PARIDADE E CLASSIFICAÇÃO DE FUNÇÕES

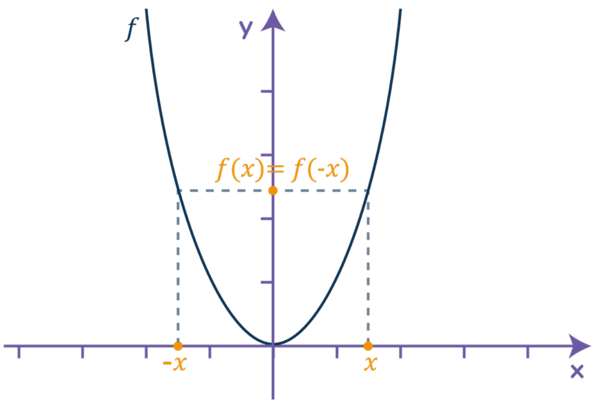
Vamos agora estudar algumas características que permitem classificar as funções e tirar conclusões a respeito delas.

PARIDADE DE FUNÇÕES

A primeira das caracterizações que iremos ver é a **paridade** de funções, que diz respeito à simetria da função em relação ao eixo y e em relação à origem. Conhecendo essas simetrias, podemos construir o gráfico de uma função com muito mais facilidade! As funções que possuem alguma paridade são chamadas de funções **pares** ou **ímpares**. Mas atenção! É importante perceber que existem funções que não são pares nem ímpares, as chamadas funções **sem paridade.**

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita par se **para todo** x em seu domínio vale que $f(-x) = f(x)$.

Exemplo: A função $f(x) = x^2$ é uma função par. Observe a imagem:



Na função do exemplo ao lado temos, por exemplo:

$$f\,(2) = 2^2 = 4 \text{ e } f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(3) = 3^2 = 9 \text{ e } f(-3) = (-3)^2 = 9$$

Na função par, **domínios opostos** geram **imagens iguais.**

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ímpar se **para todo** x em seu domínio vale que $f(-x) = -f(x)$.

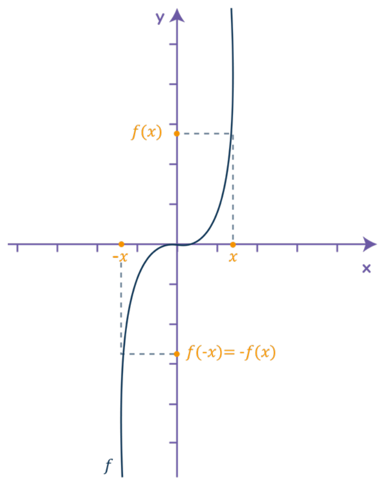
Exemplo: A função $f(x) = x^3$ é ímpar. Observe a imagem:

Na função do exemplo ao lado temos, por exemplo:

$$f\,(2) = 2^3 = 8 \text{ e } f(-2) = (-2)^3 = -8$$

$$f\,(3) = 3^3 = 27 \text{ e } f(-3) = (-3)^3 = -27$$

Na função ímpar, **domínios opostos** geram **imagens opostas.**



Observação:

- Não podemos levar em consideração apenas 2 pontos para concluir a paridade de uma função.

Funções pares e ímpares satisfazem as seguintes propriedades:

- O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y.
- O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Isso significa que podemos dizer se uma função é par ou ímpar olhando apenas para seu gráfico. Para as funções **polinomiais**, existe um critério a mais a respeito da paridade:

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função polinomial. Então, são válidas:

- Se f tem apenas expoentes pares, então f é uma função par.
- Se f tem apenas expoentes ímpares, então f é uma função ímpar.
- Se f tem expoentes pares e ímpares, então f não tem paridade.

Exemplos:

1. $f(x)=2x^6+3x^2+4$ é uma função par. De fato, pelo critério acima, f só tem expoentes pares, logo, é uma função par.

2. $g(x)=3x^{17}+4x^3+4x$ é uma função ímpar. De fato, pelo critério acima, g só tem expoentes ímpares e logo é uma função ímpar.

3. $h(x)=3x^3+4x^2+x+1$ é uma função sem paridade. De fato, h possui expoentes pares e ímpares.

INJETIVIDADE E SOBREJETIVIDADE

Outra maneira de classificar funções é a maneira com a qual o domínio e o contradomínio se relacionam. As propriedades que regem esta classificação são chamadas de injetividade e sobrejetividade e estão definidas a seguir:

Uma função $f:A\to B$ é dita:

- Injetora se for válida a condição de que para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, temos $f(x)=f(x_2)\to x_1=x_2$.
- Sobrejetora se a imagem de f for igual ao seu contradomínio.

Se uma função f for simultâneamente injetora e sobrejetora, dizemos que f é **bijetora**. Neste caso, dizemos que existe uma **correspondência biunívoca** entre o domínio e o contradomínio.

Observações:

- Injetora e injetiva são sinônimos;

- Sobrejetora e sobrejetiva são sinônimos;
- Bijetora e bijetiva são sinônimos.

Exemplo: A função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é injetora e sobrejetora. Logo, é bijetora.

Nem sempre podemos construir funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas entre dois conjuntos. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo: Considere os conjuntos $\mathrm{A}=\{1,2,3,4\}$ e $\mathrm{B}=\{1,2,3,4,5,6\}$. É possível construir uma função sobrejetora de A para B? E uma função injetora de B para A?

