

 **OBJETIVO**

ITA
Matemática

8



MÓDULO 29

Trigonometria I

Resumo das principais fórmulas da trigonometria

Arcos Notáveis:

x	sen x	cos x	tg x
30° ou $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45° ou $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60° ou $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Fórmulas Fundamentais:

1) $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x =$

2) $\text{tg } x =$

3) $\text{cotg } x =$

4) $\text{sec } x =$

5) $\text{cossec } x =$

Consequências:

6) $\text{sec}^2 x =$

7) $\text{cossec}^2 x =$

8) $\text{tg } x =$

Fórmulas de Adição de arcos:

1) $\text{sen } (a \pm b) =$

2) $\text{cos } (a \pm b) =$

3) $\text{tg } (a \pm b) =$

Fórmulas do arco duplo:

1) $\text{sen } (2a) =$

2) $\text{cos } (2a) = \left\{ \right.$

3) $\text{tg } (2a) =$

Fórmulas de transformação em produto

1) $\text{sen } p + \text{sen } q =$

2) $\text{sen } p - \text{sen } q =$

3) $\text{cos } p + \text{cos } q =$

4) $\text{cos } p - \text{cos } q =$

Leis do Seno e do Cosseno:

$$\text{---} = \text{---} = \text{---} = 2R$$

1. (ITA) – Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento \overline{CD} e F um ponto sobre o segmento \overline{CE} tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que $\cos \alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = \widehat{BAF}$ e $\beta = \widehat{EAD}$.

2. (IME) – Determine θ sabendo-se que:

(i)
$$\frac{1 - \cos^4\theta}{1 - \sin^4\theta} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2}{3}$$

(ii) $0 < \theta \leq 2\pi$ radianos.

3. (ITA) – Se $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ é tal que

$$4 \operatorname{tg}^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4,$$
 então o valor de

$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x$ é:

a) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

c) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

MÓDULO 30

Trigonometria I

1. Esboçar o gráfico da função f definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} por $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x$.

2. (ITA) – Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 3 \cdot \sin \theta \\ x - 2 = \cos \theta \end{cases}$$

para x e θ reais. Se restringirmos ao intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, então o sistema

- a) não possuirá solução.
- b) possuirá apenas uma solução $(x_1; \theta_1)$.
- c) possuirá duas soluções $(x_1; \theta_1)$ e $(x_2; \theta_2)$, de modo que $x_1 + x_2 = \frac{40}{13}$.
- d) possuirá duas soluções $(x_1; \theta_1)$ e $(x_2; \theta_2)$, de modo que $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = \frac{17}{12}$.
- e) possuirá duas soluções $(x_1; \theta_1)$ e $(x_2; \theta_2)$, de modo que $\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 = \frac{1}{2}$.

3. (ITA) – Se \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais e $(a; b)$ o intervalo aberto $\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, seja

$\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x}$.

Se $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ é tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, então $f(\alpha)$ é igual a

a) $\frac{a+b}{2}$

b) $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$

c) $\frac{a^2 - b^2}{ab}$

d) $\frac{a^2 + b^2}{ab}$

e) n.d.a.

4. Resolver, em \mathbb{R} , a equação

$$5 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 4 \operatorname{cos}^2 x = 3$$

MÓDULO 31

Trigonometria I

1. Os valores reais de a para que a equação $\operatorname{sen}^4 x - 2 \operatorname{cos}^2 x + a^2 = 0$ admita raízes reais são tais que:

a) $|a| \geq 2$

b) $|a| = 3$

c) $|a| \leq \sqrt{2}$

d) $-\sqrt{3} \leq a < -\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2} < a \leq \sqrt{3}$

2. (ITA-2006) – Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77} \operatorname{sen}[5(x + \pi/6)]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então $m + n$ é igual a:

- a) $2\pi/15$ b) $\pi/15$ c) $-\pi/30$
d) $-\pi/15$ e) $-2\pi/15$

3. (ITA-2007) – Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{ x_k = \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \pi}{24} \right) : k = 1, 2 \right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{ y_k = \operatorname{sen}^2 \left(\frac{(3k + 5) \pi}{24} \right) : k = 1, 2 \right\}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) $(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})/3$ e) $(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})/3$

4. (ITA) – Se $\text{tg}(2A) = 5$ então

$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + A\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - A\right)$ é igual a:

- a) $-40/21$ b) -2 c) 5
d) 8 e) 10

MÓDULO 32

Trigonometria I

1. (IME) – Determine o conjunto-solução da equação $\text{sen}^3x + \text{cos}^3x = 1 - \text{sen}^2x \cdot \text{cos}^2x$

2. (ITA) – A expressão

$$\frac{2 \left[\text{sen} \left(x + \frac{11}{2}\pi \right) + \text{cotg}^2x \right] \text{tg} \frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

é equivalente a

- a) $[\cos x - \text{sen}^2x] \text{cotg} x$. b) $[\text{sen} x + \cos x] \text{tg} x$.
c) $[\cos^2 x - \text{sen} x] \text{cotg}^2 x$. d) $[1 - \text{cotg}^2 x] \text{sen} x$.
e) $[1 + \text{cotg}^2 x] [\text{sen} x + \cos x]$.

