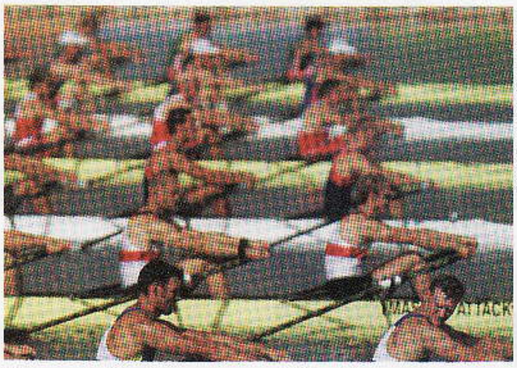
19 MATRIZES

Em jornais e revistas, com freqüência encontramos informações numéricas organizadas na forma de tabelas, com linhas e colunas. Veja alguns exemplos a seguir.

Jogos Olímpicos de Atenas — 2004
Tabela de medalhas

País	Ouro	Prata	Bronze
1º Estados Unidos	35	40	27
2º China	32	17	14
3º Rússia	27	27	38
4º Austrália	17	16	16
5º Japão	16	9	12
6º Alemanha	14	16	19
7º França	11	9	13
8º Itália	10	11	11
9º Coréia	9	12	9
10º Grã-Bretanha	9	9	12
11º Cuba	9	7	11
12º Ucrânia	9	5	9
13º Hungria	8	6	3
14º Romênia	8	5	6
15º Grécia	6	6	4
16º Brasil	5	2	3
17º Noruega	5	0	1
18º Holanda	4	9	9
19º Suécia	4	1	2
20º Espanha	3	11	5

Fonte: The Official Website of the Olympic Movement (www.olympic.org).


Doug Pensinger/Getty Images

Competição de remo nas Olimpíadas de 2004.

Como os pesquisadores definem as classes econômicas

1 Contam-se pontos conforme o número de itens na casa

Itens \ Quantidade	Um	Dois	Três	Quatro ou mais
TV em cores	2	3	4	5
Rádio	1	2	3	4
Banheiro	2	3	4	4
Carro	2	4	5	5
Empregada	2	4	4	4
Aspirador	1	1	1	1
Lava-roupas	1	1	1	1
Vídeo ou DVD	2	2	2	2
Geladeira	2	2	2	2
Freezer	1	1	1	1

2 Adicionam-se pontos segundo o grau de instrução do chefe da família

Primário completo	1
Ginasial completo	2
Colegial completo	3
Superior completo	5

Resultado

Total de pontos	Classe econômica
30 a 34	A1
25 a 29	A2
21 a 24	B1
17 a 20	B2
11 a 16	C
6 a 10	D
6 a 5	E

Dados: Abep.

Fonte: *Veja*, 26/1/2005.

Em Matemática, as tabelas que você acabou de ler serão chamadas de matrizes.

Dizemos, então, que uma matriz m × n é uma tabela de m · n números dispostos em *m* linhas (filas horizontais) e *n* colunas (filas verticais). Vejamos:

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz 1 × 3

$B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3 × 2

$C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2 × 2

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3 × 4

Representação de uma matriz

Consideremos uma matriz *A* do tipo m × n. Um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, no qual o índice *i* refere-se à linha em que se encontra tal elemento e o índice *j* refere-se à coluna em que se encontra o elemento.

Representaremos também a matriz *A* por $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Note que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

exemplo 1

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$.

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = -1$.
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 0$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = -2$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 5$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 3$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 4$.

exemplo 2

Vamos escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ em que $a_{ij} = i - j$.

Uma matriz do tipo 2 × 3 pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Utilizando a "regra de formação" dos elementos dessa matriz, temos:

$a_{11} = 1 - 1 = 0$ $a_{12} = 1 - 2 = -1$ $a_{13} = 1 - 3 = -2$

$a_{21} = 2 - 1 = 1$ $a_{22} = 2 - 2 = 0$ $a_{23} = 2 - 3 = -1$

Assim, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Matrizes especiais

Vejamos alguns tipos de matrizes especiais:

- Matriz linha: é uma matriz formada por uma única linha.

  $A = (0 \quad 2 \quad 4)$ é uma matriz linha 1×3.

- Matriz coluna: é uma matriz formada por uma única coluna.

  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4×1.

- Matriz nula: é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2×3.

  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2×2.

- Matriz quadrada: é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.

