1.14 Números Complexos

1.14.1 Introdução

(a) Do mesmo modo que a generalização da noção de raiz de índice qualquer para um número positivo exigiu a introdução do conceito de número irracional (p.ex.: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$), também a impossibilidade da determinação de raízes de índice par de um número negativo levou à noção de número imaginário.

(b) Os números positivos e negativos recebem, em conjunto, o nome de **números reais**.

Em contrapartida, denomina-se **número imaginário** ou **número complexo** à toda expressão de forma $x + \boldsymbol{j}y$ [1], na qual x e y são números reais e $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$ é a **unidade imaginária**.

(c) Conforme já vimos na subseção 1.6.2, as raízes de uma equação do 2º grau,

$$az^2 + bz + c = 0$$

são dadas pela conhecida fórmula

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \qquad \textbf{(12)}$$

Obtemos, então duas raízes reais e desiguais quando o discriminante é positivo e uma raiz real dupla se ele for nulo.

Quando o discriminante é negativo, a fórmula **(12)** não conduz a nenhuma raiz real e o trinômio $az^2 + bz + c = 0$ é sempre diferente de zero qualquer que seja o valor real que se atribua à z. Por exemplo, se tentarmos resolver a equação

$$z^2 + 4z + 13 = 0$$

que já havia sido abordada no Exemplo 2, item c, somos conduzidos a:

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

que não representa nenhum número real. Por outro lado, se operarmos normalmente como se $\sqrt{-1}$ fosse um número, teremos:

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{36(-1)}}{2} = \frac{-4 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm 3\sqrt{-1}$$

---

[1] Os matemáticos usam $\underline{i}$ no lugar do $\boldsymbol{j}$ e os eletricistas preferem a letra $\underline{j}$ minúscula normal, já que estes últimos usam a letra $\underline{i}$ para representar a corrente. No entanto, na Unidade 3, Matrizes, é quase que universal a notação a_{ij} para representar o elemento genérico. Assim sendo optamos por $\boldsymbol{j}$ minúscula em negrita e itálica para representar a unidade imaginária.

ou seja

$$z_1 = -2 + 3\sqrt{-1}$$

e

$$z_1 = -2 - 3\sqrt{-1}$$

Vamos substituir tais "números" na equação original a fim de verificar se eles são realmente raízes. Ao procedermos desta forma devemos encarar o símbolo $\sqrt{-1}$ como se ele fosse mesmo um número em especial, lembrando inclusive que o seu quadrado é:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 .$$

Temos então:

$$\begin{aligned} (z_1)^2 + 4z_1 + 13 &= \left(-2 + 3\sqrt{-1}\right)^2 + 4\left(-2 + 3\sqrt{-1}\right) + 13 = \\ &= 4 - 12\sqrt{-1} - 9 - 8 + 12\sqrt{-1} + 13 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (z_2)^2 + 4z_2 + 13 &= \left(-2 - 3\sqrt{-1}\right)^2 + 4\left(-2 - 3\sqrt{-1}\right) + 13 = \\ &= 4 + 12\sqrt{-1} - 9 - 8 - 12\sqrt{-1} + 13 = 0 \end{aligned}$$

A partir de tais considerações conclui-se ser possível resolver a equação do 2º grau mesmo quando temos $b^2 - 4ac < 0$, se operarmos com o símbolo $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$ como se fosse um número. Conforme já mencionado ele deve ter a propriedade de que $\boldsymbol{j}^2 = -1$, e deve operar ao lado dos números reais com as mesmas leis que regem formalmente tais números. Temos então os números complexos da forma $x + \boldsymbol{j}y$ onde, conforme já mencionado, x e y são reais e $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$, tais como:

$$4 + \boldsymbol{j}6 \ , \quad \frac{1}{3} - \boldsymbol{j}2 \ , \quad \sqrt{3} + \boldsymbol{j}\frac{4}{9} \ , \quad -2 - \boldsymbol{j}\frac{3}{\sqrt{7}}$$

onde o novo elemento $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$ é denominado **unidade imaginária**.

Utilizando tal notação, as raízes da equação que acabamos de resolver assumem as formas seguintes:

$$z_1 = -2 + \boldsymbol{j}3$$

e

$$z_2 = -2 - \boldsymbol{j}3$$

e no final da subseção **1.14.3** veremos por que tais raízes constituem um par complexo conjugado.

Temos então de forma geral:

$$\boxed{z = x + \boldsymbol{j}y} \quad \textbf{(34)}$$

onde as grandezas reais x e y são denominadas as partes **real** e **imaginária** de z, respectivamente. Podemos, inclusive, usar as notações $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para representar tais partes, ou seja:

$$\boxed{x = \operatorname{Re}(z)} \quad \textbf{(35)}$$

e

$$\boxed{y = \operatorname{Im}(z)} \quad \textbf{(36)}$$

Em particular quando $x = 0$ temos a expressão $\boldsymbol{j}y$ que será denominada **número imaginário puro** ou simplesmente **imaginário**, reservando-se o nome **número complexo** para o caso geral.

Quando $y = 0$ o número complexo reduz-se à sua parte real x.

