APOSTILA DE MATEMÁTICA EsPCEx

www.elitemil.com.br

Olá, combatente, aqui quem fala é o **1º Ten Thiago Henrique, fundador e CEO do Elite Mil – Cursos Preparatórios.** Para todos nós, da Equipe Elite Mil, é uma satisfação imensa poder compartilhar com vocês esse material didático que, certamente, fará parte da sua jornada rumo à aprovação.

Essa apostila foi desenvolvida para servir como **material complementar de estudo para os alunos Elite Mil** matriculados em nossas turmas presenciais e também em nossos cursos on-line. Portanto, para que você tenha um aprendizado otimizado, **utilize este material em conjunto com as nossas aulas**, fazendo anotações, adicionando informações e sublinhando pontos importantes.

Caso você não seja ainda um aluno Elite Mil ou ainda, caso deseje presentear alguém com o nosso curso, gostaria de te oferecer a possibilidade de adquirir um dos nossos cursos com um **DESCONTO ESPECIAL** de 15%. Basta clicar em um dos links abaixo:

Curso EsPCEX: http://bit.ly/apostila-espcex-elitemil

Curso ESA: http://bit.ly/apostila-esa-elitemil

Se você ainda não me segue nas redes sociais, já vá pagando 10 flexões e, em seguida, faça parte dos milhares de jovens que são impactados diariamente com os conteúdos que produzo!

CANAL NO TELEGRAM: https://t.me/thiagohenrique_elitemil

CANAL NO YOUTUBE: Thiago Henrique – Elite Mil

INSTAGRAM: http://instagram.com/thiagohenrique_elitemil

Não esqueça também de visitar o **Blog Elite Mil**, pois lá temos diversas postagens com informações riquíssimas para você.

www.elitemil.com.br/blog

Ah, e se você quiser receber vários **bizus** sobre estudos, treinamento físico, preparação psicológica, dentre outros temas, diretamente no seu e-mail, clique no link abaixo e faça parte da nossa lista!

www.elitemil.com.br/lista-vip

Por fim, gostaria de agradecer a sua confiança e dizer que estou muito feliz em poder fazer parte da sua vitória. **Sinto um imenso orgulho de cada um de vocês**, pois sei que, por trás de cada aluno e aluna, existe uma grande história de superação e diversos desafios enfrentados diariamente.

Mantenha o seu foco! FÉ NA MISSÃO!

1º Ten Thiago Henrique – CEO Elite Mil – Cursos Preparatórios.

Sumário

Matemática Básica - As quatro operações.

ADIÇÃO:

Operação de adição entre números inteiros:

3875 + 763 =

Operação de adição entre números decimais
Observações:

- "Zeros" no final da escrita decimal não alteram o valor do número representado.

- Compare números decimais começando pela parte inteira. Depois compare os décimos, centésimos, milésimos, etc.

EXEMPLO:

576,28 + 94,7 =
794,3 + 81 + 50,542 =

Propriedades:

Elemento neutro: $a + 0 = a$

Comutativa: $a + b = b + a$

Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

SUBTRAÇÃO:

Operação de subtração entre números inteiros:

1938 − 375 =

Operação de subtração entre números decimais

475,08 − 86,5 =

Observações:

1) Oposto de um número

2) $a - (b - c) = a - b + c$

8 + 3 − (4 − 9) =

MULTIPLICAÇÃO:

Regra de sinais:

O produto entre dois números de sinais iguais é positivo e o produto entre dois números de sinais contrários é negativo.

3 · 5 =

3 · (− 5) =

− 3 · 5 =

(− 3) · (− 5) =

Notação: 3×5 = 3·5 = 3(5) = (3).(5)

Operação de multiplicação entre números inteiros:
328 · 52 =

Operação de multiplicação entre números decimais:
30,2 × 24,75 =

Propriedades:

Elemento neutro: a .1 = a

Comutativa: a . b = b . a

Associativa: (a . b) . c = a . (b . c)

Distributiva: a . (b + c) = a . b + a . c

Anulação: a . 0 = 0

DIVISÃO:

Regra de sinais:

A divisão entre dois números de sinais iguais é positiva e a divisão entre dois números de sinais contrários é negativa.

Notação

$$3 \div 5 = 3/5 = \frac{3}{5}$$

Operação de divisão entre números inteiros
348 ÷ 6 =

433 ÷ 6 =

7530 ÷ 25 =

35 ÷ 80 =

Operação de divisão entre números decimais

7,2 ÷ 3 =

52,7 ÷ 1,24 =

Matemática Básica - Expressões numéricas; - Frações; - Potenciação.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS:

Sequência na Reunião:

I - Parênteses ( )

II - Colchetes [ ]

III - Chaves { }

Sequência nas Operações:

I - Potência ou Raiz

II - Multiplicação ou Divisão

III - Adição ou Subtração

Exemplo:

60 + {4 +[(8 – 12) – (5+3) – 7] + 2 } =

2 + {12 ÷ [2 + 3 x 6 – (3 + 5) x 2]} =

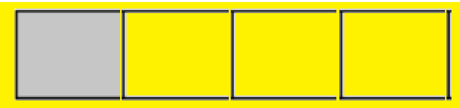
{6 – [(32 x 4 ÷ 2 – 1) – (16 x 23 ÷ 4)] x 3} ÷ 7 =

FRAÇÕES

O símbolo ab significa $a \div b$, sendo a e b números naturais e b diferente de zero. ab chamamos de fração, a de numerador e b de denominador.

Exemplo: Paulo comeu 1/4 de um chocolate. Isso significa que, se dividíssemos o chocolate em 4 partes iguais, Paulo teria comido 1 parte:

Chocolate



Classificação das frações:

Fração própria: o numerador é menor que o denominador.

Exemplo: $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$

Fração imprópria: o numerador é maior ou igual ao denominador.

Exemplo: $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{5}$

Fração aparente: o numerador é múltiplo do denominador.

Exemplo: $\frac{8}{4}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{9}{3}$

Frações Equivalentes:

Frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo.

Exemplo: $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$, são equivalentes.

Redução de frações a um mesmo denominador

Exemplo

Reduza ao mesmo denominador as seguintes frações:

$\frac{5}{2} =$ $\frac{3}{4} =$ $\frac{2}{5} =$

Comparação de Frações:

Comparar duas frações é determinar se elas são iguais e, caso sejam diferentes, determinar qual delas é maior ou menor.

1ª Situação: os denominadores são iguais;

$\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$

2ª Situação: os denominadores são diferentes;

$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$

Adição e Subtração de Frações:

1ª Situação: os denominadores são iguais.

$\frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} =$

2ª Situação: os denominadores são diferentes.

$\frac{3}{5} + \frac{5}{3} + \frac{1}{2} =$

Multiplicação de Frações:

Exemplo:

$\frac{2}{3} x \frac{5}{3} x \frac{2}{4} =$

Divisão de Frações:

Regra:
A divisão de uma fração por outra fração é igual ao produto da 1ª pelo inverso da 2ª.

Exemplo:

$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} =$

POTENCIAÇÃO:

Seja a um número real e n um número natural, com $n \geq 2$. A potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a$ (n fatores)

Exemplos:

$(-3)^2 =$ $-3^2 =$ $-3^3 =$ $(-3)^3 =$

Potência com expoente n negativo

Seja a um número real não nulo e n um número natural, com $n \geq 2$. A potência de base a e expoente $-n$ é o número a^{-n} tal que:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Exemplos:

$4^{-2} =$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

$-\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} =$

OBSERVAÇÕES:

Toda potência de expoente 1 é igual à base.

$a^1 = a$

Para $a \neq 0$

$a^0 = 1$

PROPRIEDADES

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ $\in$ $\mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades:

P1: $\boldsymbol{a^m . a^n = a^{m+n}}$

$$\frac{2 \cdot 3^6 + 3^7}{3^4 - 3 \cdot 3^5}$$

P2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$\frac{a^{2(n+1)} \cdot a^{3-n}}{a^{1-n}}$$

P3: $(am)^{\boldsymbol{n}} = a^{m \cdot n}$

Verdadeiro ou Falso?

( ) $4^{3000} = 3^{4000}$

P4: $(a.b)^{\boldsymbol{n}} = a^n \cdot b^n$

Quantos algarismos possui o número $5^8 . 4^3$?

P5: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Assinale V para verdadeiro e F para falso nos itens abaixo:

( ) $\frac{6^4}{2^6} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$

( ) $\frac{6^4}{4 \cdot 3^4} = 2$

Matemática Básica - Radiciação; - Racionalização.

RADICIAÇÃO:

Veremos nesta aula que a radiciação é a operação inversa da potenciação.

Seja a um número real e n um número natural diferente de zero. Dizemos que $\sqrt[n]{a}$ é um número b, tal que $b^n = a$.

Exemplo:

$\sqrt[3]{-8} =$

$\sqrt{25} =$

Onde n é o índice

Nomenclatura: Modelo $\sqrt[n]{a}$

Onde $\sqrt{\ }$ é o radical

Onde a é o radicando

Observações:

1. Da definição temos que $\sqrt[n]{a^n} = a$, para que todo $a \geq 0$.

2. $\sqrt[PAR]{x} \Rightarrow x \geq 0$

$\sqrt[ÍMPAR]{x} \Rightarrow x \in R$

Potência de Expoente Racional:

A potência de base a ($a > 0$), e expoente racional $\frac{m}{n}$, é o número:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

a. $3^{\frac{3}{2}} =$

b. $5^{\frac{5}{2}} =$

Propriedades:

P1: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a \cdot b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$

Exemplo:

Simplifique os radicais:

a. $\sqrt{\boldsymbol{12}}$

b. $\sqrt[3]{\boldsymbol{864}}$

P2: $\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$

Exemplo:

Calcule o valor da expressão $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$

P3: $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}}$

Exemplo:

$\left(\sqrt[4]{16}\right)^2 =$

P4: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$

Exemplo:
Coloque os seguintes números em ordem crescente:

$\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[4]{5}$ $\sqrt[6]{7}$

P5: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

Exemplo:

Simplifique:

$$\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{16}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{8}}} =$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES:

Racionalizar o denominador de uma fração significa eliminar os radicais do denominador sem alterá-la.

1º Caso: Denominadores do tipo $\sqrt[n]{a^m}$

Exemplo 01:

$\frac{2}{\sqrt{5}} =$

Exemplo 02:

$\frac{4}{\sqrt[3]{5}} =$

2º Caso: Denominadores do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Exemplo 01:

Racionalize o denominador:

$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$

Exemplo 02:

Racionalize o denominador:

$$\frac{3}{3\sqrt{2}-5} =$$

Matemática Básica - Produtos notáveis;
- Fatoração de expressões algébricas.

PRODUTOS NOTÁVEIS:

Nesta aula veremos que os produtos notáveis são multiplicações que se destacam na matemática, por serem frequentemente utilizadas.

1. Quadrado da Soma de Dois Termos

$(a+b)^2 =$

Exemplo:

$(5x+3)^2 =$

2. Quadrado da Diferença de Dois Termos

$(a-b)^2=$

Exemplo:

$(2x-2)^2 =$

3. Produto da soma pela diferença de dois termos

$(a+b)\cdot(a-b) =$

Exemplo:

$(3+2x)\cdot(3-2x) =$

FATORAÇÃO:

Fatorar é transformar uma soma ou diferença de duas ou mais parcelas como produto de dois ou mais fatores.

1. Fator Comum

ax + ay =

Exemplos:

$3x^2 - 6x =$

$36x^2y^2 - 24x^4y =$

2. Agrupamento

ax + ay + bx + by =

Exemplo:

$6x^2 - 4ax - 9bx + 6ab =$

3. Diferença de Quadrados

A diferença de dois quadrados é igual ao produto da soma pela diferença.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemplos:

$X^2 - 25 =$

$1 - 4a^2 =$

4. Trinômio Quadrado Perfeito: O trinômio quadrado perfeito é igual ao quadrado da soma/diferença de dois termos.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Exemplo:

x2 + 8x + 16 =

Exemplo:

$4a^2 + 4ab + b^{2} =$

5. Trinômio do Segundo Grau Supondo que x_1 e x_2 sejam as raízes do trinômio

$ax^{2} + bx + c$, $(a \neq 0)$, então:

$ax^{2} + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemplo:

$x^{2} - 5x + 4 =$

Matemática Básica - Sistema de numeração decimal;

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

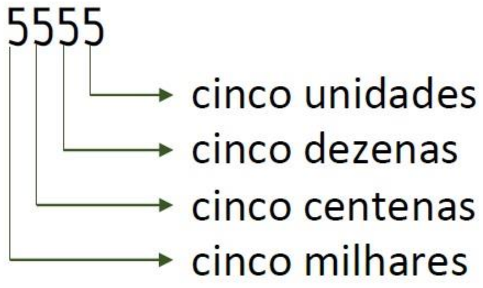
SISTEMA HINDU-ARÁBICO

- É um sistema decimal (base I0):

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

É um sistema posicional:

Cada algarismo muda de valor de acordo com a posição que ele ocupa em um determinado número.



- Utilização do zero – 3042

CLASSE E ORDENS:

Classes	MILHÕES			MILHARES			UNIDADES		
Ordens	centena	dezena	unidade	centena	dezena	unidade	centena	dezena	unidade
	100.000.000	10.000.000	1.000.000	100.000	10.000	1.000	100	10	1
	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

EXEMPLO: 75.803

REPRESENTAÇÃO PARA NÚMEROS DECIMAIS:

centena	dezena	unidade	décimo	centésimo	milésimo
100	10	1	0,1	0,01	0,001
10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

EXEMPLO: 35,147

POTÊNCIA DE 10:

Quadro comparativo

...	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	...
...	100.000	10.000	1.000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	...

EXEMPLO:

Fator	Nome	Símbolo	Fator	Nome	Símbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p

Reescreva os números abaixo utilizando a potência de 10:

12.000.000.000.000= 0,0000000000023 =

EXEMPLO:

Reescreva os números abaixo utilizando a potência de 10:

30.000.000 x 0,000005 =

48.000.000.0002.000.000 x 0,00008=

NOTAÇÃO CIENTÍFICA:

A notação científica é uma forma de escrever números que acomodam valores demasiadamente grandes ou pequenos. Sua representação numérica é composta de dois fatores:

1º Número de decimal a, tal que $1≤a<10$;

2º Potência de base 10 e expoente inteiro.

$\boldsymbol{x=a\cdot 10n}$

EXEMPLO:

Reescreva os números abaixo em notação científica:

237.000.000.000.000=
0,0000000000002353=

EXEMPLO:

Reescreva os números abaixo em notação científica:

0,0008 x 1012 = 680.000 x 10^{-10}=

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL:

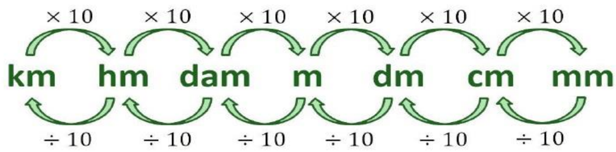
O sistema métrico decimal foi proposto em 1792 e evoluiu para o Sistema Internacional De Unidades (S.I) proposto em 1960. Ele considera o metro como padrão de comprimento, o quilograma como padrão de massa e o segundo como padrão de tempo.

PREFIXOS DO S.I

Os prefixos usados no Sistema Internacional para os múltiplos e submúltiplos das unidades são:'

METRO ($\boldsymbol{m}$): A UNIDADE DE MEDIDA DE COMPRIMENTO

Veja como transitar entre os múltiplos e submúltiplos do metro:



EXEMPLO:

Faça as seguintes conversões de comprimento solicitadas:

a. 12,4 $km \rightarrow$ ____________m

b. 430 $cm \rightarrow$ _____________m

c. 32 $dam \rightarrow$ _______________cm

d. 42300 $dm \rightarrow$ ______________________km

SEGUNDO (S): A UNIDADE DE MEDIDA DE TEMPO

As igualdades importantes para a unidade de tempo são:

$$\boldsymbol{1\ min = 60\ s}$$
$$\boldsymbol{1\ h = 60\ min = 3600\ s}$$

EXEMPLO:

Faça as seguintes conversões de tempo solicitadas:

a) 3 $h\ e\ meia \rightarrow$ ______________min

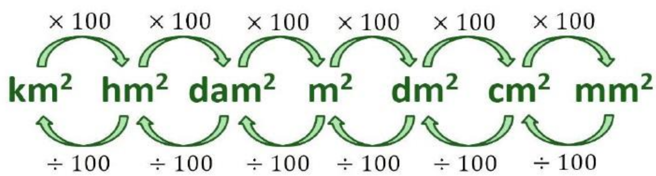
b) 40 $min \rightarrow$ ______________s

c. 150 $min \rightarrow$ ______________h

d. 432 $mil\ segundos \rightarrow$ ______________h

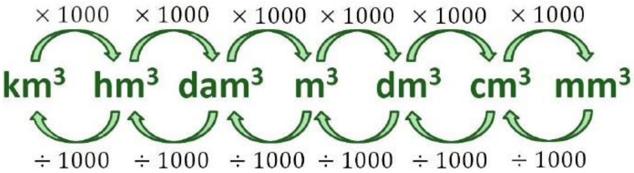
UNIDADE DE ÁREA

Veja como transitar entre os múltiplos e submúltiplos da unidade de área:



UNIDADE DE VOLUME

Veja como transitar entre os múltiplos e submúltiplos da unidade de volume:



EXEMPLO:

Faça as seguintes conversões solicitadas:

a. 350 $cm2 \rightarrow$ ______________$m2$

b. 0,42 $km2 \rightarrow$ ______________$m2$

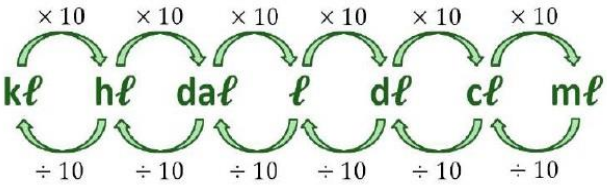
c. 0,071 $dam3 \rightarrow$ ______________$cm3$

d. 8,32·104 $mm3 \rightarrow$ ______________$m3$

CAPACIDADE

A capacidade é uma grandeza que obedece à norma de prefixos do sistema decimal.

Assim temos:



Observação:

Importante mencionar as seguintes equivalências:

$\mathbf{1\ m3 \leftrightarrow 1000\ell}$

$\mathbf{1dm3 \leftrightarrow 1\ell}$

$\mathbf{1cm3 \leftrightarrow 1m\ell}$

EXEMPLO:

Determine a capacidade em litros equivalente a cada um dos volumes:

a) 350 $cm3$=

b) 0,04 $m3$=

c) 80.000 $mm3$=

EXEMPLO:

Determine, em $cm3$, o volume equivalente a cada uma das capacidades:

a) 0,6 ℓ=

b) 40 ℓ=

c) 700 $m\ell$=

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos)
- Conjuntos;
- Subconjuntos;
- Operações: União, interseção, diferença e complementar
- Conjunto universo e conjunto vazio.

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos é o ramo da matemática que estuda conjuntos, que são coleções de elementos. Vamos começar estudando os símbolos matemáticos usados neste ramo.

∈: pertence

⇒: implica que

∉: não pertence

⇔: se, e somente se

⊂: está contido

∋ existe

⊄: não está contido

∌ não existe

⊃: contém

∀: para todo (ou qualquer que seja)

⊅: não contém

∅ ou conjunto vazio

/: tal que

U: **conjunto universo**

REPRESENTAÇÃO DE UM CONJUNTO:

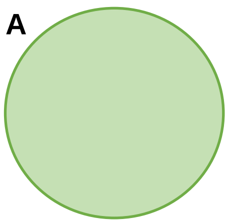
Normalmente, usamos letras maiúsculas para nomear os conjuntos e letras minúsculas para representar seus elementos.

I. REPRESENTAÇÃO ATRAVES DE CHAVES

$\boldsymbol{A= a,e,i,o,u}$

II. REPRESENTAÇÃO POR DIAGRAMA DE VENN

A



III. REPRESENTAÇÃO POR PROPRIEDADE

$\boldsymbol{A=x \mid x\ tem\ a\ propriedade\ P}$

SUBCONJUNTO:

Dizer que um conjunto B é subconjunto de um conjunto A, é equivalente a dizer que, se x é elemento de B, então x é elemento de A.

Em símbolos: $\boldsymbol{B \subset A \Leftrightarrow \forall x\ x \in B \Rightarrow x \in A}$

EXEMPLO:

A = 1,2,3,4,5

B = 3,4,5

C = 4,5,6

<u>Conjunto vazio</u>

É um conjunto que não possui elementos. O conjunto vazio é representado por { } ou ∅

<u>Conjunto universo</u>

Em matemática, principalmente na teoria dos conjuntos e nos fundamentos da matemática, um **<u>universo</u>** é uma classe que contém (como elementos) todas as entidades que se deseja considerar em uma certa situação. Assim, todos os conjuntos em questão seriam subconjuntos de um conjunto maior, que é conhecido como **<u>conjunto universo</u>** e indicado geralmente por U.

OPERAÇÕES

I. UNIÃO

A **união** de dois conjuntos A e B, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A **ou** ao conjunto B.

$A \cup B = x \mid x \in A\ ou\ x \in B$

EXEMPLO:

A = 1,2,3,4

B= 3,4,5

C= 1,2,3

II. INTERSECÇÃO

A intersecção de dois conjuntos A e B, é o conjunto formado pelos elementos que pertecem ao conjunto A e ao conjunto B.

$A \cap B = x \mid x \in A\ e\ x \in B$

EXEMEPLO;

A=4,5,6,7

B=4,6,8

C=8,9,10

III. DIFERENÇA0

A **diferença** de dois conjuntos A e B, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem a B.

$A-B=x\ x \in A\ e\ x \notin B$

EXEMPLO:

A=4,5,6,7

B=4,6,8

C=8,9,10

IV. COMPLEMENTAR

Sejam A e B dois conjuntos que A ⊂ B. Chama-se complementar de A em relação a B, o conjunto o qual os elementos pertencem a B e não pertencem a A.

$CBA=x\ x \in B\ e\ x \notin A\}$

EXEMPLO;

A=4,5

B=4,5,6,7

C= 5,6,7

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

É importante que saibamos resolver problemas que relacionam as operações entre conjuntos aprendidas até aqui com a quantidade de elementos desse conjunto.

EXEMPLOS:

EXEMPLO 1:

Dos 40 alunos de uma classe, 20 falam inglês, 15 falam espanhol e 10 não falam inglês e nem espanhol. Quantos alunos dessa classe falam as duas línguas?

EXEMPLO 2:

Em uma pesquisa, 33 dos entrevistados leem o jornal A, 29 leem o jornal B, 22 leem o jornal C, 13 leem A e B, 6 leem B e C, 14 leem A e C e 6 leem os 3 Jornais. Quantos entrevistados lê os jornais A e B, mas não lê C?

ATIVIDADES 01 (Teoria dos Conjuntos)

01) Sejam A = {l, 2, 3, ... ,4029, 4030} um subconjunto dos números naturais e B⊂A, tal que não existem x e y, x ≠ y, pertencentes a B nos quais x divida y. O número máximo de elementos de B é N. Sendo assim, a soma dos algarismos de N é

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

e) 12

02) Uma empresa possui 13 postos de trabalho para técnicos em contabilidade, 10 para técnicos em sistemas operacionais e 12 para técnicos em eletrônica. Alguns técnicos ocupam mais de um posto de trabalho, isto é, 4 são técnicos em contabilidade e em sistemas operacionais, 5 são técnicos em sistemas operacionais e em eletrônica e 3 possuem todas as três especialidades. Nessas condições, se há 22 técnicos nessa empresa, qual a quantidade de técnicos em contabilidade e em eletrônica.

a) 4

b) 6

c) 9

d) 7

e) 10

03) Representando-se por n(x) o número de elementos de um conjunto X, considere dois conjuntos A e B tais que $n(A \cap B) = 4$, $n(A - B) = 5$ e $n(A \times B) = 36$. Podemos afirmar que $n(A \cup B)$ é igual a:

a) 4

b) 6

c) 7

d) 9

e) 10

04) Numa escola há n alunos. Sabe-se que 56 alunos leem o jornal A, 21 leem os jornais A e B, 106 leem apenas um dos dois jornais e 66 não leem o jornal B. O valor de n é

a) 249

b) 137

c) 158

d) 127

e) 183

05) Um subconjunto X de números naturais contém exatamente 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 e 8 números ímpares. Então, o número de elementos de X é igual a:

a) 22

b) 20

c) 18

d) 24

e) 28

06) Uma pesquisa foi realizada para tentar descobrir, do ponto de vista das mulheres, qual é o perfil da parceira ideal procurada pelo homem do séc. XXI. Alguns resultados estão apresentados no quadro abaixo.

O QUE AS MULHERES PENSAM QUE OS HOMENS PREFEREM	
72% das mulheres têm certeza de que os homens odeiam ir ao shopping	**65%** pensam que os homens preferem mulheres que façam todas as tarefas da casa
No entanto, apenas **39%** dos homens disseram achar a atividade insuportável	No entanto, **84%** deles disseram acreditar que as tarefas devem ser divididas entre o casal

Se a pesquisa foi realizada com 300 mulheres, então a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao shopping e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é

a) inferior a 80.

b) superior a 80 e inferior a 100.

c) superior a 100 e inferior a 120.

d) superior a 120 e inferior a 140.

e) superior a 140.

07) Se A é um conjunto finito, seja n(A) o número de elementos de A. Sejam X, Y e Z três conjuntos tais que:

$n(X) = 100$, $n(Y) = 90$, $n(Z) = 80$, $n(X - (Y \cup Z)) = 50$

$n(X \cap Y \cap Z) = 10$ e $n(X \cap Y) = n(X \cap Z) = n(Y \cap Z)$

Nestas condições o número de elementos que pertencem a mais de um conjunto é:

a) 70

b) 80

c) 90

d) 100

e) 125

08) Um grupo de 50 pessoas, foi dividido em duas categorias: quanto à cor dos cabelos, louras ou morenas; quanto à cor dos olhos, azuis ou castanhos. De acordo com essa identificação, sabe-se que 14 pessoas no grupo são louras com olhos azuis, que 31 pessoas são morenas e que 18 têm olhos castanhos. Nesse grupo, o número de pessoas morenas com olhos castanhos é:

a) 13

b) 14

c) 15

d) 16

e) 17

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) - Conjuntos dos números naturais e inteiros; - Números Primos; - Fatoração; - Número de divisores; - Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS (ℕ)

O conjunto dos números naturais é representado por:

$\mathbb{N}$=0,1,2,3,4,5,6, …

O conjunto dos números naturais não nulos é representado por:

$\mathbb{N}*$ **=1,2,3,4,5,6, …**

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS (ℤ)

O conjunto dos números inteiros é representado por:

$\mathbb{Z}$=…, −3,−2,−1, 0, 1, 2, 3, …

Subconjuntos importantes de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}*$=…,−3,−2,−1,1,2,3,…

$\mathbb{Z}+$=0,1,2,3,4,…= $\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}+*$=1,2,3,4,5,6,…= $\mathbb{N}*$

$\mathbb{Z}-$=…,−3,−2,−1,0

$\mathbb{Z}-*$=…,−4,−3,−2,−1

Observação: Todo número natural é inteiro, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Números primos: Números primos são os números naturais que têm apenas dois divisores naturais diferentes: o 1 e ele mesmo.

Exemplos:

1) 2 tem apenas os divisores 1 e 2, portanto 2 é um número primo.
2) 17 tem apenas os divisores 1 e 17, portanto 17 é um número primo.
3) 10 tem os divisores 1, 2, 5 e 10, portanto 10 não é um número primo.

Observações:
1 não é um número primo, porque ele tem apenas um divisor que é ele mesmo.

2 é o único número primo que é par

NÚMERO COMPOSTO: Um número natural composto é aquele que possui mais de dois divisores naturais distintos.

EXEMPLOS:

4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,24,25,26,27,28, ...

Decomposição em fatores primos: Todo número natural, maior que 1, pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores primos.

Decomposição do número 12 em fatores primos:

No produto 2 x 2 x 3, todos os fatores são primos.

OBSERVAÇÃO:

Chamamos de fatoração de um número natural, maior que 1, a sua decomposição em um produto de fatores primos.

Quantidade de Divisores Naturais de um Número

Passo #1: faça a decomposição em fatores primos do número dado.

Passo #2: somar uma unidade a cada um dos expoentes dos fatores primos.

Passo #3: Multiplique os resultados encontrados.

EXEMPLO:

Determine a Quantidade de Divisores dos Números…

a) 15

b) 120

MÚLTIPLOS E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO INTEIRO EXEMPLO:

$\boldsymbol{M3}$=

$\boldsymbol{M4}$=

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

O mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais inteiros é o menor inteiro positivo que é múltiplo simultaneamente desses números.

EXEMPLO:
$M3$=

$M4$=

MMC – REGRA PRÁTICA

Determine o MMC entre os números 12,15 e 20.

M12={12,24,36,48,60,72,84,96,108,120,132,…}

M15={15,30,45,60,75,90,105,120,135,…}

M12={20,40,60,80,100,120,140,…}

PROPRIEDADES QUE ENVOLVEM O MMC

P1: O mínimo múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números primos será sempre o produto entre eles.

P2: Entre dois ou mais números, se o maior deles é múltiplo dos outros, então esse maior número é o mmc.

P3: Se os números forem multiplicados/divididos por uma constante k, então o mmc entre esses números também será multiplicado/dividido por k.

PROBLEMAS SOBRE MMC

Uma pessoa dá a volta completa em uma pista circular em 12 minutos enquanto que outra realiza a mesma volta em 15 minutos. As duas partem juntas e ao mesmo tempo às 13h30min. A que horas as duas pessoas se encontrarão novamente no ponto onde partiram e quantas voltas de cada uma?

MÁXIMO DIVISO COMUM (MDC)

O máximo divisor comum (mdc) entre dois ou mais números inteiros é o maior número inteiro que é divisor de tais números.

EXEMPLO:

Qual é o máximo divisor comum entre os números 12 e 18?

MDC – REGRA PRÁTICA

O máximo divisor comum entre dois ou mais números inteiros pode ser obtido pelo método da fatoração simultânea de números inteiros.

EXEMPLO:

Qual é o máximo divisor comum entre os números 120 e 140?

PROPRIEDADES

P1: O máximo divisor comum (mdc) entre dois ou mais números primos é sempre igual a 1.

P2: O se a é divisor de b, então $mdca,b=a$.

P3: Se os números forem multiplicados/divididos por uma constante k, então o mdc entre esses números também será também multiplicado/dividido por k.

OBSERVAÇÃO: mdc(a,b) x mmc(a,b) = a x b

PROBLEMAS SOBRE MDC

Três barbantes que medem respectivamente 24 m, 84 m e 90 m foram cortados em pedaços iguais do maior tamanho possível, sem deixar sobras. Determine o número de pedaços obtidos e o tamanho de cada um deles.

ATIVIDADE 02

01) Sejam os números A = $2^3.3^2.5$ e B = $2.3^3.5^2$. O MDC e o MMC entre A e B valem, respectivamente:

a) $2.3^2.5$ e $2^3.3^3.5^2$

b) 2.3^2 5 e $2^2.3^2.5$

c) $2.3.5$ e $2^3.3^3.5^2$

d) $2^2.3^2.5$ e $2.3^2.5$

e) $2^3.3^2.5^2$ e $2.3^3.5^2$

02) Dois ônibus partem simultaneamente de um mesmo terminal rodoviário com destinos diferentes. Um dos ônibus torna a partir do terminal a cada 80 minutos e o outro a cada 90 minutos. Quantos minutos serão necessários para os ônibus partirem novamente juntos do terminal?

a) 450 minutos

b) 810 minutos

c) 650 minutos

d) 500 minutos

e) 720 minutos

03) Uma faixa retangular de tecido deverá ser totalmente recortada em quadrados, todos de mesmo tamanho e sem deixar sobras. Esses quadrados deverão ter o maior tamanho (área) possível. Se as dimensões da faixa são 105 cm de largura por 700 cm de comprimento, o perímetro de cada quadrado, em centímetros, será:

a) 28

b) 60

c) 100

d) 140

e) 280

04) Um galpão na forma de um paralelepípedo reto de dimensões 30m, 72m e 6m deve ser preenchido completamente com caixas cúbicas de mesmo volume.

Qual o menor número de caixas a serem utilizadas?

a) 80

b) 70

c) 60

d) 50

e) 40

05) Das pessoas presentes em uma festa, sabe-se que a razão entre o número de mulheres e o de homens, nessa ordem, é 7/13. Nessas condições, o número de mulheres é igual a que porcentagem do total de pessoas presentes?

a) 35%

b) 25%

c) 20%

d) 13%

e) 7%

06) Na série de razões $x2=y3=z4$, calcule o valor de X + Y + Z, sabendo que X + 3Y + 2Z = 76.

a) 34

b) 35

c) 36

d) 37

e) 38

07) Três semirretas partem de um mesmo ponto Q, formando 3 ângulos que cobrem todo o plano e são proporcionais aos números 11, 12 e 13. O suplemento do maior dos 3 ângulos, em graus, mede:

a) 50

b) 60

c) 70

d) 80

e) 90

08) O presidente de um clube de futebol resolveu dividir uma gratificação de R$ 1.400,00 entre os dois melhores jogadores de uma certa partida, de forma inversamente proporcional ao número de faltas que eles cometeram no jogo. Se um jogador A fez 5 faltas e um jogador B fez 2 faltas, então a diferença entre o que coube aos jogadores é:

a) 400

b) 600

c) 800

d) 900

e) 1000

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) - Razão, proporção e suas propriedades; - Divisão em partes direta e inversamente proporcionais; - Regra de três simples e composta.

RAZÃO E PROPORÇÃO

RAZÃO:

Razão é toda a relação existente entre dois valores de uma mesma grandeza, expressa geralmente “a para b”, $a:b$ ou ab.

Quando comparamos duas medidas, dois valores ou até duas grandezas, estamos determinando uma relação entre dois números que os representam.

EXEMPLOS:

a. Um concurso público possui 20.000 candidatos concorrendo a 50 vagas.

b. Em uma sala de aula existem 20 meninas e 15 meninos.

PROPORÇÃO:

Proporção é igualdade entre duas ou mais razões.

PROPRIEDADES NAS PROPORÇÕES

a. $ab=cd\Rightarrow$

b. $ab=cd$ =

EXEMPLO 1:

Encontre o valor de x na seguinte proporção:

$2x-48=52$

EXEMPLO 2:

Uma empresa possui atualmente 2.100 funcionários. Se a relação entre o número de efetivos e contratados é de 5 por 2, quantos são efetivos?

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

As grandezas a e b são **diretamente proporcionais** se $ab=k$.

EXEMPLO:

Três amigos, Paulo, Bruno e Carlos, abriram uma loja. Paulo entrou com R$60.000,00, Bruno com R$ 90.000,00 e Carlos com R$120.000,00. No primeiro ano, a loja teve um lucro de R$540.000,00 que será dividido de forma proporcional aos valores integrados por elas na abertura do negócio. Quando cada uma deverá receber?

GRANDEZA INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

As grandezas a e b são inversamente proporcionais se uma delas é proporcional ao inverso da outra, ou seja, $a \cdot b = k$.

EXEMPLO:

Pedro recebeu um prêmio de R$ 6.000,00 e irá dividi-lo entre suas três filhas de forma inversamente proporcional e suas idades. Sabendo que suas filhas têm 20 anos, 15 anos e 12 anos, determine a quantia que cada uma receberá.

REGRA DE TRÊS SIMPLES

GRANDEZA: **Grandeza** é tudo aquilo que pode ser medido, contado ou comparado.

EXEMPLO:

Assinale se as grandezas abaixo são diretamente proporcionais (D) ou inversamente proporcionais(I):

(   ) Velocidade e Tempo.

(   ) Velocidade e Distância.

(   ) Quantidade de Operários e Tempo.

(   ) Eficiência e Quantidade de Operários.

REGRA DE TRÊS SIMPLES

É uma regra prática para resolver problemas que envolvam duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo: Uma máquina, funcionando durante 5 horas, enche 120 vasilhas de detergente. Quantas vasilhas ela encheria se funcionasse durante 8 horas?

EXEMPLO:

Vinte homens fazem um determinado serviço em 10 dias. Para fazer o mesmo trabalho em 8 dias, quantos homens, com a mesma capacidade dos primeiros, seriam necessários?

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

É uma regra prática para resolver problemas que envolvam três ou mais grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

EXEMPLO 1:

Em 3 horas, 4 torneiras despejam 4200 litros de água. Em quantas horas 5 dessas torneiras despejam 7000 litros de água?

EXEMPLO 2:

Se 2 impressoras trabalhando 10 horas por dia levam 6 dias para fazer determinado trabalho, então 3 impressoras (com a mesma eficiência das anteriores) trabalhando 8 horas por dia levarão quantos dias para fazer o mesmo trabalho?

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) (Conjunto dos números racionais) - Escalas; - Porcentagem; - Juros simples; - Juros compostos.

ESCALAS NUMÉRICAS

Na área de medidas, dizemos que **escala** é a razão constante entre qualquer grandeza física ou química que permite uma comparação.

No caso de um desenho ou mapa, chamamos de escala cartográfica a relação matemática entre as dimensões apresentadas no desenho e o objeto real por ele representado. Estas dimensões devem ser sempre tomadas na mesma unidade.

A forma de representação é a seguinte:

Escala = medida no desenho ÷ medida no objeto real

Por exemplo, se um mapa apresenta a escala **1:50**, significa que 1 cm no mapa é equivalente a 50 cm na área real.

EXEMPLO: Um construtor entrega ao mestre de obras a reprodução reduzida da planta de uma casa desenhada em um papel ofício de 30 cm de comprimento. Se a casa a ser construída tem 27 metros de comprimento, a escala utilizada no desenho do papel ofício foi igual a:

A planta do prédio de uma empresa foi feita na escala de 1:250. Determine a área real que está representada na planta por $4cm2$.

PORCENTAGEM

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DA PORCENTAGEM

TRANSFORMAÇÃO DE TAXAS

47% = **0,56% =**

0,37 = **0,097 =**

PORCENTAGEM DE UMA QUANTIA

EXEMPLOS:

a. Qual é o valor de 20% de R$ 60,00?

b. 40% de quanto dá 30?

c. O valor 30 corresponde a quanto de 210?

OBSERVAÇÃO:

Para calcular 10% ou 1% de um número, basta "andar com vírgula" uma ou duas casas para a esquerda.

10% de 55,3

1% de 234

AUMENTO DE X% DE UM VALOR A

a. Aumente em 40% o valor 300.

b. Aumente em 6% o valor 500.

DESCONTO DE X% DE UM VALOR A

a. Diminua em 20% o valor 800.

b. Diminua em 25% o valor 900.

AUMENTOS E DESCONTOS SUCESSIVOS

Para compor vários aumentos e/ou descontos basta multiplicar os vários fatores individuais e obter o fator acumulado.

EXEMPLO:

Uma determinada quantia recebe um aumento de 40% depois um desconto de 30% e, por último, outro desconto de 10%. Ao final, a quantia teve um aumento ou diminuição ao valor original? Qual é a porcentagem?

EXEMPLO 1:

De toda a produção agrícola de uma região no ano passado, 40% foram grãos e, destes, 50% foi soja. Qual foi o porcentual de soja produzida em relação a toda a produção agrícola da região no ano passado?

EXEMPLO 2:

A quantidade de desempregados de um certo país, em 2001, era de 6.000.000, correspondendo a 20% da população total. Em 2010, este número aumentou para 9.000.000, correspondendo a 15% da população total. Indique a variação percentual da população do país no período considerado.

MATEMÁTICA FINANCEIRA

TERMOS UTILIZADOS: Capital (C), Tempo (T), Juros (J), Taxa (i) e Montante (M)

Exemplo:

Roberto emprestou R$1.000,00 a Paulo por 3 anos. Durante esse período, a taxa de juros simples foi de 10% ao ano. Qual é o montante desse empréstimo ao final de três anos?

JUROS SIMPLES: Quando um capital C é aplicado durante t unidades de tempo e a taxa i de juros, por unidade de tempo, incide apenas sobre o capital inicial, os juros j são chamados de juros simples. Esses juros ao final da aplicação são calculados por:

$J=C\cdot i\cdot t$

EXEMPLO:

Qual é o juro simples produzido por capital de R$ 3.600,00 aplicado durante um ano e meio à taxa de 5% ao mês?

EXEMPLO:

Em quanto tempo se pode duplicar um capital aplicado a juro simples à taxa de 0,5% ao dia?

JUROS COMPOSTOS

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro, sendo, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia a dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Roberto emprestou R$1.000,00 a Paulo por 3 anos. Durante esse período, a taxa de juros simples foi de 10% ao ano. Qual é o montante desse empréstimo ao final de três anos?

Simplificando, obtemos a fórmula:

$M=C\cdot 1+in$

<u>Importante:</u> a taxa **i** tem que ser expressa na mesma medida de tempo de **n**, ou seja, taxa de juros ao mês para n meses.

Para calcularmos apenas os juros, basta diminuir o principal do montante ao final do período:

$J=M-C$

EXEMPLO:

Determine os juros compostos gerados por uma aplicação de R$ 4.000,00 por um período de um ano e meio, à taxa de 8% ao mês. Dado: (1,08)18=3,99.

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) (Conjunto dos irracionais e reais) - Números irracionais; - Módulo de um número real; - Representação decimal; - Operações com intervalos reais.

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica: esses são os números irracionais. Eles não podem ser representados por uma razão entre dois números inteiros, tal como os números racionais.

EXEMPLO:

2=1,4142136…

3=1,7320508…

π=3,1415926…

OBSERVAÇÃO:

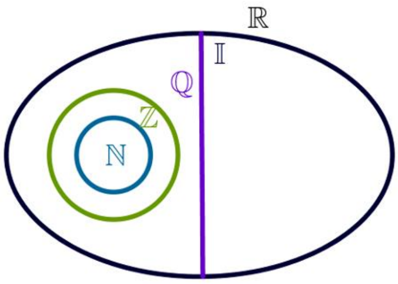
Até esse momento, um número é racional ou irracional e $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Como o **conjunto dos números reais** possui todos os conjuntos estudados até o momento, sua representação numérica é:

R = {… -4, -3, -2, -1,23, 0, + $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3,34527..., 5 , 6 , 7}

Veja agora como podemos representar o conjunto dos reais por meio de diagramas. A relação estabelecida na imagem a seguir é de inclusão, isto é, um conjunto está contido em outro conjunto.



REPRESENTAÇÃO DECIMAL

REPRESENTAÇÃO DECIMAL FINITA

72=

<u>EXEMPLO:</u>

9 =

3,235 =

5210000=

REPRESENTAÇÃO DECIMAL INFINITA

Um número com representação decimal infinita é chamado de dízima.

- Dízima não periódica

É um número que quando escrito na forma decimal apresenta uma série infinita de algarismo após a vírgula e, em nenhum momento, se repetem em grupos de um ou mais algarismo.

EXEMPLO:

45,23875849303862...
7,2934528739057...

- Dízima periódica

É um número que quando escrito na forma decimal apresenta uma série infinita de algarismos após a virgula e, a partir de certo algarismo, se repetem em grupos de um ou mais algarismos.

EXEMPLOS:

0,33333333 ... = 13
0,23333333 ... = 2190

EXEMPLOS:

0,555555...

2,17171717 ...

2,12424242424...

INTERVALO REAIS

A RETA REAL

A cada ponto de uma reta pode-se associar um único número real.

R = {… -4, -3, -2, -1,23, 0, + $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3,34527..., 5 , 6 , 7}

R

INTERVALOS REAIS

Considere, a, b ∈ R, no qual a < b. Os intervalos reais são os subconjuntos de R apresentado a seguir:

Intervalo fechado

x ∈ R | a ≤ x ≤b =[a, b]

R

Intervalo aberto

x ∈R | a< x <b =] a, b[

R

Intervalo fechado à esquerda

x ∈ R | a ≤ x < b =[a, b[

R

Intervalo fechado à direita

x ∈ R | a < x ≤ b =]a, b]

R

Intervalo ilimitado

x ∈ R | x ≥ a = [a,+∞[

R

x ∈ R | x < a =]-∞, a[

R

OPERAÇÕES COM INTERVALOS

Intervalos são subconjuntos de ℝ, logo é possível fazer operações com eles.

EXEMPLO:

Dados os intervalos A =]4,8], B = [6,10] determinar:

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$=

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$=

EXEMPLO:

Dados os intervalos **C** =] -**3, +∞** [e **D** =] - **∞, 7],** Determinar:

$\boldsymbol{C-D}$ =

MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

DEFINIÇÃO

Dado um número real x, chama-se módulo ou valor absoluto de x, e se indica por $|x|$, o número real não negativo tal que:

x =

x, se x ≥0

- x, se x <0

Observação:

Isso significa o seguinte:

- O modulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;

- O módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

EXEMPLO:

a) 3·|2|=

b) −3+|2|=

c) |−7+4|=

d) |(−2)·(−3)|

PROPRIEDADE DO MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

$P1)|x|\geq 0$

$P2 x=0 \Leftrightarrow x=0$

$P3) x\cdot y=|xy|$

$P4)$x2=$|x2=x2$

$P5) x=|-x|$

$P6)\ x\leq x$

$P7)\ X+Y\leq X+y$

P8)x2=|x|

ATIVIDADE 03

1) Determine o valor da expressão, ab−c2c−1 quando a=0,333…, b=0,5 e c=−2.

a) 233

b) 253

c) 214

d) 232

e) 272

02) Decompondo-se o número natural 3500 em fatores primos a, b e c obtém-se o produto am·bn·cP. Se a<b<c, então é falso afirmar que

a) m+P=n

b) m·n=m+n+p

c) n−m=p

d) nm=p

03) Simplificando 2a2x3·a2x2−23, com a>0 e x>0, temos

a) 2a3a2x23x

b) 2a3a2x23ax

c) 2a3a2x23a

d) 23a2x23x

04) A fração a−4−b−4a−2−b−2 é igual a

a) a−6−a−6

b) a−2−a−2

c) a−2+a−2

d) a2+a2

05) Supondo definida em ℝ a fração a·a+a·a−a·a+1a2−1, o seu valor é

a) a+1

b) a+1

c) a−1

d) a

06) O valor da expressão

144÷0.62,4·10 − 342−1,5÷1+12

a) 112

b) 712

c) − 25

d) 25

07) Assinale a alternativa que representa o tempo necessário para que uma pessoa que aplicou R$ 2.000,00, a taxa de 10% ao ano, receba R$ 662,00 de juros

a) 36 meses

b) 1 ano e meio

c) 3 anos

d) 2 anos

e) 6 anos

08) As promoções do tipo “leve 3, pague 2”, comuns no comércio acenam um desconto, sobre cada unidade vendida, de

a) 503%

b) 1003%

c) 20%

d) 50%

ATIVIDADE 04

01) Sendo i2=−1, determine o valor da expressão y=i+i2+i3+i4…+i101

a) i

b) − i

c) - 1

d) 1

02) Qual é o valor de m, de modo que o produto 2+mi·3+i seja um imaginário puro?

03) Determine o conjugado da expressão 1+3i2−i:

04) Sabendo que α∈ℝ, calcular α se a parte imaginária do complexo 2+$i\alpha$+2i é igual a zero

05) O resultado da expressão 3+2i1−4i na forma x+yi é

a) 1117+1417·i

b) 1115+1415·i

c) 1117−1417·i

d) 1117−1417·i

e) −517+1417·i

06) Considere o número complexo z=1+$ai$$a$−$i$, onde a é um número real e i é a unidade imaginária, determine o valor de z1000

a) i

b) $-i$

c) - 1

d) 1

07) O número complexo $z=1+i$ representado na forma trigonométrica é

a) $2cos450+i sen450$

b) $2cos900+i sen900$

c) $2cos600+i sen600$

d) $2cos600-i sen600$

e) $2cos900-i sen900$

08) Dado o número complexo $z=-1-3i$, determine o valor de $z8$

a) $z=256cos4\pi3+i sen4\pi3$

b) $z=256cos\pi3+i sen\pi3$

c) $z=256cos4\pi3+i sen4\pi3$

d) $z=256cos2\pi3+i sen2\pi3$

e) $z=256cos2\pi+i sen2\pi$

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) (Conjunto dos números complexos) - Introdução; - Representação algébrica; - Operações; - Conjugado de um número complexo.

NÚMEROS COMPLEXOS – INTRODUÇÃO

Vamos analisar a seguinte equação:

$x2+9=0$

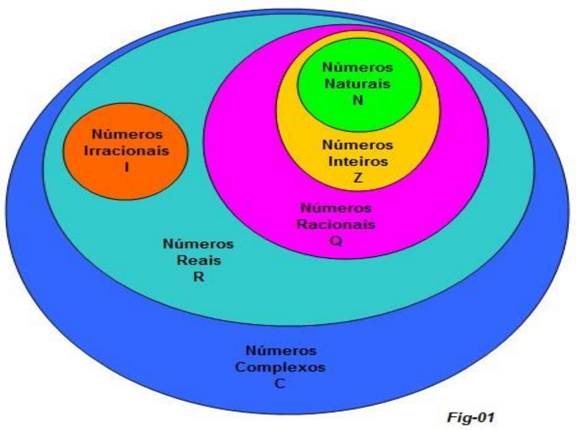


Fig-01

EXEMPLO:

Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x2-6x+25=0$

FORMA ALGÉBRICA

Um número complexo qualquer pode ser escrito da seguinte forma: a, $b \in \mathbb{R}$

$$z=a+bi$$

Parte real (a) - Parte imaginária (b)

Observação: Podemos também representar um número complexo como sendo um par ordenado

$$z=(a, b)$$

Parte real (a) - Parte imaginária (b)

OBSERVAÇÃO

Quando $imz=0$, dizemos que z é um número real.

Quando $Rez=0$, $imz\neq0$, dizemos que z é um número imaginário puro.

EXEMPLO:

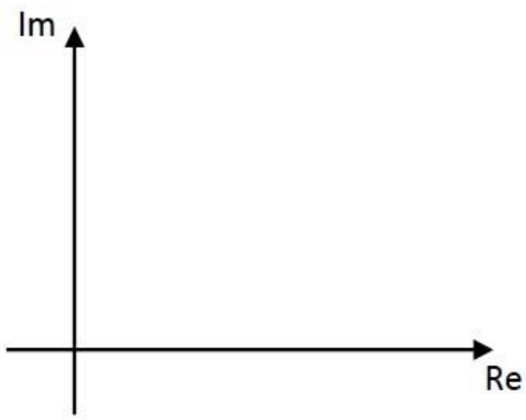
Qual deve ser o valor do número real k para que $z=6+k-4i$ seja um número real?

EXEMPLO:

Determinar o valor do real k para que $z=$k$2-36+k-6i$ seja imaginário puro.

O PLANO DE ARGAND-GAUSS

Como todo número complexo pode ser representado com um par ordenado (a, b), é possível estabelecer uma correspondência entre um número complexo $z=a+bi$ e um ponto $P(a, b)$ de um plano, e vice-versa.



IGUALDADE ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS

Dois números complexos são iguais se possuírem suas partes reais iguais e suas partes imaginárias também iguais.

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, \quad b=d$$

EXEMPLO:

Calcule x e y reais, sabendo que $2x+y+i=-1+x-yi$.

OPERAÇÃO COM NÚMEROS COMPLEXOS

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

A regra aqui é simples: soma/subtrai “termo real” com “termo real” e soma/subtrai “termo imaginário” com “termo imaginário”.

EXEMPLO: Dados $z1=3+2i, z2=-2+i$ e $z3=-4i$. Calcule:

a) $z1+z2$

b) $z3-z2$

c) $z1-z3$

MULTIPLICAÇÃO

A regra aqui é a propriedade distributiva da multiplicação. Vale lembrar que $i2=-1$.

EXEMPLO: Dados $z1=3+2i, z2=-2+i$ e $z3=1-3i$. Calcule:

a) $z1 \cdot z2=$

b) $z1 \cdot z3=$

CONJUGADO

Dado o número complexo $z=a+bi$, denominamos conjugado de z, indicamos por z, o complexo cuja parte real é igual à de z e cuja parte imaginária é o oposto da de z:

$z=a+bi \Rightarrow z=a-bi$

Observação:

Quando multiplicamos um número complexo $z=a+bi$ pelo seu conjugado $z=a-bi$ o resultado é um número real.

DIVISÃO

Para calculamos a divisão entre dois números complexos z1$z2$, multiplicamos o numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

Calcule:

$2+6i3-2i$

EXEMPLO:

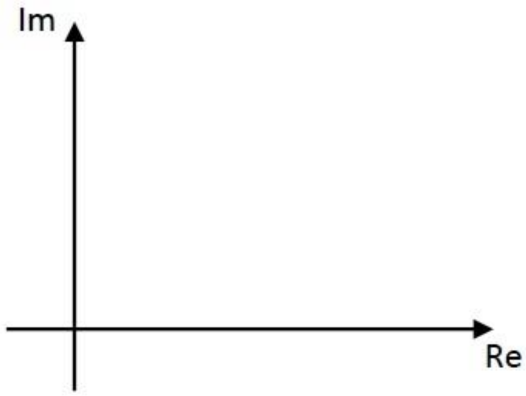
Determinar $x \in \mathbb{R}$ de modo que $z=2+3i2-xi$ seja imaginário puro.

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) (Conjunto dos números complexos) - Representação trigonométrica.

FORMA TRIGONOMÉTRIA OU POLAR

MÓDULO

Seja $z=a+bi$ a forma algébrica de um número complexo cujo afixo (ou imagem geométrica) é o ponto $P(a,b)$.



EXEMPLO:

Calcule o módulo dos seguintes números complexos e os represente no plano de Argand-Gauss:

A) $Z1=2i$

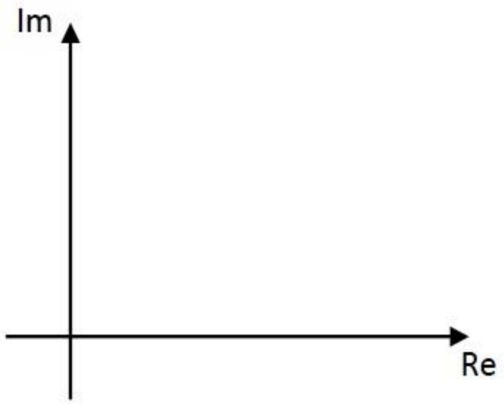
B) $Z2=3$

C) $Z3=2+3i$

D) $Z4=-2-1i$

ARGUMENTO

É o ângulo formado entre o eixo real do plano de Argand-Gauss e o modulo do número complexo $z=a+bi$ nele representado. Esse ângulo deve ser medido sempre no sentido anti-horário.



θ: Argumento de z

$00 \leq \theta \leq 3600$

$sen\theta=b\rho$ $\cos\theta=a\rho$ $Tg\theta=ba$

EXEMPLO:

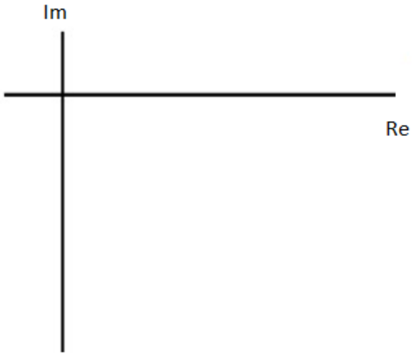
Determine o argumento do seguinte número complexo:

$z1=3+i$

EXEMPLO:

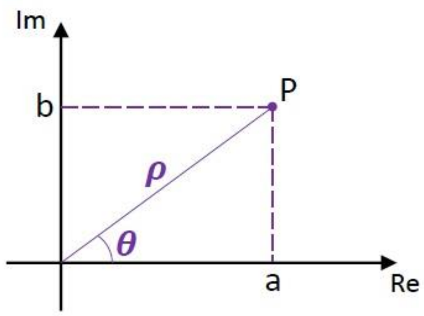
Determine o argumento do seguinte número complexo:

$z2=12-32i$



FORMA TRIGONOMETRICA OU POLAR

Seja $z=a+bi$ a forma algébrica de um número complexo. Vejamos:



$\cos\theta=a\rho$ $sen\theta=b\rho$

EXEMPLO:

Obtenha a forma polar ou trigonométrica dos seguintes números complexo:

a) $z1=3-i$

b) $z2=3i$

c) $z3=-2-2i$

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) (Conjunto dos números complexos) - Potência de i; - Operações na forma trigonométrica.

POTÊNCIA DE i

Seja i a unidadeimaginária. Vamos calcular i^{n}, para alguns valores naturais de n. Vejamos:

i^0 =

i^1 =

i^2 =

i^3 =

i^4 =

i^5 =

i^6 =

i^7 =

Calcule os exemplos abaixo:

a) $i13$

b) $i26$

c (- i)37

d) 3 + i·4−i−1328

e) 1 + i1−i133

f) $i+i2+i3+i4\ldots+i1001$

g) $i4n+2$ (para $n \in \mathbb{N}$)

OPERAÇÕES NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Sejam dois números complexos:

$z1=\rho1\cos\theta1+i\cdot sen\theta1$ e $z2=\rho2\cos\theta2+i\cdot sen\theta2$

MULTIPLICAÇÃO

Na multiplicação desses dois números complexos, a gente multiplica os módulos e soma os argumentos, ou seja:

OBSERVAÇÃO:

Esse raciocínio pode ser generalizado para um produto de n números complexos $z1\cdot z2\cdot\ldots\cdot zn$, isto é, basta multiplicar todos os módulos e somar todos os argumentos envolvidos.

EXEMPLO:

Sendo:

$z1$=6(cos30°+$i \cdot sen$ 30°) e $z2$=5(cos120°+$i \cdot sen$ 120°), calcule $z1 \cdot z2$.

DIVISÃO: Na divisão desses dois números complexos, a gente divide os módulos e subtrai os argumentos, ou seja:

$z1=\rho 1\cos\theta 1+i \cdot sen\theta 1$ e $z2=\rho 2\cos\theta 2+i \cdot sen\theta 2$

EXEMPLO:

Sendo:

$z1$=8(cos150°+$i \cdot sen$ 150°) e $z2$=4(cos60°+$i \cdot sen$ 60°), calcule z1$z2$ e z2$z1$

POTENCIAÇÃO

O cálculo de zn fica muito trabalhoso se utilizamos a forma algébrica. Considerando a forma trigonométrica $z=\rho(cos\theta+i \cdot sen\theta)$, temos o seguinte:

$zn=\rho n\cos n\cdot\theta+i \cdot sen\ n\cdot\theta$

Esse resultado é conhecido como 1ª Fórmula de Moivre.

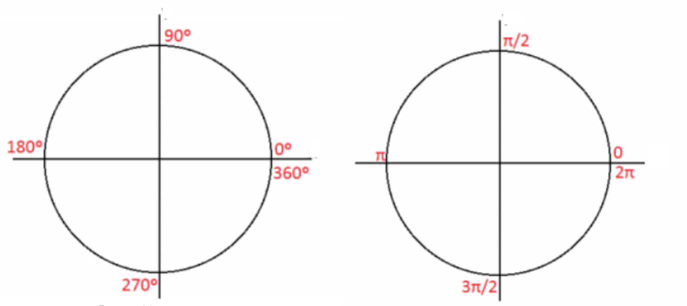
EXEMPLO:

Se z=2(cos60°+$i \cdot sen$ 60°), qual é o valor de $z5$?

EXEMPLO:

Qual é o valor de (23 −2i)8?

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) (Conjunto dos números complexos) - Radiciação nos complexos.



Potenciação

$zn=\rho n\cos n\cdot\theta+i \cdot sen n\cdot\theta$

1ª Fórmula de Moivre

Radiciação

Se $z=\rho\cos\theta+i \cdot sen\theta$, suas raízes enésimas são dadas por:

wk=nρcosθ + 2kπn+$i \cdot sen$θ + 2kπn onde n∈ℕ∗e k=0,1,2…n−1

Essa expressão é conhecida como 2ª Fórmula de Moivre.

Exemplo: Determine as raízes cúbicas de z = 8.

1 - Vamos calcular o módulo e o argumento de **z** para a aplicação da 2ª fórmula de Moivre:

2 - As raízes cúbicas de **8** são dadas por:

$wk=n\rho$cosθ + 2kπn+$i \cdot sen$θ + 2kπn

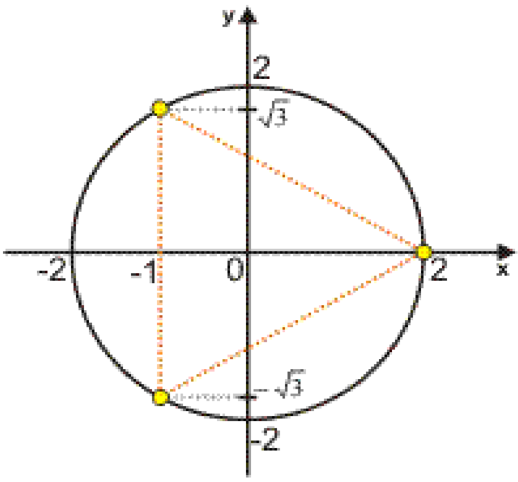
O número **k** pode assumir os valores **0**, **1** e **2**:

Para k = 0.

Para k = 1.

Para k = 2.

Geometricamente, note que as três raízes estão sobre uma circunferência de raio **2** e são vértices de um triângulo equilátero.



Exemplo: Determine as raízes de 4z, com z = 16.

1 - Vamos calcular o módulo e o argumento de **z** para a aplicação da 2ª fórmula de Moivre:

2 - As raízes de 4z, com z = 16 são dadas por:

$wk=n\rho$cosθ + 2kπn+$i \cdot sen$θ + 2kπn

O número **k** pode assumir os valores **0**, **1, 2** e 3:

Para k = 0.

Para k = 1.

Para k = 2.

Para k = 3.

Geometricamente, note que as quatro raízes estão sobre uma circunferência de raio 1 e são vértices de um quadrado.

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) (Conjunto dos números complexos) - Equações binômias e trinomiais nos complexos.

EQUAÇÕES BINÔMIAIS

Qualquer equação que possa ser reduzida à forma abaixo, é chamada equação binômia:

$axn+b$=0, com a *e* b∈ℂ, a *e* b≠o *e* n∈ℕ

Para resolve-la, isolamos $\boldsymbol{xn}$ no primeiro membro e aplicamos a segunda fórmula de De Moivre:

Essa equação admite enésimas raízes para

z = $-ba$

Em ℂ, encontre as raízes da equação 3x4+48=0

EQUAÇÕES TRINÔMIAIS

Outro tipo muito comum de equação que envolve números complexos é o que se pode reduzir à chamada equação trinômia:

$ax2n+b\cdot xn+c$=0, com a, b *e* c∈ℂ, a≠0, b≠0 *e* n∈ℕ.

Para solucioná-la, fazemos uma mudança de variável, $xn=y$ obtendo uma equação do 2º grau:

$ay2+by+c$=0

Em ℂ, encontre as raízes da equação x6+7x3−8=0

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) - ATIVIDADE EXTRA I.

01 – (AFA – 2017)

Sejam os números reais

a. (–1)2·0,1222….(1,2)−1

b. comprimento de uma circunferência de raio 1

c. *12·90·160·147*

Sendo ℕ, ℤ, ℚ *e* ℝ os conjuntos numéricos, assinale a alternativa **FALSA.**

a){a,c}⊂ℚ

b) c∈(ℤ∩ℕ)

c) ℝ−ℚ⊃{b,c}

d) {a,c}⊂(ℝ∩ℚ)

02 – (EsSA – 2008)

A proporção entre as medalhas de ouro, prata e bronze conquistada por um atleta é 1:2:4, respectivamente. Se ele disputar 77 competições e ganhar medalhas em todas elas, quantas medalhas de bronze ele ganhará?

a) 55

b) 33

c) 44

d) 22

e) 11

03 – (EEAR – 2001)

Seja pq a forma irredutível do resultado da expressão

234+112414−112+1,2363636… o valor de p – q é

a) 78

b) 98

c) 324

d) 524

04 – (EsPCEx – 2006)

Este ano, duas empresas patrocinarão a premiação, em dinheiro, dos alunos de uma escola pelo destaque no critério “Melhor Rendimento Escolar”. A empresa alfa doará um montante de R$ 9.600,00 e a empresa Bravo de R$ 7.800,00. Cada aluno deve receber como prêmio um cheque de somente uma das empresas e todos os cheques devem ter o mesmo valor. Se todo esse montante for distribuído, o número mínimo de alunos que poderá ser contemplado nessa premiação é de

a) 25

b) 29

c) 30

d) 32

e) 40

05 – (EPCAr – 2016)

As idades de dois irmãos hoje são números inteiros e consecutivos. Daqui a 4 anos, a diferença entre as idades deles será 110 da idade do mais velho. A soma das idades desses irmãos, hoje, é um número

a) primo

b) que divide 100

c) múltiplo de 3

d) divisor de 5

06 – (EEAR – 2004)

É correto afirmar que

a) o número 0,37222... é racional.

b) toda raiz de uma equação do 2º grau é um número real.

c) o quadrado de qualquer número real é um número racional.

d) o número *2* pode ser representado sob a forma pq, sendo p e q inteiros, e q≠0.

07 – (EsPCEx – 2000)

Se A=[−5,1[e B= −23,*5* , então os conjuntos $A-B$ e $A \cap B$ são, respectivamente

A) −5,−23 e −21,1

B) −5,−23 e −23,*5*

C) −23,1 e −23,*5*

D) 1,*5* e −5,−23

E) −23,1 e −23,1

(Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos) - ATIVIDADE EXTRA II.

01 – (EEAR – 2004)

A região assinalada no diagrama corresponde a:

A) (B∪C) ∩ A

b) (B∩C)∪ A

c) (A-B) ∩ C

d) C-(A∩B**)**

02 – (EsPCEx – 2013)

Uma determinada empresa de biscoitos realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus consumidores em relação a seus três produtos: biscoitos cream cracker, wafer e recheados. Os resultados indicaram que:

- 68 pessoas compram cream crakers.

- 85 pessoas compram wafer.

- 170 pessoas compram biscoitos recheados.

- 20 pessoas compram wafers, cream crakers e recheados.

- 50 pessoas compram cream crakers e recheados.

- 30 pessoas compram cream crakers e wafers.

- 60 pessoas compram wafers e recheados.

- 50 pessoas compram biscoitos dessa empresa.

Determine quantas pessoas responderam essa pesquisa.

a) 200

b) 250

c) 320

d) 370

e) 530

03 – (EsSA – 2010)

Em uma escola com 500 alunos, foi realizada uma pesquisa para determinar a tipagem sanguínea destes. Observou-se que 115 tinha o antígeno A, 235 tinha o antígeno B e 225 não possuíam nenhum dos dois. Escolhendo ao acaso um destes alunos, a probabilidade de que ele seja do tipo AB, isto é, possua os dois antígenos, é

a) 15%

b) 23%

c) 30%

d) 45%

e) 47%

04 - (EsSA – 2014)

O número complexo $\mathbf{i}^{102}$, onde **i** representa a unidade imaginária,

A) é positivo.

B) é imaginário puro.

C) é real.

D) está na forma trigonométrica.

E) está na forma algébrica.

05 – (EEAR - 2000)

Para que o complexo z= 1+2i3+ki seja real, o valor de k, onde k ∈ R deve ser:

A) 6

B) -6

C) 8

D) -8

06 - (EsPCEx – 2011)

Seja o número complexo $Z=x+yi3+4i$, x e y reais e $i2=-1$. Se $x2+y2=20$, então o módulo de Z é igual a:

A) 0

B) *5*

C) 255

D) 4

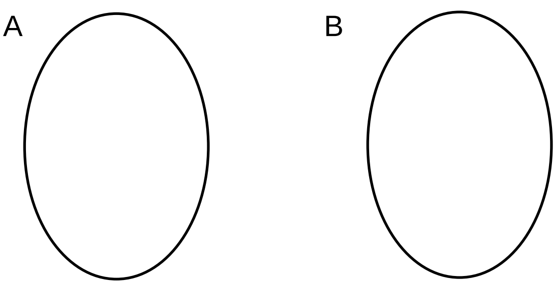
E) 10

(Funções) - Definição, domínio, imagem, contradomínio, funções injetoras, sobrejetoras, bijetoras, funções pares e impares, funções periódicas.

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES

NOÇÃO DE FUNÇÃO POR MEIO DE CONJUNTOS

Sejam os conjuntos A = {1,2,3} e B = {1,2,3,4,6,9}. Associar cada elemento do conjunto A ao seu dobro em B.



Observação:

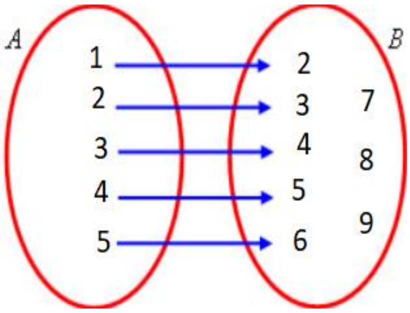
Em uma função:

- Jamais sobrarão elementos no conjunto de partida;

- Cada elemento do conjunto de partida possuirá um único elemento correspondente no conjunto de chegada.

DEFINIÇÃO E NOTAÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único $y \in B$.



$f: A \rightarrow B$

$fx=x+1$

$Obs: \ fx=y$

DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

Seja f uma função de A em B, define-se:

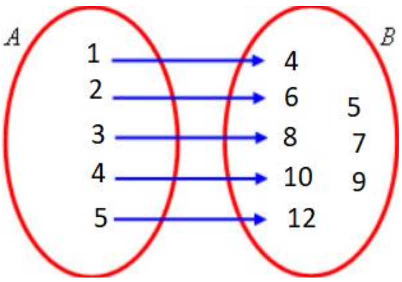
Domínio: Conjunto de partida

Contradomínio: Conjunto de chegada

Imagem: Conjunto formado por elementos do conjunto de chegada que possuem correspondente no conjunto de partida.

EXEMPLO:

Sejam os conjuntos $A=$ {1,2,3,4,5} e $B=${4,5,6,7, 8,9,10,12} e a função f:A →B definida por $fx=$2x+2. Determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem dessa função.



ESTUDO DO DOMÍNIO DAS FUNÇÕES REAIS

Nos exemplos abaixo, vamos determinar o domínio de cada função fx apresentada.

EXEMPLOS

$fx=4x-2$

$fx= 3x+2x-4$

$fx=x-3$

$fx=2xx-7$

$fx=3-xx+2$

$fx=3x-9-32x+6$

$fx=34x+2$

FUNÇÃO INJETORA

Uma função f:A→B é injetora quando elementos diferentes de A possuem correspondentes diferentes em B, ou seja, se $x1\neq x2$ em A, então fx1$\neq f(x2)$ em B.

EXEMPLO:

Analise as seguintes funções quanto a sua injetividade:

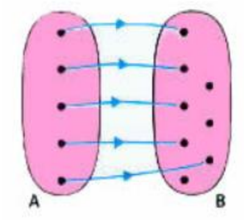
a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $fx=3x+1$

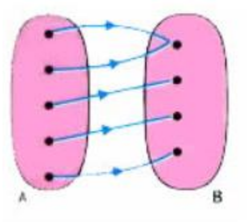
b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $fx=x2$

c. $f:\mathbb{R}+\to\mathbb{R}$ tal que $fx=x2$

Observação:

Por meio de diagramas, é fácil analisar se uma função é injetora ou não, veja:



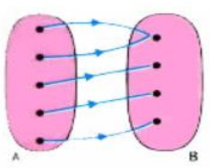


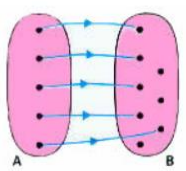
FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função $f:A\to B$ é sobrejetora quando todo elemento de B for imagem de algum $x\in A$, ou seja, $Imf=B$.

Observação:

Por meio de diagramas, é fácil analisar se uma função é sobrejetora ou não, veja:

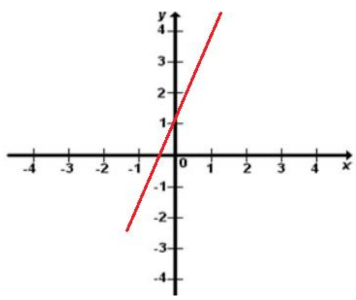




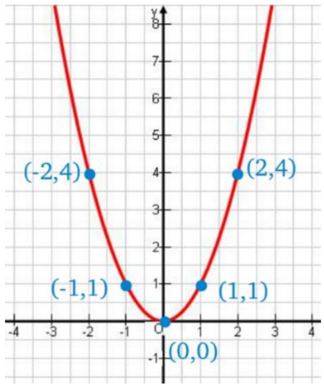
EXEMPLO:

Analise as seguintes funções quanto a sua sobrejetividade:

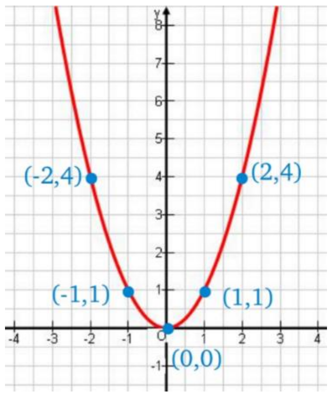
a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $fx=3x+1$



b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $fx=x2$



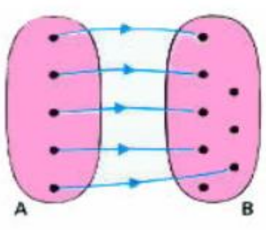
c. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}+$ tal que $fx=x2$



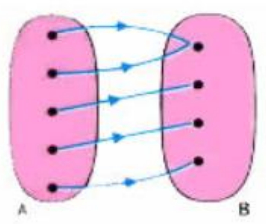
Uma função $f:A\to B$ é bijetora quando ela for, simultaneamente, injetora e cobrejetora.

Resumindo:

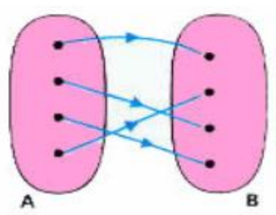
Função Injetora



Função Sobrejetora



Função Bijetora

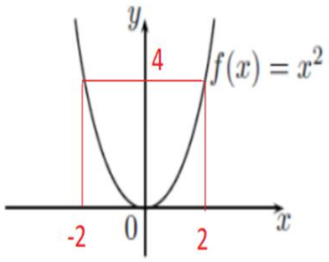


PARIDADE DE FUNÇÕES

FUNÇÃO PAR

Uma função é considerada função par quando $f x= f -x$. Graficamente, esse tipo de função é simétrica em relação ao eixo das ordenadas (eixo y).

EXEMPLO:
Seja a função f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f x=x 2$.

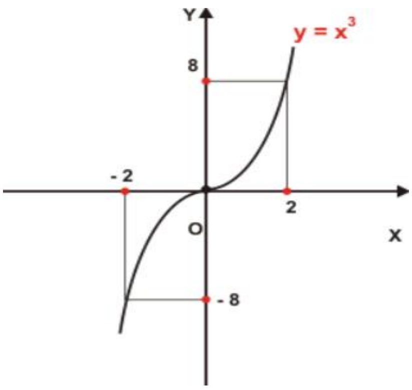


FUNÇÃO ÍMPAR

Uma função é considerada função ímpar quando $f x=-f -x$. O gráfico desse tipo de função é simétrico em relação à origem do plano cartesiano.

EXEMPLO:

Seja a função f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f x=x 3$.



Observação:

As funções que não são pares e nem ímpares são chamadas de “funções sem paridade”. Um exemplo é a função $f x=x-3$.

FUNÇÕES PERIÓDICAS

As funções periódicas são aquelas nas quais os valores da variável dependente y se repetem para determinados valores da variável independente x, ou seja, para cada período determinado pelos valores de x, iremos obter valores repetidos para y.

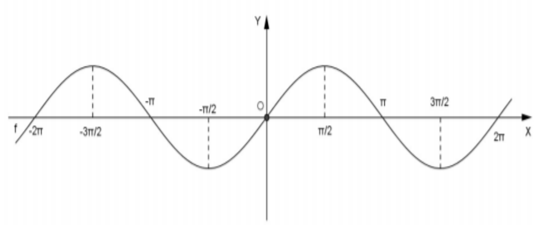
EXEMPLOS:

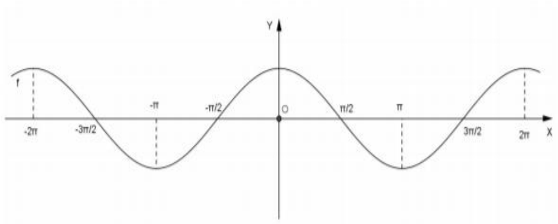
f:$\mathbb{N}\to z$, fx=–1x

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	1	-1	1	-1	1	-1

Função Seno e Função Cosseno:

Analisando os gráficos das funções seno e cosseno podemos observar suas características





ATIVIDADE 05

01) Dados os conjuntos $A=a,\ b,\ c,\ d$ e B=1, 2, 3, 4, 5, assinale a única alternativa que define uma função de A em B.

a) a, 1b, 3c, 2

b) a, 3b, 1c, 5 (a, 1)

c) a, 1b, 1c, 1(d, 1)

d) a, 1a, 2a, 3a, 4(a, 5)

a) a, 12, b3, c4, d(5, a)

02) Dada as funções f(x) = 3x + 5, $gx=x2+2x-1$ e h(x) = 7 – x, o valor em módulo da expressão:

$4h12-g4f-1$

03) A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é tal que, para todo $x\in\mathbb{R}$, $f3x=3fx$. Se $f9$= 45, calcule $f1$.

04) Calcular a função inversa de:

a) $gx=2x-8$

b) $fx=x+31-2x$

05) Se f é uma função tal que $fa+b= fa\cdot fb$, quaisquer que seja a e b, então $f3x$ é igual a

a) 3$\cdot fx$

b) 3+fx

c) fx3

d) fx3

e) $f3+fx$

06) Nas funções f e g, definidas por $fx=x2+2$ e $gx=x-3$, obtenha as leis que definem:

a) fgx b) gfx

07) Seja a função f definida por $fn+1=fn2$, com $f0=4$, calcule o valor de $f3$

08) Considere a função f(x) real, definida por f(1) = 43 e f(x+1) = 2f(x) -15. Determine o valor de f(0).

