Estou na área, grande guerreiro, futuro oficial da Marinha, Marinha Mercante ou Aeronáutica do Brasil!

Esta é a aula 06 do nosso curso de Matemática 1 para as provas da AFA, EFOMM e ESCOLA NAVAL e estudaremos hoje as funções do segundo grau (funções quadráticas). Além disso, veremos também um método bastante eficiente para resolver inequações produto-quociente. Este é um tópico que cai bastante nestes concursos! Portanto, fique ligado e vem comigo!

SUMÁRIO

FUNÇÕES QUADRÁTICAS

1. DEFINIÇÃO

É uma função da forma $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$.

OBSERVAÇÃO

***a* é dito coeficiente líder da função quadrática**

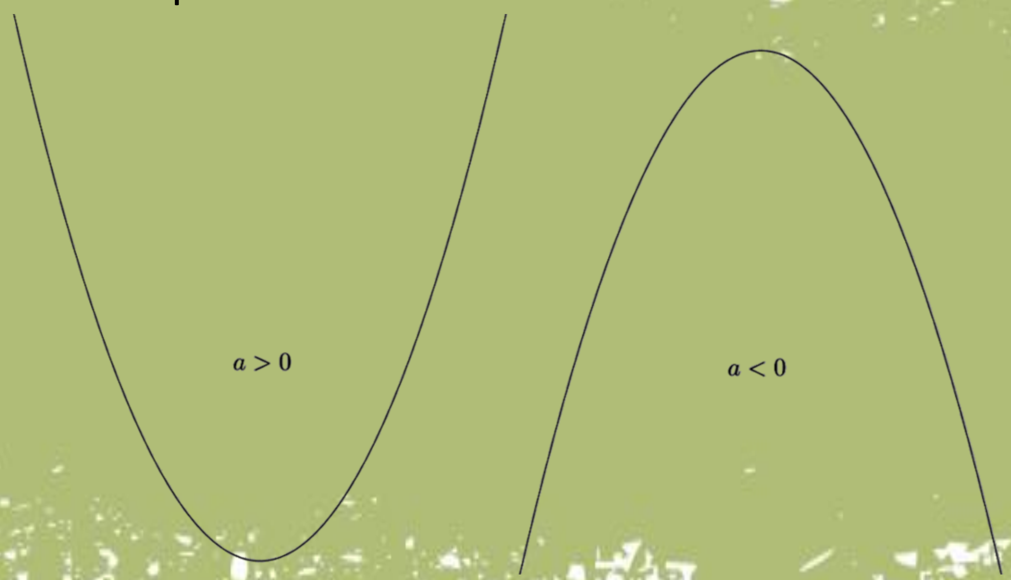
Exemplo: $f(x)=4x^2+5x-8$

2. GRÁFICO

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

OBSERVAÇÃO

Quando $a>0$, a parábola tem concavidade voltada para CIMA e quando $a<0$, a parábola tem concavidade voltada para BAIXO.



Para memorizar mais facilmente a concavidade da parábola, podemos pensar no seguinte "macete":
Quando a > 0, pensamos que "a parábola está feliz" e assim a concavidade é para CIMA.
Quando a < 0, pensamos que "a parábola está triste" e assim a concavidade é para BAIXO.

PROBIZU

3. RAÍZES

Para resolver uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, usaremos a técnica de completar quadrados, vista no nosso módulo de fatoração

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Somando $b^2 - 4ac$ a ambos lados, temos que $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$. Sendo $b^2 - 4ac = \Delta$ (discriminante), obtemos a

(Fórmula de Bhaskara) As raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, são dadas por $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

OBSERVAÇÃO

A fórmula de Bhaskara também é verdadeira para equações com coeficientes complexos.

4. DISCUSSÃO SOBRE AS RAÍZES REAIS

Dada uma equação do 2º grau com coeficientes reais, temos:

i) $\Delta > 0$: a equação possui duas raízes reais distintas

ii) $\Delta = 0$: a equação possui duas raízes reais iguais (raiz dupla)

iii) $\Delta < 0$: a equação não possui raízes reais

5. RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES

Dada uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ de raízes x_1 e x_2, temos que $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Para demonstrarmos estas fórmulas, basta usar a fórmula de Bhaskara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Logo, $S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} + -b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$.

Por fim, $P = x_1 x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Fique atento nas seguintes ideias que despencam em prova:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP.$$

PROBIZU

6. MÁXIMOS E MÍNIMOS

Muitos problemas que aparecem nas provas da AFA, EFOMM e ESCOLA NAVAL envolvem minimizar ou maximizar uma função quadrática. Vejamos agora como calcular os máximos e mínimos de uma função quadrática:

i) Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite valor mínimo $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ (“y do vértice”) e tal valor mínimo ocorre para $x = x_V = -\frac{b}{2a}$ (“x do vértice”). Neste caso, o “x do vértice” é dito minimizante.

ii) Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite valor máximo $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ (“y do vértice”) e tal valor máximo ocorre para $x = x_V = -\frac{b}{2a}$ (“x do vértice”). Neste caso, o “x do vértice” é dito maximizante.

OBSERVAÇÃO

O ponto $(x_V, y_V) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado de vértice da parábola.

PROBIZU

Para achar o valor máximo ou mínimo de uma função quadrática, podemos substituir o valor do “x do vértice” na função, não precisando encontrar o delta. Ás vezes, isto pode tornar mais rápido o cálculo.

Temos que $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ou seja, o “x do vértice” é igual à média aritmética das raízes da função quadrática.

