \cos\left(A+\frac{(2n+1)r}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{S = \frac{\cos\left(A+\frac{r}{2}\right) - \cos\left(A+\frac{(2n+1)r}{2}\right)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}}$$

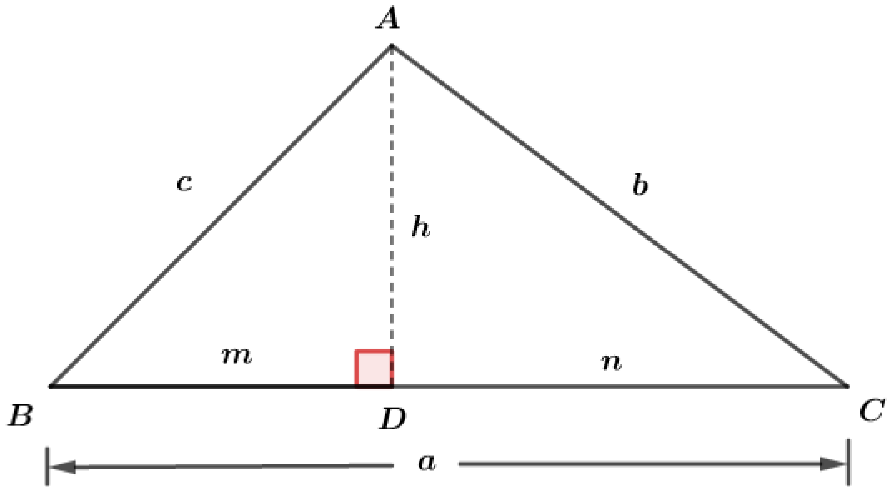
Não é necessário decorar essa fórmula, basta que você saiba como chegar à ela.

6. Resumo

6.1. Tabela de Ângulos Trigonométricos

Graus	Radianos	sen	cos	tg
$0°$	0	0	1	0
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$18°$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$36°$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$22{,}5°$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	*Não existe*
$180°$	π	0	-1	0
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	*Não existe*

6.2. Lei dos senos e cossenos



6.2.1. Lei dos Senos

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

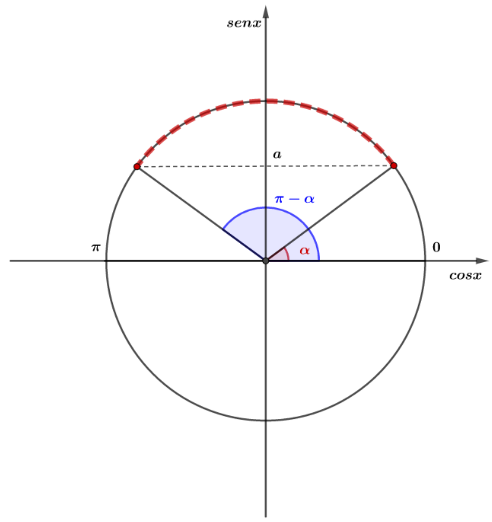
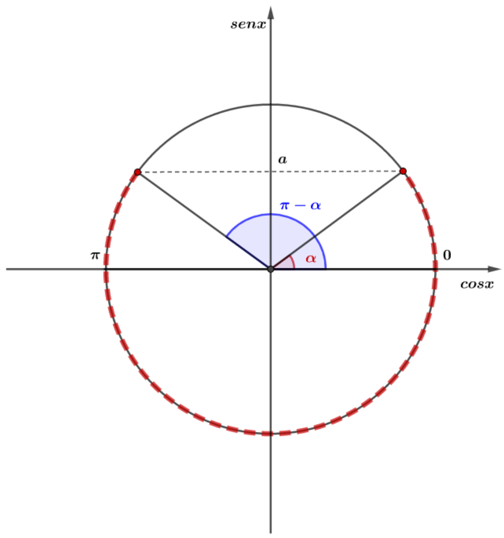
6.2.2. Lei dos Cossenos

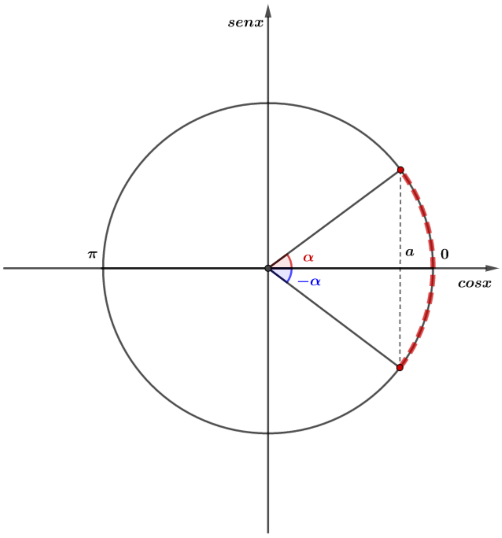
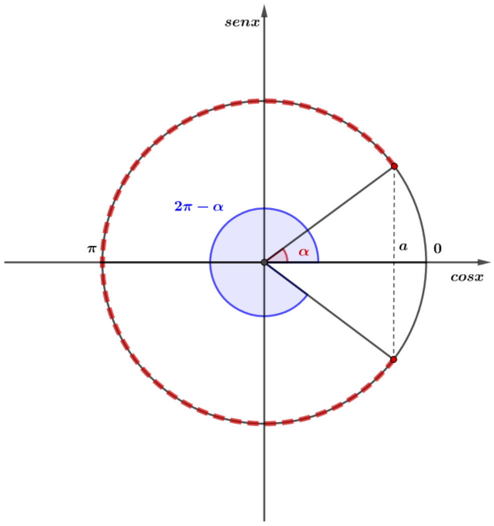
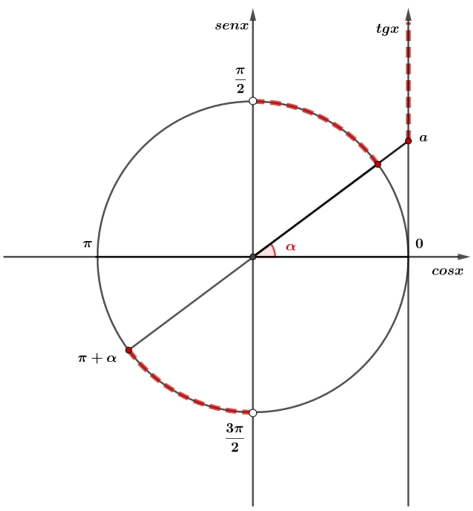
$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC \end{array}}$$

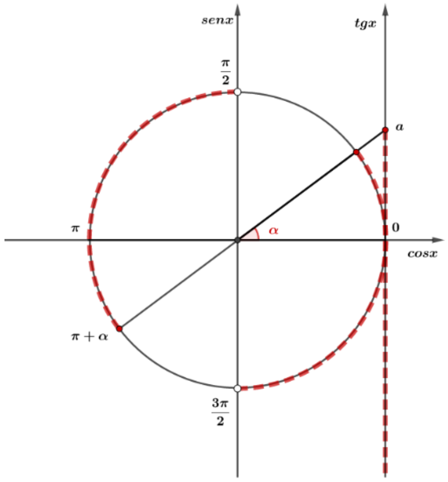
6.3. Equações Trigonométricas

Equações Fundamentais	Solução
$sen\alpha = sen\beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi\ ou\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$cos\alpha = cos\beta$	$\alpha = \pm\beta + 2k\pi$
$tg\alpha = tg\beta$	$\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6.4. Inequações Trigonométricas

Inequações Fundamentais	Ciclo Trigonométrico	Solução
$senx \geq a$		$arcsen(a) + 2k\pi \leq x$ e $x \leq \pi - arcsen(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$senx \leq a$		$0 + 2k\pi \leq x \leq arcsen(a) + 2k\pi$ Ou $\pi - arcsen(a) + 2k\pi \leq x$ $x \leq 2\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$cosx \geq a$		$-\arccos(a) + 2k\pi \leq x$ e $x \leq \arccos(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$cosx \leq a$		$x \geq \arccos(a) + 2k\pi$ e $x \leq 2\pi - \arccos(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$tgx \geq a$		$arctg(a) + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$tgx \leq a$		$\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + arctg(a) + k\pi$

7. Lista de Questões

Lista de Questões Sem Comentários

4. (Espcex/2019)

O número de raízes da equação $2\cos^2 x + 3cosx + 1 = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

5. (Espcex/2018)

O conjunto solução da inequação $2sen^2x - cosx - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$

6. (Espcex/2017)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

7. (Espcex/2015)

Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

8. (Espcex/2015)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

9. Exercício de Fixação

Resolver a equação na variável x

$$x^2sen\alpha - 2xcos\alpha - sen\alpha = 0, \text{com } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

10. Exercício de Fixação

Determine o conjunto dos números reais x tais que $sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

11. Exercício de Fixação

Resolver em $\mathbb{R}$:

a) $sen^2x = 1$

b) $sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1}{sen^2x} = 1 - \frac{cosx}{senx}$

d) $sen(4x) - \cos x = 0$

e) $senx + sen(3x) + sen(4x) + sen(6x) = 0$

f) $\sqrt{3}cosx + senx = 1$

g) $sen(5x) + senx = 2sen(3x)$

h) $senx + cosx = sen(2x) + \cos(2x)$

12. Exercício de Fixação

Resolver em $[0, 2\pi[$:

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

13. Exercício de Fixação

Para que valores de $m, m \in \mathbb{R}$, a equação $m \cdot senx + cosx = m$ tem solução?

14. Exercício de Fixação

Resolver em $[0, 2\pi[$:

$$sen^3x \cdot cosx - senxcos^3x = \frac{1}{4}$$

15. Exercício de Fixação

Resolva as seguintes equações:

a) $\sec^2 x = 2tgx$

b) $(1 + cosx)tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1+senx}{1+cosx} = \frac{1}{2}$

16. Exercício de Fixação

Resolva as seguintes inequações:

a) $|tgx| > \sqrt{3}$

b) $\frac{cosx}{1+cos2x} < 0$

c) $2cosx\left(cosx - \sqrt{8}tgx\right) < 5$

d) $cotgx + \frac{senx}{cosx-2} \geq 0$

e) $\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2 x} \geq 3tgx$

17. Exercício de Fixação

Calcular $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

18. (EsPCEx/2017)

O conjunto solução da inequação $2sen^2x - \cos x - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$.

19. (EsPCEx/2016)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

20. (EsPCEx/2014)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

21. (EsPCEx/2014)

Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a:

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$.

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$.

d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$.

e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

22. (EsPCEx/2009)

O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a $\frac{1}{2}$ é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

23. (EsPCEx/2004)

A quantidade de valores inteiros que a pode assumir para que a equação $\cos x = (a-1)^2$ tenha solução é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

24. (EsPCEx/2004)

Dadas as funções reais $f(x) = \text{sen}\, 2x$ e $g(x) = \frac{1}{2}$ tal que $x \in [0, 2\pi]$. Então, o número de interseções entre os gráficos de f e g é:

a) 6

b) 2

c) 1

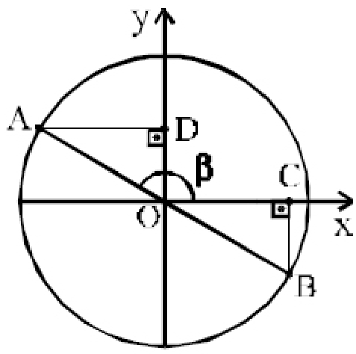
d) 4

e) 8

25. (EsPCEx/2002)
O produto $\cot g\, x \cdot \cos x$ é postivo, portanto, x pertence ao
a) $1°$ ou $2°$ quadrantes.
b) $1°$ ou $4°$ quadrantes.
c) $2°$ ou $3°$ quadrantes.
d) $2°$ ou $4°$ quadrantes.
e) $3°$ ou $4°$ quadrantes.

26. (EsPCEx/2002)
O valor de $\cos x + \operatorname{sen} x$, sabendo que $3 \cdot \operatorname{sen} x + 4 \cdot \cos x = 5$, é
a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{4}{5}$
c) 1
d) $\frac{6}{5}$
e) $\frac{7}{5}$

27. (EsPCEx/2001)
No círculo trigonométrico (raio $= 1$), representado na figura, a medida de β é $150°$ e $\overline{AB}$ representa um diâmetro. O valor do produto das medidas dos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ é



a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. (EsPCEx/2000)
Sendo $\operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{cossec} \alpha$ é
a) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$

b) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
c) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

29. (EsPCEx/2000)
O número de soluções da equação $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \leq x < 2\pi$, é
a) infinito
b) 4
c) 2
d) 1
e) 0

30. (EsPCEx/2000)
Pode-se afirmar que o sistema $\begin{cases} 2x - 1 = 3\text{sen}\,\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$,
a) possui apenas um par ordenado (x, θ) como solução.
b) possui dois pares ordenados (x, θ) como solução.
c) possui três pares ordenados (x, θ) como solução.
d) possui infinitas soluções.
e) não possui solução.

Gabarito

4. d
5. c
6. b
7. b
8. d
9. $\boldsymbol{S = \{cotg\alpha - cossec\alpha; cotg\alpha + cossec\alpha\}}$
10. $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$
11. a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$
    b) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$
    c) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$
    d) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$
    e) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$
    f) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$ ou $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$
    g) $\boldsymbol{x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

h) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

12. $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}}$
13. $\forall \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$
14. $\boldsymbol{S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}}$
15. $\boldsymbol{x = 2k\pi\ ou\ x = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ e\ \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$
16. a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

    b) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$

    c) $\boldsymbol{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

    d) $\boldsymbol{\pi + 2k\pi < x \le \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ 2k\pi < x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

    e) $\boldsymbol{k\pi \le x \le \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \le x \le \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$
17. Demonstração
18. c
19. b
20. d
21. b
22. c
23. c
24. d
25. a
26. e
27. c
28. a
29. b
30. b

Lista de Questões Comentadas

4. (Espcex/2019)

O número de raízes da equação $2\cos^2 x + 3cosx + 1 = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$cosx = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = -1 \; ou -\frac{1}{2}$$

Para $cosx = -1$ e $x \in]0, 2\pi[$:

$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi$$

Para $cosx = -1/2$:

$$cosx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \; ou \; x = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, temos 3 raízes distintas.

Gabarito: "d".

---

5. (Espcex/2018)

O conjunto solução da inequação $2sen^2x - cosx - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$

Comentários

Reescrevendo a inequação, obtemos:

$$2(1 - \cos^2 x) - cosx - 1 \geq 0$$

$$-2\cos^2 x - cosx + 1 \geq 0$$

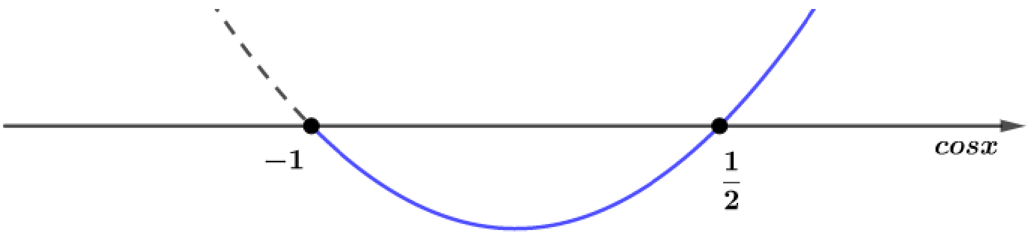
$$2\cos^2 x + cosx - 1 \leq 0$$

Encontrando as raízes:

$$cosx = \frac{(-1 \pm \sqrt{9})}{4} = -1 \; ou \; \frac{1}{2}$$

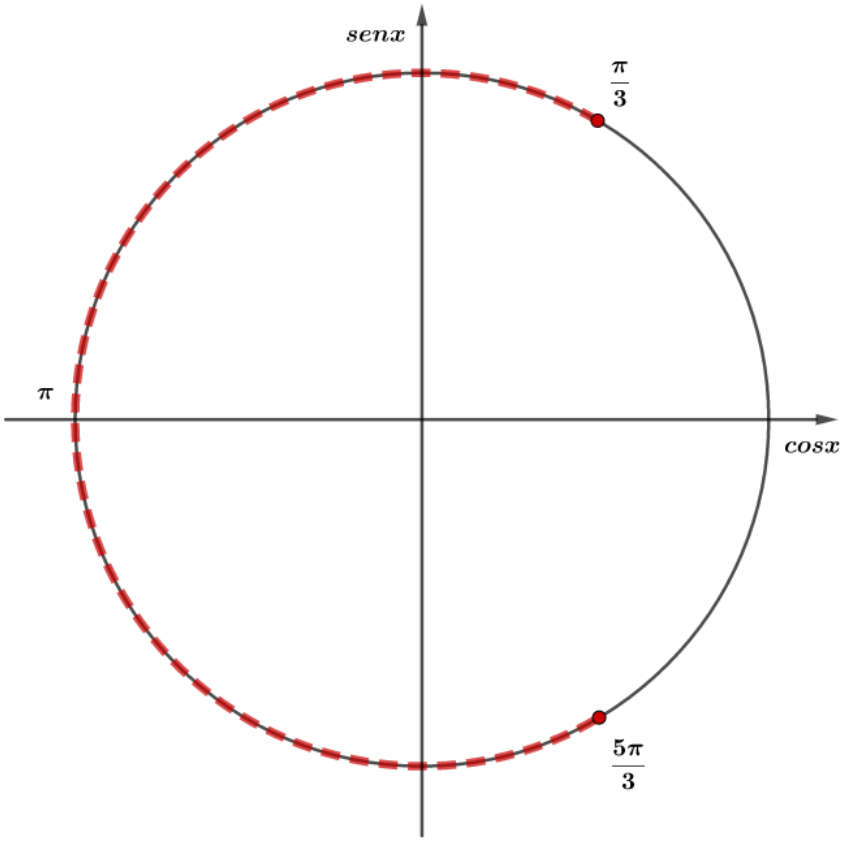
$$2(cosx + 1)\left(cosx - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

Estudando o sinal dessa função, temos:



$$-1 \leq cosx \leq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Assim, podemos ver que:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Queremos as soluções no intervalo $]0,2\pi]$, assim, temos:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

Gabarito: "c".

---

6. (Espcex/2017)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

Comentários

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Encontrando as raízes dessa equação:

$$cosx = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = 1\ ou - \frac{1}{2}$$

Para $x \in [0, 2\pi)$:

$$cosx = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$cosx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}\ ou\ x = \frac{4\pi}{3}$$

Somando as raízes:

$$S = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$$

Gabarito: "b".

---

7. (Espcex/2015)

Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Comentários

Simplificando β usando as propriedades do logaritmo, temos:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} \frac{3}{7}}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{3}{7}} 3$$

$$\beta = \log_{\frac{3}{7}} 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$$

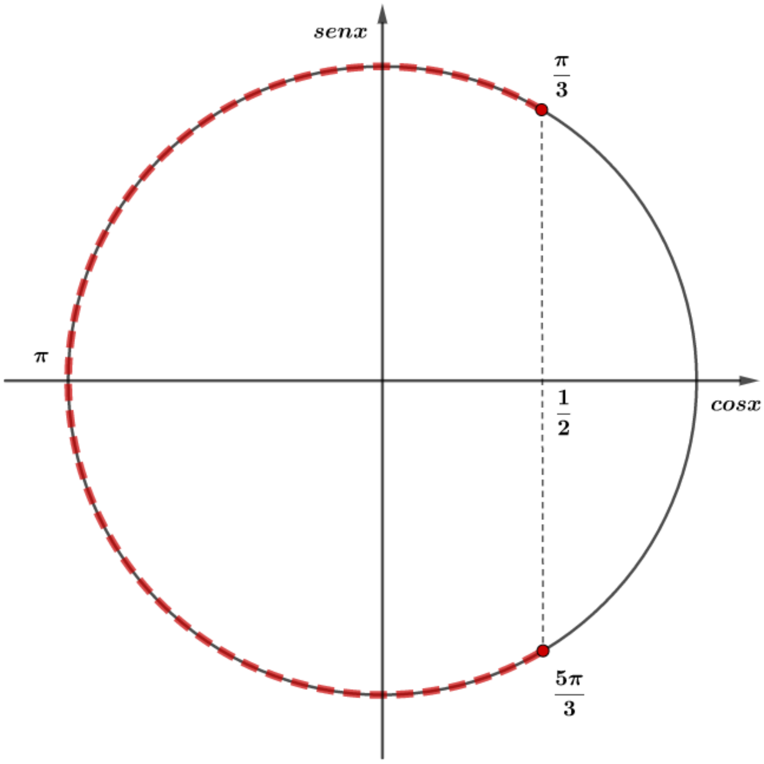
Substituindo na inequação:

$$3^{cosx} \leq 3^{\frac{1}{2}}$$

Como a função exponencial é injetora, temos:

$$cosx \leq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Para $x \in [0,2\pi)$:

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

Gabarito: "b".

---

8. (Espcex/2015)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

Comentários

Vamos fatorar a expressão:

$$2\cos(x)\,(\cos^2(x)-1)-(\cos^2(x)-1)=0$$
$$(2\cos x-1)(\cos^2 x-1)=0$$

As raízes são dadas por:

$$cosx=\frac{1}{2}\;ou\cos x=\pm 1$$

Para $x\in[0,2\pi]$:

$$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\;ou\;x=\frac{5\pi}{3}$$
$$\cos x=1\Rightarrow x=0\;ou\;x=2\pi$$
$$cosx=-1\Rightarrow x=\pi$$

Somando as raízes, temos:

$$S=\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+2\pi+\pi=5\pi$$

Gabarito: “d”.

