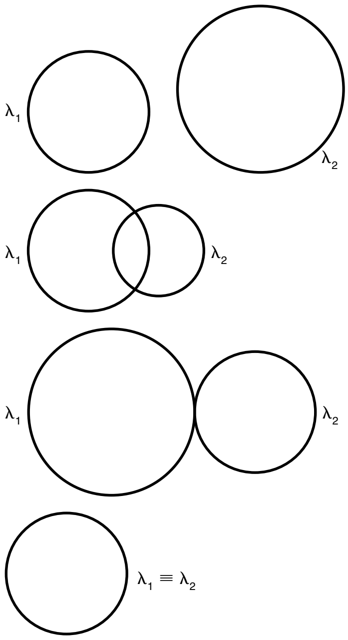
## Capítulo 4
# Geometria analítica: circunferência

## Para pensar

**1.** A intersecção de duas circunferências de um mesmo plano pode ser vazia; ou possuir exatamente um ponto; ou exatamente dois pontos; ou infinitos pontos, no caso de as circunferências coincidirem. Por exemplo:




**2.** De acordo com o infográfico, duas circunferências determinam dois pontos, então, é necessária uma terceira circunferência que intercepte as duas anteriores para determinar o único ponto que pertence às três.

## Exercícios propostos

**1.** A equação reduzida de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R é dada por: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
Assim, para cada item, temos:

a) $C(4, 6)$ e $R = 10$
$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 10^2$
Logo, a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R é: $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 100$

b) $C(7, 0)$ e $R = \sqrt{3}$
$(x - 7)^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$
Logo, a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R é: $(x - 7)^2 + y^2 = 3$

c) $C(0, 1)$ e $R = \frac{2}{3}$
$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
Logo, a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R é: $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{4}{9}$

d) $C(0, 0)$ e $R = 4$
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$
Logo, a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R é: $x^2 + y^2 = 16$

**2.** Vamos comparar as equações dadas com a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, em cada caso:

a) $\begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ R^2 = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ R = 7 \end{cases}$

Logo, $C(6, 2)$ e $R = 7$.

b) $(x - 4)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 5$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ R^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ R = \sqrt{5} \end{cases}$

Logo, $C(4, 0)$ e $R = \sqrt{5}$.

c) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 = \frac{16}{25}$

$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ R^2 = \frac{16}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ R = \frac{4}{5} \end{cases}$

Logo, $C(-1, -2)$ e $R = \frac{4}{5}$.

**3.** Substituindo as variáveis x e y da equação pela abscissa e ordenada de cada ponto, respectivamente, temos:

a) $(5 - 1)^2 + (8 + 5)^2 = 4^2 + 13^2 = 185 \neq 25$
$(1 - 1)^2 + (3 + 5)^2 = 0^2 + 8^2 = 64 \neq 25$
Logo, (5, 8) e (1, 3) não pertencem à circunferência da equação dada.

b) $(-2 - 1)^2 + (-1 + 5)^2 = (-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$(-3 - 1)^2 + (-4 + 5)^2 = (-4)^2 + 1^2 = 16 + 1 \neq 25$
Logo, $(-2, -1)$ pertence à circunferência, mas $(-3, -4)$ não pertence a ela.

c) $(6 - 1)^2 + (-5 + 5)^2 = 5^2 + 0^2 = 25$
$(1 - 1)^2 + (-1 + 5)^2 = 0^2 + 4^2 = 16 \neq 25$
Logo, $(6, -5)$ pertence à circunferência, mas $(1, -1)$ não pertence a ela.

d) $(4 - 1)^2 + (-9 + 5)^2 = 3^2 + (-4)^2 = 25$
$(1 - 1)^2 + (0 + 5)^2 = 0^2 + 5^2 = 25$
Logo, os pontos $(4, -9)$ e $(1, 0)$ pertencem à circunferência.

e) $(0 - 1)^2 + (0 + 5)^2 = (-1)^2 + 5^2 = 26 \neq 25$
$(3 - 1)^2 + (2 + 5)^2 = 2^2 + 7^2 = 4 + 49 \neq 25$
Logo, (0, 0) e (3, 2) não pertencem à circunferência.
Alternativa **d**.

**4.** Para $x = 4$, temos:
$(4 - 2)^2 + (y - 5)^2 = 13 \Rightarrow (y - 5)^2 = 9$
$\therefore\ y - 5 = \pm 3 \Rightarrow y = 8$ ou $y = 2$
Concluímos, assim, que os pontos de abscissa 4, pertencentes a essa circunferência, são (4, 8) e (4, 2).

**5.** Queremos a equação da circunferência que tem centro $C(3, 2)$ e passa pelo ponto $P(7, 5)$.
O raio R dessa circunferência é dado por:
$R = d_{PC} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9}$
$\therefore\ R = 5$
Logo, a equação reduzida da circunferência será: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

**6.** Essa circunferência tem centro $C(4, -4)$ e passa por $P(4, 0)$.

$R = d_{CP} = \sqrt{(4-4)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{0+16} = 4$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

**7.** **a)** A medida $AB$ do lado do quadrado é $AB = 5 - 1 = 4$. Logo, $D(1, 3+4) = D(1, 7)$.

O centro $E$ da circunferência circunscrita ao quadrado pertence às mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, cujas equações são $x = 3$ e $y = 5$, respectivamente; logo, $E(3, 5)$.

O raio $R$ da circunferência é dado por:

$R = EA = \sqrt{(3-1)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{2}$

Concluímos, então, que a equação reduzida da circunferência é:

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$, ou seja,

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 8$

**b)** O ponto de abscissa máxima da circunferência é a solução de maior abscissa do sistema:

$$\begin{cases} y = 5 & \text{(I)} \\ (x-3)^2 + (y-5)^2 = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$x = 3 + 2\sqrt{2}$ ou $x = 3 - 2\sqrt{2}$

Logo, o ponto $F$ de abscissa máxima, pertencente à circunferência, é $F\left(3 + 2\sqrt{2}, 5\right)$.

**c)** O ponto de ordenada mínima da circunferência é a solução de menor ordenada do sistema:

$$\begin{cases} x = 3 & \text{(I)} \\ (x-3)^2 + (y-5)^2 = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$y = 5 + 2\sqrt{2}$ ou $y = 5 - 2\sqrt{2}$

Logo, o ponto $G$ de ordenada mínima, pertencente à circunferência, é $G\left(3, 5 - 2\sqrt{2}\right)$.

**8.** Indicando o ponto $C$ por $C(c, 0)$, temos:

$CA = CB \Rightarrow \sqrt{(c-1)^2 + [0-(-3)]^2} = \sqrt{(c-2)^2 + (0-4)^2}$

$\therefore (c-1)^2 + 9 = (c-2)^2 + 16 \Rightarrow c = 5$

Logo, o centro da circunferência é $C(5, 0)$.

O raio $R$ da circunferência é dado por:

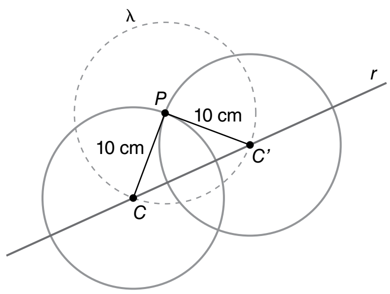
$R = CA = \sqrt{(5-1)^2 + [0-(-3)]^2} = 5$

Concluímos, assim, que a equação reduzida da circunferência é:

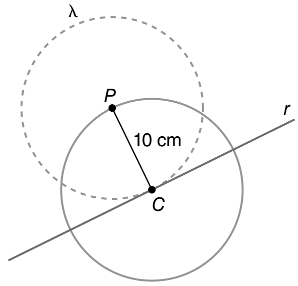
$(x-5)^2 + y^2 = 25$

**9.** **a)** Traçando nesse plano, a circunferência $\lambda$ de centro $P$ e raio 10 cm, podemos ter:

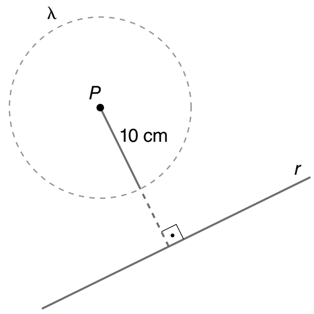
- A intersecção entre $\lambda$ e $r$ possui exatamente dois pontos distintos $C$ e $C'$. Nesse caso, existem exatamente duas circunferências de raio 10 cm que passam por $P$ e têm centros em $r$.




- A intersecção entre $\lambda$ e $r$ possui exatamente um ponto $C$. Nesse caso, existe uma única circunferência de raio 10 cm que passa por $P$ e tem centro em $r$.




- A intersecção entre $\lambda$ e $r$ é vazia. Nesse caso, não existe circunferência de raio 10 cm que passe por $P$ e tenha centro em $r$.




**b)** Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares possui coordenadas iguais. Indicando o ponto $C$ por $C(c, c)$, temos:

$CP = 10 \Rightarrow \sqrt{(c-3)^2 + (c-1)^2} = 10$

$\therefore (c-3)^2 + (c-1)^2 = 100 \Rightarrow 2c^2 - 8c - 90 = 0$

$\therefore c = 9$ ou $c = -5$

Logo, os centros das circunferências são $C(9, 9)$ e $C'(-5, -5)$. Concluímos, então, que suas equações reduzidas são:

$(x-9)^2 + (y-9)^2 = 100$ e $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 100$

**10.** O centro de $\lambda$ é a intersecção das mediatrizes das cordas $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$.

- Equação da mediatriz de $\overline{EF}$:

$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + [y-(-2)]^2}$

$\therefore x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 =$

$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4$

$\therefore x - 2y - 5 = 0$

- Equação da mediatriz de $\overline{FG}$:

$\sqrt{(x-6)^2 + [y-(-2)]^2} = \sqrt{[x-(-2)]^2 + [y-(-6)]^2}$

$\therefore x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 =$

$= x^2 + 4x + 4 + y^2 + 12y + 36$

$\therefore 2x + y = 0$

Assim, as coordenadas do centro de $\lambda$ são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -2$$

Temos, então, $C(1, -2)$.

O raio $r$ da circunferência é igual à distância entre $C$ e $E$, ou seja:

$r = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-2)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$\therefore r = 5$

Logo, uma equação de $\lambda$ é: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

**11.** a) Tal equação representa uma circunferência se, e somente se, $k - 4 > 0 \Rightarrow k > 4$

b) Tal equação representa um único ponto se, e somente se, $k - 4 = 0 \Rightarrow k = 4$

c) Tal equação representa o conjunto vazio se, e somente se, $k - 4 < 0 \Rightarrow k < 4$

**12.** Seja t o tempo em hora. Como o raio da circunferência é 10 km, temos:

$$1.200 = \frac{10}{t} \Rightarrow t = \frac{10}{1.200}$$

$$\therefore t = \frac{1}{120} \text{ h} = 30 \text{ s}$$

Portanto, após a explosão, levará 30 s para que sejam atingidos os pontos da circunferência $x^2 + y^2 - 100 = 0$.

**13.** a) Comparando a equação $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = -10 \\ -2b = -2 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 & \text{(I)} \\ b = 1 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 17 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$5^2 + 1^2 - R^2 = 17$

$\therefore R = 3$

Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(5, 1)$ e raio $R = 3$.

b) Comparando a equação $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 19 = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = -8 \\ -2b = 6 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 & \text{(I)} \\ b = -3 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 19 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$4^2 + (-3)^2 - R^2 = 19$

$\therefore R = \sqrt{6}$.

Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(4, -3)$ e raio $R = \sqrt{6}$.

c) Comparando a equação $x^2 + y^2 - 14x + 44 = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = -14 \\ -2b = 0 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 & \text{(I)} \\ b = 0 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 44 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$7^2 + 0^2 - R^2 = 44$

$\therefore R = \sqrt{5}$

Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(7, 0)$ e raio $R = \sqrt{5}$.

d) Comparando a equação $x^2 + y^2 - 3 = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = 0 \\ -2b = 0 \\ a^2 + b^2 - R^2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{(I)} \\ b = 0 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = -3 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$0^2 + 0^2 - R^2 = -3$

$\therefore R = \sqrt{3}$

Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(0, 0)$ e raio $R = \sqrt{3}$.

e) Temos: $5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

Comparando a equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = 2 \\ a^2 + b^2 - R^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{(I)} \\ b = -1 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = -2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$1^2 + (-1)^2 - R^2 = -2$

$\therefore R = 2$

Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(1, -1)$ e raio $R = 2$.

**14.** a) Temos:

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 26 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) = 26$

$\therefore (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 26 + 9 + 1$

Assim, a equação reduzida da circunferência é: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 36$

Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C(3, 1)$ e $R = 6$

b) Temos:

$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 4x) + (y^2 - 8y) = -19$

$\therefore (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) = -19 + 4 + 16$

Assim, a equação reduzida da circunferência é: $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$

Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C(-2, 4)$ e $R = 1$

c) Temos:

$x^2 + y^2 + 10x + 23 = 0 \Rightarrow (x^2 + 10x) + (y^2) = -23$

$\therefore (x^2 + 10x + 25) + (y^2) = -23 + 25$

Assim, a equação reduzida da circunferência é: $(x + 5)^2 + y^2 = 2$

Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C(-5, 0)$ e $R = \sqrt{2}$

d) Para obter a equação reduzida, é mais cômodo trabalhar com os coeficientes de x e y unitários; por isso, vamos dividir por 9 ambos os membros da equação, obtendo:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - y + \frac{1}{9} = 0$$

Temos, então:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - y + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + (y^2 - y) = -\frac{1}{9}$$

$$\therefore \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) + \left(y^2 - 2y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}$$

Assim, a equação reduzida da circunferência é: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e $R = \frac{1}{2}$

**15.** Indicando por $R_1$ e $R_2$ os raios das circunferências $C_1$ e $C_2$, respectivamente, temos que a área $A$ pedida é dada por:
$A = \pi(R_2)^2 - \pi(R_1)^2 \Rightarrow A = \pi[(R_2)^2 - (R_1)^2]$
Para esse cálculo, vamos determinar $R_1$ e $R_2$:
- A equação $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$ é equivalente a $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 0 + 1 + 1$; logo, a equação reduzida de $C_1$ é $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, com o que concluímos que $R_1 = \sqrt{2}$.
- A equação $x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0$ é equivalente a $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0 + 4 + 4$; logo, a equação reduzida de $C_2$ é $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$, com o que concluímos que $R_2 = 2\sqrt{2}$.

Assim, a área $A$ é dada por:
$A = \pi\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right] \Rightarrow A = 6\pi$
Alternativa **d**.

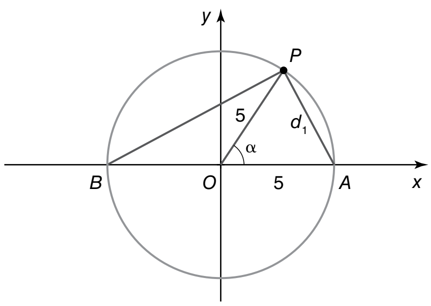
**16.** Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas, obtemos o centro $C$ da circunferência:
$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 1$
Logo, $C(-1, 1)$.
Assim, com o centro $C(-1, 1)$ e o raio $R = \sqrt{2}$, obtemos a equação de $\lambda$:
$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ ou, na forma geral,
$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$.
Alternativa **e**.

**17.** O centro $C$ da circunferência é o ponto em que a mediatriz de $\overline{AB}$ intercepta o eixo das abscissas.
Lembrando que todos os pontos $P(x, y)$ da mediatriz $r$ de um segmento $\overline{AB}$ equidistam de $A$ e $B$, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é dada por:
$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} =$
$= \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 2)^2}$
$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 =$
$= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4$
$\therefore 3x + y - 15 = 0$
Então, substituímos y por 0 na equação da mediatriz e encontramos a abscissa de $C$:
$3x - 0 - 15 = 0 \Rightarrow x = 5$
Dessa forma, o centro da circunferência que queremos é $C(5, 0)$, e seu raio $R$ é a distância entre $A(3, 1)$ e $C(5, 0)$, ou seja:
$R = \sqrt{(5 - 3)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$
$\therefore R = \sqrt{5}$
Logo, uma equação dessa circunferência é:
$(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = 5$
$\therefore x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$

**18.** O centro $C$ da circunferência $\lambda$ é o ponto de intersecção entre a mediatriz de $\overline{AB}$ e a bissetriz dos quadrantes ímpares, cuja equação é: $x - y = 0$
Lembrando que todos os pontos $P(x, y)$ da mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ equidistam de $A$ e $B$, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é dada por:
$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 8)^2} =$
$= \sqrt{(x - 4)^2 + [y - (-2)]^2}$
$\therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16y + 64 =$
$= x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$
$\therefore x - 5y + 12 = 0$
Então, as coordenadas de $C$ são a solução do sistema:
$\begin{cases} x - 5y + 12 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 3$
Dessa forma, o centro da circunferência $\lambda$ é $C(3, 3)$, seu raio $R$ é a distância entre $A(2, 8)$ e $C(3, 3)$, ou seja:
$R = \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 8)^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2}$
$\therefore R = \sqrt{26}$
Logo, uma equação dessa circunferência é:
$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 26$
$\therefore x^2 + y^2 - 6x - 6y - 8 = 0$
Portanto, a equação normal da circunferência é:
$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 8 = 0$

**19.** O centro $C$ da circunferência $\lambda$ é o ponto de intersecção entre a mediatriz de $\overline{AB}$ e a reta de equação $y = x - 5$.
Lembrando que todos os pontos $P(x, y)$ da mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ equidistam de $A$ e $B$, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é dada por:
$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + [y - (-5)]^2}$
$\therefore x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 +$
$+ 10y + 25$
$\therefore 3x - 4y - 16 = 0$
Então, as coordenadas de $C$ são a solução do sistema:
$\begin{cases} 3x - 4y - 16 = 0 \\ y - x = -5 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = -1$
Dessa forma, o centro da circunferência $\lambda$ é $C(4, -1)$, e seu raio $R$ é a distância $A(1, 3)$ e $C(4, -1)$, ou seja:
$R = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$
$\therefore R = 5$
Logo, uma equação dessa circunferência é:
$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 5^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 25$
$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$
Assim, a equação geral da circunferência é:
$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$

**20.** a) Temos que a equação reduzida da trajetória circular da partícula é $x^2 + y^2 = 25$; logo, o centro $C$ e o raio $R$ da circunferência são dados por: $C(0, 0)$ e $R = 5$. Assim, esquematizamos:




A abscissa e a ordenada de $P$ são $5 \cos \alpha$ e $5 \text{ sen } \alpha$, respectivamente, isto é, $P(5 \cos \alpha, 5 \text{ sen } \alpha)$. Assim, concluímos que:
$d_1 = PA = \sqrt{(5 \cos \alpha - 5)^2 + (5 \text{ sen } \alpha - 0)^2}$
$\therefore d_1 = 5\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$

b) $d_2 = PB = \sqrt{(5 \cos \alpha + 5)^2 + (5 \text{ sen } \alpha - 0)^2}$

$\therefore d_2 = 5\sqrt{2(1 + \cos \alpha)}$

c) Podemos calcular $\alpha$ em função de $t$ por meio da regra de três:

| Tempo (minuto) | Medida de $P\widehat{O}A$ (radiano) |
|---|---|
| 1 | $60\pi$ |
| $t$ | $\alpha$ |

De onde obtemos $\alpha = 60\pi t$.

Assim, concluímos que:

$$d_1 = 5\sqrt{2(1 - \cos 60\pi t)}$$

**21.** a) Não é equação de circunferência, pois os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são diferentes $(5 \neq 1)$.

b) Não é equação de circunferência, pois o coeficiente de $y^2$ é igual a zero.

c) Não é equação de circunferência, pois o coeficiente de $xy$ é diferente de zero.

d) Como os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são iguais e não nulos, e o coeficiente de $xy$ é igual a zero, pelo método da redução, temos:

$x^2 + y^2 + 6x + 6y + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 6x) + (y^2 + 6y) = -2$

$\therefore (x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) = -2 + 9 + 9$

$\therefore (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 16$

que é equação de uma circunferência de centro $C(-3, -3)$ e raio $R = 4$.