(Funções) - Funções compostas, raiz de uma função, função constante, função crescente e função decrescente.

FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas as funções f: A → B e g: B → C, denominamos função composta de g e f a função h: A → C, tal que h = (g ∘ f)(x) = g(f(x)), com X ∈ A.

Vamos analisar um exemplo para entender o que é uma função composta.

Consideramos os conjuntos:

A = {0,1,2}

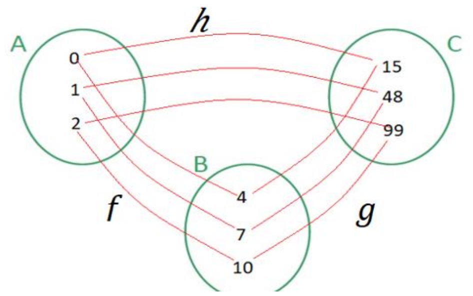
B = {4,7,10}

C = {15,48,99}

E as funções

f: A → B definida por f(x) = 3x+4

g: B → C definida por g(y) = y^2-1



EXEMPLO:

Sejam as funções $f\colon A\to B$, tal que $fx=2x+2$ e $g\colon B\to C$, tal que $gx=x-1$. Determine a função composta $h\colon A\to C$.

EXEMPLOS:

01) Sejam as funções $fx=x2+2$ e $gx=x-1$. Determine:

a. $fg0$

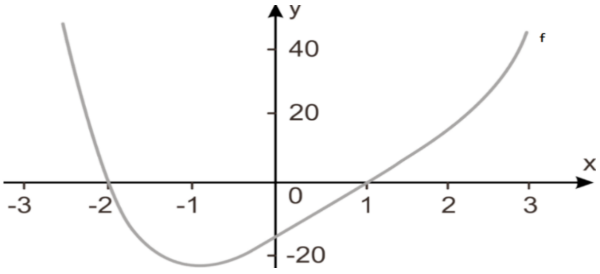
b. $gf1$

c. $g(fx)$

02) Sejam as funções reais $fx=2x+3$ e $f\circ gx=2x2-4$. Determine $g(2)$.

RAIZES DA FUNÇÃO

Dada uma função y = f(x), os valores de x para os quais f(x) = 0, são chamados **raízes** da função. No gráfico cartesiano, as raízes são abscissas dos pontos onde o gráfico corta o eixo horizontal. Observe o gráfico abaixo:



Neste gráfico, temos:

- Raízes da função f no intervalo analisado os valores -2 e 1

EXEMPLO:

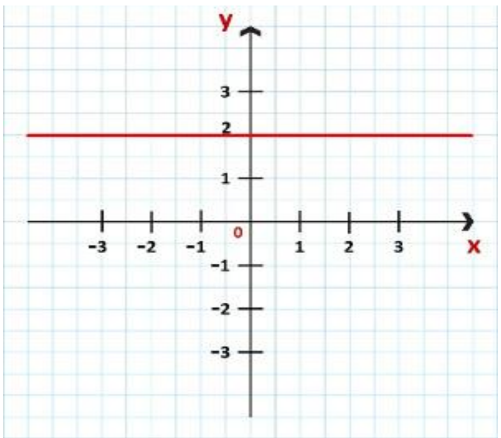
Determine as raízes das funções $f\colon A\to B$, tal que $fx=2x+2$ e $g\colon B\to C$, tal que $gx=x-1$.

FUNÇÃO CONSTANTE

Uma função constante é caracterizada por apresentar uma lei deformação f(x) = c, na qual c é um número real.

EXEMPLO:

O gráfico da função **f(x) = 2** é uma reta paralela ao eixo **x** que intercepta o eixo **y** no ponto **(0, 2)**.

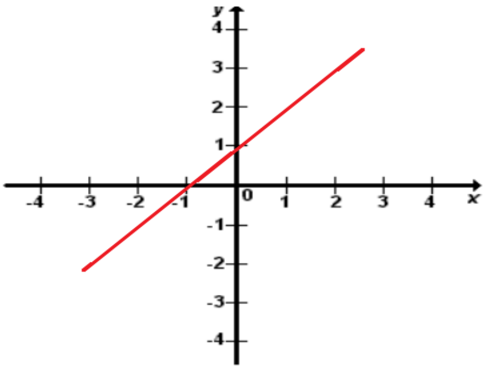


FUNÇÃO CRESCENTE

Dada uma função f: A → B, dizemos que f é **crescente** se, e somente se, para quaisquer $x_2 \in A$ e $x_1 \in A$, com $x_2 > x_1$ tivermos $f(x_2) > f(x_1)$.

Por exemplo, a função f: ℝ → ℝ definida por f(x) = x+1 é crescente, pois: $x_2 > x_1$ teremos $f(x_2) > f(x_1)$. Ou seja, quando os valores do domínio crescem, suas imagens também crescem.

f(x) = x+1



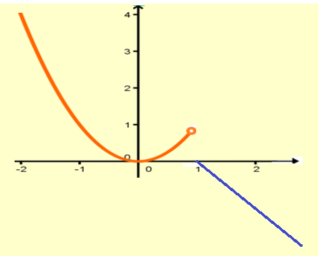
Podemos notar no gráfico que à medida que os valores de x vão aumentando, suas imagens também vão aumentando.

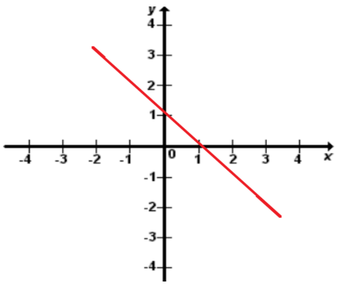
FUNÇÃO DECRESCENTE

Dada uma função f: A → B, dizemos que f é **decrescente** se, e somente se, para quaisquer $x_2 \in A$ e $x_1 \in A$, com $x_2 > x_1$, tivermos $f(x_2) < f(x_1)$.

Por exemplo, a função f: ℝ → ℝ definida por f(x) = -x+1 é decrescente, pois: $x_2 > x_1$ teremos $f(x_2) < f(x_1)$.

f(x) = -x+1





Podemos notar no gráfico que à medida que os valores de x vão aumentando, suas imagens vão diminuindo.

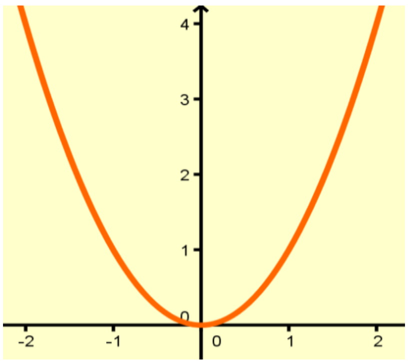
(Funções) - Função definida por mais de uma sentença - Função inversa e seu gráfico.

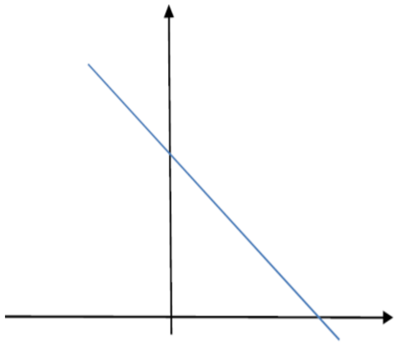
Função Definida Por Várias Sentenças

Considere as seguintes funções:

1. g : ℝ → ℝ, definida por gx=x2;

2. h: ℝ → ℝ, definida por hx=1−x.





Agora, se pensarmos em uma função f definida por fx= gx=x2 para x < 1

e fx= hx=1−x, quando x ≥ 1, isto é:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ para } x < 1 \\ 1 - x \text{ , quando } x \geq 1 \end{cases}$$

o gráfico da função f será o gráfico da função g quando os valores de x tomados são menores que 1, e quando os valores de x tomados maiores ou igual a 1, o gráfico da f será igual ao gráfico de h:

EXEMPLO:

01) Considere a função real f: ℝ → ℝ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 6, \text{ se } x \leq -2 \\ x^2, \text{ se } -2 < x < 1 \\ x + 1, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) calcule as imagens a baixo:

I) $f(-2)$ =

II) f (−1) =

III) f (0) =

IV) f (1) =

V) f (2) =

b) construa o gráfico da f.

02) Considere a função real f: ℝ → ℝ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \leq 0 \\ x + 1, \text{ se } 0 < x < 2 \\ -x + 7, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) calcule as imagens a baixo:

I) $f(-2)$ =

II) f (-1) =

III) f (0) =

IV) f (1) =

V) f (2) =

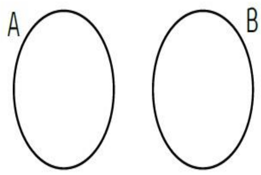
b) construa o gráfico da f.

c) determine o valor da razão $f3 \cdot f1f2+f0$

FUNÇÃO INVERSA

EXEMPLO PRELIMINAR

Dados os conjuntos $A=\{1,2\}$ e $B=\{0,2\}$, considerando a função f de A em B definida por $fx=2x-2$.



Observação:

- Somente funções bijetoras admitem a existência da função inversa;

REGRA PRÁTICA PARA DETERMINAR A FUNÇÃO INVERSA

São dois passos simples para nós determinamos a inversa de uma função:

1º. trocar x por y e y por x;

2º. Isolar y.

EXEMPLOS:

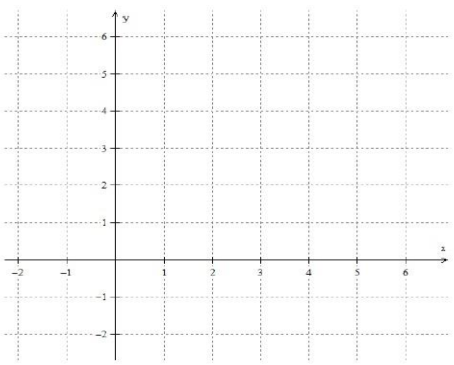
01) Determine a função inversa da função $fx=3x+2$.

02) Determine a função inversa da função $fx= 2x-1x$.

03) Se $fx=x+22$, determine $f-12$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO INVERSA

Os gráficos das funções f e $f-1$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

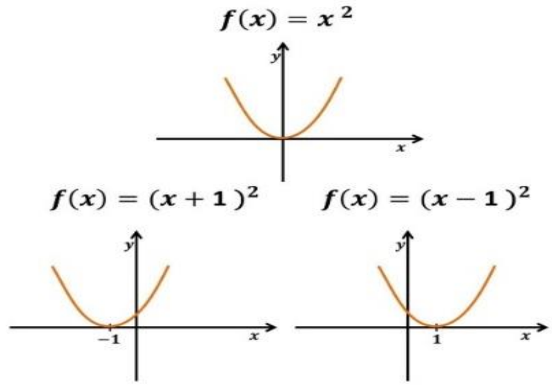


(Funções) - Translação e reflexão de funções; - As funções y = k·x, y = nx e seus gráficos; - Atividade Extra.

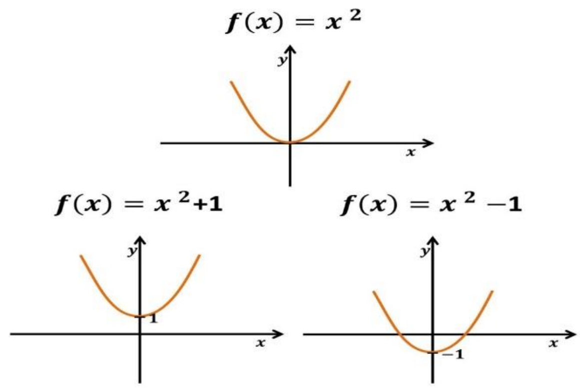
Gráfico de Funções: Translações

A translação de uma função f(x) é uma nova função cujo gráfico tem forma idêntica ao de f(x), porém, está numa posição diferente no plano cartesiano. Assim, a Translação do Gráfico de uma Função fx pode ser no sentido horizontal ou vertical:

Horizontal: Ocorre quando somamos uma constante c no argumento da função, $fx+c$. Caso a constante seja positiva o gráfico é deslocado c unidades para a esquerda; se por negativa é deslocado c unidades para a direita. Veja o exemplo:



Vertical: Ocorre quando somamos uma constante c na função, $fx+c$. Neste caso, a função é deslocada para cima se a constante for positiva e para baixo se for negativa. Veja o exemplo:



Observação:

A translação também pode acontecer horizontalmente e verticalmente simultaneamente, conforme o exemplo:

$$f(x) = (x + 1)^2 + 1$$

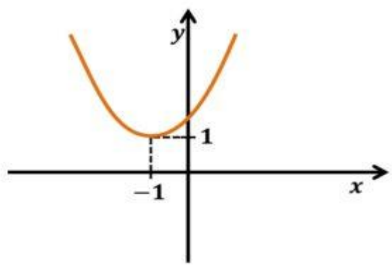
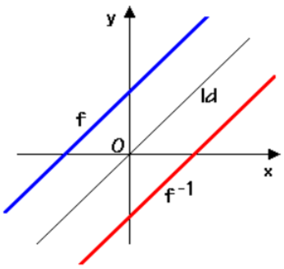


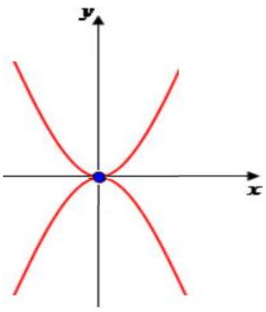
Gráfico de Funções: Reflexões

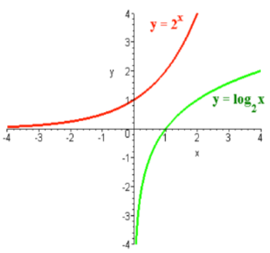
As reflexões são gráficos refletidos de uma função entorno de um eixo de reflexão. Por isso, a reflexão do gráfico de uma função é o reflexo que uma função gera através de um eixo de reflexão. Assim, pode-se imaginar este eixo de reflexão como se fosse um espelho.

Este eixo de reflexão é uma reta em que a função original é refletida para o outro lado com igual distância.

Exemplos:



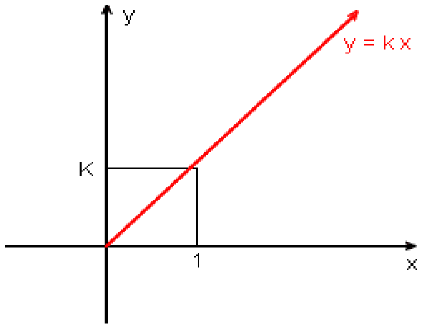




Função y = k·x e seu gráfico

Dizemos que uma variável (ou grandeza) y é diretamente proporcional à outra variável (ou grandeza) x se existir uma constante k tal que y = k·x, na qual k é denominada constante de proporcionalidade.

A função y = k·x ou f(x) = k·x é uma função linear do tipo $f(x)=ax+b$ com coeficiente angular a igual k (constante de proporcionalidade) e coeficiente linear b igual a zero, portanto a reta da função y = k·x passa na origem do plano cartesiano.

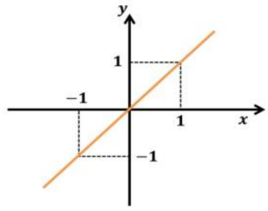


Função y = $\sqrt[n]{x}$ e seu gráfico

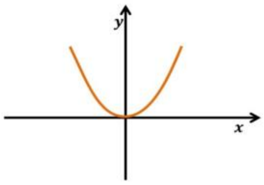
Função Potência

São aquelas funções em que a variável independente x está elevada à uma potência. Quando for um número natural, o grau da potência representa a quantidade de raízes que a função possui, sendo que algumas das raízes podem não ser reais. As demais são os pontos onde interceptam o eixo x, exemplos:

$f(x) = x$

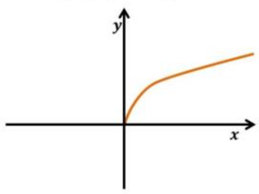


$f(x) = x^2$

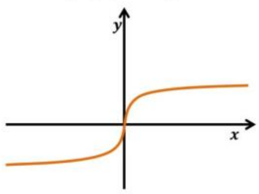


Dentro das funções potência existe o caso particular em que a potência é fracionária, por isso este tipo de função é chamada de Função Raiz, uma vez que $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$. Veja dois exemplos e repare no domínio:

$f(x) = \sqrt[2]{x}$



$f(x) = \sqrt[5]{x}$



Atividade Extra

01 – (EEAR)

Seja a função f de $\Re$ - {3} em $\Re$ - {1}, definida por $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$. Pela inversa de f, o número 5 é imagem do número?

02 – (EEAR)

Sejam as funções reais f (x) = 2x +1 e g(x) = x^2 − 6x + 4. A função composta h(x) = g(f (x)) é?

03 – (EsSA)

Sejam as funções reais dadas por fx=5x+1 e gx=3x−2. Se m=fn , então gmvale:

ATIVIDADE EXTRA

01 - (EsSA-2015) Sejam f a função dada por f (x) = 2x + 4 e g a função dada por g(x) = 3x - 2. A função f_0 g deve ser dada por

a) f(g(x)) = 6x

b) f (g(x)) = 6x + 4

c) f(g(x)) = 2x - 2

d) f(g(x)) = 3x + 4

e) f (g(x)) = 3x + 2

02 – (EEAR – 2005) O maior valor inteiro de k que torna crescente a função f:R→R definida por f(x)=2-(3+5k)·x

a) - 1

b) 0

c) 1

d) - 2

03 - (EsSA – 2012) Se f(2x + 1) = x² + 2x, então f(2) vale

a) 5/4

b) 3/2

c) 1/2

d) 3/4

e) 5/2

04 - (EEAR – 2004) Seja f:R→R uma função bijetora tal que f(5)=2. Se g:R→R é uma função inversa de f então g^(-1) (5) é igual a

a) 2

b) - 2

c) 1/2

d) - 1/2

05 – (EsPCEx – 2009) Considere a função real g(x) definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 5^x, se\ x \leq 1 \\ \frac{-3x^2}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{17}{4}, se\ 1 < x \leq 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, se\ x > 3 \end{cases}$$

O valor de g(g(g(1))) é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

06 - (EsPCEx - 2012) Sejam as funções reais f(x)=√(x^2+4x) e g(x) = x-1. O domínio da função f(g(x)) é

a) D= {x R | x ≤ -3 ou x ≥1}

b) D= {x R |-3 < x < 1}

c) D= {x R | x < 1}

d) D= {x R | 0 < x < 4}

e) D= {x R | x < 0 ou x > 4}

07 - (EsPCEx - 2011) O domínio da função real f(x)=√(2-x)/(x^2-8x+12) é

a)] 2, ∞ [

b)] 2,6 [

c)] -∞,6 [

d)] -2,2 [

e)] -∞,2 [

Função afim e linear

EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Equação do 1º grau, na variável real x, é toda equação que pode ser expressa na forma ax+b=0, no qual a e b são números reais e a≠0.

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Uma equação do primeiro grau pode ter uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução no conjunto dos números reais. Veja:

a) 6x-14=3x+7

b) 8+3x=17-3(3-x)

c) 2x-4=2x+4

RAIZ DE UMA EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Raiz de uma equação do primeiro grau é um número que transforma a equação em uma sentença verdadeira.

EXEMPLOS:

a) 2x-6=0

b) 4x-4=3x+2

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Vamos relembra dois métodos para achar as soluções de um sistema de duas equações e duas incógnitas.

METODO DA SUBSTITUIÇÃO

$3x + 4y = 13x-2y=1$

METODO DA ADIÇÃO

$5x - 3y = 11x+y=-1$

EXEMPLO:

Numa loja existe motos e automóveis, num total de 80 veículos e 256 rodas.

Determine o número de motos e automóveis dessa loja.

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU (FUNÇÃO AFIM)

Toda função do tipo f(x)=ax+b, com a e b números reais e a≠0 é denominada função polinomial do 1º grau ou função afim.

EXEMPLOS:

a) f(x)=2x-3

b) y=2-4x

c) f(x)=3x

ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Chama-se zero ou raiz da função polinomial do 1º grau f(x) = ax + b, a ≠ 0, o número real x tal que f(x) = 0. Temos:

EXEMPLOS:

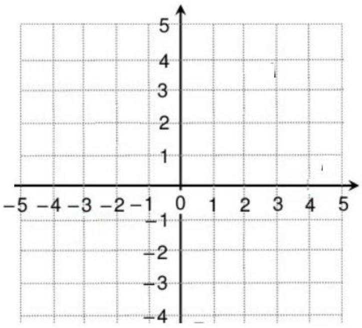
a) f(x)=2x-4
b) f(x)=x-5

GRÁFICO

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, y = ax + b, com a ≠ 0, é uma reta oblíqua aos eixos das abscissas e ordenadas.

EXEMPLO:

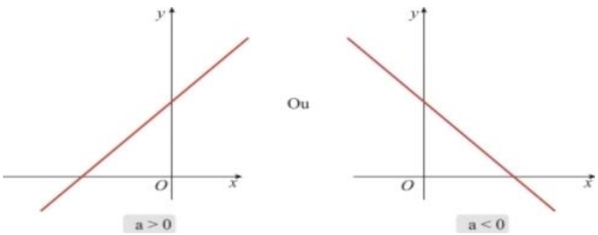
Construir o gráfico da função y=x+2 (Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los)



FUNÇÃO CRESCENTE OU DECRESCENTE

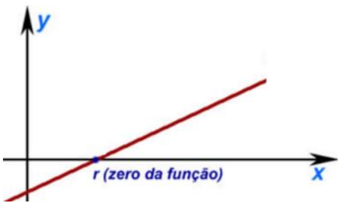
Regra geral: - A função do 1º grau f(x) = ax + b é crescente quando o coeficiente de x é positivo (a > 0);

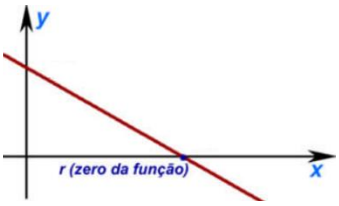
- A função do 1º grau f(x) = ax + b é decrescente quando o coeficiente de x é negativo (a < 0);



COEFICIENTES DA FUNÇÃO AFIM

Analisando o gráfico da função afim f(x)=ax+b, é possível observar algumas propriedades importantes relacionadas aos coeficientes da função.





COEFICIENTES DE UMA FUNÇÃO AFIM

• Coeficiente angular ou declividade;

• Coeficiente linear (local onde o gráfico corta o eixo das ordenadas)

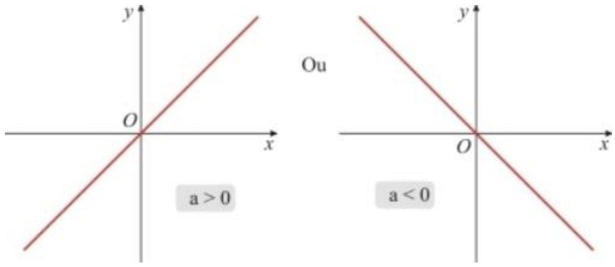
EXEMPLOS:

a) $fx=2x+1$

b) $fx=-x+1$

FUNÇÃO LINEAR

Toda função afim do tipo f(x)=ax é chamada de função linear.



ATIVIDADE 06

01) Seja uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $fx=2x-35$. Qual é o elemento do domínio que tem -34 como imagem?

02) Sejam f e g funções polinomiais de primeiro grau, tais que o gráfico de f passa por (2, 0) e o de g, por (- 2, 0). Se a interseção dos gráficos é o ponto (0, 3), é correto afirmar que.

a) f e g são crescentes.

b) f e g são decrescentes.

c) f é crescente e g é decrescente.

d) f é decrescente e g crescente.

03) O ponto de intersecção dos gráficos das funções $fx=x+2$ e $gx=2x-1$ pertence a qual quadrante

a) 1º

b) 2º

c) 3º

d) 4º

04) Considere as seguintes retas do plano cartesiano, definidas pelas equações:

$r1$: $2x+3y=5$;

$r2$: $-\chi+13y=2$;

$r3$: $y=x$;

$r4$: $2x=5$;

$r5$: $x-y=0$.

05) João, ao perceber que seu carro apresentou um defeito, optou por alugar um veículo para cumprir seus compromissos de trabalho. A locadora, lhe apresentou duas propostas:

Plano A, no qual é cobrado um valor fixo de R$ 50,00 e mais R$ 1,60 por quilômetro rodado.

Plano B, no qual é cobrado um valor fixo de R$ 6400 e mais R$ 1,20 por quilômetro rodado.

João observou que, para certo deslocamento que totaliza K quilômetros, era indiferente optar pelo plano A ou pelo plano B, pois o valor final a ser pago seria o mesmo.

É correto afirmar que K é um número racional entre:

a) 14,5 e 20

b) 20 e 25,5

c) 25,5 e 31

d) 31 e 36,5

06) Atualmente, o valor de um computador novo é R$ 3.000,00. Sabendo que seu valor decresce linearmente com o tempo, de modo que daqui a 8 anos seu valor será zero, podemos afirmar que daqui a 3 anos (contados a partir de hoje) o valor do computador será:

a) R$ 1.875,00

b) R$ 1.800,00

c) R$ 1.825,00

d) R$ 1.850,00

e) R$ 1.900,00

07) A soma de todos números inteiro positivos que satisfazem a inequação

$3x2+12<2x3+5$

a) 3

b) 6

c) 10

d) 15

e) 21

08) Determine o conjunto solução da inequação 2x – $1\cdot -x+23x-1\leq 0$

- Função linear e Função afim; - Inequação do 1º Grau.

ESTUDO DO SINAL DA FUNÇAÕ AFIM

Estudar o sinal de uma função consiste em determinar os valores de x para quais $fx>0$, $fx<0$ e $fx=0$.

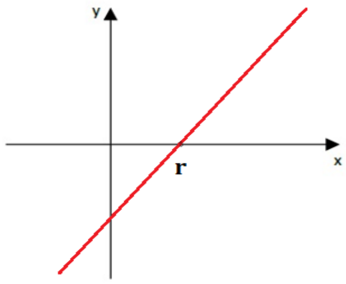
Na função $fx=ax+b$, duas são as possibilidades:

Primeira possibilidade se $a>0 \Longrightarrow Função\ crescente.$

$fx=0$ *se x for igual a raiz*

$fx>0$ *se x for maior que a raiz*

$fx<0$ *se x for menor que a raiz*

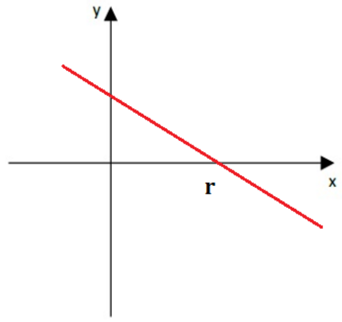


Segunda possibilidade se $a < 0 \Rightarrow$ função decrescente.

$fx=0$ *se x for igual a raiz*

$fx>0$ *se x for menos que a raiz*

$fx<0$ *se x for maior que a raiz*



EXEMPLO:

01) Estude o sinal da função $fx=2x-4$

02) Estude o sinal da função $fx=3-x$

INEQUAÇÃO DO 1º GRAU - INTRODUÇÃO

Vamos fazer alguns exemplos para entender um pouco sobre essas inequações

EXEMPLOS:

01) Resolva a inequação $3x-3>6$

02) Resolva a inequação $4+5x\leq 2x+13$

03) Resolva a inequação $2x+1-3\geq 3x-1-43x-2$

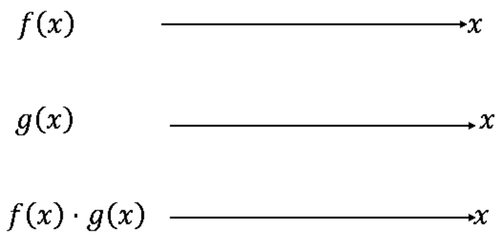
INEQUAÇÃO DO 1º GRAU – PRODUTO E QUOCIENTE

INEQUAÇÃO PRODUTO

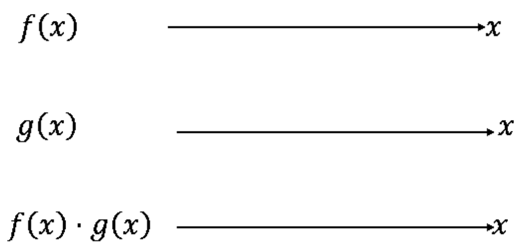
Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações do tipo $fx\cdot gx>0$, $fx\cdot gx<0$, $f(x)\cdot g(x)\geq 0$ e $f(x)\cdot g(x)\leq 0$ são denominadas inequações produto. Vejamos os exemplos abaixo:

EXEMPLOS:

01) Resolva a inequação $x+22-x<0$



02) Resolva a inequação $(x+1)$ $(3x-3)$ ≤ 0

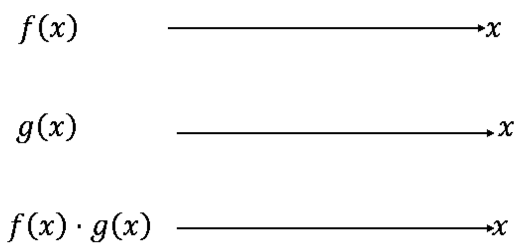


INEQUAÇÃO QUOCIENTE

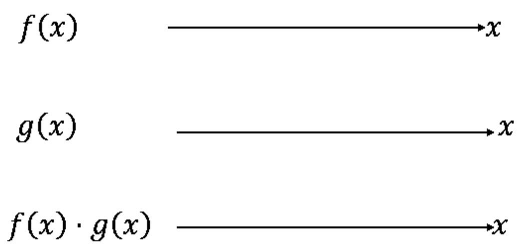
Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x as inequações do tipo $f(x)g(x)>0$, $f(x)g(x)<0$, $f(x)g(x)\geq 0$, $f(x)g(x)\leq 0$ são denominadas inequações quociente.

EXEMPLOS:

1) Resolva a inequação $x-2x+3>0$



02) Resolva a inequação $x+21-x\geq 2$



INEQUAÇÃO SIMULTÂNEA

A dupla desigualdade $fx<gx<h(x)$ se decompõe em duas inequações, isto é, equivalente a um sistema de duas inequações em x.

EXEMPLO:

Resolva a inequação $-4<2x-2<8$

- Função Quadrática Parte 1

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Equação do 2º grau, na variável real x, é toda equação da forma $ax2+bx+c=0$, no qual a, b, $c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

EXEMPLOS:

01) $\mathbf{3x2-5x+2=0}$

$a=$ $b=$ $c=$

02) $\mathbf{23x+x2=0}$

$a=$ $b=$ $c=$

03) $\mathbf{3x2-9=0}$

$a=$ $b=$ $c=$

RAIZ DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Uma equação do segundo grau possui duas raízes. Essas raízes podem ser determinadas através da fórmula, que é conhecida como fórmula de Bhaskara:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

no qual $\Delta = b^2 - 4ac$

EXEMPLOS:

$\mathbf{2x2-9x+7=0}$

EQUAÇÕES INCOMPLETAS

1º Caso: b=0.

$2x2-32=0$

2º Caso: c=0.

$\mathbf{4x2-8x=0}$

DISCRIMINANTE (∆)

EXEMPLOS:

$\Delta > \mathbf{0} \Rightarrow$ a equação possui duas raízes reais e diferentes

$\Delta = \mathbf{0} \Rightarrow$ a equação possui duas reais e iguais

$\Delta < \mathbf{0} \Rightarrow$ a equação não possui raízes reais

01) $x2+4x-5=0$

02) $4x2-4x+1=0$

03) $3x2+2+1=0$

RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES E AS RAÍZES

A equação do 2º grau possui duas importantes relações entre as raízes $x1$ e $x2$ e os coeficientes a,b e c. Essas relações são conhecidas como Soma e Produto das raízes ou Relação de Girard.

Soma: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

Produto: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

EXEMPLO:

01) $\mathbf{x2+3x-10=0}$

EXEMPLO:

02) Se $x1$ e $x2$ são as raízes da equação $3x2-6x+5=0$, determine o valor da expressão $5x1+5x2$

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Se $x1$ e $x2$ são as raízes de uma equação do 2º grau, então essa equação pode ser escrita como:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad S = x_1 + x_2 \quad P = x_1 \cdot x_2$$

EXEMPLO:

Determine a equação do 2º grau que possui {3, -7} como conjunto solução.

PROBLEMAS QUE ENVOLVEM A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

EXEMPLO:

01) O produto da idade de João pela idade de Carlos é igual a 21. João é 4 anos mais velho do que Carlos. Qual o total da soma da idade dos dois?

02) Um homem caminhou 240 km em uma certa viagem. Se caminhasse mais 4 km por dia, teria gasto dois dias a menos na viagem. Quantos dias gastou na viagem e quantos quilômetros andou por dia?

FUNÇÃOM POLINOMIAL DO 2º GRAU

Toda função do tipo $fx=ax2+bx+c$, com a,b e c reais e $a≠0$, é denominada função polinomial do 2º grau ou função quadrática.

Veja os seguintes exemplos:

a. $fx=2x2+4x-2$

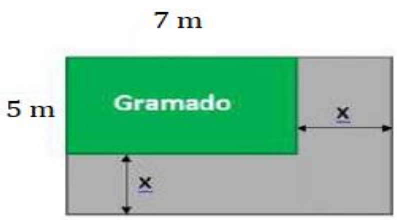
b. $y=-4x2+8$

c. $fx=5x-2x2$

d. $y=5x2$

EXEMPLO:

Deseja-se construir uma calçada, de largura constante x, em metros, contornando dois lados consecutivos de um gramado de forma retangular, com dimensões $5m\ X\ 7m$, conforme mostra a figura abaixo.



Expresse a área A da calçada, em função de x.

- Função Quadrática Parte 2

ZERO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Os zeros de uma função quadrática $fx=ax2+bx+c$ são os valores de x para quais $fx=0$. Graficamente, os zeros representam os valores de intersecção da parábola com eixo das abscissas.

CALCULANDO OS ZEROS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

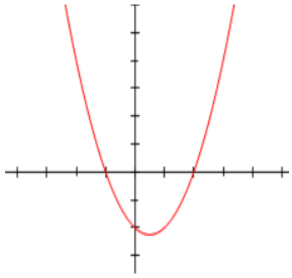
Para calcularmos os zeros de uma função quadrática, basta resolver a equação do segundo grau $ax2+bx+c=0$. Para isso, utilizaremos a seguinte fórmula:

$$x=-b\pm\Delta 2a$$

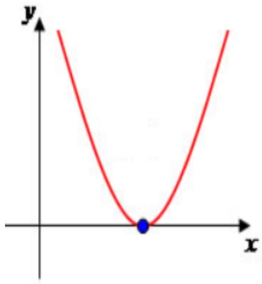
$\Delta=b2-4ac$

- $\Delta>0$

Determine os zeros da função $fx=x2-x-2$



Determine os zeros da função $fx=x2-4x+4$



Determine os zeros da função $fx=x2-2x+3$

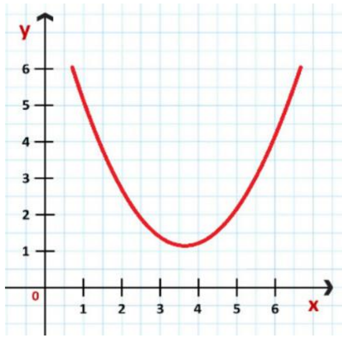
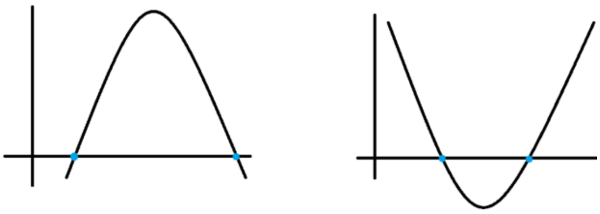


GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma **função do 2º grau** é definida pela seguinte lei de formação **f(x) = ax² + bx + c**

ou **y = ax² + bx + c,** em que a, b e c são números reais e a ≠ 0.

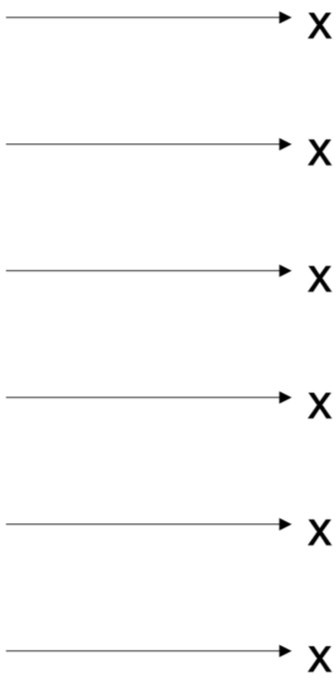


CONCAVIDADE

A parábola representativa da função quadrática $fx=ax2+bx+c$, pode ter a concavidade voltada para “cima” ou voltada para “baixo”. Veja:

Se a > 0, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Se a < 0, a concavidade da parábola é voltada para baixo.



COEFICIENTE “B”

O coeficiente b de uma função quadrática indica se a parábola intercepta o eixo y em seu ramo crescente ou em seu ramo decrescente.

A função intercepta o eixo y:		
b > 0	b = 0	b < 0
y y	y y	y y

COEFICIENTE “C”

O coeficiente c de uma função quadrática corresponde à ordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y.

Observação:

O gráfico de qualquer função cruza o eixo y quando $x=0$

$fx=x^2-2x-3$

- Função Quadrática Parte 3

ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Estuda o sinal de uma função consiste em determinar os valores de x para os quais $fx>0$, $fx<0$ e $fx=0$

O estudo do sinal da função quadrática depende do valor do discriminante:

$\Delta=b^2-4ac$

CASOS POSSÍVEIS

I - Caso:

$\Delta >0 \Rightarrow duas\ raizes\ reais\ e\ distintas$

$a>0$

$fx=0 \Rightarrow$

$fx>0 \Rightarrow$

$fx<0 \Rightarrow$

$a<0$

$fx=0 \Rightarrow$

$fx>0 \Rightarrow$

$fx<0 \Rightarrow$

II - Caso: $\Delta =0 \Rightarrow duas\ raizes\ reais\ e\ iguais$

$a>0$

$fx=0 \Rightarrow$

$fx>0 \Rightarrow$

$fx<0 \Rightarrow$

$a<0$

$fx=0 \Rightarrow$

$fx>0 \Rightarrow$

$fx<0 \Rightarrow$

III - Caso: $\Delta <0 \Rightarrow$ $não$ $há$ $raizes\ reais$

$a>0$

$a<0$

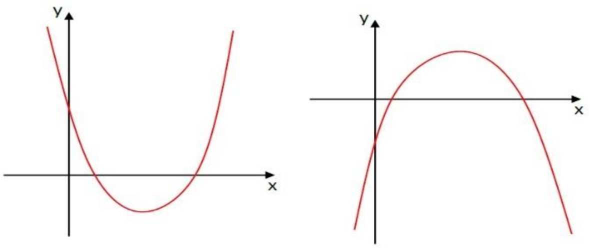
EXEMPLOS:

1) Estude o sinal da função $fx=x2-2x-3$

02) Para que valores de x a função $fx= -x2+4x-3$ assume valores negativos?

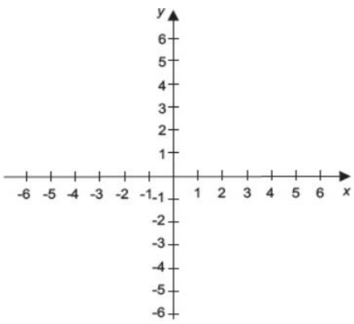
03) A função $fx= x2+2x$, assume valores positivos quando os valores de x são:

MÁXIMO E MÍNIMO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA



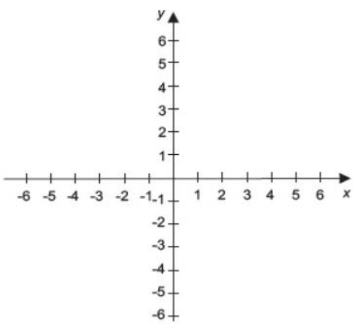
VALOR MÁXIMO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Seja a função $fx=-\ x2-4x$



VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Seja a função $fx= x2-4x$



COORDENADAS DO VÉRTICE DA PARÁBOLA

A coordenadas do vértice $V(xV,yV)$ da parábola correspondente à função $fx=ax2+bx+c$ são dadas por:

$V-b2a,-\Delta 4a$ no qual $\Delta=b2-4ac$

EXEMPLO:

A função C(x) = $2x^2$ – 400x + 10000 representa o custo de produção de uma empresa para produzir x unidades de um determinado produto, por mês. Para que o custo seja mínimo, o valor de x será:

ATIVIDADE 06

01) A trajetória de um projetil se dá por $y=-x264+x16$, unidades em Km, a altura máxima atingida pelo projétil é:

a) 40 m

b) 64 m

c) 16,5 m

d) 32 m

e) 62,5 m

02) A área máxima de um retângulo de 12 m de perímetro é:

a) 3

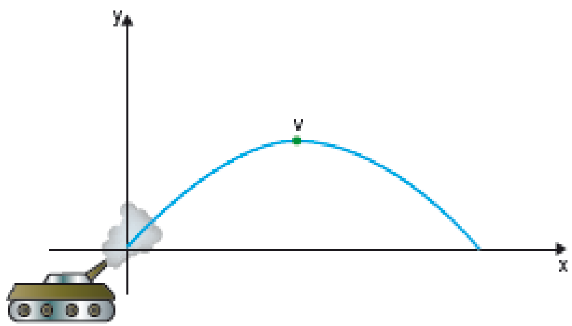
b) 6

c) 9

d) 12

e) 15

03) Um projétil é atirado de um canhão (como mostra a figura) e descreve uma parábola de equação $y=-310000x2+610x$ (sendo x e y medidos em metros).



Determine a soma da altura máxima atingida pelo projétil e o alcance do disparo é igual

a) 2300m

b) 2400

c) 2500

d) 2600

e) 2700

04) As funções polinomiais f(x) = 3x + 3 e g(x) = x^2 + 2x + 1. Determine se as funções acima assumem o mesmo valor em um único valor de x.

05) Sejam a e b as raízes da equação x^2 – 7x + m = 3. Se $1a+1b=1$, determine o valor de m.

a) 3

b) 7

c) 10

d) 12

e) 15

06) Se f: R ∊ R é uma função definida por $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, então podemos afirmar que $f(x) > 0$ para:

a) $-1 < x < 0$

b) $0 < x < 1$

c) $1 < x < 2$

d) $2 < x < 3$

07) Resolva a inequação produto.

$x2-x-2\cdot-x2+4x-3>0$

08) Resolva a inequação quociente.

$2-3x2x2+3x-2<0$

- Inequações do 2º Grau.

INEQUAÇÃO DO 2º GRAU – INTRODUÇÃO

Vamos resolver as seguintes inequações do 2º grau:

EXEMPLOS:

01) $x2-8x+15<0$

02) $-x2+16\geq0$

03) $2x2-2x+5>0$

04) $-x2+6x-9>0$

INEQUAÇÃO DO 2º GRAU – PRODUTO E QUOCIENTE

Resolva as seguintes inequações produto em reais:

EXEMPLOS:

01) $x+2-x2-2x+3\leq0$

INEQUAÇÃO PRODUTO

02) $x2-x-2-x2+4x-3>0$

INEQUAÇÃO QUOCIENTE

EXEMPLOS:

01) $x+1x2-3x+2\geq0$

02) $2x2+x-12x-x2\leq0$

- Equação e Função Modular.

EQUAÇÃO MODULAR

Equações modulares são aquelas em que a incógnita aparece dentro de módulos. Para resolver essas equações iremos utilizar a definição de módulo e suas propriedades.

Exemplos:

Resolva as seguintes equações modulares:

a) $x-2=4$

b) $2x-2=x+8$

c) $x2+2x-15=0$

d) $x2-x-1=1$

e) $3x-4=2x-2$

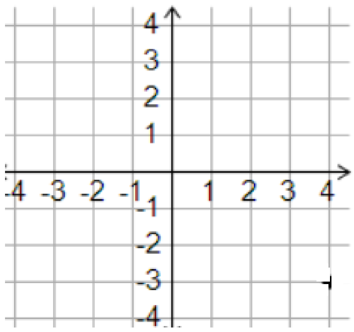
f) x + 2−1=2

FUNÇÃO MODULAR

Chama-se função modular a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $fx=x$. utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser assim definida:

$fx=x, se x\geq0 -x, se<0$

Construção do gráfico da função modular $fx=x$:



Gráficos de funções que envolvem a função modular.

Usaremos o conceito de translações para construção de gráficos de funções envolvendo módulo.

Exemplos:

a) $f(x)=x+1$

b) $f(x)=x-1$

c) $f(x)=x+3$

d) $f(x)=x-3$

e) $f(x)=x+2+2$

f) $fx=x2-4$

- Inequação Modular.

INEQUAÇÃO MODULAR

As inequações modulares são desigualdades que envolvem módulos. Para a solução é necessário a utilização das seguintes propriedades dos módulos:

I) $x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II) $x < 0$ $não\ existe\ x \in \mathbb{R}$

III) $x < k$, se $-k < x < k$

IV) $x > k$, se $x > k$ ou $x < -k$

01) Resolva as seguintes inequações modulares:

a) $4x-1 \leq 7$

b) $4x-3>5$

c) $x+3<-2$

d) $1 \leq x-1 \leq 3$

e) $4x-4 \geq 2x+2$

02) Cerca de 90% das baterias de automóveis produzidas por uma empresa tem tempo de vida X (em meses) que satisfaz a desigualdade x – 244≤1,65.

Qual diferença entre o maior e menor valor de X?

03) Qual a soma dos valores inteiros de X que satisfazem simultaneamente as desigualdades $x-5<3$ e $x-4 \geq 1$?

ATIVIDADE 07

01) Resolva as seguintes equações modulares:

a) $3x-1=2$

b) $x2-3x-1=3$

c) $x-2=2x+1$

d) $3x+2=x-1$

e) $x2+x-6=0$

02) Resolva as inequações

a) $3x-2<4$

b) $2x-1>3$

03) A função modular $fx=x-2$ é decrescente para todo x real tal que

a) $0<x<4$

b) $x>0$

c) $x>4$

d) $x \leq 2$

04) Seja $fx=x-3$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

05) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $fx=2x2-3$. O valor de $1+f-1$

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

06) Os gráficos de $fx=2x2-4$ e $gx=x-22$ se interceptam em

a) apenas um ponto.

b) dois pontos.

c) três pontos.

d) quatro pontos

e) nenhum ponto.

- Equação Exponencial; - Função Exponencial

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Equação exponencial é uma equação cuja incógnita aparece no expoente

Em algumas equações exponenciais os dois membros podem ser reduzidos a potências de mesma base: $ax1=ax2 \Leftrightarrow x1=x2$

Ex: $2x=64$

Vamos resolver as seguintes equações exponenciais:

1) $2x=34$

2) $125x=1$

3) $3x-1+3x+1=90$

4) $22X \ -5 \cdot 2x+4=0$

5) $16x+645=4x+1$

6) $3x+2+3x-1=84$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função definida por $fx= ax$ ou $y=ax$, com $a>0$ e $a\neq1$, é chamada função exponencial.

a:

EXEMPLOS:

a) $fx=2x$

b) $g(x)=(3)x$

c) $hx=(14)x$

d) $y=0{,}3x$

Observação 1:

As restrições $a>0$ e $a\neq1$ são necessárias para caracterizar uma função exponencial.

Se $a=1$, teríamos $fx=1x$ uma função constante.

Se $a\leq0$, não poderíamos definir $fx=ax\ em\ \mathbb{R}$.

Observação 2:

Existem funções escritas como $fx=b\cdot ax$ ou $fx=b+ax$, que são obtidas a partir da função exponencial. Nesse caso, são funções do tipo exponencial.

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONECIAL

Veja os seguintes exemplos:

a. $fx=2x$

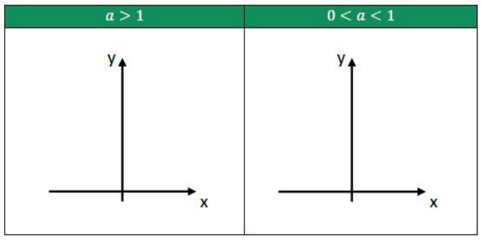
x	$f(x)=2^x$	(x,y)

b. $fx=12x$

x	$f(x)=(1/2)^x$	(x,y)

RESUMO

Dependendo do valor da base a da função exponencial, a curva exponencial possui o seguinte aspecto:

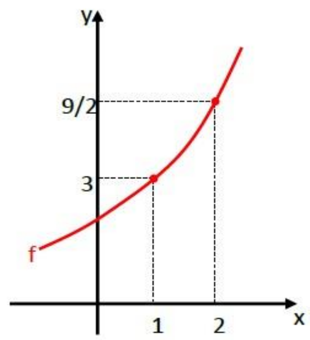


FUNÇÃO DO TIPO EXPONENCIAL

EXEMPLOS:

01) Certa população de insetos cresce de acordo com a função $Nt=500\cdot2t6$, sendo t o tempo em meses e N o número de insetos na população após o tempo t. Nesse contexto, determine o número inicial de insetos e o número de insetos e o número de insetos daqui a um ano.

02) Seja o gráfico da função exponencial f, definida por $fx=k\cdot ax$, esboçado no plano cartesiano abaixo. Determine:



a. Os valores das constantes a e k.

b. $f(0)$ e $f(3)$.

- Inequação Exponencial

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Inequações exponenciais são inequações com a incógnita no expoente.

Exemplos:

$3x>27$

$3x\leq7$

MÉTODO DA REDUÇÃO A UMA BASE COMUM

Lembremos que a função exponencial $fx= ax$ é crescente, se $a>1$, ou decrescente, se $0<a<1$. Se b e c são números reais, então:

Caso 1) $a>1$: $ab>ac \iff b>c$

Caso 2) $0<a<1$: $ab>ac \iff b<c$

EXEMPLOS:

Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

1) $64x+2>8x+5$.

2) $(0,5)4x+3\leq(0,25)x+5$.

3) $(3)3x-1\leq 427$.

4) $132x-1>3x+2$.

5) $3x+1+2\cdot3x-1\geq11$.

ATIVIDADE 09

01) A raiz da equação $3x\cdot32x=127$, é divisível por 5.

02) O número de raízes reais e positivas da equação $100\cdot10x=x10005$ é igual a 1:

03) A função f, definida por $fx=4-x-2$, intercepta o eixo das abscissas em

a) – 2

b) – 1

c) – 1/2

d) 0

e) 1/2

04) O decrescimento da quantidade de massa de uma substância radioativa pode ser apresentada pela função exponencial real dada por $ft=at$. Então, pode-se afirmar que:

a) a < 0

b) a = 0

c) 0 < a < 1

d) a > 1

e) a ∈ $\mathbb{R}$

05) Se mn é a fração irredutível que é solução da equação exponencial $9x-9x-1=1944$, então, $m-n$ é igual a

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

06) O gráfico mostra, em função do tempo, a evolução do número de bactérias em certa cultura. Dentre as alternativas a seguir decorridos 30 minutos do início das observações, o valor mais próximo desse número é:

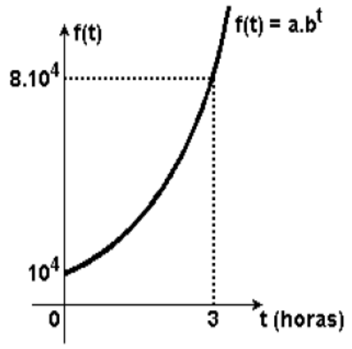
a) 18.000

b) 20.000

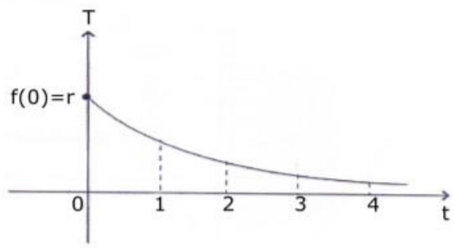
c) 32.000

d) 14.000

e) 40.000



07) Assuma que a função exponencial de variável real $T=ft=r\cdot ekt$, em que r e k são constantes reais não nulas, representa a variação da temperatura T ao longo do tempo t (em horas) com $0\leq t\leq4$..



Sabendo que os valores $f1$, $f2$, $f3$ e $f4$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 14 e soma igual a 255128, então o valor de r é um número múltiplo de

a) 9

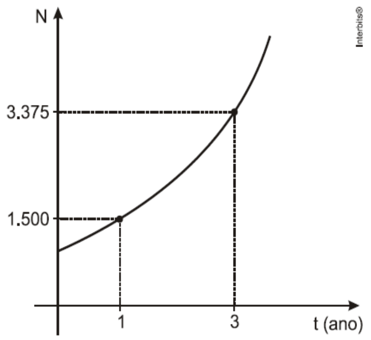
b) 5

c) 3

d) 7

08) As matas ciliares desempenham importante papel na manutenção das nascentes e estabilidade dos solos nas áreas marginais. Com o desenvolvimento do agronegócio e o crescimento das cidades, as matas ciliares vêm sendo destruídas. Um dos métodos usados para a sua recuperação é o plantio de mudas.

O gráfico mostra o número de mudas $Nt=bat0<a\neq1$ e $b>0$a serem plantadas no tempo (em anos), numa determinada região.



De acordo com os dados, o número de mudas a serem plantadas, quando t = 2 anos, é igual a

a) 2.137

b) 2.150

c) 2.250

d) 2.437

e) 2.500

- Logaritmos.

INTRODUÇÃO

Vimos que uma equação exponencial pode ser resolvida reduzindo os dois termos a uma potência de mesma base. Por exemplo:

$2^x=16$

Agora, como faremos para resolver a equação exponencial $2^x=13$?

Sejam a e b dois números reais positivos, com $a\neq 1$, chamamos de logaritmo de b na base a o valor de x, tal que:

$\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b$

Onde:

b → logaritmando ($b\in$ R e $b>0$)

a → base do logaritmo ($a\in$ R e $0<a\neq 1$)

x → logaritmo

Consequência da definição

Pela definição de logaritmo, podemos observar algumas consequências, que são as seguintes:

1) $\log_a 1=0$

2) $\log_a a=1$

3) $a^{\log_a b}=b$

4) $\log_a b=\log_a c \Leftrightarrow b=c$

EXEMPLOS:

Encontre o valor dos seguintes logaritmos

a) $\log_3 81=$

b) $\log_2 8=$

c) $\log_5 5=$

d) $\log 10=$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

LOGARITMO DO PRODUTO

O logaritmo de um **produto** de dois ou mais números reais positivos é igual à **soma** dos logaritmos de cada um desses números, ou seja:

$\log_a (b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$

LOGARITMO DO QUOCIENTE

O logaritmo de um **quociente** de dois ou mais números reais positivos é igual à **diferença** entre os logaritmos dos dividendos e do divisor, ou seja:

$\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$

LOGARITMO DO POTÊNCIA

O logaritmo de uma **potência** de base real positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da referida base, ou seja:

$\log_a b^n=n\cdot\log_a b$

EXEMPLOS:

A partir das propriedades, calcule o valor dos seguintes logaritmos: (dado $\log 2=0,3$, $\log 3=0,48$ e $\log 5=0,7$)

a) $\log 15=$

b. $\log 2,5=$

MUDANÇA DE BASE

Vimos que as propriedades operatórias dos logaritmos são válidas para logaritmos de mesma base. Para efetuar cálculos de logaritmos de outras bases, podemos efetuar a mudança de base do logaritmo.

Para mudar a base do logaritmo $\log_a b$ para a base c, efetuamos:

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

Consequências Importantes:

1) $\log_a b\cdot \log_c a=\log_c b$

2) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

3) $logan\ bk$= knlogab

4) $a$logcb= $b$logca

EXEMPLOS:

1) Determine os valores numéricos das expressões:

(dado log3=0,48, log11=1,04 e log13=1,11)

a. log1327= b. log111113=

ATIVIDADE 10

01) Considere os seguintes números reais: a=12, b=$log2$ 2 c= log 22 2. Então c < a < b.

02) O valor de x^4, sabendo-se que: 1$log2x$ +1$log4x$+1$log8x$=24, é par.

03) A expressão log35·log253·log525. é equivalente a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

04) O produto P=35log4·54log3·43log5é um número primo.

05) A solução da equação 0.01x=50 é

a) −1+$log2$

b) 1+$log2$

c) −1+ log2

d) 1+ log2

e) 2log2

06) Tendo-se a e b como números reais positivos, e sendo b ≠1, se

log2a+1$logb$2=6, então a·b é igual a:

a) 12

b) 16

c) 32

d) 64

e) 128

07) Se log3(x−y) = 5 e log5(x+y) = 3, então log2(3x−8y) é igual a:

a) 9

b) 4+log25

c) 8

d) 2+log210

e) 10

08) O valor de x na equação $log_{\frac{1}{3}} log_{27}^{3x} = 1$

a) 1 **b) 3** **c) 9** **d) 27**

-Equação, Função e Inequação Logarítmica.

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Chamamos de equações logarítmicas, as equações cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos. Realizando a mudança de base e aplicado as propriedades operatórias dos logaritmos, podemos resolver essas equações. Para isso, utilizamos a seguinte consequência da definição:

log$\boldsymbol{ab}$=log$\boldsymbol{ac}$ ⟺$\boldsymbol{b=c}$

Observação:

Lembre-se de sempre verificar as condições de existência do logaritmo:

log$\boldsymbol{ab}$⟹$\boldsymbol{a>0}$, $\boldsymbol{b>0}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{a\neq 1}$

EXEMPLO:

Determine a solução das equações abaixo:

a) log84x=log8(3x+1)

b) log$x$−15x+1=2

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Uma função definida por fx= logax ou y=logax, com a>0 e a≠1, é chamada função logarítmica

EXEMPLOS:

a) fx= log2x

b) y=log0,5x

CONTRUÇÃO DO GRÁFICO

Veja os seguintes exemplos:

a) fx= log2x

x	$f(x) = \log_2 x$	(x, y)

b) fx= log0,5x

x	$f(x) = \log_{0,5} x$	(x, y)

EXEMPLO:

A altura (em metros) de um arbusto em uma dada fase de seu desenvolvimento pode ser expressa pela função ht=0,5+log3(t+1), onde o tempo t≥0 é dado em anos.

Qual é o tempo necessário para que a altura aumente de 0,5 m para 1,5 m?

INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

Vamos classificar as inequações logarítmicas em três tipos

TIPO - I

Inequação no formato logab>logac

Se a>1, então logab>logac⟹b>c

Se 0<a<1, então logab>logac⟹b<c

EXEMPLO:

Resolver em ℝ a inequação log22x−1<log26

TIPO – II

Inequação no formato logab>k

Se a>1, então logab>k⟹b>ak

Se 0<a<1, então logab>k⟹b<ak

EXEMPLO:

Resolver em ℝ a inequação log12(2x2−3x)>−1

TIPO - III

Nesse tipo de inequação, resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de variável.

EXEMPLO:

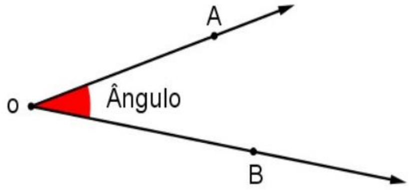
Resolver em ℝ a inequação [log3x]2−3·log3x+2>0.

Geometria Plana - Ângulos; - Ângulos na circunferência.

ÂNGULOS

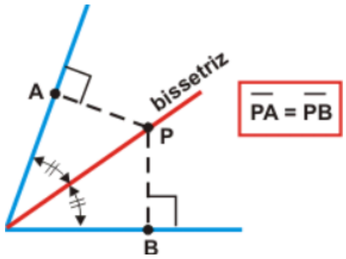
Ângulo

Ângulo é a medida da abertura formada por duas semirretas de mesma origem.



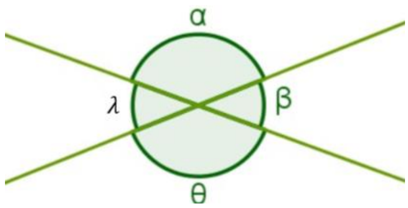
Bissetriz de um ângulo

A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e o divide em dois ângulos congruentes.



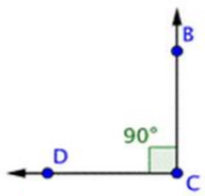
Ângulos opostos pelo vértice

Ângulos opostos pelo vértice são formados pelo encontro de duas retas e são congruentes.

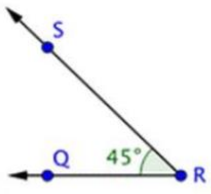


Classificação

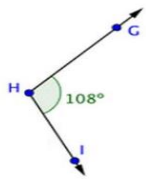
Ângulo reto



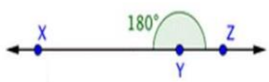
Ângulo agudo



Ângulo obtuso



Ângulo raso



Ângulos Complementares:

Dois ângulos são complementares se a soma de duas medidas é 90º.

Ângulos Suplementares:

Dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é 180º

Ângulos Replementares:

Dois ângulos são replementares se a soma de suas medidas é 360º

Ângulos Explementares:

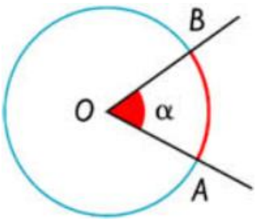
Dois ângulos são explementares quando a diferença de suas medidas é igual a 180.

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Ângulo central

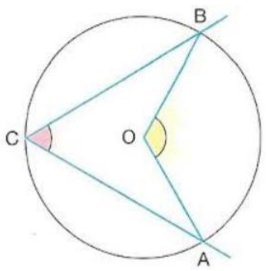
Ângulo central é aquele que tem o vértice no centro da circunferência.

0: Centro



Propriedade: $\alpha = mAB$

plÂngulo inscrito é aquele que tem o vértice na circunferência e tem por lados duas semirretas secantes.



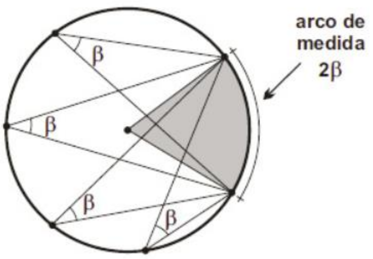
β:$Ângulo\ inscrito$

α:$Ângulo\ central$

Propriedade: $\beta = \alpha 2$

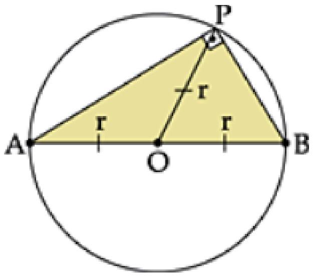
Observação 01:

Todos os ângulos inscritos associados a um mesmo arco são iguais entre si.



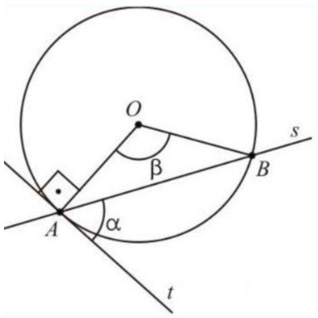
Observação 02:

Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo. Então a mediana relativa a hipotenusa é igual a metade da hipotenusa.



Ângulo de segmento

Ângulo de segmento é aquele que tem o vértice na circunferência e tem por lados uma semirreta secante e outra tangente.

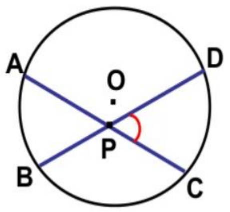


Propriedade:

$\alpha = \beta 2$

Ângulo de vértice interior

Se um ângulo formado por duas secantes tiver o vértice no interior da circunferência, a medida desse ângulo é igual à semissoma dos arcos compreendidos entres seus lados.

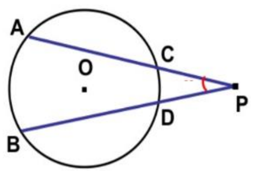


Propriedade:

$$\alpha = \frac{AB + CD}{2}$$

Ângulo de vértice exterior

Se um ângulo formado por duas secantes tiver o vértice no exterior da circunferência, a medida desse ângulo é igual à semidiferença dos arcos compreendidos entres seus lados.

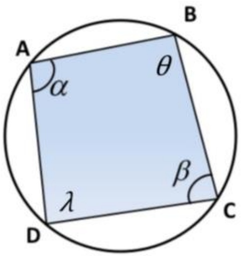


Propriedade:

$$\alpha = \frac{AB - CD}{2}$$

Quadrilátero inscritível

Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja inscritível é que dois ângulos opostos sejam suplementares.



Propriedade:

α+β=1800

θ+λ=1800

ATIVIDADES

01 – (EEAR) O complemento do suplemento do ângulo de 112° mede

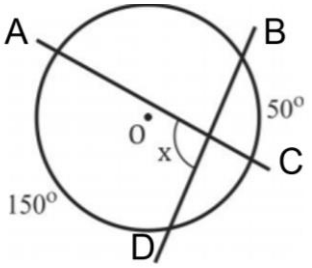
a) 18°

b) 28°

c) 12°

d) 22°

02 - Sendo A, B, C e D pontos da circunferência, determine o valor de X.



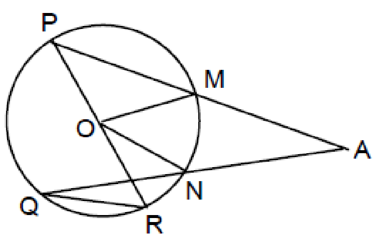
a) 120°

b) 60°

c) 80°

d) 100°

03- (EEAR)Na figura, O é o centro da circunferência, med (MÔN) = 62°, e med (PRQ) = 65°. O ângulo MÂN mede



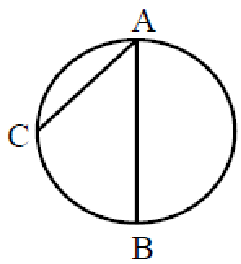
a) 34°.

b) 36°.

c) 38°.

d) 40°.

04 - (EEAR) Na figura, AB é diâmetro. Se o arco AC mede 70º, a medida do ângulo CÂB é



a) 50°.

b) 55°.

c) 60°.

d) 65°.

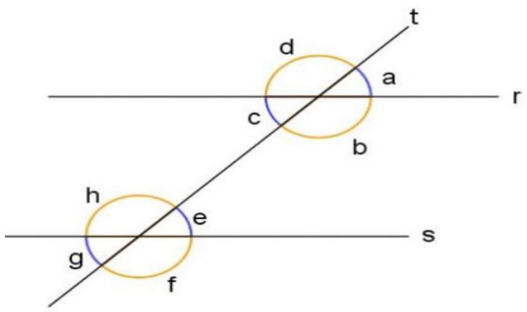
Geometria Plana - Paralelismo e triângulos.

PARALELISMO

Paralelismo e suas propriedades

Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal.

Retas **r** e **s**: são paralelas e reta **t** transversal



Ângulos correspondentes são iguais:

∡ d = h; ∡ a = e; ∡ c = g; ∡ b = f

Ângulos alternos internos são iguais:

∡ c = ∡ e; ∡ b = ∡ h

Ângulos alternos externos são iguais:

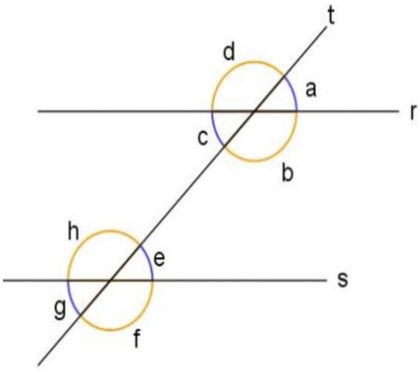
∡ d = ∡ f; ∡ a = ∡ g

Ângulos colaterais internos são suplementares:

∡ c + ∡ h = 1800; ∡ b + ∡ e = 1800

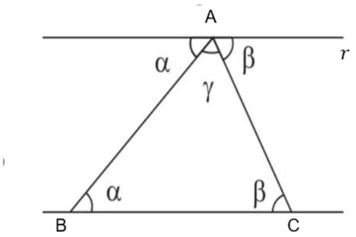
Ângulos colaterais externos são suplementares:

∡ a + ∡ f = 1800; ∡ d + ∡ g = 1800



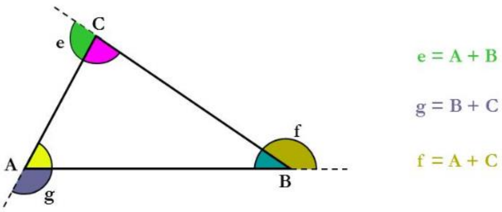
Propriedades básicas

I - A soma dos três ângulos internos de um triângulo é 1800

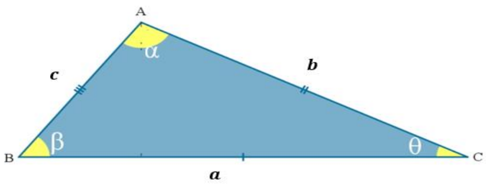


$r//\overline{BC} \Rightarrow \alpha+\beta+y=180^0 \Rightarrow s_i=180^0$

II – Cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.



TRIÂNGULOS



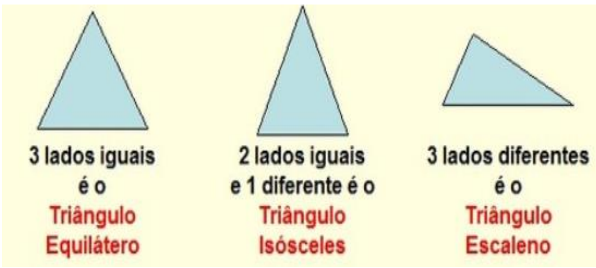
Elementos de um triângulo

Vértice – São os pontos de interseção A, B e C das linhas que constituem o triângulo ABC.

Lados – São os segmentos AB, BC *e* CA delimitados pelos vértices A, B e C.

Classificação de triângulos

Quanto aos lados

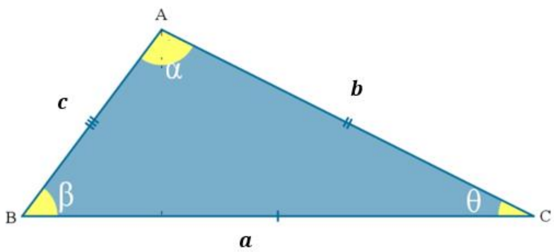


$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{A}'\\ \\ \hat{B}=\hat{B}'\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$$

Quanto aos ângulos

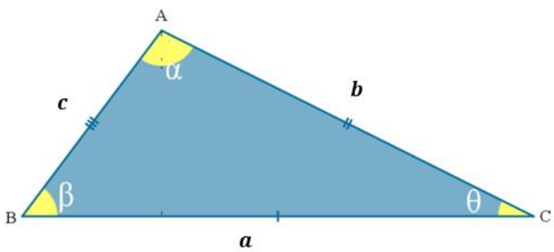
Condição de existência

Qualquer lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença em módulo dos outros dois.



$b-c<a<b+c$

Reconhecimento de triângulos



Se a é o maior lado do triângulo, tem-se as seguintes relações

a2=b2+c2 ⇒ triângulo retângulo

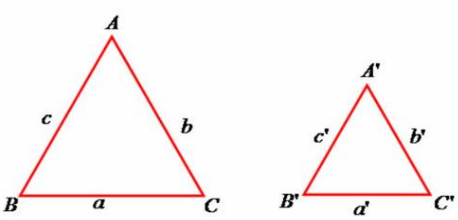
a2<b2+c2 ⇒ triângulo acutângulo

a2>b2+c2 ⇒ triângulo obtusângulo

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

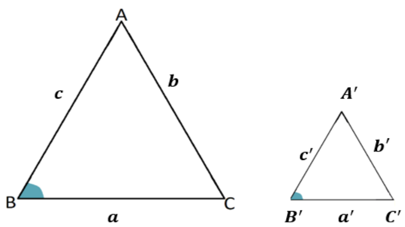
Primeiro caso de semelhança:

Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes iguais, então eles são semelhantes.



Segundo caso de semelhança:

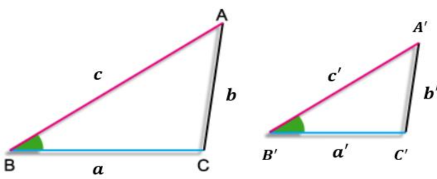
Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados correspondentes do outro triângulo e os ângulos compreendidos são iguais, então eles são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}=k\\ \hat{B}\equiv\hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \left(\frac{b}{b'}=k,\ \hat{A}\equiv\hat{A}', \hat{C}\equiv\hat{C}'\right)$$

Terceiro caso de semelhança:

Se dois triângulos de lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.



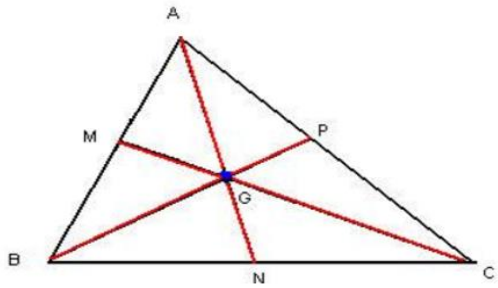
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k \qquad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad (\hat{A}\equiv\hat{A}', \hat{B}\equiv\hat{B}', \hat{C}\equiv\hat{C}')$$

Observação: A razão de semelhança *k*

PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULOS

MEDIANA:

Mediana é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. O ponto de encontro das medianas é chamado de **BARICENTRO.**



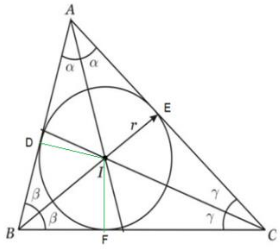
Observação:

$\overline{AG}=\frac{2}{3}\ de\ \overline{AN}$; $\overline{BG}=\frac{2}{3}\ de\ \overline{BP}$;

$\overline{CG}=\frac{2}{3}\ de\ \overline{CM}$.

BISSETRIZ:

Bissetriz é a semirreta de origem no vértice do ângulo e que divide em dois ângulos congruentes. As bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um ponto, chamado **INCENTRO,** equidistante dos lados.

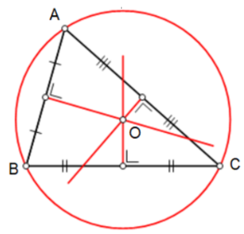


Observação:

$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=r$ (raio da circunferência inscrita)

MEDIATRIZ:

Mediatriz é a reta perpendicular no ponto médio de um segmento. As três mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, chamado CIRCUNCENTRO, equidistante dos seus três vértices.

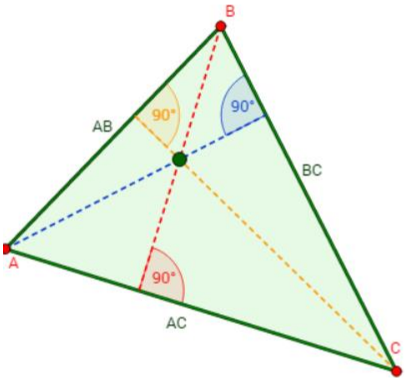


Observação:

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$ (raio da circunferência circunscrita)

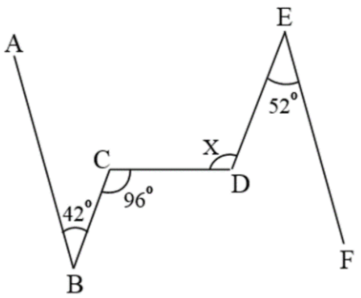
ALTURA:

Altura é o segmento de reta perpendicular traçado de um vértice ao seu lado oposto ou ao seu prolongamento. As três alturas de um triângulo concorrem em um ponto, chamado **ORTOCENTRO**.



ATIVIDADES

01) (EEAR) Na figura, AB // EF. A medida X é



a) 105^0

b) 106^0

c) 107^0

d) 108^0

02) Num triângulo ABC, o ângulo interno de vértice A mede 60°. O maior ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos internos de vértices B e C mede:

a) 45°

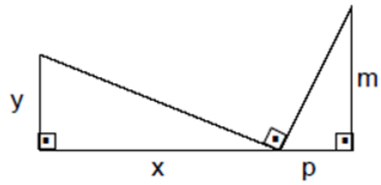
b) 60°

c) 90°

d) 120°

e) 150°

03) (EEAR) Na figura, os ângulos assinalados são retos. Assim, necessariamente, teremos



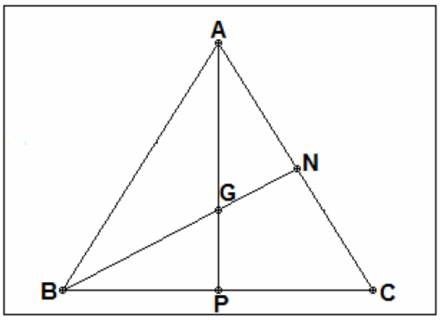
a) $\frac{x}{y} = \frac{P}{m}$

b) $\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

d) $x^2 + y^2 = p^2 + m^2$

04) Na figura, N e P são os pontos médios dos lados AC e BC, respectivamente. Se G é o baricentro do triângulo ABC, AP = 6cm e GN = 1,5 cm, obter, em centímetros:



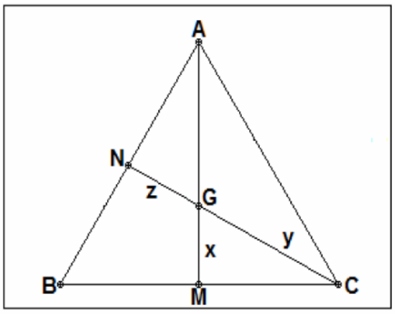
a) AG =

b) GP =

c) BG =

d) BN =

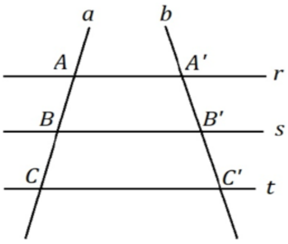
05) No triângulo ABC, da figura, AM e CN são medianas que se interceptam em G. Sendo. AG = 10 cm e CN = 18 cm calcule **x**, **y** e **z.**



Geometria Plana - Teorema de Tales; - Relações métricas nos triângulos.

TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales garante que um feixe de retas paralelas determine, sobre duas transversais quaisquer, segmentos correspondentes proporcionais.