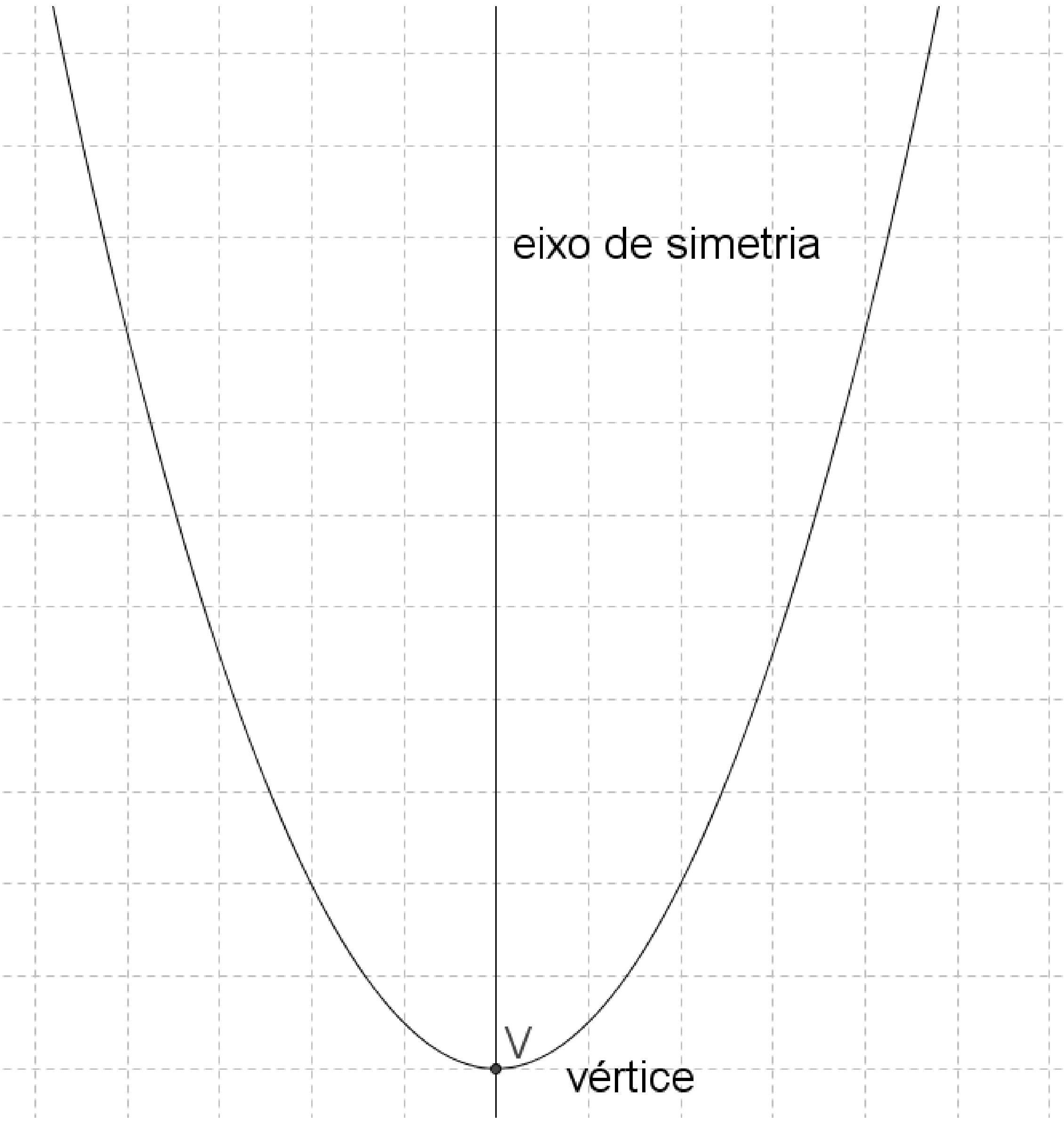
Podemos escrever $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$. Neste caso, dizemos que a função quadrática está na forma canônica.

Exemplos:

A função $x^2 - 4x + 5$ possui concavidade para cima e portanto admite mínimo, que ocorre para $x_V = \frac{-(-4)}{2} = 2$. O discriminante desta função quadrática é $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$ e portanto o valor mínimo é $y_V = \frac{-(-4)}{4} = 1$. Pelo PROBIZU, poderíamos calcular o mínimo substituindo x por 2, o que nos daria $2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$, como encontrado pelo método do “y do vértice”.

7. EIXO DE SIMETRIA

Pontos do gráfico de uma função quadrática com abscissas equidistantes do x_V estão à mesma altura, ou seja, a reta $x = x_V$ é um eixo de simetria da parábola.



8. FORMA FATORADA

Se $f(x)=ax^2+bx+c$ possui raízes r_1 e r_2, podemos fatorar $f(x)=a(x-r_1)(x-r_2)$.

Exemplo: Seja $f(x)=6x^2-5x-1$. As raízes desta função quadrática são 1 e $-\frac{1}{6}$. Assim, podemos fatorar tal função como $6(x-1)\left(x+\frac{1}{6}\right)=(x-1)(6x+1)$.

9. ESTUDO DO SINAL

Seja $f(x)=ax^2+bx+c$ uma função quadrática. Temos então a seguinte análise:

I) $a>0$ (CONCAVIDADE PARA CIMA):

$-\ \Delta<0$:

$f(x)$ é sempre positivo

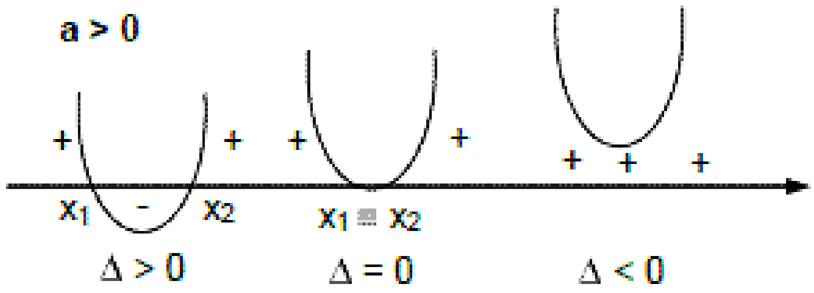
$-\ \Delta=0$:

$f(x)$ é sempre não-negativo e tangencia o eixo em $x=x_V$.

$-\Delta>0$:

$f(x)$ é negativo na região entre-raízes.

$f(x)$ é positivo na região extra-raízes.



II) $a<0$ (CONCAVIDADE PARA BAIXO):

$- \ \Delta<0$:

$f(x)$ é sempre negativo

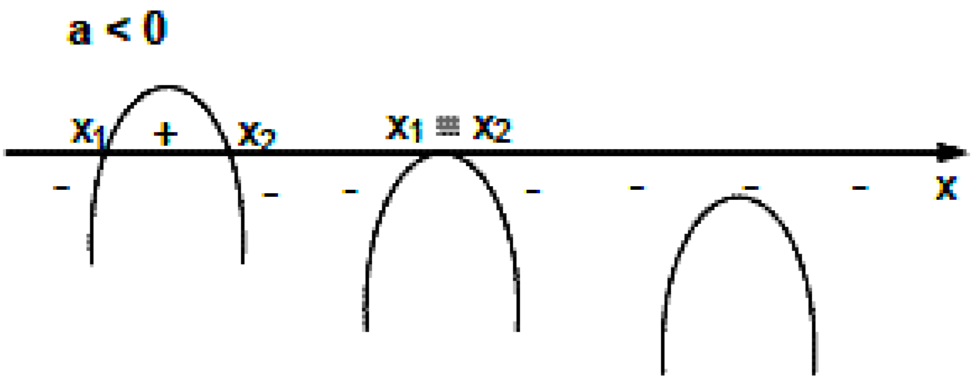
$- \ \Delta=0$:

$f(x)$ é sempre não-positivo e tangencia o eixo em $x=x_V$.

$- \ \Delta>0$:

$f(x)$ é positivo na região entre-raízes.

$f(x)$ é negativo na região extra-raízes.



10. INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE (MÉTODO DA RETA REAL)

Estamos interessados em estudar o sinal de funções da forma

$$f(x)=\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\ldots(x-b_p)^{m_p}},$$

onde $n_1,\ldots,n_k,m_1,\ldots,m_p$ são inteiros positivos. Nos pontos $x=a_1,\ldots,a_k$, a função se anula raízes e os pontos $x=b_1,\ldots,b_p$ são chamados pontos de descontinuidade. Para estudarmos o sinal de $f(x)$, marcamos na reta real todos os zeros e os pontos de descontinuidade. Determinaremos agora o sinal em cada um dos intervalos determinados pelos pontos marcados a partir do seguinte método:

(i) Todas as raízes da função $f(x)$ obtida no lado esquerdo da desigualdade devem ser marcadas na reta real com “bolas fechadas” (raízes do numerador) e seus pontos de descontinuidade (raízes do denominador) com “bolas abertas”.

(ii) Devem ser identificados os pontos simples e duplos. Os pontos duplos devem ser sublinhados.

(iii) Da direita para a esquerda, começando acima da reta real, uma curva ondulada é desenhada passando por todos os pontos marcados de forma que, ao passar por um ponto simples, a curva cruze a reta real (mude de sinal) e, ao passar por um ponto duplo, a curva permaneça do mesmo lado da reta real (conserve o sinal). Alternativamente, pode-se apenas indicar o sinal em cada intervalo, mantendo o sinal ao passar por um ponto duplo e invertendo o sinal ao passar por um ponto simples.

(iv) Os intervalos apropriados são escolhidos de acordo com o sinal da desigualdade na curva chamada curva de sinais.

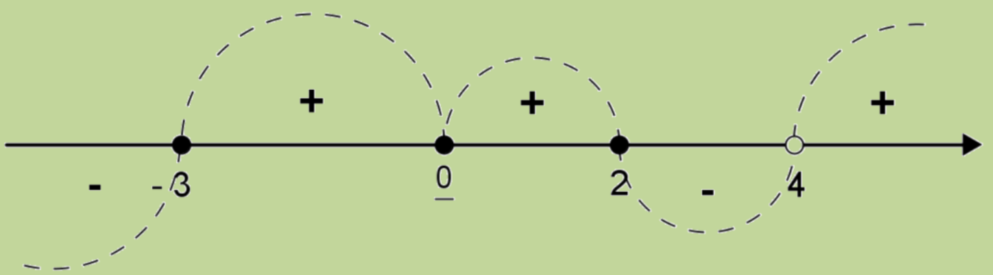
EXEMPLO:

Resolva $\dfrac{x^2 \cdot (x-2)^3 \cdot (x+3)}{(x-4)^7} > 0$.

RESOLUÇÃO:

As raízes são 0, 2 e -3; e 4 é um ponto de descontinuidade.

Dentre os pontos acima, 2, -3 e 4 são pontos simples, enquanto 0 é ponto duplo.



Escolhendo os intervalos marcados com sinal positivo, lembrando de excluir os pontos marcados com "bola aberta" e que os pontos marcados com "bola fechada" anulam a função, obtemos o conjunto solução:

$$S =]-3,0[\cup]0,2[\cup]4,+\infty[$$

Observe que a curva traçada indica o sinal da função em cada intervalo, mas não é o gráfico da função.

Vamos ver agora alguns exercícios resolvidos para que eles te guiem nos exercícios de combate!

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) Determine o valor de k para que as raízes da equação do segundo grau $(k-5)x^2 - 4kx + k - 2 = 0$ sejam o seno e o cosseno de um mesmo arco.

SOLUÇÃO:

Sendo $x_1 = \operatorname{sen}\alpha$ e $x_2 = \cos\alpha$ as raízes da equação, temos pela relação fundamental da trigonometria que $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$.

Vimos no PROBIZU que $x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$.

Veja agora que $S = \dfrac{4k}{k-5}$ e $P = \dfrac{k-2}{k-5}$.

Logo $\left(\dfrac{4k}{k-5}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{k-2}{k-5} = 1$ .Multiplicando tudo por $(k-5)^2$, obtemos:

$$16k^2 - 2(k-2)(k-5) = (k-5)^2 \Leftrightarrow 13k^2 + 24k - 45 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos $k = -3$ ou $k = \dfrac{15}{13}$.

Devemos verificar ainda se para os valores obtidos para k, as raízes encontradas são reais ou não (lembre que seno e cosseno são números reais!).

O discriminante da equação original é $(4k)^2 - 4 \cdot (k-5)(k-2) = 12k^2 + 28k - 40$. É fácil ver que para $k = -3$, o discriminante é negativo e para $k = \dfrac{15}{13}$, o discriminante é positivo.

Assim o único valor de k é $\dfrac{15}{13}$.

2) Resolva a inequação $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}<1$.

SOLUÇÃO:

Um erro bastante cometido pelos alunos é passar o x^2-1 multiplicando para o outro lado! Fique atento a isto! Não podemos fazer esta passagem, pois não sabemos se x^2-1 é positivo ou negativo.

Devemos proceder da seguinte maneira:

$\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}<1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6-x^2+1}{x^2-1}<0 \Leftrightarrow \frac{-x-5}{x^2-1}<0$. Esta última é equivalente a $-\frac{(x+5)}{x^2-1}<0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{(x+1)(x-1)}>0$. Usando o método da reta real, obtemos que o conjunto solução é $S=(-5,-1)\cup(1,+\infty)$.

3) O conjunto de todos os valores de m para os quais a função $f(x)=\frac{x^2+(2m+3)x+(m^2+3)}{\sqrt{x^2+(2m+1)x+m^2+2}}$ está definida e é não negativa para todo x real é:

a) $\left[\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right[$ b) $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$ c) $\left]0,\frac{7}{4}\right[$ d) $\left]-\infty,\frac{1}{4}\right]$ e) $\left]\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right[$

SOLUÇÃO:

Para que a função esteja definida e seja não negativa para todo x real, devemos ter:

I) NUMERADOR não negativo para todo x real

II) RADICANDO DO NUMERADOR positivo para todo x real

Assim, temos:

I) $\Delta_{\text{NUMERADOR}} \le 0$:

Logo $(2m+3)^2-4(m^2+3)=12m-3\le 0 \Leftrightarrow m\le\frac{1}{4}$

II) $\Delta_{\text{DENOMINADOR}} < 0$:

Logo $(2m+1)^2-4(m^2+2)=4m-7<0 \Leftrightarrow m<\frac{7}{4}$

Juntando as inequações obtidas, segue que $m\le\frac{1}{4}$.

LETRA D

4) O gráfico de um trinômio do 2º grau *y* tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos à direita da origem. O trinômio $-y$ tem um valor

a) mínimo e raízes positivas

b) mínimo e raízes negativas

c) máximo e raízes positivas

d) máximo e raízes negativas

e) máximo e raízes de sinais opostos

SOLUÇÃO:

Se y possui concavidade para cima, -y possui concavidade para baixo e assim admite máximo. Por outro lado, as raízes de –y são as mesmas que as raízes de y. Como o enunciado disse que as raízes estão à direita da origem, estas são positivas.