**22.** A equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0$ satisfaz as condições (I) e (II) necessárias para que ela represente uma circunferência, isto é, os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são iguais e não nulos, e o coeficiente de $xy$ é zero. Essas duas condições não bastam; além delas, deve ser obedecida a condição (III), isto é, na equação reduzida, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, o número $k$ deve ser positivo.

Escrevendo a equação na forma reduzida, temos:

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 4 + 9 - m$

$\therefore (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13 - m$

Impondo a condição (III), temos que: $13 - m > 0$, ou seja, $m < 13$. Concluímos, então, que a equação representa uma circunferência se, e somente se, $m < 13$.

Alternativa **e**.

**23.** Como os coeficientes de $x^2 + y^2$ devem ser iguais, temos $a = 2$. Além disso, o coeficiente de $xy$ deve ser nulo, ou seja, $b = 0$.

Temos, então:

$2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + c = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - y + \frac{c}{2} = 1$

$\therefore (x^2 + 2x) + (y^2 - y) = 1 - \frac{c}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + \left(y^2 - 2y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) =$

$= 1 - \frac{c}{2} + 1 + \frac{1}{4}$

$\therefore (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9 - 2c}{4}$

Essa equação representa uma circunferência se, e somente se:

$\frac{9 - 2c}{4} > 0 \Rightarrow 9 - 2c > 0$

$\therefore c < \frac{9}{2}$

Portanto, para que a equação represente uma circunferência, devemos ter: $a = 2$, $b = 0$ e $c < \frac{9}{2}$

**24.** Como as equações representam circunferências, temos que os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são iguais; logo, $p = 2$.

Vamos escrever as equações na forma reduzida.

Equação I:

$2x^2 + 2y^2 + 4qx - 8y + 22 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2qx - 4y + 11 = 0$

$\therefore x^2 + 2qx + q^2 + y^2 - 4y + 4 = q^2 + 4 - 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + q)^2 + (y - 2)^2 = q^2 - 7$

Logo, o centro $C_1$ e o raio $R_1$ dessa circunferência são: $C_1(-q, 2)$ e $R_1 = \sqrt{q^2 - 7}$

Equação II:

$x^2 + y^2 - 5 \cdot 2 \cdot y + 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + (y^2 - 10y + 25) = 25 - 24$

$\therefore x^2 + (y - 5)^2 = 1$

Logo, o centro $C_2$ e o raio $R_2$ dessa circunferência são: $C_2(0, 5)$ e $R_2 = 1$

Como a distância entre os centros dessas circunferências é $3\sqrt{2}$, concluímos que:

$C_1C_2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{[0 - (-q)]^2 + (5 - 2)^2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore q^2 + 9 = 18 \Rightarrow q = \pm 3$

Resumindo, chegamos a: $p = 2$ e $q = \pm 3$

**25.** a) Como $(4 - 3)^2 + (2 - 1)^2 = 2 < 6$, o ponto P é interior à circunferência $\lambda$.

b) Como $4^2 + 9^2 - 14 \cdot 9 + 30 = 1 > 0$, o ponto P é exterior à circunferência $\lambda$.

c) Como $(10 - 5)^2 + (14 - 2)^2 = 169$, o ponto P pertence à circunferência $\lambda$.

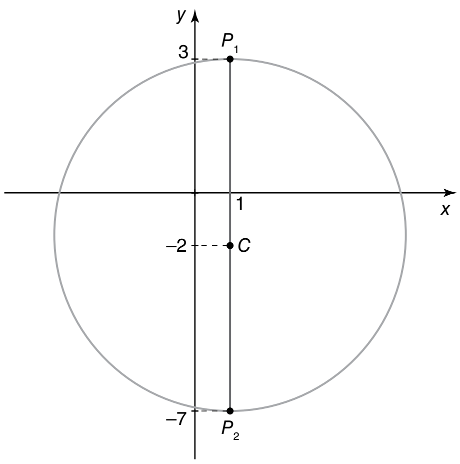
**26.** a) Para que o ponto P pertença à circunferência $\lambda$, devemos ter:

$1^2 + (k + 2)^2 - 2 \cdot 1 + 4(k + 2) - 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 + 8k - 9 = 0$

$\therefore k = -9$ ou $k = 1$

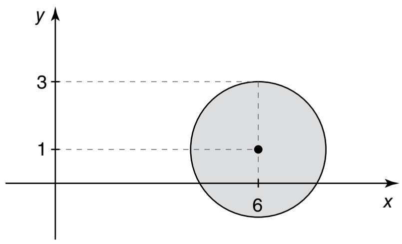
b) Sendo C o centro da circunferência e $P_1(1, 3)$ e $P_2(1, -7)$, temos:



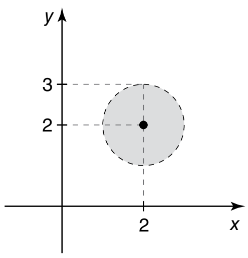
**27.** Para que o ponto $P$ seja interior a $\lambda$, devemos ter:
$(m - 2)^2 + (m - 2 + 1)^2 < 25 \Rightarrow m^2 - 3m - 10 < 0$
$\therefore -2 < m < 5$
Concluímos, então, que $P$ é interior a $\lambda$ para qualquer valor real de $m$, com $-2 < m < 5$.

**28.** Todo ponto da reta $r$ é da forma $A(a, 2a - 10)$. Para que $A$ seja exterior a $\lambda$, devemos ter:
$a^2 + (2a - 10)^2 > 100 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 40a + 100 > 100$
$\therefore 5a^2 - 40a > 0 \Rightarrow a < 0$ ou $a > 8$
Logo, os pontos que pertencem à reta $r$ e são exteriores à circunferência $\lambda$ são todos os pontos da forma: $(a, 2a - 10)$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a < 0$ ou $a > 8$.

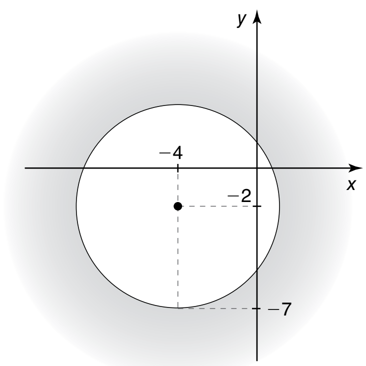
**29.** **a)** As soluções $(x, y)$ da inequação $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 4$ são os pontos da circunferência de centro $C(6, 1)$ e raio 2, assim como os pontos interiores a ela.



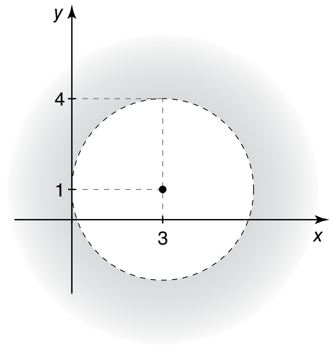

**b)** Temos:
$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 4x) + (y^2 - 4y) < -7$
$\therefore (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) < -7 + 4 + 4$
$\therefore (x - 2)^2 + (y - 2)^2 < 1$
Assim, as soluções $(x, y)$ da inequação $x^2 - y^2 - 4x - 4y + 7 < 0$ são os pontos interiores à circunferência de centro $C(2, 2)$ e raio 1.



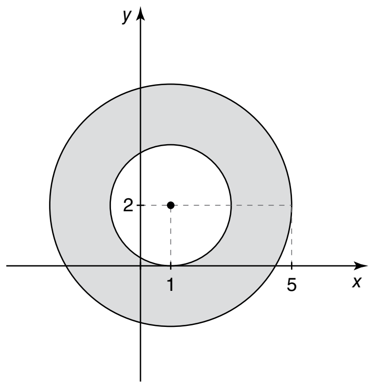

**c)** Os pontos $(x, y)$ que são soluções da inequação $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 \geqslant 25$ são os pontos da circunferência de centro $C(-4, -2)$ e raio 5, assim como os pontos exteriores a ela.




**d)** Temos:
$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) > -1 + 9 + 1$
$\therefore (x - 3)^2 + (y - 1)^2 > 9$
Portanto, as soluções $(x, y)$ da inequação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 > 0$ são os pontos exteriores à circunferência de centro $C(3, 1)$ e raio 3.



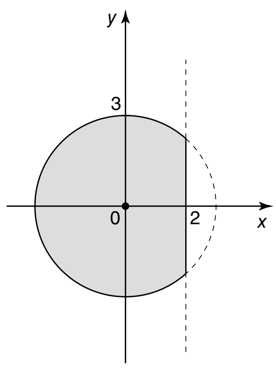

**30.** **a)** Um ponto $(x, y)$ será solução do sistema se, e somente se, ele for solução de cada uma das inequações que o compõem. Assim, a solução do sistema é representada pela intersecção das regiões (I) e (II), determinadas pelas inequações:
(I) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geqslant 4$
(II) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 16$
Essa representação é a coroa circular a seguir:




**b)** A representação gráfica do sistema é a intersecção das regiões determinadas pelas inequações (I) e (II).

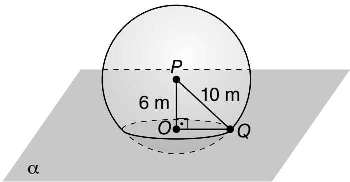
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 & \text{(I)} \\ x \leqslant 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Essa representação é dada por:



**31.** A região do espaço que está ao alcance do sensor é uma esfera de centro P e raio 10 m.

Associando-se ao plano $\alpha$ um sistema cartesiano $xOy$, a região do plano que está ao alcance do sensor é um círculo cujo centro é $O(0, 0)$ e cujo raio $r$ é a medida do segmento $\overline{OQ}$, representado abaixo.




Assim:

$r^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow r = 8$

Portanto, a região do plano cartesiano contida no campo magnético do sensor é representada por:

$x^2 + y^2 \leqslant 64$

**32.** a) A circunferência tem centro C(1, 2) e raio R = 5. Calculando a distância $d_{Cs}$, temos:

$$d_{Cs} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 19|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|30|}{\sqrt{25}} = \frac{30}{5} = 6$$

Como $d_{Cs} > R$, pois $6 > 5$, concluímos que s é exterior a $\lambda$.

b) A circunferência tem centro C(0, 4) e raio R = 3. Calculando a distância $d_{Cs}$, temos:

$$d_{Cs} = \frac{|12 \cdot 0 - 5 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|-26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

Como $d_{Cs} < R$, pois $2 < 3$, concluímos que s é secante a $\lambda$.

c) Temos:

$y = \frac{x}{4} + 1 \Rightarrow x - 4y + 4 = 0$

e

$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 4y + 4) =$

$= -12 + 25 + 4 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 17$

Assim, a circunferência tem centro C(5, −2) e raio $R = \sqrt{17}$. Calculando a distância $d_{Cs}$, temos:

$$d_{Cs} = \frac{|5 - 4 \cdot (-2) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|17|}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

Como $d_{Cs} = R$, concluímos que s é tangente a $\lambda$.

**33.** a) $s: \begin{cases} (0, 4) \\ m_s = \frac{4 - 0}{0 + 2} = 2 \end{cases} \Rightarrow y - 4 = 2(x - 0)$

Logo, uma equação geral da reta s é: $2x - y + 4 = 0$

b) O raio R da circunferência é a distância entre C e s, ou seja:

$$R = d_{Cs} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Logo, a equação reduzida da circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

**34.** As equações das retas paralelas à reta s são da forma $3x + y + m = 0$, com $m \in \mathbb{R}$.

O raio da circunferência é igual à distância do centro à reta tangente, ou seja:

$$\sqrt{10} = \frac{|3 \cdot 4 + 2 + m|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{|14 + m|}{\sqrt{10}}$$

$\therefore |14 + m| = 10 \Rightarrow 14 + m = -10$ ou $14 + m = 10$

$\therefore m = -24$ ou $m = -4$

Assim, as equações das retas são: $3x + y - 24 = 0$ e $3x + y - 4 = 0$

**35.** Na circunferência $\lambda$, o centro é o ponto C(4, 3) e o raio R é a distância CO, que é dada por:

$R = OC = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = 5$

O coeficiente angular $m_r$ da reta $r$ é dado por: $m_r = \frac{3 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}$. Assim, a equação do feixe de retas paralelas a $r$ é $y = \frac{3x}{4} + k$, com $k \in \mathbb{R}$ ou, na forma geral: $3x - 4y + 4k = 0$. Sendo $r$ uma reta desse feixe, ela será tangente a $\lambda$ se $d_{Cr} = 5$, isto é:

$$\frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 4k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5 \Rightarrow |4k| = 25$$

$\therefore 4k = 25$ ou $4k = -25 \Rightarrow k = \frac{25}{4}$ ou $k = -\frac{25}{4}$

Concluímos, então, que as equações pedidas são: $3x - 4y + 25 = 0$ e $3x - 4y - 25 = 0$

**36.** O centro C e o raio R da circunferência $\lambda$ podem ser obtidos pelo método da redução, conforme segue:

$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 12$

$\therefore x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 12 + 4 \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 16$

Logo, C(0, 2) e R = 4.

Para que uma reta s do feixe $12x - 5y + m = 0$, com $m \in \mathbb{R}$, seja tangente a $\lambda$, devemos ter $d_{Cs} = 4$, isto é:

$$\frac{|12 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + m|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = 4 \Rightarrow |m - 10| = 52$$

$\therefore m - 10 = 52$ ou $m - 10 = -52$

$\therefore m = 62$ ou $m = -42$

Assim, concluímos que as duas retas desse feixe tangentes a $\lambda$ têm equações:

$12x - 5y + 62 = 0$ e $12x - 5y - 42 = 0$

**37.** Na circunferência $\lambda$, o centro é o ponto C(2, −1) e o raio R é dado por $R = \sqrt{2k}$.

Como s é tangente a $\lambda$, temos $d_{Cs} = \sqrt{2k}$, isto é:

$$\frac{|2 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2k} \Rightarrow |1 + k| = 2\sqrt{k}$$

$\therefore (1 + k)^2 = 4k \Rightarrow 1 + 2k + k^2 = 4k$

$\therefore k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$

Logo, a equação da reta s é $x + y + 1 = 0$ e a equação da circunferência $\lambda$ é $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$.

Assim, respondemos aos itens:

a) F, pois, substituindo na equação da reta as variáveis x e y por 1 e −1, respectivamente, obtemos uma sentença falsa, qual seja: $1 + (-1) + 1 = 0$

b) V, pois, substituindo na equação da circunferência as variáveis x e y por 2 e $\sqrt{2} - 1$, respectivamente, obtemos uma sentença verdadeira, qual seja: $(2 - 2)^2 + \left(\sqrt{2} - 1 + 1\right)^2 = 2$

c) V, pois, fazendo $y = 0$ na equação da circunferência, obtém-se uma equação que admite raiz real, qual seja: $(x - 2)^2 + (0 + 1)^2 = 2$

d) F, pois, fazendo $x = 0$ na equação da circunferência, obtém-se uma equação que não admite raiz real, qual seja: $(0 - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$

e) V, pois, a distância $d_{Os}$ entre a origem O(0, 0) e a reta s é dada por: $d_{Os} = \frac{|0 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) V, pois, a equação reduzida da circunferência é $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$, de onde deduzimos que o raio é $\sqrt{2}$, que é maior que 1.

**38.** Temos:
$x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 12x + 36) + (y^2) = -20 + 36$
$\therefore (x - 6)^2 + y^2 = 16$
Assim, a circunferência tem centro $C(6, 0)$ e raio $R = 4$.
Sendo o raio da circunferência igual à distância entre o centro e a reta tangente $x = n$, paralela ao eixo das ordenadas, temos:
$R = |x_C - n| \Rightarrow 4 = |6 - n|$
$\therefore 6 - n = -4$ ou $6 - n = 4$
Portanto, $n = 10$ ou $n = 2$.

**39.** A reta será secante à circunferência se, e somente se, a distância entre o centro de $\lambda$ e a reta for menor ou igual ao raio de $\lambda$, ou seja:
$$\frac{|5 \cdot 6 - 12 \cdot 2 + k|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} < \sqrt{39} \Rightarrow \frac{|6 + k|}{\sqrt{169}} < \sqrt{39}$$
$\therefore |6 + k| < 13\sqrt{39} \Rightarrow -13\sqrt{39} < 6 + k < 13\sqrt{39}$
$\therefore -13\sqrt{39} - 6 < k < 13\sqrt{39} - 6$

**40.** Para que a reta tenha pelo menos um ponto em comum com a circunferência $\lambda$, a distância entre o centro de $\lambda$ e a reta deve ser menor ou igual ao raio. Como a reta de equação $y = k$ é paralela ao eixo das abscissas, temos:
$|0 - k| \leqslant 2 \Rightarrow -2 \leqslant k \leqslant 2$

**41.** a) Substituindo as coordenadas do ponto P na equação da circunferência $\lambda$, temos:
$(3 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 4^2 + (-4)^2 = 32$
Logo, o ponto P pertence à circunferência $\lambda$.

b) O centro da circunferência é $C(-1, 2)$. Como P é um ponto de $\lambda$, a reta s é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Logo, o coeficiente angular de s é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CP}$. Como $m_{CP} = \dfrac{-2 - 2}{3 - (-1)} = -1$, temos que $m_s = 1$.
A reta s passa por $P(3, -2)$; assim, podemos concluir que a equação da reta s é:
$y - (-2) = 1(x - 3)$
ou seja, uma equação da reta s é: $x - y - 5 = 0$

**42.** a) Temos:
$(0 - 1)^2 + (-5 - 2)^2 = (-1)^2 + (-7)^2 = 50 \neq 5$
Logo, o ponto P não pertence à circunferência $\lambda$.

b) Como $P \notin \lambda$, há duas retas distintas que passam por P e são tangentes a $\lambda$. Pelo menos uma dessas retas não é vertical e, portanto, tem equação da forma $y - (-5) = m(x - 0)$, ou seja, $mx - y - 5 = 0$, com $m \in \mathbb{R}$. A distância entre o centro de $\lambda$ e uma reta tangente é o raio da circunferência e, portanto:
$$\frac{|m \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|m - 7|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$
$$\therefore \frac{(m - 7)^2}{m^2 + 1} = 5 \Rightarrow m^2 - 14m + 49 = 5m^2 + 5$$
$\therefore 2m^2 + 7m - 22 = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{11}{2}$ ou $m = 2$
Logo, as equações das retas são:
$-\dfrac{11}{2}x - y - 5 = 0$ e $2x - y - 5 = 0$,
ou seja, $11x + 2y + 10 = 0$ e $2x - y = 0$

**43.** O raio R da circunferência, que é a distância do ponto $P(0, 7)$ ao centro $C(3, 3)$, é dado por:
$R = \sqrt{(3 - 0)^2 + (3 - 7)^2}\ 5\ \sqrt{3^2 + (-4)^2}$
$\therefore R = 5$
Seja $m \in \mathbb{R}$ o coeficiente angular da reta s. Pelo gráfico, temos $m > 0$. Assim, uma equação de s que passa por $Q(8, 0)$ é:
$y - 0 = m(x - 8) \Rightarrow mx - y - 8m = 0$
Como a reta é tangente à circunferência, a distância do centro de $\lambda$ a s é igual ao raio, ou seja:
$$\frac{|m \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 8m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|-5m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5$$
$$\therefore \frac{(-5m - 3)^2}{m^2 + 1} = 25 \Rightarrow 25m^2 + 30m + 9 = 25m^2 + 25$$
$\therefore 30m = 16 \Rightarrow m = \dfrac{8}{15}$
Logo, uma equação da reta s é:
$$\frac{8x}{15} - y - \frac{8 \cdot 8}{15} = 0$$
ou seja: $8x - 15y - 64 = 0$

**44.** a) Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:
$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 & \text{(I)} \\ (x + 1)^2 + y^2 = 25 & \text{(II)} \end{cases}$$
Da equação (I), temos:
$y = 6 - x$
Substituindo na equação (II), temos:
$(x + 1)^2 + (6 - x)^2 = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 36 - 12x + x^2 = 25$
$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$
- Para $x = 2$, temos da equação (I): $y = 4$
- Para $x = 3$, temos da equação (I): $y = 3$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(2, 4), (3, 3)\}$.

b) Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:
$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$
Da equação (I), temos:
$y = 1 - x$
Substituindo na equação (II), temos:
$x^2 + (1 - x)^2 - 2x - 4(1 - x) + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 - 2x - 4 + 4x + 3 = 0$
$\therefore 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
Para $x = 0$, temos da equação (I): $y = 1$
Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(0, 1)\}$.

c) Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:
$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 & \text{(I)} \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$
Da equação (I), temos:
$x = 4 - 3y$
Substituindo na equação (II), temos:
$(4 - 3y - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9y^2 + y^2 - 6y + 9 = 3$
$\therefore 5y^2 - 3y + 3 = 0 \Rightarrow \nexists y \in \mathbb{R}$
Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \varnothing$.