---

9. Exercício de Fixação

Resolver a equação na variável x

$$x^2sen\alpha-2xcos\alpha-sen\alpha=0,\text{com } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

Comentários

Encontrando as raízes:

$$x=\frac{cos\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}}{sen\alpha}=\frac{cos\alpha\pm 1}{sen\alpha}=cotg\alpha\pm cossec\alpha$$

Portanto, as raízes são dadas por:

$$S=\{cotg\alpha-cossec\alpha;cotg\alpha+cossec\alpha\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=\{cotg\alpha-cossec\alpha;cotg\alpha+cossec\alpha\}}$

---

10. Exercício de Fixação

Determine o conjunto dos números reais x tais que $sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Comentários

Sabemos que $sen(k\pi)=0, k\in\mathbb{Z}$. Então:

$$2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$$
$$2x=\frac{\pi}{3}+k\pi$$
$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

---

11. Exercício de Fixação

Resolver em $\mathbb{R}$:

a) $sen^2x = 1$

b) $sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1}{sen^2x} = 1 - \frac{cosx}{senx}$

d) $sen(4x) - \cos x = 0$

e) $senx + sen(3x) + sen(4x) + sen(6x) = 0$

f) $\sqrt{3}cosx + senx = 1$

g) $sen(5x) + senx = 2sen(3x)$

h) $senx + cosx = sen(2x) + \cos(2x)$

Comentários

a) $sen^2x = 1$

$$senx = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$3x - \frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\frac{1}{sen^2x} = 1 - \frac{cosx}{senx}$

$$cossec^2x = 1 - cotgx$$

Usando a relação fundamental:

$$1 + cotg^2x = 1 - cotgx$$

$$cotg^2 + cotgx = 0$$

$$cotgx(cotgx + 1) = 0$$

Raízes:

$$cotgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$cotgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen(4x) - cosx = 0$

$$sen(4x) = cosx$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = cosx$$

$$\frac{\pi}{2} - 4x = \pm x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x \pm x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

$$5x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

e) $senx + sen(3x) + sen(4x) + sen(6x) = 0$

Vamos transformar as somas dos senos em produto:

$$senx + sen(6x) + sen(3x) + sen(4x) = 0$$

$$2sen\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}\right) + 2sen\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$sen\left(\frac{7x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0$$

Temos as seguintes raízes:

$$\begin{cases} sen\left(\frac{7x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$sen\left(\frac{7x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{7x}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{5x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5x}{2}\right) = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$$

$$\pi - \frac{x}{2} = \pm\frac{5x}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} \pm \frac{5x}{2} = \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \pi - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = \pi - 2k\pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

f) $\sqrt{3}cosx + senx = 1$

Vamos dividir a equação por 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}senx = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)cosx + sen\left(\frac{\pi}{6}\right)senx = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

g) $sen(5x) + senx = 2sen(3x)$

Fazendo a transformação de soma em produto, temos:

$$2sen\left(\frac{6x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x}{2}\right) = 2sen(3x)$$

$$sen(3x)(\cos(2x) - 1) = 0$$

$$sen(3x) = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$\cos(2x) = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

h) $senx + cosx = sen(2x) + \cos(2x)$

Isolando seno e cosseno:

$$senx - sen(2x) = \cos(2x) - cosx$$

Usando a fórmula de Prostaférese:

$$\underbrace{2\,sen\left(\frac{-x}{2}\right)}_{-sen\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = -2sen\left(\frac{3x}{2}\right)sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - sen\left(\frac{3x}{2}\right)\right) = 0$$

Raízes:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - sen\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = sen\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$tg\left(\frac{3x}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

e) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$

f) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$ **ou** $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

g) $\boldsymbol{x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

h) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

---

12. Exercício de Fixação

Resolver em $[0, 2\pi[$:

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comentários

Transformando a soma em produto, temos:

$$2sen\left(\frac{2x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2senxcos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2senx\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$senx=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ou\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Para $x\in[0,2\pi[$:

$$x=\frac{\pi}{6}\ ou\ x=\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}}$

---

13. Exercício de Fixação

Para que valores de $m,m\in\mathbb{R}$, a equação $m\cdot senx+cosx=m$ tem solução?

Comentários

Vamos isolar m:

$$m(1-senx)=cosx$$

$$m=\frac{cosx}{1-senx}$$

Usando as seguintes identidades:

$$\boxed{\boldsymbol{senA=\frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\cos(A)=\frac{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}}$$

$$m=\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}$$

$$m=\frac{\left(1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)-2tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$m=\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$m=\frac{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$m=\frac{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Isolando a tangente:

$$m-mtg\left(\frac{x}{2}\right)=1+tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)(1+m)=m-1$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{m-1}{1+m}$$

Como a função tangente possui imagem no conjunto dos reais, temos que a única restrição é $1+m\neq 0$:

$$1+m\neq 0\Rightarrow m\neq -1$$

Para $m=-1$, temos:

$$-senx+cosx=-1$$

Esse caso possui solução para:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Portanto, $\forall m\in\mathbb{R}$, a equação possui solução.

Gabarito: $\forall \boldsymbol{m}\in\mathbb{R}$

---

14. Exercício de Fixação

Resolver em $[0,2\pi[$:

$$sen^3x\cdot cosx-senxcos^3x=\frac{1}{4}$$

Comentários

Vamos fatorar a expressão:

$$\underbrace{senx \cdot cosx}_{\frac{sen(2x)}{2}}\left(\underbrace{sen^2x - \cos^2 x}_{-\cos(2x)}\right) = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{sen(2x)\cos(2x)}{2} = \frac{1}{4}$$

$$2sen(2x)\cos(2x) = -1$$

$$sen(4x) = -1$$

As raízes são dadas por:

$$4x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Para o intervalo determinado:

$$x = \frac{3\pi}{8} \; ou \; x = \frac{7\pi}{8} \; ou \; x = \frac{11\pi}{8} \; ou \; x = \frac{15\pi}{8}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}}$

---

15. Exercício de Fixação

Resolva as seguintes equações:

a) $\sec^2 x = 2tgx$

b) $(1 + cosx)tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1+senx}{1+cosx} = \frac{1}{2}$

Comentários

a) Vamos usar a relação fundamental $\sec^2 x = 1 + tg^2x$:

$$1 + tg^2x = 2tgx$$

$$tg^2x - 2tgx + 1 = 0$$

$$(tgx - 1)^2 = 0$$

$$tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Escrevendo $cosx$ em função de $tg\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$cosx = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\left(1+\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)tg\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\underbrace{\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}}_{senx}=0$$

$$senx=0$$

$$\Rightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

c) Desenvolvendo a equação:

$$2+2senx=1+cosx$$

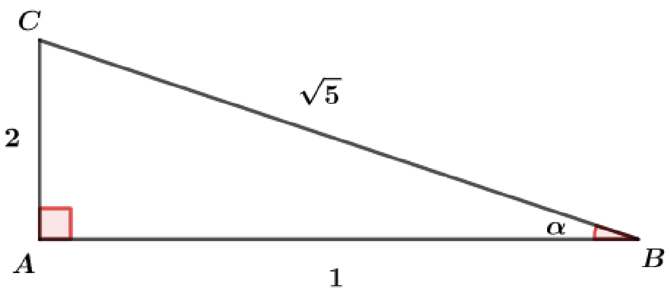
$$2senx-cosx=-1$$

$$cosx-2senx=1$$

Dividindo a equação por $\sqrt{5}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}cosx-\frac{2}{\sqrt{5}}senx=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Vamos usar o seguinte triângulo retângulo:



Assim, podemos escrever:

$$cos\alpha cosx-sen\alpha senx=cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+x)=cos\alpha$$

As raízes são dadas por:

$$\alpha+x=\pm\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$x=-\alpha\pm\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Ou

$$x=-2\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\ e\ \alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{x=2k\pi\ ou\ x=-2\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\ e\ \alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$

16. Exercício de Fixação

Resolva as seguintes inequações:

a) $|tgx| > \sqrt{3}$

b) $\frac{cosx}{1+cos2x} < 0$

c) $2cosx(cosx - \sqrt{8}tgx) < 5$

d) $cotgx + \frac{senx}{cosx-2} \geq 0$

e) $\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2 x} \geq 3tgx$

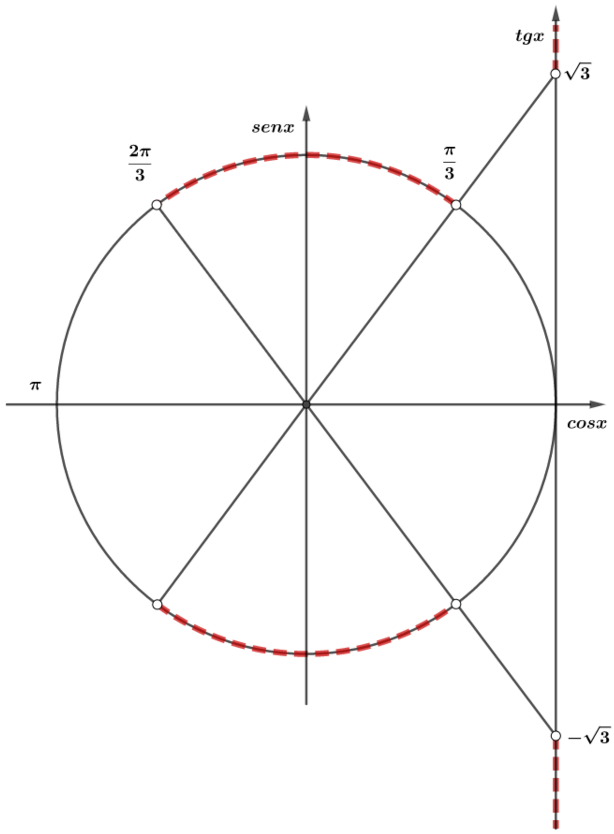
Comentários

a) Sempre que resolver uma inequação trigonométrica, recomendo usar o ciclo trigonométrico para visualizar as raízes do problema:

$$|tgx| > \sqrt{3}$$

$$tgx > \sqrt{3} \; ou \; tgx < -\sqrt{3}$$

Ciclo trigonométrico:



Assim, as raízes são dadas por:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

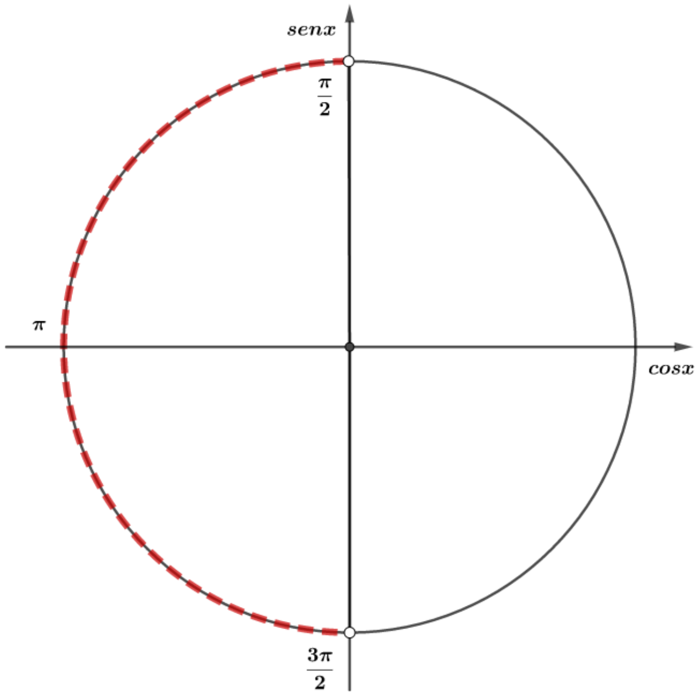
b) Vamos escrever $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$:

$$\frac{cosx}{1+2\cos^2 x-1}<0$$
$$\frac{cosx}{2\cos^2 x}<0$$

Para $cosx \neq 0$:

$$\frac{1}{2cosx}<0$$
$$cosx<0$$

Os valores que pertencem ao terceiro e quarto quadrante satisfazem essa inequação:



$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

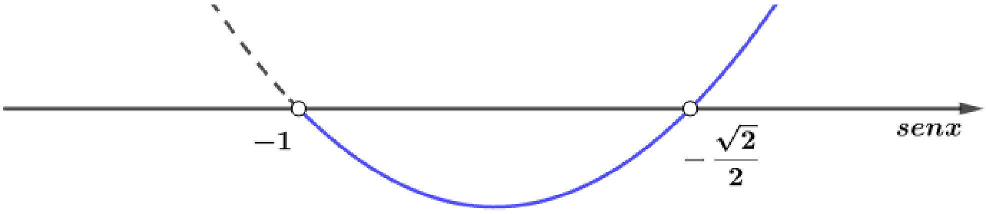
c) $2cosx\left(cosx-\sqrt{8}tgx\right)<5$

$$2\cos^2 x-2\sqrt{8}senx<5$$
$$2(1-sen^2x)-4\sqrt{2}senx-5<0$$
$$-2sen^2x-4\sqrt{2}senx-3<0$$
$$2sen^2x+4\sqrt{2}senx+3>0$$

Encontrando as raízes da inequação:

$$senx=\frac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ou\ \underbrace{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}_{<-1}$$

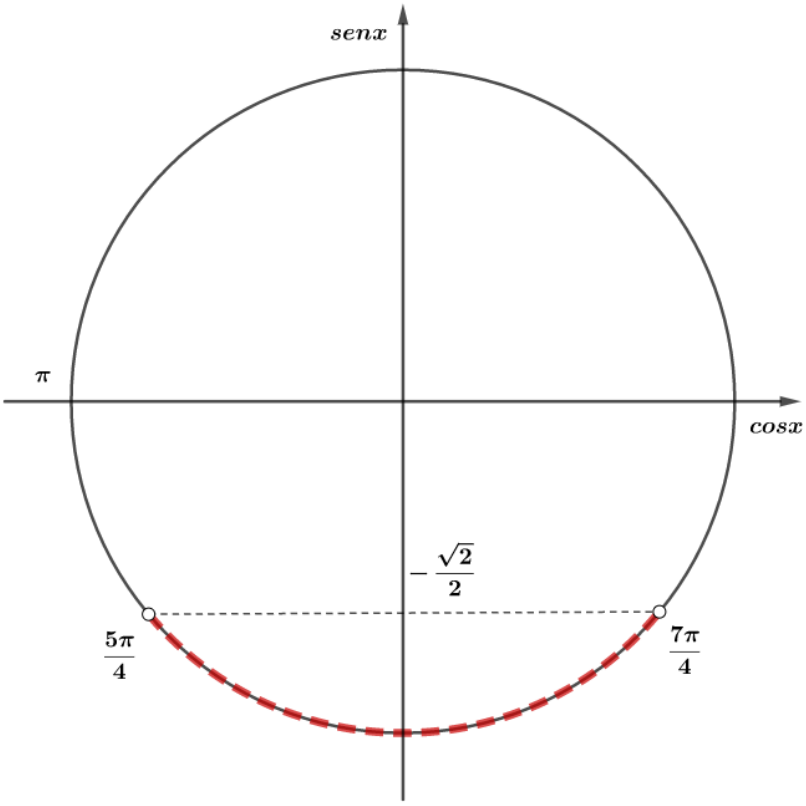
Como $-1\leq senx\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}$, temos:



Assim, devemos ter:

$$-1 < senx < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Portanto, as raízes são dadas por:

$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) Desenvolvendo a inequação, obtemos:

$$cotgx + \frac{senx}{cosx - 2} \geq 0$$

$$\frac{cosx}{senx} + \frac{senx}{cosx - 2} \geq 0$$

$$\frac{cosx(cosx - 2) + sen^2 x}{senx(cosx - 2)} \geq 0$$

$$\frac{\cos^2 x - 2cosx + sen^2 x}{senx(cosx - 2)} \geq 0$$

$$\frac{1-2cosx}{senx(cosx-2)} \geq 0$$

Como $-1 \leq cosx \leq 2$, temos:

$$-3 \leq cosx - 2 \leq 0$$

Assim, o termo $(cosx - 2)$ é sempre negativo.

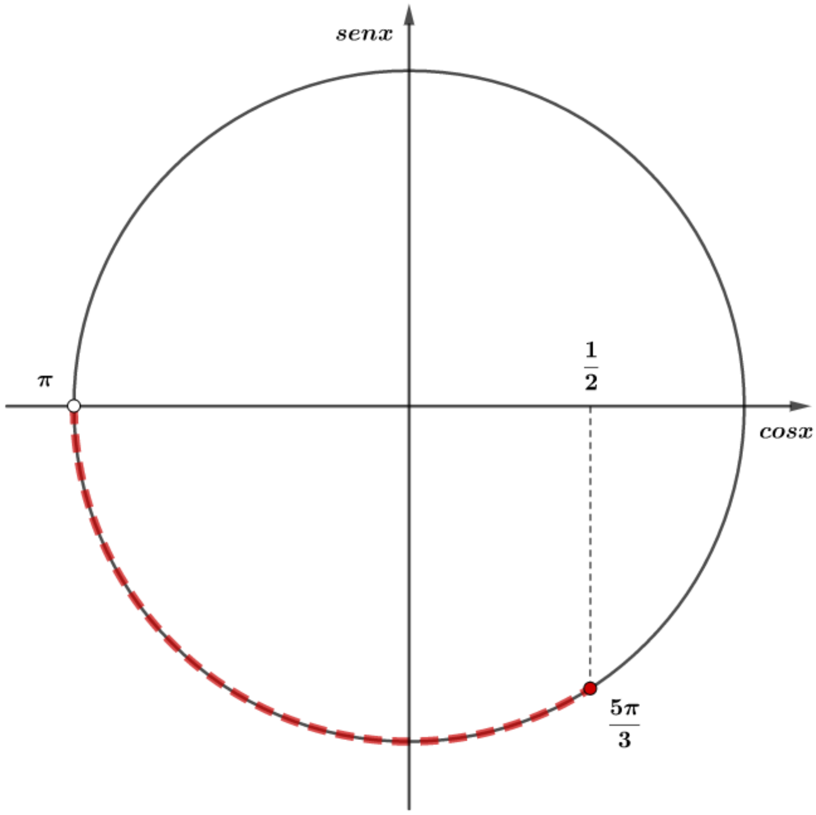
Então, temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{cases} senx < 0 \\ 1 - 2cosx \geq 0 \end{cases} ou \begin{cases} senx > 0 \\ 1 - 2cosx \leq 0 \end{cases}$$

Para cada um dos casos:

$$\begin{cases} senx < 0 \\ 1 - 2cosx \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} senx < 0 \\ cosx \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



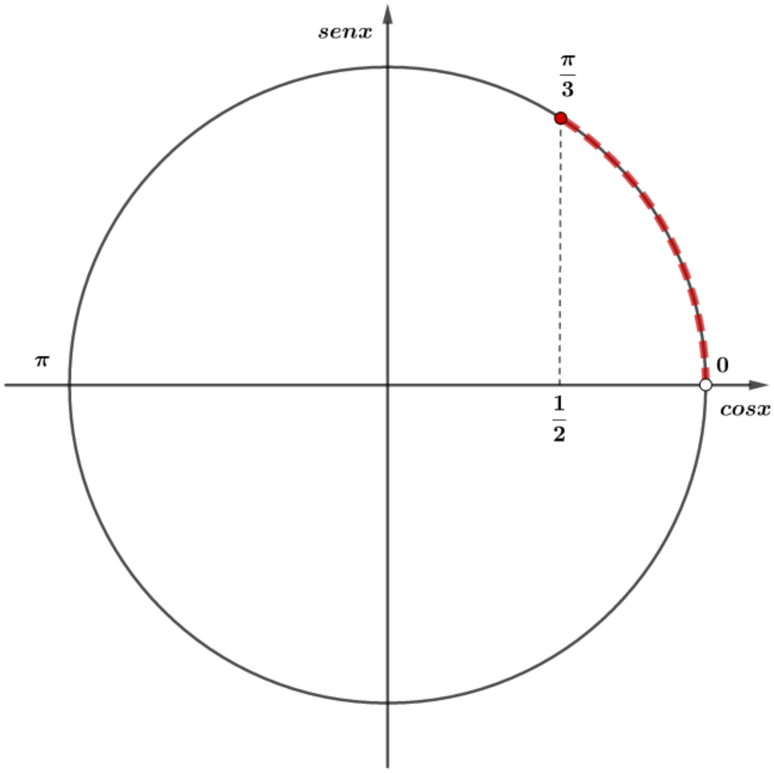
Para esse caso, temos:

$$\pi + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o outro caso:

$$\begin{cases} senx > 0 \\ 1 - 2cosx \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} senx > 0 \\ cosx \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



$$2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e) $\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2 x} \geq 3tgx$

Da condição de existência, temos:

