CAPÍTULO 27
MATRIZES

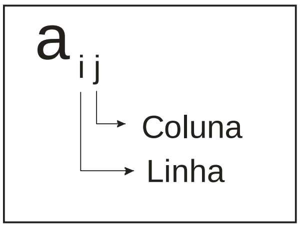
Matriz é toda tabela de números formada por $\boldsymbol{m}$ linhas e $\boldsymbol{n}$ colunas, sendo $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ dois números inteiros maiores ou iguais a 1. Dizemos que a matriz é do tipo $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ (lê-se: $\boldsymbol{m}\ por\ \boldsymbol{n}$) ou de ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$.

Podemos esboçar a matriz da seguinte maneira:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notação:

- Letras maiúsculas representam as matrizes, por exemplo, $A_{m\,x\,n}$.
- Letras minúsculas representam os elementos, por exemplo, a_{ij}
- Os elementos são determinados pela posição que ocupam dentro da matriz, obedecendo à seguinte forma:



Exemplos:

a) $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

A é uma matriz de 3 linhas e 2 colunas e de ordem 3×2.
Por exemplo, o número 5 está na 2ª linha e 2ª coluna, ou seja, $a_{22} = 5$.

b) $B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

B é uma matriz de 3 linhas e 3 colunas e de ordem 3×3. Neste caso, o usual é dizer que B tem ordem 3.

Lei de Formação

Existem matrizes que podem ser representadas abreviadamente por uma sentença matemática que indica a lei de formação para seus elementos.
Exemplo:
01. Construa a matriz de ordem 2×3, sendo a lei de formação dada por $a_{ij} = i \cdot j$
Escrevendo a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$, temos:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- **MATRIZES ESPECIAIS**

Vejamos alguns tipos de matrizes especiais.

✓ **MATRIZ QUADRADA**:

É a matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas e apresenta duas diagonais, a saber: diagonal principal (DP) e diagonal secundária (DS).
Exemplo:

Diagonal Secundária

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ -1 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonal Principal

✓ **MATRIZ IDENTIDADE**

Chama-se matriz identidade de ordem n, que se indica por I_n, a matriz:

$$I_n = (a_{ij})_{n\times n}\ tal\ que \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}.$$

Note que:
Toda matriz identidade de ordem maior que 1 terá todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e todos os demais iguais a 0.
Exemplos:

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

✓ **MATRIZ NULA**

Matriz nula do tipo $m \times n$ é qualquer matriz que possui todos os elementos iguais a zero.
Exemplo:
Considere uma matriz $B_{3\times 2}$ nula, então podemos escrever:

$$B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓ **MATRIZ TRANSPOSTA**

Dada uma matriz A qualquer, dizemos **transposta de $\boldsymbol{A}$** a matriz A^t obtida de A permutando-se as linhas pelas colunas e vice-versa, ou seja, se temos o elemento $a_{12}\ (primeita\ linha, segunda\ coluna)$ na matriz A, na transposta A^t será $a_{21}(segunda\ linha, primeira\ coluna)$.
Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Notas:

1ª. Se $A = A^t$·, então dizemos que a matriz A é simétrica.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, temos que $A = A^t$. Logo são simétricas.

2ª. Se $A = -A^t$ e os elementos da diagonal principal de A forem todos nulos então, dizemos que a matriz A é antissimétrica. É claro que as matrizes simétricas e antissimétricas são quadradas.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = -A^t$. Logo, são antissimétricas.

Igualdade de Matrizes

Dizemos que duas matrizes, A e B, do mesmo tipo $m \times n$, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição forem idênticos.

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A = B$, então $c = 0$ e $b = 3$.

Operações com Matrizes

Adição e Subtração de Matrizes

I - Dadas as matrizes A, B e C, de ordem $m \times n$, chamamos soma de A com B a matriz C, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Notação: $A + B = C$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

II - Dadas as matrizes A, B e C, de ordem $m \times n$, chamamos subtração de A com B a matriz C, tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Notação: $A - B = C$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 4-(-1) \\ 0-0 & 7-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e x um número real, definimos produto de x por todos os elementos da matriz A uma matriz $B_{m \times n}$ tal que:

$$B = x \cdot A$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $x = 3$, então B será:

$$B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ 12 & 9 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

O produto de duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é definido quando o número de colunas de $\boldsymbol{A}$ for igual ao número de linhas de $\boldsymbol{B}$ e, indicamos por:

$$A \cdot B = C$$

Em outras palavras, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, temos:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Observe que:

1. O número de linhas da matriz C é o mesmo da matriz A.
2. O número de colunas da matriz C é o mesmo da matriz B.

Para obtermos o produto de duas matrizes A e B, devemos multiplicar ORDENADAMENTE os elementos da linha $\boldsymbol{i}$, da matriz A, pelos elementos da coluna $\boldsymbol{j}$, da matriz B. Assim, cada elemento da matriz C é a soma dos produtos obtidos.

Exemplo:

1. Dados $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, vamos determinar $A \cdot B$.

Resolução:

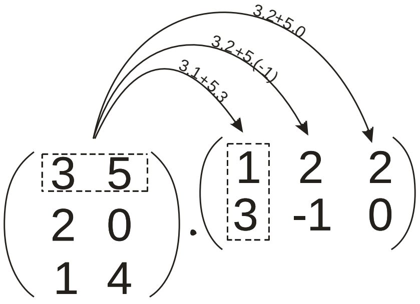
1º. Passo: verificar se o produto existe.

Temos:

$$A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = C_{3 \times 3}$$

Esse produto existe, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Observe que a ordem da matriz C é 3.

2º. Passo: realizar o dispositivo prático.



$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Assim, c_{11} é o produto dos elementos da 1ª. linha da matriz A pelos elementos da 1ª coluna matriz B, obtido da seguinte forma:

$$c_{11} = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 18.$$

Analogamente, teremos para os outros elementos:
$c_{12} = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1.$
$c_{13} = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 6\,.$
$c_{21} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 2.$
$c_{22} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 4.$
$c_{23} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4.$
$c_{31} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 13.$
$c_{32} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -2.$
$c_{33} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 2.$

Portanto, a matriz C será dada por:

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 13 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades das Matrizes

Vejamos algumas propriedades das matrizes.
P1. $(A^t)^t = A.$
P2. $(A + B)^t = A^t + B^t.$
P3. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$

Se verificadas as condições de existência, para a multiplicação de matrizes, são válidas as seguintes propriedades:
P4. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$
P5. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$
P6. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B.$
P7. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

IMPORTANTE: segundo a definição de produto, só é possível calcular $A \cdot B$ e $B \cdot A$ se A e B são matrizes quadradas. Entretanto, na multiplicação de matrizes, a ordem dos fatores não é indiferente. Em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, definimos **matriz inversa** de A, usualmente simbolizada por A^{-1}, toda matriz quadrada tal que seu produto pela sua inversa seja igual a uma matriz identidade.

$$A \cdot A^{-1} = I$$
$$ou$$
$$A^{-1} \cdot A = I$$

Exemplo:

01. Sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, vamos determinar a matriz inversa de A.

Resolução:
Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I_2$.

Sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas temos:

$$a = \frac{1}{5}\ ,\ b = -\frac{2}{5}\ ,\ c = \frac{2}{5}\ \text{ e } d = \frac{1}{5}$$

Assim: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Exercícios

01. (PUC) Se A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,então a matriz X, de ordem 2, tal que: $\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C$ é igual a :
a) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 24 & 3 \end{pmatrix}$.
b) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$.
c) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 25 & 3 \end{pmatrix}$.
d) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 30 & 3 \end{pmatrix}$.
e) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 22 & 3 \end{pmatrix}$.

02. (PM) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ do tipo 3×4, calcule o elemento situado da 2ª linha e na 2ª coluna, sendo $a_{ij} = i^4 + 5j$:
a) 36.
b) 35.
c) 25.
d) 26.
e) 30.

03. (EEAR) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix}$. Se $A \cdot B$ é uma matriz nula 2×1, então $a + b$ é:
a) -1.
b) 0.
c) 1.
d) 2.

04. (EEAR) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Se A^t e B^t são as matrizes transpostas de A e B, respectivamente, então $A^t + B^t$ é igual a:
a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

05. (EFOMM) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ então $M \cdot N - N \cdot M$ vale:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

06. (ESPCEX) Os valores de x e y que satisfazem a igualdade $\begin{bmatrix} log_x 3 & 1 \\ log_3 x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ log_2 y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ são, respectivamente:

a) 3 e $\frac{1}{2}$.
b) 3 e 2.
c) 9 e $\frac{1}{2}$.
d) 3 e $\sqrt{2}$.
e) 9 e $\sqrt{2}$.

07. (AFA) As Matrizes A, B e C são do tipo $m \times 3, n \times p$ e $4 \times r$, respectivamente. Se a matriz transposta de $(A \cdot B \cdot C)$ é do tipo 5×4, então:

a) $m = p$.
b) $mp = nr$.
c) $n + p = m + r$.
d) $r = n$.

Capítulo 28
Determinantes

Determinante é um número associado a uma matriz quadrada, na qual é obtido a partir de operações que envolvem todos os elementos da matriz.
Para representarmos o determinante de uma matriz, utilizamos barras.

Determinante de 2ª. ordem

Dada a matriz M = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição, temos que o determinante associado a essa matriz, ou seja, o determinante de 2ª. ordem é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

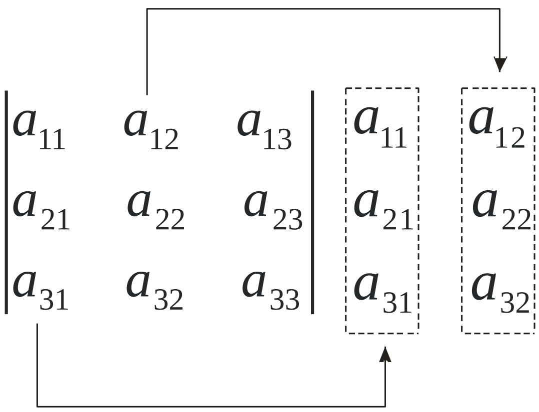
Exemplo: Sendo M = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, então

det M = $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ = 1 . 3 − 3. 4 = 3 −12 = −9.

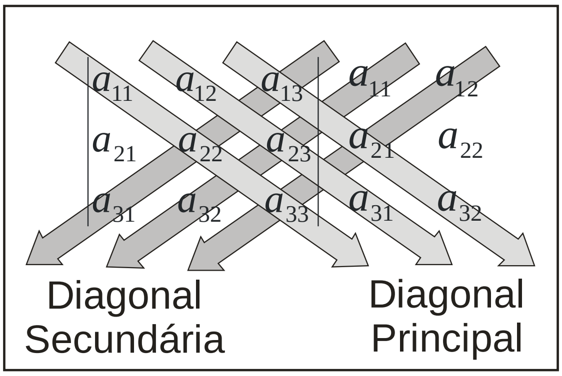
Determinante de 3ª. ordem

Dada a matriz D = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, devemos utilizar a regra de SARRUS para calcularmos o determinante dessa matriz. Assim, temos o seguinte dispositivo:

1º. Passo: repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira.

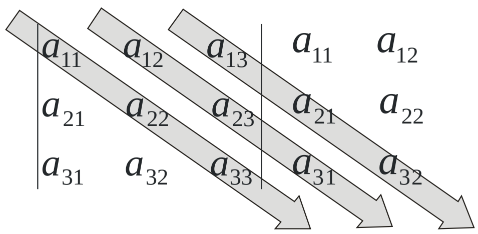


2º. Passo: De acordo com a figura abaixo iremos identificar a diagonal principal e a diagonal secundaria da matriz



3º. Passo: Iremos calcular o valor das diagonais através da soma dos produtos dos elementos indicados em cada seta. Veja a indicação dos cálculos abaixo:
Dados:

$$D_p \rightarrow Diagonal\ Principal$$
$$D_s \rightarrow Diagonal\ Secundária$$



$$D_p = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$D_s = a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

4º Passo:Calcula- se o valor do determinante pela subtração da diagonal principal pela diagonal secundária.

$$detD = D_{Principal} - D_{secundária}$$

Exemplo:

1. Calcular o valor do determinante da matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução:
De acordo com a regra de SARRUS, podemos escrever:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix}$$

Calculando as diagonais:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix}$$

$$Dig_{\ principal} = 2.1.1 + 3.2.(-3) + (-1).4.2$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix}$$

$$Dig_{Secundária} = (-1).1.(-3) + 2.2.2 + 3.4.1$$

Assim, temos:

$$detD = D_{Principal} - D_{secundária}$$
$$detD = (2 - 18 - 8) - (3 + 8 + 12)$$
$$= (-24) - 23$$
$$= -47.$$

Cofator

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, $n \geq 2$ e a_{ij} um elemento qualquer de A, então se denomina cofator do elemento a_{ij} o número real dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Sendo D_{ij} o determinante da matriz que se obtém após serem eliminadas a linha i e a coluna j da matriz A.
Exemplo:
01. Calcular o cofator do elemento a_{21} da matriz abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ \boxed{1} & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Temos:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow A_{21} = (-1) \cdot [5 \cdot 10 - (-1) \cdot 3]$$
$$\Rightarrow A_{21} = (-1) \cdot (50 + 3)$$
$$\Rightarrow A_{21} = -53.$$

Teorema de LAPLACE

O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.
Nesse método, é recomendável escolher a fila que contenha maior quantidade de elementos nulos.
Exemplo:
1. Calcular o determinante D.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolução:
De acordo com o teorema de Laplace, podemos escolher uma fila qualquer. Por comodidade, escolheremos a fila com maior quantidade de zeros, isto é, a terceira coluna. Tal escolha é conveniente porque o produto do elemento zero pelo seu cofator é igual a zero e, portanto, não é preciso calcular esse cofator.
Assim,

$$D = 3 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 4 \cdot A_{43}$$

Precisamos calcular apenas os cofatores A_{13} e A_{43}:

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot (1 + 24 + 4 - 2 - 3 - 16) = 8$$
$$A_{43} = (-1)^7 \cdot (60 + 4 + 2 - 32 - 5 - 3) = -26$$

Logo, D = 3.8 + 4.(−26) = −80.