  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2. Dizemos que *A* é quadrada de ordem 2.

  $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 7 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que *B* é quadrada de ordem 3.

Seja *A* uma matriz quadrada de ordem *n*.

- Os elementos de *A* cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a diagonal principal de *A*. Assim, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ formam a diagonal principal de:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Os elementos de *A* cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a diagonal secundária de *A*.

  Se, por exemplo, *A* é matriz quadrada de ordem 3, os elementos a_{13}, a_{22} e a_{31} formam a diagonal secundária de *A*, conforme indicado a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

exercícios

1. Dê o tipo de cada uma das seguintes matrizes:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

   b) $B = (3 \quad -4 \quad 2 \quad 9)$

   c) $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

   e) $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

2. Qual a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, em que $a_{ij} = 3i - 2j$?

3. Determine a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ em que $b_{ij} = i^j$. Que elementos pertencem às diagonais principal e secundária de *B*?

4. Indique as matrizes $C = (c_{ij})_{4 \times 1}$, em que $c_{ij} = i^2 + j$, e $D = (d_{ij})_{1 \times 3}$, em que $d_{ij} = i - j$. Que matrizes especiais são essas?

5. Dê a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, em que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \geqslant j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$$

6. Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, forneça os elementos que pertencem às diagonais principal e secundária de *A*.

7. Qual é o elemento $a_{4 \times 6}$ da matriz $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, em que $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{2j}{i}$?

8. (UE-RJ) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j:

$$\begin{bmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

Igualdade de matrizes

Elementos correspondentes

Dadas duas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \text{ e}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

dizemos que elementos de mesmo índice (linha e coluna) são correspondentes.

Assim:

- a_{11} e b_{11} são correspondentes;
- a_{12} e b_{12} são correspondentes;

  ⋮ ⋮
- a_{mn} e b_{mn} são correspondentes.

exemplo 3

Para que valores de m vale a igualdade $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & m+1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m^2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2m+1 \end{pmatrix}$?

Devemos ter:

$$\begin{cases} 0 = 1 - m^2 \Rightarrow m = -1 \text{ ou } m = 1 \quad (1) \\ m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \quad (2) \\ -1 = 2m + 1 \Rightarrow m = -1 \quad (3) \end{cases}$$

Como as condições (1), (2) e (3) devem ser satisfeitas simultaneamente, o valor de m é -1.

exercícios

9. Determine a, b, c e d para que se tenha $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & 6 \end{pmatrix}$.

10. Determine x, y e z que satisfaçam $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 4 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Determine p e q, tais que $\begin{pmatrix} 8 & p^2 \\ 3^{-q} & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^p & 9 \\ 81 & 2q \end{pmatrix}$.

12. Verifique se existe m, $m \in \mathbb{R}$, para que se tenha $\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1-m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2m \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

13. Determine m, $m \in \mathbb{R}$, se existir, tal que $\begin{pmatrix} 9-m^2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 7 \end{pmatrix}$.

14. Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$. Determine m, n e p em $B = \begin{pmatrix} m+n & 3 & m-2p \\ n+1 & n-p & 5 \end{pmatrix}$, a fim de que tenhamos $A = B$.

15. Determine x e y reais, de modo que $\begin{bmatrix} 2^x & y^2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ y^x & 5 \end{bmatrix}$.

Adição e subtração

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Em outras palavras, a matriz soma C é do mesmo tipo que A e B e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de A e B, como podemos observar na soma:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

exemplo 4

Vamos determinar a matriz X, tal que $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

A matriz procurada é do tipo 2×3 e podemos representá-la por $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$.

Temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\begin{bmatrix} 3+a & 2+b & 1+c \\ -1+d & -4+e & 2+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Do conceito de igualdade, vem:

$$3+a=7 \qquad 2+b=5 \qquad 1+c=1$$
$$-1+d=1 \qquad -4+e=6 \qquad 2+f=7$$

Então:

$a=4$, $b=3$, $c=0$, $d=2$, $e=10$ e $f=5$

Logo:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz oposta

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Chama-se oposta de A a matriz representada por $-A$, tal que $A + (-A) = 0$, em que 0 é a matriz nula do tipo $m \times n$.

Da definição, decorre que $-A$ é sempre obtida de A trocando-se o sinal de cada um de seus elementos.

