15 RELAÇÕES ENTRE AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo, as diversas razões trigonométricas de um mesmo arco serão relacionadas umas com as outras. Serão estudadas oito relações entre essas razões, sendo cinco delas chamadas relações fundamentais e as demais, relações decorrentes. As relações fundamentais são assim chamadas por serem distintas e independentes umas das outras. Elas permitem que, dado o valor de uma das razões de um arco qualquer, encontremos os valores das demais razões trigonométricas do mesmo arco (se existirem).

Nossa tarefa será facilitada porque, no decorrer do capítulo anterior, ao definirmos algumas razões, o fizemos geometricamente, o que favorece a visualização conjunta das razões.

No entanto, para as quatro últimas (tangente, cotangente, secante e cossecante), por se tratar de quocientes envolvendo senos e cossenos nos denominadores, é necessário, quando apropriado, apurar as condições de existência de cada uma delas.

Relações fundamentais

Das cinco relações fundamentais, as duas primeiras foram estudadas em tópicos próprios:

I. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

II. $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

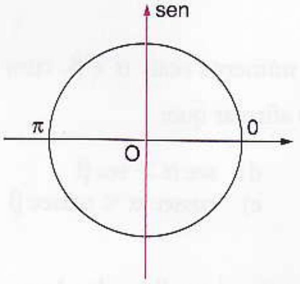
As outras três foram desenvolvidas com as definições das razões:

III. $\text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$

IV. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

V. $\text{cossec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$

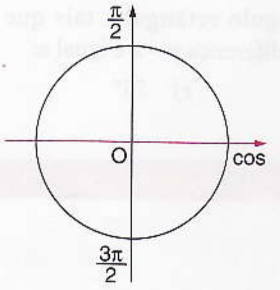
Como afirmamos na introdução deste capítulo, é fundamental a preocupação com as condições de existência: uma razão não pode ter o denominador nulo. Assim, precisamos estar atentos aos pontos em que o seno ou o cosseno se anula.



$\text{sen}\, 0 = \text{sen}\, \pi = 0$

$\nexists\, \text{cotg}\, 0, \nexists\, \text{cotg}\, \pi,$

$\nexists\, \text{cossec}\, 0$ e $\nexists\, \text{cossec}\, \pi$



$\cos \dfrac{\pi}{2} = \cos \dfrac{3\pi}{2} = 0$

$\nexists\, \text{tg}\, \dfrac{\pi}{2}, \nexists\, \text{tg}\, \dfrac{3\pi}{2},$

$\nexists\, \sec \dfrac{\pi}{2}$ e $\nexists\, \sec \dfrac{3\pi}{2}$

exemplo 1

Dado $\cos \alpha = \dfrac{1}{4}$, com $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, para calcular $\text{tg}\, \alpha$ utilizamos inicialmente a relação fundamental I:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \text{sen}\, \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Portanto, como α é do 1º quadrante, temos $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Finalmente, pela relação fundamental II:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4} : \frac{1}{4}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{15}$$

Como podemos notar, obtivemos $\text{tg}\,\alpha > 0$, o que de fato se verifica para valores de α do 1º quadrante.

exemplo 2

Dada $\sec x = \dfrac{5}{2}$, podemos encontrar as demais razões trigonométricas do arco x, situado, por exemplo, no 4º quadrante.

Vamos utilizar as relações fundamentais:

IV. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{\sec x} = 1 : \dfrac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \dfrac{2}{5}$

I. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$

$\text{sen}\,x = \pm\dfrac{\sqrt{21}}{5} \overset{4^{\circ}\text{Q}}{\Rightarrow} \text{sen}\,x = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

II. $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg}\,x = \dfrac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \text{tg}\,x = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

III. $\text{cotg}\,x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} \Rightarrow \text{cotg}\,x = \dfrac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{cotg}\,x = -\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$

V. $\text{cossec}\,x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} \Rightarrow \text{cossec}\,x = \dfrac{1}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} =$

$= -\dfrac{5}{\sqrt{21}} \Rightarrow \text{cossec}\,x = -\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$

exercícios

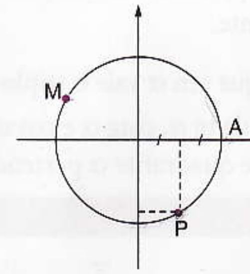
1. Calcule sen α sendo que α é do 2º quadrante e $\cos\alpha = -\dfrac{4}{7}$.