Propriedades dos Determinantes

As propriedades, a seguir, são relativas a determinantes associados a matrizes quadradas de ordem n.

- **O determinante é nulo.**

P1. Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.
Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

P2. Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.
Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 11 \\ 2 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 5 & 11 \\ 2 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$
Observe que:
$$1^{\underline{a}}\ coluna = 2^{\underline{a}}\ coluna.$$

P3. Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então o seu determinante é nulo.
Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 11 \\ 4 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 10 & 5 & 11 \\ 4 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$
Observe que:
$$1^{\underline{a}}\ coluna = 2 \cdot (2^{\underline{a}}\ coluna).$$

P4. Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então o seu determinante é nulo.
Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 12 & 2 & 14 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 12 & 2 & 14 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$
Observe que:
$$3^{\underline{a}}\ coluna = 1^{\underline{a}}\ coluna + 2^{\underline{a}}\ coluna.$$

- **O determinante não se altera**

P5. **Teorema de Jacobi**: o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.
Ex.:
Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, pelo teorema acima podemos escrever, por exemplo, uma matriz B tal que:
$$B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Observe que $detA = detB$:
$$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$
$$det\ B = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -2.$$

P6. O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.
Exemplo:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$
$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$
Logo, $detA = detA^t$.

- **O determinante se altera**

P7. Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.
Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Multiplicando a 1ª. linha por 5, temos:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 10 = -10.$$

P8. Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.
Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Trocando de posição as linhas da matriz, temos:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2.$$

P9. Se $k \in \mathbb{R}$ e A é uma matriz quadrada de ordem n, então $det(k.A) = k^n \cdot det\ A$.
Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Multiplicando a matriz A por 8, temos:
$$\det(8 \cdot A) = 8^2 \cdot detA = 64 \cdot (-2) = -128.$$

- **Propriedades complementares**

P10. Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow detA = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 5 = 50.$$

P11. Se as matrizes A, B e C são tais que C = A.B, então det C = det A . det B.

P12. Determinante da matriz inversa: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Se A^{-1} é a matriz inversa de A , então $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Nessas condições, podemos afirmar que $\det(A.A^{-1}) = \det(I_n)$ e, portanto igual a 1.
Logo, podemos também escrever $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$.
Assim, concluímos que:
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Notas:

1ª. Se det (A) = 0, não existe a matriz inversa A^{-1}. Dizemos, então, que a matriz A é SINGULAR ou NÃO-INVERSÍVEL.

2ª. Se det A ≠ 0 , então a matriz inversa A^{-1} existe e é única. Dizemos, então, que a matriz A é INVERSÍVEL.

Exercícios Resolvidos

1. Qual o determinante associado à matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 10 & 87 & 100 \\ 6 & 9 & 3 & 24 \end{pmatrix}$$

Resolução:
Observe que a 4ª. linha da matriz é proporcional à 1ª. linha, isto é,

$$4\text{ª}.\,linha = 3 \cdot (1\text{ª}\ linha).$$

Portanto, pela **P3**, o determinante da matriz é NULO.

2. Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 25 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 34 \\ 32 & 0 & 87 \end{vmatrix}$$

Resolução:
Observe que a 2ª. coluna é composta por zeros; conforme **P1:** D = 0.

3. Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 67 & 5 & 0 \\ 44 & 21 & 9 \end{vmatrix}$$

Resolução:
Observe que os elementos acima da diagonal principal são todos nulos, portanto pela **P10**, temos:

$$D = 2 \cdot 5 \cdot 9 = 90.$$

Exercícios

01. (PM) O valor do determinante associado à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ é:
a) -2.
b) 0.
c) -1.
d) 1.
e) 2.

02. (EEAR) Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz real quadrada de ordem 2 e I_2 a matriz identidade também de ordem 2. Se "r_1" e "r_2" são as raízes da equação $det\,(A - r.I_2) = n.r$, sendo *n* um número inteiro positivo, podemos afirmar que
a) $r_1 + r_2 = a_{11} + a_{22}$.
b) $r_1 + r_2 = n\,(a_{11} + a_{22})$.
c) $r_1 \,.\, r_2 = det\,A$.
d) $r_1 \,.\, r_2 = -\,n \,.\, det\,A$.

03. (FGV) Se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = 0, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 1 \\ c & 0 & 2 \end{vmatrix}$ é:
a) 0.
b) bc.
c) 2bc.
d) 3bc.
e) b²c².

04. (AEPOM) Calcule os determinantes por intermédio das propriedades, justificando os valores obtidos.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -8 \\ 3 & 5 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

05. (AEPOM) Calculando o determinante abaixo encontramos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

06. (ITA) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} cos25° & sen65° \\ sen120° & cos390° \end{bmatrix}$. O valor do determinante de A é:
a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
b) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$.
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
d) 1.
e)0.

07. (AFA) O determinante $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$ é:
a) positivo para $x \in \mathbb{R}$.
b) negativo para $0 < x < 1$.
c) positivo para $x < -1\ ou\ x > 1$.
d) negativo para $x < -1$.

08. (ITA) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

CAPÍTULO 29
Sistemas Lineares

Equação Linear

Chama-se **equação linear** com **n** incógnitas toda equação do tipo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b$$

com a_{11}, a_{12}, a_{13},... a_{1n} são números reais que recebem o nome de coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ e b é um número real chamado termo independente.

Exemplos:

- ✓ $4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 11$
- ✓ $5x + 7y - 8z = 1$

Notas:

1ª. Nas equações lineares, todas as incógnitas apresentam expoentes iguais a 1.

2ª. Se $b = 0$, dizemos que a equação é HOMOGÊNEA.

Sistema Linear

Chamamos de ***sistema linear*** $m \times n$ o conjunto de m equações lineares, todas com n variáveis, que devem ser resolvidas simultaneamente.

Exemplos:

$S_1: \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 10 \\ 6x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 22 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 14 \end{cases}$

$S_3: \begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$

Observe que S_1 e S_2 são sistemas quadrados 2×2 e 3×3 respectivamente. S_3 é um sistema 3×2. Assim, um sistema linear genérico $m \times n$ é geralmente representado por:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Expressão Matricial de um sistema de Equação

A esse tipo de sistema, é costume associar a um produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exemplo:

1. S: $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$

Temos: **S** → $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{11} \end{pmatrix}$

Regra de Cramer

Em um sistema linear normal, podemos aplicar o método de **Cramer** que consiste no seguinte:

Considerando:

- **A** → a matriz dos coeficientes.
- **A_x** → a matriz que se obtém substituindo da matriz **A,** a coluna dos coeficientes de **x** pela coluna dos termos independentes.
- **A_y** → a matriz que se obtém substituindo da matriz **A,** a coluna dos coeficientes de **y** pela coluna dos termos independentes.

e assim por diante, os valores das variáveis são dados por:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} \quad , \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} \quad \ldots$$

Exemplo:

1. Resolver o seguinte sistema: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

Resolução

Temos m = n = 2

S → $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Assim a matriz dos coeficientes:

A = $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ = −6 −2 = −8 ≠ 0

Como o sistema é normal, podemos utilizar a regra de Cramer para resolvê-lo.

Substituindo na coluna dos coeficientes de x pela coluna formada pelos termos independentes, encontramos:

$\det A_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$ = −21−3 = −24

Substituindo, agora, a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes, encontramos:

$\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = 6 − 14 = −8.

Assim: $x = \dfrac{\det A_x}{A} = \dfrac{-24}{-8} = 3 \quad e \; y = \dfrac{\det A_y}{A} = \dfrac{-8}{-8} = 1$

Logo, (x, y) = (3, 1) é a solução do sistema dado.

Sistema Linear Escalonado

Dependendo do sistema linear, não é conveniente utilizarmos a regra de Cramer por se tornar muito trabalhosa. Por exemplo, um sistema com quatro equações e quatro incógnitas requer o cálculo de cinco determinantes de 4ª. ordem.

Nesse caso, usamos a técnica de **escalonamento**, que se aplica a todo tipo de sistema linear.

Vejamos:

Dado o sistema linear:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

quando existir pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, dizemos que S está escalonado se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, aumentar de equação para equação.

Exemplos:

1. $S_1 = \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3y = 12 \end{cases}$

2. $S_2 = \begin{cases} 5x - y + z = 7 \\ 3y - z = 2 \\ 2z = 1 \end{cases}$

Propriedades fundamentais

P1. Um sistema de equações não se altera, quando permutamos as posições de duas equações quaisquer do sistema.

P2. Um sistema de equações não se altera, quando multiplicamos os membros de qualquer uma das equações do sistema, por um número real não nulo.

P3. Um sistema de equações lineares não se altera, quando substituímos uma equação qualquer por outra obtida a partir da adição membro a membro desta equação, com outra na qual foi aplicada a propriedade 2.

Procedimentos para escalonar um sistema

1. Fixamos como 1ª. equação uma das que possuam o coeficiente da 1ª. incógnita diferente de zero.
2. Anulamos todos os coeficientes da 1ª. incógnita das demais equações.
3. Anulamos todos os coeficientes da 2ª. incógnita a partir da 2ª. equação.
4. Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Exemplo:

1. Escalone o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = -2 \\ 2x - y + 5z = 18 \end{cases}$$

Resolução

Para escalonarmos, o sistema proposto vamos nos utilizar das operações elementares, indicando-as por meio de um esquema com setas. Assim, seguindo os procedimentos de escalonamento temos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 & \times(-3) \quad \times(-2) \\ 3x + 2y - z = -2 & \leftarrow + \\ 2x - y + 5z = 18 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ -y - 7z = -20 & \times(-3) \\ -3y + z = 6 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ -y - 7z = -20 \\ 22z = 66 \end{cases}$$ Sistema Escalonado

Da terceira equação do sistema escalonado, temos:

$$22z = 66 \leftrightarrow z = \frac{66}{22} = 3.$$

Substituindo $z = 3$ na segunda equação do sistema escalonado, encontramos:

$$-y - 7 \cdot (3) = -20$$
$$-y = -20 + 21$$
$$y = -1.$$

Substituindo $z = 3$ e $y = -1$ na primeira equação do sistema escalonado, obtemos:

$$x + (-1) + 2 \cdot (3) = 6$$
$$x - 1 + 6 = 6$$
$$x = 6 - 6 + 1$$
$$x = 1.$$

Logo, o conjunto solução do sistema proposto é {(1, -1, 3)}.

Discussão de um Sistema Linear

Se um sistema linear possui $\boldsymbol{n}$ equações e $\boldsymbol{n}$ incógnitas, então ele pode ser:

- **Possível e determinado:** se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, isto é, det **A** ≠ 0. Nesse caso, a solução é única.

- **Possível e indeterminado:** se os determinantes forem iguais a zero, isto é, det **A** = det $\mathbf{A}_x$ = det $\mathbf{A}_y$ = ... = 0, para n = 2; para n ≥ 3, esta condição só é válida se não temos equações com coeficientes das incógnitas respectivamente proporcionais e termos independentes não-proporcionais. Nesse caso, o sistema apresenta infinitas soluções.

- **Impossível:** se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero (det **A** = 0) e existir det $\mathbf{A}_x$ ≠ 0 ou det $\mathbf{A}_y$ ≠ 0 ou qualquer outro determinante diferente de zero. Nesse caso, o sistema não tem solução.

Exemplo:

1. Discutir para quais valores de k o sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + ky = 2 \end{cases}$ é:

a) possível e determinado.
b) possível e indeterminado.
c) impossível.

Resolução:

a) O sistema é possível e determinado se det A ≠ 0. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k - 4 \neq 0 \Rightarrow k \neq 4$$

b) O sistema é possível e indeterminado se det **A** = det $\mathbf{A_x}$ = det $\mathbf{A_y}$ = 0.
temos:

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \nexists k \in R$$

tal que o sistema seja possível e indeterminado.

c) O sistema é impossível se det A = 0 e det $A_x \neq 0$ ou det $A_y \neq 0$. Mas, det A = 0 para k = 4. Como det $A_y = -4 \neq 0$, o sistema é impossível para k = 4.

Observação:
Chama-se **sistema Linear Homogêneo** aquele que possui **todos** os termos independentes **nulos**. São exemplos de sistemas homogêneos:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 4x + 2y - 3z = 0 \\ 9x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ \ \ x - \ 3y + 7z = 0 \end{cases}$$

Note que todo sistema homogêneo é **possível**, pois admite a **solução nula** (0, 0, 0, ..., 0), também conhecida como **solução trivial**.