Dessa maneira, temos:

- se $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, então

$$-A = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

- se $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -5 \end{bmatrix}$

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, definimos a matriz diferença $A - B$ como a soma de A com a oposta de B; isto é:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Vejamos dois exemplos:

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

exemplo 5

Vamos determinar a matriz X, tal que:

$$X - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz X procurada é $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$.

Temos:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\begin{bmatrix} a-1 & b-3 & c-2 \\ d-4 & e-6 & f-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Em que:

$$a-1=3 \qquad c-2=4 \qquad e-6=-1$$
$$b-3=6 \qquad d-4=0 \qquad f-5=5$$

Então:

$a=4$, $b=9$, $c=6$, $d=4$, $e=5$, $f=10$

Logo:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição

Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo $(m \times n)$ e 0 a matriz nula do tipo $m \times n$, pode-se provar que valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I. Comutativa: $A + B = B + A$

II. Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

III. Elemento neutro: $A + 0 = A$

IV. Oposto: $A + (-A) = 0$

exemplo 6

Vamos determinar a matriz X, tal que $X - A + B = C$, em que A, B e C são matrizes do mesmo tipo.

Utilizemos as propriedades citadas anteriormente para "isolar" a matriz X nessa equação.

- Somamos aos dois membros a matriz oposta de B, que é $-B$:

$$X - A + B + (-B) = C + (-B)$$

- Usamos agora as propriedades II, III e IV:

$$(X - A) + \underbrace{(B + (-B))}_{=0} = C + (-B)$$

$$X - A = C + (-B)$$

- Somamos aos dois membros desta última equação a matriz A e usamos a propriedade associativa:

$$X - A + A = C + (-B) + A$$

isto é:

$$X + \underbrace{(-A + A)}_{=0} = C + (-B) + A$$

$$\boxed{X = C - B + A}$$

A seqüência apresentada nos mostra que essa equação é resolvida do mesmo modo que a equação $x - a + b = c$, em que x, a, b e c são números reais. Assim, para adição e subtração de matrizes é possível simplesmente fazer:

$$X - A + B = C \Rightarrow X = C - B + A$$

exercícios

16. Calcule:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $(1 \quad 5 \quad 0 \quad 4) - (6 \quad 6 \quad 8 \quad 7)$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

17. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, em que $b_{ij} = i + j - 1$.

a) Determine a matriz $C = A + B$.

b) Determine a matriz $D = A - B$. Como você representaria, genericamente, um elemento d_{ij} de D?

18. Sejam $A = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$. Determine a matriz $A + B + C$.

19. Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

20. Determine a matriz X em:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ & \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

21. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{10 \times 12}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{10 \times 12}$, em que $b_{ij} = i + j$. Seja $C = A + B$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Determine os elementos:

a) c_{78} b) $c_{10\,12}$

22. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} X + Y + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 18 & 14 \end{pmatrix} \\ X - Y - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

23. As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (A, B e C) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, História e Física, representadas por suas iniciais), nos meses de março e abril.

	Março				
	P	M	B	H	F
Aluno A	2	1	0	4	2
Aluno B	1	0	2	1	1
Aluno C	5	4	2	2	2

	Abril				
	P	M	B	H	F
Aluno A	1	2	0	1	3
Aluno B	0	1	1	3	1
Aluno C	3	1	3	2	3

a) Qual tabela indica o número de faltas desses alunos no primeiro bimestre?

b) No primeiro bimestre, qual aluno teve o maior número de faltas em Português? E em Matemática? E em História?

Produto de um número real por uma matriz

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real. O produto de k pela matriz A (indica-se: $k \cdot A$) é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, que se obtém multiplicando cada elemento de A pelo fator k.

Vejamos alguns exemplos:

- se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, então $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$
- se $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, então $\frac{1}{2} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- se $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$(-2) \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

exemplo 7

Vamos resolver a equação matricial $2X = A + B$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Devemos determinar $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Temos:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade, vem:

$2a = 4 \Rightarrow a = 2$ $\quad$ $2b = 2 \Rightarrow b = 1$

$2c = -6 \Rightarrow c = -3$ $\quad$ $2d = 2 \Rightarrow d = 1$

Assim, $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz transposta

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se transposta de A a matriz:

$$\boxed{A^t = (a'_{ji})_{n \times m}}$$

tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo i e todo j. Em outros termos, a matriz A^t tem colunas ordenadamente iguais às linhas de A.

