Estou na área, grande guerreiro, futuro oficial da Marinha, Marinha Mercante ou Aeronáutica do Brasil!

Esta é a aula 04 do nosso curso de Matemática 1 para as provas da AFA, EFOMM e ESCOLA NAVAL e estudaremos hoje progressões aritméticas (PA's), geométricas (PG's), aritméticas-geométricas (PAG's) e progressões de ordens superiores.

Prontos para a guerra? Vamos lá!

SUMÁRIO

PROGRESSÕES

1. SEQUÊNCIAS

Antes de começarmos o estudo das progressões, veremos uma definição um pouco mais geral: estudaremos o que é uma sequência.

Intuitivamente, uma sequência é uma lista de elementos que estão escritos em uma determinada ordem.

Formalmente, uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos.

Vejamos alguns exemplos de sequências:

i) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... (sequência (infinita) dos inteiros positivos)

ii) 2, 4, 6, 8, 10, ... (sequência (infinita) dos inteiros positivos pares)

iii) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... (sequência (infinita) dos números primos positivos)

iv) 5, 10, 15, 20, 25 (sequência (finita) dos inteiros positivos múltiplos de 5 que são menores que 30)

v) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... (sequência (infinita) de Fibonacci – cada termo, a partir do segundo, é a soma dos dois termos anteriores)

Uma notação muito útil para representar sequências é a seguinte:

a_1 representa o primeiro termo da sequência

a_2 representa o segundo termo da sequência

a_3 representa o terceiro termo da sequência

...

a_n representa o n-ésimo termo da sequência

Com efeito, no exemplo v), teríamos: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21$

2. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Agora que já vimos o que é uma sequência, estamos aptos para introduzir a nossa primeira progressão.

Antes de mais nada, veja o seguinte exemplo: a Copa do Mundo da França ocorreu em 1998, a Copa do Mundo da Coréia do Sul e do Japão ocorreu em 2002, a Copa do Mundo da Alemanha ocorreu em 2006, a Copa do Mundo da África do Sul ocorreu em 2010 e última Copa do Mundo, realizada no Brasil, ocorreu em 2014. Repare que a Copa do Mundo acontece de 4 em 4 anos. Pela definição que veremos a seguir, os anos em que ocorrem a Copa do Mundo formam uma progressão aritmética.

2.1. DEFINIÇÃO

Uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é dita uma **PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)** se a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é constante, isto é, se $\boxed{a_{n+1} - a_n = r}$, para todo n inteiro positivo e onde r é uma constante. Neste caso, dizemos que r é a razão desta PA.

EXEMPLOS:

i) 1, 1, 1, 1, 1 é uma progressão aritmética com 5 termos e cuja razão é igual a 1 – 1 = 0.

ii) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ é uma progressão aritmética infinita com razão 1.

iii) $1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$ é uma progressão aritmética com 6 termos e cuja razão é $-\frac{1}{2}$.

2.2. CLASSIFICAÇÃO

I) CRESCENTES: aquelas onde cada termo é maior que o anterior, ou seja, onde a razão é positiva.

EXEMPLO:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

II) CONSTANTES: aquelas onde cada termo é igual ao anterior, ou seja, aquelas PA’s com razão nula.

EXEMPLO:

1, 1, 1, 1, 1

III) DECRESCENTES: aquelas onde cada termo é menor que o anterior, ou seja, onde a razão é negativa.

PROBIZU

2.3. TERMO GERAL

Vamos deduzir agora fórmulas para encontrar um termo de uma PA se conhecermos outro termo e a razão.

I) N-ÉSIMO TERMO EM FUNÇÃO DO PRIMEIRO:

Como a diferença entre dois termos consecutivos é sempre igual à razão da PA, podemos escrever:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = r \\ a_3 - a_2 = r \\ a_4 - a_3 = r \\ \quad \vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} = r \\ a_n - a_{n-1} = r \end{cases}$$

Somando estas $n-1$ equações, repare que há cancelamento de vários termos:

$$\cancel{a_2} - a_1 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cancel{a_4} - \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} \cancel{-a_{n-2}} + a_n - \cancel{a_{n-1}} = (n-1)r$$

Assim, sobrarão apenas os termos a_n e a_1 e então obtemos que $a_n - a_1 = (n-1)r$.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

II) N-ÉSIMO TERMO EM FUNÇÃO DO P-ÉSIMO:

Com um procedimento análogo ao do item anterior, podemos deduzir que:

$$\boxed{a_n = a_p + (n-p)r}$$

Veja que esta fórmula permite relacionar quaisquer dois termos de uma PA. Além disso, a fórmula deduzida em I é um caso particular desta.

2.4. INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Interpolar, inserir ou intercalar k meios aritméticos entre os extremos a e b significa construir uma progressão aritmética de $k+2$ termos, sendo que o primeiro termo é igual a a e o segundo termo é igual a b. Vejamos um exemplo:

EXEMPLO:

Intercalar 10 meios aritméticos entre os extremos 2 e 57.

SOLUÇÃO:

Queremos construir uma PA $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ de forma que $a_1 = 2$ e $a_{12} = 57$. Com base nisto, vamos determinar a razão r da PA: pela fórmula do termo geral, temos que $a_{12} = a_1 + (12-1)r$. Substituindo $a_1 = 2$ e $a_{12} = 57$, segue que $57 = 2 + 11r \Leftrightarrow r = 5$. Desta forma, os meios que devemos inserir são: 7, 12,17,22,27,32,37,42,47,52

2.5. SOMA DOS TERMOS

Agora, estaremos interessados em calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$. Para isso, precisaremos do seguinte PROBIZU:

Em uma progressão aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a soma de dois termos equidistantes do termo central sempre possui o mesmo valor, ou seja, $a_p + a_{n+1-p} = a_1 + a_n$. De fato, temos que $a_p = a_1 + (p-1)r$ (1) e $a_n = a_{n+1-p} + (n-(n+1-p))r = a_{n+1-p} + (p-1)r$.

Assim, $a_{n+1-p} = a_n - (p-1)r$ (2).

Somando (1) e (2), chegamos a $a_p + a_{n+1-p} = a_1 + a_n$.