3. (ITA) – Seja a equação

$$\operatorname{sen}^3 x \cos x - \operatorname{sen} x \cos^3 x = \frac{1}{m} \text{ onde } m \text{ é um número real}$$

não nulo. Podemos afirmar que:

- a) A equação admite solução qualquer que seja m , $m \neq 0$.
- b) Se $|m| < 4$ esta equação não apresenta solução real.
- c) Se $m > 1$ esta equação não apresenta solução real.
- d) Se $|m| > 2$ esta equação sempre apresenta solução real.
- e) Se $m < 4$ esta equação não apresenta solução real.

4. (ITA) – A respeito da equação

$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$, $0 \leq x < 2\pi$, podemos afirmar que:

- a) Existe apenas uma solução real no primeiro quadrante.
- b) Existe apenas uma solução real no segundo quadrante.
- c) Existe apenas uma solução real no terceiro quadrante.
- d) Existe apenas uma solução real no quarto quadrante.
- e) Existem duas soluções no intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 29

1. Se $\sec x \cdot \operatorname{cosec} x = 3$, então $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x$ é igual a

- a) 9 b) 15 c) 18 d) 21 e) 27

2. (ITA) – Se num quadrilátero convexo de área S, o ângulo agudo entre as diagonais mede $\pi/6$ radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a:

- a) S b) 2S c) 3S d) 4S e) 5S

■ MÓDULO 30

1. Considere o sistema $\begin{cases} 2 \operatorname{sen} \theta = 2x - 1 \\ 2 \operatorname{cos} \theta = \sqrt{x + 2} \end{cases}$, para $x \in \mathbb{R}$

e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então, é correto afirmar que

- a) o sistema possui solução única.
b) o sistema possui solução $(x_0; \theta_0)$, com $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$.
c) o sistema possui solução única $(x_0; \theta_0)$, com $x_0 > -2$.
d) o sistema possui duas soluções distintas.
e) $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Esboce o gráfico da função f definida por

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 x}} + \operatorname{sen} x, \text{ com contradomínio em } \mathbb{R}.$$

3. (ITA) – Se $\cos^4 4x - \operatorname{sen}^4 4x = a \neq 0$, então $\cos 8x$ vale:

- a) 2a b) a c) 4a d) zero e) a + 4

■ MÓDULO 31

1. (ITA) – O valor de $x > 0$ que satisfaz a equação

$$\sqrt{x} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \text{ é:}$$

- a) $x = 4\sqrt{3}$ b) $x = 5 - 4\sqrt{3}$
c) $x = 7 - \sqrt{3}$ d) $x = 7 - 4\sqrt{3}$
e) $x = 9 - 4\sqrt{3}$

2. (ITA) – Sejam a e b constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \operatorname{tg} t + 1$ e $y^2 = b^2 \sec^2 t - b^2$ onde $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Então uma relação entre x e y é dada por:

- a) $y = \frac{b}{a} (x - 1)^2, x \geq a$.
b) $y = \frac{b^2}{a^4} (x - 1)^2, x \geq 1$.
c) $y = \frac{b}{a^2} (x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$.
d) $y = \frac{-b}{a^2} (x - 1), x \geq 1$.
e) $y = \frac{a^2}{b^4} (x - 1), x \leq 1$.

■ MÓDULO 32

1. (ITA) Sabendo-se que θ é um ângulo tal que $2 \operatorname{sen}(\theta - 60^\circ) = \cos(\theta + 60^\circ)$, então $\operatorname{tg} \theta$ é um número da forma $a + b\sqrt{3}$ onde

- a) a e b são reais negativos; b) a e b são inteiros;
c) $a + b = 1$; d) a e b são pares;
e) $a^2 + b^2 = 1$.

2. (ITA) – Suponha x e y números reais, tais que

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y) = \sqrt{3} \\ (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} y) = 1 \end{cases}$$

Calcule o módulo do número $S = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$.