Assim, –y admite valor máximo e possui raízes positivas.

LETRA C

5) O produto de dois números reais *x* e *y* é igual a 150. Assim sendo, *x* + *y* NÃO pode ser igual a

a) 31,71 b) 28,27 c) 25,15 d) 24,35 e) –26,95

SOLUÇÃO:

Sendo S a soma dos números x e y, temos que a equação do segundo grau $t^2 - St + 150 = 0$ admite x e y como raízes.

Como x e y são números reais, o discriminante deve ser não negativo:

$S^2 - 4 \cdot 1 \cdot 150 \geq 0 \Leftrightarrow S^2 \geq 600$

Assim $S \leq -\sqrt{600}$ ou $S \geq \sqrt{600}$. Como $\sqrt{600} \cong 24,495$, temos que $x + y$ NÃO pode ser igual a 24,35.

LETRA D

Vamos agora para os exercícios de combate? Lembre sempre: força e foco na missão que chegaremos lá!

1. (AFA 1988) Considere o polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$, satisfazendo as condições $a < 0$, $c < 0$ e $p(1) > 0$. Se as suas raízes forem reais, então elas serão:

a) nulas
b) negativas
c) positivas
d) de sinais contrários

2. (AFA 1989) A solução da inequação $\frac{x^2 + x + 3}{x + 1} \leq 3$ é dada pelo conjunto:

a) $\{x \in R \ / \ 0 \leq x \leq 2\}$
b) $\{x \in R \ / \ x \leq -1 \text{ ou } 0 < x \leq 2\}$
c) $\{x \in R \ / \ x > -1 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2\}$
d) $\{x \in R \ / \ x < -1 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2\}$

3. (AFA 1989) Para que o valor mínimo da função $y = x^2 - 4x + k$ seja igual a -1, o valor de k é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

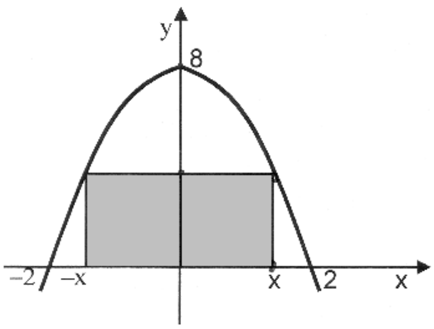
4. (AFA 1994) O polinômio do segundo grau $y = \frac{b}{2}\left(x^2 + 1\right) + ax$, com coeficientes reais, não possui raiz real, se e somente se:

a) $a - b < 0$
b) $a^2 - b^2 < 0$
c) $b^2 - 4a > 0$
d) $b^2 - 2ab < 0$

5. (AFA 1995) As raízes da equação $2x^2 - px - 1 = 0$ são $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$. Sendo θ um número real, o valor de p é:

a) 0
b) 2
c) 4
d) 5

6. (AFA 2001) O retângulo, com base no eixo das abscissas, está inscrito numa parábola, conforme figura abaixo. O valor de *x* que faz esse retângulo ter perímetro máximo é



a) 1
b) 0,5
c) 0,25
d) 0,125

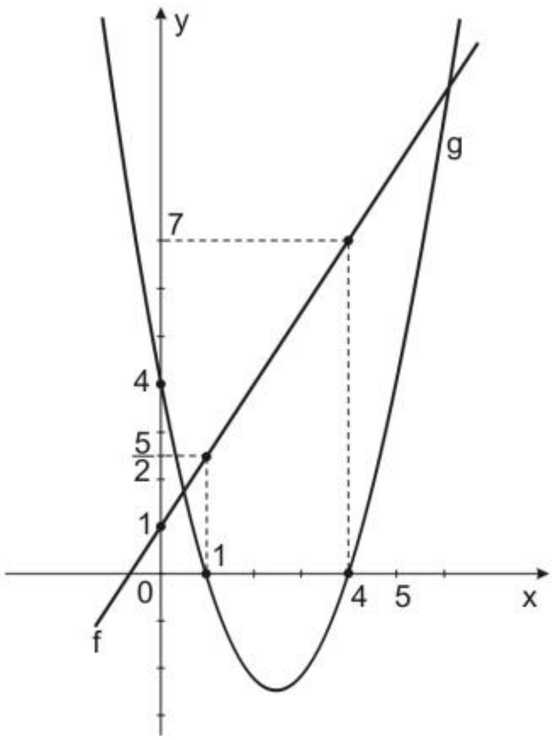
7. (AFA 2004) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ uma função real definida para todo número real. Sabendo-se que existem dois números x_1 e x_2, distintos, tais que $f(x_1).f(x_2) < 0$, pode-se afirmar que

a) f passa necessariamente por um máximo
b) f passa necessariamente por um mínimo
c) $x_1 . x_2$ é necessariamente negativo
d) $b^2 - 4ac > 0$

8. (AFA 2005) Dada a função real $f(x) = x^2$, considere a função real $g(x) = f(x+m) + k$, sendo m,k reais. É **INCORRETO** afirmar que:

a) o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f é deslocado k unidades para cima, se k>0, e m unidades para a direita, se m < 0.
b) a equação do eixo de simetria da parábola que representa g é dada por x = m
c) se m = 0 e k = 1, então o conjunto imagem de g é dado por $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$
d) se $m = -2$ e k = -3, então as coordenadas do vértice da parábola que representa g são $(-m,k)$

9. (AFA 2008) As funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ do primeiro grau e $g:\mathbb{R}\to[b,+\infty[$ do segundo grau estão representadas no gráfico abaixo.



Com base nas informações acima, é correto afirmar que

a) o menor valor de b que torna a função g sobrejetora é um número inteiro

b) $\left(g\circ g\circ f^{-1}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right)>0$

c) $\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{g(x)}>0 \Leftrightarrow \{x\in\mathbb{R}\,|\,x<1\vee x>4\}$

d) $f(x)-g(x)\le 0 \Leftrightarrow \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 0\vee x\ge 6\}$

10. (AFA 2009)Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função afim crescente de raiz $r<0$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função linear decrescente e $h:A\to\mathbb{R}$ é uma função definida por $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-\left[f(x)\right]^{20}\cdot\left[g(-x)\right]^{7}}}$, então o conjunto A, mais amplo possível, é dado por