Podemos representar PA's da seguinte forma bastante útil:

3 termos: $(x-r, x, x+r)$

PROBIZU

$$y = \frac{r}{2}$$

Para calcular S_n, utilizaremos o seguinte artifício (escreveremos a soma desejada na ordem inversa)

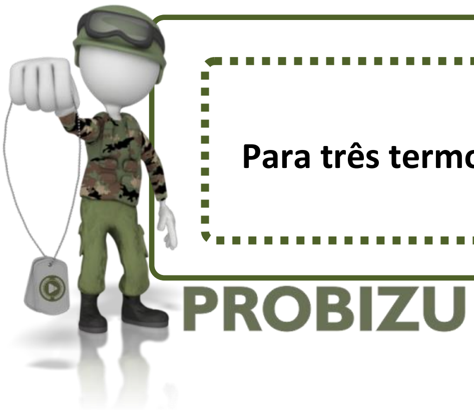
$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

Somando estas duas últimas equações, temos que $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Utilizando o PROBIZU, segue que $2S_n = n(a_1 + a_n)$ e então obtemos a seguinte fórmula para a soma dos termos de uma PA:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Eu gosto de gravar esta soma com a seguinte frase: "a soma dos termos de uma PA é igual ao primeiro termo mais o último termo vezes a quantidade de termos; isso tudo dividido por 2".



Para três termos consecutivos a, b, c de uma PA, vale que $b = \frac{a+c}{2}$.

VEJAMOS AGORA ALGUNS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS ANTES DE DARMOS CONTINUIDADE À MATÉRIA:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1:

De 1995 a 2004, a população de uma cidade vem aumentando anualmente em progressão aritmética. Em 2004 constatou-se que o número de habitantes era 8% maior que no ano anterior. Pode-se concluir que, de 1995 a 2004, a população dessa cidade aumentou em:

a) 200%

b) 180%

c) 160%

d) 100%

e) 80%

SOLUÇÃO:

De 1995 a 2004, há 10 anos a serem considerados. Seja a_1 a população no ano de 1995 e a_{10} a população no ano de 2004.

Da informação "Em 2004 constatou-se que o número de habitantes era 8% maior que no ano anterior", podemos concluir que:

$$a_{10} = \left(1 + \frac{8}{100}\right)a_9 = 1{,}08a_9 \quad (*)$$

Como $a_{10} = a_9 + r$, substituindo $a_9 = a_{10} - r$ na equação (*), temos que:

$$\begin{aligned}
&a_{10} = 1{,}08(a_{10} - r) \Leftrightarrow \\
&1{,}08r = 0{,}08a_{10} \Leftrightarrow \\
&\frac{27}{25}r = \frac{2}{25}a_{10} \Leftrightarrow \\
&a_{10} = \frac{27r}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que $a_{10} = a_1 + (10-1)r = a_1 + 9r \Leftrightarrow a_{10} - a_1 = 9r$. Com isso, $a_1 = \frac{27r}{2} - 9r = \frac{9r}{2}$

Assim, o aumento percentual da população de 1995 até 2004 é de $\left(\frac{a_{10} - a_1}{a_1}\right) \times 100\% = \frac{9r}{\frac{9r}{2}} \times 100\% = 200\%$.

RESPOSTA: A

EXERCÍCIO RESOLVIDO 2:

Determine quatro números em progressão aritmética crescente, sabendo que sua soma é 8 e que a soma de seus quadrados é 36.

SOLUÇÃO:

Sejam $(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$ os quatro números. Desta forma, temos:

$$\begin{cases} x - 3y + x - y + x + y + x + 3y = 8 \\ (x-3y)^2 + (x-y)^2 + (x+y)^2 + (x+3y)^2 = 36 \end{cases}$$

Simplificando as equações utilizando produtos notáveis, temos:

$$\begin{cases} 4x = 8 \\ 4x^2 + 20y^2 = 36 \end{cases}$$

Da primeira equação, $x = 2$. Substituindo este valor na segunda equação, obtemos que $16 + 20y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Como a progressão é crescente, temos que $y > 0$.Logo $y = 1$ e a progressão desejada é $(-1,1,3,5)$.

3. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Veja a história a seguir:

"O grão-vizir, principal conselheiro do rei, tinha inventado um novo jogo. Era jogado com peças móveis sobre um tabuleiro quadrado que consistia em 64 quadrados vermelhos e pretos. O objetivo era capturar o rei inimigo, e por isso o jogo era chamado, em persa, shahmat – shah para rei, mat para morto. Morte ao rei. O jogo, claro, é o xadrez. Mas reza a história que o rei ficou tão encantado com a invenção que mandou o grão-vizir determinar sua própria recompensa. O grão-vizir já tinha a resposta na língua: era um homem modesto, disse ao xá. Desejava apenas uma recompensa simples. Apontando as oito colunas e as oito filas de quadrados no tabuleiro que tinha inventado, pediu que lhe fosse dado um único grão de trigo no primeiro quadrado, o dobro dessa quantia no segundo, o dobro dessa quantia no terceiro e assim por diante, até que cada quadrado tivesse o seu complemento de trigo. Não protestou o rei, era uma recompensa demasiada modesta para uma invenção tão importante.

No entanto, quando o mestre do Celeiro Real começou a contar os grãos, o rei se viu diante de uma surpresa desagradável. O número de grãos começa bem pequeno: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024... mas quando se chega ao 64° quadrado, o número se torna colossal, esmagador. O número final chega a quase 18,5 quintilhões (se cada grão tivesse o tamanho de um milímetro, todos os grãos juntos pesariam cerca de 75 bilhões de toneladas!)."

Este é um exemplo de progressão geométrica, que é o assunto que estudaremos a seguir.

3.1. DEFINIÇÃO

Uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é dita uma **PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)** se cada termo é igual ao anterior vezes uma constante, isto é, se $\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$, para todo n inteiro positivo e onde q é uma constante. Neste caso, dizemos que q é a razão desta PG.

EXEMPLOS:

i) 1, 1, 1, 1, 1 é uma progressão geométrica com 5 termos e cuja razão é igual a $\frac{1}{1} = 1$.

ii) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ é uma progressão geométrica infinita com razão 2.

iii) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$ é uma progressão aritmética com 6 termos e cuja razão é $-\frac{1}{2}$.

3.2. CLASSIFICAÇÃO

I) **CRESCENTES**: aquelas em que cada termo é maior que o anterior

II) **DECRESCENTES**: aquelas em que cada termo é menor que o anterior

III) **ALTERNANTES**: aquelas em que cada termo possui sinal contrário ao do anterior

IV) **CONSTANTES**: aquelas em que cada termo é igual ao anterior

V) **ESTACIONÁRIAS**: aquelas em que a razão é nula, ou seja, cada termo, a partir do segundo, é nulo.