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 29

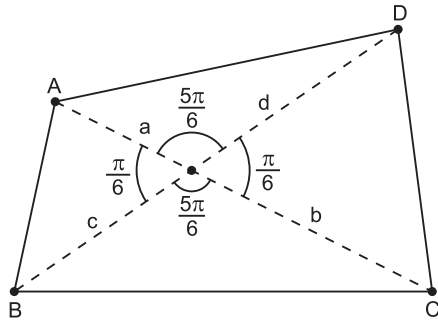
$$\begin{aligned} 1) \quad 1) \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} + \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x}{\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} x} = \\ &= \sec x \cdot \operatorname{cosec} x = 3 \end{aligned}$$

$$2) \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$\begin{aligned} 3) \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x &= \\ &= (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x) = \\ &= 3 \cdot (7 - 1) = 18 \end{aligned}$$

Resposta: C

- 2) No quadrilátero convexo ABCD da figura, sendo $AC = a + b$ e $BD = c + d$, tem-se:



$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \frac{5\pi}{6} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot b \cdot d \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = S$$

Assim:

$$\frac{ac}{4} + \frac{bc}{4} + \frac{bd}{4} + \frac{ad}{4} = S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ac + bc + bd + ad = 4S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + b) \cdot (c + d) = 4S \Leftrightarrow AC \cdot BD = 4S$$

Resposta: D

■ MÓDULO 30

$$1) \begin{cases} 2 \sin \theta = 2x - 1 \\ 2 \cos \theta = \sqrt{x + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{2x - 1}{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{x + 2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x + 2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + x + 2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{4}$$

Para $x = 1$, tem-se $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Para $x = -\frac{1}{4}$, tem-se $\sin \theta = -\frac{3}{4}$,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

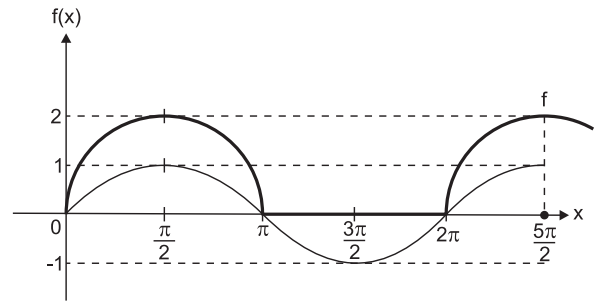
Resposta: D

$$2) f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 x}} + \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} + \sin x =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x} + \sin x = |\sin x| + \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2 \sin x; & \text{se } \sin x \geq 0 \\ 0 & ; \text{ se } \sin x < 0 \end{cases}$$

e o gráfico de f é:



Resposta: Gráfico

$$3) \cos^4 4x - \sin^4 4x =$$

$$= (\cos^2 4x + \sin^2 4x)(\cos^2 4x - \sin^2 4x)$$

Então:

$$\cos^4 4x - \sin^4 4x = \cos^2 4x - \sin^2 4x = \cos 8x = a$$

Resposta: B

■ MÓDULO 31

1) Para $x > 0$ tem-se:

$$I) \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} = 6 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

$$II) \sqrt{x} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} = 7 - 4\sqrt{3}$$

2)

$$I) y^2 = b^2 \cdot \sec^2 t - b^2 = b^2 \cdot (\sec^2 t - 1) = b^2 \cdot \operatorname{tg}^2 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm b \cdot \operatorname{tg} t$$

$$II) \begin{cases} x = a^2 \cdot \operatorname{tg} t + 1 \\ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} t = \frac{x-1}{a^2}, x \geq 1, \text{ supondo } a \neq 0$$

De (I) e (II), vem:

$$y = \pm b \cdot \left(\frac{x-1}{a^2} \right), x \geq 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a^2} \cdot (x-1), x \geq 1.$$

Uma relação entre x e y pode ser:

$$y = -\frac{b}{a^2} \cdot (x-1), x \geq 1$$

Resposta: D

■ MÓDULO 32

$$1) \quad 2 \operatorname{sen}(\theta - 60^\circ) = \cos(\theta + 60^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\operatorname{sen} \theta \cdot \cos 60^\circ - \cos \theta \cdot \operatorname{sen} 60^\circ) =$$

$$= \cos \theta \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta - \sqrt{3} \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen} \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos \theta \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = -4 + 3\sqrt{3}$$

Sendo $\operatorname{tg} \theta = a + b \cdot \sqrt{3}$, temos $a = -4$ e $b = 3$.

Resposta: B

2) Sendo x e y, números reais, tais que:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x-y) = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{temos: } \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + 1} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Como: } (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)^2 = (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)^2 + 4 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$$

$$\text{resulta: } (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)^2 = (2 \cdot \sqrt{3})^2 + 4 \cdot 1 = 16$$

$$\text{e, portanto: } |S| = |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| = 4$$

$$\text{Resposta: } |S| = |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| = 4$$