Exercícios

01. Escalone, classifique e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$

02. (PM) Se a terna ordenada (a, b, c) de números reais, é a solução do sistema $\begin{cases} x + \ y - \ z = 0 \\ x - \ y + \ z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$ então $a + b + c$ é igual:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

03. (PM) Determine a solução do sistema: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

a) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.
b) $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.
c) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.
d) $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
e) $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

04. (EEAR) Os valore de **k**, tais que o sistema homogêneo $\begin{cases} x + \ y + 2z = 0 \\ x - \ ky + z = 0 \\ kx - y - \ z = 0 \end{cases}$ admita apenas a solução trivial, são:

a) $k \neq 0 \ ou \ k \neq -1$.
b) $k \neq 1 \ ou \ k \neq -1$.
c) $k = 0 \ ou \ k \neq -1$.
d) $k \neq 1 \ ou \ k \neq -2$.

05. (EFOMM) Em um navio transportador de petróleo, um oficial de náutica colheu 3 amostras de soluções resultantes da lavagem dos tanques e constatou 3 produtos diferentes x, y, z que podem ser relacionados pelo seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x - 2y + mz = 0 \\ mx + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

Para que valores de $\boldsymbol{m}$, o sistema é possível e determinado?

a) $m \neq 1 \ ou \ m \neq 6$.
b) $m \neq 5 \ ou \ m \neq -3$.
c) $m = 4 \ ou \ m = 5$.
d) $m = 3 \ ou \ m \neq -2$.
e) $m \neq 3 \ ou \ m \neq -1$.

06. (EPCAR) Considere o sistema linear $\begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + y = q \\ 4x + pz = 0 \end{cases}$ nas variáveis x, y e z, com $p, q \in \mathbb{R}$. é correto afirmar que:

a) Se $p = q = 0$, os sistema terá solução além da trivial.
b) Se $p = 2$ e $q = 1$, o sistema terá mais de uma solução.
c) Existe algum valor de p para o qual o sistema é impossível, quando $q = 0$.
d) o sistema terá uma única solução se o determinante da matriz incompleta não for nulo, qualquer que seja o valor de q.

07. (AFA) Os valores de k fazem o sistema $\begin{cases} x - z = 0 \\ kx + y + 3z = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$ admitir uma única solução real que pertence ao conjunto:

a) $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.
b) $\mathbb{R} - \{1, -4\}$.
c) $\mathbb{R} - \{-1, 4\}$.
d) $\mathbb{R} - \{1, -3\}$.

08. (AEPOM) Seja dado o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 5 \end{cases}$$

A solução desse sistema é a terna (x, y, z) igual a:

a) (1, 2, 3).
b) (3, −2, 1).
c) (1, −10, −5).
d) (0, −10, −5).
e) n.d.a.

CAPÍTULO 30

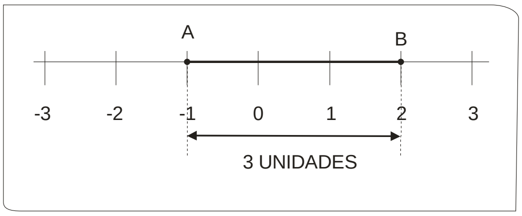
GEOMETRIA ANALÍTICA

Introdução

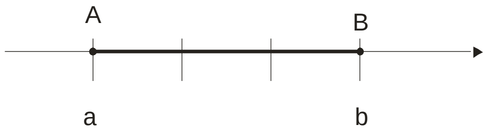
No volume anterior estudamos: geometria plana e geometria espacial. Agora iremos unir propriedades geométricas com coordenadas no plano cartesiano e funções, a fim de utilizar a geometria das coordenadas ou geometria analítica. Iremos relacionar as figuras geométricas (com ponto, reta e circunferência) com elementos algébricos (como pares ordenados, equações etc.).

Distância entre dois pontos na reta

Em geometria analítica, um ponto na reta determina uma coordenada num eixo do plano cartesiano, assim para determinar a distância entre dois pontos, basta calcular a diferença entre as coordenadas.



Geometricamente chegamos à conclusão que a distância entre os pontos **A** e **B** equivale a 3 unidades. Assim generalizando a chegaremos à seguinte formula:



d (A, B) =| b - a |

Exercício Resolvido

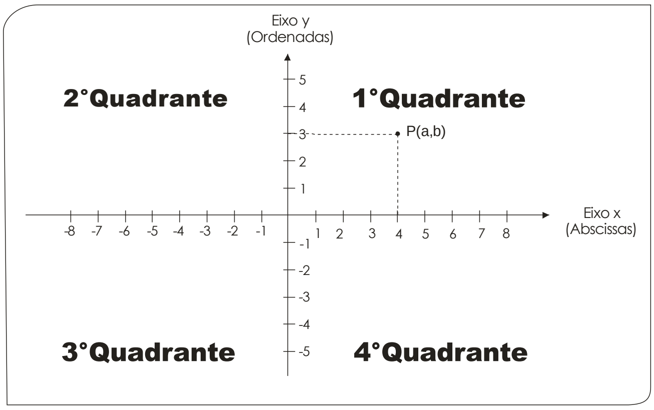
01. (AEPOM) Dados os pontos A, B e C de coordenadas -6, 2 e 10, respectivamente, calcular:
a) a distância entre A e B.
b) o comprimento do segmento BC.
c) a distância os pontos A e C.
Resolução:

a)
$$d(A,B)=|b-a|$$
$$d(A,B)=|2-(-6)|$$
$$d(A,B)=|2+6|$$
$$d(A,B)=8$$

b)
$$d(B,C)=|c-b|$$
$$d(B,C)=|10-2|$$
$$d(B,C)=8$$

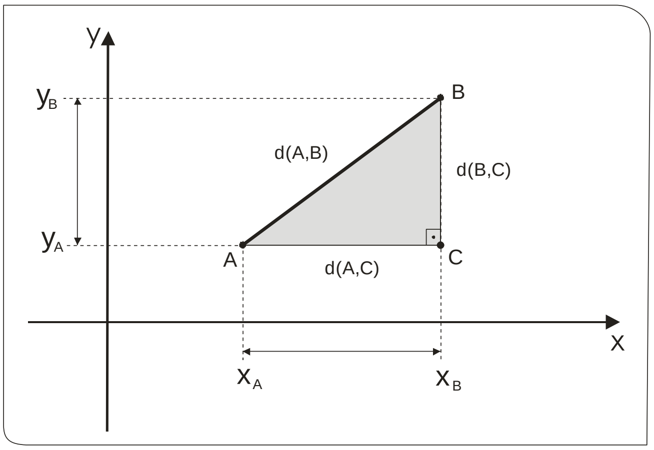
c)
$$d(A,C)=|c-a|$$
$$d(A,C)=|10-(-6)|$$
$$d(A,C)=|10+6|$$
$$d(A,C)=16$$

Relembrando Sistema cartesiano ortogonal

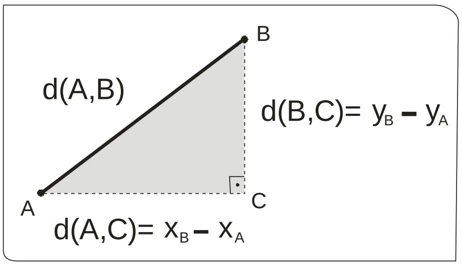


Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Quando identificamos no plano cartesiano dois pontos A e B, teremos os seguintes elementos:



Sejam x_A e y_A as coordenadas do ponto $A(x_A, y_A)$ e x_B e y_B as coordenadas do ponto $B(x_B, y_B)$.
No triângulo retângulo ABC, pelo teorema de Pitágoras, teremos:

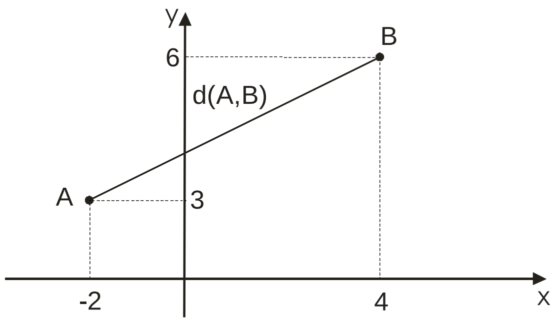


$[d(A,B)]^2=[d(A,C)]^2+[d(B,C)]^2$, concluindo a fórmula:

$$[d(A,B)]^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercícios Resolvidos

01. (AEPOM) Calcular a distância entre os pontos $A(-2,3)$ e $B(4,6)$.
Resolução:



Assim temos:

$x_A = -2$ e $y_A = 3$.

$x_B = 4$ e $y_A = 6$.

$$d(A,B) = \sqrt{(4-(-2))^2 + (6-3)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(6)^2 + (3)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{36+9}$$
$$d(A,B) = \sqrt{45}$$

02. (AEPOM) Usando as coordenadas abaixo, determine se é possível formar um triângulo retângulo ligando cada uma delas. Dados: $A\ (-1,-3), B\ (6,1)\ e\ C(2,-5)$.

Resolução:

$$d(A,B) = \sqrt{(6+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{26}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(2+1)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$d(B,C) = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

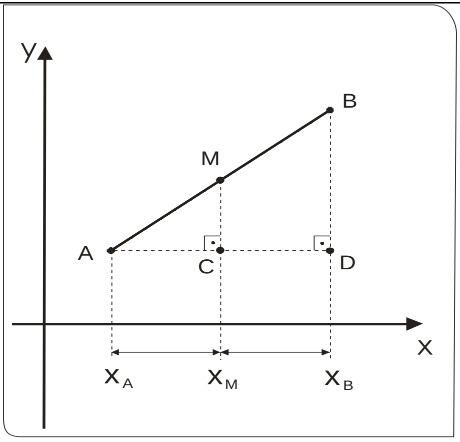
Aplicando o teorema de Pitágoras e usando o maior lado como hipotenusa, temos:

$$\left(\sqrt{65}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{26}\right)^2$$
$$65 = 13 + 26$$
$$65 = 65$$

Logo, o triângulo é retângulo de hipotenusa $\overline{AB}$.

Cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento

Para solução de alguns problemas, precisaremos determinar a coordenada do ponto equidistante a duas extremidades. Para isso, iremos utilizar da geometria plana, mais especificamente semelhança de triângulos para chegarmos a uma conclusão lógica da fórmula do ponto médio.



Na figura, temos dois triângulos, ΔADB e ΔACM que são semelhantes (pelo critério de ângulo-ângulo). O ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Logo, podemos concluir que o ponto C é ponto médio de $\overline{AD}$.

Assim $M = (x_M, y_M)$

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Exercício Resolvido

01. (AEPOM) Determine as coordenadas do ponto médio de um segmento cujas extremidades são $A\ (-2, 3)$ e $B(6, 9)$.

Resolução:

Consideremos M o ponto médio de $\overline{AB}$, assim:

$$M = (x_M, y_M)$$

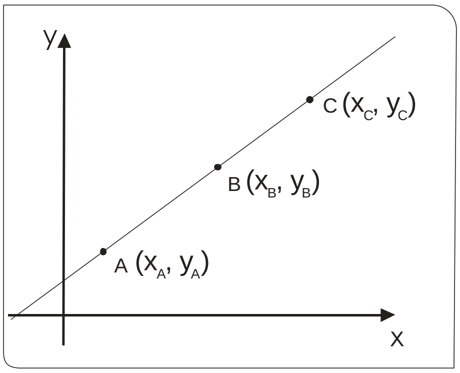
Então, temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6$$
$$\therefore M = (2, 6)$$

Condição de alinhamento entre três pontos

No gráfico a seguir, mostraremos três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, que estão alinhados em cima da mesma reta.