Por exemplo:

- A transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.
- A transposta de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

- A transposta de $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ é

$$C^t = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}.$$

Matriz simétrica

Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada A de ordem n, tal que:

$$\boxed{A^t = A}$$

Em outros termos, uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e todo j. Isso significa que os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

As matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$$

por exemplo, são simétricas.

Matriz anti-simétrica

Chama-se matriz anti-simétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que:

$$\boxed{A^t = -A}$$

Em outros termos, uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é anti-simétrica quando $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i e todo j. Isso significa que os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos e os elementos da diagonal principal são todos nulos.

Por exemplo, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

são anti-simétricas.

exercícios

24. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes:

a) $4 \cdot A$ b) $\frac{1}{3} \cdot A$

25. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Determine as seguintes matrizes:

a) $3A + B$ b) $A - 3B$

26. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = 2i - 3j$. Determine a matriz $3A + 4B$.

27. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $2 \cdot (A + B)$ e $2A + 2B$. Os resultados são iguais?
b) Calcule $3 \cdot (A - B)$ e $3A - 3B$. Os resultados são iguais?
c) Calcule $2 \cdot (3 \cdot A)$ e $(2 \cdot 3) \cdot A$. Os resultados são iguais?
d) Calcule $1 \cdot A$. A matriz obtida é igual a A?

28. Resolva a equação:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

29. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e

$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz X que verifica a equação $2A + B = X + 2C$.

30. Sendo $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, determine:

a) $2A + A^t$
b) $3B^t$
c) $(A^t)^t$
d) $(-B)^t$

31. Determine X em $3X + 2A = B^t + 2X$, se
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

32. Resolva a equação $2X^t - 3A = B$, se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$.

33. Resolva o sistema $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -4 \\ 17 & -13 & 20 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -6 \\ 29 & -20 & 33 \end{pmatrix} \end{cases}$.

34. Sabendo-se que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de $x + 2y - z$?

35. (UC-GO) Analise a afirmação seguinte: Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz anti-simétrica.

Multiplicação de matrizes

A tabela abaixo representa as notas obtidas em um curso de espanhol pelos alunos *A*, *B* e *C*, em cada bimestre do ano letivo.

	1º bim.	2º bim.	3º bim.	4º bim.
Aluno A	7	8	6	8
Aluno B	4	5	5	7
Aluno C	8	7	9	10

Para calcular a nota final do ano, o professor deve fazer uma média ponderada usando como pesos, respectivamente, 1, 2, 3 e 4. Assim, a média de cada aluno será determinada pela fórmula:

$$\frac{(1^{\circ}\text{bim.} \times 1) + (2^{\circ}\text{bim.} \times 2) + (3^{\circ}\text{bim.} \times 3) + (4^{\circ}\text{bim.} \times 4)}{1 + 2 + 3 + 4}$$

que equivale a fazer:

$$1^{\circ}\text{bim.} \times 0{,}1 + 2^{\circ}\text{bim.} \times 0{,}2 + 3^{\circ}\text{bim.} \times 0{,}3 + 4^{\circ}\text{bim.} \times 0{,}4$$

Vamos calcular as médias dos alunos *A*, *B* e *C*:

- A: $7 \times 0{,}1 + 8 \times 0{,}2 + 6 \times 0{,}3 + 8 \times 0{,}4 = 7{,}3$
- B: $4 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}2 + 5 \times 0{,}3 + 7 \times 0{,}4 = 5{,}7$
- C: $8 \times 0{,}1 + 7 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}4 = 8{,}9$

Podemos representar a tabela das notas bimestrais pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Vamos representar os pesos dos bimestres pela matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

E representamos as médias pela matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 7{,}3 \\ 5{,}7 \\ 8{,}9 \end{bmatrix}$$

Dizemos que C é o produto da matriz A (notas) pela matriz B (pesos):

$$C = A \cdot B$$

A idéia utilizada para calcular C é a que será usada agora para o produto de matrizes.

Definição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se produto de A por B, e se indica por $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, em que um elemento qualquer c_{ik} é obtido da seguinte maneira:

- Tomamos ordenadamente os n elementos da linha i da matriz A: $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$. (1)
- Tomamos ordenadamente os n elementos da coluna k da matriz B: $b_{1k}, b_{2k}, ..., b_{nk}$. (2)
- Multiplicamos o 1º elemento de (1) pelo 1º elemento de (2), o 2º elemento de (1) pelo 2º elemento de (2), e assim sucessivamente.
- Somamos os produtos obtidos.