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\cos^2 x \geq 0$, temos:

$$\cos^2(2x) \geq \frac{3senx}{cosx}\cos^2 x$$

$$1 - sen^2(2x) \geq 3senxcosx$$

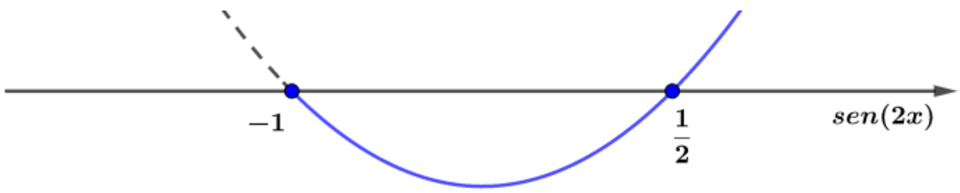
$$1 - sen^2(2x) - \frac{3}{2}sen(2x) \geq 0$$

$$2sen^2(2x) + 3sen(2x) - 2 \leq 0$$

Encontrando as raízes:

$$sen(2x) = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = -2 \; ou \, \frac{1}{2}$$

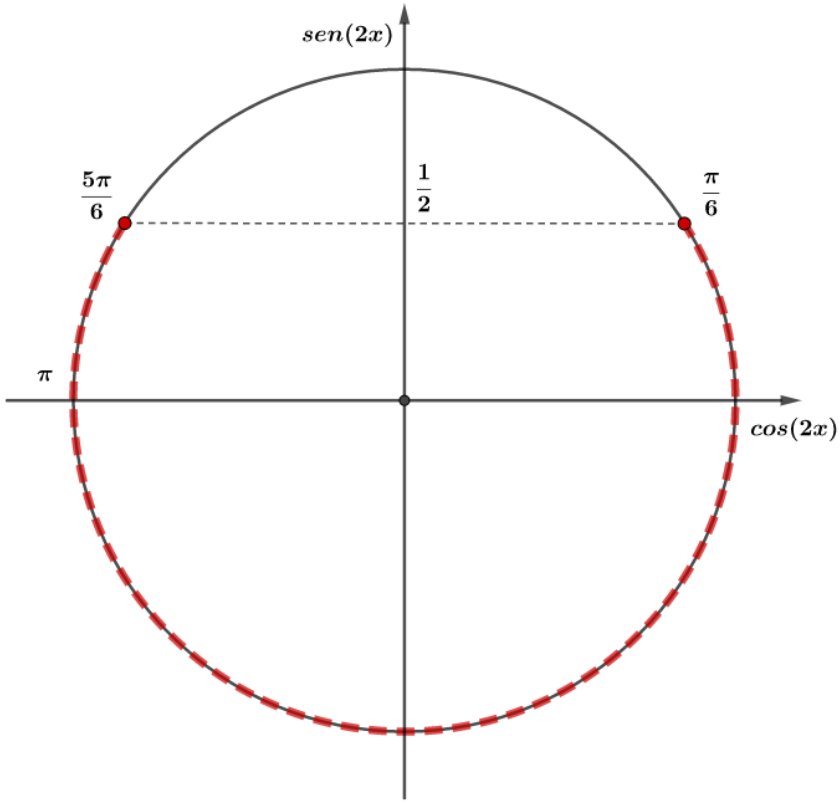
Estudando o sinal:



Assim, temos:

$$-1 \leq sen(2x) \leq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Portanto, as raízes são dadas por:

$$2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq 2\pi + 2k\pi \Rightarrow \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência, temos:

$$k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$

c) $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\pi + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

---

17. Exercício de Fixação

Calcular $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Comentários

$$2 \cdot 18° + 3 \cdot 18° = 90°$$

Usando a propriedade de arco complementar, podemos escrever:

$$sen\left(2 \cdot \frac{\pi}{10}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - 3 \cdot \frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{10}\right)$$

Aplicando as fórmulas de arco duplo e triplo:

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 3$$

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = 4\left(1 - sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) - 3$$

$$4sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 2sen\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 = 0$$

Encontrando as raízes da equação de segundo grau:

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Como 18° pertence ao primeiro quadrante, podemos afirmar:

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Gabarito: Demonstração

---

18. (EsPCEx/2017)

O conjunto solução da inequação $2sen^2 x - \cos x - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$.

Comentários

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$2sen^2 x - \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$$

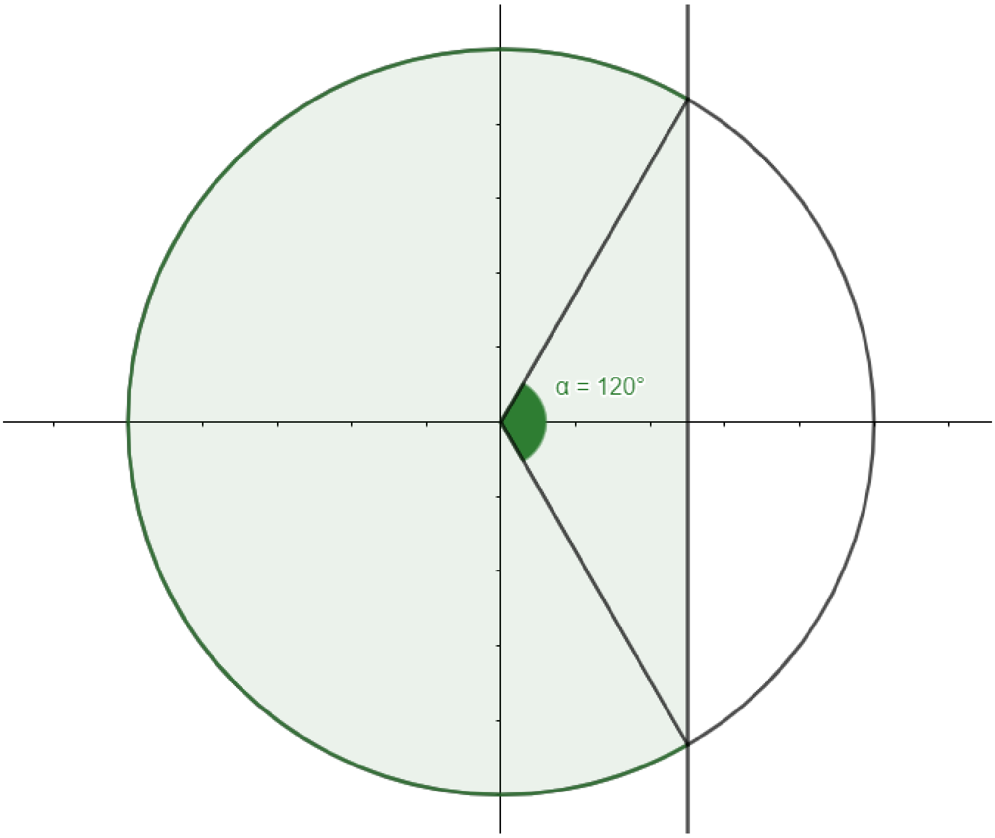
Olhando a expressão no membro direito da última desigualdade como uma quadrática em $\cos x$, calculamos o determinante Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9.$$

As raízes do polinômio $p(y) = 2y^2 + y - 1$ são:

$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y_1 = \frac{-1-3}{2\cdot 2} = -1 \text{ e } y_2 = \frac{-1+3}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Como $a = 2 > 0$, o gráfico de $p(y)$ é uma parábola de concavidade para cima, em forma de U, com raízes -1 e $\frac{1}{2}$. Assim, $2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos x$ está entre -1 e $\frac{1}{2}$, isto é, $\cos x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Na figura abaixo vemos que os valores permitidos são, considerando $x \in]0, 2\pi]$, $S = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.



Gabarito: "c".

---

19. (EsPCEx/2016)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

Comentários

$$\cos(2x) = \cos(x) \Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Conjunto-solução:

$$S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\} \Rightarrow \text{ soma } = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$$

Gabarito: “b”.

---

20. (EsPCEx/2014)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 5π
e) 6π

Comentários

Antes de tentar resolver a equação cúbica, vamos fazer a transformação $y = \cos(x)$. Ficamos com:

$$P(y) = 2y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0$$

O teorema das raízes racionais diz que, se houver raiz racional num polinômio de coeficientes inteiros, e se a fração da raiz estiver em sua forma irredutível, então o denominador divide o coeficiente do termo líder e o numerador divide o termo independente. Assim, suponhamos que exista $\frac{p}{q}$ raiz racional do polinômio acima, $q > 0$, de modo que $\mathrm{mmc}(p, q) = 1$. Então, $p \in \{1, -1\}$ e $q \in \{1,2\}$. Por inspeção, verifica-se que $r = \frac{1}{2}$ é raiz do polinômio (poderíamos ter verificado outra).

Após a divisão polinomial de $P(y)$ por $(y - r) = \left(y - \frac{1}{2}\right)$, ficamos com um fator quadrático, mas que facilmente se fatora usando produtos notáveis:

$$P(y) = \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot (2y^2 - 2) = (2y - 1) \cdot (y^2 - 1) = (2y - 1) \cdot (y - 1) \cdot (y + 1)$$

Dessa maneira, as raízes de P são $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$ e $y = -1$. Lembrando que $y = \cos x$, temos, no intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \ \vee x = 2\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

Logo, a soma das raízes é $\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + 0 + 2\pi + \pi = 5\pi$.

Gabarito: “d”.

---

21. (EsPCEx/2014)

Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a:

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$.
b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$.
d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$.
e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Comentários

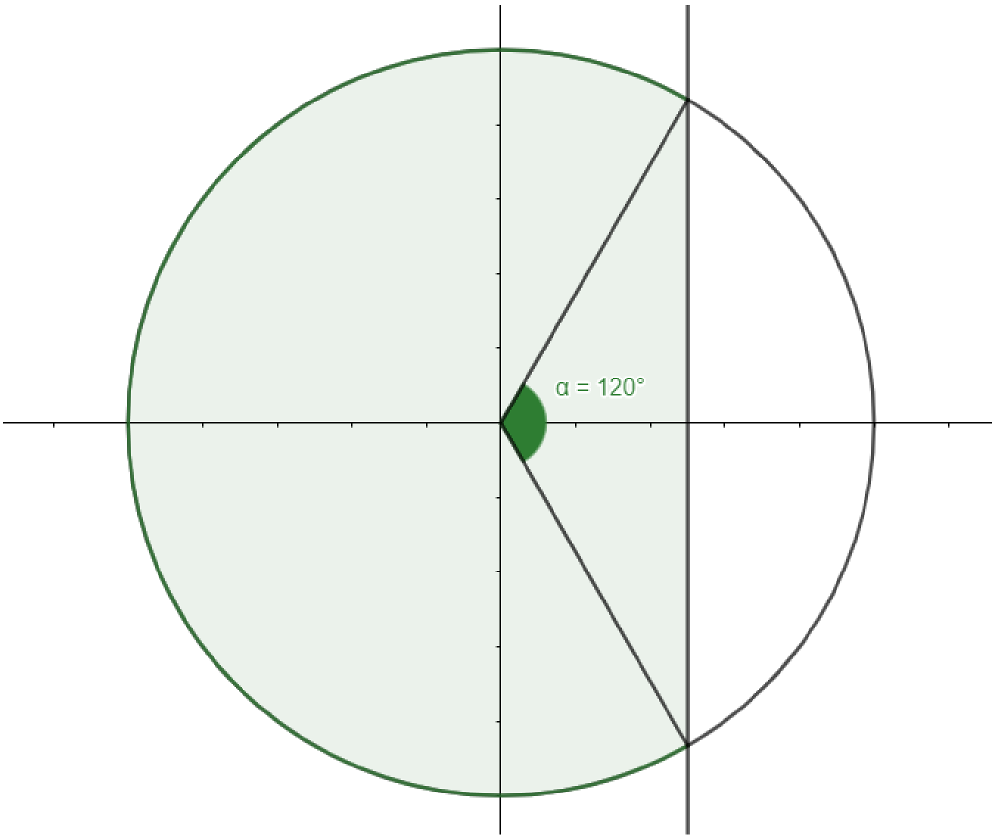
$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7} \Rightarrow 2\beta = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10}\left(\frac{3}{7}\right)} = \log_{\frac{3}{7}} 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2\beta} = 3$$

Dessa forma, temos que:

$$3^{\cos x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta} \Leftrightarrow 3^{2\cos x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{2\beta} = 3^1 \Leftrightarrow 2\cos x \leq 1 \text{ (pois a função } f(y) = 3^y \text{ é crescente)}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2}$$

Na figura a seguir, podemos ver que o conjunto solução desejado é $[60°, 300°] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.



Gabarito: "b".

22. (EsPCEx/2009)

O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a $\frac{1}{2}$ é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Comentários

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $\frac{19\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6}$, as soluções válidas são $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$.

Gabarito: "c".

---

23. (EsPCEx/2004)

A quantidade de valores inteiros que a pode assumir para que a equação $\cos x = (a-1)^2$ tenha solução é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Comentários

Como $\cos x \in [-1,1]$, a equação tem solução se, e somente se, $-1 \leq (a-1)^2 \leq 1$. A primeira desigualdade é verdadeira para todo $a \in \mathbb{R}$. Vamos nos atentar à segunda desigualdade.

$$(a-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |a-1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$$

Os valores inteiros de a são $a = 0, a = 1$ e $a = 2$.

Gabarito: "c".

---

24. (EsPCEx/2004)

Dadas as funções reais $f(x) = \text{sen}\, 2x$ e $g(x) = \frac{1}{2}$ tal que $x \in [0, 2\pi]$. Então, o número de interseções entre os gráficos de f e g é:

a) 6
b) 2
c) 1
d) 4
e) 8

Comentários

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \text{sen}\, 2x = \frac{1}{2} = \text{sen}\frac{\pi}{6}.$$

Temos duas opções: $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$, o que implica que há 4 interseções entre os gráficos de f e g tal que $x \in [0,2\pi]$.

Gabarito: “d”.

---

25. (EsPCEx/2002)

O produto $\operatorname{cotg} x \cdot \cos x$ é postivo, portanto, x pertence ao

a) $1°$ ou $2°$ quadrantes.

b) $1°$ ou $4°$ quadrantes.

c) $2°$ ou $3°$ quadrantes.

d) $2°$ ou $4°$ quadrantes.

e) $3°$ ou $4°$ quadrantes.

Comentários

$$\operatorname{cotg} x \cdot \cos x = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) \cdot \cos x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Logo, como $\cos^2 x \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, o produto é positivo se, e somente se, $\operatorname{sen} x > 0$, o que ocorre nos quadrantes 1 e 2.

Gabarito: “a”.

---

26. (EsPCEx/2002)

O valor de $\cos x + \operatorname{sen} x$, sabendo que $3 \cdot \operatorname{sen} x + 4 \cdot \cos x\ = 5$, é

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) 1

d) $\frac{6}{5}$

e) $\frac{7}{5}$

Comentários

$$3 \cdot \operatorname{sen} x + 4 \cdot \cos x\ = 5$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \cos x\ = 5 - 3 \cdot \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow 16 \cdot \cos^2 x = (5 - 3 \cdot \operatorname{sen} x)^2$$

$$\Leftrightarrow 16 - 16 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 25 - 30 \cdot \operatorname{sen} x + 9 \cdot \operatorname{sen}^2 x$$

$$\Leftrightarrow 0 = 25 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 30 \cdot \operatorname{sen} x + 9 = (5 \cdot \operatorname{sen} x - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$$

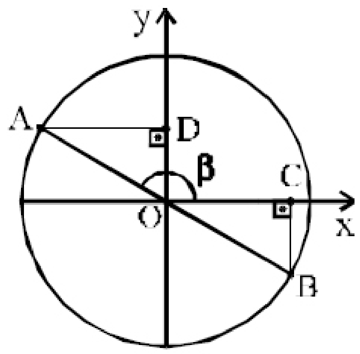
Logo, usando a equação, $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ e $\cos x = \frac{4}{5}$ é a única solução. Então, $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{7}{5}$.

Gabarito: “e”.

---

27. (EsPCEx/2001)

No círculo trigonométrico (raio $= 1$), representado na figura, a medida de β é $150°$ e $\overline{AB}$ representa um diâmetro. O valor do produto das medidas dos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ é



a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comentários

$$\beta = 150° \Rightarrow B\hat{O}C = 180° - \beta = 30° \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OB} \cdot \cos 30° = \cos 30\,° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\beta = 150° \Rightarrow A\hat{O}D = \beta - 90° = 60° \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OA} \cdot \cos 60° = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gabarito: "c".

---

28. (EsPCEx/2000)

Sendo $\operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{cossec} \alpha$ é

a) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$
b) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
c) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

Comentários

Se tivéssemos $\cos \alpha = 0$, teríamos, pela equação, que $\operatorname{sen} \alpha = 0$, e então $1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0^2 + 0^2 = 0$, absurdo. Logo, como $\cos \alpha \neq 0$, podemos dividir a equação por $\cos \alpha$:

$$\operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3 \Leftrightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{3}$$

Usando que $\operatorname{cossec}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$, temos:

$$\operatorname{cossec}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

No intervalo $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e, portanto, $\operatorname{cossec} \alpha < 0$. Logo, $\operatorname{cossec} \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Gabarito: "a".

---

29. (EsPCEx/2000)

O número de soluções da equação $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \le x < 2\pi$, é

a) infinito
b) 4
c) 2
d) 1
e) 0

Comentários

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 1^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = [\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x] + 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x.$$

Usando o dado do enunciado na subexpressão entre colchetes, além da fórmula para o seno do arco duplo, temos:

$$1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot (4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{sen} 2x)^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x = 0$$

Logo, $\operatorname{sen} 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Para $0 \le x < 2\pi$, temos $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ como conjunto solução.

Gabarito: "b"

---

30. (EsPCEx/2000)

Pode-se afirmar que o sistema $\begin{cases} 2x - 1 = 3\operatorname{sen}\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$ e $0 \le \theta < 2\pi$,

a) possui apenas um par ordenado (x, θ) como solução.
b) possui dois pares ordenados (x, θ) como solução.
c) possui três pares ordenados (x, θ) como solução.
d) possui infinitas soluções.
e) não possui solução.

Comentários

Por inspeção, verifica-se que o sistema admite pelo menos uma solução, com $\theta = 90°$ e $x = 2$, por exemplo. Poder-se ia verificar tal fato também da seguinte forma: isolam-se as funções $sen\ \theta$ e $\cos\theta$ e utiliza-se a relação fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 + (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow 13(x-2)\left(x - \frac{14}{13}\right) = 0$$

$x = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1$ e $\cos\theta = 0 \Rightarrow (x, \theta) = (2, 90°)$ é um par válido como solução.

$x = \frac{14}{13} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$ e $\cos\theta = -\frac{12}{13} \Rightarrow (x, \theta) = \left(\frac{14}{13}, \pi - \operatorname{arcsen}\frac{5}{13}\right)$ é um par válido como solução.

Logo, há dois pares ordenados como solução do sistema, considerando $x \in \mathbb{R}$ e $0 \le \theta < 2\pi$.

Gabarito: “b”.

8. Questões de Provas Anteriores

31. (ITA/2020)

Seja a um número real satisfazendo $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Então, a soma de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos x \ \ sen(a + x) = sen\ a$$

é igual a

a) $5\pi + 2a$.

b) $5\pi + a$.

c) 5π.

d) $5\pi - a$.

e) $5\pi - 2a$.

32. (ITA/2019)

Determine todas as soluções da equação $sen^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$.

33. (ITA/2019)

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Determine $\text{sen}\,\hat{B}$, sabendo que

$$\text{sen}(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{4}{5} = \text{sen}(\hat{A} - \hat{C}).$$

34. (ITA/2018)

Com relação à equação $\frac{tg^3 x - 3tgx}{1 - 3tg^2 x} + 1 = 0$, podemos afirmar que

a) no intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ a soma das soluções é igual a 0.

b) no intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ a soma das soluções é maior que 0.

c) a equação admite apenas uma solução real.

d) existe uma única solução no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

e) existem duas soluções no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

35. (ITA/2017)

O número de soluções da equação $(1 + \sec\theta)(1 + cossec\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

36. (ITA/2017)

Determine o conjunto das soluções reais da equação $3cossec^2\left(\frac{x}{2}\right) - tg^2 x = 1$.

37. (ITA/2016)

Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$. Determine todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - sen\, y = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} sen\, x + \sqrt{3}\cos y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

38. (ITA/2015)

Seja n um inteiro positivo tal que $sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine n.

b) Determine $sen\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

39. (ITA/2015)

Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{5}\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{5}$$

e

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{4}{7}\cos^4\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{3}{7}$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) 0

40. (ITA/2014)

Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0,2\pi]$ que satisfazem simultaneamente, a

$$\frac{2sen^2x + senx - 1}{\cos x - 1} < 0$$

e

$$tgx + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3}cotgx\right)cotgx$$

41. (ITA/2013)

Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}(4senxcosx - 1)$.

42. (ITA/2013)

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - sen^8x + 4sen^6x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = 1/2$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e III.

d) apenas II e IV.

e) todas.

43. (ITA/2013)

Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[\ x \ ]0, \frac{\pi}{2}[$ que satisfazem simultaneamente as equações $(tg\alpha + cotg\beta)cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$ e $\sqrt{3}sen(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$.

44. (ITA/2012)

Determine os valores reais de x de modo que $sen(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

45. (ITA/2010)

Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \left(\frac{4\pi}{3}\right), 0 \leq \alpha \leq \beta$, maximizam a soma $sen\alpha + sen\beta$, então α é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{3\pi}{5}$

d) $\frac{5\pi}{8}$

e) $\frac{7\pi}{12}$

46. (ITA/2010)

Considere a equação

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 6tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi[$.

b) Para as soluções encontradas em a), determine $cotgx$.