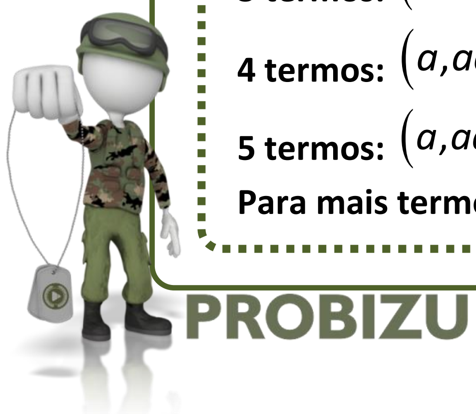
Para PG's, é bom representá-las da seguinte forma:

3 termos: (a, aq, aq^2)

4 termos: (a, aq, aq^2, aq^3)

5 termos: $(a, aq, aq^2, aq^3, aq^4)$

Para mais termos, podemos usar representações análogas.



3.3. TERMO GERAL

Vamos deduzir agora fórmulas para encontrar um termo de uma PG se conhecermos outro termo e a razão.

I) N-ÉSIMO TERMO EM FUNÇÃO DO PRIMEIRO:

Podemos escrever:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 q \\ a_3 = a_2 q \\ a_4 = a_3 q \\ \quad \vdots \\ a_{n-1} = a_{n-2} q \\ a_n = a_{n-1} q \end{cases}$$

Multiplicando todas as equações e cancelando os termos, obtemos:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

II) N-ÉSIMO TERMO EM FUNÇÃO DO P-ÉSIMO:

Com um procedimento análogo ao do item anterior, podemos deduzir que:

$$\boxed{a_n = a_p q^{n-p}}$$

Veja que esta fórmula permite relacionar quaisquer dois termos de uma PG. Além disso, a fórmula deduzida em I é um caso particular desta.

3.4. INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolar, inserir ou intercalar k meios geométricos entre os extremos a e b significa construir uma progressão geométrica de $k+2$ termos, sendo que o primeiro termo é igual a a e o segundo termo é igual a b.

Vejamos um exemplo:

EXEMPLO:

Intercalar 8 meios geométricos entre os extremos 5 e 2560.

SOLUÇÃO:

Queremos construir uma PG $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ de forma que $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2560$. Com base nisto, vamos determinar a razão q da PG: pela fórmula do termo geral, temos que $a_{10} = a_1 q^9$. Substituindo $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2560$, segue que $2560 = 5q^9 \Leftrightarrow q^9 = 512 \Leftrightarrow q = 2$. Desta forma, os meios que devemos inserir são:

$$10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280$$

3.5. SOMA DOS TERMOS DE UMA PG FINITA

Agora, estaremos interessados em calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Utilizando a fórmula do termo geral, podemos reescrever

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} \text{ (1)}$$

O truque agora é multiplicar ambos os lados pela razão q, obtendo assim:

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n \text{ (2)}$$

Fazendo (2) – (1), obtemos, após cancelar os termos comuns:

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$

Supondo $q \neq 1$, obtemos a seguinte fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Por outro lado, se $q = 1$, todos os termos da PG são iguais ao primeiro e obtemos:

$$\boxed{S_n = n a_1}$$

3.6. PRODUTO DOS TERMOS DE UMA PG

Estamos agora interessados em calcular $P_n = a_1 a_2 \ldots a_n$ .Substituindo $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pelas expressões obtidas através do termo geral, temos: $P_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \ldots \cdot a_1 q^{n-1}$. Logo obtemos $P_n = a_1{}^n q^{1+2+\ldots+n-1}$ e como $1+2+\ldots+n-1 = \dfrac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, segue que:

$$\boxed{P_n = a_1{}^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

3.7. SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

Consideraremos agora PG's infinitas cuja razão q é tal que $|q|<1$, ou seja, $-1<q<1$. Estamos interessados em calcular $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$. Para isso, note que as somas $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ se aproximam cada vez mais de S, quando n vai ficando cada vez maior. Pela fórmula da soma dos termos de uma PG finita, temos que $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)}$. Repare agora que quando n fica cada vez maior, temos que q^n se aproxima cada vez mais de 0.

Formalmente, temos que $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1 \cdot (0-1)}{q-1} = \dfrac{a_1}{1-q}$. Com isso, obtemos a seguinte fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}} \quad (\text{se } |q|<1)$$

Para três termos consecutivos a, b, c de uma PG, vale que $b^2 = ac$.

PROBIZU

Vejamos agora mais exercícios resolvidos antes de prosseguirmos com a matéria:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3:

O terceiro termo de uma progressão geométrica é 10 e o sexto termo é 80. Então a razão desta progressão é:

a) 1

b) – 1

c) – 2

d) 2

e) 3

SOLUÇÃO:

Temos que $a_3 = 10$ e $a_6 = 80$. Pela fórmula do termo geral, temos que $a_6 = a_3 q^{6-3} = a_3 q^3$. Substituindo os valores, obtemos que: $80 = 10q^3 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$.

RESPOSTA: D

EXERCÍCIO RESOLVIDO 4:

A soma dos cinco primeiros termos de uma PG, de razão negativa, é 1/2. Além disso, a diferença entre o sétimo termo e o segundo termo desta PG é igual a 3. Determine a razão da PG.

SOLUÇÃO:

Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ a PG. Pelo enunciado, temos:

$$S_5 = \frac{1}{2}$$

$$a_7 - a_2 = 3$$

Pela fórmula da soma dos termos de uma PG, temos que $S_5 = \dfrac{a_1\left(q^5 - 1\right)}{q - 1} = \dfrac{1}{2}$ (1)

Pela fórmula do termo geral, temos que $a_7 = a_1 q^6$ e $a_2 = a_1 q$. Substituindo na segunda equação, segue que $a_1 q\left(q^5 - 1\right) = 3 \Leftrightarrow a_1\left(q^5 - 1\right) = \frac{3}{q}$. Substituindo esta última na igualdade (1), obtemos:

$$\frac{\frac{3}{q}}{q-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{q(q-1)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q^2 - q - 6 = 0$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, levando em conta que q é negativo, temos que $q = -2$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 5:

A soma dos termos de uma PG infinita é 3. Sabendo que o primeiro termo é igual a 2, então o quarto termo desta PG é:

a) $\frac{2}{27}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{27}$

e) $\frac{3}{8}$

SOLUÇÃO:

Temos que $a_1 = 2$ e $S = \frac{a_1}{1-q} = 3$ (usando a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG). Substituindo a primeira igualdade na segunda, chegamos a $\frac{2}{1-q} = 3 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$. Pela fórmula do termo geral, $a_4 = a_1 q^3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$.

RESPOSTA: A

Vamos continuar nossos estudos agora vendo as progressões aritméticas-geométricas (PAG's):

4. PROGRESSÃO ARITMÉTICA-GEOMÉTRICA (PAG)

4.1. DEFINIÇÃO

Uma PAG é uma sequência cujo termo geral é da forma $a_n = u_n v_n$, onde u_n é uma progressão aritmética e v_n é uma progressão geométrica. Vejamos alguns exemplos para esclarecer a definição.