**d)** Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = 12 \text{ e } y = 5) \text{ ou } (x = -12 \text{ e } y = 5)$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(12, 5), (-12, 5)\}$.

**e)** Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = x + 1 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$x^2 + (x + 1)^2 - 4x - 6(x + 1) + 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 6x - 6 + 11 = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(1, 2), (3, 4)\}$.

**45.** O coeficiente angular da reta s é: $m_s = \dfrac{-\frac{8}{3} - 0}{0 - 8} = \dfrac{1}{3}$

Assim, uma equação de s é: $y - 0 = \dfrac{1}{3}(x - 8)$

ou seja: $x - 3y - 8 = 0$

O raio $R$ da circunferência $\lambda$ é a distância entre o centro $C(2, 3)$ e o ponto $P(-2, 0)$, isto é:

$R = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$

$\therefore R = 5$

Logo, uma equação da circunferência é:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Para encontrar a intersecção de $\lambda$ com a reta s, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y - 8 = 0 & \text{(I)} \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos:

$x = 3y + 8$

Substituindo na equação (II), temos:

$(3y + 8 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2 + 36y + 36 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0$

$\therefore y^2 + 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ ou } y = -1$

- Para $y = -2$, temos da equação (I): $x = 2$
- Para $y = -1$, temos da equação (I): $x = 5$

Concluímos, assim, que $A(2, -2)$ e $B(5, -1)$.

**46.** Para encontrar a intersecção de s e $\lambda$, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + (y - 5)^2 = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos:

$y = x + 1$

Substituindo na equação (II), temos:

$x^2 + (x + 1 - 5)^2 = 10 \Rightarrow x^2 + x^2 - 8x + 16 = 10$

$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$

- Para $x = 1$, temos da equação (I): $y = 2$
- Para $x = 3$, temos da equação (I): $y = 4$

Concluímos, assim, que os pontos de intersecção entre s e $\lambda$ são (1, 2) e (3, 4).

O comprimento da corda que $\lambda$ determina sobre s é a distância entre os pontos de intersecção, dada por:

$\sqrt{(1 - 3)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

**47.** Os pontos $A$ e $B$ são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x = 0 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 2 \text{ e } y = -2)$$

Como a abscissa de $A$ é menor que a de $B$, temos que $A(0, 0)$ e $B(2, -2)$. Assim, devemos obter a equação da reta $t$ tangente a $\lambda$ no ponto $B(2, -2)$. Para isso, determinamos o centro C de $\lambda$:

$x^2 + y^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4$

$\therefore (x - 2)^2 + y^2 = 4$

Logo, $C(2, 0)$.

Observamos, portanto, que a reta $\overleftrightarrow{CB}$ é vertical, pois C e B têm abscissas iguais. Como a reta $t$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{CB}$, deduzimos que a reta $t$ é horizontal. Por ser horizontal e passar por $B(2, -2)$, a equação de $t$ é $y = -2$.

Alternativa **a**.

**48.** Fazendo $y = 0$ na equação da circunferência, obtemos:

$x^2 + mx - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 + 16}}{2}$

Assim, os pontos de intersecção dessa circunferência com o eixo $Ox$ são:

$A\left(\dfrac{-m + \sqrt{m^2 + 16}}{2}, 0\right)$ e $B\left(\dfrac{-m - \sqrt{m^2 + 16}}{2}, 0\right)$

Como $M\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, temos:

$$\frac{\dfrac{-m + \sqrt{m^2 + 16}}{2} + \left(\dfrac{-m - \sqrt{m^2 + 16}}{2}\right)}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{-2m}{4} = \dfrac{5}{2}$

$\therefore m = -5$

Assim, a equação da circunferência é:

$x^2 + y^2 - 5x - y - 4 = 0$. Comparando-a com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, obtemos:

$-2a = -5 \text{ e } -2b = -1 \Rightarrow a = \dfrac{5}{2} \text{ e } b = \dfrac{1}{2}$

Concluímos, então, que o centro da circunferência é o ponto $C\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

**49.** A distância do ponto P à circunferência $\lambda$ é igual à distância $PC - R$, sendo $R$ a medida do raio da circunferência.

Assim a distância é dada por:

$\sqrt{(12 - 0)^2 + (5 - 0)^2} - 3 = \sqrt{169} - 3 = 10$

Portanto, a distância de P a $\lambda$ é 10 unidades.

**50.** O ponto da circunferência de centro C que está mais distante de $O$ é uma das intersecções entre a reta $\overleftrightarrow{CO}$ e a circunferência $\lambda$. O raio $R$ da circunferência $\lambda$ é a distância entre o centro $C(3, 6)$ e o ponto $P(1, 7)$, isto é:

$R = \sqrt{(3 - 1)^2 + (6 - 7)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$

$\therefore R = \sqrt{5}$

Logo, uma equação da circunferência é:

$(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 5$

O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CO}$ é:

$m_{CO} = \dfrac{6 - 0}{3 - 0} = 2$

Assim, uma equação dessa reta é: $y - 0 = 2(x - 0)$ ou seja: $y = 2x$

Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = 2x & \text{(I)} \\ (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$(x - 3)^2 + (2x - 6)^2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 24x + 36 = 5$

$\therefore x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

- Para $x = 2$, temos da equação (I): $y = 4$
- Para $x = 4$, temos da equação (I): $y = 8$

Assim, os pontos de intersecção de $\overleftrightarrow{CO}$ e $\lambda$ são (2, 4) e (4, 8); desses pontos, o mais distante de O(0, 0) é o ponto (4, 8).

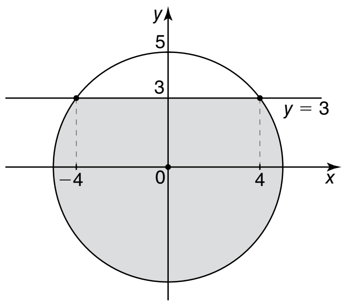
**51.** a) Para encontrar a intersecção $s \cap \lambda$, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = 3 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = -4$ e $y = 3)$ ou $(x = 4$ e $y = 3)$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(-4, 3), (4, 3)\}$.

b) Um ponto $P(x, y)$ é solução do sistema se, e somente se, $P$ satisfaz cada uma das inequações desse sistema. A região do plano determinada pelas soluções do sistema é representada abaixo.




**52.** a) O centro C e o raio R da circunferência são (5, 8) e 4.

Se $r$ é tangente a $\lambda$, então a distância $d_{Cr}$ do centro C à reta $r$ é igual ao raio R, isto é:

$$\frac{|m \cdot 5 - 8 + 8|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 4 \Rightarrow |5m| = 4\sqrt{m^2 + 1}$$

$\therefore 25m^2 = 16(m^2 + 1) \Rightarrow m = \pm\dfrac{4}{3}$

Logo, o maior valor possível de $m$ é $\dfrac{4}{3}$.

b) O ponto T de tangência é a solução do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{4x}{3} - y + 8 = 0 \\ (x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9}{5} \text{ e } y = \frac{52}{5}$$

Logo, $T\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{52}{5}\right)$.

**53.** a) Comparando a equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$ com a equação geral

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, obtemos:

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = -4 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2 \text{ e } R = 2\sqrt{5}$$

Assim, o centro C e o raio R da circunferência $\lambda$ são (1, 2) e $2\sqrt{5}$.

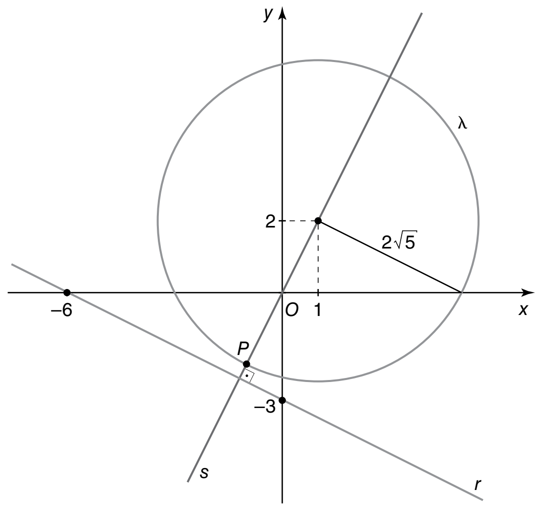
O coeficiente angular $m_s$ da reta $s$ é o oposto do inverso do coeficiente angular $m_r$ da reta $r$, isto é:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

Com esse coeficiente angular e o ponto C(1, 2), obtemos a equação da reta $s$:

$y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow 2x - y = 0$

b) Esquematizamos:




Observamos que $P$, intersecção entre $\lambda$ e $s$ no terceiro quadrante, é o ponto pertencente a $\lambda$ mais próximo de $r$. Esse ponto é uma das soluções do sistema:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = 3$ e $y = 6)$ ou $(x = -1$ e $y = -2)$

Logo, $\lambda \cap s = \{(3, 6), (-1, -2)\}$.

Como o ponto $P$ pertence ao terceiro quadrante, concluímos que $P(-1, -2)$.

(*Nota*: Sem o auxílio do gráfico, deveríamos calcular a distância entre a reta $r$ e cada um dos pontos (3, 6) e (−1, −2) para determinar qual desses pontos está mais próximo de $r$.)

**54.** a) O centro $C_1$ e o raio $R_1$ de $\lambda_1$ são $C_1(1, -1)$ e $R_1 = 5$.

O centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$ são $C_2(5, 2)$ e $R_2 = 13$.

$$\text{Temos: } \begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + [2 - (-1)]^2} = 5 \\ R_1 + R_2 = 18 \\ |R_1 - R_2| = 8 \end{cases}$$

Assim, $d_{C_1C_2} < |R_1 - R_2|$. Logo, $\lambda_1$ é interior a $\lambda_2$.

b) Pelo método da redução:

$x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + (y^2 - 2y) = 24$

$\therefore x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 24 + 1 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 25$

Logo, o centro $C_1$ e o raio $R_1$ de $\lambda_1$ são $C_1(0, 1)$ e $R_1 = 5$.

O centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$ são $C_2(-3, 5)$ e $R_2 = 10$.

$$\text{Temos: } \begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (5 - 1)^2} = 5 \\ R_1 + R_2 = 15 \\ |R_1 - R_2| = 5 \end{cases}$$

Assim, $d_{C_1C_2} = |R_1 - R_2|$. Logo, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são tangentes interiormente.

**c)** O centro $C_1$ e o raio $R_1$ de $\lambda_1$ são $C_1(0, 0)$ e $R_1 = \sqrt{5}$.
O centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$ são $C_2(3, 6)$ e $R_2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Temos: $\begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\ R_1 + R_2 = 3\sqrt{5} \end{cases}$

Assim, $d_{C_1C_2} = R_1$ e $R_2$. Logo, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são tangentes exteriormente.

**d)** Pelo método da redução, temos:
$x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x^2 - 8x) + y^2 = -7$
$\therefore (x^2 - 8x + 16) + y^2 = -7 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 9$
O centro $C_1$ e o raio $R_1$ e $\lambda_1$ são $C_1(0, 3)$ e $R_1 = 1$.
O centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$ são $C_2(4, 0)$ e $R_2 = 3$.

Temos: $\begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = 5 \\ R_1 + R_2 = 4 \end{cases}$

Assim, $d_{C_1C_2} > R_1 + R_2$. Logo, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são exteriores.

**e)** Pelo método da redução, temos:
$x^2 + y^2 - 8x - 18y + 81 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 8x) + (y^2 - 18y) = -81$
$\therefore (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 18y + 81) =$
$= -81 + 16 + 81$
$\therefore (x - 4)^2 + (y - 9)^2 = 16$
Assim, o centro $C_1$ e o raio $R_1$ de $\lambda_1$ são $C_1(4, 9)$ e $R_1 = 4$.
O centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$ são $C_2(6, 8)$ e $R_2 = 10$.

Temos: $\begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(6 - 4)^2 + (8 - 9)^2} = \sqrt{5} \\ R_1 + R_2 = 14 \\ |R_1 - R_2| = 6 \end{cases}$

Assim, $d_{C_1C_2} < |R_1 - R_2|$. Portanto, $\lambda_1$ é interior a $\lambda_2$.

**f)** Pelo método da redução, temos:
$4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 11 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + \frac{11}{4} = 0$
$\therefore (x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) = -\frac{11}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = -\frac{11}{4} + 4 + 1$
$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4}$
O centro $C_1$ e o raio $R_1$ de $\lambda_1$ são $C_1(2, 1)$ e $R_1 = \frac{3}{2}$.
O centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$ são $C_2(2, 1)$ e $R_2 = \frac{3}{2}$.
Como $d_{C_1C_2} = 0$ e $R_1 = R_2$, as circunferências coincidem.

**55.** O centro $C_1$ e o raio $R_1$ de $\lambda_1$ são $(2, 1)$ e 2; e o centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$ são $(6, -2)$ e $k$. Assim, respondemos aos itens:

**a)** Para que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sejam tangentes exteriores, devemos ter: $C_1C_2 = R_1 + R_2$, isto é:
$\sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = 2 + k \Rightarrow 5 = 2 + k$
$\therefore k = 3$

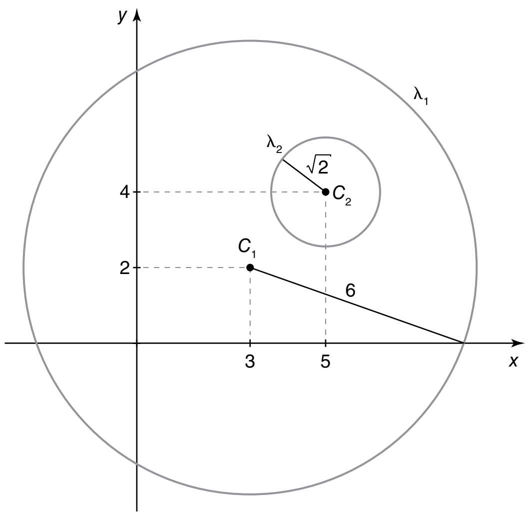
**b)** Para que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sejam tangentes interiores, devemos ter: $C_1C_2 = |R_1 - R_2|$, isto é:
$\sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = |2 - k| \Rightarrow 5 = |2 - k|$
$\therefore k = -3$ ou $k = 7$
Como, por hipótese, $k$ é positivo, só nos convém $k = 7$.

**c)** Para que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sejam exteriores, devemos ter: $C_1C_2 > R_1 + R_2$, isto é:
$\sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} > 2 + k \Rightarrow 5 > 2 + k$
$\therefore k < 3$
Como, por hipótese, $k$ é positivo, temos $0 < k < 3$.

**d)** Para que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sejam secantes, devemos ter: $|R_1 - R_2| < C_1C_2 < R_1 + R_2$, isto é:
$|2 - k| < \sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} < 2 + k \Rightarrow$
$\Rightarrow |2 - k| < 5 < 2 + k$
$\therefore \begin{cases} |2 - k| < 5 \\ 5 < 2 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 < 2 - k < 5 \\ 3 < k \end{cases}$
$\therefore \begin{cases} -3 < k < 7 \\ k > 3 \end{cases} \Rightarrow 3 < k < 7$

**e)** Para que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sejam interiores, devemos ter: $C_1C_2 < |R_1 - R_2|$, isto é:
$\sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} < |2 - k| \Rightarrow 5 < |2 - k|$
$\therefore k < -3$ ou $k > 7$
Como, por hipótese, $k$ é positivo, só nos convém $k > 7$.

**56. a)** Temos que $C_1C_2 < |R_1 - R_2|$; logo, $C_1$ e $C_2$ são interiores.
Graficamente:




**b)** O coeficiente angular $m_r$ da reta $r$ que passa por $C_1$ e $C_2$ é dado por:
$m_r = \frac{4 - 2}{5 - 3} = 1$
Com esse coeficiente angular e o ponto $C_1(3, 2)$, obtemos a equação de $r$:
$y - 2 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 1$

**c)** Os pontos de intersecção entre $r$ e $\lambda_2$ são as soluções do sistema:
$\begin{cases} y = x - 1 \\ (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x = 6$ e $y = 5)$ ou $(x = 4$ e $y = 3)$
Logo, $\lambda_2 \cap r = \{(6, 5), (4, 3)\}$.

**d)** Pelo gráfico do item **a**, constatamos que entre os pontos $(6, 5)$ e $(4, 3)$, o mais próximo de $\lambda_1$ é $(6, 5)$; logo, $P(6, 5)$.
*Nota:* Sem o auxílio do gráfico, deveríamos calcular a distância entre a circunferência $\lambda_1$ e cada um dos pontos $(6, 5)$ e $(4, 3)$ para determinar qual desses pontos está mais próximo de $\lambda_1$.

**57.** a) Antena A:
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 400$
Antena B:
$(x - 6)^2 + (y - 10)^2 = 400$

b) A distância entre os centros das circunferências é dada por:
$AB = \sqrt{(1 - 6)^2 + (2 - 10)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2}$
$\therefore AB = \sqrt{89}$
Portanto, o comprimento do segmento, em quilômetro, é: $2 \cdot 20 - \sqrt{89} = 40 - \sqrt{89}$

**58.** a) A intersecção de $\lambda_1$ com $\lambda_2$ é o conjunto solução do sistema:
$$\begin{cases}(x - 2)^2 + y^2 = 10\\(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25\end{cases}$$
que equivale a
$$\begin{cases}x^2 - 4x + y^2 - 6 = 0 \quad \text{(I)}\\x^2 + 8x + y^2 + 6y = 0 \quad \text{(II)}\end{cases}$$
Subtraímos (II) de (I) membro a membro, obtendo:
$-12x - 6y - 6 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1 \quad \text{(III)}$
Substituindo (III) em (I), temos:
$x^2 - 4x + (-2x - 1)^2 - 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4x^2 + 4x + 1 - 6 = 0$
$\therefore 5x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$
- Para $x = 1$, temos da equação (III): $y = -3$
- Para $x = -1$, temos da equação (III): $y = 1$

Portanto, $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{(1, -3), (-1, 1)\}$.

b) O conjunto $\lambda_1 \cap \lambda_2$ é o conjunto solução do sistema:
$$\begin{cases}x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \quad \text{(I)}\\x^2 + y^2 - 10x - 4y + 11 = 0 \quad \text{(II)}\end{cases}$$
Fazendo (I) $-$ (II), temos:
$8x + 8y - 8 = 0 \Rightarrow x = 1 - y \quad \text{(III)}$
Substituindo (III) em (I), temos:
$(1 - y)^2 + y^2 - 2 \cdot (1 - y) + 4y + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - 2y + y^2 + y^2 - 2 + 2y + 4y + 3 = 0$
$\therefore 2y^2 + 4y + 2 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0$
$\therefore (y + 1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1$
Para $y = -1$, temos da equação (III): $x = 2$
Portanto, $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{(2, -1)\}$.

c) A intersecção $\lambda_1 \cap \lambda_2$ é o conjunto solução do sistema:
$$\begin{cases}x^2 + (y - 1)^2 = 2\\x^2 + y^2 - 8x - 10y + 31 = 0\end{cases}$$
que equivale a
$$\begin{cases}x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \quad \text{(I)}\\x^2 + y^2 - 8x - 10y + 31 = 0 \quad \text{(II)}\end{cases}$$
Fazendo (I) $-$ (II), obtemos:
$8y + 8x - 32 = 0 \Rightarrow y = 4 - x \quad \text{(III)}$
Substituindo (III) em (I), obtemos:
$x^2 + (4 - x)^2 - 2(4 - x) - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 - 8 + 2x - 1 = 0$
$\therefore 2x^2 - 6x + 7 = 0$
$\Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -20 < 0$
Como $\Delta < 0$, concluímos que $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \varnothing$.