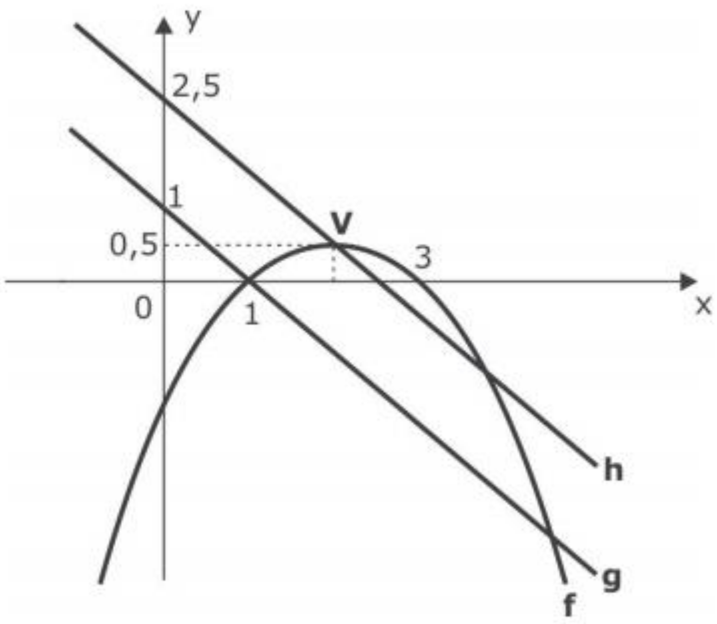
a) $]r,0]$

b) $]-\infty,0[-\{r\}$

c) $]r,+\infty[-\{0\}$

d) $]-\infty,0[$

11. (AFA 2010) Considere o esboço dos gráficos das funções reais f, g, h, tais que f é do segundo grau e g e h são do primeiro grau. Sabe-se que V é o vértice da parábola.



O conjunto de todos os valores de x para os quais $h(x) > g(x) > f(x)$ é

a) $\mathbb{R} -]1,5[$

b) $\mathbb{R} - [1,5]$

c) $\mathbb{R} - [1,3]$

d) $\mathbb{R} -]1,3[$

12. (AFA 2013) O gráfico de uma função polinomial do segundo grau $y = f(x)$, que tem como coordenadas do vértice $(5,2)$ e passa pelo ponto $(4,3)$, também passará pelo ponto de coordenadas

a) $(1,18)$

b) $(0,26)$

c) $(6,4)$

d) $(-1,36)$

13. (AFA 2014) Seja f uma função quadrática tal que:

i) $f(x) > 0$ para todo x real

ii) tem gráfico interceptando o gráfico da função g, dada por $g(x) = 2$, num único ponto cuja abscissa é 2.

iii) seu gráfico possui o ponto Q, simétrico do ponto R(0, –3) em relação à origem do sistema cartesiano.

Seja h uma função afim cujo gráfico intercepta o gráfico de f no eixo y e no ponto de menor ordenada de f.

Assim sendo, o conjunto solução da inequação $\dfrac{[f(x)]^3 \cdot [g(x)]^{10}}{[h(x)]^{15}} \geq 0$ contém o conjunto

a) $[0,8]$

b) $[1,7]$

c) $[2,6]$

d) $[3,5]$

14. (EFOMM 2002) A soma e o produto das raízes da equação $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x-2}{x} - 1 = 0$ são iguais a:

a) –2
b) –1
c) 0
d) 2
e) 3

15. (EFOMM 2004) Que valores deve apresentar o coeficiente "a" da função $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ para que ela tenha concavidade voltada para cima e vértice no primeiro quadrante?

a) a > 0
b) $0 < a \leq 1$
c) 0 < a < 1
d) a > 1
e) $a \geq \dfrac{1}{2}$

16. (EFOMM 2006) Se M e N são asraízes de $x^2 - 6x + 10 = 0$, o valor de $\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{N}$ é:

a) 6
b) 2
c) 1
d) 3/5
e) 1/6

17. (EFOMM 2007)

O incomparável sabor da Amazônia

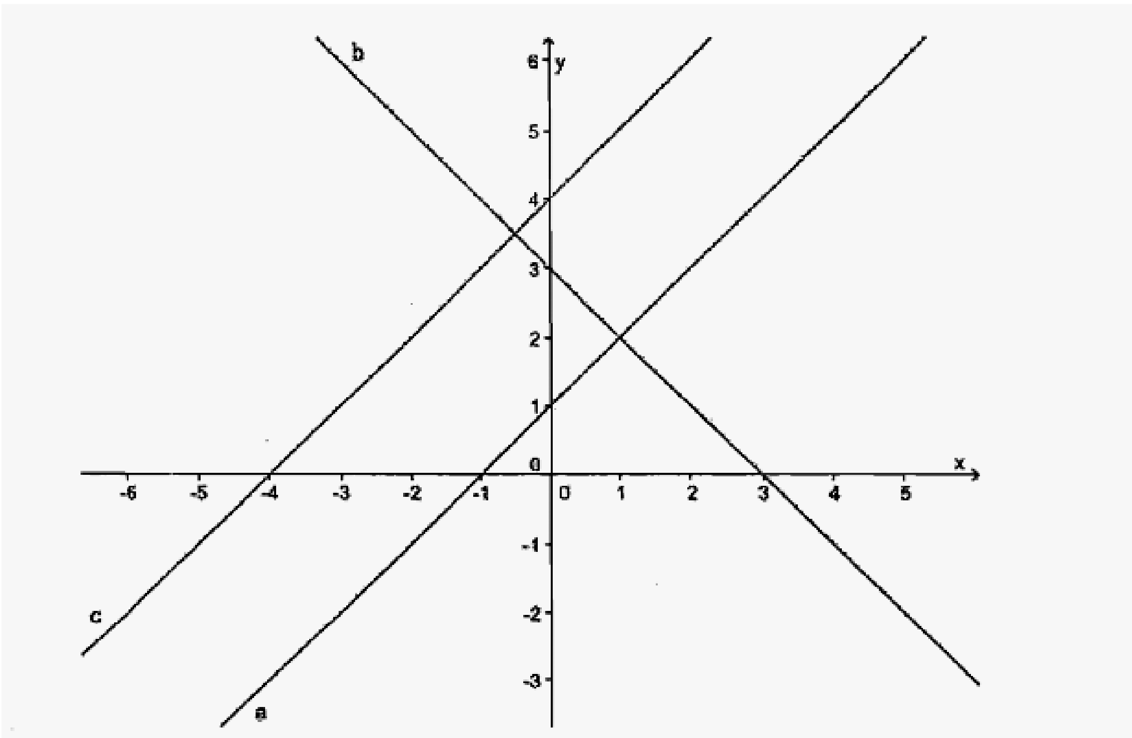
O açaí é uma fruta de caroços arroxeados; sendo comida básica de comunidades inteiras no Pará, transforma-se em alimento-vida. Antes de ser mercadoria, o açaí é esperança: do sucesso da colheita sobrevivem populações ribeirinhas e interioranas. Já faz parte do cotidiano de homens, mulheres e crianças ouvir o galo cantar enquanto percorrem a longa distância entre a base do fino tronco da palmeira do açaizeiro e os frutos lá em cima.