47. (ITA/2008)

Determine todos os valores de $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tais que a equação (em x) $x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + tg\alpha = 0$ admita apenas raízes reais e simples.

48. (ITA/2008)

A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0,$$

Que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a

a) 2π

b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$

e) $\frac{13}{12}\pi$

49. (ITA/2007)

Seja x um número real no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2}tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\sec(x) \geq 0.$$

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{12}$

50. (ITA/2006)

Determine para quais valores de $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vale a desigualdade

$$\log_{cosx}(4sen^2x - 1) - \log_{cosx}(4 - \sec^2 x) > 2.$$

51. (ITA/2006)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R}: f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então $m + n$ é igual a

a) $\frac{2\pi}{15}$

b) $\frac{\pi}{15}$

c) $-\frac{\pi}{30}$

d) $-\frac{\pi}{15}$

e) $-\frac{2\pi}{15}$

52. (ITA/2006)

O conjunto solução de $(tg^2x-1)(1-cotg^2x)=4, x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, é

a) $\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{k\pi}{4}\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{k\pi}{4}\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{k\pi}{4}\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{\left(\frac{\pi}{8}\right)+\left(\frac{k\pi}{4}\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{\left(\frac{\pi}{12}\right)+\left(\frac{k\pi}{4}\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$

53. (ITA/2005)

O intervalo $I\subset\mathbb{R}$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan\left[\frac{1+x}{2}\right]+\arctan\left[\frac{1-x}{2}\right]\geq\frac{\pi}{6}$$

É

a) $[-1,4]$

b) $[-3,1]$

c) $[-2,3]$

d) $[0,5]$

e) $[4,6]$

54. (ITA/2005)

Obtenha todos os pares (x,y), com $x,y\in[0,2\pi]$, tais que

$$sen(x+y)+sen(x-y)=\frac{1}{2}$$
$$senx+cosy=1$$

55. (ITA/2004)

O conjunto de todos os valores de $\alpha, \alpha\in\,]-\pi/2,\pi/2[$, tais que as soluções da equação (em x)

$x^4 - (\sqrt[4]{48})x^2 + tg\alpha = 0$ são todas reais, é

a) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$

b) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

c) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

d) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$

56. (ITA/2004)

Determine os valores reais do parâmetro a para os quais existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$.

57. (ITA/2003)

Encontre todos os valores de $a \in]-\pi, 2, \pi/2[$ para os quais a equação na variável real x, $arctg\left[\sqrt{2} - 1 + \left(\frac{e^x}{2}\right)\right] + arctg\left[\sqrt{2} - 1 - \left(\frac{e^x}{2}\right)\right] = a$, admite solução.

58. (ITA/2000)

Para x no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o conjunto de todas as soluções da inequação

$$sen(2x) - sen\left[3x + \left(\frac{\pi}{2}\right)\right] > 0$$

É o intervalo definido por

a) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

59. (ITA/2000)

Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, o cosseno de x é igual a

a) $\sqrt{3}/5$

b) $2/7$

c) $5/13$

d) $15/26$

e) $13/49$

60. (ITA/1998)

A soma das raízes da equação $\sqrt{3}tgx - \sqrt{3}sen(2x) + \cos(2x) = 0$, que pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) $17\pi/4$

b) $16\pi/3$

c) $15\pi/4$

d) $14\pi/3$

e) $13\pi/4$

61. (ITA/1997)

Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação

$\sec\left\{arctg\left(\frac{1}{1+e^x}\right) - arctg(1-e^x)\right\} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Então

a) $S = \emptyset$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S \subset [1, 2]$

d) $S \subset [-1, 1]$

e) $S = [-1, 2[$

62. (IME/2020)

Todos os arcos entre 0 e 2π radianos que satisfazem a desigualdade

$$senx - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{12}$

c) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{12}$

63. (IME/2019)

Seja um triângulo ABC com lados a, b e c opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Os lados a, b e c formam uma progressão aritmética nesta ordem. Determine a relação correta entre as funções trigonométricas dos ângulos dos vértices desse triângulo.

a) $2sen(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})$

b) $2cos(\hat{A}+\hat{C}) = cos(\hat{A}) + cos(\hat{C})$

c) $2sen(\hat{A}-\hat{C}) = sen(\hat{A}) - sen(\hat{C})$

d) $2cos(\hat{A}-\hat{C}) = cos(\hat{A}) - cos(\hat{C})$

e) $2cos(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})$

64. (IME/2019)

O número de soluções reais da equação abaixo é:

$$(\cos x)^{2018} = 2 - 2^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

65. (IME/2019)

Determine todas as soluções da equação

$$4sen^2(7x)\cdot\cos(2x) + 2sen(9x) + 8sen^2(x) + 5\cos(2x) + 2sen(5x) = 4$$

no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

66. (IME/2018)

A menor raiz real positiva da equação $arctg\left(x\cdot tg\left(arcsen\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) = \frac{2\pi}{x+2}$ encontra-se no intervalo:

a) $(0, 1]$

b) $(1, 2]$

c) $(2, 3]$

d) $(3, 4]$

e) $(4, 5]$

67. (IME/2018)

Sabendo que $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ e que x satisfaz a equação abaixo

$$\frac{3 - cosx(4cosx + senx)}{10sen^2x - 8senxcosx} = \frac{1}{2}$$

Determine os possíveis valores de x.

68. (IME/2016)

Determine o conjunto solução da equação:

$$(sen\ x)\left(1 + tgx\ tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 4 - cotgx$$

69. (IME/2015)

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \ln \frac{8 + 3senx - sen3x}{8 - 4senx + 2sen2xcosx}$$

Marque a opção verdadeira:

a) f não tem raízes reais

b) f é uma função ímpar

c) f é uma função par

d) $|f(x)| \leq 1$

e) f é sobrejetora

70. (IME/2015)

O número de soluções da equação $\cos(8x) = sen(2x) + tg^2(x) + cotg^2(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

e) 8

71. (IME/2014)

Resolva a equação $(\log_{\cos x} sen^2 x) \cdot (\log_{\cos^2 x} sen\, x) = 4$.

72. (IME/2012)

Os ângulos de um triângulo obtusângulo são $105°, \alpha$ e β. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$ (real), determine:

a) as raízes da equação $3secx + m\left(\sqrt{3}cosx - 3senx\right) = 3cosx + \sqrt{3}senx$, em função de m;

b) o valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

73. (IME/2011)

O valor de x que satisfaz a equação $sen\left(arccotg(1 + x)\right) = \cos\left(arctg(x)\right)$:

a) $\frac{3}{2}$

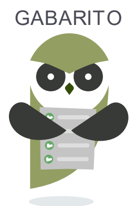
b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) $-\frac{3}{2}$

9. Gabarito



31. e
32. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + k\pi \; ou \; x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$
33. $\boldsymbol{sen\,\hat{B} = \frac{44}{125}}$
34. b
35. a

36. $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi; -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$
37. $(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ou $(x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$
38. a) $n = 6$ b) $sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$
39. b
40. $S = S_1 \cap S_2 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$
41. $D = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$
42. e
43. $S = \left\{\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right); \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$
44. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
45. b
46. a) $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\}$ b) $cotg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}; cotg\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}; cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
47. $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$
48. e
49. d
50. $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$
51. e
52. d
53. c
54. $(x, y) \in \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right)\right\}$
55. d
56. $a \leq \sqrt{2}$
57. $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$
58. a
59. c
60. b
61. d
62. c
63. a
64. d
65. $S = \left\{\frac{7\pi}{4}; \frac{67\pi}{42}; \frac{71\pi}{42}; \frac{79\pi}{42}; \frac{83\pi}{42}\right\}$
66. d
67. $x = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$
68. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ } ou \text{ } x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
69. b
70. c
71. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
72. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = arctg(m) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $m = 1$

73. d

10. Questões de Provas Anteriores Resolvidas e Comentadas

31. (ITA/2020)

Seja a um número real satisfazendo $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Então, a soma de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos x \ sen(a + x) = sen\ a$$

é igual a

a) $5\pi + 2a$.

b) $5\pi + a$.

c) 5π.

d) $5\pi - a$.

e) $5\pi - 2a$.

Comentários

Reescrevendo a equação, obtemos:

$$\cos x \ sen(a + x) = sen\ a$$

$$\cos x\,(sena \cos x + senx \cos a) = sen\ a$$

$$sena \cos^2 x + senx \cos x \cos a = sen\ a$$

Note que

$$sen\ 2x = 2senx \cos x \Rightarrow senx \cos x = \frac{sen\ 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Substituindo na equação:

$$sena\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) + \left(\frac{sen\ 2x}{2}\right)\cos a = sen\ a$$

$$\frac{sen\ a}{2} + \frac{sen\ a \cos 2x}{2} + \frac{sen\ 2x \cos a}{2} = sen\ a$$

$$\frac{sen\ a \cos 2x + sen\ 2x \cos a}{2} = \frac{sen\ a}{2}$$

$$sen(a + 2x) = sen\, a$$

Assim, temos as seguintes soluções:

$$a + 2x = a + 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$a + 2x = \pi - a + 2k\pi \Rightarrow 2x = \pi - 2a + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o intervalo $x \in [0, 2\pi]$ e lembrando que $a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - a > 0$, as soluções são:

$$x = k\pi \Rightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - a + k\pi \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} - a, \frac{3\pi}{2} - a\right\}$$

Somando-se as soluções:

$$S = 0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{2} - a + \frac{3\pi}{2} - a = 5\pi - 2a$$

Gabarito: "e".

---

32. (ITA/2019)

Determine todas as soluções da equação $sen^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$.

Comentários

$$sen^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$$

Para resolver essa questão, podemos usar o seguinte produto notável

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Assim, temos

$$(sen^2 x + \cos^2 x)^3 = sen^6 x + 3sen^4 x \cos^2 x + 3sen^2 x \cos^4 x + \cos^6 x$$

$$\underbrace{(sen^2 x + \cos^2 x)^3}_{1} = \underbrace{sen^6 x + \cos^6 x}_{\frac{7}{12}} + 3sen^2 x\, cos^2 x \underbrace{(sen^2 x + \cos^2 x)}_{1}$$

$$1 = \frac{7}{12} + 3sen^2 x(1 - sen^2 x)$$

$$1 - \frac{7}{12} - 3sen^2 x + 3sen^4 x = 0$$

$$3sen^4 x - 3sen^2 x + \frac{5}{12} = 0$$

Encontrando as raízes:

$$sen^2 x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{5}{12}}}{6} = \frac{3 \pm 2}{6} = \frac{1}{6}\ ou\ \frac{5}{6}$$

$$sen^2x = \frac{1}{6} \Rightarrow senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$sen^2x = \frac{5}{6} \Rightarrow senx = \pm\frac{\sqrt{30}}{6} \Rightarrow x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, as soluções são:

$$\boxed{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + k\pi \text{ } ou \text{ } x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + k\pi \text{ } ou \text{ } x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}}$

---

33. (ITA/2019)

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Determine sen $\hat{B}$, sabendo que

$$\text{sen}(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{4}{5} = \text{sen}(\hat{A} - \hat{C}).$$

Comentários

Se $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ são os ângulos internos de um triângulo, temos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$. Logo:

$$\text{sen}(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}(\pi - \hat{C}) = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\hat{C} = \frac{4}{5}}$$

Como $\hat{C}$ é um ângulo interno do triângulo e sen $\hat{C} = \frac{4}{5}$, podemos ter:

$$\cos\hat{C} = \frac{3}{5} \text{ ou } \cos\hat{C} = -\frac{3}{5}$$

O cosseno assume um valor negativo apenas se o ângulo for obtuso, assim, $\cos\hat{C} < 0$ somente se ele for o maior ângulo do triângulo. Vamos analisar.

Se $\hat{C} > \hat{A}$, temos $\hat{A} - \hat{C} < 0$ e, assim, $sen(\hat{A} - \hat{C}) < 0$, o que é um absurdo, pois, pela relação dada no enunciado:

$$sen(\hat{A} - \hat{C}) = \frac{4}{5}$$

Assim, $\hat{C} < \hat{A}$ e, consequentemente, $\cos\hat{C} > 0$. Logo,

$$\boxed{\cos\hat{C} = \frac{3}{5}}$$

Para $\cos\hat{C} = 3/5$, temos:

$$sen(\hat{A} - \hat{C}) = \frac{4}{5} \Rightarrow sen\hat{A}\cos\hat{C} - sen\hat{C}\cos\hat{A} = \frac{4}{5}$$

$$sen\hat{A}\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cos\hat{A} = \frac{4}{5} \Rightarrow 3sen\hat{A} - 4\cos\hat{A} = 4$$

Fazendo $t = tg\left(\frac{A}{2}\right)$ e usando as seguintes identidades

$$sen\hat{A} = \frac{2t}{1+t^2} \text{ e } \cos \hat{A} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Temos:

$$3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) - 4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 4$$

$$6t - 4 + 4t^2 = 4 + 4t^2$$

$$6t = 8$$

$$t = \frac{4}{3} \Rightarrow tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

Assim, podemos calcular o valor de tgA:

$$tg\hat{A} = \frac{2tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{2\left(\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{24}{7} = \frac{sen\hat{A}}{\cos \hat{A}}$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$hipotenusa^2 = 24^2 + 7^2 \Rightarrow hipotenusa = \sqrt{576 + 49} = 25$$

Como $0 < A < \pi$, temos:

$$\boxed{sen\hat{A} = \frac{24}{25}} \text{ e } \boxed{\cos \hat{A} = -\frac{7}{25}}$$

Usando os dados encontrados, vamos calcular $sen\hat{B}$:

$$sen\ \hat{B} = sen(\pi - \hat{B}) = sen(\hat{A} + \hat{C}) = sen\hat{A}\cos \hat{C} + sen\hat{C}\cos \hat{A}$$

$$sen\ \hat{B} = \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) = \frac{72 - 28}{125} = \frac{44}{125}$$

$$\therefore \boxed{sen\ \hat{B} = \frac{44}{125}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{sen\ \hat{B} = \frac{44}{125}}$

---

34. (ITA/2018)

Com relação à equação $\frac{tg^3x - 3tgx}{1 - 3tg^2x} + 1 = 0$, podemos afirmar que

a) no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.

b) no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.

c) a equação admite apenas uma solução real.

d) existe uma única solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

e) existem duas soluções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

Comentários

Vamos substituir $tgx = y$ para obter a equação:

$$\frac{y^3 - 3y}{1 - 3y^2} + 1 = 0$$

Simplificando:

$$\frac{y^3 - 3y + 1 - 3y^2}{1 - 3y^2} = 0$$

$$\Rightarrow y^3 - 3y^2 - 3y + 1 = 0$$

Fatorando a expressão, obtemos:

$$(y^3 + 1) - 3y(y + 1)$$

$$(y + 1)(y^2 - y + 1 - 3y)$$

$$\Rightarrow (y + 1)(y^2 - 4y + 1) = 0$$

Encontrando as raízes:

Para $y + 1 = 0$:

$$y = -1 \Rightarrow tgx = -1$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $y^2 - 4y + 1 = 0$:

$$y = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$tgx = 2 \pm \sqrt{3}$$

Para esses valores de tangente, temos:

$$x = arctg\left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = arctg\left(2 + \sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

*À primeira vista, esses valores de tangente podem não ser claros. Mas com a prática de vários exercícios, você saberia que $tg(45° - 30°) = 2 - \sqrt{3}$ e $tg(45° + 30°) = 2 + \sqrt{3}$.

Analisando as alternativas, vemos que as raízes estão compreendidas entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Então, temos:

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{12}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_3 = \frac{5\pi}{12}$$

Se somarmos as raízes, encontramos:

$$S = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} > 0$$

Portanto, o gabarito é a letra b.

Gabarito: “b”.

---

35. (ITA/2017)

O número de soluções da equação $(1 + \sec\theta)(1 + cossec\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Vamos analisar a condição de existência da equação:

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} \Rightarrow \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$cossec\theta = \frac{1}{sen\theta} \Rightarrow \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Nessa questão, devemos analisar os dois casos possíveis:

$$(1 + sec\theta)(1 + cossec\theta) = 0$$

$$1 + sec\theta = 0 \ \ (I)$$

Ou

$$1 + cossec\theta = 0 \ \ (II)$$

(I):

$$1 + sec\theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{cos\theta} = -1$$

$$cos\theta = -1$$

$$\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in [-\pi, \pi]$, temos:

$$\Rightarrow \theta = -\pi \text{ ou } \theta = \pi$$

(II):

$$1 + cossec\theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{sen\theta} = -1$$

$$sen\theta = -1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Fazendo a intersecção da solução com a condição de existência do problema, temos:

$$\theta = \pm\pi \text{ não convém, pois } \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ não convém, pois } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Portanto, a solução é o conjunto vazio:

$$S = \emptyset$$

Gabarito: "a".

---

36. (ITA/2017)

Determine o conjunto das soluções reais da equação $3cossec^2\left(\frac{x}{2}\right) - tg^2x = 1$.

Comentários

Vamos, inicialmente, simplificar a equação:

$$3cossec^2\left(\frac{x}{2}\right) - tg^2x = 1$$

$$3cossec^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + tg^2x$$

Usando a identidade $1 + tg^2x = \sec^2 x$, temos:

$$\frac{3}{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sec^2 x$$

$$\frac{3}{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Vamos igualar os ângulos. Sabendo que o cosseno do arco metade é dado por $cosx = 1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$, temos:

$$cosx = 1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - cosx}{2}$$

Substituindo a identidade acima na equação, obtemos:

$$\frac{3}{\frac{1 - cosx}{2}} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$6\cos^2 x = 1 - cosx$$

$$6\cos^2 x + cosx - 1 = 0$$

$$cosx = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = -\frac{1}{2} \; ou \; \frac{1}{3}$$

Para $cosx = -1/2$:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $cosx = 1/3$:

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi; -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi; -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}}$

---

37. (ITA/2016)

Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$. Determine todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - sen\, y = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\, x + \sqrt{3}\cos y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Comentários

Se $x, y \in [0, \pi]$, temos $0 < senx < 1$ e $0 < seny < 1$.

Isolando $senx$ e $cosx$:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = sen\, y + \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\, x = -\sqrt{3}\cos y - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Elevando as equações ao quadrado e somando, temos:

$$2\left(\underbrace{\cos^2 x + sen^2 x}_{1}\right) = \left(sen^2 y + seny + \frac{1}{4}\right) + \left(3\cos^2 y + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{4}\right)$$

$$2 = \underbrace{sen^2 y + 3\cos^2 y}_{1+2\cos^2 y} + seny + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{2}$$

$$2 = 1 + 2\cos^2 y + seny + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{2}$$

$$seny = \frac{1}{2} - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy$$

*Sempre que elevamos uma equação trigonométrica ao quadrado, devemos verificar se as raízes satisfazem ao problema.

Elevando a equação ao quadrado:

$$sen^2 y = \left(\frac{1}{2} - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy\right)^2$$

$$1 - \cos^2 y = \frac{1}{4} + 4\cos^4 y + 3\cos^2 y - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy + 4\sqrt{3}\cos^3 y$$

$$4\cos^4 y + 4\sqrt{3}\cos^3 y + 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy - \frac{3}{4} = 0$$

$$16\cos^4 y + 16\sqrt{3}\cos^3 y + 8\cos^2 y - 4\sqrt{3}cosy - 3 = 0$$

Substituindo $a = \cos y$, temos:

$$16a^4 + 16\sqrt{3}a^3 + 8a^2 - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

Nesse momento, podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini para simplificar a equação. Mas, podemos, também, usar a fatoração. Perceba os termos coloridos:

$$16a^4 + 16\sqrt{3}a^3 + \underbrace{8a^2}_{12a^2 - 4a^2} - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

$$16a^4 + +16\sqrt{3}a^3 + 12a^2 - 4a^2 - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

Podemos fatorar:

$$4a^2(4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3) - (4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3) = 0$$

$$(4a^2 - 1)(4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3) = 0$$

Com isso, basta resolver as duas equações quadráticas:

$$4a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

$$4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ (raiz\ dupla)$$

Agora, devemos testar os valores para encontrar x e y.

Para $a = 1/2$:

$$cosy = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2}sen\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$senx = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Mas $senx > 0$, então, **não convém**.

Para $a = -1/2$:

$$cosy = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt{2}sen\,x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2}sen\,x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$senx = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} > 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}\ ou\ x = \frac{11\pi}{12}$$

Para $x = \frac{\pi}{12}$:

$$cosx = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$seny = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cosy = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = sen\,y + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\,x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow OK!$$

Logo, o par $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{2\pi}{3}\right)$ é solução do sistema.

Para $x = \frac{11\pi}{12}$:

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \neq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Como a primeira equação não foi satisfeita, $x = \frac{11\pi}{12}$ não é solução do sistema.

Para $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$cosy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{5\pi}{6}$$

$$\sqrt{2}sen\,x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2}senx = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\ ou\ x = \frac{3\pi}{4}$$

Testando os valores:

Para $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = sen\ y + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{cases}\right. \Rightarrow OK!$$

Portanto, $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{5\pi}{6}$ é solução.

Para $x = \frac{3\pi}{4}$:

$$\sqrt{2}\cos x = sen\ y + \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Não convém, devido à primeira equação.