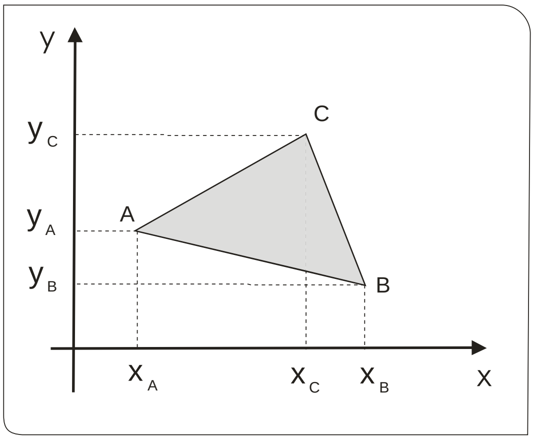


Iremos adotar o método matricial para provar se os três pontos estão alinhados. Para isto é valida a seguinte afirmação:

$$D = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow (colineares)$$

Quando $D \neq 0$, dizemos que os três pontos não estão alinhados, ou seja, não são colineares. Assim, se ligarmos os pontos, formaremos um triângulo cuja área pode ser calculada pela fórmula:



$$S_{triângulo} = \frac{|D|}{2}$$

Baricentro

Sabemos da Geometria plana, que o baricentro de um triângulo ABC é o ponto de encontro das três medianas. Sendo G o baricentro, as coordenadas de $G(x_G,\ y_G)$ do triângulo ABC nas quais $A(x_a\ , y_a)\ , B(x_b\ , y_b)\ e\ C(x_c\ , y_c)$ é dado por:

$$x_G = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}$$

$$y_G = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}$$

Assim, podemos dizer que **as coordenadas do baricentro do triângulo ABC, são iguais às médias aritméticas das coordenadas dos pontos A, B e C.**

Exemplo:

01. Calcule o baricentro do triângulo formado pelos pontos $A(0, 2), B(-3, 1)$e $C(4, 5)$.

Resolução:
Sabemos que as coordenadas do baricentro do triângulo ABC são iguais às médias aritméticas das coordenadas dos pontos A, B e C. Assim, temos:

$$G(x_G, y_G)$$

$$x_G = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \quad \Rightarrow x_G = \frac{0 - 3 + 4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$y_G = \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \quad \Rightarrow y_G = \frac{2 + 1 + 5}{3} = 4$$

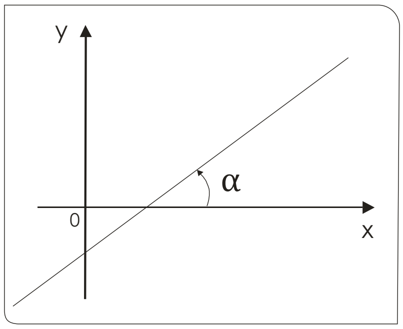
Logo,

$$G = \left(-\frac{1}{3}, 4\right)$$

Estudo da Reta

Inclinação e Coeficiente angular de uma reta

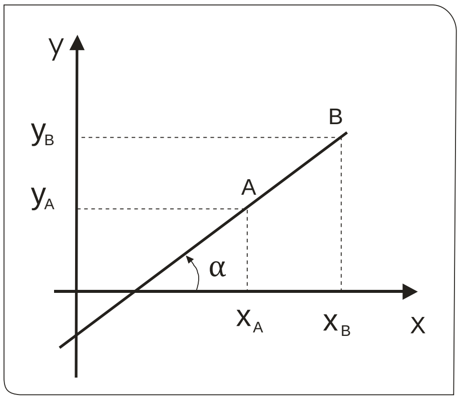
Dada uma reta no plano cartesiano, o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ é dado como a inclinação da reta $\boldsymbol{r}$ em relação ao eixo x.



Denomina-se coeficiente angular o número real $\boldsymbol{m}$ que é dado por:

$$m_r = tg\ \alpha$$

Cálculo do coeficiente angular:



$$m_r = tg\ \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \Rightarrow \quad m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exercício Resolvido

01. (AEPOM) Determinar o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A\ (2{,}4)$ e $B(3{,}7)$.
Resolução:

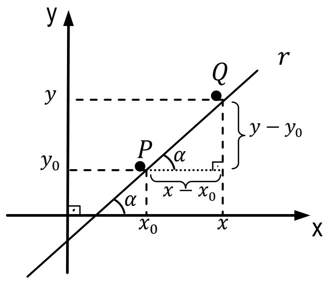
$$tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$tg\alpha = \frac{7-4}{3-2} = \frac{3}{1}$$

$$m = 3$$

Equação Fundamental da reta

Seja $\boldsymbol{r}$ uma reta não-vertical com inclinação $\boldsymbol{m_r}$ e $P(x_0, y_0)$ um ponto conhecido dessa reta, considere ainda, $Q(x, y)$ um ponto qualquer da reta $\boldsymbol{r}$.
Observe a figura abaixo:



$$\Rightarrow \; m_r = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

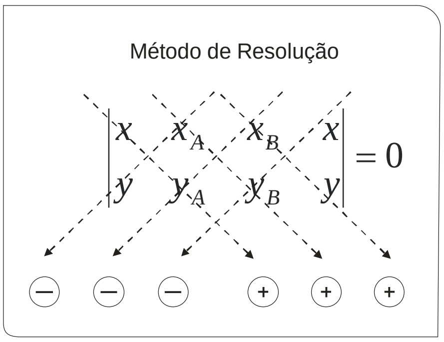
Então, podemos escrever:

$$\boxed{y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)}$$

Equação da Reta que passa por dois pontos

Para que possamos traçar uma reta, é necessário que conheçamos dois pontos, logo é valido o seguinte método semelhante a uma matriz capaz de gerar a equação da reta que passa por dois pontos:

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B & x \\ y & y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0$$



Efetuando o cálculo do determinante, obtemos uma equação do tipo:

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c} = 0$$

Dados $\boldsymbol{a \neq 0}$ e $\boldsymbol{b \neq 0}$, definimos a **equação geral da reta** que passa por dois pontos.

Nota: Para obtermos a ***equação reduzida da reta*** é necessário isolarmos a variável y.

Exemplo:

01. (AEPOM)Dados os pontos A(3,4) e B (1,2). Determinar a equação reduzida da reta.

Resolução:

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B & x \\ y & y_A & y_B & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 & x \\ y & 4 & 2 & y \end{vmatrix}$$

$$x.4 + 3.2 + 1.y - (3.y + 1.4 + x.2) = 0$$

$$4x + 6 + y - 3y - 4 - 2x = 0$$

$$2x - 2y + 2 = 0$$

$$y = \frac{2x+2}{2} \Rightarrow y = x + 1$$

Observação:

Equação segmentária de uma reta:

É toda equação de reta do tipo $\boldsymbol{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$, em que $\boldsymbol{p}$ corta o eixo x e $\boldsymbol{q}$ corta o eixo y.

Assim, uma equação geral da reta pode ser transformada em equação segmentária. Observe o exemplo a seguir:

Seja a reta r de equação geral $10x + 4y - 20 = 0$, podemos obter a equação segmentária da seguinte maneira:

1º. Passo: isolar as variáveis x e y.

$$10x + 4y = 20$$

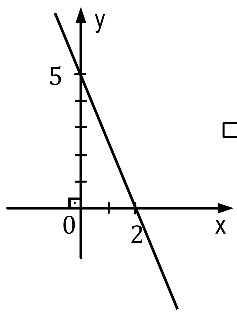
2º. Passo: dividir toda equação por 20.

$$\frac{10x}{20} + \frac{4y}{20} = \frac{20}{20}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$$

Representado a equação segmentária no plano, temos:



$$\boldsymbol{p} = 2$$
$$\boldsymbol{q} = 5$$

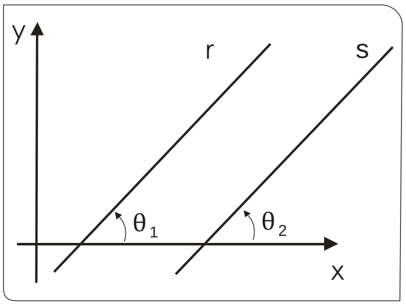
Observação:

Retas horizontais, verticais ou que passam pela origem **NÃO** possuem equação segmentária.

Posição relativa de duas retas no Plano Cartesiano

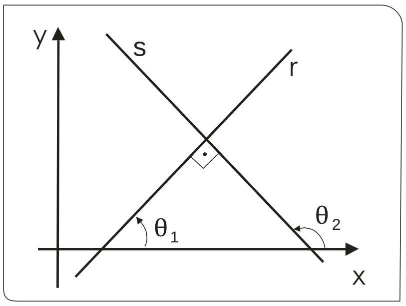
Considerando duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ **(não-verticais),** teremos as seguintes situações:

1°. Caso: $\theta_1 = \theta_2$.



$m_r = m_s$, logo as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são **paralelas.**

2°. Caso: $\theta_1 \neq \theta_2$

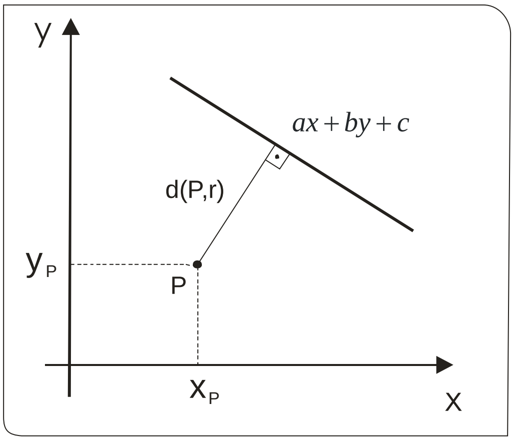


$m_r \neq m_s$, logo as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ não são **paralelas,** porém se o produto dos coeficientes angulares resultar em -1; chegaremos à conclusão que **r** e **s** são perpendiculares ou ortogonais.

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Distância entre um ponto e uma reta

Dados um ponto $P(x_p, y_p)$ e uma reta $\boldsymbol{r}$ de equação geral $ax + by + c = 0$, a distância entre P e r é dada pela formula:



$$d(P,r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo: Determine a distância entre o ponto $P(2, 1)$ e a reta s, de equação $x + 2y - 14 = 0$.

Resolução:

$$d(P,r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-14)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

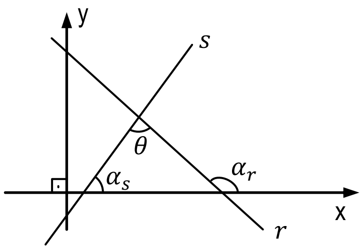
$$= \frac{|2 + 2 - 14|}{\sqrt{5}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

Racionalizando o denominador, obtemos:

$$d(P,r) = 2\sqrt{5}$$

Ângulo formado por duas retas

Considere $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ duas retas não-verticais e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo agudo formado entre essas retas. Então, de acordo com a figura abaixo temos:



Pelo teorema do ângulo externo, temos que:

$$\alpha_s + \theta = \alpha_r \quad \Rightarrow \quad \theta = \alpha_r - \alpha_s$$

Aplicando tg em ambos os lados temos:

$$tg\ \theta = tg(\alpha_r - \alpha_s) \quad \Rightarrow \quad tg\ \theta = \frac{tg\ \alpha_r - tg\ \alpha_s}{1 + tg\ \alpha_r \cdot tg\ \alpha_s}$$

Mas, sabemos que:

$$m_r = tg\ \alpha_r \quad e \quad m_s = tg\ \alpha_s$$

Substituindo e como estamos considerando θ um ângulo agudo ($tg\ \theta > 0$), temos:

$$\boxed{tg\ \theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|}$$

Exemplo: Determine a medida do ângulo agudo formado pelas retas (r): $x + 5y - 10 = 0$ e (s): $2x - 3y + 12 = 0$.

Resolução:

Isolando a variável y em cada uma das equações, a fim de determinarmos os coeficientes angulares, temos:

reta $\boldsymbol{r}$:

$$x + 5y - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{5}x + 2 \quad \Rightarrow \quad m_r = -\frac{1}{5}$$

reta $\boldsymbol{s}$:

$$2x - 3y + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + 4 \ \Rightarrow \ m_s = \frac{2}{3}$$

Assim, sendo θ a medida do ângulo agudo, temos:

$$tg\ \theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right| \Rightarrow tg\ \theta = \left|\frac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{2}{3}}\right| = |-1|$$

$$\therefore tg\ \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°$$

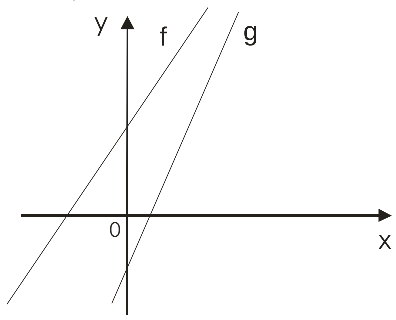
Exercícios

01. (EEAR) Considere o segmento que une os pontos $(-1, -3)$ e $(5, 5)$ e uma reta perpendicular a ele. O coeficiente angular desta reta é

a) $-\frac{2}{3}$.
b) $-\frac{3}{4}$.
c) $\frac{1}{2}$.
d) $\frac{2}{3}$.

02. (EEAR) Os pontos $M(-2, a), N(a, 5)\ e\ P(0, a)$ estão alinhados. Assim o quadrante que o N pertence é
a) 1°.
b) 2º.
c) 3º.
d) 4°.

03. (EEAR) Sejam os gráficos $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Podemos afirma que



a) $a > 0\ e\ b < 0$.
b) $a < 0\ e\ d > 0$.
c) $b > 0\ e\ d > 0$.
d) $c > 0\ e\ d < 0$.

04. (EEAR) Seja G um ponto de todas as medianas de um triângulo cujos vértices são $A(-1, -3), B(4, -1)\ e\ C(3,7)$. A abscissa de G é

a) -1.
b) 0.
c) 1.
d) 2.

05. (AEPOM)Num triângulo ABC, sendo $A = (4,3)$, $B = (0,3)$ e C um ponto pertencente ao eixo Ox com $AC = BC$. O ponto C tem como coordenadas
a) $(2,0)$.
b) $(-2,0)$.
c) $(0,2)$.
d) $(0, -2)$.

06. (AEPOM) Dados os vértices $P(1, 1)$, $Q(3, -4)$ e $R(-5, 2)$ de um triângulo, o comprimento da mediana que tem extremidade no vértice Q é
a) 12,32.
b) 10,16.
c) 15,08.
d) 7,43.

07. (EEAR)Seja $M(4, a)$, o ponto médio do segmento de extremidades $A(3, 1)$ e $B(b, 5)$. Assim, o valor a+b é
a) 8.
b) 6.
c) 4.
d) 2.