EXEMPLOS:

i) $1\cdot 1, 2\cdot 2, 3\cdot 4, 4\cdot 8, 5\cdot 16, \ldots$ é uma PAG, pois seus termos são os produtos dos termos da PA 1, 2, 3, 4, 5, ... pelos termos da PG 1, 2, 4, 8, 16, ...

ii) $\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{8}, \frac{12}{16}, \frac{15}{32}$ é uma PAG, pois seus termos são os produtos dos termos da PA 3, 6, 9, 12, 15 pelos termos da PG $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$.

4.2. SOMA DOS TERMOS DE UMA PAG

Não desenvolveremos aqui uma fórmula geral para o cálculo da soma dos termos de uma PAG, pois não é de grande valia guardar esta fórmula. O mais importante, na verdade, é saber o procedimento para se calcular a soma dos termos de uma PAG. Este procedimento é completamente similar ao método utilizado para o cálculo da soma dos termos de uma PG.

OBSERVAÇÃO

A ideia que deve ser gravada é:
Para calcular a soma dos termos de uma PAG, multiplique a soma desejada pela razão da PG e subtraia as duas relações encontradas.

Vejamos um exemplo para que as coisas fiquem ainda mais claras:

EXEMPLO:

Calcule $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots$

SOLUÇÃO:

Esta é a soma de uma PAG infinita. Para calcular esta soma, multiplicaremos S inicialmente pela razão da PG, que é 1/3. Assim, obtemos:

$$\frac{S}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{3}{81} + \frac{4}{243} + \ldots \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1), obtemos:

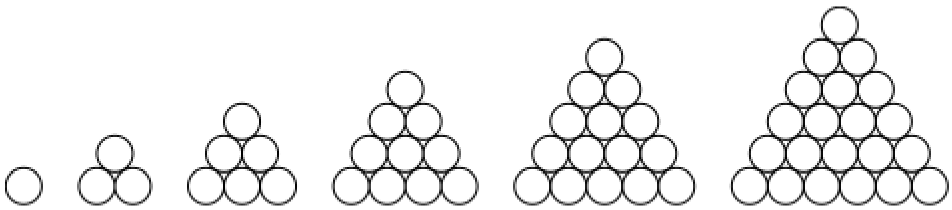
$$S - \frac{S}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2-1}{9} + \frac{3-2}{27} + \frac{4-3}{81} + \frac{5-4}{243} + \ldots \Leftrightarrow$$
$$\frac{2S}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots$$

Caímos agora na soma dos termos de uma PG infinita de termo inicial 1/3 e razão 1/3. Assim, usando a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, temos:

$$\frac{2S}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{S = \frac{3}{4}}$$

5. PROGRESSÕES DE ORDEM SUPERIOR:

Considere a seguinte imagem:



Contando o número de bolinhas em cada figura, temos:

- Figura 1 – 1 bolinha
- Figura 2 – 3 bolinhas
- Figura 3 – 6 bolinhas

- Figura 4 – 10 bolinhas
- Figura 5 – 15 bolinhas
- Figura 6 – 21 bolinhas

A sequência do número de bolinhas em cada figura é dada por 1, 3, 6, 10, 15, 21.

Agora, vamos observar as diferenças entre o número de bolinhas entre uma figura e a próxima:

3 – 1 = 2

6 – 3 = 3

10 – 6 = 4

15 – 10 = 5

21 – 15 = 6

Veja que a sequência formada por estas diferenças constitui uma progressão aritmética. Pela definição que veremos a seguir, a sequência do número de bolinhas em cada figura constituirá uma progressão aritmética de segunda ordem.

OBSERVAÇÃO

Os números desta sequência que consideramos são chamados de números triangulares.

5.1. DEFINIÇÃO

A definição de uma PA de ordem superior é recursiva, ou seja, a definição depende das definições anteriores. Começaremos definindo o que é uma PA de 2ª ordem, depois o que é uma PA de 3ª ordem e em seguida generalizaremos a definição.

I) PA de 2ª ordem: uma sequência é dita uma PA de segunda ordem se as diferenças entre seus termos consecutivos constituem uma PA.

EXEMPLOS:

i) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 é uma PA de segunda ordem, pois as diferenças entre os termos consecutivos formam a sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, que é uma PA.

ii) 1, 3, 7, 13, 21, 31 é uma PA de segunda ordem, pois as diferenças entre os termos consecutivos formam a sequência 2, 4, 6, 8, 10, que é uma PA.

II) PA de 3ª ordem: uma sequência é dita uma PA de segunda ordem se as diferenças entre seus termos consecutivos constituem uma PA de segunda ordem.

EXEMPLOS:

i) 1, 8, 27, 64, 125, 216 é uma PA de terceira ordem, pois as diferenças entre os termos consecutivos formam a sequência 7, 19, 37, 61, 91, que é uma PA de segunda ordem, uma vez que as diferenças entre os termos consecutivos desta última sequência são 11, 18, 24, 30, que é uma PA.

III) PA de k-ésima ordem: uma sequência é dita uma PA de ordem k se as diferenças entre seus termos consecutivos constituem uma PA de ordem $k-1$.

5.2. TERMO GERAL

Não demonstraremos o resultado a seguir neste material, pois a demonstração foge ao escopo dos concursos para os quais estamos nos preparando (a prova utiliza indução forte e algumas manipulações algébricas).

TEOREMA 1: O termo geral de uma PA de ordem k é um polinômio de grau k.

5.3. SOMA DOS TERMOS

Mais uma vez, não demonstraremos o resultado a seguir.

TEOREMA 2: A soma dos termos de uma PA de ordem k é um polinômio de grau $k+1$, sem termo independente.

Vejamos agora um exercício resolvido:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 6:

Calcule $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

SOLUÇÃO:

O termo geral da soma que estamos buscando é da forma k^2, que é um polinômio de grau 2. Desta forma, queremos calcular a soma dos termos de uma PA de segunda ordem. Pelo teorema 2, esta soma é um polinômio de grau 3, sem termo independente. Assim, temos $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=an^3+bn^2+cn$. Para encontrar as constantes a,b,c, devemos substituir alguns valores para n:

$n=1$: $a+b+c=1$

$n=2:8a+4b+2c=1^2+2^2=5$

$n=3:27a+9b+3c=1^2+2^2+3^2=14$

Temos então o sistema`

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=5 \\ 9a+3b+c=14 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{6}$.

