POLIEDROS

Em geometria plana estudamos o conceito de polígonos, que são conjuntos de segmentos de reta unidos pelos vértices que satisfaz algumas propriedades. São aquelas figuras em duas dimensões que estamos acostumados, tais como triângulos, quadriláteros, pentágonos etc. Quando falamos de poliedros, agora, vamos estudar objetos que são “parentes” dos polígonos, só que aplicado ao universo de três dimensões: cubos, prismas, pirâmides, etc. Mas, antes de falar destes poliedros propriamente ditos, temos que definir o conceito de **superfície poliédrica**.

SUPERFÍCIE POLIÉDRICA

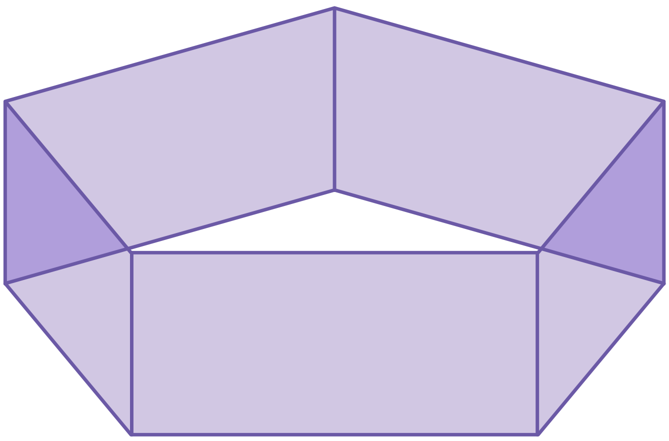
Definição 1. Uma superfície poliédrica é um conjunto de superfícies poligonais que satisfaz as seguintes propriedades.

a. O conjunto das superfícies poligonais tomadas dois a dois não podem ser coplanares.

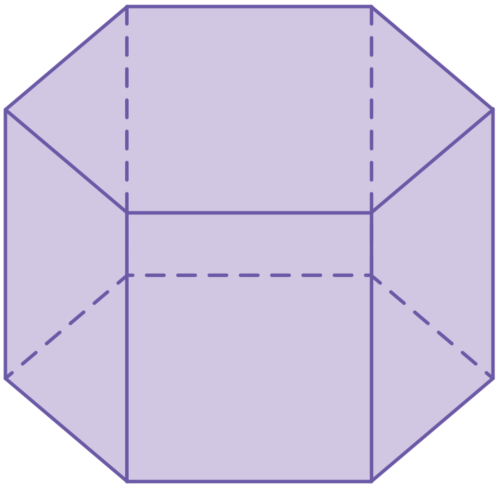
b. Cada lado considerado está em até dois polígonos (no máximo).

c. Todos os polígonos possuem, pelo menos, um lado em comum com os outros.

As superfícies poliédricas podem ser denominadas abertas, quando pelo menos um dos lados de uma superfície poligonal não coincide com o lado de outro polígono, e fechadas quando sempre coincidem com o lado de outro polígono. As figuras abaixo mostram a diferença entre estes conceitos.



Uma superfície poliédrica aberta.

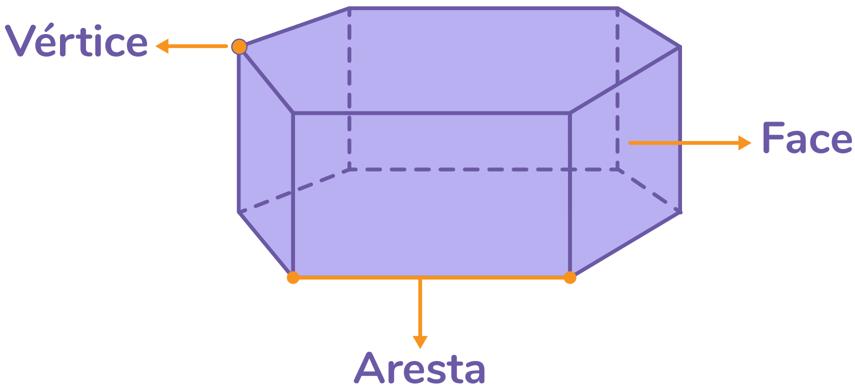


Uma superfície poliédrica fechada.

Agora, dada essa introdução, podemos definir um poliedro.

Definição 2. Um poliedro é o objeto sólido formado por uma superfície poliédrica fechada.