(d) Uma vez que os números complexos não pertencem ao corpo dos números reais, alguns "desavisados de plantão" podem pensar que tais soluções são meramente fictícias e não representam nenhum fenômeno físico real. Para estes é bom mencionar que a corrente alternada que chega às indústrias, hospitais e residências, é representada por funções senoidais ou cossenoidais, que têm a mesma representação gráfica a menos de uma defasagem de 90º. Acontece que o equacionamento de circuitos elétricos sob excitação harmônica (senoidal) é bem mais simples no domínio da freqüência, no qual a solução para a corrente é dada por um "fasor" $\dot{I}$, que é um **número complexo**. A fim de relacionarmos o domínio da freqüência com o domínio do tempo é utilizada a relação

$$i(t) = \operatorname{Re}\left(\dot{I}e^{j\omega t}\right)$$

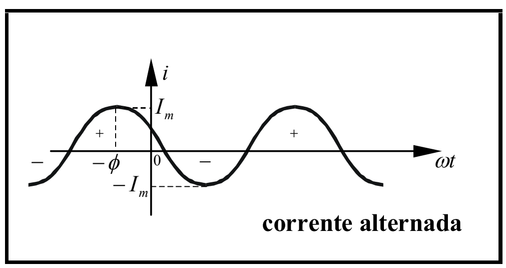

Fig. 1.12

que é bem conhecida do pessoal da área da Eletricidade. Ora, a corrente alternada senoidal do tipo $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ tem existência física real (qualquer dúvida é só tocar com um dedo no terminal da fase de uma tomada energizada!). Assim sendo, as **soluções complexas** ou **imaginárias** (sendo este último termo um tanto impróprio pois pode levar à conclusões erradas) estão bem longe de serem fictícias sendo, é bem verdade, artifícios engenhosos, nascidos no problema primordial de lidar com raízes de índices pares de números negativos.

Exemplo 1.12

Determine $x \in \mathbb{R}$ para que o número complexo $\left(5x^2 - 7x\right) + \boldsymbol{j}7$ seja imaginário puro.

Solução:

Para ele ser um número imaginário puro devemos ter parte real nula, ou seja:

$$5x^2 - 7x = 0 \therefore x(5x-7) = 0 \therefore \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

1.14.2 Potências de *j*

As potências sucessivas de ***j*** reproduzem-se periodicamente de quatro em quatro, ou seja:

$$\boldsymbol{j}^0 = +1$$

$$\boldsymbol{j}^1 = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$\boldsymbol{j}^3 = \boldsymbol{j}^2 . \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^4 = \boldsymbol{j}^2 . \boldsymbol{j}^2 = (-1)(-1) = +1$$

$$\boldsymbol{j}^5 = \boldsymbol{j}^2 . \boldsymbol{j}^3 = (-1)(-\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^6 = \boldsymbol{j}^3 . \boldsymbol{j}^3 = (-\boldsymbol{j})(-\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}^2 = -1$$

$$\boldsymbol{j}^7 = \boldsymbol{j}^3 . \boldsymbol{j}^4 = (-\boldsymbol{j})(+1) = -\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^8 = \boldsymbol{j}^4 . \boldsymbol{j}^4 = (+1)(+1) = +1$$

$$\boldsymbol{j}^9 = \boldsymbol{j}^4 . \boldsymbol{j}^5 = (+1)(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}$$

....

Podemos escrever em geral:

$$\boldsymbol{j}^{4p} = \left(\boldsymbol{j}^4\right)^p = 1$$

$$\boldsymbol{j}^{4p+1} = \left(\boldsymbol{j}^4\right)^p \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^{4p+2} = \left(\boldsymbol{j}^4\right)^p \boldsymbol{j}^2 = -1$$

$$\boldsymbol{j}^{4p+3} = \left(\boldsymbol{j}^4\right)^p \boldsymbol{j}^3 = -\boldsymbol{j}$$

Regra geral: para determinar o valor de uma potência de ***j*** qualquer, basta dividir o expoente da potência por 4 e elevar ***j*** à potência determinada pelo resto da divisão.

Exemplo 1.13

Efetuar as seguintes potências:

a) $\boldsymbol{j}^7$; b) $\boldsymbol{j}^{513}$; c) $\boldsymbol{j}^{1998}$; d) $\boldsymbol{j}^{500}$

Solução:

a) $$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{j}^7 = \boldsymbol{j}^3 = -\boldsymbol{j}$$

b) $$\begin{array}{r|l} 5'1'3' & 4 \\ \cline{2-2} 11 & 128 \\ 33 & \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{j}^{513} = \boldsymbol{j}$$

c) $$\begin{array}{r|l} 1'9'9'8' & 4 \\ \cline{2-2} 39 & 499 \\ 38 & \\ 2 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{j}^{1998} = \boldsymbol{j}^2 = -1$$

d) $$\begin{array}{r|l} 5'0'0' & 4 \\ \cline{2-2} 10 & 125 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \mathrm{j}^{500} = \mathrm{j}^0 = 1$$

1.14.3 Representações e Formas de um Número Complexo:

a) Representações:

Um número complexo pode ser geometricamente representado por um ponto no plano complexo ou plano de Argand-Gauss, conforme mostrado a seguir:

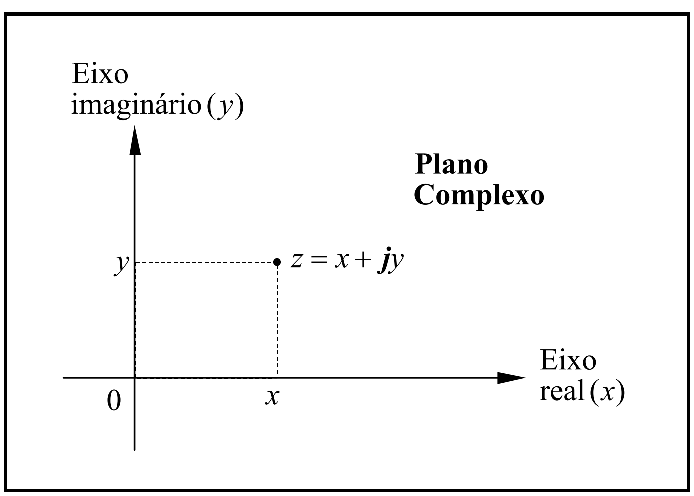

Fig. 1.13

Uma representação geométrica equivalente, conforme na próxima figura, é feita por um segmento orientado, da origem ao ponto $z = x + \boldsymbol{j}y$.