Assim, a soma pedida é $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

VAMOS AGORA PARA A BATALHA DOS EXERCÍCIOS??

1. Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros termos são $1-a, -a, \sqrt{11-a}$. O quarto termo desta PA é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

2. Numa progressão aritmética de primeiro termo 1/3 e razão 1/2, a soma dos n primeiros termos é 20/3. O valor de n é

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

3. Interpolando-se 7 termos aritméticos entre os números 10 e 98, obtém-se uma progressão aritmética cujo termo central é

a) 45

b) 52

c) 54

d) 55

e) 57

4. Uma criança anêmica pesava 8,3 kg. Iniciou um tratamento médico que fez com que engordasse 150 g por semana durante 4 meses. Quanto pesava ao término da 15ª semana de tratamento?

a) 22,50 kg

b) 15 kg

c) 10,7 kg

d) 10,55 kg

e) 10,46 kg

5. Se dividirmos o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética pelo seu terceiro termo, obtemos 4, enquanto, se dividirmos o nono termo dessa progressão pelo seu quarto termo, obtemos 2 e o resto 4. A soma dos 20 primeiros termos dessa progressão é:

a) 250

b) 430

c) 610

d) 590

e) 820

6. Mister MM, o Mágico da Matemática, apresentou-se diante de uma platéia com 50 fichas, cada uma contendo um número. Ele pediu a uma espectadora que ordenasse as fichas de forma que o número de cada

uma, excetuando-se a primeira e a última, fosse a média aritmética do número da anterior com o da posterior. Mister MM solicitou a seguir à espectadora que lhe informasse o valor da décima sexta e da trigésima primeira ficha, obtendo como resposta 103 e 58 respectivamente. Para delírio da platéia, Mister MM adivinhou então o valor da última ficha. Determine você também este valor.

7. A soma dos cinco primeiros termos de uma PA vale 15 e o produto desses termos é zero. Sendo a razão da PA um número inteiro e positivo, o segundo termo dessa seqüência vale

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4

8. A direção de uma escola decidiu enfeitar o pátio com bandeiras coloridas. As bandeiras foram colocadas em linha reta, na seguinte ordem: 1 bandeira vermelha, 1 azul, 2 vermelhas, 2 azuis, 3 vermelhas, 3 azuis, e assim por diante. Depois de colocadas exatamente 99 bandeiras, o número das de cor azul era:

a) a) 55

b) b) 60

c) c) 50

d) d) 45

9. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$.

10. Os números a_1, a_2, a_3 formam uma progressão aritmética de razão r, de tal modo que a_1+3, a_2-3, a_3-3 estejam em progressão geométrica. Dado ainda que $a_1 > 0$ e $a_2 = 2$, conclui-se que r é igual a

a) $3+\sqrt{3}$

b) $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $3+\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $3-\sqrt{3}$

11. Calcule $\frac{1^2+2^2+\ldots+50^2}{1^3+2^3+\ldots+50^3}$.

12. A soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica crescente é igual a 13,5 e a soma dos dois primeiros termos é igual a 12. Nessas condições, o termo numericamente igual à razão da seqüência é o

a) quarto.

b) quinto.

c) sexto.

d) sétimo.

e) oitavo.

13. (AFA 90) O produto dos 15 primeiros termos da progressão geométrica, de primeiro termo 1 e razão 10, vale:

a) 10^{105}

b) 10^{115}

c) 10^{125}

d) 10^{135}

e) nra

14. (AFA 90) Quantos números NÃO múltiplos de 11 há no conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid 51 \le x \le 1500\}$?

a) 1210

b) 1318

c) 1406

d) 1412

e) nra

15. (AFA 95) Num pentágono, os ângulos internos estão em progressão aritmética. Qual o 3º termo, em graus, desta progressão?

a) 54

b) 108

c) 162

d) 216

16. (AFA 97) Seja uma Progressão Geométrica de 3 termos positivos com razão 2. O primeiro termo, o último e a soma dos 3 termos dessa PG nessa ordem formam os três primeiros termos de uma Progressão Aritmética. A razão entre os termos 24 e 34 dessa PA é:

a) 0,4

b) 0,7

c) 1,4

d) 1,7

17. (AFA 99) Se a seqüência de inteiros (2, x, y) é uma Progressão Geométrica e (x + 1, y, 11) uma Progressão

Aritmética, então, o valor de x + y é:

a) 11

b) 12

c) 13

d) 14

18. (AFA 00) Se a soma dos 6 primeiros termos de uma progressão aritmética é 21 e o sétimo termo é o triplo da soma do terceiro com o quarto termo, então o primeiro termo dessa progressão é

a) –7

b) –8

c) –9

d) –10

19. (AFA 00) Seja (x, y, z, w) uma progressão aritmética crescente cuja soma é 10 e (a, b, c, d) uma progressão geométrica com a + b = 1 e c + d = 9. Se ambas têm a mesma razão, então o produto yw é

a) –8

b) –2

c) 7

d) 9

20. (AFA 06) São dadas uma progressão aritmética e uma progressão geométrica alternante com primeiro termo igual a 1. Multiplicando-se os termos correspondentes das duas seqüências obtém-se a seqüência (-1,1,3,...). A soma dos 5 primeiros termos desta seqüência é

a) 61

b) 97

c) 103

d) 111

21. (AFA 07) Sejam as seqüências de números reais (–3, x, y, ...) que é uma progressão aritmética de razão r, e (x, y, 24, ...) que é uma progressão geométrica de razão q. O valor de $\frac{r}{q}$ pertence ao intervalo

a) [0, 1/2[

b) [1/2,1[

c) [1,2[

d) [2,3[

22. 22) (AFA 10) Sejam as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\frac{x}{2}$ e $g(x)=2^{-x}$. Considere os números A e B tais que

$$A=f(1)+f(2)+\ldots+f(50)$$

$$B=1+g(1)+g(2)+\ldots$$

Se o produto de A por B tende para o número α, então α é

a) ímpar múltiplo de 9

b) par divisor de 10000

c) par múltiplo de 15

d) ímpar múltiplo de 25

23. (AFA 11) De um dos lados de uma avenida retilínea, estão dispostos alguns postes nos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Do outro lado dessa mesma avenida, estão dispostos algumas árvores nos pontos $A_1, A_2, \ldots, A_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que:

i) $\overline{P_1P_2} = 3$ dam

ii) $\overline{P_1P_i} = 63$ dam

iii) $\left(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética finita de razão 3

iv) $\overline{A_1A_j} = \overline{P_1P_i}$

v) $\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots\right)$ é uma progressão geométrica finita de razão 2