**59.** As intersecções das circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são as soluções do sistema:
$$\begin{cases}(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 85\\(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 34\end{cases}$$
que equivale a $\begin{cases}x^2 + 12x + y^2 - 8y - 33 = 0 \quad \text{(I)}\\x^2 + 4x + y^2 - 6y - 21 = 0 \quad \text{(II)}\end{cases}$

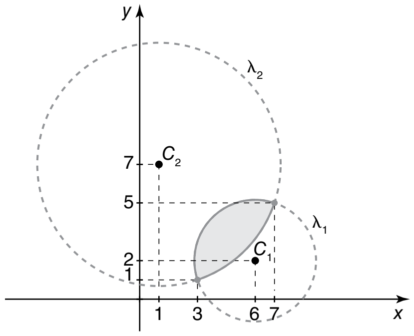
Fazendo (I) $-$ (II), obtemos:
$8x - 2y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4x - 6 \quad \text{(III)}$
Substituindo (III) em (I), temos:
$x^2 + 12x + (4x - 6)^2 - 8 \cdot (4x - 6) - 33 = 0$
$\therefore x^2 + 12x + 16x^2 - 48x + 36 - 32x + 48 - 33 = 0$
$\therefore 17x^2 - 68x + 51 = 0$
$\Delta = (-68)^2 - 4 \cdot 17 \cdot 51 = 1.156$
$\therefore x = \dfrac{68 \pm 34}{2 \cdot 17} \Rightarrow x = 3$ ou $x = 1$
- Para $x = 3$, temos da equação (III): $y = 6$
- Para $x = 1$, temos da equação (III): $y = -2$

Portanto, os pontos de intersecção das circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são $P(1, -2)$ e $Q(3, 6)$. A corda comum a essas circunferências é o segmento $\overline{PQ}$, cujo comprimento é:
$PQ = \sqrt{(3 - 1)^2 + [6 - (-2)]^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

**60.** a) Os pontos comuns a $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são as soluções do sistema:
$$\begin{cases}x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 = 0 \quad \text{(I)}\\x^2 + y^2 - 2x - 14y + 10 = 0 \quad \text{(II)}\end{cases}$$
Subtraindo, membro a membro, (II) de (I), temos:
$-10x + 10y + 20 = 0 \Rightarrow y = x - 2 \quad \text{(III)}$
Substituímos (III) em (I):
$x^2 + (x - 2)^2 - 12x - 4(x - 2) + 30 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$
$\therefore x = 7$ ou $x = 3$
Fazendo $x = 7$ na equação (III), obtemos $y = 5$.
Fazendo $x = 3$ na equação (III), obtemos $y = 1$.
Concluímos, então, que: $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{(7, 5), (3, 1)\}$

b) A região do plano cartesiano formado por todas as soluções $(x, y)$ do sistema
$$\begin{cases}x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 \leqslant 0 \quad \text{(I)}\\x^2 + y^2 - 2x - 14y + 10 \leqslant 0 \quad \text{(II)}\end{cases}$$
é a intersecção das regiões representadas por (I) e (II). Para representá-las, vamos obter o centro e o raio de $\lambda_1$ e de $\lambda_2$.
- Obtendo o centro $C_1$ e o raio $R_1$ de $\lambda_1$:
$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 12x + 36) + (y^2 - 4y + 4) =$
$= -30 + 36 + 4$
$\therefore (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 10$
Assim, $C_1(6, 2)$ e $R_1 = \sqrt{10}$.
- Obtendo o centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$:
$x^2 + y^2 - 2x - 14y + 10 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 14y + 49) = -10 + 1 + 49$
$\therefore (x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 40$
Assim, $C_2(1, 7)$ e $R_2 = 2\sqrt{10}$.

Concluímos, então, que todas as soluções (x, y) do sistema são representadas por:




## Exercícios complementares

### Exercícios técnicos

**1.** **a)** Para C(−4, −1) e R = 3, temos:

$[x - (-4)]^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$

Logo, a equação reduzida da circunferência é:

$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$

**b)** Para C(−5, 0) e $R = 2\sqrt{5}$, temos:

$[x - (-5)]^2 + (y - 0)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$

$\therefore (x + 5)^2 + y^2 = 4 \cdot 5$

Logo, a equação reduzida da circunferência é:

$(x + 5)^2 + y^2 = 20$

**c)** Para C(0, −8) e $R = \frac{1}{5}$, temos:

$(x - 0)^2 + [y - (-8)]^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

Logo, a equação reduzida da circunferência é:

$x^2 + (y + 8)^2 = \frac{1}{25}$

**d)** Para $C\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ e $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, temos:

$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left[y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\therefore \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9 \cdot 2}{4}$

Logo, a equação reduzida da circunferência é:

$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$

**2.** **a)** $x^2 + (y + 3)^2 = 1 \Rightarrow (x - 0)^2 + [y - (-3)]^2 = 1$

$\begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \\ R^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \\ R = 1 \end{cases}$

Logo, C(0, −3) e R = 1.

**b)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = 36 \Rightarrow$

$\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = 36$

$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{4} \\ R^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{4} \\ R = 6 \end{cases}$

Logo, $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ e R = 6.

**c)** $x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 8$

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ R^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ R = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Logo, C(0, 0) e $R = 2\sqrt{2}$.

**3.** A circunferência tem centro C(1, 2) e passa pela origem O(0, 0); logo, o raio R dessa circunferência é:

$R = d_{CO} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} =$

$\therefore R = \sqrt{5}$

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

**4.** As intersecções da circunferência λ com o eixo das abscissas são as soluções do sistema a seguir.

$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 81 & \text{(I)} \\ y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$(x - 5)^2 + (0 + 4)^2 = 81 \Rightarrow (x - 5)^2 = 65$

$\therefore x - 5 = \pm\sqrt{65} \Rightarrow x = 5 + \sqrt{65}$ ou $x = 5 - \sqrt{65}$

Portanto, os pontos de intersecção são $\left(5 - \sqrt{65}, 0\right)$ e $\left(5 + \sqrt{65}, 0\right)$.

**5.** **a)** Por ser o ponto médio de $\overline{AB}$, o centro C da circunferência é dado por: $C\left(\frac{0 + 6}{2}, \frac{0 + 8}{2}\right) = C(3, 4)$

O raio R da circunferência é a distância CA, isto é:

$R = CA = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5$

Logo, a equação reduzida é: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

**b)** Fazendo x = 0 na equação da circunferência, temos:

$(0 - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Rightarrow y^2 - 8y = 0$

$\therefore y = 0$ ou $y = 8$

Assim, os pontos comuns à circunferência e ao eixo das abscissas são (0, 0) e (0, 8); logo, o ponto pedido é P(0, 8).

**6.** Fazendo x = 0 na equação da reta, obtemos: y = 4

Fazendo y = 0 na equação da reta, obtemos: x = 2

Assim, os pontos de intersecção da reta com os eixos coordenados são A(0, 4) e B(2, 0).

O centro C da circunferência é o ponto médio de $\overline{AB}$ e o raio R é a distância CA, isto é:

$C\left(\frac{0 + 2}{2}, \frac{4 + 0}{2}\right) = C(1, 2)$ e

$R = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{5}$

Logo, a equação da circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

Alternativa **a**.

**7.** A medida do lado desse triângulo equilátero é 2; logo, a medida de sua altura é $\frac{2\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $\sqrt{3}$. Assim, o vértice do triângulo, pertencente ao eixo Oy, é o ponto $\left(0, \sqrt{3}\right)$.

O centro da circunferência inscrita em um triângulo qualquer é o incentro I (ponto de encontro das bissetrizes internas), que, no caso do triângulo equilátero, coincide com o baricentro G (ponto de encontro das medianas). Assim, o centro dessa circunferência é dado por:

$G\left(\frac{-1 + 1 + 0}{3}, \frac{0 + 0 + \sqrt{3}}{3}\right) = G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

O raio $R$ da circunferência é a medida do apótema do triângulo equilátero, que é a terça parte da altura, ou seja, $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Concluímos, então, que a equação da circunferência é:

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Alternativa **e**.

**8.** A circunferência passa pela origem $O(0, 0)$, tem raio 2 e seu centro é da forma $C(c, 2c)$; logo:

$CO = 2 \Rightarrow \sqrt{(c - 0)^2 + (2c - 0)^2} = 2$

$\therefore c^2 + 4c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Como, por hipótese, $c$ é positivo, temos que $c = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e, portanto, $C\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5c}\right)$.

Concluímos, então, que a equação da circunferência é: $\left(x - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 4$

Alternativa **e**.

**9.** Indicando por $M$ o ponto (2, 1) e por $C$ o centro (1, 0) da circunferência, temos que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{CM}$. Logo, o coeficiente angular $m_{AB}$ da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é o oposto do inverso do coeficiente angular $m_{CM}$ da reta $\overleftrightarrow{CM}$, isto é:

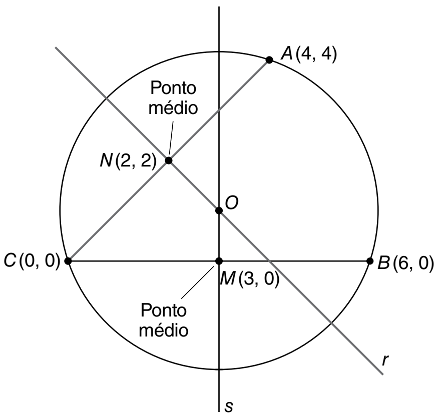
$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{CM}} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{\frac{1 - 0}{2 - 1}} = -1$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $M(2, 1)$, obtemos a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3$

Alternativa **c**.

**10.**




As equações das mediatrizes de $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são, respectivamente: $(r)$ $y = -x + 4$ e $(s)$ $x = 3$

O centro $O$ da circunferência é a solução do sistema

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

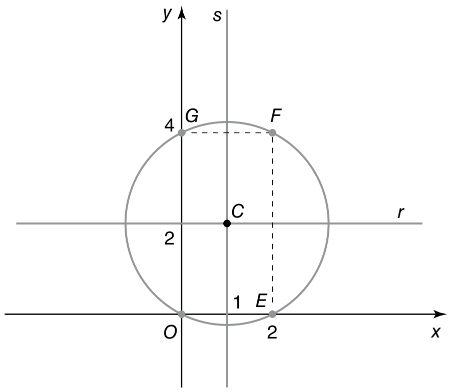
isto é: $O(3, 1)$

A medida $R$ do raio da circunferência é a distância entre $O$ e um dos três pontos $A$, $B$ ou $C$:

$R = OC = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10}$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$

**11.** O centro $C$ da circunferência equidista dos pontos $E(2, 0)$, $F(2, 4)$ e $G(0, 4)$; logo, $C$ pertence às mediatrizes de $\overline{EF}$, $\overline{EG}$ e $\overline{FG}$. Bastam duas dessas mediatrizes para a determinação de $C$; por exemplo, traçando as mediatrizes $r$ e $s$ dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$, respectivamente, temos o gráfico:




Logo, $C(1, 2)$.

Concluímos, então, que a distância pedida é a distância entre $C(1, 2)$ e $O(0, 0)$, isto é:

$CO = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{5}$

Alternativa **d**.

**Professor!**

É oportuno ressaltar aos alunos que nos valemos, nessa resolução, da particularidade de as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ serem vertical e horizontal, respectivamente. Sem essa particularidade, a resolução geral é apresentada a seguir.

*Resolução geral*:

O centro $C$ da circunferência equidista dos pontos $E(2, 0)$, $F(2, 4)$ e $G(0, 4)$; logo, $C$ pertence às mediatrizes de $\overline{EF}$, $\overline{EG}$ e $\overline{FG}$. Bastam as equações de duas dessas mediatrizes para a determinação de $C$:

- Obtendo a equação da mediatriz $r$ de $\overline{EF}$:

  O ponto médio $M$ de $\overline{EF}$ é dado por:

  $$M\left(\frac{2 + 2}{2}, \frac{0 + 4}{2}\right) = M(2, 2)$$

  A reta $\overleftrightarrow{EF}$ é vertical, pois $E$ e $F$ têm abscissas iguais; logo, a mediatriz $r$ é horizontal.

  Por ser horizontal e passar por $M(2, 2)$ a equação de $r$ é $y = 2$.

- Obtendo a equação da mediatriz $s$ de $\overline{FG}$:

  O ponto médio $N$ de $\overline{FG}$ é dado por:

  $$N\left(\frac{2 + 0}{2}, \frac{4 + 4}{2}\right) = N(1, 4)$$

  A reta $\overleftrightarrow{FG}$ é horizontal, pois $F$ e $G$ têm ordenadas iguais; logo, a mediatriz $s$ é vertical.

  Por ser vertical e passar por $N(1, 4)$ a equação de $s$ é $x = 1$.

Assim, o ponto $C$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Logo, $C(1, 2)$.

Concluímos, então, que a distância pedida é a distância entre $C(1, 2)$ e $O(0, 0)$, isto é:

$$CO = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

Alternativa **d**.

**12.** Tal equação representa um único ponto se, e somente se:
$n^2 - 9 = 0 \Rightarrow n = -3$ ou $n = 3$

**13.** Tal equação representa uma circunferência se, e somente se:
$p^2 - 16 > 0 \Rightarrow p < -4$ ou $p > 4$

**14.** Para que a equação represente uma circunferência, devemos ter:
$$75 - k^2 > 0 \Rightarrow -5\sqrt{3} < k < 5\sqrt{3}$$
Como $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, então, $5\sqrt{3} \approx 8{,}5$, logo temos que o maior inteiro $k$ que satisfaz a desigualdade é 8, que é um múltiplo de 4.
Alternativa **a**.

**15.** **a)** Comparando a equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ com a equação geral
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:
$$\begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = 4 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 & \text{(I)} \\ b = -2 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 1 & \text{(III)} \end{cases}$$
Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:
$(-1)^2 + (-2)^2 - R^2 = 1$
$\therefore R = 2$
Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(-1, -2)$ e raio $R = 2$.

**b)** Comparando a equação $x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$ com a equação geral
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:
$$\begin{cases} -2a = 0 \\ -2b = -4 \\ a^2 + b^2 - R^2 = -21 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{(I)} \\ b = 2 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = -21 & \text{(III)} \end{cases}$$
Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:
$0^2 + 2^2 - R^2 = -21$
$\therefore R = 5$
Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(0, 2)$ e raio $R = 5$.

**c)** Comparando a equação $x^2 + y^2 - 8x = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:
$$\begin{cases} -2a = -8 \\ -2b = 0 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 & \text{(I)} \\ b = 0 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$
Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:
$4^2 + 0^2 - R^2 = 0$
$\therefore R = 4$
Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(4, 0)$ e raio $R = 4$.

**d)** Temos $9x^2 + 9y^2 + 18x + 54y + 86 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y + \frac{86}{9} = 0$
Comparando a equação
$x^2 + y^2 + 2x + 6y + \frac{86}{9} = 0$ com a equação geral
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R_2 = 0$, temos:
$$\begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = 6 \\ a^2 + b^2 - R^2 = \frac{86}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 & \text{(I)} \\ b = -3 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = \frac{86}{9} & \text{(III)} \end{cases}$$
Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:
$(-1)^2 + (-3)^2 - R^2 = \frac{86}{9}$
$\therefore R = \frac{2}{3}$
Assim, concluímos que a circunferência tem centro $C(-1, -3)$ e raio $R = \frac{2}{3}$.

**16.** **a)** Temos:
$x^2 + y^2 + 12x + 2y + 26 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 + 12x) + (y^2 + 2y) = -26$
$\therefore (x^2 + 12x + 36) + (y^2 + 2y + 1) = -26 + 36 + 1$
Assim, a equação reduzida da circunferência é:
$(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 11$
Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C(-6, -1)$ e $R = \sqrt{11}$

**b)** Temos:
$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \Rightarrow (x^2) + (y^2 + 6y) = -5$
$\therefore (x^2) + (y^2 + 6y + 9) = -5 + 9$
Assim, a equação reduzida da circunferência é:
$x^2 + (y + 3)^2 = 4$
Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C(0, -3)$ e $R = 2$

**c)** Temos:
$x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 3x) + (y^2 - 2y) = -1$
$\therefore \left(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + (y^2 - 2y + 1) =$
$= -1 + \frac{9}{4} + 1$
Assim, a equação reduzida da circunferência é:
$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4}$
Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $R = \frac{3}{2}$

**d)** Para obter a equação reduzida, é mais cômodo trabalhar com os coeficientes de x e y unitários; por isso, vamos dividir por 3 ambos os membros da equação, obtendo:
$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y - \frac{4}{3} = 0$
Temos, então:
$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 2x) + \left(y^2 - \frac{4}{3}y\right) = \frac{4}{3}$
$\therefore (x^2 - 2x + 1) + \left(y^2 - 2y \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) =$
$= \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + 1$
Assim, a equação reduzida da circunferência é:
$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C\left(1, \frac{2}{3}\right)$ e $R = \frac{5}{3}$

**e)** Para obter a equação reduzida, é mais cômodo trabalhar com os coeficientes de x e y unitários; por isso, vamos multiplicar por 5 ambos os membros da equação, obtendo:
$x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$

Temos, então:
$x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 10x) + (y^2 + 10y) = -25$
$\therefore (x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 10y + 25) =$
$= -25 + 25 + 25$
Assim, a equação reduzida da circunferência é:
$(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$
Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são: $C(5, -5)$ e $R = 5$

**17.** O centro C da circunferência é o ponto médio de $\overline{AB}$ e o raio R é a distância CA, isto é:
$C\left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = C\left(4, \frac{7}{2}\right)$ e
$R = \sqrt{(4-2)^2 + \left(\frac{7}{2} - 5\right)^2} = \frac{5}{2}$
Logo, a equação da circunferência é:
$(x-4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 7y + 22 = 0$
Alternativa **d**.

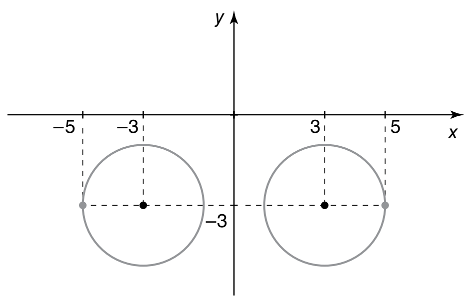
**18.** O centro C da circunferência λ é o ponto em que a mediatriz de $\overline{AB}$ intercepta o eixo das ordenadas.
Lembrando que todos os pontos $P(x, y)$ da mediatriz $r$ de um segmento $\overline{AB}$ equidistam de A e B, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é dada por:
$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$
$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 =$
$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$
$\therefore x - y + 2 = 0$
Então, substituímos x por 0 na equação da mediatriz e encontramos a ordenada de C:
$0 - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2$
Dessa forma, o centro da circunferência λ é $C(0, 2)$ e seu raio R é a distância entre $A(3, 4)$ e $C(0, 2)$, ou seja:
$R = \sqrt{(0-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}$
$\therefore R = \sqrt{13}$
Logo, uma equação dessa circunferência é:
$(x-0)^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 13$
$\therefore x^2 + y^2 - 4y - 9 = 0$
Portanto, a equação geral de λ é:
$x^2 + y^2 - 4y - 9 = 0$

**19.** O centro C da circunferência é o ponto de intersecção entre a mediatriz de $\overline{AB}$ e a bissetriz dos quadrantes pares, cuja equação é $x + y = 0$.
Os pontos $P(x, y)$ da mediatriz $r$ de um segmento $\overline{AB}$ equidistam de A e B; assim, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é dada por:
$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-11)^2 + [y-(-2)]^2}$
$\therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 =$
$= x^2 - 22x + 121 + y^2 + 4y + 4$
$\therefore 3x - y - 20 = 0$
Então, as coordenadas de C são a solução do sistema:
$\begin{cases} 3x - y - 20 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ e } y = -5$
Dessa forma, o centro da circunferência é $C(5, -5)$.