08. (EEAR) Seja α o ângulo formado por duas retas cujos coeficientes angulares são $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$. O valor de $tg\ \alpha$ é:
a) $\frac{3}{4}$.
b) 1.
c) $\frac{5}{4}$.
d) $\frac{3}{2}$.

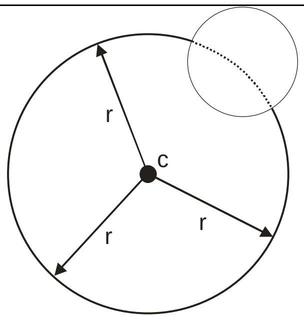
09. (AFA) A área, em unidades de área, do polígono cujos vértices são os pontos $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(-3, -1)$, $(2, -3)$ e $(5, 1)$.
a) 20.
b) 55.
c) 40.
d) 72.

CAPÍTULO 31

CIRCUNFERÊNCIA

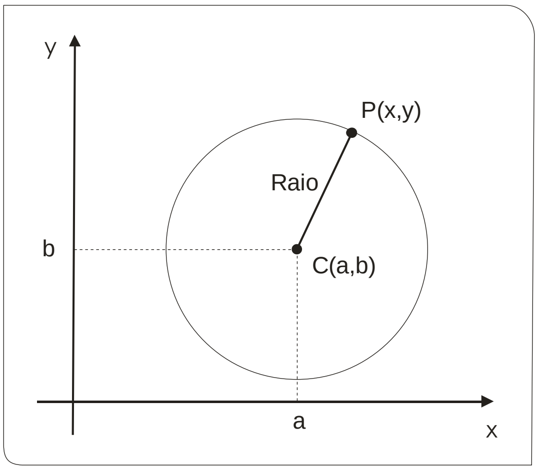
Estudo da Circunferência

Na definição de geometria, temos que circunferência é o conjunto de todos os pontos equidistantes a um ponto fixo (centro da circunferência).



Equação reduzida da Circunferência

Sabendo que a distância do centro da circunferência para qualquer ponto da mesma é sempre **igual** e que uma circunferência é formada por infinitos pontos, usaremos a fórmula que calcula a distância entre dois pontos para definirmos a equação reduzida da circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r.



$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

Nota:
Desenvolvendo a equação e ordenando convenientemente os termos, temos:

$$\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0}$$

A essa equação damos o nome de **equação geral da circunferência**.

Exemplo: Determinar a equação geral da circunferência com centro no ponto $C(3,\ 6)$ e raio igual a 4.

Resolução:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-3)^2+(y-6)^2=4^2$$

$$x^2-2.3.x+3^2+y^2-2.6.y+6^2=4^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-12y+36=16$$

$$x^2-6x+y^2-12y+29=0$$

Exercício Resolvido

01. (AEPOM) Determine a equação reduzida da circunferência em que os pontos $A\,(4,-2)$ e $B\,(2,0)$ são extremidades do diâmetro.

Resolução:
Vamos calcular a medida do diâmetro, sabendo que o raio vale metade do diâmetro.

$$d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

$$d(A,B)=\sqrt{(2-4)^2+(0+2)^2}$$

$$d(A,B)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore r=\frac{d(A,B)}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Vamos calcular a coordenada do centro da circunferência, sabendo que este ponto é ponto médio do diâmetro. Assim, temos:

$$a=x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4+2}{2}=3$$

$$b=y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-2+0}{2}=-1$$

Logo, o centro é dado por: $C\,(3,-1)$

Portanto, a equação reduzida da circunferência vale:

$$(x-3)^2+\left(y-(-1)\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

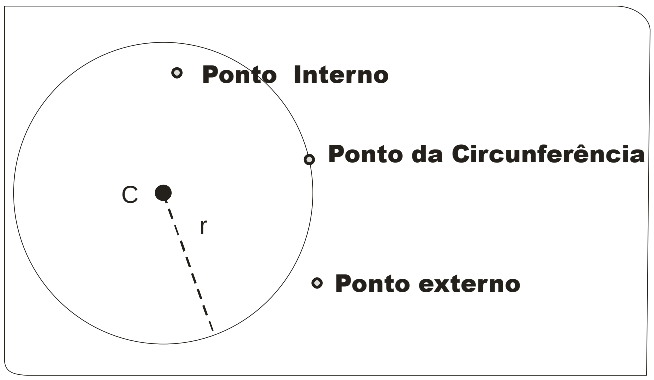
$$(x-3)^2+(y+1)^2=2$$

Posições relativas

- ✓ **Ponto e circunferência**

De acordo com o estudo de circunferência no volume 2, daremos um novo enfoque na posição de um ponto em relação a uma circunferência.

Dada uma circunferência de centro C e uma reta s, temos:



Para verificar a posição de um ponto na circunferência, basta calcular a distância entre um ponto e o centro C da circunferência.

$$d(C,p) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

1°. Caso: $d(C,p) > r$; logo, o ponto é externo.

2°. Caso: $d(C,p) = r$; logo, o ponto pertence à circunferência.

3°. Caso: $d(C,p) < r$; logo, o ponto é interno.

Exemplo: Determine a posição do ponto $P(5,4)$ em relação à circunferência $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$.

Resolução:
Analisando a equação reduzida, concluímos que a circunferência possui centro $C(3,4)$ e raio $r = 3$. A distância do ponto P ao centro C é dado por:

$$d(C,p) = \sqrt{(5-3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Portanto, temos $d(C,p) < r$, pois $2 < 3$.

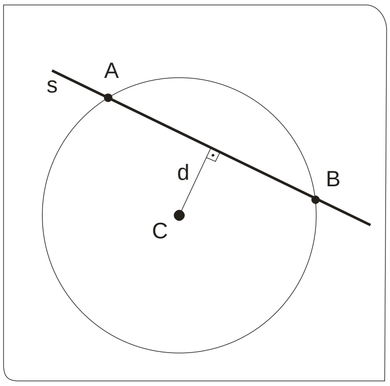
Logo, o ponto P é **interno** à circunferência.

- ✓ **Reta e Circunferência**

Dada uma circunferência de centro C e uma reta s, temos:

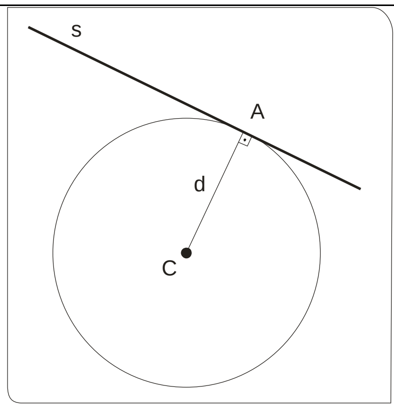
$$d(C,s) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1°. Caso: A reta $\boldsymbol{s}$ intercepta a circunferência em dois pontos. Assim, classificamos a reta $\boldsymbol{s}$ como **secante**.



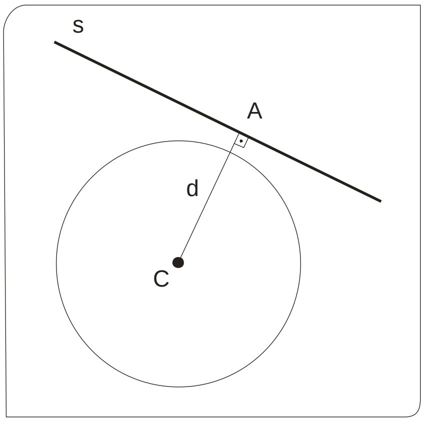
$$d(C,s) < r$$

2°.Caso: A reta $\boldsymbol{s}$ intercepta a circunferência em um ponto. Assim, classificamos a reta $\boldsymbol{s}$ como **tangente**.



$$d(C,s) = r$$

3°.Caso: A reta $\boldsymbol{s}$ não intercepta a circunferência. Assim, classificamos a reta $\boldsymbol{s}$ como **exterior**.



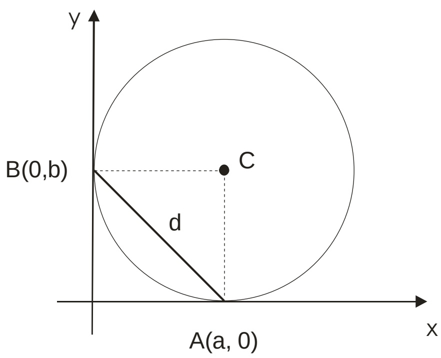
$$d(C,s) > r$$

Exercício Resolvido

01. (AEPOM) A circunferência de equação: $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ é tangente ao eixo x no ponto A e é tangente ao eixo y no ponto B. Determinar o comprimento do segmento AB.

Resolução:

Para determinar as coordenadas do ponto A, devemos ter $y = 0$.



$$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$$

Substituindo $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{a}$, obtemos:

$$a^2 - 8a + 16 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4.1.16$$

$$\Delta = 64 - 64$$

$$\Delta = 0$$

$$a = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\log o : A(0,-4)$$

Para determinar as coordenadas do ponto B, devemos ter $x = 0$.

$$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$$

Substituindo $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{b}$, obtemos:

$$b^2 + 8b + 16 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4.1.16$$

$$\Delta = 64 - 64$$

$$\Delta = 0$$

$$b = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\log o : B(0,-4)$$

O comprimento do segmento AB é calculado por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

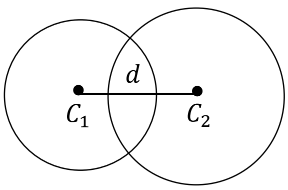
$$d(A,B) = \sqrt{(0-4)^2 + (-4-0)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

✓ **Entre duas circunferências**

Dadas duas circunferências de centro C_1 e C_2 e raio r_1 e r_2, elas podem ter um, dois ou nenhum ponto em comum. Portanto, no plano, elas podem ter as seguintes posições relativas:

1º. Caso: As circunferências possuem dois pontos em comum. Assim, classificamos as circunferências como **secantes**.

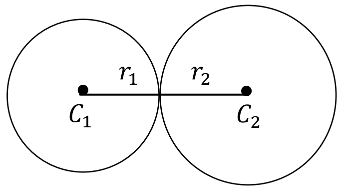


$$|r_1 - r_2| < d(C_1C_2) < r_1 + r_2$$

2º. Caso: As circunferências possuem um ponto em comum. Assim, classificamos as circunferências como:

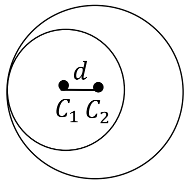
✓

✓ **Tangentes externamente**



$$d(C_1C_2) = r_1 + r_2$$

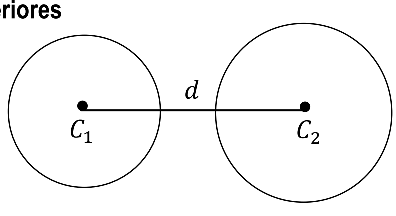
✓ **Tangentes internamente**



$$d(C_1C_2) = |r_1 - r_2|$$

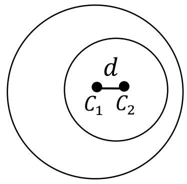
3º. Caso: As circunferências não se interceptam. Assim, classificamos as circunferências como:

✓ **Exteriores**



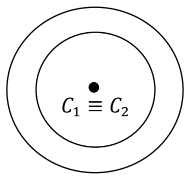
$$d(C_1C_2) > r_1 + r_2$$

✓ **Internas**



$$d(C_1C_2) < |r_1 - r_2|$$

✓ **Concêntricas**



$$d(C_1C_2) = 0$$

Exercício Resolvido

01. (EEAR) Se uma circunferência de centro $C(1,0)$ e raio 1 e outra tem equação geral $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$, então essas circunferências são:

a) secantes.
b) externas.
c) tangentes internas.
d) tangentes externas.

Resolução:
Em primeiro lugar, devemos encontrar o centro e o raio da circunferência de equação:

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$$

Podemos escrever essa equação da seguinte maneira:

$$x^2 - 2x + \_\_ + y^2 - 8y + \_\_ + 8 = 0$$

Agora, devemos preencher as lacunas com números nos quais possamos completar os quadrados, não se esquecendo de que: o que somamos de um lado somamos no outro. Observe:

$$x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 + y^2 - 2 \cdot 4 \cdot y + 4^2 + 8 = 0 + 1^2 + 4^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + 8 = 9$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$

Logo, essa circunferência possui centro $C(1,4)$ e raio 3.
Assim, temos:

$$r_1 + r_2 = 1 + 3 = 4$$

Calculando a distância entre os centros das circunferências, obtemos:

$$d(C_1C_2) = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Portanto, temos $d(C_1C_2) = r_1 + r_2$.
Logo, as circunferências são tangentes externas.
Resposta: alternativa **d.**

Exercícios

01. (EEAR) Seja p ponto $Q\ (2,1)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$, então o valor de k é
a) 6.
b) 3.
c) -7.
d) -10.