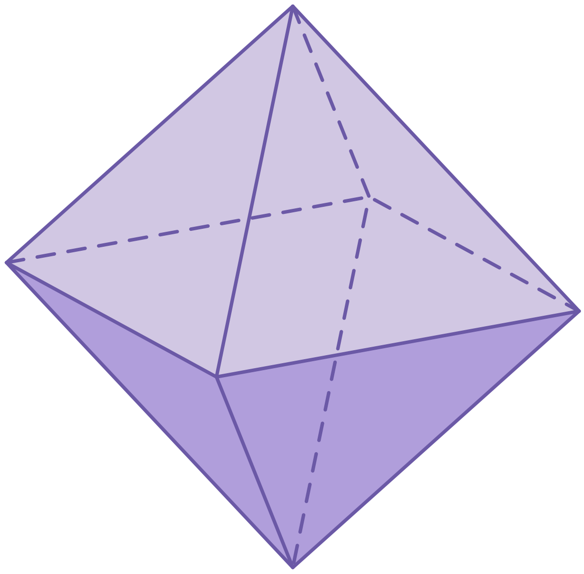
A palavra poliedro tem suas origens no idioma grego, em que "poli" quer dizer "várias" e "edro" quer dizer "faces". Com isto em mente, podemos falar sobre os elementos que formam um poliedro: **vértice**, que é o próprio vértice dos polígonos que formam o poliedro; **aresta**, que é o lado de cada polígono que forma o poliedro; e **face**, que é cada superfície poligonal do poliedro. Observe a imagem abaixo.



Os elementos que formam o poliedro.

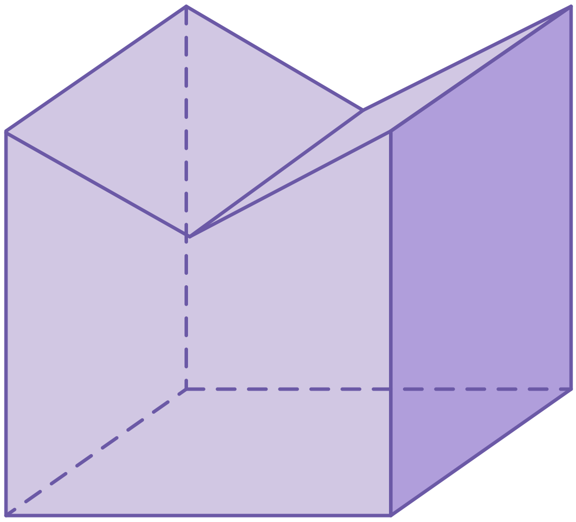
POLIEDROS CONVEXOS E CÔNCAVOS

Em seguida, vamos falar sobre a diferença entre poliedros **convexos** e **côncavos**. Um poliedro é dito convexo se, ao posicionar um plano sobre qualquer uma de suas faces, todas as demais ficarem "do outro lado" do plano, chamado de semiespaço. A figura abaixo exemplifica isso.



Um poliedro convexo.

Por outro lado, um poliedro é dito côncavo se, ao posicionar um plano sobre qualquer uma de suas faces, existir pelo menos uma que não divida as demais para o outro semiespaço (ou o "outro lado plano"). Observe abaixo.



Um poliedro côncavo.

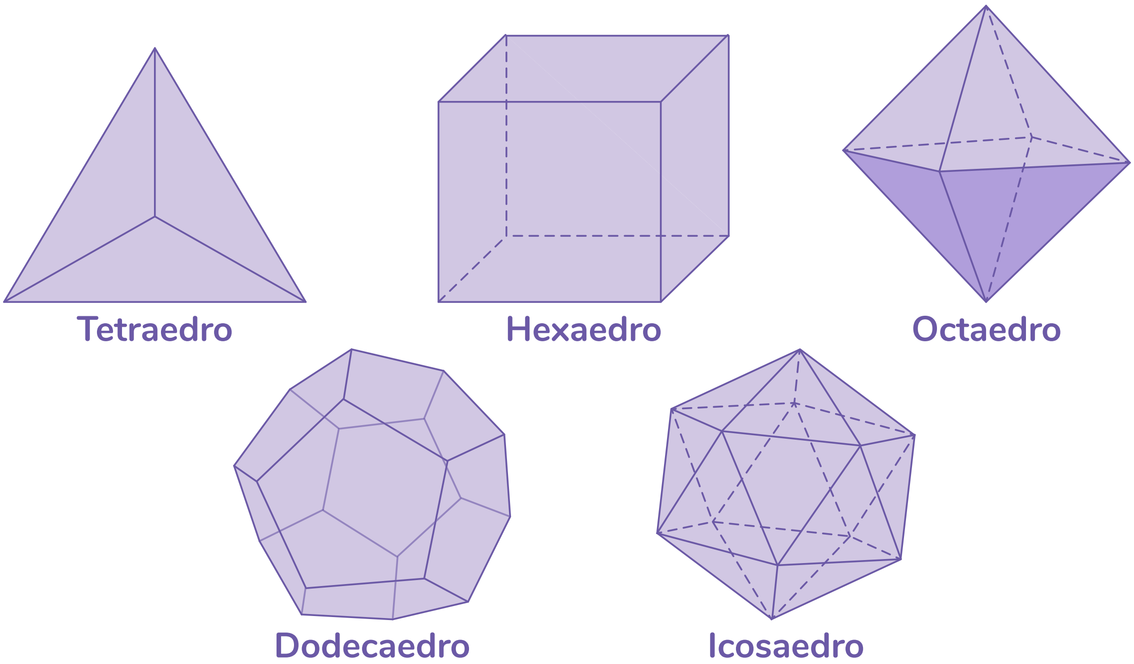
NOMENCLATURA

A nomenclatura dos polígonos era classificada de acordo com o número de lados. Já para o caso dos poliedros, a nomenclatura é comumente classificada de acordo com o **número de faces**. A tabela abaixo resume a nomenclatura dos poliedros mais estudados.