2. Quanto vale $\cos\alpha$, se $\text{sen}\,\alpha = 0{,}3$ e $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?

3. Com $4\cos x - 3 = -4$, quais são os valores possíveis para sen x?

4. Quando x é do 4º quadrante, é possível termos $\text{sen}\,x = -\dfrac{2}{3}$? Nessas condições, quanto vale cos x?

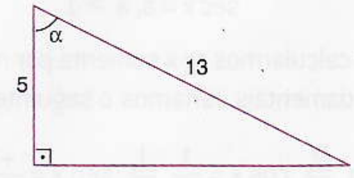
5. Qual é o significado da ordenada do ponto P? Qual é o seu valor?



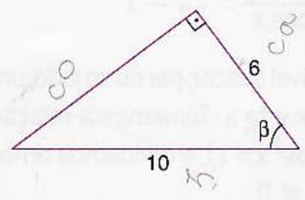
6. Apure o valor de tg x, se x é do 1º quadrante tal que $\text{sen}\,x = \dfrac{2}{7}$.

7. Quanto vale tg x, se $\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$?

8. Determine cotg α.



9. Calcule sec β e cossec β.



10. Sendo $\cos x = \dfrac{2}{5}$, qual é o valor de m de modo que se tenha $\sec x = \dfrac{m+1}{4}$?

11. Ache tg x, sabendo que cossec x = 2, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

12. Dado $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{4}$, determine as demais razões trigonométricas do arco *x* do 2º quadrante.

13. Escreva em ordem crescente as seis razões trigonométricas do arco *x* do 2º quadrante, sabendo que cossec x = 1,5.

14. Descubra os valores de *m* para os quais temos simultaneamente $\text{sen } x = 1 - 2m$ e $\cos x = -m$.

15. (UFF-RJ, adaptado) Determine a relação entre os números reais *a* e *b*, de modo que as igualdades $1 + \cos x = a \text{ sen } x$ e $1 - \cos x = b \text{ sen } x$, com *x* na primeira volta, sejam satisfeitas simultaneamente.

16. Sabe-se que sen α vale o triplo de cos α.

a) Calcule tg α, cotg α e cos α.

b) A que quadrante α pertence?

Relações decorrentes

A partir das cinco relações fundamentais, podemos deduzir outras relações, que serão úteis para simplificar a resolução de alguns problemas.

Suponhamos, por exemplo, que seja dado o valor da secante de um arco *x* do 1º quadrante:

$$\sec x = a,\ a > 1$$

Para calcularmos tg x somente por meio das relações fundamentais, faríamos o seguinte:

$$\sec x = a \overset{\text{IV}}{\Rightarrow} \cos x = \frac{1}{a} \overset{\text{I}}{\Rightarrow} \text{sen } x = \frac{+\sqrt{a^2 - 1}}{a} \overset{\text{II}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \sqrt{a^2 - 1}$$

É possível buscar, por outro lado, uma relação direta entre sec x e tg x. Tomemos a relação fundamental I ($\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$), e dividamos ambos os membros por $\cos^2 x \neq 0$:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\boxed{\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x}$, válida quando $\cos x \neq 0$

Da mesma forma, tomando a relação fundamental I e dividindo ambos os membros por $\text{sen}^2 x \neq 0$, obtemos:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$$

expressão válida quando $\text{sen } x \neq 0$ e que se escreve:

$$\boxed{\text{cotg}^2 x + 1 = \text{cossec}^2 x}$$

Existe outra relação, imediata, que surge da simples observação das relações fundamentais II e III:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Podemos multiplicá-las membro a membro:

$$\text{tg } x \cdot \text{cotg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen } x} = 1$$