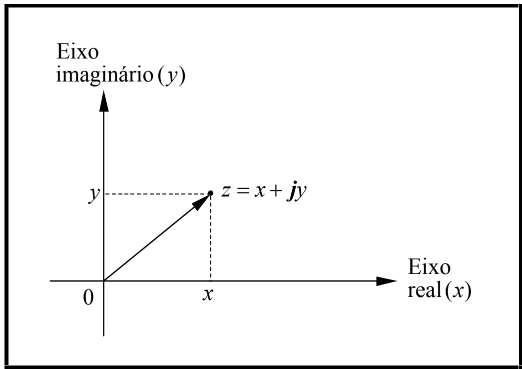

Fig. 1.14

Assim a adição ou subtração de duas grandezas complexas pode ser realizada graficamente, conforme ilustração nas partes (a) e (b) da figura 1.15, por meio das regras comumente usadas para a adição e subtração de vetores, já que tanto as grandezas complexas quanto os vetores podem ser representados por intermédio de segmentos orientados.

Na figura 1.16 o símbolo $|\ z\ |$ significa o comprimento do segmento orientado que representa z, ou seja, é a distância da origem até o ponto representado pelo complexo z, e é denominado módulo, norma ou valor absoluto de z.

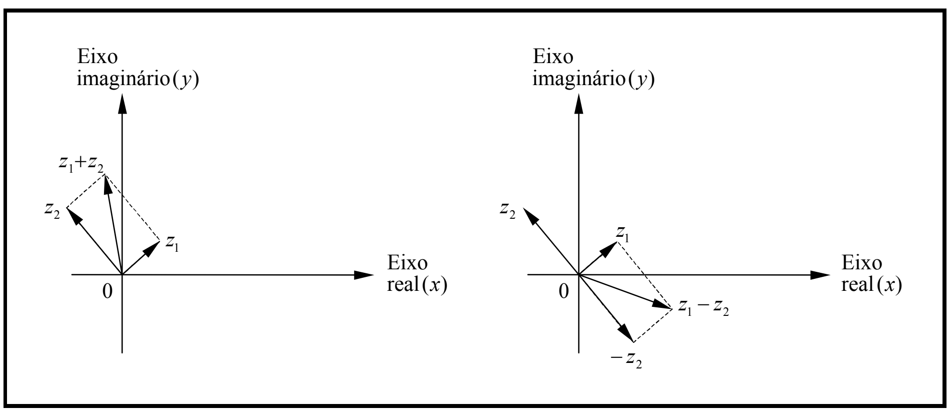

Fig. 1.15

O ângulo do segmento orientado, medido positivamente no sentido anti-horário e negativamente no sentido horário, a partir do semi-eixo real positivo, é notado por θ ou arg z, sendo chamado de **ângulo polar**, **argumento** ou **fase** de z.

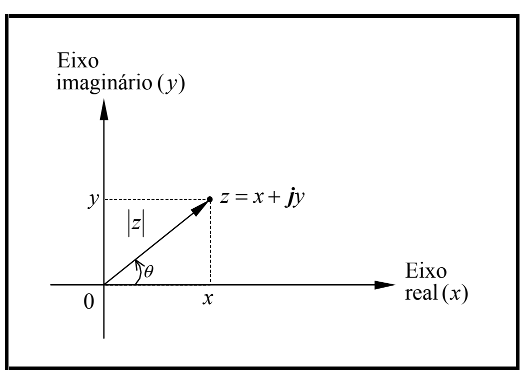

Fig. 1.16

Da última figura depreende-se que:

$$\boxed{x = |z| \cos \theta \leq |z|} \quad \textbf{(37)}$$

$$\boxed{y = |z| \operatorname{sen} \theta \leq |z|} \quad \textbf{(38)}$$

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \textbf{(39)}$$

$$\boxed{\theta = arc\ tg\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \textbf{(40)}$$

Observações:

(1ª) Nos livros de origem americana encontra-se, muitas vezes, a notação tg^{-1} ao invés de arc tg para a função inversa da tangente. Isto também ocorre nas calculadoras eletrônicas.

(2ª) Para um dado $z \neq 0$, o ângulo (argumento) θ é determinado a menos de múltiplos inteiros de 360º (2π rad), ou seja,

$$\theta = \theta_0 + k360^{\text{o}}\ ;\ k = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ .\ .\ .$$

ou

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi\ \text{rad}\ ;\ k = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ .\ .\ .$$

O valor de θ que existe no intervalo $-180^{\text{o}} < \theta \leq 180^{\text{o}} \left(-\pi\ \text{rad} < \theta \leq \pi\ \text{rad}\right)$ é chamado de **valor principal** do argumento de *z*, e notado por θ_0 nas equações acima. Na prática, salvo observação em contrário, estaremos sempre trabalhando com o argumento principal.

Face às orientações de ângulos já mencionadas e levando-se em conta os intervalos entre os limites -180^{o} e 180º, teremos:

- ângulos no 1º e 2º quadrantes $\left(0 < \theta < 180^{\text{o}}\right)$ serão sempre positivos e orientados no sentido anti-horário a partir do semi-eixo real positivo.

- ângulos no 3º e 4º quadrantes $\left(-180 < \theta < 0\right)$ serão sempre negativos e orientados no sentido horário a partir do semi-eixo real positivo.