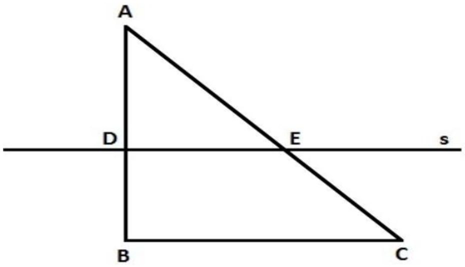


Propriedades

Se $r \,//\, s \,//\, t \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

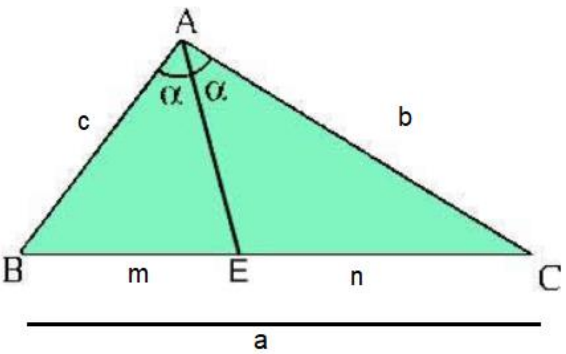
Consequência 1

Toda reta paralela a um lado de um triângulo determina, nos outros dois lados, segmentos proporcionais.



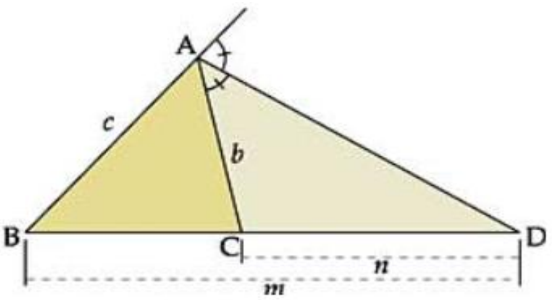
$DE \,//\, BC$, então $ADAB=AEAC$

Consequência 2 (Teorema da bissetriz interna)



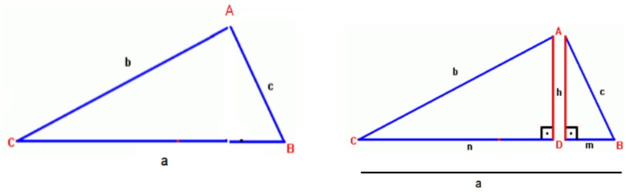
Sendo AE a bissetriz interna do ângulo A, então $cm=bn$

Consequência 3 (Teorema da bissetriz externa)



Sendo AD a bissetriz externa do ângulo A, então $bn=cm$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



b e **c –** catetos

a – Hipotenusa

h – Altura relativa a hipotenusa

m – Projeção do cateto c sobre a

n – Projeção do cateto b sobre a

Dessa forma, tem se: $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta ADB$

A partir da proporcionalidade existente entre os triângulos, é possível encontrar várias relações métricas, cujo o destaque é o Teorema de Pitágoras.

$b2=n\cdot a$

$c2=m\cdot a$

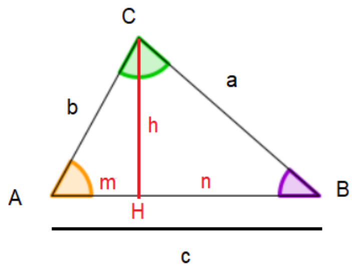
$h2=m\cdot n$

$h\cdot a=b\cdot c$

$a2=b2+c2$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO QUALQUER

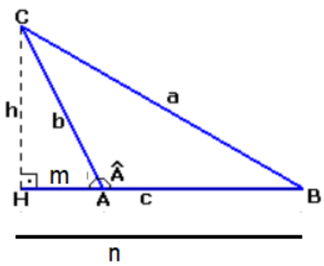
Triângulo agudo - Considere o ΔABC, em que o ângulo A é agudo:



$a2=b2+c2-2cm$

Triângulo obtuso

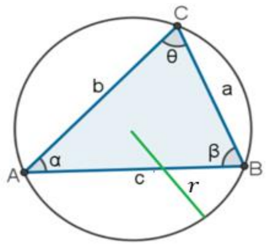
Considere o ΔABC, em que o ângulo A é obtuso:



$a2=b2+c2+2cm$

Lei dos senos

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c opostos aos respectivos vértice A, B e C, conforme ilustra a figura a seguir.



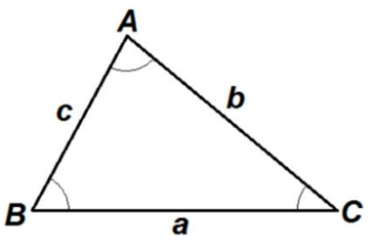
A lei dos senos afirma que:

$a sen\alpha = b sen\beta = c sen\theta = 2r$

Em que r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC

Lei dos cossenos

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c opostos aos respectivos vértice A, B e C, conforme ilustra a figura a seguir.



A lei dos cossenos afirma que:

$a2=b2+c2-2\cdot b\cdot c\cdot cosA$

$b2=a2+c2-2\cdot a\cdot c\cdot cosB$

$c2=a2+b2-2\cdot a\cdot b\cdot cosC$

ATIVIDADES

01) (EsSA) Num triângulo retângulo cujos catetos medem *8* e *9*, a hipotenusa mede.

a) *10*

b) *11*

c) *13*

d) *17*

e) *19*

02) (EsSA) Em um triângulo retângulo de lados 9m, 12m e 15m, a altura relativa ao maior lado será:

a) 7,2

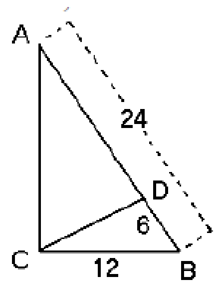
b) 7,8

c) 8,6

d) 9,2

e) 9,6

03) (EEAR) Se os dados no triângulo ABC, retângulo em C, estão em cm, então o triângulo BCD é



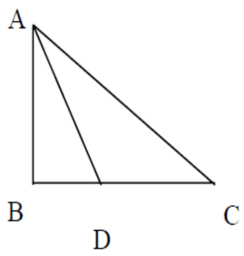
a) obtusângulo.

b) retângulo.

c) isósceles.

d) equilátero.

04) Seja o triângulo ABC retângulo em B. Se AD é bissetriz de Â, AB = 6 cm, e AC = 10 cm, então a medida de DC, em cm, é



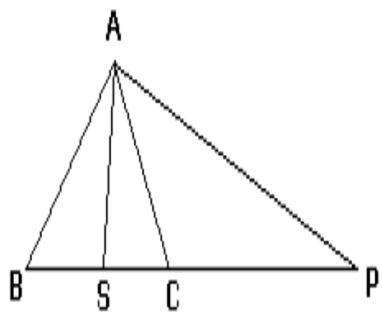
a) 6.

b) 5.

c) 4.

d) 3.

05) Na figura, AS e AP são, respectivamente, bissetriz interna e externa do triângulo ABC. Se BS = 8m e SC = 6m, então SP mede, em m.



a) 42.

b) 48.

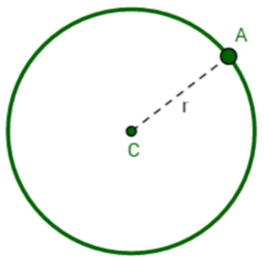
c) 38.

d) 32.

Geometria Plana - Circunferências, círculos; - Quadriláteros notáveis; - Polígonos.

CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência é uma linha curva fechada, contida em um plano, tal que todos os seus pontos equidistam de um ponto fixo chamado de centro.



C: Centro

CA = r (raio)

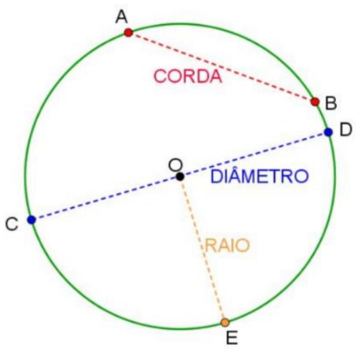
A: Pertence a circunferência

Elementos da circunferência:

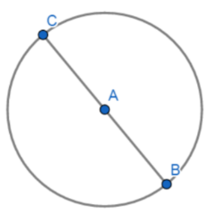
Corda é o segmento cujas extremidades pertencem à circunferência;

Diâmetro é a corda que pelo centro. É a corda de maior comprimento;

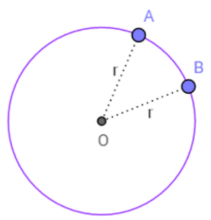
Raio é um segmento com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência.



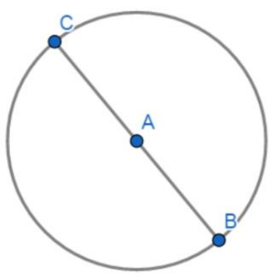
Circunferência:



Arco de circunferência:



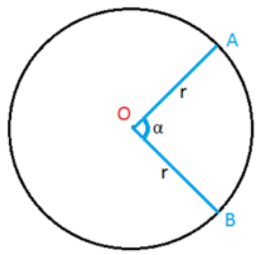
Comprimento da circunferência:



O comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por:

$c = 2\pi r$

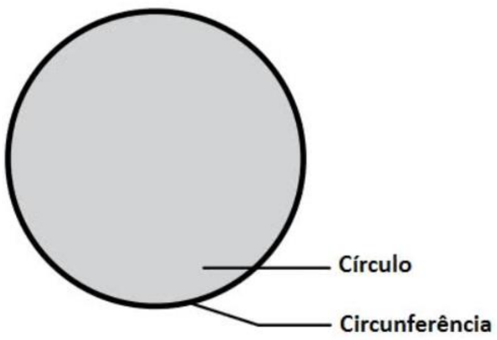
Comprimento de arco de circunferência:



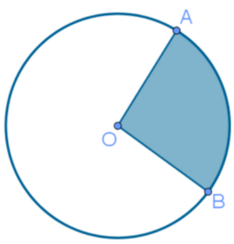
$$\left.\begin{array}{ccc} 360^0 & - & 2\pi r \\ \alpha^0 & - & l \end{array}\right\} \quad l = \frac{\pi r \alpha}{180^0}$$

CÍRCULO

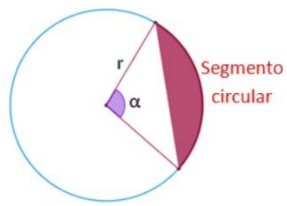
Círculo é o conjunto dos pontos de um plano cuja distância ao centro é menor ou igual a uma distância (não nula) dada.



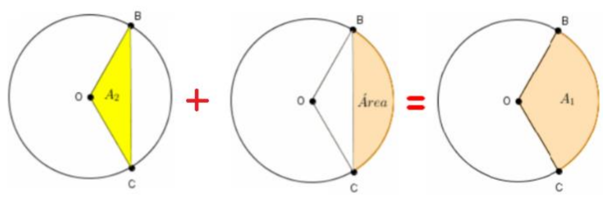
Setor circular



Segmento circular

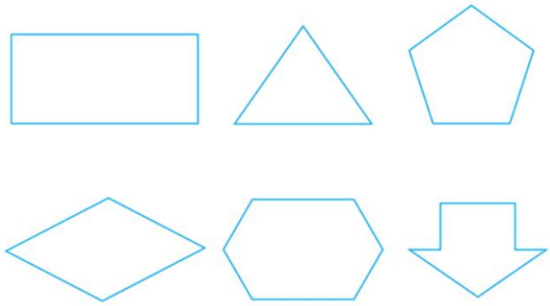


Observação



POLÍGONOS

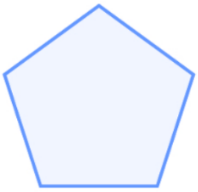
Chama-se **polígono** a figura formada pela união de **n** segmentos de retas consecutivos.



Classificação dos polígonos

Quanto à região

Convexo Não convexo

Quanto ao gênero

De acordo com o gênero, os polígonos podem receber as denominações:

Nome	Polígono	Número de Lados
Triângulo		3
Quadrilátero		4
Pentágono		5
Hexágono		6
Heptágono		7
Octógono		8
Decágono		10

Observações:

Os demais polígonos são denominados: polígonos de n lados;

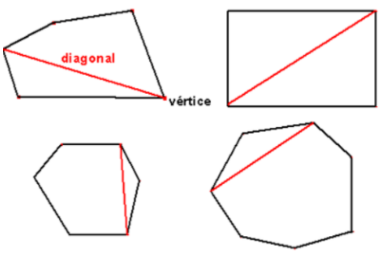
Um polígono é equilátero quando seus lados forem congruentes;

Um polígono é equiângulo quando seus ângulos internos forem congruentes;

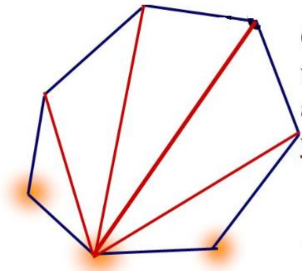
Um polígono é regular quando for equilátero e equiângulo.

Diagonal de um polígono

A diagonal de um polígono convexo é todo segmento que liga dois vértices não consecutivos.



Número de diagonais de um polígono convexo



Cada ponto não pode ser unido a **ele mesmo** nem aos **dois** vértices **vizinhos** (adjacentes)

Então de cada vértice *partem* **n - 3** diagonais

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

LADOS	Qtd mín de triângulos	Soma dos ângulos internos	
3		180°	(3 - 2) · 180° = 180°
4		2 · 180° = 360°	(4 - 2) · 180° = 360°
5		3 · 180° = 540°	(5 - 2) · 180° = 540°
6		4 · 180° = 720°	(6 - 2) · 180° = 720°
n			(n-2) · 180°

$$S_i = 180^o \cdot (n-2)$$

Observação: Ângulo interno

Soma dos ângulos externos de um polígono regular

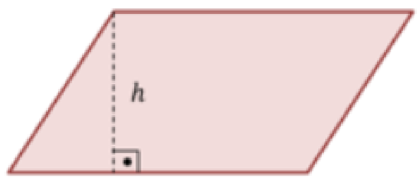
se=3600

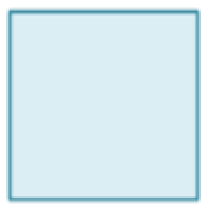
Ângulo externo de um polígono regular

ae=3600n

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos e congruentes.



Propriedades:

Ângulos opostos congruentes;

Ângulos consecutivos suplementares;

Lados opostos congruentes;

Diagonais dividem-se ao meio.

Retângulo

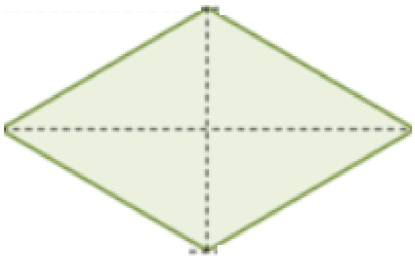
Um paralelogramo é um **retângulo** se, e somente se, possuir quatro ângulos congruentes.

Propriedades:

Além das propriedades do paralelogramo, em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Losango

Um paralelogramo é um **losango** se, e somente se, possuir quatro lados congruentes.

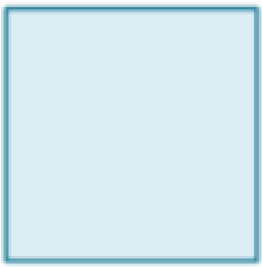


Propriedades:

Além das propriedades do paralelogramo, em todo losango as diagonais são perpendiculares e suas diagonais são bissetrizes dos ângulos interno.

Quadrado

Um paralelogramo é um **quadrado** se, e somente se, possuir quatro ângulos e os quatro lados congruentes.

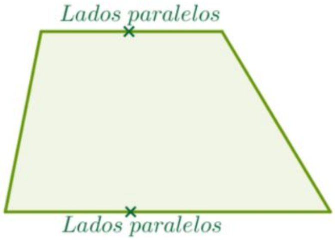


Propriedades:

Além das propriedades do paralelogramo, o quadrado tem as propriedades características do retângulo e losango.

TRAPÉZIO

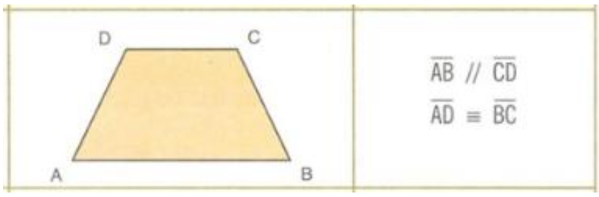
Um quadrilátero é um trapézio se, e somente se, possuir apenas dois lados paralelos.



Observação: Os lados paralelos são as bases do trapézio.

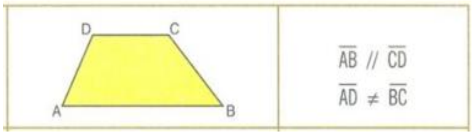
Trapézio isósceles

Se os dois lados não paralelos forem congruentes temos um trapézio isósceles.



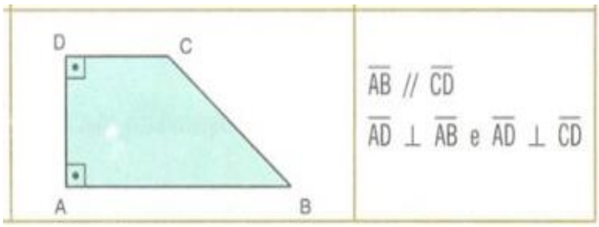
Trapézio escaleno

Se os dois lados não paralelos não forem congruentes temos um trapézio escaleno.



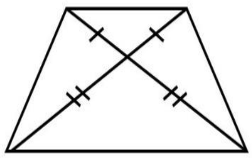
Trapézio retângulo

Um trapézio será retângulo se tiver dois ângulos retos e um dos lados não paralelos é perpendicular às bases.

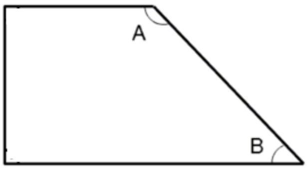


Propriedades:

As diagonais do trapézio isósceles são congruentes;

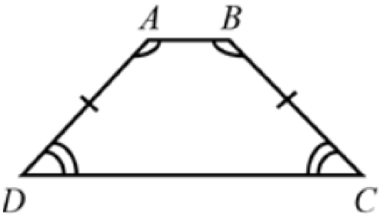


Em qualquer trapézio dois ângulos adjacentes que não são da mesma base são suplementares;



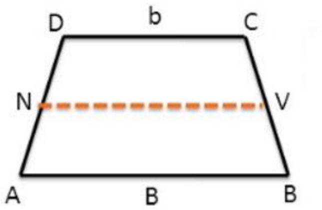
$$\hat{A} + \hat{B} = 180^0$$

Em todo trapézio isósceles, os ângulos correspondentes à mesma base são congruentes.



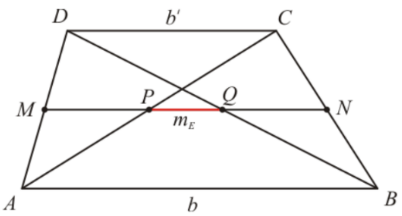
Teorema da base média

Em todo trapézio, o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos é paralelo às bases e é igual à semissoma das mesmas.



$$B_m = \frac{B + b}{2}$$

Mediana de Euler



$$m_E = \frac{b - b'}{2}$$

ATIVIDADES

01) Os ângulos externos de um polígono regular medem 15°. O número de diagonais desse polígono é:
a) 56.
b) 24.
c) 252.
d) 128.
e) 168.

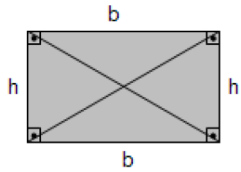
02) Um arco de circunferência mede 300°, e seu comprimento é 2km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio em metros?
a) 157
b) 284
c) 382
d) 628
e) 764

03) O relógio de uma torre possui o ponteiro dos minutos medindo 1 metro. Calcule a distância que a extremidade desse ponteiro percorre em 50 minutos.

Geometria Plana - Perímetro e área dos polígonos e círculos.

ÁREA DOS QUADRILÁTEROS

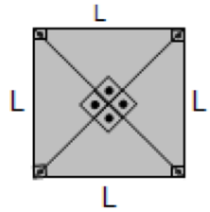
Retângulo



$\boxed{A = b \cdot h}$

Diagonal: $d = \sqrt{b^2 + h^2}$

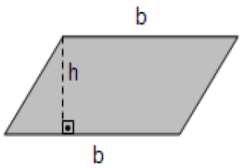
Quadrado



$\boxed{A = L^2}$

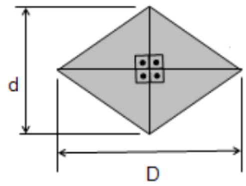
Diagonal: $d = L\sqrt{2}$

Paralelogramo



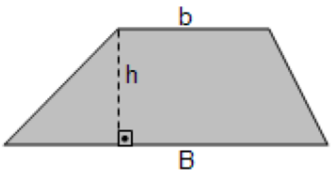
$\boxed{A = b \cdot h}$

Losango



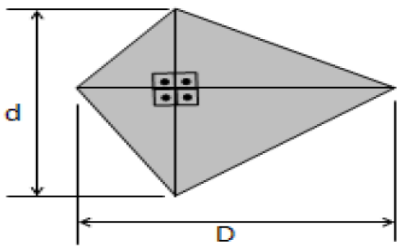
$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$

Trapézio



$\boxed{A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h}$

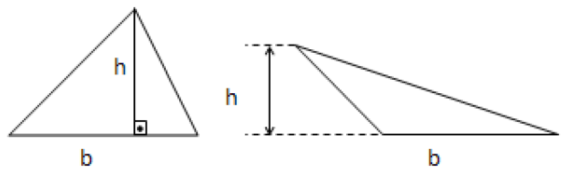
Quadrilátero com diagonais perpendiculares



$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$

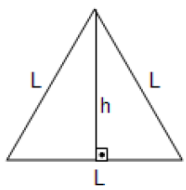
ÁREA DOS TRIÂNGULOS

Triângulo Qualquer



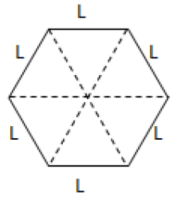
$$A = \frac{1}{2}.b.h$$

Triângulo Equilátero



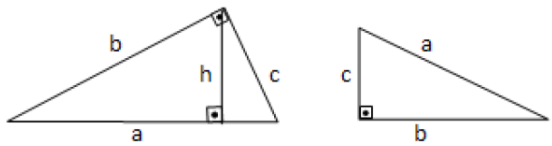
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}.L^2$$

Área de um Hexágono Regular



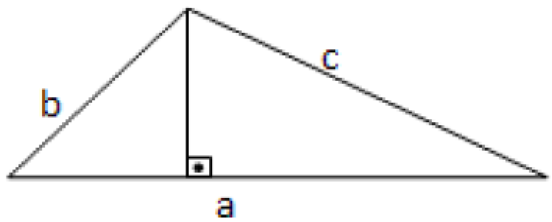
$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}.L^2$$

Triângulo Retângulo



$$A = \frac{a.b}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{b.c}{2}$$

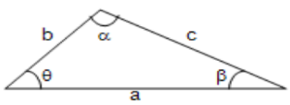
Área do triângulo em função dos 3 lados (Fórmula de Herão)



$$A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

Onde p=a+b+c2 (semi-perímetro)

Área do triângulo em função de 2 lados e do ângulo entre eles

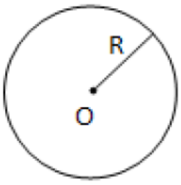


$$A = \frac{1}{2}.a.b.\operatorname{sen}\theta \qquad A = \frac{1}{2}.a.c.\operatorname{sen}\beta$$

$$A = \frac{1}{2}.b.c.\operatorname{sen}\alpha$$

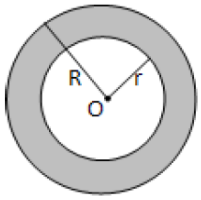
ÁREA DAS FIGURAS CIRCULARES

Círculo:



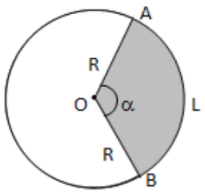
$$A = \pi.R^2$$

Coroa Circular:



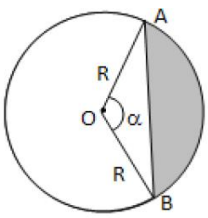
$$A = \pi.(R^2 - r^2)$$

Setor circular:



$$A = \pi.R^2.\frac{\alpha}{360^\circ}$$

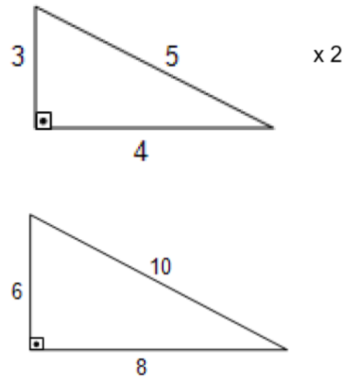
Segmento Circular:



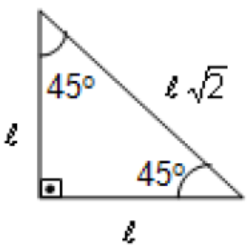
$$A_{SEG} = A_{SETOR} - A_{\Delta ABO}$$

LEMBRETES IMPORTANTES

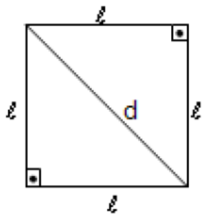
Os números Pitagóricos ⇒ 3, 4 e 5



O triângulo Retângulo Isósceles

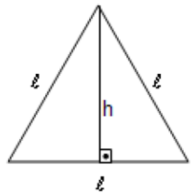


A diagonal de um quadrado



$d = \ell\sqrt{2}$

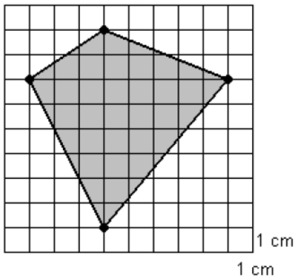
A altura de um triângulo equilátero



$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

ATIVIDADES

01) A área do quadrilátero mostrado na figura abaixo mede:



a) 16 cm^2

b) 32 cm^2

c) 64 cm^2

d) 24 cm^2

e) 18 cm^2

02) Um triângulo equilátero e um quadrado têm o mesmo perímetro. A medida do lado do quadrado é 90 cm. Nessas condições, a medida do lado do triângulo equilátero é de...

a) 90 cm.

b) 180 cm.

c) 120 cm.

d) 100 cm.

e) 150 cm.

03) Um triângulo tem lados que medem, respectivamente, 6m, 8m e 10m. Um segundo triângulo, que é um triângulo semelhante ao primeiro, tem perímetro igual a 12m. A área do segundo triangulo será igual a

a) 6 m^2

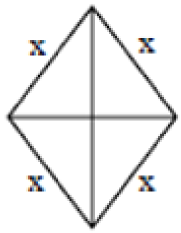
b) 12 m^2

c) 24 m^2

d) 48 m^2

e) 60 m^2

04) A área de um losango é 24 cm^2. Se uma das diagonais desse losango mede 6 cm, o lado dele, em cm, mede



a) 4.

b) 5.

c) 2.

d) 7.

05) O perímetro de um triângulo retângulo é 30 cm. Se a soma das medidas dos catetos é 17 cm, e a soma das medidas da hipotenusa e do cateto menor é 18 cm, então a medida, em cm, do cateto maior é

a) 8.

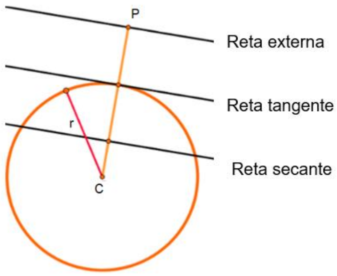
b) 9.

c) 12.

d) 15.

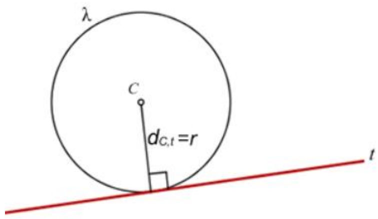
Geometria Plana - RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA; - RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS; - POLÍGONOS INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS.

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

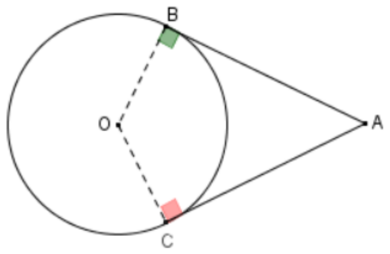


Propriedades das tangentes

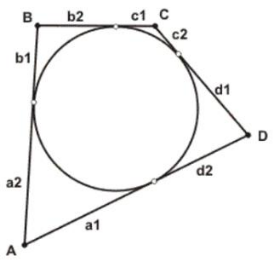
I – A tangente é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contato.



II – Se de um ponto A forem conduzidos os segmentos AB e AC, ambos tangentes a uma circunferência, com B e C nessa circunferência, então AB = AC



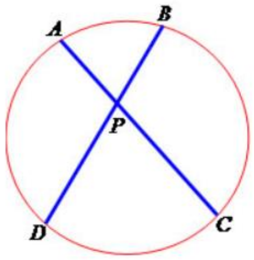
III – Se um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.



AB+CD=BC+AD

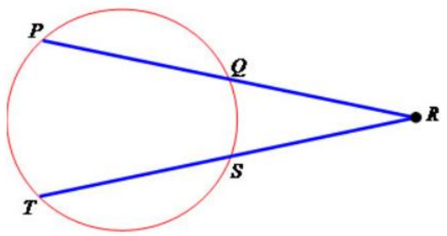
Relações métricas na circunferência

Primeiro caso: Corda X Corda



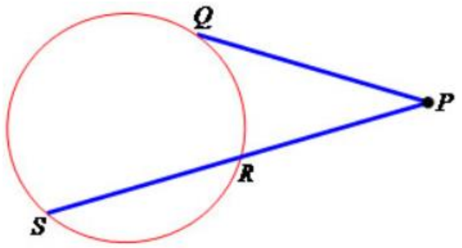
PA·PC=PB·PD

Segundo caso: Secante X Secante



RP·RQ=RT·RS

Terceiro caso: Tangente X Secante

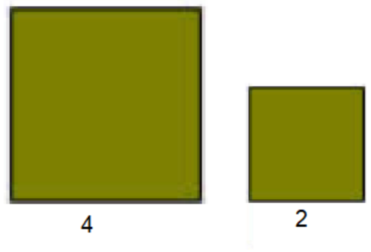


***PQ*2=PS·PR**

RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Na figura a seguir notam-se dois polígonos semelhantes, de lados 4 e 2 e área 16 e 4.

Observe que a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

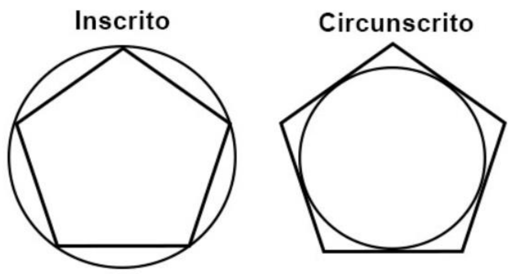


Observações:

Essa relação é válida para todos os polígonos semelhantes.

Os círculos são sempre semelhantes, portanto a razão entre as áreas de dois círculos é igual ao quadrado da razão de semelhança do comprimento da circunferência.

POLÍGONOS INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS

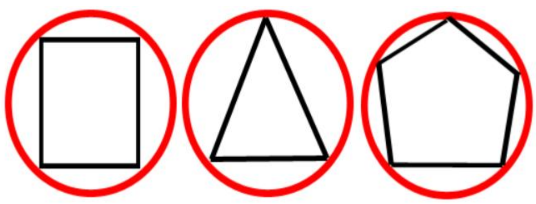


Observações:

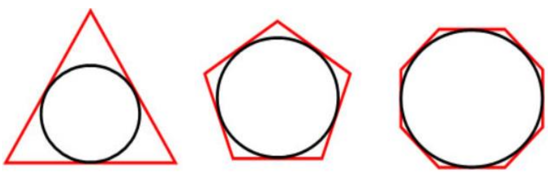
Um polígono convexo é regular se seus lados e ângulos são congruentes entre si.

Todo polígono regular pode ser inscrito ou circunscrito numa circunferência.

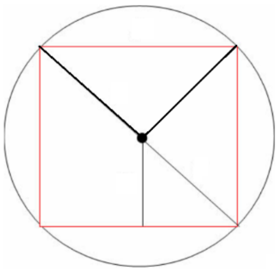
Exemplos de polígonos inscritos



Exemplos de polígonos circunscritos



Vamos analisar os seguintes elementos do polígono a seguir:



Centro:

Raio:

Ângulo central:

Ângulo interno:

Ângulo externo:

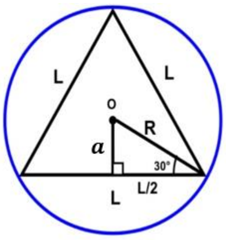
Apótema:

Polígonos especiais inscritos

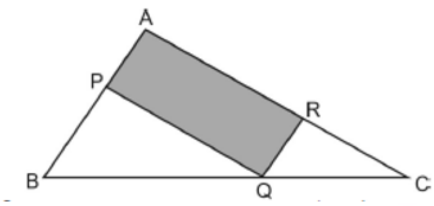
Triângulo equilátero

$L = R\sqrt{3}$

$a = \frac{R}{2}$

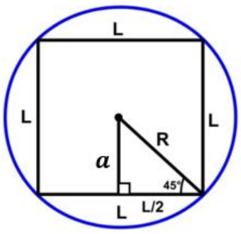


Quadrado



$L = R\sqrt{2}$

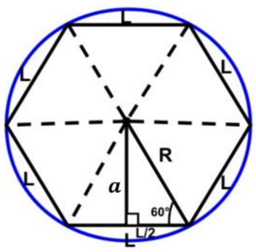
$a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$



Hexágono

L = R

$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

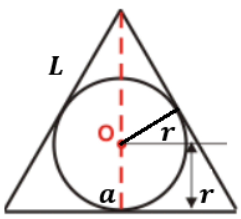


Polígonos especiais circunscritos

Triângulo equilátero

$a = r$

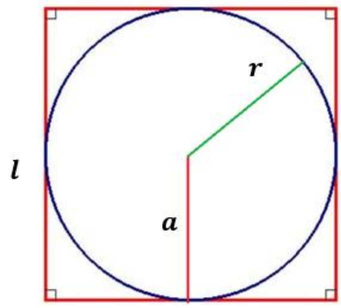
$r = \frac{L\sqrt{3}}{6}$



Quadrado

$a = r$

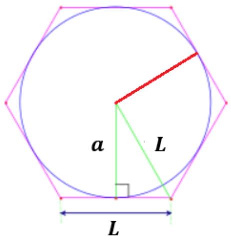
$l = 2r$



Hexágono

$a = r$

$L = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$



ATIVIDADES

01.(AFA) Considere, no triângulo ABC abaixo, os pontos P ∈ AB, Q ∈ BC, R ∈ AC e os segmentos PQ e QR paralelos, respectivamente, a AC e AB. Sabendo que BQ = 3cm, QC = 1cm e que a área do triângulo ABC é 8cm^2, então a área do paralelogramo hachurado, em cm^2, é igual a

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

02.(EsSA) Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de diâmetro **4cm**. O perímetro desse hexágono, em **cm**, é

A) 4.

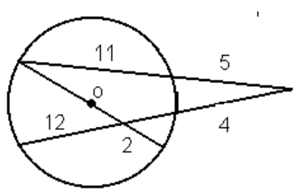
B) 8.

C) 24.

D) 6.

E) 12.

03.(EEAR) Observando-se a figura e considerando-se que as medidas são dadas em cm, pode-se afirmar que a medida, em cm, do raio da circunferência de centro O é



a) 11

b) 12

c) 13

d) 14

05) A razão r entre o apótema e o lado de um hexágono regular inscrito é igual a

a) 32

b) 22

c) 23

d) 13

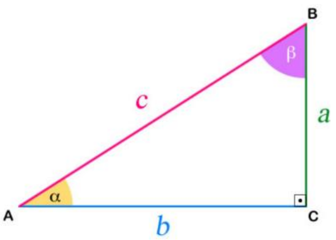
e) 53

Trigonometria - TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO; - TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER.

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Considere o triângulo retângulo em C como mostra a figura.



Observe que:

$\alpha+\beta=90^0$

($\alpha+\beta$ são complementares)

(α e β são agudos)

Assim, para um ângulo ($\alpha ou\ \beta$) de um triângulo retângulo ABC, tem-se que:

$sen\alpha=ac$

$cos\alpha=bc$

$tg\alpha=ab$

$sen\beta=bc$

$cos\beta=ac$

$tg\beta=ba$

Observações:

$sen\alpha = cos\beta$ e $sen\beta = cos\alpha$. De um modo geral, $senx=cos900-x$

$tg\beta=sen\beta cos\beta$

$tg\alpha=Sen\alpha cos\alpha$

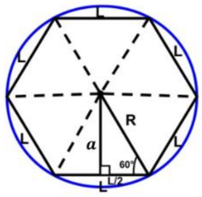
$sen\alpha=ac$ $sen\beta=bc$

$cos\alpha=bc$ $cos\beta=ac$

$tg\alpha=ab$ $tg\beta=ba$

L = R

$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$



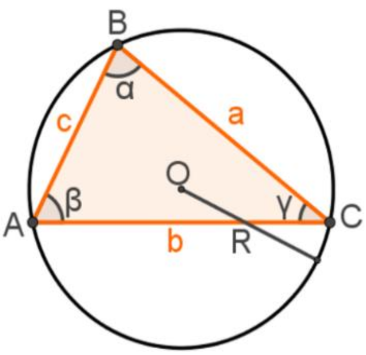
Razões trigonométricas nos ângulos notáveis (30º, 45º e 60º)

α	30°	45°	60°
senα			
cosα			
tgα			

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER

LEI DOS SENOS

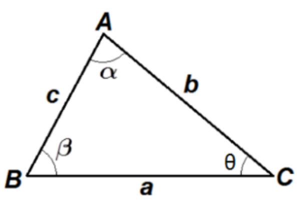
Na **lei dos senos,** utilizamos relações que envolvem o seno do ângulo e a medida oposta ao ângulo.



$aSen\beta=bSen\alpha=cseny=2R$

LEI DOS COSSENOS

A lei dos cossenos permite encontrar o valor da medida de um lado de um triângulo qualquer se a medida dos outros lados e o ângulo formado por eles forem conhecidos.



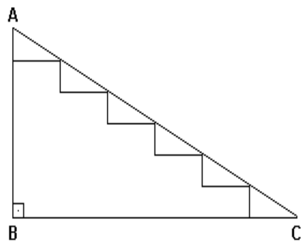
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\theta$

ATIVIDADES

01) A figura adiante representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além de mesma altura. Se AB = 2m e BCA mede 30°, então a medida da extensão de cada degrau é:



a) 233 m

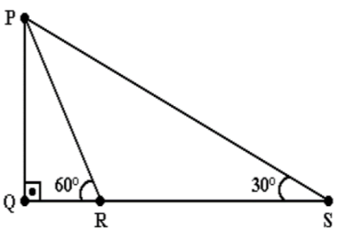
b) 23 m

c) 36 m

d) 32 m

e) 33m

02) Considere os triângulos retângulos PQR e PQS da figura a seguir. Se RS=100, quanto vale PQ?



a) 100*3*

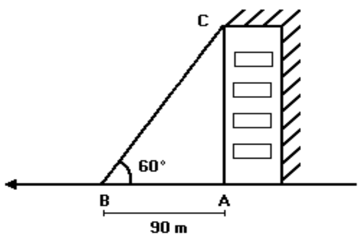
b) 50*3*

c) 50

d) 50*3*/3

e) 25*3*

03) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura adiante.



Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60°. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

a) 150

b)180

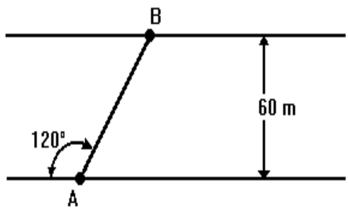
c) 270

d) 300

e) 310

04) Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio.

Sendo a largura do rio 60 m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de



a) 40 *2*

b) 40 *3*

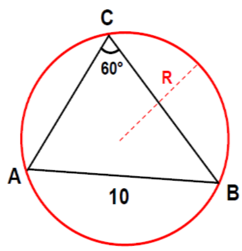
c) 45 *3*

d) 50 *3*

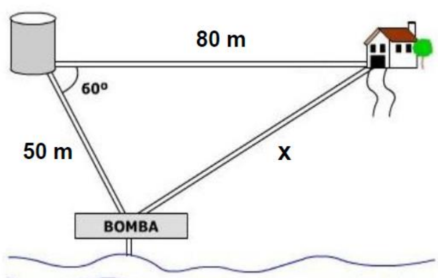
e) 60 *2*

05) Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo do qual se conhecem um lado AB = 10m e o ângulo oposto C = 60º.

Representando geometricamente a situação, temos:



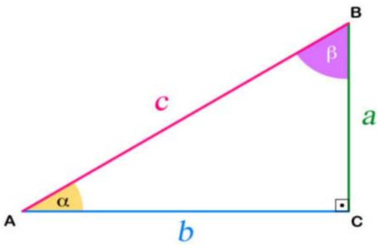
06) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a 50m de distância. A casa está a 80m de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa-d'água-bomba e caixa-d'água-casa é de 60º. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento são necessários?



Trigonometria - RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS; - UNIDADE DE MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS; - CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.

OUTRAS RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

(cossecante, secante e cotangente)



A partir de $\boldsymbol{sen\alpha=ac}$, $\boldsymbol{cos\alpha=bc}$ e $\boldsymbol{tg\alpha=ab}$, são definidas as seguintes relações:

$\boldsymbol{cossec\alpha=ca}$, $\boldsymbol{sec\alpha=cb}$ e $\boldsymbol{cotg\alpha=ba}$, ou seja

$\boldsymbol{cossec\alpha=1Sen\alpha}$

$\boldsymbol{sec\alpha=1cos\alpha}$

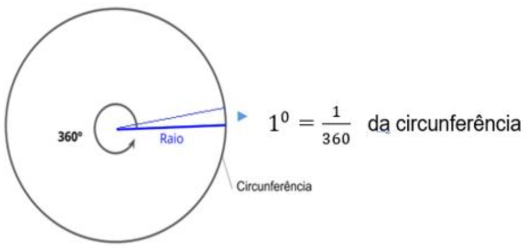
$\boldsymbol{cotg \propto=1tg\alpha}$

UNIDADE DE MEDIDA DE ARCOS E ÂNGULOS

Unidades de medida

Grau (º)

Um grau (1º) é a medida angular que corresponde a 1360 da circunferência. Dessa forma, a abertura de toda a circunferência equivale a 360 graus (360º).



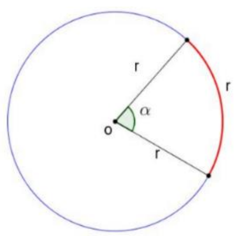
10 = 60′

1′ = 60″

10 = 3600″

Radiano (rad)

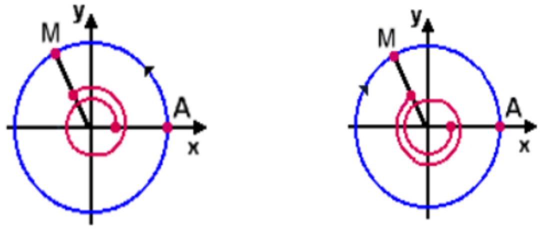
Um radiano (1 rad) é um arco cujo tamanho é igual ao comprimento do raio da circunferência.



- $2\pi rad$=3600
- πrad=1800

Arcos ou ângulos com medida superior a uma volta.

É possível um determinado arco (ângulo) medir mais de uma volta (3600 ou $2\pi rad$), seja no sentido horário ou anti-horário.

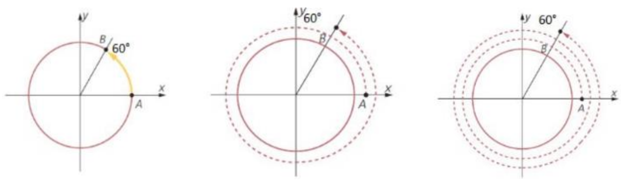


Ângulos medidos no sentido anti-horário, pertencem à primeira determinação positiva, quando situados na primeira volta;

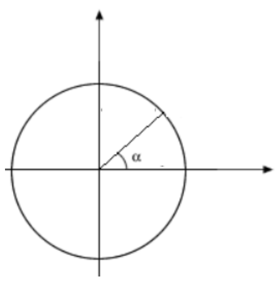
Ângulos medidos no sentido horário, pertencem à primeira determinação negativa quando situados na primeira volta.

Ângulos côngruos

Levando em consideração ao exposto anterior, é inevitável que existam ângulos que possuam mesma origem (00 ou 0 rad) e extremidade. Tais ângulos são denominados ângulos côngruos.



De um modo geral, para um ângulo ∝ qualquer, tem-se o seguinte.



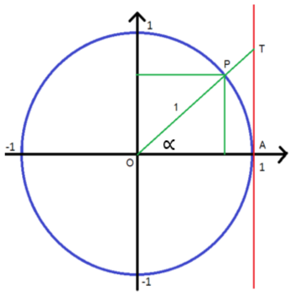
∝ + k · 3600

ou

α + 2k πrad

SENO, COSSENO e TANGENTE DE UM ARCO

Considere a seguinte figura.



Sendo ∝ a medida do arco AP, define-se:

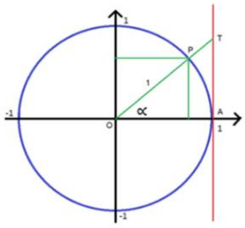
$cos\alpha$= abscissa de P

$Sen\alpha$= ordenada de P

tgα=$sen\alpha$cosα = ordenada de T sobre o eixo t, desde que $cos\alpha \neq 0$.

Com base nas definições anteriores, conclui-se que o seno, cosseno e tangente têm sinais que dependem do quadrante em que se situa o ponto P.

P ∈ primeiro quadrante

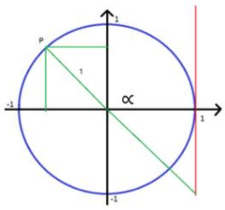


$0 < sen\alpha < 1$

$0 < cos\alpha < 1$

$tg\alpha > 0$

P ∈ segundo quadrante

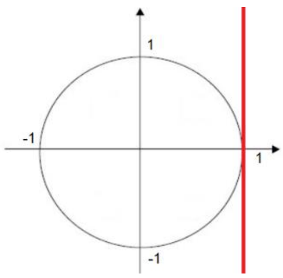


$0 < sen\alpha < 1$

$-1 < cos\alpha < 0$

$tg\alpha < 0$

A partir das definições anteriores, observa-se que:



$sen0^0 = 0$	$cos0^0 = 1$	$tg0^0 = 0$
$sen90^0 = 1$	$cos90^0 = 0$	$\nexists\ tg90^0$
$sen180^0 = 0$	$cos180^0 = -1$	$tg180^0 = 0$
$sen270^0 = -1$	$cos270^0 = 0$	$\nexists\ tg270^0$
$sen360^0 = 0$	$cos360^0 = 1$	$tg360^0 = 0$

ATIVIDADES

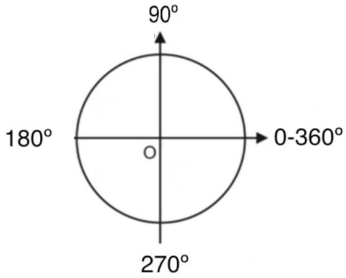
01) Expresse em radiano os seguintes arcos:

a) 3000

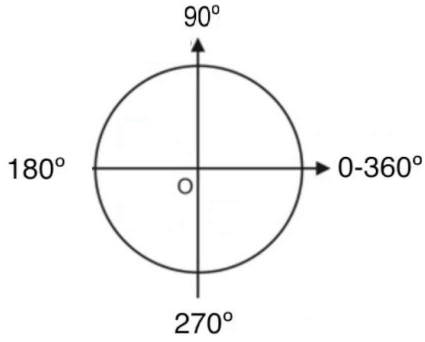
b) 600

c) 120

02) Qual a primeira determinação positiva de um arco de 10000



03) A menor determinação positiva de – 49000 é:



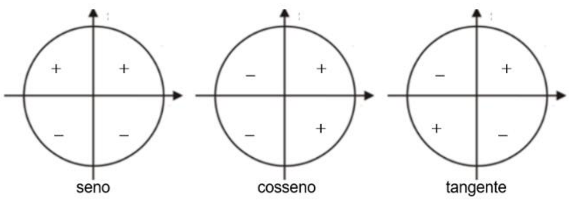
04) O maior valor numérico que y pode assumir quando y=37−2$senx$3 é:

05) Para que valores de m a equação $cosx$=2m−5 admite solução.

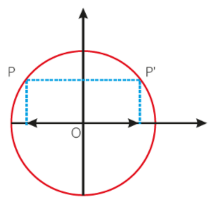
Trigonometria - REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

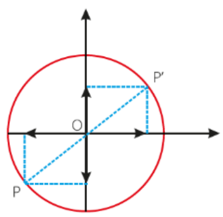
Vale a pena relembrar os quadrantes para os quais as relações seno cosseno e tangente são positivos ou negativos. Vejamos isso na imagem a seguir.



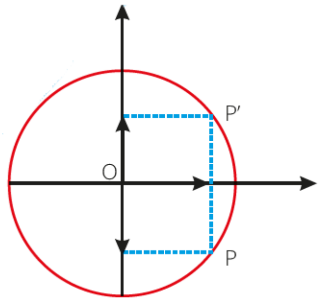
Redução do segundo ao primeiro quadrante



Redução do terceiro ao primeiro quadrante



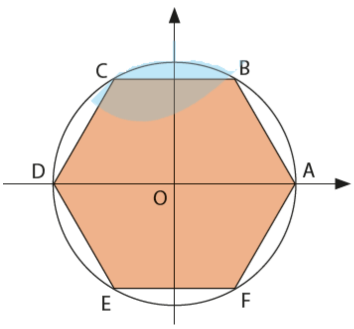
Redução do quarto ao primeiro quadrante



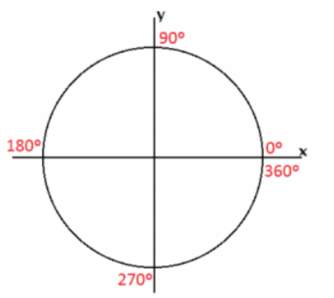
ATIVIDADES

01) Na figura a seguir, o hexágono inscrito na circunferência é regular.

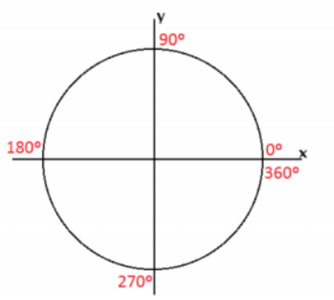
Se A é a origem, calcule a soma dos senos dos arcos associados aos vértices A, B, C, D, E, F do hexágono regular.



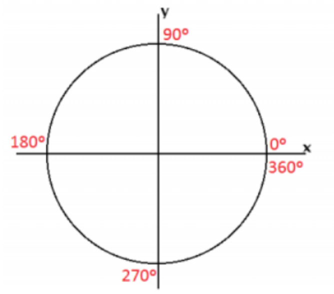
02) O valor do $cos 22800$



03) Determine o valor de y = cos 120° + sen 300° - tg 135° - cos 90°



04) Reduza ao 1° quadrante o ângulo de **150°**.



05) O valor de sen 1270° é igual

a) - cos 90°

b) - sen 30°

c) - sen 10°

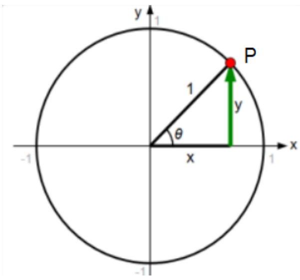
d) - cos 30°

Trigonometria - FUNÇÃO SENO.

FUNÇÃO DE SENO

Função seno

Considere, na circunferência trigonométrica a seguir, um ponto P associado a um número real X. A todo número real X está associado um único número real sen x. Pode-se, então, definir uma função f de $\mathbb{R}$ como função seno.



$\boldsymbol{f}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{fx=Senx}$

Domínio e imagem

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$, pois ela está definida para todos os números reais.

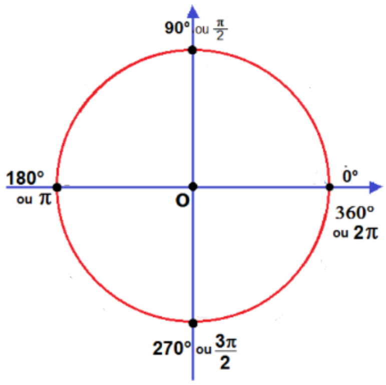
O contradomínio também é $\mathbb{R}$, mas a imagem da função seno é o conjunto $-\mathbf{1},\mathbf{1}$, pois para todo X ϵ $\mathbb{R}$, tem-se $-\mathbf{1}\leq \boldsymbol{senx} \leq \mathbf{1}$.

$\boldsymbol{Df}=\mathbb{R}$

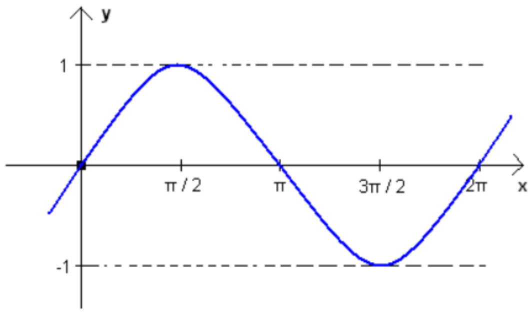
$\boldsymbol{CDf}=\mathbb{R}$

$\boldsymbol{Imf}=\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}-\mathbf{1}\leq \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1}$

Gráfico



Para construir o gráfico da função y = Senx monta-se uma tabela com alguns valores de X no intervalo 0, 2π e assim obtém-se y.



Observações:

A função é crescente e positiva no intervalo]0, $\pi 2$ [;

A função é decrescente e positiva no intervalo]$\pi 2$, π [;

A função é decrescente e negativa no intervalo]π, 3$\pi 2$ [;

A função é crescente e negativa no intervalo]3$\pi 2$, 2π[;

A função seno é periódica e tem intervalo 2π. Isso significa que a curva obtida no intervalo 0, 2π vai se repetir;

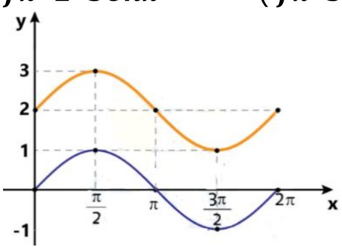
O gráfico da função seno é uma curva denominada de senóide.

VARIAÇÕES DA FUNÇÃO DE SENO

É possível construir o gráfico de outras funções que possuem o seno como razão trigonométrica. Essas funções apresentam as seguintes características:

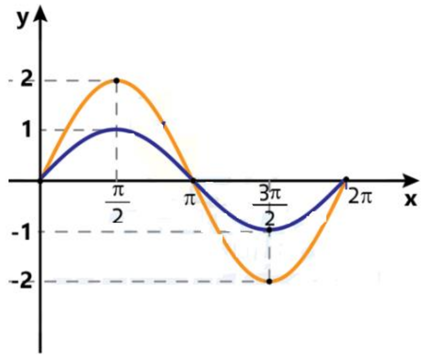
Função seno tipo

$fx=2+Senx$ - ($fx=Senx$)



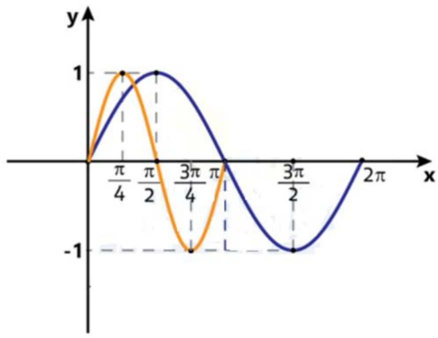
Função seno tipo:

$fx=2Senx$ - ($fx=Senx$)



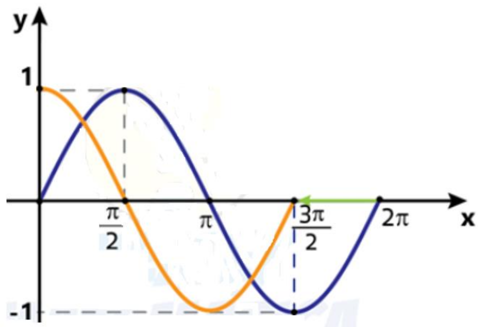
Função seno tipo:

$fx=Sen(2x)$ - ($fx=Senx$)



Função seno tipo:

$fx=Sen(x+ \pi 2)$ - ($fx=Senx$)



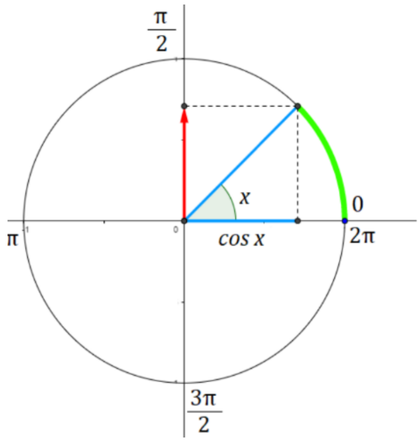
Observação: $fx=a \pm bsencx \pm d$

Trigonometria - FUNÇÃO COSSENO; - FUNÇÃO TANGENTE.

FUNÇÃO DE COSSENO

Função cosseno

Considere, na circunferência trigonométrica a seguir, um ponto P associado a um número real X. A todo número real X está associado um único número real cos x



Com base nesse conceito, pode ser definida uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ chamada função cosseno.

$\boldsymbol{f}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{fx=cosx}$

Domínio e imagem

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$**,** pois ela está definida para todos os números reais.

O contradomínio também é $\mathbb{R}$**,** mas a imagem da função cosseno é o conjunto $-1,1$, pois para todo X $\boldsymbol{\epsilon}$ $\mathbb{R}$, tem-se $\boldsymbol{-1 \leq cosx \leq 1}$**.**

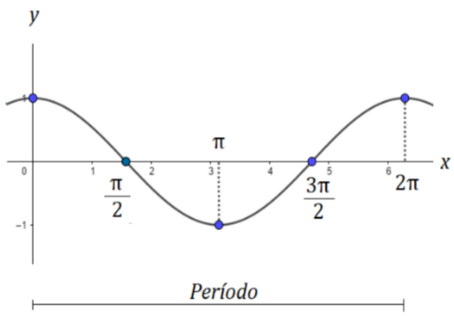
$\boldsymbol{Df=\mathbb{R}}$

$\boldsymbol{CDf=\mathbb{R}}$

$\boldsymbol{Imf=Y \in \mathbb{R} -1 \leq y \leq 1}$

Gráfico

Para construir o gráfico da função $\boldsymbol{y=cosx}$ monta-se uma tabela com alguns valores de X no intervalo $\boldsymbol{0,\ 2\pi}$ e assim obtém-se y.



Observações:

A função é decrescente e positiva no intervalo $]0,\pi2[$;

A função é decrescente e negativa no intervalo $]\pi2,\ \ \pi$ [;

A função é crescente e negativa no intervalo $]\pi,\ \ 3\pi2[$;

A função é crescente e positiva no intervalo $]3\pi2,\ \ 2\pi[$;

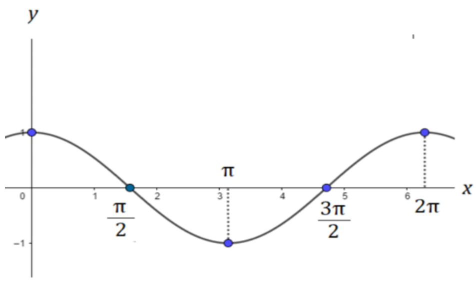
A função cosseno é periódica e tem intervalo 2π. Isso significa que a curva obtida no intervalo $0,\ 2\pi$ vai se repetir;

VARIAÇÕES DA FUNÇÃO DE COSSENO

É possível construir o gráfico de outras funções que possuem o cosseno como razão trigonométrica. Essas funções apresentam as seguintes características:

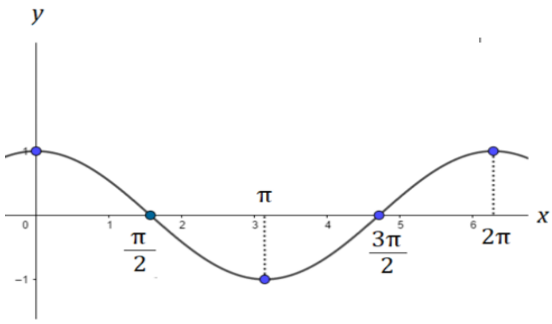
Função cosseno tipo:

$\boldsymbol{fx=2+cosx}$ - ($\boldsymbol{fx=cosx}$)



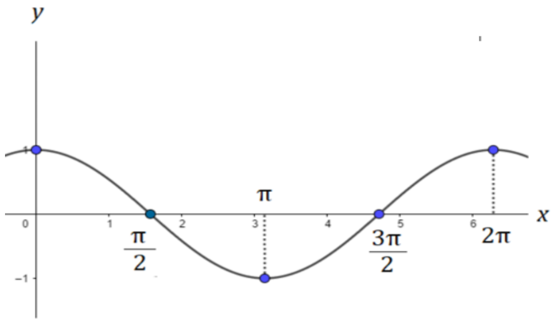
Função cosseno tipo:

$\boldsymbol{fx=2cosx}$ - ($\boldsymbol{fx=cosx}$)



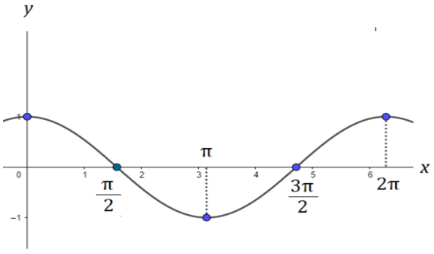
Função cosseno tipo:

$\boldsymbol{fx=cos(2x)}$ - ($\boldsymbol{fx=cosx}$)



Função cosseno tipo:

$\boldsymbol{fx=cos(x+\ \pi 2)}$ **-** ($\boldsymbol{fx=cosx}$)

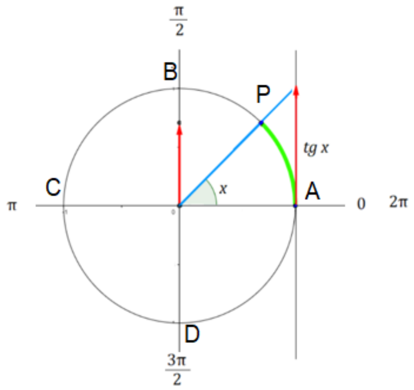


Observação: $fx=a\ \ \pm bcoscx\pm d$

FUNÇÃO TANGENTE

Função tangente

Considere, na circunferência trigonométrica a seguir, um ponto P associado a um número real X, que não coincida com os pontos B e D. Está associado um único número real tg x.



Pode, então, ser definida uma função f para todos os reais diferentes de $\boldsymbol{\pi 2+k\pi},\ \ \boldsymbol{k\in\mathbb{R}},$ denominada função tangente.

$\boldsymbol{f:x\in\mathbb{R}x\neq\pi 2+k\pi,k\in\mathbb{Z}\to\mathbb{R}}$

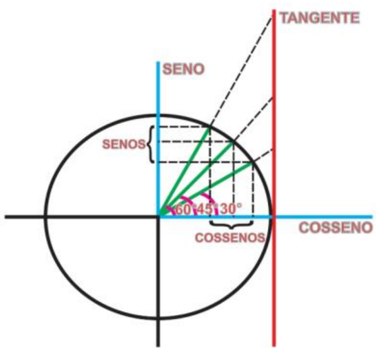
$\boldsymbol{fx=tgx}$

Domínio e imagem

$\boldsymbol{Df=\ x\in\mathbb{R}x\neq\pi 2+k\pi,k\in\mathbb{Z}}$

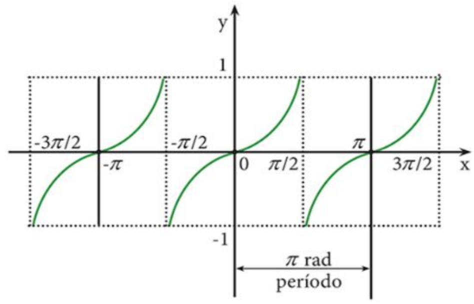
$\boldsymbol{CDf=\ \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{Imf=\mathbb{R}}$



Gráfico

Para construir o gráfico da função $\boldsymbol{y=tgx}$ monta-se uma tabela com alguns valores de X no intervalo $\mathbf{0},\ \ \boldsymbol{\pi}$ e assim obtém-se y.



Observações:

A função é **crescente** e positiva no intervalo] $0,\pi 2$ [;

A função é **crescente** e negativa no intervalo] $\pi 2,\ \ \pi$ [;

A função é **crescente** e positiva no intervalo] $\pi,\ \ 3\pi 2$ [;

A função é **crescente** e negativa no intervalo] $3\pi 2,\ \ 2\pi$ [;

A função tangente é periódica e tem intervalo π. Isso significa que a curva obtida no intervalo $0,\ \ \pi$ vai se repetir;

ATIVIDADES

Sobre a função f, de IR em IR, definida por f(x)=cos 3x, é correto afirmar que

a) seu conjunto imagem é [-3; 3].

b) seu domínio é [0; 2 π].

c) é crescente para x ϵ $\mathbb{R}$ [0; π /2].

d) sua menor raiz positiva é π /3.

e) seu período é $2\pi/3$.

Observação: $\boldsymbol{fx=a\ \ \pm bcoscx\pm d}$

Trigonometria - EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Uma equação trigonométrica é qualquer equação na qual a incógnita faz parte do arco ou do ângulo de alguma função trigonométrica.

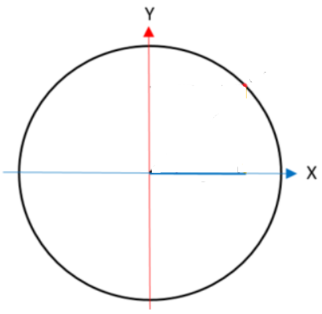
Exemplo:

1) $2 \cdot Senx=2$

2) $Senx+4cosx=1$

Equações trigonométricas fundamentais

Equação do tipo $\boldsymbol{senx=a}$



Temos, então:

$\boldsymbol{senx=a} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{x} = \beta + 2\mathrm{k}\pi \boldsymbol{oux=\pi-\beta+2k\pi}$,

Exemplo:

Resolva a equação $\boldsymbol{senx=22}$

Equações trigonométricas fundamentais

Equação do tipo $\boldsymbol{cosx=a}$

Temos, então:

$\boldsymbol{cox=a} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{x} = \beta + 2\mathrm{k}\pi \boldsymbol{oux=-\beta+2k\pi}$,

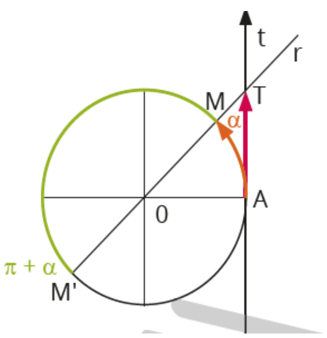
$\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}$

Exemplo:

Resolva a equação $\boldsymbol{cosx=32}$

Equações trigonométricas fundamentais

Equação do tipo $\boldsymbol{tgx=a}$



Temos, então:

$\boldsymbol{tgx=a} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x=\alpha+k\pi}$

$\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}$

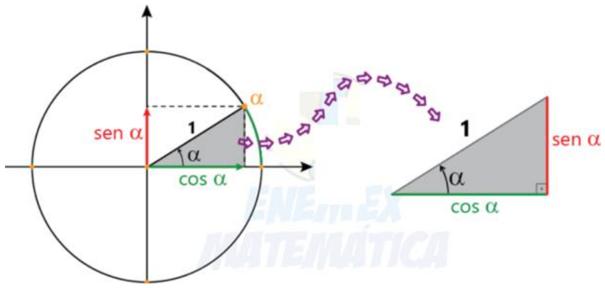
Exemplos:

Resolva a equação $\boldsymbol{tgx=33}$

Equações trigonométricas redutíveis às fundamentais

01) Resolva a equação $\boldsymbol{2cosx-secx=1}$

02) Resolva a equação $\boldsymbol{\cos 2x=1+senx}$



03) Resolva a equação $\boldsymbol{tgx+cotgx=2}$

Trigonometria - INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Inequações trigonométricas

De um modo geral, inequação trigonométrica é toda desigualdade em que a incógnita está associada a alguma função trigonométrica.

Exemplos:

$senx>-2$

$senx+cosx<1$

Nas inequações trigonométricas, devemos achar o intervalo que atenda a desigualdade.

Exemplos:

01) Ache as soluções da inequação senx ≥ 1/2, para x ∈]0,2π]

02) Ache as soluções da inequação $\cos x < -12$, para $x \in$]0,2π]

03) Ache as soluções da inequação $tg\ x \geq 1$, para $x \in$]0,2π]

04) O conjunto solução da inequação $2sen^2x$ – senx - 1 < 0, no intervalo]0,2π] é

05) O conjunto solução da inequação $2cos^2x$ – cosx ≤ 0, no intervalo]0,2π] é

06) O conjunto solução da inequação $2sen^2x$ – cosx - 1 ≥ 0, no intervalo]0,2π] é

Trigonometria - TRANSFOMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Adição e subtração de arcos

Seno da soma

sen (a + b) = sena·cosb + senb·cosa

Seno da diferença

sen(a - b) = sena·cosb - senb·cosa

Cosseno da soma

cos(a + b) = cosa·cosb - sena·senb

Cosseno da diferença

cos(a – b) = cosa·cosb + sena·senb

Tangente da soma

$tga+b$=tg$a+tgb1-tgatgb$

Tangente da diferença

$tga-b$=tg$a-tgb1+tgatgb$

Arco duplo

sen(2a)

sen (a + b) = sena·cosb + senb·cosa

Arco duplo

cos(2a)

cos(a + b) = cosa·cosb - sena·senb

Arco duplo

$tg2a$

$tga+b$=tg$a+tgb1-tgatgb$

ATIVIDADES

1) Utilizando as transformações trigonométricas, qual dos valores a seguir é o resultado de sen75°?

2) Determine o valor de **A = sen 105° + cos 105°**.

3) Se tg (x + y) = 33 e tg x = 3, então tg y é igual a:

4) O cosseno do arco de medida 255° é igual a:

5) Sabendo que cosx = 4/5, qual é o valor de sen2x

6) Qual é o valor de $(\text{sen}22°30' + \cos22°30')^2$

GEOMETRIA DE POSIÇÃO - Postulados; - Posições relativas; - Projeção ortogonal.

GEOMETRIA DE POSIÇÃO

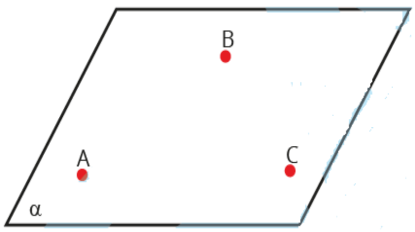
A geometria de posição é o ponto inicial para o entendimento da geometria espacial. Com ela podemos ter melhor percepção das projeções tanto de um ponto na reta como de uma reta no plano, dando início à formação de um sólido.

Postulados

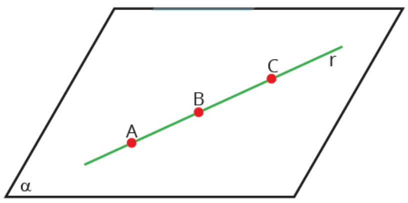
Iremos comentar nove postulados da Geometria Plana. Os postulados nada mais são que sentenças que não são demonstradas, apenas aceitas como parte para elaboração de uma teoria.

I – Por dois pontos distintos passa uma única reta.

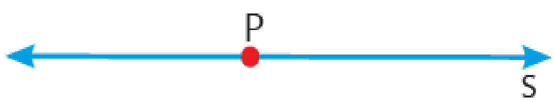
II – Três pontos distintos e não colineares determinam um único plano.



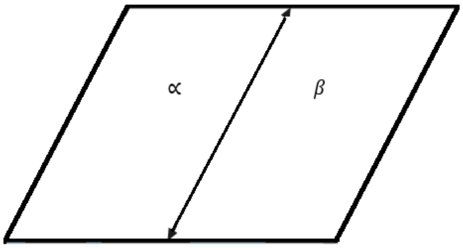
III – Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então, todos os pontos da reta pertencem a esse plano.



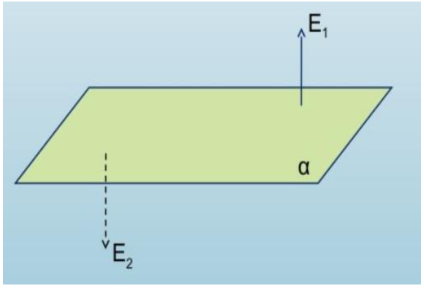
IV – Um ponto de uma reta divide essa em duas semirretas, e esse ponto é dito origem das semirretas.



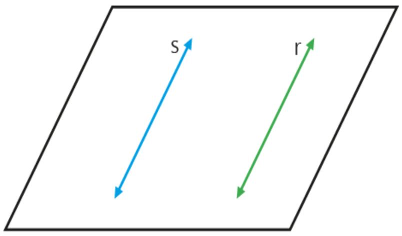
V – Uma reta de um plano divide esse em dois semiplanos, em que tal reta é a origem dos semiplanos.



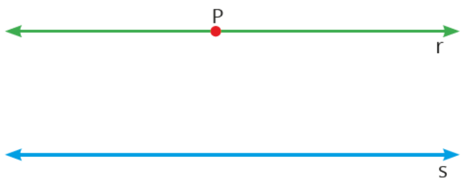
VI – Um plano divide o espaço em dois semiespaços, sendo esse plano a origem dos semiespaços.



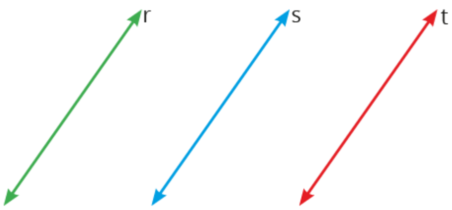
VII – Duas retas r e s são ditas paralelas quando forem coplanares e a interseção for vazia, ou quando forem coincidentes. Nesse caso, são ditas paralelas coincidentes.



VIII – Por um ponto exterior a uma reta s, passa uma única reta r paralela a s.

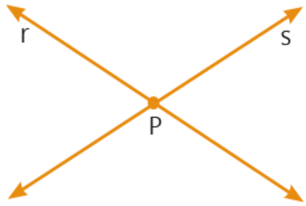


IX – Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

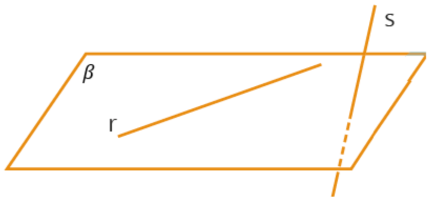


Posições relativas entre retas

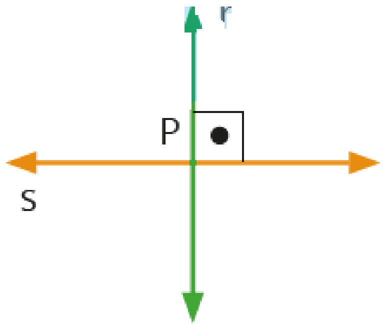
1) **Retas concorrentes secantes**: retas coplanares cuja interseção é um único ponto.



2) **Retas reversas**: quando a interseção é vazia (não são coplanares e nem paralelas).

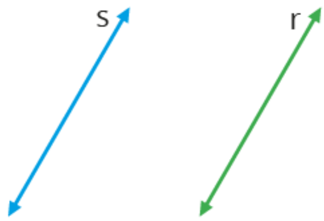


3) **Retas perpendiculares:** quando o ângulo formado por duas retas mede 900(ângulo reto), essas retas são chamadas de perpendiculares.



$s \perp r$

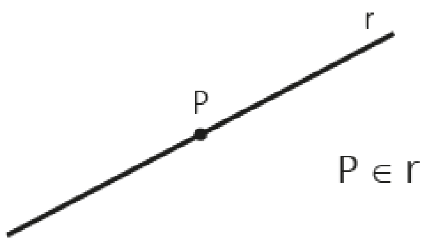
4) Retas paralelas: Duas retas coplanares que não têm ponto em comum são chamadas de paralelas distintas.



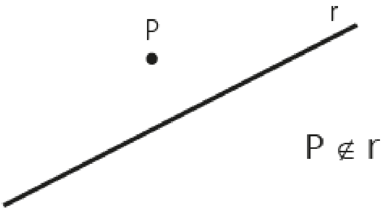
$s /\!/ r$

Posições relativas entre ponto reta

O ponto pertence à reta

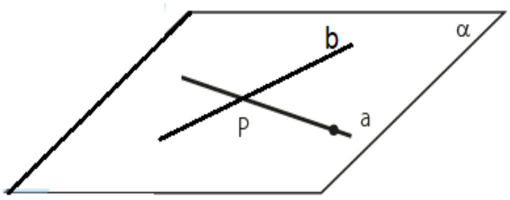


O ponto não pertence a reta

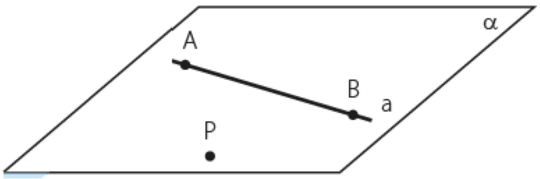


Determinação de um plano

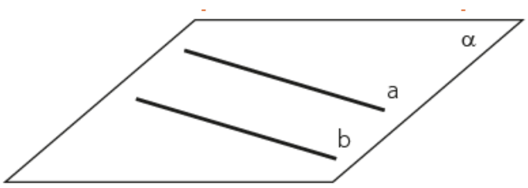
Por duas retas concorrentes passa um único plano



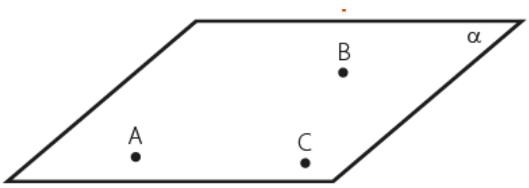
Por uma reta e um ponto fora dela passa um único plano



Por duas retas paralelas e distintas passa um único plano

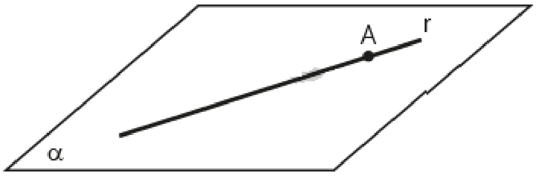


Três pontos não colineares determinam um único plano

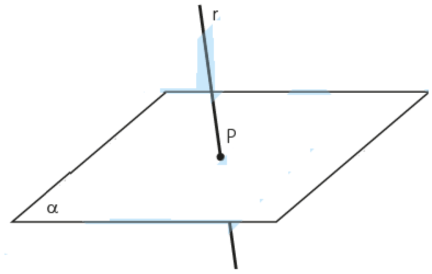


Posições relativas entre uma reta e um plano

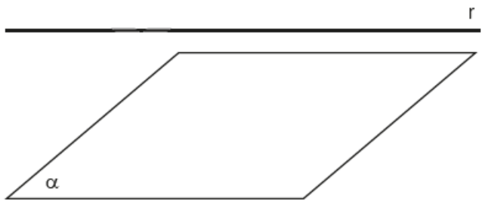
A reta pode está contida no plano, isto é, todo ponto da reta pertence ao plano.