Faces	Nome
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro

Faces	Nome
7	Heptaedro
8	Octaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

A figura abaixo mostra alguns dos poliedros citados.



Alguns dos poliedros mais comuns.

Agora é hora de falarmos um pouco sobre os **poliedros regulares**. Vamos defini-los abaixo:

POLIEDROS REGULARES

Um poliedro é dito regular se suas faces são polígonos regulares congruentes e os ângulos poliédricos também são congruentes.

Obs.: Os ângulos poliédricos são os ângulos internos formados entre duas arestas de um poliedro.

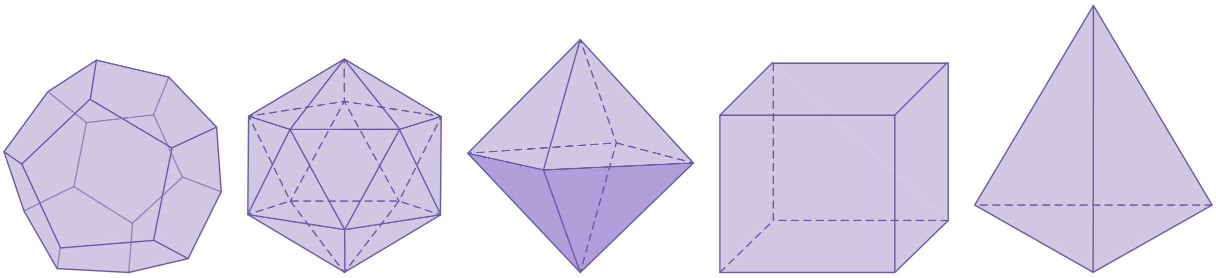
POLIEDROS DE PLATÃO

Há ainda, dentre os poliedros regulares, os chamados **Poliedros de Platão**. Estes poliedros são assim chamados se cumprem com as seguintes premissas:

a. Todas as suas faces possuem o mesmo número de arestas.

b. Todos os seus vértices são formados pelo mesmo número de arestas.

Os poliedros de Platão são exatamente cinco, mostrados na figura abaixo.



Dodecaedro Regular	Icosaedro Regular	Octaedro Regular	Hexaedro Regular	Tetraedro Regular
Faces: 12	Faces: 20	Faces: 8	Faces: 6	Faces: 4
Vértices: 20	Vértices: 12	Vértices: 6	Vértices: 8	Vértices: 4
Arestas: 30	Arestas: 30	Arestas: 12	Arestas: 12	Arestas: 6

Os poliedros de Platão.

RELAÇÃO DE EULER

Todos os poliedros convexos, regulares e não-regulares, obedecem à uma equação que conhecemos por **Relação de Euler**. Ela relaciona o número de vértices V, o número de faces F e o número de arestas A de um poliedro convexo da seguinte forma:

$$V + F = A + 2$$

Além disso, temos como propriedade dos poliedros a seguinte equação:

$$2A = nF = pV$$

Onde n é o número de lados em cada face do poliedro e p é o número de arestas que formam um vértice.

EXERCICIO RESOLVIDO

Exercício 1: Considere um poliedro convexo que possui 2 faces hexagonais e 6 faces quadrangulares. Qual é o número de arestas e vértices desse poliedro?

Resolução:

Primeiro, devemos entender que as arestas de um polígono convexo são compartilhadas pelas suas faces. Como sabemos que cada face hexagonal possui 6 lados e cada face quadrangular possui 4 lados, podemos descobrir o seu número de arestas pela propriedade vista anteriormente:

$$2A = nF = 6\,.\,2 + 4\,.\,6$$

$$2A = 12 + 24$$

$$2A = 36$$

$$A = 18$$

Uma vez em posse do número de arestas desse poliedro, usamos a relação de Euler para descobrir o número de vértices:

$$V + 8 = 18 + 2$$

$$V = 20 - 8 = 12$$

Logo, este poliedro possui 18 arestas e 12 vértices.

Os poliedros possuem também uma importante propriedade relacionada à soma dos ângulos internos das faces:

$$S_{i\,faces} = 360° \,.\, (V - 2)$$

Onde V é o número de vértices do poliedro.

Exercício 2: Considere um poliedro regular cuja soma dos ângulos de suas faces seja 2160°. Qual é o número de arestas desse poliedro?

Resolução:

Utilizando a equação da soma dos ângulos das faces de um poliedro, temos:

$$2160° = 360° \,.\, (V - 2)$$

$$V - 2 = \frac{2160°}{360°}$$

$$V - 2 = 6$$

$$V = 8$$

Como este poliedro é regular e possui 8 vértices, dentre todos os poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) ele só pode ser um hexaedro. Além disso, como sabemos que o hexaedro possui 12 arestas, temos a nossa solução: o poliedro possui 12 arestas.

ANOTAÇÕES