(3ª) Levando em conta tais convenções e limites, concluímos que quando *z* for um número real negativo o seu argumento principal será $\pi\ \text{rad}\left(180^{\text{o}}\right)$ ao invés de $-\pi\ \text{rad}\left(-180\right)$, uma vez que o valor -180^{o} não está incluído no intervalo $-180^{\text{o}} < \theta \leq 180^{\text{o}}$.

b) As Fórmulas de Euler e suas decorrências:

Antes de passarmos às diversas formas de um número complexo vamos instituir as fórmulas de Euler, que são de importância capital para o prosseguimento de nosso estudo.

Admitindo que uma função $F(x)$ pode ser representada por uma série de potências de *x*, essa série deve ser da forma de McLaurin,

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\frac{x^3}{3!}F'''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}F^{n-1}(0)+\ldots$$

em que a função e todas as suas derivadas existem para $x=0$.

Desenvolvendo $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ e $e^{j\theta}$ em potências de θ pela série de McLaruin temos:

$$\operatorname{sen}\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\ldots$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\ldots$$

$$e^{j\theta}=1+\boldsymbol{j}\theta-\frac{\theta^2}{2!}-\boldsymbol{j}\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\boldsymbol{j}\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^6}{6!}-\boldsymbol{j}\frac{\theta^7}{7!}+\ldots$$

Reagrupando os termos de $e^{j\theta}$, temos:

$$e^{j\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\ldots\right)+\boldsymbol{j}\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\ldots\right)=\cos\theta+\boldsymbol{j}\operatorname{sen}\theta\,.$$

Assim sendo temos:

$$\boxed{e^{j\theta}=\cos\theta+\boldsymbol{j}\operatorname{sen}\theta} \quad \textbf{(41)}$$

e

$$\boxed{e^{-j\theta}=\cos\theta-\boldsymbol{j}\operatorname{sen}\theta} \quad \textbf{(42)}$$

conhecidas como fórmula de Euler, bem como suas decorrências:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}} \quad \textbf{(43)}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{\boldsymbol{j}2}} \quad \textbf{(44)}$$

que são de grande utilidade no trato com os números complexos de um modo geral.

c) Formas

c.1) Cartesiana ou Retangular

É a que já foi apresentada no início da presente seção, na equação (34), ou seja:

$$\boxed{z = x + \boldsymbol{j}y}. \quad \textbf{(34)}$$

c.2) Trigonométrica

Substituindo **(37)** e **(38)** em **(34)** temos:

$$z = x + \boldsymbol{j}y = |z|\cos\theta + \boldsymbol{j}|z|\operatorname{sen}\theta$$

o que implica em

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\theta)} \quad \textbf{(45)}$$

que é forma trigonométrica.

c.3) Exponencial ou de Euler

Pela equações **(41)** e **(45)** temos que:

$$\boxed{z = |z|e^{j\theta}} \quad \textbf{(46)}$$

que é a forma exponencial ou de Euler.

c.4) Polar ou de Steinmetz

A equação **(46)** pode também ser colocada na forma polar ou de Steinmetz:

$$\boxed{z = |z|\underline{/\theta}} \quad \textbf{(47)}$$

Na realidade o símbolo $\underline{/\theta}$ é, simplesmente, uma notação abreviada para $e^{j\theta}$, muito utilizada pelas pessoas da área de Eletricidade em geral.

É importante notar que uma interpretação correta do fator $e^{j\theta}$ necessita que o ângulo θ seja expresso em radianos. Na prática, o ângulo é muitas vezes apresentado em graus (lembrar que 1 grau = 1º $= \dfrac{\pi}{180}$ radiano $= \dfrac{\pi}{180}$ rad), mas toda vez que houver chance de confusão no emprego das equações **(41)** a **(47)**, o ângulo θ deverá ser convertido de graus para radianos. **A notação $e^{j\theta}$ com θ expresso em graus é, normalmente, considerada uma prática inadequada, mas escrever $\underline{/\theta}$ com θ em graus é bastante usual**.

Observações:

1ª) Ao passarmos um complexo da forma retangular (cartesiana) para a forma polar, devemos utilizar as equações **(39)** e **(40)**. Acontece que quando esta última equação é utilizada, a determinação do quadrante onde se situa o complexo $z = x + \boldsymbol{j}y$ pode ser feita pela inspeção dos sinais de x e y, a não ser que a calculadora em uso já tenha as rotinas REC $\rightarrow$ POL e POL $\rightarrow$ REC, que já fazem as transformações diretamente.

2ª) Cumpre ressaltar que no caso da transformação acima citada, as calculadoras científicas mais sofisticadas fornecem diretamente $|z|$ e θ_0 (argumento principal), seguindo para este último as regras de orientação de ângulos já descritas na 2ª observação da subseção 1.14.3.a:

- ângulos no 1º e 2º quadrantes ($0 < \theta < 180^\circ$ ou $0 < \theta < \pi$ rad) sempre positivos, e orientados no sentido anti-horário a partir do semi-eixo real positivo.

- Ângulos no 3º e 4º quadrantes ($-180^\circ < \theta < 0$ ou $-\pi$ rad $< \theta < 0$) sempre negativos, e orientados no sentido horário a partir do semi-eixo real positivo.