Reta e plano podem ser secantes, nesse caso eles têm um único ponto comum.

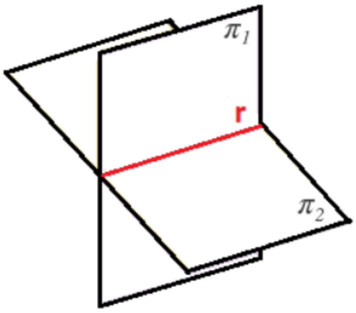


Reta e plano podem ser paralelos, ou seja, não têm ponto comum.

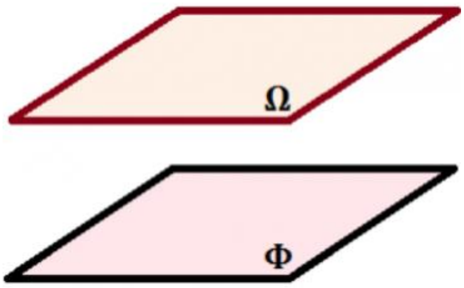


Posições relativas entre planos

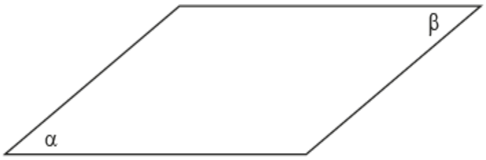
Planos secantes ou concorrentes: São dois planos cuja intersecção é uma reta.



Planos paralelos: São planos que não têm ponto comum.

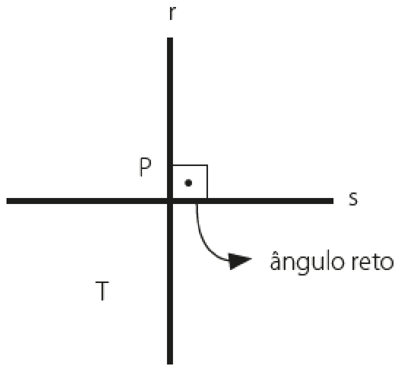


Planos coincidentes: Dois planos são coincidentes quando possuem todos os pontos em comum.



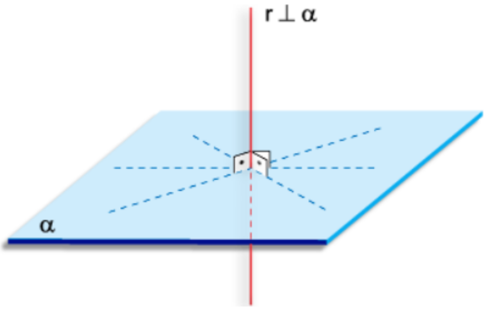
Perpendicularidade

Entre retas: No plano, por um ponto P de uma reta r passa uma única reta s perpendicular a r.

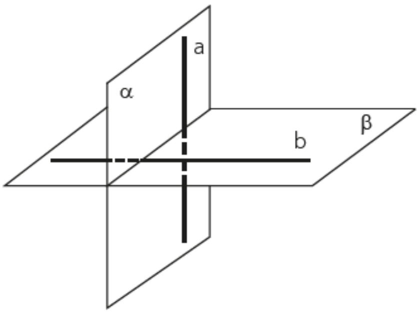


Porém, no espaço, por um ponto P de uma reta r passam infinitas retas perpendiculares a reta r.

Entre reta e plano: Uma reta r é perpendicular a um plano ∝ num ponto P se r é perpendicular a qualquer reta de ∝ que passa em P.

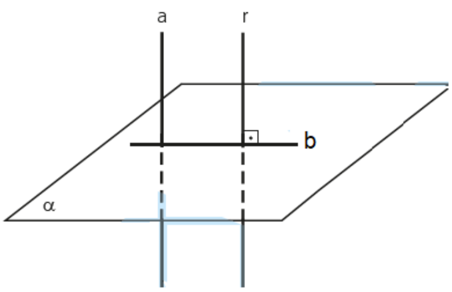


Entre planos: Dois planos são perpendiculares se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.



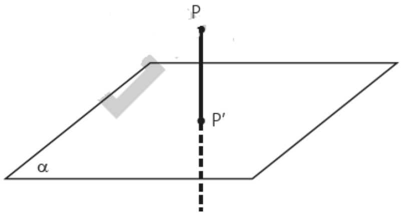
Retas ortogonais

Duas retas reversas a e b são ditas ortogonais se houver uma reta r paralela a uma delas e que seja concorrente e perpendicular à outra.

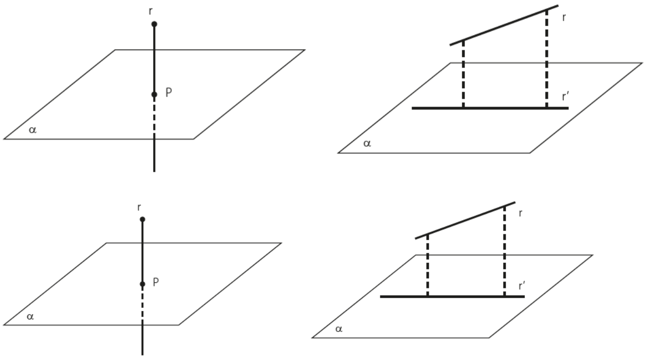


Projeção ortogonal

A projeção ortogonal de um ponto **P** sobre um plano ∝ é o ponto **P'**, que corresponde a interseção da reta que passa por **P** e é perpendicular ao plano ∝.

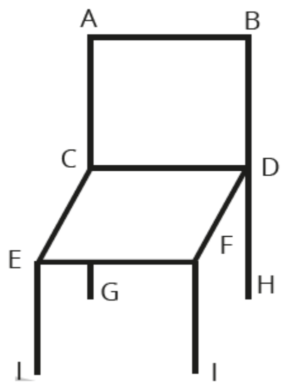


A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é uma reta ou um ponto.



ATIVIDADES

A figura a seguir representa uma cadeira onde o assento é um paralelogramo perpendicular ao encosto



A partir dos dados, é correto afirmar que os segmentos de retas

a) CD e EF são paralelos

b) BD e FJ são concorrentes

c) AC e CD são coincidentes

d) AB e EI são perpendiculares

A partir dos dados, é correto afirmar que os segmentos de retas

a) CD e EF são paralelos

b) BD e FJ são concorrentes

c) AC e CD são coincidentes

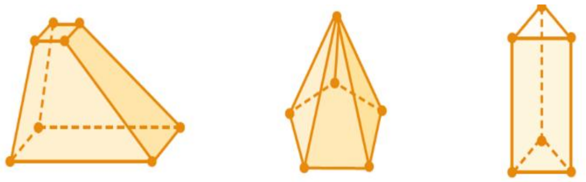
d) AB e EI são perpendiculares

GEOMETRIA ESPACIAL - Poliedros.

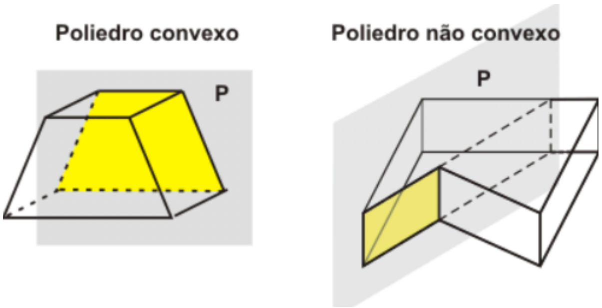
GEOMETRIA ESPACIAL

Poliedros

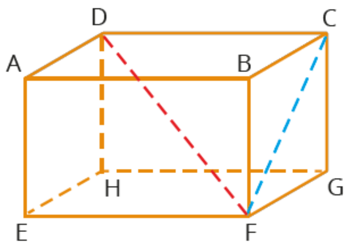
Os poliedros são sólidos geométricos limitados por polígonos que, dois a dois, possuem uma aresta em comum.



Poliedros convexo e não convexo



Elementos do Poliedro



Temos:

Vértices

Arestas

Faces

Diagonal do poliedro

Diagonal da face

Relação de Euler

Para todo poliedro convexo, vale a seguinte relação:

V + F = A + 2

Em que:

V = números de vértices

F = número de faces

A = número de aresta.

Poliedros regulares:

Um poliedro é dito regular se todas as faces polígonos regulares e congruentes entre si. Em um poliedro regular, de cada vértice do poliedro parte o mesmo número de arestas.

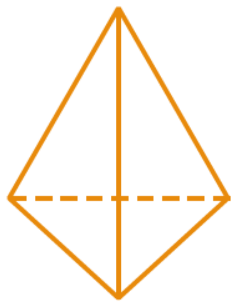
Só existe cinco poliedros regulares, conhecidos também como **Poliedros de Platão.**

Tetraedro regular

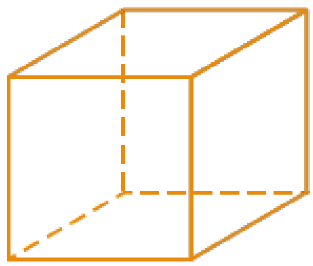
4 faces triangulares equiláteros;

4 vértices onde, em cada vértice, chegam 3 arestas;

6 arestas.



Hexágono regular

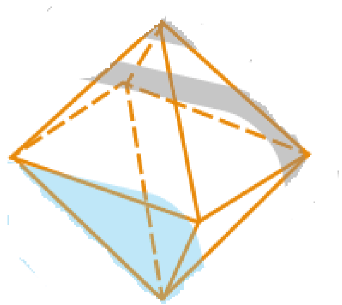


6 faces quadradas;

8 vértices onde, em cada vértice, chegam 3 arestas;

12 arestas

Octaedro regular

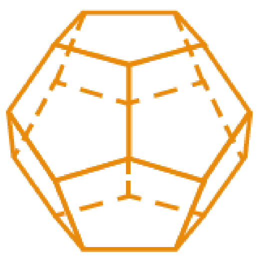


8 faces triangulares equiláteros;

6 vértices onde, em cada vértice, chegam 4 arestas;

12 arestas

Dodecaedro regular

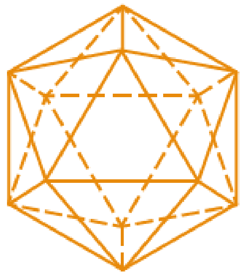


12 faces pentagonais regulares;

20 vértices onde, em cada vértice, chegam 3 arestas;

30 arestas

Icosaedro regular



20 faces triangulares equiláteras;

12 vértices onde, em cada vértice, chegam 5 arestas;

30 arestas

ATIVIDADES

1) Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é

2) Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

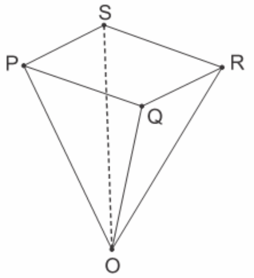


Figura 1

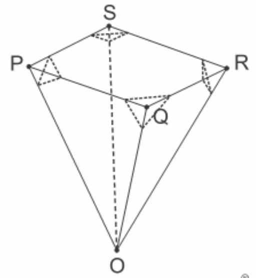


Figura 2

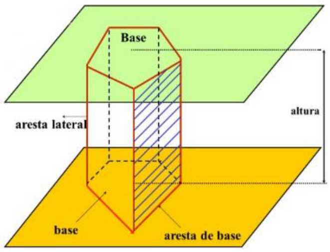
Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

GEOMETRIA ESPACIAL - Prismas; - Pirâmides e Tronco de pirâmide.

GEOMETRIA ESPACIAL - PRISMA

Prisma

Prisma é um poliedro convexo em que duas faces são polígonos quais quer, iguais e paralelos, chamados base, e todas as outras faces são paralelogramos, chamados faces laterais.



Nomenclatura:

Prisma triangular;

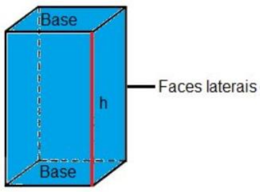
Prisma quadrangular;

Prisma pentagonal, etc

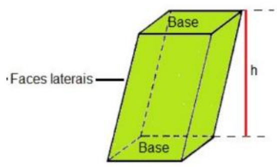
A denominação do prisma será de acordo com o número de lados do polígono da base.

Classificação:

Um prisma pode ser classificado em reto ou oblíquo.



Prisma reto



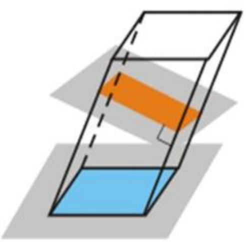
Prisma oblíquo

Um prisma reto é dito regular se as bases são polígonos regulares.

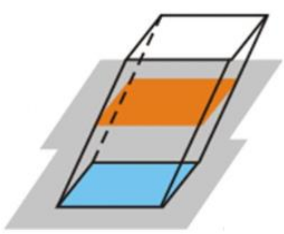
Secção:

A secção de um prisma por um plano pode ser reta ou transversal.

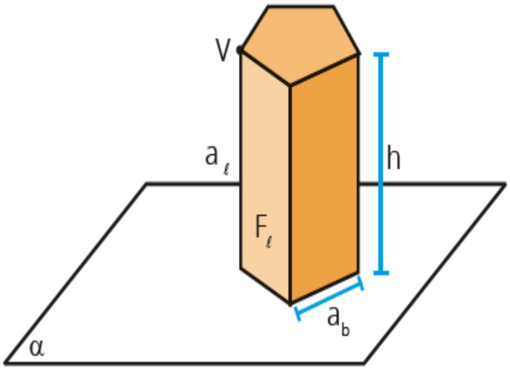
Reta



Transversal



Elementos do prisma:



Na figura,

h = altura

a_b = aresta da base

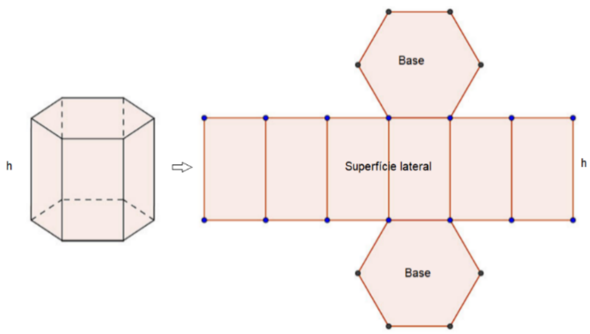
a_l = aresta lateral

V = vértice

F_l = face lateral

Área e volume do prisma:

Considere o prisma reto hexagonal e sua planificação:



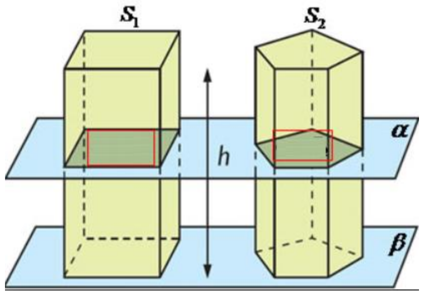
Área da superfície lateral – Como as bases de um prisma reto são seções retas do prisma, então a medida da superfície lateral será dada pelo produto do perímetro da base pela sua aresta lateral (altura).

Área total de um prisma reto – A medida da superfície total do prisma do reto é igual a sua área lateral mais o dobro da área da base.

Volume de um prisma – O volume de um prisma tem por medida o produto da área da base pela altura do prisma.

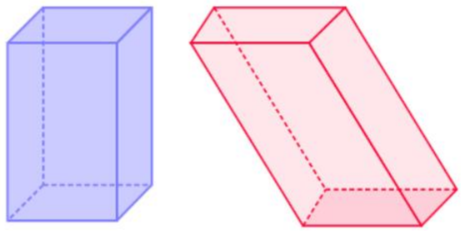
Princípio de Cavaliere:

Suponha dois sólidos com bases em um mesmo plano ∝. Se todo plano β, paralelo a ∝, que intercepta um dos sólidos e também intercepta o outro e determina nesses sólidos seções transversais de mesma área, então os sólidos têm o mesmo volume.



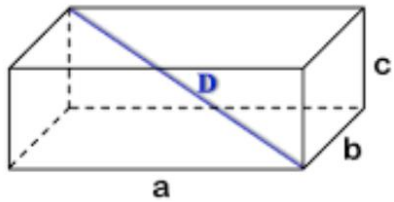
Paralelepípedo:

Denomina-se paralelepípedo o prisma no qual as seis faces são paralelogramos.



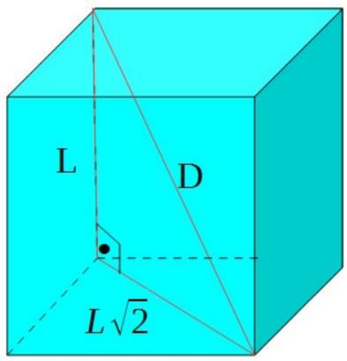
Paralelepípedo retângulo:

Paralelepípedo retângulo é um prisma reto cujas as bases são retangulares.



Cubo ou hexaedro:

O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas faces são todas quadradas.

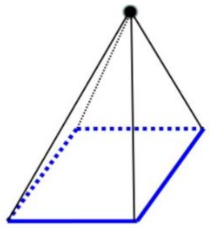


GEOMETRIA ESPACIAL - PIRÂMIDES

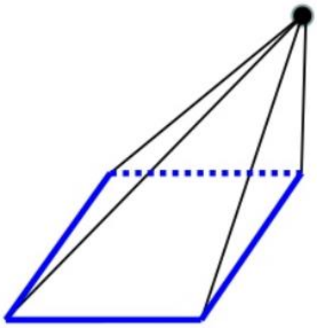
Pirâmides:

Em relação ao segmento que une o vértice da pirâmide ao centro da base, a pirâmide pode ser:

Reta – Quando esse segmento por perpendicular ao plano da base



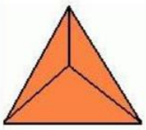
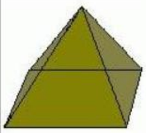
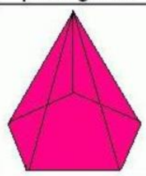
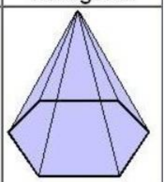
Oblíqua – Quando esse segmento não por perpendicular ao plano da base



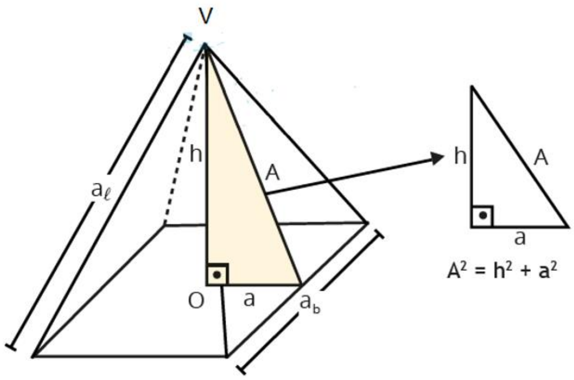
Classificação das Pirâmides:

Uma pirâmide é dita regular quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base.

Quanto ao número de lados as pirâmides são classificadas em:

triangular	quadrangular	pentagonal	hexagonal
			
base:triângulo	base:quadrado	base:pentágono	base:hexágono

Elementos das Pirâmides:



a → apótema da base

h → altura da pirâmide

A → apótema da pirâmide ou altura da face

O → centro da base

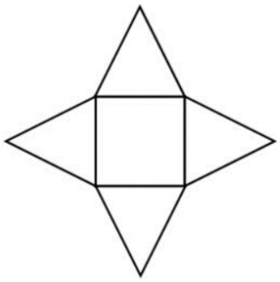
V → vértice

al → aresta lateral

ab → **aresta da base**

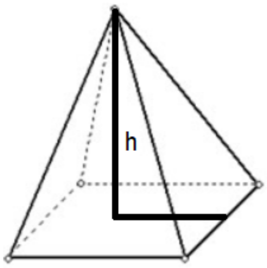
Área e volume da Pirâmide:

Área:



At=Al+Ab

Volume:

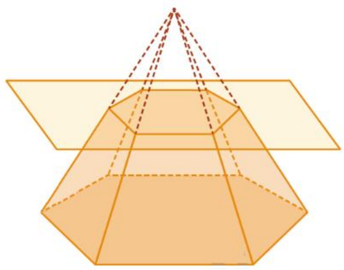


V=13Ab·h

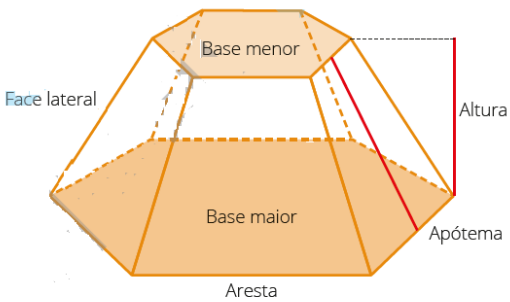
GEOMETRIA ESPACIAL – TRONCO DE PIRÂMIDES

Tronco de pirâmide:

O tronco da pirâmide é um sólido formado por um corte feito por um plano paralelo à base da pirâmide, como mostra a imagem.

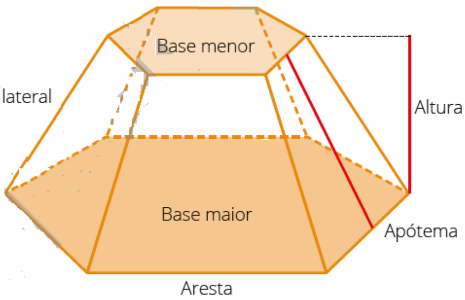


Elementos do Tronco da pirâmide:



Área do tronco da pirâmide:

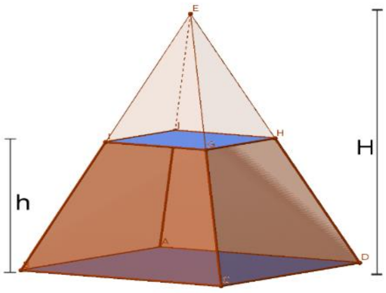
A área de um tronco de pirâmide é igual a soma das áreas de todos os polígonos que o formam. As bases menor e maior podem ser qualquer polígono, enquanto as faces laterais são trapézios.



At=AB+Ab+ Al

Volume do tronco da pirâmide:

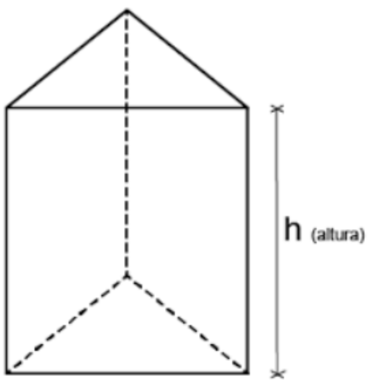
Para calcular o volume do tronco de uma pirâmide, devemos subtrair do volume da pirâmide original o volume da pirâmide menor formada pela secção transversal.



V=h3B+B·b+b

ATIVIDADES

01) (EEAR – 2004 B1) Um prisma regular de base triangular tem altura igual ao lado da base e volume igual a 16 *3* cm^3. A área lateral desse prisma, em cm^2, é



A) 24

B) 8

C) 4

D) 48

02) (EEAR-2001 A1) – A base de um prisma quadrangular regular está inscrita numa circunferência cujo círculo tem 100 π cm^2 de área. Se a altura do prisma mede 1,5 cm, então o volume desse prisma, em cm^3, é de:

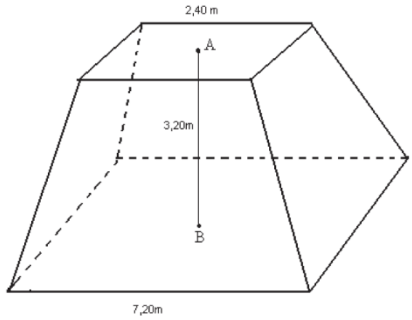
A) 200

B) 300

C) 400

D) 800

03) Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de 11m² por galão.



Desenho fora de escala
Os pontos A e B representam os centros das bases do tronco de pirâmide

O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

A) 6

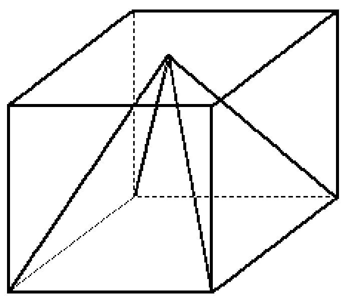
B) 7

C) 9

D) 10

E) 11

04) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura anterior. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m3, então, o volume do cubo, em m2, é igual a:



A) 9

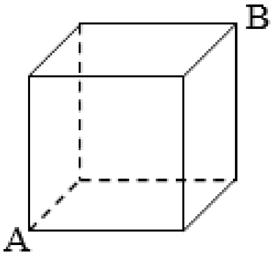
B) 12

C) 15

D) 18

E) 21

05) (EEAR – 2000 A2) Um alpinista deseja escalar uma pedra com a forma de um cubo, de 50 m de aresta. Desta forma, de acordo com a figura, partindo do ponto A e desejando colocar sua bandeira em B, caminhando pelas faces da pedra, o caminho mais curto que ele pode percorrer mede (em metros)



A) 503+2

B) 503

C) 505

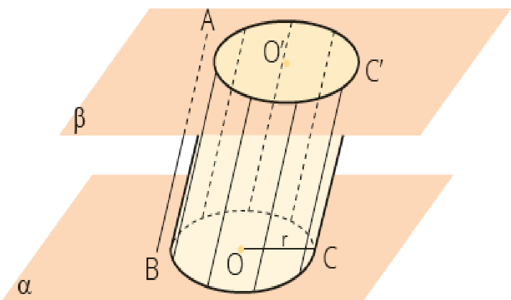
D) 5050+5

GEOMETRIA ESPACIAL - Cilindro; - Tronco de cilindro.

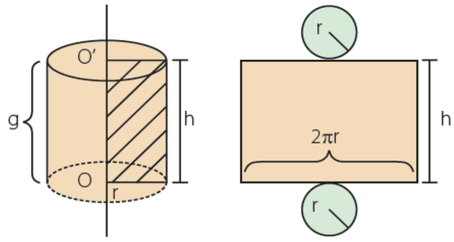
GEOMETRIA ESPACIAL - CILINDRO

Cilindro:

Considere dois planos α e β, paralelos e distintos, um círculo de centro O e raio r contido em α e um segmento de reta AB, com $A \in \beta$ e $B \in \alpha$. Cilindro é o conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes ao segmento AB com uma das extremidades no círculo de centro O e outro no plano β.

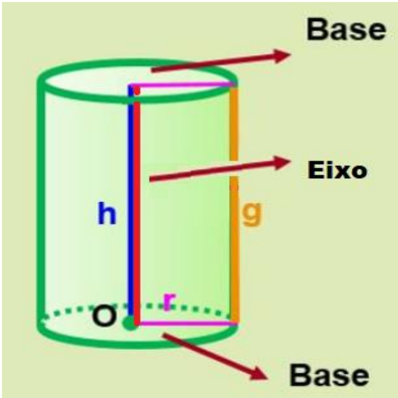


Cilindro reto, também chamado cilindro de revolução, é o sólido gelado pela rotação complete de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados.



(Planificação do cilindro)

Elementos do Cilindro:



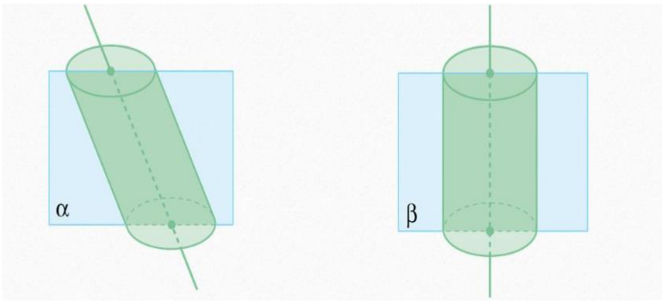
h – Altura (eixo)

g – Geratriz

r – Raio

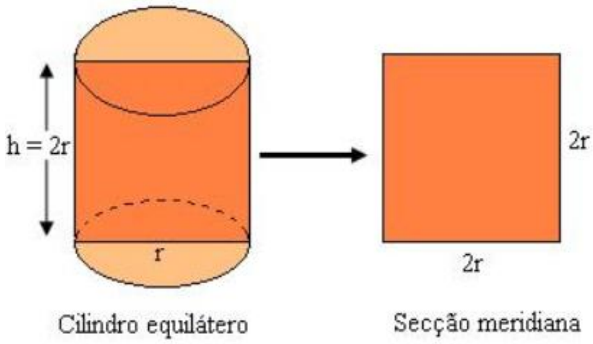
Secção meridiana:

É a região obtida na intersecção do cilindro e o plano que contém o seu eixo

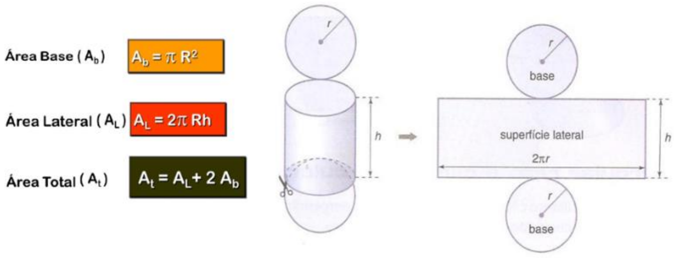


Observação:

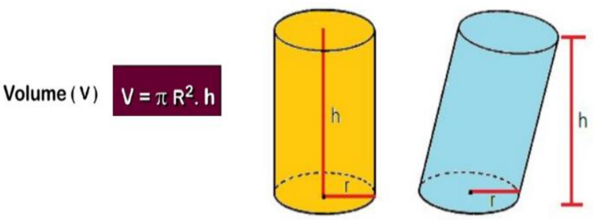
Todo cilindro cuja secção meridiana é um quadrado (altura igual ao diâmetro da base) é chamado **cilindro equilátero.**



Área do cilindro:



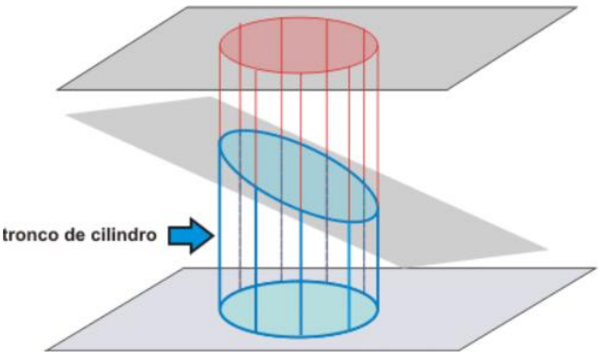
Volume do cilindro:



GEOMETRIA ESPACIAL – TRONCO DE CILINDRO

Tronco de cilindro:

Seccionando-se um cilindro por um plano não paralelo à base, obtêm-se dois sólidos geométricos, conforme percebe-se na figura abaixo.

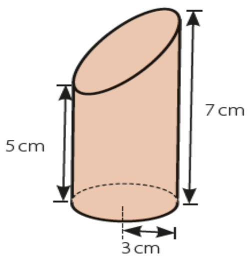


Cada um dos sólidos remanescentes após a secção pelo plano denomina-se **tronco de cilindro**

Volume de tronco de cilindro:

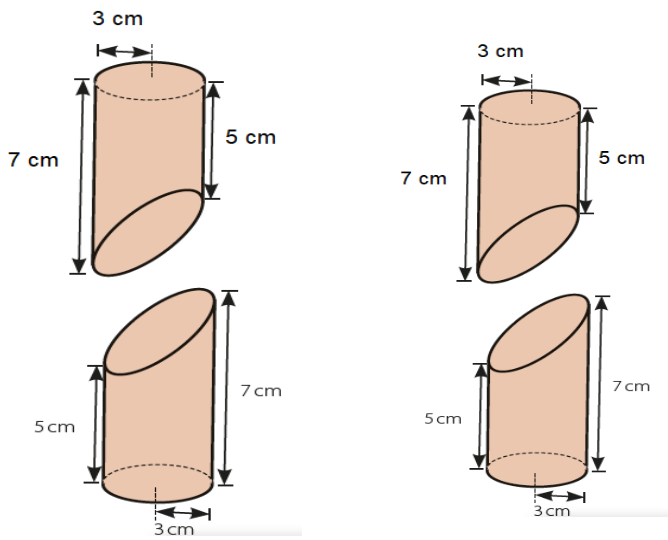
Pode-se calcular o volume do tronco de um cilindro utilizando um artifício simples e eficaz. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo: Considere o seguinte tronco de cilindro:



Área do tronco de cilindro:

Considerando ainda o exemplo anterior, sabe-se que a área lateral do cilindro é dada por $Al=2\pi rh$. Dessa forma, usando π = 3, a área do cilindro formado pela junção de dois troncos é:



Área lateral: $Al=2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Área da base $Ab=\pi r2$

Área da elipse $Aelipse=\pi ab$

Área total $Atotal= Al+A+Ae$

ATIVIDADES

01- (EsSA) Dobrando-se a altura de um cilindro circular reto e triplicando o raio de sua base, pode-se afirmar que seu volume fica multiplicado por

A) 6

B) 9

C) 1 2

D) 1 8

E) 36

02 – (EEAR) A secção meridiana de um cilindro equilátero tem 42 cm de diagonal. O volume do cilindro, em cm^3, é de:

a) 16 π

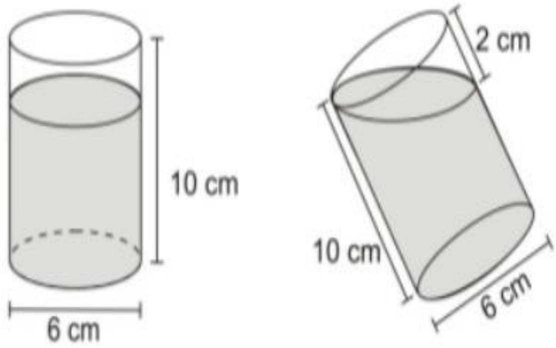
b) 24 π

c) 32 π

d) 54 π

03) Um copo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 6 cm e cuja altura mede 10 cm, contém certo volume de água. Inclinando-se o máximo possível esse copo, sem derramar a água, obtém a medida descrita nas

figuras abaixo. Determine, em cm^3, o volume de água contida nesse copo. (adote π = 3)

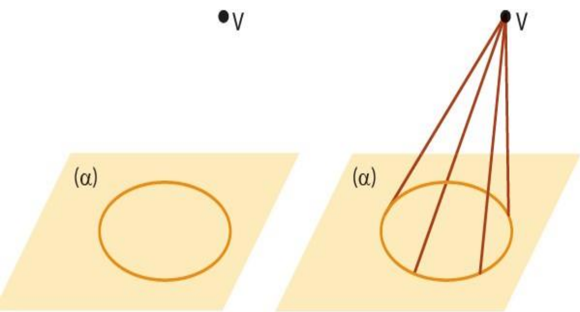


GEOMETRIA ESPACIAL -Cone; - Tronco de cone.

GEOMETRIA ESPACIAL – CONE

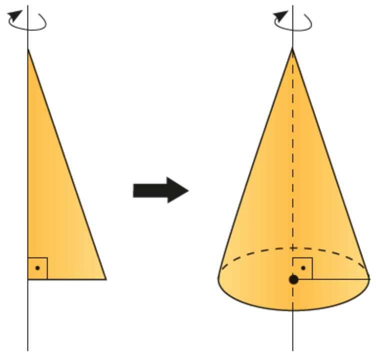
Cone

Considere uma circunferência contida num plano ∝. Se de um ponto V fora do plano traçarmos segmentos que ligam V a pontos dessa circunferência, o sólido formado será um cone.

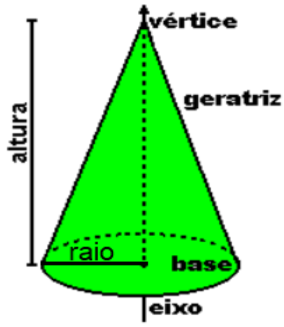


Cone reto

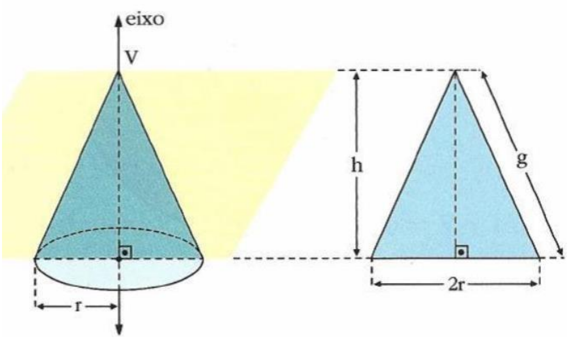
Cone reto, também conhecido como cone de revolução, é formado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus catetos.



Elementos do cone

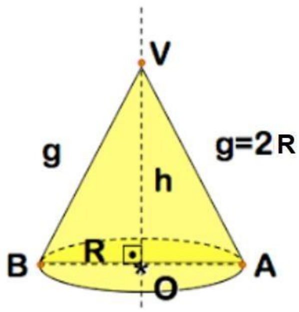


Secção meridiana do cone



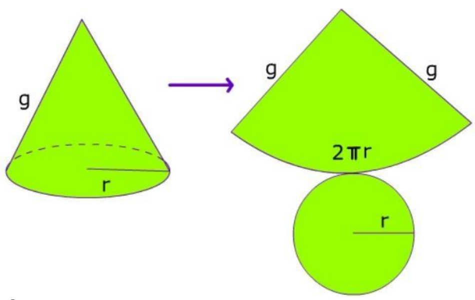
Observação:

O cone reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base (sua secção meridiana é um triângulo equilátero) é chamado de cone equilátero.



Área do cone

Após a planificação, observa-se que a superfície lateral do cone é um setor circular e sua base é a área do círculo; assim pode-se concluir que:

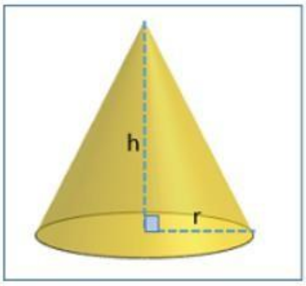


Área da base: Ab= πr^2

Área lateral: Al=πrg

Área total: At=πrg+ πr^2

Volume do cone



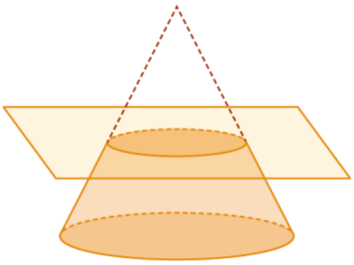
A$b.h$3

πr2.h3

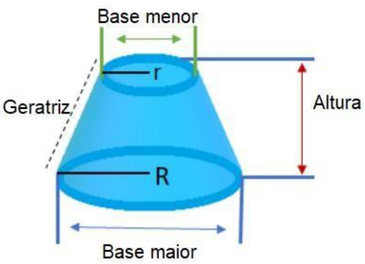
GEOMETRIA ESPACIAL – TRONCO DE CONE

Tronco de cone

O tronco de cone é um sólido formado por um corte feito por um plano paralelo à base do cone, como mostra a imagem:



Elementos do Tronco de cone



Área do Tronco de cone

Área lateral: $A_l = \pi\ \ R + r \cdot g_t$

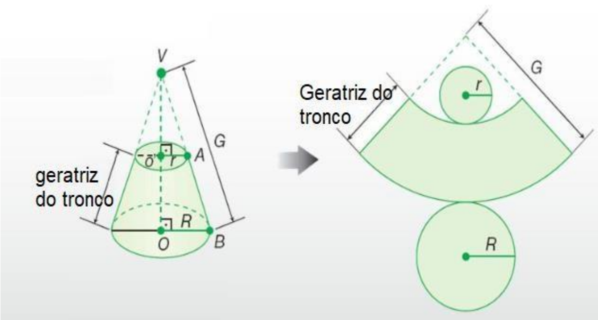
Área da base maior: $A_B = \pi R^2$

Área da base menor: $A_b = \pi r^2$

Área total: $A_t = A_l + A_B + A_b$

Volume do Tronco de cone

V=πh3(**R2**+Rr+r2**)**



ATIVIDADES

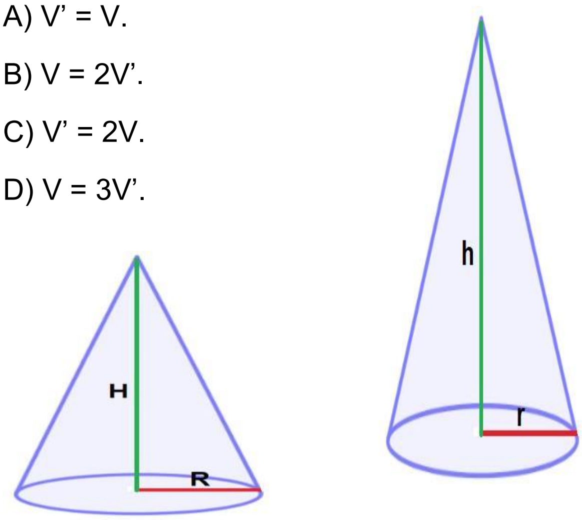
1) (EEAR) Sejam dois cones, A e B, de volumes V e V', respectivamente. Se as razões entre os raios das bases e entre as alturas de A e B são, respectivamente, 2 e 1/2, então podemos afirmar que

A) V' = V.

B) V = 2V'.

C) V' = 2V.

D) V = 3V'.



2) (EEAR) A área lateral de um cone circular reto é 24π cm^2. Se o raio da base desse cone mede 4 cm, então sua altura, em cm, mede

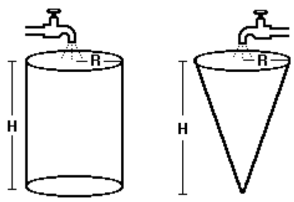
A)52

B) 53

C) 25

D) 35

3) No desenho a seguir, dois reservatórios de altura H e raio R, um cilíndrico e outro cônico, estão totalmente vazios e cada um será alimentado por uma torneira, ambas S,de mesma vazão. Se o reservatório cilíndrico leva 2 horas e meia para ficar completamente cheio, o tempo necessário para que isto ocorra com o reservatório cônico será de.



A) 2 h

B) 1 h e 30 min

C) 1 h

D) 50 min

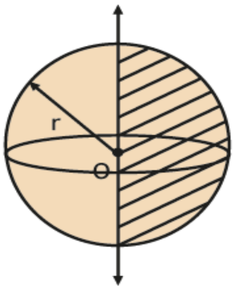
E) 30 min

GEOMETRIA ESPACIAL - Esfera; - Sólidos inscritos e circunscritos.

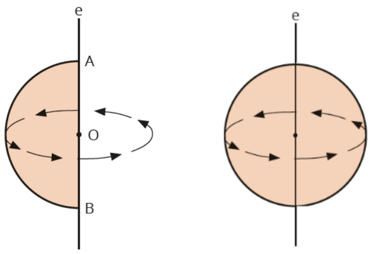
GEOMETRIA ESPACIAL - ESFERA

Esfera

Considere um ponto O e um número real positivo r. Esfera é o conjunto de todos os pontos dos espaços cuja distância ao ponto O é menor ou igual a r.



Pode-se obter uma esfera pela rotação completa de um semicírculo em torno do eixo que contém seu diâmetro.



Volume e área da superfície esférica

$$v_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

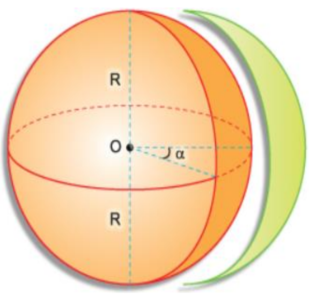
$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$

Partes da esfera

Fuso esférico

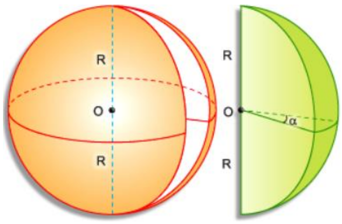
Área do fuso:

$$A = \left(\frac{\propto}{360^0}\right) \cdot 4\pi r^2$$



Cunha esférica

Volume da cunha

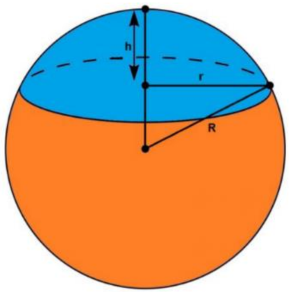


$$V = \left(\frac{\propto}{360^0}\right) \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

ATIVIDADES

Segmento esférico

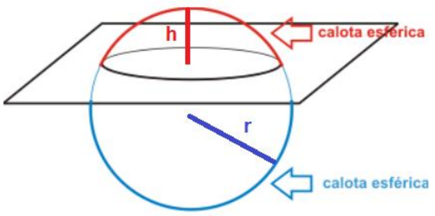
Volume do segmento esférico



$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3R - h)$$

Calota esférica (calota esférica é somente a superfície)

Área da calota

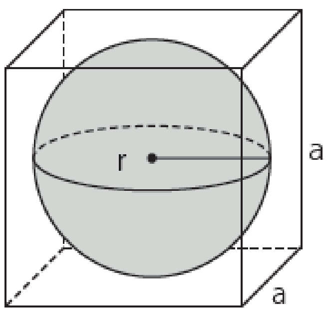


$$A = 2\pi r h$$

GEOMETRIA ESPACIAL – INSCRIÇÕES E CIRCUNSCRIÇÕES DE SÓLIDOS

Cubo circunscrito à esfera

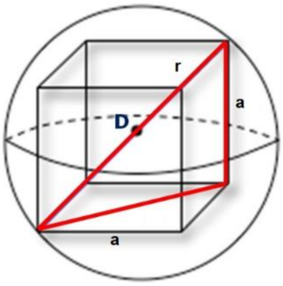
Considere um cubo de aresta a circunscrito à esfera de raio r. Percebemos, por meio da imagem, que:



$a = 2r$

Cubo inscrito na esfera

Considere um cubo de aresta a inscrito na esfera de raio r, sendo D a diagonal do cubo. (observe que D = 2r)

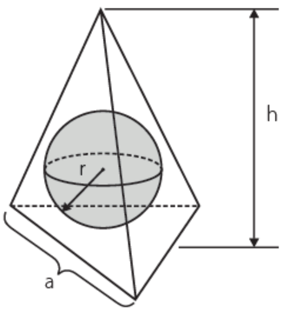


Como a medida da diagonal do cubo em função da medida de suas arestas é dada por D= $a3$, temos:

$$a = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Tetraedro regular circunscrito à esfera

Considere um tetraedro regular de aresta a e altura h circunscrito à esfera de raio r.

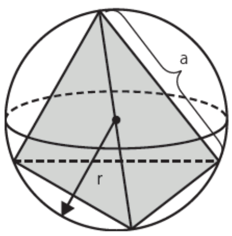


A altura do tetraedro regular de aresta a é igual a h= $a6$3. Como h = 4r, tem-se:

$$a = 2r\sqrt{6}$$

Tetraedro regular inscrito à esfera

Considere um tetraedro regular de aresta a inscrito na esfera de raio r.

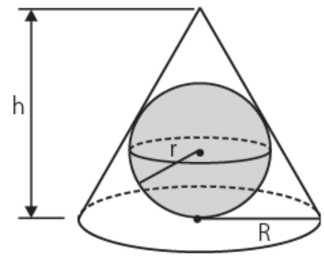


$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$a = \frac{2r\sqrt{6}}{3}$$

Cone equilátero circunscrito à esfera

Considere um cone equilátero de raio R e altura h circunscrito à esfera de raio r.

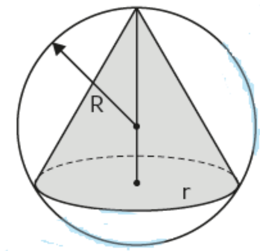


Tem-se que h = 3r logo

$$R = r\sqrt{3}$$

Cone equilátero inscrito na esfera

O centro da esfera coincide com o centro do cone equilátero (baricentro da secção meridiana). Consequentemente, a distância do centro da esfera ao vértice é equivalente a 2/3 da altura, a qual corresponde ao próprio raio.



Assim, como h = $r3$

$$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

ATIVIDADES

1) (EsSA) Duas esferas de aço de raio **4 cm** e 361 **cm** fundem-se para formar uma esfera maior. Considerando que não houve perda de material das esferas durante o processo de fundição, a medida do raio da nova esfera é de:

A) 5 c m

B) 5, 5 c m

C) 4, 5 c m

D) 6 c m

E) 7 cm

2) (EEAR) – Ao seccionar uma esfera, um plano determina um círculo de raio 16 cm. Se a distância

do plano ao centro da esfera é de 12 cm, então o raio da esfera, em cm, vale

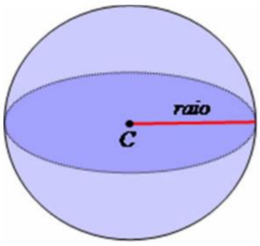
a) 20

b) 28

c) 30

d) 38

3) Uma esfera de raio R = 3 cm foi cortada ao meio, gerando dias semiesferas. A área da superfície de cada semiesfera é _______ π cm^2.



a) 18

b) 27

c) 22

d) 25

GEOMETRIA ANALÍTICA - Plano cartesiano - Distância entre dois pontos; - Ponto médio de um segmento; - Condição de alinhamento de três pontos.

GEOMETRIA ANALÍTICA

Sistema cartesiano ortogonal

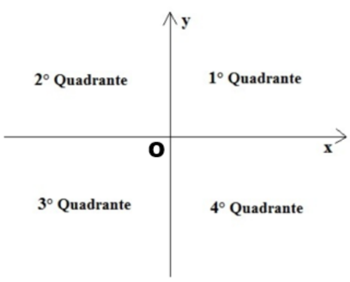
O sistema cartesiano ortogonal é formado por dois eixos, x e y, perpendiculares entre si, com a mesma origem O, e orientado.

O eixo x é denominado eixo das abscissas.

O eixo y é denominado eixo das ordenadas.

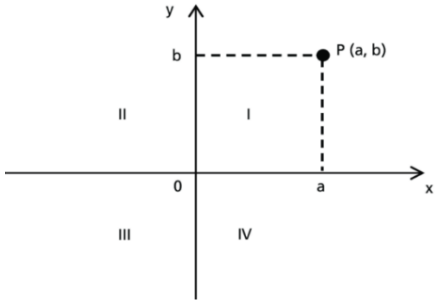
O ponto O (interseção dos dois eixos) é a origem do sistema cartesiano.

Os eixos x e y dividem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes



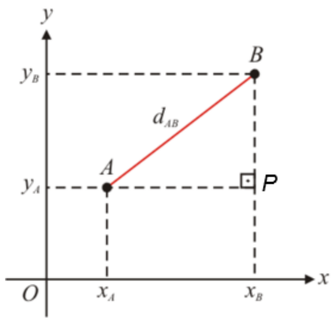
Tomando um ponto P, no primeiro quadrante, por exemplo, a e b são as projeções ortogonais de P sobre os eixos x e y.

O número real a é chamado abscissa do ponto P, e o número real b é chamado ordenada do ponto P. Os números a e b são chamados coordenadas do ponto P.



Distância entre dois pontos

Considere dois pontos distintos do plano cartesiano. A distância entre eles é a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.

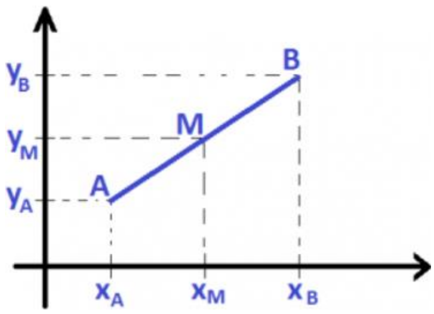


A distância entre A e B, dAB, é calculado por meio do Teorema de Pitágoras no triângulo ABP.

dAB=XB−XA2+yB−YA2

Ponto médio de um segmento

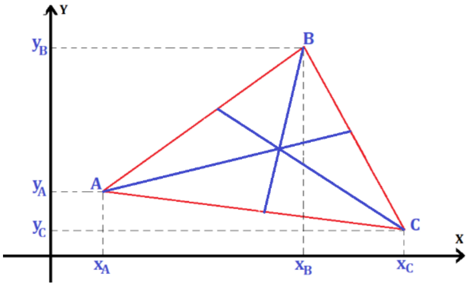
Considere os pontos AxA, yA e BxB, yB, conforme a figura a seguir.



As coordenadas do ponto médio M do segmento de extremos AxA, yA e BxB, yB é dada por:

MxA+xB2,yA+yB2

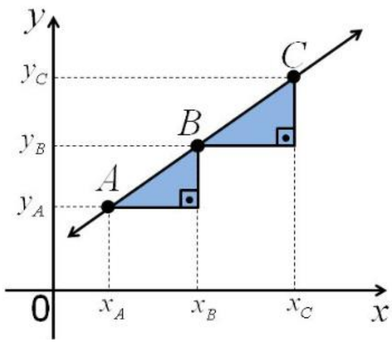
Coordenadas do baricentro de um triângulo



$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Condição de alinhamento de três pontos

Sejam três pontos AxA,yA, BB,yB e CxC,yC distintos e colineares.



Pelo Teorema de Tales, tem-se:

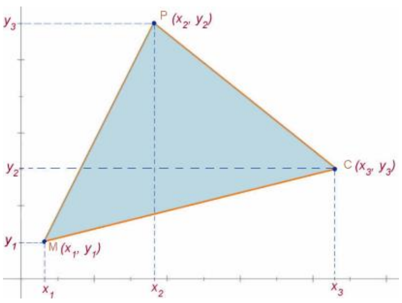
ABAC=xB−xAxC−xA e ABAC=yB−yAyC−yA, tem-se xB−xAxC−xA = yB−yAyC−yA

$$x_B \cdot y_C - x_B \cdot y_A - x_A \cdot y_C - x_C \cdot y_B + x_C \cdot y_A + x_A \cdot y_B = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Área de um triângulo

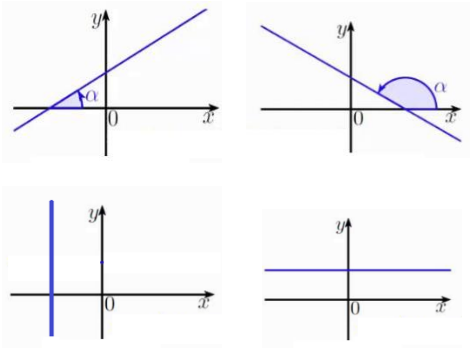
Seja PMC um triângulo qualquer no plano cartesiano. Se A = área de PMC, a expressão de A será dada por:



$$A = \frac{1}{2}|D|, \text{ em que D = } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Inclinação de uma reta

Observe os gráficos a seguir:



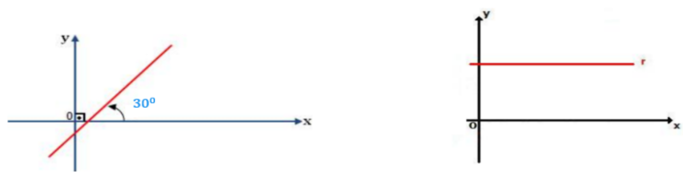
Denomina-se inclinação de uma reta a medida do ângulo ∝ que corresponde ao ângulo orientado no sentido anti-horário.

Coeficiente angular de uma reta

Chama-se coeficiente angular de uma reta e indica - se por m o número que é a tangente do ângulo de inclinação da reta.

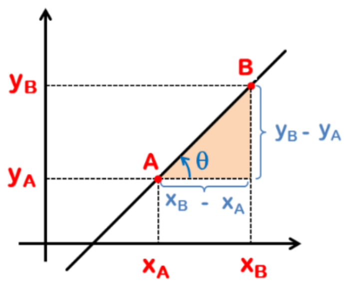
$$m = tg\alpha$$

Exemplos:



Observação:

O coeficiente angular de uma reta também pode ser calculado a partir de dois pontos AxA,yA e BxB,yB.



m=tgθ=yB−yAxB−xA=ΔyΔx

ATIVIDADES

1) Qual é a distância aproximada entre os pontos A e B, em centímetros, sabendo que suas coordenadas são A = (2,3) e B = (-2,-2)?

a) 41 cm

b) 6 cm

c) 49 cm

d) 41,5 cm

e) 6,4 cm

2) Dado um segmento de reta AB cujas extremidades estão nas coordenadas A = (1, 3) e B = (– 5, – 6), quais são as coordenadas do seu ponto médio?

a) M = (– 1,5; – 2)

b) M = (– 2; – 1,5)

c) M = (2; 1,5)

d) M = (1,5; 2)

e) M = (2,5; – 1)

3) A área do triângulo cujos vértices são os pontos (1,2), (3,5) e (4,-1) vale:

a) 4,5

b) 6

c) 7,5

d) 9

e) 15

GEOMETRIA ANALÍTICA - Equação geral e reduzida da reta; -Paralelismo e perpendicularidade; - Ângulo entre retas;

GEOMETRIA ANALÍTICA

Equação geral da reta

Seja $\boldsymbol{r}$ a reta que passa pelos pontos $A\ x_A,\ y_A$, $B\ x_B$, y_B e $P\ x,\ y$ um ponto qualquer pertencente à $\boldsymbol{r}$. Pela condição de alinhamento de três pontos, tem-se que:

$$\boldsymbol{r}: \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x_A} & \boldsymbol{y_A} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x_B} & \boldsymbol{y_B} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Desenvolvendo o determinante, obtém-se:

$\boldsymbol{y_A - y_B \ \cdot x + x_A - x_B + \ x_A y_B - x_B y_A}$

Fazendo $\boldsymbol{y_A - y_B \ = a,\ x_A - x_B = b}$ e $\boldsymbol{x_A y_B - x_B y_A \ = c,}$ tem-se que todo ponto P(x, Y) pertencente $\boldsymbol{r}$ deve satisfazer a equação:

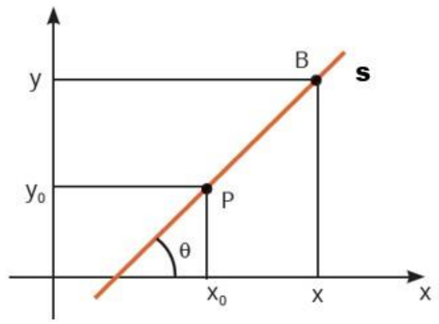
$\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

Essa equação é denominada equação geral da reta $\boldsymbol{r}$, em que $\boldsymbol{a,\ b}$ e $\boldsymbol{c}$ são números reais.

Equação reduzida da reta

Coeficiente angular ou declividade da reta s é a tangente trigonométrica da inclinação dessa reta e é representada por **m**.

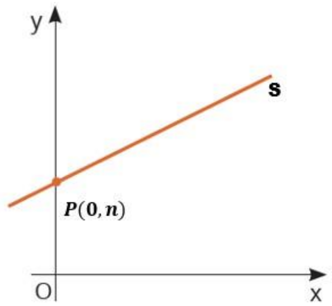
Considere que a reta s passa pelo ponto Px0,y0 e tem coeficiente angular **m**.



Como **m** = tgθ, temos:

$m{=}y{-}y0x{-}x0 \Rightarrow$ y - y_0= mx - x_0

Considere a reta s que passa pelo ponto **P(0, n)** cujo coeficiente angular é **m**



y - y_0 **= mx -** x_0

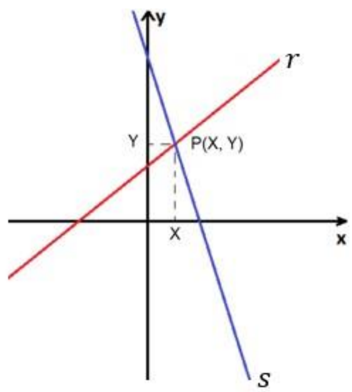
y - n = mx - 0

y = mx + n (equação reduzida da reta s)

Observação: Na equação reduzida da reta (**y=mx + n**), **m** é o coeficiente angular da reta e **n** é o coeficiente linear da reta.

Intersecção de retas:

A intersecção de duas retas r e s**,** ocorrem quando essas retas são concorrentes, existindo assim um ponto **p(x, y),** comum a elas, esse ponto é a solução do sistema formado pelas equações das duas retas.



Exemplo:

Determine o ponto de intersecção das retas $\boldsymbol{r_1}$: $\boldsymbol{-x+y=0}$ e $\boldsymbol{r_2}$: $\boldsymbol{-x-y=-2}$

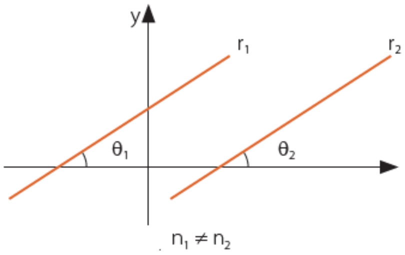
Paralelismo e perpendicularidade

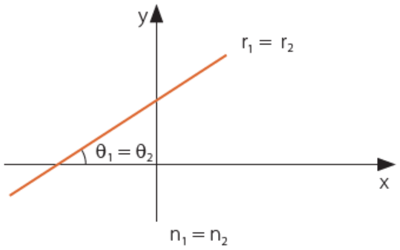
Vamos determinar a posição relativa entre retas por meio das relações entre seus coeficientes angulares. Considere as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$, cujas equações são dadas por

$y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ com inclinação θ_1 e θ_2, respectivamente.

$\theta_1 = \theta_2$

Se $\theta_1 = \theta_2 \neq 900$, temos:

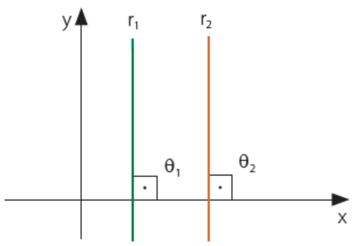


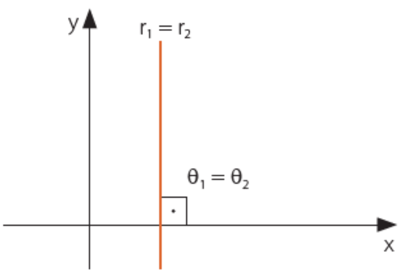


$\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow$ **tg** θ_1 **= tg** $\theta_2 \;\Leftrightarrow\; m_1 = m_2$

As retas são paralelas ou coincidentes

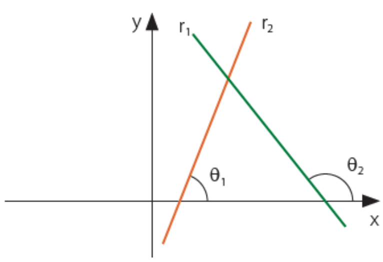
Se $\theta_1 = \theta_2 = 90^0$, temos:





$m_1 =$ tg θ_1 e $m_2 =$ tg θ_2 não estão definidos e as retas são verticais.

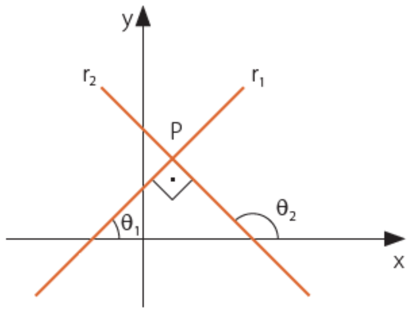
$\theta_1 \neq \theta_2$



Se $\theta_1 \neq 90^0$ e $\theta_2 \neq 90^0$, temos:

$\theta_1 \neq \theta_2 \Leftrightarrow$ tg $\theta_1 \neq tg\theta_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$

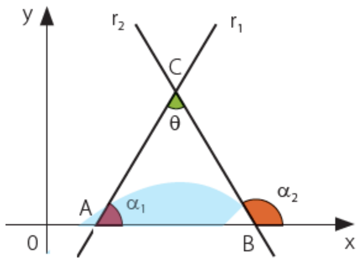
Duas retas r_1 e $r_2$de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente, são perpendiculares se, somente se,



$m1=1m2$ ou $m1.m2=-1$

Ângulo entre duas retas

Considere duas retas r_1 e r_2, não perpendiculares entre si e com coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente:



Considere o ΔABC e indicando a medidas do ângulo agudo entre $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ por $\boldsymbol{\theta}$, temos:

$\boldsymbol{\alpha_2 = \theta + \alpha_1 \Rightarrow \theta = \alpha_2 - \alpha_l \Rightarrow}$ **tg** $\boldsymbol{\theta =}$ **tg** $\boldsymbol{\alpha_2 - \alpha_1}$

Dessa forma temos:

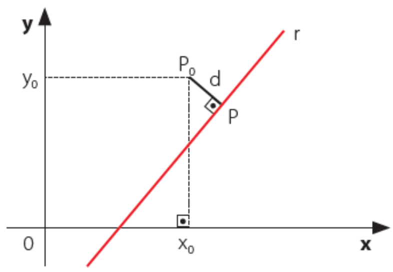
$tg\theta=tg\alpha2-tg\alpha11+tg\alpha2.tg\alpha1$

Se $\boldsymbol{tg\ \alpha_1 = m_1}$ e $\boldsymbol{tg\ \alpha_2 = m}$, podemos escrever:

$tg\theta=m2-m11+m2.m1$

Distância entre ponto e reta

Observe a figura:



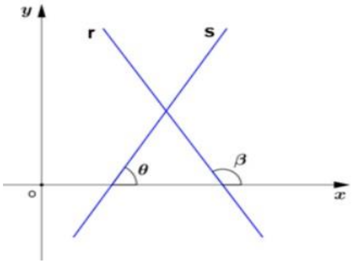
Seja dada a reta r, representada pela equação geral **ax + by + c = 0** e $P_0\ x_0,\ y_0$.

Podemos determinar a distância d do ponto P_0 à reta r pela fórmula:

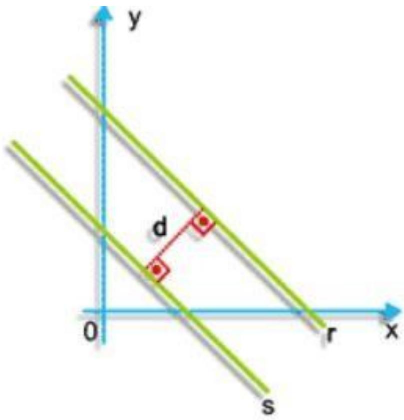
$$d_{P_0 r} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distância entre duas retas

Caso duas retas sejam concorrentes, não é possível definir uma distância entre elas, pois, para cada ponto de uma das retas, é possível calcular a distância à outra reta dada.



Retas paralelas



ATIVIDADES

1) A equação da reta que passa pelos pontos (3,3) e (6,6) é:

A) y = x.

B) y = 3x.

C) y = 6x.

D) 2y = x.

E) 6y = x.

2) A equação cartesiana da reta que passa pelo ponto (1, 1) e faz com o semi- eixo positivo ox um ângulo de 45° é:

3) Dada a reta r: $2x - 3y + 5 = 0$ e o ponto P(5, 6), a distância de P a r é?

4) A reta r é perpendicular à reta de equação 2x+y-1=0 no ponto de abscissa -1. A equação da reta r é

a) x - 2y + 7 = 0

b) 2x + y - 7 = 0

c) -x + 2y + 7 = 0

d) 2x + y + 7 = 0

e) x + 2y - 1 = 0

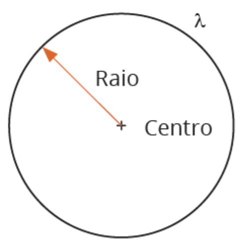
GEOMETRIA ANALÍTICA - Equação geral e reduzida da circunferência; - Posições relativas entre ponto e circunferência; - Posições relativas entre reta e circunferência; - Posições relativas entre duas circunferências.

GEOMETRIA ANALÍTICA

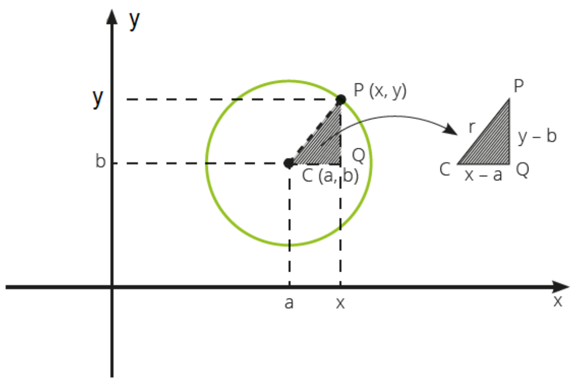
Equação reduzida da circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um único ponto fixo (centro) do mesmo plano.

A distância de qualquer ponto ao centro é o raio r.



Observe a circunferência de centro C(a, b) e raio r, no plano cartesiano:



Afirmamos que P(x, y) pertence à circunferência se, somente se, d(P,C) = r

Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔPQC

$r2$=x – a2+y – b2

x – a2+y – b2 = $r2$

Essa equação é denominada equação reduzida da circunferência, em que a e b são as coordenadas do centro e r é o raio da circunferência

Caso o centro da circunferência coincida com a origem do sistema cartesiano, temos:

x – 02+y – 02 = $r2$ ⇒ $x2+y2$ = $r2$

Equação geral da circunferência

Para obtermos a equação geral de uma circunferência, basta desenvolver a equação reduzida. Dessa forma:

x – a2+y – b2 = $r2$

Considerando $a2+b2-r2=C$, temos que a equação geral da circunferência é dada por:

$x2+y2-2ax-2by+C=0$

Exemplo:

Determine a equação geral e reduzida da circunferência cujo centro é C (3, -1) e cujo raio mede 2 cm.

Equação da circunferência: Condições para representação

Seja a circunferência de equação geral:

$\boldsymbol{x2+y2-2ax-2by+(a2+b2-r2) = 0}$ (1)

Procuremos as condições que a equação geral do 20 grau com duas incógnitas dada por

$\boldsymbol{Ax2+Bxy+Cy2+Dx+Ey+F = 0}$ (2)

deve satisfazer para que represente uma circunferência.

É necessário e suficiente que consigamos determinar os valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{r}$, tais que as duas equações, (1) e (2), tenham as mesmas soluções.

$\boldsymbol{x2+y2-2ax-2by+(a2+b2-r2) = 0}$ (1)

$\boldsymbol{Ax2+Bxy+Cy2+Dx+Ey+F = 0}$ (2)

É necessário e suficiente que consigamos determinar os valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{r}$, tais que as duas equações, (1) e (2), tenham as mesmas soluções.

Confrontando os coeficientes dos termos semelhantes nas equações citadas, levando-se em conta que B = 0 (porque não existe o termo em xy na equação (1)) e que A ≠ 0, conclui-se que:

$\boldsymbol{A1=C1=D-2a=E-2b=Fa2+b2-r2}$

Dessas proporções tiramos:

A = C ≠ 0

2Aa = - D

2Ab = - E

A($\boldsymbol{a2+b2-r2}$) = F

Concluímos que, dada uma equação do 20 grau com duas variáveis, as condições necessárias e suficiente para que a equação represente uma circunferência, no sistema cartesiano ortogonal, são A = C ≠ 0 e B = 0.

$(Ax2+Bxy+Cy2+Dx+Ey+F=0)$

Respeitada essas condições e fazendo operações matemática para tornar A e B iguais 1, pode-se aferir que:

$-D2-E2$ é o centro da circunferência;

$r2 = a2+b2-$ F (onde r é o raio da circunferência)

Então,

Se $a2+b2-$ F > 0 ⇒ circunferência real de centro (a, b) e raio r

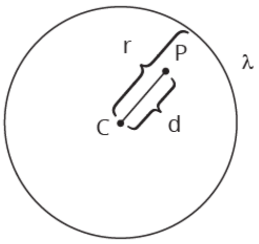
Se $a2+b2-$ F = 0 ⇒ circunferência de raio nulo, reduzindo-se ao ponto (a, b)

Se $a2+b2-$ F < 0 ⇒ circunferência imaginária

Posições relativas entre ponto e circunferência

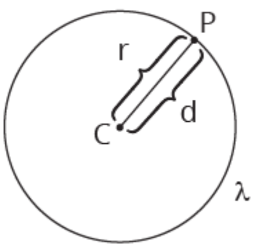
Considere uma circunferência λ de centro C(a, b) e raio **r,** e seja P um ponto qualquer. Então, podemos admitir que:

O ponto P é interior à λ ou seja, a distância do ponto até C é menor do que **r.**



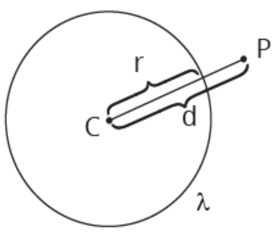
dPC<r

O ponto P é pertence à λ ou seja, a distância do ponto até C é igual ao raio **r.**



dPC=r

O ponto P é exterior à λ ou seja, a distância do ponto até C é maior do que **r.**

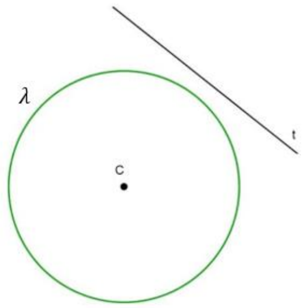


dPC>r

Posições relativas entre reta e circunferência

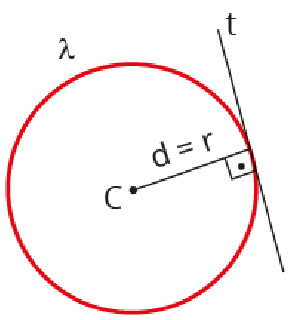
Considere uma circunferência λ de centro C(a, b) e raio $\boldsymbol{r}$. Existem três posições relativas entre a circunferência e uma reta t. Sendo d a distância entre a reta e o centro da circunferência, podemos admitir que:

A reta t é exterior à circunferência λ:

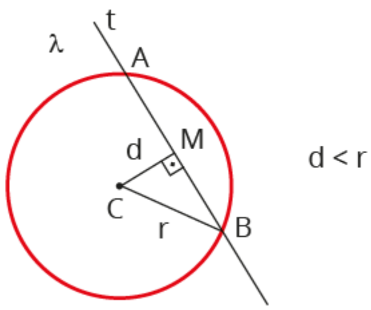


dtC > r

A reta t é tangente à circunferência λ:



A reta t é secante à circunferência λ:



Observações: Considere o sistema formado pela equação da circunferência λ e a reta t:

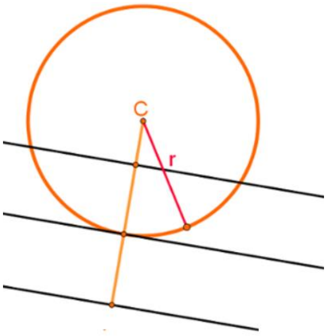
$\mathbf{x-m2+y-n2=r2ax+by+c=0}$

A resolução desse sistema pode apresentar três situações:

1) Não existe par ordenado que solucione o sistema – isso ocorre quando t é exterior à λ;

2) O sistema tem uma única solução - isso ocorre quando t é tangente λ. Nesse caso, a solução é representada pelas coordenadas do ponto de tangência;

3) O sistema tem duas soluções - isso ocorre quando t for secante à λ. Nesse caso, as soluções são representadas pelas coordenadas dos dois pontos de interseção entre t e λ.

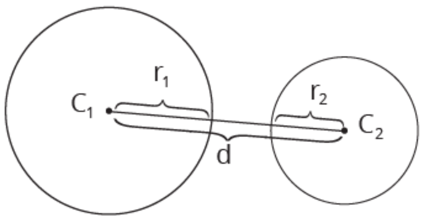


Posições relativas entre duas circunferências

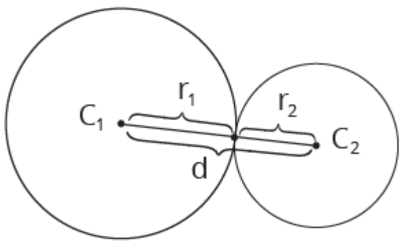
Considere uma circunferência $\lambda 1$, de raio $r1$ e $c1$, e outra $\lambda 2$, de raio $r2$ e $c2$.

Considere, também, a distância d entre essas duas circunferências $\lambda 1$ e $\lambda 2$ são possíveis as seguintes posições relativas:

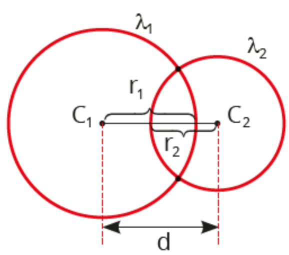
Externas



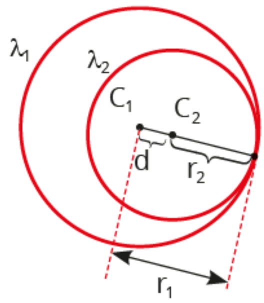
Tangentes externas



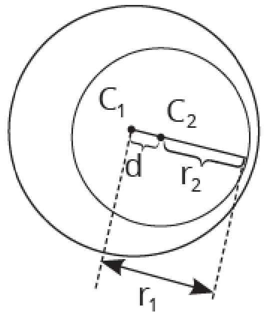
Circunferências secantes



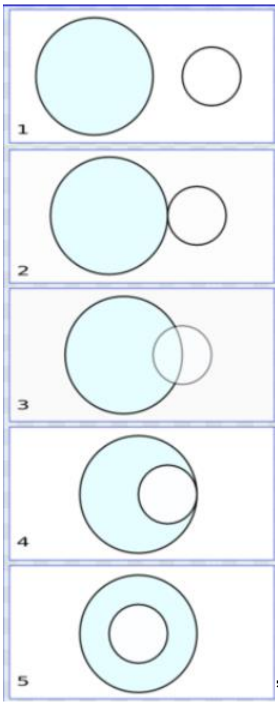
Circunferências tangentes internas



Circunferência de raio menor interna à de raio maior



Número de soluções do sistema de equações	Posição relativa entre as circunferências
Nenhuma	Externas ou internas
Uma	Tangentes externas ou tangentes internas
Duas	Secantes



,

ATIVIDADES

01) Dados os pontos A(-1,2) e B(0,4), pertencentes a um sistema de eixos ortogonais num plano, podemos afirmar que:

I. A distância entre esses pontos é 5.

II. A equação da reta que passa por esse ponto é 2x – y = -4.

III. A equação da circunferência que tem centro em A e passa por B -e $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Das afirmativas anteriores, é(são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) I e II.

e) II e III.