vi) i = j

Com base nessas informações, e correto afirmar que a maior distância entre duas árvores consecutivas é, em dam, igual a

a) 63

b) 32

c) 18

d) 16

24. (AFA 12) Sejam $(1, a_2, a_3, a_4)$ e $(1, b_2, b_3, b_4)$ uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, respectivamente, ambas com a mesma soma dos termos e ambas crescentes. Se a razão r da progressão aritmética é o dobro da razão q da progressão geométrica, então o produto rq é igual a:

a) 15

b) 18

c) 21

d) 24

25. (AFA 13) A sequência $\left(x, 6, y, y + \frac{8}{3}\right)$ é tal que os três primeiros termos formam uma progressão aritmética e os três últimos formam uma progressão geométrica. Sendo essa sequência crescente, a soma de seus termos é

a) 92/3

b) 89/3

c) 86/3

d) 83/3

26. (EFOMM 12) Num quadrado de lado a, inscreve-se um círculo; nesse círculo, inscreve-se um novo quadrado e nele um novo círculo. Repetindo a operação indefinidamente, tem-se que a soma dos raios de todos os círculos é:

a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

b) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$

d) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$

e) $2a\left(\sqrt{2}+1\right)$

27. (EFOMM 10) Se a sequência de inteiros positivos (2, x, y) é uma progressão geométrica e (x+1, y, 11) é uma progressão aritmética, então o valor de x + y é:

a) 11

b) 12

c) 13

d) 14

e) 15

28. (EN 14) Considere a sequência $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1+2}{1+2}, x_3=\frac{1+2+3}{1+2+4}, x_4=\frac{1+2+3+4}{1+2+4+8}, \ldots$. O valor de x_n é:

a) $\frac{n+1}{2}$

b) $\frac{n(n-1)}{2^n}$

c) $\frac{n(n+1)}{2^n-1}$

d) $\frac{n(n+1)}{2^n}$

e) $\frac{n(n+1)}{2(2^n-1)}$

29. (EN 14) O quinto termo da progressão aritmética $3-x, -x, \sqrt{9-x}$, x real, é

a) 7

b) 10

c) – 2

d) $-\sqrt{14}$

e) – 18

30. (EN 11) Três números inteiros estão em PG. A soma destes números vale 13 e a soma de seus quadrados vale 91. Chamando de n o termo do meio desta PG, quantas comissões de n elementos a Escola Naval pode formar com 28 professores do Centro Técnico Científico?

a) 2276

b) 3176

c) 3276

d) 19656

e) 19556

1.

RESPOSTA: B

Temos que $-2a = 1 - a + \sqrt{11-a} \Leftrightarrow -a-1 = \sqrt{11-a}$.

Elevando ao quadrado, segue que $a^2 + 2a + 1 = 11 - a \Rightarrow a^2 + 3a - 10 = 0$. Logo $a = -5$ ou $a = 2$. Não podemos ter a = 2, pois senão teríamos $-3 = \sqrt{9}$, o que não é verdade.

Assim, a = - 5 e a PA é 6, 5, 4. O quarto termo portanto é 3.

2.

RESPOSTA: A

Temos $a_1 = \frac{1}{3}$ e $r = \frac{1}{2}$. Assim, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + (n-1)\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot n}{2} = \frac{n(3n+1)}{12}$.

Logo $\frac{n(3n+1)}{12} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow 3n^2 + n - 80 = 0 \Rightarrow n = 5$.

3.

RESPOSTA: C

Queremos formar uma PA de 9 termos com $a_1 = 10$ e $a_9 = 98$. O valor pedido é a_5. Veja que $2a_5 = a_1 + a_9 \Leftrightarrow 2a_5 = 108 \Leftrightarrow a_5 = 54$.

4.

RESPOSTA: D

A sequência (8300, 8450, 8600, ...) é uma P.A. onde $a_1 = 8300$g é o peso inicial da criança, $a_2 = 8450$g o peso da criança ao término da 1ª semana de tratamento, $a_3 = 8600$g o peso ao término da 2ª semana e, assim por diante. Assim, o termo a_{16} representa o peso da criança ao término da 15ª semana:

$a_1 = 8300$

$r = 150$

$a_{16} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

$a_{16} = a_1 + 15.r$

$a_{16} = 8300 + 15.150$

$a_{16} = 8300 + 2250 = 10550$

A criança pesava ao término da 15ª semana 10550g ou 10,55 kg.

5.

RESPOSTA: C

Pelo enunciado, temos:

$$\frac{a_{11}}{a_3} = 4 \text{ e } a_9 = 2a_4 + 4.$$

Sendo $a_1 = a$ e r a razão, segue que:

$$\frac{a+10r}{a+2r} = 4 \Leftrightarrow 3a = 2r$$

$$a + 8r = 2(a+3r) + 4 \Leftrightarrow 2r = a + 4$$

Logo $3a = a + 4 \Leftrightarrow a = 2$ e assim r = 3.

Queremos calcular $S_{20} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$.

Temos $a_1 = 2$ e $a_{20} = a_1 + 19r = 59$. Logo $S_{20} = \dfrac{(2+59)\cdot 20}{2} = 610$.

6.

RESPOSTA: A

“Ele pediu a uma espectadora que ordenasse as fichas de forma que o número de cada uma, excetuando-se a primeira e a última, fosse a média aritmética do número da anterior com o da posterior”

A partir desta informação, podemos concluir que a sequência dos números nas fichas forma uma PA. Foi dado então que $a_{16} = 103$ e $a_{31} = 58$. Devemos calcular a_{50}.

Temos que $a_{31} = a_{16} + 15r \Leftrightarrow 15r = 58 - 103 \Leftrightarrow 15r = -45 \Leftrightarrow r = -3$.

Logo $a_{50} = a_{31} + 19r = 58 - 57 = 1$.

7.

RESPOSTA:

Seja $(a-2r, a-r, a, a+r, a+2r)$ a PA. A soma desses termos é $5a = 15 \Leftrightarrow a = 3$.

Como o produto dos termos é zero, temos que $(3-2r)(3-r)\cdot 3\cdot(3+r)(3+2r) = 0$.

Como a razão é um inteiro positivo, obtemos que $r = 3$ e assim o segundo termo é $a - r = 3 - 3 = 0$.

8.

RESPOSTA: D

No fim do primeiro ciclo, temos 2 bandeiras (1 azul e 1 vermelha), no fim do segundo ciclo, temos 4 bandeiras (2 azuis e 2 vermelhas), no fim do terceiro ciclo, temos 6 bandeiras (3 azuis e 3 vermelhas) e assim por diante. Seja 2n então o número de bandeiras no último ciclo completo.