Exemplo 1.14

Exprimir cada um dos seguintes números complexos na forma polar:

a) $20e^{j\frac{\pi}{4}}$; b) $10e^{-j\frac{2\pi}{3}}$; c) $2e^{j\frac{5\pi}{6}}$

Solução:

a) $20e^{j\pi/4} = 20\underline{/\pi/4} = 20\underline{/45^\circ}$

b) $10e^{-j2\pi/3} = 10\underline{/-2\pi/3} = 10\underline{/-120^\circ}$

c) $2e^{j5\pi/6} = 2\underline{/5\pi/6} = 2\underline{/150^\circ}$

Exemplo 1.15

Passar os seguintes números complexos da forma polar para a forma retangular:

a) $53{,}0\ \underline{/160^\circ}$

b) $0{,}050\underline{/-20^\circ}$

c) $0{,}156\underline{/170^\circ}$

Observação: se a sua calculadora tem as rotinas RET $\rightarrow$ POL e POL $\rightarrow$ RET você **pode** e **deve** fazer as transformações diretamente, e depois voltar à forma original a fim de checar seus resultados.

Solução:

Pelas equações **(34)**, **(37)** e **(38)** temos que:

a) $53{,}0\,\underline{/160°} = 53{,}0\cos 160° + \boldsymbol{j}53{,}0\,\text{sen}\,160° = -49{,}8 + \boldsymbol{j}18{,}1$

b) $0{,}050\,\underline{/-20°} = 0{,}050\cos(-20°) + \boldsymbol{j}0{,}050\,\text{sen}(-20°) = 0{,}047 - \boldsymbol{j}0{,}017$

c) $0{,}156\,\underline{/170°} = 0{,}156\cos(170°) + \boldsymbol{j}0{,}156\,\text{sen}(170°) = -0{,}154 + \boldsymbol{j}0{,}027$

Exemplo 1.16

Converter os seguintes números complexos da forma retangular para a polar:

a) $3 + \boldsymbol{j}4$

b) $-3 + \boldsymbol{j}4$

c) $-3 - \boldsymbol{j}4$

Solução:

Se a sua calculadora não possuir as rotinas REC → POL e POL → REC, você deve tomar cuidado com os sinais das partes real e imaginária dos complexos, a fim de identificar com acerto o quadrante onde estão situados os números. A figura seguinte é de grande utilidade.

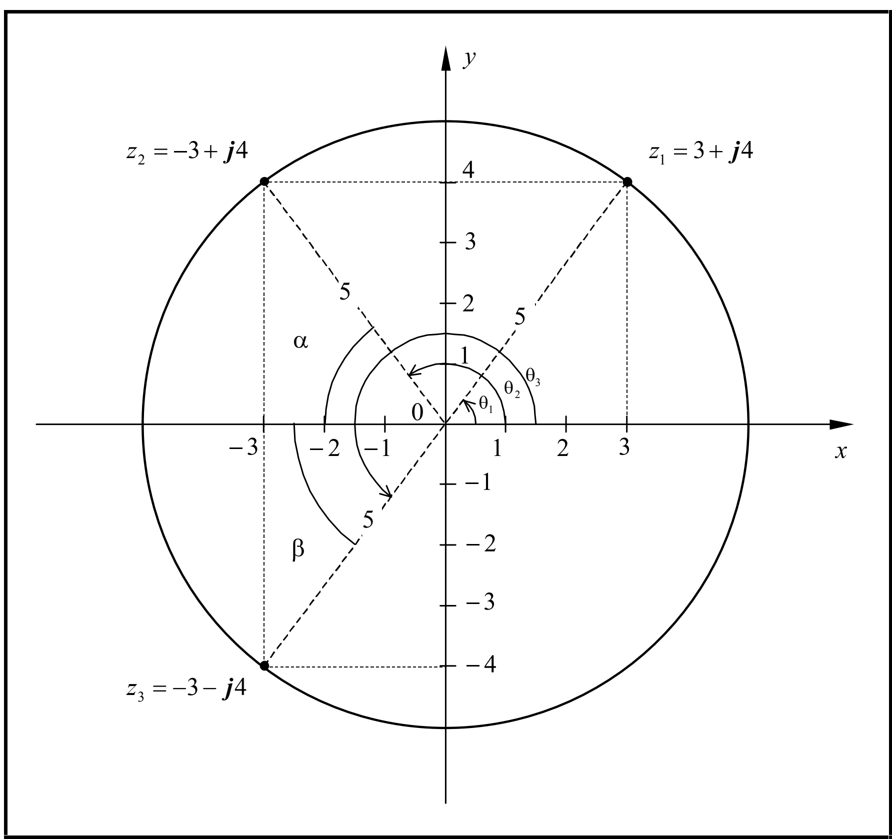

Fig. 1.17

a) Pelas equações **(39)** e **(40)** temos que:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta_1 = \text{arc tg}\,\frac{4}{3}$$

A tangente é positiva no 1º e 3º quadrantes. Uma vez que $x > 0$ e $y > 0$, θ_1 pertence ao 1º quadrante (vide figura 1.17).

$$\theta_1 = 53{,}1^\text{o}$$

Temos então:

$$z_1 = \underline{/53{,}1^\circ}$$

b) $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$$\theta_2 = \text{arc tg}\,\frac{4}{-3}$$

A tangente é negativa no 2º e 4º quadrantes. Sendo $x < 0$ e $y > 0$, θ_2 pertence ao 2º quadrante. Da figura 1.16 temos, em módulo,

$$\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$$

donde

$$\alpha = 53{,}1^\text{o}$$

e

$$\theta_2 = 180^\text{o} - 53{,}1^\text{o} = 126{,}9^\text{o}\,.$$

Então,

$$z_2 = 5\underline{/126{,}9^\circ}$$

c) $|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

$$\theta_3 = \text{arc tg}\,\frac{-4}{-3}$$

Temos $x < 0$ e $y < 0$, logo θ_3 é do 3º quadrante. Da mesma figura tiramos:

$$\text{tg}\beta = \frac{4}{3}$$

logo $\beta = 53{,}1^\text{o}$

e

$$\theta_3 = 180^\circ + \beta = 233{,}1^\circ$$

o que implica em

$z_3 = 5\underline{/233{,}1^\circ}$, que não é uma forma usual, visto que o argumento principal deve estar entre os valores $-180^\circ < \theta \le 180^\circ$, o que nos leva então a escrever $z_3 = 5\underline{/-126{,}9^\circ}$ (que é a resposta da calculadora CASIO fx-82LB).