Dessa forma, temos apenas dois pares ordenados que satisfazem ao sistema:

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right)\ ou\ (x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right)\ ou\ (x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)}$

---

38. (ITA/2015)

Seja n um inteiro positivo tal que $sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine n.

b) Determine $sen\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Comentários

a) Vamos analisar o valor do seno:

$$sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

Sendo $n \in \mathbb{Z}_+$, temos $\frac{\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$.

Podemos usar a fórmula $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ e tentar encontrar um número que é mais fácil de ser analisado. Calculando o valor do cosseno:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1 - 2\left[\frac{(2-\sqrt{3})}{4}\right] = \frac{4-4+2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, o valor de n é:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow n = 6$$

O número $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ já caiu várias vezes nas provas do ITA. Vimos na teoria que esse número resulta de $sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Poderíamos escrever diretamente:

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Rightarrow n = 6$$

b) Vamos usar a fórmula $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2}}$$

Encontrando o valor de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - sen^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{8}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Substituindo esse valor na equação de $sen\left(\frac{\pi}{24}\right)$:

$$sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$$

Gabarito: a) $n = 6$ b) $sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$

---

39. (ITA/2015)

Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{5}\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{5}$$

e

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{4}{7}\cos^4\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{3}{7}$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) 0

Comentários

Vamos resolver cada equação separadamente:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{5}\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{5}$$

Fazendo $x = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

Raízes:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8} = 1 \; ou \, \frac{1}{4}$$

Encontrando os valores de α:

I) $x = 1$:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in]0, 2\pi[$, para esses valores de α, não temos solução, pois 0 e 2π não pertencem a esse intervalo.

II) $x = 1/4$:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $\alpha \in]0,2\pi[$:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} \; ou \; \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

Encontramos os valores possíveis de α. Vamos resolver a outra equação:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{4}{7}\cos^4\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{3}{7}$$

Fazendo $y = \cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)$:

$$7y = 4y^2 + 3$$
$$4y^2 - 7y + 3 = 0$$

Raízes:

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{8} = 1 \; ou \, \frac{3}{4}$$

Encontrando os valores de β:

III) $y = 1$:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{\beta}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\beta = 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\beta \in]0, 2\pi[$, não temos solução para esse caso.

IV) $y = 3/4$:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\beta}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\beta = \pm\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\beta \in]0, 2\pi[\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

Com os valores de α e β, vamos calcular os valores de $\cos(\alpha + \beta)$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, o menor valor é:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: “b”.

---

40. (ITA/2014)

Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0,2\pi]$ que satisfazem simultaneamente, a

$$\frac{2sen^2x + senx - 1}{\cos x - 1} < 0$$

e

$$tgx + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}cotgx)cotgx$$

Comentários

Vamos resolver cada inequação separadamente:

$$\frac{2sen^2x + senx - 1}{\cos x - 1} < 0$$

Nessa inequação, temos duas funções:

$$f(x) = 2sen^2x + senx - 1$$

$$g(x) = cosx - 1$$

Como condição de existência, temos$g(x) \neq 0$:

$$cosx \neq 1$$

Como $-1 \leq cosx < 1$, a função g sempre é negativa:

$$-1 \leq cosx < 1$$

$$-2 \leq cosx - 1 < 0$$

$$-2 \leq g(x) < 0$$

Portanto, devemos ter:

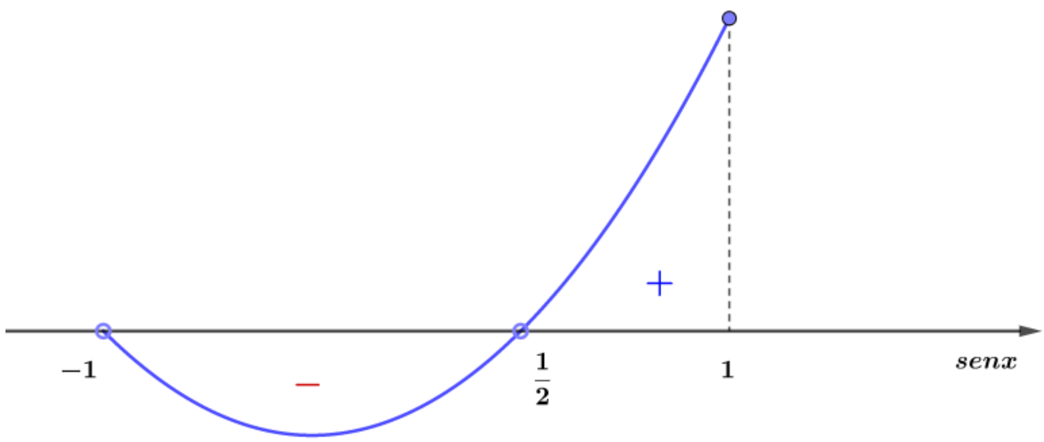
$$2sen^2x + senx - 1 > 0$$

Raízes da equação:

$$senx = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = -1 \; ou \; \frac{1}{2}$$

$$2(senx + 1)\left(senx - \frac{1}{2}\right) > 0$$

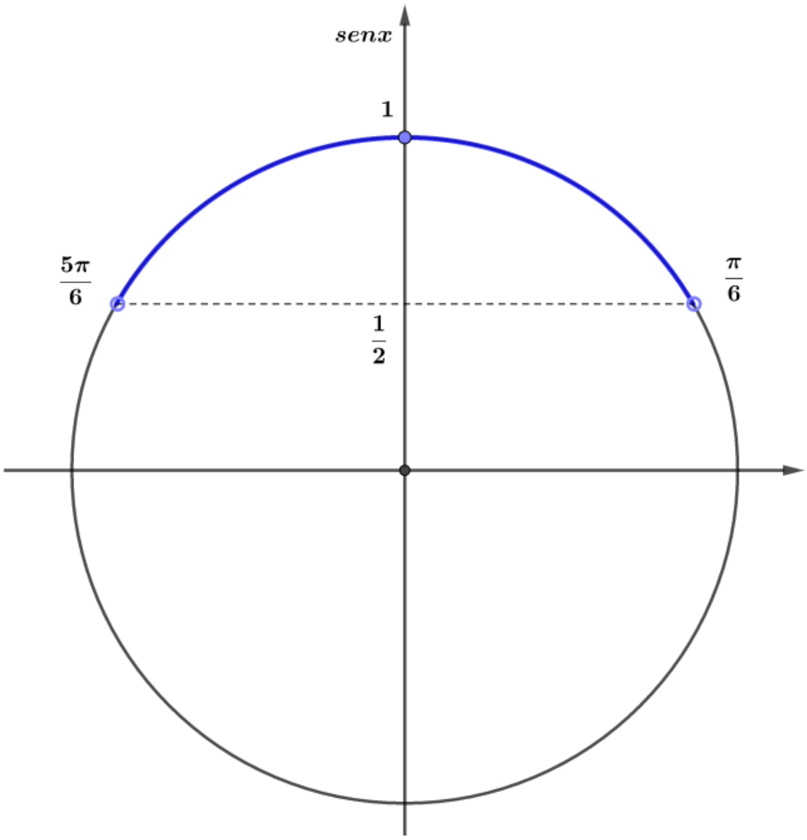
Analisando o sinal, temos:



Pela figura, vemos que $\frac{1}{2} < senx \leq 1$:

$$\frac{1}{2} < senx \leq 1$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Podemos ver que $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

$$S_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Resolvendo a outra inequação:

$$tgx + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3}cotgx\right)cotgx$$

$$tgx + \sqrt{3} < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{tgx}\right)\left(\frac{1}{tgx}\right)$$

$$tgx + \sqrt{3} < \frac{tgx + \sqrt{3}}{tg^2x}$$

$$\frac{tg^2x\left(tgx + \sqrt{3}\right) - \left(tgx + \sqrt{3}\right)}{tg^2x} < 0$$

$$\frac{(tg^2x - 1)\left(tgx + \sqrt{3}\right)}{tg^2x} < 0$$

$$\Rightarrow (tg^2x - 1)\left(tgx + \sqrt{3}\right) < 0$$

Substituindo $tgx = y$:

$$(y^2 - 1)(y + \sqrt{3}) < 0$$

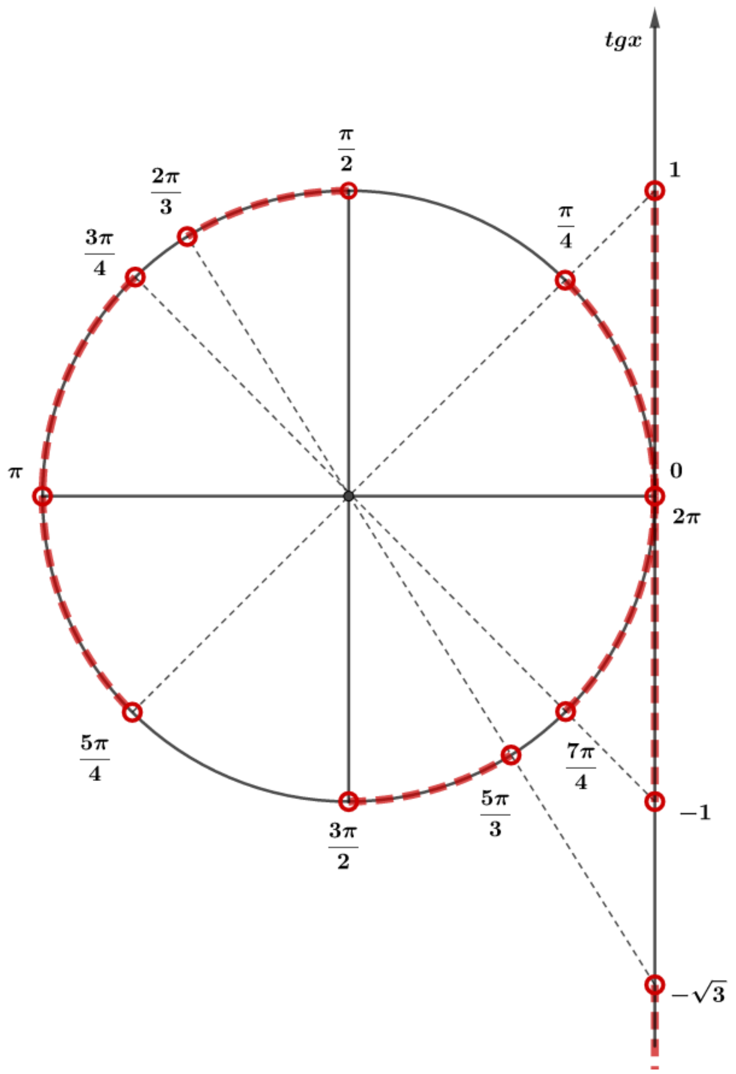
Analisando o sinal, temos a seguinte tabela:

		$-\sqrt{3}$		-1		1		y
$y^2 - 1$	$+$		$+$		$-$		$+$	
$y + \sqrt{3}$	$-$		$+$		$+$		$+$	
$(y^2 - 1)(y + \sqrt{3})$	$-$		$+$		$-$		$+$	

Os valores de $\boldsymbol{y}$ que satisfazem a inequação são dados por:

$$\boldsymbol{y < -\sqrt{3}\ ou -1 < y < 1}$$

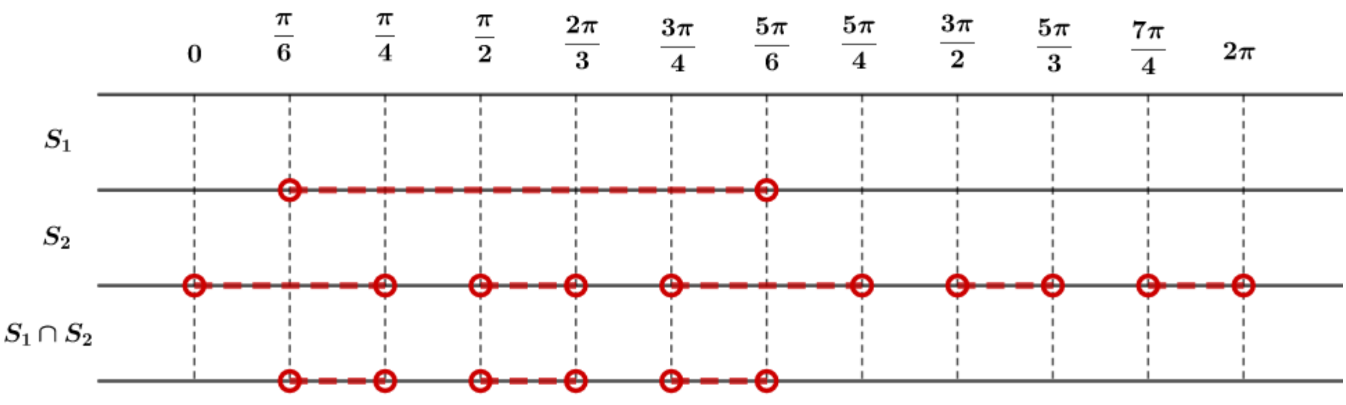
Usando o ciclo trigonométrico:



Podemos ver que a solução dessa inequação é dada por:

$$\boldsymbol{S_2 = \left(0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4},\pi\right) \cup \left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)}$$

Fazendo a intersecção das soluções, temos:



Portanto, a solução do problema é dada por:

$$\boldsymbol{S = S_1 \cap S_2 = \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = S_1 \cap S_2 = \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)}$

41. (ITA/2013)

Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}(4senxcosx - 1)$.

Comentários

Vamos verificar as condições de existência da função f:

$$\begin{cases} 4senxcosx - 1 > 0 \\ x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \\ x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1 \end{cases}$$

Analisando cada restrição, temos:

I) $4senxcosx - 1 > 0$

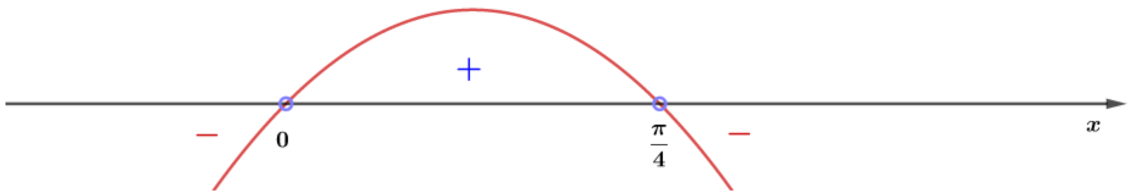
$$2sen(2x) - 1 > 0$$

$$sen(2x) > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

II) $x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>0$



$$\Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{4}$$

III) $x(\frac{\pi}{4}-x)\neq 1$

Desenvolvendo a equação:

$$-x^2+\pi x-4\neq 0$$

Verificando o discriminante:

$$\Delta=\pi^2-16<0$$

Logo, a equação não possui raízes e por isso é diferente de zero para qualquer valor de x.

Fazendo a intersecção dos resultados:

$$\frac{\pi}{12}+k\pi<x<\frac{5\pi}{12}+k\pi\ e\ 0<x<\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{4}$$

Dessa forma, o maior domínio da função é dada por:

$$D=\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{D=\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)}$

---

42. (ITA/2013)

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x\in[0,2\pi]$ da equação $\cos^8 x-sen^8x+4sen^6x=a$. Das afirmações:

I. Se $a=0$, então $n=0$;

II. Se $a=1/2$, então $n=8$;

III. Se $a=1$, então $n=7$;

IV. Se $a=3$, então $n=2$,

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e III.

d) apenas II e IV.

e) todas.

Comentários

Inicialmente, vamos escrever a equação em função de $senx$:

$$\cos^8 x - sen^8x + 4sen^6x = a$$

$$(1 - sen^2x)^4 - sen^8x + 4sen^6x - a = 0$$

Simplificando:

$$(1 - 2sen^2x + sen^4x)^2 - sen^8x + 4sen^6x - a = 0$$

$$1 + 4sen^4x + sen^8x - 4sen^2x + 2sen^4x - 4sen^6x - sen^8x + 4sen^6x - a = 0$$

$$6sen^4x - 4sen^2x - a + 1 = 0$$

Vamos analisar as afirmações:

I. Para $a = 0$, temos:

$$6sen^4x - 4sen^2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$$

Como $\Delta < 0$, não temos solução real nesse caso. Logo, $n = 0$. Verdadeira.

II. Para $a = 1/2$:

$$6sen^4x - 4sen^2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$sen^2x = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{1}{2}\ ou\ \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow senx = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ ou\ senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$$senx = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4\ soluções\ (\text{2 para seno positivo e 2 para seno negativo})$$

$$senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow 4\ soluções$$

Nesse caso, temos 4 soluções para cada valor de seno. Então, $n = 8$. Verdadeira.

III. Para $a = 1$:

$$6sen^4x - 4sen^2x = 0$$

$$2sen^2x(3sen^2x - 2) = 0$$

$$sen^2x = 0\ ou\ sen^2x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow senx = 0\ ou\ senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$senx = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi\ (3\ soluções)$$

$$senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 4\ soluções$$

$$\Rightarrow n = 7$$

∴Verdadeira

IV. Para $a = 3$:

$$6sen^4x - 4sen^2x - 2 = 0$$

$$3sen^4x - 2sen^2x - 1 = 0$$

$$sen^2x = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{3} = 1\ ou - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow senx = \pm 1\ (2\ soluções)$$

$$\Rightarrow sen^2x = -\frac{1}{3}\ (não\ convém)$$

$$\Rightarrow n = 2$$

∴Verdadeira

Gabarito: "e".

---

43. (ITA/2013)

Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[\ x\ ]0, \frac{\pi}{2}[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$(tg\alpha + cotg\beta)cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$ e $\sqrt{3}sen(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$.

Comentários

Vamos resolver cada equação separadamente:

$$(tg\alpha + cotg\beta)cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$$

$$\left(\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \frac{cos\beta}{sen\beta}\right)cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$$

$$\frac{(sen\alpha sen\beta + cos\alpha cos\beta)}{sen\beta cos\alpha}cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$$

$$\cos(\alpha - \beta) - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$$

$$2\cos^2(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta) - 1 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = 1\ ou - \frac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 \Rightarrow \alpha - \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ \ (I)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha - \beta = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ \ (II)$$

Como $(\alpha, \beta) \in]0, \pi/2[\ x\ ]0, \pi/2[$, temos:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$$

Dessa forma, podemos escrever de (I):

$$\alpha - \beta = 0$$

Para a outra equação, temos:

$$\sqrt{3}sen(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$$

O bizu agora é perceber os termos escondidos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}sen(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)sen(\alpha + \beta) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \ (III)$$

Ou

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \ (IV)$$

Como $(\alpha, \beta) \in]0, \pi/2[\ x \ ]0, \pi/2[$, temos:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \alpha + \beta < \pi$$

De (III) e (IV), temos:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{6} \ ou \ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Assim, encontramos dois sistemas:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} \ e \ \beta = \frac{\pi}{12}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \; e \; \beta = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, encontramos dois pares ordenados que satisfazem simultaneamente as equações:

$$S = \left\{\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right); \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right); \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}}$

---

44. (ITA/2012)

Determine os valores reais de x de modo que $sen(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Comentários

Perceba os termos escondidos na expressão:

$$sen(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$$

$$2\left(\frac{1}{2}sen(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right)$$

$$2\left(sen(2x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)\right)$$

$$2sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Seja $f(x) = 2sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, queremos x que torne f máximo. O maior valor que f assume ocorre quando o seno for igual a 1:

$$sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito: $\boldsymbol{x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

---

45. (ITA/2010)

Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \left(\frac{4\pi}{3}\right), 0 \leq \alpha \leq \beta$, maximizam a soma $sen\alpha + sen\beta$, então α é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{3\pi}{5}$

d) $\frac{5\pi}{8}$

e) $\frac{7\pi}{12}$

Comentários

Do enunciado, temos:

$$\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$$

A soma do seno é dada por:

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow sen\alpha + sen\beta = \frac{2\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

A soma é máxima quando o cosseno é igual a 1:

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha-\beta}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha + \beta = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha + \beta = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$$2\alpha = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\beta = \frac{4\pi}{3} - \alpha$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{3} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Das condições do problema:

$$0 \leq \alpha \leq \beta$$

$$0 \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{2\pi}{3} - 2k\pi$$

$$0 \leq \frac{1}{3} + k \leq \frac{1}{3} - k$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 0$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, devemos ter $k = 0$:

Assim, o valor de α é dado por:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Gabarito: "b".

---

46. (ITA/2010)

Considere a equação

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 6tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi[$.

b) Para as soluções encontradas em a), determine $cotgx$.

Comentários

a) Resolvendo a equação:

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 6tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 6tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + \frac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{6sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{6sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$3 - 2\cos^2 x = 6sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$3 - 2\cos^2 x = 3senx$$

$$3 - 2(1 - sen^2 x) = 3senx$$

$$2sen^2 x - 3senx + 1 = 0$$

Raízes:

$$senx = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = 1 \; ou \; \frac{1}{2}$$

Como $x \in [0, \pi[$, temos:

$$senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$senx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \; ou \; x = \frac{5\pi}{6}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\}$$

b) Calculando os valores de $cotgx$:

$$cotg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$cotg\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

$$cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\}}$ **b)** $\boldsymbol{cotg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}; cotg\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}; cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$

---

47. (ITA/2008)

Determine todos os valores de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x) $x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + tg\alpha = 0$ admita apenas raízes reais e simples.