Assim:

$$\boxed{c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}}$$

observações

- A definição garante a existência do produto AB quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de A e o número de colunas é igual ao número de colunas de B. Observemos o esquema abaixo:

$$A_{(m \times \mathbf{n})} \cdot B_{(\mathbf{n} \times p)} = C_{(m \times p)}$$

garante a existência do produto

- Notemos que, se A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$, com p diferente de m, então AB existe, mas BA não existe, pois:

$$B_{(n \times \mathbf{p})} \cdot A_{(\mathbf{m} \times n)}$$

são diferentes!

exemplo 8

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, determinemos AB e BA.

- Como A é do tipo 2×2 e B é do tipo 2×2, segue que $C = A \cdot B$ existe e é do tipo 2×2, isto é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

em que:

$$c_{11} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = -3$$
$$c_{12} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$
$$c_{21} = (-1) \cdot 0 + 5 \cdot (-1) = -5$$
$$c_{22} = (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 9$$

Assim, $C = AB = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

- $D = B \cdot A$ existe e é do tipo 2×2, isto é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

em que:

$$d_{11} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -1$$
$$d_{12} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 5$$
$$d_{21} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -4$$
$$d_{22} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 7$$

Assim, $D = BA = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

observação

Pelo exemplo 8 podemos ver que AB e BA existem, mas $AB \neq BA$. Isso sugere que, em geral, o produto de matrizes não é comutativo.
Quando $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

exemplo 9

Vamos encontrar todas as matrizes quadradas de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz B que deve comutar com $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix}$$

Então, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c=a \\ b+2d=2a+b \Rightarrow c=0,\ a=d \text{ e } b \text{ qualquer} \\ d=2c+d \end{cases}$$

Assim, as matrizes que comutam com $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

exemplo 10

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6\times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{jk})_{3\times 8}$, em que $b_{jk} = i + j$. Sendo $C = A \cdot B = (c_{ik})_{6\times 8}$, vamos determinar o elemento c_{35}.

O elemento c_{35} da matriz produto C será obtido tomando-se a linha 3 de A e a coluna 5 de B. Dessa forma, usamos a "regra de formação" dos elementos de A e B para determinar as filas procuradas:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{6\times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} \dots & b_{15} & \dots \\ \dots & b_{25} & \dots \\ \dots & b_{35} & \dots \end{pmatrix}_{3\times 8} = \begin{pmatrix} \dots & 6 & \dots \\ \dots & 7 & \dots \\ \dots & 8 & \dots \end{pmatrix}$$

Assim, $c_{35} = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 = 19$.

exemplo 11

Vamos encontrar a matriz X em $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Precisamos, inicialmente, determinar o tipo da matriz X.

Temos:

$$\underset{(2\times 2)}{\underset{\downarrow}{A}} \cdot \underset{(n\times p)}{\underset{\downarrow}{X}} = \underset{(2\times 1)}{\underset{\downarrow}{B}}$$

Devemos ter:

- $n = 2$, para garantir a existência do produto;
- $p = 1$, pois o número de colunas de X é igual ao número de colunas de B.

Assim: $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Efetuando o produto, vem $\begin{pmatrix} 5a+7b \\ 2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, de onde resulta o sistema $\begin{cases} 5a+7b=4 \\ 2a+3b=1 \end{cases}$, cuja solução é $a = 5$ e $b = -3$.

Logo, $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Propriedades da multiplicação

Supondo que as matrizes A, B e C sejam de tipos tais que as operações abaixo possam ser realizadas, valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

I. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
II. Distributiva à direita em relação à adição: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
III. Distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

exercícios

36. Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

37. Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

38. Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}(6 \quad -2 \quad 8)$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $(1 \quad 2)(3 \quad 4)$

39. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determine, se existir:

a) $A \cdot B$ c) $A \cdot C$ e) $B \cdot A^t$

b) $B \cdot A$ d) $B^t \cdot C$

40. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Se $C = (c_{ij})_{3 \times 2}$ é a matriz produto $A \cdot B$, determine, se existirem, os elementos:

a) c_{22} b) c_{31} c) c_{33}

41. Calcule x e y em $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

42. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto $A \cdot B$, determine o elemento c_{43}.

43. (UF-SC) Sejam $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$, respectivamente. Se $A \cdot B = C$, então qual é o elemento c_{32} da matriz C?

44. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $(A + B) \cdot C$ e $A \cdot C + B \cdot C$. Os resultados são iguais?

b) Calcule $(A - B) \cdot C$ e $A \cdot C - B \cdot C$. Os resultados são iguais?

c) Calcule $(A \cdot B) \cdot C$ e $A \cdot (B \cdot C)$. Os resultados são iguais?

d) Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Os resultados são iguais?

45. Determine x e y a fim de que as matrizes $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ comutem.

46. Seja A uma matriz quadrada de ordem n; definimos $A^2 = A \cdot A$. Assim, determine A^2 nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

47. Seja uma matriz quadrada de ordem n; definimos $A^3 = A \cdot A \cdot A$. Utilizando os dados do exercício anterior, calcule A^3.

48. A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos alunos A, B e C nas provas de Português, Matemática e Conhecimentos Gerais em um exame vestibular.

	Português	Matemática	Conhecimentos Gerais
Aluno A	4	6	7
Aluno B	9	3	2
Aluno C	7	8	10

Se os pesos das provas são 7 (em Português), 6 (em Matemática) e 5 (em Conhecimentos Gerais), qual o produto de matrizes que permite determinar a nota final de cada aluno? Determine a nota de cada um.

49. Resolva a equação $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

50. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, resolva a equação $A^t \cdot X = B^t$.

51. Resolva a equação $A \cdot X + B = C$, na qual $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$.

52. Resolva a equação $A \cdot B = X \cdot C$, se

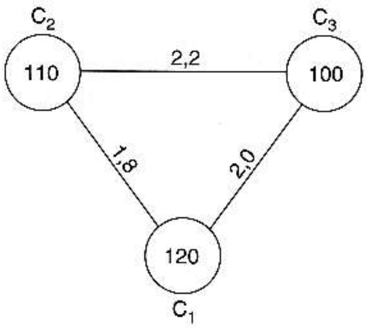
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

53. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^2, A^3 e A^4.

54. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ são tais que $A \cdot B = B \cdot A$ (dizemos, por isso, que A e B comutam). Calcule x e y.

55. (U. F. Santa Maria-RS) Uma medida no sentido de desafogar o trânsito é o planejamento na construção de edifícios públicos.

O diagrama a seguir representa três bairros, C_1, C_2 e C_3, com as respectivas populações de alunos e as distâncias entre eles, em quilômetros:



Deseja-se construir uma escola em um desses bairros, de tal maneira que a distância percorrida por todos os alunos seja a mínima possível.

A matriz X que representa as distâncias entre as localidades é dada por $X = [d_{ij}]$, onde d_{ij} é a distância entre C_i e C_j, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$.

Classifique cada uma das afirmações como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}8 & 2 \\ 1{,}8 & 0 & 2{,}2 \\ 2 & 2{,}2 & 0 \end{pmatrix}$

b) Se $Y = \begin{bmatrix} 120 \\ 110 \\ 100 \end{bmatrix}$ é a matriz coluna das populações, então $XY = \begin{bmatrix} 398 \\ 436 \\ 482 \end{bmatrix}$.

c) A localidade escolhida para a construção da escola deve ser C_2.

56. (FGV-SP, adaptado) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & y \\ x & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A^t \cdot B$ é uma matriz nula, calcule $x \cdot y^2$.

Matriz identidade

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é denominada matriz identidade de ordem n (indica-se por I_n) quando os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero.

Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

⋮

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem n.

Propriedade

Qualquer que seja a matriz quadrada A de ordem n, tem-se:

$$A \cdot I_n = A \quad \text{e} \quad I_n \cdot A = A$$

Veja dois exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por essa propriedade, a matriz identidade funciona como elemento neutro na multiplicação de matrizes.

Matriz inversa

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é dita inversível (ou invertível) se existir uma matriz B tal que:

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = I_n}$$

Nesse caso, B é dita inversa de A e é indicada por A^{-1}.

exemplo 12

A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

exemplo 13

Vamos encontrar, se existir, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Devemos determinar $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 5a + 4c & 5b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade, seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 5a + 4c = 0 \end{cases}, \text{ cuja solução é } a = 2 \text{ e } c = -\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 5b + 4d = 1 \end{cases}, \text{ cuja solução é } b = -1 \text{ e } d = \frac{3}{2}$$

Assim:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

É fácil verificar que a outra condição, $A^{-1} \cdot A = I_2$, está satisfeita.

exemplo 14

Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem e inversíveis.