Vamos a seguir apresentar as rotinas de operações para as transformações RET → POL e POL → RET para duas minicalculadoras usuais no mercado

1.º) CASIO fx-82LB

a) RET → POL:

$$\underbrace{x\ \ \boxed{\text{a}}\ \ y}_{\text{entradas}}\ \boxed{\text{b}}\ \overbrace{\boxed{\text{2nd F}}\ \boxed{\text{a}}}^{\text{(convocamos a transformação para polares} \to r\,\theta)}\ \underbrace{|z|\ \ \boxed{\text{b}}\ \ \theta}_{\text{saída}}$$

b) POL → RET:

$$\underbrace{|z|\ \ \boxed{\text{a}}\ \ \theta}_{\text{entradas}}\ \boxed{\text{b}}\ \overbrace{\boxed{\text{2nd F}}\ \boxed{\text{b}}}^{\text{(convocamos a transformação para retangular} \to xy)}\ \underbrace{x\ \ \boxed{\text{b}}\ \ y}_{\text{saída}}$$

2.º) CASIO fx-6300 G

a) RET → POL:

$$\overbrace{\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{+}}^{\text{convocamos a transformação POL (}}\ \ \underbrace{x\ \overbrace{\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{(}}^{\text{convocamos a ,}}\ y}_{\text{entradas}}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{EXE}}\ \ \underbrace{|z|\ \overbrace{\boxed{\text{ALFA}}\ \boxed{)}}^{\text{convocamos J}}\ \boxed{\text{EXE}}\ \theta}_{\text{saída}}$$

b) POL → RET:

$$\overbrace{\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{-}}^{\text{convocamos a transformação REC* (}}\ \ \underbrace{|z|\ \overbrace{\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{(}}^{\text{convocamos a ,}}\ \theta}_{\text{entradas}}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{EXE}}\ \ \underbrace{x\ \overbrace{\boxed{\text{ALFA}}\ \boxed{)}}^{\text{convocamos J}}\ \boxed{\text{EXE}}\ y}_{\text{saída}}$$

(*) Em Português → Retangular (RET)
Em Inglês → Rectangular (REC)

c.5) Algumas Formas Polares Especiais

As equações **(41)**, **(46)** e **(47)** conduzem a uma nova interpretação para o número imaginário puro $\boldsymbol{j}$, anteriormente definido como sendo $\boldsymbol{j}=\sqrt{-1}$ ou $\boldsymbol{j}^2=-1$. Se $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ rad nas referidas equações, $e^{j\pi/2}=\boldsymbol{j}$, de modo que $\boldsymbol{j}$ é um número complexo com módulo unitário e fase igual a 90º, ou seja:

$$\boxed{\boldsymbol{j}=e^{j\pi/2}=1\underline{/90^\circ}} \qquad \textbf{(48)}$$

por outro lado,

$$\boxed{\frac{1}{\boldsymbol{j}}=\frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}^2}=-\boldsymbol{j}=e^{-j\pi/2}=1\underline{/-90^\circ}} \qquad \textbf{(49)}$$

Finalmente,

$$\boxed{1=1\underline{/0^\circ}} \qquad \textbf{(50)}$$

e

$$\boxed{-1=1\underline{/180^\circ}} \qquad \textbf{(51)}$$

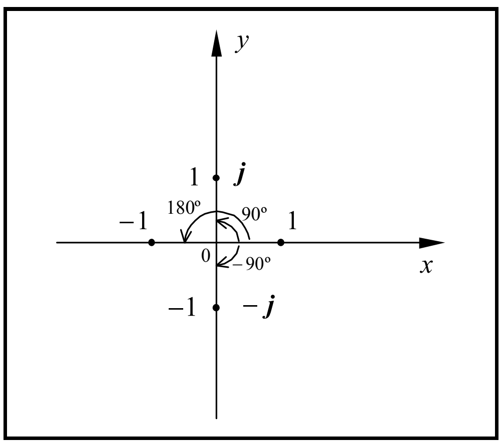

Fig. 1.18

c-6) Complexo Conjugado:

O complexo conjugado de $z=x+\boldsymbol{j}y$ é definido, na forma retangular, por [2] :

$$\boxed{z^*=x-\boldsymbol{j}y} \qquad \textbf{(52)}$$

e tem a **mesma parte real** que o complexo *z*, porém, a **parte imaginária** é **simétrica**.

---

[2] Alguns autores preferem usar $\bar{z}$ ao invés de z^* para representar o complexo conjugado porém, na área da Eletricidade a notação z^* é uma unanimidade.