A resposta para ambas as perguntas é **não**. Se tivermos uma função f sobrejetora de A para B, teremos ao menos um elemento de A sendo levado por f em dois elementos distintos de B, o que não pode acontecer pela definição que demos para funções. Agora, não podemos ter uma função injetora de B para A. Se tentarmos construir tal função, associando cada elemento de B a um elemento distinto de A, teríamos sempre dois elementos de B "sobrando" sem imagem, o que também não pode acontecer pela definição de função.

A seguinte propriedade nos diz quando existem ou não funções injetoras, bijetoras e sobrejetoras entre dois conjuntos:

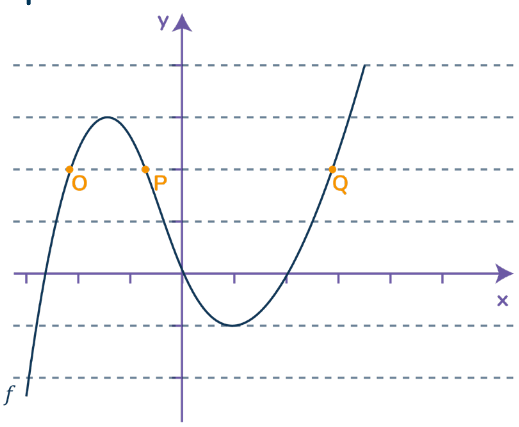
Sejam A e B dois conjuntos e denote por $n(A)$ o número de elementos de A e por $n(\mathrm{B})$ o número de elementos de B. Então:

- Existe uma função injetora entre A e B se, e somente se, $n(A) \leq n(\mathrm{B})$;
- Existe uma função sobrejetora entre A e B se, e somente se, $n(A) \geq n(\mathrm{B})$;
- Existe uma função bijetora entre A e B se, e somente se, $n(A) = n(\mathrm{B})$;

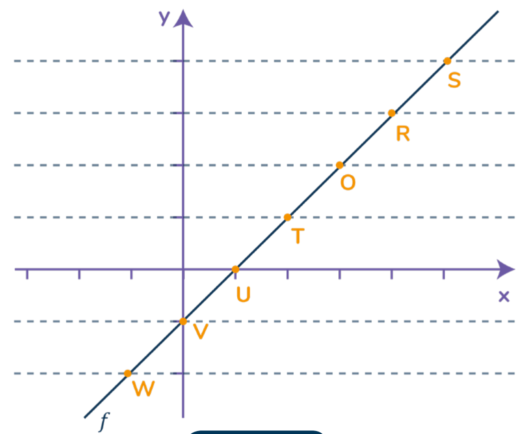
Nem sempre é fácil enxergar o número de elementos de um conjunto. Por esse motivo, existe uma outra maneira de dizermos se uma função é injetora ou sobrejetora: olhando para o gráfico da função.

Para vermos se uma função é injetora a partir de seu gráfico, traçamos linhas horizontais (paralelas ao eixo x) e vemos quantas vezes cada uma dessas linhas cruza o gráfico da função. Uma função será injetora se, e somente se, cada uma dessas linhas interceptar o gráfico em, no máximo, um ponto. Observe o exemplo:

Exemplo:



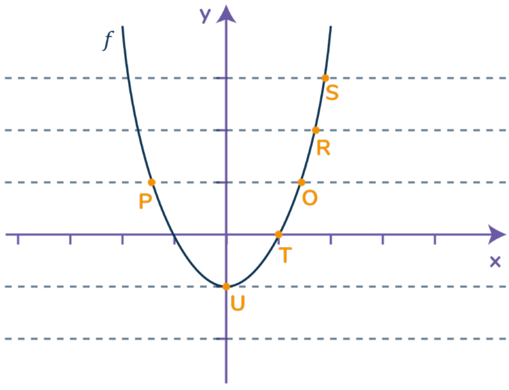
Não é injetora



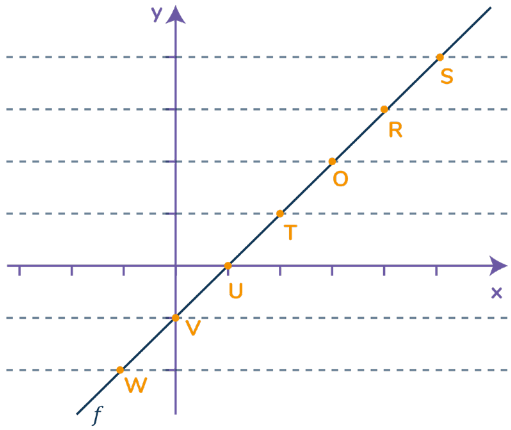
É injetora

Agora, para vermos se uma função é sobrejetora, desenhamos novamente as linhas horizontais e avaliamos se todas as linhas cruzam o gráfico, de acordo com o contradomínio da função. Uma função será sobrejetora se, e somente se, todas as linhas horizontais cruzarem seu gráfico. Observe o exemplo.

Exemplo:



Não é sobrejetora se considerarmos seu contradomínio sendo $\mathbb{R}$, uma vez que as linhas abaixo do eixo x não cruzam o gráfico.



É sobrejetora

Observação:

- Se restringirmos o contradomínio da função da imagem da esquerda para [u,+∞), a função se tornará sobrejetora.

ANOTAÇÕES