Comentários

Podemos fazer a seguinte substituição $y = x^2 \geq 0$:

$$y^2 - 2\sqrt[4]{3}y + tg\alpha = 0$$

Para essa equação ter apenas raízes reais simples, devemos ter:

$$\Delta > 0$$

$$\left(2\sqrt[4]{3}\right)^2 - 4tg\alpha > 0$$

$$4\sqrt{3} > 4tg\alpha$$

$$tg\alpha < \sqrt{3}$$

*Não podemos ter $\Delta \geq 0$, pois caso $\Delta = 0$, teríamos uma raiz dupla em y e consequentemente geramos 2 raízes duplas em x.

Com essa condição, temos 2 raízes em y distintas. Como $y = x^2 > 0$, a menor raiz deve ser maior que zero. Encontrando a menor raiz:

$$y = \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{4\sqrt{3} - 4tg\alpha}}{2}$$

$$y = \sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - tg\alpha}$$

$$y > 0$$

$$\sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - tg\alpha} > 0$$

$$\sqrt[4]{3} > \sqrt{\sqrt{3} - tg\alpha}$$

Já que ambos os termos dessa inequação são positivos (devido à condição $tg\alpha > 0$), temos:

$$\sqrt{3} > \sqrt{3} - tg\alpha$$

$$tg\alpha > 0$$

Assim, devemos satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} 0 < tg\alpha < \sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Os valores de α são dados por:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{0 < \alpha < \frac{\pi}{3}}$

---

48. (ITA/2008)

A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0,$$

Que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a

a) 2π

b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$

e) $\frac{13}{12}\pi$

Comentários

Vamos transformar a seguinte soma em produto usando a fórmula de Prostaférese:

$$\cos 3x + \cos 9x = 2\cos\left(\frac{9x + 3x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x - 3x}{2}\right) = 2\cos(6x)\cos(3x)$$

Assim, temos:

$$\cos(3x) + 2\cos(6x) + \cos(9x) = 0$$

$$2\cos(6x) + 2\cos(6x)\cos(3x) = 0$$

$$2\cos(6x)\left(1 + \cos(3x)\right) = 0$$

Encontrando as raízes:

$$\cos(6x) = 0 \Rightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$1 + \cos(3x) = 0 \Rightarrow \cos(3x) = -1 \Rightarrow 3x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Queremos a soma de todas as soluções no intervalo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \ ou\ x = \frac{\pi}{4} \ ou\ x = \frac{5\pi}{12}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}$$

$$S = \frac{13\pi}{12}$$

Gabarito: "e".

---

49. (ITA/2007)

Seja x um número real no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2} tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\sec(x) \geq 0.$$

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{12}$

Comentários

Devemos simplificar a expressão. Perceba que o ângulo da tangente é complementar, então:

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{tgx} = cotgx$$

O termo $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}$ é a fórmula do arco metade:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Para $\alpha = x/2$:

$$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

Reescrevendo a inequação:

$$\frac{1}{2}cotgx - \sqrt{3}\left(\frac{1+\cos(x)}{2} - \frac{1}{2}\right)secx \geq 0$$

$$cotgx - \frac{\sqrt{3}\cos(x)}{\cos(x)} \geq 0$$

$$cotgx \geq \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{tgx} \geq \sqrt{3}$$

$$tgx \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $x \in]0, \pi/2[$, temos:

$$0 < tgx < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{6}$$

O comprimento desse intervalo é:

$$I = \frac{\pi}{6}$$

Gabarito: “d”.

---

50. (ITA/2006)

Determine para quais valores de $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vale a desigualdade

$$\log_{cosx}(4sen^2x - 1) - \log_{cosx}(4 - \sec^2 x) > 2.$$

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência dos logaritmos:

$$cosx > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$cosx \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$4sen^2x - 1 > 0 \Rightarrow sen^2x > \frac{1}{4} \Rightarrow senx > \frac{1}{2}\ ou\ senx < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$4 - \sec^2 x > 0 \Rightarrow \sec^2 x < 4 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} < 4$$

Como $\cos^2 x > 0$ e $cosx > 0$:

$$\cos^2 x > \frac{1}{4} \Rightarrow cosx > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

Fazendo a intersecção das condições, obtemos:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$$

Resolvendo a inequação:

$$\log_{\cos x}\left(\frac{4sen^2x - 1}{4 - \sec^2 x}\right) > 2$$

Como $0 < cosx < 1$, a desigualdade fica:

$$\frac{4sen^2x - 1}{4 - \sec^2 x} < \cos^2 x$$

$$\frac{4sen^2x - 1}{4 - \sec^2 x} - \cos^2 x < 0$$

$$\frac{4sen^2x - 1 - 4\cos^2 x + \underbrace{\sec^2 x \cos^2 x}_{1}}{4 - \sec^2 x} < 0$$

$$\frac{4sen^2x - 4\cos^2 x}{4 - \sec^2 x} < 0$$

Da condição de existência, temos $4 - \sec^2 x > 0$, assim, temos:

$$4sen^2x - 4\cos^2 x < 0$$

$$sen^2x < \cos^2 x$$

$$tg^2x < 1$$

$$-1 < tgx < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência, encontramos a solução:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{x \in \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)}$

---

51. (ITA/2006)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R}: f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então $m + n$ é igual a

a) $\frac{2\pi}{15}$

b) $\frac{\pi}{15}$

c) $-\frac{\pi}{30}$

d) $-\frac{\pi}{15}$

e) $-\frac{2\pi}{15}$

Comentários

Vamos encontrar o conjunto B, de acordo com o enunciado:

$$f(x) = 0$$

$$\sqrt{77}sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

$$sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

$$5\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$:

$$B \cap (-\infty, 0) = \left\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{11\pi}{30}; -\frac{17\pi}{30}; \dots\right\}$$

O maior elemento desse conjunto é:

$$m = -\frac{\pi}{6}$$

n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$:

$$B \cap (0, +\infty) = \left\{\frac{\pi}{30}; \frac{7\pi}{30}; \frac{13\pi}{30}; \dots\right\}$$

$$n = \frac{\pi}{30}$$

Calculando $m + n$:

$$m + n = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30} = -\frac{4\pi}{30} = -\frac{2\pi}{15}$$

Gabarito: “e”.

---

52. (ITA/2006)

O conjunto solução de $(tg^2x - 1)(1 - cotg^2x) = 4, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, é

a) $\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{\left(\frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

Comentários

Simplificando a expressão:

$$\left(\frac{sen^2x}{\cos^2 x}-1\right)\left(1-\frac{\cos^2 x}{sen^2x}\right)=4$$

$$\frac{(sen^2x-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\left(\frac{sen^2x-\cos^2 x}{sen^2x}\right)=4$$

$$(sen^2x-\cos^2 x)^2=4sen^2xcos^2x$$

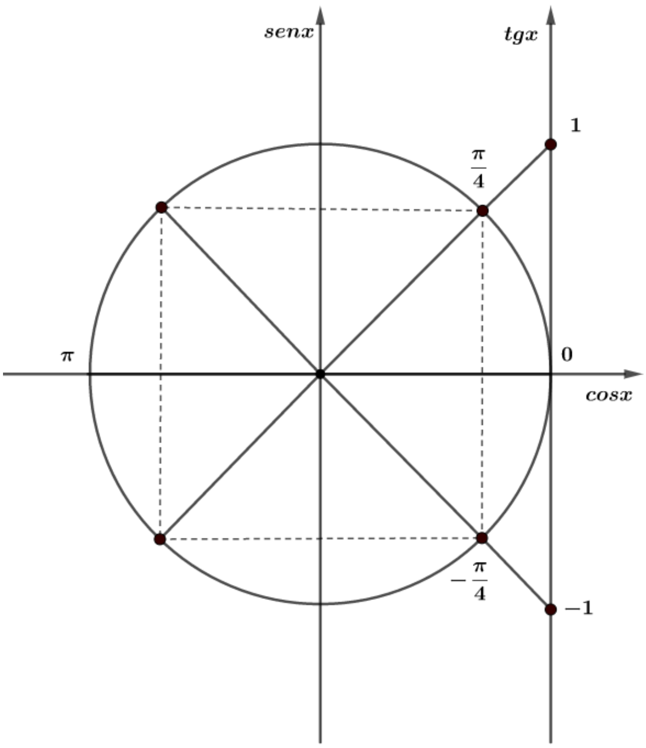
$$(-\cos(2x))^2=(2senxcosx)^2$$

$$\cos^2(2x)=sen^2(2x)$$

$$tg^2(2x)=1$$

$$tg(2x)=\pm 1$$

Pelo ciclo trigonométrico, podemos ver que:



$$2x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$$

Gabarito: "d".

---

53. (ITA/2005)

O intervalo $I\subset\mathbb{R}$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan\left[\frac{1+x}{2}\right]+\arctan\left[\frac{1-x}{2}\right]\geq\frac{\pi}{6}$$

É

a) $[-1, 4]$

b) $[-3, 1]$

c) $[-2, 3]$

d) $[0, 5]$

e) $[4, 6]$

Comentários

Fazendo $\alpha = \arctan\left(\frac{1+x}{2}\right)$ e $\beta = \arctan\left(\frac{1-x}{2}\right)$, temos:

$$tg\alpha = \frac{1+x}{2}$$

$$tg\beta = \frac{1-x}{2}$$

Analisando a inequação:

$$tg(\alpha+\beta) \geq tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2}}{1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4}{4-(1-x^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4}{3+x^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$12 \geq 3\sqrt{3} + \sqrt{3}x^2$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \geq x^2$$

$$x^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$$

$$-\sqrt{4\sqrt{3}-3} \leq x \leq \sqrt{4\sqrt{3}-3}$$

Usando a aproximação $\sqrt{3} \cong 1{,}7$, temos:

$$-\sqrt{4 \cdot 1{,}7 - 3} \leq x \leq \sqrt{4 \cdot 1{,}7 - 3}$$

$$-\sqrt{3{,}4} \leq x \leq \sqrt{3{,}4}$$

$$-2 < -\sqrt{3{,}4} \leq x \leq \sqrt{3{,}4} < 2$$

Analisando as alternativas, vemos que o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém todas as soluções é:

$$I = [-2, 3]$$

Gabarito: “c”.

---

54. (ITA/2005)

Obtenha todos os pares (x, y), com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$sen(x+y) + sen(x-y) = \frac{1}{2}$$

$$senx + cosy = 1$$

Comentários

Desenvolvendo a primeira equação, encontramos:

$$senxcosy + senycosx + senxcosy - senycosx = \frac{1}{2}$$

$$2senxcosy = \frac{1}{2}$$

$$senxcosy = \frac{1}{4}$$

Usando a segunda equação:

$$senx = 1 - cosy$$

Substituindo na primeira:

$$(1 - cosy)cosy = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 y - cosy + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\cos y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo $\cos y = 1/2$ na segunda equação:

$$senx\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$senx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Como $x, y \in [0, 2\pi]$, temos:

$$y = \frac{\pi}{3} \ ou \ y = \frac{5\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \ ou \ x = \frac{5\pi}{6}$$

Portanto, os pares ordenados que satisfazem as equações são dados por:

$$(x, y) \in \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right)\right\}$$

Gabarito: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right)\right\}$

---

55. (ITA/2004)

O conjunto de todos os valores de $\alpha, \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, tais que as soluções da equação (em x)

$x^4 - (\sqrt[4]{48})x^2 + tg\alpha = 0$ são todas reais, é

a) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$

b) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

c) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

d) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$

Comentários

Vamos fazer a substituição $y = x^2 \geq 0$:

$$y^2 - (\sqrt[4]{48})y + tg\alpha = 0$$

Para todas as raízes serem reais, devemos ter:

$$\Delta \geq 0 \; e \; y_{1,2} \geq 0$$

$$\Delta = \sqrt{48} - 4tg\alpha$$

$$4\sqrt{3} - 4tg\alpha \geq 0$$

$$tg\alpha \leq \sqrt{3}$$

Encontrando as raízes da equação em y:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt[4]{48} \pm \sqrt{\sqrt{48} - 4tg\alpha}}{2}$$

Para a menor raiz, temos:

$$y_1 = \frac{\sqrt[4]{48} - \sqrt{\sqrt{48} - 4tg\alpha}}{2} \geq 0$$

$$\sqrt[4]{48} - \sqrt{\sqrt{48} - 4tg\alpha} \geq 0$$

$$\sqrt[4]{48} \geq \sqrt{\sqrt{48} - 4tg\alpha}$$

Como ambos os lados são positivos, podemos elevar ao quadrado:

$$\sqrt{48} \geq \sqrt{48} - 4tg\alpha$$
$$4tg\alpha \geq 0$$
$$tg\alpha \geq 0$$

Fazendo a intersecção das condições:

$$0 \leq tg\alpha \leq \sqrt{3}$$
$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$$

Gabarito: “d”.

---

56. (ITA/2004)

Determine os valores reais do parâmetro a para os quais existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$.

Comentários

Temos uma inequação paramétrica. Um bizu para resolver esse tipo de questão é observar o termo $\sqrt{1-x^2}$. Podemos usar a trigonometria para resolvê-la. Veja:

Analisando a condição de existência:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

x deve pertencer ao intervalo $[-1; 1]$. Então, podemos fazer a seguinte substituição:

$$x = sen\alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Assim, temos:

$$\sqrt{\underbrace{1 - sen^2\alpha}_{\cos^2\alpha}} \geq a - sen\alpha$$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, temos $cos\alpha \geq 0$. Então:

$$cos\alpha \geq a - sen\alpha$$
$$sen\alpha + cos\alpha \geq a$$

Temos uma expressão clássica. Vamos multiplicar a inequação por $\sqrt{2}/2$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} sen\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} cos\alpha \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\alpha \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Sabemos que o máximo valor da função seno é 1:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \leq sen\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

Assim, a inequação possui solução real para a satisfazendo:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \leq 1$$

$$a \leq \sqrt{2}$$

*Podemos resolver essa questão usando geometria analítica. Estudaremos o método na aula de geometria analítica.

Gabarito: $\boldsymbol{a \leq \sqrt{2}}$

---

57. (ITA/2003)

Encontre todos os valores de $a \in]-\pi, 2, \pi/2[$ para os quais a equação na variável real x, $arctg\left[\sqrt{2} - 1 + \left(\frac{e^x}{2}\right)\right] + arctg\left[\sqrt{2} - 1 - \left(\frac{e^x}{2}\right)\right] = a$, admite solução.

Comentários

Fazendo $\alpha = arctg\left[\sqrt{2} - 1 + \left(\frac{e^x}{2}\right)\right]$ e $\beta = arctg\left[\sqrt{2} - 1 - \left(\frac{e^x}{2}\right)\right]$ e aplicando a função tangente na equação, temos:

$$tg\alpha = \sqrt{2} - 1 + \left(\frac{e^x}{2}\right)$$

$$tg\beta = \sqrt{2} - 1 - \left(\frac{e^x}{2}\right)$$

$$tg(\alpha + \beta) = tga$$

$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = tga$$

$$\frac{\left(\sqrt{2} - 1 + \left(\frac{e^x}{2}\right) + \sqrt{2} - 1 - \left(\frac{e^x}{2}\right)\right)}{1 - \left(\sqrt{2} - 1 + \left(\frac{e^x}{2}\right)\right)\left(\sqrt{2} - 1 - \left(\frac{e^x}{2}\right)\right)} = tga$$

Vamos simplificar a expressão e isolar a variável e^x:

$$\frac{2\sqrt{2} - 2}{1 - \left(\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 - \frac{e^{2x}}{4}\right)} = tga$$

$$\frac{2\sqrt{2} - 2}{1 - \left(3 - 2\sqrt{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right)} = tga$$

$$\frac{2\sqrt{2}-2}{-2+2\sqrt{2}+\frac{e^{2x}}{4}}=tga$$

$$\frac{8\sqrt{2}-8}{-8+8\sqrt{2}+e^{2x}}=tga$$

$$8\sqrt{2}-8=\left(8\sqrt{2}-8\right)tga+e^{2x}tga$$

$$e^{2x}=\frac{\left(8\sqrt{2}-8\right)(1-tga)}{tga}$$

Como $e^{2x}>0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\left(8\sqrt{2}-8\right)(1-tga)}{tga}>0$$

$\left(8\sqrt{2}-8\right)>0$, então:

$$\frac{1-tga}{tga}>0$$

Temos as seguintes possibilidades:

$$1-tga>0 \; e \; tga>0$$

Ou

$$1-tga<0 \; e \; tga<0$$

Para o primeiro:

$$1-tga>0 \Rightarrow tga<1$$

Como $a \in]-\pi/2\,, \pi/2[$:

$$0<tga<1 \Rightarrow 0<a<\frac{\pi}{4}$$

Para o outro caso:

$$1-tga<0 \Rightarrow tga>1$$

$tga<0 \; e \; tga>1 \Rightarrow$não há intersecção, logo não possui solução

Assim, os valores de a que satisfazem ao problema devem pertencer ao intervalo:

$$a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)}$

---

58. (ITA/2000)

Para x no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o conjunto de todas as soluções da inequação

$$sen(2x)-sen\left[3x+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]>0$$

É o intervalo definido por

a) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

Comentários

Vamos transformar a subtração em produto, usando a seguinte transformação:

$$sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$sen(2x) - sen\left[3x + \left(\frac{\pi}{2}\right)\right] > 0$$

$$2sen\left(\frac{-x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{5x+\frac{\pi}{2}}{2}\right) > 0$$

Como a função seno é ímpar, podemos escrever:

$$-2sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$2sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Como $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

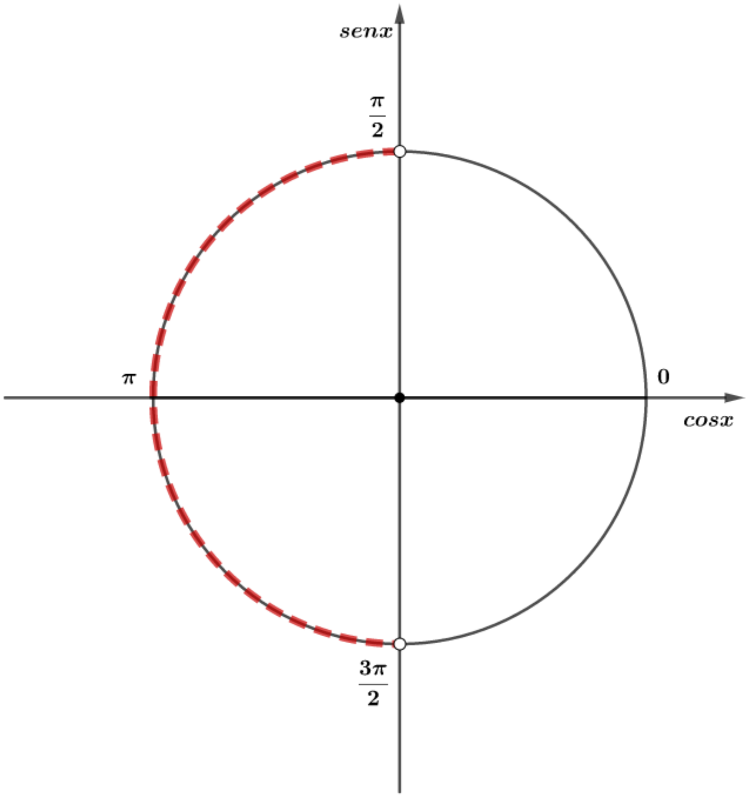
$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \leq sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

Assim, a função seno dessa inequação é positiva para o intervalo determinado. Então, devemos ter:

$$\cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Queremos os valores negativos do cosseno:



$$\frac{\pi}{2} < \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$$
$$2\pi < 10x + \pi < 6\pi$$
$$\pi < 10x < 5\pi$$
$$\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$$

Gabarito: "a".

---

59. (ITA/2000)

Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, o cosseno de x é igual a

a) $\sqrt{3}/5$

b) $2/7$

c) $5/13$

d) $15/26$

e) $13/49$

Comentários

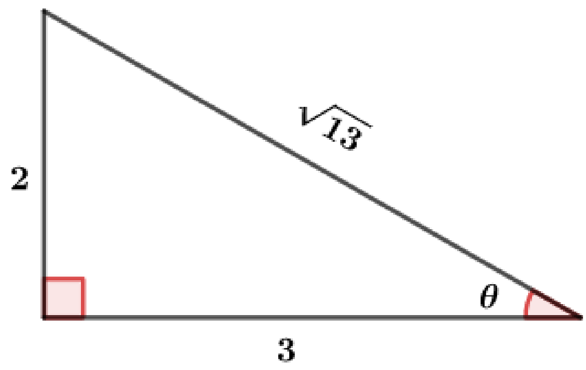
De acordo com o enunciado, temos:

$$3secx + 2tgx = 3$$

Desenvolvendo essa equação:

$$\frac{3}{cosx}+\frac{2senx}{cosx}=3$$
$$3+2senx=3cosx$$
$$3cosx-2senx=3$$

Vamos usar o seguinte triângulo para simplificar a equação:



Assim, vamos dividir a equação por $\sqrt{13}$:

$$\frac{3}{\sqrt{13}}cosx-\frac{2}{\sqrt{13}}senx=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Observando o triângulo, podemos escrever para $0<\theta<\frac{\pi}{2}$:

$$sen\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$$
$$cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Reescrevendo a equação:

$$cos\theta cosx-sen\theta senx=cos\theta$$
$$cos(\theta+x)=cos\theta$$

Assim, temos:

$$\theta+x=\pm\theta+2k\pi$$
$$x=2k\pi$$

Ou

$$x=-2\theta+2k\pi$$

Como $x\in\,]0,2\pi[$, temos:

$$x=2\pi-2\theta$$

Queremos calcular o valor de $\cos x$:

$$\cos x=\cos(2\pi-2\theta)$$
$$cosx=\cos(-2\theta)=\cos(2\theta)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - sen^2\theta = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{5}{13}$$

Gabarito: “c”.