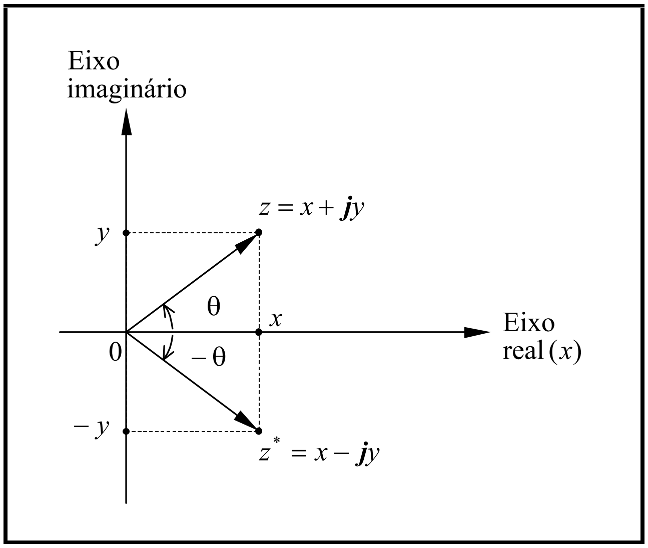

Fig. 1.19

Pela definição de módulo,

$$\left|z^*\right| = \sqrt{x^2 + \left(-y^2\right)} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

e da definição de fase fica claro que o ângulo de fase é simétrico.

Assim sendo, temos também que:

$$\boxed{z^* = |z|e^{-j\theta}} \quad \textbf{(53)}$$

$$\boxed{z^* = |z| \underline{/-\theta}} \quad \textbf{(54)}$$

$$\boxed{\left(z^*\right)^* = z} \quad \textbf{(55)}$$

- **Ilustração 1.17**

a) $z_1 = 3 + \boldsymbol{j}4 \to z_1^* = 3 - \boldsymbol{j}4$

b) $z_2 = 10e^{-j\pi/3} \to z_2^* = 10e^{j\pi/3}$

c) $z_3 = 5 \underline{/30°} \to z_3^* = 5 \underline{/-30°}$

d) $z_4 = 2 \to z_4^* = 2$

Fica agora fácil entender que as raízes $z_1 = -2 + \boldsymbol{j}3$ e $z_2 = -2 - \boldsymbol{j}3$ da equação resolvida na subseção **1.14.1** constituem um par complexo conjugado.

1.14.4 Operações com Números Complexos

a) Igualdade:

Dois números complexos $z_1 = x_1 + \boldsymbol{j}y_1 = |z_1|e^{j\theta_1} = |z_1| \underline{/\theta_1}$ e $z_2 = x_2 + \boldsymbol{j}y_2 = |z_2|e^{j\theta_2} = |z_2| \underline{/\theta_2}$ são iguais se, e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ ou, equivalentemente, $|z_1| = |z_2|$ e $\theta_1 = \theta_2$.

b) Adição e Subtração:

A adição e a subtração são facilmente efetuadas se os números estiverem na forma retangular, embora as calculadoras mais sofisticadas (HP48GX por exemplo) sejam capazes de efetuarem tais operações quer os números estejam na forma polar ou na retangular, e ainda darem a opção de obter o resultado final em uma forma ou outra. Na forma retangular,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + \boldsymbol{j}y_1) + (x_2 + \boldsymbol{j}y_2) = x_1 + \boldsymbol{j}y_1 + x_2 + \boldsymbol{j}y_2 = \\ &= (x_1 + x_2) + \boldsymbol{j}(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + \boldsymbol{j}y_1) - (x_2 + \boldsymbol{j}y_2) = x_1 + \boldsymbol{j}y_1 - x_2 - \boldsymbol{j}y_2 = \\ &= (x_1 - x_2) + \boldsymbol{j}(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \boldsymbol{j}(y_1 + y_2)} \quad \textbf{(56)}$$

e

$$\boxed{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \boldsymbol{j}(y_1 - y_2)} \quad \textbf{(57)}$$

A figura 1.20, logo a seguir, ilustra as operações realizadas graficamente. Na parte (b) da mesma é fácil verificar que $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ é a distância entre os pontos do plano complexo definidos, respectivamente, pelos complexos z_1 e z_2.

A partir das equações **(56)** e **(57)** decorre então que:

$$z + z^* = (x + \boldsymbol{j}y) + (x - \boldsymbol{j}y) = 2x$$

e

$$z - z^* = (x + \boldsymbol{j}y) - (x - \boldsymbol{j}y) = \boldsymbol{j}2y$$

ilustradas na figura 1.21,

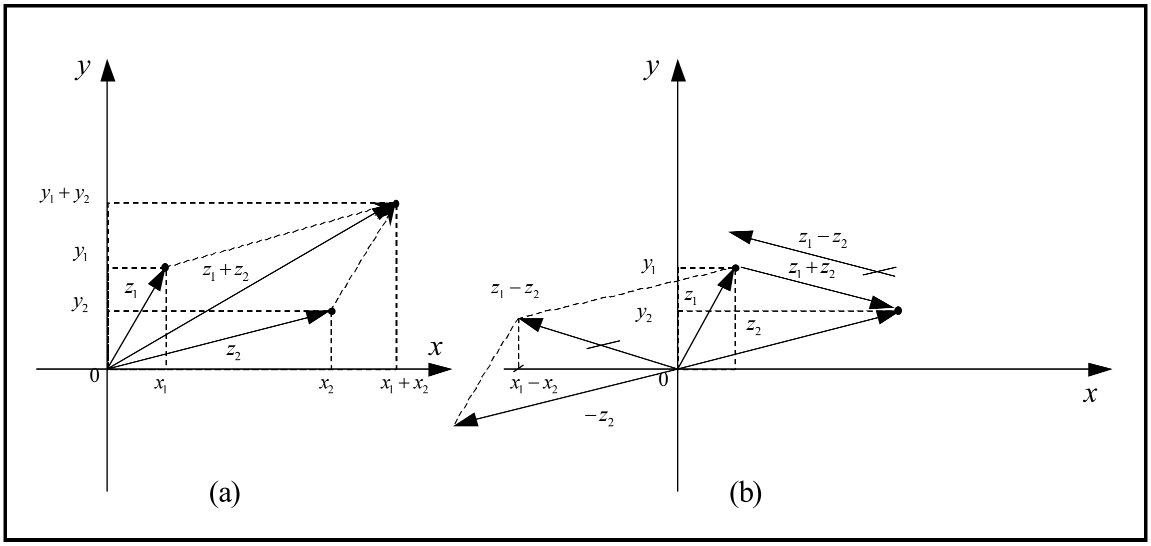

Fig. 1.20

ou seja,

$$\boxed{z + z^* = 2x = 2\,\text{Re}(z)} \quad \textbf{(58a)} \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{z + z^*}{2}} \quad \textbf{(58b)}$$