Devemos ter assim $2+4+6+\ldots+2n \leq 99 \Leftrightarrow \frac{(2+2n)n}{2} \leq 99 \Leftrightarrow n(n+1) \leq 99$. O maior valor possível de n é, portanto, 9. Assim, o último ciclo completo possui 9 bandeiras azuis e 9 vermelhas. O total de bandeiras até o último ciclo é 90. Restam 9 bandeiras para serem colocadas, que serão todas vermelhas.

Assim, o número de bandeiras na cor azul é $\frac{90}{2} = 45$.

9.

RESPOSTA:

Queremos calcular $S = \frac{3}{3^1} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \frac{9}{3^4} + \ldots$ (I).

Multiplicando a soma por $\frac{1}{3}$, temos $\frac{S}{3} = \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \frac{9}{3^5} + \ldots$ (II).

Fazendo (II) – (I), obtemos:

$$\frac{2S}{3} = \frac{3}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots = 1 + \frac{\frac{2}{3^2}}{1-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Logo $S = 2$.

10.

RESPOSTA: E

Como $a_2 = 2$, podemos escrever que a PA é $2-r, 2, 2+r$.

Como a_1+3, a_2-3, a_3-3 formam PG, temos que $5-r, -1, r-1$ formam PG e assim $(-1)^2 = (5-r)(r-1)$, o que nos dá $r = 3-\sqrt{3}$ ou $r = 3+\sqrt{3}$. Como $a_1 > 0$, devemos ter $r = 3-\sqrt{3}$.

11.

RESPOSTA:

Você deve saber as seguintes fórmulas:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Utilizando-se estas fórmulas, segue que:

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+50^2}{1^3+2^3+\ldots+50^3}=\frac{\frac{50\cdot 51\cdot 101}{6}}{\frac{50^2\cdot 51^2}{4}}=\frac{101}{3825}$$

12.

RESPOSTA: A

Seja a o primeiro termo da PG e seja q sua razão.

Temos:

$$\frac{a}{1-q}=\frac{27}{2} \text{ e } a+aq=12 \Leftrightarrow a=\frac{12}{q+1}$$

Substituindo a segunda igualdade na primeira, temos:

$\frac{12}{1-q^2}=\frac{27}{2}\Leftrightarrow q=\frac{1}{3}$, pois a PG é crescente e assim q é positivo.

Assim, $a=\frac{12}{\frac{4}{3}}=9$.

Queremos determinar n tal que $a_n=\frac{1}{3}$. Para isso, $9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^3\Leftrightarrow n=4$.

13.

RESPOSTA: A

Temos $a_1 = 1$ e $q = 10$. Logo $a_2 = 10, a_3 = 10^2, a_4 = 10^3, \ldots, a_{15} = 10^{14}$.

Queremos calcular então $1 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot \ldots \cdot 10^{14} = 10^{1+2+3+\ldots+14} = 10^{\frac{15 \cdot 14}{2}} = 10^{105}$.

14.

RESPOSTA: B

No total, temos $1500 - 51 + 1 = 1450$ números.

Vamos contar agora a quantidade de números múltiplos de 11 e descontar este valor do total.

Os múltiplos de 11 formam a PA: 55, 66, 77, ..., 1496, cuja quantidade de termos é $\frac{1496 - 55}{11} + 1 = 132$.

Assim, a quantidade de números NÃO múltiplos de 11 no intervalo buscado é 1450 – 132 = 1318.

15.

RESPOSTA: B

Sejam $a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r$ os ângulos do pentágono. A soma dos ângulos internos de um pentágono é 540°. Logo $5a = 540 \Leftrightarrow a = 108°$.

16.

RESPOSTA: B

Seja $a, 2a, 4a$ a PG. Pelo enunciado, $a, 4a, 7a$ são os três primeiros termos de uma PA, cuja razão é 3a.

Logo $a_{24} = a + 23 \cdot 3a = 70a$ e $a_{34} = a + 33 \cdot 3a = 100a$.

Assim $\frac{a_{24}}{a_{34}} = \frac{70\cancel{a}}{100\cancel{a}} = 0{,}7$.

17.

RESPOSTA: B

Temos que $x^2 = 2y$ e $2y = x + 1 + 11 = x + 12$.

Logo $x^2 = x + 12 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -3$. Como y é inteiro, segue que 2y é par e assim x^2 é par, o que nos dá x par.

Logo $x = 4$ e $y = 8$.

Assim x + y = 12.

18.

RESPOSTA: C

Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a PA.

Pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 21 \\ a_7 = 3(a_3 + a_4) \end{cases}$$

Pela fórmula da soma dos termos de uma PA, $\frac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} = 21 \Leftrightarrow a_1 + a_6 = 7$.

Agora, veja que $a_3 + a_4 = a_1 + a_6 = 7$. Logo $a_7 = 3 \cdot 7 = 21$. Sendo r a razão da PA, temos que

$$a_1 = a_7 - 6r = 21 - 6r$$
$$a_6 = a_7 - r = 21 - r$$

Logo $a_1 + a_6 = 42 - 7r = 7 \Leftrightarrow r = 5$. Com isso, obtemos que $a_1 = 21 - 6 \cdot 5 = -9$.

19.

RESPOSTA: C

Seja q a razão da progressão geométrica. Logo $b = aq, c = aq^2, d = aq^3$. Daí $a + aq = 1 \Leftrightarrow a(1+q) = 1$ e $aq^2 + aq^3 = 9 \Leftrightarrow aq^2(1+q) = 9$.

Logo $\frac{aq^2(1+q)}{a(1+q)} = 9 \Leftrightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = 3$, pois q é positivo, uma vez que a razão da PA também é q e a PA é crescente.

Assim, temos que a PA é x, x + 3, x + 6, x + 9. A soma é $4x + 18 = 10 \Leftrightarrow x = -2$.

Logo y = x + 3 = 1 e w = x + 9 = 7 e assim yw = 7.

20.

RESPOSTA: D

Sejam $(a, a+r, a+2r)$ os primeiros termos da PA e $(1, q, q^2)$ os primeiros termos da PG. Multiplicando-se os termos, obtemos a sequência $(a, (a+r)q, (a+2r)q^2)$.

Logo $a=-1$, $(a+r)q=1$ e $(a+2r)q^2=3$.

Assim, obtemos que $\begin{vmatrix} q(r-1)=1 \\ q^2(2r-1)=3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} q^2=\dfrac{1}{(r-1)^2} \\ q^2=\dfrac{3}{2r-1} \end{vmatrix}$.