Açaí, um líquido cheiroso e espesso de cor arroxeada, pode ser servido como sobremesa ou acompanhante de peixes, carnes e frutos do mar, além de ser o par constante das farinhas d'água e de tapioca (Texto adaptado extraído da coleção especial Ver-o-Pará).

Sabendo que o custo de produção y, por minuto do açaí, em função do nº x de litros de açaí fabricados, por minuto, é dado por $y = 2x^2 - 40x + 50$. Quantos litros de açaí devem ser fabricados, por minuto, para que o custo de produção, por minuto, seja mínimo e qual é esse custo? Assinale a alternativa correta.

a) 5L e R$ 60,00
b) 10L e R$ 50,00
c) 20L e R$ 100,00
d) 50L e R$ 10,00
e) 60L e R$ 100,00

18. (EFOMM 2010) O gráfico das três funções polinomiais do 1º grau a, b e c definidas, respectivamente, por $a(x), b(x)$ e $c(x)$ estão representadas abaixo.



Nestas condições, o conjunto solução da inequação $\frac{(a(x))^5 \cdot (b(x))^6}{(c(x))^3} \geq 0$ é:

a) $(-4,-1) \cup [3,+\infty)$
b) $[-4,-1] \cup [3,+\infty)$
c) $(-\infty,-4) \cup [-1,+\infty)$
d) $[4,+\infty)$
e) $\mathbb{R} - \{4\}$

19. (EFOMM 2011) O conjunto solução da inequação $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$ é:

a) $[0,+\infty)$
b) $[0,1)$
c) $(1,+\infty)$
d) $[0,1]$
e) $(-\infty,0] \cup (1,+\infty)$

20. (EFOMM 2012) O lucro obtido pela venda de cada peça de roupa é x – 10, sendo x o preço da venda e 10 o preço do custo. A quantidade vendida por mês é igual a 70 – x. O lucro mensal máximo obtido com a venda do produto é:

a) 1200 reais
b) 1000 reais
c) 900 reais
d) 800 reais
e) 600 reais

21. (EFOMM 2012) Um professor escreveu no quadro-negro uma equação do segundo grau e pediu que os alunos a resolvessem. Um aluno copiou errado o termo constante da equação e achou as raízes –3 e –2. Outro aluno copiou errado o coeficiente do termo do primeiro grau e achou as raízes 1 e 4. A diferença positiva entre as raízes da equação correta é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

22. (EFOMM 2014) A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é de 2 cm. Se sua área é menor ou igual a 35 cm², então todos os possíveis valores de x, em cm, satisfazem:

a) $0 < x < 7$
b) $0 < x < 5$
c) $2 < x \leq 5$
d) $2 < x \leq 7$
e) $2 < x < 7$

23. (EN 1988) Para todo *x* real, $-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ se e só se:

a) $-3 < a < 2$
b) $-1 < a < 2$
c) $-6 < a < 7$
d) $-1 < a < 7$
e) $-6 < a < 2$

24. (EN 1994) O conjunto-solução da inequação $\frac{x^4 - 1}{-x^4 + 3x^3 - 2x^2} \leq 0$ é:

a) $(-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$
b) $(-\infty, -1] \cup (1, 2)$
c) $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$
d) $(-\infty, -1] \cup [1, 2]$
e) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

25. (CN 2007) A menor raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $abc \neq 0$, é a média geométrica entre m e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre n e a menor raiz. Pode-se afirmar que $m + n$ é expresso por:

a) $\frac{3abc - b^3}{a^2c}$
b) $\frac{3abc + b^3}{a^2c}$
c) $\frac{3abc - b^3}{c^2a}$
d) $\frac{abc + b^3}{c^2a}$
e) $\frac{abc - b^3}{a^2c}$

26. Qual é a soma das raízes quadradas das raízes da equação do 2º grau $x^2 - 6x + 2 = 0$?

a) $\sqrt{6+2\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{3+2\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{3+3\sqrt{2}}$

27. (ITA 95) Os dados experimentais da tabela abaixo correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundo é:

Tempo(s)	Concentração (moles)
1	3,00
2	5,00
3	1,00

a) 3,60
b) 3,65
c) 3,70
d) 3,75
e) 3,80

28. (CN 2009) O conjunto solução de números reais tal que $\dfrac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^{8}} \geq 0$ é:

a) $[5,+\infty[\cup \left\{-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right\}$

b) $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right] \cup [5,+\infty[$

c) $\mathbb{R}$

d) $\left]-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right] \cup [5,+\infty[$

e) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup [5,+\infty[$

29. (CN 2009) Quantos são os números inteiros com os quais é possível, no conjunto dos números reais, calcular o valor numérico da expressão algébrica $\sqrt{103x - x^2 - 300}$?

a) 100
b) 99
c) 98
d) 97
e) 96

30. (CN 2005) As raízes do trinômio do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$ são 1000 e 3000. Se quando x vale 2010, o valor numérico de *y* é 16, qual é o valor numérico de *y* quando *x* vale 1990?

a) 64
b) 32
c) 16
d) 8
e) 4

1. Como $p(1) > 0$, temos que $a + b + c > 0$. Por outro lado, como a e c são negativos, devemos ter b positivo. Assim o produto das raízes é $\frac{c}{a}$, que é positivo, pois c e a são negativos. Isto mostra que as raízes possuem o mesmo sinal. Finalmente, como a soma é $-\frac{b}{a} > 0$, temos que as raízes são ambas positivas.

RESPOSTA: C

2. $\frac{x^2 + x + 3}{x+1} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{x+1} \leq 0$

Pelo método da reta real, temos que $S = (-\infty, -1) \cup [0, 2]$.

RESPOSTA: D

3. Temos que $x_V = \frac{4}{2} = 2$. Assim, devemos ter $2^2 - 4 \cdot 2 + k = -1 \Leftrightarrow k = 3$.

RESPOSTA: C

4. O polinômio é $\frac{b}{2}x^2 + ax + \frac{b}{2}$. Para que não possua raízes reais, seu discriminante deve ser negativo:

$$a^2 - 4 \cdot \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 0$$

RESPOSTA: B

5. Temos que $\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ (relação fundamental da trigonometria).

Sendo S a soma das raízes e P o produto, devemos ter $S^2-2P=1\Leftrightarrow\left(\frac{p}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=1\Leftrightarrow p^2=0\Leftrightarrow p=0$

RESPOSTA: A

6. A parábola tem raízes – 2 e 2 e passa pelo ponto (0,8). Escrevendo na forma fatorada sua equação, temos $a(x-2)(x+2)=a(x^2-4)$. Como ela passa por (0,8), temos que $-4a=8\Leftrightarrow a=-2$. Assim, a altura do retângulo é $-2x^2+8$ e a largura é $2x$.