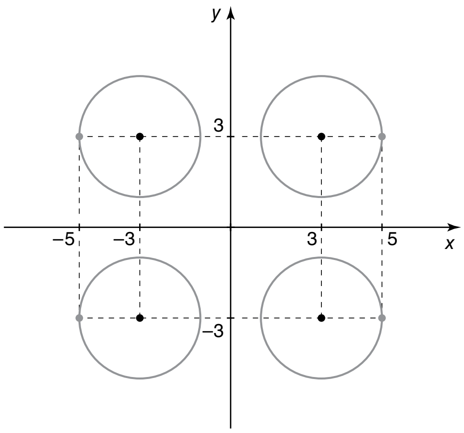
**20.** Por pertencer à bissetriz dos quadrantes ímpares, o centro C é um ponto da forma $C(c, c)$; logo:
$CA = CB \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(c-6)^2 + (c-7)^2} = \sqrt{[c-(-1)]^2 + (c-0)^2}$
$\therefore (c-6)^2 + (c-7)^2 = (c+1)^2 + c^2 \Rightarrow c = 3$
Assim, o centro da circunferência é $C(3, 3)$ e o raio R é dado por:
$$R = CA = \sqrt{(3-6)^2 + (3-7)^2} = 5$$
Concluímos, então, que a equação da circunferência é: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$

**21.** O centro C da circunferência λ é o ponto de intersecção entre a mediatriz de $\overline{AB}$ e a reta de equação $y = 2x - 1$.
Lembrando que todos os pontos $P(x, y)$ da mediatriz $r$ de um segmento $\overline{AB}$ equidistam de A e B, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é dada por:
$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$
$\therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 =$
$= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$
$\therefore x - y = 0$
Então, as coordenadas de C são a solução do sistema:
$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1$
Dessa forma, o centro da circunferência λ é $C(1, 1)$ e seu raio R é a distância entre $A(2, 3)$ e $C(1, 1)$, ou seja:
$R = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}$
$\therefore R = \sqrt{5}$
Assim:
$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 5$
$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
Portanto, a equação geral de λ é:
$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

**22.** **a)** Para $x \geq 0$, temos:
$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) = -14 + 9 + 9$
$\therefore (x-3)^2 + (y+3)^2 = 4 \quad \text{(I)}$
Essa equação representa uma circunferência de centro $C_1(3, -3)$ e raio $R_1 = 2$.
Para $x < 0$, temos:
$x^2 + y^2 + 6x + 6y + 14 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) = -14 + 9 + 9$
$\therefore (x+3)^2 + (y+3)^2 = 4 \quad \text{(II)}$
Essa equação representa uma circunferência de centro $C_2(-3, -3)$ e raio $R_2 = 2$.
Assim, a representação pedida é a reunião das circunferências de equações (I) e (II), isto é:



b) Para $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, temos:
$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 4$ (I)
Essa equação representa uma circunferência de centro $C_1(3, -3)$ e raio $R_1 = 2$.
Para $x \geqslant 0$ e $y < 0$, temos:
$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$ (II)
Essa equação representa uma circunferência de centro $C_2(3, 3)$ e raio $R_2 = 2$.
Para $x < 0$ e $y \geqslant 0$, temos:
$x^2 + y^2 + 6x + 6y + 14 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4$ (III)
Essa equação representa uma circunferência de centro $C_3(-3, -3)$ e raio $R_3 = 2$.
Para $x < 0$ e $y < 0$, temos:
$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 14 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$ (IV)
Essa equação representa uma circunferência de centro $C_4(-3, 3)$ e raio $R_4 = 2$.
Assim, a representação pedida é a reunião das circunferências de equações (I), (II), (III) e (IV), isto é:




**23.** Comparando a equação $x^2 + y^2 - 16x + my + n = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, obtemos:

$$\begin{cases} -2a = -16 & \text{(I)} \\ -2b = m & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - 1^2 = n & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) e (II), obtemos: $a = 8$ e $b = -\frac{m}{2}$; logo, o centro $D$ de $\lambda$ é $D\left(8, -\frac{m}{2}\right)$.

O ponto médio $M$ de $\overline{BC}$ é dado por:

$$M\left(\frac{2 + 6}{2}, \frac{4 + 2}{2}\right) = M(4, 3).$$

Como os pontos $D$, $A$ e $M$ estão alinhados, temos:

$$\begin{vmatrix} 8 & -\frac{m}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -12$$

Com esse valor de $m$, obtemos do sistema anterior:
$a = 8$, $b = 6$ e $n = 99$
Alternativa **b**.

**24.** a) Não é equação de uma circunferência, pois os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são diferentes: $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}\right)$

b) Como os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são iguais e não nulos, o coeficiente de $xy$ é igual a zero, pelo método da redução, temos:
$-x^2 - y^2 + 6x + 4y - 10 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 10 = 0$
$\therefore (x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -10 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -10 + 9 + 4$
$\therefore (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$
que é uma equação da circunferência de centro $C(3, 2)$ e raio $R = \sqrt{3}$.

c) Temos:
$(2x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 + 2x + 8y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 + 2x + 8y = 0$
$\therefore 4x^2 + 4y^2 - 6x + 8 = 0$
Como os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são iguais e não nulos, o coeficiente de $xy$ é igual a zero, pelo método da redução, temos:
$4x^2 + 4y^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2 = 0$
$\therefore \left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + y^2 = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16}\right) + y^2 = -2 + \frac{9}{16}$
$\therefore \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = -\frac{23}{16}$
que não é equação de uma circunferência.

d) Não é equação de circunferência, pois o coeficiente de $xy$ é diferente de zero.

e) Temos:
$(2x + y)^2 + (x - 2y)^2 - 10x - 20y + 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 +$
$+ 4xy + y^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$
$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$
Como os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são iguais e não nulos, o coeficiente de $xy$ é igual a zero, pelo método da redução, temos:
$5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
$\therefore (x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -1 + 1 + 4$
$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
que é uma equação da circunferência de centro $C(1, 2)$ e raio $R = 2$.

**25.** Como os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ devem ser iguais e não nulos, deduzimos que $p = 3$. Temos, então:
$3x^2 + 3y^2 - 6x + qy + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + \frac{q}{3}y + 1 = 0$
$\therefore (x^2 - 2x) + \left(y^2 + \frac{q}{3}y\right) = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 2x + \mathbf{1}) + \left(y^2 + 2y \cdot \frac{q}{6} + \frac{q^2}{36}\right) =$
$= -1 + \mathbf{1} + \frac{q^2}{36}$
$\therefore (x - 1)^2 + \left(y + \frac{q}{6}\right)^2 = \frac{q^2}{36}$
Essa equação representa uma circunferência se, e somente se:
$\frac{q^2}{36} > 0 \Rightarrow q \neq 0$
Portanto, para que a equação represente uma circunferência, devemos ter $p = 3$ e $q \neq 0$.

**26.** A equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y + k = 0$ satisfaz as condições (I) e (II) necessárias para que ela represente uma circunferência, isto é, os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ são iguais e não nulos, e o coeficiente de $xy$ é zero. Essas duas condições não bastam; além delas, deve ser obedecida a condição (III), isto é, na equação reduzida, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = q$, o número $q$ deve ser positivo.
Escrevendo a equação na forma reduzida:
$x^2 + y^2 - 4x + 8y + k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = -k + 4 + 16$
$\therefore (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20 - k$
Impondo a condição (III), temos que: $20 - k > 0$, ou seja, $k < 20$. Concluímos, então, que a equação representa uma circunferência se, e somente se, $k < 20$.
Alternativa **a**.

**27.** Observamos que para $p = 0$, as equações não representam uma circunferência, logo, devemos ter $p$ diferente de zero. Assim:

$$\begin{cases} x = 5 + 2 \text{ sen } t \\ y = 1 + p \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - 5}{2} = \text{sen } t \\ \dfrac{y - 1}{p} = \cos t \end{cases}$$

Quadrando ambos os membros de cada equação do sistema, temos:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x - 5}{2}\right)^2 = \text{sen}^2\, t \\ \left(\dfrac{y - 1}{p}\right)^2 = \cos^2 t \end{cases}$$

Adicionando membro a membro, chegamos a:

$$\left(\frac{x - 5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y - 1}{p}\right)^2 = \text{sen}^2\, t + \cos^2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(x - 5)^2 + \frac{1}{p^2}(y - 1)^2 = 1$$

Essa equação representará uma circunferência se, e somente se:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \pm 2$$

Para qualquer um desses valores de $p$ a equação representa uma circunferência de centro (5, 1) e raio 1. Logo, o centro de $\lambda$ pertence ao primeiro quadrante e $|p| = 2$.
Alternativa **c**.

**28.** **a)** Como $0^2 + 0^2 - 8 \cdot 0 + 7 = 7 > 0$, o ponto P é exterior à circunferência $\lambda$.

**b)** Como $(-3)^2 + 3^2 = 18 > 15$, o ponto $P$ é exterior à circunferência $\lambda$.

**c)** Como $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4} - 1\right)^2 = \dfrac{5}{8} < \dfrac{4}{3}$, o ponto P é interior à circunferência $\lambda$.

**29.** O centro da circunferência é o ponto $C(2, 1)$ e o raio $R$ é a distância entre os pontos $C(2, 1)$ e $D(2, -2)$, isto é:
$R = CD = \sqrt{(2 - 2)^2 + [1 - (-2)]^2} = 3$
Logo, a equação reduzida da circunferência é:
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

**a)** Como visto acima a equação da circunferência é $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$, logo, a alternativa **a** é falsa.

**b)** O interior da circunferência é representado pela inequação $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 < 9$, ou seja, $x^2 - 4x + y^2 - 2y < 4$, logo, a alternativa **b** é falsa.

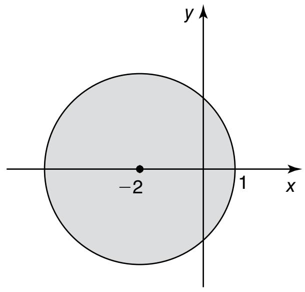
**c)** O interior da circunferência é representado pela inequação $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 < 9$, ou seja, $x^2 - 4x + y^2 - 2y < 4$, logo, a alternativa **c** é verdadeira.

**d)** O exterior da circunferência é representado pela inequação $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 > 9$, ou seja, $x^2 - 4x + y^2 - 2y > 4$, logo, a alternativa **d** é falsa.

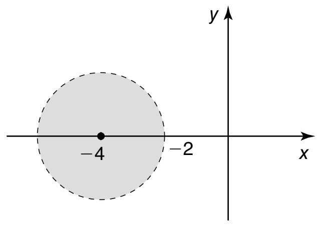
**e)** Substituindo x por 5 e y por $-1$, obtemos $(5 - 2)^2 + (-1 - 1)^2 = 13 \neq 9$, portanto o ponto $(5, -1)$ não pertence à circunferência.

Alternativa **c**.

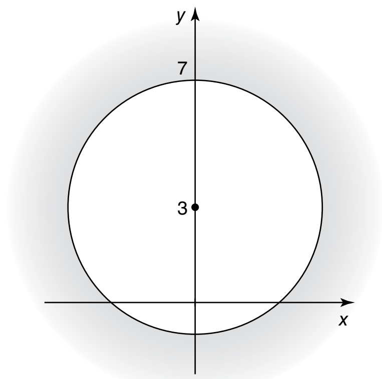
**30.** **a)** $(x + 2)^2 + y^2 \leqslant 9$



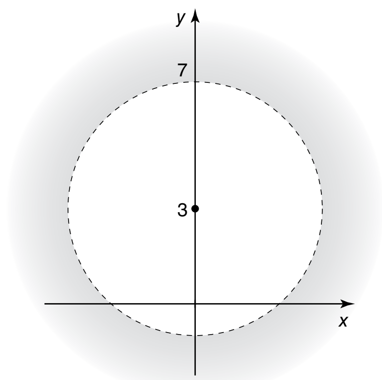

**b)** $x^2 + y^2 + 8x + 12 < 0 \Rightarrow (x^2 + 8x) + y^2 < -12$
$\therefore (x^2 + 8x + 16) + y^2 < -12 + 16$
$\therefore (x + 4)^2 + y^2 < 4$




**c)** $x^2 + (y - 3)^2 \geqslant 16$




**d)** $x^2 + y^2 - 6y - 7 > 0 \Rightarrow x^2 + (y^2 - 6y) > 7$
$\therefore x^2 + (y^2 - 6y + 9) > 7 + 9$
$\therefore x^2 + (y - 3)^2 > 16$



**31.** **a)** Queremos construir o gráfico cartesiano da região dos pontos (x, y), que são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x + 13 < 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 \geqslant 0 \end{cases}$$

Pelo método da redução, temos:

$x^2 + y^2 - 14x + 13 < 0 \Rightarrow (x^2 - 14x) + y^2 < -13$

$\therefore (x^2 - 14x + 49) + y^2 < -13 + 49$

$\therefore (x - 7)^2 + y^2 < 36$

Temos também:

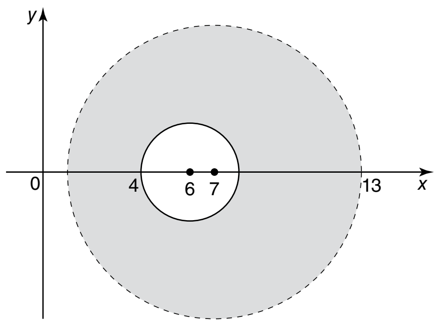
$x^2 + y^2 - 12x + 32 \geqslant 0 \Rightarrow (x^2 - 12x) + y^2 \geqslant -32$

$\therefore (x^2 - 12x + 36) + y^2 \geqslant -32 + 36$

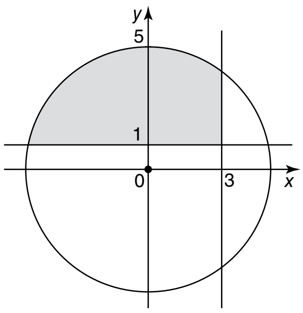
$\therefore (x - 6)^2 + y^2 \geqslant 4$

Assim, o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} (x - 7)^2 + y^2 < 36 \\ (x - 6)^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$$

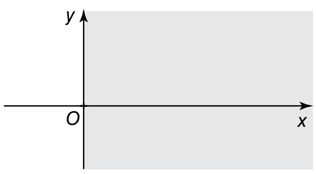



**b)** A intersecção das regiões do sistema de inequações é:

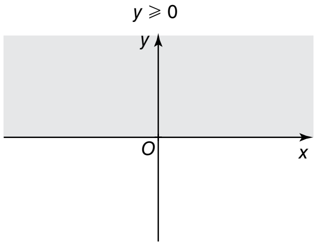



**32.** Observe a representação no plano cartesiano de cada uma das desigualdades:

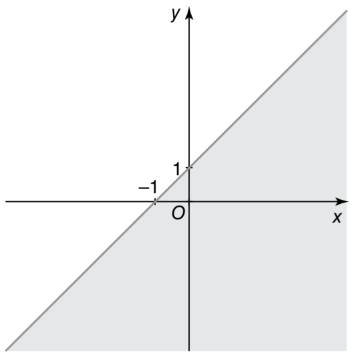
(I)
$x \geqslant 0$



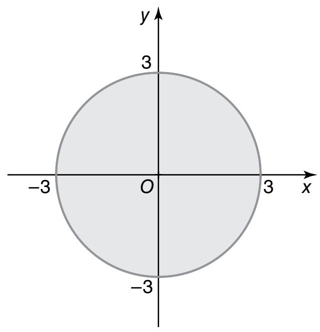

(II)
$y \geqslant 0$




(III)
$x - y + 1 \geqslant 0$



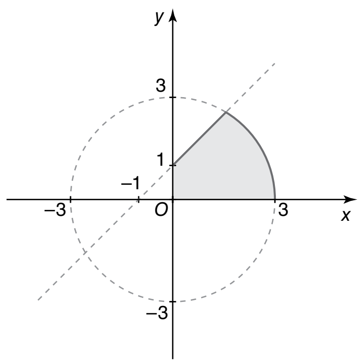

(IV)
$x^2 + y^2 \leqslant 9$




A intersecção das quatro regiões vistas anteriormente representa o conjunto das soluções do sistema de inequações:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$$

Ou seja:




Alternativa **a**.

**33** **a)** Temos:

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) = -2 + 4 + 4$

$\therefore (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 6$

Assim, a circunferência tem centro C(−2, 2) e raio $R = \sqrt{6}$. Calculando a distância $d_{Cs}$, temos:

$$d_{Cs} = \frac{|2 \cdot (-2) + 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$

Como $d_{Cs} < R$, pois $0 < \sqrt{6}$, concluímos que s é secante a λ.

**b)** Temos:

$y = -x - 6 \Rightarrow x + y + 6 = 0$

A circunferência tem centro $C(2, -4)$ e raio $R = 2\sqrt{2}$. Calculando a distância $d_{Cs}$, temos:

$$d_{Cs} = \frac{|2 + (-4) + 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Como $d_{Cs} = R$, concluímos que s é tangente a $\lambda$.

**c)** Temos:

$x^2 + y^2 - 12x + 6y + 35 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 12x + 36) + (y^2 + 6y + 9) = -35 + 36 + 9$

$\therefore (x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 10$

Assim, a circunferência tem centro $C(6, -3)$ e raio $R = \sqrt{10}$. Calculando a distância $d_{Cs}$, temos:

$$d_{Cs} = \frac{|6 - 3 \cdot (-3) + 15|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|30|}{\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$$

Como $d_{Cs} > R$, pois $3\sqrt{10} > \sqrt{10}$, concluímos que s é exterior a $\lambda$.

**34.** Fazendo $x = 0$ na equação da reta, obtém-se $y = -2$; logo, $P(0, -2)$. A circunferência de centro P deve tangenciar o eixo das abscissas; logo, o raio R da circunferência é a distância do ponto P a esse eixo, ou seja, $R = 2$. Assim, temos que a equação reduzida da circunferência é $(x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 4$, que, na forma geral, é: $x^2 + y^2 + 4y = 0$

Alternativa **c**.

**35.** O raio da circunferência é igual à distância do centro à reta tangente, ou seja:

$$R = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|12|}{\sqrt{25}}$$

$\therefore R = \frac{12}{5}$

Assim, uma equação da circunferência é:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = \frac{144}{25}$$

**36.** Temos:

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -9 + 9 + 4$

$\therefore (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

O raio $R = 2$ da circunferência é igual à distância do centro $C(3, -2)$ à reta tangente, ou seja:

$$2 = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|1 + m|}{5}$$

$\therefore |1 + m| = 10 \Rightarrow 1 + m = -10$ ou $1 + m = 10$

$\therefore m = -11$ ou $m = 9$

Assim, as equações das retas são:

$3x + 4y - 11 = 0$ e $3x + 4y + 9 = 0$

**37.** Temos:

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 7 + 1 + 1$

$\therefore (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Logo, a circunferência tem centro $C(-1, 1)$ e raio $R = 3$.

Além disso, as equações das retas paralelas à reta s são da forma $3x + 4y + m = 0$, sendo $m$ um número real.

O raio da circunferência é igual à distância do centro à reta tangente, ou seja:

$$3 = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow 3 = \frac{|1 + m|}{\sqrt{25}}$$

$\therefore |1 + m| = 15 \Rightarrow 1 + m = -15$ ou $1 + m = 15$

$\therefore m = -16$ ou $m = 14$

Assim, as equações das retas são:

$3x + 4y - 16 = 0$ e $3x + y + 14 = 0$

**38.** Sendo o raio R da circunferência igual à distância entre o centro e a reta tangente $y = p$, paralela ao eixo das abscissas, temos:

$R = |y_C - p| \Rightarrow 3 = |5 - p|$

$\therefore 5 - p = -3$ ou $5 - p = 3$

$\therefore p = 8$ ou $p = 2$

**39.** Para que a reta tenha dois pontos distintos em comum com a circunferência, a distância entre o centro da circunferência e a reta deve ser menor que o raio. Como a reta de equação $x = k$ é paralela ao eixo das ordenadas, temos:

$|k - x_C| < R \Rightarrow |k - 4| < 8$

$\therefore -8 < k - 4 < 8 \Rightarrow -4 < k < 12$

**40.** Temos:

$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 5 + 4$

$\therefore x^2 + (y - 2)^2 = 9$

Assim, a circunferência tem centro $C(0, 2)$ e raio $R = 3$.