Generalizando, temos a seguinte expressão, válida quando $\cos x \neq 0$ e $\text{sen } x \neq 0$:

$$\boxed{\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}}$$

exemplo 3

Dada $\text{tg } x = \frac{5}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, para calcular o valor de sec x, utilizamos a primeira relação decorrente:

$$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1 = \sec^2 x$$

$$\sec^2 x = \frac{41}{16}$$

$$\sec x = \pm\frac{\sqrt{41}}{4} \overset{3^{\circ}\text{Q}}{\Rightarrow} \sec x = -\frac{\sqrt{41}}{4}$$

Considerando a terceira relação decorrente, podemos encontrar o valor de cotg x:

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} \Rightarrow \text{cotg } x = \frac{1}{\frac{5}{4}} \Rightarrow \text{cotg } x = \frac{4}{5}$$

exemplo 4

Dada $\text{cossec}\, x = \frac{10}{7}$, sendo x do 2º quadrante, podemos encontrar diretamente cotg x:

$$\text{cotg}^2\, x + 1 = \text{cossec}^2\, x$$

$$\text{cotg}^2\, x + 1 = \left(\frac{10}{7}\right)^2$$

$$\text{cotg}^2\, x = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49}$$

$$\text{cotg}\, x = \pm\frac{\sqrt{51}}{7} \overset{2º\text{ Q}}{\Rightarrow} \text{cotg}\, x = -\frac{\sqrt{51}}{7}$$

exercícios

17. Dada $\text{tg}\, x = \frac{4}{3}$, determine cotg x e sec x, sendo x do 1º quadrante.

18. Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ e $\text{cotg}\, \alpha = \frac{60}{11}$, quanto vale cossec α? E tg α?

19. Quanto vale tg x, se $\sec^2 x = 4$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$? E quanto vale x?

20. Sendo $\sec x = \frac{7}{3}$, quanto vale tg x, se x é do 4º quadrante? Além disso, se $\text{cotg}\, x = 1{,}5\, m$, quanto vale m?

21. Sabendo-se que $2 \cos x - 1 = 0$, quanto vale $\text{cotg}^2\, x$?

22. (UF-RN) Sabendo que $\text{tg}\, \theta = 2$ e $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, calcule o seno e o cosseno do ângulo θ, medido em radianos.

23. Simplifique a expressão $\text{sen}^2\, x + \frac{\text{cotg}^2\, x}{1 + \text{cotg}^2\, x}$.

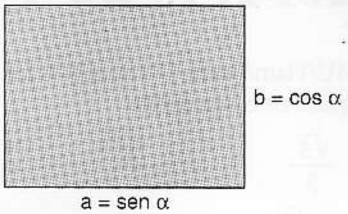
24. Se x não é do 1º quadrante e $\text{tg}\, x = 1{,}5$, quanto vale cos x?

25. Sendo x arco do 2º quadrante, com $|\cos x| = \frac{12}{13}$, determine o valor de tg x.

26. Se $a^2 = \sec^2 x - 1$ e $b^2 = \text{cossec}^2\, x - 1$, quanto vale o produto $a \cdot b$?

27. Com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, sendo $\text{sen}\, x = \frac{1}{10}$, quanto vale $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$?

28. (U. F. Ouro Preto-MG) Um retângulo possui lados medindo $a = \text{sen}\, \alpha$ e $b = \cos \alpha$, onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Determine a área do retângulo, sabendo que o perímetro é igual a $\sqrt{8}$.

29. Resolva a seguinte equação do 2º grau:

$$x^2\, \text{sen}\, \alpha - (2 \cos \alpha)x - \text{sen}\, \alpha = 0$$

30. Resolva a seguinte equação do 2º grau na incógnita x:

$$x^2 - 2x \sec \alpha + \text{tg}^2\, \alpha = 0$$

31. (UF-SC) Sendo $\text{sen}\, \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$:

a) determine sen α e cos α;

b) represente no círculo trigonométrico todos os ângulos α que satisfazem a igualdade dada.