Desta forma, o perímetro é $2(-2x^2+8)+2\cdot 2x=-4x^2+4x+16$. Para que o retângulo tenha perímetro máximo, devemos ter $x=x_V=\frac{-4}{2\cdot(-4)}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

RESPOSTA: B

7. Como $f(x_1).f(x_2)<0$, necessariamente f possui uma raiz real entre x_1 e x_2. Desta forma, seu discriminante deve ser positivo, isto é, $b^2-4ac>0$.

RESPOSTA: D

8. Temos que $g(x)=(x+m)^2+k$. Desta forma, temos $x_v=-m$ e assim a equação do seu eixo de simetria é $x=-m$, o que invalida a alternativa B.

RESPOSTA: B

9. O gráfico da função f passa pelos pontos $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ e $(4,7)$. Assim temos que $f(x)=\frac{3x}{2}+1$.

A função g tem raízes 1 e 4 e seu gráfico passa pelo ponto (0,4). Escrevendo na forma fatorada, temos que $g(x)=a(x-1)(x-4)$. Como o gráfico passa pelo ponto (0,4), segue que $4=a\cdot(-1)\cdot(-4)\Leftrightarrow a=1$ e então $g(x)=(x-1)(x-4)$.

Vamos analisar as afirmativas:

a) o menor valor de b que torna a função g sobrejetora é um número inteiro

Para que g seja sobrejetora, devemos ter $b = y_v$. Como $x_v = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$ (x do vértice é a média aritmética das raízes), segue que $b = y_v = \left(\frac{5}{2} - 1\right)\left(\frac{5}{2} - 4\right) = -\frac{9}{4}$, que não é inteiro. (FALSA)

b) $\left(g \circ g \circ f^{-1}\right)\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

Temos que $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 1$, já que o gráfico de f passa por $\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

Assim, $\left(g \circ g \circ f^{-1}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = g\left(g\left(1\right)\right) = g\left(0\right) = 4$, que é positivo. (VERDADEIRA)

RESPOSTA: B

10. Podemos escrever $f\left(x\right) = ax - ar$, onde $a > 0$ e $g\left(x\right) = -kx$, onde $k > 0$.

Para determinar o conjunto A, devemos fazer com que $-\left[f\left(x\right)\right]^{20} \cdot \left[g\left(-x\right)\right]^{7} > 0 \Leftrightarrow \left(ax - ar\right)^{20}\left(kx\right)^{7} < 0$.

Pelo método da reta real, temos que $A = \left]-\infty, 0\right[- \left\{r\right\}$.

RESPOSTA: B

11. Temos que f possui raízes 1 e 3 e possui $y_V = 0{,}5$. Escrevendo f na forma fatorada, temos $f\left(x\right) = a\left(x-1\right)\left(x-3\right)$ e $x_V = \frac{1+3}{2} = 2$. Assim, $0{,}5 = a \cdot 1 \cdot \left(-1\right) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$. Podemos escrever então $f\left(x\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$.

O gráfico de g passa pelos pontos (1,0) e (0,1) e assim $g\left(x\right) = -x + 1$.

Finalmente, o gráfico de h passa pelos pontos (0, 2,5) e (2,0,5) e assim $h\left(x\right) = -x + \frac{5}{2}$.

Para termos $h\left(x\right) > g\left(x\right) > f\left(x\right)$, veja que pelo gráfico $h\left(x\right) > g\left(x\right)$ para todo x. Assim, basta termos $g\left(x\right) > f\left(x\right)$, o que nos dá:

$$-x + 1 > -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 > 0$$

Com isso, temos que o conjunto dos valores pedido é $\mathbb{R} - \left[1, 5\right]$.

RESPOSTA: B

12. Como o vértice da parábola é (5,2), temos que $x_V = 5$ e $y_V = 2$.

Relembrando a forma canônica, vista no PROBIZU: $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$

Escrevendo assim f na forma canônica, segue que: $f(x) = a(x-5)^2 + 2$.

Finalmente, como o gráfico passa pelo ponto (4,3), temos que:

$$3 = a \cdot (4-5)^2 + 2 \Leftrightarrow a = 1$$

Assim, $f(x) = (x-5)^2 + 2$ e é fácil ver que o gráfico também passará por (1,18).

RESPOSTA: A

13. Como f(x) > 0 para todo x real, seu gráfico é uma parábola com concavidade para cima e f não possui raízes reais.
O gráfico de f intercepta o gráfico de g(x) = 2 em um único ponto cuja abscissa é 2. Como a reta g é horizontal, segue que o vértice da parábola é $(2,2)$.

Seu gráfico possui o ponto $(0,3)$, que é simétrico de R com relação à origem.

Escrevendo f na forma canônica, temos que $f(x) = a(x-2)^2 + 2$. Como (0,3) está no gráfico de f, segue que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto (0,3). Assim, o ponto (0,3) está no gráfico de h. Finalmente, como h passa pelo ponto de menor ordenada de f, temos que h passa pelo ponto (2,2). Assim, temos que $h(x) = -\frac{x}{2} + 3$.

Como $f(x)$ e $g(x)$ são sempre positivos, $\frac{[f(x)]^3 \cdot [g(x)]^{10}}{[h(x)]^{15}} \geq 0$ é equivalente a $[h(x)]^{15} > 0$ (pois h não pode se anular). Esta última é equivalente a $h(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 6$.

Assim, o conjunto solução da inequação contém o conjunto $[3,5]$.

RESPOSTA: D

14. $\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (1-x)(x-2) - x(1-x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$

Como 0 e 1 não são raízes desta última equação, qualquer raiz desta última será raiz da equação original. Assim, a soma das raízes é -2 e o produto também é – 2.

RESPOSTA: A

15. Para que tenha concavidade para cima, a deve ser positivo.

O vértice da função é $\left(\frac{1}{a},\frac{a-1}{a}\right)$. Para que o vértice esteja no primeiro quadrante, $\frac{1}{a}>0$ e $\frac{a-1}{a}>0$. Como a é positivo, basta que $a>1$.

RESPOSTA: D

16. Temos que $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}=\frac{M+N}{MN}=\frac{S}{P}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

RESPOSTA: D

17. Devemos calcular o vértice da função dada.

Temos $x_V=\frac{-(-40)}{2\cdot 2}=10$ e $y_V=2\cdot 10^2-40\cdot 10+50=-150$.

A única afirmativa que possui x do vértice igual a 10 é a letra B, entretanto, o custo mínimo obtido é negativo, o que é uma inconsistência. A questão portanto não apresenta alternativa correta.

18) Pelo gráfico, podemos obter as funções:

$a(x)=x+1$

$b(x)=3-x$

$c(x)=x+4$

Assim, queremos resolver $\frac{(x+1)^5(3-x)^6}{(x+4)^3}\geq 0$.

Pelo método da reta real, temos que $S=(-\infty,-4)\cup[-1,+\infty)$.

RESPOSTA: C

19. $\frac{1+x}{1-x}\geq 1\Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}\leq 0$ (como mudamos o sinal de 1 – x, mudamos o sinal da desigualdade!)