02) Em qual das alternativas a seguir, o ponto p pertence ‘a circunferência β?

a) P(5, 6); β: $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 =$

b) P(1, 2); β: $(x - 2)^2 + (y- 2)^2 =$

c) P (1, 5); β: $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$

d) P (1, 3); β: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$

e) P (3, 1); β: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$

03) No plano cartesiano, a reta de equação 3x + 4y = 17 tangencia uma circunferência de centro no ponto (1,1). A equação dessa circunferência é:

a) $x^2 + y – 2x – 2y – 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 3 = 0$

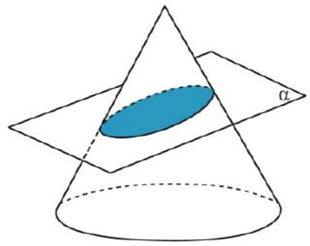
e) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 1 = 0$

GEOMETRIA ANALÍTICA - Elipse.

GEOMETRIA ANALÍTICA

Elise (origem)

Seccionando um cone reto com um plano não paralelo ao plano da base desse cone, a figura obtida é uma elipse.



Definição:

Sejam F1 e F2 dois pontos distintos de um plano, tais que d(F1, F2) = 2c ≠ 0. Chamamos de elipse o lugar geométrico dos pontos desse plano, cuja soma das distâncias aos dois pontos F1 e F2 é uma constante 2a (> 2c).

Elementos da elipse

Pontos principais:

$A1$, $A2$ e $B1$,$B2$ - Vértices

$F1$, e $F2$ - Focos

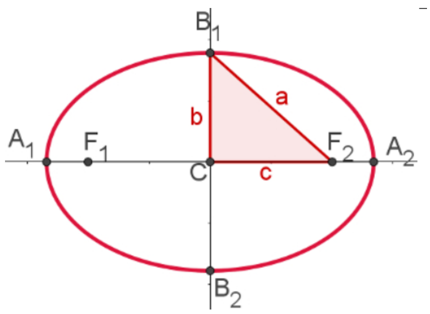
C – Centro

Segmentos:

A1$A2$ Eixo maior m($A1$,$A2$) = 2a

B1$B2$ Eixo menor m($B1$,$B2$) = 2b

A1$A2$ Distância focal m($F1$,$F2$) = 2c



Excentricidade:

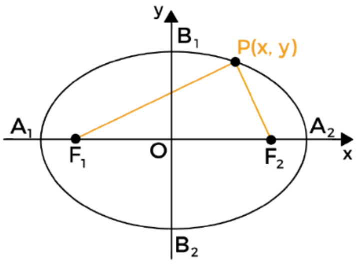
$e=ca$ (0<e<1)

Relação importante:

$a^2=b^2+c^2$

Equação reduzida:

I - Quando o centro da elipse se encontra na origem do plano cartesiano e os focos no eixo das abscissas temos:



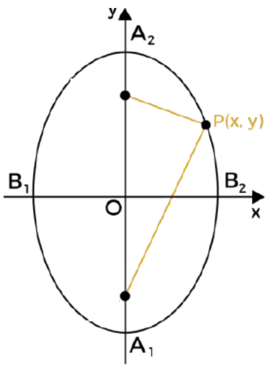
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Exemplo:

Dada uma elipse cuja medida do eixo maior é igual a 10 e a distância entre os focos vale 6, com os focos no eixo das abscissas e o centro na origem, determine a equação dessa elipse.

Equação reduzida:

II - Quando o centro da elipse se encontra na origem do plano cartesiano e os focos no eixo das ordenadas temos:



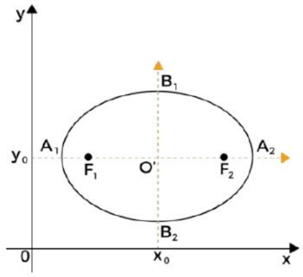
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Exemplo:

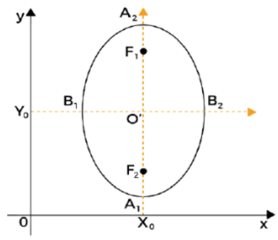
Dada uma elipse cuja medida do eixo maior é igual a 10 e a distância entre os focos vale 8, com os focos no eixo das ordenadas e o centro na origem, determine a equação e a excentricidade dessa elipse.

Equação reduzida:

III - Quando o centro da elipse não se encontra na origem do plano cartesiano temos:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Exemplo:

Determine a equação da elipse que tem centro no ponto O(6, 8), semieixo maior a = 10, semieixo menor b = 8 e eixo maior paralelo ao eixo x?

Equação geral:

A equação geral é obtida pelo desenvolvimento das formas reduzidas.

Considere a elipse $\frac{(x-m)^2}{E_1}+\frac{(y-n)^2}{E_2}=1$, com $E_1 \neq E_2$, com ambos positivos. Ao desenvolver e ordenar, obtemos

$$E_2x^2+E_1y^2-2E_2mx-2E_1ny+E_2m^2+E_1n^2-E_1E_2=0$$

Observação:

Quando a equação da elipse se apresentar em sua forma geral é recomendável transforma essa equação para sua forma reduzida, conforme exemplos a seguir:

Exemplos:

Dada as seguintes equações das elipses representadas em suas formas gerais. Determine suas formas reduzidas:

01) $4x^2+9y^2=36$

02) $4x^2-24x+25y^2-64=0$

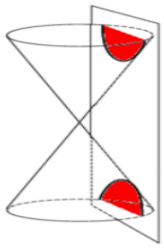
03) $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$

GEOMETRIA ANALÍTICA - Hipérbole.

GEOMETRIA ANALÍTICA

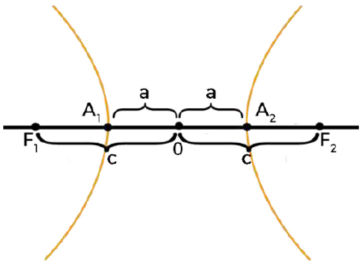
Hipérbole (origem)

Seccionando dois cones retos justa postos pelo vértice por um plano, a figura obtida (composta de duas partes iguais – ramos) é uma hipérbole.

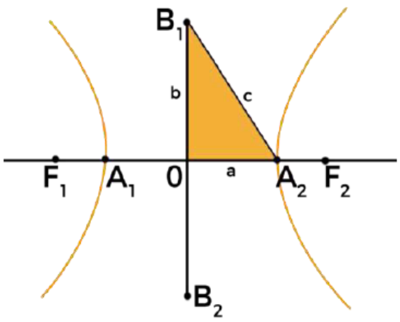


Definição:

Dado dois pontos fixos $F1$ e $F2$ de um plano, tais que d($F1$,$F2$) = 2c ≠ 0, chamamos hipérbole o lugar geométrico dos pontos desse plano, cujo módulo da diferença de suas distâncias aos dois pontos $F1$ e $F2$ é a constante 2a (< 2c).



Elementos da hipérbole:



Pontos principais:

$A1$ e $A2$ - Vértices

$F1$ e $F2$ - Focos

O – Centro

Segmentos:

A1$A2$ Eixo real mA1, $A2$ = 2a

B1$B2$ Eixo imaginário mB1, $BA2$ = 2b

F1$F2$ Distância focal mF1, $F2$ = 2c

Excentricidade:

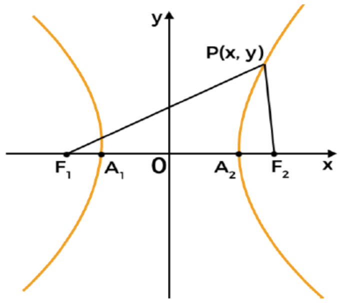
$e=ca$ **(> 1)**

Relação importante:

$c2=a2+b2$

Equação reduzida:

Quando o centro da hipérbole se encontra na origem do plano cartesiano e os focos no eixo real (abscissas) temos (hipérbole horizontal):



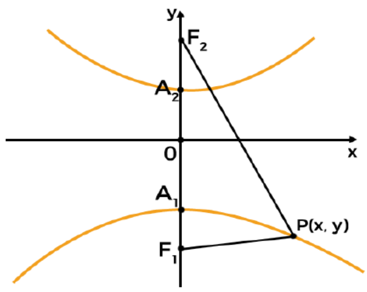
$$\mathbf{x2a2-y2b2=1}$$

Exemplo:

Dada uma hipérbole cujo o eixo real é igual a 10 e a distância entre os focos vale 12, com os focos no eixo das abcissas e o centro na origem, determine a equação dessa hipérbole.

Equação reduzida:

Quando o centro da hipérbole se encontra na origem do plano cartesiano e os focos no eixo imaginário (ordenadas) temos (hipérbole vertical):



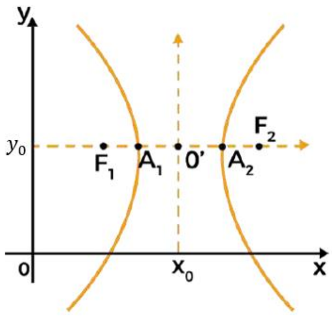
$$\mathbf{y2a2-x2b2=1}$$

Exemplo:

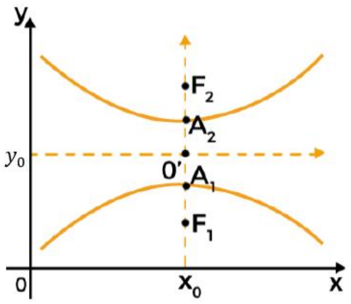
Dada uma hipérbole que tem como coordenadas dos focos $F1$ e $F2$, os pontos (0, -15) e (0, 15) e eixo real medindo 24, determine assim a equação reduzida dessa hipérbole.

Equação reduzida:

Quando o centro da hipérbole não se encontra na origem do plano cartesiano:



$(x - \boldsymbol{x}0)2\boldsymbol{a}2 - (y - \boldsymbol{y}0)2\boldsymbol{b}2 = 1$



$(y - \boldsymbol{y}0)2\boldsymbol{a}2 - (x - \boldsymbol{x}0)2\boldsymbol{b}2 = 1$

Exemplo:

Dada uma hipérbole de equação reduzida x – 4216−y – 429=1, determine as coordenadas dos focos $F1$ e $F2$ dessa hipérbole.

Equação geral:

A equação geral da hipérbole é obtida pelo desenvolvimento das formas reduzidas.

Observação:

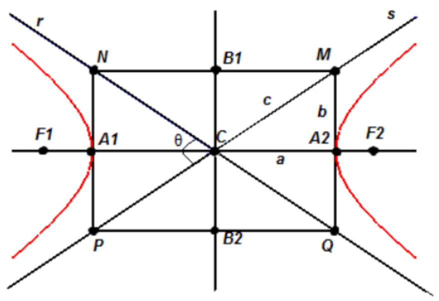
Quando a equação da hipérbole se apresentar em sua forma geral é recomendável transforma essa equação para sua forma reduzida, conforme exemplos a seguir:

Exemplo:

Determine a distância focal na hipérbole cuja equação é

$4x2-25y2-32x-100y-136=0$

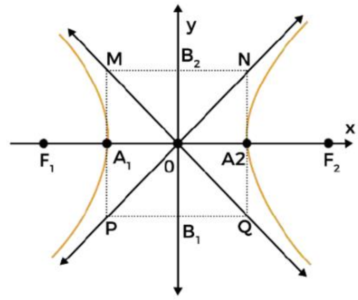
Assíntotas da hipérbole:



Equações das retas assíntotas da hipérbole:

Observação:

Quando a=b, o retângulo é um quadrado. Nessa situação as assíntotas são retas perpendiculares e a hipérbole é denominada de hipérbole equilátera.



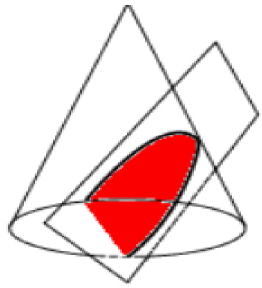
Exemplo:

Determine as equações das assíntotas da hipérbole $16x2-9y2=144$

GEOMETRIA ANALÍTICA - Parábola.

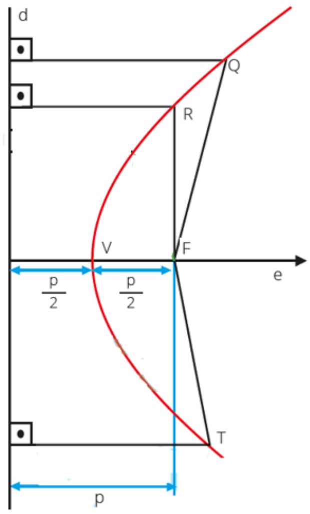
GEOMETRIA ANALÍTICA

Parábola (origem)

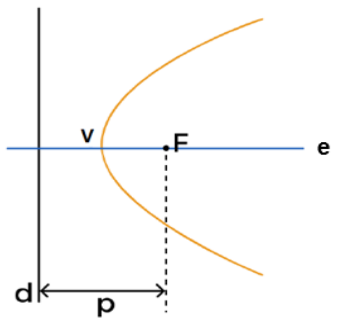


Definição:

Parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano situados a igual distância de uma reta fixa d e de um ponto fixo F não pertencente a d.



Elementos da parábola:



Pontos principais:

V - Vértice

F - Foco

e – eixo de simetria

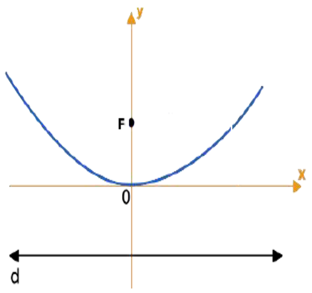
Segmentos:

p – parâmetro

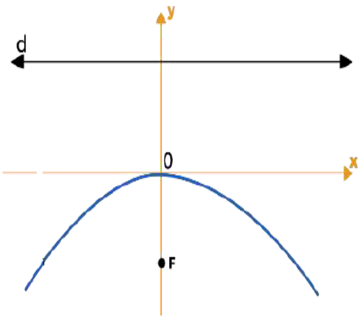
$VF \;=\; P2$

Equação reduzida da parábola:

Quando a parábola tem seu vértice na origem do plano cartesiano e concavidade voltada para cima ou para baixo:



$x2=2P\cdot y$

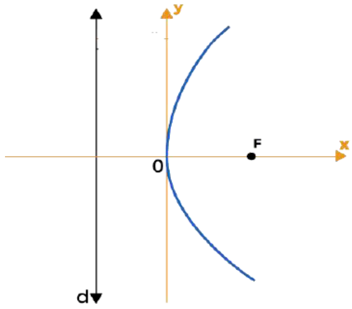


$x2=-\,2P\cdot y$

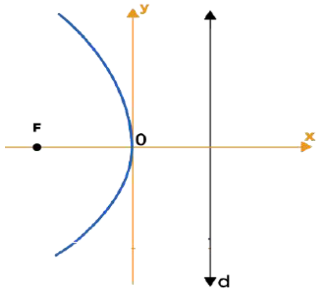
Exemplo:

Dada a parábola com vértice na origem do plano cartesiano, foco no semieixo positivo das ordenadas e parâmetro P=6. Determine sua equação reduzida.

Quando a parábola tem seu vértice na origem do plano cartesiano e concavidade voltada para direita ou para esquerda:



$y2=2P\cdot x$

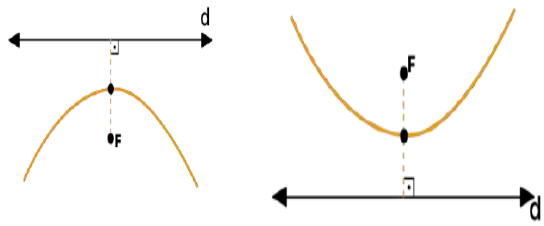


$y2=-\,2P\cdot x$

Exemplo:

Dada a parábola com vértice na origem do plano cartesiano e foco F(8, 0). Determine sua equação reduzida.

Quando o vértice da parábola, encontra-se no ponto qualquer do plano cartesiano e concavidade voltada para direita ou para esquerda:



$(x-xv)2=\pm\,2P\cdot(y-yv)$

Quando o vértice da parábola, encontra-se no ponto qualquer do plano cartesiano e concavidade voltada para direita ou para esquerda:

$(y-yv)2=\pm\,2P\cdot(x-xv)$

Exemplo:

Dada a parábola que tem equação x = - 2 como equação da reta diretriz e foco o ponto F (4, 2). Determine sua equação reduzida.

Equação geral da parábola:

A equação geral da parábola é obtida pelo desenvolvimento das formas reduzidas.

$x=ay2+by+c$ (parábola com eixo de simetria na horizontal)

$y=ax2+bx+c$ (parábola com eixo de simetria na vertical)

Observação:

Quando a equação da parábola se apresentar em sua forma geral é recomendável transforma essa equação para sua forma reduzida, conforme exemplos a seguir:

Exemplos:

01) Dada a parábola de equação $x2-4x-12y-8=0$. Determine a equação reduzida dessa parábola.

02) Determine o vértice, o parâmetro e a equação da diretriz da parábola $y=x2-6x+8$.

03) Dada a parábola de equação $y2-12y+20x+16=0$. Determine foco dessa parábola.

(Contagem e Análise Combinatória) - Fatorial; - Princípio Fundamenta da Contagem; - Arranjos e Combinações Simples.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Fatorial

Sendo $\boldsymbol{n}$ um número natural qualquer, define-se o **fatorial de $\boldsymbol{n}$** e denota-se $\boldsymbol{n!}$

a expressão:

$\boldsymbol{n!=nn-1\cdot n-2\cdot \ldots .2\cdot 1}$

Em outras palavras, o fatorial de $\boldsymbol{n}$ é o produto de todos os naturais menores ou iguais a $\boldsymbol{n}$

Por convenção, define-se que 0!=1 e 1! = 1

Exemplos:

1) 2!=

2) 5!=

3) 10!7! =

4) 8!·3!5!·6! =

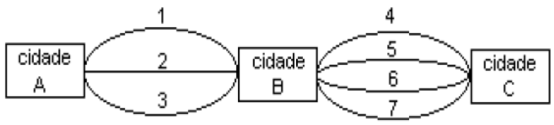
5) $n!n-2!$=

6) n – 1!$n+1!$=

Princípio Fundamenta da Contagem

Exemplo:

Para viajar de uma cidade A para uma cidade C, por uma rodovia, deve-se passar necessariamente por uma cidade B. Se há 3 rodovias ligando A a B e 4 rodovias ligando B a C, quantas opções diferentes há para ir de A até C?



Arranjos simples

Um arranjo simples de n elementos tomados p a p, é qualquer agrupamento de p elementos distintos, escolhidos entre n elementos, que diferem entre si pela sua ordem ou natureza.

Exemplo:

São escritos todos os agrupamentos de dois elementos distintos que se formam com as letras da palavra BOLA, que diferem pela ordem ou pela natureza.

(B, O) (B, L) (B, A)

(O, B) (O, L) (O, A)

(L, B) (L, O) (L, A)

(A, B) (A, O) (A, L)

As sequências de dois elementos obtidas são chamadas de ARRANJOS SIMPLES, onde as sequencias diferem pela sua natureza e pela sua ordem.

Cálculo do número de arranjos simples:

Exemplo:

São escritos todos os agrupamentos de dois elementos distintos que se formam com as letras da palavra BOLA, que diferem pela ordem ou pela natureza.

(B, O) (B, L) (B, A)

(O, B) (O, L) (O, A)

(L, B) (L, O) (L, A)

(A, B) (A, O) (A, L)

$\boldsymbol{An,P=n!n-p!}$

Combinações simples

Uma combinação simples de n elementos tomados p a p, é qualquer agrupamento de p elementos distintos, escolhidos entre n elementos, que diferem entre si apenas pela sua natureza.

Exemplo:

São escritos todos os agrupamentos de dois elementos distintos que se formam com as letras da palavra BOLA, que diferem pela natureza (subconjuntos).

{B, O} {B, L} {B, A}

{O, L} {O, A}

{L, A}

Os subconjuntos de dois elementos obtidas são chamadas de COMBINAÇÕES SIMPLES.

Cálculo do número de combinações simples:

Exemplo:

São escritos todos os agrupamentos de dois elementos distintos que se formam com as letras da palavra BOLA, que diferem pela natureza (subconjuntos).

{B, O} {B, L} {B, A}

{O, L} {O, A}

{L, A}

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Observação:

A diferenciação entre combinações e arranjos será de fundamental importância na resolução dos problemas de contagem.

COMBINAÇÕES ⇒ a ordem não importa

ARRANJOS ⇒ a ordem importa

ATIVIDADES

01) Quantos números inteiros positivos menores que 1000 (com algarismos distintos) podemos formar?

a) 504

b) 645

c) 648

d) 738

e) 845

02) Com um grupo de 15 pessoas, do qual fazem parte Lúcia e José, o número de comissões distintas que se podem formar com 5 membros, incluindo, necessariamente, Lúcia e José, é:

a) 3003

b) 792

c) 455

d) 286

e) 348

03) De um grupo de 8 candidatos serão escolhidos 3 para ser o gerente, o caixa e o vendedor de uma loja. De quantas maneiras pode ser feita essa escolha?

a) 24

b) 56

c) 336

d) 1444

e) 120

(Contagem e Análise Combinatória) - Permutações.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

PERMUTAÇÃO SIMPLES

É um caso particular de arranjos simples. A ***permutação*** de ***n*** elementos distintos é o arranjo de *n* elementos distintos tomados *n* a *n*.

$$P_n = A_{n,n} = n!$$

Exemplos:

01) De quantas maneiras 5 pessoas podem ficar em fila?

02) Quantos anagramas distintos da palavra ROTAS são possíveis obter, se as letras R e T devem permanecer juntas?

03) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de seis algarismos distintos. Dentre eles, quantos serão iniciados por números pares e são divisíveis por 5?

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES

É o número de permutações de ***n*** objetos onde há a repetição de um ou mais elementos. Para ser mais objetivo, o primeiro elemento repete-se ∝**1 vezes**, o segundo elemento repete-se ∝**2 vezes**, ..., o **k-ésimo** elemento repete-se ∝**k vezes**.

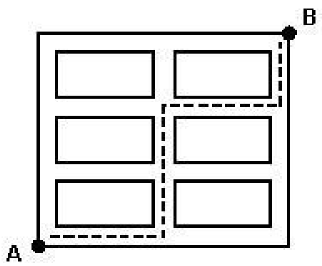
$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2 \ldots \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \alpha_k!}$$

Exemplos:

01) Qual a quantidade de anagramas distintos da palavra ARARA?

02) Quantos anagramas da palavra BANANA, iniciados com a letra A é possível obter?

03) O desenho representa seis quarteirões retangulares e um dos possíveis percursos de A até B. O número total de percursos mínimos distintos, de A até B, ao longo das ruas, é:

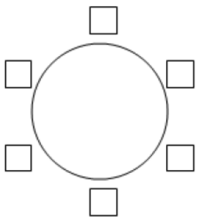


PERMUTAÇÃO CIRCULAR

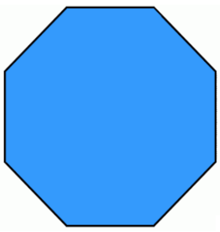
É o caso em que deseja colocar elementos em torno de objetos circulares. É dado por: $\boldsymbol{P_{(n-1)} = (n-1)!}$ **ou** $\frac{n!}{n}$

Exemplos:

01) De quantas maneiras distintas 6 pessoas podem sentar-se em uma mesa redonda



02) Numa reunião de 8 países (EUA, Canadá, Inglaterra, Alemanha, Japão, Rússia, Itália e França), deseja-se acomodar os 8 representantes de governo em torno de uma mesa em forma de octógono regular (figura abaixo). De quantos modos posso dispô-los se os representantes dos EUA, Canadá e Inglaterra devem sentar- se sempre juntos?



a) 720

b) 120

c) 4320

d) 5040

(Contagem e Análise Combinatória) "Binômio de Newton introdução" - Números binomiais; - Triângulo de Pascal.

BINÔMIO DE NEWTON

NÚMEROS BINÔMIAIS

O número binomial de ordem n e classe p $\binom{n}{p}$, com n e p $\in$ ao conjunto dos naturais e $n \geq p$, é a combinação simples de n, p a p

$\boldsymbol{\binom{n}{p} = C_{n_p} = \frac{n!}{P!\cdot(n-p)!}}$

Exemplo:

$\boldsymbol{\binom{6}{3}}$ =

$\boldsymbol{\binom{5}{0}}$ =

$\boldsymbol{\binom{0}{0}} =$

$\boldsymbol{\binom{4}{3}}$ =

$\boldsymbol{\binom{4}{4}} =$

Observação:

Dois números binomiais de mesmo numerador e cuja soma dos denominadores é igual ao numerador são chamados **binomiais complementares**.

Propriedade de números binomiais

Dois números binomiais são iguais se tiverem o mesmo numerador e:

Seus denominadores forem iguais, ou

São binomiais complementares.

Exemplo:

Dado dois números binomiais $\binom{7}{3}$ e $\binom{7}{x}$, sabendo que $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$, determine o valor de x

TRIÂNGULO DE PASCAL

É uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os números binomiais.

Calcular:

1) $\binom{8}{2} + \binom{8}{3} =$

2) $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\cdots\binom{7}{7}=$

3) $\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}=$

4) $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\cdots\binom{9}{2}=$

(Contagem e Análise Combinatória) - Binômio de Newton.

BINÔMIO DE NEWTON

DESENVOLVIMENTO DO BINÔMIO DE NEWTON

Toda potência da forma $(A+B)^n$ com A e $B \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é conhecida como binômio de Newton.

Para $n=0$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathbf{0}}=$

Para $n=1$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathbf{1}}=$

Para $n=2$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathbf{2}}=$

Para $n=3$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathbf{3}}=$

Para $n=4$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathbf{4}}=$

Exemplo 01:

$(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{3}}=$

$(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{5}}=$

$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{4}}$

TERMO GERAL DO BINÔMIO $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{n}}$

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}+\mathbf{1}}=\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{p}}$$

$\boldsymbol{p}+\mathbf{1}=$ Posição do termo

Observações:

$(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{4}}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}+\mathbf{8}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{24}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{32}^{\boldsymbol{x}}+\mathbf{16}$

Exemplo:

1) Dado binômio de Newton $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{4}}$, determine: $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{4}}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}+\mathbf{8}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{24}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{32}^{\boldsymbol{x}}+\mathbf{16}$

a) O termo em x^3

b) O termo médio

c) O termo independente

2) Calcule o quarto termo na expansão do binômio $(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{6}}$

3) Calcule o termo central no desenvolvimento de $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{8}}$

4) Determine o termo independente do binômio $\left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{6}}$

(Probabilidade)

PROBABILIDADE

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Chama-se de experimento aleatório todo experimento cujo resultado é imprevisível, ou seja, mesmo que realizado em condições semelhantes, pode apresentar resultados diferentes.

Exemplo: Lançar um dado e observar o número mostrado na face superior.

Observação

Um experimento aleatório, embora imprevisível, deve apresentar resultados com uma certa regularidade. Assim, ao lançarmos uma moeda um certo número de vezes, espera-se que os resultados cara ou coroa ocorram aproximadamente o mesmo número de vezes.

ESPAÇO AMOSTRAL

Considerando um experimento aleatório, chama-se espaço amostral desse experimento o conjunto de todos os resultados possíveis.

Representamos o espaço amostral pela letra Ω e n(Ω) o número de elementos do espaço amostral.

Exemplo: Lançamento de um dado não viciado

W **= {1, 2, 3, 4, 5, 6}** → **n(**W**) = 6**

Observação

Dizemos que um espaço amostral é equiprovável quando seus elementos têm a mesma chance de ocorrer.

EVENTO DE UM EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Chama-se evento de um experimento aleatório qualquer subconjunto do espaço amostral desse experimento.

Exemplo: Lançamento de um dado não viciado

PAR = {2, 4, 6} à n(PAR) = **3**

PRIMO = {2, 3, 5) à n(PRIMO) = **3**

PROBABILIDADE DE UM EVENTO

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Onde:

P(E) à probabilidade de ocorrer o evento E.

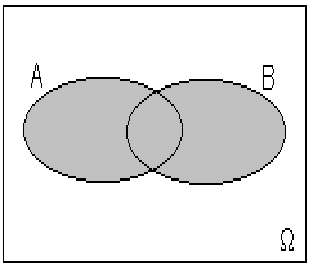
n(E) à número de casos possíveis do evento E.

n(Ω) à número de elementos do espaço amostral.

Exemplo:

Qual a probabilidade de que ao jogarmos um dado não viciado, a face superior dê um número primo?

PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS



P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)

Exemplo: Uma urna possui 10 bolas numeradas de 1 a 10. Qual a probabilidade de que ao tirarmos aleatoriamente uma bola, ela seja par ou maior que 7?

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Vamos entender probabilidade condicional por meio dos seguintes exemplos:

Exemplo 01

Em uma sala de aula existem 50 pessoas, sendo 30 mulheres e 20 homens, das quais 10 homens e 15 mulheres são casados.

Se escolhermos uma dessas pessoas ao acaso e essa pessoa for homem, qual é a probabilidade de ele ser casado?

PROBABILIDADE DA INTERSEÇÃO DE DOIS VENTOS INDEPENDENTES

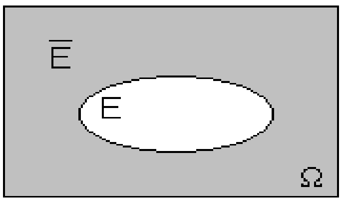
P**(A ∩ B) = P(A) . P(B)**

Observação

Podemos generalizar para o caso de *n* eventos independentes:

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \ldots P(A_n)$

PROBABILIDADE DO COMPLEMENTAR DE UM EVENTO



$$n(\overline{E}) = n(\Omega) - n(E)$$

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Observação

Quando calculamos a probabilidade do complementar de um evento E, estamos calculando a probabilidade de não ocorrer o evento E

Exemplo:

Uma urna possui 100 bolas numeradas de 1 até 100. Qual a probabilidade de que ao tirarmos uma bola aleatoriamente, o número escrito não termine em zero?

ATIVIDADES

01) Uma moeda é lançada 3 vezes. Observando-se as possíveis sequências de resultados obtidos, qual a probabilidade de sair cara no máximo 2 vezes?

a) 3/8

b) 4/8

c) 5/8

d) 6/8

e) 7/8

02) Escolhe-se, ao acaso, um dos anagramas de palavra xadrez. Qual a probabilidade de a palavra escolhida começar por xa?

a) 2/3

b) 1/4

c) 1/6

d) 1/30

e) 2/35

03) Um recipiente contém 4 balas de hortelã, 5 de morango e 3 de anis. Se duas balas forem retiradas sucessivamente e sem reposição, a probabilidade de que sejam de mesmo sabor é:

a) 18/65

b) 19/66

c) 20/67

d) 21/68

e) 22/69

(Matriz) - Tipos de matrizes; - Operações com matrizes; - Matriz inversa.

MATRIZ

Denomina-se matriz toda tabela composta por m linhas e n colunas. Por isso, diz-se que essa possui ordem m x n (lê-se “m por n”).

Uma matriz pode ser representada por parênteses ( ), colchetes [ ] ou barras duplas || ||. Veja os seguintes exemplos:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

A matriz A é de ordem 2 x 2

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \sqrt{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$$

A matriz B é de ordem 3 x 1

$$\boldsymbol{C} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{10} \end{matrix} \right\|$$

A matriz C é de ordem 3 x 3

É costume indicar um elemento qualquer de uma matriz por $\boldsymbol{a_{ij}}$ **ou** $\boldsymbol{b_{ij}}$ **ou** $\boldsymbol{c_{ij}}$ etc., em que i é a posição da linha e j a da coluna.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{3} \\ \mathbf{21} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-14} & \sqrt{\mathbf{2}} \\ \mathbf{-39} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

O elemento $\sqrt{2}$ **está no cruzamento (posição) da linha 3 com coluna 3. Por isso, ele fica indicado por $\boldsymbol{a_{33}}$, ou seja $\boldsymbol{a_{33}}$ = $\sqrt{\mathbf{2}}$.**

Representação genérica

Uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$, pode ser representada conforme mostrado a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Tipos de matrizes

Matriz quadrada

Matriz quadrada é toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{mxn}$, em que m = n

Se A é quadrada, pode-se dizer que sua ordem é somente n

Matriz retangular

Matriz retangular é toda matriz cujo número de linhas é diferente do número de colunas.

Exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A = (a_{ij})_{mxn}}$,

em que m ≠ n

Matriz linha

Matriz linha é toda matriz que possui apenas uma linha.

Exemplo:

$\boldsymbol{A} = [\mathbf{2} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{3}]$

$\boldsymbol{A = (a_{ij})_{mxn}}$,

em que m = 1

Matriz coluna

Matriz linha é toda matriz que possui apenas uma coluna.

Exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \sqrt{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A = (a_{ij})_{mxn}}$, **em que n = 1**

Matriz nula

Matriz linha é toda matriz cujos elementos são todos iguais a zero.

Exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A = (a_{ij})_{mxn}}$,

em que $\boldsymbol{a_{ij} = 0, \forall ij}$

Matriz triangular

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{mxn}$.é denominada matriz triangular, se todos elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

$A = (a_{ij})_{mxn}$. é denominada matriz diagonal, se $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$, ou seja os elementos que não pertence à diagonal principal são nulos (iguais a zero).

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

Chama-se matriz identidade de ordem n, indicada por, I_n. A matriz:

$I_n = (a_{ij})_{mxn}$., tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Isso significa que os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo

$$I_1 = (1)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

Chama-se transposta da matriz $(a_{ij})_{mxn}$, que se indica por A^t, a matriz:

$A^t = (b_{ji})_{n \times m}$, **tal que** $b_{ji} = a_{ij}$

Em outras palavras troca linha por coluna.

Exemplo:

$$A = [2 \quad 1 \quad 3] \qquad \Rightarrow \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Propriedades da matriz transposta

Considere as matrizes A e B e o número real k. Valem as seguintes propriedades:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(A^t)^t = A$$

$$(k \cdot A)^t = kA^t$$

$$(AB)^t = A^t \cdot B^t$$

Matriz simétrica

Uma matriz quadrada A é simétrica se, somente se, $A = A^t$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -8 \\ 3 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -8 \\ 3 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

Matriz antissimétrica

Uma matriz quadrada A é simétrica se, somente se, $A = -A^t$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A^t = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz oposta

É a matriz que se obtém de uma matriz A, trocando-se o sinal de cada um dos seus elementos. Indica-se a oposta de uma matriz A por – A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -8 \\ 3 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -3 \\ -5 & 0 & 8 \\ -3 & +8 & -16 \end{bmatrix}$$

Igualdade de matrizes

Dada duas matrizes de mesma ordem A e B, diz-se que A = B se, somente se, todo elemento de A for igual ao seu correspondente em B.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -8 \\ 3 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-10} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-8} & \mathbf{16} \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Adição de matrizes

A operação de adição de matrizes só pode ser efetuada com matrizes de mesma dimensão.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, então a matriz soma é dada por:

Subtração de matrizes

Dada duas matrizes A e B do mesmo tipo m x n, chamamos de diferença de A com B a soma da matriz A com a matriz oposta de B ou seja,

A – B = A + (- B).

Exemplo:

Sejam A = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Então,

A + (-B) =

Produto de um número real por matriz

Considere a matriz A, do tipo m x n, e um número real k. Definimos o produto de k por A, e denotamos por k·A a matriz obtida ao multiplicar todos os elementos de A por k.

Exemplo:

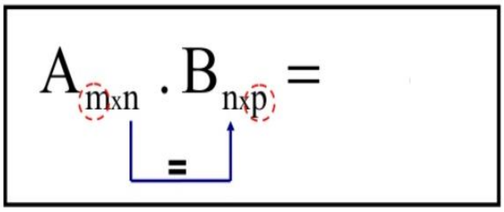
Sejam $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ e k = 2. Então,

K·A = **2**·$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$**=**

Multiplicação de matrizes

<u>Condição de existência da multiplicação</u>

Só é possível multiplicar duas matrizes A e B se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.



O produto entre duas matrizes é obtido multiplicando-se cada linha da primeira matriz por cada coluna da segunda matriz.

Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, determine se possível, a matriz produto AB.

Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A terá uma matriz inversa se existir uma matriz B, quadrada de ordem n, tal que:

$$\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A = I_n}$$

Observação: A matriz inversa de A é indicada por A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Exemplo:

Determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

01) Sejam as matrizes:

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b+c & 1 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 1+b & 3-c \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Se M = N, então o valor do produto $a \cdot b \cdot c$:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

02) Se A, B e C são matrizes de ordens respectivamente iguais a (2x3), (3x4) e (4x2), então a expressão [A. (B. C)]2 tem ordem igual a:

a) 2 x 2

b) 3 x 3

c) 4 x 4

d) 6 x 6

e) 12 x 12

03) Sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} a+1 & 8 & 3b-1 \\ a & c & 2c \\ 8 & 10 & b-2 \end{bmatrix}$ é simétrica, determine o valor de a + b + c.

a) 5

b) 8

c) 12

d) 16

e) 18

(Determinante Parte I)

DETERMINANTERS

Denomina-se determinante de uma matriz quadrada o número associado a essa matriz obtido por meio de operações que envolvem todos os seus elementos.

Os determinantes são usados para resolver sistemas lineares, em geral, como os seguintes exemplos

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=10 \\ x+3y+z=8 \\ -2x+y-5z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ 2x+y-z-w=2 \\ -x_1-y+z+5w=-1 \\ 2x+y+7z-w=10 \end{cases}$$

A representação de determinante é feita por duas barras.

$$B=\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 10 & - & 3 \\ 2 & - & 5 \end{vmatrix}$$

Determinante da matriz de ordem 1

Quando a matriz possui apenas um elemento, seu determinante é igual ao próprio elemento da matriz.

Exemplo:

$A=[5]$ $\Rightarrow$ determinante de A = det A = $|5|=5$

Determinante da matriz de ordem 2

O determinante de uma matriz de ordem 2 é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo:

$$B=\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 10 & - & 3 \\ 2 & - & 5 \end{vmatrix}$$

Determinante da matriz de ordem 3

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem 3, utilizaremos a Regra de Sarrus.

Considere a seguinte matriz.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & C \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Devemos utilizar os seguintes procedimentos:

I – Repetem-se as duas primeiras colunas, na ordem que aparecem à direita do determinante.

II – Multiplicam-se os elementos que estão na direção da diagonal principal, mantendo o sinal de cada produto.

III - Multiplicam-se os elementos que estão na direção da diagonal secundária, trocando o sinal de cada produto.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Exemplo: Determine o valor de $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

Determinante da matriz de ordem $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$

Regra de Chió

A regra de Chió tem por finalidade reduzir em uma unidade a ordem de um determinante, sem alterar o seu valor.

Passos para aplicação da regra de Chió:

Escolher um elemento igual a 1 da matriz. Caso não tenha elemento igual a 1, utilize o Teorema de Jacobi para obtenção do elemento 1;

Suprima a linha e a coluna no qual se encontra o elemento 1 escolhido;

Forme uma matriz apenas com os elementos restantes;

Subtraia de cada um desses elementos o produto dos elementos correspondentes que foram suprimidos;

Calcule esse novo determinante e multiplique por $(-1)^{i+j}$. O índice $(i+\ j)$ correspondem à posição do elemento 1 escolhido.

Exemplo:

Escolher um elemento igual a 1 da matriz. Caso não tenha elemento igual a 1, utilize o Teorema de Jacobi para obtenção do elemento 1;

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 3-2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Suprima a linha e a coluna no qual se encontra o elemento 1 escolhido;

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 3-2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Forme uma matriz apenas com os elementos restantes;

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 3-2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Subtraia de cada um desses elementos o produto dos elementos correspondentes que foram suprimidos;

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 3-2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Calcule esse novo determinante e multiplique por $(-1)^{i+j}$. O índice $(i+\ j)$ correspondem à posição do elemento 1 escolhido.

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 3-2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Matriz de Vandermonde:

Chama-se matriz de Vandermonde toda matriz quadrada de ordem n, em que as linhas ou as colunas dessa matriz estão formando uma PG (progressão geométrica) onde o primeiro termo, de cada linha (ou coluna), é igual a 1.

Exemplos:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$

$det\ A = \ (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)\cdot(d-a)\cdot(d-b)\cdot(d-c)$

Calcule o determinante da matriz

$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} =$

(Determinante Parte II)

DETERMINANTES

Teorema de Laplace

Menor complementar

Considere uma matriz M de ordem $n \geq 2$. Seja a_{ij} um elemento de M. O menor complementar do elemento a_{ij}, indicado por D_{ij}, é o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j da matriz M.

Exemplo:

Seja M = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, calcule D_{12} e D_{21}.

Cofator

Considere uma matriz M de ordem $n \geq 2$. Seja a_{ij} um elemento de M. O cofator do elemento a_{ij}, indicado por A_{ij}, é o número $(-1)^{ij} \cdot D_{ij}$

Exemplo:

Seja M = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, calcule A_{11} e D_{23}.

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, é obtido escolhendo arbitrariamente uma fila (linha ou coluna) dessa matriz e soma-se o produto dos elementos da fila escolhida pelos respectivos cofatores.

Exemplo:

Calcular

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3-2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 3-2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Propriedades dos determinantes

1) Quando todos os elementos de uma fila são nulos, o determinante é zero.

Exemplo:

M=$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 3-2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

2) Se duas filas paralelas são iguais, então o determinante é zero

Exemplo:

M = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

3) Se duas filas paralelas são proporcionais, o determinante é zero

Exemplo:

M=$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 3-2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & 12 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

4) O determinante de uma matriz e o da sua transposta são iguais.

$M = \begin{vmatrix}10 & - & 3\\ 2 & - & 5\end{vmatrix} =$

$M^t = \begin{vmatrix}10 & & 2\\ -3 & - & 5\end{vmatrix} =$

5) Ao multiplicar uma fila de uma matriz por um número real, o determinante fica multiplicado por esse número.

Exemplo:

$A = \begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 8\end{vmatrix}$ ⇒ det A =

$B = \begin{vmatrix}4 & 2\\ 6 & 8\end{vmatrix}$ ⇒ det B =

6) Seja A uma matriz n x n e K um número real, então

$det(k \cdot A) = k^n \cdot det\, A$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ e $k = 3$

$det\, A =$

$K \cdot A = \begin{pmatrix}6 & 3\\ 12 & 15\end{pmatrix}$

$det(K \cdot A) =$

7) Ao trocar a posição de duas filas paralelas, o determinante muda de sinal.

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix} \quad det\, A =$

$B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix} \quad det\, B =$

8) Quando todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos, o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix} =$

9) O determinante de um produto é o produto dos determinantes, ou seja,

$\boldsymbol{det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B}$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \; det\, A =$

$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix} \; det\, B =$

$A \cdot B = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 11 & 8\end{pmatrix} \; det(A \cdot B) =$

Logo, $det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B =$

10) Se os elementos de fila são combinações lineares de filas paralelas, então o determinante é zero.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix} = 0$, pois $C_3 = C_1 + C_2$

b) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 4 & 7 & 6\end{vmatrix} = 0$, pois $L_3 = 2L_1 + L_2$

11) Se A é uma matriz inversível, então

$$\boldsymbol{det\, A^{-1} = \frac{1}{det\, A}}$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix}3 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, calcule $det\, A^{-1}$

12) Teorema de Jacobi

Adicionando a uma fila de uma matriz A, de ordem n, uma outra filha paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz A', tal que $det\, A = det\, A'$

Exemplo 1:

$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}$

Exemplo 2:

$\begin{vmatrix}1 & 2 & -5 & 4\\ 2 & 7 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$

(Sistemas Lineares Parte I)

SISTEMAS LINEARES

Equação Linear

Uma equação linear é uma equação descrita da seguinte forma

$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_n \cdot x_n = b}$

Em que:

$\boldsymbol{a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots .. a_n,}$ são números reais chamados de coeficientes; $\boldsymbol{x_1,\ x_2, x_3 \ldots x_n,}$ São as incógnitas $\boldsymbol{b}$ é o termo independente

Exemplos:

$5x - 2y = 5$

$4x - 7y + 2z = 1$

$x - 2 + 2z - 4t = 2$

$yx - 7y = 1$

$x^2 + 2y = 4$

Solução de uma equação linear

Dizemos que uma sequência de números reais $(\alpha_{1,}\ \alpha_{2,}\ \alpha_3 \ldots \alpha_n)$ é solução da equação $\boldsymbol{a_1 x_1} + \boldsymbol{a_2 x_2} + \boldsymbol{a_3 x_3} + \cdots + \boldsymbol{a_n} \cdot \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b}$ quando a sentença $\boldsymbol{a_1} \propto_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{a_2} \propto_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{a_3} \propto_{\boldsymbol{3}} + \cdots + \boldsymbol{a_n} \cdot \propto_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}$ é verdadeira.

Exemplo:

Encontre as soluções da equação 4x – 2y = 0

Sistema linear

É o conjunto de $\boldsymbol{m}$ equações lineares, nas mesmas incógnitas.

Exemplos:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 10 \\ x + 3y + z = 8 \\ -2x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x + y - z - w = 2 \\ -x - y + z + 5w = -1 \\ 2x + y + 7z - w = 10 \end{cases}$$

Solução de um sistema linear

Denomina-se solução de um sistema linear toda sequência ordenada de números $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$ que colocados respectivamente, nos lugares de $x_1, x_2 \ldots x_n$. Fazem com que todas as equações se tornem sentenças verdadeira

Exemplo:

Para o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 5} \\ \boldsymbol{x - y = 1} \end{cases}$, o par (3, 2) é solução, pois $\begin{cases} \boldsymbol{3 + 2 = 5} \\ \boldsymbol{3 - 2 = 1} \end{cases}$

Representação matricial de um sistema linear

Um sistema linear pode ser gerado a partir da multiplicação de duas matrizes.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ x - 2z = 6 \end{cases}$$

Sistema linear homogêneo

Um sistema linear homogêneo é aquele em que o termo independente de cada uma das equações é igual a zero.

Exemplos:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -2x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

Note que um sistema linear homogêneo admite sempre pelo menos uma solução, que é a solução (0, 0, ..., 0), chamada de **solução trivial**

Sistema equivalentes

Dois sistemas lineares, s_1 e s_2, são ditos equivalentes se tiverem as mas soluções.

Exemplo:

$$s_1 = \begin{cases} 2X + 3Y = 8 \\ 4X - 2Y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s_2 = \begin{cases} X + Y = 3 \\ -X + Y = 1 \end{cases}$$

Os dois sistemas apresentam uma única solução, que é (1, 2). Logo, s_1 e s_2, são equivalentes.

Classificação de um sistema linear

Classificamos um sistema linear conforme o número de soluções que ele possui.

Possível e determinado (SPD), Sistema linear que possuir uma única solução;

Possível e indeterminado (SPI), Sistema linear que possuir infinitas solução;

Impossível (SI), Sistema linear que não possui solução.

Escalonamento de sistemas lineares

Exemplo de sistemas lineares escalonados

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3y - z = 5 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

Observação:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \end{cases}$$

Recursos para escalonar um sistema linear

Operações que não alteram o conjunto solução de um sistema linear:

Multiplicar por K, com K ∈ $\mathbb{R}^*$, ambos os lados de uma equação;

Substituir uma equação do sistema pela soma dela com alguma outra equação;

Trocar a posição das equações do sistema.

Multiplicar por K, com K ∈ $\mathbb{R}^*$, ambos os lados de uma equação;

Substituir uma equação do sistema pela soma dela com alguma outra equação;

Trocar a posição das equações do sistema.

Escalonando um sistema linear

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \end{cases}$$

Regra de Cramer

Um processo de resolução de sistemas lineares em o número de equações é igual ao número de incógnitas é conhecido como Regra de Cramer, baseado no cálculo de determinantes.

Vamos considerar um sistema com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Vamos considerar Δ o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se $\Delta \neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD) e a solução será:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{e} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Onde: $\Delta_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$ e $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}$

Exemplo:

Determine a solução do sistema usando a Regra de Cramer:

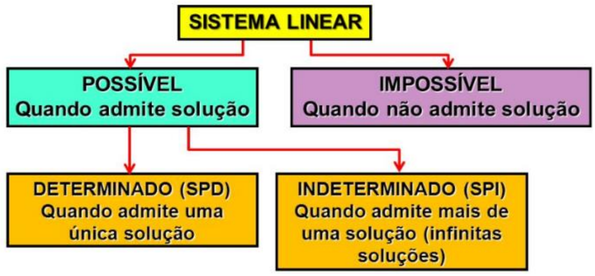
$$\begin{cases} 3x - 5y = -9 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

(Sistemas Lineares Parte II)

SISTEMAS LINEARES

Discussão de um sistema linear

Discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetro significa dizer para quais valores do(s) parâmetros(s) o sistema é possível determinado (SPD), sistema possível indeterminado (SPI) ou o sistema impossível (SI).



Para o sistema do tipo 2 x 2, podemos usar um método prático.

$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ (SPD)

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ (SI)

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ (SPD)

Exemplo:

Discuta o sistema linear em função do parâmetro K:

$$\begin{cases} 3x + ky = 2 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

Para discutir um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas vamos usar a Regra de Cramer.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \text{d}x + \text{e}y = f \end{cases}$$

Vamos considerar Δ o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

Se: $\Delta \neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD)

$\Delta = 0$, então o sistema é possível indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI)

Exemplos:

1 - Discuta o sistema linear em função do parâmetro:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + ky = 2 \end{cases}$$

2 - Determine o valor de k para que o sistema admita infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -3x + ky = 0 \end{cases}$$

3 - Discuta o sistema linear em função do parâmetro m

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ mx + y + 5z = 9 \end{cases}$$

4 - Discuta o sistema linear em função do parâmetro m

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ mx + y + 5z = 13 \end{cases}$$

(Progressão Aritmética)

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma sequência é um conjunto em que seus elementos estão em determinada ordem. Uma sequência numérica pode ser representada colocando os seus elementos ou termos entre parênteses e separando-os por vírgula ou ponto vírgula. Genericamente representamos os elementos por letras minúsculas e um índice numérico que indica a posição do elemento:

$a_1 \rightarrow$ "a índice 1" (primeiro termo);

$a_2 \rightarrow$ "a índice 2" (segundo termo);

$a_3 \rightarrow$ "a índice 3" (terceiro termo);

$a_n \rightarrow$ "a índice n" (enésimo termo);

Observação: Uma sequência numérica pode ser finita quando possuir um último termo ou um número exato de termos, caso contrário, será infinitiva.

Progressão aritmética

Progressão aritmética (PA) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo antecedente com uma constante $\boldsymbol{r}$. O número $\boldsymbol{r}$ é chamado de razão da progressão aritmética.

Propriedades das progressões aritméticas

Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

$PA(\,2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20)$

Observação: $\boldsymbol{a_m + a_n = a_p + a_q \Leftrightarrow m + n = p + q}$

Exemplo

Sabendo-se que uma P.A. de 101 termos ocorre $a_1 + a_{101} = 42$, então $\frac{a_{51}}{7} + \frac{a_{15}+a_{87}}{6}$ vale:

a) 9

b) 10

c) 11

d) 12

e) 13

Em uma PA, o termo médio de três termos consecutivos é igual à média aritmética entre os outros dois.

Exemplo

$PA(\ 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14 \ldots..)$

PA de 3 termos

A melhor forma de representar uma PA de três termos de maneira genérica, para agilizar resoluções de problemas é a seguinte:

$PA\ de\ três\ termos$: $(x - r,\ \ x,\ \ x + r)$

Exemplo 1:

Na PA (a, b, c) temos

$$\begin{cases} a + b + c = 9 \\ abc = 15 \end{cases}$$

Calcular a PA

Exemplo 2:

Os lados de um triângulo retângulo estão em PA de razão 2. Qual o perímetro desse triângulo?

Fórmula do termo geral de uma PA

Numa $PA(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \ldots a_n \ldots.)$ de razão $\boldsymbol{r}$, temos:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

Exemplo 1:

Calcular o 15° e 20° da PA (3, 7, 11......)

Exemplo 2:

Calcular o primeiro termo de uma PA em, $a_7 = 1$ e $a_{10} = 16$

Exemplo 3:

Se inserirmos vinte meios aritméticos entre os números 15 e 120 obteremos uma progressão crescente cujo décimo sétimo termo é:

a) 105

b) 95

c) 85

d) 75

e) 65

Soma dos termos de uma PA

Somar os naturais de 1 a 100

$(1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots .98,\ 99,\ 100)$

Esse raciocínio pode ser generalizado pela seguinte fórmula:

$$s_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

Exemplo 1:

Calcular a soma dos 20 primeiros termos da PA (2, 5, 8...)

Exemplo 2:

Calcular 3 + 6 + 9 +.........+120

(Progressão Geométrica)

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Progressão geométrica (PG) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. O número q é chamado de razão da progressão geométrica, essa sequência pode ser representada pela seguinte fórmula.

$$a_n = a_{n-1} \cdot q; \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Razão

Em qualquer P.G. não nula, a Lei de Recorrência, $a_n = a_{n-1} \cdot q$, permite deduzir a seguinte expressão.

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Ou seja:

Razão $= \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q\ (constante)$

Classificação:

Uma progressão geométrica de razão q pode ser de quatro tipos.

Crescente – Quando cada termo é maior que o anterior;

Constante ou estacionária – Quando todos os termos são iguais entre si (q=1)

Decrescente - Quando cada termo é menor que o anterior;

Alternante – Quando cada termo tem sinal contrário ao do anterior (q < 0)

Observação:

Na P.G. de três termos (a, b, c) o termo central é média geométrica dos extremos: P.G. $(a, b, c) \Rightarrow b = \sqrt{ac}$

Veja: Razão $= \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot c,\ portanto\ b = \sqrt{ac}$

Exemplo 1:

Determine x de modo que a sequência (3, x+2, 3x) seja uma P.G. Crescente.

Exemplo 2:

Para dois números positivos a e c, a sequência (a, 4, c) é P.A. e a sequência (c+2, 4, a) é PG. Determine a e c

P.G. de 3 termos

A melhor forma de representar uma P.G. de três termos de maneira genérica, para agilizar resoluções de problemas é a seguinte:

$$\left(\frac{x}{q},\ x,\ x \cdot q\right)$$

Exemplo:

Determine a PG de três termos sabendo que o produto desses termos é 8 e que a soma do 2° com 3° termo é 14.

Fórmula do termo geral de uma P.G.

Numa $PG(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \dots a_n \dots .)$ de razão q, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplo

Determine o quinto termo de uma P.G. cuja a razão e o primeiro termo são iguais a 3.

Propriedade das progressões geométricas

P1 - Em toda P.G., o quadrado de cada termo, a partir do segundo, é o produto entre o antecedente e o consequente.

Exemplo

$PG(\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64)$

P2 - Em toda P.G., finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Exemplo

$PG(\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32)$

P3 - Em toda P.G., o produto de dois termos quaisquer será igual ao produto de dois outros termos, desde que a soma dos índices dos dois primeiros seja igual à soma dos índices dos outros dois.

$$a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s \Leftrightarrow m + n = r + s$$

Exemplo

$PG(\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\ )$

Soma dos termos de uma Progressão geométrica finita

A Soma (S_n) dos n primeiros termos de uma P.G. com razão diferente de 1 é dada pela seguinte expressão.

$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}}$ **,** com $q \neq 1$

Exemplo 1:

Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. (1, 2, 4, 8...)

Exemplo 2:

Determine a P.G. cuja soma dos quatro primeiros termos é 312 e a razão é 5.

Soma dos termos de uma Progressão geométrica infinita

A soma s_∞ dos infinitos termos de uma $PG(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \ldots .)$ é dada por:

$s_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, com $-1 < q < 1$

Exemplo:

Determine a soma dos infinitos termos da PG $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} \ldots\right)$

Produto dos n primeiros termos de uma P.G. $(\boldsymbol{P_n})$

$\boldsymbol{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$ ou $\boldsymbol{p_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Exemplo:

Calcule o produto dos termos da P.G.: $\left(\frac{4}{3}, 2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8}\right)$

Atividades PA e PG

01) Em certo país, ocorrem eleições para prefeito de 4 em 4 anos e para senador, de 6 em 6 anos, desde o ano de 1840, quando ocorrem simultaneamente eleições para prefeito e para senador.

Até o final de 2011, ocorreram eleições simultâneas para esses dois cargos, nesse país:

a) 24 vezes

b) 21 vezes

c) 18 vezes

d) 15 vezes

e) 12 vezes

2) Sejam as sequências (75, a2, a3, a4...) e (25, b2, b3, b4...) duas progressões aritméticas de mesma razão. Se $a_{100} + b_{100} = 496$, então $\frac{a_{100}}{b_{100}}$ é igual a:

a) $\frac{273}{223}$

b) $\frac{269}{219}$

c) $\frac{247}{187}$

d) $\frac{258}{191}$

e) $\frac{236}{171}$

03) As progressões aritméticas (5, 8, 11, ...) e (3, 7, 11, ...) têm 100 termos cada uma. O número de termos iguais nas duas progressões é:

a) 28

b) 27

c) 26

d) 25

e) 24

04) Após o nascimento do filho, o pai comprometeu-se a depositar mensalmente, em uma caderneta de poupança, os valores de R$ 1,00, R$ 2,00, R$ 4,00 e assim sucessivamente, até o mês em que o valor do depósito atingisse R$ 2048,00. No mês seguinte, o pai recomeçaria os depósitos como de início e assim o faria até o 21º aniversário do filho. Não tendo ocorrido falha de depósito ao longo do período, e sabendo-se que 210 = 1024, o montante total dos depósitos, em reais, feitos em caderneta de poupança foi de:

a) 42947,50

b) 49142,00

c) 57330,00

d) 85995,00

e) 114660,00

05) Alguns números positivos foram inseridos entre 1/32 e 64. Sabe-se que na sequência obtida, cada termo que foi inserido é a raiz quadrada do produto dos seus dois vizinhos, anterior e posterior. Se o produto de todos os termos da sequência é igual a 256, o número de termos inseridos foi:

a) 13

b) 14

c) 15

d) 16

e) 17

06) Considere uma progressão geométrica de 5 termos e razão positiva, onde a soma do primeiro com o terceiro termo é 9/2 e o produto de seus termos é 1024.

O produto dos três termos iniciais dessa progressão é igual a:

a) 1/2

b) 1

c) $2\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{2}$

e) $8\sqrt{2}$

7) O radical $\sqrt[3]{121\sqrt[3]{121\sqrt[3]{121}}}$... equivale a:

a) 11

b) $11\sqrt[3]{11}$

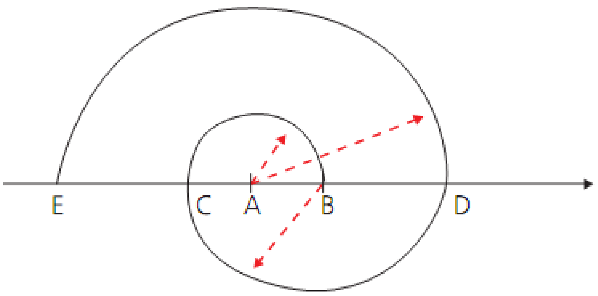
c) 121

d) $11\sqrt[3]{121}$

e) $121\sqrt[3]{11}$

08) Chamamos de falsa espiral de dois centros aquela construída da seguinte forma: os dois centros são os pontos A e B. Traçam-se semicircunferência no sentido anti-horário, a primeira com o centro em A e raio AB, a segunda com centro em B e raio BC, a terceira com centro em A e raio AD, repetindo esse procedimento em que os centros se alternam entre A e B, como mostrado na figura a seguir.

Sabe-se que, ao completar duzentas semicircunferências, o comprimento total



dessa falsa espiral 100500π metros.
Qual a distância em metros entre A e B?
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

09) Observe a sequência de figuras:

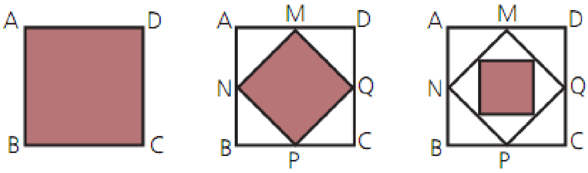


fig. 1 fig. 2 fig. 3

ABCD é um quadrado, cujo lado mede x cm. Ligando os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se o quadrado MNPQ. Realizando esse procedimento indefinidamente, a soma das áreas de todos os quadrados sombreados dessa sequência é áreas de todos

os quadrados sombreados dessa sequência é igual a $64\sqrt{2}cm2$. A área do quadrado sombreado da décima figura dessa sequência, em centímetros quadrados, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{2}$

e) $8\sqrt{2}$

10) Dois corredores vão se preparar para participar de uma maratona. Um deles começará correndo 8 km no primeiro dia e aumentará, a cada dia, essa distância em 2 km; o outro correrá 17 km no primeiro dia e aumentará, a cada dia, essa distância em 1 km. A preparação será encerrada no dia em que eles percorrerem, em quilômetros, a mesma distância.

A soma, em quilômetros, das distâncias que serão percorridas pelos dois corredores durante todos os dias do período de preparação é igual a:

a) 370

b) 375

c) 380

d) 385

e) 390

Polinômio ou função polinomial; - Polinômios idênticos; - Polinômio nulo; - Raiz de um polinômio; - Valor numérico de um polinômio; - Operações com polinômios.

POLINÔMIOS

Polinômio ou função Polinomial

Exemplo 1:

$\boldsymbol{P(x) = x^3 - 5x^2 + x - 14}$

Variável =

Coeficientes =

Termo independente =

Grau →

Exemplo 2:

$\boldsymbol{P(y) = y^5 - 5y^2 + y - 4}$

Variável =

Coeficientes =

Termo independente =

Grau →

Observação 1: O polinômio pode ser do tipo completo ou incompleto.

Observação 2: O grau do polinômio será indicado pelo expoente de maior valor e esse expoente será número natural.

Exemplo 3:

Dado o polinômio $\boldsymbol{P(x) = (m^2 - 16) \cdot x^3 + (m - 4)x^2 + 2x - 7,}$ determine o valor de $m \in \mathbb{R}$, para que o polinômio seja de grau 2.

Forma Geral

$\boldsymbol{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$

Valor numérico

O valor numérico de um polinômio $\boldsymbol{P(x)}$ em $\boldsymbol{a}$ é obtido substituindo $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{a}$ e efetuando as operações.

Exemplo:

Dado o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 1$, determine o valor numérico de:

$P(2)$

$P(1)$

$P(0)$

$P(i)$

Raiz de um polinômio

Dado um polinômio $\boldsymbol{P(x)}$ e $\boldsymbol{a}$ um número complexo. O número $\boldsymbol{a}$ será uma raiz do polinômio $\boldsymbol{P(x)}$ se ao substituímos $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{a,}$ temos $\boldsymbol{P(a) = 0}$

Exemplo 1:

a) Determine a raiz de $\boldsymbol{P(x) = 2x - 14}$

b) Determine o valor de m, sabendo que - 2 é raiz do polinômio

$P(x) = x^3 + 4x^2 + mx - 2$

Polinômio nulo

Polinômio nulo é aquele que todos os coeficientes são iguais a zero.

Exemplo:

Determine os valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, sabendo que o polinômio

$\boldsymbol{P(x) = (m^2 - 16) \cdot x^2 + (n - 5)x}$ é nulo.

Polinômios idênticos:

Dado dois polinômios $\boldsymbol{P(x)}$ e $\boldsymbol{Q(x),}$ dizemos que são idênticos (ou iguais) quando os coeficientes correspondentes são iguais.

Exemplo:

Determine os valores de $\boldsymbol{a,}$ $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c,}$ sabendo que $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + (b - 3)x + 8}$ e

$\boldsymbol{Q(x) = 5x^2 + 6x - 2c}$ são polinômios idênticos.

Operações com polinômios

Adição e subtração

Na operação de adição e subtração devemos somar/subtrair os coeficientes dos termos semelhantes.

Exemplo:

Dado os polinômios $\boldsymbol{P(x) = 5x^3 - 5x^2 + 4x + 8}$ e

$\boldsymbol{Q(x) = 15x^2 + 6x - 4,}$ determine:

a) $\boldsymbol{P(x) + Q(x)}$

$\boldsymbol{P(x) = 5x^3 - 5x^2 + 4x + 8}$ e

$\boldsymbol{Q(x) = 15x^2 + 6x - 4,}$ determine:

b) $\boldsymbol{P(x) - Q(x)}$

Multiplicação

Na operação de multiplicação devemos aplicar a propriedade distributiva e somar os termos semelhantes obtidos.

Exemplo:

Dado os polinômios $\boldsymbol{P(x) = 2x^3 + x + 8}$ e $\boldsymbol{Q(x) = x - 4}$, determine:

a) $\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) =}$

$\boldsymbol{P(x) = 2x^3 + x + 8}$ e

$\boldsymbol{Q(x) = x - 4}$, determine:

b) $2 \cdot \boldsymbol{Q(x) =}$

Observação:

Na multiplicação o grau do polinômio obtido será igual à soma dos graus desses polinômios.

Divisão de polinômios; - Teorema do Resto; - Teorema de D'Alembert.

POLINÔMIOS

Operações com polinômios

Divisão

Considere dois polinômios, $\boldsymbol{f(x)}$ e $\boldsymbol{g(x)}$. Dividir $\boldsymbol{f(x)}$ por $\boldsymbol{g(x)}$, com $\boldsymbol{g(x) \neq 0}$, significa encontrar dois outros polinômios, que indicaremos por $\boldsymbol{q(x)}$ e $\boldsymbol{r(x)}$, tais que:

$\boldsymbol{f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)}$ e Grau (r) < Grau (g) ou $r(x) = 0$

Assim, dizemos que:

$\boldsymbol{f(x)}$ é o dividendo

$\boldsymbol{g(x)}$ é o divisor

$\boldsymbol{q(x)}$ é o quociente

$\boldsymbol{r(x)}$ é o resto

Método da chave

É um dos métodos para efetuar a divisão de polinômios, que é semelhante ao aplicado para divisão de números inteiros. Vejamos como é o método da chave com alguns exemplos.

Exemplo 1:

Efetue a divisão de $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3}$ por $\boldsymbol{D(x) = x - 1}$

Exemplo 2:

Efetue a divisão de $\boldsymbol{P(x) = x^4 + x^2 - 2x + 1}$ por $\boldsymbol{D(x) = x - 3}$

Exemplo 3:

Dados os polinômios $\boldsymbol{P(x) = x^3 + ax + b}$ por $\boldsymbol{D(x) = 2x^2 + 2x - 6}$. Determine o valor de $\boldsymbol{a + b}$, sabendo que $\boldsymbol{P(x)}$ é divisível por $\boldsymbol{D(x)}$.

Método de Descartes

Esse método, também chamado de método dos coeficientes a determinar, baseia-se no fato de que:

$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ e Grau (r) < Grau (g) ou $r(x) = 0$

O método consiste de três etapas:

1 - Determinar os graus de $q(x)$ e $r(x)$;

2 - Construímos os polinômios $q(x)$ e $r(x)$, deixando seus coeficientes como variáveis;

3 - Determinamos os coeficientes impondo a igualdade $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$.

Exemplo 1:

Dividir $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ por $\boldsymbol{g(x) = x^2 + 2x + 3}$

Exemplo 2:

Dividindo o polinômio $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3}$ **por** $\boldsymbol{B(x)}$, obtemos o quociente $\boldsymbol{Q(x) = x - 1}$ e o resto $\boldsymbol{R(x) = 2x - 1}$. Determine $\boldsymbol{B(x)}$.

Teorema do resto

Um caso particular e importante da divisão de polinômios é quando o divisor e um polinômio de 1º grau do tipo $\boldsymbol{x - a}$ ou $\boldsymbol{x + a}$ com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}$

O resto da divisão de um polinômio $\boldsymbol{f(x)}$ por $\boldsymbol{x - a}$ ou $\boldsymbol{x + a}$ é igual ao valor numérico de $\boldsymbol{f(x)}$ em $\boldsymbol{a}$.

Exemplo 1:

Determine o resto da divisão de $\boldsymbol{p(x) = x^2 + 3x + 6}$ por $\boldsymbol{g(x) = x + 1}$

Exemplo 2:

$\boldsymbol{x^5 - x^3 + 2}$ é divisível por $\boldsymbol{x + 2}$

Exemplo 3:

Calcular o resto da divisão de $P(x) = (x + 3)^7 + (x - 2)^2$ por $x + 3$

Teorema de D'ALEMBERT

P(x) é divisível por $\boldsymbol{x - a}$ se $\boldsymbol{a}$ é raiz de P(x)

Exemplo 3:

Determine m de modo que $\boldsymbol{x^3 - 4x^2 + mx - 6}$ seja divisível por $\boldsymbol{x - 3}$

(Divisão de polinômios) - Dispositivo de Briot Ruffini; - Divisões sucessivas; - Divisão por binômios do tipo $kx \pm a$.

POLINÔMIOS

Divisão

Dispositivo de Briot Ruffini

O método de Briot-Ruffini é um dispositivo prático para divisão de polinômios quaisquer por polinômios do primeiro grau do tipo $(x \pm a)$.

Vejamos por meio de exemplos, como aplicar o método de Briot-Ruffini.

Exemplo 01:

Ache o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ por $x - 3$.

Exemplo 02:

Verifique se o polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ é divisível por $x - 1$ usando o algoritmo de Briot-Ruffini.

Exemplo 03:

Determine o quociente e o resto da divisão do $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 10$ por $h(x) = x + 3$, usando o dispositivo prático de Briot-Riffini.

Divisões sucessivas:

Se um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ e o quociente $Q(x)$ dessa divisão é divisível $x - b$, então $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a) \cdot (x - b)$.

Exemplo 01:

Verifique se o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é divisível por $(x - 2) \cdot (x + 1)$?

Exemplo 01:

Verifique se o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é divisível por $(x - 2) \cdot (x + 1)$?

Exemplo 02:

Verifique se o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ é divisível por $x^2 - 5x + 4$?

Quando o polinômio $P(x)$ é divisível $(x - a)$ e $(x - b)$ separadamente com $a \neq b$, $P(x)$ será divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$

Exemplo:

Determine se $P(x) = x^3 - 13x + 12$ é divisível por $(x - 3)$? por $(x + 4)$? por $x^2 + x - 12$?

Exemplo:

Determine se $P(x) = x^3 - 13x + 12$ é divisível por $(x - 3)$? por $(x + 4)$? por $x^2 + x - 12$?

Divisão por binômios do tipo $kx \pm a$

Para encontrarmos o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de um polinômio $P(x)$ por $\boldsymbol{kx \pm a}$, devemos usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, e dividir o quociente encontrado por $\boldsymbol{k}$

Exemplo 01:

Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = 8x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 4x + 2$ por $4x - 3$

Exemplo 01:

Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = 8x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 4x + 2$ por $4x - 3$

Exemplo 02:

Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio

$P(x) = -3x^5 + 12x^4 - x^3 + 5x^2 - 5x + 4$ por $4 - x$

Exemplo 03:

Determine o valor de K para que o polinômio

$P(x) = 6x^5 + 11x^4 + 4x^3 + Kx^2 + 2x + 8$

seja divisível $3x + 4$

Resoluções de questões Polinômios

01) Numa divisão de polinômios em x, o divisor é $x^2 + x$, o quociente, $4x + 1$ e o resto é $2x + 1$. Qual é o dividendo?

a) $4x^3 + 5x^2 + 3x - 1$

b) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$

c) $4x^3 + 5x^2 + 3x + 1$

d) $4x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

e) $4x^3 - 5x^2 - 3x + 1$

02) Determine o quociente e o resto da divisão de $3x^4 + 2x^2 - x + 1$ por $x^2 + x + 2$.

a) $Q(x) = 3x^2 - 3x - 1$ e $R(x) = 6x + 3$

b) $Q(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $R(x) = 6x + 3$

c) $Q(x) = 3x^2 - 3x - 1$ e $R(x) = 6x - 3$

d) $Q(x) = 3x^2 + 3x - 1$ e $R(x) = 6x - 3$

e) $Q(x) = 3x^2 - 3x - 1$ e $R(x) = 6x + 6$

03) O polinômio $x^3 - 5x^2 + mx - n$ é divisível por $x^2 - 3x + 6$. Então, os números **m** e **n** são tais que m + n é igual a:

a) 0

b) 12

c) 24

d) 18

e) 28

04) Seja Q(x) o quociente da divisão do polinômio $P(x) = x^5 - 3x^3 + 18$ por $x - 2$. Então a soma dos coeficientes do polinômio Q(x) é igual a:

a) 25

b) 19

c) 10

d) 31

e) 36

05) O resto da divisão de $5x^{2n} - 4x^{2n+1} - 2$ (n é natural) por $x + 1$, é igual a:

a) 7

b) 8

c) –7

d) 9

e) –9

06) Dividindo $x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por um certo polinômio P(x), obtemos como quociente $x - 1$ e resto $2x - 1$. O polinômio P(x) é igual a:

a) $2x^2 - 3x + 2$

b) $x^2 - 3x + 2$

c) $x^2 - x + 1$

d) $2x^2 - 3x + 1$

e) n.d.a.

07) Determine o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 8x^3 - x + 1$ por $D(x) = 2x - 1$.

a) $Q(x) = 8x^2 + 4x + 1$ e $R(x) = \frac{2}{3}$

b) $Q(x) = 8x^2 + 4x - 1$ e $R(x) = \frac{2}{3}$

c) $Q(x) = 4x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ e $R(x) = \frac{2}{3}$

d) $Q(x) = 4x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ e $R(x) = \frac{1}{2}$

e) $Q(x) = 8x^2 + 4x + 1$ e $R(x) = \frac{1}{2}$

08) Dividindo-se $3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$, por $x - 2$, obtém-se:

a) quociente $3x^3 + 7x^2 + 11x - 2$

b) resto 29

c) quociente $4x^2 - 4x + 13$

d) resto 49

e) quociente $3x^3 + 4x^2 + 10x + 19$

09) Se P(x) é um polinômio inteiro, em que P(3) = –2 e P(–1) = 6, então o resto da divisão de P(x) pelo produto $(x - 3)(x + 1)$ é:

a) $-2x + 4$

b) $4x - 2$

c) $2x - 4$

d) $4x + 2$

e) 0

10) Um polinômio p(x) dividido por $x - 1$ deixa resto 2, o quociente desta divisão é então dividido por $x - 4$, obtendo resto 1. O resto da divisão de p(x) por $(x - 1)(x - 4)$ é:

a) 1

b) 2

c) x + 1

d) x – 1

e) 3

(Equações Polinomiais Parte I) - Raízes das equações polinomiais; - Teorema Fundamental da Álgebra; - Teorema da Decomposição.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Equação Algébrica ou Polinomial

Uma equação polinomial ou algébrica é toda equação do tipo

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0$$

em que $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n$ são números complexos (lembre-se que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Raiz da Equação algébrica

Diz-se que um número complexo $\propto$ é raiz de $P(x)$ se, e somente se $P(\propto) = 0$

Exemplo 01:

Verifique se -1, 1 e 2 são raízes da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Exemplo 02:

Determine as raízes da equação $x^2 - 6x + 10 = 0$

Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.)

Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

Teorema da Decomposição

Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$ e raízes r_1, r_2, r_3 e r_n, pode ser decomposto em n fatores de 1° grau, isto é:

$$P(x) = \boldsymbol{a}(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

onde "$\boldsymbol{a}$" é o coeficiente do termo dominante (maior expoente)

Observação:

P(x) é divisível por cada um de seus fatores, individualmente e também por qualquer produto desses fatores.

Exemplo 01:

Decomponha o polinômio $P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$ sabendo que as suas raízes são $\frac{1}{3}$, 1, 3.

Exemplo 02:

O número 1 é uma das raízes da equação $4x^3 - 11x^2 + 5x + 2 = 0$. Resolver essa equação e apresentar a forma fatorada.

Exemplo 03:

Duas das raízes da equação $2x^4 + 5x^3 - 35x^2 - 80x + 48 = 0$. São - 3 e – 4. Determine as outras raízes e apresente essa equação na forma fatorada.

Exemplo 04:

Dada a equação $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$ e sabendo que uma das raízes é igual a 2, determine as outras raízes e escreva a equação na forma fatorada.

Exemplo 05:

Calcule o coeficiente m de modo que o número 4 seja raiz de $6x^3 + mx^2 + 21x - 4 = 0$ e depois resolva a equação.

(Equações Polinomiais parte II) - Multiplicidade de uma raiz; - Raízes racionais.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Multiplicidade de uma raiz

Exemplo $\boldsymbol{x^2 - 4x + 4 = 0}$

Dizemos que $\boldsymbol{r}$ é raiz de multiplicidade $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{1})$ da equação

$\boldsymbol{P(x) = 0}$ se a forma fatorada de $\boldsymbol{P(x)}$ for:

$\boldsymbol{p(x)} = \dfrac{\boldsymbol{(x-r)\cdot(x-r)\cdots(x-r)\cdot q(x)}}{\boldsymbol{m\ vezes}}$

Observação:

Quando $\boldsymbol{m}$ = 1, dizemos que $\boldsymbol{r}$ é uma raiz simples; Quando $\boldsymbol{m}$ = 2, dupla.

Exemplo 01:

Verificar qual é a multiplicidade da raiz – 3 na equação

$\boldsymbol{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18 = 0}$

Exemplo 02:

Qual é o grau de equação polinomial $\boldsymbol{P(x) = 0}$ cujas raízes são 3, 2, - 1 com multiplicidade 7, 6 e 10, respectivamente?