32. Os números reais positivos a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Sendo $\sec x = \frac{5}{a}$, $\text{sen}\, x = \frac{b}{3}$ e $\cos x = \frac{a + c}{5}$, determine a progressão.

33. Sendo $\cos x = \frac{1}{3}$, calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\text{sen}\, x - \text{cossec}\, x}{\sec x \cdot \text{cotg}\, x}$$

34. Mostre que sec α pode ser escrito como:

a) $\text{sen}\, \alpha \cdot \text{tg}\, \alpha + \cos \alpha$

b) $\frac{\text{tg}^2\, \alpha}{\sec \alpha - 1} - 1$

35. Mostre que cossec α pode ser escrito como $\text{cotg}\, \alpha + \frac{\text{sen}\, \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

36. Se $\dfrac{\text{tg a} + \text{tg b}}{\text{cotg a} + \text{cotg b}} = \dfrac{7}{10}$, quanto vale tg a · tg b?

37. (FGV-SP)

a) Num triângulo isósceles ABC, em que AB = AC, o ângulo $\hat{A}$ mede o dobro da soma dos outros dois. O lado $\overline{BC}$ mede 10 cm. Obtenha o perímetro desse triângulo.

b) Considerando que sen x + cos x = k, calcule, em função de *k*, o valor da expressão $\text{sen}^3 x + \cos^3 x$.

testes de vestibulares

1. (FMU/Fiam/Faam-SP) Se tg α = 2 e α é um arco do 3º quadrante, sen α vale:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ c) $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ e) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

2. (Unifor-CE) Se *k* é o número real positivo que satisfaz simultaneamente as equações $\text{sen } x = \dfrac{k+1}{3}$ e $\cos x = -k$, então:

a) $k = \dfrac{1}{5}$

b) $k = \dfrac{2}{5}$

c) $k = \dfrac{3}{5}$

d) $k = \dfrac{4}{5}$

e) $k = 1$

3. (FMU/Fiam/Faam-SP) O valor da expressão $\dfrac{2 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \text{tg}^2 x$ é:

a) 1 b) –1 c) 0 d) 2 e) –2

4. (Cefet-PR) A expressão

$$\frac{\cos x}{1 + \text{sen } x} + \frac{1 + \text{sen } x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$$

é equivalente a:

a) sen x b) cos x c) tg x d) cotg x e) sec x

5. (UF-AM) Associe as expressões equivalentes das duas colunas e assinale a alternativa correspondente à associação correta:

(A) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ (1) $\dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$

(B) sec x (2) $\text{tg}^2 x + 1$

(C) $\sec^2 x - 1$ (3) 1

(D) $\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x$ (4) $\text{tg}^2 x$

a) A2, B1, C3, D4

b) A3, B1, C4, D2

c) A2, B3, C4, D1

d) A2, B1, C4, D3

e) A2, B4, C1, D3

6. (Ucsal-BA) Se *x* e *y* são números reais tais que $y = \dfrac{\text{sen } x}{1 + \text{sen } x} + \dfrac{\text{sen } x}{1 - \text{sen } x}$, então *y* é igual a:

a) 2 · sec x · tg x

b) 2 · sen x · cos x

c) $2 \cdot \cos^2 x$

d) 2 · sec x

e) sen x

7. (Unit-SE) Se *x* é tal que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e tg x = 4, então $\dfrac{\cos x - \sec x}{\text{sen } x - \text{cossec } x}$ é igual a:

a) 256 b) 128 c) 64 d) $\sqrt{17}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