Pelo método da reta real, temos que $S=[0,1)$

RESPOSTA: B

20) O lucro obtido com a venda em função de x é dado pela função $L(x)=(x-10)(70-x)=-x^2+80x-700$.

Esta função é do segundo grau e possui concavidade para baixo. Com isso, é uma função que admite máximo, dado por $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$.

O discriminante é dado por $\Delta = 80^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-700) = 6400 - 2800 = 3600$.

Assim, o lucro máximo é $\frac{-3600}{-4} = 900$ reais.

RESPOSTA: C

21. Seja $ax^2 + bx + c = 0$ a equação do segundo grau correta.

Como o primeiro aluno copiou errado o termo constante, seja $ax^2 + bx + c' = 0$ a equação por ele copiada. Como esta equação possui -3 e -2 como raízes, temos que a soma das raízes é -5 e assim $-\frac{b}{a} = -5 \Leftrightarrow b = 5a$.

Por fim, o segundo aluno copiou errado o coeficiente do termo do primeiro grau. Seja $ax^2 + b'x + c = 0$ a equação por ele copiada. Como esta equação possui 1 e 4 como raízes, temos que o produto das raízes é 4 e desta forma $\frac{c}{a} = 4 \Leftrightarrow c = 4a$.

Assim, a equação correta é dada por $ax^2 + 5ax + 4a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$, que tem como raízes – 4 e – 1. Assim, a diferença positiva entre as raízes é 3.

RESPOSTA: C

22. Temos que $x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$. Para que a área seja menor ou igual a 35 cm², devemos ter $x(x-2) \le 35 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 \le 0$. Resolvendo esta inequação, temos que $-5 \le x \le 7$.

Ainda devemos ter $x > 2$ para que a dimensão y seja positiva.

Assim obtemos $2 < x \le 7$.

RESPOSTA: D

23. Como $x^2 - x + 1 > 0$ para todo x real, temos que $-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ é equivalente a $-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2 \Leftrightarrow 4x^2 + (a-3)x + 1 > 0$ para todo x real e além disso $x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - (a+2)x + 4 > 0$ para todo x real.

Para que aconteçam estas duas condições, devemos ter os discriminantes negativos:

$(a-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 7$

$(a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 > 0 \Leftrightarrow -6 < a < 2$

Intersectando as condições, temos que $-1 < a < 2$.

RESPOSTA: B

24. Fatorando os numeradores e denominadores, temos:

NUMERADOR: $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

DENOMINADOR: $-x^4+3x^3-2x^2=-x^2(x^2-3x+2)=-x^2(x-1)(x-2)$

Assim, queremos resolver $\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{-x^2(x-1)(x-2)}\le 0$. Cancelando $x-1$ e lembrando que $x\ne 1$ e $x^2+1>0$ para todo x real, devemos resolver:

$$\frac{(x+1)}{x^2(x-2)}\ge 0$$

Pelo método da reta real, obtemos $S=(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$.

RESPOSTA: A

25. Sejam $x_1<x_2$ as raízes. Pelo enunciado, temos:

$$x_1=\sqrt{mx_2}\Rightarrow m=\frac{{x_1}^2}{x_2}$$

$$x_2=\sqrt{nx_1}\Rightarrow n=\frac{{x_2}^2}{x_1}$$

Assim $m+n=\dfrac{{x_1}^3+{x_2}^3}{x_1x_2}=\dfrac{S^3-3SP}{P}$. Substituindo $S=-\dfrac{b}{a}$ e $P=\dfrac{c}{a}$, obtemos:

$$m+n=\frac{-\dfrac{b^3}{a^3}+\dfrac{3bc}{a^2}}{\dfrac{c}{a}}=\frac{3abc-b^3}{a^2c}$$

RESPOSTA: A

26. Seja $S=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ a soma pedida. Elevando ao quadrado, temos que $S^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=6+2\sqrt{2}\Rightarrow S=\sqrt{6+2\sqrt{2}}$

LETRA A

27) Seja $C(t)=at^2+bt+c$ a função que descreve a concentração em função do tempo. Temos então:

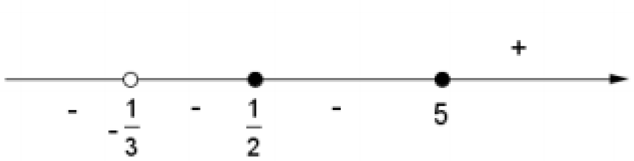
$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a+2b+c=5 \\ 9a+3b+c=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $a=-3$, $b=11$ e $c=-5$.

Assim $C(t)=-3t^2+11t-5$. Para $t=2{,}5$, obtemos $C(2{,}5)=(-3)\cdot\frac{25}{4}+11\cdot\frac{5}{2}-5=\frac{15}{4}=3{,}75$

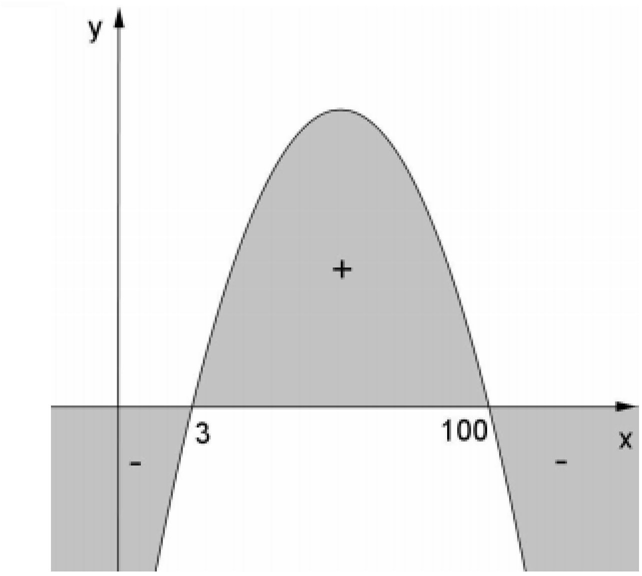
RESPOSTA: D

28. Basta utilizar o método da reta real para obter $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[5,+\infty[$



RESPOSTA: E

29. Devemos ter $103x-x^2-300\geq 0 \Leftrightarrow x^2-103x+300\leq 0$. Como as raízes da função quadrática são 100 e 3, devemos ter $3\leq x\leq 100$, em um total de 100 – 3 + 1 = 98 números.



RESPOSTA: C

30) Vimos que o "x do vértice" é dado pela média aritmética entre as raízes.

Assim temos que $x_V=\frac{1000+3000}{2}=2000$.

Desta forma, a reta $x=2000$ é eixo de simetria para a parábola do problema.

Como 2010 e 1990 equidistam de 2000, segue que os pontos correspondentes estão à mesma altura, ou seja, o valor numérico de y quando x vale 1990 é o mesmo valor numérico de y quando x vale 2000, que é 16.

RESPOSTA: C