Exemplo 03:

Construir a equação polinomial $\boldsymbol{P(x) = 0}$ com conjunto solução

$\boldsymbol{s = \{2, -3,\ 6\}}$ tal que 2 é raiz tripla, - 3 é raiz dupla, 6 é raiz simples e o coeficiente dominante de $\boldsymbol{P(x)}$ é 4.

Exemplo 04:

Sabendo que – 3 é uma raiz dupla de $\boldsymbol{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x + 45 = 0}$, encontre as demais raízes.

Exemplo 05:

Determinar o conjunto solução do polinômio $\boldsymbol{P(x) = 4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4}$, sabendo que é divisível por $x^2 + 4x + 4$

Exemplo 06:

Dada a equação $\boldsymbol{x^5 + 3x^4 - x^3 - 11x^2 - 12x - 4 = 0}$, determine o conjunto solução e a multiplicidade da raiz x = -1.

Raízes racionais de equações com coeficientes inteiros

Para descobrir as possíveis raízes racionais de uma equação algébrica, vamos adotar o seguinte procedimento:

Considere a equação algébrica

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

As possíveis raízes da equação acima são os números racionais da forma $\frac{p}{q}$, em que p são os divisores de a_0(termo independente) e q são os divisores de a_n(termo dominante)**.**

Exemplo:

Verificar se a equação $2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admite raízes racionais.

Exemplo:

Verificar se a equação $2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admite raízes racionais.

(Equações Polinomiais parte III) - Relações de Girard; - Raízes complexas.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Relações de Girard

As relações de Girard são relações entre os coeficientes de uma equação algébrica e as raízes dessa mesma equação.

Equação do 2º grau:

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Temos as seguintes relações entre suas raízes e os coeficientes da equação:

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Equação do 3º grau:

Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Temos as seguintes relações entre suas raízes e os coeficientes da equação:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-b}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \frac{c}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{-d}{a}$$

Equação do 4º grau:

Sejam r_1, r_2, r_3 e r_4 as raízes da equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$. Temos as seguintes relações entre suas raízes e os coeficientes da equação:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_3 = \frac{-b}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4 + r_3 \cdot r_4 = \frac{c}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{-d}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{e}{a}$$

Exemplos:

01) Sejam r, s e t as raízes de $x^3 - 4x^2 + 6x - 5 = 0$. Calcular

a) $r + s + t =$

b) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} =$

02) Determine as raízes da equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$, sabendo que uma das raízes é a soma das outras.

03) Resolva a equação $2x^3 - 13x^2 + 22x - 8 = 0$, sabendo que suas raízes são positivas e uma delas é igual ao produto das outras duas.

Raízes complexas

Resolva a equação:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Teorema do conjugado

Se um número complexo $z = a + bi$ é raiz de uma equação algébrica de coeficientes reais, então o seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz da equação

Uma equação algébrica de coeficientes reais possui um número par de raízes complexas não reais. Se o grau de uma equação algébrica de coeficientes reais por ímpar, essa equação possui, necessariamente, pelo menos uma raiz real.

Se uma equação algébrica de coeficientes reais possui uma raiz complexa não real z de multiplicidade m, então $\bar{z}$ também é uma raiz de multiplicidade m.

Exemplos:

01) Qual o grau de uma equação algébrica de coeficientes reais que admite como raízes 1, $2i$ e $1 + i$

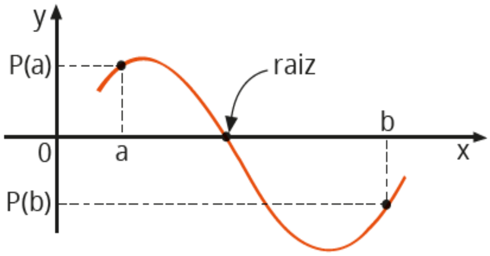
02) Admita que $5 - 2i$ é uma das raízes equação $x^2 + mx + n = 0$ e que m e n são valores reais. Determine a outra raiz e os valores de m e n dessa equação.

(Equações Polinomiais parte IV) - Teorema de Bolzano; - Atividades.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Teorema de Bolzano

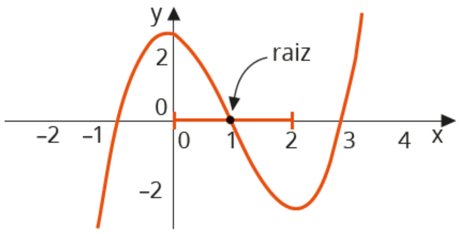
Se um polinômio P(x) apresenta valores P($\boldsymbol{a}$) e P($\boldsymbol{b}$), com $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, tais que P($\boldsymbol{a}$)·P($\boldsymbol{b}$) < 0 (isto é, têm sinais contrários), então a equação admite um número ímpar (pelo menos uma) de raízes reais entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$



Exemplo:

01) Seja $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, verifique se existem raízes reais neste no intervalo $[0,\ 2]$

Pelo teorema de Bozano existe pelo menos uma raiz entre 0 e 2



02) Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 2$, verifique se esse polinômio admite raízes reais no intervalo $[-1,\ 1]$

03) Seja P(x) um polinômio de grau 5, admitindo 2 e i como raízes. Se P(1) · P(-1) < 0, então o número de raízes no intervalo $[-1,\ 1]$

Atividades

01) Encontrar as raízes da equação $x^5 - 2x^4 + 15x^3 = 0$.

02) Determine quais são as raízes da equação algébrica

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(x + \frac{2}{7}\right)^3 \cdot (x - 2^0)^2 \cdot (x - 21) = 0$$

e sua multiplicidade

03) Dada a equação algébrica $2x^3 - 3x^2 - 72x - 35 = 0$, sendo $-\frac{1}{2}$ uma de suas raízes determine a soma das outras duas raízes.

04) O polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: r, - r e s. Determine os valores de r e s.

05) Sabendo-se que o polinômio $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 66x - 63$ tem uma raiz simples $x_1 > 3$ e uma raiz dupla x_2 é correto afirmar.

a) $x_2 < -\frac{7}{2}$

b) $x_2 < -3$

c) $x_2 < -\frac{5}{4}$

d) $x_2 > -\frac{3}{4}$

e) $x_2 > -\frac{5}{4}$

LISTAS DE EXERCÍCIOS

Exercícios – Expressões numéricas

1) (UNAERP SP/2006) Analisando as expressões:

I. [(+2)(– 3/4):(–2/3)]

II. (+2–3+1):(–2+2)

III. (+4–9):(–5+3)

IV. (2–3+1):(–7)

podemos afirmar que zero é o valor de:

a) somente I, II e IV

b) somente I e III

c) somente IV

d) somente II e IV

e) somente II

2) Escrever um número na notação científica significa expressá-lo como o produto de dois números reais x e y, tais que: 1 ≤ x < 10 e y é uma potência de 10.

Assim, por exemplo, as respectivas expressões dos números 0,0021 e 376,4 na notação científica são 2,1 x 10–3 e 3,764 x 102.

Com base nessas informações, a expressão do número N na notação científica é:

N = 14,4·0,072 / 0,16·0,000027

a) 7,2 x 10^3

b) 2,4 x 10^4

c) 2,4 x 10^5

d) 3,6 x 10^4

e) 3,6 x 10^3

3) Qual das alternativas a seguir representa um quinto do resultado desta expressão numérica:

[(64 – 16·4) + (48·10 – 180)]·5

a) 270

b) 300

c) 350

d) 400

e) 410

4) Margarida viu no quadro-negro algumas anotações da aula anterior um pouco apagadas, conforme mostra a figura a seguir. Qual número foi apagado?

a) 9

b) 10

c) 12

d) 13

e) 15

5) Qual o valor de x na expressão abaixo?

$$x = \frac{3^{-2} + 2^{-1}}{\sqrt{1 + 5.4^{-1}}} + 5.\frac{\sqrt{\frac{16}{9}}}{6}$$

a) 1/27

b) 41/27

c) 1/17

d) 11/18

e) 41/17

6) Simplifique: ((0 ÷ 3) + (0,75 x 4)) / (1 + 0,5).

a) 1,5

b) 2

c) 4

d) 5,5

e) 6

7) Determine o valor da expressão:

-1 + 6 x (7 – 4 ÷ 2)

A) 7,5

B) 29

C) 8,5

D) 24

E) 32,5

8) Calcule o valor da expressão:

$$26 + \{12 - [(30 - 18) - (4 - 1) - 6] - 1\}$$

a) 10

b) 15

c) 34

d) 40

e) 54

9) Calcule o valor da expressão:

$$4^3 + 3^4 - 9^2$$

a) 6

b) 22

c) 32

d) 36

e) 64

10) Calcule o valor da expressão [(5 + 3) x 12] ÷ [(5- 3) x 4]

a) 6

b) 8

c) 12

d) 16

e) 24

Exercícios – Radiciação

1) (FGV) Simplificando-se 2√3 + 2√12 – 2√75 obtém-se:

a) 0

b) – 2√3

c) – 4√3

d) – 6√3

e) – 8√3

2) (Mack) O valor de √2 + √3.√18 é igual a:

a) √56

b) √108

c) √2 + 54

d) √6 + 6

e) √2.(1 + 3.√3)

3) (UFRGS) A expressão:

$$\frac{5\sqrt[12]{64}-\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt[4]{324}}$$

é igual a:

a) √2 + 3√3 / 4√2

b) 5√2

c) √3

d) 8√2

e) 1

4) (UTF - PR) Considere as seguintes expressões:

I. $\frac{3\sqrt{12}}{2} = 3\sqrt{2}$

II. $(2\sqrt{3})^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

III. $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

É (são) verdadeira(s), somente:

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) I e III.

5) EPCAR - 2015

O valor da soma

$$S = \sqrt{4} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{196}+\sqrt{195}}$$

é um número

a) natural menor que 10

b) natural maior que 10

c) racional não inteiro.

d) irracional.

6) CEFET/RJ – 2014 Por qual número devemos multiplicar o número 0,75 de modo que a raiz quadrada do produto obtido seja igual a 45?

a) 2700

b) 2800

c) 2900

d) 3000

7) IFCE - 2017

Aproximando os valores de $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$ até a segunda casa decimal, obtemos 2,23 e 1,73, respectivamente. Aproximando o valor de $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ até a segunda casa decimal, obtemos

a) 1,98.

b) 0,96.

c) 3,96.

d) 0,48.

e) 0,25.

8) IFSC - 2018

Analise as afirmações seguintes:

I. −52 − √16 · (−10) ÷ (√5)2 = −17

II. 35 ÷ (3 + √81 −23 + 1) × 2 = 10

III. Efetuando-se (3 + √5)(3 − √5) , obtém-se um número múltiplo de 2.

Assinale a alternativa CORRETA.

a) Todas são verdadeiras.

b) Apenas I e III são verdadeiras.

c) Todas são falsas.

d) Apenas uma das afirmações é verdadeira.

e) Apenas II e III são verdadeiras.

Exercícios – Produtos notáveis

1) O resultado $y^2x^2 – 4a^2$ é obtido por meio de qual dos produtos notáveis abaixo?

a) (yx + 2a)(yx – 2a)

b) (yx + 2a)(yx + 2a)

c) (x + a)(y – 2)

d) (y + a)(x + 2)

e) $(yx + 2a)^2$

2) Seja $x^2 + y^2 = 60$. Qual é o valor positivo de x + y, sabendo que xy = 20?

a) 5

b) 10

c) 15

d) 20

e) 25

3) A respeito dos produtos notáveis, assinale a alternativa correta.

a) $(x + a)^2 = x^2 + a^2$

b) $(x + a)^2 = x^2 + xa + a^2$

c) $(x – a)^2 = x^2 – a^2$

d) $(x – a)^2 = x^2 – 2x – a^2$

e) $(x – a)^2 = x^2 – 2ax + a^2$

4) Cefet/MG – 2014 O valor numérico da expressão $\sqrt{68^2-32^2}$ está compreendido no intervalo

a) [30,40[

b) [40,50[

c) [50,60[

d) [60,70[

5) Aprendiz de Marinheiro - 2015

O produto $(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ é igual a

a) 6

b) 1

c) 0

d) – 1

e) – 6

6) EPCAR - 2016

O valor da expressão

$$\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}\right).\left(\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}\right)$$

em que x e y ∈ R* e x ≠ y e x ≠ −y, é

a) −1

b) −2

c) 1

d) 2

7) (Uel) Se o polinômio f=2x£-12Ë(2)x+4k é um quadrado perfeito, então a constante real k é um número

a) quadrado perfeito.

b) cubo perfeito.

c) irracional.

d) divisível por 8.

e) primo.

8) A expressão [(4x+8)/(x£+3x+2)]+[(3x3)/(x£-1)], para x·•1, x·-2, é equivalente a

a) [4/(x + 1)] - [3/(x - 1)]

b) 1/(x + 1)

c) 7/(x + 1)

d) [4/(x + 1)] + [3/(x - 1)]

e) 1/(x + 1)

9) (Fatec) Sabe-se que a£ - 2bc - b£ - c£ = 40 e a - b - c = 10 com a, b e c números reais. Então o valor de a + b + c é igual a:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 10

e) 20

10) (Ufes) Assinale a sentença verdadeira.

a) Se a e b são números reais e ab>1, então a>1 ou b>1.

b) Se a = 0,999..., então Ëa = 0,333...

c) Se n é um inteiro positivo, então n£ + n é par.

d) Para todo número real x > 0 tem-se |x-1| = x-1.

e) Para todo número real x > 0 tem-se x´ x£ ´ x¤.

Exercícios – Teoria dos conjuntos e conjuntos numéricos

1) (UFSE) Os senhores A, B e C concorriam à liderança de certo partido político. Para escolher o líder, cada eleitor votou apenas em dois candidatos de sua preferência. Houve 100 votos para A e B, 80 votos para B e C e 20 votos para A e C. Em consequência:

a) venceu A, com 120 votos.

b) venceu A, com 140 votos.

c) A e B empataram em primeiro lugar.

d) venceu B, com 140 votos.

e) venceu B, com 180 votos.

2) (UFMG) Uma escola realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de seus alunos. Alguns resultados dessa pesquisa foram:

• 82% do total de entrevistados gostam de chocolate;
• 78% do total de entrevistados gostam de pizza; e
• 75% do total de entrevistados gostam de batata frita.

Então, é CORRETO afirmar que, no total de alunos entrevistados, a porcentagem dos que gostam, ao mesmo tempo, de chocolate, de pizza e de batata frita é, pelo menos, de:

a) 25%.

b) 30%.

c) 35%.

d) 40%.

3) (UFPA) Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus n alunos, tendo chegado ao seguinte resultado:

• 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club;

• 23 alunos torcem pelo Clube do Remo;

• 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama;

• 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco;

• 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo.

Se designarmos por A o conjunto dos torcedores do Paysandu, por B o conjunto dos torcedores do Remo e por C o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, teremos, evidentemente, $A \cap B = \varnothing$. Concluímos que o número n de alunos dessa turma é

a) 49.

b) 50.

c) 47.

d) 45.

d) 46.

4) Enem – 2004 Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a) 135

b) 126

c) 118

d) 114

e) 110

5) Sejam x e y números tais que os conjuntos {0, 7, 1} e {x, y, 1} são iguais. Então, podemos afirmar que:

A) $x = 0$ e $y = 5$

B) $x + y = 7$

C) $x = 0$ e $y = 1$

D) $x + 2y = 7$

E) $x = y$

Exercícios – Conjunto dos números naturais e inteiros

1) (IESES – IGP – SC) Faça a leitura das frases sobre conjuntos numéricos:

I. O número natural n pode ser chamado antecessor de n+1.

II. O conjunto dos números naturais é um subconjunto dos números inteiros.

III. A soma de dois números inteiros ímpares é sempre um número inteiro par.

IV. Entre dois números racionais, a e b, com a diferente de b, existe sempre outro número racional. A sequência correta é:

a) Apenas as assertivas I, III e IV estão corretas.

b) Apenas as assertivas III e IV estão corretas.

c) As assertivas I, II, III e IV estão corretas.

d) Apenas as assertivas I e II estão corretas.

2) Excetuando-se o 1, sabe-se que o menor divisor positivo de cada um de três números naturais diferentes são, respectivamente, 7; 3 e 11. Excetuando-se o próprio número, sabe-se que o maior divisor de cada um dos três

números naturais já citados são, respectivamente, 11; 17 e 13. A soma desses três números naturais é igual a:

a) 271.

b) 159.

c) 62.

d) 303.

e) 417.

3) (PM SC 2011) Leia as afirmações a seguir:

I. Os números Naturais são aqueles inteiros não positivos mais o zero.

II. Os números Irracionais são aqueles que representam dízimas periódicas.

III. Os números Reais representam a soma dos números Racionais com os Irracionais.

Assinale a alternativa correta:

a) Somente a assertiva II está correta.

b) Somente a assertiva III está correta.

c) Somente a assertiva I está correta.

d) Somente as assertivas II e III estão corretas.

4) Sendo D o número de divisores naturais de 252, e N o número de divisores naturais de 1296, então o valor de 2.D + 3.N será:

A) 18

B) 25

C) 43

D) 75

E) 111

5) (UFMT MG – 2006) XYZ4 e X4YZ representam dois números inteiros de quatro algarismos. Se X4YZ excede XYZ4 em 288 unidades, então Z-Y é igual a:

a) -3

b) -1

c) 1

d) 3

e) 5

6) (FGV – 2006) Pedro tirou menos de uma centena de fotos da festa de comemoração ao seu aniversário e quer colocá-las todas num álbum de 20 páginas. Em cada página desse álbum cabem, no máximo, 10 fotos. Inicialmente, Pedro tentou colocar 6 fotos em cada página. Ao final, depois de preenchidas algumas páginas do álbum, ficou sobrando uma foto. Em nova tentativa, dispôs 7 fotos por página e ainda assim sobrou uma foto. Finalmente, Pedro conseguiu colocar todas as fotos, de modo que cada página contivesse o mesmo número de fotos. Quantas páginas do álbum Pedro preencheu?

a) 9

b) 17

c) 18

d) 19

e) 20

7) Se a soma e a diferença entre dois números inteiros são, respectivamente, iguais a 33 e 7, o produto desses números é:

a) 400

b) 260

c) 13

d) 20

e) 169

8) O número natural ($2^{103} + 2^{102} + 2^{101} – 2^{100}$) é divisível por:

a) 6

b) 10

c) 14

d) 22

e) 26

Exercícios – MMC E MDC

1) (FUVEST) No alto da torre de uma emissora de televisão, duas luzes “piscam” com frequências diferentes. A primeira “pisca” 15 vezes por minuto e a segunda “pisca” 10 vezes por minuto. Se, num certo instante, as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a “piscar” simultaneamente?

A) 12

B) 10

C) 20

D) 15

E) 30

2) (UNICAMP) Numa linha de produção, certo tipo de manutenção é feito na máquina A a cada 3 dias, na máquina B a cada 4 dias e na máquina C a cada 6 dias. Se no dia 2 de dezembro foi feita a manutenção nas três máquinas, a próxima vez em que a manutenção das três ocorreu no mesmo dia foi:

A) 5 de dezembro.

B) 6 de dezembro.

C) 8 de dezembro.

D) 14 de dezembro.

E) 26 de dezembro.

3) (PUC) A partir das 07h00min, as saídas de ônibus de Belo Horizonte para Sete Lagoas, Ouro Preto e Monleavade obedecem à seguinte escala

• Para Sete Lagoas, de 35 em 35 minutos.

• Para Ouro Preto, de 40 em 40 minutos.

• Para Monlevade, de 70 em 70 minutos. Às sete horas, os ônibus saem juntos. Após as sete horas, os ônibus para essas cidades voltarão a sair juntos às

A) 10h20min.

B) 11h40min.

C) 12h10min.

D) 13h00min.

4) Em algumas famílias de uma comunidade carente foram distribuídos 240 cadernos, 576 lápis e 1080 borrachas. A distribuição foi feita de tal modo que o maior número de famílias fosse contemplado e que cada família recebesse a mesma quantidade x de lápis, a mesma quantidade y de cadernos e a mesma quantidade z de borrachas. Nessas condições, a quantidade z de borrachas que cada família recebeu foi igual a

A) 24.

B) 28.

C) 36.

D) 40.

E) 45.

5) (UFES) Deseja-se acondicionar 2004 bolas de tênis em caixas de mesma capacidade, de modo que cada caixa contenha o número de bolas determinado por usa capacidade. Dispõese de vários tipos de caixas, desde o tipo com capacidade para apenas uma bola até o tipo com capacidade para todas as bolas. Nessas condições, o número de todos os possíveis tipos de caixas para acondicionar as 2004 bolas é

A) 12

B) 15

C) 24

D) 25

E) 30

6) (COLÉGIO NAVAL 2018) Considere os dois números naturais 'a' e ‘b’,ambos formados por dois algarismos. Sabe-se que a • b = 2160 e que 0 máximo divisor comum de ‘a’ e ‘b’ é 12. Sendo assim, é correto afirmar que, ao se dividir a diferença positiva entre ‘a’ e ‘b’ por 11, encontra-se resto igual a:

A) 9

B) 6

C) 5

D) 2

E) 1

7) (CMRJ 2017) Um torneio de xadrez terá alunos de escolas militares. O Colégio Militar de Campo Grande (CMCG) levará 120 alunos; o Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ), 180; e o Colégio Militar de Brasília (CMB), 252. Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e que o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo. Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é

A) 10.

B) 12.

C) 15.

D) 21.

E) 46.

8) Em um depósito há um determinado número de caixas que deverão ser empilhadas, de modo que cada pilha tenha o mesmo número de caixas. Na realização da tarefa foi constatado que, se cada pilha tiver 5 caixas, ou 6 caixas ou 8 caixas, sempre restarão 2 caixas fora das pilhas. O menor número de caixas que deverão ser empilhadas nesse depósito é

A) 124.

B) 126.

C) 120.

D) 122.

E 118.

9) (EAM 2018) Considerando-se todos os divisores naturais de 360, quantos NÃO são pares?

A) 6

B) 5

C) 4

D) 3

E) 2

10) (EAM 2016) Seja A = 120, B = 160, x = mmc(A,B) e y = mdc(A,B), então o valor de x + y é igual a:

A) 460

B) 480

C) 500

D) 520

E) 540

Exercícios – Regra de três simples e composta

1) (EsPCEx 2015) As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e a soma dessas medidas é igual a 48 cm. Então a medida da sua área total, em cm2, é:

a) 752.

b) 820.

c) 1024.

d) 1302.

e) 1504.

2) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

a) 12 kg.

b) 16 kg.

c) 24 kg.

d) 36 kg.

e) 75 kg.

3) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m³. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m³, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2.

b) 4.

c) 5.

d) 8.

e) 9.

4) Os habitantes de certa ilha têm predileção por uma loteria na qual o jogador deve escolher pelo menos 5 das 35 letras que compõem o alfabeto utilizado no lugar. Vence o jogo quem acertar as 5 letras sorteadas independentemente da ordem do sorteio. Pela aposta em uma quina, o jogador paga um pin, unidade monetária da ilha.

Caso um apostador decida aumentar suas chances de ganhar marcando 7 letras, o preço que deverá pagar pelo jogo, em pins, será:

a) 14

b) 16

C) 19

d) 21

5) Um automóvel, modeloflex, consome 34 litros de gasolina para percorrer 374 km. Quando se opta pelo uso do álcool, o automóvel consome 37 litros deste combustível para percorrer 259 km. Suponha que um litro de gasolina custe R$ 2,20.

Qual deve ser o preço do litro do álcool para que o custo do quilômetro rodado por esse automóvel, usando somente gasolina ou somente álcool como combustível, seja o mesmo?

a) R$ 1,00

b) R$ 1,10

c) R$ 1,20

d) R$ 1,30

e) R$ 1,40

6) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

a) 12 kg.

b) 16 kg.

c) 24 kg.

d) 36 kg.

e) 75 kg.

7) Um festival foi realizado num campo de 240 m por 45 m. Sabendo que por cada 2 m2 havia, em média, 7 pessoas, quantas pessoas havia no festival?

a) 42.007

b) 41.932

c) 37.800

d) 24.045

e) 10.000

8) Uma televisão pode ser posicionada de modo que se consiga enxergar os detalhes de uma imagem em alta definição. Considere que a distância ideal, com conforto visual, para se assistir à televisão de 32 polegadas é de 1,8 metro. Supunha que haja uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho da tela (medido

em polegada) e a distância ideal. Considere que um espectador dispõe de uma televisão de 60 polegadas e que ele deseja se posicionar em frente a ela, com conforto visual.

A distância da televisão, em metro, em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de

a) 0,33

b) 0,96

c) 1,57

d) 3,37

9) Um ciclista percorreu 150 km em 3 dias, pedalando 2 horas, diariamente. Pedalando 4 horas por dia, durante 4 dias, ele percorrerá ____ quilômetros.

a) 300

b) 350

c) 400

d) 450

e.500e.3,60

10) Um show especial de Natal teve 45 000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o show, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao show e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

a) 1 hora.

b) 1 hora e 15 minutos.

c) 5 horas.

d) 6 horas.

e) 6 horas e 15 minutos.

11) **(PA)** Preparando-se para a Volta Internacional da Pampulha, que mede 17.800 m, certo atleta treina diariamente e, a cada dia, corre 150 m a mais do que no dia anterior. Nesse ritmo, no décimo segundo dia, ele corre um total de 3.650 m.

A partir dessas informações, pode-se estimar que, para estar em condições de cumprir essa prova, esse atleta deverá treinar, no mínimo, durante:

a) 107 dias

b) 110 dias

c) 113 dias

d) 116 dias

12) Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm X 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

a) Retirar 16 células.

b) Retirar 40 células.

c) Acrescentar 5 células.

d) Acrescentar 20 células.

e) Acrescentar 40 células

13) Em alguns países anglo-saxões, a unidade de volume utilizada para indicar o conteúdo de alguns recipientes é a onça fluida britânica. O volume de uma onça fluida britânica corresponde a 28,4130625 mL.

A título de simplificação, considere uma onça fluida britânica correspondendo a 28 mL.

Nessas condições, o volume de um recipiente com capacidade de 400 onças fluidas britânicas, em cm3, é igual a

a) 11200

b) 1120

c) 112

d) 11,2

e) 1,12

Exercícios – Conjunto dos números racionais

1) Num mapa político, de escala 1: 1000.000, foram realizadas três medições, a saber:

AB= 7,3cm; BC = 8,2cm e CD= 9cm.

Quais as distâncias correspondentes, respectivamente, no terreno?

a) 73 km, 82 km e 90 km.

b) 730 km, 820 km e 900 km.

c) 73 m, 82 m e 90 m.

d) 23 km, 280 km e 91 km.

e) 71 km, 83 km e 91 km.

2) A distância, em linha reta, entre duas cidades em um mapa é de 4,3 cm. A escala do mapa é de 1: 3.500.000. A distância real entre as cidades é de:

a) 1,505 km

b) 15,05 km

c) 150,5 km

d) 1.505 km

e) 15.050 km

3) Em um mapa, a distância entre dois pontos é de 4 cm (quatro centímetros) e a distância real é de 4 km (quatro quilômetros). Esse mapa está representado na seguinte escala numérica:

a) 1:100

b) 1:1.000

c) 1:10.000

d) 1:100.000

e) 1:1.000.000

4) Devido a fatores cambiais e alfandegários, o preço de certo produto importado aumentou 150%. Para que o preço desse produto voltasse a ser o que era antes do aumento, o novo preço teria que ser diminuído de

A) 40%

B) 60%

C) 80%

D) 150%

5) **(PROBABILIDADE)** (EPCAR 2019) Numa competição matemática entre as esquadrilhas do Esquadrão Phoenix, atual 1° esquadrão do CPCAR, havia um desafio entre as duas duplas A e B finalistas. Tal desafio consistia em escolher uma caixa na qual poderia haver um objeto escondido.

Foram colocadas 8 caixas e em apenas uma encontrava-se o tal objeto desejado. Ganhava o desafio aquela dupla que apontasse a caixa na qual estivesse o objeto.

Sabe-se que, na competição, as duplas alternariam na escolha da caixa e, caso a dupla errasse, a caixa seria eliminada.

Sorteada a ordem de competição, a dupla A fez a 1ª escolha e errou. A 2ª escolha foi feita pela dupla B que também errou. No entanto, a dupla B foi a vencedora do desafio, o que só aconteceu na última caixa restante.

Em relação à probabilidade de cada dupla ser vencedora do desafio no momento de escolha da caixa, é correto afirmar que a

a) maior probabilidade de acerto que a dupla A teve numa de suas escolhas foi menor que 40 %

b) probabilidade de acerto da dupla A em sua 3ª escolha foi maior que 15% e menor que 17%

c) probabilidade de acerto da dupla B era sempre o dobro da probabilidade de acerto da dupla A, se consideradas duas escolhas consecutivas.

d) 3ª maior probabilidade de acerto da dupla B foi de 20%

6) Um investidor aplicou R$ 30.000,00 em uma instituição financeira a uma taxa de juros simples de 2% ao mês. Qual o valor do juro obtido em um ano?

a) R$ 7.200,00.

b) R$ 7.800,00.

c) R$ 8.000,00.

d) R$ 8.200,00.

e) R$ 8.500,00.

7) Considere que um investidor possuía um determinado montante financeiro que foi dividido em duas aplicações financeiras de mesmo valor, numa mesma data, com a mesma taxa de juros, no regime de juros compostos. Uma das aplicações proporcionou um montante de R$ 43.923,00, num prazo de quatro meses. A outra aplicação proporcionou um montante de R$ 53.146,83, num prazo de 6 meses. Assinale a opção que apresenta o valor do montante financeiro que o investidor possuía na data da aplicação.

a) R$ 30.000,00

b) R$ 45.000,00

c) R$ 50.000,00

d) R$ 60.000,00

e) R$ 90.000,00

8) Dois capitais foram aplicados por quatro anos, com a mesma taxa de juros de 5% ao ano. Um capital foi aplicado no regime de juros simples e o outro no regime de juros compostos. Assinale a opção que apresenta o valor da diferença dos valores dos capitais aplicados, sabendo que eles produzem montantes iguais a $ 24.000,00, no final dos quatro anos e assumindo o ano comercial com 360 dias.

a) $ 255,14

b) $ 285, 14

c) $ 350,14

d) $ 355,14

e) $ 385,14

9) Um trabalhador autônomo pretende garantir um ganho mensal de cinco salários mínimos por ocasião de sua aposentadoria. Calcule o valor necessário que este trabalhador deverá acumular até a sua aposentadoria para garantir o recebimento mensal desejado, de forma perpétua, sabendo-se que o valor acumulado será remunerado com uma taxa de 0,8% ao mês, no regime de juros compostos, e assinale a opção correta.

Dados: Valor do salário mínimo de R$ 724,00 e constante ao longo do tempo.

a) R$ 45. 250,00

b) R$ 90 .500,00

c) R$ 452 .500,00

d) R$ 905 .000,00

e) R$ 4 .525.000,00

10 Dois capitais foram aplicados por quatro anos, com a mesma taxa de juros de 5% ao ano. Um capital foi aplicado no regime de juros simples e o outro no regime de juros compostos. Assinale a opção que apresenta o valor da diferença dos valores dos capitais aplicados, sabendo que eles produzem montantes iguais a $ 24.000,00, no final dos quatro anos e assumindo o ano comercial com 360 dias.

a) $ 255,14

b) $ 285, 14

c) $ 350,14

d) $ 355,14

e) $ 385,14

11) Maria comprou um computador em 3 parcelas mensais e iguais de R$ 540,80, a primeira parcela paga no momento da compra. Se o preço do computador à vista era de R$ 1500,00, e se foram cobrados juros compostos de 4% ao mês, quanto Maria pagou de juros (em valores do momento da compra)?

a) R$ 60,80

b) R$ 60,70

c) R$ 60,60

d) R$ 60,50

e) R$ 60,40

12) Alexandre pegou dois empréstimos com seus familiares, totalizando R$ 20.000,00. Ele combinou pagar juros simples de 8% ao ano em um dos empréstimos e de 5% ao ano no outro. Após um ano nada foi pago, e por isso sua dívida aumentou de R$ 20.000,00 para R$ 21.405,00. Quanto foi tomado emprestado de cada familiar?

a) R$ 2.600,00 e R$ 17.400,00.

b) R$ 4.000,00 e R$ 16.000,00.

c) R$ 6.500,00 e R$ 13.500,00.

d) R$ 7.700,00 e R$ 12.300,00.

e) R$ 8.200,00 e R$ 11.800,00.

Exercícios – Conjuntos dos números irracionais e reais

1) As alternativas abaixo fazem afirmações sobre o conjunto dos números irracionais. Qual delas está correta?

a) O conjunto dos números irracionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração.

b) No conjunto dos números irracionais, é possível encontrar alguns números inteiros, como $\sqrt{2}$.

c) O conjunto dos números irracionais é formado por todas as raízes de números que não são quadrados perfeitos.

d) O conjunto dos números irracionais é constituído por todos os decimais que não são números racionais.

e) O conjunto dos números racionais também contém dízimas periódicas.

2) Qual das alternativas abaixo contém pelo menos um número que não é racional?

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) 1,234567891011121314...

c) π; φ; $\sqrt{7}$ e 1,3333333...

d) $\sqrt{2}$+3e $\sqrt{3}$

e) $3\sqrt{2}$, 3π e 3φ

3) Quais valores de x fazem com que o resultado da divisão abaixo não seja um número real?

$$\frac{4x^2+16}{4x^2-16}$$

a) x = 4 ou x = 2

b) x = 4 ou x = – 4

c) x = 2 ou x = – 2

d) x = 2

e) x = 4

4) (MACK) Dado m > 0, a equação $\sqrt{x+m} = x - \sqrt{m}$ admite:

a) unicamente a raiz nula

b) uma raiz real e positiva

c) uma única raiz real e negativa

d) duas raízes reais, sendo uma nula

e) duas raízes reais e simétricas

5) Sobre o conjunto dos números Reais, estão corretas as afirmações:

I – O número raiz de sete é um número irracional, portanto é também um número real.

II – O número 3/5 é um número racional, portanto é também um número real.

III – Todo número natural é inteiro, todo número inteiro é também racional e todo número racional é também um número real.

a) Apenas I e III estão corretas.

b) Apenas II e III estão corretas.

c) apenas I e II estão corretas.

d) Apenas II está correta.

e) Todas estão corretas.

6) (Unesp 94) Sejam x e y dois números reais não nulos e distintos entre si. Das alternativas a seguir, a única necessariamente verdadeira é:

a) - x < y.

b) x < x + y.

c) y < xy.

d) x£ · y£.

e) x£ - 2xy + y£ > 0

7) (Fuvest 99) Dados dois números reais a e b que satisfazem as desigualdades 1 < a < 2 e 3 < b < 5, pode-se afirmar que

a) a/b ´ 2/5

b) a/b µ 2/3

c) 1/5 ´ a/b ´ 2/3

d) 1/5 ´ a/b ´ 1/2

e) 3/2 ´ a/b ´ 5

8) (Puccamp 2000) Considere os conjuntos:

IN, dos números naturais,

Q, dos números racionais,

Q_+, dos números racionais não negativos,

IR, dos números reais.

O número que expressa

a) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de Q_+, mas não de IN.

b) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de IN.

c) a velocidade média de um veículo é um elemento de Q, mas não de Q_+.

d) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de Q_+.

e) a medida do lado de um triângulo é um elemento de Q.

9) (Ita 2002) Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se x > 4 e y < 2, então x£ - 2y > 12.

II. Se x > 4 ou y < 2, então x£ - 2y > 12.

III. Se x£ < 1 e y£ > 2, então x£ - 2y < 0.

Então, destas é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) apenas I e III.

e) todas

10) (Ufc 2000) Sejam x e y números reais tais que:

1/4 < x < 1/3; 2/3 < y < 3/4 e A = 3x - 2y

Então é correto afirmar que:

a) 4/3 < A < 5/2

b) 3/4 < A < 1

c) -4/3 < A < -3/4

d) -3/4 < A < -1/3

e) -1/3 < A < 0

Exercícios – Números complexos

1) (EsPCEx 2017) Seja a igualdade:

$$\frac{a}{3} - \frac{b}{5} i = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^4$$

onde **i** é a unidade imaginária. Se a e b são números reais, então o quociente ***a/b*** é igual a:

a) √3/5

b) 3√3/5

c) - 3√3/5

d) - √3/5

e) 15√3/4

2) (EsPCEx2016) As três raízes da equação x3–6x2+21x–26=0 são m,n e p. Sabendo que m e n são complexas e que p é uma raiz racional, o valor de m2+n2 é igual a

a) – 18

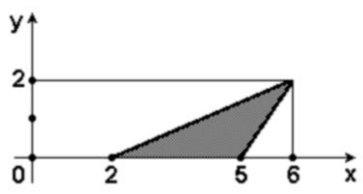
b) – 10

c) 0

d) 4

e) 8

3) (Unifesp) Considere, no plano complexo, conforme a figura, o triângulo de vértices $z_1 = 2$, $z_2 = 5$ e $z_3 = 6 + 2i$.



A área do triângulo de vértices $w_1 = iz_1$, $w_2 = iz_2$ e w3 = $2iz_3$ é:

a) 8.

b) 6.

c) 4.

d) 3.

e) 2.

4) (Unitau) O módulo de $z=1/i^{36}$ é:

a) 3.

b) 1.

c) 2.

d) 1/36.

e) 36.

5) (Cesgranrio) O lugar geométrico das imagens dos complexos z, tais que z^2 é real, é:

a) um par de retas paralelas.

b) um par de retas concorrentes.

c) uma reta.

d) uma circunferência.

e) uma parábola.

6) (Fuvest) Dado o número complexo z=Ë3+i qual é o menor valor do inteiro n≥1 para o qual z^n é um número real?

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

7) (Unitau) A expressão $i^{13}+i^{15}$ é igual a:

a) 0

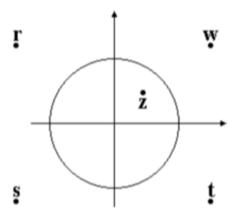
b) i.

c) - i.

d) - 2i.

e) 3i.

8) (Cesgranrio) A figura mostra, no plano complexo, o círculo de centro na origem e raio 1, e as imagens de cinco números complexos. O complexo 1/z é igual a:



a) z

b) w

c) r

d) s

e) t

9) e menor grau possível, admite as raízes 1 e i. Se P(0)=-1, então P(-1) vale:

a) -4

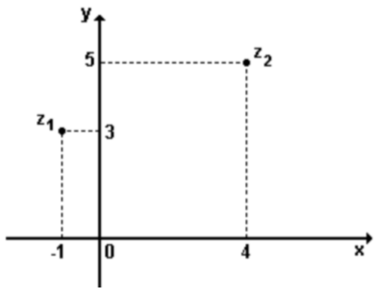
b) 4

c) -2

d) 2

e) -1

10) (Unirio)



Sejam z_1 e z_2 números complexos representados pelos seus afixos na figura anterior. Então, o produto de z_1 pelo conjugado de z_2 é:

a) 19 + 10i

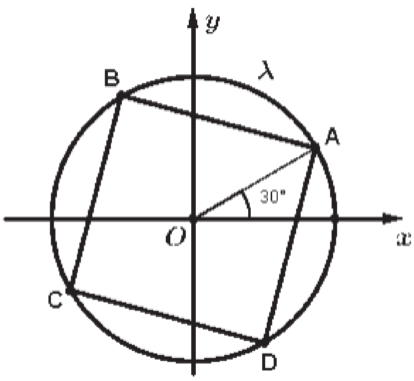
b) 11 + 17i

c) 10

d) -19 + 17i

e) -19 + 7i

11) (EsPCEx 2018) No plano complexo, temos uma circunferência λ de raio 2 centrada na origem. Sendo ABCD um quadrado inscrito à λ, de acordo com a figura abaixo, podemos afirmar que o número complexo que representa o vértice B é



Desenho Ilustrativo Fora de Escala

a) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

b) $-\sqrt{3}-i.$

c) $-1+\sqrt{3}i.$

d) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$

12) (EsPCEx 2016) Sejam z e v números complexos onde |z|=1 e v tem coordenadas no plano de Argand-Gauss $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Sobre o número complexo z e v (resultante da multiplicação dos complexos z e v), podemos afirmar que

a) sempre é um número real.

b) sempre tem módulo igual a 2.

c) sempre é um número imaginário puro.

d) pertence à circunferência x2 + y2 = 1

e) sempre tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$

13) (EsPCEx 2014) A representação geométrica, no Plano de Argand-Gauss, do conjunto de pontos que satisfazem a condição | z + 2 -3i | = | z - 1 + 4i |, com z = x + yi, sendo x e y números reais, é reta de equação

a) 2x-3y+7=0.

b) 3x-7y-2=0.

c) 2x-3y+3=0.

d) 4x-3y+3=0.

e) 2x-y=0.

14) (EsPCEx 2013) Sendo z o número complexo obtido na rotação de 900, em relação à origem, do número complexo 1 + i, determine z3:

a) 1 - i

b) -1 + i

c) -2i

d) -1 - 2i

e) 2 + 2i

15) Sendo Z o conjugado do número complexo Z e i a unidade imaginária, o número complexo Z que satisfaz à condição Z+2 Z= 2-Zi é

a) z = 0 + 1i

b) z = 0 + 0i

c) z = 1 + 0i

d) z = 1 + i

e) z = 1 – i

16) Um número complexo z, em sua forma trigonométrica, é do tipo z = p(cosq + isenq), onde p é o módulo de z e q é a medida em radiano do argumento de z. Ao apresentarmos o número complexo z = $-1+i\sqrt{3}$ em sua forma trigonométrica, os parâmetros p e q são respectivamente

a) $p=2, q=\frac{3\pi}{4}$

b) $p=3, q=\frac{2\pi}{3}$

c) $p=3, q=\frac{3\pi}{4}$

d) $p=2, q=\frac{2\pi}{3}$

17) Dados os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -i$ e $z_3 = z_1 . z_2$, é correto afirmar que a forma trigonométrica do número complexo z_3 é

a) $1\left(cos\frac{7\pi}{4}+i\,sen\frac{7\pi}{4}\right)$

b) $2\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sen\frac{\pi}{4}\right)$

c) $2\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\,sen\frac{5\pi}{4}\right)$

d) $\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+i\,sen\frac{7\pi}{4}\right)$

e) $\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sen\frac{3\pi}{4}\right)$

18) (IFAL 2919) A forma trigonométrica do número complexo $Z=-2i$ é:

a) $Z=2\left(cos\frac{\pi}{2}+i\,sen\frac{\pi}{2}\right)$

b) $Z=2(cos\,\pi+i\,sen\,\pi)$

c) $Z=2\left(cos\frac{3\pi}{2}+i\,sen\frac{3\pi}{2}\right)$

d) $Z=2(cos\,2\pi+i\,sen\,2\pi)$

e) $Z=2\left(sen\frac{3\pi}{2}+i\,cos\frac{3\pi}{2}\right)$

Exercícios – Funções

1) **(RAZÃO/PROPORÇÃO)** Duas grandezas positivas x e y são inversamente proporcionais se existe uma correspondência bijetiva entre os valores de x e os valores de y e um número constante positivo k tal que, se o valor y é o correspondente do valor x então y.x = k. Nestas condições, se o valor y = 6 é o correspondente ao valor x = 25, então o valor y que corresponde ao valor x = 15 é

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

2) Enem 2017) No primeiro ano do ensino médio de uma escola, é hábito os alunos dançarem quadrilha na festa junina. Neste ano, há 12 meninas e 13 meninos na turma, e para a quadrilha foram formados 12 pares distintos, compostos por uma menina e um menino. Considere que as meninas sejam os elementos que compõem o conjunto A e os meninos, o conjunto B, de modo que os pares formados representem uma função f de A em B.

Com base nessas informações, a classificação do tipo de função que está presente nessa relação e

a) f é injetora, pois para cada menina pertencente ao conjunto A está associado um menino diferente pertencente ao conjunto B.

b) f é sobrejetora, pois cada par e formado por uma menina pertencente ao conjunto A e um menino pertencente ao conjunto B, sobrando um menino sem formar par.

c) f é injetora, pois duas meninas quaisquer pertencentes ao conjunto A formam par com um mesmo menino pertencente ao conjunto B, para envolver a totalidade de alunos da turma.

d) f é bijetora, pois dois meninos quaisquer pertencentes ao conjunto B formam par com uma mesma menina pertencente ao conjunto A.

e) f é sobrejetora, pois basta que uma menina do conjunto A forme par com dois meninos pertencentes ao conjunto B, assim nenhum menino ficará sem par.

3) (ITA 2017) Sejam X e Y dois conjuntos finitos com X ⊂ Y e X X ≠ Y. Considere as seguintes afirmações:

I. Existe uma bijeção f: X → Y.

II. Existe uma função injetora g: Y → X.

III. O número de funções injetoras f: X → Y é igual ao número de funções sobrejetoras g: Y → X.

É (são) verdadeira(s)

a) nenhuma delas.

b) apenas I.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) todas.

4) No primeiro ano do ensino médio de uma escola, é hábito os alunos dançarem quadrilha na festa junina. Neste ano, há 12 meninas e 13 meninos na turma, e para a quadrilha foram formados 12 pares distintos, compostos por uma menina e um menino. Considere que as meninas sejam os elementos que compõem o conjunto A e os meninos, o conjunto B, de modo que os pares formados representem uma função f de A em B. **(REPETE :02)**

Com base nessas informações, a classificação do tipo de função que está presente nessa relação é

a) f é injetora, pois para cada menina pertencente ao conjunto A está associado um menino diferente pertencente ao conjunto B.

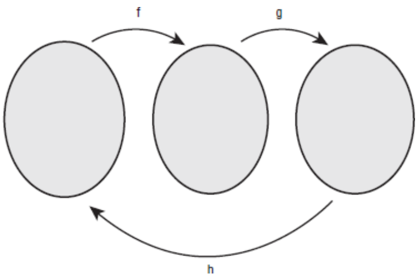
b) f é sobrejetora, pois cada par e formado por uma menina pertencente ao conjunto A e um menino pertencente ao conjunto B, sobrando um menino sem formar par.

c) f é injetora, pois duas meninas quaisquer pertencentes ao conjunto A formam par com um mesmo menino pertencente ao conjunto B, para envolver a totalidade de alunos da turma.

d) f é bijetora, pois dois meninos quaisquer pertencentes ao conjunto B formam par com uma mesma menina pertencente ao conjunto A.

e) f é sobrejetora, pois basta que uma menina do conjunto A forme par com dois meninos pertencentes ao conjunto B, assim nenhum menino ficará sem par.

5) (ESPM 2018) Se f(x) = 2x + 1 e g(x) = 3 – x, a função h(x) representada no diagrama abaixo é:



a) $h(x)=\frac{2-x}{2}$

b) $h(x)=\frac{2-x}{x}$

c) $h(x)=\frac{x}{2-x}$

d) $h(x)=\frac{x}{x-2}$

e) $h(x)=\frac{x-2}{2x}$

6) Considere a função $f(x)=\frac{1}{2-x}$, Então f(f(f(3))) é igual a:

a) 5/3

b) 3

c) -1/3

d) -1

e) 3/5

7) Seja a função $h(x)$ definida para todo número real x por

$$h(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & \text{se} \quad x\leq 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{se} \quad x>1. \end{cases}$$

Então: h(h(h(o)))

a) 0.

b) 2.

c) 4.

d) 8.

8) (EsPCEx 2015) Considere as funções reais *f* e *g*, tais que $f(x)=\sqrt{x}+4$ e $f(g(x))=x^2-5$, onde g(x) é não negativa para todo x real.

Assinale a alternativa cujo conjunto contém todos os possíveis valores de *x*, que satisfazem os dados do enunciado.

a) $IR-\,]-3,3[$

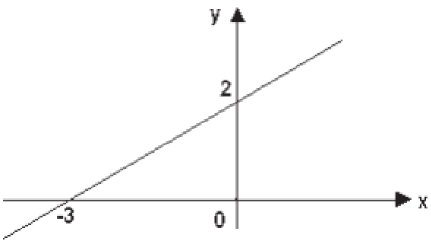
b) $IR-\,]-\sqrt{5},\sqrt{5}[$

c) $]-\sqrt{5},\sqrt{5}[$

d) $]-3,3[$

e) $IR-\,]-\infty,3[$

9) (EsPCEx 2011) Considere a função real f(x), cujo gráfico está representado na figura, e a função real g(x), definida por g(x) = f(x-1) + 1.



O valor de $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ é

a) -3

b) -2

c) 0

d) 2

e) 3

10) (EsPCEx 2009) Considere a função real g(x) definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 5^x, \text{ se } x \leq 1 \\ \frac{-3x^2}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{17}{4}, \text{ se } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

O valor de g(g(g(1))) é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

11) (EsPCEx 2016) (FUNÇÃO MODULAR) Os gráficos de f(x)=2 e g(x)=x2-|x| têm dois pontos em comum. O valor da soma das abscissas dos pontos em comum é igual a

a) 0

b) 4

c) 8

d) 10

e) 15

12) Uma lanchonete de empadas, tem uma despesa mensal fixa de R$ 1.650,00. Sabe-se que cada empada é vendida por R$ 4,00, sendo que a despesa para ser produzida é de R$ 1,80. Qual o número mínimo de empadas que devem ser vendidas em um mês para que não haja prejuízo?

a) 250

b) 450

c) 750

d) 1000

e) 1125

13) Os pares ordenados A(55, 113) e B(57, 117) representam pontos que pertencem ao gráfico da função afim definida por f(x) = ax + b.

O valor de a é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

14) A renda líquida mensal x (em reais) de uma família pode ser decomposta em duas parcelas: o consumo e a poupança. A poupança é a parte da renda líquida que não é utilizada para consumo.

Admitindo que o consumo C seja uma função do primeiro grau de x e que, quando a renda líquida é R$8 000,00, o consumo é R$8 000,00, e, quando a renda líquida é R$12 000,00, o consumo é R$10 000,00, pode-se afirmar que a poupança P em função de x é:

a) P = 0, 5x - 3500

b) P = 0, 5x - 4000

c) P = 0, 5x - 5000

d) P = 0, 5x - 4500

e) P = 0, 5x - 5500

15) Em uma concessionária de carros, um vendedor tem o salário fixo mensal de R$ 3.000,00. Além disso, ele recebe R$ 500,00 de comissão para cada carro que ele vender. Nesse contexto, o ganho mensal total do vendedor em função do número x de automóveis vendidos e a quantidade que ele precisa vender em um mês para obter um salário de R$ 10.000,00 são, respectivamente,

a) 3 000 + 500x e 6.

b) 3 000 + 500x e 14.

c) 3 000x + 500 e 3.

d) 3 500 + x e 3 500.

e) 3 500 + x e 6 500.

16) **(FUNÇÃO COSSENO)** (PUC-PR) A variação da pressão sanguínea (em mmHG) de uma pessoa em função do tempo (em segundos) é uma função trigonométrica cuja lei é dada por:

$$P(t) = 100 - 20.cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$

De acordo com os dados acima, assinale a alternativa que corresponde à CORRETA variação da pressão

a) [-20, 20].

b) [0, 20].

c) [80,100].

d) [80,120].

e) [100,120].

17) **(EEAR) (FUNÇÃO MODULAR)** Seja f(x) = |x - 3| uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

18) (FUNÇÃO MODULAR) Se f : R→R é definida por f (x) =1− x^2 − |x^2− 2| , então

a) o gráfico de f é uma parábola.

b) o conjunto imagem de f é] −∞, −1] .

c) f é uma função injetora.

d) f é uma função sobrejetora.

e) f é crescente para x ≤ 0, e, decrescente para x >0 =.

19) Se f é uma função inversível com f(2)=0 e g(x) = x/(x+1), então $(fog)^{-1}(0)$ é igual a

a) − 4

b) − 3

c) − 2

d) − 1

e) 0

20) (LOGARITMO) Seja R_+ o conjunto dos números reais positivos e f: R → R_+ a função definida por f(x) = 2^x . Esta função é invertível. Se f-1 : R+ → R é sua inversa, então, o valor de f^{-1} (16) – f^{-1} (2) – f^{-1} (1) é

a) 3.

b) 8.

c) 7.

d) 5.

Exercícios – Função quadrática

1) Considere a função y = 3x2 - 2x - 1para todos os valores reais de x. Qual é o vértice da parábola?

a) $\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$

b) $\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2},-\frac{4}{3}\right)$

d) (3,-4)

2**) (REGRA DE 3)** A gestão municipal de uma cidade aplica R$ 24,00 em Educação para cada R$ 14,00 em Saúde. Se, em dois meses, foram aplicados R$ 224.000,00 em Saúde, qual é o valor aplicado em Educação nesses dois meses?

a) R$ 584.000,00

b) R$ 434.000,00

c) R$ 384.000,00

d) R$ 296.000,00

e) R$ 248.000,00

3) Após perder o emprego, Edileusa decidiu iniciar um negócio próprio. Como ela sempre teve uma boa desenvoltura para cozinhar, decidiu que iria fazer bolos para vender. Depois de certo tempo, com o crescimento das encomendas, Edileusa conseguiu calcular o lucro obtido por meio de uma função matemática que relaciona a quantidade de bolos produzidos e vendidos. A função é f(x) = – x 2 + 60x, em que f(x) representa o lucro obtido, em reais, e x a quantidade de bolos produzidos e vendidos. Porém, com o passar do tempo, Edileusa percebeu que, para atingir o lucro máximo, ela só poderá produzir certa quantidade máxima de bolos, pois, caso contrário, com uma produção muito grande, o lucro começaria a diminuir devido aos crescentes custos.

Portanto, para que Edileusa consiga um lucro máximo, ela deverá produzir e vender

Obs.: Considere que todos os bolos que são produzidos são vendidos.

a) 20 bolos

b) 30 bolos.

c) 40 bolos.

d) 50 bolos.

e) 60 bolos

4) Sejam as funções reais definidas por f(x) = x^2 - 1 e $g(x)=\frac{1}{x}$. Então, f (g(-1)) é igual a:

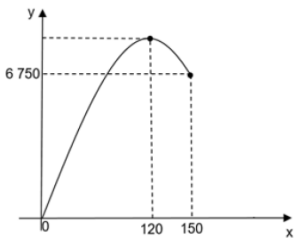
a) – 1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

5) Um empresário do ramo farmacêutico que produz e comercializa antibióticos percebeu que a quantidade vendida variava de acordo com o preço de venda. Guiando-se pela lei da oferta e da procura, elaborou uma fórmula matemática que modela a Receita (y), em reais, em função da quantidade de antibióticos (x) vendidos pela empresa, sendo $0 \leq x \leq 150$.



Com base no gráfico, a receita máxima obtida com a venda de antibióticos é

a) 5 040.

b) 7 200.

c) 9 320.

d) 12 000.

e) 13 680.

6) Sejam x e y valores que representam o número de funcionários alocados em diferentes setores de um hospital e o símbolo ⊗, uma relação entre esses valores, definida por: $x \otimes y = 2x + y2$. Se a relação estabelece o gasto máximo mensal do hospital, em Reais, com brindes distribuídos aos seus funcionários, o gasto para $3 \otimes (2 \otimes 4)$ será de

a) 406 Reais.

b) 156 Reais.

c) 70 Reais.

d) 24 Reais.

7) Uma empresa produz diariamente x quilogramas de uma matéria prima, a um custo diário dado por $C(x) = 0{,}1x2 + 40x + 3000$, em que $x \leq 400$.

Se o preço de venda por quilograma for de 80 reais, podemos afirmar que o lucro diário será positivo, para valores de x entre:

a) 110 e 310

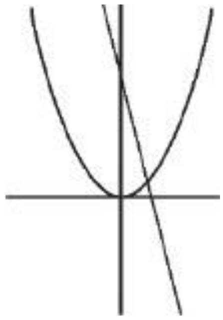
b) 90 e 290

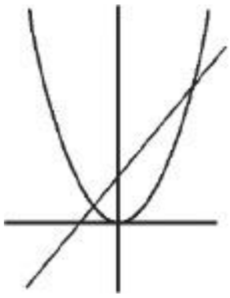
c) 100 e 300

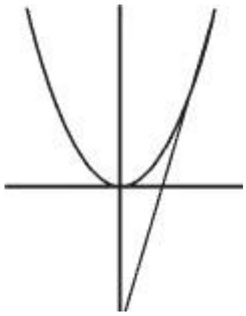
d) 80 e 280

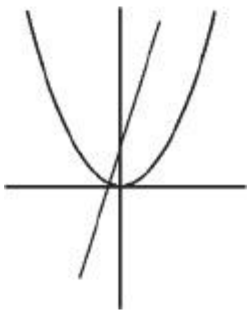
e) 120 e 320

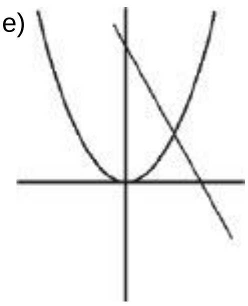
8) Qual das alternativas a seguir representa, conjuntamente, os esboços dos gráficos das funções reais $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4x-4$?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

9) Funções afins e quadráticas têm aplicações em alguns modelos simples, envolvendo os conceitos preço de venda e custo de produção de uma mercadoria, bem como a receita e o lucro obtidos com sua venda. Para uma empresa, é fundamental determinar o intervalo de produção em que a receita supera o custo de produção.

Suponha que o custo de produção de uma mercadoria de certa empresa, em função da quantidade produzida x ,seja dado pela função C(x) = 40x + 1400 (c0 = 1400 é denominado custo fixo de produção) e que o preço de venda seja p(x) = -2x + 200, em que x é a quantidade demandada (vendida). Nesse caso, a receita R obtida com as vendas é função de x, precisamente R(x) = x.p(x).

As quantidades produzidas e vendidas x para as quais essa empresa tem lucro L(x) = R(x) - C(x) positivo (receita supera o custo de produção) é

a) {x ∊ R | x > 40}

b) {x ∊ R | 0 < x < 10}

c) {x ∊ R | 10 < x < 70}

d) {x ∊ R | 10 < x < 40}

10) Para produzir determinado tipo de tecido, uma fábrica gasta R$ 2,20 por metro. Além disso, há uma despesa fixa de R$ 2.500,00, independente da quantidade de metros produzidos. Se cada metro do tecido é vendido por R$ 4,00, o número mínimo de metros no qual a fábrica passa a ter lucro com a venda é

a) 1388.

b) 1389.

c) 1390.

d) 1391.

e) 1392.

Exercícios – Inequação do 2 grau

1) Um número N, inteiro e positivo, que satisfaz à inequação N2 − 17N + 16 > 0 é:

a) 2

b) 7

c) 16

d)17

2) Considere a inequação x2 - 1 ≤ 3 . Está contido no conjunto solução dessa inequação o intervalo

a) [–3, 0]

b) [–1, 1]

c) [1, 3]

d) [3, 4]

3) Considere as funções reais dadas pelas leis f(x) = x – 1 e g(x) = x^2 – 2x + 2. O conjunto solução da inequação f(x) > f(g(x)) é dado por

a) {x ∈ IR| 0 < x < 1}.

b) {x ∈ IR| 1 < x < 2}.

c) {x ∈ IR| x < 0 ou x > 2}.

d) {x ∈ IR| x > 2}.

e) {x ∈ IR| x < 0}.

4) Os valores de m que tornam a desigualdade mx2 - 4x + m < 0 sempre verdadeira, são aqueles tais que:

a) m < 0.

b) -2 < m < 2.

c) m < -2.

d) m ≥ 1.

5) Resolvendo em ℝ a inequação log3(10 - 2x) > log3 x deve-se obter como solução:

a) S = {x ∊ ℝ | 0 < x < 10/3}

b) S = {x ∊ ℝ | 0 < x < 2}

c) S = {x ∊ ℝ | 0 < x < 5}

d) S = {x ∊ ℝ | 2 < x < 5}

e) S = ∅

6) A produção sustentável tem se tornado a bandeira de muitas indústrias, ressaltando o uso consciente dos recursos naturais em seus produtos. Uma empresa, que aderiu à sustentabilidade, trabalha com a produção de taças especiais e tem gastos fixos de R$ 200,00 mais o custo de R$ 2,00 por taça produzida. Sabendo-se que cada unidade será vendida a R$ 10,00, quantas taças deverão ser produzidas para que o valor arrecadado supere os gastos e gere menos impacto ao meio ambiente?

a) Mais de 25 taças.

b) Entre 19 e 24 taças.

c) Entre 15 e 18 taças.

d) Menos de 15 taças.

7) O conjunto solução da inequação | |x-4|+1|≤ 2 é um intervalo do tipo [a,b]. O valor de a+b é igual a

a) -8.

b) -2.

c) 0.

d) 2.

e) 8.

8) O conjunto verdade, em reais, da inequação: $\frac{x-4}{x+4} < 0$ é:

a) [-4;4].

b) [-4;4[.

c)]-4;4[.

d) [2;-4].

e)]-2;2[.

9) O conjunto das soluções da inequação $\frac{2+x}{2-x} \geq 1$ é:

a) [2,0).

b) [0, ∞).

c) (− ∞, 0]∪ (2, ∞).

d) [1, ∞).

10) O intervalo de duração do efeito de uma anestesia depende de vários fatores. Em certa situação, esse efeito estará presente enquanto $2t^2 + k < 80t$, em que t é o tempo (em minutos) após sua aplicação, e o valor da constante k pode ser controlado pelo anestesista.
Para que o intervalo de duração seja 5min < t < 35min, k deve ser ajustada para certo valor, que deverá ser múltiplo de:

a) 20

b) 30

c) 40

d) 50

e) 60

Exercícios – Equação e função modular

1) (EsPCEx 2002) O número de raízes reais distintas da equação $x\,|x| - 3x + 2 = 0$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

2) (2003) A soma dos quadrados de todas as raízes da equação $x^2 + 4x - 2.|x + 2| + 4 = 0$ é igual a

a) 16.

b) 20.

c) 24.

d) 28.

e) 36.

3) Há dois valores de x que minimizam a função de variável real f(x) = x2 - 5 |x| + 6.

A soma desses valores é:

a) 0

b) 2

c) -3

d) 3

e) -2

4) O conjunto solução da equação |x|2 +3 |x| -4 = 0 é:

a) {1}.

b) {− 1,1 }.

c) {4}.

d) { 4,1 }.

5) Sabendo-se que x1 e x2 são números reais distintos que satisfazem a equação |3x + 10| = |5x + 2|, é correto afirmar que o valor de |x1 − x2| é

a) $\frac{7}{2}$

b) 4

c) $\frac{11}{2}$

d) 6

e) $\frac{15}{2}$

6) Sobre a equação $(x + 3)2^{x2-9} \log |x^2 + x - 1| = 0$, é correto afirmar que

a) ela não possui raízes reais.

b) sua única raiz real é -3.

c) duas de suas raízes reais são 3 e -3.

d) suas únicas raízes reais são -3, 0 e 1

e) ela possui cinco raízes reais distintas.

d) $\frac{3}{2}$

7) (EEAR 2017) Seja a função $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$. Se P(a ,b) é o vértice do gráfico de f, então |a + b| é igual a

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

8) Sendo $f(x)= |x^2 - 4|+ 5$, é CORRETO afirmar que o conjunto imagem de f(x) é:

a) Im(f) = {f(x) є R / f(x) ≤ 4};

b) Im(f) = {f(x) є R / f(x) ≥ 4};

c) Im(f) = {f(x) є R / f(x) ≥ 5};

d) Im(f) = {f(x) є R / f(x) ≤ 5};

9) A interseção dos gráficos das funções f e g, definidas por f(x) = |x| e g(x) = 1 – |x|, os quais são desenhados no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, determina um polígono.

A área desse polígono é

a) 0,125.

b) 0,25.

c) 0,5.

d) 1.

e) 2.

10) A área da região compreendida entre o gráfico da função f(x) = | |x - 4| -2|, o eixo das abscissas e as retas x = 0 e x = 6 é igual a (em unidades de área)

a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 10.

e) 12.

Exercícios – Inequação modular

1) O número de soluções inteiras da inequação 0 ≤ x 2 − |3x 2 + 8x| ≤ 2 é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

2) O conjunto solução da equação |x| = x – 5 é igual a:

a) S = Ø.

b) S = {0}.

c) S = {5}.

d) S = {0, 1}.

e) S = {0, 5}.

3) É correto afirmar que a soma dos números inteiros que satisfazem a sentença 0 <|2x+2|≤6 é

a) -1

b) -4

c) -7

d) -6

4) o conjunto IR dos números reais, o conjunto solução S da inequação modular |x| · |x – 5| ≥ 6 é:

a) S = {x ∈ IR / –1 ≤ x ≤ 6}.

b) S = {x ∈ IR / x ≤ –1 ou 2 ≤ x ≤ 3}.

c) S = {x ∈ IR / x ≤ –1 ou 2 ≤ x ≤ 3 ou x ≥ 6}.

d) S = {x ∈ IR / x ≤ 2 ou x ≥ 3}.

e) S = IR.

5) O conjunto-solução da equação $|-x+6|\geq 8$ é dado por

a) $S=\{x\in R\,/\,x<-2\,ou\,x\geq 14\}$

b) $S=\{x\in R\,/-2\leq x\leq 14\}$

c) $S=\{x\in R\,/\,x\leq -2\,ou\,x\geq 14\}$

d) $S=\{x\in R\,/-2<x\leq 14\}$

e) $S=\{x\in R\,/\,x\leq -14\,ou\,x\geq 2\}$

6) O conjunto solução do sistema de inequações modulares dado por $\begin{cases}|x|+|y|\geq 1\\|x|+|y|\leq 2\end{cases}$ representa, no plano cartesiano de eixos ortogonais, uma região de área igual a

a) $2\sqrt{2}$

b) 3

c) $2+\sqrt{2}$

d) $\frac{7}{2}$

e) 6

Exercícios – Equação e função exponencial

1) (EsPCEx 2017) As raízes inteiras da equação 2^{3x} - 7.2^x + 6=0 são

a) 0 e 1.

b) -3 e 1.

c) -3, 1 e 2.

d) -3, 0 e 1.

e) 0, 1 e 2.

2) (EsPCEx 2003) Se os números inteiros *x* e *y* satisfazem à equação $2^{x+1}+2^x=3^{y+2}-3^y$, então *x* + *y* é igual a

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

3) (EsPCEx 2001) Uma pequena empresa expande suas vendas em 20% ao ano.

Se num determinado ano ela vendeu 500 unidades, t anos após, terá vendido:

a) 500 · (0,2)t

b) 500 · (1,2)t

c) 500 · (0,02)t

d) 500 · 2t

e) 500 · (1,02)t

4) (EEAR 2018) O valor real que satisfaz a equação $4^x - 2^x - 2 = 0$ é um número

a) entre –2 e 2

b) entre 2 e 4

c) maior que 4

d) menor que –2

5) As soluções da equação exponencial $3^{2x+1} - 10.3^x + 3 = 0$ são:

a) 0 e 1

b) 1 e 2

c) – 1 e 1

d) – 1 e 0

e) – 2 e 1

6) Dados estatísticos indicam que, em uma fábrica de rádios, um operário consegue montar, em t dias, Q(t) rádios, onde $Q(t) = 700 - 399{,}546.e^{-0,5t}$, com e = 2,718. Nestas condições, o número de rádios que um operário montará em 2 dias será

a) 553.

b) 603.

c) 583.

d) 513.

7) Sejam x, m e n números reais tais que $x^m = 5$ e $5^n = x$, o produto de m e n vale:

a) 1

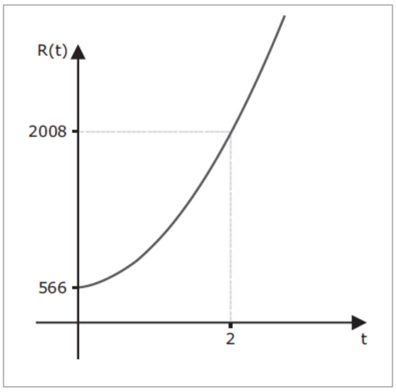
b) 5

c) 10

d) 25

e) 50

8) O gráfico a seguir mostra o número de solicitações de refúgio no Brasil $R(t) = at^2 + b$ ($a, b \in R$), onde t = 0 corresponde a 2010, t = 1 corresponde a 2011 e assim por diante.



Fonte: Disponível em: <www.agenciaplano.com/por/noticias.php?cod_noticia=109>. Acesso em: 28 nov. 2016. (Adaptado)

Com base nos dados acima, o número de solicitações de refúgio em 2014 foi igual a:

a) 2 008

b) 2 884

c) 3 450

d) 5 768

e) 6 334

9) Em uma gincana de alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola, foi feita a seguinte pergunta:

“A soma das idades dos dois filhos do professor Pedro é o resultado da equação $2^{3x-2} - 4^{x+6} = 0$. Sabendo-se que a diferença de idade entre os dois filhos é de dois anos, podemos afirmar que a idade do filho mais novo do professor Pedro é?”

A resposta **CORRETA** para esta pergunta é:

a) 10 anos

b) 8 anos

c) 6 anos

d) 4 anos

10) Durante as competições Olímpicas, um jogador de basquete lançou a bola para o alto em direção à cesta. A trajetória descrita pela bola pode ser representada por uma curva chamada parábola, que pode ser representada pela expressão:

h = -2x2 + 8x

(onde “h” é a altura da bola e “x” é a distância percorrida pela bola, ambas em metros)

A partir dessas informações, encontre o valor da altura máxima alcançada pela bola:

a) 4 m

b) 6 m

c) 8 m

d) 10 m

e) 12 m

Exercícios – Inequação exponencial

1) (EsPCEx 2011) A inequação $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111$, em que x é um número real,

a) não tem solução

b) tem apenas uma solução

c) tem apenas soluções positivas

d) tem apenas soluções negativas

e) tem soluções positivas e negativas

2) (EsPCEx 2010) O conjunto-solução da inequação $x^{\log_x (x+1)^2} \leq 4$, no conjunto dos números Reais, é

a) {x ∈ R |0 < x < 1}

b) {x ∈ R |0 ≤ x ≤ 1}

c) {x ∈ R |0 < x ≤ 1}

d) {x ∈ R |-3 ≤ x ≤ 1}

e) {x ∈ R |-3 ≤ x < 1}

3) (EsPCEx 2001) O conjunto-solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \frac{1}{4}$ é:

a) [5,+ ∞[

b) [4,+ ∞[

c)]-∞,5]

d) {x ∈ ℜ/x ≤ -5}

e) {x ∈ ℜ/x ≥ -5}

4) (EEAR 2017) A desigualdade $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ tem como conjunto solução

a) S = {x ∈ R | x > 1}

b) S = {x ∈ R | x < 5}

c) S = {x ∈ R | x > 5}

d) S = {x ∈ R |1 < x < 5}

5) O intervalo de duração do efeito de uma anestesia depende de vários fatores. Em certa situação, esse efeito estará presente enquanto $2t^2 + k < 80t$, em que t é o tempo (em minutos) após sua aplicação, e o valor da constante k pode ser controlado pelo anestesista.

Para que o intervalo de duração seja 5min < t < 35min, k deve ser ajustada para certo valor, que deverá ser múltiplo de

a) 20

b) 30

c) 40

d) 50

e) 60

6) O conjunto S é formado pela solução da inequação dada a seguir, com X ε Z

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x(x+5)} - \left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} \geq 0$$

O número de conjuntos de 3 elementos cada um, que podemos formar com os elementos obtidos em S é igual a:

a) 10.

b) 120.

c) 64.

d) 20.

Exercícios – Equação, função e inequação logarítmica

1) (EsPCEx 2018) A equação $\log_3 x = 1 + 12\log_{x^2} 3$ tem duas raízes reais. O produto dessas raízes é

a) 0

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

d) 3

e) 9

2) (EsPCEx 2011) Se x é um número real positivo, então a sequência ($\log_3 x$, $\log_3 3x$, $\log_3 9x$) é

a) Uma Progressão Aritmética de razão 1

b) Uma Progressão Aritmética de razão 3

c) Uma Progressão Geométrica de razão 3

d) Uma Progressão Aritmética de razão log3 x

e) Uma Progressão Geométrica de razão log3 x

3) (EsPCEx 2002) Sendo $y = 2^{\log_6 5 \cdot \log_2 6}$, o valor de y é

a) 2

b) 5

c) 6

d) 12

e) 30

4) Uma pesquisa realizada na primeira década do século XXI revelou que, a partir do ano 2000, em determinada região do Brasil, a expectativa de vida, em anos, sofreu modificação e é dada pela função E(t) = 12[150 log t – 491], sendo t o ano do nascimento da pessoa. Considerando-se log 2000 = 3,32, pode-se afirmar que uma pessoa dessa região que tenha nascido no ano 2000, tem expectativa de viver, aproximadamente,

a) 68 anos.

b) 72 anos.

c) 76 anos.

d) 84 anos.

e) 92 anos.

5) Assinale a propriedade válida sempre

a) log(a.b) = log a.logb.

b) log(a + b) = log a + logb.

c) logm.a = mlog a.

d) log a^m = m log a.

6) A raiz da equação $\log x + \log x^2 + \log x^3 + ... + \log x^{100} = 15150$, onde os logaritmos são considerados na base 10, é um número

a) Primo.

b) Ímpar.

c) Múltiplo de 10.

d) Menor que 140.

7) Aplicar o dinheiro em caderneta de poupança é ter segurança na aplicação, porém, é uma das piores taxas de rendimentos encontradas no mercado financeiro. Sendo assim, uma pessoa opta por comprar uma casa esperando valorização do seu dinheiro. Sabendo-se que este imóvel valorizou 12% ao ano, e desprezando qualquer forma de taxação de impostos, é correto afirmar que seu valor duplicou num período de:

Use os dados: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 7 = 0{,}85$

a) 6 anos.

b) 8 anos.

c) 10 anos.

d) 12 anos.

e) 15 anos.

8) (EEAR 2017) As funções logarítmicas $f(x) = \log_{0,4} x$ e $g(x) = \log_4 x$ são, respectivamente,

a) crescente e crescente

b) crescente e decrescente

c) decrescente e crescente

d) decrescente e decrescente

9) Uma pesquisa foi desenvolvida a partir de 250 bactérias de uma cultura. Estimou-se então, de maneira aproximada, que, durante certo tempo, o aumento percentual do número de bactérias na cultura poderia ser obtido pela expressão $B(t) = – 30 . \log_3 (t + 21) + 150$, em que t é o tempo decorrido, em minutos, após o início da pesquisa, Nessas condições, ao fim da primeira hora da pesquisa, quantas bactérias havia em tal cultura?

a) 325

b) 400

c) 450

d) 525

10) Num determinado mês, a quantidade vendida Q de um certo produto, por dia, em uma loja, em função do dia d do mês, é representada pela função $Q = \log_2 d$. Qual a quantidade vendida desse produto no dia 16 desse mês?

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

11) O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) >1$ é o intervalo:

a) $]- \infty, - 5/2[$

b) $]7/4, \infty[$

c) $]- 5/2, 0[$

d) $]1/3, 7/4[$

e) $]0, 1/3[$

12) Todo número inteiro positivo n pode ser escrito em sua notação científica como sendo $n = k \cdot 10^x$, em que $k \in R^*$, $1 \leq k < 10$ e $x \in Z$. Além disso, o número de algarismos de n é dado por $(x + 1)$.

Sabendo que $\log 2 \cong 0{,}30$, o número de algarismos de 2^{57} é

a) 16.

b) 19.

c) 18.

d) 15.

e) 17.

13) As senhas do website L são formadas por uma sequência de 5 símbolos, que podem ser uma das 26 letras ou um dos 10 dígitos numéricos. O website M usa sequências de n símbolos, mas permite apenas números.

Supondo-se que a segurança de cada um seja dada pelo número de senhas possíveis e considerando-se $\log 6 = 0{,}78$, para que a segurança de M seja maior ou igual a de L, o valor de n deve ser, pelo menos,

a) 5

b) 6

c) 8

d) 13

e) 18

14) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como Mw), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substitui a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$M_w = – 10{,}7 + \frac{2}{3} \log_{10} (M_0)$

Onde M

0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terreno de Kobe (em dina cm)?

a) $10^{-5,10}$

b) $10^{-0,73}$

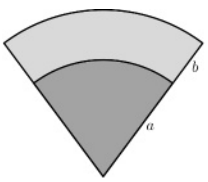
c) $10^{12,00}$

d) $10^{21,65}$

e) $10^{27,00}$

Exercícios – Geometria plana

1) A figura abaixo exibe um setor circular dividido em duas regiões de mesma área. A razão a/b é igual a



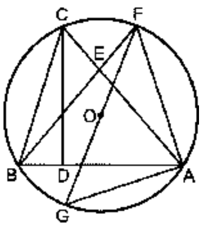
a) $\sqrt{3} + 1$

b) $\sqrt{2} + 1$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{2}$

2) (EPCAR 2018) Considere a figura e os dados a seguir:



DADOS:

• O é o circuncentro do triângulo ABC

• med($A\widehat{C}D$) = 50^0

• BÊC e $B\widehat{D}C$ são retos

• $\overline{FG}$ é o diâmetro da circunferência de centro O

A medida do ângulo $A\widehat{F}G$, em graus, é igual a

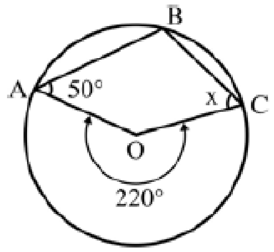
a) 40

b) 50

c) 60

d) 70

3) Considere o quadrilátero ABCO, de vértices A, B e C na circunferência e vértice O no centro dela. Nessas condições x mede



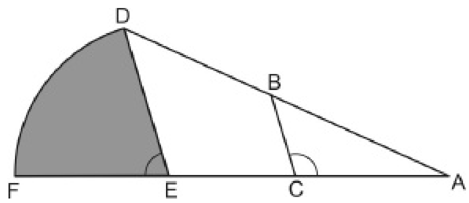
a) 30°

b) 45°

c) 55°

d) 60°

4) Na figura abaixo, tem-se que $\widehat{df}$ é um arco de circunferência de centro E e raio DE



Sabe-se que:

• ADE é um triângulo

• DE é paralelo a BC

• $\overline{BD}$ = 7 cm

• $\overline{AC}$ = 10 cm

• $\overline{BC}$ = 6 cm

• $A\widehat{C}B$ = 120°

• cos 120° = $-\dfrac{1}{2}$

5) A área do setor circular hachurado na figura, em cm², é igual a

a) 27π

b) $\frac{27\pi}{2}$

c) $\frac{9\pi}{2}$

d) 3π

6) Uma pista de atletismo tem formato circular. Em uma prova de corrida, o atleta João Pedro abandona a prova por lesão, após percorrer 250m. Sabendo que o raio da pista é de 62,5m, podemos afirmar que João Pedro percorreu um arco de aproximadamente: (Use π = 3,14).

a) 180 °

b) 220 °

c) 225 °

d) 229 °

e) 720 °

7) Um trapézio tem 12 cm de base média e 7 cm de altura. A área desse quadrilátero é ______ cm^2.

a) 13

b) 19

c) 44

d) 84

8) As medidas, em cm, dos lados de um pentágono estão em Progressão Aritmética (PA). Se o perímetro desse polígono é 125 cm, o terceiro elemento da PA é

a) 25

b) 30

c) 35

d) 40

9) Quais são as dimensões de uma sala quadrada de 49m2 de área?