02. (EEAR) Considere a equação da circunferência $9 = (x-2)^2 + (y-4)^2$ e uma reta r secante a ela. Uma possível distância entre r e o centro da circunferência é
a) 5,67.
b) 4,63.
c) 3,58.
d) 2,93.****

03. (AFA) A circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 2y + k = 0$ passa pelo ponto $A(0,1)$. Sabendo-se que o ponto P, da circunferência, mais próximo da origem coincide com o baricentro do triângulo MNQ, onde $M(0,k), N(2k,0)\ e\ Q(x_q, y_q)$ é correto afirmar que a área do triângulo MNQ é um número do intervalo

a) $\left[1, \frac{3}{2}\right[$.

b) $\left[\frac{3}{2}, 2\right[$.*****

c) $\left[2, \frac{5}{2}\right[$.

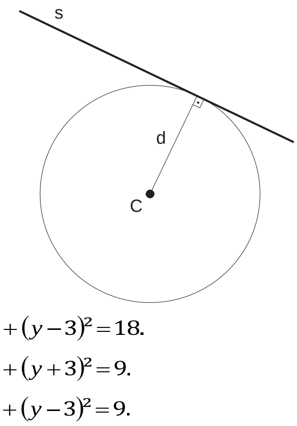
d) $\left[\frac{5}{2}, 3\right[$.

04. (AFA) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ e centro C é tangente ao eixo das abscissas no ponto A e é tangente ao eixo das ordenadas no ponto B. A área do triângulo ABC vale
a) 4.
b) 8.
c) 12.
d) 16.

5. (CFO)A circunferência que é tangente à reta $y + x - 2 = 0$ e que é concêntrica com a circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ possui equação:

a) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 64$.
b) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 8$.
c) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 64$.
d) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 8$.
e) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 8$.

06. (AEPOM) Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(1,3) e que é tangente à reta de equação S: x + y +2 = 0.



a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 18$.
b) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$.
c) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.
d) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 18$.

07. (EEAR) Dadas a reta de equação $y = \frac{\sqrt{3}\,x}{3}$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x = 0$. A área do triângulo determinado pelo centro da circunferência e os pontos de intersecção entre a reta e ela, em unidades de área, é igual a

a) $\sqrt{3}$.
b) 3.

c) $3\sqrt{3}$.

d) 6.

08. (AFA) Considere duas circunferências de mesmo raio, sendo $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ a equação geral da primeira e $C_2(4, 2)$, o centro da segunda. Se a reta $\boldsymbol{s}$ contém uma corda comum a ambas circunferências, então é **FALSO** que $\boldsymbol{s}$:

a) É perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares.

b) Tem declividade positiva.

c) Admite equação na forma segmentária.

d) Tem coeficiente linear nulo.

09. (EEAR) Se uma circunferência de equação geral $x^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$ tem centro $C(1, -3)$ e raio $\sqrt{3}$, então $b + c + d + k$ é igual a:

a) 12.
b) 11.
c) 10.
d) 9.

CAPÍTULO 32

Números Complexos I

Os números da forma $a + bi$, com a e b reais, são chamados de **números complexos.**
A forma $z = a + bi$ é chamada de **forma algébrica** de **z**. Os números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são chamados:

$$\boldsymbol{a}: parte\ real\ de\ \boldsymbol{z}.$$
$$\boldsymbol{b}: parte\ imaginária\ de\ \boldsymbol{z}.$$

O conjunto dos números complexos é representado pela letra $\mathbb{C}$ e i é a unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$ ou simplesmente $i^2 = -1$).
Exemplos:
Os números $i,\ 2i,\ -4i,\ 2 + i,\ 3 - i$ são exemplos de números complexos.
Notas:
1ª. Se $a = 0 \Rightarrow z = bi$ que é chamado número imaginário puro.
Exemplos:

$$i, 2i, 3i, \ldots$$

2ª. Se $b = 0 \Rightarrow z = a$ que é chamado de número real.

Igualdade de números complexos

Dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são iguais se, e somente se, possuírem a mesma parte real e a mesma parte imaginária.
Assim,

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Exemplo:
1. Determine os valores reais de x e y de modo que:

$$3 + 3i = 2 + x + (y + 1)i$$

Resolução
Para que dois complexos sejam iguais, eles devem possuir a mesma parte real e imaginária. Assim, temos:
1º. Parte real igual:

$$3 = 2 + x \Rightarrow x = 1$$

2°. Parte imaginária igual:

$$3 = (y + 1) \Rightarrow y = 2$$

Logo, $(x, y) = (1, 2)$.

Adição, Subtração e Multiplicação de Números Complexos

Nestas operações, consideramos os números complexos como se fossem "**expressões de 1º grau na variável $\boldsymbol{i}$**".
Assim, teremos:
Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos, então:

- $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}$
- $\boldsymbol{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i}$
- $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$

Exemplo:
1. Sendo $z_1 = 5 + 2i$ e $z_2 = 3 + 6i$, temos:

$$z_1 + z_2 = (5 + 2i) + (3 - 6i) = 5 + 2i + 3 - 6i = 8 - 4i$$

$$z_1 - z_2 = (5 + 2i) - (3 - 6i) = 5 + 2i - 3 + 6i = 2 + 8i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i)(3 - 6i) = 15 - 12i^2 - 30i + 6i = 27 - 24i$$

Propriedades
A adição e a multiplicação possuem as seguintes propriedades:
P1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (comutativa).
P2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (associativa).
P3. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (comutativa).
P4. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (associativa).
P5. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (distributiva).

Conjugado de um Número Complexo

Chamamos de conjugado de $z = a + bi$ o número complexo indicado por $\bar{z}$, tal que: $\bar{z} = a - bi$.
Exemplos:

a) $z_1 = 2 - 2i \Longrightarrow \bar{z}_1 = 2 + 2i$

b) $z_2 = 3 + 4i \Longrightarrow \bar{z}_2 = 3 - 4i$

c) $z_3 = -i \Longrightarrow \bar{z}_3 = i$

Nota:
Para obtermos o conjugado de um número complexo, trocamos o sinal do coeficiente da parte imaginária.

Propriedades do conjugado

P1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$.

P2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$.

P3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$.

P4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$, $z_2 \neq 0$.

P5. $\bar{\bar{z}} = z$.

Divisão de Números Complexos

Dados dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, para obtermos a forma algébrica do quociente $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$, multiplicamos o numerador e o denominador da fração por $\overline{z_2}$ (conjugado do denominador).
Esse procedimento, além de não alterar o valor de $\frac{z_1}{z_2}$, nos permite eliminar a parte imaginária do denominador (pois $z_2 \cdot \overline{z_2}$ é real), obtendo, desse modo, a forma algébrica.

Exemplo:

01. Sendo $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 + 3i$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{4+3i} = \frac{2+3i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{8-6i+12i-9i^2}{16-9i^2} = \frac{17+6i}{16+9} =$$

$$= \frac{17}{25} + \frac{6}{25} \cdot i$$

Potências de i

Estudando as potências de i ($i^n, n \in N$), temos:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 i = -i$$
$$i^4 = i^2 i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i$$
$$i^6 = i^4 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^7 = i^4 i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$
$$i^8 = i^4 i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$
$$i^9 = i^8 i = 1 \cdot i = i$$
$$i^{10} = i^8 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^{11} = i^{10} i = -1 \cdot i = -i$$

Então, podemos escrever:

$$\begin{cases} i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1 \\ i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = i^{4n} i = 1 \cdot i = i \\ i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = i^{4n} i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\ i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = i^{4n} i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \end{cases}$$

Portanto, para determinarmos uma potência de i superior a 4, basta dividirmos o expoente de i por 4 e considerarmos apenas i elevado ao resto dessa divisão, isto é:

$$\boxed{i^n = i^{4q+r} \iff i^n = i^r}$$

Exemplo:
1. Calcule o valor de i^{230}.
Resolução
Como i é muito superior a 4, podemos usar o algoritmo das potências de i. Assim, temos:

$$\left.\begin{array}{r|l} 230 & 4 \\ \hline 30 & 57 \\ 2 & \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 230 = 4 \cdot 57 + 2$$

Podemos, então, escrever:

$$i^{230} = i^{4 \cdot 57 + 2} \iff i^{230} = i^2 = -1$$

Exercícios

01. (EEAR) Seja $m \in \mathbb{R}$, para que o $(2 + mi) \cdot (3 + i)$ seja um número imaginário puro, o valor de m deve ser:
a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.

02. (EEAR) Sendo i a unidade imaginária, a potência de $[(1 - i)^2 - (1 + i)^2]^3$ é igual a:
a) 64.
b) $-64i$.
c) $64i$.
d) -64.

03. (EFOMM) O inverso do complexo $2i$ é:
a) $\frac{1}{2} - i$.
b) $\frac{1}{2} + i$.
c) $\frac{i}{2}$.
d) $-\frac{i}{2}$.
e) -2.

04. (EFOMM) Qual deve ser o valor de e, que é um escalar real, em que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{e+2i}$ é nula?
a) -4.
b) -2.
c) 1.
d) 2.
e) 4.

05. (EEAR) Sendo $m - ni = i$ e $mi - n = 1 + 3i$, os números complexos "m" e "n" são tais que sua soma é:
a) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.
b) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
c) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.
d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

06. (AEPOM) O primeiro termo de uma PG de razão i, de $4n + 3$ termos e de último termo $-1 - i$ é:
a) $-1 - i$.
b) $-1 + i$.
c) $1 - i$.
d) $1 + i$.
e) 1.

07. (EFOMM) O valor de x para que o produto $(12 - 2i) \cdot [18 + (x - 2)i]$ seja um número real é:
a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

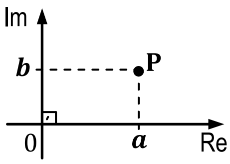
08. (EEAR) Dado $x \in \mathbb{R}$, para que o número complexo $z = (2 - xi) \cdot (x + 2i)$ seja real, o valor de x pode ser:
a) 4.
b) 0.
c) -1.
d) -2.

09. (AEPOM) Sendo $\frac{z}{1+i} + \frac{\bar{z}}{1-i} = 5$, $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, o valor de $a + b$ é:
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

CAPÍTULO 33
Números Complexos II

Representação Geométrica de um Número Complexo

Podemos representar um número complexo geometricamente por meio de um plano cartesiano, que é chamado de **plano Argand – Gauss**, em homenagem ao matemático alemão *Karl Friedrick Gauss (1777-1855)*.
Assim, ao complexo $z = a + bi$ associamos o ponto $\mathbf{P}$ de coordenadas $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
Observe a figura:



Im: eixo imaginário
Re: eixo real

O ponto $\mathbf{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ é chamado de **AFIXO** de $z = a + bi$.
Essa associação é biunívoca, isto é, cada número complexo possui um único afixo e vice-versa.

Observações:

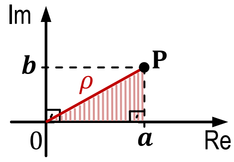
1ª. O número complexo não-nulo $z = a + bi$ e seu oposto $z' = -a - bi$ são simétricos em relação a origem.

2ª. O número complexo não-nulo $z = a + bi$ e seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ são simétricos em relação ao eixo real (Re).

Módulo de um Número Complexo

Seja $z = a + bi$ um número complexo e $\mathrm{P}(a, b)$ o seu afixo. O módulo de z é a distância de P à origem do plano de Gauss.
Notação:
Módulo de z: escrevemos $|z|$ ou ρ.

Observe a figura:

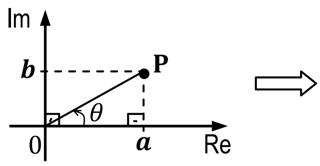


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos:
$$\rho^2 = a^2 + b^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nota:
Considerando todos os números complexos de mesmo módulo ρ $(\rho \neq 0)$, a figura formada pelos seus afixos é uma circunferência de centro **O** e raio $\boldsymbol{\rho}$.

Argumento de um Número Complexo

Seja um número complexo $z = a + bi$ e seu afixo P, chamamos de **argumento** de $\boldsymbol{z}$ o ângulo (ou sua medida θ) que o semieixo real positivo deve girar, no sentido anti-horário, tal que $0 \leq \theta < 2\pi$ e escrevemos $\theta = \arg(z)$. Observe a figura abaixo:



$$\theta = \arg(z)$$
$$e$$
$$tg\ \theta = \frac{b}{a}$$

<u>**Observação**</u>:
Não se define argumento para o número complexo $z = 0$.