Além disso, as retas paralelas à reta de equação $y - 9 = 0$, ou seja, $y = 9$, têm equações da forma $x = k$, sendo $k$ um número real.

Para que a reta seja secante à circunferência, a distância entre o centro da circunferência e a reta deve ser menor que o raio. Como a reta de equação $y = k$ é paralela ao eixo das abscissas, temos:

$|k - y_C| < R \Rightarrow |k - 2| < 3$

$\therefore -3 < k - 2 < 3 \Rightarrow -1 < k < 5$

Assim, as equações das retas paralelas são da forma $y = k$ para todo real $k$ no intervalo $]-1, 5[$.

**41.** O centro C e o raio R da circunferência são $(0, -1)$ e 3.

A equação geral da reta $r$ é $mx - y + 4 = 0$.

A reta será secante à circunferência se a distância $d_{Cr}$ entre C e $r$ for menor que o raio R, isto é:

$$d_{Cr} < R \Rightarrow \frac{|m \cdot 0 - (-1) + 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} < 3$$

$$\therefore \frac{5}{\sqrt{m^2 + 1}} < 3$$

Como os dois membros da desigualdade são positivos, podemos quadrá-los e manter o sentido da desigualdade, obtendo:

$$\frac{25}{m^2 + 1} < 9$$

Como $m^2 + 1$ é um número positivo, podemos multiplicar os dois membros por $m^2 + 1$ e manter o sentido da desigualdade, obtendo:

$$25 < 9m^2 + 9 \Rightarrow m^2 > \frac{16}{9}$$

$$\therefore m < -\frac{4}{3} \text{ ou } m > \frac{4}{3}$$

Concluímos, então, que a reta é secante à circunferência para qualquer $m$ real, com $m < -\frac{4}{3}$ ou $m > \frac{4}{3}$.

**42.** O ponto $P$ pertence à circunferência $\lambda$, pois:
$(-2)^2 + 6^2 + 10 \cdot (-2) - 8 \cdot 6 + 28 = 0$
Para obter o centro $\lambda$, vamos representar sua equação na forma reduzida:
$x^2 + y^2 + 10x - 8y + 28 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) = -28 + 25 + 16$
$\therefore (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 13$
Assim, a circunferência tem centro $C(-5, 4)$.
Como $P$ é um ponto de $\lambda$, a reta $s$ é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Logo, o coeficiente angular de $s$ é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CP}$. Como $m_{CP} = \dfrac{6-4}{-2-(-5)} = \dfrac{2}{3}$, temos que $m_s = -\dfrac{3}{2}$.
Assim, como $s$ passa por $P(-2, 6)$, a equação dessa reta é dada por:
$y - 6 = -\dfrac{3}{2}[x - (-2)]$
Ou seja, uma equação da reta $s$ é: $3x + 2y - 6 = 0$

**43.** O ponto $P \notin \lambda$ e é exterior à circunferência $\lambda$, pois:
$(0 - 3)^2 + (2 - 2)^2 = 9 > 2$
Logo, há duas retas distintas que passam por $P$ e são tangentes a $\lambda$. Pelo menos uma dessas retas não é vertical e, portanto, tem equação da forma $y - 2 = m(x - 0)$, ou seja, $mx - y + 2 = 0$, com $m \in \mathbb{R}$.
A distância entre o centro de $\lambda$ e uma reta tangente é o raio da circunferência e, portanto:
$\dfrac{|m \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}$
$\therefore \dfrac{(3m)^2}{m^2+1} = 2 \Rightarrow 9m^2 = 2m^2 + 2$
$\therefore 7m^2 = 2 \Rightarrow m = -\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ ou $m = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$
Logo:
$-\dfrac{\sqrt{14}}{7}x - y + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{14}\,x + 7y - 14 = 0$ e
$\dfrac{\sqrt{14}}{7}x - y + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{14}\,x - 7y + 14 = 0$
Portanto, as equações das retas são:
$\sqrt{14}\,x + 7y - 14 = 0$ e $\sqrt{14}\,x - 7y + 14 = 0$

**44.** Para obter o centro e o raio $\lambda$, vamos representar sua equação na forma reduzida:
$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = 3 + 16 + 1$
$\therefore (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 20$
Assim, a circunferência tem centro $C(4, -1)$ e raio $R = \sqrt{20}$.
O ponto $P \notin \lambda$ e é exterior à circunferência $\lambda$, pois:
$(-1 - 4)^2 + (-1 + 1)^2 = 25 > 20$
Logo, há duas retas distintas que passam por $P$ e tangenciam $\lambda$. Pelo menos uma dessas retas não é vertical e, portanto, tem equação da forma $y - (-1) = m(x - (-1))$, ou seja, $mx - y + m - 1 = 0$, com $m \in \mathbb{R}$.
A distância entre o centro de $\lambda$ e uma reta tangente é o raio da circunferência e, portanto:
$\dfrac{|m \cdot 4 - 1 \cdot (-1) + m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{20}$
$\therefore \dfrac{(5m)^2}{m^2+1} = 20 \Rightarrow 25m^2 = 20m^2 + 20$
$\therefore m^2 = 4 \Rightarrow m = -2$ ou $m = 2$
Logo:
$-2x - y + (-2) - 1 = 0 \Rightarrow 2x + y + 3 = 0$ e
$2x - y + 2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$
Portanto, as equações das retas são:
$2x + y + 3 = 0$ e $2x - y + 1 = 0$

**45.** Os coeficientes angulares de $r$ e $s$ são diferentes, $1 \neq -\sqrt{3}$, logo, $r$ e $s$ são retas concorrentes.
Para descobrir a posição das retas em relação à circunferência $C$, necessitamos do centro $E$ e do raio $R$ de $C$ e, por isso, vamos determiná-los:
$x^2 + 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1$
$\therefore (x + 1)^2 + y^2 = 1$
Logo, $E(-1, 0)$ e $R = 1$.
Calculando a distância $d_{Er}$ do centro $E$ à reta $r$, temos:
$\dfrac{|-1 - 0 + 1 + \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 1$
Como a distância $d_{Er}$ é igual ao raio da circunferência $C$, concluímos que $r$ é tangente a $C$.
Calculando a distância $d_{Es}$ do centro $E$ à reta $s$, temos:
$\dfrac{|\sqrt{3} \cdot (-1) + 0 - 2 + \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = 1$
Como a distância $d_{Es}$ é igual ao raio da circunferência $C$, concluímos que $s$ é tangente a $C$.
Resumindo, $r$ e $s$ são concorrentes e ambas são tangentes a $C$.
Alternativa **e**.

**46.** **a)** Indicando por $t$ a reta pedida, temos que o coeficiente angular $m_t$ da reta $t$ é o oposto do inverso do coeficiente angular de $r$, isto é, $m_t = -\dfrac{1}{2}$. Com esse coeficiente angular e o ponto $A(0, 3)$, obtemos a equação da reta $t$:
$y - 3 = -\dfrac{1}{2} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + 3$

**b)** Observamos que o ponto $A(0, 3)$ pertence à reta $s$, pois, substituindo $x$ por 0 e $y$ por 3 na equação da reta $s$, obtemos:
$3 = 2 \cdot 0 + 3 \Rightarrow 3 = 3$
E que as retas $r$ e $s$ são paralelas, pois têm o mesmo coeficiente angular. Assim, o centro $C$ da circunferência é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, em que $B$ é o ponto de intersecção da reta $t$, obtida no item **a**, com a reta $r$. Para obter $B$, resolvemos o sistema:
$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{2} + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{8}{5} \text{ e } y = \dfrac{11}{5}$$
Logo: $B\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$ e $C\left(\dfrac{\frac{8}{5} + 0}{2}, \dfrac{\frac{11}{5} + 3}{2}\right) = C\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$
O raio $R$ da circunferência é a distância $CB$, isto é:
$R = CB = \sqrt{\left(\dfrac{8}{5} - \dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{11}{5} - \dfrac{13}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$
Concluímos, então, que a equação da circunferência é:
$\left(x - \dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{13}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{5}$

**47.** **a)** Sendo C o centro de uma das circunferências, temos que C equidista dos pontos $A(0, 0)$ e $B(2, 0)$; logo, C pertence à mediatriz $r$ de $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AB}$ é horizontal pois os pontos possuem mesma ordenada, então, seu ponto médio é $M(1, 0)$ e sua mediatriz é vertical de equação $x = 1$. Assim, o ponto C é da forma $C(1, c)$.

A distância $d_{Cr}$ entre C e $r$ deve ser igual à distância $d_{CA}$ entre C e A, isto é:

$d_{Cr} = d_{CA} \Rightarrow \dfrac{|1 - c + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{(1-0)^2 + (c-0)^2}$

$\therefore |3 - c| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + c^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (|3 - c|)^2 = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + c^2}\right)^2$

$\therefore 9 - 6c + c^2 = 2 + 2c^2 \Rightarrow c^2 + 6c - 7 = 0$

$\therefore c = 1$ ou $c = -7$

Concluímos, então, que os centros das circunferências são os pontos $C(1, 1)$ e $C'(1, -7)$.

**b)** Os raios $R$ e $R'$ das circunferências de centros $C(1, 1)$ e $C'(1, -7)$, respectivamente, são as distâncias $d_{CA}$ e $d_{C'A}$, isto é:

$R = d_{CA} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

e

$R' = d_{C'A} = \sqrt{(1-0)^2 + (-7-0)^2} = 5\sqrt{2}$

**48.** **a)** Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$\begin{cases} x + y - 3 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (I), temos:

$y = 3 - x$

Substituindo na equação (II), temos:

$x^2 + (3 - x)^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 - 2x - 1 = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Para $x = 2$, temos da equação (I): $y = 1$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(2, 1)\}$.

**b)** Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$\begin{cases} x - y - 4 = 0 & \text{(I)} \\ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 34 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (I), temos:

$y = x - 4$

Substituindo na equação (II), temos:

$(x - 4)^2 + (x - 4 - 2)^2 = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 - 12x + 36 = 34$

$\therefore x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 9$

- Para $x = 1$, temos da equação (I): $y = -3$
- Para $x = 9$, temos da equação (I): $y = 5$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(1, -3), (9, 5)\}$.

**c)** Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$\begin{cases} x + 3y - 11 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (I), temos:

$x = 11 - 3y$

Substituindo na equação (II), temos:

$(11 - 3y)^2 + y^2 - 2(11 - 3y) - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 121 - 66y + 9y^2 + y^2 - 22 + 6y - 9 = 0$

$\therefore y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow y = 3$

Para $y = 3$, temos da equação (I): $x = 2$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(2, 3)\}$.

**d)** Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$\begin{cases} 2x - y = 0 & \text{(I)} \\ (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (I), temos:

$y = 2x$

Substituindo na equação (II), temos:

$(x + 3)^2 + (2x - 1)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1 = 4$

$\therefore 5x^2 + 2x + 6 = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \varnothing$.

**e)** Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$\begin{cases} x = 3 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$ e $y = -1$ ou $x = 3$ e $y = 5$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(3, -1), (3, 5)\}$.

**49.** Para encontrar a intersecção da reta $\lambda$ com $s$, resolvemos o sistema:z

$\begin{cases} y = x + 4 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 4x - 12y + 38 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) na equação (II), temos:

$x^2 + (x + 4)^2 - 4x - 12(x + 4) + 38 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 8x + 16 - 4x - 12x - 48 + 38 = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$

- Para $x = 1$, temos da equação (I): $y = 5$
- Para $x = 3$, temos da equação (I): $y = 7$

Concluímos, assim, que os pontos de intersecção entre $s$ e $\lambda$ são $(1, 5)$ e $(3, 7)$.

O comprimento da corda que $\lambda$ determina sobre $s$ é a distância entre os pontos de intersecção, dada por:

$\sqrt{(1-3)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

**50.** O coeficiente angular da reta $s$ é:

$m_s = \dfrac{-6 - 0}{-4 - 14} = \dfrac{1}{3}$

Assim, uma equação de $s$ é:

$y - 0 = \dfrac{1}{3}(x - 14)$, ou seja: $x - 3y - 14 = 0$

O raio $R$ da circunferência $\lambda$ é a distância entre o centro $C(2, 1)$ e o ponto $P(5, 5)$, isto é:

$R = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$\therefore R = 5$

Logo, uma equação da circunferência é:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$\begin{cases} x - 3y - 14 = 0 & \text{(I)} \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (I), temos:

$x = 3y + 14$

Substituindo na equação (II), temos:

$(3y + 14 - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2 + 72y + 144 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0$

$\therefore y^2 + 7y + 12 = 0 \Rightarrow y = -4$ ou $y = -3$

- Para $y = -4$, temos da equação (I): $x = 2$
- Para $y = -3$, temos da equação (I): $x = 5$

Concluímos, assim, que $A(2, -4)$ e $B(5, -3)$.

Temos, então:

$AB = \sqrt{(5-2)^2 + [-3-(-4)]^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{10}$

Portanto, o comprimento da corda $\overline{AB}$ é $\sqrt{10}$.

**51.** Para determinar o centro $C$ e o raio $R$ da circunferência $\lambda$, vamos representar sua equação na forma reduzida:

$x^2 + y^2 - 10x = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25$

$\therefore (x - 5)^2 + y^2 = 25$

Logo, $C(5, 0)$ e $R = 5$.

Para calcular a distância entre o centro $C$ da circunferência e a reta $r$ de equação $y = mx$, vamos representar essa equação na forma geral: $mx - y = 0$

Assim, respondemos aos itens:

(01) V, como se observa na equação reduzida $(x - 5)^2 + y^2 = 25$.

(02) F, pois a distância $d_{Cr}$ entre o centro $C$ e a reta $r$ é menor que 5, como se observa no cálculo a seguir:

$$d_{Cr} = \frac{|10 \cdot 5 - 0|}{\sqrt{10^2 + (-1)^2}} = \frac{50}{\sqrt{101}}$$

(04) V, pois atribuindo-se o valor 0 (zero) à variável $x$ da equação da reta, obtém-se $y = 0$ para qualquer valor real de $m$.

(08) F, conforme a justificativa a seguir.

Os pontos de intersecção da reta com a circunferência são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ (x - 5)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow (x = 0 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 5 \text{ e } y = 5)$$

Logo, as extremidades da corda determinada na circunferência pela reta são os pontos $A(0, 0)$ e $B(5, 5)$.

O comprimento dessa corda é dado por:

$AB = \sqrt{(5 - 0)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(16) V, pois o raio $R$ é igual ao módulo da abscissa do centro $C$ da circunferência.

(32) V, conforme a justificativa a seguir.

Os pontos de intersecção da reta com a circunferência são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ (x - 5)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow (x = 0 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 1 \text{ e } y = 3)$$

Logo, os pontos comuns à reta e à circunferência são $D(0, 0)$ e $F(1, 3)$.

- A soma das alternativas corretas é:
  $01 + 04 + 16 + 32 = 53$

**52.** O ponto da circunferência de centro $C$ que está mais próximo de $P$ é uma das intersecções entre a reta $\overleftrightarrow{CP}$ e a circunferência $\lambda$. Da equação de $\lambda$, seu centro é $C(1, 2)$. Portanto, o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CP}$ é $m_{CP} = \frac{5 - 2}{7 - 1} = \frac{1}{2}$.

Assim, uma equação de $\overleftrightarrow{CP}$ é:

$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 7)$

ou seja: $x - 2y + 3 = 0$

Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 & \text{(I)} \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos:

$x = 2y - 3$

Substituindo na equação (II), temos:

$(2y - 3 - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20 \Rightarrow$

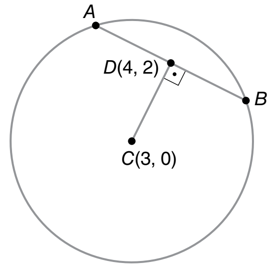
$\Rightarrow 4y^2 - 16y + 16 + y^2 - 4y + 4 = 20$

$\therefore y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 4$

- Para $y = 0$, temos da equação (I): $x = -3$
- Para $y = 4$, temos da equação (I): $x = 5$

Calculando a distância entre o ponto $P(7, 5)$ e cada um dos pontos $A(-3, 0)$ e $B(5, 4)$, concluímos que o ponto de $\lambda$ mais próximo de $P$ é $B(5, 4)$.

**53.** a) O centro da circunferência é o ponto $C(3, 0)$. Indicando por $D$ o ponto $(4, 2)$, temos que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são perpendiculares.




Assim, o coeficiente angular $m_{AB}$ da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é o oposto do inverso do coeficiente angular $m_{CD}$ da reta $\overleftrightarrow{CD}$, isto é:

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{CD}} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{\frac{2 - 0}{4 - 3}} = -\frac{1}{2}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $D(4, 2)$, obtemos a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$y - 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4) \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$

b) Os pontos $A$ e $B$ são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = 0 \text{ e } y = 4)$ ou $(x = 8 \text{ e } y = 0)$

Supondo que $A$ seja o ponto de menor abscissa, temos: $A(0, 4)$ e $B(8, 0)$

c) $AB = \sqrt{(8 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

**54.** Para obter o centro e o raio $\lambda$, vamos representar sua equação na forma reduzida:

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -8 + 1 + 9$

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$

Logo, o centro da circunferência é $C(1, 3)$ e seu raio é $R = \sqrt{2}$.

Para que $s$ seja secante a $\lambda$, a distância entre $s$ e $C(1, 3)$ deve ser menor que o raio de $\lambda$, ou seja:

$$\frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{|k - 2|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$$

$\therefore |k - 2| < 2 \Rightarrow -2 < k - 2 < 2$

$\therefore 0 < k < 4$

**55.** Para que a reta (s) $kx - y = 0$ seja tangente à circunferência $\lambda$, a distância entre $s$ e $C(-2, 6)$ deve ser igual ao raio de $\lambda$, ou seja:

$$\frac{|k \cdot (-2) - 1 \cdot 6|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{10} \Rightarrow \frac{|-2k - 6|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore \frac{(k + 3)^2}{k^2 + 1} = 10 \Rightarrow k^2 + 6k + 9 = 10k^2 + 10$$

$\therefore 9k^2 - 6k + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

**56.** Para obter o centro e o raio $\lambda$, vamos representar sua equação na forma reduzida:

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = -3 + 4 + 1$

$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Logo, o centro da circunferência é $C(2, 1)$ e seu raio é $R = \sqrt{2}$.

Para que (s) $x + y - k = 0$ seja exterior a $\lambda$, a distância entre s e C(2, 1) deve ser maior que o raio de $\lambda$, ou seja:

$$\frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{|3 - k|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

$\therefore |3 - k| > 2 \Rightarrow 3 - k < -2$ ou $3 - k > 2$

$\therefore k < 1$ ou $k > 5$

**57.** O centro C e o raio R de $\lambda$ são C(−1, 2) e $R = \sqrt{2}$; e a equação geral de $r$ é $mx - y + m = 0$.

Como $r$ é tangente a $\lambda$, temos que a distância $d_{Cr}$, entre C e $r$, é igual ao raio da circunferência, isto é:

$$\frac{|m \cdot (-1) - 2 + m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{2}$$

$\therefore 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow 2^2 = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 + 1}\right)^2$

$\therefore 4 = 2m^2 + 2 \Rightarrow m = \pm 1$

Como, por hipótese, $m$ é positivo, temos que $m = 1$. Assim, a equação da reta é $y = x + 1$.

O ponto de intersecção entre $r$ e $\lambda$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 1$$

Logo, o ponto de intersecção entre $r$ e $\lambda$ é (0, 1).