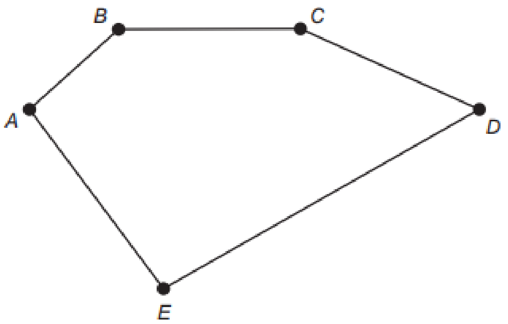
a) 7mx7m.

b) 7mx6m.

c) 6mx7m.

d) 7mx9m.

10) Uma pessoa possui um terreno em forma de um pentágono, como ilustrado na figura.



Sabe-se que a diagonal AD mede 50 m e é paralela ao lado BC, que mede 29 m. A distância do ponto B a AD é de 8 m e a distância do ponto E a AD é de 20 m.

A área, em metro quadrado, deste terreno é igual a

a) 658.

b) 700.

c) 816.

d) 1 132

e) 1 632.

11) As medidas das bolas - circunferência, peso e pressão - que serão utilizadas durante os jogos da Copa do Mundo na Rússia serão conferidas 30 minutos antes de cada partida. A bola "TELSTAR 18" possui circunferência central com o comprimento de 69,08cm. Usando 3,14 como aproximação para π, o valor do diâmetro dessa circunferência será

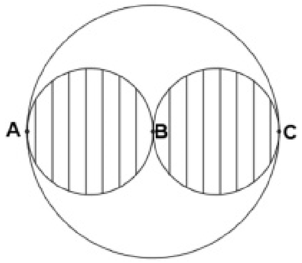
a) 20 cm.

b) 22 cm.

c) 14 cm.

d) 18 cm

12) De um disco de papelão pretende-se remover dois discos menores, como mostrado na figura abaixo, sendo que cada um dos discos menores tem raio 3. Eles são tangentes ao círculo maior nos pontos A e C e tangenciam um ao outro no ponto B, que é o centro do disco maior.



A área da região que sobrará depois da remoção dos discos menores será de

a) 14π

b) 15π

c) 16π

d) 17π

e) 18π

13) Um estudante do Curso de Mecânica do IFAL dispõe de uma placa metálica quadrada de lado 60 cm. Qual será a área de um círculo inscrito nessa placa em centímetros quadrados? Use π = 3,14.

a) 1413.

b) 1884.

c) 2826.

d) 5652.

e) 11304.

14) comprimento de uma circunferência, cujo diâmetro mede 16cm, é: (Considere = 3,1).

a) 48cm

b) 49,6cm

c) 96cm

d) 99,2cm

e) 496cm

15) A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para

celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro,em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros. Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

a) 53

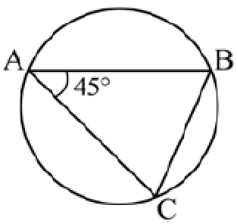
b) 94

c) 113

d) 135

e) 145

16) (EEAR 2018) O triângulo ABC está inscrito na circunferência. Se BC = 8, a medida do raio é



a) $4\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}$

c) 4

d) 2

17) Considere um triângulo cujos lados medem $3a$, $4a$ e $5a$, de modo que a seja um número positivo qualquer.

Determine o cosseno do menor ângulo interno deste triângulo.

a) 0,8

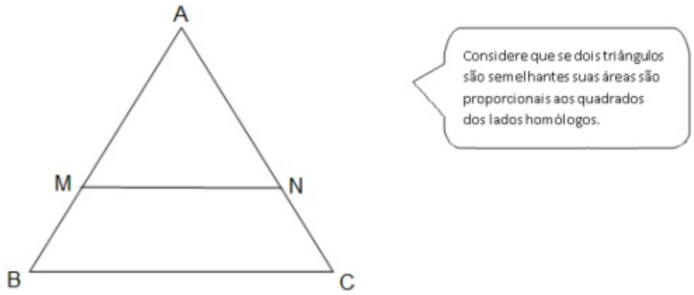
b) 0,7

c) 0;6

d) 0,4

e) 0,2

18) Pedro possui um terreno na forma de um triângulo equilátero. Ele quer dividi-lo igualmente entre seus dois filhos, como indicado nesta figura.



Dados: AB = 120 m, MN é paralelo a BC e $\sqrt{2}$ = 1,4.

Para que as áreas dos polígonos AMN e BMNC sejam iguais, o valor de AM é, aproximadamente

a) 65m.

b) 70m.

c) 85m.

d) 100m.

19) Durante uma aula expositiva de matemática, o professor demonstrou várias fórmulas de áreas de figuras planas, as quais foram: triângulo, losango e trapézio. De repente um aluno completou com as seguintes áreas de: retângulo, círculo e circunferência. Além disso, o aluno questionou o mestre sobre uma pergunta que relacionava as matérias de física e matemática, a qual propunha o seguinte problema: um carro de corrida com peso de 1000 Kg encontrava-se em uma aceleração centrípeta de 10 m/s. Dessa forma, o estudante pediu para o professor resolver a questão.

Assim sendo, quantos erros de conceitos existem no texto que você acabou de ler?

a) Nenhum.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

20) Um arquiteto projeta, em uma praça, um muro formado por triângulos equiláteros, numa sequência que começa por um triângulo de lado l e segue com triângulos que possuem lados com medidas correspondentes à metade da medida do lado do anterior. Nessas condições, se fosse possível construir infinitos triângulos equiláteros, poderíamos dizer que a soma das áreas dos triângulos seria

a) l^2

b) $l^2\sqrt{3}$

c) $\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{l^2\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

21) Ao somar o número de diagonais e o número de lados de um dodecágono obtém-se

a) 66

b) 56

c) 44

d) 42

22) Assinale a alternativa que apresenta corretamente os valores, na mesma unidade de medida, que podem representar as medidas dos lados de um triângulo.

a) 1 - 2 - 4

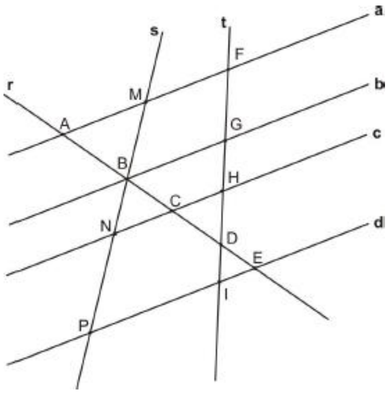
b) 3 - 2 - 6

c) 8 - 4 - 3

d) 3 - 9 - 4

e) 6 - 4 - 5

23) Observe a figura a seguir:



Nela, as retas a, b, c e d são paralelas e são interceptadas pelas retas transversais r, s e t

Assim, as medidas dos segmentos, em cm, são:

AB = y   BC = 9   CD = 10

DE = 4   FG = z   GH = m

HD = 5   DI = 2   MN = 16

BN = 6   BP = x

A soma AB + FH, em cm, é dada por um número divisível por

a) 3

b) 4

c) 7

d) 11

24) Algumas diagonais do decágono regular passam pelo seu centro e outras não. Sendo assim, escolhendo-se ao acaso uma diagonal desse polígono, qual é a probabilidade de ela não passar pelo centro do decágono?

a) 6/7

b) 1/2

c) 3/4

d) 3/5

e) 1/7

25) Um conjunto de polígonos possui 18 triângulos e 12 quadriláteros. A metade dos elementos desse conjunto é constituída por polígonos regulares. Se o número de quadrados desse conjunto é 5, então o número de triângulos equiláteros é:

a) 7

b) 8

c) 10

d) 6

e) 12

26) Se, em um polígono convexo, o número de lados n é um terço do número de diagonais, então o valor de n é

a) 9.

b) 11.

c) 13.

d) 15.

27) Considere as seguintes proposições matemáticas:

(I) Todo triangulo equilátero é isósceles.

(II) Todo quadrado é um retângulo.

(III) Todo hexágono regular possui seis triângulos equiláteros.

(IV) Todo polígono tem mais de três lados.

Assinale a alternativa correta:

a) Todas são verdadeiras.

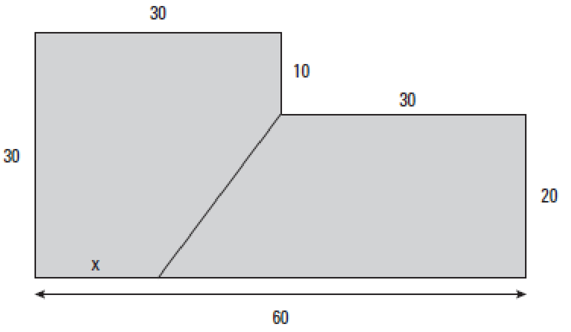
b) Todas são falsas.

c) Só uma é falsa.

d) Duas verdadeiras e duas falsas.

e) Só uma é verdadeira.

28) O terreno mostrado na figura abaixo, cujas medidas estão expressas em metros, foi dividido em dois lotes de mesma área.



A medida x, em metros, é igual a:

a) 11

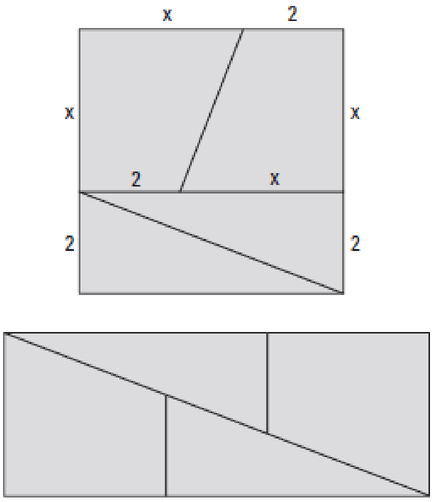
b) 12

c) 13

d) 14

e) 15

29) O quadrado e o retângulo da figura abaixo foram montados com as mesmas 4 peças. A medida x é igual a:



a) $2\sqrt{5}-1$

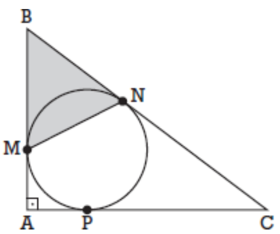
b) $\sqrt{5}-1$

c) $\sqrt{5}+1$

d) $3\sqrt{5}-2$

e) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

30) Na figura abaixo, M, N e P são os pontos de tangência do triângulo retângulo ABC com sua circunferência inscrita. Se AB = 3 e AC = 4, a área do triângulo BMN é igual a:



a) 1,2

b) 2,0

c) 1,8

d) 2,4

e) 1,6

31) (EsPCEx 2018) Em um triângulo ABC, BC=12 cm e a mediana relativa a esse lado mede 6 cm. Sabendo-se que a mediana relativa ao lado AB mede 9 cm, qual a área desse triângulo?

a) $\sqrt{35}cm^2$

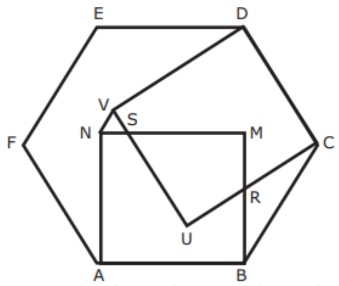
b) $2\sqrt{35}cm^2$

c) $6\sqrt{35}cm^2$

d) $\frac{\sqrt{35}}{2}cm^2$

e) $3\sqrt{35}cm^2$

32) (EsPCEx 2019) figura abaixo ABCDEF é um hexágono regular de lado igual a 1, ABMN e CDVU são quadrados.



Desenho Ilustrativo-Fora de Escala

Com base nessas informações, a medida do segmento VN é igual a

a) $2-\sqrt{3}$

b) $2-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3}-1$

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

33) O polígono regular cujo ângulo externo mede 24° tem _____ lados.

a) 20

b) 15

c) 10

d) 5

34) A prefeitura de uma cidade detectou que as galerias pluviais, que possuem seção transversal na forma de um quadrado de lado 2 m, são insuficientes para comportar o escoamento da água em caso de enchentes. Por essa razão, essas galerias foram reformadas e passaram a ter seções quadradas de lado igual ao dobro das anteriores,

permitindo uma vazão de 400 mª/s. O cálculo da vazão V (em mª/s) e dado pelo produto entre a área por onde passa a água (em mª) e a velocidade da água (em m/s).

Supondo que a velocidade da água não se alterou, qual era a vazão máxima nas galerias antes das reformas?

a) 25 m^3/s

b) 50 m^3/s

c) 100 m^3/s

d) 200 m^3/s

e) 300 m^3/s

35) Um marceneiro irá revestir o tampo de dez mesas de forma hexagonal regular, de 50 cm de lado, com placas de fórmica.

Sabendo-se que a fórmica custa R$ 40,00 o m^2 quanto ele deverá gastar para revestir essas dez mesas? (Use $\sqrt{3} \cong 1{,}73$)

a) R$ 432,40.

b) R$ 259,50.

c) R$ 519,00.

d) R$ 579,00.

e) R$ 648,75.

36) A medida, em metros, do lado de um quadrado onde o comprimento de cada uma das diagonais é 2m é igual a

a) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $3\sqrt{2}$

37) O piso de uma das salas do hemocentro de um Complexo Hospitalar tem a forma de um hexágono regular, cujo lado mede 2,0 metros. Para revesti-lo, serão compradas placas quadradas de piso, antiderrapantes, que admitem ser cortadas, sem perda, e com os pedaços cobrir toda a área.

Com base nessas informações, pode-se estimar que o número mínimo de placas com 0,50m de lado, a serem compradas, é

a) 41

b) 40

c) 38

d) 36

e) 35

38) Encontre o valor da área interna ao hexágono regular e externa à circunferência inscrita ao hexágono. Sabe-se que o lado do polígono é 10 centímetros.

a) 15 + 10π.

b) 15 - 10π.

c) 105 + 10π.

d) 15 + 100π.

e) $150\sqrt{3}$- π . 75.

39) Julgue as seguintes assertivas assinalando V, para verdadeiro e F, para falso.

• Quadrados e losangos possuem diagonais que também são bissetrizes internas.

• Retângulos, quadrados e losangos possuem diagonais que se interceptam no ponto médio destes segmentos.

• Os ângulos consecutivos de retângulos e trapézios são suplementares.

• Paralelogramos, trapézios, quadrados e retângulos são polígonos convexos.

a) VVFV.

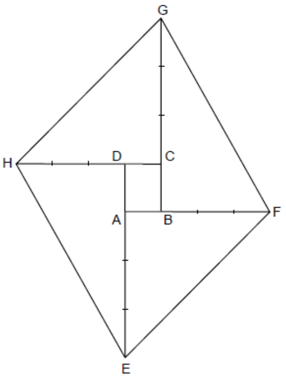
b) VFFF.

c) FVVV.

d) FFFF.

e) VFVF.

40) Para construir a pipa esboçada a seguir, começamos com o retângulo ABCD e prolongamos cada um dos lados do retângulo, quadruplicando o seu comprimento, e obtemos o quadrilátero EFGH. Se o retângulo ABCD tem área medindo 80 cm^2, qual a área do quadrilátero EFGH?



a) 0,1 m^2

b) 0,2 m^2

c) 0,3 m^2

d) 0,4 m^2

e) 0,5 m^2

41) Dados os pontos A(0,0), B(5,0), C(8,5) e D(11,8) no plano cartesiano ortogonal, P é um ponto do 1.º quadrante tal que as áreas dos triângulos APB e CPD são, respectivamente, iguais a 25/2 e 6.

Em tais condições, o produto da abscissa pela ordenada de P pode ser igual a

a) 18.

b) 20.

c) 21.

d) 24.

e) 25.

42) Um triângulo possui os seguintes lados: 12, 16 e 20. Encontre o raio da circunferência inscrita neste triângulo.

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

43) Um triângulo retângulo possui os seguintes lados: 30, 40 e 50 centímetros. Obtenha a mediana relativa ao ângulo de 90°.

a) 15.

b) 20.

c) 25.

d) 35.

e) 40.

44) No triângulo OYZ, o ângulo interno em O é igual a 90 graus, o ponto H no lado YZ é o pé da altura traçada do vértice O e M é o ponto médio do lado YZ. Se $\hat{Y} - 2\hat{Z} = 10$ graus (diferença entre a medida do ângulo interno em Y e duas vezes a medida do ângulo interno em Z igual a 10 graus), então, é correto afirmar que a medida do ângulo $H\hat{O}M$ é igual a

a) $\frac{170}{3} graus$

b) $\frac{140}{3} graus$

c) $\frac{110}{3} graus$

d) $\frac{100}{3} graus$

45) Sejam A, B, C, D, E, F, G e H vértices de um octógono regular. Se, ao serem traçadas todas as diagonais desse octógono, escolher-se aleatoriamente uma delas, a probabilidade de que ela não passe pelo seu centro é de:

a) 80%

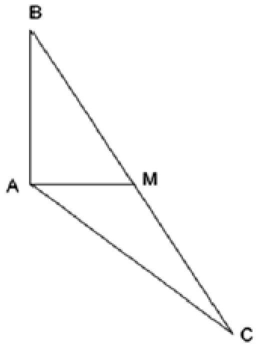
b) 75%

c) 70%

d) 65%

e) 60%

46) No triângulo ABC, da figura acima, AM é mediana relativa ao lado BC e é perpendicular ao lado AB. Se as medidas de BC e AM são, respectivamente, 4 cm e 1 cm, então a medida do lado AC, em cm, é



a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{6}$

e) $\sqrt{7}$

47) Considere um segmento de reta XY cuja medida do comprimento é 10 cm e P um ponto móvel no interior de XY dividindo-o em dois segmentos consecutivos XP e PY. Se M e N são respectivamente os pontos médios de XP e PY, então podemos afirmar corretamente que a medida do comprimento do segmento MN

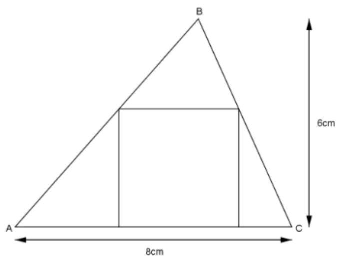
a) varia entre 0 cm e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.

b) varia entre 5 cm e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.

c) varia entre 2,5 cm e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.

d) é igual a 5 cm, sempre.

48) Na figura abaixo, temos um quadrado inscrito no triângulo ABC. Notamos que AC = 8cm e a altura relativa ao lado AC tem comprimento 6cm. O valor do lado do quadrado é:



a) 4

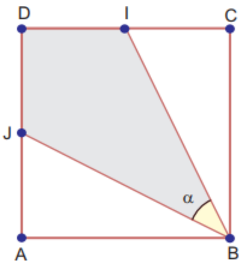
b) $\frac{25}{7}$

c) 3

d) $\frac{24}{7}$

e) $\frac{26}{7}$

49) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e I e J são pontos médios de DC e AD, respectivamente. Nessas condições, sen α é igual a:



a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

50) Sabe-se que os pontos notáveis: baricentro(B), incentro (I), circuncentro (C) e ortocentro (O) estão alinhados num triângulo isósceles. Qual é esta ordem do vértice à base não congruente?

a) B, I, C e O.

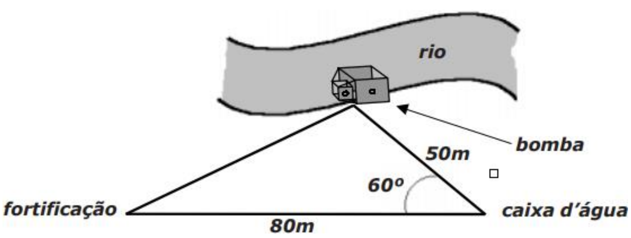
b) C, B, I e O.

c) O, C, B e I.

d) O, B, I e C.

e) I, B, C e O.

51) (EsPCEx 2005) A água utilizada em uma fortificação é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água localizada a *50 m* de distância da bomba. A fortificação está a *80 m* de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções bomba – caixa d'água e caixa d'água – fortificação é de *60º*, conforme mostra a figura abaixo. Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a fortificação, quantos metros de tubulação são necessários?



a) 54 metros.

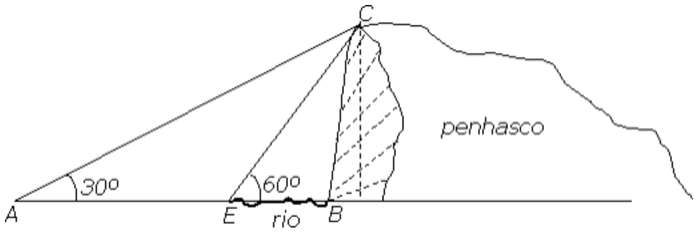
b) 55 metros.

c) 65 metros.

d) 70 metros.

e) 75 metros.

52) (EsPCEx 2005) Um topógrafo, querendo conhecer a altura de um penhasco, mediu a distância do ponto A até a beira do rio (ponto E), obtendo 20 metros. A largura do rio (EB) é desconhecida. A figura abaixo mostra os ângulos BÂC = 30º e BÊC = 60º. A altura do penhasco encontrada pelo topógrafo foi



a) $15\sqrt{3}m$

b) $12\sqrt{3}m$

c) $10\sqrt{3}m$

d) $20\sqrt{3}m$

e) $40\sqrt{3}m$

53) Alex está parado em um posto na estrada A, seu amigo Paulo está em um outro posto na estrada B. As duas estradas se cruzam, formando um ângulo de 90 graus. O posto onde Alex se encontra está a 4 km do cruzamento, enquanto, que posto de Paulo está a 3 km. Qual é a distância que separa Alex de Paulo em linha reta? Considere que as estradas são retas dos postos até o cruzamento.

a) 4 km.

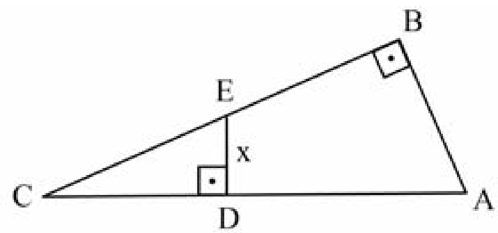
b) 4,7 km.

c) 5 km.

d) 5,5 km.

e) 7 km.

54) (EEAR 2018) Conforme a figura, os triângulos ABC e CDE são retângulos. Se AB = 8 cm, BC = 15 cm e CD = 5 cm, então a medida de DE, em cm, é



a) 2/5

b) 3/2

c) 8/3

d) 1/4

55) Em determinada hora do dia, um casal de indígenas, observando suas sombras projetadas pelos raios solares, percebem que elas têm 2 m e 2,2 m de comprimento. Sabendo-se que a índia tem 1,50 m de altura e que projeta a menor sombra, a altura do índio é

a) 1,55 m.

b) 1,60 m.

c) 1,65 m.

d) 1,70 m.

56) (EEAR 2016) Sabe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo tem $5\sqrt{5}$ cm de comprimento e a soma dos catetos é igual a 15cm. As medidas, em cm, dos catetos são

a) 6 e 9

b) 2 e 13

c) 3 e 12

d) 5 e 10

57) Para medir a altura de um prédio, uma pessoa cravou uma estaca de 50 cm perpendicularmente ao solo. Em determinado horário, ela constatou que a sombra da estaca media 15 cm e a do edifício, 21 m. Qual é a altura, em metros, desse prédio?

a) 60

b) 70

c) 75

d) 105

e) 150

58) Em um triângulo retângulo, se um dos catetos mede 9 metros e o outro cateto mede 12 metros, a hipotenusa mede:

a) 12 metros

b) 10 metros

c) 20 metros

d) 15 metros

e) 9 metros

59) Sejam x_1, x_2 e x_3 as medidas dos lados de um triângulo retângulo ABC.

Sabendo que x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 24x^2 + 188x - 480 = 0$, então a área do triângulo ABC, em unidades de superfície, é

a) 12

b) 24

c) 30

d) 40

e) 48

60) Na Figura 2 sem escala, o raio da circunferência de centro 0 é r = 3cm e o segmento OP mede 5cm.

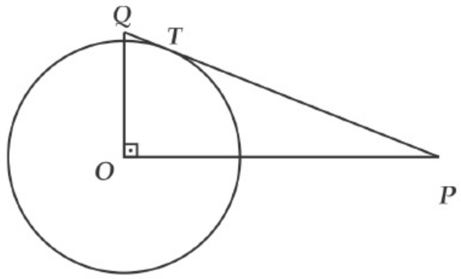


Figura 2

Sabendo que o segmento PQ tangencia a circunferência no ponto T, pode-se dizer que o segmento OQ mede:

a) 1,25 cm

b) 5 cm

c) 3,75 cm

d) 4 cm

e) 3,5 cm

61) Seja ABC um triângulo tal que A(1, 1), B(3, –1) e C(5, 3). O ponto ______ é o baricentro desse triângulo.

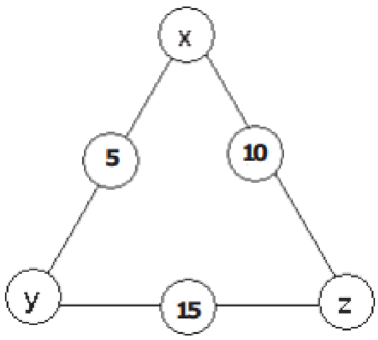
a) (2, 1)

b) (3, 3)

c) (1, 3)

d) (3, 1)

62) (EsPCEx 2011) A figura abaixo é formada por um dispositivo de forma triangular em que, nos vértices e nos pontos médios dos lados, estão representados alguns valores, nem todos conhecidos. Sabe-se que a soma dos valores correspondentes a cada lado do triângulo é sempre 24.



a) -2

b) -1

c) 2

d) 5

e) 10

63) (EsPCEx 2016) Se o perímetro de um triângulo equilátero inscrito em um círculo é 3 cm, a área do círculo (em cm²) é igual a

a) $\frac{\pi}{3}$

b) 3π

c) π

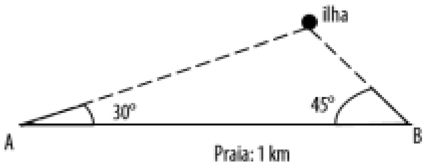
d) $\sqrt[3]{3}$

e) 81π

64) Dois amigos, em visita a uma praia, estão decidindo se vão ou não nadar até uma ilha que se encontra em frente. Resolvem então tentar estimar a distância da praia à ilha.

A praia é retilínea e tem exatamente um quilômetro.

Usando um instrumento improvisado, eles medem o ângulo entre a linha da praia e a reta na direção da ilha nos dois pontos extremos da praia, os pontos A e B da figura. Em um extremo, o ângulo é de 30° e, no outro, o ângulo é de 45°. A distância da praia à ilha, em metros, de acordo com estas medidas, é de



a) $\frac{1000}{\sqrt{3}+1}$

b) $\frac{1000}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

c) $\frac{1000}{\sqrt{6}}$

d) $\frac{1000}{\sqrt{2}+1}$

e) $\frac{1000}{3}$

65) Se as medidas de dois dos lados de um triângulo são respectivamente 7m e $5\sqrt{2}$m e se a medida do ângulo entre esses lados é 135 graus, então, a medida, em metros, do terceiro lado é

a) 12.

b) 15.

c) 13.

d) 14.

66) No triângulo XYZ o ponto D, no lado YZ, pertence à mediatriz do lado XZ. Se XD é a bissetriz do ângulo interno no vértice X e se a medida do ângulo interno em Y é 105 graus, então, a medida, em graus, do ângulo interno em Z é

a) 30.

b) 20.

c) 35.

d) 25.

67) Analise as sentenças, e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) Se uma circunferência X está inscrita em um triângulo qualquer, então a interseção das bissetrizes desse triângulo determina o centro de X.

( ) Seja PQ uma corda de uma circunferência Y. A corda que passa pelo ponto médio de PQ e é perpendicular à PQ é um diâmetro de Y.

( ) Se EFG é um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência Z, então a interseção das medianas desse triângulo determina o centro de Z.

Assinale a alternativa **correta,** de cima para baixo.

a) F – F – F

b) V – V – V

c) V – V – F

d) V – F – F

e) F – V – F

68) A razão entre a área e altura de um triângulo isósceles ABC de lados AB = AC = 5m e BC = 8 m é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

69) Um triângulo ABC é tal que BC=5, AC=6 e AB=7. Determinando a altura relativa ao lado AC, encontramos:

a) $2\sqrt{6}$

b) $4\sqrt{6}$

c) $4\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{2}$

e) 8

70) Dados os pontos P=(3, 5) e Q=(7, 3), a mediatriz do segmento PQ irá interceptar o eixo das ordenadas em

a) y = − 3

b) y = − 4

c) y = − 5

d) y = − 6

e) y = − 7

71) (EsPCEx 2011) Considere um plano α e os pontos A, B, C e D tais que

· O segmento AB tem 6 cm de comprimento e está contido em α.

· O segmento BC tem 24 cm de comprimento, está contido em α e é perpendicular a AB.

· O segmento AD tem 8 cm de comprimento e é perpendicular a α.

Nessas condições, a medida do segmento CD é

a) 26 cm

b) 28 cm

c) 30 cm

d) 32 cm

e) 34 cm

72) Ângelo aprendeu nas aulas de Ciências que as sombras formadas pela incidência da luz do Sol sobre objetos poderiam ser usadas para medir o tamanho desses objetos quando uma medida direta não fosse possível. Ele resolveu utilizar esse conhecimento para medir, de maneira aproximada, a altura do prédio onde mora. Para isso, na mesma hora do dia, mediu o tamanho da sombra, formada pelo Sol, de uma pequena vara vertical de 1 metro de altura e o tamanho da sombra do seu prédio. Nessas condições o tamanho da sombra da vara foi de 50 centímetros e o tamanho da sombra do prédio foi de 10 metros.

Ângelo concluiu que a altura do prédio deveria ser igual a

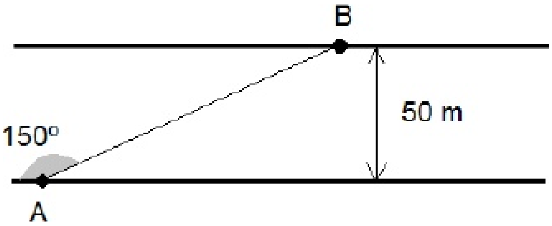
a) 5 metros.

b) 10 metros.

c) 20 metros.

d) 25 metros.

73) Esta figura mostra uma canoa atravessando um rio de largura igual a 50m, do ponto **A** para o ponto **B**.



Considerando que o ângulo formado pela trajetória da canoa e a margem do rio é igual a 150º, ASSINALE a alternativa que contém a distância percorrida pela canoa.

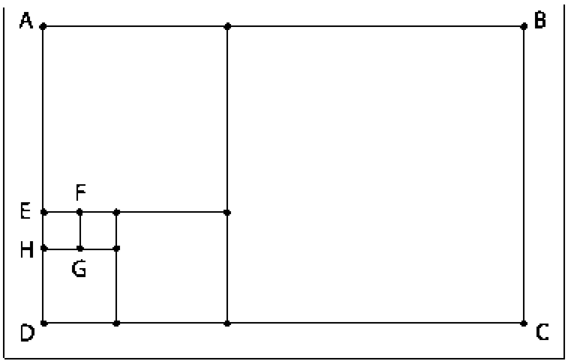
a) 100 m

b) 150 m

c) 200 m

d) 250 m

74) O retângulo ABCD da figura foi decomposto em seis quadrados.



Sabendo que o quadrado EFGH tem área igual a 1 cm2, então a área do retângulo ABCD é, em centímetros quadrados,

a) 64.

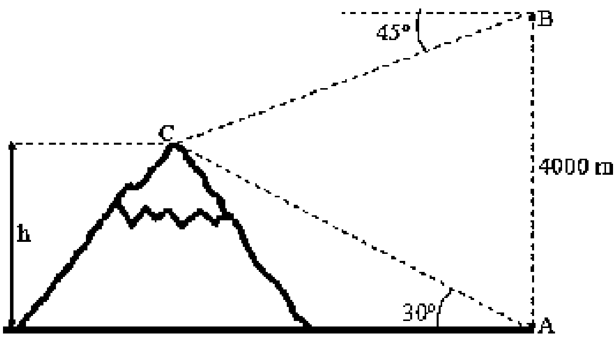
b) 89.

c) 104.

d) 111.

e) 205.

75) Analise a figura.



A estimativa da medida da altura da montanha representada na figura é (Use $\sqrt{3} = 1{,}7$)

a) 1356 m.

b) 1464 m.

c) 1489 m.

d) 1512 m.

e) 2563 m.

76) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 8 cm. Quais são as respectivas medidas dos lados de um triângulo semelhante a este cujo perímetro mede 0,6 m?

a) 15 cm, 21 cm e 24 cm

b) 12 cm, 22 cm e 26 cm

c) 18 cm, 20 cm e 22 cm

d) 11 cm, 23 cm e 26 cm

e) 16 cm, 18 cm e 26 cm

77) Considere as áreas dos hexágonos regulares A e B inscritos, respectivamente, em círculos de raios 1 e 4.

A razão entre a área do hexágono A e a área do hexágono B é

a) 1/16

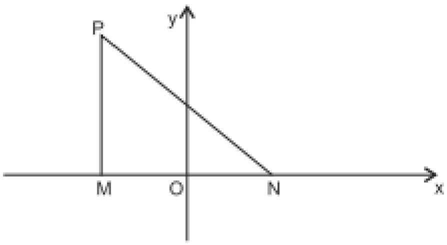
b) 1/8

c) 1/4

d) 1/2

e) 1

78) Na figura, os pontos M(− 4, 0), N(4, 0) e P(− 4, a) são vértices de um triângulo MNP. Considerando-se que o lado PN mede 10u.c., pode-se afirmar que a área desse triângulo, em u. a., é igual a



a) 12

b) 24

c) 36

d) 48

e) 60

79) Uma placa retangular de alumínio tem dimensões 40cm x 15cm. Através de um fio que passa pelo seu baricentro, ela é presa ao teto de um quarto, permanecendo horizontalmente a 1,5m do assoalho e a 50cm do teto. Bem junto ao fio, no teto, há uma lâmpada cujo filamento tem dimensões desprezíveis.

Com base nessa informação, é correto afirmar que a área da sombra projetada pela placa é igual, em m^2, a

a) 0,96

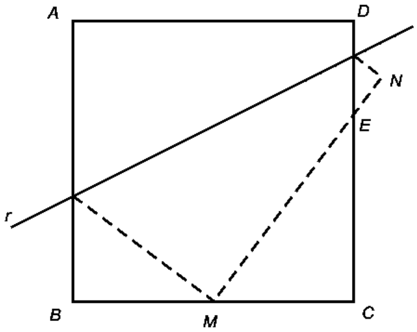
b) 0,88

c) 0,82

d) 0,77

e) 0,69

80) Uma folha de papel quadrada, ABCD, que mede 12 cm de lado, é dobrada na reta r, como mostrado nesta figura:



Feita essa dobra, o ponto D sobrepõe-se ao ponto N, e o ponto A, ao ponto médio M, do lado BC.

É CORRETO afirmar que, nessas condições, o segmento CE mede

a) 7,2 cm.

b) 7,5 cm.

c) 8,0 cm.

d) 9,0 cm.

81) A sombra de um prédio em determinada hora do dia é igual a 56 m. Sabendo que no mesmo momento uma régua, de comprimento igual a 50 cm, possui sombra igual a 53 cm, qual é o valor APROXIMADO da altura desse prédio?

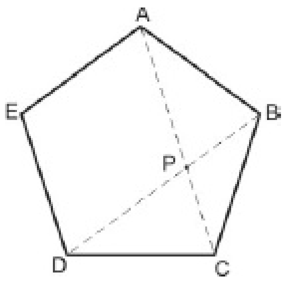
a) 57,4 m

b) 52,8 m

c) 49,3 m

d) 47,1 m

82) (AFA 2018) A figura a seguir é um pentágono regular de lado 2 cm.



Os triângulos DBC e BCP são semelhantes.

A medida de AC, uma das diagonais do pentágono regular, em cm, é igual a

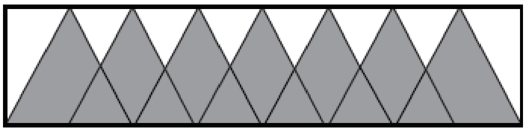
a) $1+\sqrt{5}$

b) $-1+\sqrt{5}$

c) $2+\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $2\sqrt{5}-1$

83)



A figura representa um painel com uma faixa decorativa retangular, com 40u.c. de comprimento, composta por triângulos equiláteros congruentes e superpostos.

Sabendo-se que o ponto médio da base de cada triângulo é vértice de, pelo menos, outro triângulo, e que a região não sombreada no painel mede X $\sqrt{3}u.a.$, pode-se afirmar que X é igual a

a) 50,5

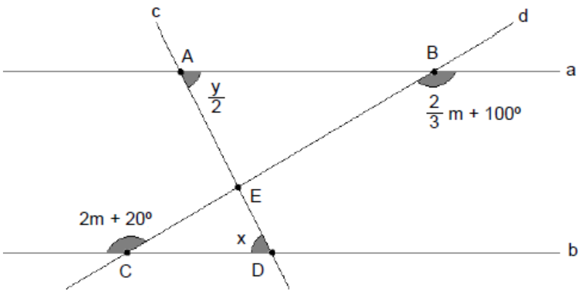
b) 56,0

c) 62,5

d) 68,0

e) 75,0

84) Dadas as retas a, b, c, d, considere as afirmativas sabendo que 2x – y = 0º e assinale a opção correta.



1. As retas a e b são paralelas.

2. $m = \frac{\pi}{3}$ radianos

3. Os triângulos ABE e CDE são semelhantes.

a) Somente 1 está correta.

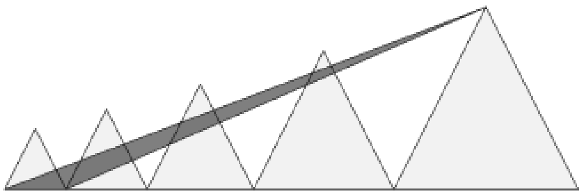
b) Somente 1 e 2 estão corretas.

c) Somente 1 e 3 estão corretas.

d) Somente 2 e 3 estão corretas.

e) 1, 2 e 3 estão corretas.

85) As áreas dos triângulos equiláteros abaixo estão em progressão geométrica.



Se o menor triângulo equilátero tem área $\sqrt{3}cm^2$ e o segundo menor tem área $3cm^2$, então a área do triângulo em destaque, cuja base coincide com a base do triângulo equilátero menor e a altura coincide com a altura do triângulo equilátero maior, é

a) $\sqrt{3}$

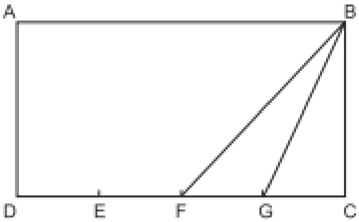
b) $\sqrt{6}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$

e) 3

86)



A área do retângulo ABCD da figura mede 72u.a. e os segmentos DE, EF, FG e GC têm a mesma medida.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que a área do triângulo FGB, em u.a., é igual a

a) 36

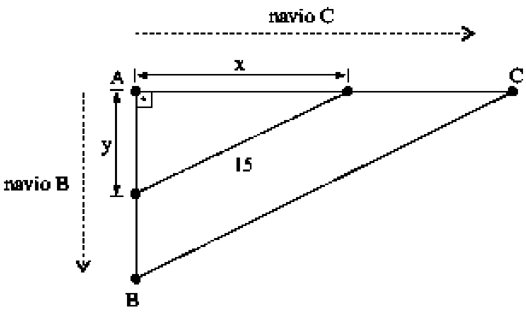
b) 24

c) 18

d) 9

e) 6

87) Suponha que dois navios tenham partido ao mesmo tempo de um mesmo porto A, em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Sabe-se que a velocidade do navio B é de 18 km/h e que, com 30 minutos de viagem, a distância que o separa do navio C é de 15 km, conforme mostra a figura:



Desse modo, pode-se afirmar que, com uma hora de viagem, a distância, em km, entre os dois navios e a velocidade desenvolvida pelo navio C, em km/h, serão, respectivamente,

a) 30 e 25.

b) 25 e 22.

c) 30 e 24.

d) 25 e 20.

e) 25 e 24.

88) Na Figura 1, o triângulo retângulo ABC possui ângulo reto em B, AF=1cm, AC=10cm e BDEF é um quadrado. Suponha que o quadrado BDEF seja transladado ao longo de AC, sem alterar a medida dos lados e ângulos ao longo dessa translação, gerando, dessa forma, um novo quadrado XYZW, em que coincidem os pontos C e Z conforme ilustra a Figura 2.

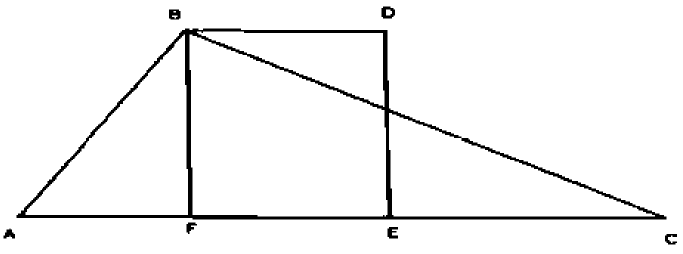


Figura 1

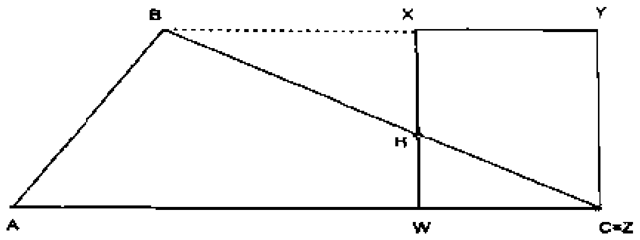


Figura 2

Nessas condições, qual é o valor (em cm²) da área do triângulo HZW?

a) 5/2

b) 13/4

c) 3/2

d) 15/2

89) Uma fonte de luz monocromática puntiforme ilumina um disco e projeta sua sombra em uma parede. Considere o diâmetro do disco muito maior que o comprimento de onda da luz. O disco está a uma distância de um metro da parede e sua sombra tem um perímetro perfeitamente circular, com área quatro vezes a área do disco. Assim, a distância entre a fonte de luz e a parede, em metros, é

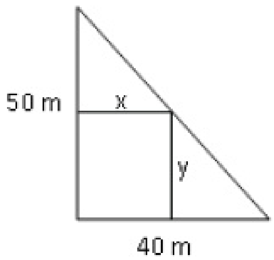
a) 4/3.

b) 4.

c) 2.

d) 3/4.

90) Num terreno, que tem a forma de um triângulo retângulo com catetos medindo 40 e 50 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y como indicado na figura. Para que a área ocupada pela casa seja máxima, os valores de x e y devem ser, em metros, respectivamente iguais a



a) 20 e 25

b) 24 e 30

c) 25 e 20

d) 30 e 24

Exercícios – Trigonometria

1) Se sen(ϴ) = 0,8 e 0 < ϴ < 90°, então qual o valor de cos(ϴ/2)?

a) $\sqrt{1,5}$

b) $\sqrt{1,2}$

c) $\sqrt{0,8}$

d) $\sqrt{0,7}$

e) $\sqrt{0,3}$

2) Na competição de skate a rampa em forma de U tem o nome de vert, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo skate, uma delas é a “180 allie frontside”, que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que 540° e 900° são côngruos a 180°, um atleta que faz as manobras 540 Mc Tuist e 900 realizou giros completos de

a) 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.

b) 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.

c) 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.

d) 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.

e) 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

3) Se a é o menor valor que satisfaz a inequação $|1-8x| \leq 3$ e sen(y) = a, então o valor da constante k, que satisfaz a igualdade sen(2y) = k cotg(y), é:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{16}$

e) 1

4) Qual é o valor de sen(2α) para α tal que sen(α) = $\frac{1}{4}$ e $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Dado: para todo número real x vale a identidade trigonométrica sen(2x) = 2 sen(x)cos(x).

a) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

b) $-\frac{\sqrt{15}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

5) Se tga = 2 com $0 < a < \frac{\pi}{2}$, então sen2a é igual a

a) $\frac{4}{5}$

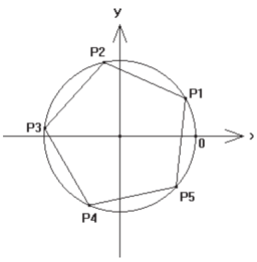
b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{4}{3}$

6) (EsPCEx 2008) Na figura, está representado um círculo trigonométrico em que os pontos P1 a P5 indicam extremidades de arcos. Esses pontos, unidos, correspondem aos vértices de um pentágono regular inscrito no círculo. Se o ponto P1 corresponde a um arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos, então o ponto P4 corresponderá à extremidade de um arco cuja medida, em radianos, é igual a



a) $\frac{13\pi}{30}$

b) $\frac{17\pi}{30}$

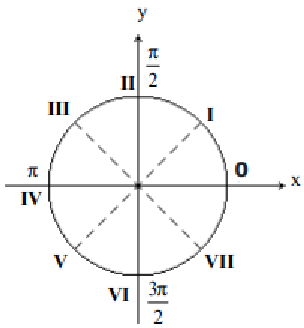
c) $\frac{29\pi}{30}$

d) $\frac{41\pi}{30}$

e) $\frac{53\pi}{30}$

7) (EsPCEx 2007) Os termos da sequência de números em progressão aritmética $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}$ ... correspondem às medidas em radianos de arcos, que podem ser representados na circunferência trigonométrica abaixo.

Os pontos identificados por **0** a **VII** representam as medidas de arcos que dividem a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, medidas no sentido anti-horário, a partir de **0**.



Nessas condições, o arco correspondente ao **13° termo** da seqüência, igualmente medido no sentido anti-horário e a partir de **0**, terá sua extremidade situada entre os pontos

a) I e II

b) II e III

c) IV e V

d) V e VI

e) VII e 0

8) tg75º é igual a:

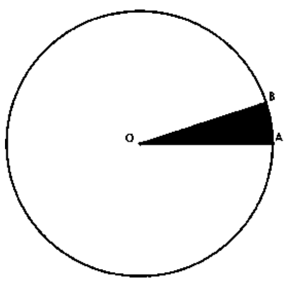
a) $2 + \sqrt{2}$

b) $2 + \sqrt{3}$

c) $2 - \sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{2}$

9) Se o círculo abaixo tem área 240cm² e o ângulo AOB mede 18°, então a área do setor circular AOB é igual a



a) 10 cm²

b) 12 cm²

c) 15 cm²

d) 18 cm²

e) 20 cm²

10) Qual o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando este marca 12 h e 20 min?

a) 120°

b) 110°

c) 100°

d) 90°

11) (EsPCEx 2002) O valor de cos x + sen x, sabendo que 3.sen x + 4.cos x = 5, é

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) 1

d) $\frac{6}{5}$

e) $\frac{7}{5}$

12) (EsPCEx 2003) Considere as expressões:

$$(I)\frac{sen30^\circ.cos150^\circ}{tg210^\circ}$$

$$(II)\frac{cotg50^\circ.sen93^\circ}{tg181^\circ}$$

$$(III)\frac{\cos x.\text{cossec}\, x}{\sec x.\text{cotg}\, x}, x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$$

$$(IV)\frac{sen\, x.tg\, x}{\text{cossec}\, x}, x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

Têm valor sempre negativo:

a) I e II.

b) I e IV.

c) II e III.

d) I e III.

e) III e IV.

13) (Mackenzie 2017) O número de soluções que a equação 4 $\cos^2$x − cos 2x + cos x = 2 admite no intervalo [0, 2π] é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

14) Os números reais *a, b* e *c* formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Sendo $secx = \frac{5}{a}$, $senx = \frac{b}{3}$ e $cosx = \frac{a+c}{5}$, é correto afirmar que

a) c = 2a.

b) c = 2b.

c) c é um número irracional positivo.

d) c é um número irracional negativo.

e) c = 0.

15) (IFAL 2018) O valor de x na expressão

$$x = \frac{tg2160^0 + cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)}{sen2640^0 - cos\frac{5\pi}{4}}$$

É:

a) 0

b) 1

c) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

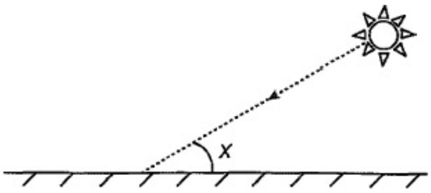
d) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

e) $\sqrt{2}$

16) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.

Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por I(x) = k • sen(x)

sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0o e 90°.



Quando x = 30°, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33%

b) 50%

c) 57%

d) 70%

e) 86%

17) (EsPCEx 2016) A soma das soluções da equação cos(2x) - cos(x)=0, com $x \in [0,2\pi)$ é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

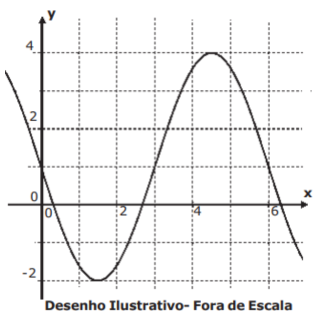
b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

18) (EsPCEx 2019) Na figura abaixo está representado um trecho do gráfico de uma função real da forma *y* = *m* · *sen (nx)* + *k*, com *n* > 0.



Os valores de m, n e k, são, respectivamente,

a) 3, π/3 e -1.

b) 6, π/6 e 1.

c) -3, π/6 e 1.

d) -3, π/3 e 1.

e) 3, π/6 e -1.

19) Se o volume de ar (em litros) nos pulmões de uma pessoa for dado em função do tempo (em segundos) por V(t) = 2,9 + 0,3.cos(1,1.t), então os volumes mínimo e máximo serão, respectivamente,

a) 2,6 litros e 3,2 litros.

b) 2,6 litros e 3,5 litros.

c) 2,9 litros e 3,2 litros.

d) 2,9 litros e 3,5 litros.

e) 3,2 litros e 3,5 litros.

20) A altura h em que uma pessoa se encontra sentada na cadeira de uma roda gigante com 10 metros de raio varia em função do ângulo de giro x, segundo a fórmula h(x) = 10 + 10 sen x.

Sendo assim, ASSINALE a alternativa que contém o ângulo x para o qual a altura é máxima.

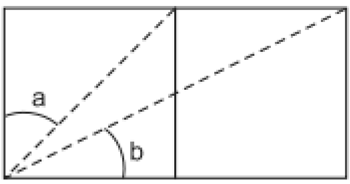
a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{2}$

21) Considerando-se a e b os ângulos indicados na figura, em que os dois quadrados são congruentes com um lado comum, pode-se afirmar que o valor do sen (a + b) é



a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

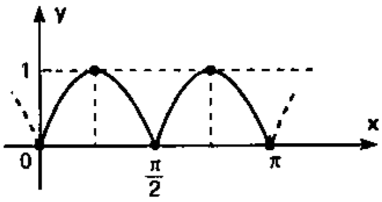
b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$

d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

22) Qual função trigonométrica representa o gráfico a seguir?



a) $y = \sqrt{1 - cos^2 2x}$

b) $y = \sqrt{1 - sen^2 3x}$

c) $y = \frac{3}{2}.sen\frac{2x}{3}$

d) $y = 1 + sen\frac{x}{2}$

e) $y = 2.cos2x$

23) O valor da expressão 4 sem $\frac{31\pi}{3}$ + 6 cos 2655o é igual a:

a) $^{2-}\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{2}\ {}^{-}\sqrt[2]{3}$

c) $\sqrt[3]{2}\ ^{-3}$

d) $\sqrt[2]{3}\ {}^{-}\sqrt[3]{2}$

24) Sendo $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arco seno e [0, π] o contradomínio da função arco cosseno, assinale o valor $\cos\left(arcsen\frac{3}{5} + arccos\frac{4}{5}\right)$.

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{\sqrt{15}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

25) Seja $f: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a função definida por f(x) = arcsen(x). Então, a soma $\sum_{n=0}^{4} f\left(cos\frac{2\pi}{3^n}\right)$ é igual a

a) $\frac{253}{162}\pi$

b) $\frac{245}{162}\pi$

c) $\frac{152}{81}\pi$

d) $-\frac{82}{81}\pi$

e) $-\frac{79}{162}\pi$

26) O conjunto solução da equação sen(x) = cos[x-(π/2)] em IR é:

a) {-1, 0, 1}

b) [-1, 1]

c) {x Æ IR | x = (/2) + k, k Z}

d) {x Æ IR | x = k, k Z}

e) IR

27) A inequação sen(x)cos(x) ≤ 0, no intervalo de 0 ≤ x ≤ 2π e x real, possui conjunto solução

a) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \; ou \; \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

b) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \; ou \; \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

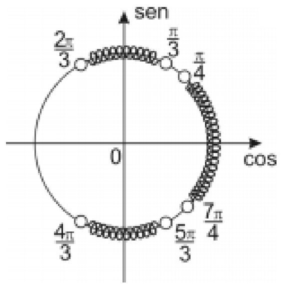
c) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \; ou \; \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \; ou \; \frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$

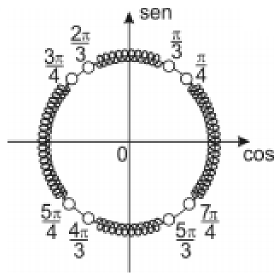
e) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \; ou \; \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$

28) Sendo x ∈ [0, 2 π], a interpretação gráfica no ciclo trigonométrico para o conjunto solução da inequação -8 sen^4x + 10 sen^2x - 3 < 0 dada por

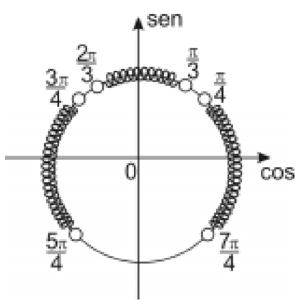
a)



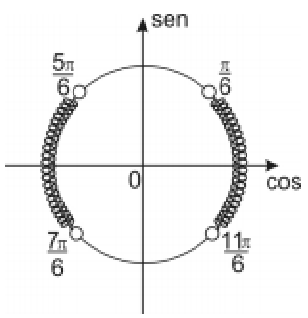
b)



c)



d)



29) (EsPCEx 2017) O conjunto solução da inequação $2sen^2x$-cosx-1 ≥ 0, no intervalo]0,2π] é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$

30) Para ângulos de medidas x e y, em que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x + 2k\pi < y + 2k\pi < \pi + 2k\pi$, com k inteiro, é correto afirmar que

a) 0 < sen x < sen y.

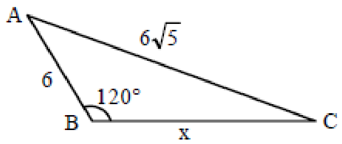
b) cos x < cos y.

c) tg x < tg y.

d) sen y < tg y.

e) 0 < cos y < tg y.

31) (EEAR 2018) Pelo triângulo ABC, o valor de x2 + 6x é



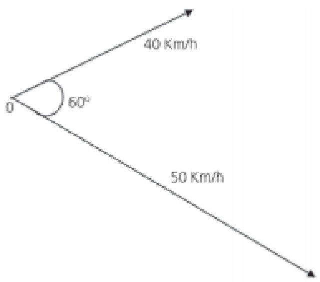
a) 76

b) 88

c) 102

d) 144

32) Dois navios partem de um mesmo ponto 0 (zero) e seguem trajetórias retilíneas que formam um ângulo de 60º, conforme a figura abaixo. Ambas as embarcações afastam-se do ponto 0 (zero) desenvolvendo velocidades constantes de 40 km/h e de 50 km/h. Decorridas duas horas após a partida, a distância (em quilômetros) entre os navios será de:



a) $20\sqrt{13}$

b) $20\sqrt{17}$

c) $20\sqrt{19}$

d) $20\sqrt{21}$

33) João está procurando cercar um terreno triangular que ele comprou no campo. Ele sabe que dois lados desse terreno medem, respectivamente, 10 m e 6 m e formam entre si um ângulo de 120o. O terreno será cercado com três voltas de arame farpado. Se o preço do metro do arame custa R$ 5,00, qual será o valor gasto por João com a compra do arame?

Dados: sen de 120º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos de 120º = $-\frac{1}{2}$

a) R$ 300,00

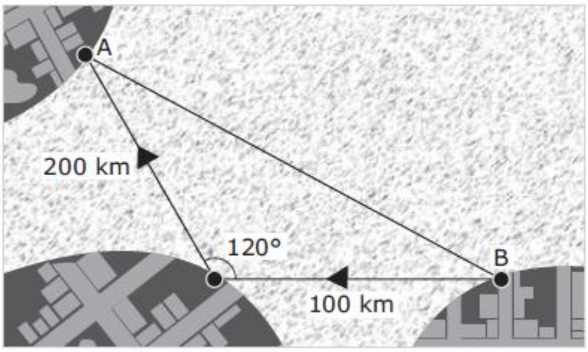
b) R$ 420,00

c) R$ 450,00

d) R$ 500,00

e) R$ 520,00

34) A falta de oportunidade em algumas regiões de conflito faz com que uma parte da população recorra a embarcações clandestinas para buscar uma vida melhor nos países vizinhos. A figura a seguir mostra uma rota de travessia entre as cidades A e B.



Com base na figura, qual é a distância entre as cidades A e B?

a) 100

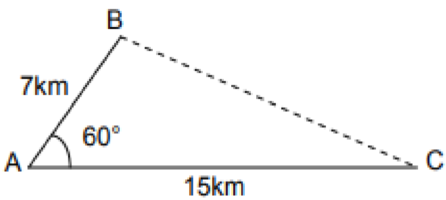
b) $100\sqrt{3}$

c) $100\sqrt{5}$

d) $100\sqrt{7}$

e) 300

35) Entre três cidades A, B e C de uma certa região do sertão alagoano, foram construídas duas estradas (linhas cheias) entre A e B e entre A e C. Deseja-se construir uma nova estrada entre B e C (linha tracejada), conforme figura abaixo:



Quantos km de asfalto serão gastos nessa nova estrada?

a) 9km.

b) 10km.

c) 11km.

d) 12km.

e) 13km.

36) Sendo dados: sen(x) = 0,8 e cos (x)= 0,6, qual é o valor do sen(2x)?

a) 0,96.

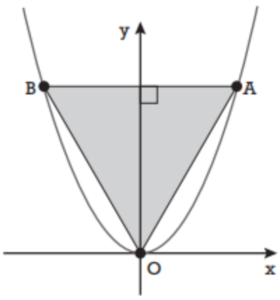
b) 0,90.

c) 0,80.

d) 0,70.

e) 0,60.

37) No plano cartesiano abaixo estão representados o gráfico da função $y = x^2$ e o triângulo equilátero OAB.



A área desse triângulo mede:

a) $2\sqrt{3}$

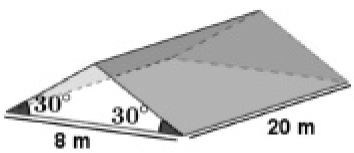
b) 3

c) $\sqrt{3}$

d) 2

e) $3\sqrt{3}$

38) O telhado de uma casa tem o formato de um prisma triangular reto, conforme mostrado na figura abaixo. Um quarto da área do telhado ficará coberta por painéis fotovoltaicos que irão captar energia solar.



Usando $\sqrt{3} = 1{,}7$, podemos afirmar que a área total do telhado coberta pelos painéis é, em m^2 , aproximadamente igual a

a) 48,2.

b) 45,3.

c) 42,7.

d) 39,1.

e) 35,2.

39) (FUVEST 2013) Um caminhão sobe uma ladeira com inclinação de 15º. A diferença entre a altura final e a altura inicial de um ponto determinado do caminhão, depois de percorridos 100 m da ladeira, será de, aproximadamente,

Dados:
$\sqrt{3} \cong 1,73$
$\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}$

a) 7 m

b) 26 m

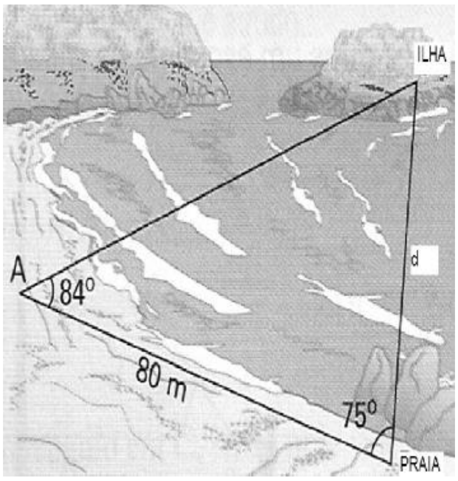
c) 40 m

d) 52 m

e) 67 m

40) Observando a ilustração abaixo, determinar a distância, d, entre a ilha e a praia.

(Dados: sen 84º = 0,99 , sen 75º = 0,97 e sen 21º = 0,36)



a) 74m

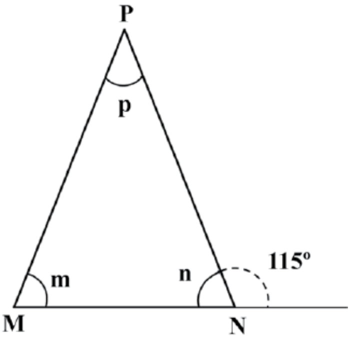
b) 76m

c) 198m

d) 200m

e) 220m

41) O triângulo PMN acima é isósceles de base MN. Se p, m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura, então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,



a) 50º, 65º, 65º

b) 65º, 65º, 50º

c) 65º, 50º, 65º

d) 50º, 50º, 80º

e) 80º, 80º, 40º

42) Quanto mede em radiano um arco de 15º?

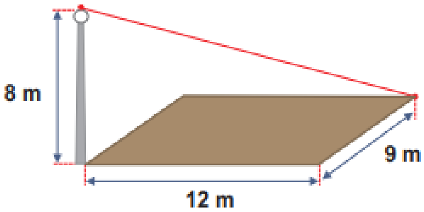
a) $\frac{\pi}{12} rad$

b) $\frac{\pi}{5} rad$

c) $\frac{\pi}{7} rad$

d) $\frac{\pi}{11} rad$

43) Um mastro de 8 m de altura está colocado sobre um dos vértices de um campo retangular, cujos lados medem 12 m e 9 m. No vértice oposto está preso um cabo, conectado ao topo do poste, conforme indica a figura.



Qual é o comprimento desse cabo?

a) 17 m.

b) 19 m.

c) 20 m.

d) 21 m.

e) 23 m.

44) Assinale a alternativa INCORRETA.

a) Se uma função f: A→B é bijetiva, então é também sobrejetiva.

b) O número de diagonais do octógono convexo é 20.

c) Todo quadrado é losango e retângulo.

d) O número de subconjuntos do conjunto A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} é 1024.

e) Não existe triângulo retângulo isósceles.

45) Uma escada está apoiada em uma parede vertical num ponto a uma altura de 3m do solo. Sabendo-se que a medida do ângulo formado entre a escada e a parede é de 30º, qual a distância da parede ao pé da escada?

a) $\sqrt{3m}$

b) 2m

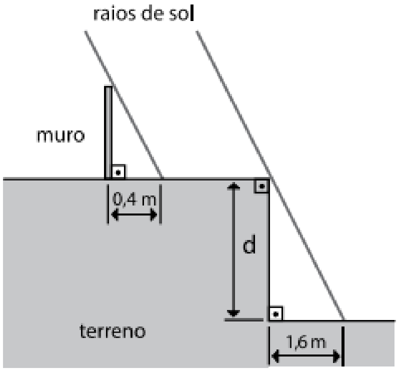
c) $3\sqrt{3m}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}m$

e) 3m

46) Sem dispor de uma trena de comprimento suficiente, um pedreiro determinou a medida do desnível (d) de um terreno, valendo-se da propriedade da propagação retilínea da luz.

Observou que, em determinado momento do dia, um muro vertical de 1,5 m de altura, construído na parte alta do terreno, projetava uma sombra de 0,4 m sobre a parte superior do terreno, que era plana e horizontal. No mesmo instante, o desnível do terreno projetava sobre a parte mais baixa, igualmente horizontal, uma sombra de 1,6 m, conforme a figura.



Com suas observações, foi capaz de deduzir corretamente que o desnível do terreno era de

a) 6,0 m.

b) 8,0 m.

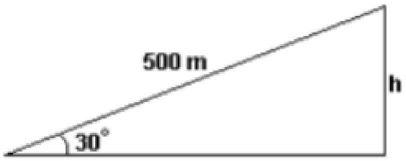
c) 10,0 m.

d) 12,0 m.

e) 14,0 m.

47) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30°. Então, depois que tiver percorrido 500 m, conforme indicado na figura, sua altura h em relação ao solo, em metros, será igual a:

Considere sen 30° = 0,50 ou cos 30° = 0,87.



a) 250

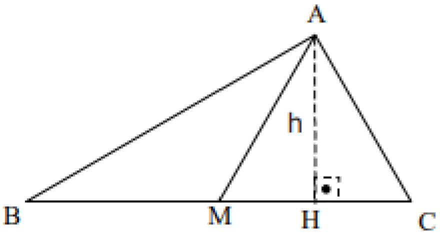
b) 300

c) 400

d) 435

e) 440

48) (EsPCEx 2007) No triângulo ABC, a base BC mede 8 cm, o ângulo B mede 30° e o segmento AM é congruente ao segmento MC, sendo M o ponto médio de BC. A medida, em centímetros, da altura h, relativa ao lado BC do triângulo ABC, é de



a) $\sqrt{2}cm$

b) $2\sqrt{2}cm$

c) $\sqrt{3}cm$

d) $2\sqrt{3}cm$

e) $3\sqrt{3}cm$

49) (EsPCEx 2011) O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale

a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$

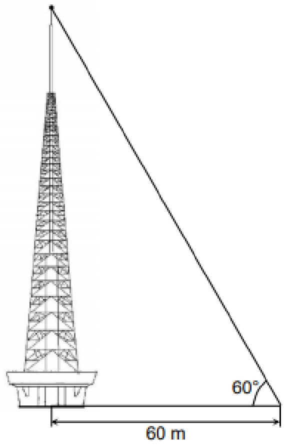
b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$

c) $-\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$

d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

e) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}$

50) Na ilustração a seguir, temos uma torre de transmissão de imagens. A torre é perpendicular ao plano, o cabo de sustentação forma com a superfície plana do solo um ângulo de 60°, e a distância entre a torre e a extremidade do cabo no solo é de 60 m.



Qual a altura da torre, em metros? Dado: use a aproximação $\sqrt{3} \cong 1,73$

a) 103,2 m

b) 103,4 m

c) 103,6 m

d) 103,8 m

e) 104,0 m

51) O valor de sen 1270° é igual a

a) – cos 10°

b) – sen 30°

c) – sen 10°

d) – cos 30°

52) Sabendo-se que os pontos (a, b) e (c, d) pertencem ao segundo e quarto quadrantes, respectivamente, do sistema coordenado retangular XY, é CORRETO afirmar que o quadrante ao qual pertence o ponto (ad + bc, - ac - bd) é o:

a) 3º

b) 2º

c) 1º

d) 4º

53) Os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero cuja medida da área é $9\sqrt{3}m^2$ são ligados dividindo o triângulo em quatro outros triângulos equiláteros congruentes. A medida da altura de cada um destes triângulos menores é

a) $\sqrt{6{,}75}m$

b) $\sqrt{6{,}25}m$

c) $\sqrt{6{,}95}m$

d) $\sqrt{6{,}45}m$

54) (UFRGS) Considere as afirmações a seguir:

I. tan 92° = –tan 88°

II. tan 178° = tan 88°

III. tan 268° = tan 88°

IV. tan 272° = –tan 88°

Quais estão corretas?

a) I, III

b) III, IV

c) I, II, IV

d) I, III, IV

e) II, III, IV

55) (EEAR 2017) Ao somar as medidas angulares 120° e $\frac{3\pi}{2}rad$, obtém-se a medida de um arco pertencente ao ___ quadrante.

a) 1°

b) 2º

c) 3º

d) 4º

56) medida de um arco é a medida do ângulo central que o subtende, independentemente do raio da circunferência que contém o arco. As unidades como o grau e o radiano são usadas para medir os arcos.

Assinale a alternativa correta para o cálculo em radianos a medida do ângulo central correspondente a um arco de comprimento 15 cm contido numa circunferência de raio 3 cm.

a) 30 rad.

b) 15 rad.

c) 45 rad.

d) 3 rad.

e) 5 rad.

57) Se a e b são ângulos agudos e complementares, o valor da expressão $sen^2(a+b) - cos^2(a+b)$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt{3}$

58) O valor da soma sen(x) + sen(x + π) + sen(x + 2π) + sen(x + 3π) + ... + sen(x + nπ), onde n é um número natural par e menor do que 100 é

a) sen(x).

b) cos(x).

c) 0.

d) 1.

59) A expressão cotg 160 + tg 80 é igual a:

a) cos sec 160

b) sen 160

c) sen 80

d) cos 80

60) (EsPCEx 2015) Um portal de igreja tem a forma de um arco de parábola, conforme figura abaixo. A medida da sua base AB é 4m e da sua altura é 5m. Um vitral foi colocado 3,2m acima da base.

Qual a medida CD da base, em metros?

a) 1,44

b) 1,80

c) 2,40

d) 3,00

e) 3,10

Exercícios – Geometria espacial

1) Qual é a capacidade de uma lata que tem a forma cilíndrica, com 7cm de diâmetro e 14cm de altura? Considere $\pi = 3{,}14$

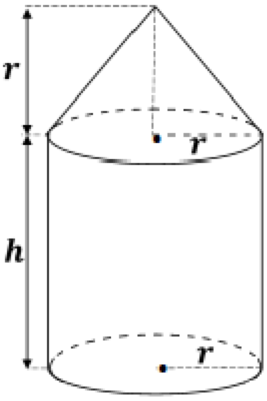
a) 539,6ml.

b) 538,5ml.

c) 578,7ml.

d) 521,7ml.

2) Para armazenar a ração dos animais, o senhor Antônio utiliza um silo metálico, constituído por um cilindro, de altura h e raio da base r, e um cone, de altura r, acoplado na parte superior do cilindro, conforme mostra a Figura. Se as medidas são r = 3 m e h = 10 m e considerando $\pi = 3$, o volume desse depósito, em m^3, será de



Figura

a) 179.

b) 297.

c) 366.

d) 540.

3) Um tonel de forma cilíndrica está cheio de vinho, as dimensões do mesmo são 5 m de raio e 9 m de altura. Deseja-se armazenar a mesma quantidade desse vinho em tonéis menores, também em forma de cilindro circular reto, com raio igual a 50 cm e altura igual a 2 m. Quantos tonéis menores serão necessários?

a) 400

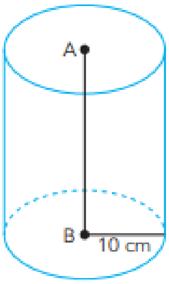
b) 450

c) 455

d) 445

e) 440

4) Considere, em um cilindro circular reto com raio de 10 cm e volume de 7 850 cm^3, o segmento AB que liga os centros das bases, conforme ilustra a figura a seguir.



Considerando $\pi = 3{,}14$, a medida, em centímetros, do segmento AB, é igual a:

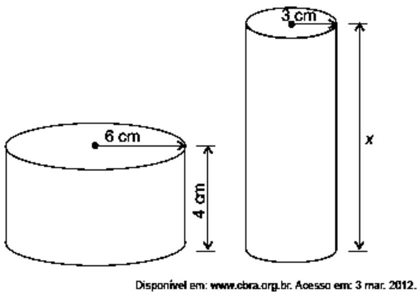
a) 21

b) 23

c) 25

d) 27

5) Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, V1, é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, V2.



A medida da altura desconhecida vale

a) 8cm.

b) 10cm.

c) 16cm.

d) 20cm.

e) 40cm.

6) Um cilindro regular de madeira, com 20cm de altura e 20cm de diâmetro, deverá ser transformado em um cone com 20cm de altura e 2cm a menos no diâmetro. Qual o volume de madeira que um marceneiro tem que desgastar?

a) 1573π cm3

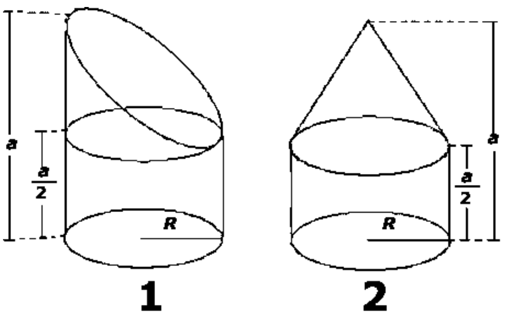
b) $1520\,\pi$ cm3

c) $1460\,\pi$ cm3

d) $1333\,\pi$ cm3

e) 720 cm3

7) (EsPCEx) O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



Desenho Ilustrativo Fora de Escala

a) $\frac{13}{12}a$

b) $\frac{7}{6}a$

c) $\frac{5}{4}a$

d) $\frac{4}{3}a$

e) $\frac{17}{12}a$

8) (EsPCEx 2014) Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1 cm. O volume desse cone (em cm3) é igual a

a) 1/3π.

b) 2/3π.

c) 4/3π.

d) 8/3π.

e) 3π.

9) (EsPCEx 2012) Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura. Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

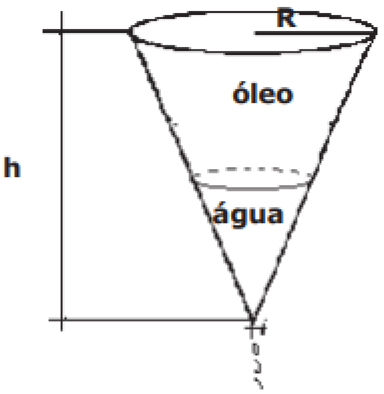


Figura fora de escala

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$

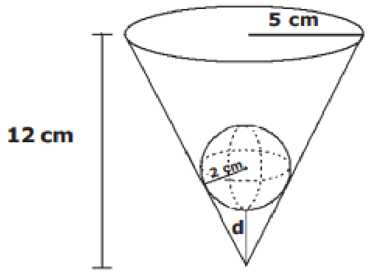
b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$

c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$

d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$

e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

10) (EsPCEx 2008) Uma esfera de 2 cm de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir. O vaso tem 12 cm de altura e sua abertura é uma circunferência com 5 cm de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é



Desenho Fora de Escala

a) 3,0 cm

b) 3,2 cm

c) 3,4 cm

d) 3,6 cm

e) 3,8 cm

11) Certo tanque de combustível tem o formato de um cone invertido com profundidade de 5 metros e com raio máximo de 4 metros. Quantos litros de combustível cabem, aproximadamente, nesse tanque? Considere $\pi = 3{,}14$.

a) 20.000 ℓ.

b) 50.240 ℓ.

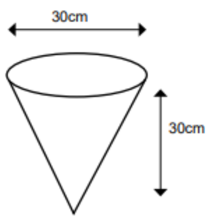
c) 83.733,33 ℓ.

d) 104666,67 ℓ.

e) 150.000 ℓ.

12) Uma pessoa utiliza um recipiente em forma de um cone para encher de água uma caixa em forma de um paralelepípedo, com as seguintes dimensões: 54cm de largura, 50cm de comprimento e 20cm de altura. Considerando que o cone tem as medidas conforme mostra a figura a seguir, quantas vezes será necessário encher o cone para completar o volume total do paralelepípedo.

Considere π = 3.



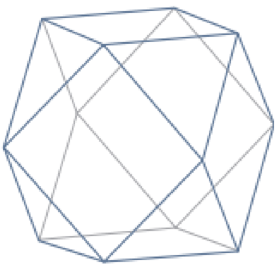
a) 4

b) 5

c) 6

d) 8

13) A figura abaixo é um cuboctaedro, um poliedro convexo que possui 8 faces triangulares, 6 faces quadradas e 12 vértices.



Quantas arestas o cuboctaedro possui?

a) 14.

b) 18.

c) 20.

d) 24.

e) 26.

14) Uma quadrilha decide roubar cobre de uma indústria. Para tanto, os ladrões utilizaram um carro utilitário com capacidade de carga de 720kg e 810L. O cobre está armazenado em barras de formato de paralelepípedos reto retângulo de dimensões 5cm X 10cm X 20 cm. Considerando a densidade do cobre de aproximadamente dcu = 9kg/dm3, qual é a quantidade máxima de barras de cobre que o utilitário comporta dentro dos seus limites?

a) 6480 barras.

b) 90 barras.

c) 100 barras.

d) 80 barras.

e) 810 barras.

15) Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.

A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

a) 56.

b) 32.

c) 30.

d) 36.

e) 48.

16) Um diedro mede 120°. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi cm^2$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$

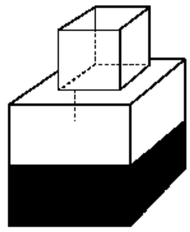
b) $3\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{2}$

e) 2

17) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8

b) 10

c) 16

d) 18

e) 24

18) Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}, \sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido VABC é

a) 2

b) 4

c) $\sqrt{17}$

d) 6

e) $5\sqrt{10}$

19) (EsPCEx 2018) O volume de uma esfera inscrita em um cubo com volume 216 cm3 é igual a

a) 38π cm3.

b) 36π cm3.

c) 34π cm3.

d) 32π cm3.

e) 30π cm3.