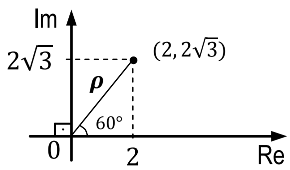
Exemplo:
1. Determinar o módulo, o argumento e representar graficamente o número complexo $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.
Resolução
Do número complexo, temos:
$$a = 2$$
$$b = 2\sqrt{3}$$
Assim,
- ✓ Módulo de z:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

- ✓ Argumento de z:

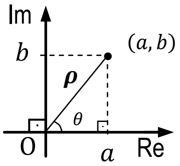
$$tg\ \theta = \frac{b}{a} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} = 60°$$

- ✓ Representação gráfica:



Forma Trigonométrica ou Polar

Dado um número complexo $z = a + bi$ com módulo $\boldsymbol{\rho}$ e argumento $\boldsymbol{\theta}$, temos:



$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\,\theta = \dfrac{a}{\rho} \;\; \Rightarrow \;\; a = \rho \cdot \cos\,\theta \\ sen\,\theta = \dfrac{b}{\rho} \;\; \Rightarrow \;\; b = \rho \cdot sen\,\theta \end{cases}$$

Substituindo esses resultados na forma algébrica de z, encontramos:

$$z = \underbrace{\rho \cdot (\cos\,\theta\ + i \cdot sen\,\theta)}_{forma\ trigonométrica}$$

Exemplo:
1. Escreva o número complexo $z = 1 + i$ na forma polar.
Resolução
Sabemos que $z = 1 + i$ é um complexo que tem representação gráfica no primeiro quadrante.
Assim, temos:
1º. Cálculo do módulo:

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2º. Cálculo do argumento:

$$tg\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \theta = \arg(z) = 45° = \frac{\pi}{4}$$

Logo,

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Operações na Forma Trigonométrica

✓ **Multiplicação**

Dados os números complexos:

$$z_1 = \rho_1 \cdot (cos\ \theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$$
e
$$z_2 = \rho_2 \cdot (cos\ \theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$$

Temos:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Note que:
1. O módulo do produto é o produto dos módulos dos fatores.
2. O argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores.
Exemplo:
1. Sejam os números complexos:

$$\begin{cases} z_1 = 3 \cdot (cos30° + i \cdot sen30°) \\ e \\ z_2 = 2 \cdot (cos60° + i \cdot sen60°) \end{cases}$$

Calcule o valor de $z_1 \cdot z_2$.

Resolução
Sabemos que:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

Então,

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2 \cdot [cos(30° + 60°) + i \cdot sen(30° + 60°)]$$
$$\Updownarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot [cos(90°) + i \cdot sen(90°)]$$
$$\Updownarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot [0\ + i \cdot 1]$$
$$\Updownarrow$$
$$z_1 \cdot z_2 = 6i$$

✓ **Divisão**

Dados os números complexos:

$$z_1 = \rho_1 \cdot (cos\ \theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$$
e
$$z_2 = \rho_2 \cdot (cos\ \theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$$

Temos:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 - \theta_2)]}$$

Note que:
1. O módulo do quociente é o quociente dos módulos do dividendo e do divisor.
2. O argumento do quociente é a diferença dos argumentos do dividendo e do divisor.
Exemplo:
1. Sejam os números complexos:

$$\begin{cases} z_1 = 8 \cdot (cos55° + i \cdot sen55°) \\ e \\ z_2 = 2 \cdot (cos10° + i \cdot sen10°) \end{cases}$$

Calcule o valor de $\frac{z_1}{z_2}$.

Resolução
Sabemos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 - \theta_2)]$$

Então,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2} \cdot [\cos(55° - 10°) + i \cdot sen(55° - 10°)]$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 4 \cdot [\cos(45°) + i \cdot sen(45°)]$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 4 \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

Fórmulas de Moivre – (1667-1754)

✓ **Potenciação**

Considerando o número complexo $z = \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$, não-nulo, $\forall n \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\boxed{z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)]}$$

Exemplo:
1. Sabe-se que $z = 2 \cdot (cos30° + i \cdot sen30°)$, calcule z^4.
Resolução
Sabemos que:

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)]$$

Então,

$$z^4 = 2^4 \cdot [\cos(4 \cdot 30°) + i \cdot sen(4 \cdot 30°)]$$

$$\Updownarrow$$

$$z^4 = 16 \cdot [\cos(120°) + i \cdot sen(120°)]$$

$$\Updownarrow$$

$$z^4 = 16 \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$$

- ✓ **Radiciação**

Considerando o número complexo $z = \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$, não-nulo, e z_k uma de suas raízes enésimas temos:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]}$$

Com $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}^*$

Observação:
Dizemos que z_k é uma raiz enésima de z se, e somente se, elevado ao expoente $\boldsymbol{n}$ reproduz $\boldsymbol{z}$, isto é:

$$z_k{}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{z}$$

Exemplo:
1. Calcular as raízes cúbicas de $8i$.
Resolução
Temos:

$$z = 8i \Rightarrow z = 8(0 + i) \Rightarrow \begin{cases} \rho = 8 \\ e \\ \theta = 90° \end{cases}$$

E, portanto, $z = 8 \cdot (cos90° + i \cdot sen90°)$.
Aplicando a fórmula de radiciação de Moivre e lembrando que $\pi\, rad = 180°$, obtemos:

$$z_k = 2 \cdot \left[cos\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{3}\right)\right]$$

Com $k \in \{0, 1, 2\}$.

Assim sendo, as raízes cúbicas z_0, z_1, z_2 valem:

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2 \cdot [cos(30°) + i \cdot sen(30°)]$$

$$\Updownarrow$$

$$z_0 = 2 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2 \cdot \left[cos\left(\frac{90° + 360°}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{90° + 360°}{3}\right)\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$z_1 = 2 \cdot [cos(150°) + i \cdot sen(150°)]$$

$$\Updownarrow$$

$$z_1 = 2 \cdot \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2 \cdot \left[cos\left(\frac{90° + 720°}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{90° + 720°}{3}\right)\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$z_2 = 2 \cdot [cos(270°) + i \cdot sen(270°)]$$

$$\Updownarrow$$

$$z_2 = 2 \cdot [0 + i \cdot (-1)]$$

$$\Updownarrow$$

$$z_2 = -2i$$

Logo, as raízes cúbicas de z são: $\sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} + i\ e\ -2i.$

Exercícios

01. (EEAR) O módulo do número complexo $z = -3 + 4i$ é:
a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.

02. (EEAR) O valor de m, para que o módulo do número complexo $z = (m + 2i)(1 + i)$ seja igual a 4, é:
a) ± 1.
b) ± 2.
c) ± 3.
d) 0.

03. (EFOMM) O argumento do número complexo $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ é:
a) 45°.
b) 60°.
c) 90°.
d) 135°.
e) 225°.

04. (AFA) Dado o número complexo $\boldsymbol{z}$ tal que $z + 2\bar{z} - 9 = 3i$, é correto afirmar que:
a) $|z| = 3\sqrt{10}$.
b) $z = 3\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot sen\frac{7\pi}{4}\right)$.
c) $\bar{z} = 9 - 3i$.
d) $z^{-1} = \frac{1+i}{3}$.

05. (EEAR) Um número complexo tem argumento $\frac{5\pi}{6}$. Se o argumento do produto desse número por outro número complexo z é $\frac{\pi}{2}$, então o argumento principal de z é:
a) $\frac{4\pi}{3}$.
b) $\frac{7\pi}{6}$.
c) $\frac{5\pi}{3}$.

d) $\frac{11\pi}{6}$.

06. (ITA) Se $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z \cdot \bar{w} = 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ é um argumento de $z \cdot w$, então θ é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$.

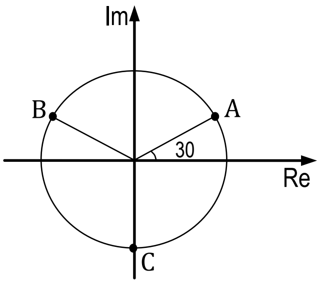
b) π.

c) $\frac{2\pi}{3}$.

d) $\frac{5\pi}{3}$.

e) $\frac{3\pi}{2}$.

07. (AFA) Os pontos A, B e C da figura abaixo são afixos das raízes cúbicas do número complexo $\boldsymbol{z}$. Se $\boldsymbol{n}$ é o menor natural não nulo para o qual $\boldsymbol{z^n}$ é um real positivo, então $\boldsymbol{n}$ é igual a:
a) 8.
b) 6.
c) 4.
d) 2.



CAPÍTULO 34
Polinômios

Definição
Chamamos **polinômio** na variável $\boldsymbol{x}$ toda função polinomial $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Em que:
a) $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ e são chamados de coeficientes.

b) $n \in \mathbb{N}$.

c) x é a variável.

Exemplo:
1. $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 5$

Termos: $2x^3, -2x^2, 3x$ e 5.
Coeficientes: $2, -2, 3$ e 5.

Notas:
1ª. Grau de um Polinômio: o grau de um polinômio é o maior expoente da variável $\boldsymbol{x}$ com coeficiente diferente de zero.

Exemplo:
Para o polinômio $P(x) = 0x^3 + 2x^2 + 3x - 10$ o grau é 2, e escrevemos $G_P = 2$.

2ª. Polinômio Nulo: é aquele em que todos os coeficientes são nulos.
Exemplo:

$$P(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

3ª. Igualdade de Polinômios: dois Polinômios são iguais se, e somente se, possuírem termos correspondentes iguais.
Exemplo:
Dados os polinômios $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$ e $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 3 \end{cases}$$

4ª. Valor Numérico: o valor numérico de $P(x)$ para $x = \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$, é o número que obtemos quando substituímos x por α e representamos por $P(\alpha)$.
Exemplo:
O valor numérico do polinômio $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 5$ para $x = 1$ é:

$$P(1) = 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 - 5 = 1$$

5ª. Raiz de um Polinômio: o número $\boldsymbol{r}$ é chamado $\boldsymbol{raiz}$ de $P(x)$ se, e somente se, $P(\boldsymbol{r}) = 0$.
Exemplo:
$r = 1$ é raiz de $P(x) = x^2 - 5x + 4$, pois:

$$P(r) = P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 0$$

Operações com Polinômios

✓ **Adição**

Para efetuarmos a soma de dois polinômios, devemos somar os monômios de mesmo grau.
Exemplo:
1. Dados $P(x) = 5x^3 + 2x + 1$ e $Q(x) = 4x^2 + 3x$, calcule $P(x) + Q(x)$.

Resolução

Em primeiro lugar, vamos completar os polinômios. Assim, temos:
$P(x) = 5x^3 + 0x^2 + 2x + 1$ e $Q(x) = 0x^3 + 4x^2 + 3x + 0$
Logo,

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 5x^3 + 0x^2 + 2x + 1 \\ 0x^3 + 4x^2 + 3x + 0 \end{array}\right\} \oplus \\ \hline 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1 \end{array}$$

$$\therefore\ P(x) + Q(x) = 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1$$

✓ **Subtração**

Para efetuarmos a subtração de dois polinômios, devemos subtrair os monômios de mesmo grau.
Exemplo:
01. Dados $P(x) = 5x^3 + 2x + 1$ e $Q(x) = 4x^2 + 3x + 2$ calcule $P(x) - Q(x)$.

Resolução

Em primeiro lugar, vamos completar os polinômios. Assim, temos:
$P(x) = 5x^3 + 0x^2 + 2x + 1$ e $Q(x) = 0x^3 + 4x^2 + 3x + 2$
Logo,

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 0x^2 + 2x + 1 \\ 0x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \\ \hline 5x^3 - 4x^2 - x - 1 \end{array} \ominus$$

$$\therefore\ P(x) + Q(x) = 5x^3 - 4x^2 - x - 1$$

✓ Multiplicação

Para efetuarmos o produto de dois polinômios $P(x) e\ Q(x)$, devemos multiplicar cada termo de $P(x)$ por todos os termos de $Q(x)$ e somar os resultados de mesmo grau.
Exemplo:
1. Dados $P(x) = x + 2$ e $Q(x) = x^2 + 4x + 1$, calcule $P(x) \cdot Q(x)$.

Resolução

$$P(x) \cdot Q(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 4x + 1)$$

$$\Updownarrow$$

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 + 4x^2 + x) + (2x^2 + 8x + 2)$$

$$\Updownarrow$$

$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$$

Divisão de Polinômios

Dividir um polinômio $P(x)$, chamado dividendo, por um polinômio não-nulo $D(x)$, chamado divisor, é encontrar o polinômio $Q(x)$, chamado quociente, e o polinômio $R(x)$, chamado resto, que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1^{\text{a}})\ P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ 2^{\text{a}})\ G_R < G_D \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

Observações:
1ª. Quando $R(x) = 0$, dizemos que $P(x)$ é divisível por $D(x)$.
2ª. Em uma divisão polinomial, sempre temos a seguinte relação:

$$G_Q = G_P - G_D$$

✓ Método da chave

Este tipo de divisão segue os seguintes passos:

1º. Ordena-se o dividendo e o divisor na forma decrescente, e complete-os se necessário.

2º. Divide-se os monômios do maior grau do dividendo pelo monômio de maior grau do divisor.

3º. Multiplica-se o resultado pelo divisor e subtrai-se do dividendo.

4º. Repete-se sucessivamente a operação até encontrar um polinômio de grau menor que o divisor. Este será denominado de resto.

Para ficar mais claro, observe o exemplo abaixo:

1. Divida o polinômio $P(x) = 24x^3 - 26x^2 + 2$ pelo polinômio $D(x) = 4x + 1$.

Resolução
Apliquemos o método da chave, lembrando que devemos acrescentar o termo $0x$ no dividendo para que ele fique devidamente reduzido e ordenado. Assim, temos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 24x^3 & -26x^2 & +0x & +2 & 4x+1 \\ \cline{5-5} -24x^3 & -6x^2 & & & 6x^2 - 8x + 2 \\ \cline{1-2} & -32x^2 & +0x & & \\ & 32x^2 & +8x & & \\ \cline{2-3} & & 8x & +2 & \\ & & -8x & -2 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

quociente: $6x^2 - 8x + 2$
resto: 0

Observe que encontramos **resto nulo**; logo, dizemos que $P(x)$ é divisível por $D(x)$.