**58.** a) Inicialmente, vamos determinar o centro C e o raio R da circunferência $\lambda$. Para isso, representamos a equação de $\lambda$ na forma reduzida:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 = -\frac{9}{2} + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = \frac{9}{2}$$

Assim, C(3, 0) e $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

As equações reduzidas das retas não verticais que passam por O(0, 0) são da forma $y = mx$, com $m \in \mathbb{R}$. Uma reta $r$, dentre essas, será tangente a $\lambda$ se a distância $d_{Cr}$, entre C e $r$, for igual ao raio R de $\lambda$, isto é:

$$\frac{|m \cdot 3 - 0|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow |3m| = \frac{3\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore (|3m|)^2 = \left(\frac{3\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow 9m^2 = \frac{9m^2 + 9}{2}$$

$\therefore 18m^2 = 9m^2 + 9 \Rightarrow m = \pm 1$

Logo, as equações das retas $r$ e $s$ que passam por O e tangenciam $\lambda$ são: (r) $y = x$ e (s) $y = -x$

b) O ponto de tangência da reta (r) $y = x$ com a circunferência $\lambda$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ (x - 3)^2 + y^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ e } y = \frac{3}{2}$$

Ou seja, a reta $r$ tangencia $\lambda$ no ponto $P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

O ponto de tangência da reta (s) $y = -x$ com a circunferência $\lambda$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = -x \\ (x - 3)^2 + y^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ e } y = -\frac{3}{2}$$

Ou seja, a reta s tangencia $\lambda$ no ponto $Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Portanto, os pontos de tangência na circunferência $\lambda$ são:

$P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e $Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

**59.** a) Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = x & \text{(I)} \\ (x - 4)^2 + y^2 = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

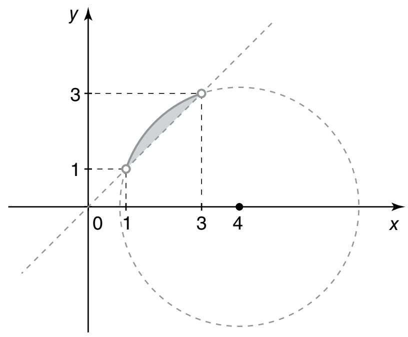
$(x + 4)^2 + x^2 = 10 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 = 10$

$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$

- Para $x = 1$, temos da equação (I): $y = 1$
- Para $x = 3$, temos da equação (I): $y = 3$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(1, 1), (3, 3)\}$.

b) $\begin{cases} y > x \\ (x - 4)^2 + y^2 \leqslant 10 \end{cases}$




**60.** a) Para encontrar a intersecção, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = x + 1 & \text{(I)} \\ x^2 + (y - 1)^2 = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

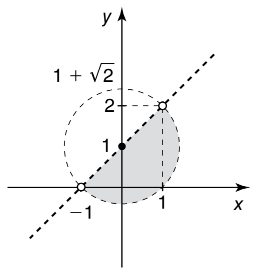
$x^2 + (x + 1 - 1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + x^2 = 2$

$\therefore x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

- Para $x = -1$, temos da equação (I): $y = 0$
- Para $x = 1$, temos da equação (I): $y = 2$

Concluímos, assim, que $s \cap \lambda = \{(-1, 0), (1, 2)\}$.

b) $\begin{cases} y \leqslant x + 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 < 2 \end{cases}$




**61.** Para que a reta tenha intersecção não vazia com a curva, o sistema abaixo deve ser possível, isto é, deve ter pelo menos uma solução.

$$\begin{cases} y = x + b & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$x^2 + (x + b)^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 + 2bx + b^2 - 8 = 0$

Para que essa equação polinomial do 2º grau na variável $x$ tenha raiz real, é necessário e suficiente que seu discriminante não seja negativo, isto é:

$(2b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (b^2 - 8) \geqslant 0 \Rightarrow b^2 \leqslant 16$

$\therefore |b| \leqslant 4$

Alternativa **e**.

**62.** O centro $M_1$ e o raio $R_1$ da circunferência $C_1$ são $M_1(0, 0)$ e $R_1 = 3$.
O centro $M_2$ da circunferência $C_2$, por estar na bissetriz dos quadrantes ímpares, é da forma $M_2(m, m)$; e o raio de $C_2$ é 3.
Como os centros das circunferências e o ponto de tangência são colineares, temos que a distância $d_{M_2M_1}$, entre $M_2$ e $M_1$, é 6, isto é:
$d_{M_2M_1} = 6 \Rightarrow \sqrt{(c-0)^2 + (c-0)^2} = 6$
$\therefore\ 2c^2 = 36 \Rightarrow c = \pm 3\sqrt{2}$
O gráfico informa que $c$ é positivo; logo, $c = 3\sqrt{2}$, portanto, o centro da circunferência $C_2$ é $M_2\left(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$.
Alternativa **c**.

**63.** Para que uma circunferência de centro $C(1, -1)$ e raio $R$ seja tangente à circunferência $\lambda$ de centro $Q(-2, 3)$ e raio $R' = 7 - 3 = 4$, devemos ter:
$d_{CQ} = R + R'$ ou $d_{CQ} = |R - R'|$
Temos:
$$\begin{cases} d_{CQ} = \sqrt{(-2-1)^2 + [3-(-1)]^2} = 5 \\ R + R' = R + 4 \\ |R - R'| = |R - 4| \end{cases}$$
Assim:
$d_{CQ} = R + R' \Rightarrow R + 4 = 5$
$\therefore\ R = 1$
Temos, ainda:
$d_{CQ} = |R - R'| \Rightarrow |R - 4| = 5$
$\therefore\ R - 4 = 5 \Rightarrow R = 9$ ou $R - 4 = -5 \Rightarrow R = -1$ (não convém, pois $R > 0$)
Portanto, as equações das circunferências são:
$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 81$

**64.** Temos que:
- O centro $C_1$ e o raio $R_1$ da circunferência $x^2 + y^2 = (1 + m)^2$ são $C_1(0, 0)$ e $R_1 = 1 + m$.
- O centro $C_2$ e o raio $R_2$ da circunferência $(x-8)^2 + (y+6)^2 = m^2$ são $C_2(8, -6)$ e $R_2 = m$.
- A distância $d_{C_1C_2}$, entre os centros $C_1$ e $C_2$, é dada por:
  $d_{C_1C_2} = \sqrt{(8-0)^2 + (-6-0)^2} = 10$

Para que essas circunferências sejam secantes, devemos ter:
$|R_1 - R_2| < d_{C_1C_2} < R_1 + R_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |1 + m - m| < 10 < 1 + m + m$
$\therefore\ 1 < 10 < 1 + 2m \Rightarrow m > \dfrac{9}{2}$
Alternativa **e**.

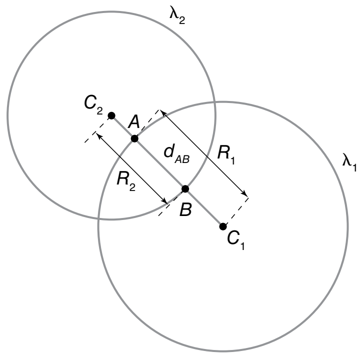
**65.** **a)** O centro $C_1$ de $\lambda_1$ é $C_1(4, -5)$, e o centro $C_2$ de $\lambda_2$ é $C_2(-5, 4)$. Assim, o coeficiente angular $m_{C_1C_2}$ da reta $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ é dado por:
$$m_{C_1C_2} = \frac{(-5-4)}{(4-(-5))} = -1$$
Com esse coeficiente angular e o ponto $C_1(4, -5)$, obtemos a equação da reta $\overleftrightarrow{C_1C_2}$:
$y - (-5) = -1 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = -x - 1$

**b)** Os pontos de intersecção de $r$ com $\lambda_1$ são as soluções do sistema:
$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ (x-4)^2 + (y+5)^2 = 98 \end{cases} \Rightarrow$$
$\Rightarrow (x = 11$ e $y = -12)$ ou $(x = -3$ e $y = 2)$
Logo, $r \cap \lambda_1 = \{(11, -12), (-3, 2)\}$.

**c)** Os pontos de intersecção de $r$ com $\lambda_2$ são as soluções do sistema:
$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ (x+5)^2 + (y-4)^2 = 72 \end{cases} \Rightarrow$$
$\Rightarrow (x = 1$ e $y = -2)$ ou $(x = -11$ e $y = 10)$
Logo, $r \cap \lambda_2 = \{(1, -2), (-11, 10)\}$.

**d)** Temos que:
- O centro $C_1$ e o raio $R_1$ de $\lambda_1$ são $C_1(4, -5)$ e $R_1 = 7\sqrt{2}$; e o centro $C_2$ e o raio $R_2$ de $\lambda_2$ são $C_2(-5, 4)$ e $R_2 = 6\sqrt{2}$.
- O centro $C_1(4, -5)$ é externo a $(\lambda_2)$
  $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 72$, pois
  $(4+5)^2 + (-5-4)^2 > 72$; e o centro $C_2(-5, 4)$ é externo a $(\lambda_1)$ $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 98$, pois $(-5-4)^2 + (4+5)^2 > 98$.
- A distância $d_{C_1C_2}$, entre $C_1$ e $C_2$, é dada por:
  $d_{C_1C_2} = \sqrt{[4-(-5)]^2 + (-5-4)^2} = 9\sqrt{2}$

Assim, podemos calcular a distância $d_{AB}$, entre $A$ e $B$, do seguinte modo:




$R_1 + R_2 - d_{AB} = d_{C_1C_2} \Rightarrow 7\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - d_{AB} = 9\sqrt{2}$
$\therefore\ d_{AB} = 4\sqrt{2}$

**66.** **a)** Os pontos de intersecção das circunferências são a solução do sistema:
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases} \sim$$
$$\sim \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 4y = -4 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$
Subtraindo (II) de (I), membro a membro, temos:
$6x - 2y = -4 \Rightarrow 3x - y = -2$
$\therefore\ y = 3x + 2 \quad \text{(III)}$
Substituindo (III) em (II), temos:
$x^2 + (3x + 2)^2 - 2x - 2(3x + 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(10x + 4) = 0$
$\therefore\ x = 0$ ou $x = -\dfrac{2}{5}$
Substituindo em (III) os valores encontrados, obtemos:
$x = 0 \Rightarrow y = 2$
$x = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow y = \dfrac{4}{5}$
Logo:
$$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \left\{(0, 2); \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$$

**b)** Os pontos de intersecção das circunferências são a solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo (II) de (I), membro a membro, temos:

$10x + 10y = 0 \Rightarrow x = -y \quad \text{(III)}$

Substituindo (III) em (I), temos:

$(-y)^2 + y^2 + 2 \cdot (-y) + 6y + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y^2 + 4y + 2 = 0$

$\therefore y = -1$

Substituindo em (III) o valor encontrado, obtemos:

$x = 1$

Logo:

$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{(1, -1)\}$

**c)** Os pontos de intersecção das circunferências são a solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo (I) de (II), membro a membro, temos:

$8x - 4y + 16 = 0 \Rightarrow y = 2x + 4 \quad \text{(III)}$

Substituindo (III) em (I), temos:

$x^2 + (2x + 4)^2 + 4 \cdot (2x + 4) - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 + 24x + 28 = 0$

Resolvendo a equação $5x^2 + 24x + 28 = 0$, temos:

$\Delta = 24^2 - 4 \cdot 5 \cdot 28 = 16$

$$\therefore x = \frac{-24 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 5} \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = -\frac{14}{5}$$

Substituindo em (III) os valores encontrados, obtemos:

$x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = 0$

$x_2 = -\dfrac{14}{5} \Rightarrow y_2 = -\dfrac{8}{5}$

Logo:

$$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \left\{(-2, 0); \left(-\frac{14}{5}, -\frac{8}{5}\right)\right\}$$

**d)** Os pontos de intersecção das circunferências são a solução do sistema:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo (II) de (I), membro a membro, temos:

$2x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow x = y + 3 \quad \text{(III)}$

Substituindo (III) em (II), temos:

$(y + 3)^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow 2y^2 + 2y + 9 = 0$

Resolvendo a equação $2y^2 + 2y + 9 = 0$, temos:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -68 < 0$

Como o sistema não possui solução: $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \varnothing$

**67.** As equações das circunferências são

$\lambda_1$: $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = r_1^2$

$\lambda_2$: $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = r_2^2$

Como $(-13, 0) \in \lambda_1$, temos:

$(-13 + 6)^2 + (0 - 2)^2 = r_1^2 \Rightarrow r_1^2 = 53$

E, como $(7, 0) \in \lambda_2$, temos:

$(7 - 4)^2 + (0 + 8)^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2^2 = 73$

Assim, os pontos de intersecção de $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} (x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 53 \\ (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 73 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 12x - 4y - 13 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 8x + 16y + 7 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo (II) de (I), membro a membro, temos:

$20x - 20y - 20 = 0 \Rightarrow x = y + 1 \quad \text{(III)}$

Substituindo (III) em (I), temos:

$(y + 1)^2 + y^2 + 12(y + 1) - 4y - 13 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y^2 + 10y = 0$

$\therefore 2y(y + 5) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = -5$

Substituindo em (III) os valores encontrados, obtemos:

$y = 0 \Rightarrow x = 1$

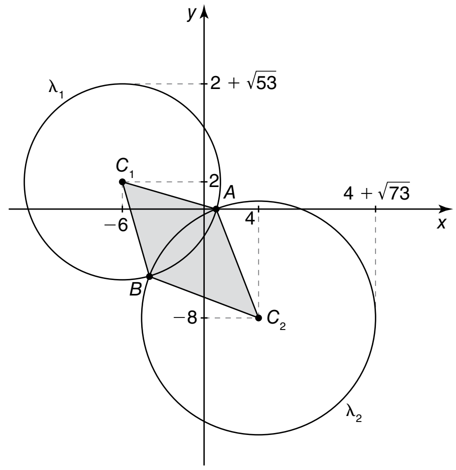
$y = -5 \Rightarrow x = -4$

Logo, sendo $A$ e $B$ as intersecções, temos:

$A(1, 0)$ e $B(-4, -5)$

Assim, os vértices do quadrilátero são:

$C_1(-6, 2)$, $C_2(4, -8)$, $A(1, 0)$ e $B(-4, -5)$




Sendo $S_1$ e $S_2$ as áreas dos triângulos $ABC_1$ e $ABC_2$ e $S$ a área do quadrilátero, temos:

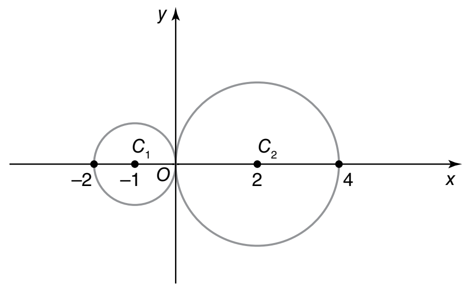
$S = S_1 + S_2 =$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} \right| + \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot (45 + 55) = \frac{100}{2} = 50$$

Logo, a área do quadrilátero é 50.

**68. a)** O centro $C_1$ e o raio $R_1$ da circunferência $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ são $C_1(-1, 0)$ e $R_1 = 1$; e o centro $C_2$ e o raio $R_2$ da circunferência $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ são $C_2(2, 0)$ e $R_2 = 2$. Assim, temos o gráfico:



Pelo gráfico, constatamos que o único ponto de intersecção dessas circunferências é (0, 0).

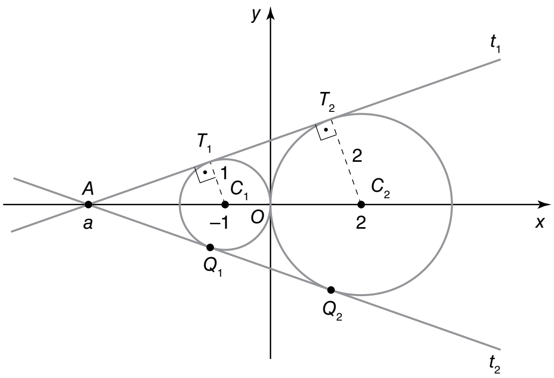
**Outro modo:**

Se existirem, os pontos de intersecção das circunferências são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 1 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

Logo, a intersecção das circunferências contém um único ponto, ou seja, (0, 0).

**b)** Pelo gráfico construído no item **a**, constatamos que a abscissa $a$ deve ser negativa. Assim, esquematizamos a situação pelo gráfico abaixo, em que $T_1$, $T_2$, $Q_1$ e $Q_2$ são os pontos de tangência entre as circunferências e as retas que passam por $A(a, 0)$.




Pela semelhança entre os triângulos $AT_2C_2$ e $AT_1C_1$, temos:

$$\frac{2}{1} = \frac{2 - a}{-1 - a} \Rightarrow a = -4$$

## Exercícios contextualizados

**69.** A distância percorrida pelo satélite, em quilômetro, em cada volta é: $12.560 \cdot 5 = 62.800$

Assim, sendo R o raio da órbita do satélite, temos:

$2\pi R = 62.800 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot R = 62.800$

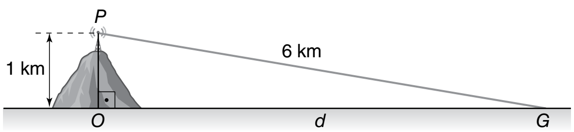
$\therefore R = 10.000 = 10^4$

Logo, uma equação da órbita desse satélite é:

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (10^4)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 10^8$

Alternativa **a**.

**70. a)** Sendo G um dos pontos mais distantes de O alcançado pelas ondas, esquematizamos a situação pela figura a seguir, em que $d$ é a distância entre O e G.




Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 + 1^2 = 6^2 \Rightarrow d = \sqrt{35}$$

Assim, a equação pedida representa a circunferência de centro O(0, 0) e raio $\sqrt{35}$; logo, essa equação é:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 35 \text{ ou, ainda, } x^2 + y^2 = 35$$

**b)** Não, pois a distância máxima, a partir de O, alcançada pelas ondas transmitidas pela antena é $\sqrt{35}$ km, que é menor que 6 km.

**71. a)** $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \text{ sen } t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \cos t \\ \dfrac{y}{3} = \text{sen } t \end{cases}$

Quadrando ambos os membros de cada equação do sistema, temos:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 = \cos^2 t \\ \left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = \text{sen}^2\, t \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, chegamos a:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2\, t \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$\therefore x^2 + y^2 = 9$

**b)** Pelas equações paramétricas, observamos que:

- Para $t = 0$, temos que $x = 3$ e $y = 0$; logo, no início da marcação de tempo, o elétron estava no ponto (3, 0).
- Para $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, temos que $x$ como função de $t$ é decrescente e $y$ como função de $t$ é crescente, portanto, o elétron gira no sentido anti-horário; logo, para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, o elétron percorre os quadrantes na ordem I, II, III e IV. Assim, ele cruza a bissetriz dos quadrantes ímpares pela primeira vez no primeiro quadrante.

Nos pontos comuns à trajetória do elétron e à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos que $x = y$, de onde deduzimos, das equações paramétricas, que:

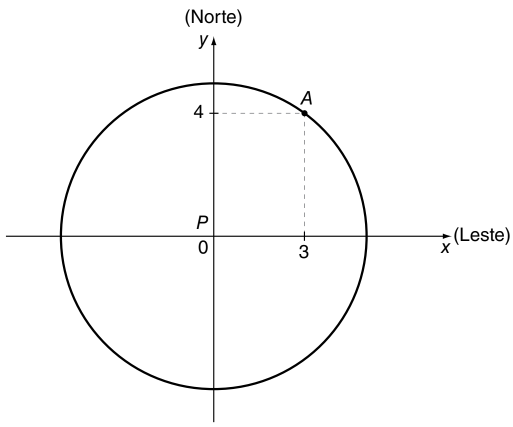
$3 \cos t = 3 \text{ sen } t \Rightarrow \text{tg } t = 1$

$\therefore t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}_+$

Note que $k$ não pode ser negativo, pois $t$ representa o tempo. Assim, para $k = 0$, obtemos $t = \frac{\pi}{4}$.

Concluímos, então, que o elétron cruza a bissetriz dos quadrantes ímpares pela primeira vez no instante $\frac{\pi}{4}u$, após o início da marcação de tempo.

**72.** Esquematizando a situação, temos:




Assim, temos que o centro da circunferência é $P(0, 0)$ e o raio é $PA$:

$PA = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = 5$

Logo, a equação geral da circunferência é:

$x^2 + y^2 - 25 = 0$

**73.** **a)** Inicialmente, vamos obter o centro $C$ e o raio $R$ da circunferência $\lambda$ representada na tela do GPS:

$x^2 + y^2 - 8x - 6y - 75 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = 75 + 16 + 9$

$\therefore (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 100$

Logo, $C(4, 3)$ e $R = 100$.