e

$$\boxed{z - z^* = \boldsymbol{j}2y = \boldsymbol{j}2\,\text{Im}(z)} \quad \textbf{(59a)} \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{z - z^*}{\boldsymbol{j}2}} \quad \textbf{(59b)}$$

Temos também que:

$$(z_1 + z_2)^* = (x_1 + x_2) - \boldsymbol{j}(y_1 + y_2) = (x_1 - \boldsymbol{j}y_1) + (x_2 - \boldsymbol{j}y_2)$$

ou seja:

$$\boxed{(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*} \quad \textbf{(60)}$$

o que significa que o conjugado da soma é a soma dos conjugados.

Similarmente, é fácil também mostrar que

$$\boxed{(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*} \quad \textbf{(61)}$$

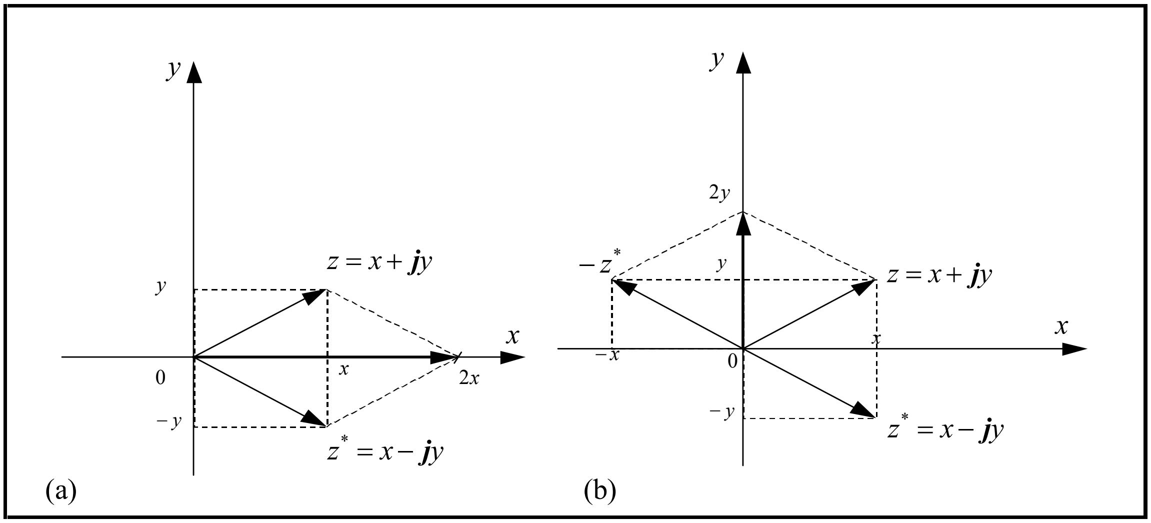

Fig. 1.21

Exemplo 1.17

Somar os complexos a seguir tanto de forma analítica quanto gráfica, e comparar os resultados.

a) $z_1 = 2 + \boldsymbol{j}3$ e $z_2 = 3 - \boldsymbol{j}4$

b) $z_3 = 2 \underline{/30^\circ}$ e $z_4 = 5 \underline{/70^\circ}$

Solução:

a) $z_1 + z_2 = (2+3) + \boldsymbol{j}(3-4) = 5 - \boldsymbol{j} = 5{,}1 \underline{/-11{,}3^\circ}$

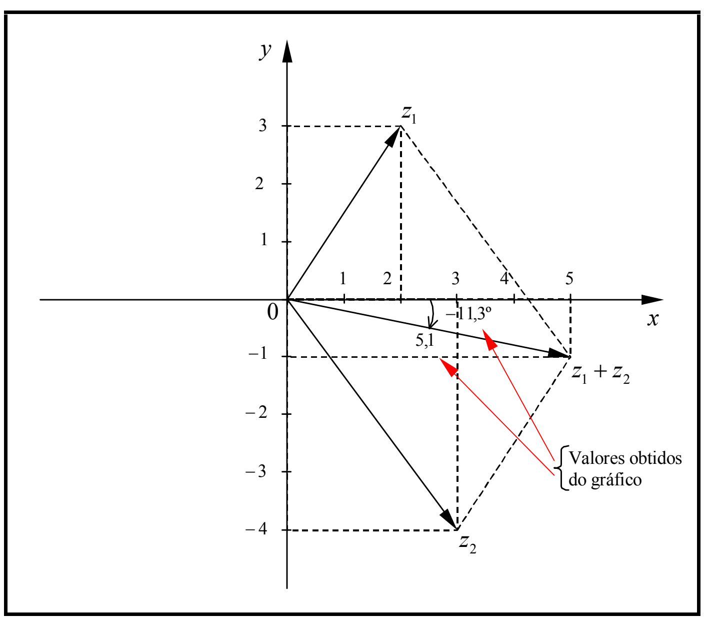

Fig. 1.22