✓ Teorema do Resto

Seja a divisão de um polinômio $P(x)$ por um polinômio do tipo $x - \alpha$. Note que o resto dessa divisão é necessariamente um polinômio constante, isto é, um número $\boldsymbol{r}$, pois o divisor tem grau 1.
Assim, $r = 0$ se a divisão for exata e $r \neq 0$ em caso contrário.
Considere $Q(x)$ o quociente dessa divisão, então:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - \alpha \\ \cline{2-2} r & Q(x) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$$

Substituindo $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{\alpha}$, obtemos:

$$P(\alpha) = Q(\alpha) \cdot \underbrace{(\alpha - \alpha)}_{0} + r$$

$$\Updownarrow$$

$$\therefore\ r = P(\alpha)$$

Logo, podemos enunciar o seguinte teorema:
O resto da divisão de um polinômio $\boldsymbol{P(x)}$ por um polinômio do tipo $\boldsymbol{x - \alpha}$ é $\boldsymbol{P(\alpha)}$.

Nota:
Uma consequência imediata desse teorema é o **teorema de D'Alembert**, que afirma:
Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - \boldsymbol{\alpha}$ se, e somente se, $P(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, ou seja, se $\boldsymbol{\alpha}$ for a raiz de $P(x)$.

Exemplo:
1. Determine o resto da divisão de $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ por $x - 2$.

Resolução
O teorema do resto nos garante que $P(2)$ é o resto da divisão, então, temos que:

$$P(2) = 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 3 = 31$$
$$\therefore r = p(2) = 31$$

✓ Algoritmo de Briot-Ruffini

O **algoritmo de Briot-Ruffini** é um método prático e eficiente que nos permitirá efetuar com rapidez a divisão de um polinômio $P(x)$ por um polinômio do tipo $x\ \pm \alpha$.
Explicaremos o algoritmo, considerando o seguinte exemplo:
01. Dividir o polinômio $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 7x + 4$ por $x - 2$.

Resolução
Para utilizarmos o algoritmo, devemos realizar os seguintes passos:

1°. Passo: dispomos os coeficientes de $P(x)$ devidamente ordenados numa mesma linha; fazemos $x - 2 = 0$, logo $x = 2$ (destacado por uma circunferência) e o colocamos ao lado do primeiro coeficiente, conforme a figura abaixo.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ \hline & & & & \end{array}$$

2°. Passo: abaixamos o primeiro coeficiente de $P(x)$ para a linha inferior; em seguida, multiplicamos esse mesmo coeficiente pelo número da circunferência e somamos o resultado no 2°. coeficiente de $P(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

3°. Passo: o resultado do passo anterior é colocado abaixo do 2°. coeficiente de $P(x)$. Esse resultado é multiplicado pelo número da circunferência e o produto é adicionado ao próximo coeficiente de $P(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ \hline & 5 & 13 & & \end{array}$$

4°. Passo: repetimos as mesmas operações do passo anterior, colocando o resultado final abaixo do último coeficiente de $P(x)$. Esse resultado final é o número que estamos procurando.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ \hline & 5 & 13 & 33 & 70 \end{array}$$

O resultado final é $P(2) = 70$.
Como $P(2)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$, de acordo com o teorema do resto, o algoritmo acaba fornecendo não apenas o resto, mas também o quociente da divisão. Observe:

$$\begin{array}{r c|cccc} \text{Raiz do divisor} & 2 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{5 \quad 3 \quad 7 \quad 4}^{\text{Coeficientes do dividendo}}} \\ \hline & & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{5 \quad 13 \quad 33}_{\text{Coeficientes Do quociente}}} & \underbrace{70}_{\text{resto}} \end{array}$$

Assim:
Dividendo: $5x^3 + 3x^2 + 7x + 4$.
Divisor: $x - 2$.
Quociente: $5x^2 + 13x + 33$.
Resto: 70.

Considerações Finais

Equações Polinomiais: É toda equação de grau $\boldsymbol{n}$ do tipo $P(x) = 0$, na qual $P(x)$ é um polinômio de grau $\boldsymbol{n}$ na variável $\boldsymbol{x}$.
Exemplo:
A equação $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ é uma equação polinomial.

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)
Todo polinômio de grau $n, n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Teorema da Decomposição
Dado o polinômio:
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$.
Podemos reescrever $P(x)$ da seguinte maneira:

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

Com $r_1, r_2, \ldots, r_n$ raízes de $P(x)$.

Multiplicidade de uma Raiz
Se na decomposição de $P(x)$ em fatores de primeiro grau o fator $(x - \boldsymbol{r})$ aparecer $\boldsymbol{k}$ vezes, dizemos que o número $\boldsymbol{r}$ é raiz de $P(x)$ com multiplicidade $\boldsymbol{k}$.
Exemplo:
Considere o polinômio $P(x) = 2(x-2)^2 \cdot (x-3)$, então concluímos que:

- O número 2 é raiz com multiplicidade dois ou raiz dupla.
- O número 3 é raiz com multiplicidade um ou raiz simples.

Teorema das Raízes Conjugadas
Se um número complexo $z = a + bi,\ b \neq 0$, for raiz de uma equação com **coeficientes reais** então $\bar{z} = a - bi$ também é raiz de $P(x)$.

Relações de Girard
Chamamos de **relações de Girard** as relações existentes entre as raízes e os coeficientes de uma equação polinomial.
Assim, temos:
01. Equação de grau 2.
Para uma equação de grau 2, temos:
$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ *ou* $\boldsymbol{a(x - r_1)(x - r_2) = 0}$, *com* $\boldsymbol{a} \neq 0$.
Logo, podemos concluir que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Aplicando a propriedade distributiva no segundo membro e dividindo ambos os lados por a, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2$$

Assim, igualando os coeficientes correspondentes, obtemos as **duas relações de Girard:**

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

2. Equação de grau $\mathbf{3}$.

Para uma equação de grau 3, temos:

$$\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$$
$$ou$$
$$\boldsymbol{a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0}, com\ \boldsymbol{a} \neq 0.$$

Logo, podemos concluir que:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Aplicando a propriedade distributiva no segundo membro e dividindo ambos os lados por a, obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Assim, igualando os coeficientes correspondentes, obtemos as **três relações de Girard:**

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

3. Equação de grau $\boldsymbol{n}$.

Para uma equação de grau n, temos:

$$\boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0}$$
$$ou$$
$$\boldsymbol{a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) = 0}$$

Com $\boldsymbol{a_n} \neq 0$ e $\boldsymbol{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ raízes da equação.

De modo análogo, podemos encontrar as $\boldsymbol{n}$ **relações de Girard**. Assim, podemos escrever:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \cdots + r_{n-1} \cdot r_n = +\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \cdots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Exemplo:

1. Resolva a equação $x^3 + 4x^2 - 25x - 100 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são simétricas.

Resolução

Sejam $r_1, r_2\ e\ r_3$ as raízes da equação. Pelo enunciado, é dado que duas raízes são simétricas, consideremos $r_1 e\ r_2$ raízes simétricas, isto é:

$$r_1 = -r_2 \quad \Rightarrow \quad r_1 + r_2 = 0$$

Assim pelas relações de Girard, temos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \underbrace{r_1 + r_2}_{0} + r_3 = -4 \qquad \therefore\ r_3 = -4$$

Sendo $r_3 = -4$ uma das raízes, concluímos que o polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$ é divisível por $x + 4$.

Efetuando essa divisão através do algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

-4	1	4	-25	-100
	1	0	-25	0

Feito isso, conseguimos encontrar o quociente $Q(x) = x^2 - 25x$.

Então a equação dada também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(x + 4) \cdot (x^2 - 25x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -4 \\ \quad ou \\ x = 5 \\ \quad ou \\ x = -5 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto verdade é $V = \{-5, -4, 5\}$.

Exercícios

01. (PM) Sejam os polinômios $A(x) = x^3 - x^2 - 3x + x - 1$ e $B(x) = -3x^2 + x + 2$, calcule:

$$A\left(\frac{1}{2}\right) - B(-1)$$

a) $\frac{11}{8}$.

b) $\frac{12}{7}$.

c) $\frac{15}{2}$.

d) 45.

e) 35.

02. (EEAR) A igualdade $\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ ocorre quando A e B são, respectivamente:

a) -1 e -1.

b) -1 e 1.

c) 1 e -1.

d) 1 e 1.

03. (EEAR) Seja um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se os coeficientes de $P(x)$ são diferentes de zero, então para todo $x \in \mathbb{R}$, "$P(x) + P(-x)$" tem grau:

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 1.

04. (EFOMM) Para que valor de k o polinômio $P(x) = kx^3 + x^2 - 5$ é divisível por $x + \frac{1}{3}$?

a) -132.

b) -100.

c) $\frac{132}{100}$.

d) 100.

e) 132.

05. (ITA) A divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto $x+1$. Se os restos das divisões de $p(x)$ por $(x-1)$ e $(x-2)$ são, respectivamente, os números a e b, então a^2+b^2 vale:
a) 13.
b) 5.
c) 0.
d) 1.
e) 0.

06. (AFA) Dado $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + m - 1$, o valor de m, para o qual $P(x)$ é divisível por $(x-2)$, é:
a) 1.
b) 7.
c) 13.
d) 17.

07. (AFA) Analise as proposições abaixo:, classificando-as em V(verdadeiro) ou F(falso):

( ) Se $p(x) = 2x^3 - (p-1)x + 4$ e $m(x) = qx^3 + 2 + q$ são polinômios idênticos, então $p^2 + q^2 = 5$.
( ) Dividindo-se $A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ por $B(x)$, obtém-se o quociente $C(x) = 1 + x$ e o resto $R(x) = C(x)$. Pode-se afirmar que $B(x)$ é tal que $B(0) = 0$.
( ) Se f, g, e h são polinômios de graus m, n, e q $(m, n, q \in \mathbb{N}\ e\ m > n > q)$, então o grau de $(f+g)\cdot h$ é dado por $m+q$.
a) $\mathrm{F-V-V}$.
b) $\mathrm{V-V-F}$.
c) $\mathrm{V-F-V}$.
d) $\mathrm{V-V-V}$.

08. (AFA) Se a, b, c, d, e são raízes do polinômio $p(x) = 2x^5 - 6x^4 + 3x^3 + x^2 + 7x + 5$, então, o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$ vale:
a) $-\frac{7}{5}$.
b) $-\frac{2}{5}$.
c) $\frac{3}{7}$.
d) $\frac{1}{3}$.

09. (EEAR) Uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raízes os números $3+i, 7$ e $2-3i$. Essa equação tem, no mínimo, grau:
a) 6.
b) 5.
c) 4.
d) 3.

10. (AFA) A equação polinomial de menor grau com raízes 1 e i, com $i = \sqrt{-1}$, é:
a) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.
b) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$.
c) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$.
d) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

11. (EFOMM) Determine as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, sabendo que elas estão em PA.
a) $S = \{1, 2, 3\}$.
b) $S = \{1, 3, 5\}$.
c) $S = \{2, 4, 6\}$.
d) $S = \{2, 3, 4\}$.
e) $S = \{3, 5, 7\}$.

12. (EFOMM) Determine as raízes da equação $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$, sabendo que elas estão em PG.
a) $S = \{1, 2, 4\}$.
b) $S = \{2, 3, 4\}$.
c) $S = \{2, 3, 6\}$.
d) $S = \{2, 4, 6\}$.
e) $S = \{2, 4, 8\}$.

13. (ITA) O polinômio com coeficientes reais $p(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade dois, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes é igual a:
a) -4.
b) -6.
c) -1.
d) 1.
e) 4.

14. (AFA) A equação:
$7x^4 - 5x^3 + (R-6)x^2 + (3S-2)x + T - 9 = 0$ possui uma raiz tripla em $x = 0$. O produto $R \cdot S \cdot T$ é:
a) -18.
b) -14.
c) 16.
d) 36.

CAPÍTULO 35

GABARITO

CAPÍTULO 27
01. B
02. D
03. A
04. A
05. A
06. E
07. A

CAPÍTULO 28
01. C
02. C
03. D
04.
a) determinante é igual a zero, pois temos uma combinação linear, isto é, 3ª linha = 1ª linha + 2ª linha.
b) determinante é igual a zero, pois a 2ª coluna é nula.
c) determinante é igual a zero, pois a 1ª linha é igual a 4ª linha.
d) determinante é igual a zero, pois a 3ª linha é proporcional a 1ª linha, isto é, 3ª linha = (−2)·(1ª linha).
05. A
06. E
07. C
08. A

CAPÍTULO 29
01. A
02. A

03. A
04. E
05. D
06. B
07. E

CAPÍTULO 30
01. B
02. A
03. D
04. D
05. A
06. D
07. A
08. A
09. C

CAPÍTULO 31
01. C
02. D
03. B
04. B
05. E
06. A
07. A
08. C
09. A

CAPÍTULO 32
01. B
02. C
03. D
04. E
05. C
06. B
07. A
08. D
09. E

CAPÍTULO 33
01. C
02. B
03. E
04. B
05. A
06. C
07. C

CAPÍTULO 34
01. A
02. B
03. C
04. A
05. A
06. C
07. D
08. A
09. B
10. A
11. D
12. E
13. A
14. D