Como podemos "isolar" a matriz X em $A \cdot X = B$?

- Multiplicamos os dois membros, à esquerda, por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

- Usamos a propriedade associativa, a definição de matriz inversa e o elemento neutro:

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

exercícios

57. Verifique se $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

58. Determine, se existir, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

59. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Determine A^{-1}.

60. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Determine:

a) $A^{-1} + B^{-1}$

b) $A^{-1} \cdot B^{-1}$

61. Determine, se existir, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

62. (UF-CE) As matrizes A e B são quadradas de ordem 4 e tais que $AB = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Determine a matriz BA.

63. Seja A^{-1} a inversa de $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine:

a) $A + A^{-1}$
b) $(A^{-1})^2 + A^2$

64. (UC-GO) Determine x a fim de que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ seja igual a sua inversa.

65. A inversa de $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix}$. Determine x e y.

66. Qual é a inversa da matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

67. Determine a matriz inversa de $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

68. Usando a inversão de matrizes, resolva a equação $A \cdot X = B$, se $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

69. Supondo inversíveis e de mesma ordem todas as matrizes envolvidas, isole a matriz X em:

a) $X \cdot B + A = C$
b) $A^{-1} \cdot X = B^{-1}$

testes de vestibulares

1. (PUC-MG) A matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ é tal que $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, \text{ se } i \neq j \\ 2i - 3j, \text{ se } i = j \end{cases}$. É *correto* afirmar que:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$
b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -5 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$
c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$
d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

2. (Vunesp-SP) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 36 & 45 \end{pmatrix}$, com x, y, z números reais. Se $A \cdot B = C$, a soma dos elementos da matriz A é:

a) 9
b) 40
c) 41
d) 50
e) 81

3. (Mackenzie-SP) O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal. O traço da matriz $A = (a_{i,j})_{3 \times 3}$, tal que $a_{i,j} = i^j$, é:

a) 3^3
b) 2^5
c) 5^2
d) 4^3
e) 2^6

4. (Unirio-RJ) Matrizes binárias são matrizes cujos elementos pertencem ao conjunto {0, 1} e têm aplicação em Ciência da Computação.

A matriz obtida pela soma de todas as matrizes binárias 2 × 2 é:

a) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

5. (UF-AM) Uma matriz quadrada é simétrica se, e somente se, $A^t = A$. Se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 & x \\ 1 & 0 & 5-y \\ -1 & y-3 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, então o valor de $\frac{x+y}{3}$ é:

a) −1
b) 3
c) 1
d) 4
e) 0

6. (PUC-RS) O elemento c_{22} da matriz $C = AB$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, é:

a) 0
b) 2
c) 6
d) 11
e) 22

7. (U. E. Londrina-PR) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, definida por $a_{ij} = i - j$, $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$, definida por $b_{ij} = j$, e $C = (c_{ij})$, definida por $C = A \cdot B$, é correto afirmar que o elemento c_{23} é:

a) igual ao elemento c_{12}.
b) igual ao produto de a_{23} por b_{23}.
c) o inverso do elemento c_{32}.
d) igual à soma de a_{12} com b_{11}.
e) igual ao produto de a_{21} por b_{13}.

8. (Mackenzie-SP) Se o produto de matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ é a matriz nula, $x + y$ é igual a:

a) 0 c) −1 e) −2
b) 1 d) 2

9. (Fatec-SP) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix}$, tal que $A^2 = \begin{bmatrix} -19 & -8 \\ 10 & -19 \end{bmatrix}$. É verdade que $a + b$ é igual a:

a) 0 c) 9 e) −9
b) 1 d) −1

10. (UF-RN) A matriz a seguir é 7×7 e foi formada com o número 1 em cada posição da primeira linha, um 0 e um 2, alternadamente, nas posições da segunda linha, dois 0 e um 3, também alternadamente, nas posições da terceira linha, e assim sucessivamente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Numa matriz 100×100, construída com o mesmo critério, a quantidade de números diferentes de zero na centésima coluna é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

11. (U. F. Ouro Preto-MG) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, sabe-se que $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. O valor de $a + b$ é:

a) 3 c) 10
b) 7 d) 11

12. (Unifor-CE) Sejam as matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. É verdade que:

a) $M \cdot N = \alpha \cdot N$
b) $M \cdot N = \alpha \cdot M$
c) $N \cdot M = \alpha^2 \cdot M$
d) $N \cdot M = \alpha \cdot M$
e) $N \cdot M = \alpha \cdot N$

13. (Unifesp-SP) Uma indústria farmacêutica produz, diariamente, p unidades do medicamento X e q unidades do medicamento Y, ao custo unitário de r e s reais, respectivamente. Considere as matrizes M, 1×2, e N, 2×1:

$$M = [2p \quad q] \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} r \\ 2s \end{bmatrix}$$

A matriz produto $M \cdot N$ representa o custo da produção de:

a) 1 dia c) 3 dias e) 5 dias
b) 2 dias d) 4 dias

14. (UFF-RJ) Um dispositivo eletrônico usado em segurança modifica a senha escolhida por um usuário, de acordo com o procedimento descrito abaixo.
A senha escolhida $S_1S_2S_3S_4$ deve conter quatro dígitos, representados por S_1, S_2, S_3 e S_4. Esses dígitos são, então, transformados nos dígitos M_1, M_2, M_3 e M_4, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}$$

onde P é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se a senha de um usuário, já modificada, é 0110, isto é, $M_1 = 0$, $M_2 = 1$, $M_3 = 1$ e $M_4 = 0$, pode-se afirmar que a senha escolhida pelo usuário foi:

a) 0011 c) 1001 e) 1100
b) 0101 d) 1010

15. (Faap-SP) Uma montadora produz três modelos de veículos, A, B e C. Neles podem ser instalados dois tipos de *air bags*, D e E. A matriz [*air bag* modelo] mostra a quantidade de unidades de *air bags* instaladas:

$$\begin{array}{c} \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Numa determinada semana, foram produzidas as seguintes quantidades de veículos, dadas pela matriz [modelo-quantidade]:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \text{Qtde.} \\ \begin{bmatrix} 300 \\ 500 \\ x \end{bmatrix} \end{array}$$

O produto da matriz [*air bag* modelo] pela matriz [modelo-quantidade] é $\begin{bmatrix} 1\,600 \\ 3\,600 \end{bmatrix}$. Quantos veículos do modelo C foram montados na semana?

a) 300 c) 150 e) 100
b) 200 d) 0

16. (Unifor-CE) Se a matriz $B = (b_{ij})$, de ordem 2, é a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, então:

a) $b_{11} = -\frac{1}{2}$
b) $b_{12} = -1$
c) $b_{21} = 1$
d) $b_{22} = -1$
e) $b_{22} = -\frac{1}{2}$

17. (U. F. Viçosa-MG) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, onde *x* e *y* são números reais e *M* é a matriz inversa de *A*. Então o produto xy é:

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{1}{4}$

18. (PUC-MG) Multiplicando-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ pela matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$, obtém-se a matriz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então, o valor de *x* é:

a) −1
b) 0
c) 2
d) 3

19. (Fuvest-SP) Uma matriz real *A* é ortogonal se $AA^t = I$, onde *I* indica a matriz identidade e A^t indica a transposta de *A*. Se $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix}$ é ortogonal, então $x^2 + y^2$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{3}{2}$

20. (Cefet-PR) Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, então o produto entre a matriz transposta de *A* e a matriz inversa de *B* é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} -3 & -10 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} -3 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

21. (UF-AM) Considere as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Se *X* é solução de $M^{-1} \cdot N \cdot X = P$, então $x^3 + y^2$ é igual a:

a) −5
b) 5
c) −3
d) 3
e) 4

desafios

1. (UF-CE) A matriz quadrada *M*, de ordem $n > 1$, satisfaz a equação $M^2 = M - I$, onde *I* é a matriz identidade de ordem *n*. Determine, em termos de *M* e *I*, a matriz M^{2003}.

2. (U. E. Londrina-PR, adaptado) Uma das formas de enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:
   1) Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave *C*.
   2) O destinatário recebe do remetente uma matriz *P*, tal que MC = P, onde *M* é a matriz mensagem a ser decodificada.
   3) Cada número da matriz *M* corresponde a uma letra do alfabeto: 1 = a, 2 = b, 3 = c, ..., 23 = z.
   4) Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras *k*, *w* e *y*.
   5) O número zero corresponde ao ponto de exclamação.
   6) A mensagem é lida, encontrando a matriz *M*, fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: $m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}$.

   Considere as matrizes: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$.

   Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, que mensagem foi enviada por meio da matriz *M*?