---

60. (ITA/1998)

A soma das raízes da equação $\sqrt{3}tgx - \sqrt{3}sen(2x) + \cos(2x) = 0$, que pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) $17\pi/4$

b) $16\pi/3$

c) $15\pi/4$

d) $14\pi/3$

e) $13\pi/4$

Comentários

Podemos transformar o seno e cosseno, usando as fórmulas abaixo:

$$\boxed{\boldsymbol{senA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\cos(A) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}}$$

Assim, temos:

$$\sqrt{3}tgx - \sqrt{3}\left(\frac{2tgx}{1 + tg^2x}\right) + \left(\frac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x}\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}tgx + \sqrt{3}tg^3x - 2\sqrt{3}tgx + 1 - tg^2x}{1 + tg^2x} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}tg^3x - tg^2x - \sqrt{3}tgx + 1}{1 + tg^2x} = 0$$

$$\sqrt{3}tg^3x - tg^2x - \sqrt{3}tgx + 1 = 0$$

Fatorando a expressão:

$$\sqrt{3}tgx(tg^2x - 1) - (tg^2x - 1) = 0$$

$$(tg^2x - 1)\left(\sqrt{3}tgx - 1\right) = 0$$

Encontrando as raízes:

$$tgx = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o intervalo $[0, 2\pi]$, temos as seguintes raízes:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$$

Somando as raízes:

$$S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}$$

$$S = \frac{16\pi}{3}$$

Gabarito: "b".

---

61. (ITA/1997)

Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação

$\sec\left\{arctg\left(\frac{1}{1+e^x}\right) - arctg(1 - e^x)\right\} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Então

a) $S = \emptyset$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S \subset [1, 2]$

d) $S \subset [-1, 1]$

e) $S = [-1, 2[$

Comentários

Fazendo $\alpha = arctg\left(\frac{1}{1+e^x}\right)$ e $\beta = arctg(1 - e^x)$, com $\alpha, \beta \in]-\pi/2, \pi/2[$, temos:

$$tg\alpha = \frac{1}{1+e^x}$$

$$tg\beta = 1 - e^x$$

$$\sec(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Elevando ao quadrado:

$$\sec^2(\alpha - \beta) = \frac{5}{4}$$

$$1 + tg^2(\alpha - \beta) = \frac{5}{4}$$

$$tg^2(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}$$

$$|tg(\alpha - \beta)| = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}\right| = \frac{1}{2}$$

Substituindo os valores de $tg\alpha$ e $tg\beta$:

$$\left|\frac{\frac{1}{1+e^x} - (1 - e^x)}{1 + \frac{1-e^x}{1+e^x}}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1 - (1 - e^{2x})}{1 + e^x + 1 - e^x}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{e^{2x}}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Como $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

Portanto, $S = \{0\} \subset [-1, 1]$.

Gabarito: "d".

---

62. (IME/2020)

Todos os arcos entre 0 e 2π radianos que satisfazem a desigualdade

$$senx - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{12}$

c) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{12}$

Comentários

Reescrevendo a inequação, temos:

$$\boldsymbol{senx - \cos x > \frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

O membro à esquerda pode ser reescrito do seguinte modo:

$$\boldsymbol{senx - \cos x = \sqrt{2}\left(senx\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(senx \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos x\, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{\therefore senx - \cos x = \sqrt{2} \cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Assim, temos:

$$\boldsymbol{\sqrt{2} \cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

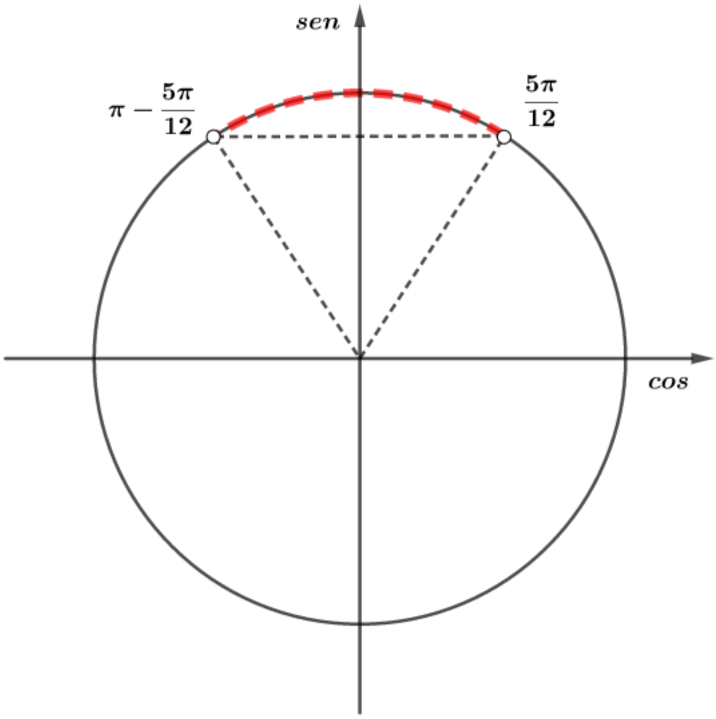
$$\boldsymbol{\Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

O número à direita é um valor conhecido de seno, ele é o seno de $\boldsymbol{75°}$:

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = sen(75°) = sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$

Para resolver essa inequação, podemos fazer uso do ciclo trigonométrico:



Observando o ciclo, podemos ver que os ângulos que satisfazem à inequação devem satisfazer a seguinte condição:

$$\boldsymbol{\frac{5\pi}{12} < x - \frac{\pi}{4} < \pi - \frac{5\pi}{12}}$$

$$\boldsymbol{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{4}}$$

$$\boldsymbol{\frac{8\pi}{12} < x < \frac{10\pi}{12}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}}$$

Gabarito: “c”.

63. (IME/2019)

Seja um triângulo ABC com lados a, b e c opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Os lados a, b e c formam uma progressão aritmética nesta ordem. Determine a relação correta entre as funções trigonométricas dos ângulos dos vértices desse triângulo.

a) $2sen(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})$

b) $2cos(\hat{A}+\hat{C}) = cos(\hat{A}) + cos(\hat{C})$

c) $2sen(\hat{A}-\hat{C}) = sen(\hat{A}) - sen(\hat{C})$

d) $2cos(\hat{A}-\hat{C}) = cos(\hat{A}) - cos(\hat{C})$

e) $2cos(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})$

Comentários

Como (a, b, c) formam uma PA, podemos escrever:

$$\boxed{2b = a + c} \quad (I)$$

A questão pede as relações trigonométricas dos ângulos do triângulo. Podemos usar a lei dos senos para relacionar os lados e os ângulos internos. Então, temos:

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})} = 2R$$

$$\begin{cases} a = 2Rsen(\hat{A}) \\ b = 2Rsen(\hat{B}) \\ c = 2Rsen(\hat{C}) \end{cases}$$

R é o raio da circunferência circunscrita ao ΔABC.

Vamos substituir essas relações na equação (I):

$$2\left(2Rsen(\hat{B})\right) = 2Rsen(\hat{A}) + 2Rsen(\hat{C})$$

$$\boxed{2sen(\hat{B}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})} \quad (II)$$

Nas alternativas, podemos ver que devemos substituir o ângulo $\hat{B}$. Usando a relação dos ângulos internos do ΔABC, temos:

$$\hat{B} = \pi - (\hat{A} + \hat{C})$$

$$\Rightarrow sen(\hat{B}) = sen\left(\pi - (\hat{A} + \hat{C})\right) = sen(\hat{A} + \hat{C})$$

Portanto:

$$\boxed{2sen(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})}$$

Gabarito: “a”.

64. (IME/2019)

O número de soluções reais da equação abaixo é:

$$(\cos x)^{2018} = 2 - 2^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Para resolvermos essa questão, vamos analisar as funções envolvidas.

Seja $f(x) = (\cos x)^{2018}$ e $g(x) = 2 - 2^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}$. Note que ambas funções são pares:

$$f(-x) = (\cos(-x))^{2018} = (\cos x)^{2018} = f(x)$$

$$g(-x) = 2 - 2^{\left(-\frac{x}{\pi}\right)^2} = 2 - 2^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} = g(x)$$

Queremos saber quantas soluções temos para $f(x) = g(x)$. Inicialmente, podemos verificar que $x = 0$ satisfaz a igualdade:

$$f(0) = (\cos 0)^{2018} = 1$$

$$g(0) = 2 - 2^0 = 1 = f(0)$$

Assim, já verificamos que a equação possui 1 solução. Como as funções são pares, devemos ter um número ímpar de soluções, já que se $f(x_0) = g(x_0)$ for verdade, temos que $f(-x_0) = g(-x_0)$ também será. Analisando as alternativas, podemos ver que apenas as letras “b” e “d” podem ser o gabarito da questão. Vamos verificar se temos 3 soluções (alternativa “d”).

A imagem de f é o intervalo $[0, 1]$ e a de g é o intervalo $]-\infty, 1]$.

g é uma função que se anula no ponto $x = \pi$:

$$g(\pi) = 2 - 2^{\left(\frac{\pi}{\pi}\right)^2} = 2 - 2^1 = 0$$

g é decrescente e contínua no intervalo $x > 0$. Então, como $g(\pi) = 0$, temos que $x > \pi$ resulta $g(x) < 0$. Já que a imagem de f está no intervalo $[0, 1]$, as possíveis soluções de $f(x) = g(x)$ devem estar no intervalo $[0, \pi]$.

Nesse intervalo, temos:

- f é decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- f é crescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Como $f(\pi) = (\cos \pi)^{2018} = 1$ e $g(\pi) = 0$, podemos afirmar que no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, onde f é crescente, as funções se interceptam uma vez. Logo, temos 3 soluções no intervalo $[-\pi, \pi]$.

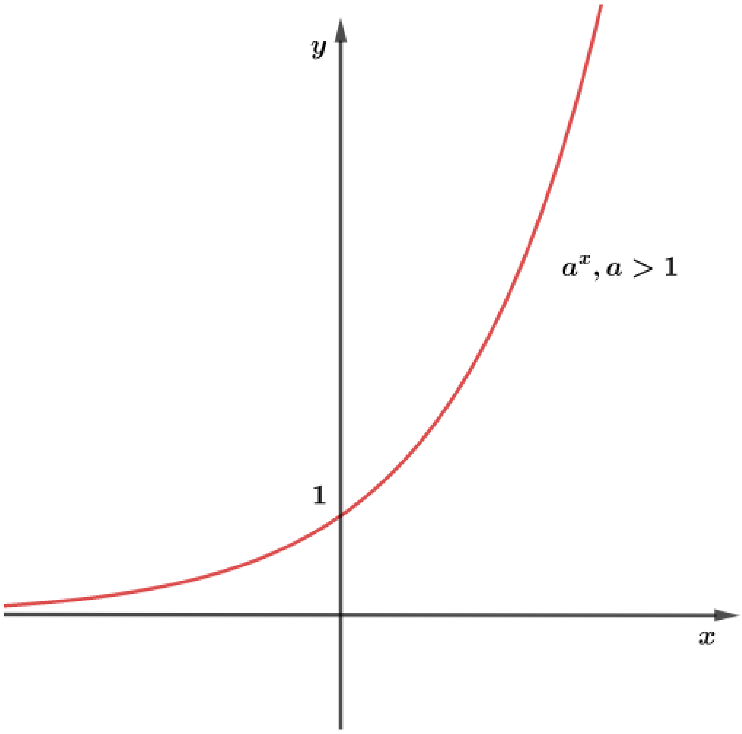
Portanto, encontramos o gabarito na letra "d".

Poderíamos ter resolvido através do esboço do gráfico, veja:

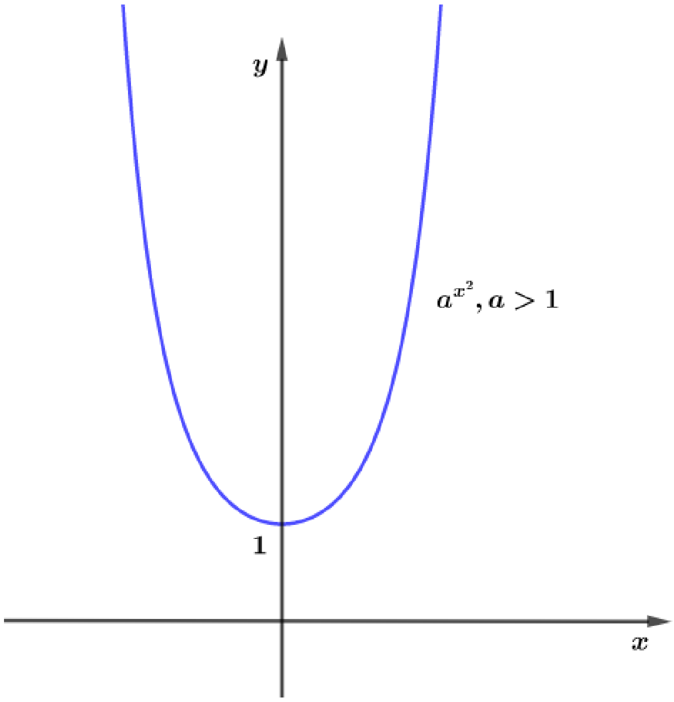
Vamos ver como é o gráfico de g:

$$g(x) = 2 - 2^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} = 2 - \left(2^{\frac{1}{\pi^2}}\right)^{x^2}$$

Façamos por partes. Iniciando pelo termo $\left(2^{\frac{1}{\pi^2}}\right)^{x^2}$. Você deve se lembrar que a função exponencial cuja base é maior que 1 possui o seguinte formato:



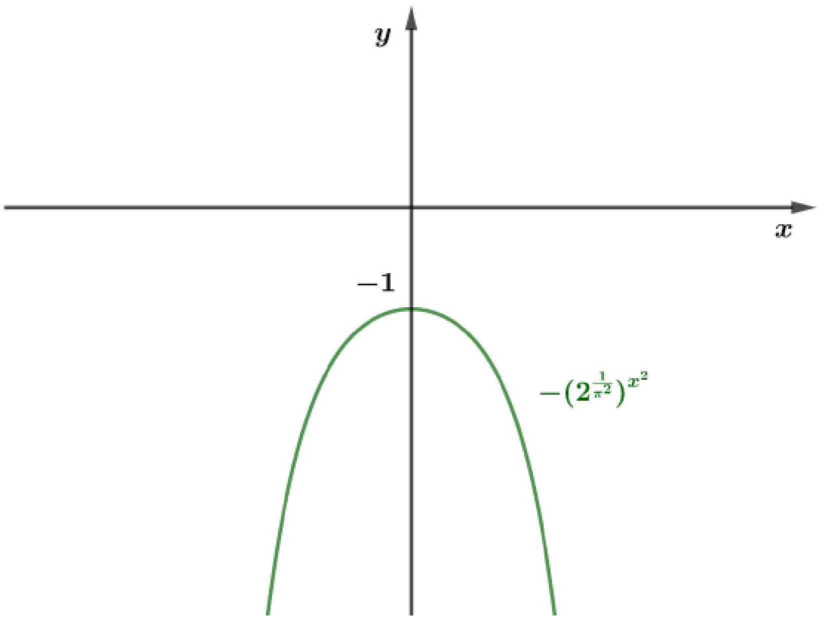
Note que o termo $2^{\frac{1}{\pi^2}} > 1$, logo, $\left(2^{\frac{1}{\pi^2}}\right)^x$ é do tipo acima. Se elevamos a variável x ao quadrado, a função $h(x) = \left(2^{\frac{1}{\pi^2}}\right)^x$ torna-se par e, assim, ela será simétrica em relação ao eixo y. Então, $h(x^2) = \left(2^{\frac{1}{\pi^2}}\right)^{x^2}$ terá a seguinte forma:



Para construirmos a função g, devemos fazer:

$$\left(2^{\frac{1}{\pi^2}}\right)^{x^2} \xrightarrow{x(-1)} -\left(2^{\frac{1}{\pi^2}}\right)^{x^2} \xrightarrow{+2} 2-\left(2^{\frac{1}{\pi^2}}\right)^{x^2}$$

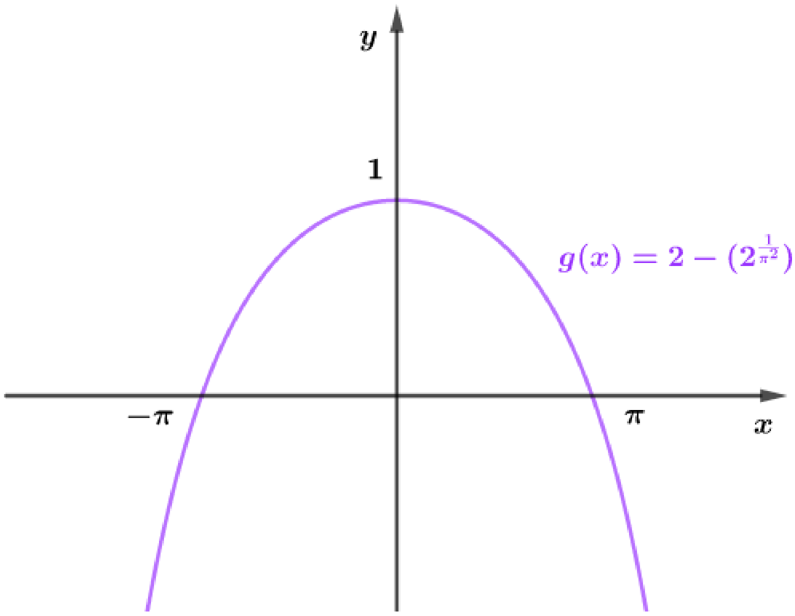
Então, vamos multiplicar a função por (-1):



Quando somamos 2 na função, sua imagem é deslocada 2 posições para cima e, assim, obtemos mais 2 raízes. Perceba que para $x = \pm\pi$, a função g se anula:

$$g(\pm\pi) = 2 - 2^{\left(\frac{\pm\pi}{\pi}\right)^2} = 0$$

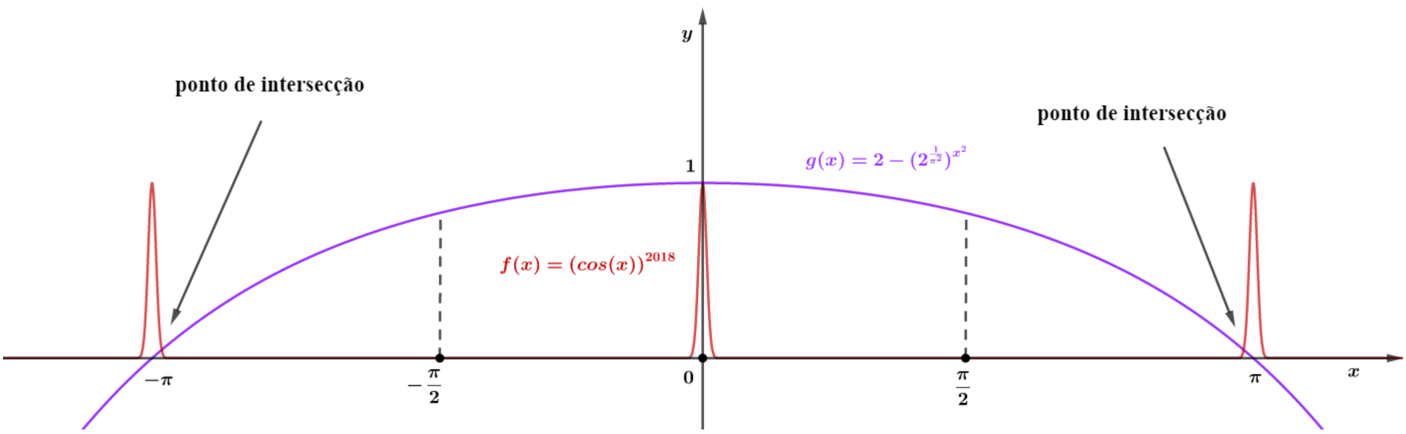
Logo, essas são as raízes de g:



Vamos analisar a função f para $x > 0$:

- A imagem de $f(x) = (\cos x)^{2018}$ é o intervalo $[0, 1]$.
- f se anula nos pontos $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- f é decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e crescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

No intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, f decresce rapidamente, pois seu expoente é 2018 e sua imagem é menor do que 1. No intervalo, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, ele volta a crescer e se aproxima de 1 apenas quando x estiver próximo de 1. Desse modo, temos o seguinte esboço:



Perceba que os gráficos apenas se interceptam 3 vezes.

Gabarito: "d".