Com isso, segue que $\dfrac{1}{(r-1)^2}=\dfrac{3}{2r-1}$, o que nos dá $r=2$ ou $r=\dfrac{2}{3}$. Como a PG é alternante, q deve ser negativo e assim $r=\dfrac{2}{3}$, fornecendo assim $q=-3$.

Com isso, a PA é $\left(-1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{5}{3}\right)$ e a PG é $(1, -3, 9, -27, 81)$.

Assim, a sequência obtida é $(-1, 1, 3, -27, 135)$, cuja soma é 111.

21.

RESPOSTA: C

Temos:

$2x=y-3$

$y^2=24x$

Logo $(2x+3)^2=24x \Leftrightarrow 4x^2+12x+9=24x \Leftrightarrow (2x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Assim, $y=6$ e então $r=y-x=\dfrac{9}{2}$ e $q=\dfrac{y}{x}=4$.

Com isso, $\dfrac{r}{q}=\dfrac{9}{8}\in[1,2[$

22.

RESPOSTA: D

Temos que $A=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots\frac{50}{2}=\frac{\frac{(1+50)\cdot 50}{2}}{2}=\frac{1275}{2}$.

Também temos que $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

Logo $AB=1275$, que é um ímpar múltiplo de 25.

23.

RESPOSTA: B

Temos para os pontos P's a seguinte PA: (3, 6, 9, ..., 3+3(i-2)) = (3, 6, 9, ..., 3i-3).

Como $P_1P_i=63$, segue que $3+6+9+\ldots+3i-3=63 \Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+i-1=21 \Leftrightarrow i(i-1)=42 \Rightarrow i=7$.

Logo j = 7 e sendo $A_1A_2=d$, temos que (d, 2d, 4d, 8d, 16d, 32d) forma a PG do outro lado da rua. Assim $d+2d+4d+8d+16d+32d=63 \Rightarrow d=1$.

Assim, a maior distância entre duas árvores consecutivas é 32 dam.

24.

RESPOSTA: B

A PA é $(1,1+2q,1+4q,1+6q)$ e a PG é $(1,q,q^2,q^3)$.

Como possuem a mesma soma dos termos, temos:

$$4+12q=1+q+q^2+q^3 \Leftrightarrow q^3+q^2-11q-3=0 \Leftrightarrow (q-3)(q^2+4q+1)=0$$

Como as sequências são crescentes, segue que $q=3$ e assim r = 6, o que nos dá rq = 18.

25.

RESPOSTA: C

Usaremos os seguintes fatos descritos no PROBIZU:

i) Em uma PA de três termos, o do meio é a média aritmética dos outros dois
ii) Em uma PG de três termos, o quadrado do termo do meio é igual ao produto dos outros dois.

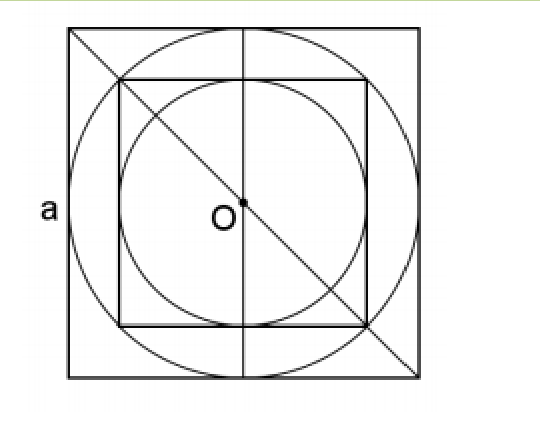
Com isso, temos:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y^2 = 6\left(y + \dfrac{8}{3}\right) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos y = - 2 e x = 14 ou y = 8 e x = 4. No primeiro caso, a sequência não é crescente. Desta forma, obtemos y = 8 e x = 4, o que nos dá a sequência (4, 6, 8, 32/3), cuja soma dos termos é 86/3.

26.

RESPOSTA: C



O primeiro raio é igual a $\frac{a}{2}$. O quadrado inscrito no primeiro círculo tem diagonal a e assim seu lado é igual a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Com isso, o círculo inscrito neste quadrado possui raio $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Continuando este procedimento, temos que os raios dos círculos formam uma PG de razão $\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo a soma dos raios pedida é $\dfrac{\frac{a}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{a}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

27.

RESPOSTA:

Esta questão é idêntica à questão 17. Coloquei ela no material duas vezes para ressaltar a importância de trabalharmos com questões de concursos anteriores. Esta questão caiu na AFA em 1999 para depois cair na EFOMM em 2010. Fique atento!

28.

RESPOSTA: D

Temos que $x_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} = \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{2^n-1} = \dfrac{n(n+1)}{2(2^n-1)}$

29.

RESPOSTA: C

Temos que $-2x = 3 - x + \sqrt{9-x} \Leftrightarrow x + 3 = -\sqrt{9-x}$.

Elevando ao quadrado, temos:

$x^2 + 6x + 9 = 9 - x \Leftrightarrow x^2 + 7x = 0$. Logo $x = 0$ ou $x = -7$. Testando na equação original, vemos que $x = -7$ e assim a PA é 10, 7, 4, 1, -2.

Logo o quinto termo é -2.

30.

RESPOSTA: C

Sejam (a, aq, aq^2) os três inteiros que estão em PG. Pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 13 \\ a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1+q+q^2) = 13 \\ a^2(1+q^2+q^4) = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a(q^3-1)}{q-1} = 13 \\ \dfrac{a^2(q^6-1)}{q^2-1} = 91 \end{cases},$$

Onde na última passagem usamos a fórmula da soma da PG.
Dividindo a segunda equação pelo quadrado da primeira, obtemos:

$$\frac{a^2(q^6-1)}{q^2-1} \cdot \frac{(q-1)^2}{a^2(q^3-1)^2} = \frac{7}{13} \Leftrightarrow \frac{(q^3-1)(q^3+1)(q-1)^2}{(q+1)(q-1)(q^3-1)^2} = \frac{7}{13}$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{\left(q^3+1\right)\left(q-1\right)}{\left(q+1\right)\left(q^3-1\right)}=\frac{7}{13}$$

Utilizando soma e diferença de cubos, esta última é equivalente a:

$$\frac{q^2-q+1}{q^2+q+1}=\frac{7}{13}\Leftrightarrow 3q^2-10q+3=0$$

Logo q = 3 ou q = 1/3.

Se q = 3, a = 1 e então a sequência é (1, 3, 9).

Se q = 1/3, a = 9 e então a sequência é (9,3,1).

Em ambos os casos, n = 3 e o pedido é $C_{28}^{3}=3276$.

OBS: Se q = 1, não obteríamos soluções e assim podemos usar a soma da PG.