8. (Cefet-MG) A expressão $\dfrac{\sec^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{cossec}^2 x - \cos^2 x}$ é equivalente a:

a) 1

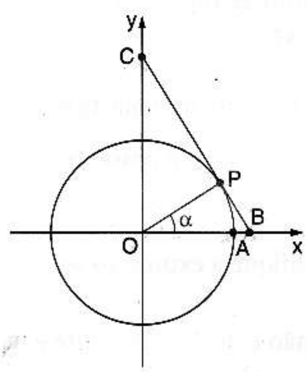
b) $\text{cotg}^2 x$

c) $\text{cossec}^2 x$

d) $\sec^2 x$

e) $\text{tg}^2 x$

9. (UF-RS) Na figura, o círculo é unitário e $\overline{BC}$ é tangente ao círculo no ponto *P*.



Se o arco $\widehat{AP}$ mede α, $\overline{BC}$ vale:

a) tg α + cotg α

b) sen α + cos α

c) sec α + cossec α

d) tg α + sen α

e) cotg α + cos α

10. (U. F. Santa Maria-RS) Calculando $x \in \mathbb{R}$, de modo que ocorram simultaneamente $\text{sen}\ \alpha = \frac{x}{x+1}$ e $\cos \alpha = \frac{x-1}{x+1}$, obtém-se:

a) 0 e 1
b) 1 e 4
c) 1 e 1
d) 0 e 4
e) 4 e –1

11. (Furg-RS) O valor da expressão $y = \frac{2\,\text{cotg}\,x}{1+\text{tg}^2\,x}$, quando $\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{7}$ e $\text{tg}\,x < 0$, é:

a) $-\frac{13\sqrt{13}}{147}$
b) $-\frac{12\sqrt{13}}{49}$
c) $-\frac{49\sqrt{13}}{108}$
d) $\frac{12\sqrt{13}}{49}$
e) $-\frac{49\sqrt{13}}{39}$

12. (Ucsal-BA) Qualquer que seja o número real *x*, a expressão $\cos^4 x - \text{sen}^4 x$ é equivalente a:

a) $\text{sen}^2 x - 1$
b) $2\ \text{sen}\ x \cos x$
c) $2 \cos^2 x - 1$
d) $2 - \text{cox}^2\ x$
e) $(\text{sen}\ x + \cos x) \cdot \cos x$

13. (Cefet-MG) A expressão trigonométrica $\frac{\sec x - \text{cossec}\ x}{\text{sen}\ x - \cos x}$, onde $\text{sen}\ x \neq \cos x$, equivale a:

a) $\sec x \cdot \text{cossec}\ x$
b) $-\sec x \cdot \text{cossec}\ x$
c) –1
d) 0
e) 1

14. (U. F. Ouro Preto-MG) Dado $\text{sen}\ 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, o valor de sec 18° é:

a) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$
b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$
c) $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$
d) $\frac{8}{5+\sqrt{5}}$

15. (Funrei-MG) Se existe um ângulo *x* tal que $\text{sen}\ x = \frac{2}{m-1}\sqrt{m-2}$ e $\text{tg}\ x = \sqrt{m-2}$, então a soma de todos os valores possíveis de *m* é igual a:

a) 4
b) 6
c) 5
d) 7
e) 3

16. (ITA-SP) Seja θ um valor fixado no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sabe-se que $a_1 = \text{cotg}\ \theta$ é o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita de razão $q = \text{sen}^2\ \theta$. A soma de todos os termos dessa progressão é:

a) $\text{cossec}\ \theta \cdot \text{tg}\ \theta$
b) $\sec \theta \cdot \text{tg}\ \theta$
c) $\sec \theta \cdot \text{cossec}\ \theta$
d) $\sec^2 \theta$
e) $\text{cossec}^2\ \theta$

desafios

1. Resolva a equação do 2º grau:

$$x^2 - 2x + \text{sen}\ \alpha(x-1) - \cos \alpha(1-x) + \text{sen}\ \alpha \cos \alpha = -1$$

2. Sendo O o centro da circunferência abaixo, com α = 30°, determine cossec β.