20) (EEAR 2017) Considere um recipiente em forma de cubo, completamente cheio de água. Se três esferas metálicas de 1 cm de raio forem colocadas dentro do recipiente, o volume de água que será derramado será de ______ π cm³.

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

21) Um artista dispõe de 500 cm³ de prata para fazer um artefato, em formato de esfera, para os Jogos Olímpicos do Rio 2016. Considerando $\boldsymbol{\pi}$ = 3, o raio desse artefato, em cm, será

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

22) Considere um cilindro reto de altura 32 e raio da base 3, e uma esfera com volume igual ao do cilindro.

Com essas condições, o raio da esfera é

a) 4.

b) 6.

c) 8.

d) 10.

e) 12.

23) Uma esfera metálica de 3 cm de raio é colocada em um congelador e, após algum tempo, acumula uma camada de gelo de 3 cm de espessura, mantendo a forma esférica. Então, o volume do gelo acumulado é

a) 198π cm3

b) 215π cm3

c) 252π cm3

d) 207π cm3

e) 225π cm3

24) Coloca-se uma esfera do raio r no interior de um recipiente com formato de um cilindro circular reto com raio da base R. Em seguida, preenche-se o recipiente com água até que a esfera fique exatamente coberta por água, ou seja, a esfera tangencia a superfície da água. Retira-se, então, a esfera e é observado que o nível da água é reduzido em $\frac{1}{4}$.

O valor da razão $\frac{r}{R}$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{3}{4}$

25) Um dos mistérios da humanidade consiste em saber como as pirâmides, como as do Sol e da Lua, foram construídas por civilizações que não tinham o aporte tecnológico que há na atualidade. Para se construir, em argila, uma escultura com 15 m de altura em formato de pirâmide maciça de base quadrada com 10 m de lado, o volume do material usado foi de

a) 650 m³.

b) 550 m³.

c) 500 m³.

d) 400 m³.

26) Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

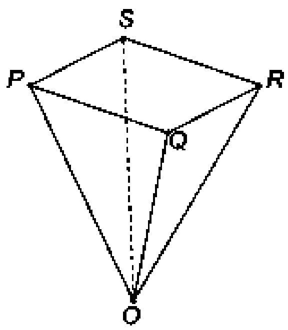


Figura 1

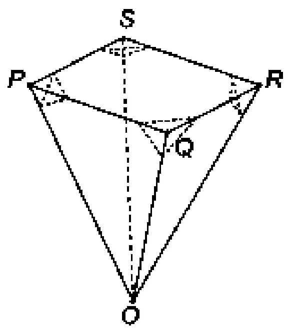


Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13.

b) 9, 24 e 13.

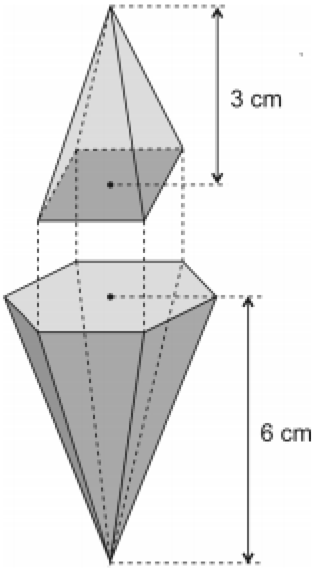
c) 7, 15 e 12.

d) 10, 16 e 5.

e) 11, 16 e 5.

27) (AFA) Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6cm foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura 3cm, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura.

Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}cm$ então, o volume do sólido cm obtido, em cm^3 é igual a



a) $15\sqrt{3}$

b) $20\sqrt{3}$

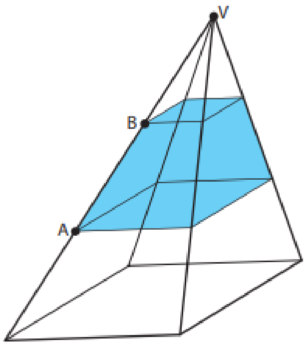
c) $25\sqrt{3}$

d) $30\sqrt{3}$

28) Observe na imagem uma pirâmide de base quadrada, seccionada por dois planos paralelos à base, um contendo o ponto A e o outro o ponto B. Esses planos dividem cada aresta lateral em três partes iguais.

Considere as seguintes medidas da pirâmide:

- altura = 9 cm;
- aresta da base = 6 cm;
- volume total = 108 cm3.



O volume da região compreendida entre os planos paralelos, em cm3, é:

a) 26

b) 24

c) 28

d) 30

29) Certa empresa pretende vender amêndoas torradas em embalagens de papel com formato de pirâmides. O setor de marketing da empresa sugeriu três características para a embalagem: a base da pirâmide deve ser um quadrado, a altura deve ter o dobro do comprimento do lado do quadrado da base e o volume da embalagem deve ser de 144 cm3 para caber a quantidade ideal de amêndoas. Desprezando a espessura do papel, o comprimento do lado do quadrado da base da pirâmide que atende a especificação do marketing é

a) 12 cm

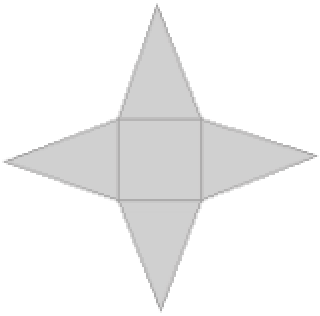
b) 8 cm

c) 9 cm

d) 6 cm

e) 10 cm

30) A figura a seguir representa a forma como foi cortada uma folha de papelão que será utilizada na confecção de uma caixa. Na figura, tem-se um quadrado de lado 10 dm e quatro triângulos isósceles, cujos lados congruentes medem 13 dm. A caixa será obtida dobrando-se nas linhas que formam o quadrado e colando-se os lados congruentes dos triângulos adjacentes. Desprezando-se a espessura do papelão, o volume da caixa é



a) $V = \frac{100.\sqrt{185}}{3} dm^3$

b) $V = \frac{100.\sqrt{119}}{3} dm^3$

c) $V = \frac{100.\sqrt{137}}{3} dm^3$

d) $V = \frac{100.\sqrt{104}}{3} dm^3$

31) (UEA 2017) Um ourives fundiu dois blocos de ouro, ambos de formato cúbico, de arestas medindo 10 mm e 6 mm. Em seguida, usou todo o ouro líquido resultante da fusão para compor um novo bloco com a forma de um prisma reto de base quadrada, de área da base igual a 64 mm² e altura igual a x mm. Admitindo-se que na fusão não ocorreu perda de material, o valor de x é igual a

a) 14,0.

b) 18,0.

c) 17,6.

d) 15,5.

e) 19,0.

32) O formato interno de uma cisterna é um paralelepípedo retângulo que possui altura igual a 2,5 m e sua base é um quadrado de diagonal $4\sqrt{2}m$.

A capacidade máxima da cisterna, em m³, é igual a:

a) 50

b) 40

c) 35

d) 25

33) Uma fábrica que trabalha com matéria-prima de fibra de vibro possui diversos modelos e tamanhos de caixa-d'água. Um desses modelos é um prisma reto com base quadrada. Com o objetivo de modificar a capacidade de armazenamento de água, está sendo construído um novo modelo, com as medidas das arestas da base duplicadas, sem a alteração da altura, mantendo a mesma forma.

Em relação ao antigo modelo, o volume do novo modelo é

a) oito vezes maior.

b) quatro vezes maior.

c) duas vezes maior.

d) a metade.

e) a quarta parte.

34) Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo retângulo, com base tendo medidas 30 m e 20 m. Inicialmente vazia, a piscina está sendo preenchida a uma vazão de 300 m3 por minuto. De quantos metros por minuto sobe a altura da água na piscina?

a) 0,4 m/min

b) 0,5 m/min

c) 0,6 m/min

d) 0,7 m/min

e) 0,8 m/min

35) (ITA 2018) Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm3:

a) 10

b) 12

c) 15

d) 20

e) 30

36) Considere que um cilindro circular reto e um prisma quadrangular regular têm alturas de mesma medida. E, embora suas bases não tenham o mesmo formato, elas têm perímetros iguais. Considere ainda um cone circular cuja base é equivalente à base do referido prisma.

Apenas em relação a esses três sólidos, descritos acima, analise a veracidade das afirmações a seguir.

I. As bases do prisma e do cilindro são equivalentes.

II. A área lateral do prisma é igual à área lateral do cilindro.

III. Se a altura do cone tem a mesma medida da altura do cilindro, então o volume do cilindro é igual ao triplo do volume do cone.

IV. O volume do prisma é, aproximadamente, 21,5% menor do que o volume do cilindro.

V. Mesmo se o cone não for reto, sempre existirá uma medida H, para a sua altura, tal que o seu volume seja exatamente igual ao volume do prisma, qualquer que seja a medida da altura desse prisma.

Dessas afirmações, apenas

a) II, IV e V são verdadeiras.

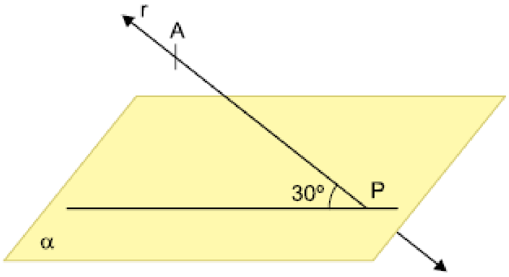
b) I e III são verdadeiras.

c) II e V são verdadeiras.

d) II e III são verdadeiras.

e) I é verdadeira.

37) Na figura, a reta r intercepta o plano α em P e forma com ele um ângulo de 30º.



Se AP = 30 cm, então a menor distância de A ao plano α é

a) $15\sqrt{3}cm$

b) $30\sqrt{3}cm$

c) 30cm

d) $15\sqrt{2}cm$

e) 15cm

38) (EEAR 2019) Um pedaço de queijo, em forma de prisma triangular regular, tem 6 cm de altura e possui como base um triângulo de 10 cm de lado. O volume desse pedaço de queijo é _____ $\sqrt{3}cm^3$.

a) 150

b) 165

c) 185

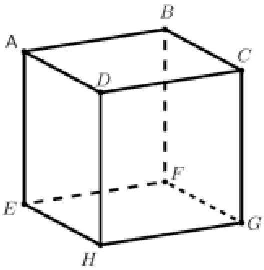
d) 200

39) No cubo representado na figura a seguir, considere as seguintes afirmativas:

I. As retas determinadas pelos pares de pontos (A, B) e (H, G) são paralelas.

II. As retas determinadas pelos pares de pontos (A, B) e (E, H) são reversas.

III. Os segmentos AB, AE e AD são dois a dois perpendiculares.



Assinale a alternativa correta:

a) Somente a afirmativa I é verdadeira

b) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras

c) Somente a afirmativa II é verdadeira

d) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras

e) Todas as afirmativas são verdadeiras

40) Seja PQRS um trapézio isósceles cujas bases menor e maior são respectivamente os segmentos PQ e SR. Se M e N são respectivamente as projeções ortogonais de P e Q sobre SR e se a razão entre as medidas de SR e PQ é igual a três, então, pode-se afirmar corretamente que a razão entre a área do trapézio e a área do quadrilátero PQNM é igual a

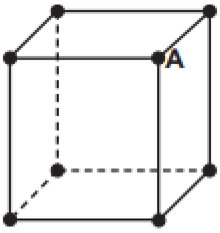
a) 3,0.

b) 1,5.

c) 2,0.

d) 2,5

41) O número de triângulos que podem ser formados unindo o vértice A a dois dos demais vértices do paralelepípedo é



a) 15

b) 18

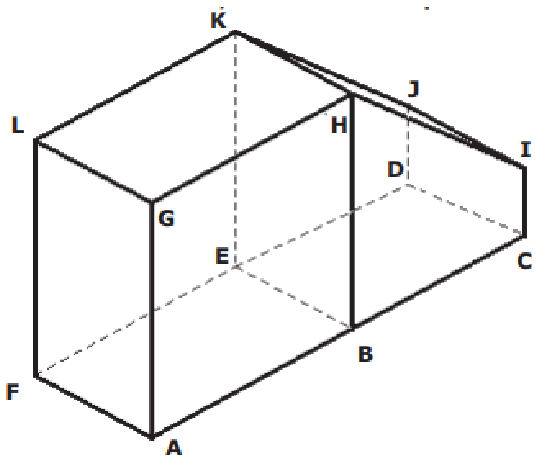
c) 21

d) 24

e) 27

42) (EsPCEx 2012) O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma.

Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas LB e GE; as retas AG e HI e as retas AD e GK. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



a) concorrentes; reversas; reversas.

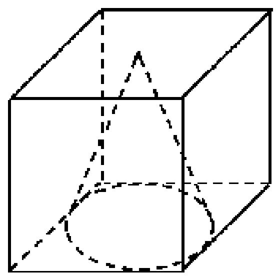
b) reversas; reversas; paralelas.

c) concorrentes, reversas; paralelas.

d) reversas; concorrentes; reversas.

e) concorrentes; concorrentes; reversas.

43) Um cone circular reto está perfeitamente inscrito em um cubo, conforme ilustrado na figura abaixo



Sabendo-se que a aresta do cubo mede 6 cm, o volume do cone é

a) $18\pi cm^3$

b) $\frac{18}{4}\pi cm^3$

c) $16\pi cm^3$

d) $\frac{14}{4}\pi cm^3$

e) $16\ cm^3$

44) Num certo instante, uma caixa d'agua está com um volume de líquido correspondente a um terço de sua capacidade total. Ao retirarmos 80 litros de água, o volume de água restante na caixa corresponde a um quarto de sua capacidade total. Nesse instante, o volume de água, em litros, necessário para encher totalmente a caixa d'água é

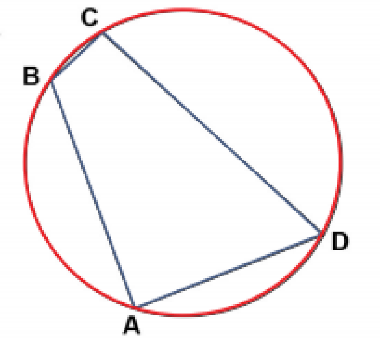
a) 720.

b) 740.

c) 700.

d) 760.

45) Na figura abaixo, AB = 7, BC = 2 e CD = 9.



Se BD é um diâmetro do círculo, qual é o comprimento de AD?

a) 6.

b) 8.

c) $\sqrt{85}$.

d) 11.

e) 16.

46) Um cone de revolução tem altura 8 cm e está circunscrito a uma esfera de raio igual a 2 cm. A razão entre o volume da esfera e o volume do cone igual a:

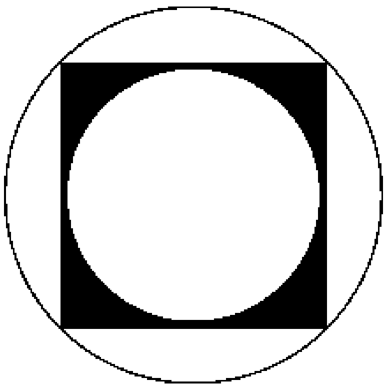
a) 1/4.

b) 1/8.

c) 1/2.

d) 2.

47)



Na figura, tem-se uma circunferência inscrita em um quadrado, que, por sua vez, está inscrito em outra circunferência.

Considerando-se π = 3,14, a área escura compreendida entre o quadrado e a circunferência menor representa, em relação à área interna à circunferência maior, um percentual de, aproximadamente,

a) 11,8%

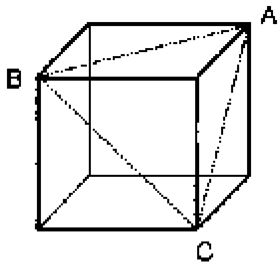
b) 13,7%

c) 16,4%

d) 18,3%

e) 21,5%

48) A figura a seguir ilustra um cubo de aresta 4 cm.



Se A, B e C são vértices desse cubo, a área do triângulo ABC, em cm2, vale

a) $2\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{6}$

c) $4\sqrt{3}$

d) $8\sqrt{2}$

e) $8\sqrt{3}$

49) Um octaedro é um poliedro convexo que possui 6 vértices e 8 faces. Nessas condições, o número de arestas do octaedro é:

a) 7.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

50) Sabendo que o dodecaedro regular possui 20 vértices, o número de arestas desse poliedro é

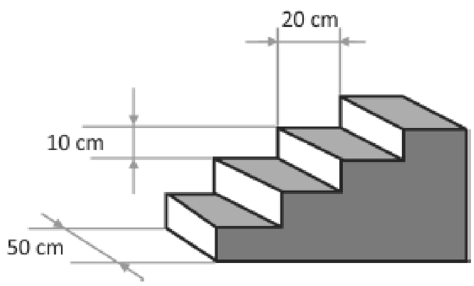
a) 16

b) 28

c) 30

d) 32

51) A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto-retângulo. A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm. Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a



a) 2,1 m^3

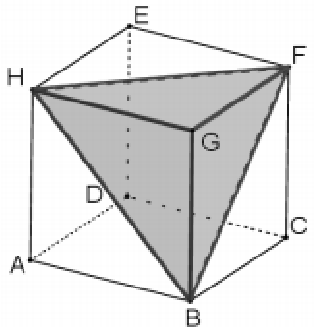
b) 2,3 m³

c) 3,0 m³

d) 4,2 m³

e) 6,0 m³

52) Considere o paralelepípedo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H e a pirâmide de vértices B, F, G, H, inscrita no paralelepípedo, representados na figura a seguir.



A razão entre o volume da pirâmide e o volume do paralelepípedo é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2}$

53) Assinale a alternativa correta para o cálculo do número de arestas e o número de vértice de um poliedro convexo com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

a) 8 arestas e 10 vértices.

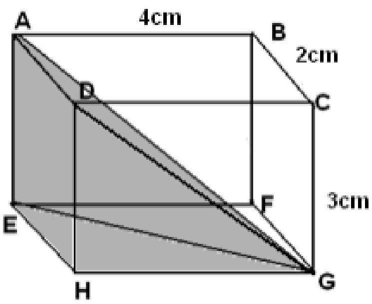
b) 16 arestas e 5 vértices.

c) 18 arestas e 10 vértices.

d) 20 arestas e 10 vértices.

e) 18 arestas e 5 vértices.

54) Na figura a seguir, o volume do sólido com vértices nos pontos A, D, E, H, G é



a) 8/3 cm³

b) 6 cm³

c) 8 cm³

d) 12 cm³

e) 24 cm³

55) Um balde de plástico tem o formato de um tronco de cone, cujos raios das bases são: 5 e 2 e que possua geratriz igual a 5. Obtenha a área lateral do balde.

a) 10π.

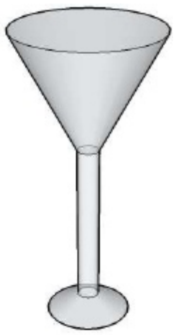
b) 15π.

c) 20π.

d) 35π.

e) 40π.

56) A figura apresenta um esboço de uma taça confeccionada apenas com formas geométricas espaciais regulares.



Quais formas espaciais regulares estão presentes no cálice?

a) Cilindro e cone.

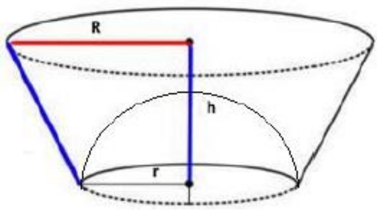
b) Cone, cubo e pirâmide.

c) Tronco de cone e cilindro.

d) Cilindro, paralelepípedo e pirâmide.

e) Tronco de pirâmide e paralelepípedo.

57) Um recipiente tem o formato de um tronco de cone, com raio maior medindo 5 cm, raio menor medindo 3 cm, altura medindo 4 cm e, no fundo do recipiente, há uma meia esfera sólida e fixa. Analisando a figura a seguir, pode-se afirmar que o volume de água que este recipiente comporta é aproximadamente:



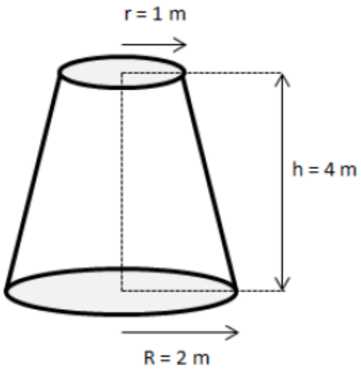
a) 29 π cm³

b) 47 π cm³

c) 65 π cm³

d) 71 π cm³

58) O reservatório de água de um parque tem a forma de um tronco de cone, com as dimensões apresentadas na figura a seguir.



Supondo que, quando totalmente cheio, ocorresse um pequeno vazamento de 1 litro/minuto, localizado no fundo desse reservatório, o menor tempo, em dias, para que fique totalmente vazio, é (use π = 3)

a) 14.

b) 16.

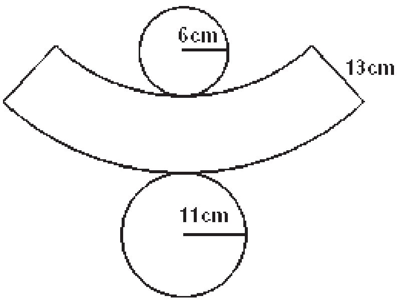
c) 18.

d) 20.

e) 22.

59) (EsPCEx 2010) A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz.

A medida da altura desse tronco de cone é



Desenho fora de escala

a) 13 cm

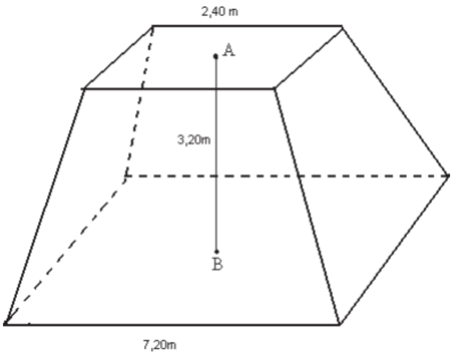
b) 12 cm

c) 11 cm

d) 10 cm

e) 9 cm

60) (EsPCEx 2009) Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de 11m² por galão.



Desenho fora de escala

Os pontos A e B representam os centros das bases do tronco de pirâmide

O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

a) 6

b) 7

c) 9

d) 10

e) 11

Exercícios – Geometria analítica

1) (EEAR 2017) Seja $(x – 1)^2 + (y – 6)^2 = 25$ a equação reduzida de uma circunferência de centro C (a, b) e raio R. Assim, a + b + R é igual a

a) 18

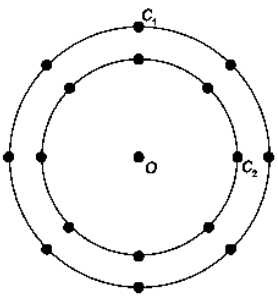
b) 15

c) 12

d) 9

2) A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima.

Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quantos metros uma criança sentada no cavalo C_1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C_2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

a) 55,5

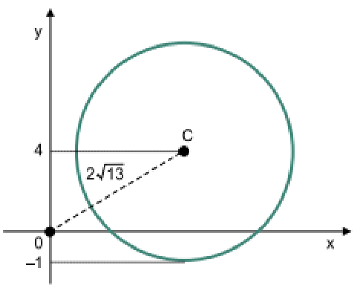
b) 60,0

c) 175,5

d) 235,5

e) 240,0

3) A distância do centro C(x,4) de uma circunferência, com x > 0, até a origem do plano cartesiano é $2\sqrt{13}$, conforme mostra a figura.



A equação dessa circunferência é dada por

a) $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$.

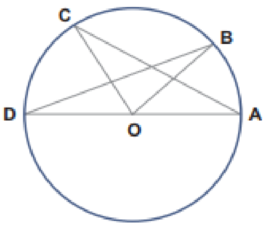
b) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

c) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

d) $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

e) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

4) Os pontos A, B, C e D estão sobre a circunferência de centro em O, conforme indica a figura.



Se o ângulo CÂD mede 31° e o ângulo BDA mede 23°, qual é a medida do ângulo CÔB?

a) 27°.

b) 36°.

c) 54°.

d) 63°.

e) 72°.

5) O centro de uma circunferência está sobre a reta y = 2x. Se essa circunferência passa pelos pontos (0,-1) e (2,5), sua equação é:

a) $x^2 + (y - 1)^2 = 7$.

b) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 1$.

c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

d) $x^2 + (y + 1)^2 = 7$.

e) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 1$

6) Considere as equações $y = 4x - 5$ e $y = x^2 - 5x + 3$. Suponha que os pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) satisfaçam as duas equações e que $x_1 < x_2$. Suponha ainda que o par $(4, y_3)$ satisfaça somente a primeira equação. Então é CORRETO afirmar que a equação da circunferência, que tem centro em $(4, y_3)$ e que passa pelo ponto (x_2, y_2), é dada por

a) $(x - 4)^2 + (y - 11)^2 = 153$.

b) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 225$.

c) $(x - 4)^2 + (y - 11)^2 = 256$.

d) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 264$.

e) $(x - 4)^2 + (y - 11)^2 = 272$.

7) No plano cartesiano, a circunferência C tem centro no ponto P = (0, 12) e raio R = 13. Esta circunferência tem dois pontos de interseção com o eixo 0x (reta y = 0). A distância entre estes dois pontos é

a) 8

b) 6

c) 9

d) 7

e) 10

8) Considerando as cônicas: $x^2 + y^2 - 16 = 0$ e $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$, obtenha a solução para a intersecção das mesmas.

a) (1;2) e (3;4).

b) (-1;2) e (3;-4).

c) (1;1) e (3;3).

d) (2;1) e (4;3).

e) S = ∅.

9) Considerando a elipse: $[(x^2)/9] + [(y^2)/16] = 1$, obtenha a equação da reta que passa pelo ponto médio entre os focos e tenha coeficiente angular igual a 2.

a) Y = 2X.

b) Y = 2X + 1.

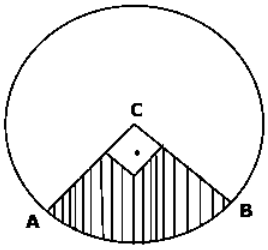
c) Y = 2X + 2.

d) Y = 2X + 3.

e) Y = 2X + 4.

10) (EsPCEx 2016) Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor

circular ao se juntar os raios CA e CB. O volume desse cone, em cm3, é igual a



desenho ilustrativo-fora de escala

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

b) $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

c) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

d) $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

e) $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

11) O conjunto de todos os pontos do plano que estão 2 vezes mais distantes da origem do que do ponto P(0,–6) constitui

a) uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas.

b) uma parábola com vértice no ponto V(0,–4).

c) elipse com um vértice no ponto V(0,–4)

d) uma circunferência de raio 2.

e) uma circunferência de raio 4.

12) A equação $ax^2 + by^2 = c$ pode descrever curvas diferentes, dependendo dos valores assumidos pelos parâmetros a, b e c. A opção que relaciona corretamente o tipo de curva descrita com os parâmetros da equação dada é:

a) hipérbole, se a > 0, abc < 0, c < 0 e a ≠ b.

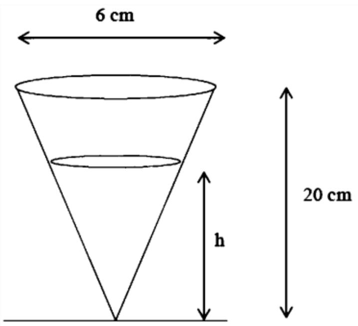
b) elipse, se a > 0, ab > 0, c > 0 e a ≠ b.

c) circunferência, se a > 0, bc > 0, c > 0 e a ≠ b.

d) parábola, se a > 0, ab = 0 e c > 0.

e) par de retas, se ab = 0, b > 0 e c < 0.

13) Conforme a figura abaixo, um copo de papelão tem o formato de um cone de 20cm de altura e 6cm de diâmetro da base.



Querendo encher esse copo com suco numa quantidade igual a $\frac{3}{4}$ de sua capacidade total, a altura **h** atingida pelo suco deverá ser de:

a) $10\sqrt[3]{2}cm$

b) 15 cm.

c) $12\sqrt[3]{3}cm$

d) $10\sqrt[3]{6}cm$

14) Quais os pontos de interseção entre a elipse $\frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ e a parábola $y = x^2$?

a) (2, -2) e (2, 2)

b) (-1, -1,) e (1, 1)

c) (1,-1) e (-1, 1)

d) (1,1) e (-1,1)

e) (3, 1) e (-3, 1)

15) A área do triangulo cujos vértices são A(8,3), B(4,7) e C(2,1) é:

a) 15.

b) 13.

c) 14.

d) 16.

16) (EEAR 2019) Para que os pontos A(x,3), B(–2x,0) e C(1,1) sejam colineares, é necessário que x seja

a) –2

b) –1

c) 2

d) 3

17) Os valores de a de modo que os pontos A(5a - 6,2), B(a2,8) e C(4,12) sejam colineares, são:

a) a = 0 ou a = 2.

b) a = 3 ou a = 4.

c) a.a = 5 ou a = 7.

d) a = 4 ou a = 9.

18) **Equação de uma curva**

Dizemos que uma equação nas variáveis x e y é a equação de uma curva λ se, e somente se:

1. As coordenadas de todos os pontos de λ satisfazem a equação.

2. Todo par (x; y) solução da equação representa um ponto da curva λ.

Disponível em:. Acesso em: 22 nov. 2016 (adaptado).

Nesse contexto, dadas as afirmativas,

I. Se A, B e C são números reais não nulos, então a equação Ax + By + C = 0 é a equação de uma reta.

II. Se A é um número real não nulo, então a equação $x^2 + y^2 - A = 0$ é a equação de uma circunferência.

III. Se A e B são números reais maiores que zero, então a equação $Ax^2 - By^2 = 0$ é a equação de um par de retas.

verifica-se que está(ão) correta(s)

a) I, II e III.

b) II e III, apenas.

c) I e III, apenas.

d) II, apenas.

e) I, apenas.

19) Considere os pontos P (a+3b, a-2) e Q (1+a, 3b). Se P e Q representam o mesmo ponto do plano, então:

a) a é um número par.

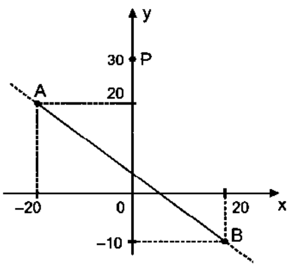
b) a é um número negativo.

c) a + b não é um número inteiro.

d) b é um número ímpar.

e) b = 3.

20) figura abaixo ilustra as localizações de um Posto de Saúde (P) e de um trecho retilíneo de uma rodovia (AB) em um plano cartesiano ortogonal, na escala 1:200.



Pretende-se construir uma estrada ligando o Posto à rodovia, de modo que a distância entre eles seja a menor possível. Se a unidade de medida real é o metro, a distância entre o Posto e a rodovia deverá ser igual a:

a) 600 m

b) 800 m

c) 2 km

d) 4 km

21) As retas (r) 3x – 2y + 8 = 0 e (s) 2x + 7y – 3 = 0 se interceptam num ponto P. A equação da reta perpendicular a s pelo ponto P é:

a) 7x + 2y – 16 = 0

b) 3x – 2y + 6 = 0

c) 3x + 2y – 16 = 0

d) 2x + 3y – 6 = 0

e) 7x – 2y + 16 = 0

22) Sabendo que o ponto B = (3,b) é equidistante dos pontos A = (6,0) e C = (0,6), então b vale:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

23) No plano cartesiano, a área do quadrado inscrito na circunferência de equação x2 + y2 - 6x - 8y + 20 = 0 é:

a) 17,5

b) 15,0

c) 12,5

d) 20,0

e) 10,0

24) No plano cartesiano, considere o ponto P do primeiro quadrante que pertence à reta de equação 3x + 2y = 12.

Considere também o retângulo OAPB em que O é a origem e A e B são as projeções ortogonais de P nos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente.

A área máxima do retângulo OAPB é:

a) 7

b) 5,5

c) 6

d) 5

e) 6,5

25) Qual é a medida da área e do perímetro do losango cujos vértices são A(2,3); B(1,0); C(0,3) e D(1,6)?

Utilize: $\sqrt{10} = 3{,}2$

a) Área = 6 e perímetro = 12,8

b) Área = 6 e perímetro = 10,4

c) Área = 12 e perímetro = 22,3

d) Área = 12 e perímetro = 25,9

e) Área = 18 e perímetro = 27,1

26) Seja A o vértice da parábola de equação $y = x^2 - 4x + 6$. A reta que passa pela origem O do plano cartesiano e pelo ponto A intercepta a parábola também num ponto B. Pode-se afirmar que:

a) OA = AB

b) OA = 2 · AB

c) AB = 2 · OA

d) AB = 3 · OA

e) OA = 3 · AB

27) Considere a ∈ IR, com a > 1. Se M(1,3) é o ponto médio do segmento de reta de extremidades A(a,4) e B(−1,2), então o valor de a é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

28) Os pontos A(3, 5), B(1, –1) e C(x, –16) pertencem a uma mesma reta se x for igual a

a) – 5

b) – 1

c) – 3

d) – 4

e) – 2

29) Em um plano cartesiano estão alocados os pontos A(4, 1), B(1, 3), C(0, 1) e D(2, 0).

Assinale a alternativa que contempla as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta G, que passa pelos pontos A e B e a reta H, que passa pelos pontos C e D.

a) (-2, -11)

b) (16, -7)

c) (0, 0)

d) (1, 3)

e) (0, 1)

30) Assinale a alternativa que indica o valor da incógnita “a”, de forma que a reta que passa pelos pontos P1(2, 3) e P2(5, a) forme um ângulo de 45 graus com o eixo X no plano cartesiano.

a) a = 0

b) a = 2,5

c) a = 3

d) a = 5

e) a = 6

31) Sabe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo está contido na reta t: y = 5x – 13, e um de seus catetos está contido na reta r: y = x – 1. tem-se também que o ponto P(m, 5) é o vértice onde está o ângulo reto e encontra-se sobre a reta r. Assim sendo, a área desse triângulo é:

a) 6

b) 12

c) 18

d) 24

e) 30

32) No plano cartesiano, considere a reta (r) de equação $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

A reta (s), paralela à reta (r) e passando pelo ponto P(1,5); intercepta o eixo das abscissas no ponto de abscissa:

a) 4,25

b) 4,00

c) 4,50

d) 4,75

e) 5,00

33) As retas (r) mx - y = 5 e (s) 4x - my = 8 do plano cartesiano serão concorrentes se, e somente se:

a) $m = 6$

b) $m = -14$

c) $m^2 \neq 4$

d) $m = 2$

e) $m \neq 8$

No plano cartesiano, as retas $x = a$ e $x = b$ ($a \neq b$ e $a, b \in R$) tangenciam a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$.

A soma $a + b$ é igual a

a) 5

b) 8

c) 7

d) 4

e) 6

Exercícios – Análise combinatória

1) O TDAH (Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade) é um dos transtornos neuropsiquiátricos mais conhecidos na infância. Quem nasce com o TDAH pode manifestá-lo durante toda sua vida. Considere que dois pacientes com TDHA cheguem a uma sala com sete lugares vagos. De quantas maneiras diferentes os dois podem ocupar esses lugares?

a) 84

b) 78

c) 49

d) 42

2) Uma família mudou-se da zona rural para uma cidade grande, onde os pais e seus 10 filhos deverão morar numa casa de três quartos. Os dez filhos deverão ocupar dois quartos, sendo 6 filhos num quarto e 4 filhos em outro quarto. De quantos modos os filhos poderão ser separados dessa forma?

a) 6! + 4!

b) 6!4!

c) $\frac{10!}{6!4!}$

d) $\frac{10!}{6!}$

3) Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado o tesoureiro e o menos votado o secretário. Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

a) 120

b) 60

c) 40

d) 20

e) 10

4) O número de maneiras distintas de um grupo formado por dois meninos e por cinco meninas posicionar-se lado a lado para um "selfie" de tal maneira que cada menino tenha, à sua esquerda e à sua direita, pelo menos uma menina, é

a) 120

b) 240

c) 720

d) 960

e) 1440

5) Um grupo de formandos, para tirar uma foto para o convite de formatura, decidiu formar 3 fileiras: uma com 9 meninas sentadas no chão, na frente do grupo; outra com 9 meninas sentadas em um banco, logo atrás das primeiras; e outra com os 10 meninos em pé, ao fundo da foto. O número de maneiras diferentes que esses estudantes podem se arranjar para tirar essa foto é

a) 10! · 18!

b) 28!

c) 3 · 28!

d) 2 · 9! · 10!

e) 9! · 9! · 10!

6) Atente à seguinte disposição de números inteiros positivos:

1 2 3 4 5
6 7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20
21 . . . .
. . . . .

Ao dispormos os números inteiros positivos nessa forma, chamaremos de linha os números dispostos na horizontal. Por exemplo, a terceira linha é formada pelos números 11, 12, 13, 14 e 15. Nessa condição, a soma dos números que estão na linha que contém o número 374 é

a) 1840.

b) 1865.

c) 1885.

d) 1890.

7) No desenvolvimento de x(2x + 1)10 o coeficiente de x3 é

a) 480.

b) 320.

c) 260.

d) 180.

8) O valor do maior coeficiente do desenvolvimento $(x + 1)^{12}$ é igual a:

a) 345

b) 457

c) 579

d) 792

e) 929

9) O valor de $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \cdots + \binom{7}{7}$ é:

a) 121.

b) 125.

c) 128.

d) 127.

10) Obtenha o termo independente de x, no desenvolvimento do seguinte binômio de Newton: $[(Y – Y^{-1})(Y + Y^{-1})]^6$. Lembre-se de em que o termo independente é aquele que as variáveis não aparecem, ou seja, os expoentes das variáveis são iguais a zero.

a) -20.

b) +20.

c) -30.

d) +30.

e) -40.

11) Tomando os algarismos ímpares para formar números com quatro algarismos distintos, a quantidade de números divisíveis por 5 que se pode obter é

a) 12.

b) 14.

c) 22.

d) 24.

e) 26.

12) Marcos precisa de uma nova senha para o seu e-mail. O provedor exige que a senha possua letras e números. Assim, Marcos decidiu usar todas as letras do seu nome e todos os dígitos do seu ano de nascimento. Sabendo que Marcos nasceu em 1956 e que deixará os algarismos para o final da senha, quantas possibilidades de senha ele terá para escolher?

a) 17.240

b) 17.250

c) 17.260

d) 17.270

e) 17.280

13) Usando-se apenas os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem estritamente crescente da esquerda para a direita, podemos formar vários números de 3 algarismos. A quantidade desses números que são múltiplos de 15 é igual a:

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

14) Mariana e uma colega estavam brincando com problemas sobre paridades quando uma das colegas indagou se Mariana saberia dizer quantos números pares de quatro dígitos distintos poderiam ser formados usando os algarismos 0, 2, 4, 6, 7 e 8. Sabendo que Mariana respondeu corretamente, qual foi sua resposta?

a) 240

b) 300

c) 180

d) 252

e) 124

15) O prédio onde funciona uma clínica tem, além do piso térreo, mais quatro andares.

Sabendo-se que seis pessoas entram no térreo no elevador que, na subida, não para no primeiro andar, mas deverá parar em dois dos outros andares e que, em cada andar onde o elevador para, as pessoas saem em grupo de duas ou de quatro, é correto afirmar que o número máximo de formas distintas de essas pessoas deixarem o elevador é igual a

a) 50

b) 65

c) 70

d) 85

e) 90

16) Simplificando a expressão $\frac{78!+79!}{80!}$, temos

a) $\frac{1}{78}$

b) $\frac{1}{80}$

c) $\frac{1}{79}$

d) $\frac{1}{40}$

e) $\frac{1}{39}$

17) Seis estudantes, entre eles Bruna e Caio, entraram em um auditório para assistir a uma palestra e escolheram uma fileira onde havia 8 poltronas vazias, uma ao lado da outra. Sabendo que Bruna e Caio querem sentar-se um ao lado do outro, o número de maneiras distintas de esses seis estudantes sentarem-se nessa fileira é

a) 720

b) 1440

c) 5 040

d) 10 080

18) Sendo k > 0, o(s) valor(es) de k tal que $\frac{[k!-(k-1)!]}{(k-1)!}$ são:

a) 2.

b) 0 e 4.

c) 0 e 5.

d) nenhum.

e) qualquer número natural.

19) Simplificando $\frac{8!5!}{6!9!}$, obtemos:

a) $\frac{1}{54}$

b) $\frac{1}{34}$

c) $\frac{1}{18}$

d) $\frac{1}{53}$

20) Analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa que contém todas as corretas.

I. A distância entre as retas paralelas r: x – 3y + 6 = 0 e s: 2x – 6y + 7 = 0 é $\frac{\sqrt{10}}{4}$

II. Para que os pontos A (- 1,2), B (3,1) e C (7,k) são colineares, o valor de k é 2.

III. Numa confeitaria existem apenas quatro tipos diferentes de doces. Uma pessoa que deseja comprar cinco doces nessa confeitaria poderá fazê-lo de, exatamente, 1024 modos distintos.

IV. A soma de dois números irracionais pode resultar em um número racional.

V. A soma das coordenadas do baricentro do triângulo ABC em que M (-1,5), N (2,1) e P (5,6) são os pontos médios dos seus lados é 6.

a) IV - V

b) III - V

c) I - IV - V

d) I - II – III

21) (EsPCEx 2011) Se todos os anagramas da palavra ESPCEX forem colocados em ordem alfabética, a palavra ESPCEX ocupará, nessa ordenação, a posição

a) 144

b) 145

c) 206

d) 214

e) 215

22) Quantos anagramas possui a palavra CAPITALISMO?

a) 9041278

b) 9586482

c) 9979200

d) 9990020

23) Oito adultos e um bebê irão tirar uma foto de família. Os adultos se sentarão em oito cadeiras, um adulto por cadeira, que estão dispostas lado a lado e o bebê sentará no colo de um dos adultos. O número de maneiras distintas de dispor essas 9 pessoas para a foto é

a) $8 \cdot 8!$

b) $9!$

c) $9 \cdot 8^8$

d) 8^9

24) Considere a palavra “ENXAME”.

Quantos são os anagramas dessa palavra que começam com “XA”?

a) 12

b) 60

c) 120

d) 24

e) 96

25) Para registrar a comemoração das bodas de prata do Senhor Mauro e da Dona Lita, o fotógrafo que fazia a cobertura do evento sugeriu uma foto do casal com seus 5 filhos. Na organização dessa foto, todos os filhos devem ficar entre os pais.

De quantas maneiras distintas essa foto pode ser tirada?

a) 5.

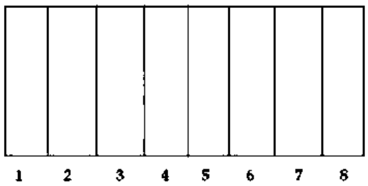
b) 10.

c) 60.

d) 120.

e) 240.

26) Um artista plástico gosta de arte abstrata, geralmente entendida como uma forma de arte que não representa objetos próprios da nossa realidade concreta exterior; em vez disso, usa as relações formais entre cores, linhas e superfícies para compor a realidade da obra, de uma maneira “não representacional”. Esse artista deseja colorir seu quadro, que possui oito faixas, conforme a figura a seguir, com três cores disponíveis: vermelho, azul e amarelo. A quantidade de maneiras como ele pode pintar esse quadro de modo que as faixas consecutivas numeradas não sejam da mesma cor é



a) 256.

b) 384.

c) 520.

d) 6561.

e) 8574.

27) Numa matéria de jornal, a sigla da Associação Brasileira de Vaquejada (ABVAQ) foi digitada errada, saindo impresso (ABQAV). O número máximo de maneiras diferentes de ordenar as letras da sigla ABVAQ, de modo que não represente a abreviação da Associação Brasileira de Vaquejada, é

a) 45.

b) 59.

c) 60.

d) 70.

28) Quantas são as possibilidades de se obter números, diferentes e com três algarismos distintos com: 2, 3,4,6,7 e 9?

a) 20.

b) 40.

c) 100.

d) 120.

e) 140.

29) (AFA 2019) No ano de 2017, 22 alunos da EPCAR foram premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Desses alunos, 14 ganharam medalhas, sendo 3 alunos do 3o esquadrão, 9 do 2o esquadrão e 2 do 1o esquadrão. Os demais receberam menção honrosa, sendo 2 alunos do 3o esquadrão, 4 do 2o esquadrão e 2 do 1o esquadrão.

Para homenagear os alunos premiados, fez-se uma fotografia para ser publicada pela Nascentv em uma rede social.

Admitindo-se que, na fotografia, os alunos que receberam menção honrosa ficaram agachados, sempre numa única ordem, sem alteração de posição entre eles, à frente de uma fila na qual se posicionaram os alunos medalhistas, de modo que, nesta fila:

• as duas extremidades foram ocupadas somente por alunos do 2o esquadrão que receberam medalha;

• os alunos do 1o esquadrão, que receberam medalha, ficaram um ao lado do outro; e

• os alunos do 3o esquadrão, que receberam medalha, ficaram, também, um ao lado do outro.

Marque a alternativa que contém o número de fotografias distintas possíveis que poderiam ter sido feitas.

a) (72)· 9!

b) (144)· 9!

c) (288)· 9!

d) (864)· 9!

30) Um anagrama é a transposição ou o rearranjo de letras de uma palavra ou frase, com o intuito de formar outras palavras ou frases com ou sem sentido. Um aluno ficou interessado em descobrir quantos são os anagramas da palavra UNCISAL que começam com vogal ou terminam com consoante. Fazendo os cálculos corretos, esse aluno obterá como resultado o número

a) 3 600.

b) 3 800.

c) 4 040.

d) 4 800.

e) 5 040.

Exercícios – Probabilidade

1) (EsPCEx 2019) Numa sala existem duas caixas com bolas amarelas e verdes. Na caixa 1, há 3 bolas amarelas e 7 bolas verdes. Na caixa 2, há 5 bolas amarelas e 5 bolas verdes. De forma aleatória, uma bola é extraída da caixa 1, sem que se saiba a sua cor, e é colocada na caixa 2.

Após esse procedimento, a probabilidade de extrair uma bola amarela da caixa 2 é igual a

a) 49/110.

b) 51/110.

c) 53/110.

d) 57/110.

e) 61/110.

2) (EsPCEx 2011) Pesquisas revelaram que, numa certa região, 4% dos homens e 10% das mulheres são diabéticos. Considere um grupo formado por 300 homens e 700 mulheres dessa região. Tomando-se ao acaso uma pessoa desse grupo, a probabilidade de que essa pessoa seja diabética é

a) 4%

b) 5%

c) 5,4%

d) 7,2%

e) 8,2%

3) (EsPCEx 2017) Em uma população de homens e mulheres, 60% são mulheres, sendo 10% delas vegetarianas. Sabe-se, ainda, que 5% dos homens dessa população também são vegetarianos. Dessa forma, selecionando-se uma pessoa dessa população ao acaso e verificando-se que ela é vegetariana, qual é a probabilidade de que seja mulher?

a) 50%.

b) 70%.

c) 75%.

d) 80%.

e) 85%.

4) (EEAR 2018) Em um lote com 250 peças, foi constatado que existem exatamente seis defeituosas. Retirando-se, ao acaso, uma peça desse lote, a probabilidade de que ela seja perfeita é de _____%.

a) 82,3

b) 85,5

c) 97,6

d) 98,2

5) Em uma das salas de aula do IFAL com 50 estudantes, sendo 28 do sexo masculino e 22 do sexo feminino, foi sorteado, aleatoriamente, um estudante para ser o representante da turma. Qual a probabilidade de o estudante sorteado ser do sexo feminino?

a) 2%.

b) 22%.

c) 28%.

d) 44%.

e) 56%.

6) Uma clínica contém três grupos, A, B e C, de pacientes com depressão, ansiedade e TOC (Transtorno Obsessivo Compulsivo). O grupo A contém 3 pacientes com depressão, 4 pacientes com ansiedade e 2 pacientes com TOC. O grupo B contém 5 pacientes com depressão, 2 pacientes com ansiedade e um paciente com TOC. O grupo C contém 2 pacientes com depressão, 3 pacientes com ansiedade e 4 pacientes com TOC. Um paciente de cada grupo é sorteado para experimentar um novo método de tratamento. Qual é a probabilidade de os três pacientes terem, respectivamente, depressão, ansiedade e TOC?

a) 1/27

b) 1/30

c) 1/54

d) 1/32

7) Durante uma epidemia de gripe, das 800 pessoas atendidas em um posto de saúde, 100 estavam de fato infectadas com a doença. Se admitirmos a mesma frequência da doença na população, qual a probabilidade percentual de o próximo paciente atendido no posto ter contraído a doença?

a) 10,5%

b) 11%

c) 12%

d) 12,5%

e) 13%

8) Seis pessoas tentaram adivinhar a quantidade de bolinhas em um recipiente transparente por inspeção visual. Os seis palpites foram 52, 59, 62, 65, 49 e 42 bolinhas. Sabe-se que três das pessoas superestimaram o número de bolinhas, cometendo erros de 6, 12 e 9 bolinhas; e que outras três pessoas subestimaram o número de bolinhas, cometendo erros de 1, 4 e 11 bolinhas. Nas condições descritas, o total de bolinhas no recipiente era igual a

a) 51.

b) 52.

c) 53.

d) 54.

e) 55.

9) Em uma população humana, a probabilidade de um indivíduo ser cego é de 0,9%, de ser mudo é de 0,5% e de ser cego ou mudo é de 0,95%. Se um indivíduo desta população é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de ele ser cego e mudo?

a) 0,45%

b) 0,40%

c) 0,35%

d) 0,30%

e) 0,25%

10) Um projeto de preservação ambiental está sendo analisado pela Secretaria de Meio Ambiente e, para ser implantado, deve ser aprovado pelos setores técnico e financeiro dessa secretaria. Ecologistas estimam em $\frac{3}{4}$ a probabilidade de o projeto ser aprovado pelo setor técnico.

Caso isso aconteça, a probabilidade de ser aprovado pelo setor financeiro é $\frac{5}{6}$. Nessas condições, a probabilidade de que o projeto seja implantado é de

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{7}{12}$

e) $\frac{1}{12}$

11) O resultado de uma pesquisa realizada por um orgão do governo do estado do Ceará sobre o perfil dos fumantes e publicado pela imprensa cearense mostrou que, num grupo de 1000 pessoas, 17% fumam e, dentre os fumantes, 44% são mulheres. Se, nesse grupo de 1000 pessoas, uma é escolhida ao acaso, então a probabilidade de ela ser fumante e mulher é, aproximadamente,

a) 0,044

b) 0,054

c) 0,075

d) 0,085

e) 0,095

12) Os Jogos Olímpicos de 2016, que serão realizados no Brasil, contarão com a participação de 10.500 atletas. Considerando que desses atletas 8.400 são do sexo masculino, qual a probabilidade de que, em se escolhendo aleatoriamente um atleta, este seja do sexo feminino?

a) 80 %.

b) 50 %.

c) 40 %.

d) 20 %.

e) 10 %.

13) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) 1/100

b) 19/100

c) 20/100

d) 21/100

e) 80/100

14) Uma loteria consta de 20 bilhetes, numerados de 1 a 20, que são vendidos aos apostadores.

O sorteio é feito da seguinte forma: 20 bolinhas são numeradas de 1 a 20 e duas bolinhas são sorteadas sucessivamente e sem reposição. O portador do primeiro número sorteado ganha um prêmio de R$5 000,00 e o do segundo, de R$3 000,00.

Se um apostador comprar bilhetes com os números 5, 7, 12 e 18, a probabilidade dele ganhar ao menos um prêmio é um número:

a) maior que 0,5.

b) menor que 0,2.

c) entre 0,3 e 0,4.

d) entre 0,4 e 0,5.

e) entre 0,2 e 0,3.

15) Uma prova contém 60 testes de múltipla escolha, cada um com 4 alternativas das quais apenas uma é correta. Catarina tem 40% de chances de resolver corretamente cada teste. Quando não sabe resolver um teste, ela assinala aleatoriamente uma das 4 alternativas.

A probabilidade de que Catarina sabia resolver corretamente um teste da prova que ela acertou é igual a:

a) 8/13

b) 9/13

c) 8/11

d) 9/11

e) 8/9

Exercícios – Matriz e Determinantes

1) (EsPCEx 2019) Duas cidades A e B têm suas áreas urbanas divididas em regiões Comercial, Residencial e Industrial. A tabela 1 fornece as áreas dessas regiões em hectares para as duas cidades.

A tabela 2, por sua vez, fornece os valores anuais médios de arrecadação, em milhões de reais por hectare, referentes ao Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), ao fornecimento de energia elétrica e ao fornecimento de água.

Tabela 1

	Área Comercial	Área Residencial	Distrito Industrial
Cidade A	10	25	42
Cidade B	8	12	18

Tabela 2

	Área Comercial	Área Residencial	Distrito Industrial
IPTU	12	6	5
Energia Elétrica	25	12	60
Água	15	10	50

Considere as matrizes T1 e T2, associadas respectivamente às tabelas 1 e 2.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 10 & 25 & 42 \\ 8 & 12 & 18 \end{bmatrix} \; T_2 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 5 \\ 25 & 12 & 60 \\ 15 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

Seja a_{ij} os elementos da matriz resultante do produto $T_1 \cdot T_2^t$.

Nessas condições, a informação contida no termo de ordem a_{22} desse produto de matrizes é o valor total arrecadado com

a) fornecimento de energia elétrica nas áreas residenciais.

b) fornecimento da água da cidade A.

c) fornecimento da água nas áreas residenciais.

d) IPTU nos distritos industriais.

e) fornecimento de energia elétrica na cidade B.

2) (EsPCEx 2016) Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se a e b são números reais não nulos e det(M)=0, então o valor de 14 a^2 - 21 b^2 é igual a

a) 15

b) 28

c) 35

d) 49

e) 70

3) O determinante $\begin{bmatrix} 1 & 72 & 81 \\ 0 & 2 & 200 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 6.

b) 72.

c) 81.

d) 161.

4) Num jogo, foram sorteados 6 números para compor uma matriz M = (m_{ij}) de ordem 2 X 3. Após o sorteio, notou-se que esses números obedeceram à regra m_{ij} = 4i – j. Assim, a matriz M é igual a _________.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

5) Um lojista está fazendo um orçamento sobre o preço de determinada camiseta. A matriz A representa o preço, em reais, dessa camiseta de acordo com o tamanho: pequeno (P), médio (M) ou grande (G), em três lojas diferentes, e a matriz B representa a quantidade de camisetas, por tamanho, que o lojista pretende comprar.

$$\begin{array}{c} \text{P} \quad \text{M} \quad \text{G} \longleftarrow \text{Tamanhos} \\ A = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 10 & 16 & 23 \\ 13 & 15 & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Loja 1} \\ \longrightarrow \text{Loja 2} \\ \longrightarrow \text{Loja 3} \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{P} \\ \text{M} \\ \text{G} \end{array}$$

A diferença entre o maior e o menor orçamento é

a) R$ 80,00.

b) R$ 150,00.

c) R$ 230,00.

d) R$ 290,00.

e) R$ 320,00.

6) A soma dos elementos da 3.ª linha da matriz A = $(a_{ij})_{3x3}$ definida por a_{ij} $\begin{cases} i + j, se\ i = j \\ i - j, se - \neq j \end{cases}$ é igual a:

a) 9.

b) 8.

c) 7.

d) 5.

e) 4.

7) Sabe-se que a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 16 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, então x vale:

a) 4

b) -4

c) ± 4

d) 16

e) -16

8) Os elementos a, b, c, d da matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ são distintos entre si e escolhidos aleatoriamente no conjunto {1, 3, 5, 7}.

Considerando-se, para cada escolha destes elementos, d o determinante de M, o número de valores distintos que d pode assumir é

a) 6.

b) 8.

c) 16.

d) 24.

9) (ITA 2018) Sejam A e B matrizes quadradas n×n tais que A+B = A·B e In a matriz identidade n × n. Das afirmações:

I. In − B é inversível

II. In − A é inversível;

III. A · B = B · A.

é (são) verdadeira(s)

a) Somente I.

b) Somente II.

c) Somente III.

d) Somente I e II.

e) Todas.

10) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação A2 = aA + bI, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) -2.

b) -1.

c) 1.

d) 2.

11) Obtenha o valor do determinante a seguir:

$$\begin{vmatrix} +2 & +4 & +5 & +3 \\ +1 & -1 & +3 & +2 \\ 0 & +2 & 0 & 0 \\ -3 & +2 & +1 & +4 \end{vmatrix}$$

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

12) Bianca está estudando para o vestibular e, em certo problema, achou o determinante de uma matriz X, de quinta ordem, com o valor igual a 7. Seu professor multiplicou todos os elementos da matriz X por 10. A nova matriz obtida tem com determinante o valor

a) 7.

b) 700.

c) 7000.

d) 70000.

e) 700000.

13) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} senx & cosx \\ -3cosx & 3senx \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 3senx² + 3cosx²

b) 9

c) $3sen^2x + 3cos^2x$

d) 3

14) Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} sen15^0 & \sqrt{2} \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ Encontre det(3M).

a) $3\sqrt{6}$

b) 6

c) $9\sqrt{6}$

d) 18

e) 9

15) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 com det(A)=3 e se k é um número real tal que det(kA)=192, então o valor de k é:

a) 4

b) 8

c) 32

d) 64

e) 96

Exercícios – Sistemas lineares

1) (UESP) Se o terno (x0, y0, z0) é a solução do sistema abaixo, então 3×0 + 5y0 + 4z0 é igual a:

$$\begin{cases} 3x + z = -5 \\ x + y + z = -2 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

a) -8

b) -7

c) -6

d) -5

e) -4

2) O sistema abaixo:

$$\begin{cases} 5x + 3y - 11z = 13 \\ 4x - 5y + 4z = 18 \\ 9x - 2y - 7z = 25 \end{cases}$$

a) só apresenta a solução trivial;

b) é possível e determinado não tendo solução trivial;

c) é possível e indeterminado;

d) é impossível;

e) admite a solução (1; 2; 1)

3) O sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 9 \end{cases}$$

a) é impossível;

b) é possível e determinado;

c) é possível e indeterminado;

d) admite apenas a solução (1; 2; 3);

e) admite a solução (2; 0; 0)

4) 07. (UEL) O sistema abaixo, de incógnitas x e y, é:

$$\begin{cases} 6x + ky = 9 \\ 2x - 7y = 1 \end{cases}$$

a) impossível, para todo k real diferente de -21;

b) possível e indeterminado, para todo k real diferente de -63;

c) possível e determinado, para todo k real diferente de -21;

d) possível e indeterminado, para todo k real diferente de -3;

e) possível e determinado, para todo k real diferente de -1 e -63.

5) Considere o seguinte sistema de equações de incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma única solução para certo número real k que é um:

a) quadrado perfeito

b) número primo

c) número racional não inteiro

d) número negativo

e) múltiplo de 5

6) Se tivermos o sistema abaixo, então x + y + z + t é igual a:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + z + t = 5 \\ y + z + t = 7 \\ x + y + t = 4 \end{cases}$$

a) -1

b) 7

c) 5

d) 4

e) 5/9

7) (EsPCEx 2015) Para que o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = b \end{cases}$$

em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de a+b é igual a

a) 10.

b) 11.

c) 12.

d) 13.

e) 14.

8) (EsPCEx 2016) Considere o sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - 3y + kz = 0 \\ 3x + ky + z = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$, onde k é um número real

O único valor que torna o sistema, acima, possível e indeterminado, pertence ao intervalo

a) (−4,−2]

b) (−2,1]

c) (1,2]

d) (2,4]

e) (4,6]

9) O valor de x no sistema linear a seguir é:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 19 \\ x + 2y + z = 12 \\ 3x - y + z = 7 \end{cases}$$

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

10) O conjunto solução do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ -3x + 6y + 9z = -15 \\ 5x - 10y - 15z = 17 \end{cases}$$

a) É vazio.

b) Tem exatamente 1 elemento.

c) Tem exatamente 2 elementos.

d) Tem exatamente 4 elementos.

e) É infinito.

Exercícios – PA e PG

1) (EsPCEx 2001) Uma progressão aritmética tem razão *r* = -10, sabendo que seu 100º (centésimo) termo é zero, pode-se afirmar que seu 14º (décimo quarto) termo vale:

a) 120

b) 990

c) 860

d) 130

e) 870

2) (EsPCEx 2002) Os números a, b e c determinam, nessa ordem, uma progressão aritmética (PA) de razão r (r ≠ 0). Na ordem b, a, c determinam uma progressão geométrica (PG).

Então a razão da PG é

a) -3

b) -2

c) -1

d) 1

e) 2

3) Assinale a única alternativa correta, para a PA de quatro termos, em que o 1º termo é a_1 = -6 e a razão é r = 8.

a) PA (-8, -6, -2, 2)

b) PA (-6, -2, 10, -18)

c) PA (-18, -10, -2, -6)

d) PA (-6, 2, 10, 18)

e) PA (-4, 2, 10, 16)

4) No dia 7 de abril (Dia Mundial da Saúde) de 2017 – a Organização Mundial da Saúde (OMS) deu início a uma campanha sobre depressão com o lema "Vamos Conversar". A iniciativa reforça que existem formas de prevenir a depressão e também de tratá-la. Suponha que duas mil pessoas aderiram no primeiro dia, quatro mil, no segundo dia; seis mil, no terceiro dia e assim sucessivamente. Seguindo essa razão, quantas pessoas, no total, serão atingidas na campanha do primeiro ao vigésimo dia?

a) 210.000

b) 328.000

c) 420.000

d) 450.000

5) A soma dos 101 primeiros números ímpares positivos é:

a) 7801.

b) 8303.

c) 10201.

d) 12505.

6) Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

• primeiro dia -corrida de 6 km;

• dias subsequentes -acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

a) 414

b) 438

c) 456

d) 484

7) Ao saber que a esposa estava grávida, um homem passa a armazenar latas de leite no quarto do bebê, aguardando sua chegada, porém, para ficar bem decorado, ele as junta formando uma pirâmide, onde na fila superior tem uma lata, na segunda fila duas latas, na terceira três e assim por diante até a fila da base. Se ele consegue formar exatamente 10 filas sem sobras de latas, quantas latas ele conseguiu juntar?

a) 10.

b) 25.

c) 55.

d) 60.

e) 75.

8) (EsPCEx 2010) Um menino, de posse de uma porção de grãos de arroz, brincando com um tabuleiro de xadrez, colocou um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro grãos na terceira casa, oito grãos na quarta casa e continuou procedendo desta forma até que os grãos acabaram, em algum momento, enquanto ele preenchia a décima casa. A partir dessas informações, podemos afirmar que a quantidade mínima de grãos de arroz que o menino utilizou na brincadeira é

a) 480

b) 511

c) 512

d) 1023

e) 1024

9) (EsPCEx 2001) A seqüência de números reais a, b, c, d forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 110, a seqüência de números reais a, b, e, f forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2.

A soma d + f é igual a:

a) 142

b) 132

c) 120

d) 102

e) 96

10) A PG é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo “a partir do segundo” pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão. Assinale a única alternativa correta, após determinar a razão de (2, 8,...)

a) q= 8

b) q= -2

c) q= 10

d) q= 2

e) q= 4

11) (EEAR 2018) O 6º termo da sequência 2, 8, 32, 128, ... é um número cuja soma dos algarismos é

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

12) (EEAR 1018) Seja a PG (a1, a2, a3, a4, ...) de razão q = 2. Se a1 + a5 = 272, o valor de a1 é

a) 8

b) 6

c) 18

d) 16

13) Sabendo que o primeiro termo de uma Progressão Geométrica é a1 = 2 e a razão q = 3, determine a soma dos 5 primeiros termos dessa progressão:

a) 80.

b) 141.

c) 160.

d) 242.

e) 322.

14) Um usuário do Facebook, embalado pela polêmica envolvendo a vaquejada, expõe sua opinião sobre o tema nessa rede social. Acompanhando os compartilhamentos de sua postagem, ele percebe que a quantidade de compartilhamentos a cada hora forma uma progressão geométrica de razão $\boldsymbol{q} = \mathbf{3}$ e primeiro termo $\boldsymbol{a}\mathbf{1} = \mathbf{3}$. Considerando essas informações, a quantidade de compartilhamentos, na quinta hora, foi de

a) 81.

b) 243.

c)729.

d) 2.187.

15) Um casal de coelhos, considerado a primeira geração de uma família (a_1 = 2), se reproduziu rapidamente. Na segunda geração, a família aumentou para 6 coelhos (a_2 = 6); na terceira, para 12 (a_3 = 12); na quarta, para 20 (a_4 = 20); e assim sucessivamente.

Nessas condições, se não houver mortes nessa família, haverá 30 e 42 coelhos na quinta e na sexta gerações respectivamente, porque a sequência

a) a_1, a_2, a_3, a_4, ... forma uma progressão aritmética.

b) a_1, a_2, a_3, a_4, ... forma uma progressão geométrica.

c) $a_2 – a_1$, $a_3 – a_2$, $a_4 – a_3$, $a_4 – a_3$, ... forma uma progressão geométrica de razão 2.

d) $a_2 – a_1$, $a_3 – a_2$, $a_4 – a_3$, $a_4 – a_3$, ... forma uma progressão aritmética de razão 2.

e) $a_2 – a_1$, $a_3 – a_2$, $a_4 – a_3$, $a_4 – a_3$, ... forma uma progressão aritmética de razão 4.

Exercícios – Polinômios

1) (EsPCEx 2016) As três raízes da equação $x^3–6x^2+21x–26=0$ são m,n e p. Sabendo que m e n são complexas e que p é uma raiz racional, o valor de m2+n2 é igual a

a) – 18

b) – 10

c) 0

d) 4

e) 8

2) (EsPCEx 2015) Considere o polinômio $p(x)=x^6 −2x^5+2x^4 −4x^3+x^2 −2x$. Sobre as raízes de p(x)=0, podemos afirmar que:

a) Quatro raízes são reais distintas.

b) Quatro raízes são reais, sendo duas iguais.

c) Apenas uma raiz é real.

d) Apenas duas raízes são reais e iguais.

e) Apenas duas raízes são reais distintas.

3) O resto da divisão do polinômio $x^3 + 3x^2 – 5x + 1$ por (x-2) é:

a) 1

b) 2

c) 10

d) 11

e) 12

4) Considere o polinômio: $P(x) = 4x^2 + 3x^3 - 2x^2 + x + k$ Sabendo que P(1) = 2, então o valor de P(3) é:

a) 386.

b) 405.

c) 324.

d) 81.

e) 368.

5) Se um polinômio f for divisível separadamente por (x – a) e (x – b) com a ≠ b, então f é divisível pelo produto entre (x–a) e (x–b). Sabendo-se que 5 e -2 são os restos da divisão de um polinômio f por (x – 1) e (x + 3), respectivamente, então o resto da divisão desse polinômio pelo produto dado por (x – 1) e (x + 3) é igual a:

a) 13x/4 + 7/4

b) 7x/4 – 13/4

c) 7x/4 + 13/4

d) -13x/4 – 13/4

e) -13x/4 – 7/4

6) Em relação à função f(x) = x5 + $4x^3$ + 2x + 3 pode-se afirmar:

a) não tem raízes reais.

b) tem cinco raízes reais.

c) tem três raízes reais e duas complexas.

d) tem uma raiz real e quatro complexas.

e) tem duas raízes reais e três complexas.

7) Assinalar a alternativa que apresenta o resultado do polinômio abaixo:

2x(5x + 7y) + 9x(2y)

a) 10x + 14xy + 18yx

b) $6x^2$ + 21xy

c) $10x^2$ + 32xy

d) $10x^2$ + 9y

e) 22x + 9y

8) Se $P(x) = x^n – x^{n-1} + x^{n-2} – \dots + x^2 – x + 1$ e P(-1) = 19, então n é igual a:

a) 10

b) 12s

c) 14

d) 16

e) 18

9) Se P(x) é um polinômio tal que $2P(x) + x^2 P(x – 1) \equiv x^3 + 2x + 2$, então P(1) é igual a:

a) 0

b) -1

c) 1

d) -2

e) 2

10) As soluções da equação Q(x) = 0, em que Q(x) é o quociente do polinômio $x^4 – 10x^3 + 24x^2 + 10x – 24$ por $x^2 – 6x + 5$, são:

a) -1 e 5

b) -1 e -5

c) 1 e -5

d) 1 e 5

e) 0 e 1

11) (UESP) Se o polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 – 1$ é divisível por $x^2 + x – 1$, então m é igual a:

a) -3

b) -2

c) -1

d) 1

e) 2

12) Dividindo-se o polinômio $x^4 + 2x^3 – 2x^2 – 4x – 21$ por x + 3, obtêm-se:

a) x3 – 2×2 + x -12 com resto nulo;

b) x3 – 2×2 + 3 com resto 16;

c) x3 – x2 -13x + 35 e resto 84;

d) x3 – x2 – 3x + 1com resto 2;

e) x3 – x2 + x -7 e resto nulo;

13) Se o resto da divisão do polinômio $p = x^4 – 4x^3 – kx – 75$ por (x – 5) é 10, o valor de k é:

a) -5

b) -4

c) 5

d) 6

e) 8

14) Para que o polinômio $2x^4 – x^3 + mx^2 – nx + 2$ seja divisível por $x^2 – x – 2$, devemos ter:

a) m = 1 e n = 6

b) m = -6 e n = -1

c) m = 6 e n = 1

d) m = -6 e n = 1

e) m = 6 e n = -1

15) Sabe-se que o polinômio $f = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ é divisível por $x^2 - 1$. Um outro divisor de f é o polinômio

a) $x^2 - 4$

b) $x^2 + 1$

c) $(x + 1)^2$

d) $(x - 2)^3$

e) $(x - 1)^2$

16) A soma de dois polinômios P(x) + Q(x) é um polinômio de grau 6, e a diferença P(x)-Q(x) é um polinômio de grau 4. É válido afirmar-se que:

a) a diferença Q(x) - P(x) tem grau 6

b) P(x) e Q(x) têm o mesmo grau

c) P(x) tem grau 5

d) Q(x) tem grau 4

e) P(x) tem grau 4

17) O resto da divisão do polinômio $x^5 – 3x^2 + 1$ pelo polinômio $x^2 - 1$ é:

a) x – 1

b) x + 2

c) 2x – 1

d) x + 1

e) x – 2

18) Se (x - 2) é um fator do polinômio $x^3 + kx^2 + 12x – 8$, então, o valor de k é igual a:

a) –3.

b) 2.

c) 3.

d) 6.

e) –6.

19) Se uma das raízes do polinômio $P(x) = x^4 – 8x^2 + ax + b$ é 2 e P(1) = 9, então o valor de a^5 é

a) –64. b) –28. c) 16. d) 24.

20) O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x + 1$ pelo binômio x + 3 são, respectivamente:

a) x - 2 e 5

b) x + 2 e 6

c) x - 3 e 2

d) x + 1 e 0

e) x - 1 e –2

Gabarito

Exercícios – Expressões numéricas

Gabarito: 1-C, 2-C, 3-B, 4-A, 5-E, 6-B, 7-B, 8-C, 9-E, 10-C.

Radiciação

Gabarito: 1-C, 2-E, 3-E, 4-B, 5-B, 6-A, 7-C, 8-B.

Produtos notáveis

Gabarito: 1-A, 2-B, 3-E, 4-D, 5-B, 6-A, 7-A, 8-C, 9-C, 10-C.

Teoria dos conjuntos e conjuntos numéricos

Gabarito: 1-E, 2-C, 3-B, 4-C, 5-B.

Conjunto dos números naturais e inteiros

Gabarito: 1-C, 2-A, 3-B, 4-E, 5-C, 6-B, 7-B, 8-E.

MMC E MDC

Gabarito: 1-A, 2-D, 3-B, 4-E, 5-A, 6-D, 7-B, 8-D, 9-A, 10-D.

Regra de três simples e composta

Gabarito: 1-E, 2-A, 3-C, 4-D, 5-E, 6-A, 7-C, 8-C, 9-B, 10-A, 11-A, 12-A.

Conjunto dos números racionais

Gabarito: 1-A, 2-C, 3-D, 4-B, 5-D, 6-A, 7-D, 8-A, 9-C, 10-A, 11-A, 12-C.

Conjuntos dos números irracionais e reais

Gabarito: 1-D, 2-C, 3-C, 4-B, 5-E, 6-E, 7-C, 8-D, 9-D, 10-D.

Números complexos

Gabarito: 1-A, 2-B, 3-B, 4-B, 5-B, 6-C, 7-A, 8-E, 9-A, 10-B, 11-C, 12-D, 13-B, 14-E, 15-D, 16-D, 17-D, 18-C.

Funções

Gabarito: 1-B, 2-A, 3-A, 4-A, 5-A, 6-E, 7-C, 8-E, 9-D, 10-C, 11-A, 12-C, 13-B, 14-B, 15-B, 16-D, 17-C, 18-B, 19-C, 20-A.

Função quadrática

Gabarito: 1-A, 2-C, 3-B, 4-B, 5-B, 6-A, 7-C, 8-C, 9-C, 10-B.

Inequação do 2 grau

Gabarito: 1-D, 2-B, 3-B, 4-C, 5-A, 6-A, 7-E, 8-C, 9-A, 10-D.

Equação e função modular

Gabarito: 1-D, 2-B, 3-A, 4-B, 5-C, 6-E, 7-A, 8-C, 9-C, 10-C.

Inequação modular

Gabarito: 1-C, 2-A, 3-D, 4-C, 5-C, 6-E.

Equação e função exponencial

Gabarito: 1-A, 2-D, 3-B, 4-A, 5-C, 6-A, 7-A, 8-E, 9-C, 10-C.

Inequação exponencial

Gabarito: 1-D, 2-A, 3-A, 4-B, 5-D, 6-D.

Equação, função e inequação logarítmica

Gabarito: 1-D, 2-A, 3-B, 4-D, 5-D, 6-C, 7-A, 8-C, 9-A, 10-E, 11-D, 12-C, 13-C, 14-E.

Geometria plana

Gabarito: 1-B, 2-A, 3-D, 4-B, 5-D, 6-D, 7-D, 8-A, 9-A, 10-C, 11-B, 12-E, 13-C, 14-B, 15-D, 16-A, 17-A, 18-C, 19-D, 20-D, 21-A, 22-E, 23-A, 24-A, 25-C, 26-A, 27-C, 28-E, 29-C, 30-E, 31-C, 32-A, 33-B, 34-C, 35-B, 36-B, 37-D, 38-E, 39-A, 40-B, 41-B, 42-C, 43-C, 44-C, 45-A, 46-E, 47-D, 48-D, 49-C, 50-B, 51-D, 52-C, 53-C, 54-C, 55-C, 56-D, 57-B, 58-D, 59-B, 60-C, 61-D, 62-A, 63-A, 64-A, 65-C, 66-D, 67-C, 68-D, 69-A, 70-D, 71-A, 72-C, 73-A, 74-C, 75-B, 76-A, 77-A, 78-B, 79-A, 80-C, 81-B, 82-A, 83-C, 84-E, 85-D, 86-D, 87-C, 88-C, 89-C, 90-A.

Trigonometria

Gabarito: 1-C, 2-A, 3-A, 4-B, 5-A, 6-D, 7-D, 8-B, 9-B, 10-B, 11-E, 12-B, 13-D, 14-E, 15-C, 16-B, 17-B, 18-D, 19-A, 20-D, 21-E, 22-A, 23-D, 24-B, 25-B, 26-E, 27-A, 28-B, 29-C, 30-D, 31-D, 32-D, 33-C, 34-D, 35-E, 36-A, 37-E, 38-B, 39-B, 40-E, 41-A, 42-A, 43-A, 44-E, 45-A, 46-A, 47-A, 48-D, 49-D, 50-D, 51-C, 52-C, 53-A, 54-D, 55-A, 56-E, 57-B, 58-A, 59-A, 60-C.

Geometria espacial

Gabarito: 1-B, 2-B, 3-B, 4-C, 5-B, 6-C, 7-E, 8-D, 9-A, 10-B, 11-C, 12-D, 13-D, 14-D, 15-D, 16-E, 17-B, 18-A, 19-B, 20-B, 21-A, 22-B, 23-C, 24-C, 25-C, 26-A, 27-B, 28-C, 29-D, 30-B, 31-E, 32-B, 33-B, 34-B, 35-D, 36-A, 37-E, 38-A, 39-E, 40-C, 41-C, 42-E, 43-A, 44-A, 45-A, 46-C, 47-B, 48-E, 49-D, 50-C, 51-A, 52-A, 53-C, 54-C, 55-D, 56-C, 57-B, 58-D, 59-B, 60-B.

Geometria analítica

Gabarito: 1-C, 2-B, 3-B, 4-E, 5-C, 6-E, 7-E, 8-E, 9-A, 10-C, 11-E, 12-B, 13-D, 14-D, 15- D, 16-B, 17-A, 18-C, 19-C, 20-D, 21-E, 22-C, 23-E, 24-C, 25-A, 26-B, 27-B, 28-D, 29-B, 30-E, 31-A, 32-D, 33-C, 34-B.

Análise combinatória

Gabarito: 1-D, 2-C, 3-B, 4-E, 5-A, 6-B, 7-D, 8-E, 9-C, 10-A, 11-D, 12-E, 13-E, 14-D, 15-E, 16-C, 17-C, 18-E, 19-A, 20-C, 21-B, 22-D, 23-A, 24-A, 25-E, 26-B, 27-B, 28-D, 29-D, 30-A.

Probabilidade

Gabarito: 1-C, 2-E, 3-C, 4-C, 5-D, 6-A, 7-D, 8-C, 9-A, 10-B, 11-C, 12-D, 13-C, 14-C, 15-C.

Matriz e Determinantes

Gabarito: 1-E, 2-C, 3-A, 4-C, 5-C, 6-A, 7-C, 8-A, 9-E, 10-A, 11-E, 12-E, 13-D, 14-C, 15-A.

Sistemas lineares

Gabarito: 1-B, 2-D, 3-C, 4-C, 5-A, 6-C, 7-B, 8-B, 9-B, 10-A.

PA e PG

Gabarito: 1-C, 2-B, 3-D, 4-C, 5-C, 6-C, 7-C, 8-C, 9-B, 10-E, 11-C, 12-D, 13-D, 14-B, 15-D.

Polinômios

Gabarito: 1-B, 2-E, 3-D, 4-A, 5-C, 6-D, 7-C, 8-E, 9-E, 10-A, 11-E, 12-E, 13-E, 14-D, 15-C, 16-B, 17-E, 18-E, 19-A, 20-A.