---

65. (IME/2019)

Determine todas as soluções da equação

$$4sen^2(7x) \cdot \cos(2x) + 2sen(9x) + 8sen^2(x) + 5\cos(2x) + 2sen(5x) = 4$$

no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Comentários

Para encontrar as soluções da equação, devemos simplificá-lo:

$$4sen^2(7x)\cdot cos(2x)+2sen(9x)+8sen^2(x)+5\,cos(2x)+2sen(5x)=4$$

$$4sen^2(7x)\cdot cos(2x)+2\big(sen(9x)+sen(5x)\big)+4(2sen^2(x)-1)+5\,cos(2x)=0$$

Sabendo que:

$$sen(p)+sen(q)=2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(2x)=1-sen^2(x)$$

Temos:

$$sen(9x)+sen(5x)=2sen\left(\frac{9x+5x}{2}\right)cos\left(\frac{9x-5x}{2}\right)=2sen(7x)\cos(2x)$$

$$2sen^2(x)-1=-\cos(2x)$$

Desse modo, a equação pode ser reescrita como:

$$\Rightarrow 4sen^2(7x)\cdot cos(2x)+2(2sen(7x)\cos(2x))+4(-\cos(2x))+5\,cos(2x)=0$$

$$4sen^2(7x)\cdot cos(2x)+4sen(7x)\cos(2x)+\cos(2x)=0$$

$$\cos(2x)\,(4sen^2(7x)+4sen(7x)+1)=0$$

$$\Rightarrow \cos(2x)\,(2sen(7x)+1)^2=0$$

Assim:

$I)\ \cos(2x)=0\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, devemos ter:

$$\boxed{x=\frac{7\pi}{4}}$$

$II)\ 2sen(7x)+1=0\Rightarrow sen(7x)=-\frac{1}{2}$

$$(i)\ \ 7x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7},k\in\mathbb{Z}$$

Ou

$$(ii)\ \ 7x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{11\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7},k\in\mathbb{Z}$$

Para $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, temos:

$$(i)\ \ \frac{3\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\le 2\pi\Rightarrow\frac{3}{2}\le\frac{1}{6}+\frac{2k}{7}\le 2$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\le\frac{2k}{7}\le 2-\frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{6}\le\frac{2k}{7}\le\frac{11}{6}$$

$$56 \leq 12k \leq 77$$

$$\Rightarrow k = 5 \; ou \; k = 6$$

$$k = 5 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{7} \Rightarrow \boxed{x = \frac{67\pi}{42}}$$

$$k = 6 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{7} \Rightarrow \boxed{x = \frac{79\pi}{42}}$$

$$(ii) \quad \frac{3\pi}{2} \leq \frac{11\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7} \leq 2\pi \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{11}{42} + \frac{2k}{7} \leq 2$$

$$\frac{3}{2} - \frac{11}{42} \leq \frac{2k}{7} \leq 2 - \frac{11}{42}$$

$$\frac{52}{42} \leq \frac{2k}{7} \leq \frac{73}{42}$$

$$\frac{52}{6} \leq \frac{12k}{6} \leq \frac{73}{6}$$

$$\Rightarrow k = 5 \; ou \; k = 6$$

$$k = 5 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{42} + \frac{10\pi}{7} \Rightarrow \boxed{x = \frac{71\pi}{42}}$$

$$k = 6 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{42} + \frac{12\pi}{7} \Rightarrow \boxed{x = \frac{83\pi}{42}}$$

Portanto, a solução da equação é dada por:

$$S = \left\{\frac{7\pi}{4}; \frac{67\pi}{42}; \frac{71\pi}{42}; \frac{79\pi}{42}; \frac{83\pi}{42}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{7\pi}{4}; \frac{67\pi}{42}; \frac{71\pi}{42}; \frac{79\pi}{42}; \frac{83\pi}{42}\right\}}$

---

66. (IME/2018)

A menor raiz real positiva da equação $arctg\left(x \cdot tg\left(arcsen\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) = \frac{2\pi}{x+2}$ encontra-se no intervalo:

a) $(0, 1]$

b) $(1, 2]$

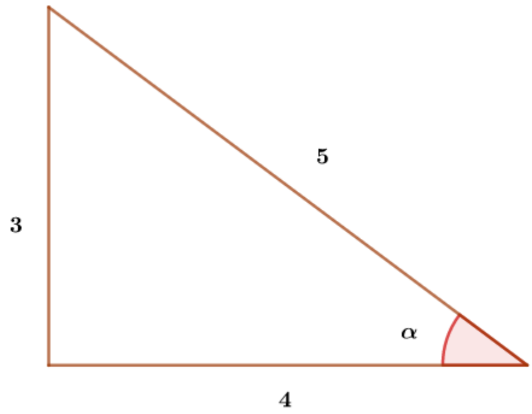
c) $(2, 3]$

d) $(3, 4]$

e) $(4, 5]$

Comentários

Perceba que $tg\left(\underbrace{arcsen\left(\frac{3}{5}\right)}_{\alpha}\right) = \frac{3}{4}$:



Assim, temos:

$$arctg\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{2\pi}{x+2}$$

Sabemos que a imagem da função arco-tangente é o intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Assim, temos:

$$-\frac{\pi}{2} < arctg\left(\frac{3}{4}x\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{x+2} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{4} \Rightarrow x > 2$$

$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} \Rightarrow x < -6$$

Como o problema pede a menor solução positiva, vamos considerar $x > 2$:

Retornando à equação, temos:

$$tg\left(arctg\left(\frac{3}{4}x\right)\right) = tg\left(\frac{2\pi}{x+2}\right)$$

$$\frac{3}{4}x = tg\left(\frac{2\pi}{x+2}\right)$$

Seja as funções $f(x) = \frac{3}{4}x$ e $g(x) = tg\left(\frac{2\pi}{x+2}\right)$. No intervalo $x > 2$, a função f é estritamente crescente e a função g é estritamente decrescente. Para encontrar a solução dessa equação, devemos usar o método da tentativa:

Para $x = 2$:

$$f(2) = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

$$g(2) = tg\left(\frac{2\pi}{4}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow g(2) > f(2)$$

Para $x = 3$:

$$f(3) = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$g(3) = tg\left(\frac{2\pi}{5}\right) = tg(72°)$$

Para $x = 4$:

$$f(4) = 3$$

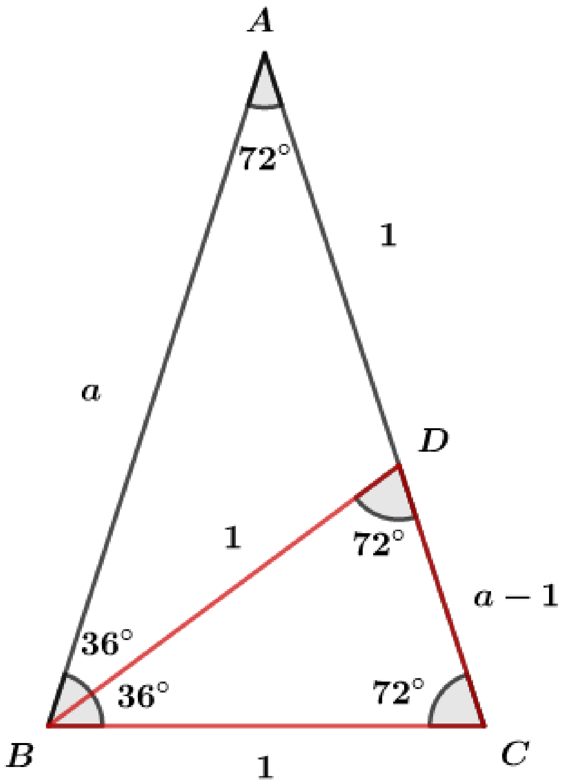
$$g(4) = tg\left(\frac{2\pi}{6}\right) = tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow g(4) < f(4)$$

Perceba que $2 < x < 4$, pois para $x = 2$, $g(2) > f(2)$ e para $x = 4, g(4) < f(4)$.

Temos que descobrir o valor de $tg(72°)$ para saber se $3 < x < 4$:

Vamos usar o triângulo isósceles para encontrar esse valor:



Devemos encontrar o valor de a. Perceba que os triângulos ABC e BCD são semelhantes. Dessa forma:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$$
$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a-1}$$
$$a^2 - a - 1 = 0$$
$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $a > 0$, temos:

$$a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Vamos usar a Lei dos Cossenos para o triângulo ABC:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2(BC)(CA)\cos(72°)$$
$$a^2 = 1 + a^2 - 2a\cos(72°)$$
$$\cos(72°) = \frac{1}{2a}$$
$$\sec(72°) = 2a = \sqrt{5} + 1$$

Usando a relação $\sec^2 72° = 1 + tg^2 72°$:

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^2 = 1 + tg^2(72°)$$
$$5 + 2\sqrt{5} = tg^2(72°)$$

Como $5 + 2\sqrt{5} > 2{,}25$, temos:

$$g(3) > f(3)$$

Portanto, podemos concluir que $3 < x < 4$.

Gabarito: “d”.

---

67. (IME/2018)

Sabendo que $|x| \le \frac{\pi}{6}$ e que x satisfaz a equação abaixo

$$\frac{3 - cosx(4cosx + senx)}{10sen^2x - 8senxcosx} = \frac{1}{2}$$

Determine os possíveis valores de x.

Comentários

Inicialmente, devemos simplificar a equação:

$$\frac{3 - cosx(4cosx + senx)}{10sen^2x - 8senxcosx} = \frac{1}{2}$$
$$6 - 8\cos^2 x - 2senxcosx = 10sen^2x - 8senxcosx$$
$$6 - 8(1 - sen^2x) + 6senxcosx - 10sen^2x = 0$$

$$-2sen^2x + 6senxcosx - 2 = 0$$

Como $|x| \leq \pi/6$, podemos dividir a equação por $\cos^2 x$:

$$-\frac{2sen^2x}{\cos^2 x} + \frac{6senxcosx}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos^2 x} = 0$$

$$-2tg^2x + 6tgx - 2\sec^2 x = 0$$

Fazendo $\sec^2 x = 1 + tg^2x$, temos:

$$-2tg^2x + 6tgx - 2(1 + tg^2x) = 0$$

$$-4tg^2x + 6tgx - 2 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$tgx = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-4} = 1\ ou\ \frac{1}{2}$$

Temos que verificar a condição $|x| \leq \pi/6$:

$$tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para esse valor de x, o resultado não condiz com a condição $|x| \leq \pi/6$. Portanto, não é solução.

Para a outra raíz:

$$tgx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Devemos verificar se esse valor atende à condição. Usando as seguintes aproximações:

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0{,}57$$

$$tgx = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Como a função tangente é crescente para x positivo e $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) > tgx$, temos:

$$x = arctg\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{6}$$

Dessa forma, encontramos uma única solução:

$$x = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{x = arctg\left(\frac{1}{2}\right)}$

---

68. (IME/2016)

Determine o conjunto solução da equação:

$$(sen\ x)\left(1 + tgx\ tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 4 - cotgx$$

Comentários

Preliminarmente, devemos analisar a condição de existência da equação:

$$tgx = \frac{senx}{cosx} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$cotgx = \frac{cosx}{senx} \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Unindo as restrições, temos:

$$x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Agora, podemos resolver a equação:

$$(sen\ x)\left(1 + tgx\ tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 4 - cotgx$$

Vamos escrever os termos trigonométricos com arco metade:

$$senx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$tgx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$cotgx = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\left(1 + \left(\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 4 - \left(\frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Fazendo $tg\left(\frac{x}{2}\right) = y$:

$$\Rightarrow \left(\frac{2y}{1 + y^2}\right)\left(1 + \left(\frac{2y}{1 - y^2}\right)y\right) = 4 - \left(\frac{1 - y^2}{2y}\right)$$

$$\left(\frac{2y}{1 + y^2}\right)\left(\frac{1 + y^2}{1 - y^2}\right) = 4 - \left(\frac{1 - y^2}{2y}\right)$$

$$\frac{2y}{1 - y^2} = 4 - \left(\frac{1 - y^2}{2y}\right)$$

Perceba que os termos coloridos podem ser escritos como:

$$tg(x) = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Dessa forma, temos:

$$tgx = 4 - \frac{1}{tgx}$$

$$\Rightarrow tg^2x - 4tgx + 1 = 0$$

Raízes:

$$tgx = 2 \pm \sqrt{3}$$

Lembra do bizu na aula teórica? Conhecemos esses valores de tangente:

Para $tgx = 2 + \sqrt{3}$:

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $tgx = 2 - \sqrt{3}$:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ ou \ x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ ou \ x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

---

69. (IME/2015)

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \ln \frac{8 + 3senx - sen3x}{8 - 4senx + 2sen2xcosx}$$

Marque a opção verdadeira:

a) f não tem raízes reais

b) f é uma função ímpar

c) f é uma função par

d) $|f(x)| \leq 1$

e) f é sobrejetora

Comentários

Temos que analisar cada alternativa. Vamos simplificar a função:

$$f(x) = \ln \frac{8 + 3senx - sen3x}{8 - 4senx + 2sen2xcosx}$$

Fazendo $sen2x = 2senxcosx$ e $sen3x = 3senx - 4sen^3x$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 3senx - (3senx - 4sen^3x)}{8 - 4senx + 2(2senxcosx)cosx}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 3senx - 3senx + 4sen^3x}{8 - 4senx + 4senxcos^2x}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4senx + 4senx(1 - sen^2x)}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right)$$

a) Verificando se f tem raízes:

$$f(x) = 0$$

$$\ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right) = 0$$

$$\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x} = 1$$

$$8sen^3x = 0$$

$$senx = 0$$

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

f tem raízes reais. Portanto, alternativa falsa.

b) Verificando a paridade da função:

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3(-x)}{8 - 4sen^3(-x)}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{8 - 4sen^3x}{8 + 4sen^3x}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right)^{-1}$$

$$f(-x) = -\ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Portanto, a função é ímpar. Alternativa correta.

c) Falsa, como provado na letra b.

d) Falsa, pois para $x = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\frac{8+4}{8-4}\right) = \ln 3 > 1$$

e) Falsa, pois a imagem de f não é o conjunto dos reais:

$$-1 \leq senx \leq 1$$
$$-1 \leq sen^3x \leq 1$$
$$-4 \leq 4sen^3x \leq 4$$
$$\Rightarrow 4 \leq 8 + 4sen^3x \leq 12$$
$$-1 \leq -sen^3x \leq 1$$
$$-4 \leq -4sen^3x \leq 4$$
$$\Rightarrow 4 \leq 8 - 4sen^3x \leq 12$$

Assim, temos a desigualdade:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x} \leq 3$$
$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq f(x) \leq \ln 3$$

Gabarito: "b".

---

70. (IME/2015)

O número de soluções da equação $\cos(8x) = sen(2x) + tg^2(x) + cotg^2(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

e) 8

Comentários

Analisando a equação:

$$\cos(8x) = sen(2x) + tg^2x + cotg^2x$$
$$tg^2x + \frac{1}{tg^2x} = \cos(8x) - sen(2x)$$

Nessa questão, devemos usar a desigualdade das médias para resolvê-la:

$$MA \geq MG$$

Então, vamos analisar os termos $tg^2x + cotg^2x$:

$$\frac{tg^2x + \frac{1}{tg^2x}}{2} \geq \sqrt{tg^2x \cdot \left(\frac{1}{tg^2x}\right)}$$

$$\Rightarrow tg^2x + \frac{1}{tg^2x} \geq 2$$

$$\Rightarrow \cos(8x) - sen(2x) \geq 2$$

Agora, devemos perceber que:

$$|\cos\,(8x)| \leq 1$$

$$|sen(2x)| \leq 1$$

$$\cos(8x) - sen(2x) \geq 2$$

Essa desigualdade é satisfeita quando $\cos(8x) = 1\ e\ sen(2x) = -1$. Assim, temos:

$$\cos(8x) = 1 \Rightarrow 8x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$sen(2x) = -1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, as soluções devem satisfazer ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Para o intervalo pedido, encontramos as seguintes soluções:

$$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}\ e\ x = \frac{7\pi}{4}$$

Assim, temos apenas 2 soluções.

Gabarito: "c".

---

71. (IME/2014)

Resolva a equação $(\log_{\cos x} sen^2 x) \cdot (\log_{\cos^2 x} sen\, x) = 4$.

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência do logaritmo:

$$cosx > 0$$

$$senx > 0$$

$$cosx \neq 1$$

Dessas restrições, concluímos que x pertence ao primeiro quadrante com $0 < x < \pi/2$.

Simplificando a equação, temos:

$$(\log_{\cos x} sen^2 x) \cdot (\log_{\cos^2 x} sen\, x) = 4$$

Usando as propriedades do logaritmo:

$$2(\log_{\cos x} senx)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(\log_{cosx} sen\, x)=4$$

$$(\log_{cosx} senx)^2=4$$

$$\log_{\cos x} senx=\pm 2$$

$$senx=\cos^2 x\ \ ou\ senx=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Para $senx=\cos^2 x$:

$$senx=1-sen^2x$$

$$sen^2x+senx-1=0$$

$$senx=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Como $senx>0$, temos:

$$senx=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$cosx=\sqrt{1-sen^2x}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}>0$$

$$cosx\neq 1$$

Portanto, temos a seguinte solução:

$$\Rightarrow x=arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Para $senx=\frac{1}{\cos^2 x}$:

Devemos verificar a condição de existência do logaritmo:

$$cosx\neq 1\ e\ cosx>0\Rightarrow 0<cosx<1$$

$$\cos^2 x<1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}>1$$

Como $senx=1/\cos^2 x$:

$$\Rightarrow senx>1$$

Isso é um absurdo, logo, para essa relação, não temos solução.

Portanto, temos apenas a seguinte solução:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x=arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x=arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

72. (IME/2012)

Os ângulos de um triângulo obtusângulo são $105°, \alpha$ e β. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$ (real), determine:

a) as raízes da equação $3secx + m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 3cosx + \sqrt{3}senx$, em função de m;

b) o valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

Comentários

a) Vamos isolar o termo com m e simplificar a equação:

$$3secx + m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 3cosx + \sqrt{3}senx$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 3cosx + \sqrt{3}senx - \frac{3}{\cos x}$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = \frac{3\cos^2 x + \sqrt{3}senxcosx - 3}{cosx}$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = \frac{3(\cos^2 x - 1) + \sqrt{3}senxcosx}{cosx}$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = \frac{3(-sen^2x) + \sqrt{3}senxcosx}{cosx}$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = \frac{senx}{cosx}(\sqrt{3}cosx - 3senx)$$

$$(m - tgx)(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 0$$

$$\sqrt{3}cosx - 3senx = 0 \Rightarrow tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$ou$$

$$m = tgx \Rightarrow x = arctg(m) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Das relações de ângulo do triângulo, temos que:

$$\alpha + \beta = 180° - 105° = 75°$$

Queremos que α e β sejam raízes da equação da letra (a). Então, podemos supor:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$x = arctg(m) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta = arctg(m)$$

$$\alpha + \beta = 75° = \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{6} + arctg(m) = \frac{5\pi}{12}$$

$$arctg(m) = \frac{3\pi}{12}$$

$$arctg(m) = \frac{\pi}{4}$$

$$m = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Portanto, o valor de m que torna α e β raízes da equação é dado por:

$$m = 1$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = arctg(m) + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$ **b)** $\boldsymbol{m = 1}$

---

73. (IME/2011)

O valor de x que satisfaz a equação $sen\big(arccotg(1 + x)\big) = \cos\big(arctg(x)\big)$:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) $-\frac{3}{2}$

Comentários

Fazendo $\alpha = arccotg(1 + x)$ e $\beta = arctg(x)$, temos:

$$sen\big(arccotg(1 + x)\big) = \cos\big(arctg(x)\big) \Rightarrow sen\alpha = cos\beta$$

Disso, concluímos que α e β são complementares:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\ ou\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

Para $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$:

$$cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = sen\beta$$

$$\Rightarrow cos\alpha = sen\beta$$

Dividindo $sen\alpha = cos\beta$ por $cos\alpha$:

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos\beta}{cos\alpha} = \frac{cos\beta}{sen\beta}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$$

$$\alpha = arccotg(1 + x) \Rightarrow cotg\alpha = 1 + x \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{1 + x}$$

$$\beta = arctg(x) \Rightarrow tg\beta = x$$

Substituindo esses valores na equação, temos:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x}$$

$$x=1+x$$

$$0=1$$

Isso é um absurdo, logo não convém.

Para $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$:

$$cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-sen\beta$$

$$\Rightarrow cos\alpha=-sen\beta$$

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha}=\frac{cos\beta}{-sen\beta}$$

$$tg\alpha=\frac{1}{-tg\beta}$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{-x}$$

$$-x=1+x$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Portanto, temos apenas uma única solução:

$$S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Gabarito: “d”.

11. Considerações Finais da Aula

Vimos tudo que precisamos saber para resolver as questões de trigonometria das provas.

Continue se esforçando! Tente resolver todos os exercícios dessa aula. Caso você encontre alguma dificuldade ou fique com alguma dúvida não hesite em me procurar!

A próxima aula será uma introdução à geometria plana, outro assunto que cai bastante nessas provas. Então, prepare-se!

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

12. Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. 9. ed. Atual, 2013. 311p.

[2] Antar Neto, Aref. Sampaio, José Luiz Pereira. Lapa, Nilton. Cavallantte, Sidney Luiz. Noções de Matemática, v.3. 2 ed. Vestseller, 2009. 324p.

[3] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Perdigão do Carmo, Manfredo. Trigonometria Números Complexos. 3 ed. SBM, 2005. 164p.

[4] Rufino, Marcelo. Elementos da Matemática volume 5 – Trigonometria e Geometria Espacial. 1 ed. Vestseller, 2017. 552p.