Os pontos do anel viário mais próximo e mais distante de $O$ são os pontos de intersecção entre $\lambda$ e a reta $\overleftrightarrow{CO}$, por isso, vamos obter uma equação dessa reta.

O coeficiente angular $m_{CO}$ da reta $\overleftrightarrow{CO}$ é dado por:

$$m_{CO} = \frac{3 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $O(0,0)$, obtemos a equação de $\overleftrightarrow{CO}$:

$$y - 0 = \frac{3}{4} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{3x}{4}$$

Os pontos comuns a $\lambda$ e $\overleftrightarrow{CO}$ são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x}{4} \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = 12 \text{ e } y = 9)$ ou $(x = -4 \text{ e } y = -3)$

Logo, $\lambda \cap \overleftrightarrow{CO} = \{(12, 9), (-4, -3)\}$.

Calculando a distância entre o ponto $O(0, 0)$ e cada um dos pontos $A(12, 9)$ e $B(-4, -3)$, temos:

$$OA = \sqrt{(12 - 0)^2 + (9 - 0)^2} = \sqrt{225} = 15$$

e

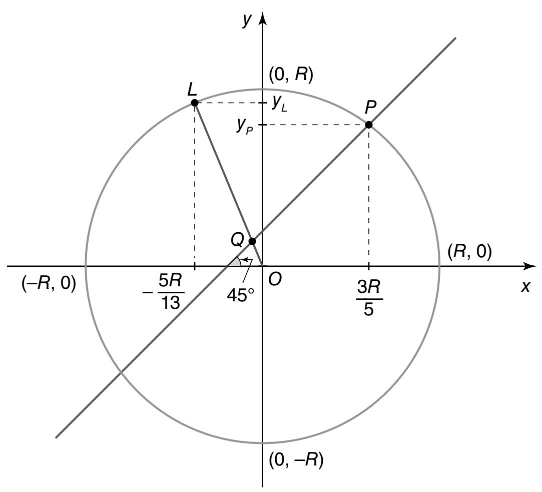
$$OB = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Logo, durante o trajeto no anel viário, a menor distância entre o carro do usuário e o ponto $O$ foi de 5 km.

**b)** Conforme já foi dito na resolução do item **a**, os pontos do anel viário mais próximo e mais distante de $O$ são os pontos de intersecção entre $\lambda$ e a reta $\overleftrightarrow{CO}$. Logo, a distância $OA$ calculada no item **a** é a resposta do item **b**.

Assim, concluímos que, durante o trajeto no anel viário, a maior distância entre o carro do usuário e o ponto $O$ foi de 15 km.

**74.** **a)** Esquematizando a situação, temos:




Em relação a esse sistema cartesiano, a equação da órbita lunar é $x^2 + y^2 = R^2$.

Os pontos $P\left(\frac{3R}{5}, y_P\right)$ e $L\left(-\frac{5R}{13}, y_L\right)$ pertencem à órbita; logo:

$$\left(\frac{3R}{5}\right)^2 + (y_P)^2 = R^2 \Rightarrow y_P = \pm\frac{4R}{5}$$

e

$$\left(-\frac{5R}{13}\right)^2 + (y_L)^2 = R^2 \Rightarrow y_L = \pm\frac{12R}{13}$$

Como $P$ e $L$ pertencem ao primeiro e segundo quadrante, respectivamente, temos que:

$y_P = \frac{4R}{5}$ e $y_L = \frac{12R}{13}$. Logo, $P\left(\frac{3R}{5}, \frac{4R}{5}\right)$ e $L\left(-\frac{5R}{13}, \frac{12R}{13}\right)$.

O ponto $Q$ é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OL}$ com a reta $r$ que contém a trajetória do meteorito; por isso, vamos obter as equações dessas retas.

O coeficiente angular $m_{OL}$ da reta $\overleftrightarrow{OL}$ é dado por:

$$m_{OL} = \frac{\frac{12R}{13} - 0}{-\frac{5R}{13} - 0} = -\frac{12}{5}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $O(0, 0)$, obtemos a equação de $\overleftrightarrow{OL}$:

$$y - 0 = -\frac{12}{5} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -\frac{12x}{5}$$

O coeficiente angular $m_r$ da reta $r$ é dado por:

$m_r = \text{tg } 45° = 1$

Com esse coeficiente angular e o ponto $P\left(\frac{3R}{5}, \frac{4R}{5}\right)$, obtemos a equação de $r$:

$$y - \frac{4R}{5} = 1 \cdot \left(x - \frac{3R}{5}\right) \Rightarrow y = x + \frac{R}{5}$$

Assim, o ponto $Q$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{12x}{5} \\ y = x + \dfrac{R}{5} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{R}{17} \text{ e } y = \frac{12R}{85}$$

Concluímos, então, que o ponto procurado é:

$$Q\left(-\frac{R}{17}, \frac{12R}{85}\right)$$

**b)** A distância $d_{OQ}$ entre os pontos $O$ e $Q$ é dada por:

$$d_{OQ} = \sqrt{\left(-\frac{R}{17} - 0\right)^2 + \left(\frac{12R}{85} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{169R^2}{7.225}} =$$

$$= \frac{13R}{85}$$

**c)** A distância $d_{Or}$ entre o ponto $O$ e a reta $r$ é dada por:

$$d_{Or} = \frac{\left|0 - 0 + \frac{R}{5}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{R\sqrt{2}}{10}$$

**d)** A distância $d_{Lr}$ entre o ponto $L$ e a reta $r$ é dada por:

$$d_{Lr} = \frac{\left|-\frac{5R}{13} - \frac{12R}{13} + \frac{R}{5}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{36R\sqrt{2}}{65}$$

**75.** Relacionando as informações do enunciado, sob as condições estabelecidas, temos:

$x(10.000 - 50x) + y(12.000 - 50y) \leqslant 18.750 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10.000x - 50x^2 + 12.000x - 50y^2 \leqslant 18.750$

Dividimos ambos os membros por $-50$, obtendo:
$x^2 - 200x + y^2 - 240y \geqslant 375 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 200x + 10.000) +$
$+ (y^2 - 240y + 14.400) \geqslant -375 + 10.000 + 14.400$
$\therefore (x - 100)^2 + (y - 120)^2 \geqslant 155^2$
Alternativa **a**.

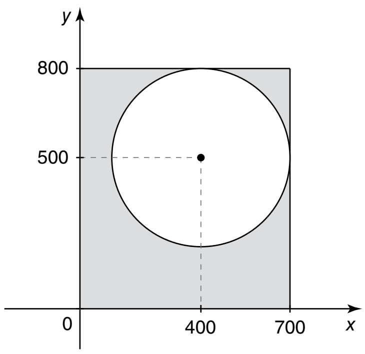
**76.** a) Para a produção de x metros do fio *A*, o custo total é: $x \cdot \left(4 - \frac{x}{200}\right) = 4x - \frac{x^2}{200}$; para a produção de y metros do fio *B*, o custo total é:

$y \cdot \left(5 - \frac{y}{200}\right) = 5y - \frac{y^2}{200}$

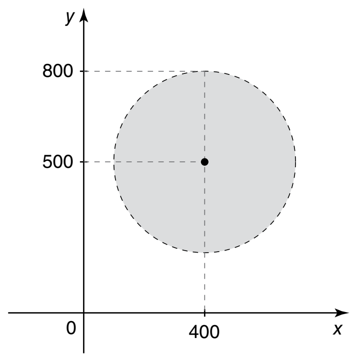
Como o custo não deve ultrapassar R$ 1.600,00, temos:

$4x - \frac{x^2}{200} + 5y - \frac{y^2}{200} \leqslant 1.600 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 800x + y^2 - 1.000y \geqslant -320.000$
$\therefore (x^2 - 800x + 160.000) +$
$+ (y^2 - 1.000y + 250.000) \geqslant -320.000 +$
$+ 160.000 + 250.000$
$\therefore (x - 400)^2 + (y - 500)^2 \geqslant 90.000$

Para $x \leqslant 700$ e $y \leqslant 800$, temos o seguinte gráfico:




b) A região que queremos é a região complementar à do item **a**, isto é:




**77.** a) Temos: $6s = \frac{6}{3.600}\ h = \frac{1}{600}\ h$

Assim, durante $\frac{1}{600}$ h, a região atingida pelo som tem raio máximo de: $\left(\frac{1}{600} \cdot 1.200\right)$ km $= 2$ km

Temos, então:
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 \leqslant 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leqslant 4$

Portanto, durante os 6 primeiros segundos a região atingida pelo som é representada por: $x^2 + y^2 \leqslant 4$

b) Seja *t* o tempo em hora. Como o raio da circunferência é 10 km, temos:

$1.200 = \frac{10}{t} \Rightarrow t = \frac{10}{1.200}$

$\therefore t = \frac{1}{120}\ h = 30\ s$

Portanto, após a explosão, levará 30 s para que sejam atingidos os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 100$.

**78.** Seja $P(x, y)$ um ponto atingido pelo terremoto. Temos $d_{PE} \leqslant 5$, ou seja:

$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 0)^2} \leqslant 5 \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 \leqslant 25$

Portanto, a inequação $(x - 3)^2 + y^2 \leqslant 25$ expressa toda a região atingida pelo terremoto.

**79.** a) A trajetória do asteroide está contida em uma reta horizontal que passa pelo ponto (0; 3,4); logo, uma equação dessa trajetória é $y = 3{,}4$.

b) A trajetória do satélite é uma circunferência de raio 4,2 cujo centro é a origem $O(0, 0)$; logo, uma equação dessa trajetória é $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (4{,}2)^2$, ou seja, $x^2 + y^2 = 17{,}64$.

c) Os pontos $P_1$ e $P_2$ são as soluções do sistema:

$\begin{cases} y = 3{,}4 \\ x^2 + y^2 = 17{,}64 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \approx -2{,}5 \text{ e } y = 3{,}4)$ ou $(x \approx 2{,}5 \text{ e } y = 3{,}4)$

Logo, com abscissas aproximadas, os pontos $P_1$ e $P_2$ são: $P_1(2{,}5;\ 3{,}4)$ e $P_2(-2{,}5;\ 3{,}4)$

d) A distância *d*, na unidade u, entre $P_1$ e $P_2$ é, aproximadamente $|2{,}5 - (-2{,}5)|$, ou seja, $d \approx 5$ u.

Como 1 u = 10.000 km, temos que $d \approx 50.000$ km. Assim, o tempo t, em segundo, que o asteroide levou para percorrer a distância $P_1P_2$ é dado por:

$50.000 \approx 7{,}8t \Rightarrow t \approx 6.410$

Ou seja, o asteroide percorreu a distância $P_1P_2$ em 6.410 s, aproximadamente, ou 1 hora e 47 minutos, aproximadamente.

**80.** a) Os pontos onde as duas trajetórias se cruzam são as soluções do sistema:

$\begin{cases} 4y - 3x - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = -1 \text{ e } y = 1)$ ou $(x = 7 \text{ e } y = 7)$

Logo, os pontos comuns às duas trajetórias são $P(-1, 1)$ e $Q(7, 7)$.

b) Para responder a este item, vamos obter o centro C e o raio R da circunferência $\lambda$ que descreve a trajetória do ciclista B:

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 + 16$
$\therefore (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

Logo, $C(3, 4)$ e $R = 5$.

Observamos que C pertence à reta $\overleftrightarrow{PQ}$, pois, substituindo x por 3 e y por 4 na equação $4y - 3x - 7 = 0$, obtém-se uma sentença verdadeira: $4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 7 = 0$; logo, o segmento $\overline{PQ}$ é diâmetro da circunferência. Assim, o ciclista A percorre o diâmetro $\overline{PQ}$ e o ciclista B percorre a semicircunferência $\overset{\frown}{PQ}$.

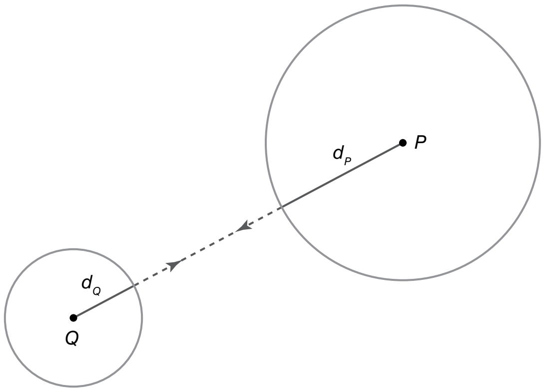
O comprimento $\ell_{\overline{PQ}}$ do segmento $\overline{PQ}$ e o comprimento $\ell_{\overset{\frown}{PQ}}$ da semicircunferência $\overset{\frown}{PQ}$ são dados por: $\ell_{\overline{PQ}} = 10$ e $\ell_{\overset{\frown}{PQ}} = 5\pi$. Assim, sendo $v$ a velocidade de B, em quilômetro por hora, temos:

$$\frac{10}{20} = \frac{5\pi}{v} \Rightarrow v = 10\pi$$

Ou seja, a velocidade do ciclista B deve ser de $10\pi$ km/h ou, aproximadamente, 31,4 km/h.

**81.** a) Sejam:

- $t$ o tempo, em segundo, decorrido a partir do instante em que foi abandonada a primeira pedra em P;
- $d_P$ a distância percorrida, em metro, por um ponto da primeira onda provocada em P;
- $d_Q$ a distância percorrida, em metro, por um ponto da primeira onda provocada em Q.

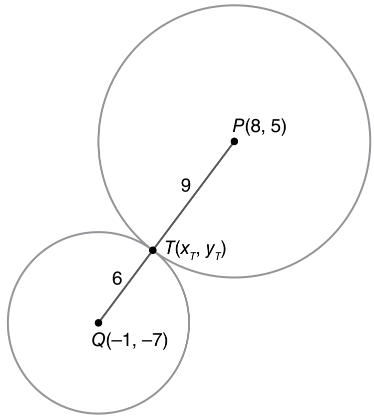



Assim, temos:
$d_P = 1{,}5t$
e
$d_Q = 1{,}5(t - 2)$, para $t \geqslant 2$
Adicionando, membro a membro, essas equações, obtemos:
$d_P + d_Q = 1{,}5t + 1{,}5(t - 2)$
Quando as ondas se encontrarem, as somas das distâncias $d_P$ e $d_Q$ será igual à distância PQ, que é dada por:
$PQ = \sqrt{(-1 - 8)^2 + (-7 - 5)^2} = \sqrt{225} = 15$
Assim:
$15 = 1{,}5t + 1{,}5(t - 2) \Rightarrow t = 6$
Concluímos, então, que as duas primeiras ondas produzidas em P e Q se encontraram 6 s depois de abandonada a primeira pedra.

b) Para $t = 6$ s, o raio da primeira onda provocada em P será $(6 \cdot 1{,}5)$ m, ou seja, 9 m; e o raio da primeira onda provocada em Q será $(4 \cdot 1{,}5)$ m, ou seja, 6 m. Assim, as equações dessas ondas, no instante $t = 6$ s, serão: $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 81$ e $(x + 1)^2 + (y + 7)^2 = 36$

c) Para determinar o ponto de encontro das duas ondas tangentes, poderíamos resolver o sistema formado pelas equações obtidas no item **a**; porém, nesse caso, é muito mais simples aplicar o conceito de divisão de um segmento por um ponto interno ao segmento. Observe:

O ponto $T(x_T, y_T)$ de tangência das duas ondas, no instante em que elas se encontram, dividem o segmento $\overline{QP}$, de Q para P, na razão $\frac{6}{9}$, ou seja, $\frac{2}{3}$.




Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x_T - (-1)}{8 - x_T} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{y_T - (-7)}{5 - y_T} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x_T = \frac{13}{5} \text{ e } y_T = -\frac{11}{5}$$

Logo, $T\left(\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

## Pré-requisitos para o capítulo 5

**1.** a) $PF_1 + PF_2 = \sqrt{[0 - (-3)]^2 + (4 - 0)^2} + \sqrt{(0 - 3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{25} + \sqrt{25} = 10$

b) $QF_1 + QF_2 = 10 \Rightarrow \sqrt{[3 - (-3)]^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(3 - 3)^2 + (y - 0)^2} = 10$
$\therefore \sqrt{36 + y^2} + \sqrt{y^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{36 + y^2} + |y| = 10$
$\therefore \sqrt{36 + y^2} = 10 - |y|$
Quadrando ambos os membros, obtemos:
$36 + y^2 = 100 - 20|y| + y^2 \Rightarrow 20|y| = 64$
$\therefore |y| = 3{,}2 \Rightarrow y = 3{,}2$ ou $y = -3{,}2$

**2.** a) $|PF_1 - PF_2| = \left|\sqrt{(0 - 0)^2 + [3 - (-5)]^2} - \sqrt{(0 - 0)^2 + (3 - 5)^2}\right| = \left|\sqrt{64} - \sqrt{4}\right| = 6$
e
$|PF_2 - PF_1| = |PF_1 - PF_2| = 6$

b) $|QF_1 - QF_2| = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left|\sqrt{(x - 0)^2 + [5 - (-5)]^2} - \sqrt{(x - 0)^2 + (5 - 5)^2}\right| = 6$
$\therefore \left|\sqrt{x^2 + 100} - \sqrt{x^2}\right| = 6 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 100} - |x| = \pm 6$
$\therefore \sqrt{x^2 + 100} = \pm 6 + |x|$
Quadrando ambos os membros, obtemos:
$x^2 + 100 = 36 \pm 12|x| + x^2 \Rightarrow 64 = \pm 12|x|$
$\therefore |x| = \frac{16}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{3}$ ou $x = -\frac{16}{3}$

**3.** a) $PF = \sqrt{(6 - 0)^2 + (12 - 4)^2} = \sqrt{100} = 10$
e

$$Pr = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 10$$

b) $QF = Qr \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (-8-4)^2} = \dfrac{|x+4|}{\sqrt{1^2+0^2}}$

$\therefore \sqrt{x^2+144} = |x+4|$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$x^2 + 144 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow 8x = 128$

$\therefore x = 16$

## Trabalhando em equipe

### Matemática sem fronteiras

1. O custo total C de produção, em real, é dado por:

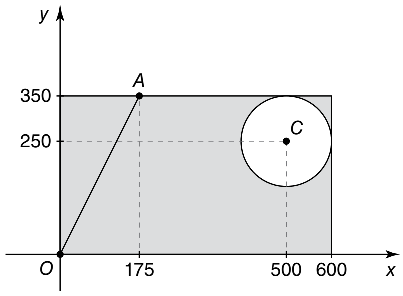
$C = x\left(100 - \dfrac{x}{10}\right) + y\left(50 - \dfrac{y}{10}\right)$

Logo, para $x = 380$ e $y = 240$, temos:

$C = 380\left(100 - \dfrac{380}{10}\right) + 240\left(50 - \dfrac{240}{10}\right) \Rightarrow C = 17.320$

Assim, a produção de 380 litros do perfume A e 240 litros de B terá o custo de R$ 17.320,00.

2. Os pontos $(x, y)$ formam o segmento de reta $OA$ obtido pela intersecção da reta de equação $y = 2x$ com a região indicada no texto, isto é:




3. Observamos que a maior produção possível, de modo que $y = 2x$, ocorre para $x = 175$ e $y = 350$; logo, o maior custo total C possível, em real, nessas condições é:

$C = 175\left(100 - \dfrac{175}{10}\right) + 350\left(50 - \dfrac{350}{10}\right)$

$\therefore C = 19.687,50$

### Análise da resolução

**COMENTÁRIO:** A resolução está errada porque, por definição, a raiz quadrada de um número real, quando existe, é um número não negativo. Assim, obedecida a condição de existência para a raiz quadrada, temos que a variável y na equação $y = \sqrt{9 - x^2}$ simboliza um número não negativo, isto é, $y \geq 0$. Portanto, o gráfico apresentado nessa resolução está incorreto, pois possui pontos $(x, y)$ com $y < 0$.

*Resolução correta*:

O gráfico pedido é formado pelos pontos $(x, y)$ tais que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A equação $x^2 + y^2 = 9$ teria como gráfico uma circunferência de centro (0, 0) e raio 3; porém, sob a condição $y \geq 0$, o gráfico é a semicircunferência representada a seguir: