Física

Livro 2

Pré-vestibular Física

SISTEMA DE ENSINO
POLIEDRO

Autoria: Nicolau Arbex Sarkis, Marcílio Alberto de Faria Pires e André Oliveira de Guadalupe.

Diretor executivo: Nicolau Arbex Sarkis.

Gerência editorial: João Carlos Puglisi.

Coordenação de edição técnica: Marília L. dos Santos G. Ribeiro.

Edição técnica: Equipe de editores técnicos da Editora Poliedro.

Coordenação de produção editorial: Lívia Scherrer dos Santos.

Analista de produção editorial: Claudia Moreno Fernandes.

Coordenação de edição: Michelle Silva da Mata e Vivian Plascak Jorge.

Edição: Equipes de edição da Editora Poliedro.

Coordenação de revisão: Mariana Castelo Queiroz.

Revisão: Equipe de revisão da Editora Poliedro.

Coordenação de arte: Antonio Domingues e Kleber S. Portela.

Diagramação: Equipe de arte da Editora Poliedro.

Ilustrações: Equipes de ilustração e de arte da Editora Poliedro.

Coordenação de licenciamento: Ana Rute A. M. Perugini.

Licenciamento: Equipe de licenciamento da Editora Poliedro.

Projeto gráfico: Alexandre Moreira Lemes e Kleber S. Portela.

Projeto gráfico da capa: Bruno Torres.

Coordenador de PCP: Anderson Flávio Correia e Varão Monteiro Junior.

Impressão e acabamento: nywgraf Editora Gráfica Ltda.

Créditos: capa e frontispício topseller/Shutterstock **5** © An Van De Wal | Dreamstime.com • © Petr Kirillov | Dreamstime.com • © Werner Forman/CORBIS/Corbis (DC)/Latinstock **121** Jonathan Zander (Digon3)/Wikipedia • Maximilien Brice/CERN • tobkatrina/123rf.com **227** U.S. Navy photos by Mass Communication Specialist Seaman Joshua Valcarcel • Biswarup Ganguly/Wikimedia Commons • Daniel Photos/Wikimedia Commons **contracapa** Elinalee/Shutterstock.

A Editora Poliedro pesquisou junto às fontes apropriadas a existência de eventuais detentores dos direitos de todos os textos e de todas as obras de artes plásticas presentes nesta obra, sendo que sobre alguns nenhuma referência foi encontrada. Em caso de omissão, involuntária, de quaisquer créditos faltantes, estes serão incluídos nas futuras edições, estando, ainda, reservados os direitos referidos nos arts. 28 e 29 da lei 9.610/98.

SISTEMA DE ENSINO
POLIEDRO

São José dos Campos – SP
ISBN: 978-85-7901-050-7
Telefax: (12) 3924-1616
editora@sistemapoliedro.com.br
www.sistemapoliedro.com.br

Copyright © 2015
Todos os direitos de edição reservados à Editora Poliedro

SUMÁRIO

Frente 1

6 Cinemática vetorial 6

Considerações iniciais 7
Grandezas escalares e grandezas vetoriais 7
Vetor 7
Cinemática vetorial 13
Composição de movimentos 17
Revisando 22
Exercícios propostos 25
Texto complementar 33
Exercícios complementares 35

7 Lançamento oblíquo no vácuo 44

Lançamento oblíquo no vácuo 45
Revisando 50
Exercícios propostos 53
Textos complementares 59
Exercícios complementares 62

8 Dinâmica 69

Definições 70
Leis de Newton 71
Principais forças da Mecânica 73
Equilíbrio de um corpo 77
Revisando 83
Exercícios propostos 88
Texto complementar 104
Exercícios complementares 106

Frente 2

5 Resistores 122

Resistores 123
Potência dissipada em um resistor por efeito Joule 123
Segunda Lei de Ohm 126
Associação de resistores 127
Curto-circuito 130
Fusíveis e disjuntores 131
Reostatos 131
Resolução de circuitos elétricos simples envolvendo resistores 131
A ponte de Wheatstone 134
Método de cálculo da resistência equivalente envolvendo várias resistências 136
Revisando 137
Exercícios propostos 138
Texto complementar 147
Exercícios complementares 149

6 Circuitos elétricos 152

Introdução 153
Geradores elétricos 153
O receptor elétrico 158
Capacitores 160
Variação de potencial entre os terminais de elementos de um circuito 163
As leis de Kirchhoff 163
Resolução de circuitos elétricos 163
Medidas elétricas 165
Medidas de força eletromotriz – O potenciômetro de Poggendorf 168
Revisando 168
Exercícios propostos 170
Texto complementar 180
Exercícios complementares 184

7 Interação entre cargas elétricas e campo magnético 189

Fenômenos magnéticos 190
O campo magnético 191
Interação entre o campo magnético e as cargas elétricas 192
Revisando 193
Exercícios propostos 195
Texto complementar 204
Exercícios complementares 205

8 Fontes de campo magnético **208**
A experiência de Oersted 209
Corrente retilínea como fonte de campo magnético 209
Corrente circular (em uma espira) como fonte de campo magnético 210
Revisando 213
Exercícios propostos 214
Texto complementar 221
Exercícios complementares 223

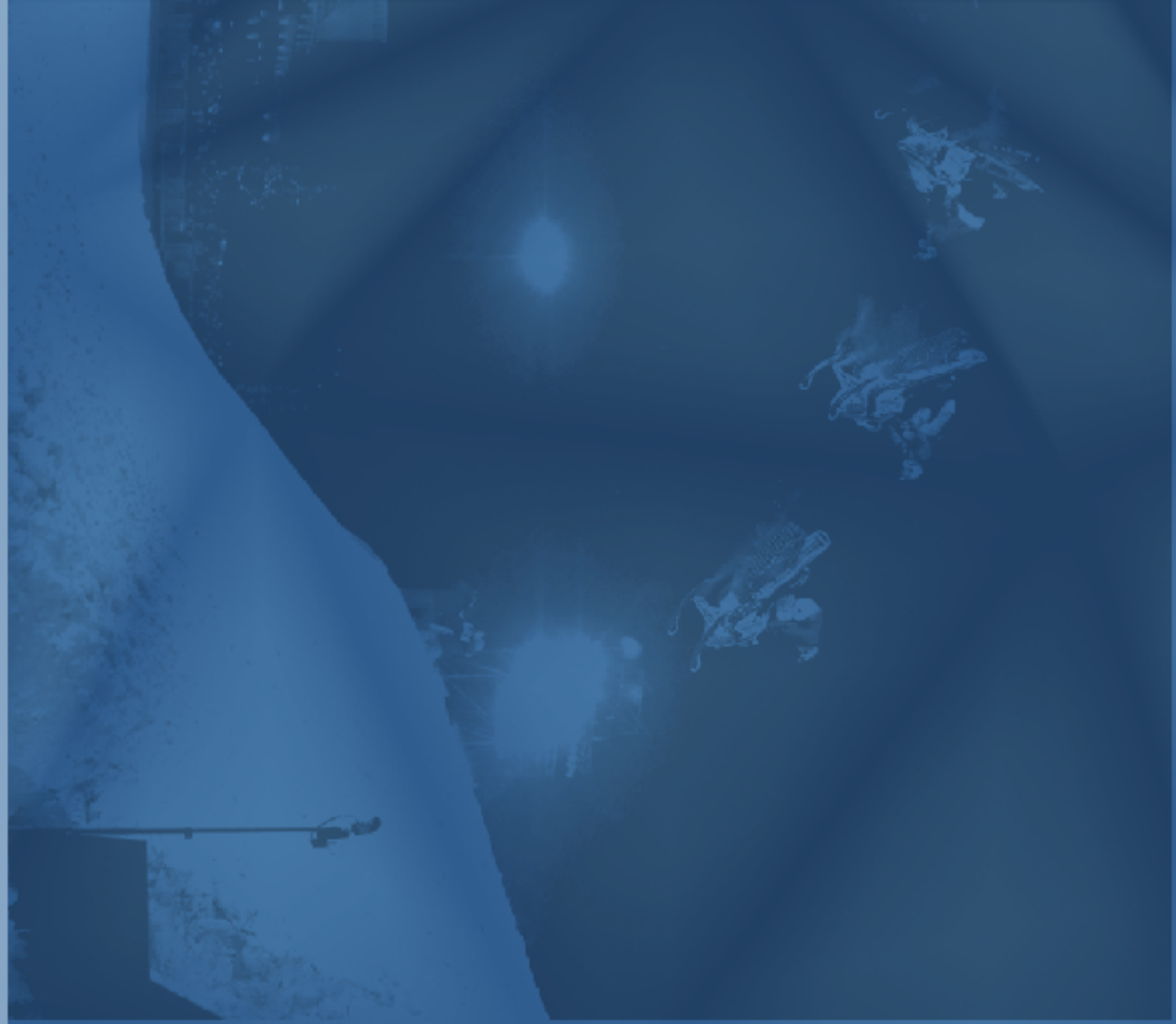
Frente 3

7 Introdução à óptica geométrica **228**
Introdução 229
Ondas eletromagnéticas 229
Óptica geométrica 230
Revisando 233
Exercícios propostos 234
Textos complementares 236
Exercícios complementares 238

8 Reflexão da luz **241**
Introdução 242
Reflexão 242
Espelho plano 243
Espelhos esféricos 247
Revisando 252
Exercícios propostos 253
Texto complementar 258
Exercícios complementares 260

9 Refração da luz **267**
Introdução 268
Lentes esféricas delgadas 275
Revisando 279
Exercícios propostos 283
Textos complementares 293
Exercícios complementares 299

Gabarito **313**



Frente 1

6

FRENTE 1

Cinemática vetorial

© AN VAN DE WAL | DREAMSTIME.COM

Algumas grandezas físicas são definidas apenas por seu módulo e sua unidade, como a temperatura. Outras, porém, necessitam de direção e sentido. Por exemplo, dizer apenas que um homem faz força não traz uma informação completa, pois vários homens podem fazer força e essas forças se anularem. Os vetores são utilizados para representar e caracterizar essas grandezas.

Considerações iniciais

Direção

Retas paralelas têm sempre a mesma direção.

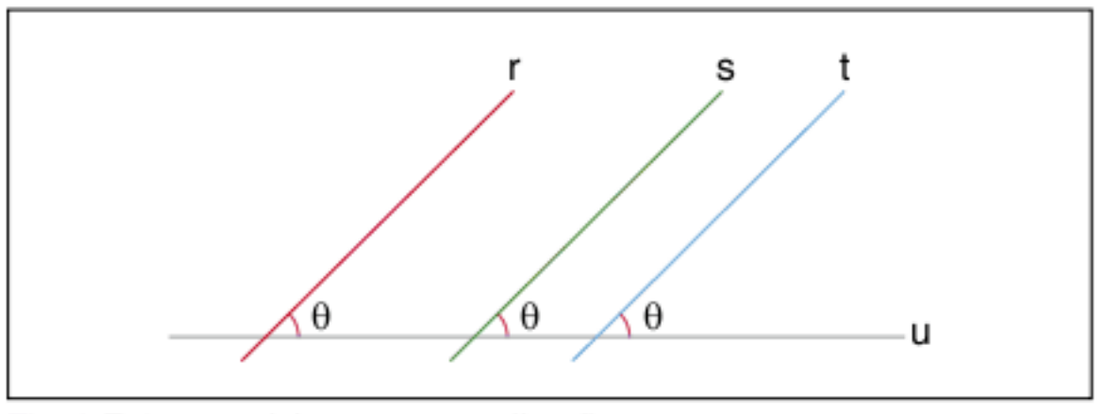


Fig. 1 Retas paralelas – mesma direção.

Na figura 1, as retas r, s, e t são paralelas, pois formam o mesmo ângulo θ com uma dada reta u.

Dois segmentos de reta, AB e CD, têm a mesma direção se pertencem à mesma reta ou a retas paralelas.

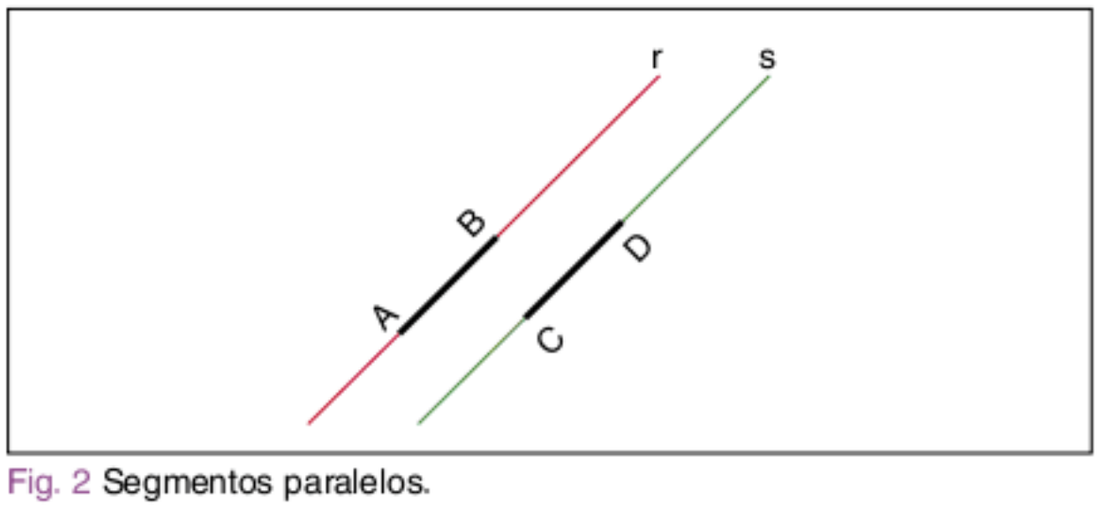


Fig. 2 Segmentos paralelos.

Sendo assim, retas que não são paralelas definem diferentes direções.

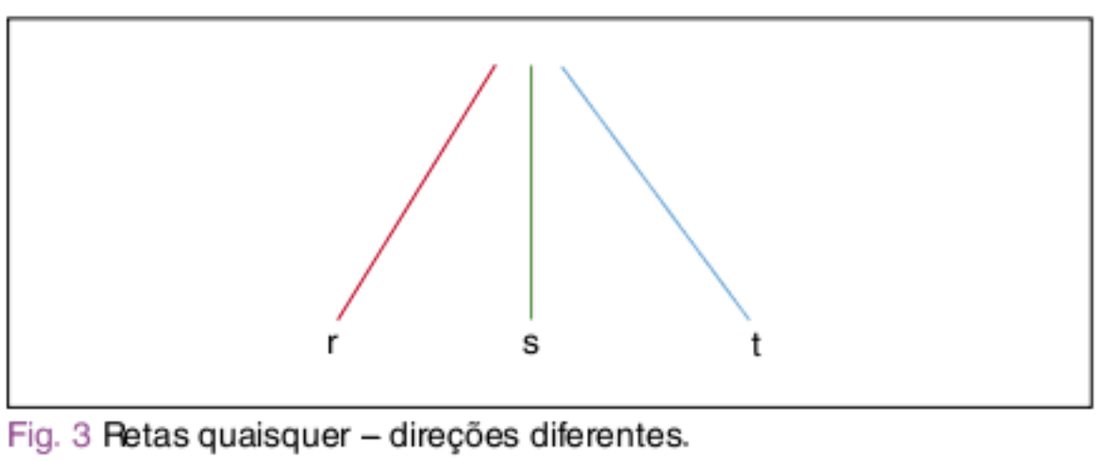


Fig. 3 Retas quaisquer – direções diferentes.

Sentido

Para uma determinada direção, podemos ter dois sentidos possíveis.

Na direção horizontal, por exemplo, temos os sentidos: da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

Na direção vertical, temos os sentidos: de baixo para cima e de cima para baixo.

É bom lembrar que existem infinitas direções para um movimento.

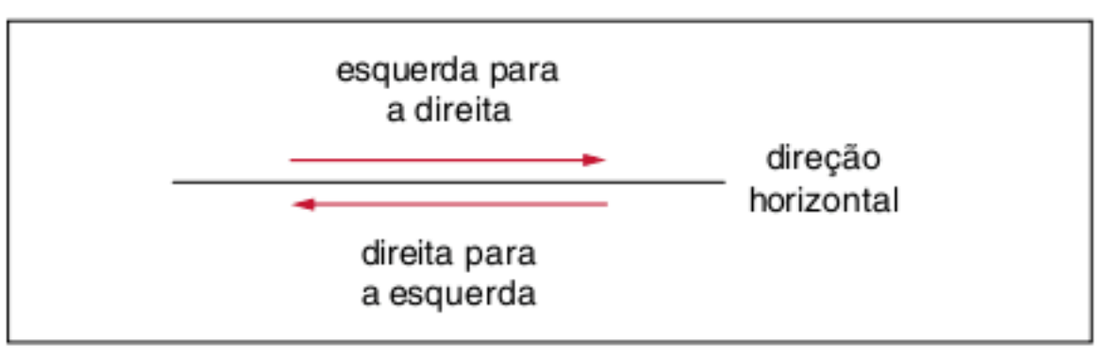


Fig. 4 Possíveis sentidos para a direção horizontal.

Grandezas escalares e grandezas vetoriais

Uma grandeza física é escalar quando necessita apenas de um valor numérico e de sua unidade para ficar totalmente determinada.

Temos, por exemplo, o tempo. Quando dizemos que uma viagem durou 2 horas, não precisamos acrescentar mais nada. Também são grandezas escalares a massa, o volume, a temperatura, a energia etc.

Já uma grandeza física é dita vetorial quando necessita, além do valor numérico e da unidade, de uma direção e de um sentido para ficar totalmente determinada.

Se dissermos, por exemplo, que um automóvel possui velocidade de 60 km/h, seu movimento não estará completamente determinado.

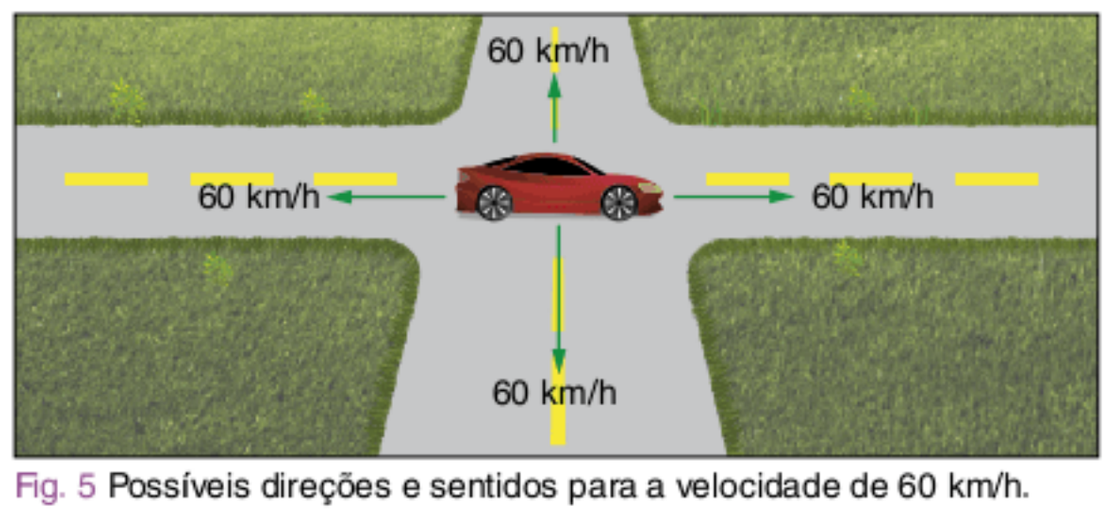


Fig. 5 Possíveis direções e sentidos para a velocidade de 60 km/h.

Se adicionarmos a informação de que ele se movimenta sobre a Via Dutra, ele poderá estar andando do Rio de Janeiro para São Paulo ou vice-versa.

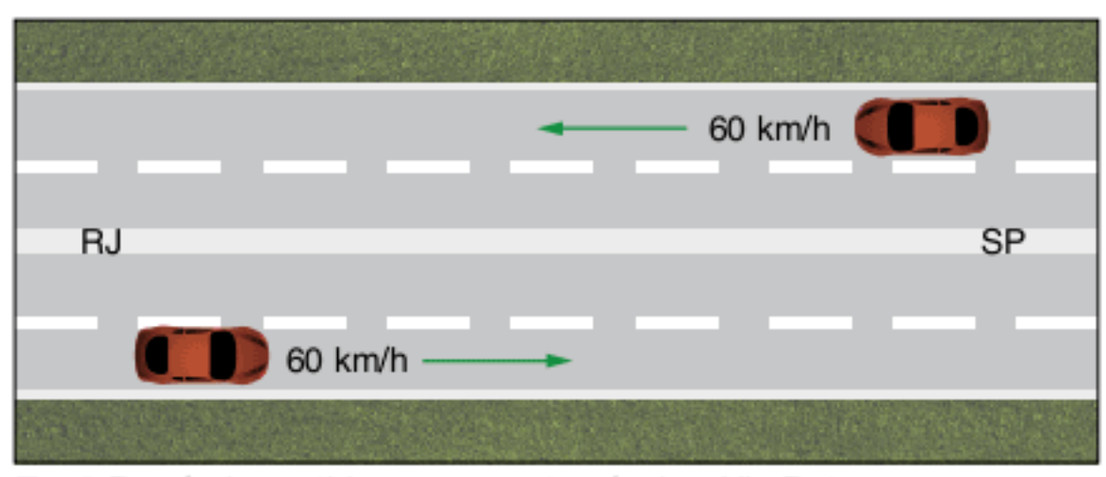


Fig. 6 Possíveis sentidos para o automóvel na Via Dutra.

Só dizendo que vai do Rio de Janeiro para São Paulo é que esclareceremos completamente o que acontece.

Dessa forma, a velocidade é uma grandeza vetorial. Também são grandezas vetoriais a aceleração, a força, o impulso etc.

Vetor

Definição

Um vetor é um ente matemático que representa todos os segmentos orientados com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. (Geometricamente, o tamanho do segmento representa o módulo do vetor.)

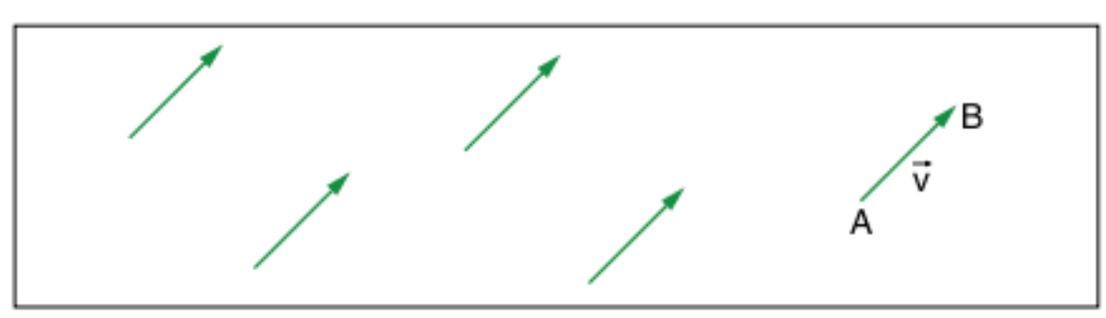


Fig. 7 Segmentos orientados.

Na figura 7, todos os segmentos têm a mesma direção, pois são paralelos, têm o mesmo sentido e mesmo comprimento e, portanto, podem ser representados pelo vetor $\vec{v}$.

O vetor $\vec{v}$ é representado pelo segmento de reta orientado $\overline{AB}$, em que A é a origem do vetor e B é a extremidade do vetor.

O módulo de $\vec{v}$ é dado por $|\vec{v}|$ ou simplesmente v.

ATENÇÃO!

- O módulo, ou intensidade, de uma grandeza física vetorial é o valor numérico (sem sinal algébrico) acompanhado da unidade.
- Existem grandezas chamadas adimensionais, que são apenas determinadas por um valor numérico sem unidade, como: rendimento, coeficiente de atrito, entre outras.

Temos, a seguir, algumas definições importantes sobre vetores:

I. Vetor oposto: $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são vetores opostos quando possuem a mesma direção, o mesmo módulo, mas sentidos contrários.

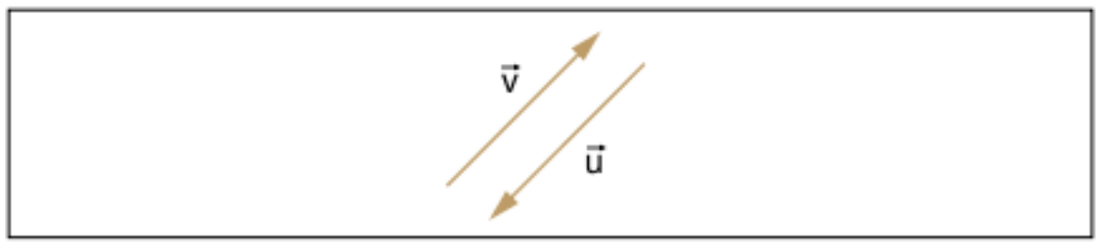


Fig. 8 Vetores opostos.

Nesse caso, temos: $\vec{u} = -\vec{v}$ e $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

II. Vetor nulo: quando o módulo do vetor é nulo ($|\vec{v}| = 0$ e $\vec{v} = \vec{0}$). Nesse caso, não se define direção nem sentido.

III. Vetor unitário: quando o módulo do vetor é 1 ($|\vec{v}| = 1$). Nesse caso, ele também é chamado de versor.

IV. Vetores iguais: dois vetores são iguais quando possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. Dessa forma, para que sejam diferentes, basta que um desses três elementos (módulo, direção ou sentido) seja diferente.

Fig. 9 Vetores diferentes – sentidos opostos.

Fig. 10 Vetores diferentes – módulos diferentes.

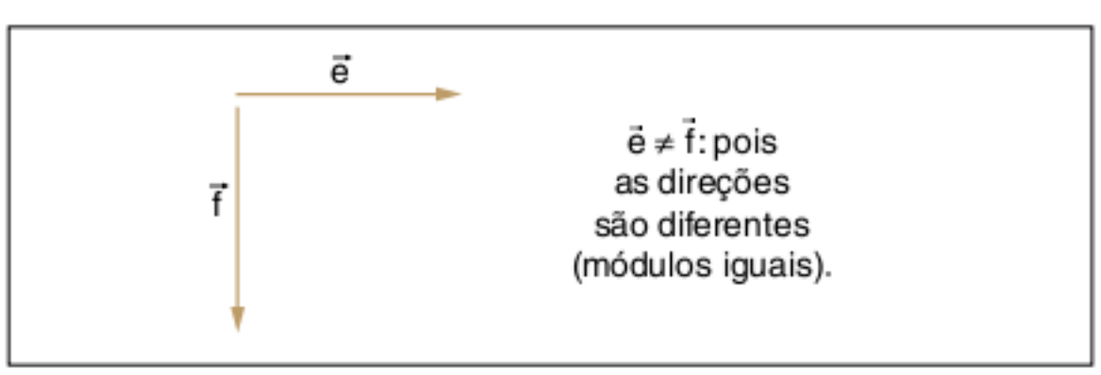


Fig. 11 Vetores diferentes – direções diferentes.

Finalmente:

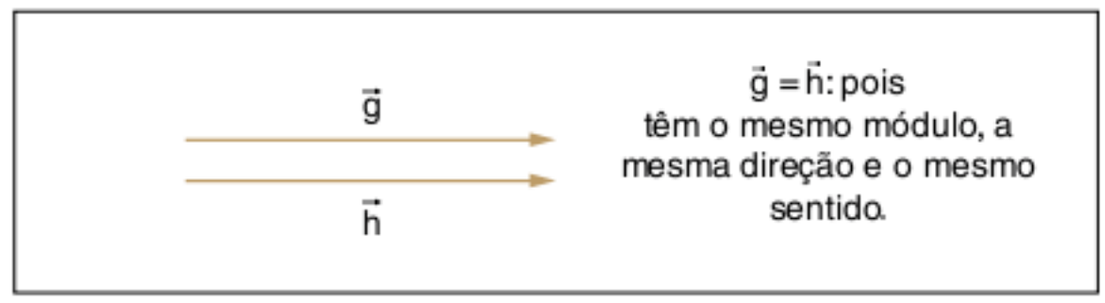


Fig. 12 Vetores iguais.

Adição de vetores

Para efetuar a adição de dois ou mais vetores, veremos três métodos:

- regra da poligonal;
- regra do paralelogramo;
- método de decomposição de vetores.

Regra da poligonal

Se tivermos dois vetores quaisquer, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, para obtermos o vetor soma ou resultante, devemos tomar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de modo que a origem de $\vec{b}$ coincida com a extremidade de $\vec{a}$.

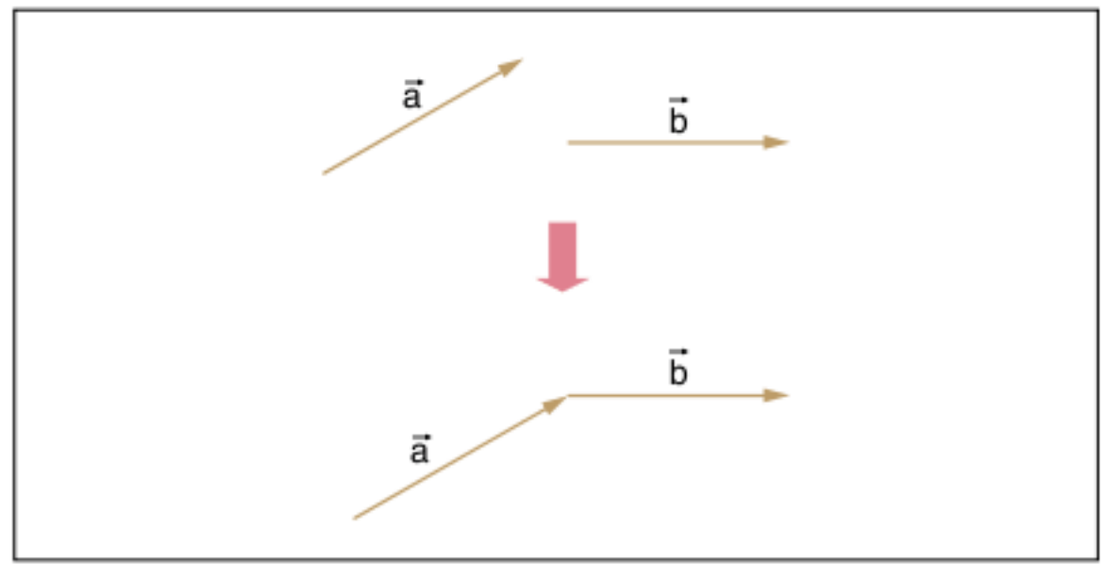


Fig. 13 Soma pela regra da poligonal.

Ao trasladarmos o vetor $\vec{b}$, continuamos com o mesmo vetor, pois são mantidos módulo, direção e sentido.

O vetor soma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ será o vetor com origem coincidente com a origem de $\vec{a}$ e extremidade coincidente com a extremidade de $\vec{b}$.

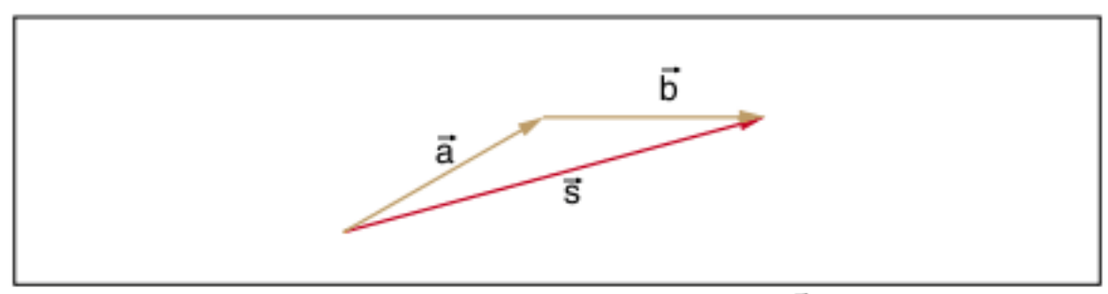


Fig. 14 Vetor soma pela regra da poligonal ($\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$).

Observe que poderíamos também trasladar $\vec{a}$ de modo que sua origem coincida com a extremidade de $\vec{b}$, como na figura 15.

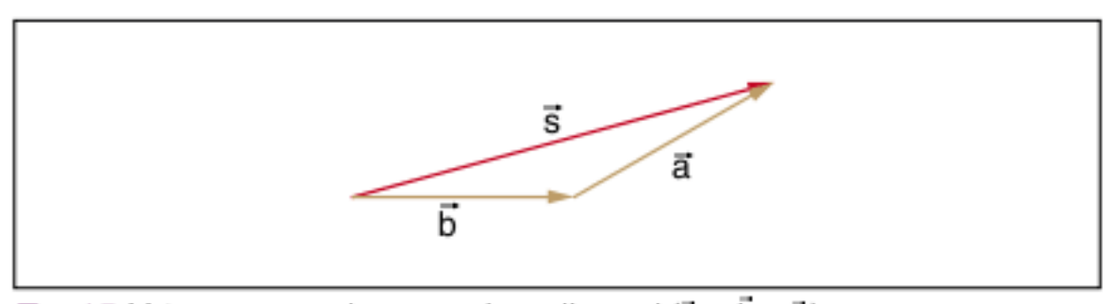


Fig. 15 Vetor soma pela regra da poligonal ($\vec{s} = \vec{b} + \vec{a}$).

ATENÇÃO!

- $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, a ordem de colocação dos vetores não altera o resultado da soma.
- Note que sempre teremos: $|\vec{s}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
- A equação: $|\vec{s}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ é conhecida como desigualdade triangular, também estudada na frente 3 de Matemática.
- Cuidado: não existe a notação $\vec{u} = 0$, pois não é possível fazer uma igualdade entre uma grandeza escalar e uma grandeza vetorial.

Vejamos alguns casos de adição de vetores.

- Quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm mesma direção e mesmo sentido:

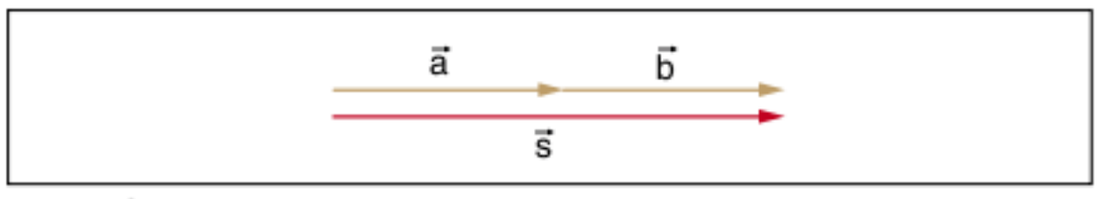


Fig. 16 Soma de vetores de mesma direção e mesmo sentido.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow |\vec{s}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

- Quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm mesma direção e sentidos opostos:

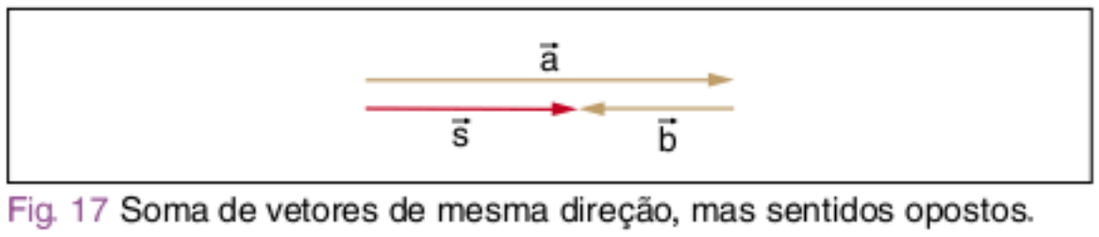


Fig. 17 Soma de vetores de mesma direção, mas sentidos opostos.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow |\vec{s}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$$

- Quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm direções perpendiculares entre si:

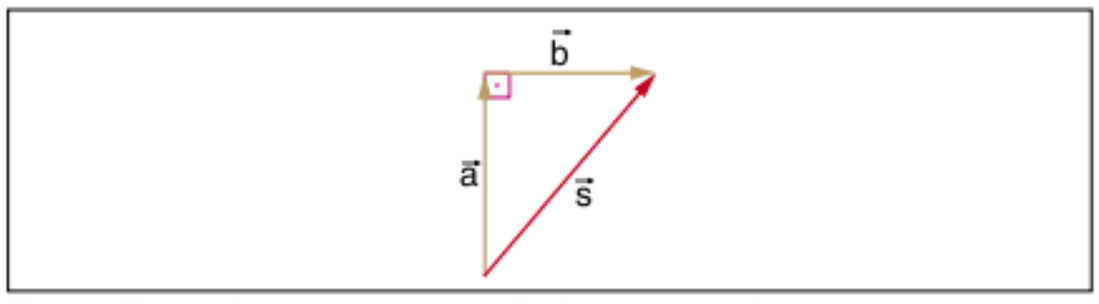


Fig. 18 Soma de vetores perpendiculares entre si.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$|\vec{s}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{s}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$$

A soma de mais de dois vetores também pode ser efetuada utilizando a regra da poligonal. Sejam os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$:

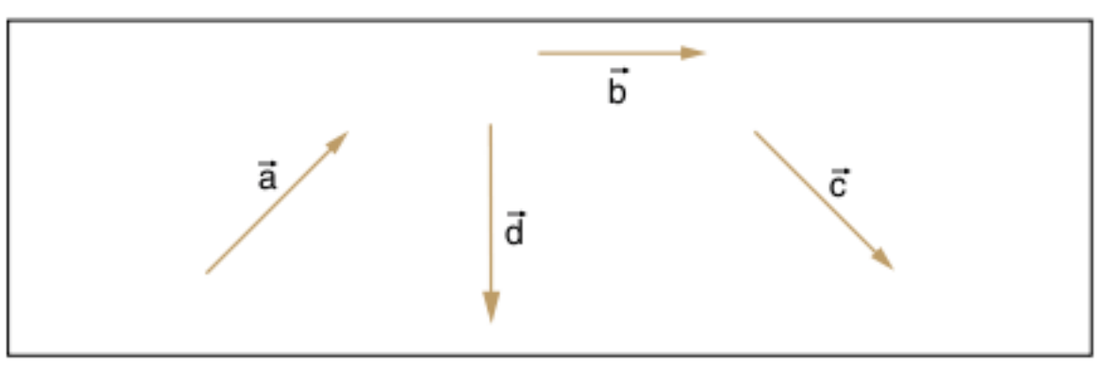


Fig. 19 Vetores quaisquer.

Trasladar os vetores de forma que se tornem consecutivos:

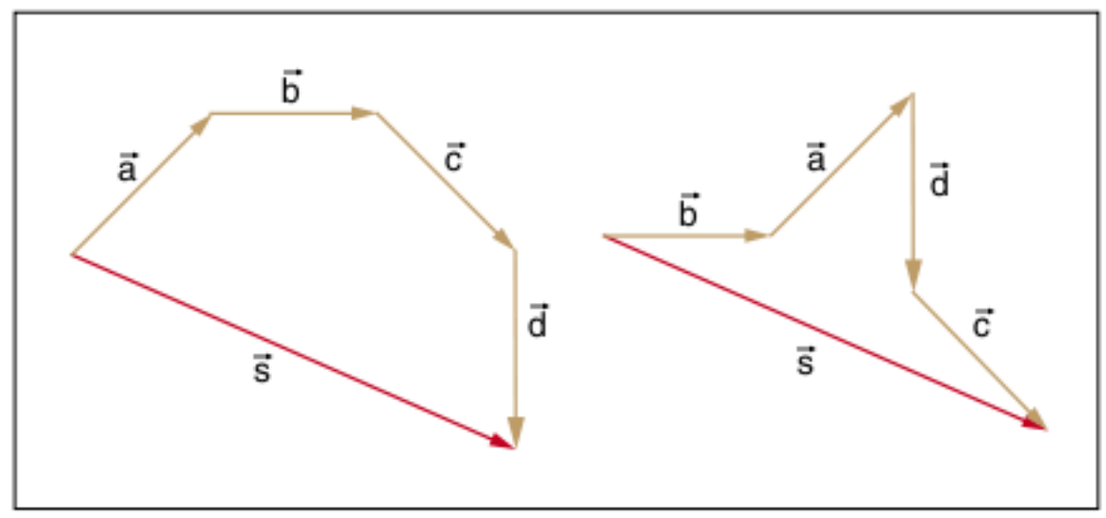


Fig. 20 Soma de quatro vetores quaisquer pelo método da poligonal.

em que: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{d} + \vec{c}$

Regra do paralelogramo

Se tivermos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

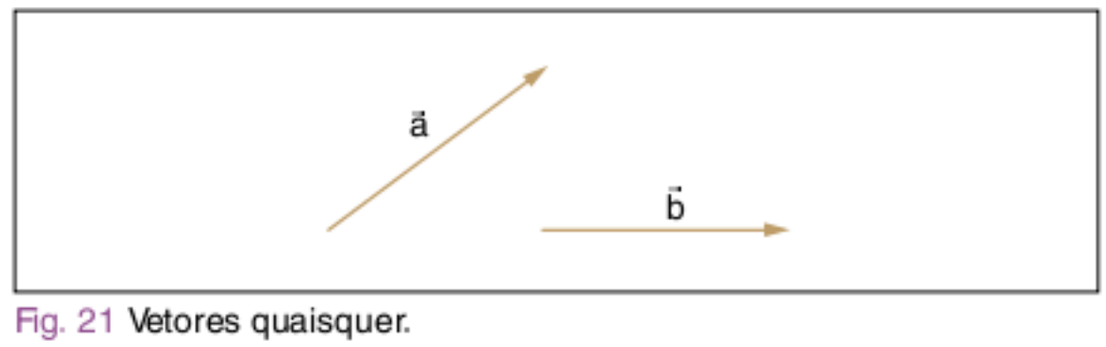


Fig. 21 Vetores quaisquer.

Para obtermos o vetor soma, devemos trasladar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de modo que suas origens coincidam:

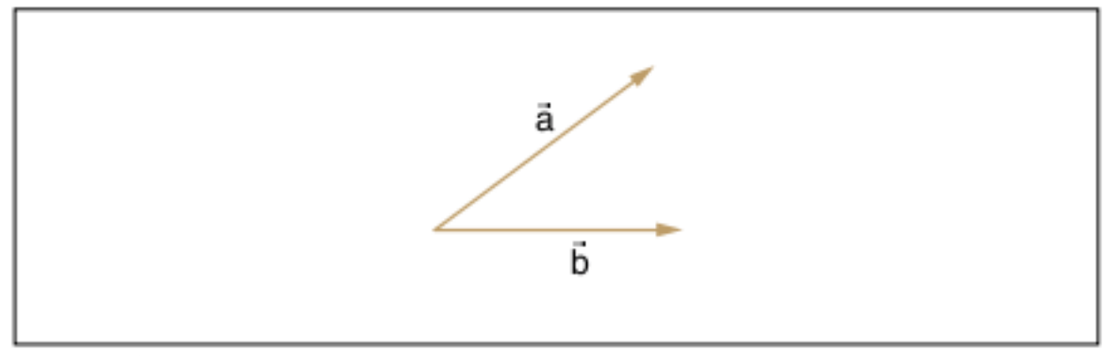


Fig. 22 Soma pela regra do paralelogramo.

A seguir, construímos um paralelogramo, traçando, pela extremidade de cada vetor, uma reta paralela ao outro vetor:

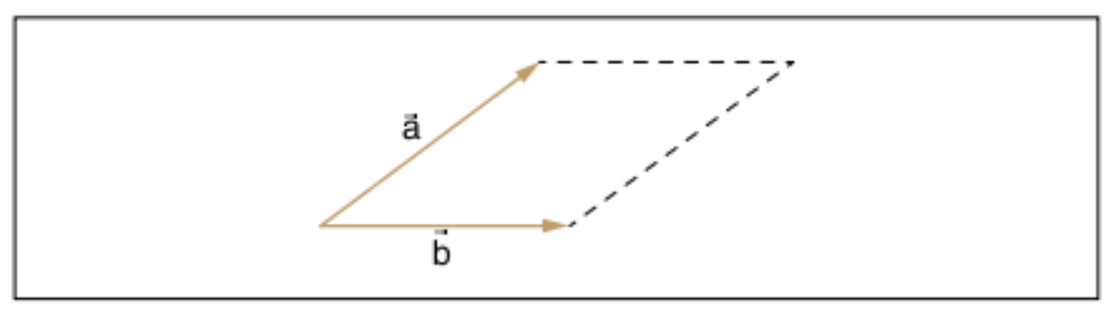


Fig. 23 Construção do paralelogramo.

O vetor soma será a diagonal desse paralelogramo com origem na origem comum de $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

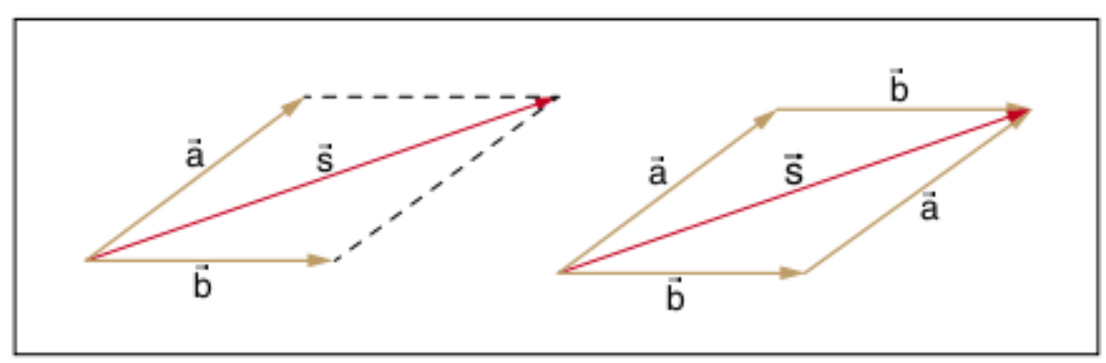


Fig. 24 Soma pelo método do paralelogramo.

ATENÇÃO!

Para obtermos a soma de quatro vetores ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$) pela regra do paralelogramo, devemos somar dois vetores: $(\vec{a}+\vec{b})$. Em seguida, somar a resultante com $\vec{c}$: $[(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}]$. Depois, somar a nova resultante com o vetor $\vec{d}$: $[(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{d}]$.

Para calcularmos o módulo e a direção dos vetores resultantes, tanto pela regra da poligonal quanto pela regra do paralelogramo, é útil relembrarmos a lei dos cossenos e a lei dos senos.

Lei dos cossenos

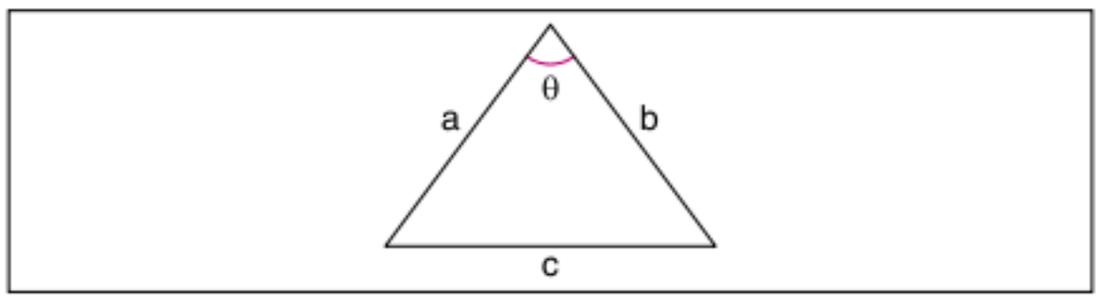


Fig. 25 Lei dos cossenos.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta$$

Lei dos senos

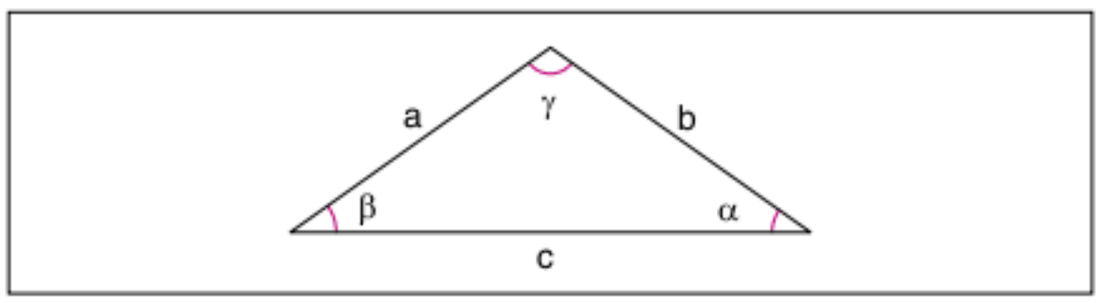


Fig. 26 Lei dos senos.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Observação: *O ângulo entre dois vetores é definido como o menor ângulo entre eles quando colocados com origem comum.*

Assim, aplicando a regra do paralelogramo para a soma de $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

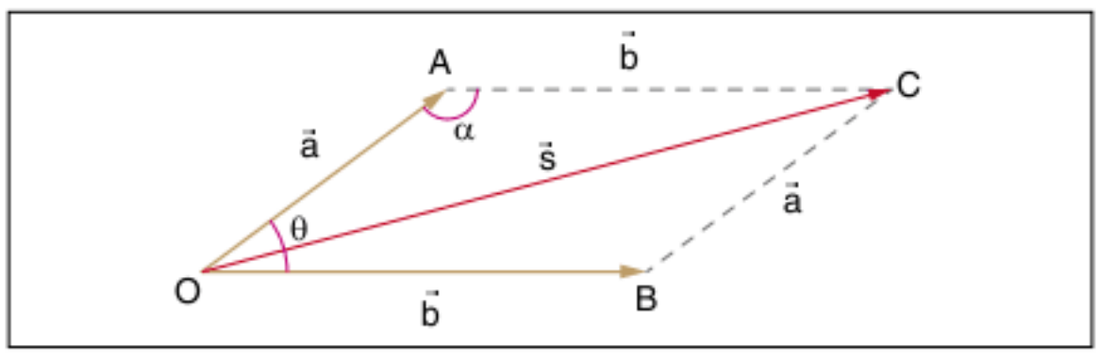


Fig. 27 Lei dos cossenos na regra do paralelogramo.

Aplicando a lei dos cossenos para o ΔOAC, temos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

Como θ é o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e $\alpha + \theta = 180°$, então:

$$\cos\alpha = \cos(180 - \theta) = -\cos\theta$$

Logo:

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta$$

Assim:

$$|\vec{s}| = s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2.\,a.\,b.\cos\theta}$$

Método de decomposição de vetores

Se um vetor $\vec{v}$ é representado pelo segmento $\overline{AB}$, podemos obter a projeção do vetor $\vec{v}$ no eixo x por meio das projeções ortogonais da origem e da extremidade de $\vec{v}$.

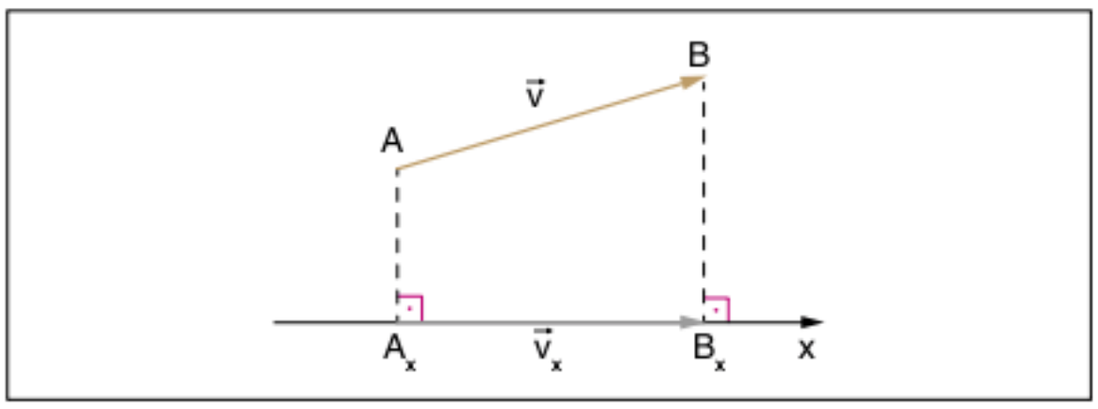


Fig. 28 Projeção sobre o eixo x.

Assim, A_x e B_x são as projeções ortogonais de A e B, respectivamente, no eixo x, e o segmento $\overline{A_x B_x}$ é a representação do vetor $\vec{v}_x$ (projeção de $\vec{v} = \overline{AB}$ no eixo x). Sendo assim, podemos decompor um vetor em dois outros, cuja soma vetorial é o vetor original. Essa decomposição será feita em nosso estudo apenas em direções perpendiculares, apesar de não ser essa uma condição necessária.

Seja um vetor $\vec{v}$ que desejamos decompor em suas projeções nos eixos x e y.

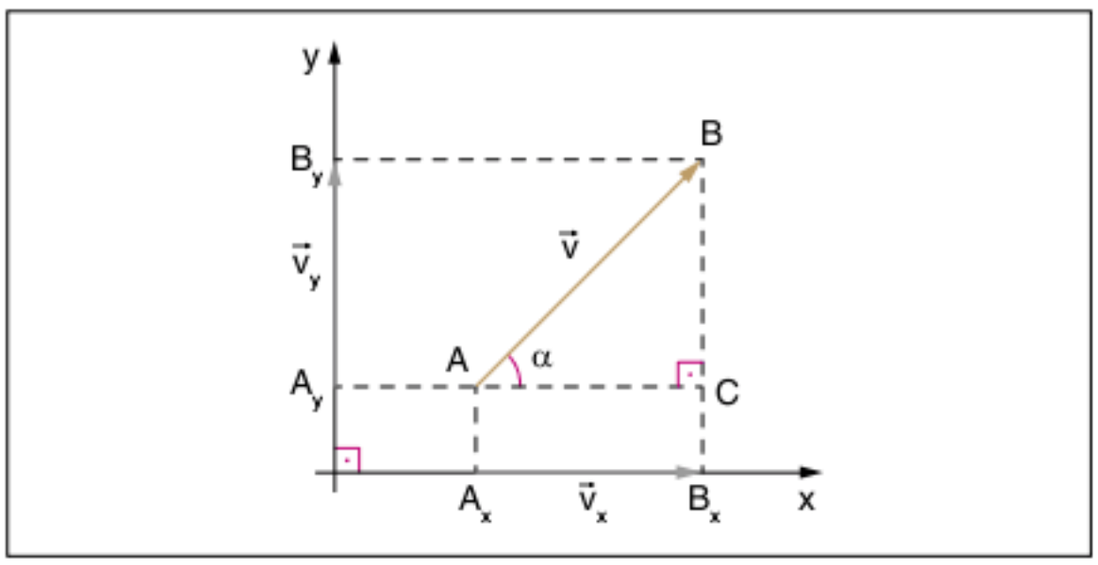


Fig. 29 Projeções sobre o eixo x e sobre o eixo y.

Do ΔABC, observamos que:

$$AC = |\vec{v}_x| \quad \text{e} \quad CB = |\vec{v}_y|$$

Sabemos também que:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{CB}{AB}$$

Logo:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_x|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{v}_x| = |\vec{v}|.\cos\alpha$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{v}_y| = |\vec{v}|.\,\text{sen}\,\alpha$$

Se tivermos então quatro vetores, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$, e quisermos obter o vetor soma dos vetores, podemos encontrar suas decomposições nos eixos.

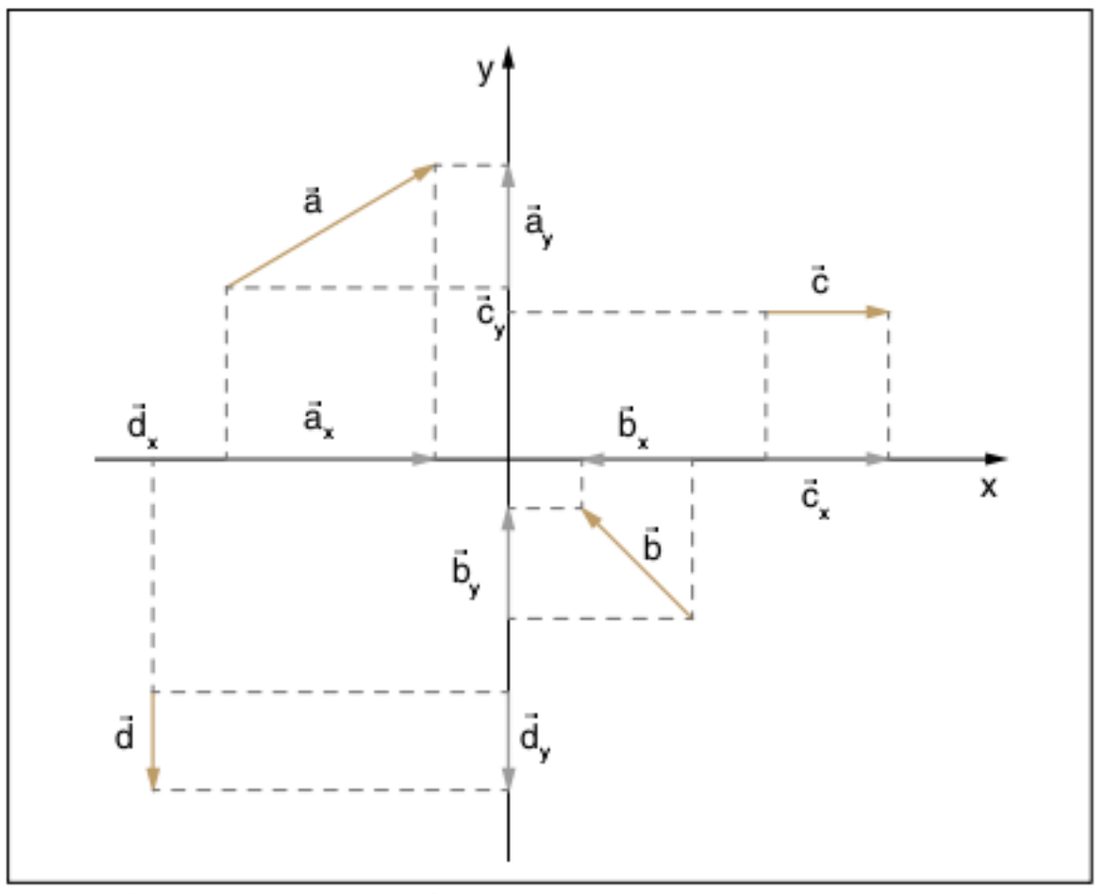


Fig. 30 Decomposição de vários vetores sobre os eixos x e y.

I. Somando as projeções dos vetores no eixo x, obtemos a projeção do vetor soma em x:

$$\vec{s}_x = \vec{a}_x + \vec{b}_x + \vec{c}_x + \vec{d}_x$$

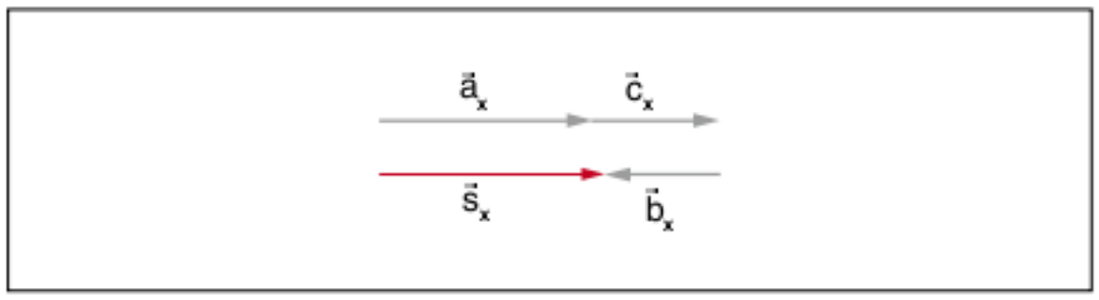


Fig. 31 Soma sobre o eixo x.

II. Somando as projeções dos vetores no eixo y, obtemos a projeção do vetor soma em y:

$$\vec{s}_y = \vec{a}_y + \vec{b}_y + \vec{c}_y + \vec{d}_y$$

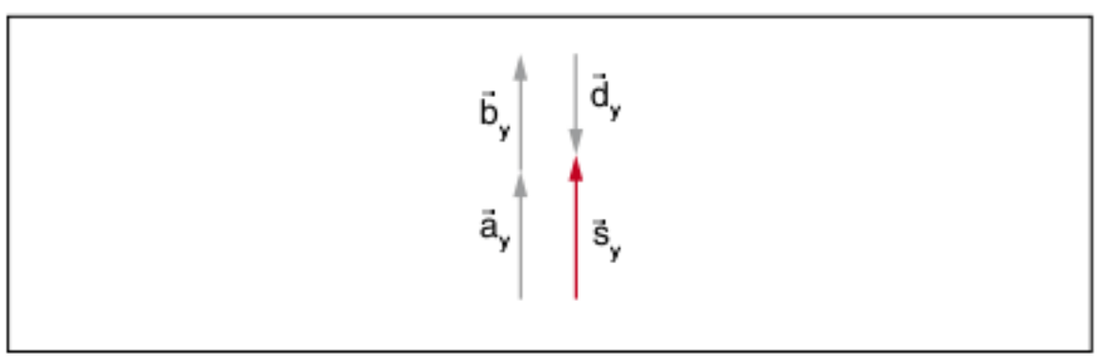


Fig. 32 Soma sobre o eixo y.

Desse modo, somando $\vec{s}_x$ e $\vec{s}_y$, obtemos o vetor soma de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ como o vetor soma de $\vec{s}_x$ e $\vec{s}_y$:

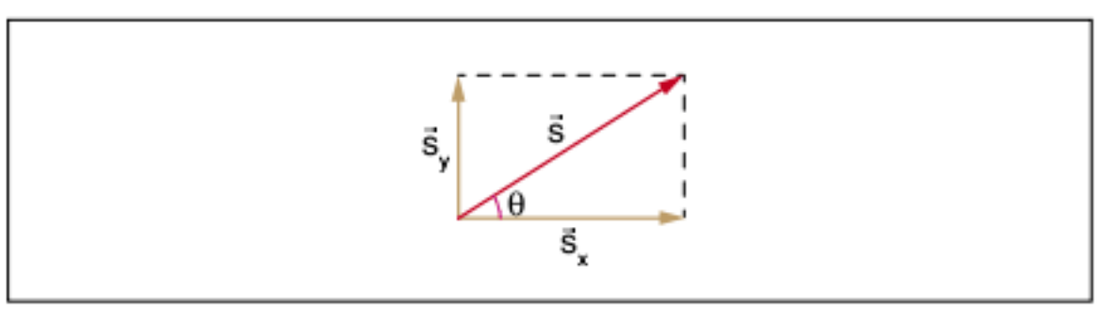


Fig. 33 Vetor soma resultante.

com $\vec{s} = \vec{s}_x + \vec{s}_y$, em que seu módulo é dado por:

$$|\vec{s}| = \sqrt{|\vec{s}_x|^2 + |\vec{s}_y|^2}$$

e sua direção é dada por:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{|\vec{s}_y|}{|\vec{s}_x|} \Rightarrow \theta = \text{arc tg}\,\frac{|\vec{s}_y|}{|\vec{s}_x|}$$

Subtração de vetores

Tomemos dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

Fig. 34 Vetores quaisquer.

A subtração (ou diferença) de vetores, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, pode ser entendida como uma soma de vetores, pois: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, ou seja, é igual à soma do vetor $\vec{a}$ com o oposto do vetor $\vec{b}$, que é $(-\vec{b})$. Então:

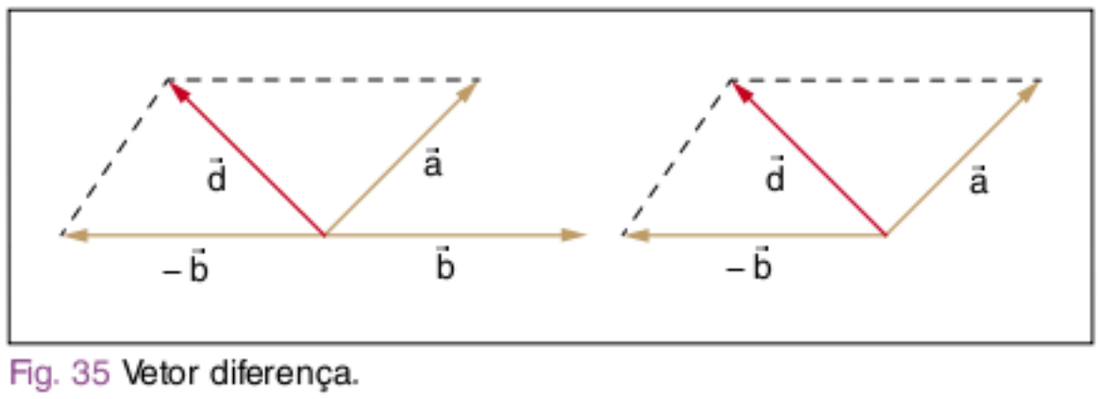


Fig. 35 Vetor diferença.

Esse vetor diferença $\vec{d}$ tem extremidade coincidente com a extremidade de $\vec{a}$ e origem coincidente com a extremidade de $\vec{b}$:

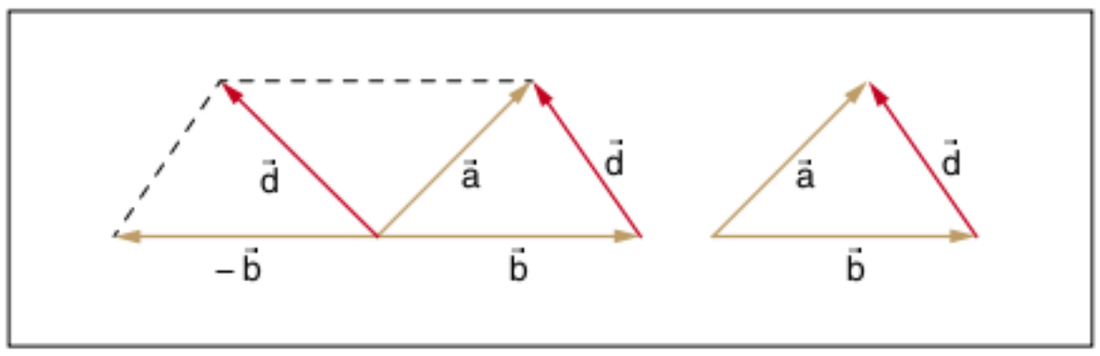


Fig. 36 Posição do vetor diferença.

Note que, se: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$,
então: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$.
Se quisermos obter $\vec{d}' = \vec{b} - \vec{a}$, teremos:

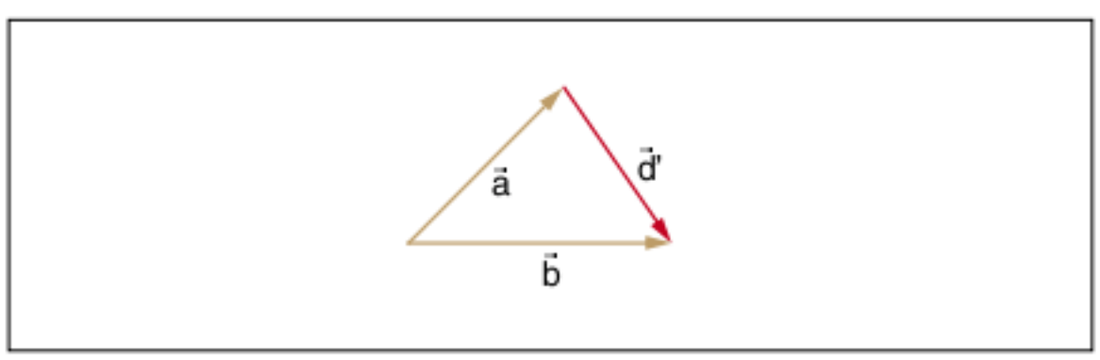


Fig. 37 Vetor diferença: $\vec{d}'$.

em que $\vec{d}' = -\vec{d}$.

Em ambos os casos, o módulo do vetor diferença pode ser calculado pela lei dos cossenos:

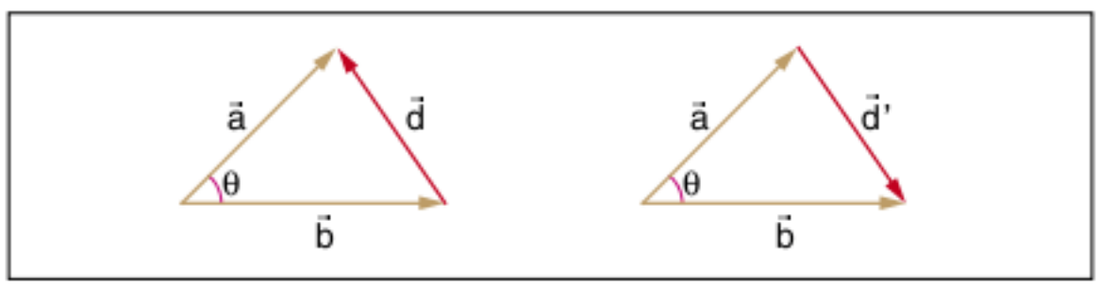


Fig. 38 Triângulos iguais.

com $d^2 = d'^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\theta$, em que θ é o ângulo formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Multiplicação de um vetor por um número real

Seja $\vec{a}$ um vetor e n um número real. O produto de n por $\vec{a}$ é dado por:

$$\vec{p} = n.\vec{a}$$

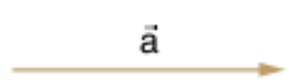
O vetor $\vec{p}$ tem as seguintes características:

- **direção**: a mesma de $\vec{a}$.
- **sentido**: o mesmo de $\vec{a}$, se $n > 0$
  o contrário de $\vec{a}$, se $n < 0$
- **módulo**: $|\vec{p}| = |n|.|\vec{a}|$

Assim, se $n = 0$, então $\vec{p} = \vec{0}$, que é o vetor nulo; se $n = -1$, então $\vec{p} = -\vec{a}$, que é o vetor oposto de $\vec{a}$.

Exercícios resolvidos

1 Seja o vetor $\vec{a}$:

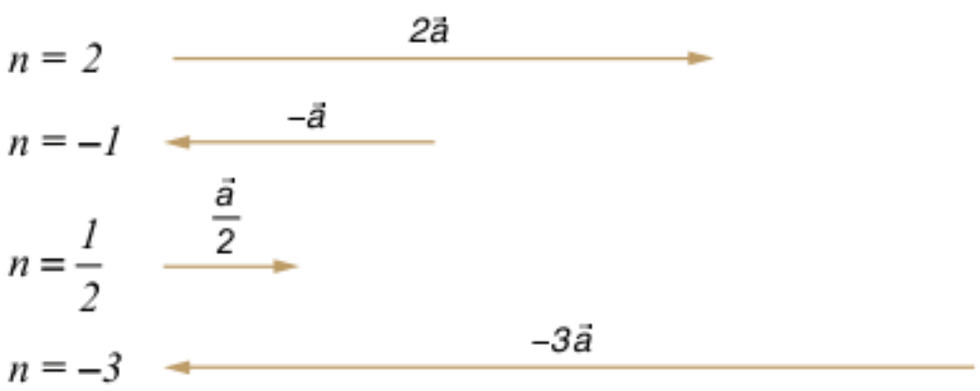


Determine graficamente os vetores: $2\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{\vec{a}}{2}$ e $-3\vec{a}$.

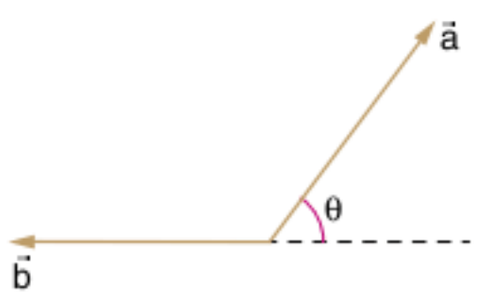
Resolução:

Calcularemos $\vec{p} = n.\vec{a}$.

Para:



2 São dados dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



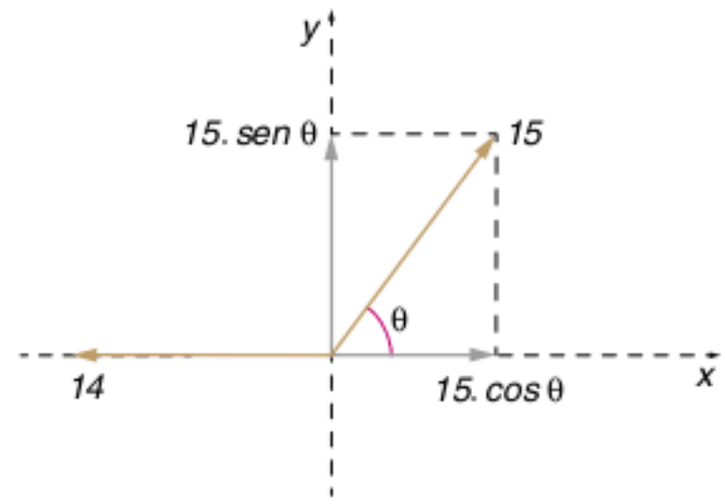
$|\vec{a}| = 15$; $|\vec{b}| = 14$ e $\cos\theta = 0,6$

Determine módulo, direção e sentido dos vetores:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $-\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$

Resolução:

a) Podemos determinar $\vec{a} + \vec{b}$ pelo método da decomposição de vetores. Decompondo $\vec{a}$ nos eixos x e y:

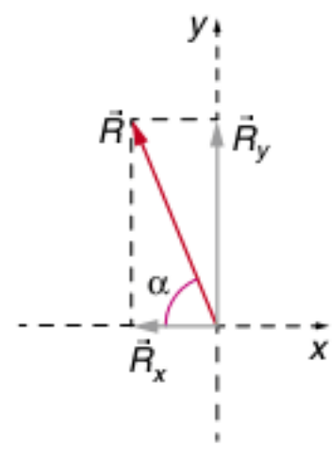


Assim:

$R_x = 15 \cdot 0,6 - 14 = -5$

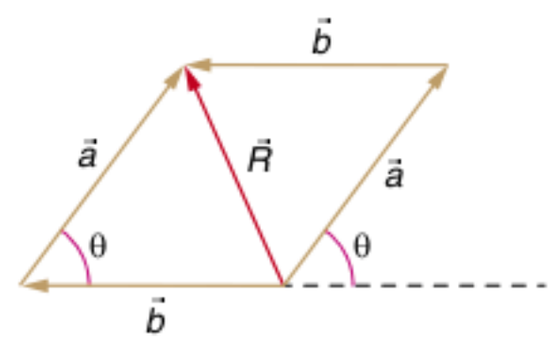
$R_y = 15 \cdot 0,8 = 12$

$|\vec{R}| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} \Rightarrow |\vec{R}| = 13$



$$em\ que\ tg\,\alpha = \frac{|\vec{R}_y|}{|\vec{R}_x|} = \frac{12}{5} \Rightarrow \alpha = arc\ tg\left(\frac{12}{5}\right)$$

Pela regra da poligonal ou do paralelogramo:

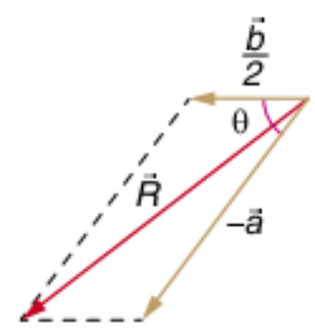


$$|\vec{R}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2.|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta$$

$$= 15^2 + 14^2 - 2.15.14.0,6$$

$$|\vec{R}|^2 = 169 \Rightarrow |\vec{R}| = 13$$

b) Para $-\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$, *temos:*



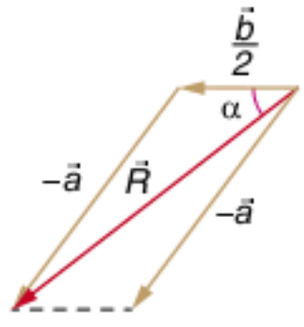
Assim:

$$|\vec{R}|^2 = |-\vec{a}|^2 + \left|\frac{\vec{b}}{2}\right|^2 + 2|-\vec{a}|.\left|\frac{\vec{b}}{2}\right|\cos\theta$$

$$|\vec{R}|^2 = 15^2 + 7^2 + 2.15.7.0,6 = 400$$

$$|\vec{R}| = 20$$

Para determinar α, podemos utilizar a lei dos cossenos:

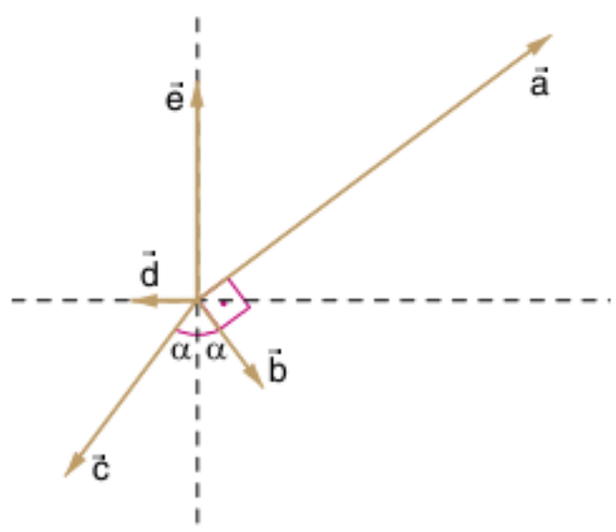


$$|-\vec{a}|^2 = \left|\frac{\vec{b}}{2}\right|^2 + |\vec{R}|^2 - 2\left|\frac{\vec{b}}{2}\right||\vec{R}|\cos\alpha$$

$$15^2 = 7^2 + 400 - 2.7.20.\cos\alpha$$

$$280\cos\alpha = 224 \Rightarrow \alpha = arc\cos 0,8$$

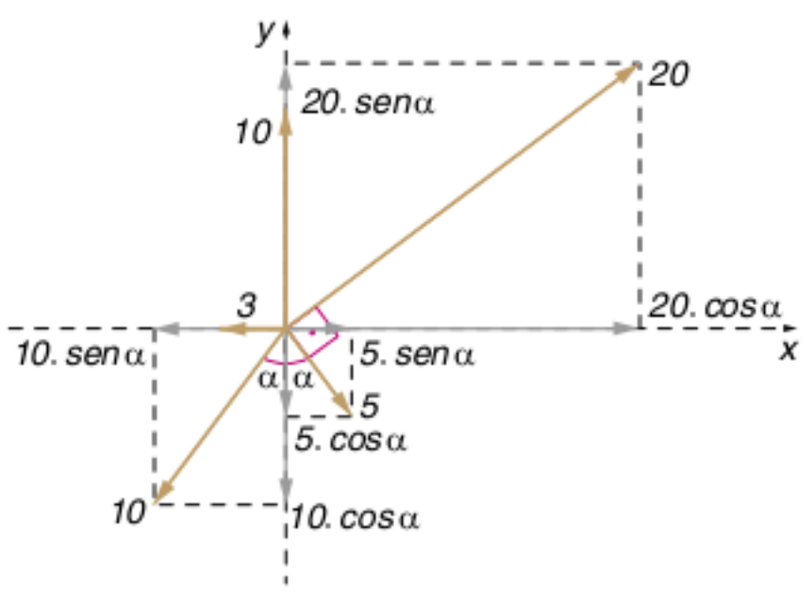
3 Determine a resultante dos seguintes vetores.



$|\vec{a}| = 20$
$|\vec{b}| = 5$
$|\vec{c}| = 10$
$|\vec{d}| = 3$
$|\vec{e}| = 10$
$\cos\alpha = 0,8$

Resolução:

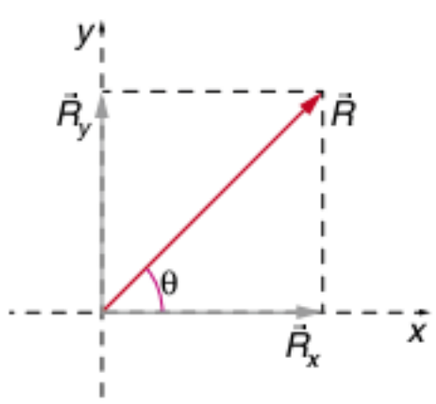
Utilizaremos aqui o método da decomposição de vetores:



Assim:

$$R_x = 20\cdot\cos\alpha + 5\cdot sen\alpha - 3 - 10\cdot sen\alpha$$
$$= 20\cdot 0,8 + 5\cdot 0,6 - 3 - 10\cdot 0,6 = 10$$
$$R_y = 20\cdot sen\alpha + 10 - 5\cdot\cos\alpha - 10\cdot\cos\alpha$$
$$= 20\cdot 0,6 + 10 - 5\cdot 0,8 - 10\cdot 0,8 = 10$$

Então:



Assim:

$$|\vec{R}| = \sqrt{10^2 + 10^2} \Rightarrow |\vec{R}| = 10\sqrt{2}\ e$$

$$tg\,\theta = \frac{|\vec{R}_y|}{|\vec{R}_x|} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \theta = 45°$$

Cinemática vetorial

Nos capítulos anteriores, estudamos o movimento de um ponto material de maneira escalar, ou seja, preocupamo-nos apenas com os módulos das grandezas espaço, velocidade e aceleração. A direção dos movimentos foi considerada no instante em que se conheceu a trajetória, sendo ela a própria direção do movimento. Isso significa que, ao dizermos que um automóvel se move sobre a Via Dutra, do Rio de Janeiro para São Paulo, a 80 km/h, direção e sentido já estavam determinados.

Neste capítulo, posição, velocidade e aceleração são caracterizados como grandezas vetoriais.

Vetor posição

A posição de uma partícula em relação a um sistema de referência, independentemente da trajetória, é definida pelo vetor posição. Desse modo, o vetor posição $\vec{r}$ de um ponto P em relação a um referencial O é dado pelo vetor com origem em O e extremidade em P.

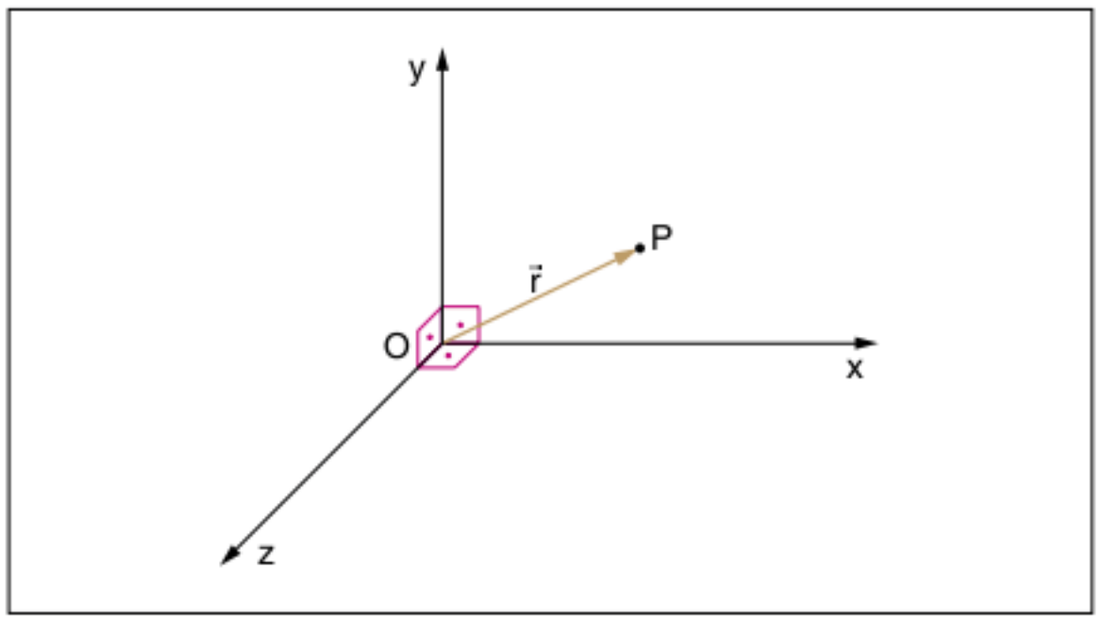


Fig. 39 Vetor posição.

Para o referencial O, escolhemos um sistema de coordenadas triortogonal Oxyz.

Podemos obter as projeções do vetor $\vec{r}$ nos eixos x, y e z. Assim:

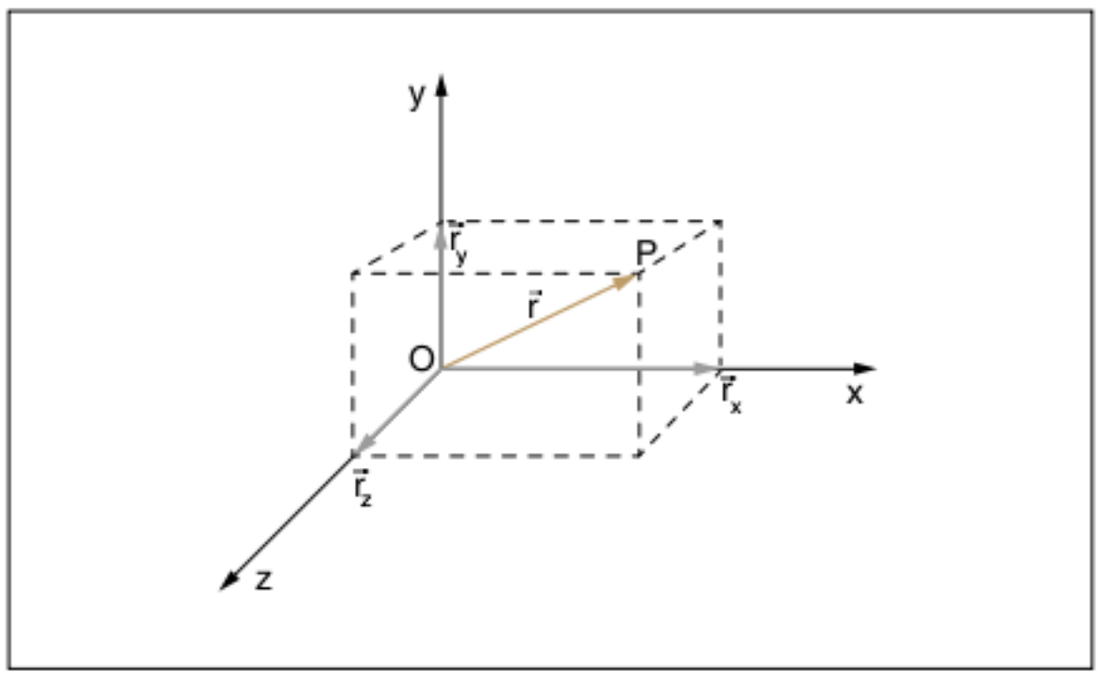


Fig. 40 Projeções do vetor posição.

em que: $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$ ou: $\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}$

com $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ versores nos eixos x, y e z, respectivamente.

Então: $|\vec{r}|^2 = |\vec{r}_x|^2 + |\vec{r}_y|^2 + |\vec{r}_z|^2$

Vetor deslocamento

Seja uma partícula que se desloca sobre uma trajetória qualquer. Ela passa pelo ponto P_1, de espaço s_1, no instante t_1 e pelo P_2, de espaço s_2, no instante t_2. O vetor posição da partícula em P_1 é $\vec{r}_1$ e em P_2 é $\vec{r}_2$.

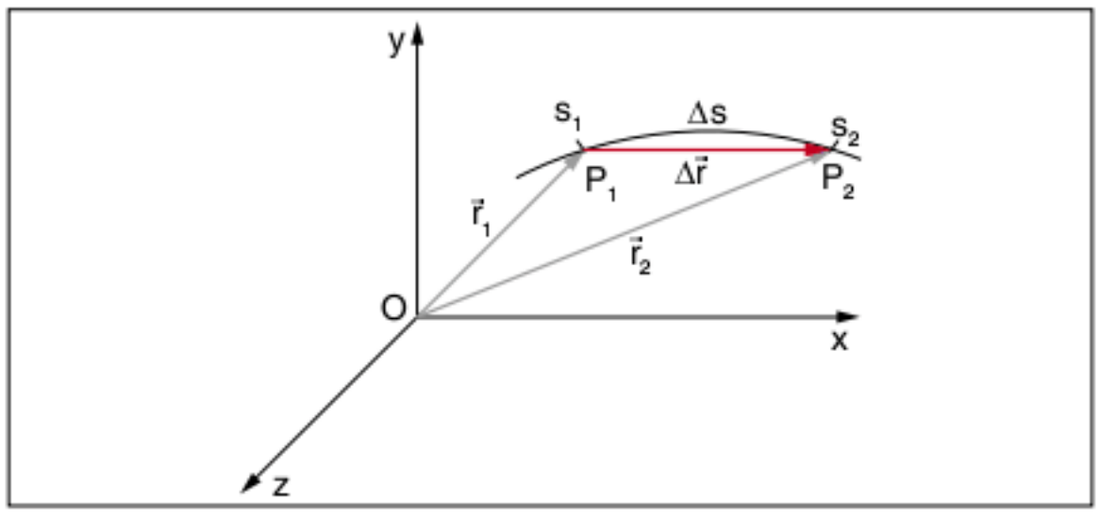


Fig. 41 Vetor deslocamento.

Sabemos, da Cinemática escalar, que a variação de espaço (Δs) é definida como $\Delta s = s_2 - s_1$.

Na Cinemática vetorial, definimos a variação do vetor posição, ou vetor deslocamento, como:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Note que:

$$|\Delta\vec{r}| \leq |\Delta s|$$

$|\Delta\vec{r}| = |\Delta s|$ quando a trajetória é retilínea.

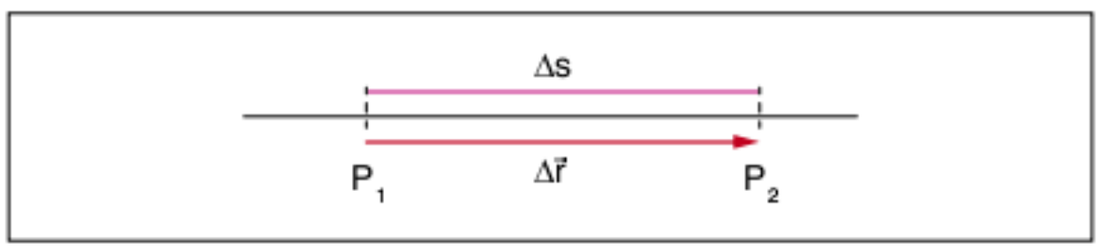


Fig. 42 Variação do espaço e módulo do vetor posição iguais.

Velocidade vetorial média

Sabemos que a velocidade escalar média (v_m) é dada pelo quociente entre a variação de espaço (Δs) e o intervalo de tempo (Δt):

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Analogamente, a velocidade vetorial média ($\vec{v}_m$) é definida pelo quociente entre a variação do vetor posição ($\Delta\vec{r}$) e o intervalo de tempo (Δt):

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Como Δt é um número real maior do que zero, então $\vec{v}_m$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\Delta\vec{r}$. Ainda:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

Assim:

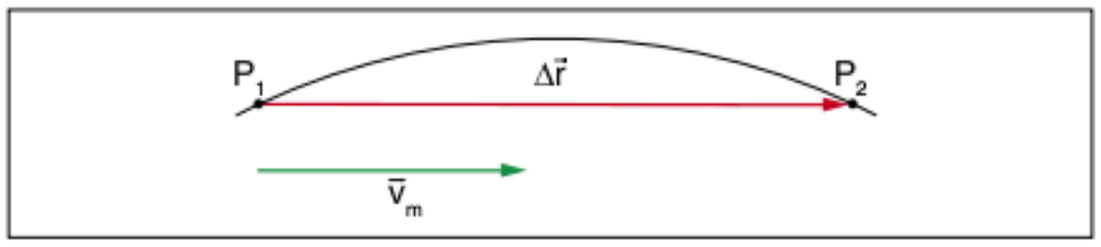


Fig. 43 Velocidade vetorial média.

Sabemos que:

$$|\Delta\vec{r}| \leq |\Delta s|$$

Logo:

$$\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \leq \frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

E, portanto:

$$|\vec{v}_m| \leq |v_m|$$

em que:

$|\vec{v}_m|$ é o módulo da velocidade vetorial média.

$|v_m|$ é o módulo da velocidade escalar média.

e $|\vec{v}_m| = |v_m|$ quando a trajetória for retilínea.

Velocidade vetorial instantânea

Sabemos que a velocidade escalar instantânea (v) é dada por:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Analogamente, a velocidade vetorial instantânea ($\vec{v}$) pode ser definida como a velocidade vetorial média quando o intervalo de tempo se torna extremamente pequeno, ou seja, tendendo a zero ($\Delta t \to 0$):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m$$

Logo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Em uma trajetória qualquer, para calcularmos a velocidade vetorial de uma partícula ao passar por um ponto P_1, em um instante t_1, tomamos a velocidade vetorial média entre o instante t_1 e um instante t_2, em que a partícula passa pelo ponto P_2. Se Δt tender a zero, t_2 tende a t_1, aproximando-se deste. À medida que t_2 se aproxima de t_1, P_2 se aproxima de P_1, e a direção do vetor $\Delta\vec{r}$ (e, consequentemente, $\vec{v}_m$), de secante à trajetória, tende a ser tangente à trajetória no ponto P_1.

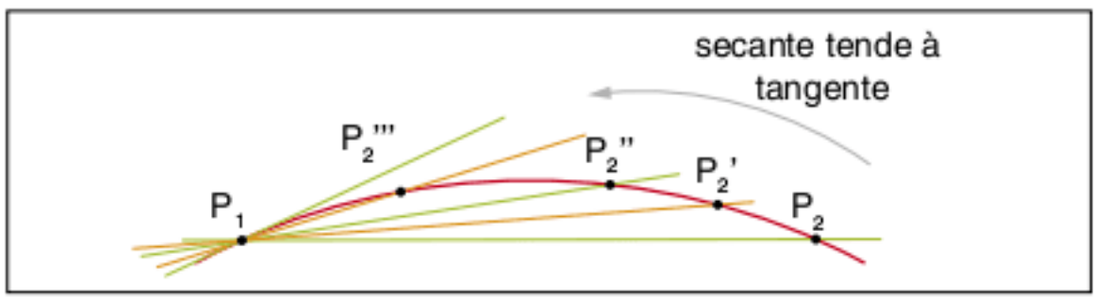


Fig. 44 Variação da direção do vetor deslocamento quando $\Delta t \to 0$.

Dessa forma, a direção da velocidade vetorial instantânea é a da tangente à trajetória no ponto considerado. O sentido é o mesmo do movimento.

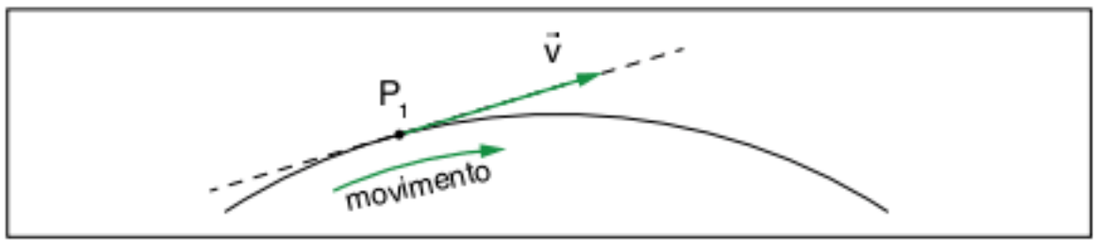


Fig. 45 Direção e sentido da velocidade vetorial instantânea.

Para o módulo de $\vec{v}$, quando Δt tende a zero, $|\Delta\vec{r}|$ também tende a zero, porém o quociente $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ tende a um valor limite, que é o módulo da velocidade vetorial instantânea.

Temos também que, quando Δt tende a zero, $|\Delta s|$ tende a $|\Delta\vec{r}|$ e, então:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

Logo:

$$|\vec{v}| = |v|$$

ou seja, o módulo da velocidade vetorial instantânea é igual ao módulo da velocidade escalar instantânea.

Desse modo, no movimento uniforme, o módulo da velocidade vetorial é constante e, no movimento variado, ele é variável. No movimento retilíneo, a direção da velocidade vetorial é constante e, no movimento curvilíneo, ela é variável.

Movimento	Velocidade vetorial	
	Módulo	Direção
MRU	constante	constante
MRUV	variável	constante
MCU	constante	variável
MCUV	variável	variável

Tab. 1 Comparação das velocidades vetoriais para vários movimentos.

Aceleração vetorial média

Sabemos que a aceleração escalar média (a_m) é dada pelo quociente entre a variação de velocidade (Δv) e o intervalo de tempo (Δt):

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Analogamente, a aceleração vetorial média ($\vec{a}_m$) é definida pelo quociente entre a variação da velocidade vetorial ($\Delta\vec{v}$) e o intervalo de tempo (Δt):

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Se uma partícula possui velocidade vetorial $\vec{v}_1$ ao passar pelo ponto P_1, em um instante t_1, e velocidade $\vec{v}_2$ ao passar por P_2, em um instante t_2, então:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

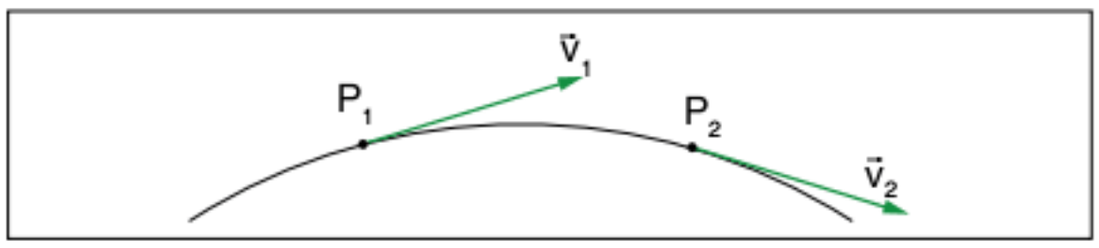


Fig. 46 Vetor velocidade para dois instantes distintos.

Assim, para $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, temos:

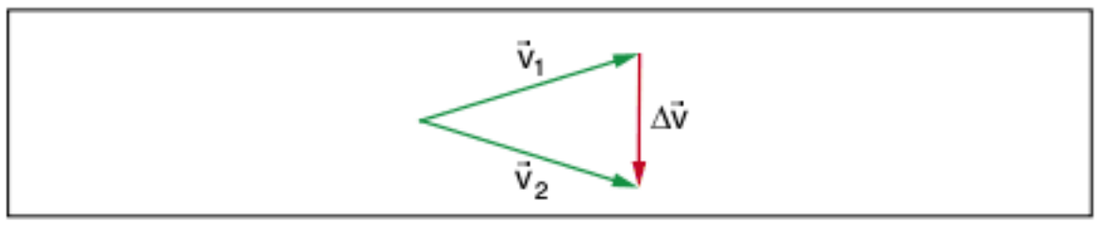


Fig. 47 Variação do vetor velocidade.

Como Δt é um número real maior do que zero, então $\vec{a}_m$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\Delta\vec{v}$. Ainda:

$$|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

Se a trajetória for curva, a aceleração vetorial média estará voltada para dentro da concavidade.

Pela desigualdade triangular:

$$|\Delta\vec{v}| \geq |\vec{v}_2| - |\vec{v}_1|$$

Logo:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \geq \frac{|\vec{v}_2| - |\vec{v}_1|}{\Delta t}$$

e:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \geq \frac{|v_2 - v_1|}{\Delta t} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$$

Portanto:

$$|\vec{a}_m| \geq |a_m|$$

em que:

$|\vec{a}_m|$ é o módulo da aceleração vetorial média.

$|a_m|$ é o módulo da aceleração escalar média.

e $|\vec{a}_m| = |a_m|$ quando a trajetória for retilínea.

Aceleração vetorial instantânea

Sabemos que a aceleração escalar instantânea (a) é dada por:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Analogamente, a aceleração vetorial instantânea ($\vec{a}$) pode ser definida como a aceleração vetorial média quando o intervalo de tempo se torna extremamente pequeno, ou seja, tendendo a zero ($\Delta t \to 0$):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m$$

Logo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Para estudarmos a aceleração vetorial instantânea, é útil decompô-la em duas direções: tangencial e normal à trajetória.

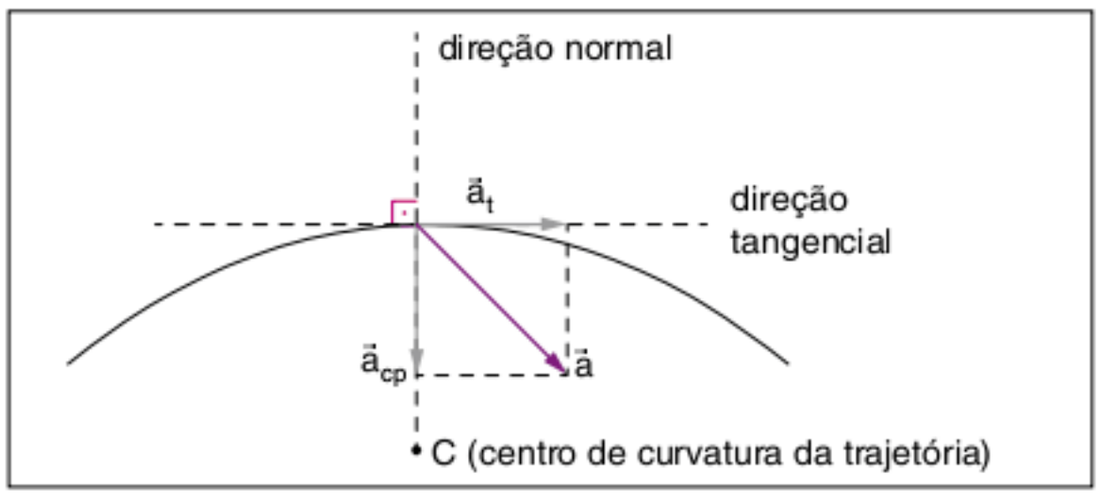


Fig. 48 Vetor aceleração resultante.

A componente do vetor aceleração que é tangente à trajetória é chamada aceleração tangencial $(\vec{a}_t)$ e está relacionada com a variação do módulo de $\vec{v}$.

Pela própria definição, a direção de $\vec{a}_t$, é a tangente à trajetória no instante considerado. Quanto ao sentido, é o mesmo de $\vec{v}$ quando o movimento for acelerado e oposto ao de $\vec{v}$ quando o movimento for retardado.

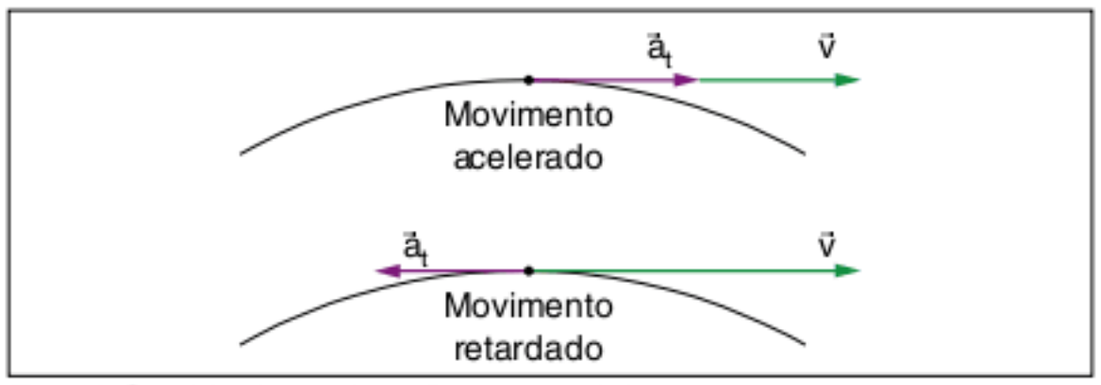


Fig. 49 Sentido da aceleração tangencial.

Como a aceleração tangencial mede a variação do módulo de $\vec{v}$, e o módulo de $\vec{v}$ é igual ao módulo da velocidade escalar instantânea, cuja variação já é medida pela aceleração escalar instantânea, então: $|\vec{a}_t| = |a|$.

Resumindo, para $\vec{a}_t$, temos:

- **direção**: tangente à trajetória.
- **sentido**: o mesmo de $\vec{v}$ quando acelerado e oposto ao de $\vec{v}$ quando retardado.
- **módulo**: igual ao módulo da aceleração escalar.

Dessa forma, se o movimento é uniforme, a aceleração tangencial é nula.

A componente do vetor aceleração que é normal à trajetória é chamada de aceleração centrípeta $(\vec{a}_{cp})$ e está relacionada com a variação da direção de $\vec{v}$.

Pela própria definição, a direção de $\vec{a}_{cp}$ é a normal à trajetória no instante considerado. Quanto ao sentido, é sempre orientado para o centro de curvatura da trajetória. Pode-se demonstrar que o módulo de $\vec{a}_{cp}$ é dado pela expressão:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$$

em que v é o módulo de $\vec{v}$ e R é o raio de curvatura da trajetória.

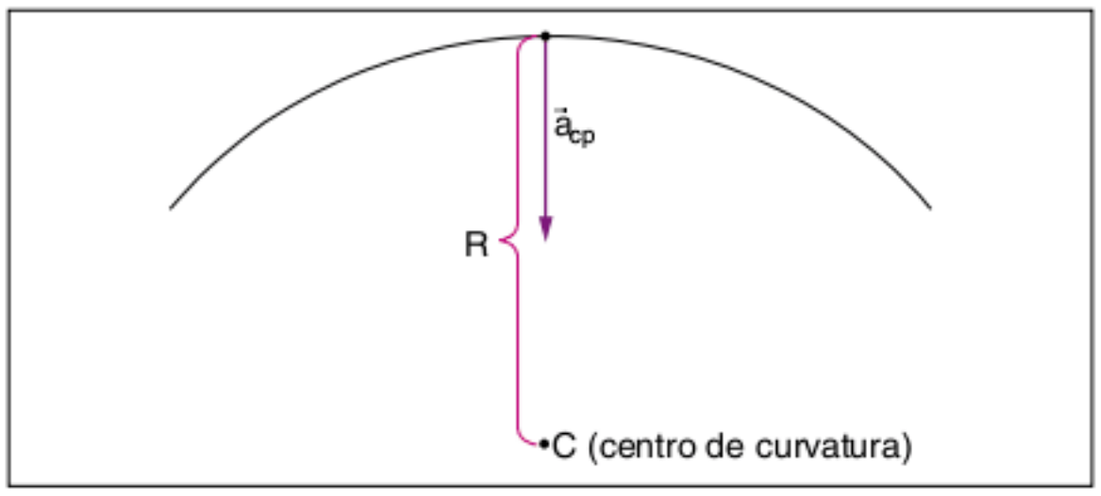


Fig. 50 Aceleração centrípeta.

ATENÇÃO!

No caso do movimento circular, o raio de curvatura coincide com o raio da circunferência. Quando o movimento é curvo, mas não circular, podemos pensar que existe um $\Delta s \to 0$, com o ponto considerado em seu centro, e que este pequeno trecho é a aproximação de um "pedaço" de circunferência. O raio dessa circunferência é o raio de curvatura (R).

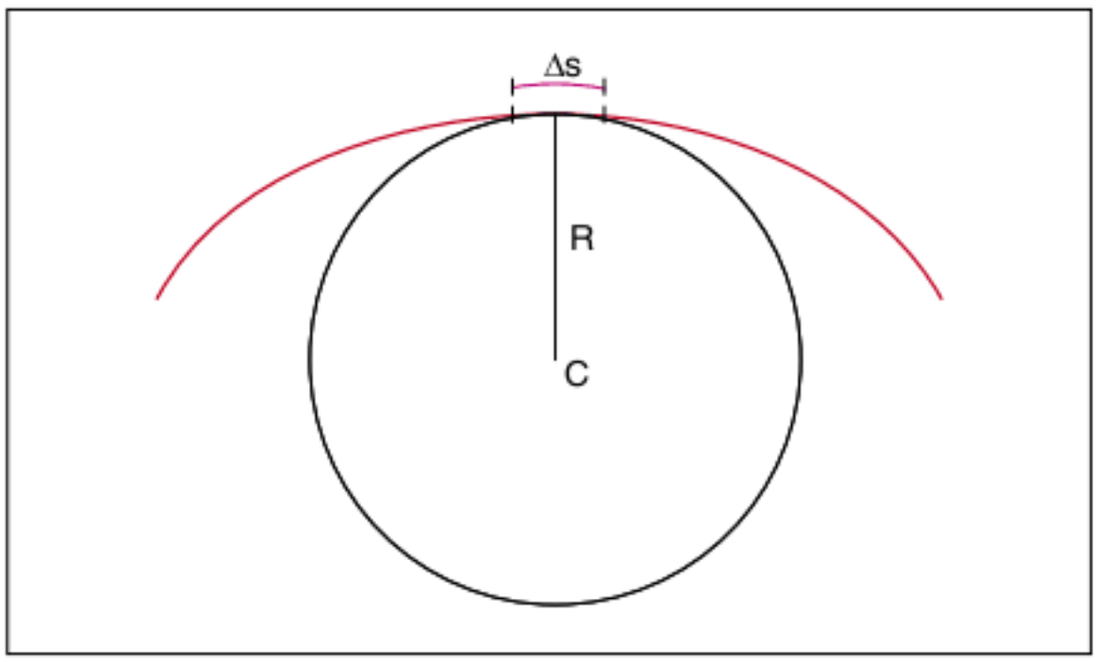


Fig. 51 Movimento curvo não circular.

Resumindo, para $\vec{a}_{cp}$, temos:

- **direção**: perpendicular à trajetória.
- **sentido**: para o centro de curvatura.
- **módulo**: $\frac{v^2}{R}$.

Dessa forma, se o movimento é retilíneo, $R \to \infty$ e a aceleração centrípeta é nula.

	Trajetória			
	Retilínea		Curvilínea	
Movimento	uniforme	variado	uniforme	variado
Módulo de $\vec{v}$	constante	variável	constante	variável
Direção de $\vec{v}$	constante	constante	variável	variável
$\vec{a}_t$	nula	não nula	nula	não nula
$\vec{a}_{cp}$	nula	nula	não nula	não nula
$\vec{a}$	0	$\vec{a}_t$	$\vec{a}_{cp}$	$\vec{a}_t + \vec{a}_{cp}$

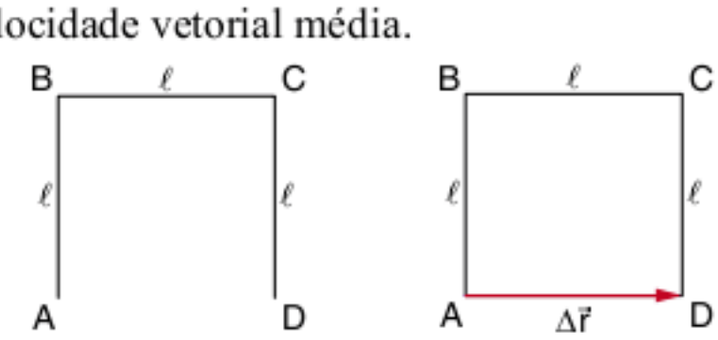
Tab. 2 Velocidade e aceleração vetorial para vários movimentos.

Exercícios resolvidos

4 Se um corpo percorre a trajetória ABCD sobre um quadrado de lado ℓ em um tempo Δt, como na figura, determine o módulo:

a) da velocidade escalar média.

b) da velocidade vetorial média.



Resolução:

a) $\Delta s = 3\ell \Rightarrow |v_m| = \frac{3\ell}{\Delta t}$

b) $|\Delta\vec{r}| = \ell \Rightarrow |\vec{v}_m| = \frac{\ell}{\Delta t}$

5 Um móvel descreve uma circunferência de raio 4 m, com período de 4 s. Determine, para um intervalo de 1 s de movimento, o módulo da:

a) velocidade vetorial média.
b) aceleração vetorial média.

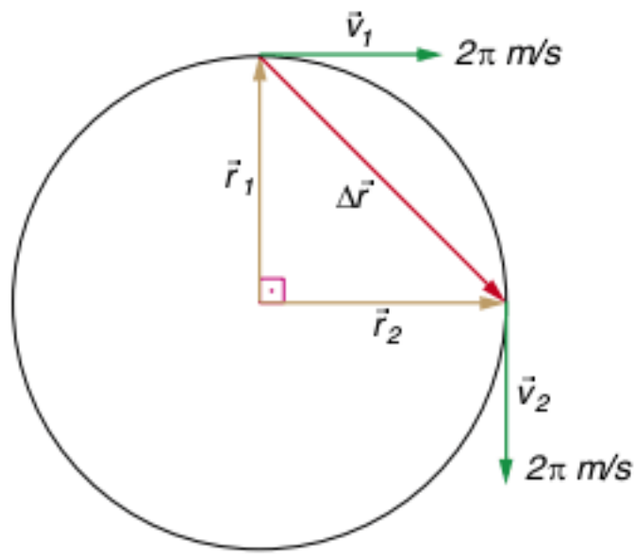
Resolução:

Se o período é 4 s, então, em 1 s, o móvel descreve $\frac{1}{4}$ *de circunferência, o que equivale a um ângulo de* $\frac{\pi}{2}$ *rad.*

A velocidade escalar instantânea do móvel é dada por:

$$v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi . 4}{4} \Rightarrow v = 2\pi \ m/s$$

Assim, no intervalo de 1 s:



a) $|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$

Mas:

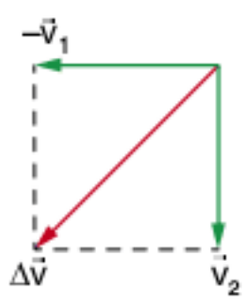
$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{|\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \ m$$

Logo:

$$|\vec{v}_m| = \frac{4\sqrt{2} \ m}{1 \ s} \Rightarrow |\vec{v}_m| = 4\sqrt{2} \ m/s$$

b) $|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$

com $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
e:



Então:

$$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2} = \sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi)^2} = 2\pi\sqrt{2} \ m/s$$

Logo:

$$|\vec{a}_m| = \frac{2\pi\sqrt{2} \ m/s}{1 \ s} \Rightarrow |\vec{a}_m| = 2\pi\sqrt{2} \ m/s^2$$

6 Um objeto move-se em uma circunferência de raio 2 m. Sua posição escalar varia com o tempo conforme a função:

$$s(t) = 3t^2 - 14t + 10$$

Determine o vetor aceleração desse objeto no instante t = 3 s.

Resolução:

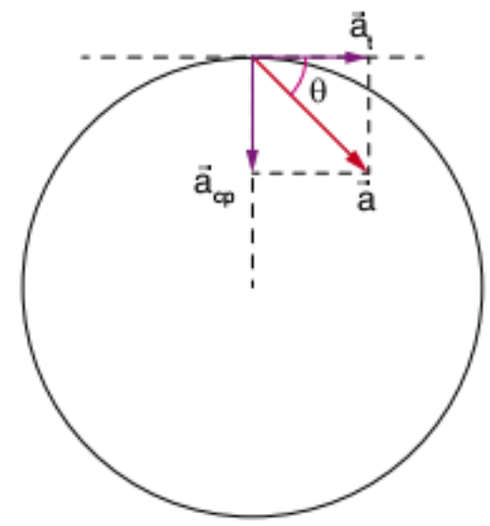
Da equação do espaço:

$s(t) = 3t^2 - 14t + 10$

podemos obter as equações de velocidade e aceleração:

$v(t) = 6t - 14$
$a(t) = 6$

Assim, no instante t = 3 s:



Mas:

$|\vec{a}_t| = a = 6 \ m/s^2$

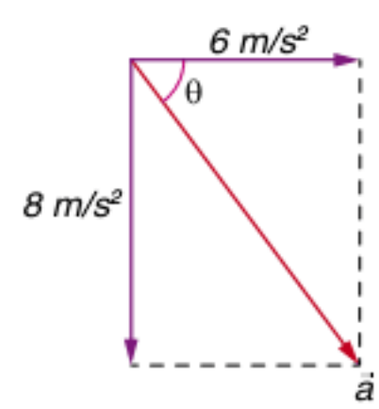
$|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$

em que $v(3) = 6 \cdot 3 - 14 = 4$ *m/s e* $R = 2$ *m*

Logo:

$|\vec{a}_{cp}| = \frac{4^2}{2} = 8 \ m/s^2$

e:



$|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 6^2} \Rightarrow |\vec{a}| = 10 \ m/s^2$

com $tg\,\theta = \frac{|\vec{a}_{cp}|}{|\vec{a}_t|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{4}{3}\right)$

em que θ é o ângulo entre a aceleração vetorial e a sua decomposição na direção tangencial.

Composição de movimentos

Já vimos que o movimento de um corpo pode ser visto de diferentes maneiras, dependendo do observador. Isso significa que as grandezas espaço, velocidade e aceleração têm valores diferentes quando mudamos o referencial.

Vamos estudar um exemplo. Tomemos um homem (H) que se movimenta, dentro de um caminhão (C), com velocidade de 3 m/s para a direita. A velocidade do homem em relação ao caminhão é designada por $\vec{v}_{HC}$, em que $|\vec{v}_{HC}| = 3$ m/s. Sendo assim, em 1 s, o homem se movimenta 3 m dentro do caminhão para a direita.

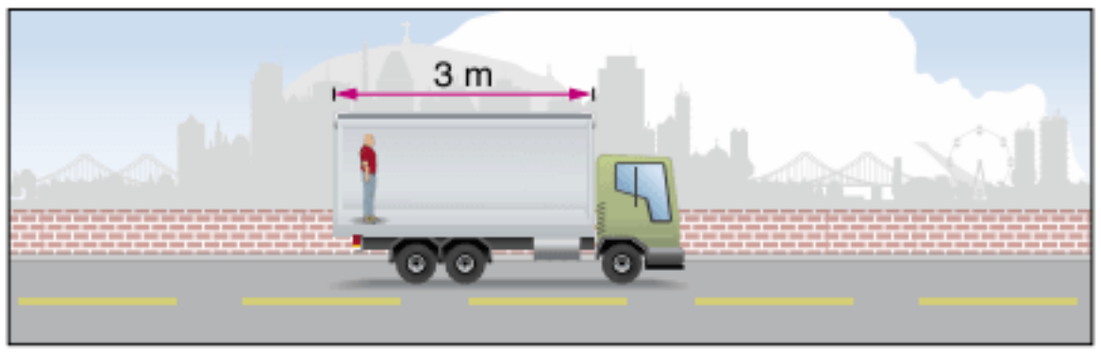


Fig. 52 Movimento do homem em relação ao caminhão.

Se o caminhão (C) começar a se mover com velocidade de 6 m/s para a direita em relação ao solo (S), designaremos essa velocidade por $\vec{v}_{CS}$, em que $|\vec{v}_{CS}| = 6$ m/s. Assim, a cada segundo, enquanto o homem se movimenta 3 m para a direita dentro do caminhão, este se move 6 m em relação ao solo.

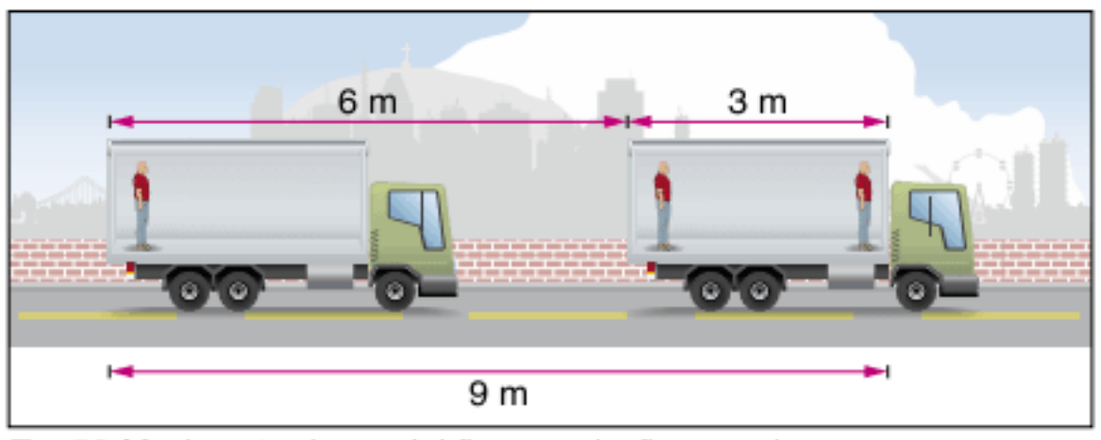


Fig. 53 Movimento do caminhão em relação ao solo.

Desse modo, o homem (H) se move 9 m em 1 s em relação ao solo (S). Essa velocidade é designada por $\vec{v}_{HS}$, em que $|\vec{v}_{HS}| = 9$ m/s. Teremos então:

$$\vec{v}_{HS} = \vec{v}_{HC} + \vec{v}_{CS}$$

Mesmo que os movimentos não aconteçam na mesma direção, podemos considerar as seguintes velocidades:

$\vec{v}_{AB}$ = velocidade de A em relação a B
$\vec{v}_{AC}$ = velocidade de A em relação a C
$\vec{v}_{CB}$ = velocidade de C em relação a B

Podemos montar a seguinte relação:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_{CB}$$

Ao aplicar essa relação, estamos fazendo uma mudança de referencial: a velocidade de A medida pelo referencial C passa a ser medida pelo referencial B. Temos várias aplicações além da que já estudamos:

$$\begin{cases} \text{A – chuva} \\ \text{B – solo} \\ \text{C – carro} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{A – avião} \\ \text{B – solo} \\ \text{C – ar} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{A – barco} \\ \text{B – solo} \\ \text{C – água} \end{cases}$$

Essa relação entre velocidades vetoriais também é válida para deslocamentos vetoriais e acelerações vetoriais:

$$\vec{d}_{AB} = \vec{d}_{AC} + \vec{d}_{CB}$$
$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AC} + \vec{a}_{CB}$$

ATENÇÃO!

No estudo da composição de dois ou mais movimentos, Galileu Galilei propôs o princípio da simultaneidade ou da independência dos movimentos simultâneos, segundo o qual cada um dos movimentos se realiza como se os demais não existissem e no mesmo intervalo de tempo.

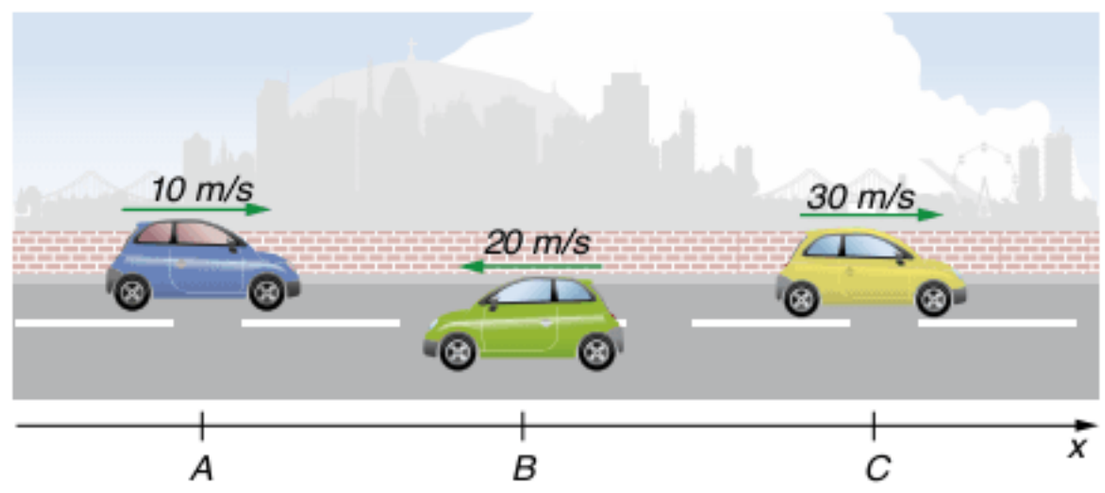
Exercícios resolvidos

7 Três carros, A, B e C, percorrem a mesma estrada, com velocidades iguais a 10 m/s para a direita, 20 m/s para a esquerda e 30 m/s para a direita, respectivamente. Determine módulo e sentido da:

a) velocidade de B em relação a A.
b) velocidade de C em relação a B.
c) velocidade de A em relação a C.
d) velocidade de um carro D, de modo que os módulos das velocidades de A e B em relação a D sejam iguais.

Resolução:

Temos o seguinte esquema:



Sejam $\vec{v}_{AS}$, $\vec{v}_{BS}$ e $\vec{v}_{CS}$ as velocidades de A, B e C em relação ao solo, respectivamente.

a) Sabemos que:

$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AS} \Rightarrow \vec{v}_{BA} = \vec{v}_{BS} - \vec{v}_{AS}$$

Mas: $\vec{v}_{BS} = -20\,\hat{i}$ e $\vec{v}_{AS} = 10\,\hat{i}$, em que $\hat{i}$ representa o sentido positivo do eixo x.

Assim: $\vec{v}_{BA} = (-20\,\hat{i}) - (10\,\hat{i}) = -30\,\hat{i}$

Logo, a velocidade de B em relação a A vale 30 m/s com sentido para a esquerda.

b) $\vec{v}_{CS} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BS} \Rightarrow \vec{v}_{CB} = \vec{v}_{CS} - \vec{v}_{BS}$

em que: $\vec{v}_{CS} = 30\,\hat{i}$ e $\vec{v}_{BS} = -20\,\hat{i}$

Assim: $\vec{v}_{CB} = (30\hat{i}) - (-20\hat{i}) = 50\hat{i}$

Logo, a velocidade de C em relação a B vale 50 m/s com sentido para a direita.

c) $\vec{v}_{AS} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_{CS} \Rightarrow \vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AS} - \vec{v}_{CS}$

em que: $\vec{v}_{AS} = 10\,\hat{i}$ e $\vec{v}_{CS} = 30\,\hat{i}$

Assim: $\vec{v}_{AC} = (10\hat{i}) - (30\hat{i}) = -20\hat{i}$

Logo, a velocidade de A em relação a C vale 20 m/s com sentido para a esquerda.

Podemos observar que os módulos das velocidades relativas podem ser obtidos como a diferença dos módulos das velocidades dos carros em relação ao solo, quando eles caminham no mesmo sentido, e como a soma dos módulos das velocidades dos carros em relação ao solo, quando eles caminham em sentidos contrários.

d) $\vec{v}_{AD} = \vec{v}_{AS} - \vec{v}_{DS}$

$\vec{v}_{BD} = \vec{v}_{BS} - \vec{v}_{DS}$

Tomando um carro D que se mova para a direita com velocidade v: $\vec{v}_{DS} = v\,\hat{i}$

Assim:

$\vec{v}_{AD} = (10\hat{i}) - (v\hat{i}) = (10 - v)\hat{i}$

$\vec{v}_{BD} = (-20\hat{i}) - (v\hat{i}) = (-20 - v)\hat{i}$

Para que $|\vec{v}_{AD}| = |\vec{v}_{BD}|$ *:*

$|10 - v| = |-20 - v|$

$$|10 - v| = \begin{cases} 10 - v, \text{ se } v \le 10 \\ -10 + v, \text{ se } v > 10 \end{cases}$$

$$|-20 - v| = \begin{cases} -20 - v, \text{ se } v \le -20 \\ 20 + v, \text{ se } v > -20 \end{cases}$$

Assim:

- $v \le -20$:

  $|10 - v| = 10 - v$ e $|-20 - v| = -20 - v$

  não tem solução

- $-20 < v \le 10$:

  $|10 - v| = 10 - v$ e $|-20 - v| = 20 + v$

  $10 - v = 20 + v \Rightarrow 2v = -10 \Rightarrow v = -5$

- $v > 10$:

  $|10 - v| = -10 + v$ e $|-20 - v| = 20 + v$

  não tem solução

Logo, D está se movendo com velocidade de 5 m/s para a esquerda.

De fato, nesse caso:

$\vec{v}_{AD} = (10\hat{i}) - (-5\hat{i}) = 15\hat{i}$

$\vec{v}_{BD} = (-20\hat{i}) - (-5\hat{i}) = -15\hat{i}$

Logo:

$|\vec{v}_{AD}| = |\vec{v}_{BD}| = 15$ *m/s*

8 Um barco desce 60 km de um rio em 1 hora e sobe o mesmo trecho em 2 horas. Sabendo que a potência do barco é constante, tanto ao subir quanto ao descer o rio, determine:

a) a velocidade do barco em relação ao rio.
b) a velocidade do rio em relação às margens.
c) o tempo que o barco leva para descer o mesmo trecho com o motor desligado.
d) qual deveria ser a velocidade do barco em relação ao mesmo rio, se o tempo para subir os 60 km do rio fosse o triplo do tempo para descer.

Resolução:

Sabemos que: $\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BR} + \vec{v}_{RS}$

em que:

$\vec{v}_{BS}$ – *velocidade do barco em relação ao solo*

$\vec{v}_{BR}$ – *velocidade do barco em relação ao rio*

$\vec{v}_{RS}$ – *velocidade do rio em relação ao solo*

Assim, ao descer o rio, $\vec{v}_{BR}$ *e* $\vec{v}_{RS}$ *têm o mesmo sentido e:*

$|\vec{v}_{BS}| = v_B + v_R$

em que:

$v_B = |\vec{v}_{BS}|$ e $v_R = |\vec{v}_{RS}|$

Ao subir o rio, $\vec{v}_{BR}$ *e* $\vec{v}_{RS}$ *têm sentidos contrários e:*

$|\vec{v}_{BS}| = v_B - v_R$

Para descer os 60 km:

$$|\vec{v}_{BS}| = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_B + v_R = \frac{60 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 60 \text{ km/h} \quad (I)$$

Para subir os 60 km:

$$|\vec{v}_{BS}| = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_B - v_R = \frac{60 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 30 \text{ km/h} \quad (II)$$

Resolvendo as equações (I) e (II), obtemos:

a) $v_B = 45$ km/h
b) $v_R = 15$ km/h
c) *Com o motor desligado, o barco terá, em relação ao solo, a velocidade do rio. Assim:*

$$t = \frac{\Delta s}{|\vec{v}_{BS}|} \Rightarrow t = \frac{60 \text{ km}}{15 \text{ km/h}} \Rightarrow t = 4 \text{ h}$$

d) *Sabemos que* $|\vec{v}_{RS}| = 15$ *km/h. Assim:*

$$t_{subir} = \frac{60}{v_B - 15} \text{ e } t_{descer} = \frac{60}{v_B + 15}$$

Como $t_{subir} = 3t_{descer}$:

$$\frac{60}{v_B - 15} = 3.\frac{60}{v_B + 15} \Rightarrow v_B + 15 = 3v_B - 45$$

$2v_B = 60 \Rightarrow v_B = 30$

$|\vec{v}_{BR}| = 30$ km/h

9 Uma chuva cai verticalmente, mas deixa marcas de 60º com a horizontal nas janelas laterais de um carro que se move a $10\sqrt{3}$ km/h em relação à estrada. Determine:

a) a velocidade da chuva em relação à estrada.
b) qual deveria ser a velocidade do carro para que a chuva deixasse marcas de 30º com a horizontal nas janelas.

Resolução:

Para o problema, temos:

$\vec{v}_{CS} = \vec{v}_{CA} + \vec{v}_{AS}$

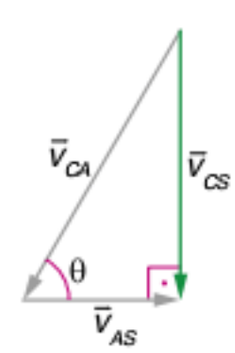
em que:

$\vec{v}_{CS}$ – *velocidade da chuva em relação ao solo*

$\vec{v}_{CA}$ – *velocidade da chuva em relação ao automóvel*

$\vec{v}_{AS}$ – *velocidade do automóvel em relação ao solo*

Esquematicamente:



com $\theta = 60°$ *e* $|\vec{v}_{AS}| = 10\sqrt{3}$ *km/h*

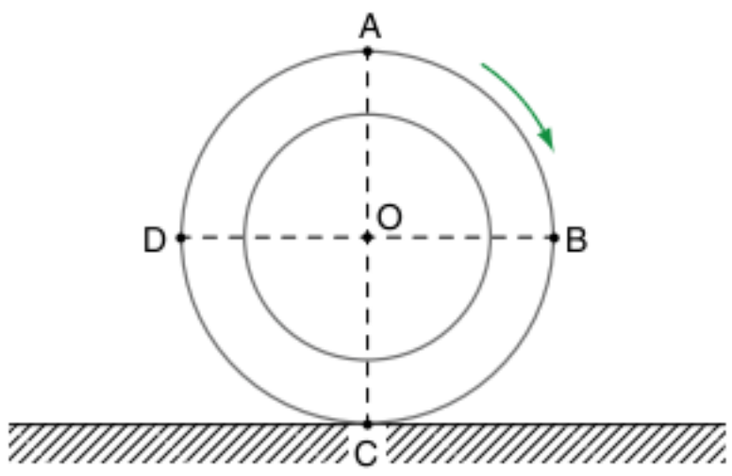
a) *Do triângulo de velocidades:*

$$tg\,\theta = \frac{|\vec{v}_{CS}|}{|\vec{v}_{AS}|} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{|\vec{v}_{CS}|}{10\sqrt{3}} \Rightarrow |\vec{v}_{CS}| = 30 \text{ km/h}$$

b) Sabemos agora que $|\vec{v}_{CS}| = 30$ *km/h. Se* $\theta = 30°$*:*

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{30}{|\vec{v}_{AS}|} \Rightarrow |\vec{v}_{AS}| = 30\sqrt{3}\ km/h$$

10 Um automóvel desenvolve, em uma estrada plana e horizontal, movimento retilíneo e uniforme com velocidade de módulo v. Supondo que suas rodas rolem sem escorregar, calcule, em relação ao plano de rolamento, os módulos das velocidades instantâneas dos pontos A, B, C, D e O, indicados na figura a seguir.



Resolução:

Neste exercício, a roda não pode ser considerada uma partícula, mas um corpo extenso. E o movimento em relação ao referencial inercial (no nosso caso o solo) de um ponto qualquer pertencente a um corpo extenso pode ser estudado como a composição de dois movimentos simultâneos:

- *movimento do ponto em relação ao seu centro de massa (por enquanto apenas nos referiremos ao centro geométrico) – também é chamado de movimento de rotação em torno do centro de massa.*
- *movimento do centro de massa em relação ao referencial inercial – também é chamado de translação do centro de massa.*

Em termos de velocidade, podemos escrever:

$\vec{v}_{PS} = \vec{v}_{PC} + \vec{v}_{CS}$

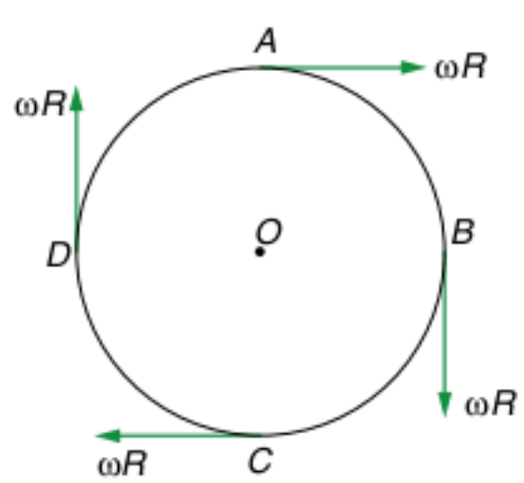
em que:

$\vec{v}_{PS}$ *é a velocidade do ponto P qualquer em relação ao solo.*

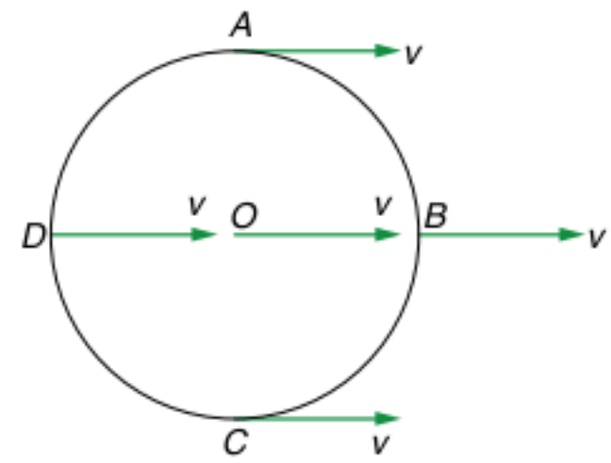
$\vec{v}_{PC}$ *é a velocidade do ponto P qualquer em relação ao centro da roda, o ponto O.*

$\vec{v}_{CS}$ *é a velocidade do centro da roda em relação ao solo.*

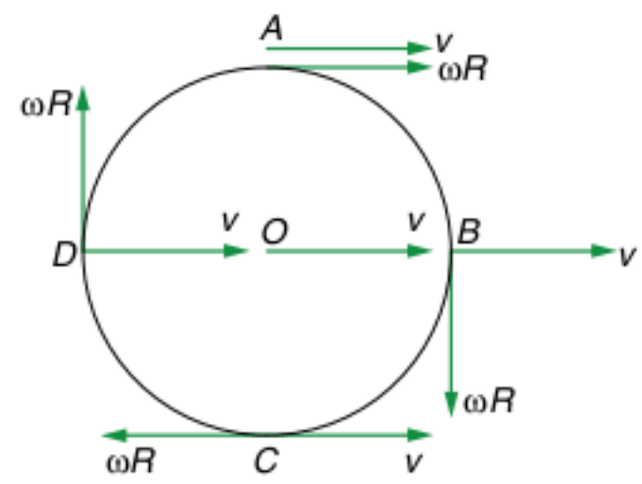
No movimento de rotação, todos os pontos giram com a mesma velocidade angular ω *em torno do centro. Se o raio da roda é igual a R, então os pontos da periferia da roda, devido exclusivamente à rotação, possuem velocidades vetoriais* $(\vec{v}_{PC})$ *de módulos iguais a* ωR*:*



No movimento de translação, o centro da roda possui velocidade de translação v e, portanto, devido exclusivamente à translação, todos os pontos possuem essa mesma velocidade vetorial $(\vec{v}_{CS})$ *de módulo v:*



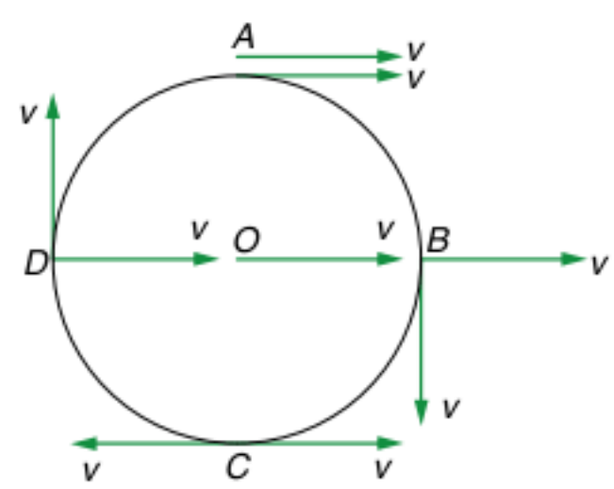
A composição desses dois movimentos simultâneos, dada pela soma vetorial $\vec{v}_{PC} + \vec{v}_{CS}$ *para cada ponto, pode ser representada pela figura a seguir:*



No caso de a roda rolar sem escorregar, o ponto da roda que estiver em contato com o solo não poderá possuir nenhuma velocidade em relação a este, ou seja, velocidade nula. E isso acontece quando tivermos $v = \omega R$*.*

Quando $v > \omega R$ *ou quando* $v < \omega R$*, haverá escorregamento. Um exemplo de* $v > \omega R$ *se dá quando um carro, tentando frear, trava seus pneus parcialmente. Um exemplo de* $v < \omega R$ *se dá quando um carro, ao acelerar partindo do repouso, gira os pneus quase sem sair do lugar.*

Assim, com $v = \omega R$*, teremos:*



E os módulos das velocidades vetoriais de cada ponto, em relação ao referencial inercial, são dados por:

$v_A = 2v$ $\quad v_C = 0$ $\quad v_O = v$

$v_B = v\sqrt{2}$ $\quad v_D = v\sqrt{2}$

11 Um barco se movimenta com velocidade de 4 m/s em relação ao rio, cuja velocidade da correnteza é de 3 m/s. A distância entre as margens vale 400 m. Determine:

a) a velocidade do barco em relação às margens quando desce o rio.
b) a velocidade do barco em relação às margens quando sobe o rio.
c) o menor tempo de travessia do rio.
d) o local que o barco atinge na outra margem no caso do item c.
e) a velocidade do barco em relação às margens no caso do item c.
f) a direção da velocidade do barco quando este atravessar o rio pela menor distância.
g) a velocidade do barco em relação às margens no caso do item f.
h) o tempo de travessia no caso do item f.

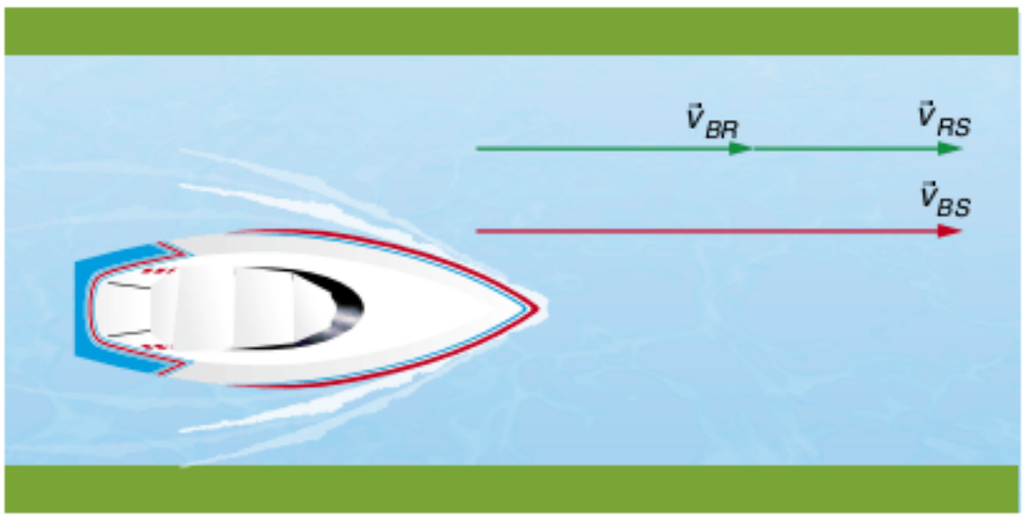
Resolução:

Em qualquer movimento do barco, teremos:

$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BR} + \vec{v}_{RS}$

em que: $|\vec{v}_{BR}| = 4\ m/s$ *e* $|\vec{v}_{RS}| = 3\ m/s$

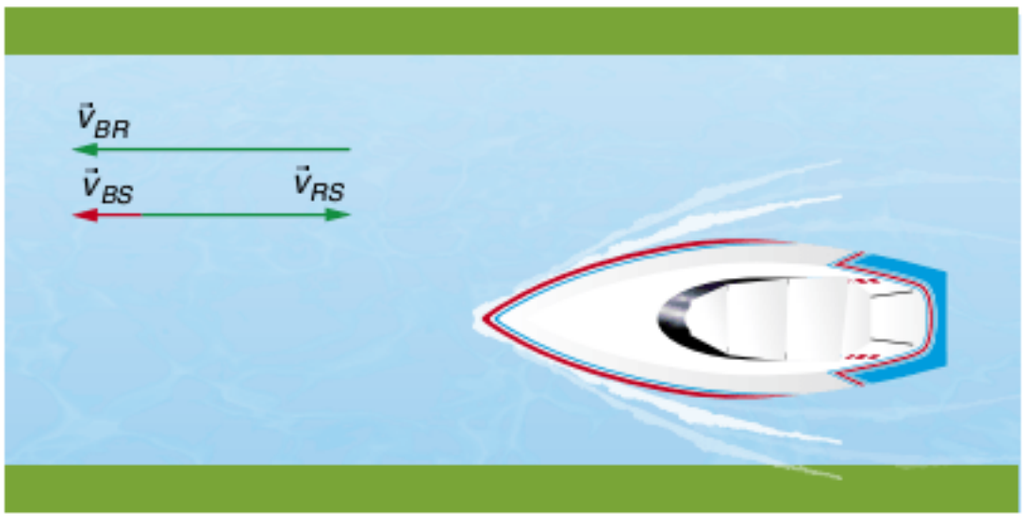
a) Se o barco estiver descendo o rio, temos:



$|\vec{v}_{BS}| = |\vec{v}_{BR}| + |\vec{v}_{RS}| = 4\ m/s + 3\ m/s \Rightarrow$

$|\vec{v}_{BS}| = 7\ m/s$

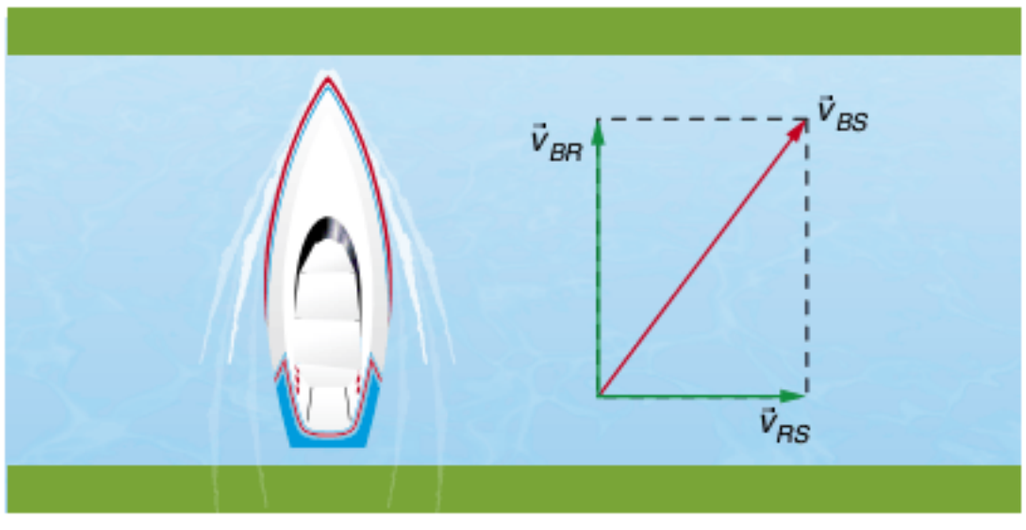
b) Se o barco estiver subindo o rio, temos:



$|\vec{v}_{BS}| = |\vec{v}_{BR}| - |\vec{v}_{RS}| = 4\ m/s - 3\ m/s \Rightarrow$

$|\vec{v}_{BS}| = 1\ m/s$

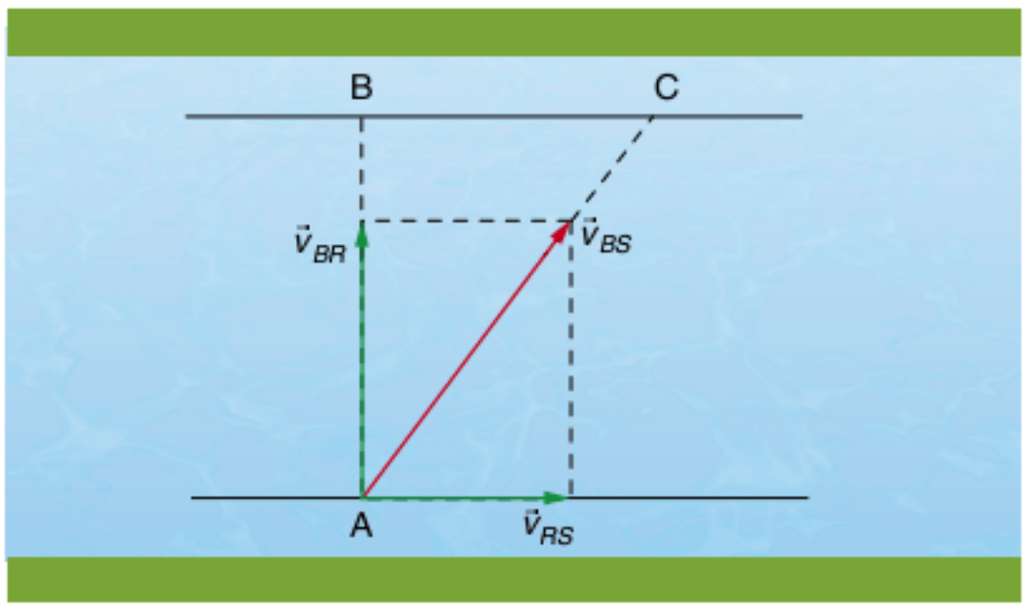
c) Se o barco quiser atravessar o rio no menor tempo, deverá manter a direção de sua velocidade em relação ao rio perpendicular às margens:



O tempo de travessia será dado pela razão entre a distância entre as margens e o módulo da projeção de $\vec{v}_{BS}$ nesta direção, que é $\vec{v}_{BR}$:

$$t = \frac{\Delta s}{|\vec{v}_{BR}|} = \frac{400\ m}{4\ m/s} \Rightarrow t = 100\ s$$

d)



O barco atinge o ponto C.

A distância BC é dada pelo produto do tempo de travessia pelo módulo da projeção de $\vec{v}_{BS}$ na direção BC, que é $\vec{v}_{RS}$:

$BC = |\vec{v}_{RS}| . t = (3\ m/s).(100\ s) \Rightarrow BC = 300\ m$

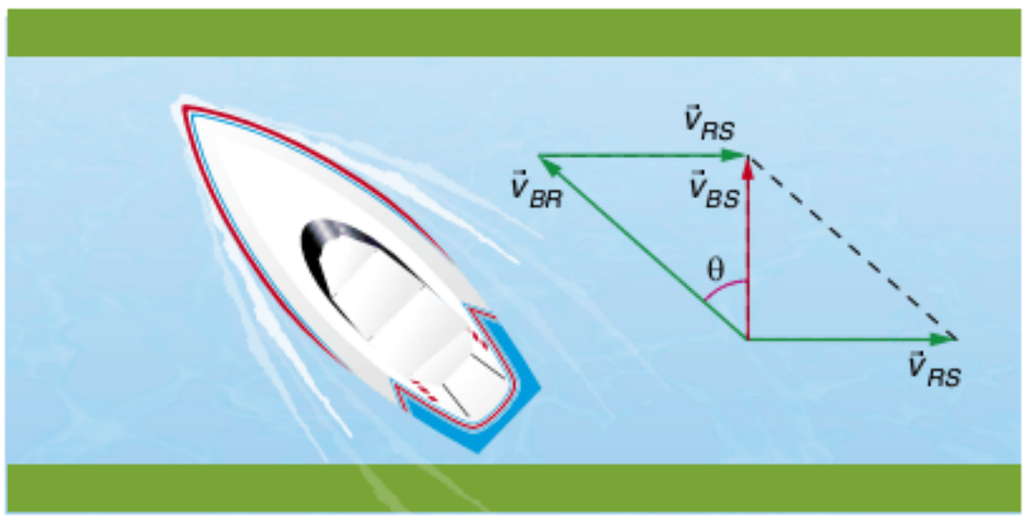
Para todas as distâncias, no caso do item c, temos:

$$\frac{AB}{|\vec{v}_{BR}|} = \frac{BC}{|\vec{v}_{RS}|} = \frac{AC}{|\vec{v}_{BS}|} = t_{travessia}$$

e) $|\vec{v}_{BS}|^2 = |\vec{v}_{BR}|^2 + |\vec{v}_{RS}|^2 = 4^2 (m/s)^2 + 3^2 (m/s)^2 \Rightarrow$

$|\vec{v}_{BS}| = 5\ m/s$

f) Se o barco quiser atravessar o rio pela menor distância, deverá manter a direção de sua velocidade em relação ao solo perpendicular às margens:



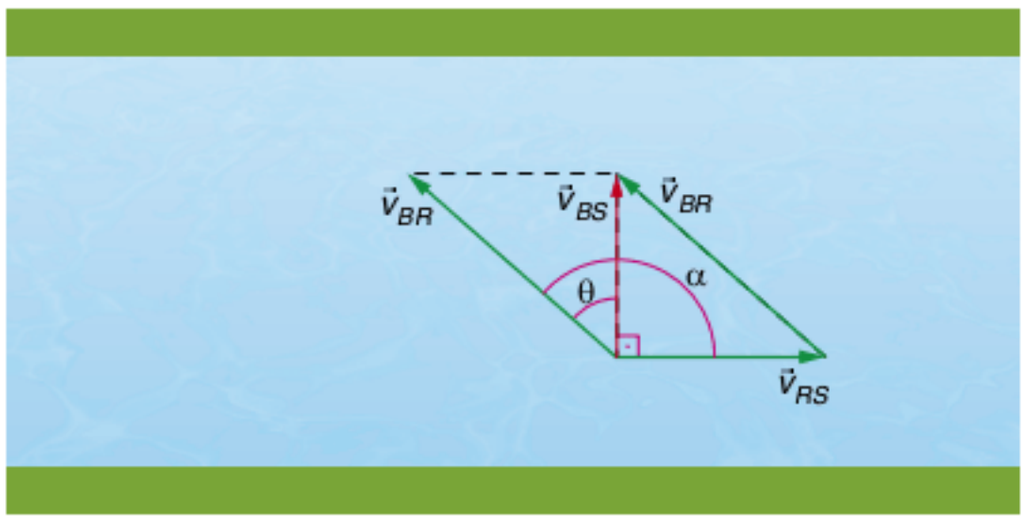
Assim:

$$sen\ \theta = \frac{|\vec{v}_{RS}|}{|\vec{v}_{BR}|} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = arc\ sen\left(\frac{3}{4}\right)$$

E o ângulo que a direção do barco, dada por $\vec{v}_{BR}$, forma com a correnteza, dada por $\vec{v}_{RS}$, será:

$$\alpha = 90^o + \theta$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + arc\ sen\left(\frac{3}{4}\right)$$



g) $|\vec{v}_{BS}|^2 = |\vec{v}_{BR}|^2 - |\vec{v}_{RS}|^2 = 4^2(m/s)^2 - 3^2(m/s)^2 \Rightarrow$

$|\vec{v}_{BS}| = \sqrt{7}\ m/s$

h) O tempo de travessia será dado pela razão entre a distância entre as margens e o módulo da projeção de $\vec{v}_{BS}$ nesta direção, que é $\vec{v}_{BS}$:

$$t = \frac{\Delta s}{|\vec{v}_{BS}|} = \frac{400\ m}{\sqrt{7}\ m/s} \Rightarrow t = \frac{400\sqrt{7}}{7}\ s$$

ATENÇÃO!

- A direção da trajetória do barco em relação às margens é dada pela direção do vetor $\vec{v}_{BS}$.
- A direção do eixo longitudinal do barco é dada pela direção do vetor $\vec{v}_{BR}$.
- Quando se diz que a velocidade de um barco é de 10 km/h sem fazer menção do referencial, então a velocidade de 10 km/h é dada em relação ao meio em que se move, a água. Do mesmo modo, quando se diz que a velocidade de um avião é de 300 km/h sem fazer menção do referencial, então a velocidade de 300 km/h é dada em relação ao ar (vento).
- Tudo o que foi estudado no exemplo do barco que se move no rio pode ser aplicado nos outros exemplos citados.

Revisando

1 Dois vetores, $\vec{A}$ e $\vec{B}$, possuem módulos iguais a 6 N e 8 N. Determine:

a) o módulo de $\vec{A} + \vec{B}$ quando os vetores formam um ângulo de 90° entre si.

b) o menor módulo possível de $\vec{A} + \vec{B}$.

c) o maior módulo possível de $\vec{A} + \vec{B}$.

2 Determine o vetor soma $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$, calculando o seu módulo e o ângulo formado com a horizontal.

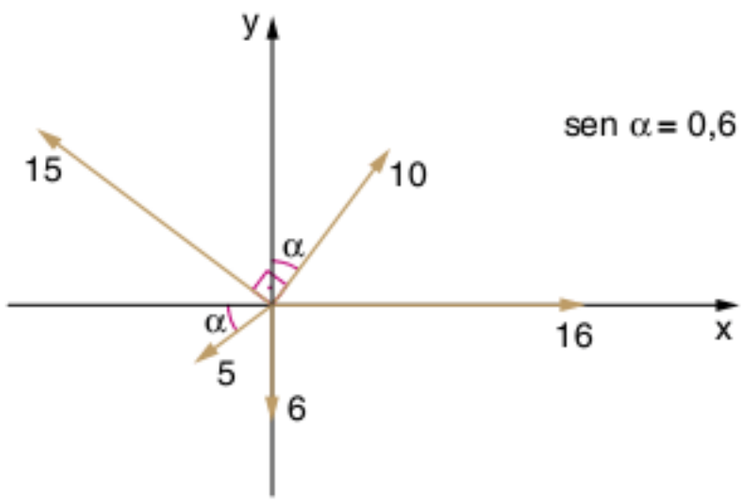
$|\vec{A}| = 15$

$|\vec{B}| = 8$

3 Determine o vetor diferença $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$, calculando o seu módulo e o ângulo formado com a horizontal.

$|\vec{A}| = |\vec{B}| = 10$

4 Determine o vetor soma dos vetores da figura ao lado, calculando o seu módulo e o ângulo formado com a horizontal.



5 Um corpo descreve um movimento circular uniforme de raio 2 m com velocidade de módulo 4 m/s. Determine:

a) o período do movimento.
b) o tempo que o corpo leva para percorrer um quarto de circunferência entre os pontos A e B.
c) a distância percorrida entre A e B.
d) o módulo do vetor deslocamento do corpo entre A e B.
e) o módulo da velocidade vetorial média do corpo entre A e B.
f) o módulo da aceleração centrípeta do corpo.
g) o módulo da aceleração vetorial média do corpo entre A e B.

6 Um objeto move-se em uma circunferência de raio 8 m. Sua velocidade escalar varia com o tempo, conforme a função: $v = 6t + 2$ (SI). Para $t = 1$ s, calcule:

a) o módulo da velocidade vetorial.
b) o módulo da aceleração tangencial.
c) o módulo da aceleração centrípeta.
d) o módulo da aceleração vetorial.
e) o ângulo formado entre a aceleração vetorial e a direção tangencial.

7 Um barco desce 30 km de um rio em 2 h e sobe o mesmo trecho em 6 h. Sabendo que a potência do barco é constante, tanto ao subir quanto ao descer o rio, determine:

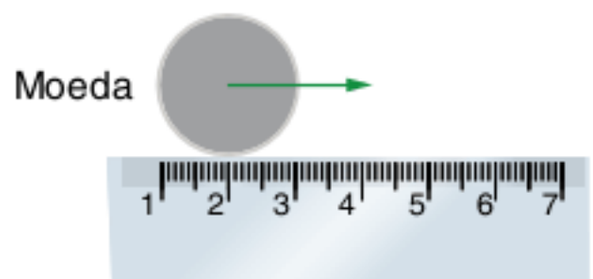
a) a velocidade do barco em relação ao rio.
b) a velocidade do rio em relação às margens.
c) o tempo que o barco leva para descer o mesmo trecho com o motor desligado.

8 Um barco navega em um rio de 4 km de largura. A velocidade do barco em relação ao rio é igual a 20 km/h e a velocidade da correnteza é de 15 km/h. Determine:

a) a velocidade do barco em relação às margens quando desce o rio.
b) a velocidade do barco em relação às margens quando sobe o rio.
c) o menor tempo de travessia.
d) o local que o barco atinge na outra margem, no caso do item c.
e) a velocidade do barco em relação às margens, no caso do item c.
f) a direção da velocidade do barco em relação à correnteza, quando o barco atravessar o rio pela menor distância.
g) a velocidade do barco em relação às margens, no caso do item f.
h) o tempo de travessia, no caso do item f.

9 Na figura ao lado, a moeda rola sem escorregar sobre uma régua. A moeda possui diâmetro igual a 4 cm, parte da posição "2 cm" e atinge a posição "6 cm" em 2 s.
Determine:

a) a velocidade do centro da moeda em relação à mesa.
b) a velocidade instantânea do ponto mais alto da moeda.
c) a velocidade angular da moeda em torno de seu centro.



Exercícios propostos

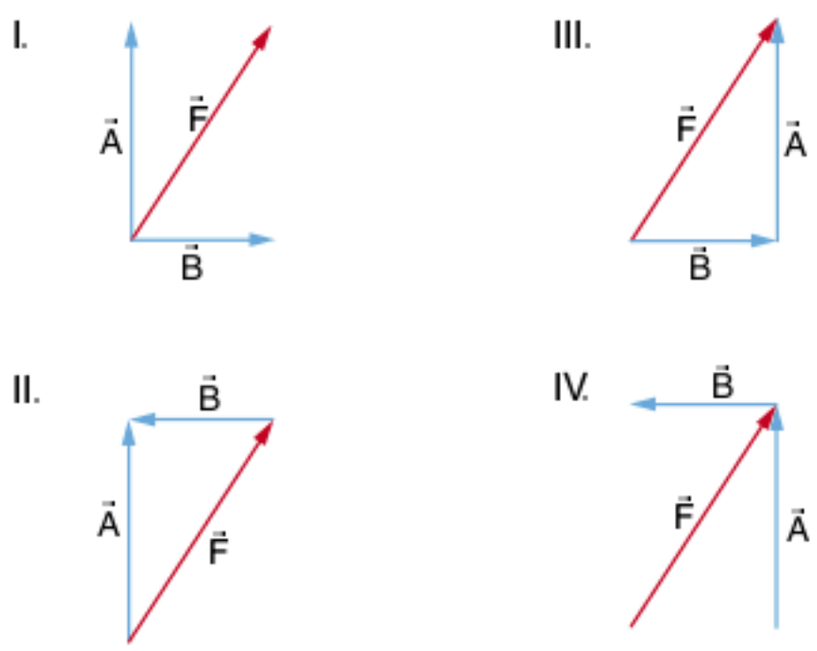
Grandezas escalares e grandezas vetoriais

1 **FUABC** As grandezas físicas podem ser escalares ou vetoriais. As vetoriais são aquelas que possuem caráter direcional. Das alternativas abaixo, assinale aquela que tem apenas grandezas vetoriais.

(a) Força, massa e tempo.
(b) Tempo, temperatura e velocidade.
(c) Potência, temperatura e densidade.
(d) Deslocamento, massa e trabalho.
(e) Velocidade, força e deslocamento.

Operações com vetores

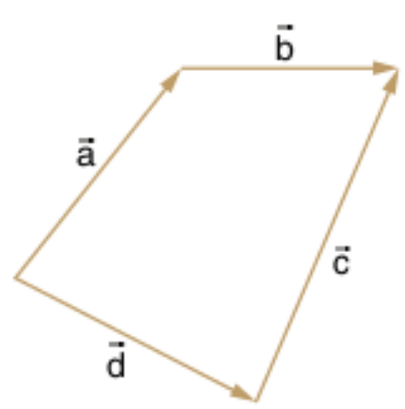
2 **UFPB 2007** Considere os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{F}$ nos diagramas numerados de I a IV.



Os diagramas que, corretamente, representam a relação vetorial $\vec{F} = \vec{A} - \vec{B}$ são apenas:

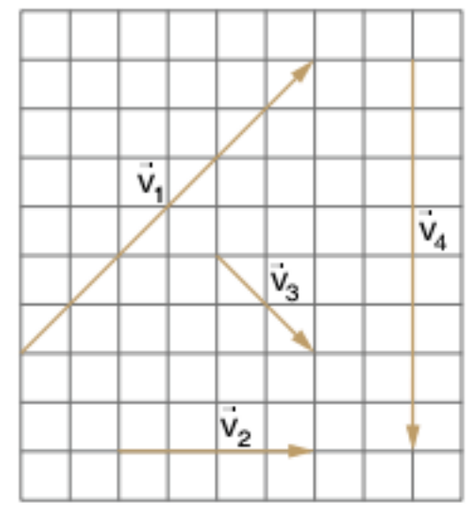
(a) I e III.
(b) II e IV.
(c) II e III.
(d) III e IV.
(e) I e IV.

3 **UCBA** Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, representados no esquema a seguir, vale a seguinte relação:



(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$
(b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$
(c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$
(d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{c}$
(e) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

4 **FCC-BA** No esquema estão representados os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$.



A relação vetorial correta entre esses vetores é:

(a) $\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$
(b) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{0}$
(c) $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2$
(d) $\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2$
(e) $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{v}_4$

5 **Utam** Considere um relógio com mostrador circular de 10 cm de raio, e cujo ponteiro dos minutos tem comprimento igual ao raio do mostrador. Considere esse ponteiro como vetor de origem no centro do relógio e direção variável. O módulo da soma dos três vetores determinados pela posição desse ponteiro quando o relógio marca exatamente 12h, 12h20min e 12h40min é, em centímetros, igual a:

(a) 30
(b) $10(1+\sqrt{3})$
(c) nulo.
(d) 20
(e) 37

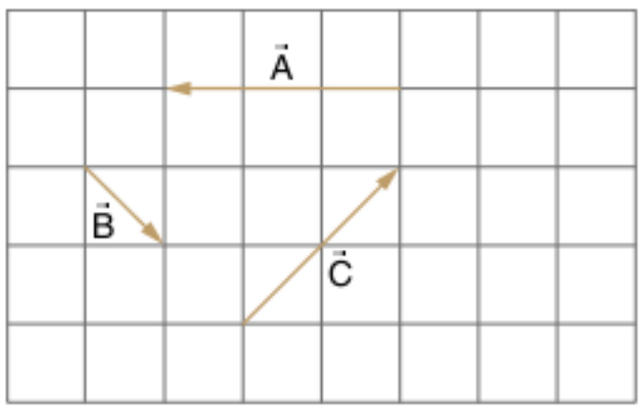
6 **Unitau** Consideramos quatro vetores de módulos iguais a 5,0, tais que, ao se determinar sua resultante pelo método do polígono, observa-se um quadrado, dando resultante nula. Se trocarmos os sentidos de dois deles, consecutivos, a resultante terá módulo aproximadamente igual a:

(a) zero
(b) 5,0
(c) 8,0
(d) 10,0
(e) 14,0

7 **Unifor** A soma de dois vetores de módulos 12 N e 18 N tem certamente o módulo compreendido entre:

(a) 6 N e 18 N
(b) 6 N e 30 N
(c) 12 N e 18 N
(d) 12 N e 30 N
(e) 29 N e 31 N

8 **Fatec** Dados os vetores A, B e C, representados na figura em que cada quadrícula apresenta lado correspondente a uma unidade de medida, é correto afirmar que a resultante dos vetores tem módulo:



(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 6

9 **Mackenzie** A resultante de dois vetores perpendiculares entre si tem módulo igual a $\sqrt{20}$. Sabendo que o módulo de um dos vetores é o dobro do outro, calcule os módulos dos dois vetores.

10 Dados os vetores: $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{c} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$, em que $\vec{i}$ e $\vec{j}$ são vetores ortogonais, resolva a equação: $\vec{c} - 3\vec{b} = 2\vec{a} - 3\vec{x}$.

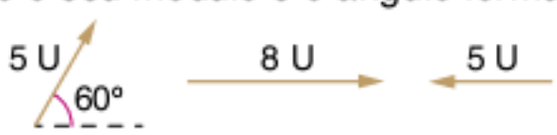
11 Dois vetores perpendiculares entre si, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, são tais que:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = 17 \quad \text{e} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = 13$$

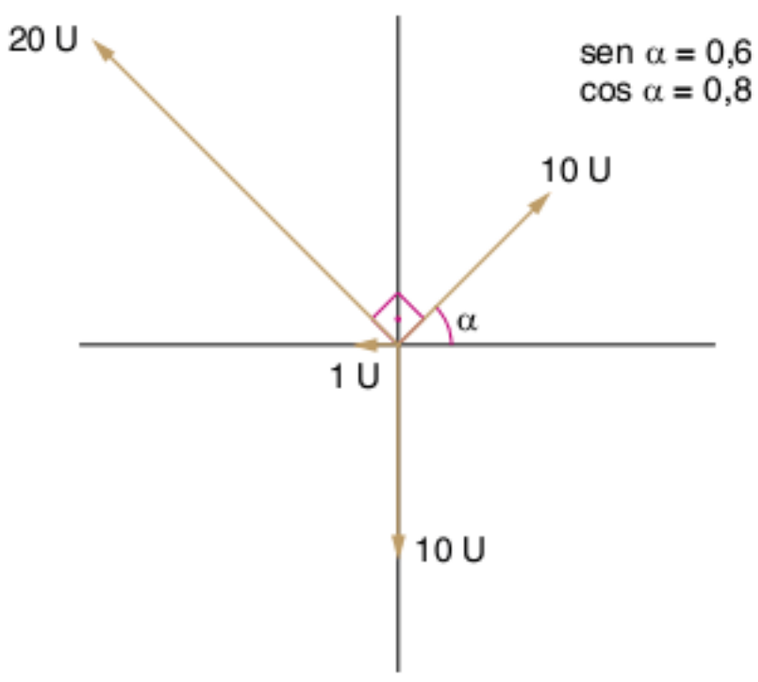
Determine os módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sabendo que $|\vec{a}| > |\vec{b}|$.

12 Determine o vetor soma $\vec{S}$ em cada caso a seguir, calculando o seu módulo e o ângulo formado com a horizontal.

a)



b)



Conceitos de Cinemática vetorial

13 **PUC-RS** As informações a seguir referem-se a um movimento retilíneo realizado por um objeto qualquer.

I. A velocidade vetorial pode mudar de sentido.
II. A velocidade vetorial tem sempre módulo constante.
III. A velocidade vetorial tem direção constante.

A alternativa que representa corretamente o movimento retilíneo é:

(a) todas.
(b) somente III.
(c) somente II.
(d) somente II e III.
(e) somente I e III.

14 **Esal-MG** O movimento retilíneo uniformemente acelerado tem as seguintes características.

(a) Aceleração normal nula; aceleração tangencial constante diferente de zero e de mesmo sentido que a velocidade.
(b) Aceleração normal constante diferente de zero; aceleração tangencial nula.
(c) Aceleração normal nula; aceleração tangencial constante diferente de zero e de sentido oposto ao da velocidade.
(d) Aceleração normal constante diferente de zero e de mesmo sentido que a velocidade.
(e) As acelerações normal e tangencial não são grandezas relevantes ao tratamento deste tipo de movimento.

15 **PUC-MG** Leia atentamente os itens a seguir, tendo em vista um movimento circular e uniforme.

I. A direção da velocidade é constante.
II. O módulo da velocidade não é constante.
III. A aceleração é nula.

Assinale:

(a) se apenas I e III estiverem incorretas.
(b) se todas estiverem incorretas.
(c) se apenas I estiver incorreta.
(d) se apenas II estiver incorreta.
(e) se apenas III estiver incorreta.

16 **FEI** Para um móvel que descreve trajetória circular com velocidade constante, podemos afirmar que:

(a) o valor da aceleração é nulo.
(b) o valor da aceleração é constante.
(c) o valor da velocidade varia em função do tempo.
(d) o deslocamento é nulo para qualquer intervalo de tempo.
(e) o valor da aceleração varia em função do tempo.

17 **UFPR 2008** Em relação aos conceitos de movimento, considere as seguintes afirmativas.

1. O movimento circular uniforme se dá com velocidade de módulo constante.
2. No movimento retilíneo uniformemente variado, a aceleração é variável.
3. Movimento retilíneo uniformemente variado e movimento circular uniforme são dois exemplos de movimentos nos quais um objeto em movimento está acelerado.
4. Movimento retilíneo uniforme ocorre com velocidade constante e aceleração nula.

Assinale a alternativa correta.

(a) Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.
(b) Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.
(c) Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras.
(d) Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.
(e) Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras.

18 **Unifor** As afirmações abaixo referem-se ao movimento de um automóvel que percorre, com velocidade escalar constante de 60 km/h, um trecho de estrada com muitas curvas, durante 16 min.

I. O deslocamento escalar foi de 16 km.
II. A aceleração vetorial do automóvel foi constante.
III. A aceleração vetorial do automóvel foi sempre nula.

Dentre as afirmações:

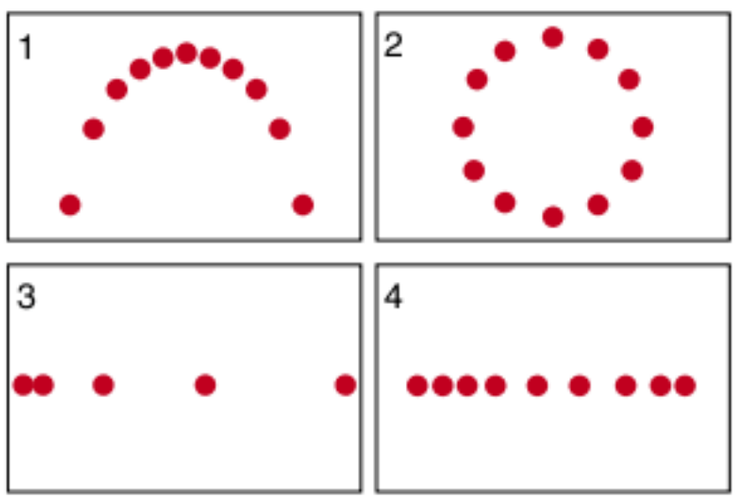
(a) somente I é correta.
(b) somente II é correta.
(c) somente III é correta.
(d) somente II e III são corretas.
(e) todas são corretas.

19 **UFMS 2002** No estudo do movimento, é correto afirmar que:

(a) em movimento uniforme, o vetor velocidade nunca varia.
(b) em trajetória retilínea, pode haver aceleração centrípeta.
(c) em movimento uniforme, pode haver aceleração.
(d) em movimento retilíneo e uniforme, o vetor aceleração pode variar.
(e) em movimento uniformemente variado, a velocidade nunca pode ser nula.

20 **FCC** Durante o seu estudo de mecânica, um aluno realizou diversas experiências de laboratório. Revisando-as, reuniu as figuras 1, 2, 3 e 4, obtidas em experiências diferentes. Os pontos indicam as posições de um móvel, obtidas em intervalos de tempo iguais.

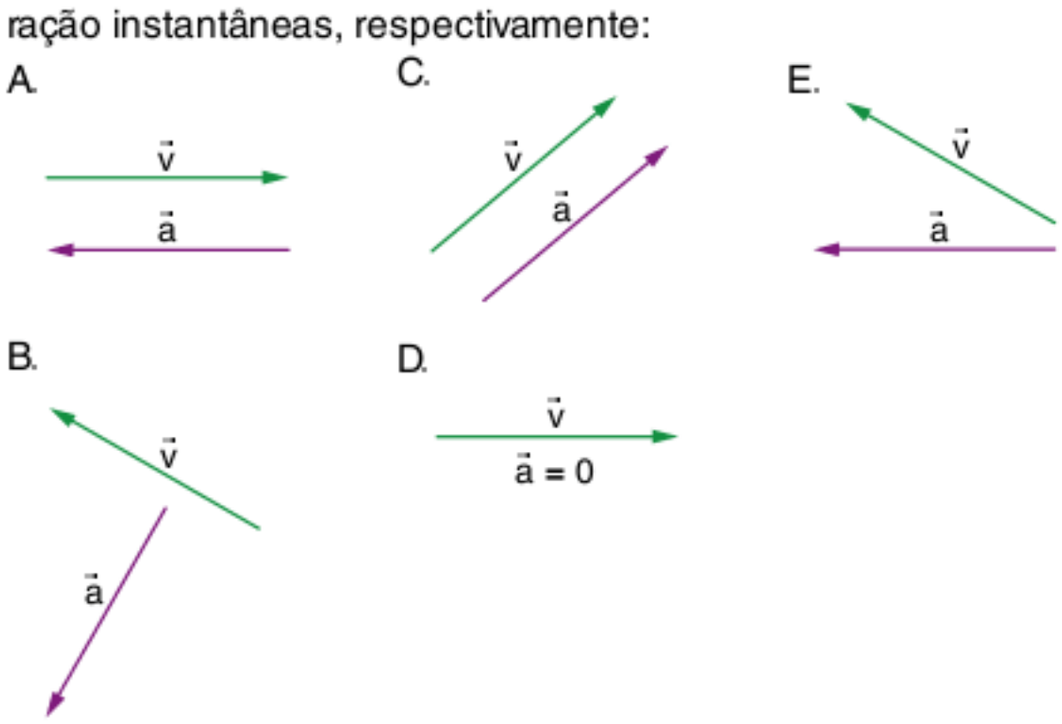
Analisando as figuras, ocorreu ao aluno a seguinte pergunta: "Em quais das experiências a aceleração do móvel não foi nula?"



Respondeu à questão, afirmando:

(a) apenas em 1 e 3.
(b) apenas em 1, 3 e 4.
(c) apenas em 2 e 4.
(d) apenas em 2, 3 e 4.
(e) nas quatro.

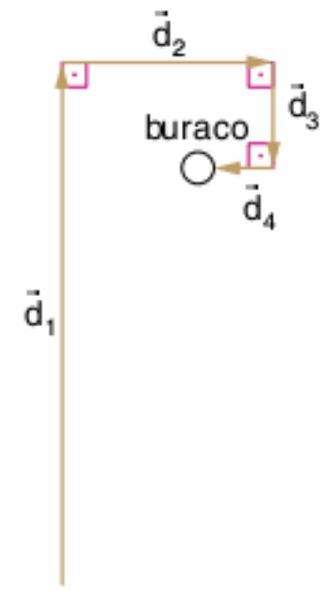
21 **UFG** Associe as alternativas A, B, C, D e E abaixo com as proposições I, II, III, IV e V. $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são a velocidade e a aceleração instantâneas, respectivamente:



( ) I. movimento de velocidade vetorial constante no tempo.
( ) II. movimento retilíneo acelerado.
( ) III. movimento retilíneo retardado.
( ) IV. movimento circular de velocidade escalar constante.
( ) V. movimento circular uniformemente acelerado.

Deslocamento vetorial

22 **UNEB-BA** Um jogador de golfe necessita de quatro tacadas para colocar a bola no buraco. Os quatro deslocamentos estão representados na figura ao lado. Sendo $d_1 = 15$ m, $d_2 = 6{,}0$ m, $d_3 = 3{,}0$ m e $d_4 = 1{,}0$ m, a distância inicial da bola ao buraco era, em metros, igual a:

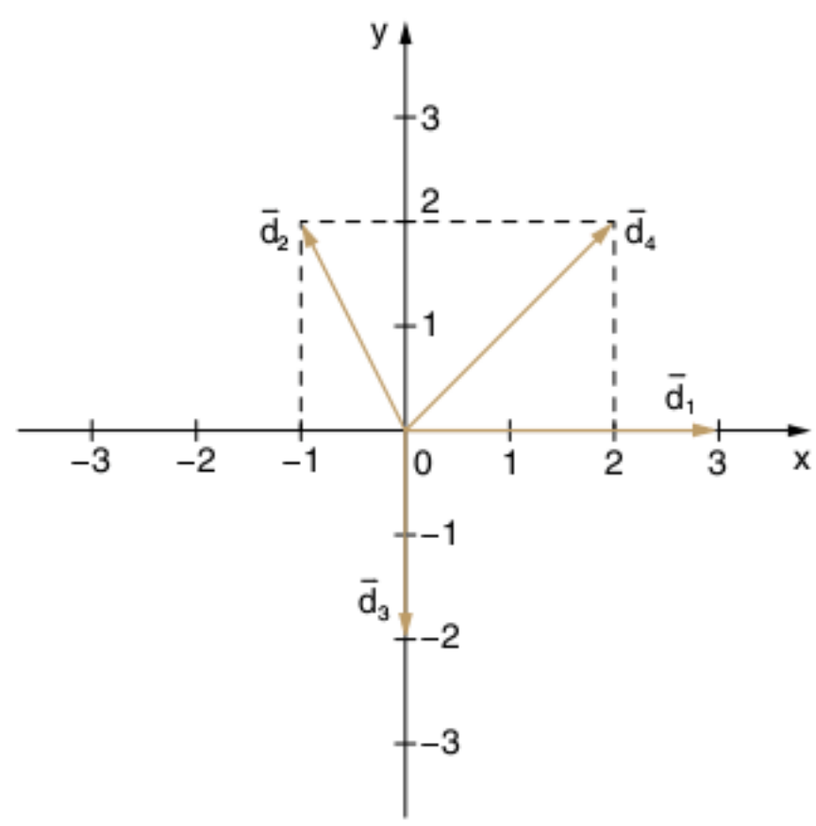


(a) 5,0
(b) 11
(c) 13
(d) 17
(e) 25

23 **UFPB 2006** Um cidadão está à procura de uma festa. Ele parte de uma praça, com a informação de que o endereço procurado estaria situado a 2 km ao norte. Após chegar ao referido local, ele recebe nova informação de que deveria se deslocar 4 km para o leste. Não encontrando ainda o endereço, o cidadão pede informação a outra pessoa, que diz estar a festa acontecendo a 5 km ao sul daquele ponto. Seguindo essa dica, ele finalmente chega ao evento. Na situação descrita, o módulo do vetor deslocamento do cidadão, da praça até o destino final, é:

(a) 11 km
(b) 7 km
(c) 5 km
(d) 4 km
(e) 3 km

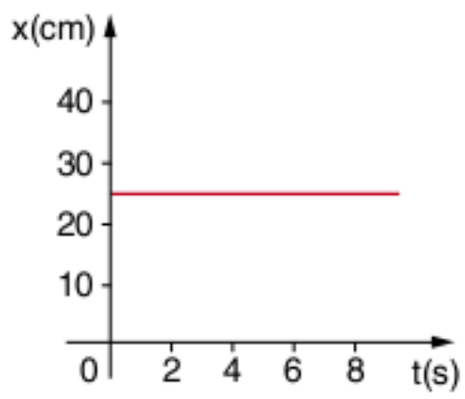
24 **UFPB 2008** Uma bola de bilhar sofre quatro deslocamentos sucessivos representados pelos vetores $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, $\vec{d}_3$ e $\vec{d}_4$, apresentados no diagrama a seguir.

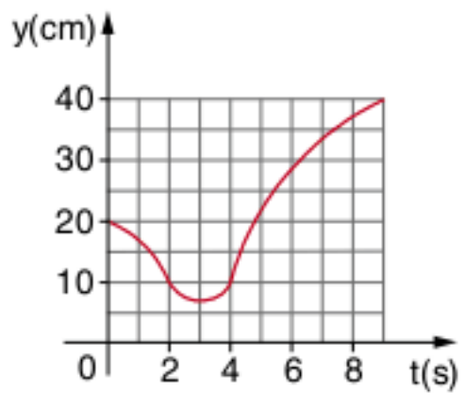


O deslocamento resultante $\vec{d}$ da bola está corretamente descrito em:

(a) $\vec{d} = -4\hat{i} + 2\hat{j}$
(b) $\vec{d} = -2\hat{i} + 4\hat{j}$
(c) $\vec{d} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$
(d) $\vec{d} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$
(e) $\vec{d} = 4\hat{i} + 4\hat{j}$

25 **FCMSC** Uma partícula se move em um plano, em relação a um sistema de eixos cartesianos fixos, sendo x e y as coordenadas de sua posição. Os gráficos a seguir nos dão x e y em função do tempo t.





Dentre os valores a seguir, o que mais se aproxima do módulo do vetor deslocamento do móvel entre os instantes t = 2,0 s e t = 9,0 s é:

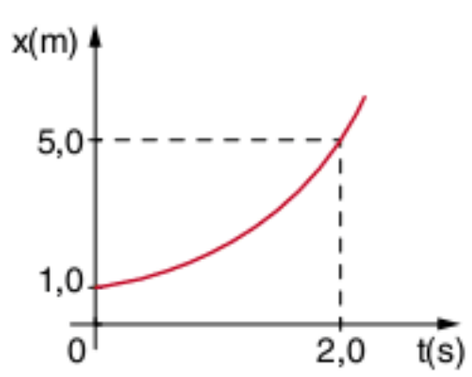
(a) 10 cm
(b) 20 cm
(c) 30 cm
(d) 40 cm
(e) 50 cm

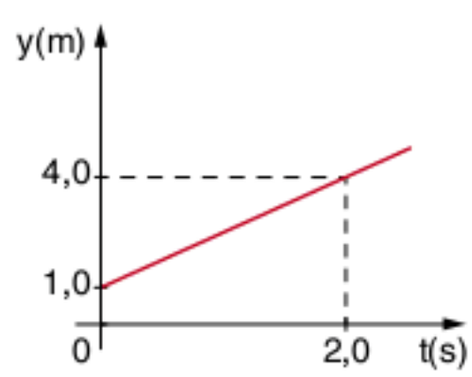
Velocidade vetorial

26 **Unisa-SP** Um projétil é lançado verticalmente para cima, com velocidade escalar 200 m/s. A velocidade vetorial média do projétil, para o intervalo de tempo que vai do lançamento até o instante em que o projétil volta ao solo, tem módulo igual a:

(a) 400 m/s
(b) 200 m/s
(c) 100 m/s
(d) zero
(e) 50 m/s

27 Considere uma partícula em movimento sobre o plano cartesiano Oxy. Suas coordenadas de posição variam em função do tempo conforme mostram os gráficos a seguir.





No intervalo de $t_0 = 0$ a $t_1 = 2,0$ s, calcule:

a) a intensidade do deslocamento vetorial da partícula.
b) a intensidade da sua velocidade vetorial média.

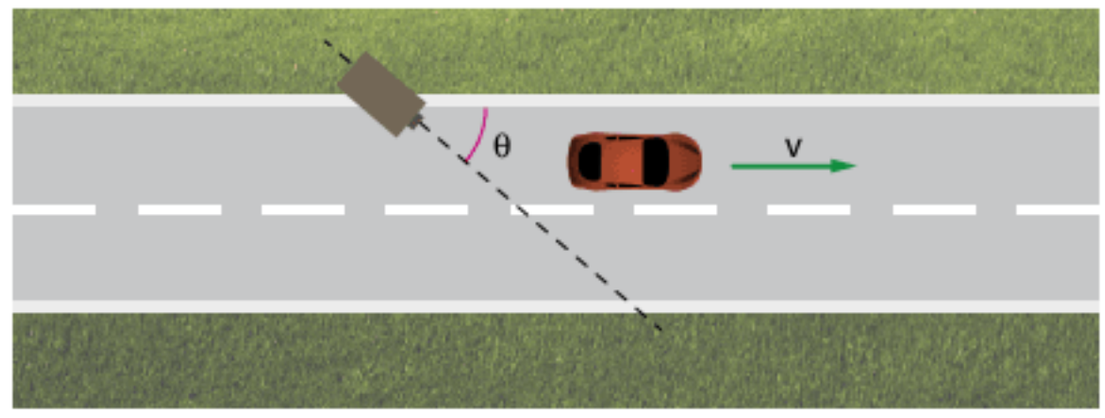
28 **Vunesp** A escada rolante que liga a plataforma de uma estação subterrânea de metrô ao nível da rua move-se com velocidade constante de 0,80 m/s.

a) Sabendo-se que a escada tem uma inclinação de 30° em relação à horizontal, determine, com o auxílio da tabela adiante, a componente vertical de sua velocidade.

Ângulo θ	sen θ	cos θ
30°	0,500	0,867
60°	0,867	0,500

b) Sabendo-se que o tempo necessário para que um passageiro seja transportado pela escada, do nível da plataforma ao nível da rua, é de 30 segundos, determine a que profundidade se encontra o nível da plataforma em relação ao nível da rua.

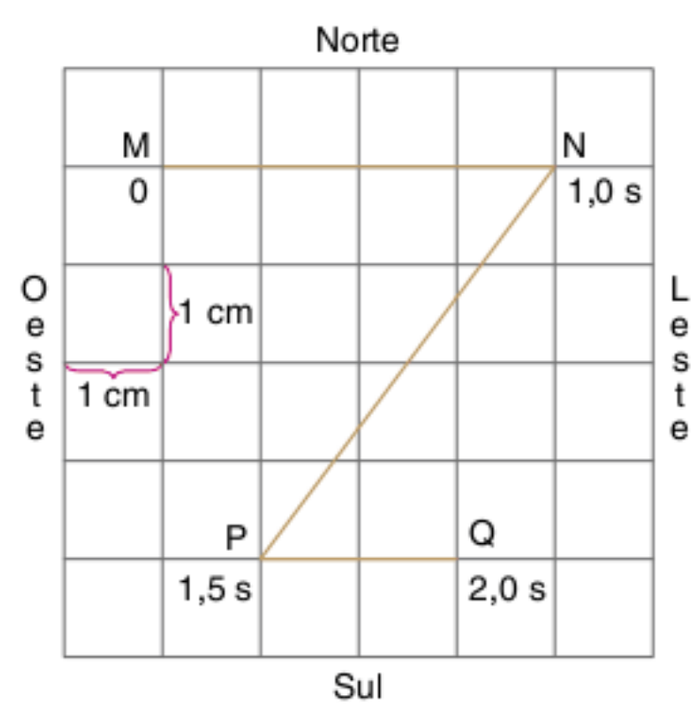
29 **Uerj 2003** Pardal é a denominação popular do dispositivo óptico-eletrônico utilizado para fotografar veículos que superam um determinado limite estabelecido de velocidade V. Em um trecho retilíneo de uma estrada, um pardal é colocado formando um ângulo θ com a direção da velocidade do carro, como indica a figura a seguir.



Suponha que o pardal tenha sido calibrado para registrar velocidades superiores a V, quando o ângulo θ = 0°.
A velocidade v do veículo que acarretará o registro da infração pelo pardal, com relação à velocidade padrão V, será de:

(a) $V \cdot \text{sen}\,\theta$
(b) $V \cdot \cos\theta$
(c) $\dfrac{V}{\text{sen}\,\theta}$
(d) $\dfrac{V}{\cos\theta}$

30 **UCSAL-BA** Uma partícula percorreu a trajetória MNPQ, representada na figura a seguir. Os instantes de passagem pelos diferentes pontos estão anotados (em segundos).



a) A velocidade escalar média da partícula durante os 2 s de movimento foi, em cm/s, igual a:

(a) 6,0
(b) 5,5
(c) 4,5
(d) 2,5
(e) 2,0

b) A velocidade vetorial média da partícula durante todo o percurso tem módulo, em cm/s, igual a:

(a) 6,0
(b) 5,5
(c) 4,5
(d) 2,5
(e) 2,0

Aceleração vetorial

31 **FEI** Um automóvel realiza uma curva de raio 20 m com velocidade constante de 72 km/h. Qual é a sua aceleração durante a curva?

(a) 0
(b) 5 m/s²
(c) 10 m/s²
(d) 20 m/s²
(e) 3,6 m/s²

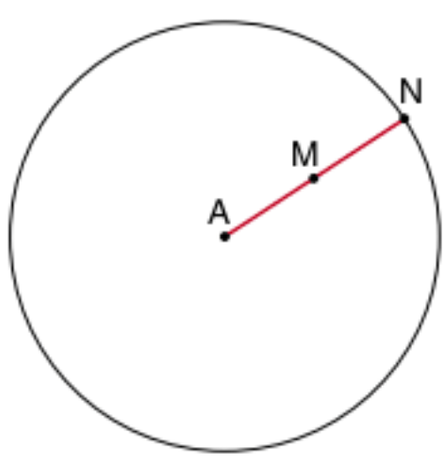
32 Um satélite descreve uma órbita circular de raio R em torno da Terra. Admitindo que o movimento seja uniforme de período igual a T, aponte a alternativa que traz o valor correto da intensidade da aceleração vetorial do satélite:

(a) zero.
(b) $\frac{R}{T^2}$
(c) $\frac{4R}{T^2}$
(d) $\frac{4\pi^2R}{T^2}$
(e) $\frac{\pi^2R}{T^2}$

33 **Unitau** Uma partícula tem movimento circular uniforme de velocidade escalar 10 m/s, dando uma volta a cada 8 segundos. O módulo da aceleração vetorial média para um intervalo de tempo de 2 s é:

(a) $\sqrt{2}$ m/s²
(b) $5\sqrt{2}$ m/s²
(c) $2\sqrt{5}$ m/s²
(d) 2 m/s²
(e) 5 m/s²

34 **UFSC** Um disco gira, executando um movimento circular uniforme. A distância que separa os pontos M e N, assinalados na figura, é de 20 cm. Sabendo-se que o diâmetro do disco é de 80 cm, determine a razão (quociente) da aceleração centrípeta a_N, do ponto N, em relação à aceleração centrípeta a_M, do ponto M.



35 **Vunesp** Uma partícula desloca-se num plano, partindo da origem, com velocidade $\vec{v}_0 = \vec{0}$ e aceleração constante, dada pelas componentes $a_x = 3{,}0$ m/s² e $a_y = 4{,}0$ m/s².

a) Calcule o instante t para o qual o módulo da velocidade da partícula é 40 m/s.
b) Determine as coordenadas x e y da partícula no instante t calculado no item a.

36 **PUC-SP** Um móvel parte do repouso e percorre uma trajetória circular de raio 100 m, assumindo movimento uniformemente acelerado de aceleração escalar 1 m/s².

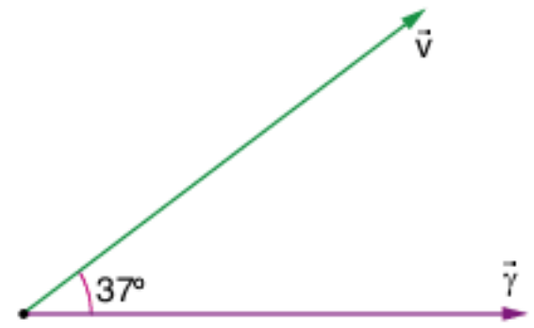
a) As componentes tangencial e centrípeta da aceleração valem, respectivamente, após 10 s:

(a) 1 m/s² e 10 m/s²
(b) 10 m/s² e 1 m/s²
(c) 10 m/s² e 10 m/s²
(d) 10 m/s² e 100 m/s²
(e) 1 m/s² e 1 m/s²

b) O ângulo formado entre a aceleração total e o raio da trajetória no instante t = 10 s vale:

(a) 180°
(b) 90°
(c) 60°
(d) 45°
(e) 30°

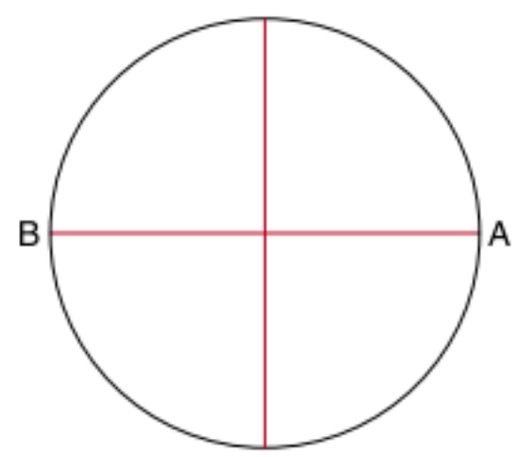
37 A figura representa os vetores velocidade ($\vec{v}$) e aceleração ($\vec{\gamma}$) de uma partícula num certo instante t, em uma trajetória cujo raio de curvatura vale R.



Sendo R = 48 m, $\gamma = 5$ m/s², sen 37° = 0,6 e cos 37° = 0,8, calcule, no instante t:

a) o módulo da aceleração escalar da partícula.
b) a velocidade escalar.

38 **UFMS 2005** Uma partícula executa movimento uniforme no sentido anti-horário com velocidade angular de $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ rad/s sobre uma circunferência de diâmetro AB = 8 cm. Sabe-se que 3 segundos após passar pelo ponto A a partícula está passando por um ponto C.



É correto afirmar que:

(a) o período, a aceleração centrípeta e a velocidade escalar da partícula no ponto C são, respectivamente, 4 s, zero e 4π cm/s.
(b) a medida do arco AC é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm.
(c) o módulo do vetor velocidade média no trecho AC é $\frac{\left(4\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}{3}$ cm/s.
(d) os pontos A, B e C são vértices de um triângulo isósceles.
(e) o período, a aceleração centrípeta e a velocidade escalar da partícula no ponto C são, respectivamente, 8 s, zero e π cm/s.

Equação paramétrica do movimento

39 **Fuvest** Uma partícula desloca-se em um plano Oxy, de modo que sua abscissa x e sua ordenada y são dadas pelas seguintes equações horárias:

$$x = 3t + 1 \quad e \quad y = 4t + 2$$

onde x e y são dadas em metros e t em segundos.

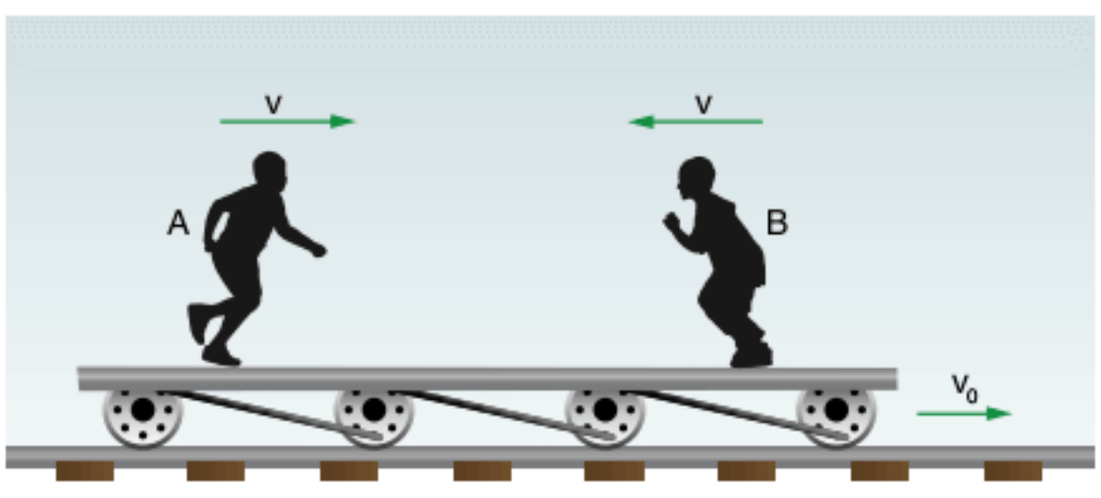
a) Qual o módulo da velocidade?
b) Qual a equação da trajetória?
c) Qual a forma da trajetória?

Composição de movimento – unidimensional

40 **EFFSP** Um patrulheiro viajando em um carro dotado de radar, a uma velocidade de 60 km/h em relação a um referencial fixo no solo, é ultrapassado por outro automóvel que viaja no mesmo sentido que ele. A velocidade indicada pelo radar após a ultrapassagem é de 30 km/h. A velocidade do outro automóvel em relação ao solo é, em km/h, igual a:

(a) 30
(b) 45
(c) 60
(d) 75
(e) 90

41 **Fuvest** Num vagão ferroviário, que se move com velocidade $v_0 = 3$ m/s com relação aos trilhos, estão dois meninos, A e B, que correm um em direção ao outro, cada um com velocidade v = 3 m/s com relação ao vagão.

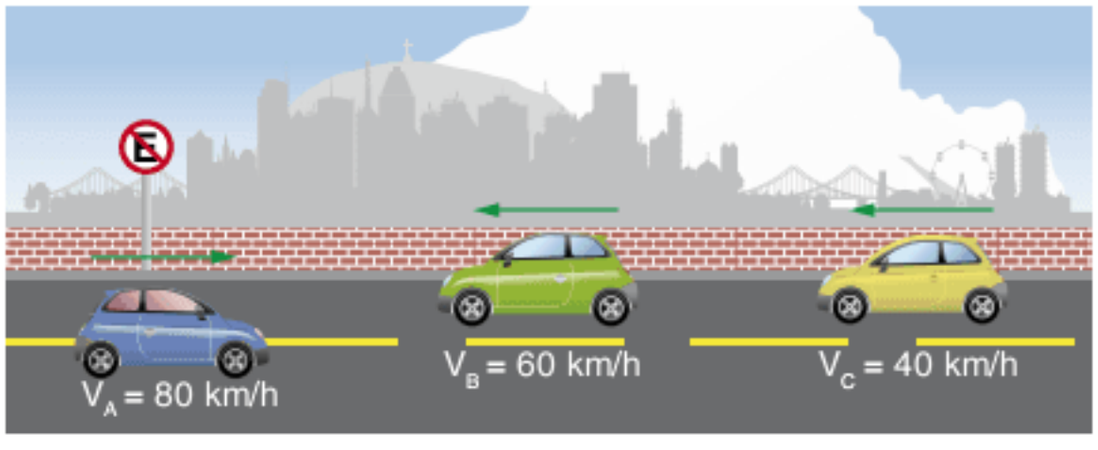


As velocidades dos meninos, v_A e v_B, com relação aos trilhos serão, respectivamente:

(a) 6 m/s e 0
(b) 3 m/s e 3 m/s
(c) 0 e 9 m/s
(d) 9 m/s e 0
(e) 0 e 6 m/s

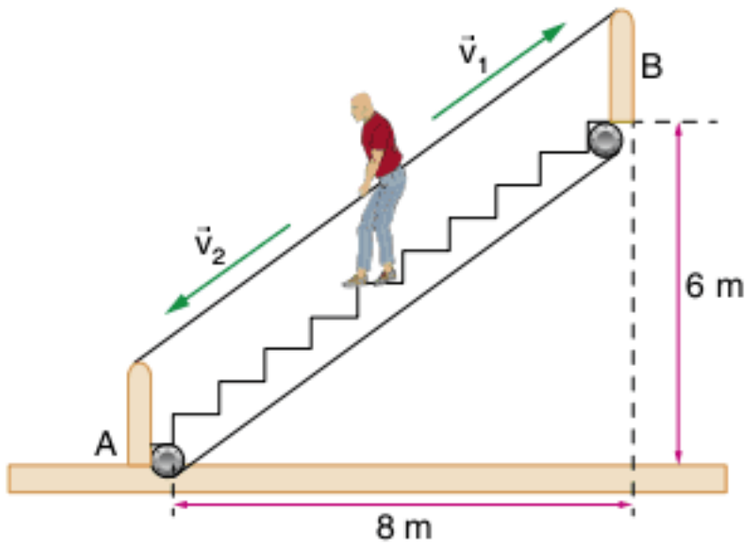
42 **Mackenzie** Qual deve ser a intensidade e o sentido da velocidade, em relação à Terra, de um avião voando numa linha paralela ao equador, de latitude 60° (equador: latitude = 0°), para que fique em repouso em relação ao Sol? Admita o raio da Terra igual a 6.000 km.
Nota: Não considere o movimento de translação da Terra em relação ao Sol.

43 **Ufop** Três carros se movem numa pista retilínea. As velocidades indicadas na figura foram medidas em relação à placa de estacionamento proibido presa à pista. A afirmativa incorreta é:



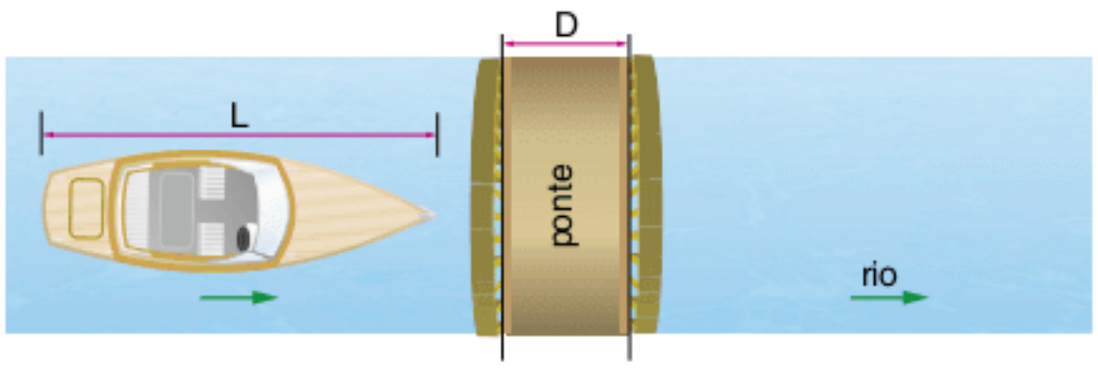
(a) o módulo da velocidade do carro A é de 120 km/h para um referencial no carro C.
(b) o módulo da velocidade do carro B é de 100 km/h para um referencial no carro C.
(c) o módulo da velocidade do carro B é de 140 km/h para um referencial no carro A.
(d) o módulo da velocidade do carro C é de 20 km/h para um referencial no carro B.
(e) os carros A e B podem ter os módulos de suas velocidades iguais, conforme a escolha do referencial.

44 **UFPE** Uma escada rolante liga dois pisos A e B, movendo-se com velocidade ascendente e constante $v_1 = 0{,}5$ m/s, como ilustra a figura. Descendo, uma pessoa gasta 10 segundos para ir do piso B ao piso A.



a) Qual a velocidade da pessoa em relação ao solo?
b) Qual a velocidade da pessoa em relação à escada?

45 **UFPE 2007** Um barco de comprimento L = 80 m, navegando no sentido da correnteza de um rio, passa sob uma ponte de largura D = 25 m, como indicado na figura. Sabendo-se que a velocidade do barco em relação ao rio é $v_B = 14$ km/h, e a velocidade do rio em relação às margens é $v_R = 4$ km/h, determine em quanto tempo o barco passa completamente por baixo da ponte, em segundos.



46 **UEL** Um barco, com o motor a toda potência, percorre 60 km em 2 h, descendo um rio. Em sentido contrário, ele percorre 40 km em igual intervalo de tempo. A velocidade do barco em relação às águas e a velocidade das águas em relação às margens do rio são, respectivamente, em km/h, iguais a:

(a) 20 e 30
(b) 25 e 5
(c) 25 e 20
(d) 30 e 5
(e) 12,5 e 7,5

47 **Uesb** Um barco, deslocando-se no sentido contrário ao da correnteza, leva o tempo t = 20 s para ir de um ponto A a um ponto B, situados sobre a mesma margem de um rio, e gasta o tempo $\frac{t}{2}$ para voltar do ponto B ao ponto A. Sabendo que a velocidade do barco, em relação à água, é constante e igual a 6 m/s, a distância de A a B é igual a:

(a) 20 m
(b) 40 m
(c) 60 m
(d) 80 m
(e) 100 m

Composição de movimento – bidimensional

48 Define-se velocidade relativa de um móvel A em relação a um móvel B pela equação vetorial $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$, em que:

$\vec{v}_{AB}$ = velocidade de A em relação a B.
$\vec{v}_A$ = velocidade de A em relação à Terra.
$\vec{v}_B$ = velocidade de B em relação à Terra.

Determine o módulo de $\vec{v}_{AB}$ nos seguintes casos:

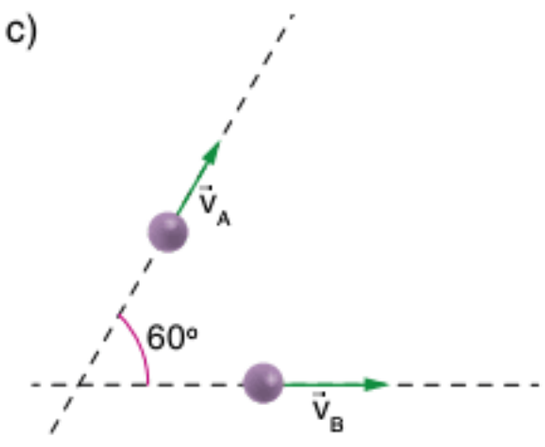
a)

$v_A = 10$ m/s
$v_B = 4$ m/s

b)

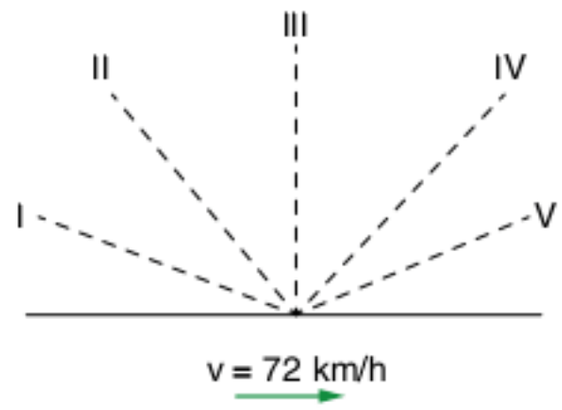
$v_A = 2$ m/s
$v_B = 3$ m/s

c)



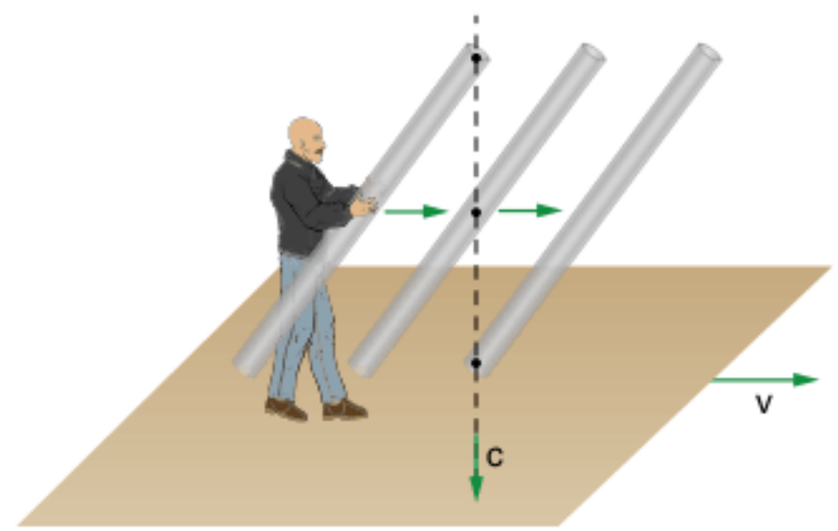
$v_A = 15$ m/s
$v_B = 7$ m/s

49 **Fesp** Um motorista viaja em um carro, por uma estrada em linha reta, sob uma chuva que cai verticalmente a uma velocidade constante de 10 m/s (em relação ao solo). Se o carro se move da esquerda para a direita com velocidade constante igual a 72 km/h, para o motorista, as gotas de chuva parecem estar caindo na direção I, II, III, IV ou V, conforme o esquema?



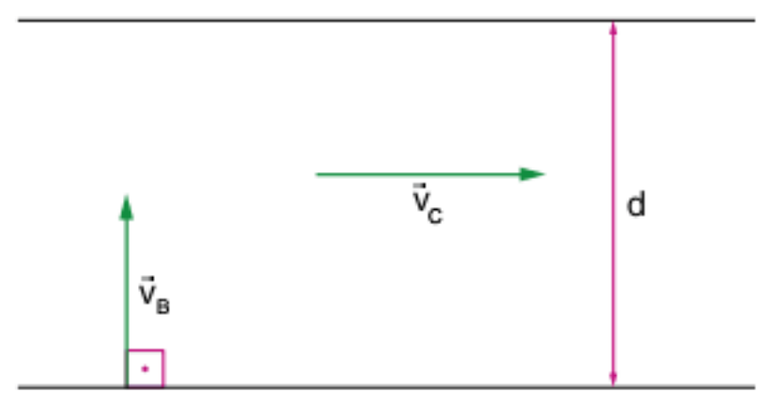
(a) I
(b) II
(c) III
(d) IV
(e) V

50 **Vunesp** Um homem, em pé sobre uma plataforma que se move horizontalmente para a direita com velocidade constante v = 4,0 m/s, observa que, ao inclinar de 45° um tubo cilíndrico oco, permite que uma gota de chuva, que cai verticalmente com velocidade c constante em relação ao solo, atravesse o tubo sem tocar em suas paredes.



Determine a velocidade c da gota da chuva, em m/s.

51 **FU-Itaúna** Um barco atravessa um rio de margens retilíneas e paralelas, com velocidade $\vec{v}_B$ em relação à água, a qual é perpendicular às margens. A velocidade das águas em relação às margens é $\vec{v}_C$. Assinale a alternativa falsa.



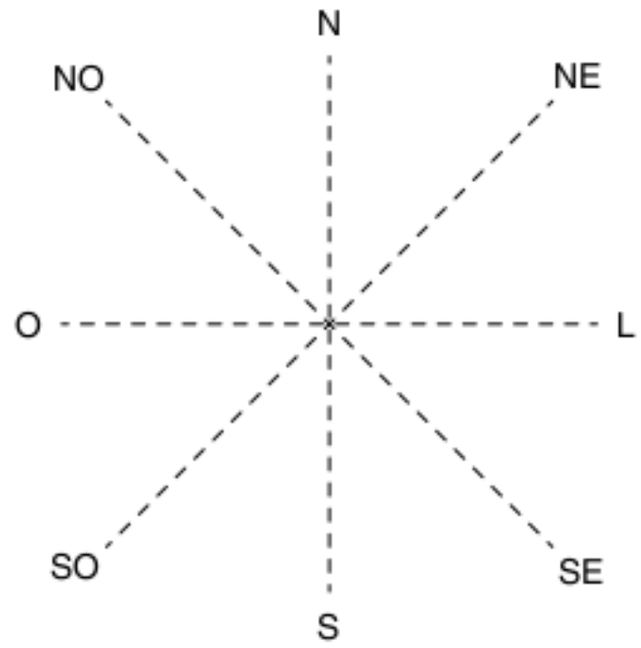
(a) Se não houvesse correnteza, o barco gastaria menos tempo para passar de uma margem à outra.
(b) O tempo gasto pelo barco, na travessia, é $t = \frac{d}{v_B}$.
(c) Se não houvesse correnteza, o barco gastaria o mesmo tempo para atravessar o rio.
(d) Se a velocidade da correnteza fosse duas vezes maior, o tempo gasto pelo barco na travessia, ainda assim, seria o mesmo.
(e) A velocidade do barco, em relação às margens, é $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{v}_C$, onde $v = \sqrt{v_B^2 + v_C^2}$.

52 **Fuvest** Um barco atravessa um rio de margens paralelas de largura d = 4 km. Devido à correnteza, a componente da velocidade do barco ao longo das margens é $v_A = 0,5$ km/h em relação às margens. Na direção perpendicular às margens, a componente da velocidade é $v_B = 2$ km/h. Pergunta-se:

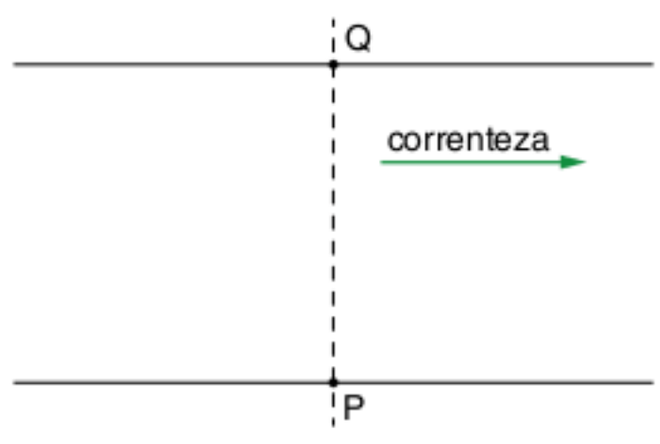
a) Quanto tempo leva o barco para atravessar o rio?

b) Ao completar a travessia, qual é o deslocamento do barco na direção das margens?

53 Um veleiro deseja se mover para o nordeste, sendo que o vento sopra de leste para oeste. Na figura a seguir, represente a direção do barco.



54 **Puccamp** Um barco sai de um ponto P para atravessar um rio de 4,0 km de largura. A velocidade da correnteza, em relação às margens do rio, é de 6,0 km/h. A travessia é feita segundo a menor distância PQ, como mostra o esquema representado a seguir, e dura 30 min.



A velocidade do barco em relação à correnteza, em km/h, é de:

(a) 4,0
(b) 6,0
(c) 8,0
(d) 10
(e) 12

55 **Fatec** Em relação ao ar, um avião voa para o leste com velocidade de 120 km/h e está sujeito a um vento norte com velocidade de 50 km/h. Analise as afirmativas.

I. O avião voa aproximadamente de leste para nordeste.
II. A velocidade resultante do avião é de 130 km/h.
III. Se o avião voasse para o norte, sua velocidade seria de 170 km/h.

São corretas as afirmativas:

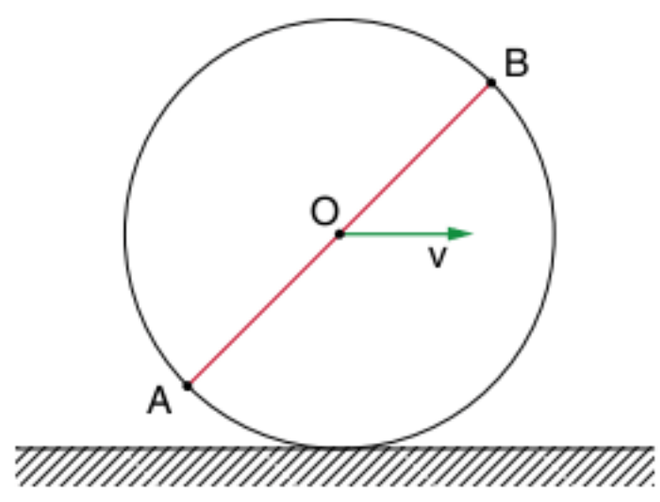
(a) I e II.
(b) II e III.
(c) III e I.
(d) todas são corretas.
(e) apenas uma é correta.

Composição de movimento – roda

56 **FM Santa Casa** Uma pedra se engasta no pneu de um automóvel que está com velocidade uniforme de 90 km/h. Supondo que o pneu não patina nem escorrega, e que o sentido de movimento do automóvel é o positivo, os valores algébricos mínimo e máximo da velocidade da pedra em relação ao solo, em km/h, são:

(a) –180 e 180
(b) –90 e 90
(c) –90 e 180
(d) 0 e 90
(e) 0 e 180

57 **FEI** A roda da figura rola sem escorregar, paralelamente a um plano vertical fixo. O centro O da roda tem velocidade constante v = 5 m/s. Qual é o módulo da velocidade do ponto B no instante em que o diâmetro AB é paralelo ao plano de rolamento?



58 **Efei** Um ciclista desloca-se em movimento retilíneo e uniforme, com velocidade de 6,0 m/s. Sabendo que as duas rodas da bicicleta têm diâmetros iguais a 60 cm, calcule:

a) a velocidade angular da catraca rigidamente ligada à roda traseira.

b) a relação entre o raio do volante acoplado aos pedais (r_2) e o raio da catraca (r_1), de modo que o ciclista realize 60 pedaladas completas por minuto.

TEXTO COMPLEMENTAR

Navegando contra o vento

Como fazem os navios a vela para navegar "contra o vento" ou, como dizem os marinheiros, para navegar "cochado"?

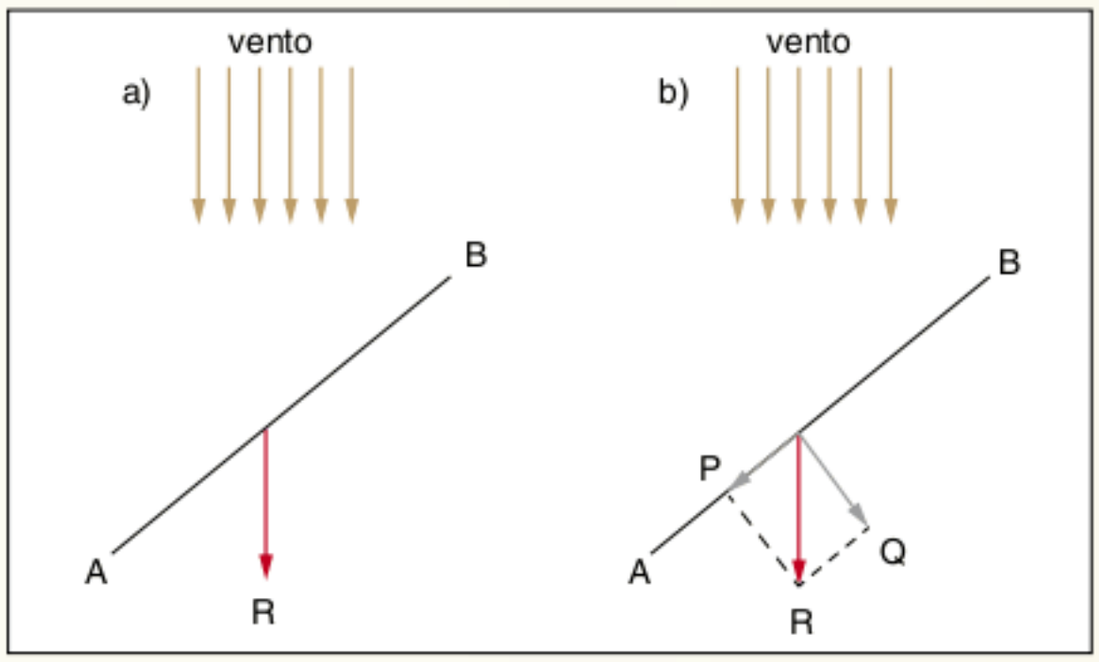
De fato, um marinheiro lhe dirá que você não pode navegar diretamente contra o vento, mas quase, formando um ângulo agudo com a direção na qual sopra o vento. O ângulo, contudo, é muito pequeno – aproximadamente um quarto do ângulo reto – e é, realmente, difícil entender que diferença há entre navegar diretamente contra o vento ou num ângulo de 22° com ele.

Contudo, existe uma diferença e veremos por que um barco a vela pode se utilizar do vento para singrar "cochado". Primeiramente, entretanto, vejamos como o vento age sobre as velas em geral, ou em que direção ele arrasta a vela quando sopra sobre ela. Suponho que você está pensando que o vento empurra a vela sempre na direção em que sopra. Não é assim, esse é o erro básico, como sempre, derivado do senso comum.

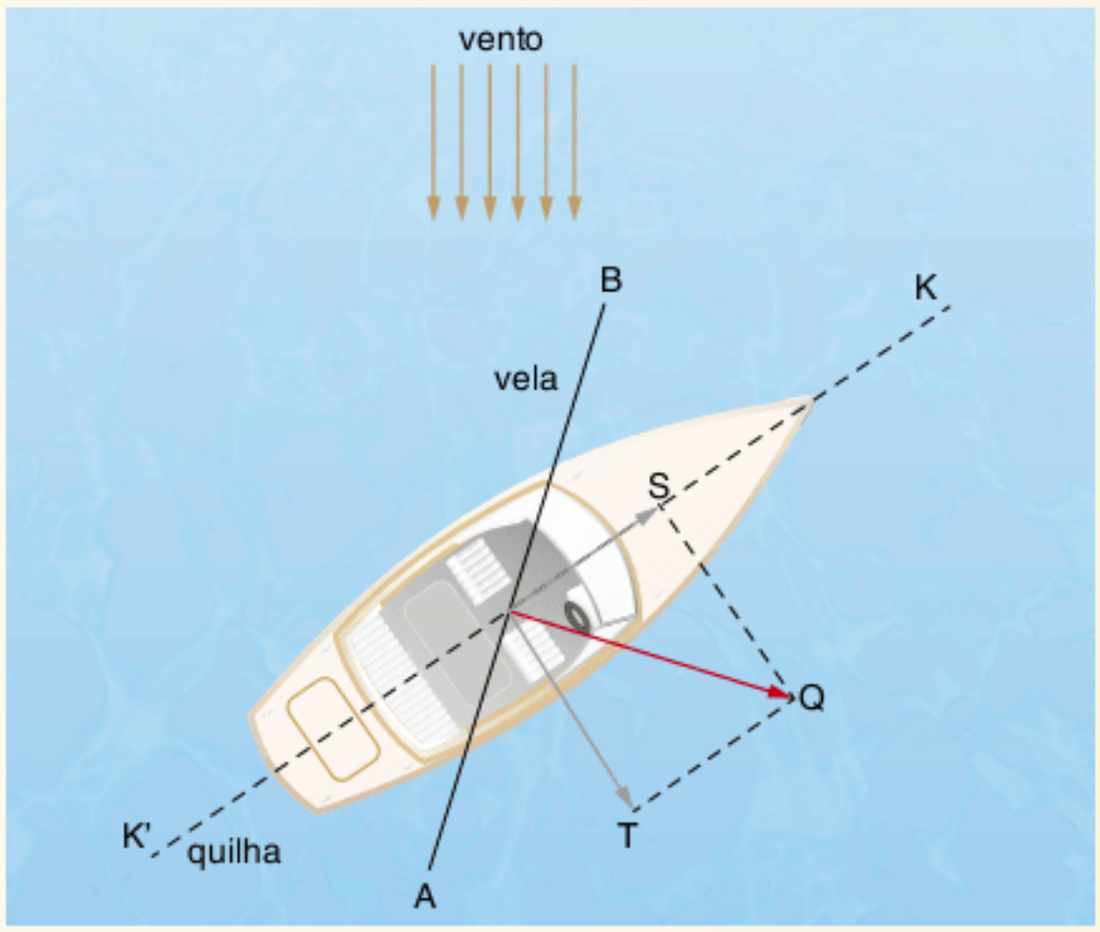
Qualquer que seja a direção em que sopre, sempre arrasta a vela na direção perpendicular ao plano desta.

Esse é um princípio básico da fluidodinâmica: fluidos não resistem a esforços tangenciais, apenas a esforços normais. A força que um fluido aplica numa parede é sempre perpendicular a essa parede.

Imagine que o vento sopre na direção indicada pelas flechas da ilustração a seguir (a), onde a linha AB representa a vela. Desde que o vento pressione igualmente toda a superfície da vela, podemos substituir a pressão do vento pela força **R** aplicada no centro da vela. Decompondo essa força, nós obtemos **Q**, que é perpendicular à vela, e **P**, que se confunde com ela (b). Esta última não empurra absolutamente o barco, porquanto o atrito entre o vento e o velame é nulo – essas são as tais forças tangenciais que citamos acima. Sobra a força **Q**, que impele a vela segundo um ângulo reto – essas são as tais forças normais.

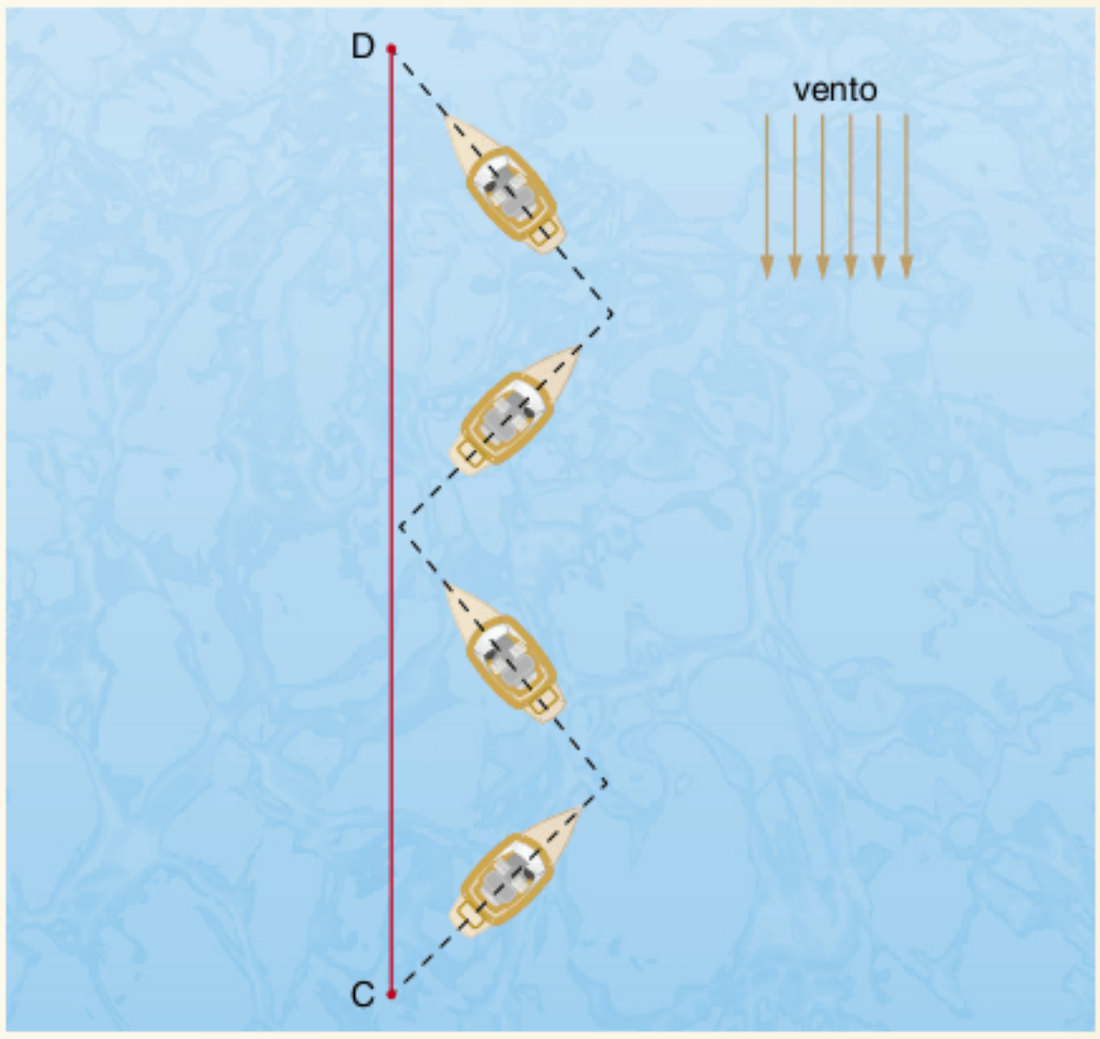


Uma vez conscientes desse fato, podemos compreender facilmente por que uma embarcação pode navegar quase contra o vento formando um ângulo agudo. Façamos o segmento de reta KK' da ilustração a seguir representar a quilha do barco. O vento sopra segundo um ângulo agudo a esta linha, na direção representada pelas flechas. AB é a própria vela, que está colocada de tal maneira que seu plano divida o ângulo entre a direção da quilha e a do vento. Esse é o ângulo agudo (cerca de 22°) que citamos na introdução. Essa mesma ilustração mostra como a força **Q** é decomposta em **S** e **T**.



O impacto do vento sobre a vela é indicado pela força **Q**, a qual, como sabemos, deve ser perpendicular à vela. Decompondo-a, obtemos a força **T**, perpendicular à quilha, e a força **S**, que se confunde com a linha da quilha. Como o movimento do bote no sentido de **T** encontra uma forte resistência oferecida pela água (a quilha da embarcação mergulha profundamente), a força **T** é anulada quase totalmente pela resistência da água. Resta-nos apenas a força **S**, que, dirigida para frente, impele o barco para frente, em ângulo, por assim dizer, nas garras do vento (pode-se provar que a força **S** é maior quando o plano da vela está entre as direções do vento e da quilha).

Comumente, esta manobra é realizada por meio de movimentos em zigue-zague, como mostramos na figura, o que, em linguagem marítima, chama-se "navegar à bolina".



Prof. Luiz Ferraz Netto. <www.feiradeciencias.com.br/sala19/texto31.asp>.

RESUMINDO

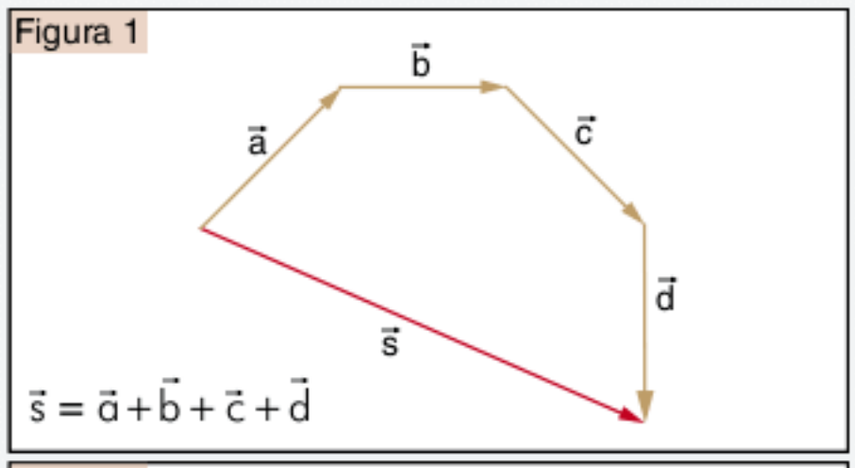
Vetor é o ente matemático que representa todos os segmentos orientados com a mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo.

Um vetor é utilizado na representação de uma **grandeza vetorial**, como força, aceleração e velocidade. Diferentemente da **grandeza escalar**, que necessita apenas de um valor numérico e uma unidade para ser definida, a grandeza vetorial precisa de **direção**, **sentido** e **módulo**.

Além da direção, sentido e módulo de um vetor, estudamos os conceitos de:

- **vetor oposto**: vetor com mesma direção e mesmo módulo de outro vetor, mas sentido contrário.
- **vetor nulo**: vetor com módulo nulo.
- **vetor unitário**: vetor com módulo igual a 1.
- **vetores iguais**: vetores com mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

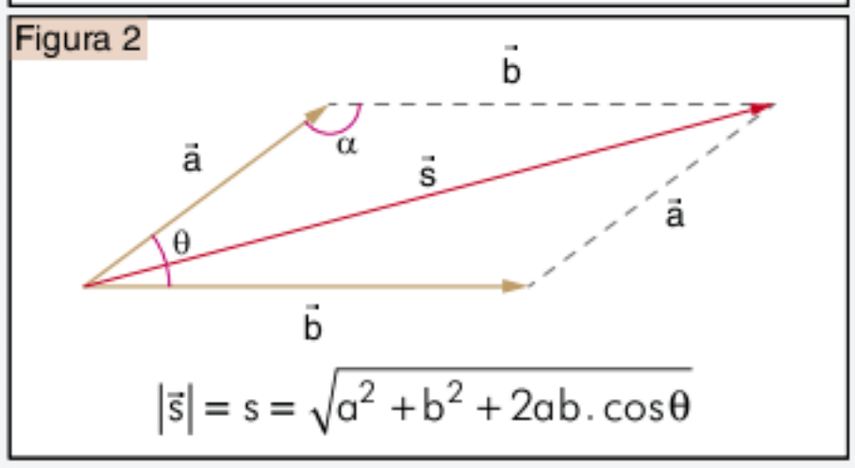
Figura 1



A **adição de vetores** pode ser efetuada por três métodos:

- **regra da poligonal**: veja a figura 1.
- **regra do paralelogramo**: veja a figura 2.
- **método de decomposição de vetores**: todos os vetores a serem somados são decompostos em duas direções, e o vetor soma é a soma das resultantes em cada uma das duas direções.

Figura 2



Estudamos ainda:

- **Subtração de vetores**: é idêntica à soma de vetores, apenas tomando $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- **Multiplicação de um número real por um vetor**: o produto de n por $\vec{a}$ é dado por $\vec{p} = n\vec{a}$.

A **Cinemática vetorial** estuda o movimento dos corpos com a preocupação de caracterizar o módulo, a direção e o sentido das grandezas posição, velocidade e aceleração.

- **vetor posição** ($\vec{r}$): vetor com origem na origem do referencial escolhido e extremidade no corpo.
- **vetor deslocamento**: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$
- **velocidade vetorial instantânea**: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
- **aceleração vetorial instantânea**: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
- **velocidade vetorial média**: $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
- **aceleração vetorial média**: $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

É importante observar que a direção da velocidade vetorial instantânea é sempre tangente à trajetória, o sentido é o mesmo do movimento e o módulo é o mesmo da velocidade escalar instantânea.

Demonstra-se que $|\Delta\vec{r}| \leq |\Delta s|$, $|\vec{v}_m| \leq |v_m|$ e $|\vec{a}_m| \geq |a_m|$, sendo que $|\Delta\vec{r}| = |\Delta s|$, $|\vec{v}_m| = |v_m|$ e $|\vec{a}_m| = |a_m|$ no caso de trajetória retilínea.

Vimos que o estudo da aceleração é facilitado quando a decompomos em duas direções: **tangencial** e **normal à trajetória**, em que o módulo da aceleração tangencial é igual ao módulo de aceleração escalar e o módulo da aceleração centrípeta (ou normal) é dado por:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$$

em que v é o módulo de $\vec{v}$ e R é o raio de curvatura da trajetória.

E, para concluir, estudamos a **composição de movimentos** que, em linhas gerais, pode ser escrita por:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_{CB}$$

$\vec{v}_{AB}$ = velocidade de A em relação a B
$\vec{v}_{AC}$ = velocidade de A em relação a C
$\vec{v}_{CB}$ = velocidade de C em relação a B

Essa relação entre velocidades vetoriais também é válida para deslocamentos vetoriais e acelerações vetoriais:

$$\vec{d}_{AB} = \vec{d}_{AC} + \vec{d}_{CB}$$
$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AC} + \vec{a}_{CB}$$

QUER SABER MAIS?

SITES

- <www.ludoteca.if.usp.br/tudo/tex.php?cod=_formula1corridadevetores>.
- <http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/vetores/>.

Exercícios complementares

Grandezas escalares e grandezas vetoriais

1 **UFPB** Das afirmativas:

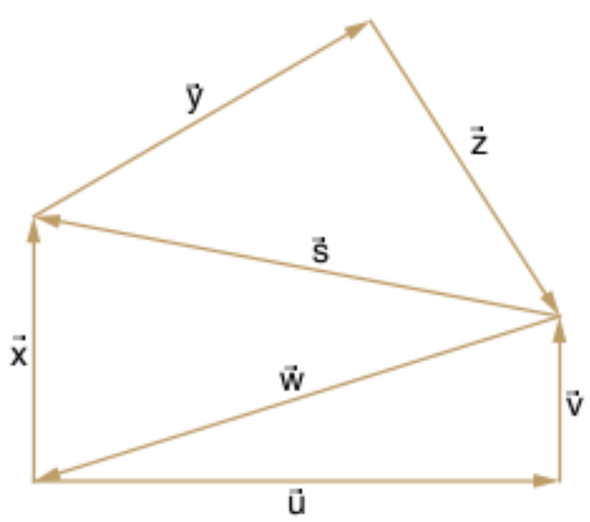
I. As grandezas vetoriais sempre podem ser somadas.
II. Uma grandeza vetorial pode ser somada com uma grandeza escalar.
III. Pode-se multiplicar uma grandeza vetorial por uma escalar.
IV. Apenas as grandezas escalares têm unidades.

está(ão) correta(s) somente:

(a) I e II.
(b) I.
(c) IV.
(d) I e IV.
(e) III.

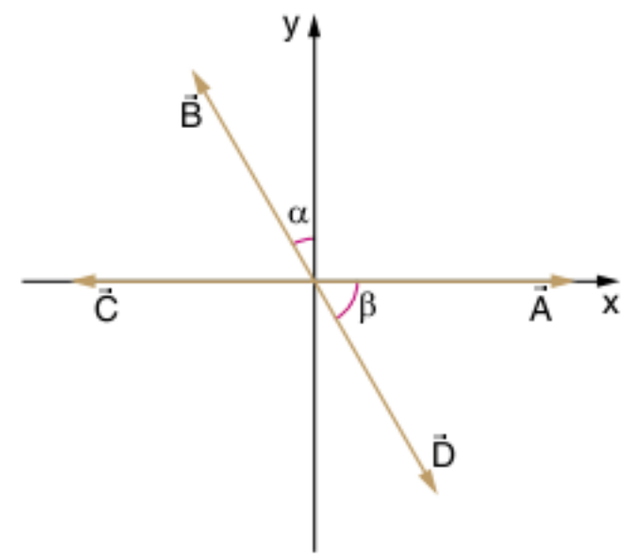
Operações com vetores

2 **FACS-BA** Considerando o conjunto de vetores representados a seguir, classifique as sentenças em verdadeiro (V) ou falso (F).



( ) $\vec{y}+\vec{z}=\vec{s}$
( ) $\vec{x}+\vec{w}=-(\vec{y}+\vec{z})$
( ) $\vec{y}+\vec{w}+\vec{z}=-\vec{x}$
( ) $\vec{s}-\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$
( ) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{s}+\vec{x}=\vec{0}$
( ) $-\vec{u}+\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}-\vec{v}=\vec{0}$

3 **UnB** Quatro vetores, $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ e $\vec{D}$, iguais em módulo e representando uma certa grandeza física, estão dispostos no plano (xy) como mostra a figura ($\alpha = 30°$ e $\beta = 60°$).



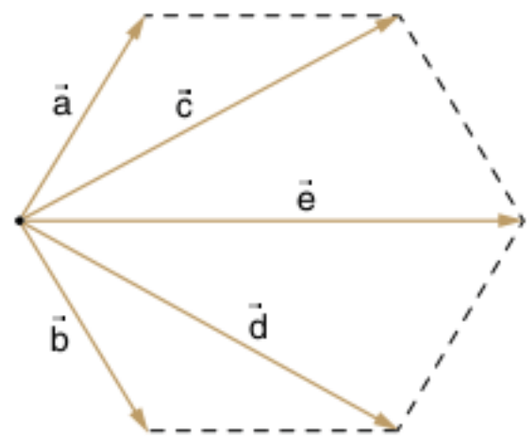
Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=\vec{0}$
( ) O resultado de $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$ só pode ser nulo se os vetores coincidirem com os semieixos x e y.
( ) $(\vec{A}+\vec{B})-\vec{C}=\vec{0}$
( ) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{D}+\vec{C}$
( ) $\vec{B}+\vec{C}=-(\vec{D}+\vec{A})$
( ) $(\vec{A}+\vec{C})-(\vec{B}+\vec{D})\neq\vec{0}$
( ) A soma dos módulos $|\vec{A}|+|\vec{B}|+|\vec{C}|+|\vec{D}|$ é nula.
( ) A soma algébrica das projeções dos quatro vetores sobre o eixo x é nula.

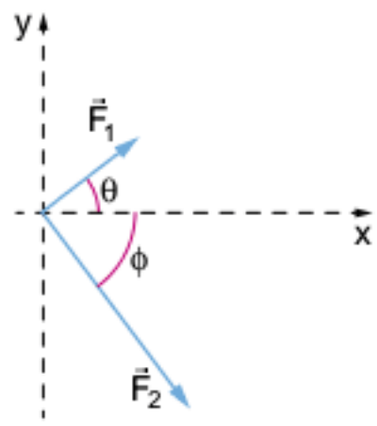
4 **UnB** Ao se determinar a resultante de seis vetores de mesmo módulo k, pelo método do polígono, foi obtido um hexágono regular, dando resultante nula. Se trocarmos o sentido de três deles, alternadamente, a resultante terá módulo igual a:

(a) 2k
(b) $2\sqrt{3}k$
(c) $\sqrt{\frac{3}{2}}k$
(d) zero
(e) 6k

5 **Mackenzie** Na figura a seguir, estão representados cinco vetores de mesma origem e cujas extremidades estão sobre os vértices de um hexágono regular, cujos lados medem k unidades. Calcule o módulo da resultante desses vetores.



6 **UFPB 2009 (Adapt.)** Dois homens, com auxílio de duas cordas, puxam um bloco sobre uma superfície horizontal lisa e sem atrito, conforme representação a seguir.



Considere que os módulos e direções das forças exercidas pelos homens são dados por:

- $F_1 = 5$ N e $F_2 = 10$ N
- $\cos\theta = 0{,}8$ e $\cos\phi = 0{,}6$

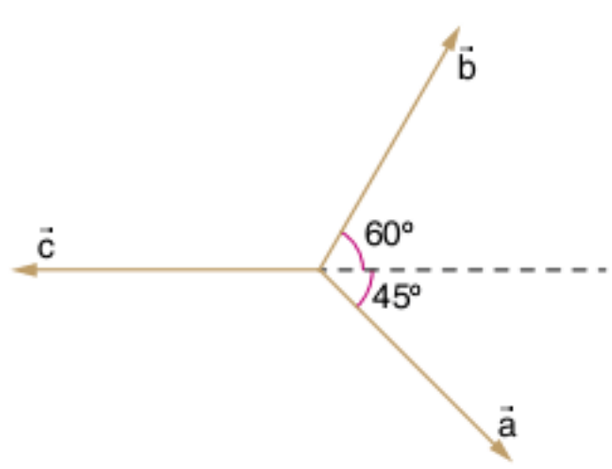
Nessa situação, é correto afirmar que a força resultante no bloco, em newtons, é dada por:

(a) $-5\hat{i} + 10\hat{j}$
(b) $10\hat{i} + 10\hat{j}$
(c) $10\hat{i} - 5\hat{j}$
(d) $-10\hat{i} - 5\hat{j}$
(e) $5\hat{i} + 10\hat{j}$

7 **Mackenzie** Um sistema é constituído por duas forças de direções perpendiculares entre si e de intensidades 60 N e 80 N. A força resultante dessas duas forças forma com a força de intensidade 80 N um ângulo cujo seno vale:

(a) 0,50
(b) 0,60
(c) 0,75
(d) 0,80
(e) 1,00

8 **Ufla** Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, representados a seguir, têm resultante nula.



Sabendo que $|\vec{b}| = \sqrt{6}$, $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ e $\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, podemos afirmar que os módulos de $\vec{a}$ e $\vec{c}$ valem, respectivamente:

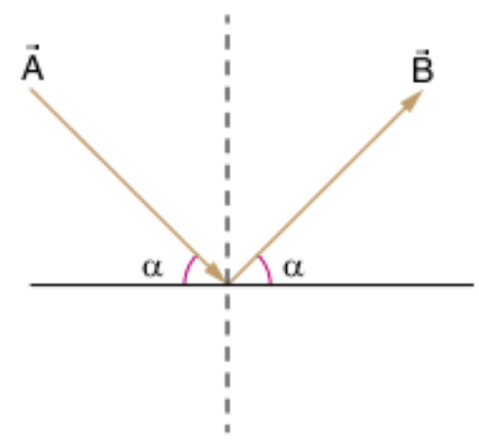
(a) 3 e $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
(b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ e $2\sqrt{3}$
(c) $3\sqrt{2}$ e 3
(d) 6 e 3
(e) 3 e $3\sqrt{2}$

9 Determine o vetor diferença $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ em cada caso a seguir, calculando seu módulo e o ângulo formado com a horizontal.

a)

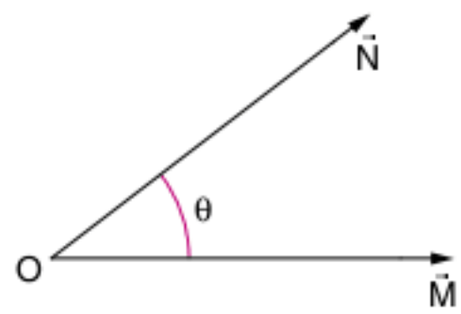
$|\vec{A}| = 8$ U
$|\vec{B}| = 3$ U

b)

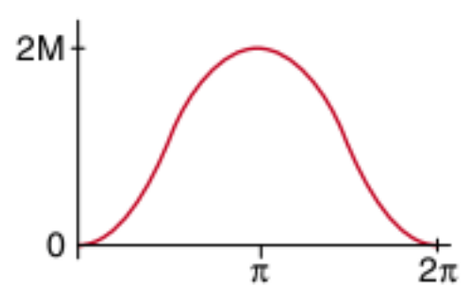


sen α = 0,8
cos α = 0,6
$|\vec{A}| = |\vec{B}| = 20$ N

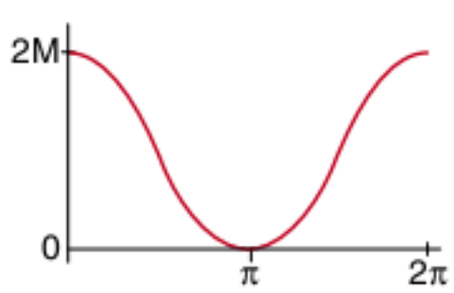
10 **UFC 2003** $\vec{M}$ e $\vec{N}$ são vetores de módulos iguais ($|\vec{M}| = |\vec{N}| = M$). O vetor $\vec{M}$ é fixo e o vetor $\vec{N}$ pode girar em torno do ponto O (veja figura) no plano formado por $\vec{M}$ e $\vec{N}$. Sendo $\vec{R} = \vec{M} + \vec{N}$, indique, entre os gráficos abaixo, aquele que pode representar a variação de $|\vec{R}|$ como função do ângulo θ entre $\vec{M}$ e $\vec{N}$.



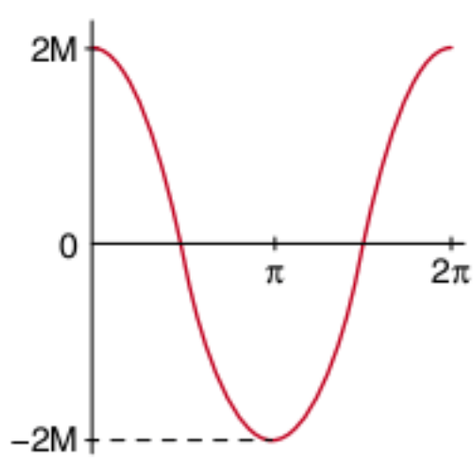
(a)



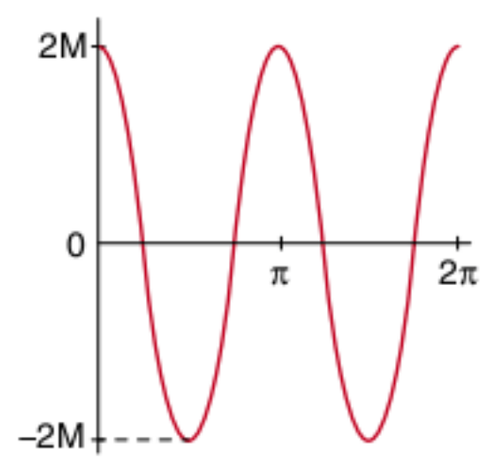
(b)



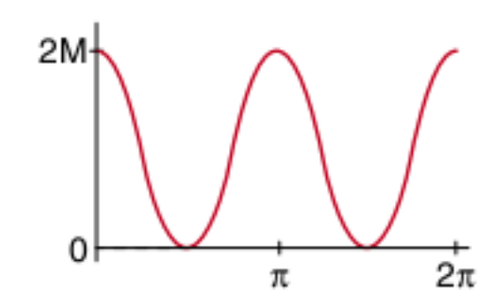
(c)



(d)

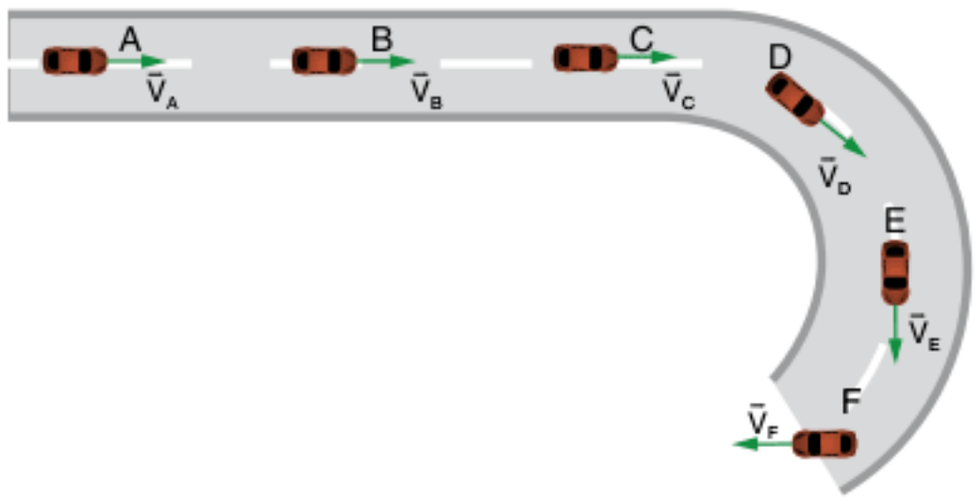


(e)



Conceitos de Cinemática vetorial

11 **UFSC 2008** Um carro com velocidade de módulo constante de 20 m/s percorre a trajetória descrita na figura, sendo que de A a C a trajetória é retilínea e de D a F é circular, no sentido indicado.

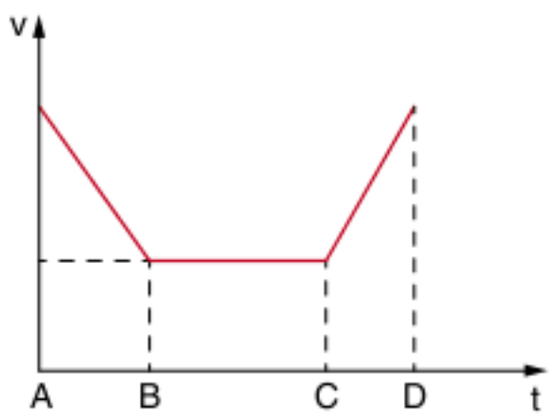


Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

01 O carro tem movimento uniforme de A até C.
02 O carro tem movimento uniforme de A até F.
04 O carro tem aceleração de A até C.
08 O carro tem aceleração de D até F.
16 O carro tem movimento retilíneo uniformemente variado de D até F.

Soma = ☐

12 O gráfico a seguir representa o módulo da velocidade (v) de um automóvel em função do tempo (t) quando o mesmo percorre um trecho circular de uma rodovia:



Em relação a esse movimento, podemos afirmar que:

(a) entre A e B, a aceleração tangencial é nula.
(b) entre B e C, a aceleração tangencial é nula.
(c) entre B e C, a aceleração centrípeta é nula.
(d) entre C e D, a aceleração centrípeta é nula.
(e) entre C e D, a aceleração tangencial tem sentido oposto ao da velocidade.

13 **UEL** Das afirmativas abaixo:

I. Quando a velocidade de um corpo é nula, sua aceleração é também nula.
II. Quando a aceleração de um corpo é nula, sua velocidade é também nula.
III. Os vetores velocidade e aceleração podem ser perpendiculares entre si.

(a) somente I é correta.
(b) somente II é correta.
(c) somente III é correta.
(d) somente II e III são corretas.
(e) todas são corretas.

14 **UFPA** Uma partícula percorre, com movimento uniforme, uma trajetória não retilínea. Em cada instante, teremos que:

(a) os vetores velocidade e aceleração são paralelos entre si.
(b) a velocidade vetorial é nula.
(c) os vetores velocidade e aceleração são perpendiculares entre si.
(d) os vetores velocidade e aceleração têm direções independentes.
(e) o valor do ângulo entre o vetor velocidade e o vetor aceleração muda de ponto a ponto.

15 **PUC-RS** Com relação à velocidade e à aceleração de um corpo, é correto afirmar que:

(a) a aceleração é nula sempre que o módulo da velocidade é constante.
(b) um corpo pode estar acelerado mesmo que o módulo de sua velocidade seja constante.
(c) a aceleração centrípeta é nula no movimento circunferencial.
(d) sempre existe uma aceleração tangencial no movimento circunferencial.
(e) a velocidade é diretamente proporcional à aceleração em qualquer movimento acelerado.

16 Analise as proposições a seguir e determine quais são corretas.

01 Se a velocidade vetorial de um ponto material é constante e não nula, sua trajetória pode ser retilínea, mas não necessariamente.
02 Para que a velocidade vetorial de um corpo permaneça constante, ele deve se mover em MRU.
04 Duas pessoas sentadas em um mesmo automóvel podem estar se deslocando em relação à estrada com diferentes velocidades lineares.
08 Quando o módulo da velocidade de um móvel for constante, esse móvel não possui aceleração.
16 Enquanto a aceleração vetorial de um móvel permanece constante, não pode haver alteração na direção da velocidade vetorial.

Soma = ☐

17 **PUC-MG** As figuras mostram reproduções de três fotografias estroboscópicas, cada uma correspondendo ao movimento de uma partícula em um plano. Em todas as fotos, duas posições sucessivas da partícula correspondem sempre a um mesmo intervalo de tempo, a saber, 0,1 segundo.

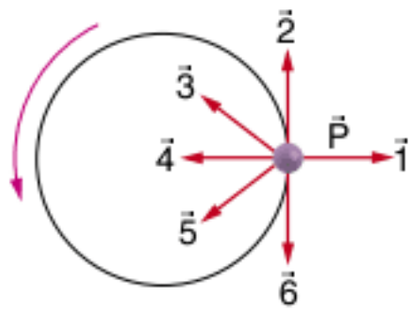
Sobre essas situações, analise as seguintes afirmações.

I. Existe aceleração centrípeta em B e em C.
II. Existe aceleração tangencial em B e em C.
III. Em uma das situações não há aceleração.

Assinale:

(a) se todas as afirmativas são corretas.
(b) se todas as afirmativas são falsas.
(c) se apenas as afirmativas I e II são corretas.
(d) se apenas as afirmativas II e III são corretas.
(e) se apenas as afirmativas I e III são corretas.

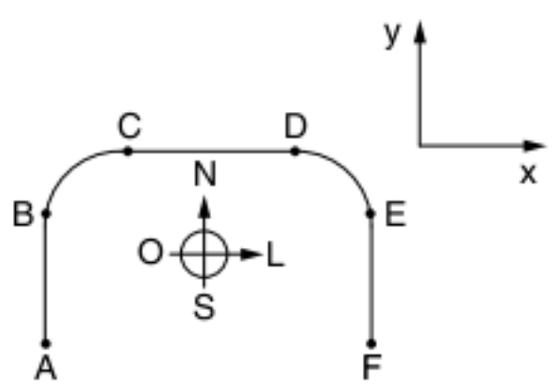
18 **FMABC** Sabendo-se que o móvel P executa um movimento circular retardado, analise as 3 proposições a seguir, assinalando certo ou errado.



I. Os vetores que representam, respectivamente, a velocidade vetorial e a aceleração vetorial são: $\vec{2}$ e $\vec{5}$.
II. Os vetores que representam, respectivamente, a aceleração centrípeta e a tangencial são: $\vec{4}$ e $\vec{6}$.
III. A velocidade vetorial e a aceleração vetorial são representadas pelos vetores $\vec{6}$ e $\vec{3}$, respectivamente.

Responda de acordo com o código abaixo:
(a) se todas forem corretas.
(b) se apenas I e II forem corretas.
(c) se apenas I e III forem corretas.
(d) se apenas II e III forem corretas.
(e) se todas forem incorretas.

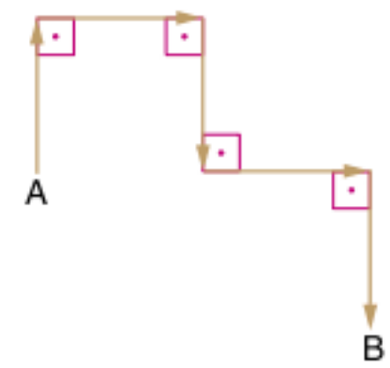
19 **ITA 2007** A figura mostra uma pista de corrida A B C D E F, com seus trechos retilíneos e circulares percorridos por um atleta desde o ponto A, de onde parte do repouso, até a chegada em F, onde para. Os trechos BC, CD e DE são percorridos com a mesma velocidade de módulo constante.
Considere as seguintes afirmações.
I. O movimento do atleta é acelerado nos trechos AB, BC, DE e EF.
II. O sentido da aceleração vetorial média do movimento do atleta é o mesmo nos trechos AB e EF.
III. O sentido da aceleração vetorial média do movimento do atleta é para sudeste no trecho BC, e, para sudoeste, no DE.



Então, está(ão) correta(s):
(a) apenas a I.
(b) apenas a I e II.
(c) apenas a I e III.
(d) apenas a II e III.
(e) todas.

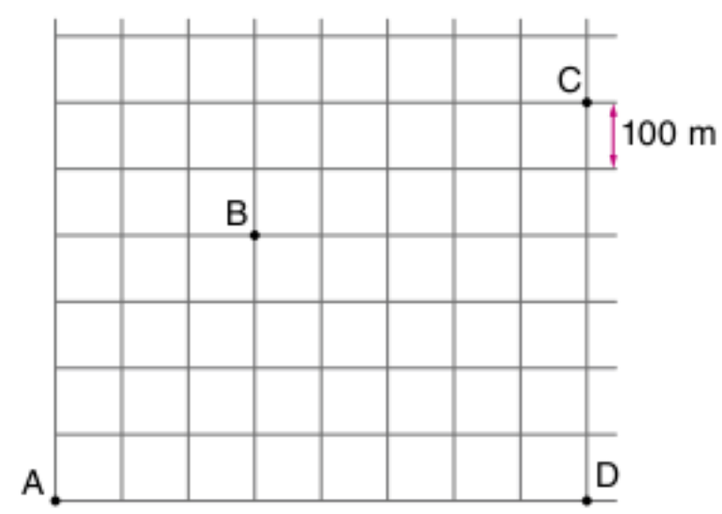
Deslocamento vetorial

20 **UFRN** A figura a seguir representa os deslocamentos de um móvel em várias etapas.



Cada vetor tem módulo igual a 20 m. A distância percorrida pelo móvel e o módulo do vetor deslocamento são, respectivamente, iguais a:
(a) $20\sqrt{5}$ m e $20\sqrt{5}$ m
(b) 40 m e $40\sqrt{5}$ m
(c) 100 m e $20\sqrt{5}$ m
(d) $20\sqrt{5}$ m e 40 m
(e) 100 m e $40\sqrt{5}$ m

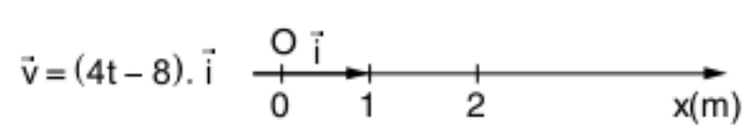
21 **UFC 2003** A figura a seguir mostra o mapa de uma cidade em que as ruas retilíneas se cruzam perpendicularmente e cada quarteirão mede 100 m. Você caminha pelas ruas a partir de sua casa, na esquina A, até a casa de sua avó, na esquina B. Dali segue até sua escola, situada na esquina C.



A menor distância que você caminha e a distância em linha reta entre a sua casa e a escola são, respectivamente:
(a) 1.800 m e 1.400 m
(b) 1.600 m e 1.200 m
(c) 1.400 m e 1.000 m
(d) 1.200 m e 800 m
(e) 1.000 m e 600 m

22 **PUC-MG** Um móvel parte do repouso, de um ponto sobre uma circunferência de raio R, e efetua um movimento circular uniforme de período igual a 8 s. Após 18 s de movimento, o seu vetor deslocamento tem módulo igual a:
(a) 0
(b) R
(c) 2R
(d) $\frac{2R}{3}$
(e) $R\sqrt{2}$

23 **EN** Um móvel desloca-se em uma trajetória retilínea e na direção do eixo Ox, de tal maneira que sua velocidade ($\vec{v}$) varia com o tempo (t) de acordo com a equação:

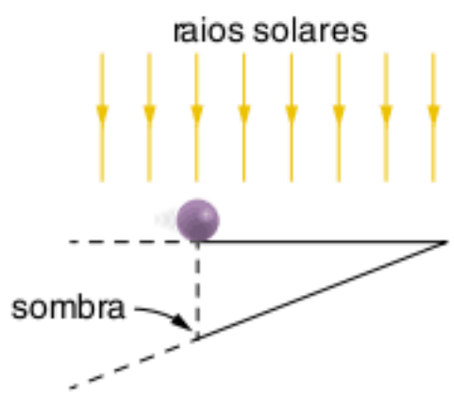


onde t é dado em segundos, v em metros por segundo e $\vec{i}$ é o versor mostrado na figura. Sabendo que para t = 1 s o vetor posição da partícula (cuja origem está em O) é dado por $\vec{r} = 2\vec{i}$ (com $|\vec{r}|$ em metros), determine:

a) o vetor posição da partícula no instante t = 0.
b) o vetor posição da partícula no instante t = 6 s.
c) o módulo do vetor deslocamento entre os instantes t = 0 e t = 6 s.
d) a distância total percorrida entre os instantes t = 0 e t = 6 s.

Velocidade vetorial

24 **Vunesp** Uma bola desloca-se em trajetória retilínea, com velocidade constante, sobre um plano horizontal transparente. Com o sol a pino, a sombra da bola é projetada verticalmente sobre um plano inclinado, como mostra a figura a seguir.



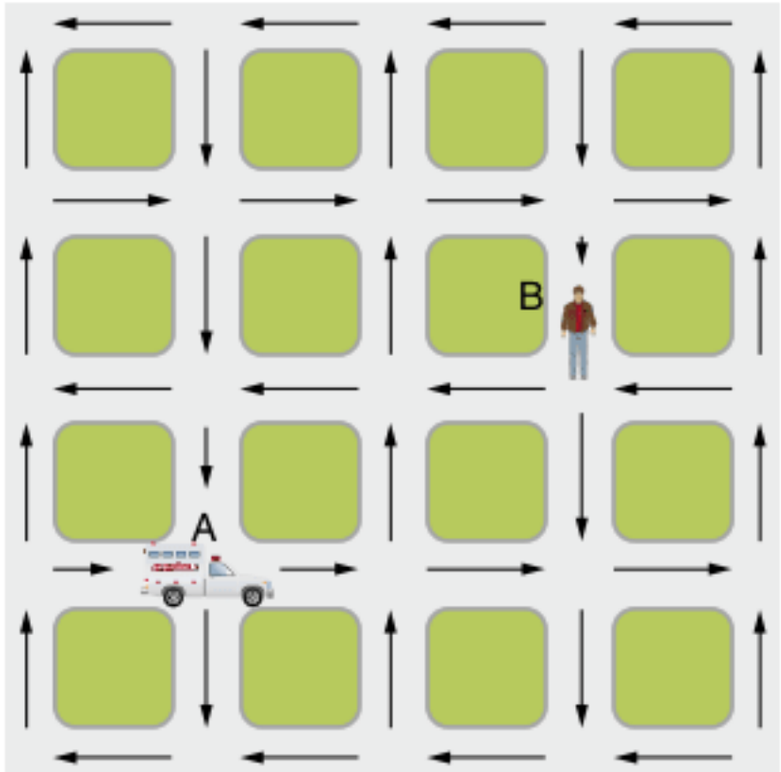
Nessas condições, a sombra desloca-se sobre o plano inclinado em:

(a) movimento retilíneo uniforme, com velocidade de módulo igual ao da velocidade da bola.
(b) movimento retilíneo uniforme, com velocidade de módulo menor que o da velocidade da bola.
(c) movimento retilíneo uniforme, com velocidade de módulo maior que o da velocidade da bola.
(d) movimento retilíneo uniformemente variado, com velocidade de módulo crescente.
(e) movimento retilíneo uniformemente variado, com velocidade de módulo decrescente.

25 **FEI** Uma partícula descreve uma circunferência de raio de 20 cm, percorrendo $\frac{1}{6}$ da mesma em 8 s. Qual é, em cm/s, o módulo do vetor velocidade média da partícula no referido intervalo de tempo?

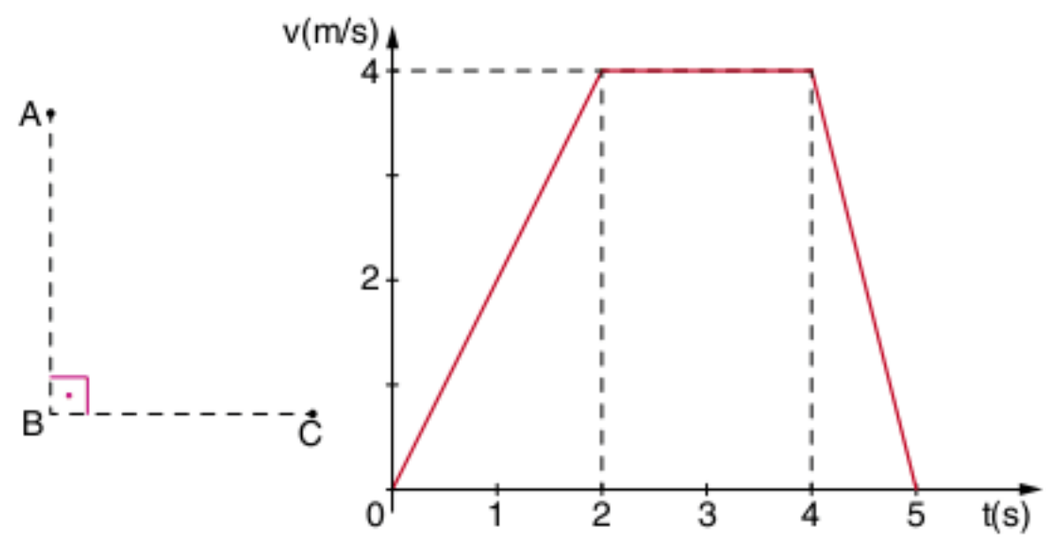
(a) 1,8
(b) 2,0
(c) 2,5
(d) 2,8
(e) 3,5

26 **Unicamp** A figura a seguir representa um mapa da cidade de Vectoria, o qual indica a direção das mãos do tráfego. Devido ao congestionamento, os veículos trafegam com a velocidade média de 18 km/h. Cada quadra dessa cidade mede 200 m por 200 m (do centro de uma rua ao centro de outra rua). Uma ambulância localizada em A precisa pegar um doente localizado bem no meio da quadra em B, sem andar na contramão.



a) Qual o menor tempo gasto (em minutos) no percurso de A para B?
b) Qual é o módulo do vetor velocidade média (em km/h) entre os pontos A e B?

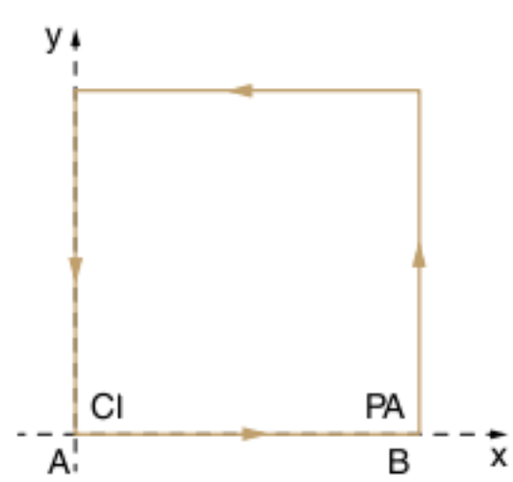
27 Uma partícula parte do ponto A da trajetória ABC, esquematizada abaixo, no instante $t_0 = 0$, atinge o ponto B no instante $t_1 = 3{,}0$ s e para no ponto C no instante $t_2 = 5{,}0$ s. A variação de sua velocidade escalar pode ser observada no gráfico abaixo.



Considerando o intervalo de 0 a 5,0 s, calcule, para a partícula:

a) o valor absoluto da velocidade escalar média.
b) a intensidade da velocidade vetorial média.

28 **UFG 2008 (Adapt.)** O excesso de navegação no mundo virtual fez com que um cidadão (CI), "ao se sentir obeso", procurasse um contato físico com a realidade e, para tal, contratou um *personal* amigo (PA) para fazer parte de seus exercícios matinais. Suponha que isso tenha ocorrido em uma praça quadrada de Goiânia, de lado 300 m, conforme esboçada na figura a seguir.



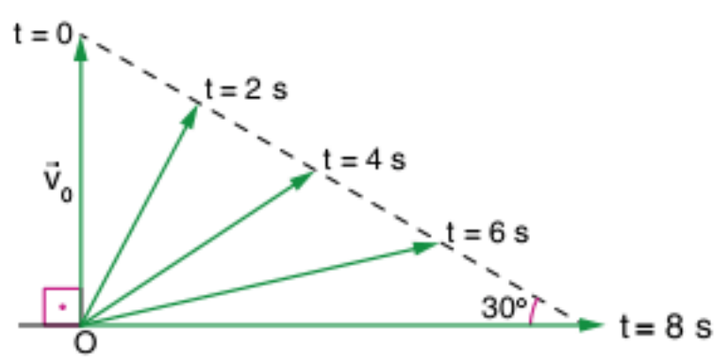
Previamente combinado, as duas pessoas, CI e PA, saíram no mesmo instante de suas posições iniciais, A e B, representadas na figura, caminhando no sentido anti-horário. CI partiu do repouso com aceleração de $5{,}0 \cdot 10^{-3}$ m/s², e PA andou desde o início com velocidade constante de 1,0 m/s. Determine, entre a posição inicial e a posição em que se encontraram:

a) o vetor velocidade média (módulo, direção e sentido) do PA.
b) a velocidade escalar média do CI.

Aceleração vetorial

29 **UFPA** Uma partícula em MCU percorre 250 cm em π segundos, com aceleração de 500 cm/s². Qual é o período de seu movimento?

30 **FEI** A velocidade $\vec{v}$ de um móvel em função do tempo acha-se representada pelo diagrama vetorial da figura. A intensidade da velocidade inicial é $v_0 = 20$ m/s. Determine o módulo da aceleração vetorial média entre os instantes t = 0 e t = 8 s.



31 **ITA** Uma partícula descreve um movimento circular de raio R, partindo do repouso no instante t = 0 e com uma aceleração tangencial $\vec{a}_t$, cujo módulo é constante. Sendo t o tempo e $\vec{a}_c$ a aceleração centrípeta no instante t, podemos afirmar que $\frac{|\vec{a}_c|}{|\vec{a}_t|}$ é igual a:

(a) $\frac{a_t^2 \cdot t}{R}$
(b) $\frac{R}{a_t \cdot t^2}$
(c) $\frac{v^2}{R}$
(d) $\frac{a_t \cdot t}{R}$
(e) $\frac{a_t \cdot t^2}{R}$

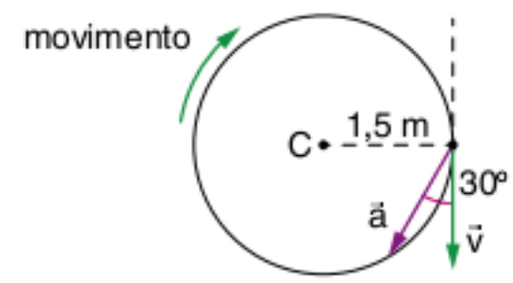
32 **PUC-SP** Para calcular a aceleração tangencial média de um corpo em movimento circular, cujo raio de curvatura é π m, você dispõe de uma tabela que relaciona, a partir do repouso e do instante t = 0, o número de voltas completas e o respectivo intervalo de tempo.

	Número de voltas completas	Intervalo de tempo
1ª tomada de dados	20	1 s
2ª tomada de dados	80	2 s
3ª tomada de dados	100	3 s

O valor da aceleração tangencial média sofrida pelo corpo durante essa experiência é:

(a) 20 m/s²
(b) 40 m/s²
(c) 40 voltas/s²
(d) 80 voltas/s²
(e) 100 voltas/s²

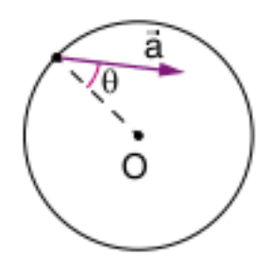
33 Uma partícula percorre uma circunferência de 1,5 m de raio no sentido horário, como está representado na figura. No instante t_0, a velocidade vetorial da partícula é $\vec{v}$ e a aceleração vetorial é $\vec{a}$.



Sabendo que $|\vec{v}| = 3{,}0$ m/s:

a) calcule $|\vec{a}|$.
b) diga se no instante t_0 o movimento é acelerado ou retardado. Justifique sua resposta.

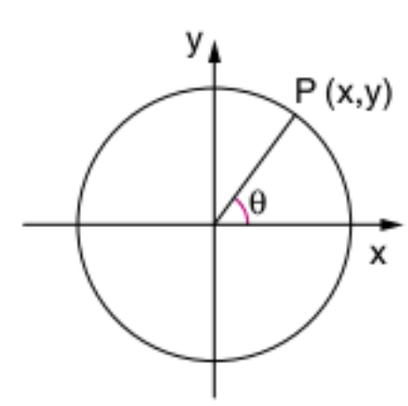
34 Uma partícula move-se em trajetória circular de centro O, com movimento uniformemente acelerado, tendo velocidade escalar $v_0 = 4{,}0$ m/s no instante t = 0. A figura representa a aceleração vetorial instantânea $\vec{a}$ no instante t = 2,0 s.



Sabendo que $|\vec{a}| = 26$ m/s² e sen $\theta = \frac{5}{13}$, calcule:

a) o módulo da aceleração tangencial.
b) o módulo da aceleração centrípeta no instante t = 2,0 s.
c) a velocidade escalar no instante t = 2,0 s.
d) o raio da trajetória.

35 **UFMS 2002** Uma partícula, identificada pelo ponto P(x, y) e pelo ângulo θ, desloca-se em movimento uniforme sobre uma circunferência de raio 5 cm (vide figura), descrevendo, no sentido anti-horário, uma volta completa a cada 12 segundos. Sabe-se que, no instante t = 0, as informações que se tem sobre as coordenadas do ponto são: x = 2,5 cm e y > 0.



É correto afirmar que:

01 a partícula não tem aceleração.
02 o vetor velocidade linear não varia.
04 a cada 3 segundos de movimento, o módulo do vetor deslocamento da partícula é $5\sqrt{2}$ cm.
08 o vetor aceleração não varia.
16 $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}t$, onde (θ) é dado em radianos e (t) em segundos.

32 $x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}t\right)$, onde (x) é dado em centímetros e (t) em segundos.

Soma = ☐

Equação paramétrica do movimento

36 **PUC-SP** Uma partícula movimenta-se no plano Oxy de modo que as equações paramétricas de sua trajetória são:

$$x = t + 3 \quad e \quad y = 5 - t$$

com x e y medidos em metros e t em segundos.

a) Qual a velocidade da partícula no instante t = 5 s?

b) Em que instante a partícula está a igual distância dos eixos Ox e Oy?

37 Em relação a um referencial cartesiano xOy, uma partícula se move segundo os seguintes movimentos parciais dados através de suas funções horárias. Determine e identifique a equação da trajetória do móvel em cada caso:

(a) $x = 3t;\ y = 18t^2$

(b) $x = 6t - 12t^2;\ y = 4t - 8t^2$

(c) $x = 2 - 4t;\ y = 5t^2 - 2t$

(d) $x = 3\cos\frac{2\pi t}{3};\ y = 3\text{sen}\frac{2\pi t}{3}$

(e) $x = 2\text{sen}\frac{\pi t}{3};\ y = 3\cos\frac{\pi t}{3}$

Composição de movimento – unidimensional

38 Um carro se desloca em movimento retilíneo uniforme a 10 m/s, em relação a um observador, conforme ilustra a figura a seguir. Preso ao carro, um sistema bloco-mola oscila em movimento harmônico simples, sendo 6 m/s o módulo máximo da velocidade do bloco em relação ao carro. Determine os módulos máximo e mínimo da velocidade do bloco em relação ao observador.

39 **PUC** Dois móveis estão dotados de movimentos uniformes sobre uma trajetória retilínea, de tal forma que a distância entre eles aumenta de 10 metros por segundo quando se deslocam no mesmo sentido e de 30 metros quando se deslocam em sentidos opostos. Os valores das velocidades destes móveis são:

(a) 20 m/s e 10 m/s

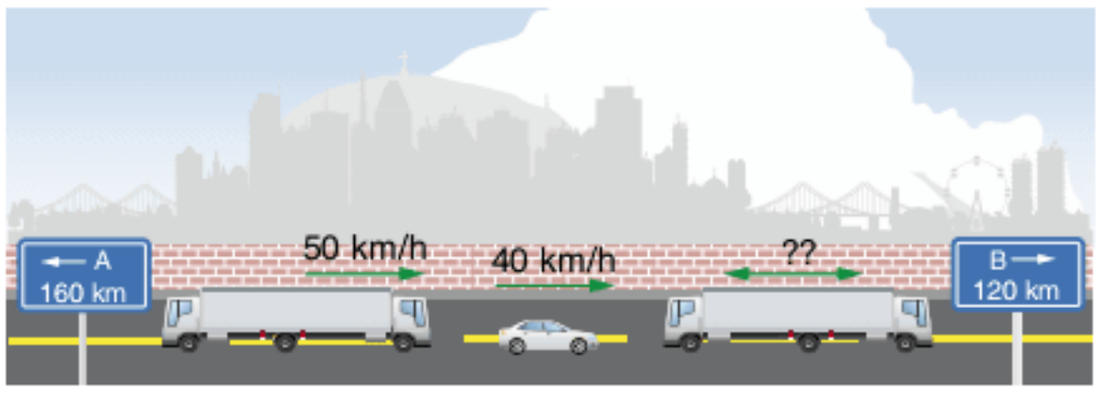
(b) 30 m/s e 5 m/s

(c) 30 m/s e 20 m/s

(d) 20 m/s e 5 m/s

(e) 25 m/s e 10 m/s

40 **Fuvest 2003** Uma jovem viaja de uma cidade A para uma cidade B, dirigindo um automóvel por uma estrada muito estreita. Em um certo trecho, em que a estrada é reta e horizontal, ela percebe que seu carro está entre dois caminhões-tanque bidirecionais e iguais, como mostra a figura. A jovem observa que os dois caminhões, um visto através do espelho retrovisor plano, e o outro, através do para-brisa, parecem aproximar-se dela com a mesma velocidade.



Como o automóvel e o caminhão de trás estão viajando no mesmo sentido, com velocidades de 40 km/h e 50 km/h, respectivamente, pode-se concluir que a velocidade do caminhão que está à frente é:

(a) 50 km/h com sentido de A para B.

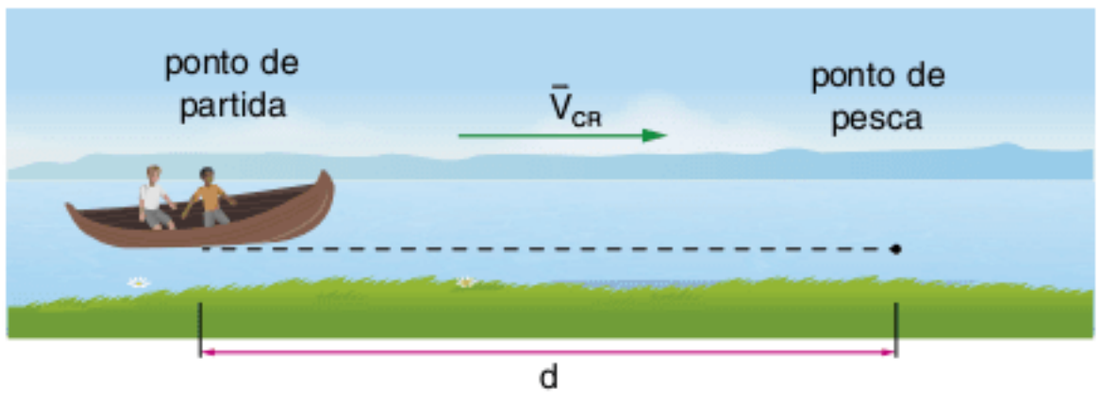
(b) 50 km/h com sentido de B para A.

(c) 40 km/h com sentido de A para B.

(d) 30 km/h com sentido de B para A.

(e) 30 km/h com sentido de A para B.

41 **UFSC 2000** Descendo um rio em sua canoa, sem remar, dois pescadores levam 300 segundos para atingir o seu ponto de pesca, na mesma margem do rio e em trajetória retilínea. Partindo da mesma posição e remando, sendo a velocidade da canoa, em relação ao rio, igual a 2,0 m/s, eles atingem o seu ponto de pesca em 100 segundos. Após a pescaria, remando contra a correnteza do rio, eles gastam 600 segundos para retornar ao ponto de partida.



Considerando que a velocidade da correnteza $\vec{V}_{CR}$ é constante, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

01 Quando os pescadores remaram rio acima, a velocidade da canoa, em relação à margem, foi igual a 4,00 m/s.

02 Não é possível calcular a velocidade com que os pescadores retornaram ao ponto de partida, porque a velocidade da correnteza não é conhecida.

04 Quando os pescadores remaram rio acima, a velocidade da canoa, em relação ao rio, foi de 1,50 m/s.

08 A velocidade da correnteza do rio é 1,00 m/s.

16 O ponto de pesca fica a 300 metros do ponto de partida.

32 Não é possível determinar a distância do ponto de partida até o ponto de pesca.

64 Como a velocidade da canoa foi de 2,0 m/s, quando os pescadores remaram rio abaixo, então, a distância do ponto de partida ao ponto de pesca é 200 m.

Soma = ☐

42 **ITA 2009** Um barco leva 10 horas para subir e 4 horas para descer um mesmo trecho do rio Amazonas, mantendo constante o módulo de sua velocidade em relação à água. Quanto tempo o barco leva para descer esse trecho com os motores desligados?

(a) 14 horas e 30 minutos
(b) 13 horas e 20 minutos
(c) 7 horas e 20 minutos
(d) 10 horas
(e) Não é possível resolver porque não foi dada a distância percorrida pelo barco.

43 **Uerj 2006 (Adapt.)** Um barco percorre seu trajeto de descida de um rio, a favor da correnteza, com a velocidade de 2 m/s em relação à água. Na subida, contra a correnteza, retornando ao ponto de partida, sua velocidade é de 8 m/s, também em relação à água. Considere que:

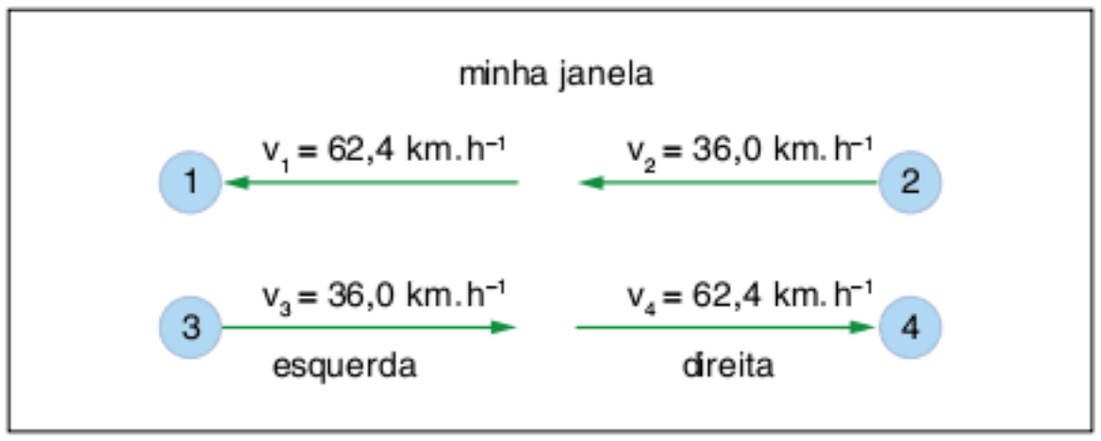
– o barco navegue sempre em linha reta e na direção da correnteza;
– a velocidade da correnteza seja sempre constante;
– a soma dos tempos de descida e de subida do barco seja igual a 10 min.

Assim, a maior distância, em metros, que o barco pode percorrer, descendo ou subindo o rio, é igual a:

(a) 1.250
(b) 1.500
(c) 1.750
(d) 2.000

Composição de movimento – bidimensional

44 **Vunesp** Gotas de chuva que caem com velocidade v = 20 m/s são vistas através da minha vidraça formando um ângulo de 30° com a vertical, vindo da esquerda para a direita. Quatro automóveis estão passando pela minha rua com as velocidades de módulos e sentidos indicados. Qual dos motoristas vê, através do vidro lateral, a chuva caindo na vertical?



(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) nenhum.

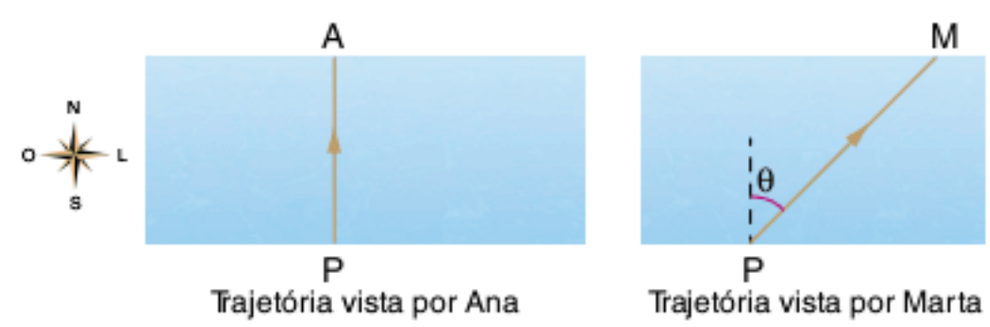
45 **UFMG** Um barco tenta atravessar um rio com 1,0 km de largura. A correnteza do rio é paralela às margens e tem velocidade de 4,0 km/h. A velocidade do barco, em relação à água, é de 3,0 km/h perpendicularmente às margens. Nessas condições, pode-se afirmar que o barco:

(a) atravessará o rio em 12 minutos.
(b) atravessará o rio em 15 minutos.
(c) atravessará o rio em 20 minutos.
(d) nunca atravessará o rio.

46 **FEI** Sabe-se que a distância entre as margens paralelas de um rio é de 100 m e que a velocidade da correnteza, de 6 m/s, é constante, com direção paralela às margens. Um barco parte de um ponto x da margem A com velocidade constante de 8 m/s, com direção perpendicular às margens do rio. A que distância do ponto x o barco atinge a margem B?

(a) 100 m
(b) 125 m
(c) 600 m
(d) 750 m
(e) 800 m

47 **Fuvest 2010** Pedro atravessa a nado, com velocidade constante, um rio de 60 m de largura e margens paralelas, em 2 minutos. Ana, que boia no rio e está parada em relação à água, observa Pedro, nadando no sentido sul-norte, em uma trajetória retilínea, perpendicular às margens. Marta, sentada na margem do rio, vê que Pedro se move no sentido sudoeste-nordeste, em uma trajetória que forma um ângulo θ com a linha perpendicular às margens. As trajetórias, como observadas por Ana e por Marta, estão indicadas nas figuras abaixo, respectivamente, por PA e PM. Se o ângulo θ for tal que $\cos\theta = \frac{3}{5}\left(\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}\right)$, qual o valor do módulo da velocidade:



a) de Pedro em relação à água?
b) de Pedro em relação à margem?
c) da água em relação à margem?

48 **UFPE 2001** Um nadador quer atravessar um rio de 30 m de largura cuja correnteza tem uma velocidade de 4,0 m/s. Se ele deseja atingir a outra margem, num ponto exatamente em frente ao ponto de partida, quantos segundos ele levará para fazer a travessia, se for capaz de nadar com velocidade constante de 5,0 m/s em relação à água?

49 **FEI** Um barco tem velocidade de 14,4 km/h em águas paradas. Com ele, deseja-se atravessar um rio cuja correnteza tem velocidade de 2 m/s, constante, indo de um ponto de uma margem até o ponto diametralmente oposto na outra margem. O ângulo que o eixo longitudinal do barco deve formar com a normal à correnteza é:

(a) 120°
(b) 90°
(c) 30°
(d) 60°
(e) 45°

50 **Cesesp-PE** Um avião, cuja velocidade em relação ao ar é v, viaja da cidade A para a cidade B em um tempo t, quando não há vento. Quanto tempo será gasto para a viagem, quando sopra um vento com velocidade u (em relação ao solo) perpendicularmente à linha que liga as duas cidades? (Despreze o tempo de subida e descida do avião.)

(a) $t.\left(1-\frac{u}{v}\right)^2$

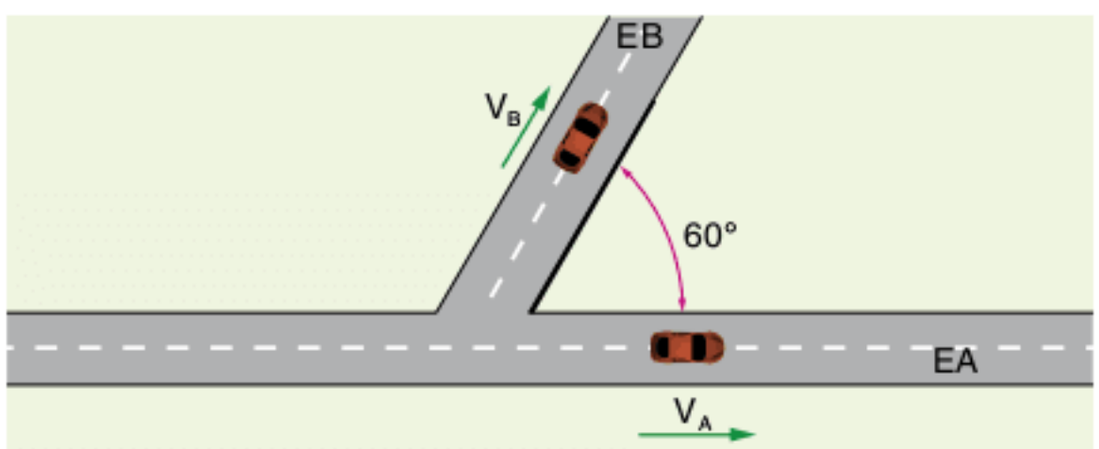
(b) $t.\left(1-\frac{u}{v}\right)$

(c) $t.\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(d) $t.\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

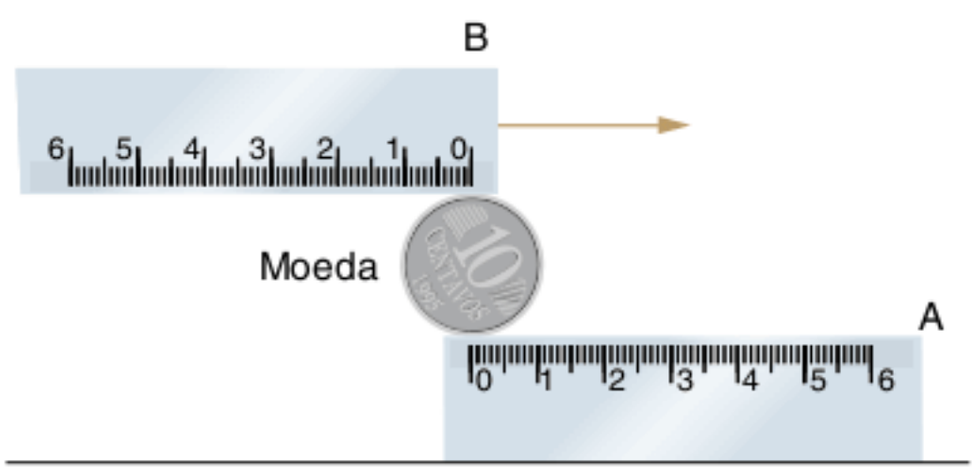
(e) $t.\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

51 **UFPE 2008** Os automóveis A e B se movem com velocidades constantes $v_A = 100$ km/h e $v_B = 82$ km/h, em relação ao solo, ao longo das estradas EA e EB indicadas nas figuras. Um observador no automóvel B mede a velocidade do automóvel A. Determine o valor da componente desta velocidade na direção da estrada EA, em km/h.



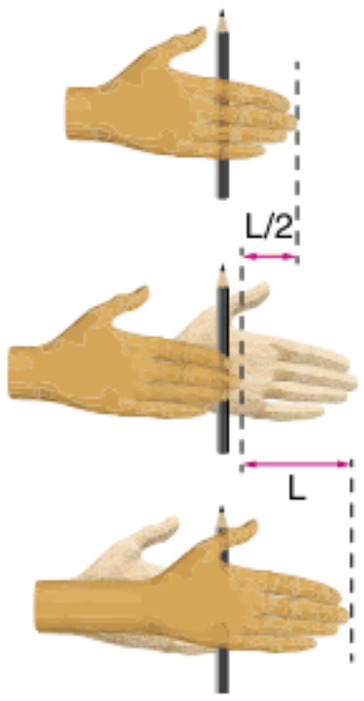
Composição de movimento – roda

52 **PUC-MG** A figura mostra uma montagem em que uma moeda rola sobre a régua A, partindo da posição mostrada na figura, "empurrada" pela régua B, sem que haja deslizamento dela em relação a qualquer uma das réguas. Quando a moeda estiver na posição "2 cm" em relação à régua A, a régua B terá percorrido, em relação à mesma régua A:



(a) 2 cm
(b) 1 cm
(c) 4 cm
(d) 6 cm
(e) 3 cm

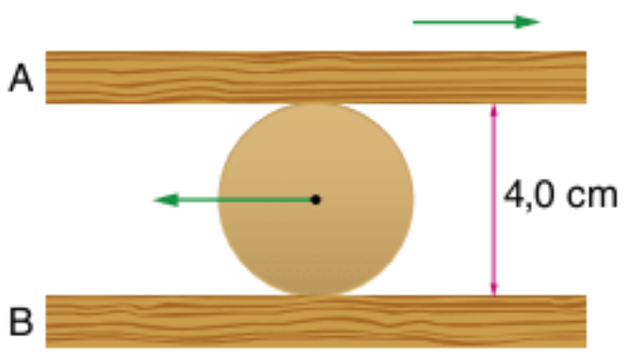
53 **Fuvest 2003** É conhecido o processo utilizado por povos primitivos para fazer fogo. Um jovem, tentando imitar parcialmente tal processo, mantém entre suas mãos um lápis de forma cilíndrica e com raio igual a 0,40 cm de tal forma que, quando movimenta a mão esquerda para a frente e a direita para trás, em direção horizontal, imprime ao lápis um rápido movimento de rotação. O lápis gira, mantendo seu eixo fixo na direção vertical, como mostra a figura a seguir. Realizando diversos deslocamentos sucessivos e medindo o tempo necessário para executá-los, o jovem conclui que pode deslocar a ponta dos dedos de sua mão direita de uma distância L = 15 cm, com velocidade constante, em aproximadamente 0,30 s.



Podemos afirmar que, enquanto gira num sentido, o número de rotações por segundo executadas pelo lápis é aproximadamente igual a:

(a) 5
(b) 8
(c) 10
(d) 12
(e) 20

54 **Fuvest** Um cilindro de madeira de 4,0 cm de diâmetro rola sem deslizar entre duas tábuas horizontais móveis, A e B, como mostra a figura. Em determinado instante, a tábua A se movimenta para a direita com velocidade de 40 cm/s e o centro do cilindro se move para a esquerda com velocidade de intensidade 10 cm/s. Qual é nesse instante a velocidade da tábua B em módulo e sentido?

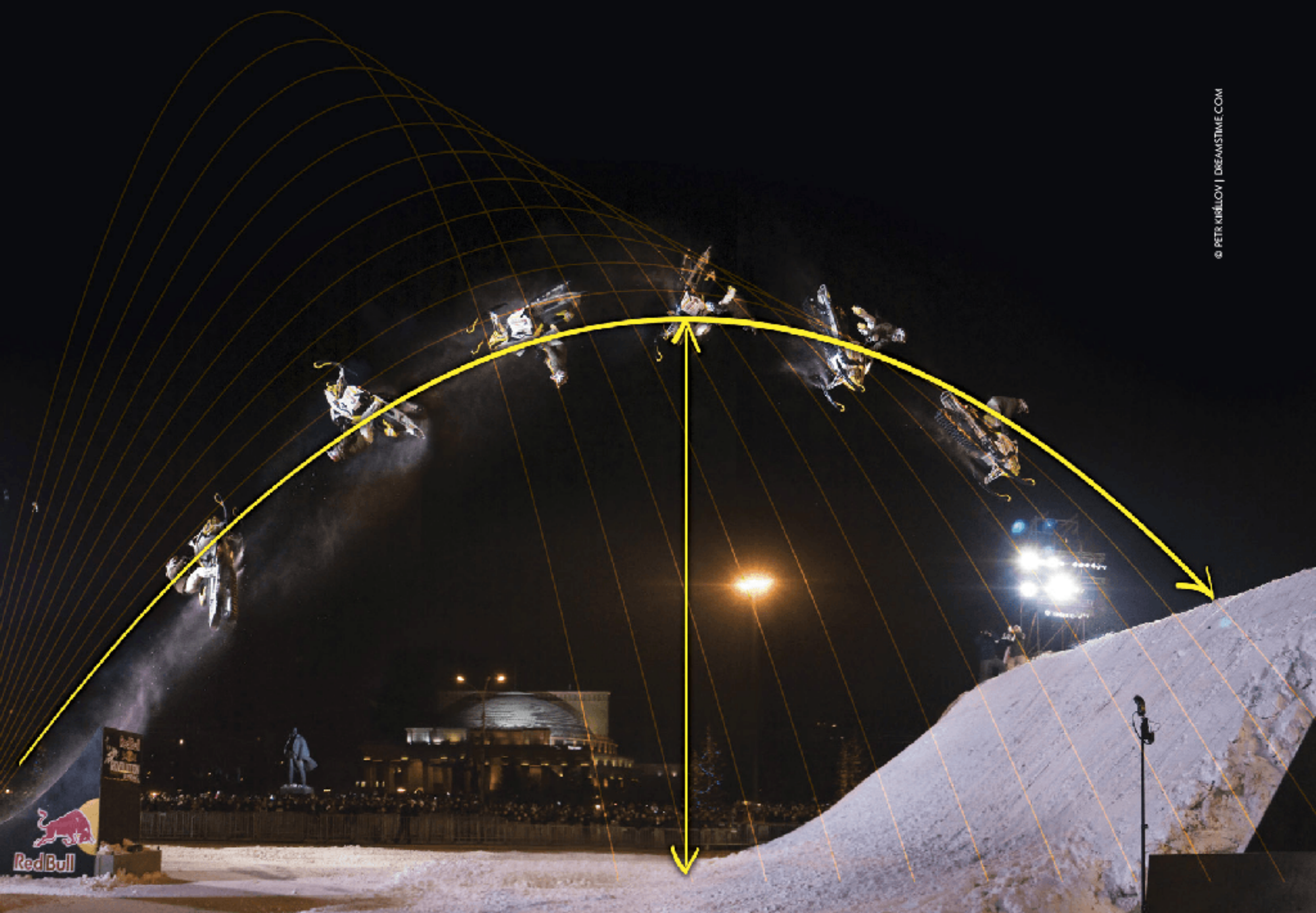


7

FRENTE 1

Lançamento oblíquo no vácuo

O estudo do lançamento oblíquo nos permite prever trajetórias de objetos que são lançados formando ângulos em relação à horizontal. É possível prever seu tempo de subida, sua altura máxima, seu tempo de descida e seu alcance. As extrapolações desse estudo permitem a realização, com segurança, de manobras, evitando que o piloto sofra acidentes.



© PETR KIRILLOV | DREAMSTIME.COM

Lançamento oblíquo no vácuo

Vamos tomar um corpo sendo lançado com velocidade $\vec{v}_0$ em uma direção que forma um ângulo θ com a horizontal.

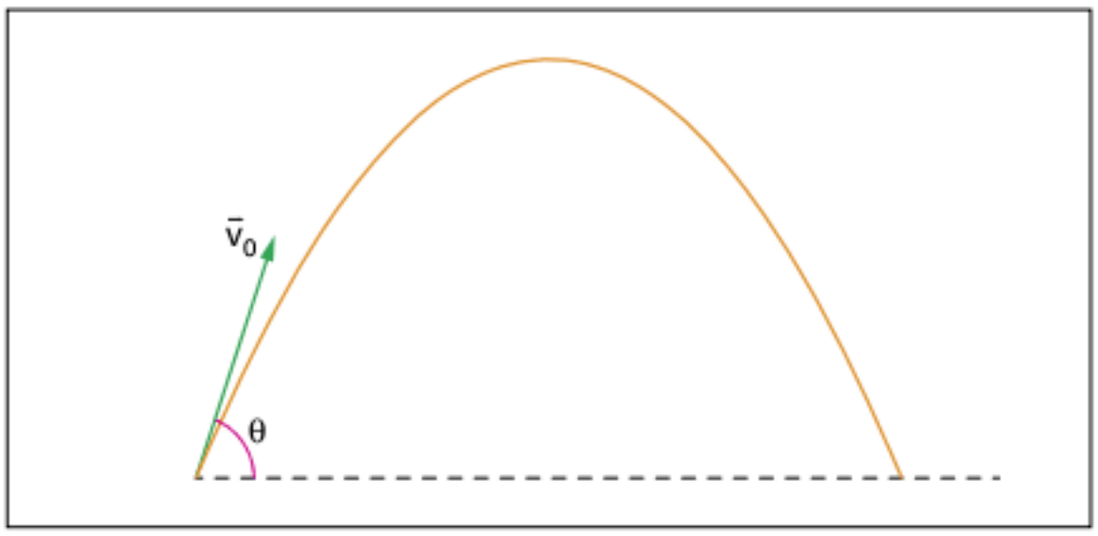


Fig. 1 Lançamento oblíquo.

Em nosso estudo, desprezamos a resistência do ar e consideramos o movimento com dimensões desprezíveis em relação ao raio da Terra. Desse modo, não levamos em conta a influência da curvatura da Terra, e a partícula estará sujeita a um campo gravitacional uniforme, onde o vetor aceleração é sempre perpendicular ao plano horizontal, com sentido para baixo e de módulo constante.

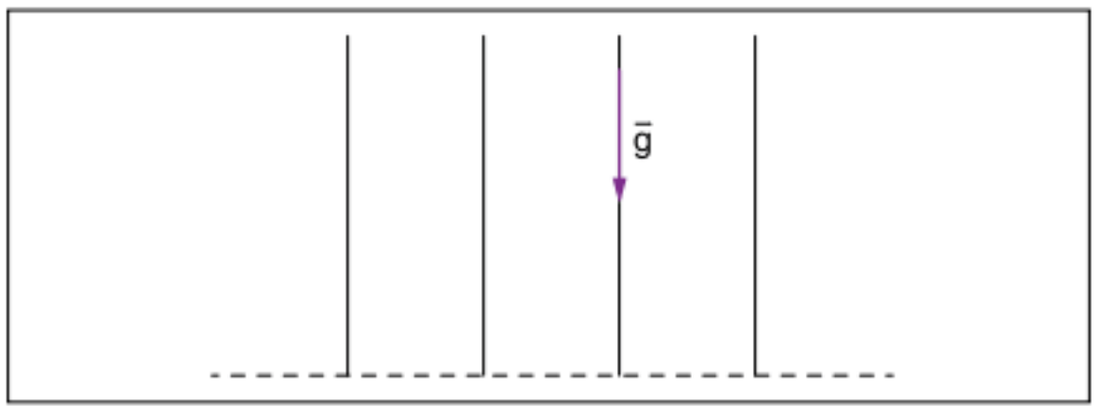


Fig. 2 Linhas de força em um campo gravitacional uniforme.

Assim, a única aceleração a que ficará sujeita a partícula é a da gravidade ($\vec{g}$), que será a sua aceleração vetorial durante todo o movimento, logo após ter sido lançada.

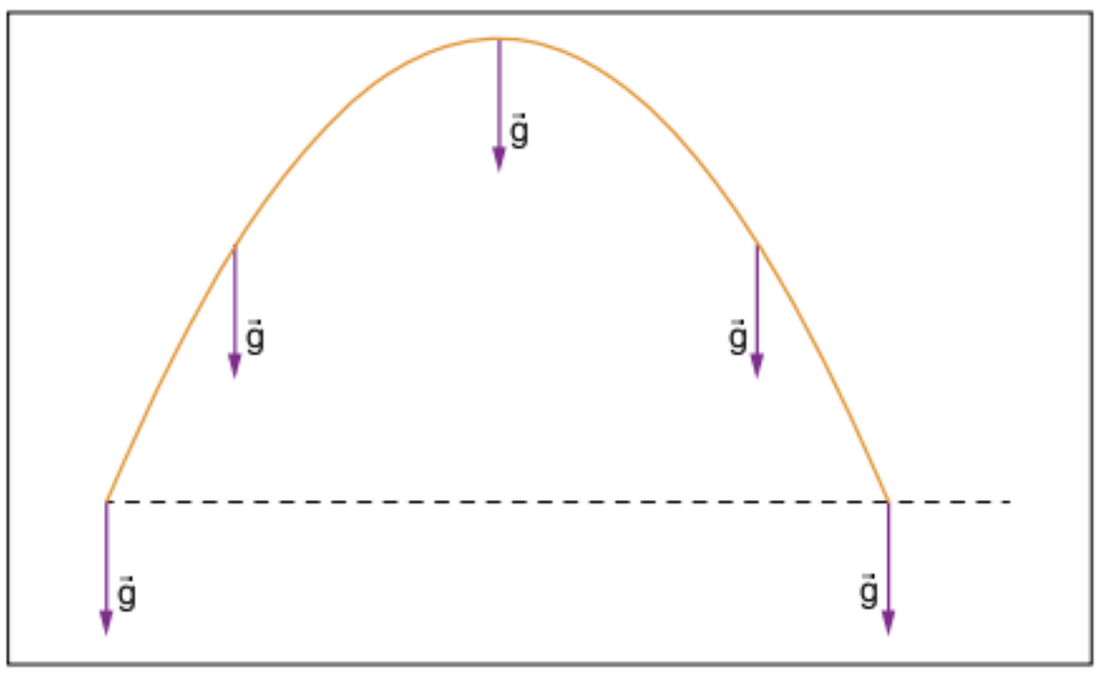


Fig. 3 O vetor aceleração é constante durante o movimento.

Esse movimento pode ser, então, considerado como a composição de dois movimentos simultâneos e independentes:

- um movimento vertical sujeito à aceleração constante da gravidade e, portanto, uniformemente variado.
- um movimento horizontal livre de acelerações e, portanto, uniforme.

Vamos estudá-los separadamente.

ATENÇÃO!

- Como descrito no capítulo 3, o valor de $|\vec{g}|$ é 9,8 m/s², porém muitos vestibulares adotam $|\vec{g}| = 10$ m/s² por simplicidade.
- Assumimos ainda que:

$$v_x = |\vec{v}_x|;\ v_y = |\vec{v}_y|;\ v_{0x} = |\vec{v}_{0x}| \text{ e } v_{0y} = |\vec{v}_{0y}|$$

Movimento vertical

Tomemos um eixo Oy orientado para cima e com sua origem coincidindo com o ponto do lançamento. Como a aceleração tem sentido para baixo, então:

$$a = -g.$$

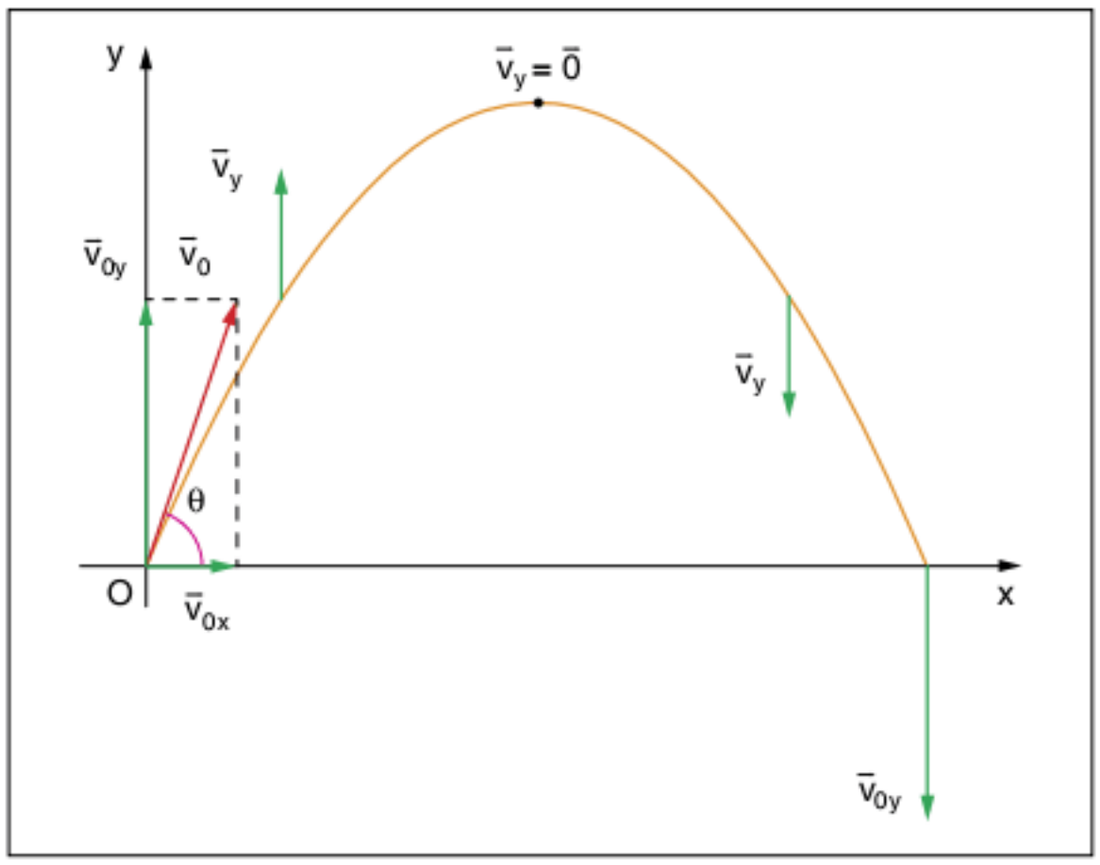


Fig. 4 Velocidade vertical, v_y.

Para podermos estudar o movimento vertical, decompomos a velocidade inicial de lançamento no eixo Oy.

Temos então:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta,$$

que é o módulo da velocidade inicial vertical.

No MUV, sabemos que as funções horárias do espaço e da velocidade e a equação de Torricelli são dadas por:

- $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- $v = v_0 + at$
- $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$

No nosso caso:

$s = y;\ s_0 = 0;\ \Delta s = \Delta y;\ v = v_y;\ v_0 = v_{0y}$ e $a = -g$

Daí:

$$y = v_0 . \text{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_0 . \text{sen}\,\theta - gt$$

$$v_y^2 = v_0^2 . \text{sen}^2\,\theta - 2g\Delta y$$

Podemos observar que a velocidade v_y diminui em módulo com o passar do tempo até se anular no ponto de altura máxima, conforme já estudado.

Movimento horizontal

Tomemos um eixo Ox orientado para a direita e com sua origem coincidindo com o ponto de lançamento.

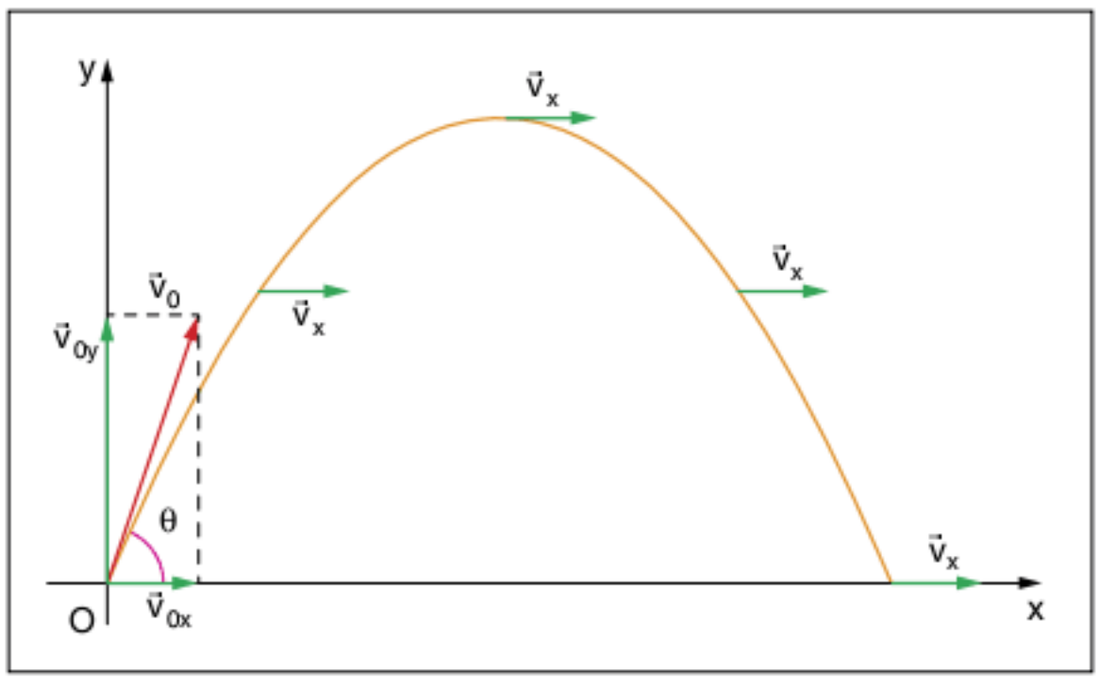


Fig. 5 Velocidade horizontal, v_x.

Para podermos estudar o movimento horizontal, decompomos a velocidade inicial de lançamento no eixo Ox.

Temos então:

$$\cos\theta = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 . \cos\theta,$$

que é o módulo da velocidade inicial horizontal.

No MU, sabemos que as funções horárias do espaço e da velocidade são dadas por:

- $s = s_0 + v \cdot t$
- $v = cte.$

No nosso caso:

$s = x;\ s_0 = 0$ e $v = v_{0x}$

Daí:

$$x = v_0 \cdot \cos\theta\, t$$

$$v = v_0 \cdot \cos\theta$$

ATENÇÃO!

Em cada ponto da trajetória, a partícula possui duas componentes da velocidade: uma componente constante na horizontal e uma componente variável na vertical.

Composição dos movimentos vertical e horizontal

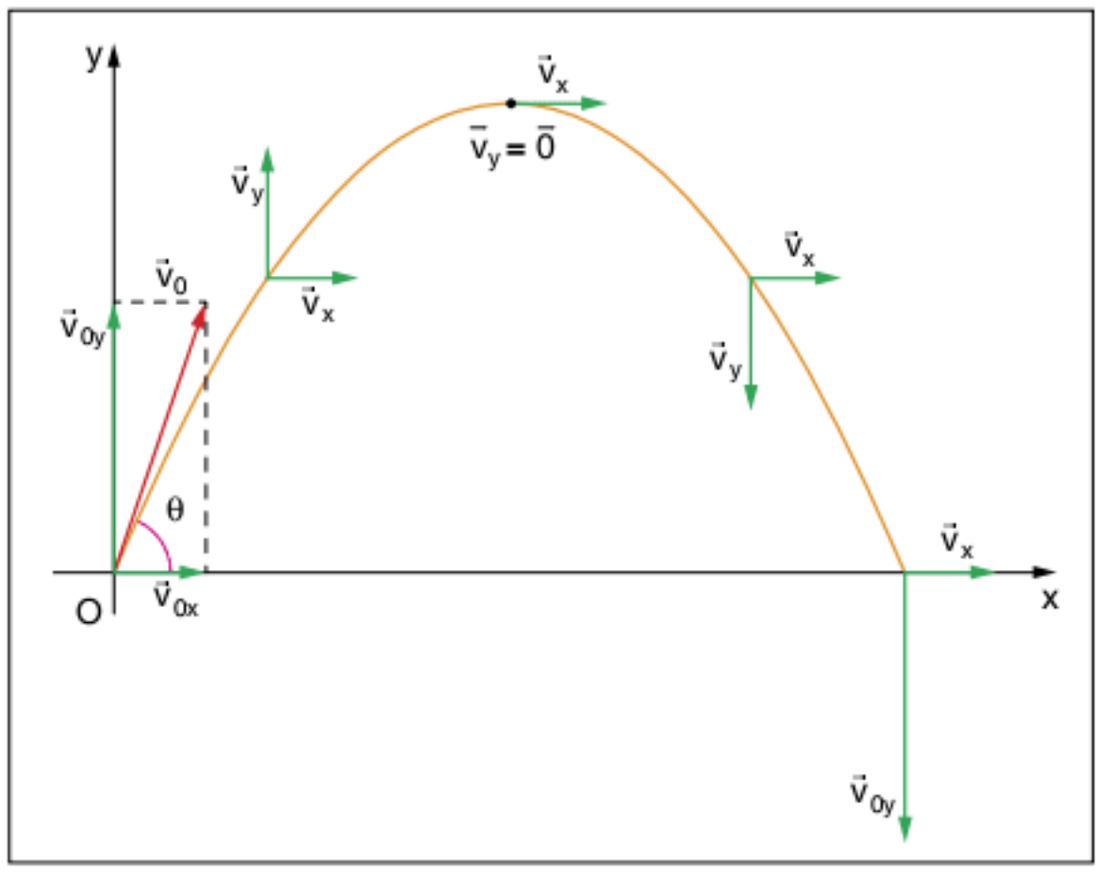


Fig. 6 Velocidade horizontal (MU) e velocidade vertical (MUV).

A velocidade vetorial instantânea será, em cada ponto, a soma dos vetores $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Sabemos ainda que o vetor velocidade instantânea será tangente à trajetória no ponto considerado.

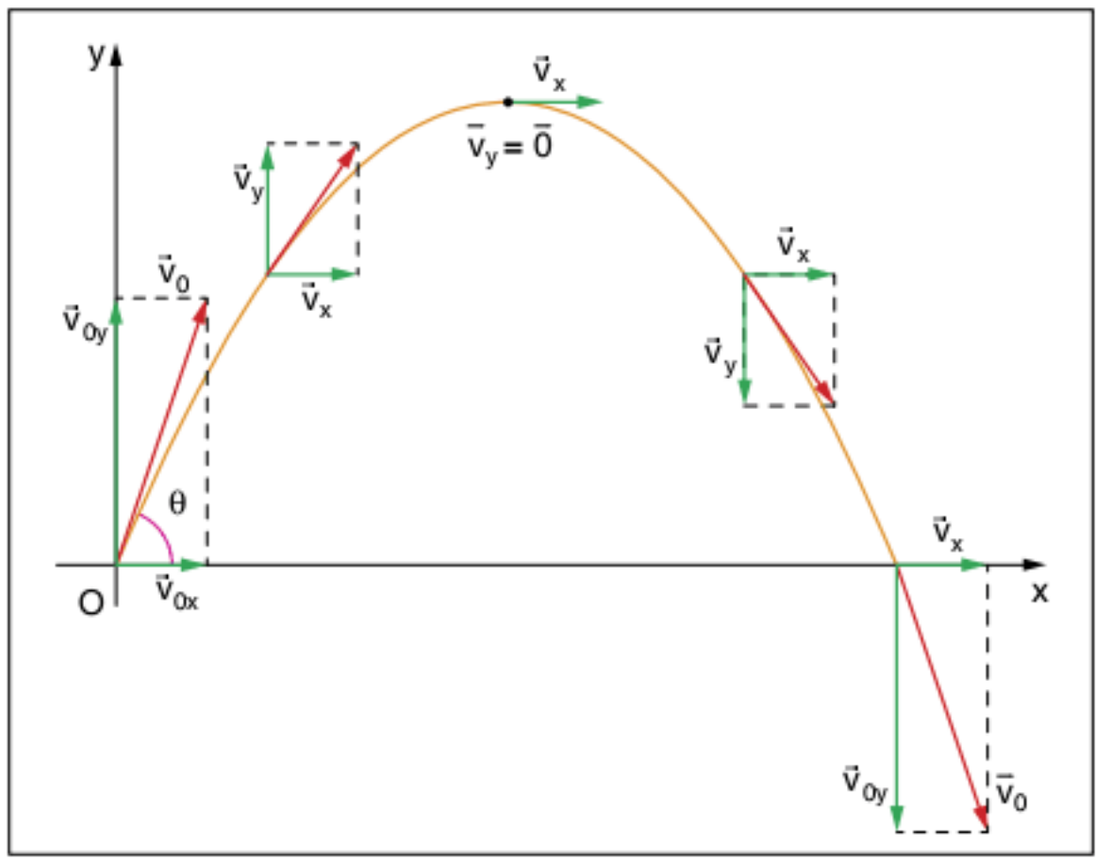


Fig. 7 Velocidade vetorial instantânea.

Observação:

- *No ponto de altura máxima, o módulo da velocidade é mínimo, porém não nulo, pois somente a velocidade vertical se anula, sendo constante a velocidade horizontal em todo o movimento.*
- *Assim como já estudado no capítulo 3, a velocidade vertical ao passar por uma dada altura tem o mesmo módulo, tanto na subida quanto na descida, diferindo apenas no sentido. Portanto, como a velocidade horizontal é constante, o módulo do vetor velocidade ao passar pela mesma altura, tanto na subida quanto na descida, é o mesmo, diferindo apenas na direção.*

Podemos observar também que a aceleração vetorial instantânea pode ser decomposta em duas componentes: tangencial e centrípeta.

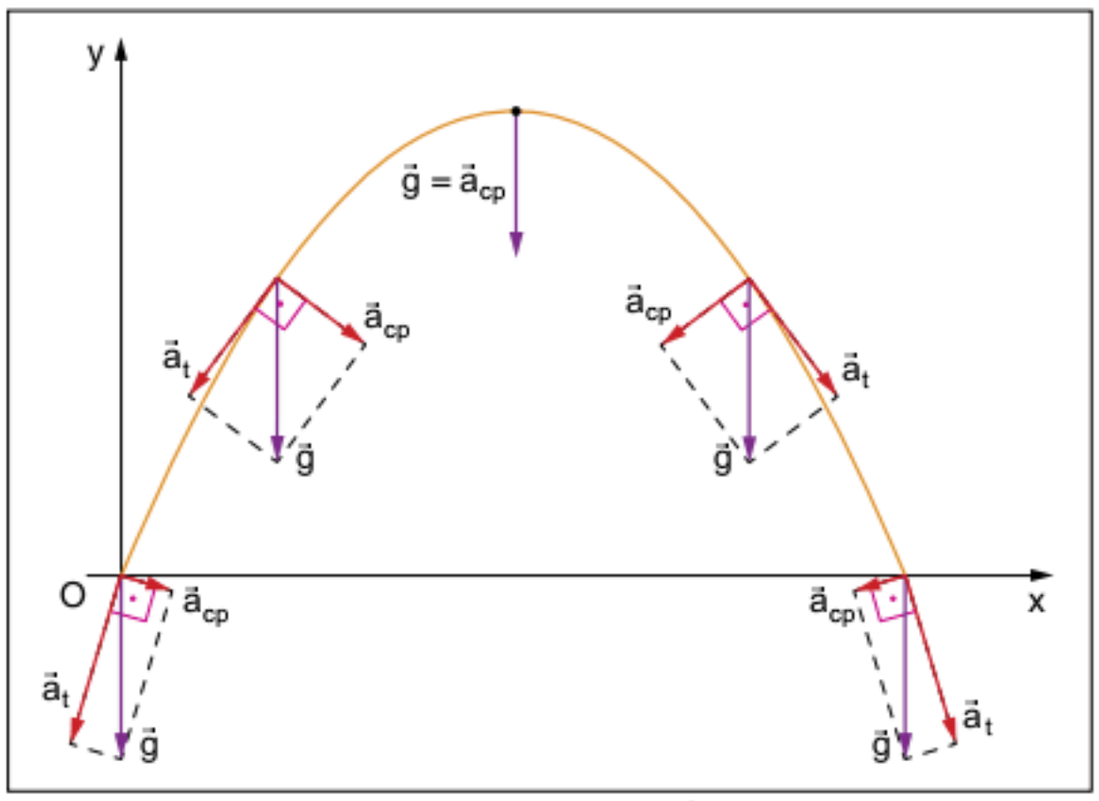


Fig. 8 Aceleração vetorial: tangencial e centrípeta.

Desde o lançamento até o ponto de altura máxima, a aceleração tangencial tem sentido contrário ao da velocidade, sendo o movimento, portanto, retardado, com o módulo da velocidade diminuindo.

Do ponto de altura máxima em diante, a aceleração tangencial tem o mesmo sentido da velocidade, sendo o movimento, portanto, acelerado, com o módulo da velocidade aumentando.

Observação:

- *A aceleração é constante e igual a $\vec{g}$, porém suas decomposições, tangencial e centrípeta, variam.*
- *No ponto de altura máxima, a aceleração vetorial instantânea coincide com a aceleração centrípeta, sendo nula a aceleração tangencial.*

Tempo de subida

Desde o lançamento até atingir a altura máxima, o tempo de subida (t_s) é calculado tomando $v_y = 0$ em:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Com $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\theta$, temos:

$$0 = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta - gt_s \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \cdot \text{sen}\,\theta}{g}$$

Como o tempo de descida (t_d), desde a altura máxima até o nível horizontal do lançamento, é igual ao tempo de subida (t_s) entre o nível horizontal e a altura máxima:

$$t_d = t_s$$

Então, o tempo total de movimento (T) será:

$$T = t_s + t_d \Rightarrow T = \frac{2v_0 \cdot \text{sen}\,\theta}{g}$$

Observação: *Como já estudado, o tempo de subida entre duas alturas dadas é igual ao tempo de descida entre elas.*

ATENÇÃO!

Note que o lançamento vertical é um caso particular do lançamento oblíquo quando $\theta = 90°$:

$$t_s = t_d = \frac{v_0 \cdot \text{sen}\,90°}{g} = \frac{v_0}{g} \quad \text{e} \quad T = \frac{2v_0}{g}$$

Altura máxima

A altura máxima é o valor de y quando a velocidade vertical se anula.

Mas:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$$

Com $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\theta$, $v_y = 0$ e $\Delta y = h_{máx} - 0 = h_{máx}$, temos:

$$0 = v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta - 2gh_{máx} \Rightarrow h_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta}{2g}$$

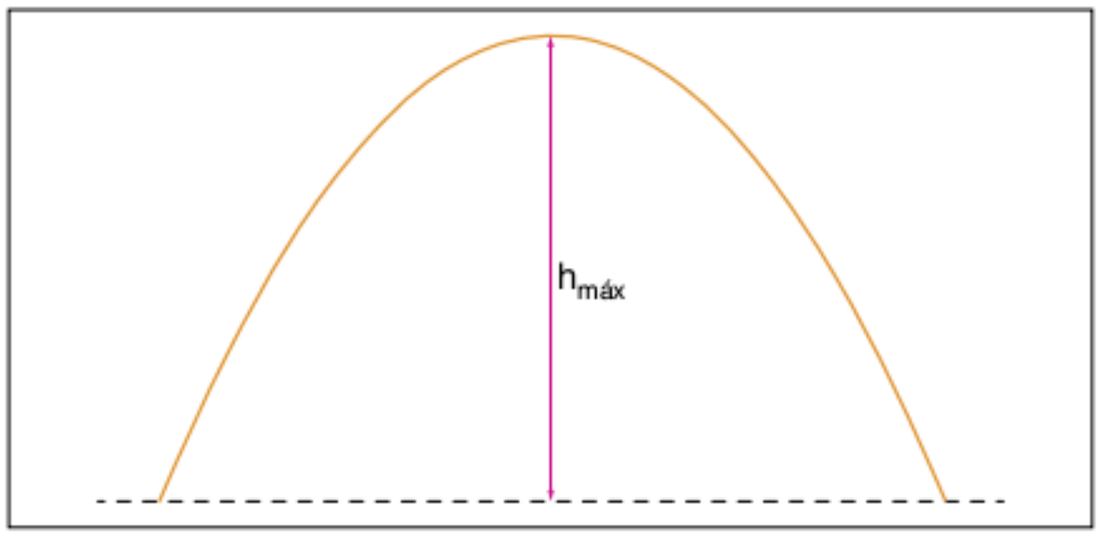


Fig. 9 Altura máxima.

ATENÇÃO!

Note que a altura máxima no lançamento vertical é um caso particular do lançamento oblíquo quando $\theta = 90°$:

$$h_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,90°}{2g} \Rightarrow h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Alcance

O alcance (A) é o deslocamento horizontal da partícula desde o lançamento até alcançar o solo.

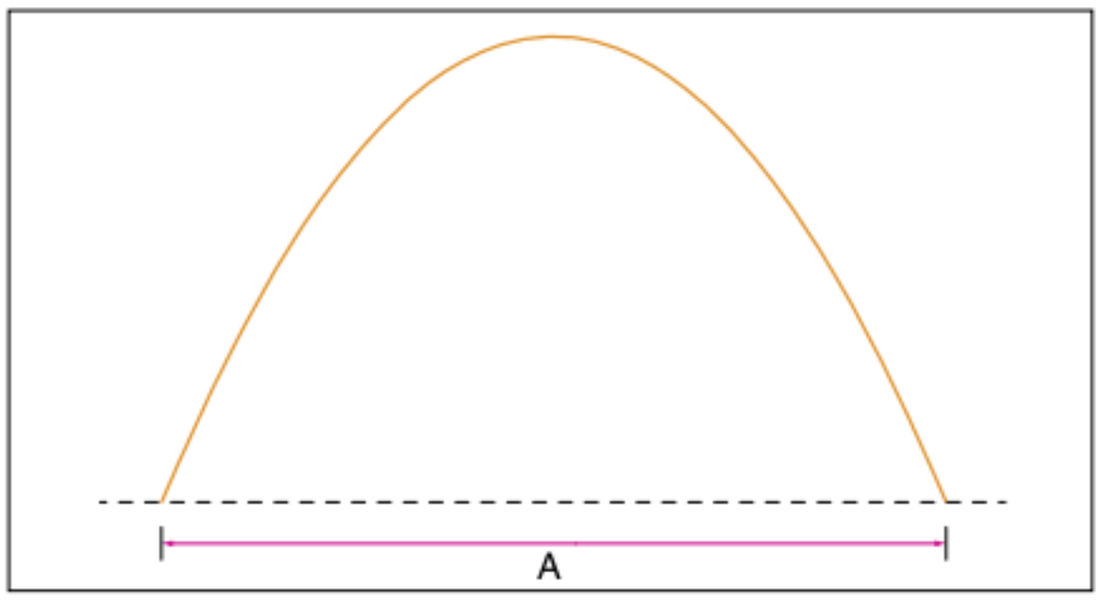


Fig. 10 Alcance em um lançamento oblíquo.

A partícula alcança o solo quando y = 0. No nosso caso, como o nível de lançamento é o mesmo do retorno ao solo, então, o tempo total é dado por:

$$T = \frac{2v_0 . \text{sen}\,\theta}{g}$$

Mas o espaço horizontal é dado por: $x = v_{0x} \cdot t$

Como $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta$:

$$x = v_0 \cdot \cos\theta\, t$$

Logo, com t = T, teremos x = A (alcance) e:

$$A = v_0 . \cos\theta . \frac{2v_0 . \text{sen}\,\theta}{g} \Rightarrow A = \frac{2v_0^2 . \text{sen}\,\theta \cos\theta}{g}$$

Sabemos da trigonometria que:

$$2\text{sen}\,\theta \cos\theta = \text{sen}\, 2\theta$$

Logo:

$$A = \frac{v_0^2 . \text{sen}\, 2\theta}{g}$$

A partir da fórmula do alcance, podemos provar que duas partículas lançadas com a mesma velocidade inicial, mas com ângulos complementares, θ_1 e θ_2, atingem o mesmo alcance.

Isso acontece porque:

$$\text{sen}\, 2\theta_1 = \text{sen}\, 2\theta_2 \Rightarrow \begin{cases} 2\theta_1 = 2\theta_2 \\ \text{ou} \\ 2\theta_1 + 2\theta_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \\ \text{ou} \\ \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \end{cases}$$

Temos ainda que o valor máximo do alcance é obtido quando $\text{sen}2\theta$ é máximo. Isso se dá para:

$$\text{sen}2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

E o valor de $A_{máx}$ será:

$$A_{máx} = \frac{v_0^2 . 1}{g} \Rightarrow A_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$$

ATENÇÃO!

A fórmula deduzida para o alcance só pode ser utilizada quando o corpo atinge o mesmo nível do lançamento. Caso contrário, deve-se aplicar o mesmo método de dedução para a situação apresentada.

Equação da trajetória

Podemos provar que a trajetória de um lançamento oblíquo é uma parábola.

As equações do espaço em x e y são dadas por:

$$x = v_0 \cdot \cos\theta\, t$$

$$y = v_0 . \text{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para obter a equação da trajetória, vamos eliminar o tempo:

$$t = \frac{x}{v_0 . \cos\theta}$$

Logo:

$$y = v_0 . \text{sen}\,\theta . \frac{x}{v_0 . \cos\theta} - \frac{1}{2} g . \frac{x^2}{v_0^2 . \cos^2\theta}$$

$$y = \text{tg}\,\theta . x - \frac{g}{2v_0^2 . \cos^2\theta} . x^2$$

Como θ, v_0 e g são constantes, então y = y(x) é uma função do 2° grau, ou seja, uma parábola. Sua concavidade é voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Como o termo independente é nulo, passa pela origem (0; 0).

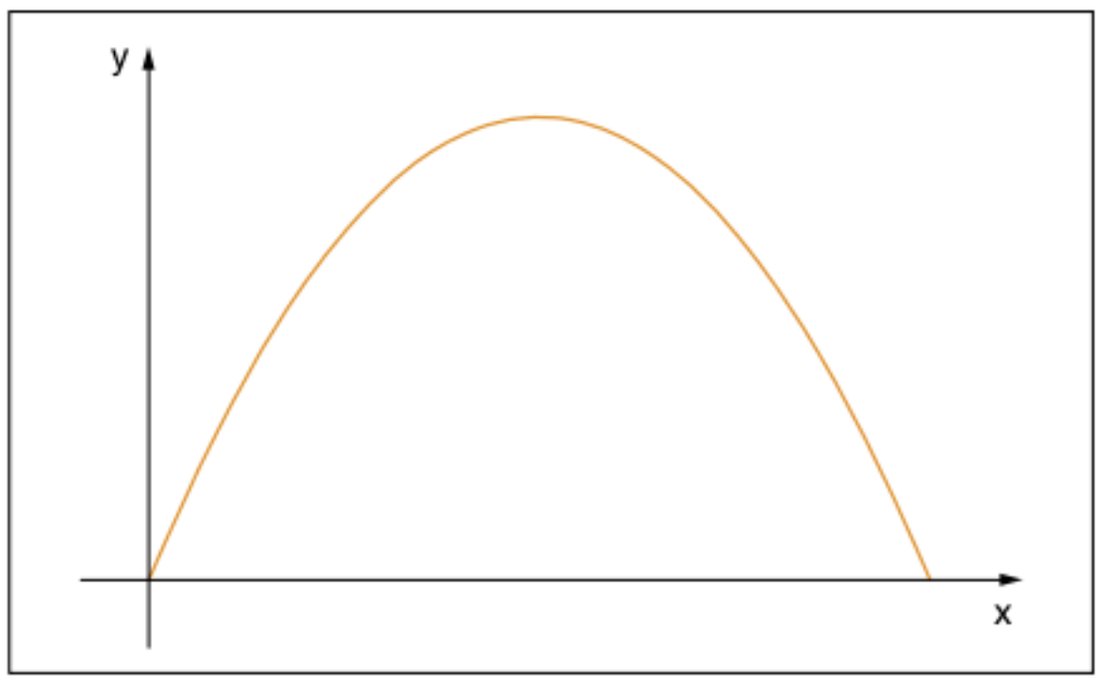


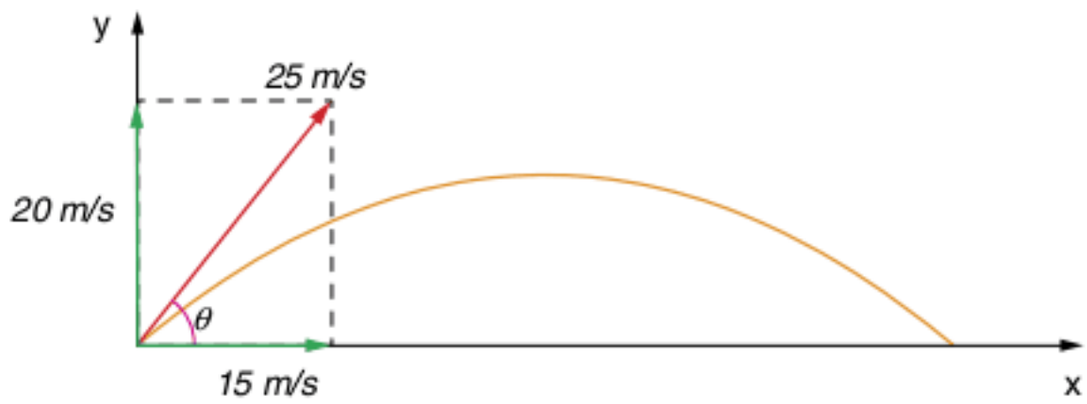
Fig. 11 Trajetória do movimento.

Exercícios resolvidos

1 Um corpo é lançado de um plano horizontal com velocidade de 25 m/s, formando um ângulo θ com a horizontal. Sabendo que g = 10 m/s² e $\text{sen}\,\theta = 0{,}8$, determine:

a) as funções horárias de espaço horizontal e vertical do movimento.
b) as funções horárias de velocidade horizontal e vertical do movimento.
c) o tempo necessário para atingir a altura máxima.
d) o tempo necessário para o corpo voltar ao solo.
e) a altura máxima atingida pelo corpo.
f) o alcance do lançamento.
g) a mínima velocidade, em módulo, durante o lançamento.
h) o vetor velocidade do corpo para t = 3 s.
i) o módulo do vetor velocidade no item h.

Resolução:



a) O movimento em x é uniforme, com a seguinte função horária:

$x = x_0 + v_x \cdot t$

Como $x_0 = 0$ e $v_x = v_0 \cdot \cos\theta = 25 \cdot 0{,}6 = 15$ m/s:
$x = 15t$
O movimento em y é uniformemente variado, com a seguinte função horária:
$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$
Como $y_0 = 0$; $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta = 25 \cdot 0{,}8 = 20$ m/s e
$a = -10$ m/s²:
$y = 20t - 5t^2$

b) *A partir das funções de espaço, temos:*
$v_x = 15$
$v_y = 20 - 10t$

c) *O corpo atinge a altura máxima quando $v_y = 0$:*
$0 = 20 - 10t \Rightarrow t = 2$ s

d) *Como não há atrito, o tempo de subida é igual ao de descida:*
$t_t = t_s + t_d = 2 + 2 \Rightarrow t_t = 4$ s

e) *Da equação de Torricelli na vertical, temos para a altura máxima:*
$0 = 20^2 + 2(-10)h_{máx} \Rightarrow h_{máx} = 20$ m

f) *O alcance é o valor de x para t = 4 s:*
$x = 15 \cdot 4 \Rightarrow x = 60$ m

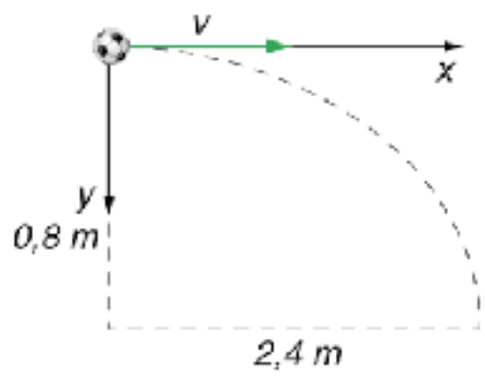
g) *A menor velocidade em módulo ocorre na altura máxima, pois aí a velocidade vertical se anula:*
$v_y = 0$ e $v_x = 15$ m/s $\Rightarrow |\vec{v}|_{mín} = 15$ m/s

h) *Para t = 3 s:*
$v_x = 15$ m/s e
$v_y = 20 - 10 \cdot 3 = -10$ m/s, *o que indica que o corpo estará descendo.*

i) $|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{15^2 + (-10)^2} \Rightarrow$
$|\vec{v}| = 5\sqrt{13}$ m/s

2 Uma bola rola de uma mesa horizontal sem atrito de 0,8 m de altura e atinge o solo a uma distância de 2,4 m da borda da mesa. Considerando g = 10 m/s², determine a velocidade da bola sobre a mesa.

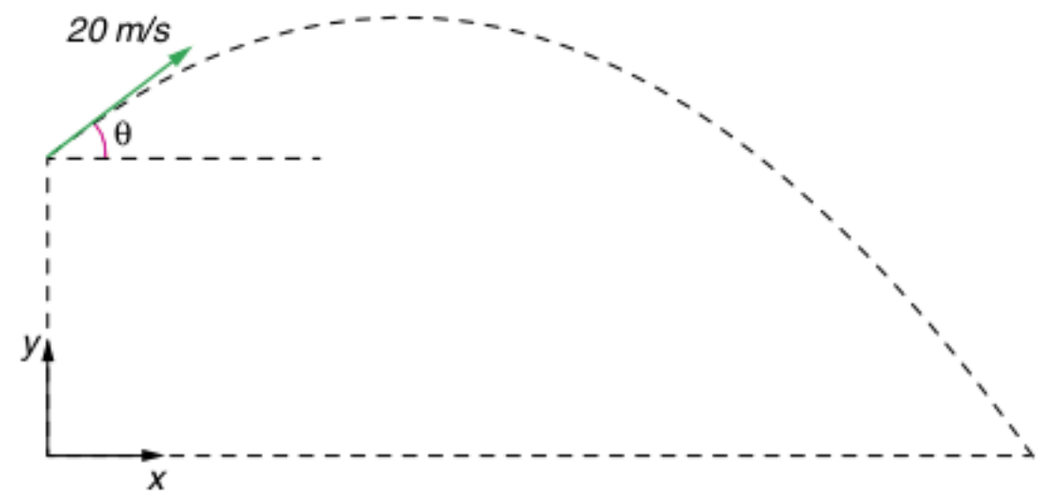
Resolução:
Para o movimento, temos:



Em y, a velocidade inicial é nula:
$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 5t^2$
como y = 0,8 m:
$0{,}8 = 5t^2 \Rightarrow t = 0{,}4$ s
que é o tempo de queda.
Nesse intervalo, o corpo percorre em x a distância de 2,4 m:
$v = \frac{2{,}4 \text{ m}}{0{,}4 \text{ s}} \Rightarrow v = 6$ m/s

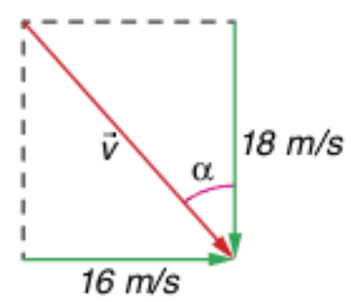
3 Um corpo é lançado do alto de um prédio de 9 m de altura, com uma velocidade de 20 m/s, formando um ângulo θ com a horizontal. Sabendo que g = 10 m/s² e sen θ = 0,6, determine:
a) o alcance do corpo.
b) o ângulo formado pelo vetor velocidade com a vertical no momento em que o corpo atinge o solo.

Resolução:
Para o movimento, temos:



a) *A equação do movimento em y é dada por:*
$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$
em que:
$y_0 = 9$ m; $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta = 20 \cdot 0{,}6 = 12$ m/s e $a = -10$ m/s²
Assim:
$y = 9 + 12t - 5t^2$
O corpo atinge o solo quando y = 0:
$0 = 9 + 12t - 5t^2 \Rightarrow 5t^2 - 12t - 9 = 0$
$t_1 = 3$ s e $t_2 = -0{,}6$ s *(não convém)*
Logo, o alcance será dado por:
$A = v_x \cdot t$
em que: $v_x = v_0 \cdot \cos\theta = 20 \cdot 0{,}8 = 16$ m/s e $t = 3$ s
$A = 16 \cdot 3 \Rightarrow A = 48$ m

b) *Sabemos que:*
$v_x = 16$ m/s e $v_y = 12 - 10t$
Para t = 3 s:
$v_x = 16$ m/s e $v_y = 12 - 10 \cdot 3 \Rightarrow v_y = -18$ m/s
Logo:

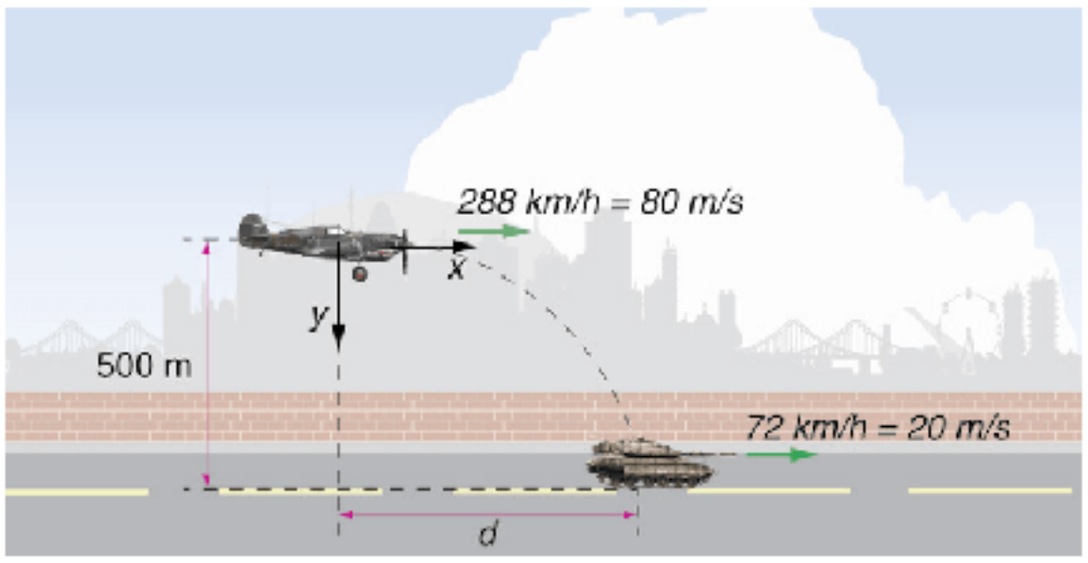


e o ângulo α que o vetor velocidade forma com a vertical é tal que:
$tg\,\alpha = \frac{16}{18} \Rightarrow \alpha = arc\,tg\,\frac{8}{9}$

4 Um avião em voo horizontal a 500 m de altura deve soltar uma bomba sobre um carro que se move à velocidade de 72 km/h. Se a velocidade do avião é de 288 km/h, no mesmo sentido do carro e no mesmo plano vertical, determine a distância d em que o avião deverá soltar a bomba para atingir o alvo, considerando g = 10 m/s².

Resolução:

Temos a seguinte situação:



Para o movimento vertical da bomba:

$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow y = 5t^2$

Quando y = 500 m:

$500 = 5t^2 \Rightarrow t = 10$ *s, que é o tempo que a bomba leva para atingir o solo.*

Para o movimento horizontal, temos:

Bomba: $x_B = 80t$

Carro: $x_C = d + 20t$

A bomba atinge o carro quando $x_B = x_C$*, para t = 10 s:*

$80 \cdot 10 = d + 20 \cdot 10 \Rightarrow d = 600$ *m*

Revisando

Considere, quando necessário, g = 10 m/s².

1 Um corpo é lançado de um plano horizontal com velocidade de 10 m/s, formando um ângulo θ com a horizontal. Sabendo que sen θ = 0,6, determine:

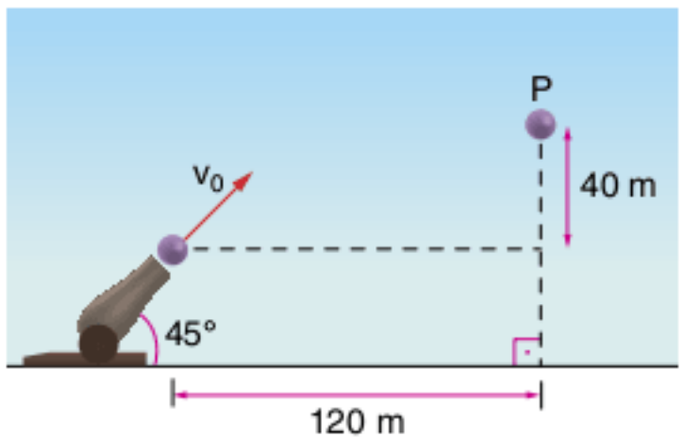
a) o tempo necessário para o corpo atingir a altura máxima.
b) a altura máxima atingida pelo corpo.
c) o tempo necessário para o corpo voltar ao solo.
d) o alcance do lançamento.
e) a mínima velocidade, em módulo, durante o lançamento.
f) o ângulo com que o corpo deveria ser lançado para atingir o alcance máximo.
g) o alcance na situação do item f.

2 Uma esfera desliza sobre uma mesa plana com velocidade constante igual a 3 m/s. A mesa está a 80 cm de altura do solo. Determine:

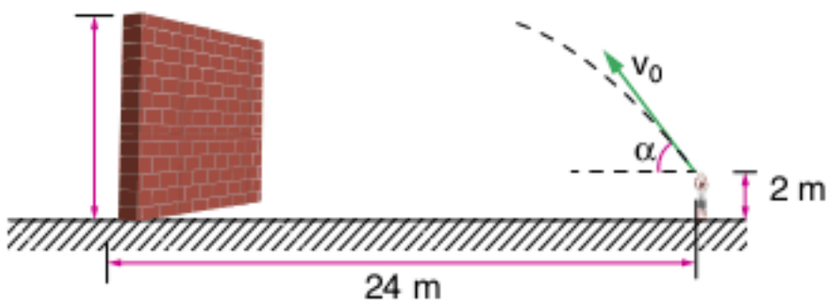
a) o tempo necessário para a esfera atingir o solo.
b) o alcance do lançamento.
c) o módulo da velocidade da esfera imediatamente antes de atingir o solo.
d) o ângulo que o vetor velocidade, na situação do item c, forma com a vertical.

3 O canhão da figura dispara um projétil com velocidade inicial de módulo igual a v_0, atingindo um alvo estacionário situado em P.
Desprezando influências do ar e as dimensões do canhão, determine:

a) o tempo que o projétil leva para atingir o alvo.
b) o valor de v_0.



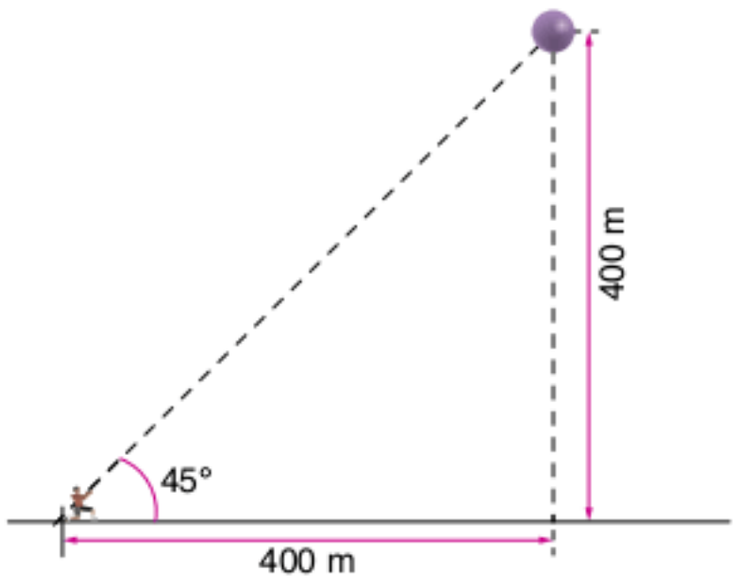
4 Um menino lança, sobre sua cabeça, uma bola com velocidade 20 m/s, que forma um ângulo α com a horizontal. A bola parte de uma altura de 2 m e o menino quer que ela ultrapasse um muro que se encontra a 24 m dele.
Determine a altura máxima que o muro pode ter para que a bola passe por ele, sabendo que senα = 0,8.



5 Um atirador aponta sua espingarda para um objeto parado no ar a uma altura de 400 m, como indica a figura. Despreze a resistência do ar. Admitindo que, no momento em que a bala sai da arma com velocidade 200 m/s, o objeto inicia seu movimento de queda, determine:

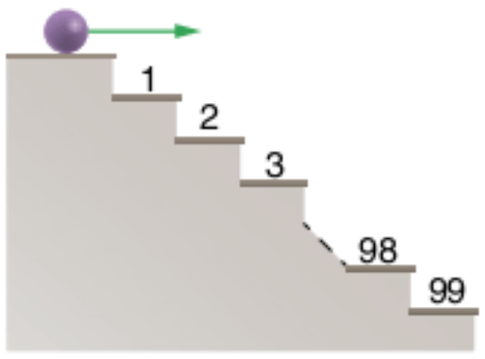
a) o instante em que a bala atinge o objeto.

b) a altura, relativamente ao solo, em que a bala atinge o objeto.



6 Uma bola de gude rola do alto de uma escada, conforme mostra a figura. Os degraus têm 25 cm de altura e 40 cm de largura.

Determine o intervalo de velocidades da bola para que ela atinja o 5º degrau.

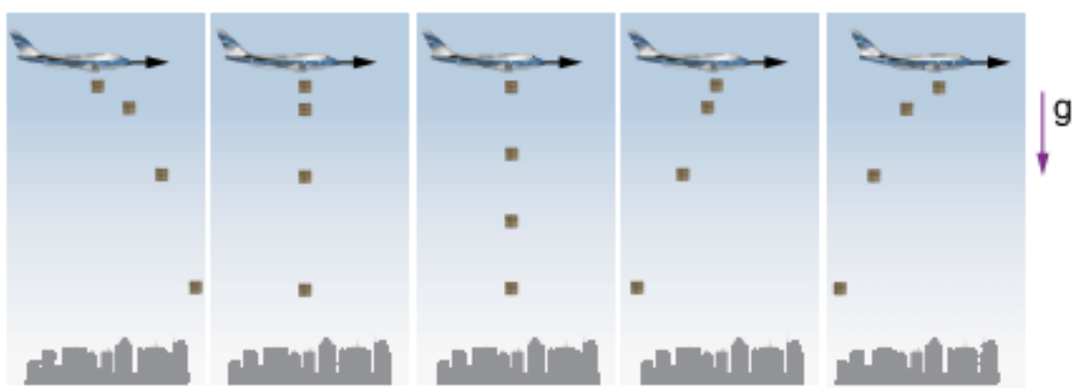


Exercícios propostos

Considere, quando necessário, $g = 10\ m/s^2$.

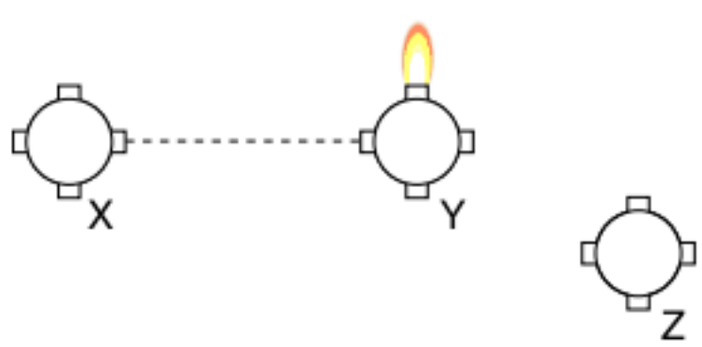
Conceitos de lançamento oblíquo

1 **Fuvest 2002** Em decorrência de fortes chuvas, uma cidade do interior paulista ficou isolada. Um avião sobrevoou a cidade, com velocidade horizontal constante, largando 4 pacotes de alimentos, em intervalos de tempos iguais. No caso ideal, em que a resistência do ar pode ser desprezada, a figura que melhor poderia representar as posições aproximadas do avião e dos pacotes, em um mesmo instante, é:



(a) (b) (c) (d) (e)

2 **UFMG (Adapt.)** A figura a seguir representa uma nave espacial que se desloca numa região do espaço onde as forças gravitacionais são desprezíveis. A nave desloca-se de X para Y, em linha reta, com velocidade constante. No ponto Y, um motor lateral da nave é acionado, ficando ela sujeita a uma aceleração constante, perpendicular à sua trajetória inicial. Depois de um certo intervalo de tempo, quando a nave se encontra em Z, o motor é desligado.

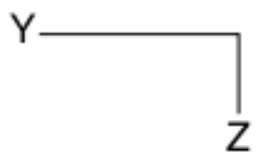


O diagrama que melhor representa a trajetória da nave entre os pontos Y e Z é:

(a)

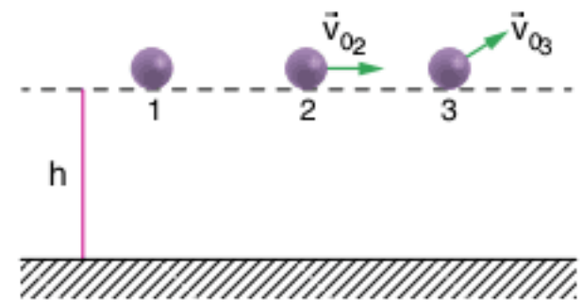
(b)

(c)

(d)


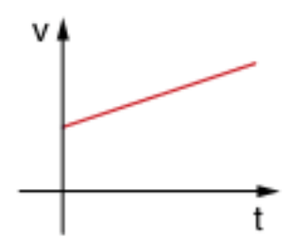
(e)

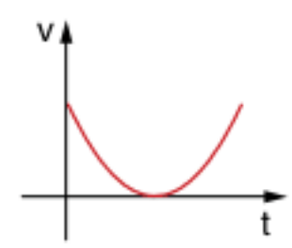
3 **Fesp** Três partículas iniciam, a partir da mesma altura h acima do solo, seus movimentos em queda livre. A velocidade inicial da partícula 1 é nula e as velocidades iniciais das outras partículas, $\vec{v}_{0_2}$ e $\vec{v}_{0_3}$, estão indicadas na figura a seguir. Qual a ordem de chegada ao solo?

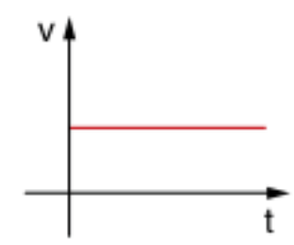


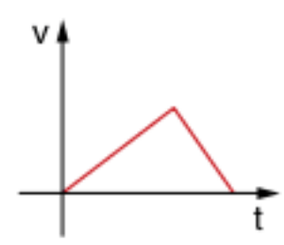
(a) 1, 2 e 3.
(b) 1 e 2 juntas e, a seguir, 3.
(c) 3, 2 e 1.
(d) 3 e, a seguir, 1 e 2 juntas.
(e) as três chegam juntas.

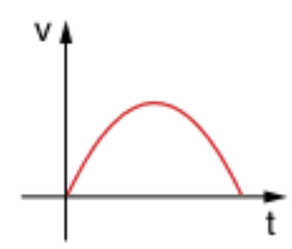
4 **Fuvest** Num dia ensolarado, com sol a pique, um jogador chuta uma bola, que descreve no ar uma parábola. O gráfico que melhor representa o valor da velocidade v da sombra da bola, projetada no solo, em função do tempo t, é:

(a)


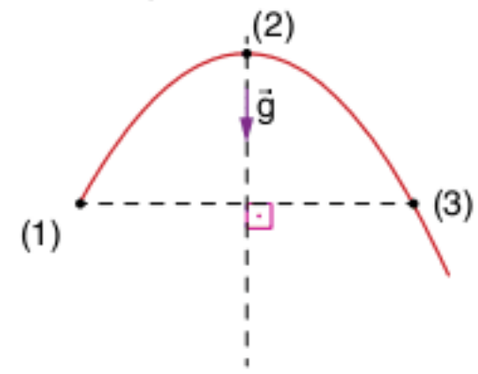
(c)


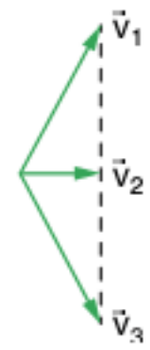
(e)


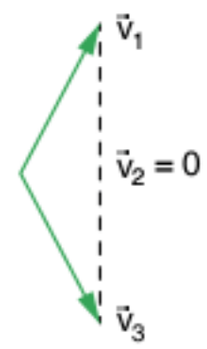
(b)


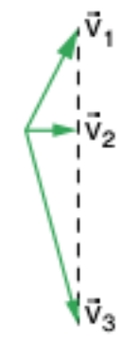
(d)


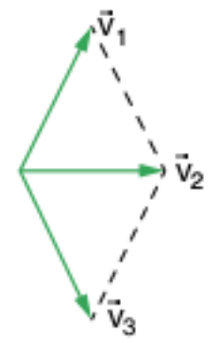
5 **PUC** Na figura a seguir, uma partícula é lançada do ponto 1 em um lugar onde a intensidade do campo gravitacional ($\vec{g}$) é constante e descreve a trajetória mostrada. O atrito é desprezível. Em qual das opções a seguir estão mais bem representadas as velocidades $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ dessa partícula quando ela passa, respectivamente, pelos pontos 1, 2 e 3 de sua trajetória? (Nas opções, os vetores velocidade são desenhados sempre a partir do mesmo ponto; a esta representação dá-se o nome de hodógrafo do movimento.)

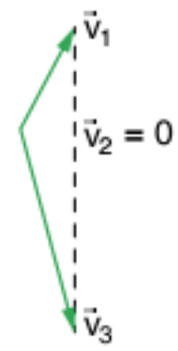


(a)


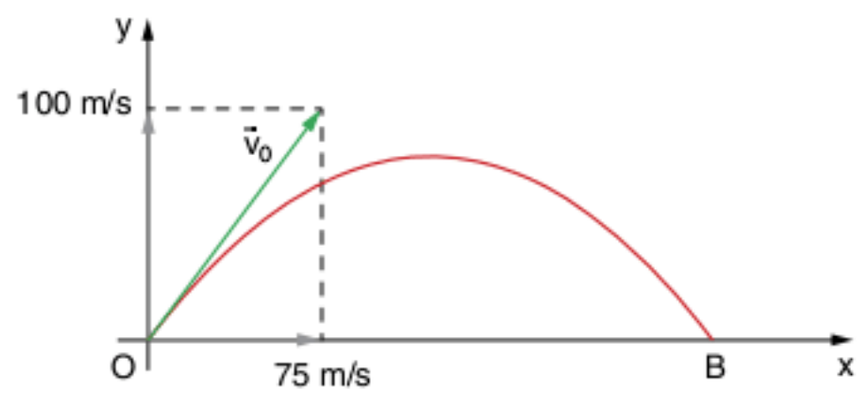
(c)


(e)


(b)


(d)


6 **PUC** Um projétil é lançado em certa direção com velocidade inicial $\vec{v}_0$, cujas projeções vertical e horizontal têm módulos, respectivamente, de 100 m/s e 75 m/s. A trajetória descrita é parabólica e o projétil toca o solo horizontal em B.



a) Desprezando a resistência do ar:
(a) no ponto de altura máxima, a velocidade do projétil é nula.
(b) o projétil chega a B com velocidade nula.
(c) a velocidade vetorial do projétil ao atingir B é igual à de lançamento.
(d) durante o movimento, há conservação das componentes horizontal e vertical da velocidade.
(e) durante o movimento, apenas a componente horizontal da velocidade é conservada.

b) Quanto ao módulo da velocidade, tem valor mínimo igual a:
(a) 125 m/s (c) 75 m/s (e) 25 m/s
(b) 100 m/s (d) zero.

7 **UFSC** Um projétil é lançado do chão com velocidade escalar inicial v_0 e ângulo θ_0 em relação ao plano horizontal. Despreze qualquer forma de atrito. Determine quais das proposições a seguir são corretas.
01 O movimento do projétil se dá em um plano.
02 Quanto maior o ângulo θ_0, entre 0° e 90°, maior o alcance do projétil.
04 Quanto maior a velocidade escalar inicial v_0, maior o alcance do projétil.
08 O tempo de subida do projétil, até o ponto de altura máxima, é igual ao tempo de descida até o chão.
16 Caso houvesse resistência do ar, essa faria com que o alcance do projétil fosse maior do que o da situação sem resistência.
32 Caso houvesse resistência do ar, essa faria com que a altura máxima do projétil fosse a mesma da situação sem resistência.
Soma = ☐

Lançamento oblíquo

8 **Unicamp** Um menino, andando de *skate* com velocidade v = 2,5 m/s num plano horizontal, lança para cima uma bolinha de gude com velocidade v_0 = 4,0 m/s e a apanha de volta. Considere g = 10 m/s².
Determine:
a) a trajetória descrita pela bolinha em relação à Terra.
b) a trajetória descrita pela bolinha em relação ao menino.
c) a altura máxima que a bolinha atinge.
d) a distância horizontal que a bolinha percorre.
e) o valor da velocidade da bolinha, em relação ao solo, quando ela atinge a altura máxima.

9 **Faap** Um projétil lançado para cima, com ângulo de tiro 60°, tem velocidade de 30 m/s no ponto culminante de sua trajetória. Calcule a velocidade do projétil ao retornar ao solo.

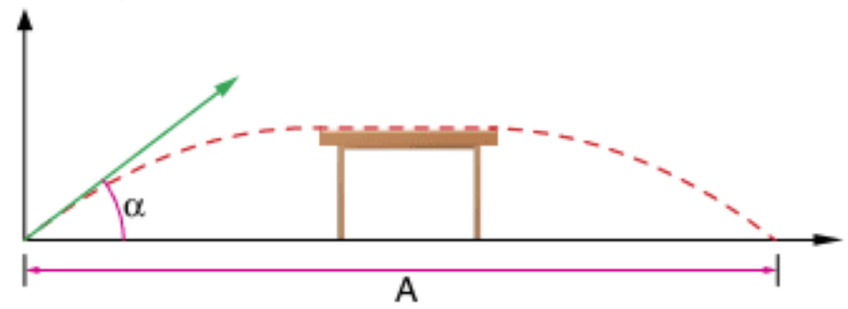
10 **Ufes** Um foguete sobe inclinado, fazendo com a vertical um ângulo de 60°. A uma altura de 1.000 m do solo, quando sua velocidade é de 1.440 km/h, uma de suas partes se desprende. A aceleração da gravidade ao longo de toda a trajetória é constante e vale 10 m/s².
A altura máxima, em relação ao solo, atingida pela parte que se desprendeu é:
(a) 1.000 m (c) 2.400 m (e) 7.000 m
(b) 1.440 m (d) 3.000 m

11 **Unisa** Um projétil é lançado obliquamente para cima com velocidade de 40 m/s e permanece no ar durante 4 segundos. O ângulo formado pelo vetor velocidade de lançamento com a vertical é de:
(a) 30° (c) 60° (e) 90°
(b) 45° (d) 75°

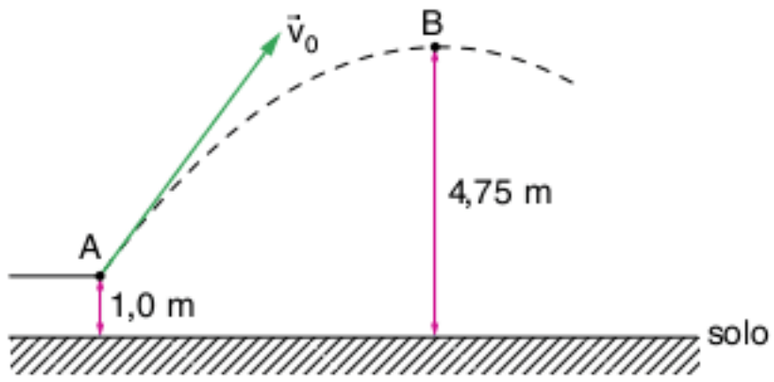
12 **FEI** Um projétil é lançado do solo numa direção que forma um ângulo θ com a horizontal. Sabe-se que ele atinge uma altura máxima $H_{máx}$ = 15 m e que sua velocidade no ponto de altura máxima é v = 10 m/s.
Adote g = 10 m/s².
Determine:
a) a sua velocidade inicial.
b) o ângulo θ de lançamento.
c) o tempo de permanência no ar.
d) o alcance.

13 **Unifap** Se uma pedra é lançada de um plano horizontal de modo a cair sobre ele com um alcance máximo x em relação ao ponto de que foi lançada, pode-se dizer que a máxima altura atingida pela pedra será:
(a) $\frac{x}{2}$ (c) x (e) 4x
(b) $\frac{x}{4}$ (d) 2x

14 **UFBA** Um projétil, lançado obliquamente com velocidade inicial de 50 m/s, forma com a horizontal um ângulo α = 37°. No instante em que ele atinge a altura máxima, encontra um plano horizontal e move-se sobre toda a sua extensão, sem atrito, durante 5 s, quando, então, inicia seu movimento de declínio, conforme a figura. Considerando sen 37° = 0,60, cos 37° = 0,80 e g = 10 m/s², determine o alcance A.



15 **Unip** Em um local onde o efeito do ar é desprezível e $g = 10\ m/s^2$, uma bola de tênis é golpeada por um tamboréu, adquirindo uma velocidade de módulo 10 m/s, quando estava a uma altura de 1,0 m acima do chão. A altura máxima atingida pela bola, medida a partir do chão, foi de 4,75 m.



A velocidade da bola, no ponto mais alto de sua trajetória, tem módulo igual a:

(a) 5,0 m/s
(b) 10 m/s
(c) zero.
(d) 2,5 m/s
(e) 1,0 m/s

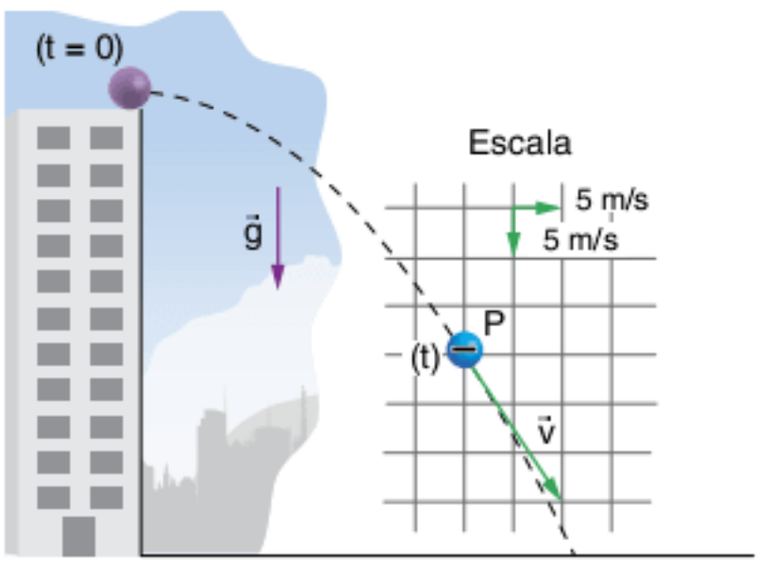
16 **Vunesp** Um avião de salvamento, voando horizontalmente a uma altura de 125 metros do solo, deve deixar cair um pacote para um grupo de pessoas que ficaram isoladas após um acidente. Para que o pacote atinja o grupo, deve ser abandonado t segundos antes de o avião passar diretamente acima do grupo. Adotando-se $g = 10\ m/s^2$ e desprezando-se a resistência oferecida pelo ar, pode-se afirmar que t, em segundos, é igual a:

(a) 1,0 (b) 2,0 (c) 3,0 (d) 4,0 (e) 5,0

17 **ITA 2001** Uma bola é lançada horizontalmente do alto de um edifício, tocando o solo decorridos aproximadamente 2 s. Sendo de 2,5 m a altura de cada andar, o número de andares do edifício é:

(a) 5
(b) 6
(c) 8
(d) 9
(e) indeterminado, pois a velocidade horizontal de arremesso da bola não foi fornecida.

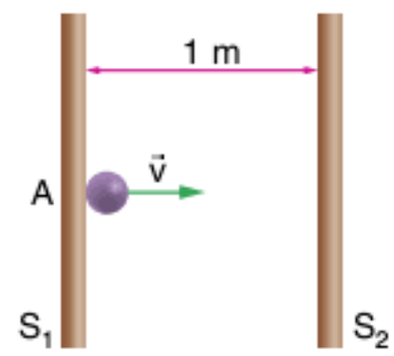
18 **Vunesp** Uma pequena esfera é lançada horizontalmente do alto de um edifício com velocidade $\vec{v}_0$. A figura a seguir mostra a velocidade $\vec{v}$ da esfera no ponto P da trajetória, t segundos após o lançamento, e a escala utilizada para representar esse vetor (as linhas verticais do quadriculado são paralelas à direção do vetor aceleração da gravidade $\vec{g}$).



Considerando $g = 10\ m/s^2$ e desprezando a resistência oferecida pelo ar, determine, a partir da figura:

a) o módulo de $\vec{v}_0$.
b) o instante t em que a esfera passa pelo ponto P.

19 **Fuvest (Adapt.)** A figura ilustra dois anteparos paralelos, colocados perpendicularmente com relação ao solo. Uma esfera é lançada do ponto A, com velocidade inicial de 20 m/s, perpendicular a S_1. A esfera colide sucessivamente com S_1 e S_2, através de choques elásticos. Calcule:



a) o tempo que a esfera leva para atingir novamente o anteparo S_1.
b) a que altura h, relativamente ao ponto inicial A, a esfera se encontra, após 0,5 s do lançamento.

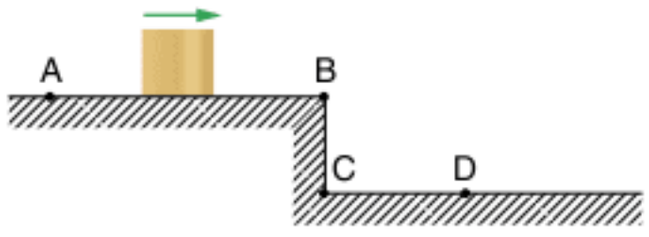
20 **Fuvest** Dois rifles são disparados com os canos na horizontal, paralelos ao plano do solo e ambos à mesma altura acima do solo. À saída dos canos, a velocidade da bala do rifle A é três vezes maior que a velocidade da bala do rifle B.
Após intervalos de tempo t_A e t_B, as balas atingem o solo a, respectivamente, distâncias d_A e d_B das saídas dos respectivos canos. Desprezando-se a resistência do ar, pode-se afirmar que:

(a) $t_A = t_B$, $d_A = d_B$
(b) $t_A = \frac{t_B}{3}$, $d_A = d_B$
(c) $t_A = \frac{t_B}{3}$, $d_A = 3d_B$
(d) $t_A = t_B$, $d_A = 3d_B$
(e) $t_A = 3t_B$, $d_A = 3d_B$

21 **FCC** Um avião precisa soltar um saco com mantimentos a um grupo de sobreviventes que está numa balsa. A velocidade horizontal do avião é constante e igual a 100 m/s com relação à balsa e sua altitude é 2.000 m. Desprezando os efeitos do ar e supondo $g = 10\ m/s^2$, determine:

a) o tempo que o saco leva para alcançar os sobreviventes.
b) a distância horizontal que separa o avião dos sobreviventes.
c) o módulo da velocidade do saco, no momento em que atinge a balsa.

22 **Udesc** Um bloco parte do repouso no ponto A da figura e percorre o trajeto entre os pontos A e B, sobre um plano horizontal situado a 0,45 m de altura do solo, obedecendo à equação horária $d = 2t^2$ (d em metros e t em segundos). Depois de passar pelo ponto B, o bloco segue em queda livre, indo atingir o solo no ponto D. Despreze atritos e considere a distância entre os pontos A e B igual a 2 metros.



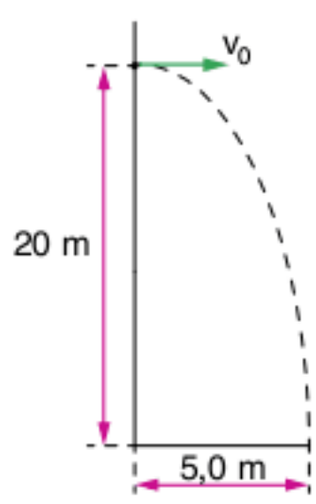
Determine:

a) a trajetória descrita pelo bloco no movimento entre B e D.
b) a aceleração constante do bloco no trecho AB.
c) a velocidade do bloco no ponto B.
d) a distância entre os pontos C e D.

23 **Mackenzie** Um corpo é lançado horizontalmente do alto de uma torre e atinge o solo horizontal com velocidade de 37,5 m/s, formando 53° com a horizontal. A altura da torre é de:
Observação: despreze as resistências ao movimento.
Dados: $g = 10\ m/s^2$, cos 53° = 0,6 e sen 53° = 0,8.

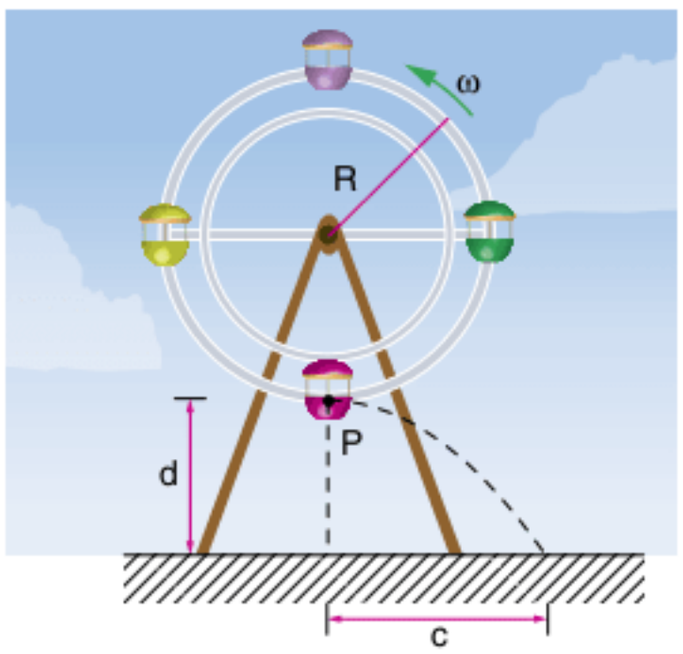
(a) 20 m
(b) 30 m
(c) 40 m
(d) 45 m
(e) 50 m

24 **Ufla** Da janela de um prédio, a 20 m do chão, é arremessada uma pedra horizontalmente, de forma a tocar o chão a 5,0 m da base do prédio, conforme esquema a seguir. Considerando $g = 10\ m/s^2$, calcule:



a) o tempo que a pedra demora, desde o seu lançamento, até atingir o chão.
b) a velocidade inicial da pedra ao ser arremessada.
c) a velocidade da pedra ao atingir o chão.
d) a equação da trajetória da pedra: y = f(x).

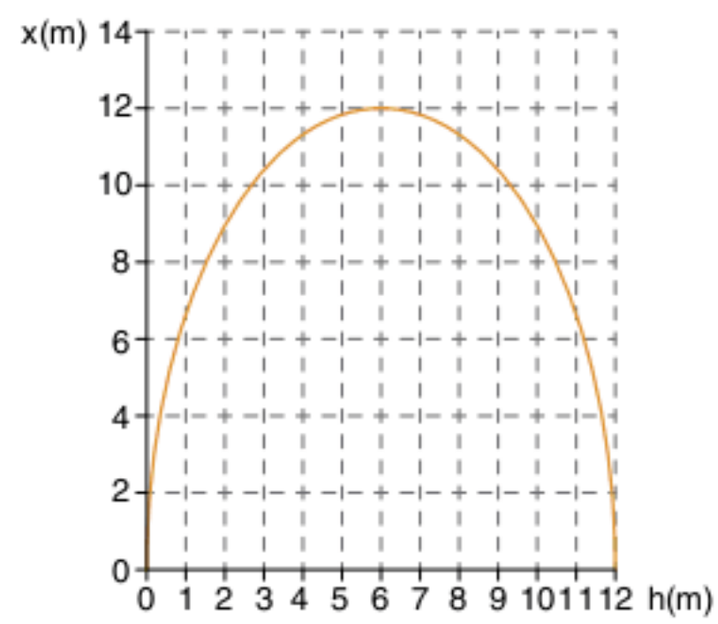
25 **UFU** Um vestibulando observa, num parque de diversão, uma roda-gigante girando com velocidade angular constante ω. Em um determinado instante, observa que, do ponto P mais baixo da roda-gigante, distante R do eixo, solta-se um parafuso, descrevendo a trajetória parabólica mostrada na figura.



Desprezando a resistência do ar e considerando c = 1 m, d = 5 m, R = 5 m, $g = 10\ m/s^2$, determine:

a) o intervalo de tempo que o parafuso demora para cair a partir do ponto P.
b) a velocidade escalar do parafuso, no instante em que ele é solto.
c) a velocidade angular ω da roda-gigante.

26 **UFMS 2005** O gráfico a seguir representa o deslocamento horizontal (x) de um jato de líquido que se escoa através de um pequeno furo feito a uma profundidade (h) na lateral de um tanque de altura (12 m), que permanece sempre cheio devido a um processo automático de reposição.



Considere as afirmativas.

I. O valor máximo de (x) ocorre quando o furo é feito na metade da altura do tanque.
II. O valor máximo de (x) obtido é de 6 m.
III. Dois furos cuja soma das profundidades é 12 m proporcionam o mesmo alcance (x).
IV. Dois furos cuja soma das profundidades é 12 m proporcionam a mesma velocidade de escoamento.
V. Dois furos cuja soma das profundidades é 12 m proporcionam o mesmo tempo de queda.

É correto afirmar que:

(a) apenas a afirmativa I é correta.
(b) apenas as afirmativas I e III são corretas.
(c) todas as afirmativas são corretas.
(d) todas as afirmativas são falsas.
(e) apenas a afirmativa IV é falsa.

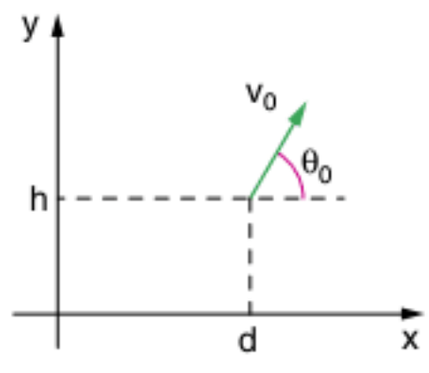
27 **Unifesp 2006 (Adapt.)** Um projétil de massa m = 0,10 kg é lançado do solo com velocidade de 100 m/s, em um instante t = 0, em uma direção que forma 53° com a horizontal. Admita que a resistência do ar seja desprezível e adote $g = 10\ m/s^2$. Utilizando um referencial cartesiano com a origem localizada no ponto de lançamento, qual a abscissa x e a ordenada y da posição desse projétil no instante t = 12 s?
Dados: sen 53° = 0,80; cos 53° = 0,60.

28 **Vunesp** Um projétil é atirado com velocidade $v_0 = 200$ m/s, fazendo um ângulo de 60° com a horizontal. Desprezada a resistência do ar, qual será a altura do projétil quando sua velocidade fizer um ângulo de 45° com a horizontal?
Adote $g = 10\ m/s^2$.

(a) 500 m (c) 1.000 m (e) 750 m
(b) 1.500 m (d) 3.000 m

29 **Puccamp** Um projétil é lançado segundo um ângulo de 30° com a horizontal, com uma velocidade de 200 m/s. Supondo a aceleração da gravidade igual a 10 m/s² e desprezando a resistência do ar, o intervalo de tempo entre as passagens do projétil pelos pontos de altura 480 m acima do ponto de lançamento, em segundos, é:
(a) 2,0 (c) 6,0 (e) 12
(b) 4,0 (d) 8,0

30 **UFMS 2002** A figura a seguir mostra um objeto sendo lançado de um ponto de coordenadas (d, h), no plano xy, com velocidade inicial v_0, segundo um ângulo θ_0 em relação ao eixo horizontal x. Sabe-se que a maior altura e o alcance horizontal obtidos foram H e L, respectivamente. A aceleração da gravidade é (g) e o objeto será localizado pelas suas coordenadas (x, y).



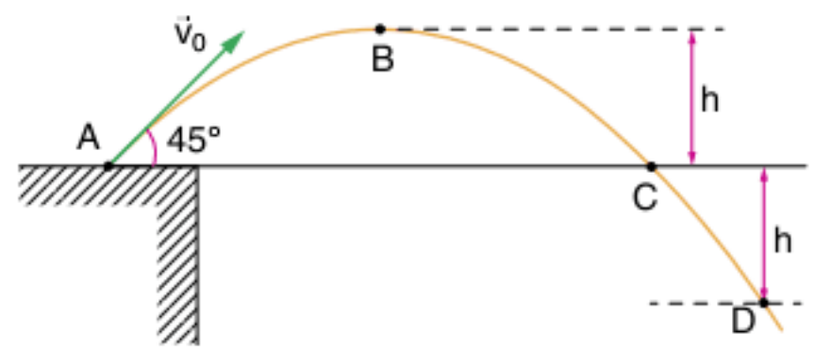
Desprezando a resistência do ar, pode-se afirmar, corretamente, que:
01 se $\theta_0 = 45°$, o alcance horizontal L será máximo.
02 quando y = H, a velocidade do objeto será igual a $v_0 \cdot \cos\theta_0$.
04 quando o objeto atinge o eixo x, as coordenadas do objeto serão (L, 0).
08 o tempo de subida e o tempo de descida do objeto serão iguais.
16 o tempo de descida será maior do que $\frac{v_0 \cdot \text{sen}\,\theta_0}{g}$.
32 $H = h + \left(\frac{v_0 \cdot \text{sen}\,\theta_0}{\sqrt{2g}}\right)^2$

Soma = ☐

31 Do alto de uma torre de 80 m de altura, dispondo de uma "mangueira", um bombeiro lança água para cima, em uma direção que forma um ângulo θ com a horizontal e com uma velocidade de 50 m/s. Admita g = 10 m/s² e despreze a resistência do ar. Calcule a que distância do pé da torre a água atinge o plano horizontal da base da torre.
Dado: sen θ = 0,6.

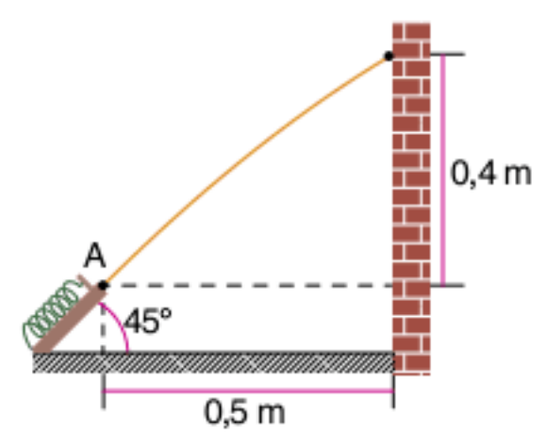
32 **PUC** Do alto de uma torre são lançados, no mesmo instante, dois corpos, A e B, com velocidades iniciais iguais em módulo e inclinações distintas $\alpha_A = 30°$ e $\alpha_B = 45°$. Observa-se que ambos atingem o solo (suposto horizontal) no mesmo ponto. Desprezando a resistência do ar, qual é a relação entre os tempos de queda $\frac{t_A}{t_B}$, respectivamente, dos corpos A e B?

33 **UFPE** Uma pedra é lançada do topo de um edifício, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, formando um ângulo de 45° com a horizontal, conforme a figura a seguir. Despreze a resistência do ar e indique a afirmativa errada.



(a) A velocidade da pedra ao passar pelo ponto D é $\sqrt{(v_0^2 + 2gh)}$.
(b) O tempo gasto pela pedra no percurso BC é menor que o tempo gasto no percurso CD.
(c) O tempo gasto pela pedra no percurso BCD é $\sqrt{2}$ vezes maior que o tempo gasto no percurso BC.
(d) No ponto C, os módulos das componentes vertical e horizontal da velocidade são iguais.
(e) Se o tempo gasto pela pedra no percurso ABC é 2 segundos, h é 5 metros.

34 **UFPR 2005** Um jogo consiste em lançar uma bolinha com um dispositivo dotado de mola, cujo objetivo é atingir um ponto predefinido na parede, conforme ilustrado na figura. O ponto A representa a posição da bolinha no momento imediatamente seguinte ao seu lançamento. Considere g = 10 m/s².

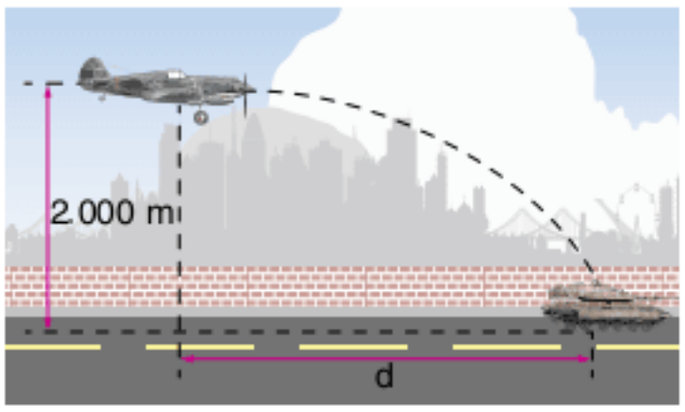


Com base nesses dados, a velocidade de lançamento da bolinha deve ser:
(a) 5,0 m/s
(b) 4,0 m/s
(c) 10 m/s
(d) 20 m/s
(e) 3,0 m/s

35 **Mackenzie** Um jogador de basquete, parado, lança obliquamente a bola da altura de 1,70 m com velocidade de 10 m/s, formando um ângulo α (senα = 0,8; cosα = 0,6) acima da horizontal, para outro jogador situado a 9 m dele. Adote g = 10 m/s² e despreze a resistência do ar. A altura, em relação ao solo, a que esse jogador deve colocar a mão, com o braço na vertical, para apanhar a bola é:
(a) 0,75 m
(b) 1,70 m
(c) 2,25 m
(d) 2,45 m
(e) 2,65 m

Movimentos simultâneos

36 **FEI** Um avião em voo horizontal a 2.000 m de altura deve soltar uma bomba sobre um alvo móvel. A velocidade do avião é 432 km/h, a do alvo é 10 m/s, ambas constantes e de mesmo sentido, e $g = 10\ m/s^2$.

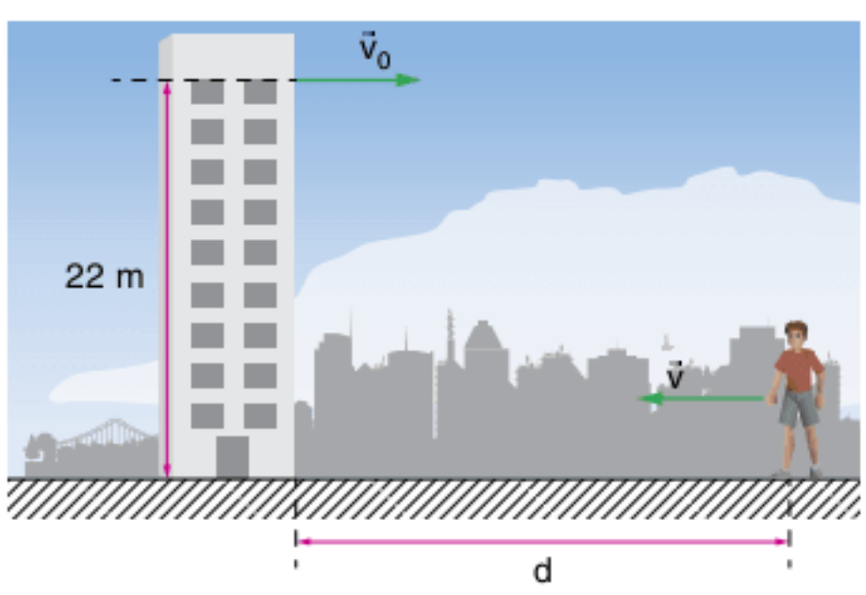


Determine:

a) a distância d em que o avião deverá soltar a bomba para atingir o alvo.

b) o ângulo formado pela linha de visada com a horizontal, no momento em que a bomba é solta.

37 Uma senhora joga, pela janela de seu apartamento, a chave da porta para seu filho, que aguarda no solo. A chave é lançada com velocidade horizontal $\vec{v}_0$, cujo módulo é $v_0 = 3{,}0$ m/s, de um ponto situado 22 m acima do solo (veja a figura). No exato instante em que a chave é lançada, o filho começa a se movimentar com velocidade constante $\vec{v}$, de módulo $v = 5{,}0$ m/s, em direção ao prédio. Com isso, consegue apanhar a chave em um ponto situado 2,0 m acima do solo. Adotando $g = 10\ m/s^2$ e desprezando a resistência do ar, determine a distância d entre o filho e o prédio, no momento em que a chave foi lançada.

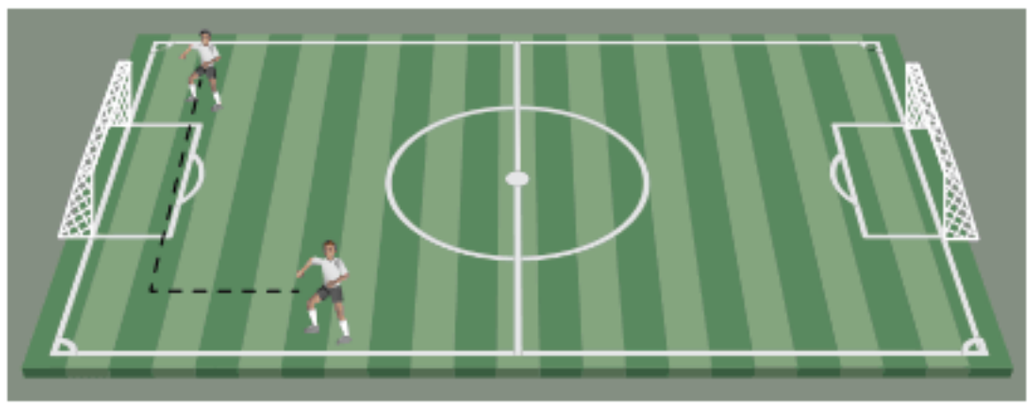


38 **Unifesp 2010** No campeonato paulista de futebol, um famoso jogador nos presenteou com um lindo gol, no qual, ao correr para receber um lançamento de um dos atacantes, o goleador fenomenal parou a bola no peito do pé e a chutou certeira ao gol. Analisando a jogada pela TV, verifica-se que a bola é chutada pelo armador da jogada a partir do chão com uma velocidade inicial de 20,0 m/s, fazendo um ângulo com a horizontal de 45° para cima.

Dados: $g = 10\ m/s^2$ e $\sqrt{2} = 1{,}4$.

a) Determine a distância percorrida pela bola entre o seu lançamento e a posição de recebimento pelo artilheiro (goleador fenomenal).

b) No instante do lançamento da bola, o artilheiro estava a 16,0 m de distância da posição em que ele estimou que a bola cairia e, ao perceber o início da jogada, corre para receber a bola. A direção do movimento do artilheiro é perpendicular à trajetória da bola, como mostra a figura. Qual é a velocidade média, em km/h, do artilheiro, para que ele alcance a bola imediatamente antes de ela tocar o gramado?

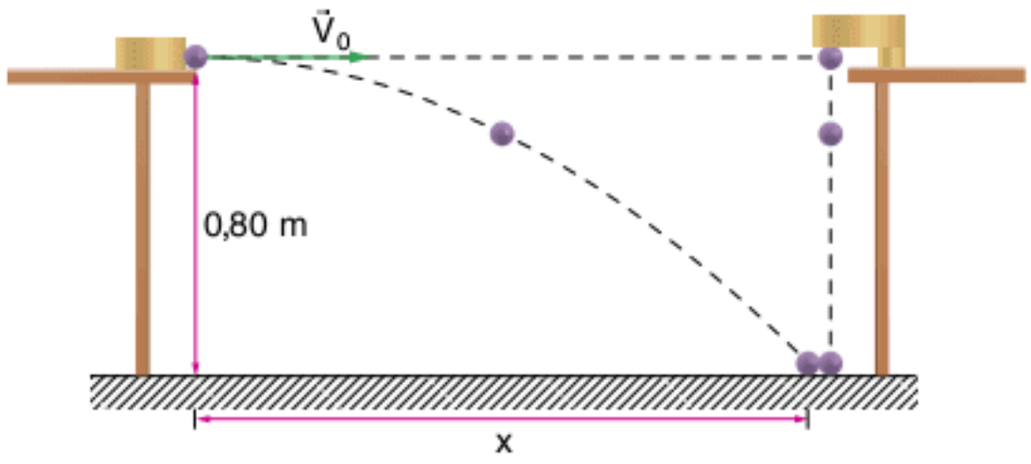


39 **UFRJ 2003** Duas mesas de 0,80 m de altura estão apoiadas sobre um piso horizontal, como mostra a figura a seguir. Duas pequenas esferas iniciam o seu movimento simultaneamente do topo da mesa: 1) a primeira, da mesa esquerda, é lançada com velocidade $\vec{V}_0$ na direção horizontal, apontando para a outra esfera, com módulo igual a 4 m/s; 2) a segunda, da mesa da direita, cai em queda livre.

Sabendo que elas se chocam no momento em que tocam o chão, determine:

a) o tempo de queda das esferas.

b) a distância x horizontal entre os pontos iniciais do movimento.



40 **ITA 2009** Considere hipoteticamente duas bolas lançadas de um mesmo lugar ao mesmo tempo: a bola 1, com velocidade para cima de 30 m/s, e a bola 2, com velocidade de 50 m/s formando um ângulo de 30° com a horizontal. Considerando $g = 10\ m/s^2$, assinale a distância entre as bolas no instante em que a primeira alcança sua máxima altura.

(a) $d = \sqrt{6.250}$ m

(b) $d = \sqrt{7.217}$ m

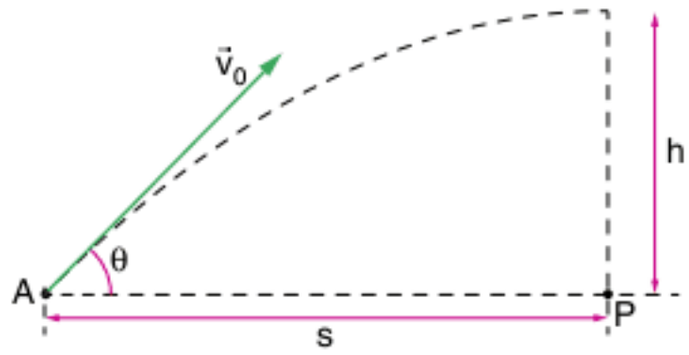
(c) $d = \sqrt{17.100}$ m

(d) $d = \sqrt{19.375}$ m

(e) $d = \sqrt{26.875}$ m

41 **FEI (Adapt.)** Num exercício de tiro ao prato, um prato é lançado verticalmente de um ponto P. Simultaneamente, uma arma é disparada de um ponto A, situado na mesma horizontal de P, à distância s = 24 m dele. Depois de 2 s, o projétil atinge o prato numa altura h = 12 m.

Dado: $g = 10\ m/s^2$.



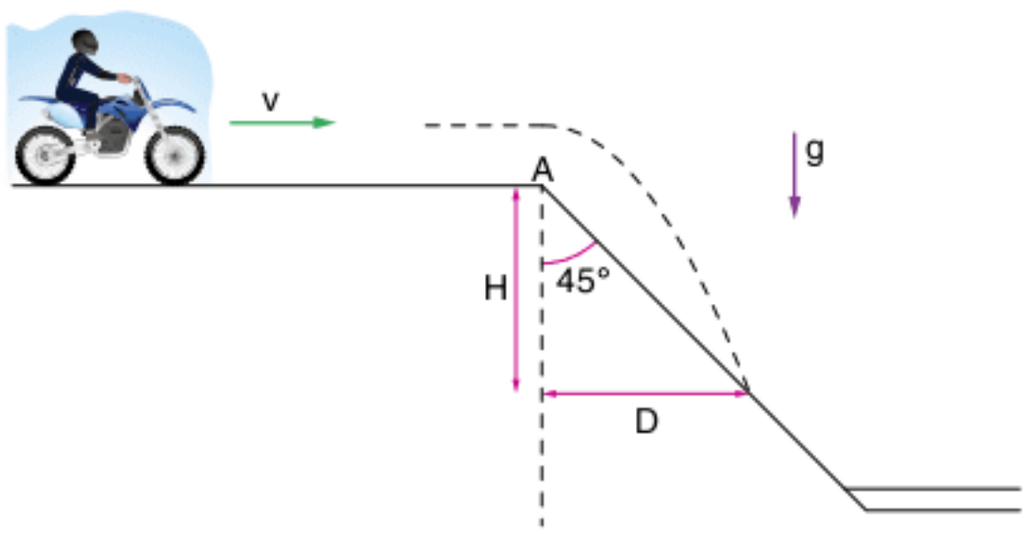
Desprezando os efeitos do ar, determine:

a) o módulo da velocidade inicial ($\vec{v}_0$) do projétil.

b) o ângulo θ que o cano da arma deve fazer com a horizontal.

Lançamento ao longo de plano inclinado

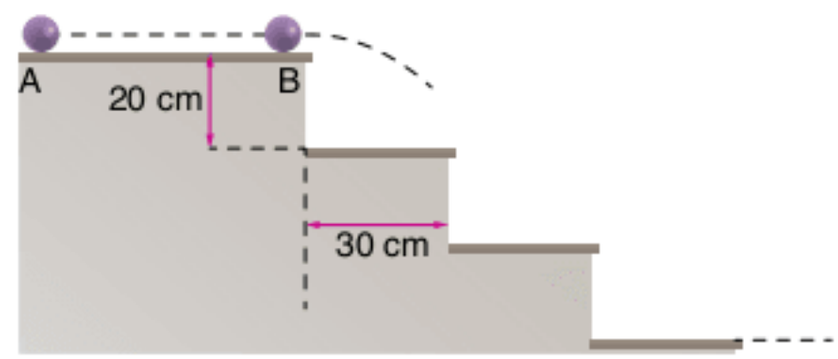
42 **Fuvest 2001** Um motociclista de motocross move-se com velocidade v = 10 m/s, sobre uma superfície plana, até atingir uma rampa (em A), inclinada a 45° com a horizontal, como indicado na figura.



A trajetória do motociclista deverá atingir novamente a rampa a uma distância horizontal D (D = H), do ponto A, aproximadamente igual a:

(a) 20 m
(b) 15 m
(c) 10 m
(d) 7,5 m
(e) 5 m

43 **Cesgranrio** Na superfície horizontal do patamar superior de uma escada, uma esfera de massa 10 g rola de um ponto A para um ponto B, projetando-se no ar a partir deste ponto para os degraus inferiores. Cada degrau tem altura de 20 cm e largura de 30 cm.



Considerando-se desprezível a resistência do ar e g = 10 m/s², a velocidade mínima que a esfera deve ter ao passar pelo ponto B, para não tocar no primeiro degrau logo abaixo, é, em m/s, igual a:

(a) 0,6
(b) 0,8
(c) 1,0
(d) 1,2
(e) 1,5

TEXTOS COMPLEMENTARES

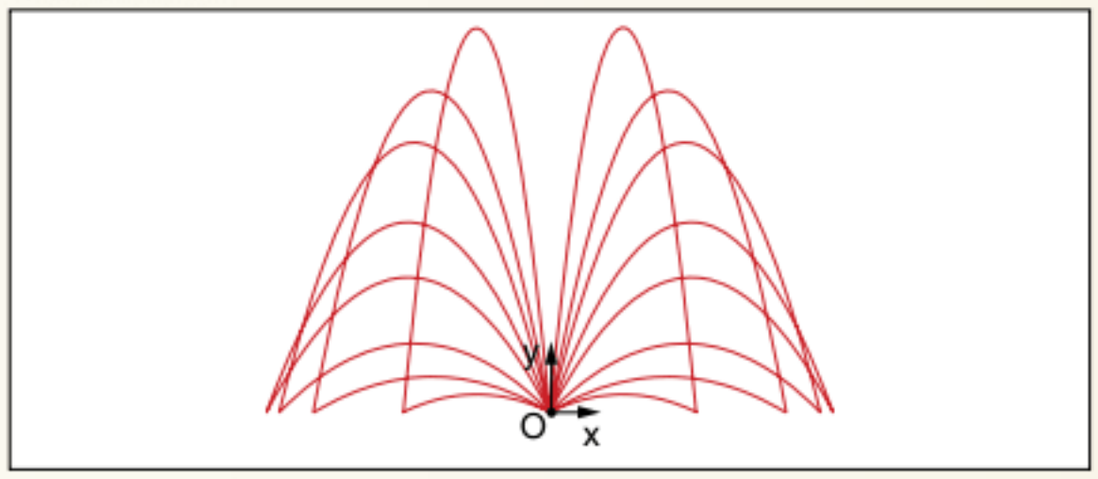
Parábola de segurança

Para analisarmos este aspecto muito interessante do lançamento de projéteis, tomemos um corpo que é arremessado com velocidade sempre igual a v_0 a partir do mesmo ponto, variando somente o ângulo de lançamento θ.

Podemos tomar como exemplo um canhão que sempre dispara projéteis com a mesma velocidade.

A água utilizada para apagar incêndios também sai da mangueira com a mesma velocidade. Tanto o atirador quanto o bombeiro variam apenas o ângulo para atingir alvos diferentes.

Se tomarmos ângulos diferentes de lançamento a partir da origem do sistema xOy, encontramos uma figura da seguinte forma:



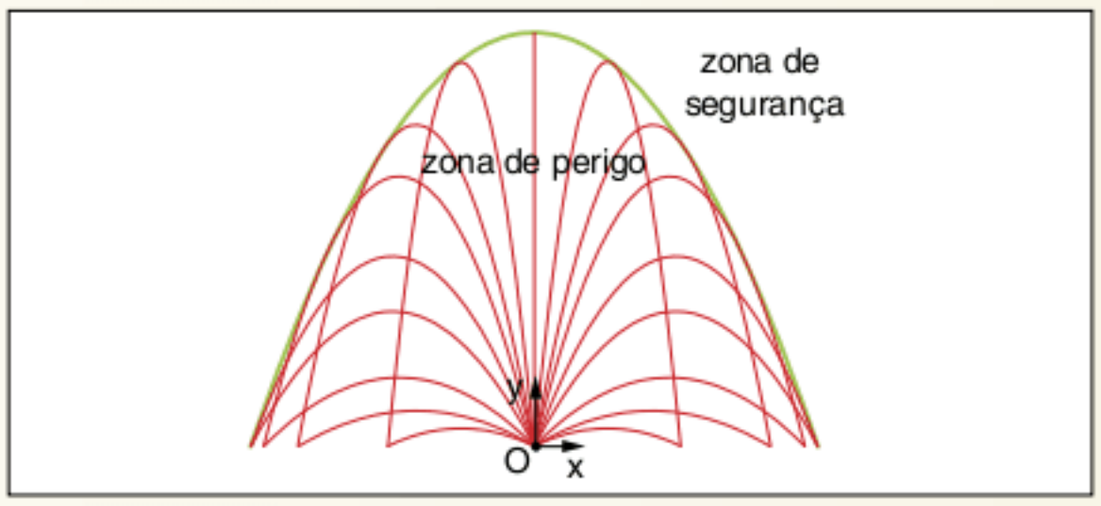
Da figura, podemos observar que existe uma região limite, tal que um alvo fora dessa região jamais será atingido. Pode ser demonstrado que essa região é delimitada por uma parábola, chamada de parábola de segurança.

Observação: Não faz parte deste texto a demonstração de que essa região é uma parábola; vamos assumir isso como verdadeiro e deduzir a sua equação.

A região envolvida pela curva é chamada de zona de perigo e a região exterior à curva é chamada de zona de segurança.

A parábola de segurança tem propriedades muito interessantes:

- se plotarmos todos os lançamentos a partir do ponto O, com uma mesma velocidade v_0, apenas variando o ângulo de lançamento, verificamos que as trajetórias obtidas (parábolas) tangenciam a parábola de segurança.



- se desejarmos lançar um projétil para atingir um determinado ponto, existem infinitas combinações de v_0 e θ que satisfarão essa necessidade. No entanto, a equação da parábola de segurança determina a menor velocidade de lançamento que possibilita o alvejamento.

A equação geral de uma parábola é dada por:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Para a dedução da equação da parábola de segurança, precisamos conhecer três pontos:

I. no lançamento a 45°, o alcance é máximo e a trajetória do projétil tangencia a parábola de segurança no ponto $x = A_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$ e $y = 0$.

II. por simetria, também pertence à parábola o ponto $x = -\frac{v_0^2}{g}$ e $y = 0$.

III. no lançamento vertical ($\theta = 90°$), a altura é máxima e a trajetória do projétil tangencia a parábola de segurança no ponto $y = h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$ e $x = 0$.

Como $y = ax^2 + bx + c$, do ponto $\left(0;\ \frac{v_0^2}{2g}\right)$, temos:

$$\frac{v_0^2}{2g} = a.0^2 + b.0 + c \Rightarrow c = \frac{v_0^2}{2g}$$

Pela simetria da parábola em relação ao eixo Oy, temos que $b = 0$.

Logo, do ponto $\left(\frac{v_0^2}{g};\ 0\right)$, temos:

$$0 = a\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 + 0\left(\frac{v_0^2}{g}\right) + \left(\frac{v_0^2}{2g}\right) \Rightarrow a = -\frac{g}{2v_0^2}$$

Então, a parábola de segurança tem sua equação dada por:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}.x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Podemos estudar um exemplo de aplicação:

Exercício resolvido

1 Um bombeiro deseja apagar um incêndio de um prédio de 15 andares. Devido às proporções do incêndio, o bombeiro não pode se aproximar mais de 10 m da base do prédio. Sabendo que a mangueira lança o jato de água com velocidade não superior a 20 m/s, qual a maior altura que o jato de água atingirá ao longo do prédio?

Desprezando a resistência do ar, a água percorre uma trajetória parabólica.

Resolução:

Sabemos que $v_0 = 20$ m/s e que $g = 10$ m/s².

A maior altura atingida pelo jato de água é aquela pertencente à parábola de segurança para $x = 10$ m.

Da equação $y = -\frac{g}{2v_0^2}.x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$, temos:

$$h = -\frac{10}{2.20^2}.10^2 + \frac{20^2}{2.10} \Rightarrow h = -1,25 + 20$$

Logo: $h = 18,75$ m

Observação: Vale lembrar que este problema seria de difícil resolução caso não utilizássemos esta ferramenta poderosa, que é a parábola de segurança.

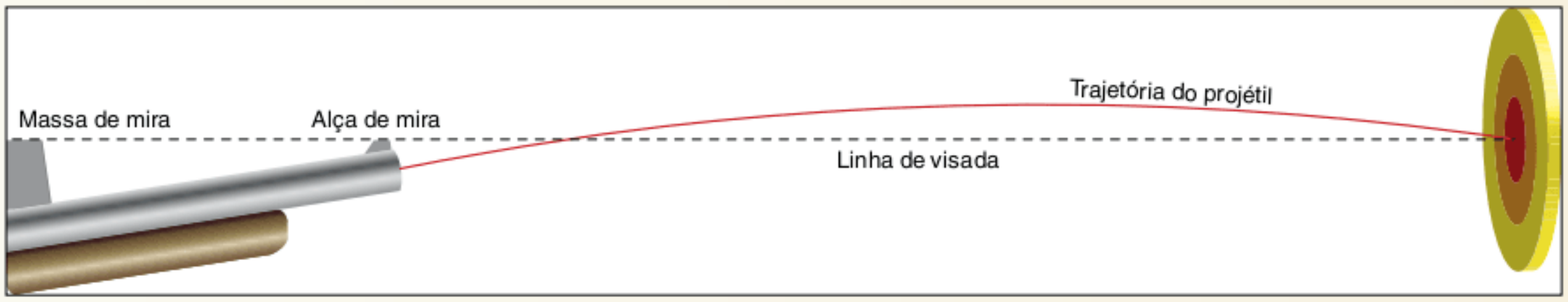
No entanto, esse conceito não será utilizado em nenhum de nossos exercícios.

A linha de visada é paralela à trajetória do projétil?

Em uma competição de tiro ao alvo, um atirador mira seu alvo através da linha de visada, geralmente sinalizada por uma marca na ponta da arma.

O prolongamento dessa linha passa pelo alvo do tiro. Para tiros de longo alcance, devido à ação da aceleração da gravidade por um maior intervalo de tempo, é necessário utilizar o ajuste da alça de mira.

Esse ajuste é realizado a partir do alcance de alça, que é o alcance registrado na alça de mira, presente em armas que efetuam tiros a longas distâncias com precisão, como rifles e fuzis. Esse alcance compensa a ação da gravidade na trajetória do projétil. Assim, apesar de o atirador mirar de modo retilíneo, o cano da arma tem uma pequena inclinação ascendente e realiza um lançamento oblíquo em vez de um lançamento retilíneo.



RESUMINDO

Estudamos, neste capítulo, o lançamento de um corpo em que a direção de lançamento não é mais vertical, mas forma um ângulo com a direção horizontal (ou vertical). Para o desenvolvimento do estudo, foi necessário considerar desprezível a resistência do ar e assumir um campo gravitacional uniforme, ou seja, o vetor aceleração da gravidade a que ficará sujeito o corpo será sempre constante.

É importante destacar que os conceitos utilizados no presente capítulo já foram objeto de estudo nos capítulos 2 e 3 (movimento uniforme e movimento uniformemente variado). Isso se dá porque o **lançamento oblíquo**, que é bidimensional, nada mais é do que a composição de dois movimentos unidimensionais:

- **MRUV na vertica**l, pois, nessa direção, o corpo estará sujeito à aceleração constante da gravidade.
- **MRU na horizonta**l, pois, nessa direção, o corpo estará livre de acelerações.

As velocidades iniciais vertical e horizontal são obtidas a partir da decomposição da velocidade inicial do corpo em y e x, respectivamente. Consideramos, ao longo do estudo, um lançamento em que o corpo deixa e atinge pontos situados no mesmo nível.

Desse modo, as equações válidas para o movimento oblíquo são:

- **movimento vertica**l:

$y = v_0 . \text{sen}\theta t - \frac{1}{2}gt^2$ $\quad v_y = v_0 . \text{sen}\theta - gt$ $\quad a_y = -g$ $\quad v_y^2 = v_0^2 . \text{sen}^2\theta - 2g\Delta y$

- **movimento horizonta**l:

$x = v_0 . \cos\theta t$ $\quad v_x = v_0 . \cos\theta$ $\quad a_x = 0$

Dessas equações, podemos deduzir algumas relações importantes para o lançamento oblíquo:

- **tempo de subida**: $t_s = \frac{v_0 . \text{sen}\theta}{g}$
- **tempo total de movimento**: $T = \frac{2v_0 . \text{sen}\theta}{g}$
- **altura máxima**: $h_{máx} = \frac{v_0^2 . \text{sen}^2\theta}{2g}$
- **alcance**: $A = \frac{v_0^2 . \text{sen}2\theta}{g}$
- **alcance máximo**: $A_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$
- **equação da trajetória**: $y = \text{tg}\theta . x - \frac{g}{2v_0^2 . \cos^2\theta} . x^2$

Vale observar que o movimento resultante é uma parábola, em que a velocidade vetorial, que é a resultante das velocidades vertical e horizontal, é sempre tangente à trajetória. Além disso, a aceleração vetorial, que é a resultante das acelerações tangencial e centrípeta, é sempre igual ao vetor aceleração da gravidade.

QUER SABER MAIS?

SITES

- Lançamento oblíquo
  <http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_pt_BR.html>.
  <www.fisica.ufpb.br/~romero/objetosaprendizagem/Rived/02aProjeteisMovimento/site/Animacao.htm>.
  <http://demotu.org/x/salto/fundamentos.html>.

Exercícios complementares

Considere, quando necessário, $g = 10\ m/s^2$.

Conceitos de lançamento oblíquo

1 **UFSC** Suponha um bombardeiro voando horizontalmente com velocidade vetorial constante. Em certo instante, uma bomba é solta do avião. Desprezando a resistência do ar, podemos afirmar que:

I. a bomba cai verticalmente, para um observador na Terra.
II. o movimento da bomba pode ser interpretado como sendo composto por dois movimentos: MRUV na vertical e MRU na horizontal.
III. a bomba atingirá o solo exatamente abaixo do avião.
IV. a bomba adquire uma aceleração vertical igual à aceleração da gravidade, g.

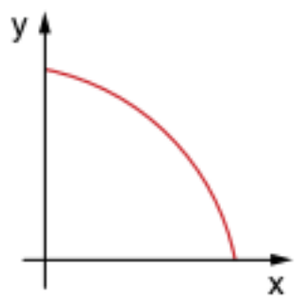
Estão corretas:

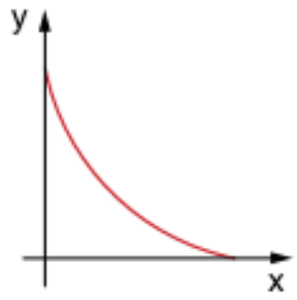
(a) II, III e IV.
(b) II e IV.
(c) II e III
(d) I, II e IV.
(e) todas.

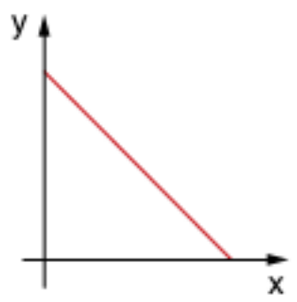
2 **UFMG** Uma pessoa observa o movimento parabólico de uma pedra lançada horizontalmente com velocidade v_0. A pessoa poderia ver a pedra cair verticalmente se se deslocasse:

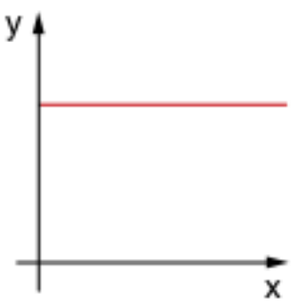
(a) com velocidade $v' = 2v_0$, paralela a v_0 e no mesmo sentido.
(b) com velocidade $v' = v_0$, paralela a v_0 e no sentido oposto.
(c) com velocidade $v' = v_0$, paralela a v_0 e no mesmo sentido.
(d) com velocidade $v' = 2v_0$, paralela a v_0 e no sentido oposto.
(e) com velocidade $v' = v_0$, em qualquer direção e em qualquer sentido.

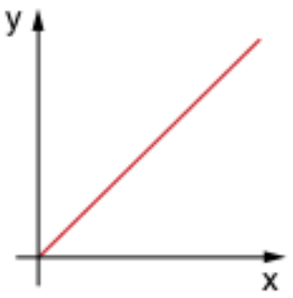
3 **UFPB 2006** Uma partícula é abandonada de uma altura h em relação ao solo. Durante a queda, além da aceleração da gravidade, essa partícula fica sujeita a uma aceleração horizontal constante devido a uma força horizontal que atua sobre a mesma. Nessas condições, a trajetória da partícula está mais bem representada no gráfico:

(a)


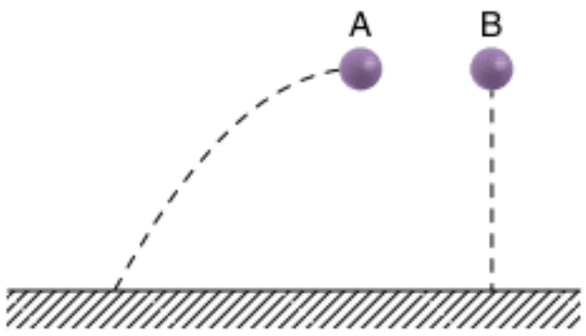
(b)


(c)


(d)


(e)


4 **UFMG** Um corpo A é lançado horizontalmente de uma determinada altura. No mesmo instante, um outro corpo B é solto em queda livre, a partir do repouso, dessa mesma altura, como mostra a figura.

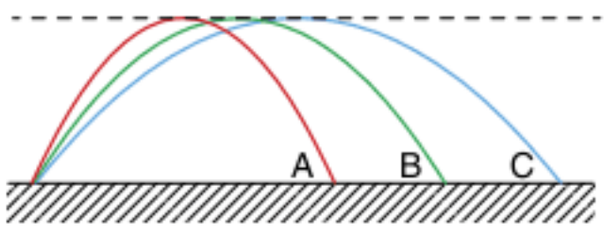


Sejam v_A e v_B os módulos das velocidades dos corpos A e B, respectivamente, imediatamente antes de tocarem o chão e t_A e t_B os tempos despendidos por cada corpo nesse percurso. Despreze os efeitos da resistência do ar.

Nessas condições, pode-se afirmar que:

(a) $v_A = v_B$ e $t_A > t_B$
(b) $v_A = v_B$ e $t_A = t_B$
(c) $v_A > v_B$ e $t_A > t_B$
(d) $v_A > v_B$ e $t_A = t_B$

5 A figura a seguir mostra três trajetórias de uma bola de futebol que é chutada de um mesmo ponto.



a) Sejam: t o tempo de permanência da bola no ar, V_y a componente vertical da velocidade inicial da bola e V_x a componente horizontal da velocidade inicial. Em relação a estas três grandezas físicas e considerando as três trajetórias A, B e C acima, livres da resistência do ar, pode-se concluir que:

(a) $t_A < t_B < t_C$, $V_{yA} = V_{yB} = V_{yC}$, $V_{xA} = V_{xB} = V_{xC}$
(b) $t_A = t_B = t_C$, $V_{yA} < V_{yB} < V_{yC}$, $V_{xA} < V_{xB} = V_{xC}$
(c) $t_A = t_B = t_C$, $V_{yA} = V_{yB} = V_{yC}$, $V_{xA} < V_{xB} < V_{xC}$
(d) $t_A = t_B = t_C$, $V_{yA} = V_{yB} = V_{yC}$, $V_{xA} > V_{xB} > V_{xC}$
(e) $t_A < t_B < t_C$, $V_{yA} < V_{yB} < V_{yC}$, $V_{xA} = V_{xB} > V_{xC}$

b) Podemos concluir ainda que:

(a) as bolas foram lançadas com velocidades de mesma intensidade.
(b) as velocidades das bolas no ponto mais alto da trajetória são iguais.
(c) os ângulos de tiro de A e C (ângulo entre a velocidade de lançamento e o plano horizontal) são complementares.
(d) a cada instante, as bolas estavam na mesma altura.
(e) durante o voo, as bolas têm acelerações diferentes.

6 **Cesgranrio** Um corpo é lançado obliquamente para cima. Desprezando-se a resistência do ar, o vetor variação da velocidade do corpo entre dois pontos quaisquer da trajetória é:

(a) ↓

(b) ↑

(c) nulo.

(d) ←

(e) →

7 **PUC** Um projétil de massa 100 g é lançado obliquamente a partir do solo, para o alto, numa direção que forma 60° com a horizontal, com velocidade de 120 m/s, primeiro na Terra e posteriormente na Lua.

Considerando a aceleração da gravidade da Terra o sêxtuplo da gravidade lunar e desprezíveis todos os atritos nos dois experimentos, analise as proposições a seguir.

I. A altura máxima atingida pelo projétil é maior na Lua que na Terra.

II. A velocidade do projétil, no ponto mais alto da trajetória, será a mesma na Lua e na Terra.

III. O alcance horizontal máximo será maior na Lua.

IV. A velocidade com que o projétil toca o solo é a mesma na Lua e na Terra.

Está(ão) correta(s):

(a) apenas III e IV.
(b) apenas II.
(c) apenas III.
(d) todas.
(e) nenhuma delas.

8 **UFSC** Um vagão hermeticamente fechado e à prova de som encerra em seu interior um homem e trafega em um trecho reto de estrada. O homem lança uma moeda verticalmente para cima (em relação a ele), deixando-a cair em seguida. A partir dessa experiência, considere as sentenças:

I. O homem não tem condições de descobrir se o trem está parado ou em movimento retilíneo uniforme porque, em ambas as hipóteses, a moeda descreve trajetória retilínea em relação ao vagão.

II. O sentido do movimento do vagão não pode ser determinado pelo homem, caso o vagão se mova com velocidade constante.

III. O homem tem condições de descobrir se o trem está acelerado.

Quais são as sentenças verdadeiras?

Lançamento oblíquo

9 **UFPE 2002** Numa partida de futebol, uma falta é cobrada de modo que a bola é lançada segundo um ângulo de 30° com o gramado. A bola alcança uma altura máxima de 5,0 m. Qual é o módulo da velocidade inicial da bola em km/h? Despreze a resistência do ar.

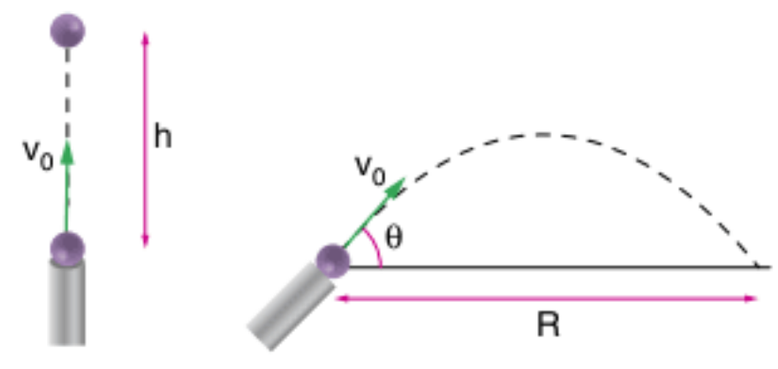
10 **Fuvest** Um gato, de 1 kg, dá um pulo, atingindo uma altura de 1,25 m e caindo a uma distância de 1,5 m do local do pulo.

a) Calcule a componente vertical de sua velocidade inicial.

b) Calcule a velocidade horizontal do gato.

11 **FEI** Uma pessoa na traseira de um caminhão atira uma pedra obliquamente para trás com velocidade de 8,00 m/s, que forma com uma vertical presa ao carro um ângulo de 30°. Para uma pessoa estacionada à beira da estrada, a pedra cai exatamente segundo a vertical. Determine a velocidade do caminhão, em km/h.

12 **UEL 2010** Um sistema mecânico que consiste de um pequeno tubo com uma mola consegue imprimir a uma esfera de massa m uma velocidade fixa v_0. Tal sistema é posto para funcionar impulsionando a massa na direção vertical, a massa atingindo a altura máxima h e voltando a cair. Em seguida, o procedimento é efetuado com o eixo do tubo formando um determinado ângulo com a direção horizontal, de modo que o alcance R nesta direção seja maximizado. Tais situações estão representadas na figura a seguir.



Os experimentos ocorrem em um local onde a aceleração da gravidade g' é um pouco menor que seu valor na superfície terrestre $g = 9{,}8\ m/s^2$.

Baseado nesses dados e concordando com expressões cinemáticas para os movimentos de queda livre e lançamento oblíquo, é correto afirmar:

(a) a razão $\frac{h}{R}$ obedecerá a relação $\frac{h}{R} = \frac{g}{2g'}$.

(b) a razão $\frac{h}{R}$ obedecerá a relação $\frac{h}{R} = \frac{2g}{g'}$.

(c) a razão $\frac{h}{R}$ obedecerá a relação $\frac{h}{R} = \frac{g'}{2g}$.

(d) a distância R a ser alcançada pela massa será a mesma que se obteria em um experimento na superfície terrestre, porque tal quantidade só depende do valor da componente horizontal da velocidade $v_0 \cos(\theta)$.

(e) R e h serão diferentes de seus valores obtidos em experimentos realizados na superfície, mas a relação $\frac{h}{R} = \frac{1}{2}$ se manterá, porque esta independe do valor local da aceleração da gravidade.

13 **FMI** Um projétil de massa m é lançado com velocidade inicial $\vec{v}_0$, fazendo certo ângulo com a horizontal. A componente horizontal de sua velocidade será, considerando H a altura máxima:

(a) v_0
(b) $\sqrt{2v_0}$
(c) $\sqrt{v_0^2 + 2gH}$
(d) $\sqrt{v_0^2 - 2gH}$
(e) $\sqrt{2gH}$

14 **Utam** Um índio lança uma flecha para atingir uma tartaruga que se encontra na outra margem de um lago. Qual será o ângulo de elevação desse lançamento, sabendo que a tartaruga está a 300 m de distância horizontal do ponto de lançamento e que o tempo total do percurso da flecha é 30 s?
Considere $g = 10\ m/s^2$.

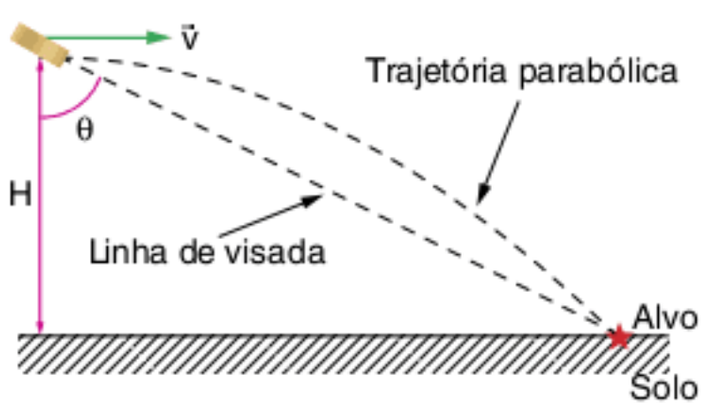
(a) $tg^{-1}15$
(b) $tg^{-1}30$
(c) $sen^{-1}10$
(d) $sen^{-1}30$
(e) $cos^{-1}10$

15 **Unicamp 2002** Até os experimentos de Galileu Galilei, pensava-se que quando um projétil era arremessado, o seu movimento devia-se ao *impetus*, o qual mantinha o projétil em linha reta e com velocidade constante. Quando o *impetus* acabasse, o projétil cairia verticalmente até atingir o chão. Galileu demonstrou que a noção de *impetus* era equivocada. Consideremos que um canhão dispara projéteis com uma velocidade inicial de 100 m/s, fazendo um ângulo de 30º com a horizontal. Dois artilheiros calcularam a trajetória de um projétil: um deles, Simplício, utilizou a noção de *impetus*, o outro, Salviati, as ideias de Galileu. Os dois artilheiros concordavam apenas em uma coisa: o alcance do projétil.

a) Qual o alcance do projétil?
b) Qual a altura máxima alcançada pelo projétil, segundo os cálculos de Salviati?
c) Qual a altura máxima calculada por Simplício?

16 **Unitau** Um alvo de altura 1,0 m encontra-se a certa distância x do ponto de disparo de uma arma, que está alinhada com o centro daquele. A arma é, então, mirada no centro do alvo e o projétil sai com velocidade horizontal 500 m/s. Supondo nula a resistência do ar e adotando $g = 10\ m/s^2$, qual a distância máxima a que se deve localizar a arma do alvo de modo que o projétil o atinja?

17 Um avião de bombardeio voa horizontalmente em linha reta, à altura H, com velocidade $\vec{v}$. Desprezando influências do ar no movimento da bomba, determine o ângulo θ, no momento da largada da bomba, para que ela atinja o alvo.

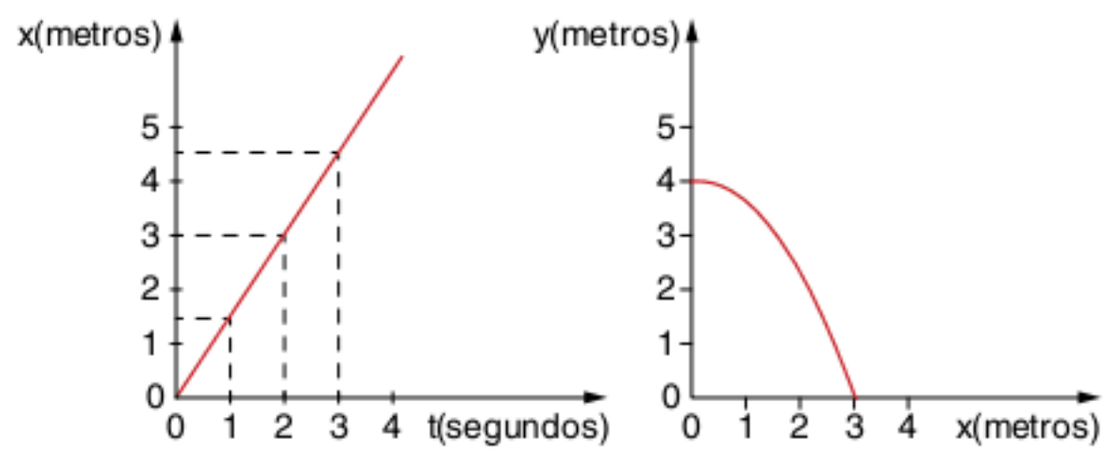


18 **UFG** Uma esfera rola sobre uma mesa horizontal, abandona essa mesa com uma velocidade horizontal v_0 e toca o solo após 1 s. Sabendo que a distância horizontal percorrida pela bola é igual à altura da mesa, a velocidade v_0, considerando $g = 10\ m/s^2$, é de:

(a) 1,25 m/s
(b) 10,00 m/s
(c) 20,00 m/s
(d) 5,00 m/s
(e) 2,50 m/s

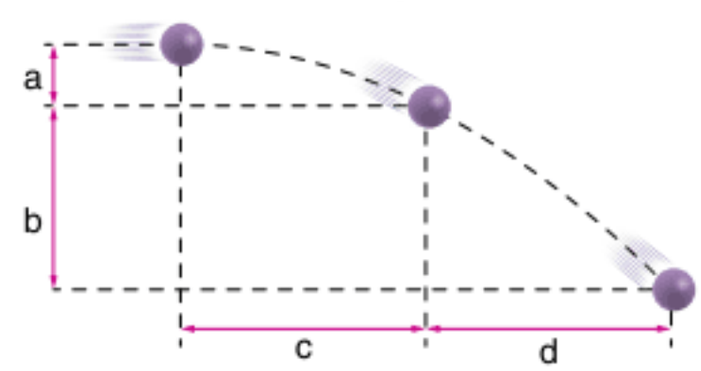
19 **Vunesp** Em voo horizontal, a 3.000 m de altitude, com a velocidade de 540 km/h, um bombardeiro deixa cair uma bomba. Esta explode 15 s antes de atingir o solo. Desprezando a resistência do ar, calcule a velocidade da bomba no momento da explosão.
Dado: $g = 10\ m/s^2$.

20 **Unicamp** Um habitante do planeta Bongo atirou uma flecha e obteve os gráficos a seguir. Sendo x a distância horizontal e y a vertical:



a) Qual a velocidade horizontal da flecha?
b) Qual a velocidade vertical inicial da flecha?
c) Qual o valor da aceleração da gravidade no planeta Bongo?

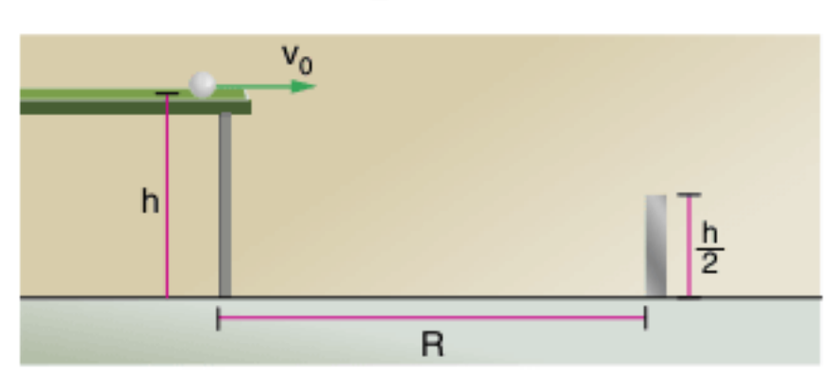
21 A figura mostra a fotografia estroboscópica de uma bolinha lançada horizontalmente, nas proximidades da Terra:



Sendo a = 1 m e c = 4 m, calcule b e d.

22 **Cesgranrio** Para bombardear um alvo, um avião em voo horizontal a uma altitude de 2,0 km solta a bomba quando a sua distância horizontal até o alvo é de 4,0 km. Admite-se que a resistência do ar seja desprezível. Para atingir o mesmo alvo, se o avião voasse com a mesma velocidade, mas, agora, a uma altitude de apenas 0,50 km, ele teria que soltar a bomba a que distância horizontal do alvo?

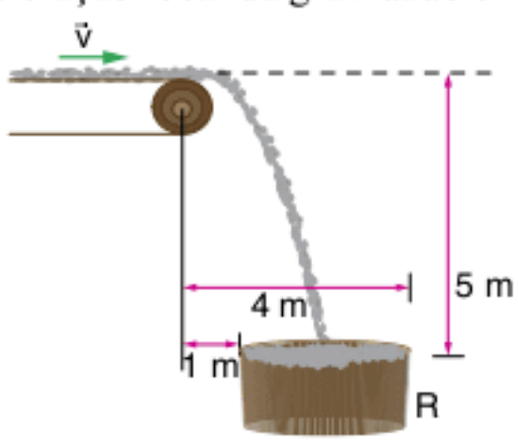
23 **UFPB 2009** Um jogador de tênis de mesa arremessa uma bola horizontalmente, com velocidade v_0, de uma mesa com altura h. A uma distância R dessa mesa existe uma chapa metálica fina e rígida com altura $\frac{h}{2}$, conforme representado abaixo:



Nesse contexto, desprezando-se as perdas de energia da bola por atrito com o ar, ou devido a possível impacto com a chapa, identifique as afirmativas corretas.

I. O menor valor que v_0 pode ter, para que a bola passe por cima da parede, é $R\sqrt{\frac{g}{h}}$.
II. O tempo que a bola leva para atingir o solo não depende de v_0.
III. O tempo para a bola cair a primeira metade da altura é o mesmo para a segunda metade.
IV. A componente horizontal da velocidade da bola, antes de atingir o solo, é v_0.
V. O tempo de queda da bola, em um planeta cuja aceleração da gravidade seja 2g, será maior que na Terra.

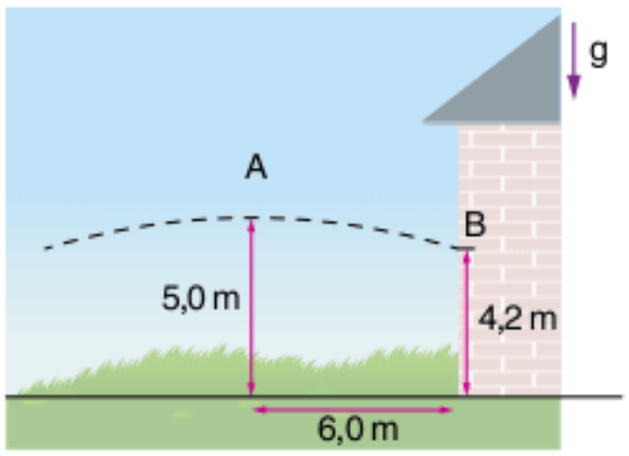
24 **PUC** O esquema representa uma correia que transporta minério, lançando-o no recipiente R. A velocidade da correia é constante e a aceleração local da gravidade é 10 m/s².



a) Para que todo o minério caia dentro do recipiente, a velocidade v da correia, dada em m/s, deve satisfazer a desigualdade:
(a) $2 < v < 3$
(b) $2 < v < 5$
(c) $1 < v < 3$
(d) $1 < v < 4$
(e) $1 < v < 5$

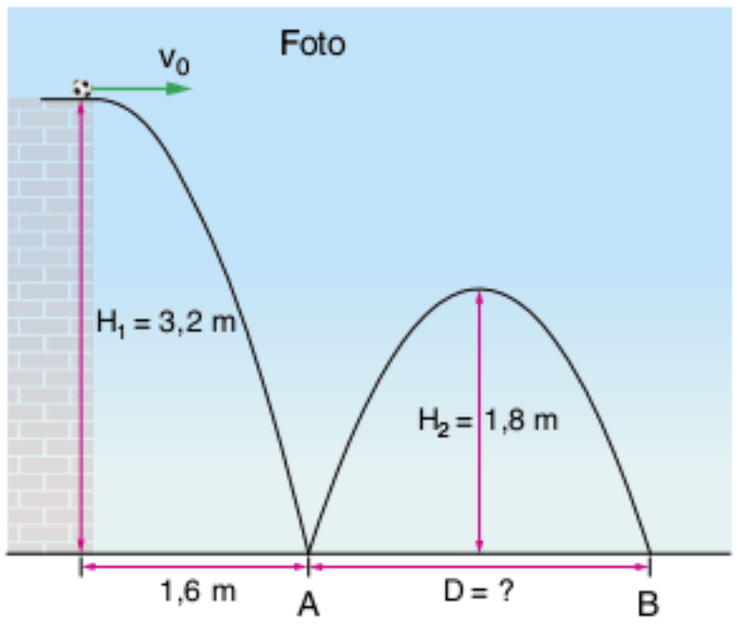
b) Se for aumentado o desnível entre a correia transportadora e o recipiente R, o intervalo de variação das velocidades-limite para que todo o minério caia em R:
(a) permanece o mesmo, assim como os valores das velocidades-limite.
(b) permanece o mesmo, mas os valores das velocidades-limite aumentam.
(c) permanece o mesmo, mas os valores das velocidades-limite diminuem.
(d) aumenta.
(e) diminui.

25 **Fuvest 2004** Durante um jogo de futebol, um chute forte, a partir do chão, lança a bola contra uma parede próxima. Com auxílio de uma câmera digital, foi possível reconstituir a trajetória da bola, desde o ponto em que ela atingiu sua altura máxima (ponto A) até o ponto em que bateu na parede (ponto B). As posições de A e B estão representadas na figura. Após o choque, que é elástico, a bola retorna ao chão e o jogo prossegue.



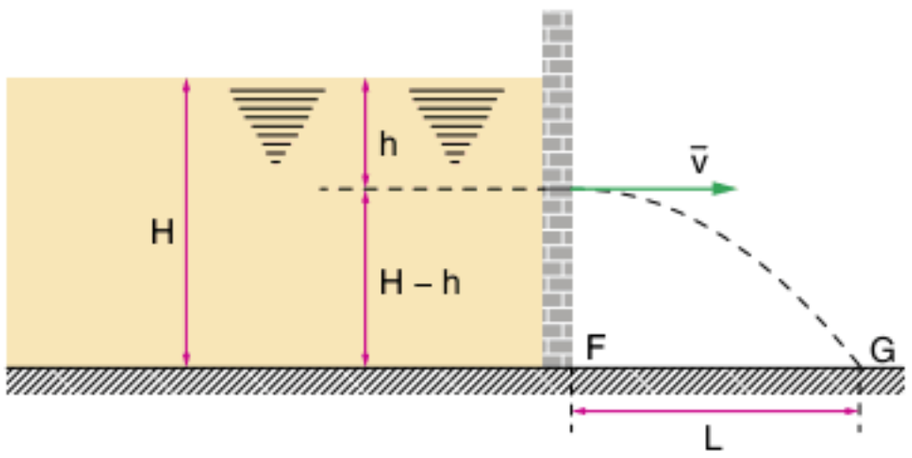
Note e adote: V_y é positivo quando a bola sobe; V_x é positivo quando a bola se move para a direita.
a) Estime o intervalo de tempo t_1, em segundos, que a bola levou para ir do ponto A ao ponto B.
b) Estime o intervalo de tempo t_2, em segundos, durante o qual a bola permaneceu no ar, do instante do chute até atingir o chão após o choque.
c) Represente, no sistema de eixos da folha de resposta, em função do tempo, as velocidades horizontal V_x e vertical V_y da bola em sua trajetória, do instante do chute inicial até o instante em que atinge o chão, identificando por V_x e V_y, respectivamente, cada uma das curvas.

26 **Fuvest 2007** Uma bola chutada horizontalmente de cima de uma laje, com velocidade V_0, tem sua trajetória parcialmente registrada em uma foto, representada no desenho abaixo. A bola bate no chão, no ponto A, voltando a atingir o chão em B, em choques parcialmente inelásticos.



Note e adote: Nos choques, a velocidade horizontal da bola não é alterada. Desconsidere a resistência do ar, o atrito e os efeitos de rotação da bola.
a) Estime o tempo T, em s, que a bola leva até atingir o chão, no ponto A.
b) Calcule a distância D, em metros, entre os pontos A e B.
c) Determine o módulo da velocidade vertical da bola V_A, em m/s, logo após seu impacto com o chão no ponto A.

27 **FCC** Se um pequeno furo horizontal for feito na parede vertical de um reservatório que contenha um líquido ideal (sem viscosidade), um filete de líquido escoará pelo furo, e sua velocidade inicial terá intensidade $v = \sqrt{2gh}$, onde g é o módulo da aceleração da gravidade. Considere o movimento do fluido como o de um projétil lançado no vácuo, a partir do furo, com velocidade $\vec{v}$.

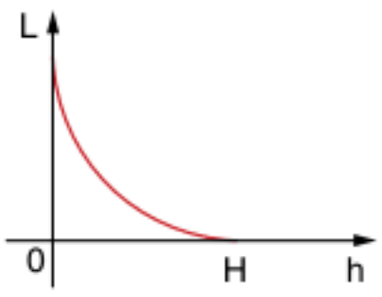


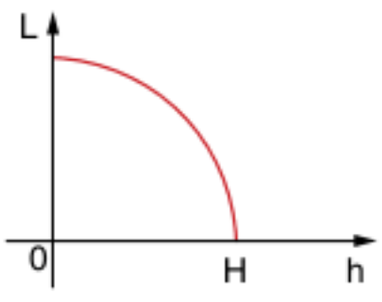
a) Podemos afirmar que o valor de L é:

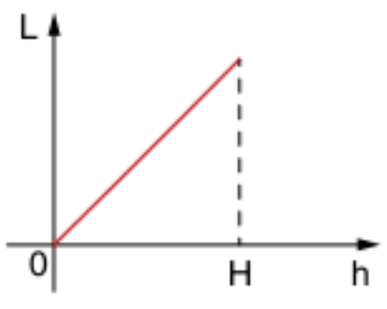
(a) $\frac{(H-h)v}{g}$ (c) $\sqrt{-4h^2+4Hh}$ (e) $\frac{4(H-h)}{v}$

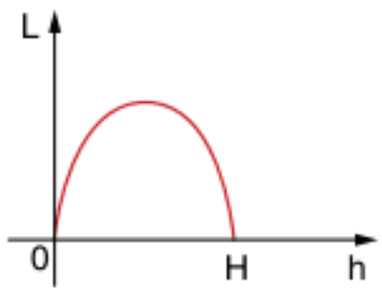
(b) $\sqrt{2vg}$ (d) $\sqrt{\frac{(H-h)v}{2g}}$

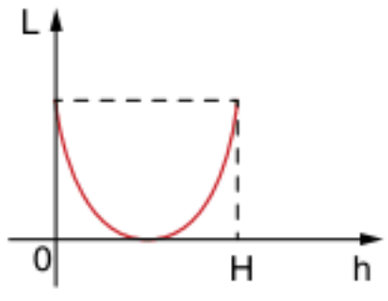
b) O gráfico que melhor representa a distância L em função de h é:

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


c) Se desejarmos que o filete incida em um ponto G o mais afastado possível de F, o furo deverá ser feito a uma altura tal que:

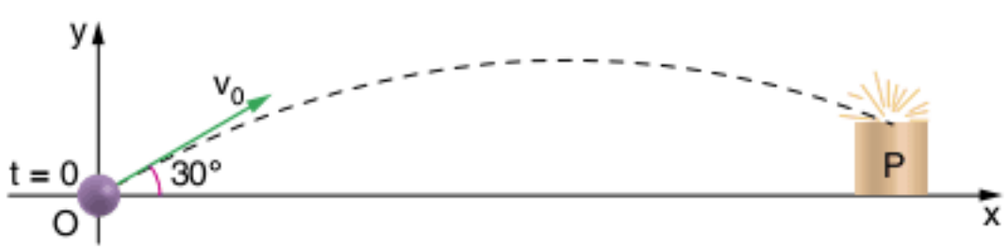
(a) $h = \frac{2}{3}H$ (c) $h = \frac{1}{3}H$ (e) $h = \frac{3}{4}H$

(b) $h = \frac{1}{4}H$ (d) $h = \frac{1}{2}H$

28 Uma pedra é arremessada com velocidade inicial de 80 m/s, formando um ângulo de 30° com a horizontal, para cima. Desprezando-se a resistência do ar, o módulo de sua velocidade, em m/s, 5 segundos após o lançamento, é aproximadamente:
Adote $g = 10\ m/s^2$.

(a) 120 (d) $40\sqrt{3}$
(b) 90 (e) 10
(c) 70

29 Um projétil é lançado no instante t = 0 com velocidade inicial igual a 100 m/s, segundo um ângulo de 30° em relação à horizontal.

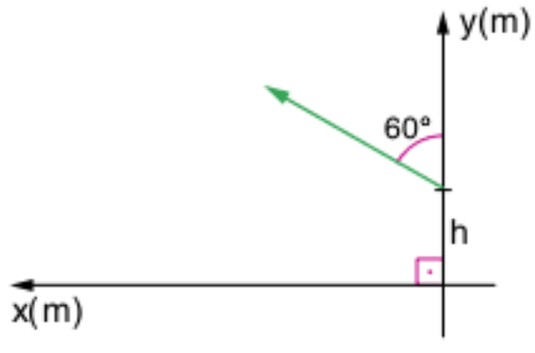


Desprezando as influências do ar e considerando $g = 10\ m/s^2$, determine o instante em que o projétil atinge o prédio P, de 45 m de altura.

30 **Mackenzie** Um balão (aerostato) parte do solo plano com movimento vertical, subindo com velocidade constante de 14 m/s. Ao atingir a altura de 25 m, seu piloto lança uma pedra com velocidade de 10 m/s, em relação ao balão e formando 37° acima da horizontal.
A distância entre a vertical que passa pelo balão e o ponto de impacto da pedra no solo é:
Adote: $g = 10\ m/s^2$, cos 37° = 0,8 e sen 37° = 0,6.

(a) 30 m (d) 90 m
(b) 40 m (e) 140 m
(c) 70 m

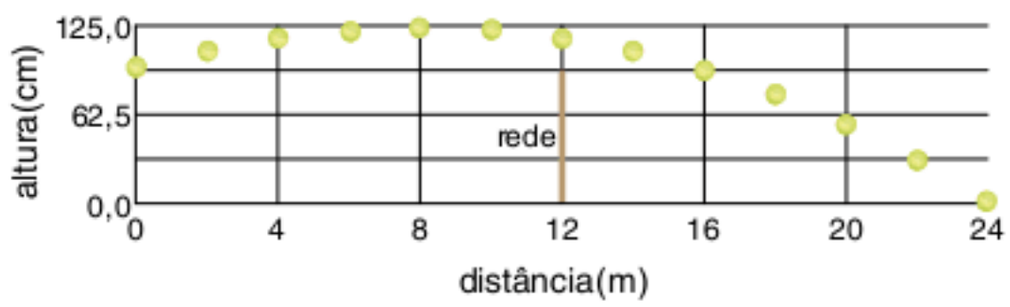
31 **UFMS 2004** Um objeto puntiforme é atirado com velocidade de módulo 144 km/h, de um ponto situado a uma altura (h = 20 m) em relação ao eixo horizontal (x), segundo um ângulo de 60º em relação ao eixo vertical (y), conforme figura a seguir. A aceleração da gravidade, no sentido oposto ao eixo (y), tem intensidade constante ($g = 10\ m/s^2$).



Desprezando-se a resistência do ar, é correto afirmar que:

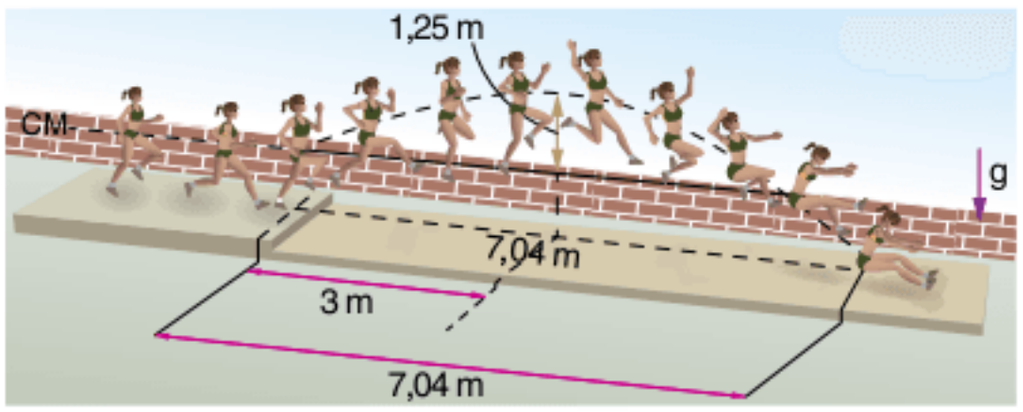
(a) as coordenadas do vértice da parábola descrita pelo objeto serão (3h; 2h).
(b) o tempo que o objeto leva no movimento de queda é de $2\sqrt{2}$ s.
(c) a velocidade do objeto no vértice da parábola será nula.
(d) as coordenadas do ponto onde o objeto toca o eixo (x) serão (3h; h).
(e) a velocidade do objeto será máxima no vértice da parábola descrita pelo mesmo objeto.

32 **Unicamp 2004 (Adapt.)** Uma bola de tênis rebatida numa das extremidades da quadra descreve a trajetória representada na figura a seguir, atingindo o chão na outra extremidade da quadra. O comprimento da quadra é de 24 m.



a) Calcule o tempo de voo da bola, antes de atingir o chão. Desconsidere a resistência do ar nesse caso.
b) Qual é a velocidade horizontal da bola no caso acima?
c) Quando a bola é rebatida com efeito, o corpo fica sujeito a uma aceleração resultante igual a 4g, vertical, de cima para baixo. Quais serão as velocidades iniciais horizontal e vertical da bola, rebatida com efeito para uma trajetória idêntica à da figura?

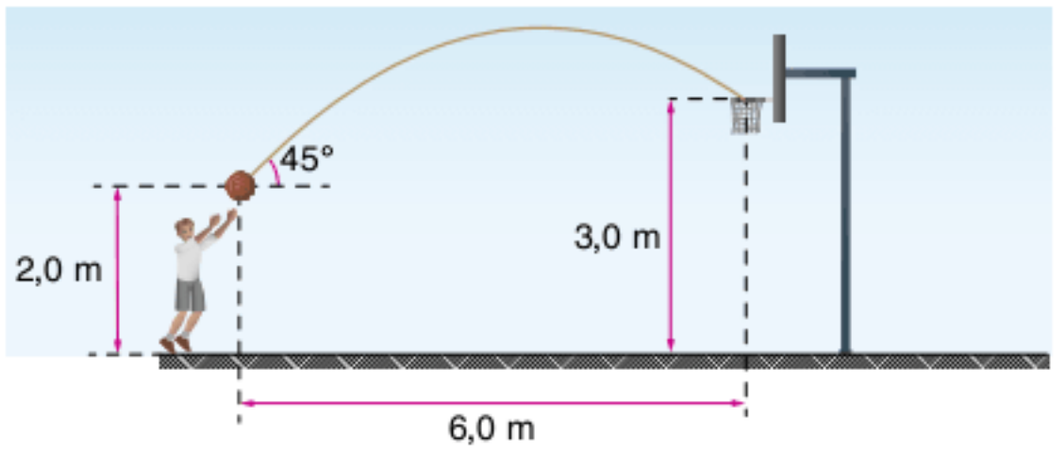
33 **Fuvest 2009** O salto que conferiu a medalha de ouro a uma atleta brasileira, na Olimpíada de 2008, está representado no esquema a seguir, reconstruído a partir de fotografias múltiplas. Nessa representação, está indicada, também, em linha tracejada, a trajetória do centro de massa da atleta (CM). Utilizando a escala estabelecida pelo comprimento do salto, de 7,04 m, é possível estimar que o centro de massa da atleta atingiu uma altura máxima de 1,25 m (acima de sua altura inicial), e que isso ocorreu a uma distância de 3,0 m, na horizontal, a partir do início do salto, como indicado na figura.



Considerando essas informações, estime:
Note e adote: Desconsidere os efeitos da resistência do ar.

a) o intervalo de tempo t_1, em s, entre o instante do início do salto e o instante em que o centro de massa da atleta atingiu sua altura máxima.
b) a velocidade horizontal média, V_H, em m/s, da atleta durante o salto.
c) o intervalo de tempo t_2, em s, entre o instante em que a atleta atingiu sua altura máxima e o instante final do salto.

34 **UFPR 2007** A figura a seguir ilustra um jogador de basquete no momento em que ele faz um arremesso bem-sucedido. A bola, ao ser arremessada, está a uma distância horizontal de 6,0 m da cesta e a uma altura de 2,0 m em relação ao piso. Ela sai das mãos do jogador com uma velocidade de módulo $6\sqrt{2}$ m/s, fazendo um ângulo de 45° com a horizontal. A cesta está fixada a uma altura de 3,0 m em relação ao piso. Desprezando a resistência do ar, determine:

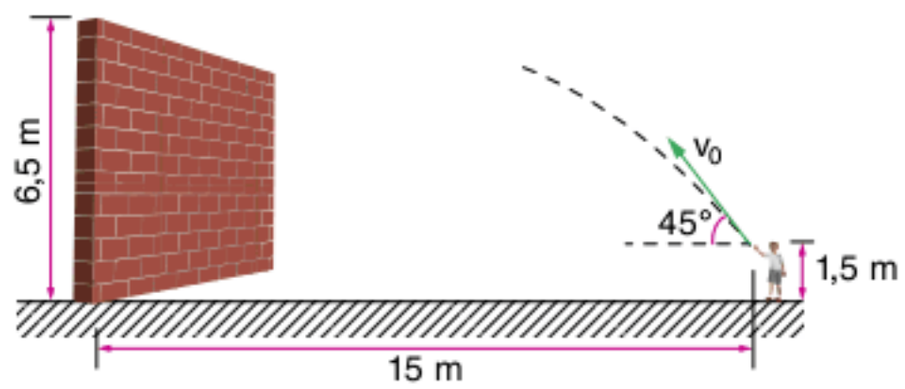


a) a altura máxima atingida pela bola em relação ao piso.
b) o intervalo de tempo entre o instante em que a bola sai da mão do jogador e o instante em que ela atinge a cesta.

35 **ITA 2004** Durante as Olimpíadas de 1968, na cidade do México, Bob Beamow bateu o recorde de salto em distância, cobrindo 8,9 m de extensão. Suponha que, durante o salto, o centro de gravidade do atleta teve sua altura variando de 1,0 m do início, chegando ao máximo de 2,0 m e terminando a 0,20 m no fim do salto. Desprezando o atrito com o ar, pode-se afirmar que o componente horizontal da velocidade inicial do salto foi de:

(a) 8,5 m/s
(b) 7,5 m/s
(c) 6,5 m/s
(d) 5,2 m/s
(e) 4,5 m/s

36 **Fesp** Um rapaz de 1,5 m de altura, que está parado, em pé, a uma distância de 15 m frente a um muro de 6,5 m de altura, lança uma pedra com um ângulo de 45° com a horizontal.



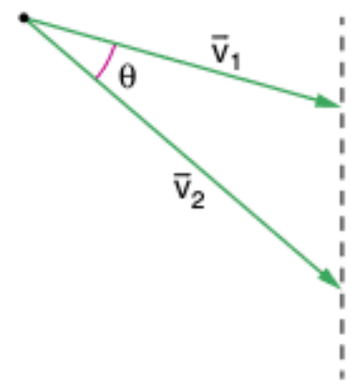
Com que velocidade mínima deve lançar a pedra para que esta passe por cima do muro? Despreze a resistência do ar. Adote $g = 10$ m/s².

(a) 11 m/s
(b) 14 m/s
(c) 15 m/s
(d) 16 m/s
(e) 17 m/s

37 **UEL** Um projétil é atirado com velocidade de 40 m/s, fazendo ângulo de 37° com a horizontal. A 64 m do ponto de disparo, há um obstáculo de altura 20 m. Adotando $g = 10$ m/s², cos 37° = 0,80 e sen 37° = 0,60, pode-se concluir que o projétil:

(a) passa à distância de 2,0 m acima do obstáculo.
(b) passa à distância de 8,0 m acima do obstáculo.
(c) choca-se com o obstáculo a 12 m de altura.
(d) choca-se com o obstáculo a 18 m de altura.
(e) cai no solo antes de chegar até o obstáculo.

38 Uma partícula é lançada horizontalmente, em uma região em que $g = 10$ m/s². Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ as velocidades da partícula nos instantes t_1 e t_2, respectivamente (com $t_2 > t_1$). A figura representa $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ por segmentos orientados de mesma origem. Sabendo que $\cos\theta = \frac{5}{6}$, $|\vec{v}_1| = 6$ m/s e $|\vec{v}_2| = 10$ m/s, calcule o valor de $t_2 - t_1$. Despreze os efeitos do ar.



Movimentos simultâneos

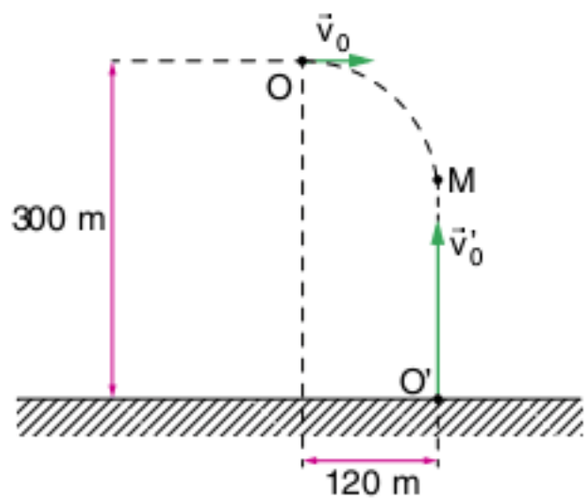
39 **FEI** Uma bola é arremessada para um garoto, distante 60 m, a uma velocidade de 20 m/s e fazendo ângulo de 45° com a horizontal. Com que velocidade e em qual direção e sentido o garoto deve correr para conseguir apanhar a bola na mesma altura em que foi lançada? Adote $g = 10$ m/s² e despreze os efeitos do ar.

40 **FEI** Um objeto voa em uma trajetória retilínea, com velocidade $v = 200$ m/s, a uma altura $H = 1.500$ m do solo. Quando o objeto passa exatamente na vertical de uma peça de artilharia,

esta dispara um projétil, num ângulo de 60° com a horizontal. O projétil atinge o objeto decorrido o intervalo de tempo Δt. Adotar $g = 10\ m/s^2$.

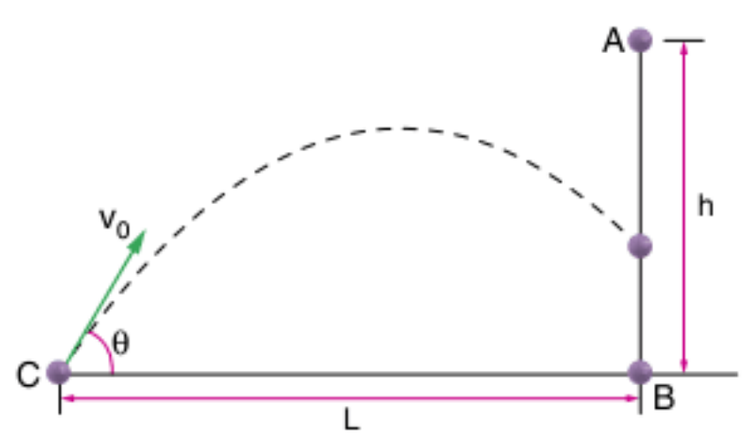
a) Calcular a velocidade de lançamento do projétil.
b) Calcular o menor intervalo de tempo Δt em que o projétil atinge o objeto. Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.

41 De um ponto O situado a 300 m acima do solo, lança-se horizontalmente uma partícula com velocidade $\vec{v}_0$. No mesmo instante, outra partícula é lançada verticalmente para cima, de um ponto O' situado no solo, com velocidade $\vec{v}_0'$ cujo módulo é 50 m/s, conforme mostra a figura. Sabe-se que as partículas chocam-se em um ponto M. Adotando $g = 10\ m/s^2$ e desprezando os efeitos do ar, calcule:



a) o tempo decorrido desde o lançamento até o choque das partículas.
b) a altura do ponto M.
c) o módulo de $\vec{v}_0$.

42 **UFM** De um ponto A, situado à altura h de um plano horizontal, abandona-se um corpo, sem velocidade inicial. Nesse mesmo instante, é disparado um projétil do ponto C, situado no plano, à distância L de B. Desprezam-se as resistências passivas aos movimentos. Determine o ângulo θ (pelo seu seno, cosseno ou tangente) com que o projétil deve ser disparado para atingir o corpo.

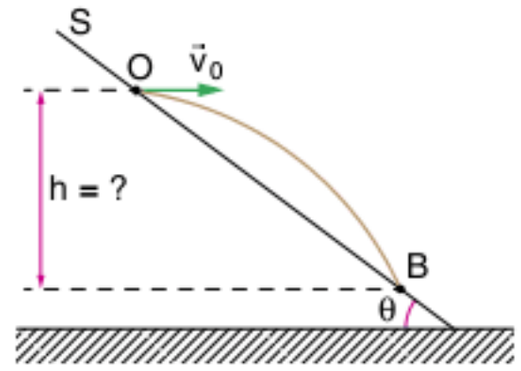


43 **Faap** Uma partícula é lançada obliquamente num plano vertical da origem O de um referencial cartesiano Oxy com a velocidade de módulo 10 m/s, a qual faz com o eixo Ox um ângulo de 60º. No mesmo instante, é lançada verticalmente para cima uma outra partícula do ponto $\left(100;\ 40\sqrt{3}\right)$, onde as coordenadas são dadas em metros. Admitindo desprezível a resistência do ar e a curvatura da superfície terrestre, e considerando $g = 10\ m/s^2$, determinar:

a) o tempo decorrido desde o instante dos lançamentos até o instante do encontro.
b) o módulo da velocidade da partícula lançada verticalmente para que consiga encontrar a outra.

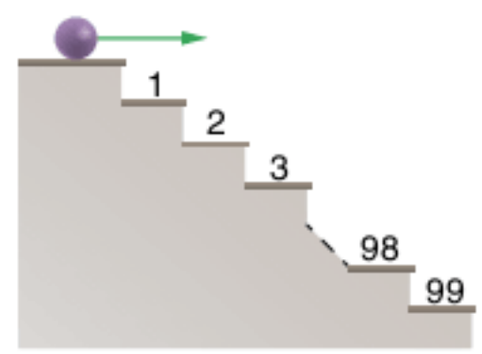
Lançamento ao longo de plano inclinado

44 Consideramos uma superfície plana S, cuja inclinação em relação ao solo é θ (sen $\theta = 0{,}6$). De um ponto O da superfície S, uma partícula é lançada horizontalmente com velocidade $\vec{v}_0$, cujo módulo é $v_0 = 20$ m/s. Seja B o ponto onde a partícula atinge S. Supondo $g = 10\ m/s^2$ e desprezando os efeitos do ar, calcule:

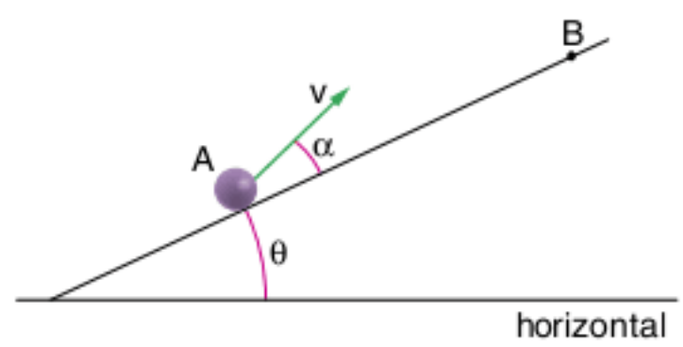


a) o desnível h entre O e B.
b) o comprimento do segmento $\overline{OB}$.

45 **UFC** Uma bola de 1 cm de diâmetro rola do alto de uma escada com 99 degraus, a uma velocidade de 2 m/s, conforme a figura. Os degraus da escada têm 18 cm de altura e 18 cm de largura. Desprezando a resistência do ar e considerando $g = 10\ m/s^2$, determine o primeiro degrau atingido pela bola.



46 **UFC 2007** Uma partícula pontual é lançada de um plano inclinado conforme esquematizado na figura a seguir. O plano tem um ângulo de inclinação θ em relação à horizontal, e a partícula é lançada, com velocidade de módulo v, numa direção que forma um ângulo de inclinação α em relação ao plano inclinado. Despreze qualquer efeito da resistência do ar. Considere que a aceleração da gravidade local é constante (módulo igual a g, direção vertical, sentido para baixo).



a) Considerando o eixo x na horizontal, o eixo y na vertical e a origem do sistema de coordenadas cartesianas no ponto de lançamento, determine as equações horárias das coordenadas da partícula, assumindo que o tempo é contado a partir do instante de lançamento.
b) Determine a equação da trajetória da partícula no sistema de coordenadas definido no item a.
c) Determine a distância, ao longo do plano inclinado, entre o ponto de lançamento (ponto A) e o ponto no qual a partícula toca o plano inclinado (ponto B). Considere $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad e $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

Dinâmica

8

FRENTE 1

Túmulo de Isaac Newton.

"Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."

Essa frase é de Isaac Newton (1642-1727), físico, matemático e astrônomo inglês que revolucionou a ciência com sua obra *Philosophiae naturalis principia mathematica*, na qual ele explica a mecânica de Galileu e esclarece suas ideias sobre os princípios naturais. Também criou o binômio de Newton, realizou descobertas sobre a natureza das cores e, junto com Leibniz, elaborou o cálculo infinitesimal.

Isaac Newton foi enterrado na Abadia de Westminster, mesmo local onde foram enterrados pensadores como Charles Darwin e outros importantes personagens da história da Inglaterra e da humanidade.

Definições

Na Cinemática, fizemos o estudo geométrico dos movimentos. Na Dinâmica, estudaremos os movimentos, levando em conta as causas que os produzem ou modificam.

Vamos considerar os corpos estudados como pontos materiais, ou seja, com dimensões e estruturas desprezíveis, mas sem desprezar suas massas.

Massa

A massa de um corpo é obtida comparando-o com um corpo padrão, por meio de uma balança de braços iguais.

Fig. 1 Balança de braços iguais.

Na figura 1, se a balança estiver em equilíbrio, não importando seus volumes, podemos afirmar que as massas dos corpos A e B são iguais.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de massa é o quilograma (kg). O quilograma-padrão é um cilindro de platina (90%) e irídio (10%) mantido no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, próximo a Paris. Por definição, a massa do quilograma-padrão é um quilograma.

São também utilizadas outras unidades de massa:

- grama (g): $1\ g = \frac{1}{1.000}\ kg = 10^{-3}\ kg$
- miligrama (mg): $1\ mg = \frac{1}{1.000}\ g = 10^{-6}\ kg$
- tonelada (t): $1\ t = 1.000\ kg = 10^{3}\ kg$

ATENÇÃO!

As sete unidades fundamentais no SI são:

- kg (massa)
- s (tempo)
- m (espaço)
- A (corrente elétrica)
- K (temperatura termodinâmica)
- mol (quantidade de matéria)
- cd (intensidade luminosa)

Força

Dizemos que "fazemos força" quando empurramos, puxamos ou seguramos algum objeto.

A força é a responsável pela aceleração, ou seja, ela provoca a variação de velocidade que, por ser uma grandeza vetorial, pode variar em módulo, direção ou sentido.

No Sistema Internacional de Unidades, a unidade de força é o newton (N).

Se sobre um corpo atuarem muitas forças:

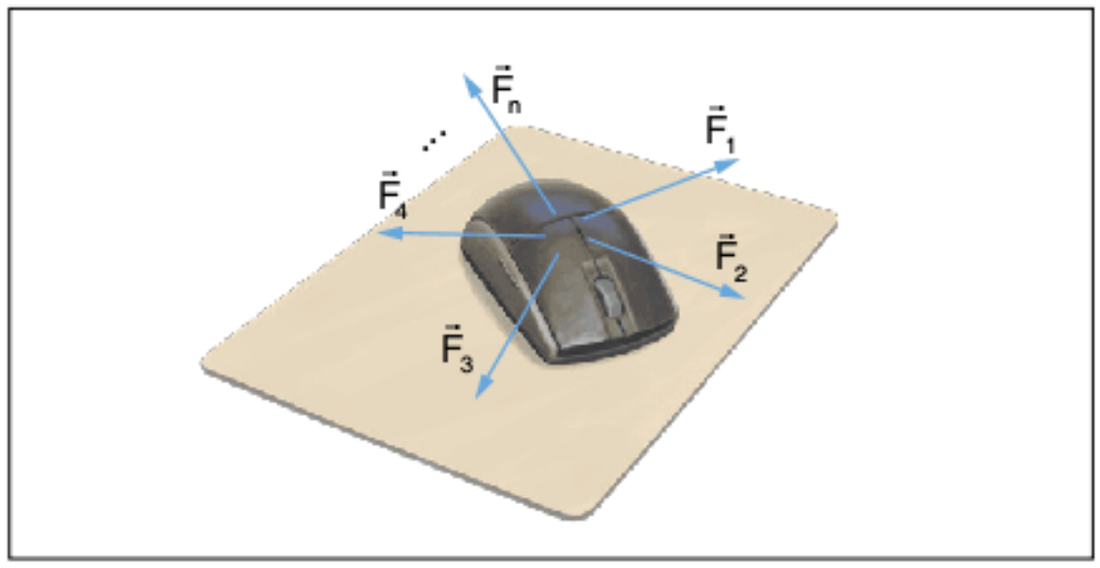


Fig. 2 Corpo submetido a n forças.

dizemos que a resultante dessas forças ($\vec{F}_R$) é a soma vetorial de todas as forças que agem sobre o corpo:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n \quad \text{ou} \quad \vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Desse modo, a força resultante não é uma força a mais atuando no corpo, mas é a força que, atuando sozinha, produz o mesmo efeito que as demais forças ($\vec{F}_1$, ... , $\vec{F}_n$) atuando juntas.

Portanto, quando falarmos que atua uma força resultante sobre um corpo, não significa, necessariamente, que apenas atua uma força, mas que ela substitui todas as outras com o mesmo efeito.

Assim, a resultante pode ser nula, mesmo que atuem forças sobre o corpo.

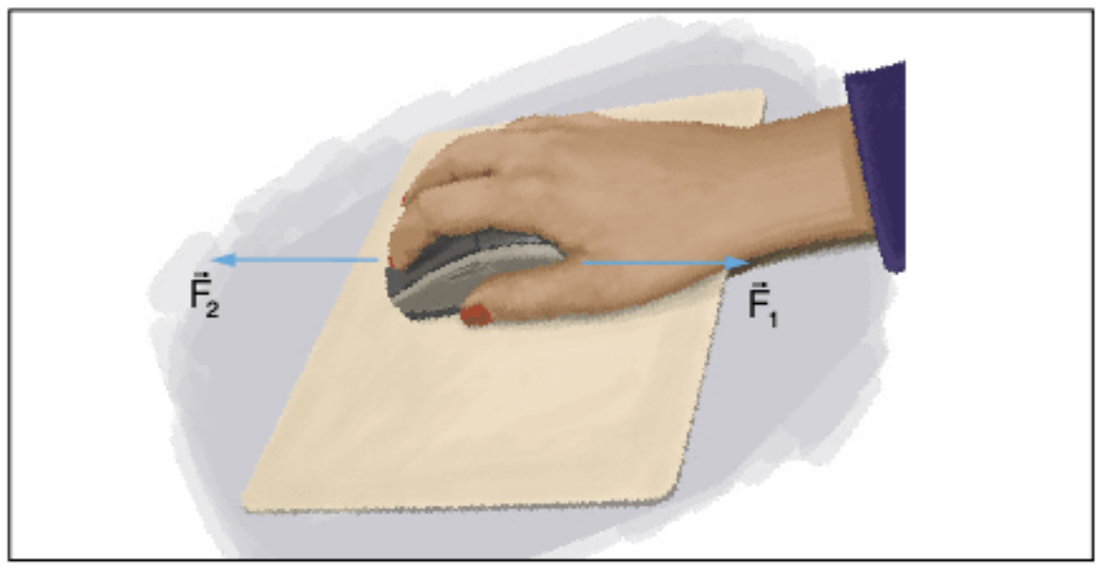


Fig. 3 Corpo submetido a duas forças de mesma direção e sentidos contrários.

Observe, na figura 3, que:

- se $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$: $\vec{F}_R$ é orientada para a direita.
- se $|\vec{F}_1| < |\vec{F}_2|$: $\vec{F}_R$ é orientada para a esquerda.
- se $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$: $\vec{F}_R$ é nula.

Por ser uma grandeza vetorial, a soma de forças é feita como explicado no capítulo 6.

Classes de forças

As forças podem ser de contato ou de ação a distância.

Forças de contato

Só existem quando duas superfícies entram em contato. Para empurrarmos um carro, devemos encostar nele, o que permite a existência da força.

Fig. 4 Contato entre o homem e o carro.

Um corpo pendurado, por um fio, ao teto exerce força sobre o fio por estar em contato com ele.

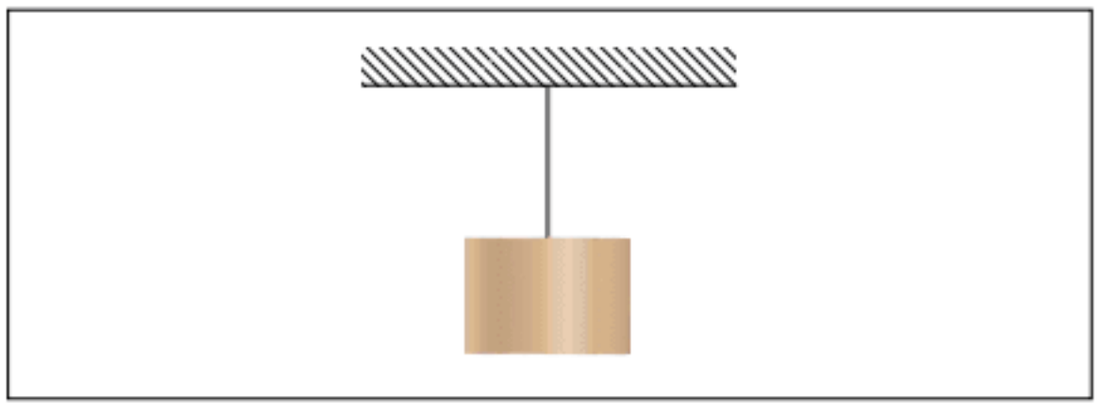


Fig. 5 Contato entre o corpo e o fio.

Forças de ação a distância

Também chamadas de forças de campo, são forças que existem entre dois corpos mesmo que suas superfícies não estejam em contato.

Um corpo próximo à superfície da Terra é atraído por ela pela força gravitacional, que está presente mesmo que o corpo não encoste na superfície.

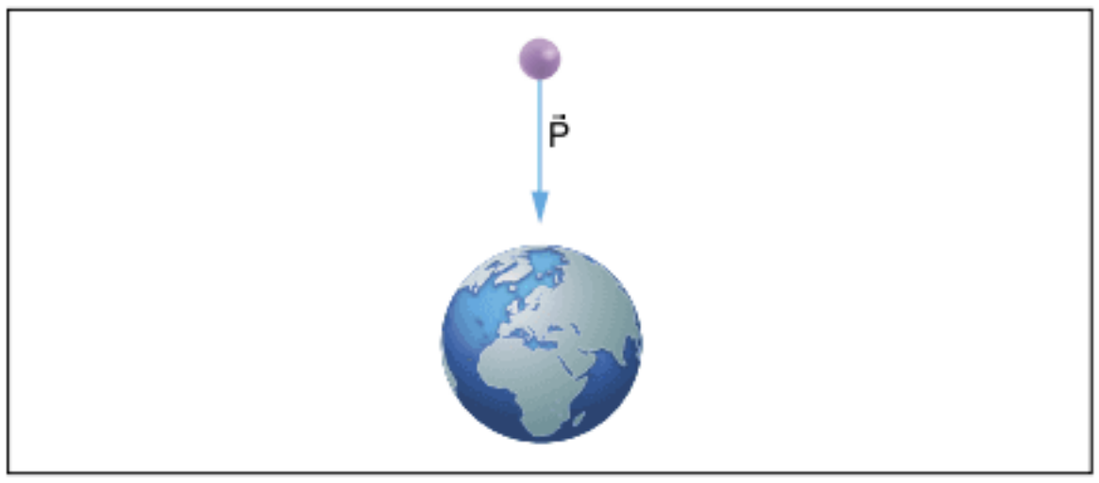


Fig. 6 Força de campo – gravitacional.

Observação: *Se o corpo estiver encostado na superfície da Terra, a força de campo não deixará de existir, mas aparecerá também uma força de contato.*

Outro exemplo: dois corpos carregados eletricamente podem se repelir mesmo sem haver contato.

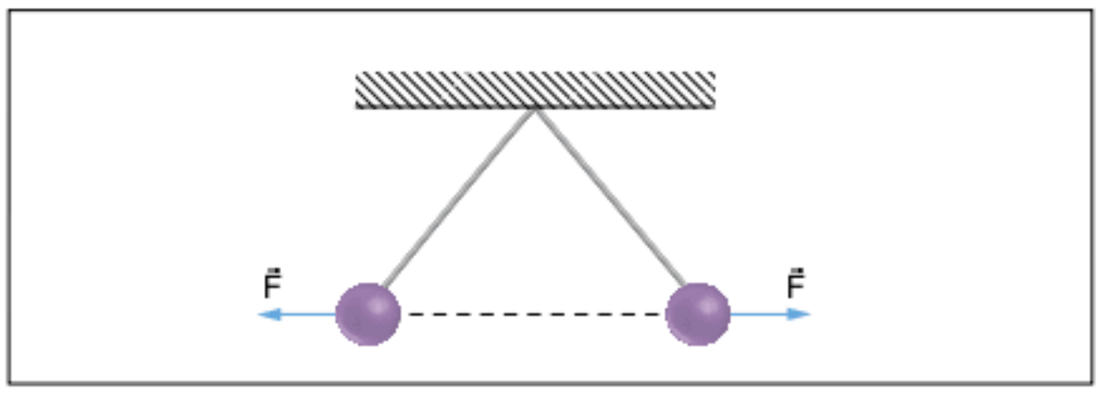


Fig. 7 Força de campo – elétrica.

O campo de forças é a região do espaço onde atuam as forças de campo. Assim, o campo gravitacional é a região onde atua a força gravitacional e o campo magnético é a região onde atua a força magnética.

Forças externas e forças internas

As forças também podem ser classificadas em externas ou internas.

Uma força é externa quando um agente externo ao sistema exerce a força sobre uma parte do sistema.

Uma força é interna quando uma parte do sistema exerce a força sobre outra parte do mesmo sistema.

Quando temos uma bola sobre a cadeira, existe uma força ($\vec{F}_1$) de contato que a bola exerce sobre a cadeira e uma força ($\vec{F}_2$) de contato que a cadeira exerce sobre a bola.

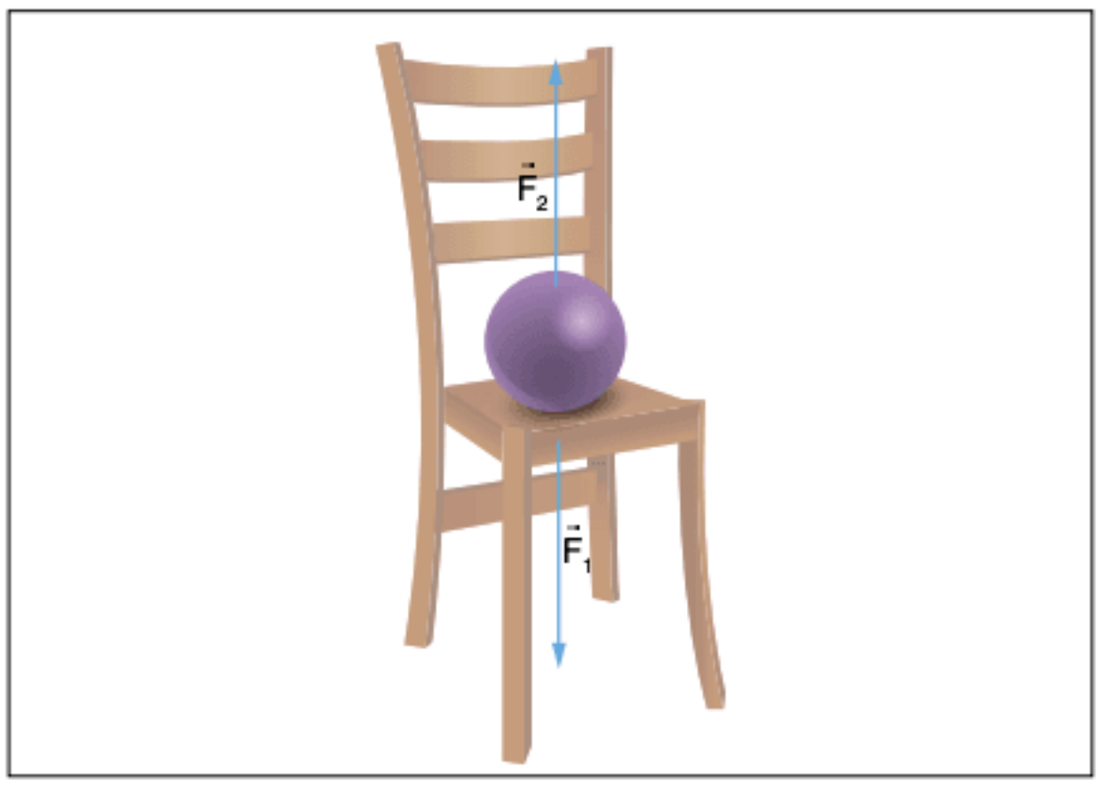


Fig. 8 Força externa ou interna.

Se o sistema a ser considerado for a bola, a força que a bola recebe da cadeira é externa.

Se o sistema a ser considerado for bola + cadeira, a força que a bola recebe da cadeira é interna.

Leis de Newton

Primeira Lei de Newton

Também chamada de Princípio da Inércia.

Uma das formas de enunciar essa lei é a seguinte:

Um corpo tende a manter seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme se a resultante das forças que agem sobre ele for nula.

Desse modo, se um corpo estiver em repouso, tenderá a se manter em repouso, a menos que apliquemos sobre ele uma resultante não nula.

Da mesma forma, se um corpo estiver em movimento retilíneo uniforme, que significa ter velocidade vetorial constante, ele tenderá a se manter com velocidade constante e em linha reta, a menos que apliquemos sobre ele uma resultante não nula. Essa resultante alterará a velocidade em módulo, direção ou sentido, produzindo, portanto, aceleração, o que nos conduz ao conceito de que a força é o agente que produz aceleração.

Essa propriedade do corpo de resistir à mudança de sua velocidade é chamada de inércia.

Assim, um corpo em repouso tende, por inércia, a permanecer em repouso, e um corpo em MRU tende, por inércia, a permanecer em MRU.

Se um passageiro estiver em pé em um ônibus parado, quando este arranca, o passageiro tende a se manter parado em relação ao solo e, por isso, ele será projetado para trás em relação ao ônibus. Ao segurar na barra de apoio do ônibus, o passageiro recebe uma força que o acelerará para frente.

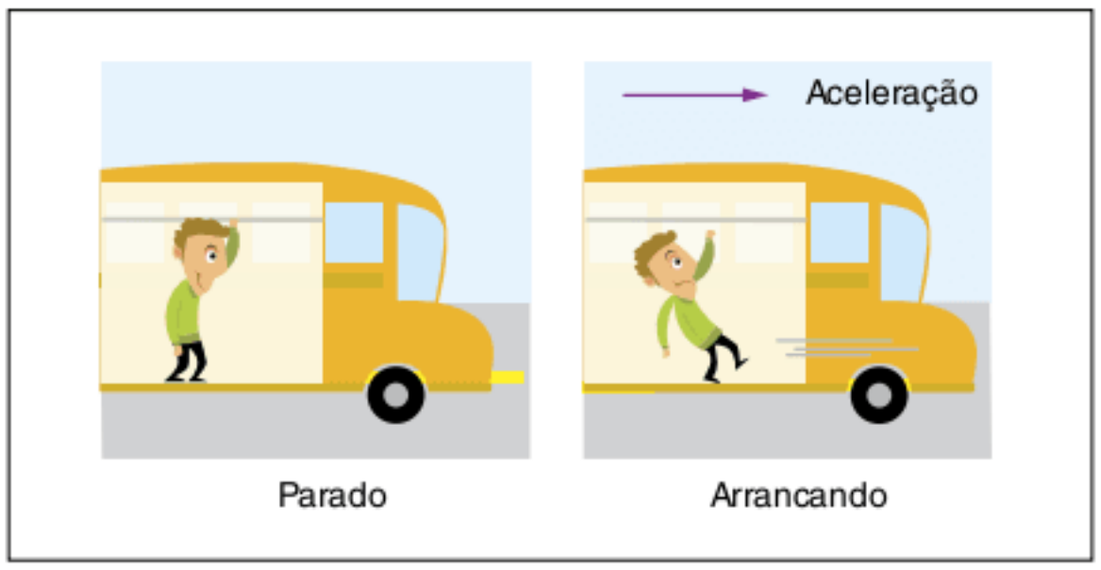


Fig. 9 Inércia em um ônibus que acelera.

O mesmo acontece com um passageiro em pé em um ônibus que se move com velocidade constante. Quando este freia, o passageiro tende a se manter em MRU em relação ao solo e, por isso, ele será projetado para frente em relação ao ônibus. Ao segurar no ônibus, o passageiro recebe uma força que o freará.

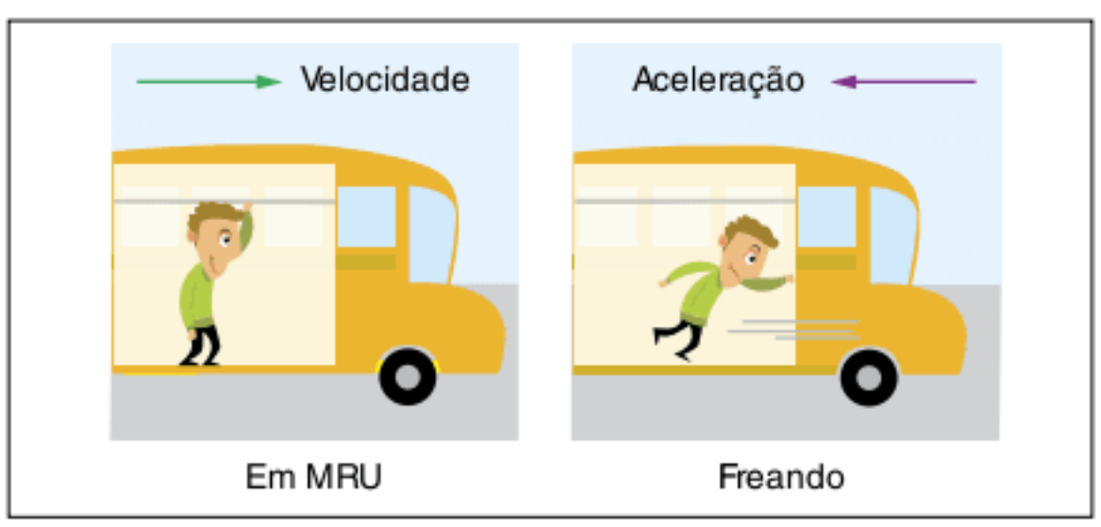


Fig. 10 Inércia em um ônibus que freia.

Suponha um carro de Fórmula 1 percorrendo um circuito com velocidade constante em módulo. É claro que, se há variação na direção da velocidade, então há aceleração e, portanto, existe uma força atuando no carro. Essa força é a força de atrito entre os pneus e o solo. Se estiver chovendo e o carro, ao realizar uma curva, perder o atrito com o solo devido à superfície molhada, a resultante torna-se nula e o corpo tenderá a se mover em MRU, saindo pela tangente.

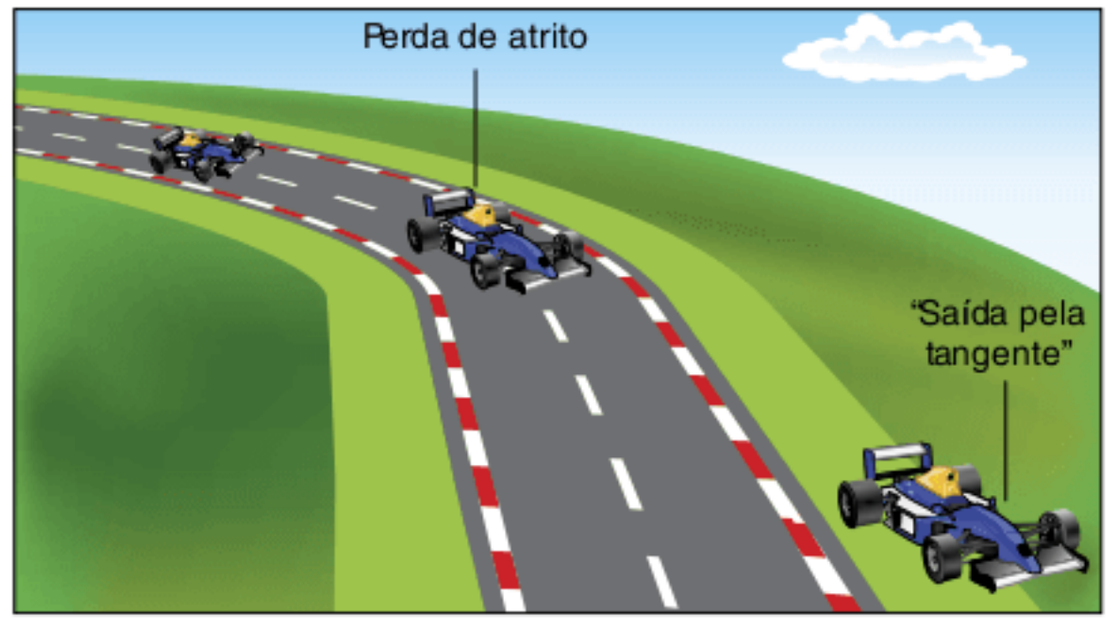


Fig. 11 Inércia em uma curva.

Segunda Lei de Newton

Também chamada de Princípio Fundamental da Dinâmica.

Seja um corpo de massa m, submetido a uma força resultante $\vec{F}_R$. Se a aceleração adquirida pelo corpo devido à resultante vale $\vec{a}$, então, de acordo com a Segunda Lei de Newton, a resultante é igual ao produto da massa pela aceleração:

$$\vec{F}_R = m.\vec{a}$$

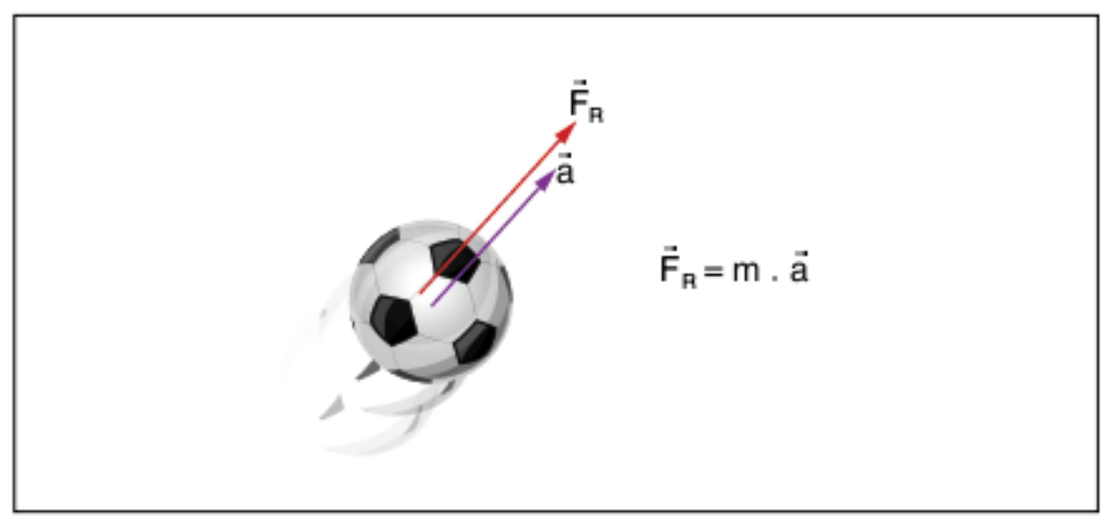


Fig. 12 Segunda Lei de Newton.

Como a massa é uma grandeza escalar positiva, então a aceleração $\vec{a}$ adquirida pelo corpo, devido à aplicação da resultante $\vec{F}_R$, tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{F}_R$, sendo seu módulo dado por:

$$|\vec{F}_R| = m.|\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_R|}{m}$$

Se a resultante for nula, a aceleração será nula, o que implica em velocidade constante. Assim, chegamos ao enunciado da Primeira Lei de Newton a partir da Segunda Lei de Newton e, nesse caso, o corpo tenderá a se manter em repouso ou MRU.

Observação: *$\vec{F}_R = m.\vec{a}$ é um enunciado simplificado da Segunda Lei de Newton, sendo válido para o caso de massa constante. Caso isso não ocorra, é válida a segunda lei com o seguinte enunciado:*

$$\vec{F}_R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

em que $\vec{Q}$ é a quantidade de movimento do sistema.

No entanto, esse assunto só será tratado no capítulo 11. Por enquanto, só estudaremos casos em que a massa do sistema não varia.

Da Segunda Lei de Newton, observamos que, aplicando a mesma força para corpos de massas diferentes, as acelerações serão diferentes. Observe:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} \text{ e } a_2 = \frac{F}{m_2}$$

Se $m_1 > m_2$, então $a_1 < a_2$.

Portanto, quanto maior a massa, menor a mudança na velocidade provocada pela força.

Isso significa que a massa confere resistência à variação de velocidade, sendo, por isso, a medida da inércia de um corpo.

A partir da Segunda Lei de Newton, temos:

unid(F) = unid(m)·unid(a)

No SI: unid(F) = N; unid(m) = kg; unid(a) = m/s^2.

Então: 1 N = 1 kg·1 m/s^2.

Logo, 1 N é a intensidade da força que, aplicada a um corpo de massa 1 kg, produz nele uma aceleração de intensidade 1 m/s^2.

Terceira Lei de Newton

Também chamada de Princípio da Ação e Reação.

Se um corpo A exerce uma força sobre outro corpo B, então o corpo B exerce sobre o corpo A uma força de mesmo módulo e mesma direção, mas de sentido contrário.

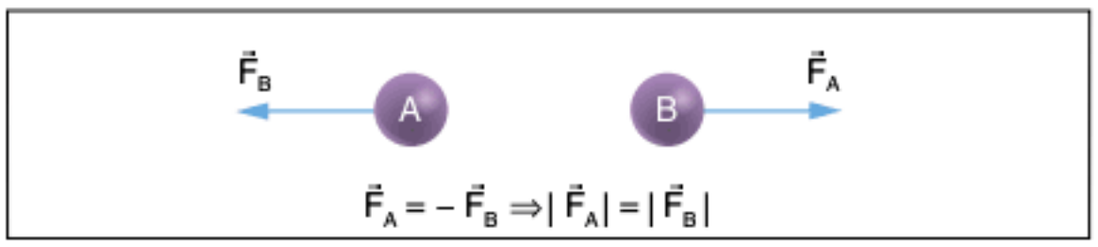


Fig. 13 Aplicação do Princípio da Ação e Reação.

Essas duas forças constituem um par ação-reação, no qual tanto $\vec{F}_A$ como $\vec{F}_B$ podem ser chamadas de ação ou reação, sendo que as forças aparecem simultaneamente sobre os dois corpos.

Outra característica é que as forças do par ação-reação estão aplicadas sobre corpos diferentes e, portanto, não se equilibram. A força $\vec{F}_A$ está aplicada sobre B e a força $\vec{F}_B$ sobre A.

Elas têm a mesma natureza, sendo ambas forças de contato ou de ação a distância. É interessante observar também que, por estarem aplicadas sobre corpos diferentes, de massas diferentes, as forças produzirão acelerações diferentes. Somente se as massas forem iguais é que as acelerações serão iguais.

Principais forças da Mecânica

Força peso

Quando um corpo está situado nas proximidades da Terra, esta exerce sobre o corpo uma força de campo chamada de força gravitacional. Quando estudarmos gravitação, entraremos em mais detalhes sobre essa força. Por enquanto, é suficiente saber que seu módulo varia com a distância do corpo ao centro da Terra, sua direção é a reta que une o centro do corpo ao centro da Terra e seu sentido é sempre o de atração.

Essa força será chamada aqui de peso.

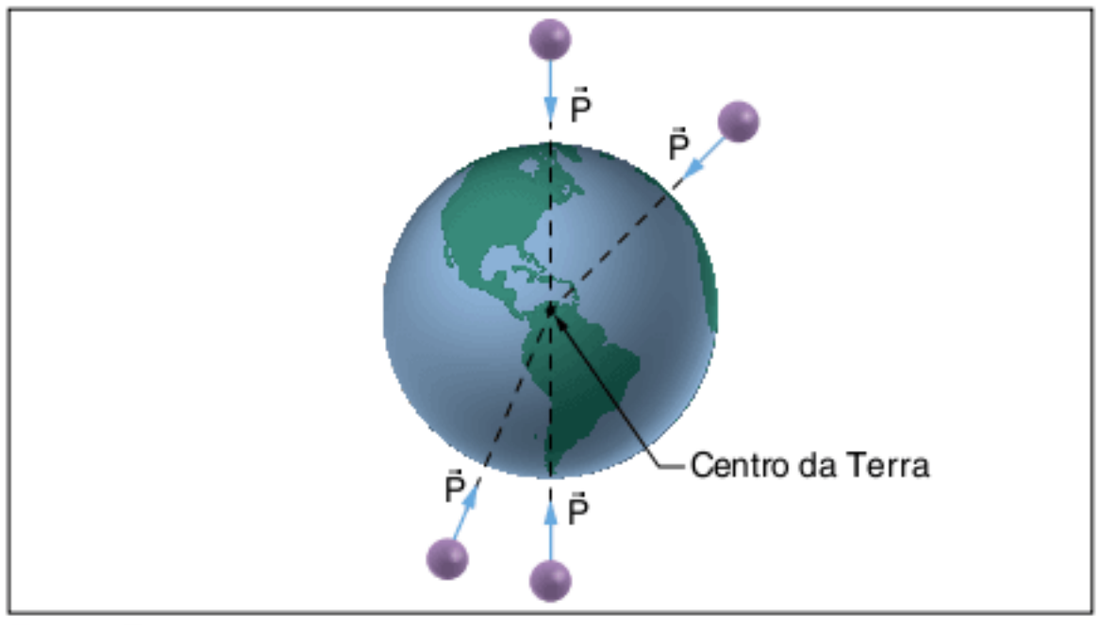


Fig. 14 Força peso.

Já vimos que o campo gravitacional pode ser considerado uniforme quando o movimento tiver dimensões desprezíveis em relação ao raio da Terra, desconsiderando também a curvatura da Terra. Nesse caso, o vetor aceleração é sempre perpendicular ao plano horizontal, com sentido para baixo e de módulo constante.

Se a única força a atuar sobre o corpo for o peso ($\vec{P}$), ela será a resultante e a aceleração produzida será a da gravidade:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

em que $\vec{g}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{P}$.

O vetor $\vec{g}$ representa o campo gravitacional gerado pela Terra.

Chamamos de aceleração normal da gravidade ao valor da aceleração ao nível do mar e a uma latitude de 45°, em que:

$$|\vec{g}_n| = 9{,}80665 \text{ m/s}^2$$

Para facilitar os cálculos nas resoluções de exercícios, costumamos adotar g = 10 m/s^2.

Observação: *É importante notar que a massa de um corpo é uma propriedade que ele possui independentemente de onde estiver. Já o peso depende do valor do campo gravitacional, que é variável. Na Lua, o peso de um corpo é um sexto do peso na Terra. À medida que caminhamos, na superfície da Terra, do Equador em direção a um dos polos, o módulo de $\vec{g}$ aumenta e, portanto, a intensidade do peso aumenta.*

ATENÇÃO!

Existe uma unidade de força também muito utilizada, que é o quilograma-força (kgf).

O quilograma-força é a intensidade do peso de um corpo de 1 kg, em um local em que a aceleração da gravidade é normal ($\vec{g}_n$):

P = m·g ⇒ 1 kgf = 1 kg·9,80665 m/s^2 ⇒ 1 kgf = 9,80665 N ou 1 kgf ≈ 9,8 N

Se um corpo próximo à superfície da Terra é atraído por ela com a força peso ($\vec{P}$), então, segundo o Princípio da Ação e Reação, o corpo também atrai a Terra com uma força de igual módulo e direção, mas sentido contrário ($-\vec{P}$), igualmente de campo:

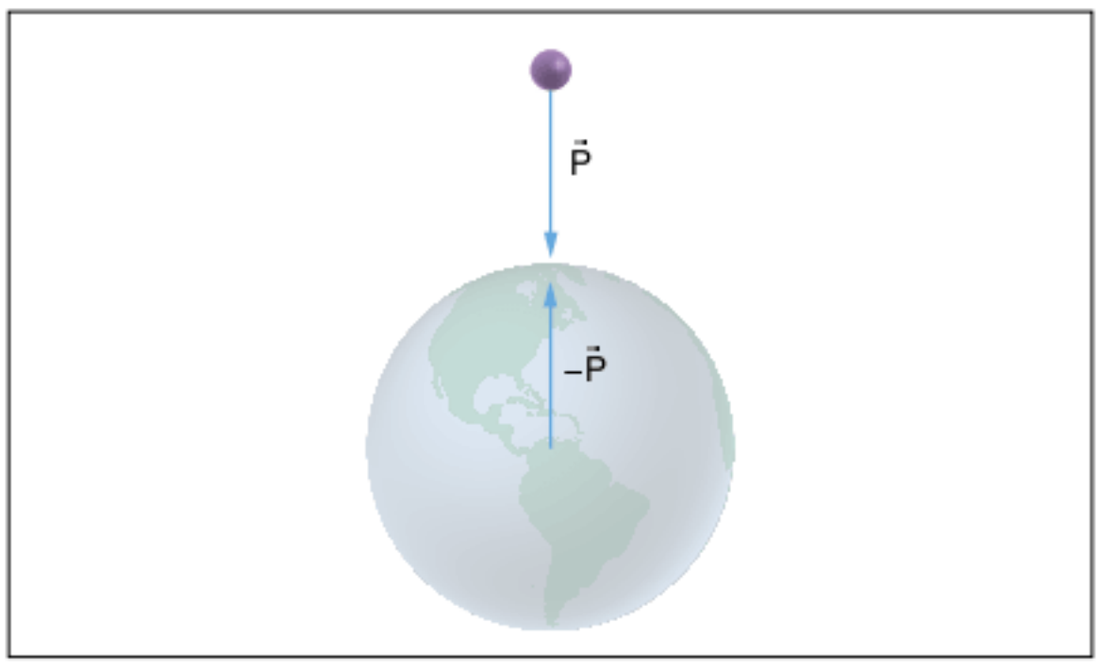


Fig. 15 Princípio da Ação e Reação em uma força de campo.

Essa força $-\vec{P}$ atua no centro de massa da Terra.

Como a massa do corpo é desprezível se comparada com a massa da Terra, então a aceleração da Terra é desprezível se comparada com a aceleração do corpo.

Força normal

Se esse corpo estiver agora apoiado sobre uma mesa:

Fig. 16 Corpo apoiado sobre uma mesa.

continuarão a existir as forças $\vec{P}$ e $-\vec{P}$. Como é atraído pela Terra, o corpo entra em contato com a mesa, comprimindo-a e exercendo sobre ela uma força de contato, chamada de força normal $-\vec{F}_N$. A mesa, por sua vez, reage, exercendo sobre o corpo uma força $\vec{F}_N$ de igual módulo e direção, mas sentido contrário, também de contato.

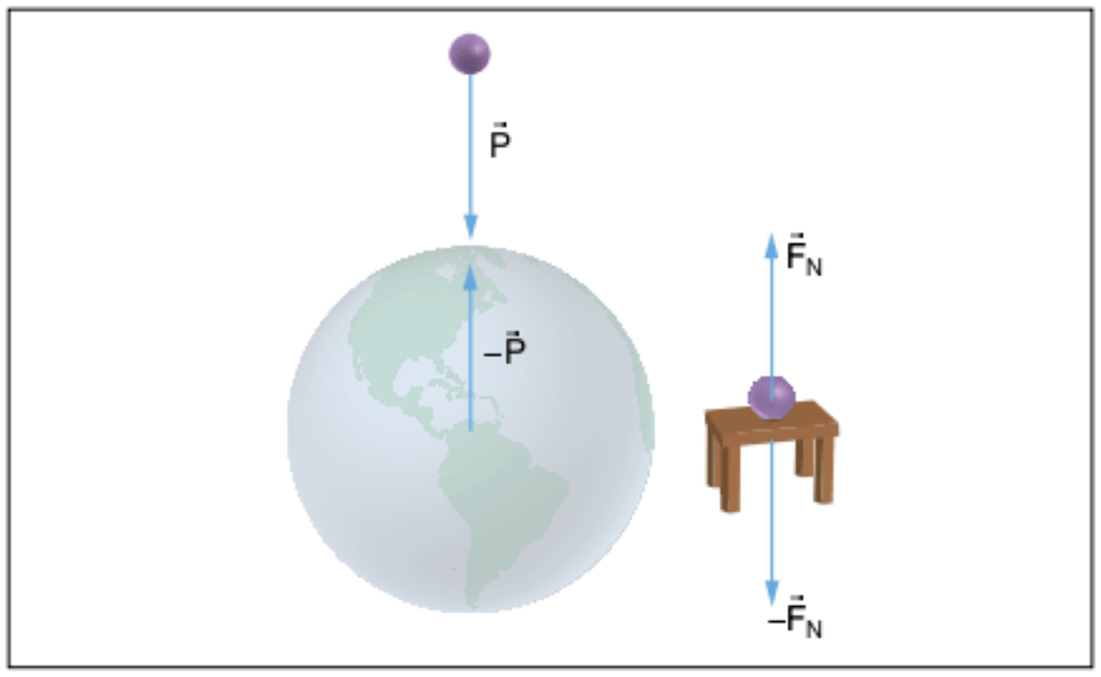


Fig. 17 Princípio da Ação e Reação em um corpo apoiado sobre uma mesa.

Sobre o corpo, atuam então duas forças: $\vec{P}$ e $\vec{F}_N$, a primeira exercida pela Terra e a segunda pela mesa. Como o corpo está em equilíbrio, então a resultante deve ser nula e, portanto:

$$|\vec{P}| = |\vec{F}_N|$$

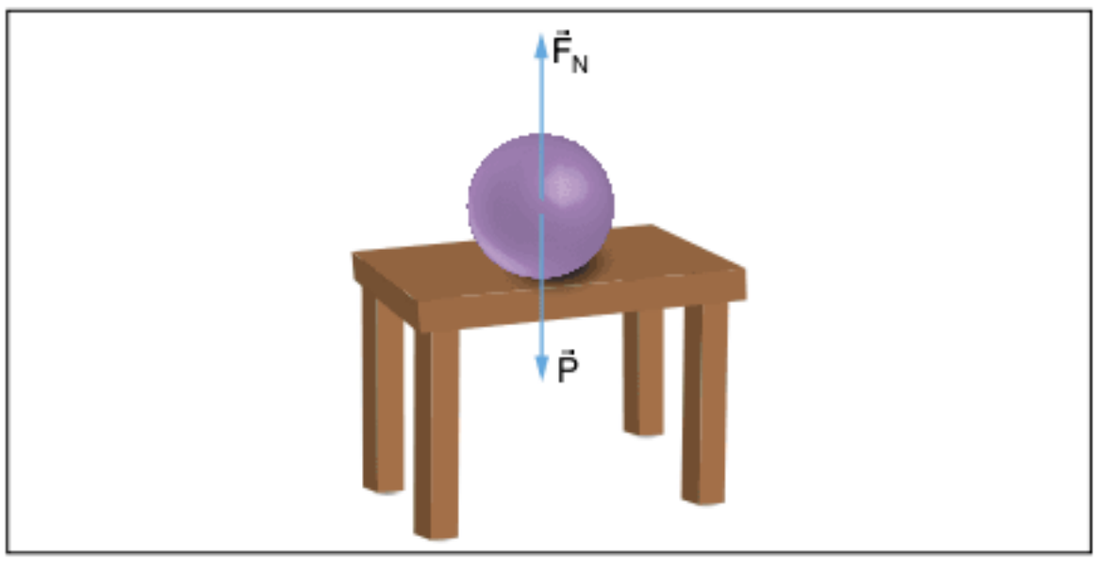


Fig. 18 Forças que agem sobre o corpo apoiado na mesa.

Essas duas forças não constituem um par ação-reação, pois $\vec{F}_N$ é reação a $-\vec{F}_N$ e $\vec{P}$ é reação a $-\vec{P}$.

A força de contato $\vec{F}_N$ é chamada de força normal por ser perpendicular à superfície de contato.

Observação: *Como uma pessoa faz para andar? Ela empurra o chão para trás com uma força $\vec{F}$, devido à existência do atrito. O chão, por sua vez, reage, aplicando sobre o pé da pessoa uma força $-\vec{F}$ de igual módulo e direção, mas sentido contrário.*

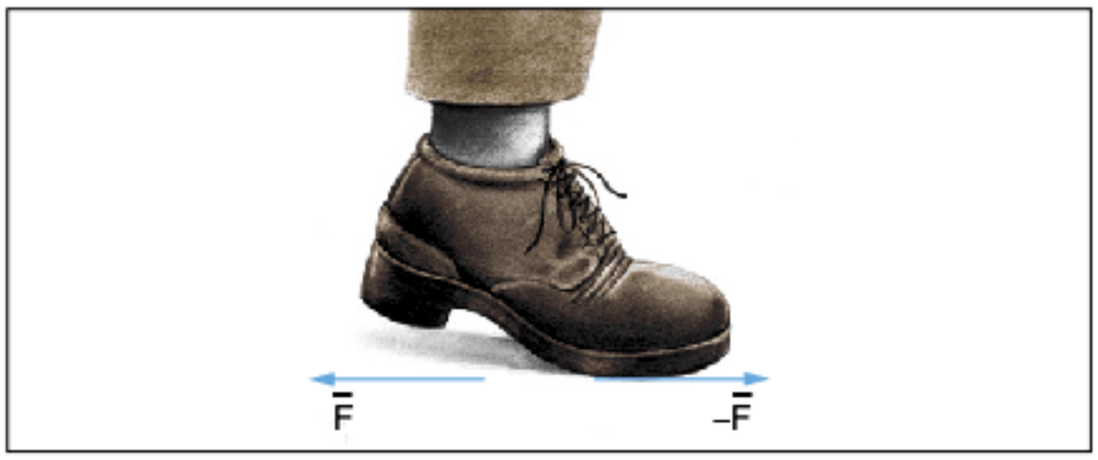


Fig. 19 Força que impulsiona uma pessoa caminhando.

Força de tração em fio

Se um corpo estiver pendurado, por um fio, ao teto, nas proximidades da superfície da Terra, atuarão duas forças sobre o corpo: uma força de campo $\vec{P}$ exercida pela Terra e uma força de contato $\vec{T}_1$ exercida pelo fio. Como já vimos, pelo Princípio da Ação e Reação, o corpo exerce uma força $-\vec{P}$ sobre a Terra.

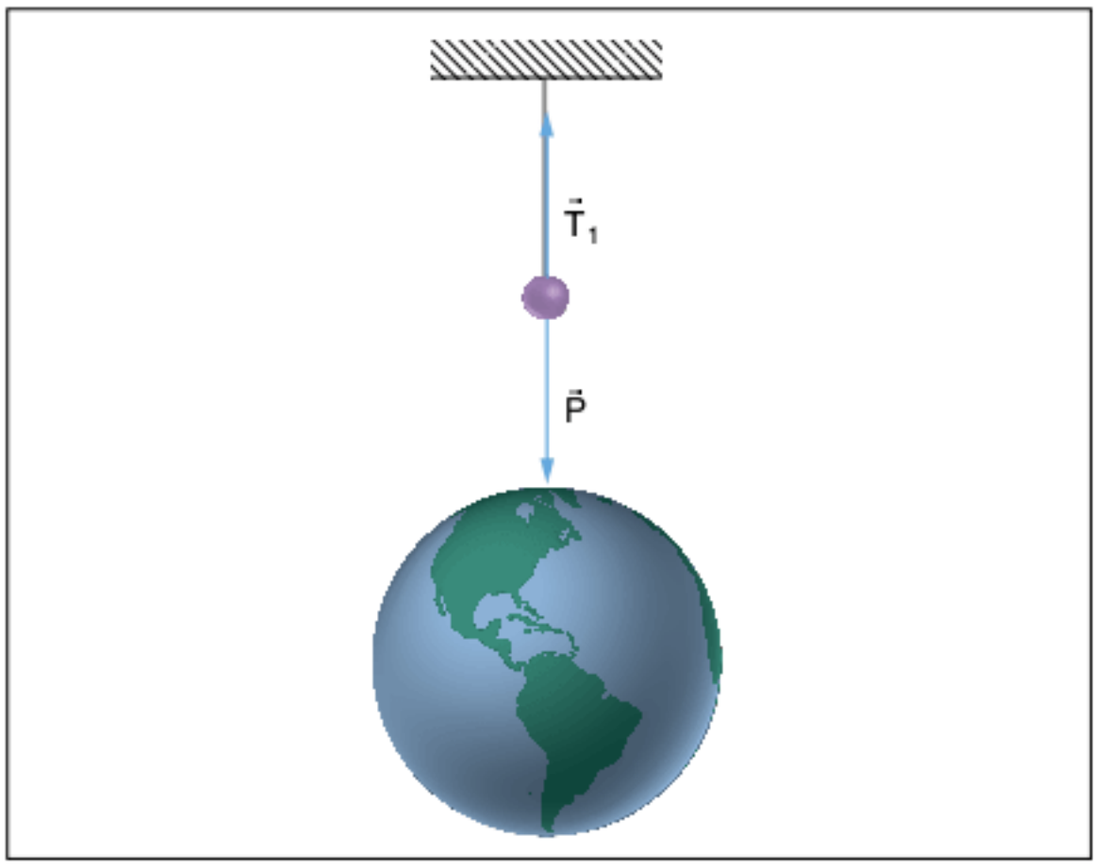


Fig. 20 Forças que agem sobre o corpo suspenso por um fio.

Se o corpo estiver em equilíbrio, então a resultante que age sobre ele é nula:

$$|\vec{P}| = |\vec{T}_1|$$

Analisando agora o fio, observamos que, sobre ele, agem três forças: uma força de campo $\vec{P}'$, que é o peso do fio exercido pela Terra, uma força de contato $-\vec{T}_1$ exercida pelo corpo, reação a $\vec{T}_1$, e uma força de contato $\vec{T}_2$ exercida pelo teto sobre o fio. Temos aqui, também, pelo Princípio da Ação e Reação, que o fio reage, exercendo uma força $-\vec{T}_2$ sobre o teto.

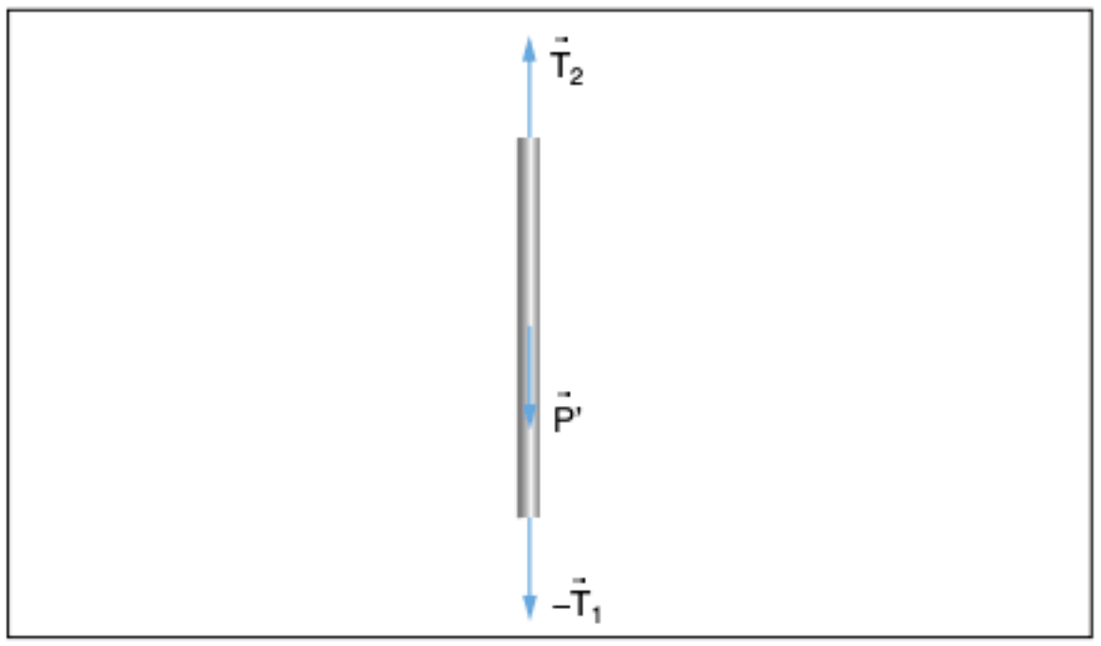


Fig. 21 Forças que agem em um fio.

Se o fio estiver em equilíbrio, então a resultante será nula:

$$|\vec{T}_2| = |\vec{P}'| + |-\vec{T}_1|, \text{ ou } T_2 = P' + T_1$$

Em nossos exercícios, vamos considerar, frequentemente os fios como ideais. Um fio ideal tem massa desprezível, é inextensível (não é uma mola) e é flexível.

Portanto, se o fio for ideal:

$$P' = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 = T$$

Chamamos a força no fio de tração. Em um fio ideal, a tração é integralmente transmitida pelo fio, ou seja, todos os pontos do fio recebem e exercem a mesma força. A tração tem sempre a direção do fio naquele ponto e seu sentido é o de tracionar o fio, nunca de comprimi-lo, pois um fio não resiste à compressão, somente à tração.

Mesmo se o fio possuir aceleração, a tração será a mesma por todo o fio. Por exemplo, se o fio da figura tiver aceleração para a direita $\vec{a}$:

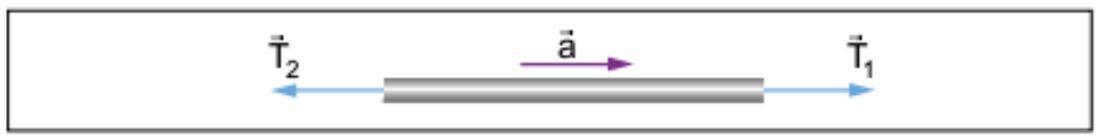


Fig. 22 Fio acelerado.

Utilizando a Segunda Lei de Newton:

$$\vec{F}_R = m.\vec{a} \Rightarrow T_1 - T_2 = m.a$$

mas:

$$m = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 = 0 \,.\, a = 0$$

ou seja, $T_1 = T_2$ mesmo que o fio esteja acelerado, sendo a massa desprezível a única condição para que a tração se propague igualmente por todo o fio.

Observação: *Uma barra, ao contrário de um fio, além de resistir à tração, também resiste à compressão.*

Fig. 23 Barra sujeita a compressão.

Força elástica

Tomemos uma mola de massa desprezível e de comprimento L_0, presa a uma parede por uma de suas extremidades.

Se aplicarmos uma força F_1 sobre a mola, seu novo comprimento será L_1. Chamamos de deformação da mola a diferença entre seu comprimento final e seu comprimento inicial. Em nosso caso, $L_1 - L_0 = x_1$.

Se aplicarmos outra força F_2 sobre a mola, seu novo comprimento será L_2, e a deformação $L_2 - L_0 = x_2$.

Repetindo várias vezes essa experiência, podemos observar que existe uma razão constante entre a força e a deformação:

$$\frac{F_1}{x_1} = \frac{F_2}{x_2} = \ldots = \frac{F_n}{x_n} = \text{cte.}$$

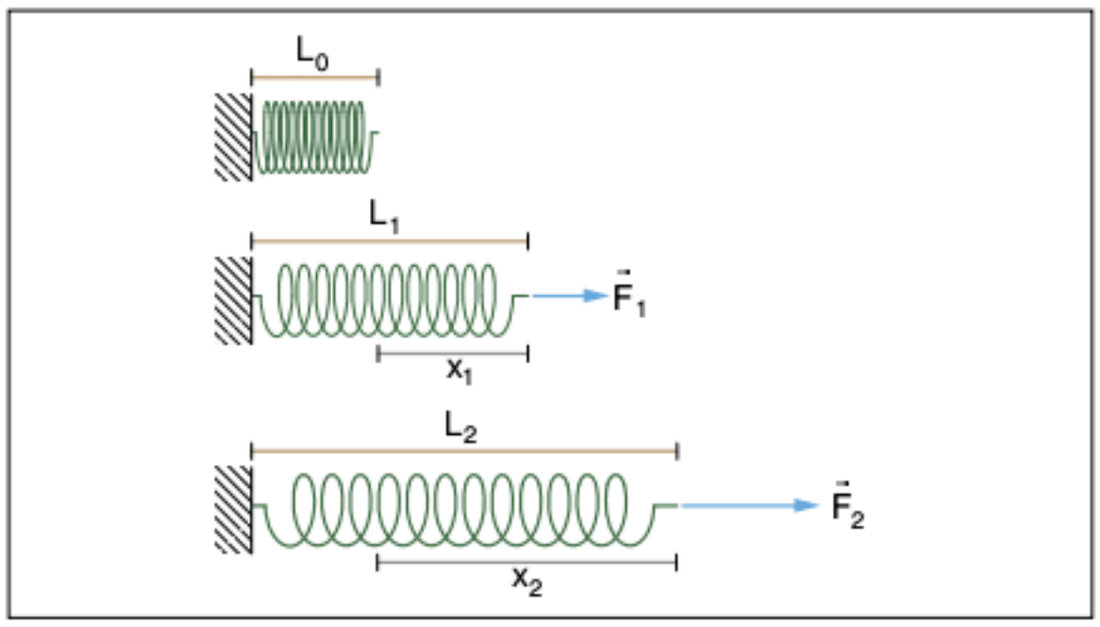


Fig. 24 Força elástica.

Essa constante é chamada de constante elástica da mola, donde se pode obter a Lei de Hooke:

$$F = k \cdot x$$

Sabemos que:

$$\text{unid}(k) = \frac{\text{unid}(F)}{\text{unid}(x)}$$

No SI:

$$\text{unid}(k) = \frac{N}{m}$$

que é a unidade da constante elástica.

Essa constante não depende da força ou da deformação, depende apenas do material da mola e da sua geometria.

Se, após esticarmos ou comprimirmos uma mola, ela for solta e retornar a seu comprimento original, dizemos que a deformação foi elástica. Se ela não retornar ao seu comprimento original, dizemos que a deformação não foi elástica, o que acontece quando as deformações são muito grandes se comparadas com seu comprimento natural L_0.

A Lei de Hooke é válida somente na região elástica de deformação, tanto quando a mola é alongada como quando é comprimida. Graficamente:

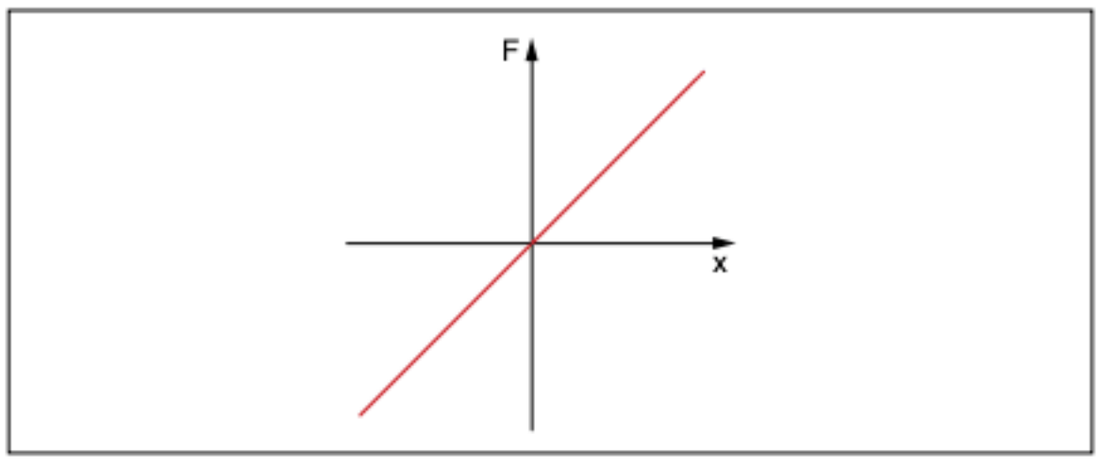


Fig. 25 Força elástica *versus* elongação.

Pelo Princípio da Ação e Reação, se puxamos a mola com uma força $\vec{F}$, a mola puxa nossa mão com uma força $-\vec{F}$, de igual módulo e direção, mas sentido contrário.

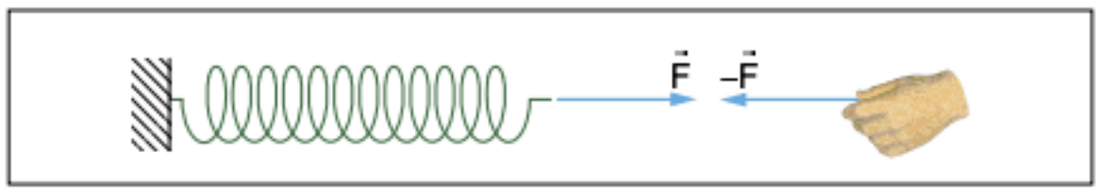


Fig. 26 Princípio da Ação e Reação em uma mola.

Uma mola ideal é aquela que obedece à Lei de Hooke e possui massa desprezível. Como no fio ideal, devido ao fato de não possuir massa, a força aplicada sobre ela se propaga integralmente por todos os pontos da mola. Sobre ela, atuam duas forças de contato, da mão ($\vec{F}$) e da parede ($\vec{F}_1$):

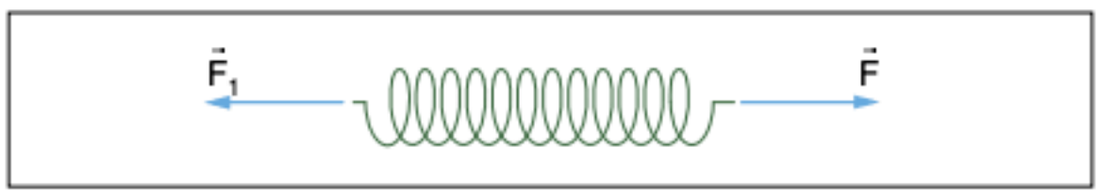


Fig. 27 Forças que agem em uma mola.

Se a mola já tiver sido deformada e estiver em equilíbrio, então $|\vec{F}_1| = |\vec{F}|$. Como vimos no caso dos fios, mesmo acelerada, teremos $|\vec{F}_1| = |\vec{F}|$.

Dinamômetro

Uma grande aplicação para as molas é o dinamômetro, que é um instrumento utilizado para medir forças. Ele consiste de uma mola com um ponteiro e uma escala. Ao aplicarmos uma força sobre a mola, o ponteiro se desloca, indicando na escala o valor da força.

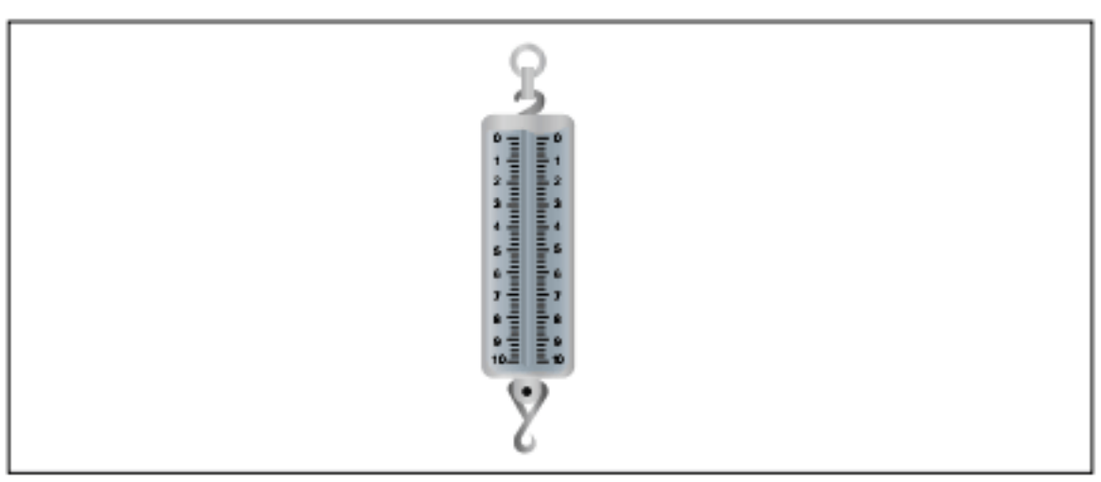


Fig. 28 Dinamômetro.

O dinamômetro pode ser utilizado para medir o peso de um corpo. Ao pendurar o corpo em um dinamômetro vertical:

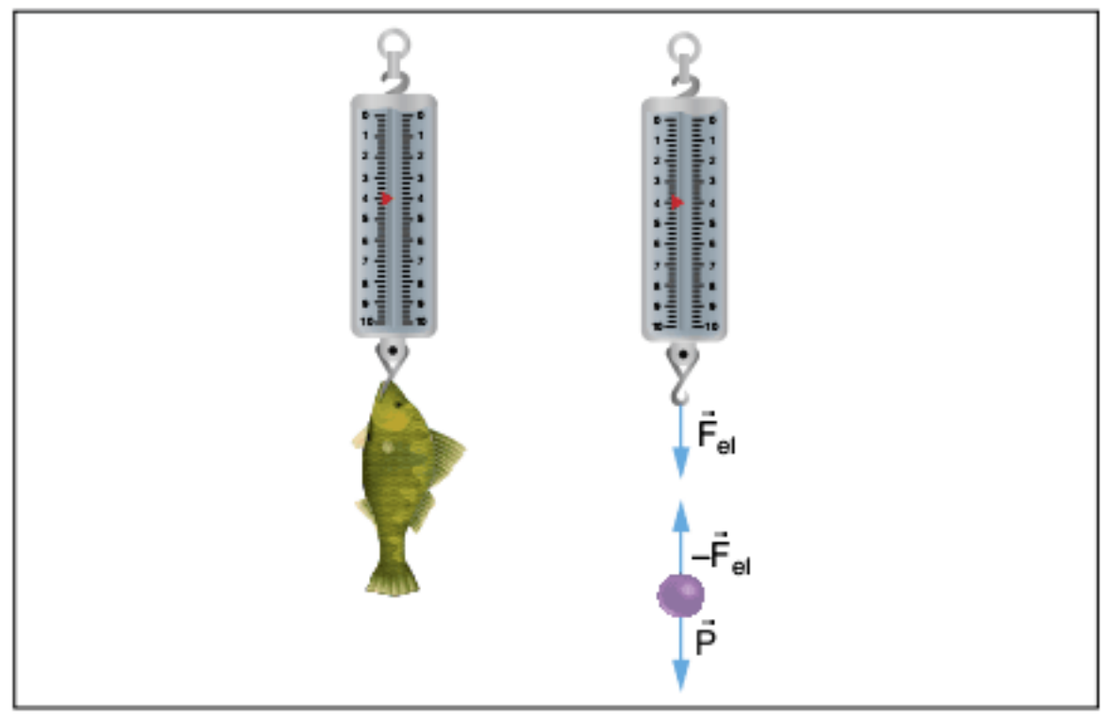


Fig. 29 Exemplo de aplicação de um dinamômetro.

sobre o corpo, atuam a força peso ($\vec{P}$), aplicada pela Terra, e a força elástica ($-\vec{F}_{el}$), aplicada pela mola. No equilíbrio:

$$F_{el} = P$$

Pelo Princípio da Ação e Reação, o corpo também realiza uma força de igual módulo e direção, mas sentido contrário ao da força elástica.

Assim, a mola medirá essa força, que é, em módulo, igual ao peso. Podemos transformar o dinamômetro também em um instrumento para medir a massa, desde que dividamos os valores de força na escala pela gravidade local. Nesse caso, se mudamos de local, devemos também mudar a escala.

Associação de molas em série

Vamos tomar duas molas ideais de constantes elásticas k_1 e k_2, associadas em série:

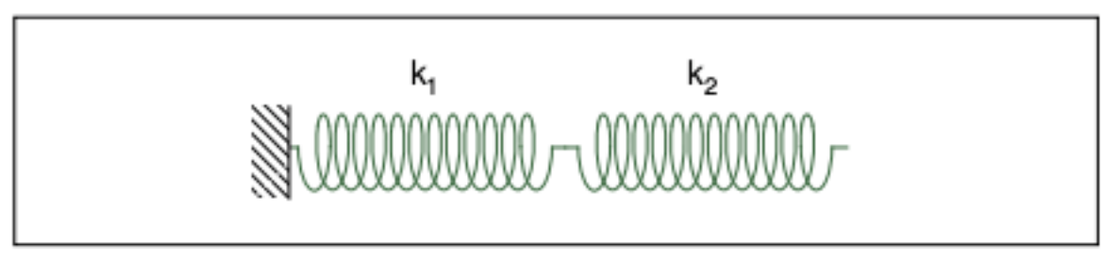


Fig. 30 Molas associadas em série.

Ao aplicarmos uma força F sobre o sistema, já sabemos que, por serem as molas ideais, a força se propaga integralmente por elas. As molas 1 e 2 sofrerão, então, deformações, respectivamente, iguais a x_1 e x_2, de tal modo que o conjunto formado pelas duas molas se deforme de x, onde:

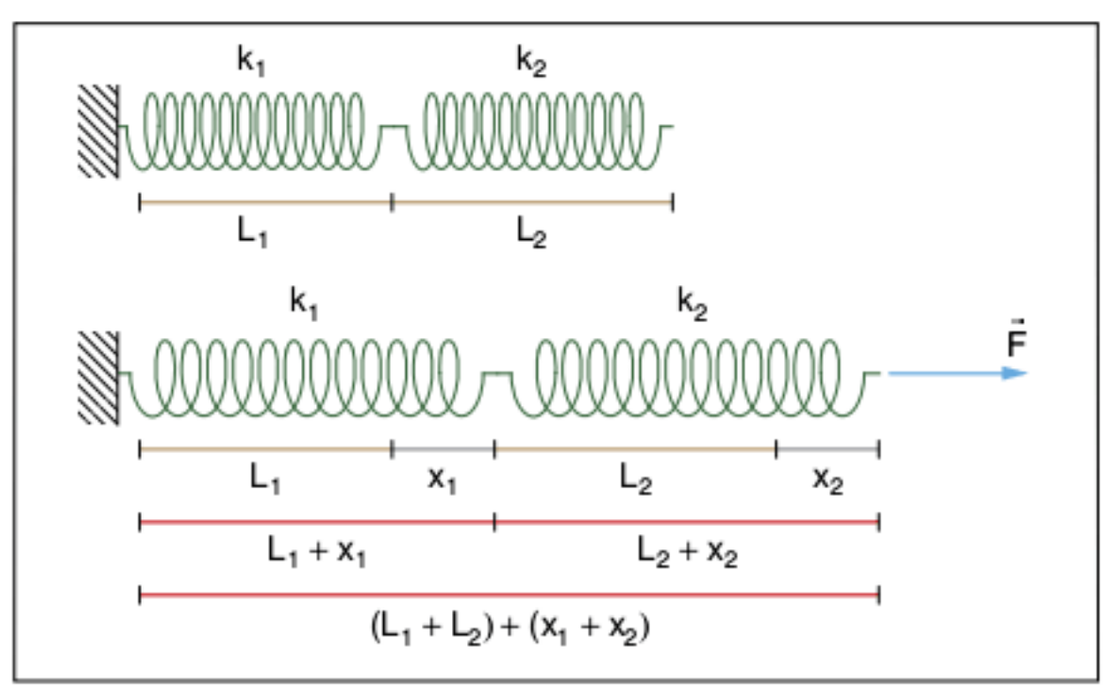


Fig. 31 Molas em série submetidas a força.

Se a força se propaga integralmente, então:

$$F = k_1 . x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{k_1}$$

$$F = k_2 . x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{F}{k_2}$$

Vamos tomar uma mola equivalente, de tal modo que, recebendo a mesma força F, se deforme também de x:

$$F = k_{eq} . x \Rightarrow x = \frac{F}{k_{eq}}$$

Mas:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

De um modo geral, para n molas em série, temos:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ... + \frac{1}{k_n}$$

Associação de molas em paralelo

Vamos tomar duas molas ideais de constantes elásticas k_1 e k_2, de mesmo comprimento natural L_0, associadas em paralelo:

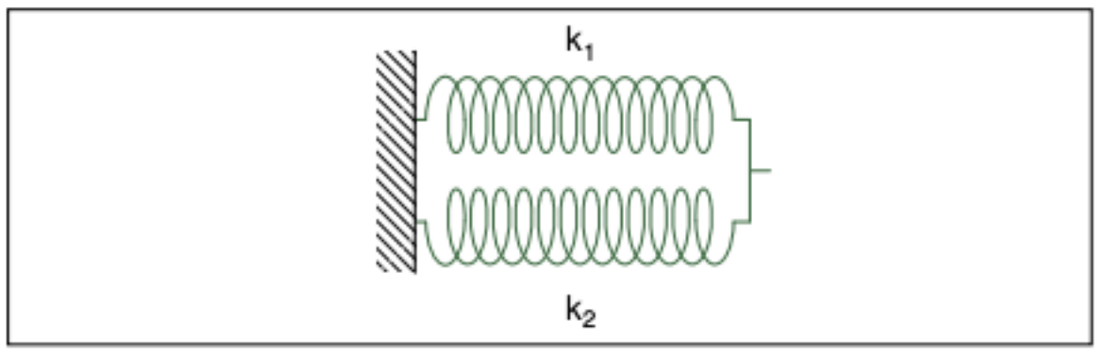


Fig. 32 Molas associadas em paralelo.

Ao aplicarmos uma força F sobre o sistema, as deformações, por construção, serão as mesmas. Como as constantes são diferentes, as forças F_1 (mola 1) e F_2 (mola 2) são diferentes, em que:

$$F = F_1 + F_2$$

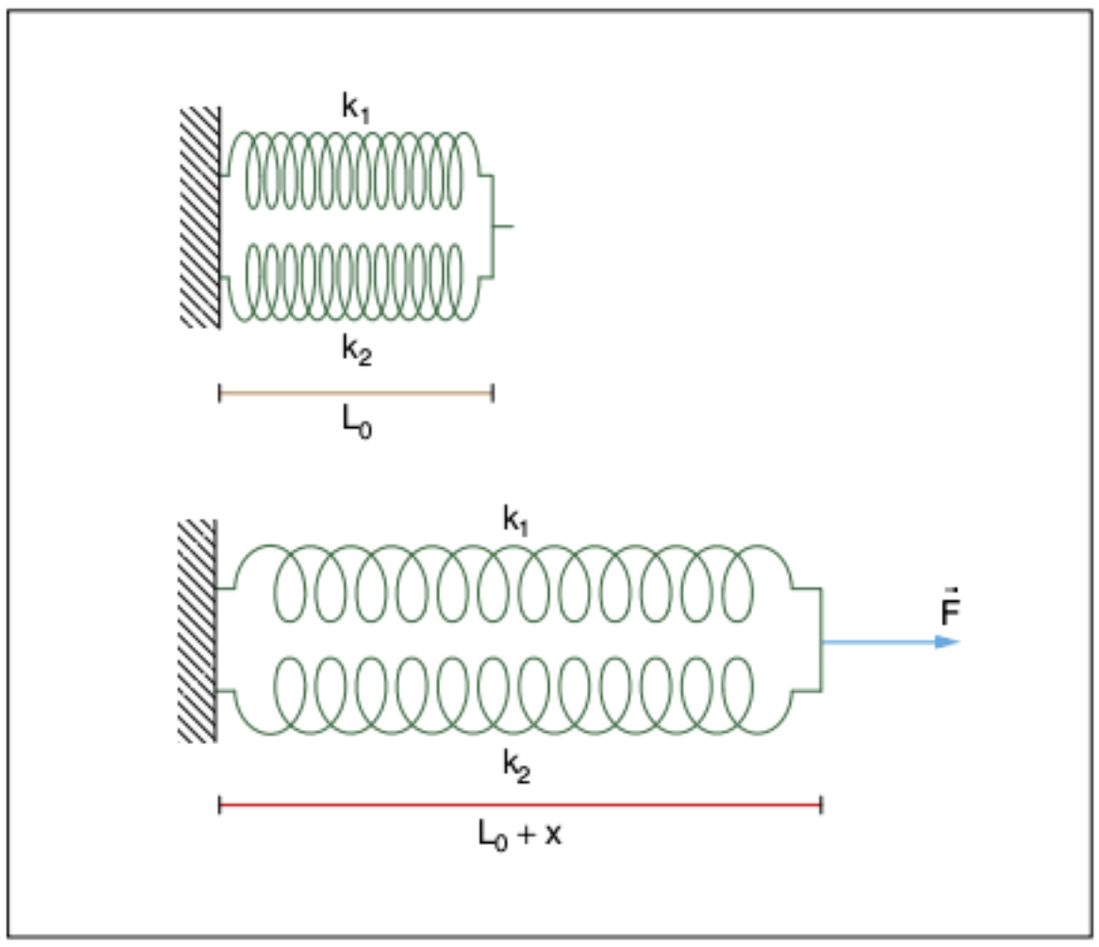


Fig. 33 Molas em paralelo submetidas a força.

Temos então:

$F_1 = k_1 \cdot x$

$F_2 = k_2 \cdot x$

Vamos tomar uma mola equivalente, de tal modo que, recebendo a mesma força F, se deforme também de x:

$$F = k_{eq} \cdot x$$

Mas:

$$F = F_1 + F_2 \Rightarrow k_{eq} \cdot x = k_1 \cdot x + k_2 \cdot x \Rightarrow$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

De modo geral, para n molas em paralelo, temos:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + ... + k_n$$

Equilíbrio de um corpo

Um corpo está em equilíbrio quando a resultante das forças que agem sobre ele é nula. Logo, a velocidade vetorial deve ser constante.

Isso conduz a dois tipos de equilíbrio:

- equilíbrio estático: velocidade vetorial constante e igual a zero. Nesse caso, o corpo está em repouso.
- equilíbrio dinâmico: velocidade vetorial constante e diferente de zero. Nesse caso, o corpo possui movimento retilíneo uniforme.

O equilíbrio estático pode se apresentar de três formas:

- equilíbrio estável: se deslocarmos o corpo de sua posição de equilíbrio, ele tende a voltar à sua posição inicial.

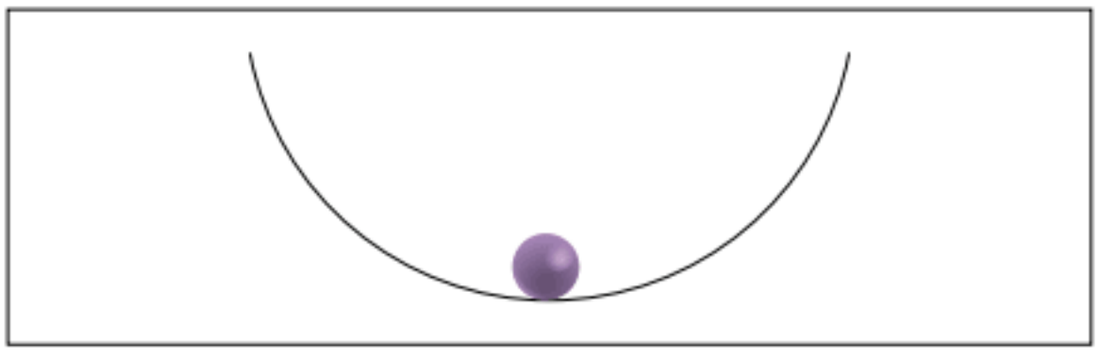


Fig. 34 Equilíbrio estável.

- equilíbrio instável: se deslocarmos o corpo de sua posição de equilíbrio, ele tende a se afastar mais ainda de sua posição inicial.

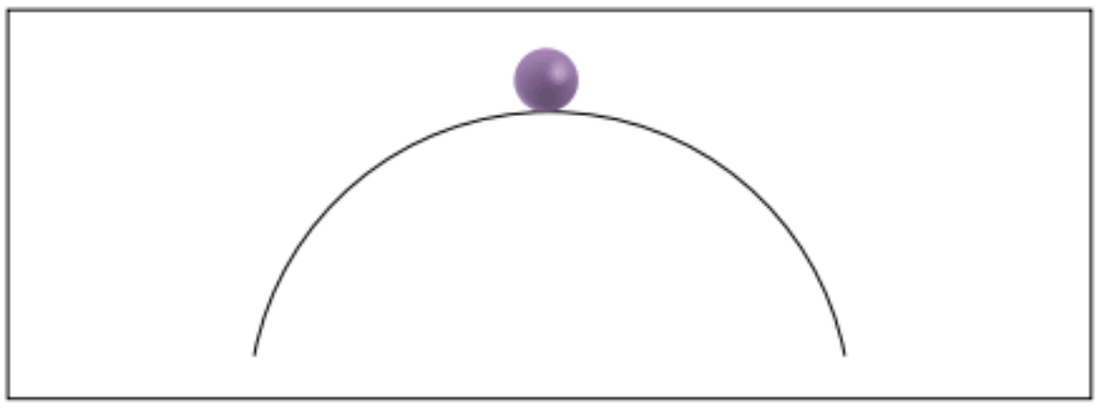


Fig. 35 Equilíbrio instável.

- equilíbrio indiferente: se deslocarmos o corpo de sua posição de equilíbrio, ele fica em equilíbrio na nova posição.

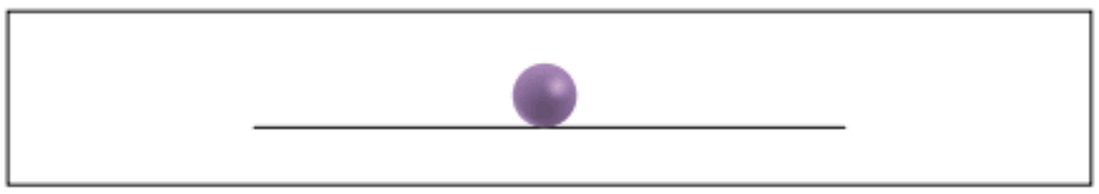


Fig. 36 Equilíbrio indiferente.

Exercícios resolvidos

1 Um corpo de massa 8 kg, ao passar por um ponto A de uma trajetória retilínea com velocidade de 10 m/s, passa a sofrer a ação de uma força constante e no mesmo sentido da velocidade. Ao passar pelo ponto B, 2 s após, sua velocidade vale 20 m/s. Determine:

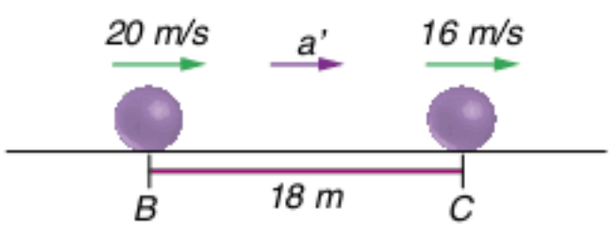
a) a intensidade da força.
b) o espaço percorrido de A a B.
c) a intensidade e o sentido da resultante que passa a agir sobre o corpo a partir de B, de modo que o corpo atinja a velocidade de 16 m/s, 18 m depois do ponto B.

Resolução:

a) *Para a aceleração entre A e B:*
$v_B = v_A + at \Rightarrow 20 = 10 + a.2 \Rightarrow a = 5\ m/s^2$
Mas:
$F = ma \Rightarrow F = 8.5 \Rightarrow F = 40\ N$

b) *Aplicando a equação de Torricelli entre A e B:*
$v_B^2 = v_A^2 + 2a\Delta s \Rightarrow 20^2 = 10^2 + 2.5.\Delta s$
Logo:
$\Delta s = 30\ m$

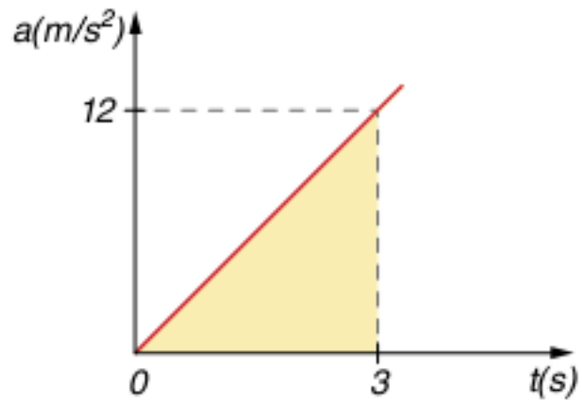
c)



Aplicando a equação de Torricelli entre B e C:
$v_C^2 = v_B^2 + 2a'\Delta s \Rightarrow 16^2 = 20^2 + 2a'.18 \Rightarrow a' = -4\ m/s^2$
o que mostra que o corpo está sendo freado.
Para o módulo de F':
$F' = m.a' \Rightarrow F' = 8.4 \Rightarrow F' = 32\ N$
Então, a força terá módulo F' e sentido contrário ao do movimento.

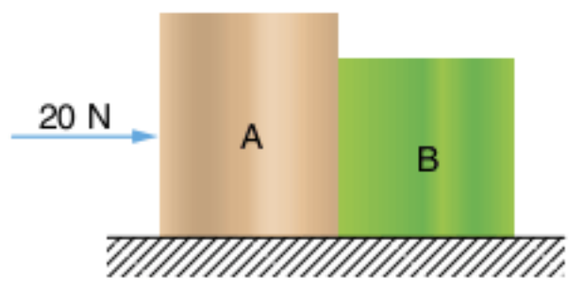
2 Um corpo de massa 10 kg é submetido a uma força de intensidade 40.t, com t medido em segundos. Se, no instante t = 0, o corpo possuía velocidade de 6 m/s no mesmo sentido da resultante, determine a velocidade desse corpo no instante t = 3 s.

Resolução:
Sabemos que:
$R = ma$
Logo:
$40t = 10a \Rightarrow a = 4t$
Em um gráfico $a \times t$:



A área colorida representa a variação de velocidade de 0 a 3 s:
$\Delta v = \frac{3.12}{2} \Rightarrow \Delta v = 18\ m/s$
Mas:
$\Delta v = v_F - v_I \Rightarrow 18 = v_F - 6 \Rightarrow v_F = 24\ m/s$

3 Uma força de 20 N atua sobre o bloco A da figura. Os blocos A e B têm massas $m_A = 3$ kg e $m_B = 2$ kg.



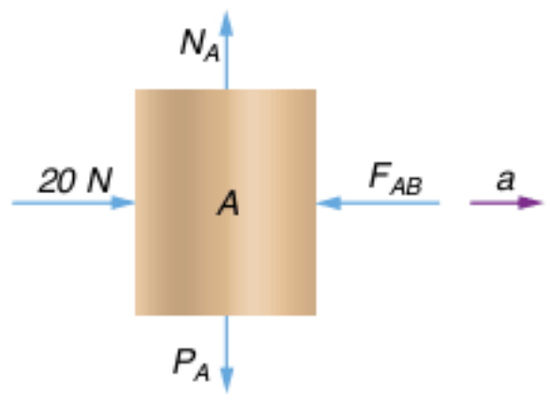
Sabendo que g = 10 m/s² e desconsiderando quaisquer atritos:

a) isole o bloco A e escreva a Segunda Lei de Newton para ele.
b) isole o bloco B e escreva a Segunda Lei de Newton para ele.
c) determine os valores da aceleração do sistema e da força de contato entre os blocos.

Resolução:

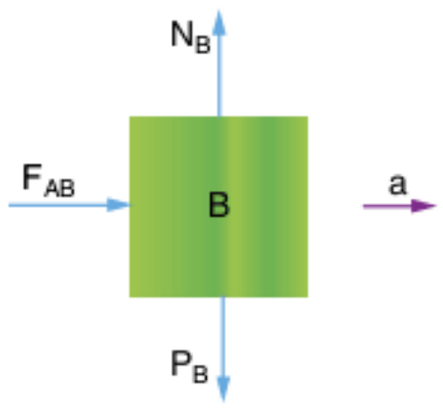
a) *Precisamos isolar o corpo A. Isolamos um sistema ao desenhá-lo e representar todas as forças que atuam sobre ele. As forças que atuam sobre o corpo são as forças de contato e as forças de campo. Para representar as forças de campo, é preciso checar quais os corpos que exercem força mesmo sem estarem em contato com o sistema que está sendo isolado; em nosso estudo de Dinâmica, a força de campo mais comum é a força peso. Para representar as forças de contato, basta substituir todos os corpos em contato com o sistema pelas forças que os corpos aplicam sobre ele; além disso, devemos representar as forças sem agente especificado, porém enunciadas ou desenhadas no problema.*

Isolando o corpo A:



em y, não há movimento:
$N_A = P_A = 30\ N$
em x, o corpo A se move com aceleração a:
$20 - F_{AB} = m_A.a \Rightarrow 20 - F_{AB} = 3a \qquad (I)$

b) *Isolando o corpo B:*



em y, não há movimento:
$N_B = P_B = 20\ N$
em x, o corpo B se move com aceleração a:
$F_{AB} = m_B \cdot a \Rightarrow F_{AB} = 2a \qquad (II)$

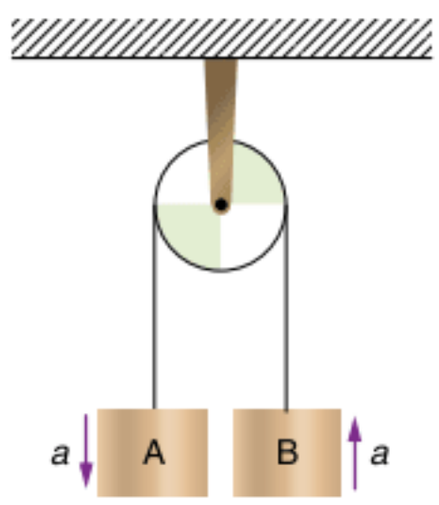
c) *De (I) e (II):*

$$\begin{array}{l} 20 - F_{AB} = 3a \\ \quad\ \ F_{AB} = 2a \\ \hline 20 \qquad\ \ = 5a \end{array} \Rightarrow a = 4\ m/s^2$$

em (II):
$F_{AB} = 2 \cdot 4 \Rightarrow F_{AB} = 8\ N$

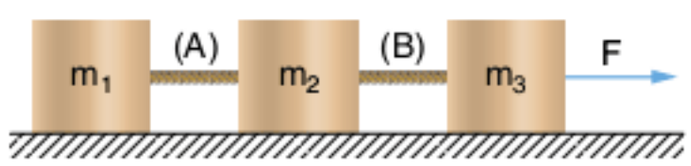
O valor de a também poderia ser obtido diretamente se isolássemos todo o sistema:
$20 = (m_A + m_B)a \Rightarrow 20 = (3+2)a \Rightarrow$
$a = 4\ m/s^2$

Observação: *Dois ou mais corpos podem ser isolados juntos apenas quando eles tiverem a mesma aceleração vetorial, ou seja, quando a aceleração dos corpos for a mesma em módulo, direção e sentido.*



Os corpos A e B da figura não podem ser isolados juntos, pois, apesar de suas acelerações serem iguais em módulo e direção, não possuem o mesmo sentido.

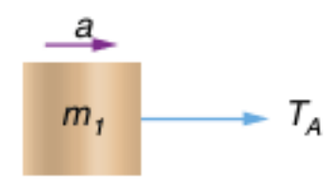
4 Uma força F = 40 N arrasta três blocos de massas m_1, m_2 e m_3, ligados por cordas de massas desprezíveis, sobre uma superfície sem atrito. Sabe-se que a soma das massas vale 8 kg, que $T_A = \frac{F}{4}$ e $T_B = \frac{3F}{4}$. Determine, então, os valores das massas.



Resolução:
Isolando todo o sistema, temos:
$F = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow 40 = 8a \Rightarrow a = 5\ m/s^2$

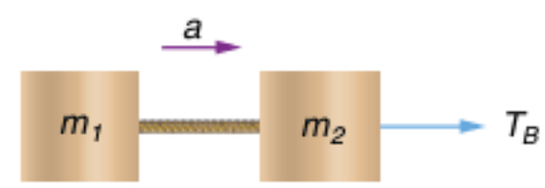
Se $T_A = \frac{F}{4}$, *então* $T_A = 10\ N$.

Isolando m_1 *e tomando as forças em x:*



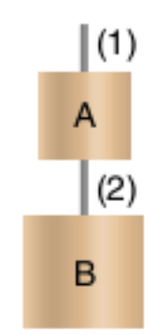
$T_A = m_1 \cdot a \Rightarrow 10 = m_1 \cdot 5 \Rightarrow m_1 = 2\ kg$
Se $T_B = \frac{3F}{4}$, *então* $T_B = 30\ N$.

Isolando m_1 *e* m_2 *e tomando as forças em x:*



$T_B = (m_1 + m_2)a \Rightarrow 30 = (m_1 + m_2)5 \Rightarrow$
$m_1 + m_2 = 6\ kg \Rightarrow m_2 = 4\ kg$
Como $m_1 + m_2 + m_3 = 8\ kg$, *então* $m_3 = 2\ kg$

5 Dois blocos, A e B, de massas 2 kg e 3 kg, respectivamente, estão suspensos na vertical, conforme a figura a seguir.

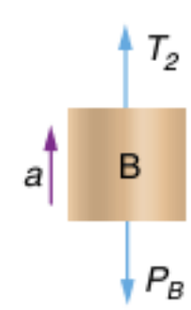


A máxima tração no fio 2 é 60 N. Sabendo que g = 10 m/s², determine:

a) a máxima aceleração do sistema.
b) a máxima tração no fio 1.
c) a aceleração do sistema e a tração em 2 quando a tração no fio 1 for 80% da tração máxima.
d) a tração no fio 1 para que o sistema fique em equilíbrio.

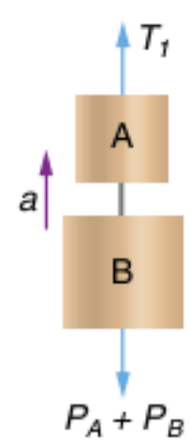
Resolução:

a) *Na situação em que* $T_2 = 60\ N$, *temos, para B:*



$T_2 - P_B = m_B \cdot a_{máx} \Rightarrow 60 - 30 = 3a_{máx} \Rightarrow$
$a_{máx} = 10\ m/s^2$

b) *Isolando todo o sistema:*



$T_1 - (P_A + P_B) = (m_A + m_B)a_{máx} \Rightarrow$
$T_1 - 50 = 5 \cdot 10 \Rightarrow T_1 = 100\ N$

c) *Se $T_1 = 80\% \cdot 100\ N = 80\ N$, teremos, para o sistema:*

$T_1 - (P_A + P_B) = (m_A + m_B)a \Rightarrow$

$80 - 50 = 5a \Rightarrow a = 6\ m/s^2$

Para B:

$T_2 - P_B = m_B \cdot a \Rightarrow T_2 - 30 = 3 \cdot 6 \Rightarrow T_2 = 48\ N$

d) *Para o equilíbrio, temos a = 0. Logo:*

$T_1 - (P_A + P_B) = 0 \Rightarrow T_1 = 50\ N$

6 Em um elevador, há uma balança graduada em newtons. Um homem de massa m, sobre a balança, lê 960 N quando o elevador sobe com certa aceleração e 640 N quando ele desce com a mesma aceleração. Sabendo que $g = 10\ m/s^2$, determine:

a) a massa do homem.

b) a aceleração do elevador.

c) a indicação da balança quando o elevador desce ou sobe com velocidade constante.

Resolução:

a) *Isolando o homem:*

Quando o homem sobe com aceleração a, temos N > P:

$N - P = ma \Rightarrow 960 - 10m = ma \quad (I)$

Quando o homem desce com aceleração a, temos N < P:

$P - N = ma \Rightarrow 10m - 640 = ma \quad (II)$

De (I) e (II):

$960 - 10m = 10m - 640 \Rightarrow 1.600 = 20m \Rightarrow$

$m = 80\ kg$

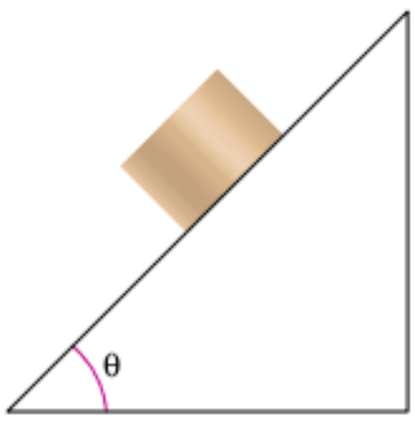
b) *Em (I):*

$960 - 10 \cdot 80 = 80a \Rightarrow a = 2\ m/s^2$

c) *Se a velocidade for constante, então a = 0. Nesse caso:*

$N - P = 0 \Rightarrow N = mg \Rightarrow N = 800\ N$

7 O corpo da figura tem massa igual a 5 kg e o plano inclinado liso forma um ângulo θ com a horizontal, tal que cos θ = 0,6.



Sabendo que $g = 10\ m/s^2$, determine:

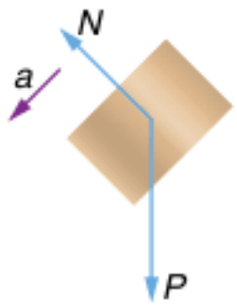
a) a aceleração do corpo.

b) a força paralela ao plano necessária para o corpo ficar em repouso.

c) a força paralela ao plano necessária para o corpo subir com aceleração de $2\ m/s^2$.

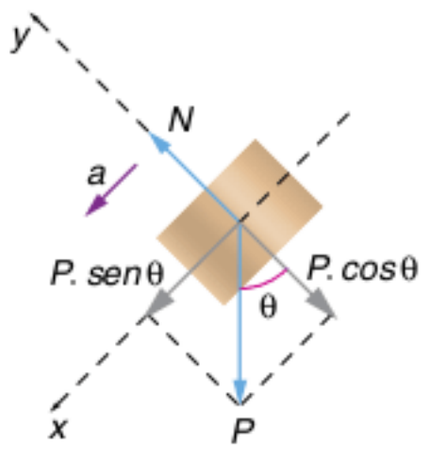
Resolução:

a) *Isolando o corpo:*



Neste exercício, necessitaremos decompor as forças. Não é regra decompor as forças, mas que a aceleração do corpo e as forças sobre ele aplicadas estejam todas decompostas em duas direções definidas. Usualmente, é mais fácil não decompor a aceleração. Nesses casos, escolhemos a direção da aceleração como uma das duas direções e a direção perpendicular à aceleração como a outra direção. Depois, decompomos todas as forças nessas duas direções. São raros, mas há casos em que é mais fácil decompor a aceleração do que as forças.

Decompondo as forças na direção do movimento e na direção perpendicular ao movimento:



em x:

$P \cdot sen\ \theta = m \cdot a \Rightarrow mg \cdot sen\ \theta = m \cdot a \Rightarrow$

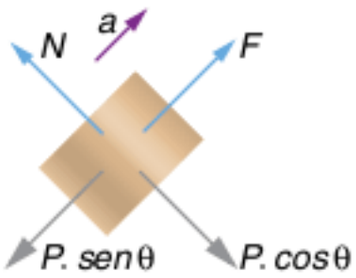
$a = g \cdot sen\ \theta = 10 \cdot 0{,}8 \Rightarrow a = 8\ m/s^2$

em y:

$N - P \cdot cos\ \theta = 0 \Rightarrow$

$N = mg \cdot cos\ \theta = 5 \cdot 10 \cdot 0{,}6 \Rightarrow N = 30\ N$

b) e c) *Com a aplicação da força F:*



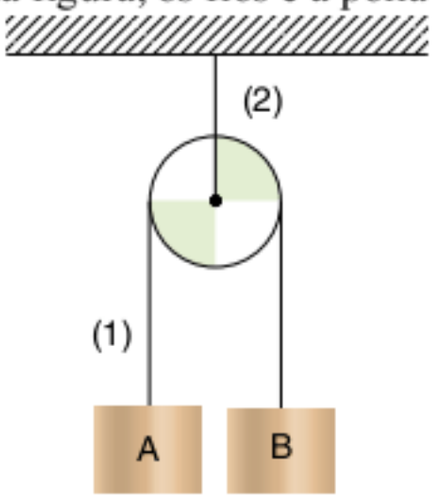
Para o corpo ficar em repouso:

$F - P \cdot sen\ \theta = 0 \Rightarrow F = P \cdot sen\ \theta = 50 \cdot 0{,}8 \Rightarrow F = 40\ N$

Para o corpo subir com $a = 2\ m/s^2$:

$F - P \cdot sen\ \theta = ma \Rightarrow F - 50 \cdot 0{,}8 = 5 \cdot 2 \Rightarrow F = 50\ N$

8 No arranjo da figura, os fios e a polia são ideais.

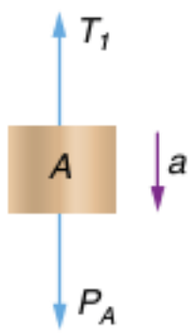


Se as massas de A e B são, respectivamente, iguais a 3 kg e 2 kg, determine, para g = 10 m/s²:

a) a aceleração das massas.
b) a tração no fio 1.
c) a tração no fio 2.

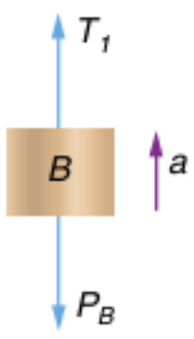
Resolução:

a) *Como a massa de A é maior, então A descerá com aceleração a e B subirá com a mesma aceleração.*
Isolando o bloco A:



$P_A - T_1 = m_A \cdot a \Rightarrow 30 - T_1 = 3a$ (I)

Isolando o bloco B:



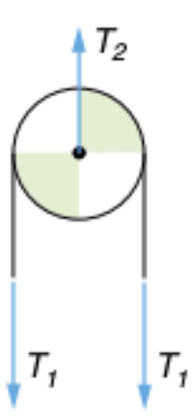
$T_1 - P_B = m_B \cdot a \Rightarrow T_1 - 20 = 2a$ (II)

De (I) e (II):

$$\begin{array}{l} 30 - T_1 = 3a \\ T_1 - 20 = 2a \\ \hline 10 = 5a \Rightarrow a = 2\ m/s^2 \end{array}$$

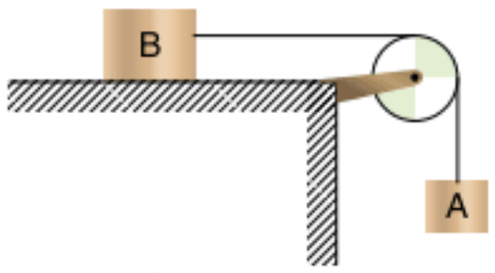
b) *Em (I):*
$30 - T_1 = 3 \cdot 2 \Rightarrow T_1 = 24\ N$

c) *Isolando a roldana:*



Como a roldana não tem massa e está em repouso:
$T_2 - 2T_1 = 0 \Rightarrow T_2 = 2T_1 \Rightarrow T_2 = 48\ N$

9 Na figura, os fios e a polia são ideais. As massas de A e B valem 6 kg e 4 kg, respectivamente.

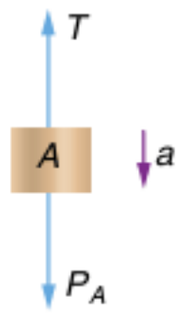


Sabendo que g = 10 m/s², determine:

a) a aceleração do sistema.
b) a tração no fio.
c) a força que deve ser aplicada sobre B para que o sistema fique em equilíbrio.
d) a força que deve ser aplicada sobre B para que ele se mova para a esquerda com aceleração igual a 2 m/s².

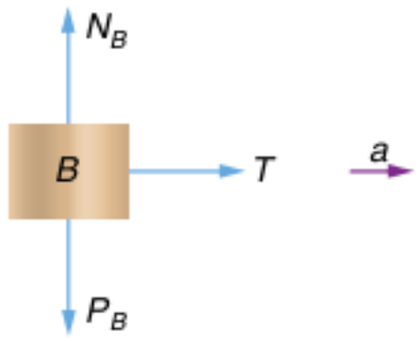
Resolução:

a) *Isolando o corpo A:*



$P_A - T = m_A \cdot a \Rightarrow 60 - T = 6a$ (I)

Isolando o corpo B:



em y:
$a = 0 \Rightarrow N_B = P_B = 40\ N$
em x:
$T = m_B \cdot a \Rightarrow T = 4a$ (II)
De (I) e (II):

$$\begin{array}{l} 60 - T = 6a \\ \quad\ \ T = 4a \\ \hline 60 \quad = 10a \Rightarrow a = 6\ m/s^2 \end{array}$$

b) *Em (II):*
$T = 4a \Rightarrow T = 4 \cdot 6 \Rightarrow T = 24\ N$

c) *Para o equilíbrio de A:*
$T = P_A \Rightarrow T = 60\ N$

Para o equilíbrio de B:

$F = T \Rightarrow F = 60\ N$

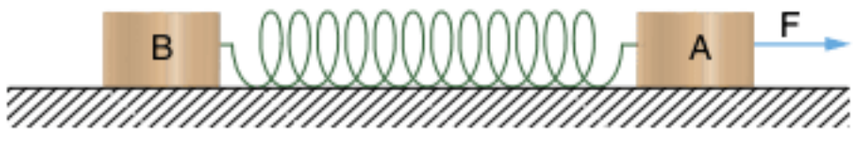
d) *Para que A e B se movam com a = 2 m/s²:*

$$\begin{cases} F - T = m_B \cdot 2 \\ T - P_A = m_A \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - T = 4 \cdot 2 \\ T - 60 = 6 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F - T = 8 \\ T - 60 = 12 \end{cases}$$

$$F - 60 = 20 \Rightarrow F = 80\ N$$

10 O sistema da figura repousa sobre uma superfície lisa sem atrito. As massas de A e B valem 4 kg e 2 kg, respectivamente. A constante de mola vale 100 N/m e o comprimento natural da mola é 30 cm.



Ao ser aplicada uma força de 30 N sobre o corpo A, como na figura, determine:

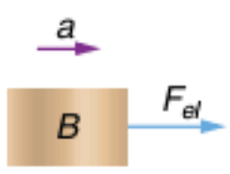
a) a aceleração do sistema.
b) o novo comprimento da mola.

Resolução:

a) Isolando todo o sistema e tomando as forças em x:

$F = (m_A + m_B)a \Rightarrow 30 = (4+2)a \Rightarrow a = 5\,m/s^2$

b) Isolando o corpo B e tomando as forças em x:



$F_{el} = m_B \,.\, a = 2 \,.\, 5 \Rightarrow F_{el} = 10\ N$

Mas:

$F_{el} = kx \Rightarrow 10 = 100x \Rightarrow x = 0{,}1\ m = 10\ cm$

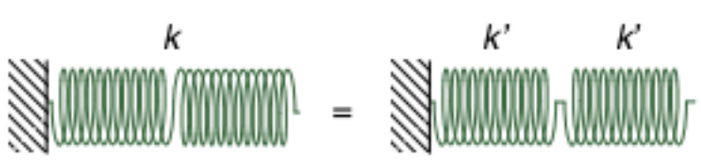
Como $l_0 = 30$ *cm, então:*

$l = l_0 + x = 30 + 10 \Rightarrow l = 40\ cm$

11 Uma mola de constante k é cortada ao meio e as duas metades são associadas em paralelo. Determine a constante elástica equivalente do sistema em paralelo.

Resolução:

Uma mola de constante elástica k equivale a duas molas de constantes elásticas iguais a k' em série:

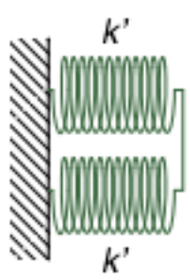


Logo:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{k'} = \frac{2}{k'} \Rightarrow k' = 2k$$

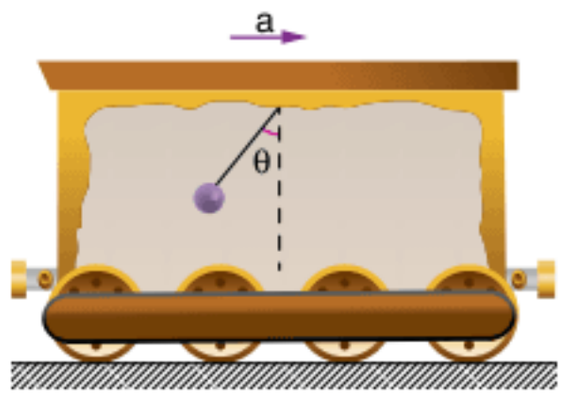
Assim, quando cortamos uma mola pela metade, a constante elástica de cada metade será o dobro da constante elástica da mola inicial.

Ao associarmos as duas metades em paralelo:



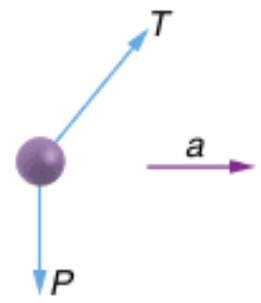
$k_{eq} = k' + k' = 2k + 2k \Rightarrow k_{eq} = 4k$

12 Em um trem, há um corpo preso ao teto por um fio. Quando o trem possui uma aceleração a para a direita, o fio forma com a vertical um ângulo θ. Determine a relação entre a, θ e g.

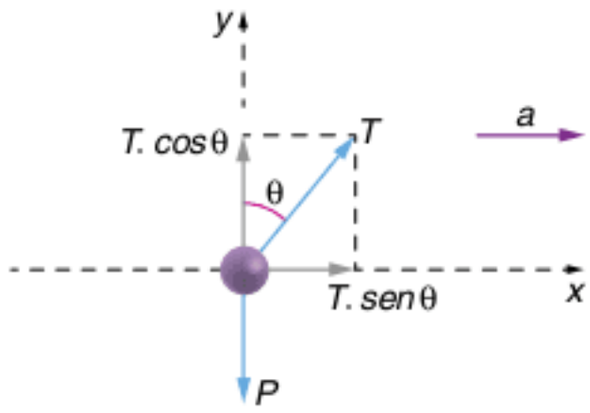


Resolução:

Isolando o corpo:



Decompondo as forças na direção da aceleração (horizontal) e na direção perpendicular à aceleração (vertical):



em x:

$T \,.\, sen\ \theta = ma \qquad (I)$

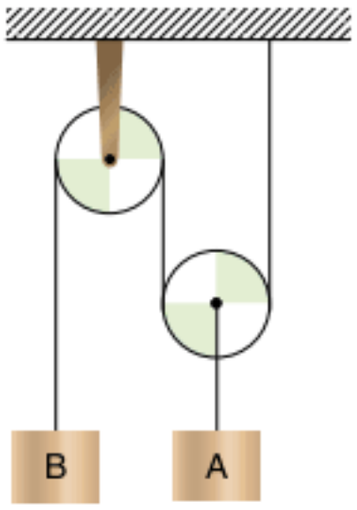
em y:

$T \,.\, cos\ \theta - P = 0 \Rightarrow T \,.\, cos\ \theta = mg \qquad (II)$

Dividindo (I) por (II):

$$\frac{T \,.\, sen\ \theta}{T \,.\, cos\ \theta} = \frac{ma}{mg} \Rightarrow tg\ \theta = \frac{a}{g}$$

13 Na figura, as massas de A e B são iguais a 3 kg.



Sabendo que g = 10 m/s², determine:

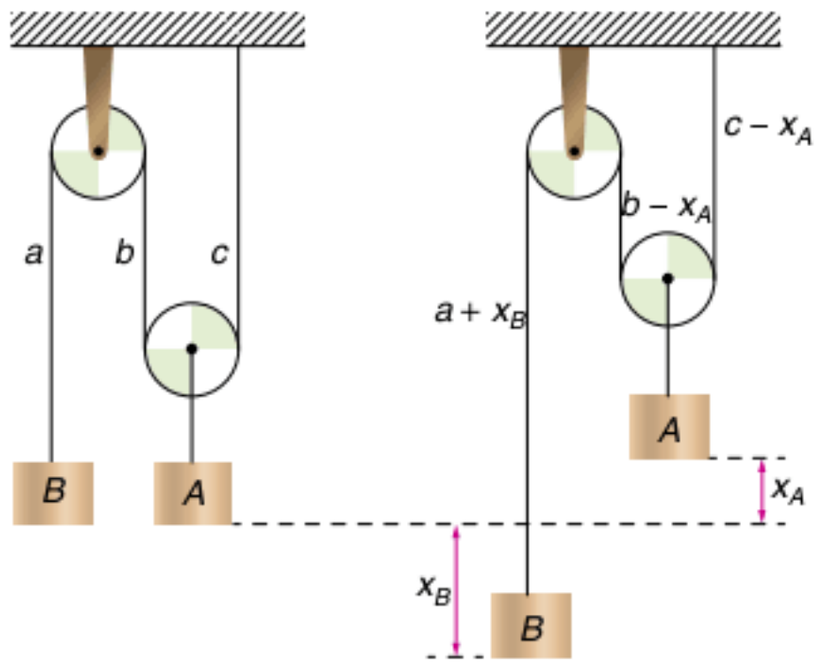
a) a relação entre as acelerações de A e B.
b) a aceleração de A.
c) a aceleração de B.
d) a tração no fio.

Resolução:

a) Vamos tomar o sistema em duas situações:

- *situação inicial*

- *após o corpo A ter subido x_A e o corpo B ter descido x_B*



Como o comprimento total do fio se mantém constante:

$a + b + c = (a + x_B) + (b - x_A) + (c - x_A) \Rightarrow$

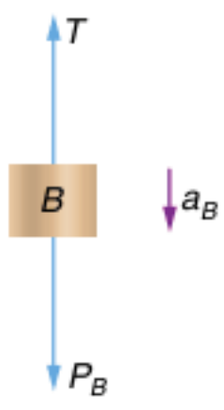
$x_B = 2x_A$

ou seja, o deslocamento de B é sempre o dobro do deslocamento de A. A mesma relação é válida para as velocidades e para as acelerações de A e B:

$v_B = 2v_A$ e $a_B = 2a_A$

b) *Se estamos supondo, a partir da situação inicial em que os corpos estão em repouso, que o corpo A suba x_A e o corpo B desça x_B, então, por coerência, devemos também supor que a aceleração de A tenha sentido para cima e a aceleração de B tenha sentido para baixo. Normalmente, não é possível, sem fazer as contas, em casos de problemas com vínculo geométrico, saber com antecedência o correto sentido das acelerações. Isso não é motivo de preocupação, pois as acelerações que tiveram seus sentidos "chutados" corretamente terão sinal positivo; as acelerações que tiveram seus sentidos "chutados" erroneamente terão sinal negativo.*

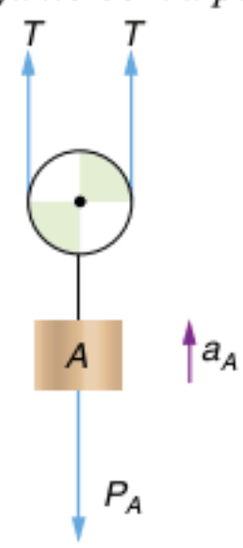
Isolando o corpo B:



$P_B - T = m_B \cdot a_B \Rightarrow 30 - T = 3a_B$ (I)

Quando um corpo está ligado a uma polia móvel, é possível isolar o corpo juntamente com a polia, pois ambos possuem a mesma aceleração vetorial. Além disso, não há acréscimo de massa, pois a polia em questão é ideal. A vantagem desse processo é "economizar" uma análise, pois, do contrário, teríamos de isolar o corpo e, em seguida, a polia.

Isolando o corpo A junto com a polia:



$2T - P_A = m_A \cdot a_A \Rightarrow 2T - 30 = 3a_A$ (II)

Mas:

$a_B = 2a_A$ (III)

De (III) em (I):

$30 - T = 6a_A$ (IV)

Tomando 2.(IV) e (II):

$$\begin{aligned} 60 - 2T &= 12a_A \\ 2T - 30 &= 3a_A \\ \hline 30 &= 15a_A \end{aligned} \Rightarrow a_A = 2\ m/s^2$$

c) *De (III):*

$a_B = 2a_A = 2 \cdot 2 \Rightarrow a_B = 4\ m/s^2$

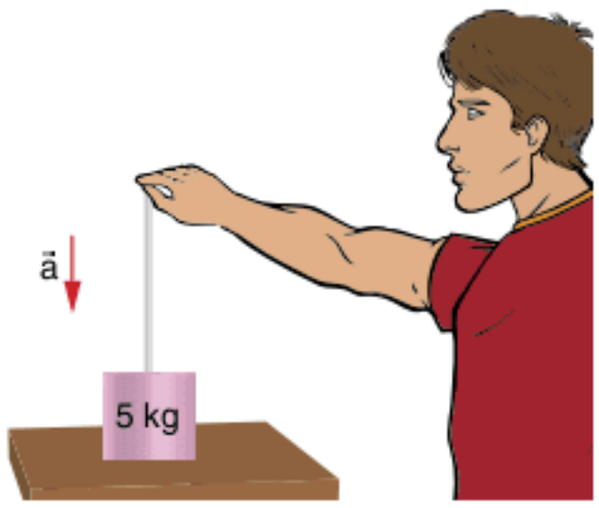
d) *De (I):*

$30 - T = 3a_B = 3 \cdot 4 \Rightarrow T = 18\ N$

Revisando

Considere, quando necessário, g = 10 m/s².

1 **Fuvest (Adapt.)** Um homem tenta levantar uma caixa de 5 kg, que está sobre uma mesa, aplicando uma força vertical de 10 N. Nessa situação, determine o valor da força que a mesa aplica na caixa.



2 Dois corpos, A e B, carregados eletricamente, atraem-se mutuamente sob a ação da força elétrica, completamente isolados da influência de qualquer outra força. Suas massas são $m_A = 2{,}0$ kg e $m_B = 3$ kg. Em determinado instante, a aceleração de A vale 6 m/s^2, para a direita. Determine, nesse instante:

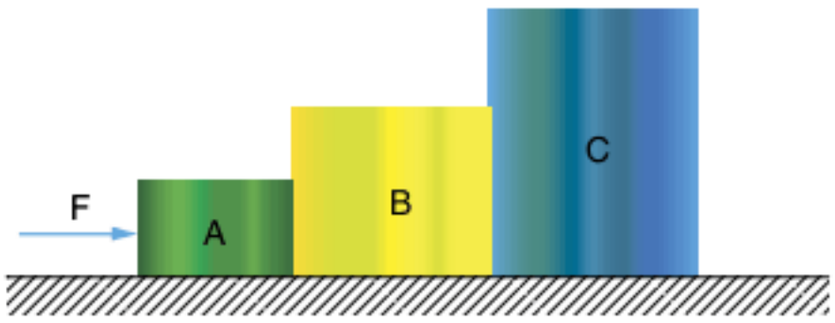
a) o módulo, a direção e o sentido da força resultante sobre A.
b) o módulo, a direção e o sentido da força resultante sobre B.
c) o módulo, a direção e o sentido da força resultante sobre o conjunto.
d) o módulo, a direção e o sentido da aceleração de B.

3 Um corpo de 5 kg move-se em um plano horizontal liso, sob a ação de uma força horizontal constante, de intensidade 20 N. Sabe-se que o corpo passa por um ponto A com velocidade 10 m/s, no mesmo sentido da força, e, após percorrer 100 m, passa por um ponto B. Determine:

a) a velocidade do corpo ao passar por B.
b) o tempo decorrido entre A e B.

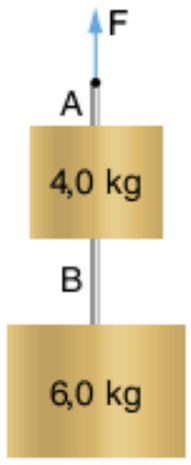
4 Na figura, os corpos A, B e C, de massas $m_A = 2$ kg, $m_B = 3$ kg e $m_C = 5$ kg, estão apoiados em uma superfície plana, horizontal e lisa. Ao bloco A, é aplicada uma força horizontal F = 20 N. Determine:

a) a aceleração do conjunto.
b) a força resultante em A.
c) a força que A exerce em B.
d) a força que B exerce em C.



5 Dois blocos estão ligados pelo fio B e, sobre o fio A, é aplicada uma força F, conforme a figura ao lado. Determine as trações em A e B, quando:

a) os corpos são mantidos em repouso.
b) os corpos possuem uma aceleração de 2,0 m/s^2, vertical e para cima.
c) os corpos possuem uma aceleração de 3,0 m/s^2, vertical e para baixo.



6 Um homem de 50 kg está sobre uma balança graduada em newtons, no interior de um elevador. Determine:

a) a indicação da balança quando o elevador sobe com aceleração constante de 2 m/s^2.

b) o módulo e o sentido da aceleração do elevador quando a balança marca 450 N.

7 Um corpo de 3 kg é solto do repouso sobre um plano inclinado liso, que forma um ângulo de 30° com a horizontal. Sabendo que o corpo leva 4 s para atingir a base do plano, determine:

a) a força que o corpo exerce sobre o plano.

b) a aceleração do corpo.

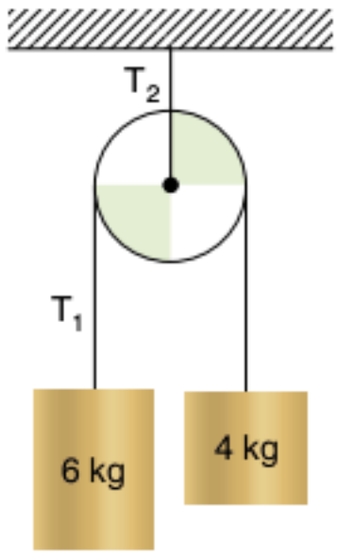
c) a distância percorrida pelo corpo até atingir a base do plano.

8 No arranjo da figura, os fios e a polia têm massas desprezíveis. O fio é inextensível e passa sem atrito pela polia. Determine:

a) a aceleração dos corpos.

b) a tração T_1.

c) a tração T_2.

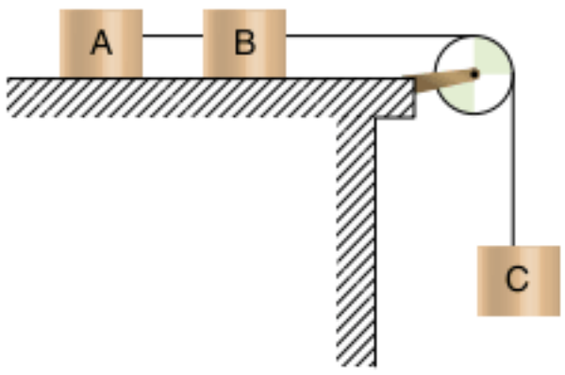


9 **UEL (Adapt.)** Os três corpos, A, B e C, representados na figura ao lado têm massas iguais, m = 3,0 kg. O plano horizontal, onde se apoiam A e B, não oferece atrito e a roldana tem massa desprezível. Determine:

a) a aceleração do conjunto.

b) a tração no fio que une os blocos A e B.

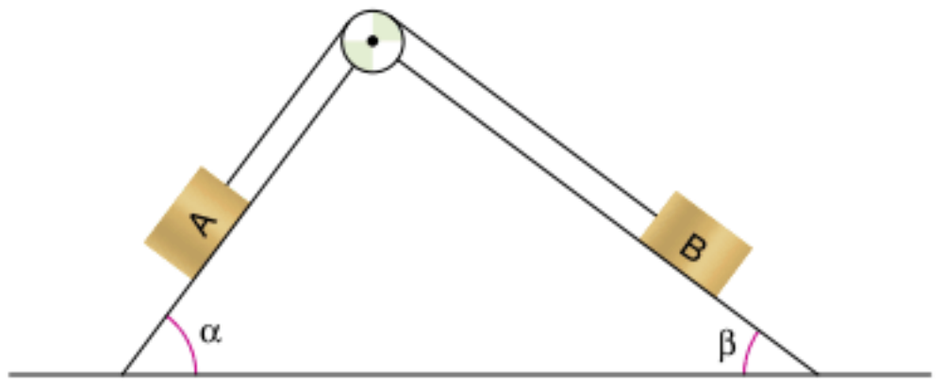
c) a tração no fio que une os blocos B e C.



10 Na figura, a polia e o fio são ideais e as superfícies são perfeitamente lisas. Sabendo que $m_A = 2{,}0$ kg, $m_B = 1{,}5$ kg e $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta = 0{,}8$, determine:

a) o módulo e o sentido da aceleração de A.

b) a tração no fio.

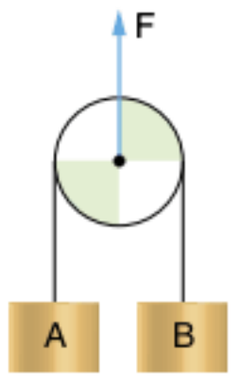


11 A polia e os fios da figura são considerados ideais e não há atritos de qualquer espécie. Sabendo que $m_A = 5{,}0$ kg, $m_B = 2{,}0$ kg e F = 80 N, determine:

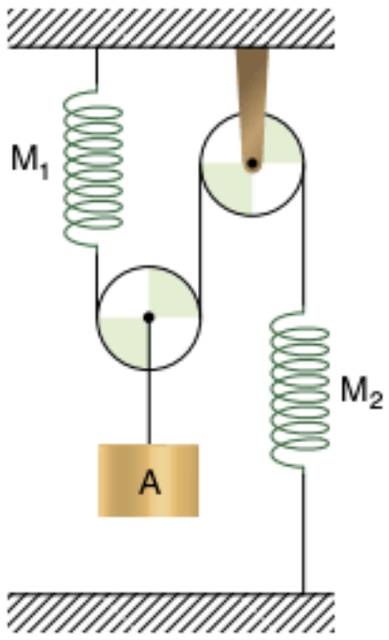
a) a tração no fio que une os corpos A e B.

b) o módulo e o sentido da aceleração de A.

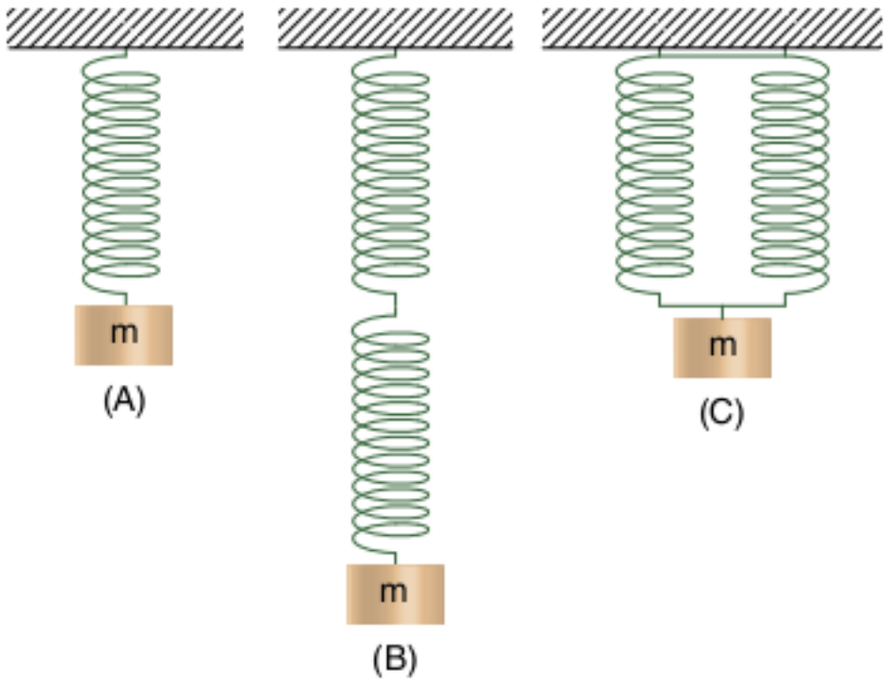
c) o módulo e o sentido da aceleração de B.



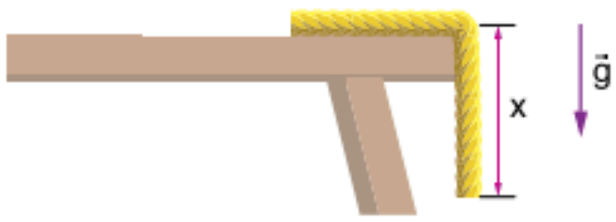
12 No sistema da figura, o corpo A tem peso 200 N, as molas M_1 e M_2 possuem comprimentos naturais, respectivamente, iguais a 60 cm e 40 cm e constantes elásticas, respectivamente, iguais a 10^3 N/m e 2.10^3 N/m. As molas e as polias são ideais. Determine os comprimentos finais das molas.



13 São montados três arranjos, esquematizados nas figuras ao lado. As molas são todas iguais, com k = 100 N/m. Se m = 2 kg, determine a deformação total em cada arranjo.



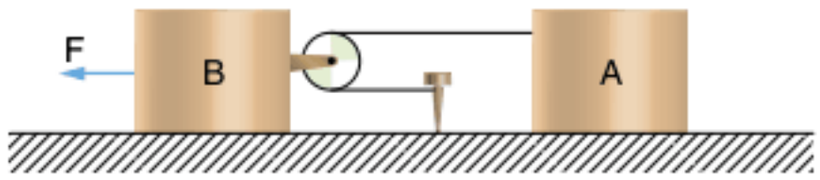
14 Uma corda homogênea tem seção transversal constante e comprimento total 5 m. Na figura, quando a corda está com um comprimento x pendente e com um trecho de seu comprimento apoiado em uma mesa horizontal e perfeitamente lisa, a sua aceleração é igual a 4 m/s². Determine o valor de x.



15 **Fuvest 2010 (Adapt.)** Uma pessoa pendurou um fio de prumo no interior de um vagão de trem e percebeu que, quando o trem partiu do repouso, o fio se inclinou em relação à vertical. A massa presa ao fio é igual a 5 kg. Com auxílio de um transferidor, a pessoa determinou que o ângulo máximo de inclinação, na partida do trem, foi de 36,87° em relação à vertical. Nessas condições, determine:
Dado: sen 36,87° = 0,6.

a) o sentido de movimento do trem.
b) a aceleração máxima do trem.
c) a tração no fio quando o trem estava em repouso.
d) a tração no fio quando o trem estava com aceleração máxima.

16 Dois blocos, A e B, com massas, respectivamente, iguais a 4,0 kg e 2,0 kg, estão unidos conforme mostra a figura ao lado.
O fio que prende o corpo A tem a outra extremidade presa a um pino fixo no chão. Despreze as massas dos fios e da roldana, considere que não há atritos e que a intensidade da força aplicada em B é 36 N. Determine:



a) a relação entre as acelerações de A e de B, $\frac{a_A}{a_B}$.
b) os módulos de a_A e de a_B.
c) o módulo da tração no fio.

Exercícios propostos

Considere, quando necessário, $g = 10\ m/s^2$.

Conceitos básicos

1 **Fatec-SP** Dadas as afirmações:

I. Um corpo pode permanecer em repouso quando solicitado por forças externas.

II. As forças de ação e reação têm resultante nula, provocando sempre o equilíbrio do corpo em que atuam.

III. A força aplicada sobre um corpo, pela Segunda Lei de Newton, é o produto de sua massa pela aceleração que o corpo possui.

é(são) correta(s):

(a) I e II.
(b) I e III.
(c) II e III.
(d) I.
(e) todas.

2 **UFPR** Os princípios básicos da mecânica foram estabelecidos por Newton e publicados em 1686, sob o título *Princípios matemáticos da filosofia natural*. Com base nesses princípios, é correto afirmar que:

I. a aceleração de um corpo em queda livre depende da massa desse corpo.

II. as forças de ação e reação são forças de mesmo módulo e estão aplicadas em um mesmo corpo.

III. a massa de um corpo é uma propriedade intrínseca desse corpo.

IV. as leis de Newton são válidas somente para referenciais inerciais.

V. quanto maior for a massa de um corpo, maior será a sua inércia.

VI. a Lei da Inércia, que é uma síntese das ideias de Galileu sobre a inércia, afirma que, para manter um corpo em movimento retilíneo uniforme, é necessária a ação de uma força.

3 **UFRJ 2005** Leia atentamente os quadrinhos a seguir.

Garfield, Jim Davis © 1994 Paws, Inc. All Rights Reserved / Dist. Universal Uclick.

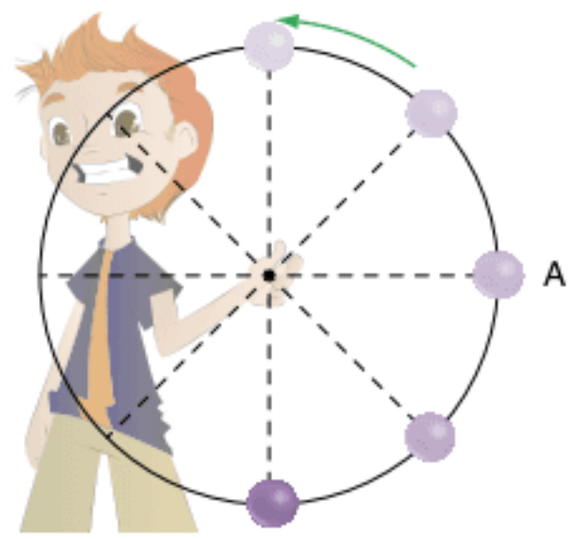
A solução pensada pelo gato Garfield para atender à ordem recebida de seu dono está fisicamente correta? Justifique sua resposta.

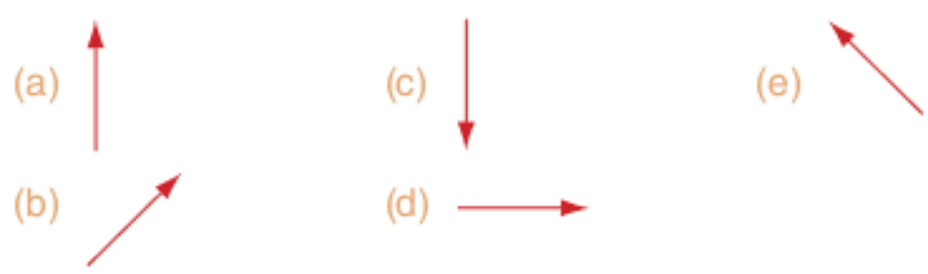
4 **UFC 2005** Dois corpos, A e B, de massas m e 2m, respectivamente, encontram-se num determinado instante separados por uma distância d em uma região do espaço, em que a interação ocorre apenas entre eles. Considere F_A o módulo da força que o corpo A faz sobre o corpo B e F_B o módulo da força que B exerce sobre A. Assinale, dentre as alternativas a seguir, a correta.

(a) $F_A = \frac{F_B}{d^2}$
(b) $F_A = \frac{F_B}{d}$
(c) $F_A = 2F_B$
(d) $F_A = F_B$
(e) $F_A = \frac{F_B}{2}$

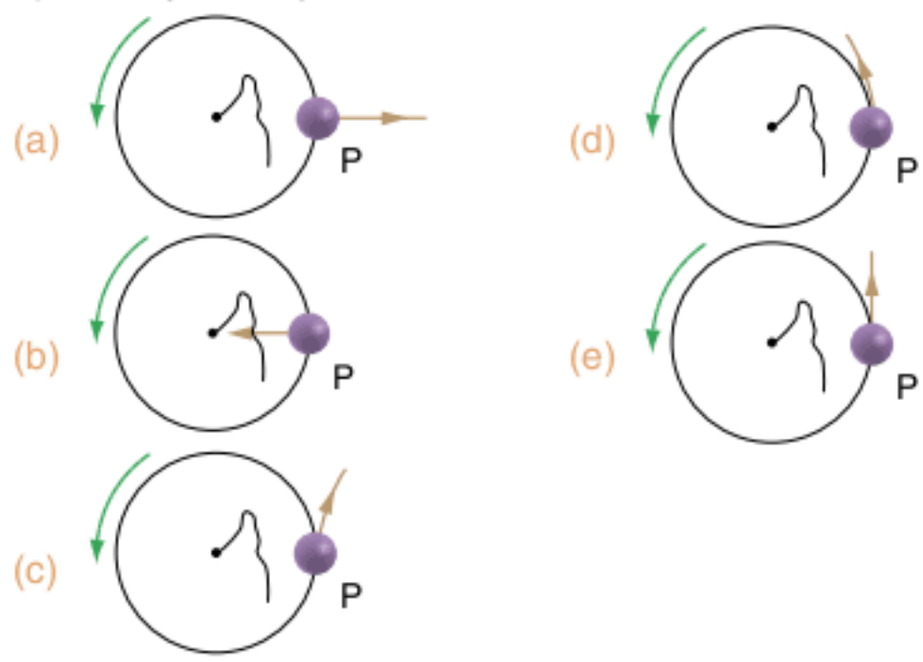
5 **Cesgranrio** Um garoto mantém uma pequena esfera girando em um plano vertical, por intermédio de um fio, conforme indica a figura a seguir. Em determinado momento, quando a esfera passa pelo ponto A, o fio se rompe.

a) Assinale a opção que representa corretamente a força resultante que age sobre a esfera imediatamente após o fio se romper.





b) A trajetória que a bolinha então descreve é:



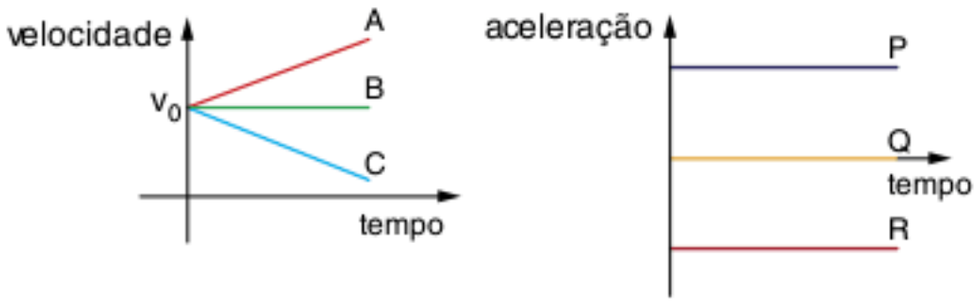
6 **Vunesp** As figuras I e II adiante representam:

I. forças atuando sobre uma partícula de massa m, com velocidade inicial $v_0 > 0$, que pode se deslocar ao longo de um eixo x, em três situações diferentes.

II. gráficos de velocidade e aceleração em função do tempo, associados aos movimentos da partícula.

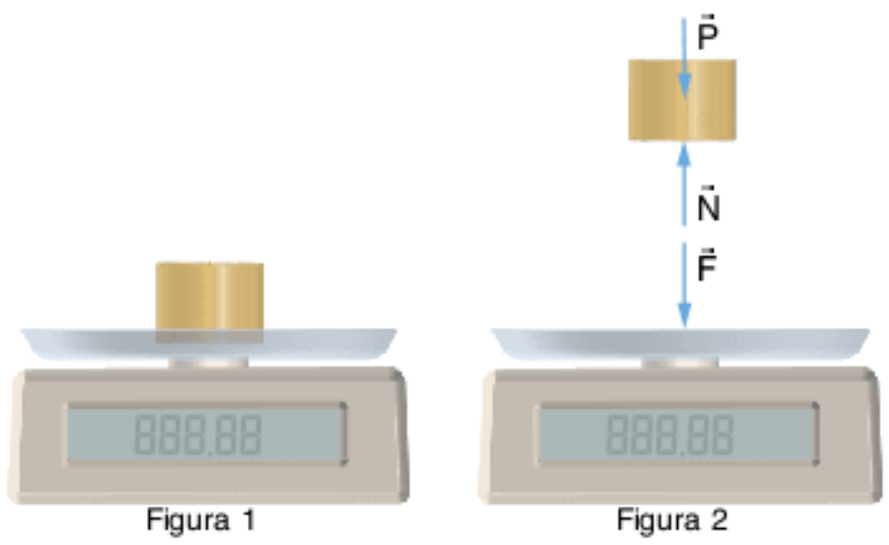
Figura I

Figura II



Para cada uma das três situações representadas na figura I, indique o correspondente gráfico de velocidade (A, B ou C) e de aceleração (P, Q ou R) da partícula.

7 **Cesgranrio** Um corpo se encontra em equilíbrio sobre o prato de uma balança, em repouso no laboratório (Fig. 1). Na figura 2, estão representadas as forças que atuam sobre o corpo ($\vec{P}$ e $\vec{N}$), bem como a força exercida pelo corpo sobre o prato ($\vec{F}$).



	As condições de equilíbrio implicam	A Terceira Lei de Newton implica
(a)	$\lvert\vec{F}\rvert=\lvert\vec{N}\rvert$	$\lvert\vec{N}\rvert=\lvert\vec{P}\rvert$
(b)	$\lvert\vec{P}\rvert=\lvert\vec{N}\rvert$	$\lvert\vec{N}\rvert=\lvert\vec{F}\rvert$
(c)	$\lvert\vec{P}\rvert=\lvert\vec{N}\rvert$	$\lvert\vec{P}\rvert=\lvert\vec{F}\rvert$
(d)	$\lvert\vec{P}\rvert=\lvert\vec{F}\rvert$	$\lvert\vec{P}\rvert=\lvert\vec{N}\rvert$
(e)	$\lvert\vec{P}\rvert=\lvert\vec{F}\rvert$	$\lvert\vec{F}\rvert=\lvert\vec{N}\rvert$

8 **UFSC 2008** No livro *Viagem ao céu*, Monteiro Lobato afirma que quando jogamos uma laranja para cima, ela sobe enquanto a força que produziu o movimento é maior que a força da gravidade. Quando a força da gravidade se torna maior, a laranja cai. Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

01 Realmente, na subida, após ser lançada pela mão de alguém, haverá uma força maior do que o peso para cima, de modo a conduzir a laranja até uma altura máxima.

02 Quando a laranja atinge sua altura máxima, a velocidade é nula e todas as forças também se anulam.

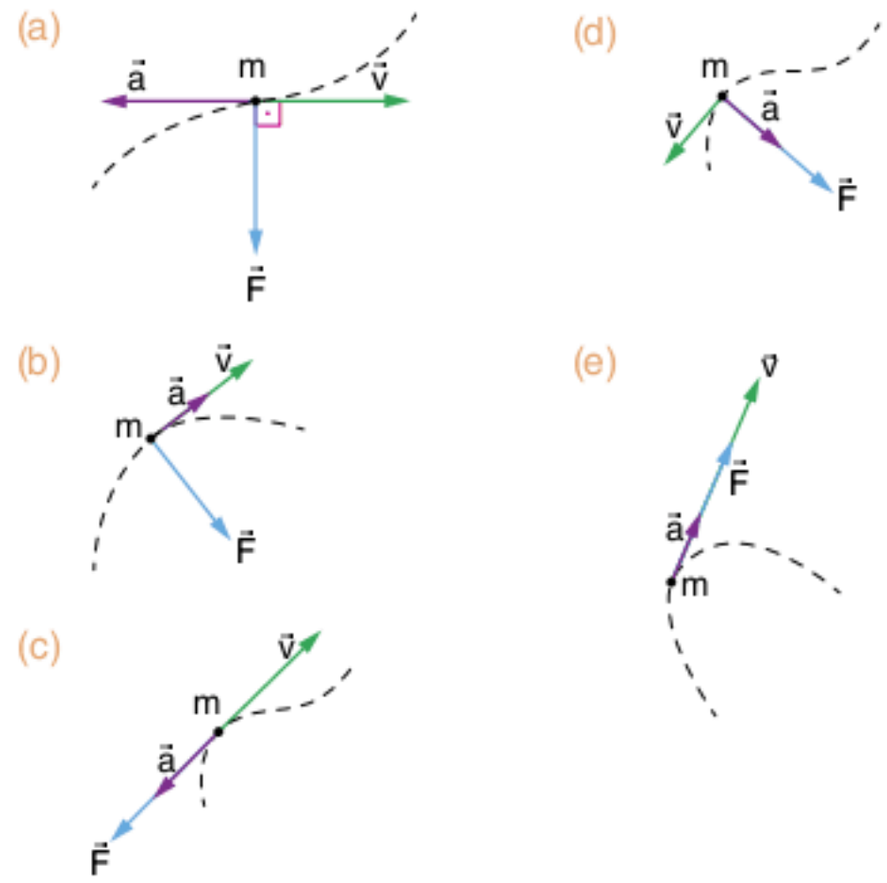
04 Supondo nula a resistência do ar, após a laranja ser lançada para cima, somente a força peso atuará sobre ela.

08 Para que a laranja cesse sua subida e inicie sua descida, é necessário que a força da gravidade seja maior que a mencionada força para cima.

16 Supondo nula a resistência do ar, a aceleração da laranja independe de sua massa.

Soma = ☐

9 **ITA** Seja $\vec{F}$ a resultante das forças aplicadas a uma partícula de massa m, velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$. Se a partícula descrever uma trajetória plana, indicada pela curva tracejada em cada um dos esquemas a seguir, segue-se que aquele que relaciona corretamente os vetores coplanares $\vec{v}$, $\vec{a}$ e $\vec{F}$ é:



10 **UFPB 2010** Um avião é autorizado a decolar, mas a aeromoça se esquece de travar as rodas do carrinho de alimentos que se encontra no corredor, na parte da frente do avião. Admita que as rodas desse carrinho estão bem polidas, de modo que o atrito entre elas e o piso do avião seja desprezível. Três observadores, localizados nos pontos especificados a seguir, fazem considerações acerca do movimento do carrinho enquanto o avião acelera para decolar.

- O primeiro observador está parado na pista, ao lado do avião.
- O segundo observador está sentado em uma poltrona, no interior do avião, com o cinto de segurança afivelado.
- O terceiro observador está na pista, deslocando-se em linha reta e paralelamente ao avião, com velocidade constante em relação ao primeiro observador.

Nesse contexto, identifique as afirmativas corretas.

I. O primeiro observador, fundamentado pela Lei da Inércia, deduz que o carrinho não entra em movimento.

II. O segundo observador constata que o carrinho adquire um movimento; entretanto, ele não pode aplicar as leis de Newton para explicar esse movimento.

III. O terceiro observador afirma que esse carrinho está se deslocando com velocidade constante.

IV. O primeiro observador pode ser considerado como um sistema de referência inercial para descrever o movimento do carrinho.

V. O segundo e o terceiro observadores não podem ser considerados como sistemas de referência inerciais.

11 **Fuvest 2010** Um avião, com velocidade constante e horizontal, voando em meio a uma tempestade, repentinamente perde altitude, sendo tragado para baixo e permanecendo com aceleração constante vertical de módulo a > g, em relação ao solo, durante um intervalo de tempo Δt. Pode-se afirmar que, durante esse período, uma bola de futebol que se encontrava solta sobre uma poltrona desocupada:

(a) permanecerá sobre a poltrona, sem alteração de sua posição inicial.
(b) flutuará no espaço interior do avião, sem aceleração em relação ao mesmo, durante o intervalo de tempo Δt.
(c) será acelerada para cima, em relação ao avião, sem poder se chocar com o teto, independentemente do intervalo de tempo Δt.
(d) será acelerada para cima, em relação ao avião, podendo se chocar com o teto, dependendo do intervalo de tempo Δt.
(e) será pressionada contra a poltrona durante o intervalo de tempo Δt.

12 **UFF** Um fazendeiro possui dois cavalos igualmente fortes. Ao prender qualquer um dos cavalos com uma corda a um muro (Figura 1), observa que o animal, por mais que se esforce, não consegue arrebentá-la. Ele prende, em seguida, um cavalo ao outro, com a mesma corda. A partir de então, os dois cavalos passam a puxar a corda (Figura 2) tão esforçadamente quanto antes.

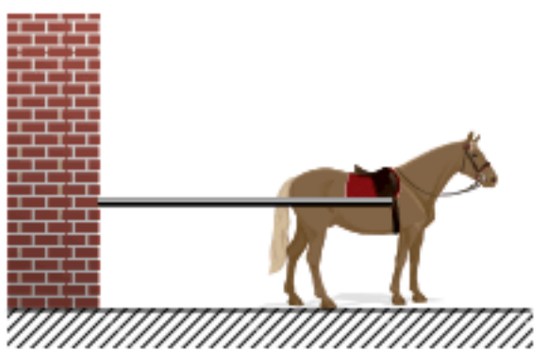


Figura 1

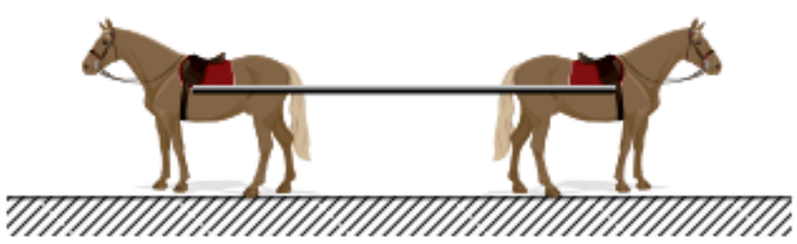


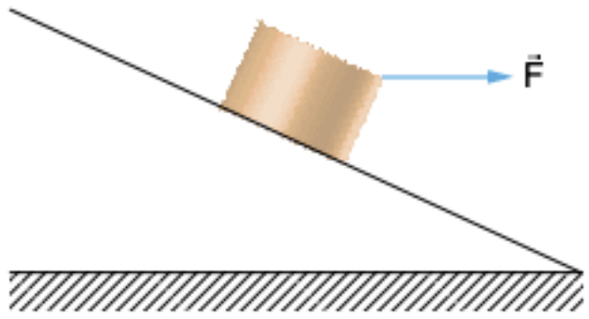
Figura 2

A respeito da situação ilustrada pela figura 2, é correto afirmar que:

(a) a corda arrebenta, pois não é tão resistente para segurar dois cavalos.
(b) a corda pode arrebentar, pois os dois cavalos podem gerar, nessa corda, tensões até duas vezes maiores que as da situação da figura 1.
(c) a corda não arrebenta, pois a resultante das forças exercidas pelos cavalos sobre ela é nula.
(d) a corda não arrebenta, pois não está submetida a tensões maiores que na situação da figura 1.
(e) não se pode saber se a corda arrebenta ou não, pois nada se disse sobre sua resistência.

Estática

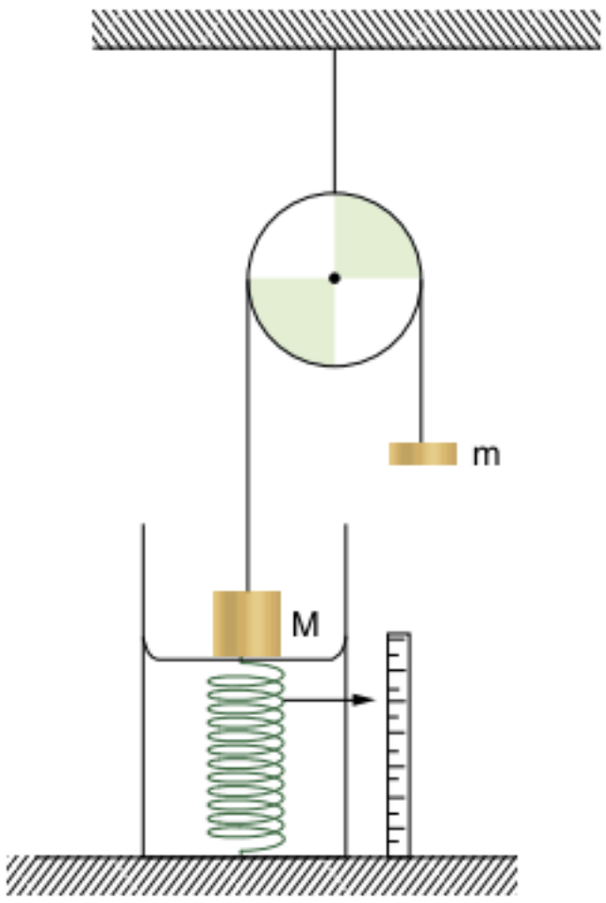
13 **Cesgranrio** Um bloco permanece em repouso sobre um plano inclinado, muito embora lhe apliquemos uma força $\vec{F}$, horizontal, conforme ilustra a figura adiante.



Assim, a resultante de todas as forças que agem sobre esse bloco, excetuando-se $\vec{F}$, será corretamente representada pelo vetor:

(a)
(b)
(c)
(d)
(e) nulo.

14 **UFPE 2004** Dois objetos de massas M e m são ligados por um fio fino e inextensível, que passa através de uma roldana também ideal. Quando o objeto de massa M repousa sobre uma balança de mola, como mostra a figura seguinte, esta registra uma leitura igual a 0,4 kgf.



Se M = 0,5 kg, qual o valor da massa m?

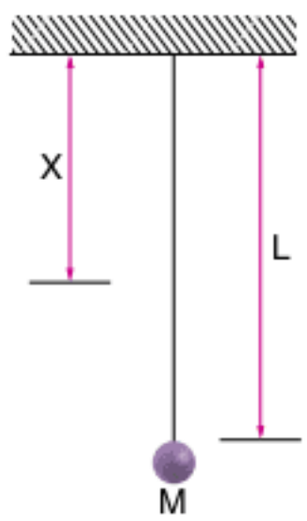
(a) 0,1 kg
(b) 0,2 kg
(c) 0,3 kg
(d) 0,4 kg
(e) 0,5 kg

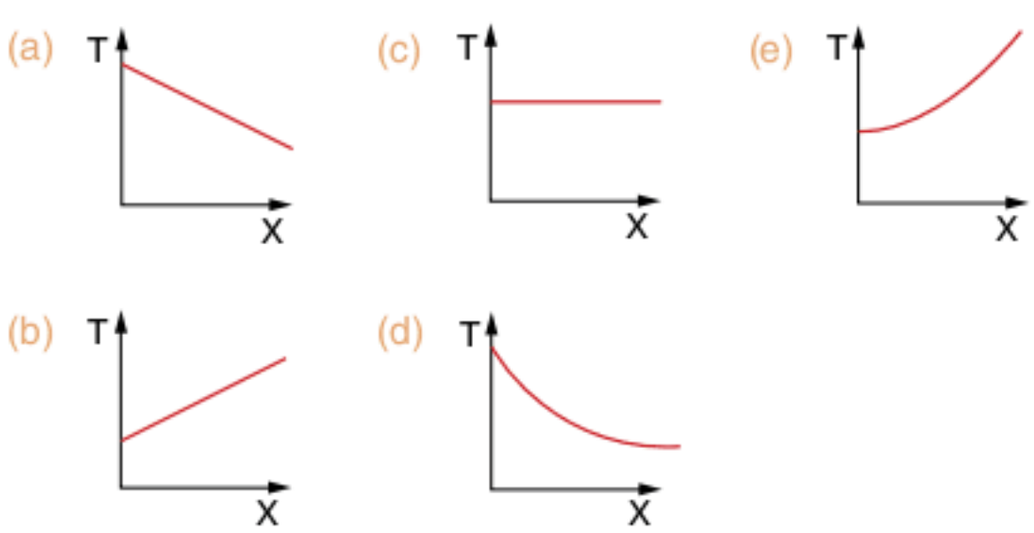
15 **UFRJ** Uma pessoa idosa, de 68 kg, ao se pesar, o faz apoiada em sua bengala, como mostra a figura.

Com a pessoa em repouso, a leitura da balança é 650 N. Considere $g = 10\ m/s^2$.

a) Supondo que a força exercida pela bengala sobre a pessoa seja vertical, calcule o seu módulo e determine o seu sentido.
b) Calcule o módulo da força que a balança exerce sobre a pessoa e determine a sua direção e o seu sentido.

16 **UFC 2004** Um bloco de massa M encontra-se suspenso e preso ao teto por meio de um fio de aço de comprimento L e densidade uniforme. Indique, dentre as alternativas a seguir, o gráfico que melhor representa a variação da tensão T com a distância X entre o teto e um ponto qualquer do fio.

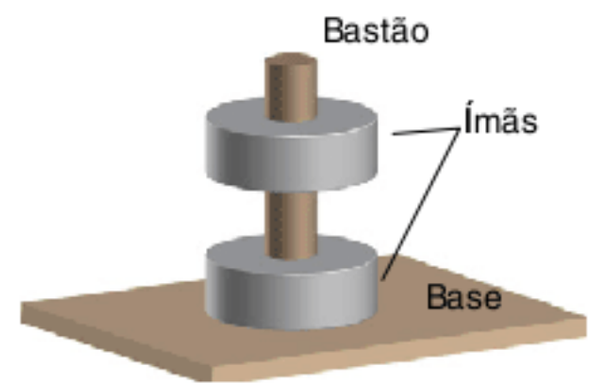




17 **Fuvest** Um fio de massa desprezível está preso verticalmente por uma de suas extremidades a um suporte. A tração máxima que o fio suporta, sem se romper, é de 5,80 N. Penduraram-se sucessivamente objetos de 50 g cada, separados uns dos outros por uma distância de 10 cm, até o fio se romper. Considere $g = 10\ m/s^2$.

a) Quantos objetos foram pendurados?
b) Onde o fio se rompeu?

18 **UFMG** Na figura, dois ímãs iguais, em forma de anel, são atravessados por um bastão que está preso em uma base. O bastão e a base são de madeira. Considere que os ímãs se encontram em equilíbrio e que o atrito entre eles e o bastão é desprezível.

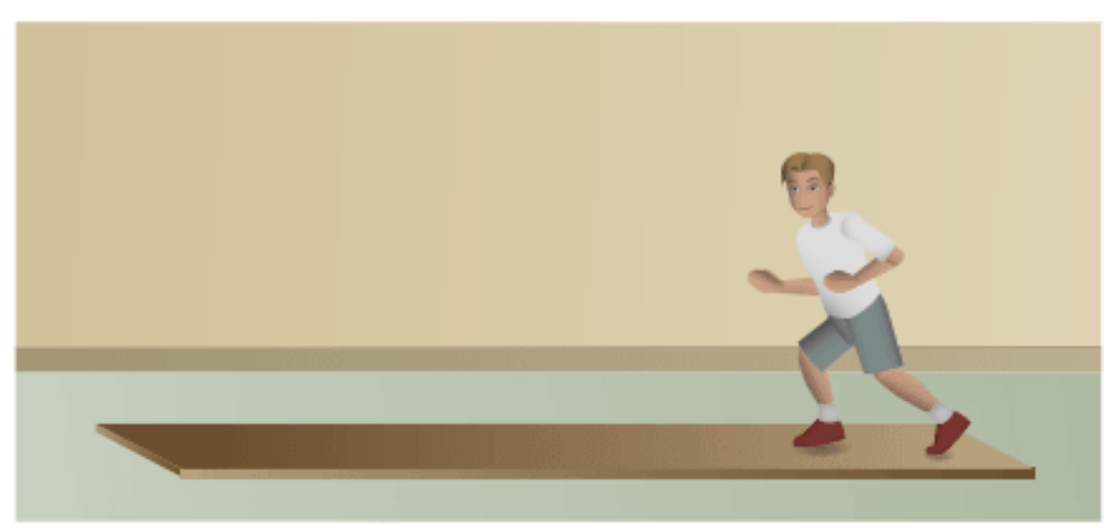


Nessas condições, o módulo da força que a base exerce sobre o ímã de baixo é:

(a) igual ao peso desse ímã.
(b) nulo.
(c) igual a duas vezes o peso desse ímã.
(d) maior que o peso desse ímã e menor que o dobro do seu peso.

Aplicações básicas da 2ª e 3ª Leis de Newton

19 **UFRJ 2010** Um menino de 40 kg de massa corre em movimento retilíneo horizontal em cima de uma prancha de 8,0 kg de massa, que desliza sobre um piso horizontal, conforme indica a figura. Não há qualquer atrito entre a prancha e o piso, embora haja atrito entre o menino e a prancha. O movimento do menino ocorre com aceleração constante de módulo $0{,}20\ m/s^2$ e sentido para a esquerda, em relação ao piso.



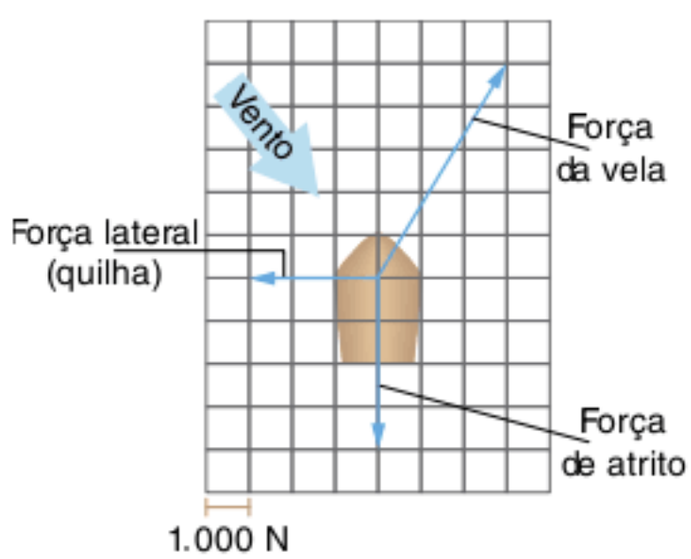
a) Indique o sentido da componente horizontal da força que a prancha exerce sobre o menino e calcule seu módulo.
b) Indique o sentido da aceleração da prancha relativa ao piso e calcule seu módulo.

20 **UEL** Sob a ação exclusiva de duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de mesma direção, um corpo de 6,0 kg de massa adquire aceleração de módulo igual a $4{,}0\ m/s^2$. Se o módulo de $\vec{F}_1$ vale 20 N, o módulo de $\vec{F}_2$, em newtons, só pode valer:

(a) 0
(b) 4
(c) 40
(d) 44
(e) 4 ou 44

21 **UFSC** Sejam dois corpos com massas desconhecidas, m_1 e m_2. Uma força imprime à massa m_1 uma aceleração de 5 m/s² e à massa m_2 uma aceleração igual a 20 m/s². Se a mesma força atuar, agora, sobre os dois corpos reunidos, qual será a aceleração do conjunto?

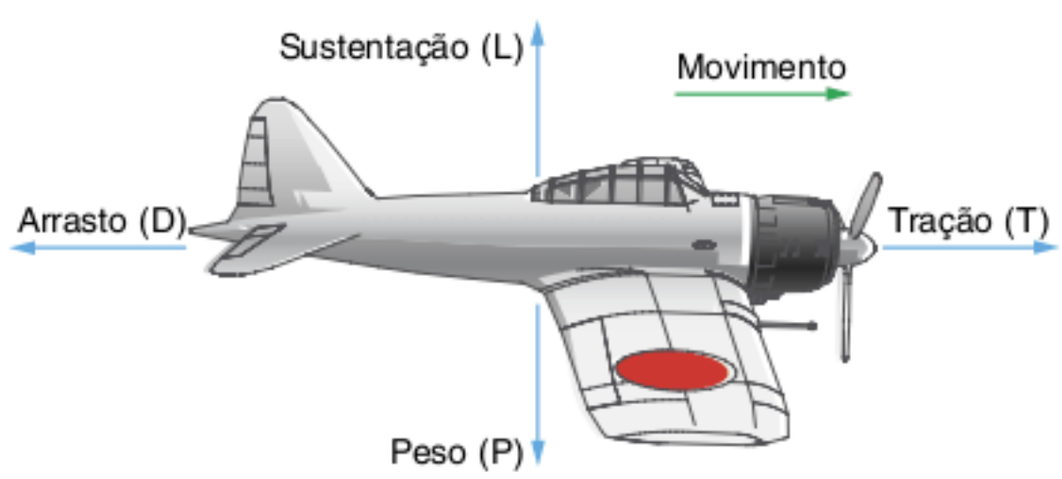
22 **Unicamp** Na viagem do descobrimento, a frota de Cabral precisou navegar contra o vento uma boa parte do tempo. Isso só foi possível graças à tecnologia de transportes marítimos mais moderna da época: as caravelas. Nelas, o perfil das velas é tal que a direção do movimento pode formar um ângulo agudo com a direção do vento, como indicado pelo diagrama de forças a seguir:



Considere uma caravela com massa de 20.000 kg.

a) Utilizando a régua, reproduza o diagrama de forças e determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante.
b) Calcule a aceleração da caravela.

23 A figura a seguir mostra as forças que atuam em um aeromodelo.



Se P = 8 N, T = 5 N e D = 6 N, determine:

a) a sustentação para que o aeromodelo esteja descrevendo uma trajetória horizontal.
b) a intensidade, a direção e o sentido da resultante dessas forças.
c) se a velocidade do aeromodelo está aumentando, diminuindo ou é constante.

Cinemática

24 **UFMG** Submete-se um corpo de massa 5.000 kg à ação de uma força constante que, a partir do repouso, imprime-lhe a velocidade de 72 km/h, ao fim de 40 s. Determine:

a) a intensidade da força.
b) o espaço percorrido nos 40 s.

25 **PUC-MG** A respeito das leis de Newton, são feitas três afirmativas.

I. A força resultante necessária para acelerar, uniformemente, um corpo de massa 4,0 kg, de 10 m/s para 20 m/s, em uma trajetória retilínea, em 5,0 s, tem módulo igual a 8,0 N.
II. Quando uma pessoa empurra uma mesa e esta não se move, podemos concluir que a força de ação é anulada pela força de reação.
III. Durante uma viagem espacial, podem-se desligar os foguetes da nave que ela continua a se mover. Esse fato pode ser explicado pela Primeira Lei de Newton.

Assinale:

(a) se todas as afirmativas estiverem corretas.
(b) se todas as afirmativas estiverem incorretas.
(c) se apenas as afirmativas I e II estiverem corretas.
(d) se apenas as afirmativas I e III estiverem corretas.
(e) se apenas as afirmativas II e III estiverem corretas.

26 **UFRJ** Um motorista dirige seu automóvel com velocidade de 90 km/h quando percebe um sinal de trânsito fechado. Neste instante, o automóvel está a 100 m do sinal. O motorista aplica imediatamente os freios, impondo ao carro uma desaceleração constante de 2,5 m/s² até que este atinja o repouso.

a) O automóvel para antes do sinal ou após ultrapassá-lo? Justifique sua resposta.
b) Se a massa do automóvel é igual a 720 kg e a do motorista é igual a 80 kg, calcule o módulo da resultante das forças que atuam sobre o conjunto automóvel-motorista, supondo que o motorista esteja solidário com o automóvel.

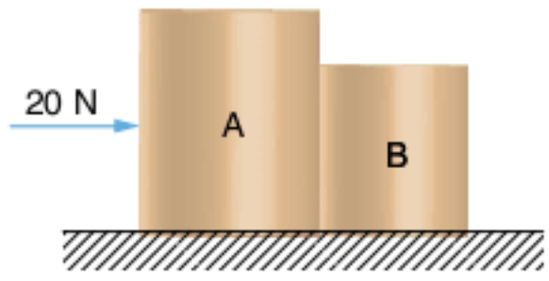
27 **UFPE 2002** Uma partícula de massa m = 2,0 kg move-se, a partir do repouso, sobre uma superfície horizontal sem atrito, sob a ação de uma força constante, cujas componentes nas direções x e y são, respectivamente, F_x = 40 N e F_y = 30 N. As direções x e y são definidas sobre a superfície horizontal. Calcule o módulo da velocidade da partícula, em m/s, decorridos 3,0 s.

28 **Mackenzie** Um corpo em repouso e de 1,0 t de massa é submetido a uma resultante de forças, com direção constante, cuja intensidade varia em função do tempo (t) segundo a função F = 200.t, no sistema MKS, a partir do instante zero. A velocidade escalar desse corpo, no instante t = 10 s, vale:

(a) 3,6 km/h
(b) 7,2 km/h
(c) 36 km/h
(d) 72 km/h
(e) 90 km/h

Movimento horizontal

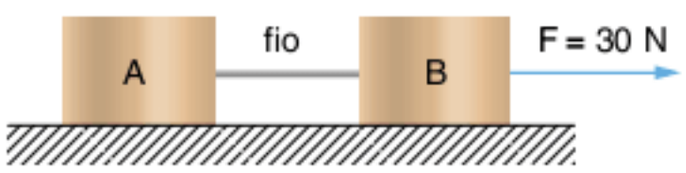
29 **USC-RS** Uma força de 20 N atua sobre o bloco A. Os blocos A e B têm massas m_A = 3 kg e m_B = 1 kg, como mostra a figura a seguir.



Se a superfície sobre a qual desliza o conjunto é horizontal e sem atrito, determine:

a) a aceleração do conjunto.
b) a intensidade da força resultante sobre o bloco A.
c) a força resultante sobre B.

30 **UFRGS** Dois blocos, A e B, de massas $m_A = 5$ kg e $m_B = 10$ kg, são colocados sobre uma superfície plana horizontal (o atrito entre os blocos e a superfície é nulo) e ligados por um fio inextensível e com massa desprezível (conforme a figura a seguir).



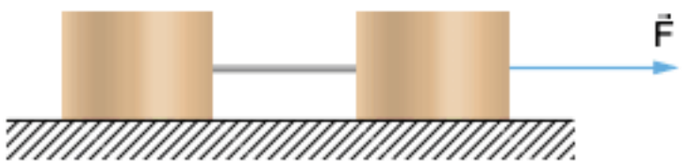
Nessa situação, a aceleração do sistema e a tração no fio valem, respectivamente:

(a) 2 m/s² e 30 N
(b) 2 m/s² e 20 N
(c) 3 m/s² e 5 N
(d) 3 m/s² e 10 N
(e) 2 m/s² e 10 N

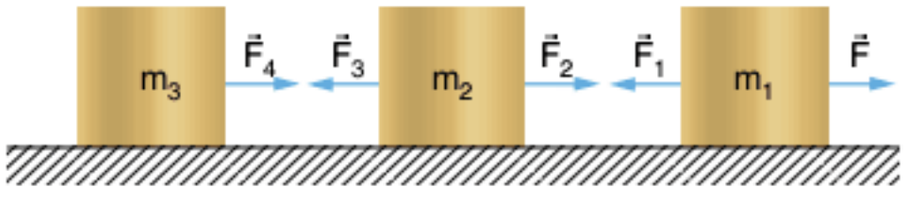
31 **UFRJ 2007** Um sistema é constituído por um barco de 100 kg, uma pessoa de 58 kg e um pacote de 2,0 kg que ela carrega consigo. O barco é puxado por uma corda, de modo que a força resultante sobre o sistema seja constante, horizontal e de módulo 240 newtons.

Supondo que não haja movimento relativo entre as partes do sistema, calcule o módulo da força horizontal que a pessoa exerce sobre o pacote.

32 **Vunesp-SP** Dois blocos idênticos, unidos por um fio de massa desprezível, jazem sobre uma mesa lisa e horizontal, conforme mostra a figura a seguir. A força máxima a que esse fio pode resistir é 20 N.
Qual o valor máximo da força $\vec{F}$ que se poderá aplicar a um dos blocos, na mesma direção do fio, sem romper o fio?



33 **Vunesp-SP** Uma força $\vec{F}$ arrasta três blocos de massas m_1, m_2 e m_3, ligados por cordas de massas desprezíveis, sobre uma superfície sem atrito, produzindo uma aceleração a no sistema. São escritas várias equações relacionadas com o estudo do movimento desses blocos:



I. $m_1a = F - F_1$
II. $m_2a = F_2 - F_3$
III. $(m_1 + m_2)a = F - F_3$
IV. $m_3a = F_3$
V. $(m_1 + m_2 + m_3)a = F$

Podemos afirmar que:

(a) todas estão corretas.
(b) apenas I e IV estão corretas.
(c) apenas V está correta.
(d) estão corretas somente I, IV e V.
(e) estão corretas somente II, III e IV.

34 **UFRJ 2008** Uma força horizontal de módulo F puxa um bloco sobre uma mesa horizontal com uma aceleração de módulo a, como indica a figura 1.

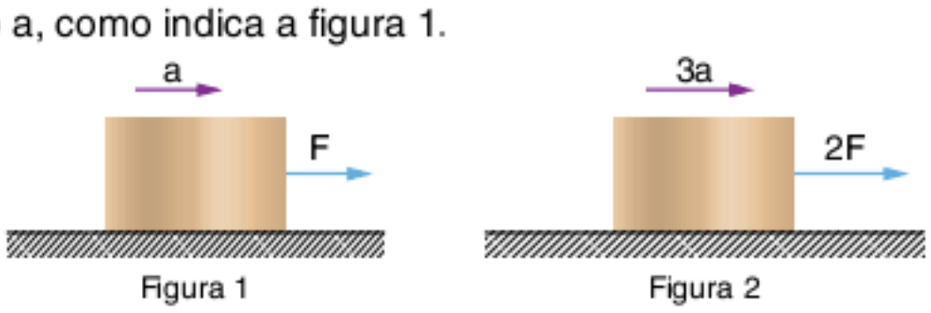
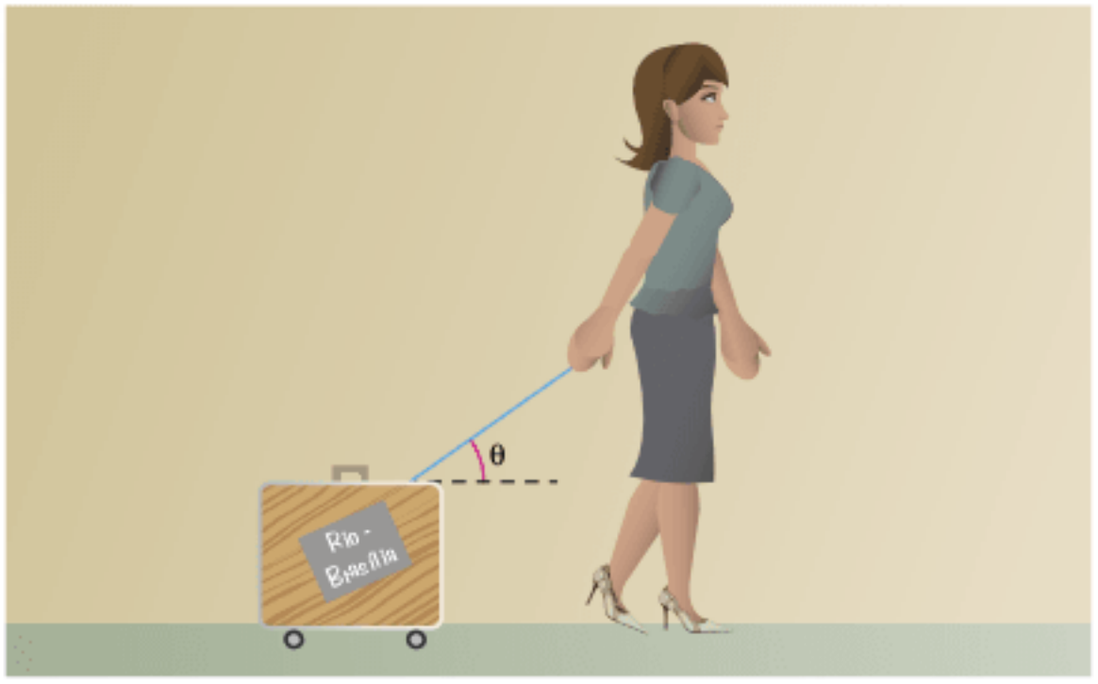


Figura 1 Figura 2

Sabe-se que, se o módulo da força for duplicado, a aceleração terá módulo 3a, como indica a figura 2.
Suponha que, em ambos os casos, a única outra força horizontal que age sobre o bloco seja a força de atrito – de módulo invariável f – que a mesa exerce sobre ele.
Calcule a razão $\frac{f}{F}$ entre o módulo f da força de atrito e o módulo F da força horizontal que puxa o bloco.

35 **UFF 2003** Uma aeromoça, locomovendo-se até o setor de embarque de um aeroporto, transporta sua mala puxando-a por uma alça, que forma um ângulo θ com a horizontal, conforme mostra a figura.

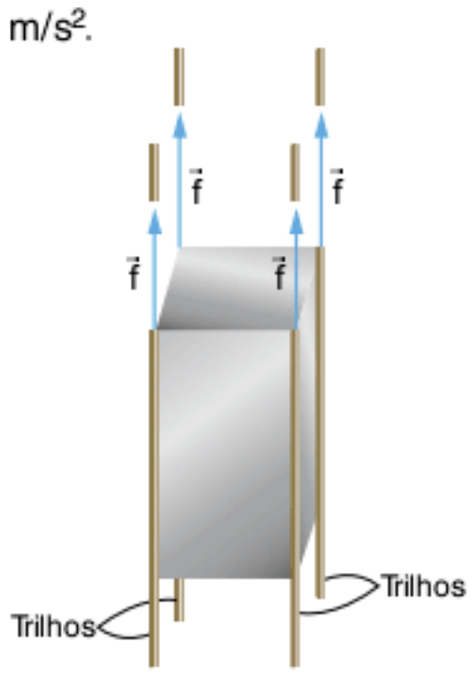


Dados: sen 30° = cos 60° = 0,50; sen 60° = cos 30° = 0,87.
A massa da mala, incluindo a bagagem interna, é de 12 kg e, para puxá-la ao longo do trajeto, mantendo a velocidade constante, a aeromoça exerce na mala, ao longo da alça, uma força de 20 N.
Considerando que a força de atrito total entre as rodinhas da mala e o piso é de 10 N e que a aceleração da gravidade é 10 m/s², determine:

a) o valor do ângulo θ.
b) a componente normal da força do piso sobre a mala.

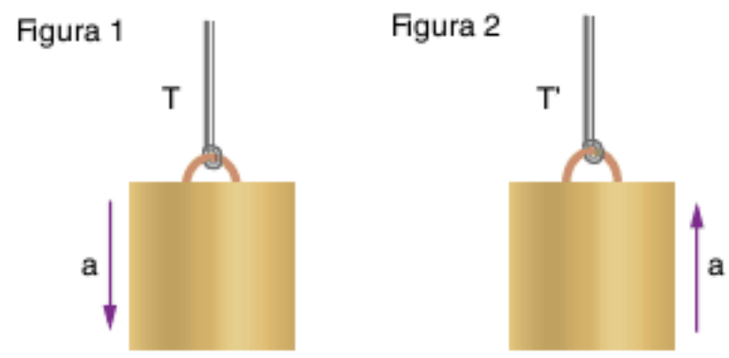
Movimento vertical

36 **UFRJ 2005** Quando o cabo de um elevador se quebra, os freios de emergência são acionados contra trilhos laterais, de modo que esses passem a exercer, sobre o elevador, quatro forças verticais constantes e iguais a f, como indicado na figura. Considere g = 10 m/s².



Suponha que, numa situação como essa, a massa total do elevador seja M = 600 kg e que o módulo de cada força $\vec{f}$ seja $|\vec{f}| = 1.350$ N.
Calcule o módulo da aceleração com que o elevador desce sob a frenagem dessas forças.

37 **UFRJ 2006** Um bloco de massa m é abaixado e levantado por meio de um fio ideal. Inicialmente, o bloco é abaixado com aceleração constante vertical, para baixo, de módulo a (por hipótese, menor do que o módulo g da aceleração da gravidade), como mostra a figura 1.
Em seguida, o bloco é levantado com aceleração constante vertical, para cima, também de módulo a, como mostra a figura 2.
Sejam T a tensão do fio na descida e T' a tensão do fio na subida.



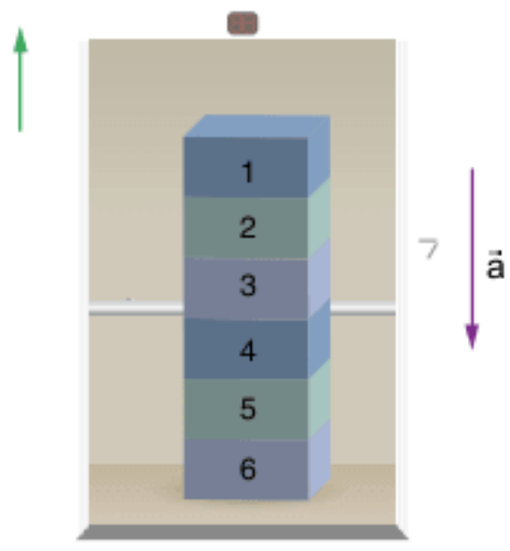
Determine a razão $\frac{T'}{T}$ em função de a e g.

38 **UFMG** Uma pessoa entra num elevador carregando uma caixa pendurada por um barbante frágil, como mostra a figura. O elevador sai do 6° andar e só para no térreo.

É correto afirmar que o barbante poderá arrebentar:

(a) no momento em que o elevador entrar em movimento, no 6° andar.
(b) no momento em que o elevador parar no térreo.
(c) quando o elevador estiver em movimento, entre o 5° e o 2° andar.
(d) somente numa situação em que o elevador estiver subindo.

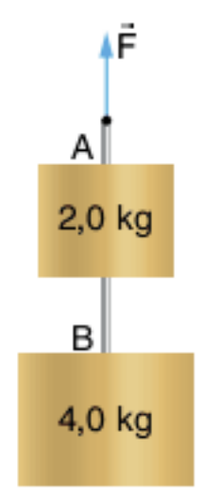
39 **ITA 2000** Uma pilha de seis blocos iguais, de mesma massa m, repousa sobre o piso de um elevador, como mostra a figura a seguir. O elevador está subindo em movimento uniformemente retardado com uma aceleração de módulo a.



O módulo da força que o bloco 3 exerce sobre o bloco 2 é dado por:

(a) 3m(g + a)
(b) 3m(g – a)
(c) 2m(g + a)
(d) 2m(g – a)
(e) m(2g – a)

40 **Vunesp** Dois blocos estão suspensos em um campo gravitacional de intensidade g (10 m/s²) por duas cordas, A e B, de massas desprezíveis, como indica a figura. O bloco superior tem massa igual a 2,0 kg e o inferior 4,0 kg.



Determine as trações em cada corda nos seguintes casos.

a) Os corpos são mantidos em repouso.
b) Os corpos possuem uma aceleração de 2,0 m/s², vertical para cima.
c) Os corpos estão em queda livre.

41 **Uece** Um homem de peso P encontra-se no interior de um elevador. Considere as seguintes situações.

1. O elevador está em repouso, ao nível do solo.
2. O elevador sobe com aceleração uniforme durante alguns segundos.
3. Após esse tempo, o elevador continua a subir, a uma velocidade constante $\vec{v}$.

Analise as afirmativas a seguir.

I. A força $\vec{F}$ que o soalho do elevador exerce nos pés do homem é igual, em módulo, ao peso P vetorial do homem, nas três situações.
II. As situações (1) e (3) são dinamicamente as mesmas: não há aceleração, pois a força resultante é nula.
III. Na situação (2), o homem está acelerado para cima, devendo a força $\vec{F}$ que atua nos seus pés ser maior que o peso, em módulo.

Está(ão) correta(s) somente:

(a) I. (b) II. (c) I e III. (d) II e III.

42 **Uneb** Uma "balança" mede o peso de um homem de 70 kg de massa, no interior de um elevador, cuja velocidade diminui 4 m/s a cada 2 s. Considerando que o elevador está subindo e a aceleração da gravidade é igual a 10 m/s², o peso, em newtons, medido pela "balança", é:

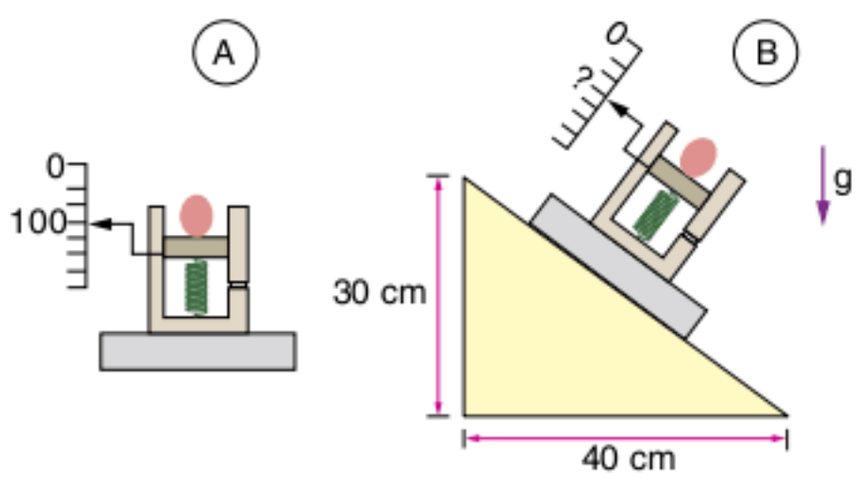
(a) 560 (b) 630 (c) 700 (d) 770 (e) 840

43 **EEM** Num elevador, há uma balança graduada em newtons. Um homem de 60 kg, sobre ela, lê 720 N quando o elevador sobe com certa aceleração e 456 N quando desce com a mesma aceleração.

a) Quais as acelerações da gravidade e do elevador?
b) Quanto registrará a balança se o elevador subir ou descer com velocidade constante?
c) Que deverá ter ocorrido quando a balança registrar zero?

Plano inclinado

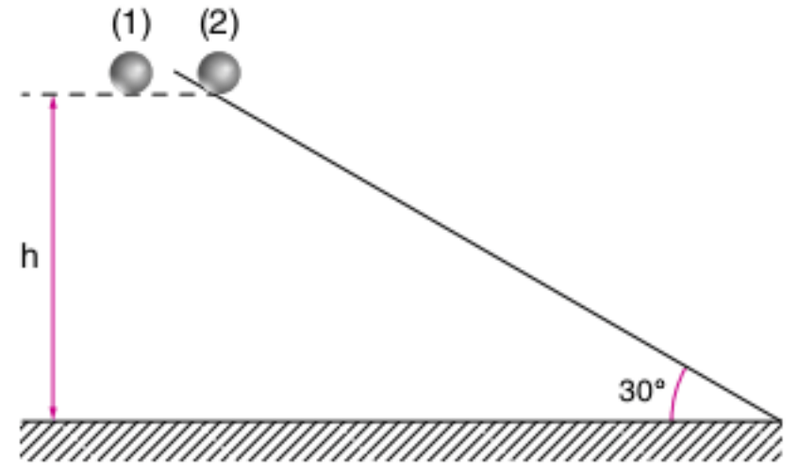
44 **Fuvest 2005** O mostrador de uma balança, quando um objeto é colocado sobre ela, indica 100 N, como esquematizado em A.



Se tal balança estiver desnivelada, como se observa em B, seu mostrador deverá indicar, para esse mesmo objeto, o valor de:

(a) 125 N (b) 120 N (c) 100 N (d) 80 N (e) 75 N

45 **UFRJ** Duas pequenas esferas de aço são abandonadas a uma mesma altura h do solo. A esfera (1) cai verticalmente. A esfera (2) desce uma rampa inclinada de 30° com a horizontal, como mostra a figura a seguir.



Considerando os atritos desprezíveis, calcule a razão $\frac{t_1}{t_2}$ entre os tempos gastos pelas esferas (1) e (2), respectivamente, para chegarem ao solo.

46 **FEI-SP** Um plano inclinado tem 1,8 m de altura e 3 m de comprimento. Um bloco de peso P = 100 N é mantido parado sobre o plano por um obstáculo fixo. Calcule:
Supor g = 10 m/s².

a) a força exercida pelo bloco sobre o plano.
b) a força exercida pelo bloco sobre o obstáculo.
c) a aceleração adquirida pelo bloco quando for retirado o obstáculo.
d) o tempo gasto pelo bloco para atingir a base do plano após ser solto do alto dele.

47 **Mackenzie** As figuras a seguir mostram um corpo de massa 50 kg sobre um plano inclinado sem atrito, que forma um ângulo θ com a horizontal.
Dados: g = 10 m/s²; sen θ = 0,6.

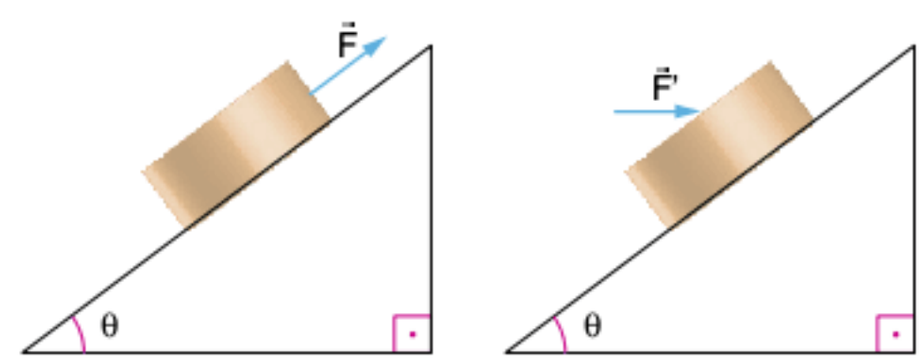


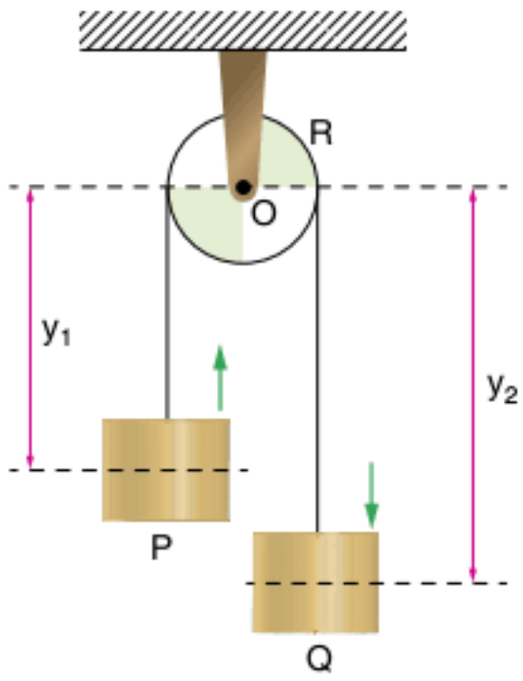
Figura 1 Figura 2

Determine:

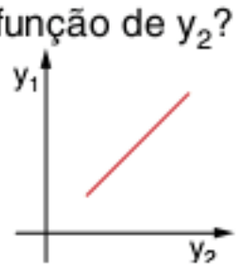
a) a intensidade da força $\vec{F}$ (figura 1) para o corpo subir o plano com velocidade constante.
b) a intensidade da força $\vec{F}$ (figura 1) para o corpo subir o plano com aceleração constante de 2 m/s².
c) a intensidade da força $\vec{F}$ (figura 2) para o corpo descer o plano com velocidade constante.
d) a intensidade da força $\vec{F}$ (figura 2) para o corpo descer o plano com aceleração constante de 2 m/s².

Polia simples – movimento vertical

48 **Cesgranrio** Os dois corpos P e Q são ligados por um fio inextensível que passa por cima da roldana fixa R. Quando o sistema está em movimento, as distâncias y_1 e y_2, mostradas na figura, variam.



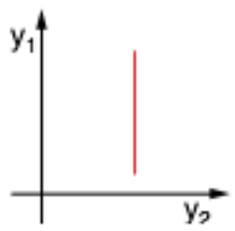
Qual dos gráficos propostos melhor representa como varia y_1 em função de y_2?

(a)


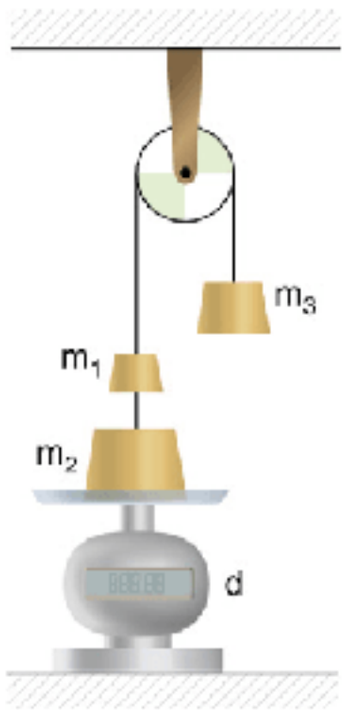
(b)

(c)

(d)

(e)


49 **UFRGS** Três blocos, de massas m_1 = 1 kg, m_2 = 5 kg e m_3 = 3 kg, encontram-se em repouso num arranjo, como o representado na figura. Considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s² e despreze eventuais forças de atrito.



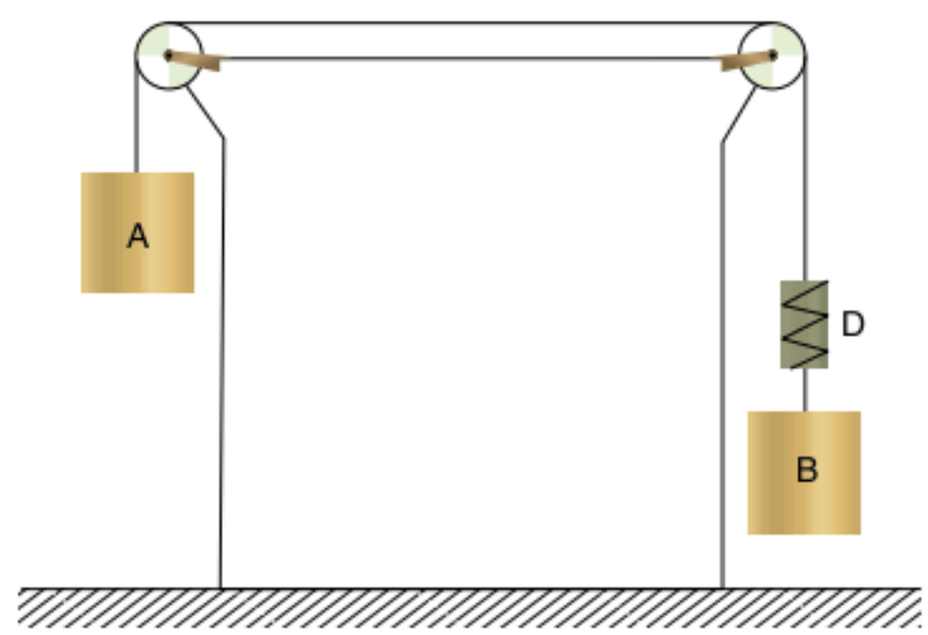
a) Qual é a leitura do dinamômetro d?

(a) 20 N
(b) 30 N
(c) 40 N
(d) 50 N
(e) 60 N

b) Se a corda fosse cortada entre as massas m_1 e m_2, a aceleração do sistema formado pelas massas m_1 e m_3 seria, em m/s²:

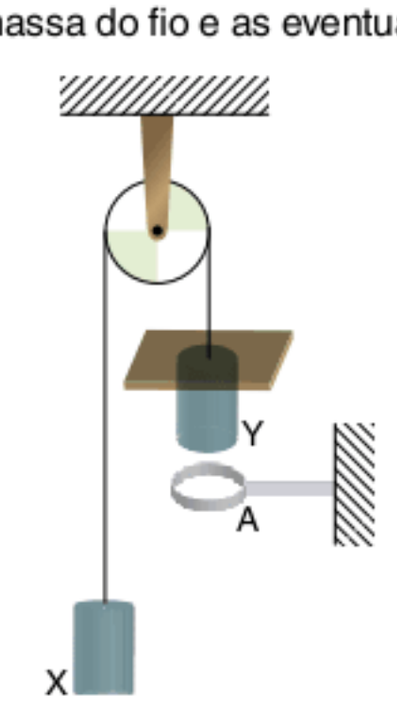
(a) 10
(b) 7,5
(c) 6
(d) 5
(e) 1

50 **Uerj 2008** Os corpos A e B, ligados ao dinamômetro D por fios inextensíveis, deslocam-se em movimento uniformemente acelerado.
Observe a representação desse sistema, posicionado sobre a bancada de um laboratório.



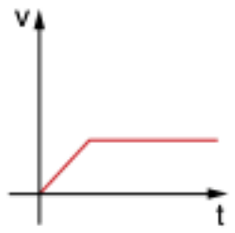
A massa de A é igual a 10 kg e a indicação no dinamômetro é igual a 40 N.
Desprezando qualquer atrito e as massas das roldanas e dos fios, estime a massa de B.

51 **Puccamp** Dois massores cilíndricos idênticos, X e Y, e um contrapeso retangular são posicionados numa polia com a ajuda de um fio como mostra o esquema. Nesse esquema, os corpos são inicialmente mantidos parados e A indica um aro que permite a passagem do massor Y e impede a passagem do contrapeso que está somente associado em Y. Considere desprezíveis a massa da polia, a massa do fio e as eventuais forças de atrito.



No instante t = 0, os corpos são liberados e, enquanto for possível o movimento, o módulo v da velocidade do corpo Y em função do tempo t é mais bem representado pelo gráfico:

(a)

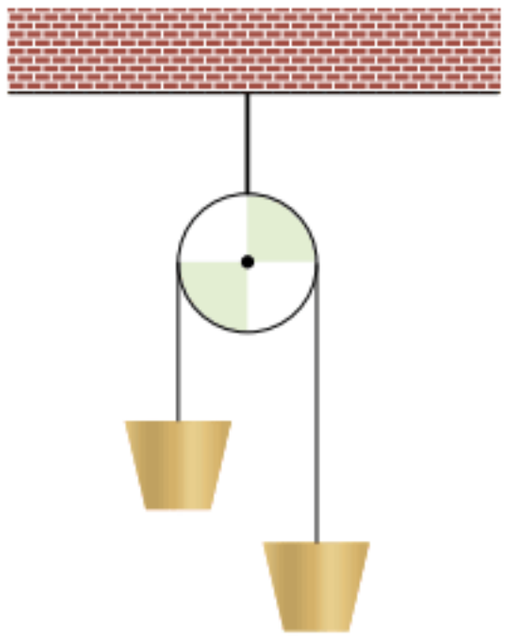
(b)


(c)

(d)

(e)

52 **UFPR 2007** A figura a seguir mostra uma máquina de Atwood formada por dois baldes idênticos e uma polia. Um cabo inextensível acoplado ao teto sustenta o eixo de uma polia, a qual pode girar sem atrito com o eixo. Os dois baldes encontram-se ligados um ao outro por meio de uma corda inextensível que não desliza sobre a polia. Os baldes, a polia, a corda e o cabo têm massas desprezíveis. Considere que tenhamos 10 kg de areia para distribuir entre os dois baldes e despreze a resistência do ar.

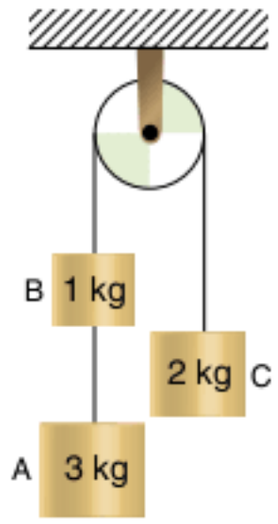


a) Supondo que a areia tenha sido dividida entre os baldes em porções de massas m_1 e m_2 e usando g para o módulo da aceleração da gravidade local, deduza as fórmulas para a aceleração dos baldes e para a tração na corda.

b) Mostre que o módulo da força exercida pelo cabo sobre o teto é dado por $F = \left(\frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)g$.

c) Em qual das seguintes situações a força exercida pelo cabo sobre o teto é menor: 5 kg de areia em cada balde (situação 1) ou 4 kg num deles e 6 kg no outro (situação 2)? Justifique sua resposta utilizando o resultado do item anterior.

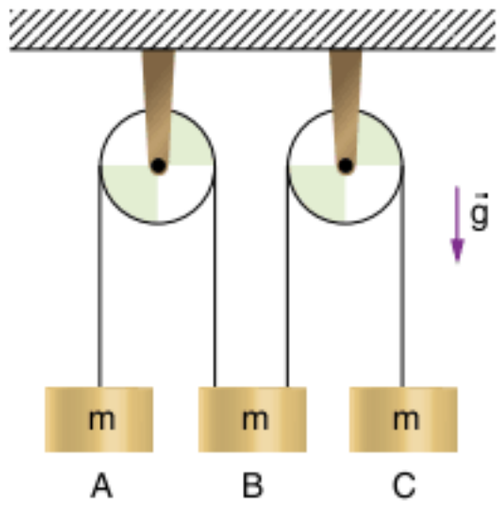
53 **Mackenzie** No conjunto de fios e polias ideais a seguir, os corpos A, B e C encontram-se inicialmente em repouso. Num dado instante, esse conjunto é abandonado e, após 2,0 s, o corpo A se desprende, ficando apenas os corpos B e C interligados.



O tempo gasto para que o novo conjunto pare, a partir do desprendimento do corpo A, é de:

(a) 8,0 s
(b) 7,6 s
(c) 4,8 s
(d) 3,6 s
(e) 2,0 s

54 **Fuvest** Um sistema mecânico é formado por duas polias ideais que suportam três corpos, A, B e C, de mesma massa m, suspensos por fios ideais, como representado na figura. O corpo B está suspenso simultaneamente por dois fios, um ligado a A e outro a C.

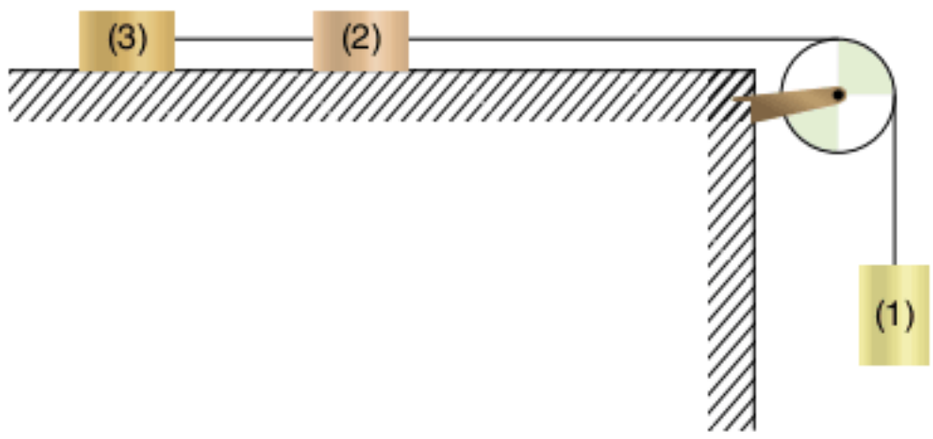


Podemos afirmar que a aceleração do corpo B será:

(a) zero.
(b) $\frac{g}{3}$ para baixo.
(c) $\frac{g}{3}$ para cima.
(d) $\frac{2g}{3}$ para baixo.
(e) $\frac{2g}{3}$ para cima.

Polia simples – movimento vertical e horizontal

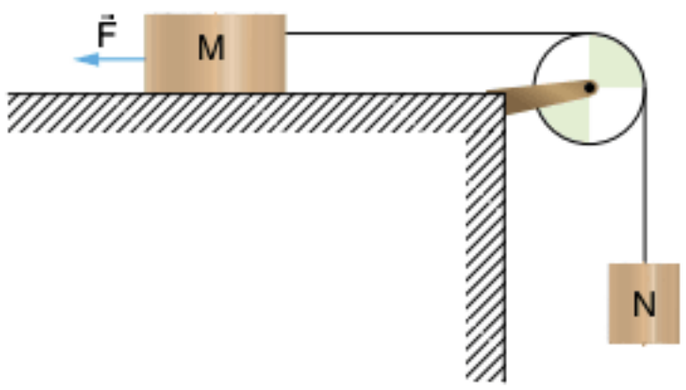
55 **UFRJ 2004** O sistema representado na figura é abandonado sem velocidade inicial. Os três blocos têm massas iguais. Os fios e a roldana são ideais e são desprezíveis os atritos entre os blocos (2) e (3) e a superfície horizontal na qual estão apoiados.



O sistema parte do repouso e o bloco (1) adquire uma aceleração de módulo igual a a. Após alguns instantes, rompe-se o fio que liga os blocos (2) e (3). A partir de então, a aceleração do bloco (1) passa a ter um módulo igual a a'.

Calcule a razão $\frac{a'}{a}$.

56 **Unifor-CE** No sistema representado a seguir, o atrito e a resistência do ar são desprezíveis e a polia e o fio podem ser considerados ideais.

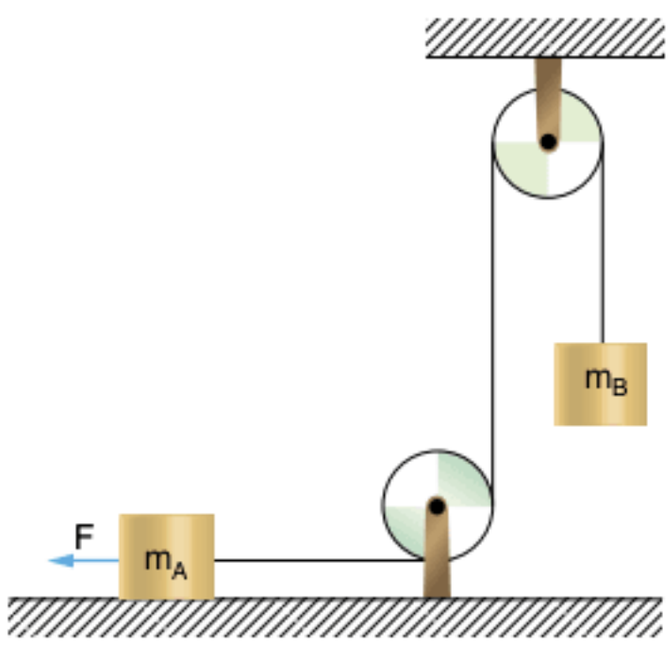


Sabe-se que a intensidade da força $\vec{F}$ vale 60 N, que a massa do corpo M é de 4,0 kg, que a aceleração da gravidade é 10 m/s² e que o corpo N está subindo com velocidade escalar constante. Nessas condições, a massa de N, em kg, vale:

(a) 2,0
(b) 3,0
(c) 4,0
(d) 5,0
(e) 6,0

57 **Aman** No sistema apresentado na figura, não há forças de atrito e o fio tem massa desprezível.

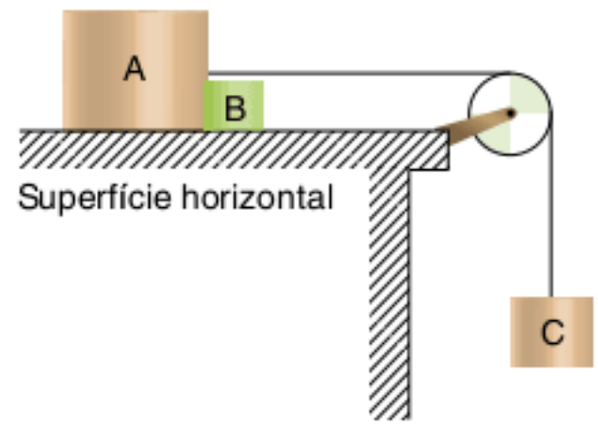
Dados: F = 500 N, m_A = 15 kg, m_B = 10 kg e g = 10 m/s².



A tração no fio e a aceleração do sistema valem, respectivamente:

(a) 200 N; 20,0 m/s²
(b) 100 N; 26,7 m/s²
(c) 240 N; 18,0 m/s²
(d) 420 N; 15,0 m/s²
(e) 260 N; 16,0 m/s²

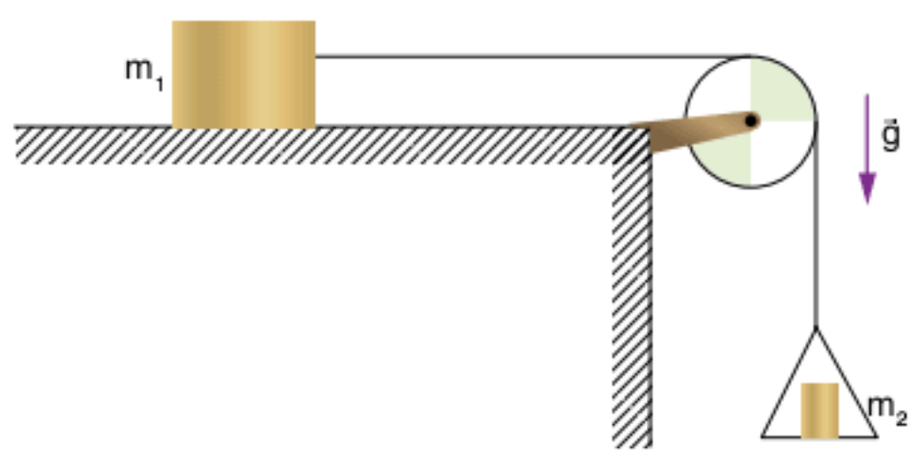
58 **UEL** Três blocos, A, B e C, de massas m_A = 5,0 kg, m_B = 1,0 kg e m_C = 4,0 kg são dispostos conforme o esquema a seguir, num local onde a aceleração da gravidade vale 10 m/s².



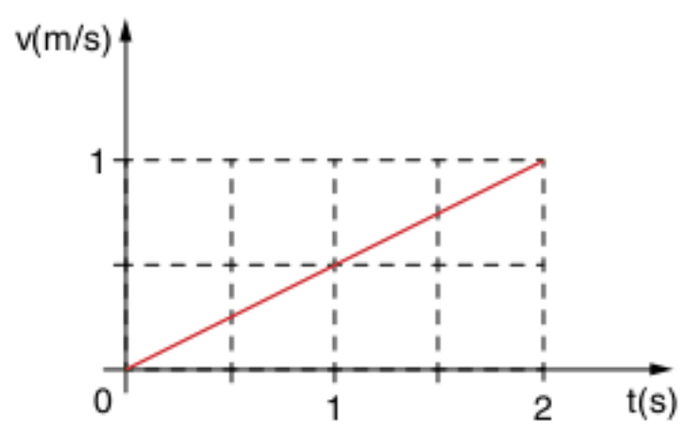
Desprezando os atritos e considerando ideais a polia e o fio, a intensidade da força que A exerce em B vale, em newtons:

(a) 10,0
(b) 6,0
(c) 5,0
(d) 4,0
(e) 1,0

59 **UFG 2003** No arranjo esquematizado na figura a seguir, o corpo de massa m_1 é ligado por um fio inextensível a uma bandeja, passando por uma polia. Sobre a bandeja, há um corpo de massa m_2.



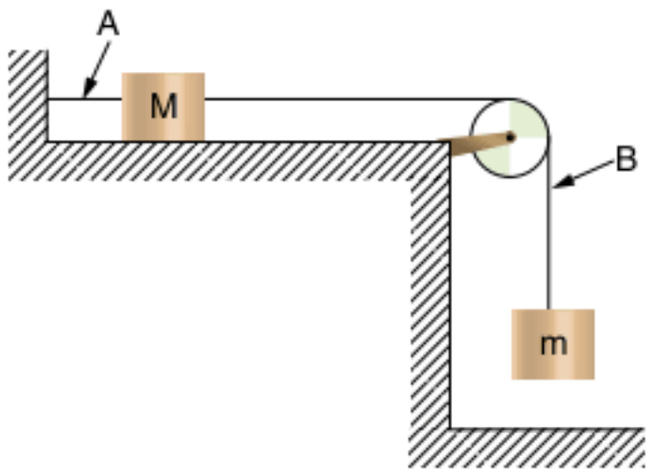
O gráfico da velocidade do corpo de massa m_1, em função do tempo, é:



Despreze as forças de atrito e as massas da bandeja, fio e polia. Considere m_1 = 1,0 kg, g = 10,0 m/s² e determine:

a) a massa m_2.
b) a força que a bandeja exerce sobre o corpo de massa m_2.

60 **Vunesp** Dois blocos de massas M e m, mantidos em repouso por um fio A preso a uma parede e ligados entre si por um outro fio B, leve e inextensível, que passa por uma roldana de massa desprezível, estão dispostos conforme a figura. O bloco de massa M está apoiado sobre uma superfície plana e horizontal, enquanto o de massa m encontra-se suspenso. A roldana pode girar livremente. Considere g = 10 m/s².



Num dado instante, o fio A é cortado e os blocos passam a se mover com aceleração constante a.

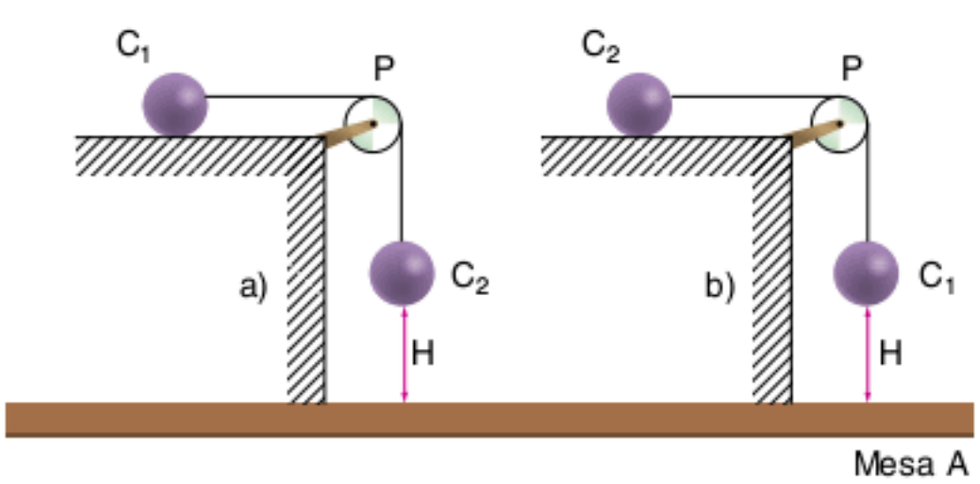
a) A condição mínima para que o sistema entre em movimento após o fio ser cortado é dada por:

(a) m = M
(b) m > M
(c) m < M
(d) m ≠ 0
(e) m = M = 0

Se m = 0,80 kg, determine:

b) a tensão T_0 existente no fio B antes do corte em A ser efetuado.
c) a tensão T_1 no fio B durante o período de aceleração para a = 2,5 m/s².
d) no caso do item c, a massa M.

61 **PUC-SP** No esquema a seguir, A é uma mesa horizontal lisa e P uma polia de massa desprezível, sem atrito. Com dois corpos, C_1 e C_2, de massas, respectivamente, iguais a 20 kg e 80 kg, são realizadas duas experiências:



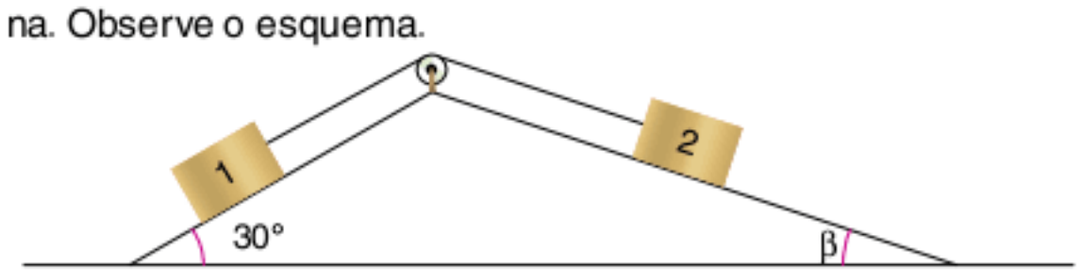
a) C_1 sobre a mesa e C_2 pende do fio.
b) C_2 sobre a mesa e C_1 pende do fio.

Supondo que em ambas o sistema seja abandonado a partir do repouso, a razão $\frac{t_1}{t_2}$ entre os tempos empregados, respectivamente, por C_1 e C_2, para atingir o solo, vale:

(a) $\frac{1}{4}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) 1
(d) 2
(e) 4

Polia simples – plano inclinado

62 **Uerj 2010** Um jovem, utilizando peças de um brinquedo de montar, constrói uma estrutura na qual consegue equilibrar dois corpos, ligados por um fio ideal que passa por uma roldana. Observe o esquema.

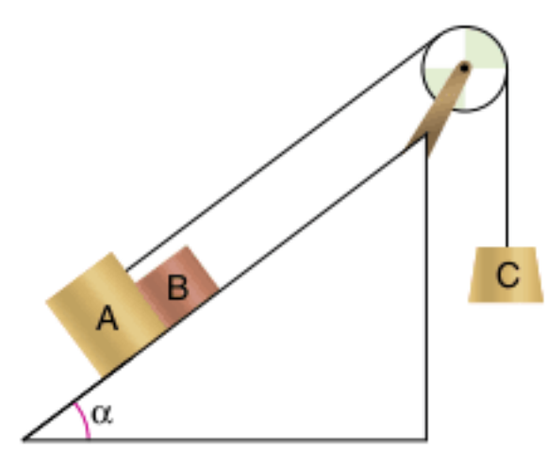


Admita as seguintes informações.

- Os corpos 1 e 2 têm massas, respectivamente, iguais a 0,4 kg e 0,6 kg.
- A massa do fio e os atritos entre os corpos e as superfícies e entre o fio e a roldana são desprezíveis.

Nessa situação, determine o valor do ângulo β.

63 **Mackenzie** Num local onde a aceleração gravitacional tem módulo 10 m/s², dispõe-se o conjunto a seguir, no qual o atrito é desprezível, a polia e o fio são ideais.

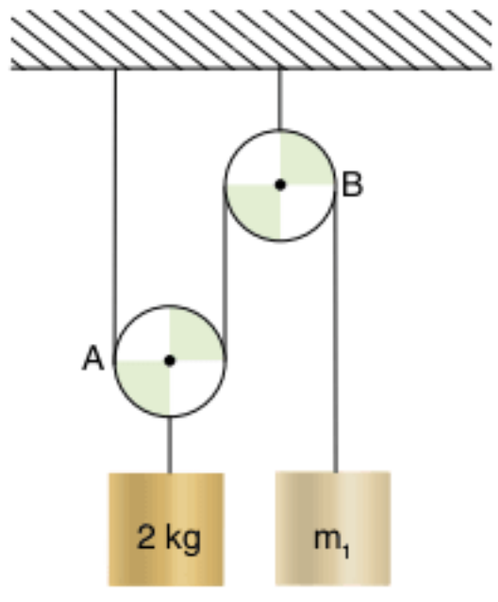


Dados: m_A = 6,0 kg; m_B = 4,0 kg; m_C = 10 kg e cos α = 0,8.
Nessas condições, a intensidade da força que o bloco A exerce no bloco B é:

(a) 20 N
(b) 32 N
(c) 36 N
(d) 72 N
(e) 80 N

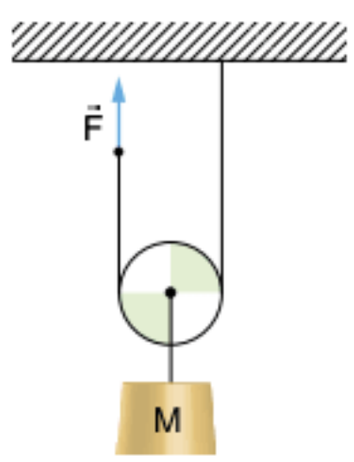
Polia móvel

64 **UFRJ 2002** A figura a seguir mostra um sistema constituído por fios inextensíveis e duas roldanas, todos de massa desprezível.
A roldana A é móvel e a roldana B é fixa.



Calcule o valor da massa m_1 para que o sistema permaneça em equilíbrio estático.

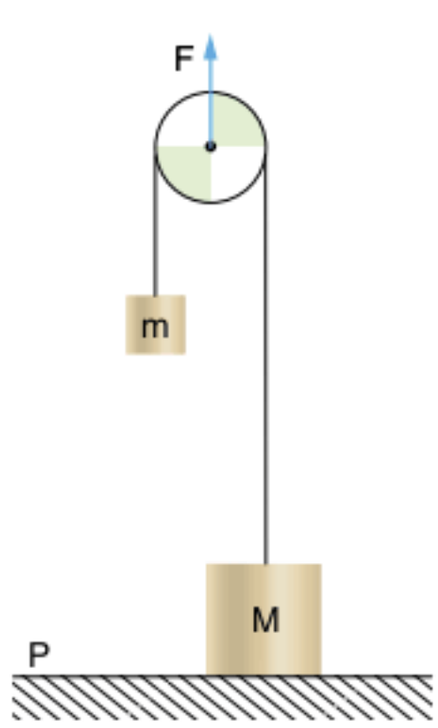
65 **Unifor-CE** O bloco de massa m = 10 kg sobe com aceleração de 2,0 m/s² quando se aplica a força $\vec{F}$ na extremidade da corda de massa desprezível, que passa sem atrito pela polia móvel.



Adotando g = 10 m/s², o módulo de $\vec{F}$ é:

(a) 120 N
(b) 100 N
(c) 80 N
(d) 60 N
(e) 50 N

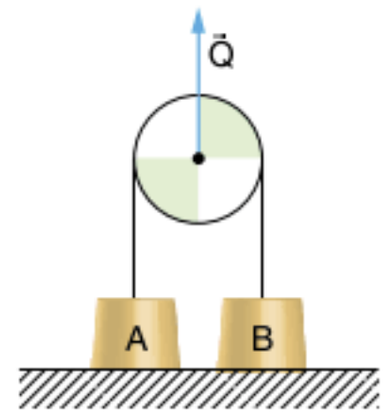
66 **UFC 2003** A figura a seguir mostra dois blocos de massas m = 2,5 kg e M = 6,5 kg, ligados por um fio que passa sem atrito por uma roldana. Despreze as massas do fio e da roldana e suponha que a aceleração da gravidade valha g = 10 m/s². O bloco de massa M está apoiado sobre a plataforma P e a força F aplicada sobre a roldana é suficiente apenas para manter o bloco de massa m em equilíbrio estático na posição indicada.



Sendo F a intensidade dessa força e R a intensidade da força que a plataforma exerce sobre M, é correto afirmar que:

(a) F = 50 N e R = 65 N
(b) F = 25 N e R = 65 N
(c) F = 25 N e R = 40 N
(d) F = 50 N e R = 40 N
(e) F = 90 N e R = 65 N

67 **UFSCar** A polia e os fios da figura são considerados ideais, sem inércia. O fio é perfeitamente flexível e não há atritos a considerar. Considere g = 10 m/s². Dadas as massas m_A = 40 kg e m_B = 24 kg.



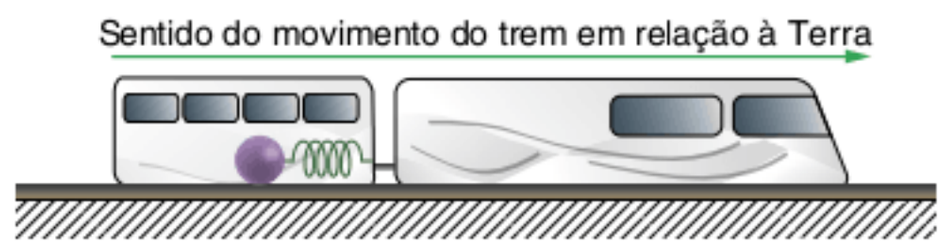
Determine as acelerações α (do corpo A) e β (do corpo B) quando:

a) Q = 400 N.
b) Q = 720 N.
c) Q = 1.200 N.

Molas

68 **UFRJ** Um trem está se deslocando para a direita sobre trilhos retilíneos e horizontais, em movimento uniformemente variado em relação à Terra.

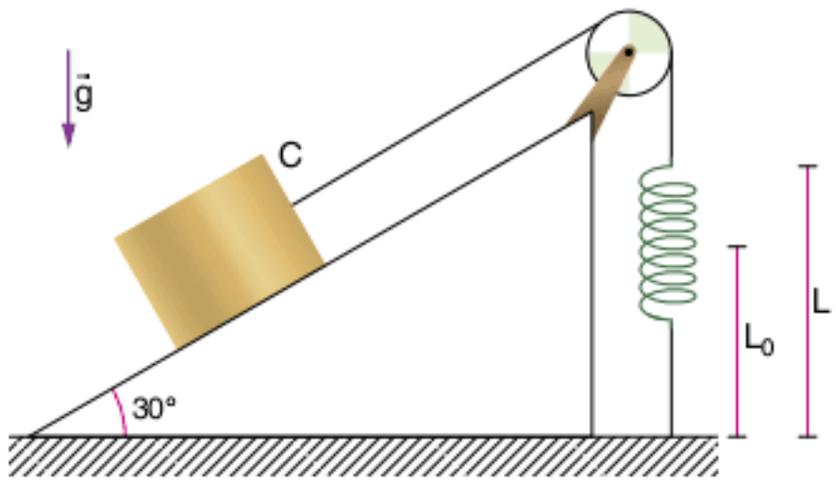
Uma esfera metálica, que está apoiada no piso horizontal de um dos vagões, é mantida em repouso em relação ao vagão por uma mola colocada entre ela e a parede frontal, como ilustra a figura. A mola encontra-se comprimida.



Suponha desprezível o atrito entre a esfera e o piso do vagão.

a) Determine a direção e o sentido da aceleração do trem em relação à Terra.
b) Verifique se o trem está se deslocando em relação à Terra com movimento uniformemente acelerado ou retardado, justificando sua resposta.

69 **Fuvest** Um corpo C de massa igual a 3 kg está em equilíbrio estático sobre um plano inclinado, suspenso por um fio de massa desprezível preso a uma mola fixa ao solo, como mostra a figura a seguir. O comprimento natural da mola (sem carga) é L_0 = 1,2 m e, ao sustentar estaticamente o corpo, ela se distende, atingindo o comprimento L = 1,5 m. Os possíveis atritos podem ser desprezados.



A constante elástica da mola, em N/m, vale, então:

(a) 10 (b) 30 (c) 50 (d) 90 (e) 100

70 **Fatec** Certa mola, presa a um suporte, sofre alongamento de 8,0 cm quando se prende à sua extremidade um corpo de peso 12 N, como na figura 1. A mesma mola, tendo agora em sua extremidade o peso de 10 N, é fixa ao topo de um plano inclinado de α, sem atrito, como na figura 2.
Dado: senα = 0,60.

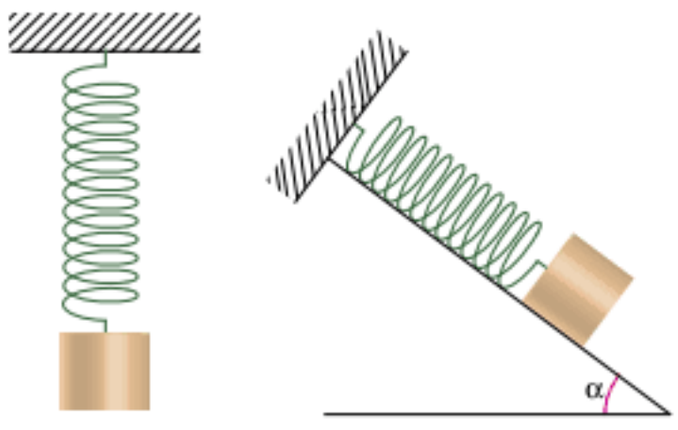
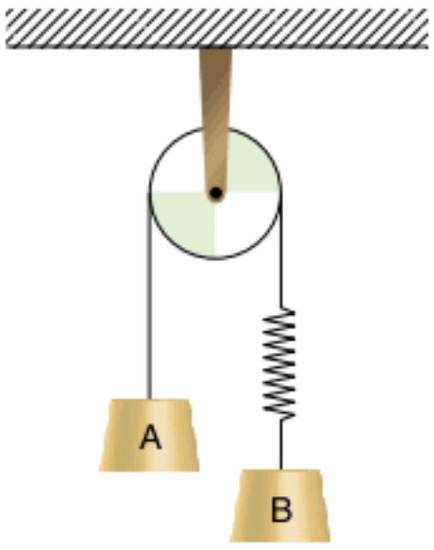


Figura 1 Figura 2

Nesse caso, o alongamento da mola é, em cm:

(a) 4,0 (b) 5,0 (c) 6,0 (d) 7,0 (e) 8,0

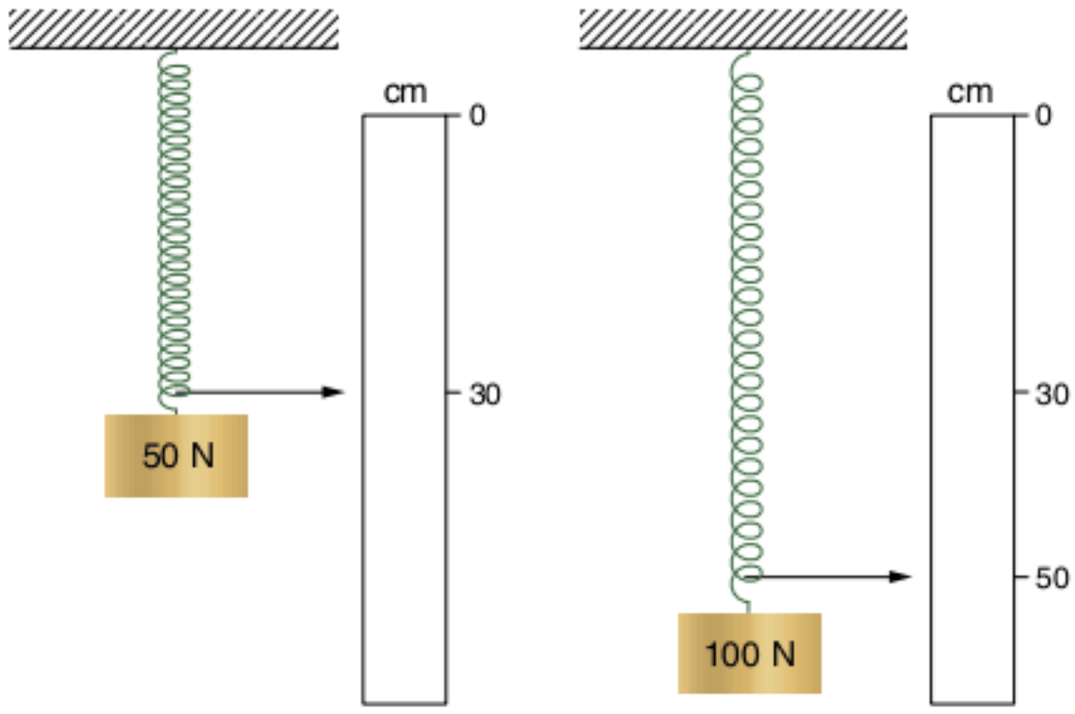
71 **FEI** O corpo A, de massa m_A = 1 kg, sobe com aceleração constante de 2 m/s². Sabe-se que o comprimento inicial da mola é L_0 = 1 m e a constante elástica da mola é k = 20 N/m.



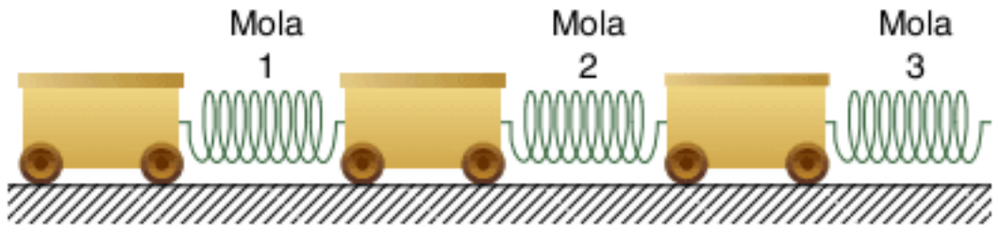
Determine:

a) o comprimento final da mola.
b) a massa do corpo B.

72 **Unifei 2005** A figura mostra dois pesos diferentes pendurados, um de cada vez, em uma mola ideal, de constante elástica k. Se todo o peso for removido da mola, qual será a marca na escala indicada pelo ponteiro?



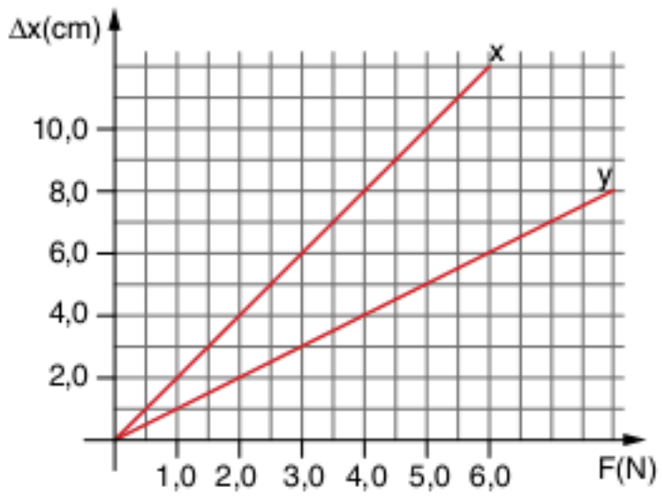
73 **Cesgranrio** O sistema representando na figura (carrinhos de mesma massa ligados a molas idênticas) está inicialmente em repouso, podendo mover-se com atritos desprezíveis sobre trilhos horizontais.



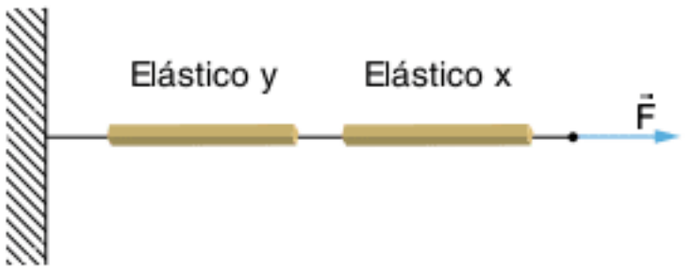
Aplica-se à extremidade livre da mola 3 uma força constante, paralela aos trilhos e dirigida para a direita. Depois de as oscilações iniciais terem sido amortecidas, o conjunto desloca-se em bloco para a direita. Nessa situação, sendo ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 os comprimentos respectivos das molas 1, 2 e 3, pode-se afirmar que:

(a) $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$
(b) $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$
(c) $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$
(d) $\ell_1 = \ell_2 < \ell_3$
(e) $\ell_1 = \ell_2 > \ell_3$

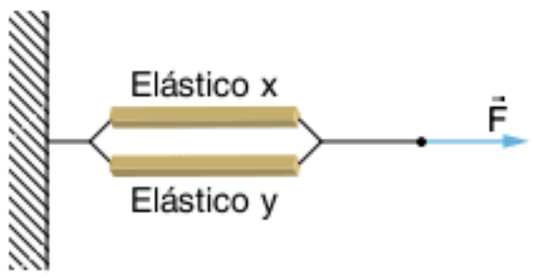
74 **UFRN** No gráfico seguinte, estão representadas as distensões (Δx) de dois elásticos (x e y) em função do módulo (F) da força de distensão aplicada em cada um deles separadamente:



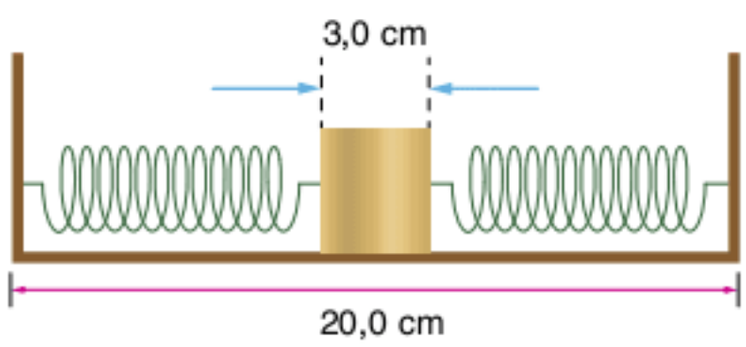
a) Suponha que os elásticos sejam associados em série, como mostra a figura a seguir. Qual é o valor da constante elástica deste sistema, em N/cm?



b) Se os elásticos forem associados em paralelo, como mostra a figura seguinte, qual será o valor da constante elástica do sistema, em N/cm?



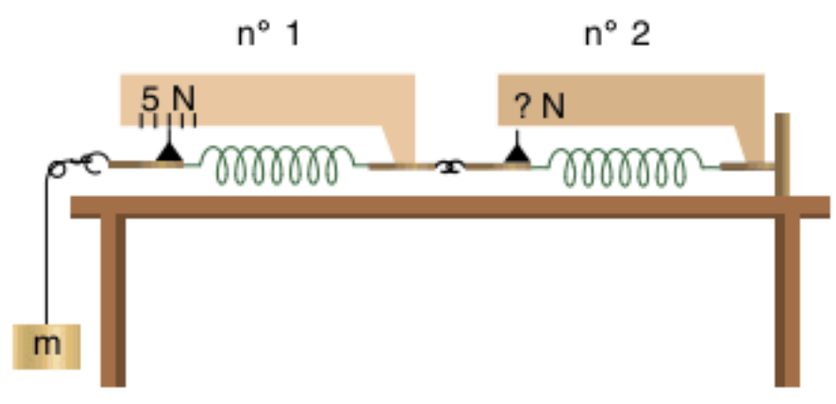
75 **Cesesp-PE** Duas molas têm o mesmo comprimento de 10,0 cm quando em equilíbrio e constantes elásticas k_1 e k_2, respectivamente. Elas são usadas para fixar um pequeno cubo de aresta igual a 3,0 cm no fundo de uma caixa de largura igual a 20 cm, conforme indicado na figura.



Se $k_1 = 2k_2$, os comprimentos das molas 1 e 2 após a montagem do sistema são, em centímetros, respectivamente:

(a) 9,0 e 8,0
(b) 5,7 e 11,3
(c) 10,3 e 6,7
(d) 6,3 e 10,7
(e) 7,3 e 9,7

76 **Vunesp** Dinamômetros são instrumentos destinados a medir forças. O tipo mais usual é constituído por uma mola cuja deformação varia linearmente com a intensidade da força que a produz (Lei de Hooke). Dois dinamômetros estão montados sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa, conforme mostra a figura a seguir.

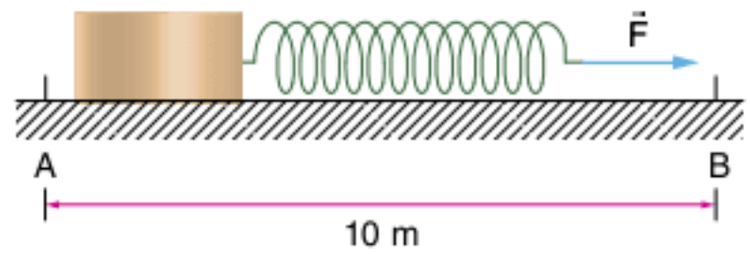


Quando um corpo de massa m é suspenso por um fio de massa desprezível, preso à extremidade do dinamômetro nº 1, a força que este indica é 5 N.

a) Que força indicará o dinamômetro nº 2?
b) Qual a massa do corpo suspenso?
c) Se k_1 e k_2, constantes elásticas dos dinamômetros 1 e 2, forem iguais a 25 N/m e 20 N/m, respectivamente, qual a deformação total do conjunto?

Considere $g = 10\ m/s^2$ e despreze qualquer atrito.

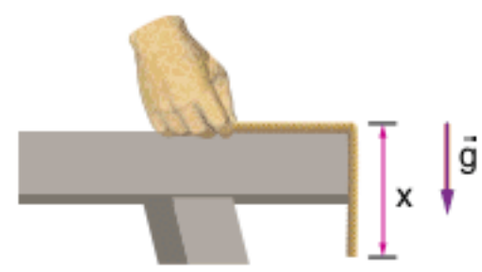
77 **FEI** O bloco da figura, de massa m = 4,0 kg, desloca-se sob a ação de uma força horizontal constante de intensidade F. A mola ideal, ligada ao bloco, tem comprimento natural (isto é, sem deformação) $\ell_0 = 14$ cm e constante elástica k = 160 N/m.



Desprezando-se as forças de atrito e sabendo-se que as velocidades escalares do móvel em A e B são, respectivamente, iguais a 4 m/s e 6 m/s, qual é, em cm, o comprimento da mola durante o movimento?

Fio com massa

78 Uma corda homogênea tem seção transversal constante e comprimento total L. A corda encontra-se inicialmente em repouso, com um trecho de seu comprimento apoiado em uma mesa horizontal e perfeitamente lisa, conforme indica a figura.

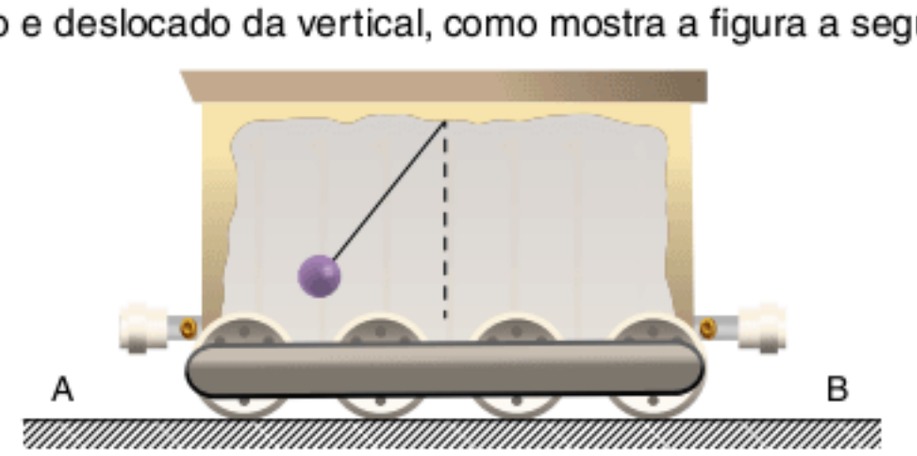


Num determinado instante, a corda é abandonada, adquirindo movimento acelerado. Não considerando a resistência do ar e assumindo para o módulo da aceleração da gravidade o valor g, aponte a alternativa que apresenta como varia o módulo da aceleração da corda em função do comprimento pendente x:

(a) $g \cdot \frac{x}{L}$
(b) $g \cdot \frac{x^2}{L^2}$
(c) $g \cdot \frac{L}{x}$
(d) $g \cdot \frac{x^3}{L^3}$
(e) Não há elementos para uma conclusão, pois a massa da corda não foi dada.

Corpo suspenso ou movimento de plano inclinado

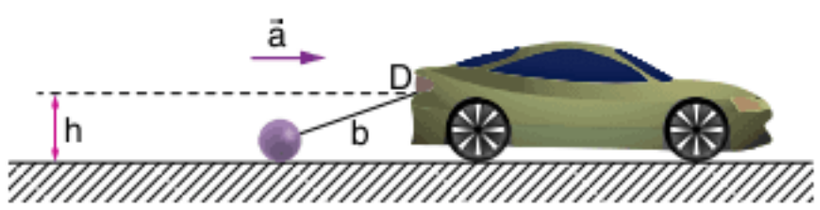
79 **UEL** Um observador vê um pêndulo preso ao teto de um vagão e deslocado da vertical, como mostra a figura a seguir.



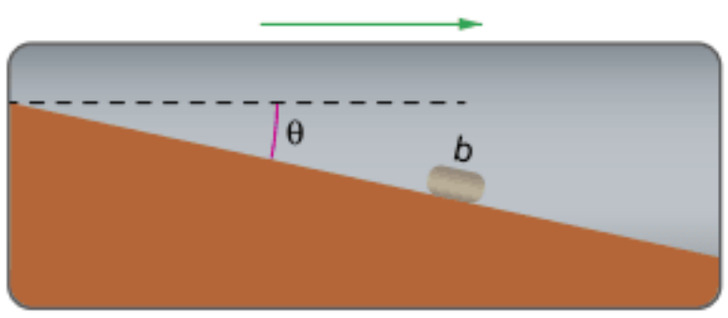
Sabendo que o vagão se desloca em trajetória retilínea, ele pode estar se movendo de:

(a) A para B, com velocidade constante.
(b) B para A, com velocidade constante.
(c) A para B, com sua velocidade diminuindo.
(d) B para A, com sua velocidade aumentando.
(e) B para A, com sua velocidade diminuindo.

80 Um veículo move-se sobre uma estrada plana horizontal, com movimento acelerado, de aceleração a. De um ponto D de sua traseira, pende um fio ideal de comprimento b, o qual arrasta uma bolinha de massa m.
Dados: $g = 10\ m/s^2$, $b = 1{,}3\ m$ e $h = 0{,}50\ m$.
Calcule o máximo valor de a, de modo que a bolinha não perca o contato com a estrada.

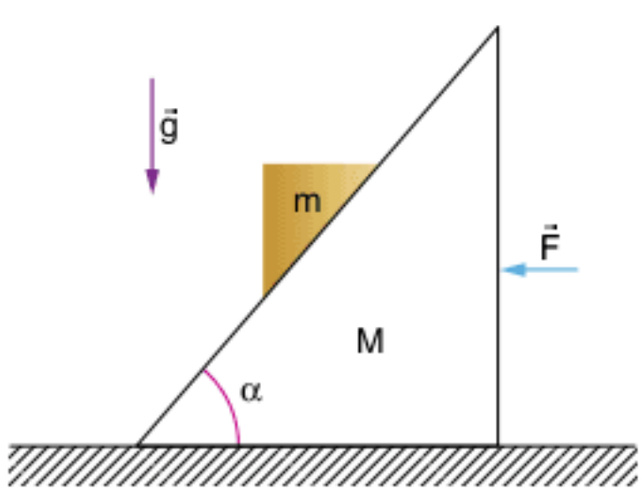


81 **Uerj 2000** Um caminhão-tanque, transportando gasolina, move-se no sentido indicado com aceleração a. Uma pequena boia b flutua na superfície do líquido, como indica a figura.



A inclinação do líquido no interior do tanque, expressa pela tangente do ângulo θ, é igual a:
(a) $\frac{a}{g}$
(b) $2\frac{a}{g}$
(c) $3\frac{a}{g}$
(d) $4\frac{a}{g}$

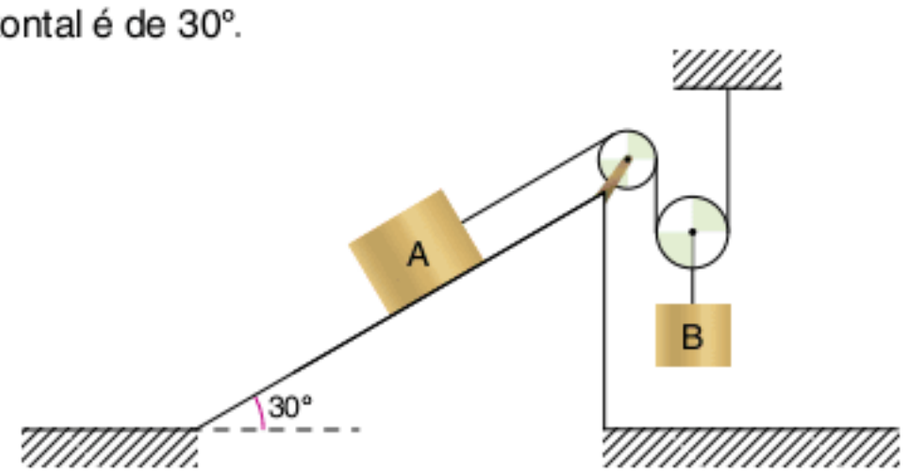
82 **ITA** O plano inclinado da figura tem massa M e, sobre ele, apoia-se um objeto de massa m. O ângulo de inclinação é α e não há atrito nem entre o plano inclinado e o objeto nem entre o plano inclinado e o apoio horizontal.



Aplica-se uma força $\vec{F}$ horizontal ao plano inclinado e constata-se que o sistema todo se move horizontalmente, sem que o objeto deslize em relação ao plano inclinado. Podemos afirmar que, sendo g a aceleração da gravidade local:
(a) $F = mg$
(b) $F = (M + m)g$
(c) F tem que ser infinitamente grande.
(d) $F = (M + m)g.\text{tg}\alpha$
(e) $F = Mg.\text{sen}\alpha$

Vínculos geométricos

83 **UFSC** No sistema da figura a seguir, os fios são inextensíveis, as polias sem massa e as superfícies sem atrito. O ângulo que a hipotenusa da superfície de seção triangular faz com a horizontal é de 30°.



Sabendo que a relação entre as massas dos corpos A e B é $\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}$ e considerando $g = 10\ m/s^2$, calcule:
a) a relação $\frac{a_A}{a_B}$ entre as acelerações dos corpos A e B.
b) a aceleração dos corpos A e B.

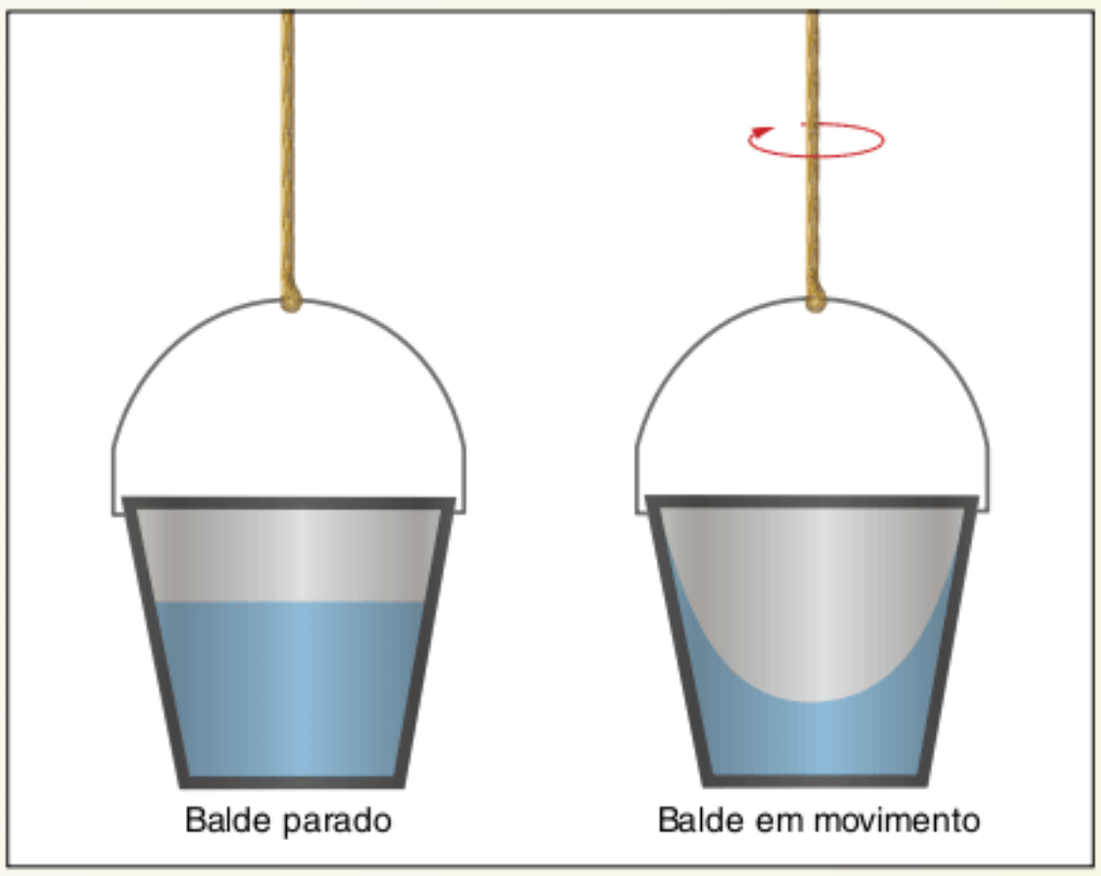
84 **FEI** Sobre um plano horizontal sem atrito, repousam, conforme a figura a seguir, dois corpos, A e B.
Dados: Massa de A = 30 kg, massa de B = 5,0 kg, massas do fio e da polia desprezíveis.
Que aceleração escalar se deve imprimir à polia para que a aceleração escalar do corpo A seja de $2{,}0\ m/s^2$? Qual a intensidade da força $\vec{F}$?

TEXTO COMPLEMENTAR

A experiência do balde de Newton

Considera-se um balde com água em seu interior, o sistema está em repouso em relação à Terra, e verifica-se que a superfície da água apresenta um formato plano. Em seguida, consideram-se a água e o balde girando juntos com uma velocidade angular constante, novamente em relação à Terra. Percebe-se uma alteração na superfície da água, que assume agora um formato côncavo; essa alteração é causada por algo que interage com a água quando o balde está girando.

Analisando essa observação de acordo com as leis de Newton, podemos pensar nessa deformação como resultado da interação entre a água em rotação e o balde, a Terra ou as estrelas fixas.



Newton observou que a água permaneceu em repouso em relação ao balde nos dois casos, balde em repouso e balde em movimento, concluindo que a interação água-balde não é a responsável pela deformação.

A interação entre a água e a Terra também não é a responsável, já que a força exercida pela Terra sobre a água é a mesma, estando a água em repouso ou em movimento em relação à Terra; a força é sempre atrativa e para baixo.

Pensando nas estrelas fixas, Newton afirma, em sua obra, que, como estas estrelas não estão sujeitas a uma paralaxe (diferença de posição aparente de um objeto visto por observadores em locais distintos) perceptível devido ao movimento anual da Terra, visto que as estrelas se encontram a uma grande distância, elas não podem ter nenhuma força para produzir qualquer efeito considerável em nosso sistema.

Newton sabia que, com base na Lei da Gravitação Universal, a força que uma casca esférica exerce sobre um corpo que se encontra em seu interior é igual a zero, independentemente de esse corpo estar em rotação ou em repouso, já que a intensidade da força não depende da velocidade ou da aceleração dos corpos do sistema, mas da distância entre eles. Assim, a relação com as estrelas fixas também não poderia ser a causa da deformação.

Para Newton, a mudança do formato da superfície da água era causada pela rotação dela em relação ao "espaço absoluto". Com o conceito de espaço absoluto, Newton foi capaz de estabelecer a diferença entre os referenciais inerciais (aqueles que estão em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto) e os referenciais não inerciais (aqueles que se encontram acelerados em relação ao espaço absoluto).

Ao estudar o movimento dos corpos, do ponto de vista de um referencial não inercial, Newton percebeu o surgimento de efeitos dinâmicos que passavam a invalidar o Princípio Fundamental da Dinâmica, pois evidenciavam a presença de outras forças, que, aparentemente, não apresentavam causa, agindo sobre os corpos materiais apenas pelo fato de o referencial em questão estar acelerado em relação ao espaço absoluto.

Assim, para Newton, referencial inercial é qualquer sistema em que não se podem constatar quaisquer efeitos produzidos por forças sem agente causador aparente, ou forças inerciais, ou seja, qualquer sistema que se encontra em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto.

Então, podemos afirmar que as três leis de Newton são válidas apenas em referenciais inerciais, por definição, pois nesse caso não é necessário introduzir forças inerciais para explicar qualquer fenômeno, já que todos os efeitos podem ser entendidos através de interações físicas reais. Para estudar o movimento de um corpo utilizando um referencial não inercial, os efeitos causados pelas forças inerciais devem ser levados em consideração. Desse modo, pode-se concluir que a forma côncava assumida pela superfície da água está relacionada ao movimento de rotação dela em relação ao espaço absoluto, com a consequente presença de forças inerciais.

RESUMINDO

Neste capítulo, estudamos os fundamentos da Dinâmica, assunto que tem importância por si só e para a continuidade de todo o estudo da Mecânica.

A **massa** de um corpo é obtida comparando-o com um corpo padrão.

A **força** é a grandeza vetorial responsável pela aceleração de um corpo. A resultante das forças que atuam em um corpo é a soma vetorial de todas as forças que agem sobre ele:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n \quad \text{ou} \quad \vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

As forças podem ser classificadas em:

- **forças de contato**: só existem quando duas superfícies entram em contato.
- **forças de ação a distância**: existem mesmo que as superfícies dos corpos não estejam em contato.

Para a resolução de problemas, precisamos reconhecer se uma força é externa ou interna:

- **força externa**: quando um agente externo ao sistema exerce a força sobre uma parte do sistema.
- **força interna**: quando uma parte do sistema exerce a força sobre outra parte do mesmo sistema.

As três Leis de Newton são a base do estudo da Dinâmica.

A **Primeira Lei de Newton**, também chamada de Princípio da Inércia, pode ser enunciada como: "Um corpo tende a manter seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme se a resultante das forças que agem sobre ele for nula."

A **Segunda Lei de Newton**, também chamada de Princípio Fundamental da Dinâmica, pode ser explicada pela fórmula: $\vec{F}_R = m.\vec{a}$, em que $\vec{F}_R$ é a resultante das forças que agem sobre o corpo de massa m, que adquire a aceleração $\vec{a}$.

A **Terceira Lei de Newton**, também chamada de Princípio da Ação e Reação, pode ser enunciada como: "Se um corpo A exerce uma força sobre outro corpo B, então o corpo B exerce sobre o corpo A uma força de mesmo módulo e mesma direção, mas de sentido contrário."

Estudamos também as principais forças vistas em Mecânica.

A **força peso** é uma força de ação a distância que a Terra exerce sobre um corpo situado nas suas proximidades; é dada por $\vec{P} = m\vec{g}$, em que $\vec{g}$ representa o campo gravitacional gerado pela Terra.

A **força normal** existe apenas quando há contato entre dois corpos; a direção da normal é perpendicular à superfície de contato entre os corpos e o sentido da força é direcionado do corpo que aplica a força para o corpo que recebe a força.

A **força de tração em fio** existe quando um fio é submetido a uma força no sentido de tracioná-lo, pois fios não suportam compressão; a direção da tração é a própria direção do fio e o sentido é o de tracionar o fio. Em um fio ideal, que possui massa desprezível, é inextensível e flexível, todos os seus pontos recebem e exercem a mesma força de tração.

A **força elástica** é aquela exercida sobre uma mola (e por uma mola). A direção da força elástica é a própria direção da mola e o sentido pode ser de tração ou compressão; o módulo da força é dado pela lei de Hooke, $F = kx$, válida para a região elástica de deformação, em que x é a deformação da mola e k é a constante elástica da mola, que depende apenas do material da mola e de sua geometria.

O **dinamômetro** é um instrumento utilizado para medir a força aplicada em uma mola.

As molas podem ser associadas em série ou em paralelo.

Em uma **associação de molas em série**, com n molas, a constante elástica equivalente é dada por:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}$$

Em uma **associação de molas em paralelo**, com n molas, a constante elástica equivalente é dada por:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

Vimos também que o equilíbrio, que ocorre quando a resultante das forças que agem sobre um corpo é nula, pode ser classificado em:

- **equilíbrio estático**: quando a velocidade vetorial é constante e igual a zero, que é o caso do repouso.
- **equilíbrio dinâmico**: quando a velocidade vetorial é constante e diferente de zero, que é o caso do movimento retilíneo uniforme.

O equilíbrio estático pode apresentar-se de três formas: **estável**, **instável** e **indiferente**.

QUER SABER MAIS?

SITES

- <www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/celeste/kepler4/kepler4.html>.
- <www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/newton/biografia.htm>.
- <www.dmat.ufpe.br/gradua/intervalo/ciencia_hoje_celeste.pdf>.

Exercícios complementares

Considere, quando necessário, $g = 10\ m/s^2$.

Conceitos básicos

1 **Unirio** Um bloco de concreto e um balde com pedras pendem livremente de uma polia, estando ambos à mesma altura do solo e em repouso (Fig. 1). O balde é puxado para baixo e mantido nessa posição (Fig. 2).
Considere os fios e a polia ideais.

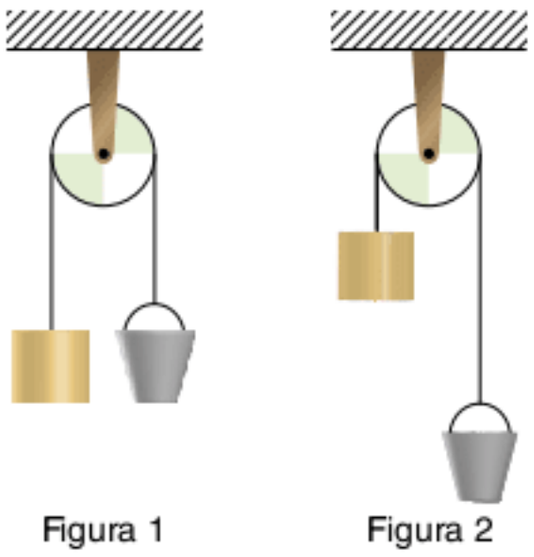
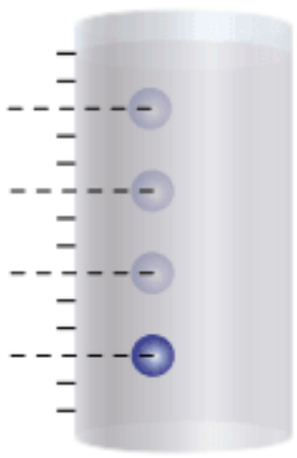


Figura 1 Figura 2

Soltando-se o balde, ocorre o seguinte:
(a) o balde e o bloco permanecem na mesma posição.
(b) o balde sobe e o bloco desce até o bloco tocar o solo.
(c) o bloco sobe e o balde desce até o balde tocar o solo.
(d) o balde sobe e o bloco desce até voltarem à posição descrita na figura 1.
(e) o bloco e o balde oscilam em torno da posição mostrada na figura 1 até pararem.

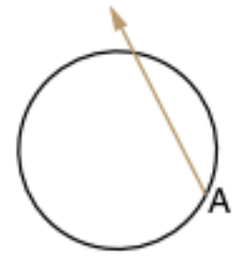
2 **UFRJ** Um método de medir a resistência oferecida por um fluido é mostrado na figura a seguir.

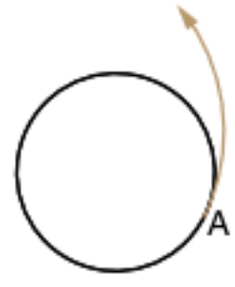


Uma bolinha de massa m desce verticalmente ao longo de um tubo de vidro graduado, totalmente preenchido com glicerina. Com ajuda das graduações do tubo, percebe-se que, a partir de um determinado instante, a bolinha percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais. Nessas condições, sendo g a aceleração da gravidade:
a) calcule a resultante das forças que atuam sobre a bolinha.
b) calcule a força resultante que o fluido exerce sobre a bolinha.

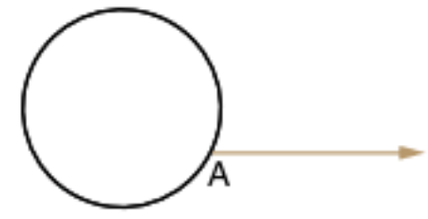
3 **UFF 2009** Na prova de lançamento de martelo nas Olimpíadas, o atleta coloca o martelo a girar e o solta quando atinge a maior velocidade que ele lhe consegue imprimir. Para modelar este fenômeno, suponha que o martelo execute uma trajetória circular num plano horizontal. A figura abaixo representa esquematicamente esta trajetória enquanto o atleta o acelera, e o ponto A é aquele no qual o martelo é solto.

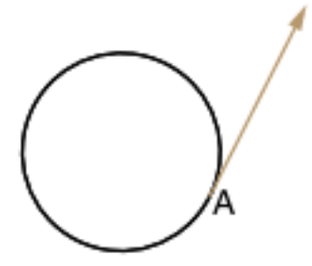
Assinale a opção que representa corretamente a trajetória do martelo, vista de cima, após ser solto.

(a)


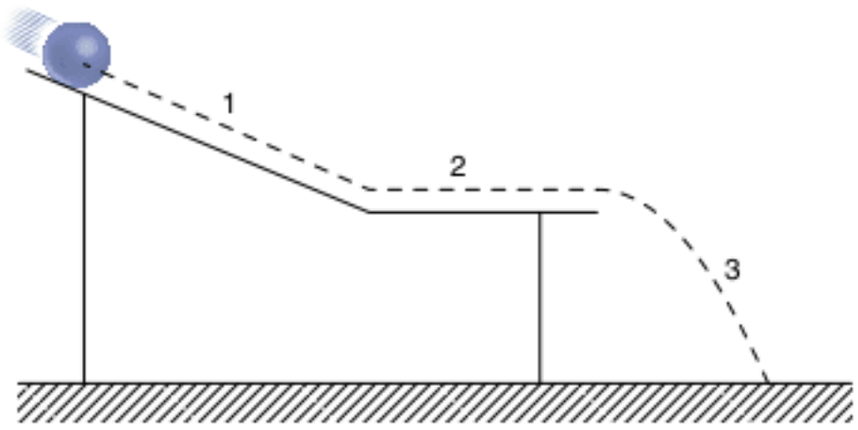
(b)


(c)

(d)


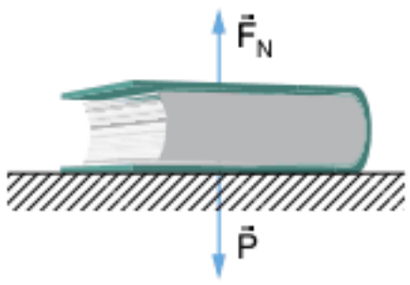
(e)


4 **UFMG** Uma bola desliza inicialmente sobre um plano inclinado (trecho 1), depois sobre um plano horizontal (trecho 2) e, finalmente, cai livremente (trecho 3) como mostra a figura. Desconsidere as forças de atrito durante todo o movimento. Considere os módulos das acelerações da bola nos trechos 1, 2 e 3 como sendo a_1, a_2 e a_3, respectivamente.



Sobre os módulos dessas acelerações nos três trechos do movimento da bola, pode-se afirmar que:
(a) $a_1 < a_2 < a_3$
(b) $a_1 < a_3$ e $a_2 = 0$
(c) $a_1 = a_2$ e $a_3 = 0$
(d) $a_1 = a_3$ e $a_2 = 0$

5 Um livro está em um plano horizontal. Atuam sobre ele as forças peso e normal, como indicado na figura.



Analisando-se as afirmações a seguir:

I. A força de reação à força peso está aplicada no centro da Terra.

II. A força de reação à força normal está aplicada sobre o plano horizontal.

III. O livro está em repouso e, portanto, normal e peso são forças de mesma intensidade e direção, porém de sentidos contrários.

IV. A força normal é reação à força peso.

pode-se dizer que:

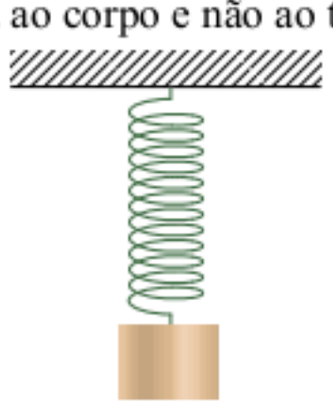
(a) todas as afirmações são verdadeiras.
(b) apenas I e II são verdadeiras.
(c) apenas I, II e III são verdadeiras.
(d) apenas II e III são verdadeiras.
(e) apenas III é verdadeira.

6 **Ucsal-BA** Uma mola está sustentando um corpo de peso P, conforme a figura. Sobre essa situação, considere as seguintes proposições.

I. A mola apresenta um alongamento porque a Terra exerce uma força no extremo inferior da mola.

II. Pela Lei da Ação e Reação, a mola atrai a Terra com força.

III. A mola apresenta deformação dupla da que apresentaria se só estivesse presa ao corpo e não ao teto.



Analisando as situações e as proposições, podemos afirmar que:

(a) apenas I é verdadeira.
(b) apenas II é verdadeira.
(c) apenas III é verdadeira.
(d) todas são verdadeiras.
(e) todas são falsas.

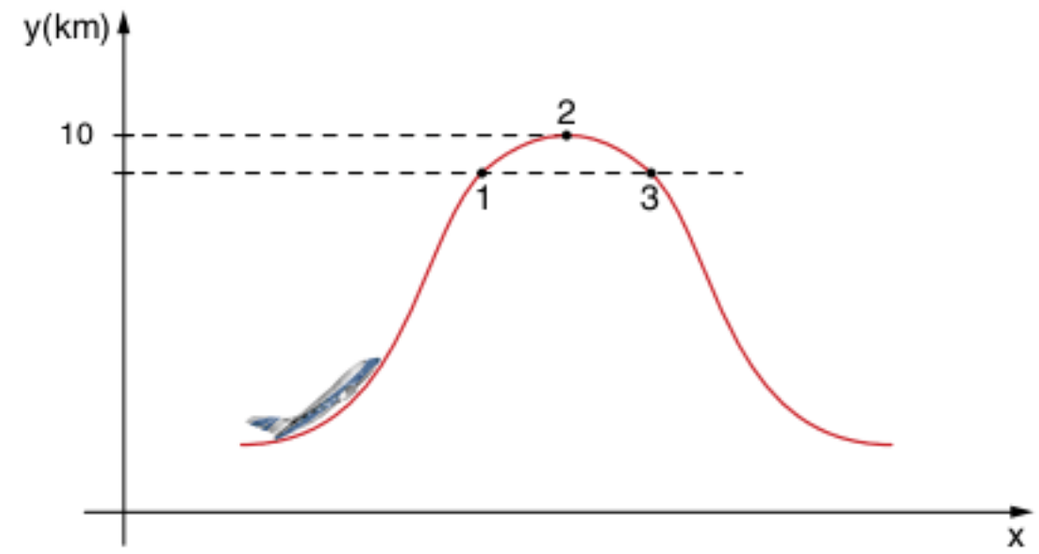
7 **Unifesp 2007 (Adapt.)** Na divulgação de um novo modelo, uma fábrica de automóveis destaca uma inovação em relação à prevenção de acidentes decorrentes de colisões traseiras: protetores móveis de cabeça.

Em caso de colisão traseira, os protetores de cabeça, controlados por sensores, são movidos para a frente para proporcionar proteção para a cabeça do motorista e do passageiro dianteiro dentro de milisegundos. Os protetores [...] previnem que a coluna vertebral se dobre, em caso de acidente, reduzindo o risco de ferimentos devido ao efeito chicote [a cabeça é forçada para trás e, em seguida, volta rápido para a frente].

Disponível em: <www.daimlerchrysler.com.br/noticias/Agosto/Nova_ClasseE_2006/popexpande.htm>.

Qual lei da física explica a razão de a cabeça do motorista ser forçada para trás quando o seu carro sofre uma colisão traseira, dando origem ao "efeito chicote"? Justifique.

8 **UFSC 2005 (Adapt.)** A figura a seguir mostra o esquema (fora de escala) da trajetória de um avião. O avião sobe com grande inclinação até o ponto 1, a partir do qual tanto a ação das turbinas quanto a do ar cancelam-se totalmente e ele passa a descrever uma trajetória parabólica sob a ação única da força peso. Durante a trajetória parabólica, objetos soltos dentro do avião parecem flutuar. O ponto 2 corresponde à altura máxima de 10 km.



Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

01 Os objetos parecem flutuar porque a força de atração gravitacional da Terra sobre eles é desprezível.

02 Para justificar por que os objetos flutuam, a força gravitacional da Terra sobre os objetos não pode ser desprezada entre os pontos 1, 2 e 3.

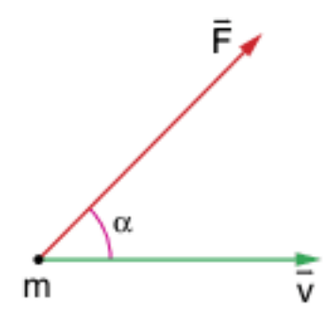
04 A componente horizontal da velocidade é constante entre os pontos 1, 2 e 3.

08 A aceleração vertical, em relação ao solo, a 10 km de altura (ponto 2), vale zero.

16 A velocidade do avião, em relação ao solo, tem o mesmo valor no ponto 1 e no ponto 3.

Soma = ☐

9 **UFSC 2007** Um corpo de massa m se desloca ao longo de um plano horizontal. Durante o intervalo de tempo Δt, considere α como o ângulo entre as direções dos vetores velocidade $\vec{v}$ e força resultante $\vec{F}$ de módulo constante, conforme indicado na figura a seguir.



Assinale a(s) proposição(ões) correta(s) a respeito do tipo de movimento do corpo de massa m, durante o intervalo de tempo Δt.

01 Retilíneo uniforme se α e $\vec{F}$ forem nulos e $\vec{v}$ não for nula.

02 Retilíneo uniforme se α for nulo, $\vec{v}$ e $\vec{F}$ não nulos.

04 Retilíneo uniformemente variado se α for nulo, $\vec{v}$ e $\vec{F}$ não nulos.

08 Circular uniforme se α for 90°, $\vec{v}$ e $\vec{F}$ não nulos.

16 Circular uniforme se α for 60°, $\vec{v}$ e $\vec{F}$ não nulos.

32 Retilíneo uniformemente variado se α e $\vec{F}$ forem nulos e $\vec{v}$ não for nula.

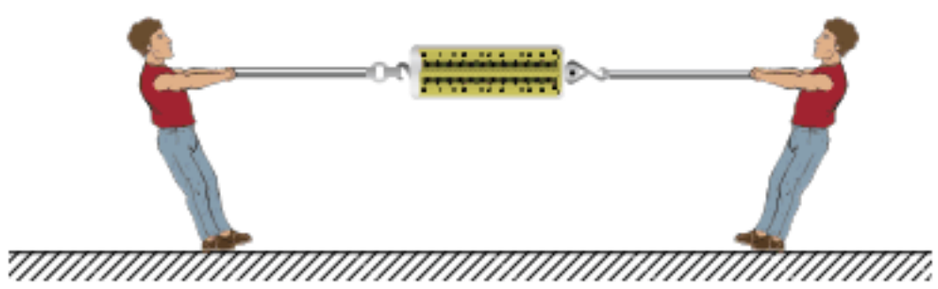
10 **ITA** Um físico acha-se encerrado dentro de uma caixa hermeticamente fechada, que é transportada para algum ponto do espaço cósmico, sem que ele saiba.

Então, abandonando um objeto dentro da caixa, ele percebe que o mesmo cai com movimento acelerado.

Baseado em sua observação, ele pode afirmar com segurança:

(a) Estou parado num planeta que exerce força gravitacional sobre os objetos de minha caixa.
(b) Estou caindo sobre um planeta e é por isso que vejo o objeto caindo dentro da caixa.
(c) Minha caixa está acelerada no sentido contrário ao do movimento do objeto.
(d) Não tenho elementos para julgar se o objeto cai porque a caixa sobe com o movimento acelerado ou se o objeto cai porque existe um campo gravitacional externo.
(e) Qualquer das afirmações acima que o físico tenha feito está errada.

11 **FEI** Um dinamômetro possui suas duas extremidades presas a duas cordas. Duas pessoas puxam as cordas na mesma direção e sentidos opostos, com força de mesma intensidade F = 100 N.



Quanto marcará o dinamômetro?

(a) 200 N
(b) 0
(c) 100 N
(d) 50 N
(e) 400 N

Estática

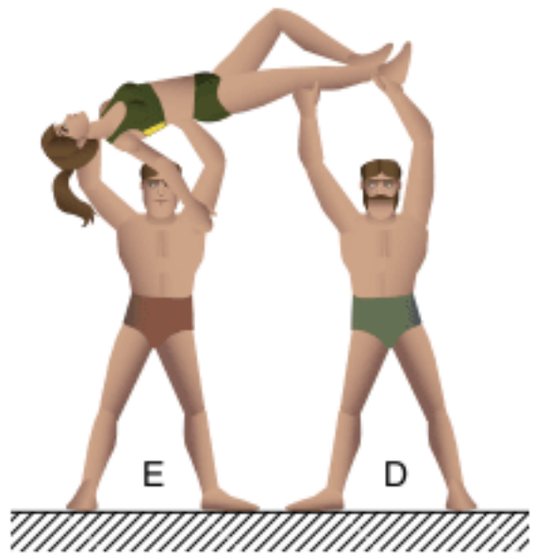
12 **UFMG** Na Terra, um fio de cobre é capaz de suportar, em uma de suas extremidades, massas suspensas de até 60 kg, sem se romper. Considere a aceleração da gravidade na Terra igual a 10 m/s^2 e, na Lua, igual a 1,5 m/s^2.

a) Qual a intensidade da força máxima que o fio poderia suportar na Lua?
b) Qual a maior massa de um corpo suspenso por esse fio, na Lua, sem que ele se rompa?

13 **UFPR 2010** Uma corrente composta por cinco elos está presa ao teto por meio de um barbante, conforme mostra a figura a seguir. A massa de cada elo é de 200 g.

a) Faça um diagrama de forças para o terceiro elo, identificando cada uma das forças que atuam sobre ele.
b) Calcule o módulo de todas as forças que estão atuando nesse terceiro elo.

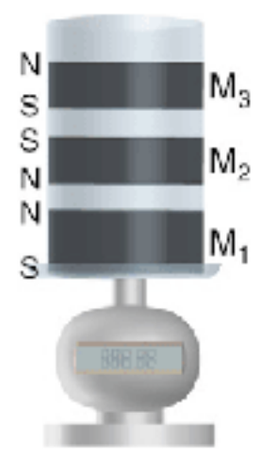
14 **UFRJ 2000** A figura mostra três ginastas, dois homens e uma mulher, agrupados em forma de arco, com os homens de pé sobre o piso horizontal sustentando a mulher. O homem da direita pesa 80 kgf e a mulher pesa 70 kgf. No instante focalizado, todos eles estão em repouso.



O módulo da componente vertical da força que o homem da direita (D) exerce sobre a mulher é igual a 30 kgf.

a) Calcule o módulo da componente vertical da força que o homem da esquerda (E) exerce sobre a mulher.
b) Calcule o módulo da componente vertical da força que o solo exerce sobre o homem da direita (D).

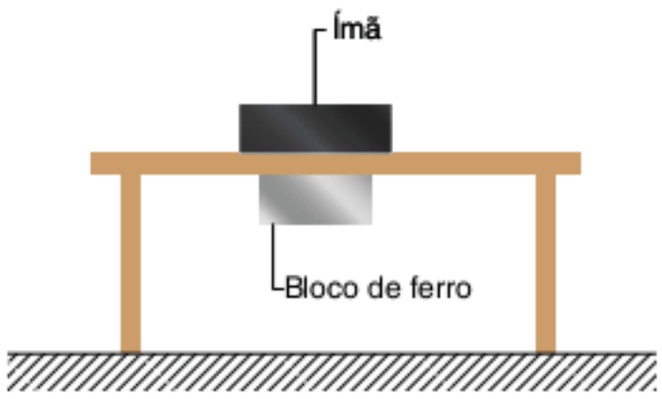
15 **Fuvest** Um tubo de vidro de massa m = 30 g está sobre uma balança. Na parte inferior do vidro, está um ímã cilíndrico de massa M_1 = 90 g. Dois outros pequenos ímãs de massas $M_2 = M_3$ = 30 g são colocados no tubo e ficam suspensos devido às forças magnéticas e aos seus pesos.
Adote: aceleração da gravidade = 10 m/s^2.



a) Qual a direção e o módulo (em newtons) da resultante das forças magnéticas que agem sobre o ímã 2?
b) Qual a indicação da balança (em gramas)?

16 **Cesgranrio** Um bloco de ferro é mantido em repouso sob o tampo de uma mesa, sustentado exclusivamente pela força magnética de um ímã, apoiado sobre o tampo dessa mesa. As forças relevantes que atuam sobre o ímã e sobre o bloco de ferro correspondem, em módulo, a:

P_1: peso do ímã.
F_1: força magnética sobre o ímã.
N_1: compressão normal sobre o ímã.
P_2: peso do bloco de ferro.
F_2: força magnética sobre o bloco de ferro.
N_2: compressão normal sobre o bloco de ferro.



Sendo $P_1 = P_2$, é correto escrever:

(a) $N_1 + N_2 = 2F_1$
(b) $P_1 = F_2$
(c) $P_1 + P_2 = F_1$
(d) $P_1 + P_2 = N_1$
(e) $F_1 + F_2 + P_1 + P_2 = 0$

Aplicações básicas da 2ª e 3ª Leis de Newton

17 **FMIT** Um corpo de massa igual a 100 kg é atraído pela Terra, que provoca nele uma aceleração. Esse corpo, por sua vez, também exerce uma força sobre a Terra, comunicando-lhe uma aceleração. Sabendo-se que a massa da Terra tem a ordem de grandeza de 10^{24} kg, calcular o módulo da aceleração que a Terra adquire, como consequência da interação com o referido corpo.

18 **PUC-SP** Leia o texto a seguir e responda, em seguida, às questões propostas.

Um dos atrativos da vida na Base e na Lua em geral era, sem dúvida alguma, a baixa gravidade, produzindo uma sensação de bem-estar generalizado. Contudo, isso apresentava os seus perigos e era preciso que decorressem algumas semanas até que um emigrante procedente da Terra conseguisse adaptar-se [...]

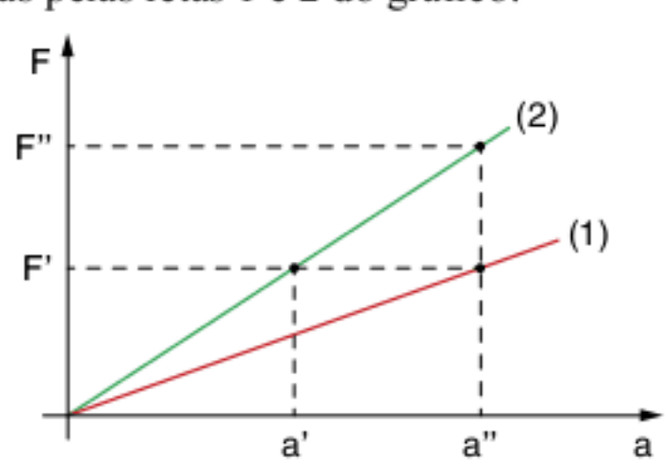
Um homem que pesasse na Terra noventa quilogramas-força poderia descobrir, para grande satisfação sua, que na Lua o seu peso era de apenas quinze quilogramas-força. Enquanto se deslocasse em linha reta e velocidade uniforme, sentiria uma sensação maravilhosa, como se flutuasse. Mas assim que resolvesse alterar o seu curso, virar esquinas, ou deter-se subitamente, então perceberia que sua massa [...] continuava presente [...].

Arthur C. Clarke. *2001: Uma odisseia no espaço.*

Dado: $g_{Terra} \cong 9{,}8\ m/s^2$.

a) Por que um astronauta só caminha com facilidade, sobre o solo lunar, em linha reta e com velocidade constante? Qual a massa do homem na Lua? E na Terra?
b) Qual o valor da aceleração da gravidade na Lua?

19 **FCMSC-SP** Aplicando-se diferentes forças resultantes aos corpos C_1 e C_2, de massas constantes, obtiveram-se acelerações que são dadas pelas retas 1 e 2 do gráfico.



A razão $\dfrac{\text{massa de } C_1}{\text{massa de } C_2}$ é igual a:

I. $\dfrac{a'}{a''}$

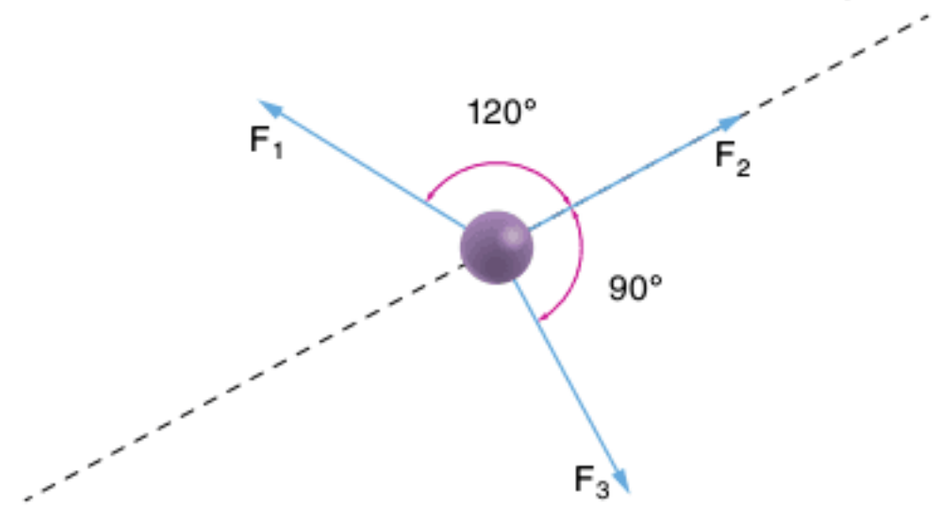
II. $\dfrac{a''}{a'}$

III. $\dfrac{F'}{F''}$

IV. $\dfrac{F''}{F'}$

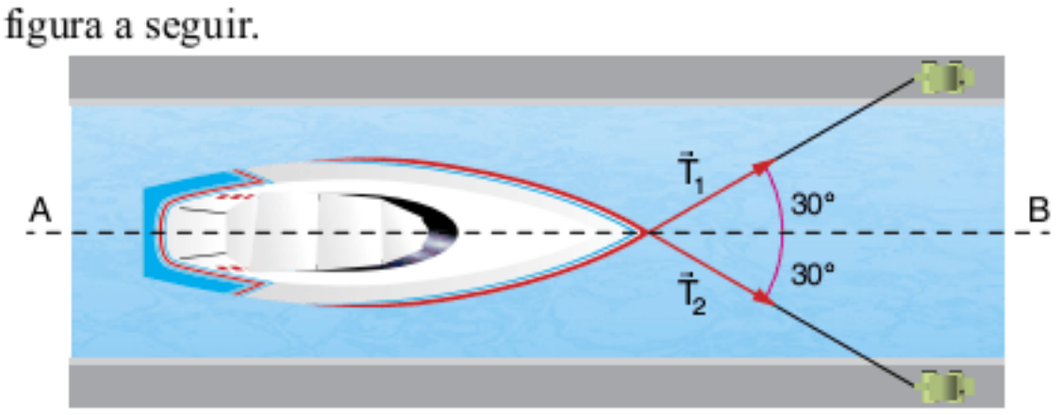
Quais são as proposições corretas?

20 **UFPE 2008** A figura mostra uma partícula de massa m = 20 g que está sob a ação de três forças constantes e coplanares, cujos módulos são: $F_1 = 1{,}4$ N; $F_2 = 0{,}50$ N; $F_3 = 1{,}5$ N.



Calcule a magnitude da aceleração da partícula ao longo da direção indicada pela linha tracejada, em m/s^2.

21 **UFRJ 2001** Um navio de massa igual a 1.000 toneladas deve ser rebocado ao longo de um canal estreito por dois tratores que se movem sobre trilhos retos, conforme é mostrado na figura a seguir.



Os tratores exercem forças $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ constantes, que têm mesmo módulo, igual a 10.000 N, e formam um ângulo de 30 graus com a direção do movimento do navio, representada pela reta AB da figura. Supondo que o navio esteja inicialmente em repouso em relação às margens do canal, calcule:

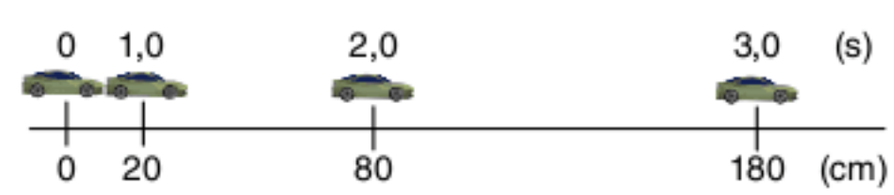
a) o módulo, a direção e o sentido da aceleração inicial.

Após um determinado intervalo de tempo, com os tratores ainda exercendo força como no início do movimento, a velocidade do navio passa a ser constante. Nessas condições, calcule:

b) o módulo, a direção e o sentido da força que a massa de água exerce sobre o navio.

Cinemática

22 **Cesgranrio** Um carrinho de brinquedo movido a pilha tem 0,5 kg de massa total e desloca-se em linha reta com movimento uniformemente acelerado sobre uma superfície horizontal. Uma fotografia estroboscópica registra a posição do carrinho a cada 1,0 s, conforme mostra a figura. Em t = 0, a velocidade do carrinho é nula.



O módulo, em newtons, da resultante das forças que agem sobre o carrinho durante o movimento vale:

(a) 0,1
(b) 0,2
(c) 0,3
(d) 0,4
(e) 0,5

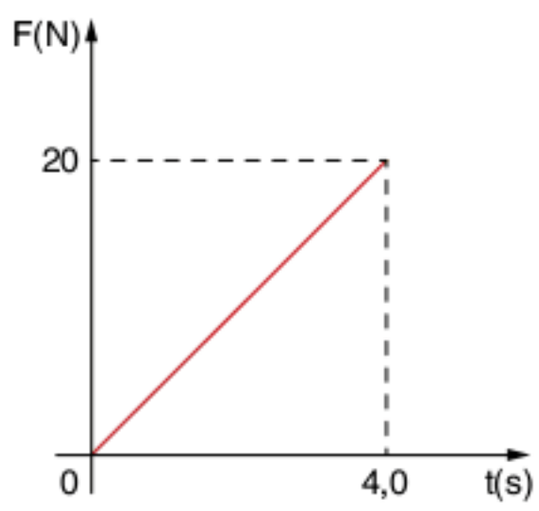
23 **Unicamp** Considere um avião a jato, com massa total de 100 toneladas ($1{,}0 \cdot 10^5$ kg), durante a decolagem numa pista horizontal. Partindo do repouso, o avião necessita de 2.000 m de pista para atingir a velocidade de 360 km/h, a partir da qual ele começa a voar.
Adote a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$.

a) Qual é a força de sustentação, na direção vertical, no momento em que o avião começa a voar?
b) Qual é a força média horizontal sobre o avião enquanto ele está em contato com o solo durante o processo de aceleração?

24 **Puccamp** Um corpo de massa 5,0 kg move-se sobre uma superfície horizontal, perfeitamente lisa, com velocidade constante de 4,0 m/s. Num dado instante, sofre a ação de uma força horizontal, perpendicular à direção do movimento, de intensidade 150 N, que atua durante 0,10 s. A nova velocidade do corpo vale, em m/s:

(a) 1,5 (b) 3,0 (c) 5,0 (d) 7,0 (e) 15

25 **PUC-MG** Um móvel, de massa 5,0 kg, tem movimento retilíneo uniforme quando recebe a ação de uma força, na mesma direção e sentido da velocidade, que varia com o tempo conforme o gráfico a seguir.



A aceleração média produzida pela força, no tempo considerado, em m/s^2, é igual a:

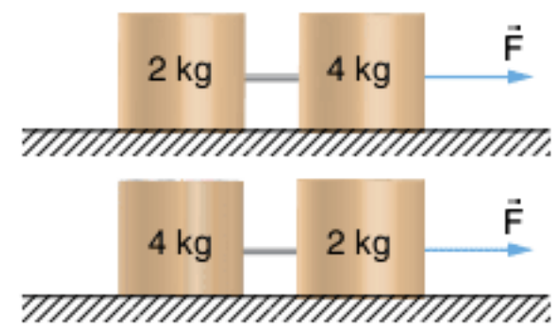
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

26 **Unicamp** As histórias de super-heróis estão sempre repletas de feitos incríveis. Um desses feitos é o salvamento, no último segundo, da mocinha que cai de uma grande altura. Considere a situação em que a desafortunada caia, a partir do repouso, de uma altura de 81,0 m e que nosso super-herói a intercepte 1,0 m antes de ela chegar ao solo, demorando 0,05 s para detê-la, isto é, para anular sua velocidade vertical. Considere que a massa da mocinha é de 50 kg e despreze a resistência do ar.

a) Calcule a força média aplicada pelo super-herói sobre a mocinha, para detê-la.
b) Uma aceleração 8 vezes maior que a gravidade (8g) é letal para um ser humano. Determine quantas vezes a aceleração à qual a mocinha foi submetida é maior que a aceleração letal.

Movimento horizontal

27 **UFRJ** Dois blocos de massas iguais a 4 kg e 2 kg, respectivamente, estão presos entre si por um fio inextensível e de massa desprezível. Deseja-se puxar o conjunto por meio de uma força $\vec{F}$, cujo módulo é igual a 3 N, sobre uma mesa horizontal e sem atrito. O fio é fraco e corre o risco de romper-se.

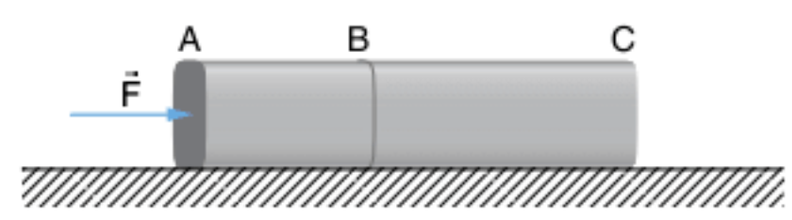


Qual o melhor modo de puxar o conjunto sem que o fio se rompa, pela massa maior ou pela menor? Justifique sua resposta.

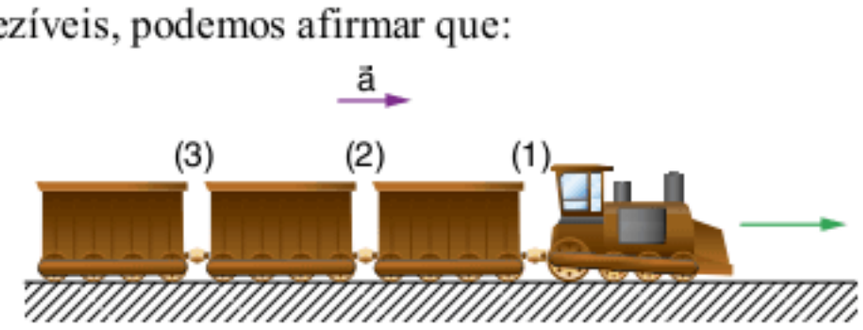
28 **ITA** Fazendo compras num supermercado, um estudante utiliza dois carrinhos. Empurra o primeiro, de massa m, com uma força F, horizontal, o qual, por sua vez, empurra outro de massa M sobre um assoalho plano e horizontal. Se o atrito entre os carrinhos e o assoalho puder ser desprezado, pode-se afirmar que a força que está aplicada sobre o segundo carrinho é:

(a) F
(b) $\dfrac{MF}{m+M}$
(c) $\dfrac{F(m+M)}{M}$
(d) $\dfrac{F}{2}$
(e) outra expressão diferente.

29 **Vunesp** Uma barra AC homogênea de massa M e comprimento L, colocada numa mesa lisa e horizontal, desliza sem girar sob a ação de uma força $\vec{F}$ também horizontal, aplicada na sua extremidade esquerda. Se o comprimento da fração BC é $\dfrac{2L}{3}$, determine a intensidade da força que esta fração exerce sobre a fração AB.

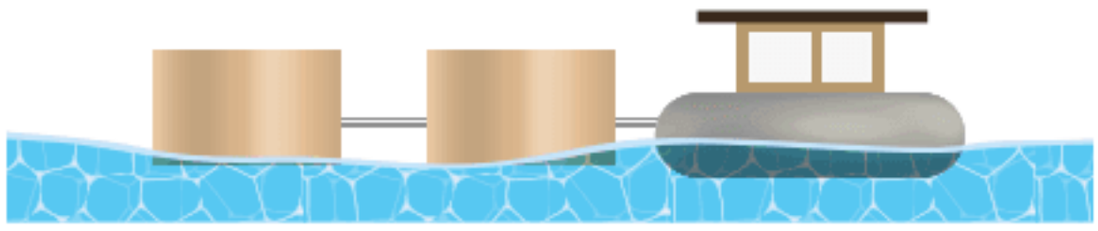


30 **Cesgranrio** A figura representa esquematicamente uma composição ferroviária com uma locomotiva e três vagões idênticos, movendo-se com aceleração constante $\vec{a}$. Sejam F_1, F_2 e F_3 os módulos das forças exercidas por cada uma das barras de acoplamento (1), (2) e (3), respectivamente, sobre os vagões. Se as forças de atrito exercidas sobre os vagões forem desprezíveis, podemos afirmar que:



(a) $\frac{1}{3}F_1 = \frac{1}{2}F_2 = F_3$
(b) $F_1 = \frac{1}{2}F_2 = \frac{1}{3}F_3$
(c) $F_1 = F_2 = F_3$
(d) $F_1 = 2F_2 = 3F_3$
(e) $3F_1 = 2F_2 = F_3$

31 Um rebocador arrasta dois flutuadores idênticos, de 3,2 t de massa cada, imprimindo-lhes uma aceleração de módulo 0,10 m/s², ao longo de uma linha reta. A força de tração no cabo que o une ao primeiro flutuador tem intensidade de 800 N.



A força da resistência aplicada pela água em cada flutuador tem intensidade f, e a força tensora no cabo que une os dois flutuadores tem intensidade T.

Assinale a opção correta.

(a) f = 80 N; T = 400 N
(b) f = 400 N; T = 800 N
(c) f = 320 N; T = 400 N
(d) f = 400 N; T = 400 N
(e) f = 160 N; T = 800 N

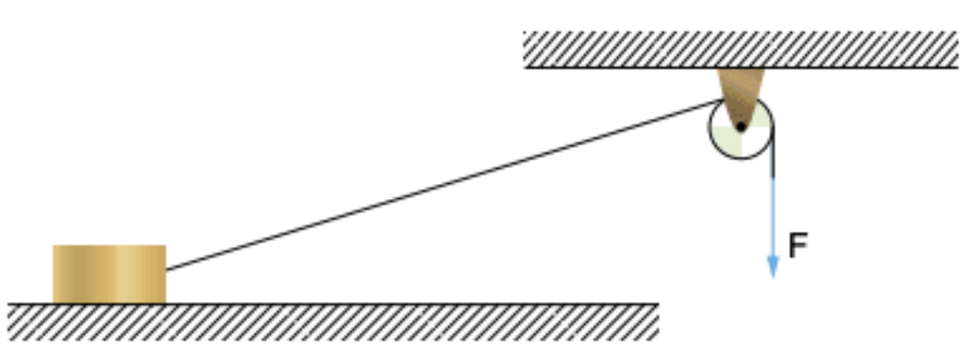
32 **UFSC 2003** A figura representa um automóvel A, rebocando um *trailer* B, em uma estrada plana e horizontal. A massa do automóvel e a massa do *trailer* são, respectivamente, iguais a 1.500 kg e 500 kg. Inicialmente, o conjunto parte do repouso, atingindo a velocidade de 90 km/h em 20 segundos. Desprezam-se os efeitos da força de resistência do ar sobre o veículo e o reboque.

Em relação à situação descrita, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

01 Não havendo nenhuma força que se oponha ao movimento do *trailer*, o automóvel não necessita fazer nenhuma força adicional para acelerá-lo.
02 Até atingirem a velocidade de 90 km/h, o automóvel e seu reboque terão percorrido 250 m.
04 O *trailer* exerce uma força de 625 N sobre o automóvel.
08 A força resultante sobre o conjunto é igual a 2.500 N.
16 A intensidade da força transmitida ao *trailer* é a mesma da força resultante sobre o conjunto.
32 A aceleração do conjunto é igual a 1,25 m/s².
64 A força que o automóvel faz sobre o *trailer* não pode ter a mesma intensidade da força que o *trailer* faz sobre o automóvel, porque, neste caso, o sistema permaneceria em repouso.

Soma = ☐

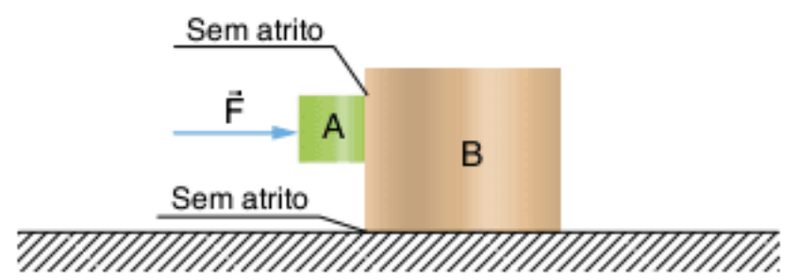
33 **UFPE 2002** Um pequeno bloco de 0,50 kg desliza sobre um plano horizontal sem atrito, sendo puxado por uma força constante F = 10,0 N aplicada a um fio inextensível que passa por uma roldana, conforme a figura a seguir.



Qual a aceleração do bloco, em m/s², na direção paralela ao plano, no instante em que ele perde o contato com o plano? Despreze as massas do fio e da roldana, bem como o atrito no eixo da roldana.

(a) 12,4
(b) 14,5
(c) 15,2
(d) 17,3
(e) 18,1

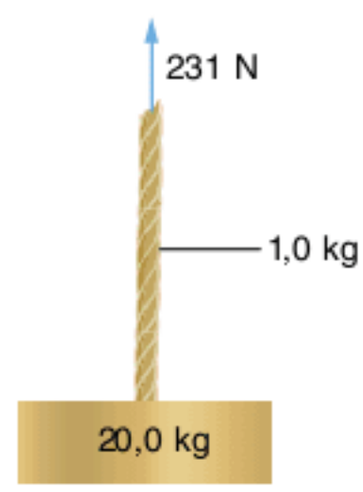
34 **PUC-Rio** A força $\vec{F}$, de módulo igual a 150 N, desloca o corpo A, de massa m_A = 12 kg, junto com o corpo B, de massa m_B = 8 kg. A aceleração gravitacional local é 10 m/s².



a) Determine o valor numérico da aceleração do corpo B.
b) Determine o valor numérico da intensidade da força resultante que atua sobre o corpo B.
c) Determine o valor numérico da aceleração total do corpo A.

Movimento vertical

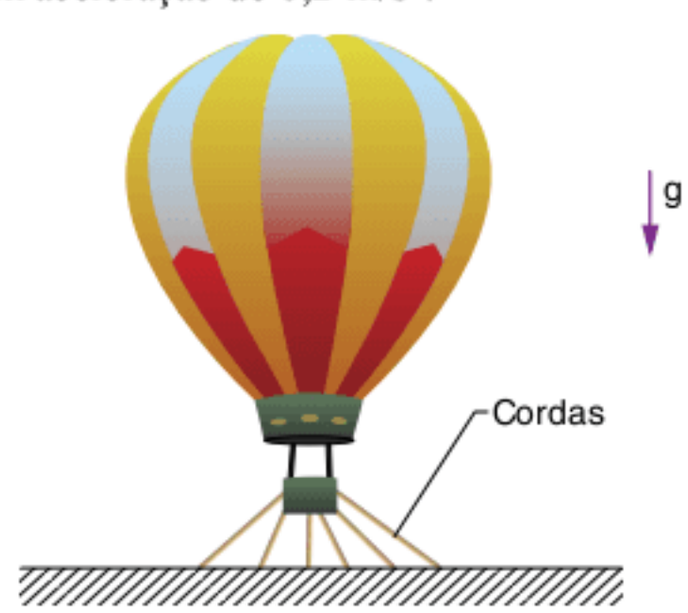
35 **Vunesp** Uma força de 231 N atua para cima, na extremidade de um pedaço de corda de 1,0 kg, que está amarrado a um bloco de 20,0 kg, como mostra a figura a seguir.



Considere g = 10 m/s² e calcule:

a) a aceleração do conjunto.
b) a força de tração na extremidade inferior da corda.

36 **Fuvest** Um balão de pesquisa, cheio de gás hélio, está sendo preparado para sua decolagem. A massa do balão vazio (sem gás) é M_B e a massa do gás hélio no balão é M. O balão está parado devido às cordas que o prendem ao solo. Se as cordas forem soltas, o balão iniciará um movimento de subida vertical com aceleração de 0,2 m/s².

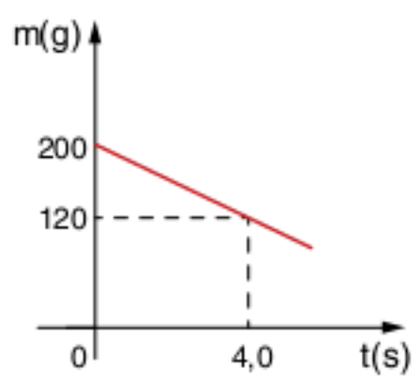


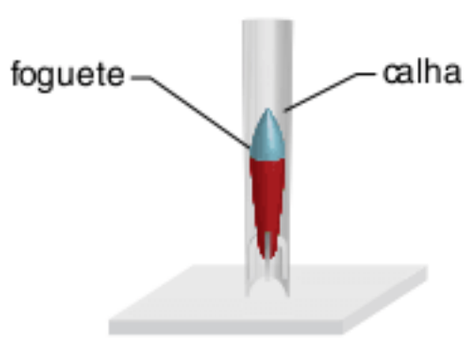
Considerando $g = 10\ m/s^2$, para que o balão permaneça parado, sem a necessidade das cordas, deve-se adicionar a ele um lastro de massa igual a:

(a) $0{,}2 \cdot M_B$
(b) $0{,}2 \cdot M$
(c) $0{,}02 \cdot M$
(d) $0{,}02 \cdot (M_B + M)$
(e) $0{,}02 \cdot (M_B - M)$

37 **Uerj 2008** Um elevador que se encontra em repouso no andar térreo é acionado e começa a subir em movimento uniformemente acelerado durante 8 segundos, enquanto a tração no cabo que o suspende é igual a 16.250 N. Imediatamente após esse intervalo de tempo, ele é freado com aceleração constante de módulo igual a $5\ m/s^2$, até parar.
Determine a altura máxima alcançada pelo elevador, sabendo que sua massa é igual a 1.300 kg.

38 **Cesgranrio** Durante as comemorações do "Tetra", um torcedor montou um dispositivo para soltar um foguete, colocando o foguete em uma calha vertical que lhe serviu de guia durante os instantes iniciais da subida. Inicialmente, a massa de combustível correspondia a 60% da massa total do foguete. Porém, a queima do combustível, que não deixou resíduos e provocou uma força vertical constante de 1,8 N, fez com que a massa total decrescesse, uniformemente, de acordo com o gráfico a seguir.





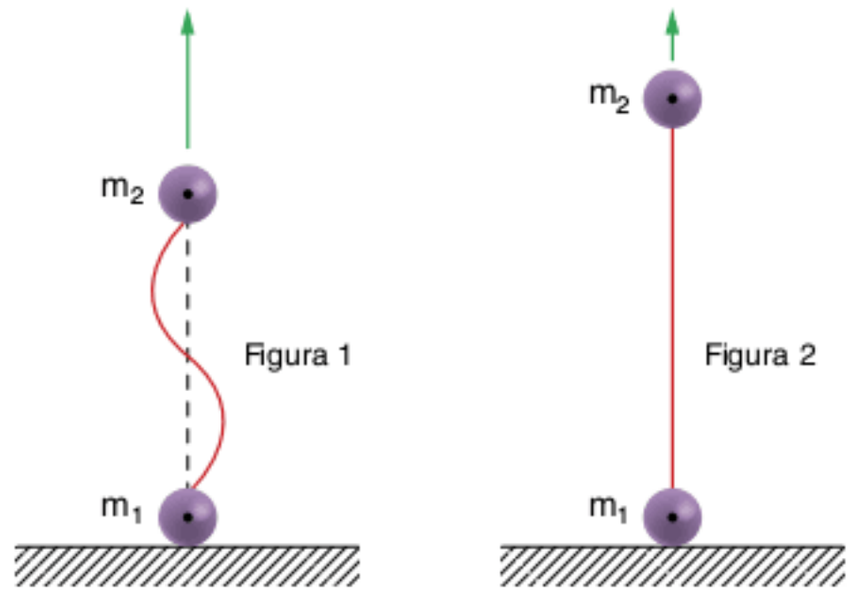
a) Considere que, neste dispositivo, os atritos são desprezíveis e que a aceleração da gravidade vale $10\ m/s^2$.
Considerando t = 0 o instante em que o combustível começou a queimar, então o foguete passou a se mover a partir do instante:

(a) 0
(b) 1,0 s
(c) 2,0 s
(d) 4,0 s
(e) 6,0 s

b) O foguete deixará de ser impulsionado pela queima do combustível no instante:

(a) 4,0 s
(b) 5,0 s
(c) 6,0 s
(d) 8,0 s
(e) 10 s

39 **UFRJ 2009** Duas pequenas esferas homogêneas de massas m_1 e m_2 estão unidas por um fio elástico muito fino de massa desprezível. Com a esfera de massa m_1 em repouso e apoiada no chão, a esfera de massa m_2 é lançada para cima ao longo da reta vertical que passa pelos centros das esferas, como indica a figura 1.
A esfera lançada sobe, esticando o fio até suspender a outra esfera do chão. A figura 2 ilustra o instante em que a esfera de massa m_1 perde contato com o chão, instante no qual o fio está ao longo da reta que passa pelos centros das esferas.



Considerando como dados m_1, m_2 e o módulo da aceleração da gravidade g, calcule, no instante em que a esfera de massa m_1 perde o contato com o chão:

a) a tensão no fio.
b) a aceleração da esfera de massa m_2.

40 **PUC-MG** Uma pessoa está dentro de um elevador em repouso, sobre uma balança que acusa uma leitura igual a P. Se o elevador subir com aceleração igual a duas vezes a aceleração da gravidade, a nova leitura será:

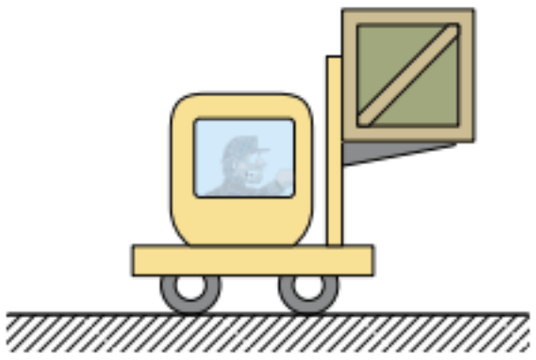
(a) P
(b) 2P
(c) 3P
(d) 4P
(e) 5P

41 **Efei** Um corpo está suspenso por um dinamômetro, ligado ao teto de um elevador ($g = 10{,}0\ N/kg$).

a) Se o elevador possui uma aceleração, na direção vertical e sentido para cima, de $2{,}0\ m/s^2$ e se a leitura no dinamômetro for de 960 N, qual é o peso desse corpo quando em repouso na superfície da Terra?
b) Se o elevador desce acelerado com uma aceleração $a = 5{,}0\ m/s^2$, qual será a leitura no dinamômetro?

42 **MED-SP** Um homem cujo peso é 600 N toma um elevador na metade de um edifício e pisa sobre uma balança. Quando o elevador começa a se mover, ele observa que a balança marca 720 N durante 5 segundos, a seguir marca 600 N durante 10 segundos, e, finalmente, 480 N durante 5 segundos, passados os quais o elevador para numa das extremidades do seu trajeto.
Calcule a altura aproximada do edifício.
Adote $g = 10\ m/s^2$.

43 **UFRJ 2001** Um operário usa uma empilhadeira de massa total igual a uma tonelada para levantar verticalmente uma caixa de massa igual a meia tonelada, com uma aceleração inicial de $0{,}5\ m/s^2$, que se mantém constante durante um curto intervalo de tempo.



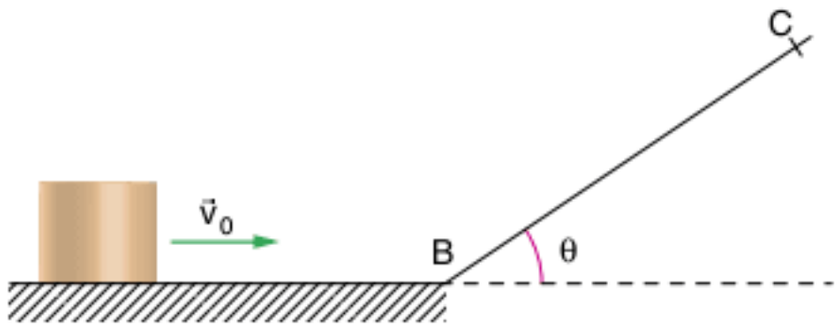
Use $g = 10\ m/s^2$ e calcule, neste curto intervalo de tempo:

a) a força que a empilhadeira exerce sobre a caixa.

b) a força que o chão exerce sobre a empilhadeira. (Despreze a massa das partes móveis da empilhadeira).

Plano inclinado

44 **UFG** Um bloco desliza sobre um plano horizontal sem atrito com velocidade constante $\vec{v}_0$. Em seguida, ele sobe uma rampa de inclinação θ, também sem atrito, até parar no ponto C da figura.

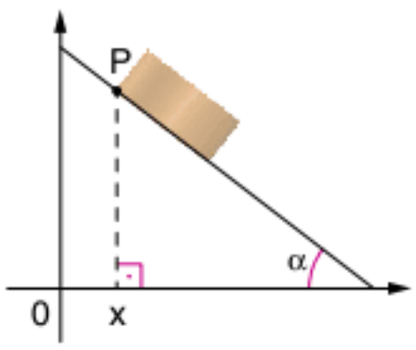


A distância BC percorrida ao longo da rampa é:

(a) $\dfrac{v_0^2}{2g.\,tg\,\theta}$ (c) $\dfrac{2v_0^2}{g.\,sen\,\theta}$ (e) $\dfrac{v_0^2}{2g.\,sen\,\theta}$

(b) $\dfrac{v_0^2}{2g.\cos\theta}$ (d) $\dfrac{v_0^2}{g.\,sen\,\theta}$

45 **UFF** Um bloco desliza, sem atrito, sobre um plano inclinado de um ângulo α, conforme mostra a figura a seguir.



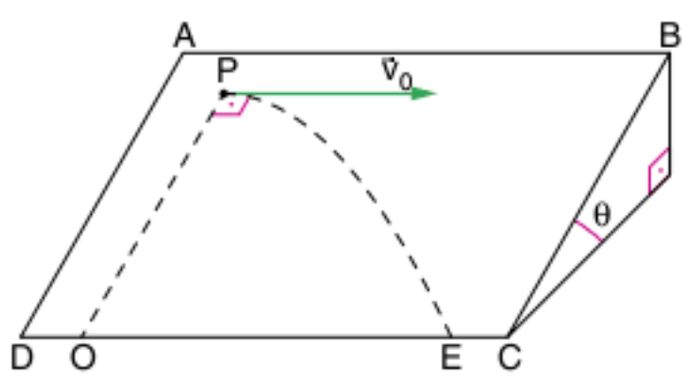
Considerando-se x a abscissa de P num instante genérico t e sabendo-se que o bloco partiu do repouso em x = 0 e t = 0, pode-se afirmar que:

(a) $x = \frac{1}{4}gt^2.\,sen\,(2\alpha)$ (d) $x = \frac{1}{2}gt^2.\cos(2\alpha)$

(b) $x = \frac{1}{2}gt^2.\,sen\,\alpha$ (e) $x = \frac{1}{2}gt^2.\,sen\,(2\alpha)$

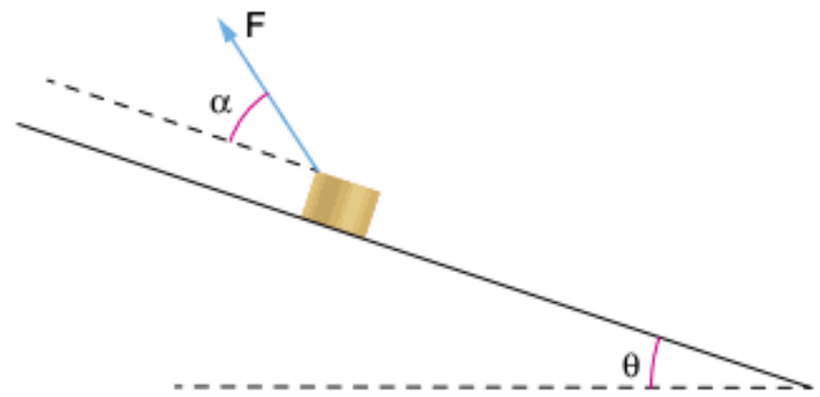
(c) $x = \frac{1}{4}gt^2.\cos\alpha$

46 Consideremos um prisma triangular apoiado sobre o solo (suposto plano e horizontal), como mostra a figura. A face ABCD do prisma forma um ângulo θ com o solo. De um ponto P, pertencente à face ABCD, lança-se uma partícula com velocidade inicial paralela à aresta $\overline{CD}$. São dados: PO = 50 m, g = 10 m/s², v_0 = 8,0 m/s e sen θ = 0,40.



Desprezando o atrito, calcule a distância OE.

47 **UFMS 2004** Para equilibrar um bloco de peso (P), colocado sobre um plano inclinado sem atrito, aplica-se uma força de intensidade (F), orientada segundo um ângulo (α) em relação ao mesmo plano inclinado (figura a seguir).



Estando o plano inclinado de um ângulo (θ) em relação à horizontal, é correto afirmar que:

01 F = P, somente quando θ = α = 45º.

02 F = P·tgα, se θ = α.

04 $F = \dfrac{P.\cos\alpha}{tg\,\theta}$.

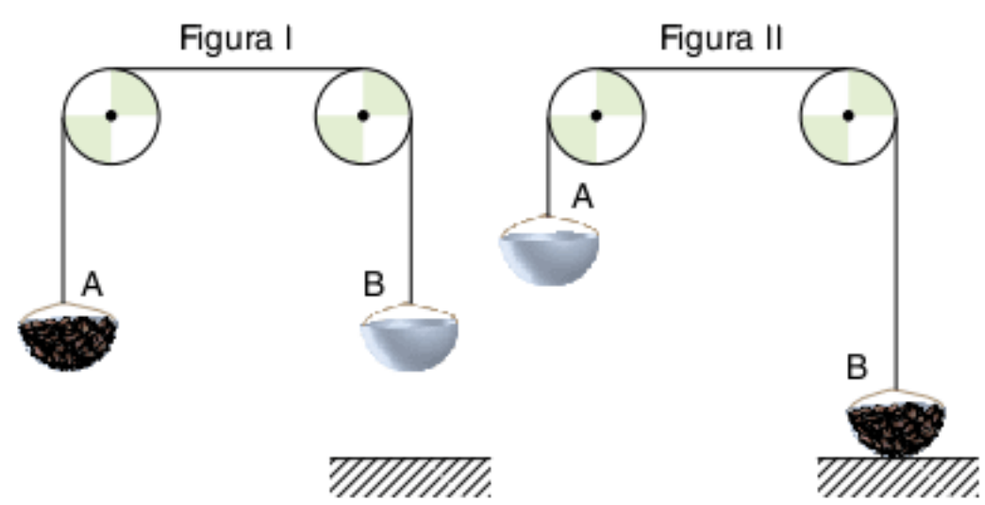
08 a força exercida pelo bloco sobre o plano terá intensidade igual a $\dfrac{P.\cos(\alpha+\theta)}{\cos\alpha}$.

16 a força exercida pelo bloco sobre o plano terá intensidade igual a P·cos θ – F·sen α.

Soma = ☐

Polia simples – movimento vertical

48 **Fuvest** A figura I, a seguir, indica um sistema composto por duas roldanas leves, capazes de girar sem atrito, e um fio inextensível que possui dois suportes em suas extremidades. O suporte A possui um certo número de formigas idênticas, com 20 miligramas cada. O sistema está em equilíbrio. Todas as formigas migram então para o suporte B e o sistema movimenta-se de tal forma que o suporte B se apoia numa mesa, que exerce uma força de 40 milinewtons sobre ele, conforme ilustra a figura II.

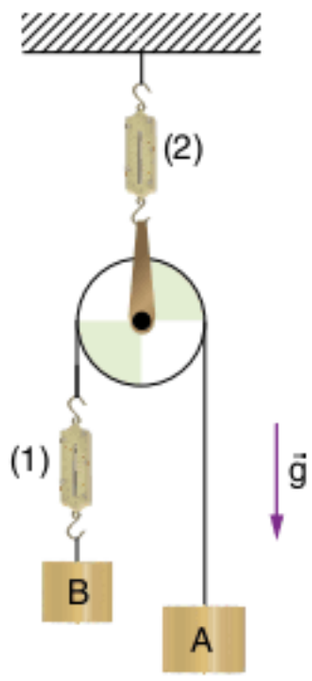


Determine:

a) o peso de cada formiga.

b) o número total de formigas.

49 Na máquina de Atwood da figura a seguir, o fio (inextensível) e a polia têm pesos desprezíveis, a resistência do ar é insignificante e a aceleração da gravidade tem módulo g. As massas dos blocos A e B são, respectivamente, M e m, com M > m.



Sendo a o módulo da aceleração dos blocos e D_1 e D_2 as indicações dos dinamômetros ideais (1) e (2), analise as proposições seguintes.

I. $a < g$

II. $D_1 = \frac{2Mm}{M+m}g$

III. $D_2 = (M + m)g$

IV. $mg < D_1 < Mg$

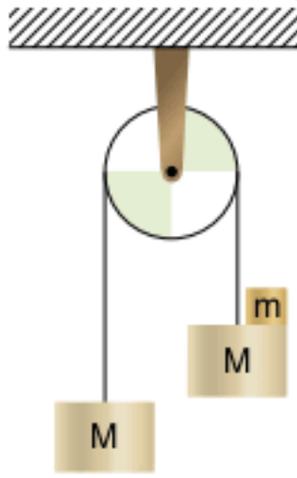
Responda mediante o código.

(a) Todas as proposições são corretas.
(b) Todas as proposições são erradas.
(c) Apenas as proposições I e III são corretas.
(d) Apenas as proposições I, II e IV são corretas.
(e) Apenas as proposições I, III e IV são corretas.

50 **Mackenzie** Uma corda envolve uma roldana fixa sem atrito. Numa das extremidades da corda está um macaco e, na outra, um bloco cúbico de peso igual ao do macaco. Na face do cubo voltada para o macaco, há um espelho plano. O macaco começa a subir pela corda. Podemos então afirmar que:

(a) o macaco só verá sua imagem no espelho se permanecer em repouso.
(b) o macaco só verá sua imagem no espelho se a sua velocidade for maior que a do cubo.
(c) o macaco não verá sua imagem no espelho, porque o cubo sobe com maior velocidade.
(d) o macaco verá constantemente sua imagem.

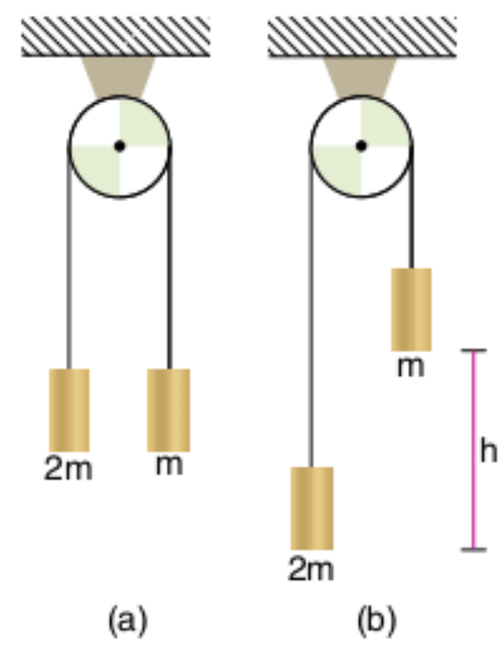
51 **ITA** Dois blocos de massa M estão unidos por um fio de massa desprezível que passa por uma roldana com um eixo fixo. Um terceiro bloco de massa m é colocado suavemente sobre um dos blocos, como mostra a figura.



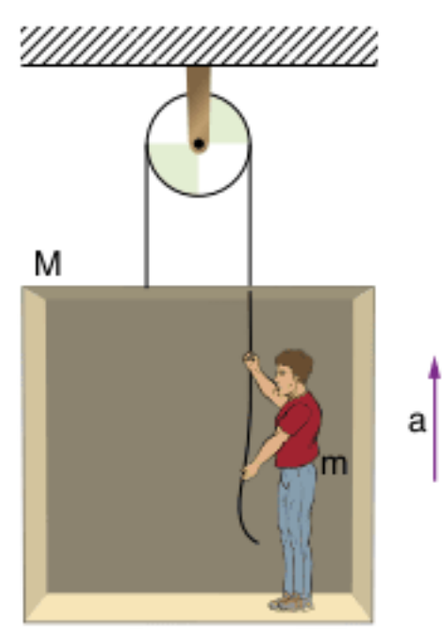
Com que força esse pequeno bloco de massa m pressionará o bloco sobre o qual foi colocado?

(a) $\frac{2mMg}{2M+m}$
(b) mg
(c) (m – M)g
(d) $\frac{mg}{2M+m}$
(e) Outra expressão.

52 **UFRJ 2002** O sistema ilustrado na figura a seguir é uma máquina de Atwood. A roldana tem massa desprezível e gira livremente em torno de um eixo fixo perpendicular ao plano da figura, passando pelo centro geométrico da roldana. Uma das massas vale m e a outra 2m. O sistema encontra-se inicialmente na situação ilustrada pela figura a, isto é, com as duas massas no mesmo nível. O sistema é então abandonado a partir do repouso e, após um certo intervalo de tempo, a distância vertical entre as massas é h, figura b. Calcule o módulo da velocidade de cada uma das massas na situação mostrada na figura b.



53 **UFSC** O sistema esquematizado compõe-se de um elevador de massa M e um homem de massa m. O elevador está suspenso a uma corda que passa por uma polia fixa e vem às mãos do operador; a corda e a roldana são supostas ideais. O operador puxa a corda e sobe com aceleração constante a, juntamente com o elevador. São supostos conhecidos M, m, a e g.

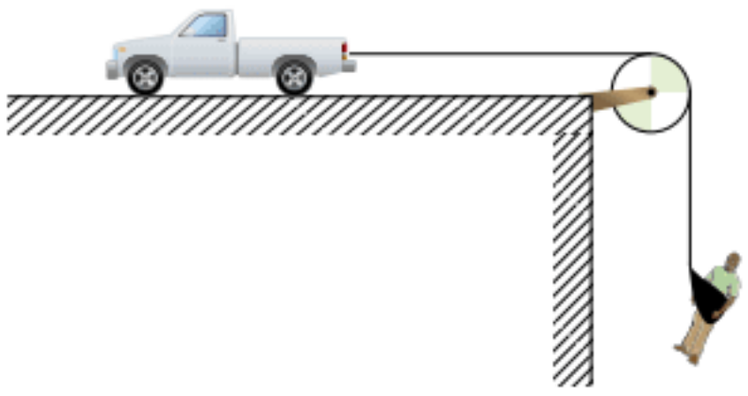


Determine:

a) a intensidade da tração no fio.
b) a intensidade da força que a plataforma exerce no operador.

Polia simples – movimento vertical e horizontal

54 **PUC-SP** Uma caminhonete de 2.000 kg tenta resgatar um operário a partir de um precipício, usando um cabo inextensível que liga o veículo ao infortunado trabalhador, de massa 80 kg. Despreze o atrito na polia.



Se o homem sobe com aceleração de 1 m/s², responda:
Dado: g = 10 m/s².

a) Qual a força que movimenta a caminhonete?
b) O cabo suporta no máximo uma tração de 2.000 N. Será possível o resgate com essa aceleração sem que ele arrebente?

55 **Vunesp** Nas duas situações mostradas nas figuras adiante, carrinhos, mesas, roldanas e fios são idênticos. Observa-se porém que, puxando o fio (Fig. 2) com uma força $\vec{F}$ igual ao peso $\vec{P}$ do corpo dependurado (Fig. 1), a aceleração do carrinho é maior.

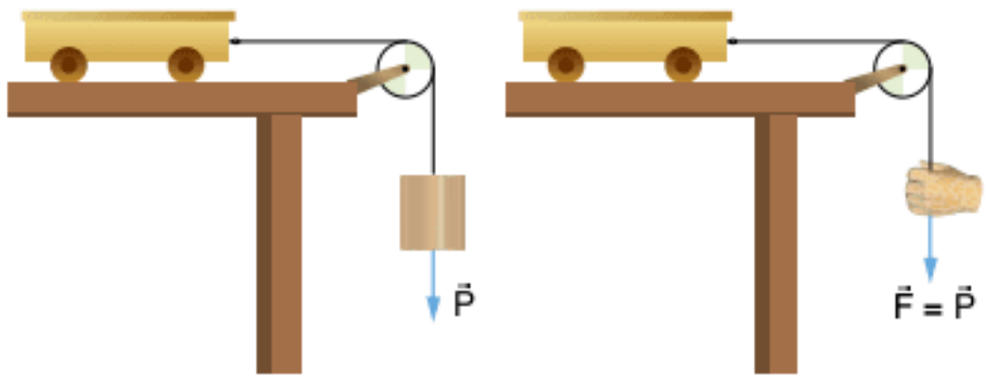
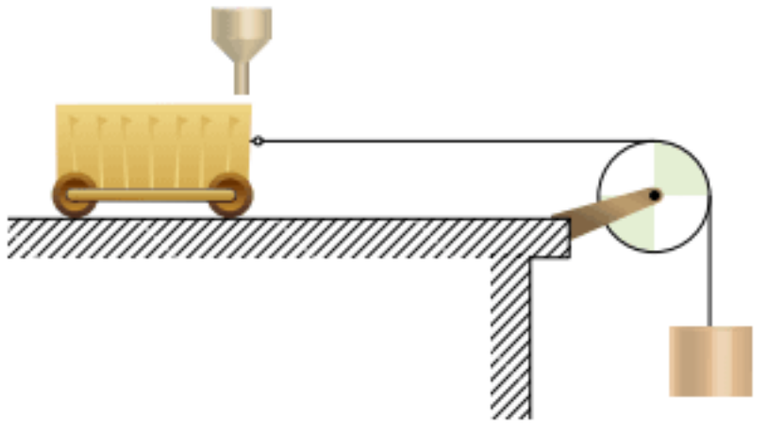


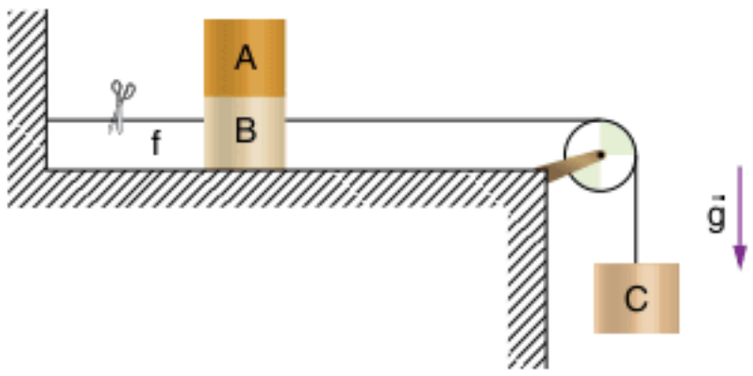
Figura 1 Figura 2

Com base na Segunda Lei de Newton, justifique o fato observado.

56 **Faap-SP** Mediante fio e polia ideais, o peso suspenso de massa 100 g solicita horizontalmente o carrinho de comprimento 2 m e massa 3,9 kg, que está sobre a mesa. No instante indicado na figura, o carrinho é solto e começa a gotejar líquido dentro dele à taxa de 180 gotas por minuto. Sendo o volume de cada gota igual a 0,1 cm³, calcule o volume máximo de líquido armazenado pelo carrinho. Despreze todos os atritos, assim como a massa das gotas em comparação com a massa do carrinho, e considere g = 10 m/s².



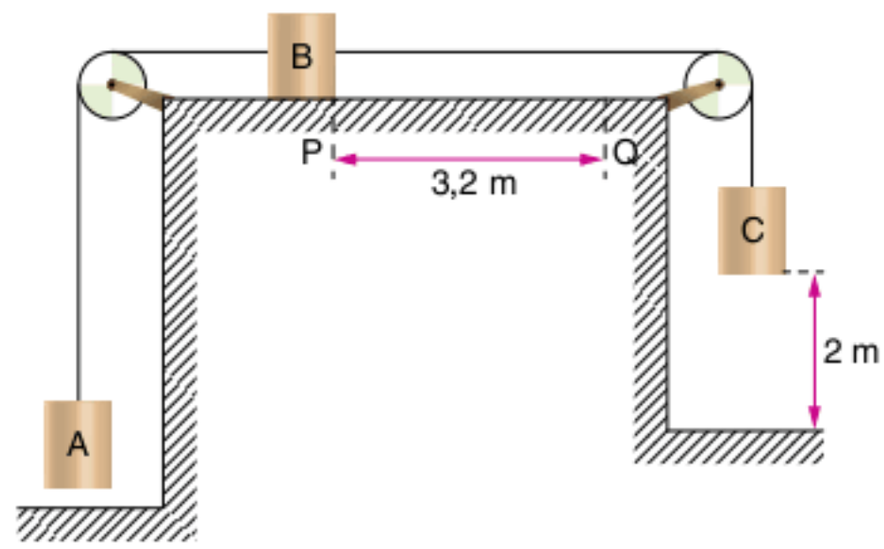
57 **Fuvest** Os corpos A, B e C têm massas iguais. Um fio inextensível e de massa desprezível une o corpo C ao B, passando por uma roldana de massa desprezível. O corpo A está apoiado sobre B. Despreze qualquer efeito das forças de atrito. O fio f mantém o sistema em repouso.



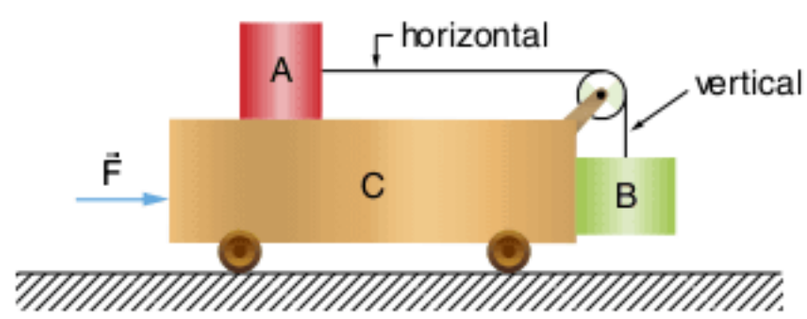
Logo que o fio f é cortado, as acelerações a_A, a_B e a_C dos corpos A, B e C serão:

(a) $a_A = 0$; $a_B = \frac{g}{2}$; $a_C = \frac{g}{2}$
(b) $a_A = \frac{g}{3}$; $a_B = \frac{g}{3}$; $a_C = \frac{g}{3}$
(c) $a_A = 0$; $a_B = \frac{g}{3}$; $a_C = \frac{g}{3}$
(d) $a_A = 0$; $a_B = g$; $a_C = g$
(e) $a_A = \frac{g}{2}$; $a_B = \frac{g}{2}$; $a_C = \frac{g}{2}$

58 **Mackenzie** O esquema a seguir representa três corpos de massas m_A = 2 kg, m_B = 2 kg e m_C = 6 kg, inicialmente em repouso na posição indicada. Num instante, abandona-se o sistema. Os fios são inextensíveis e de massa desprezível. Desprezando os atritos e considerando g = 10 m/s², determine o tempo que B leva para ir de P a Q.



59 No sistema esquematizado na figura, C é um carrinho em movimento acelerado, seguindo trilhos retilíneos e horizontais. Os blocos A e B, interligados por um fio que passa por uma polia, não se movem em relação a C.
Dados: Massa de A = 2 kg; massa de B = 10 kg; massa de C = 88 kg; g = 10 m/s².

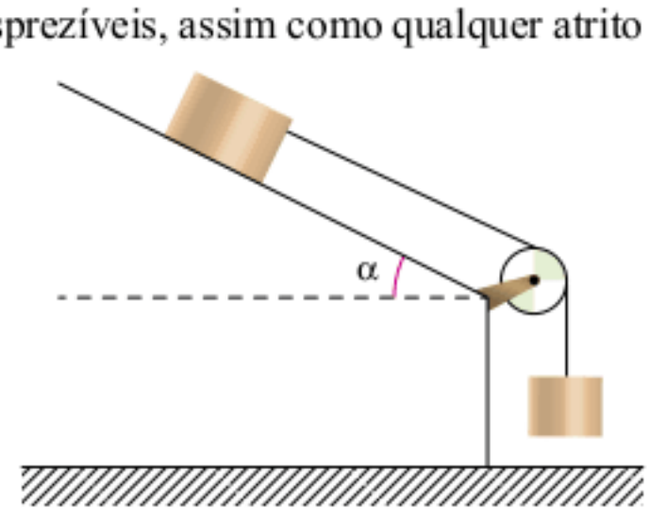


Desprezando atritos e influências do ar, e considerando ideais o fio e a polia, calcule a intensidade:

a) da força de tração no fio.
b) da aceleração do sistema.
c) da força que C exerce em B.
d) da força $\vec{F}$ que acelera o sistema.

Polia simples – plano inclinado

60 **UFMA** Dois blocos de mesma massa são conectados da maneira indicada na figura a seguir. As massas da corda e da roldana são desprezíveis, assim como qualquer atrito no sistema.

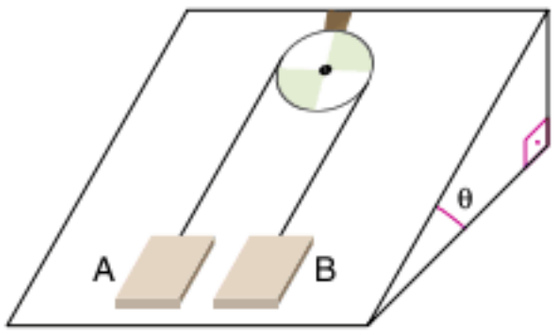


Baseados nessas informações, determine:

a) a aceleração dos blocos.

b) a tração na corda.

61 Um sistema formado por dois blocos, A e B, com um fio ideal e uma polia também ideal, foi montado sobre um plano que tem inclinação θ em relação a um plano horizontal, como mostra a figura. As massas de A e B são, respectivamente, iguais a 5,0 kg e 15 kg. São dados: $g = 10\ m/s^2$ e $sen\theta = 0{,}60$.

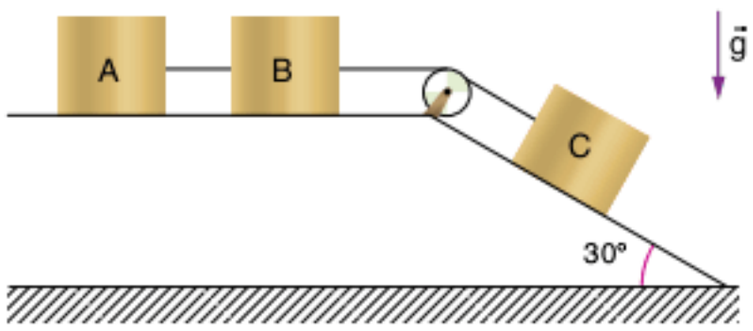


Desprezando o atrito, calcule:

a) o módulo da aceleração do bloco B.

b) o módulo da tração no fio.

62 **FMABC** Na figura, considere desprezível o atrito nos planos e na polia. A massa de A é de 4,0 kg, a massa de B é de 0,60 kg, a massa de C é de 0,40 kg e $g = 10\ m/s^2$.



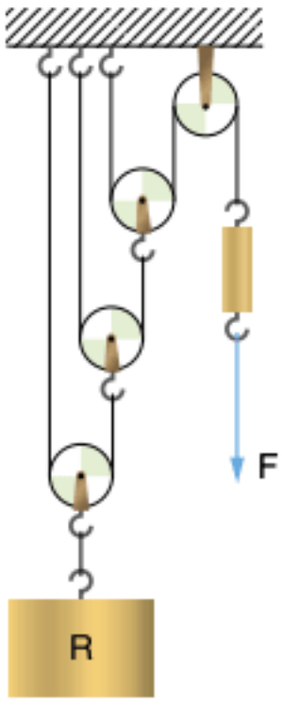
a) Qual o módulo da aceleração do conjunto?

b) Quais as intensidades das forças que tracionam os fios que ligam os corpos A e B e os corpos B e C?

c) Se o sistema for impedido de se mover por uma força aplicada em A, qual o valor dessa força?

Polia móvel

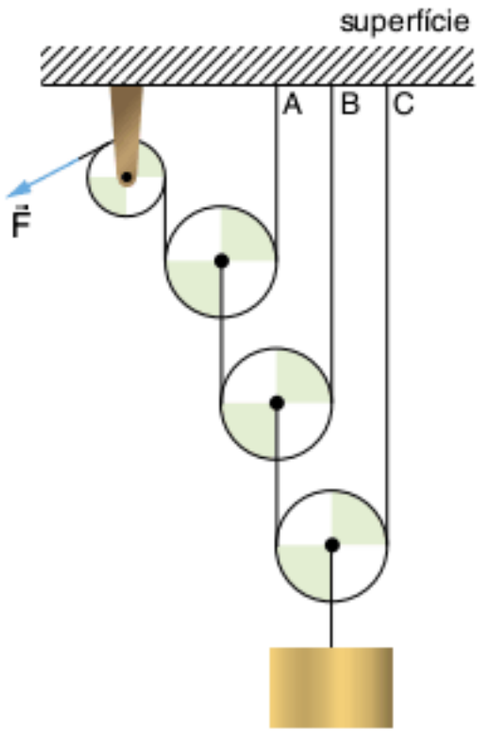
63 **Uerj 2008** A figura a seguir representa um sistema composto por uma roldana com eixo fixo e três roldanas móveis, no qual um corpo R é mantido em equilíbrio pela aplicação de uma força F, de uma determinada intensidade.



Considere um sistema análogo, com maior número de roldanas móveis e intensidade de F inferior a 0,1% do peso de R. O menor número possível de roldanas móveis para manter esse novo sistema em equilíbrio deverá ser igual a:

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11

64 **Cesgranrio** Um corpo de peso P encontra-se em equilíbrio, devido à ação da força $\vec{F}$, como indica a figura a seguir. Os pontos A, B e C são os pontos de contato entre os fios e a superfície.

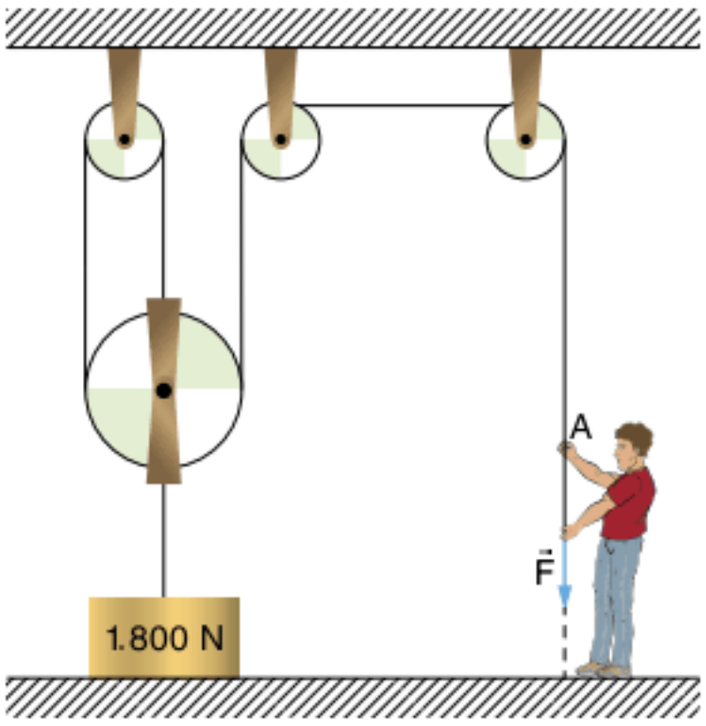


Determine a força que a superfície exerce sobre os fios nos pontos A, B e C, respectivamente, nos seguintes casos:

a) as polias não têm massa.

b) o peso de cada polia vale P.

65 **Fuvest** Para erguer um bloco de peso 1.800 N, é utilizado um sistema de polias e fios conforme o esquema.



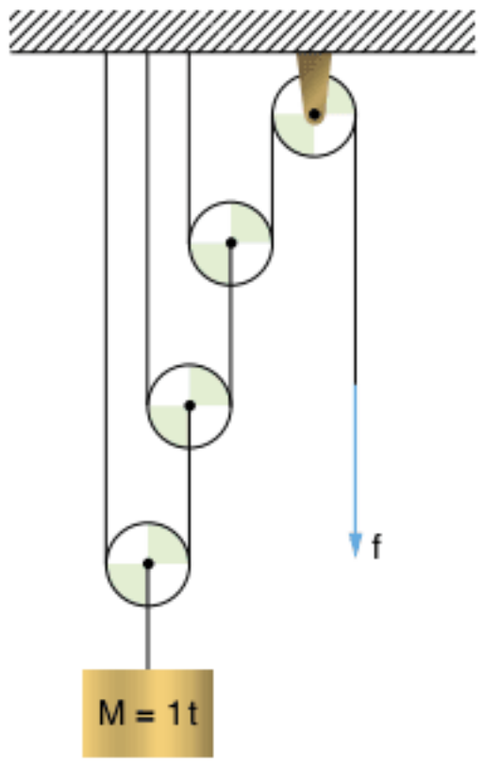
Considerando-se o sistema ideal:

Adote $g = 10\ m/s^2$.

a) que força mínima F se deve aplicar na extremidade A do fio para que o corpo comece a ser erguido?

b) seria possível a uma pessoa de peso 500 N erguer o bloco puxando o fio verticalmente pelo ponto A? Explique.

66 **UFG** O sistema de roldanas da figura a seguir apresenta propriedades "multiplicadoras" de força.



Desprezando as massas das roldanas e das cordas (considere $g = 10\ m/s^2$), calcule:

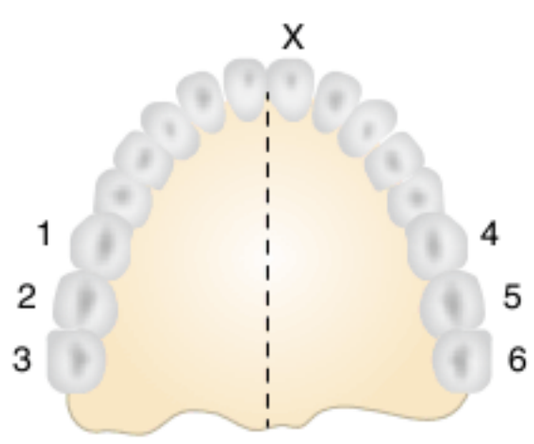
a) o valor de f (em newtons) para M subir com aceleração constante de $1\ m/s^2$.

b) o valor de f (em newtons) para M descer com aceleração constante de $1\ m/s^2$.

c) a distância que a corda (onde f atua) desce quando o bloco M sobe 10 cm.

Molas

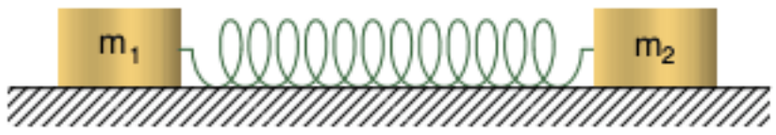
67 **Uerj** Na figura a seguir, o dente incisivo central X estava deslocado alguns milímetros para frente.



Um ortodontista conseguiu corrigir o problema usando apenas dois elásticos idênticos, ligando o dente X a dois dentes molares indicados na figura pelos números de 1 a 6. A correção mais rápida e eficiente corresponde ao seguinte par de molares:

(a) 1 e 4
(b) 2 e 5
(c) 3 e 4
(d) 3 e 6

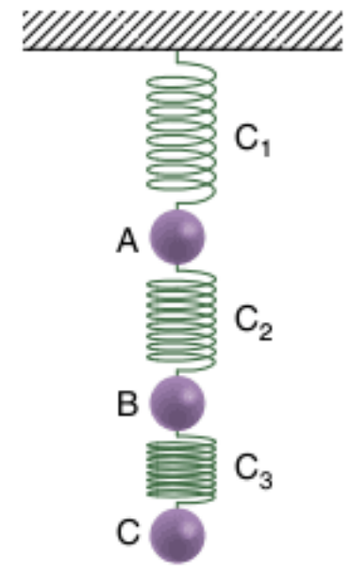
68 **UFPA** Dois blocos, de massas m_1 e m_2, interligados por uma mola fina, estão colocados sobre uma mesa plana, horizontal, sem atrito.



A razão entre os valores de suas acelerações, a_1 e a_2, após terem sido afastados e soltos, é:

(a) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$
(b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1 - m_2}{m_1}$
(c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1 - m_1}{m_2}$
(d) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}$
(e) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$

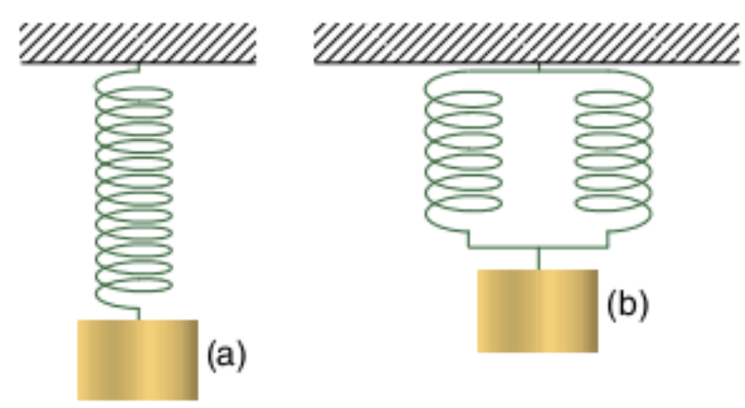
69 **Mackenzie** Sejam três molas com comprimentos naturais de 10 cm cada uma, sustentando os corpos A, B e C, de acordo com a figura. O sistema está em equilíbrio e cada corpo tem peso igual a 4 kgf.



Sendo as constantes elásticas das molas iguais a 2 kgf/cm e desprezando os pesos das molas, os novos comprimentos C_1, C_2 e C_3 das molas serão, em centímetros:

(a) $C_1 = 16$; $C_2 = 14$; $C_3 = 12$
(b) $C_1 = C_2 = C_3 = 16$
(c) $C_1 = C_2 = C_3 = 12$
(d) $C_1 = 12$; $C_2 = 14$; $C_3 = 16$
(e) $C_1 = C_2 = C_3 = 14$

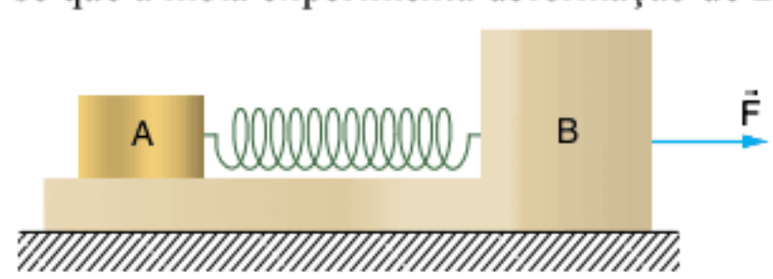
70 **Cesgranrio** Um corpo suspenso a uma mola ideal alonga-a de 12 cm (Fig. a). Corta-se a mola no meio e suspende-se o mesmo corpo ao conjunto das duas metades (Fig. b).



Cada uma dessas metades se acha alongada de:

(a) 3,0 cm
(b) 9,5 cm
(c) 24 cm
(d) 6,0 cm
(e) 12 cm

71 **FEI** Os corpos A e B representados na figura possuem, respectivamente, massas $m_A = 2{,}0$ kg e $m_B = 4{,}0$ kg. A mola é ideal e tem constante elástica $k = 50$ N/m. Despreze os atritos. Aplicando-se ao conjunto a força $\vec{F}$ constante e horizontal, verifica-se que a mola experimenta deformação de 20 cm.



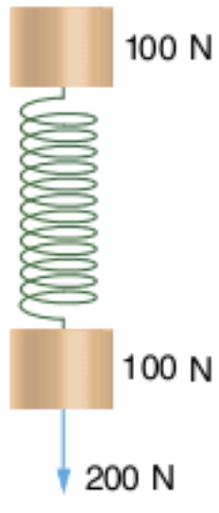
Calcule as intensidades:

a) da aceleração do conjunto.

b) da força $\vec{F}$.

72 **Fatec** O conjunto dos blocos representados na figura está sujeito a uma força vertical para baixo, constante, de 200 N. A constante elástica da mola (de massa desprezível) que une os blocos vale 1.000 N/m e o movimento do sistema se dá na mesma linha vertical.

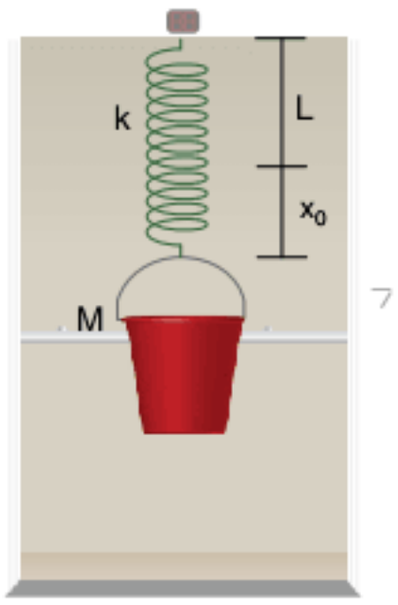
Adote $g = 10\ m/s^2$.



Qual é, em cm, a deformação da mola?

73 **UFRJ 2008** Uma mola de constante elástica k e comprimento natural L está presa, por uma de suas extremidades, ao teto de um elevador e, pela outra extremidade, a um balde vazio de massa M que pende na vertical. Suponha que a mola seja ideal, isto é, que tenha massa desprezível e satisfaça à Lei de Hooke.

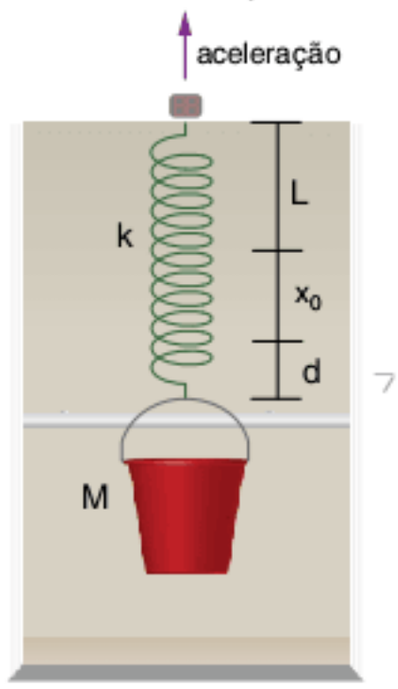
Figura 1



a) Calcule a elongação x_0 da mola, supondo que tanto o elevador quanto o balde estejam em repouso, situação ilustrada na figura 1, em função de M, k e do módulo g da aceleração da gravidade.

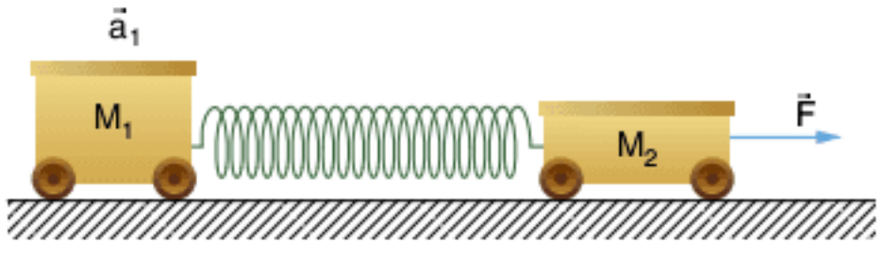
b) Considere, agora, uma situação na qual o elevador se mova com aceleração constante para cima e o balde esteja em repouso relativamente ao elevador. Calcule o módulo da aceleração do balde em termos de k, M e d.

Figura 2



Verifica-se que a elongação da mola é maior do que a anterior por um valor d, como ilustra a figura 2.

74 **Fuvest** Dois vagões de massas M_1 e M_2 estão interligados por uma mola de massa desprezível e o conjunto é puxado ao longo de trilhos retilíneos e horizontais por uma força que tem a direção dos trilhos. Tanto o módulo da força quanto o comprimento da mola podem variar com o tempo. Num determinado instante, os módulos da força e da aceleração do vagão de massa M_1 valem, respectivamente, F_1 e a_1, tendo ambas o mesmo sentido.



O módulo da aceleração do vagão de massa M_2, nesse mesmo instante, vale:

(a) $\dfrac{F - M_1 a_1}{M_2}$

(b) $\dfrac{F}{M_1 + M_2}$

(c) $\dfrac{F}{M_2}$

(d) $\dfrac{F}{M_2} - a_1$

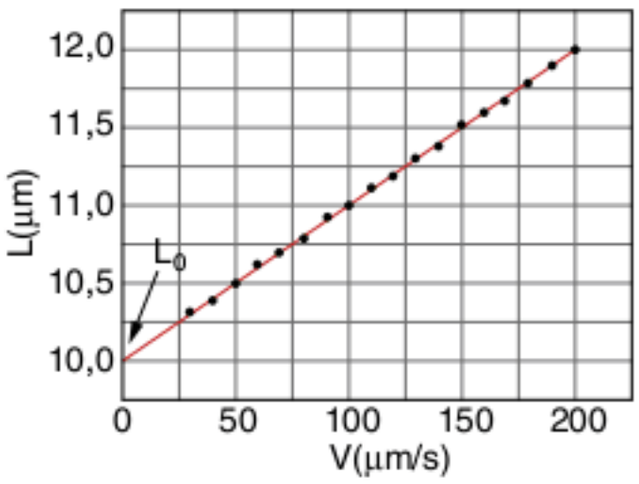
(e) $\dfrac{F}{M_2} + a_1$

75 **Unicamp 2004** A elasticidade das hemácias, muito importante para o fluxo sanguíneo, é determinada arrastando-se a hemácia com velocidade constante V através de um líquido. Ao ser arrastada, a força de atrito causada pelo líquido deforma a hemácia, esticando-a, e o seu comprimento pode ser medido através de um microscópio (vide esquema). O gráfico apresenta o comprimento L de uma hemácia para diversas velocidades de arraste V. O comprimento de repouso desta hemácia é L_0 = 10 micra.

a) A força de atrito é dada por $F_{atrito} = -bV$, com b sendo uma constante. Qual é a dimensão de b, e quais são as suas unidades no SI?

b) Sendo $b = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ em unidades do SI, encontre a força de atrito quando o comprimento da hemácia é de 11 micra.

c) Supondo que a hemácia seja deformada elasticamente, encontre a constante de mola k, a partir do gráfico.

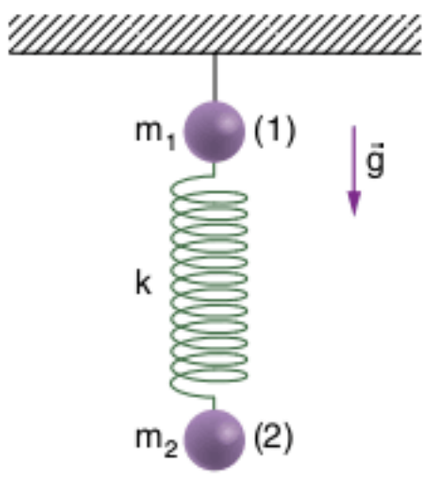


76 **Fuvest** Uma tira elástica de borracha está presa no teto de uma sala. Um macaco dependurado na tira sobe em direção ao teto com velocidade praticamente constante.

Podemos afirmar que, à medida que o macaco sobe:

(a) a força que a tira exerce no teto aumenta.
(b) a força que a tira exerce no teto diminui.
(c) a distância da extremidade inferior da tira ao chão aumenta.
(d) a distância da extremidade inferior da tira ao chão diminui.
(e) a distância da extremidade inferior da tira ao chão não se altera.

77 **Fuvest** Um conjunto de duas bolas de massas m_1 e m_2, ligadas através de uma mola ideal de constante elástica k, está em repouso, preso ao teto, conforme indica a figura. No instante t = 0, é cortado o fio que prende a bola (1) ao teto (portanto, a tensão no fio se anula).

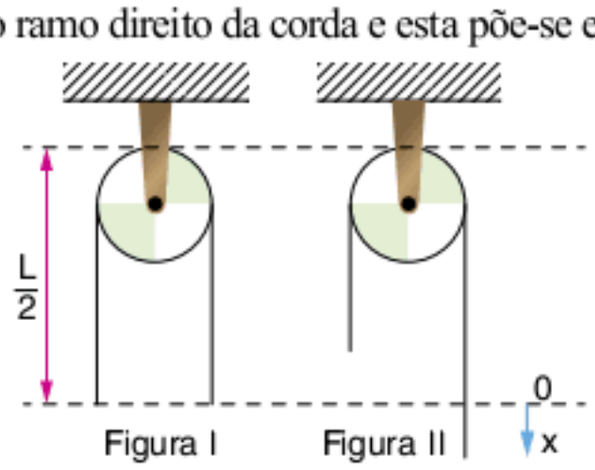


Determine:

a) a aceleração da bola (1) no instante t = 0.
b) a aceleração da bola (2) no instante t = 0.

Fio com massa

78 Na figura I, a corda homogênea de comprimento L repousa apoiada na polia ideal de dimensões desprezíveis. Um pequeno impulso é dado ao ramo direito da corda e esta põe-se em movimento.



Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, aponte a opção que mostra como varia o módulo da aceleração da extremidade direita da corda em função da coordenada x mostrada na figura II.

(a) $g \cdot \frac{x}{L}$

(b) $g \cdot \frac{2x}{L}$

(c) $g \cdot \frac{2x}{3L}$

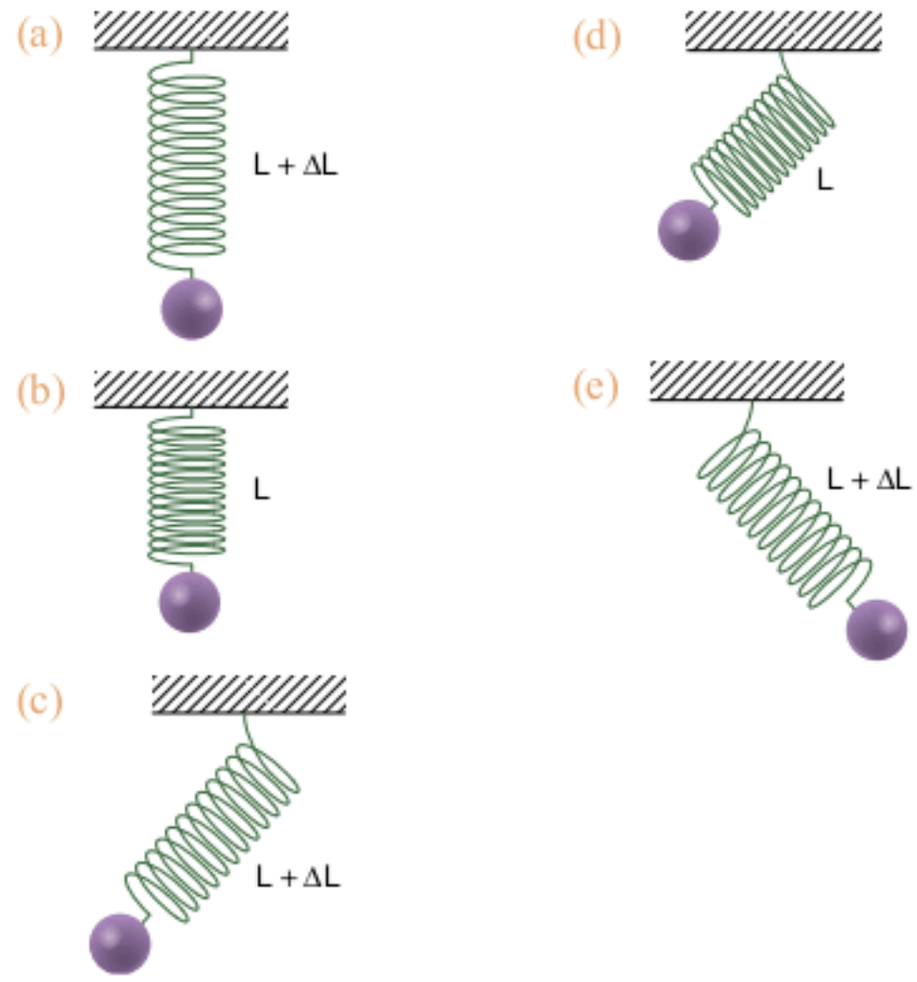
(d) g

(e) Faltam dados para uma conclusão.

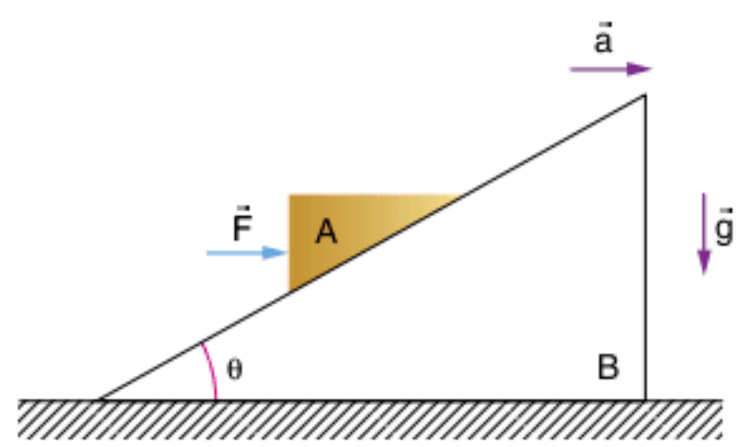
Corpo suspenso ou movimento de plano inclinado

79 **UFV** Um carro desloca-se para a direita. No seu interior, existe uma esfera suspensa por uma mola. Quando não submetida a nenhuma força, esta mola tem comprimento L. Nessas condições, indique a melhor representação para a situação de cada item.

a) O carro possui velocidade constante.
b) O carro está acelerando.
c) O carro está freando.

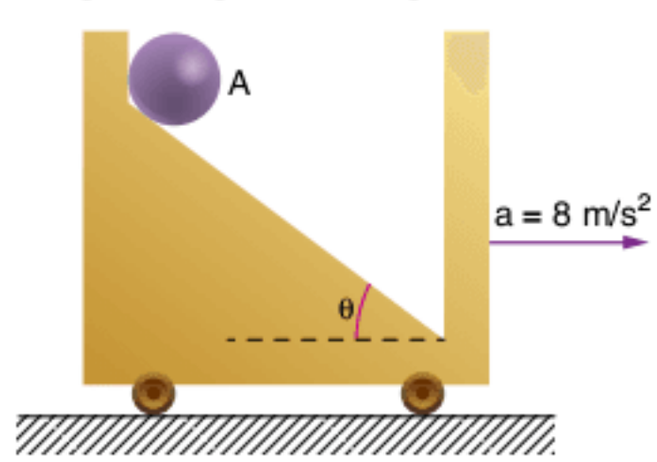


80 **Fuvest** Duas cunhas, A e B, de massas M_A e M_B, respectivamente, deslocam-se juntas sobre um plano horizontal sem atrito, com aceleração constante $\vec{a}$, sob a ação de uma força horizontal $\vec{F}$ aplicada à cunha A, como mostra a figura. A cunha A permanece parada em relação à cunha B, apesar de não haver atrito entre elas.



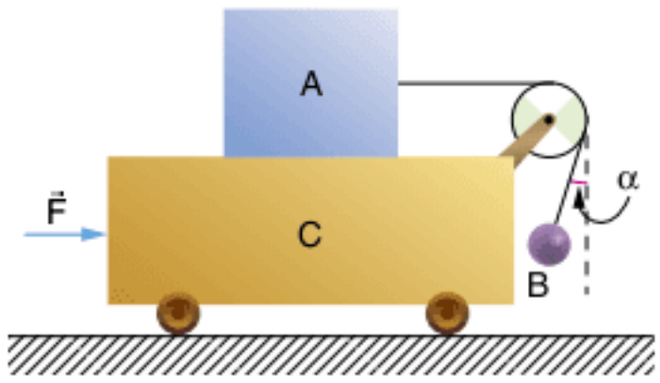
a) Determine a intensidade da força $\vec{F}$ aplicada à cunha A.
b) Determine a intensidade da força $\vec{F}_N$ que a cunha B aplica à cunha A.
c) Sendo θ o ângulo de inclinação da cunha B, determine a tangente de θ.

81 O carrinho da figura desliza no plano horizontal com aceleração 8 m/s². O corpo A possui 4 kg de massa e não há atrito entre o corpo e os planos de apoio.



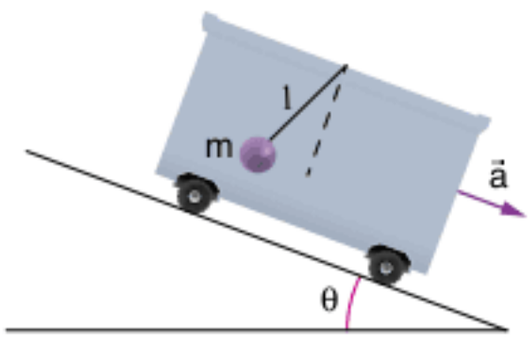
Dados senθ = 0,60 e g = 10 m/s^2, determine a força horizontal que a parede vertical exerce no corpo, considerando-o em repouso em relação ao carrinho.

82 No esquema da figura a seguir, tem-se o sistema locomovendo-se horizontalmente, sob a ação da resultante externa $\vec{F}$. A polia tem peso desprezível, o fio que passa pela mesma é ideal e a resistência do ar no local do movimento é irrelevante. Não há contato da esfera B com a parede vertical.



Sendo m_A = 10,0 kg, m_B = 6,00 kg, m_C = 144 kg e g = 10,0 m/s^2, determine a intensidade de $\vec{F}$ que faz com que não haja movimento dos dois corpos A e B em relação a C.

83 **ITA 2005** Considere uma rampa de ângulo θ com a horizontal sobre a qual desce um vagão, com aceleração $\vec{a}$, em cujo teto está dependurada uma mola de comprimento l, de massa desprezível e constante de mola k, tendo uma massa m fixada na sua extremidade.



Considerando que l_0 é o comprimento natural da mola e que o sistema está em repouso com relação ao vagão, pode-se dizer que a mola sofreu uma variação de comprimento $\Delta l = l - l_0$ dada por:

(a) $\Delta l = \dfrac{mg.\,\text{sen}\,\theta}{k}$

(b) $\Delta l = \dfrac{mg.\cos\theta}{k}$

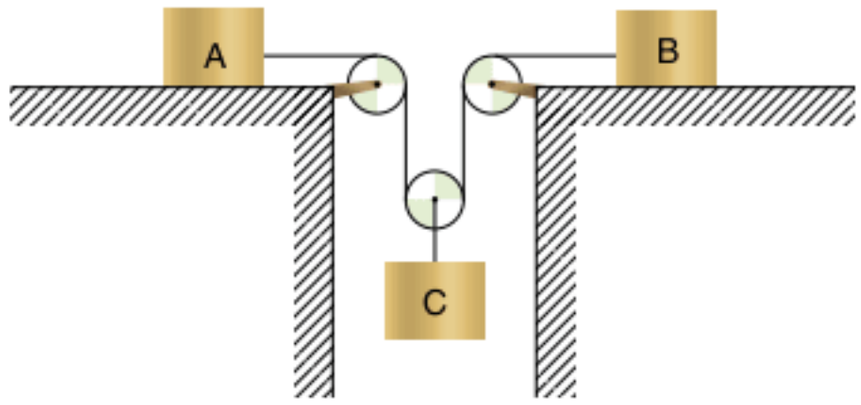
(c) $\Delta l = \dfrac{mg}{k}$

(d) $\Delta l = \dfrac{m\sqrt{a^2 - 2ag.\cos\theta + g^2}}{k}$

(e) $\Delta l = \dfrac{m\sqrt{a^2 - 2ag.\,\text{sen}\,\theta + g^2}}{k}$

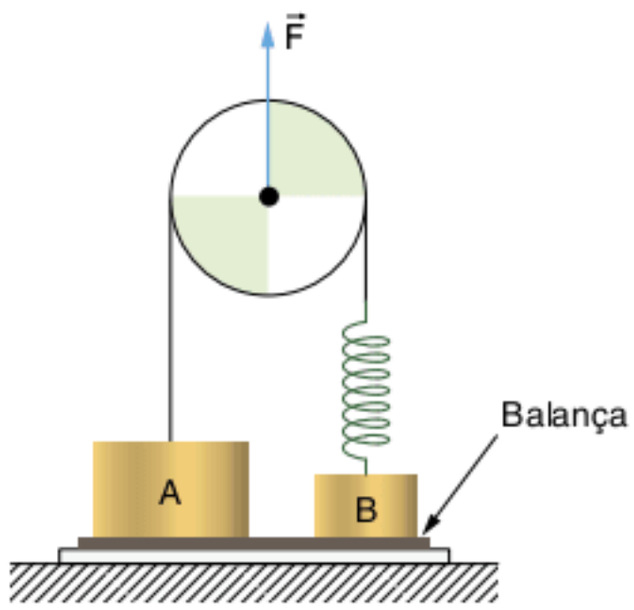
Vínculos geométricos

84 No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais, não há atrito e as massas dos blocos A, B e C são, respectivamente, iguais a 15 kg, 10 kg e 24 kg. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2. Sendo a_A, a_B e a_C os módulos das acelerações dos blocos A, B e C, respectivamente, determine:



a) a relação entre a_A, a_B e a_C.
b) os valores de a_A, a_B e a_C.
c) o módulo da tração no fio que está ligado ao bloco A.

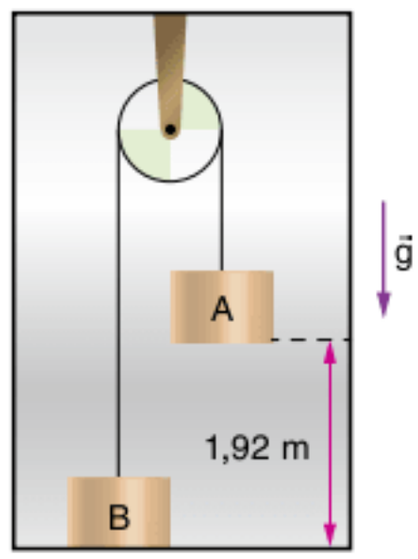
85 Na figura seguinte, os pesos da polia, do fio e da mola são desprezíveis e assume-se g = 10 m/s^2.



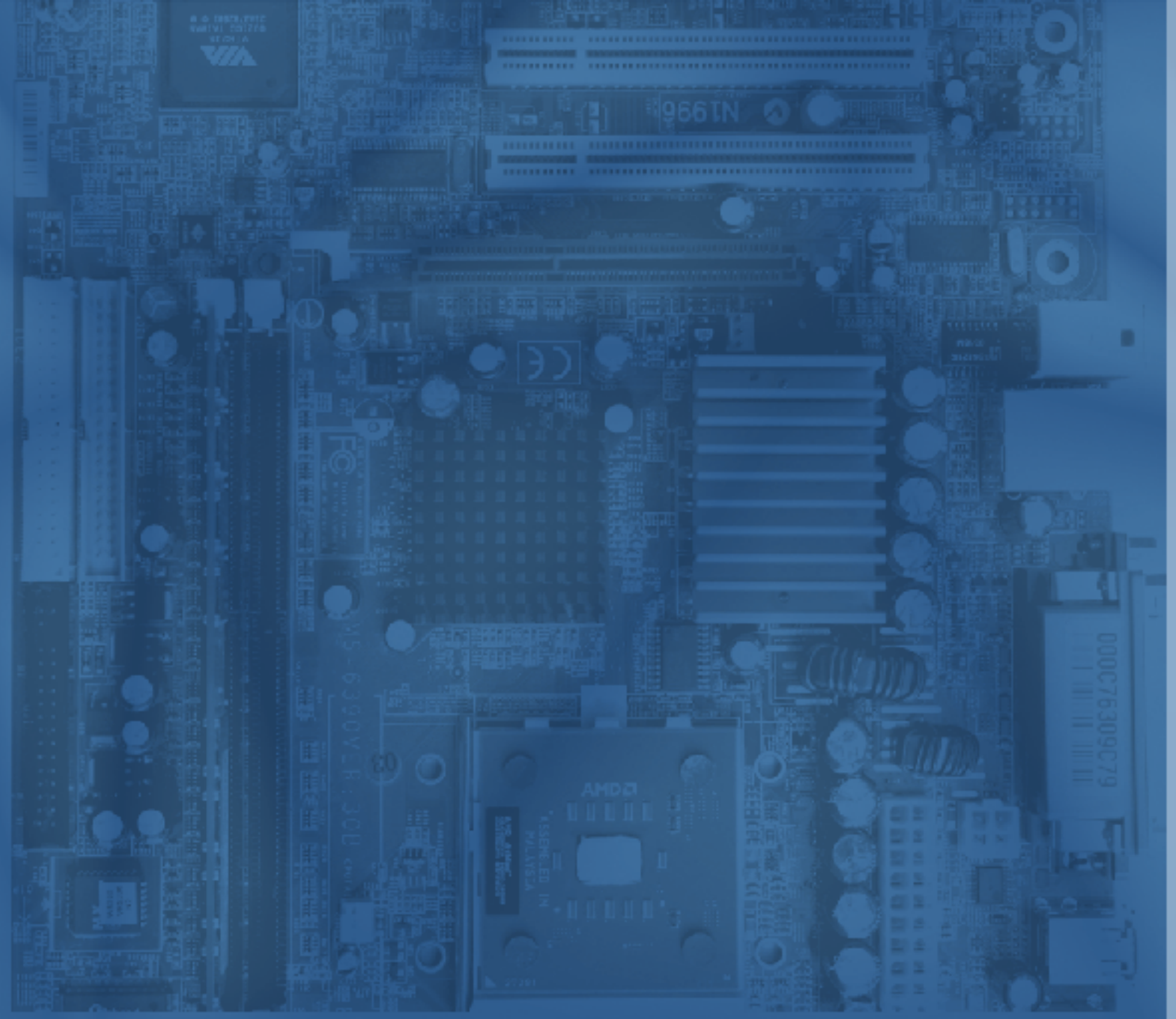
Sendo as massas de A e B iguais a 40 kg e 24 kg, respectivamente, a deformação da mola igual a 50 cm e a intensidade de $\vec{F}$ igual a 720 N, determine:

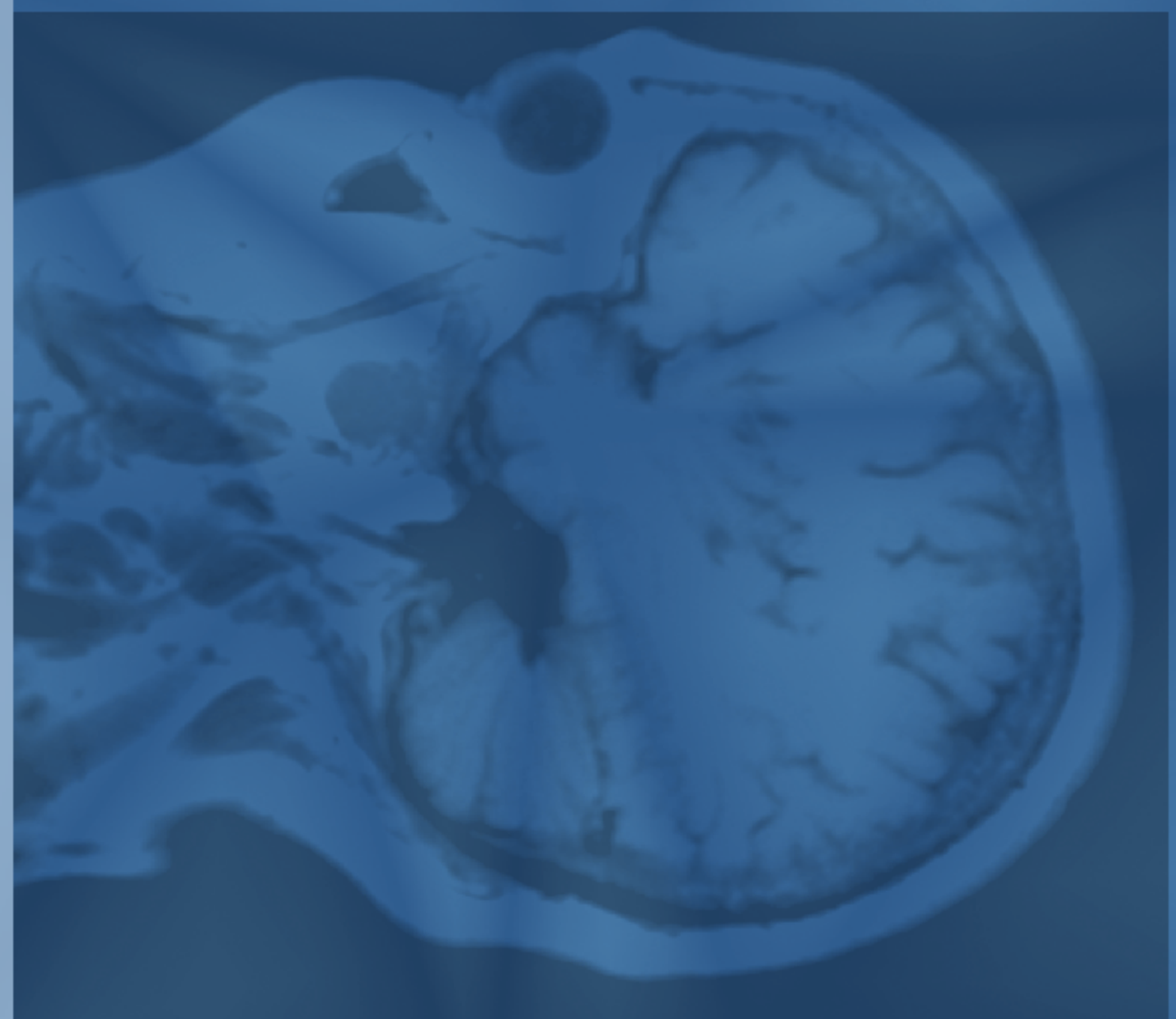
a) a constante elástica da mola, em N/m.
b) o módulo das acelerações de A, de B e do eixo da polia.
c) a indicação da balança sobre a qual repousam, inicialmente, os dois blocos.

86 A figura representa dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 3,00 kg e 1,00 kg, conectados entre si por um fio leve e inextensível, que passa por uma polia ideal, fixa no teto de um elevador. Os blocos estão inicialmente em repouso em relação ao elevador nas posições indicadas.



Admitindo que o elevador tenha aceleração de intensidade 2,0 m/s^2, vertical e orientada para cima, determine o intervalo de tempo necessário para o bloco A atingir o piso do elevador. Adote nos cálculos g = 10 m/s^2.





Frente 2

5

FRENTE 2

Resistores

REPRODUÇÃO

© ZTS | DREAMSTIME.COM.

© MARAZEM | DREAMSTIME.COM.

© KARAM MIRI | DREAMSTIME.COM.

Equipamentos elétricos, como aquecedor elétrico, chuveiro elétrico, ferro de passar roupa e a famosa "chapinha", que fazem parte do nosso dia a dia, utilizam-se do efeito Joule, ou seja, eles se aquecem quando por eles passa corrente elétrica. Os bipolos elétricos, que convertem energia elétrica exclusivamente em calor, são denominados resistores e são o objeto de estudo deste capítulo. O entendimento dos resistores, seus efeitos e associações, é de fundamental importância para a resolução de circuitos elétricos, que serão estudados no próximo capítulo.

Resistores

Conforme definido no texto inicial, os resistores podem ser conceituados como bipolos elétricos que convertem energia elétrica exclusivamente em calor. A sua representação em circuitos elétricos é vista na figura a seguir.

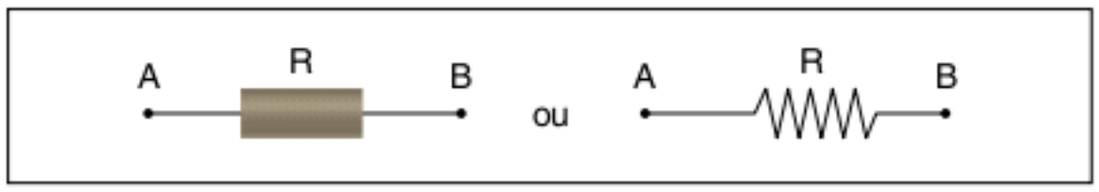
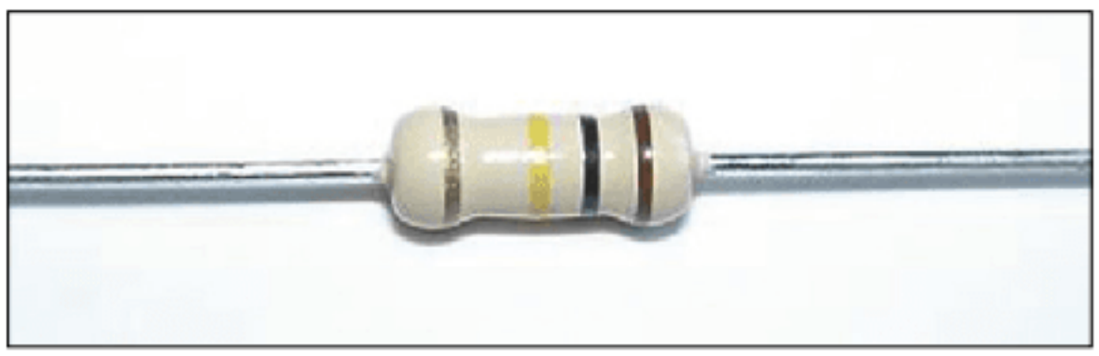


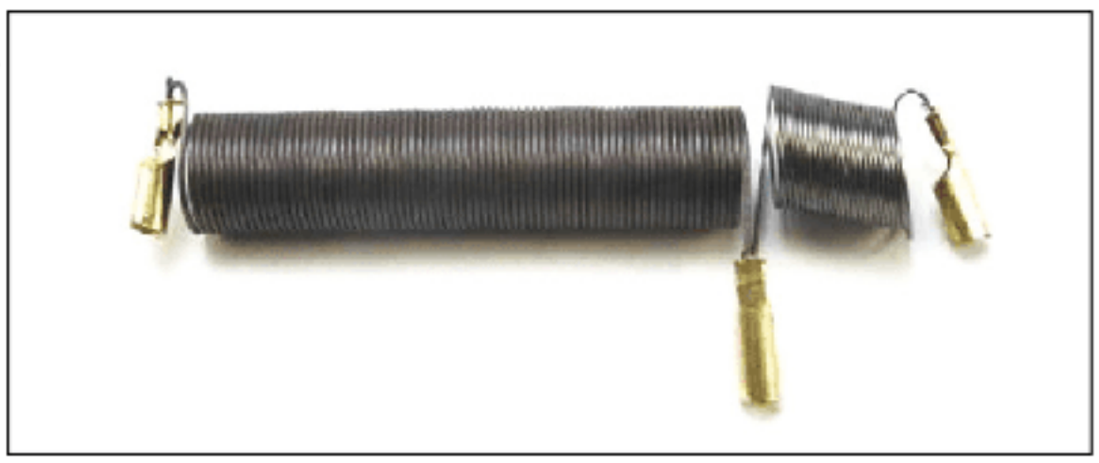
Fig. 1 Representação esquemática de um resistor.

Na figura 2, tem-se um resistor utilizado em circuitos eletrônicos; e na figura 3, uma resistência de um chuveiro elétrico.



CHRIZZ/WIKIMEDIA COMMONS.

Fig. 2 Resistor utilizado em circuitos eletrônicos.



REPRODUÇÃO.

Fig. 3 Resistência de chuveiro elétrico.

Resistores ôhmicos e não ôhmicos

Seja um bipolo elétrico que converte energia elétrica exclusivamente em calor, ou seja, um resistor, conforme o que se vê na figura a seguir.

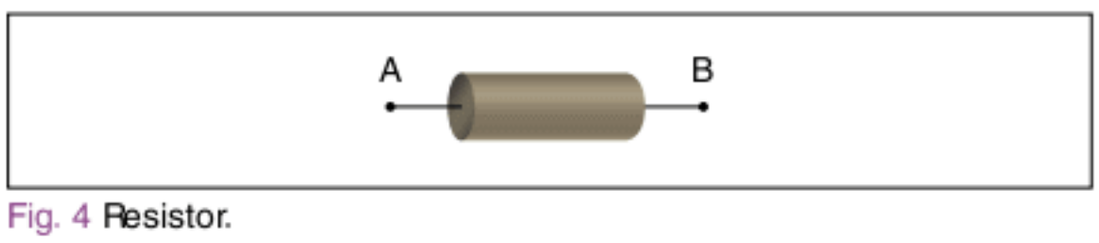


Fig. 4 Resistor.

Ao aplicar-se nos terminais A e B deste bipolo uma diferença de potencial U, tem-se uma corrente i, que se relaciona com a ddp U, por meio da sua resistência R, através da expressão já conhecida:

$$R = \frac{U}{i} \quad (\Omega\text{-ohm})$$

A grandeza resistência elétrica é muito importante, pois é um fator decisivo no desempenho de sistemas elétricos. Em alguns casos, é interessante que ela seja alta, como no caso dos isoladores e sistemas de proteção; em outros casos, é muito importante que ela seja reduzida, como é o caso dos sistemas de transmissão de energia elétrica.

Dependendo do comportamento, os resistores podem ser classificados em ôhmicos ou não ôhmicos.

Resistores ôhmicos

Conforme visto no capítulo anterior, os resistores ôhmicos são aqueles que obedecem à Primeira Lei de Ohm. Essa lei afirma que, para um resistor ser considerado ôhmico, a sua resistência deve ser constante a uma dada temperatura, ou seja, a relação entre tensão elétrica e corrente elétrica, para uma dada temperatura, deve ser constante.

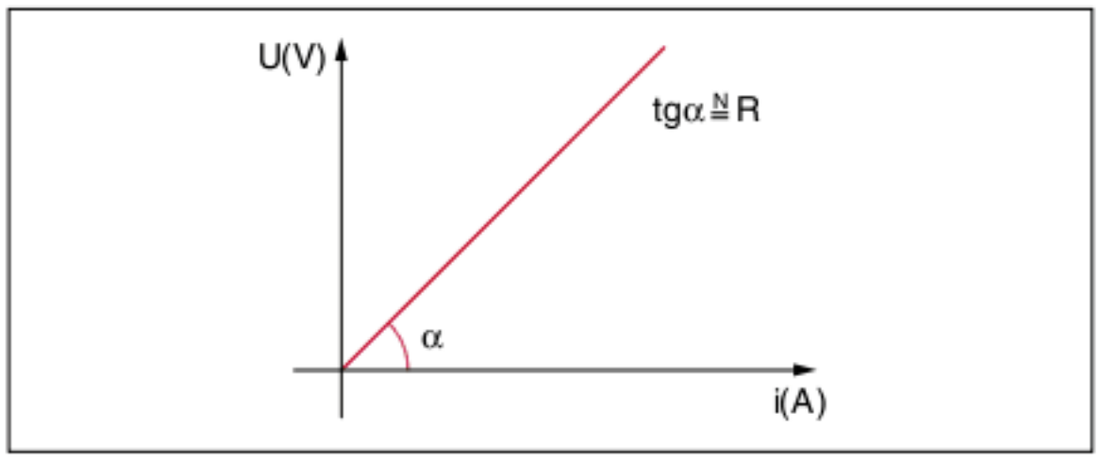


Fig. 5 Gráfico de tensão *x* corrente de um resistor ôhmico.

Resistores não ôhmicos

Existem ainda os resistores não ôhmicos. Esses materiais apresentam características peculiares, que são definidas pela tecnologia empregada nas suas construções e nas suas estruturas atômico-moleculares. Na figura 6, pode ser observada a curva de tensão aplicada em função da corrente que atravessa um condutor não ôhmico.

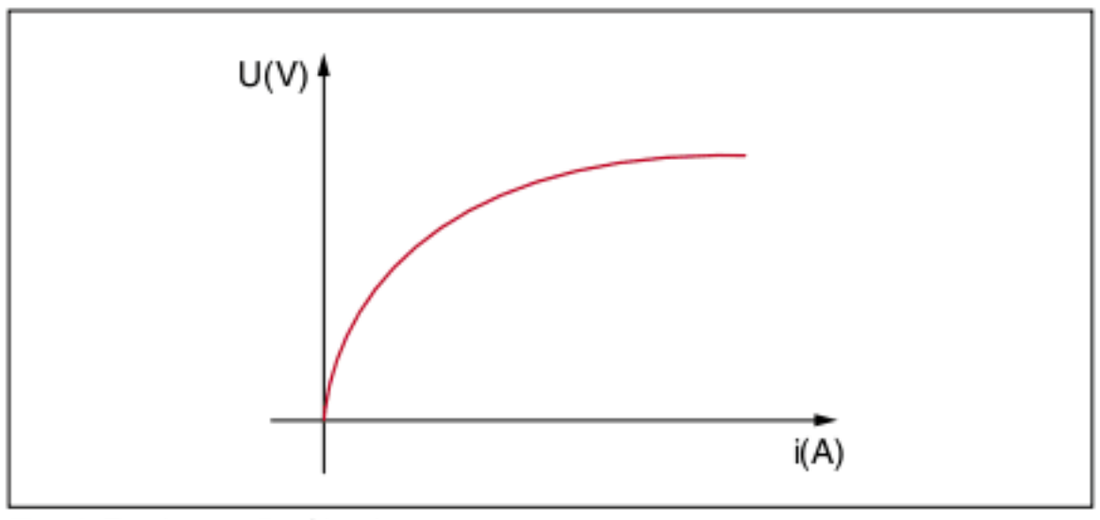


Fig. 6 Resistor não ôhmico.

De qualquer forma, para se obter a resistência de qualquer material em um dado instante, basta dividir a tensão aplicada nos seus terminais pela corrente que o atravessa.

Potência dissipada em um resistor por efeito Joule

Conforme estudado no capítulo anterior, o efeito Joule é o aquecimento que surge quando um condutor não ideal é percorrido por corrente elétrica. No caso dos resistores, toda a potência elétrica por ele consumida é convertida em calor pelo efeito Joule.

Ainda utilizando-se do capítulo anterior, sabe-se que um bipolo elétrico, ao ser submetido a uma diferença de potencial *U* e ao ser percorrido por uma corrente *i*, consome uma potência elétrica *P*, dada por:

$$P = Ui$$

Da definição de resistência elétrica, tem-se que:

$$U = Ri \Leftrightarrow i = \frac{U}{R}$$

Combinando as equações de potência, tensão e corrente, pode-se escrever que a potência dissipada em um resistor por efeito Joule é dada por:

$$P_{dissipada} = \frac{U^2}{R} = Ri^2$$

A uma primeira vista, estas equações parecem conflitantes, já que em uma delas a resistência elétrica encontra-se no denominador e em outra encontra-se no numerador. Porém, elas expressam a mesma coisa e podem ser utilizadas indistintamente.

Todavia, dependendo da situação, é mais prática a utilização de uma ou outra equação. A seguir, serão exemplificadas as situações nas quais é melhor utilizar-se de uma ou outra equação.

a) Corrente constante – resistores em série

Considere a situação a seguir na qual se tem três resistores em série.

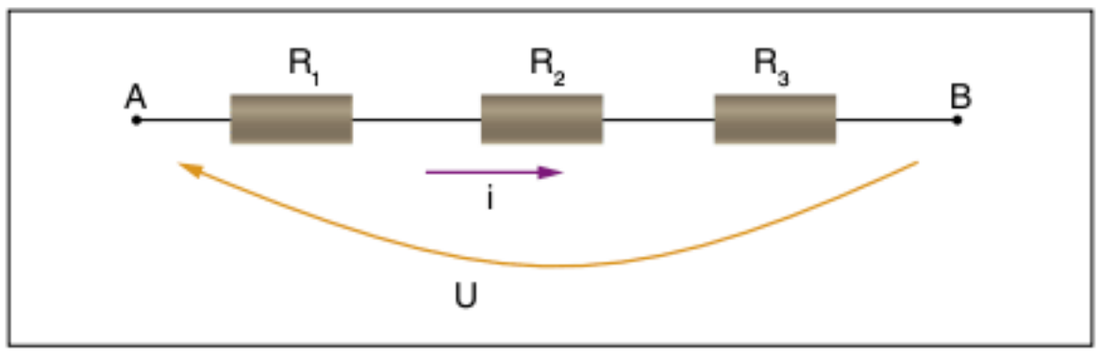


Fig. 7 Resistores em série.

Observa-se neste caso que os três resistores são percorridos pela mesma corrente. Pergunta-se então: como determinar o resistor que dissipa mais potência? Basta observar que, como a corrente é a mesma nos três resistores, a expressão para a potência dissipada por efeito Joule adequada para a comparação é:

$$P_{dissipada} = R \cdot i^2$$

Assim, o maior resistor dissipará a maior potência e o menor resistor dissipará a menor potência.

b) Tensão constante – resistores em paralelo

Na situação da figura a seguir, tem-se três resistores em paralelo.

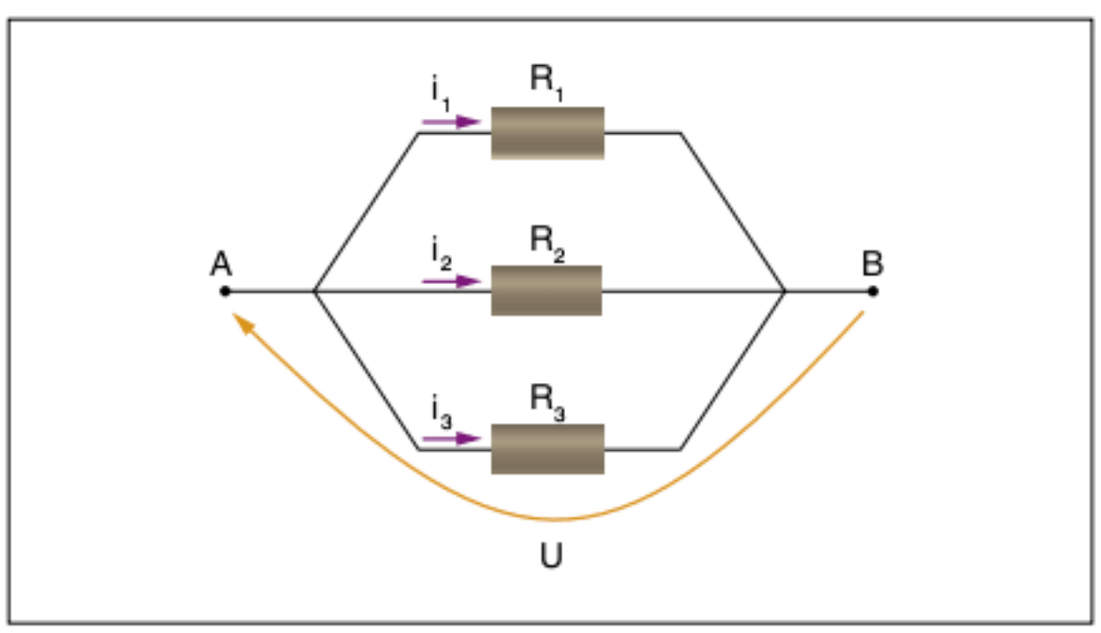


Fig. 8 Resistores em paralelo.

Na figura 7, pode ser verificado que os três resistores estão submetidos à mesma ddp U. Nesta situação, é feita a mesma pergunta: como determinar o resistor que dissipa mais potência? Neste caso, basta notar que como a ddp é a mesma nos três resistores, a melhor expressão para a comparação das potências dissipadas por efeito Joule é:

$$P_{dissipada} = \frac{U^2}{R}$$

Dessa forma, conclui-se que o menor resistor dissipará a maior potência e que o maior resistor dissipará a menor potência.

Um exemplo interessante desse segundo caso pode ser observado nas residências, onde a tensão é constante. Ao se desejar que um chuveiro aqueça mais, mudando a posição do controle de temperatura, deve-se diminuir a resistência do chuveiro, a fim de que haja maior dissipação de potência, já que a tensão é constante. O oposto ocorre quando se deseja que a temperatura do chuveiro diminua, aumentando-se a resistência.

Fig. 9 Controle de temperatura do chuveiro.

Exercício resolvido

1 **Fuvest** Ganhei um chuveiro elétrico de 6.050 W – 220 V. Para que esse chuveiro forneça a mesma potência na minha instalação, de 110 V, devo mudar a sua resistência para o seguinte valor, em ohms:

(a) 0,5 (b) 1,0 (c) 2,0 (d) 4,0 (e) 8,0

Resolução:

Deseja-se que a potência em 110 V seja igual à potência em 220 V, ou seja:

$$P_{220} = P_{110}$$

$$\frac{(220)^2}{R_{220}} = \frac{110^2}{R_{110}} \rightarrow R_{110} = \frac{R_{220}}{4}$$

Em seguida, utilizando-se a potência fornecida do chuveiro em 220 V, calcula-se a resistência elétrica do chuveiro em 220 V, tal que:

$$R_{220} = \frac{220^2}{P_{220}} \rightarrow R_{220} = \frac{220.220}{6050} = 8\ \Omega$$

Assim, a resistência em 110 V deve ser igual a 2Ω.

Resposta: Alternativa C.

Aplicação da dissipação por efeito Joule – lâmpadas incandescentes

As lâmpadas incandescentes, apesar do seu uso cada vez menor, devido à melhor eficiência das lâmpadas fluorescentes e LEDs (*Light Emitting Diode*) ou Diodos Emissores de Luz, continuam a ser uma importante fonte de iluminação nas residências e locais de trabalho. Uma lâmpada incandescente consiste de um filamento, que é uma resistência. Ao ser percorrido por corrente elétrica, essa resistência aquece-se a uma temperatura na qual emite luz. Este filamento encontra-se no interior de um bulbo selado, no qual se tem um gás inerte que serve para se contrapor à pressão atmosférica externa. As lâmpadas incandescentes são identificadas por duas grandezas físicas: a potência elétrica de consumo nominal (W) e a sua tensão nominal (V), conforme se observa na figura a seguir, na qual se tem uma lâmpada de 100 W e 127 V:

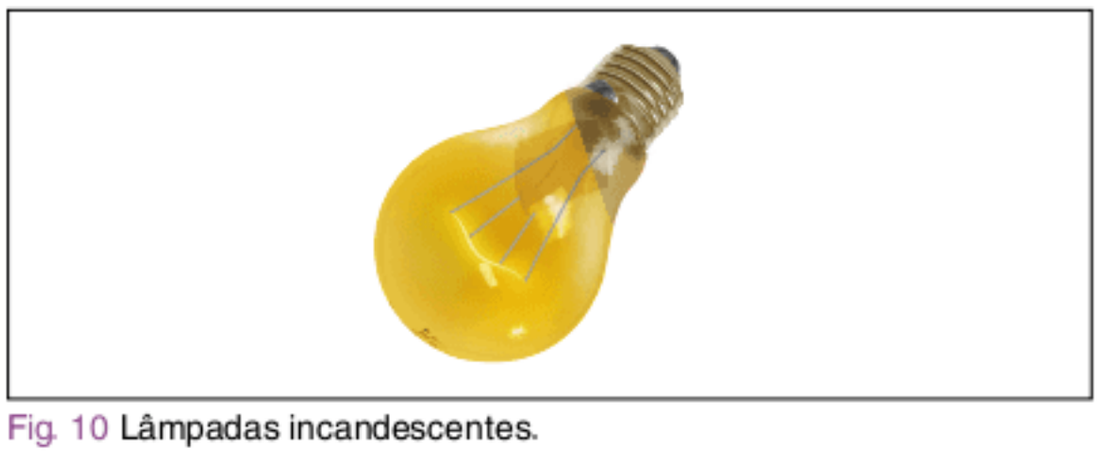


Fig. 10 Lâmpadas incandescentes.

A representação esquemática de lâmpadas em circuitos elétricos é feita conforme mostra a figura 11.

Fig. 11 Representação esquemática de lâmpadas elétricas.

As lâmpadas são tratadas em circuitos elétricos como resistores, cuja resistência é calculada a partir de seus dados nominais. Por exemplo, uma lâmpada cujas especificações são 100 W/110 V é tratada, na condição de estar ligada, como uma resistência elétrica dada por:

$$R_{lâmpada} = \frac{U_{nominal}^2}{P_{nominal}} \rightarrow R_{lâmpada} = \frac{110^2}{100} = 121\ \Omega$$

Observação: *É importante ressaltar que a resistência calculada anteriormente é à resistência com a lâmpada em pleno funcionamento, já que a temperatura ambiente a resistência pode ser até 7 vezes menor do que a resistência calculada a partir dos dados nominais. Este efeito será estudado adiante neste capítulo.*

Também a partir dos dados nominais da lâmpada (potência de consumo e tensão nominal), pode-se determinar a corrente nominal, ou seja, aquela corrente que é consumida pela lâmpada se ela for ligada na sua tensão nominal. Para a lâmpada do exemplo, tem-se que:

$$i_{nominal} = \frac{P_{nominal}}{U_{nominal}} = \frac{100}{110} \approx 0{,}9A$$

Observação: *Vale a pena ressaltar que a potência elétrica de consumo ou potência nominal não é a potência de brilho da lâmpada. Para o caso de lâmpadas incandescentes, a eficiência, ou seja, a relação entre a potência luminosa e a potência elétrica consumida é baixa, o que vem favorecendo a maior utilização de lâmpadas fluorescentes.*

Dependência da potência dissipada por efeito Joule com a diferença de potencial aplicada

Uma pergunta interessante que pode ser feita, principalmente no Brasil, onde há cidades nas quais as residências são alimentadas com 220 V e outras nas quais a ddp nas tomadas é 110 V, é a seguinte: o que ocorre se ligarmos uma lâmpada de 220 V em 110 V e vice-versa? A resposta é simples. Supondo que não haja variação da resistência elétrica com a ddp, tem-se que:

$$P_{220} = \frac{220^2}{R} \qquad P_{110} = \frac{110^2}{R}$$

Dividindo uma expressão pela outra, tem-se que:

$$\frac{P_{220}}{P_{110}} = 4$$

Dessa forma, uma lâmpada de 110 V ligada em 220 V irá consumir 4 vezes mais potência elétrica e, consequentemente, brilhará mais, porém irá queimar-se. Por outro lado, ao ligarmos uma lâmpada de 220 V em 110 V, ela irá consumir quatro vezes menos potência, brilhando menos.

Generalizando, tem-se que para duas tensões U e U_0, a relação entre as potências dissipadas respectivamente iguais a P e P_0 é dada por:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{U}{U_0}\right)^2$$

A expressão acima mostra que, para a resistência ser considerada constante, a relação entre as potências é igual ao quadrado da relação entre as tensões.

Exercício resolvido

2 **PUC 2006** No lustre da sala de uma residência, cuja tensão de entrada é de 110 V, estão colocadas duas lâmpadas "queimadas" de potência nominal igual a 200 W cada, fabricadas para funcionarem ligadas à rede de 220 V. Para substituir as "queimadas" por uma única, que ilumine o ambiente da mesma forma que as duas lâmpadas anteriores iluminavam, será preciso que a especificação desta nova lâmpada seja de:

(a) 400 W – 110 V
(b) 200 W – 110 V
(c) 200 W – 220 V
(d) 100 W – 110 V
(e) 100 W – 220 V

Resolução:

Pelo exposto anteriormente, lâmpadas de 220 V ligadas em 110 V iluminam 4 vezes menos, ou seja, funcionam como uma lâmpada de 50 W. Assim, deve-se ligar uma lâmpada de 100 W / 110 V.
Resposta: Alternativa D.

Segunda Lei de Ohm

A Segunda Lei de Ohm trata de relacionar a resistência de um resistor ôhmico com a sua geometria (comprimento e área de seção) e o material de que é feito. Observando a figura 12, é intuitivo pensar que quanto maior a área de seção de um dado condutor, menor será a sua resistência.

Para compreender o que foi dito, basta fazer uma analogia com um cano de água. A água passa mais livremente através do cano com maior área de seção.

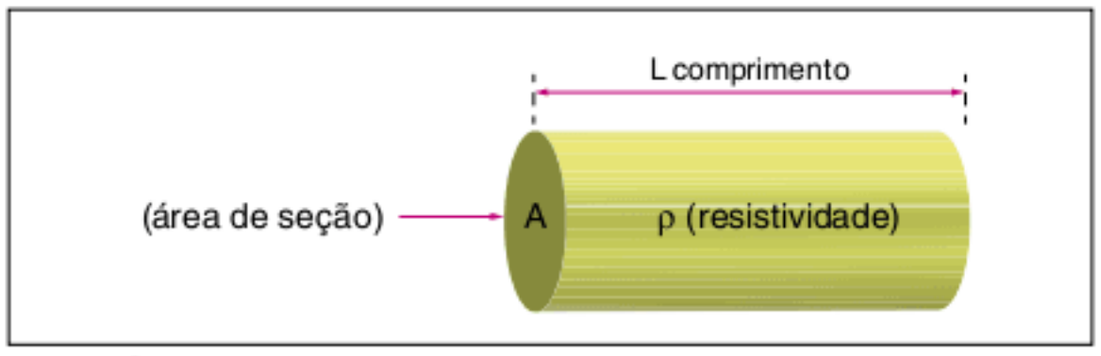


Fig. 12 Condutor e suas grandezas.

O comprimento do condutor também afeta a resistência, basta imaginar que quanto maior a distância percorrida pelos portadores de carga no interior de um resistor ôhmico, maior a resistência por eles sofrida.

Por fim, é sabido que existem materiais melhores condutores do que outros. Por exemplo, o cobre conduz melhor do que o níquel, o ouro conduz melhor do que a prata. A grandeza que expressa o fato de um material ser melhor condutor que outro é a resistividade, indicada pela letra grega ρ, esta grandeza é expressa no sistema internacional em $(\Omega.\ m)$ e cotidianamente em $\left(\frac{\Omega.\ mm^2}{m}\right)$.

Uma outra grandeza importante que caracteriza o aspecto condutor de um material é a sua condutividade, indicada pela letra grega σ. Essa grandeza é definida simplesmente como o inverso da resistividade, ou seja, $\sigma = \frac{1}{\rho}$, cuja unidade no sistema internacional é S/m (Siemens por metro). Assim, quanto maior a condutividade de um condutor, menor a sua resistividade e vice-versa.

Se expressarmos matematicamente a dependência da resistência com a área de seção do condutor (A), com o seu comprimento (ℓ), e com a sua resistividade (ρ) ou sua condutividade (σ), tem-se que:

$$R = \frac{\rho.\ell}{A} = \frac{\ell}{\sigma A}$$

Exercício resolvido

3 **Unifesp 2008** Você constrói três resistências elétricas, R_A, R_B e R_C, com fios de mesmo comprimento e com as seguintes características:

I. o fio de R_A tem resistividade $1{,}0\ .\ 10^{-6}\ \Omega\ .\ m$ e diâmetro de 0,50 mm;

II. o fio de R_B tem resistividade $1{,}2\ .\ 10^{-6}\ \Omega\ .\ m$ e diâmetro de 0,50 mm;

III. o fio de R_C tem resistividade $1{,}5\ .\ 10^{-6}\ \Omega\ .\ m$ e diâmetro de 0,40 mm.

Pode-se afirmar que:

(a) $R_A > R_B > R_C$
(b) $R_B > R_A > R_C$
(c) $R_B > R_C > R_A$
(d) $R_C > R_A > R_B$
(e) $R_C > R_B > R_A$

Resolução:

Pela Segunda Lei de Ohm, tem-se que:

$$R = \frac{\rho.\ \ell}{A}$$

I. Para o fio de resistência R_A:

$$R_A = \frac{1{,}0.10^{-6}.\ \ell}{\pi(0{,}25)^2} = \frac{1{,}6.10^{-5}.\ \ell}{\pi}(\Omega/m)$$

II. Para o fio de resistência R_B:

$$R_B = \frac{1{,}2.10^{-6}.\ \ell}{\pi(0{,}25)^2} = \frac{1{,}9.10^{-5}.\ \ell}{\pi}(\Omega/m)$$

III. Para o fio de resistência R_C:

$$R_C = \frac{1{,}5.10^{-6}.\ \ell}{\pi(0{,}20)^2} = \frac{3{,}7.10^{-5}.\ \ell}{\pi}(\Omega/m)$$

Ou seja:

$$R_C > R_B > R_A$$

Resposta: Alternativa E.

Vale notar que o exercício poderia ser resolvido por simples inspeção, ou seja, já que os resistores A e B têm o mesmo comprimento e diâmetro e o resistor B tem resistividade maior do que a de A conclui-se que $R_B > R_A$. Já o resistor R_C tem maior resistividade e é mais fino que o resistor B. Portanto, $R_C > R_B$

Influência da temperatura na resistência de resistores ôhmicos

Quando foi definida a Primeira Lei de Ohm, ficou claro que havia uma relação entre a resistência e a temperatura, pois a Primeira Lei afirma que os resistores ôhmicos têm uma resistência constante a uma dada temperatura. Assim sendo, é válido perguntar qual é a dependência da resistência com a temperatura em resistores ôhmicos.

Essa resposta não é muito simples até que se afirme que o parâmetro mais sensível à variação da temperatura é a resistividade. Para a grande maioria dos materiais, um aumento de temperatura causa um aumento da resistividade. A variação da resistividade com a temperatura é, normalmente, bem maior do que a do comprimento e a da área de seção do condutor. Assim, para a maioria dos materiais, o fator que realmente define como irá variar a resistência com a temperatura é a resistividade do material. Essa relação pode ser escrita na forma:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha.\ \Delta\theta)$$

Em que ρ_0 é a resistividade do material a uma temperatura θ_0, ρ é a resistividade do material a uma temperatura θ, $\Delta\theta$ é a variação de temperatura sofrida pelo material e α é o coeficiente de temperatura da resistividade do material.

Observação: *O coeficiente de temperatura da resistividade (α) é uma grandeza que representa o efeito final de dois fenômenos que acontecem no interior do condutor quando se varia a temperatura: um deles é a vibração das moléculas, que é diretamente proporcional à variação da temperatura, e o outro é o número de elétrons livres que aumenta com a temperatura. Valores positivos de α indicam que o aumento de vibração se sobrepõe ao aumento de elétrons livres. Valores negativos de α indicam que o aumento do número de elétrons livres se sobrepõe ao aumento da vibração das moléculas, e valores próximos a zero de α indicam que os efeitos praticamente se anulam.*

Material	ρ 20 °C $\left(\Omega . \frac{mm^2}{m}\right)$	α (°C^{-1})
Prata	0,0159	0,0040
Cobre	0,0170	0,0040
Alumínio	0,270	0,0036
Ferro	0,0970	0,0050
Platina	0,0980	0,0039
Chumbo	0,2100	0,0042
Tungstênio	0,0550	0,0048
Mercúrio	0,9500	0,0009
Constantana	0,49	menor que 10^{-5}
Manganina	0,48	menor que 10^{-5}
Nicromo	1,12	0,00017
Grafite	0,4 a 0,7	$-2 . 10^{-4}$ a $-8 . 10^{-4}$

Tab. 1 Resistividade e coeficientes de temperatura.

ATENÇÃO!

É comum confundir o coeficiente de temperatura com o coeficiente de dilatação do material, dado o fato de que as equações de dilatação linear e a equação anteriormente apresentada serem muito parecidas, porém são coeficientes distintos.

Portanto, se um condutor possui uma resistência R_0 a uma temperatura θ_0, ao variarmos a temperatura para θ, sua resistência será dada por:

$$R = R_0[1 + \alpha . (\theta - \theta_0)]$$

Exercício resolvido

4 Um fio de alumínio tem 120 m de comprimento e 2,0 mm^2 de área na sua seção transversal. A resistividade do alumínio a 20 °C é $2,7 . 10^{-2} \frac{\Omega . mm^2}{m}$ e seu coeficiente de temperatura é $3,6 . 10^{-3}$ °C^{-1}. Desprezam-se as variações nas dimensões do fio com a temperatura. Determine a resistência elétrica desse fio a 20 °C e a 100 °C.

Resolução:

A 20 °C, a resistência elétrica do fio é dada por $R_0 = \rho_0 \frac{\ell}{A}$, *sendo* $\rho_0 = 2,7 . 10^{-2} \frac{\Omega . mm^2}{m}$, $\ell = 120$ *m e* $A = 2,0$ *mm*^{2}.

Assim:

$$R_0 = 2,7 . 10^{-2} . \frac{120}{2,0}$$

$$R_0 = 1,62\ \Omega$$

Variando a temperatura de $\Delta\theta = 100$ °C – 20 °C = 80 °C, *e sendo* $\alpha = 3,6 \cdot 10-3$ °C−1, *a nova resistência R do fio será dada por:*

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta\theta)$$

$$R = 1,62\ (1 + 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 80)$$

$$R \approx 2,09\ \Omega$$

Associação de resistores

Na tabela a seguir, observa-se os valores de resistências que são produzidos comercialmente no país:

Resistores comerciais			
1.0 ohm	1.1 ohm	1.2 ohm	1.3 ohm
1.5 ohm	1.6 ohm	1.8 ohm	2.0 ohm
2.2 ohm	2.4 ohm	2.7 ohm	3.0 ohm
3.3 ohm	3.6 ohm	3.9 ohm	4.3 ohm
4.7 ohm	5.1 ohm	5.6 ohm	6.2 ohm
6.8 ohm	7.5 ohm	8.2 ohm	9.1 ohm

Tab. 2 Valores comerciais de resistência.

Para obter os demais valores basta multiplicar por: 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6...

Observa-se na tabela 2 que não são todos os valores de resistência que estão disponíveis para compra. Assim, se for necessária a obtenção de valores de resistência elétrica diferentes dos vendidos comercialmente, precisamos associar os resistores a fim de se obter valores convenientes de resistência elétrica.

Dessa forma, pode-se dizer que os resistores são associados para a obtenção de valores convenientes de resistência elétrica. O resistor equivalente (R_{eq}) aos resistores associados é, em seus efeitos físicos (dissipação de calor, corrente elétrica e ddp), a eles idêntico, ou seja, fisicamente é indistinto ter-se vários resistores associados ou substituí-los pelo seu valor equivalente.

Em princípio, os resistores podem ser associados em série e em paralelo. Essas associações serão discutidas a seguir.

Associação em série

Observe a figura a seguir.

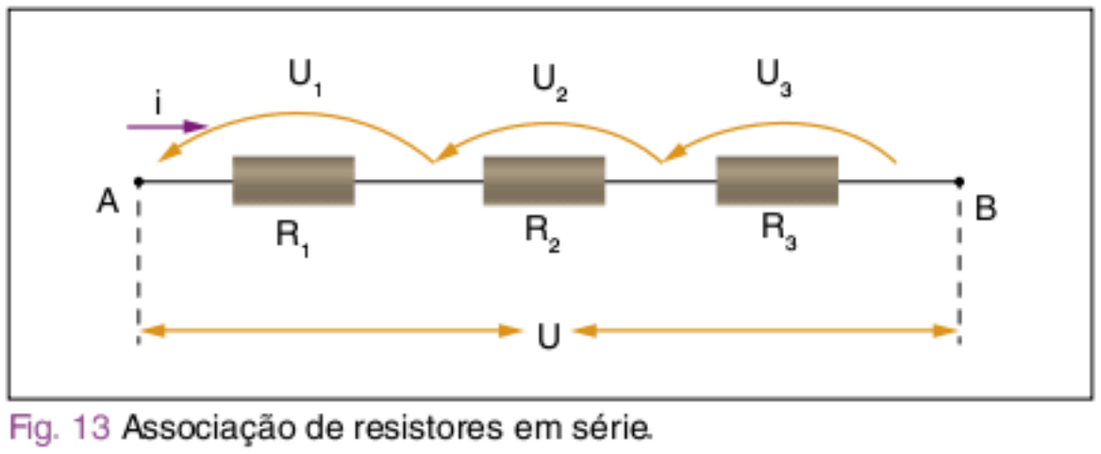


Fig. 13 Associação de resistores em série.

Pode-se ver na figura 13 que se uma corrente i entrar pelo resistor R_1, ela obrigatoriamente irá percorrer os resistores R_2 e R_3, ou seja, a corrente que percorre os três resistores é a mesma. Nesse caso, dizemos que os resistores estão em série.

O que se quer agora é calcular uma resistência R equivalente que tenha os mesmos efeitos físicos que as resistências R_1 ,R_2 e R_3. Assim, se substituirmos as resistências pela resistência equivalente, não haverá nenhuma mudança no circuito.

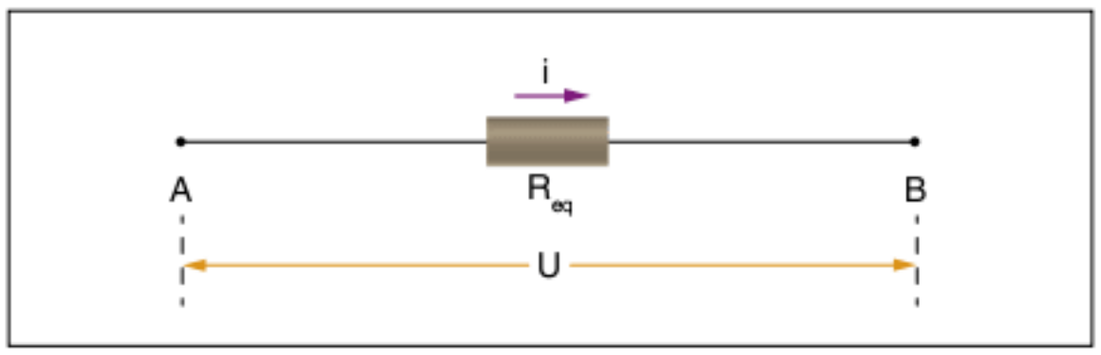


Fig. 14 Resistência equivalente entre A e B.

Para que a corrente i flua através da associação dos três resistores é necessário que haja uma diferença de potencial (ddp) U aplicada nos pontos A e B, de tal forma que a diferença de potencial total é a soma das diferenças de potencial em cada um dos resistores, ou seja:

$$U_{total} = U_1 + U_2 + U_3$$

Em que U_1, U_2, e U_3 são as tensões nos resistores R_1 ,R_2 e R_3, respectivamente, e U é a tensão total aplicada nos terminais A e B da associação.

A Primeira Lei de Ohm nos permite escrever que:

$$U_1 = R_1 \cdot i;\ U_2 = R_2 \cdot i;\ U_3 = R_3 \cdot i$$

Como queremos substituir os três resistores por um equivalente, iremos escrever que a tensão total U é igual ao produto da corrente i que atravessa os quatro resistores pela resistência equivalente, ou seja:

$$U = R_{equivalente} \cdot i$$

Igualando as expressões anteriores, temos que:

$$U = R_{equivalente} \cdot i = \underbrace{R_1 \cdot i}_{U_1} + \underbrace{R_2 \cdot i}_{U_2} + \underbrace{R_3 \cdot i}_{U_3}$$

Finalmente, a resistência equivalente é dada por:

$$R_{equivalente} = R_1 + R_2 + R_3$$

Para generalizarmos o resultado, se houver n resistores em série, a resistência equivalente em série é simplesmente o somatório de todas as resistências, ou seja:

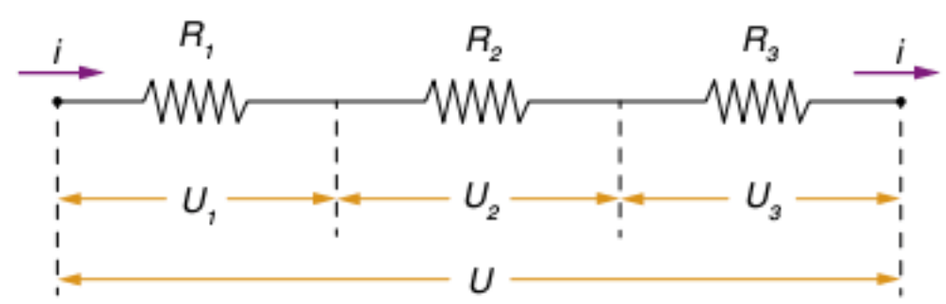
$$R_{equivalente} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Exercício resolvido

5 Têm-se três resistores de resistências elétricas $R_1 = 6{,}0\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$; e $R_3 = 20\ \Omega$. Esses resistores são associados em série, e a associação é submetida à ddp U = 180 V. Determine:

a) a resistência elétrica do resistor equivalente à associação.
b) a intensidade de corrente que atravessa a associação.
c) a ddp em cada um dos resistores associados.

Resolução:



a) A resistência elétrica do resistor equivalente é dada por:

$R_S = R_1 + R_2 + R_3$

$R_S = 6{,}0 + 10 + 20$

$R_S = 36\ \Omega$

b) A intensidade da corrente que atravessa a associação é igual a da que atravessa o resistor equivalente quando submetido a mesma ddp.

Aplicando a Lei de Ohm:

$U = R_S \cdot i$

$i = \dfrac{U}{R_S} = \dfrac{180}{36}$

$i = 5{,}0\ A$

c) Aplicando novamente a Lei de Ohm a cada resistor associado, obtemos as respectivas diferenças de potencial:

$U_1 = R_1 \cdot i$

$U_1 = 6{,}0 \cdot 5{,}0$

$U_1 = 30\ V$

$U_2 = R_2 \cdot i$

$U_2 = 10 \cdot 5{,}0$

$U_2 = 50\ V$

$U_3 = R_3 \cdot i$

$U_3 = 20 \cdot 5{,}0$

$U_3 = 100\ V$

ATENÇÃO!

- Se houver n resistores R iguais em série, a resistência equivalente será:
  $R_{equivalente} = n \cdot R$
- A resistência equivalente em série é sempre maior do que a maior das resistências da associação.
- O cálculo da resistência equivalente é sempre realizado entre dois pontos do circuito. A escolha desses pontos afeta o cálculo da resistência equivalente. Essa observação também é valida para o cálculo de resistências em paralelo.

Associação em paralelo

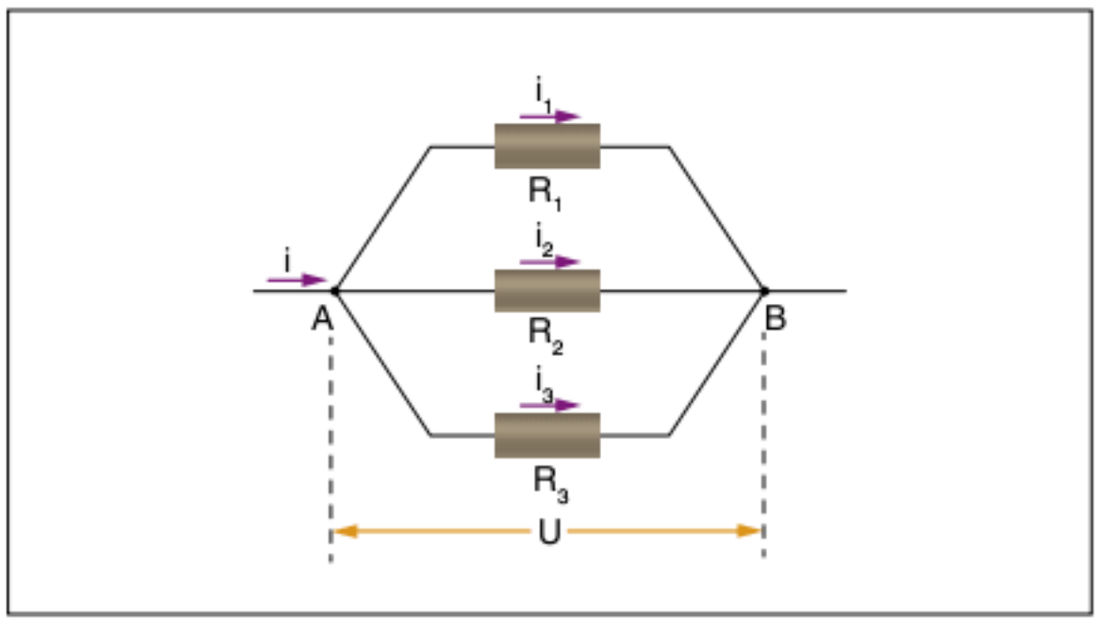


Fig. 15 Associação de resistores em paralelo.

Observa-se, pela figura acima, que os resistores R_1, R_2 e R_3 estão conectados nos mesmos nós A e B, portanto a ddp nos resistores é igual. Quando associados dessa forma, dizemos que os resistores estão em paralelo (indicado por //).

Passemos agora ao cálculo da resistência equivalente entre os três resistores R_1, R_2 e R_3 em paralelo. Para tal, basta observar, na figura15, que a corrente i que entra na associação é igual a soma das correntes i_1, i_2 e i_3 que percorrem os resistores.

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

A diferença de potencial sobre cada resistor em paralelo é a mesma, como afirmado anteriormente. Portanto, podemos escrever, por meio da Primeira Lei de Ohm, que:

$$i_1 = \frac{U}{R_1};\ i_2 = \frac{U}{R_2}\ \text{e}\ i_3 = \frac{U}{R_3}$$

A corrente total i é a que atravessa a associação, ou seja, ela é equivalente ao quociente entre a ddp U pela resistência equivalente:

$$i = \frac{U}{R_{eq}}$$

Utilizando as três equações anteriores, tem-se que:

$$i = \frac{U}{R_{eq}} = \underbrace{\frac{U}{R_1}}_{i_1} + \underbrace{\frac{U}{R_2}}_{i_2} + \underbrace{\frac{U}{R_3}}_{i_3}$$

Portanto, podemos escrever que:

$$\frac{1}{R_{equivalente}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

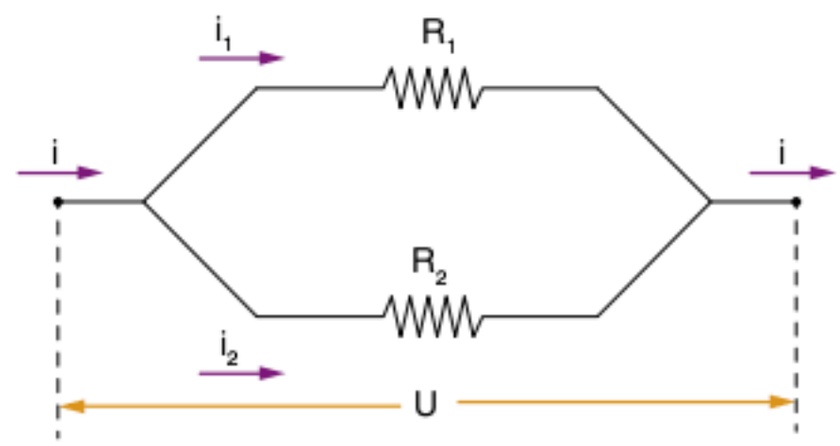
Para generalizarmos o resultado, se houver n resistores em paralelo, o inverso da resistência equivalente em paralelo é simplesmente o somatório de todas as resistências, ou seja:

$$\frac{1}{R_{equivalente}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Exercício resolvido

6 São associados em paralelo dois resistores de resistências elétricas $R_1 = 6{,}0\ \Omega$ e $R_2 = 12\ \Omega$. A associação é submetida à ddp U = 48 V. Determine:

a) a resistência elétrica do resistor equivalente à associação.
b) a intensidade da corrente que percorre o resistor equivalente.
c) a intensidade da corrente que percorre cada um dos resistores associados.



Resolução:

a) *Como são dois resistores associados em paralelo, a resistência equivalente pode ser calculada pela razão entre o produto e a soma das resistências dos resistores associados:*

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_p = \frac{6{,}0 \cdot 12}{6{,}0 + 12} = \frac{72}{18}$$

$$R_p = 4{,}0\ \Omega$$

b) *Aplicando a Lei de Ohm para o resistor equivalente, sendo U = 48 V, temos:*

$$U = Rp \cdot i$$

$$i = \frac{U}{R_p}$$

$$i = \frac{48}{4{,}0}$$

$$i = 12\ A$$

c) A aplicação da Lei de Ohm a cada um dos resistores associados fornece:

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \Rightarrow i_1 = \frac{48}{6,0} \Rightarrow i_1 = 8,0\ A$$

$$i_2 = \frac{U}{R_2} \Rightarrow i_2 = \frac{48}{12} \Rightarrow i_2 = 4,0\ A$$

ATENÇÃO!

- Se houver n resistores R iguais em paralelo, a resistência equivalente será:

$$R_{equivalente} = \frac{R}{n}$$

- A resistência equivalente em paralelo é sempre menor do que a menor das resistências da associação.
- Uma fórmula bastante utilizada é a do cálculo da resistência entre dois resistores em paralelo. Vale a pena guardar. Se dois resistores R_1 e R_2 estão em paralelo, a resistência equivalente é dada por:

$$R_{equivalente} = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\text{produto de } R_1 \text{ e } R_2}{\text{soma de } R_1 \text{ e } R_2}$$

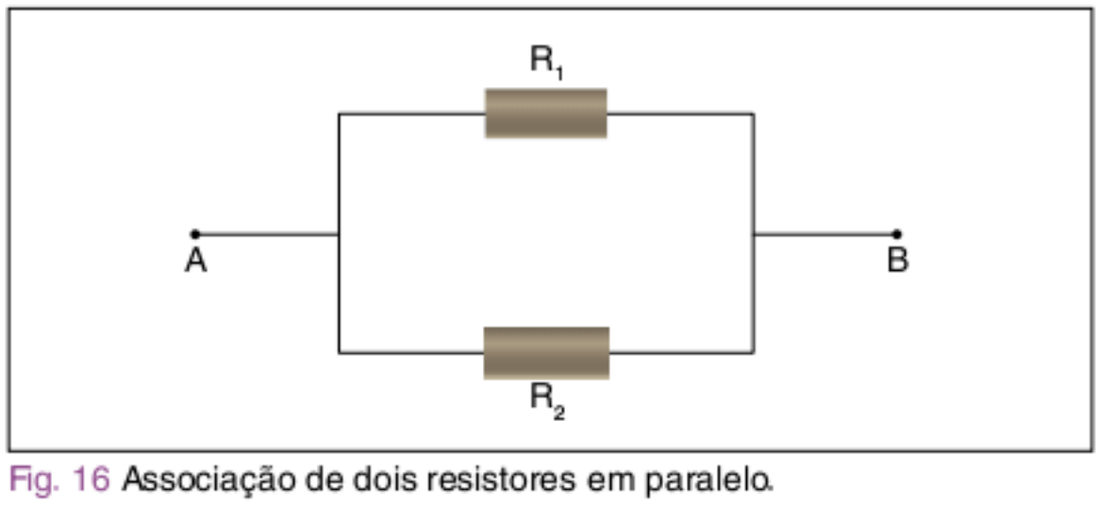


Fig. 16 Associação de dois resistores em paralelo.

Curto-circuito

O entendimento do termo "curto-circuito", ou simplesmente curto, é crucial para a resolução e, principalmente, para o entendimento dos circuitos elétricos. De forma geral, tem-se a ideia de que a única forma de fazer com que ocorra curto entre dois pontos de um circuito elétrico é conectá-los através de um condutor ideal. Conforme será visto neste tópico, esta é uma das formas na qual é possível que dois pontos estejam em curto, porém há outras possibilidades.

Considere a figura a seguir, na qual observa-se três resistores R_1, R_2 e R_3 conectados entre os pontos A e C.

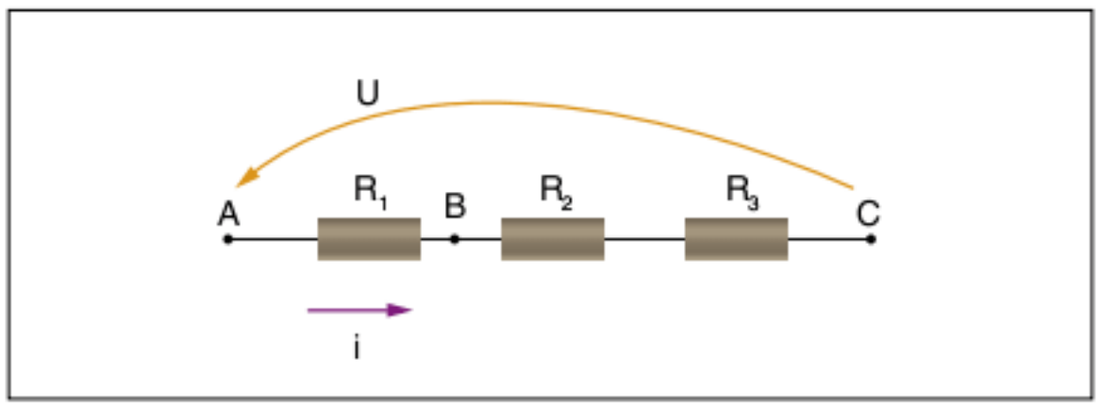


Fig. 17 Resistores em série.

Estando os três resistores em série, a corrente i é facilmente calculada como:

$$i = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Dessa forma, a ddp entre os pontos B e C é dada por:

$$U_{BC} = R_{BC} . i = (R_2 + R_3) . \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

A seguir, é colocado entre os pontos B e C um fio ideal, considerado com resistência elétrica nula, como se observa a seguir.

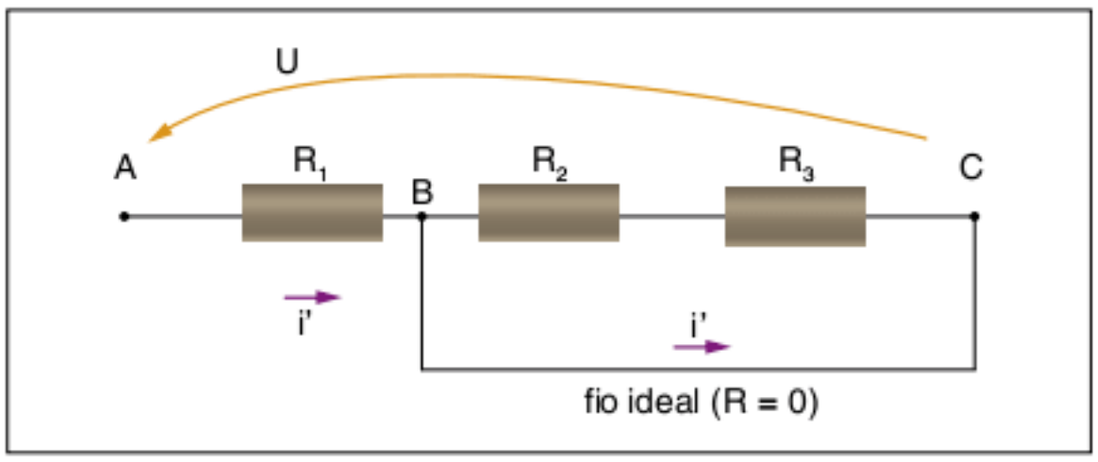


Fig. 18 Resistores R_2 e R_3 curto-circuitados.

A colocação do fio ideal altera a resistência entre os pontos A e C, tal que:

$$R_{AC} = R_1 + \underbrace{(R_2 + R_3)//0}_{R'_{BC}} = R_1$$

Consequentemente, a corrente também será alterada para um valor i' dado por:

$$i' = \frac{U}{R_{AC}} = \frac{U}{R_1}$$

Finalmente, a ddp entre os pontos B e C pode ser calculada como:

$$U'_{BC} = R'_{BC} . i' = 0 . i' = 0$$

Conclui-se que B e C estão em um mesmo potencial. Portanto, não há corrente circulando pelos resistores R_2 e R_3, razão pela qual podem ser retirados do circuito. Alternativamente, se os pontos B e C se encontram em um mesmo potencial, eles podem ser unidos. Dessa forma, fica claro, conforme se vê na figura a seguir, que os resistores R_2 e R_3 podem ser retirados do circuito sem nenhuma alteração do seu funcionamento.

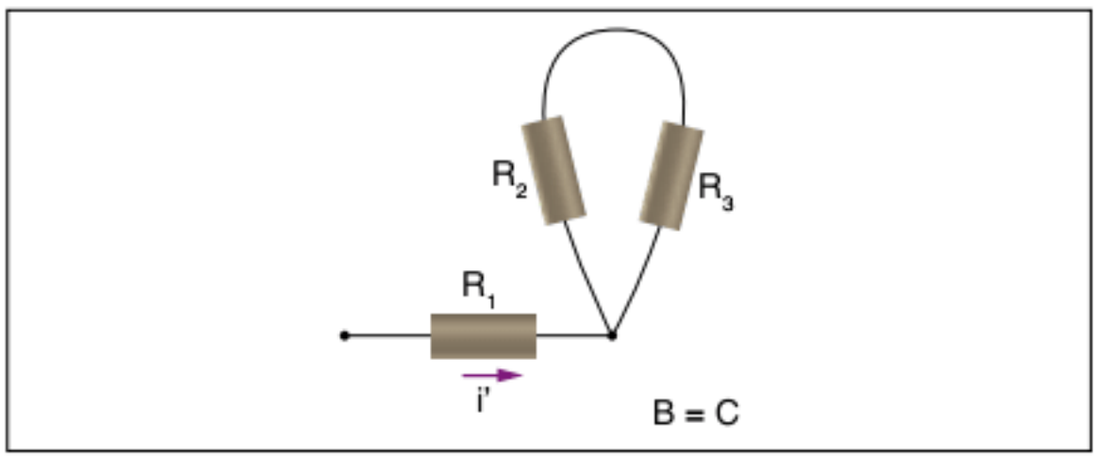


Fig. 19 Resistores R_2 e R_3 em curto.

Da análise feita anteriormente, pode-se concluir que dois pontos de um circuito estão em curto quando se encontram em um mesmo potencial elétrico. Isso pode ocorrer, como se verá

a seguir na ponte de Wheatstone, mesmo que os pontos não estejam ligados por fios ideais. Também conclui-se que a resistência equivalente entre dois pontos de um circuito, que estão em curto, é nula.

Fusíveis e disjuntores

São dispositivos de segurança de circuitos que limitam a quantidade de corrente que pode passar naquele ramo do circuito onde eles estão ligados. Os fusíveis se abrem quando a corrente que o atravessa passa do limite estipulado.

Os disjuntores têm a mesma função, porém podem ser rearmados quando a corrente que o atravessa excede o limite estipulado.

Elemento	Figura	Símbolo
Disjuntor		30 A
Fusível		20 A

MARKNADSAVDELNINGEN HAGER/ WIKIMEDIA COMMONS.

© JAMES HOENSTINE | DREAMSTIME.COM

Tab. 3 Imagens e símbolos de um disjuntor e de um fusível.

Reostatos

São resistores cuja resistência é variável. A sua representação no circuito é dada por onde os valores apresentados indicam a mínima e a máxima resistência do reostato.

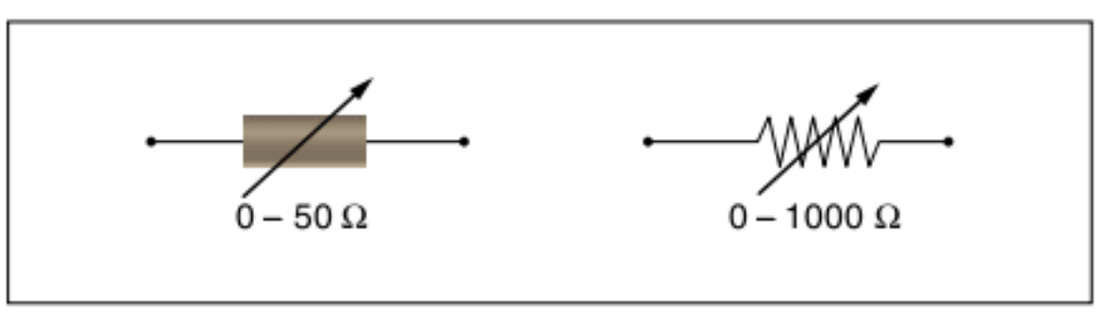
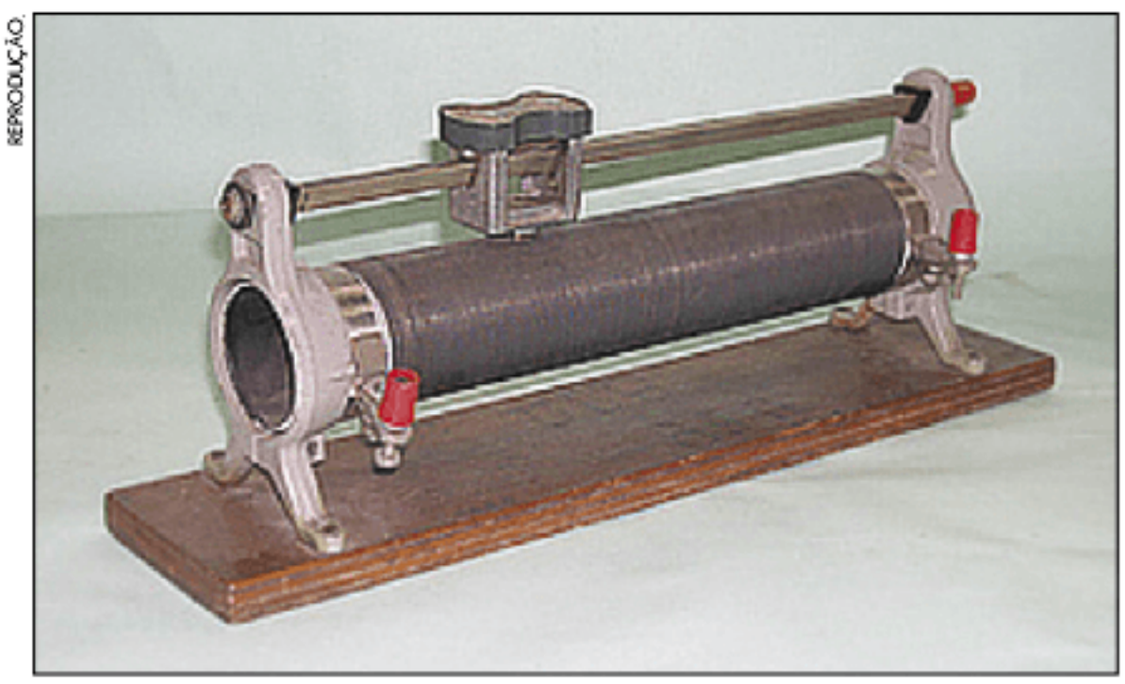


Fig. 20 Representação circuital dos reostatos.

Na figura a seguir, tem-se um reostato utilizado em laboratórios de física.



REPRODUÇÃO.

Fig. 21 Reostato.

É muito importante que o aluno entenda o funcionamento do reostato. Assim, será utilizada a ideia de curto circuito. Na figura a seguir, é representado o esquema geral de funcionamento de um reostato.

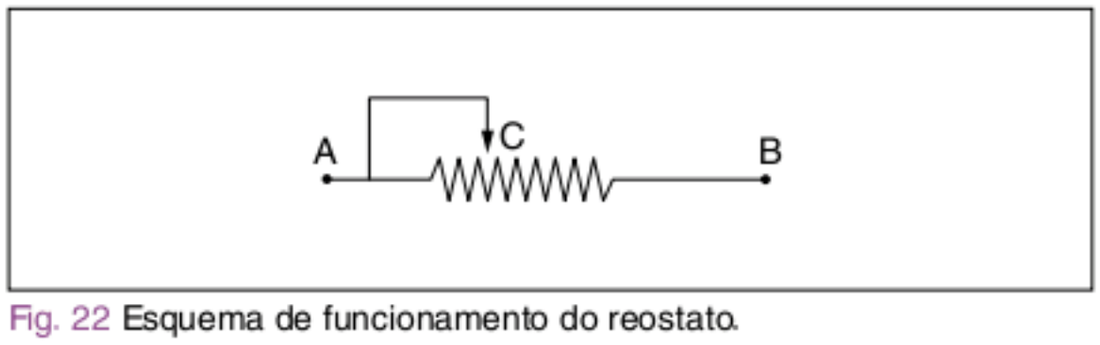


Fig. 22 Esquema de funcionamento do reostato.

Na figura anterior, C é um cursor móvel que liga o fio ideal de resistência nula ao potencial A. Observa-se que, quando o cursor é movimentado na direção de B, o trecho da resistência AB em curto aumenta, o que faz com que a resistência diminua. Ao se movimentar o cursor na direção de A, tem-se que o trecho do resistor AB em curto diminui, o que faz com que a resistência aumente.

Resolução de circuitos elétricos simples envolvendo resistores

Inicialmente, é proposto o circuito da figura 23.

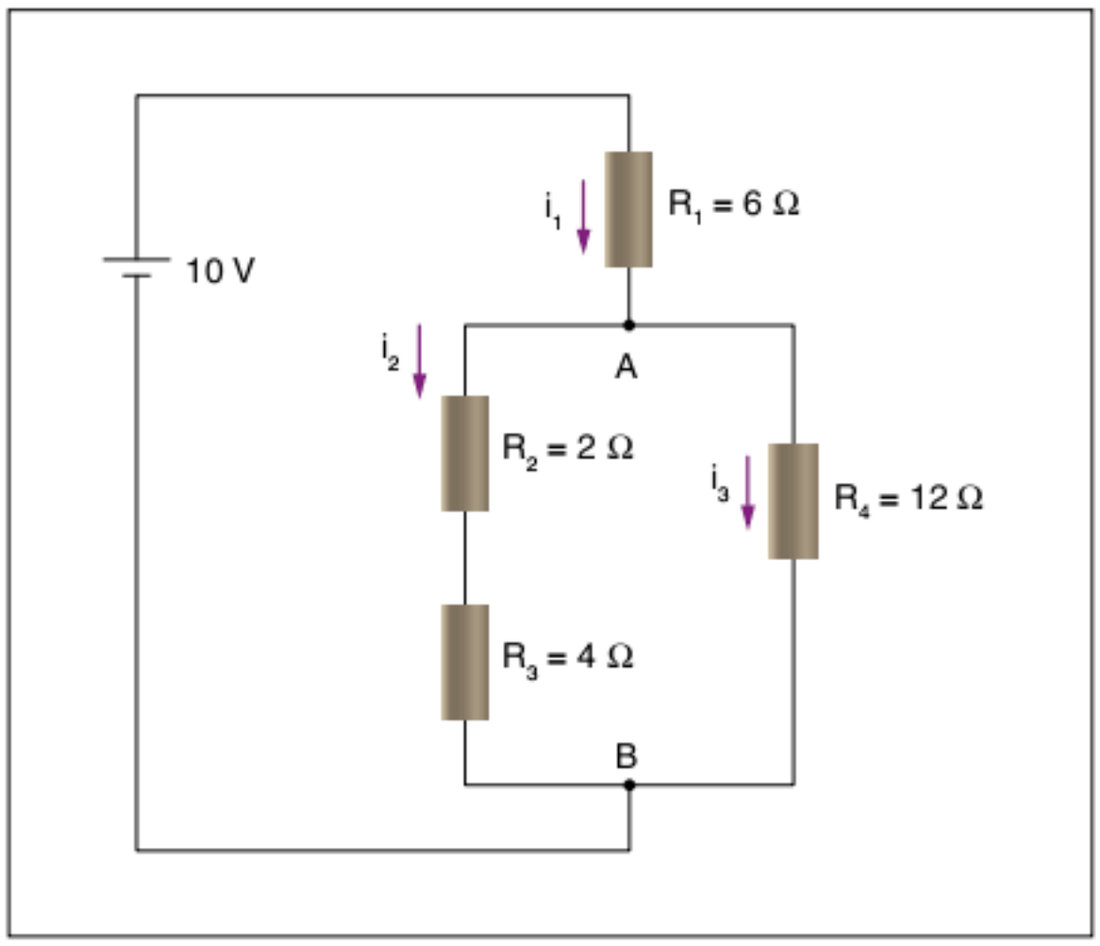


Fig. 23 Circuito em análise, forma original.

O que se deseja é resolver este circuito elétrico, o que significa ser capaz de determinar todas as tensões, correntes e potências nele envolvidas. Em circuitos puramente resistivos, a primeira coisa a fazer para a sua resolução é a determinação da resistência equivalente. Assim, as seguintes questões podem ser feitas:

a) qual a corrente fornecida pela bateria?
b) qual a tensão no resistor R_1?
c) qual a corrente no resistor R_3?
d) qual é a potência dissipada no resistor R_4?

Para a resposta dessas perguntas, deve-se inicialmente realizar o cálculo da resistência equivalente.

Observa-se, inicialmente, que os resistores R_2 e R_3 estão em série, portanto podemos escrever que a resistência equivalente entre R_2 e R_3 vale:

$$R_{eq\left(\frac{2}{3}\right)} = 2 + 4 = 6\ \Omega$$

E o circuito pode ser redesenhado da seguinte forma.

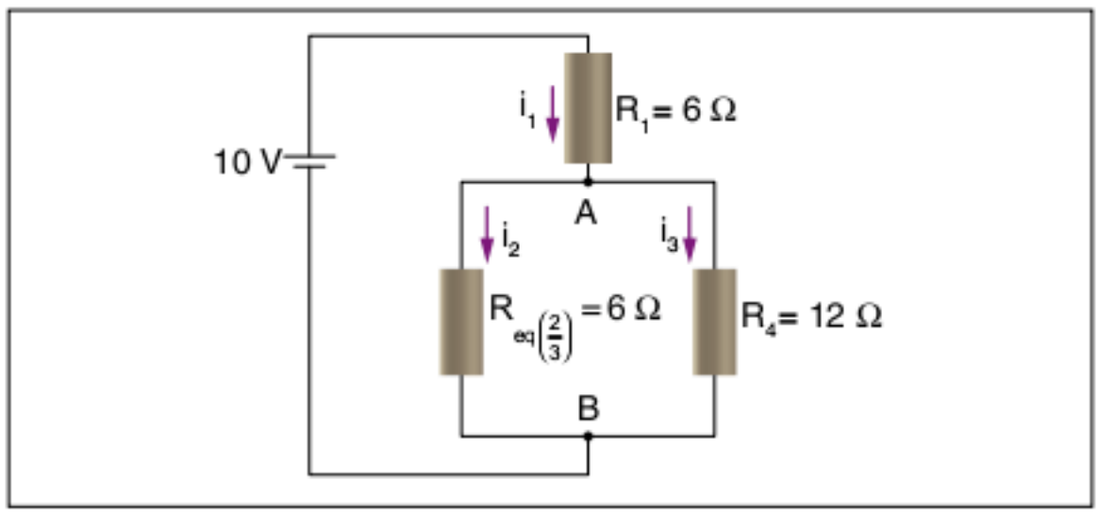


Fig. 24 Circuito com a primeira equivalência.

Observa-se que o resistor equivalente entre R_2 e R_3 está ligado nos mesmos nós que o resistor R_4 (nós A e B). Assim, $R_{eq\left(\frac{2}{3}\right)}$ e R_4 estão em paralelo e a resistência equivalente pode ser calculada por meio da expressão para o cálculo de duas resistências em paralelo. Logo, a resistência equivalente entre os pontos A e B será:

$$R_{eq\left(\frac{A}{B}\right)} = R_{eq\left(\frac{2}{3}\right)} // R_4 = \frac{6.12}{6+12} = 4\ \Omega$$

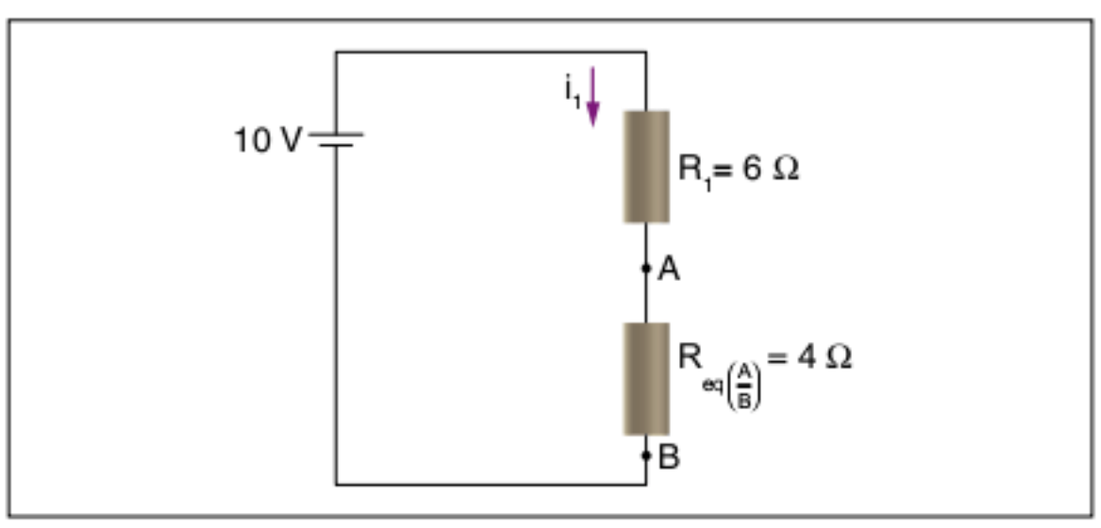


Fig. 25 Circuito com a segunda equivalência.

Finalmente, observa-se que a resistência R_1 está em série com a $R_{eq\left(\frac{A}{B}\right)}$, de tal forma que a resistência equivalente do circuito será:

$$R_{eq} = R_1 + R_{eq\left(\frac{A}{B}\right)} = 6 + 4 = 10\ \Omega$$

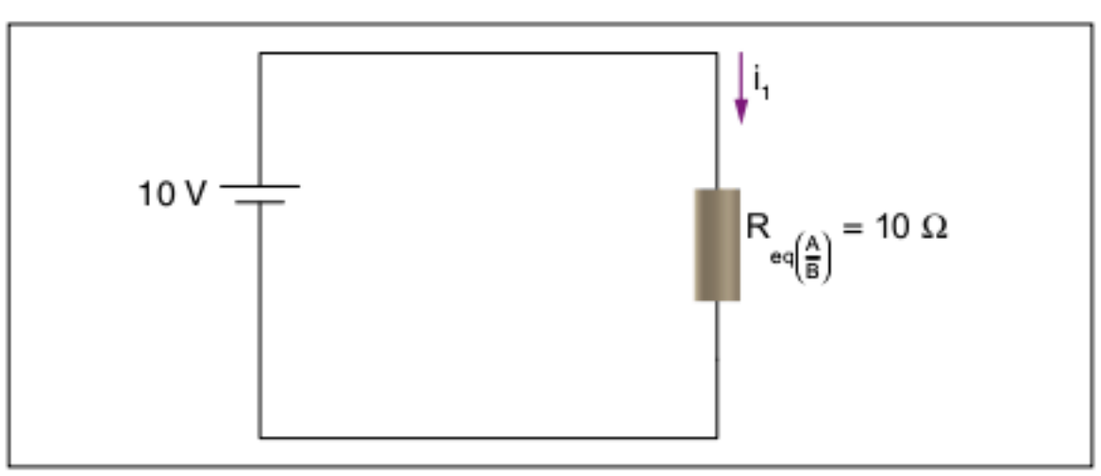


Fig. 26 Circuito equivalente final.

Assim sendo, já é possível responder à primeira pergunta: qual a corrente fornecida pela bateria?

A bateria "enxerga" 10 Ω e, portanto, pela Primeira Lei de Ohm, tem-se que:

$$i_1 = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{10}{10} = 1\ A$$

Para a determinação das correntes i_2 e i_3, façamos inicialmente uma analogia. Imaginando-se a corrente como um escoamento em um cano, ao encontrar uma bifurcação, sendo uma mais fina e a outra mais grossa, é intuitivo que o escoamento no cano mais grosso seja maior, certo?

De fato, a corrente i_1, ao chegar no nó A, terá diante de si dois caminhos a percorrer, um deles com resistência 6 Ω e outro com resistência 12 Ω. A analogia, então, é perfeita, pois o caminho de maior resistência assemelha-se ao cano mais estreito e o caminho com menor resistência ao cano mais grosso. Dessa forma, passará mais corrente no ramo de 6 Ω e menos, no de 12 Ω.

Observando a figura 25, percebemos que a corrente i passa pelos resistores R_1 e $R_{eq\left(\frac{A}{B}\right)}$, de tal forma que a ddp entre os pontos A e B pode ser calculada como:

$$U_{AB} = i_1 . R_{eq\left(\frac{A}{B}\right)} \Rightarrow U_{AB} = 1.4 = 4V$$

Portanto, acabamos de determinar a diferença de potencial que está sobre os resistores $R_{eq\left(\frac{2}{3}\right)}$ e R_4 mostrados na figura 24.

Novamente pela Primeira Lei de Ohm:

$$U_{AB} = R_{eq\left(\frac{2}{3}\right)} . i_2 \Rightarrow 4 = 6.i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{2}{3}\ A$$

Da mesma forma:

$$U_{AB} = R_4 . i_3 \Rightarrow 4 = 12.i_3 \Rightarrow i_3 = \frac{1}{3}\ A$$

Com esses valores, fica relativamente fácil determinar, por exemplo, a potência dissipada no resistor R_4.

$$P_4 = R_4 . i_3^2 \Rightarrow P_4 = 12.\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow P_4 = \frac{4}{3}\ W$$

Outra técnica interessante para se determinar a corrente i_2 e i_3 será apresentada agora.

Técnica para determinação das correntes que passam em ramos em paralelo

Inicialmente, iremos para um caso em que há três resistores em paralelo para em seguida retornarmos ao nosso problema.

Observe a figura a seguir.

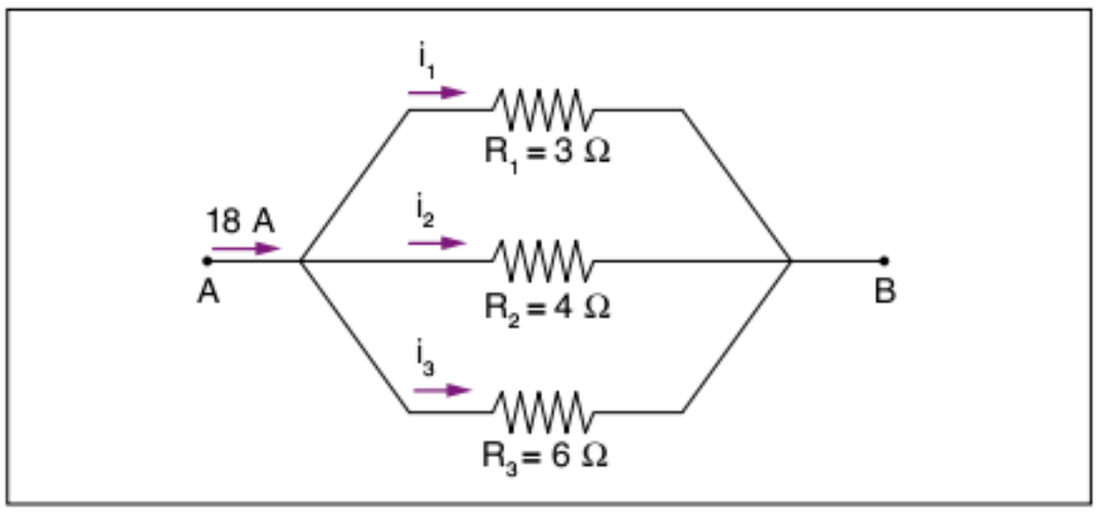


Fig. 27 Associação de resistores em paralelo.

O que se deseja saber é o valor de i_1, i_2 e i_3. Para tal, utilizaremos de uma técnica muito prática. Apresentaremos agora os passos a serem seguidos.

P1 Determina-se o mmc (mínimo múltiplo comum) dos resistores em paralelo. Se em um ramo houver resistores em série, determina-se primeiro a resistência daquele ramo e, após, calcula-se o mmc.
No nosso problema, o mmc(3, 4, 6) = 12.

P2 Divide-se o mmc obtido pelo valor de cada resistência de cada ramo, conforme mostra a figura 28. Esse número é proporcional à corrente que passará por cada ramo.

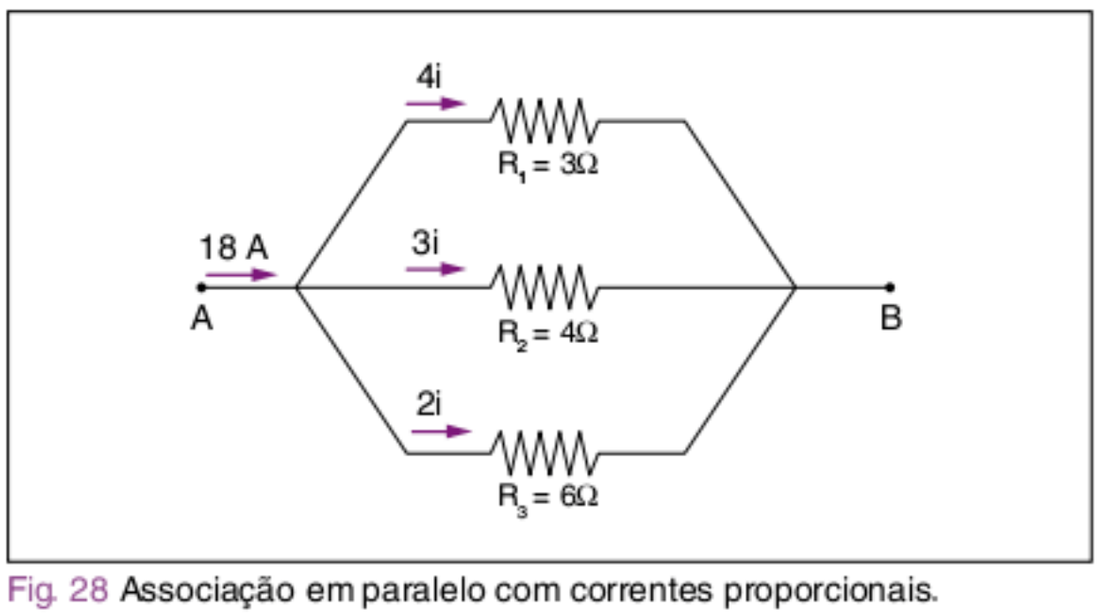


Fig. 28 Associação em paralelo com correntes proporcionais.

No nosso caso, pelo resistor de 3 Ω, passará uma corrente $4 \cdot i$; pelo resistor de 4 Ω, passará uma corrente $3 \cdot i$; e pelo resistor de 6 Ω, uma corrente $2 \cdot i$.

Com certeza, você deve estar se perguntando o porquê deste procedimento. Observe que, como os resistores estão em paralelo, a tensão em todos eles deve ser a mesma. Quando o mmc foi calculado e divido por cada resistência, o produto da corrente pela tensão fica constante, observe:

- no resistor de 3 Ω, a corrente é $4 \cdot i$, ou seja:

$$U = R \cdot i = 3 \cdot 4 \cdot i = 12 \cdot i$$

- no resistor de 4 Ω, a corrente é $3 \cdot i$, ou seja:

$$U = R \cdot i = 4 \cdot 3 \cdot i = 12 \cdot i$$

- no resistor de 6 Ω, a corrente é $2 \cdot i$, ou seja:

$$U = R \cdot i = 6 \cdot 2 \cdot i = 12 \cdot i$$

ATENÇÃO!

Com esta técnica fica fácil observar que no resistor de menor resistência passa a maior corrente e no de maior resistência a menor corrente.

P3 Cálculo da corrente: como a corrente de entrada é 18 A, o somatório da corrente que passa em cada um dos ramos deve ser igual a 18 A. Assim:

$$3 \cdot i + 4 \cdot i + 2 \cdot i = 18 \text{ A}$$
$$i = 2 \text{ A}$$

Como a corrente i_1 que passa no resistor de 3 Ω é $4 \cdot i$, por esse resistor passará uma corrente i_1, tal que:

$$i_1 = 4 \cdot i = 4 \cdot 2 = 8 \text{ A}$$

Similarmente, a corrente i_2 que passa pelo resistor de 4 Ω é igual a $3 \cdot i$, tal que:

$$i_2 = 3 \cdot i = 3 \cdot 2 = 6 \text{ A}$$

Finalmente, a corrente i_3 que passa pelo resistor de 6 Ω é igual a $2 \cdot i$, tal que:

$$i_3 = 2 \cdot i = 2 \cdot 2 = 4 \text{ A}$$

Demonstrada a técnica, vamos então terminar de responder às perguntas formuladas em relação ao circuito da figura 23, utilizando a técnica anteriormente apresentada. Se você está lembrado, calculamos a resistência equivalente $R_{equivalente} = 10\ \Omega$ e a corrente i_1 que a bateria fornece $i_1 = 1$ A.

Tratemos, então, de responder as demais perguntas:

- qual é a tensão no resistor R_1?
- qual é a corrente no resistor R_3?
- qual é a potência dissipada no resistor R_4?

Conforme se observa na figura a seguir, a corrente i_1 é a que passa pelo resistor R_1. A partir daí, ela se divide no nó A pelos dois ramos nas correntes i_2 e i_3. Assim sendo, a tensão no resistor R_1 é calculada aplicando-se diretamente a Primeira Lei de Ohm.

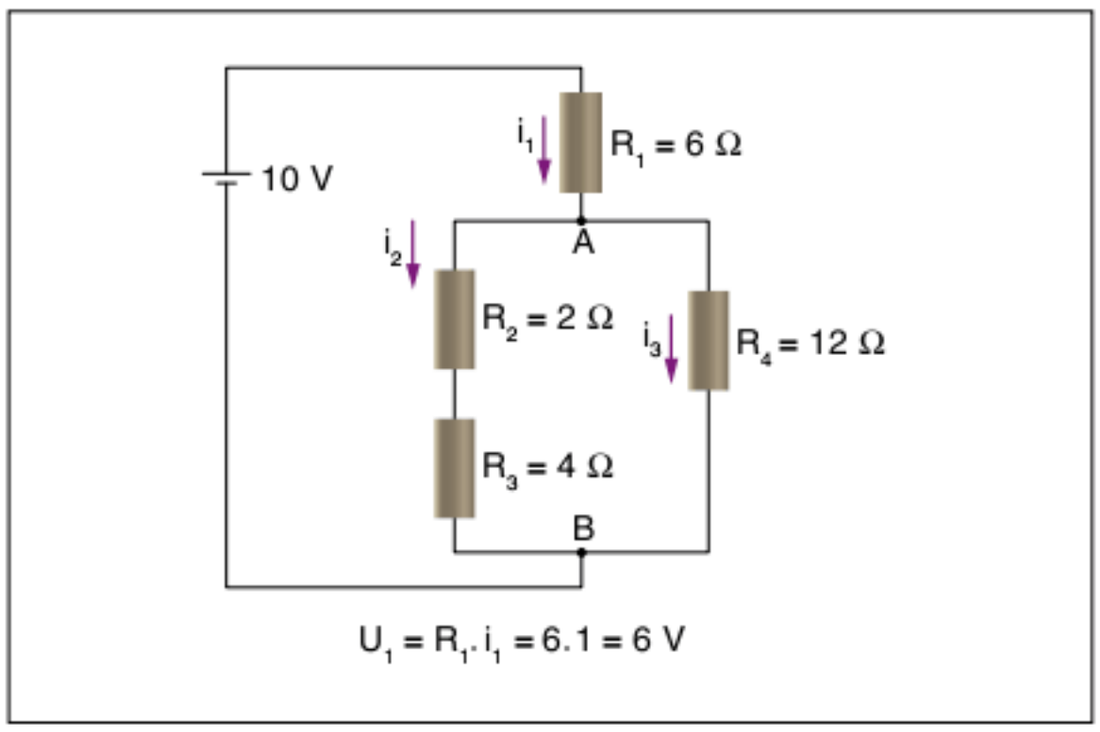


Fig. 29 Aplicação da Primeira Lei de Ohm.

Respondida a primeira pergunta, passemos à segunda: qual a corrente que passa no resistor R_3? Para responder a essa pergunta, basta observar que a corrente que passa em R_3 é a corrente i_2. Para calculá-la, basta aplicar a técnica ensinada anteriormente.

A corrente de chegada no nó é 1 A . Dessa forma, apliquemos os passos da técnica.

P1 *Cálculo do mmc*: observamos que no ramo por onde passa i_2 há duas resistências; inicialmente, devemos calcular a resistência equivalente do ramo. Isso é muito simples, pois as duas estão em série, portanto basta somar as resistências. Assim sendo, devemos calcular o mmc entre 6 Ω (resistência equivalente do ramo por onde passa i_2) e 12 Ω (resistência equivalente do ramo por onde passa i_3).

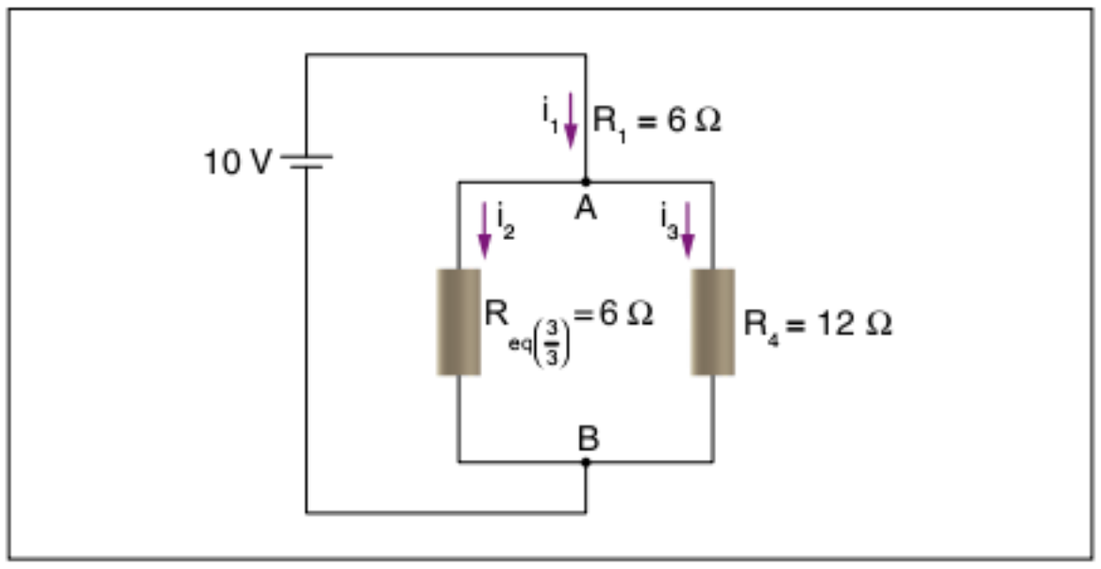


Fig. 30 Circuito com a primeira equivalência.

$$\text{mmc}(6,12) = 12$$

P2 *Divide-se o mmc por cada resistência dos ramos*: assim sendo, temos que:

$$i_2 = \left(\frac{12}{6}\right).\,i = 2.\,i;\ i_3 = \left(\frac{12}{12}\right).\,i = i$$

P3 *Cálculo da corrente*: como o somatório das correntes que passam pelos dois ramos deve ser igual a 1 A, podemos escrever que:

$$2.\,i + i = 1\ \text{A};\ i = \frac{1}{3}\ \text{A}$$

$$i_2 = 2.\,i = \frac{2}{3}\ \text{A};\ i_3 = i = \frac{1}{3}\ \text{A}$$

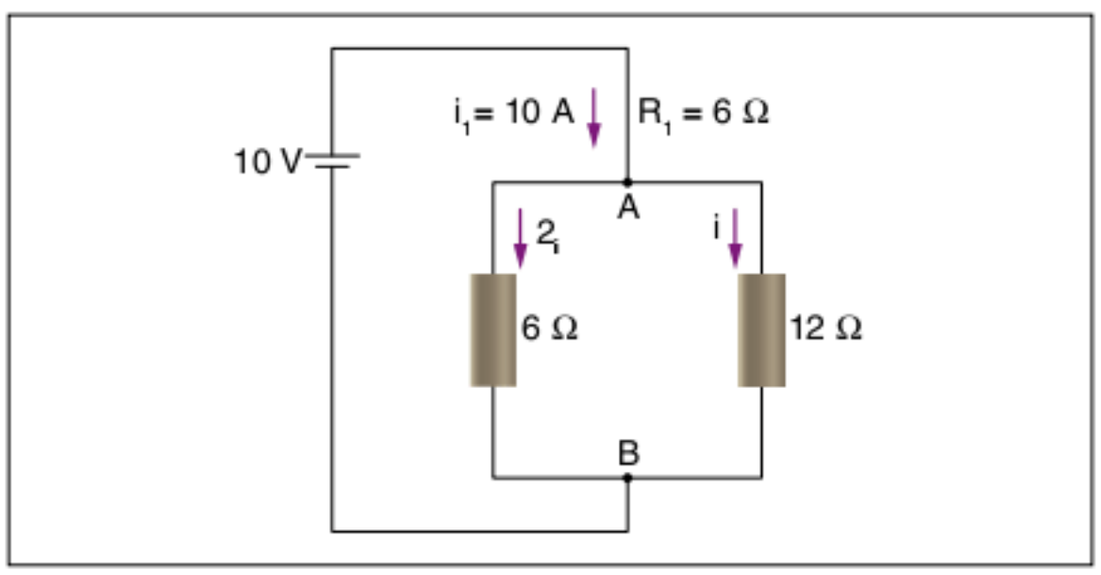


Fig. 31 Circuito com as correntes proporcionais.

Ao se determinar os valores de i_2 e i_3, fica muito fácil responder à última pergunta: qual a potência dissipada no resistor R_4? Basta retornarmos ao início do capítulo e relembrarmos que:

$$P_4 = R_4.\,i_3^2 \Rightarrow P_4 = 12.\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow P_4 = \frac{4}{3}\,\text{W}$$

Pela resolução deste exemplo, pode ser observado que a resolução de circuitos é algo que deve ser feito com método, ou seja, existe uma sequência de passos que devem ser executados:

1. determinação da resistência equivalente;
2. determinação das correntes em cada um dos ramos;
3. determinação das tensões;
4. determinação das potências.

Podemos observar que por meio dos dois métodos encontramos valores iguais, portanto ambos são válidos na hora de resolver qualquer exercício.

Nem sempre um exercício irá pedir todas estas grandezas em todos os pontos do circuito. Porém, a sua determinação é fácil, desde que seja seguida uma ordem correta na obtenção daquelas grandezas.

A ponte de Wheatstone

A ponte de Wheatstone é uma associação especial de resistores que tem a sua utilidade prática na situação em que se encontra equilibrada e é apresentada na figura a seguir.

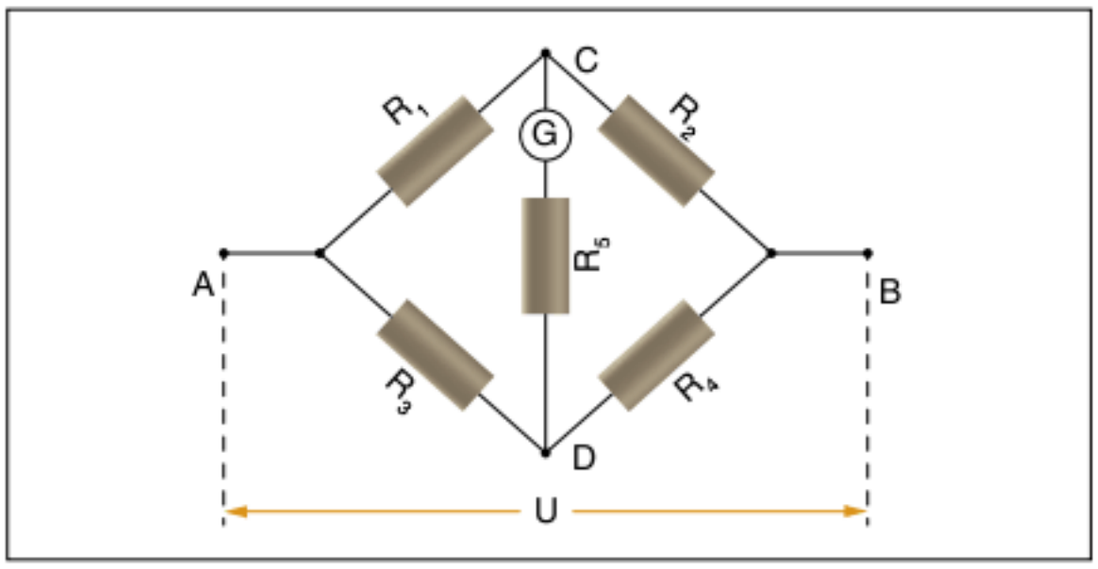


Fig. 32 Circuito de uma ponte de Wheatstone.

A ponte de Wheatstone encontra-se equilibrada na situação em que não há passagem de corrente elétrica pelo galvanômetro G, ou seja, os pontos C e D estão em curto, tal que:

$$U_{CD} = 0$$

Consequentemente, os resistores R_1 e R_2 ficam em série, da mesma forma que os resistores R_3 e R_4, tal como se observa na figura 33.

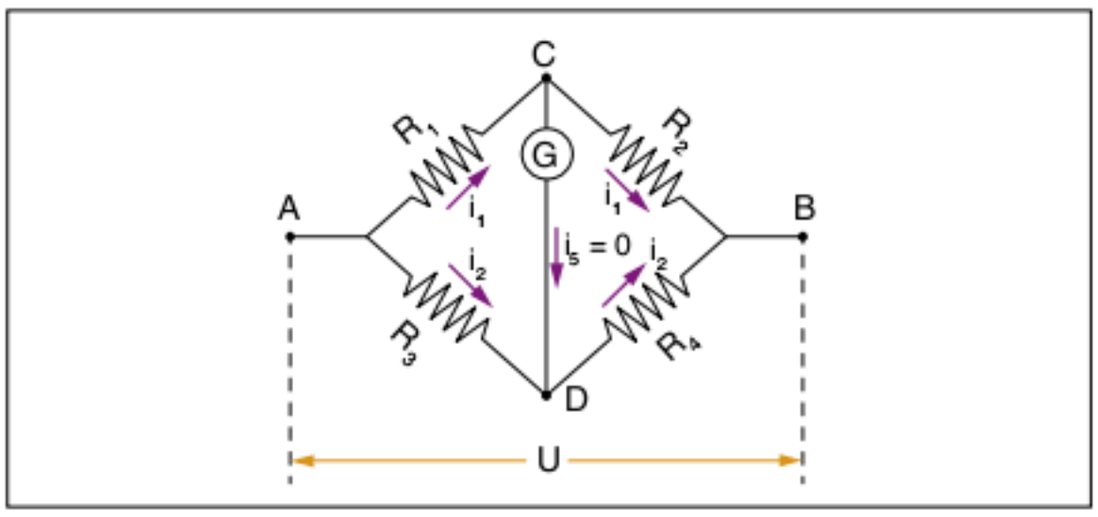


Fig. 33 Ponte de Wheatstone equilibrada.

Da figura tem-se que:

$$i_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{U}{R_3 + R_4}$$

Adotando-se o potencial nulo no ponto A e aplicando-se a condição de equilíbrio da ponte de Wheatstone, tem-se que os potenciais em C e D são respectivamente iguais a:

$$V_C = -R_1 i_1 = -R_1.\frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$V_D = -R_3.\,i_2 = \frac{U}{-R_3.\,R_3 + R_4}$$

Igualando-se os potenciais em C e D, tem-se que:

$$V_C = V_D$$

$$-R_1 \cdot \frac{U}{R_1 + R_2} = -R_3 \cdot \frac{U}{R_3 + R_4}$$

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

(Condição de equilíbrio na ponte de Wheatstone)

Além da representação clássica da ponte de Wheatstone em circuitos elétricos, ela pode aparecer também em circuitos elétricos, indicada de outras formas. Por isso, é importante que o estudante seja capaz de identificá-la se ela for apresentada de maneira diferente, dado que o cálculo da resistência equivalente fica extremamente facilitado no caso em que haja o equilíbrio da ponte. A figura a seguir mostra outras topologias para a ponte de Wheatstone.

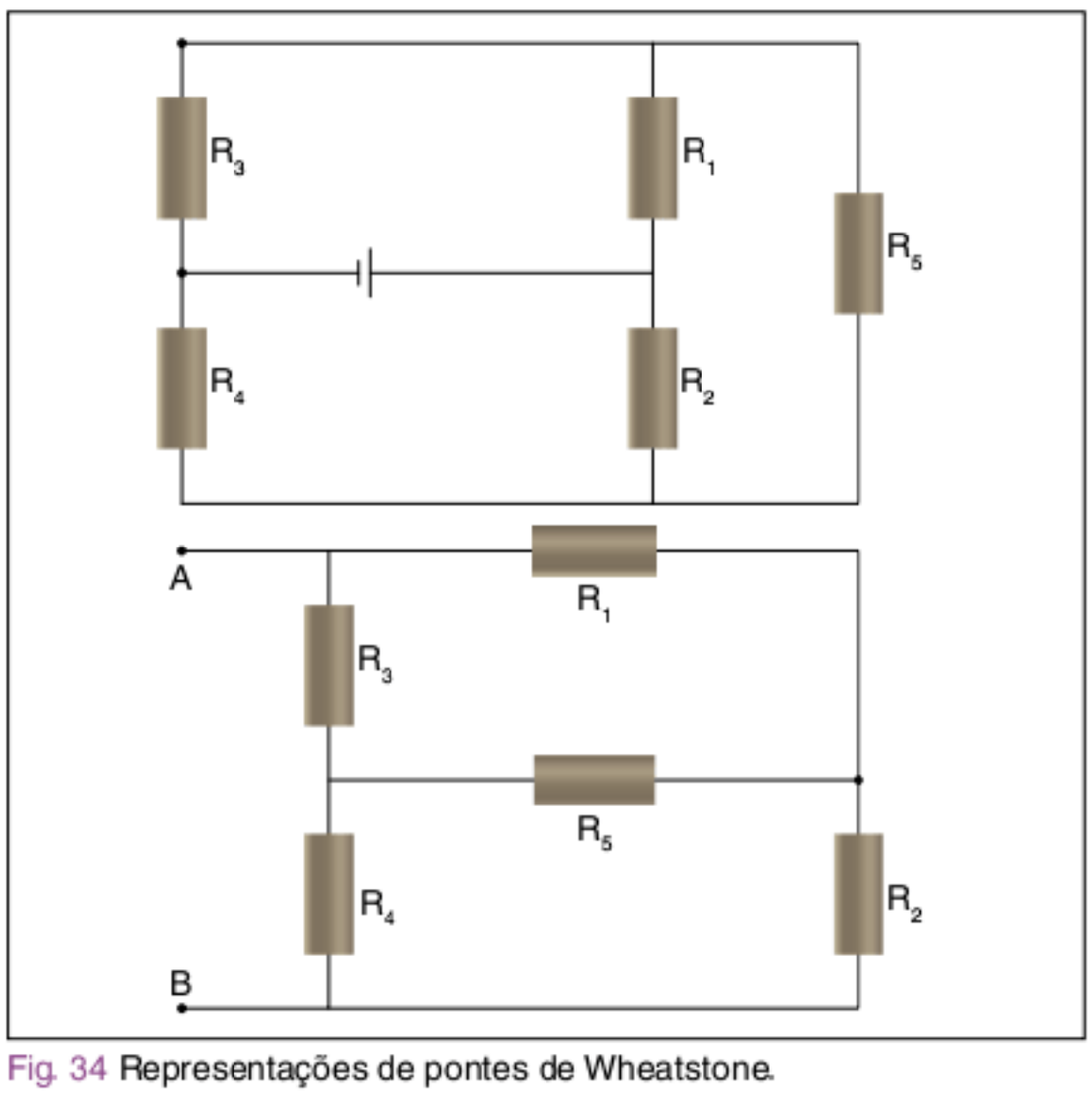
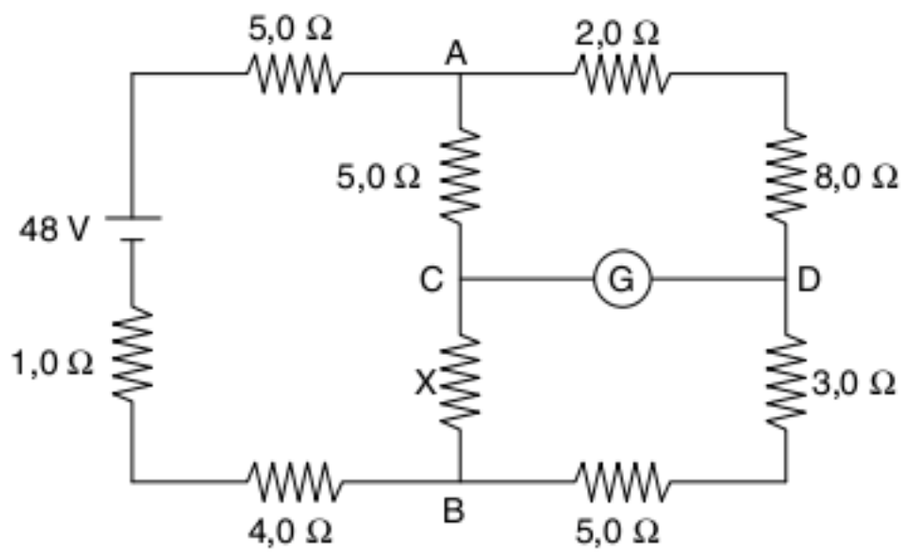


Fig. 34 Representações de pontes de Wheatstone.

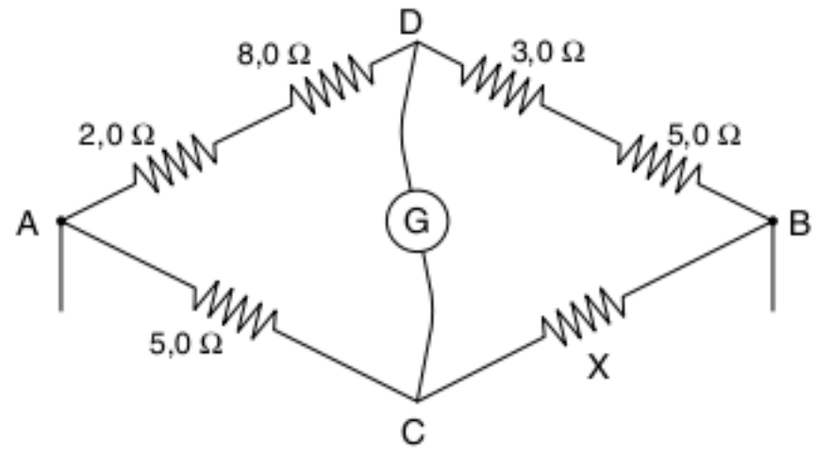
Exercício resolvido

7 No circuito esquematizado, o galvanômetro inserido não acusa passagem de corrente. Determine a resistência do resistor.



Resolução:

O trecho em que está o galvanômetro é uma ponte de Wheatstone em equilíbrio. Redesenhando esse trecho, teremos o esquema da figura.



Aplicando a propriedade de equilíbrio da ponte:

$(2{,}0 + 8{,}0) \cdot R_X = (3{,}0 + 5{,}0) \cdot 5{,}0$

$10\ R_X = 8{,}0 \cdot 5{,}0$

$R_X = \dfrac{40}{10}$

$R_X = 4{,}0\ \Omega$

Ponte de fio

Uma variação da montagem da ponte de Wheatstone é a ponte de fio. Essa montagem apresenta elevada precisão na medida de resistências desconhecidas.

Na montagem, R_X é uma resistência que se deseja determinar enquanto que R_P é uma resistência padrão, cujo valor é conhecido com elevada precisão.

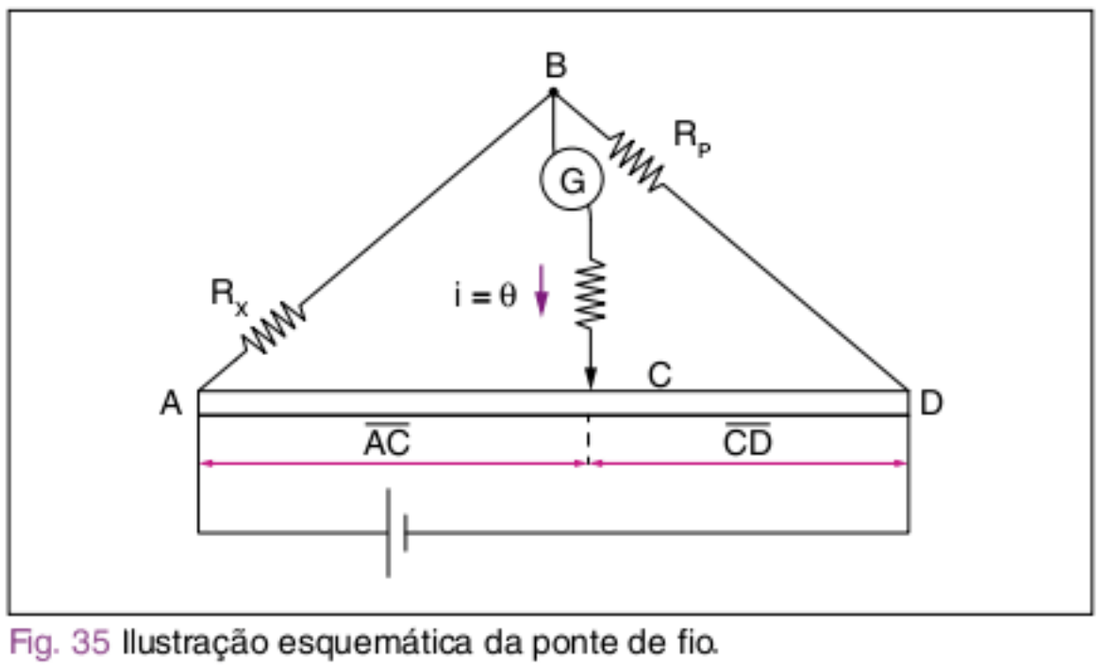


Fig. 35 Ilustração esquemática da ponte de fio.

Na figura 35, tem-se um fio AD homogêneo e de seção reta constante. C é um cursor móvel que pode deslizar sobre o fio AD. A posição do cursor é ajustada até que a corrente que passa pelo galvanômetro seja nula. Nessa condição, a ponte de fio, que na verdade é uma ponte, está equilibrada e, portanto, pode-se escrever que:

$$R_X R_{CD} = R_P R_{AC}$$

A Segunda Lei de Ohm permite escrever que:

$$R_X \cdot \frac{\rho \cdot \overline{CD}}{A} = R_P \cdot \frac{\rho \cdot \overline{AC}}{A}$$

$$R_X = \frac{R_P \cdot \overline{AC}}{\overline{CD}}$$

Método de cálculo da resistência equivalente envolvendo várias resistências

Muitas vezes nos deparamos com associações de resistores que, por possuírem vários resistores, dificultam o cálculo da resistência equivalente por não conseguirmos identificar as associações de resistores em série e em paralelo.

Nesses casos, uma técnica muito útil é a de numerarmos os nós da associação, de forma a podermos redesenhar o circuito de uma maneira que seja possível observar claramente quais resistores estão em série e em paralelo.

Observe a associação de resistores abaixo, deseja-se calcular a resistência equivalente entre os pontos A e F.

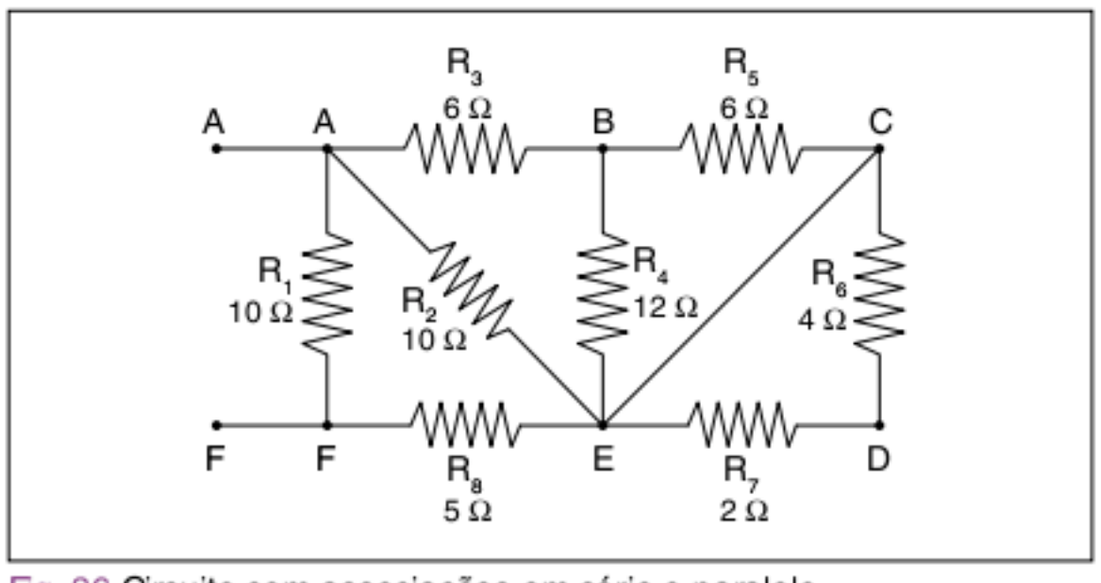


Fig. 36 Circuito com associações em série e paralelo.

Vamos agora numerar os nós de A a F. Como se deseja calcular a resistência entre os pontos A e F, devemos partir de A e chegar a F de acordo com as seguintes regras:

- a cada nó é atribuída uma numeração. Ao passar de um nó a outro, mudamos a identificação;
- caso os nós estejam curto-circuitados, estes devem receber a mesma numeração. Assim sendo, podemos "juntar" os nós em um só, já que a resistência entre os dois nós curto-circuitados é nula;
- redesenhamos o circuito respeitando a numeração colocada em cada nó; e realizamos o cálculo da resistência equivalente;
- os pontos entre os quais se deseja calcular a resistência equivalente recebem os números extremos.

Utilizando-se das regras anteriores, vamos então calcular a resistência equivalente entre os pontos A e F do circuito proposto inicialmente.

Partindo de A, atribuímos a esse ponto o número 1.

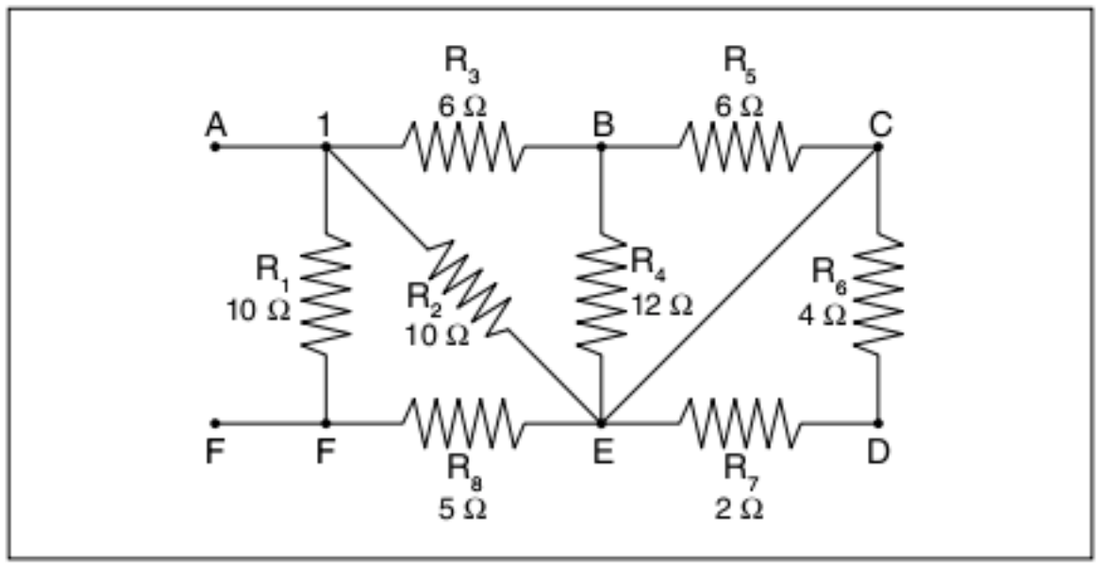


Fig. 37 Circuito com classificação primária dos nós.

Ao ir do nó A para o B, devemos mudar a numeração, de acordo com a regra 1. Então, atribuímos ao ponto B o número 2.

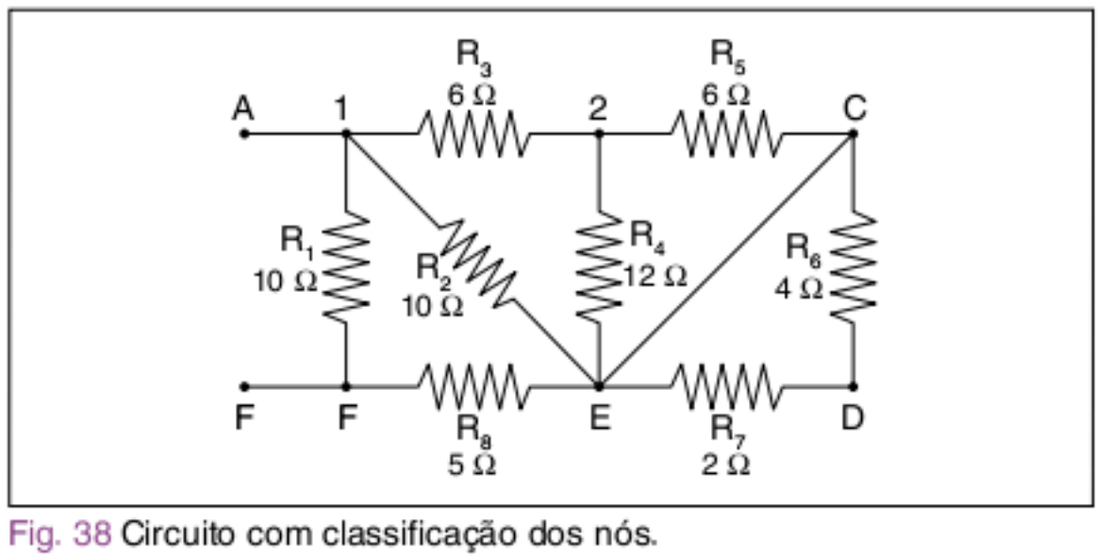


Fig. 38 Circuito com classificação dos nós.

Na sequência, ao ir do ponto B para o C, atribuímos ao ponto C o número 3. Como os pontos C e E estão curto-circuitados, o ponto E também deve receber o número 3, e, consequentemente, podemos "juntar" os pontos C e E, pois os resistores R_6 e R_7 estão curto-circuitados.

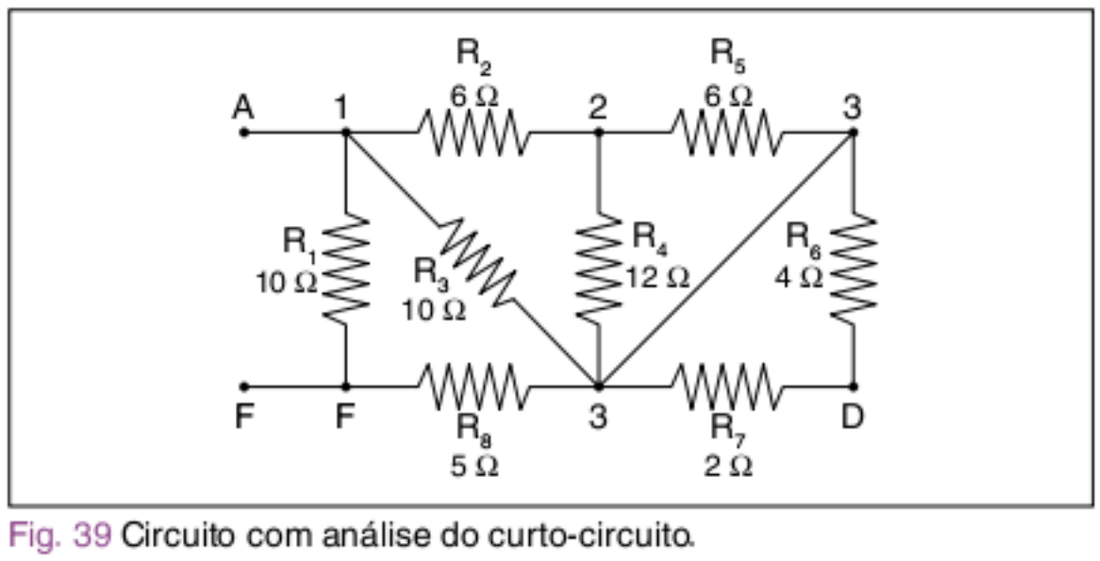


Fig. 39 Circuito com análise do curto-circuito.

Finalmente, ao ir do ponto E para o ponto F, atribuímos ao ponto F o número 4.

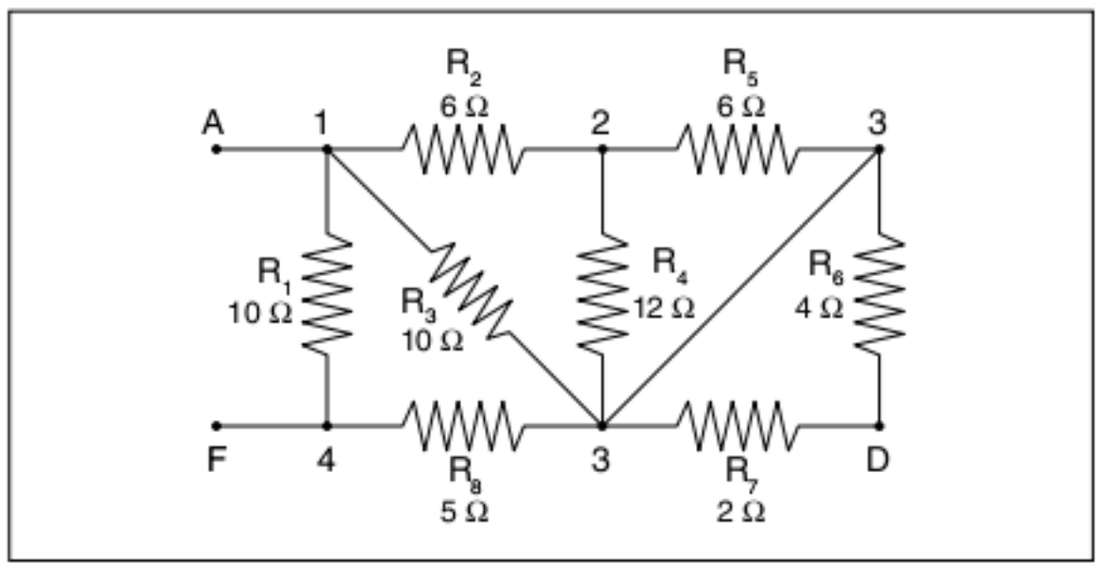


Fig. 40 Circuito com a classificação completa.

Agora, a tarefa fica muito mais simples. Basta redesenhar o circuito, de forma linear, de acordo com a numeração realizada.

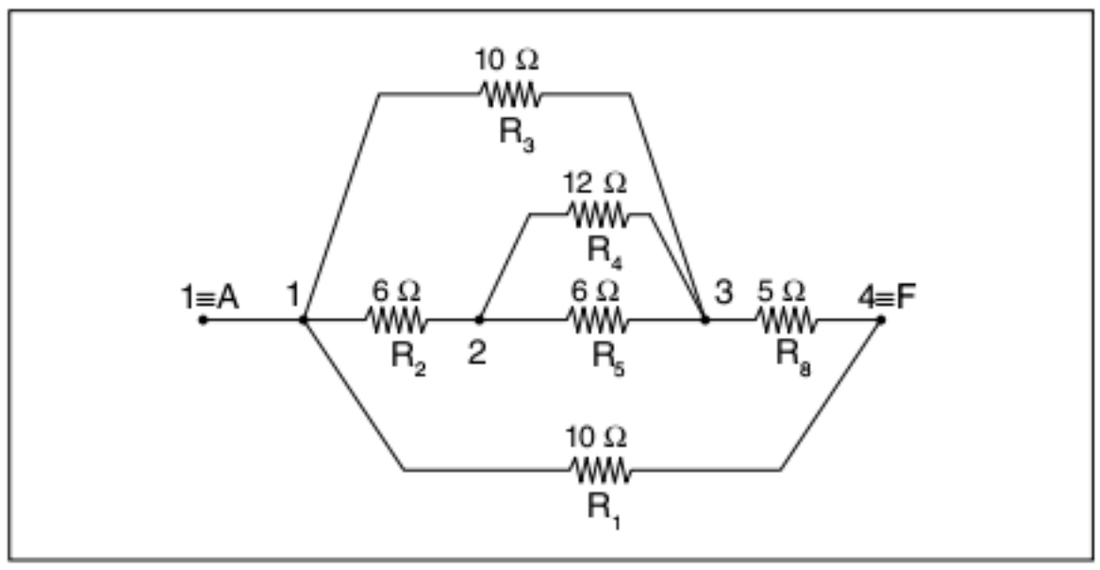


Fig. 41 Circuito final.

Na figura anterior, observa-se o circuito redesenhado.

Compare com a penúltima figura.

- Do ponto 1, vai-se ao 2 através de R_2.
- Do ponto 1, vai-se ao 3 através de R_3.
- Do ponto 1, vai-se ao 4 através de R_1.
- Do ponto 2, vai-se ao 3 através de R_5.
- Do ponto 2, vai-se ao 3 através de R_4.
- Do ponto 3, vai-se ao 4 através de R_8.
- R_6 e R_7 estão curto circuitados.

Observe que o circuito da figura 41 é o mesmo do início, com a diferença de que é muito mais fácil a visualização dos resistores em série e paralelo.

Portanto, a resistência equivalente entre A e F é dada por:

$R_{AF} = \{[R_3//(R_2 + (R_4//R_5)] + R_8\}//R_1$

$R_{AF} = \{[10//(6 + (12//6)] + 5\}//10\}$

$R_{AF} = \{[10//(6 + 4)] + 5\}//10\}$

$R_{AF} = \{[10//10] + 5\}//10\}$

$R_{AF} = (5 + 5)//10$

$R_{AF} = 10//10$

$R_{AF} = 5\ \Omega$

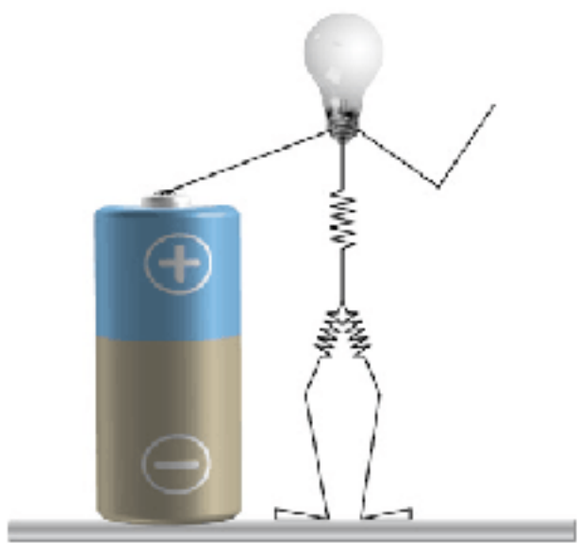
Revisando

1 **Unicamp** Uma lâmpada incandescente (100 W, 120 V) tem um filamento de tungstênio de comprimento igual a 31,4 cm e diâmetro $4{,}0.10^{-2}$ mm. A resistividade do tungstênio à temperatura ambiente é de $5{,}6.10^{-8}$ ohm. m.

a) Qual a resistência do filamento quando ele está à temperatura ambiente?

b) Qual a resistência do filamento com a lâmpada acesa?

2 **UFABC 2007 (Adapt.)** Brincando com resistores, um estudante monta o bonequinho esquematizado a seguir. Enquanto uma das mãos do boneco toca o polo positivo de uma pilha de 1,5 V, os pés mantêm contato com uma placa metálica condutora onde o outro polo da pilha está encostado. Como consequência, a lâmpada se acende.



Se a lâmpada e os três resistores utilizados têm resistências iguais e de valor 2,0 Ω, qual a potência elétrica, em W, dissipada pela lâmpada em funcionamento?

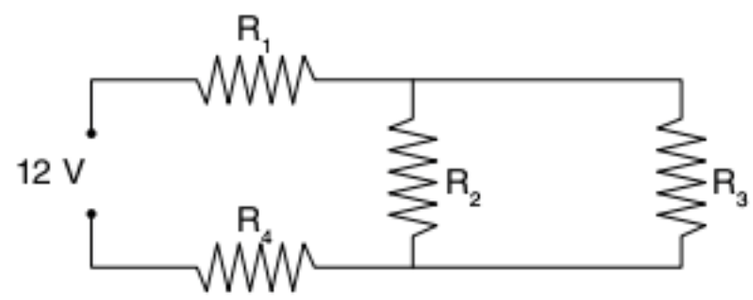
3 **FMPA-MG (Adapt.)** Para o circuito a seguir, são dados os seguintes valores:

$i_3 = 0{,}4$ A (corrente através de R_3)

$i_4 = 1{,}2$ A (corrente através de R_4)

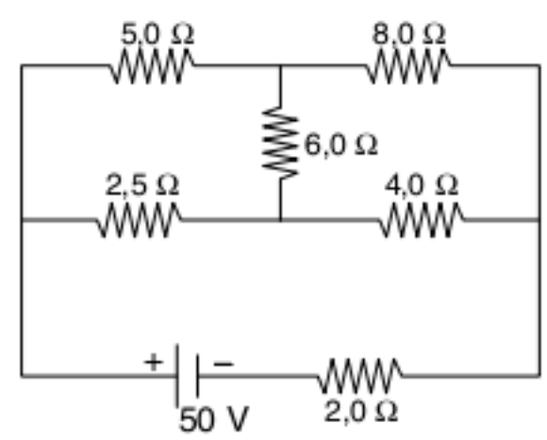
$V_1 = 3{,}6$ V (ddp aplicada em R_1)

$V_2 = 6$ V (ddp aplicada em R_2)



Quais são os valores respectivos, em ohm, dos resistores R_1, R_2, R_3 e R_4?

4 **Osec-SP (Adapt.)** Dado o esquema a seguir, qual é a potência dissipada no resistor de 6,0 Ω?



Exercícios propostos

Resistores e potência dissipada por efeito Joule

1 A potência dissipada por um determinado chuveiro elétrico é de 2.000 W. Se em 1992 era cobrado R$ 50,00 pelo consumo de 1 kWh, qual foi, na época, o valor cobrado de alguém que tomou banho durante 15 minutos?

2 Um resistor elétrico é atravessado por 300 C em um intervalo de tempo de 20 segundos. Calcule a potência dissipada, sabendo-se que a ddp aplicada no resistor é de 100 V.

3 Uma lâmpada possui a indicação 120 V – 60 W. Qual a resistência elétrica dessa lâmpada?

4 Uma lâmpada possui a indicação 120 V – 60 W. Qual a corrente elétrica dessa lâmpada nas condições normais de operação?

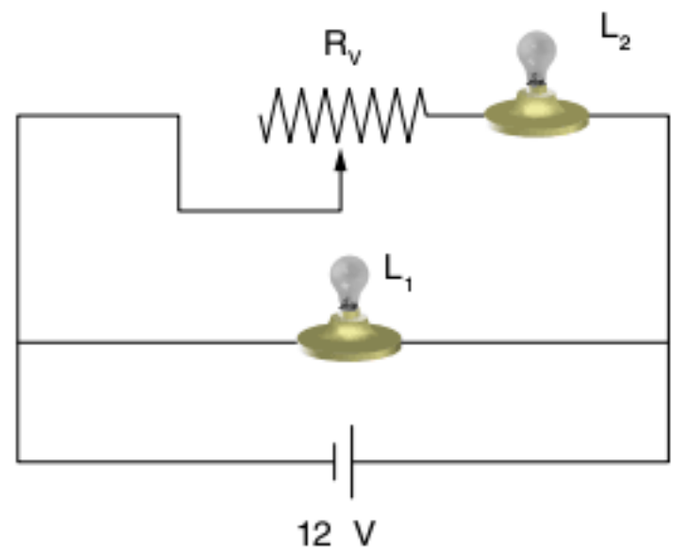
5 **Udesc** Uma pessoa resolve tomar banho e liga um chuveiro elétrico de 220 V, o qual dissipa uma potência de 2,4 kW. Após o banho, utiliza um secador de cabelo, cuja potência elétrica é 1 kW, deixando-o ligado meia hora, para secagem dos cabelos.
Descreva detalhadamente todos os procedimentos e raciocínios utilizados, para responder aos itens a seguir.

a) Qual a energia gasta pelo secador, nesse intervalo de tempo?
b) Se 1 kW (um quilowatt-hora) custa R$ 6,00, quanto custará a secagem dos cabelos?
c) Desejando duplicar a variação de temperatura da água, mantendo constante sua vazão, qual deve ser a nova resistência do chuveiro?

6 **Unicamp** Um fusível é um interruptor elétrico de proteção que queima, desligando o circuito, quando a corrente ultrapassa certo valor. A rede elétrica de 110 V de uma casa é protegida por fusível de 15 A. Dispõe-se dos seguintes equipamentos: um aquecedor de água de 2.200 W, um ferro de passar de 770 W e lâmpadas de 100 W.

a) Quais desses equipamentos podem ser ligados na rede elétrica, um de cada vez, sem queimar o fusível?
b) Se apenas lâmpadas de 100 W são ligadas na rede elétrica, qual o número máximo dessas lâmpadas que podem ser ligadas simultaneamente sem queimar o fusível de 15 A?

7 **UFG** Duas lâmpadas, L_1 e L_2, quando ligadas isoladamente em 12 V, exibem, respectivamente, potências de 4 W e 9 W.
Uma resistência variável R_V é ligada em série a L_2 e o conjunto é ligado em paralelo à lâmpada L_1 e a uma fonte 12 V, como mostra a figura a seguir. Qual deve ser o valor de R_V para que o brilho de L_2 seja idêntico ao de L_1?



8 **Cesgranrio** Um aquecedor elétrico de imersão é constituído por um resistor de 15 ohms e funciona sob tensão de 120 volts. Esse aparelho é utilizado para aquecer 900 g de água inicialmente a 20 °C. Considerando que todo o calor gerado é absorvido pela água e que o calor específico da água seja $4{,}0.10^3$ J/kg °C, então, em quantos minutos a água começará a ferver?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

9 **Enem** Lâmpadas incandescentes são normalmente projetadas para trabalhar com a tensão da rede elétrica em que serão ligadas. Em 1997, contudo, lâmpadas projetadas para funcionar com 127 V foram retiradas do mercado e, em seu lugar, colocaram-se lâmpadas concebidas para uma tensão de 120 V.
Segundo dados recentes, essa substituição representou uma mudança significativa no consumo de energia elétrica para cerca de 80 milhões de brasileiros que residem nas regiões em que a tensão da rede é de 127 V. A tabela abaixo apresenta algumas características de duas lâmpadas de 60 W, projetadas, respectivamente, para 127 V (antiga) e 120 V (nova), quando ambas encontram-se ligadas numa rede de 127 V.

Lâmpada (projeto original)	60 W–127 V	60 W–120 V
Tensão da rede elétrica	127 V	127 V
Potência medida (Watt)	60	65
Luminosidade (lúmens)	750	920
Vida útil média (horas)	1.000	452

Acender uma lâmpada de 60 W e 120 V em um local onde a tensão na tomada é de 127 V, comparativamente a uma lâmpada de 60 W e 127 V no mesmo local tem como resultado:

(a) mesma potência, maior intensidade de luz e maior durabilidade.
(b) mesma potência, maior intensidade de luz e menor durabilidade.
(c) maior potência, maior intensidade de luz e maior durabilidade.
(d) maior potência, maior intensidade de luz e menor durabilidade.
(e) menor potência, menor intensidade de luz e menor durabilidade.

10 **Faap** Calcule o trabalho realizado pela corrente elétrica na lâmpada de uma lanterna durante 5 minutos, se a tensão na lâmpada for 3,5 volts e a intensidade de corrente 0,25 ampères.

(a) Aproximadamente 4,4 joules.
(b) Aproximadamente 263 joules.
(c) Aproximadamente 26,3 joules.
(d) Aproximadamente 44,0 joules.
(e) Aproximadamente 2.630 joules.

11 **FEI** Um chuveiro de 4.000 W e 220 V teve sua resistência danificada. Para consertar, sua resistência foi cortada ao meio, e aproveitou-se apenas a metade. Qual é a nova potência do chuveiro?

(a) 2.000 W
(b) 4.000 W
(c) 3.000 W
(d) 6.000 W
(e) 8.000 W

12 **Fatec** Uma massa de 100 g de água a 5 °C é aquecida por meio de um resistor de 100 Ω ligado a uma fonte de tensão de 100 V.

Dados: 1 cal = 4,2 J; calor específico da água: 1 cal/g°C.

Supondo-se que todo calor fornecido pelo resistor seja absorvido pela água, após 42 segundos, a temperatura da água, em °C, será:

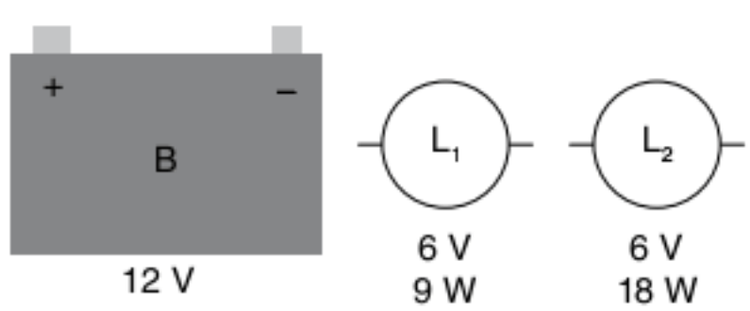
(a) 15
(b) 25
(c) 35
(d) 45
(e) 55

13 **Fuvest** O circuito elétrico do enfeite de uma árvore de Natal é constituído de 60 lâmpadas idênticas (cada uma com 6 V de tensão de resistência de 30 ohms) e uma fonte de tensão de 6 V com potência de 18 watts que liga um conjunto de lâmpadas de cada vez, para produzir o efeito pisca-pisca.

Considerando-se que as lâmpadas e a fonte funcionam de acordo com as especificações fornecidas, calcule:

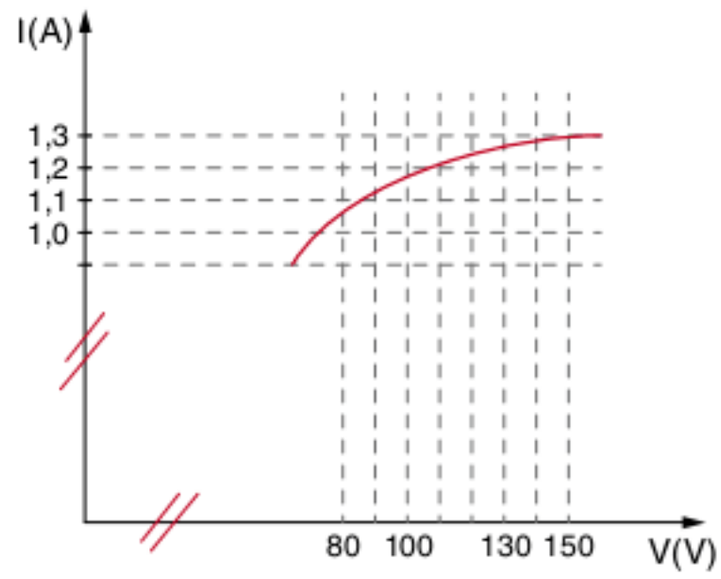
a) a corrente que circula através de cada lâmpada quando acesa.
b) o número máximo de lâmpadas que podem ser acesas simultaneamente.

14 **Fuvest** Você dispõe dos elementos: uma bateria para automóvel B e inúmeras lâmpadas incandescentes dos tipos L_1 e L_2 caracterizadas na figura a seguir. Em suas respostas, use apenas esses elementos e represente com linhas contínuas os fios de ligação. Identifique claramente os elementos utilizados.



a) Esquematize uma montagem utilizando 6 lâmpadas, sendo pelo menos uma de cada tipo, que fiquem acesas em suas condições nominais (indicadas na figura) e determine a corrente fornecida pela bateria.
b) Esquematize, se possível, uma montagem utilizando apenas 3 lâmpadas que fiquem acesas em suas condições nominais e determine a corrente fornecida pela bateria. Caso seja impossível, escreva "impossível" e justifique.

15 **Fuvest** Um certo tipo de lâmpada incandescente comum, de potência nominal 170 W e tensão nominal 130 V, apresenta a relação da corrente (I), em função da tensão (V), indicada no gráfico a seguir:



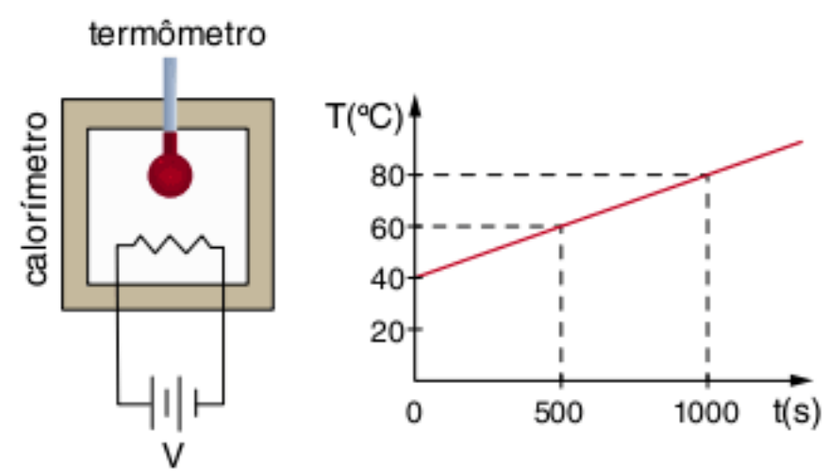
Suponha que duas lâmpadas (A e B), desse mesmo tipo, foram utilizadas, cada uma, durante 1 hora, sendo:

A – em uma rede elétrica de 130 V
B – em uma rede elétrica de 100 V

Ao final desse tempo, a diferença entre o consumo de energia elétrica das duas lâmpadas, em watt hora (Wh), foi aproximadamente de:

(a) 0 Wh
(b) 10 Wh
(c) 40 Wh
(d) 50 Wh
(e) 70 Wh

16 **Fuvest** Um calorímetro, constituído por um recipiente isolante térmico ao qual estão acoplados um termômetro e um resistor elétrico, está completamente preenchido por 0,400 kg de uma substância cujo calor específico deseja-se determinar. Num experimento em que a potência dissipada pelo resistor era de 80 W, a leitura do termômetro permitiu a construção do gráfico da temperatura T em função do tempo t, mostrado na figura adiante. O tempo t é medido a partir do instante em que a fonte que alimenta o resistor é ligada.



a) Qual o calor específico da substância em joules/(kg °C)?
b) Refaça o gráfico da temperatura em função do tempo, no caso da tensão V da fonte que alimenta o resistor ser reduzida à metade.

17 **UFSC 2007** Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

01 Para a maioria dos metais a resistividade diminui quando há um aumento na temperatura.

02 A dissipação de energia por efeito Joule num resistor depende do sentido da corrente e independe da tensão aplicada sobre ele.

04 Para dois condutores de mesmo material e mesmo comprimento, sendo que um tem o dobro da área de seção do outro, teremos uma mesma intensidade de corrente se aplicarmos a mesma tensão sobre ambos.

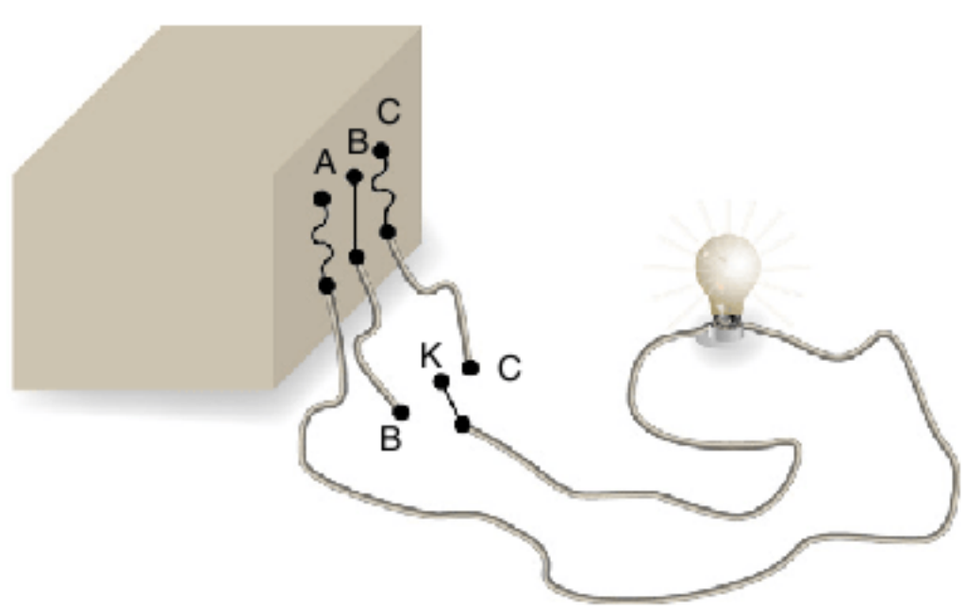
08 Para um condutor ôhmico um aumento de tensão corresponde a um aumento proporcional de corrente elétrica.

16 Ao se estabelecer uma corrente elétrica num fio metálico submetido a uma certa tensão contínua, teremos prótons se movendo do polo positivo ao negativo.

32 Os metais geralmente são bons condutores de eletricidade e de calor.

Soma = ☐

18 **Mackenzie 2006** Na figura a seguir, temos a ilustração de uma fonte de tensão para corrente contínua. Os terminais A e C, protegidos por fusíveis, apresentam potenciais elétricos, respectivamente, iguais a + 6,0 V e – 6,0 V, e o terminal B apresenta potencial elétrico zero. A lâmpada possui especificações nominais 3,0 W – 12 V, e a chave K é utilizada para fechar o circuito apenas em um ponto de cada vez.



A intensidade de corrente elétrica na lâmpada é:

(a) 125 mA, quando a chave está no ponto B; e 250 mA, quando a chave está no ponto C.

(b) 250 mA, quando a chave está no ponto B; e 125 mA, quando a chave está no ponto C.

(c) 250 mA, independentemente de a chave estar no ponto B ou no ponto C.

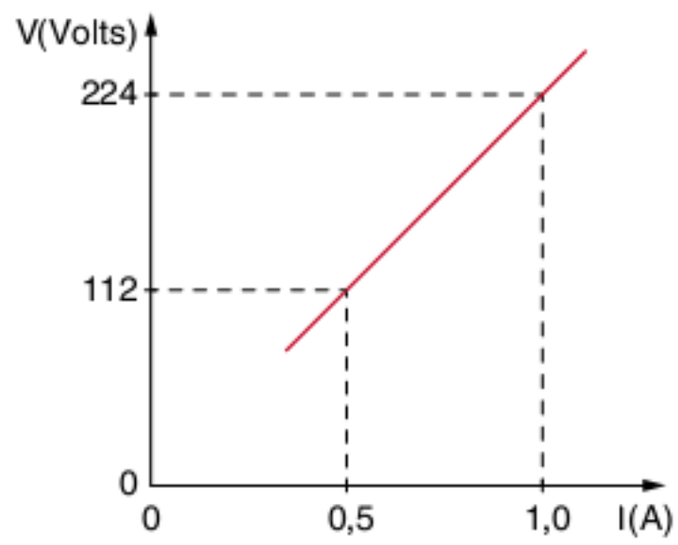
(d) zero, quando a chave está no ponto B, pois a lâmpada queima.

(e) zero, quando a chave está no ponto C, pois a lâmpada queima.

Segunda Lei de Ohm

19 Um determinado fio de cobre de comprimento L com área A (seção transversal) possui resistência elétrica R. O que acontecerá com a resistência elétrica do fio se este for diminuído à metade?

20 **UFPE** Um fio de diâmetro igual a 2 mm é usado para a construção de um equipamento médico. O gráfico da diferença de potencial nas extremidades do fio em função da corrente é indicado na figura a seguir. Qual o valor em ohms da resistência de um outro fio, do mesmo material que o primeiro, de igual comprimento e com o diâmetro duas vezes maior?



21 **Unicamp** Uma cidade consome $1{,}0.10^8\ \Omega$ de potência e é alimentada por uma linha de transmissão de 1.000 km de extensão, cuja voltagem, na entrada da cidade, é 100.000 volts. Essa linha é constituída de cabos de alumínio cuja área da seção reta total vale $A = 5{,}26.10^{-3}\ m^2$. A resistividade do alumínio é $\rho = 2{,}63.10^{-8}\ \Omega m$.

a) Qual a resistência dessa linha de transmissão?

b) Qual a corrente total que passa pela linha de transmissão?

c) Que potência é dissipada na linha?

22 **Cesgranrio** Um fio cilíndrico de comprimento ℓ e raio de seção reta r apresenta resistência R. Um outro fio, cuja resistividade é o dobro da primeira, o comprimento é o triplo, e o raio $\frac{r}{3}$, terá resistência igual a:

(a) $\frac{R}{54}$

(b) 2R

(c) 6R

(d) 18R

(e) 54R

23 **Faap** Um fio condutor homogêneo de secção transversal constante de área A e comprimento ℓ tem resistência elétrica R. Esse fio é dividido em 10 pedaços iguais que são ligados em paralelo, formando um cabo, cuja resistência vale R_C. Assim sendo, podemos afirmar que a relação entre R_C e R vale:

(a) 1

(b) $\frac{1}{10}$

(c) 10

(d) $\frac{1}{100}$

(e) 1.000

24 **UFC** Um pássaro pousa em um dos fios de uma linha de transmissão de energia elétrica. O fio conduz uma corrente elétrica i = 1.000 A e sua resistência, por unidade de comprimento, é de $5{,}0.10^{-5}\ \Omega/m$. A distância que separa os pés do pássaro, ao longo do fio, é de 6,0 cm. A diferença de potencial, em milivolts (mV), entre os seus pés, é:

(a) 1,0

(b) 2,0

(c) 3,0

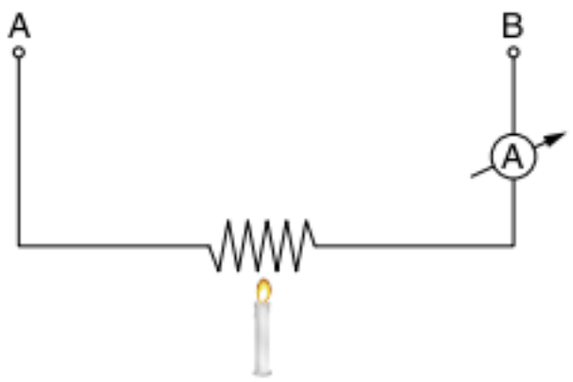
(d) 4,0

(e) 5,0

25 **FEI** Um condutor de comprimento L e diâmetro D possui resistência R_1. Qual é a resistência R_2 de um outro condutor de mesmo material, mesmo comprimento e com dobro de diâmetro do condutor 1?

(a) $R_2 = 2R_1$
(b) $R_2 = \frac{R_1}{2}$
(c) $R_2 = \frac{R_1}{4}$
(d) $R_2 = 4R_1$
(e) $R_2 = R_1$

26 **FEI** Mantendo-se a ddp constante entre A e B, ao se colocar uma fonte de calor para aquecer a resistência, podemos afirmar que:



(a) a corrente não sofrerá alteração.
(b) a resistência não sofrerá alteração.
(c) a corrente irá aumentar.
(d) a resistência irá diminuir.
(e) a corrente irá diminuir.

27 **ITA** Considere as seguintes afirmações sobre a condução elétrica num condutor homogêneo e isotrópico.

I. Energia potencial elétrica é transformada em calor ao conectar-se o condutor aos terminais de uma bateria.
II. Energia potencial elétrica é transformada em energia radiante ao conectar-se o condutor aos terminais de uma bateria.
III. A resistividade elétrica é uma propriedade intensiva da substância que compõe o condutor, isto é, não depende da geometria do condutor.
IV. A resistência de um condutor depende da sua geometria.

Das afirmativas mencionadas:

(a) apenas I é falsa.
(b) apenas II é falsa.
(c) apenas III é falsa.
(d) apenas IV é falsa.
(e) são todas corretas.

28 **Uerj** Dois fusíveis, F_1 e F_2, são utilizados para proteger circuitos diferentes da parte elétrica de um automóvel. F_1 é um fusível de 1,0 A, F_2 é um fusível de 2,0 A, e funcionam ambos sob a mesma voltagem. Esses fusíveis, feitos do mesmo material, têm comprimentos iguais e a mesma forma cilíndrica de seções transversais de áreas S_1 e S_2. A razão $\frac{S_1}{S_2}$ é igual a:

(a) 4
(b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$
(d) $\frac{1}{4}$

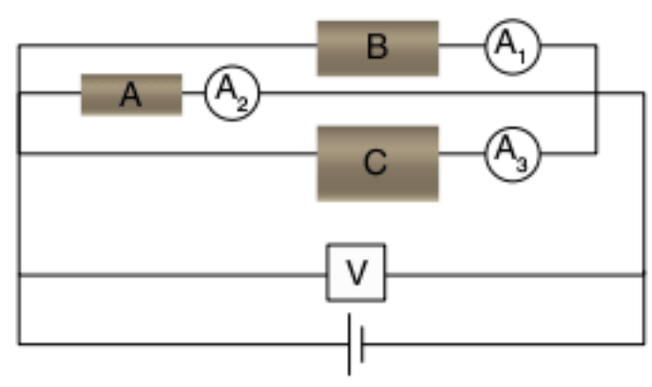
29 **UEL** Deseja-se construir uma resistência elétrica de 1,0 Ω com um fio de constantan de 1,0 mm de diâmetro. A resistividade do material é $4{,}8.10^{-7}$ Ω.m, e π pode ser adotado 3,1. O comprimento do fio utilizado deve ser, em metros:

(a) 0,40
(b) 0,80
(c) 1,6
(d) 2,4
(e) 3,2

30 **UFPR** Dois fios condutores retos A e B, de mesmo material, têm o mesmo comprimento, mas a resistência elétrica de A é a metade da resistência de B. Sobre tais fios, é correto afirmar que:

☐ a área da secção transversal de A é quatro vezes menor que a área da secção transversal de B.
☐ quando percorridos por corrente elétrica de igual intensidade, a potência dissipada por B é maior que a dissipada por A.
☐ quando submetidos à mesma tensão elétrica, a potência dissipada por A é maior que a dissipada por B.
☐ quando ligados em série, a tensão elétrica em B é maior que a tensão elétrica em A.
☐ quando ligados em paralelo, a corrente elétrica que passa por A é igual à corrente elétrica que passa por B.

31 **PUC-MG** Três condutores cilíndricos, de comprimentos iguais, são fabricados com o mesmo material condutor. O cilindro denominado A tem 1,0 cm de diâmetro, o denominado B tem 2,0 cm de diâmetro e o terceiro C tem 3,0 cm de diâmetro, e estão ligados como mostra a figura a seguir.



Considerando que a leitura no voltímetro V seja igual 1,0 volts, e o condutor cilíndrico A tem resistência 1,0 Ω, as leituras nos amperímetros A_1, A_2 e A_3 serão, respectivamente (em ampères):

(a) 1,0 – 1,0 – 1,0
(b) 4,0 – 1,0 – 9,0
(c) 5,0 – 4,0 – 9,0
(d) 18,0 – 2,0 – 8,0
(e) 13,0 – 13,0 – 13,0

32 **Mackenzie** Um cabo de cobre, utilizado para o transporte de energia elétrica, tem a cada quilômetro de comprimento resistência elétrica de 0,34 Ω. A massa de um quilômetro desse cabo é igual a:

Dados do cobre: Densidade = 9.000 kg/m³; resistividade = $1{,}7.10^{-8}$ Ω.m.

(a) 540 kg
(b) 520 kg
(c) 500 kg
(d) 450 kg
(e) 250 kg

33 **Unifesp 2008** Você constrói três resistências elétricas, R_A, R_B e R_C, com fios de mesmo comprimento e com as seguintes características.

I. O fio de R_A tem resistividade $1{,}0.10^{-6}$ Ω.m e diâmetro de 0,50 mm.

II. O fio de R_B tem resistividade $1{,}2.10^{-6}\ \Omega.m$ e diâmetro de 0,50 mm.

III. O fio de R_C tem resistividade $1{,}5.10^{-6}\ \Omega.m$ e diâmetro de 0,40 mm.

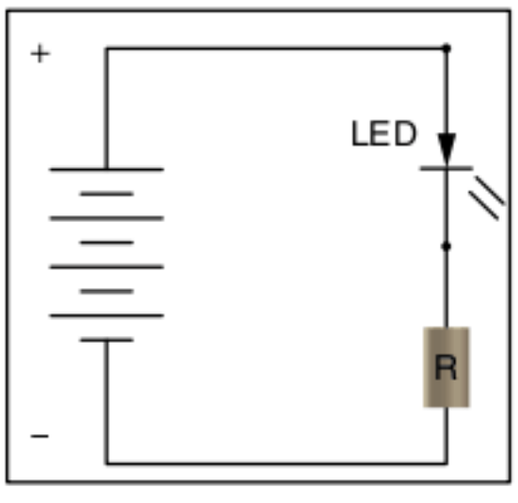
Pode-se afirmar que:

(a) $R_A > R_B > R_C$
(b) $R_B > R_A > R_C$
(c) $R_B > R_C > R_A$
(d) $R_C > R_A > R_B$
(e) $R_C > R_B > R_A$

34 **Unesp 2008** A resistência elétrica de certos metais varia com a temperatura e esse fenômeno muitas vezes é utilizado em termômetros. Considere um resistor de platina alimentado por uma tensão constante. Quando o resistor é colocado em um meio a 0 °C, a corrente que passa por ele é 0,8 mA. Quando o resistor é colocado em um outro meio cuja temperatura deseja-se conhecer, a corrente registrada é 0,5 mA. A relação entre a resistência elétrica da platina e a temperatura é especificada através da relação $R = \beta\ (1 + \alpha T)$, onde $\alpha = 4.10^{-3}\ °C^{-1}$.

Calcule a temperatura desse meio.

35 **Unifesp 2007** Uma das mais promissoras novidades tecnológicas atuais em iluminação é um diodo emissor de luz (LED) de alto brilho, comercialmente conhecido como *luxeon*. Apesar de ter uma área de emissão de luz de 1 mm^2 e consumir uma potência de apenas 1,0 W, aproximadamente, um desses diodos produz uma iluminação equivalente à de uma lâmpada incandescente comum de 25 W. Para que esse LED opere dentro de suas especificações, o circuito da figura é um dos sugeridos pelo fabricante: a bateria tem fem E = 6,0 V (resistência interna desprezível) e a intensidade da corrente elétrica deve ser de 330 mA.

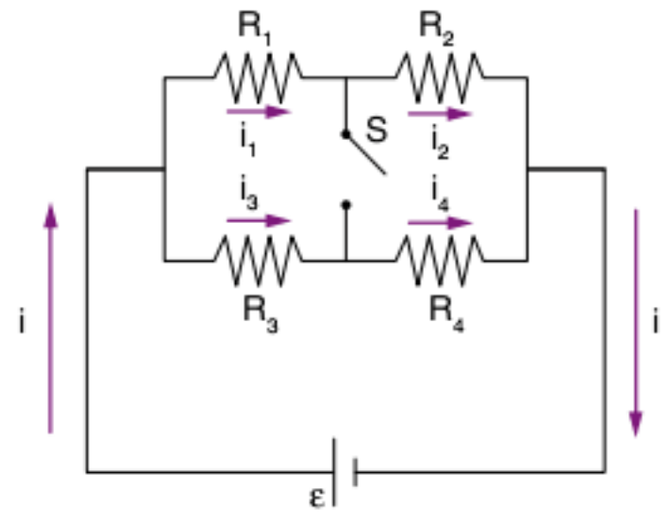


Nessas condições, pode-se concluir que a resistência do resistor R deve ser, em ohms, aproximadamente de:

(a) 2,0
(b) 4,5
(c) 9,0
(d) 12
(e) 20

Associação de resistores

36 **Ufes** No circuito, como mostra a figura, $R_1 = R$, $R_2 = 2\ R$, $R_3 = 3\ R$, $R_4 = 4\ R$ e ε é a fem. A chave S está inicialmente na posição aberta.

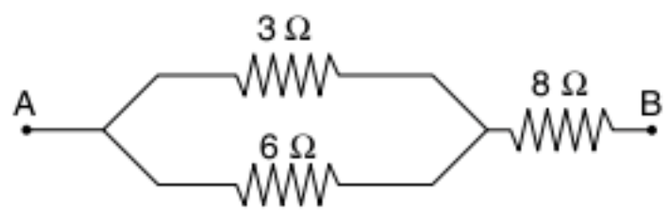


a) Com a chave S aberta, determine as correntes i_1, i_2, i_3 e i_4 que percorrem, respectivamente, as resistências R_1, R_2, R_3 e R_4.

b) Com a chave S aberta, determine a potência total fornecida pela fonte ε.

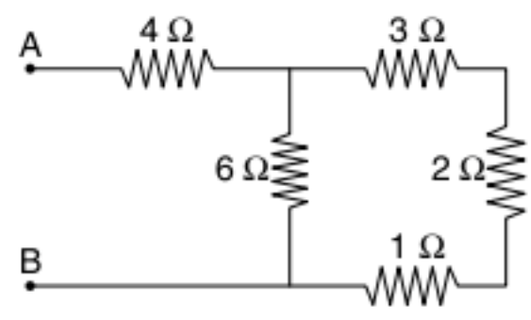
c) Com a chave S na posição fechada, determine a corrente total no circuito.

37 **Mackenzie** No trecho de circuito abaixo, a resistência de 3 Ω dissipa 27 W. A ddp entre os pontos A e B vale:



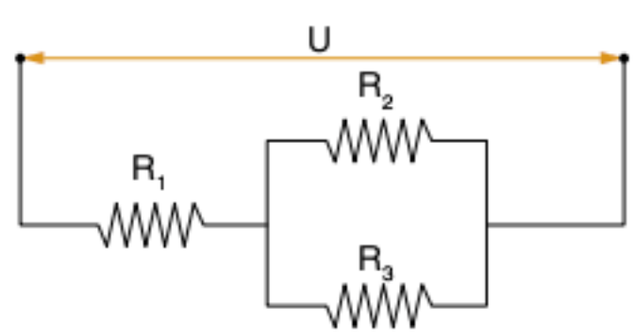
(a) 9 V
(b) 13,5 V
(c) 25,5 V
(d) 30 V
(e) 45 V

38 **Fatec** Quando se submete o sistema representado abaixo a uma diferença de potencial elétrico de 14 V entre os pontos A e B, o resistor que dissipa maior potência é o de:



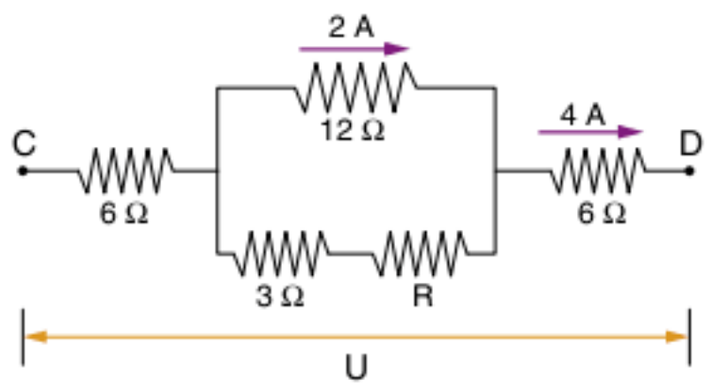
(a) 1 Ω
(b) 2 Ω
(c) 4 Ω
(d) 3 Ω
(e) 6 Ω

39 **PUC-Rio** No circuito da figura, considere P_1, P_2 e P_3 as potências dissipadas nos resistores de resistências R_1, R_2 e R_3, respectivamente. Sendo $R_2 > R_1 > R_3$, pode-se afirmar que:



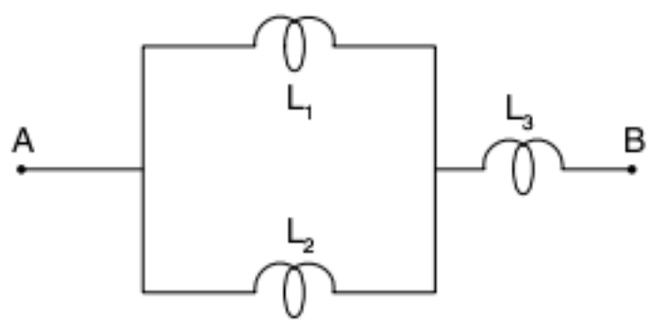
(a) $P_1 > P_2 > P_3$
(b) $P_1 > P_3 > P_2$
(c) $P_2 > P_1 > P_3$
(d) $P_2 > P_3 > P_1$
(e) $P_3 > P_2 > P_1$

40 **Fatec** No circuito elétrico representado no esquema, a corrente no resistor de 6 Ω é de 4 A e no de 12 Ω é de 2 A. Nessas condições, a resistência do resistor R e a tensão U aplicada entre os pontos C e D valem, respectivamente:



(a) 6 Ω e 42 V
(b) 2 Ω e 36 V
(c) 12 Ω e 18 V
(d) 8 Ω e 5 V
(e) 9 Ω e 72 V

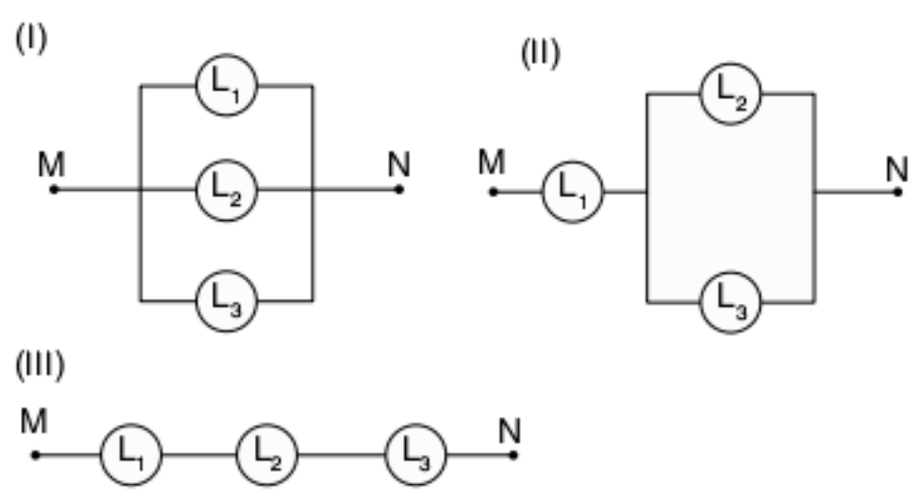
41 **Fuvest** A figura abaixo mostra um trecho de circuito com 3 lâmpadas funcionando de acordo com as características especificadas. Os pontos A e B estão ligados numa rede elétrica. A potência dissipada por L_3 é:



L_1: 100 V e 50 W
L_2: 100 V e 100 W
L_3: 100 V

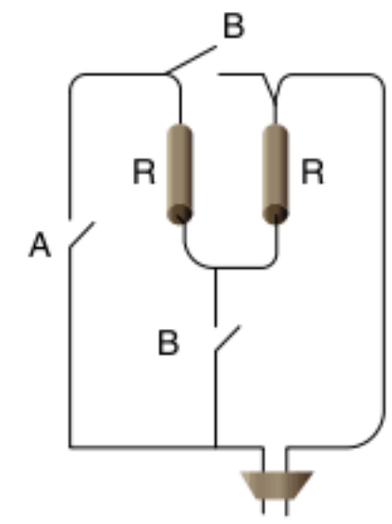
(a) 75 W
(b) 50 W
(c) 150 W
(d) 300 W
(e) 200 W

42 **FMV-RJ** Três lâmpadas – L_1 de 20 W – 110 V, L_2 de 100 W – 110 V e L_3 de 500 W – 110 V – são conectadas de três formas diferentes, conforme é mostrado nos esquemas I, II e III. Em cada caso, o circuito assim formado é ligado à rede de 110 V por seus terminais livres (M e N). Qual das opções abaixo indica corretamente a lâmpada de maior brilho em cada uma dessas três ligações?



	(I)	(II)	(III)
(a)	L_1	L_1	L_1
(b)	L_1	L_2	L_3
(c)	L_3	L_1	L_1
(d)	L_3	L_2	L_1
(e)	L_3	L_3	L_3

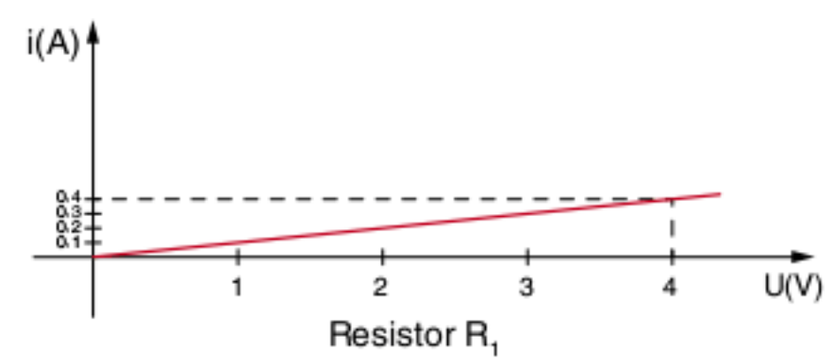
43 **Fuvest** Um aquecedor elétrico é formado por duas resistências elétricas R iguais. Nesse aparelho, é possível escolher entre operar em redes de 110 V (Chaves B fechadas e chave A aberta) ou redes de 220 V (Chave A fechada e chaves B abertas).

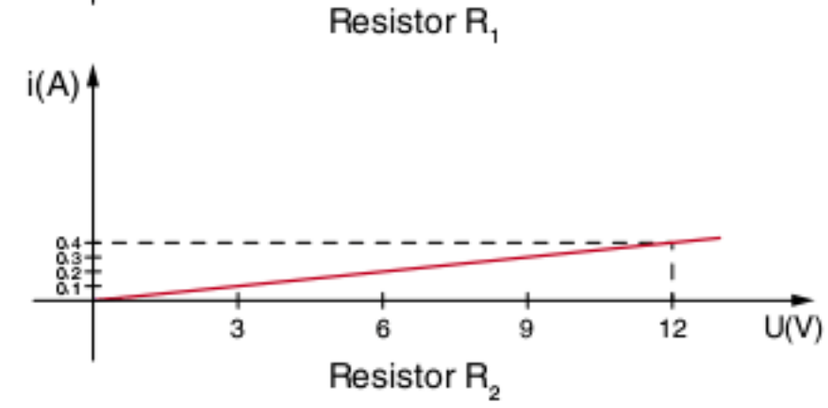


Chamando as potências dissipadas por esse aquecedor de P(220) e P(110), quando operando, respectivamente, em 220 V e 110 V, verifica-se que as potências dissipadas, são tais que:

(a) $P(220) = \frac{1}{2} P(110)$
(b) $P(220) = P(110)$
(c) $P(220) = \frac{3}{2} P(110)$
(d) $P(220) = 2\ P(110)$
(e) $P(220) = 4\ P(110)$

44 **Acafe-SC** Dois resistores, cujos gráficos (i *x* U) estão representados abaixo, estão ligados em série entre os terminais de um gerador.

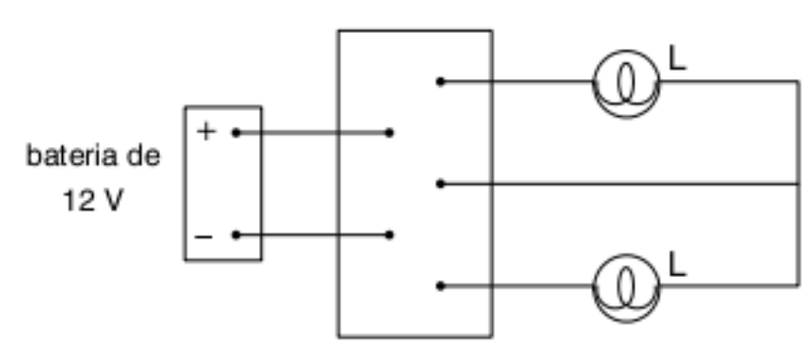




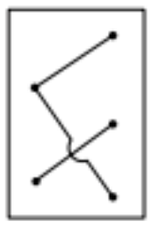
Um voltímetro, ligado entre os terminais do resistor R_1, indica 4,0 V. Determine:

a) a diferença de potencial entre os terminais do resistor R_2.
b) os valores das resistências elétricas dos resistores R_1 e R_2.
c) a resistência equivalente à associação.

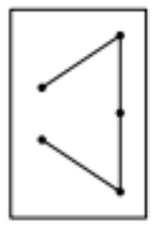
45 **Fuvest** As duas lâmpadas L, mostradas na figura, funcionam normalmente sob tensão de 12 V.

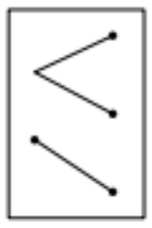


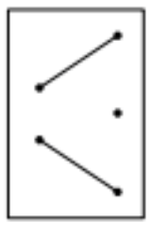
Qual é a maneira correta de ligar os terminais do quadro de ligação para que as duas lâmpadas funcionem em condições normais de operação?

(a) 

(c)

(e) 

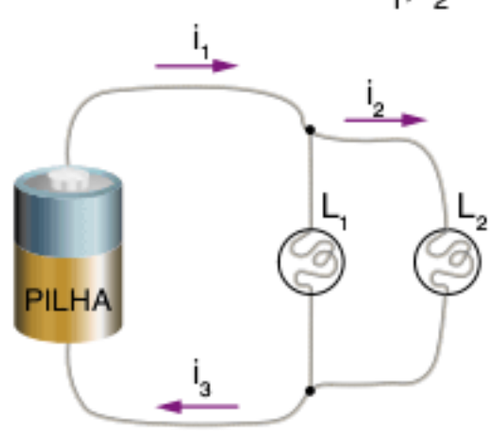
(b) 

(d) 

46 **PUC-SP** São ligados em paralelo, numa mesma tomada, um ferro elétrico de resistência R_1 e uma lâmpada de resistência R_2. Sabe-se que $R_1 < R_2$. A resistência R equivalente à associação é tal que:

(a) $R > R_2$
(b) $R < R_1$
(c) $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$
(d) $R = \frac{R_1 . R_2}{2}$
(e) $R = R_1 + R_2$

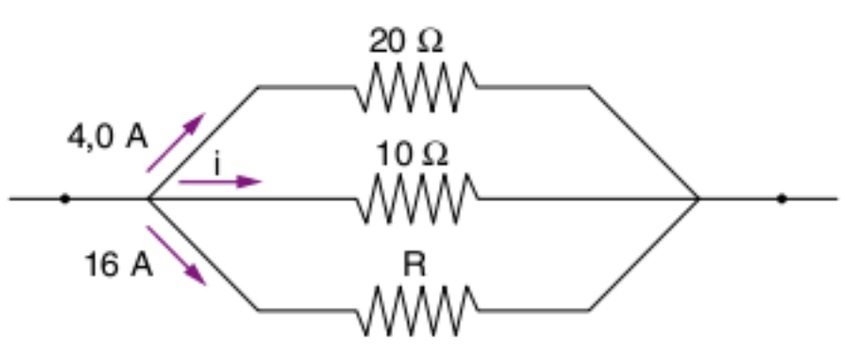
47 **Cesgranrio** As duas lâmpadas L_1 e L_2 são idênticas e ambas estão acesas. Assinale a opção correta para os valores relativos das intensidades de corrente i_1, i_2 e i_3.



(a) $i_1 = i_3$; $i_2 = \frac{1}{2} i_1$
(b) $i_1 = i_2 = i_3$
(c) $i_1 > i_3$; $i_2 = \frac{1}{2} i_1$
(d) $i_1 > i_2 > i_3$
(e) $i_1 > i_3$; $i_2 = i_1$

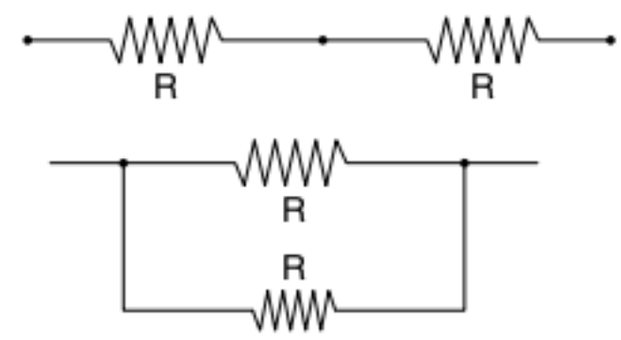
48 **UFC** Liga-se uma resistência R em paralelo a uma resistência de 17 ohms, com o objetivo de diminuir 25% da resistência de 17 ohms. Determinar R, em ohms.

49 **Fuvest** Na associação de resistores da figura, os valores de i e de R são, respectivamente:



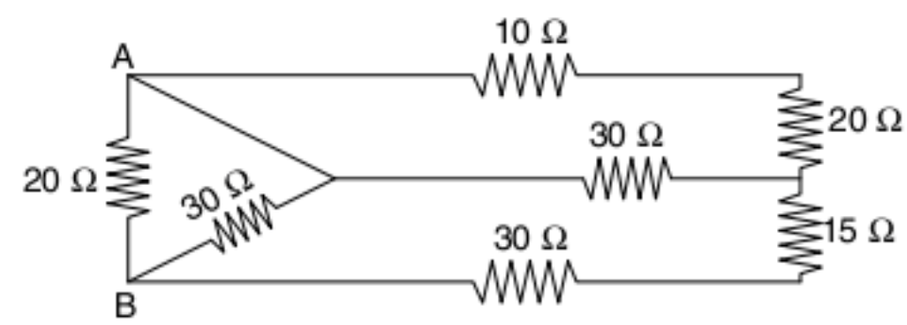
(a) 8,0 A e 5,0 Ω
(b) 5,0 A e 8,0 Ω
(c) 1,6 A e 5,0 Ω
(d) 2,5 A e 2,0 Ω
(e) 80 A e 160 Ω

50 **FOC-SP** Quatro resistores de resistências elétricas idênticas são associados dois a dois. Uma das associações é em série e tem resistência equivalente R_1, a outra é em paralelo e tem resistência equivalente R_2. Pode-se afirmar que:



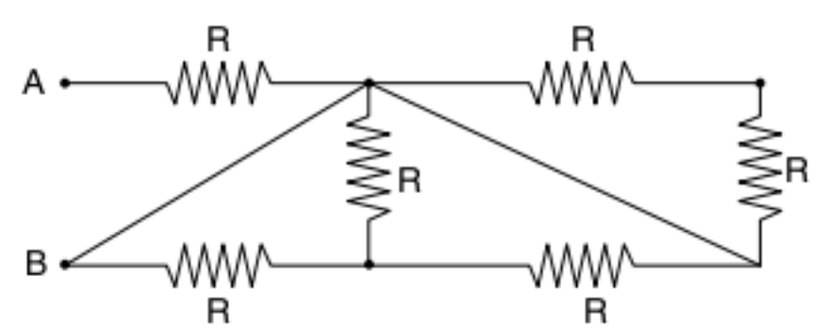
(a) $R_1 = 4\ R_2$
(b) $R_1 = 2\ R_2$
(c) $R_1 < R_2$
(d) $R_1 = R_2$

51 **UPIS-DF** Calcular a resistência equivalente entre A e B.



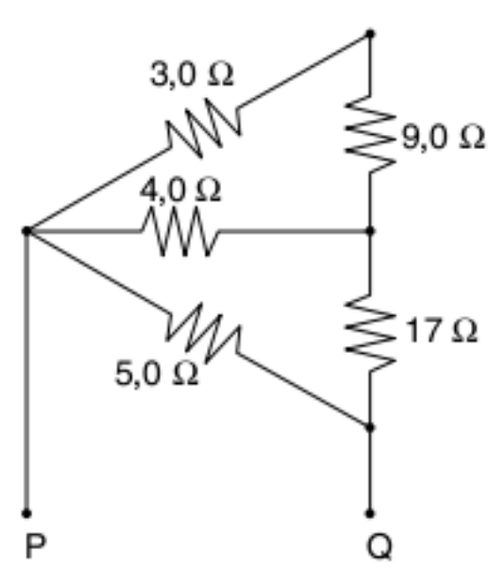
(a) 5,0 Ω
(b) 3,8 Ω
(c) 10 Ω
(d) 4,6 Ω

52 **UC-PR** Na figura, a resistência total entre os pontos A e B vale:



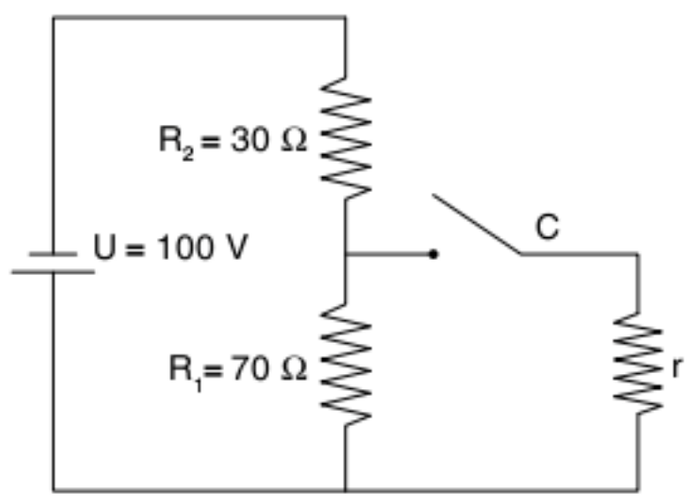
(a) $\frac{R}{2}$
(b) R
(c) $\sqrt{3}R$
(d) $\frac{3}{2}R$
(e) outro valor.

53 **Fatec-SP** O sistema esquematizado tem resistência equivalente:



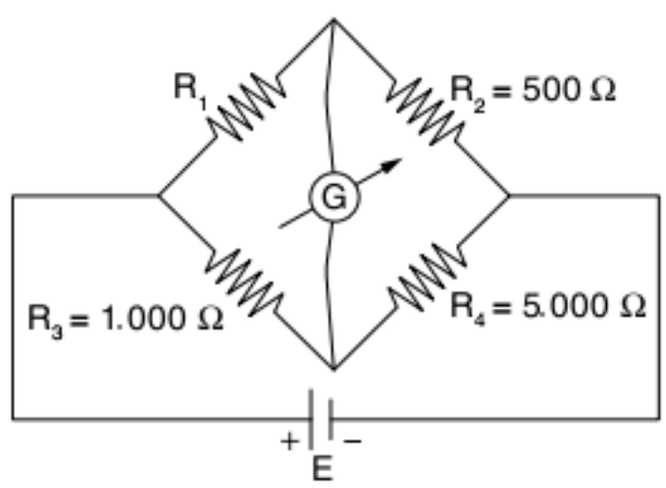
(a) 4,0 Ω
(b) 2,1 Ω
(c) 3,6 Ω
(d) 1,6 Ω
(e) 4,8 Ω

54 **FCMSC-SP** No esquema apresentado, o gerador mantém a ddp constante U = 100 V. A diferença de potencial entre os extremos de R_1, estando aberta a chave C, é igual ao dobro da que seria, se a chave estivesse fechada. Assim, considerando os valores indicados no esquema, a diferença de potencial nos extremos do resistor R_2, estando a chave C fechada, tem o valor, em volts, igual a:



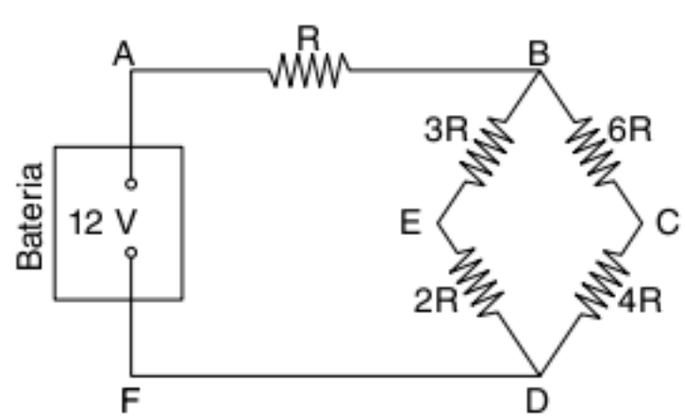
(a) 65
(b) 60
(c) 50
(d) 30
(e) 15

55 **UFPA** O esquema a seguir representa uma ponte de Wheatstone em equilíbrio. O resistor R_2 admite corrente máxima de 10 miliampères. A bateria tem resistência interna desprezível. A resistência R_1 e a máxima força eletromotriz E admissíveis são:



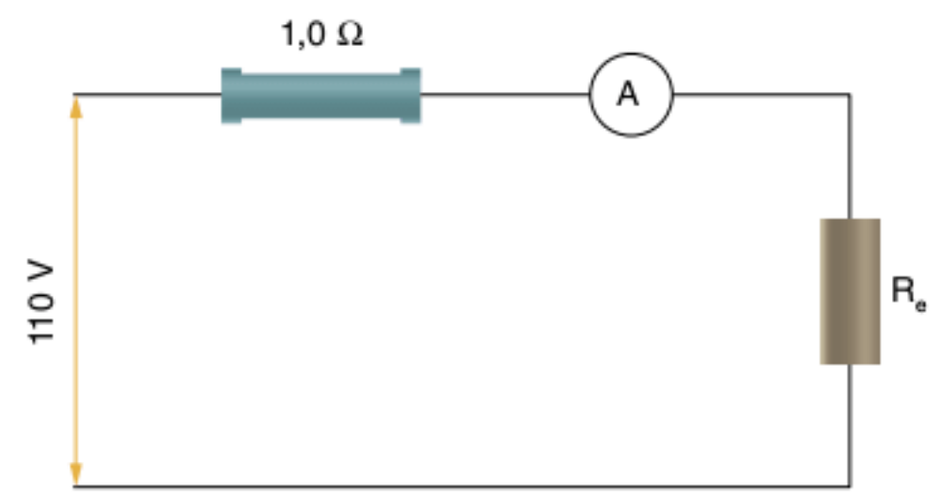
(a) R_1 = 500 ohms, E = 5,0 V
(b) R_1 = 100 ohms, E = 6,0 V
(c) R_1 = 10 ohms, E = 5,0 V
(d) R_1 = 100 ohms, E = 5,0 V
(e) R_1 = 50 ohms, E = 6,0 V

56 **Fatec** O esquema a seguir representa uma associação de resistores ligada a uma bateria. A diferença de potencial é nula entre os pontos:



(a) A e F
(b) B e D
(c) A e E
(d) E e C
(e) n.d.a.

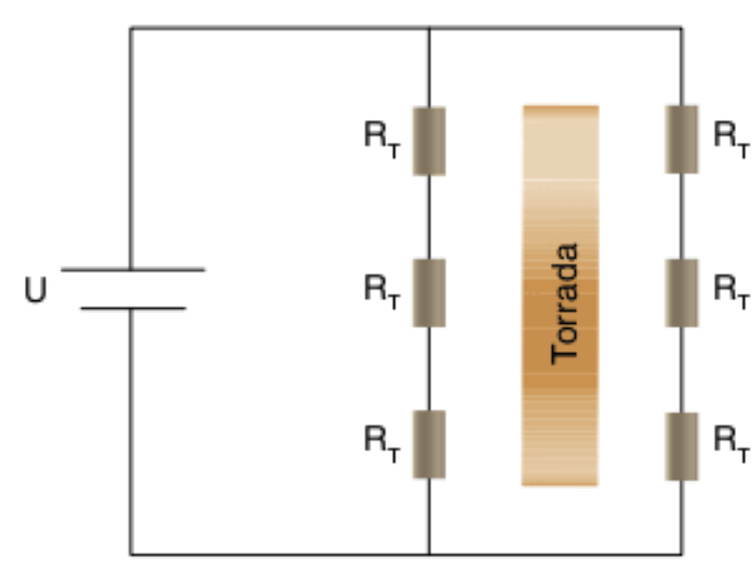
57 **Unifesp 2009** Em um enfeite de Natal, alimentado com tensão de 110 V, há 5 lâmpadas idênticas ligadas em paralelo, todas acesas, e os fios de ligação apresentam resistência elétrica de 1,0 Ω. O circuito elétrico correspondente a esta situação está esquematizado na figura a seguir, na qual as lâmpadas estão representadas pela sua resistência equivalente R_e.



Considerando que o amperímetro ideal registra uma corrente de 2,2 A, calcule:

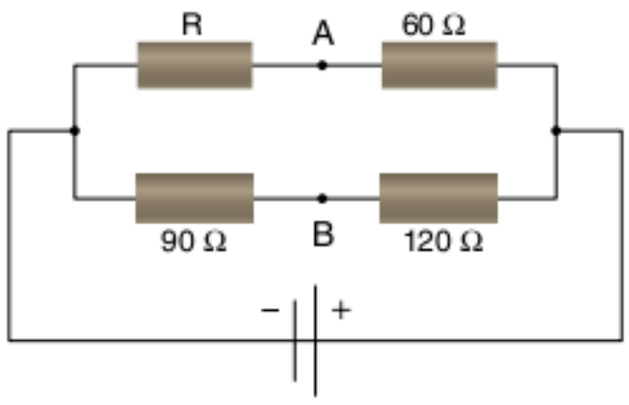
a) o valor da resistência elétrica de cada lâmpada.
b) a energia dissipada em 30 dias pelos fios de ligação, em Wh, se as lâmpadas ficarem acesas por 5 horas diárias.

58 **Unicamp 2007** O diagrama a seguir representa um circuito simplificado de uma torradeira elétrica que funciona com uma tensão U = 120 V. Um conjunto de resistores R_T = 20 Ω é responsável pelo aquecimento das torradas e um cronômetro determina o tempo durante o qual a torradeira permanece ligada.



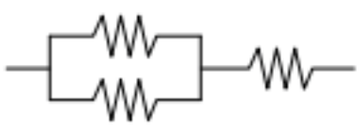
a) Qual é a corrente que circula em cada resistor R_T quando a torradeira está em funcionamento?
b) Sabendo-se que essa torradeira leva 50 segundos para preparar uma torrada, qual é a energia elétrica total consumida no preparo dessa torrada?
c) O preparo da torrada só depende da energia elétrica total dissipada nos resistores. Se a torradeira funcionasse com dois resistores R_T de cada lado da torrada, qual seria o novo tempo de preparo da torrada?

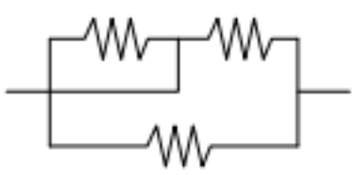
59 **Uniesp 2008** Um circuito contendo quatro resistores é alimentado por uma fonte, conforme a figura a seguir.

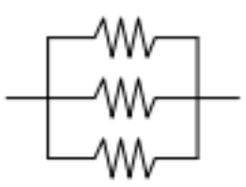


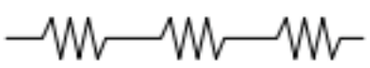
Calcule o valor da resistência R, sabendo-se que o potencial eletrostático em A é igual ao potencial em B.

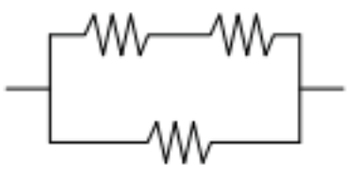
60 **Unesp 2007** Um indivíduo deseja fazer com que o aquecedor elétrico central de sua residência aqueça a água do reservatório no menor tempo possível. O aquecedor possui um resistor com resistência R. Contudo, ele possui mais dois resistores exatamente iguais ao instalado no aquecedor e que podem ser utilizados para esse fim. Para que consiga seu objetivo, tomando todas as precauções para evitar acidentes, e considerando que as resistências não variem com a temperatura, ele deve utilizar o circuito:

(a) 

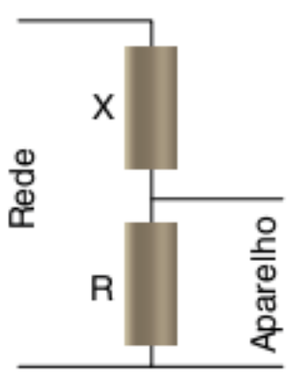
(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

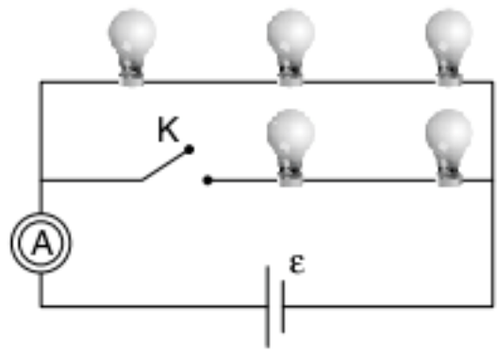
61 **Unesp 2006** Um estudante adquiriu um aparelho cuja especificação para o potencial de funcionamento é pouco usual. Assim, para ligar o aparelho, ele foi obrigado a construir e utilizar o circuito constituído de dois resistores, com resistências X e R, como apresentado na figura.



Considere que a corrente que passa pelo aparelho seja muito pequena e possa ser descartada na solução do problema. Se a tensão especificada no aparelho é a décima parte da tensão da rede, então a resistência X deve ser:

(a) 6 R
(b) 8 R
(c) 9 R
(d) 11 R
(e) 12 R

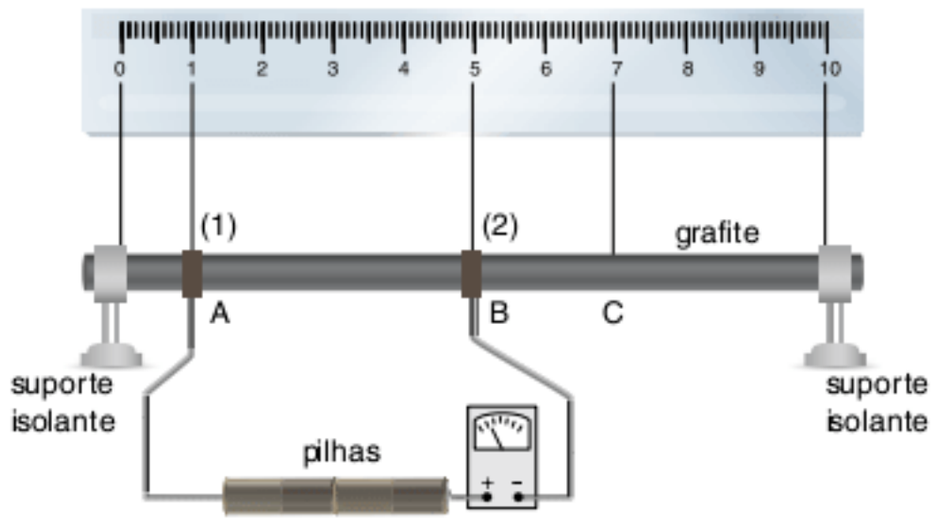
62 **Mackenzie 2008** No circuito a seguir, tem-se uma associação de lâmpadas idênticas, um amperímetro e um gerador elétrico, ambos considerados ideais.



Quando a chave K está aberta, o amperímetro indica uma intensidade de corrente elétrica i. Se fecharmos a chave K, o amperímetro indicará uma intensidade de corrente elétrica:

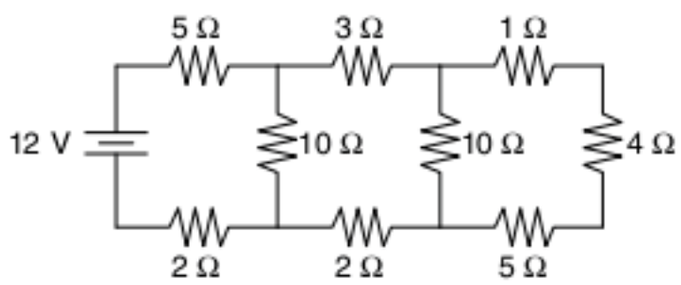
(a) 0,4 i
(b) 0,6 i
(c) 1,2 i
(d) 2,5 i
(e) 5,0 i

63 **UFABC 2008** O esquema a seguir mostra um equipamento utilizado num laboratório didático para verificar a dependência da resistência elétrica com o comprimento de um condutor de espessura constante. Trata-se de um reostato (resistor de resistência variável) de grafite apoiado em suportes isolantes. Utilizam-se, para o experimento, duas pilhas, um amperímetro, fios de ligação e duas garras, 1 e 2, todos ideais, e uma régua graduada em cm. A garra 1 é fixa no ponto A e a garra 2 pode ser colocada em qualquer posição ao longo do condutor de grafite.



Quando a garra 2 é colocada na posição B, o amperímetro indica i_B; e quando ela é colocada em C, o amperímetro indica i_C. Determine a relação $\frac{i_B}{i_C}$.

64 **Unifei 2008** Para o circuito elétrico mostrado na figura a seguir, pode-se dizer que a resistência equivalente e a corrente que passa pelo resistor de 4 Ω valem:



(a) 10 Ω e 0,75 A
(b) 12 Ω e 0,25 A
(c) 5 Ω e 1,00 A
(d) 10 Ω e 1,25 A

TEXTO COMPLEMENTAR

O divisor de corrente e o divisor de tensão

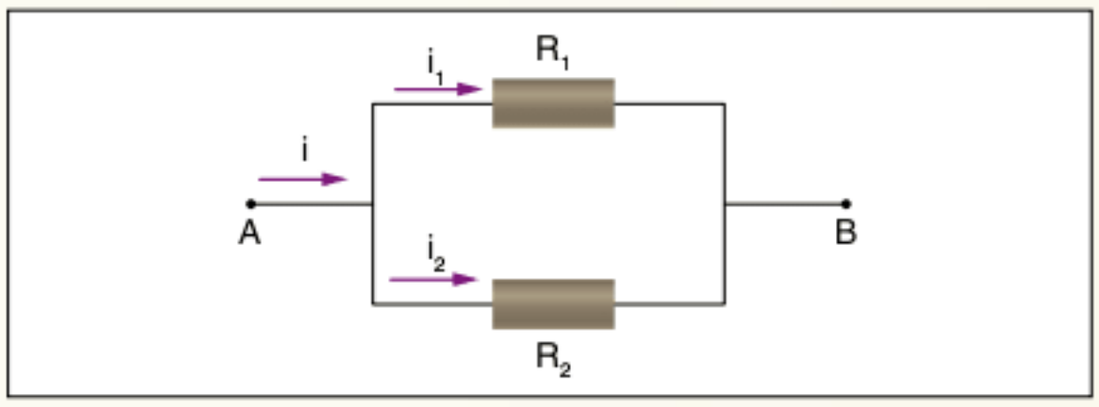
Algumas técnicas úteis para a resolução de circuitos são a utilização do divisor de corrente e do divisor de tensão. Estes são utilizados quando se quer determinar a corrente ou a tensão em um resistor em específico.

Divisor de corrente

É utilizado quando se quer determinar a corrente que passa em uma associação de dois resistores em paralelo, sabendo-se a resistência de cada um deles e a corrente total que chega na associação.

Para tal, calculemos a resistência equivalente entre os pontos A e B.

$$R_{AB} = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2}$$



Resistores em paralelo.

Portanto, a tensão entre os pontos A e B é dada por:

$$U_{AB} = R_{AB} . i = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2} . i$$

Assim sendo, a corrente i_1 pode ser facilmente determinada dividindo-se a tensão entre A e B pelo valor de R_1, ou seja:

$$i_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{\frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2} . i}{R_1} = \frac{R_2 . i}{R_1 + R_2}$$

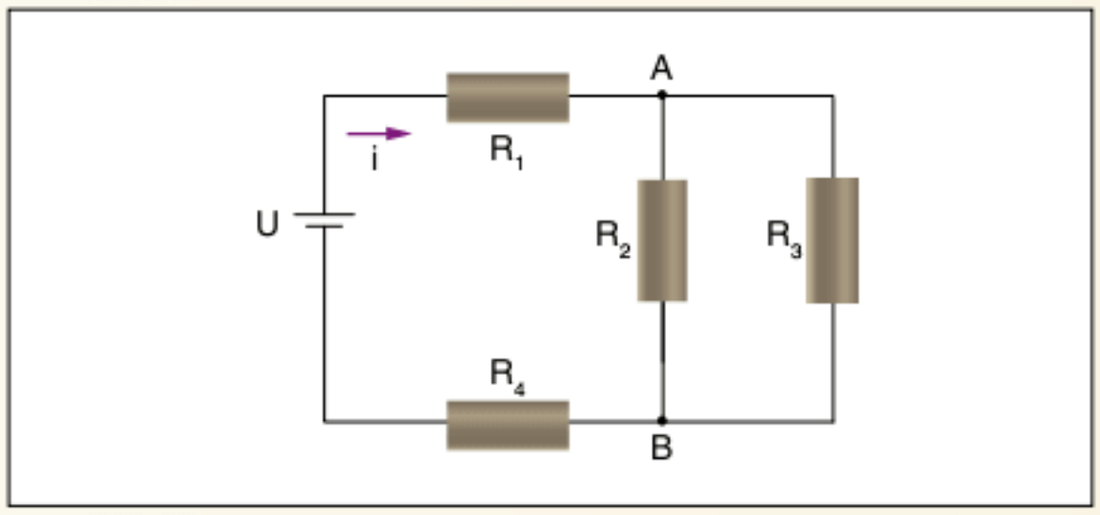
Similarmente:

$$i_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{\frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2} . i}{R_2} = \frac{R_1 . i}{R_1 + R_2}$$

Das equações acima, podemos observar que a corrente que passa em um dos resistores é igual à corrente total, multiplicada pelo outro resistor da associação, dividido pela soma das duas resistências. A utilização do divisor de corrente é muito prática, pois evita a necessidade de se calcular a resistência equivalente, quando o que se quer é simplesmente calcular a corrente em cada ramo da associação.

Divisor de tensão

A utilização do divisor de tensão é útil quando se deseja determinar a tensão em um determinado resistor de uma associação de resistores. Tomemos como exemplo o circuito da figura a seguir.



Associação de resistores em série e paralelo.

O que se deseja calcular é a tensão entre os pontos A e B da forma mais prática possível. Chamemos a resistência entre os pontos A e B de R_{AB}, em que R_{AB} é dada por:

$$R_{AB} = \frac{R_2 . R_3}{R_2 + R_3}$$

Assim sendo, a resistência equivalente do circuito é dada por:

$$R_{equivalente} = R_1 + R_{AB} + R_4$$

Consequentemente, a corrente que circula pelo circuito é:

$$i = \frac{U}{R_1 + R_{AB} + R_4}$$

Portanto, a tensão entre os pontos A e B (U_{AB}) é dada por:

$$U_{AB} = R_{AB} . i = R_{AB} \cdot \frac{U}{R_1 + R_{AB} + R_4}$$

Se quiséssemos calcular a tensão sobre o resistor R_1, bastaria multiplicarmos o resistor R_1 pela corrente, ou seja:

$$U_{R_1} = R_1 . \frac{U}{R_1 + R_{AB} + R_4}$$

Similarmente, a tensão sobre o resistor R_4 seria calculada por:

$$U_{R_4} = R_4 \cdot \frac{U}{R_1 + R_{AB} + R_4}$$

De forma geral, a tensão em um dado resistor em uma associação em série de resistores é diretamente proporcional ao valor daquele resistor. Dessa forma, se quisermos calcular a tensão sobre um resistor, basta multiplicarmos esta resistência pela tensão U e dividir pela soma de todos os resistores que estão em série.

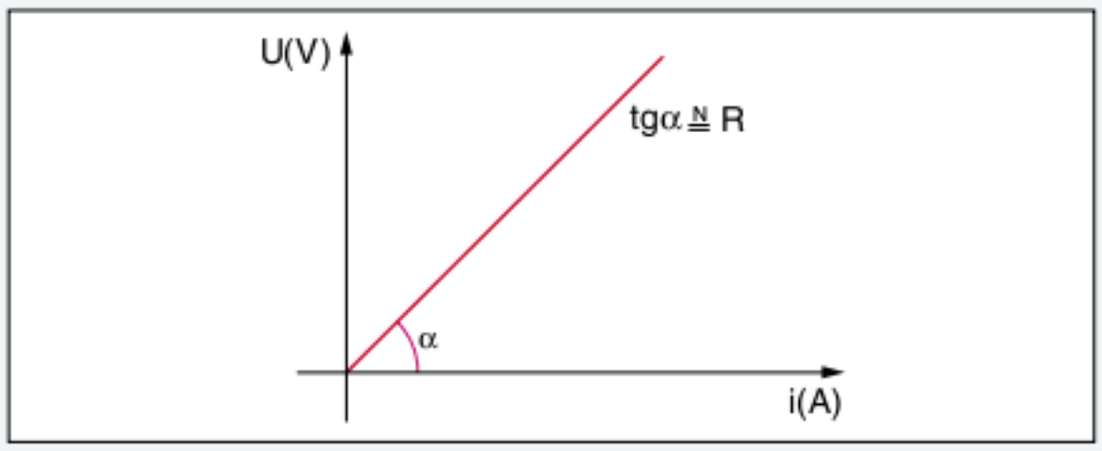
Quando da resolução de circuitos estas duas técnicas se mostrarão muito úteis, agilizando o cálculo das correntes e das tensões.

RESUMINDO

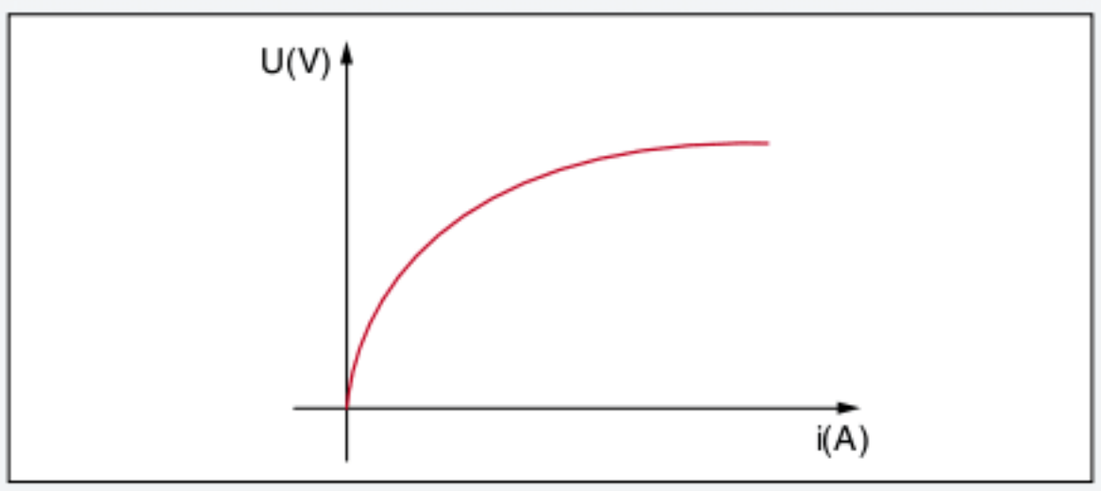
Resistores podem ser definidos como bipolos elétricos que convertem energia elétrica em calor, representados pela resistência elétrica R.

$$R = \frac{U}{i}$$

Resistores que obedecem à Primeira Lei de Ohm são denominados resistores ôhmicos, aqueles cuja resistência é constante a uma dada temperatura.



Alguns resistores apresentam características peculiares e suas grandezas características (U e i) não variam proporcionalmente, são os chamados resistores não ôhmicos.



A potência dissipada em um resistor por efeito Joule é dada a fórmula a seguir.

$$P_{dissipada} = \frac{U^2}{R} = R \cdot i^2$$

a) Corrente constante – resistores em série
b) Tensão constante – resistores em paralelo

A geometria e o material constituinte de um resistor ôhmico podem ser relacionados a sua resistência pela Segunda Lei de Ohm.

$$R = \frac{\rho\,\ell}{A} = \frac{\ell}{\sigma\,A}, \qquad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

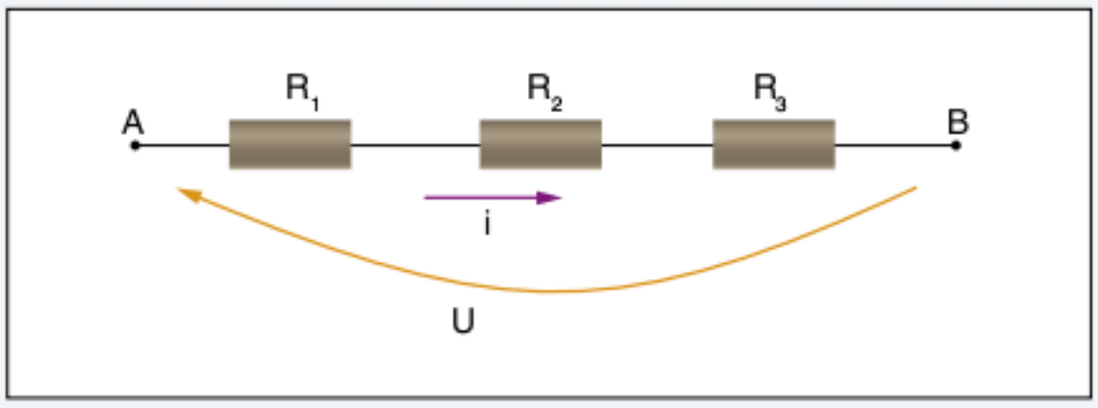
Em que ρ é a resistividade do condutor e σ é sua condutividade, características dos diferentes materiais.

A resistividade é a grandeza mais sensível a variações de temperatura em resistores ôhmicos. Para a maioria dos materiais, o fator que realmente define a variação da resistência com a temperatura é a resistividade.

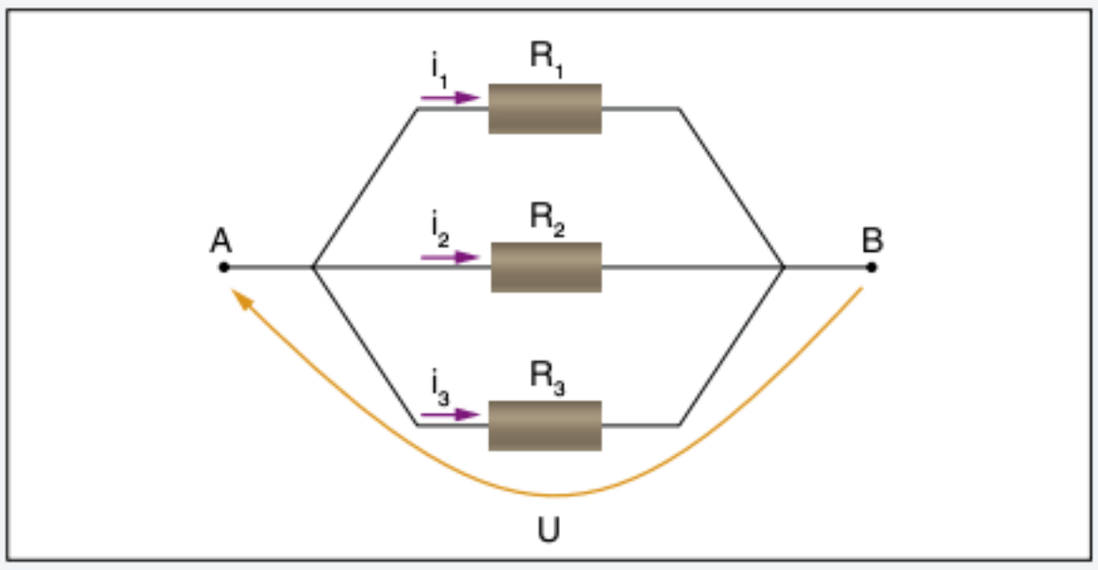
$$\rho = \rho_0 \quad (1 + \alpha\,\Delta\theta)$$

$$R = R_0 \quad [1 + \alpha(\theta - \theta_0)]$$

Resistores podem ser associados em série e em paralelo para a obtenção de valores convenientes.



Resistores em série.



Resistores em paralelo.

Dois pontos de um circuito estão em curto quando se encontram em um mesmo potencial elétrico.

A resistência equivalente entre dois pontos que estão em curto em um circuito é nula.

Para a resolução de problemas relacionados a circuitos elétricos, devemos ser capazes de determinar todas as tensões, correntes e potências envolvidas no circuito.

Em circuitos, como as pontes de Wheatstone, pode-se determinar a resistência elétrica pela seguinte relação:

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_X$$

QUER SABER MAIS?

SITES

- Lei de Ohm
  <http://phet.colorado.edu/sims/ohms-law/ohms-law_en.html>.
- Resistência em um fio
  <http://phet.colorado.edu/sims/resistance-in-a-wire/resistance-in-a-wire_en.html>.

Exercícios complementares

Questões gerais

1 **Fuvest** Um material condutor especial se torna luminoso quando é percorrido por uma corrente elétrica. Com esse material foram escritas palavras e nos terminais 1 e 2 foram ligadas fontes de tensão, numa sala escura. A palavra legível é:

(a)

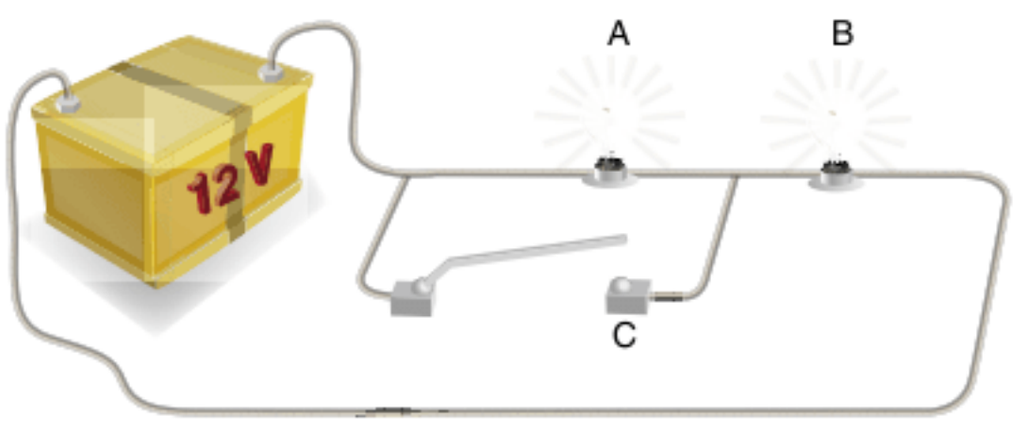
(b)

(c)

(d)

(e)

2 **Fuvest** Duas lâmpadas iguais, de 12 V cada uma, estão ligadas a uma bateria de 12 V, como mostra a figura a seguir. Estando o interruptor C aberto, as lâmpadas acendem com intensidades iguais. Ao fechar o interruptor C, observaremos que:

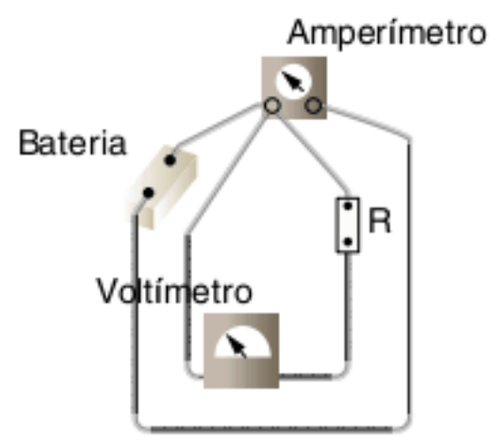


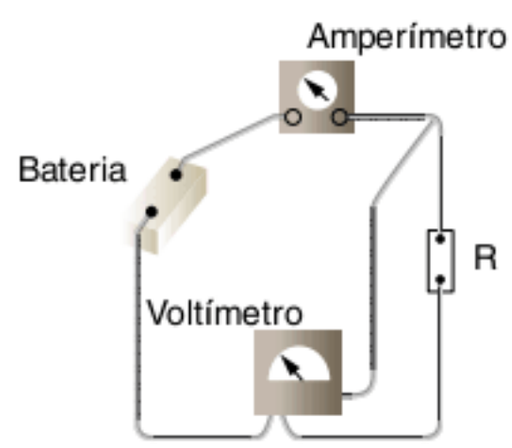
(a) A apaga e B brilha mais intensamente.
(b) A apaga e B mantém o brilho.
(c) A apaga e B apaga.
(d) B apaga e A brilha mais intensamente.
(e) B apaga e A mantém o brilho.

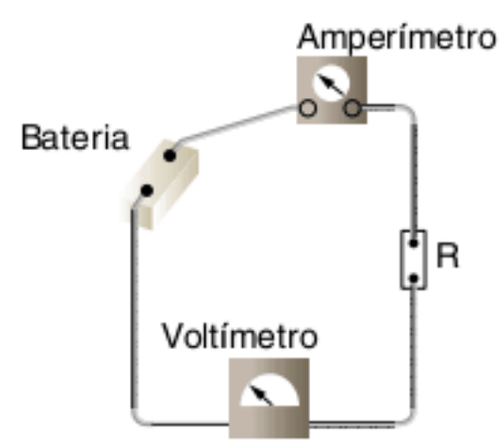
3 **Fuvest** É dada uma pilha comum, de força eletromotriz $\varepsilon = 1{,}5$ V e resistência interna igual a 1,0 Ω. Ela é ligada durante 1,0 s a um resistor R de resistência igual a 0,5 Ω. Nesse processo, a energia química armazenada na pilha decresce de um valor EP, enquanto o resistor externo R dissipa uma energia ER. Pode-se afirmar que EP e ER valem, respectivamente:

(a) 1,5 J e 0,5 J
(b) 1,0 J e 0,5 J
(c) 1,5 J e 1,5 J
(d) 2,5 J e 1,5 J
(e) 0,5 J e 0,5 J

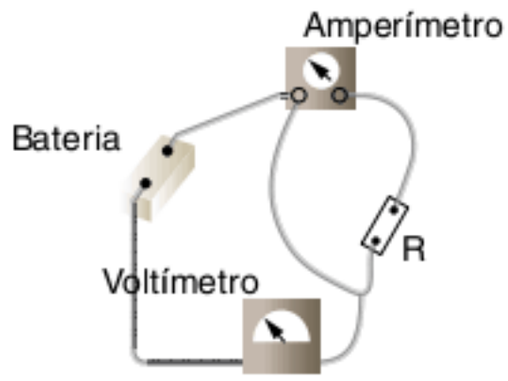
4 **Cesesp-SP** Dispondo de um voltímetro e um amperímetro ideais, qual montagem você escolheria para determinar experimentalmente o valor da resistência R?

(a)


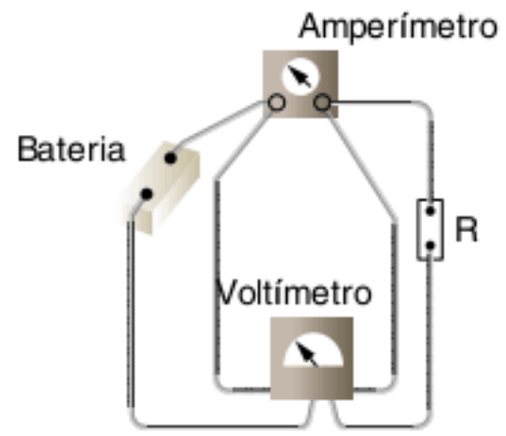
(b)


(c)


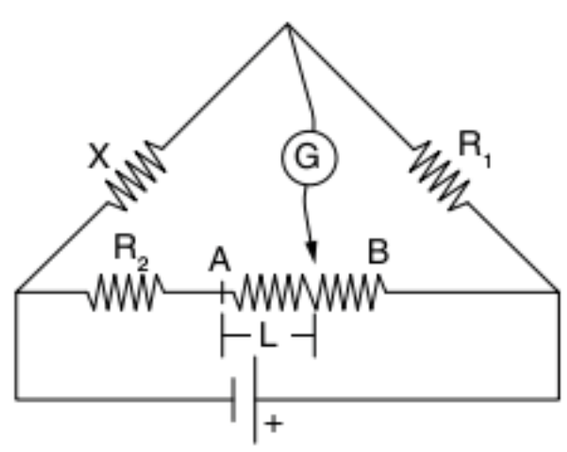
(d)



(e)

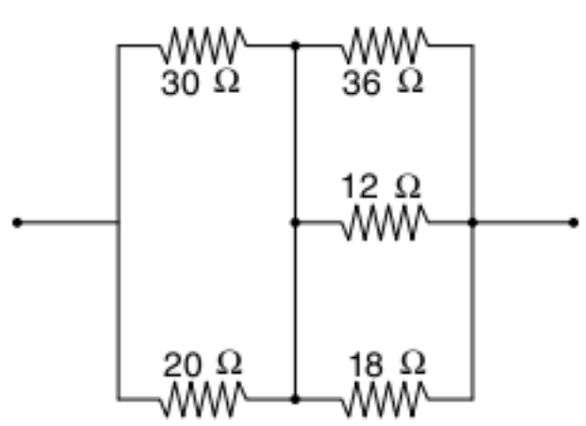


5 **Osesc-SP** No circuito esquematizado, R_1 = 210 ohms e R_2 = 30 ohms, AB é um fio homogêneo de secção constante e resistência 50 ohms e comprimento 500 mm. Obteve-se o equilíbrio do galvanômetro para L = 150 mm, medido a partir do ponto A. O valor de X é, em ohms:



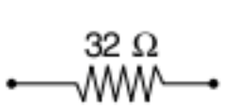
(a) 120
(b) 257
(c) 393
(d) 180
(e) 270

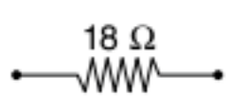
6 **Fatec-SP** Dá-se a associação de resistores do esquema abaixo. Assinalar o sistema equivalente.

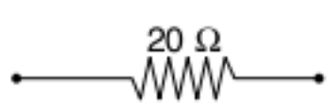


(a)

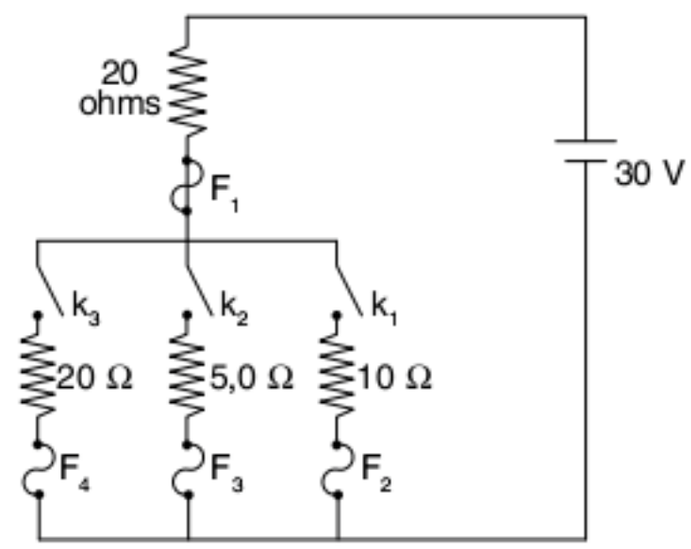
(b)

(c) 

(d) 

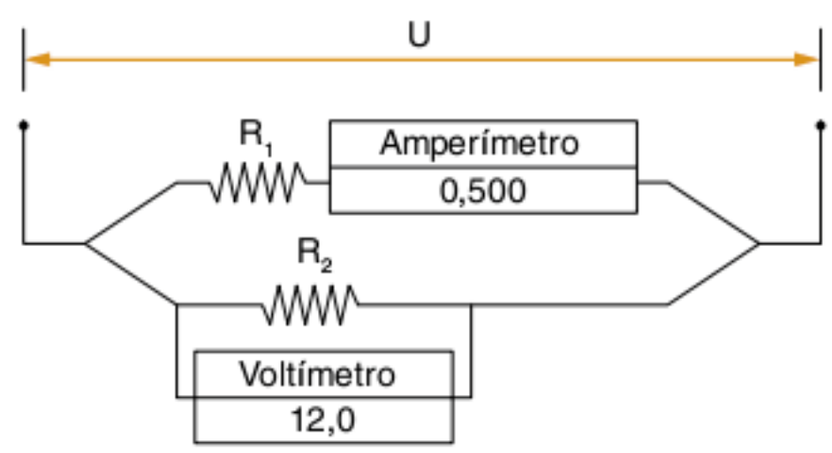
(e) 

7 **Mackenzie** No circuito indicado na figura a seguir, os fusíveis F_1, F_2, F_3 e F_4 suportam, no máximo, correntes de intensidades 1,2 A, 0,50 A, 2,0 A e 5,0 A, respectivamente. Se fechamos as chaves k_1, k_2 e k_3 nessa ordem e não simultaneamente, os fusíveis queimados serão:



(a) F_1 e F_2
(b) F_1 e F_3
(c) F_2 e F_3
(d) F_2 e F_4
(e) F_3 e F_4

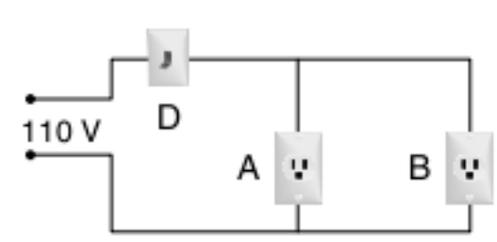
8 **UF-RS** O amperímetro e o voltímetro ideais, ligados no circuito esquematizado, acusam as leituras indicadas da corrente elétrica (em A) e da diferença de potencial (em V). Os resistores R_1 e R_2 têm a mesma resistência elétrica. Qual é a resistência equivalente que substitui a associação dos resistores R_1 e R_2?



(a) 6,0 Ω
(b) 12 Ω
(c) 24 Ω
(d) 48 Ω
(e) 96 Ω

9 **Fuvest 2007** Na cozinha de uma casa, ligada à rede elétrica de 110 V, há duas tomadas A e B. Deseja-se utilizar, simultaneamente, um forno de micro-ondas e um ferro de passar, com as características indicadas.

Ferro de passar		Micro-ondas	
Tensão	110 V	Tensão	110 V
Potência	1.400 W	Potência	920 W

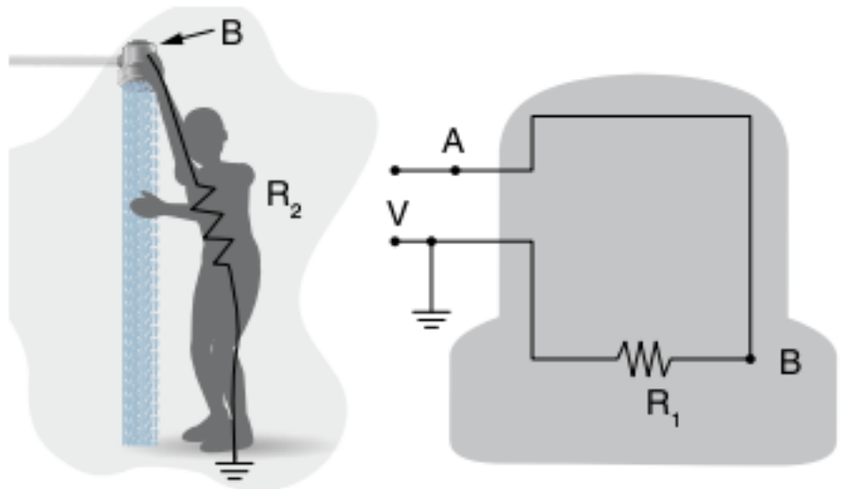


Disjuntor ou fusível: dispositivo que interrompe o circuito quando a corrente ultrapassa o limite especificado.

Para que isso seja possível, é necessário que o disjuntor (D) dessa instalação elétrica, seja de, no mínimo:

(a) 10 A
(b) 15 A
(c) 20 A
(d) 25 A
(e) 30 A

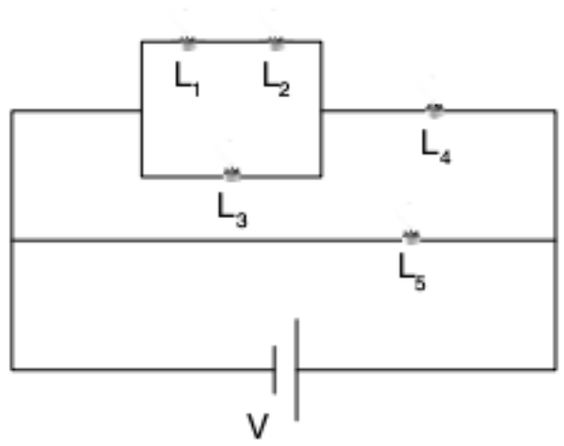
10 **Unicamp 2008** O chuveiro elétrico é amplamente utilizado em todo o país e é o responsável por grande parte do consumo elétrico residencial. A figura abaixo representa um chuveiro metálico em funcionamento e seu circuito elétrico equivalente. A tensão fornecida ao chuveiro vale V = 200 V e sua resistência é $R_1 = 10\ \Omega$.



a) Suponha um chuveiro em funcionamento, pelo qual fluem 3,0 litros de água por minuto, e considere que toda a energia dissipada na resistência do chuveiro seja transferida para a água.
O calor absorvido pela água, nesse caso, é dado por $Q = mc\Delta\theta$ onde $c = 4 \cdot 10^3$ J/kg °C é o calor específico da água, m é a sua massa e $\Delta\theta$ é a variação de sua temperatura. Sendo a densidade da água igual a 1.000 kg/m³, calcule a temperatura de saída da água quando a temperatura de entrada for igual a 20 °C.

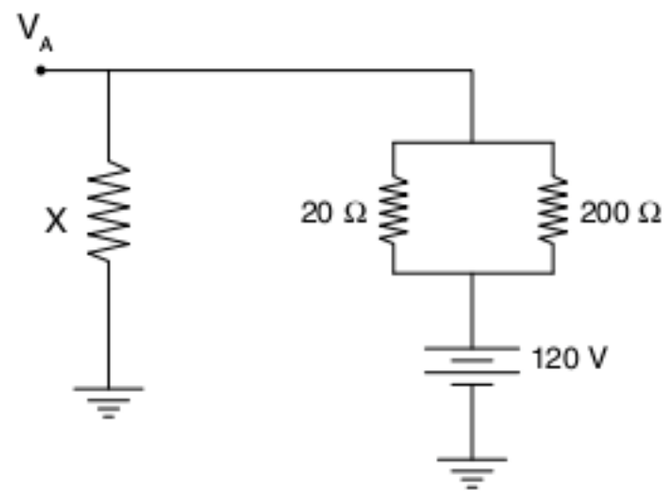
b) Considere agora que o chuveiro esteja defeituoso e que o ponto B do circuito entre em contato com a carcaça metálica. Qual a corrente total no ramo AB do circuito se uma pessoa tocar o chuveiro como mostra a figura? A resistência do corpo humano nessa situação vale $R_2 = 1.000\ \Omega$.

11 **Unifei 2009** O circuito a seguir possui 5 lâmpadas idênticas, acopladas a uma bateria de tensão constante V. Sobre possíveis alterações nessa configuração, assinale a alternativa correta.

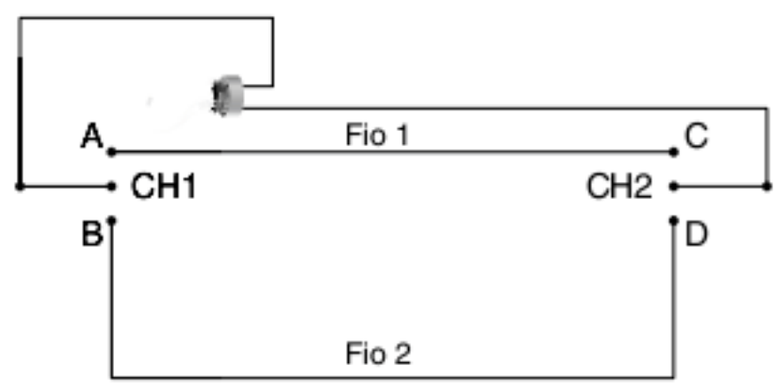


(a) Se L_4 queima, o brilho da lâmpada L_1 aumenta.
(b) A corrente elétrica que atravessa L_1 e L_2 sob nenhuma hipótese sofrerá alguma variação, independentemente do que aconteça com as demais lâmpadas.
(c) Se L_2 queima, o brilho de L_4 não se altera.
(d) Se L_5 queima, o brilho da lâmpada L_3 não se altera.

12 **Unifei 2006** A corrente I, que passa pelo resistor X, vale 0,5 A. Determine o potencial V_A, o valor da resistência X e a potência dissipada na mesma.



13 **UFABC 2009** Hoje é muito comum, em instalações elétricas residenciais, o uso de interruptores paralelos, aqueles que permitem ligar e desligar uma lâmpada quando colocados em paredes diferentes. A figura mostra um esquema com duas chaves CH1 e CH2 representando esses interruptores, uma lâmpada e uma fonte de tensão constante, todos ideais. O fio 1 e o fio 2 são feitos do mesmo material, porém o comprimento do fio 2 e sua área de secção transversal são duas vezes maiores que os do fio 1. A chave CH1 pode ser conectada aos pontos A e B, e a chave CH2 pode ser conectada aos pontos C e D.



Para estudar o funcionamento desse circuito, foram feitos dois experimentos:

1º experimento: CH1 ligada em A e CH2 ligada em C.
2º experimento: CH1 ligada em B e CH2 ligada em D.

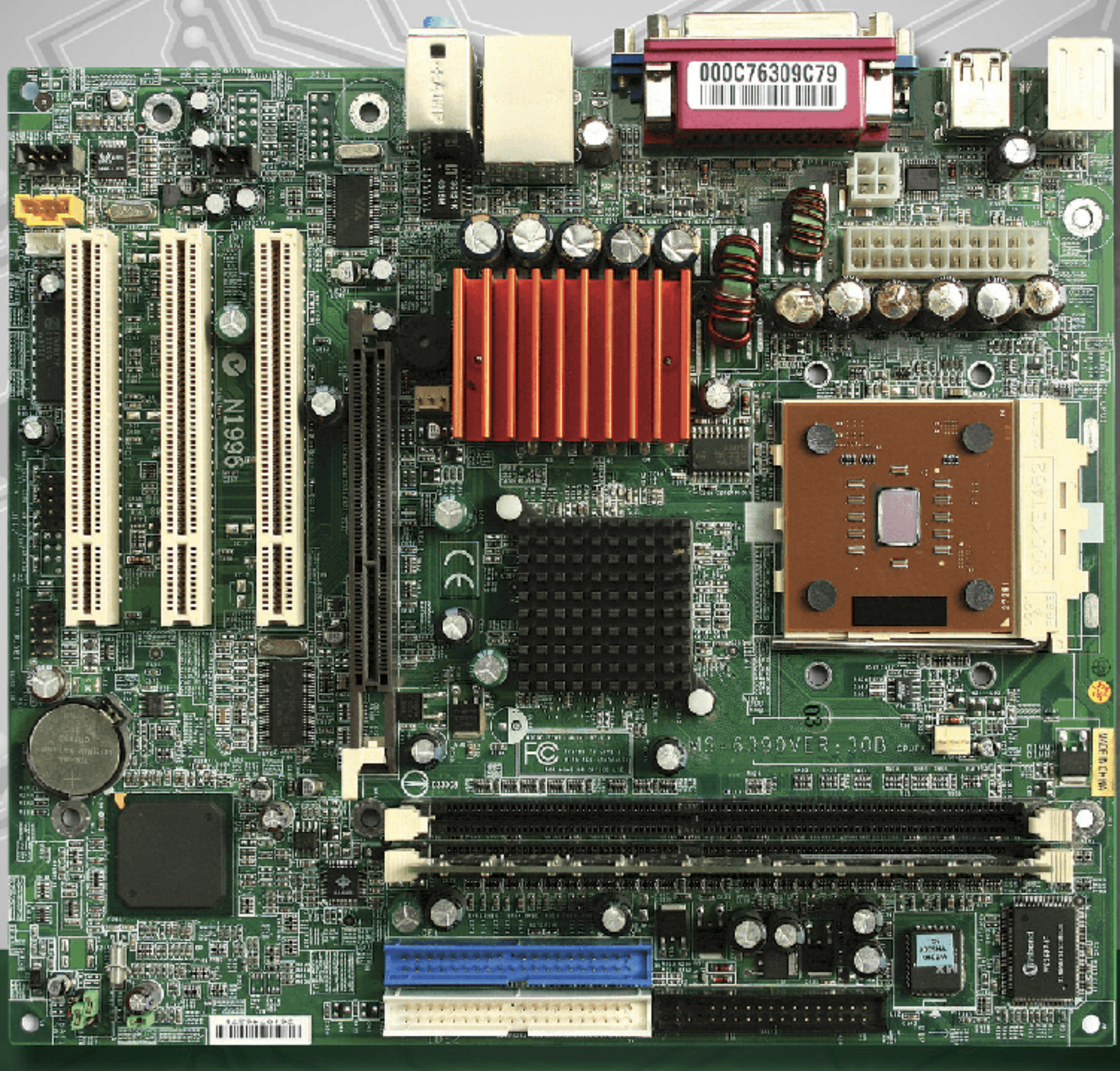
Pode-se afirmar, corretamente, que:

(a) no 1º experimento, a lâmpada brilha mais que no 2º experimento.
(b) no 1º experimento, a lâmpada brilha da mesma forma que no 2º experimento.
(c) no 2º experimento, a intensidade de corrente elétrica que passa pela lâmpada é quatro vezes maior que no 1º experimento.
(d) no 2º experimento, a intensidade de corrente elétrica que passa pela lâmpada é duas vezes maior que no 1º experimento.
(e) no 1º experimento, a potência dissipada pela lâmpada é o dobro que no 1º experimento.

6

FRENTE 2

Circuitos elétricos



JONATHAN ZANDER (DIGON3)/WIKIPEDIA

A placa-mãe de um computador possui circuitos elétricos capazes de realizar operações matemáticas com uma velocidade muito grande e de lidar com vários periféricos simultaneamente, tais como impressoras, monitores de vídeo etc. Computadores, aparelhos de TV e DVD são exemplos de equipamentos cujo funcionamento depende de circuitos que conectam componentes elétricos, como resistores e capacitores.

Introdução

No capítulo anterior, você aprendeu a calcular resistências equivalentes e assim tornou-se capaz de calcular todas as grandezas importantes de um circuito, quais sejam corrente, tensão e potência dissipada em todos os seus pontos.

Mas para que calcular essas grandezas? Na verdade, um circuito é um caminho fechado por onde a corrente elétrica pode passar e que possui uma finalidade. Por exemplo, você pode querer ligar um rádio e transformar a energia que está nas pilhas em energia sonora, ou você pode querer ligar um ventilador ou simplesmente utilizar o seu chuveiro.

Em todos esses casos, existe uma fonte de energia elétrica, um gerador e um dispositivo que converte energia elétrica em outra fonte de energia, resistores ou receptores.

Portanto, geradores são dispositivos que convertem qualquer forma de energia em energia elétrica. Como exemplo, podemos citar geradores hidrelétricos e geradores nucleares. Os primeiros convertem energia mecânica em energia elétrica e os últimos convertem energia nuclear em energia elétrica. A seguir a representação esquemática do gerador.

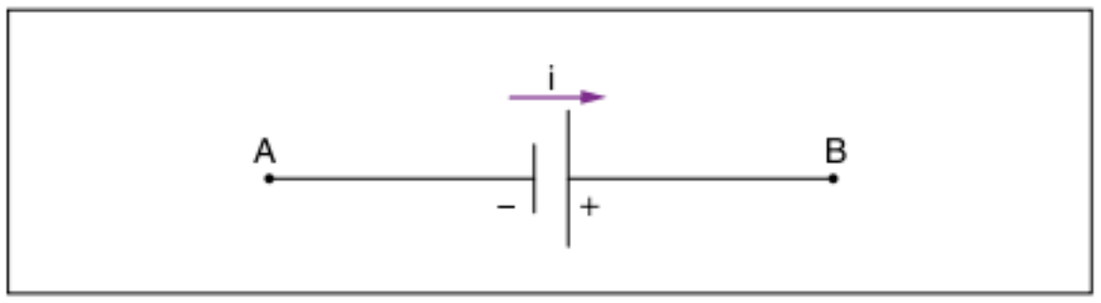


Fig. 1 Representação de um gerador.

Os receptores são dispositivos que convertem energia elétrica em outra forma de energia que não seja exclusivamente térmica. No caso do nosso exemplo, podemos citar o rádio que converte energia elétrica em sonora e o ventilador que converte energia elétrica em mecânica. Observe, a seguir, a representação de um receptor.

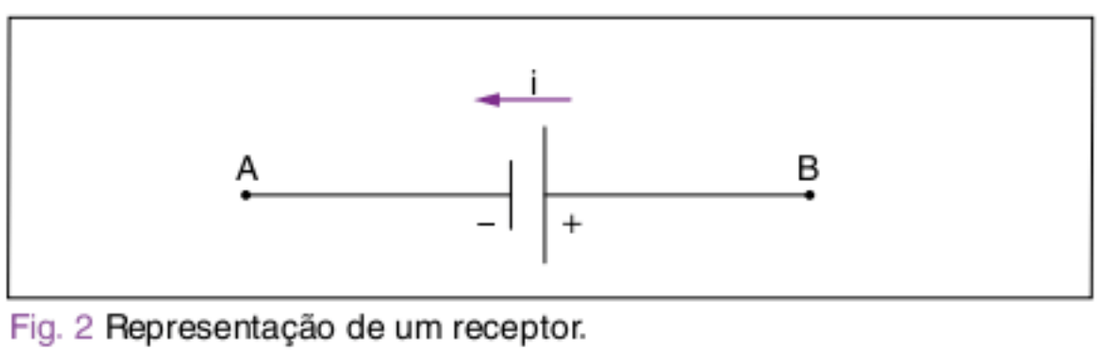


Fig. 2 Representação de um receptor.

Os resistores são dispositivos que convertem energia elétrica exclusivamente em energia térmica. No nosso exemplo, temos a resistência do chuveiro que tem por objetivo converter a energia elétrica em energia térmica.

Neste capítulo, faremos um estudo dos geradores e dos receptores. Abordaremos também os instrumentos de medidas elétricas. Você aprenderá a calcular correntes e tensões em circuitos com mais de uma malha por meio das Leis de Kirchhoff (*não se assuste com o nome!!!*).

Geradores elétricos

Como citado anteriormente, os geradores elétricos são dispositivos que convertem qualquer forma de energia em energia elétrica, portanto, são dispositivos ativos.

No caso do gerador ser uma pilha, a energia consumida é de origem química.

Como exemplo de geradores do nosso dia a dia, temos as pilhas e as baterias. Esses dispositivos têm como objetivo manter uma diferença de potencial (ddp), designada pela letra **U** (medida em volts) constante nos terminais do circuito a fim de garantir uma corrente elétrica que alimente os elementos do circuito para que eles possam cumprir as suas finalidades.

No circuito externo, supondo que a corrente elétrica se deva ao movimento das cargas positivas, o movimento dessas cargas se dá do polo positivo para o polo negativo do gerador. Ao chegar no polo negativo, há a necessidade de ela retornar ao polo positivo a fim de que a corrente não cesse.

Portanto, dentro do gerador, a carga realiza um movimento contra o campo elétrico, com gasto de energia. É por esse motivo que há o consumo de uma forma de energia qualquer para a realização deste trabalho, daí o nome força eletromotriz (fem) para a tensão ε entre as placas do gerador. Portanto, no interior do gerador, a corrente elétrica é do polo negativo para o positivo.

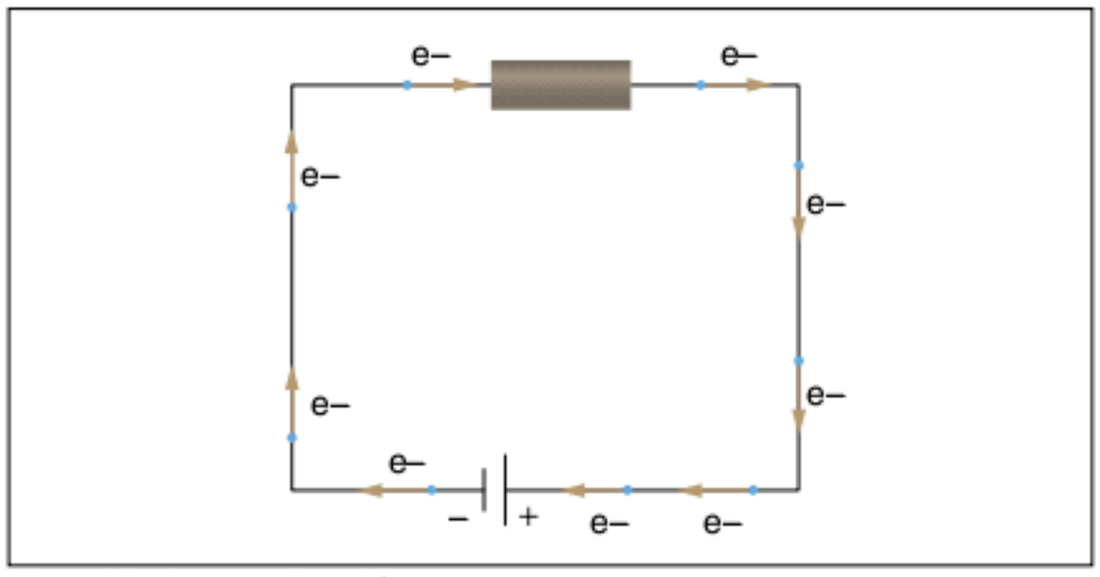


Fig. 3 Movimento dos elétrons.

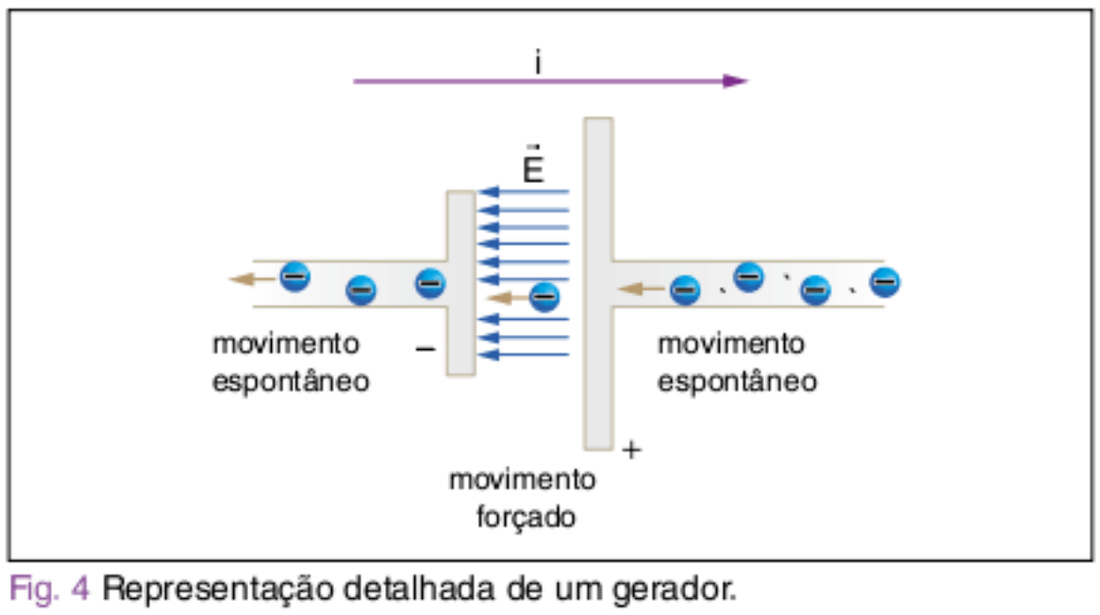


Fig. 4 Representação detalhada de um gerador.

No caso dos geradores reais, tais como as pilhas, parte da energia elétrica obtida é dissipada no próprio gerador, pois a pilha, sendo atravessada por corrente, dissipa parte da energia por efeito Joule. Dizemos então que o gerador real possui uma resistência interna r.

Caso o gerador fosse ideal e sua resistência interna **r** fosse igual a zero, não haveria dissipação de potência no seu interior e a tensão disponível **U** nos seus terminais seria igual a sua força eletromotriz **ε**.

$$U = \varepsilon$$

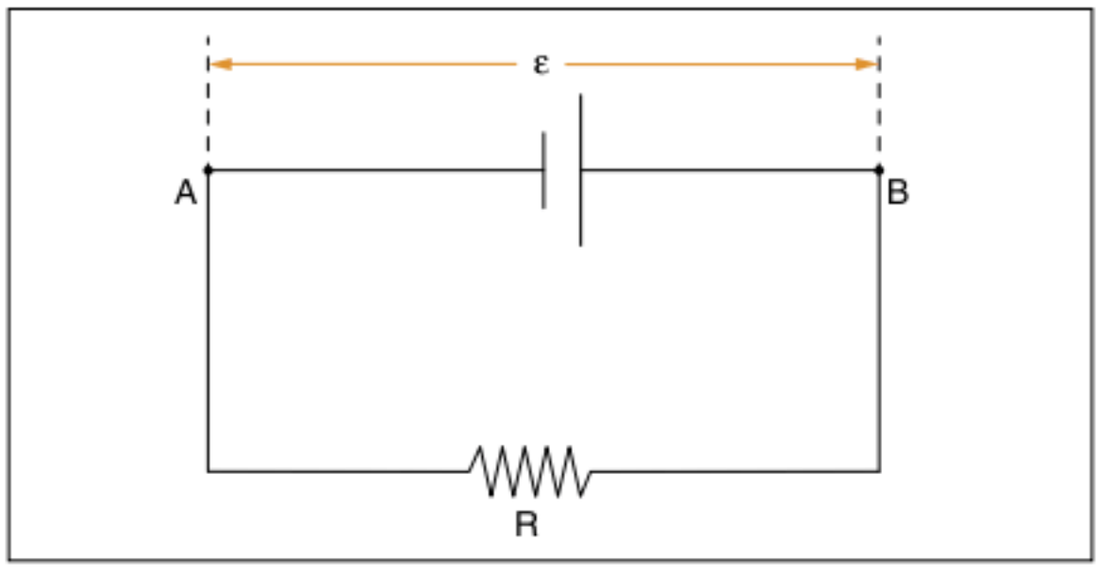


Fig. 5 Circuito com gerador ideal.

Porém, como na prática há uma resistência interna, ela causa uma queda de potencial ainda dentro do gerador, de tal forma que a tensão disponível para o circuito (**U**) é menor do que a sua força eletromotriz ε. Assim, podemos escrever que:

$$U = \varepsilon - r \cdot i$$

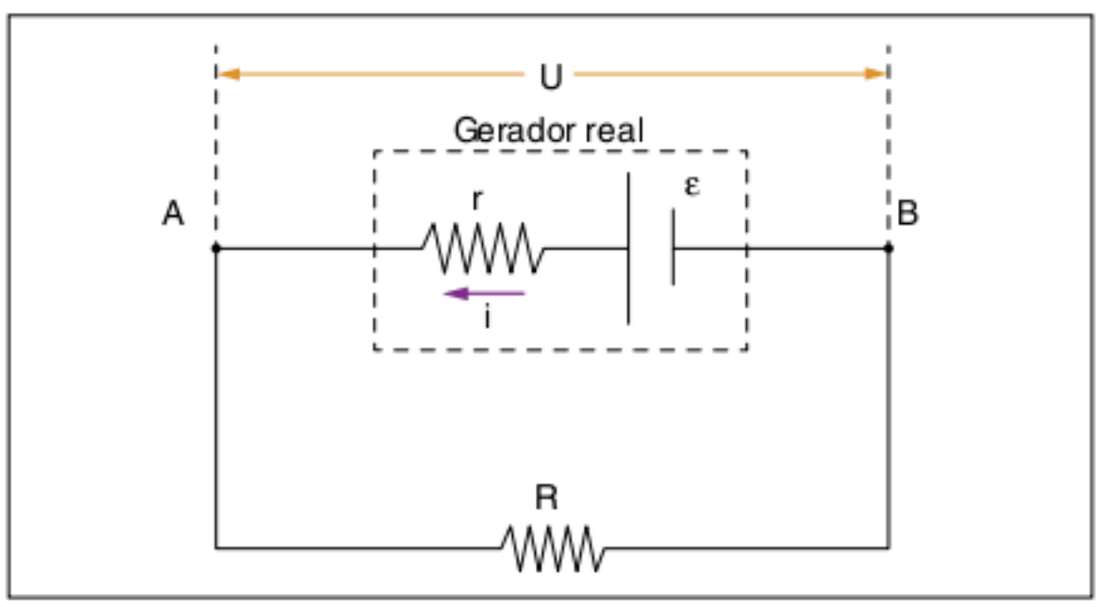


Fig. 6 Circuito com gerador real.

A equação anterior é conhecida como a equação característica do gerador elétrico. O seu estudo nos permitirá chegar a importantes conclusões.

Essa equação nos diz que a tensão disponível **U** nos terminais do circuito é igual à força eletromotriz **ε** do gerador menos a queda de tensão na resistência interna **r** do gerador. Essa equação pode ser melhor visualizada pelo gráfico de **U** em função de **i**.

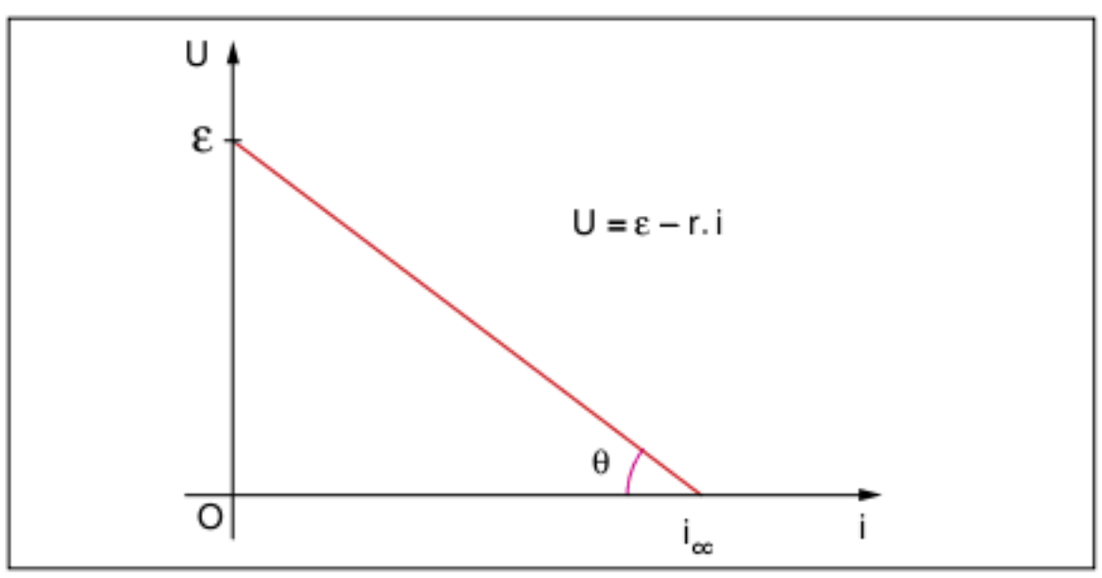


Fig. 7 Reta característica do gerador real.

Pelo gráfico, podemos observar que quando a corrente é zero, a ddp **U** nos terminais é igual à força eletromotriz ε do gerador.

Para um determinado valor de corrente, a ddp **U** nos terminais do gerador é igual a zero. Esse valor de corrente é denominado corrente de curto-circuito (i_{cc}). Substituindo **U** por zero na equação do gerador, obtém-se o valor da corrente de curto circuito que é dada por:

$$i_{cc} = \frac{\varepsilon}{r}$$

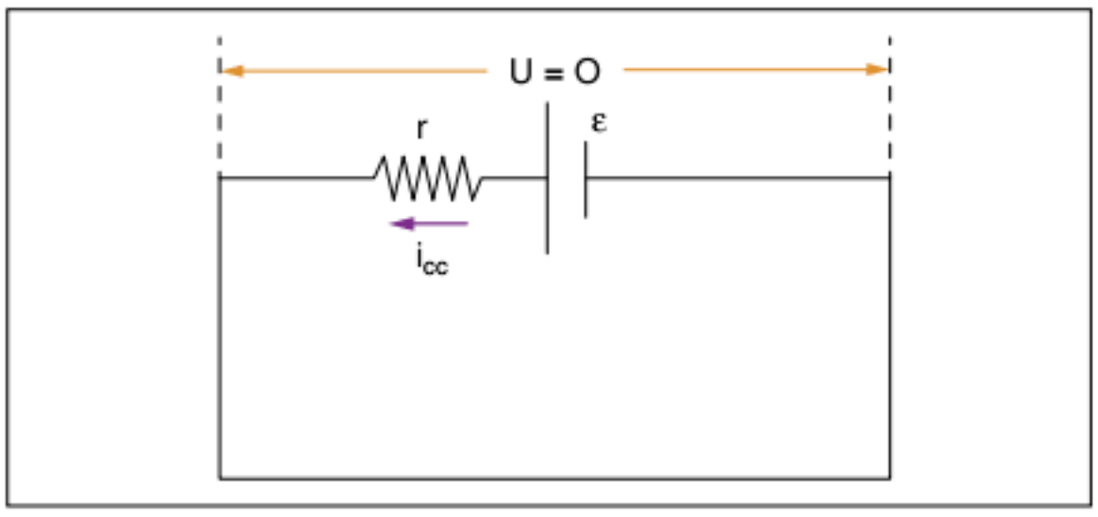


Fig. 8 Circuito com corrente de curto-circuito (i_{cc}).

Finalmente, o coeficiente angular da reta que representa a equação do gerador é a resistência interna do gerador.

$$tg\theta \overset{N}{=} r$$

Em resumo, a força eletromotriz ε do gerador é a máxima tensão elétrica (volts) que o gerador pode fornecer. Essa tensão só é obtida com o gerador em aberto, ou seja:

$$U = \varepsilon \rightarrow i = 0$$

Existe um valor de corrente no qual a ddp nos terminais do circuito é nula, essa corrente é chamada corrente de curto-circuito, tal que:

$$U = 0 \rightarrow i = i_{cc} = \frac{\varepsilon}{r}$$

ATENÇÃO!

A equação do gerador nos mostra que U < ε em qualquer ponto de funcionamento do circuito.

Lei de Pouillet: circuito gerador-resistor

Caso haja uma resistência acoplada ao gerador, calcula-se a corrente elétrica que passa através do gerador por meio da Lei de Pouillet.

Essa lei nada mais é do que realizar o cálculo já feito no capítulo anterior. Observando o circuito a seguir, verifica-se que a resistência interna **r** está em série com a resistência **R**.

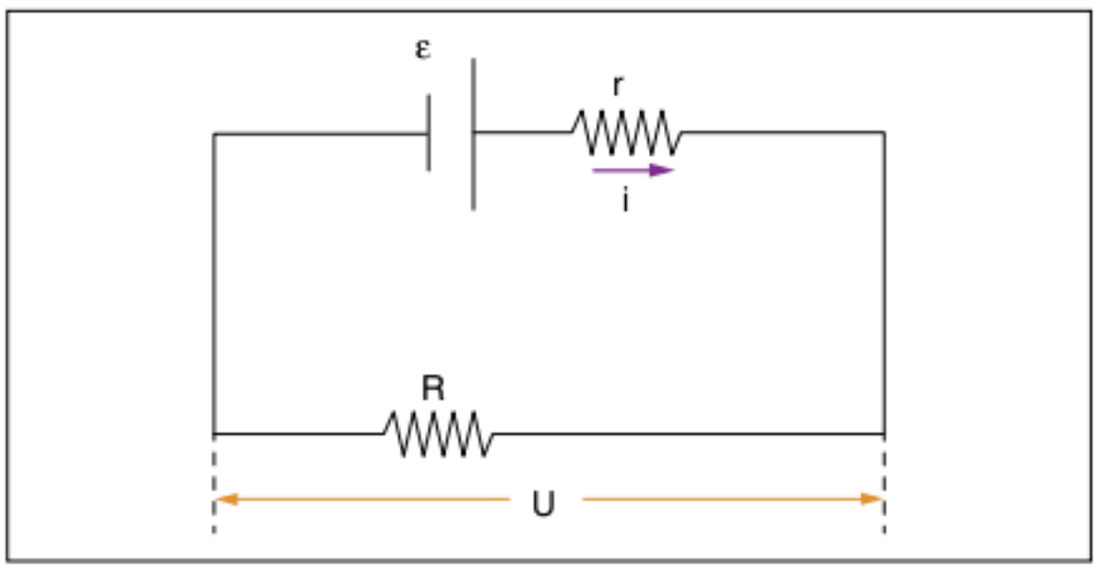


Fig. 9 Circuito gerador-resistor.

Portanto, a resistência equivalente do circuito e a corrente são:

$$R_{eq} = r + R$$

$$i = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

Energia e potência elétrica do gerador

Passando agora a pensar no gerador como um fornecedor de energia elétrica, iremos aplicar o conceito de potência elétrica visto nos capítulos anteriores. A potência elétrica nos terminais de um dipolo é dada por: $P = U \cdot i$

Quando um gerador é percorrido por uma corrente i, existe uma potência elétrica total (P_t) que o gerador pode fornecer, dada por:

$$P_t = \varepsilon \cdot i$$

Na resistência interna do gerador, parte da potência é dissipada (P_d), tal que:

$$P_d = r \cdot i^2$$

O que resta é a potência útil ou disponível (P_u) relacionada com a ddp U nos terminais do circuito, ou seja:

$$P_u = U \cdot i$$

Pelo princípio da conservação de energia, a potência útil é a potência total menos a potência dissipada nos terminais do circuito:

$$P_u = P_t - P_d$$

$$P_u = \varepsilon \cdot i - r \cdot i^2$$

Se observarmos a expressão acima, podemos notar que a potência útil P_u é uma função quadrática da corrente, conforme se observa no gráfico a seguir em que foi traçada a curva da potência em função da corrente.

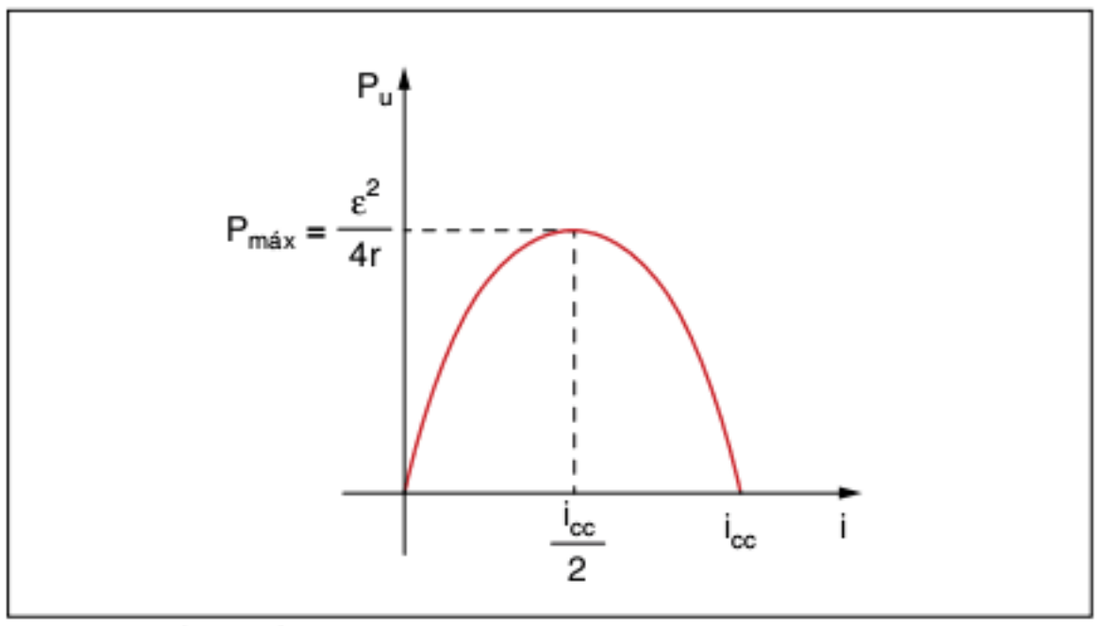


Fig. 10 Potência útil *versus* corrente.

Conforme dito anteriormente, o gráfico da potência em função da corrente é uma parábola com concavidade voltada para baixo. A potência máxima é obtida quando a corrente que atravessa o gerador é a metade da corrente de curto-circuito

$$\frac{i_{cc}}{2} = \frac{\varepsilon}{2r}.$$

Substituindo na expressão da potência útil, obtém-se o seguinte valor de potência máxima:

$$P_u = \varepsilon \cdot i - r \cdot i^2$$

$$P_{máx.} = \varepsilon . \frac{i_{cc}}{2} - r . \left(\frac{i_{cc}}{2}\right)^2 = \varepsilon . \frac{\varepsilon}{2r} - r . \frac{\varepsilon^2}{4r^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

E a tensão elétrica é dada por:

$$U = \varepsilon - r . i = \varepsilon - r . \frac{\varepsilon}{2r} = \frac{\varepsilon}{2}$$

ATENÇÃO!

Para que se atinja o ponto de potência máxima, a corrente que atravessa o circuito deve ser a metade da corrente de curto-circuito.

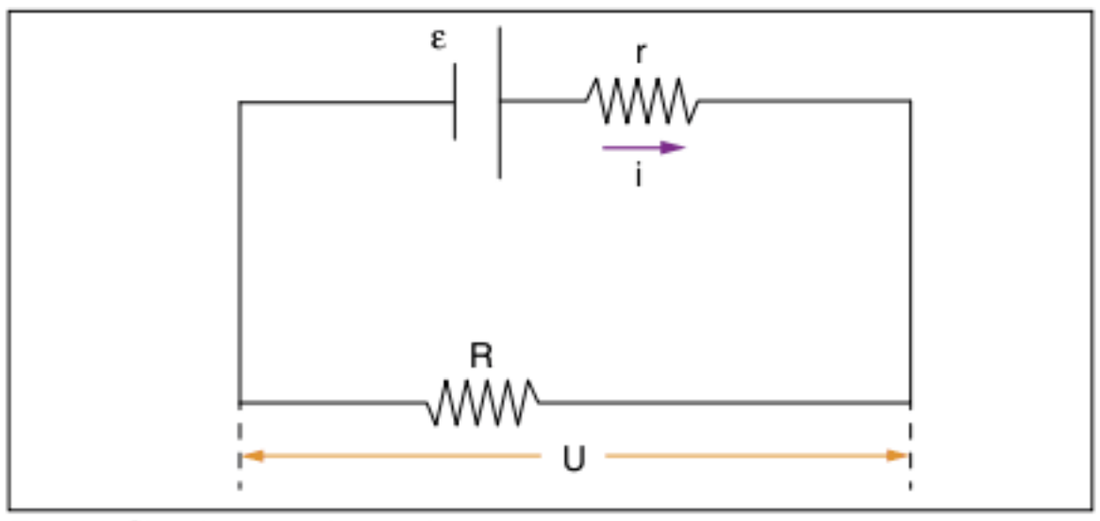


Fig. 11 Circuito gerador-resistor.

Qual deve ser o valor de R que se deve ligar ao gerador para que a potência seja máxima?

Pela Lei de Pouillet, tem-se que: $i = \frac{\varepsilon}{r + R}$

Para que a corrente i seja a metade da corrente de curto-circuito, podemos escrever que:

$$i = \frac{i_{cc}}{2} = \frac{\varepsilon}{2r} = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

E, portanto: $r = R$

ATENÇÃO!

Vemos, portanto, que a condição de máxima transferência de potência em um circuito puramente resistivo é aquela em que a resistência interna r é igual à resistência equivalente do circuito R.

Rendimento de um gerador

Um conceito muito importante para um gerador é o rendimento. Esse conceito é muito simples de ser entendido.

Se, por exemplo, a potência total que um gerador pode fornecer é de 100 W, porém 30 W são dissipados na resistência interna, somente 70 W de potência útil são fornecidos ao circuito. Portanto, o rendimento é de 70%. Podemos escrever o rendimento matematicamente como:

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{U . i}{\varepsilon . i} = \frac{U}{\varepsilon}$$

ATENÇÃO!

Para o caso em que a potência fornecida é a máxima, o rendimento pode ser facilmente calculado. Nessa situação, a ddp U, conforme calculada anteriormente, vale $\frac{\varepsilon}{2}$ e, portanto, o rendimento vale:

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{U.i}{\varepsilon.i} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon} = 0,5$$

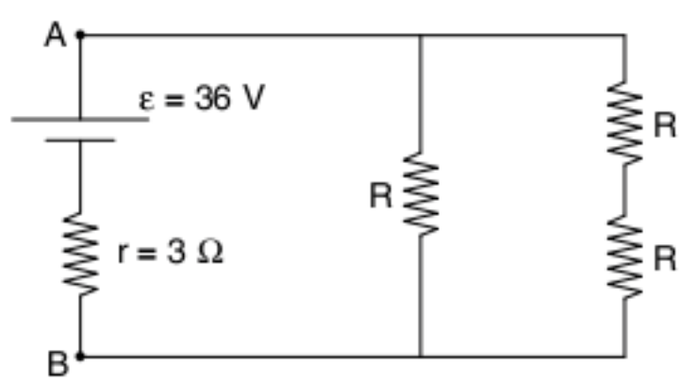
Observação: *Observemos que a máxima transferência de potência ocorre com um rendimento apenas razoável. Por isso, a condição de máxima transferência de potência raramente é imposta a sistemas de grande potência, pois as perdas são muito grandes: perde-se uma quantidade igual à que é transferida.*

Exercício resolvido

1 Para o circuito esquematizado na figura, o gerador AB está fornecendo a máxima potência. Determine:

a) o valor da resistência R de cada resistor.

b) a potência máxima fornecida.



Resolução:

a) *Nas condições de potência máxima fornecida, a resistência equivalente entre os pontos A e B deve ser igual à resistência interna do gerador.*

Assim, calculando-se a resistência equivalente entre A e B, tem-se:

$$R_{AB} = \frac{2R.R}{2R+R} = \frac{2R}{3}$$

Assim sendo, a resistência interna deve ser igual a $\frac{2R}{3}$ *ou seja:* $\frac{2R}{3} = 3 \Rightarrow R = \frac{9}{2}\Omega$

b) *A potência máxima fornecida é dada por:*

$$P_{máx} = \frac{\varepsilon^2}{4r} = \frac{36^2}{12} = 108\ W$$

Associação de geradores

É muito comum em aparelhos elétricos, principalmente aqueles que se utilizam de pilhas, ter-se a necessidade de se colocar mais de uma pilha. Essa necessidade se deve ao fato de que as pilhas comuns fornecem 1,5 V e a tensão requerida por esses dispositivos é de 3 V ou valores múltiplos de 1,5 V.

Nesses casos, utiliza-se a associação de geradores para elevar a tensão, ou mesmo para reduzir o desgaste em cada uma das pilhas, aumentando a sua durabilidade.

Os geradores, similarmente aos resistores, podem ser associados em série ou em paralelo. Dessa forma, os geradores da associação podem ser substituídos por um gerador equivalente, com uma força eletromotriz equivalente (ε_{eq}) e uma resistência interna equivalente (r_{eq}).

Associação de geradores em série

Os geradores estão associados em série quando os polos dos elementos da associação estão ligados aos polos opostos dos elementos que o antecedem e o sucedem, conforme se vê na figura.

Fig. 12 Pilhas em série.

Observação: *Se os n geradores associados forem idênticos, cada um com fem igual a ε e resistência interna igual a r, teremos:* $\varepsilon_{eq} = n.\varepsilon$ *e* $r_{eq} = n.r$.

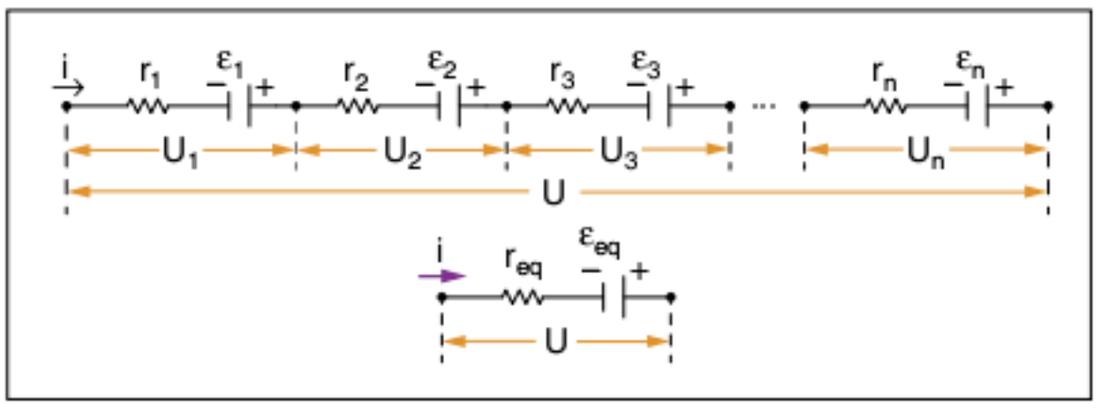


Fig. 13 Representação de geradores em série.

O gerador equivalente à associação é aquele que apresenta, entre seus terminais, a mesma ddp **U** dos terminais da associação, quando percorrido pela mesma corrente, qualquer que seja ela.

Assim, para os **n** geradores da associação, temos:

$$\begin{aligned} U_1 &= \varepsilon_1 - r_1 . i \\ U_2 &= \varepsilon_2 - r_2 . i \\ U_3 &= \varepsilon_3 - r_3 . i \\ &\vdots \\ U_n &= \varepsilon_n - r_n . i \end{aligned}$$

Somando todas essas igualdades membro a membro, obtemos:

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_4 =$$
$$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_n) - (r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n).i$$

ou

$$U = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_n) - (r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n).i \quad (I)$$

Para o gerador equivalente, temos:

$$U = \varepsilon_{eq} - r_{eq} \cdot i \quad (II)$$

Comparando as expressões (I) e (II), obtemos:

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_n$$
$$r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n$$

ATENÇÃO!

O objetivo de uma associação em série é aumentar a potência fornecida ao circuito através do aumento da fem do sistema.

Na associação de geradores em série, a grande vantagem está no fato de a força eletromotriz equivalente ser a soma das forças eletromotrizes de todos os geradores. Em contrapartida, a resistência interna equivalente também é a soma das resistências internas de todos eles.

Associação em paralelo

Analisaremos apenas o caso em que os geradores associados são iguais, por ser esta a única situação de real interesse e a única conveniente, pois neste caso os geradores são desgastados por igual.

Observação: *Na associação de geradores iguais em paralelo, uma das vantagens está no fato de a corrente que passa em cada um deles ser apenas uma fração da corrente total, o que prolonga sua vida útil. Outra vantagem é a redução da resistência interna, o que proporciona maior estabilidade na tensão de operação. Em contrapartida, a fem equivalente é a mesma de cada gerador.*

Dizemos que dois ou mais geradores estão associados em paralelo quando seus polos positivos estão ligados juntos, o mesmo ocorrendo com os polos negativos. Nessa situação, a ddp entre os terminais é a mesma para todos os geradores.

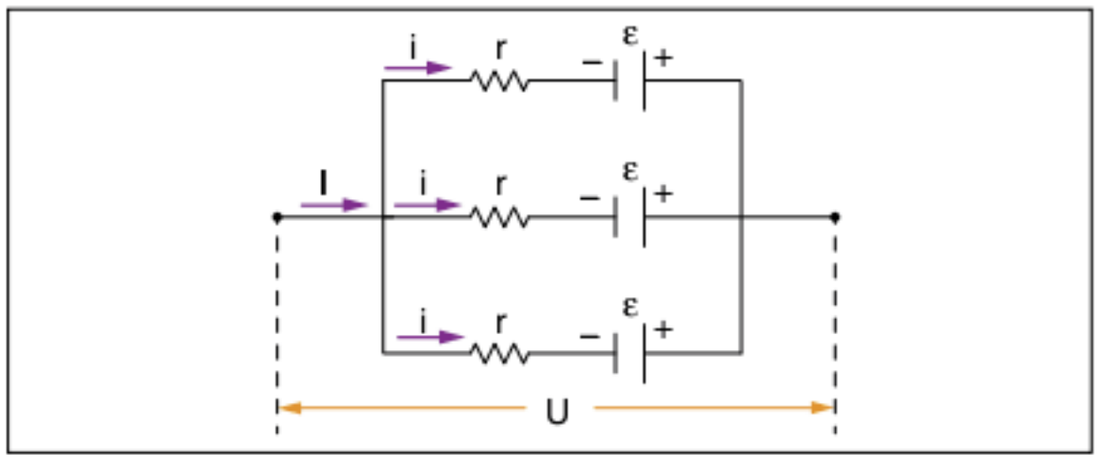


Fig. 14 Representação de geradores em paralelo.

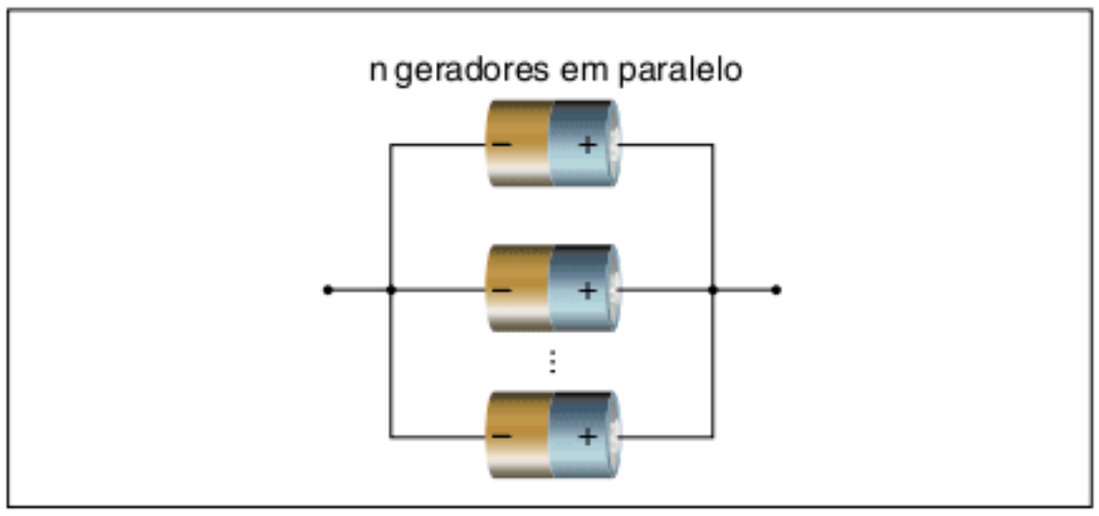


Fig. 15 Pilhas em paralelo.

O gerador equivalente à associação é aquele que, percorrido pela mesma corrente total da associação, apresenta a mesma tensão entre os seus terminais, qualquer que seja essa corrente.

ATENÇÃO!

O objetivo de uma associação em paralelo é aumentar a potência fornecida ao sistema, porém, através do aumento da corrente que circula pelo mesmo.

Para cada um dos n geradores da associação, temos:

$$U = \varepsilon - r \cdot i \quad (I)$$

Para o gerador equivalente, temos:

$$U = \varepsilon_{eq} - r_{eq} \cdot I$$

E como $I = n \cdot i$, temos:

$$U = \varepsilon_{eq} - r_{eq}\, n \cdot i \quad (II)$$

Comparando as expressões (I) e (II), obtemos:

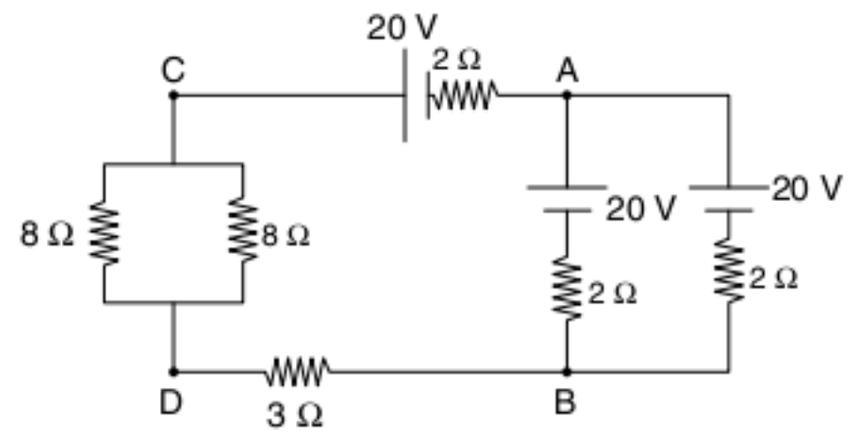
$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon \quad e \quad r_{eq} n = r \Rightarrow r_{eq} = \frac{r}{n}$$

Exercício resolvido

2 Três geradores, cada um de fem $\varepsilon = 20$ V e resistência interna $r = 2\ \Omega$, são associados como indica a figura. Nessas condições, determine:

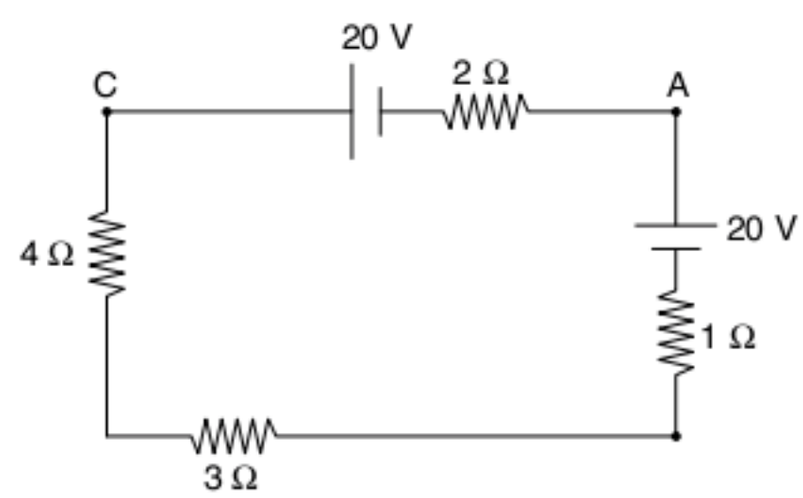
a) A intensidade da corrente que atravessa cada gerador.

b) A ddp entre os pontos A e B.



Resolução:

a) *Inicialmente, observamos que os dois geradores conectados em paralelo entre os pontos A e B são idênticos. Assim, podemos substituir esses geradores por um único de força eletromotriz $\varepsilon = 20$ V e resistência interna $r_{eq} = 1\ \Omega$. Da mesma forma, podemos substituir os dois resistores idênticos de 8 Ω em paralelo pelo seu equivalente de 4 Ω. Redesenhando, temos:*



Agora, observamos que os dois geradores estão em série. Portanto, sua força eletromotriz é a soma das fem's individuais, ou seja:

$\varepsilon = 20 + 20 = 40$ V

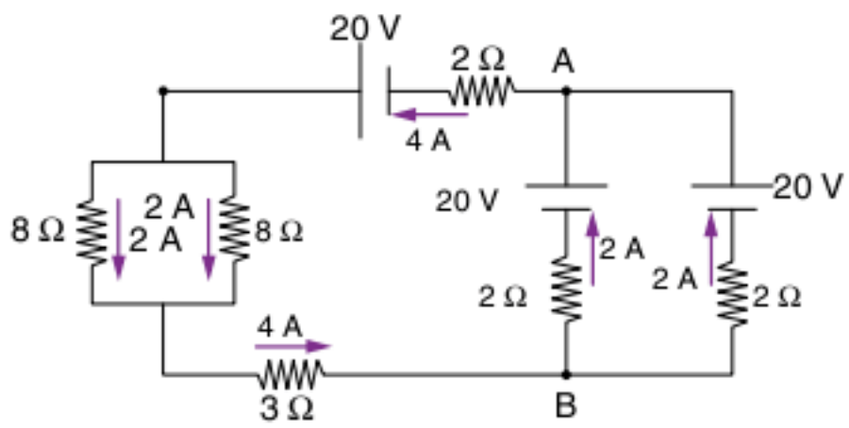
A resistência equivalente do circuito é a soma de todas as resistências, pois elas estão em série, tal que:

$r_{eq} = 1 + 2 + 4 + 3 = 10\ \Omega$

Portanto, a corrente que atravessa o circuito é dada por:

$$i = \frac{40}{10} = 4\ A$$

b) *Como os dois geradores que estão em paralelo são iguais, cada um deles será atravessado por 2 A, como mostra a figura:*



Portanto, a diferença de potencial entre os pontos A e B é igual a 16 V.

O receptor elétrico

É o elemento passivo do circuito que tem por finalidade transformar energia elétrica em outra forma qualquer de energia que não seja exclusivamente térmica.

Um motor elétrico é um bom exemplo de receptor. Ele converte energia elétrica em trabalho útil, conforme se observa na figura a seguir.

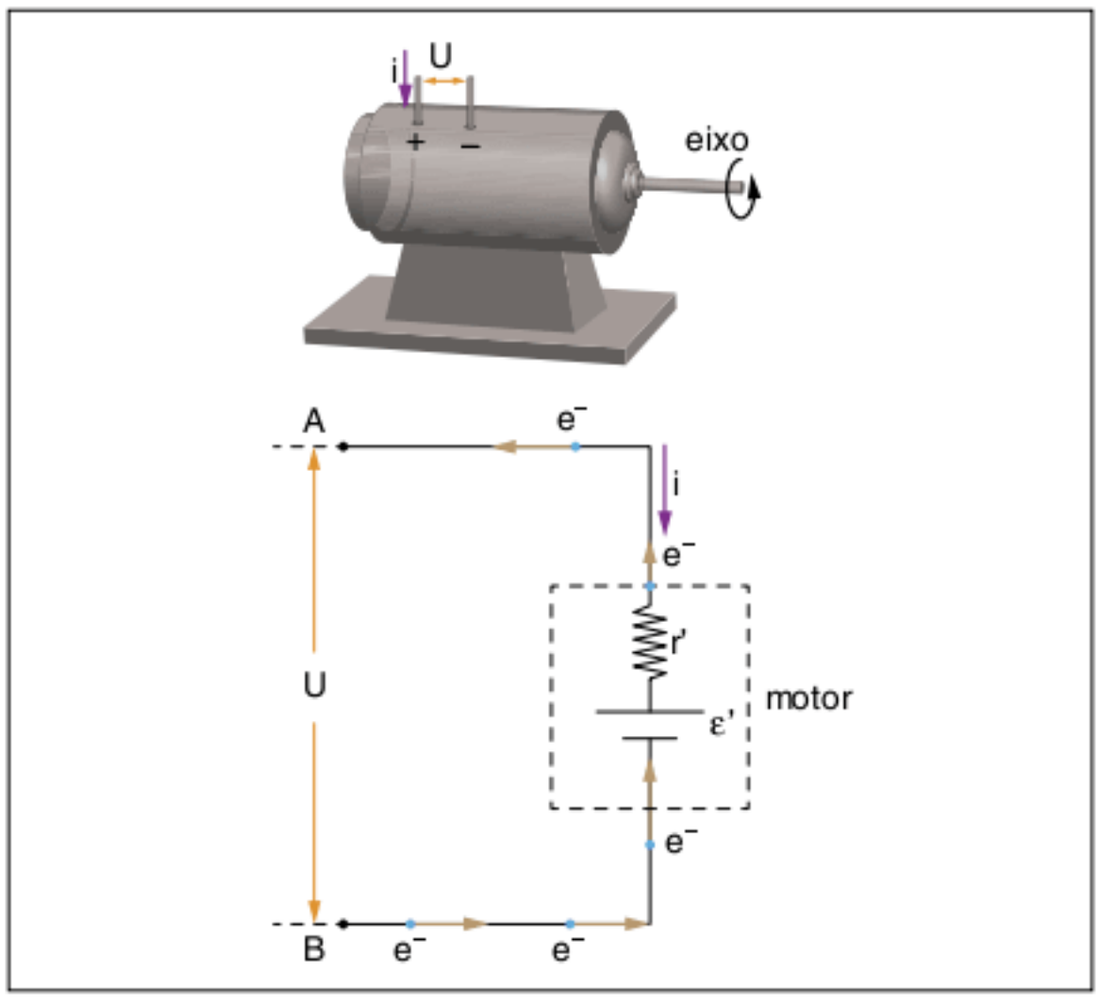


Fig. 16 Receptor elétrico.

No caso dos receptores, o movimento das cargas no circuito externo não é espontâneo. Isso se entende pelo fato de que é necessário que se force a passagem dos elétrons pelo interior do receptor a fim de que ele possa realizar a conversão de energia elétrica em energia mecânica (no caso do motor). É por esse motivo que a tensão ε' nos terminais do receptor é chamada força contraeletromotriz (fcem).

Já no interior do receptor, o movimento das cargas é a favor do campo, ou seja, a força elétrica realiza um trabalho positivo sobre as cargas e, nesse trajeto, a energia elétrica é convertida em outra forma de energia. A corrente em um receptor é do polo positivo para o negativo.

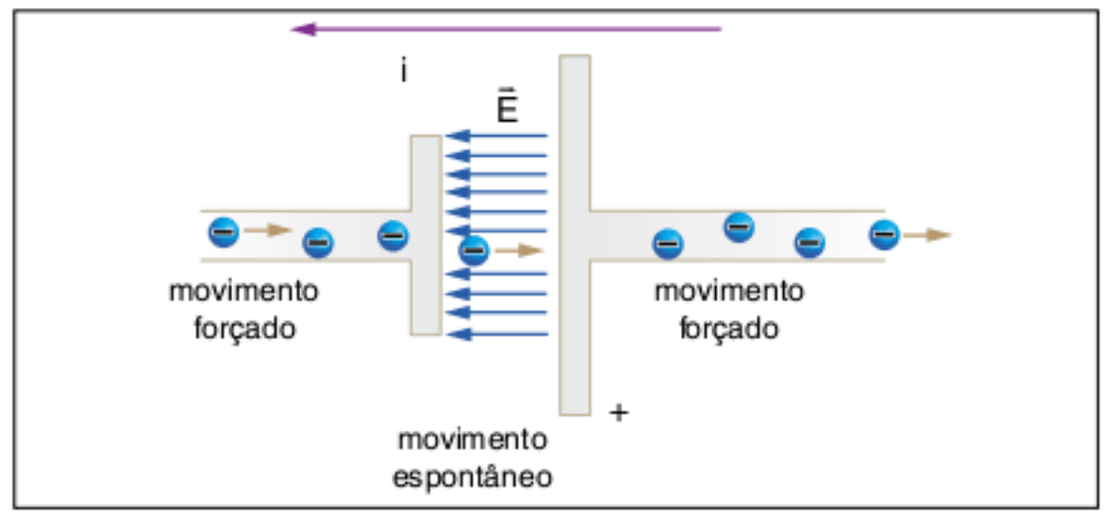


Fig. 17 Representação detalhada de um receptor.

Assim, para um receptor ideal conectado a um gerador que mantém uma tensão **U** nos terminais do circuito, podemos escrever que: U = ε'.

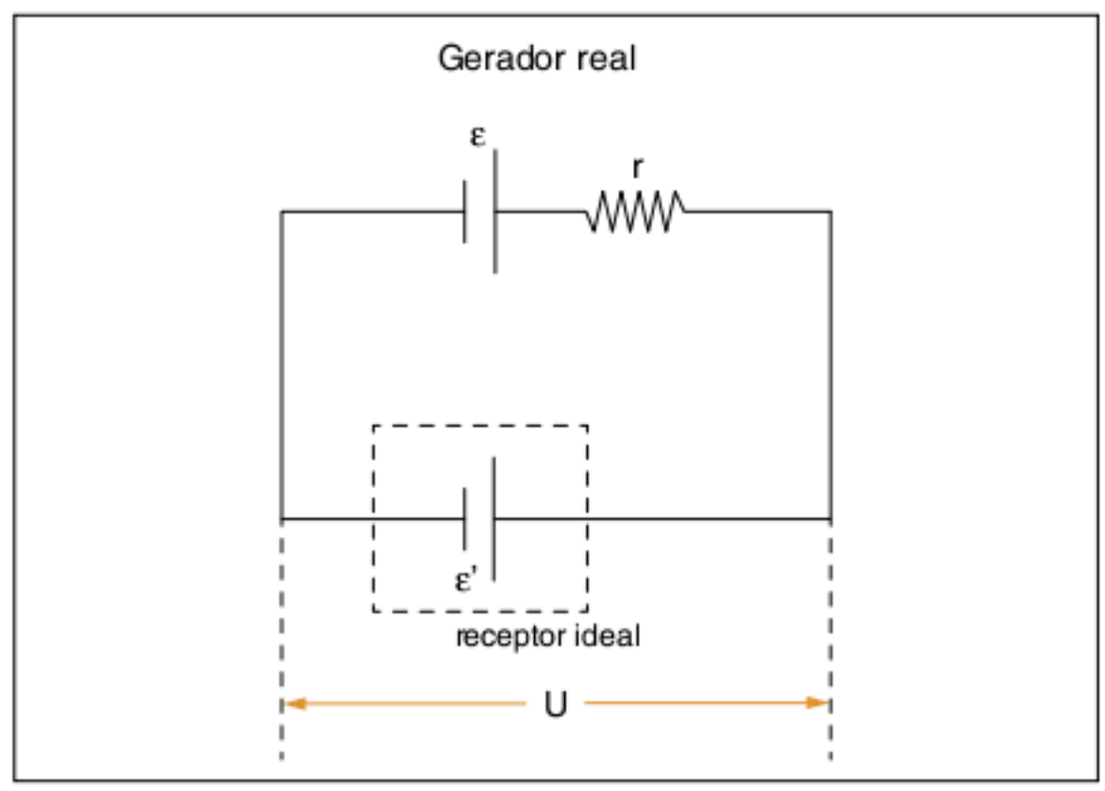


Fig. 18 Circuito com receptor ideal.

Nos receptores reais, há uma resistência interna **r'** responsável pela dissipação, por efeito Joule, de parte da energia que é entregue ao receptor. A existência dessa resistência pode ser explicada pelo fato de que a corrente, ao atravessar o gerador, encontra uma resistência não nula. Nesse caso, podemos escrever que:

$$U = \varepsilon' + r' \cdot i$$

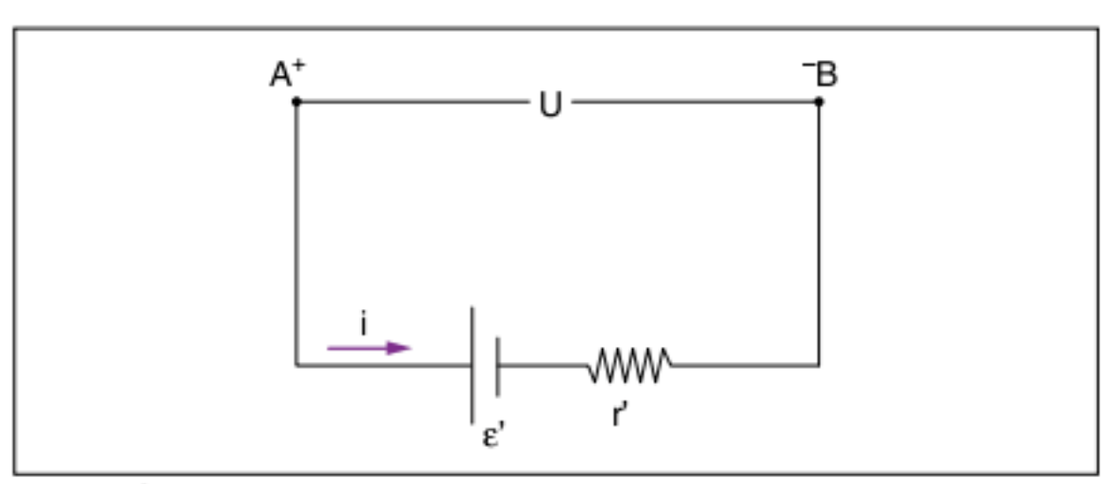


Fig. 19 Circuito com receptor real.

Essa equação é chamada equação característica do receptor elétrico e nos diz que a tensão U, mantida nos terminais do receptor, é igual à sua força contraeletromotriz ε' mais a queda de tensão na resistência interna **r'·i**. Essa equação pode ser melhor entendida se traçarmos o gráfico de **U** em função de **i**.

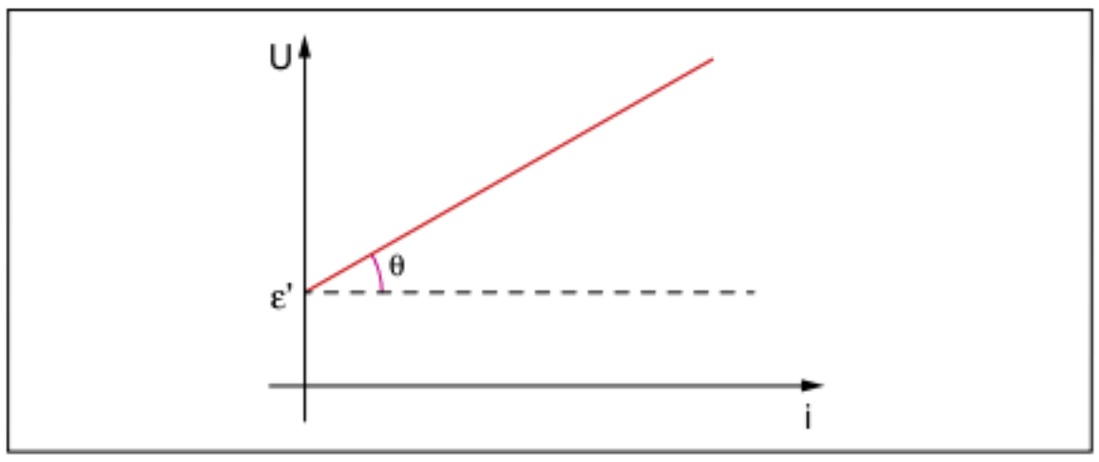


Fig. 20 Reta característica do receptor real.

Pela análise do gráfico, podemos identificar que se a corrente é nula, então $U = \varepsilon'$.

O coeficiente angular da reta é o próprio valor da resistência interna **r'** do receptor: $\text{tg}\,\theta = r'$.

ATENÇÃO!

A equação do receptor nos mostra que $U > \varepsilon'$ em qualquer ponto de funcionamento do circuito.

Lei de Pouillet: circuito gerador-resistor-receptor

Para que se possa ter uma melhor ideia do todo do circuito, vamos aplicar a Lei de Pouillet em um circuito no qual temos um gerador e receptores reais e uma resistência R.

Nesta montagem, a tensão U nos terminais do circuito é igual à tensão sobre o receptor somada à tensão na resistência.

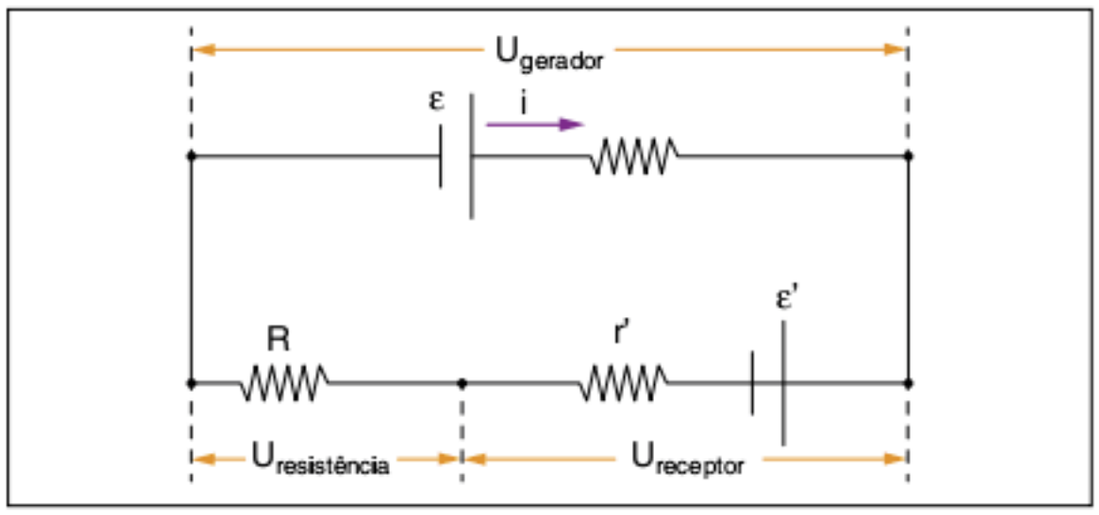


Fig. 21 Circuito gerador-resistor-receptor.

Podemos escrever que: $U_{gerador} = U_{receptor} + U_{resistor}$

Como a corrente que atravessa todos os elementos é a mesma, substituindo as equações do gerador e do receptor, temos que:

$$\varepsilon - r \cdot i = \varepsilon' + r' \cdot i + R \cdot i \quad \text{ou} \quad i = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{r + r' + R}.$$

Observação: *Essa é uma das razões pelas quais não se deve associar pilhas velhas com pilhas novas em paralelo; a pilha gasta, tendo menor tensão poderá funcionar como um receptor, drenando energia da pilha nova, que além de alimentar o circuito terá que "alimentar" a pilha gasta.*

Essa lei bem poderia ser chamada princípio do cabo de guerra. Imagine que a tensão total do circuito é um cabo de guerra no qual o elemento de maior tensão é o gerador e o de menor é o receptor. Sendo assim, a tensão total é a diferença entre a força eletromotriz e a força contraeletromotriz.

Energia e potência elétrica do receptor

Similarmente ao que foi feito com os geradores, passemos a pensar no receptor como um consumidor de energia elétrica.

O circuito, através do gerador, entrega ao receptor uma potência recebida (P_r), parte dessa potência é transformada em potência útil (P_u) e a outra parte é dissipada na resistência interna do receptor (**r'**). Pelo princípio da conservação da energia, podemos escrever que: $P_r = P_u + P_d$

Essa equação pode ser obtida multiplicando-se os dois lados da equação característica do receptor elétrico pela corrente (i), tal que: $U \cdot i = \varepsilon' \cdot i + r' \cdot i^2$

Portanto:

$P_r = U \cdot i$

$P_u = \varepsilon' \cdot i$

$P_d = r' \cdot i^2$

Podemos também definir um rendimento do receptor elétrico como sendo a razão entre a potência útil gerada pelo receptor pela potência recebida.

$$\eta_{receptor} = \frac{P_u}{P_r} = \frac{\varepsilon' . i}{U . i} = \frac{\varepsilon'}{U}$$

Exercício resolvido

3 Um motor elétrico sob tensão de 110 V é atravessado por uma corrente de intensidade de 10 A. A potência elétrica útil do motor é de 1.000 W. Calcule:

a) a força contraeletromotriz (fcem) do motor, ε', e a sua resistência interna r'.

b) o rendimento elétrico do motor.

c) A corrente que circula pelo motor se ele for travado.

Resolução:

a) A potência elétrica útil do motor é dada por:

$$P_u = \varepsilon' . i$$

$$\therefore \ \varepsilon' = \frac{1.000}{10} = 100 \ V$$

A equação característica do receptor é:

$$U = \varepsilon' + r' \cdot i \Rightarrow 110 = 100 + r' \cdot 10 \Rightarrow r' = 1\ \Omega$$

b) O rendimento do motor é a relação entre a sua fcem e a tensão aplicada nos seus terminais, ou seja:

$$\eta_{motor} = \frac{\varepsilon'}{U} = \frac{100}{110} \approx 0{,}91 \text{ ou } 91\%$$

c) Com o motor travado, a força contraeletromotriz ε' se anula, já que ela representa a conversão de energia elétrica em mecânica no motor. Neste caso, a corrente é limitada exclusivamente pela resistência interna do motor, tal que:

$$i = \frac{U}{r} = \frac{110}{1} = 110\ A$$

(Observe que o valor da corrente é bem maior do que o valor obtido com o motor funcionando.)

Em geral, podemos entender o processo da seguinte forma: o gerador possui uma potência total (P_t) a entregar para o circuito. Parte dessa potência é dissipada na sua resistência interna (P_d) e parte é entregue ao circuito na forma de uma potência (P_r).

O gerador ao receber essa potência, transforma parte dela em potência útil (P_u) e dissipa parte dela em sua resistência interna (P_d). Esse processo é melhor ilustrado na figura a seguir, onde se considera que o gerador alimenta o receptor por meio de fios ideais.

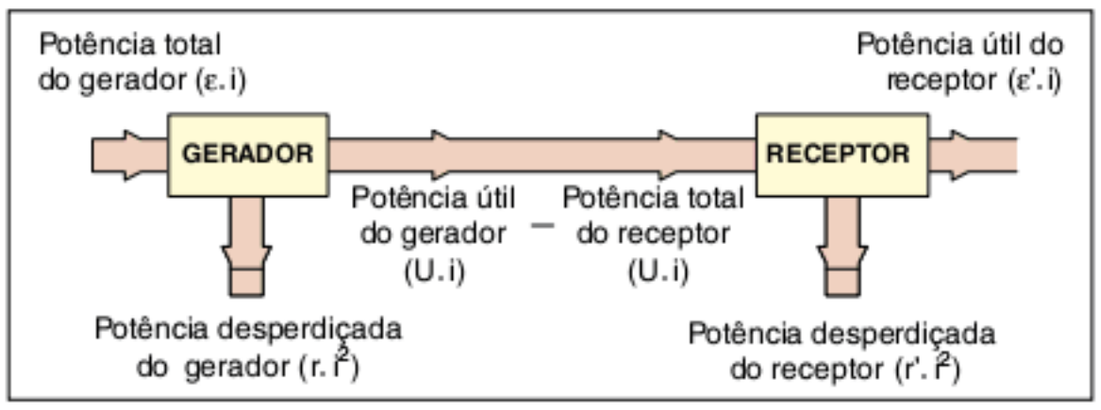


Fig. 22 Distribuição de potência em um circuito.

Capacitores

Como último elemento de um circuito elétrico a ser analisado neste capítulo, temos o capacitor ou condensador.

Os capacitores são elementos que têm, no circuito, a função de armazenar energia potencial elétrica por meio do armazenamento de cargas elétricas.

Todo par de condutores separados por um dielétrico e carregados com carga de mesmo módulo, porém de sinais opostos, constitui um capacitor ou condensador elétrico. A armadura que recebe as cargas do gerador é chamada armadura coletora e a que sofre a indução é chamada armadura condensadora.

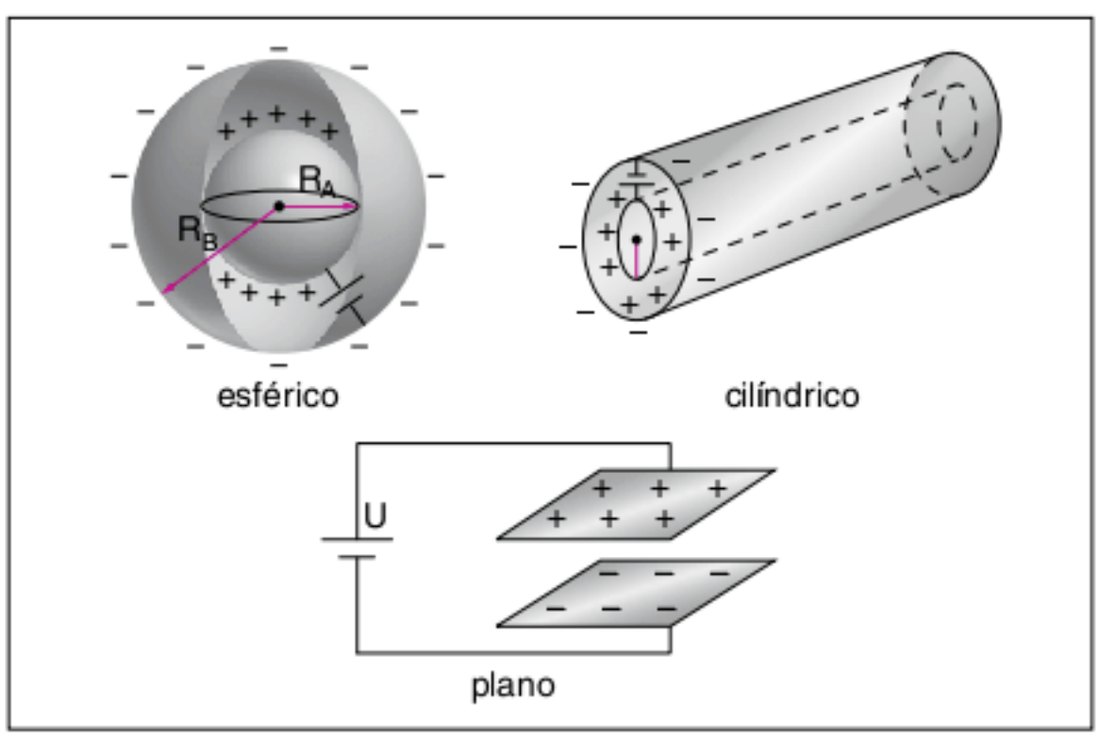


Fig. 23 Capacitores: esférico, cilíndrico e plano.

Observe que nas três situações: capacitores esféricos, cilíndricos ou planos, a indução é praticamente total. Todo o capacitor é constituído, portanto, de armaduras metálicas em que as cargas ficam armazenadas e de um meio dielétrico que separa as duas armaduras. Nosso estudo será concentrado no capacitor de armaduras planas, devido ao fato de o campo elétrico entre as armaduras ser praticamente uniforme.

O símbolo do capacitor é o indicado na figura a seguir.

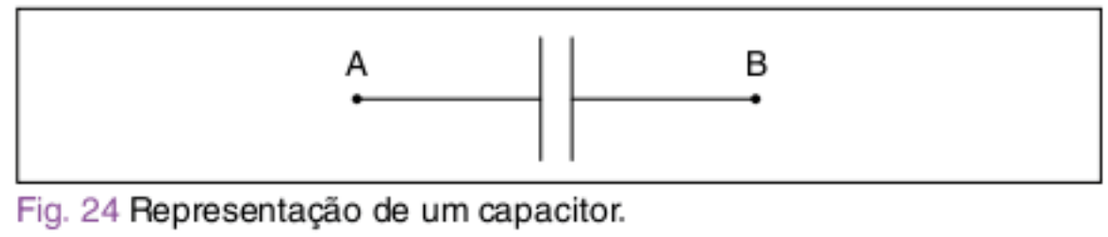


Fig. 24 Representação de um capacitor.

Os capacitores são utilizados em diversas aplicações na eletrônica, como na redução de variação de tensão em circuitos elétricos, para sintonia em circuitos de rádio e TV e em circuitos de controle de sistemas mecânicos.

Definição de capacitância

Inicialmente, iremos definir a capacitância eletrostática de um condutor esférico isolado para depois estendermos o conceito para os capacitores planos.

Considere uma esfera condutora de raio R, carregada com uma carga Q, em um meio cuja constante eletrostática é K, e em equilíbrio eletrostático. Essa situação é descrita na figura a seguir.

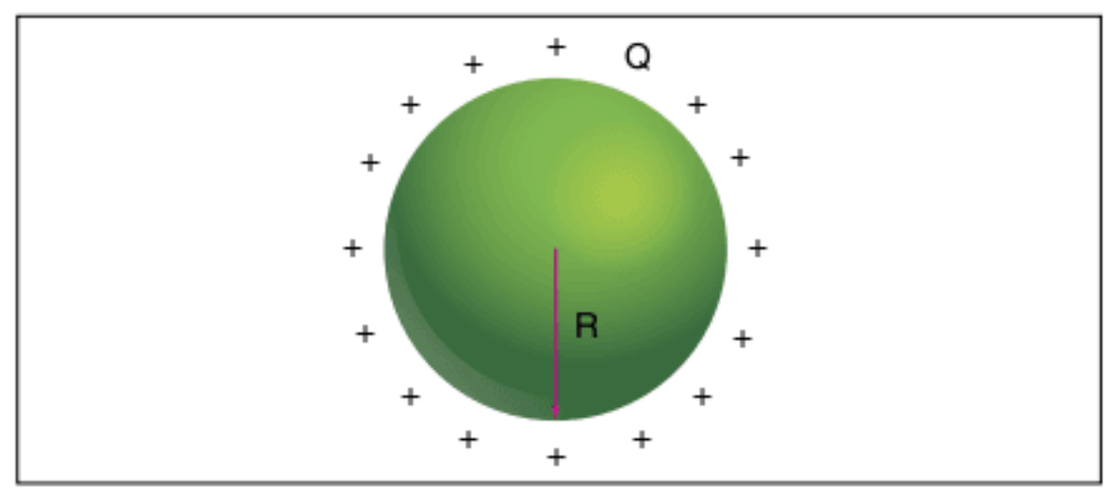


Fig. 25 Esfera condutora carregada e em equilíbrio eletrostático.

Conforme estudado no capítulo 3, o potencial dessa esfera em relação ao infinito é dado por:

$$V = \frac{KQ}{R}$$

Ou ainda, podemos escrever a relação entre a carga Q e o potencial V da seguinte forma:

$$Q = \frac{R}{K} \cdot V$$

Observe que a relação entre a carga Q e o potencial V é uma relação de proporção direta, pois o termo $\frac{R}{k}$ é uma constante que depende somente da geometria e do meio em que se encontra a esfera. Assim, podemos escrever que:

$$Q = CV$$

$$\text{Ou ainda: } C = \frac{Q}{V}$$

A esta relação entre a carga elétrica da esfera condutora e o potencial elétrico que ela adquire é dado o nome de capacitância ou capacidade eletrostática do condutor isolado, sendo a sua unidade no sistema internacional o farad, indicado pela letra F, tal que:

$$1F = \frac{1C}{1V}$$

Os capacitores, como definido anteriormente, possuem duas armaduras metálicas. O nosso estudo será focado nos capacitores de armaduras planas, conhecido como capacitor plano.

Ao se aplicar nos terminais de um capacitor uma diferença de potencial U, aparecem nas suas armaduras, cargas de módulos iguais, porém de sinais opostos, conforme se observa na figura.

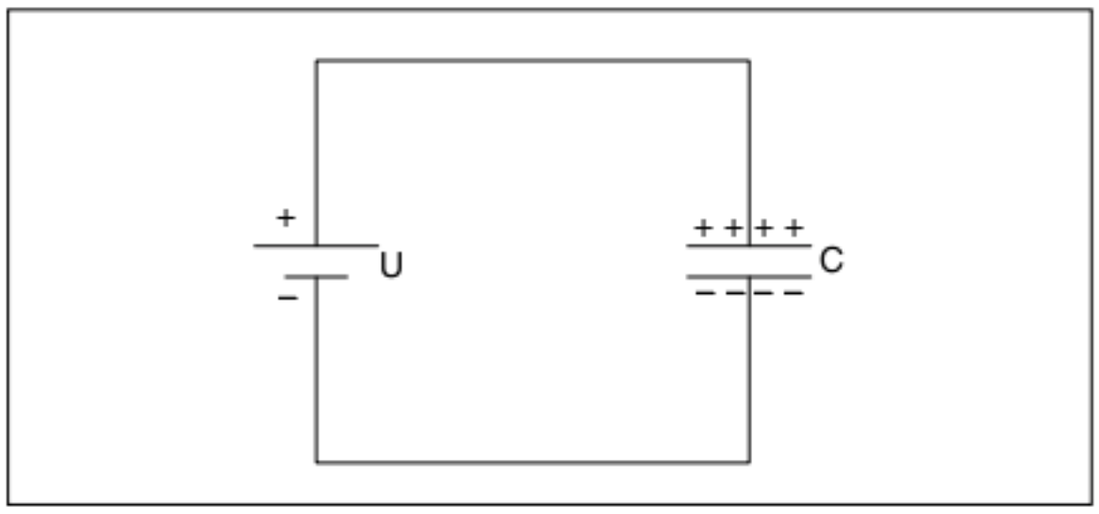


Fig. 26 Circuito com capacitor.

Define-se a capacitância (C) do capacitor como sendo a razão entre a quantidade de carga armazenada (Q) e a tensão aplicada entre os seus terminais (U), ou seja: $C = \frac{Q}{U}$

É importante frisar que a capacitância C de um capacitor é uma grandeza que depende somente da geometria do capacitor e do dielétrico que preenche o capacitor. No capacitor plano, a capacitância é dada por: $C = \frac{k\varepsilon_0 A}{d}$

Nessa expressão, k é a constante dielétrica do meio que indica a relação entre a permissividade elétrica do dielétrico que preenche o capacitor (ε) e a permissividade do vácuo (ε_0), A é a área em m^2 das armaduras e d é a distância em m entre elas.

Essa expressão nos permite concluir que ao inserirmos um dielétrico entre as placas do capacitor, inicialmente no vácuo, teremos um aumento da capacitância.

Energia potencial elétrica armazenada

Ao ligarmos um capacitor nos terminais de uma bateria, conseguimos armazenar cargas elétricas nas armaduras do capacitor. Essas cargas estão sujeitas a uma diferença de potencial U e, portanto, temos energia potencial elétrica neste sistema.

Supondo a capacitância constante, se traçarmos o gráfico de carga armazenada Q em função da tensão aplicada U, teremos a figura a seguir.

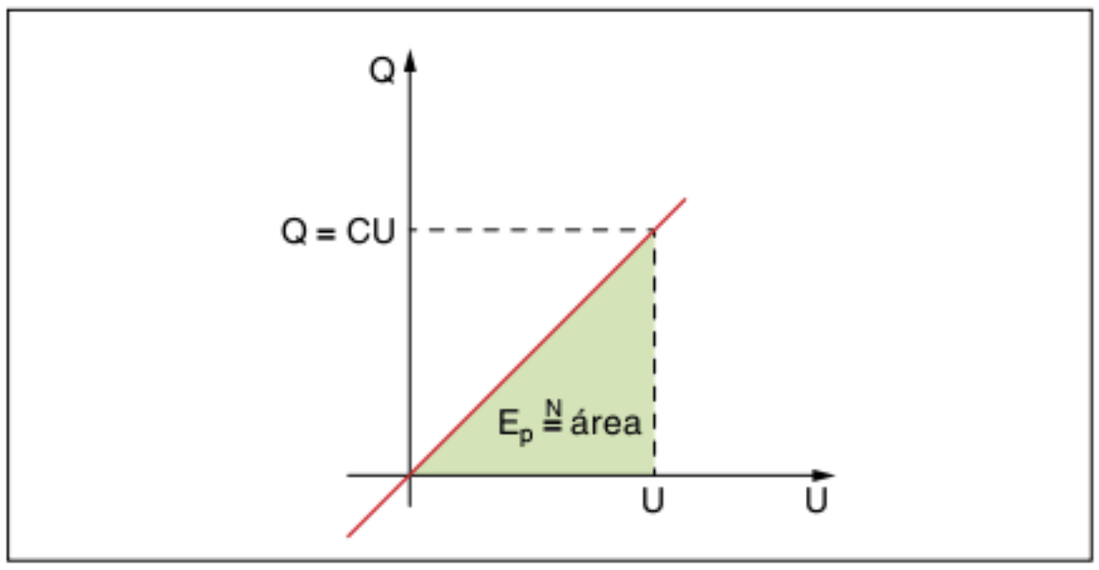


Fig. 27 Quantidade de carga *versus* diferença de potencial.

Se lembrarmos que a energia potencial elétrica de uma carga colocada em um potencial V é dada por: $E_p = qV$, iremos observar que a energia potencial elétrica armazenada pelo capacitor é numericamente igual à área sob a reta Q *versus* U. Portanto, a energia potencial elétrica é dada por: $E = \frac{QU}{2}$

Utilizando-se da relação $Q = C \cdot U$ ou $U = \frac{Q}{C}$, podemos expressar a energia potencial elétrica nas formas:

$$E = \frac{QU}{2} = \frac{C.\,U^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Associação de capacitores

Da mesma forma que os resistores podem ser associados em um circuito elétrico em série ou em paralelo, os capacitores também podem se associar.

O objetivo deste tópico é a determinação da capacitância equivalente em cada um dos casos.

Associação de capacitores em série

Observe a associação dos capacitores a seguir.

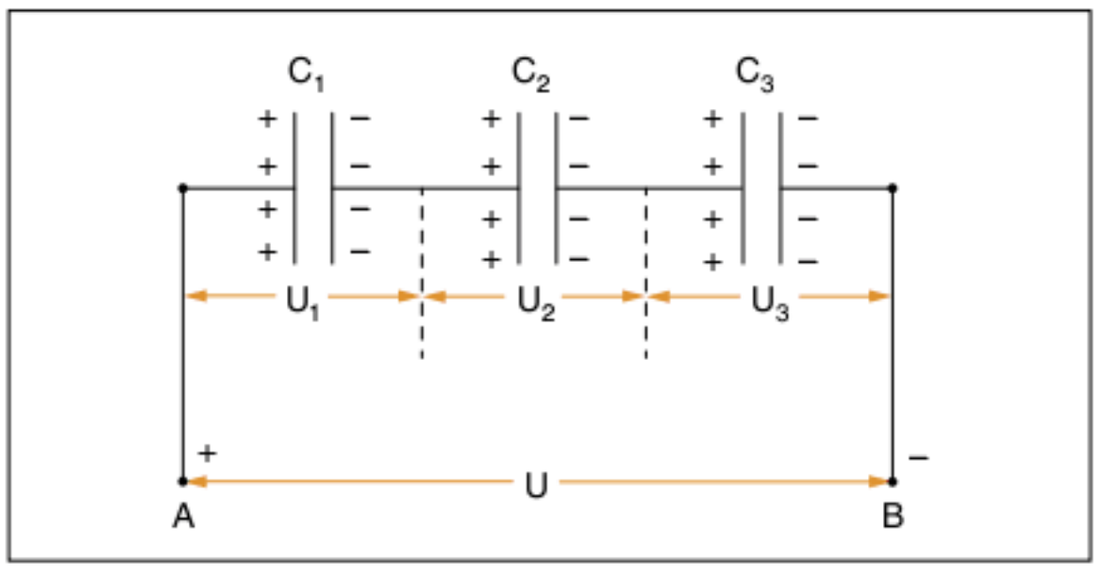


Fig. 28 Representação de capacitores em série.

É fácil observar que somente uma armadura do capacitor C_1 e uma do capacitor C_3 estão ligadas à bateria. Portanto, a carga que aparecer na armadura ligada à bateria do capacitor C_1 é a mesma em módulo que aparecerá na outra armadura do capacitor C_1, e assim por diante em todos os capacitores da associação.

ATENÇÃO!

Em uma associação de capacitores em série, todos os capacitores possuem a mesma carga Q, que é igual à carga total da associação.

A tensão total aplicada nos terminais da associação U é igual ao somatório das tensões sobre os capacitores C_1, C_2 e C_3, tal que:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

Mas

$$U = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$U_3 = \frac{Q}{C_3}$$

Substituindo na equação anterior, tem-se que:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Ou seja, o inverso da capacitância equivalente em série é igual a soma dos inversos da capacitância de cada um dos elementos da associação.

ATENÇÃO!

- Observe que o cálculo da capacitância equivalente em série é idêntico ao do cálculo da resistência equivalente em paralelo.
- A capacitância equivalente em série é sempre menor do que a menor das capacitâncias da associação.
- Se houver n capacitores iguais a C associados em série, a capacitância equivalente é calculada por: $C_{eq} = \frac{C}{n}$
- Se houver dois capacitores C_1 e C_2 associados em série, uma expressão muito útil para o cálculo da capacitância equivalente é dada por: $C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$
- A energia potencial elétrica armazenada da associação é dada por: $E_p = \frac{Q^2}{2C_{eq}}$

Associação de capacitores em paralelo

Observe a associação de capacitores a seguir.

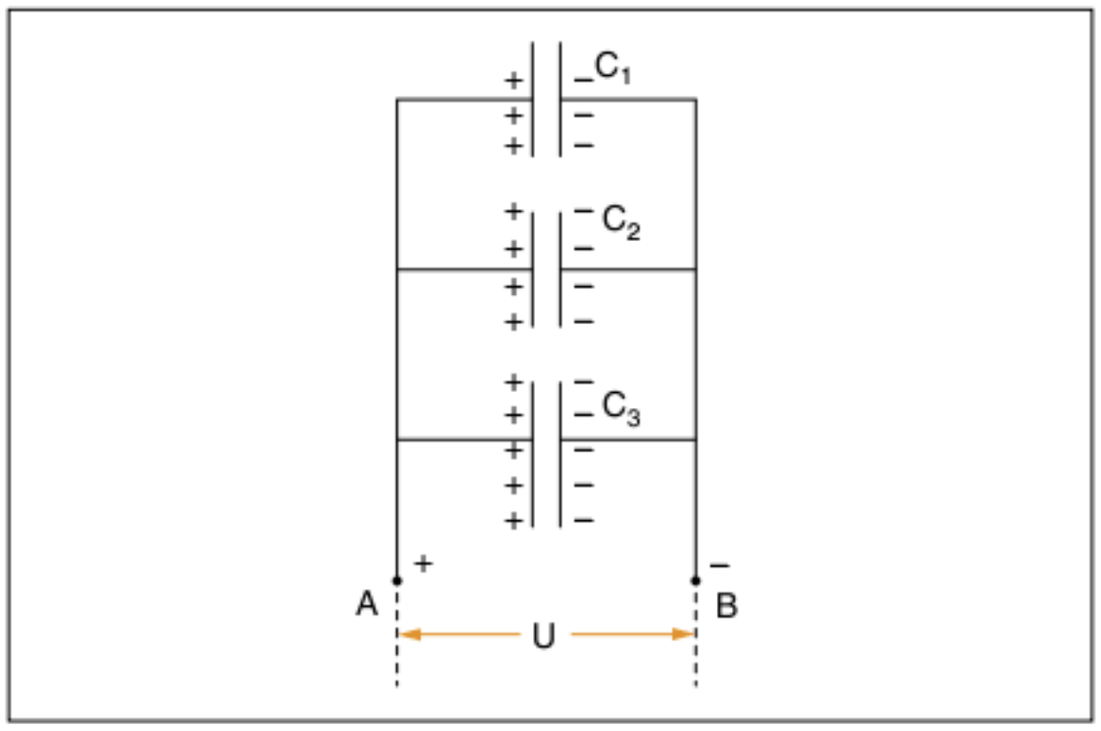


Fig. 29 Representação de capacitores em paralelo.

Como no caso dos resistores, os capacitores em paralelo estão ligados à mesma tensão, portanto a ddp nos terminais de todos os capacitores é a mesma.

Observação: *Em uma associação de capacitores em paralelo, a tensão é a mesma em todos os capacitores.*

A carga total Q armazenada pela associação é o somatório das cargas armazenadas pelos capacitores C_1, C_2 e C_3, tal que:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Mas

$Q = C_{eq} \cdot U$

$Q_1 = C_1 \cdot U$

$Q_2 = C_2 \cdot U$

$Q_3 = C_3 \cdot U$

Substituindo na equação anterior, tem-se que:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow \text{paralelo}$$

Ou seja, a capacitância equivalente em paralelo é igual à soma dos capacitores existentes na associação.

ATENÇÃO!

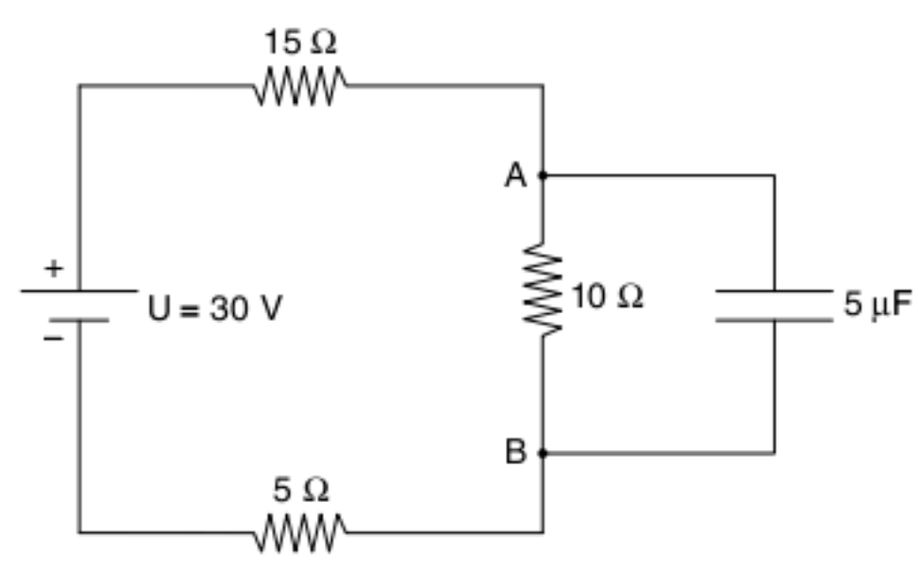
- Observe que o cálculo da capacitância equivalente em paralelo é idêntico ao do cálculo da resistência equivalente em série.
- A capacitância equivalente em paralelo é sempre maior do que a maior das capacitâncias da associação.
- Se houver n capacitores iguais a C associados em paralelo, a capacitância equivalente é calculada por: $C_{equivalente} = n \cdot C$
- A energia potencial elétrica armazenada da associação é dada por: $E_p = \frac{C_{equivalente} \cdot U^2}{2}$

Os capacitores no circuito elétrico

Quando se tem um capacitor em um circuito elétrico alimentado por uma tensão constante U, ele deve ser visto, em regime permanente, como um aberto, ou seja, a corrente que o atravessa é igual a zero. Nesse caso, a tensão sobre o capacitor é igual à tensão sobre o elemento em paralelo com o capacitor.

Exercício resolvido

4 Considere o circuito elétrico da figura abaixo:



Determine:

a) a intensidade de corrente no gerador.

b) a ddp entre A e B.

c) a carga adquirida pelo capacitor.

d) a energia potencial elétrica adquirida pelo capacitor.

Resolução:

a) *Em regime estacionário, o capacitor é visto como um aberto, dessa forma, a corrente só atravessa os resistores. A resistência equivalente é facilmente calculada como:*
$R_{equivalente} = 15 + 10 + 5 = 30\ \Omega$

Portanto, a corrente i é dada por: $i = \dfrac{30\ V}{30\ \Omega} = 1\ A$

b) *A ddp entre A e B é a própria ddp sobre o resistor de 10 Ω, tal que:* $U_{AB} = 10 \cdot 1 = 10\ V$

c) *A tensão sobre o capacitor é a própria tensão* U_{AB}, *tal que:* $Q = C \cdot U_{AB} = (10 \cdot 5) \cdot 10^{-6} = 50\ \mu C$

d) *A energia potencial elétrica pode ser calculada pela expressão:*

$$E_p = \frac{C.U^2}{2} = 50.\ 5.\ 10^{-6} = 250\ \mu J$$

Variação de potencial entre os terminais de elementos de um circuito

Para a resolução dos circuitos elétricos, é interessante que possamos entender o que acontece com a tensão nos terminais de um dipolo quando por ele passa uma corrente elétrica **i**. O quadro a seguir ilustra os principais dispositivos encontrados nos circuitos elétricos, tanto para resistores como para elementos com placas, como é o caso dos geradores, receptores e capacitores.

Elemento	no mesmo sentido da corrente, o potencial	V_A	V_B	ΔV
V_A R V_B i	diminui	x	x – R. i	R. i
Elemento	**da placa – passa para a placa +**	**V_A**	**V_B**	**ΔV**
V_A – + V_B ε Gerador receptor	aumenta	x	x + ε	ε
V_A – + V_B Q Capacitor C	aumenta	x	$x + \frac{Q}{C}$	$\frac{Q}{C}$

Tab. 1 Quedas de tensão em diferentes elementos do circuito.

Este quadro nos mostra com clareza que, ao atravessarmos um resistor R no sentido da corrente elétrica, temos uma queda de potencial igual a R·i.

É muito importante compreendermos bem esse quadro, pois ele será muito útil ao resolvermos circuitos, que será o nosso próximo assunto.

As leis de Kirchhoff

As leis de Kirchhoff são importantes ferramentas para o cálculo de correntes e tensões em circuitos elétricos. Elas se devem ao físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

Observe o circuito a seguir.

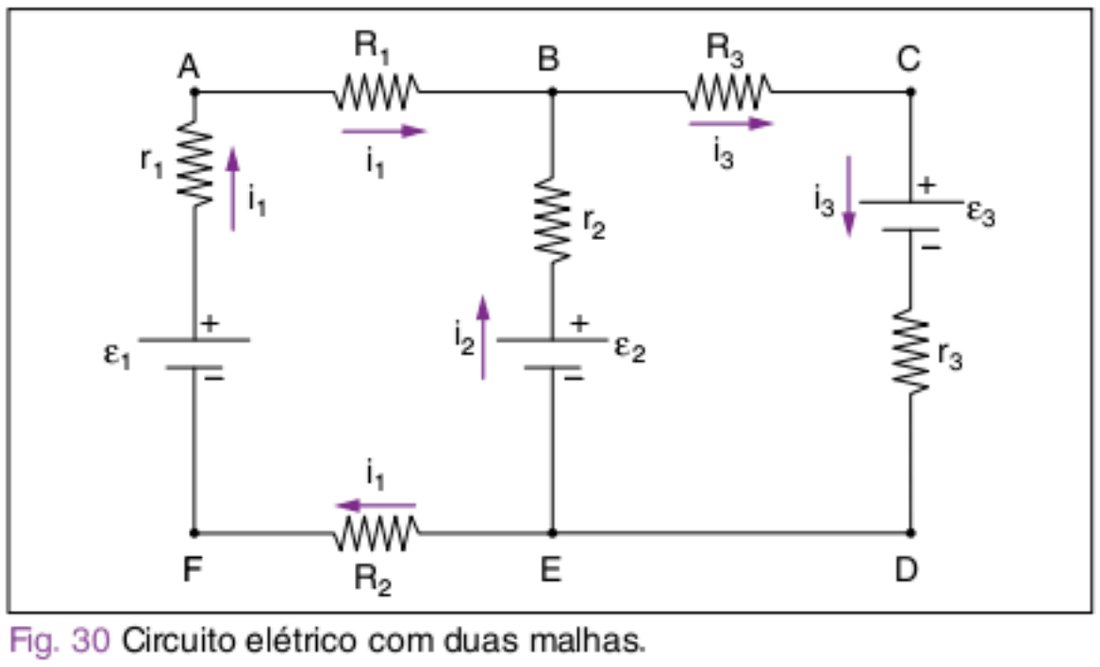


Fig. 30 Circuito elétrico com duas malhas.

Nesta rede elétrica formada pelos geradores (ε_1, r_1) e (ε_2, r_2), pelo receptor (ε_3, r_3) e pelos resistores R_1, R_2 e R_3, podemos identificar os nós B e E. Nós são pontos do circuito onde a corrente se divide.

Ramos são trechos do circuito entre os nós.

Nesse caso, podemos identificar três ramos: EFAB, EB e EDCB.

Finalmente, malhas são definidas como quaisquer conjuntos de ramos que formam um percurso fechado. Nesse caso, as malhas são três: EFABE, EBCDE e ABCDEFA.

Definidos esses termos, podemos enunciar as duas leis de Kirchhoff, que são de fácil entendimento:

- Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) ou lei dos nós – O somatório das correntes que chegam a um nó é igual ao somatório das correntes que saem deste nó.
- Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT) ou lei das malhas – Ao se percorrer uma malha, o somatório algébrico das ddps é nulo.

Resolução de circuitos elétricos

Circuitos com uma única malha

I. Primeiro método

Os circuitos com uma única malha são muito simples de resolver, bastando aplicar a Lei de Pouillet no seu caso mais geral, ou o princípio do cabo de guerra.

Observemos o circuito da figura a seguir.

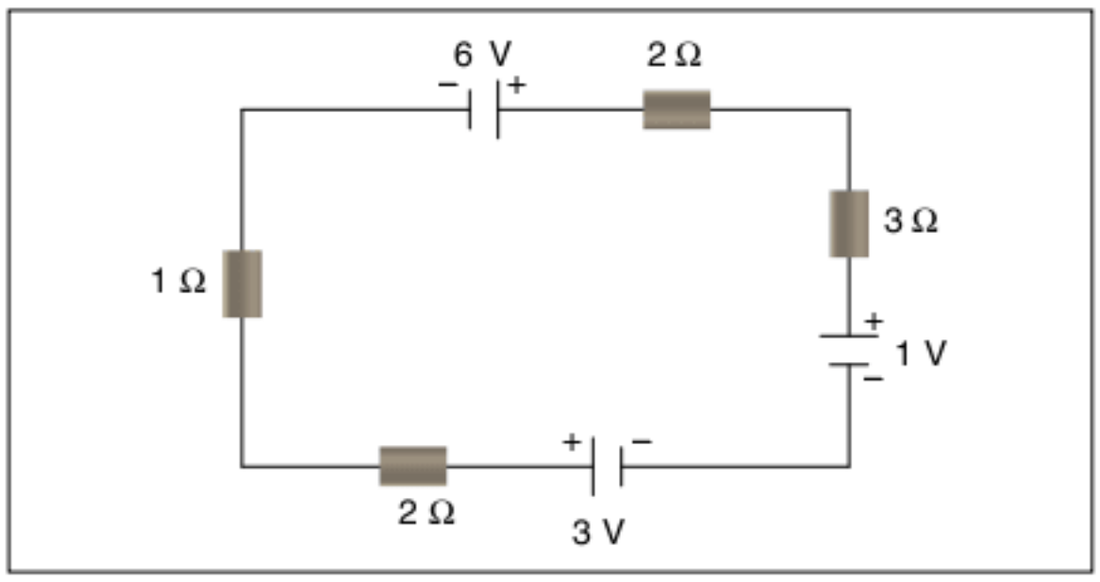


Fig. 31 Circuito de uma única malha.

Inicialmente, não sabemos quais elementos de tensão funcionarão como geradores e quais como receptores.

Verificamos, por uma simples inspeção, que as forças eletromotrizes dos elementos de tensão de 3 V e 6 V se somam, ao passo que o elemento de tensão de 1 V se "opõe" aos dois primeiros.

ATENÇÃO!

O que foi dito, anteriormente, pode ser facilmente verificado observando-se que os elementos de tensão de 3 V e 6 V fazem com que a corrente circule no sentido horário, ao passo que o elemento de tensão de 1 V faz com que a corrente circule no sentido anti-horário.

Dessa forma, verificamos que os elementos de tensão de 3 V e 6 V funcionam como geradores e o elemento de tensão de 1 V funciona como receptor.

A resistência equivalente do circuito é a soma de todas as resistências, já que todas estão em série.

Assim, pela Lei de Pouillet, temos que:

$$i = \frac{6+3-1}{1+2+3+2} = 1 \text{ A, sentido horário.}$$

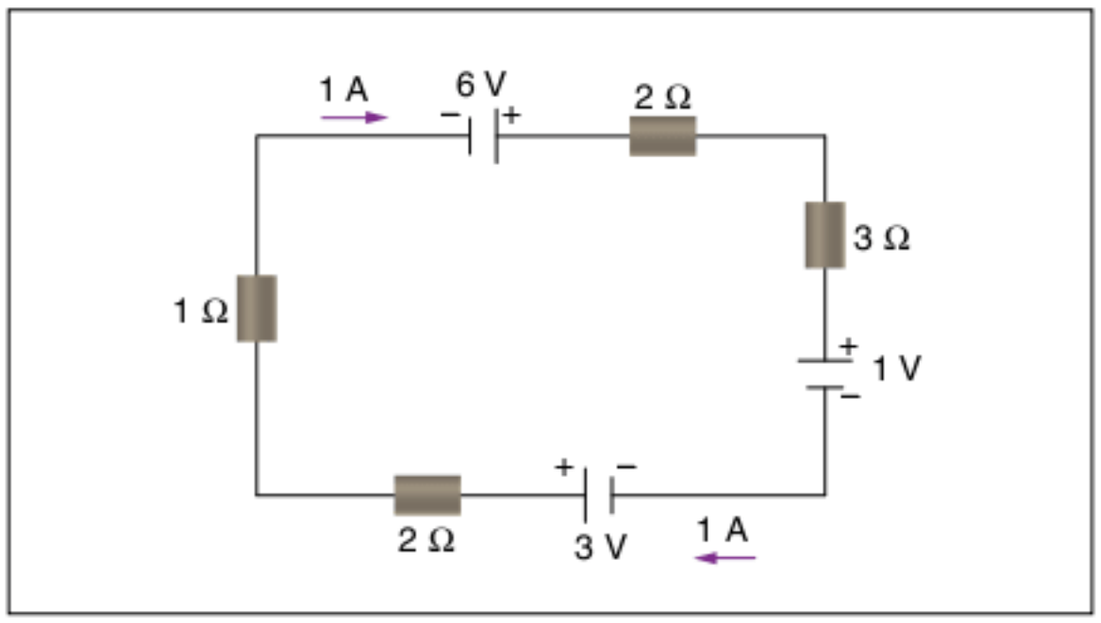


Fig. 32 Representação da corrente no circuito.

Ao observarmos o circuito, constatamos que os elementos de tensão de 3 V e 6 V são percorridos por corrente do polo negativo para o positivo, o que caracteriza geradores elétricos, ao passo que o elemento de tensão de 1 V é percorrido por corrente do polo positivo para o negativo, o que caracteriza os receptores elétricos.

II. Segundo método

Aplicando a Lei de Kirchhoff de Tensões (LKT), teremos uma outra forma de resolver o problema.

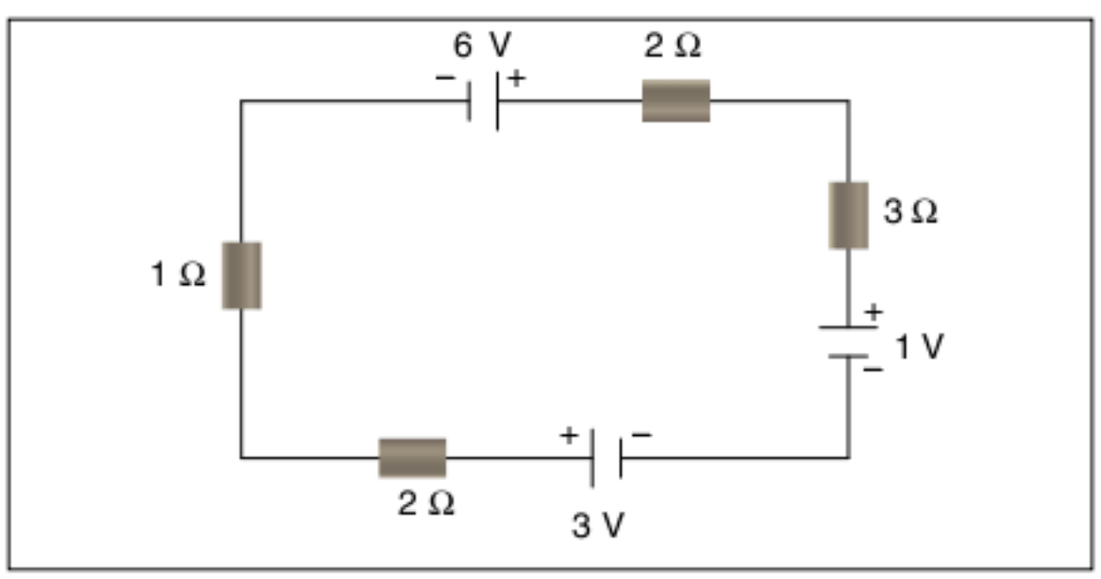


Fig. 33 Circuito de uma única malha.

Para aplicarmos as leis de Kirchhoff, partimos do pressuposto de que não conhecemos o real sentido da corrente elétrica, portanto, atribuímos arbitrariamente um sentido de corrente, por exemplo, no sentido anti-horário. Assim, o circuito, com a corrente neste sentido, pode ser visto na figura a seguir.

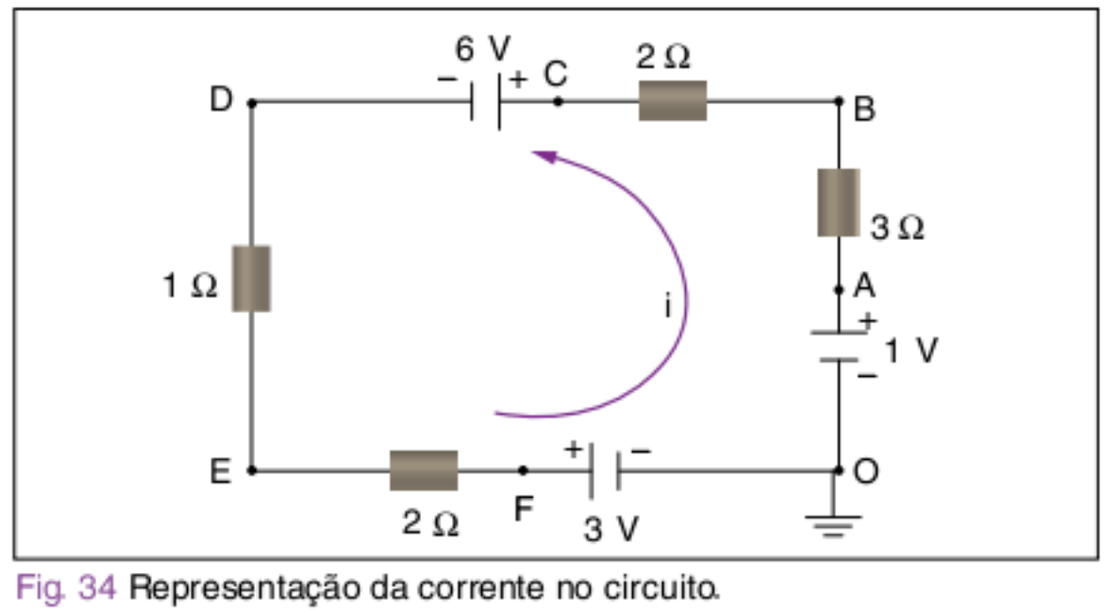


Fig. 34 Representação da corrente no circuito.

Em seguida, aplicamos a lei de malhas, obedecendo ao quadro de variação do potencial em um dipolo.

De forma resumida, tem-se que:

- ao passar por um resistor R no sentido da corrente, tem-se uma queda de potencial igual a R·i, se passarmos contra o sentido da corrente, teremos um acréscimo de potencial igual a R·i.
- ao atravessarmos um elemento de tensão do polo positivo para o negativo, tem-se um decréscimo de tensão igual ao valor de sua fem ou fcem, caso contrário teremos um acréscimo de tensão.

Partindo do ponto indicado como tensão nula (terra) e no sentido da corrente, tem-se que:

$$+1 - 3 \cdot i - 2 \cdot i - 6 - 1 \cdot i - 2 \cdot i - 3 = 0$$

A operação acima é a aplicação da lei das malhas ao circuito da figura, obedecendo aos sinais das ddps descritos acima.

A resolução dessa equação nos leva a um valor de corrente igual a: $i = -1$ A

O sinal negativo encontrado nos indica que o sentido da corrente escolhido a princípio não é correto e que a corrente elétrica flui, na verdade, no sentido horário. Esse resultado coincide com o inicialmente encontrado utilizando-se a Lei de Pouillet.

Circuitos com mais de uma malha

A real utilidade das leis de Kirchhoff se revela quando resolvemos circuitos com mais de uma malha como o do exemplo a seguir.

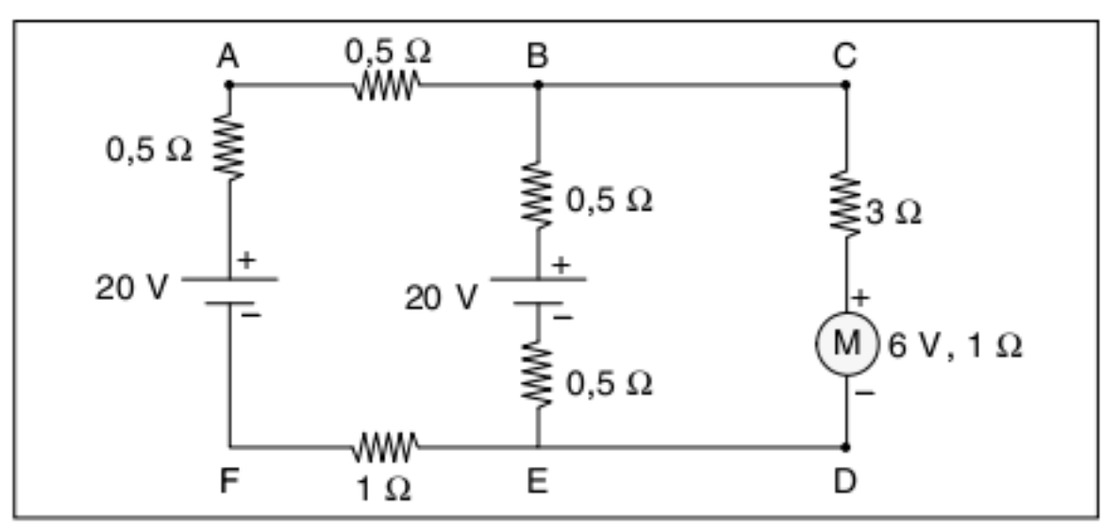


Fig. 35 Circuito com duas malhas.

O primeiro passo é atribuir arbitrariamente as correntes nos ramos do circuito EFAB (i_1), EB (i_2) e BCDE (i_3). É importante frisar que esta escolha é totalmente arbitrária. Os sinais das correntes ao final da resolução do circuito nos dirão se os sentidos foram escolhidos corretamente ou não.

Essas correntes foram escolhidas conforme a figura a seguir:

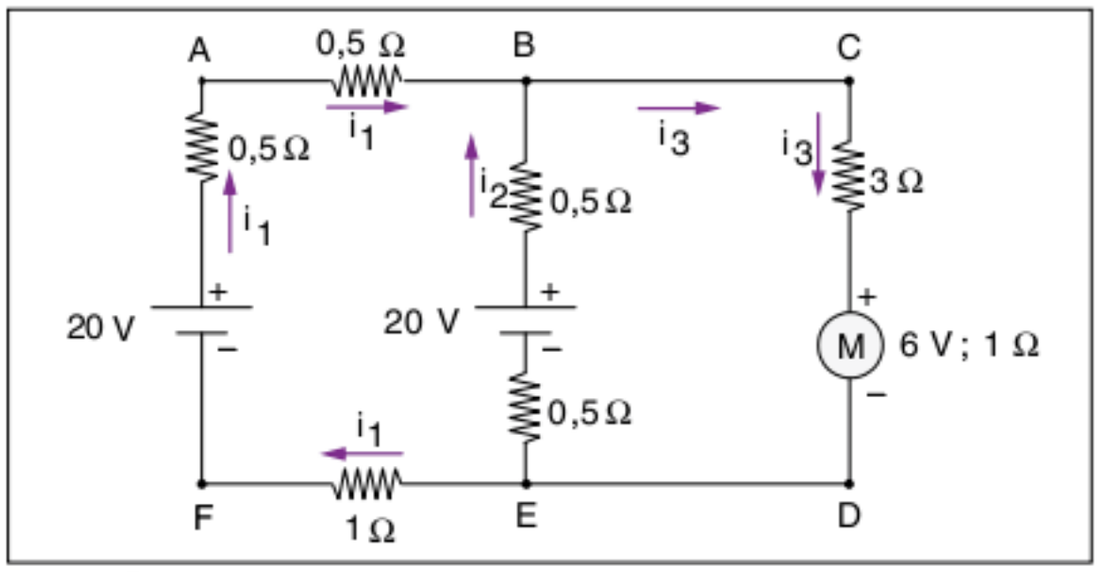


Fig. 36 Representação das correntes no circuito.

Verificamos que temos três incógnitas: as correntes i_1, i_2 e i_3. Para resolvermos essas incógnitas, precisaremos de três equações. Essas equações serão obtidas pelas leis de Kirchhoff.

Da Lei de Kirchhoff dos nós, aplicada ao nó B, temos: $i_1 + i_2 = i_3$

O somatório das correntes que chegam ao nó B (i_1 e i_2) deve ser igual ao somatório das correntes que saem deste nó (i_3).

Faltam ainda duas equações. A primeira delas sairá da aplicação da lei das malhas à malha EFABE e a segunda equação, da aplicação da lei das malhas à malha EBCDE. Observe que na malha EBCDE, o motor M é um receptor de fcem 6 V e resistência interna 1 Ω.

- Para a malha EFABE, tem-se que, partindo do nó E e percorrendo a malha no sentido de i_1:
  $-i_1 + 20 - 0{,}5 \cdot i_1 - 0{,}5 \cdot i_1 + 0{,}5 \cdot i_2 - 20 + 0{,}5 \cdot i_2 = 0$
  Rearranjando: $2 \cdot i_1 - i_2 = 0$
- Para a malha EBCDE, tem-se que, partindo do nó E, no sentido de i_2:
  $-0{,}5 \cdot i_2 + 20 - 0{,}5 \cdot i_2 - 3 \cdot i_3 - 6 - 1 \cdot i_3 = 0$
  Rearranjando: $4 \cdot i_3 + i_2 = 14$

Observe que temos agora três equações para três incógnitas. A resolução desse sistema nos leva a:

$$i_1 = 1 \text{ A}; \quad i_2 = 2 \text{ A e } i_3 = 3 \text{ A}.$$

Ou seja, os sentidos das correntes foram adequadamente escolhidos devido ao fato de que os sinais foram todos positivos.

ATENÇÃO!

A Lei de Kirchhoff, conforme apresentada aqui, foi feita com a convenção de sinais oposta ao que é normalmente utilizado. A convenção utilizada neste livro é mais intuitiva e em nada prejudica o conceito físico ou os resultados atingidos.

Medidas elétricas

Na prática, é muito importante se medir os parâmetros básicos de um circuito, tais como corrente e tensão. O aparelho básico para essas medições é o galvanômetro.

O seu princípio de funcionamento se baseia nos efeitos sobre um condutor percorrido por corrente elétrica quando colocado em um campo magnético. Esse efeito será estudado posteriormente.

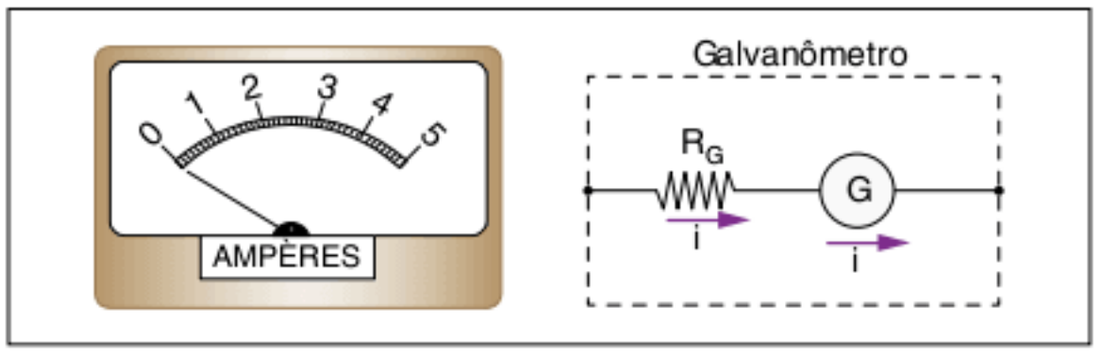


Fig. 37 Representação de um galvanômetro.

Os galvanômetros são aparelhos de resistência interna muito baixa e, portanto, capazes de detectar correntes muito baixas (na faixa de microampère). Correntes na ordem de miliampères já danificam mesmo os menos sensíveis.

Portanto, para a sua utilização, como medidores de corrente ou medidores de tensão, é necessário que se acople ao galvanômetro resistências de valores adequados a fim de não danificá-lo.

Por outro lado, ao se medir um parâmetro do circuito tal como corrente ou tensão, é indesejável que, ao se ligar o instrumento de medida no circuito, este altere significativamente os valores iniciais de corrente, ou seja, a corrente e a tensão lidas no instrumento de medida devem ser o mais próximo possível da corrente e tensão, antes de se fazer a medida.

Medida de corrente – O amperímetro

Ao se ligar um galvanômetro em série a um circuito elétrico, estamos interessados em medir a corrente elétrica que passa por esse circuito.

Tendo em vista o que foi explicado inicialmente, através do galvanômetro, agora utilizado como amperímetro, temos que respeitar o limite de corrente que pode atravessá-lo e, ao mesmo tempo, temos que garantir que o amperímetro cause a mínima perturbação no circuito. Para tal, **o amperímetro ideal é aquele que possui resistência interna nula**.

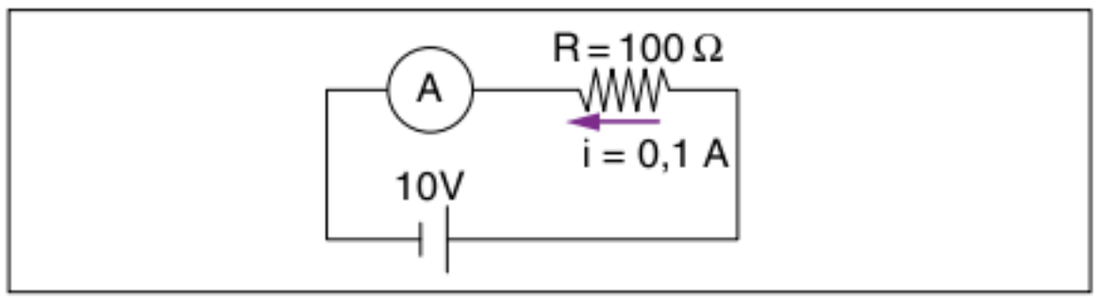


Fig. 38 Amperímetro em um circuito.

No circuito acima, temos que o amperímetro, ligado em série com o resistor R_1, irá medir a corrente que passa por esse resistor.

Corrente máxima no galvanômetro

Suponhamos que, no problema anterior, o galvanômetro utilizado como amperímetro suporte, no máximo, uma corrente de 1 mA. Como se pode observar, a corrente através de R_1 é de 0,1 A, ou seja 100 vezes maior.

Se ligássemos o galvanômetro diretamente nesse circuito, certamente o danificaríamos.

Para contornar esse problema e permitir que o amperímetro tenha um fundo de escala (máximo valor permitido para leitura) variável, colocamos em paralelo com a resistência interna R_G do galvanômetro outras resistências de menor valor, denominadas resistências *shunt* R_S, de tal forma que o excesso de corrente que passaria pelo galvanômetro seja desviada para essas resistências de *shunt*. Conforme se observa na figura 39.

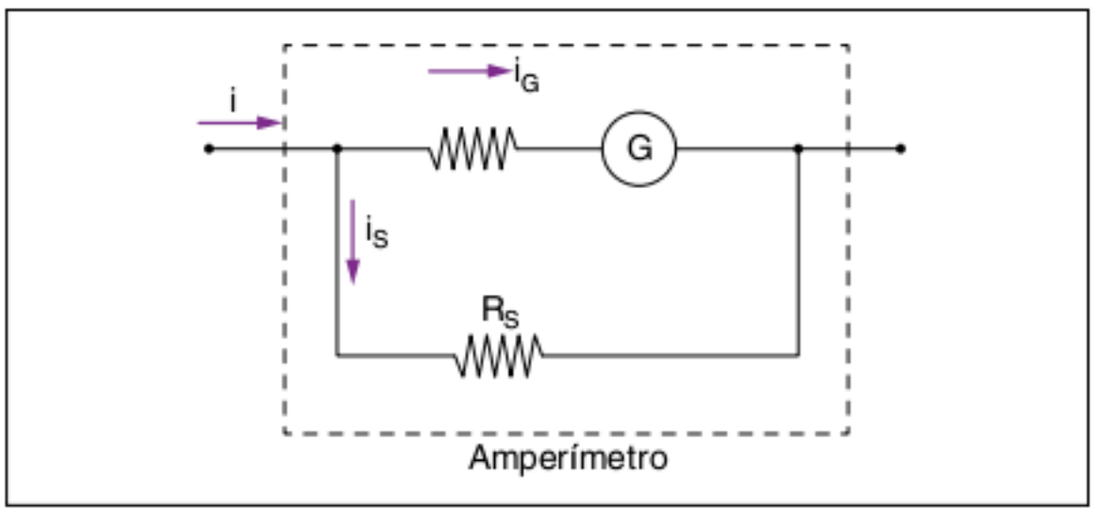


Fig. 39 Circuito com resistência de *shunt* = amperímetro.

Nesta figura, o máximo de corrente (fundo de escala) do galvanômetro é i_G. Porém, é possível ler valores maiores de corrente, colocando-se em paralelo as resistências de *shunt*, tal que o excesso de corrente i_S, que danificaria o galvanômetro, passe pela resistência R_S e não pelo galvanômetro.

É possível calcular qual deve ser a resistência de *shunt*, conhecendo-se qual é o fundo de escala do galvanômetro i_G, a sua resistência interna R_G e qual o fundo de escala que se deseja i.

Da figura anterior, tem-se que:

$$i = i_G + i_S$$

A equação acima nos diz que a corrente total que entra no amperímetro é igual à corrente que passa pelo galvanômetro i_G mais a corrente que passa pelo *shunt* i_S. Mas, pelo fato de R_G e R_S estarem em paralelo, a tensão nos seus terminais é a mesma, ou seja:

$$R_G i_G = R_S i_S$$

Portanto: $i_S = \dfrac{R_G i_G}{R_S}$

Substituindo na equação anterior e rearranjando, temos que:

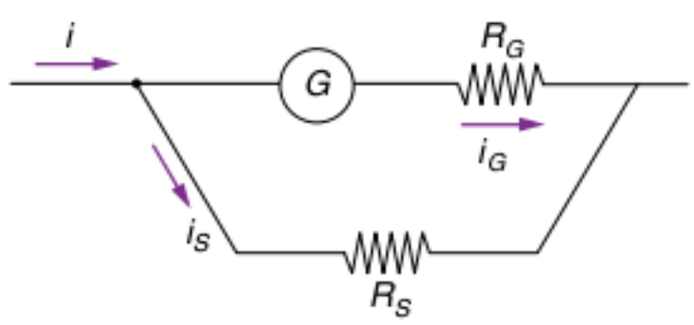
$$\frac{i}{i_G} = 1 + \frac{R_G}{R_S}$$

Pela equação acima, podemos facilmente determinar qual deve ser a resistência de *shunt* a ser colocada em paralelo para se modificar o fundo de escala de um galvanômetro.

Exercício resolvido

5 Um galvanômetro de resistência 1 Ω pode acusar, sem se danificar, correntes de intensidade até 5 mA. Qual o valor de *shunt* que deve ser associado a ele para que se torne um miliamperímetro de fundo de escala 50 mA? Qual a resistência elétrica interna do miliamperímetro?

Resolução:



Para a resolução desse problema, basta identificar os parâmetros e aplicar a equação achada anteriormente.

No nosso caso, o fundo de escala i_G vale 5 mA, a resistência interna R_G do galvanômetro é 1 Ω e o fundo de escala i que se deseja é 50 mA. Pela aplicação da equação, tem-se que:

$$\frac{i}{i_G} = 1 + \frac{R_G}{R_S}; \quad \frac{50}{5} = 1 + \frac{1}{R_S}$$

$$R_S = \frac{1}{9}\,\Omega$$

Para que se consiga aumentar o fundo de escala para 50 mA sem danificar o galvanômetro, devemos associar em paralelo à sua resistência R_G de 1 Ω uma resistência de shunt $R_S = \frac{1}{9}\,\Omega$.

A resistência do miliamperímetro é calculada fazendo R_G em paralelo com R_S.

$$R_{equivalente} = \frac{R_G \cdot R_S}{R_G + R_S}$$

$$R_{equivalente} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 1}{\frac{1}{9} + 1} = 0{,}1\ \Omega$$

Com a colocação da resistência de shunt, *conseguimos ao mesmo tempo elevar o fundo de escala e diminuir a resistência equivalente, aproximando o amperímetro real do amperímetro ideal.*

Resumo

O amperímetro é um instrumento de medida de corrente. Ele deve ser ligado em série com o ramo que se deseja medir, como mostra a figura abaixo.

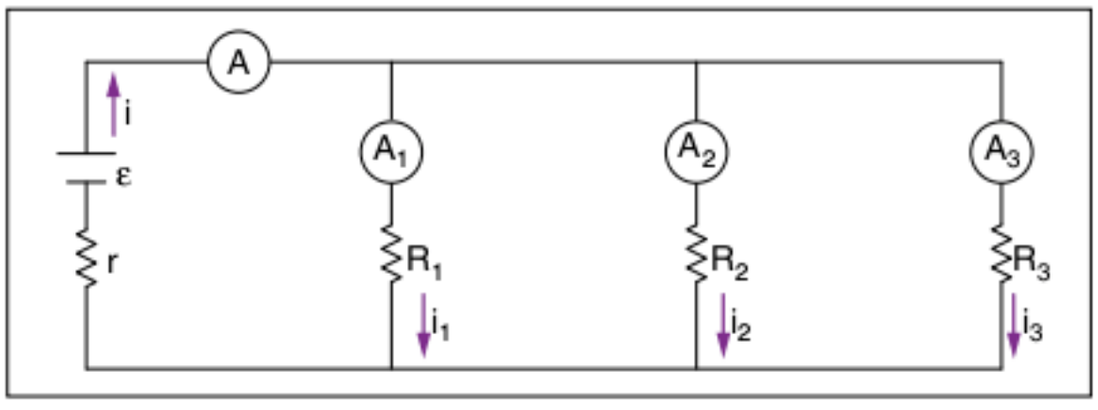


Fig. 40 Circuito contendo vários amperímetros.

No caso anterior, o amperímetro A mede a corrente total do circuito i, enquanto os amperímetros A_1, A_2 e A_3 medem as correntes i_1, i_2 e i_3, que passam pelos resistores R_1, R_2 e R_3.

A medida de corrente realizada por um amperímetro será tanto melhor quanto menor for a sua resistência interna. Portanto, o amperímetro ideal é aquele que possui resistência interna **nula**.

Para se alterar fundos de escala dos amperímetros para valores maiores do que aqueles suportados pelos galvanômetros, associa-se em paralelo com os galvanômetros resistências de pequeno valor denominadas resistências de *shunt*.

Medida de tensão – O voltímetro

Um voltímetro é um instrumento utilizado para se medir a tensão entre dois pontos de um circuito. Para tal, devemos fazer a ligação do voltímetro em paralelo com os dois pontos entre os quais se deseja medir a tensão.

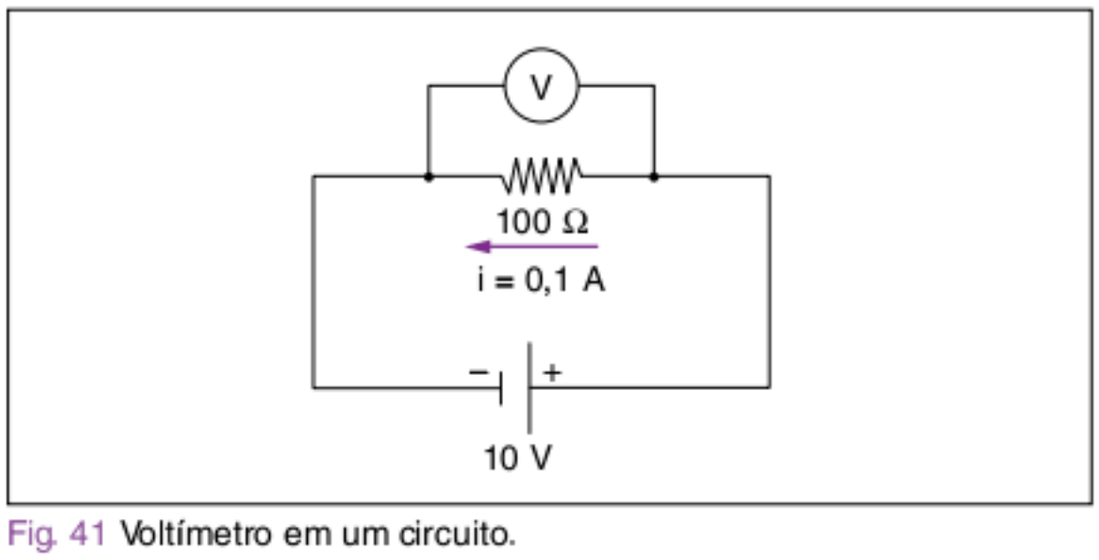


Fig. 41 Voltímetro em um circuito.

A fim de que o voltímetro cause a mínima perturbação no circuito, a corrente que passa por ele deve ser mínima. Portanto, a resistência interna do voltímetro deve ser a máxima possível. No voltímetro ideal, a sua resistência interna é infinita.

O voltímetro é obtido por meio da associação do galvanômetro com uma resistência de valor muito grande R_M, denominada multiplicador, que tem duas finalidades:

- garantir que o galvanômetro não se danifique, não permitindo que correntes acima da máxima permitida o atravessem.
- aumentar o valor máximo de tensão que o voltímetro pode ler sem se danificar.

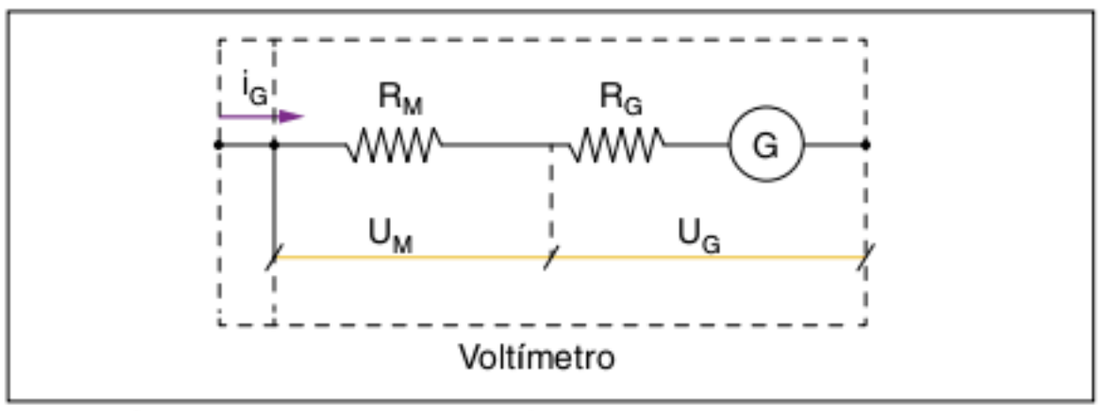


Fig. 42 Circuito interno de um voltímetro.

Na montagem anterior, observa-se que como a resistência R_G e a resistência R_M são percorridas pela mesma corrente i_G,

$$i_G = \frac{U_M}{R_M} = \frac{U_G}{R_G},$$

logo:

$$U_M = U_G\left(\frac{R_M}{R_G}\right)$$

A tensão total lida pelo voltímetro é a soma da tensão sobre a resistência R_M e sobre a resistência R_G. Dessa forma: $U = U_M + U_G$

Substituindo os valores anteriormente encontrados, tem-se que:

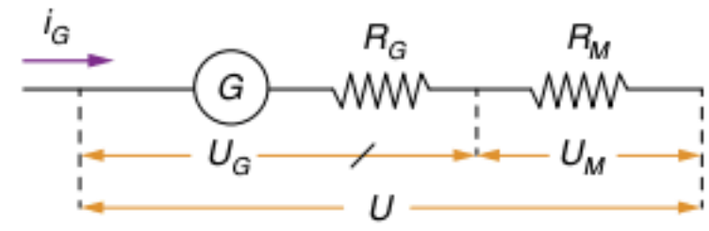
$$\frac{U}{U_G} = 1 + \frac{R_M}{R_G}$$

A equação acima nos diz que é possível aumentar a tensão máxima de leitura de um galvanômetro, colocando-se em série à resistência do galvanômetro R_G, uma resistência R_M, denominada multiplicador.

Exercício resolvido

6 Quer-se construir um voltímetro, com fundo de escala 200 V, a partir de um galvanômetro de resistência interna 10 Ω, que pode acusar, sem se danificar, correntes com intensidade de 0,25 A. Determine como o galvanômetro pode ser modificado e qual a resistência interna do voltímetro assim construído.

Resolução:



Sendo de 10 Ω a resistência R_G do galvanômetro e 0,25 A a máxima corrente que o pode atravessar sem danificá-lo. A máxima tensão U_G que o galvanômetro pode ler é dada por: $U_G = R_G i_G = 10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ V.

O que se deseja é que o novo valor de tensão a ser lido U seja igual a 200 V. Portanto, aplicando-se a equação derivada, anteriormente, tem-se que:

$$\frac{U}{U_G} = 1 + \frac{R_M}{R_G};\ \frac{200}{2{,}5} = 1 + \frac{R_M}{10}\ ;\ R_M = 790\ \Omega$$

A resistência que deve ser adicionada em série à resistência do galvanômetro R_G para que se consiga ler valores de tensão de 200 V é uma resistência R_M de 790 Ω.

A resistência total do voltímetro é a soma de R_G e R_M, já que elas se encontram em série:
$R_V = R_G + R_M = 10 + 790 = 800\ \Omega$

Resumo

O voltímetro é um aparelho de medida de tensão e deve ser ligado em paralelo com os pontos entre os quais se deseja medir a tensão, como mostra a figura a seguir.

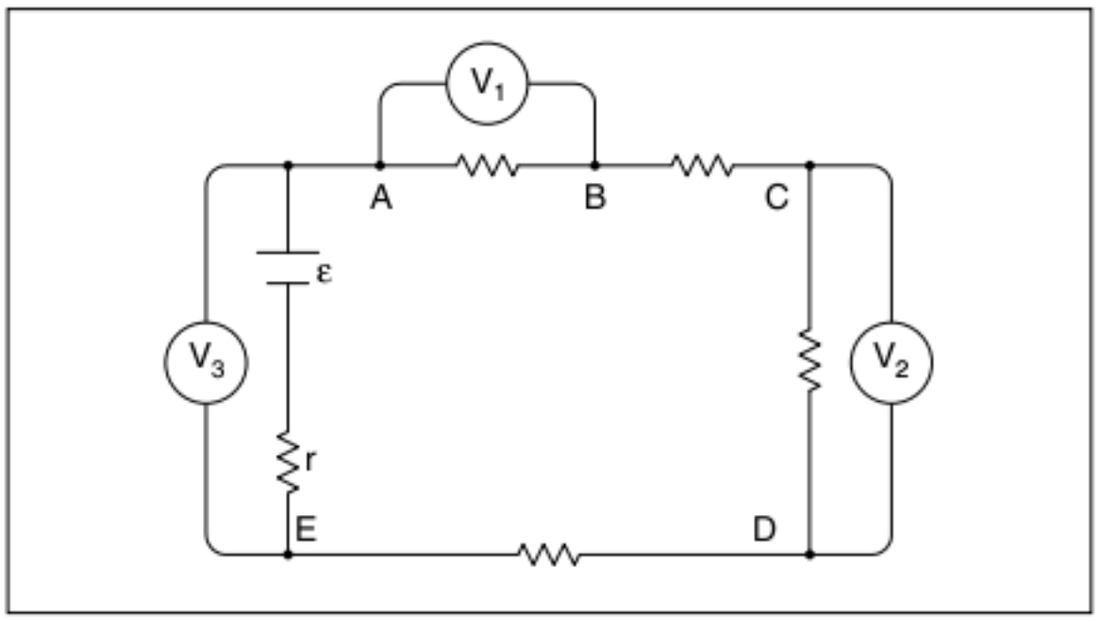


Fig. 43 Circuito contendo vários voltímetros.

O voltímetro V_3 mede a tensão sobre o gerador de fem ε e resistência interna **r**, o voltímetro V_1 mede a tensão entre os pontos A e B e o voltímetro V_2 mede a tensão entre os pontos C e D.

A medida de tensão realizada por um voltímetro será tanto melhor quanto maior for a sua resistência interna. Portanto, o voltímetro ideal é aquele que possui resistência interna infinita.

Para se alterar fundos de escala dos voltímetros para valores maiores do que aqueles suportados pelos galvanômetros, associa-se em série com os galvanômetros resistências de alto valor denominadas multiplicadores.

Medidas de resistências – Ponte de Wheatstone

Para a medida de resistências, utiliza-se a ponte de Wheatstone, conforme visto no capítulo anterior.

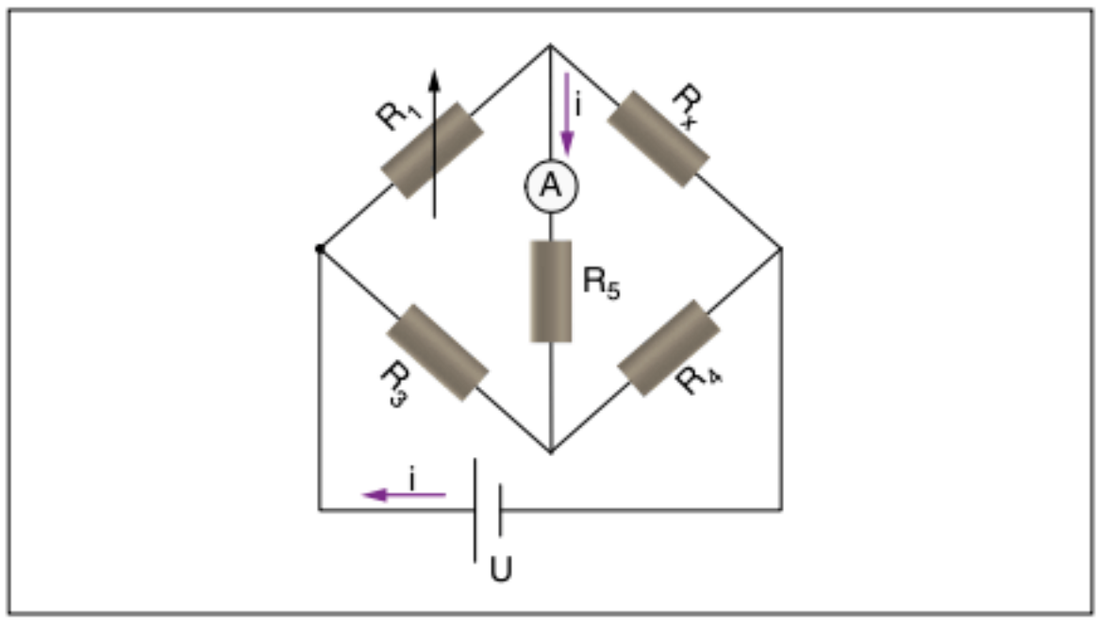


Fig. 44 Ponte de Wheatstone.

Querendo-se medir o valor da resistência R_x, varia-se o valor da resistência R_1 até obter-se leitura nula no amperímetro (A). Nessa situação, a ponte estará equilibrada e, portanto:

$$R_x \cdot R_3 = R_1 \cdot R_4 \Rightarrow R_x = R_1 \cdot \frac{R_4}{R_3}$$

Determina-se facilmente o valor da resistência R_x. O mesmo processo pode ser tranquilamente adaptado para a ponte de fio.

Medidas de força eletromotriz – O potenciômetro de Poggendorf

Observe o circuito a seguir.

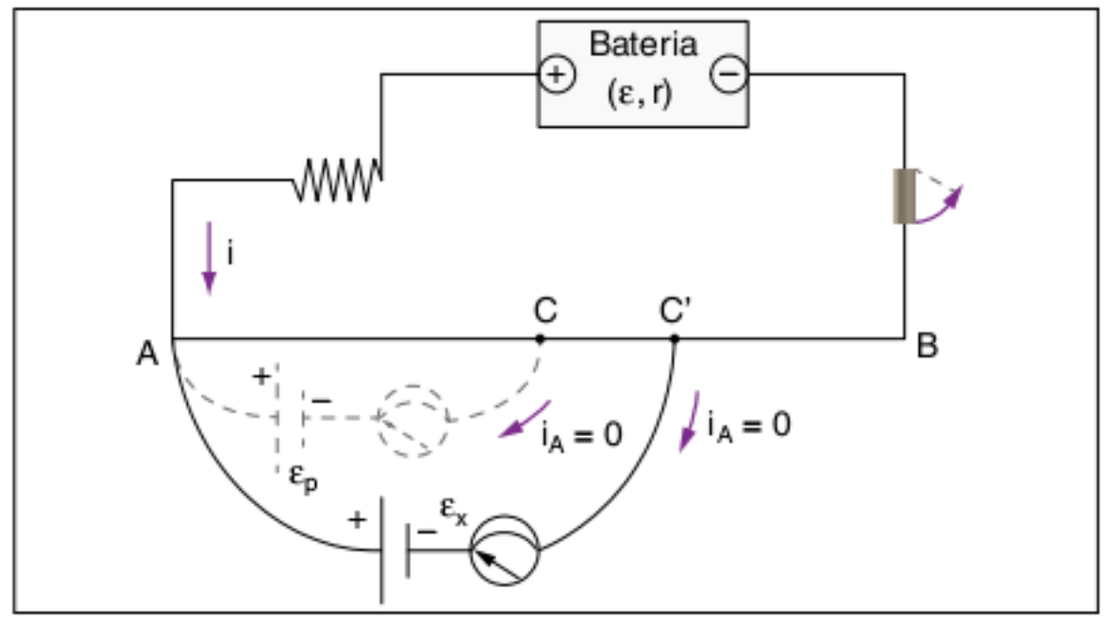


Fig. 45 Potenciômetro de Poggendorf.

A bateria de força eletromotriz ε e resistência interna r alimenta o circuito.

Coloca-se em paralelo a um trecho AC de um fio retilíneo e homogêneo uma pilha padrão de força eletromotriz conhecida ε_p, tal que o ponto C coincida com a posição em que a corrente que atravessa a pilha seja nula, assim, sendo i a corrente gerada pela bateria, tem-se que: $\varepsilon_p = R_{AC} \cdot i$

Em seguida, coloca-se o gerador de força eletromotriz que se deseja medir ε_x, até que se obtenha uma posição C', tal que a corrente que atravesse o gerador seja também zero, assim: $\varepsilon_x = R_{AC'} \cdot i$

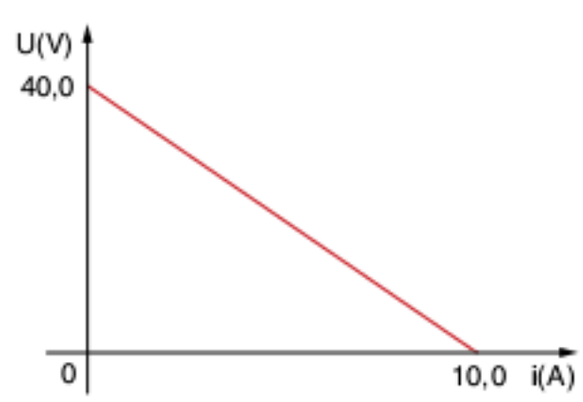
Dividindo as duas expressões, tem-se:

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_x} = \frac{R_{AC}}{R_{AC'}}$$

Como o fio é homogêneo, as resistências são proporcionais aos comprimentos, portanto: $\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_x} = \frac{AC}{AC'}$

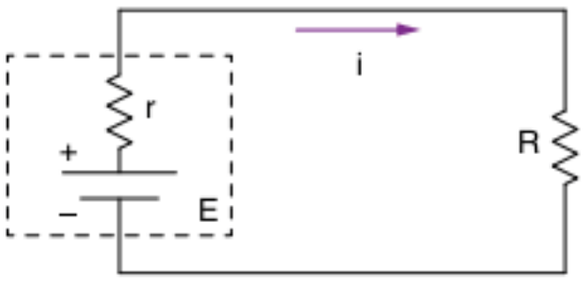
Revisando

1 **UEL (Adapt.)** O gráfico a seguir representa a curva característica de um gerador, isto é, a ddp nos seus terminais em função da corrente elétrica que o percorre.



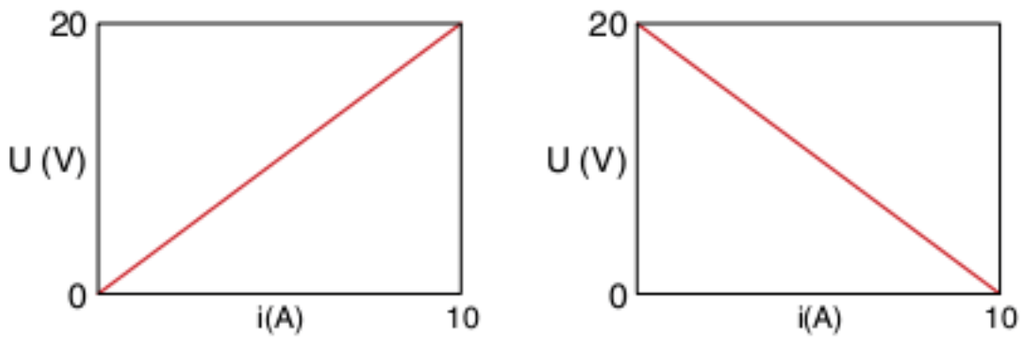
Qual é a potência máxima que esse gerador pode fornecer, em watts, ao circuito externo?

2 **Fatec (Adapt.)** No esquema, representa-se um circuito elétrico.

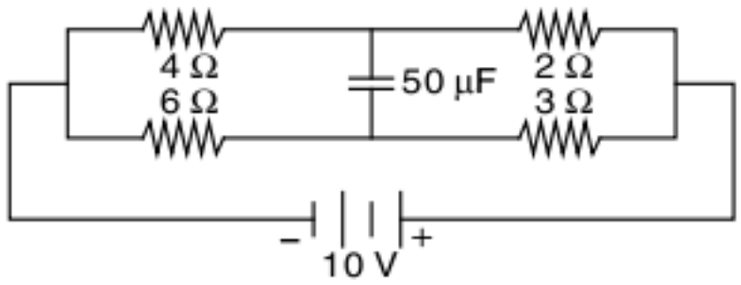


Os diagramas dão as "características" dos bipolos componentes (tensão em função de corrente). A corrente no circuito tem intensidade i.

Baseando-se nos diagramas apresentados, calcule a força eletromotriz (E), a corrente (i) e as resistências r e R do circuito elétrico.



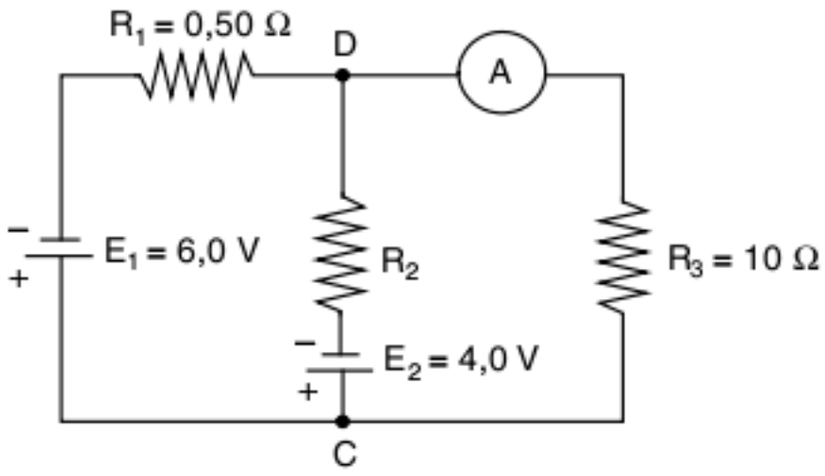
3 **Mackenzie (Adapt.)** No circuito representando no esquema, qual é a carga final do capacitor de 50 μF, inicialmente neutro?



4 **Fuvest** Considere o circuito representado esquematicamente na figura. O amperímetro ideal A indica a passagem de uma corrente de 0,50 A. Os valores das resistências dos resistores R_1 e R_3 e das forças eletromotrizes E_1 e E_2 dos geradores ideais estão indicados na figura. O valor do resistor R_2 não é conhecido.

Determine:

a) o valor da diferença de potencial entre os pontos C e D.

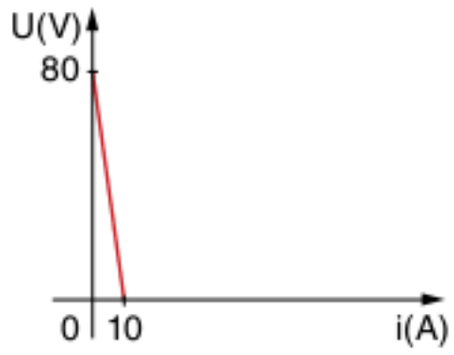


b) a potência fornecida pelo gerador E_1.

Exercícios propostos

Geradores

1 **UFRRJ** O gráfico a seguir representa a curva característica de um gerador.

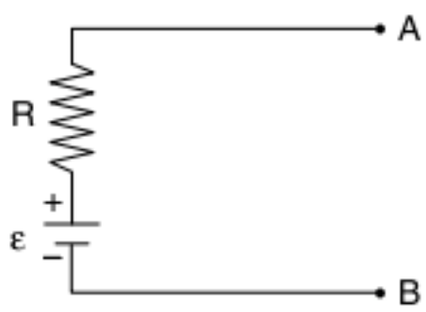


Analisando as informações do gráfico, determine:

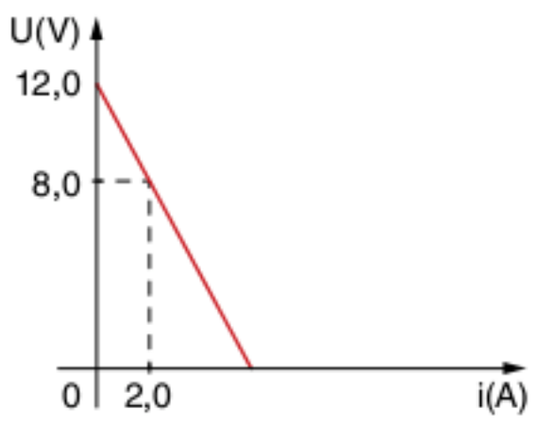
a) a resistência interna do gerador.

b) a corrente de curto-circuito do gerador.

2 **UFPE** Uma bateria elétrica real equivale a uma fonte ideal com força eletromotriz e em série com uma resistência R, como mostra a figura a seguir. Quando os terminais A e B são ligados em curto-circuito a corrente é de 10 A. Quando se coloca entre os pontos A e B uma resistência de 1,8 Ω a corrente é de 5 A. Qual o valor de ε(V) e r(Ω)?



3 **UEL** O gráfico a seguir, representa a ddp U em função da corrente i para um determinado elemento do circuito.



Pelas características do gráfico, o elemento é um:

(a) gerador de resistência interna 2,0 Ω.

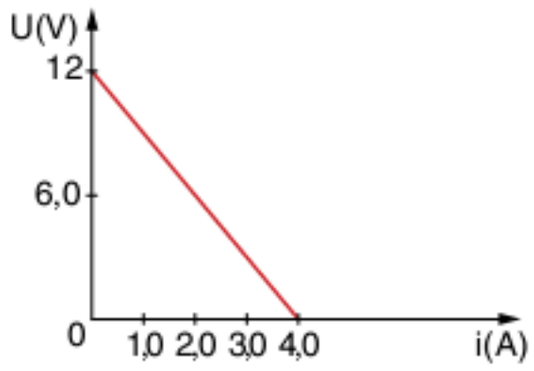
(b) receptor de resistência interna 2,0 Ω.

(c) resistor de resistência elétrica 2,0 Ω.

(d) gerador de resistência interna 1,0 Ω.

(e) receptor de resistência interna 1,0 Ω.

4 **UC-MG** Uma bateria de automóvel apresenta esta curva característica. A resistência interna da bateria vale, em ohms:



(a) 0,25

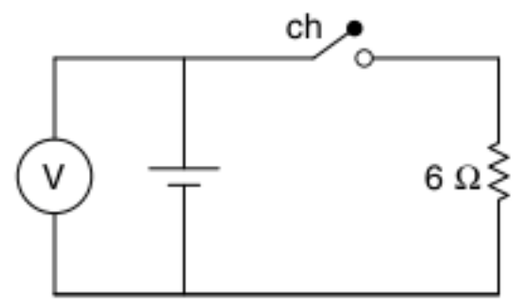
(b) 0,50

(c) 1,0

(d) 3,0

(e) 4,0

5 **Mackenzie** No laboratório de Física, um aluno observou que ao fechar a chave ch do circuito abaixo, o valor fornecido pelo voltímetro ideal passa a ser 3 vezes menor. Analisando esse fato, o aluno determinou que a resistência interna do gerador vale



(a) 4 Ω

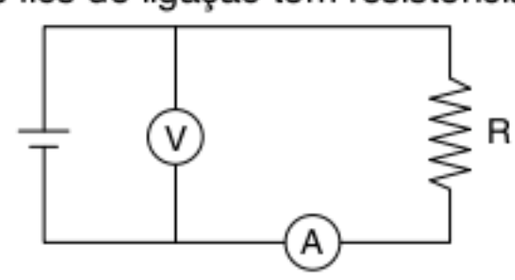
(b) 6 Ω

(c) 8 Ω

(d) 10 Ω

(e) 12 Ω

6 **UFG** Para investigar o desempenho de uma bateria B, foi montado o circuito a seguir, em que V e A representam, respectivamente, um voltímetro e um amperímetro ideais. A resistência R é variável e os fios de ligação têm resistências desprezíveis.



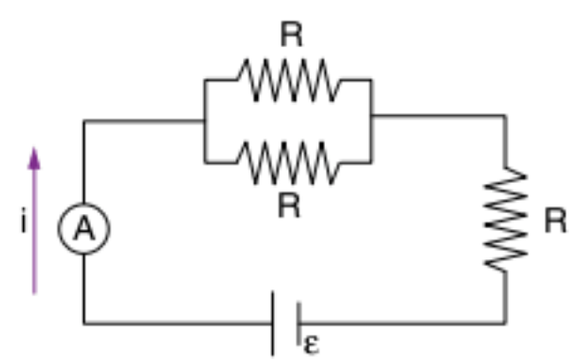
As indicações do voltímetro e do amperímetro são:

Voltímetro(V)	Amperímetro(A)
3,00	0,00
2,25	0,50
1,50	1,00
0,75	1,50
0,00	2,00

Nessas condições, podemos dizer que:

- [ ] a força eletromotriz da bateria é igual a 3,00 V.
- [ ] a resistência interna da bateria é igual a 1,50 Ω.
- [ ] para a corrente de 1,00 A, a potência dissipada na resistência R é igual a 3,00 W.
- [ ] quando a diferença de potencial sobre R for igual a 2,25 V, a quantidade de carga que a atravessa em 10 s é igual a 22,5 C.

7 **UFRGS** No circuito da figura a seguir, o amperímetro A registra uma corrente i = 0,2 A. Cada um dos três resistores representados na figura tem resistência R = 40 Ω. Qual é a potência dissipada pelo par de resistores associados em paralelo?



(a) 0,8 W (b) 1,6 W (c) 3,2 W (d) 8,0 W (e) 16,0 W

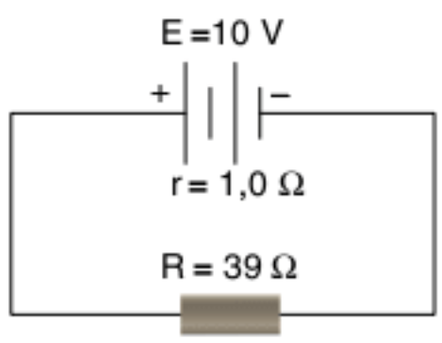
8 **UFRGS** Um gerador possui uma força eletromotriz de 10 V. Quando os terminais do gerador estão conectados por um condutor com resistência desprezível, a intensidade da corrente elétrica no resistor é 2 A. Com base nessas informações, analise as seguintes afirmativas.

I. Quando uma lâmpada for ligada aos terminais do gerador, a intensidade da corrente elétrica será 2 A.
II. A resistência interna do gerador é 5 Ω.
III. Se os terminais do gerador forem ligados por uma resistência elétrica de 2 Ω, a diferença de potencial elétrico entre eles será menor do que 10 V.

Quais das afirmativas estão corretas?

(a) Apenas I. (b) Apenas II. (c) Apenas I e II. (d) Apenas II e III. (e) I, II e III.

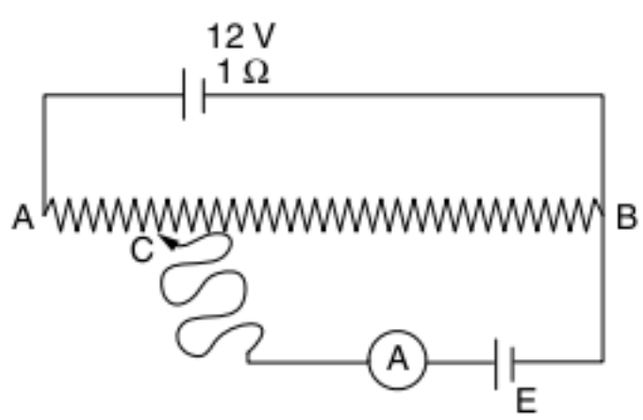
9 **FEI-SP** Liga-se um resistor de resistência R = 39 ohms a uma bateria de fem 10 V e resistência interna 1,0 ohm. Pedem-se:



a) a intensidade de corrente elétrica i no circuito.
b) a ddp nos terminais do resistor R.

10 **UFRJ** A figura ilustra o dispositivo usado para medir a força eletromotriz de um gerador. Nele, um gerador de força eletromotriz igual a 12 V e resistência interna igual a 1 Ω é ligado a um fio condutor ôhmico AB, de comprimento L, seção uniforme, e resistência total $R_{AB} = 5\ \Omega$.

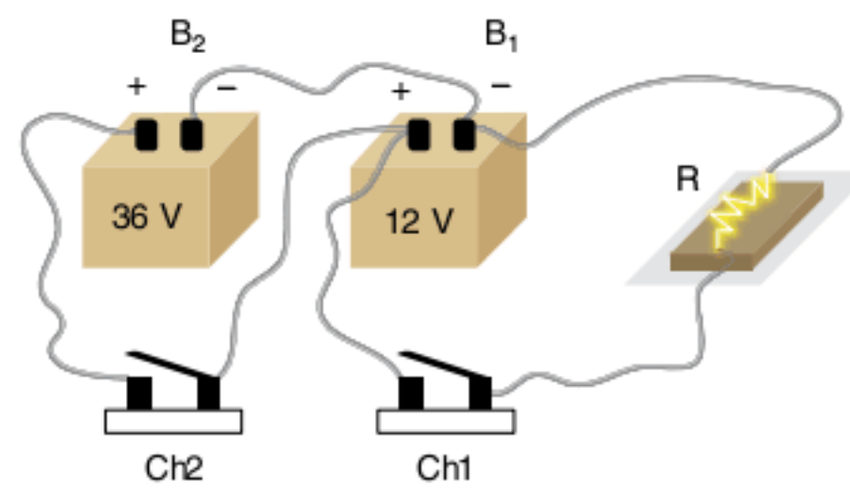
O polo negativo do gerador, de força eletromotriz E desconhecida, é ligado à extremidade B do condutor. Em série com esse gerador há um amperímetro ideal. A extremidade C pode ser ligada a qualquer ponto do condutor entre as extremidades A e B.



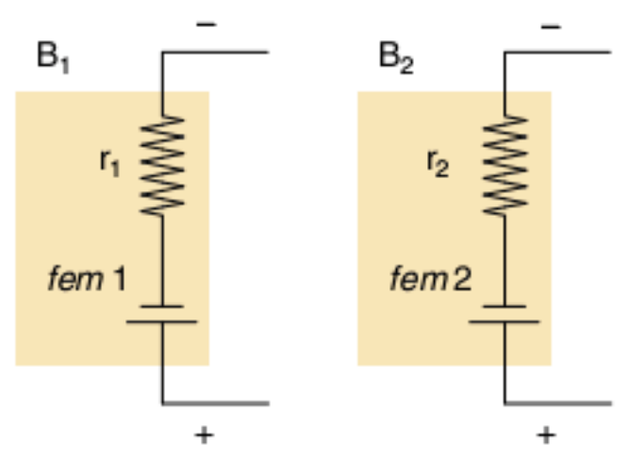
Por tentativas, verifica-se que quando a extremidade C é colocada a uma distância $\frac{L}{4}$ de A, a intensidade da corrente que passa pelo amperímetro torna-se nula. Calcule a força eletromotriz E.

11 **Fuvest** Um sistema de alimentação de energia de um resistor R = 20 Ω é formado por duas baterias, B_1 e B_2, interligadas através de fios, com as chaves Ch1 e Ch2, como representado na figura. A bateria B_1 fornece energia ao resistor, enquanto a bateria B_2 tem a função de recarregar a bateria B_1. Inicialmente, com a chave Ch1 fechada (e Ch2 aberta), a bateria B_1 fornece corrente ao resistor durante 100 s. Em seguida, para repor toda a energia química que a bateria B_1 perdeu, a chave Ch2 fica fechada (e Ch1 aberta), durante um intervalo de tempo T. Em relação a essa operação, determine:

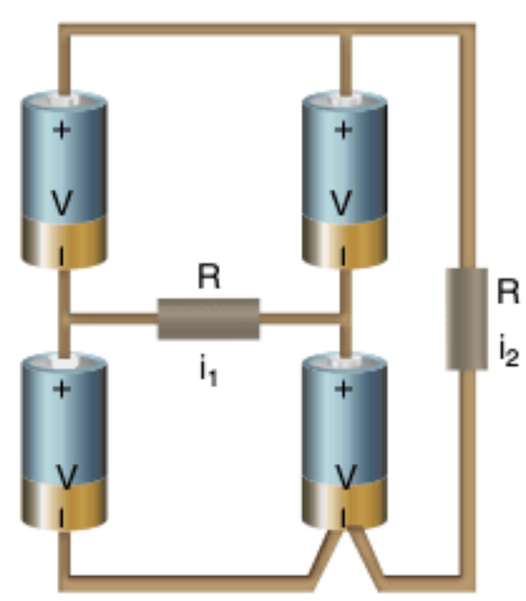
a) o valor da corrente I_1, em ampères, que percorre o resistor R, durante o tempo em que a chave Ch1 permanece fechada.
b) a carga Q, em C, fornecida pela bateria B_1, durante o tempo em que a chave Ch1 permanece fechada.
c) o intervalo de tempo T, em s, em que a chave Ch2 permanece fechada.



Note/Adote: As baterias podem ser representadas pelos modelos a seguir, com: *fem* 1 = 12 V e $r_1 = 2\ \Omega$ e *fem* 2 = 36 V e $r_2 = 4\ \Omega$

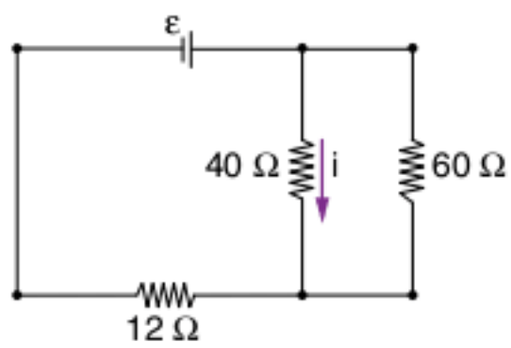


12 **Fuvest** O circuito da figura é formado por 4 pilhas ideais de tensão V e dois resistores idênticos de resistência R. Podemos afirmar que as correntes i_1 e i_2, indicadas na figura, valem:



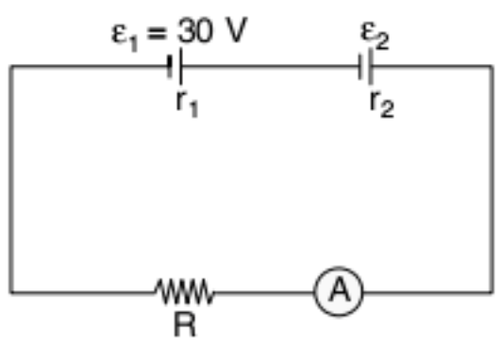
(a) $i_1 = 2\frac{V}{R}$ e $i_2 = 4\frac{V}{R}$
(b) i_1 = zero e $i_2 = 2\frac{V}{R}$
(c) $i_1 = 2\frac{V}{R}$ e $i_2 = 2\frac{V}{R}$
(d) i_1 = zero e $i_2 = 4\frac{V}{R}$
(e) $i_1 = 2\frac{V}{R}$ e i_2 = zero

13 **Fuvest** No circuito esquematizado a seguir, onde i = 0,6 A, a força eletromotriz ε vale:



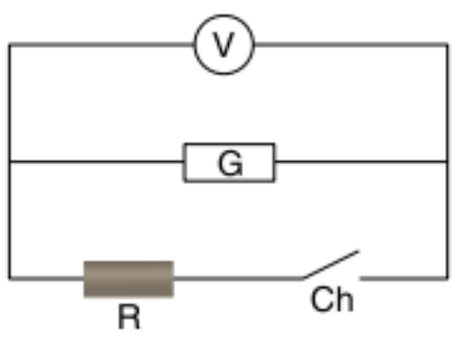
(a) 48 V
(b) 36 V
(c) 24 V
(d) 12 V
(e) 60 V

14 **Mackenzie** No circuito a seguir, a corrente que passa pelo amperímetro ideal tem intensidade 2 A. Invertendo a polaridade do gerador de fem ε_2, a corrente do amperímetro mantém o seu sentido e passa a ter intensidade 1 A. A fem ε_2 vale:



(a) 10 V
(b) 8 V
(c) 6 V
(d) 4 V
(e) 2 V

15 **UEL** O circuito esquematizado é constituído por um gerador de fem G e resistência interna r, um resistor de resistência R = 10 Ω, um voltímetro ideal V e uma chave interruptora Ch.

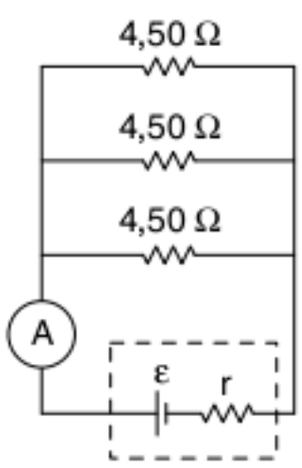


Com a chave aberta, o voltímetro indica 6,0 V. Fechando a chave, o voltímetro indica 5,0 V. Nessas condições, a resistência interna r do gerador, em ohms, vale:

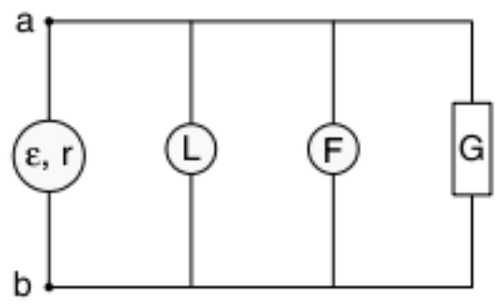
(a) 2,0
(b) 4,0
(c) 5,0
(d) 6,0
(e) 10

16 **Mackenzie** No circuito elétrico ilustrado abaixo, o amperímetro A é considerado ideal e o gerador, de força eletromotriz ε, possui resistência interna r = 0,500 Ω. Sabendo-se que a intensidade de corrente elétrica medida pelo amperímetro é 3,00 A, a energia elétrica consumida pelo gerador no intervalo de 1,00 minuto é:

(a) 480 J
(b) 810 J
(c) 1,08 kJ
(d) 1,62 kJ
(e) 4,80 kJ



17 **UFC** No circuito a seguir, um gerador de fem ε = 68 V e resistência interna r = 0,5 Ω está alimentando a associação em paralelo, a qual é constituída por uma lâmpada L, que dissipa uma potência P(L) = 126 W, um ferro de solda F, consumindo uma potência P(F) = 189 W, e um refrigerador G, que consome a potência P(G) = 315 W. A potência total fornecida pelo gerador é P = 680 W. Determine o valor, em ampères, da maior corrente dentre as que circulam pelos aparelhos anteriores mencionados.



18 **Mackenzie** Um circuito elétrico é constituído de um gerador de força eletromotriz ε e resistência interna r, e de um resistor de resistência R variável (figura 1).
A potência dissipada no resistor em função da corrente i é dada pelo gráfico mostrado na figura 2. Os valores da força eletromotriz ε e da resistência interna r do gerador são, respectivamente:

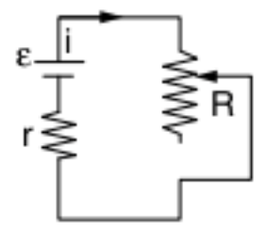


Figura 1

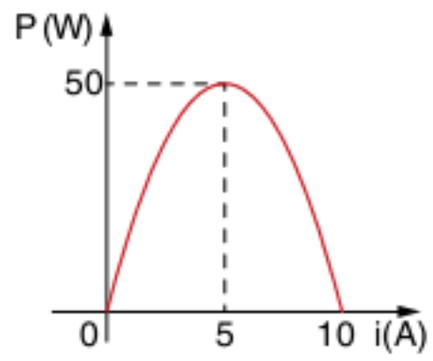


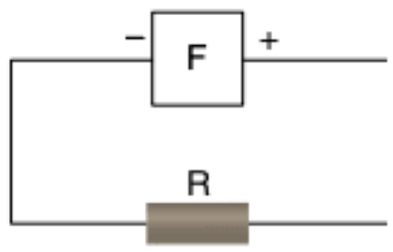
Figura 2

(a) 50 V e 4 Ω
(b) 20 V e 2 Ω
(c) 20 V e 1 Ω
(d) 25 V e 0,5 Ω
(e) 15 V e 0,5 Ω

19 **Fatec-SP** Uma pilha elétrica tem força eletromotriz E = 6,0 volts e resistência interna r = 0,20 ohm.

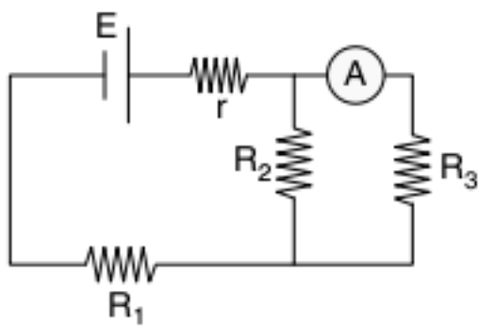
(a) A corrente de curto-circuito é i_{cc} = 1,2 A.
(b) Em circuito aberto, a tensão entre os terminais é nula.
(c) Se a corrente for i = 10 A, a tensão entre os terminais é U = 2,0 V.
(d) Se a tensão entre os terminais for U = 5,0 V, a corrente é i = 5,0 A.
(e) Nenhuma das anteriores.

20 **Puccamp** Uma fonte de tensão ideal F, cuja força eletromotriz é 12 volts, fornece uma corrente elétrica de 0,50 ampères para um resistor R, conforme indica o esquema a seguir. Se essa fonte de tensão F for substituída por outra, também de 12 volts, a corrente elétrica em R será de 0,40 ampères. A resistência interna da nova fonte de tensão é, em ohms, igual a:



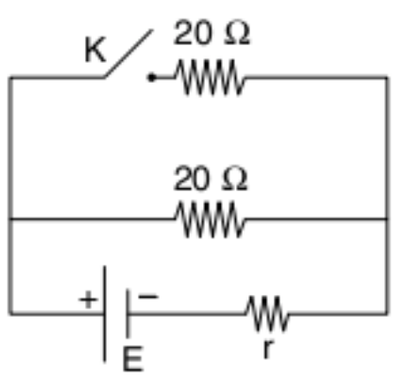
(a) 0,10
(b) 0,60
(c) 1,2
(d) 3,0
(e) 6,0

21 **FMABC-SP** No circuito, tem-se um gerador de força eletromotriz E = 21 V e resistência interna r = 1,0 Ω, associado aos resistores R_1 = 2,0 Ω, R_2 = 12 Ω e R_3 = 6,0 Ω. A leitura fornecida pelo amperímetro ideal A é igual a:



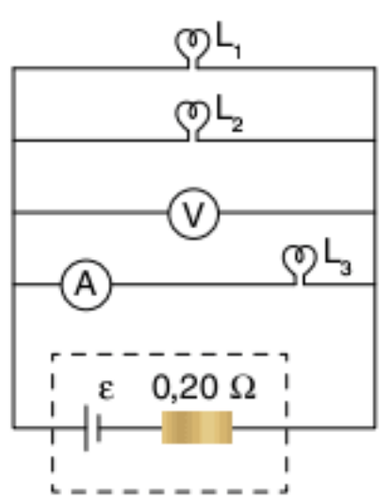
(a) 3,0 A
(b) 1,5 A
(c) 2,0 A
(d) 1,0 A
(e) 12 A

22 **UMC-SP** Um gerador está ligado a um circuito, como indica a figura. Com a chave K aberta, a corrente que o atravessa tem intensidade i_1 = 9,0 A. Fechando-se a chave, a corrente através do gerador passa a ter intensidade i_2 = 15 A. Os valores da fem (E) e da resistência interna (r) são, respectivamente:



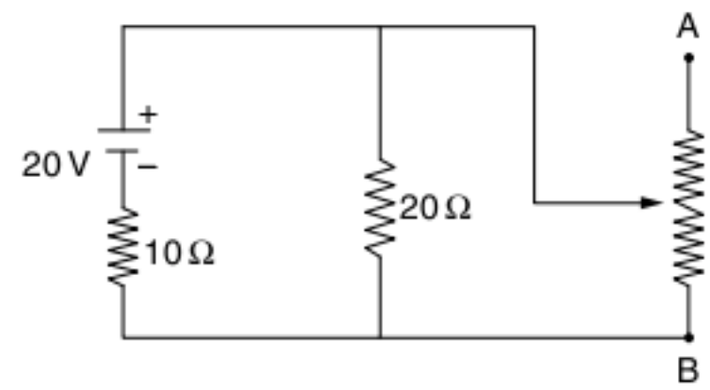
(a) E = 100 V; r = 5,0 Ω
(b) E = 150 V; r = 2,0 Ω
(c) E = 225 V; r = 5,0 Ω
(d) E = 50 V; r = 1,0 Ω
(e) E = 225 V; r = 2,0 Ω

23 **Mackenzie** Quando as lâmpadas L_1, L_2 e L_3 estão ligadas ao gerador de f.e.m. ε, conforme mostra a figura abaixo, dissipam, respectivamente, as potências 1,00 W, 2,00 W e 2,00 W, por efeito Joule. Nessas condições, se o amperímetro A, considerado ideal, indica a medida 500 mA, a força eletromotriz do gerador é de:



(a) 2,22 V
(b) 3,50 V
(c) 3,75 V
(d) 4,00 V
(e) 4,25 V

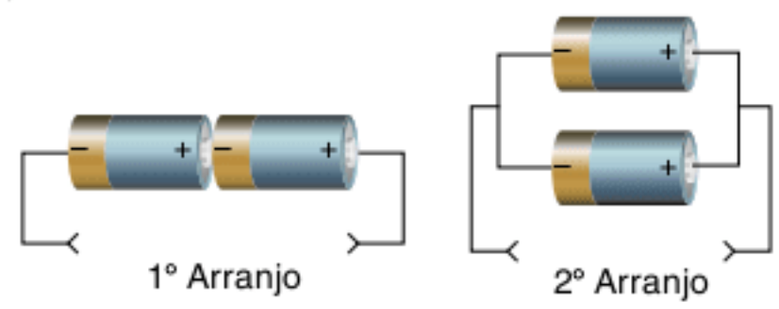
24 **FEI-SP** No circuito da figura a seguir, o reostato AB está munido do cursor C, sendo a resistência entre A e B igual a 40 Ω. Qual a intensidade de corrente no gerador quando o cursor está em B? Em que posição deverá ser colocado o cursor para que a intensidade de corrente no gerador seja a metade daquela encontrada na situação anterior?



25 **PUC-SP** Cinco geradores, cada um de fem 4,5 V e intensidade de corrente de curto-circuito igual a 0,50 A, são associados em paralelo. A fem e a resistência interna do gerador equivalente têm valores, respectivamente, iguais a:

(a) 4,5 V e 9,0 Ω
(b) 22,5 V e 9,0 Ω
(c) 4,5 V e 1,8 Ω
(d) 0,90 V e 9,0 Ω
(e) 0,90 V e 1,8 Ω

26 **Fuvest-SP** As figuras ilustram pilhas ideais associadas em série (1° arranjo) e em paralelo (2° arranjo). Supondo as pilhas idênticas, assinale a alternativa correta.



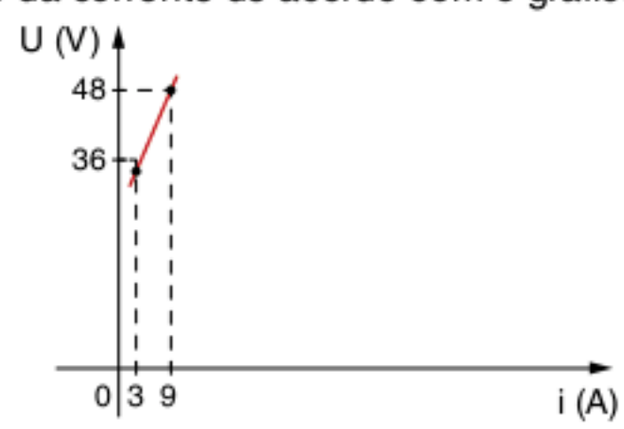
(a) Ambos os arranjos fornecem a mesma tensão.
(b) O primeiro arranjo fornece uma tensão maior que o segundo.
(c) Se ligarmos um voltímetro nos terminais do segundo arranjo, ele indicará uma diferença de potencial nula.
(d) Ambos os arranjos, quando ligados a um mesmo resistor, fornecem a mesma corrente.
(e) Se ligarmos um voltímetro nos terminais do primeiro arranjo, ele indicará uma diferença de potencial nula.

27 **Vunesp** Uma bateria de 50 pilhas, cada uma das quais de fem 2,3 V e resistência interna 0,10 ohm, deve ser carregada numa fonte de corrente contínua de 210 V e resistência interna desprezível. A corrente máxima que pode circular pelo sistema é 6,0 A. Qual é a resistência extra que deve ser inserida no circuito?

(a) 10,8 ohms
(b) 30 ohms
(c) 20,9 ohms
(d) 15,9 ohms
(e) 35 ohms

Receptores e capacitores

28 A tensão elétrica nos terminais de um receptor varia com a intensidade da corrente de acordo com o gráfico a seguir.

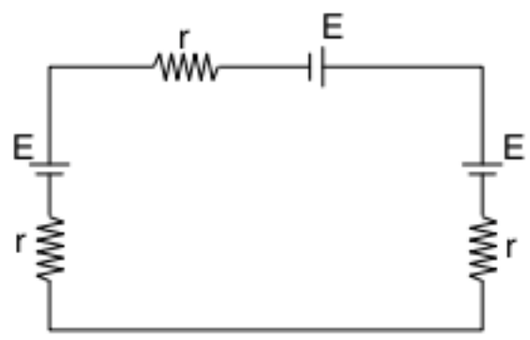


Determine:

a) a fcem e a resistência interna do receptor.

b) a energia elétrica que o receptor consome em 2 h quando sob tensão de 36 V. Dê a resposta em kWh.

29 **Fatec** Três pilhas de fem E = 1,5 V e resistência interna r = 1,0 Ω são ligadas como na figura a seguir.

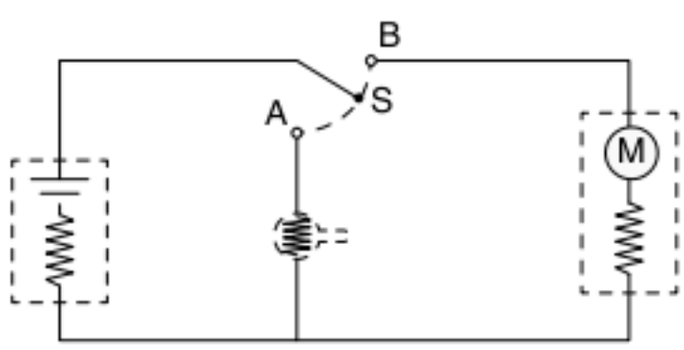


A corrente que circula pelas pilhas é de:

(a) 0,50 A, no sentido horário.
(b) 0,50 A, no sentido anti-horário.
(c) 1,5 A, no sentido horário.
(d) 2,0 A, no sentido anti-horário.
(e) 2,0 A, no sentido horário.

30 **Covest-PE** O motor elétrico de uma bomba d'água é ligado a uma rede elétrica que fornece uma diferença de potencial de 220 V. Em quantos segundos o motor da bomba consome uma energia de 35,2 kJ, se por ele circula uma corrente elétrica de 2 A?

31 **UFU-MG** Uma bateria de fem 220 V e resistência interna de 10 Ω está acoplada, conforme o circuito a seguir, ou a uma lâmpada de 100 Ω de resistência ou a um motor de fcem 205 V com resistência interna de 5 Ω, dependendo da conexão da chave S estar em A ou B. Pede-se:

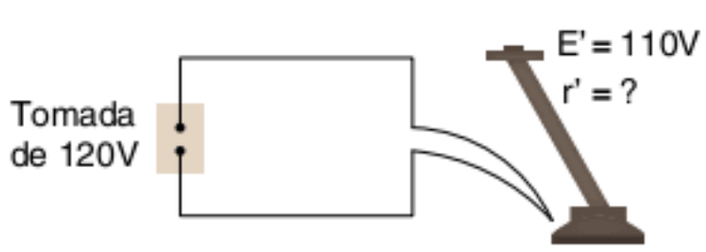


a) a potência consumida pela lâmpada.

b) a potência útil do motor.

c) a potência dissipada por efeito Joule no motor.

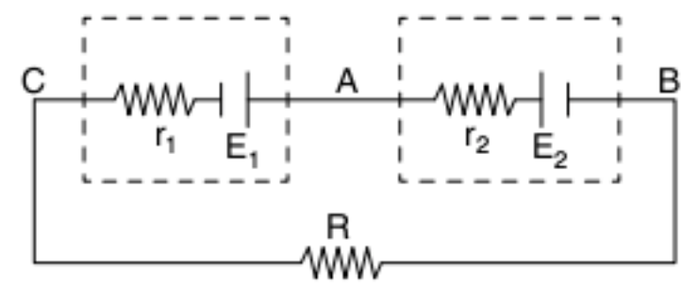
32 **PUC-SP** A figura esquematiza o circuito elétrico de uma enceradeira em funcionamento. A potência elétrica dissipada por ela é de 20 W e sua fcem 110 V. Assim, sua resistência interna é de:



(a) 5,0 Ω
(b) 55 Ω
(c) 2,0 Ω
(d) 115 Ω
(e) –5,0 Ω

33 **UFPA** No circuito a seguir, E_1 = 2,0 volts, E_2 = 4,0 volts, r_1 = 1,0 ohm, r_2 = 2,0 ohms e R = 5,0 ohms.

O valor da intensidade de corrente no circuito é:



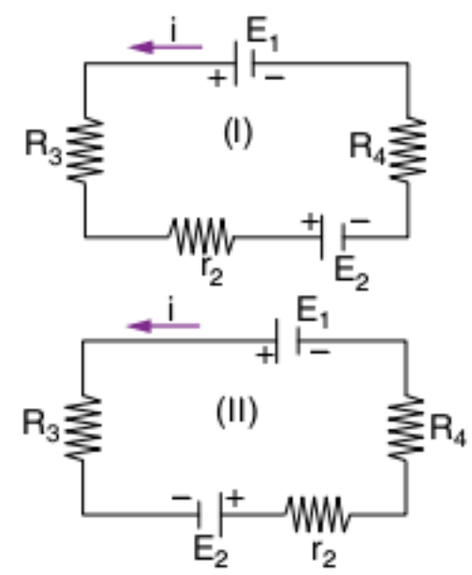
(a) 0,25 A
(b) 0,50 A
(c) 0,75 A
(d) 0,85 A
(e) 1,0 A

34 **EEM-SP** Um gerador de força eletromotriz E_1 = 12 V e resistência interna r_1 = 0,48 Ω é ligado a um receptor de fcem E_2 = 6,0 V e resistência interna r_2 = 0,12 Ω Calcule a intensidade da corrente que circula pelo gerador, indicando qual é o elemento que está fornecendo e qual é o que esta absorvendo energia.

35 **UFBA** Uma bateria de 60 V e resistência de 1,0 Ω deve ser carregada à taxa de 5,0 A por uma fonte de 110 V. A resistência que deve ser ligada em série com a bateria é de:

(a) 21 Ω
(b) 18 Ω
(c) 15 Ω
(d) 9,0 Ω
(e) 6,0 Ω

36 **Mackenzie-SP** Dados os circuitos (I) e (II) abaixo, pode-se dizer:



(a) em (I): E_1, fornece energia; E_2 absorve energia.
(b) em (I): E_1 absorve energia; E_2 fornece energia.
(c) em (II): E_1 e E_2 absorvem energia.
(d) em (II): E_1 absorve energia; E_2 fornece energia.
(e) nenhuma das anteriores.

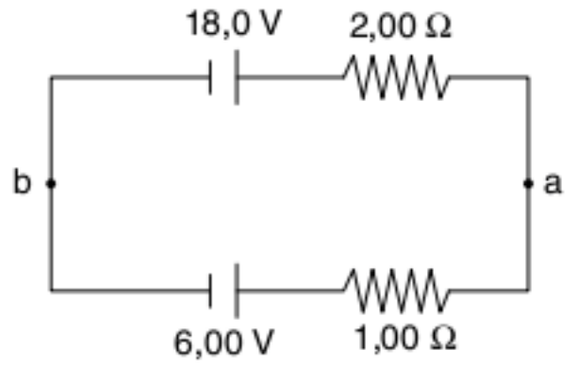
37 **Vunesp** Duas baterias de forças eletromotrizes iguais a 6,0 V e 9,0 V têm resistência interna de 0,5 Ω e 1,0 Ω, respectivamente. Ligando essas baterias em paralelo, pergunta-se:

1) Qual a corrente i que vai percorrer o circuito fechado?

2) Qual a energia E que é dissipada sob a forma de calor durante um intervalo de tempo igual a 10 s?

	i(A)	E(J)
(a)	2,0	60
(b)	10	150
(c)	2,0	30
(d)	3,0	135
(e)	3,0	90

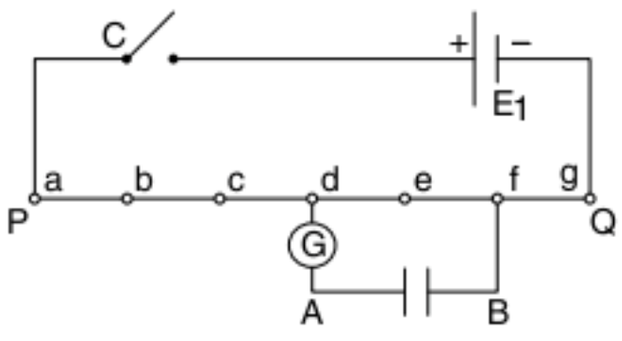
38 **ITA** As duas baterias da figura estão ligadas em oposição. Suas fem e resistências internas são, respectivamente: 18,0 V e 2,00 Ω; 6,00 V e 1,00 Ω, sendo i a corrente no circuito, V_{ab} a tensão $V_a - V_b$ e P_d a potência total dissipada, podemos afirmar que:



(a) $i = 9{,}00$ A; $V_{ab} = -10{,}0$ V; $P_d = 12{,}0$ W
(b) $i = 6{,}00$ A; $V_{ab} = 10{,}0$ V; $P_d = 96{,}0$ W
(c) $i = 4{,}00$ A; $V_{ab} = -10{,}0$ V; $P_d = 16{,}0$ W
(d) $i = 4{,}00$ A; $V_{ab} = 10{,}0$ V; $P_d = 48{,}0$ W
(e) $i = 4{,}00$ A; $V_{ab} = 24{,}0$ V; $P_d = 32{,}0$ W

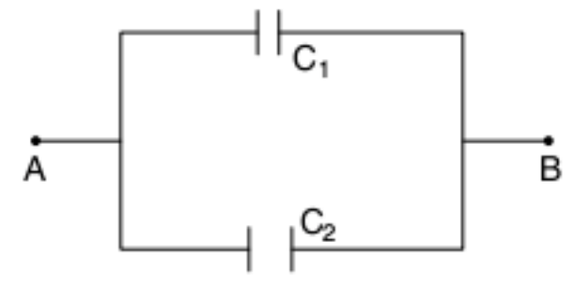
39 **UFPA** O capacitor é um dispositivo elétrico utilizado em aparelhos conhecidos popularmente, tais como rádio, televisão etc. Este dispositivo serve para:
(a) armazenar carga e energia elétrica.
(b) evitar a passagem de corrente no circuito.
(c) produzir energia elétrica por processos eletroquímicos.
(d) diminuir a resistência do circuito.
(e) estabelecer curto-circuito.

40 **ITA** O circuito representado na figura abaixo é constituído por uma pilha ideal de 1,5 V de força eletromotriz, ligada a um fio condutor PQ homogêneo de secção reta constante. O fio é provido de terminais igualmente espaçados, sendo que entre dois deles se encontra ligado um capacitor de 10 μF em série com um galvanômetro. Com a chave C fechada, é nula a indicação do galvanômetro, portanto, pode-se afirmar que:



(a) a carga no capacitor é nula.
(b) a carga no capacitor é 7,5 μC, sendo A a placa positiva.
(c) a carga no capacitor é 15 μC, sendo que a placa A está a um potencial maior do que a placa B.
(d) a carga no capacitor é 5,0 μC, sendo a placa A positiva.
(e) a carga no capacitor é bem menor do que 5,0 μC, sendo a placa A positiva com relação a B.

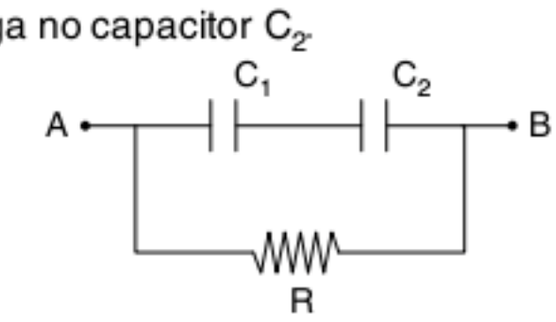
41 **Fuvest** Dois capacitores planos, C_1 e C_2, com placas de mesma área e com afastamentos d e 2d, respectivamente, são ligados aos terminais A e B, entre os quais existe uma diferença de potencial. Representando por Q_1 e Q_2 as cargas respectivas dos capacitores, e por V_1 e V_2 as diferenças de potencial respectivas entre os terminais desses capacitores, temos:



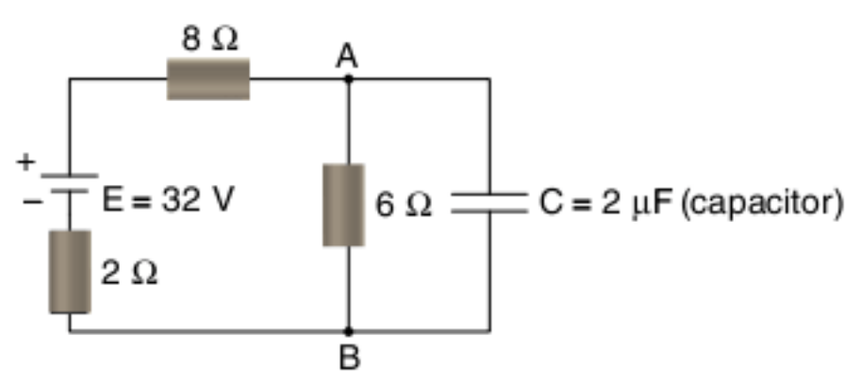
(a) $Q_1 = \frac{1}{2}Q_2$; $V_1 = V_2$
(b) $Q_1 = 2Q_2$; $V_1 = 2V_2$
(c) $Q_1 = \frac{1}{2}Q_2$; $V_1 = \frac{1}{2}V_2$
(d) $Q_1 = 2Q_2$; $V_1 = V_2$
(e) $Q_1 = \frac{1}{2}Q_2$; $V_1 = 2V_2$

42 **UFC** Três capacitores idênticos, quando devidamente associados, podem apresentar uma capacitância equivalente máxima de 18 μF. A menor capacitância equivalente que podemos obter com esses mesmos três capacitores é, em μF:
(a) 8
(b) 6
(c) 4
(d) 2
(e) 1

43 **Vunesp** O esquema a seguir representa um sistema compreendendo dois capacitores de capacidade $C_1 = 0{,}01$ μF e $C_2 = 0{,}04$ μF, ligados, da maneira indicada, a um resistor de resistência R = 100 Ω. Ao sistema aplica-se uma tensão constante $V_A - V_B = 100$ V. Estabelecido o regime estacionário, determine a carga no capacitor C_2.

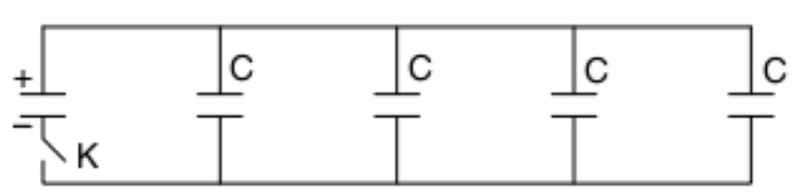


44 **Unimar** No circuito elétrico a seguir, os valores da corrente do circuito, ddp entre A e B e a carga elétrica armazenada no capacitor, respectivamente, são:
Dados: U = R.I; U = E – r.i (gerador); Q = C.U (capacitor)



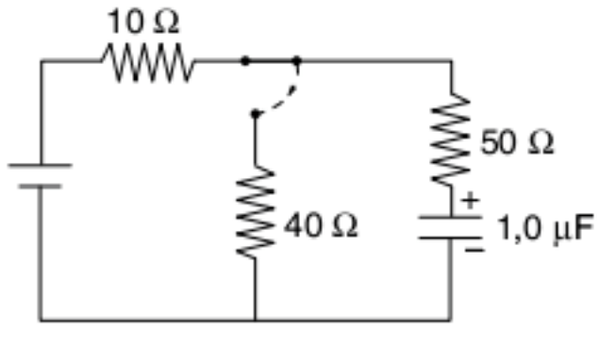
(a) 3,2 A; 19,2 V; 38,4 μC
(b) 2 A; 12 V; 24 μC
(c) 1,6 A; 9,6 V; 19,2 μC
(d) 0,8 A; 4,8 V; 19,2 μC
(e) 1,6 A; 4,8 V; 19,2 μC

45 **PUC-SP** Um capacitor de capacidade de 1,0 μF eletrizado com 100 μC poder ser ligado em paralelo a 4 capacitores iguais a ele ao ser fechada a chave K. Supondo efetuada a ligação, a energia dissipada tem valor:



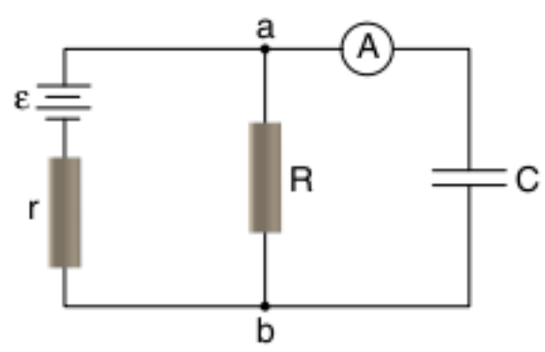
(a) $5{,}0 \cdot 10^{-3}$ J
(b) $4{,}0 \cdot 10^{-3}$ J
(c) $3{,}0 \cdot 10^{-3}$ J
(d) $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ J
(e) zero

46 **Faap-SP** No circuito esquematizado na figura abaixo, o capacitor está totalmente eletrizado e armazena energia de 0,50 J; a fem da fonte ideal é desconhecida. Qual é a potência elétrica fornecida pela fonte ao se mudar a posição do interruptor?



47 **UFSC** Dois capacitores iguais, com ar (K = 1) entre as armaduras, estão associados em paralelo. A capacitância dessa associação é de 30 μF. Supondo agora que esses capacitores são conectados em série e mergulhados em um líquido dielétrico de constante dielétrica K = 6, determine a capacitância final da associação em série, em μF.

48 **ITA** No circuito mostrado na figura a seguir, a força eletromotriz da bateria é ε = 10 V e a sua resistência interna é r = 1,0 Ω. Sabendo que R = 4,0 Ω e C = 2,0 μF, e que o capacitor já se encontra totalmente carregado, considere as seguintes afirmações:



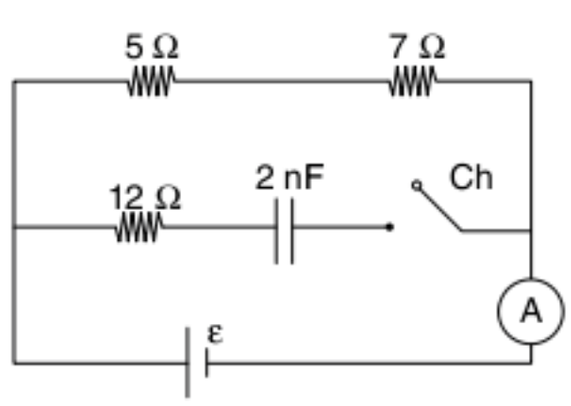
I. A indicação no amperímetro é de 0 A.
II. A carga armazenada no capacitor é 16 μC.
III. A tensão entre os pontos a e b é 2,0 V.
IV. A corrente na resistência R é 2,5 A.

Das afirmativas mencionadas, é(são) correta(s):

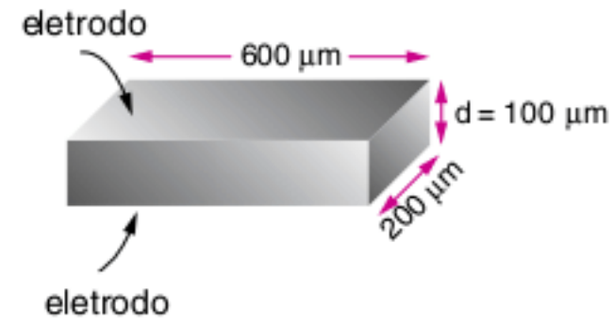
(a) Apenas I.
(b) I e II.
(c) I e IV.
(d) II e III.
(e) II e IV.

49 **Mackenzie** No circuito a seguir, o amperímetro e o gerador são ideais. Quando a chave Ch está fechada, o capacitor de 2 nF adquire a carga elétrica de 24 nC. Estando a chave fechada há algum tempo, a intensidade de corrente que se lê no amperímetro é:

(a) 0,5 A
(b) 1,0 A
(c) 1,5 A
(d) 2,0 A
(e) zero



50 **Unicamp** Numa tela de televisor de plasma, pequenas células contendo uma mistura de gases emitem luz quando submetidas a descargas elétricas. A figura a seguir mostra uma célula com dois eletrodos, nos quais uma diferença de potencial é aplicada para produzir a descarga. Considere que os eletrodos formam um capacitor de placas paralelas cuja capacidade é dada por $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$, onde $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ F/m. A é a área de cada eletrodo e d é a distância entre os eletrodos.



a) Calcule a capacitância da célula.
b) A carga armazenada em um capacitor é proporcional à diferença de potencial aplicada, sendo que a constante de proporcionalidade é a capacitância. Se uma diferença de potencial igual a 100 V for aplicada nos eletrodos da célula, qual é a carga que será armazenada?
c) Se a carga encontrada no item b atravessar o gás em 1 μs (tempo de descarga), qual será a corrente média?

51 **Mackenzie** Dois capacitadores C_1 e C_2 com $C_1 > C_2$ são associados em série e os terminais da associação são ligados a um gerador de tensão constante U. Sendo U_1 a diferença de potencial elétrico (d.d.p.) entre os terminais do capacitor de capacidade C_1 e U_2 a d.d.p. entre os terminais do capacitor de capacidade C_2, podemos afirmar que, para qualquer valor de U, sempre teremos:

(a) $U_1 > U_2$
(b) $U_1 < U_2$
(c) $U_1 = U_2$
(d) $U_1 = (U_2)^2$
(e) $U_1 = \sqrt{U_2}$

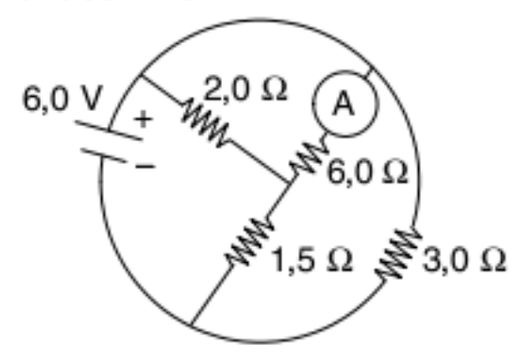
52 **Mackenzie** Dois capacitadores, de capacidades C_1 = 3 nF e C_2 = 2 nF, são associados em série e o conjunto é submetido à d.d.p. de 5 V. A carga elétrica armazenada por essa associação é:

(a) $2{,}4 \cdot 10^{-10}$ C
(b) $6{,}0 \cdot 10^{-10}$ C
(c) $3{,}0 \cdot 10^{-10}$ C
(d) $6{,}0 \cdot 10^{-9}$ C
(e) $12 \cdot 10^{-9}$ C

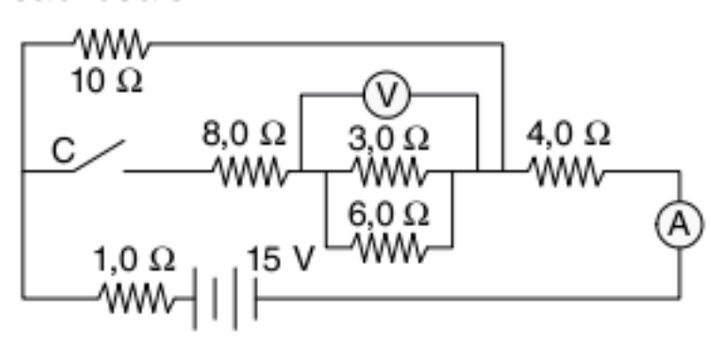
Leis de Kirchhoff e instrumentos de medida elétrica

53 **Mackenzie-SP** No circuito esquematizado a seguir, a indicação do amperímetro ideal A é:

(a) 4,0 A
(b) 3,0 A
(c) 2,0 A
(d) 1,0 A
(e) 0,50 A



O texto abaixo refere-se às questões **54** e **55**.
A figura representa um circuito elétrico, no qual os instrumentos de medida são ideais.



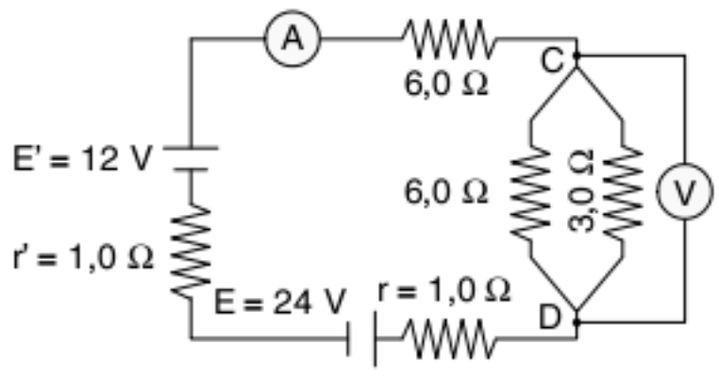
54 **UFBA** A leitura registrada no amperímetro, estando a chave C fechada, é:

(a) zero (b) 1,0 A (c) 1,5 A (d) 2,5 A (e) 3,0 A

55 **UFBA** A leitura registrada no voltímetro, estando a chave C aberta é:

(a) zero (b) 2,25 V (c) 4,50 V (d) 6,00 V (e) 7,50 V

Responder às questões **56** e **57** com base no circuito elétrico a seguir.



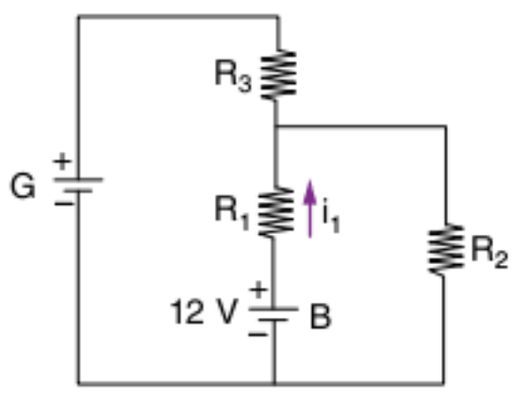
56 **PUC-RS** A leitura do amperímetro A, considerado ideal, inserido no circuito, em ampères, é de:

(a) 1,2 (b) 1,8 (c) 2,0 (d) 2,2 (e) 5,0

57 **PUC-RS** A leitura do voltímetro V, considerado ideal, colocado entre os pontos C e D, em volts, é de:

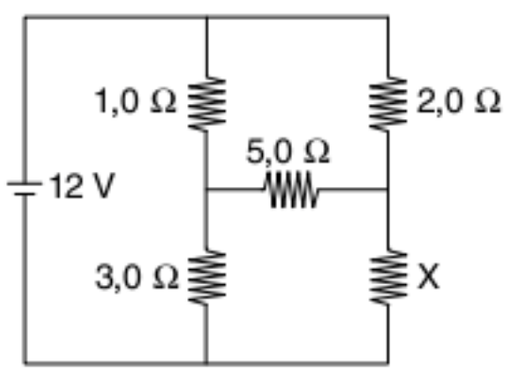
(a) 1,5 (b) 2,4 (c) 3,3 (d) 5,2 (e) 8,8

58 **Fuvest** No circuito mostrado na figura a seguir, os três resistores têm valores $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ e $R_3 = 5\ \Omega$. A bateria B tem tensão constante de 12 V. A corrente i_1 é considerada positiva no sentido indicado. Entre os instantes t = 0 s e t = 100 s, o gerador G fornece uma tensão variável V = 0,5 t (V em volt e t em segundo).



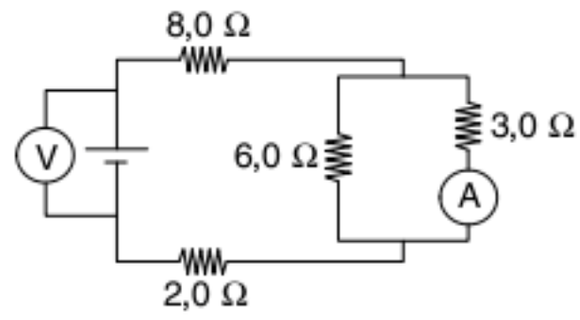
a) Determine o valor da corrente i_1 para t = 0 s.
b) Determine o instante t em que a corrente i_1 é nula.
c) Trace a curva que representa a corrente i_1 em função do tempo t, no intervalo de 0 a 100 s. Indique claramente a escala da corrente, em ampère (A).
d) Determine o valor da potência P recebida ou fornecida pela bateria B no instante t = 90 s.

59 **Unicamp** No circuito a seguir, a corrente na resistência de 5,0 Ω é nula.



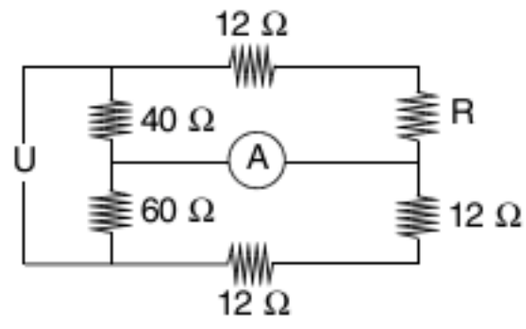
a) Determine o valor da resistência X.
b) Qual a corrente fornecida pela bateria?

60 **UFRJ** No circuito esquematizado na figura, o voltímetro e o amperímetro são ideais. O amperímetro indica 2,0 A.



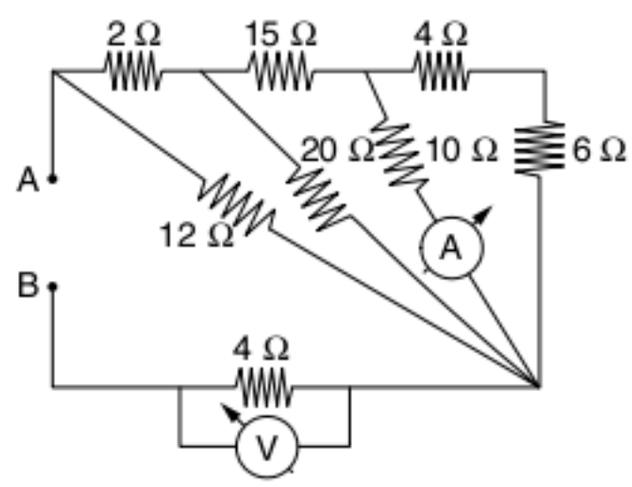
Calcule a indicação do voltímetro.

61 **Cesgranrio** No circuito a seguir, sabe-se que o amperímetro (suposto ideal) não acusa passagem de corrente elétrica. Logo, o valor da resistência R, em ohms, é:



(a) 2,0 (b) 4,0 (c) 6,0 (d) 8,0 (e) 10

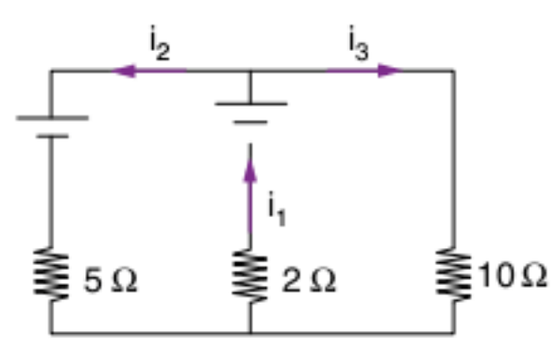
62 **Fatec** Na figura, a resistência de cada resistor está expressa em ohms.



Sabendo que U_{AB} = 100 V, então as leituras do voltímetro e do amperímetro, considerados ideais, serão dadas respectivamente por:

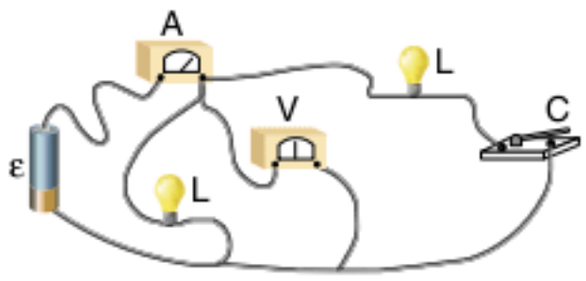
(a) 40 V e 1,25 A
(b) 40 V e 2,50 A
(c) 40 V e 5,00 A
(d) 20 V e 1,25 A
(e) 20 V e 2,50 A

63 **Mackenzie** No circuito elétrico representado adiante, os sentidos das correntes foram indicados corretamente e a intensidade de corrente i_3 é 3 A. A força eletromotriz do gerador ideal vale 40 V e a força contraeletromotriz do receptor ideal vale:



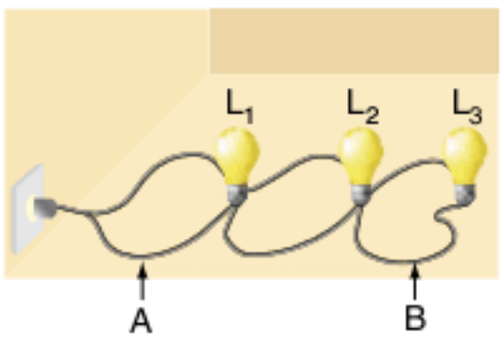
(a) 5 V (b) 12 V (c) 15 V (d) 20 V (e) 25 V

64 **UFMG** Neste circuito existem duas lâmpadas iguais, indicadas por L, ligadas a uma pilha ε, a um amperímetro A, a um voltímetro V e a uma chave C inicialmente aberta. Considere os medidores ideais e despreze a resistência interna da pilha. Fechando-se a chave C, as leituras dos medidores irão apresentar, em relação a seus valores iniciais:



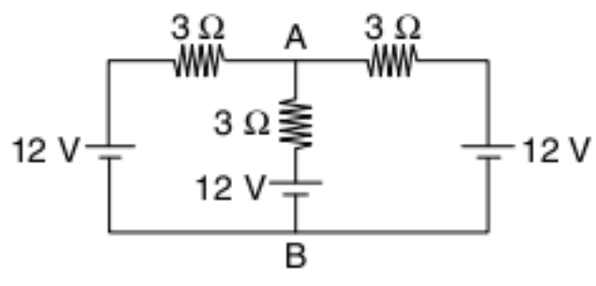
(a) aumento em A e diminuição em V.
(b) aumento em A e o mesmo valor em V.
(c) diminuição em A e aumento em V.
(d) o mesmo valor em A e aumento em V.
(e) os mesmos valores nos dois medidores.

65 **UFMG** A figura ilustra a forma como três lâmpadas estão ligadas a uma tomada. A corrente elétrica no ponto A do fio é i_A e no ponto B é i_B.



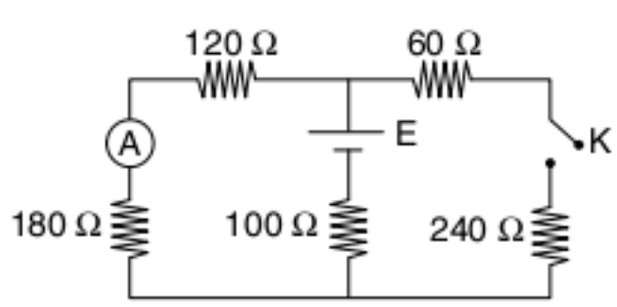
Em um determinado instante, a lâmpada L_2 se queima. Pode-se afirmar que:
(a) a corrente i_A se altera e i_B não se altera.
(b) a corrente i_A não se altera e i_B se altera.
(c) as duas correntes se alteram.
(d) as duas correntes não se alteram.

66 **Mackenzie** No circuito abaixo, os geradores são ideais. A ddp entre os pontos A e B é:



(a) zero (b) 6,0 V (c) 12 V (d) 18 V (e) 36 V

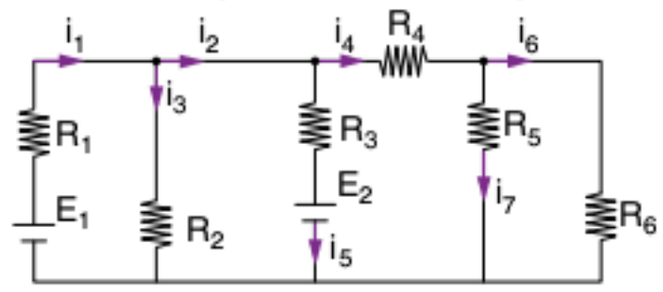
67 **Fuvest** No circuito esquematizado a seguir, o amperímetro acusa uma corrente de 30 mA.



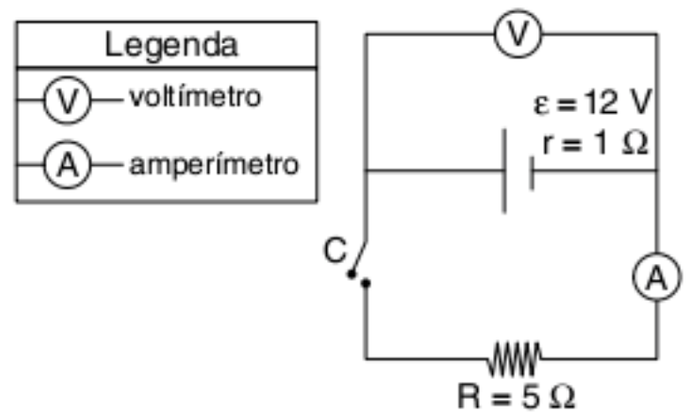
a) Qual o valor da força eletromotriz fornecida pela fonte E?
b) Qual o valor da corrente que o amperímetro passa a registrar quando a chave k é fechada?

68 **UFRRJ** Na figura a seguir, observa-se um circuito elétrico com dois geradores (E_1 e E_2) e alguns resistores. Utilizando a 1ª Lei de Kirchhoff ou lei dos nós, pode-se afirmar que:

(a) $i_1 = i_2 - i_3$
(b) $i_2 + i_4 = i_5$
(c) $i_4 + i_7 = i_6$
(d) $i_2 + i_3 = i_1$
(e) $i_1 + i_4 + i_6 = 0$



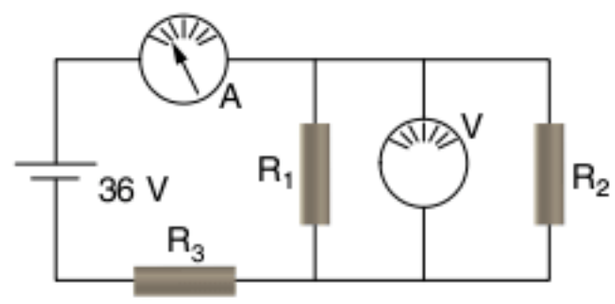
69 **UFRJ** No circuito esquematizado na figura, o amperímetro e o voltímetro são ideais.



Calcule as indicações do amperímetro e do voltímetro:
a) com a chave C aberta.
b) com a chave C fechada.

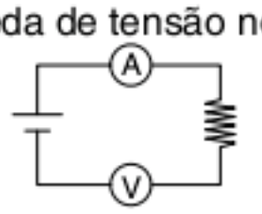
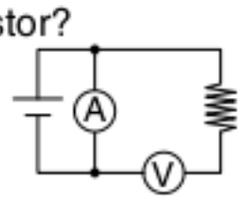
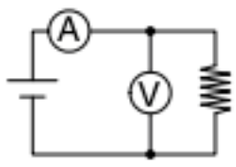
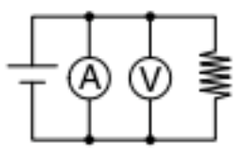
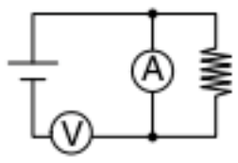
70 **Unitau** Um galvanômetro tem resistência interna de 200 Ω e admite passagem de corrente de até 5,0 mA.
a) Poderia o galvanômetro, sem resistência adicional, ser usado como medidor de tensão? Em que valores?
b) Qual o "shunt" que deve ser associado ao galvanômetro para medir correntes de até 1,0 A?
c) Qual a resistência que deve ser associada ao galvanômetro para ele medir tensão de até $1{,}0 \cdot 10^2$ V.

71 **Puccamp** No circuito representado no esquema a seguir, os resistores R_1, R_2 e R_3 têm valores iguais a 12 ohms.

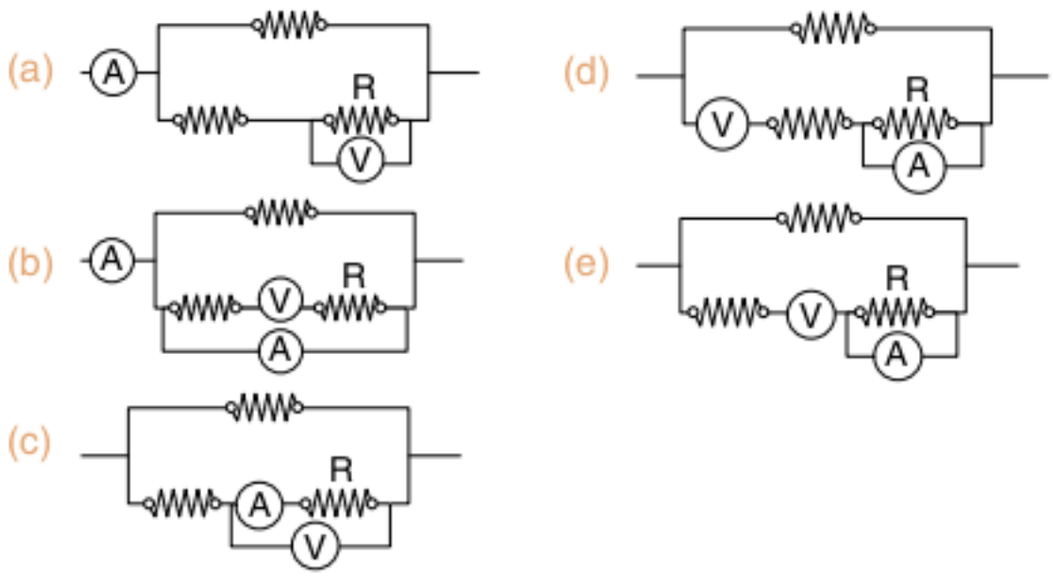


De acordo com o esquema, a leitura do amperímetro A, em ampères, e a leitura do voltímetro V, em volts, são, respectivamente:
(a) 1 e 12 (c) 2 e 12 (e) 4 e 12
(b) 1 e 36 (d) 2 e 24

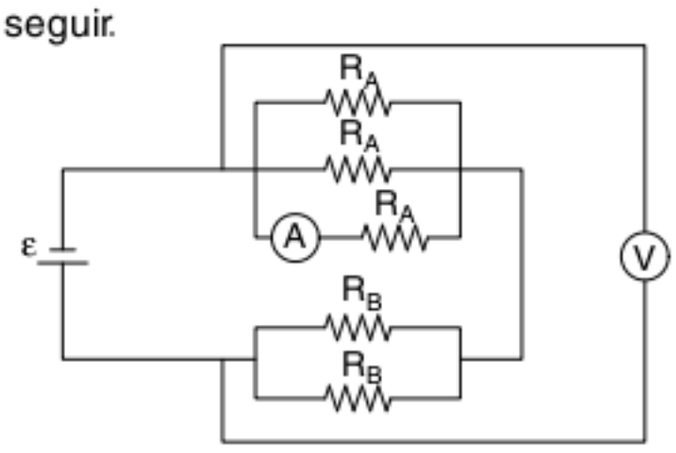
72 **Cesgranrio** Qual das opções a seguir mostra a ligação adequada de um amperímetro A e de um voltímetro V, ambos ideais, de modo a permitir uma correta medida da corrente e da queda de tensão no resistor?

(a) 
(c) 
(e) 
(b) 
(d) 

73 **Cesgranrio** Um voltímetro representado pela letra V e um amperímetro representado pela letra A, ambos ideais, são utilizados para medir a ddp e a intensidade de corrente elétrica de um resistor R. Assinale a opção que indica uma maneira correta de usar esses instrumentos.



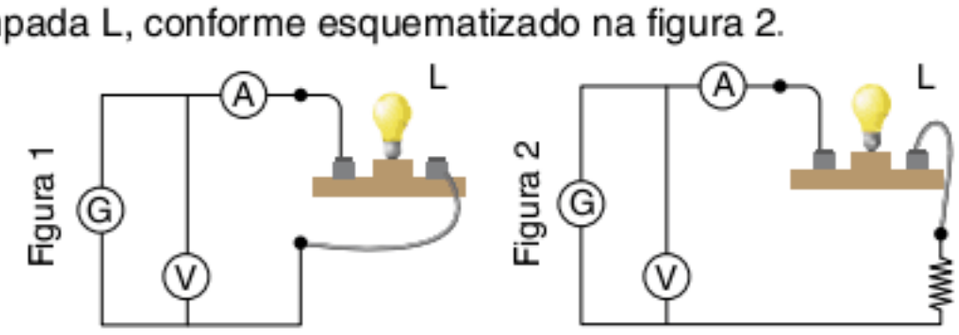
74 **UFU** É dado um circuito elétrico contendo cinco resistores de dois tipos diferentes R_A e R_B. O circuito é alimentado por uma fonte com uma fem (ε) igual a 24 V. Um amperímetro A e um voltímetro V encontram-se ligados ao circuito, conforme esquema a seguir.

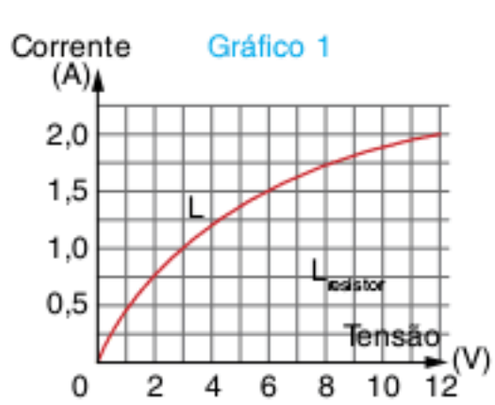


Se $R_A = 12\ \Omega$ e $R_B = 8\ \Omega$, determine:

a) a leitura no voltímetro.
b) a leitura no amperímetro.
c) a potência dissipada em cada um dos resistores.

75 **Fuvest (Adapt.)** A relação entre tensão e corrente de uma lâmpada L, como a usada em automóveis, foi obtida por meio do circuito esquematizado na figura 1, onde G representa um gerador de tensão variável. Foi medido o valor da corrente indicado pelo amperímetro A, para diferentes valores da tensão medida pelo voltímetro V, conforme representado pela curva L no Gráfico 1. O circuito da figura 1 é, então, modificado, acrescentando-se um resistor R de resistência 6,0 Ω em série com a lâmpada L, conforme esquematizado na figura 2.

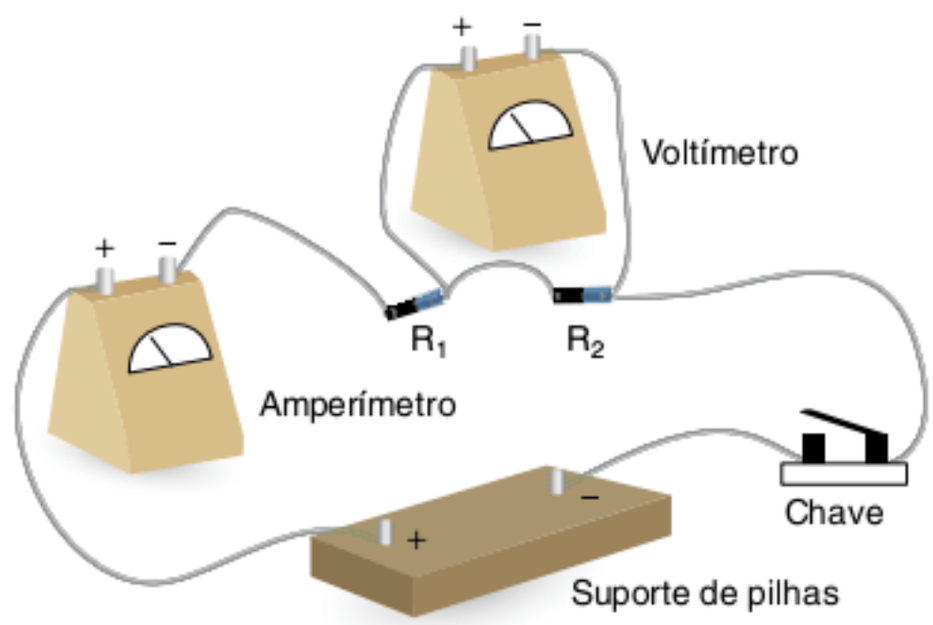




a) Construa o gráfico da potência dissipada na lâmpada, em função da tensão U entre seus terminais, para U variando desde 0 até 12 V.
b) Construa, no gráfico 1, o gráfico da corrente no resistor R em função da tensão U aplicada em seus terminais, para U variando desde 0 até 12 V.
c) Considerando o circuito da figura 2, construa o gráfico da corrente indicada pelo amperímetro em função da tensão U indicada pelo voltímetro, quando a corrente varia desde 0 até 2 A

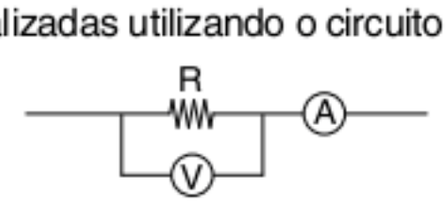
NOTE E ADOTE
O voltímetro e o amperímetro se comportam como ideais.
Na construção dos gráficos, marque os pontos usados para traçar as curvas.

76 **Unifesp (Adapt.)** A montagem experimental representada na figura se destina ao estudo de um circuito elétrico simples.



a) Usando símbolos convencionais para cada componente, represente esquematicamente esse circuito.
b) Sabendo que $R_1 = 100\ \Omega$ e $R_2 = 200\ \Omega$ e que no suporte de pilhas são colocadas duas pilhas em série, de força eletromotriz 1,5 V cada, determine as leituras no amperímetro e no voltímetro quando a chave é fechada. (Admita que as resistências internas das pilhas, dos fios de ligação e dos medidores não interferem nessas leituras.

77 **Unesp** Um estudante utiliza-se das medidas de um voltímetro V e de um amperímetro A para calcular a resistência elétrica de um resistor e a potência dissipada nele. As medidas de corrente e voltagem foram realizadas utilizando o circuito da figura.



O amperímetro indicou 3 mA e o voltímetro 10 V. Cuidadoso, ele lembrou-se de que o voltímetro não é ideal e que é preciso considerar o valor da resistência interna do medidor para se calcular o valor da resistência R. Se a especificação para a resistência interna do aparelho é 10 kΩ, calcule:

a) o valor da resistência R obtida pelo estudante.
b) a potência dissipada no resistor.

TEXTO COMPLEMENTAR

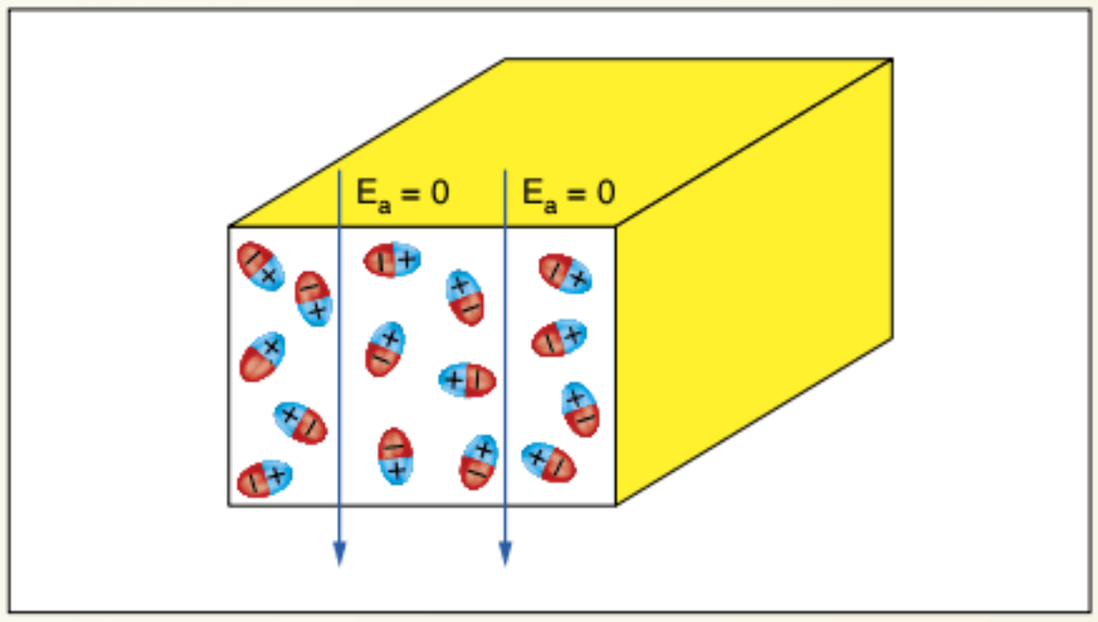
Os dielétricos e os capacitores

Influência do dielétrico na capacitância de um capacitor plano de placas paralelas

Ao introduzirmos um material dielétrico entre as placas de um capacitor ligado a uma fonte de tensão U constante, observamos um aumento da quantidade de cargas induzidas nas placas e consequentemente um aumento da energia potencial elétrica armazenada. Se fizermos o mesmo procedimento com o capacitor carregado, porém desligado da bateria, acontece exatamente o oposto, ou seja, diminuição da energia potencial elétrica armazenada. A pergunta é: por quê?

Dielétricos sob a ação de campos elétricos

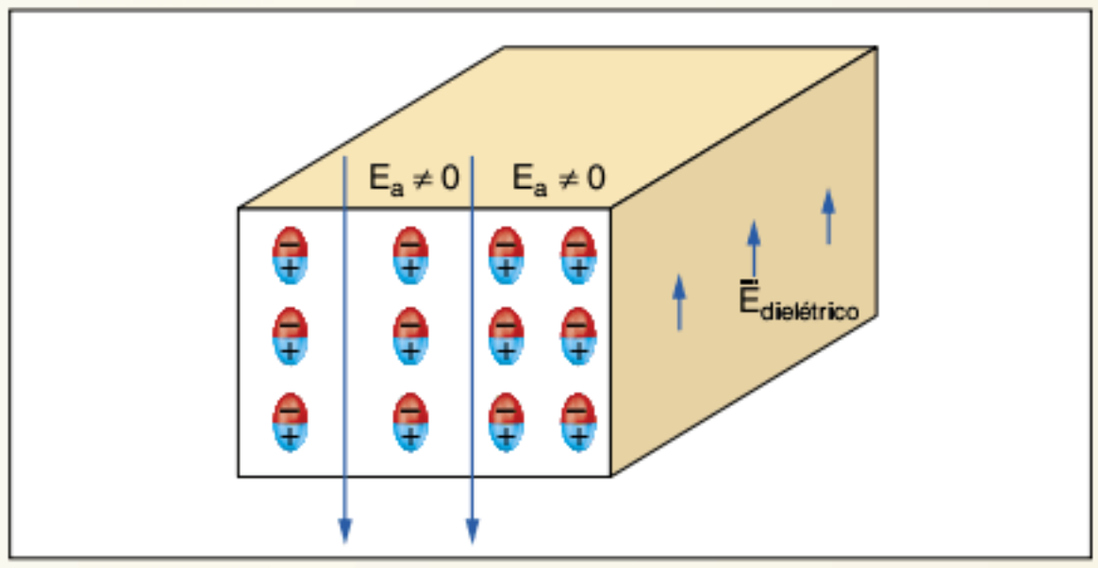
Se quisermos responder a essa pergunta, teremos que recorrer à teoria atômico-molecular e analisar um bloco de um material dielétrico polar em forma de um paralelepípedo, conforme mostra a figura a seguir:



Dielétrico polar sem a aplicação de campo elétrico externo.

Este material, como pode ser observado, apresenta vários dipolos elétricos na sua estrutura molecular, cada um deles gerando um campo elétrico E. Como esses dipolos estão orientados de forma aleatória, o campo elétrico resultante em seu interior é nulo, pois o somatório vetorial dos campos E de cada dipolo é nulo.

Se então aplicarmos um campo elétrico externo E_a, esses dipolos tendem a se alinhar com o campo elétrico externo, conforme mostra a figura a seguir:



Dielétrico sob a ação do campo elétrico externo.

O efeito final sobre o campo elétrico resultante é tal que o campo elétrico externo e o gerado pelo dielétrico têm mesma direção, porém sentidos opostos, tal que: $E_{resultante} = E_a - E_{dielétrico}$

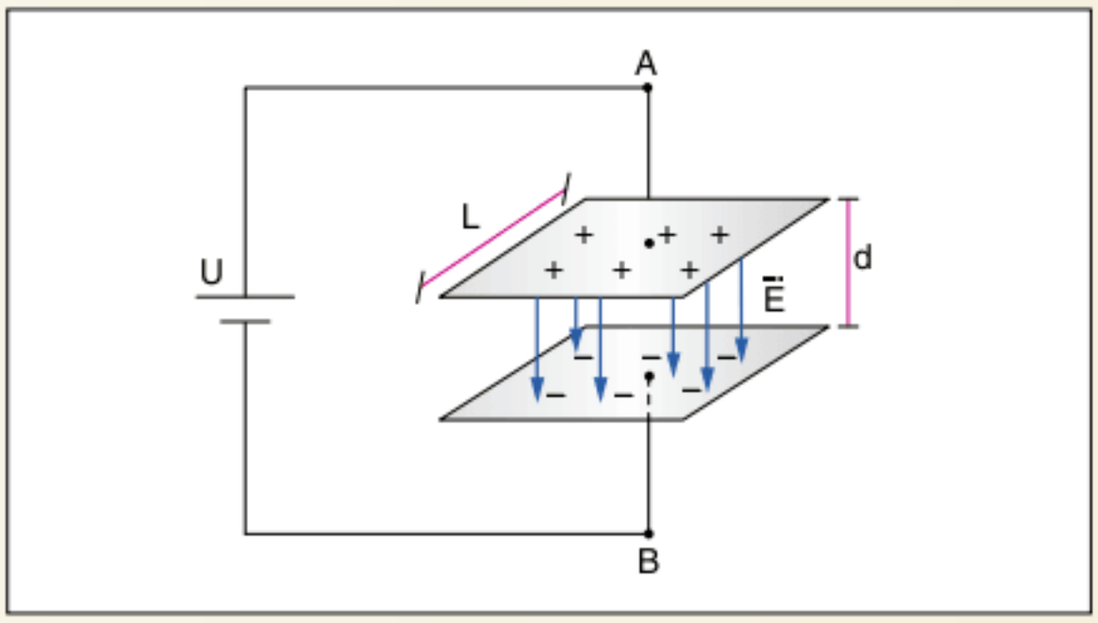
Introdução de um dielétrico em um capacitor plano ligado a uma fonte de tensão

Tomemos um capacitor de placas paralelas e quadradas de lado L, no vácuo, ligado a uma fonte de tensão U.

Como pode ser observado, as cargas que aparecem nas placas superior e inferior do capacitor criam um campo elétrico E, tal que: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

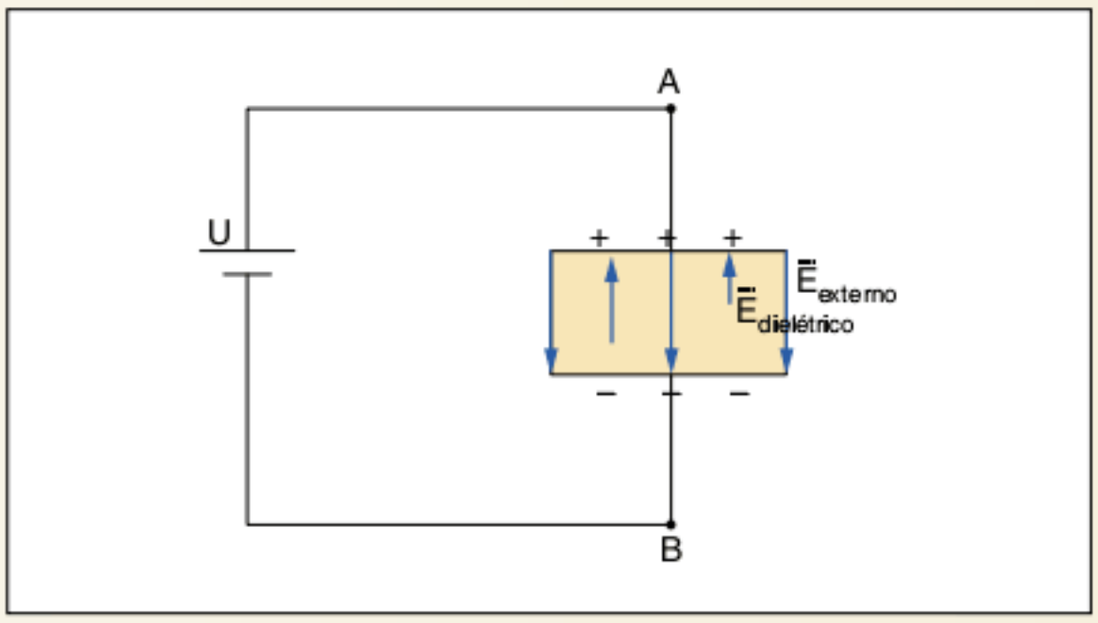
Em que σ é a densidade superficial de cargas elétricas induzidas nas placas do capacitor e ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo. O campo elétrico no interior do capacitor, considerado uniforme, nos leva a escrever que:

$$U = E.d$$



Capacitor plano.

Em que U é a tensão mantida pela bateria, suposta constante, e d é a distância entre as placas, também mantida constante. Assim sendo, o campo elétrico resultante no interior das placas deve-se manter constante. Ao se inserir o dielétrico, há uma tendência de diminuição do campo elétrico resultante devido ao aparecimento de um campo elétrico contrário induzido no dielétrico, o que pode ser observado na figura a seguir:



Capacitor com dielétrico introduzido entre as suas placas.

Porém, como a tensão é constante, é necessário que o campo elétrico se mantenha também constante. Isto é conseguido por meio de um aumento da carga elétrica armazenada pelo capacitor, onde a nova carga Q' se relaciona com a carga inicial Q pela expressão: $Q' = k.Q$.

Em que k é a constante dielétrica do meio que é a razão entre a permissividade elétrica do meio e a permissividade do vácuo, ou seja: $k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

Com o aumento da carga armazenada, mantendo-se a mesma diferença de potencial, tem-se um aumento da energia potencial elétrica armazenada, pois:

$$\text{Energia} = \frac{Q.U}{2}$$

Em resumo, ao introduzir um dielétrico entre as placas de um capacitor plano ligado a uma fonte de tensão constante, tem-se:

- manutenção da diferença de potencial elétrico.
- aumento da carga elétrica armazenada.
- aumento da energia potencial elétrica armazenada.

Toda esta análise pode ser facilmente realizada utilizando-se das expressões para a capacitância do capacitor plano, da carga armazenada e da energia potencial elétrica armazenada. Observe:

$$C = \frac{k.\varepsilon_0.A}{d}$$

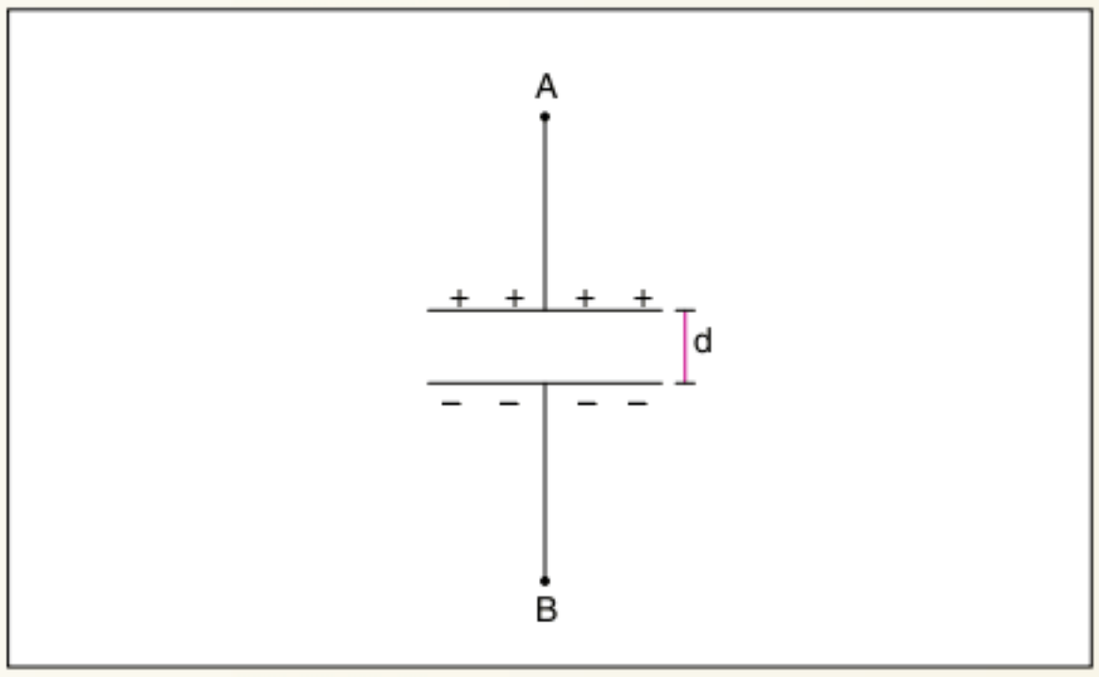
$$Q = C.U$$

$$\text{Energia} = \frac{C.U^2}{2}$$

Ao introduzirmos um dielétrico (aumentarmos o k), temos um aumento de capacitância, que leva a um aumento da carga elétrica armazenada e da energia potencial elétrica armazenada.

Introdução de um dielétrico em um capacitor plano carregado, desligado da fonte de tensão

Tomemos um capacitor de capacitância C, carregado com uma carga Q e desligado da fonte de tensão. Nesse caso, a carga do capacitor é a grandeza invariável.



Capacitor carregado desligado da fonte de tensão.

Aqui, o campo elétrico também pode ser considerado uniforme, permitindo-nos escrever: $U = E.d$

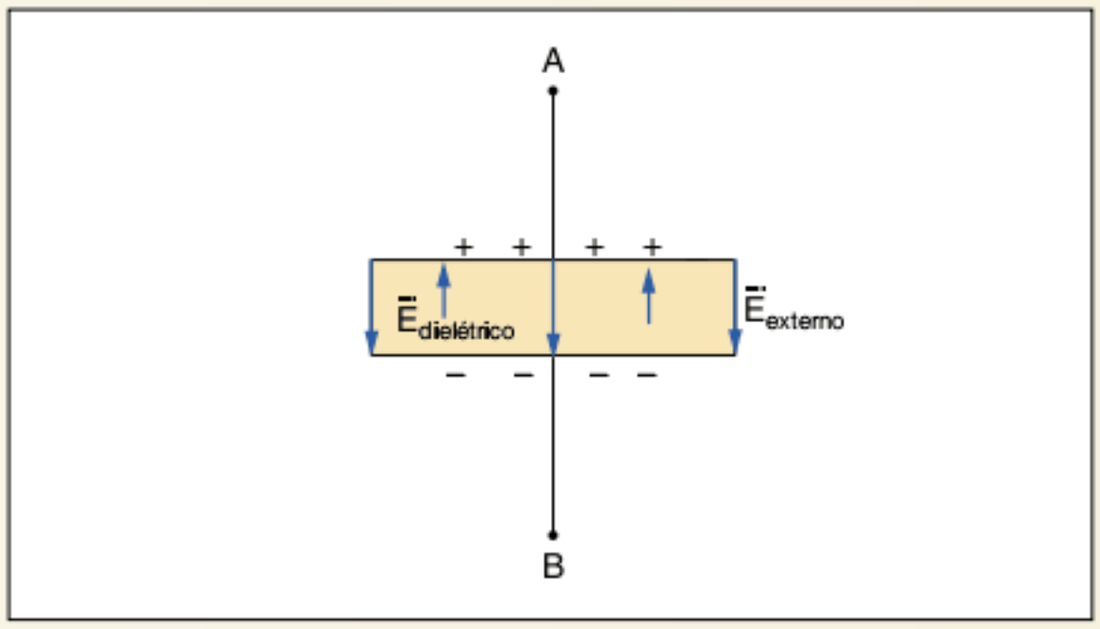
Porém, diferentemente da situação anterior, a tensão não é mais constante, já que o capacitor não mais se encontra ligado na bateria. Assim sendo, ao introduzirmos o dielétrico, há uma redução do campo elétrico resultante, devido ao aparecimento do campo elétrico gerado pelo dielétrico. Dessa forma, ao inserirmos o dielétrico, temos uma diminuição da diferença do campo elétrico entre as placas do capacitor, tal que: $E = \frac{E_0}{k}$

Em que E_0 representa o campo elétrico entre as placas do capacitor antes da inserção do dielétrico e E representa o campo elétrico após a inserção.

Consequentemente, a tensão U entre as placas do capacitor será decrescida do mesmo fator, ou seja: $U = \frac{U_0}{k}$

Em que U_0 e U são as tensões entre as placas antes e depois da inserção do dielétrico.

Essa situação está ilustrada na figura a seguir:



Capacitor carregado, desligado da fonte de tensão com dielétrico entre as suas placas.

Assim sendo, a energia potencial elétrica armazenada diminui ao inserirmos o dielétrico, pois:

$$\text{Energia} = \frac{Q.U}{2}$$

Em resumo, ao introduzir um dielétrico entre as placas de um capacitor plano carregado e desligado da fonte de tensão, tem-se:

- manutenção da carga armazenada.
- queda da diferença de potencial entre as placas do capacitor.
- diminuição da energia potencial elétrica armazenada.

Da mesma forma, a análise pode ser facilmente realizada utilizando-se das expressões para a capacitância do capacitor plano, da carga armazenada e da energia potencial elétrica armazenada.

Observe:

$$C = \frac{k.\varepsilon_0.A}{d}$$

$$Q = C.U$$

$$\text{Energia} = \frac{Q^2}{2C}$$

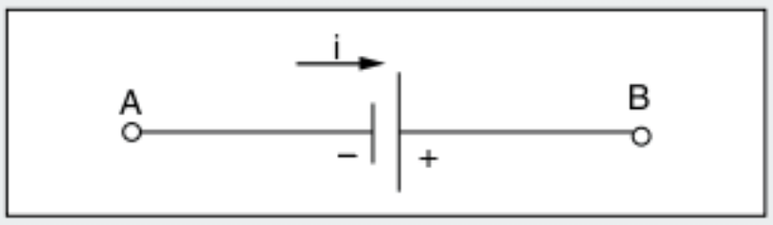
Ao introduzirmos um dielétrico (aumentarmos o k), temos um aumento de capacitância, que leva a uma queda da diferença de potencial e da energia potencial elétrica armazenada.

A mesma análise pode ser feita ao se variar a distância entre as placas, com o capacitor ligado e desligado da fonte de tensão. Fica como exercício esta análise.

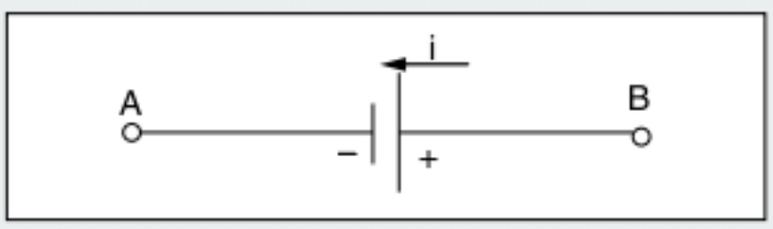
RESUMINDO

Um **circuito elétrico** é um caminho fechado, formado (composto de) por elementos elétricos como resistores, geradores, lâmpadas ..., por onde a corrente elétrica passa.

Geradores são dispositivos que convertem qualquer forma de energia em energia elétrica e têm como objetivo manter a diferença de potencial (U) constante nos terminais do circuito. Em um circuito elétrico, o gerador pode ser representado como:



Dispositivos que convertem energia elétrica em outra forma de energia, como aparelhos de som e ventiladores, são chamados **receptores**. Em um circuito elétrico, o receptor pode ser representado como:

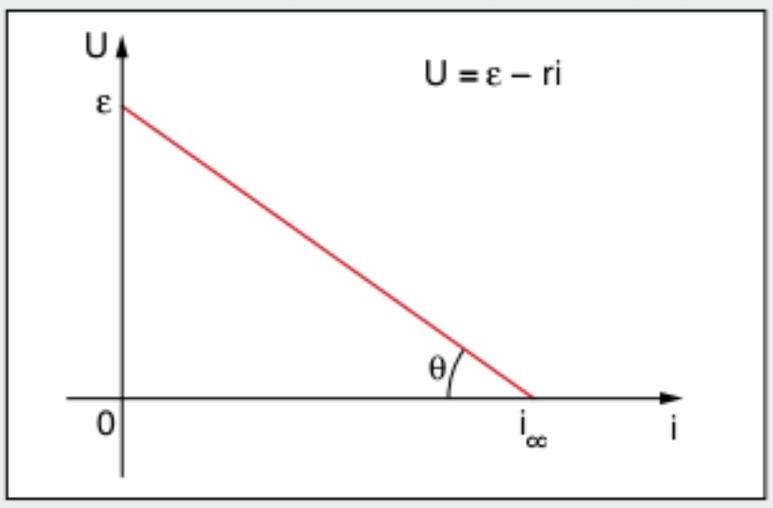


O sentido da **corrente elétrica** em um circuito é, por convenção, definido pelo fluxo dos portadores de cargas positivas, do polo positivo para o negativo do gerador. No interior do gerador a corrente elétrica vai do polo negativo para o positivo, realizando um movimento contra o campo elétrico, com gasto de energia. A tensão ε entre as placas do gerador é denominada **força eletromotriz**.

Para um **gerador ideal** $U = \varepsilon$.

Geradores reais dissipam energia, pode-se dizer que possuem resistência interna r. Dessa forma, a tensão (U) disponível para o circuito é menor do que sua força eletromotriz (ε).

$$U = \varepsilon - R.\,i$$



Para um determinado valor de corrente, a ddp entre os terminais do gerador é zero. Esse valor de corrente é denominado corrente de curto-circuito (i_{cc}), dada por:

$$i_{cc} = \frac{\varepsilon}{r}$$

Havendo uma resistência acoplada ao gerador, a corrente elétrica pode ser calculada pela **Lei de Pouillet**.

$$i - \frac{\varepsilon}{r + R}$$

O gerador pode fornecer uma **potência elétrica total** $P_t = \varepsilon i$. Parte dessa potência é dissipada na resistência interna do gerador:

$$P_d = r.\,i^2$$

O que resta é a **potência útil** ou disponível, relacionada com a ddp nos terminais do circuito:

$$P_u = U.\,i$$

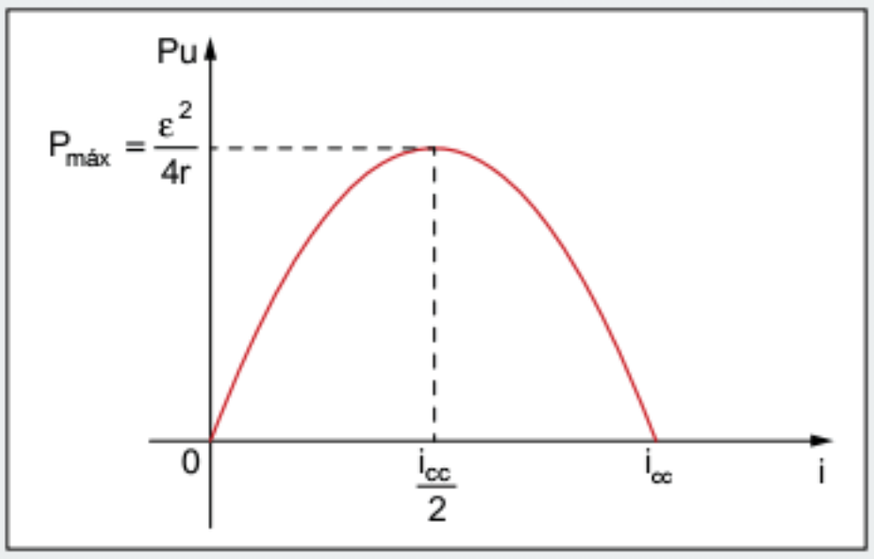
Do **Princípio da conservação da energia**,

$$P_u = P_t - P_d$$

$$P_d - \varepsilon.\,i - r.\,i^2$$

A potência máxima é obtida quando a corrente que atravessa o gerador é a metade da corrente de curto-circuito.

$$P_{máx} = \frac{\varepsilon^2}{4.\,r}$$

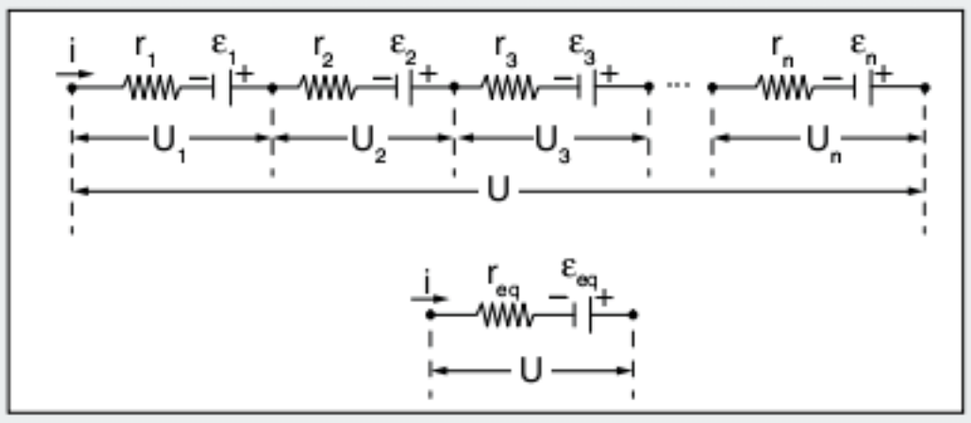


O **rendimento** (η) de um gerador é definido pela relação:

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{U.\,i}{\varepsilon.\,i} = \frac{U}{\varepsilon}$$

Geradores, assim como os resistores, podem ser associados em série e em paralelo.

Uma **associação em série** tem como objetivo aumentar a potência fornecida ao circuito com o aumento da fem.

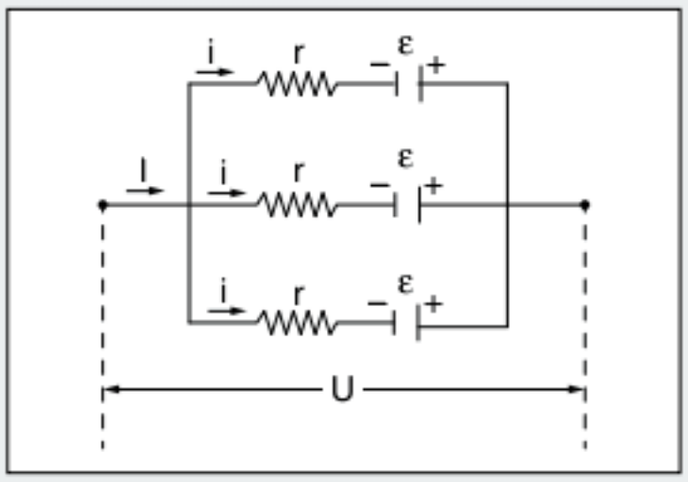


$$U = \varepsilon_{eq} - r_{eq}.\,i$$

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n$$

$$r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n$$

Associações em paralelo provocam o aumento da potência fornecida ao sistema, nesse caso, com o aumento da corrente que circula pelo circuito.



$$U = \varepsilon_{eq} - r_{eq}.\,n.\,i$$

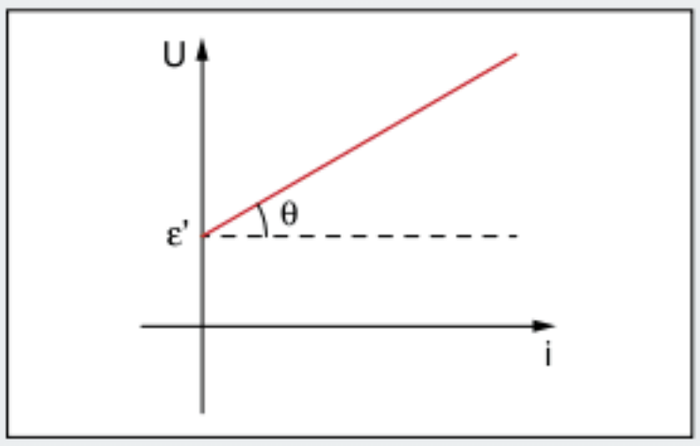
$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon$$

$$r_{eq} = \frac{r}{n}$$

Receptores elétricos

Para um receptor real:

$$U = \varepsilon' + r'.i$$



O **rendimento** (η) de um receptor é dado pela relação:

$$\eta_{receptor} = \frac{P_u}{P_r} = \frac{\varepsilon'.i}{U.i} = \frac{\varepsilon'}{U}$$

Em um circuito podem ser adicionados elementos com a função de armazenar energia potencial elétrica, com o armazenamento de cargas elétricas, são os **capacitores**.

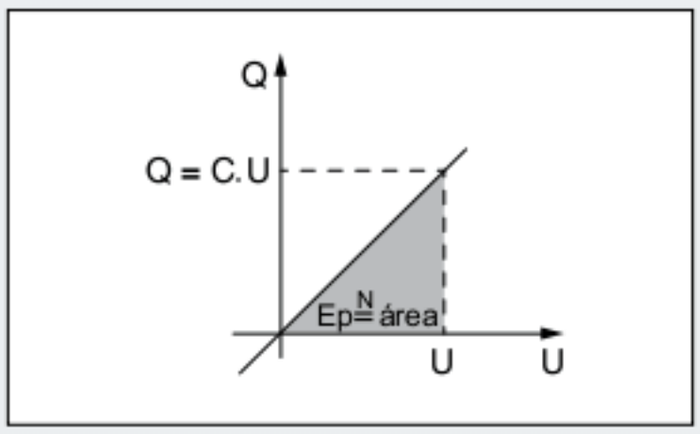
A razão entre a quantidade de carga armazenada (Q) e a tensão aplicada entre os terminais (U) define a **capacitância** (C) de um capacitor.

$$C = \frac{Q}{U}$$

A capacitância também pode ser calculada se a geometria dos condutores e as propriedades do meio entre eles forem conhecidas. Para um capacitor de placas paralelas

$$C = \frac{k.\varepsilon_0.A}{d},$$

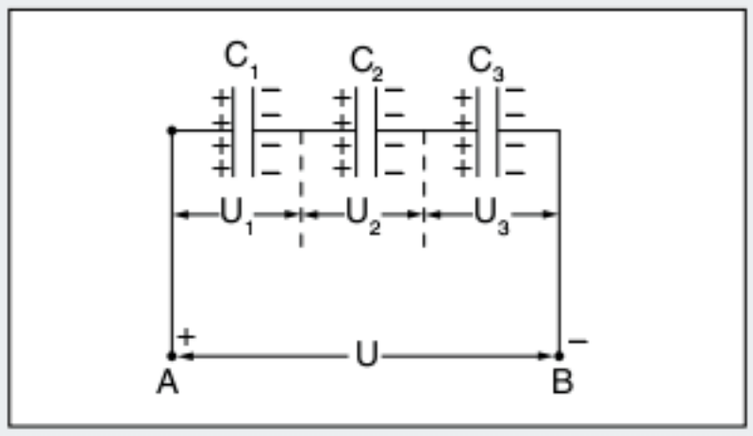
K é a constante dielétrica do meio, ε é a permissividade elétrica do vácuo, A é a área das placas e d é a distância entre elas.



$$E = \frac{Q.U}{2} = \frac{C.U^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Assim como os resistores e geradores, capacitores podem ser associados em série e paralelo em um circuito elétrico.

Em uma associação de **capacitores em série**, todos os capacitores possuem a mesma carga Q.

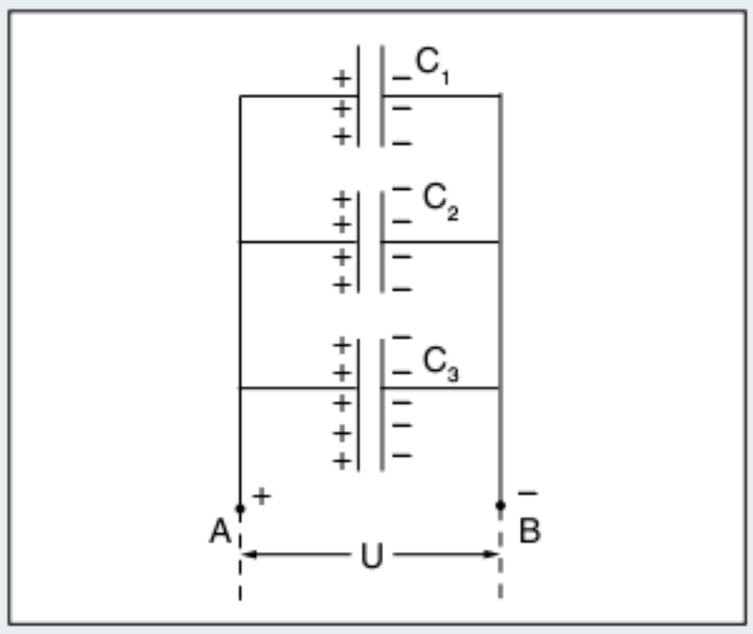


$$U = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n}$$

$$E_P = \frac{Q^2}{2C_{eq}}$$

Capacitores associados em **paralelo** apresentam a mesma tensão.



$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... + Q_n$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n$$

$$E_P = \frac{C_{eq}.U^2}{2}$$

Em um circuito elétrico alimentado por uma tensão constante U, a corrente que atravessa um capacitor é igual a zero.

Para o cálculo de correntes e tensões em circuitos elétricos usam-se as **Leis de Kirchhoff**:

Lei dos nós ou **Lei das correntes**: o somatório das correntes que chegam a um nó é igual ao somatório das correntes que saem deste nó.

Lei das malhas ou **Lei das tensões**: ao se percorrer uma malha, o somatório algébrico das ddps é nulo.

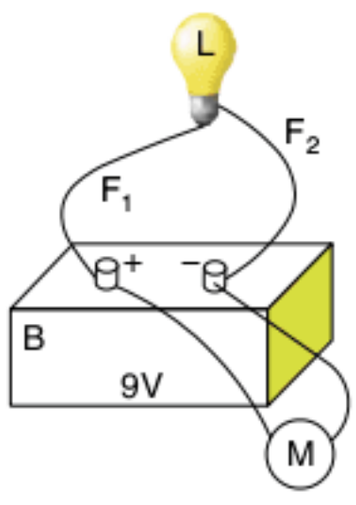
QUER SABER MAIS?

SITE

- Circuitos elétricos
  <www.if.usp.br/gref/eletro/eletro2.pdf>.

Exercícios complementares

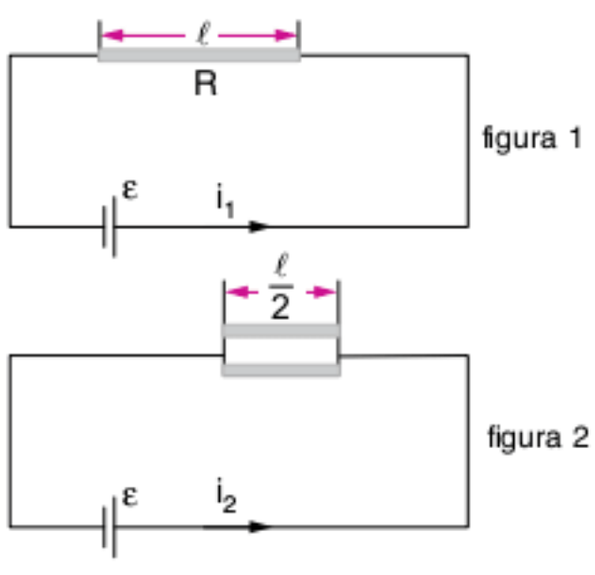
1 **Fuvest** Uma lâmpada L está ligada a uma bateria B por 2 fios, F_1 e F_2, de mesmo material, de comprimentos iguais e de diâmetros d e 3d, respectivamente. Ligado aos terminais da bateria, há um voltímetro ideal M (com resistência interna muito grande), como mostra a figura. Nessas condições, a lâmpada está acesa, tem resistência $R_L = 2{,}0\ \Omega$ e dissipa uma potência igual a 8,0 W. A força eletromotriz da bateria é $\varepsilon = 9{,}0$ V e a resistência do fio F_1 é $R_1 = 1{,}8\ \Omega$.



Determine o valor da:

a) corrente I, em ampères, que percorre o fio F_1.
b) potência P_2, em watts, dissipada no fio F_2.
c) diferença de potencial V_M, em volts, indicada pelo voltímetro M.

2 Por uma bateria de fem (ε) e resistência interna desprezível, quando ligada a um pedaço de fio de comprimento ℓ e resistência R, passa a corrente i_1 (figura 1).
Quando o pedaço de fio é cortado ao meio e suas metades ligadas à bateria, a corrente que passa por ela é i_2 (figura 2).

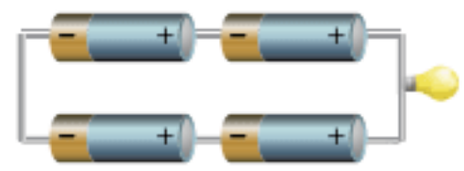


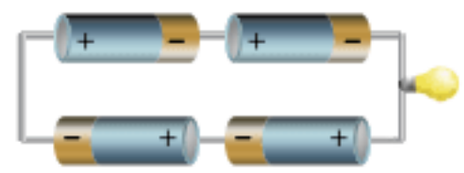
Nessas condições, e desprezando a resistência dos fios de ligação, determine:

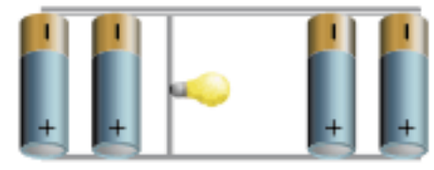
a) a resistência equivalente à associação dos dois pedaços de fio, na figura 2, e
b) a razão $\frac{i_2}{i_1}$.

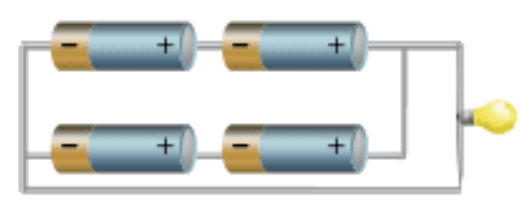
3 **Fuvest** Com 4 pilhas ideais de 1,5 V, uma lâmpada de 6,0 V e fios de ligação, podem-se montar os circuitos esquematizados abaixo. Em qual deles a lâmpada brilhará mais intensamente?

(a)

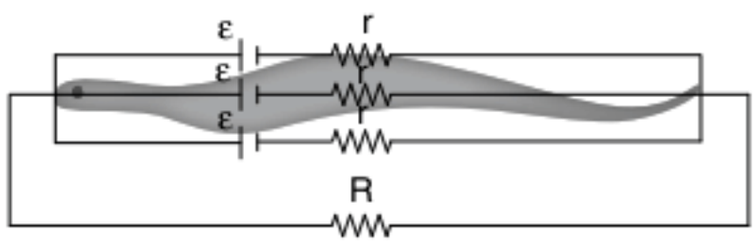
(b)


(c)


(d)


(e)


4 **UFBA** O peixe-elétrico que habita os rios da região Amazônica pode matar pequenas presas com pulsos de corrente elétrica. Nesses peixes, que possuem corpo cilíndrico de comprimento L e diâmetro D, a corrente elétrica é gerada a partir de células musculares denominadas eletroplacas, que podem ser organizadas como uma associação de três geradores ligados em paralelo, conforme a figura.
Nesse circuito, cada gerador tem força eletromotriz ε e resistência interna r, e a resistência oferecida pela água é R.



De acordo com essas informações, é correto afirmar que:

01 a resistividade elétrica do peixe é igual a $\frac{\pi D^2 r}{12L}$.
02 a resistência interna do gerador equivalente à associação é igual a r.
04 a força eletromotriz do gerador equivalente à associação é igual a ε.
08 a diferença de potencial produzida pelo peixe é igual a $\frac{\varepsilon . r}{R}$.
16 a corrente elétrica flui, de acordo com o sentido convencional, da cabeça para a cauda e daí para a água, na vizinhança do corpo do peixe.
32 a potência elétrica dissipada internamente pelo peixe durante uma descarga elétrica é igual a $3r\left(\frac{\varepsilon}{3R + r}\right)^2$.

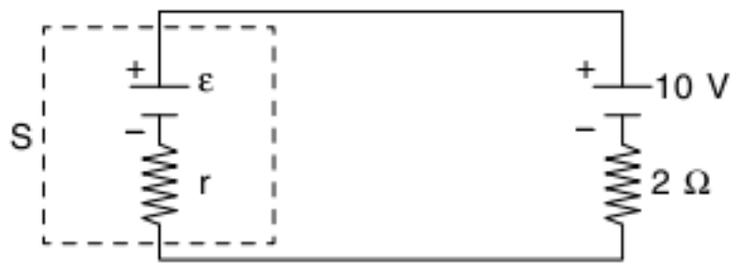
Soma = ☐

5 **FEI-SP** Com uma bateria de fem $E_1 = 21$ V e resistência interna $r_1 = 3{,}0\ \Omega$, deseja-se acionar um pequeno motor de corrente de fcem $E_2 = 5{,}0$ V e resistência interna $r_2 = 2{,}0\ \Omega$. Despreze a resistência dos fios de ligação e calcule a resistência que deve ser associada em paralelo com o motor para que a corrente nele seja de 2,0 A.

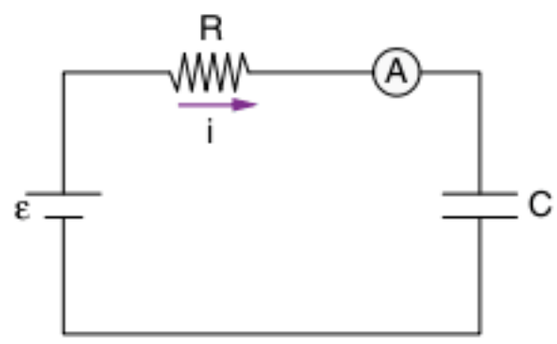
6 **ITA** A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria é de 8,5 V, quando há uma corrente que a percorre, internamente, do terminal negativo para o positivo, de 3,0 A. Por outro lado, quando a corrente que a percorre internamente for de 2,0 A, indo do terminal positivo para o negativo, a diferença de potencial entre seus terminais é de 11 V. Nessas condições, a resistência interna da bateria, expressa em ohms, e a sua força eletromotriz, expressa em volts, são, respectivamente:

(a) 2,0 e 100 (b) 0,50 e 10 (c) 0,50 e 12 (d) 1,5 e 10 (e) 5,0 e 10

7 **FEI-SP** O gerador S indicado fornece a máxima potência e a corrente no circuito vale i = 2 A. Calcule os valores de ε e r.



8 **Osec-SP** No circuito da figura, qual é a carga (em coulombs) armazenada no capacitor quando o amperímetro marca corrente i = 0,2 A? O gerador e o amperímetro são ideais. Dados: E = 12 V; R = 10 Ω; C = $2 \cdot 10^{-3}$ F.



(a) $3 \cdot 10^{-2}$ C (b) $2 \cdot 10^{-2}$ C (c) 10^{-2} C (d) 10^{-3} C (e) $2 \cdot 10^{-3}$ C

9 Nas condições da questão anterior, assinale a alternativa que corresponde à tensão elétrica sob o capacitor:

(a) 10 V (b) 2 V (c) 12 V (d) 0 V (e) 8 V

10 **ITA** Dois condensadores, um de capacidade C_1 carregado com carga Q e outro de capacidade C_2 descarregado, são conectados em paralelo. Quando o equilíbrio for estabelecido, as cargas dos condensadores serão:

(a) $Q_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_1} Q$ e $Q_2 = \frac{C_1 + C_2}{C_2} Q$

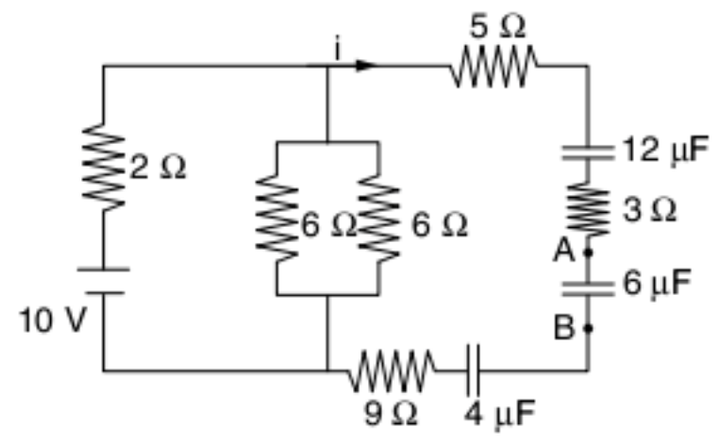
(b) $Q_1 = \frac{C_1 - C_2}{C_1} Q$ e $Q_2 = \frac{C_1 - C_2}{C_2} Q$

(c) $Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q$ e $Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q$

(d) $Q_1 = \frac{C_1}{C_1 - C_2} Q$ e $Q_2 = \frac{C_2}{C_1 - C_2} Q$

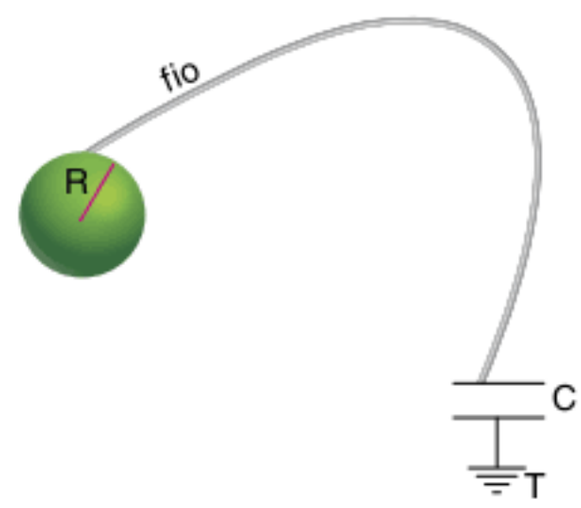
(e) $Q_1 = Q_2 = \frac{C_1}{C_2} Q$

11 **Mackenzie-SP** No circuito elétrico esquematizado, os valores da diferença de potencial entre os pontos A e B e a intensidade de corrente i valem, respectivamente:



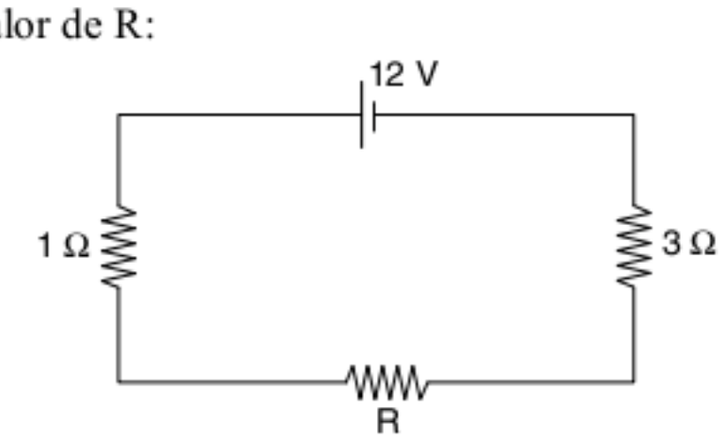
(a) 2 V e zero. (b) 1 V e zero. (c) zero e zero. (d) 2 V e 1 A. (e) 2 V e 2 A.

12 **UFC** A figura a seguir mostra uma esfera condutora, de raio R, ligada por um fio muito longo e de capacitância nula, a uma das placas de um capacitor plano de placas paralelas e de capacitância C. A outra placa do capacitor está ligada à terra no ponto T (considere nulo o potencial em T). Antes de o fio ser ligado, o capacitor estava eletricamente neutro e a esfera estava eletrizada, de modo que o potencial $V_0 = \frac{kQ_0}{R}$, na sua superfície, era de $3{,}0 \cdot 10^5$ volts. Suponha que o sistema (esfera + + fio + capacitor) está no vácuo e que a constante k é igual a $9{,}0 \cdot 10^9$ N·m²/C². O raio R é igual a 0,30 m e a capacitância C é igual a 300 pF (1 pF = $1 \cdot 10^{-12}$ F). Restabelecido o equilíbrio, após o fio ser ligado, determine:



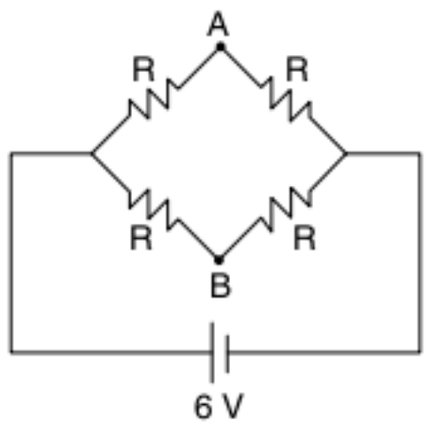
a) o valor da carga do capacitor, expresso em μC (1 μC = $1 \cdot 10^{-6}$ C).
b) a diferença de potencial entre as placas do capacitor, medida em volts.

13 **PUC-SP** Considerando-se o circuito a seguir e sabendo-se que a diferença de potencial através do resistor R é 4 V, determine o valor de R:



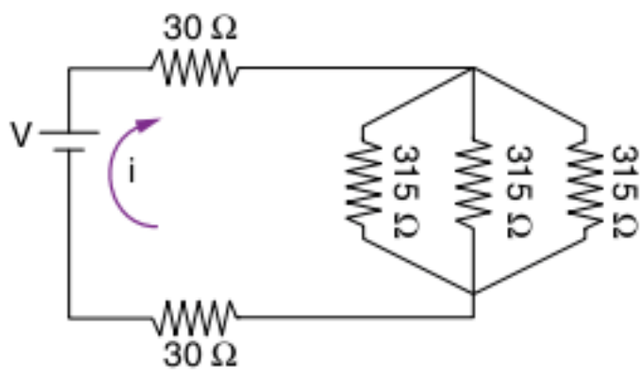
(a) 2 Ω (b) 8 Ω (c) $\frac{4}{3}$ Ω (d) 12 Ω (e) 4 Ω

14 **Fuvest** O circuito a seguir mostra uma bateria de 6 V e resistência interna desprezível, alimentando quatro resistências, em paralelo duas a duas. Cada uma das resistências vale R = 2 Ω.

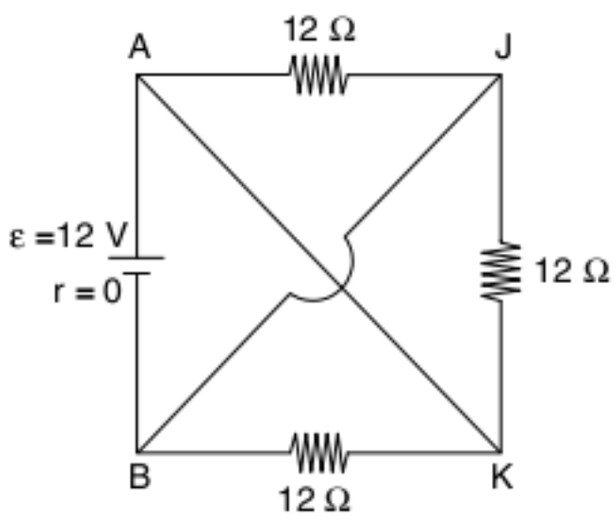


a) Qual o valor da tensão entre os pontos A e B?
b) Qual o valor da corrente que passa pelo ponto A?

15 **UFPE** Quantos resistores de 315 Ω devem ser acrescentados no circuito a seguir, em paralelo, aos de 315 Ω já existentes, para que a corrente total de i dobre de valor?

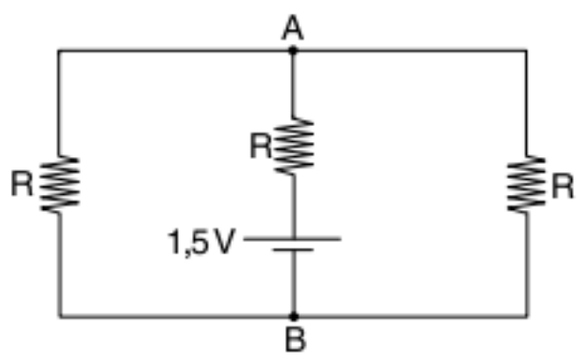


16 **UFRJ** No circuito esquematizado na figura, os fios AK e BJ têm resistências desprezíveis (quando comparadas a 12 Ω) e não se tocam.



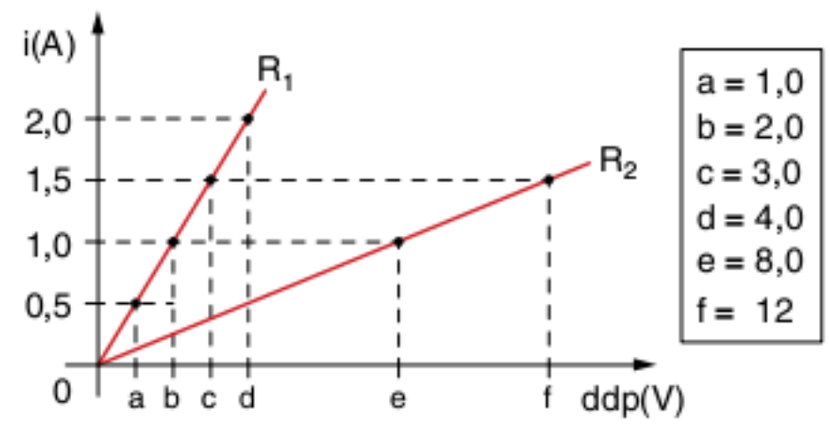
a) Calcule a resistência equivalente entre A e B.
b) Calcule as intensidades das correntes nos fios AK e BJ.

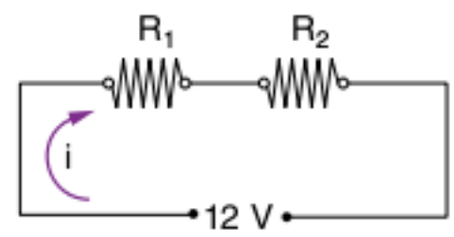
17 **Vunesp** Três resistores idênticos, cada um com resistência R, e uma pilha de 1,5 V e resistência interna desprezível são ligados como mostra a figura.



a) Determine a diferença de potencial entre A e B.
b) Supondo R = 100 Ω, determine a intensidade da corrente elétrica que passa pela pilha.

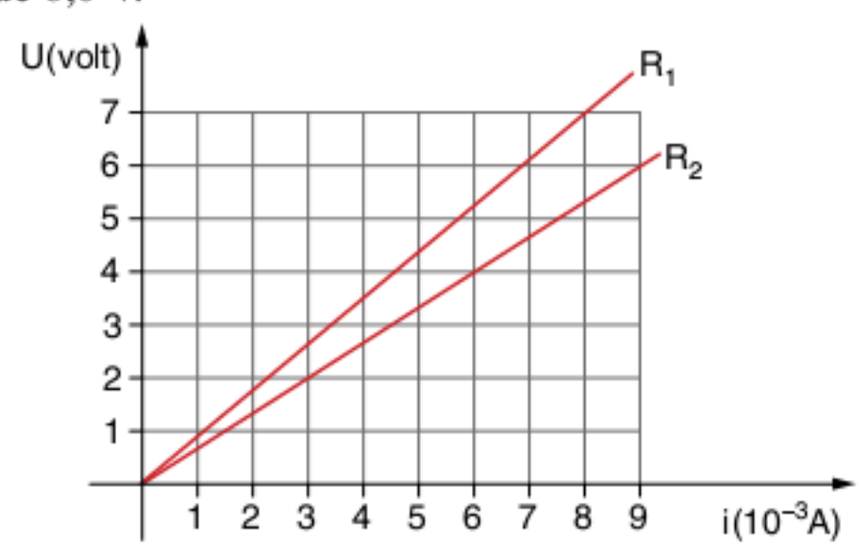
18 **Cesgranrio** O gráfico a seguir representa as intensidades das correntes elétricas que percorrem dois resistores ôhmicos R_1 e R_2, em função da ddp aplicada em cada um deles. Abaixo do gráfico, há o esquema de um circuito no qual R_1 e R_2 estão ligados em série a uma fonte ideal de 12 V.

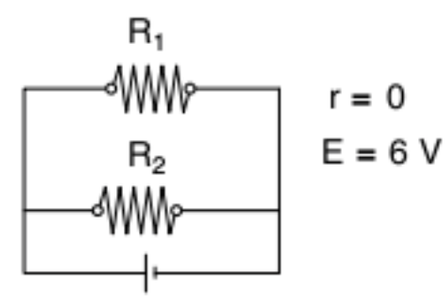




Neste circuito, a intensidade da corrente elétrica que percorre R_1 e R_2 vale:
(a) 0,8 A (b) 1,0 A (c) 1,2 A (d) 1,5 A (e) 1,8 A

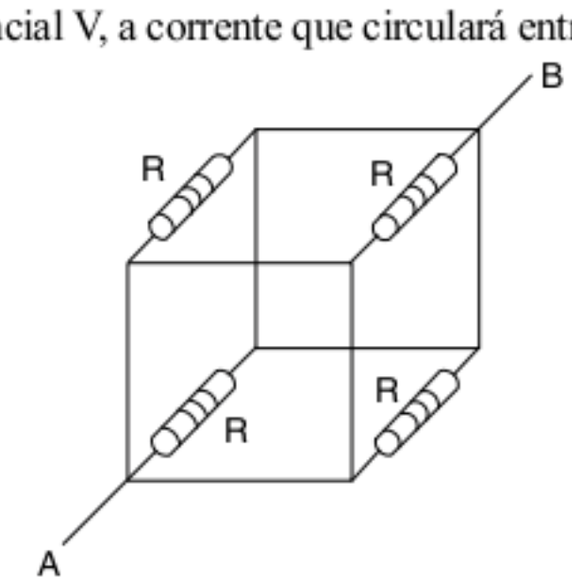
19 **Cesgranrio** O gráfico a seguir mostra as curvas características de dois resistores R_1 e R_2. A figura a seguir do gráfico mostra um circuito montado com esses resistores e um gerador ideal de 6,0 V.





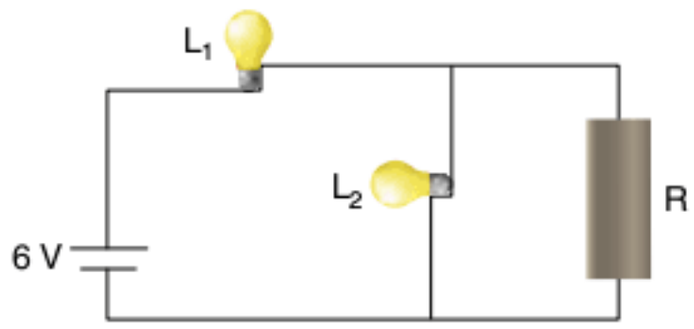
A intensidade da corrente elétrica fornecida pelo gerador a esse circuito vale, em mA:
(a) 0,016 (b) 0,8 (c) 3,9 (d) 8,0 (e) 16

20 **Fuvest** Considere um circuito formado por 4 resistores iguais, interligados por fios perfeitamente condutores. Cada resistor tem resistência R e ocupa uma das arestas de um cubo, como mostra a figura a seguir. Aplicando entre os pontos A e B uma diferença de potencial V, a corrente que circulará entre A e B valerá:



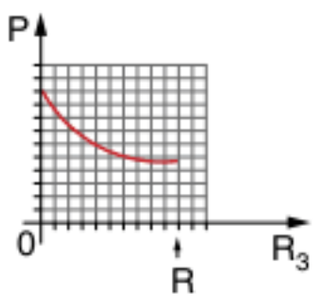
(a) $\frac{4V}{R}$ (b) $\frac{2V}{R}$ (c) $\frac{V}{R}$ (d) $\frac{V}{2R}$ (e) $\frac{V}{4R}$

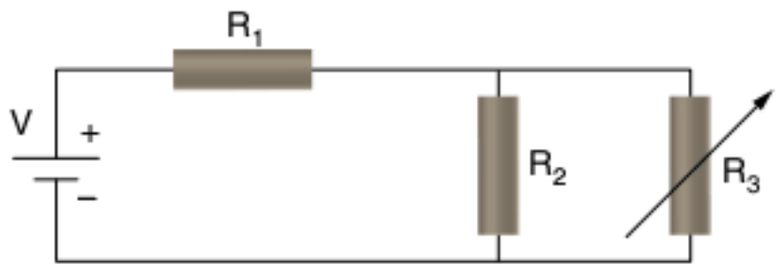
21 **Fuvest** Um circuito é formado de duas lâmpadas L_1 e L_2, uma fonte de 6 V e uma resistência R, conforme desenhado na figura. As lâmpadas estão acesas e funcionando em seus valores nominais (L_1: 0,6 W e 3 V e L_2: 0,3 W e 3 V).



O valor da resistência R é:
(a) 15 Ω (b) 20 Ω (c) 25 Ω (d) 30 Ω (e) 45 Ω

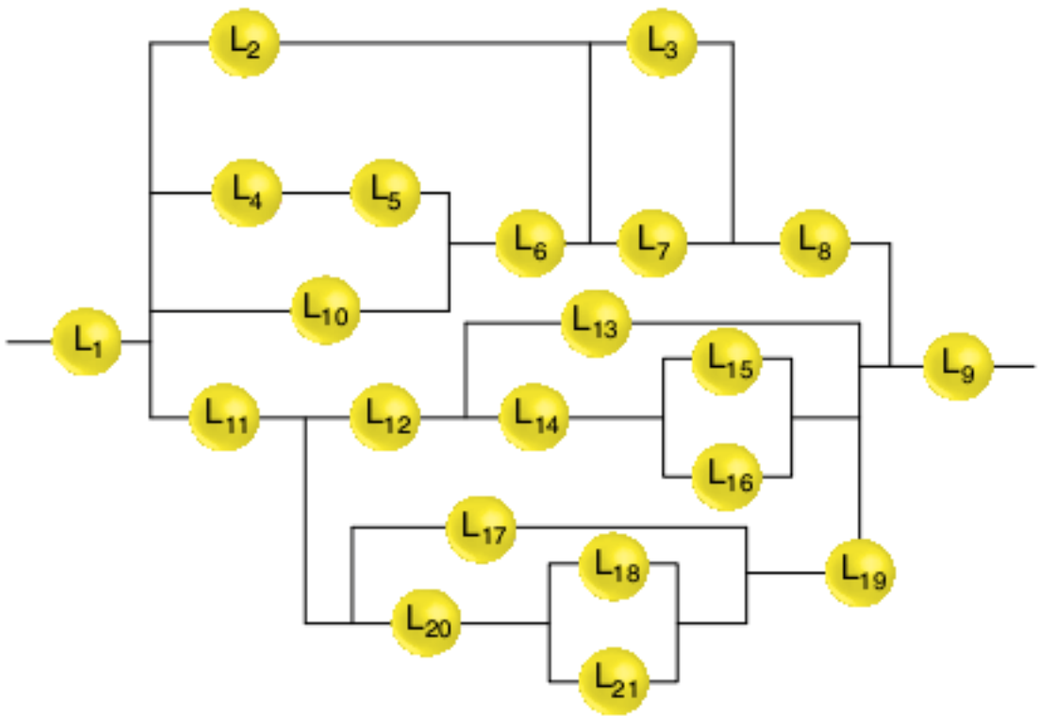
22 **Fuvest** No circuito a seguir, os resistores R_1 e R_2 têm resistência R e a bateria tem tensão V. O resistor R_3 tem resistência variável entre os valores 0 e R.





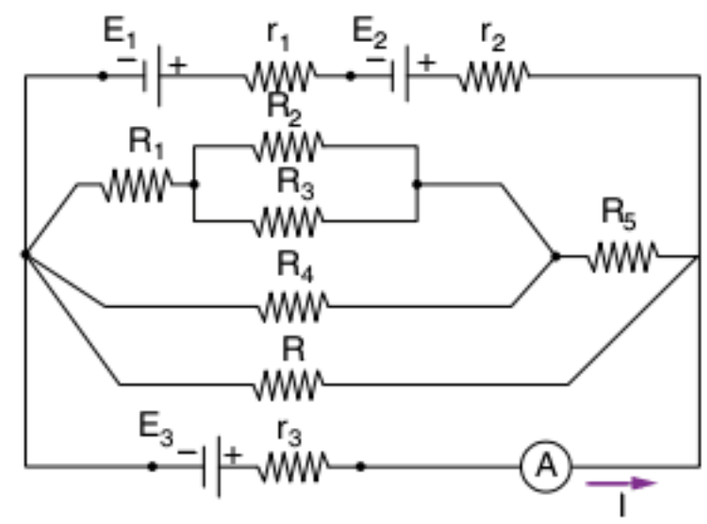
O gráfico mostra qualitativamente a variação da potência P, dissipada em um dos elementos do circuito, em função do valor da resistência de R_3. A curva desse gráfico só pode representar a:
(a) potência dissipada no resistor R_1.
(b) potência dissipada no resistor R_2.
(c) potência dissipada no resistor R_3.
(d) diferença entre potências dissipadas em R_2 e R_3.
(e) soma das potências dissipadas em R_2 e R_3.

23 **UFU** Considere um circuito elétrico, formado por 21 lâmpadas submetidas a uma diferença de potencial entre L_1 e L_9, conforme esquema a seguir.



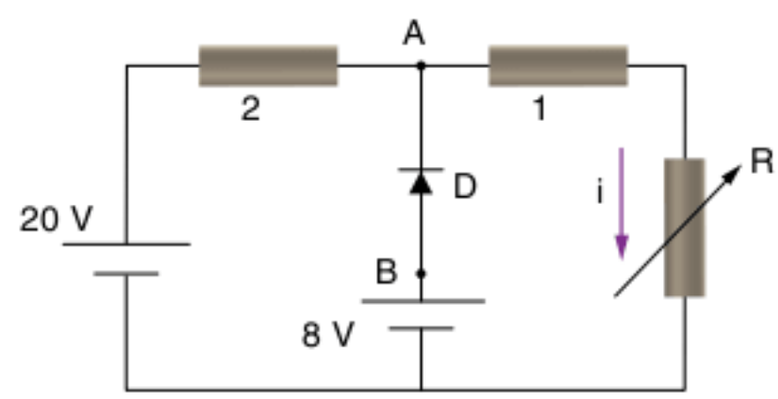
Assim sendo, é correto afirmar que:
(a) se as lâmpadas L_3 e L_6 se queimarem, as lâmpadas L_4, L_5 e L_{10} irão se apagar, enquanto as lâmpadas L_7 e L_8 permanecerão acesas.
(b) se as lâmpadas L_{15} e L_{16} se queimarem, as lâmpadas L_{11}, L_{12} e L_{14} não irão acender.
(c) se a lâmpada L_{12} se queimar, a lâmpada L_{19} irá se apagar.
(d) se a lâmpada L_{14} se queimar, as lâmpadas L_{15}, L_{16} e L_{19} irão se apagar.

24 **IME** No circuito representado a seguir, o amperímetro A, ideal, indica I = 2 A.



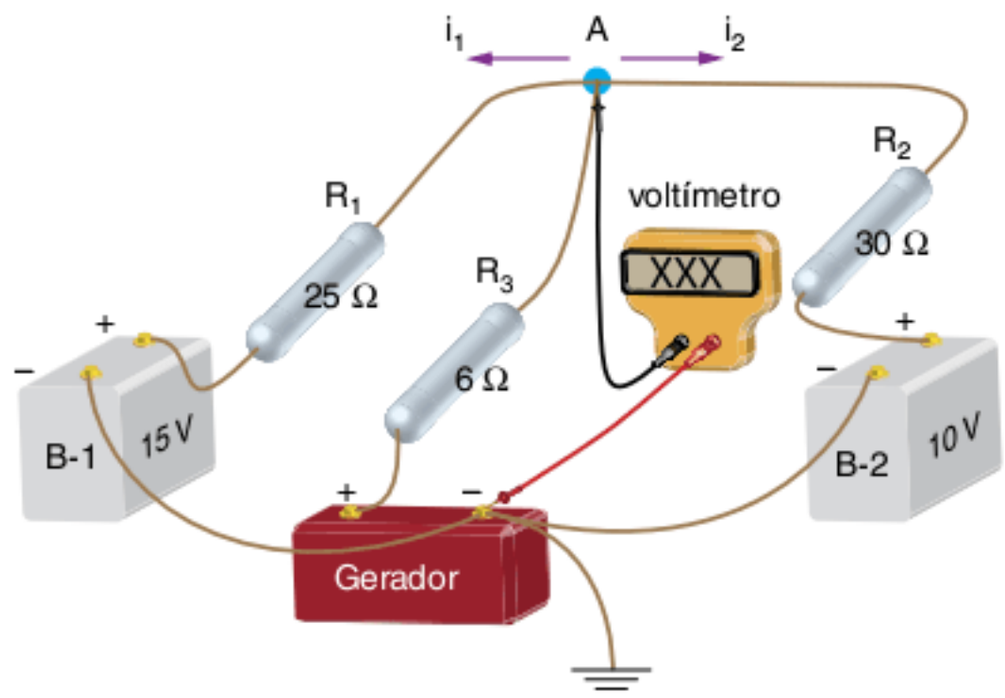
Dados:
Bateria 1: fem E_1 = 9 V; resistência interna r_1 = 1,5 Ω
Bateria 2: fem E_2 = 3 V; resistência interna r_2 = 0,5 Ω
Bateria 3: fem E_3 = 12 V; resistência interna r_3 = 2 Ω;
R_1 = 2 Ω; R_2 = R_3 = 4 Ω; R_4 = 12 Ω; R_5 = 1 Ω
Determine:
a) o valor da resistência R.
b) a quantidade de calor desenvolvida em R_5, num intervalo de tempo igual a 10 minutos.

25 **Fuvest** No circuito da figura a seguir, o componente D, ligado entre os pontos A e B, é um diodo. Esse dispositivo se comporta, idealmente, como uma chave controlada pela diferença de potencial entre seus terminais. Sejam V_A e V_B as tensões dos pontos A e B, respectivamente.
Se $V_B < V_A$, o diodo se comporta como uma chave aberta, não deixando fluir nenhuma corrente através dele, e se $V_B \geq V_A$, o diodo se comporta como uma chave fechada, de resistência tão pequena que pode ser desprezada, ligando o ponto B ao ponto A. O resistor R tem uma resistência variável de 0 a 2 Ω.



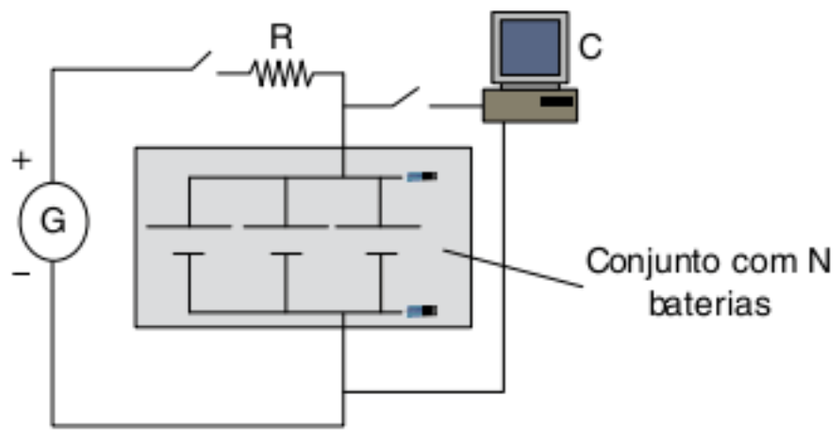
Nesse circuito, determine o valor da:
a) corrente i através do resistor R, quando a sua resistência é 2 Ω.
b) corrente i_0 através do resistor R, quando a sua resistência é zero.
c) resistência R para a qual o diodo passa do estado de condução para o de não condução e vice-versa.

26 **Fuvest** Utilizando-se um gerador, que produz uma tensão V_0, deseja-se carregar duas baterias, B-1 e B-2, que geram respectivamente 15 V e 10 V, de tal forma que as correntes que alimentam as duas baterias durante o processo de carga mantenham-se iguais ($i_1 = i_2 = i$). Para isso, é utilizada a montagem do circuito elétrico representada ao lado, que inclui três resistores R_1, R_2 e R_3, com respectivamente 25 Ω, 30 Ω e 6 Ω, nas posições indicadas. Um voltímetro é inserido no circuito para medir a tensão no ponto A.



a) Determine a intensidade da corrente i, em ampères, com que cada bateria é alimentada.
b) Determine a tensão V_A, em volts, indicada pelo voltímetro, quando o sistema opera da forma desejada.
c) Determine a tensão V_0, em volts, do gerador, para que o sistema opere da forma desejada.

27 **Fuvest** Em uma ilha distante, um equipamento eletrônico de monitoramento ambiental, que opera em 12 V e consome 240 W, é mantido ligado 20 h por dia. A energia é fornecida por um conjunto de N baterias ideais de 12 V. Essas baterias são carregadas por um gerador a diesel, G, através de uma resistência R de 0,2 Ω. Para evitar interferência no monitoramento, o gerador é ligado durante 4 h por dia, no período em que o equipamento permanece desligado. Determine:

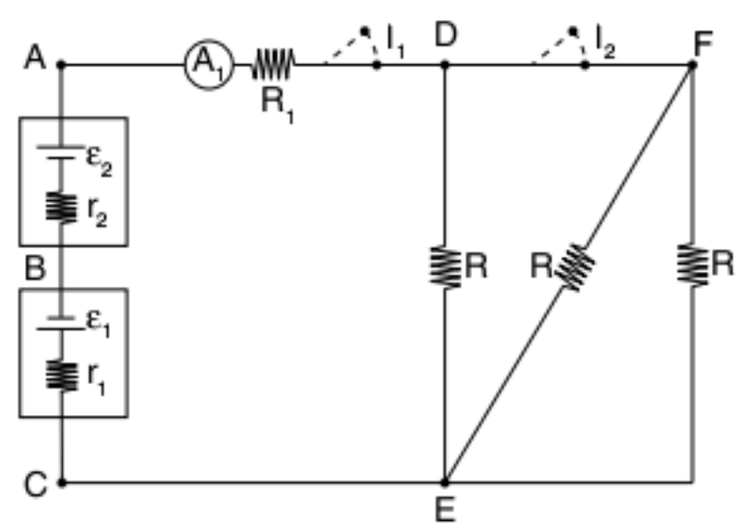


a) a corrente I, em ampères, que alimenta o equipamento eletrônico C.
b) o número mínimo N, de baterias, necessário para manter o sistema, supondo que as baterias armazenem carga de 50 A.h cada uma.
c) a tensão V, em volts, que deve ser fornecida pelo gerador, para carregar as baterias em 4 h.

NOTE E ADOTE
(1 ampère × 1 segundo = 1 coulomb)
O parâmetro usado para caracterizar a carga de uma bateria, produto da corrente pelo tempo, é o ampère-hora (A.h). Suponha que a tensão da bateria permaneça constante até o final de sua carga.

28 **Unesp** Células fotovoltaicas foram idealizadas e desenvolvidas para coletar a energia solar, uma forma de energia abundante, e convertê-la em energia elétrica. Esses dispositivos são confeccionados com materiais semicondutores que, quando iluminados, dão origem a uma corrente elétrica que passa a alimentar um circuito elétrico. Considere uma célula de 100 cm^2 que, ao ser iluminada, possa converter 12% da energia solar incidente em energia elétrica. Quando um resistor é acoplado à célula, verifica-se que a tensão entre os terminais do resistor é 1,6 V. Considerando que, num dia ensolarado, a célula recebe uma potência de 1 kW por metro quadrado, calcule a corrente que passa pelo resistor.

29 **UFSC** No circuito mostrado na figura a seguir, A_1 é um amperímetro e I_1 e I_2 são interruptores do circuito. Suponha que os interruptores estejam fechados e que $\varepsilon_1 = 2$ V, $\varepsilon_2 = 5$ V, $R_1 = 3\ \Omega$, $R = 9\ \Omega$, $r_1 = 2\ \Omega$, $r_2 = 1\ \Omega$.



Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

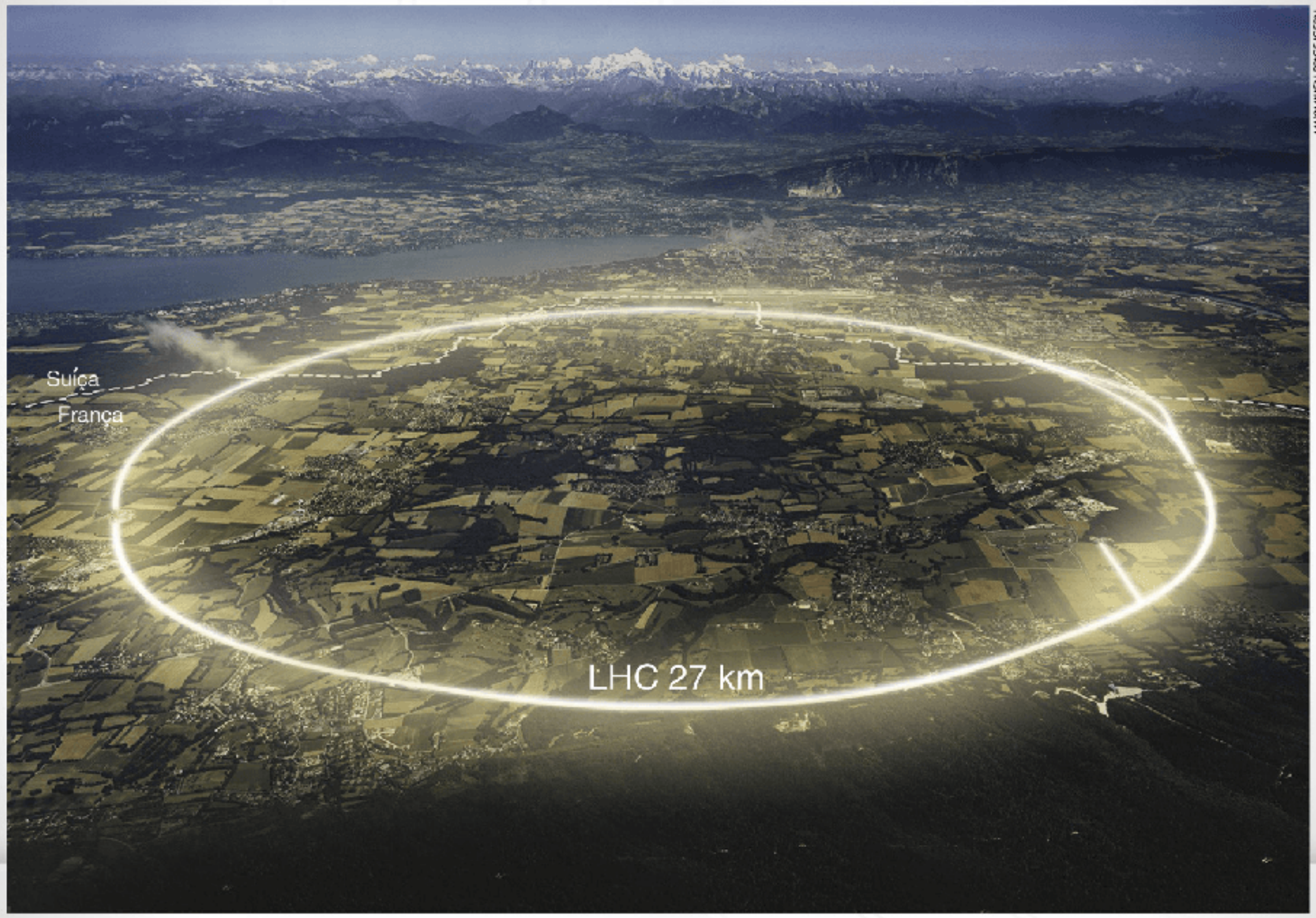
01 A diferença de potencial entre C e B é maior que o valor da força eletromotriz ε_1.
02 A diferença de potencial entre A e B é maior que o valor da força eletromotriz ε_2.
04 A diferença de potencial entre D e E é igual à diferença de potencial entre F e E.
08 O amperímetro A_1 registra a mesma corrente, esteja com o interruptor I_2 aberto ou fechado.
16 Abrindo-se o interruptor I_1, a diferença de potencial entre A e B é igual ao valor da força eletromotriz ε_2.

Soma = ☐

Interação entre cargas elétricas e campo magnético

7

FRENTE 2



MAXIMILIEN BRICE/CERN.

O CERN (Conselho Europeu para a Pesquisa Nuclear) abriga um dos maiores experimentos para a pesquisa de partículas fundamentais da matéria e as forças que agem entre elas, o acelerador de partículas LHC (*Large Hadron Collider*). Nesse acelerador, de circunferência de 27 km, um campo elétrico é responsável pela aceleração da carga que tem sua trajetória curvada por conta de um campo magnético, permitindo que a carga transite a cerca de 11.000 rotações por segundo. Este capítulo trata exatamente da força magnética que surge quando uma carga elétrica se movimenta no interior de um campo magnético, porém, antes de tratar deste assunto é necessário que sejam definidos alguns fenômenos magnéticos: a própria noção de campo magnético e de vetor indução magnética $\vec{B}$.

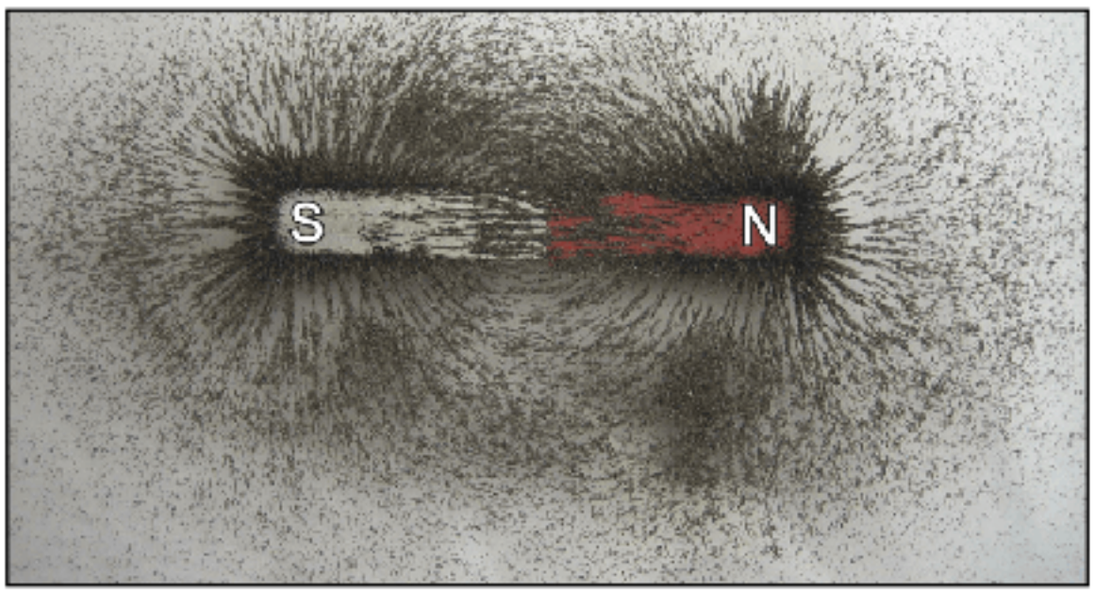
Fenômenos magnéticos

Desde a Pré-história, o homem tem observado a existência de materiais que naturalmente atraem pedaços de ferro. Esses materiais são denominados **ímãs naturais**.

Corpos de materiais como cobalto, níquel, ferro e outras ligas metálicas, após passarem por processos artificiais, denominados processos de **imantação**, podem tornar-se **ímãs artificiais**.

Alguns fenômenos magnéticos merecem destaque:

I. Quando colocamos um ímã em forma de barra, em contato com limalha de ferro, observamos que a limalha adere principalmente nas suas extremidades; essas extremidades denominam-se **polos do ímã**.



DAYNA MASON/FLICKR

Fig. 1 Polos de um ímã.

II. Quando suspendemos um ímã pelo seu centro de gravidade, ele tende a se alinhar com o campo magnético da Terra, que coincide com aproximadamente a direção norte-sul geográfica. A extremidade do ímã que aponta para o norte geográfico recebe o nome de **polo norte (N)** e a extremidade que aponta para o sul geográfico recebe o nome de **polo sul (S)**.

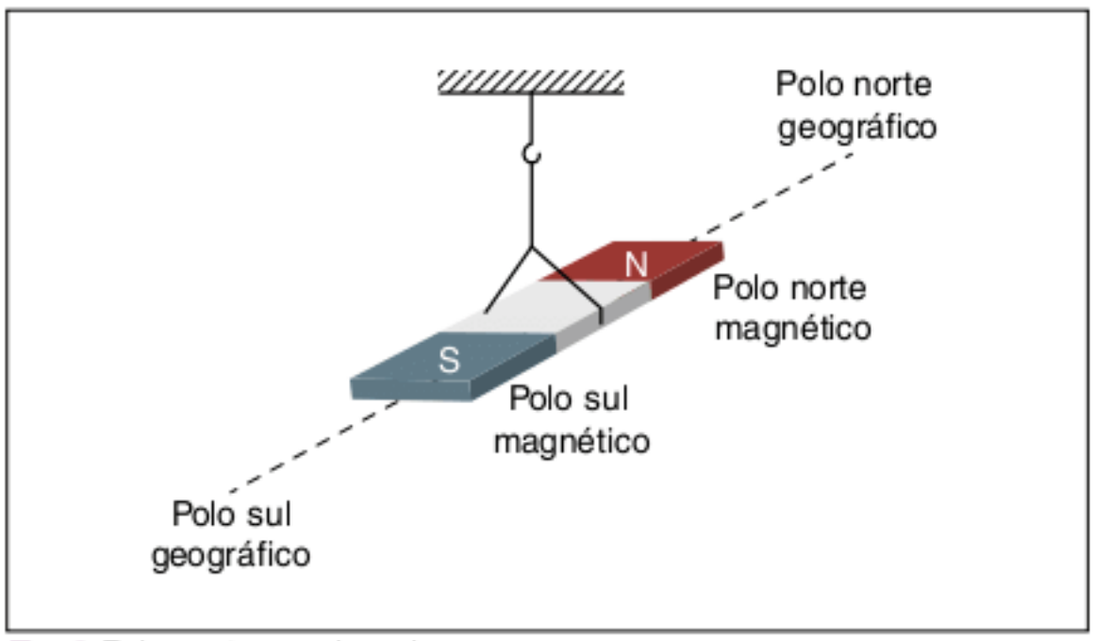


Fig. 2 Polo norte e polo sul.

III. Polos magnéticos de mesmo nome se repelem enquanto polos de nomes diferentes se atraem. Aqui há de se notar que essa atração ou repulsão se dá similarmente à Lei de Coulomb, ou seja, a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância de separação entre os dois polos.

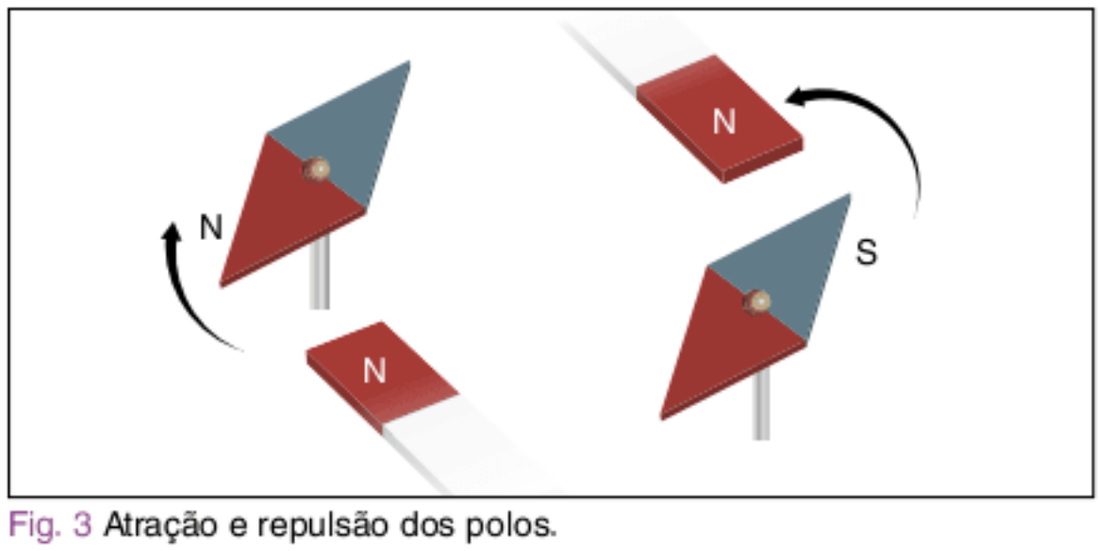


Fig. 3 Atração e repulsão dos polos.

Observação: *Devido ao fato de que polos magnéticos de nomes diferentes se atraem e polos de nomes iguais se repelem, como o polo norte da bússola é atraído para o Norte geográfico da Terra, conclui-se que o polo sul magnético da Terra encontra-se no seu Norte geográfico e o polo norte magnético da Terra encontra-se no seu polo sul geográfico.*

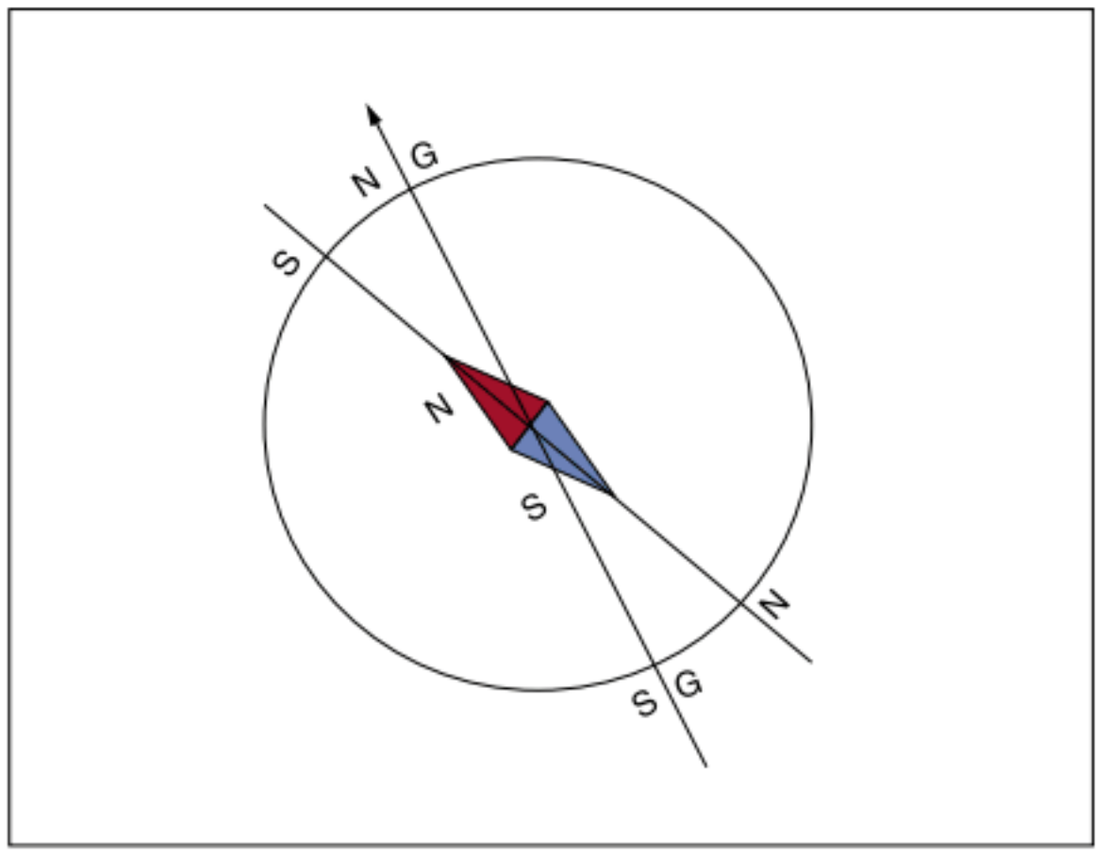


Fig. 4 O campo magnético terrestre.

IV. Experimentos mostram que não é possível separar os polos magnéticos de um ímã. Portanto, ao tentar separá-los, surgem dois novos ímãs, com seus polos norte e sul. E assim sucessivamente, se tentarmos com os dois ímãs obtidos separar os seus polos magnéticos. Isso acontece até em escalas microscópicas ou até mesmo subatômicas. A figura 5 mostra o fenômeno.

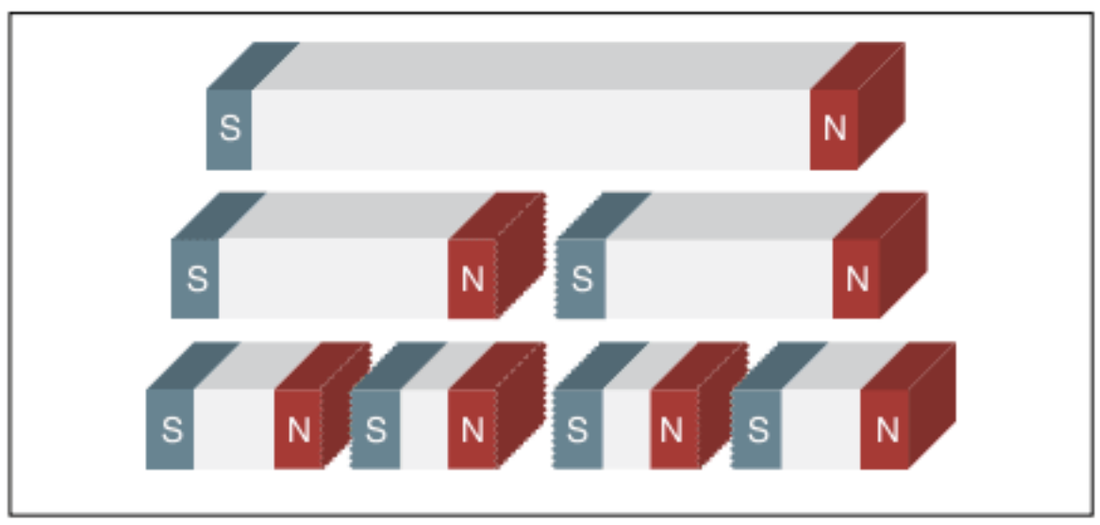


Fig. 5 Inseparabilidade dos polos.

ATENÇÃO!

A inseparabilidade dos polos é uma importante diferença entre cargas elétricas e ímãs. Enquanto é possível obter cargas positivas separadas de cargas negativas, não é possível obter um polo norte magnético separado de um sul magnético, e, assim, pode-se dizer que o monopolo magnético não existe.

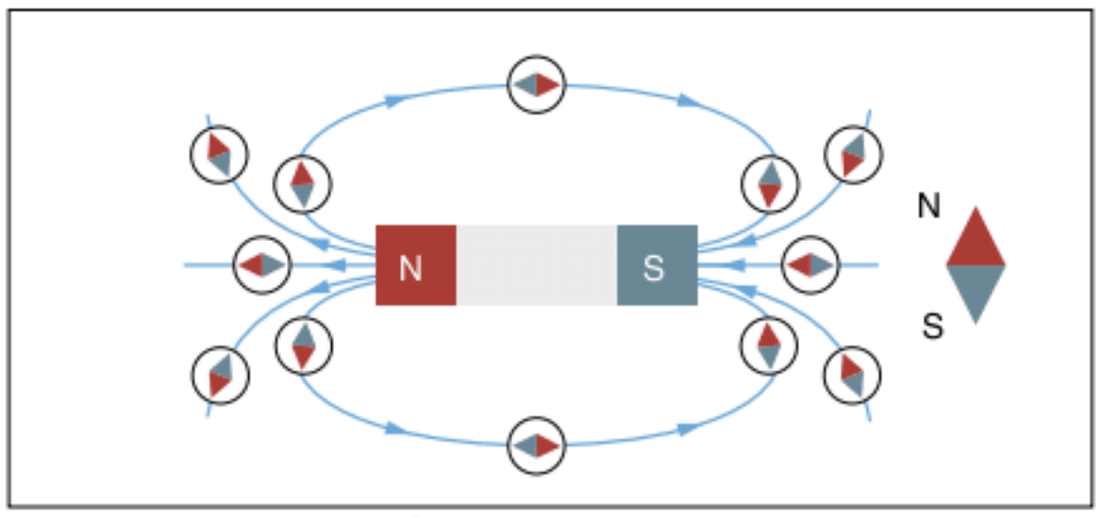


Fig. 8 Alinhamento de um ímã.

O campo magnético

Nas proximidades de um ímã, onde verifica-se sua ação, podemos afirmar que existe um campo magnético. Esse campo magnético é descrito por um vetor indução magnética, cuja unidade no SI é dada em tesla (T).

SAIBA MAIS

Fig. 6 Nikola Tesla (1856-1943).

Foi físico, inventor e engenheiro elétrico de raro talento. Tesla desenvolveu o motor de indução e o sistema a longa distância de transmissão de corrente alternada. Seus trabalhos teóricos e patentes ainda formam a base do sistema de potência elétrica em corrente alternada. Desenvolveu também os princípios dos dispositivos sem fio, tais como controle remoto e telecomunicações.

Orientação do vetor indução magnética ($\vec{B}$)

Observa-se que as linhas de indução magnética se orientam do polo norte magnético para o polo sul magnético. O **vetor indução magnética** ($\vec{B}$) é tangente às linhas de indução magnética, similarmente ao **campo elétrico** ($\vec{E}$) em relação às linhas de campo elétrico. A figura 7 representa graficamente as linhas de indução magnética e o vetor campo magnético.

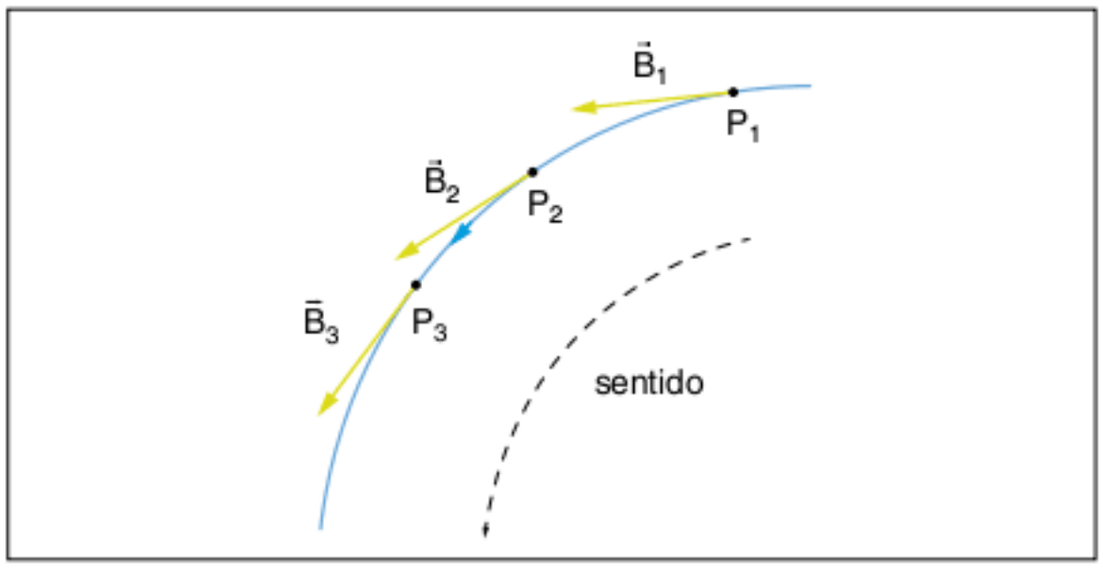


Fig. 7 Linha de indução magnética.

É importante salientar que todo ímã, na presença de um campo magnético, tende a se alinhar com o vetor indução magnética naquele ponto. Tal que o seu polo norte magnético aponta no mesmo sentido do vetor indução magnética.

ATENÇÃO!

No caso da figura 8, é importante ressaltar que o campo magnético terrestre foi considerado desprezível, pois, sendo a indução magnética de natureza vetorial, teríamos que obter o vetor indução magnética resultante. Assim, como o campo magnético gerado pelo ímã é muito mais intenso em suas proximidades do que o campo da Terra, podemos considerá-lo desprezível.

O campo magnético uniforme

O campo magnético uniforme é definido de forma similar ao campo elétrico uniforme, ou seja, é aquele campo em que a sua intensidade, direção e sentido são iguais em todos os pontos, e as linhas de indução magnética são retas paralelas entre si, igualmente orientadas.

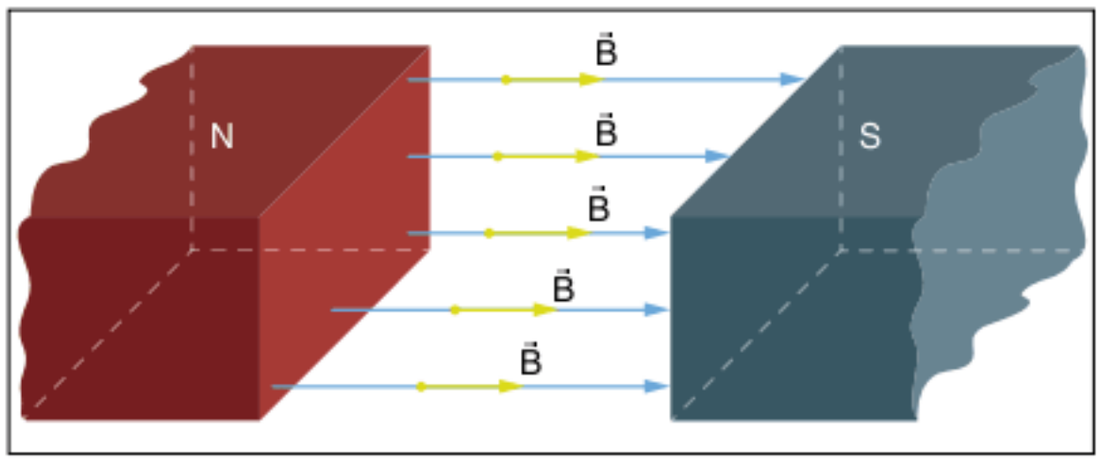


Fig. 9 Campo magnético uniforme.

Aqui é importante que se convencione o vetor indução magnética, já que agora iremos trabalhar com três dimensões, e nos interessa o que se passa fora do plano do papel. Imaginando que o vetor indução seja uma flecha (➵), quando ele "sai" do plano do papel, vemos somente um ponto, conforme a figura 10.

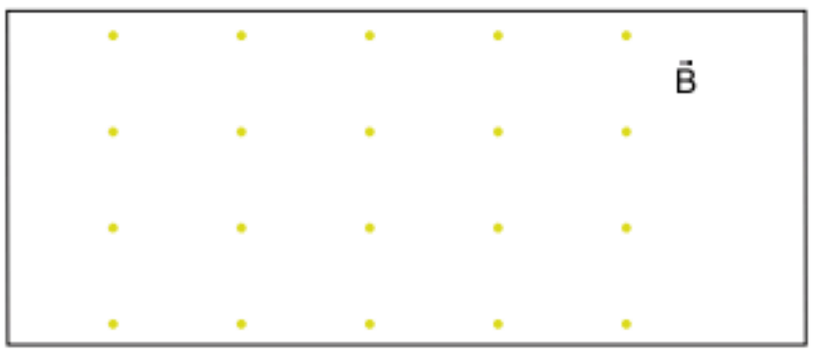


Fig. 10 Campo magnético "saindo" do plano do papel.

Caso o vetor indução "entre" no plano do papel, veremos o rabo da flecha, indicado por pequenas cruzes.

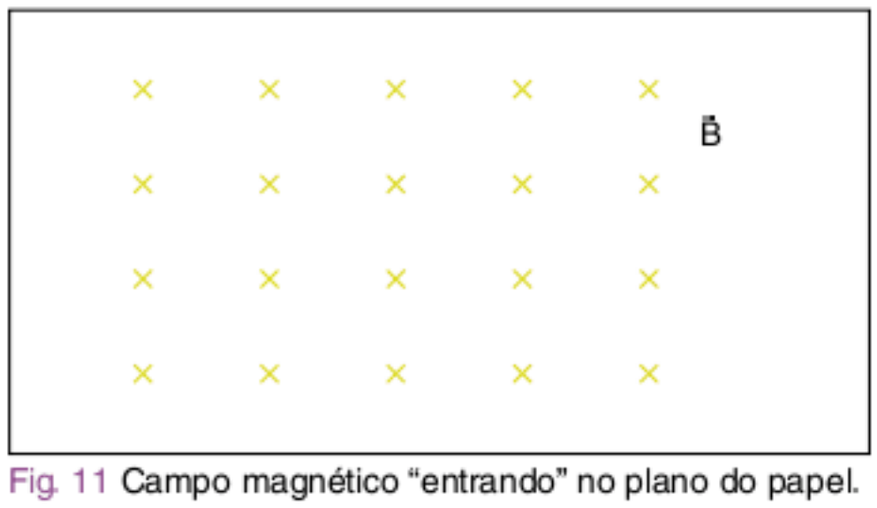


Fig. 11 Campo magnético "entrando" no plano do papel.

Veremos agora a ação do campo magnético sobre cargas elétricas.

Interação entre o campo magnético e as cargas elétricas

A primeira consideração a esse respeito, que **o campo magnético não age sobre cargas em repouso**, é experimental.

A segunda consideração, tão importante quanto a primeira, é: **o campo magnético não age sobre cargas que se movimentam na mesma direção do campo.**

No caso de uma carga que se move em uma direção que não é a mesma do campo, observa-se experimentalmente que ela fica sujeita a uma força de origem magnética, que depende da carga elétrica, da sua velocidade, da intensidade do campo e do ângulo que a velocidade faz com o vetor indução.

Inicialmente, consideremos o caso em que a velocidade é perpendicular ao vetor indução magnética.

Carga com vetor velocidade perpendicular ao vetor indução

Observa-se, experimentalmente, que a força magnética que surge quando a carga se desloca perpendicularmente ao vetor $\vec{B}$ é perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$, ou seja, a força magnética é, simultaneamente, perpendicular aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

$$F_m = qvB$$

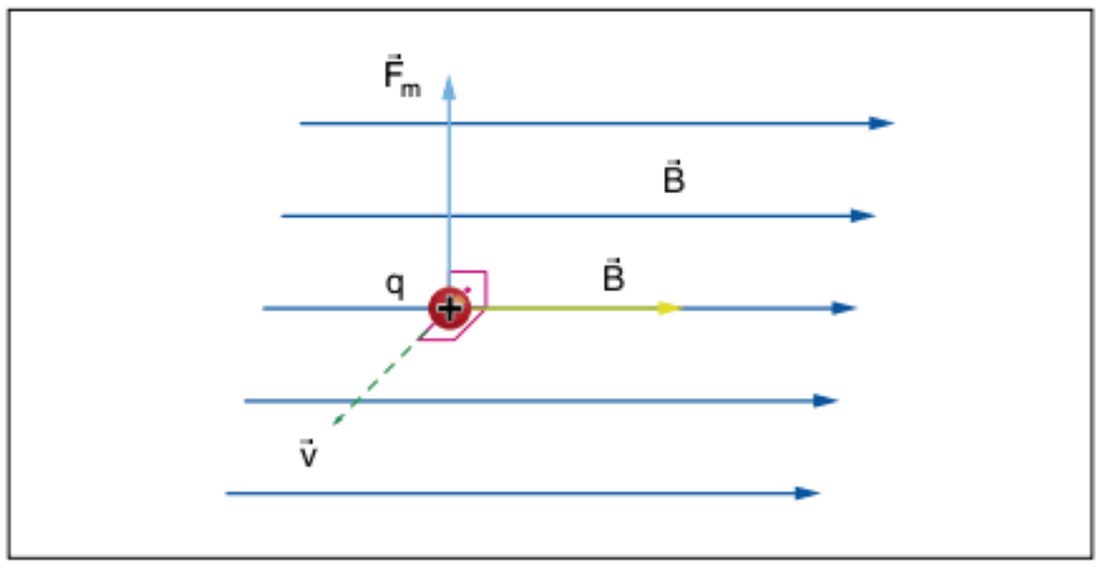


Fig. 12 Orientação da força magnética.

Carga com vetor velocidade em uma direção qualquer não paralela a $\vec{B}$

Neste caso, quando a carga se desloca em uma direção que forma um ângulo θ com o vetor indução $\vec{B}$, observa-se que somente a componente da velocidade perpendicular a $\vec{B}$ influencia na intensidade da força magnética. Pela figura 13, podemos verificar que essa componente é igual a $v \cdot \text{sen}\,\theta$.

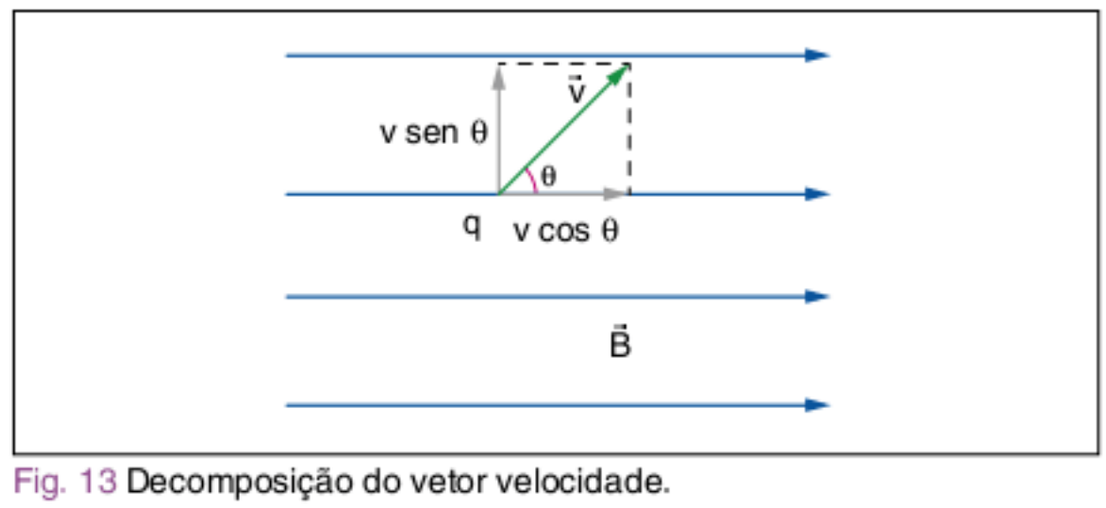


Fig. 13 Decomposição do vetor velocidade.

Portanto, temos: $F_m = B \cdot q \cdot v \cdot \text{sen}\,\theta$

Partindo da expressão anterior, pode-se determinar o módulo da força magnética que age sobre uma carga que se move dentro de um campo magnético.

Mas como determinar sua direção e sentido?

A resposta é fácil, podemos fazê-lo pela regra da mão direita.

Direção e sentido da força magnética: A regra da mão direita

A regra da mão direita é de utilização bastante simples e prática. Com a mão direita espalmada, colocam-se os dedos apontando na direção de $\vec{B}$ e o polegar na direção da velocidade $\vec{v}$. A força magnética é então perpendicular à palma da mão se a carga for positiva, ou perpendicular às costas da mão se a carga for negativa, ou seja, de sentido oposto à força que age sobre a carga positiva. A figura14 nos mostra a utilização da regra da mão direita.

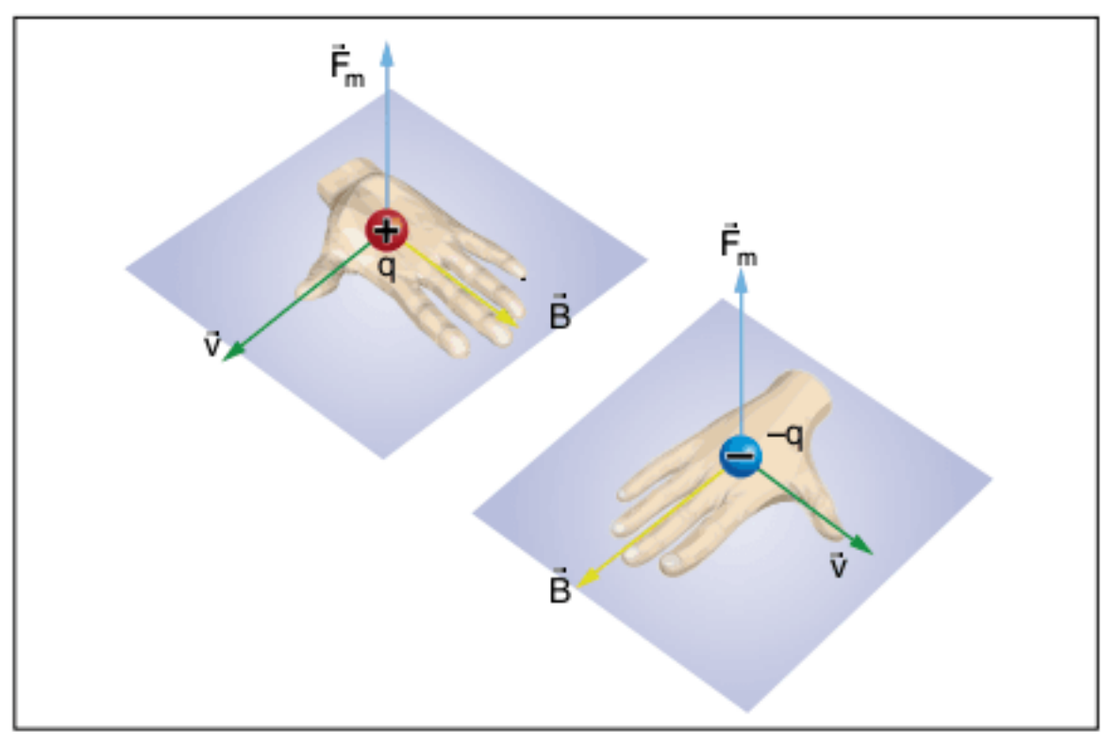


Fig. 14 Regra da mão direita.

Observação: *É muito importante observar que, como a força magnética que age sobre uma carga puntiforme é perpendicular ao plano formado pelos vetores velocidade ($\vec{v}$) e indução magnética ($\vec{B}$), ela é sempre perpendicular ao deslocamento da carga no interior do campo. Dessa forma, o trabalho realizado pela força magnética sobre a carga puntiforme é nulo.*

Finalmente, conclui-se, com ajuda do teorema da energia cinética, que a força magnética é incapaz de alterar o módulo da velocidade da carga puntiforme sujeita a um campo magnético. Pode-se dizer que a força magnética altera a direção e o sentido da velocidade da carga puntiforme sujeita ao campo, mas não o módulo de sua velocidade.

Um caso importante de estudo é quando a carga se movimenta em um campo magnético uniforme.

Carga deslocando-se em um campo magnético uniforme

Para os casos em que a carga se movimenta paralelamente ao campo, já foi visto que a força magnética que age sobre a carga é nula, já que $\theta = 0°$ ou $\theta = 180°$.

Caso o ângulo θ seja igual a 90°, ou seja, o vetor velocidade e o vetor indução são perpendiculares, a carga elétrica executará um movimento circular uniforme.

Dessa forma, a força magnética nunca altera a energia cinética da carga.

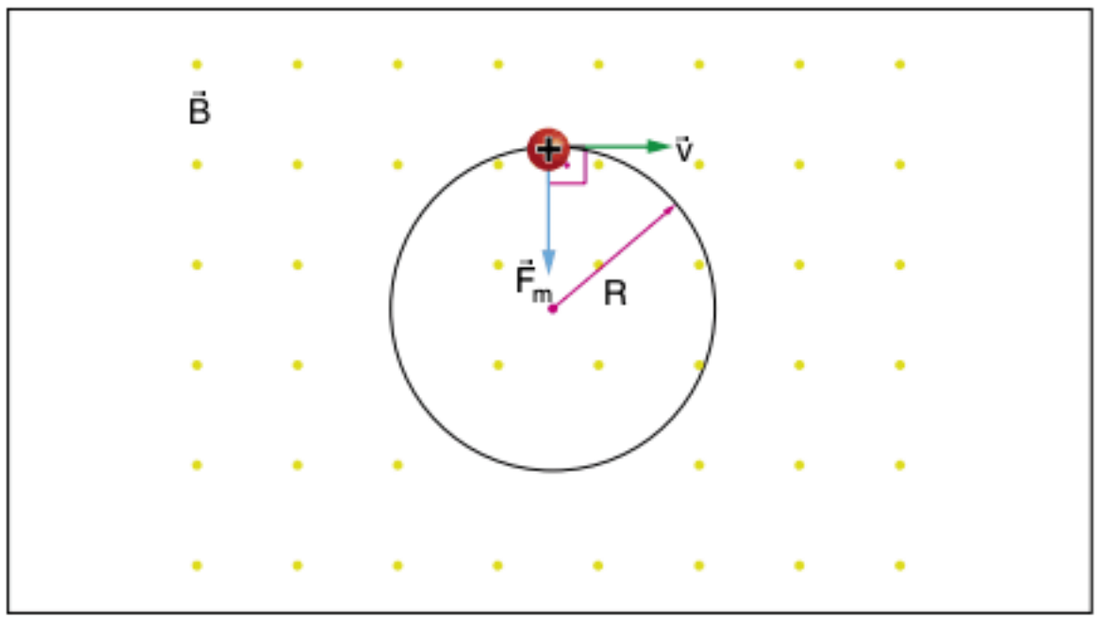


Fig. 15 Movimento de uma carga em um campo magnético.

Podemos observar que a força magnética exerce o papel de força centrípeta; assim, podemos escrever:

$$F_m = F_{cp} \Rightarrow B.\ q.\ v.\ \text{sen}\,90° = \frac{m.\ v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m.\ v}{B.\ q}$$

Caso a velocidade não seja exatamente perpendicular ao campo, podemos decompô-la em uma componente perpendicular $\vec{v}_2$ ($v\ \text{sen}\,\theta$) e uma componente na mesma direção do campo $\vec{v}_1$ ($v \cos\theta$). O movimento resultante é do tipo helicoidal e uniforme (MHU).

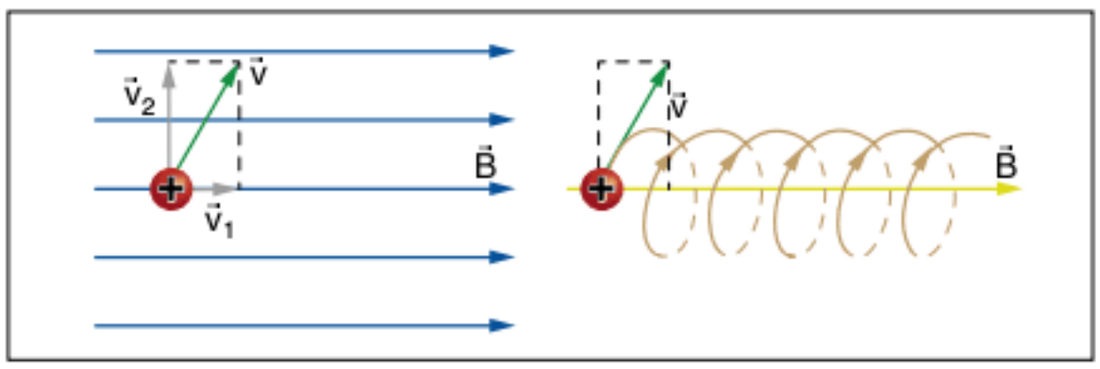


Fig. 16 Decomposição do vetor velocidade.

O raio da parte circular do movimento é dado por:

$$R = \frac{m.\ v.\ \text{sen}\,\theta}{B.\ q}$$

Para o movimento circular e uniforme, pode-se calcular a velocidade angular (ω), o período (T) e a frequência (f).

$$\omega = \frac{v.\ \text{sen}\,\theta}{R} = \frac{v.\ \text{sen}\,\theta}{\frac{m.\ v.\ \text{sen}\,\theta}{B.\ q}} = \frac{B.\ q}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{B.\ q}{m}} = \frac{2\pi.\ m}{B.\ q}$$

E, finalmente, a frequência pode ser facilmente calculada:

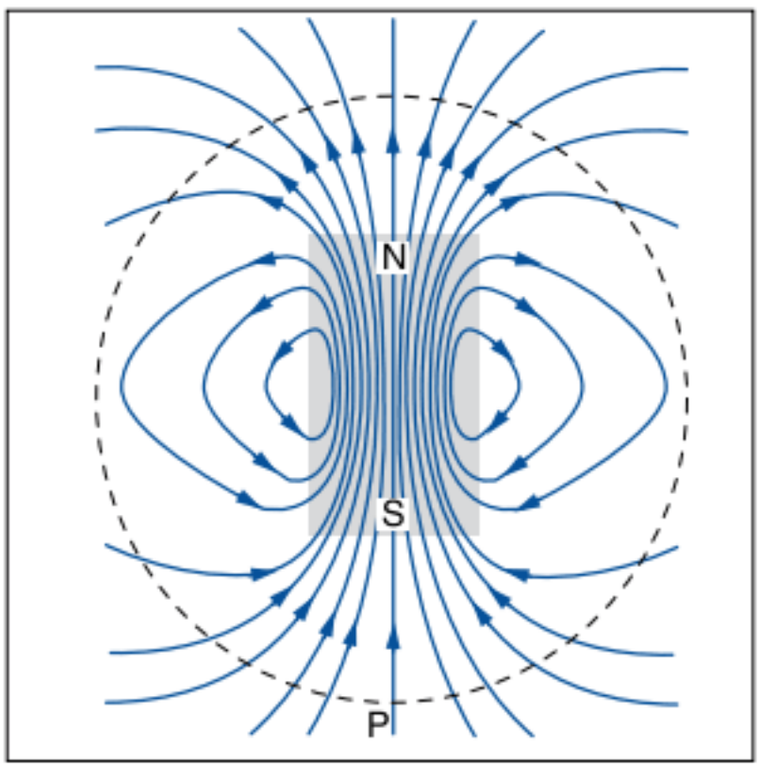
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi.\ m}{B.\ q}} = \frac{B.\ q}{2\pi.\ m}$$

ATENÇÃO!

Podemos observar que a velocidade angular, o período e a frequência não dependem da velocidade escalar, dependem somente da intensidade do vetor indução magnética $\vec{B}$ e da relação carga-massa do corpo (q/m).

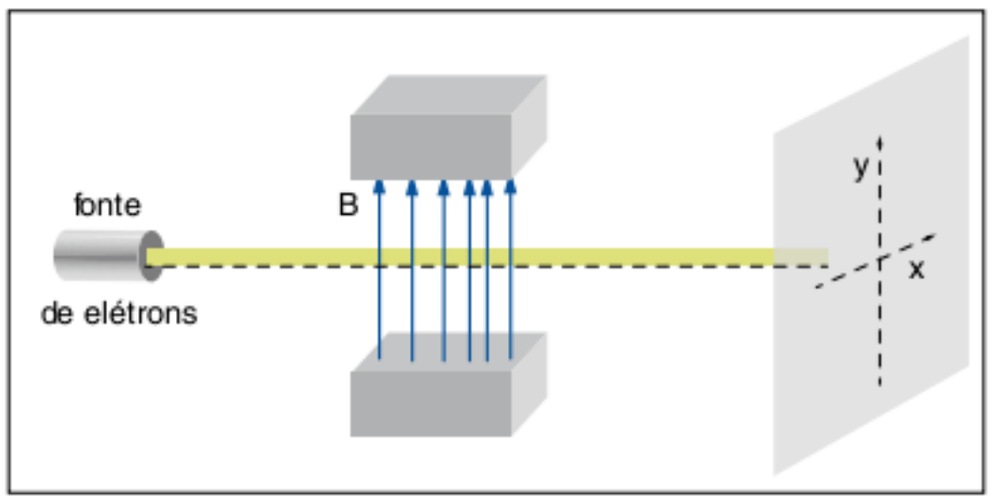
Revisando

1 **Fuvest 2006 (Adapt.)** Sobre uma mesa plana e horizontal, é colocado um ímã em forma de barra, representado na figura, visto de cima, juntamente com algumas linhas de seu campo magnético. Uma pequena bússola é deslocada, lentamente, sobre a mesa, a partir do ponto P, realizando uma volta circular completa em torno do ímã. Ao final desse movimento, desconsiderando o campo magnético da terra, quantas voltas a agulha da bússola terá completado em torno de seu próprio eixo?



2 **Fuvest (Adapt.)** Assim como ocorre em tubos de TV, um feixe de elétrons move-se em direção ao ponto central O de uma tela, com velocidade constante. A trajetória dos elétrons é modificada por um campo magnético vertical B, na direção perpendicular à trajetória do feixe, cuja intensidade varia em função do tempo t.

Represente graficamente o padrão, visível na tela, deixado pelos elétrons incidentes ao atravessar o campo magnético.

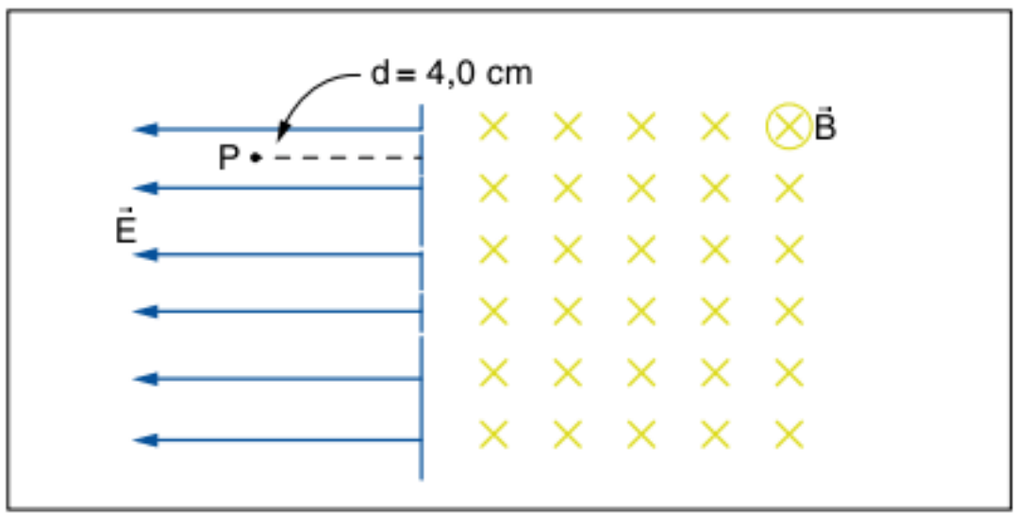


3 No esquema, representa-se uma região onde existem dois campos uniformes, um elétrico $\vec{E}$ e um magnético $\vec{B}$. Esses campos têm intensidades $E = 1{,}0 \cdot 10^4$ N/C e $B = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ T. Um elétron é abandonado em repouso, no ponto P, conforme a figura. Para o elétron, o quociente entre o módulo de sua carga e de sua massa é $\frac{|q|}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{11}$ C/kg.

Pede-se:

a) esboçar a trajetória do elétron.

b) calcular o módulo da velocidade do elétron na região onde reina o campo magnético.



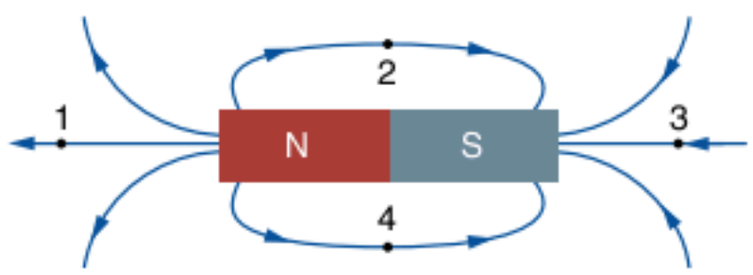
Exercícios propostos

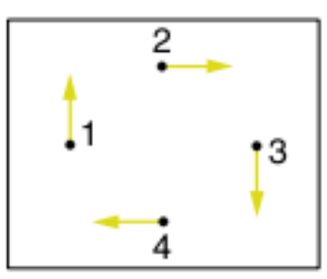
Fenômenos magnéticos

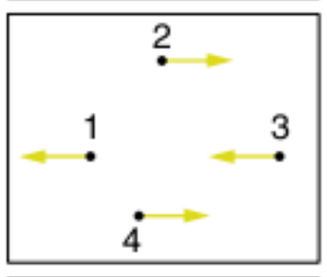
1 Serrando transversalmente um ímã em forma de barra:

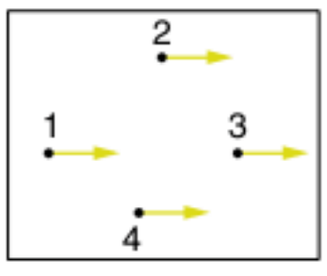
(a) as duas partes se desmagnetizam.
(b) obtém-se um polo norte e um polo sul isolados.
(c) na seção de corte, surgem polos contrários àqueles das extremidades das partes.
(d) o polo norte conserva-se isolado, mas o polo sul desaparece.
(e) nenhuma das anteriores está correta.

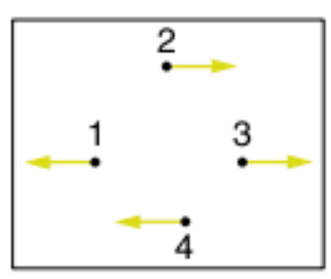
2 Na figura, temos a representação das linhas de indução do campo magnético de um ímã em forma de barra. Os vetores indução magnética, nos pontos 1, 2, 3 e 4, são corretamente representados por:

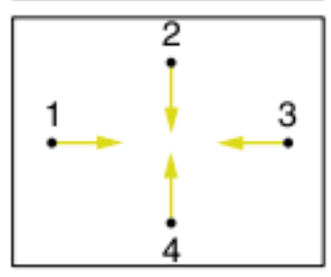


(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


3 **Mackenzie** As linhas de indução de um campo magnético são:

(a) o lugar geométrico dos pontos, onde a intensidade do campo magnético é constante.
(b) as trajetórias descritas por cargas elétricas num campo magnético.
(c) aquelas que em cada ponto tangenciam o vetor indução magnética, orientadas no seu sentido.
(d) aquelas que partem do polo norte de um ímã e vão até o infinito.
(e) nenhuma das anteriores é correta.

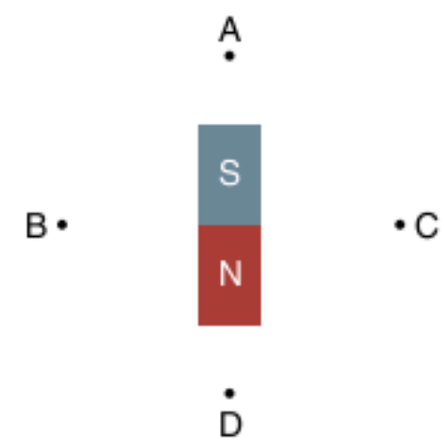
4 Considere as afirmativas:

I. uma pequena agulha magnética é colocada em um ponto de um campo magnético. Ela se orienta na direção do vetor indução magnética $\vec{B}$ desse ponto, estando seu polo norte no sentido de $\vec{B}$.
II. as linhas de indução de um ímã saem do polo norte e chegam ao polo sul.
III. cargas elétricas em movimento originam, no espaço que as envolve, um campo magnético.

Podemos afirmar que:

(a) somente I e II são corretas.
(b) somente II e III são corretas.
(c) I, II e III são corretas.
(d) somente I e III são corretas.
(e) I, II e III são incorretas.

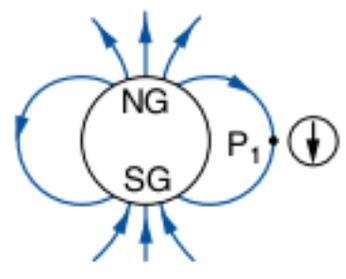
5 **UFRGS** Uma pequena bússola é colocada próxima de um ímã permanente. Em quais posições assinaladas na figura a extremidade norte da agulha apontará para o alto da página?

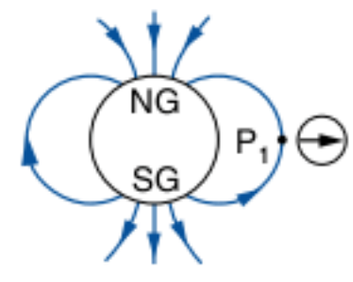


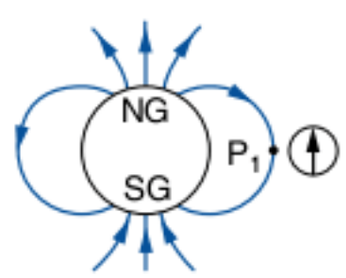
(a) Somente em A ou D.
(b) Somente em B ou C.
(c) Somente em A, B ou D.
(d) Somente em B, C ou D.
(e) Em A, B, C ou D.

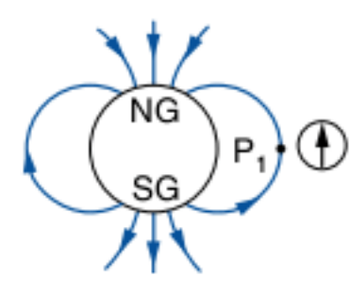
6 **Cesgranrio** As linhas de força do campo magnético terrestre (desprezando-se a inclinação do eixo magnético) e a indicação da agulha de uma bússola colocada em P_1, sobre a linha de força, são mais bem representados por:

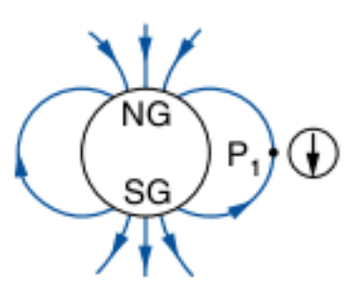
NG = polo norte geográfico
SG = polo sul geográfico

(a)


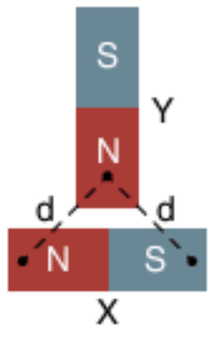
(d)


(b)


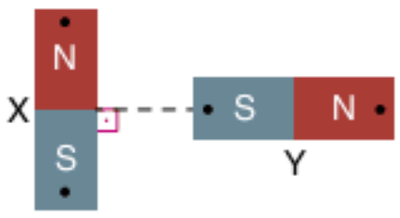
(e)


(c)


7 Represente a força magnética resultante que os polos N e S do ímã X exercem sobre o polo N do ímã Y, situados no mesmo plano, conforme a figura.



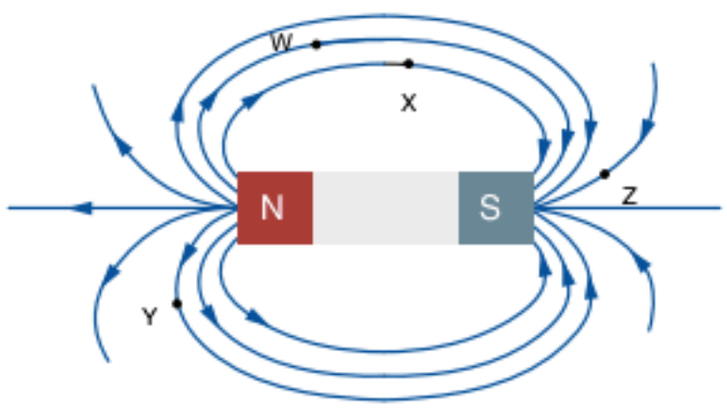
8 Represente a força magnética resultante que os polos N e S do ímã X exercem sobre os polos N e S do ímã Y.



9 **UnB** Três chaves de fenda, que podem estar com as pontas imantadas e cujos polos são X, Y e Z, são aproximadas do polo K de um ímã. Observamos que os polos X e Y são atraídos e Z é repelido. Se a chave X é um polo sul, podemos afirmar que:

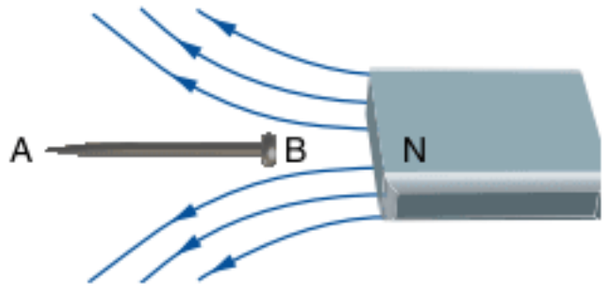
(a) Y é um polo norte.
(b) Z e K são polos norte.
(c) Y não está imantada e K é um polo sul.
(d) n.d.a.

10 **FCC-SP** A figura a seguir representa as linhas de força do campo magnético de um ímã. X, Y, Z e W são pontos desse campo.



Determine em qual desses pontos a agulha de uma bússola ficaria, em relação ao ímã, na seguinte posição:

11 **FCC-SP** O prego de ferro AB, inicialmente não imantado, é aproximado do polo norte N de um ímã, como mostra a figura a seguir.

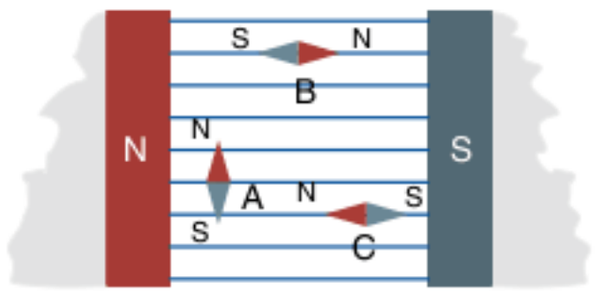


A respeito dessa situação, são feitas três afirmações:

I. o campo magnético do ímã magnetiza o prego.
II. em A, forma-se um polo norte e em B, um polo sul.
III. o ímã atrai o prego.

Quais são as afirmações corretas?

12 Na figura, temos um campo magnético uniforme. Uma agulha magnética é colocada inicialmente na situação A, depois na situação B e, finalmente, na situação C:

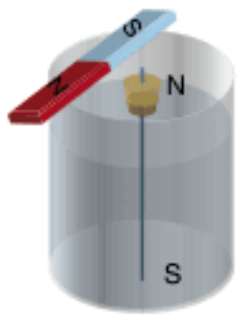


São feitas as seguintes afirmações.

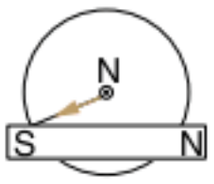
I. As linhas de indução do campo magnético citado são orientadas da esquerda para a direita.
II. A agulha está em equilíbrio estável na situação A.
III. A agulha está em equilíbrio estável na situação B.
IV. A agulha está em equilíbrio instável na situação C.

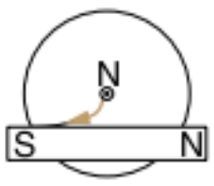
Quais afirmações são corretas?

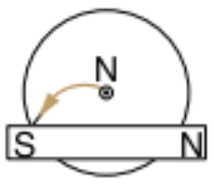
13 **Cesgranrio** Uma barra imantada repousa sobre a beira de um copo contendo água. Um flutuador, feito com rolha de cortiça e atravessado por uma agulha imantada, é mantido no centro do copo (equidistante dos dois polos da barra). O sistema todo está em repouso.

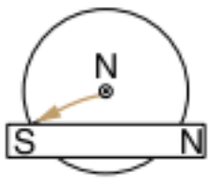


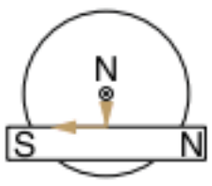
A figura mostra as polaridades da barra e da agulha. Abandona-se o flutuador. Qual das figuras a seguir melhor representa a trajetória seguida pelo flutuador na superfície da água?

(a)


(b)


(c)


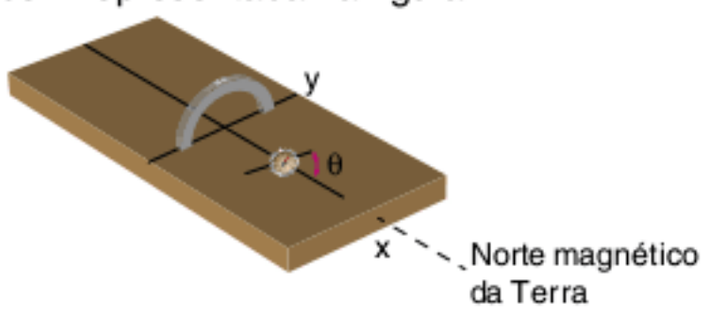
(d)


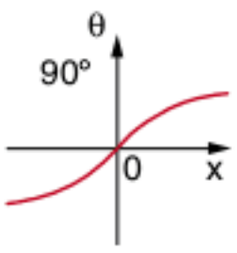
(e)


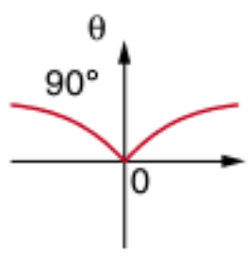
14 **UEL** Cada um dos ímãs I_1 e I_2, representados no esquema a seguir, gera, no ponto P, os vetores indução magnética $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$, cujos módulos são iguais a 0,20 tesla.

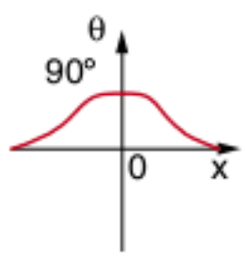
Qual o módulo do vetor indução magnética resultante no ponto P?

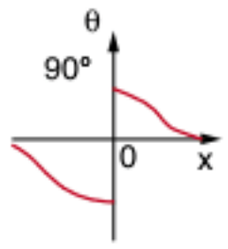
15 **Cesgranrio** Numa superfície horizontal, são traçados dois eixos coordenados ortogonais Ox e Oy, com o eixo Ox apontando para o polo norte magnético da Terra. Coloca-se um ímã em formato de ferradura, apoiado sobre suas extremidades, de modo que estas estejam sobre o eixo Oy e simetricamente dispostas em relação à origem O dos eixos. Desloca-se uma pequena bússola ao longo de Ox, sendo θ o ângulo que a agulha da bússola forma com este eixo. A variação do ângulo θ ao longo de Ox é mais bem representada na figura:

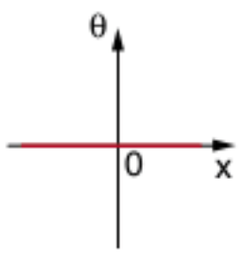


(a)


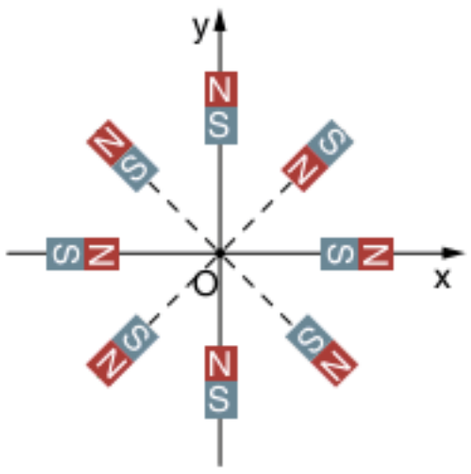
(b)


(c)


(d)


(e)


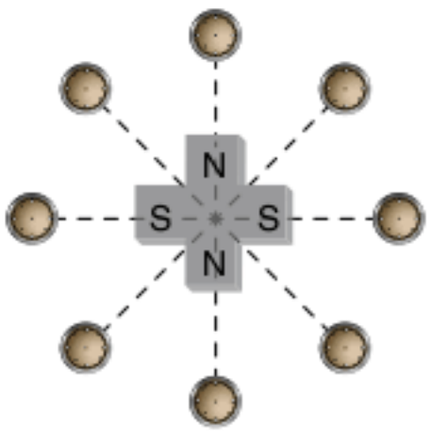
16 **UFG** Oito ímãs idênticos estão dispostos sobre uma mesa à mesma distância de um ponto O, tomado como origem, e orientados como mostra a figura.



Desprezando o efeito do campo magnético da Terra, o campo magnético resultante, em O, formará com o eixo x, no sentido anti-horário, um ângulo de:

(a) 0°
(b) 315°
(c) 135°
(d) 225°
(e) 45°

17 **Fuvest** A figura esquematiza um ímã permanente, em forma de cruz de pequena espessura, e oito pequenas bússolas, colocadas sobre uma mesa. As letras N e S representam, respectivamente, polos norte e sul do ímã e os círculos representam as bússolas nas quais você irá representar as agulhas magnéticas. O ímã é simétrico em relação às retas NN e SS. Despreze os efeitos do campo magnético terrestre.



a) Desenhe na própria figura algumas linhas de força que permitam caracterizar a forma do campo magnético criado pelo ímã, no plano da figura.
b) Desenhe nos oito círculos da figura a orientação da agulha da bússola em sua posição de equilíbrio. A agulha deve ser representada por uma flecha (→) cuja ponta indica o seu polo norte.

18 **Fuvest** A figura I a seguir representa um ímã permanente em forma de barra, onde N e S indicam, respectivamente, polos norte e sul. Suponha que a barra seja dividida em três pedaços, como mostra a figura II.

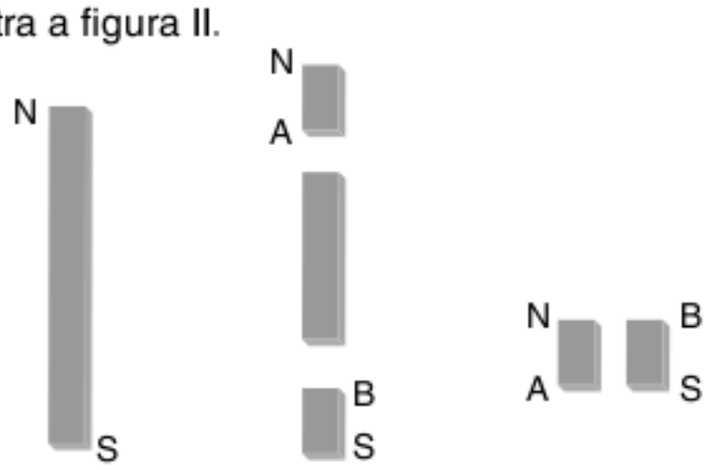


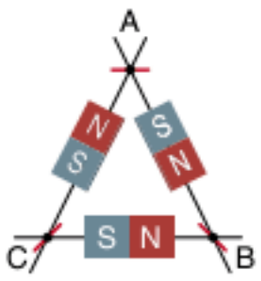
Figura I Figura II Figura III

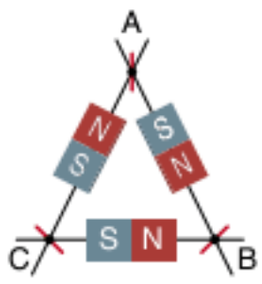
Colocando lado a lado os dois pedaços extremos, como indicado na figura III, é correto afirmar que eles:

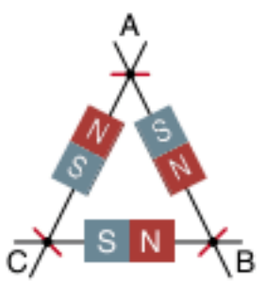
(a) se atrairão, pois A é polo norte e B é polo sul.
(b) se atrairão, pois A é polo sul e B é polo norte.
(c) não serão atraídos nem repelidos.
(d) se repelirão, pois A é polo norte e B é polo sul.
(e) se repelirão, pois A é polo sul e B é polo norte.

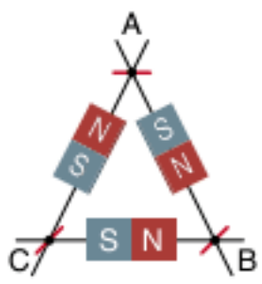
19 **Fuvest** Três ímãs iguais em forma de barra, de pequena espessura, estão sobre um plano. Três pequenas agulhas magnéticas podem girar nesse plano e seus eixos de rotação estão localizados nos pontos A, B e C. Despreze o campo magnético da Terra. A direção assumida pelas agulhas, representadas pela figura I, é melhor descrita pelo esquema a seguir:

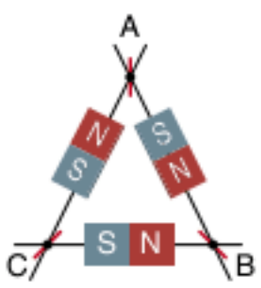
Fig. I

(a)


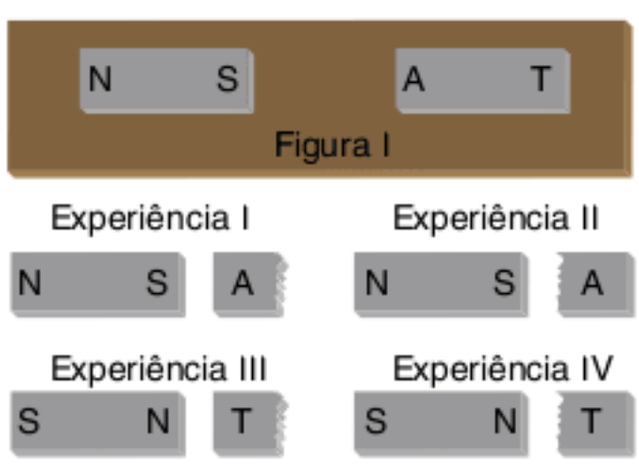
(d)


(b)


(e)


(c)


20 **Fuvest** Um ímã, em forma de barra, de polaridade N (norte) e S (sul), é fixado numa mesa horizontal. Um outro ímã semelhante, de polaridade desconhecida, indicada por A e T, quando colocado na posição mostrada na figura 1, é repelido para a direita. Quebra-se esse ímã ao meio e, utilizando as duas metades, fazem-se quatro experiências, representadas nas figuras I, II, III e IV, em que as metades são colocadas, uma de cada vez, nas proximidades do ímã fixo.



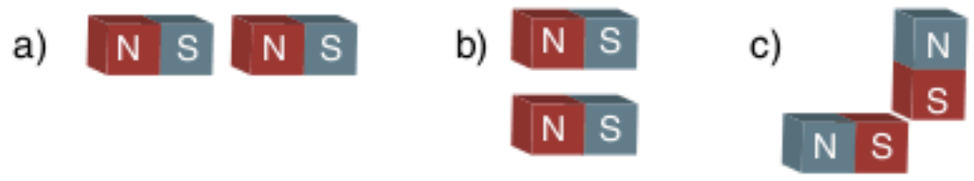
Indicando por "nada" a ausência de atração ou repulsão da parte testada, os resultados das quatro experiências são, respectivamente:

(a) I – repulsão; II – atração; III – repulsão; IV – atração.
(b) I – repulsão; II – repulsão; III – repulsão; IV – repulsão.
(c) I – repulsão; II – repulsão; III – atração; IV – atração.
(d) I – repulsão; II – nada; III – nada; IV – atração.
(e) I – atração; II – nada; III – nada; IV – repulsão.

21 Aproximando-se um ímã de uma bolinha de aço, observa-se que a bolinha:

(a) é repelida pelo polo sul e atraída pelo polo norte.
(b) é atraída pelo polo sul e repelida pelo polo norte.
(c) é repelida pela região compreendida entre os polos.
(d) é atraída por qualquer dos polos.
(e) é repelida por qualquer dos polos.

22 Pares de ímãs em forma de barra são dispostos conforme indicam as figuras a seguir.



A letra N indica o polo norte e o S o polo sul de cada uma das barras. Entre os ímãs de cada um dos pares anteriores (a), (b) e (c) ocorrerão, respectivamente, forças de:

(a) atração, repulsão, repulsão.
(b) atração, atração, repulsão.
(c) atração, repulsão, atração.
(d) repulsão, repulsão, atração.
(e) repulsão, atração, atração.

23 Tem-se três barras, AB, CD, EF, aparentemente idênticas. Experimentalmente, constata-se que:

I. a extremidade A atrai a extremidade D;
II. A atrai a extremidade C;
III. D repele a extremidade E.

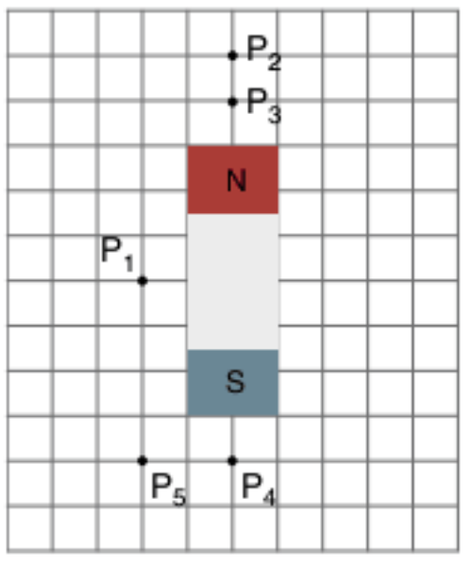
Então:

(a) AB, CD e EF são ímãs.
(b) AB é ímã, CD e EF são de ferro.
(c) AB é de ferro, CD e EF são ímãs.
(d) AB e CD são de ferro, EF é ímã.
(e) CD é ímã, AB e EF são de ferro.

24 **UEL** A agulha de uma bússola assume a posição indicada na figura a seguir quando colocada numa região onde existe, além do campo magnético terrestre, um campo magnético uniforme e horizontal. Considerando a posição das linhas de campo uniforme, desenhadas na figura, o vetor campo magnético terrestre na região pode ser indicado pelo vetor:

(a) ↗ (b) → (c) ↓
(d) ← (e) ↑

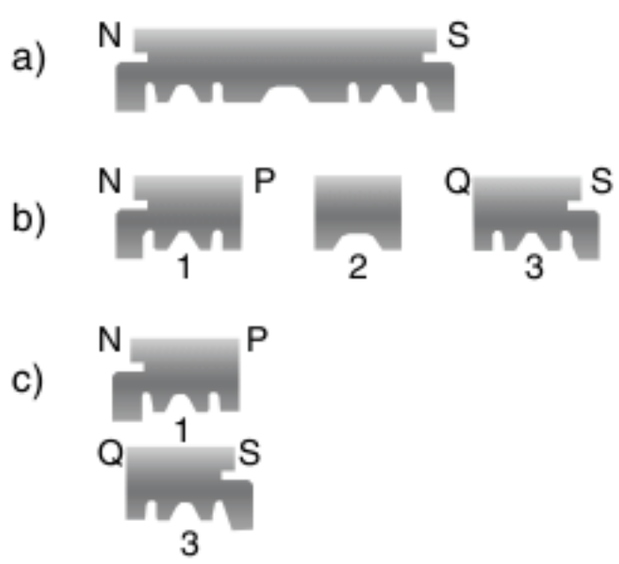
25 **UEL** Considere o campo magnético nos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 às proximidades de um ímã em barra, conforme representado na figura a seguir.



A intensidade do campo magnético é menor no ponto:

(a) P_1
(b) P_2
(c) P_3
(d) P_4
(e) P_5

26 **UFRGS** A figura (a) representa uma metade magnetizada de uma lâmina de barbear, com os polos norte e sul indicados, respectivamente, pelas letras N e S. Primeiramente, esta metade de lâmina é dividida em três pedaços, como indica a figura (b). A seguir, os pedaços 1 e 3 são colocados lado a lado, como indica a figura (c).

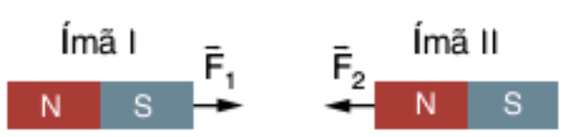


Nessas condições, podemos afirmar que os pedaços 1 e 3 se _____, pois P assinala um polo _____ e Q um polo _____ .

A alternativa que preenche corretamente as lacunas na afirmativa anterior é:

(a) atrairão – norte – sul
(b) atrairão – sul – norte
(c) repelirão – norte – sul
(d) repelirão – sul – norte
(e) atrairão – sul – sul

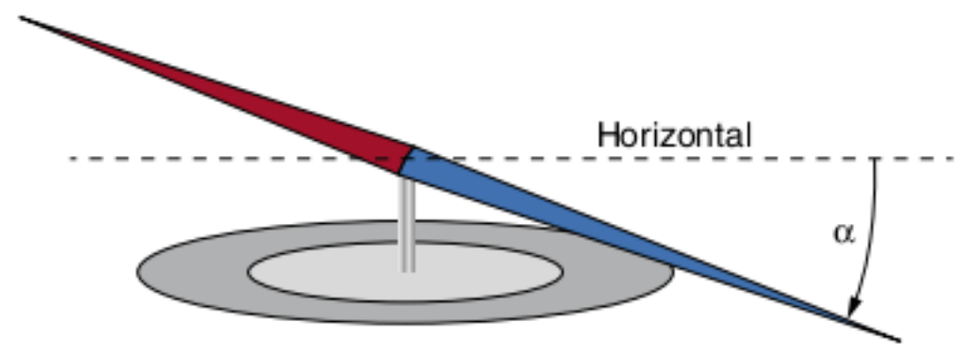
27 **Unirio** Dois ímãs estão dispostos em cima de uma mesa de madeira, conforme a figura abaixo.



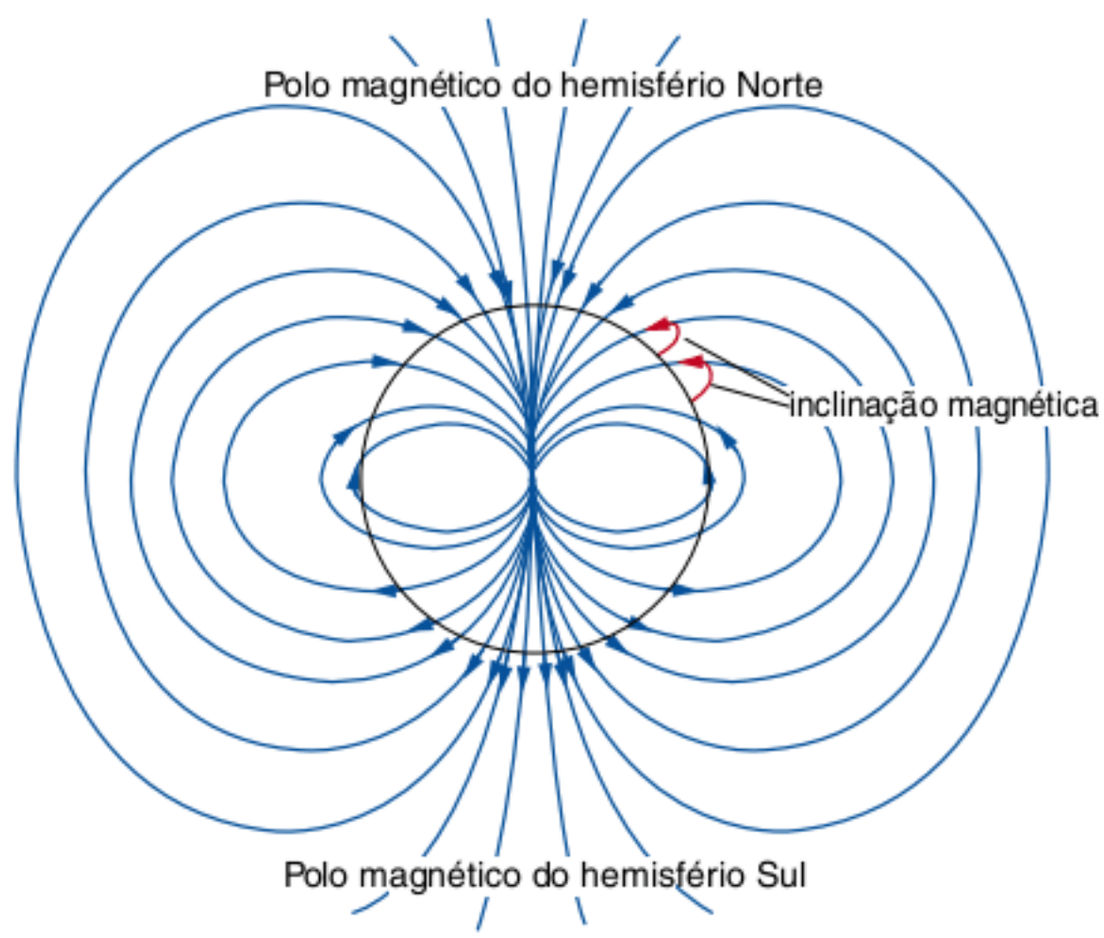
$\vec{F}_1$ é a força que o ímã II exerce sobre o ímã I, enquanto que este exerce uma força $\vec{F}_2$ sobre o ímã II. Considerando que F_1 e F_2 representam os módulos dessas duas forças, podemos afirmar que:

(a) $F_1 = F_2 \neq 0$.
(b) $F_1 = F_2 = 0$.
(c) $F_2 < F_1$, pois o polo norte atrai o polo sul.
(d) $F_2 > F_1$, pois o polo sul atrai o polo norte.
(e) as forças são diferentes, embora não se possa afirmar qual é a maior.

28 **Unifesp 2008** A figura mostra uma bússola que, além de indicar a direção dos polos magnéticos da Terra, indica também a inclinação α das linhas de campo no local onde ela está.



Bússolas, como essa, se inclinam α_E em regiões próximas ao Equador, α_T em regiões próximas aos trópicos e α_P em regiões próximas aos círculos polares. Conhecendo a configuração do campo magnético terrestre (veja a figura).



Pode-se afirmar que:

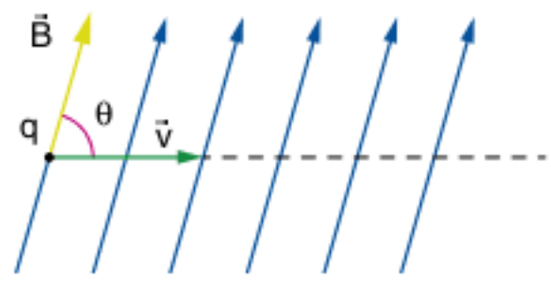
(a) $\alpha_P > \alpha_T > \alpha_E$
(b) $\alpha_T > \alpha_P > \alpha_E$
(c) $\alpha_P > \alpha_E > \alpha_T$
(d) $\alpha_T > \alpha_E > \alpha_P$
(e) $\alpha_E > \alpha_T > \alpha_P$

Interação entre carga elétrica e campo magnético

O enunciado abaixo refere-se às questões **29** e **30**.

Uma carga elétrica positiva q penetra em um campo magnético uniforme de indução $\vec{B}$, com a velocidade $\vec{v}$. Suponha que o plano determinado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$ seja o plano do papel e que o ângulo formado pelos dois vetores seja θ.

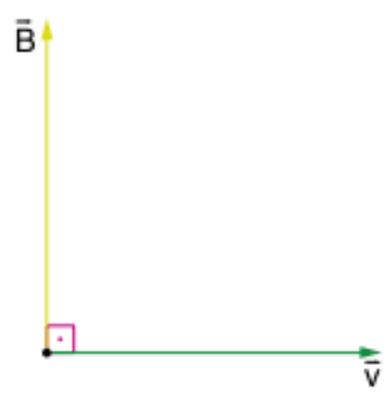
29 A carga q positiva sofrerá a ação de uma força magnética $\vec{F}$:



(a) de mesma direção e sentido de $\vec{v}$.
(b) de mesma direção e sentido de $\vec{B}$.
(c) de direção normal ao plano do papel e saindo do mesmo.
(d) de direção normal ao plano do papel e entrando no mesmo.
(e) nenhuma das opções anteriores está correta.

30 A intensidade da força magnética que age na carga é dada por:
(a) qvB
(b) qvB sen θ
(c) qvB cos θ
(d) qvB tg θ
(e) zero.

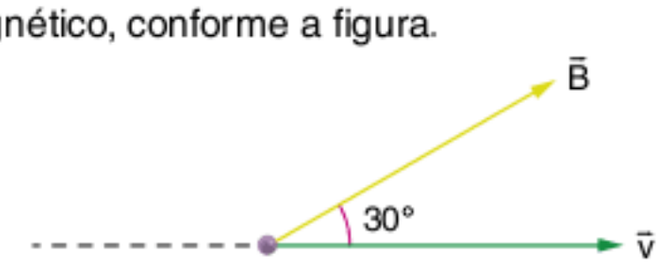
31 A figura representa um feixe de elétrons penetrando perpendicularmente em uma região onde existe um campo de indução magnética $\vec{B}$. Podemos dizer que a direção e o sentido da força magnética que atua no feixe são, respectivamente:



(a) a mesma direção de $\vec{B}$ e sentido contrário a $\vec{B}$.
(b) a mesma direção e sentido de $\vec{B}$.
(c) perpendicular a $\vec{B}$ e mesmo sentido de $\vec{v}$.
(d) perpendicular a $\vec{B}$ e $\vec{v}$, saindo do plano do papel.
(e) perpendicular a $\vec{B}$ e $\vec{v}$, entrando no plano do papel.

O texto a seguir refere-se às questões de **32** a **34**.

Em um campo magnético de intensidade 10^2 T, uma partícula com carga $2{,}0 \cdot 10^{-14}$ C é lançada com velocidade $2{,}0 \cdot 10^5$ m/s, em uma direção que forma um ângulo de 30° com a direção do campo magnético, conforme a figura.

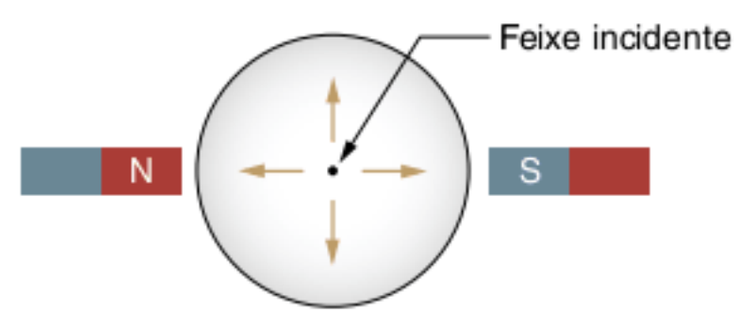


32 **UFBA** Sobre a partícula lançada atua uma força que tem:
(a) a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{B}$.
(b) a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$.
(c) a mesma direção, mas o sentido contrário ao de $\vec{v}$.
(d) direção perpendicular ao plano de $\vec{B}$ e $\vec{v}$ e sentido para cima.
(e) direção perpendicular ao plano de $\vec{B}$ e $\vec{v}$ e sentido para baixo.

33 **UFBA** A intensidade da força que atua sobre a partícula é:
(a) $4{,}0 \cdot 10^{-11}$ N
(b) $5{,}0 \cdot 10^{-8}$ N
(c) $2{,}0 \cdot 10^{-7}$ N
(d) $1{,}4 \cdot 10^{-7}$ N
(e) $6{,}0 \cdot 10^{-6}$ N

34 **UFBA** A força magnética terá máxima intensidade se o ângulo formado entre $\vec{B}$ e $\vec{v}$ for igual a:
(a) zero.
(b) 30°
(c) 60°
(d) 90°
(e) 180°

35 **UFU (Adapt.)** A figura mostra a representação da tela de um osciloscópio onde um feixe de elétrons, que provém perpendicularmente da página para seus olhos, incide no centro da tela. Aproximando-se lentamente da tela dois ímãs iguais com seus respectivos polos mostrados, verificar-se-á que o feixe:



(a) será desviado para cima ↑.
(b) será desviado para baixo ↓.
(c) será desviado para a esquerda ←.
(d) será desviado para a direita →.
(e) não será desviado.

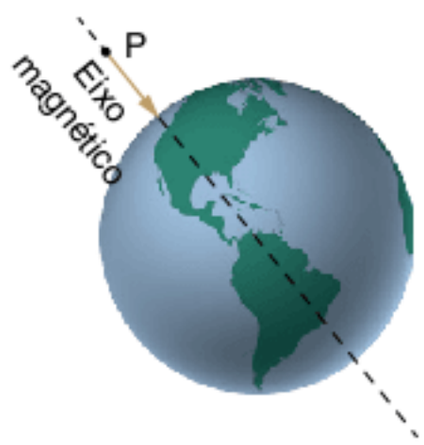
36 **UFPA** Uma partícula de massa m, carga q > 0 é lançada em uma região do espaço onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$. A partícula tem uma velocidade que forma com a direção de $\vec{B}$ um ângulo θ. Nessas condições, podemos afirmar corretamente que:
(a) a trajetória da partícula é uma circunferência quando θ = 0.
(b) a trajetória da partícula é uma circunferência quando θ = π.
(c) a partícula descreve uma trajetória helicoidal se $\theta = \frac{\pi}{2}$.
(d) a trajetória da partícula é helicoidal com eixo paralelo a $\vec{B}$ se $\theta = \frac{\pi}{4}$.
(e) para $\theta = \frac{\pi}{2}$, a partícula descreve uma trajetória retilínea paralela a $\vec{B}$.

37 Uma partícula com carga elétrica Q, não nula, e massa M penetra em uma região R onde existe um campo magnético constante e uniforme, no qual foi feito vácuo. A carga penetra na região R em uma direção perpendicular ao campo magnético. Nessas condições, e não havendo outras interações com a partícula, considere as seguintes afirmações relacionadas com a partícula em R:
I. o movimento da partícula é retilíneo e uniforme.
II. o movimento da partícula é circular, sendo que a velocidade da partícula aumenta com o tempo.
III. a partícula está certamente sob a ação de uma força perpendicular à direção de seu movimento.
Qual(quais) dessas afirmativas é(são) correta(s)?
(a) Somente I.
(b) Somente II.
(c) Somente III.
(d) Somente I e III.
(e) Somente II e III.

38 **ITA** Consideremos uma carga elétrica q entrando com velocidade $\vec{v}$ num campo magnético $\vec{B}$. Para que a trajetória de q seja uma circunferência, é necessário e suficiente que:

(a) $\vec{v}$ seja perpendicular a $\vec{B}$ e que $\vec{B}$ seja uniforme e constante.
(b) $\vec{v}$ seja paralela a $\vec{B}$.
(c) $\vec{v}$ seja perpendicular a $\vec{B}$.
(d) $\vec{v}$ seja perpendicular a $\vec{B}$ e que tenha simetria circular.
(e) nada se pode afirmar, pois não é dado o sinal de q.

39 **Fuvest** Raios cósmicos são partículas de grande velocidade, provenientes do espaço, que atingem a Terra de todas as direções. Sua origem é, atualmente, objeto de estudos. A Terra possui um campo magnético semelhante ao criado por um ímã em forma de barra cilíndrica, cujo eixo coincide com o eixo magnético da Terra. Uma partícula cósmica P com carga elétrica positiva, quando ainda longe da Terra, aproxima-se percorrendo uma reta que coincide com o eixo magnético da Terra, como mostra a figura. Desprezando a atração gravitacional, podemos afirmar que a partícula, ao se aproximar da Terra:

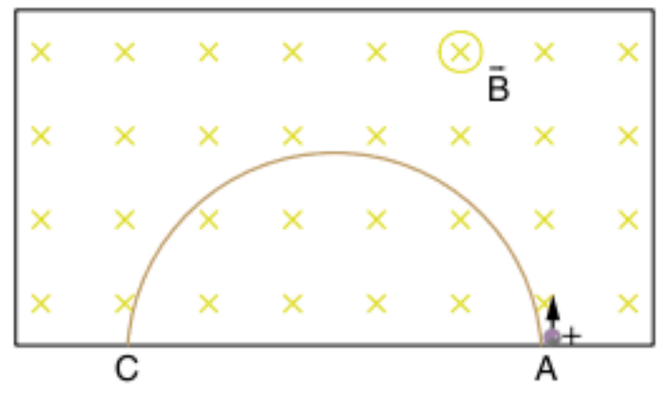


(a) aumenta a velocidade e não se desvia de sua trajetória retilínea.
(b) diminui sua velocidade e não se desvia de sua trajetória retilínea.
(c) tem sua trajetória desviada para leste.
(d) tem sua trajetória desviada para oeste.
(e) não altera sua velocidade nem se desvia de sua trajetória retilínea.

40 **Cesp-PE** Um elétron é lançado perpendicularmente a um campo magnético uniforme de intensidade 0,5 T e descreve uma trajetória circular de raio igual a 15 cm.
Sabendo-se que a carga do elétron é $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, pode-se concluir que o módulo de sua quantidade de movimento, em N.s, será:

(a) $4{,}8 \cdot 10^{-18}$
(b) $1{,}2 \cdot 10^{-20}$
(c) $3{,}6 \cdot 10^{-19}$
(d) $5{,}4 \cdot 10^{-21}$
(e) $3{,}2 \cdot 10^{-15}$

41 **Mackenzie** Um íon de massa $8{,}0 \cdot 10^{-27}$ kg e carga $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C "entra" na câmara de um espectrômetro de massa com uma energia cinética de $1{,}6 \cdot 10^{-16}$ J, após ter sido acelerado por uma ddp. Após descrever a trajetória ilustrada na figura a seguir, o íon atinge o ponto C de uma chapa fotográfica, distante de A:
Dado: $B = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ T



(a) 0,10 cm
(b) 1,0 cm
(c) 2,0 cm
(d) 10 cm
(e) 20 cm

42 **ITA** Uma partícula de carga q e massa m desloca-se com movimento circular sob a ação exclusiva de um campo de indução magnética uniforme de intensidade $|\vec{B}|$. Nessas condições, pode-se afirmar que:

(a) esse movimento é uniformemente acelerado.
(b) o trabalho realizado pela força magnética num período é positivo.
(c) o trabalho realizado pela força magnética num período é negativo.
(d) o movimento é circular e uniforme com velocidade angular diretamente proporcional a q/m.
(e) o movimento é circular e uniforme com velocidade angular independente de $|\vec{B}|$.

43 **Unip** Uma partícula α (2 prótons + 2 nêutrons) e um dêuteron (1 próton + 1 nêutron) são lançados com a mesma velocidade inicial, perpendicularmente às linhas de indução de um campo magnético uniforme. As partículas vão descrever movimentos circulares e uniformes. Sejam R_α e T_α o raio da circunferência e o período do movimento descrito pela partícula α e R_D e T_D os respectivos valores para o movimento do dêuteron. Admita que a partícula α e o dêuteron se movam sob a ação exclusiva do campo magnético.
Assinale a opção certa:

(a) $R_\alpha = R_D$ e $T_\alpha = T_D$
(b) $R_\alpha = R_D$ e $T_\alpha < T_D$
(c) $R_\alpha = R_D$ e $T_\alpha > T_D$
(d) $R_\alpha < R_D$ e $T_\alpha < T_D$
(e) $R_\alpha > R_D$ e $T_\alpha > T_D$

44 **Mackenzie** Uma carga elétrica puntiforme penetra com velocidade $\vec{v}$ numa região do espaço onde existe um campo magnético uniforme. Com relação a esse fato, considere as afirmações:

I. a trajetória da carga é circular e sua velocidade tem direção perpendicular à do campo.
II. a trajetória da carga é sempre uma hélice cilíndrica.
III. a força magnética que age sobre a carga não altera sua velocidade.
IV. a força magnética que age sobre a carga não altera sua energia cinética.

Assinale:

(a) se II e IV estiverem incorretas.
(b) se II e III estiverem incorretas.
(c) se I e IV estiverem incorretas.
(d) se I e III estiverem incorretas.
(e) se I e II estiverem incorretas.

45 **UFV** A figura mostra um próton e um elétron, penetrando paralelamente com a mesma velocidade em uma região onde há um campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular ao plano do papel.

A observação das trajetórias das partículas no campo permite concluir que:

(a) "1" é o elétron e $\vec{B}$ aponta para fora.
(b) "1" é o elétron e $\vec{B}$ aponta para cima.
(c) "1" é o próton e $\vec{B}$ aponta para dentro.
(d) "1" é o elétron e $\vec{B}$ aponta para dentro.
(e) "1" é o próton e $\vec{B}$ aponta para fora.

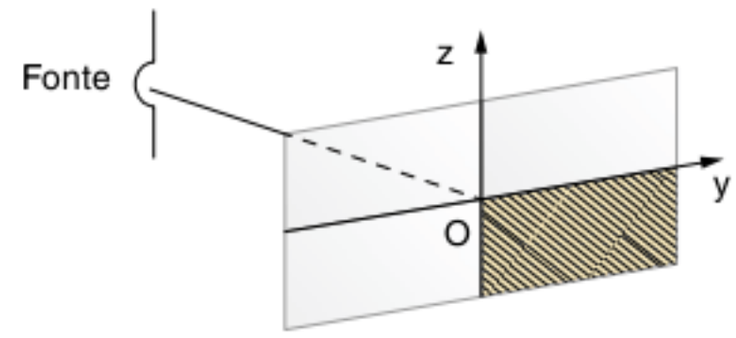
46 **Fuvest** Um feixe de elétrons, todos com mesma velocidade, penetra em uma região do espaço onde há um campo elétrico uniforme entre duas placas condutoras, planas e paralelas, uma delas carregada positivamente e a outra, negativamente. Durante todo o percurso, na região entre as placas, os elétrons têm trajetória retilínea, perpendicular ao campo elétrico. Ignorando efeitos gravitacionais, esse movimento é possível se entre as placas houver, além do campo elétrico, também um campo magnético, com intensidade adequada e:

(a) perpendicular ao campo elétrico e à trajetória dos elétrons.
(b) paralelo e de sentido oposto ao do campo elétrico.
(c) paralelo e de mesmo sentido que o do campo elétrico.
(d) paralelo e de sentido oposto ao da velocidade dos elétrons.
(e) paralelo e de mesmo sentido que o da velocidade dos elétrons.

47 Um elétron atravessa uma região na qual existem dois campos, um magnético e outro elétrico perpendiculares entre si, sem sofrer desvio. Sendo E a intensidade do campo elétrico e B a do magnético, a velocidade do elétron, cuja direção será perpendicular às dos campos, vale:

(a) $v = \sqrt{\frac{E}{B}}$
(b) $v = \sqrt{\frac{B}{E}}$
(c) $v = \frac{E}{B}$
(d) $v = \frac{B}{E}$
(e) diferente dos anteriores.

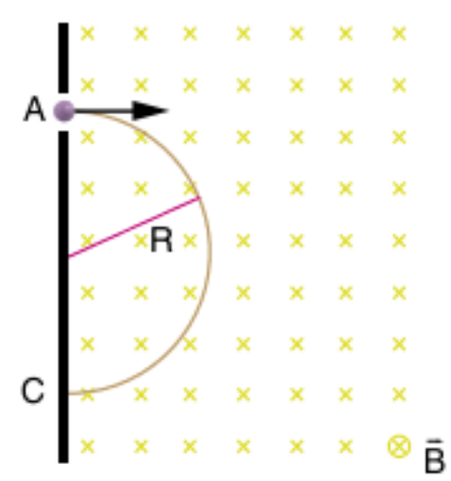
48 **Mackenzie** A fonte indicada na figura emite um feixe de elétrons com velocidade inicial horizontal que vai atingir o centro O do anteparo vertical. Aplica-se, então, na região entre a fonte e o anteparo, um campo de indução magnética $\vec{B}$ e um campo elétrico $\vec{E}$, ambos verticais e uniformes.



Os sentidos de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ para que o feixe eletrônico atinja o quadrante hachurado são:

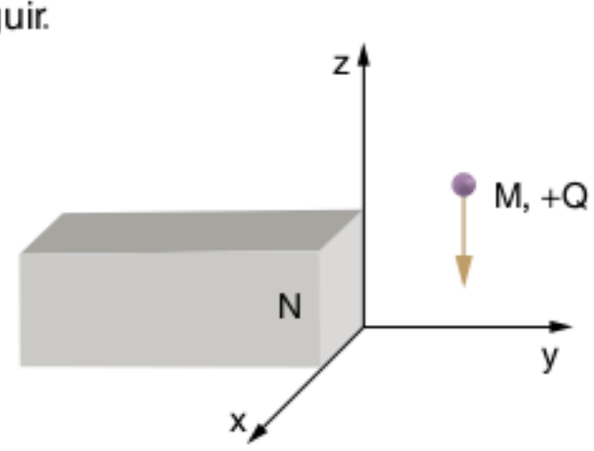
(a) $\vec{B}$ ↑ $\vec{E}$ ↓
(b) $\vec{B}$ ↓ $\vec{E}$ ↓
(c) $\vec{B}$ ↑ $\vec{E}$ ↑
(d) $\vec{B}$ ↓ $\vec{E}$ ↑
(e) imprevisíveis.

49 **Fuvest** Ao penetrar numa região com um campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular ao plano do papel, uma partícula de massa m e carga elétrica q descreve uma trajetória circular de raio R, conforme indica a figura.



a) Qual o trabalho realizado pela força magnética que age sobre a partícula no trecho AC trajetória circular?
b) Calcule a velocidade da partícula em função de B, R, m e q.

50 **UFU** Um objeto de massa M, carregado com uma carga positiva +Q, cai devido à ação da gravidade e passa por uma região próxima do polo norte (N) de um ímã, conforme mostra a figura a seguir.

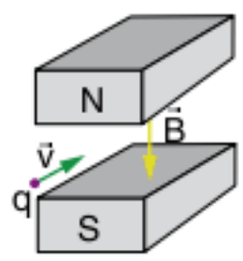


De acordo com o sistema de eixos representados anteriormente, assinale a alternativa que contém a afirmação correta.

(a) O objeto sofrerá um desvio no sentido positivo do eixo y, devido à presença do campo magnético na região.
(b) O objeto cairá verticalmente, não sofrendo desvio algum até atingir o solo, pois campos gravitacionais e magnéticos não interagem.

(c) O objeto sofrerá um desvio no sentido positivo do eixo x, devido à presença do campo magnético na região.
(d) O objeto sofrerá um desvio no sentido negativo do eixo x, devido à presença do campo magnético na região.

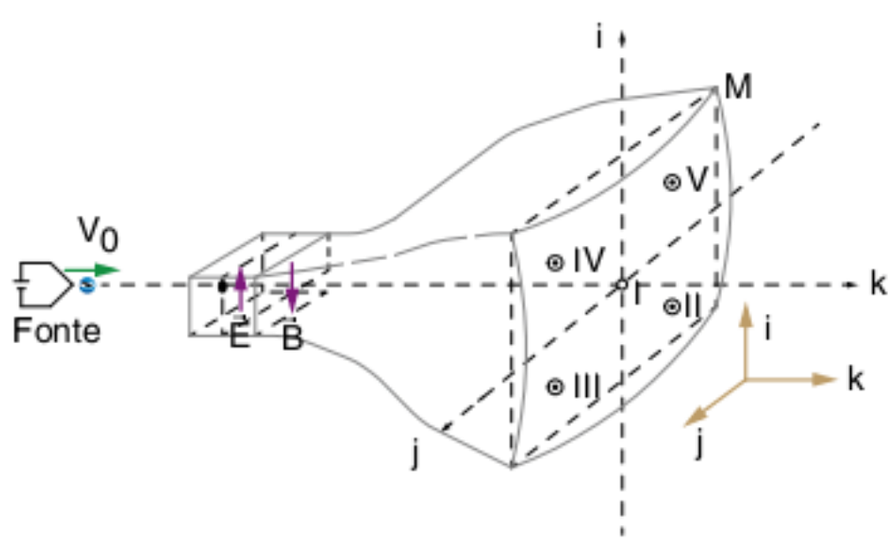
51 **Fuvest** Uma partícula dotada de carga positiva q é lançada com velocidade $\vec{v}$ numa região entre as peças polares de um ímã conforme a figura a seguir.



O vetor indução magnética $\vec{B}$ é uniforme e normal à direção inicial de movimento da partícula. Quanto à alteração do estado de movimento da partícula podemos afirmar que:
(a) a partícula aumentará sua velocidade ao penetrar no campo magnético.
(b) a partícula diminuirá sua velocidade ao penetrar no campo magnético.
(c) a partícula se desviará aproximando-se do polo norte.
(d) a partícula se desviará aproximando-se do polo sul.
(e) a partícula se desviará no plano normal a $\vec{B}$ e o módulo de sua velocidade não sofrerá variações.

52 **Mackenzie** Uma carga, lançada perpendicularmente a um campo magnético uniforme, efetua MCU de período T. Se o lançamento fosse feito com velocidade três vezes maior, o período seria:
(a) $\frac{T}{3}$ (b) T (c) 3T (d) $T^{\frac{1}{3}}$ (e) T^3

53 **UFG** Um feixe de elétrons, emitidos por uma fonte, a uma velocidade v_0, passa por duas regiões, uma com campo elétrico $\vec{E} \neq \vec{0}$ e outra com campo magnético $\vec{B} \neq \vec{0}$, ambos constantes e uniformes, veja figura a seguir.

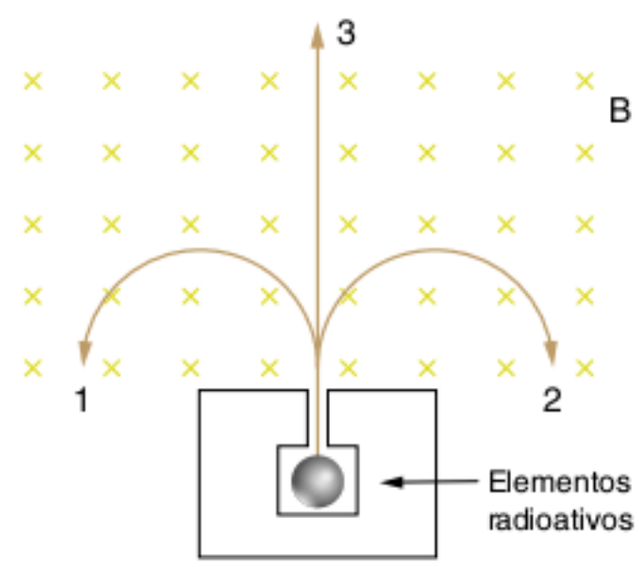


O feixe, após passar por estas regiões, incide sobre uma tela fluorescente M. O ponto de incidência será:
(a) II
(b) III
(c) V
(d) IV
(e) I

54 Para um elétron, a massa m e a carga q, são tais que $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg e $|q| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Consideremos uma região onde o campo gravitacional tem módulo $g = 10$ m/s². Um elétron, movendo-se a $2{,}0 \cdot 10^3$ m/s, penetra em um campo magnético uniforme de 2,0 T, perpendicularmente às linhas de indução. Calcule os módulos das forças magnética e gravitacional atuantes no elétron nessa situação. Compare os dois valores.

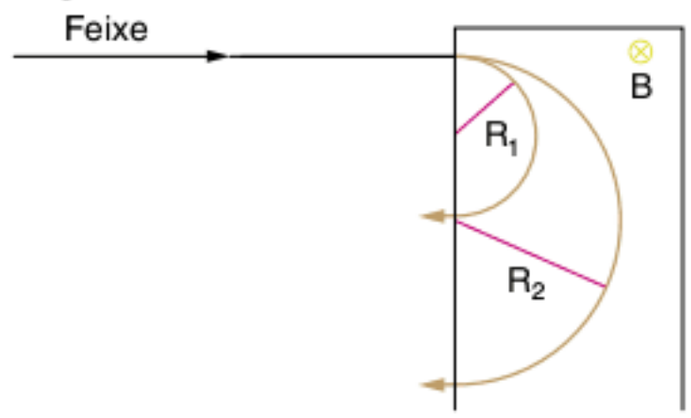
55 Um dêuteron – partícula constituída por um nêutron e um próton – descreve trajetória circular de raio igual a 50 cm em um campo magnético de indução uniforme, de módulo igual a 2,0 T. Sendo a massa e a carga elétrica do dêuteron, respectivamente, iguais a $3{,}4 \cdot 10^{-27}$ kg e $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, e supondo a força magnética como a única atuante, calcule:
Use $\pi = 3{,}14$.
a) sua velocidade.
b) o intervalo do tempo para o dêuteron percorrer uma semicircunferência.

56 **Unesp** Uma mistura de substâncias radiativas encontra-se confinada em um recipiente de chumbo, com uma pequena abertura por onde pode sair um feixe paralelo de partículas emitidas. Ao saírem, três tipos de partícula, 1, 2 e 3, adentram uma região de campo magnético uniforme B com velocidades perpendiculares às linhas de campo magnético e descrevem trajetórias conforme ilustradas na figura.



Considerando a ação de forças magnéticas sobre cargas elétricas em movimento uniforme, e as trajetórias de cada partícula ilustradas na figura, pode-se concluir com certeza que:
(a) as partículas 1 e 2, independentemente de suas massas e velocidades, possuem necessariamente cargas com sinais contrários e a partícula 3 é eletricamente neutra (carga zero).
(b) as partículas 1 e 2, independentemente de suas massas e velocidades, possuem necessariamente cargas com sinais contrários e a partícula 3 tem a massa zero.
(c) as partículas 1 e 2, independentemente de suas massas e velocidades, possuem necessariamente cargas de mesmo sinal e a partícula 3 tem carga e massa zero.
(d) as partículas 1 e 2 saíram do recipiente com a mesma velocidade.
(e) as partículas 1 e 2 possuem massas iguais, e a partícula 3 não possui massa.

57 **Unesp 2007** Um feixe é constituído de dois tipos de partículas com cargas elétricas iguais, mas massas m_1 e m_2 ($m_1 \neq m_2$). Ao adentrarem, com velocidades iguais, uma região onde existe um campo magnético uniforme, as partículas de massa m_1 e m_2 descrevem, num mesmo plano, trajetórias semicirculares diferentes, com raios R_1 e R_2, respectivamente, como ilustradas na figura.



Expresse a razão entre as massas m_1 e m_2, em termos R_1 e R_2.

58 **UFSC 2009** Em relação ao campo magnético, assinale a(s) proposição(ões) correta(s):

01 Imagine que você esteja sentado numa sala com as costas voltadas para uma parede da qual emerge um feixe de elétrons que se move horizontalmente para a parede em frente. Se este feixe de elétrons for desviado para a sua direita, o campo magnético existente na sala terá o sentido do teto para o chão.

02 Um campo magnético pode ser criado por cargas em movimento ou em repouso. Um exemplo deste último é o campo magnético criado por um ímã.

04 Se uma partícula carregada for lançada em uma região onde existe um campo magnético $\vec{B}$, ela será sempre desviada perpendicularmente a $\vec{B}$.

08 Como a força magnética, agindo sobre uma partícula carregada, é sempre perpendicular ao vetor velocidade da partícula, um campo magnético $\vec{B}$ constante não pode alterar o módulo da velocidade desta partícula.

16 Se uma partícula carregada for lançada com velocidade $\vec{v}$ em uma região onde existe um campo magnético $\vec{B}$, ela descreverá uma trajetória circular desde que $\vec{v}$ seja perpendicular a $\vec{B}$.

Soma = ☐

TEXTO COMPLEMENTAR

Auroras boreais e austrais

A aurora boreal (luzes do norte) e a aurora austral (luzes do sul) sempre fascinaram a humanidade. Algumas pessoas chegam a viajar milhares de quilômetros apenas para observar o espetáculo de luzes brilhantes na atmosfera terrestre. As auroras que circundam o polo magnético norte (boreal) e o polo magnético sul (austral) ocorrem quando elétrons de carga elevada provenientes do vento solar interagem com elementos da atmosfera terrestre. Os ventos solares fluem escapando do Sol com velocidades de cerca de 1,6 milhões de quilômetros por hora. Quando alcançam a Terra, cerca de 40 horas depois de deixarem o Sol, seguem linhas de força magnética geradas pelo núcleo da Terra, fluindo através da magnetosfera por uma área com formato de lágrima constituída de campos magnéticos e elétricos de alta carga.

Os elétrons, quando penetram na atmosfera terrestre superior, encontram átomos de oxigênio e de nitrogênio em altitudes de 32 a 320 quilômetros acima da superfície terrestre. A cor da aurora depende do átomo que colide com o elétron e da altitude em que se dá essa colisão.

- Verde – oxigênio, até 240 quilômetros de altitude
- Vermelha – oxigênio, acima de 240 quilômetros de altitude
- Azul – nitrogênio, até 96 quilômetros de altitude
- Púrpura/violeta – nitrogênio, acima de 96 quilômetros de altitude

Todas as forças elétricas e magnéticas reagem entre si, em combinações constantemente mutáveis. Essas mudanças e fluxos se apresentam como a "dança" das auroras, movendo-se ao longo de correntes atmosféricas e podendo alcançar 20.000.000 ampères a 50.000 volts (como comparação, os disjuntores de uma residência são desconectados quando a corrente ultrapassa 15-30 ampères a 120 volts).

As auroras geralmente ocorrem ao longo da "oval das auroras" que tem centro nos polos magnéticos e não nos polos geográficos. De uma forma aproximada, correspondem aos círculos ártico e antártico. Em certas ocasiões, entretanto, as luzes ficam ao Sul, mais distantes, geralmente quando ocorrem muitas manchas solares. A atividade das manchas solares segue um ciclo de 11 anos. O próximo pico ocorrerá em 2012 e 2013, com boa probabilidade de ocorrência de auroras fora da faixa usual.

[...]

Como funciona a aurora boreal?. (Adapt.).

howstuffworks
comotudofunciona

Disponível em: <www.hsw.com.br>.

RESUMINDO

A ação de um campo magnético, descrito pelo vetor indução magnética $\vec{B}$, pode ser facilmente observada nas extremidades de um ímã, denominadas polos.

A extremidade que aponta para o norte geográfico recebe o nome de polo norte e a extremidade que aponta para o sul geográfico recebe o nome de polo sul. Polos iguais se repelem e polos diferentes se atraem.

Polos magnéticos não podem ser separados, ou seja, não existem monopolos magnéticos, ao contrário do que ocorre com as cargas elétricas.

O vetor indução magnética é tangente às linhas de indução, que se orientam do polo norte para o polo sul magnético.

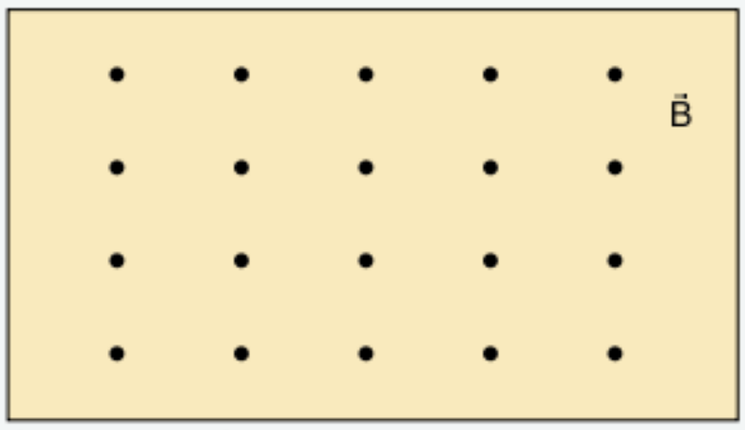
Em um campo magnético uniforme, as linhas de indução são paralelas e sua intensidade, direção e sentido são iguais em todos os pontos.

Veja ao lado como o sentido do vetor indução pode ser representado no plano do papel.

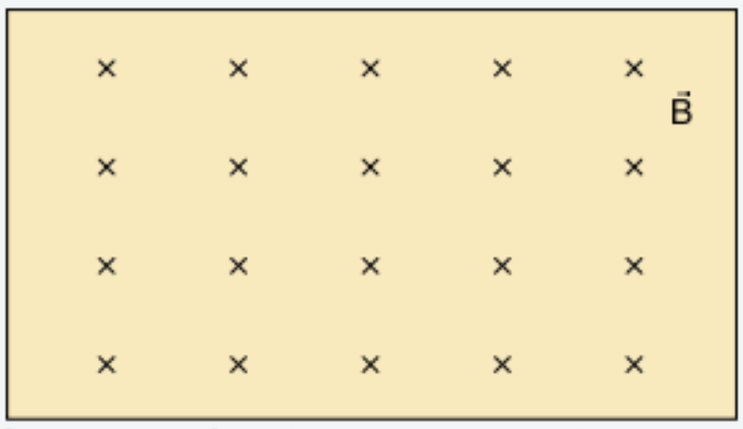
O campo magnético não age sobre cargas em repouso ou que se movimentam na mesma direção deste campo.

Cargas em movimento estão sujeitas a uma força de origem magnética, que depende de sua velocidade, intensidade do campo e direção dos vetores.

$$F_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$



Campo magnético "saindo do papel".



Campo magnético "entrando no papel".

QUER SABER MAIS?

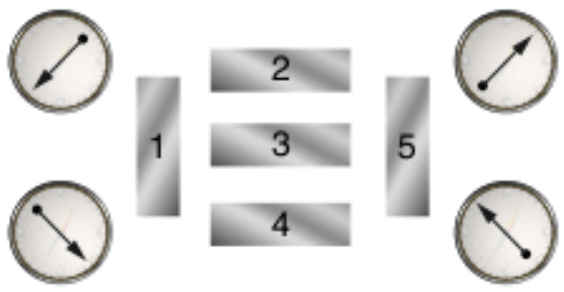
SITES

- A bússola e o campo magnético terrestre
  <www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=798&sid=7>.
- Sensibilidade de organismos a campos magnéticos
  <http://cienciahoje.uol.com.br/revista-ch/revista-ch-2008/252/o-magnetismo-das-moscas>.
- Osciloscópio
  <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electronic/oscope.html#c1>.

Exercícios complementares

Questões gerais

1 **Cesgranrio** Quatro bússolas estão colocadas no tampo de uma mesa de madeira nas posições ilustradas na figura a seguir. Elas se orientam conforme é mostrado, sob a ação do forte campo magnético de uma barra imantada colocada em uma das cinco posições numeradas.
O campo magnético terrestre é desprezível. A partir da orientação das bússolas, pode-se concluir, que o ímã está na posição:



(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

2 Suponhamos que uma pessoa esteja em uma sala onde não existe nenhum utensílio. Ela recebe duas barras de ferro, neutras e de mesmas dimensões.

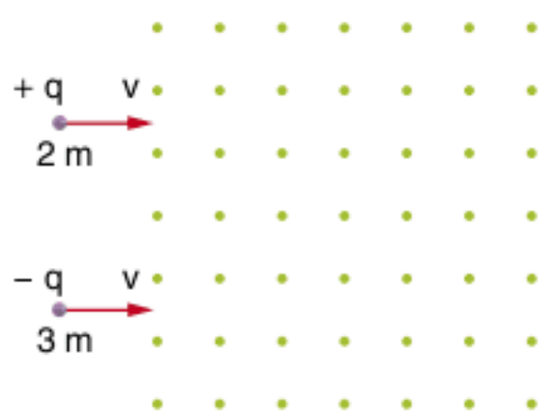
a) Como poderá descobrir se pelo menos uma delas está imantada?
b) Como poderá descobrir se as duas barras estão imantadas, ou apenas uma?
c) Como poderá determinar qual é a barra imantada, se a outra não estiver?

3 **ITA** Numa experiência inédita, um pesquisador dirigiu um feixe de partículas desconhecidas para dentro de uma região em que existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$. Ele observou que todas as partículas descreveram trajetórias circulares de diferentes raios (R), mas todas com mesmo período. Poderá ele afirmar com certeza que o feixe é constituído:

(a) de partículas iguais e com mesma velocidade inicial, pois todas as partículas descrevem órbitas circulares de mesmo período.

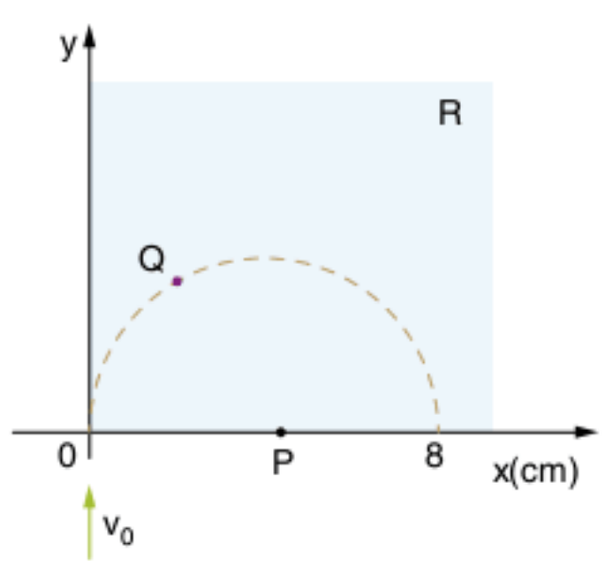
(b) de partículas diferentes, mas todas com mesma velocidade inicial, pois todas as partículas descrevem órbitas circulares de mesmo período.
(c) de partículas que apresentam o mesmo quociente entre o módulo da carga elétrica (q) e massa (m), independentemente de sua velocidade inicial.
(d) de partículas que apresentam o mesmo quociente entre carga elétrica (q) e massa (m) e mesma velocidade inicial, pois todas as partículas descrevem órbitas circulares de mesmo período.
(e) nenhuma das afirmações acima está correta.

4 **Fuvest** A figura representa um feixe contendo partículas com carga +q e massa 2 m e partículas com carga −q e massa 3 m. Todas penetram com velocidade v numa região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular ao plano do papel, saindo para a vista do leitor.



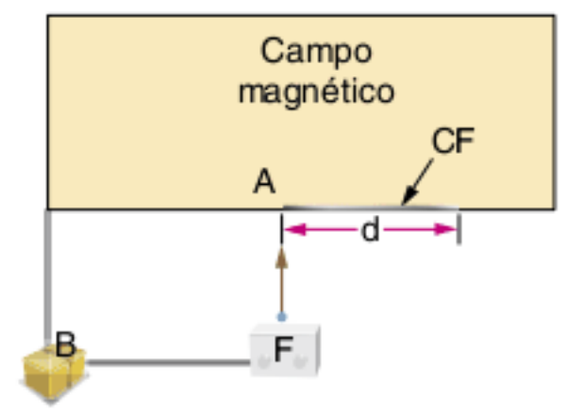
a) Esboce a trajetória de uma partícula positiva e de uma negativa sob a ação do campo magnético.
b) Qual a razão entre a aceleração das partículas positivas e a aceleração das negativas?

5 **Fuvest** Uma partícula carregada é lançada com velocidade $v_0 = 6 \cdot 10^5$ m/s paralelamente ao eixo y, em uma região R onde existe um campo magnético $\vec{B}$. Penetrando nessa região na origem dos eixos coordenados, descreve em seu interior a trajetória circular mostrada na figura.



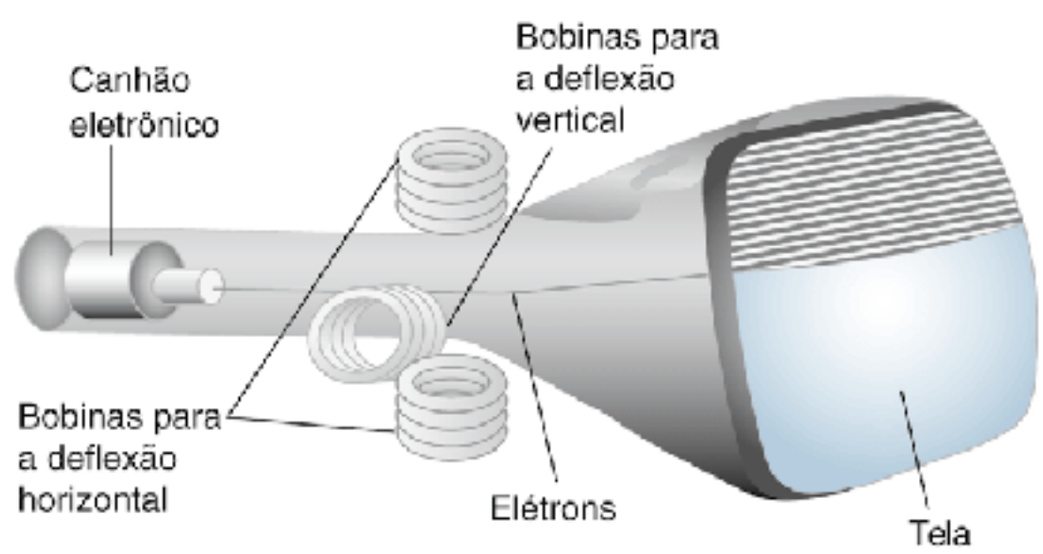
a) Qual deveria ser a velocidade de lançamento para que a partícula atingisse o ponto P de abscissa x = 4 cm?
b) Represente graficamente a força que age sobre a partícula quando ela passa pelo ponto Q.

6 **Mackenzie** A figura a seguir mostra um dispositivo usado para a medida da massa de elétrons. Um elétron com carga e (em valor absoluto) é liberado, a partir do repouso, por uma fonte F. Ele é acelerado pela bateria B de fem E, de modo a penetrar através da pequena abertura A, num campo magnético $\vec{B}$, cujas linhas de indução são perpendiculares ao plano da figura. A partir daí, move-se no campo magnético, indo incidir numa chapa fotográfica CF, a uma distância d da abertura A.



a) Qual a polaridade da bateria?
b) Qual o sentido das linhas de indução?
c) Desprezando as ações gravitacionais, calcular a massa m do elétron.

7 **Enem** A figura mostra o tubo de imagens dos aparelhos de televisão usado para produzir as imagens sobre a tela. Os elétrons do feixe emitido pelo canhão eletrônico são acelerados por uma tensão de milhares de volts e passam por um espaço entre bobinas onde são defletidos por campos magnéticos variáveis, de forma a fazerem a varredura da tela.



Nos manuais que acompanham os televisores, é comum encontrar, entre outras, as seguintes recomendações:
I. nunca abra o gabinete ou toque as peças no interior do televisor.
II. não coloque seu televisor próximo de aparelhos domésticos com motores elétricos ou ímãs.

Essas recomendações estão associadas, respectivamente, aos aspectos de:
(a) riscos pessoais por alta tensão/perturbação ou deformação de imagens por campos externos.
(b) proteção dos circuitos contra manipulação indevida/perturbação ou deformação de imagens por campos externos.
(c) riscos pessoais por alta tensão/sobrecarga dos circuitos internos por ações externas.
(d) proteção dos circuitos contra a manipulação indevida/sobrecarga da rede por fuga de corrente.
(e) proteção dos circuitos contra manipulação indevida/sobrecarga dos circuitos internos por ação externa.

8 A figura mostra um bastão de cobre XYZ inteiramente mergulhado em um campo magnético uniforme. O bastão, sempre mantido perpendicular ao campo, gira em torno do ponto Y, com velocidade angular constante, no sentido indicado:

Quais são os sinais das cargas elétricas adquiridas pelas regiões X, Y e Z do bastão, respectivamente?

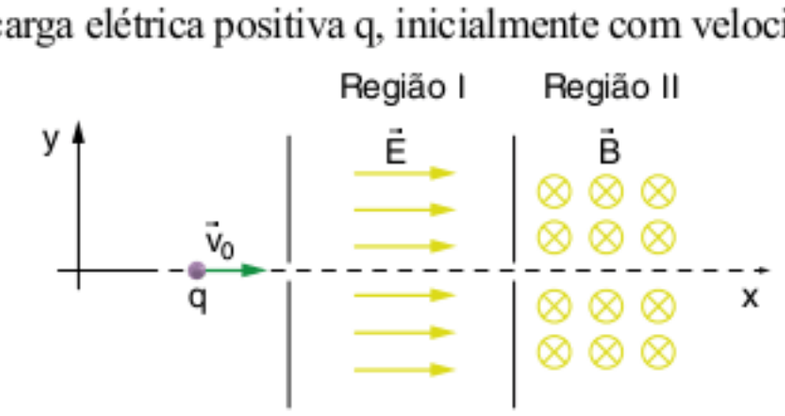
9 **ITA** Deixa-se cair, com velocidade inicial nula, de uma altura h acima do solo, uma partícula de massa m e carga elétrica q. Sobre a partícula atuam o campo gravitacional e um campo de indução magnética $\vec{B}$, estático. Qual a energia cinética da partícula ao atingir o solo?

10 **FCMSC-SP** Um feixe de partículas elétricas, aceleradas a partir do repouso, no vácuo, por uma ddp de 900 V, penetra em um campo magnético de intensidade igual a $3 \cdot 10^{-4}$ T, ortogonalmente à direção deste, passando a descrever uma circunferência de raio igual a 10 cm. Qual é, aproximadamente, o módulo de razão entre a carga e a massa da partícula, em C/Kg?

11 Em uma região existem dois campos uniformes, sendo um elétrico e outro magnético, perpendiculares entre si. O campo elétrico tem intensidade igual a $2 \cdot 10^5$ V/m e o magnético, 0,1 T. Uma partícula eletrizada atravessa a região sem sofrer desvio. Determine sua velocidade, em função do ângulo θ entre a velocidade e o campo magnético.

12 **UFG** Um acelerador de partículas é uma instalação na qual partículas são aceleradas e mantidas em uma trajetória curvilínea fechada, podendo atingir velocidades próximas à da luz. As colisões que elas podem ter com outras partículas são extremamente importantes para o melhor entendimento da estrutura interna da matéria.

O princípio básico de funcionamento de um acelerador de partículas consiste na aplicação combinada de campos elétricos e magnéticos, no interior de um anel no qual as partículas estão confinadas. A figura a seguir representa duas regiões distintas onde se movimenta uma carga elétrica positiva q, inicialmente com velocidade $\vec{v}_0$.



Região I: existe somente campo elétrico

Região II: existe somente campo magnético entrando no plano da folha.

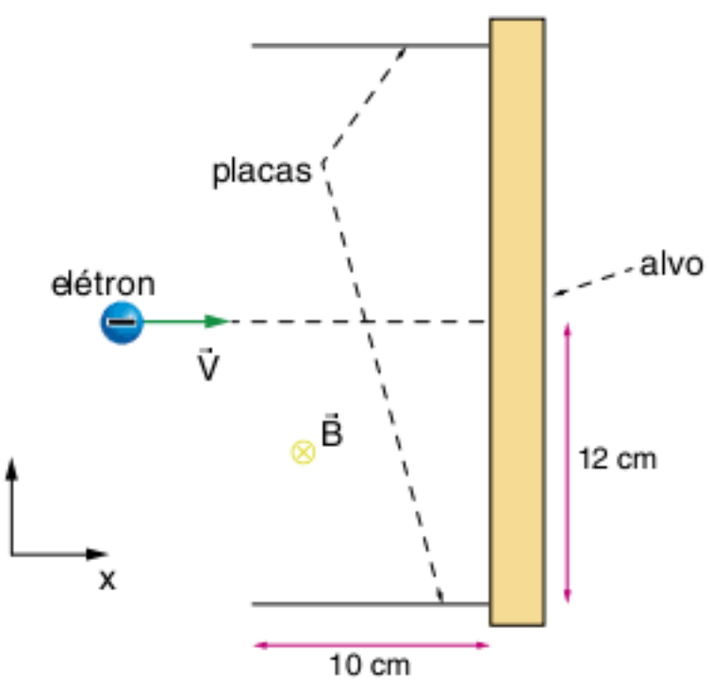
a) Represente a trajetória da carga q ao passar pela Região I e, posteriormente, pela Região II.

b) Considerando que a partícula tenha carga $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, massa $m = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg, e que $E = 10^3$ V/m, $v_0 = 10^5$ m/s e que o tempo gasto pela partícula na Região I seja $t = 10^{-6}$ s, calcule a velocidade com que a partícula entrará na Região II.

c) Se $B = 10^{-1}$ T, calcule o raio do arco de circunferência que a partícula descreve no campo magnético.

13 Uma partícula de massa m, eletrizada com carga q, é lançada com velocidade $\vec{v}$, formando um ângulo θ agudo com as linhas de indução de um campo magnético uniforme $\vec{B}$. Deduza, em função de v, θ, m, q e B, a expressão do passo p da hélice cilíndrica descrita pela partícula.

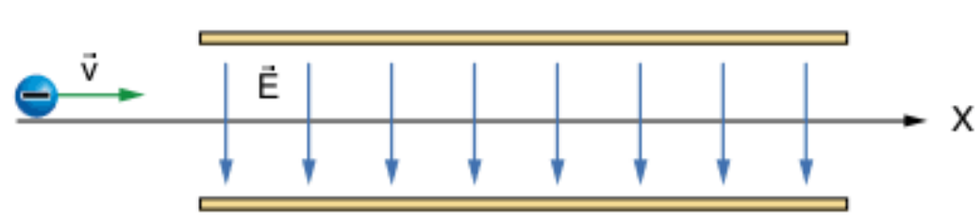
14 **Unicamp 2006** A utilização de campos elétrico e magnético cruzados é importante para viabilizar o uso da técnica híbrida de tomografia de ressonância magnética e de raios X. A figura abaixo mostra parte de um tubo de raios X, onde um elétron, movendo-se com velocidade $v = 5{,}0 \cdot 10^5$ m/s ao longo da direção x, penetra na região entre as placas onde há um campo magnético uniforme $\vec{B}$, dirigido perpendicularmente para dentro do plano do papel. A massa do elétron é $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg e a sua carga elétrica é $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. O módulo da força magnética que age sobre o elétron é dado por $F = qvB \cdot \text{sen}\theta$, onde θ é o ângulo entre a velocidade e o campo magnético.



a) Sendo o módulo do campo magnético B = 0,010 T, qual é o módulo do campo elétrico que deve ser aplicado na região entre as placas para que o elétron se mantenha em movimento retilíneo uniforme?

b) Numa outra situação, na ausência de campo elétrico, qual é o máximo valor de B para que o elétron ainda atinja o alvo? O comprimento das placas é de 10 cm.

15 **Unifei 2009** Um elétron move-se com velocidade escalar constante e igual a v = 25,0 m/s, na direção e no sentido positivo do eixo x. Esse elétron atravessa uma região onde há um campo elétrico $\vec{E}$ homogêneo, que tem a direção vertical e sentido de cima para baixo, conforme mostrado na figura. Conhecendo-se a intensidade do campo elétrico $|\vec{E}| = 50$ V/m, qual deve ser o módulo, a direção e o sentido do vetor indução magnética $\vec{B}$ que, se aplicado a essa região, é capaz de garantir que o elétron não seja defletido durante sua passagem através dessa região com os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$? Despreze a massa do elétron.



8

FRENTE 2

Fontes de campo magnético

Equipamentos para a realização de exames de ressonância magnética utilizam-se de um campo magnético estático, altamente potente, que alinha os momentos angulares dos átomos de hidrogênio do corpo. Em seguida, um pulso de radiofrequência (RF) é aplicado na frequência de ressonância destes átomos para um tecido específico, chamada frequência de Larmor. Ao retornarem para o estado normal, após o pulso ser desligado, estes átomos emitem energia. Através de um contraste, que é injetado na corrente sanguínea, cria-se uma pequena alteração no campo magnético local de forma que tecidos "sadios" e "doentes" não reagem da mesma maneira.

Os elevados campos magnéticos necessários à realização deste exame podem ser obtidos por fios percorridos por corrente elétrica. A primeira observação de que a corrente elétrica poderia gerar campos magnéticos foi feita pelo físico dinamarquês Hans Christian Oersted, ainda no século XIX. Este capítulo irá estudar exatamente isto: a corrente elétrica como fonte de campo magnético.

A experiência de Oersted

Até o início do século passado, supunha-se que os fenômenos elétricos e magnéticos eram independentes, pois campos magnéticos eram gerados por ímãs tão somente e nada tinham a ver com correntes elétricas, porém, em 1820, o físico dinamarquês Oersted descobriu que uma agulha imantada era desviada quando aproximada de um fio percorrido por uma corrente elétrica, como mostra a figura 1. Estava, então, provada a relação entre eletricidade e magnetismo.

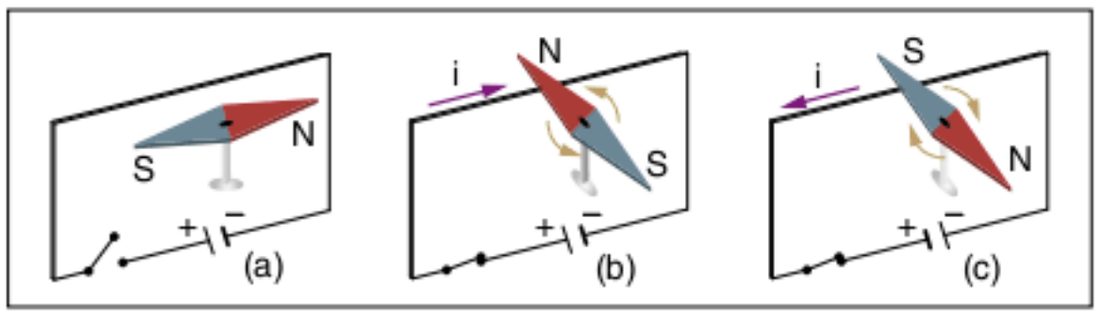


Fig. 1 Experiência de Oersted.

Na figura 1, temos:

a) estando a chave aberta, não passa corrente pelo condutor e a agulha não sofre desvio.
b) ao fecharmos a chave, a agulha sofrerá desvio tendendo a se dispor ortogonalmente ao condutor.
c) invertendo-se o sentido da corrente, a agulha desvia em sentido contrário.

ATENÇÃO!

Corrente elétrica cria um campo magnético na região próxima à circulação dessa corrente.

Passaremos agora a descrever qualitativamente e quantitativamente (quando a geometria assim o permitir) a relação entre corrente elétrica e campo magnético.

Corrente retilínea como fonte de campo magnético

Consideremos um fio muito longo, retilíneo, percorrido por uma corrente elétrica de intensidade **i**.

Se aproximarmos uma agulha imantada desse fio, perceberemos que ela sofre um desvio, indicando a presença de um campo magnético gerado por essa corrente.

O que precisamos, então, é caracterizar o vetor indução magnética $\vec{B}$, ponto a ponto do campo, no que diz respeito a módulo, direção e sentido.

Experimentalmente, se colocarmos limalhas de ferro próximas ao fio, verificaremos que as linhas de indução, do campo magnético, são circunferências concêntricas ao fio retilíneo, sendo os planos que as contém perpendiculares ao fio, conforme pode ser visto na figura 2.

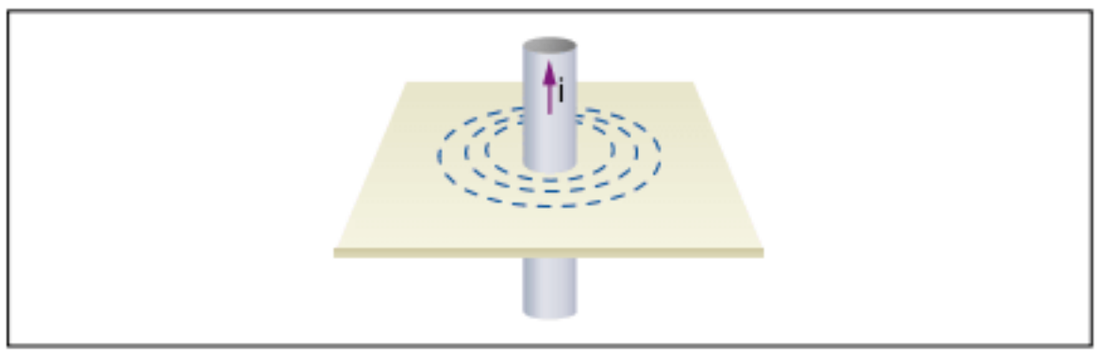


Fig. 2 Linhas de indução magnética.

Dessa forma, conclui-se que o campo magnético em torno do fio é representado por linhas de indução que formam circunferências concêntricas com o fio, conforme indicado na figura a seguir.

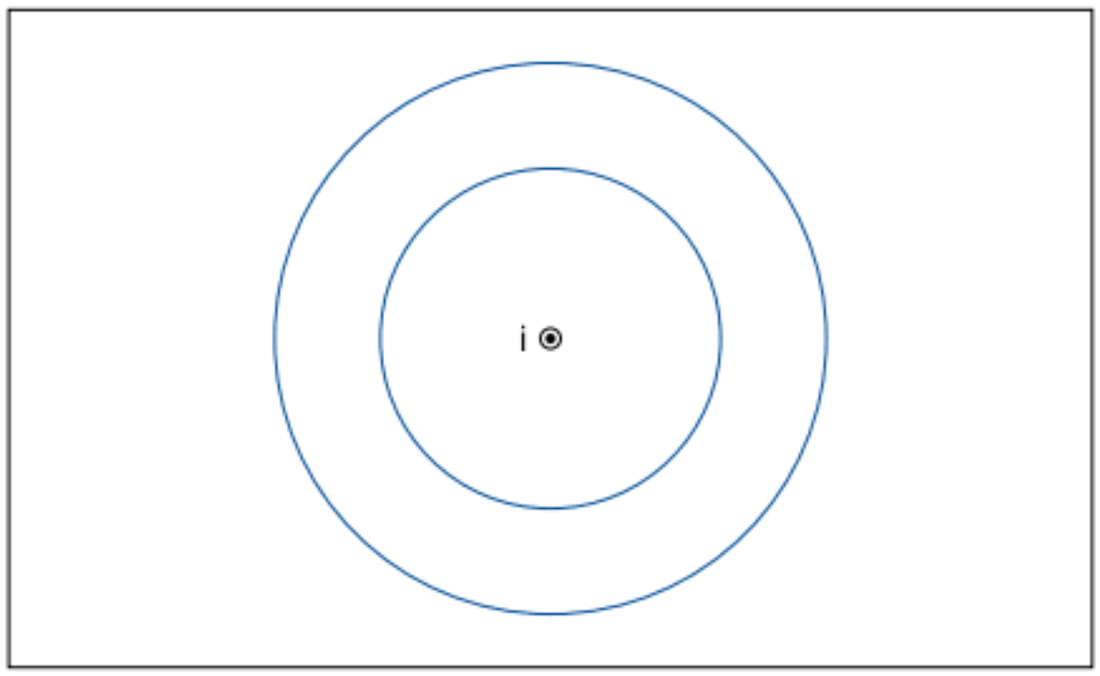


Fig. 3 Linhas de indução circulares em torno do fio.

Observa-se na figura 3 a falta uma informação crucial, que é exatamente o sentido das linhas de indução, que neste caso pode ser horário ou anti-horário. A determinação do sentido destas linhas de indução pode ser feita utilizando-se uma agulha imantada na qual se sabem as polaridades norte e sul magnético.

Ao se colocar uma agulha imantada nas proximidades do imã, ela indicará o sentido do campo magnético, conforme visto na figura 4.

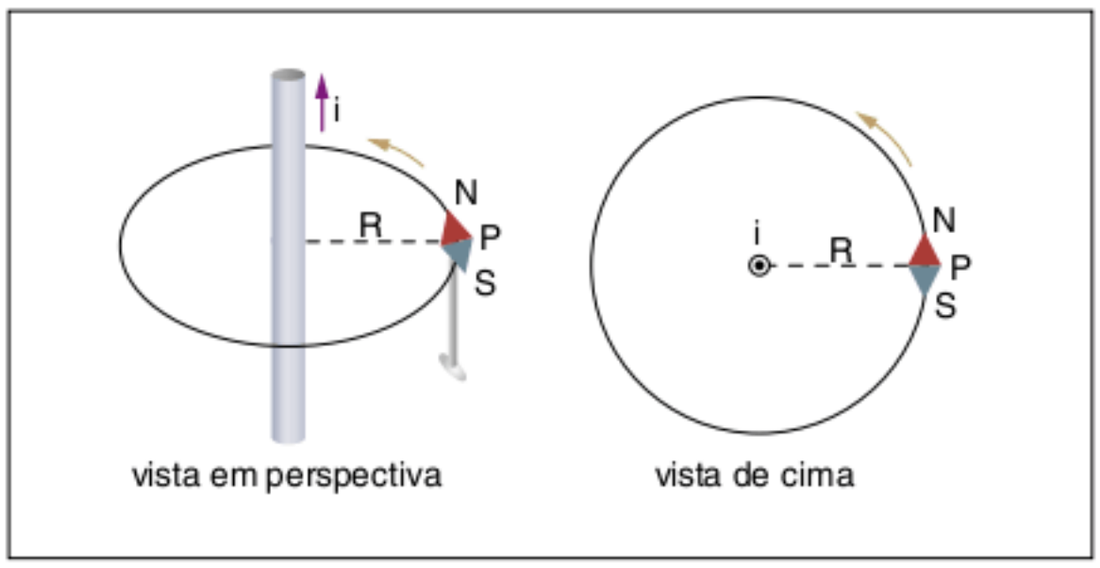


Fig. 4 Alinhamento de um ímã com o vetor $\vec{B}$.

Desta forma se conclui que o sentido das linhas de indução é anti-horário, conforme se observa na figura 5.

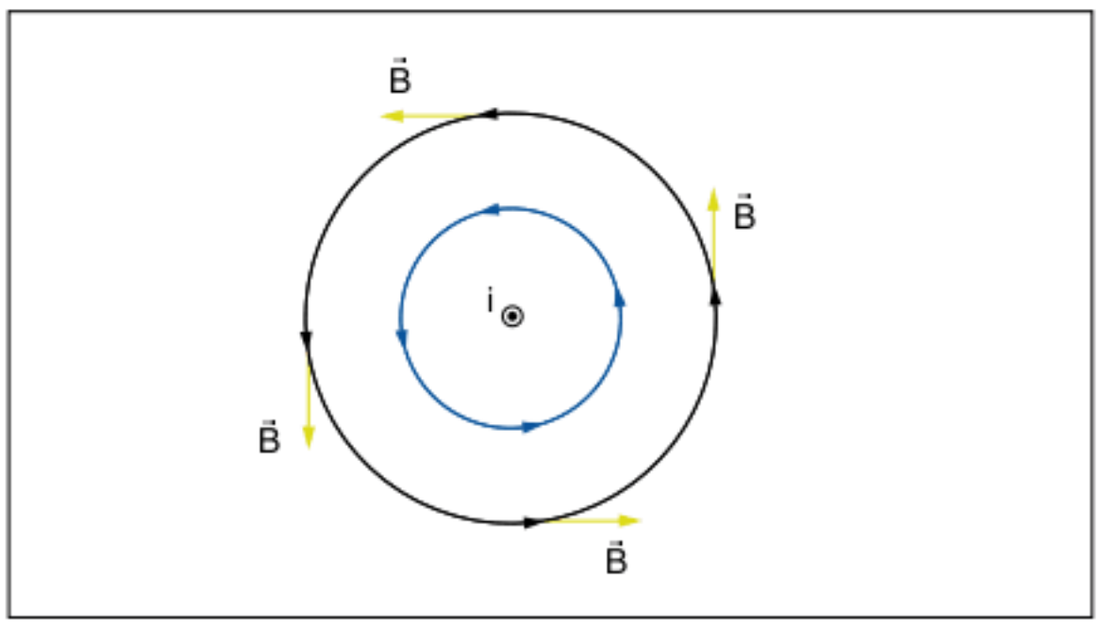


Fig. 5 Orientação das linhas de indução e do vetor $\vec{B}$ para um fio retilíneo percorrido por corrente.

Desta forma, verificamos que o vetor indução magnética $\vec{B}$ pode ser assim caracterizado:

- **direção**: tangente à linha de indução que passa por **P** e que como foi visto anteriormente é uma circunferência concêntrica ao fio de raio **R**.
- **sentido**: determinado pela regra da mão direita envolvente. Para se aplicar essa regra, envolve-se o fio com a mão direita e com o polegar apontando no sentido convencional da corrente, os demais dedos irão apontar o sentido das linhas de indução, conforme pode ser visto na figura 6.

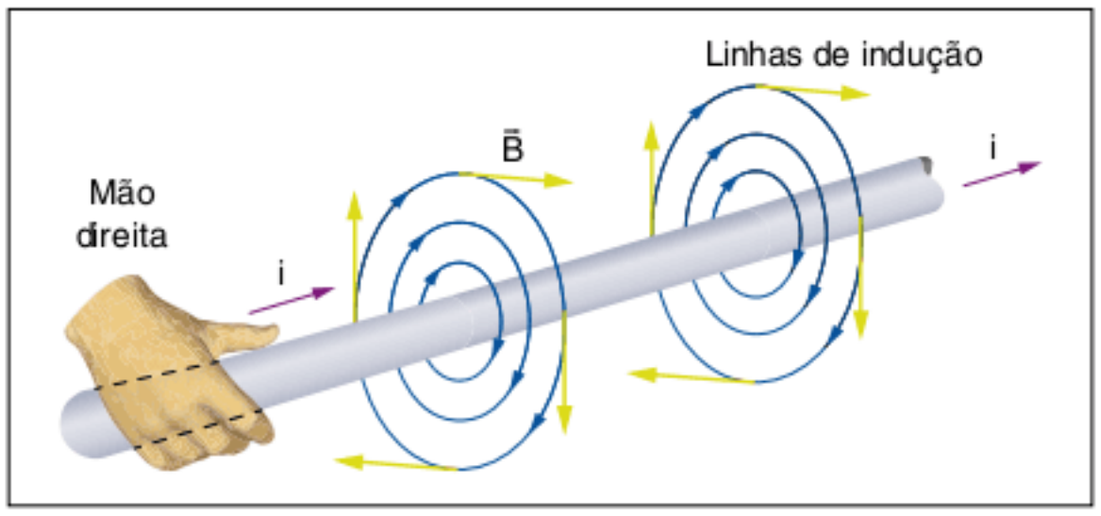


Fig. 6 Aplicação da regra da mão direita envolvente.

ATENÇÃO!

Essa regra é de utilização geral para determinação do sentido das linhas de indução do campo gerado por um condutor percorrido por corrente elétrica.

- **módulo**: o módulo do vetor indução magnética $\vec{B}$ no ponto P depende da intensidade da corrente elétrica i que percorre o fio, da distância R até o ponto em questão e de uma grandeza física que caracteriza o meio em termos magnéticos, que é a sua permeabilidade magnética (μ), semelhante à permissividade elétrica (ε) na eletricidade.

Dessa forma, podemos escrever: $B = \dfrac{\mu i}{2\pi R}$

No caso do vácuo, indicamos a permeabilidade magnética por μ_0, que, em unidades SI, vale:

$$\mu_0 = 4\pi . 10^{-7} T . m . A^{-1}$$

ATENÇÃO!

1. No caso de fio retilíneo semi-infinito percorrido por corrente elétrica, o campo magnético em um ponto situado sobre a sua extremidade é exatamente a metade do campo gerado pelo fio infinito. A figura a seguir mostra a situação.

Fig. 7 Campo magnético gerado na extremidade de fio retilíneo semi-infinito.

2. O campo magnético gerado no prolongamento de um trecho retilíneo de fio percorrido por corrente é nulo.

Fig. 8 Campo magnético gerado no prolongamento de fio retilíneo.

Corrente circular (em uma espira) como fonte de campo magnético

Consideremos agora uma espira circular de raio **R**, percorrida por uma corrente de intensidade **i**.

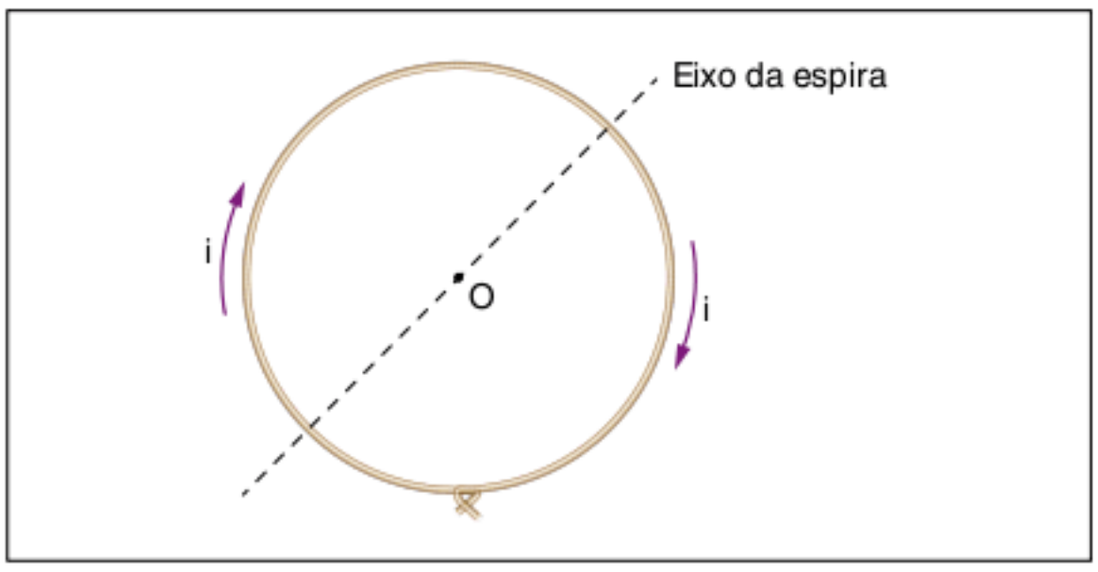


Fig. 9 Espira circular.

Pela regra da mão direita envolvente, podemos determinar o sentido e direção do vetor indução magnética conforme verifica-se na figura 10.

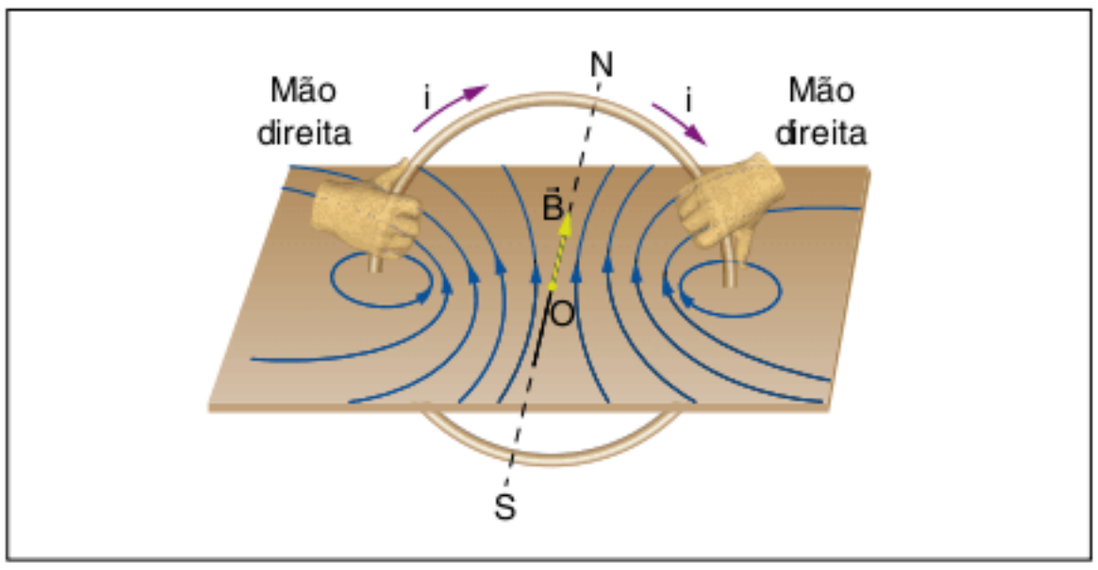


Fig. 10 Regra da mão direita para magnetismo.

Assim, da mesma forma que na corrente retilínea, podemos caracterizar o vetor indução magnética $\vec{B}$ no centro da espira da seguinte forma:

- **direção**: perpendicular ao plano da espira.
- **sentido**: determinado pela regra da mão direita envolvente.
- **módulo**: o módulo do campo magnético gerado no centro da espira depende da intensidade da corrente **i** que percorre a espira, do raio **R** da espira e da permeabilidade magnética μ do meio, tal que:

$$B = \frac{\mu i}{2R}$$

Para o caso de um trecho circular de ângulo θ (em radianos), conforme mostrado na figura 11, percorrido por uma corrente i, tem-se que o módulo do vetor indução magnética por ela gerado é dado por:

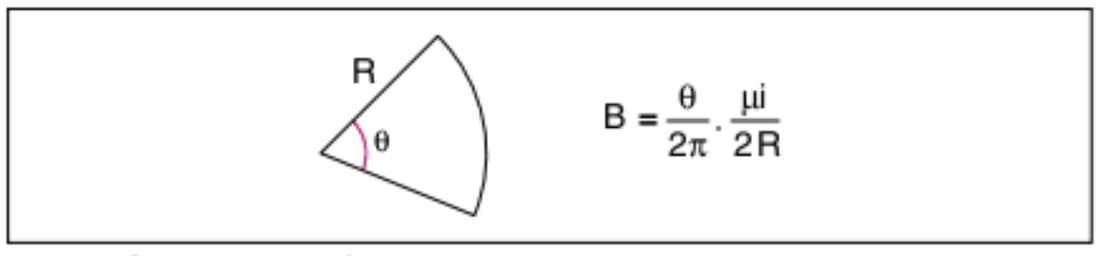
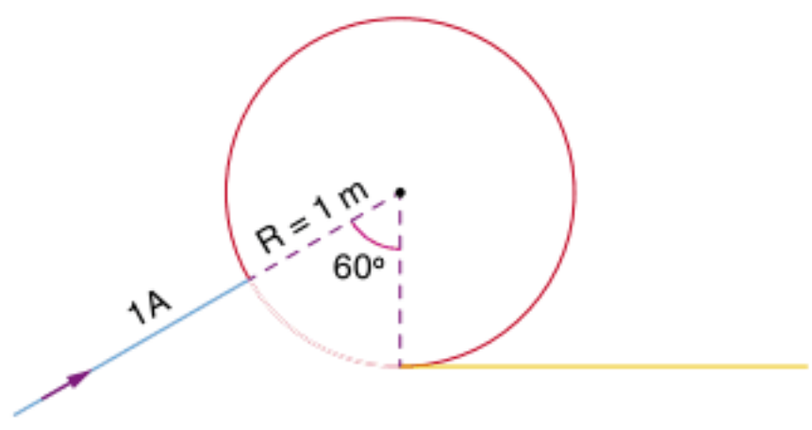


Fig. 11 Campo magnético gerado por trecho circular percorrido por corrente.

Exercício resolvido

1 Considere um fio infinito e disposto no plano do papel, segundo a figura a seguir.



Nessas condições, assinale a alternativa que corresponde ao módulo de $\vec{B}$ no centro da espira.

(a) $\left(\frac{10\pi - 6}{3}\right).10^{-7}$ T

(b) $\left(\frac{10\pi - 12}{3}\right).10^{-7}$ T

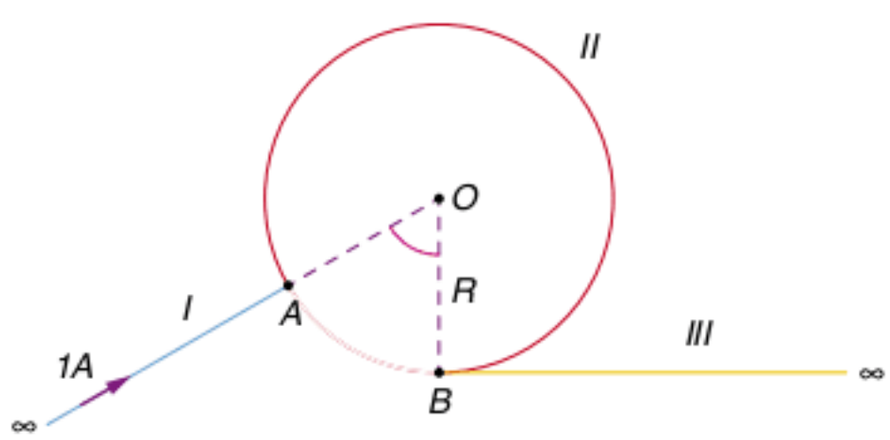
(c) $\left(\frac{5\pi - 3}{3}\right).10^{-7}$ T

(d) $(2\pi - 2)\cdot 10^{-7}$ T

(e) impossível calcular.

Resolução:

Deseja-se determinar o campo magnético no centro do arco de circunferência. Para tal, pode-se dividir o fio infinito em três trechos, conforme a figura a seguir.



Trecho I – *Fio retilíneo cujo prolongamento coincide com o centro da circunferência. Pela observação, item 2, o campo gerado por este trecho é nulo.*

$B_I = 0$

Trecho II – *Pela regra da mão direita, o campo gerado por este trecho é perpendicular ao plano do papel e apontando para dentro. Como o ângulo compreendido pelo arco é de 300°, ou* $\frac{5\pi}{3}$ *rad, tem-se que o campo devido a este trecho é dado por:*

$$B_{II} = \frac{\frac{5\pi}{3}}{2\pi} \cdot \frac{\mu i}{2R} = \frac{5}{6} \cdot \frac{\mu i}{2 \cdot R} \rightarrow B_{II} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5\pi}{3} \cdot 10^{-7},$$

apontando para dentro do plano do papel.

Trecho III – *corresponde a um fio semi-infinito. O ponto O encontra-se sobre a extremidade do fio. De acordo com a observação, item 1, feita para fios retilíneos infinitos, e utilizando-se a regra da mão direita tem-se que:*

$$B_{III} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu i}{2\pi \cdot R} \rightarrow B_{III} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = 10^{-7} T,$$

apontando para fora do plano do papel.

O módulo do campo resultante no ponto O é dado então por:

$$B_O = |B_{II} - B_{III}| = 10^{-7}\left(\frac{5\pi}{3} - 1\right) \rightarrow B_O = 10^{-7}\left(\frac{5\pi - 3}{3}\right) T$$

Portanto: alternativa C

ATENÇÃO!

Um caso particular de corrente circular é quando temos *n* espiras justapostas, chamado bobina chata, nesse caso, podemos escrever que:

$$B = n \cdot \frac{\mu i}{2R}$$

A expressão acima é válida quando o comprimento da bobina é muito menor que o seu diâmetro.

Até agora, falamos de polos magnéticos somente quando falamos de barras imantadas, todavia podemos associar a uma espira circular polos magnéticos que são definidos conforme o sentido da corrente.

Polos magnéticos associados à espira percorrida por corrente elétrica

Na figura 12, podemos observar as linhas de indução de um campo magnético criado por uma corrente **i** que percorre uma espira.

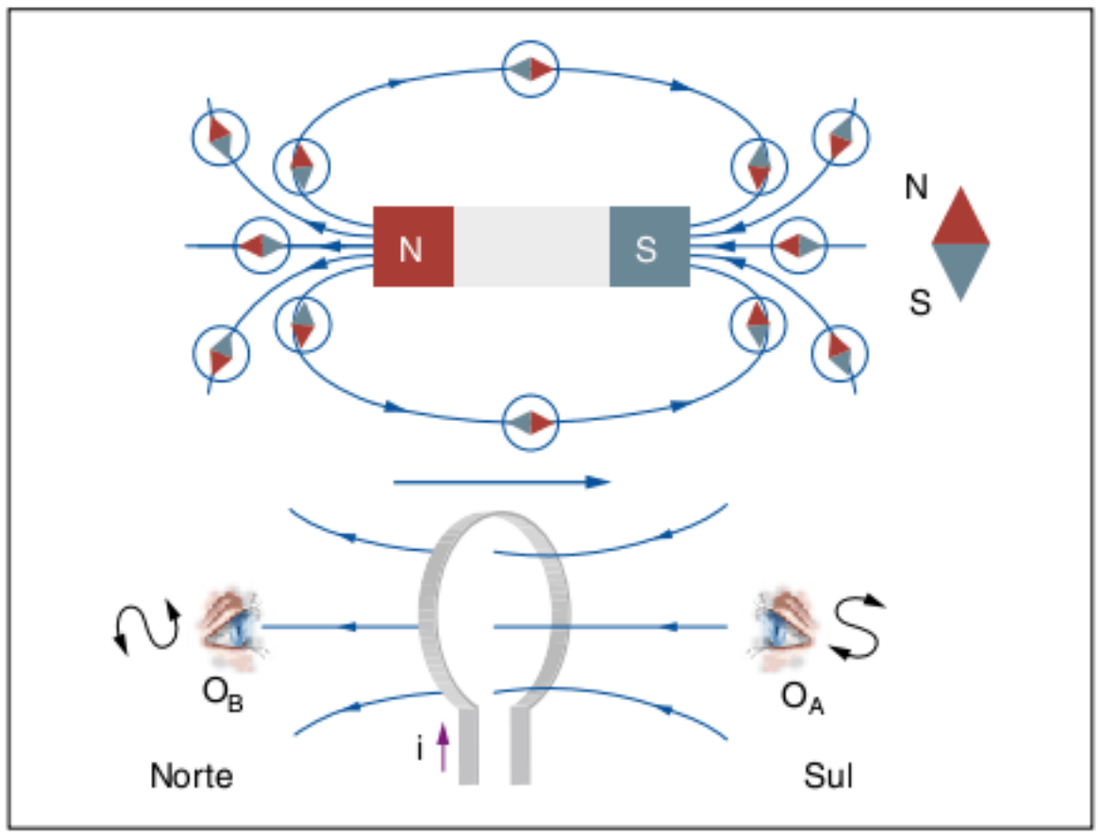


Fig. 12 Linhas de indução magnética.

O observador colocado à direita da espira (O_A) observa a corrente no sentido horário e as linhas de indução "vão" em sentido contrário ao seu, ou seja, entram no plano da espira. Já o observador colocado à esquerda da espira (O_B) observa a

corrente no sentido anti-horário e as linhas de indução "vão" na sua direção, ou seja, saem do plano da espira. Isso pode ser melhor visto na figura 13.

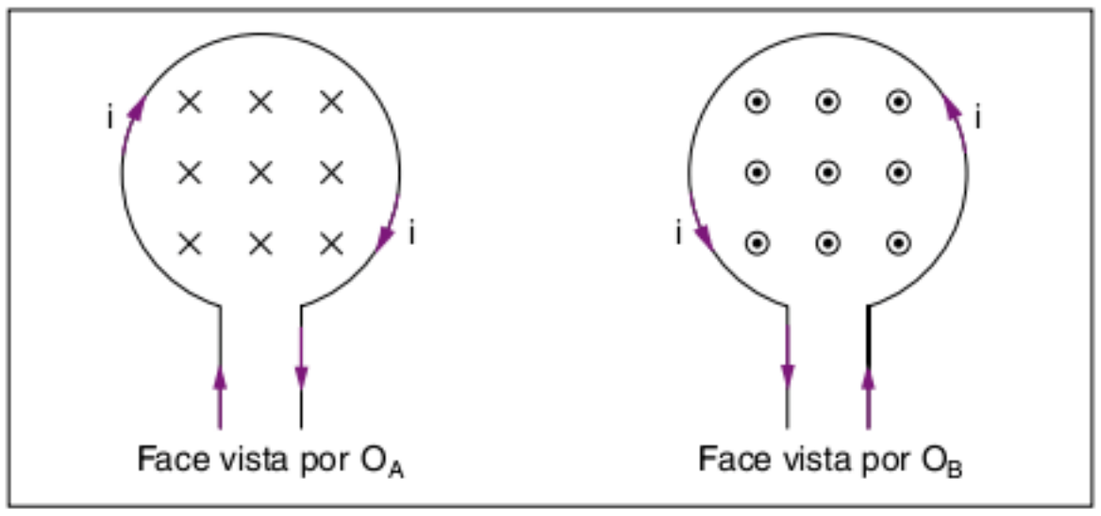


Fig. 13 Visão das linhas de indução magnética.

Observação: × – *Representa as linhas que estão entrando no plano do papel.*

⊙ – *Representa as linhas que estão saindo do plano do papel.*

Recordando que, em uma barra imantada, as linhas de indução vão do polo norte para o polo sul, podemos atribuir à cada face da espira um polo magnético:

- **polo sul magnético**: face da espira por onde as linhas de indução entram. No caso, o observador O_A olha para um polo sul, pois para ele as linhas de indução penetram no plano da espira.
- **polo norte magnético**: face da espira por onde as linhas de indução saem. No caso, o observador O_B olha para um polo norte, pois para ele as linhas de indução saem do plano da espira.

Uma maneira alternativa de se verificar o polo é por meio do sentido da corrente elétrica. Se estamos do lado da espira em que o sentido da corrente é horário, estamos observando um polo sul (S), se o sentido da corrente é anti-horário, estamos observando um polo norte (N).

Podemos comprovar a existência de polos em uma espira por meio de uma experiência bem simples. Se aproximamos um ímã em forma de barra de uma espira, observamos que um dos polos do ímã atrai uma das faces e o outro polo repele a mesma face, isto pode ser observado na figura 14.

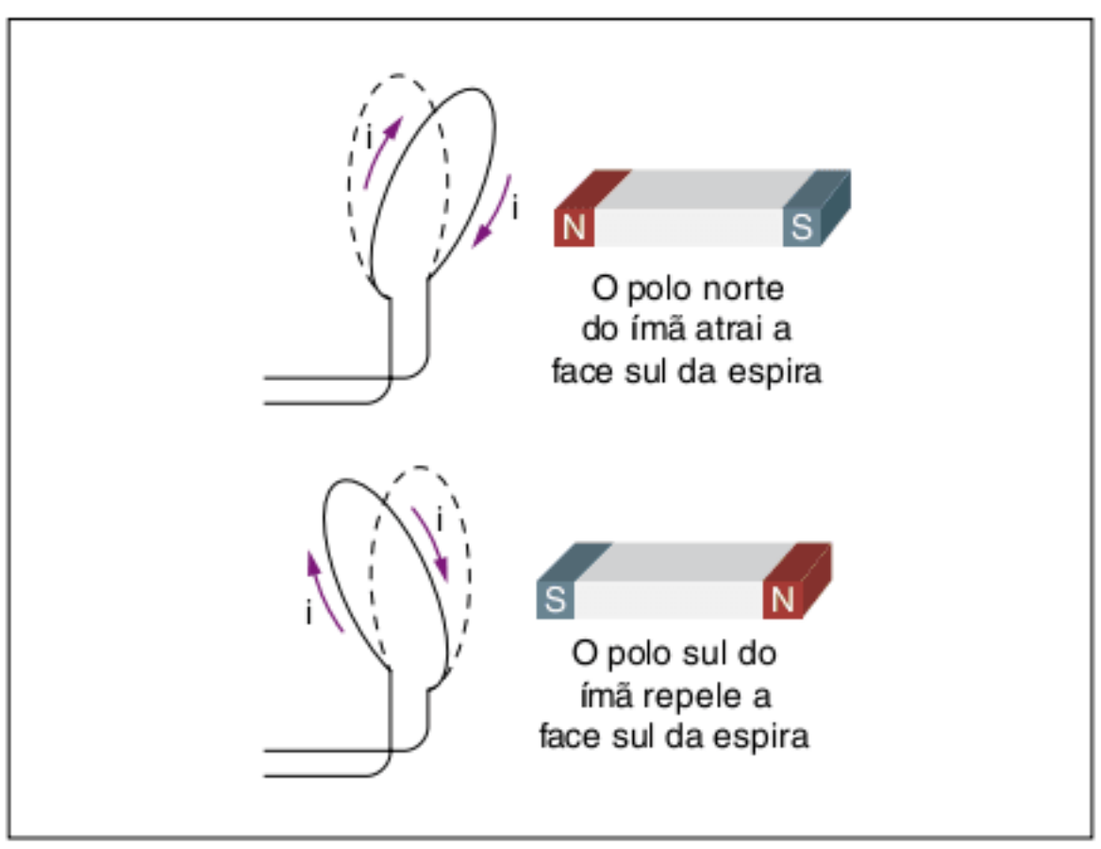


Fig. 14 Ação de um ímã em uma espira.

Campo magnético gerado por um solenoide percorrido por corrente elétrica

Podemos definir um solenoide como um fio condutor enrolado em forma de hélice cilíndrica. Na figura 15, podemos ver a configuração das linhas de indução magnética do solenoide percorrido por uma corrente **i**. A corrente entra pelo lado esquerdo e sai pelo direito.

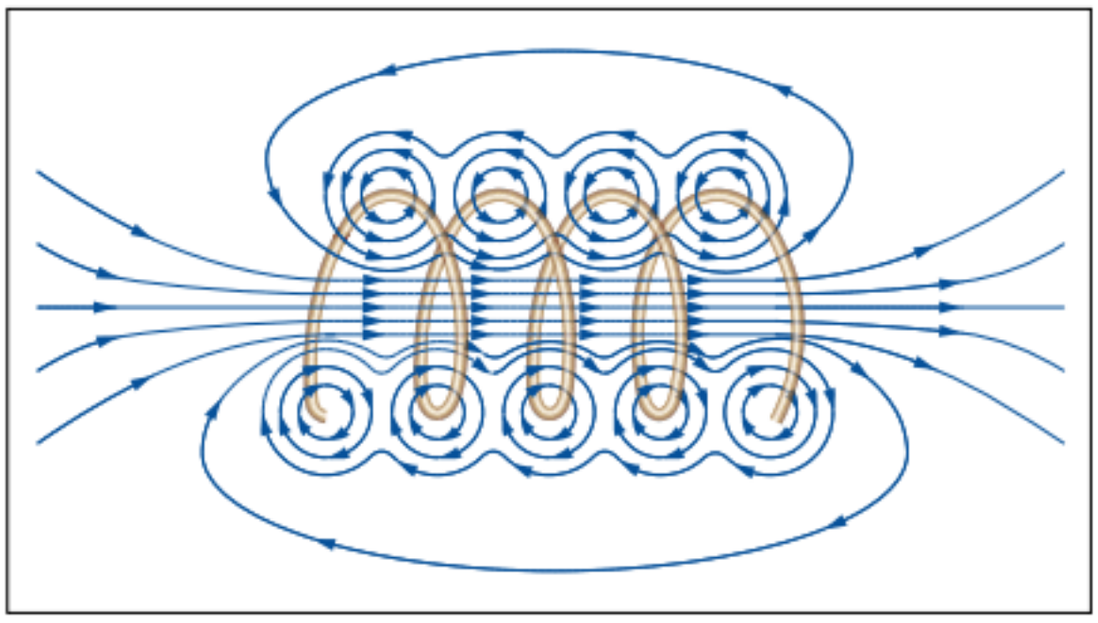


Fig. 15 Solenoide.

A primeira observação que podemos fazer é que, no interior do solenoide, para pontos não muito próximos aos fios condutores, as linhas de indução são praticamente paralelas, caracterizando assim um campo magnético uniforme. Essa uniformidade é tão mais acentuada quanto maior for o comprimento do solenoide e mais juntas as suas espiras.

Na região externa, o solenoide comporta-se praticamente como uma barra imantada, orientando-se do polo norte para o polo sul.

Para o nosso estudo, consideraremos o solenoide como sendo ideal, ou seja, o campo externo é nulo e o interno é uniforme. O solenoide real se aproxima tanto mais do ideal quanto maior o seu comprimento e mais justapostas as suas espiras.

Dessa forma, o vetor indução magnética $\vec{B}$ fica assim caracterizado:

- **direção**: o vetor indução magnética $\vec{B}$ no interior do solenoide tem a mesma direção do eixo do solenoide.
- **sentido**: determinado pela regra da mão direita envolvente.
- **módulo**: o módulo do campo magnético no interior de um solenoide ideal é proporcional à intensidade da corrente **i** que percorre o solenoide, ao número de espiras (**n**) por unidade de comprimento (ℓ) e à permeabilidade magnética do meio μ. Tal que podemos escrever:

$$B = \frac{\mu \cdot n \cdot i}{\ell}$$

Da mesma forma que em espiras podemos associar polos magnéticos, podemos fazer o mesmo nos solenoides aplicando o mesmo procedimento utilizado para as espiras.

Polos magnéticos associados a um solenoide percorrido por corrente elétrica

Podemos ver os mesmos observadores O_A e O_B, respectivamente, à direita e à esquerda de um solenoide percorrido por uma corrente **i** que entra no solenoide pelo lado direito.

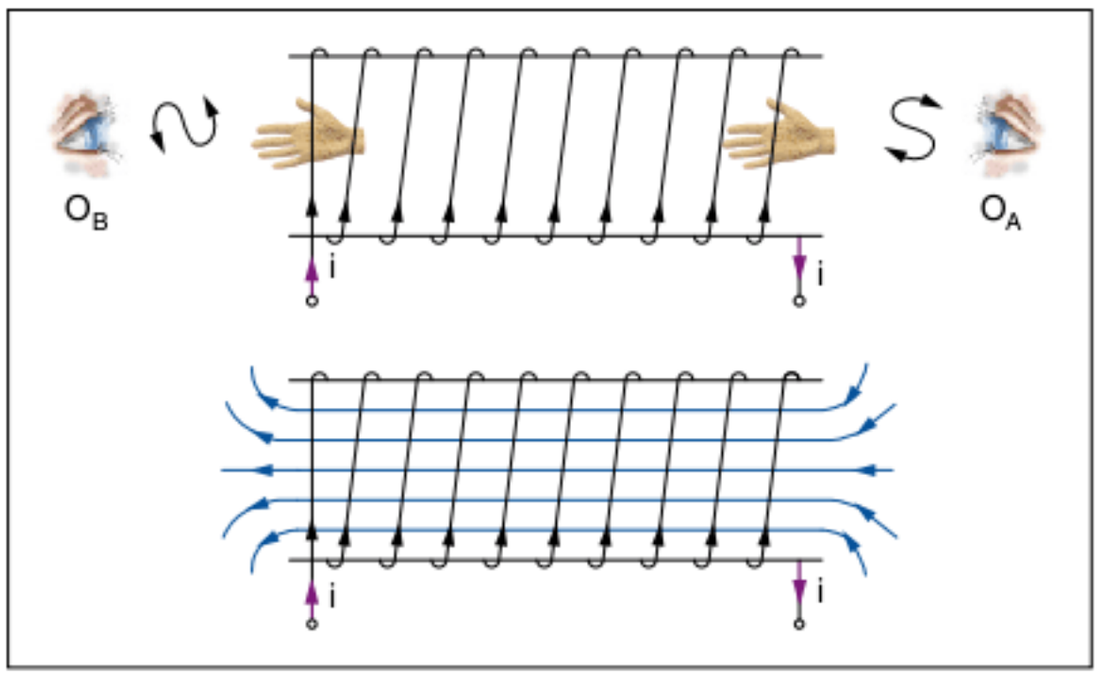


Fig. 16 Linhas de indução magnéticas em um solenoide.

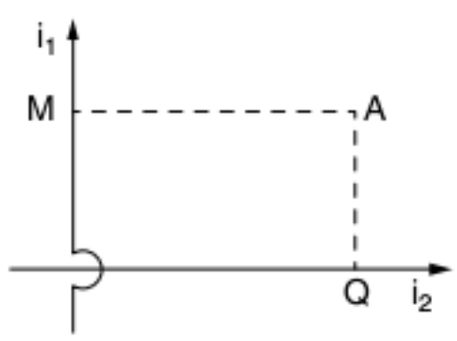
Assim, pela regra da mão direita envolvente, verificamos que, para o observador O_A, as linhas de indução entram no plano da face do solenoide voltada para ele, sendo um polo sul magnético. Para o observador O_B, as linhas de indução saem no plano da face do solenoide voltada para ele, sendo um polo norte magnético. Poderíamos concluir o mesmo se verificássemos que, para o observador O_A, o sentido da corrente é horário (polo sul magnético) e para o observador O_B o sentido da corrente é anti-horário (polo norte magnético).

ATENÇÃO!

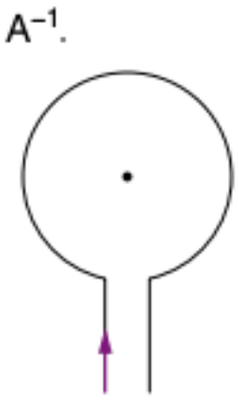
Os cálculos dos módulos dos campos magnéticos nas diversas configurações são feitos utilizando-se a *Lei circuital de Ampère* e a *Lei de Biot Savart*, que leva em consideração a geometria do problema.
A formalização matemática dessa lei foge ao escopo do nosso curso.

Revisando

1 **Osec-SP (Adapt.)** Dois condutores retilíneos e infinitamente longos estão no mesmo plano e são perpendiculares entre si, como mostra a figura. As distâncias são AM = 4,0 cm e QA = 2,0 cm, e as intensidades das correntes, $i_1 = 8$ A e $i_2 = 7$ A. Qual é o módulo do vetor indução magnética no ponto A?
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T.m.A^{-1}.

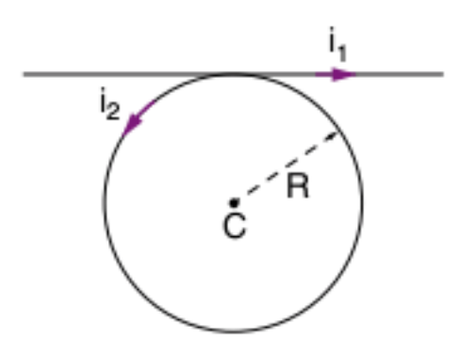


2 **Osec-SP (Adapt.)** Uma espira circular de 4π cm de diâmetro é percorrida por uma corrente de 8,0 ampères (veja figura).
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T.m.A^{-1}.



Defina a orientação e a intensidade do vetor campo magnético no centro da espira.

3 **Unip (Adapt.)** Na figura, estão representados um fio muito longo percorrido por uma corrente i_1 e uma espira circular de raio R percorrida pela corrente i_2, ambos num mesmo plano e um tangenciando o outro:



Qual é o valor da razão $\frac{i_1}{i_2}$ para que o campo magnético resultante no centro C da espira seja nulo?

Exercícios propostos

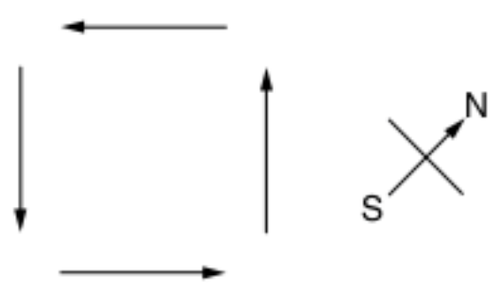
Campo magnético gerado por fio retilíneo

1 **Mauá** É dado um fio metálico reto, muito longo, percorrido por uma corrente elétrica constante.

a) Esboce as linhas de campo do vetor indução magnética $\vec{B}$ produzido por esse fio.

b) Explique como se determina o sentido desse campo.

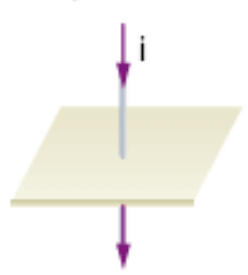
2 **Fuvest** A figura indica quatro bússolas que se encontram próximas a um fio condutor, percorrido por uma intensa corrente elétrica.

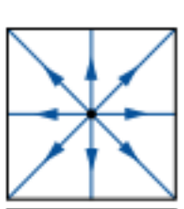


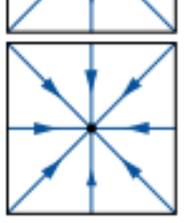
a) Represente, na figura, a posição do condutor e o sentido da corrente.

b) Caso a corrente cesse de fluir, qual será a configuração das bússolas? Faça a figura correspondente.

3 **UFMG** Observe a figura. Um fio condutor, transportando uma corrente contínua de grande intensidade, passa pelo centro de um cartão. A corrente tem o sentido indicado na figura. Indique a alternativa que melhor representa as linhas de indução do campo magnético criado pela corrente i no plano do cartão.



(a)


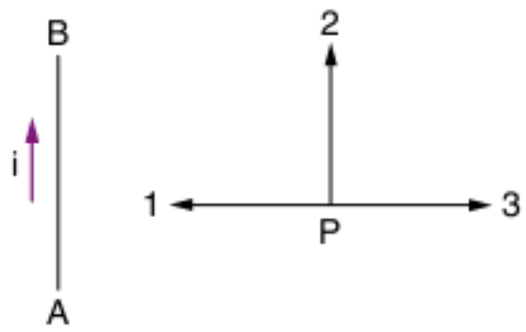
(b)


(c)

(d)

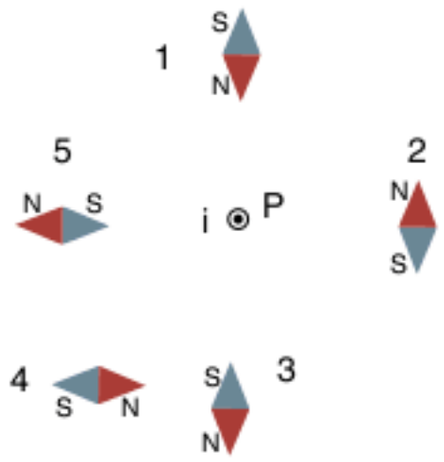
(e)

4 **UFRGS** A figura representa um condutor muito longo e reto, percorrido por uma corrente elétrica constante i, de A para B. Qual o sentido do campo magnético originado pela corrente no ponto P?



(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) para fora da página.
(e) para dentro da página.

5 **UFRGS** Um fio retilíneo e muito longo, percorrido por uma corrente elétrica constante, é colocado perpendicularmente ao plano da página no ponto P. Se o campo magnético da Terra é desprezível em relação ao produzido por essa corrente, qual o número que identifica corretamente o alinhamento da agulha magnética?



(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

6 **FIU-MG** Um fio retilíneo muito longo é percorrido por uma corrente elétrica constante I e o vetor indução magnética, num ponto P perto do fio, tem módulo B. Se o mesmo fio for percorrido por uma corrente elétrica constante 2I, o valor do módulo de vetor indução magnética no mesmo ponto P é:

(a) $\frac{B}{4}$
(b) $\frac{B}{2}$
(c) B
(d) 2B
(e) 4B

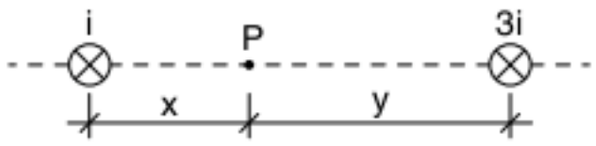
7 **UMC** Faz-se passar uma corrente elétrica de intensidade constante por um fio retilíneo longo. Nessas condições, a intensidade do vetor indução magnética num ponto situado a 10 cm do eixo do condutor é B. Se considerarmos outro ponto, situado a 20 cm do eixo do mesmo condutor, a intensidade do vetor indução será:

(a) $\frac{B}{2}$
(b) $\frac{B}{4}$
(c) $\frac{B}{8}$
(d) 4B
(e) 2B

8 **Osec-SP** Um fio metálico reto e extenso é percorrido por uma corrente de intensidade 4,5 ampères.
A intensidade do vetor indução magnética a 30,0 cm do fio é de:
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ T.m.A^{-1}$.

(a) $3{,}0.10^{-6}$ T
(b) $9{,}0.10^{-7}$ T
(c) $3{,}0.10^{-7}$ T
(d) $1{,}2.10^{-6}$ T
(e) n.d.a.

9 **Fatec** Dois fios metálicos retos, paralelos e longos são percorridos por correntes i e 3i de sentidos iguais (entrando no papel, no esquema). O ambiente é vácuo.



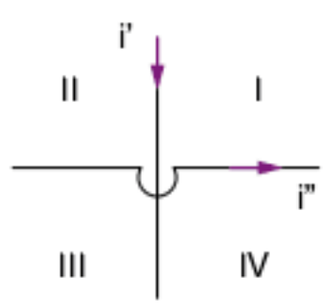
O campo magnético resultante produzido por essas correntes é nulo num ponto P, tal que:

(a) $\frac{y}{x} = 3$
(b) $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$
(c) $\frac{y}{x} = 9$
(d) $\frac{y}{x} = \frac{1}{9}$
(e) n.d.a.

10 **UFRGS** A figura mostra dois condutores longos, X e Y, perpendiculares ao plano da página, percorridos por correntes elétricas contínuas de iguais intensidades e sentido para fora da página. No ponto P, equidistante dos fios, o sentido do vetor indução magnética resultante produzido pelas duas correntes está corretamente indicado pela seta:

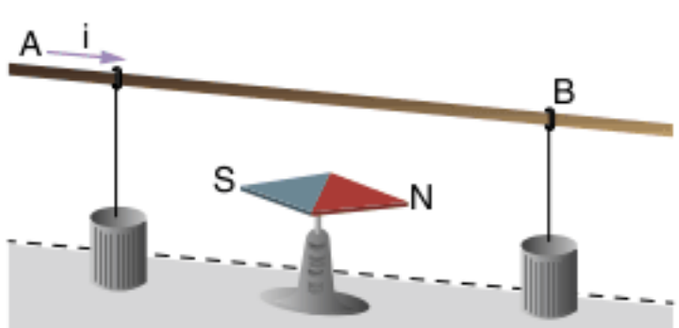
(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) perpendicular à página e para dentro da página.

11 Dois fios dispostos como indica a figura determinam as quatro regiões do plano. As correntes elétricas i', i'', pelos condutores, podem produzir campos de intensidade nula:



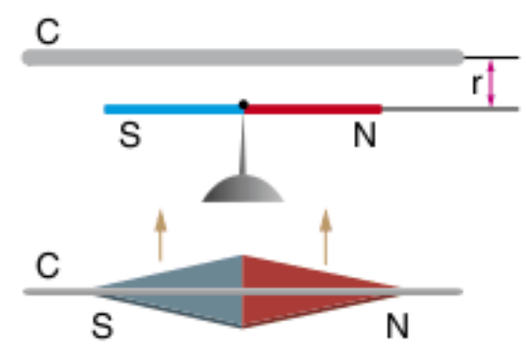
(a) somente em I.
(b) somente em II.
(c) somente em III.
(d) em II e IV.
(e) em I e III.

12 Considere a figura abaixo. Enquanto não passar corrente pelo condutor AB, o eixo magnético NS da agulha magnética é paralelo a AB. Faz-se passar corrente elétrica i no sentido de A para B. Em relação ao observador que olha a montagem de cima para baixo:



(a) a agulha magnética desvia-se no sentido horário.
(b) a agulha magnética desvia-se no sentido anti-horário.
(c) o polo norte sobe.
(d) o polo norte desce.
(e) o campo magnético gerado pela corrente elétrica não age sobre o ímã.

13 Um condutor C é colocado a uma distância r constante de uma agulha magnética, na direção do campo magnético da Terra, conforme a figura.



Quando o condutor é percorrido por uma corrente i, da direita para a esquerda, observa-se que:

(a) a agulha magnética dispõe-se perpendicularmente ao condutor.
(b) o polo sul da agulha desloca-se no sentido indicado, formando com o condutor um ângulo θ, que depende da intensidade da corrente i.
(c) o polo sul da agulha desloca-se no sentido indicado com um ângulo θ que independe de i.
(d) o polo norte da agulha desloca-se no sentido indicado.
(e) nenhuma das anteriores é correta.

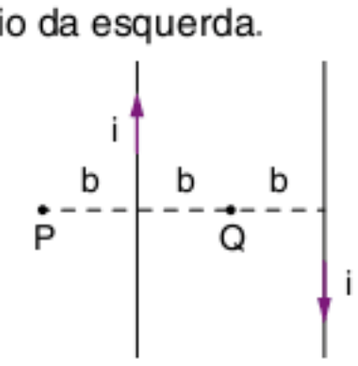
14 A corrente que passa por um fio condutor reto provoca o deslocamento de um pequeno ímã nas proximidades. Invertendo o sentido da corrente, o ímã:

(a) irá inverter o sentido do deslocamento.
(b) irá permanecer na situação anterior.
(c) toma a direção do campo magnético da Terra.
(d) tanto a como b são corretas.
(e) nenhuma das respostas anteriores.

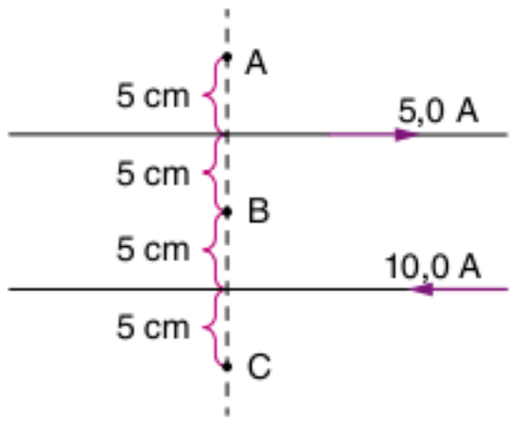
15 **Cesgranrio** Uma agulha magnética gira livremente em torno de um eixo horizontal. Quando colocada num ponto do globo terrestre situado próximo do polo norte, ela forma com a horizontal um ângulo, em radianos, igual a:

(a) 7π
(b) 2π
(c) $\frac{\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{2}$
(e) um valor diferente desses.

16 **UFPE** Dois longos fios paralelos transportam correntes iguais e de sentidos opostos, e estão separados por uma distância igual a 2b. Determine a relação $\frac{B_Q}{B_P}$ entre os módulos do vetor indução magnética no ponto Q, equidistante e coplanar aos dois fios, e no ponto P, coplanar com os fios e situado a uma distância b do fio da esquerda.

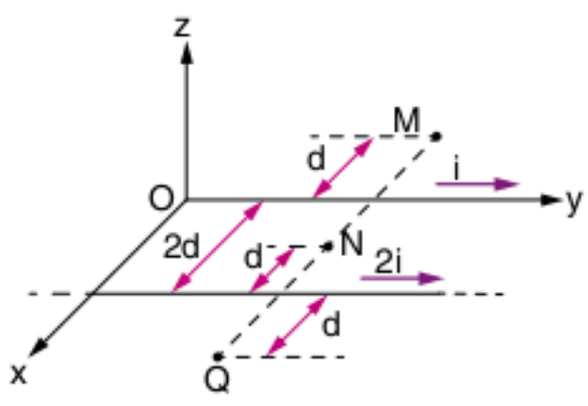


17 **Fatec** Dois condutores retos, paralelos, longos, separados por distância igual a 10 cm, são percorridos por correntes opostas e de intensidades 5,0 A e 10,0 A. Como são dirigidos os campos de indução que eles produzem nos pontos A, B e C?



	A	B	C
(a)	⊙	⊗	⊗
(b)	⊙	⊗	⊙
(c)	⊙	⊙	⊙
(d)	⊗	⊗	⊗
(e)	⊗	⊗	⊙

18 **PUC-SP** Dois condutores retilíneos, paralelos, muito longos, percorridos por correntes de intensidades respectivamente iguais a i e 2i estão situados no plano Oxy e separados por uma distância 2d. O campo de indução magnética $\vec{B}$, criado nos pontos M, N e Q do plano Oxy, é representado por vetores paralelos ao eixo Oz.



Assinale a alternativa que representa os sentidos do vetor $\vec{B}$ nos pontos M, N e Q, respectivamente:

(a)

(b)

(c)

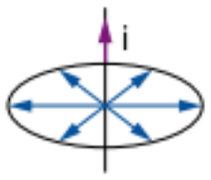
(d)

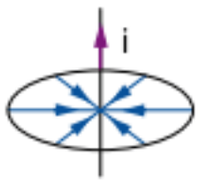
(e)

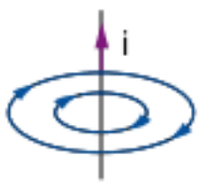
19 **Osec-SP** Quem mostrou pela primeira vez, experimentalmente, que as correntes elétricas geravam campos magnéticos foi:

(a) Einstein.
(b) Newton.
(c) Oersted.
(d) Arquimedes.
(e) Ampère.

20 **Fatec-SP** Um condutor reto e longo é percorrido por corrente elétrica invariável i. As linhas de indução de seu campo magnético seguem o esquema:

(a) 

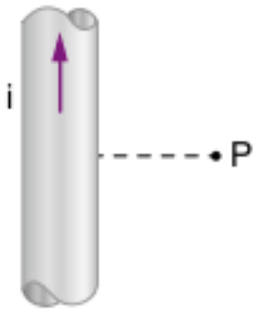
(b) 

(c) 

(d)

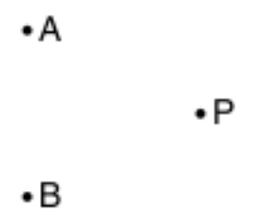
(e) n.d.a.

21 **PUC-MG** O condutor reto da figura transporta a corrente i. O campo magnético do ponto P, próximo ao fio, é representado pelo vetor:



(a) →
(b) ←
(c) ↑
(d) ⊙
(e) ⊗

22 **UFRGS** Os pontos A, B e P da figura estão no plano da página. Qual das alternativas abaixo melhor descreve uma situação em que é produzido um campo magnético perpendicular à página e para fora da página no ponto P?

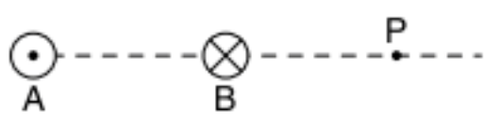


(a) Elétrons movimentando-se de B para A.
(b) Uma carga positiva em A e uma negativa em B, ambas em repouso.
(c) Um ímã permanente com o polo norte em A e o sul em B.
(d) Um ímã permanente com o polo norte em B e o sul em A.
(e) O polo norte da Terra em A e o sul em B.

23 **UFRGS** A figura a seguir mostra dois fios condutores, R e S, retilíneos, paralelos e contidos no plano da página. As setas indicam os sentidos opostos de duas correntes elétricas convencionais de mesma intensidade, que percorrem os fios. Indique se o sentido do campo magnético resultante, produzido pelas correntes elétricas, é para dentro ou para fora da página em cada um dos pontos 1, 2 e 3, respectivamente:

(a) dentro, fora, dentro.
(b) dentro, dentro, dentro.
(c) fora, fora, dentro.
(d) dentro, fora, fora.
(e) fora, dentro, fora.

24 **Ufes (Adapt.)** Dois fios retilíneos e paralelos, perpendiculares ao plano do papel, são percorridos por correntes da mesma intensidade e sentidos contrários, conforme indica a figura. No fio A, a corrente tem o sentido de aproximação do leitor. O vetor que melhor representa a indução magnética no ponto P sobre a perpendicular aos fios será:



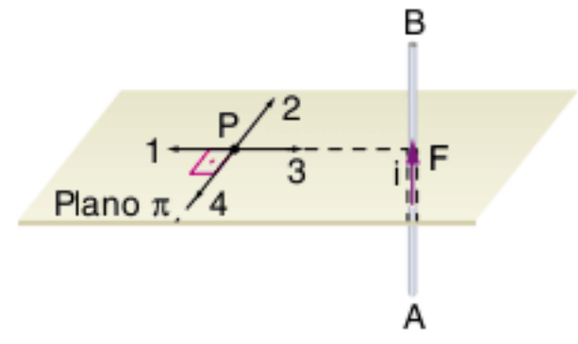
(a) ↑
(b) →
(c) ↓
(d) ←
(e) ↗

25 **FCC** Uma corrente elétrica i flui num condutor vertical, de diâmetro desprezível e comprimento praticamente infinito. Essa corrente elétrica gera um campo magnético de intensidade $\vec{B}$, num ponto situado à distância r do condutor. Pode-se afirmar corretamente que a:
(a) direção do campo magnético $\vec{B}$ é vertical.
(b) intensidade do campo magnético $\vec{B}$ é inversamente proporcional a r^2.
(c) intensidade do campo magnético $\vec{B}$ é diretamente proporcional a r.
(d) intensidade do campo magnético $\vec{B}$ é diretamente proporcional a i.
(e) intensidade do campo magnético $\vec{B}$ é inversamente proporcional a i.

26 Um elétron, a princípio, se desloca paralelamente e à pequena distância de um fio, onde circula corrente elétrica do mesmo sentido que o deslocamento do elétron. Nessas condições:
(a) o elétron acabará por se chocar com o fio.
(b) o elétron se afastará do fio.
(c) o elétron se manterá paralelo ao fio.
(d) o elétron descreverá um movimento hiperbólico em torno do fio.
(e) nada se pode dizer em relação ao movimento do elétron, pois os dados são insuficientes.

27 **FEI** Uma partícula de carga q = 4,0 μC se movimenta, com velocidade constante v = 10 m/s, paralelamente a um condutor retilíneo, muito longo, percorrido pela corrente i = 40 A. Sendo a distância da partícula do condutor d = 20 cm, qual a intensidade da força magnética nela exercida?
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T.m.A^{-1}.

28 **FCC-SP** Na figura abaixo, está representado um fio F, condutor de eletricidade, perpendicular ao plano π. No ponto P, estão representados os vetores 1, 2, 3 e 4. Pelo condutor, passa uma corrente elétrica contínua, no sentido de A para B.

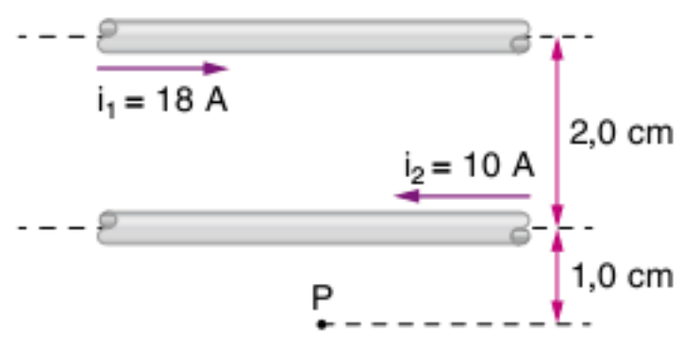


Qual dos vetores representados pode corresponder ao vetor indução magnética no ponto P, devido à corrente que passa pelo fio?

29 **FCC-SP** Um próton encontra-se em movimento, com velocidade constante $\vec{v}$, paralela a um fio condutor. Num dado instante, faz-se passar pelo fio uma corrente I, no sentido indicado na figura.

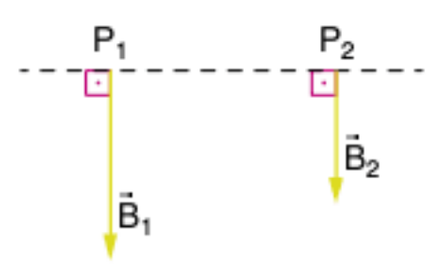
Nessas condições, o próton:
(a) será atraído, aproximando-se do fio.
(b) será desviado, afastando-se do fio.
(c) continuará na mesma direção em que vinha, com a mesma velocidade.
(d) continuará na mesma direção, porém com velocidade de módulo maior.
(e) continuará na mesma direção, porém com velocidade de módulo menor.

30 Na figura, temos trechos de dois fios paralelos muito longos, situados no vácuo, percorridos por correntes elétricas de módulos e sentidos indicados:



Determine o módulo do vetor indução magnética no ponto P, situado no mesmo plano dos fios.

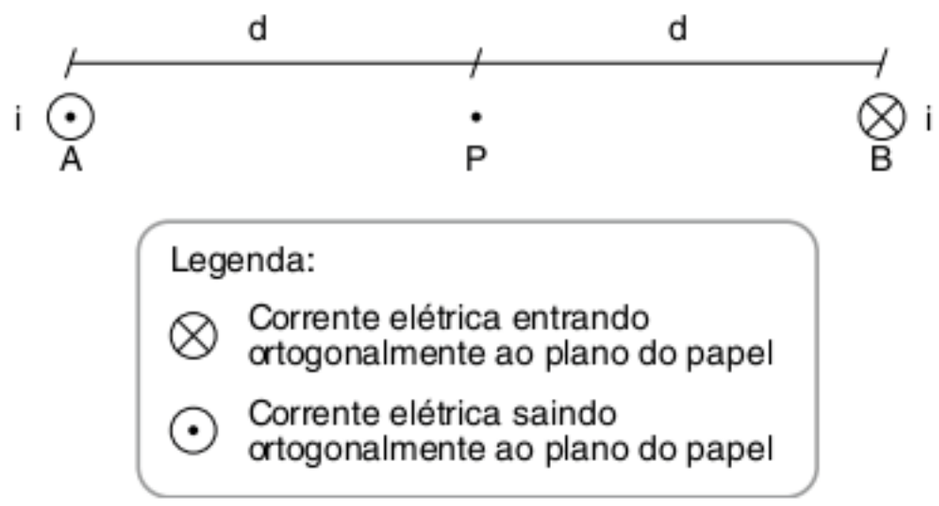
31 **FEI** Na figura, estão representados em escala os campos de indução magnética criados nos pontos P_1 e P_2 por um condutor reto, muito longo, perpendicular ao plano de representação.



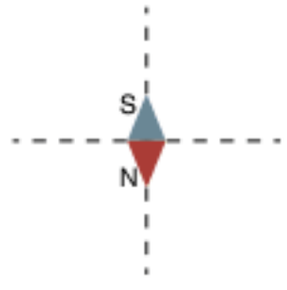
O ponto O, onde o condutor fura este plano, encontra-se:

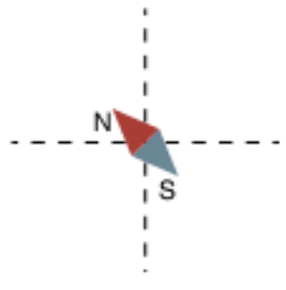
(a) à esquerda de P_1, com a corrente entrando no plano.
(b) à direita de P_2, com a corrente entrando no plano.
(c) à esquerda de P_1, com a corrente saindo do plano.
(d) à direita de P_2, com a corrente saindo do plano.
(e) entre P_1 e P_2, com a corrente entrando no plano.

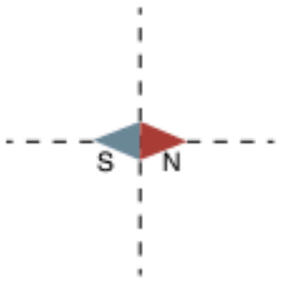
32 **PUC** O Eletromagnetismo estuda os fenômenos que surgem da interação entre campo elétrico e campo magnético. Hans Christian Oersted, em 1820, realizou uma experiência fundamental para o desenvolvimento do eletromagnetismo, na qual constatou que a agulha de uma bússola era defletida sob a ação de uma corrente elétrica percorrendo um fio condutor próximo à bússola. A figura a seguir representa as secções transversais de dois fios condutores A e B, retos, extensos e paralelos. Esses condutores são percorridos por uma corrente elétrica i cujo sentido está indicado na figura.

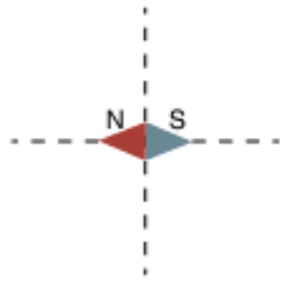


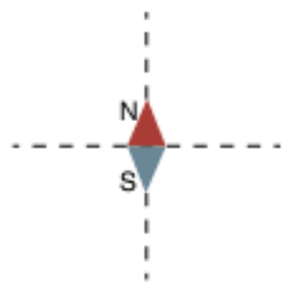
Uma pequena bússola é colocada no ponto P equidistante dos fios condutores. Desprezando os efeitos do campo magnético terrestre e considerando a indicação N para polo norte e S para polo sul, a alternativa que apresenta a melhor orientação da agulha da bússola é:

(a)


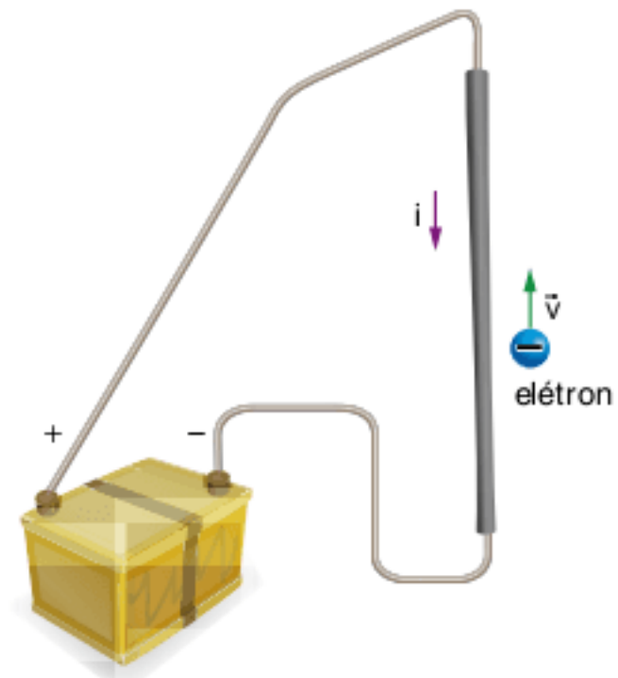
(d)


(b)


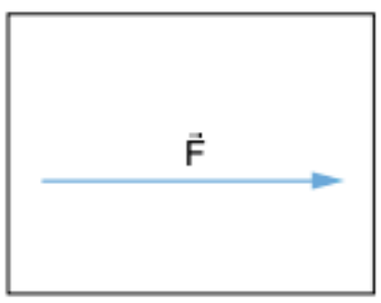
(e)


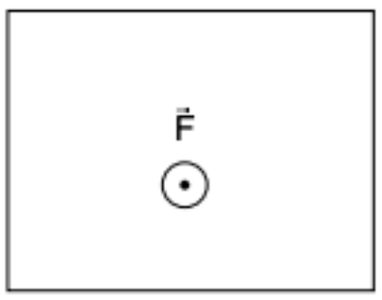
(c)


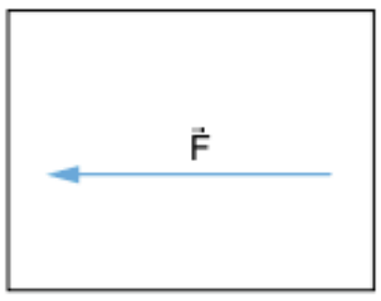
33 **PUC** Lança-se um elétron nas proximidades de um fio comprido percorrido por uma corrente elétrica i e ligado a uma bateria. O vetor velocidade $\vec{v}$ do elétron tem direção paralela ao fio e sentido indicado na figura.

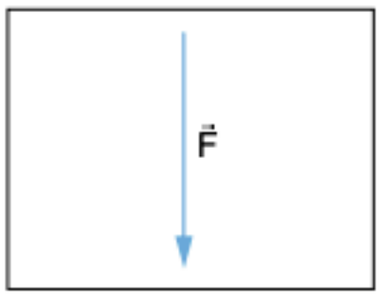


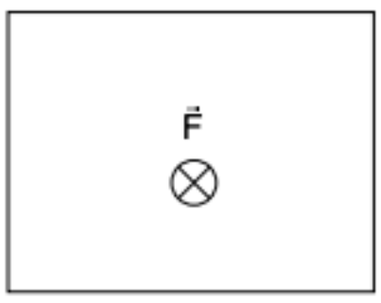
Sobre o elétron, atuará uma força magnética $\vec{F}$, cuja direção e sentido serão mais bem representados pelo diagrama:

(a)


(d)


(b)


(e)


(c)


Campo magnético gerado por espira circular, bobina chata e solenoide

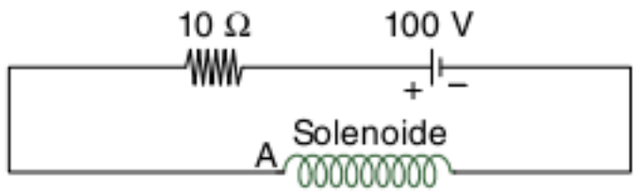
34 **FCC** Uma espira circular é percorrida por uma corrente elétrica contínua, de intensidade constante. Quais são as características do vetor campo magnético no centro da espira? Ele:

(a) é constante e perpendicular ao plano da espira.
(b) é constante e paralelo ao plano da espira.
(c) é nulo no centro da espira.
(d) é variável e perpendicular ao plano da espira.
(e) é variável e paralelo ao plano da espira.

35 **Fuvest** O campo magnético, produzido no centro de uma espira circular de raio R por uma corrente elétrica de intensidade I, é diretamente proporcional a:

(a) $I.R$
(b) $\frac{I}{R}$
(c) $\frac{R}{I}$
(d) $\frac{1}{R.I}$
(e) $\sqrt{\frac{I}{R}}$

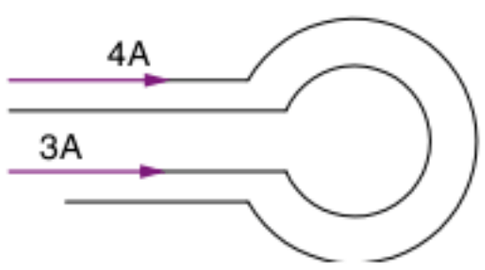
36 Na figura a seguir, a resistência elétrica do solenoide, que tem 1.000 espiras por metro, é igual a 10 Ω.



Supondo vácuo no interior do solenoide, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T.m.A^{-1}, determine:

a) o módulo do campo de indução magnética em seu interior.
b) a polaridade magnética da extremidade A.

37 **Osec-SP** Duas espiras circulares, concêntricas e coplanares, de raios 3π m e 5π m são percorridas por correntes de 3A e 4A, como mostra a figura.
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T.m.A^{-1}.



O módulo do vetor campo magnético no centro das espiras é:

(a) $0{,}1.10^{-7}$ T
(b) $0{,}2.10^{-7}$ T
(c) $0{,}3.10^{-7}$ T
(d) $0{,}4.10^{-7}$ T
(e) $3{,}6.10^{-7}$ T

38 **Fuvest** Uma espira condutora circular, de raio R, é percorrida por uma corrente de intensidade i, no sentido horário. Uma outra espira circular de raio $\frac{R}{2}$ é concêntrica com a precedente e situada no mesmo plano que ela. Qual deve ser o sentido e qual o valor da intensidade de uma corrente que, percorrendo essa segunda espira, anula o campo magnético resultante no centro O? Justifique.

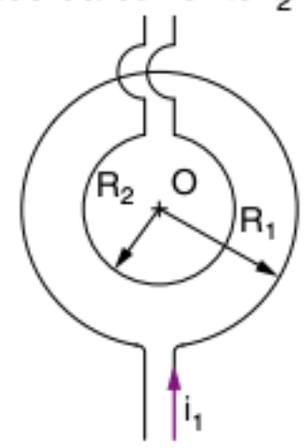
39 Duas espiras verticais, que têm centros coincidentes, estão dispostas segundo planos perpendiculares entre si. As intensidades das correntes elétricas, nas espiras, são tais que o campo magnético que cada corrente produz no centro da respectiva espira tem o mesmo valor B em módulo. O módulo do campo magnético resultante, no centro comum das espiras e considerando somente o efeito das correntes mencionadas, é:

(a) 2B
(b) $B\sqrt{2}$
(c) B
(d) zero.
(e) $\frac{B}{2}$

40 **Osec-SP** Uma bobina chata é formada de 50 espiras circulares de raio 0,1 m. Sabendo que as espiras são percorridas por uma corrente de 3A, a intensidade do vetor campo magnético no seu centro será de:
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T.m.A^{-1}.

(a) $3\pi.10^{-4}$ T
(b) $60\pi.10^{-7}$ T
(c) $15\pi.10^{-8}$ T
(d) $19\pi.10^{-6}$ T
(e) n.d.a.

41 Tem-se duas espiras circulares, concêntricas e coplanares, de centro comum O e raio R_1 e R_2, sendo $R_1 = 2R_2$. A corrente i_1 tem intensidade 5A e o sentido indicado na figura. Para que o vetor indução magnética em O seja nulo, determine o sentido e a intensidade da corrente i_2.



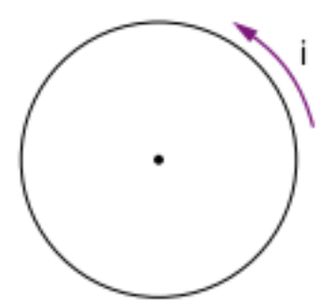
42 **PUC-MG** No centro de uma espira circular de raio R percorrida por uma corrente de intensidade i, o vetor indução magnética:

I. tem módulo independente do meio que envolve a espira.
II. é perpendicular ao plano da espira.
III. tem módulo diretamente proporcional à razão $\frac{i}{R}$.

Com relação às afirmações I, II e III, é correto afirmar que:

(a) só I e III são corretas.
(b) só II e III são corretas.
(c) só II é correta.
(d) todas são corretas.
(e) todas são falsas.

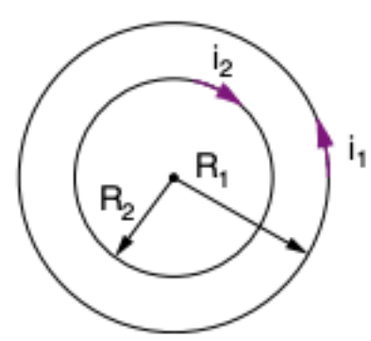
43 **Osec-SP** Uma espira circular de raio π cm é percorrida por uma corrente de intensidade 2,0 ampères, no sentido anti-horário, como mostra a figura.



O vetor indução magnética no centro da espira é perpendicular ao plano da figura e de intensidade:
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T.m.A^{-1}.

(a) 4.10^{-5} T, orientado para fora.
(b) 4.10^{-5} T, orientado para dentro.
(c) 2.10^{-4} T, orientado para fora.
(d) 2.10^{-4} T, orientado para dentro.
(e) 4.10^{-4} T, orientado para fora.

44 **UMC** São dadas duas espiras circulares concêntricas de raios R_1 e R_2, conforme a figura, percorridas por correntes de intensidades i_1 e i_2, respectivamente.
A condição para que o vetor indução magnética resultante no centro das espiras seja nulo é:



(a) $\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_1}{R_2}$ (c) $\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$ (e) $\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

(b) $\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}$ (d) $\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}$

45 **PUC-SP** Nos pontos internos de um longo solenoide percorrido por corrente elétrica contínua, as linhas de indução do campo magnético são:

(a) radiais com origem no eixo do solenoide.
(b) circunferências concêntricas.
(c) retas paralelas ao eixo do solenoide.
(d) hélices cilíndricas.
(e) não há linhas de indução, pois o campo magnético é nulo no interior do solenoide.

46 A intensidade do vetor indução magnética produzido no interior de um solenoide, percorrido por corrente, depende:

(a) só do comprimento.
(b) do diâmetro interno do solenoide e do comprimento do mesmo.
(c) só do número de espiras, da intensidade da corrente e do diâmetro.
(d) do número de espiras por unidade de comprimento e da intensidade da corrente.
(e) nenhuma das alternativas citadas.

47 **Osec-SP** Um solenoide possui 20.000 espiras por metro. A intensidade do vetor indução magnética originado na região central do solenoide devido à passagem de uma corrente de intensidade 0,5A é de:
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T. m. A^{-1}.

(a) $4\pi.10^{-3}$ T (c) $6\pi.10^{-2}$ T (e) n.d.a.
(b) $5\pi.10^{-4}$ T (d) 4.10^{-3} T

48 O campo magnético de um ímã em forma de barra tem grande analogia com o campo magnético originado por:

(a) um condutor reto percorrido por corrente contínua.
(b) um condutor reto percorrido por corrente alternada.
(c) uma bobina percorrida por corrente contínua.
(d) uma bobina percorrida por corrente alternada.
(e) n.d.a.

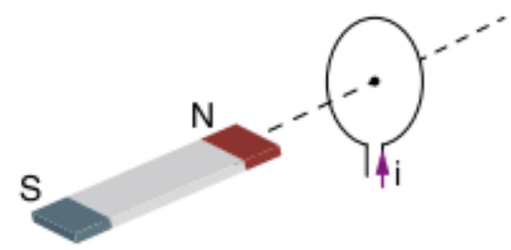
49 Considere as afirmações I, II e III.

I. Uma espira, na qual flui uma corrente elétrica, gera um campo magnético cujas linhas de indução são paralelas ao plano da espira.
II. Um condutor muito longo, retilíneo e horizontal, quando percorrido por corrente elétrica, gera um campo magnético cujas linhas de indução são retas horizontais.
III. O campo magnético, gerado por um ímã em forma de barra, não é uniforme.

Dentre as afirmações:

(a) somente I é correta. (d) I e II são corretas.
(b) somente II é correta. (e) I e III são corretas.
(c) somente III é correta.

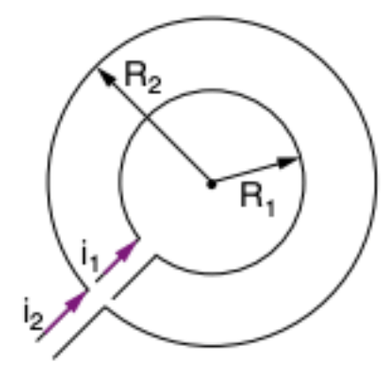
50 Na figura, temos uma espira circular de raio $R = 0{,}10\pi$ m percorrida por uma corrente elétrica de intensidade igual a 10A, no sentido indicado. Um ímã está nas proximidades da espira e em repouso em relação a ela.



Sendo $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T. m. A^{-1} a permeabilidade absoluta do meio:

a) calcule o módulo de vetor indução magnética criado pela espira, em seu centro.
b) informe se a interação entra a espira e o ímã é atrativa ou repulsiva.

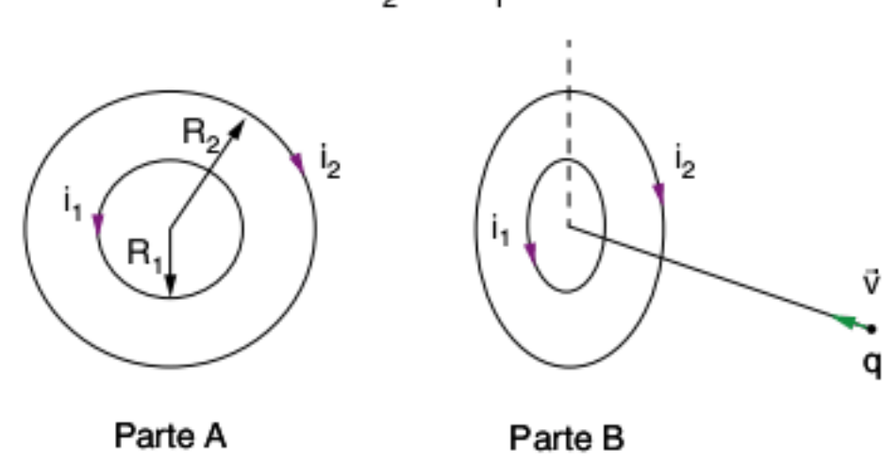
51 Duas espiras circulares, coplanares e concêntricas são percorridas por correntes elétricas de intensidades $i_1 = 20$A e $i_2 = 30$A, cujos sentidos estão indicados na figura. Os raios das espiras são $R_1 = 20$ cm e $R_2 = 40$ cm.



Calcule o módulo do vetor indução magnética no centro C, sendo $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T. m. A^{-1} a permeabilidade absoluta do meio.

52 **Osec-SP** Uma bobina chata é formada de 40 espiras circulares de 8,0 cm de raio. Qual a intensidade da corrente que percorre a bobina, quando a intensidade do campo magnético em seu centro é de $6{,}0.10^{-4}$ tesla?
Dado: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T. m. A^{-1}.

53 **Unifei** A parte A da figura mostra duas espiras condutoras concêntricas de raios $R_2 = 2R_1$ colocadas no vácuo.



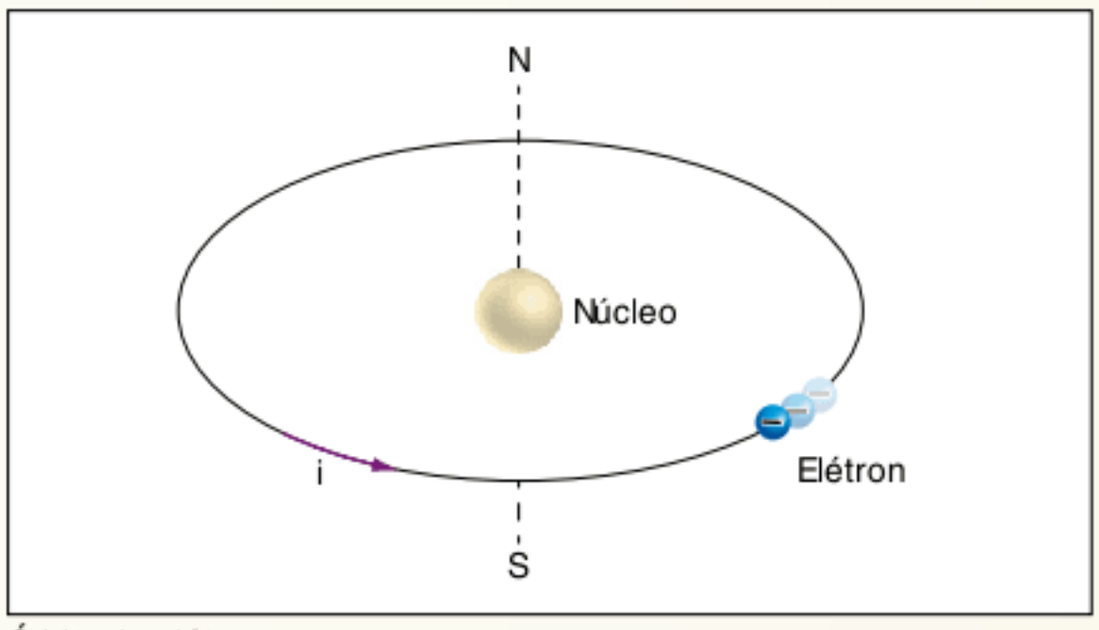
a) Se a corrente $i_2 = 4i_1$, calcule o vetor indução magnética resultante no centro da espira.
b) Suponha que uma partícula de carga q incida sobre as espiras conforme indicado na parte B da figura. Qual é a força que irá agir sobre a partícula ao atingir o centro das duas espiras? Desconsidere a força gravitacional.

TEXTO COMPLEMENTAR

Magnetismo do ponto de vista atomístico

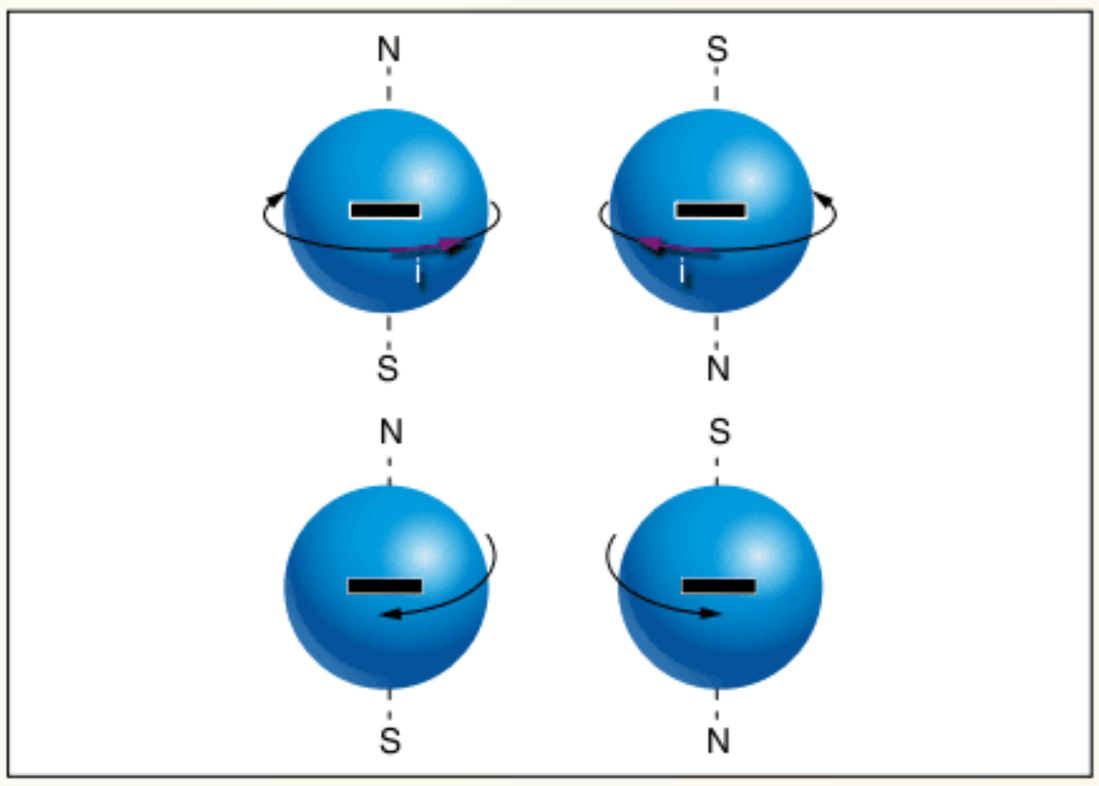
De acordo com a teoria atômica clássica, temos os átomos constituídos de elétrons (cargas negativas), girando em torno dos núcleos constituídos de prótons (cargas positivas).

Cada elétron em sua camada, em movimento circular, comporta-se como se fosse uma espira, pois sendo uma carga em movimento, ele pode ser visto como uma "corrente". Dessa forma, esse movimento circular dos elétrons em suas órbitas gera um campo magnético.



Órbita do elétron.

Além disso, os elétrons apresentam um movimento de rotação em torno de seu próprio eixo, cujo sentido de rotação é denominado *spin*. Esse movimento de rotação também faz aparecer no próprio elétron polos magnéticos.



Elétron: rotação em seu próprio eixo-*spin*.

Conforme visto no seu curso de atomística, dois elétrons emparelhados no mesmo orbital tem *spins* contrários, e, portanto, se dois elétrons estão emparelhados, o efeito magnético destes é nulo.

Porém, se temos elétrons não emparelhados em orbitais, estes farão um efeito magnético não nulo ao átomo.

Dessa forma, podemos dizer que o campo magnético de um átomo surge devido a duas causas:

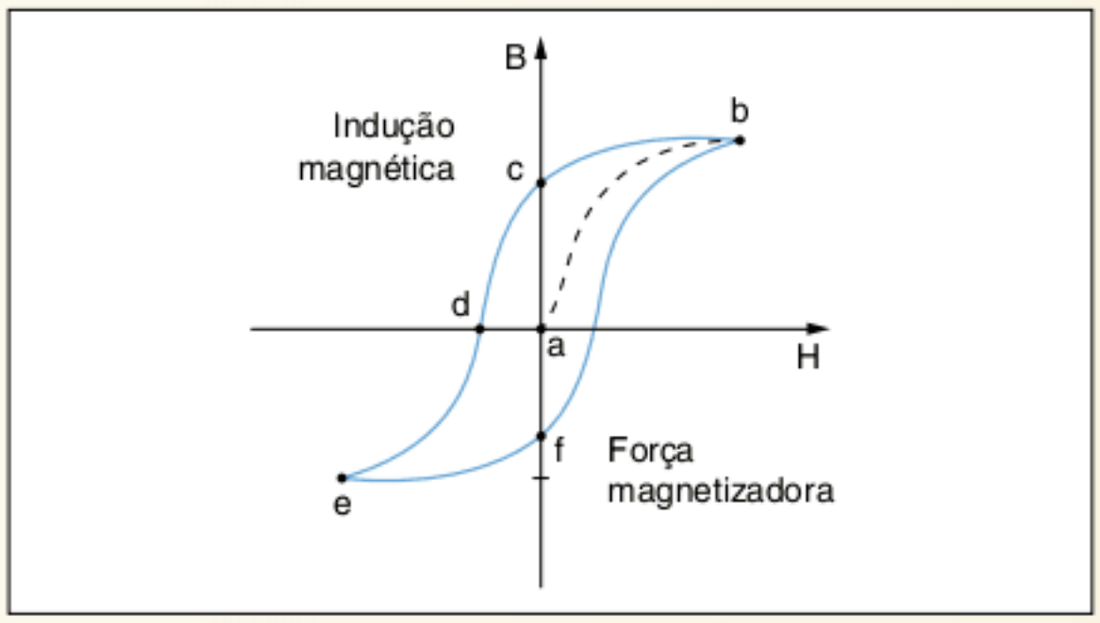
- o movimento dos elétrons em torno dos núcleos, comportando-se como espiras.
- o movimento de rotação *spin* dos elétrons de orbitais não completos.

Estes campos magnéticos gerados por esses movimentos de cargas elétricas no interior do átomo podem se orientar ao acaso, gerando um campo magnético resultante nulo ou um campo magnético residual. Esses campos magnéticos gerados por esses movimentos de cargas são denominados dipolos magnéticos.

Os materiais, quanto às suas propriedades magnéticas, podem ser classificados em paramagnéticos, ferromagnéticos ou diamagnéticos.

Os materiais paramagnéticos são aqueles que possuem na sua estrutura interior uma magnetização residual permanente, mas distribuída ao acaso. Quando submetidos a um campo externo, alguns dipolos magnéticos alinham-se com o campo magnético externo dando uma pequena contribuição de campo na mesma direção do campo externo aplicado. A contribuição de campo pelos dipolos magnéticos é maior se a temperatura for baixa, diminuindo assim o grau de agitação interna no átomo, ou se o campo magnético externo for muito alto. São exemplos de materiais paramagnéticos: o alumínio, o magnésio e o tungstênio.

Os materiais ferromagnéticos são aqueles que possuem elétrons desemparelhados, apresentando pequenas regiões, denominadas domínios magnéticos, nas quais os dipolos magnéticos estão alinhados, porém, na ausência de um campo externo, a direção de um domínio não depende da direção de outro domínio. Mas, quando um campo magnético externo é aplicado, esses domínios se alinham de tal forma que a contribuição de campo do material ao campo magnético externo é muito grande, de maneira que a magnetização persiste mesmo após o campo magnético externo ser retirado. Esse fenômeno recebe o nome de histerese magnética. Como exemplos de materiais ferromagnéticos, podemos citar o ferro, o cobalto e o níquel puros e as ligas desses elementos entre si.



Curva de histerese magnética.

Na figura anterior, o ponto **a** representa a situação em que o material ferromagnético encontra-se desmagnetizado (representado pelo eixo vertical indução magnética nulo). A partir do momento em que se aplica um campo externo (representado pelo eixo horizontal força magnetizadora), passa a existir uma indução

magnética no material, sendo que há um limite a partir do qual há uma saturação, ou seja, a indução magnética não aumenta mais, independente da força magnetizadora, o que pode ser verificado no ponto **b**. Se reduzirmos a força magnetizadora para zero, haverá uma magnetização residual, representada pelo ponto **c**, e a partir daí o processo se repete se invertermos o sentido do campo magnético externo, representado pelos pontos **d**, **e** e **f**.

Para os materiais ferromagnéticos, existe uma temperatura acima da qual os materiais perdem a sua imantação. Essa temperatura é chamada *Ponto de Curie*, que para o ferro é de 770 °C.

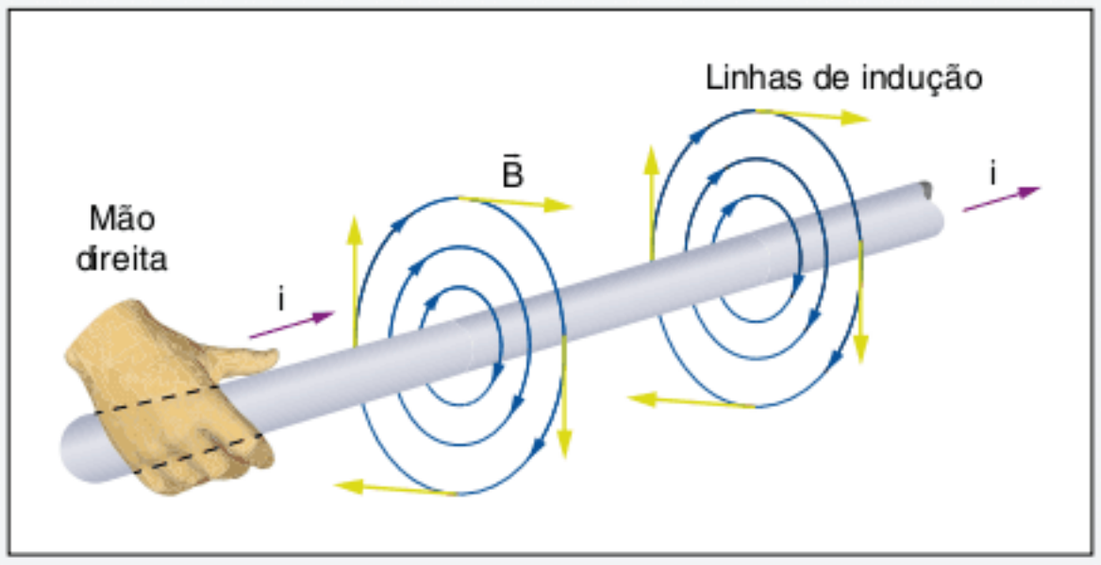
Os materiais diamagnéticos são aqueles materiais que não possuem elétrons desemparelhados, portanto, sua magnetização residual é sempre nula, pois os dipolos magnéticos se cancelam mutuamente. Assim, na ausência de campo magnético externo, sua magnetização é nula. Ao aplicarmos um campo magnético externo, surge um fraco campo magnético contrário ao campo externo aplicado, que independe da temperatura. Esse efeito pode ser entendido pela lei de *Lenz* e *Faraday* que serão estudadas posteriormente. Como exemplos de materiais diamagnéticos, temos os supercondutores, o bismuto e o ouro.

RESUMINDO

O **vetor indução magnética** pode ser caracterizado por sua direção, sentido e módulo.

Em um campo magnético gerado por **cargas em movimento em um fio retilíneo**, a direção do vetor indução magnética é tangente à linha de indução, concêntrica ao fio.

O sentido de um campo magnético pode ser determinado pela **regra da mão direita**. Nessa regra, o fio é envolvido com a mão direita, com o polegar apontando no sentido convencional da corrente. Os demais dedos apontam o sentido das linhas de indução.



Aplicação da regra da mão direita envolvente.

O módulo do vetor indução magnética depende da intensidade da corrente elétrica i que percorre o fio e da distância entre o fio e o ponto em que o campo é calculado (R). Em um fio retilíneo percorrido por corrente elétrica, o campo magnético pode ser definido como:

$$B = \frac{\mu i}{2\pi R}$$

Em que μ é a permeabilidade magnética, uma grandeza que caracteriza o meio com relação a propriedades magnéticas.

A permeabilidade magnética no vácuo é indicada por μ_0, definido, no SI, como $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T. m. A^{-1}.

Em uma **espira circular**, percorrida por uma corrente circular de intensidade i, o vetor indução magnética tem direção perpendicular ao plano da espira; seu sentido é determinado pela regra da mão direita e o módulo do campo magnético é dado por:

$$B = \frac{\mu i}{2R}$$

A configuração de n espiras justapostas, chamada bobina chata, tem:

$$B = n.\frac{\mu i}{2R}$$

Polos magnéticos podem ser associados a uma espira circular, com polaridade definida conforme o sentido da corrente. Quando a espira é percorrida por uma **corrente no sentido horário**, pela regra da mão direita, as linhas de indução parecem entrar na face da espira, definindo o **polo sul** magnético. Se a corrente que percorre a espira estiver no **sentido anti-horário**, as linhas parecem sair do plano da face, definindo o **polo norte** magnético.

O campo magnético no interior de um solenoide percorrido por corrente i, para pontos não muito próximos aos fios, pode ser considerado uniforme, com linhas de indução praticamente paralelas, na direção do eixo do solenoide. O módulo do campo magnético no interior de um solenoide é proporcional ao número de espiras (n) por unidade de comprimento ℓ.

$$B = \frac{\mu i.n}{\ell}$$

QUER SABER MAIS?

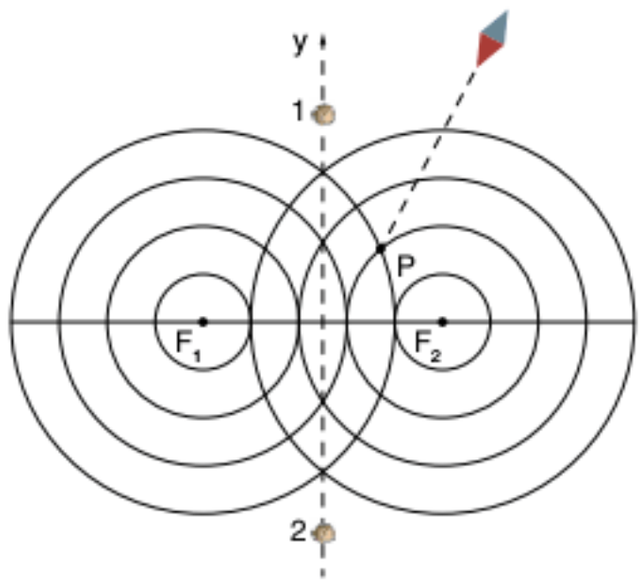
SITES

- O *spin* que move o mundo
  <http://cienciahoje.uol.com.br/colunas/fisica-sem-misterio/o-spin-quemove-o-mundo/>.
- Lei de Faraday
  <http://phet.colorado.edu/sims/faradays-law/faradays-law_pt.html>.

Exercícios complementares

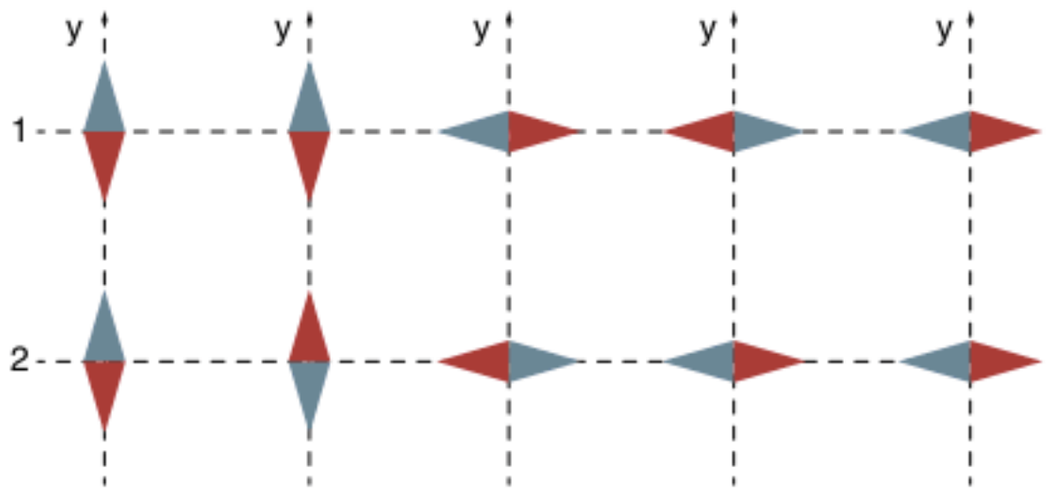
Questões gerais

1 **Fuvest 2007** Uma bússola é colocada sobre uma mesa horizontal, próxima a dois fios compridos, F_1 e F_2, percorridos por correntes de mesma intensidade. Os fios estão dispostos perpendicularmente à mesa e a atravessam. Quando a bússola é colocada em P, sua agulha aponta na direção indicada. Em seguida, a bússola é colocada na posição 1 e depois na posição 2, ambas equidistantes dos fios.

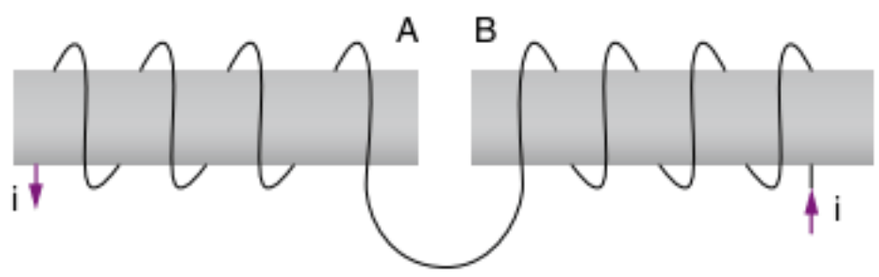


Nessas posições, a agulha da bússola indicará, respectivamente, as direções:

(a) (b) (c) (d) (e)



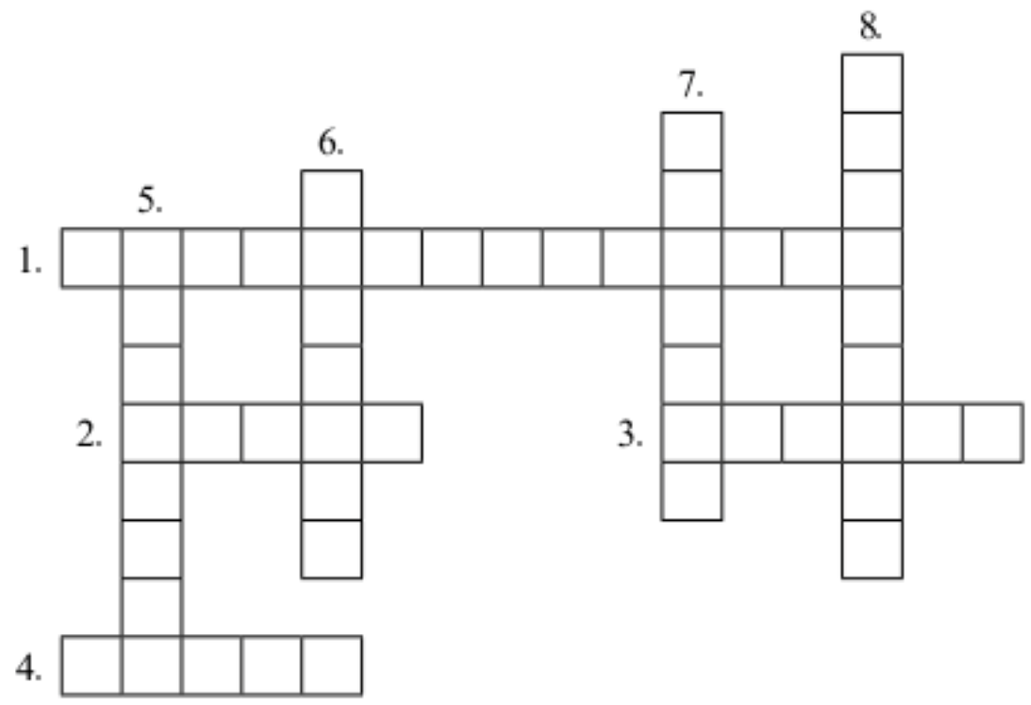
2 **Unifei 2007** Considere dois solenoides A e B percorridos por uma corrente elétrica cujo sentido é indicado na figura.



Qual é a afirmação verdadeira?

(a) A e B se atraem.
(b) A extremidade de B mais próxima de A corresponde ao polo norte do solenoide B.
(c) A extremidade de A mais próxima de B corresponde ao polo norte do solenoide A.
(d) A e B se repelem.

3 **UFABC 2008** Considere a cruzadinha para responder à questão. Nessa cruzadinha, por erro do desenhista, a figura ficou inadequada para a resolução correta de um de seus itens, identificados de 1 a 8.

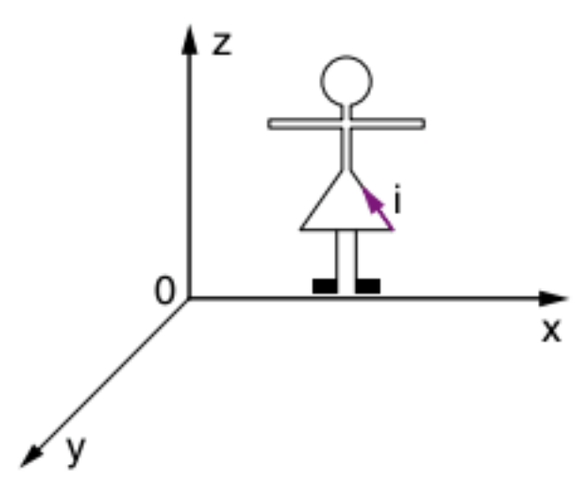


1. _____ magnética do meio. Constante física que está presente nas expressões que calculam a intensidade do campo magnético.
2. Unidade do Sistema Internacional atribuída para indicar a intensidade de campo magnético.
3. Processo de eletrização que ocorre ao se pentear o cabelo.
4. Nome do polo ao qual se atribui a condição de fonte de linhas de campo magnético.
5. Campo que, além do gravitacional, é capaz de colocar em movimento uma carga elétrica em repouso.
6. Fenômeno que ocorre quando os polos norte de dois ímãs são aproximados um do outro.
7. Processo que permite carregar eletricamente um corpo, por aproximação de outro previamente eletrizado, sem que haja contato entre eles.
8. Condutor em forma helicoidal capaz de gerar campo magnético, quando percorrido por corrente elétrica, semelhante ao de um ímã em forma de cilindro com os polos em suas bases circulares.

De fato, para a resolução correta da cruzadinha, pedimos aos nossos leitores a gentileza de:

(a) acrescentar um quadro na linha 2.
(b) acrescentar um quadro na coluna 6.
(c) acrescentar três quadros na coluna 7.
(d) desconsiderar dois quadros na linha 3.
(e) desconsiderar três quadros na coluna 8.

4 **UFABC 2007 (Adapt.)** Um estudante monta uma bonequinha, feita apenas com fio condutor de resistência elétrica desprezível.

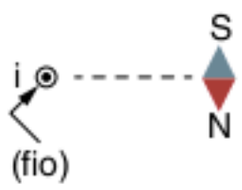


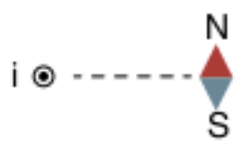
Mantendo a bonequinha no plano x0z, ligada a uma pilha que não aparece na figura, enquanto a corrente elétrica i passar pelo fio, o vetor campo magnético no centro da cabeça da bonequinha terá a direção do eixo:

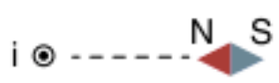
(a) x, orientado no sentido positivo desse eixo.
(b) x, orientado no sentido negativo desse eixo.
(c) y, orientado no sentido positivo desse eixo.
(d) y, orientado no sentido negativo desse eixo.
(e) z, orientado no sentido positivo desse eixo.

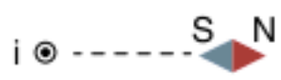
5 **FEI** Um condutor retilíneo é colocado no plano vertical que contém uma agulha magnética e paralelo a esta. Fazendo-se passar uma corrente pelo condutor do sul para o norte, a agulha sofre um desvio para leste. O condutor foi colocado acima ou abaixo do plano horizontal de suspensão da agulha? Justifique.

6 **ITA** Coloca-se uma bússola nas proximidades de um fio retilíneo, vertical, muito longo, percorrido por uma corrente elétrica contínua i. A bússola é disposta horizontalmente e assim a agulha imantada pode girar livremente em torno de seu eixo. Nas figuras abaixo, o fio é perpendicular ao plano do papel, com a corrente no sentido indicado (saindo). Assinale a posição de equilíbrio estável da agulha imantada, desprezando o campo magnético terrestre:

(a) 

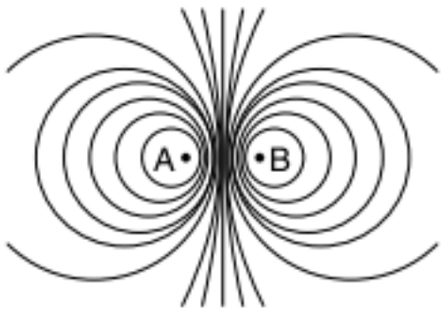
(b) 

(c) 

(d) 

(e) n.d.a.

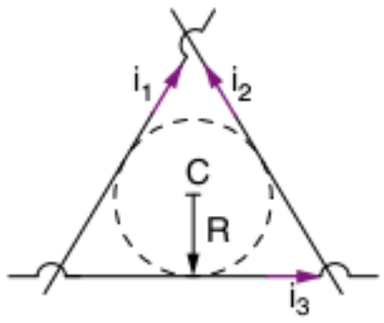
7 **FCC-SP** A figura dada representa as linhas de indução de um campo magnético, resultante das correntes elétricas que circulam em dois condutores, A e B, retilíneos, paralelos e perpendiculares à página.



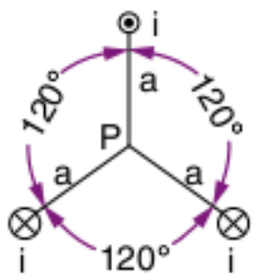
Qual a alternativa correta?

(a) As correntes elétricas têm sentidos opostos.
(b) Os condutores se atraem.
(c) O campo magnético na região entre os fios é menos intenso do que fora dessa região.
(d) Na metade da distância entre os dois fios, o campo magnético é nulo.
(e) O campo magnético entre os fios é uniforme.

8 Três condutores retos e longos formam o triângulo equilátero da figura sem se tocarem.
O círculo no triângulo tem centro C e raio R = 10 cm.
As correntes nos condutores têm os sentidos indicados e suas intensidades valem $i_1 = i_2 = 10A$ e $i_3 = 5A$. Determine o vetor indução magnética $\vec{B}$ resultante em C.
Dado: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1}$.



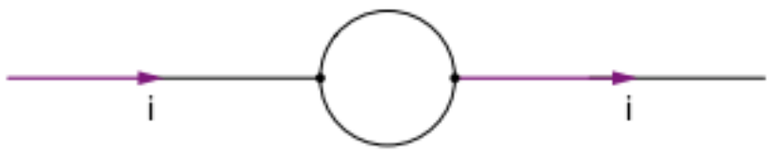
9 **Vunesp** Três fios condutores elétricos paralelos e muito longos são perpendiculares ao papel. A figura mostra um corte transversal do arranjo em que ⊗ e ⊙ indicam, respectivamente, a corrente que entra e que sai em relação à página. A corrente i = 10A é igual para todos os condutores. Sendo a = 2,0 cm, calcule o módulo do campo magnético de indução $\vec{B}$ no ponto P e indique seu sentido.
Dado: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1}$.



10 O valor da indução magnética no interior de uma bobina em forma de tubo cilíndrico é dado, aproximadamente, por $B = \mu \cdot n \cdot i$, onde μ é a permeabilidade do meio, n o número de espiras por unidade de comprimento e i é a corrente elétrica. Uma bobina deste tipo é construída com um fio fino metálico de raio r, resistividade ρ e comprimento L. O fio é enrolado em torno de uma forma de raio R obtendo-se assim uma bobina cilíndrica de uma única camada, com espiras uma ao lado da outra. A bobina é ligada aos terminais de uma bateria ideal de força eletromotriz igual a V. Nesse caso, pode-se afirmar que o valor de B dentro da bobina é:

(a) $\dfrac{\mu . \pi . r . V}{2 . \rho . L}$
(b) $\dfrac{\mu . \pi . R . V}{2 . \rho . L}$
(c) $\dfrac{\mu . \pi . r^2 . V . L}{2 . \rho}$
(d) $\dfrac{\mu . \pi . r . V}{2 . R^2 . L}$
(e) $\dfrac{\mu . r^2 . V}{2 . R^2 . L}$

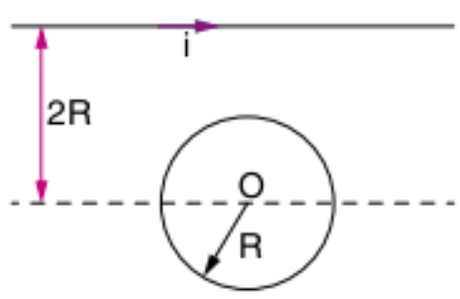
11 Um fio condutor é dividido em dois, que logo se juntam novamente, formando uma espira circular de raio r, conforme a figura. Se uma corrente i circula pelo fio, qual o módulo B do campo magnético no centro da espira?



12 **Fuvest** O condutor retilíneo muito longo indicado na figura é percorrido pela corrente i. Determine:

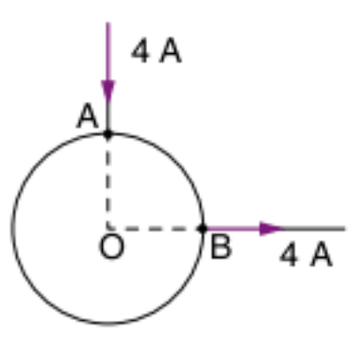
a) o sentido da corrente i' na espira circular de raio R, a fim de que seja nulo o campo de indução magnética resultante no centro O da mesma.

b) a relação $\frac{i}{i'}$ nas condições do item anterior.



13 Uma bobina chata, formada de 10 espiras circulares de raio 5 π cm, é colocada no plano do meridiano magnético de um lugar. A componente horizontal do vetor indução magnética terrestre tem intensidade $2 \cdot 10^{-5}$ T e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1}$. Uma pequena agulha magnética, móvel em torno do eixo vertical, é colocada no centro da bobina. A bobina é ligada a um circuito, sendo percorrida por corrente. Nota-se que a agulha descreve um ângulo de 45°. Calcule a intensidade i da corrente.

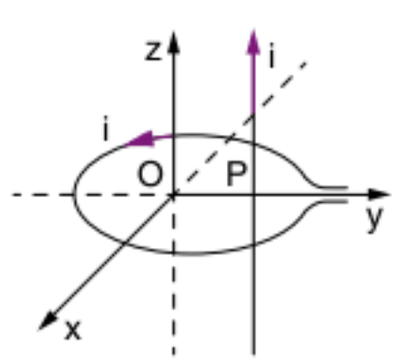
14 **Unicamp** Um condutor homogêneo de resistência 8 Ω tem a forma de uma circunferência. Uma corrente I = 4A chega por um fio retilíneo ao ponto A e sai pelo ponto B por outro fio retilíneo perpendicular, conforme a figura. As resistências dos fios retilíneos podem ser consideradas desprezíveis.

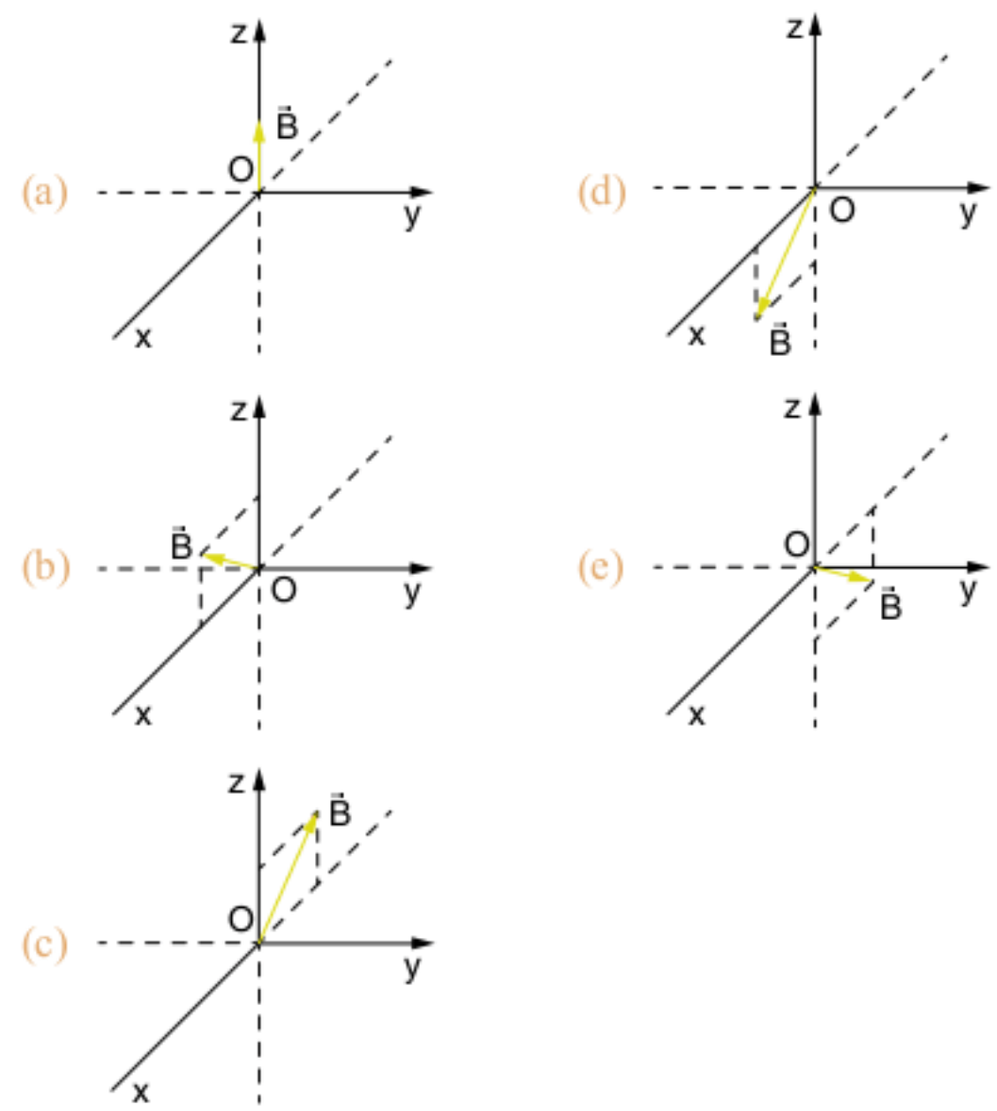


a) Calcule a intensidade das correntes nos dois arcos de circunferência compreendidos entre A e B.

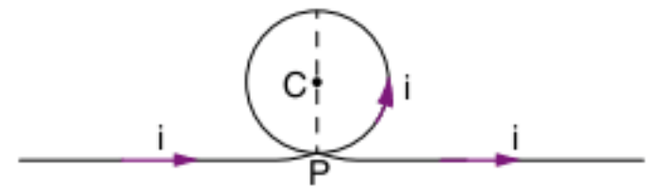
b) Calcule o valor da intensidade do campo magnético B no centro O da circunferência.

15 **Vunesp** A figura representa uma espira condutora por onde circula uma corrente i = constante, no sentido indicado. O plano da espira coincide com o plano xy e o seu centro está na origem de referencial cartesiano. Um fio condutor, retilíneo e muito longo, por onde passa também uma corrente i = constante, é paralelo ao eixo z, furando o plano da espira no ponto P. Escolha a seguir a opção que melhor representa o vetor indução magnética resultante no ponto O.





16 **ITA** Um fio condutor é dobrado na forma de uma circunferência de raio R, de modo que não haja contato elétrico no ponto P. O fio encontra-se num meio de permeabilidade magnética μ_0 e através dele circula uma corrente i.



Nessas condições, pode-se afirmar que:

(a) o campo de indução magnética no centro C da espira é nulo.

(b) o fio retilíneo cria no ponto C um campo entrando na folha de papel cuja intensidade vale: $\frac{\mu_0 i}{2R}$.

(c) o campo resultante no ponto C vale $\frac{\mu_0 i}{2R} \cdot \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$ e é perpendicular ao plano da espira.

(d) o campo resultante no ponto C vale $\frac{\mu_0 i}{2R} \cdot \left(\frac{1}{\pi} - 1\right)$ e é perpendicular ao plano da espira.

(e) o campo magnético resultante no ponto C é a soma dos módulos dos campos de indução magnética devidos ao fio retilíneo e à espira percorridos pela corrente i e vale $\frac{\mu_0 i}{2R} \cdot \left(\frac{1}{\pi} + 1\right)$.

17 Duas espiras circulares iguais são dispostas com centros comuns, segundo planos perpendiculares entre si, sendo percorridas por correntes constantes de intensidades iguais. No centro das espiras, o vetor campo magnético resultante:

(a) forma ângulo de 45° com os planos das espiras.

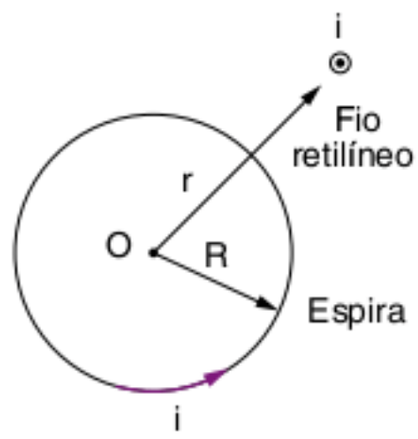
(b) está contido em um dos planos das espiras.

(c) não tem direção constante.

(d) é nulo.

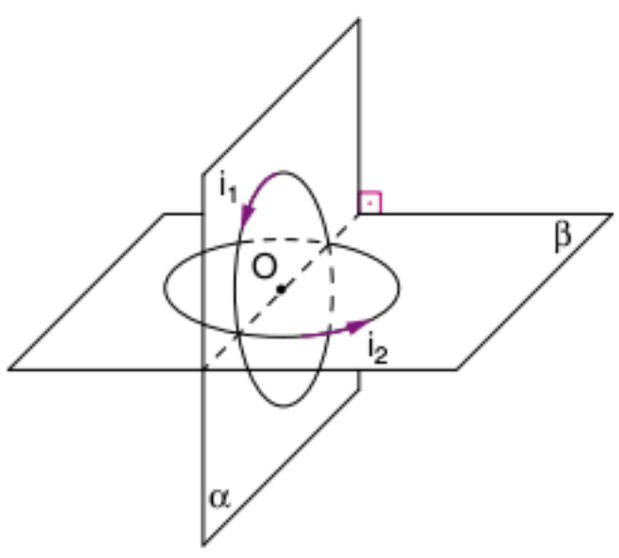
(e) nada do que se afirmou é correto.

18 Consideremos uma espira circular de raio R no plano desta página, e um fio retilíneo e extenso disposto perpendicularmente a esse plano, a uma distância r do centro da espira. Ambos são percorridos por correntes de mesma intensidade i, cujos sentidos estão indicados na figura. A permeabilidade absoluta do meio é μ_0. Determine, em função de r, R, i, μ_0 e π, o módulo do vetor indução magnética no centro O da espira.



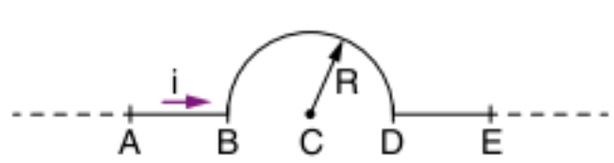
19 No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, o elétron descreve uma trajetória circular em torno do núcleo, de raio R igual a $5{,}1 \cdot 10^{-11}$ m, com frequência f igual a $6{,}8 \cdot 10^{15}$ Hz. Calcule a intensidade de $\vec{B}$ no centro da órbita.

20 Duas espiras circulares de mesmo raio, igual a 10 cm, e centros coincidentes são dispostas em planos perpendiculares. Elas são percorridas por correntes elétricas de intensidade $i_1 = 3{,}0$A e $i_2 = 4{,}0$A e situam-se num meio de permeabilidade absoluta $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1}$. Determine o módulo do vetor indução magnética no centro O das espiras.



21 Uma bobina chata foi construída com n espiras circulares. Entretanto, na construção, foram dadas $\frac{n}{2}$ voltas em um sentido, sendo outras $\frac{n}{2}$ voltas dadas dobrando-se o fio e enrolando-o em sentido contrário. Determine a indução magnética que a bobina cria em seu centro, quando percorrida por uma corrente de intensidade i.

22 **UFCS** A figura representa um fio infinito, percorrido por uma corrente de 15A. Sabendo que ambos os segmentos AB e DE têm comprimento de 0,1 m e que o raio da semicircunferência BD é de $0{,}05\pi$ m, determine o valor do campo magnético no ponto C.



23 **Unicamp** Uma corrente constante I_0 percorre um fio muito longo, LMN, dobrado em ângulo reto (figura 1). Essa corrente produz no ponto P um campo de indução magnética de módulo B_1. Solda-se em M um outro fio, também muito longo, de modo que LMO seja retilíneo (figura 2). Agora, as correntes constantes que percorrem LM e MN são, respectivamente, I_0 e $\frac{I_0}{2}$ e o campo de indução magnética produzido em P tem módulo B_2. Obtenha a razão $\frac{B_1}{B_2}$ entre os módulos do campo de indução magnética em P.

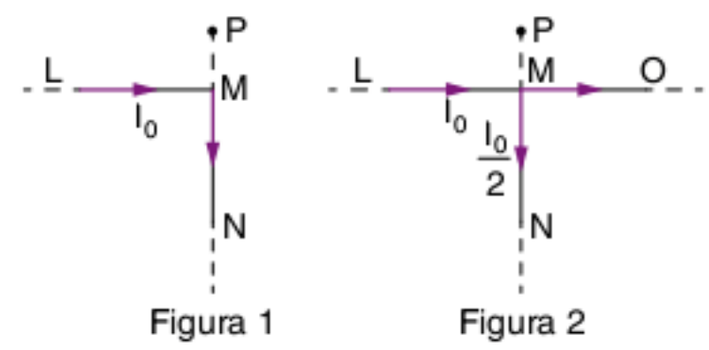
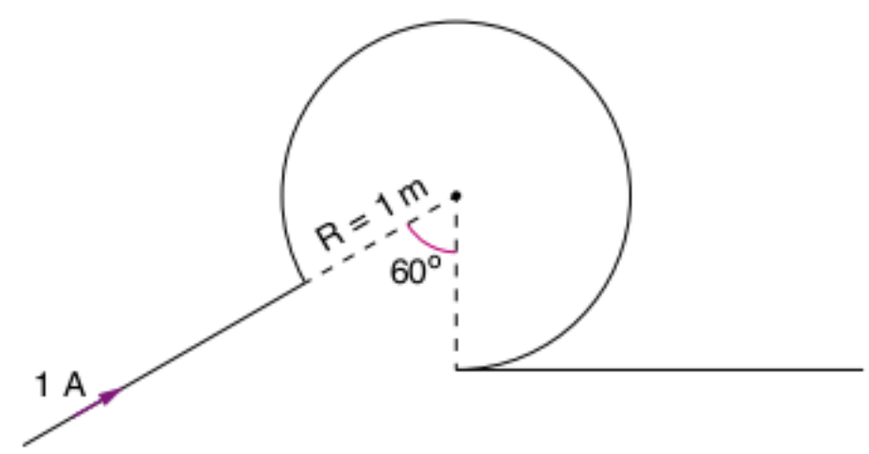


Figura 1 Figura 2

24 Considere um fio infinito e disposto no plano do papel, segundo a figura a seguir.



Nessas condições, assinale a alternativa que corresponde ao módulo de $\vec{B}$ no centro da espira:

(a) $\left(\frac{10\pi - 6}{3}\right).10^{-7}T$

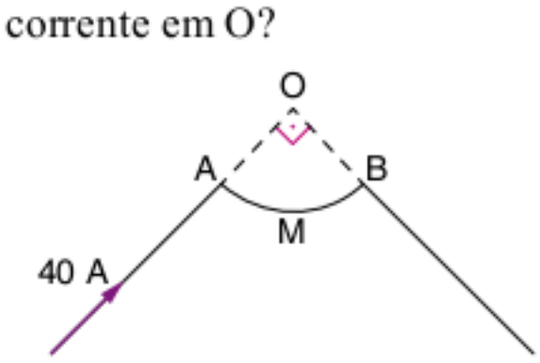
(b) $\left(\frac{10\pi - 12}{3}\right).10^{-7}T$

(c) $\left(\frac{5\pi - 3}{3}\right).10^{-7}T$

(d) $(2\pi - 2) \cdot 10^{-7}$ T

(e) impossível calcular.

25 **UFPA** O esquema da figura representa um condutor, no qual o segmento AMB é circular, com centro em O, que transporta uma corrente de 40A. Tem-se AO = 2,0 cm e a permeabilidade do vácuo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1}$. Qual o valor do campo produzido pela corrente em O?



Frente 3

7

FRENTE 3

Introdução à óptica geométrica

U.S. NAVY PHOTOS BY MASS COMMUNICATION SPECIALIST SEAMAN JOSHUA VALCARCEL

Quando um corpo se coloca entre uma fonte extensa de luz e um outro corpo, sua sombra é projetada nesse outro corpo, em regiões com ausência de luz e regiões parcialmente iluminadas (penumbra). Quando a Lua intercepta o cone de sombra da Terra, em uma situação em que o Sol, a Terra e a Lua estão exatamente alinhados, ela é parcialmente obscurecida, em regiões de sombra e penumbra, fenômeno conhecido como eclipse lunar. Durante a trajetória da Lua pelo cone de sombra da Terra, em sua órbita ao redor do planeta, pode-se observar o obscurecimento progressivo do astro.

Introdução

Para o estudo da óptica geométrica, que é o estudo macroscópico da luz, deve-se conhecer os conceitos geométricos básicos que se relacionam com a propagação, a reflexão e a refração da luz em superfícies ópticas. Além do estudo da natureza da luz.

Ondas eletromagnéticas

Inicialmente, é necessário que se compreenda o conceito de energia. Como você já estudou em capítulos anteriores, a energia pode apresentar-se sob diferentes formas: energia mecânica, energia térmica, energia elétrica, energia química, energia radiante etc.

O transporte de energia entre dois pontos de um sistema se dá por meio de ondas longitudinais e transversais. Assim, por exemplo, a energia mecânica de uma pedra que atinge a água de um lago é transmitida por toda a superfície desse lago pelas ondas.

No estudo da óptica geométrica, o que nos interessa é um tipo específico de transporte de energia, aquele feito pelas chamadas ondas eletromagnéticas, cujos exemplos mais conhecidos são: ondas de rádio, micro-ondas, raios X, radiações infravermelha, visível e ultravioleta.

Espectro eletromagnético

A diferença entre as ondas eletromagnéticas está nas diferentes frequências (f) com que essas ondas vibram. Assim, ao conjunto de todas as frequências das ondas eletromagnéticas damos o nome de espectro eletromagnético.

Região do espectro	Frequência (Hz)	Comprimento de onda (cm)
Rádio	$< 3.10^{9}$	> 10
Micro-ondas	$3.10^{9} - 3.10^{12}$	$10 - 0{,}01$
Infravermelho	$3.10^{12} - 4{,}3.10^{14}$	$0{,}01 - 7.10^{-5}$
Visível	$4{,}3.10^{14} - 7{,}5.10^{14}$	$7.10^{-5} - 4.10^{-5}$
Ultravioleta	$7{,}5.10^{14} - 3.10^{17}$	$4.10^{-5} - 10^{-7}$
Raios X	$3.10^{17} - 3.10^{19}$	$10^{-7} - 10^{-9}$
Raios gama	$> 3.10^{19}$	$< 10^{-9}$

Tab. 1 Espectro de radiação eletromagnética.

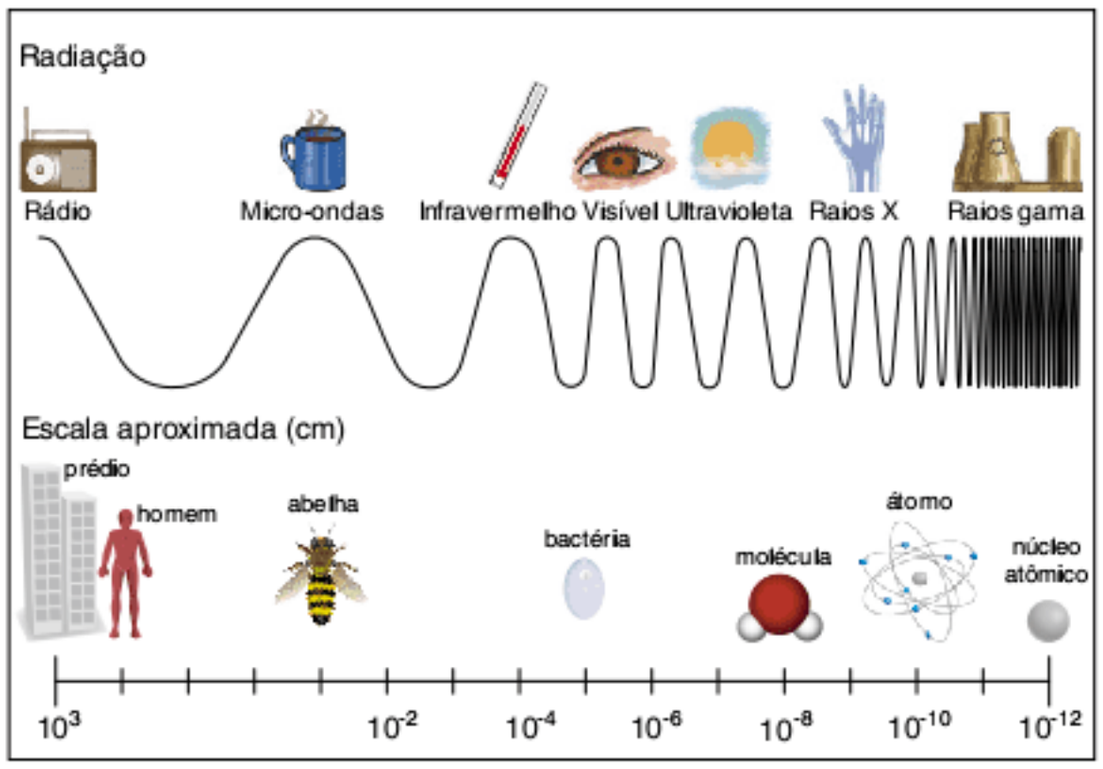


Fig. 1 Espectro eletromagnético.

Passaremos a estudar agora um tipo especial de onda eletromagnética: a luz.

Luz

É a energia que se propaga através de ondas eletromagnéticas cujas frequências sensibilizam nossos olhos.

As frequências dentro da faixa visível do espectro eletromagnético correspondem às diferentes cores com que observamos a luz. Observe, na figura 2, as diferentes cores dentro do espectro visível.

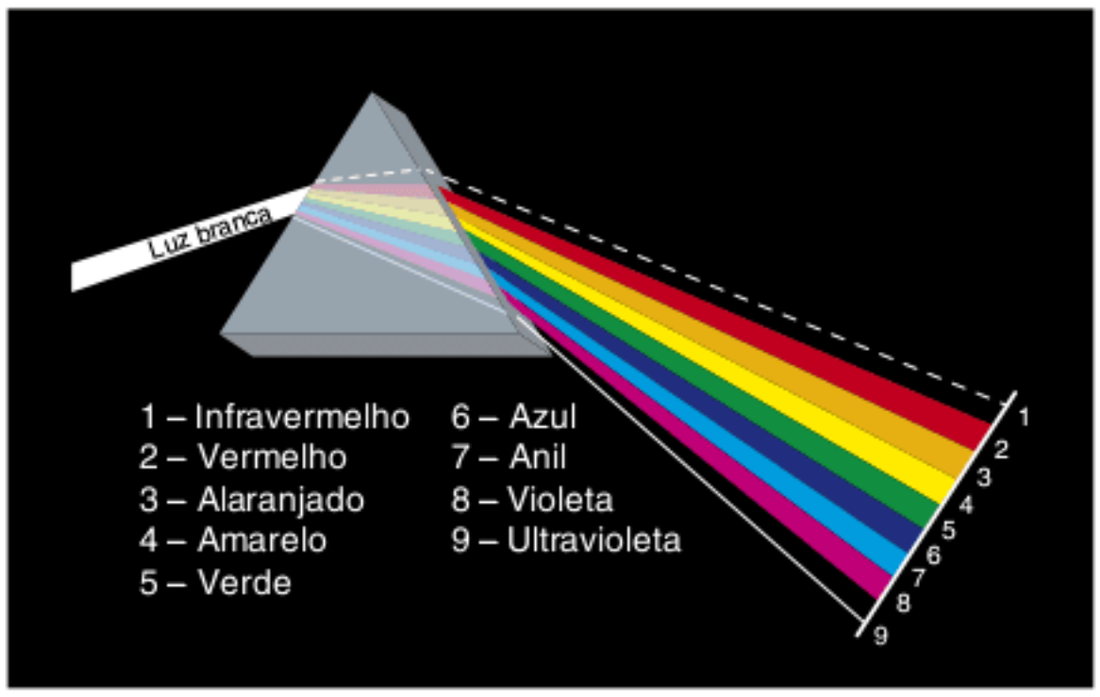


Fig. 2 Decomposição da luz branca e o espectro visível.

A luz de cor violeta corresponde à maior frequência, e a luz de cor vermelha corresponde à menor frequência.

Cor	Frequência média (Hz)	Comprimento de onda médio (nm)
Violeta	$7{,}4.10^{14}$	405
Anil	$6{,}7.10^{14}$	450
Azul	$6{,}2.10^{14}$	485
Verde	$5{,}7.10^{14}$	530
Amarelo	$5{,}2.10^{14}$	580
Alaranjado	$4{,}8.10^{14}$	620
Vermelho	$4{,}4.10^{14}$	745

Tab. 2 Espectro visível.

À luz de uma única frequência dá-se o nome de luz monocromática. Entretanto, podemos obter luzes de outras cores, combinando luzes de diferentes frequências; a essa combinação damos o nome de luz policromática.

SAIBA MAIS

Uma experiência clássica que comprova que a luz branca é policromática é o "Disco de Newton". Para reproduzir a experiência, recorte um disco de papelão e cole sobre ele um disco de papel com setores pintados com as cores do espectro visível. Faça esse disco girar sob uma forte luz branca, inserindo em seu centro um palito ou lápis. Se a proporção das cores estiver correta, o disco ficará branco ao girar; na maioria das vezes, o disco ficará cinza. Será necessário experimentar vários conjuntos de setores coloridos até chegar ao branco. Conjuntos de setores com menos cores podem resultar em branco ou em outras cores. Faça vários discos com pares ou trios de cores diferentes e observe a cor resultante ao girá-lo rapidamente sob luz branca.

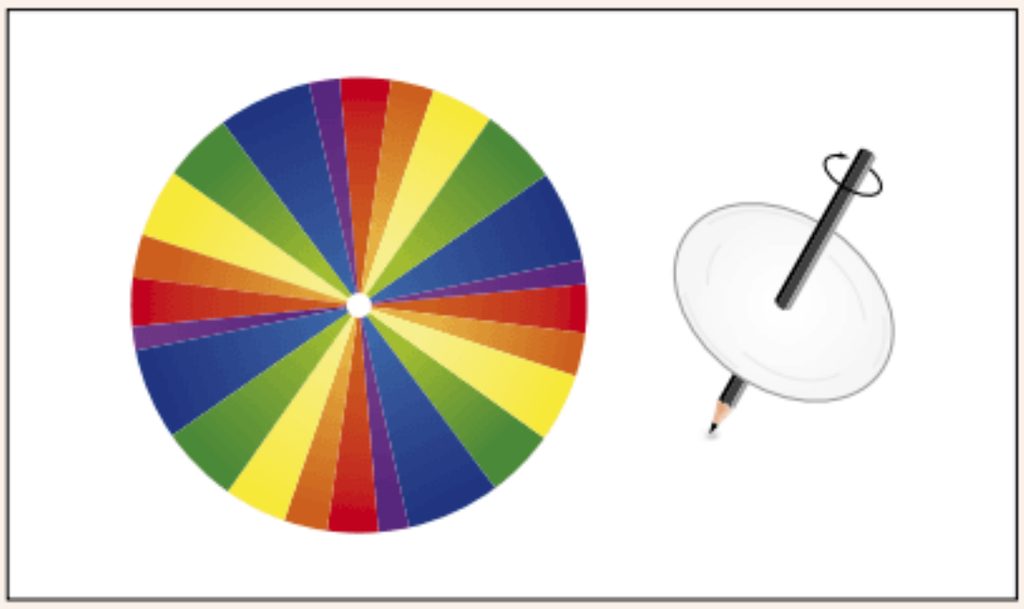


Fig. 3 Disco de Newton.

Velocidade da luz

Antigamente, pensava-se que a luz tinha velocidade infinita, isto é, que ela podia percorrer qualquer distância, por maior que fosse, sem gastar nenhum tempo para isso. Talvez o primeiro a tentar medir a velocidade da luz tenha sido Galileu. Tentou, mas com os meios que dispunha, não conseguiu, porque a luz é rápida demais. No tempo em que você leva para piscar os olhos, ela já foi de Manaus a Porto Alegre. Hoje todo mundo sabe que a velocidade da luz é de, aproximadamente, 300.000 km/s. Como usual, vamos representá-la pela letra **c**.

Atualmente, o valor mais preciso, medido pelo Bureau de Padrões americano, é c = 299.792,4586 km/s.

ATENÇÃO!

Ano-luz: é uma unidade de medida de distância. Um ano-luz é a distância percorrida pela luz durante um ano, no vácuo.
Como se sabe: $v = \Delta s/\Delta t$
Logo: $\Delta s = v \cdot \Delta t$
Portanto: 1 ano-luz $\approx 9{,}5 \cdot 10^{15}$ m

Todas as ondas eletromagnéticas possuem a mesma velocidade quando estão se propagando no vácuo. Essa velocidade corresponde à máxima velocidade admitida. Consideramos seu valor igual a:

$$c = 300.000.000 \text{ m/s} \Rightarrow c = 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$
ou
$$c = 1.080.000.000 \text{ km/h} \Rightarrow c = 10{,}8 \cdot 10^8 \text{ km/h}$$

Nos meios materiais (sólidos, líquidos ou gasosos), a velocidade v das ondas eletromagnéticas é sempre menor do que c e terá valores diferentes para as diferentes frequências. Logo, nos meios materiais:

$$v < c$$

Óptica geométrica

Para iniciarmos o estudo de óptica geométrica, que é a parte da Física que estuda os fenômenos luminosos em sistemas ópticos, tais como associações de espelhos, lentes, prismas, lâminas etc., passaremos a apresentar os conceitos de fonte de luz, raio de luz, pincel de luz e meio de propagação.

Fonte de luz

Para enxergarmos um objeto qualquer, é necessário que a luz proveniente dele atinja nossos olhos. Esse objeto é uma fonte de luz.

Fonte primária de luz

É aquela que produz a luz que emite.

As estrelas e, em particular, o Sol, são exemplos de fonte primária, pois a luz emitida é produzida por reações nucleares que ocorrem em seu interior.

Outros exemplos são:

- ferro incandescente.
- vela acesa.
- lâmpada ligada.

Fonte secundária de luz

É aquela que não produz a luz que emite, mas a que retransmite.

A Lua é um exemplo de fonte secundária, pois ela apenas reflete a luz solar.

Outros exemplos são:

- quadro-negro.
- páginas de livro.

Raio de luz

É uma linha orientada que tem origem na fonte de luz e é perpendicular às frentes de luz, superfícies limite entre a região já atingida por uma onda luminosa e a região ainda não atingida.

Os raios de luz representam a direção e o sentido da propagação da luz.

Os raios de luz provenientes de um mesmo ponto com uma pequena abertura constituem um pincel de luz, que pode ser:

- divergente
- convergente
- cilíndrico ou paralelo

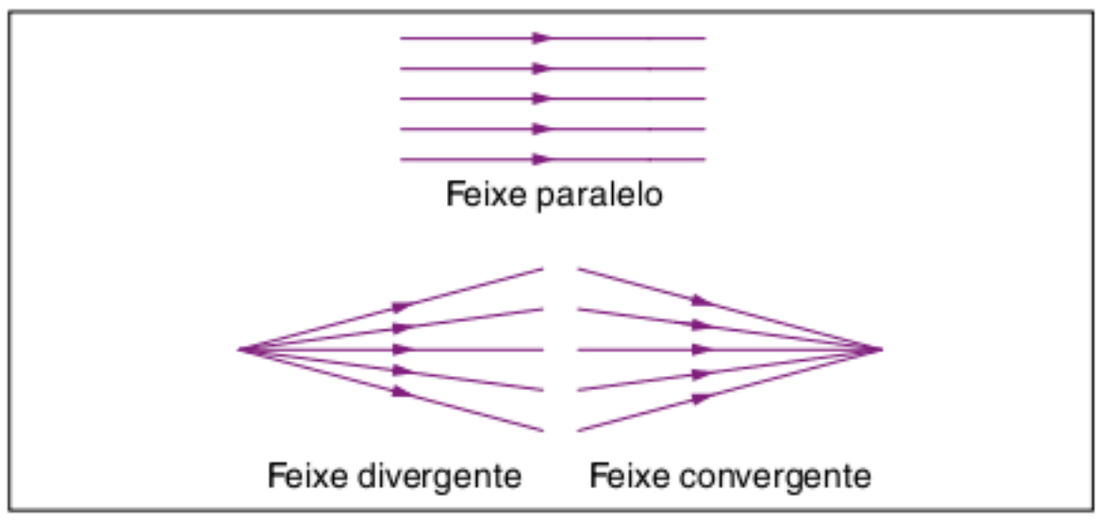


Fig. 4 Feixes de luz.

Meios de propagação

Quanto à propagação da luz, os meios são classificados em:

- **Transparente**: permite, através de si, a visualização nítida dos objetos, pois neles a luz se propaga em trajetórias definidas e praticamente sem perda de intensidade. Exemplos: vácuo, ar, vidro liso comum, fina camada de água etc.

- **Translúcido**: permite a visualização dos objetos, mas não nitidamente. Nesse meio, as trajetórias da luz não são

definidas, assumindo formas imprevisíveis e há considerável perda de intensidade luminosa. Exemplos: vidro fosco, papel vegetal, neblina etc.

- **Opaco**: não permite a propagação da luz. Exemplos: madeira, metal, tijolo, papelão grosso etc.

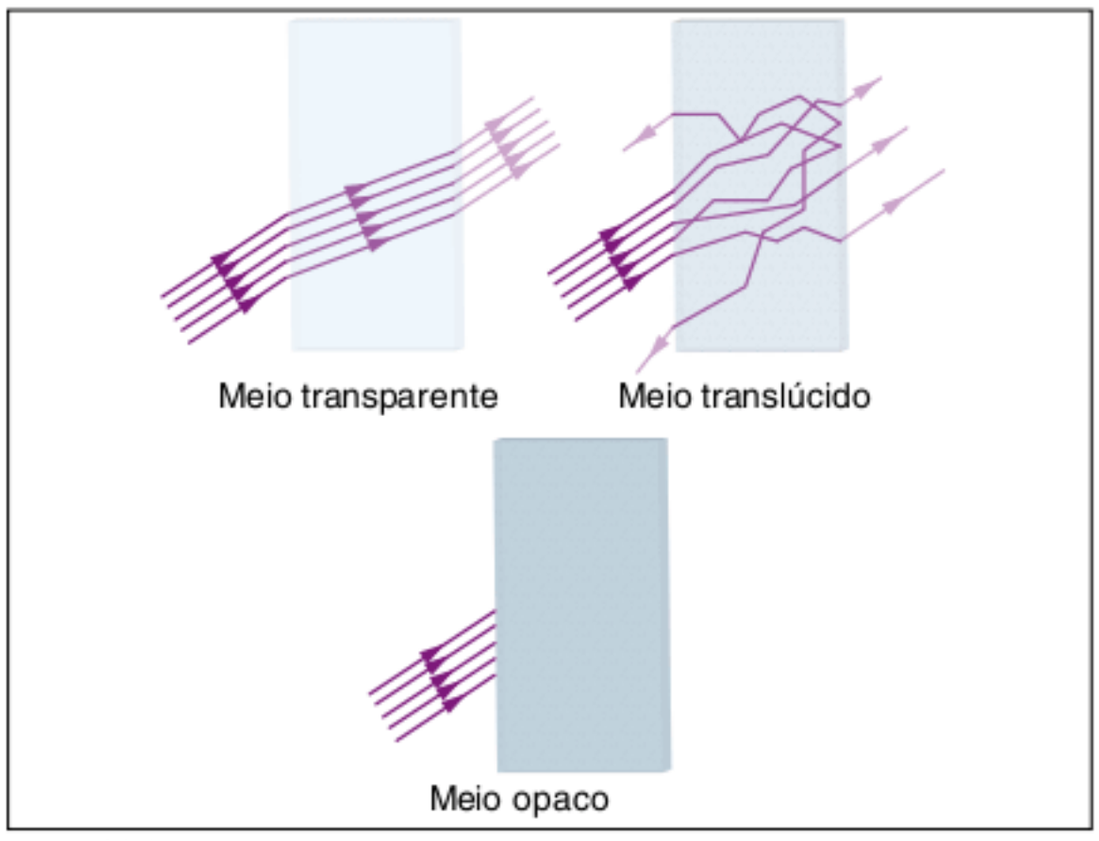


Fig. 5 Meios de propagação.

Princípios da óptica geométrica

A óptica geométrica, como toda a Física, é baseada em princípios, são eles:

P1 Princípio da propagação retilínea da luz

Nos meios transparentes e homogêneos, a luz se propaga em linha reta.

Observação: *Um meio é homogêneo quando qualquer porção dele possui as mesmas propriedades, tais como composição química, densidade, temperatura etc.*

Constatamos a validade desse princípio, observando, por exemplo, a trajetória retilínea da luz que penetra em uma sala através de uma fresta da janela. Nesse caso, o ar contido na sala é transparente e homogêneo.

P2 Princípio da independência dos raios de luz

As trajetórias dos raios de luz são independentes entre si.

Assim, se dois raios de luz, A e B, interceptam-se, eles prosseguirão em suas próprias trajetórias.

Podemos verificar o princípio da independência quando observamos pessoas iluminadas individualmente por holofotes.

P3 Princípio da reversibilidade dos raios de luz

A trajetória de um raio de luz independe de seu sentido.

Se um raio de luz parte de um ponto A para atingir um ponto B, seguindo uma determinada trajetória, então, para partir de B e atingir A, deverá seguir a mesma trajetória.

Com base nesse princípio, podemos afirmar que, se estamos enxergando os olhos de uma pessoa através de um espelho, essa pessoa tem a mesma possibilidade de nos enxergar através dele.

Aplicações dos princípios da óptica

Sombra

Em óptica, denomina-se sombra uma região desprovida de raios de luz, produzida pela interposição de um corpo opaco entre uma fonte de luz e um anteparo. A sombra é consequência da propagação retilínea da luz. A figura a seguir representa uma fonte puntiforme de luz F_P, um corpo opaco O e um anteparo A.

Observação: *Fonte puntiforme é uma fonte que possui dimensões desprezíveis em relação às demais dimensões envolvidas no estudo, como a distância percorrida pela luz no experimento ou as dimensões do corpo opaco.*

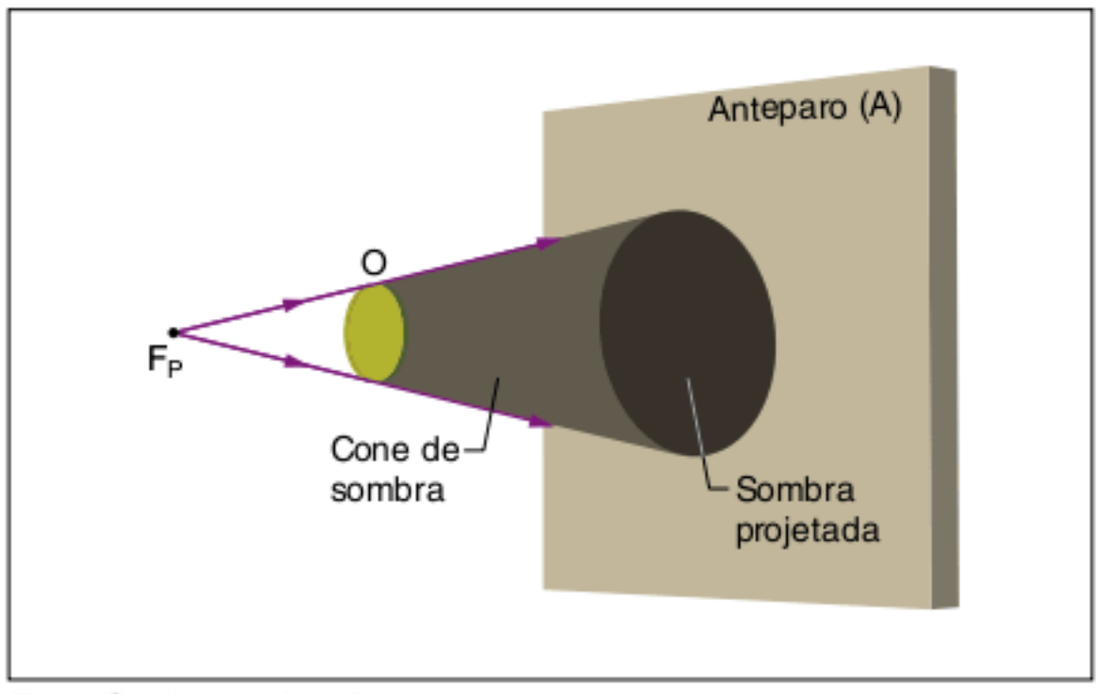


Fig. 6 Sombra projetada.

Observe a formação da sombra do corpo opaco O no anteparo A. A sombra é uma região com ausência de raios de luz.

O princípio da propagação retilínea da luz é comprovado pelo fato de a sombra projetada ter a mesma forma do corpo opaco. Assim, se o corpo opaco O é circular, a sua sombra projetada no anteparo A também será circular.

Para obtermos geometricamente a sombra projetada, basta traçarmos raios de luz que tangenciem a periferia do corpo opaco O, partindo da fonte de luz F_p até o anteparo A.

Sombra e penumbra

Para uma fonte não pontual, ou extensa, além da sombra do corpo opaco, observa-se uma região de contorno parcialmente atingida por raios de luz. Na figura a seguir, em vez da fonte puntiforme de luz F_P, considere uma fonte extensa de luz F_E.

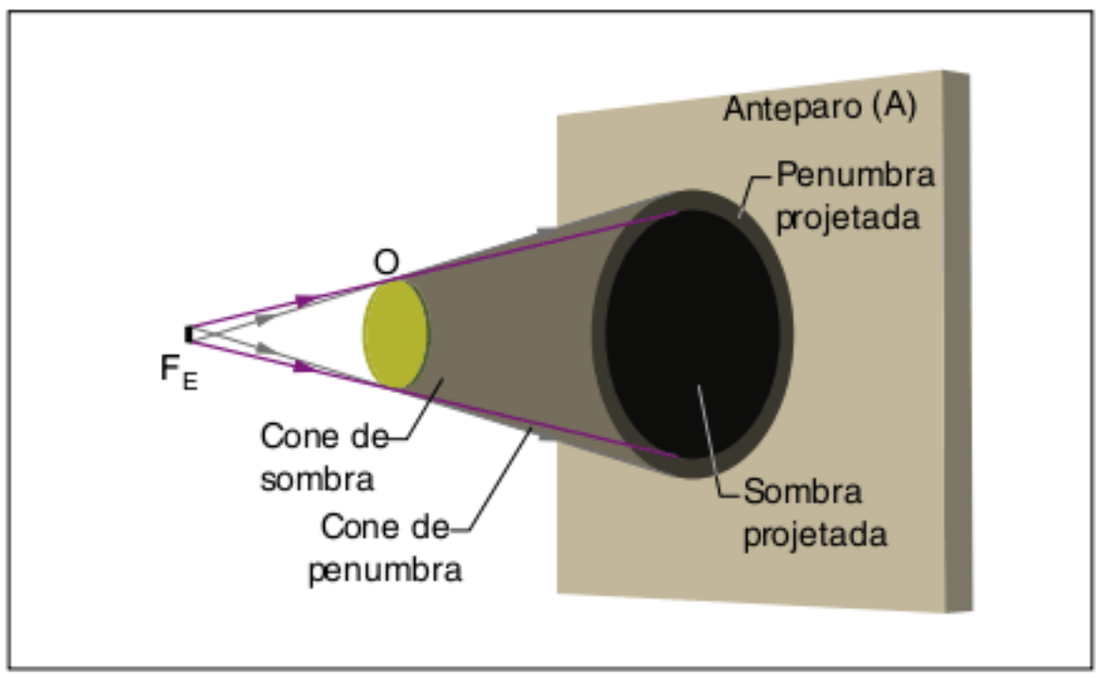


Fig. 7 Penumbra e sombra projetada.

Observação: *Uma fonte de luz é considerada extensa quando o seu tamanho não é desprezível em relação às outras dimensões envolvidas.*

Veja que, além da sombra projetada no anteparo, obtemos também a formação de penumbra, que corresponde a uma região parcialmente iluminada. É importante salientar que a penumbra projetada, representada na figura 7, tem intensidade luminosa que cresce à medida que essa penumbra se afasta da sombra e se aproxima da região iluminada.

Para obtermos geometricamente a sombra e a penumbra projetadas no anteparo A, traçamos raios de luz, a partir das extremidades da fonte extensa de luz F_E, que tangenciam o limite do corpo opaco O.

Eclipse

Os princípios da óptica geométrica podem ser observados em fenômenos como eclipses. O eclipse é o desaparecimento ou intercepção total ou parcial de um astro pela colocação de outro entre ele e o observador ou entre o astro iluminante e o iluminado. Esse astro pode ser chamado de objeto celeste, ou seja, qualquer objeto, de qualquer tamanho, que esteja fora da atmosfera terrestre.

Como no nosso sistema a única estrela é o Sol, temos que apenas ele é uma fonte primária de luz, consequentemente, todos os planetas e satélites formam um cone de sombra.

Quando a Lua penetra, total ou parcialmente, no cone de sombra da Terra, temos um eclipse total ou parcial da Lua.

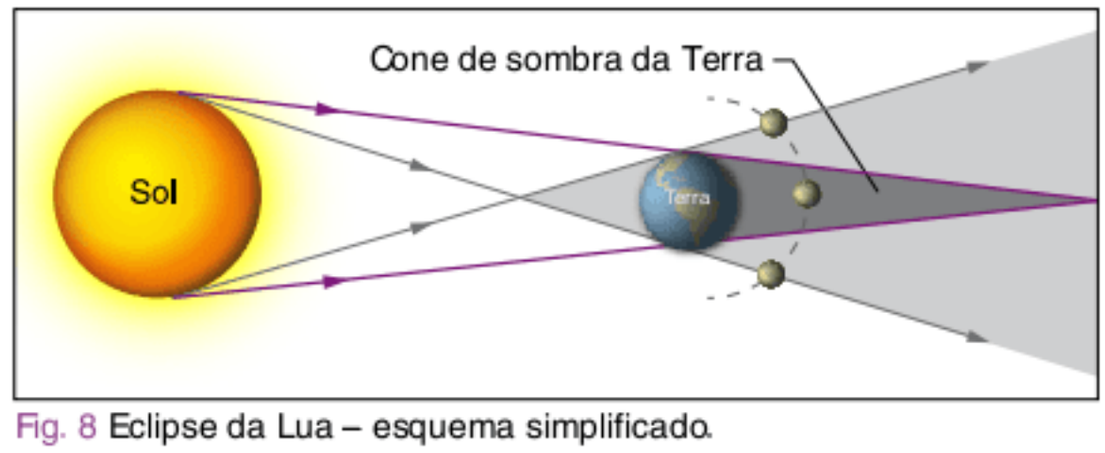


Fig. 8 Eclipse da Lua – esquema simplificado.

Quando a Terra intercepta o cone de sombra da Lua, temos um eclipse total ou parcial do Sol, dependendo da região do observador na Terra.

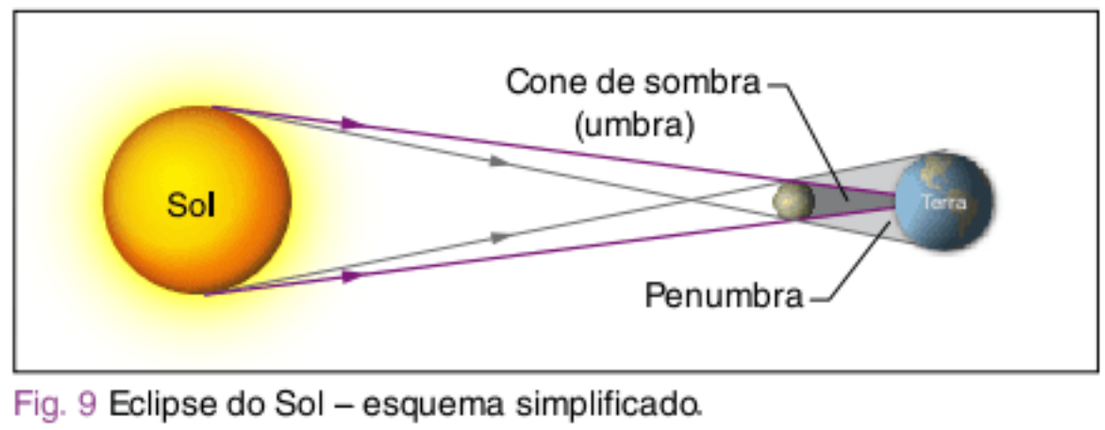


Fig. 9 Eclipse do Sol – esquema simplificado.

Observe, na figura a seguir, a percepção de um eclipse do Sol em diferentes regiões do planeta.

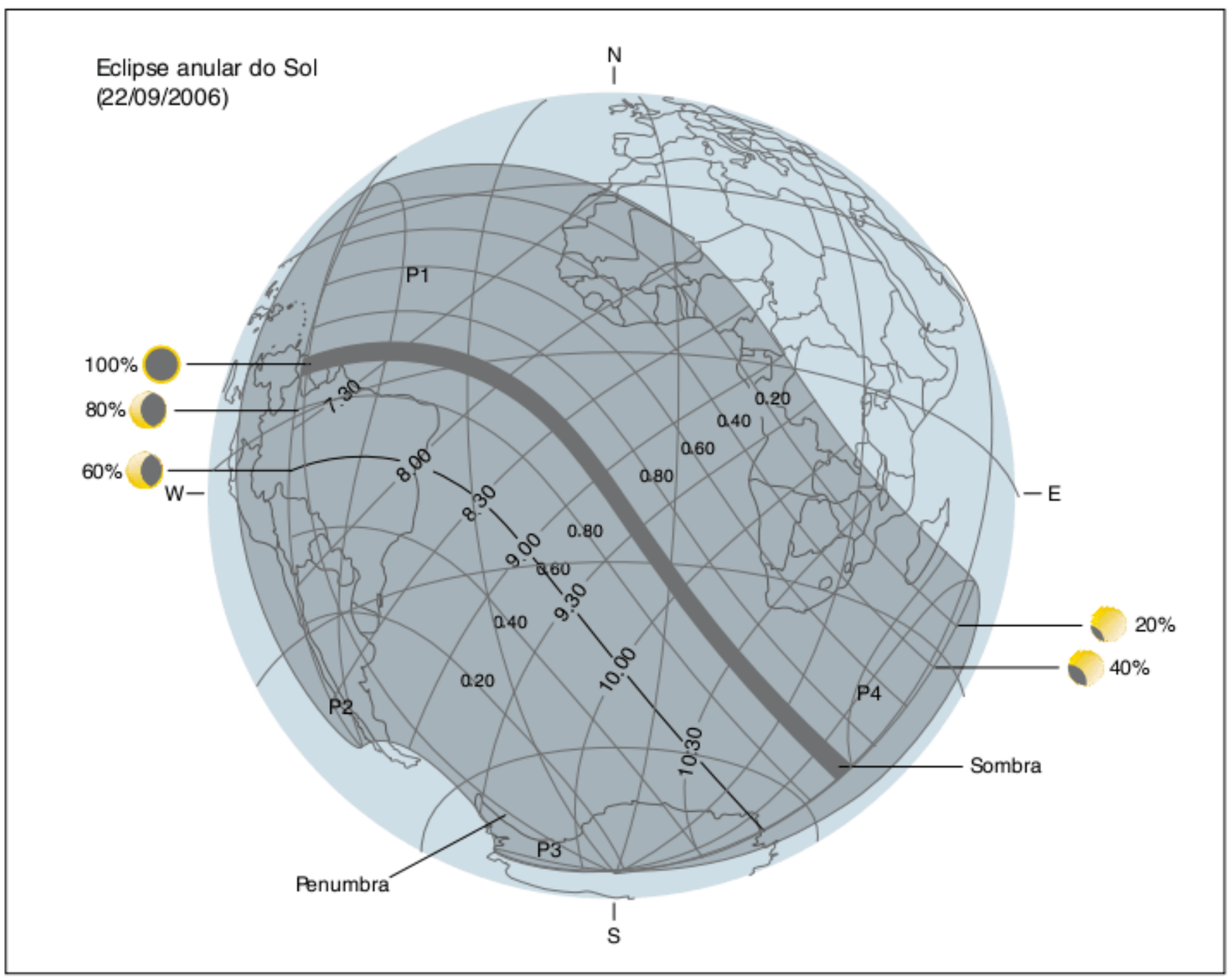


Fig. 10 Visibilidade de um eclipse solar.

Câmara escura de orifício

A câmara escura de orifício evidencia o princípio da propagação retilínea da luz e constitui a base de funcionamento das máquinas fotográficas.

Coloquemos um objeto luminoso, de extremidades A e B, diante de uma câmara de paredes opacas dotada de um pequeno orifício O. Raios de luz emitidos pelo objeto atravessarão o orifício O e se projetarão no fundo da câmara, produzindo uma figura de extremidades A'B', semelhante ao objeto AB, conforme a figura 11.

A figura A'B' é chamada de **imagem** e está em uma posição invertida em relação ao objeto AB.

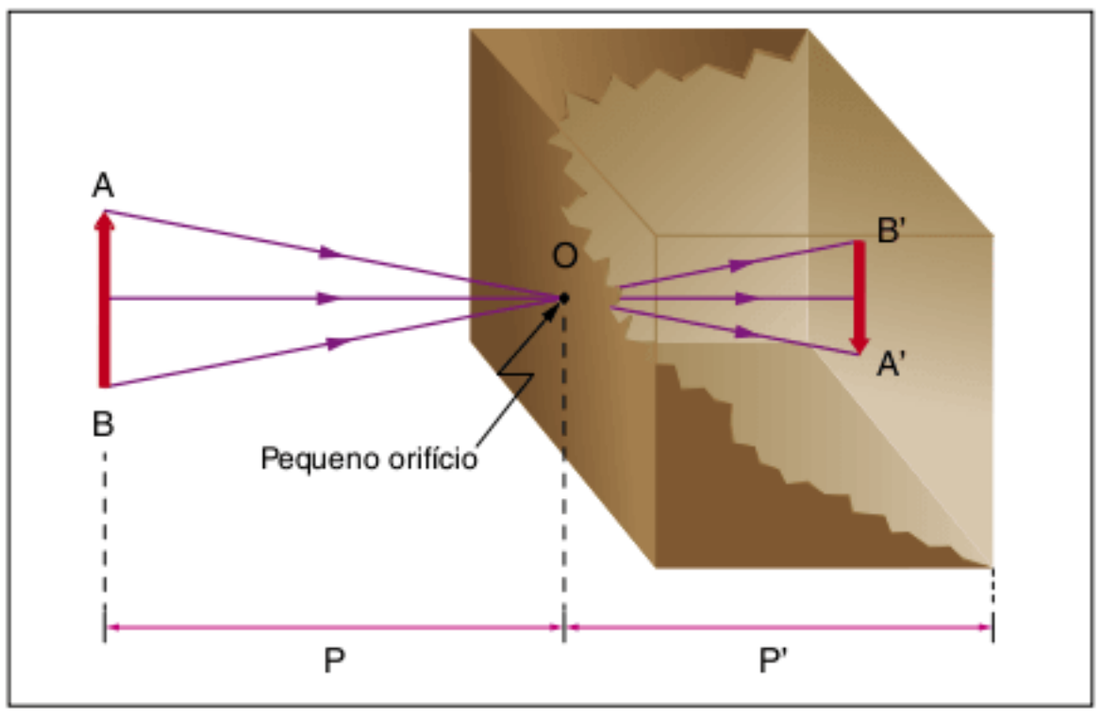


Fig. 11 Câmara escura de orifício.

$$\text{Da figura 11, obtemos} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{P}{P'}$$

LEITURA

Ângulo visual

O ângulo visual, pelo qual se observa um objeto, é delimitado pelos raios de luz provenientes das extremidades do objeto e que atingem os olhos do observador.

Percebemos facilmente que, quanto maior for a distância entre o observador e o objeto, menor será o ângulo visual.

O menor ângulo visual pelo qual a visão humana ainda percebe dois pontos distintos (limite de acuidade visual) é da ordem de um minuto de arco (1º/60).

É por isso que temos um limite de visão a longas distâncias. A partir de uma certa distância, fica impossível distinguir dois pontos. Lembre-se do teste que fazemos em uma consulta oftalmológica.

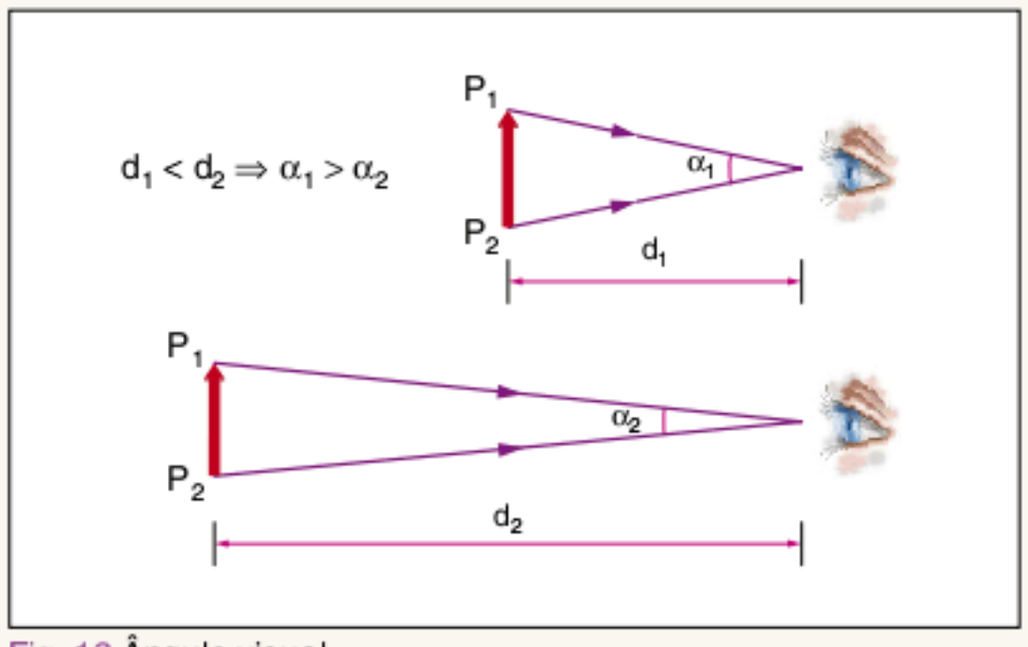
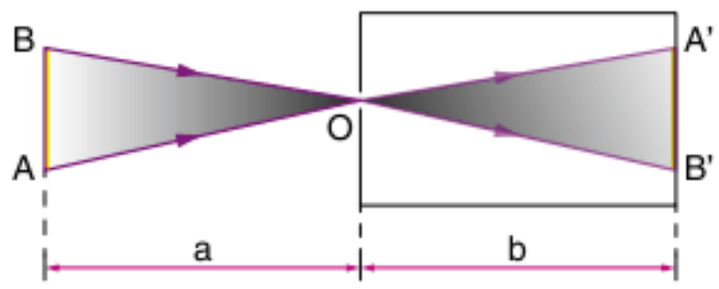


Fig. 12 Ângulo visual.

Revisando

1 Um edifício de altura H projeta no solo uma sombra de 20 m. No mesmo instante, uma pessoa toma uma haste vertical de 0,20 m e nota que sua sombra mede 0,40 m. Qual é a altura H do edifício?

2 O esquema a seguir representa o corte de uma câmara escura de orifício, diante do qual existe um corpo luminoso AB de 40 cm de comprimento.



Considerando a = 100 cm e b = 20 cm, calcule o comprimento da figura A'B' projetada no fundo da câmara.

3 Define-se um ano-luz como sendo a distância percorrida por um sinal luminoso no vácuo durante um ano terrestre. Sabendo que no vácuo a luz viaja com velocidade de $3{,}00.10^5$ km/s, calcule, em metros, o comprimento equivalente a um ano-luz.

Exercícios propostos

Espectro eletromagnético

1 **UEM 2007** Assinale a alternativa incorreta.

(a) A luz visível é uma forma de radiação eletromagnética.
(b) A frequência de uma radiação aumenta à medida que se aumenta o seu comprimento de onda.
(c) A energia de uma radiação aumenta conforme se aumenta a frequência.
(d) A radiação chamada de "visível" possui comprimento de onda menor do que a radiação emitida por emissoras de rádio.
(e) A radiação gama, produzida em reações nucleares, possui frequência maior do que a radiação infravermelha.

Fontes de luz e meios de propagação

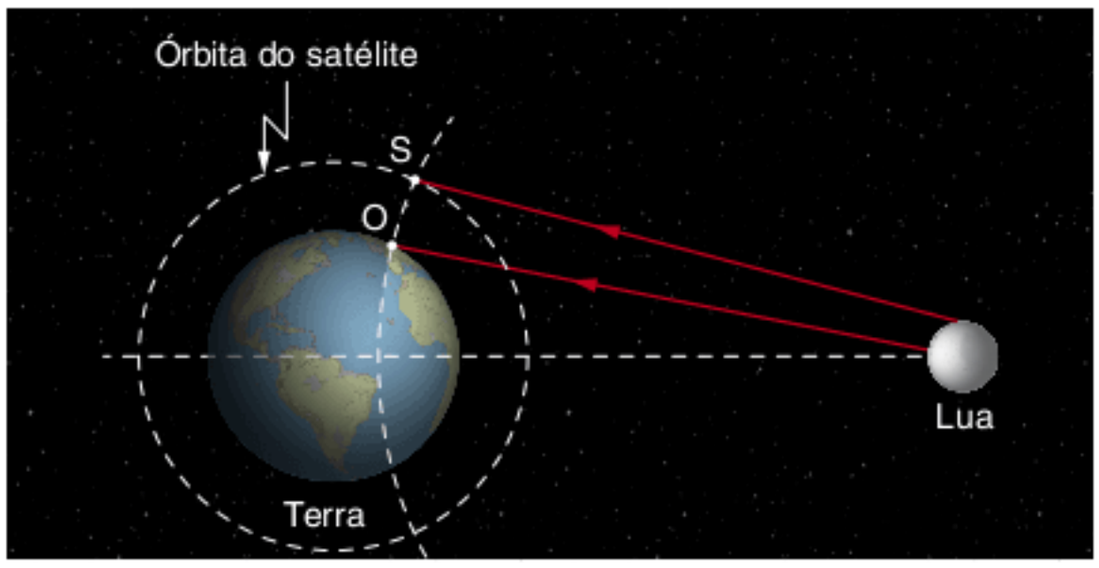
2 Das alternativas seguintes, aponte aquela que traz exclusivamente fontes luminosas primárias.

(a) Lanterna acesa, espelho plano, vela apagada.
(b) Olho de gato, Lua, palito de fósforo aceso.
(c) Lâmpada acesa, arco voltaico, vaga-lume aceso.
(d) Planeta Marte, fio aquecido ao rubro, parede de cor clara.
(e) Vídeo de uma TV em funcionamento, Sol, lâmpada apagada.

3 Considere os seguintes dados: distância do Sol à Terra = $1{,}5.10^8$ km; velocidade da luz no vácuo = 3.10^8 m/s. Admita que, a partir de um determinado instante, o Sol deixe de emanar energia, isto é, o Sol se "apague". Quanto tempo após o referido instante esse fato seria registrado na Terra?

4 Considere a seguinte citação:
"Quando contemplamos o céu numa noite de tempo bom, recebemos das estrelas um relato do passado."
Utilizando argumentos científicos, comente o pensamento do autor.

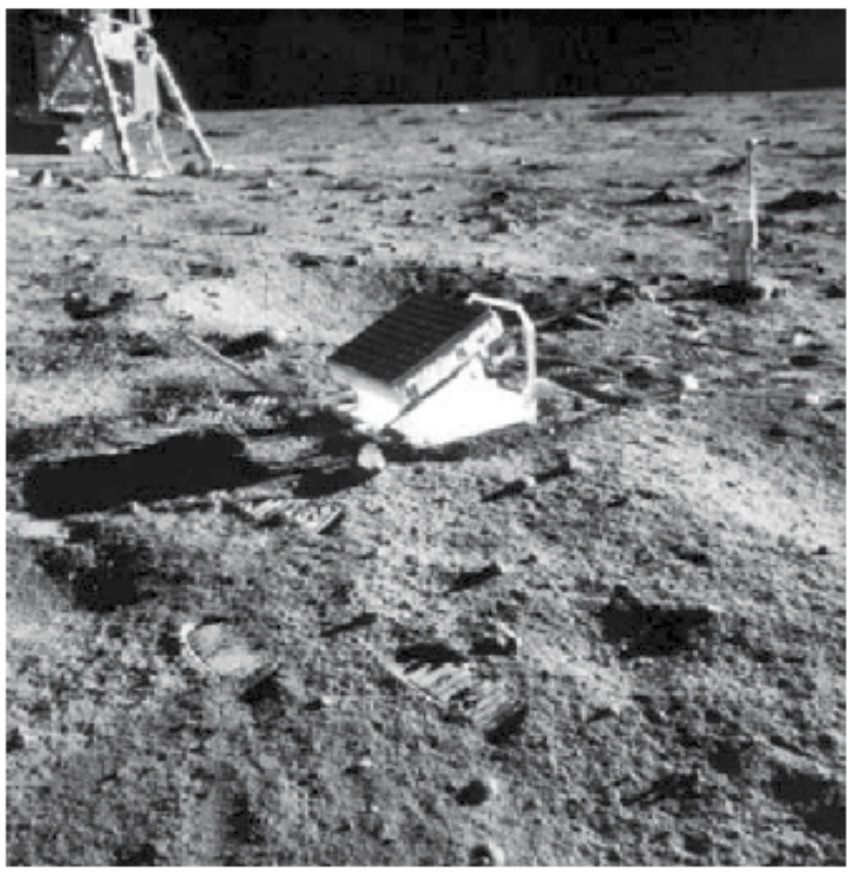
5 Com seu telescópio, um astrônomo visa a Lua para observar a decolagem de um módulo lunar. Ao mesmo tempo, seu assistente observa o fenômeno pela televisão, que faz uma transmissão via satélite. No instante da decolagem, o satélite S e o observatório O (onde estão o astrônomo e seu assistente) acham-se sobre uma mesma circunferência, que tem centro na Lua, conforme mostra o esquema a seguir.
A distância OS vale $6{,}0 \cdot 10^4$ km.



O astrônomo e seu assistente cronometram o instante em que aparecem as chamas do foguete do módulo lunar. Adotando-se, para as ondas eletromagnéticas, a velocidade $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s (no vácuo e na atmosfera terrestre), pode-se afirmar que o assistente vê o fenômeno:

(a) no mesmo instante que o astrônomo.
(b) 0,20 s antes do astrônomo.
(c) 0,20 s após o astrônomo.
(d) 2,0 s antes do astrônomo.
(e) 2,0 s após o astrônomo.

6 **UFBA 2010** As comemorações dos 40 anos da chegada do homem à Lua trouxeram à baila o grande número de céticos que não acreditam nessa conquista humana. Em um programa televisivo, um cientista informou que foram deixados na Lua espelhos refletores para que, da Terra, a medida da distância Terra-Lua pudesse ser realizada periodicamente e com boa precisão, pela medida do intervalo de tempo ΔT que um feixe de *laser* percorre o caminho de ida e volta.



Um grupo acompanhou uma medida realizada por um cientista, na qual $\Delta T = 2{,}5$ s. Considerando que a velocidade da luz, no vácuo, é igual a $3 \cdot 10^8$ m/s e desprezando os efeitos da rotação da Terra, calcule a distância Terra-Lua.

7 A velocidade de propagação das ondas luminosas:

(a) é infinitamente grande.
(b) é máxima no ar.
(c) é maior na água do que no vácuo.
(d) vale 300.000 km/s no vidro.
(e) vale $3{,}00 \cdot 10^{10}$ cm/s no vácuo.

Princípios da óptica geométrica e aplicações (sombra e luz)

8 O princípio da propagação retilínea da luz estabelece que:

(a) qualquer que seja o meio de propagação, a luz se propaga em linha reta.
(b) a sombra é a região do espaço que não recebe luz de uma fonte, em virtude da presença de um corpo opaco.
(c) a luz tem trajetória retilínea apenas nos meios homogêneos e transparentes.
(d) os raios luminosos são linhas orientadas que representam graficamente a luz em propagação.
(e) a luz não se propaga em linha reta, qualquer que seja o meio de propagação.

9 Um motorista de um carro olha pelo espelho retrovisor interno e vê o passageiro do banco traseiro. Se o passageiro olhar para o mesmo espelho, verá o motorista. Qual o princípio da óptica geométrica que explica esse fato? Faça uma figura explicativa.

10 A formação de sombra evidencia que:

(a) a luz se propaga em linha reta.
(b) a velocidade da luz não depende do referencial.
(c) a luz sofre refração.
(d) a luz é necessariamente um fenômeno de natureza corpuscular.
(e) a temperatura do obstáculo influi na luz que o atravessa.

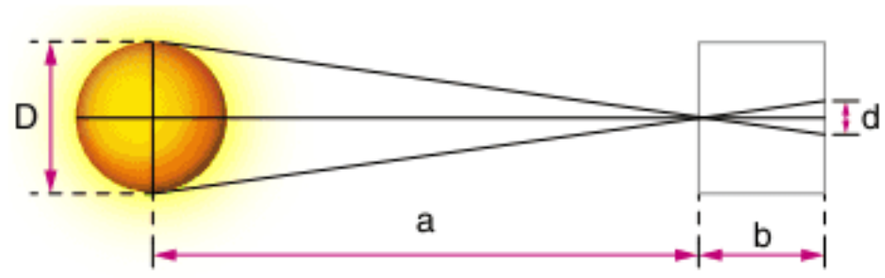
11 Em um eclipse total da Lua, a posição relativa dos três astros, Sol, Lua e Terra, é a seguinte:

(a) o Sol entre a Lua e a Terra.
(b) a Lua entre o Sol e a Terra.
(c) a Terra entre o Sol e a Lua.
(d) a Terra e a Lua à esquerda do Sol.
(e) é impossível a ocorrência de um eclipse total da Lua.

Câmara escura

12 Um objeto luminoso e linear é colocado a 20 cm do orifício de uma câmara escura, obtendo-se, em sua parede do fundo, uma figura projetada de 8,0 cm de comprimento. O objeto é, então, afastado da câmara, sendo colocado a 80 cm do orifício desta. Calcule o comprimento da nova figura, projetada na parede do fundo da câmara.

13 **Fatec** Mediante uma câmara escura de orifício, obtém-se uma imagem do Sol, conforme o esquema a seguir.



Dados: Distância Sol-Terra: $a = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m; distância do orifício ao anteparo: b = 1,0 m; diâmetro da imagem: d = 9,0 mm.
Para o diâmetro D do Sol, resulta, aproximadamente:

(a) $1{,}7 \cdot 10^{10}$ m
(b) $1{,}4 \cdot 10^{9}$ m
(c) $1{,}7 \cdot 10^{10}$ m
(d) $1{,}4 \cdot 10^{12}$ m
(e) n.d.a.

14 Uma câmara escura de orifício fornece a imagem de um prédio, que se apresenta com altura de 5,0 cm. Aumentando-se de 100 m a distância do prédio à câmara, a imagem se reduz a 4,0 cm de altura. Determine a distância do prédio à câmara em sua primeira posição.

TEXTOS COMPLEMENTARES

Como Newton explicou a separação das cores da luz do Sol

Em 1665, quando Isaac Newton tinha 23 anos, a peste se espalhou pela Europa. Para fugir do contágio na cidade grande, Newton passou um ano e meio no campo, na casa de sua mãe. Durante essas férias forçadas, dedicou-se aos estudos, que publicou vários anos depois.

Aqui vamos relatar seus estudos sobre a luz e as cores. Newton dispunha apenas de alguns prismas, lentes e da luz do Sol. Fazendo um pequeno furo em uma cortina, obteve um feixe estreito de luz que fez incidir sobre um prisma. A luz, depois de passar pelo prisma, projetava sobre a parede oposta uma mancha alongada, com as cores distribuídas do vermelho ao violeta.

"Foi muito agradável", escreveu ele, "observar as cores vivas e intensas, mas logo tratei de examiná-las com cuidado". De cara, ele chegou à ideia de que a luz branca do Sol é composta de luzes de todas as cores visíveis.

Sir Isaac Newton, 1642-1727.

O que o prisma faz é, simplesmente, separar essas componentes. A componente violeta é a mais desviada e a vermelha a menos desviada. As outras têm desvios intermediários.

Para testar essa ideia, Newton fez a luz espalhada pelo prisma incidir sobre outro prisma, colocado na posição invertida. Bingo! O segundo prisma juntou de novo as luzes componentes e a luz branca ressurgiu outro lado.

Para ter certeza de sua interpretação, Newton fez uma experiência crucial: incidiu a luz dispersada sobre um cartão com um pequeno furo. Ajustando a posição do furo, deixou passar só uma componente (a violeta, por exemplo). Fez esse feixe incidir sobre o segundo prisma e não observou nenhuma decomposição a mais. O feixe se desviava, mas continuava da mesma cor. Com essas e outras observações, Newton demonstrou que a luz branca do Sol é uma mistura de luzes com as cores visíveis. Cada cor sofre um desvio diferente pelo prisma. Tecnicamente, dizemos que a luz violeta é mais refringente que a vermelha, pois se desvia mais. Ou, em outros termos, o índice de refração da componente violeta é maior que o índice de refração da componente vermelha. Durante toda a sua vida, Newton acreditou que a luz era feita de partículas emitidas pelos corpos luminosos.

Dispersão da luz.

Cores diferentes corresponderiam a partículas diferentes. No ar, todas as partículas teriam a mesma velocidade, mas, entrando no prisma de vidro, a velocidade seria diferente para cada cor. Isso causaria o desvio diferente das componentes da luz. Outros cientistas, como Christiaan Huygens, diziam que a luz era formada de ondas, cada cor tendo um comprimento de onda diferente. Hoje sabemos que a luz apresenta um comportamento dual, com características de ondas e partículas, que podem ser observadas em diferentes fenômenos.

Óptica e a atmosfera terrestre

– Por que o céu é azul?
– Por que o pôr do sol é vermelho?
– Por que as nuvens são brancas?

A resposta está em como os raios solares interagem com a atmosfera. Quando a luz passa através de um prisma, o espectro é quebrado em um arco-íris. Nossa atmosfera faz o mesmo papel, atuando como uma espécie de prisma em que os raios solares colidem com as moléculas e são responsáveis pela dispersão do azul.

Quando olhamos a cor de algo, é porque esse "algo" refletiu ou dispersou a luz de uma determinada cor associada a um comprimento de onda. Uma folha verde utiliza todas as cores para fazer a fotossíntese, menos a verde, porque esta foi refletida. Devido ao seu pequeno tamanho e estrutura, as minúsculas moléculas da atmosfera difundem melhor as ondas com pequenos comprimentos de onda, tais como o azul e o violeta. As moléculas estão espalhadas por toda a atmosfera, de modo que a luz azul dispersada chega aos nossos olhos com facilidade.

A luz vermelha, que não é dispersa e sim transmitida, continua em sua direção original, então, quando olhamos para o céu, é a luz azul que vemos, porque é a que foi mais dispersa pelas moléculas em todas as direções.

Luz violeta tem comprimento de onda menor que luz azul, portanto, dispersa-se mais na atmosfera que o azul. Por que então não vemos o céu violeta? Porque não há luz violeta suficiente. O Sol produz muito mais luz azul que violeta.

Quando o céu está com cerração, névoa ou poluição, há partículas de tamanho grande que dispersam igualmente todos os comprimentos de ondas, logo, o céu tende ao branco pela mistura de cores. Isso é mais comum na linha do horizonte.

No vácuo do espaço extraterrestre, onde não há atmosfera, os raios solares não são dispersos, logo, eles percorrem uma linha reta do Sol até o observador. Em virtude disso, os astronautas veem um céu negro. Em Júpiter, o céu também é azul porque ocorre o mesmo tipo de dispersão do azul na atmosfera do planeta, como na Terra. Em Marte, porém, o céu é cor-de-rosa, já que há excessivas partículas de poeira na atmosfera marciana por causa da presença de óxidos de ferro originários do solo. Se a atmosfera de Marte fosse limpa da poeira, ela seria azul, porém um azul mais escuro, já que a atmosfera de Marte é muito mais rarefeita.

Por que o pôr do sol e a alvorada são vermelhos?

TRUZGUILADH/WIKIMEDIA COMMONS.

Pôr do sol.

Quando o Sol está no horizonte, a luz percorre, através da atmosfera, um caminho muito maior para chegar aos nossos olhos do que quando está sobre nossas cabeças. A luz azul nesse caminho foi toda dispersada: a atmosfera atua como um filtro, e pouca luz azul chega até nós; enquanto a luz vermelha, que não é dispersada e sim transmitida, alcança nossos olhos com facilidade. Nessa hora, a luz branca está sem o azul. Durante a dispersão da luz nas moléculas, ocorre o fenômeno de interferência destrutiva, em que a onda principal se subdivide em várias outras de menor intensidade e em todas as direções, porém mantendo a energia total conservada. O efeito disso é que a luz azul do Sol, que vinha em linha reta, passa a ir em todas as direções. Ao meio-dia, todas as direções estão próximas de nós, mas, ao entardecer, a dispersão leva para longe do nosso campo de visão o azul, já que a luz solar percorre uma longa tragetória na atmosfera da Terra até chegar aos nossos olhos.

Além disso, o vermelho e o laranja tornam-se muito mais vívidos no crepúsculo quando há poeira ou fumaça no ar, provocadas por incêndios, tempestades de poeira e vulcões. Isso ocorre porque essas partículas maiores também provocam dispersão com a luz de comprimento de onda próxima, no caso, o vermelho e o laranja.

Por que as nuvens são brancas?

Nas nuvens, existem partículas (gotas de água) de tamanhos muito maiores que o comprimento de onda da luz, ocorrendo dispersão generalizada em todo o espectro visível, e iguais quantidades de azul, verde e vermelho se juntam formando o branco. Pelo mesmo fenômeno, temos a espuma de sabão, o *chantilly* etc.

RESUMINDO

Velocidade da luz em meios materiais é sempre menor que a velocidade da luz no vácuo: $v < c$
A velocidade da luz no vácuo: $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s

Fonte de luz $\begin{cases} \text{Primária – luminosa} \\ \text{Secundária – iluminada} \end{cases}$ **Raio de luz** $\begin{cases} \text{Divergente} \\ \text{Convergente} \\ \text{Paralelo ou cilíndrico} \end{cases}$ **Meio de propagação da luz** $\begin{cases} \text{Transparente} \\ \text{Translúcido} \\ \text{Opaco} \end{cases}$

Princípios da óptica geométrica:

- **Princípio da propagação retilínea da luz**
  Nos meios transparentes e homogêneos, a luz se propaga em linha reta.
- **Princípio da independência dos raios de luz**
  As trajetórias dos raios de luz são independentes entre si.
- **Princípio da reversibilidade dos raios de luz**
  A trajetória de um raio de luz independe de seu sentido.

QUER SABER MAIS?

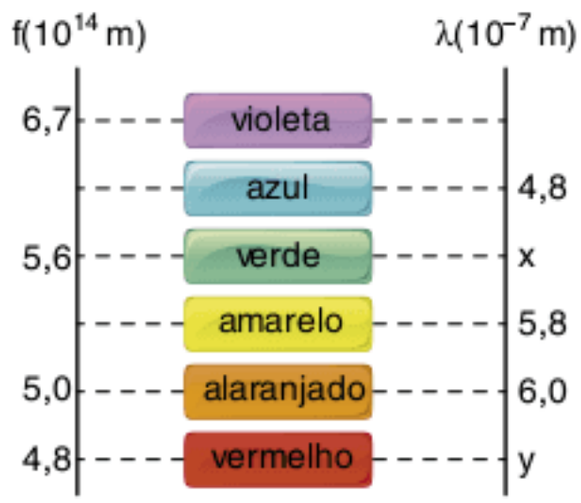
SITES

- Energia e espectro eletromagnético
  <www.uff.br/fisicoquimica/docentes/katialeal/didatico/Capitulo_2.pdf>.
- Luz e cores (radiação)
  <www.if.usp.br/gref/optica/optica2.pdf>.
- Velocidade da luz – finita ou infinita?
  <http://fisica.cdcc.usp.br/Professores/Einstein-SHMCarvalho/node9.html>.
- A câmara escura e o princípio da fotografia
  <wwwbr.kodak.com/BR/pt/consumer/fotografia_digital_classica/para_uma_boa_foto/historia_fotografia/historia_da_fotografia02.shtml?>.
- Câmera *pinhole*
  <www.eba.ufmg.br/cfalieri/pinhole.html>.
- Imprima e monte sua câmera *pinhole* (em inglês)
  <http://corbis.readymech.com/templates/localizations/en/WPCDC.pdf>.
- Eclipse triplo em Júpiter (em inglês)
  <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/solar/jupec.html>.

Exercícios complementares

Espectro eletromagnético

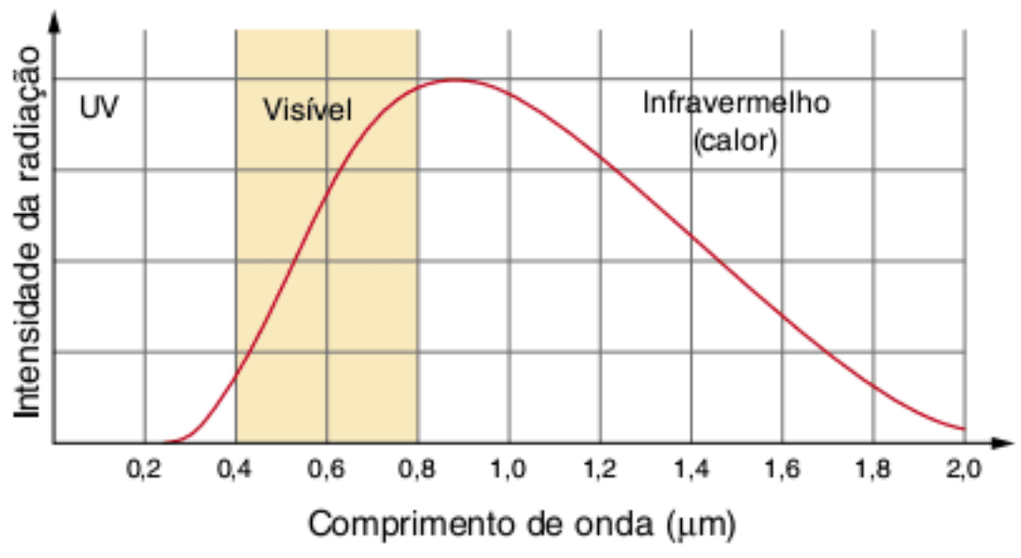
1 **PUC-SP 2007** O esquema a seguir apresenta valores de frequência (f) e comprimento de onda (λ) de ondas componentes do trecho visível do espectro eletromagnético.



O quociente $\frac{y}{x}$ é igual a

(a) $\frac{5}{4}$
(b) $\frac{6}{7}$
(c) $\frac{4}{3}$
(d) $\frac{7}{6}$
(e) $\frac{3}{2}$

2 **Enem 2008** A passagem de uma quantidade adequada de corrente elétrica pelo filamento de uma lâmpada deixa-o incandescente, produzindo luz. O gráfico a seguir mostra como a intensidade da luz emitida pela lâmpada está distribuída no espectro eletromagnético, estendendo-se desde a região do ultravioleta (UV) até a região do infravermelho.



A eficiência luminosa de uma lâmpada pode ser definida como a razão entre a quantidade de energia emitida na forma de luz visível e a quantidade total de energia gasta para o seu funcionamento. Admitindo-se que essas duas quantidades possam ser estimadas, respectivamente, pela área abaixo da parte da curva correspondente à faixa de luz visível e pela área abaixo de toda a curva, a eficiência luminosa dessa lâmpada seria de, aproximadamente:

(a) 10%
(b) 15%
(c) 25%
(d) 50%
(e) 75%

Fontes de luz e meios de propagação

3 Fixa-se no solo lunar um espelho de grandes dimensões, voltando-se sua superfície refletora para um determinado observatório na Terra. Um sinal luminoso de grande potência é emitido do observatório em direção ao espelho, onde sofre reflexão, sendo recebido de volta no ponto de partida 2,54 s depois de sua emissão. Desprezando os movimentos da Terra e da Lua durante o fenômeno e adotando, para a velocidade da luz, o valor de $3{,}00 \cdot 10^8$ m/s, calcule a distância entre a Terra e a Lua.

4 **Fuvest** Uma estrela emite radiação que percorre a distância de 1 bilhão de anos-luz, até chegar à Terra e ser captada por um telescópio. Isso quer dizer que:

(a) a estrela está a 1 bilhão de quilômetros da Terra.
(b) daqui a 1 bilhão de anos, a radiação da estrela não será mais observada na Terra.
(c) a radiação recebida hoje na Terra foi emitida pela estrela há 1 bilhão de anos.
(d) hoje, a estrela está a 1 bilhão de anos-luz da Terra.
(e) quando a radiação foi emitida pela estrela, ela tinha a idade de 1 bilhão de anos.

5 **Uerj 2008** Admita que, em um determinado lago, a cada 40 cm de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação

$$I = I_o \cdot 0{,}8^{\frac{h}{40}}$$

na qual I é a intensidade da luz em uma profundidade h, em centímetros, e I_o é a intensidade na superfície.
Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto P, é de 32% daquela observada na superfície.

A profundidade do ponto P, em metros, considerado log 2 = 0,3, equivale a:

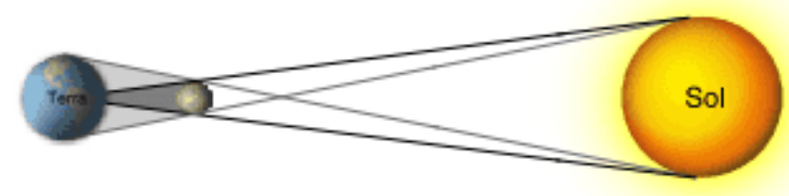
(a) 0,64
(b) 1,8
(c) 2,0
(d) 3,2

Princípios da óptica geométrica e aplicações (sombra e luz)

6 Uma fonte puntiforme ilumina um disco metálico de raio 10 cm. A fonte e o centro do disco pertencem a uma reta perpendicular a um anteparo. Sabendo-se que a distância da fonte ao disco é de 20 cm e que a do disco ao anteparo é de 50 cm, determine o raio da sombra do disco projetada no anteparo.

7 Uma pessoa de 1,8 m de altura está em pé ao lado de um edifício de altura desconhecida. Em um dado instante, a sombra dessa pessoa, projetada pela luz solar, tem uma extensão de 3,0 m, enquanto a sombra do edifício tem 80 m de extensão. Qual a altura, em metros, do edifício?

8 **UEL** Durante um eclipse solar, um observador:

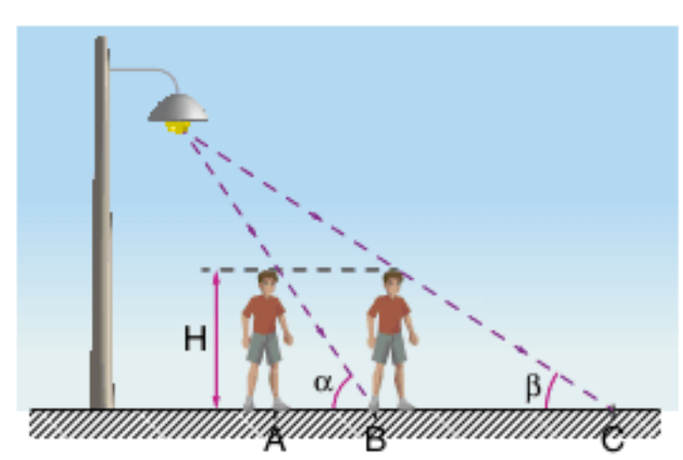


(a) no cone de sombra, vê um eclipse parcial.
(b) na região de penumbra, vê um eclipse total.
(c) na região plenamente iluminada, vê a Lua eclipsada.
(d) na região da sombra própria da Terra, vê somente a Lua.
(e) na região plenamente iluminada, não vê o eclipse solar.

9 **Enem** No Brasil, verifica-se que a Lua, quando está na fase cheia, nasce por volta das 18 horas e se põe por volta das 6 horas. Na fase nova, ocorre o inverso: a Lua nasce às 6 horas e se põe às 18 horas, aproximadamente. Nas fases crescente e minguante, ela nasce e se põe em horários intermediários.
Sendo assim, a Lua na fase ilustrada na figura a seguir poderá ser observada no ponto mais alto de sua trajetória no céu por volta de:

(a) meia-noite.
(b) três horas da madrugada.
(c) nove horas da manhã.
(d) meio-dia.
(e) seis horas da tarde.

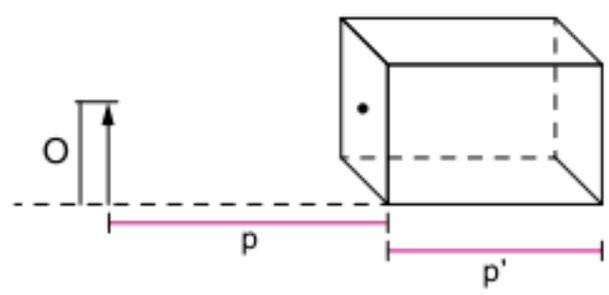
10 A figura a seguir representa um homem de altura H que vai do ponto A ao ponto B em movimento retilíneo. Durante o mesmo intervalo de tempo, a sombra de sua cabeça, projetada no solo horizontal, vai do ponto B ao ponto C:



Conhecendo os ângulos α e β ($\alpha = 60°$ e $\beta = 30°$), determine a relação entre as velocidades médias da sombra (V_s) e do homem (V_H).

Câmara escura

11 **Cesgranrio** O esquema a seguir representa um objeto situado em frente a uma câmara escura com orifício. No esquema, O é a altura do objeto, p é a distância do objeto ao orifício da câmara, e p' a distância do orifício à imagem, ou o comprimento da caixa. Esse dispositivo ilustra como funciona uma máquina fotográfica, onde a luz atravessa o diafragma e atinge o filme, sensibilizando-o.



Chamando de altura da imagem formada de i, o gráfico que melhor representa a relação entre i e p é:

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Questões gerais

12 **UFMG 2008** Suponha que, no futuro, uma base avançada seja construída em Marte.
Suponha, também, que uma nave espacial está viajando em direção à Terra, com velocidade constante igual à metade da velocidade da luz.
Quando essa nave passa por Marte, dois sinais de rádio são emitidos em direção à Terra – um pela base e outro pela nave. Ambos são refletidos pela Terra e, posteriormente, detectados na base em Marte.
Sejam t_B e t_N os intervalos de tempo total de viagem dos sinais emitidos, respectivamente, pela base e pela nave, desde a emissão até a detecção de cada um deles pela base em Marte.
Considerando-se essas informações, é correto afirmar que:

(a) $t_N = \frac{1}{2} t_B$

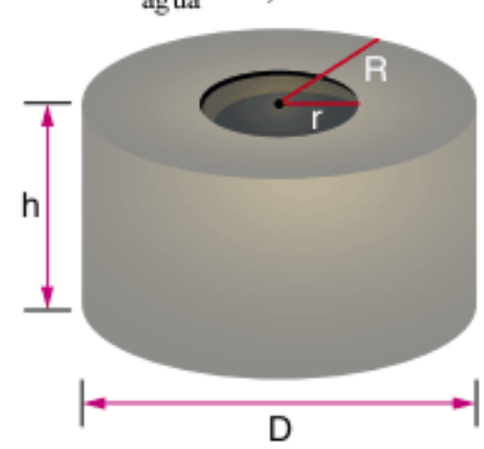
(b) $t_N = \frac{2}{3} t_B$

(c) $t_N = \frac{5}{6} t_B$

(d) $t_N = t_B$

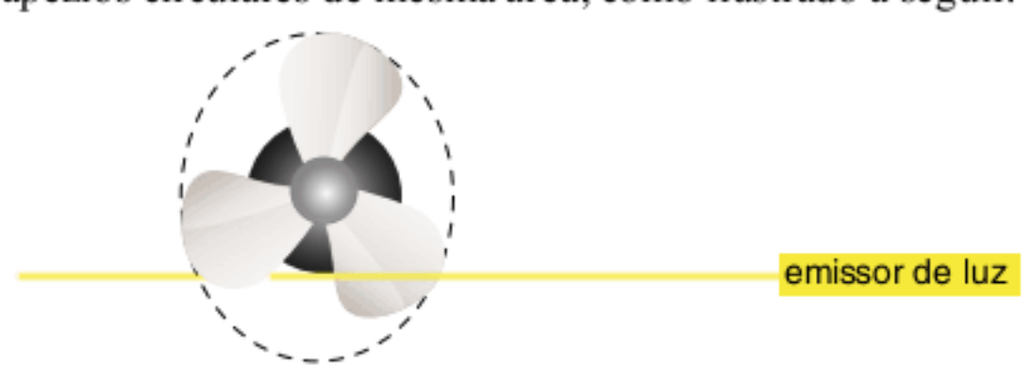
13 **Unesp** Mapas topográficos da Terra são de grande importância para as mais diferentes atividades, tais como navegação, desenvolvimento de pesquisas ou uso adequado do solo. Recentemente, a preocupação com o aquecimento global fez dos mapas topográficos das geleiras o foco de atenção de ambientalistas e pesquisadores. O levantamento topográfico pode ser feito com grande precisão utilizando os dados coletados por altímetros em satélites. O princípio é simples e consiste em registrar o tempo decorrido entre o instante em que ele retorna ao satélite, depois de refletido pela superfície na Terra. Considere que o tempo decorrido entre a emissão e a recepção do pulso do *laser*, quando emitido sobre uma região ao nível do mar, seja de $18 \cdot 10^{-4}$ s. Se a velocidade do *laser* for igual a $3 \cdot 10^8$ m/s, calcule a altura, em relação ao nível do mar, de uma montanha de gelo sobre a qual um pulso de *laser* incide e retorna ao satélite após $17{,}8 \cdot 10^{-4}$ segundos.

14 **Uerj 2008** Uma caixa-d'água cilíndrica, com altura h = 36 cm e diâmetro D = 86 cm, está completamente cheia de água. Uma tampa circular, opaca e plana, com abertura central de diâmetro d, é colocada sobre a caixa.
No esquema a seguir, R representa o raio da tampa e r o raio de sua abertura. Considere $n_{água} = 1{,}345$.



Determine o menor valor assumido por d para que qualquer raio de luz incidente na abertura ilumine diretamente o fundo da caixa, sem refletir nas paredes verticais internas.

15 **Uerj 2008** Um feixe de raios paralelos de luz é interrompido pelo movimento das três pás de um ventilador. Essa interrupção gera uma série de pulsos luminosos.
Admita que as pás e as aberturas entre elas tenham a forma de trapézios circulares de mesma área, como ilustrado a seguir.



Se as pás executam 3 voltas completas por segundo, o intervalo de tempo entre o início e o fim de cada pulso de luz é igual, em segundos, ao inverso de:

(a) 3
(b) 6
(c) 12
(d) 18

Reflexão da luz

8

FRENTE 3

BISWARUP GANGULY/WIKIMEDIA COMMONS.

Em uma associação de espelhos planos, a luz sofre reflexões sucessivas, resultando na formação de múltiplas imagens, dependendo do ângulo entre as superfícies refletoras. Um instrumento óptico, como o caleidoscópio, utiliza o princípio de reflexões múltiplas para a criação de belas imagens, com formas e cores variadas.

Introdução

Você já deve ter observado que ao mesmo tempo em que alguém consegue visualizar você através de uma janela de vidro, você também pode ver sua própria imagem refletida na superfície do vidro. O fato é que dois importantes fenômenos ópticos estão acontecendo de forma simultânea. A reflexão e a refração da luz. Ao mesmo tempo que a luz emitida por você refrata, através do vidro atingindo, o observador, parte da luz é refletida e retorna para você.

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Fig. 1 Reflexão parcial e refração da luz.

Considere uma superfície de separação S entre dois meios diferentes (ar e vidro, por exemplo). Quando a luz incide nessa superfície de separação, parte dos raios luminosos retorna ao meio original, caracterizando a **reflexão parcial**, e outra parte passa a se propagar no outro meio, caracterizando a **refração**.

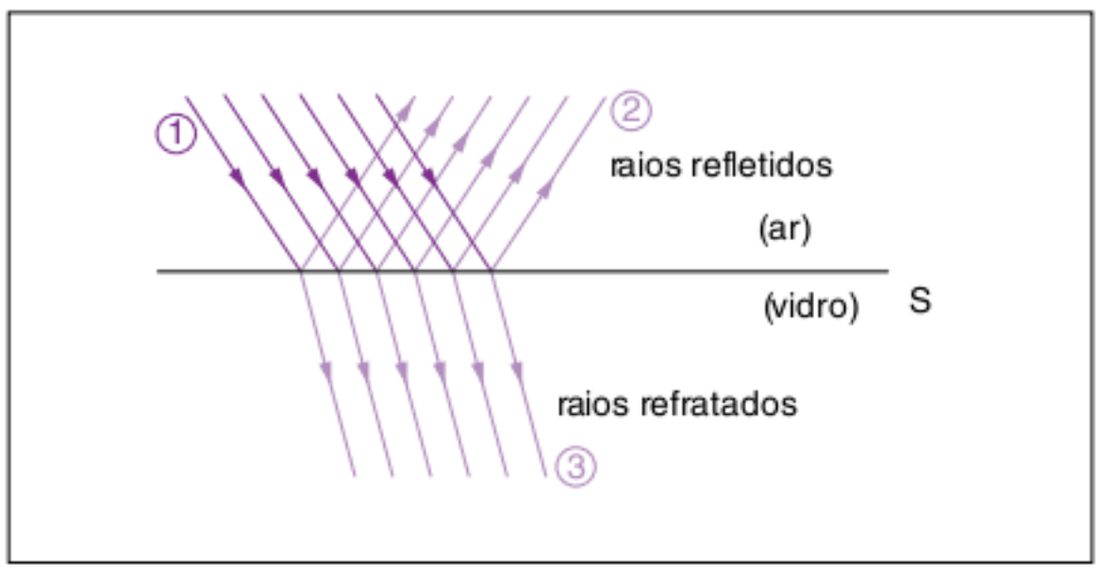


Fig. 2 Raios refletidos e refratados.

Assim, podemos definir **reflexão** e **refração** da seguinte maneira:

- **Reflexão:** fenômeno no qual a luz, após incidir na superfície de separação entre dois meios, volta a se propagar no meio de onde foi emitida. (Raio ②)
- **Refração:** é o fenômeno no qual a luz, após incidir na superfície de separação de dois meios, passa a se propagar no meio no qual ela não foi emitida. (Raio ③)

Reflexão

Reflexão regular e difusa

A reflexão pode ocorrer de duas maneiras, regular e difusa, dependendo do acabamento ou irregularidade da superfície de separação entre dois meios.

Consideremos um feixe de luz paralelo incidente sobre uma superfície S. Nesse caso, dizemos que ocorrerá reflexão **especular**, ou **regular**, se os raios refletidos forem também paralelos entre si. Caso contrário, a reflexão é considerada **difusa**.

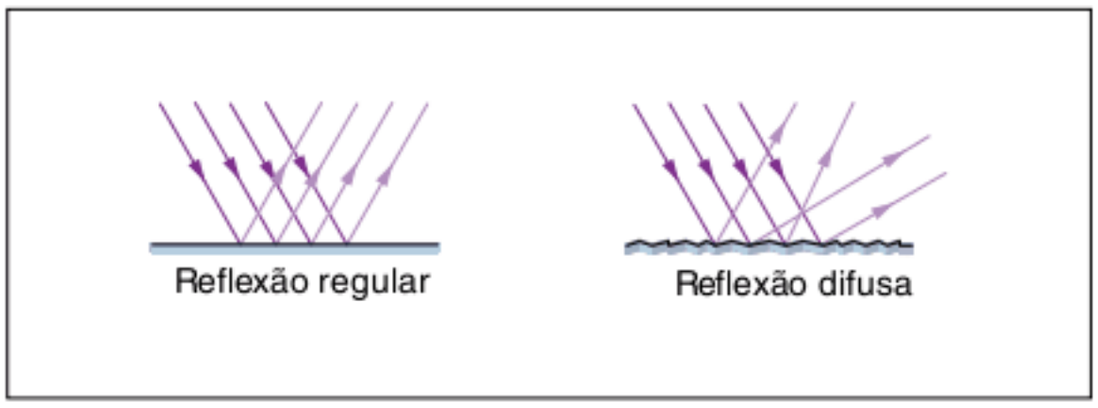


Fig. 3 Tipos de reflexão.

Regular *versus* difusa

- A reflexão regular será a reflexão predominante quando a superfície refletora for plana e bem polida.
- A reflexão difusa, ou difusão, ocorrerá em superfícies irregulares e porosas. Ela é fundamental para que possamos ver as coisas que nos cercam. É, por exemplo, a reflexão difusa que permite que você e quem está ao seu lado veja esta folha de papel.
- Na reflexão difusa, vale a mesma lei da reflexão e refração especular, estando a diferença somente na maior ou menor irregularidade da superfície.
- Como não há superfície completamente lisa, superfície refletora ideal, ocorrerá a difusão de uma parte da luz incidente sempre que ocorrer reflexão. Essa parte difundida será tanto menor quanto mais polida for a superfície.

DIRK BEYER/WIKIMEDIA COMMONS

Fig. 4 Reflexão da luz na superfície do lago Riffelsee, Suíça.

Reflexão seletiva

A luz branca, como se sabe, é policromática, ou seja, é composta de inúmeras cores.

Ao usarmos a luz branca em uma superfície verde (uma lousa, por exemplo), todas as cores componentes da luz branca são absorvidas pela superfície e transformadas em energia térmica, exceto a luz verde que está sendo refletida em nossos olhos.

Se iluminássemos essa mesma superfície com luz monocromática azul, ela iria se apresentar negra, pois absorveria a luz azul e não teria luz para refletir.

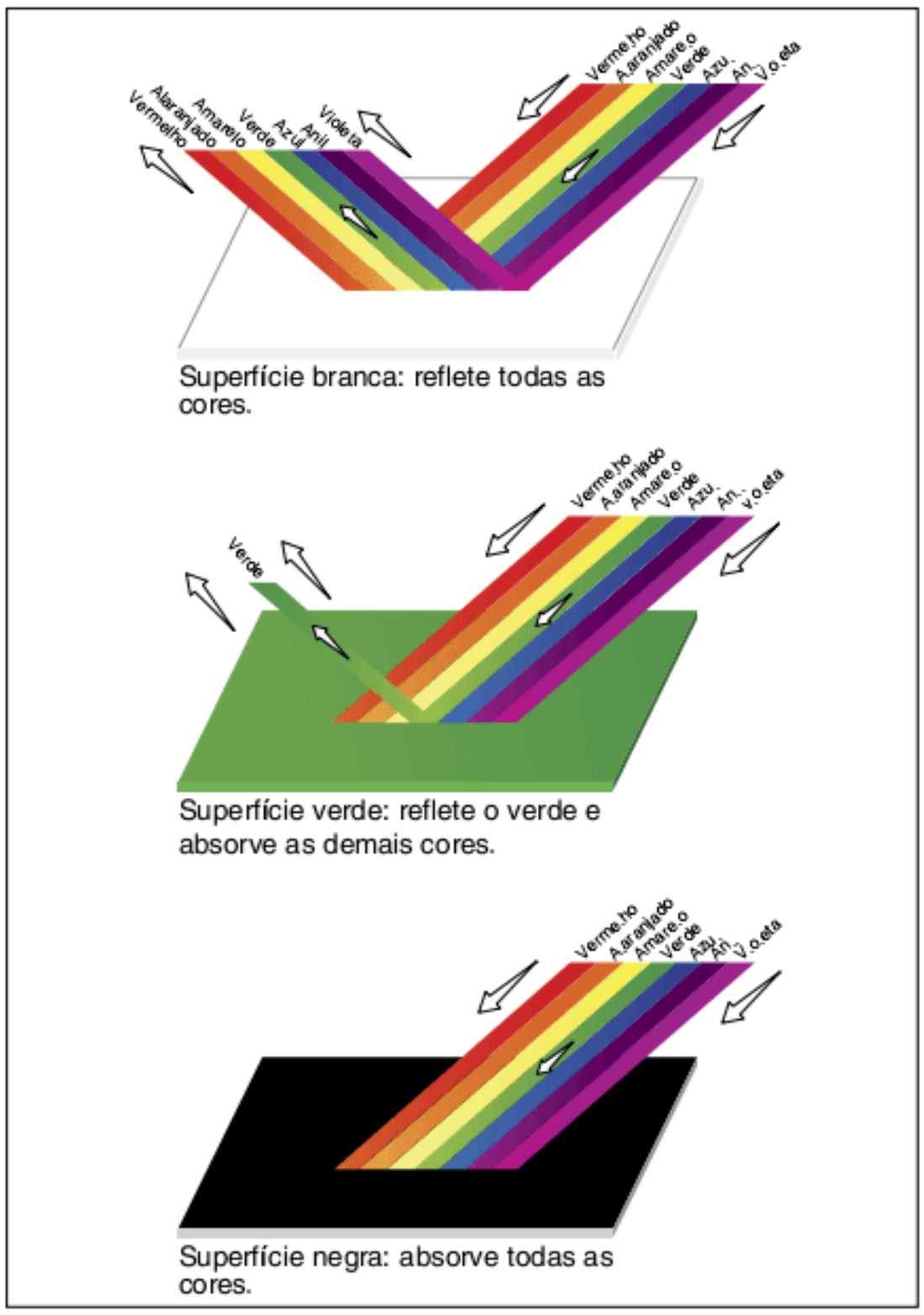


Fig. 5 Reflexão seletiva da luz.

ATENÇÃO!

- Corpo branco ideal é aquele que reflete todas as cores, não absorvendo nenhuma.
- Corpo negro ideal é aquele que absorve todas as cores, não refletindo nenhuma.

Leis da reflexão

Vamos considerar um raio de luz incidente em uma superfície e o correspondente raio de luz refletido. Traçando a reta normal à superfície pelo ponto de incidência da luz, temos:

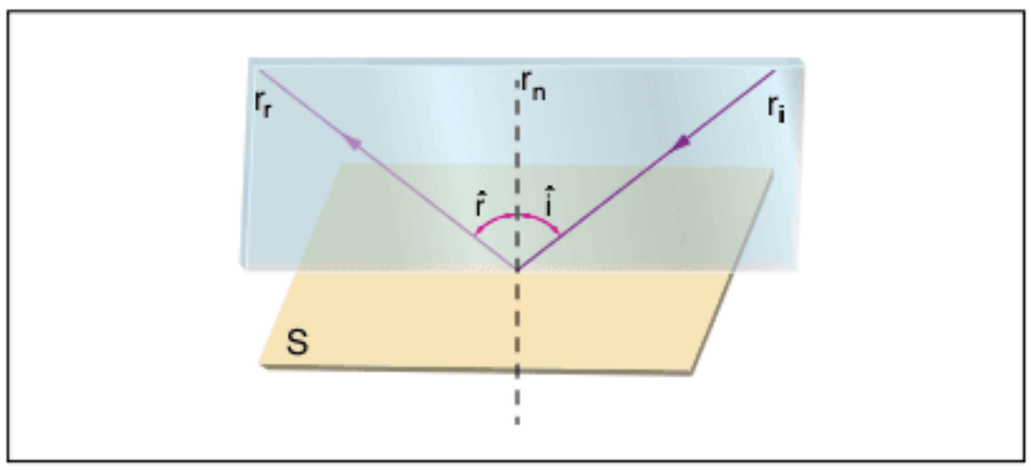


Fig. 6 Reflexão da luz.

S: superfície refletora
r_i: raio de luz incidente
r_r: raio de luz refletido
r_n: reta normal

Primeira lei da reflexão

O raio de luz incidente, o raio de luz refletido e a reta normal à superfície pelo ponto de incidência da luz são coplanares.

Percebemos na figura que r_i, r_r e r_n pertencem a um mesmo plano.

Segunda lei da reflexão

O ângulo de incidência e o ângulo de reflexão possuem a mesma medida.

ATENÇÃO!

O ângulo de incidência e o ângulo de reflexão são formados pelos raios de luz incidente e refletido, respectivamente, e a reta normal:

$\hat{i}$: medida do ângulo de incidência

$\hat{r}$: medida do ângulo de reflexão

$\hat{i} = \hat{r}$

Espelho plano

Uma superfície plana e polida na qual ocorre predominantemente reflexão regular da luz é chamada espelho plano.

Construção de imagens

Vamos considerar um ponto luminoso P diante de um espelho plano E_p. A luz proveniente de P incide no espelho, sofrendo reflexão.

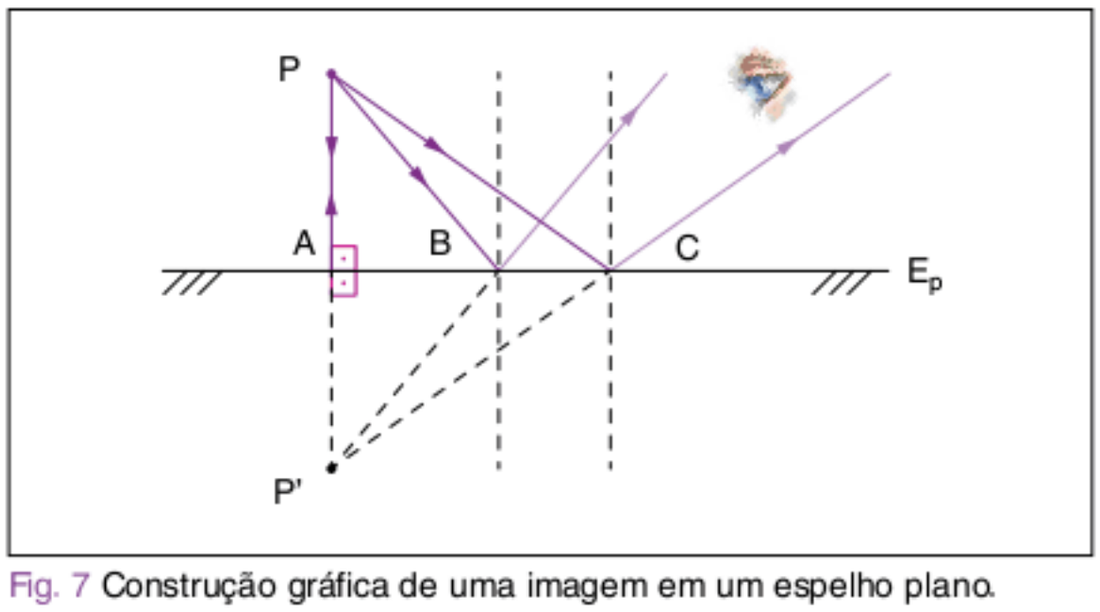


Fig. 7 Construção gráfica de uma imagem em um espelho plano.

Nessa situação, os pontos conjugados pelo sistema óptico são:

P: POR (Ponto Objeto Real)

P': PIV (Ponto Imagem Virtual)

Portanto, de um ponto objeto real (P), o espelho conjuga um ponto imagem virtual (P').

O observador recebe os raios de luz refletidos pelo espelho, cujos prolongamentos se interceptam em P'. O observador enxerga, através do espelho, a imagem P' conjugada do objeto P.

Propriedade fundamental do espelho plano: Simetria

Na figura 7, percebemos que os triângulos PAB e P'AB são congruentes, pelo caso LAA_O.

Assim, temos:

$$\overline{PA} = \overline{P'A}$$

O objeto e a imagem são **simétricos** em relação ao espelho plano, isto é, o objeto e a imagem são **equidistantes** do espelho e pertencem à mesma reta perpendicular a ele.

Imagem de um objeto virtual

O espelho plano, de um Ponto Objeto Virtual (POV), conjuga um Ponto Imagem Real (PIR).

Podemos conseguir um objeto virtual para o espelho com auxílio de um outro sistema óptico, como uma lente, conforme a figura 8.

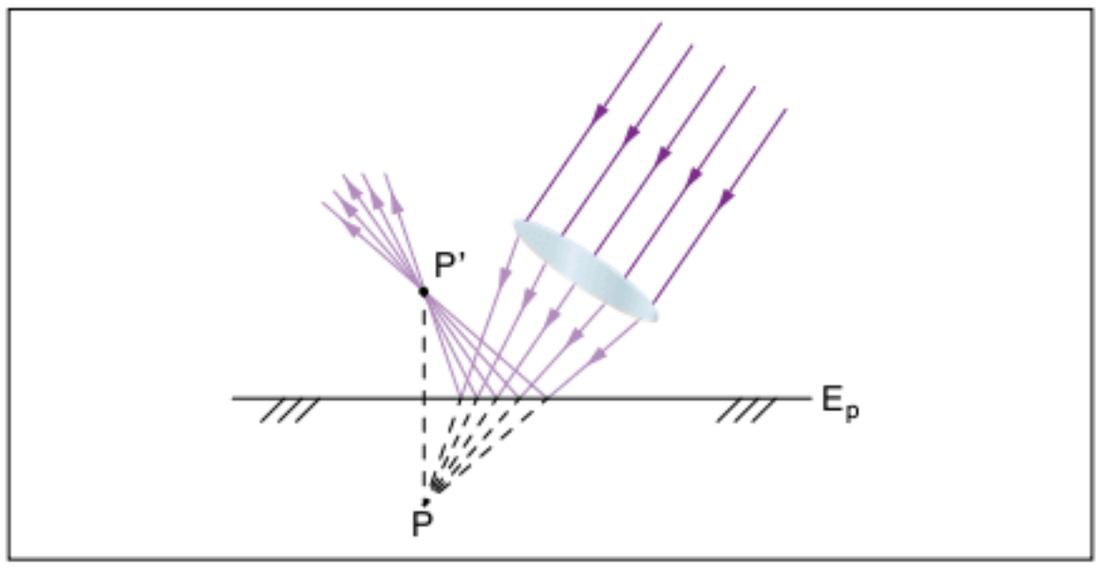


Fig. 8 Imagem real de um objeto virtual.

O ponto P é, para o espelho, um ponto objeto virtual.

Assim, usando as leis da reflexão, vamos determinar a imagem do objeto virtual, traçando os raios de luz refletidos pelo espelho.

P: POV (Ponto Objeto Virtual)

P': PIR (Ponto Imagem Real)

ATENÇÃO!

- De um ponto objeto virtual (P), o espelho conjuga um ponto imagem real (P').
- O objeto e a imagem, em um espelho plano, possuem naturezas opostas, ou seja, quando um é real o outro é virtual, e vice-versa.

Imagem de um objeto extenso

A propriedade de simetria entre o objeto e a imagem nos ajuda muito a obter a imagem de um objeto extenso, como o da figura a seguir.

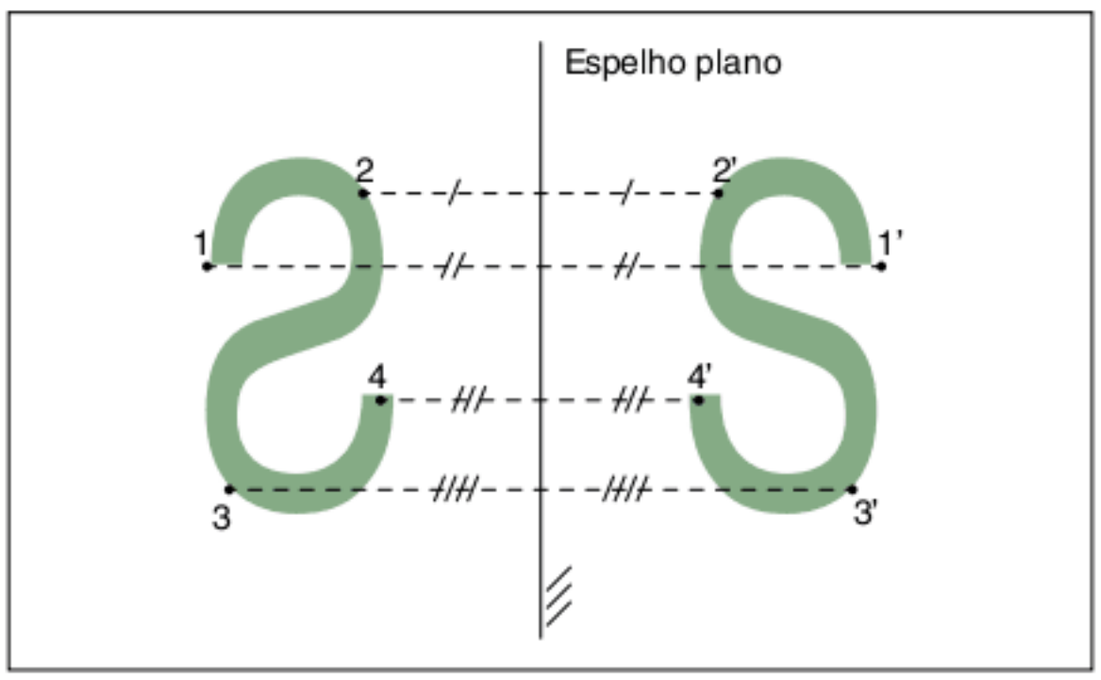


Fig. 9 Imagem de um corpo extenso.

Os pontos 1', 2', 3' e 4' são as imagens dos pontos 1, 2, 3 e 4, obtidas por simetria.

Devido à simetria, o objeto extenso e a sua imagem são iguais em forma e tamanho, porém, são **enantiomorfos** entre si, querendo-se dizer com isso que o lado direito do objeto corresponde ao esquerdo da imagem e vice-versa.

Assim, se diante de um espelho levantamos o braço direito, teremos como imagem um braço esquerdo. Se colocarmos nossa mão esquerda, espalmada, diante de um espelho, teremos como imagem uma mão direita.

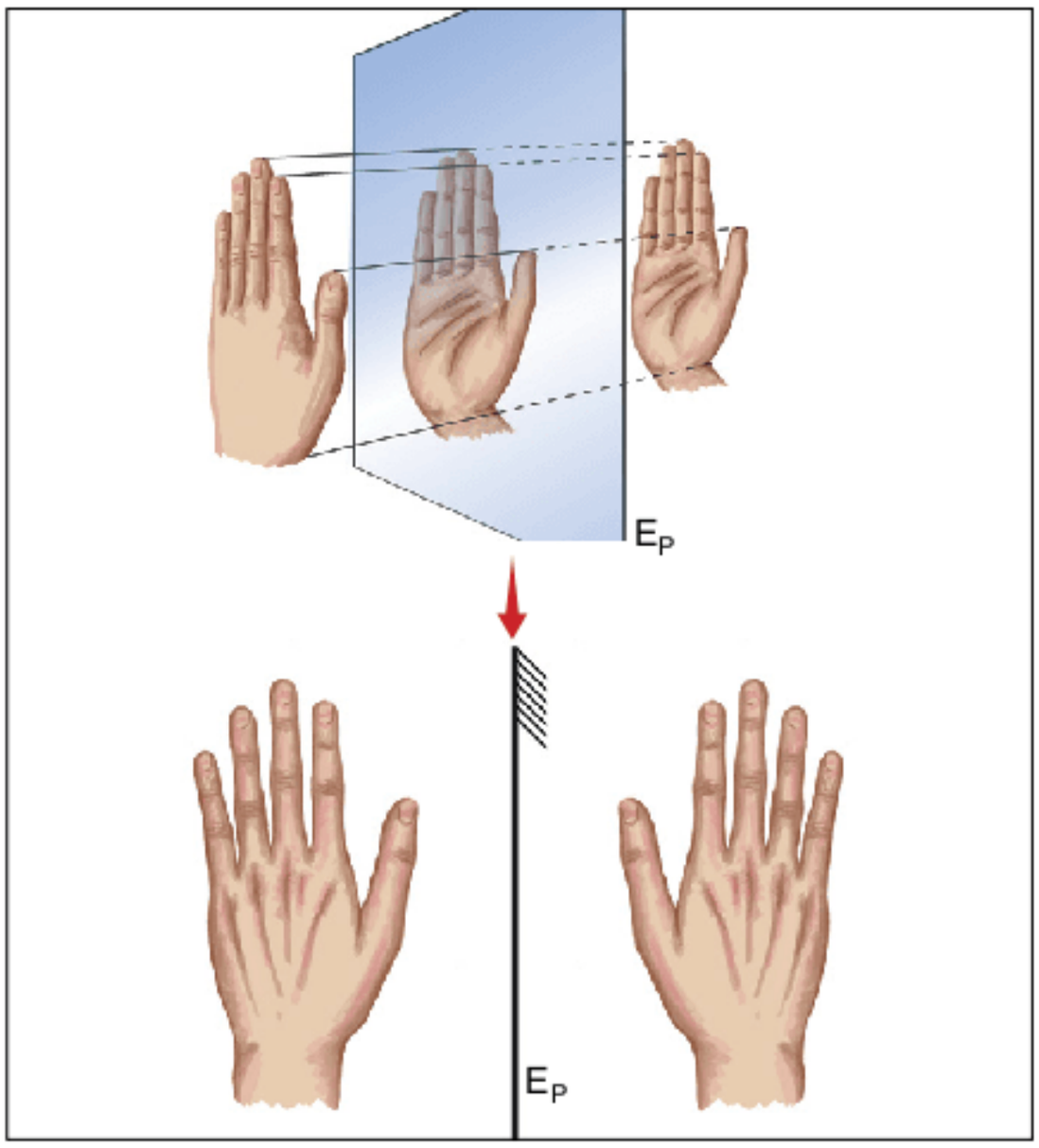
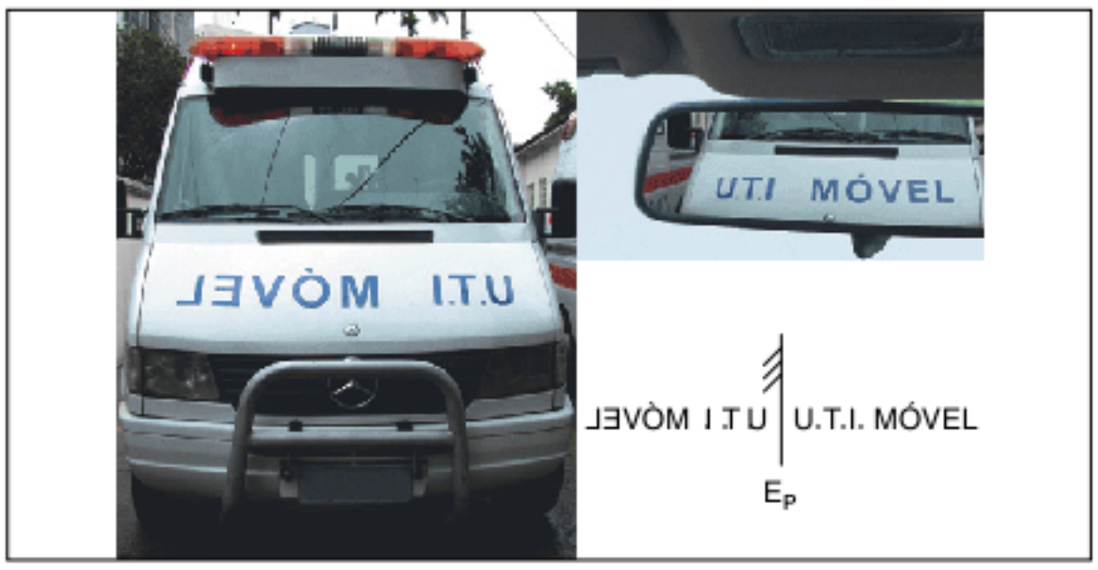


Fig. 10 Imagem enantiomorfa.

Observação: *Podemos verificar se uma figura possui ou não um eixo de simetria, sobrepondo a imagem com objeto e analisando a ocorrência de um casamento perfeito.*
Por exemplo, a mão direita não é simétrica à mão esquerda.

Observe também que as imagens de palavras aparecem escritas de maneira reversa. Por exemplo, a imagem da palavra U.T.I. MÓVEL em um veículo é vista no espelho retrovisor de um carro parado a sua frente como:



HAMILTON M. FERNANDES

Fig. 11 Imagem reversa.

Campo visual

Campo visual de um espelho em relação a um observador é, por definição, a região que pode ser visualizada por esse observador através da reflexão da luz no espelho em questão.

Geometricamente, para determinar o campo visual, basta tomar o ponto O', simétrico de O, e uni-lo às extremidades do espelho plano E_p. Essa construção é justificada pela propriedade de simetria e pela necessidade de os pontos do campo visual emitirem luz que incida em E_p e, após a reflexão, incida em O.

Qualquer ponto do campo visual (observe a área sombreada da figura 12) terá sua imagem vista pelo observador O, através do espelho E_p.

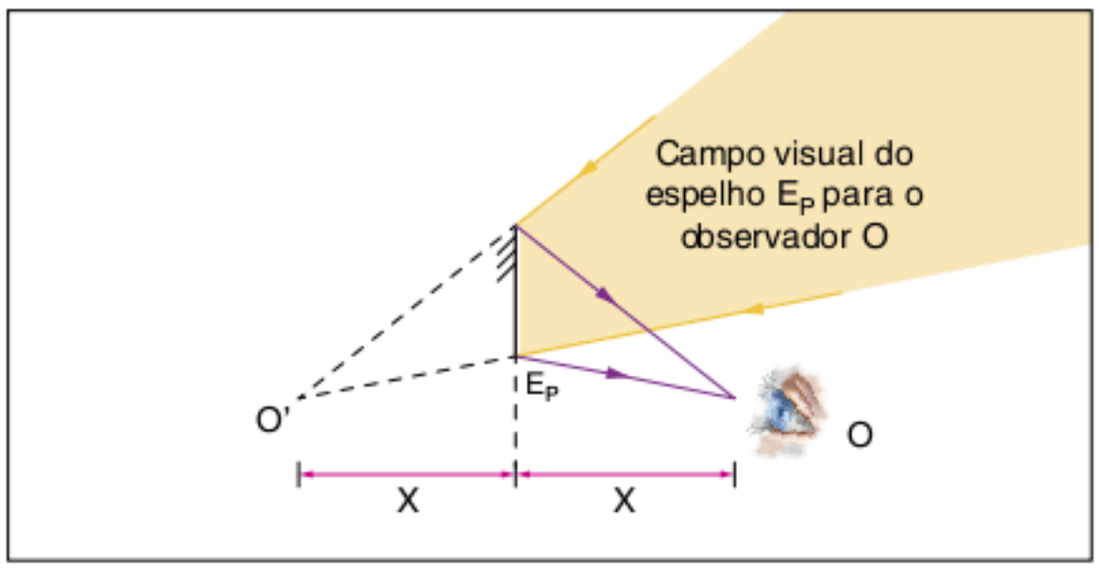


Fig. 12 Campo visual.

ATENÇÃO!

Note que o campo visual depende tanto da posição relativa do observador em relação ao espelho quanto das dimensões do espelho.

Movimentos de um espelho plano

Translação de espelho plano

Considere uma posição inicial entre um objeto e um espelho plano. Por causa da propriedade de simetria, a distância entre a imagem formada e a distância do objeto é igual, tudo em relação ao espelho. Isto é, $\overline{PE_P} = \overline{P'E_P}$.

Efetuaremos uma translação do espelho de uma distância x de sua posição inicial, mantendo o objeto fixo.

Com essa translação, a imagem sofrerá um deslocamento em relação ao espelho. A esse deslocamento sofrido pela imagem, denominamos y.

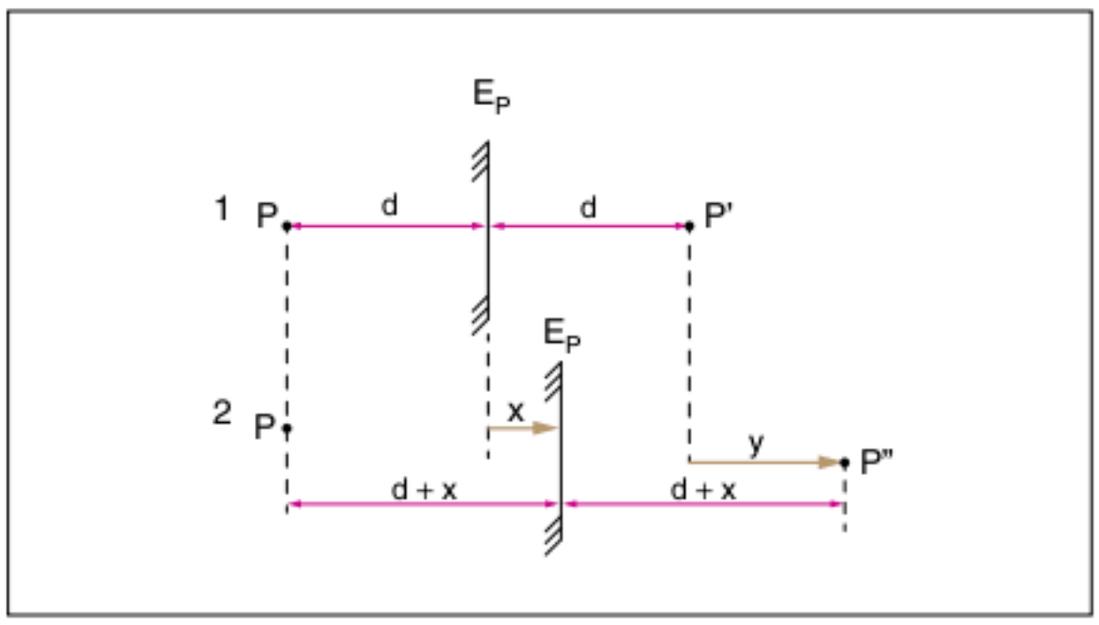


Fig. 13 Translação de um espelho plano.

Da análise da figura, temos:

$$(PP'')_1 = d + d + y = 2d + y$$

$$(PP'')_2 = d + x + (d + x) = 2d + 2x$$

como: $(PP'')_1 = (PP'')_2$

temos: $2d + y = 2d + 2x \Rightarrow$

$$y = 2x$$

Quando o espelho se translada com velocidade $\vec{v}$, em uma direção perpendicular ao seu plano, a imagem se movimenta com velocidade $2\vec{v}$. Nesse caso, o importante é definir um referencial estático e daí concluir os módulos e os sentidos das velocidades. Observe:

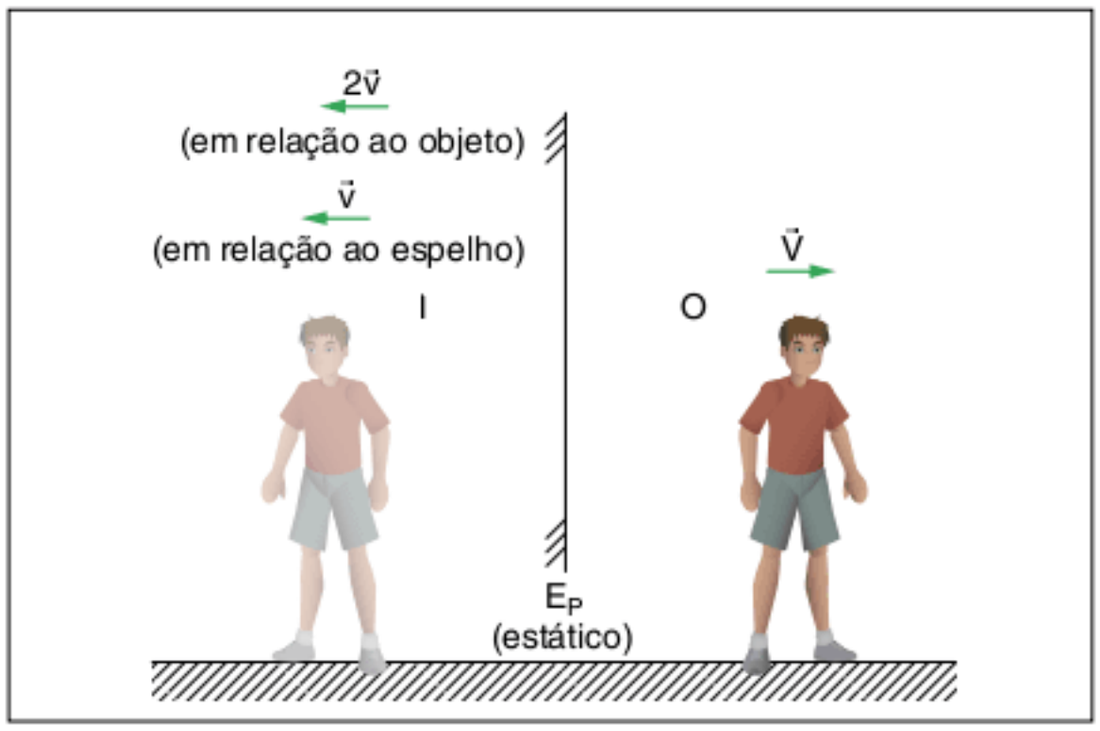


Fig. 14 Velocidades relativas na translação de um espelho plano.

Rotação de um espelho plano

Considere a figura15, em que um raio luminoso r_i incide em um ponto I_1 de um espelho plano situado na posição E_P. Dessa forma, temos o raio refletido r_r. Se girarmos o espelho, em torno do ponto O, rotação esta correspondendo a um ângulo α, o espelho passa a ocupar a posição E'_P, o raio r_i agora incide no ponto I_2 e temos o raio refletido r'_r.

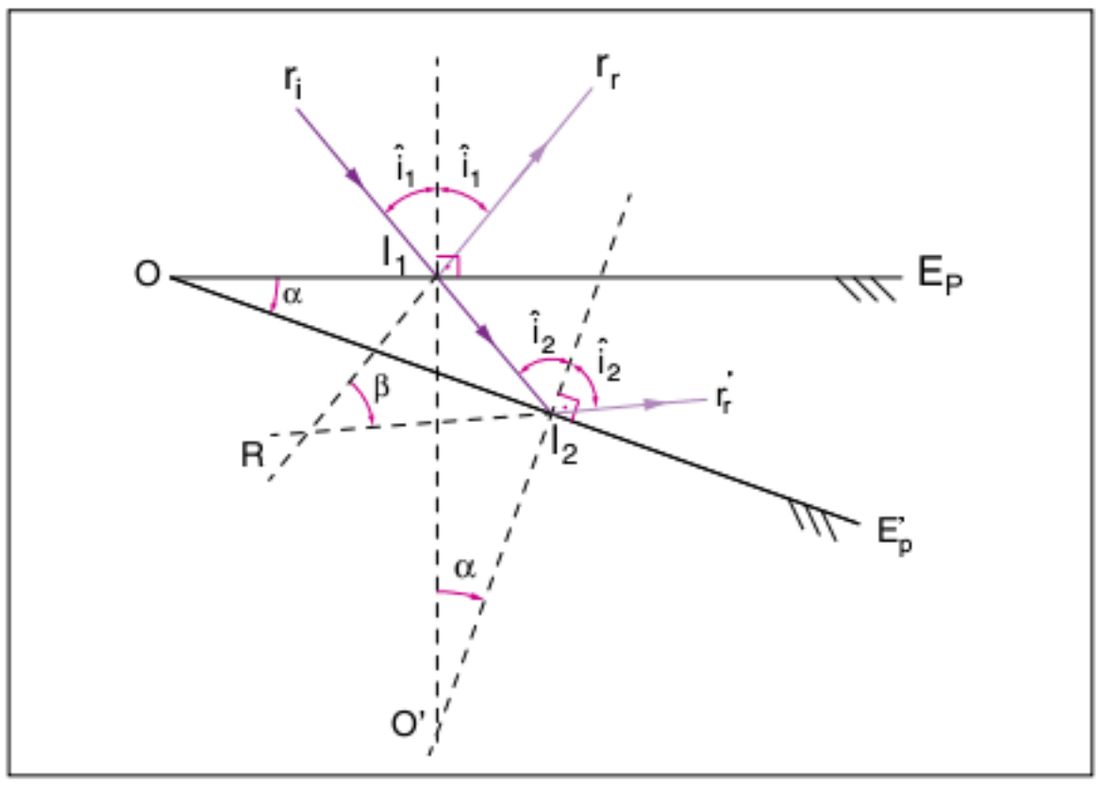


Fig. 15 Rotação de um espelho plano.

Sendo β o ângulo formado pelos raios refletidos (r_r e r'_r), vamos relacionar α e β.

1. Aplicando o teorema do ângulo externo no $\Delta O'I_1I_2$, temos:

$$\hat{i}_2 = \hat{i}_1 + \alpha$$

2. Aplicando o teorema do ângulo externo no ΔRI_1I_2, temos:

$$2\hat{i}_2 = 2\hat{i}_1 + \beta$$

como: $\alpha = \hat{i}_2 - \hat{i}_1$ e $\beta = 2\hat{i}_2 - 2\hat{i}_1 = 2(\hat{i}_2 - \hat{i}_1)$
logo:

$$\beta = 2 \cdot \alpha$$

ATENÇÃO!

Ao rotacionarmos um espelho plano com velocidade angular ω, em torno de um ponto O, a imagem será rotacionada com o dobro da velocidade de rotação do espelho.

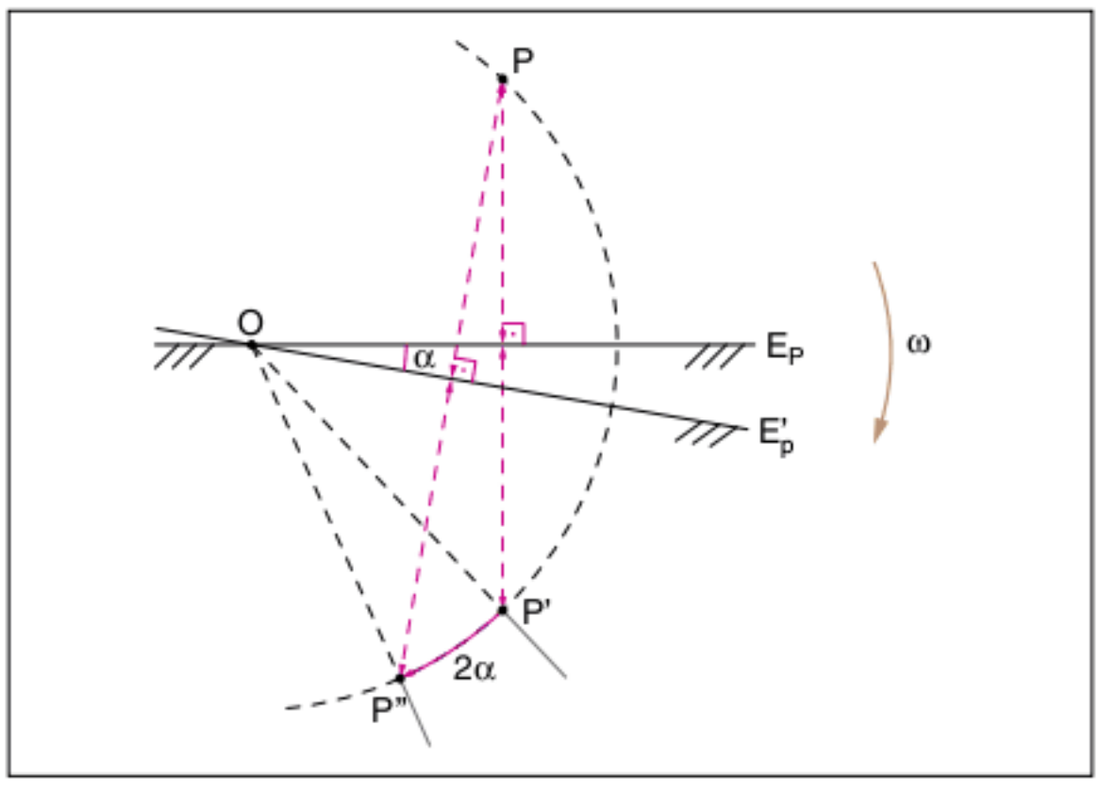


Fig. 16 Velocidades relativas na rotação de um espelho plano.

Se chamamos de ω_E a velocidade angular do espelho e de ω_i a velocidade angular da imagem, então: $\omega_i = 2\omega_E$.

Associação de espelhos planos

Consideremos um objeto P colocado diante de dois espelhos planos, E_{P_1} e E_{P_2}, perpendiculares entre si.

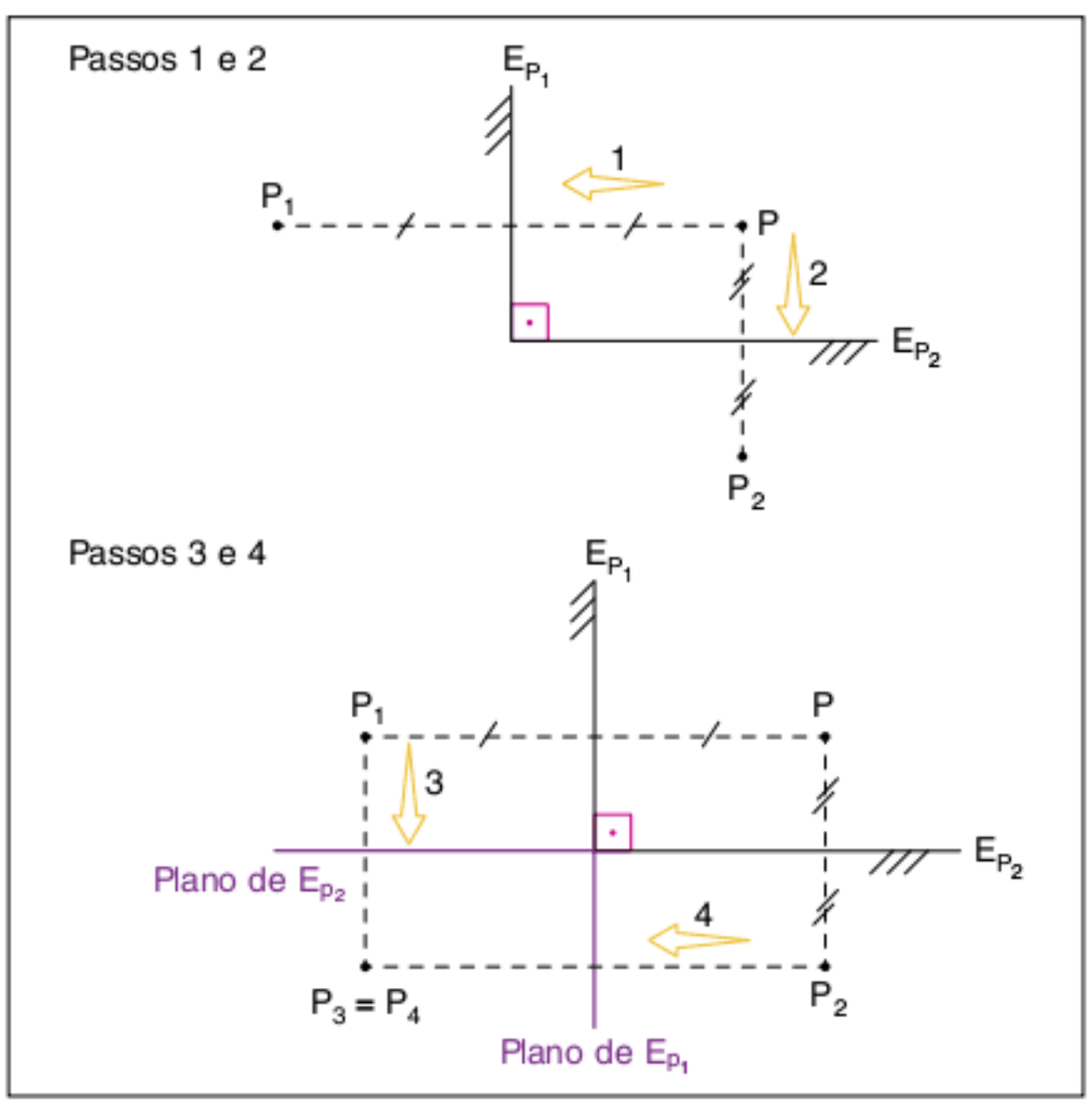


Fig. 17 Associação de espelhos planos (90º).

Observe os esquemas representados na figura 17, passo a passo.

Passos 1 e 2

Haverá formação de duas imagens por simples reflexão, ou seja:

- luz de P sofre reflexão em E_{P_1}, formando a imagem P_1.
- luz de P sofre reflexão em E_{P_2}, formando a imagem P_2.

Passos 3 e 4

Haverá também duas imagens formadas por dupla reflexão, ou seja:

- luz de P sofre reflexão em E_{P_1} e depois em E_{P_2}, formando a imagem P_3.
- a luz de P sofre reflexão em E_{P_2} e depois em E_{P_1}, formando a imagem P_4.

ATENÇÃO!

- Observe na figura que P_3 é imagem da "imagem P_1".
- Observe na figura que P_4 é imagem da "imagem P_2".
- Observe que as imagens P_3 e P_4, formadas por dupla reflexão, coincidem.
- Não haverá formação de mais imagens além dessas, pois, após duas reflexões sucessivas, a luz abandona a associação de espelhos perpendiculares.
- A associação de dois espelhos planos perpendiculares entre si forma três imagens distintas do objeto P:
  - duas, P_1 e P_2, por simples reflexão.
  - uma, $P_3 \equiv P_4$, por dupla reflexão.
- Conforme a figura 17, o objeto P e as imagens localizam-se sobre uma circunferência de centro O e o raio OP. A área compreendida entre os prolongamentos dos espelhos é chamada de **Zona Morta**, ou seja, pontos imagem que são formados nessa área não darão origem a outras imagens.

Se o objeto P for extenso, as imagens P_1 e P_2, por simples reflexão, serão enantiomorfas ao objeto.

E a imagem $P_3 \equiv P_4$, por dupla reflexão, será idêntica ao objeto.

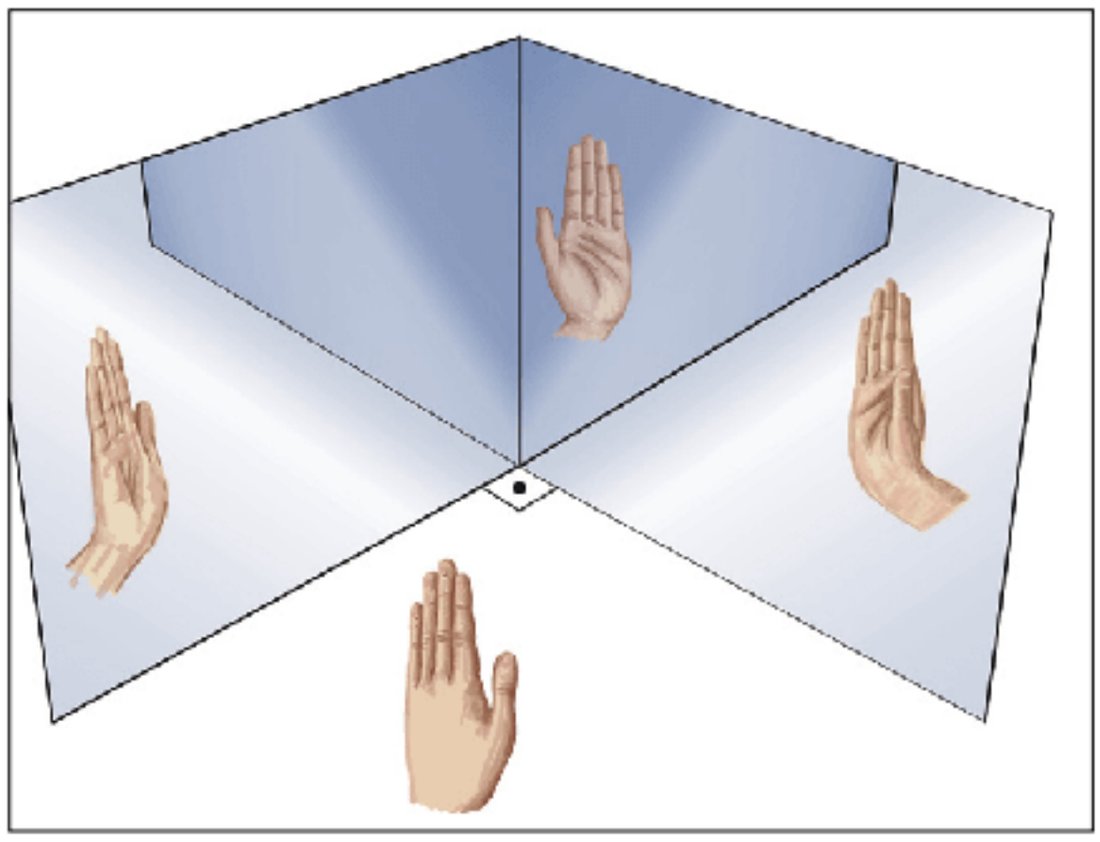


Fig. 18 Associação de espelhos planos.

ATENÇÃO!

- Se a imagem é formada por um número ímpar de reflexões, ela será enantiomorfa.
- Se formada por um número par de reflexões, ela será igual ao objeto.
- De um modo geral, quando dois espelhos formam um ângulo α entre suas faces refletoras, o número n de imagens do objeto P é dado por:
- $n = \dfrac{360^o}{\alpha} - 1$
- Essa fórmula é válida para α divisor de 360º.
  - Se $\dfrac{360^o}{\alpha}$ for par, a fórmula é válida para qualquer posição do objeto.
  - Se $\dfrac{360^o}{\alpha}$ for ímpar, a fórmula só é válida quando o objeto estiver equidistante dos dois espelhos.

Observação: *Se um objeto está localizado entre as faces refletoras de dois espelhos planos e paralelos, haverá a formação de infinitas imagens, pois aí a luz sofrerá infinitas e sucessivas reflexões entre os espelhos. Contudo, conseguiremos apenas visualizar um número finito de imagens, devido à perda de intensidade luminosa e diminuição do ângulo visual.*

Exercício resolvido

1 Com três patinadores colocados entre dois espelhos planos fixos, um diretor de cinema consegue uma cena em que são vistos, no máximo, 24 patinadores. Qual o ângulo α entre os espelhos? Sabe-se que o ângulo α é tal que $\dfrac{360^o}{\alpha}$ é um número inteiro.

Resolução:

Como são vistos no máximo 24 patinadores, significa que aos três patinadores (objetos) correspondem 21 imagens. Logo, a um patinador (objeto) correspondem 7 imagens.

De $N = \dfrac{360^o}{\alpha} - 1$, *e sendo* $N = 7$, *vem:*

$$7 = \frac{360^o}{\alpha} - 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$$

Espelhos esféricos

São superfícies refletoras que têm a forma de calota esférica. Existem dois tipos de espelhos esféricos:

I. **côncavo:** quando a face espelhada está voltada para o centro de curvatura.

II. **convexo:** quando a face espelhada está voltada para o lado oposto ao centro de curvatura.

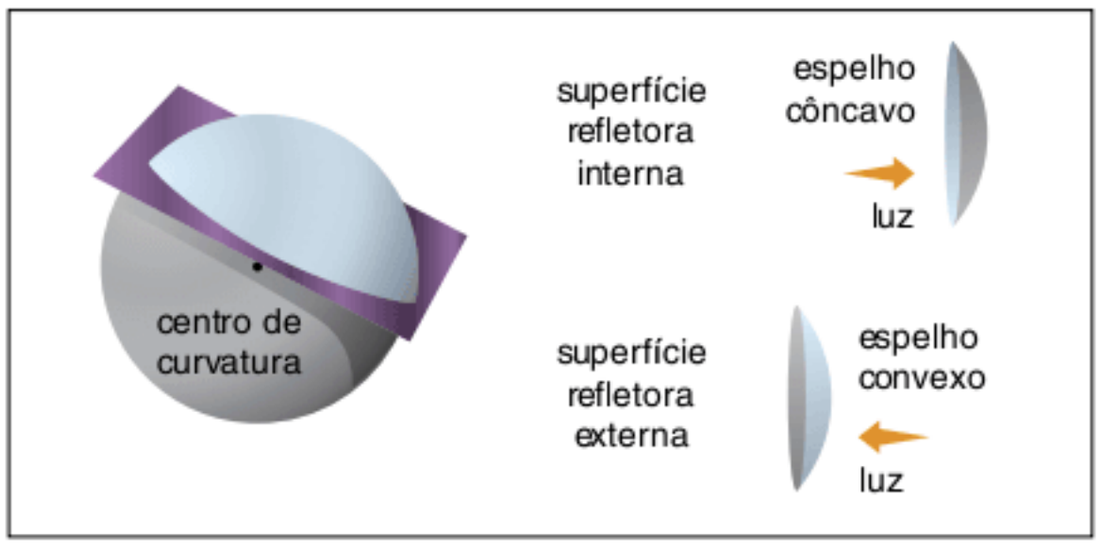


Fig. 19 Espelhos esféricos.

Espelhos esféricos gaussianos

Para obtermos a imagem de um ponto objeto P, fornecida por um espelho esférico, basta usar as leis da reflexão e lembrar que a reta normal a uma superfície esférica tem a direção que passa pelo centro de curvatura C dessa superfície.

Observamos, na figura 20, que os raios refletidos pelo espelho não se interceptam no mesmo ponto, fazendo com que ao objeto P correspondam inúmeras imagens (mancha luminosa).

Em virtude disso, dizemos que o espelho esférico é astigmático.

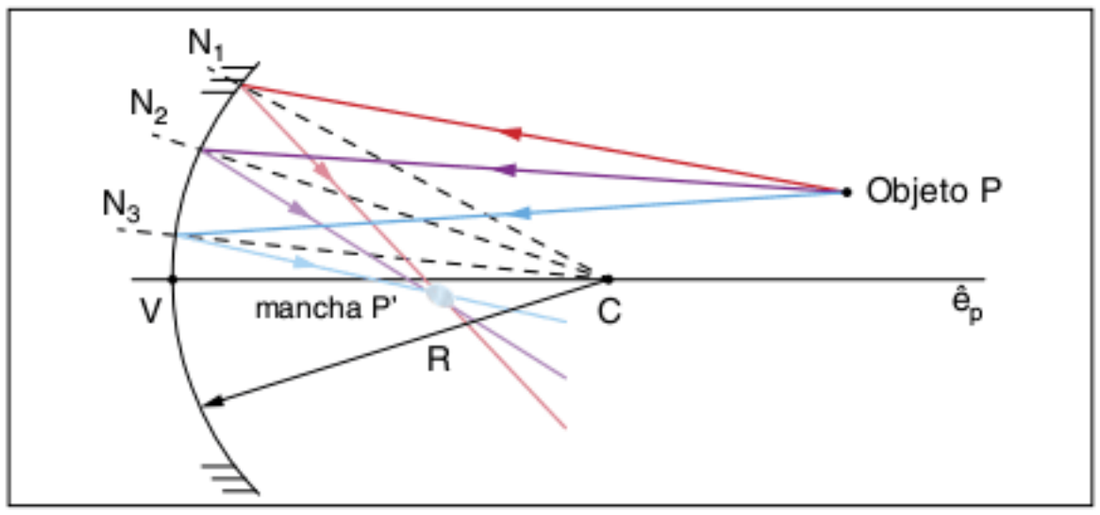


Fig. 20 Imagem astigmática.

Os principais elementos geométricos nos espelhos esféricos são:

- C: centro de curvatura
- V: vértice
- $\overline{CV} = R$: raio de curvatura
- e_p: eixo óptico principal – reta que passa por C e V

Contudo, se utilizarmos o espelho dentro de certas condições, ele poderá tornar-se **estigmático**, isto é, de um ponto objeto conjugar um único ponto imagem.

Condições de Gauss

As condições para que o espelho esférico seja **estigmático** são chamadas de condições de Gauss.

As condições de Gauss são:

I. os raios de luz devem ser pouco inclinados em relação ao eixo óptico principal.

II. os raios de luz devem incidir próximos ao vértice do espelho.

ATENÇÃO!

É muito importante ficar claro que todo o nosso estudo é baseado no uso das condições de Gauss, isto é, considerando que os espelhos esféricos sempre geram imagens estigmáticas.

Raios notáveis de luz

Passaremos agora a estudar alguns raios de luz, denominados raios notáveis por serem úteis na determinação gráfica da imagem formada em espelhos esféricos (E_E).

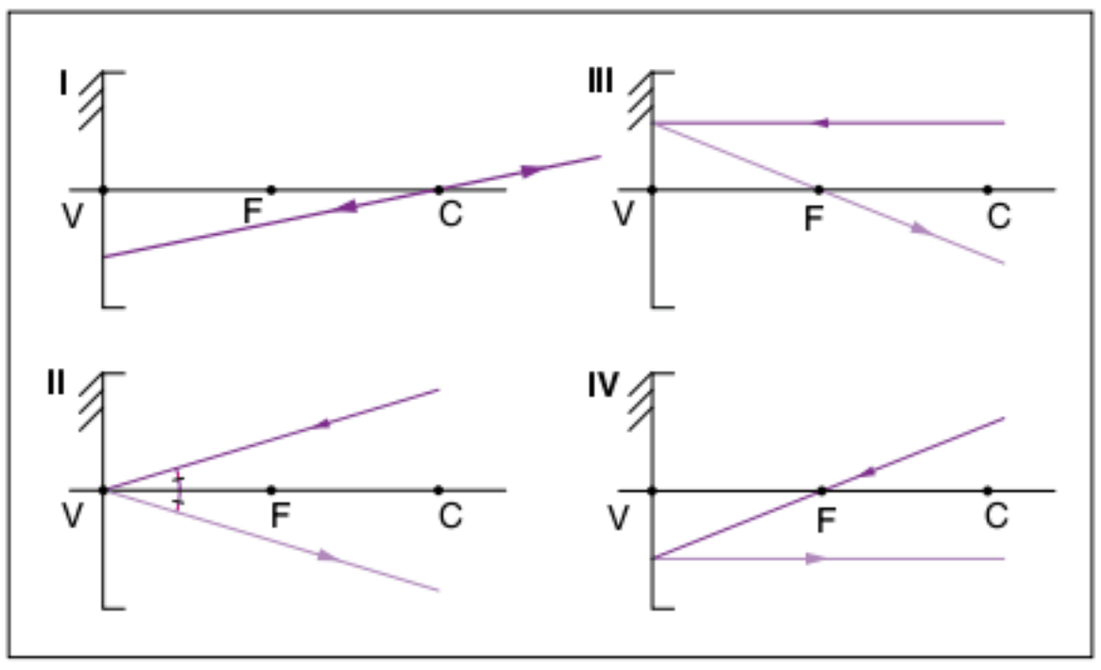


Fig. 21 Raios notáveis.

I. Todo raio que incide em uma direção que passa pelo centro de curvatura reflete-se sobre si mesmo.
Essa trajetória é devida à incidência da luz estar na direção da reta normal (incidência normal $\hat{i} = 0$).

II. Todo raio que incide no vértice do espelho reflete-se simetricamente ao eixo óptico principal.
Isso ocorre porque, nesse caso, o eixo óptico principal representa a reta normal no ponto de incidência da luz.

III. Todo raio que incide paralelamente ao eixo óptico principal reflete-se em uma direção que passa pelo foco principal do espelho.

IV. Todo raio que incide em uma direção que passa pelo foco principal reflete-se paralelamente ao eixo óptico principal.
Esse raio notável decorre do anterior pelo princípio da reversibilidade da luz.

Na figura 21, o ponto F é o chamado foco principal do espelho.

ATENÇÃO!

Foco (F) do espelho côncavo é real.
Foco (F) do espelho convexo é virtual.

O foco de um sistema óptico qualquer é um ponto que tem por conjugado um ponto impróprio (situado no infinito).

Demonstra-se que dentro das condições de Gauss, o foco F é o ponto médio do segmento $\overline{CV}$.

Sendo:

$\overline{CV} = R$: raio de curvatura

$\overline{FV} = F$: distância focal

Temos: $\overline{FV} = \dfrac{\overline{CV}}{2} \Rightarrow$

$$F = \frac{R}{2}$$

ATENÇÃO!

Assim como existe o foco principal, existem os focos secundários, ou seja, todo pincel cilíndrico que incide em um espelho esférico paralelo a um eixo secundário se reflete passando por um foco secundário.
Pode-se provar que, desde que obedecidas as condições de Gauss, todos os focos de um espelho esférico situam-se em um mesmo plano denominado plano focal.

$$\left[E_{côncavo}\right] E_{convexo}$$

Representação de um espelho esférico de Gauss.
V – vértice
C – centro de curvatura
F – foco

Fig. 22 Espelho convexo e espelho côncavo.

Determinação gráfica da imagem

Vamos determinar graficamente, nas figuras de 23 a 27, a imagem A'B' de um pequeno objeto real AB disposto frontalmente diante de um espelho esférico. Para isso, consideramos a luz emitida pela extremidade A do espelho que, após ser refletida, formará a extremidade A' da imagem. A imagem A'B' ficará determinada sabendo-se que ela também estará disposta perpendicularmente ao eixo óptico principal.

Na determinação gráfica da imagem, basta traçar dois raios quaisquer de luz entre os quatro raios notáveis.

ATENÇÃO!

É importante ressaltar que é muito útil saber determinar graficamente a imagem, tendo em vista que é uma importante ferramenta para verificar se a determinação analítica está correta.

Espelho côncavo

Caso 1:

Objeto situado depois do centro de curvatura C.

Imagem conjugada:

- real
- invertida
- menor
- entre F e C

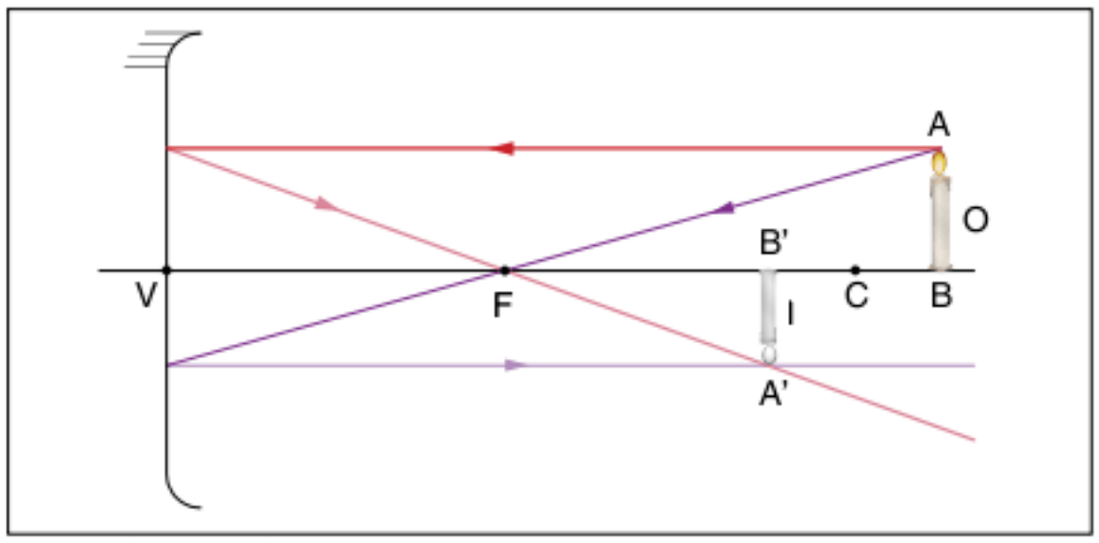


Fig. 23 Objeto além do centro de curvatura.

Caso 2:

Objeto situado sobre o centro de curvatura C.

Imagem conjugada:

- real
- invertida
- igual
- em C

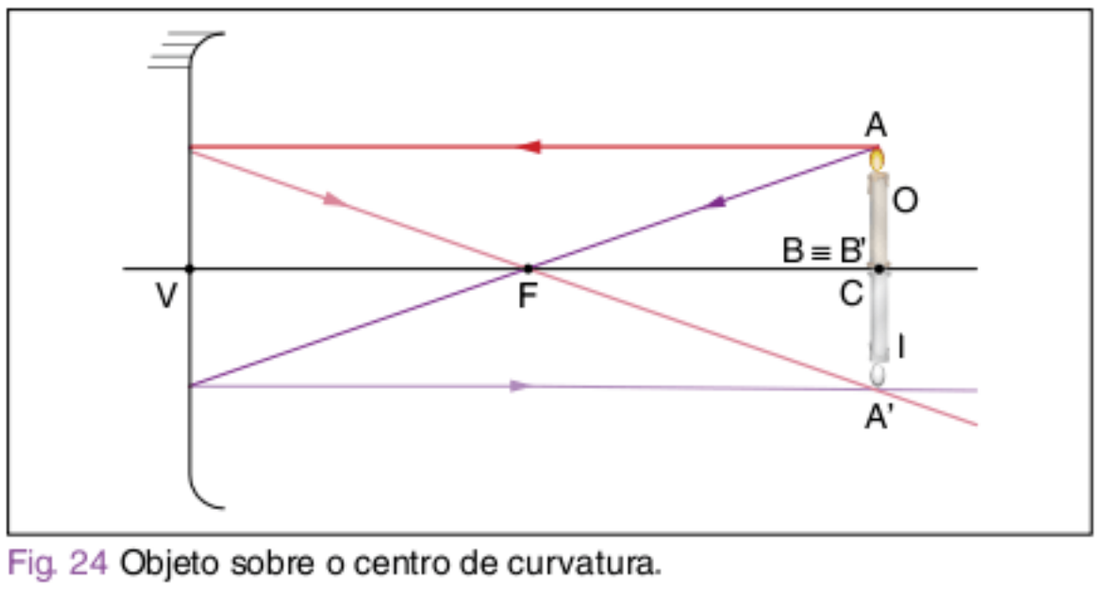


Fig. 24 Objeto sobre o centro de curvatura.

Caso 3:

Objeto situado entre o centro de curvatura C e o foco F.

Imagem conjugada:

- real
- invertida
- maior
- depois de C

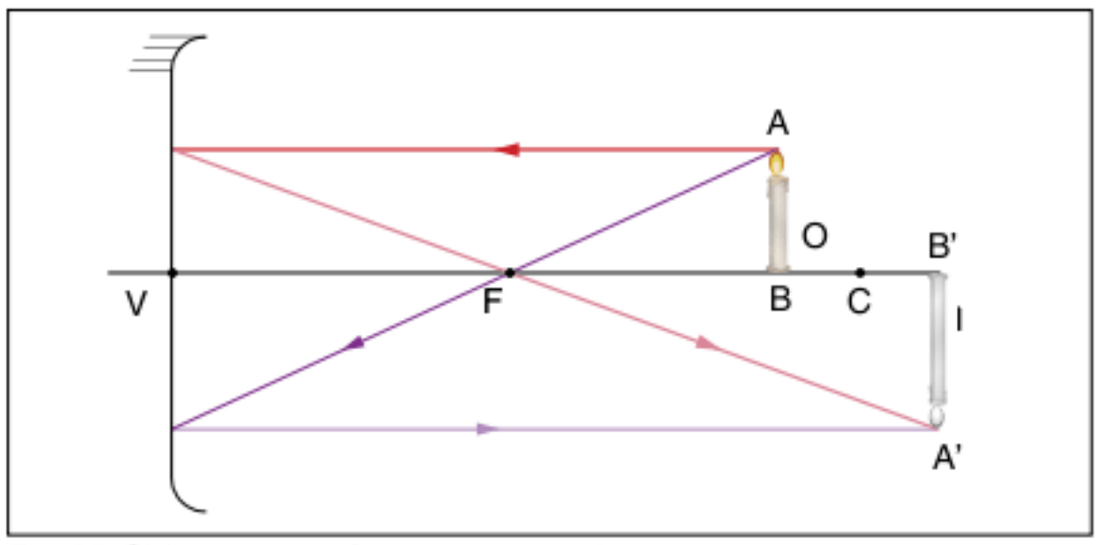


Fig. 25 Objeto entre o foco e o centro de curvatura.

Esse caso corresponde ao chamado espelho de aumento, como aqueles usados para se barbear, ou aqueles usados por dentistas.

Caso 4:

Objeto situado sobre o foco F.

Imagem conjugada no infinito (imprópria).

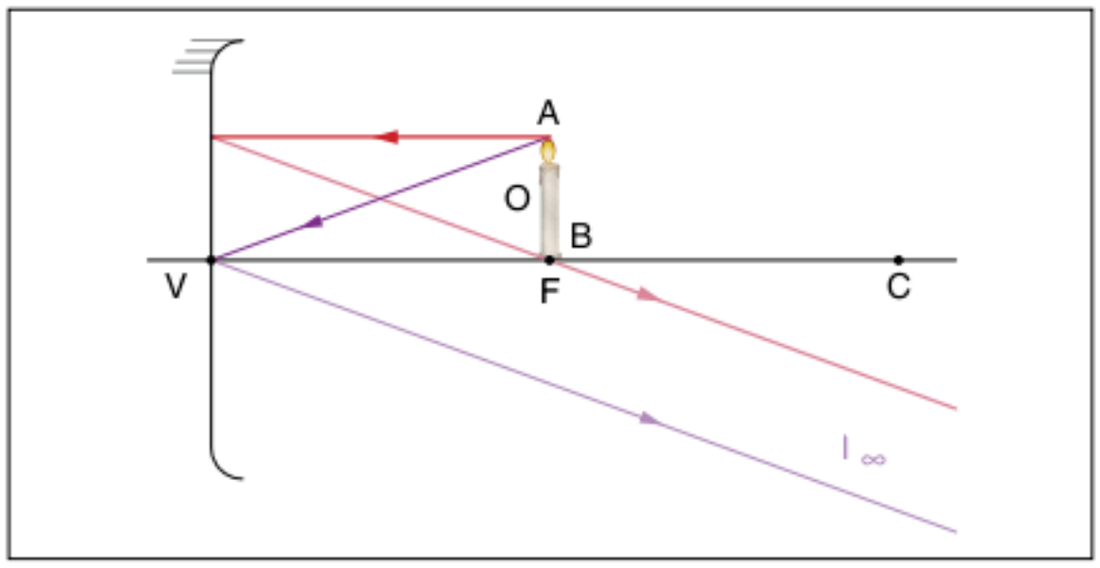


Fig. 26 Objeto sobre o foco.

Caso 5:

Objeto situado entre o foco F e o vértice V.

Imagem conjugada:

- virtual
- direita
- maior
- atrás do espelho

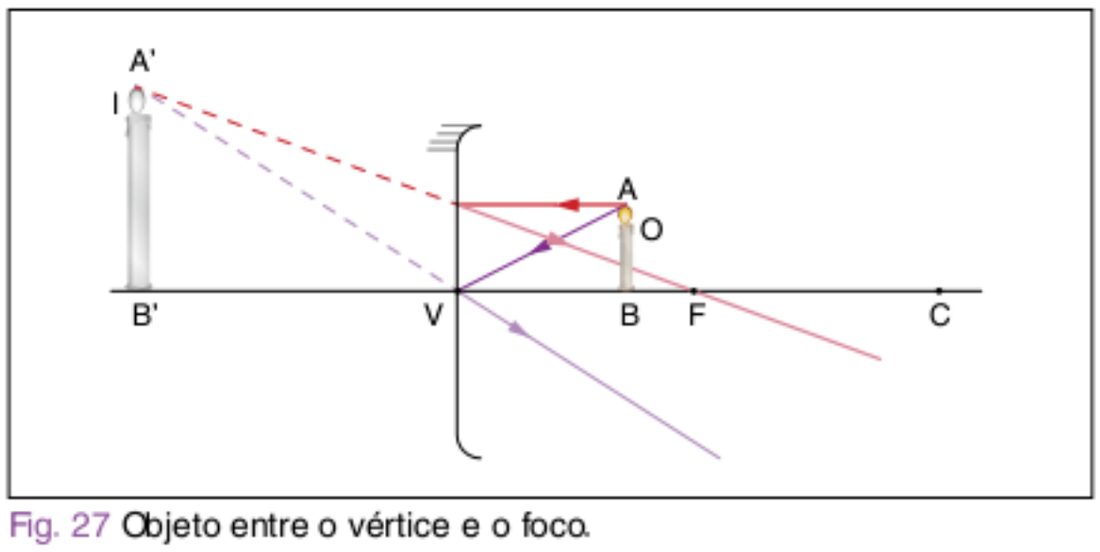


Fig. 27 Objeto entre o vértice e o foco.

Espelho convexo

Caso único:

Objeto situado na frente do espelho.

Imagem conjugada:

- virtual
- direita
- menor
- atrás do espelho

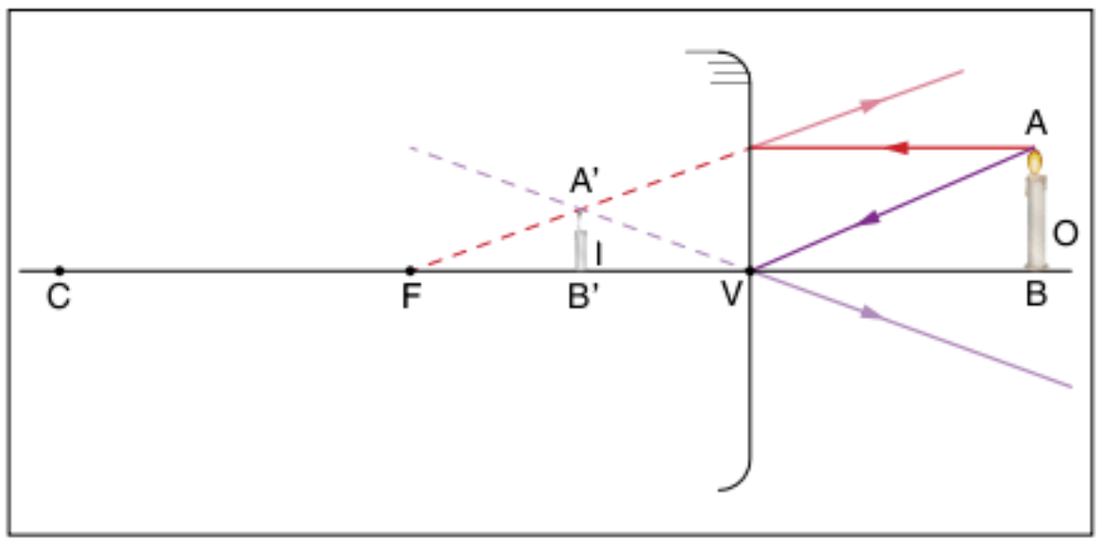


Fig. 28 Espelho convexo, caso único.

ATENÇÃO!

- Sempre que o objeto e a imagem tiverem naturezas opostas, um real e o outro virtual, a imagem é direita.
- Sempre que o objeto e a imagem tiverem a mesma natureza, os dois reais ou os dois virtuais, a imagem é invertida.
- Espelho esférico convexo, para um objeto real, sempre conjuga uma imagem virtual, direita e reduzida.
- Uma imagem real está localizada na frente do espelho e poderá ser projetada sobre um anteparo (uma tela) colocada na posição em que se forma, pois é constituída pela interseção dos próprios raios de luz.
- Uma imagem virtual está localizada atrás do espelho e, embora possa ser visualizada, não poderá ser projetada em um anteparo, pois não é constituída por luz e, sim, pelos prolongamentos dos raios.

Determinação analítica da imagem

Agora que já sabemos determinar as imagens de forma qualitativa, devemos passar para o método quantitativo, isto é, iremos determinar expressões matemáticas que determinem a posição e o tamanho da imagem.

Equação dos pontos conjugados de Gauss

Observe as figuras a seguir.

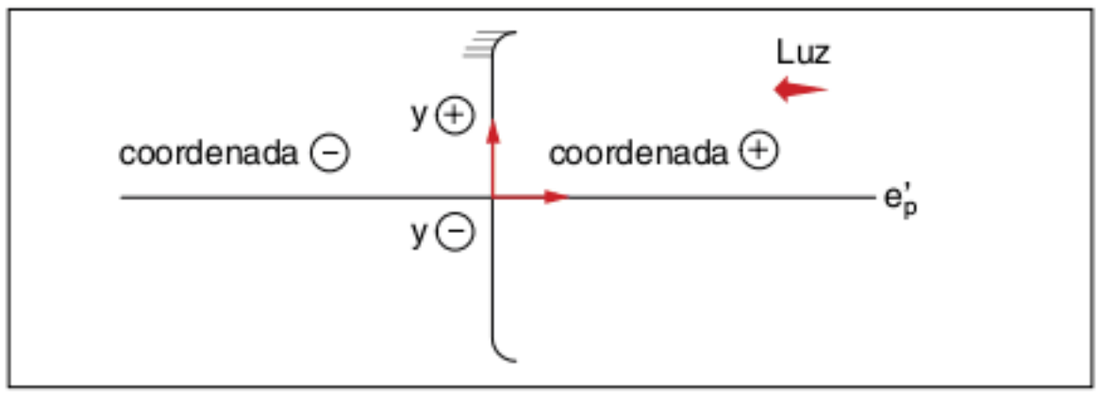


Fig. 29 Ao longo de e_p, teremos coordenadas positivas na região iluminada do espelho.

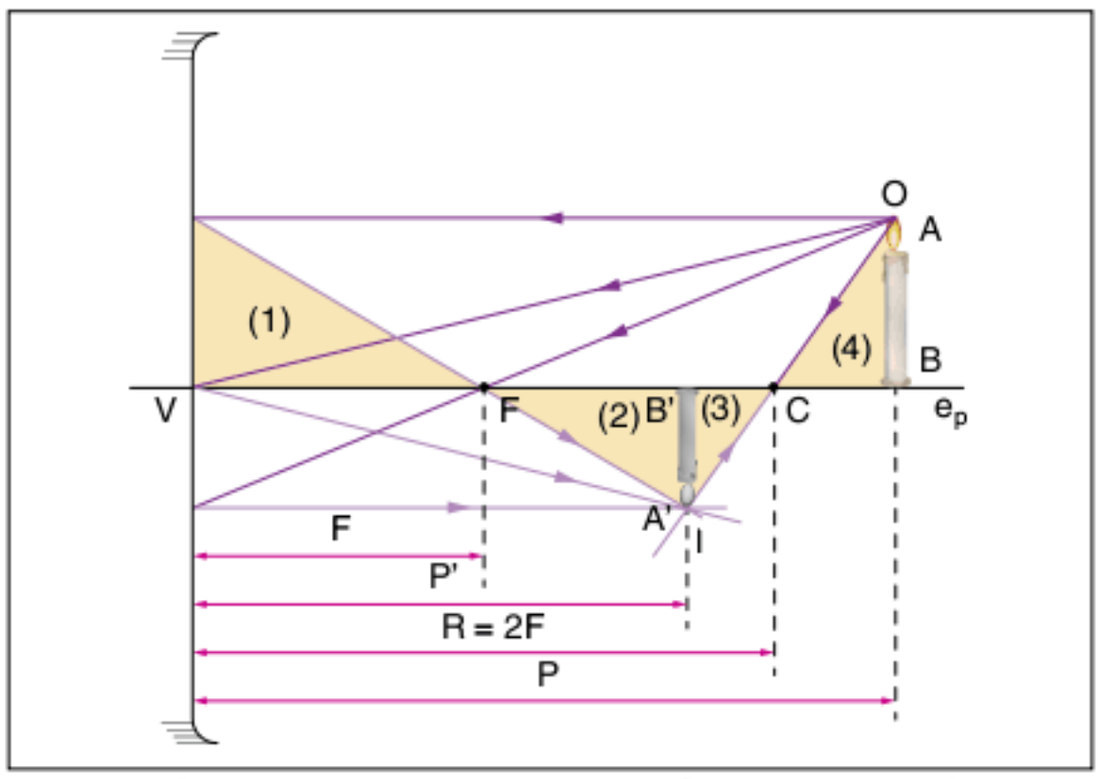


Fig. 30 Parâmetros para determinação analítica de imagens formadas em espelhos esféricos.

Na figura 29, temos:

P: abscissa do objeto, distância do objeto ao espelho

P': abscissa da imagem, distância da imagem ao espelho

O: altura do objeto, (AB)

i: altura da imagem, (A'B')

1. $\Delta(1) \approx \Delta(2)$

temos: $\frac{o}{i} = \frac{F}{P' - F}$

2. $\Delta(3) \approx \Delta(4)$

temos: $\frac{o}{i} = \frac{P - 2F}{2F - P'}$

Portanto:

$$F \cdot (2F - P') = (P - 2F) \cdot (P' - F) \Rightarrow$$
$$2F^2 - FP' = PP' - PF - 2FP' + 2F^2 \Rightarrow$$
$$2F^2 - FP' - PP' + PF + 2P' - 2F^2 = 0 \Rightarrow$$
$$-PP' + PF + FP' = 0 \Rightarrow$$
$$PF + FP' = PP'$$

Dividindo a equação por PP'F, temos:

$$\frac{PF}{PP'F} + \frac{FP'}{PP'F} = \frac{PP'}{PP'F}$$

que resulta na equação de Gauss:

$$\frac{1}{P'} + \frac{1}{P} = \frac{1}{F}$$

Observe ainda que $\Delta ABV \approx \Delta A'B'V$, logo:

$$\frac{o}{i} = \frac{P}{P'} \Rightarrow \frac{i}{o} = \frac{P'}{P}$$

Por definição, o aumento linear transversal A é a razão entre a altura da imagem i e a altura do objeto o, ou seja:

$$A = \frac{i}{o}$$

Pela relação vista anteriormente:

$$\frac{i}{o} = \frac{P'}{P} \Rightarrow \frac{i}{o} = \frac{-P'}{P} \text{ (convenção de sinal)}$$

Portanto, podemos escrever a chamada equação do aumento linear transversal:

$$A = \frac{i}{o} = \frac{-P'}{P}$$

Convenção de sinais

Para usarmos adequadamente a equação de conjugação de Gauss e a equação do aumento linear transversal, tanto para os espelhos côncavos quanto para os convexos, é necessário estabelecer uma convenção de sinais:

- objeto real: $P > 0$
- objeto virtual: $P < 0$
- imagem real: $P' > 0$
- imagem virtual: $P' < 0$
- espelho côncavo: $R > 0$ e $F > 0$
- espelho convexo: $R < 0$ e $F < 0$
- imagem direita: i com o mesmo sinal de o
- imagem invertida: i com o sinal contrário ao de o

ATENÇÃO!

Imagem projetável ⇔ Imagem Real ⇔ P' > 0

Pela equação do aumento linear transversal, notamos que:

- se A > 0, então a imagem é direita.
- se A < 0, então a imagem é invertida.
- se |A| > 1, então a imagem é maior que o objeto (imagem ampliada).
- se |A| < 1, então a imagem é menor que o objeto (imagem reduzida).
- se |A| = 1, então a imagem é igual ao objeto (imagem normal).

Exercícios resolvidos

2 Um espelho esférico conjuga, de um objeto situado a 30 cm dele, uma imagem direita e três vezes menor que o objeto. Determine:

a) o tipo de espelho.
b) sua distância focal.

Resolução:

a) O espelho que fornece imagem direita e menor é convexo. Essa imagem é virtual.

b) A abscissa do objeto é P = 30 cm. A imagem, sendo direita (aumento linear A positivo) e três vezes menor, resulta:

$$A = \frac{1}{3}$$

Da expressão $A = -\frac{P'}{P}$, *obtém-se:*

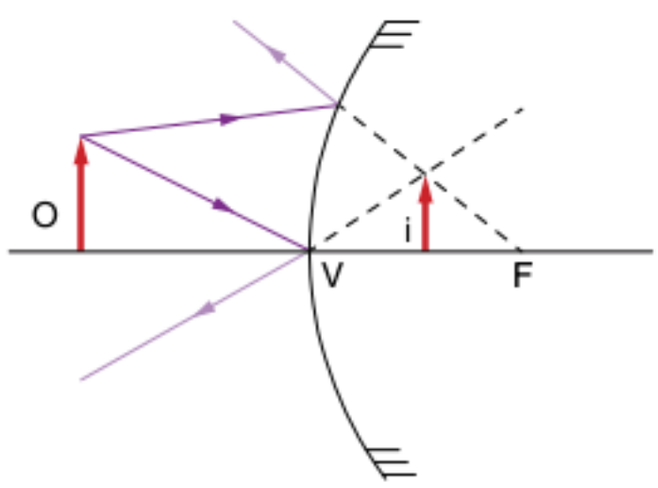
$$\frac{1}{3} = -\frac{P'}{30} \Rightarrow P' = -10 \text{ cm}$$

A equação dos pontos conjugados nos fornece:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{1}{30} + \frac{1}{-10} = \frac{1-3}{30} = \frac{-2}{30}$$

$$F = -15 \text{ cm}$$

Observe que F resultou negativo, confirmando que o espelho é convexo. Esquematicamente, temos:



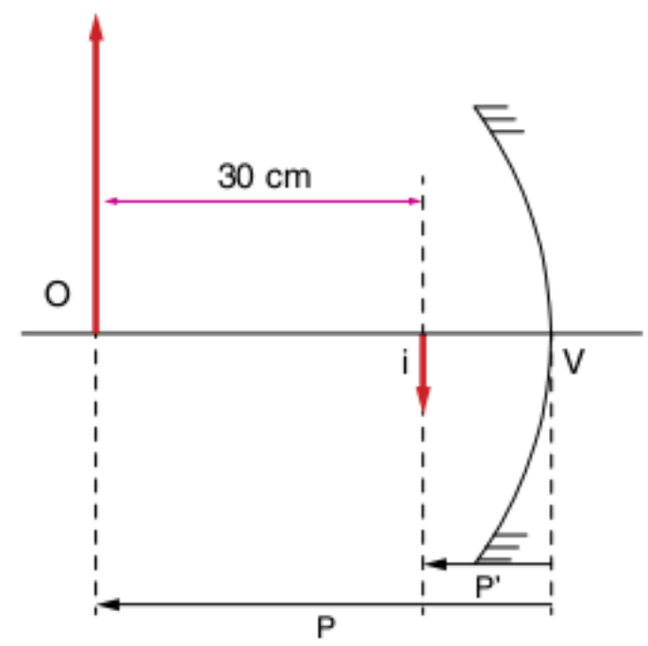
3 A distância entre um objeto e sua imagem em um espelho esférico mede 30 cm; sendo ambos reais, com o objeto apresentando altura quatro vezes superior à da imagem, determine o raio de curvatura do espelho.

Resolução:

Sendo objeto e imagem reais, o espelho é côncavo. Como a imagem é quatro vezes menor que o objeto e invertida, resulta para o aumento linear: $A = -\frac{1}{4}$.

Como $A = -\frac{P'}{P}$, *temos:* $-\frac{1}{4} = -\frac{P'}{P}$

$4P' = P$ (1)



Sendo de 30 cm a distância entre o objeto e a imagem, resulta:

$$P - P' = 30 \text{ cm (2)}$$

De (1) e (2), temos: P = 40 cm, P' = 10 cm

A equação dos pontos conjugados nos fornece:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \frac{1+4}{40}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{5}{40} \Rightarrow F = 8 \text{ cm}$$

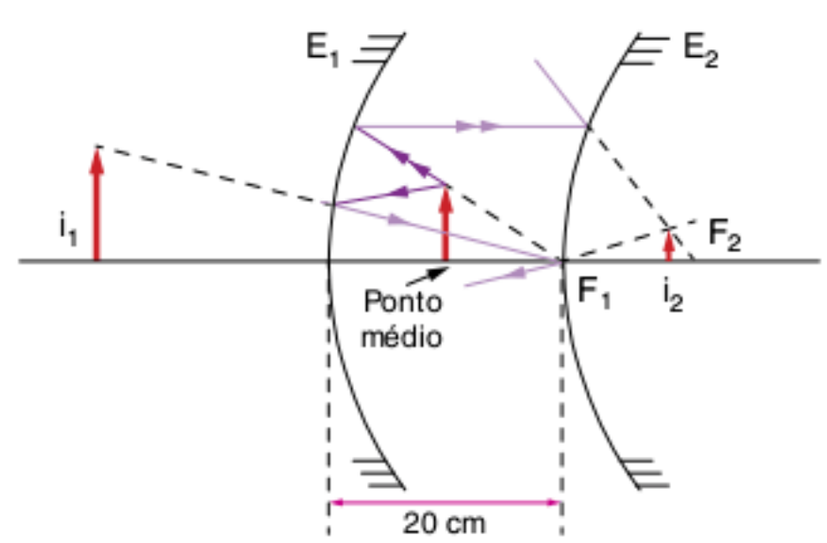
Como: R = 2F

Temos: R = 16 cm

4 Um espelho convexo, cuja distância focal mede 10 cm, está situado a 20 cm de um espelho côncavo de distância focal igual a 20 cm. Os espelhos estão montados coaxialmente e as superfícies refletoras se defrontam. Coloca-se um objeto no ponto médio do segmento que une os vértices dos dois espelhos. Localize a imagem fornecida pelo espelho convexo ao receber os raios luminosos que partem do objeto e são refletidos pelo espelho côncavo.

Resolução:

A imagem fornecida pelo espelho convexo pode ser obtida graficamente como segue:



Ao objeto, o espelho côncavo E_1 conjuga a imagem i_1. Esta funciona como objeto em relação ao espelho convexo.
A equação dos pontos conjugados aplicada ao espelho côncavo permite localizar a imagem i_1. Esta funciona como objeto em relação ao espelho convexo E_2, o qual conjuga a imagem i_2.

Espelho côncavo
A equação dos pontos conjugados aplicada ao espelho côncavo permite localizar a imagem i_1:

$$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P'_1}.$$

Sendo $F_1 = 20$ cm e $P_1 = 10$ cm, obtém-se:

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{10}+\frac{1}{P'_1} \Rightarrow \frac{1}{P'_1}=\frac{1}{20}-\frac{1}{10}=\frac{1-2}{20}=\frac{-1}{20}$$

$$P'_1 = -20 \text{ cm}$$

Espelho convexo
A imagem i_1 funciona como objeto em relação ao espelho convexo. A abscissa de i_1 para o espelho convexo é $P_2 = 40$ cm. Sendo $F_2 = -10$ cm a distância focal do espelho convexo, podemos localizar a imagem i_2:

$$\frac{1}{F_2}=\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P'_2} \Rightarrow \frac{1}{-10}=\frac{1}{40}+\frac{1}{P'_2}$$

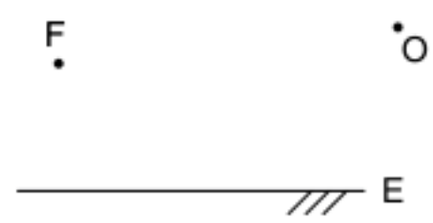
$$\frac{1}{P_2}=-\frac{1}{10}-\frac{1}{40} \Rightarrow \frac{1}{P'_2}=\frac{-4-1}{40} \Rightarrow \frac{1}{P'_2}=\frac{-5}{40}$$

$$P'_2 = -8 \text{ cm}$$

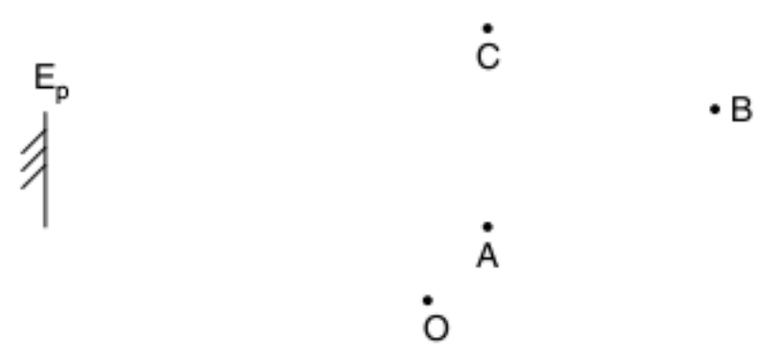
Logo, a imagem final i_2 está a -8 cm do espelho convexo e é virtual.

Revisando

1 Desenhe a trajetória do raio de luz, que parte do objeto puntiforme F, sofre reflexão no espelho plano E e atinge o observador O.



2 A figura representa um espelho plano E_p, objetos A, B e C e um observador O.



a) Determine o campo visual que E oferece a O.
b) Quais dos objetos poderão ser visualizados por O?
c) O observador O enxerga a si próprio, através do espelho E?

3 Um ponto luminoso sobre o eixo óptico principal de um espelho esférico côncavo desloca-se do centro de curvatura até o foco. Como varia a posição da imagem?

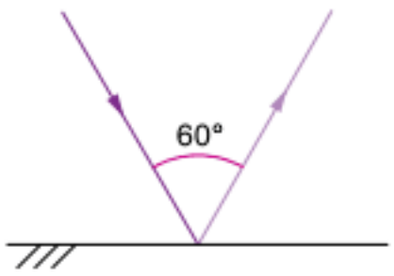
4 Diante de um espelho esférico convexo, de raio de curvatura de 60 cm, é colocado, perpendicularmente ao eixo principal, um objeto de 2 cm de altura. O objeto dista 40 cm do espelho. Determine:

a) a posição da imagem.
b) o tamanho da imagem.

Exercícios propostos

Espelhos planos

1 O esquema representa a reflexão de um raio luminoso em um espelho plano:



Determine:

a) o ângulo de incidência da luz.
b) o ângulo formado entre o raio refletido e o espelho.

2 A imagem fornecida por um espelho plano:

(a) será real, se o objeto for real.
(b) será virtual, se o objeto for virtual.
(c) será virtual, se o objeto for real, e real, se o objeto for virtual.
(d) será sempre virtual.
(e) será sempre real.

3 **Ufac** Um rapaz está sentado na cadeira de uma barbearia de frente para um espelho, tendo atrás de si o barbeiro em pé. A distância entre o rapaz e o espelho é D e entre o rapaz e o barbeiro é d. Qual é a distância x (horizontal) entre o rapaz e a imagem do barbeiro?

4 Um raio luminoso incide sobre um espelho plano formando 30° com a superfície refletora. Qual o ângulo formado entre os raios incidente e refletido?

5 Uma pessoa está em pé diante de um espelho plano vertical.

a) Qual o tamanho mínimo desse espelho, para que a pessoa consiga ver inteiramente sua imagem, dos pés à cabeça?
b) A que altura do solo deve ser colocado o espelho?

Dados: H = altura total da pessoa; h = altura dos pés aos olhos; d = distância horizontal da pessoa ao espelho.

6 Suponha que esteja trajando uma camiseta na qual se lê POLIEDRO VESTIBULARES grafada ao peito. Postando-se diante de um espelho plano, como você observará a imagem da citada inscrição?

7 **UFPR** Um espelho plano fornece, de um dado objeto em relação a ele, uma imagem real, projetável sobre um anteparo. Pode-se então afirmar, sobre o objeto e sobre o feixe emergente do espelho, respectivamente, que:

(a) é real e divergente.
(b) é virtual e convergente.
(c) é virtual e divergente.
(d) é real e convergente.
(e) é real e paralelo.

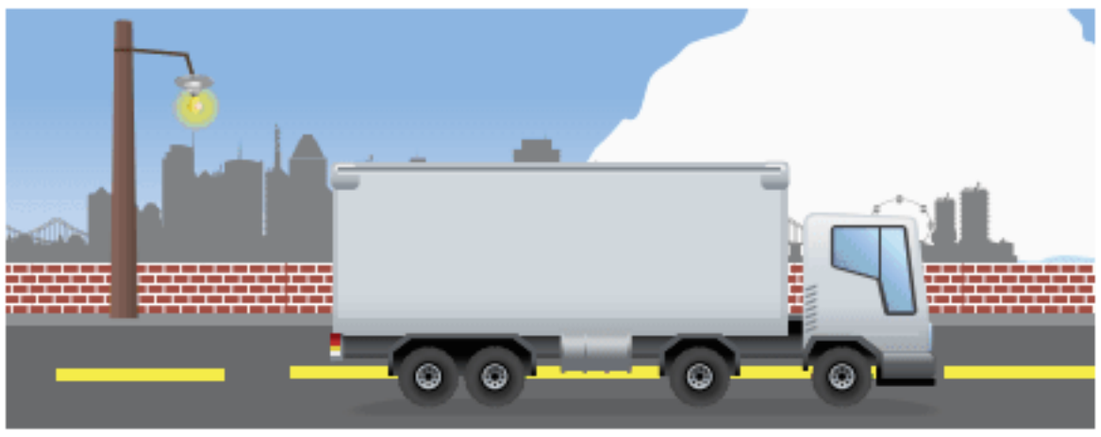
8 **Vunesp** Um raio de luz, vertical, incide num espelho plano horizontal. Se o espelho girar 20° em torno de um eixo horizontal, o raio refletido se desviará de sua direção original de:

(a) 0°
(b) 20°
(c) 10°
(d) 60°
(e) 40°

9 **ITA 2007** Um raio de luz de uma lanterna acesa em A ilumina o ponto B, ao ser refletido por um espelho horizontal sobre a semirreta DE da figura, estando todos os pontos num mesmo plano vertical. Determine a distância entre a imagem virtual da lanterna A e o ponto B. Considere AD = 2 m, BE = 3 m e DE = 5 m.

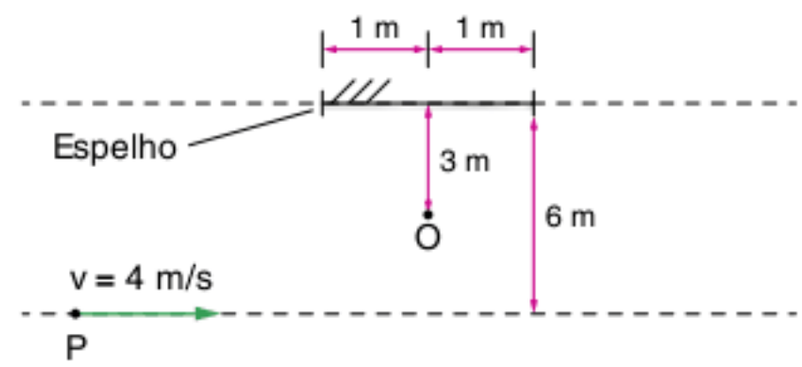
Movimentos de um espelho plano (translação e rotação)

10 Um caminhão trafega em uma estrada retilínea com velocidade de 40 km/h. Olhando no espelho retrovisor, o motorista contempla a imagem de um poste fixo na estrada.



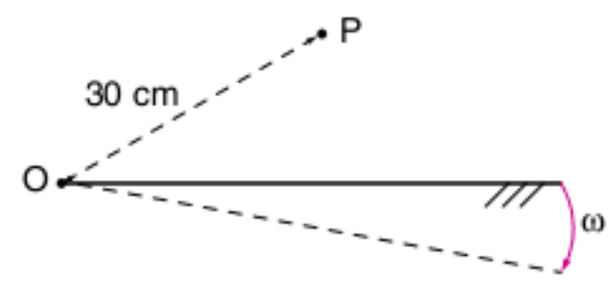
a) Qual a velocidade da imagem do poste em relação ao solo?
b) Qual a velocidade da imagem do poste em relação ao motorista do caminhão?

11 **UFJF** Um observador **O** de dimensões desprezíveis posta-se em repouso a uma distância de 3 m em frente ao centro de um espelho plano de 2 m de largura, que também está em repouso. Um objeto pontual **P** desloca-se uniformemente com 4 m/s ao longo de uma trajetória retilínea paralela à superfície do espelho e distante 6 m desta (veja figura). Inicialmente, o observador não vê o objeto.



A partir de um certo ponto de sua trajetória, o objeto passa a ser visto pelo observador. Por quanto tempo ele permanece visível?

12 Um objeto pontual **P** encontra-se diante da superfície refletora de um espelho plano, conforme mostra a figura:



Se o espelho girar em torno do eixo **O** (perpendicular à página) com velocidade angular $\omega = 5{,}0$ rad/s, qual será a velocidade escalar da imagem de **P**?

13 **UFRJ 2009** Uma criança segura uma bandeira do Brasil como ilustrado na figura I. A criança está diante de dois espelhos planos verticais *A* e *B* que fazem entre si um ângulo de 60°. A figura II indica seis posições, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, relativas aos espelhos. A criança se encontra na posição 1 e pode ver suas imagens nas posições 2, 3, 4, 5 e 6.

figura 1

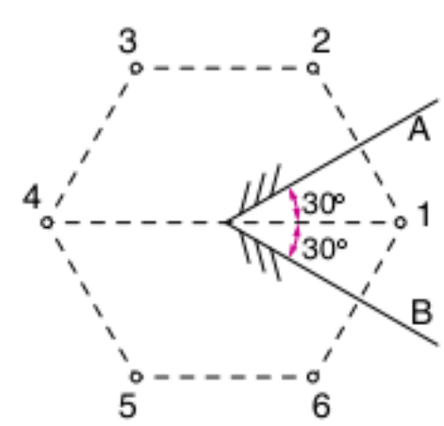
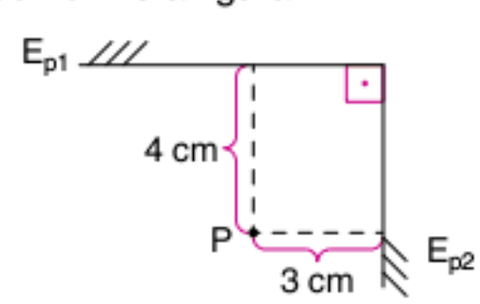


figura 2

Em quais das cinco imagens a criança pode ver os dizeres ORDEM E PROGRESSO? Justifique a sua resposta.

Associação de espelho planos

14 **PUC-SP** Um objeto P está localizado entre dois espelhos perpendiculares conforme a figura.

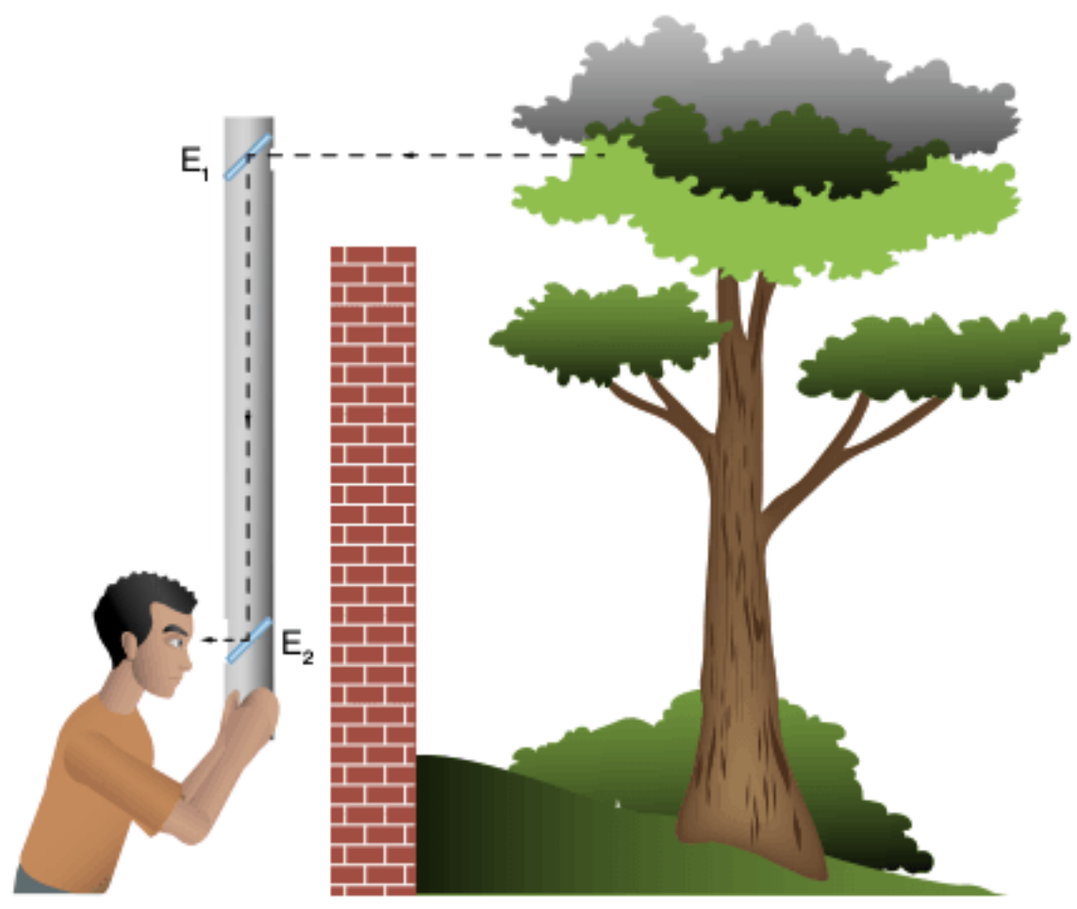


Localize, na figura, as imagens formadas; dando as suas distâncias até o objeto, e se as imagens são inversas ou direitas.

15 Uma pequena lâmpada é colocada diante das superfícies refletoras de dois espelhos planos que formam entre si um ângulo de 30°.

a) Quantas imagens a associação conjuga com a lâmpada?
b) Reduzindo-se os ângulos entre os espelhos, o número de imagens aumenta ou diminui?

16 **PUC-SP 2007** O estudo da luz e dos fenômenos luminosos sempre atraiu os pensadores desde a antiga Grécia. Muitas são as aplicações dos espelhos e lentes, objetos construídos a partir dos estudos realizados em Óptica. A figura representa um periscópio, instrumento que permite a observação de objetos mesmo que existam obstáculos opacos entre o observador e uma região ou objeto que se deseja observar. Considere que, nesse periscópio, E_1 e E_2 são espelhos planos.



A respeito do periscópio e dos fenômenos luminosos que a ele podem ser associados são feitas as afirmativas:

I. A colocação de espelhos planos, como indicada na figura, permite que a luz proveniente da árvore atinja o observador comprovando o princípio da propagação retilínea da luz.
II. O ângulo de incidência do raio de luz no espelho E_1 é congruente ao ângulo de reflexão nesse mesmo espelho.
III. Como os espelhos E_1 e E_2 foram colocados em posições paralelas, os ângulos de incidência do raio de luz no espelho E_1 e de reflexão no espelho E_2 são congruentes entre si.

Dessas afirmativas, está correto apenas o que se lê em:

(a) II.
(b) I e II.
(c) I e III.
(d) II e III.
(e) I, II e III.

17 **Ufpel 2007** Os espelhos planos podem ser associados, isto é, colocados lado a lado em ângulo ou dispostos paralelamente entre si. Há a possibilidade de essas associações deslocarem ou multiplicarem o número de imagens de um objeto. Baseado em seus conhecimentos sobre Óptica Geométrica, em relação às imagens produzidas entre dois espelhos planos em ângulo, é correto afirmar que

(a) existe a formação de uma única imagem, para um ângulo de 180°, o que, na prática, significa um único espelho.
(b) não haverá formação de imagens, quando o ângulo for de 0°, já que os espelhos ficam dispostos paralelamente.
(c) a expressão $n = 360°/\alpha - 1$ não apresenta limitações, fornecendo o número de imagens para qualquer ângulo α entre 0° e 360°.
(d) haverá a formação de 6 imagens, se os espelhos estiverem dispostos perpendicularmente.
(e) podem ser produzidas teoricamente infinitas imagens, desde que os espelhos fiquem dispostos paralelamente, ou seja, $\alpha = 180°$.

Espelhos esféricos

18 **UFBA** O quadro a seguir apresenta características de três espelhos, I, II e III.

Espelho	Tipo	Distância focal	Distância da imagem ao espelho	Distância do objeto ao espelho	Aumento linear transversal	Natureza da imagem	Orientação da imagem
I	côncavo	+20		+10			
II				+10	+1	virtual	
II		–20	–4				direita

Determine os dados que faltam relativos ao:

a) espelho I.
b) espelho II.
c) espelho III.

19 Um objeto real de altura 5,0 cm está a 3,0 m diante de um espelho esférico côncavo, de distância focal 1,0 m.

a) Determine, graficamente, as características da imagem.
b) Determine, analiticamente, a posição e o tamanho da imagem.

20 Um espelho esférico fornece, de um objeto real, uma imagem virtual e duas vezes menor do que o objeto. Sabendo que a distância do objeto ao espelho é de 60 cm, determine:

a) a posição da imagem.
b) a distância focal do espelho.

21 Um homem situado a 2,0 m do vértice de um espelho esférico visa sua imagem direita e ampliada três vezes. Determine:

a) a distância focal do espelho.
b) sua natureza (côncavo ou convexo).

22 **Ufes** Utiliza-se um espelho côncavo para projetar sobre uma parede a imagem de uma lâmpada, aumentada 5 vezes. A lâmpada está distante 1,20 m da parede. Determine:

a) o raio de curvatura do espelho.
b) a posição da lâmpada em relação ao espelho.

23 Um espelho esférico côncavo é utilizado para projetar, sobre uma tela, a imagem do Sol. A distância focal do espelho é de 2,0 metros. Qual é, aproximadamente, a distância entre a imagem do Sol e o espelho?

24 Um pequeno objeto linear é colocado sobre o eixo principal, em frente da superfície refletora de um espelho esférico gaussiano. Sabendo-se que a abscissa focal do espelho vale **F** e que a abscissa do objeto vale **P**, expressar o aumento linear transversal A em função de **F** e de **P**.

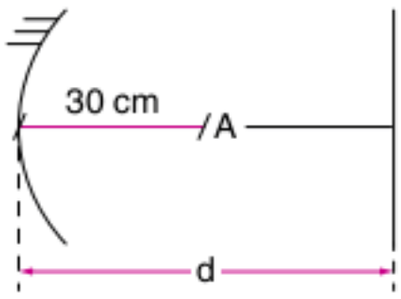
25 **ITA** Seja E um espelho côncavo cujo raio de curvatura é de 60,0 cm. Qual tipo de imagem obteremos se colocarmos um objeto real de 7,50 cm de altura, verticalmente, a 20,0 cm do vértice do espelho?

26 **Centec-BA** Em um espelho côncavo, a distância entre um objeto real e sua imagem é de 60 cm. Sabendo-se que a imagem é invertida e duas vezes menor que o objeto, qual o raio de curvatura do espelho, em cm?

27 Um ponto luminoso percorre o eixo principal de um espelho esférico côncavo gaussiano, deslocando-se do centro de curvatura para o foco. Nesse deslocamento, podemos afirmar que a imagem do ponto conjugada pelo espelho:

(a) desloca-se do centro de curvatura para o foco.
(b) desloca-se do centro de curvatura para o infinito.
(c) desloca-se do foco para o centro de curvatura.
(d) desloca-se do infinito para o foco.
(e) permanece em repouso.

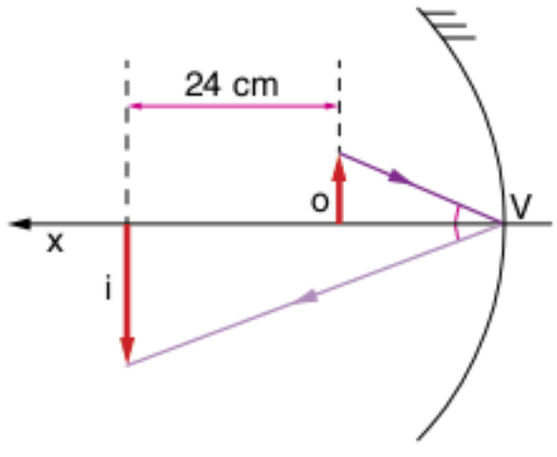
28 **ITA** Um espelho plano está colocado na frente de um espelho côncavo, perpendicularmente ao eixo principal. Uma fonte luminosa **A**, centrada no eixo principal entre os dois espelhos, emite raios que se refletem sucessivamente sobre ambos e formam, sobre a própria fonte **A**, uma imagem real da mesma. O raio de curvatura do espelho é de 40 cm e a distância do centro da fonte **A** até o centro do espelho esférico é de 30 cm. A distância **d** do espelho plano até o centro do espelho côncavo é, então:



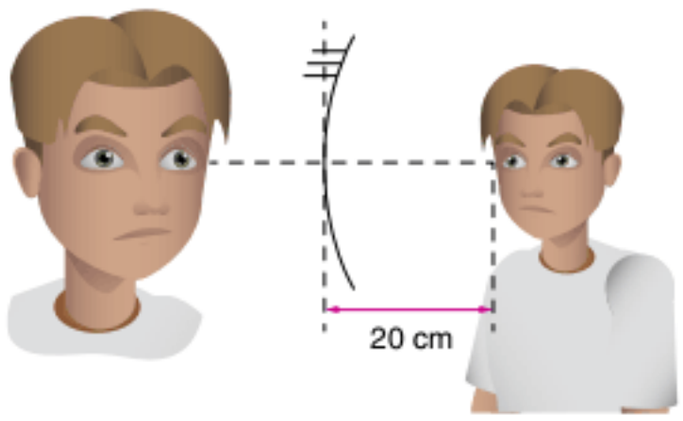
(a) 20 cm
(b) 30 cm
(c) 40 cm
(d) 45 cm
(e) 50 cm

29 A figura a seguir representa um espelho esférico côncavo, um objeto frontal e a imagem conjugada pelo espelho. A distância entre o objeto e a imagem é de 24 cm. Tendo a imagem uma altura quatro vezes maior que o objeto, obtenha:

a) as abscissas gaussianas do objeto e da imagem.
b) a distância focal do espelho.



30 **FMU-MG** Uma pessoa, estando a 20 cm de um espelho esférico côncavo, observa a imagem de seu próprio rosto refletida no espelho. A imagem é uma vez e meia maior do que o rosto da pessoa (figura).



Nessa situação, quanto vale, aproximadamente, o raio de curvatura do espelho?

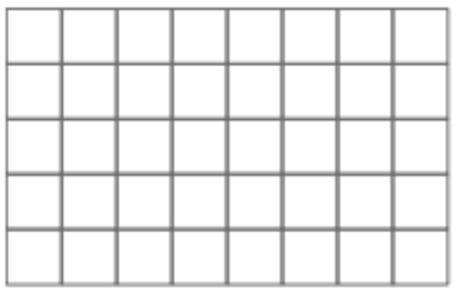
(a) 12 cm
(b) 30 cm
(c) 40 cm
(d) 60 cm
(e) 120 cm

31 **UFPR** Deseja-se obter a imagem de uma lâmpada, ampliada 5 vezes, sobre uma parede situada a 12 cm de distância da lâmpada. Quais as características e a posição do espelho esférico que se pode utilizar? Ele deverá ser:

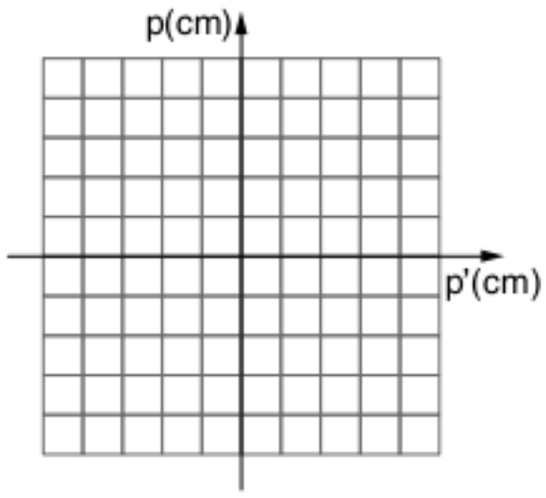
(a) convexo, com 5 cm de raio, a 3 cm da lâmpada.
(b) côncavo, com 5 cm de raio, a 3 cm da lâmpada.
(c) convexo, com 24 cm de raio, a 2 cm da lâmpada.
(d) côncavo, com 6 cm de raio, a 4 cm da lâmpada.
(e) convexo, com 6 cm de raio, a 4 cm da lâmpada.

32 Um objeto puntiforme encontra-se diante de um espelho esférico côncavo a 3,0 cm de seu vértice. A distância focal dele é 2,0 cm. Determine, pelo Método Gráfico das Coordenadas:

a) a abscissa da imagem.
b) a natureza da imagem (use o quadriculado).



33 Considere um espelho esférico convexo de distância focal f = –4,0 cm. Diante do espelho, é disposto, perpendicularmente ao seu eixo principal, um objeto luminoso situado a 4,0 cm do vértice. Usando o processo gráfico descrito nos exercícios anteriores, determine a abscissa da imagem e a natureza dela.



34 **UEPB 2008** *O espelho esférico foi estudado pelo matemático grego Euclides (325 a.C. a 265 a.C.) em sua obra Catroptics, datada de 300 a.C., [...] o nome Euclides está intrinsecamente ligado à geometria. Ao postular a propagação em linha reta dos raios luminosos, ele tornou a óptica uma simples divisão da geometria.*

Ricardo Barthem. *Temas atuais de Física: A luz.* Editora livraria da Física, São Paulo, 2005, p. 5.

Os espelhos esféricos são aplicados tecnologicamente em uma variedade de instrumentos e objetos. No caso dos espelhos convexos, estes são utilizados como espelhos retrovisores de veículos, nas saídas das garagens de prédios e nas portas de certos elevadores. Considerando que um destes espelhos tem 20 cm de distância focal, e conjuga uma imagem a 4 cm do seu vértice, a distância do objeto ao espelho é de:

(a) –3,3 cm
(b) +3,3 cm
(c) –5 cm
(d) +5 cm
(e) –4 cm

35 **Ufal 2007** Considere um espelho côncavo de raio de curvatura 20 cm e um pequeno objeto, colocado sempre perpendicularmente ao eixo principal do espelho. Analise as afirmativas seguintes.

- ( ) Se o objeto estiver entre o foco e o vértice do espelho, a imagem é virtual e invertida.
- ( ) A distância focal do espelho é de 10 cm.
- ( ) Se o objeto estiver no centro de curvatura, a imagem é real e invertida.
- ( ) Para o objeto entre o centro de curvatura e o foco do espelho, a imagem é invertida e menor que o objeto.
- ( ) Para o objeto colocado além de 20 cm do espelho, forma-se imagem real e menor que o objeto.

36 **PUC-SP 2007** Um objeto é colocado a 30 cm de um espelho esférico côncavo perpendicularmente ao eixo óptico deste espelho. A imagem que se obtém é classificada como real e se localiza a 60 cm do espelho. Se o objeto for colocado a 10 cm do espelho, sua nova imagem

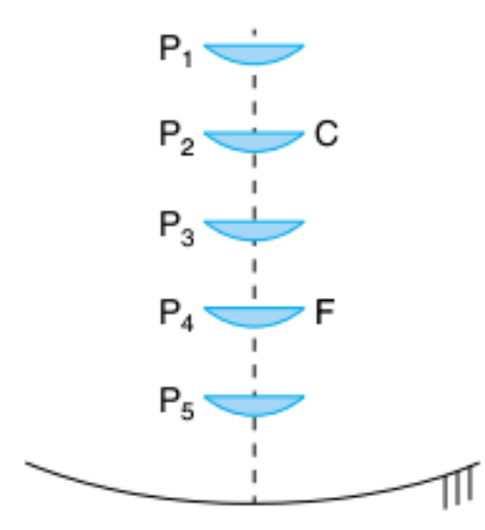
(a) será classificada como virtual e sua distância do espelho será 10 cm
(b) será classificada como real e sua distância do espelho será 20 cm.
(c) será classificada como virtual e sua distância do espelho será 20 cm.
(d) aumenta de tamanho em relação ao objeto e pode ser projetada em um anteparo.
(e) diminui de tamanho em relação ao objeto e não pode ser projetada em um anteparo.

37 **UEM 2004** Das afirmativas a seguir, assinale o que for correto.

01 Uma imagem virtual não pode ser mostrada numa tela.
02 Um espelho convexo nunca forma uma imagem real de um objeto real.
04 Um espelho côncavo sempre forma uma imagem virtual.
08 Um espelho côncavo nunca forma uma imagem real ampliada de um objeto real.
16 A imagem virtual formada por um espelho côncavo é sempre menor que o objeto.
32 Quando a distância imagem é negativa, isso significa que a imagem é virtual.
64 Todos os raios paralelos ao eixo de um espelho esférico convergem para o mesmo ponto depois de refletidos. Esse ponto é o centro de curvatura do espelho.

Soma = ☐

38 **Unifesp 2009** Os elevados custos da energia, aliados à conscientização da necessidade de reduzir o aquecimento global, fazem ressurgir antigos projetos, como é o caso do fogão solar. Utilizando as propriedades reflexivas de um espelho esférico côncavo, devidamente orientado para o Sol, é possível produzir aquecimento suficiente para cozinhar ou fritar alimentos. Suponha que um desses fogões seja constituído de um espelho esférico côncavo ideal e que, num dado momento, tenha seu eixo principal alinhado com o Sol.



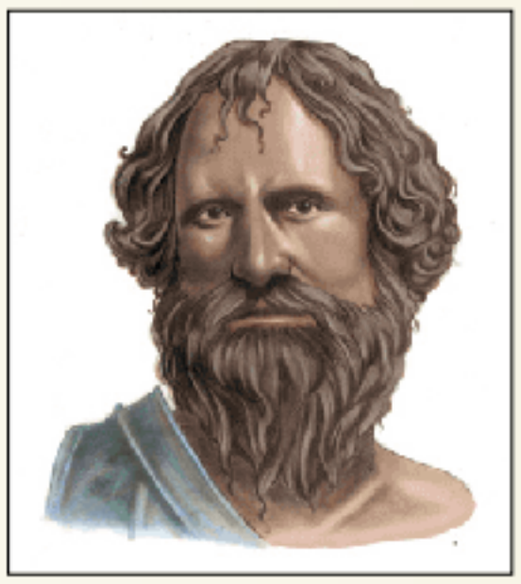
Na figura, P_1 a P_5 representam cinco posições igualmente espaçadas sobre o eixo principal do espelho, nas quais uma pequena frigideira pode ser colocada. P_2 coincide com o centro de curvatura do espelho e P_4, com o foco. Considerando que o aquecimento em cada posição dependa exclusivamente da quantidade de raios de luz refletidos pelo espelho que atinja a frigideira, a ordem decrescente de temperatura que a frigideira pode atingir em cada posição é:

(a) $P_4 > P_1 = P_3 = P_5 > P_2$.
(b) $P_4 > P_3 = P_5 > P_2 > P_1$.
(c) $P_2 > P_1 = P_3 = P_5 > P_4$.
(d) $P_5 = P_4 > P_3 = P_2 > P_1$.
(e) $P_5 > P_4 > P_3 > P_2 > P_1$

TEXTO COMPLEMENTAR

A energia solar através dos tempos

Registra a História que, no ano 212 a.C., a cidade de Siracusa foi defendida por Arquimedes, que utilizando espelhos côncavos, formados por segmentos de espelhos planos, incendiara a esquadra de Marcelus. A invasão romana havia sido derrotada pelo Sol!


Arquimedes, (287 a.C.-212 a.C.).

O foco formado pelo conjunto de espelhos fora dirigido para as velas das embarcações, cuja temperatura fora suficiente para queimá-las. Esta é provavelmente a primeira aplicação bélica da energia solar que se tem notícia em toda a História da Humanidade.

As tentativas para utilização da energia solar como uma fonte energética importante datam de épocas remotas. No século I, Heron de Alexandria construiu um dispositivo solar para bombeamento de água. O Egito antigo conhecia o efeito estufa, hoje largamente empregado nos sistemas de aquecimento solar de baixa concentração.

Foi, na verdade, a partir do século XVI que os estudos para a utilização da energia solar foram aprofundados. Data de 1560 a construção de um alambique solar pelo cirurgião francês Ambroise Paré. Mais tarde, em 1615, o engenheiro Salomon de Caus construía uma caldeira solar. Em 1697, o Grão-Duque Cosme III, da Toscana, utilizando a propriedade das lentes convergentes, concentrou os raios solares e queimou o diamante.

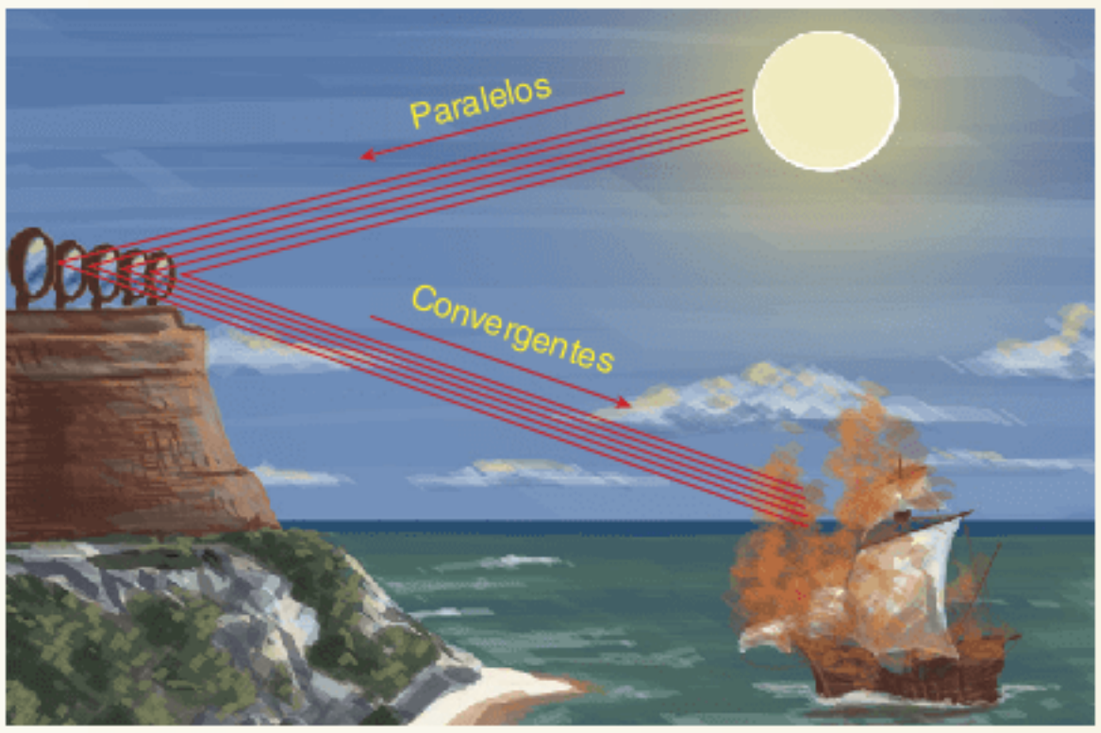


Ilustração simulando o feito de Arquimedes.

Em 1745, o pesquisador Buffon queimou uma pilha de madeira no Jardim Botânico de Paris, empregando a radiação solar captada por 140 espelhos planos, a 65 metros de distância. Em seguida, aumentou a distância para 100 metros e conseguiu queimar o carbono e fundir o chumbo. Em 1759, surgiu um motor de ar quente, com o emprego da radiação solar, cujo invento deve-se ao pesquisador inglês Henry Wood. Com o emprego de espelhos planos, o suíço Saussure construiu, em 1770, um sistema de aquecimento com o emprego da radiação solar. Chega o ano de 1772! Nesse ano, Isaac Newton conseguiu convergir em um único ponto os raios solares refletidos por meio de um sistema formado por espelhos côncavos. A ideia de Isaac Newton foi depois aperfeiçoada pelo físico russo Mikhail Lomonosov, que empregou oito lentes e mais sete espelhos dispostos segundo uma circunferência, obtendo assim um único foco de maior densidade energética, formado pela concentração dos raios solares captados no sistema. Lomonosov denominou esse sistema de catótrico-dióptrico. Ainda em 1772, Lavoisier utilizando uma lente formada por duas faces de vidro curvados e justapostos, contendo álcool em seu interior, concentrou os raios solares e reproduziu a experiência realizada por Cosme III e ainda demonstrou que o diamante e o grafite são variedades alotrópicas de um mesmo elemento químico conhecido como carbono. O astrônomo inglês John Herschel escolheu o Cabo da Boa Esperança e lá repetiu as experiências realizadas por Saussure, fato ocorrido entre 1834 e 1838.

O pesquisador Augustin Mouchot é hoje considerado o precursor moderno da Energia Solar. Por meio de espelhos troncocônicos, ele concentrou os raios solares em um cilindro e provocou a ebulição da água, fundiu o estanho, o zinco e o chumbo, fabricou bombas solares e pequenas máquinas a vapor, construiu uma máquina impressora acionada por um motor solar. Essa impressora tinha uma tiragem de 500 exemplares de um jornal denominado O Sol, trabalho este apresentado à Exposição Internacional, de Paris, em 1878. A primeira indústria solar de que se tem notícia chamou-se Centrale des utilizateurs de la chaleur solaire, e foi fundada pelo professor Mouchot em sociedade com um outro inventor, o Monsieur Pifre. Em 1886, um motor solar de 1 CV, cujo vapor era gerado por um cilindro parabólico de 19 metros quadrados, era apresentado em Estocolmo pelo engenheiro sueco Ericson. O motor girava a 120 rotações por minuto.

Até meados do século XIX, as instalações solares existentes eram insatisfatórias e de baixo rendimento termodinâmico. O primeiro resultado prático do aproveitamento direto da energia solar foi seguramente a destilação da água salobra, trabalho este atribuído ao pesquisador sueco Harding, que, em 1872, construiu na região Las Salinas, no Chile, um grande destilador que durante 25 anos consecutivos produziu diariamente 23 mil litros de água destilada, sais e nitratos. Quase cem anos depois, em 1973, foi feita a comemoração dessa instalação de destilação solar, fato ocorrido em Antofagasta no Chile, ocasião em que foi criada a Associação Latino-Americana de Energia Solar.

Inspirado nos trabalhos realizados por Mouchot, o engenheiro inglês A. C. Eneas trabalhou entre 1901 e 1903 na construção de caldeiras solares, na Califórnia e no Arizona, chegando a produzir vapor a 15 atm que alimentava estações de bombeamento de água. A instalação da Califórnia (South Pasadena) era formada por um espelho troncocônico de 9 metros de diâmetro.

Em 1904, o padre português Himalaya desenvolveu em Saint Louis, nos Estados Unidos, um espelho parabólico de 80 metros quadrados, pela associação de 6.000 espelhos planos, destinados à concentração da radiação solar.

Arnaldo Moura Bezerra. Jornal O Norte.

RESUMINDO

Leis da reflexão

Primeira lei da reflexão: O raio de luz incidente, o raio de luz refletido e a reta normal à superfície pelo ponto de incidência da luz são coplanares.

$$\text{Coplanares}\begin{cases} r_i\text{: raio de luz incidente} \\ r_r\text{: raio de luz refletido} \\ r_n\text{: reta normal} \end{cases}$$

Segunda lei da reflexão: O ângulo de incidência e o ângulo de reflexão possuem a mesma medida.

Espelho plano – Imagem formada de objetos reais:
Natureza: Virtual
Orientação: Direita
Tamanho: Igual ao objeto
Posição: Simétrica

Espelho esférico

Foco: $F = \frac{R}{2}$

Equação de Gauss: $\frac{1}{F} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'}$

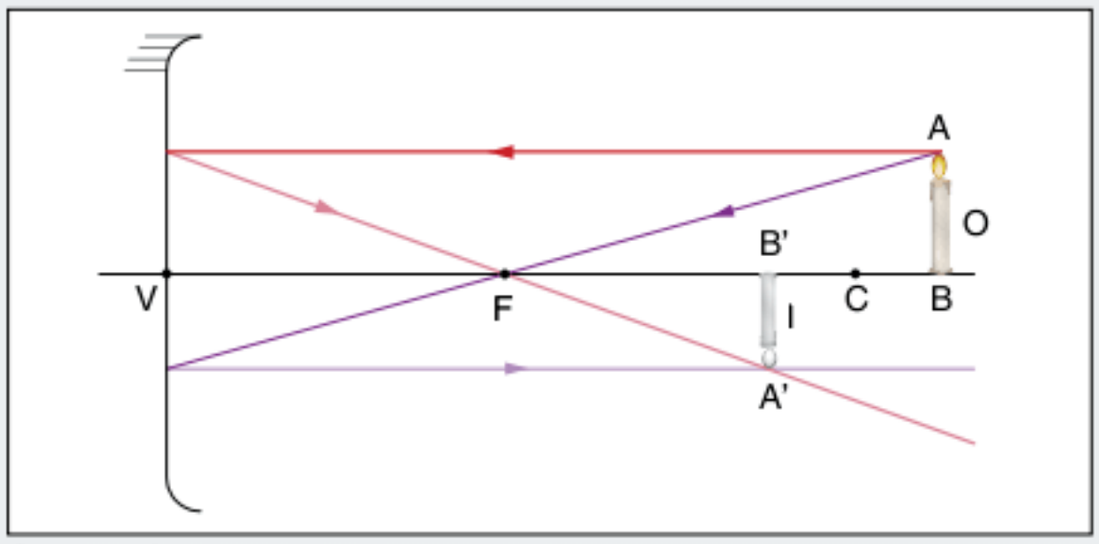
Equação do aumento linear transversal: $A = \frac{I}{O} = \frac{-P'}{P}$

Lembre-se de que uma imagem possui sempre quatro características:

- Natureza: real ou virtual
- Orientação: direita ou invertida em relação ao objeto
- Tamanho
- Posição em relação ao espelho e seus pontos notáveis

Espelho côncavo

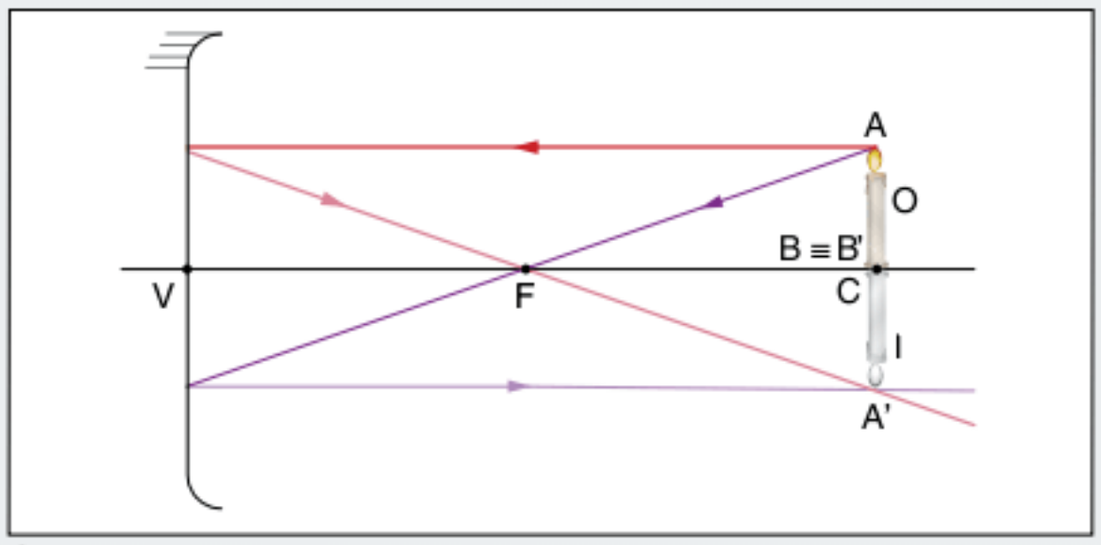
Caso 1: Objeto situado depois do centro de curvatura C. Imagem conjugada:



Objeto além do centro de curvatura.

$$\text{Imagem:}\begin{cases} \text{Real} \\ \text{Invertida} \\ \text{Menor} \\ \text{Entre F e C} \end{cases}$$

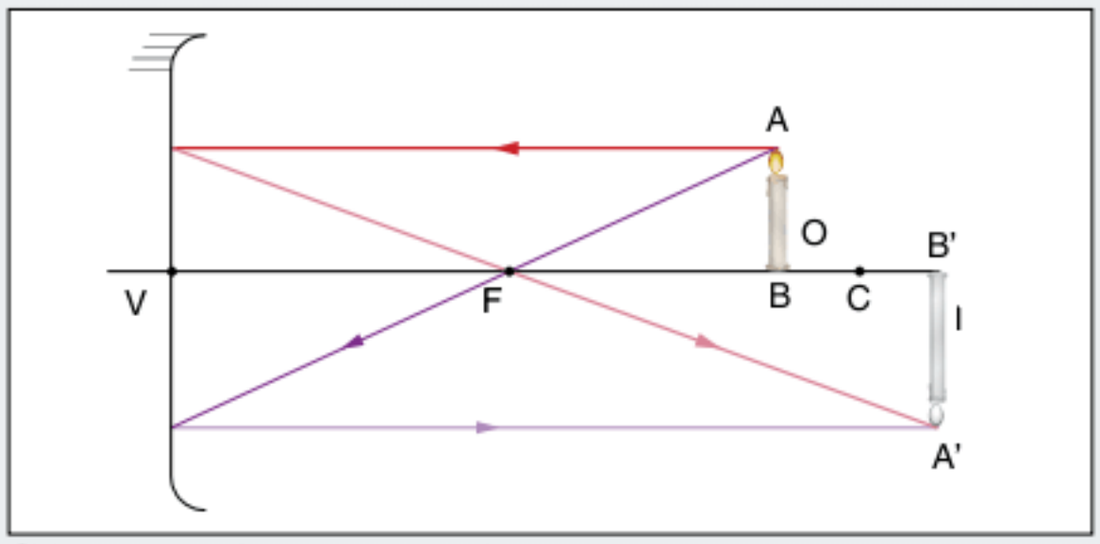
Caso 2: Objeto situado sobre o centro de curvatura C. Imagem conjugada:



Objeto sobre o centro de curvatura.

$$\text{Imagem:}\begin{cases} \text{Real} \\ \text{Invertido} \\ \text{Igual} \\ \text{Em C} \end{cases}$$

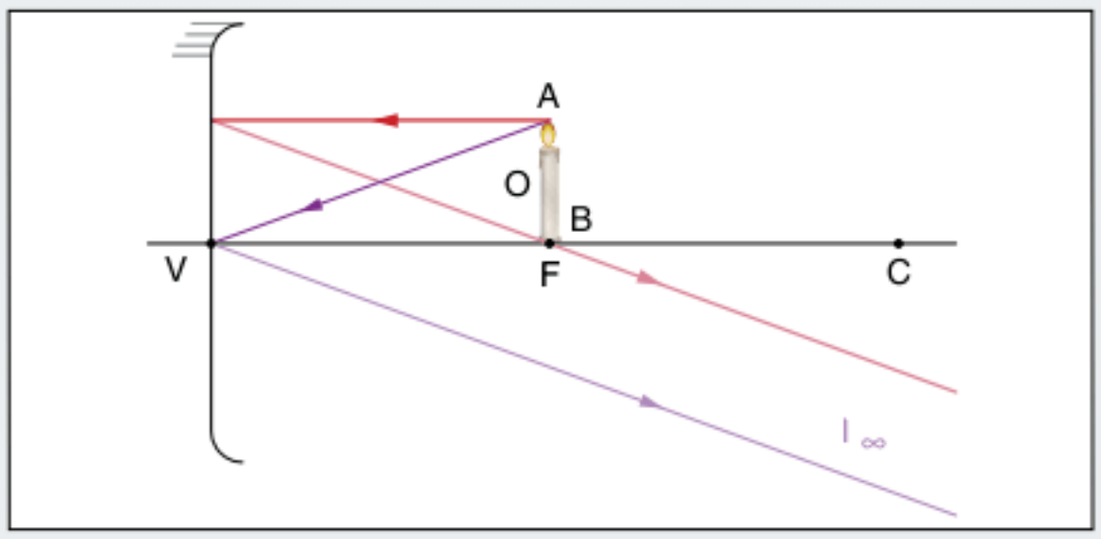
Caso 3: Objeto situado entre o centro de curvatura C e o foco F. Imagem conjugada:



Objeto entre o foco e o centro de curvatura.

$$\text{Imagem:}\begin{cases} \text{Real} \\ \text{Invertida} \\ \text{Maior} \\ \text{Depois de C} \end{cases}$$

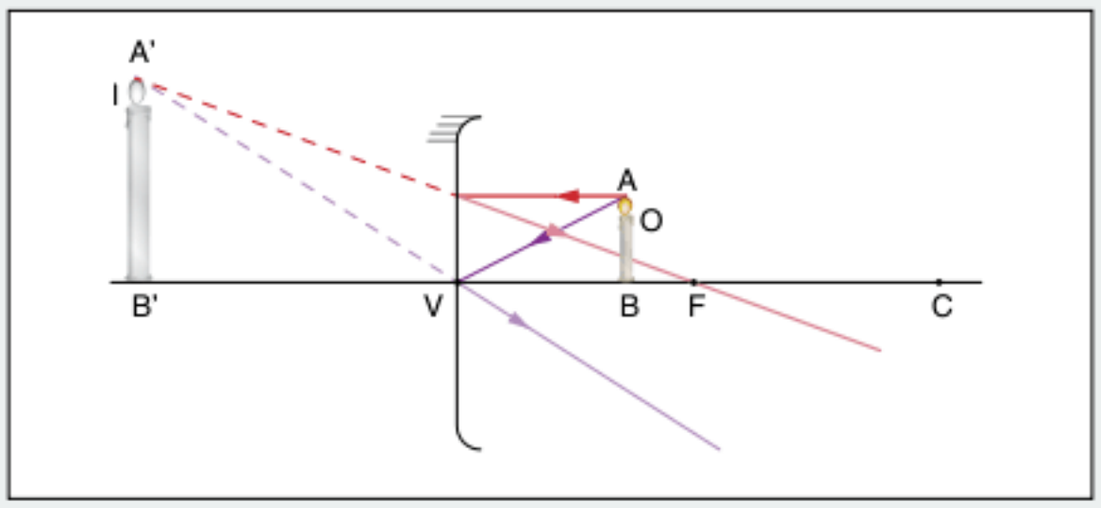
Caso 4: Objeto situado sobre o foco F. Imagem conjugada no infinito (imprópria).



Objeto sobre o foco.

Imagem: {Imprópria

Caso 5: Objeto situado entre o foco F e o vértice V. Imagem conjugada:

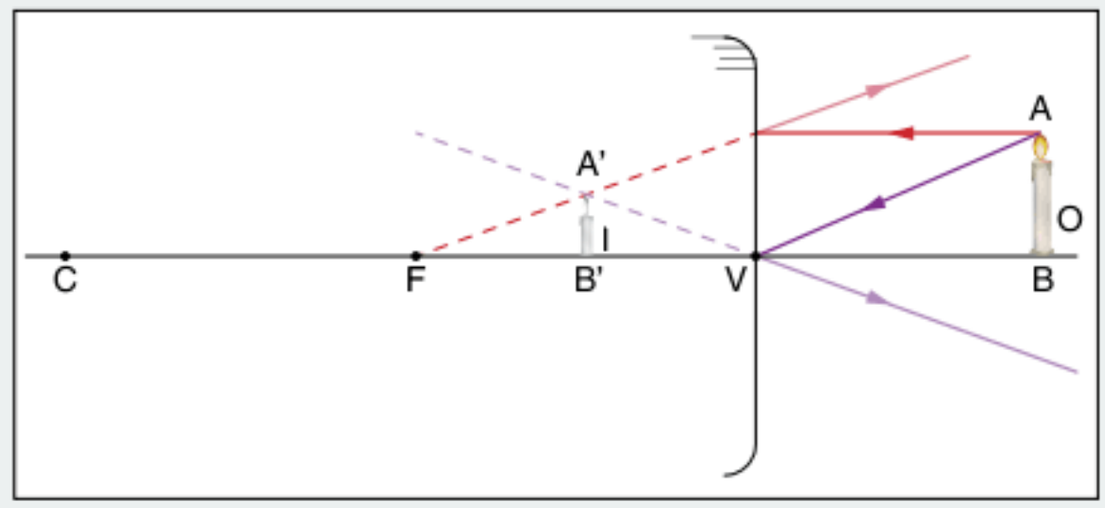


Objeto entre o vértice e o foco.

Imagem: { Virtual, Direita, Maior, Atrás do espelho }

Espelho convexo

Objeto situado na frente do espelho. Imagem conjugada:



Espelho convexo, caso único.

Imagem: { Virtual, Direita, Menor, Atrás do espelho }

Atenção para os sinais de P, P', F e A:

- Objeto real: $P > 0$
- Objeto virtual: $P < 0$
- Imagem real: $P' > 0$
- Imagem virtual: $P' < 0$
- Espelho côncavo: $R > 0$ e $F > 0$
- Espelho convexo: $R < 0$ e $F < 0$

- Imagem direita: i com o mesmo sinal de o
- Imagem invertida: i com o sinal contrário ao de o
- $A > 0$: imagem direita e consequentemente virtual
- $A < 0$: imagem invertida e consequentemente real e projetável
- $|A| > 1$: imagem maior que o objeto (imagem ampliada)
- $|A| < 1$: imagem menor que o objeto (imagem reduzida)
- $|A| = 1$: imagem igual ao objeto (imagem normal)

QUER SABER MAIS?

SITES

- Associação de espelhos planos
  <www.cienciamao.usp.br/dados/tex/_associacaodeespelhosplanos.flash.swf>.
- Monte seu caleidoscópio (em inglês)
  <www.metacafe.com/watch/714831/toy_kaleidoscope/>.

Exercícios complementares

Espelhos Planos

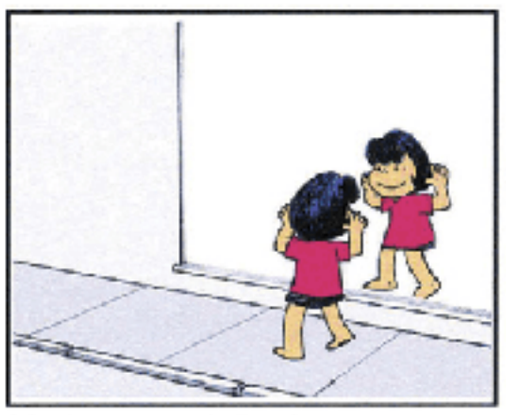
1 Um homem com 1,80 m de altura deseja mirar-se dos pés à cabeça em um espelho plano, quadrado, disposto verticalmente e com sua base paralela ao solo. Sendo a altura de seus olhos ao solo de 1,70 m, determine:

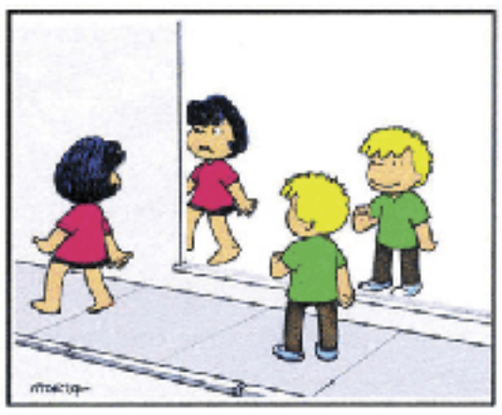
a) a menor medida admissível para o lado do espelho, a fim de que o homem consiga seu objetivo.

b) a distância da borda inferior do espelho ao solo, durante a observação do homem.

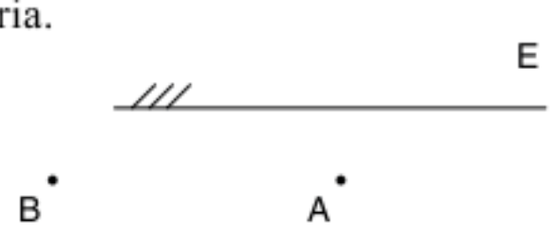
2 **FEI** Um objeto vertical AB, com altura de 80 cm, encontra-se diante de um espelho plano vertical E_p. Sabe-se que a imagem do ponto B encontra-se a 30 cm do espelho. Um raio de luz, partindo do ponto B, encontra o espelho num ponto C, segundo um ângulo de incidência α, e reflete-se passando pelo ponto A. Qual o valor de senα?

3 **UFRJ 2008** Os quadrinhos a seguir mostram dois momentos distintos. No primeiro quadrinho, Maria está na posição *A* e observa sua imagem fornecida pelo espelho plano *E*. Ela, então, caminha para a posição *B*, na qual não consegue mais ver sua imagem; no entanto, Joãozinho, posicionado em *A*, consegue ver a imagem de Maria na posição *B*, como ilustra o segundo quadrinho.


Maria na posição A


Maria na posição B e Joãozinho na posição A

Reproduza o esquema ilustrado abaixo e desenhe raios luminosos apropriados que mostrem como Joãozinho consegue ver a imagem de Maria.



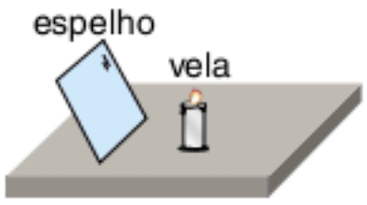
4 **FGV 2007** Leia o trecho da música "Espelho-d'Água", de Almir Sater e Renato Teixeira.

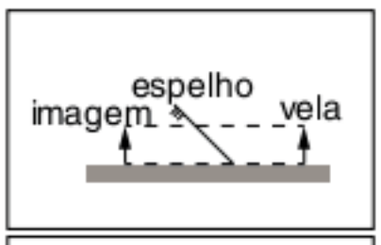
Emoção...
Os rios falam pelas cachoeiras,
Compaixão...
Os peixes nadam contra a correnteza,
Sim ou Não...
As dúvidas são partes da certeza,
Tudo é um rio refletindo a paisagem,
Espelho-d'água levando as imagens pro mar,
Cada pessoa levando um destino,
Cada destino levando um sonho...

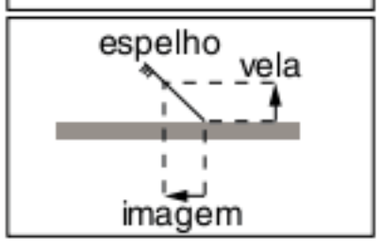
As águas límpidas e calmas de um rio podem se comportar como um espelho plano, refletindo a imagem dos objetos de uma paisagem de forma direta:

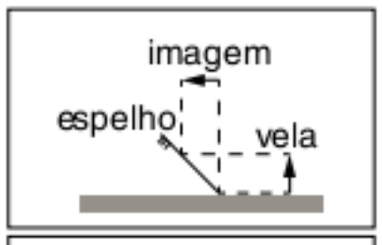
(a) real e de tamanho igual ao do objeto.
(b) virtual e de tamanho igual ao do objeto.
(c) real e de tamanho menor que o do objeto.
(d) virtual e de tamanho menor que o do objeto.
(e) real e de tamanho maior que o do objeto.

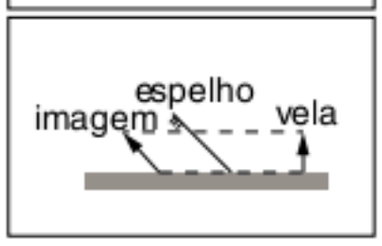
5 **UFMG 2006** Uma vela está sobre uma mesa, na frente de um espelho plano, inclinado, como representado na figura a seguir.
Assinale a alternativa cujo diagrama representa corretamente a formação da imagem do objeto, nessa situação.



(a)


(b)


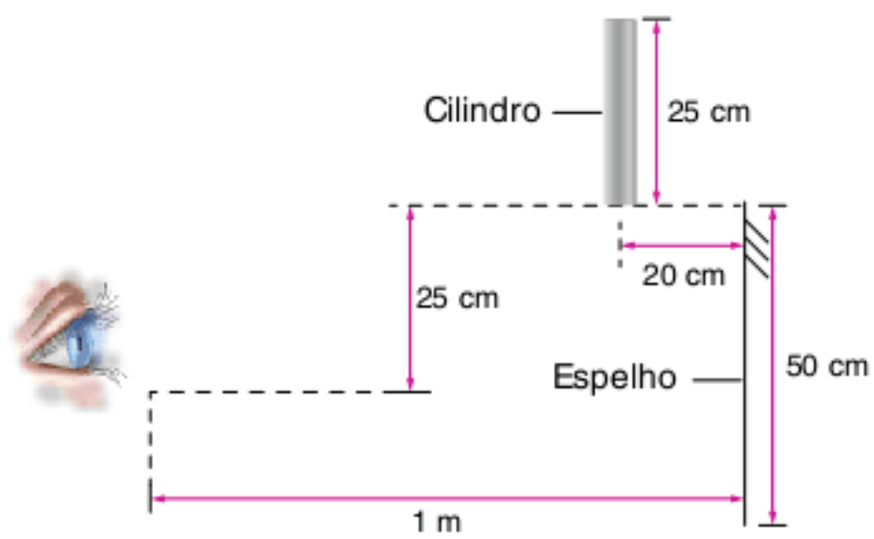
(c)


(d)


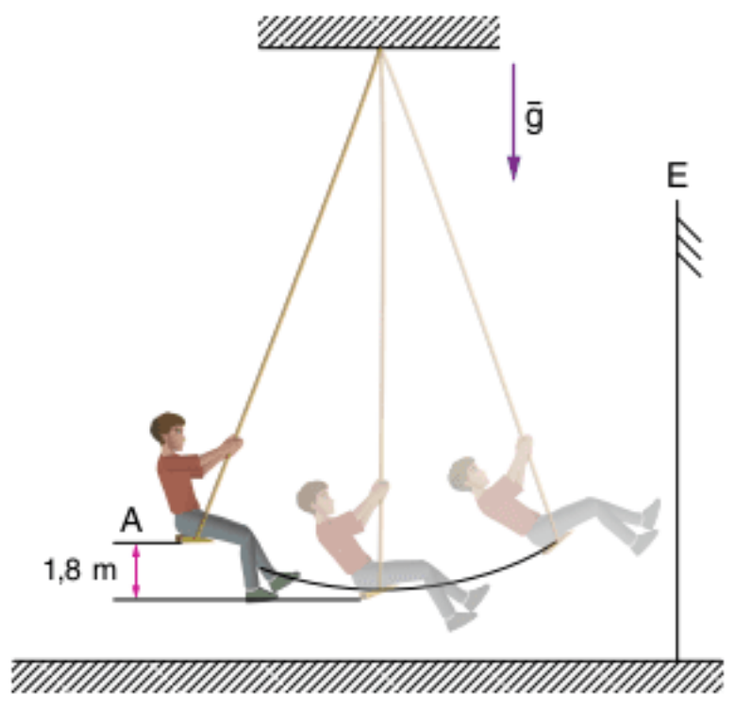
Movimentos de um espelho plano (translação e rotação)

6 Considere um corredor delimitado por duas paredes planas, verticais e paralelas entre si. Numa das paredes (**A**) está incrustada uma lâmpada puntiforme (**L**) acesa. Na outra parede (**B**) está fixado um espelho plano (MN), que reflete luz proveniente de **L**, iluminando a região M'N' da parede **A**. Considere que a parede **A** se aproxima da parede **B** com velocidade constante **v**. Determine a velocidade relativa entre M' e N'.

7 **Faap** Um cilindro de 25 cm de altura e de diâmetro desprezível foi abandonado de uma posição tal, que sua base inferior estava alinhada com a extremidade superior de um espelho plano de 50 cm de altura e a 20 cm deste. Durante sua queda, ele é visto, assim com a sua imagem, por um observador, que se encontra a 1 m do espelho e a meia altura deste (ver figura). Calcule por quanto tempo o observador ainda vê a imagem, mesmo que parcial, do cilindro, que permanece vertical durante a queda. Adote $g = 10\ m/s^2$.



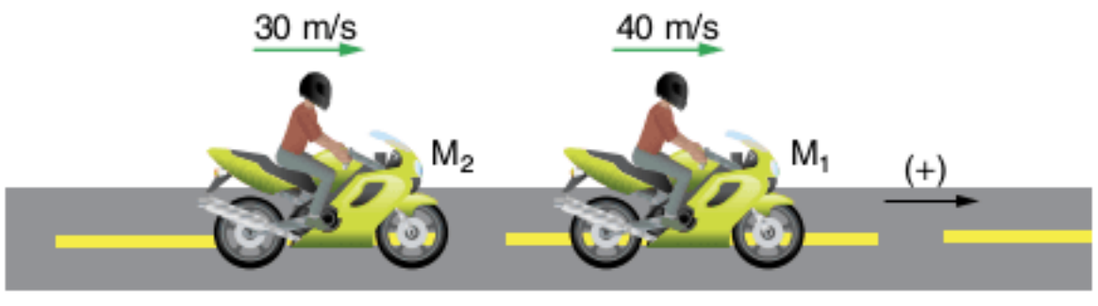
8 Na situação esquematizada, um garoto está balançando diante de um espelho plano **E** postado verticalmente sobre o solo. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $|\vec{g}| = 10\ m.s^{-2}$.



Se na posição **A** a velocidade do balanço é nula, então, o máximo valor do módulo da velocidade do garoto em relação à sua imagem fornecida por **E** é:

(a) $3{,}0\ m \cdot s^{-1}$
(b) $6{,}0\ m \cdot s^{-1}$
(c) $9{,}0\ m \cdot s^{-1}$
(d) $12{,}0\ m \cdot s^{-1}$
(e) $15{,}0\ m \cdot s^{-1}$

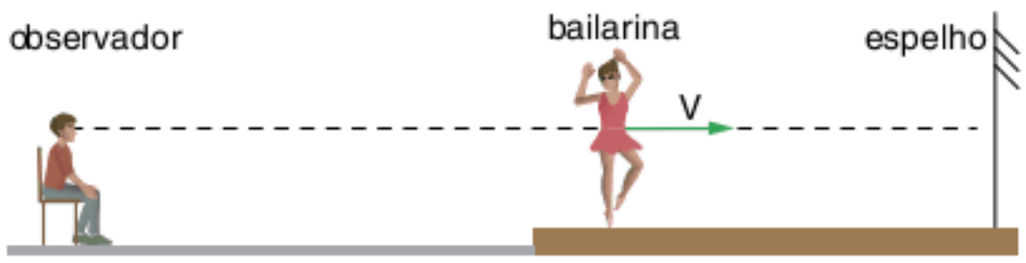
9 No esquema a seguir, são representadas as motos M_1 e M_2 em movimento uniforme em um trecho retilíneo de uma estrada. Suas velocidades escalares, dadas de acordo com a orientação da trajetória, estão indicadas na figura:



Sabendo que a moto M_1 é equipada com um espelho retrovisor plano, calcule para a imagem de M_2, conjugada pelo referido espelho:

a) a velocidade escalar em relação ao espelho.
b) a velocidade escalar em relação a M_2.
c) a velocidade escalar em relação à Terra.

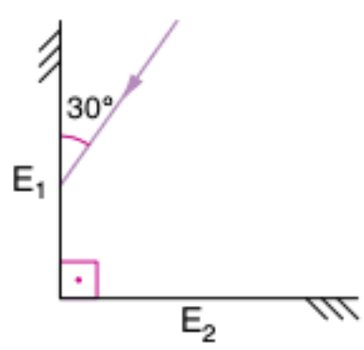
10 **UFMS 2007** Um grande espelho plano serve como pano de fundo em um palco de teatro, durante a apresentação de uma dança. A bailarina se coloca entre o espelho e o público, que assiste à dança. Um observador do público está em uma posição da qual, num dado momento, vê a imagem refletida da bailarina no espelho e vê também a bailarina na mesma linha de seus olhos (veja a figura). Nesse momento, a bailarina se aproxima do espelho com velocidade V com relação ao palco. Se a bailarina vê sua própria imagem e também a do observador refletida no espelho, é correto afirmar que:



(a) o observador percebe que a imagem da bailarina, refletida no espelho, aproxima-se dele com velocidade 2V.
(b) a bailarina percebe que a imagem do observador, refletida no espelho, aproxima-se dela com velocidade 2V
(c) a bailarina percebe que sua própria imagem, refletida no espelho, aproxima-se dela com velocidade 2V.
(d) a imagem refletida da bailarina no espelho é uma imagem real.
(e) a distância da bailarina até o espelho é o dobro da distância da bailarina até sua imagem refletida.

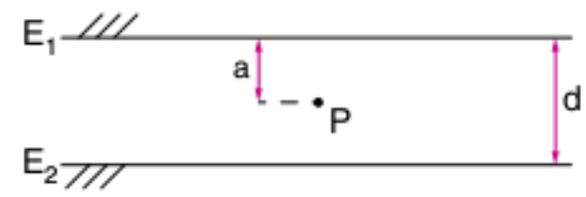
Associação de espelhos planos

11 Na figura a seguir, os espelhos planos E_1 e E_2 são perpendiculares. Um raio luminoso incide no espelho E_1 formando 30° com a superfície refletora, conforme está indicado:



Represente a trajetória da luz até que esta deixe o sistema de espelhos.

12 Um objeto P está entre dois espelhos planos e paralelos. E_1 e E_2, conforme a figura.

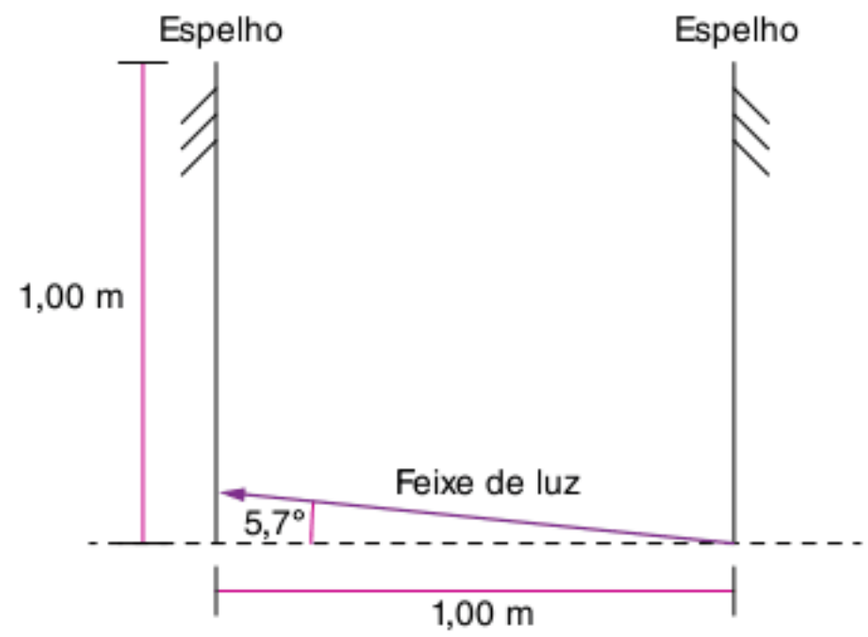


Sabendo-se que a distância entre os espelhos é **d** e que o objeto P dista **a** do espelho E_1, determine a distância entre as duas primeiras imagens formadas (imagens formadas por simples reflexão).

13 Dois espelhos planos paralelos, E_1 e E_2, estão frente a frente separados pela distância de 20 cm. Entre eles há uma fonte luminosa F, de pequenas dimensões.

a) Calcule a distância entre a primeira imagem fornecida pelo espelho E_1 e a primeira imagem fornecida pelo espelho E_2.
b) A distância calculada no item a depende da posição de F em relação a E_1 e E_2?

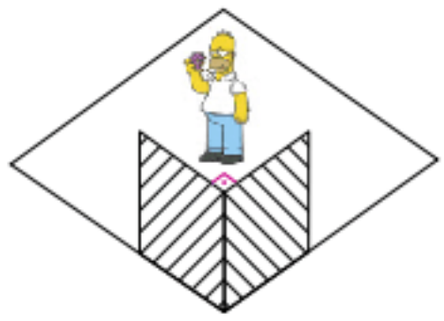
14 **CFTCE** Dois espelhos planos, dispostos paralelamente, têm suas faces refletoras voltadas uma para a outra. Um raio de luz penetra na região entre os espelhos, fazendo um ângulo de 5,7° com a horizontal, conforme a figura. O número de reflexões que o raio sofre, até deixar a região entre os espelhos, é: (use tg 5,7° = 0,1).

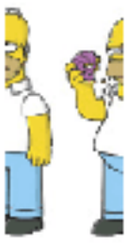


(a) 4
(b) 5
(c) 6
(d) 7
(e) 8

15 **UFRGS** A figura a seguir representa a vista frontal de Homer comendo em frente a dois espelhos planos, posicionados perpendicularmente entre si.

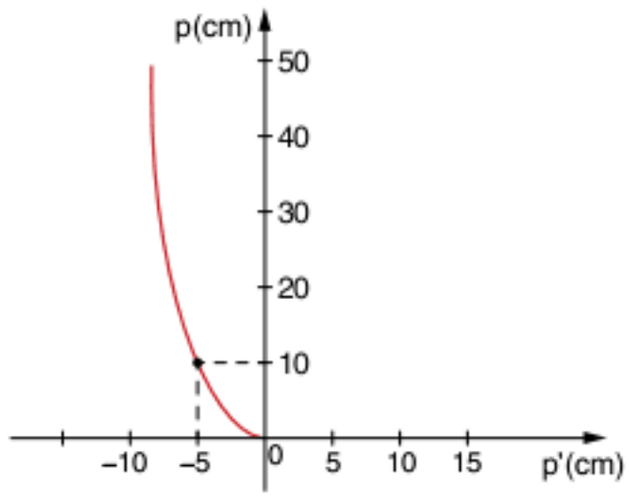
Assinale a alternativa que representa a imagem que Homer observa nos espelhos.



(a)
(b)
(c)
(d)
(e) 

Espelhos esféricos

16 Um objeto é colocado sobre o eixo de um espelho convexo. O gráfico seguinte representa, respectivamente, as posições P e P' do objeto e de sua imagem, ambas em relação ao vértice do espelho:



Qual é a distância focal desse espelho, em cm?

17 Considere um espelho côncavo de aumento, com distância focal F = 1,0 m, usado para uma pessoa fazer a barba. Calcule a distância do rosto ao espelho para que a imagem do rosto esteja ampliada 2 vezes.

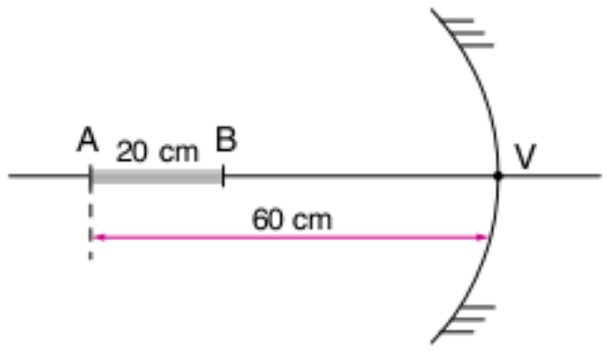
18 Diante de um espelho esférico, perpendicularmente ao seu eixo principal, é colocado um objeto luminoso a 15 cm do vértice. Deseja-se que a imagem correspondente seja projetada em um anteparo e tenha quatro vezes o comprimento do objeto. Determine:

a) se a imagem é real ou virtual, direita ou invertida.
b) a distância do anteparo ao vértice do espelho, para que a imagem seja nítida.
c) a distância focal do espelho.

19 Uma vela acesa de 18 cm de comprimento é colocada sobre o eixo principal de um espelho esférico, a 60 cm do vértice. A imagem real correspondente forma-se a 30 cm do espelho. Determine:

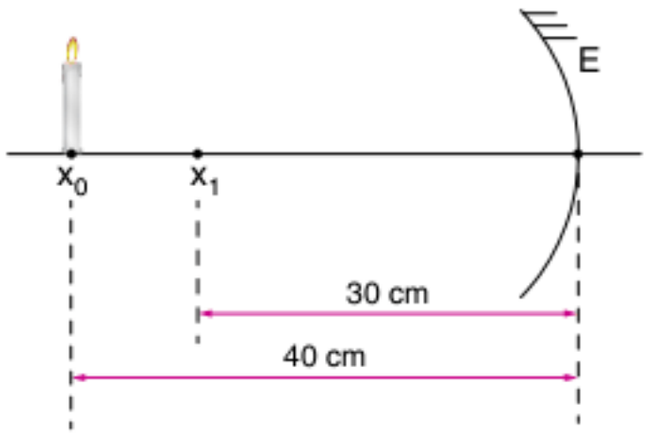
a) se o espelho é côncavo ou convexo.
b) o comprimento da imagem.
c) o traçado gráfico do objeto e de sua imagem conjugada pelo espelho.

20 Uma barra AB de 20 cm de comprimento está colocada sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo. A extremidade B encontra-se sobre o centro de curvatura do espelho, enquanto a extremidade A encontra-se a 60 cm do espelho, conforme mostra a figura. Determine:



a) a distância focal do espelho.
b) o comprimento da imagem da barra conjugada pelo espelho.

21 Em uma experiência de óptica geométrica, dispuseram-se um toco de vela e um espelho côncavo gaussiano E, de distância focal igual a 20 cm, como mostra a figura:



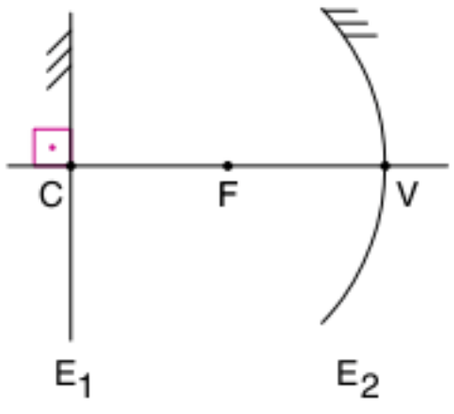
O toco de vela foi deslocado de x_0 a x_1, com velocidade escalar de módulo 1,0 cm/s. Enquanto o toco de vela foi deslocado, qual foi o módulo da velocidade escalar média da imagem, expressa em cm/s?

22 **UFSC** A distância entre a imagem e um objeto colocado em frente a um espelho côncavo é de 16 cm. Sabendo-se que a imagem é direita e 3 vezes maior, determine o raio de curvatura do espelho, em cm.

23 **Unitau** Um objeto retilíneo, de altura **h**, está diante de um espelho côncavo, de raio de curvatura R, a uma distância **d** do mesmo. Para que a sua imagem seja real e tenha altura h/2, a distância **d** deve valer:

(a) $\frac{R}{3}$
(b) $\frac{2R}{3}$
(c) $\frac{3R}{4}$
(d) $\frac{3R}{2}$
(e) 3R

24 No esquema a seguir, E_1 é um espelho plano e E_2 é um espelho esférico côncavo de raio de curvatura R = 60 cm:



C, **F** e **V** são, respectivamente, em relação a E_2, o centro de curvatura, o foco e o vértice. Em **F**, é colocada uma fonte pontual de luz. Determine a distância da fonte à sua imagem, considerando que a luz sofre dupla reflexão, primeiramente em E_1 e posteriormente em E_2.

25 **Fuvest** A imagem de um objeto forma-se a 40 cm de um espelho côncavo com distância focal de 30 cm. A imagem formada situa-se sobre o eixo principal do espelho, é real, invertida e tem 3 cm de altura.

a) Determine a posição do objeto.
b) Determine a altura do objeto.
c) Construa o esquema referente à questão, representando objeto, imagem espelho e raios utilizados e indicando as distâncias envolvidas.

26 **Faap** Um objeto de 75 mm de altura é colocado perpendicularmente ao eixo principal de um espelho esférico côncavo, de distância focal igual a 30 cm. Obtém-se um aumento de 1,5. A imagem sendo real, pergunta-se:

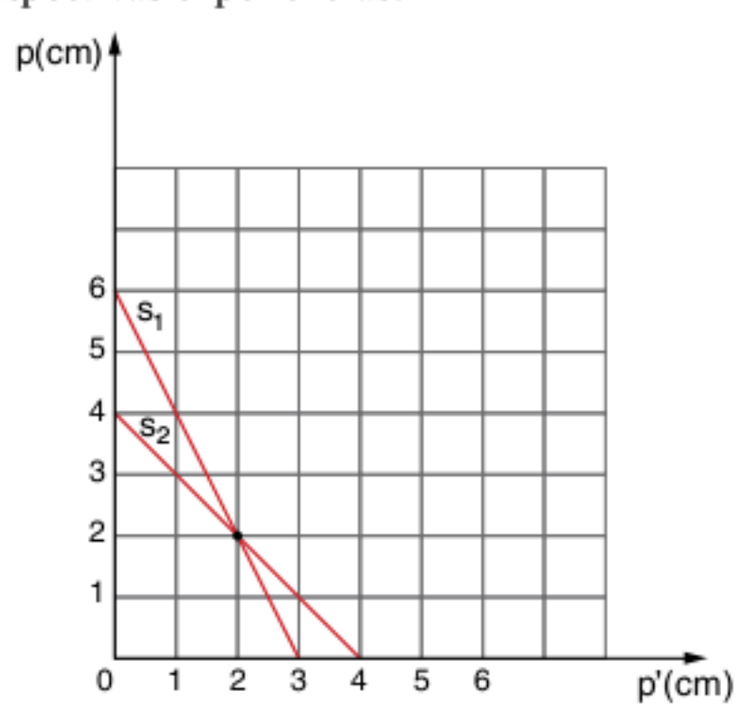
a) qual é a altura da imagem obtida? Ela é direita ou invertida?
b) qual é a distância da imagem ao espelho?
c) qual é a distância do objeto ao espelho?

27 **ITA** Seja E um espelho côncavo cujo raio de curvatura é 60,0 cm. Que tipo de imagem obteremos se colocarmos um objeto real de 12,0 cm de altura, verticalmente, a 20 cm do vértice de E?

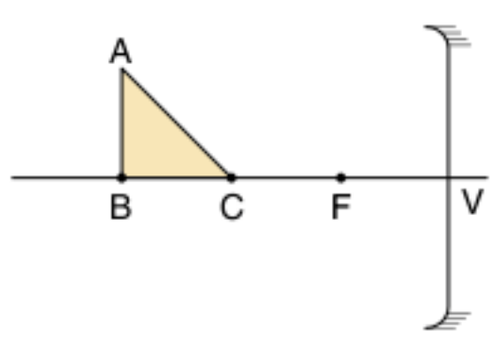
(a) Virtual e reduzida a 4,0 cm de altura.
(b) Real e colocada a 60,0 cm da frente do espelho.
(c) Virtual e três vezes mais alta que o objeto, isto é, com 36,0 cm.
(d) Real, invertida e de tamanho igual ao do objeto.
(e) Virtual, direita e com 18,0 cm de altura.

28 No plano cartesiano da figura a seguir, foram representados nos eixos cartesianos valores de abscissas de objeto (p) e de imagem (p') conjugados por um espelho esférico. Duas experiências foram representadas pelas respectivas retas suportes s_1 e s_2 de acordo com o Método Gráfico de Coordenadas. Determine:

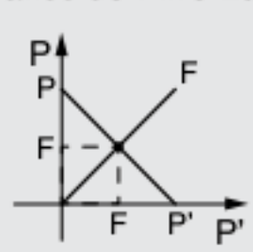
a) a distância focal e o raio de curvatura do espelho.
b) na 1ª experiência, as abscissas do objeto e da imagem.
c) na 2ª experiência, as abscissas do objeto e da imagem.
d) os aumentos lineares transversais A_1 e A_2 para cada uma das respectivas experiências.



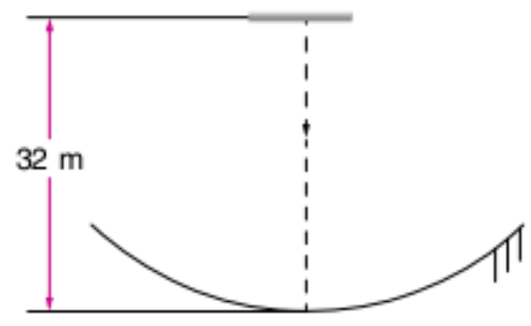
29 O triângulo retângulo ABC da figura tem o cateto $\overline{BC}$ sobre o eixo principal do espelho esférico, de centro de curvatura C e raio 12 cm. O cateto $\overline{AB}$, perpendicular ao eixo, tem 8,0 cm de comprimento, ao passo que $\overline{BC}$ tem 6,0 cm de comprimento. Determine a área da imagem do triângulo ABC.
Obs.: faça a figura da imagem.



A questão 29 deve ser resolvida pelo método gráfico de Pirre Lucie.



30 **IME 2008** Uma pequena barra metálica é solta no instante t = 0 s do topo de um prédio de 32 m de altura. A aceleração da gravidade local é 10 m/s².



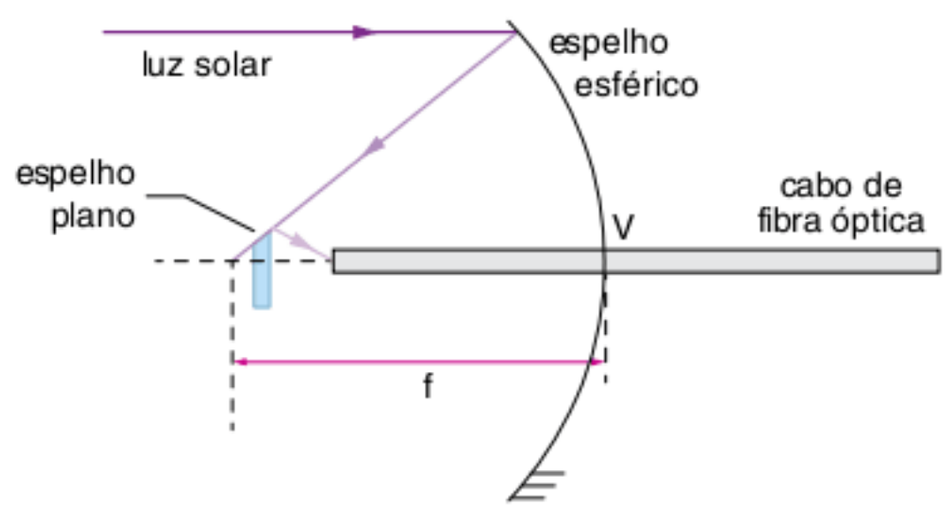
A barra cai na direção de um espelho côncavo colocado no solo, conforme indicado na figura. Em certo instante, a imagem da barra fica invertida, 30 cm acima da barra e quatro vezes maior que ela. O instante em que isso ocorre é, aproximadamente:

(a) 2,1 s
(b) 2,2 s
(c) 2,3 s
(d) 2,4 s
(e) 2,5 s

31 **ITA 2009** Um espelho esférico convexo reflete uma imagem equivalente a 3/4 da altura de um objeto dele situado a uma distância p_1. Então, para que essa imagem seja refletida com apenas 1/4 da sua altura, o objeto deverá se situar a uma distância p_2 do espelho, dada por:

(a) $p_2 = 9p_1$
(b) $p_2 = \frac{9p_1}{4}$
(c) $p_2 = \frac{9p_1}{7}$
(d) $p_2 = \frac{15p_1}{7}$
(e) $p_2 = \frac{-15p_1}{7}$

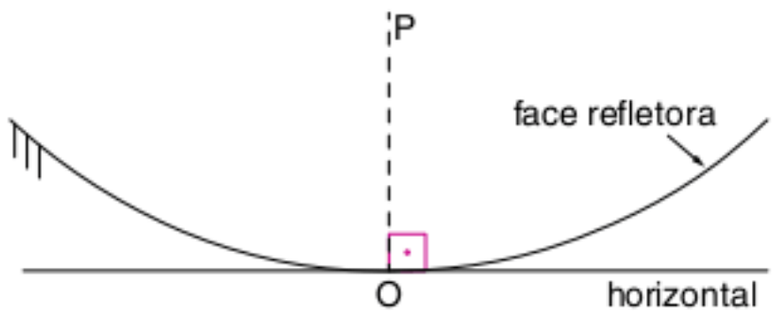
32 **Unesp 2007** Um pesquisador decide utilizar a luz solar concentrada em um feixe de raios luminosos para confeccionar um bisturi para pequenas cirurgias. Para isso, construiu um coletor com um espelho esférico, para concentrar o feixe de raios luminosos, e um pequeno espelho plano, para desviar o feixe em direção à extremidade de um cabo de fibra óptica. Este cabo capta e conduz o feixe concentrado para a sua outra extremidade, como ilustrado na figura.



Em uma área de 1 mm², iluminada pelo sol, a potência disponível é 0,001 W/mm². A potência do feixe concentrado que sai do bisturi óptico, transportada pelo cabo, cuja seção tem 0,5 mm de raio, é de 7,5 W. Assim, a potência disponibilizada por unidade de área (utilize $\pi = 3$) aumentou por um fator de:

(a) 10.000
(b) 4.000
(c) 1.000
(d) 785
(e) 100

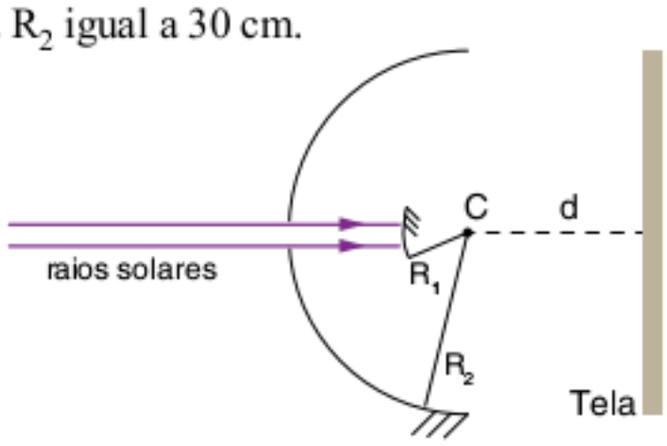
33 **UFC 2010** A figura mostra um espelho esférico côncavo de raio de curvatura *R*, apoiado sobre a horizontal, com a face refletora voltada para cima. A reta tracejada vertical $\overline{OP}$ passa sobre o ponto correspondente ao centro do espelho esférico. Determine a distância y, acima do ponto O e ao longo da reta $\overline{OP}$, para a qual ocorrerá maior incidência de luz solar refletida no espelho, suposta de incidência vertical. Considere o espelho esférico com pequeno ângulo de abertura, de modo que os raios incidentes são paralelos e próximos ao seu eixo principal.



Assinale a alternativa que apresenta corretamente essa distância.

(a) $\frac{R}{2}$
(b) $\frac{3R}{4}$
(c) R
(d) $\frac{3R}{2}$
(e) 2R

34 **UFRJ 2008** Um dispositivo para a observação da imagem do Sol é constituído por dois espelhos esféricos concêntricos e uma tela, como ilustra a figura a seguir. O espelho convexo tem raio de curvatura R_1 igual a 12 cm e o espelho côncavo tem raio de curvatura R_2 igual a 30 cm.



Calcule o valor da distância (d) entre a tela e o centro de curvatura C, comum aos dois espelhos, quando a imagem do Sol se forma com nitidez sobre a tela.

35 **FGV 2008**

LUA NA AGUA
ALGUMA LUA
LUA ALGUMA

Paulo Leminski

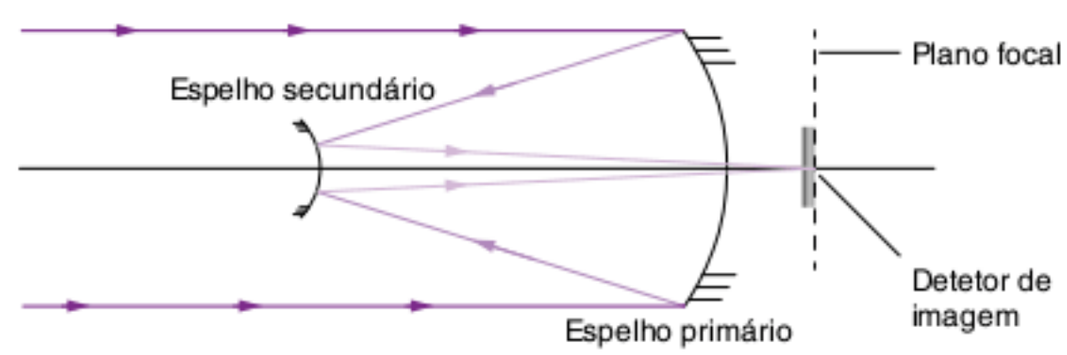
Nesse poema, Paulo Leminski brinca com a reflexão das palavras, dando forma e significado a sua poesia ao imaginar a reflexão em um espelho-d'água. Para obter o mesmo efeito de inversão das letras, se os dizeres da primeira linha estiverem sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo, com sua escrita voltada diretamente à face refletora do espelho, o texto corretamente grafado e o anteparo onde será projetada a imagem devem estar localizados sobre o eixo principal, nessa ordem:

(a) no mesmo lugar e sobre o foco.
(b) no mesmo lugar e sobre o vértice.
(c) no centro de curvatura e sobre o foco.
(d) no foco e sobre o centro de curvatura.
(e) no mesmo lugar e sobre o centro de curvatura.

36 **UFPR 2008** Mãe e filha visitam a "Casa dos Espelhos" de um parque de diversões. Ambas se aproximam de um grande espelho esférico côncavo. O espelho está fixo no piso de tal forma que o ponto focal F e o centro de curvatura C do espelho ficam rigorosamente no nível do chão. A criança para em pé entre o ponto focal do espelho e o vértice do mesmo. A mãe pergunta à filha como ela está se vendo e ela responde:

(a) "Estou me vendo maior e em pé".
(b) "Não estou vendo imagem alguma".
(c) "Estou me vendo menor e de cabeça para baixo".
(d) "Estou me vendo do mesmo tamanho".
(e) "Estou me vendo em pé e menor".

37 **UFF 2005** O telescópio refletor Hubble foi colocado em órbita terrestre de modo que, livre das distorções provocadas pela atmosfera, tem obtido imagens espetaculares do universo. O Hubble é constituído por dois espelhos esféricos, conforme mostra a figura abaixo. O espelho primário é côncavo e coleta os raios luminosos oriundos de objetos muito distantes, refletindo-os em direção a um espelho secundário, convexo, bem menor que o primeiro. O espelho secundário, então, reflete a luz na direção do espelho principal, de modo que esta, passando por um orifício em seu centro, é focalizada em uma pequena região onde se encontram os detetores de imagem.



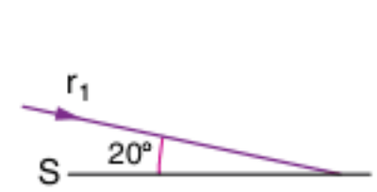
Com respeito a este sistema óptico, pode-se afirmar que a imagem que seria formada pelo espelho primário é:

(a) virtual e funciona como objeto virtual para o espelho secundário, já que a imagem final tem que ser virtual.
(b) real e funciona como objeto real para o espelho secundário, já que a imagem final tem que ser virtual.
(c) virtual e funciona como objeto virtual para o espelho secundário, já que a imagem final tem que ser real.
(d) real e funciona como objeto virtual para o espelho secundário, já que a imagem final tem que ser real.
(e) real e funciona como objeto real para o espelho secundário, já que a imagem final tem que ser real.

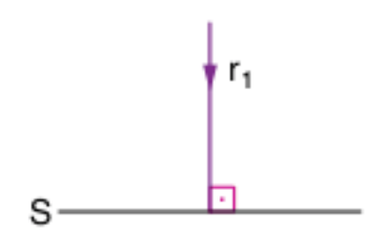
Questões gerais

38 Desenhe o raio de luz refletido pela superfície S e determine os ângulos de incidência (i) e de reflexão (r), nos casos abaixo:

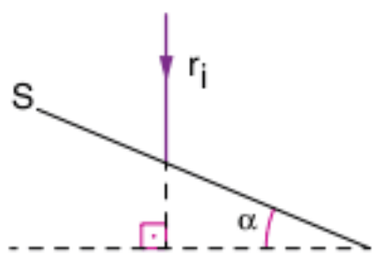
a)



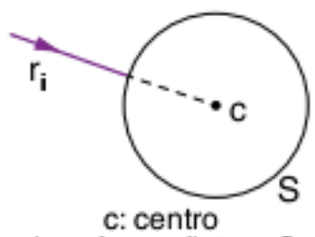
b)



c)

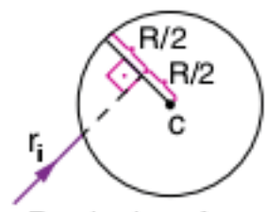


d)



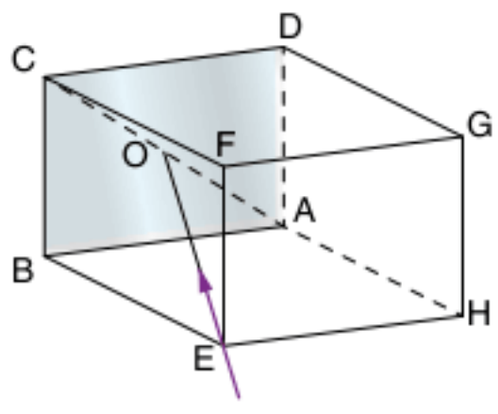
c: centro da esfera refletora S

e)



R: raio da esfera

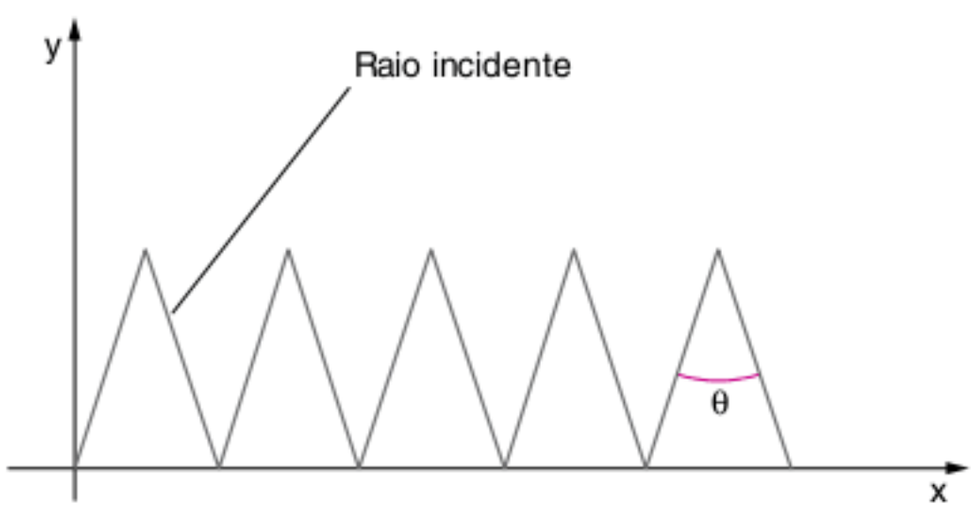
39 Considere a caixa cúbica representada a seguir, em que a face ABCD é espelhada de tal forma que a superfície refletora seja voltada para dentro da caixa:



Suponha que um raio luminoso penetre na caixa pelo vértice E e incida no ponto O, centro do espelho. Você poderá, então, afirmar que o correspondente raio refletido sairá da caixa pelo ponto:

(a) C
(b) G
(c) F
(d) H
(e) A

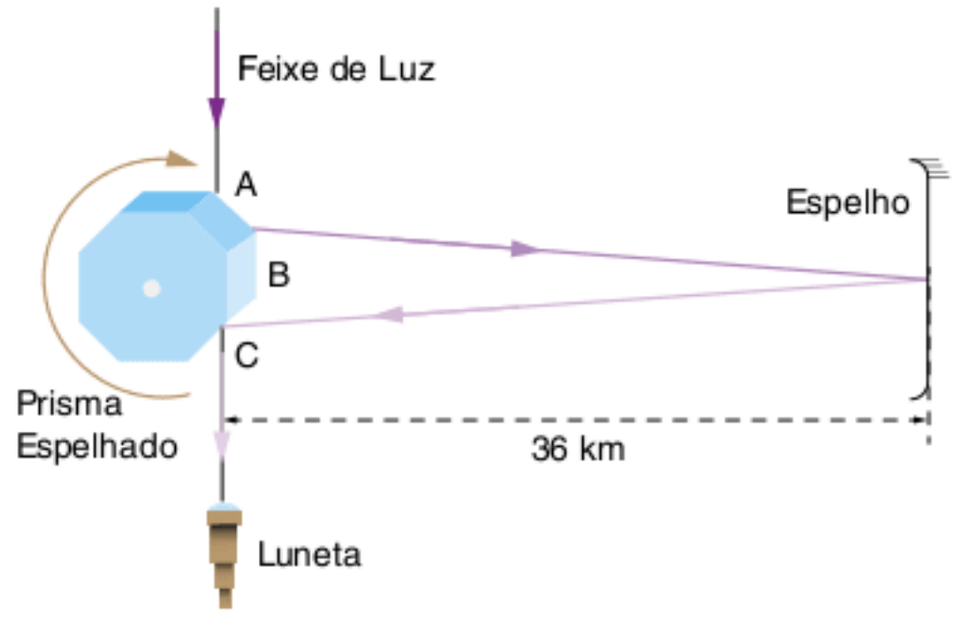
40 **Unir 2007** Um possível mecanismo pelo qual o chamado "avião invisível" seja dificilmente detectado por radares consiste na existência de pequenas saliências e reentrâncias na superfície do avião, como mostra a figura.



A partir dessas informações, assinale a afirmativa correta.

(a) Quanto menos o ângulo θ, menor o número de reflexões, independente do ângulo de incidência do raio.
(b) Qualquer incidência na direção do eixo y e para qualquer ângulo θ, resultaria em um número ímpar de reflexões.
(c) Se o ângulo θ for menor que 60°, o raio incidente fará infinitas reflexões, independente do ângulo de incidência.
(d) Para θ = 90°, o raio incidente retornaria na mesma direção, desde que se realizem duas reflexões.
(e) Se o ângulo θ for maior que 30°, o raio incidente fará apenas duas reflexões.

41 **UFBA 2009** A medida da velocidade da luz, durante muitos séculos, intrigou os homens. A figura mostra um diagrama de um procedimento utilizado por Albert Michelson, físico americano nascido na antiga Prússia. Um prisma octogonal regular com faces espelhadas é colocado no caminho óptico de um raio de luz. A luz é refletida na face A do prisma e caminha cerca de 36,0 km atingindo o espelho, no qual é novamente refletida, retornando em direção ao prisma espelhado onde sofre uma terceira reflexão na face C e é finalmente detectada na luneta. O procedimento de Michelson consiste em girar o prisma de modo que, quando o pulso de luz retornar, encontre a face B exatamente no lugar da face C.



Considerando que a velocidade da luz é igual a $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s e que a aresta do prisma é muito menor do que a distância entre o prisma e o espelho,

- calcule o tempo que um pulso de luz gasta para percorrer, ida e volta, a distância do prisma espelhado até o espelho;
- calcule a frequência de giro do prisma de modo que a face B esteja na posição da face C, quando o pulso de luz retornar.

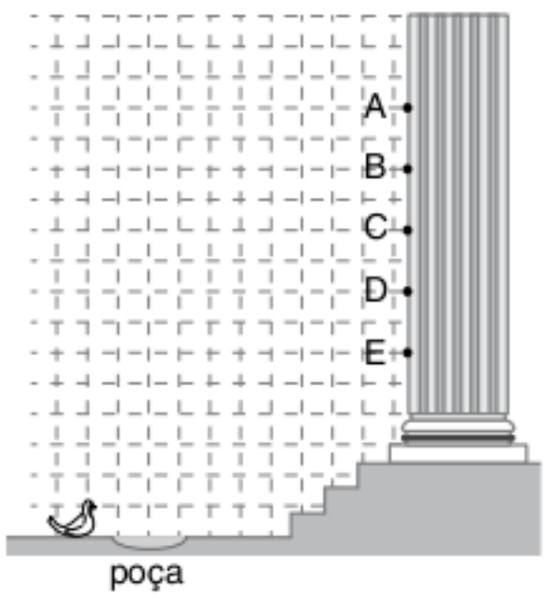
42 **FGV 2007**

A realidade e a imagem

O arranha-céu sobe no ar puro lavado pela chuva
E desce refletido na poça de lama do pátio.
Entre a realidade e a imagem, no chão seco que as separa,
Quatro pombas passeiam.

Manuel Bandeira.

Diante da suntuosa fachada neoclássica do arranha-céu, uma pomba observa o reflexo de parte de uma coluna em uma poça a sua frente.



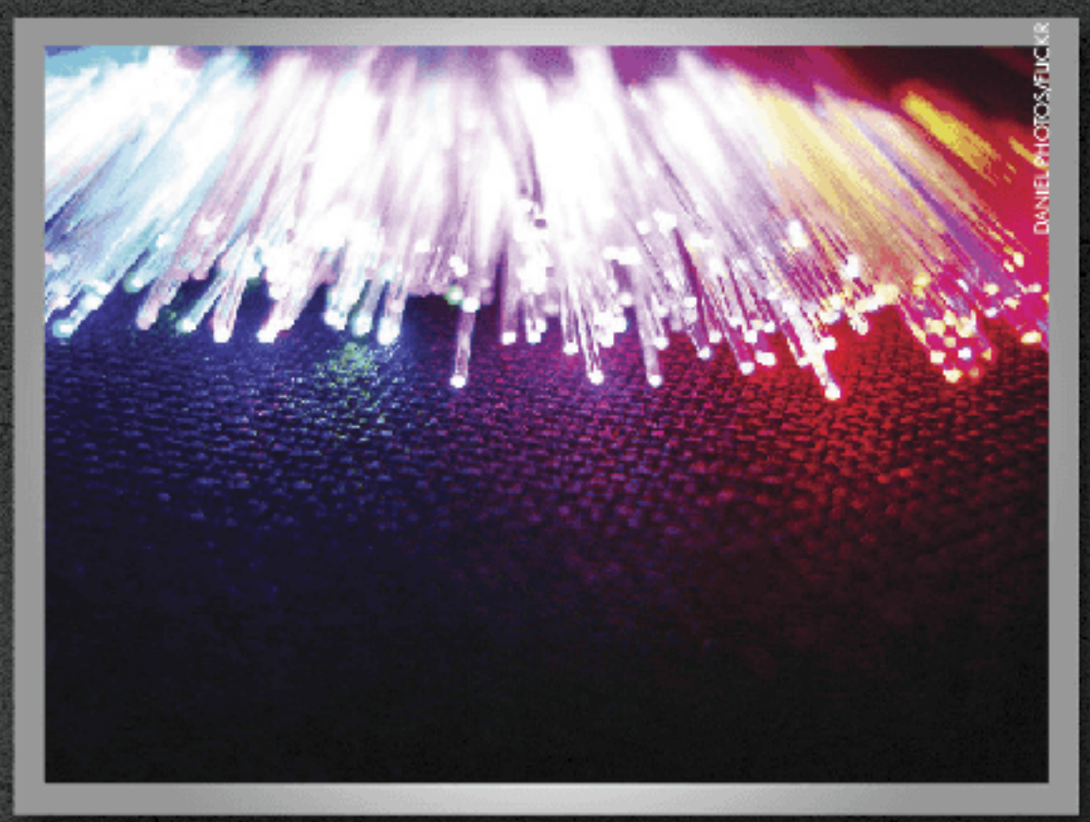
Dentre os pontos indicados, a pomba vê por reflexão, nessa poça, apenas:

(a) B
(b) C
(c) A e B
(d) B e C
(e) D e E

Refração da luz

9

FRENTE 3



DANIEL PHOTOS/FLICKR

Quando a luz passa de um meio para outro com características físicas diferentes, pode ocorrer uma mudança em sua velocidade de propagação e a luz pode ser desviada, um fenômeno conhecido como refração. A partir de um ângulo específico, o chamado ângulo crítico, o feixe luminoso não consegue retornar ao meio inicial, sofrendo reflexão interna total. Nas fibras ópticas, materiais como o vidro, com características ópticas específicas, permitem a transmissão de sinais luminosos por meio de reflexões internas sucessivas, transportando informações, com perda mínima, a grandes distâncias.

TIM WETHER/WIKIMEDIA COMMONS

Introdução

Como já foi visto em capítulos anteriores, a velocidade da luz é máxima no vácuo e, consequentemente, em qualquer meio material (água, vidro, cristal etc.) a velocidade é menor.

Dizemos que a luz sofre refração quando muda de meio de propagação, modificando sua velocidade de propagação.

Em geral, a refração é acompanhada por um desvio na trajetória original da luz, entretanto, existe um caso de refração no qual a luz não sofre desvio: é quando a luz incide normalmente à superfície de separação entre os meios (ângulo de incidência nulo).

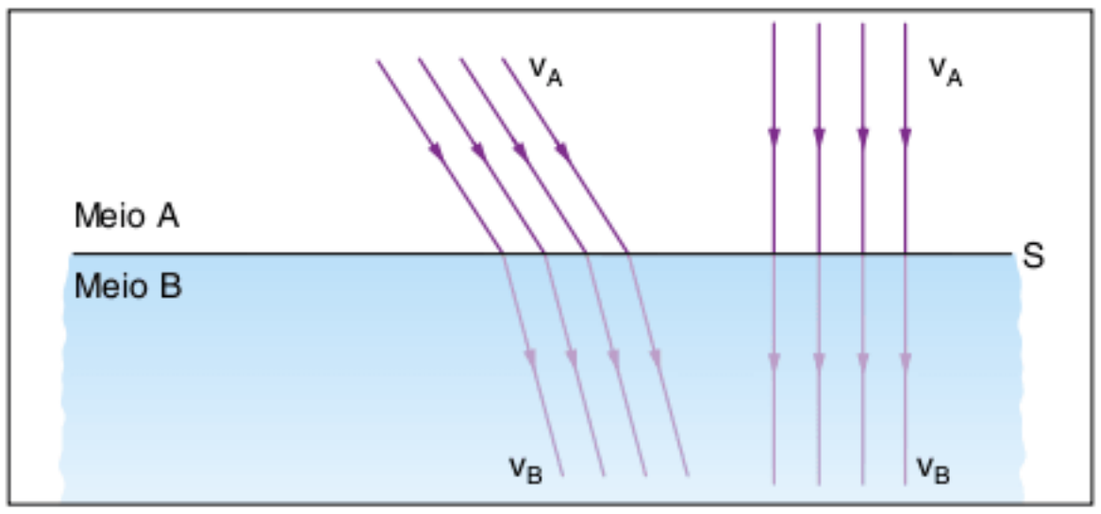


Fig. 1 Refração da luz.

Na figura anterior, S é a interface entre os meios A e B, isto é, a superfície de separação entre os meios de propagação da luz onde sua velocidade é, respectivamente, v_A e v_B.

Chama-se de dioptro ao conjunto:

- meio A
- meio B
- superfície de separação S

Nos dioptros reais, o fenômeno da refração é sempre acompanhado pelo fenômeno da reflexão da luz. Assim, o raio de luz incidente na superfície S gera dois raios: um refratado e outro refletido.

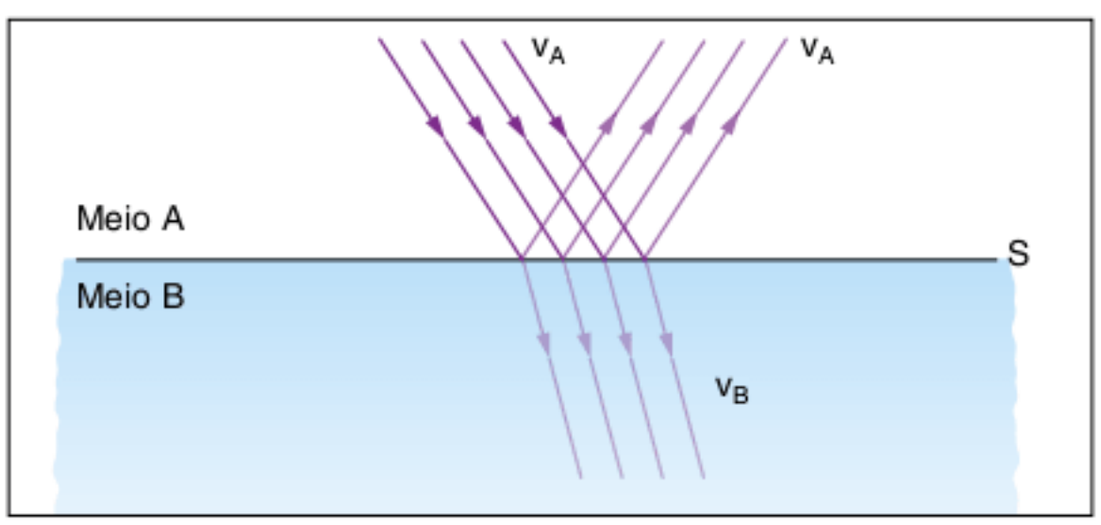


Fig. 2 Refração acompanhada de reflexão parcial.

ATENÇÃO!

Toda refração gera reflexão parcial. Além disso, é importante observar que parte da energia incidente em S é absorvida, e parte da energia luminosa incidente é transformada em energia térmica.

Em um dioptro ideal ou perfeito, a refração da luz não é acompanhada de reflexão nem de absorção.

Índice de refração

Seja c a velocidade da luz no vácuo e v a velocidade da luz em um dado meio, definimos o índice de refração absoluto do meio, denominado n, como sendo:

$$n = \frac{c}{v}$$

Observação: $n \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 1, \text{ (vácuo)} \\ n > 1, \text{ (meios materiais)} \end{cases}$

A partir da definição, temos que, quanto maior for o índice de refração absoluto do meio, menor é a velocidade da luz nesse meio.

Vale a pena observar que, em um dado meio, a velocidade de propagação depende da frequência da luz (lembre-se do capítulo anterior).

Observe a figura 3.

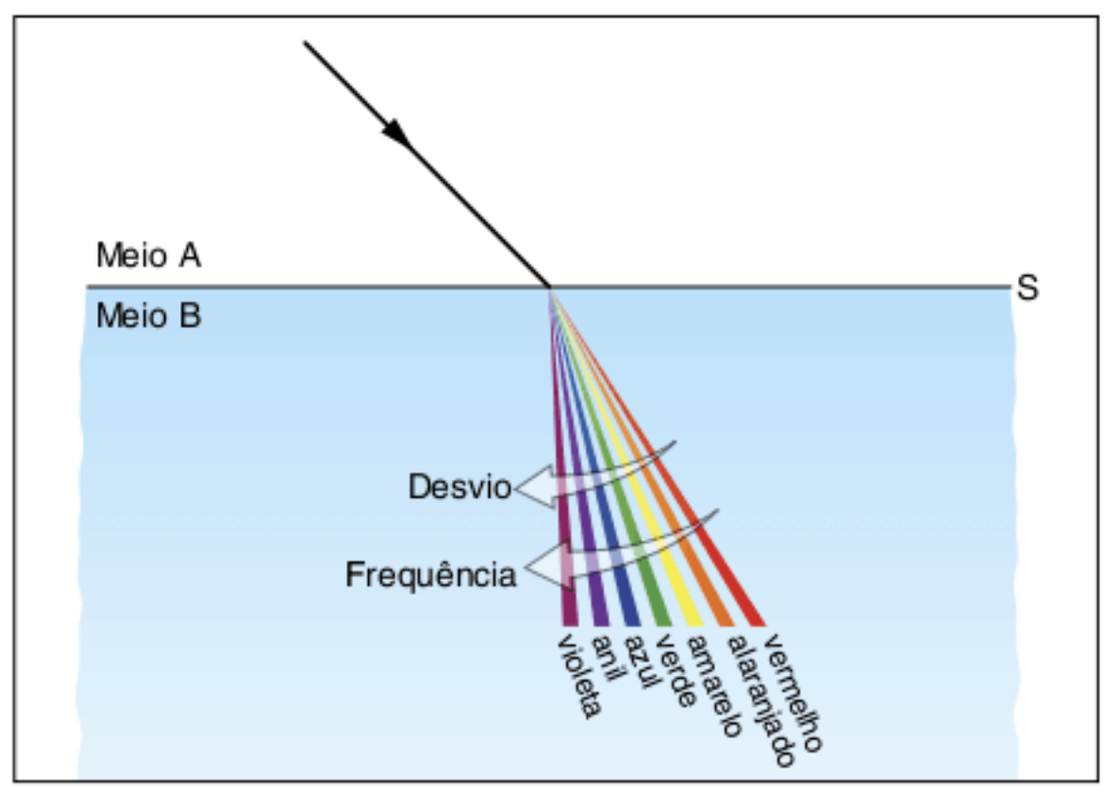


Fig. 3 Relação de n com a frequência e o desvio da luz.

ATENÇÃO!

O índice de refração absoluto é uma grandeza adimensional (sem unidade de medida).

Índice de refração relativo

Se n_A e n_B são, respectivamente, os índices de refração absolutos dos meios A e B para um dado feixe de luz monocromática, então definimos o índice de refração do meio A em relação ao meio B, $n_{A,B}$, como sendo:

$$n_{A,B} = \frac{n_A}{n_B}$$

Como:

$$n_A = \frac{c}{v_A} \text{ e } n_B = \frac{c}{v_B}$$

temos:

$$n_{A,B} = \frac{\frac{c}{v_A}}{\frac{c}{v_B}}$$

Logo:

$$n_{A,B} = \frac{n_A}{n_B} = \frac{v_B}{v_A}$$

Observe que, quanto maior o índice de refração relativo para os meios A e B, menor é a velocidade de propagação de uma luz monocromática em relação ao meio B.

Leis da refração

Considere um dioptro constituído por uma superfície de separação S e dois meios refringentes A e B, com índices de refração n_A e n_B, respectivamente. Considere agora um raio de luz monocromático incidente r_i na superfície no ponto I, gerando um raio refratado r_r. Observe a figura a seguir.

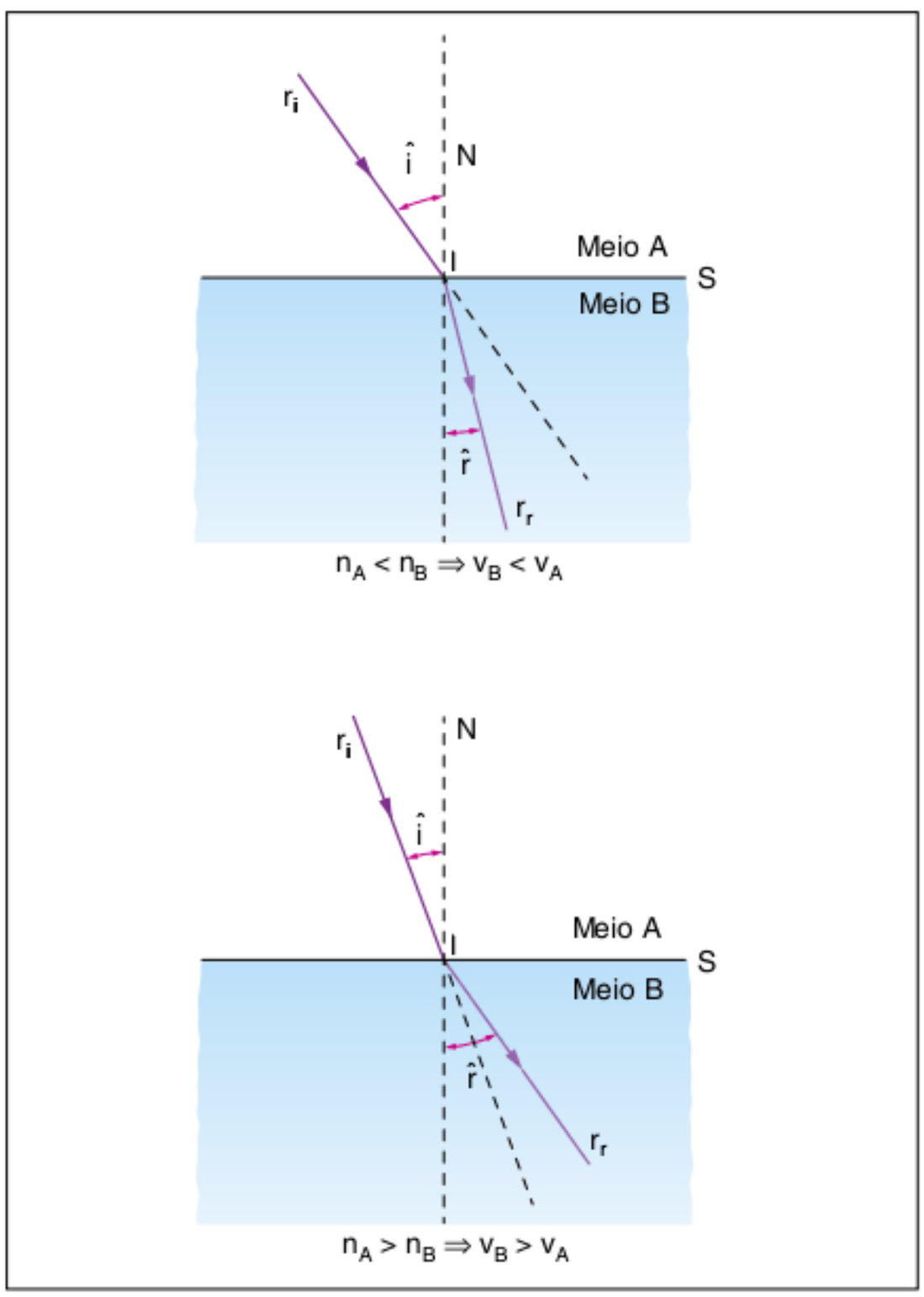


Fig. 4 Refração da luz.

Primeira lei da refração

O raio de luz incidente, o raio de luz refratado e a reta normal são coplanares.

ATENÇÃO!

Observe que o raio de luz incidente e o refratado ficam em lados opostos em relação à reta normal.

Segunda lei de refração

É constante a relação entre os senos dos ângulos de incidência e refração. Essa lei é conhecida por ***Lei de Snell-Descartes***.

$$n_A sen\hat{i} = n_B sen\hat{r}$$

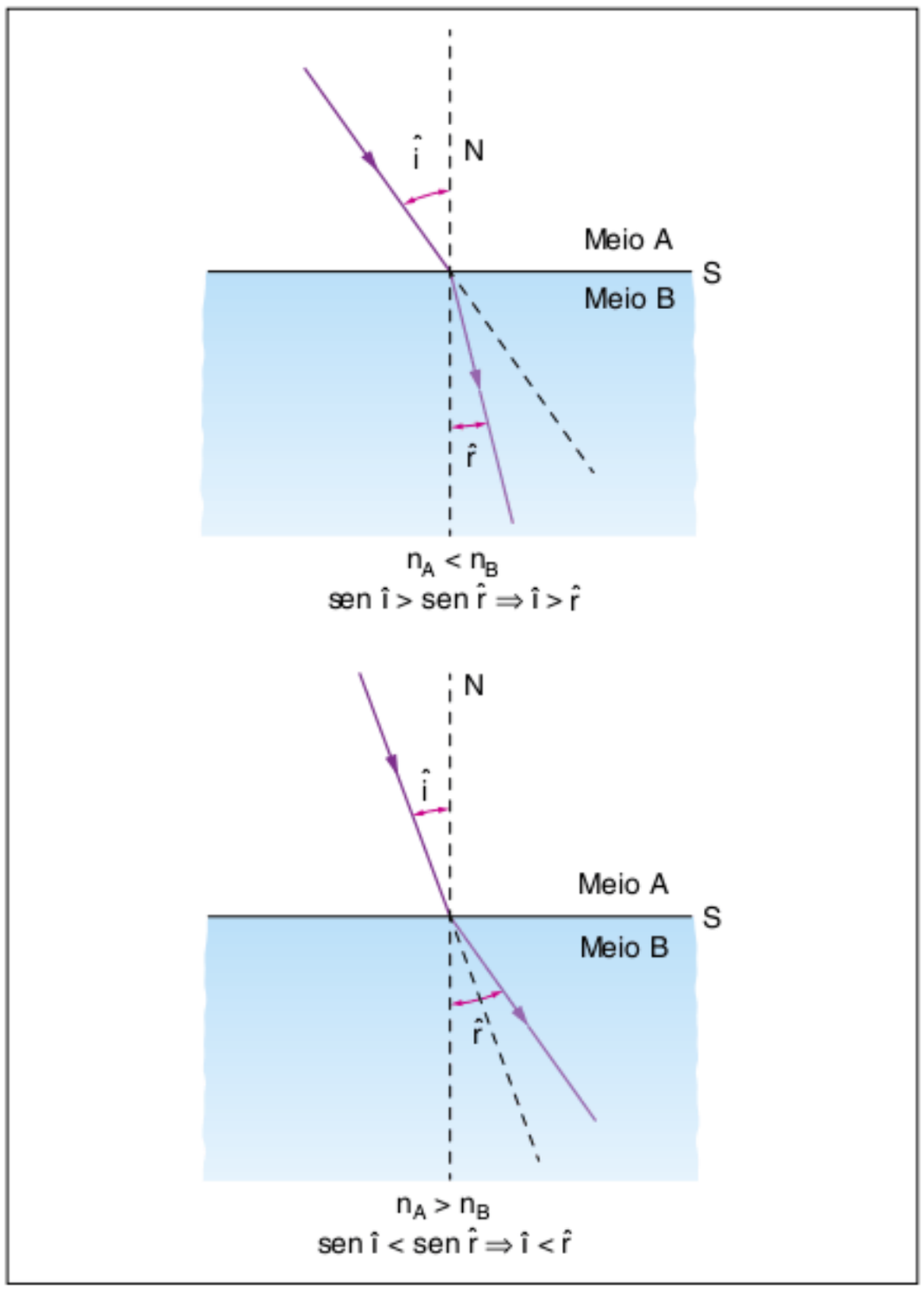


Fig. 5 Lei de Snell-Descartes.

em que:
i: ângulo de incidência.
r: ângulo de refração.

ATENÇÃO!

Semelhante à reflexão, os ângulos de incidência e de refração são sempre os ângulos formados com a reta normal.

Uma consequência direta da mudança de velocidade de propagação de um meio para o outro é que a luz poderá sofrer um desvio de direção no sentido de se aproximar ou de se afastar da reta normal. Só não ocorrerá um desvio da direção de propagação se a luz sofrer uma incidência normal ($\hat{i} = 0°$).

Para descrever o comportamento da luz na refração, observe:

$$n_{maior} \xrightarrow{\text{vai para}} n_{menor}$$
$$v_{menor} \xrightarrow{\text{vai para}} v_{maior}$$

∴ o raio de luz se afasta da reta normal

$$n_{menor} \xrightarrow{\text{vai para}} n_{maior}$$
$$v_{maior} \xrightarrow{\text{vai para}} v_{menor}$$

∴ o raio de luz se aproxima da reta normal

ATENÇÃO!

No meio mais refringente (n_{maior}), o ângulo que a luz forma e sua respectiva velocidade são menores em relação ao outro meio (n_{menor}).

Ângulo limite de incidência

Considere um raio de luz se propagando de um meio mais refringente A para um meio menos refringente B. Nesse caso, como já vimos, o raio refratado tende a se afastar da normal.

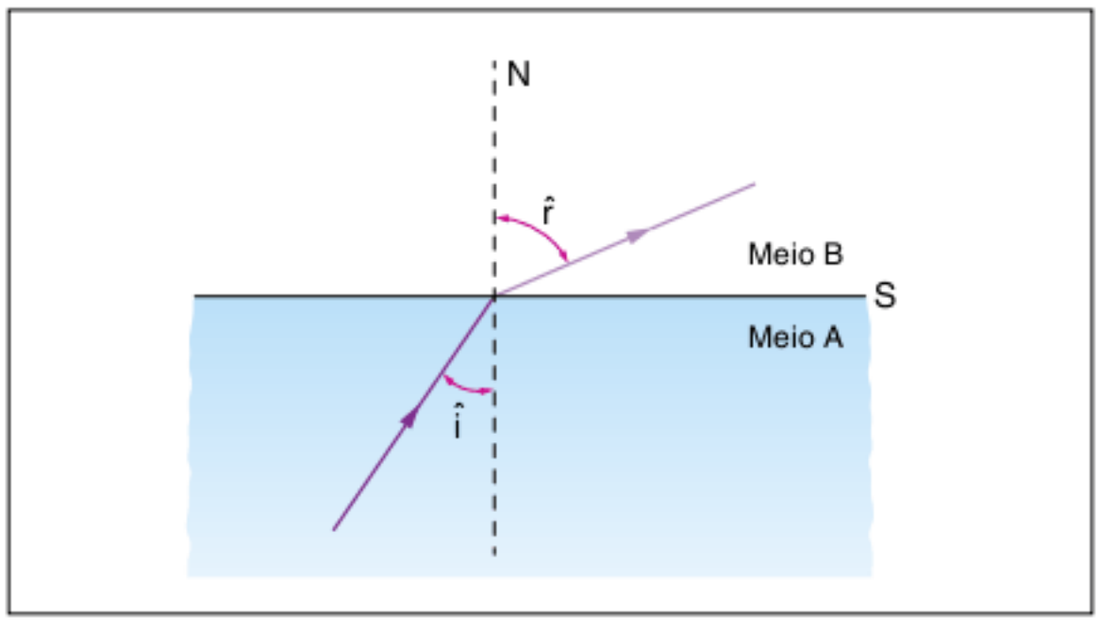


Fig. 6 Refração do meio mais refringente para o menos refringente.

Observe que $n_A > n_B \Rightarrow \hat{r} > \hat{i}$ e que, à medida que se aumenta $\hat{i}$, o ângulo $\hat{r}$ também aumenta.

No caso limite, temos um valor tal para $\hat{i}$, tal que $\hat{r} = 90°$. Para esse valor de $\hat{i}$, chamamos de ângulo limite de incidência $\hat{L}$.

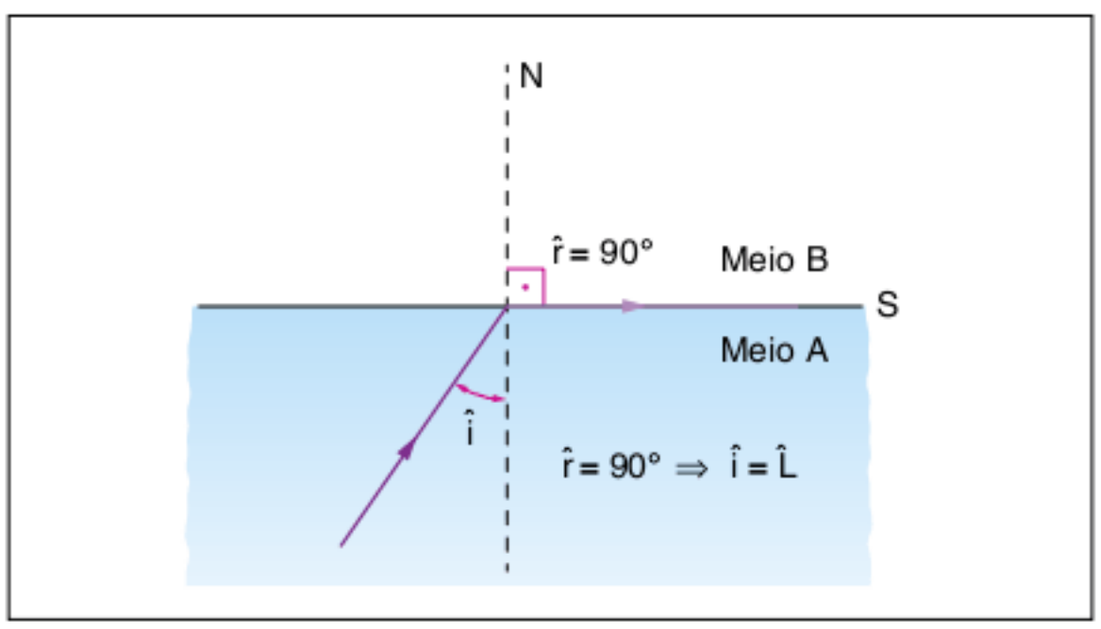


Fig. 7 Refração rasante.

ATENÇÃO!

Ângulo limite ($\hat{L}$) é o ângulo de incidência no meio mais refringente que gera uma refração rasante ($\hat{r} = 90°$) no meio menos refringente.

Pode-se calcular o ângulo limite $\hat{L}$ pela Lei de Snell-Descartes, observe:

$$n_A \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_B \cdot \text{sen}\,\hat{r}$$

aplicando a definição de $\hat{L}$, temos:

$$n_A \cdot \text{sen}\,\hat{L} = n_B \cdot \text{sen}\,90°$$

Como sen 90° = 1, temos:

$$n_A \cdot \text{sen}\,\hat{L} = n_B$$

Logo:

$$\text{sen}\,\hat{L} = \frac{n_B}{n_A}$$

Observe que, como $n_B < n_A$, sen $\hat{L}$ é sempre menor que 1.

Todo dioptro possui um ângulo limite para a refração da luz do meio mais refringente para o meio menos refringente, e esse valor é dado pelo arco cujo seno é a razão entre o menor n e o maior n.

$$\text{sen}\,\hat{L} = \frac{n_{(menor)}}{n_{(maior)}}$$

Reflexão total

E se por algum motivo o ângulo de incidência da luz no meio mais refringente for maior do que o ângulo limite?

Nesse caso, o ângulo de refração não pode ser superior a 90°, portanto, em casos de $\hat{i} > \hat{L}$, teremos uma reflexão total da luz incidente, apesar da superfície em questão não se tratar de um espelho.

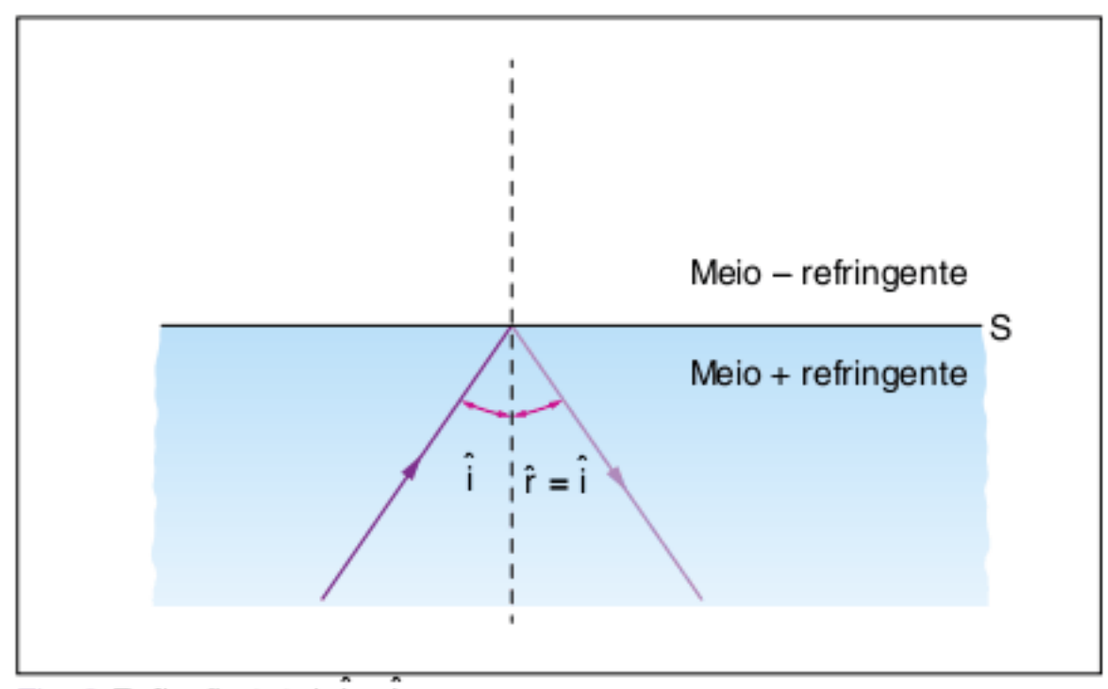


Fig. 8 Reflexão total, $\hat{i} > \hat{L}$.

ATENÇÃO!

Condições para que ocorra reflexão total:

I. incidência pelo meio mais refringente.

$n_{maior} \rightarrow n_{menor}$

II. $\hat{i} > \hat{L}$

Dioptro plano

Temos um dioptro plano quando a superfície de separação S entre os dois meios de propagação for plana. O objetivo principal, em nosso estudo de dioptros planos, é determinar posições aparentes de objetos observados por observadores em meios distintos.

Vamos dividir esse estudo em duas situações:

Situação 1:

Objeto no meio mais refringente e observador em um meio menos refringente.

Observe a figura a seguir.

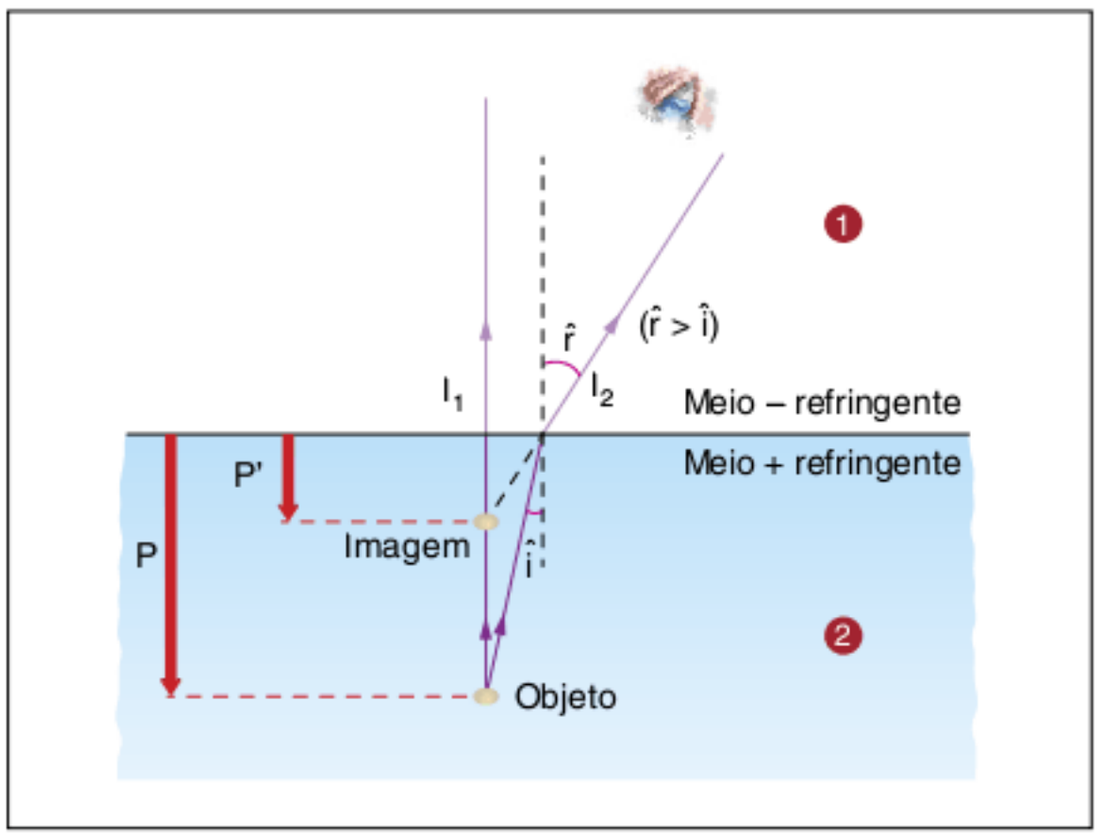


Fig. 9 Posição aparente, P' < P.

O observador no meio menos refringente percebe a imagem P', conjugada por um dioptro plano, de um objeto real P localizado no meio mais refringente.

A imagem P' é virtual e está mais próxima da superfície S do que o objeto P.

No caso dos meios 1 e 2 serem o ar e a água, respectivamente, teremos a mesma visão que temos quando observamos um peixe na água ou o fundo de uma piscina; tanto o peixe, quanto o fundo da piscina parecem estar mais próximos da superfície do que realmente estão.

Observação: *Este fenômeno pode se tornar um risco para mergulhadores de cavernas submersas, pois, ao emergir, podem ter a impressão de que o teto ou mesmo uma estalactite está mais afastado da superfície do que realmente está, podendo gerar um grave acidente.*

Contudo, o dioptro plano é um sistema óptico astigmático, significando que a imagem P' será uma mancha luminosa, entretanto, se considerarmos os raios de luz paraxiais, ou seja, próximos da reta normal, o dioptro plano poderá ser considerado estigmático.

Nessas condições, podemos demonstrar que:

$$P' = \frac{n_{observador}}{n_{objeto}} \cdot P$$

em que:

P': posição da imagem em relação a S.

P: posição do objeto em relação a S.

$n_{observador}$: índice de refração do meio para o qual a luz emerge (1).

n_{objeto}: índice de refração do meio no qual a luz incide (2).

Situação 2:

Objeto no meio menos refringente e observador em um meio mais refringente.

Observe a figura a seguir.

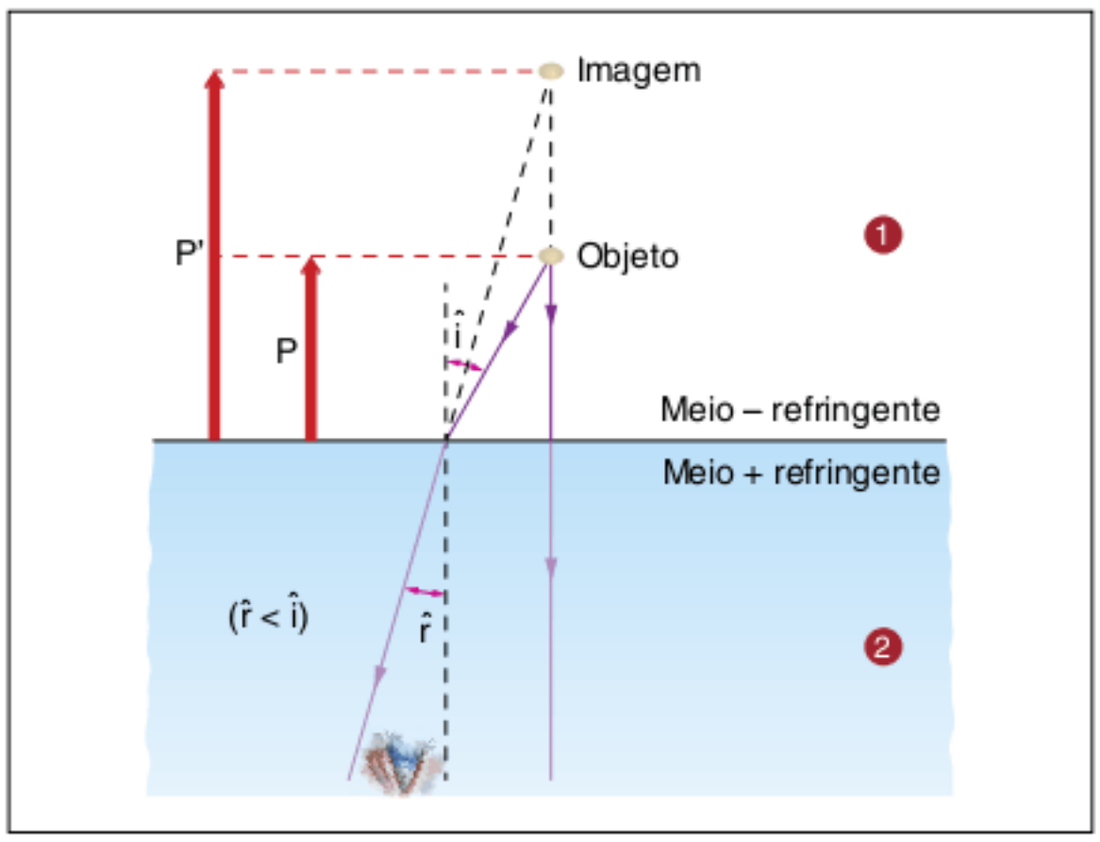


Fig. 10 Posição aparente, P' > P .

O observador no meio mais refringente percebe a imagem P', conjugada por um dioptro plano, de um objeto real P localizado no meio menos refringente.

Analogamente à situação 1, a imagem P' é virtual, só que, desta vez, a imagem está mais afastada da superfície S do que o objeto P.

No caso dos meios 1 e 2 serem o ar e a água, respectivamente, teremos a mesma visão que um mergulhador tem quando observa uma ave no ar, tendo a nítida impressão de que a ave está mais afastada da superfície do que realmente está.

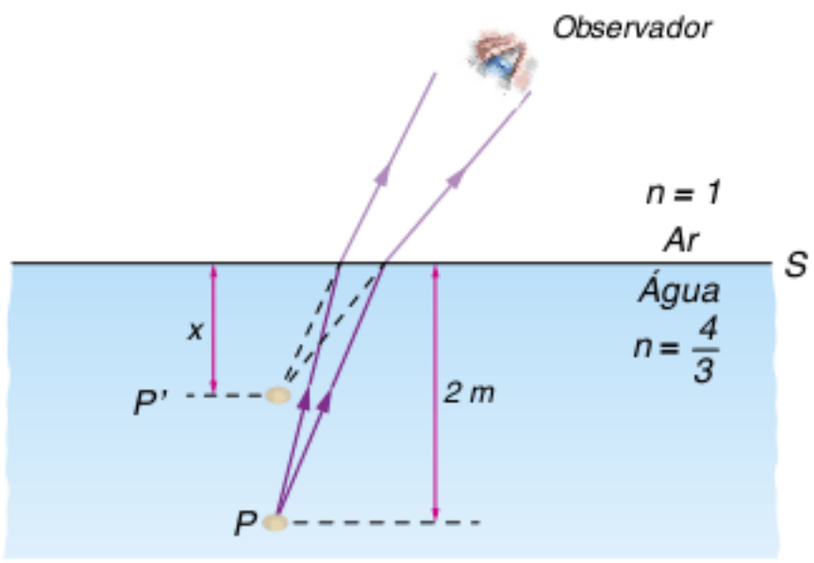
Perceba que a equação vista para a situação 1 é válida para a situação 2.

$$P' = \frac{n_{observador}}{n_{objeto}} \cdot P$$

Exercícios resolvidos

1 Uma pedrinha encontra-se no fundo de uma piscina, a uma profundidade igual a 2,0 m. Considerando igual a $\frac{4}{3}$ o índice de refração da água, qual a profundidade aparente dessa pedra para uma pessoa que se encontra fora da água, olhando para ela, nas vizinhanças da vertical que passa pela pedra?

Resolução:



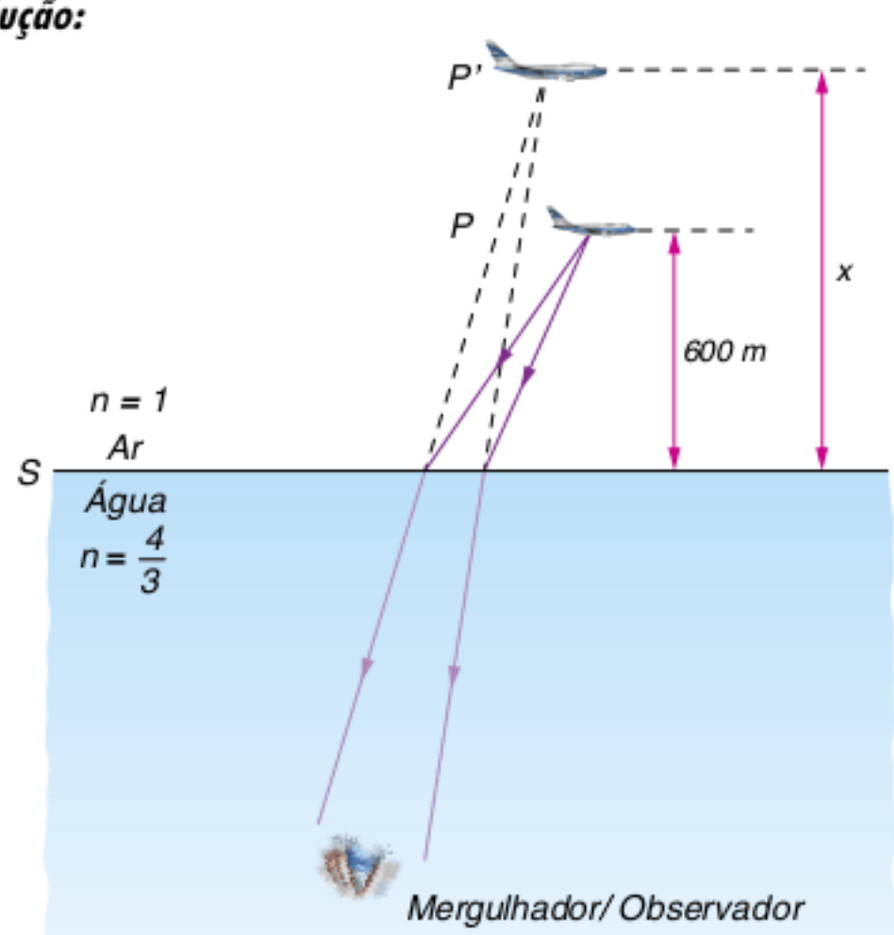
$$P' = \frac{n_{Observador}}{n_{Objeto}} \cdot P$$

$$P' = \frac{1}{4/3} \cdot 2 \Rightarrow P' = \frac{3}{4} \cdot 2 \Rightarrow P' = 1{,}5\ m$$

$$\therefore \text{Posição aparente} = 1{,}5\ m$$

2 Um mergulhador imerso nas águas de um lago observa um avião no instante em que ambos estão aproximadamente na mesma vertical. O avião está 600 m acima da superfície da água, cujo índice de refração admite-se igual a $\frac{4}{3}$. A que altura da superfície da água o avião aparenta estar, em relação ao mergulhador?

Resolução:



$$P' = \frac{n_{Observador}}{n_{Objeto}} \cdot P \Rightarrow P' = \frac{\frac{4}{3}}{1} \cdot 600 \Rightarrow P' = 800\ m$$

$$\therefore \text{Posição aparente} = 800\ m$$

Lâmina de faces paralelas

Uma lâmina de faces paralelas é uma associação de dois dioptros planos e paralelos.

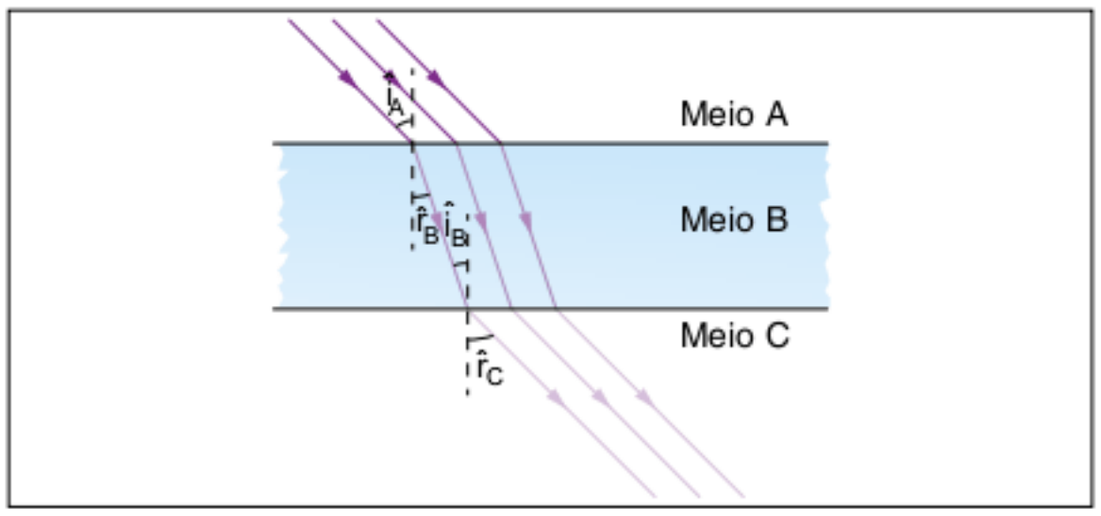


Fig. 11 Lâmina de faces paralelas.

Na maioria dos casos, o que ocorre é o representado na figura anterior, em que os meios A e C são igualmente refringentes, isto é, $n_A = n_C$, que, por sua vez, são menores que n_B.

Aplicando a Lei de Snell-Descartes, temos:

em S_1 : $n_A \cdot \text{sen}\, i_A = n_B \cdot \text{sen}\, r_B$

em S_2 : $n_B \cdot \text{sen}\, i_B = n_C \cdot \text{sen}\, r_C$

Logo:

$$n_A \cdot \text{sen}\, i_A = n_C \cdot \text{sen}\, r_C$$

No caso de $n_A = n_C$, por exemplo, uma lâmina de vidro envolvida pelo ar, $\text{sen}\, i_A = \text{sen}\, i_C$, já que $n_A \cdot \text{sen}\, i_A = n_C \cdot \text{sen}\, i_C$ e $n_A = n_C$.

Como a função seno no primeiro quadrante é uma função estritamente crescente, $\text{sen}\, i_A = \text{sen}\, i_C$ implica em

$$i_A = i_C$$

Portanto, em uma lâmina de faces paralelas envolvidas pelo mesmo meio, o raio de luz incidente é obrigatoriamente paralelo ao raio de luz emergente.

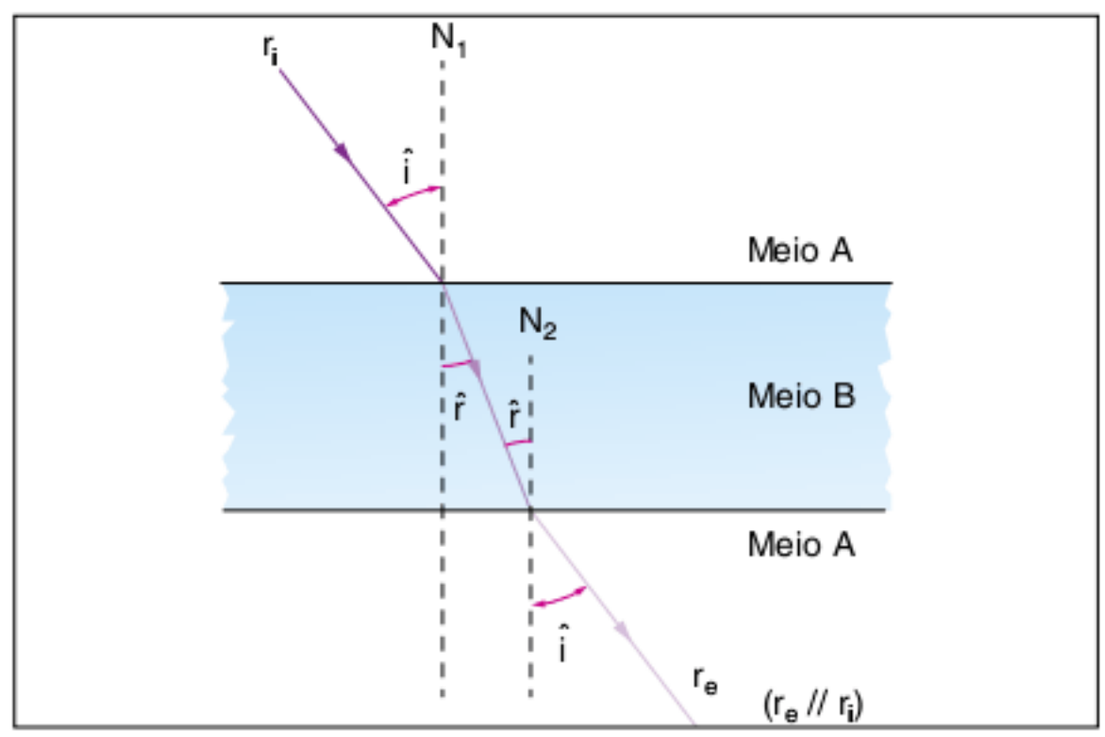


Fig. 12 Raio emergente paralelo ao raio incidente.

Em que:

r_i: raio de luz incidente.

r_e: raio de luz emergente.

Observação: *Ao observar um objeto através de uma janela de vidro de faces paralelas, a imagem observada está mais próxima do vidro do que o objeto, devido ao deslocamento dos raios de luz.*

Deslocamento lateral do raio emergente em relação ao raio incidente

Como o raio de luz emergente é paralelo ao raio de luz incidente, devemos calcular o deslocamento lateral que esse raio de luz sofre. Observe a figura a seguir.

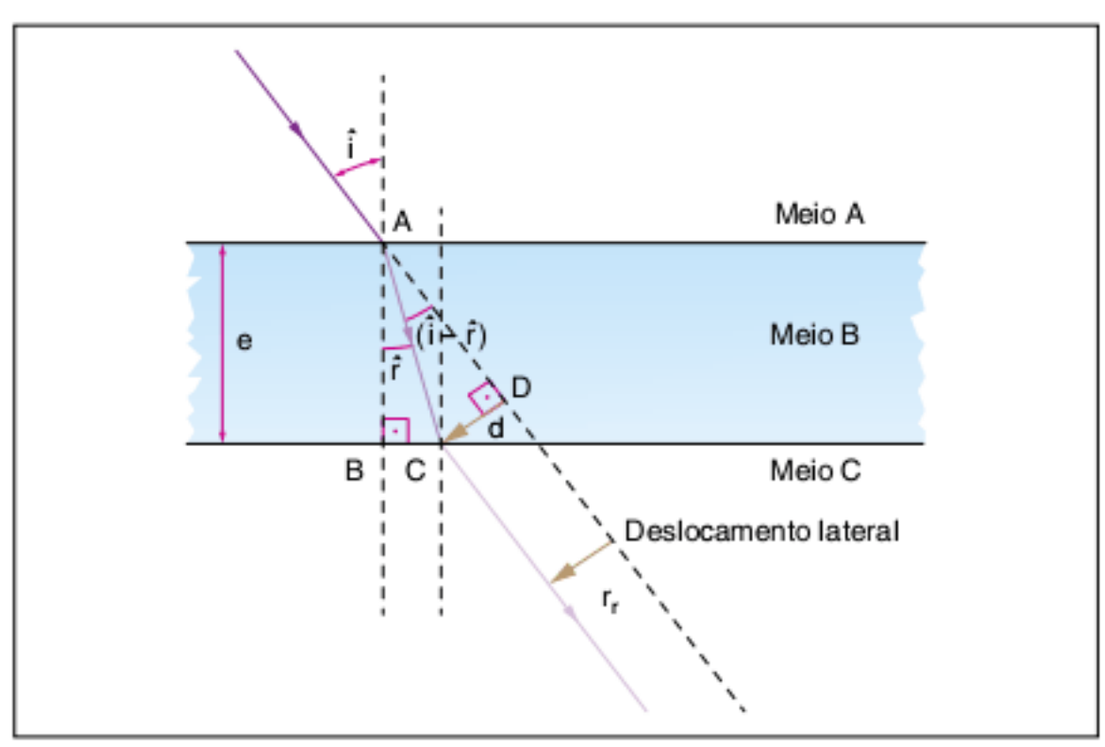


Fig. 13 Deslocamento lateral em uma lâmina de faces paralelas.

Pode-se provar que o deslocamento lateral é dado por:

$$d = e.\frac{\text{sen}(\hat{i} - \hat{r})}{\cos \hat{r}}$$

Deslocamento máximo e mínimo

Um raio de luz, ao se refratar por uma lâmina de faces paralelas, pode sofrer um deslocamento lateral que pode variar da espessura da lâmina (deslocamento máximo) até zero (deslocamento mínimo). Observe a figura a seguir.

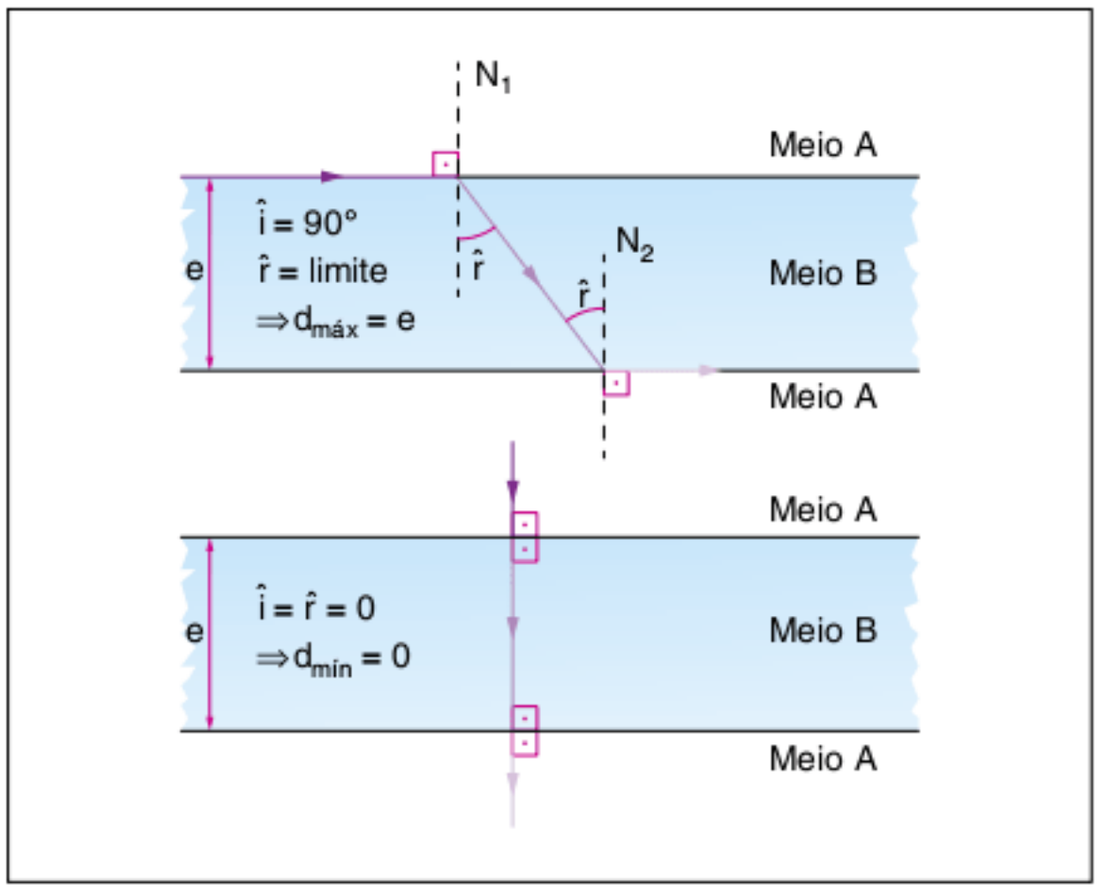


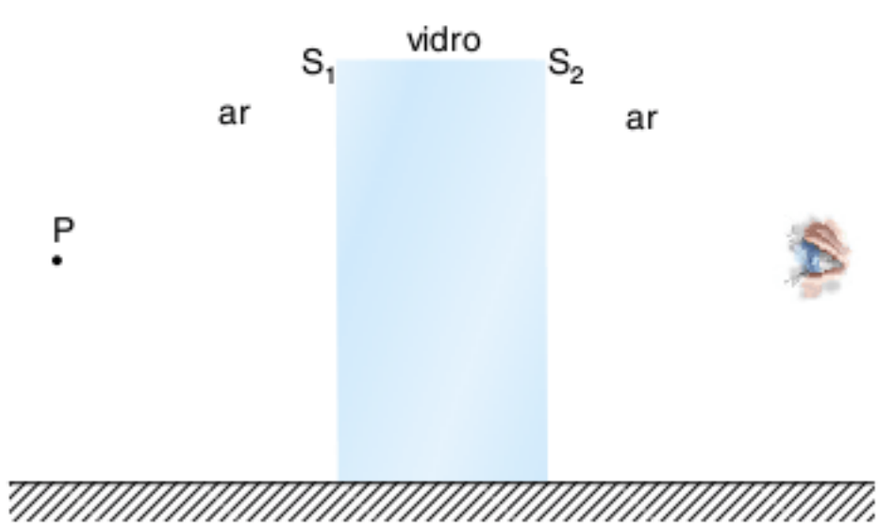
Fig. 14 Deslocamento lateral máximo e mínimo.

ATENÇÃO!

No caso do deslocamento máximo, o ângulo de refração (dentro da lâmina) é justamente o ângulo limite entre os meios da lâmina e exterior a ela.

Exercício resolvido

3 Uma lâmina de vidro de faces paralelas tem espessura de 1,5 cm e índice de refração 1,5. Um ponto luminoso P encontra-se a 2,0 cm da face S_1 da lâmina, conforme a figura. Seja P' a imagem de P conjugada pela lâmina. Qual a distância entre P' e a face S_2? O índice de refração do ar é 1,0.



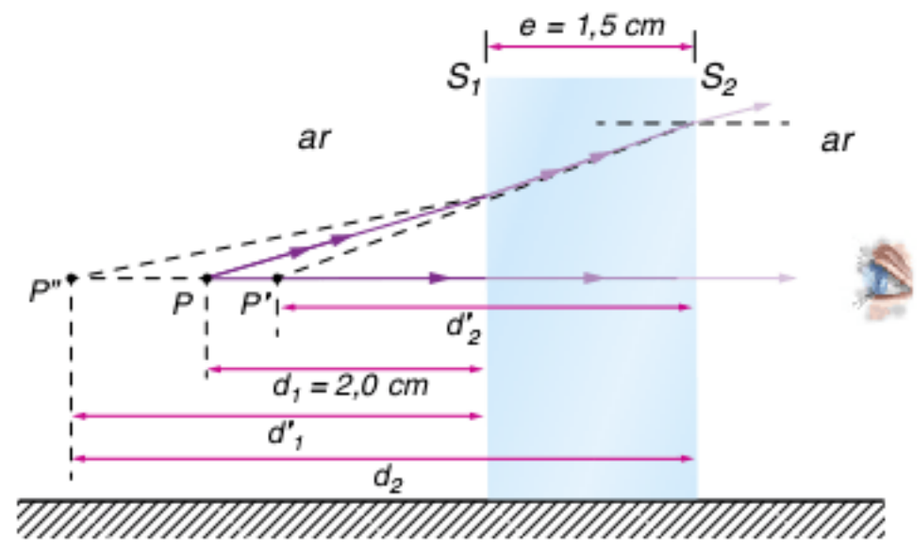
Resolução:

Dioptro ar-vidro(S_1):

$$\frac{n}{d_1} = \frac{n'}{d_1'} \Rightarrow d_1' = 3{,}0\ cm$$

P'' é objeto em relação ao dioptro S_2:

$$\frac{n}{d_2} = \frac{n'}{d_2'} \Rightarrow d_2' = 3{,}0\ cm\ (d_2 = d_1' + e)$$



Prisma óptico

Em óptica, denomina-se prisma óptico o sistema constituído por um corpo transparente dotado de duas faces planas não paralelas, como vemos na figura 15.

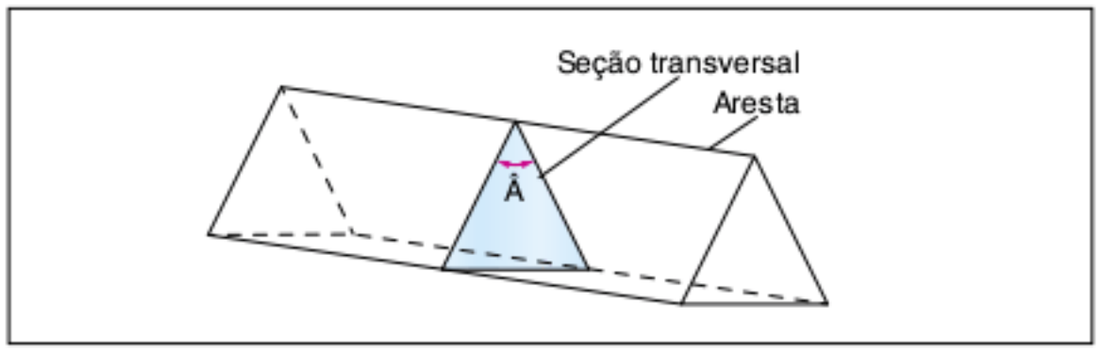


Fig. 15 Prisma.

Estudaremos o prisma a partir da sua seção reta (perpendicular à aresta), que indicamos na figura anterior e que destacamos a seguir.

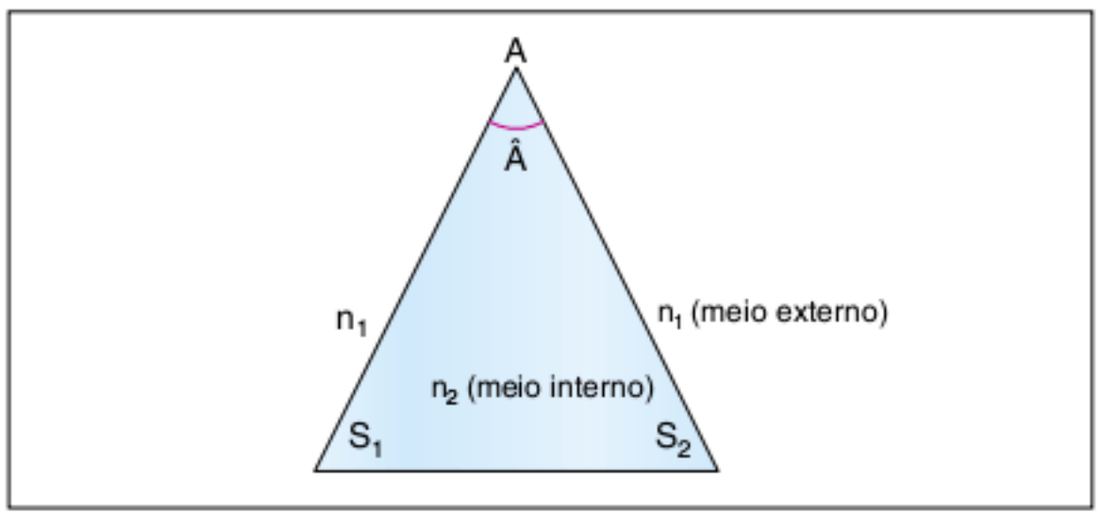


Fig. 16 Prisma, seção transversal.

Na representação do prisma, temos:

- Â: ângulo de abertura ou de refringência do prisma.
- n_1: índice de refração do meio externo ao prisma.
- n_2: índice de refração do prisma.

Observe na figura 17 a trajetória de um raio de luz através do prisma.

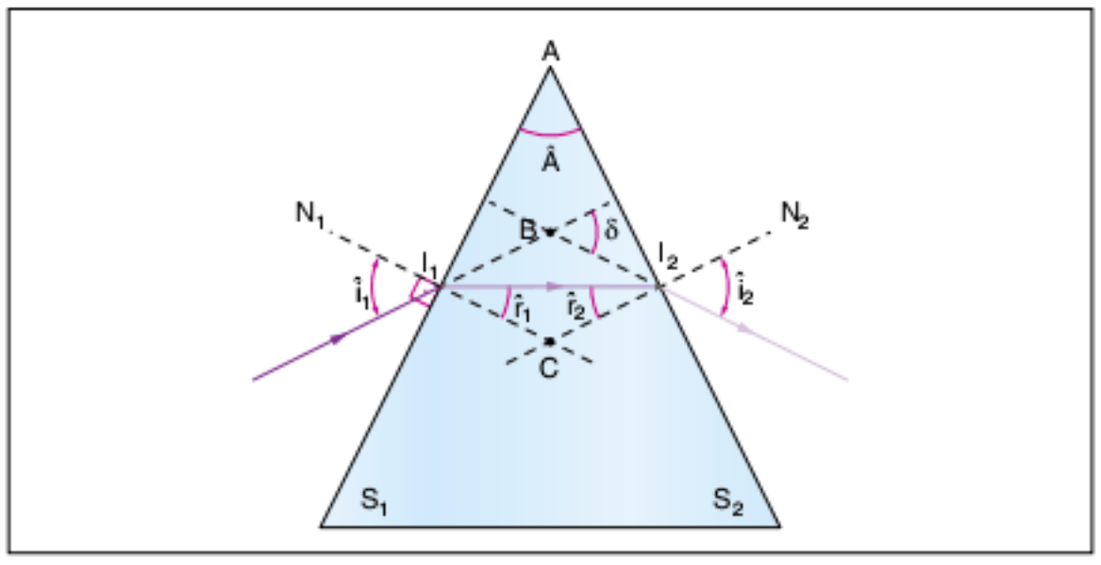


Fig. 17 Prisma, caminho da luz.

Na figura, temos:

- $\hat{i}_1$ ângulo de incidência.
- $\hat{r}_1$ ângulo de refração em S_1.
- $\hat{r}_2$ ângulo de incidência em S_2.
- $\hat{i}_2$ ângulo de emergência.
- $\hat{\delta}$ ângulo de desvio.

Aplicando no ΔI_1I_2C a propriedade do ângulo externo, temos:

$$\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$$

Por definição, o ângulo de desvio $\hat{\delta}$ sofrido pelo raio de luz ao atravessar o prisma é o ângulo entre a direção do raio incidente e a direção do raio emergente.

Aplicando no ΔI_1I_2B novamente a propriedade do ângulo externo, temos:

$$\hat{\delta} = (\hat{i}_1 - \hat{r}_1) + (\hat{i}_2 - \hat{r}_2)$$

Logo:

$$\hat{\delta} = (\hat{i}_1 + \hat{i}_2) - (\hat{r}_1 + \hat{r}_2)$$

Como $(\hat{r}_1 + \hat{r}_2) = \hat{A}$

temos:

$$\hat{\delta} = (\hat{i}_1 + \hat{i}_2) - \hat{A}$$

ATENÇÃO!

Eventualmente, podemos ter cada face do prisma em contato com meios de índice de refração diferentes entre si.

Desvio mínimo

O ângulo de desvio $(\hat{\delta})$ atinge seu valor mínimo $(\hat{\delta}_m)$ quando o ângulo de incidência $(\hat{i}_1)$ é igual ao ângulo de emergência $(\hat{i}_2)$ como decorrência, teremos $\hat{r}_1 = \hat{r}_2$ conforme a figura a seguir.

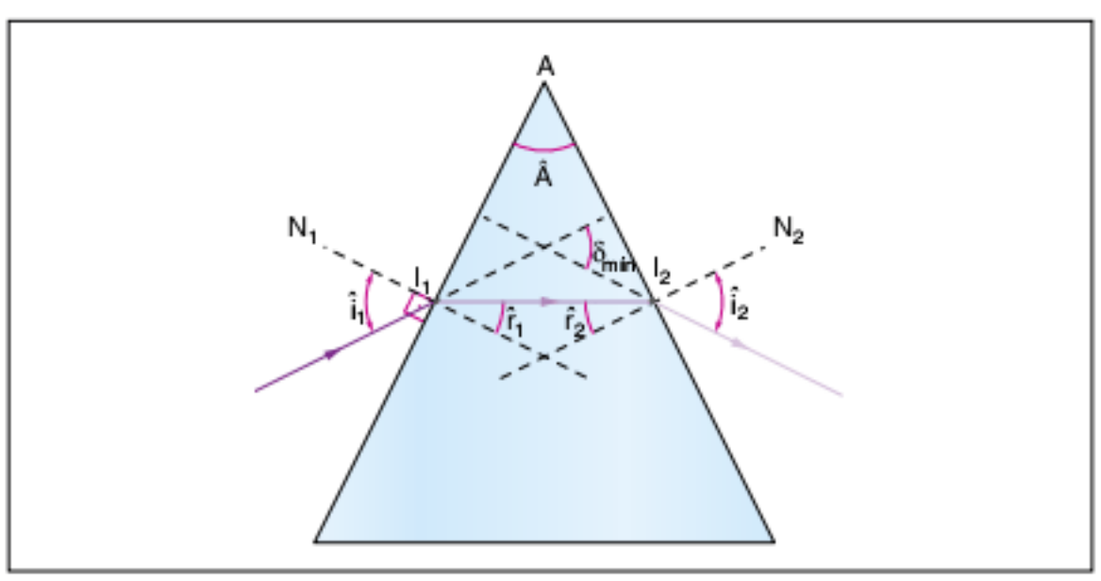


Fig. 18 Prisma, desvio mínimo (simetria).

ATENÇÃO!

Desvio mínimo $(\hat{\delta}_m) \Rightarrow \hat{i}_1 = \hat{i}_2$ e $\hat{r}_1 = \hat{r}_1 = \hat{r}_2$

Observe que, na condição de desvio mínimo, temos:

$$\hat{\delta} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A} \Rightarrow \hat{\delta}_m = 2\hat{i} - \hat{A}$$

Como:

$$\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2 \Rightarrow \hat{A} = 2.\hat{r}$$

Temos:

$$\hat{\delta}_m = 2\hat{i} - 2\hat{r} = 2(\hat{i} - \hat{r})$$

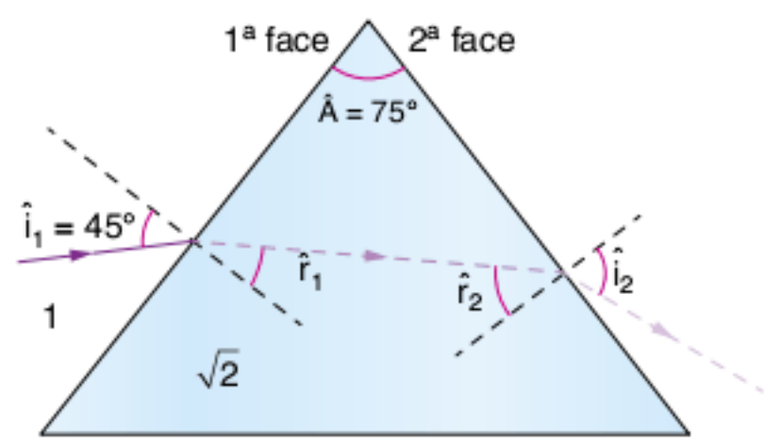
Exercício resolvido

4 Sobre uma das faces de um prisma de índice de refração $\sqrt{2}$ e imerso no ar ($n_{ar} = 1$), incide um raio de luz monocromática, fazendo com a normal um ângulo de 45°. O ângulo de refringência do prisma é de 75°. Determine:

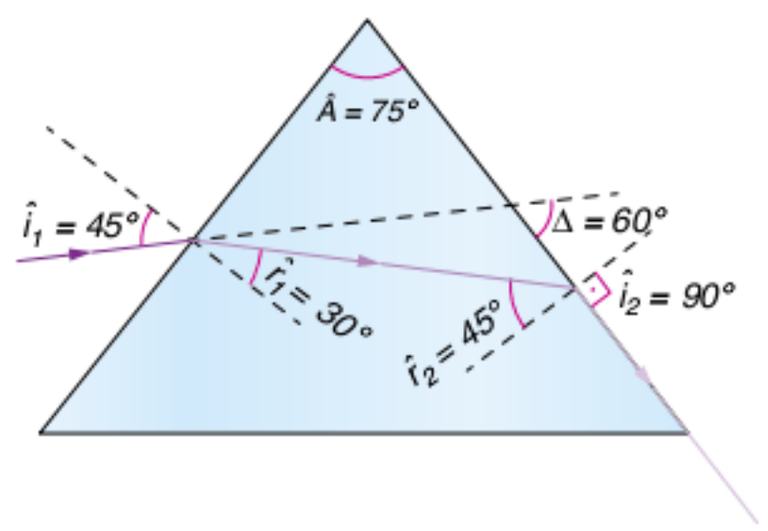
a) o ângulo de incidência $\hat{r}_2$, na segunda face.

b) o ângulo de emergência $\hat{i}_2$, na segunda face.

c) o desvio angular Δ do raio que atravessa o prisma.



Resolução:



a) Vamos, inicialmente, calcular o ângulo de refração $\hat{r}_1$ na 1ª face:

$$1.\,sen\ 45^o = \sqrt{2}.\,sen\ \hat{r}_1$$

$$1.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.\,sen\ \hat{r}_1$$

$$sen\ \hat{r}_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{r}_1 = 30^o$$

De $\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ e sendo $\hat{A} = 75°$, vem:

$$75° = 30° + \hat{r}_2$$

$$\hat{r}_2 = 45°$$

b) Lei de Snell-Descartes aplicada à 2ª face:

$n \cdot sen\ \hat{r}_2 = n_{ar} \cdot sen\ \hat{i}_2$

$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot sen\ \hat{i}_2$

$sen\ \hat{i}_2 = 1$

$\hat{i}_2 = 90^o$ *(emerge rasante)*

c) O desvio angular é dado por:

$\varnothing = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A}z$

$\Delta = 45° + 90° - 75°$

$\Delta = 60°$

LEITURA

Nós vimos no início deste capítulo que o índice de refração de um dado meio é função da velocidade da luz no vácuo em relação à velocidade da luz no meio. Entretanto, a velocidade da luz em um meio material é função da frequência da luz. Quanto maior a frequência da luz, menor a velocidade de propagação.

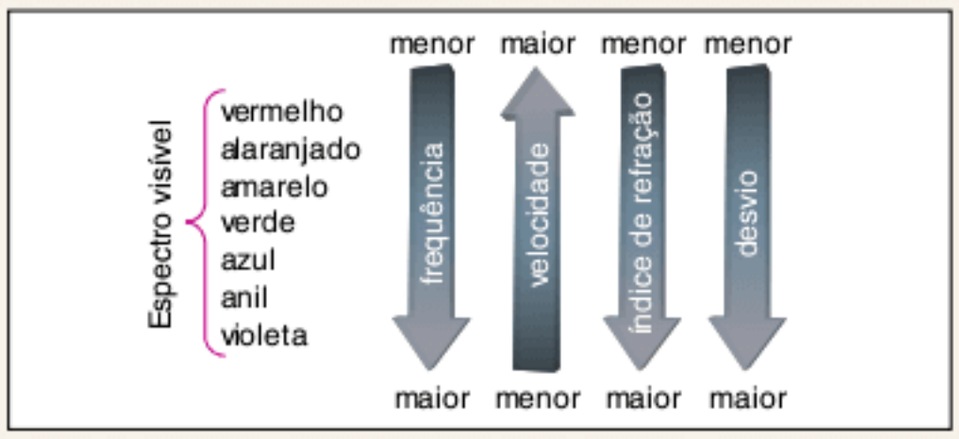


Fig. 19 Desvios diferentes para frequências diferentes.

Assim, por exemplo, o vidro tem índices de refração diferentes para cada uma das cores; dessa forma, embora o ângulo de incidência **i** seja igual para todas as frequências, os valores dos ângulos de refração **r** serão diferentes, de onde ocorre a decomposição da luz.

Lentes esféricas delgadas

Uma lente esférica é a associação de dois dioptros, sendo que uma das superfícies de separação é esférica e a outra é esférica ou plana.

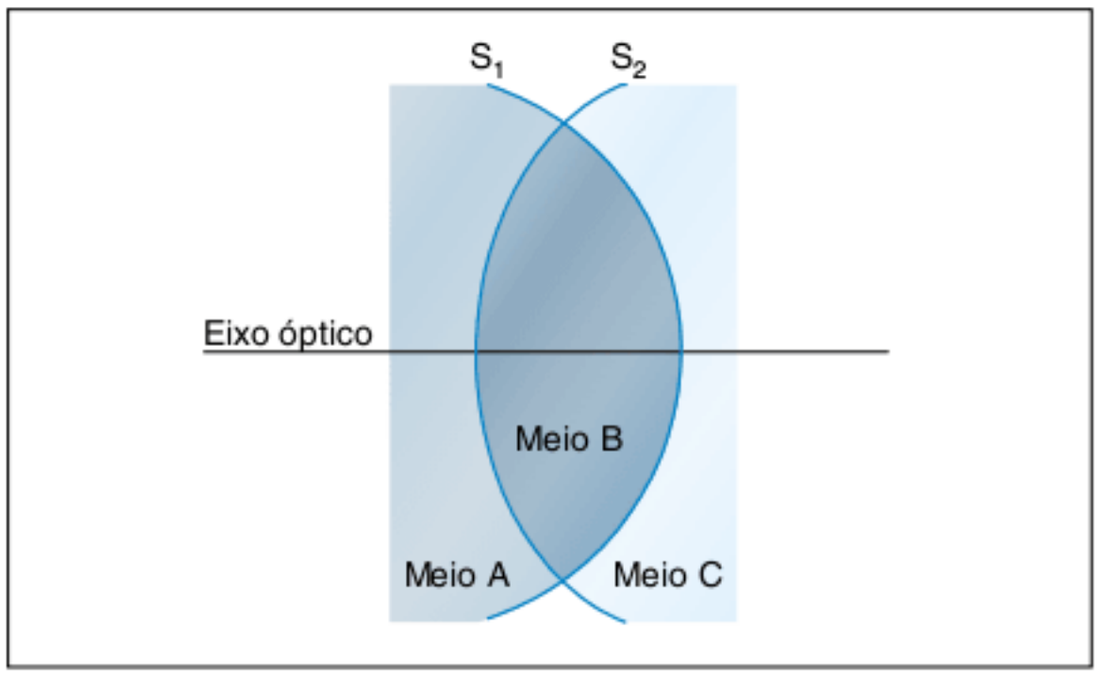


Fig. 20 Lente esférica delgada.

Em geral, consideramos idênticos os meios A e C e os chamamos, impropriamente, de meios externos à lente. Dessa maneira, o meio B, delimitado pelas superfícies S_1 e S_2, é considerado como sendo a própria lente.

Elementos geométricos

A figura a seguir mostra os elementos geométricos característicos de uma lente:

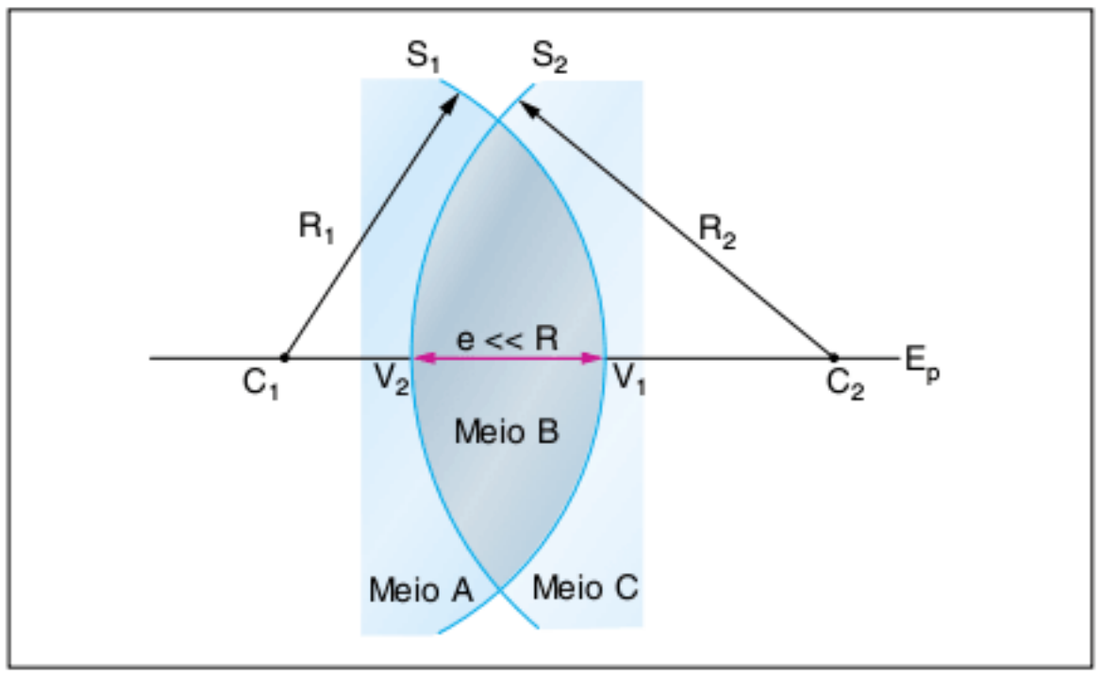


Fig. 21 Elementos geométricos de uma lente.

em que:

- C_1 e C_2 são os centros de curvatura das faces S_1 e S_2.
- R_1 e R_2 são os raios de curvatura das faces S_1 e S_2.
- E_p é o eixo óptico principal, é a reta que passa por C_1 e C_2.
- V_1 e V_2 são os vértices, isto é, interseções do eixo principal com as faces S_1 e S_2.
- $e = \overline{V_1V_2}$ é a espessura da lente ($e << R$).

Observação:

I. *Uma lente é delgada quando a espessura* **e** *for desprezível em relação aos raios de curvatura.*

II. *Quando a lente tiver uma face plana, o eixo principal passa pelo centro da face esférica e é perpendicular à face plana.*

Classificação das lentes

Podemos classificar as lentes quanto a dois aspectos: tipos de faces (**geometria**) e comportamento óptico (**vergência**).

I. Quanto às faces, temos seis tipos de lentes divididos em dois grupos: as de bordas finas e as de bordas grossas.

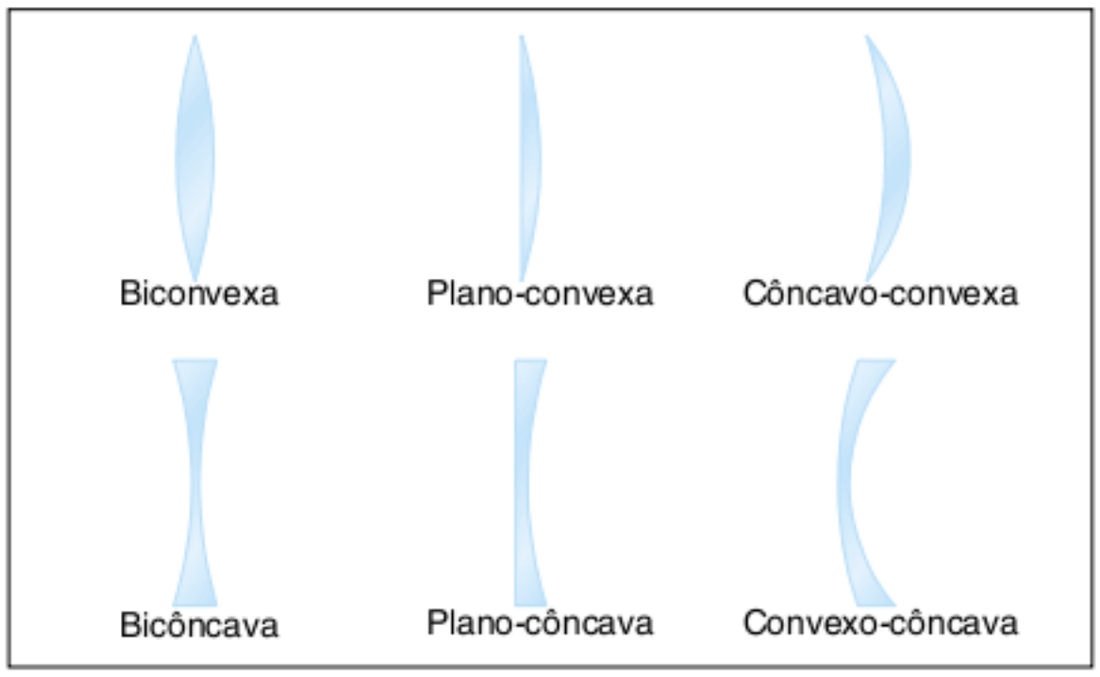


Fig. 22 Classificação das lentes às faces.

Os nomes seguem a convenção de que devemos citar em primeiro lugar a face de maior raio de curvatura e depois a face de menor curvatura. Lembre-se de que uma superfície plana possui raio de curvatura infinito.

II. Quanto ao comportamento óptico, uma lente pode ser convergente ou divergente.

A lente é convergente se a luz, ao atravessá-la, sofrer desvios no sentido de dirigir-se a um mesmo ponto. Em caso contrário, a lente será divergente.

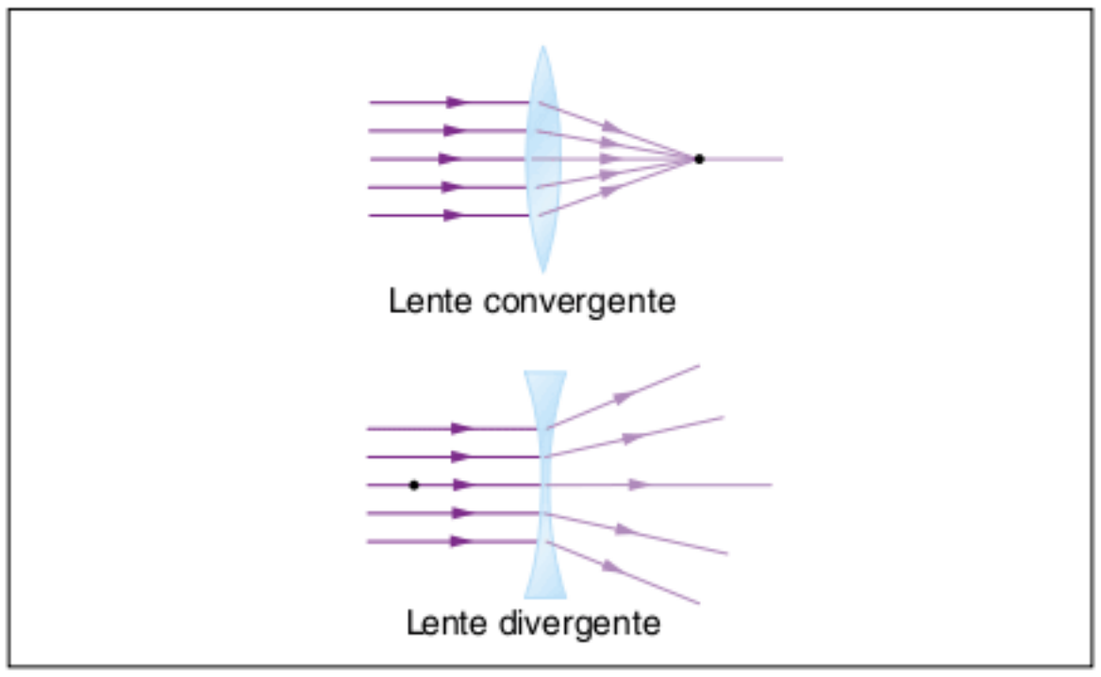


Fig. 23 Convergência e divergência de lentes delgadas.

As lentes delgadas convergentes e divergentes podem ser representadas da seguinte forma.

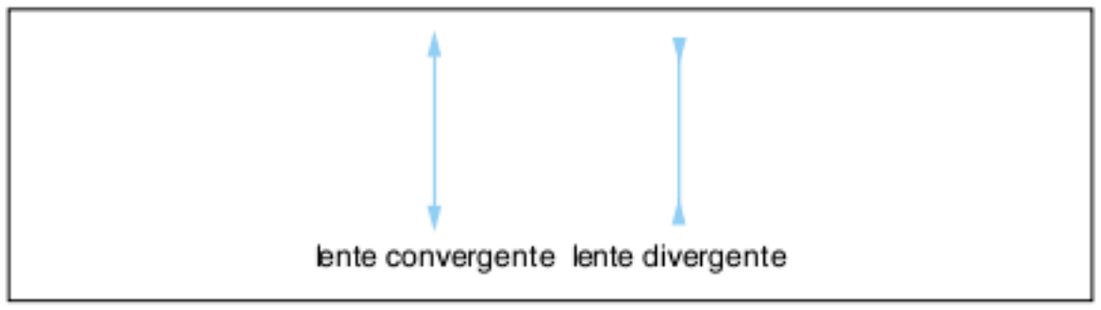


Fig. 24 Representação esquemática.

Um pincel incidente de luz, constituído por raios paralelos, ao passar por uma lente convergente, resulta em um pincel emergente convergente e, ao passar por uma lente divergente, resulta em um pincel emergente divergente.

Comportamento óptico e índice de refração

O comportamento óptico de uma lente depende, além de sua forma, dos índices de refração da lente e do meio externo a ela.

O caso mais comum é a lente ser mais refringente do que o meio externo, como uma lente de vidro imersa no ar. Nesse caso, podemos concluir que as lentes de bordas finas são convergentes e as lentes de bordas grossas são divergentes.

	Borda fina	Borda grossa
$n_L > n_{meio}$	convergente	divergente
$n_L < n_{meio}$	divergente	convergente

Tab. 1 Vergência de lentes delgadas.

Focos principais

Semelhante à abordagem dada a espelhos planos, vamos considerar, neste estudo, lentes delgadas e raios de luz dentro das condições de Gauss.

Foco imagem principal (F_I)

É o ponto imagem que a lente conjuga de um objeto impróprio, definido por raios de luz paralelos ao eixo óptico principal.

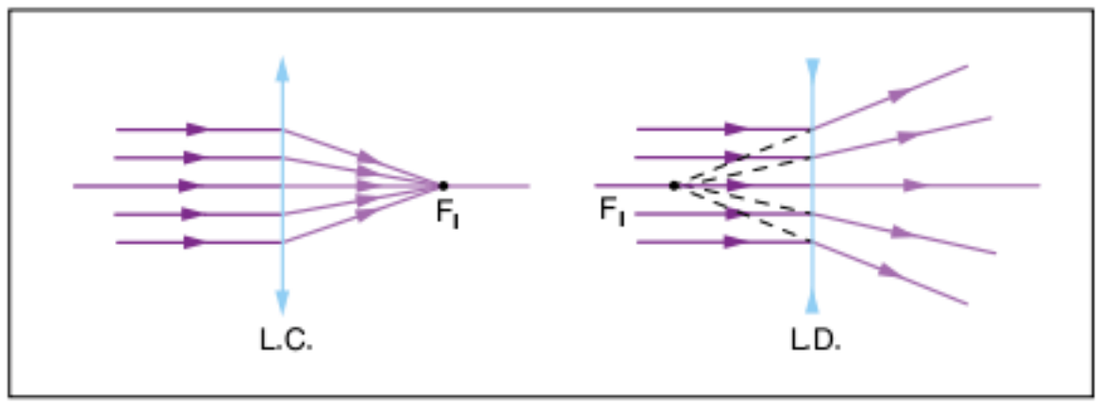


Fig. 25 Foco imagem principal.

Percebemos que a lente convergente possui foco imagem real e a lente divergente possui foco imagem virtual.

Foco objeto principal (F_O)

É o ponto objeto associado pela lente a uma imagem imprópria definida por raios de luz paralelos ao eixo óptico principal.

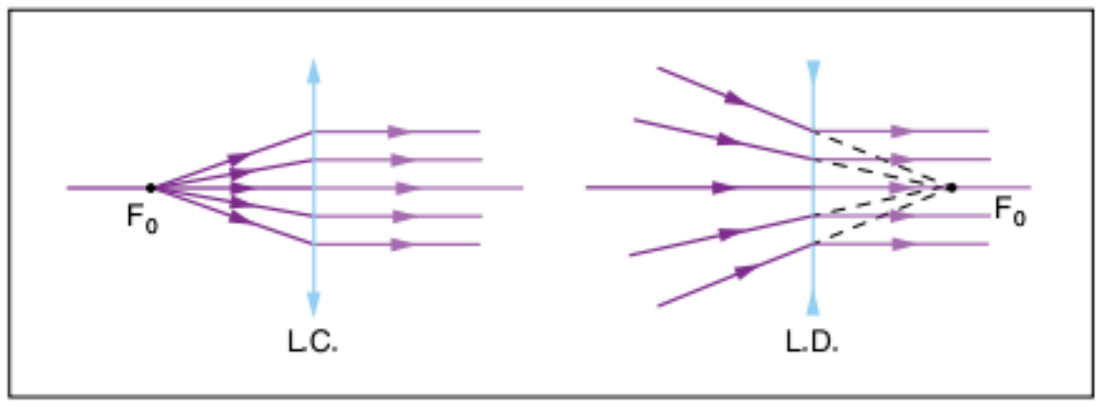


Fig. 26 Foco objeto principal.

Para a lente convergente, o foco objeto é real e, para a lente divergente, o foco objeto é virtual.

Distância focal

Como vimos, uma lente possui dois focos principais: o foco objeto e o foco imagem. Verifica-se que esses focos são simétricos em relação à lente delgada.

A distância focal F é a distância de um dos focos até a lente delgada.

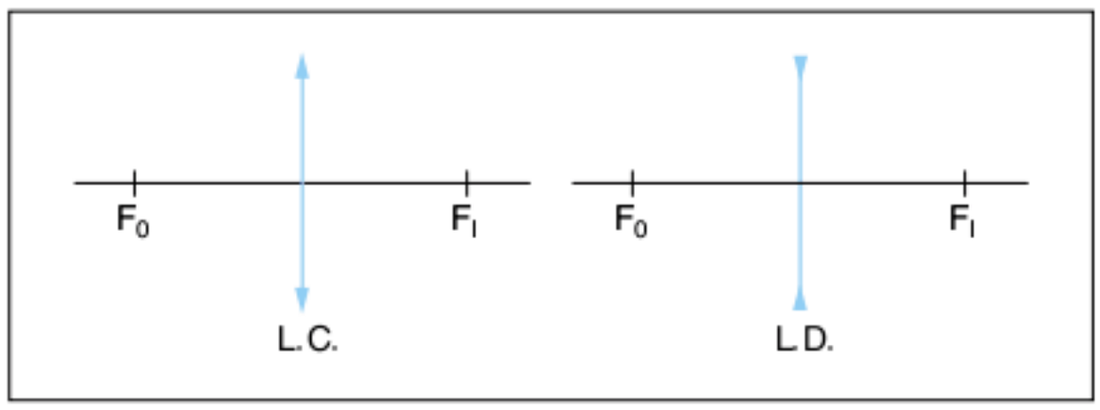


Fig. 27 Focos principais.

ATENÇÃO!

Como os focos da lente convergente são reais e os focos da lente divergente são virtuais, convenciona-se que:

- a distância focal de uma lente convergente é positiva ($F > O$).
- a distância focal de uma lente divergente é negativa ($F < O$).

Raios notáveis de luz

Os raios notáveis em lentes são semelhantes aos raios notáveis estudados em espelhos esféricos, a diferença é que em espelhos os raios de luz sofrem reflexão, enquanto nas lentes os raios sofrem refração.

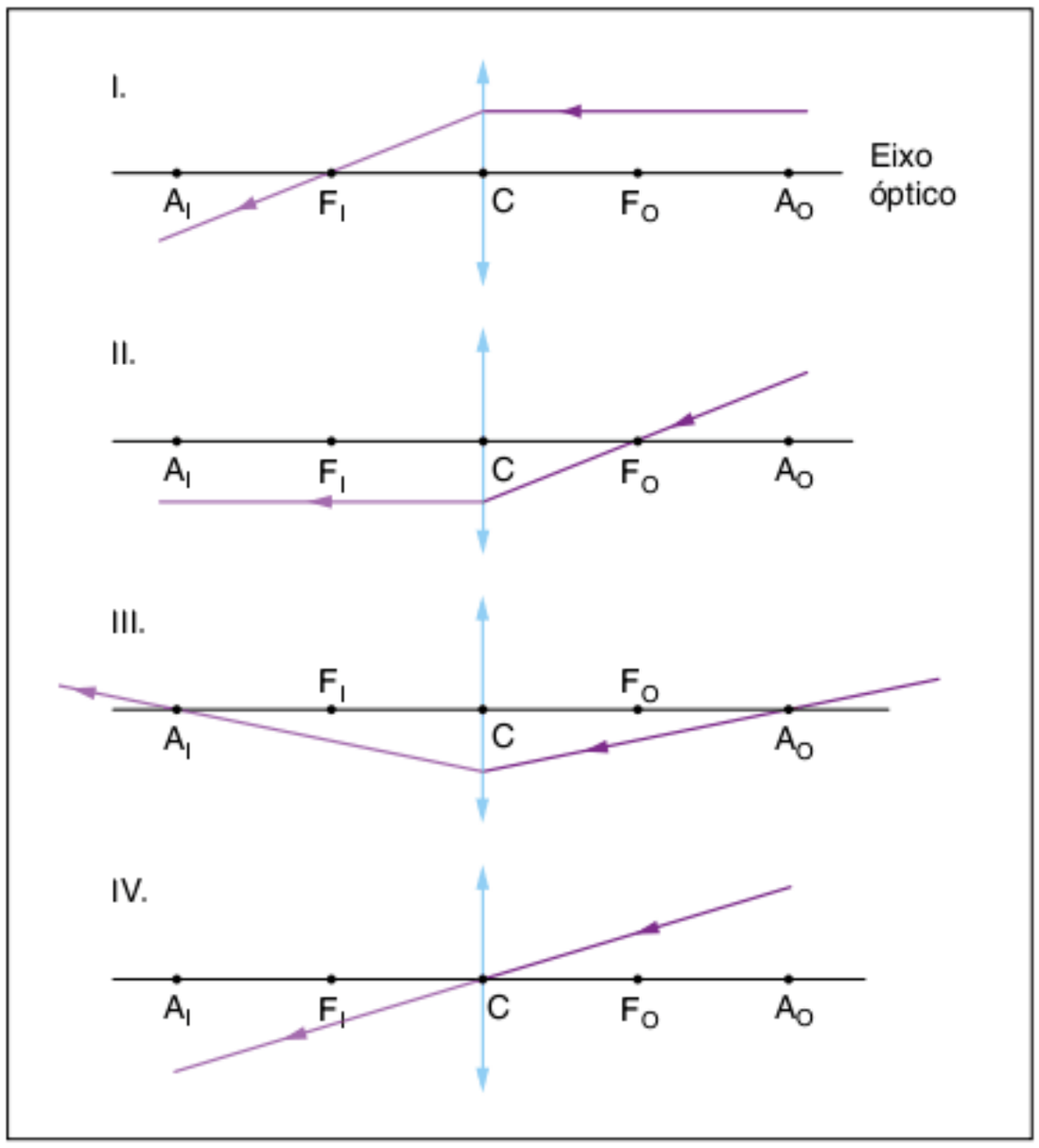


Fig. 28 Raios notáveis em lentes delgadas.

I. Todo raio de luz que incide paralelamente ao eixo óptico principal da lente emerge em uma direção que passa pelo foco imagem principal. Essa trajetória decorre da própria definição de foco imagem principal.
Na **lente convergente**, é o próprio raio de luz que passa pelo foco. Enquanto, na **lente divergente**, são os seus prolongamentos que passam pelo foco.

II. Todo raio de luz que incide em uma direção que passa pelo foco objeto principal emerge paralelamente ao eixo óptico principal. Essa trajetória também é decorrente da definição de foco objeto.

III. Todo raio de luz que incide em uma direção que passa pelo ponto antiprincipal objeto, ou antifoco (A_O), emerge em uma direção que passa pelo ponto antiprincipal imagem (A_I).

Observação: *Ponto antiprincipal é aquele que dista da lente o dobro da distância focal:*

- *A_O é o ponto antiprincipal objeto.*
- *A_I é o ponto antiprincipal imagem.*

IV. Todo raio de luz que incide pelo centro óptico da lente passa por ela sem sofrer desvio em sua direção. Esse raio de luz define o centro óptico (C) da lente, ou seja, a interseção do eixo óptico principal com a lente.

Determinação gráfica da imagem

De modo análogo ao que fizemos nos espelhos esféricos, vamos determinar graficamente a imagem I de um pequeno objeto O, disposto frontalmente diante de uma lente delgada.

Lente convergente

Caso 1:

Objeto situado além do ponto antiprincipal A_0. Imagem conjugada:

- real
- menor
- invertida
- entre A_I e F_I

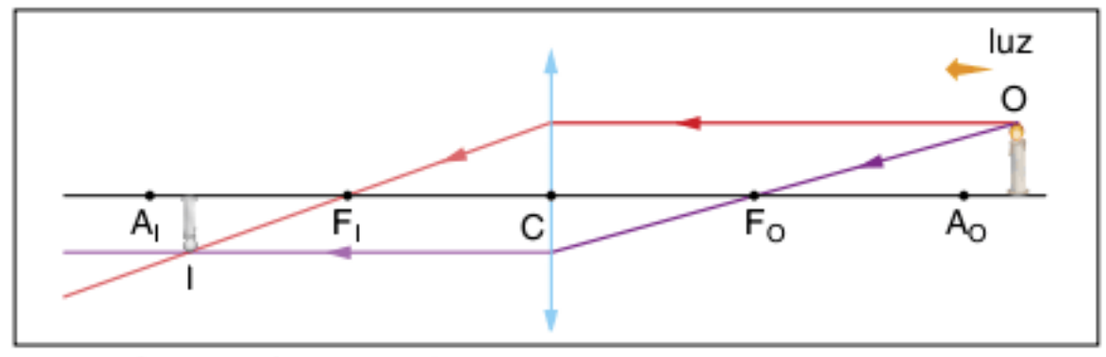


Fig. 29 Objeto além do antifoco.

Observação: *Esse caso corresponde à imagem formada por uma câmera fotográfica.*

Caso 2:

Objeto situado em A_0. Imagem conjugada:

- real
- invertida
- igual
- em A_I

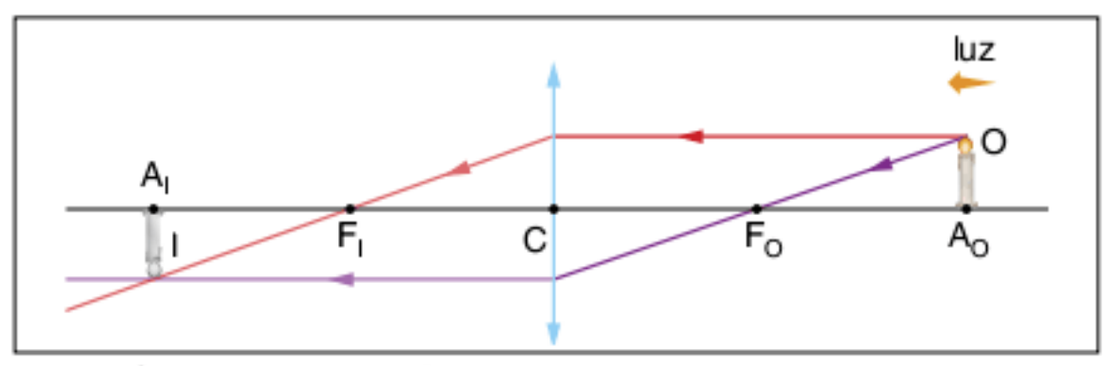


Fig. 30 Objeto sobre o antifoco.

Caso 3:

Objeto situado entre A_0 e F_0. Imagem conjugada:

- real
- invertida
- maior
- depois do A_I

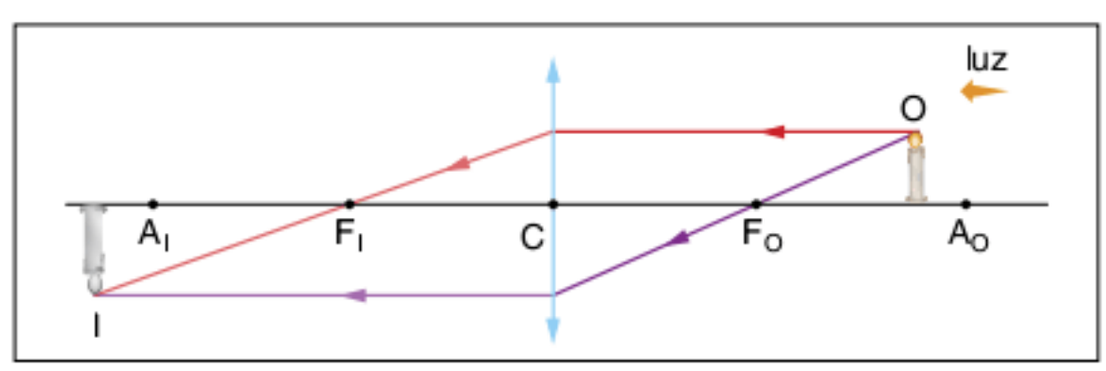


Fig. 31 Objeto entre o foco e o antifoco.

Observação: *Esse caso corresponde à imagem produzida por projetores (tanto de slides como de filmes).*

Caso 4:

Objeto situado em F_0. Imagem conjugada: imprópria (infinito).

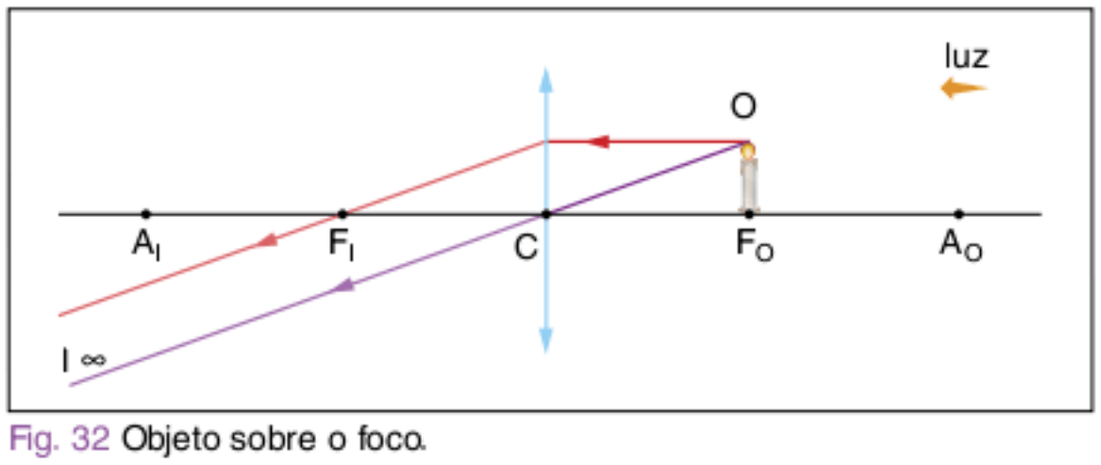


Fig. 32 Objeto sobre o foco.

Caso 5:

Objeto situado entre F_0 e C. Imagem conjugada:

- virtual
- direita
- maior
- região do objeto

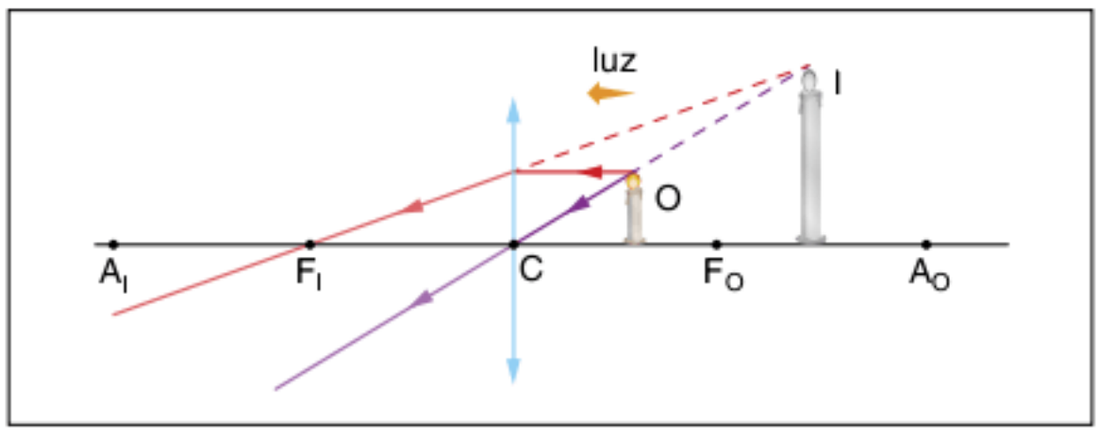


Fig. 33 Objeto entre a lente e o foco.

Observação: *A lente de aumento, ou lupa, corresponde a uma lente convergente utilizada nas condições da figura anterior.*

Lente divergente

Caso único:

Objeto situado na frente da lente. Imagem conjugada:

- virtual
- direita
- menor
- região do objeto

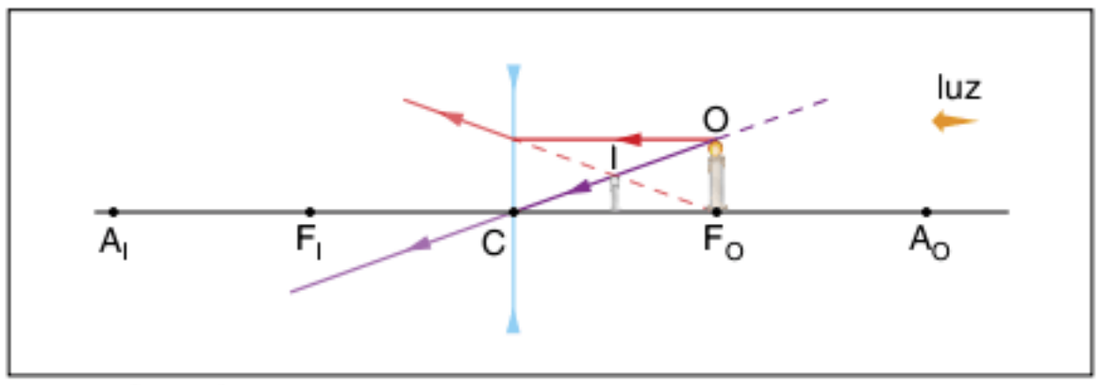


Fig. 34 Caso único de lente divergente.

Independentemente da posição do objeto real O, a imagem conjugada I será virtual, direita e reduzida.

ATENÇÃO!

Observando as construções que acabamos de fazer, podemos concluir:

- sempre que o objeto e a imagem tiverem naturezas opostas, um real e o outro virtual, estarão localizados do mesmo lado da lente e a imagem será direita em relação ao objeto.
- sempre que o objeto e a imagem tiverem mesma natureza, os dois reais ou os dois virtuais, estarão localizados em lados opostos da lente e a imagem será invertida em relação ao objeto.
- a lente divergente, para um objeto real, sempre conjuga uma imagem virtual, direita e reduzida.

Determinação analítica da imagem

As equações que utilizaremos para a determinação da posição e tamanho da imagem são análogas às utilizadas no estudo dos espelhos esféricos.

Equação dos pontos conjugados de Gauss

Observe a figura a seguir, na qual é representado o sistema de referencial.

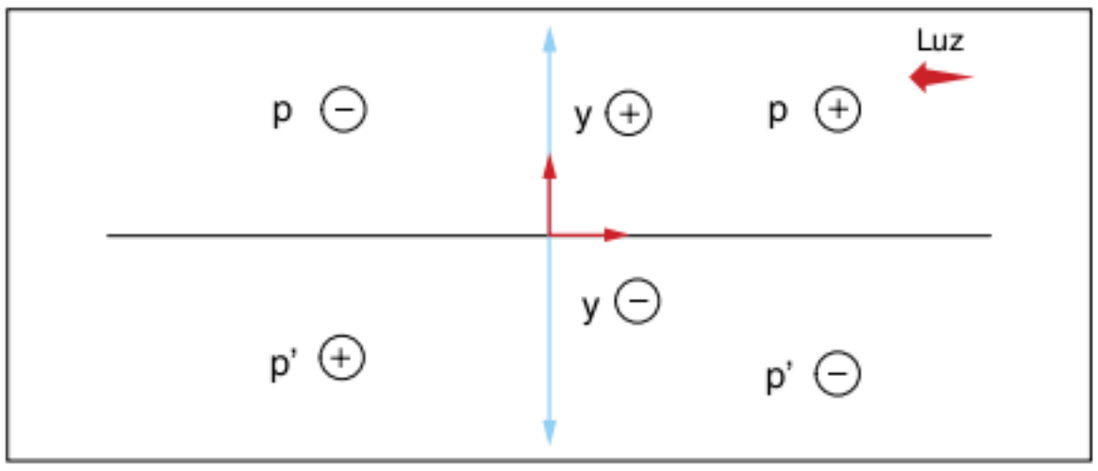


Fig. 35 Sistema de referência.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'}$$

em que:

F: distância focal.
P: abscissa do objeto.
P': abscissa da imagem.

Para aplicarmos a equação de Gauss, devemos observar a seguinte convenção de sinais:

$F > 0$: lente convergente
$F < 0$: lente divergente
$P > 0$: objeto real
$P < 0$: objeto virtual
$P' > 0$: imagem real
$P' < 0$: imagem virtual

O aumento linear transversal, analogamente a espelhos esféricos, é dado por:

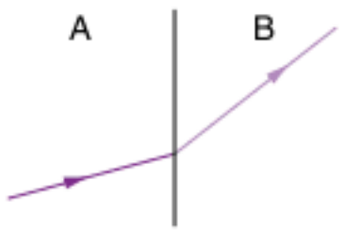
$$A = \frac{i}{o} = -\frac{P'}{P}$$

em que:

A: aumento linear transversal.
i: altura da imagem.
o: altura do objeto.

Revisando

1 Um raio de luz monocromática passa de um meio A para um meio B, conforme a figura.

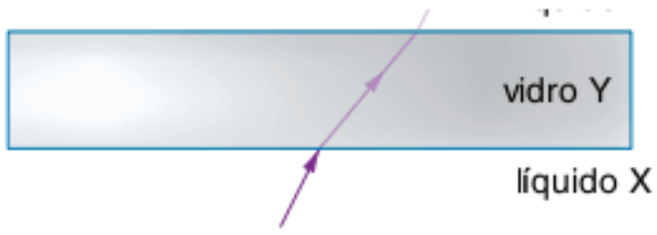


a) Qual é o meio mais refringente?
b) Em que meio a luz possui a maior velocidade?

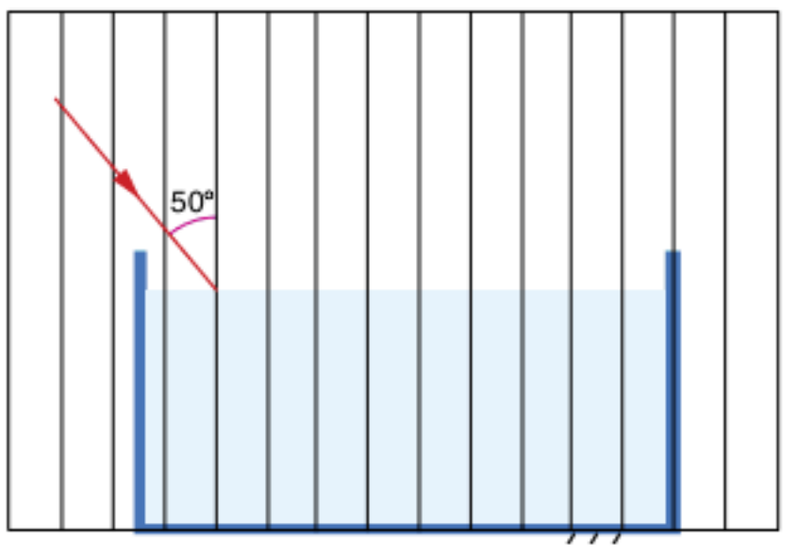
2 Um raio de luz monocromática incide perpendicularmente sobre uma das faces de um prisma, cujo ângulo de abertura é de 30º. Sendo o índice de refração do prisma $\sqrt{3}$ e estando ele imerso no ar, determine:
a) a medida do ângulo de emergência.
b) o valor do desvio angular sofrido pelo raio.

3 Um raio de luz monocromática atravessa a fronteira plana entre os meios A e B, de A para B, com ângulo de incidência igual a 30° e ângulo de refração igual a 60°. Determine:
a) o comportamento de um raio de luz de mesma frequência, que se dirige de A para B com ângulo de incidência de 60°.
b) o comportamento de um raio de luz de mesma frequência, que forma no meio B um ângulo de 30° com a normal e dirige-se de B para A.

4 Um feixe de luz monocromática passa do líquido X para o vidro Y e volta novamente para o líquido X, como mostra a figura.
Em qual meio, X ou Y, a velocidade da luz é maior? Justifique a sua resposta.



5 **UFMG 2007** Um feixe de luz vermelha, emitido por um laser, incide sobre a superfície da água de um aquário, como representado nesta figura.
O fundo desse aquário é espelhado, a profundidade da água é de 40 cm e o ângulo de incidência do feixe de luz é de 50°.
Observa-se, então, que esse feixe emerge da superfície da água a 60 cm do ponto em que entrou.
Sabe-se que, na água, a velocidade de propagação da luz diminui com o aumento de sua frequência.
Considerando essas informações:
1. trace, na figura acima, a continuação da trajetória do feixe de luz até depois de ele sair da água. Justifique sua resposta.
2. calcule o índice de refração da água nessa situação. Em seguida, usa-se outro laser que emite luz verde.



Considerando essa nova situação, responda:

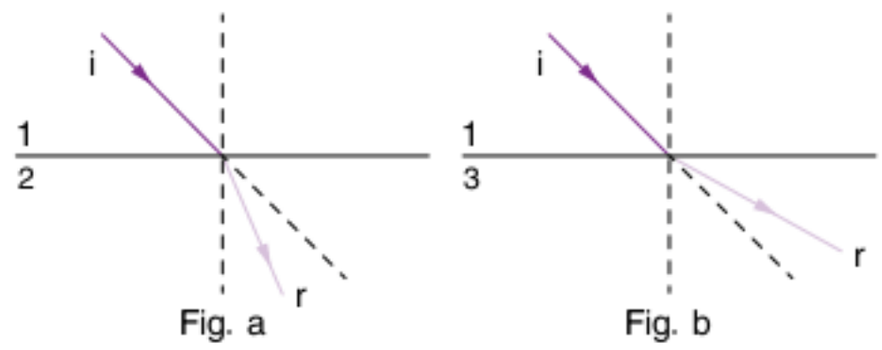
3. a distância entre o ponto em que o feixe de luz verde entra na água e o ponto em que ele emerge é menor, igual ou maior que a indicada para o feixe de luz vermelha? Justifique sua resposta.

6 **FCC (Adapt.)** Um raio luminoso monocromático se propaga de um meio transparente M para outro N. Nessa mudança de meio, sua velocidade aumenta de 25%. Para essa luz monocromática, qual o valor do índice de refração do meio M em relação ao meio N?

7 **Fuvest** As figuras a e b indicam os raios de luz incidente (i) e refratado (r) na interface entre o meio 1 e os meios 2 e 3, respectivamente:

a) Represente graficamente a refração de um raio de luz que passa do meio 2 para o meio 3.

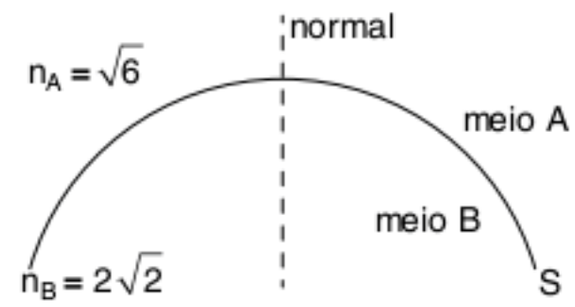
b) Um desses três meios é o vácuo. Qual deles?



8 A figura ao lado representa uma superfície S, separadora de dois meios ordinários. Os índices absolutos de refração estão indicados na figura. Pergunta-se:

a) Qual o valor do seno do ângulo limite para esses dois meios?

b) Em qual meio ocorrerá o ângulo limite?



9 **Fuvest** Um feixe de luz monocromática incide sobre lâminas paralelas de diamante e vidro. Sendo os índices de refração de 2,42 para o diamante e 1,52 para o vidro, represente a trajetória do feixe luminoso que possui incidência oblíqua.

10 **Fuvest** Um raio luminoso proveniente do ar atinge uma lâmina de vidro de faces paralelas com 8,0 cm de espessura e 1,5 de índice de refração. Esse raio sofre refração e reflexão ao atingir a primeira superfície; refração e reflexão ao atingir a segunda superfície (interna).

a) Trace as trajetórias dos raios incidente, refratados e refletidos.

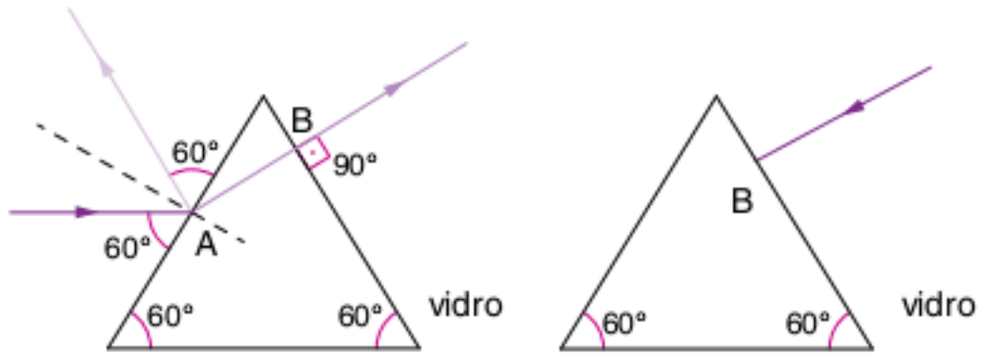
b) Determine o tempo para o raio refratado atravessar a lâmina, sendo o seno do ângulo de incidência 0,9.

11 Se a distância entre o objeto e a lente convergente passa de 2F para F (em que F é a distância focal), como irá variar a distância entre a imagem e a lente?

12 **Fuvest** O esquema representa um bloco de vidro com uma cavidade prismática vazia e a trajetória percorrida por um raio de luz incidente no ponto A.

a) Desenhe a trajetória de um outro raio que entra na cavidade, no ponto B, perpendicularmente à face.

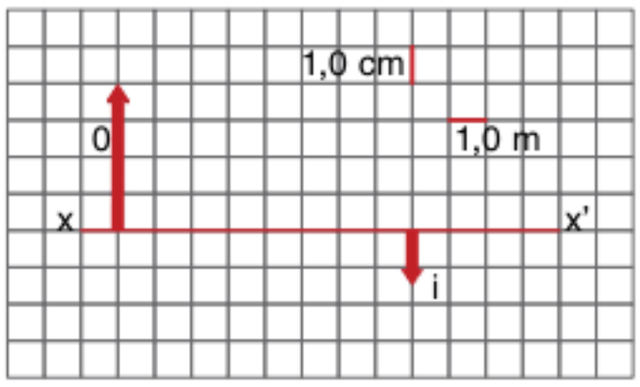
b) Calcule o índice de refração do vidro.



13 A figura representa um objeto real O e a respectiva imagem i, produzida por uma lente delgada de eixo óptico principal xx'. Determine graficamente:

a) a posição do centro óptico.

b) a distância focal da lente.

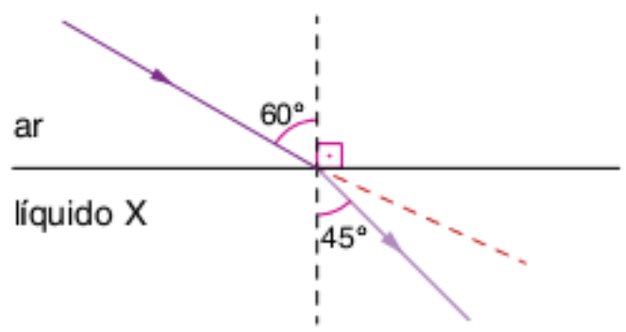


Exercícios propostos

1 A velocidade da luz em um meio A é $1{,}0.10^8$ m/s e, no meio B, é $1{,}5.10^8$ m/s. Dada a velocidade da luz no vácuo 3.10^8 m/s:

a) calcule os índices de refração absolutos dos meios A e B.
b) qual é o índice de refração de A em relação a B?

2 Considere a refração da luz ao passar do ar para um líquido X, conforme o esquema seguinte:



Determine o índice de refração absoluto do líquido X, sabendo que: sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e índice de refração absoluto do ar ≅ 1.

3 Quando um raio de luz passa de um meio mais refringente para outro menos refringente:

(a) afasta-se da normal.
(b) aproxima-se da normal.
(c) aumenta a frequência.
(d) não ocorre desvio.
(e) aumenta a velocidade de propagação.

4 O índice de refração do vácuo é igual a 1. Admitamos que o índice de refração do diamante seja igual a 2,4. Sendo de 300.000 km/s a velocidade da luz no vácuo, podemos, então, concluir que:

(a) o vácuo é mais refringente que o diamante.
(b) a luz sempre desvia fortemente, quando passa do vácuo para o diamante.
(c) o diamante é um excelente emissor de luz.
(d) a velocidade de propagação da luz no diamante é de 125.000 km/s.
(e) a velocidade de propagação da luz no diamante é de 720.000 km/s.

5 Assinale as afirmações a seguir.

I. Quando um raio incidente oblíquo passa do meio menos refringente para o mais refringente, ele aproxima-se da normal.
II. Quando um raio incidente oblíquo passa do meio mais refringente para o menos refringente, ele afasta-se da normal.
III. Quando um raio de luz incide na fronteira entre dois meios transparentes opticamente diferentes, ocorre reflexão.
IV. A velocidade de propagação da luz altera-se na refração.

Responda de acordo com o código:

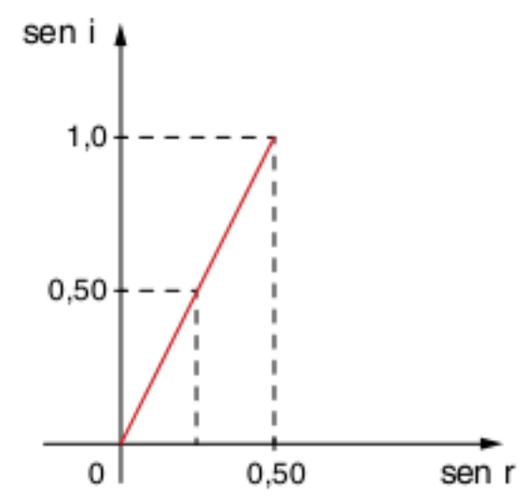
(a) se apenas I e II forem corretas.
(b) se apenas I, II e III forem corretas.
(c) se apenas I, II e IV forem corretas.
(d) se todas forem corretas.
(e) se todas forem incorretas.

6 Qual o comprimento de onda de uma luz de frequência igual a 4.10^{14} Hz propagando-se em um meio de índice de refração igual a 1,5?

7 Quando a luz emerge da água para o ar:

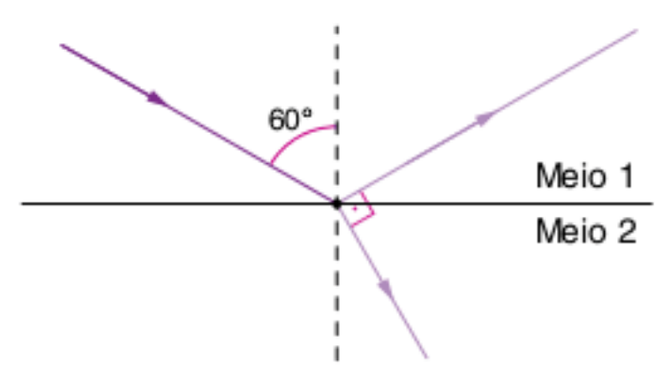
(a) sua frequência aumenta.
(b) seu comprimento de onda diminui.
(c) sua direção de propagação necessariamente se altera.
(d) sua cor modifica-se ligeiramente.
(e) sua velocidade de propagação aumenta.

8 Uma mesma luz monocromática passa do vácuo para o interior de uma substância, com diversos ângulos de incidência. Os senos do ângulo de incidência (i) e do ângulo de refração (r) são dados pelo gráfico seguinte.



Calcule o índice de refração absoluto dessa substância.

9 Na figura seguinte representa-se um pincel cilíndrico de luz monocromática que, propagando-se num meio 1, incide na fronteira separadora deste com um meio 2. Uma parcela de luz incidente é refletida, retornando ao meio 1, enquanto a outra é refratada, passando para o meio 2.



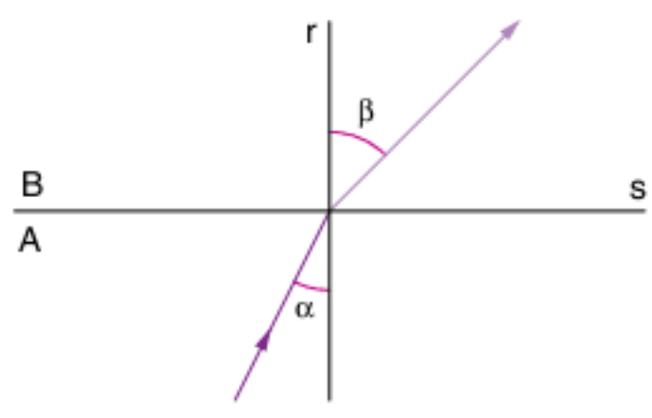
Sabendo que os pincéis refletido e refratado são perpendiculares entre si, obtenha:

a) os ângulos de reflexão e de refração.
b) o índice de refração do meio 2 em relação ao meio 1.

10 Consideremos dois blocos de mesmo formato e igualmente lapidados, um de quartzo e outro de diamante, imersos no ar. Dados: índice de refração do quartzo $n_{quartzo} = 1{,}5$ e índice de refração do diamante $n_{diamante} = 2{,}4$.
Sendo igualmente iluminados:

(a) o diamante brilha mais, porque o ângulo limite na fronteira diamante-ar é menor que na fronteira quartzo-ar, o que favorece a reflexão interna no diamante.
(b) o diamante brilha mais, porque o ângulo limite na fronteira diamante-ar é maior que na fronteira quartzo-ar.
(c) o diamante brilha mais, porque a luz propaga-se em seu interior com velocidade maior que no interior do quartzo.
(d) o quartzo brilha mais, porque ele é mais refringente que o diamante.
(e) o quartzo e o diamante brilham igualmente.

11 **Fuvest** Um raio de luz monocromática propaga-se em um meio A. Incide na superfície S formando um ângulo α com a reta normal r e emerge no meio B formando um ângulo β com r. Quando α vale 30°, β vale 45°. Qual o valor de β quando $\alpha = 45°$?

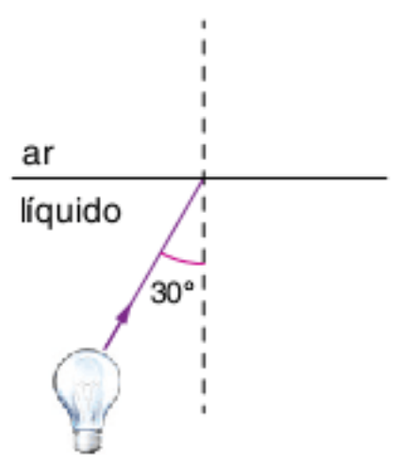


(a) 15°
(b) 30°
(c) 60°
(d) 75°
(e) 90°

12 **FCC** Admitindo que a luz se propaga no vácuo com uma velocidade de $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s, qual é o índice de refração absoluto de um líquido em que sua velocidade de propagação é igual a $2{,}0 \cdot 10^5$ km/s?
(a) 1,5
(b) 2,5
(c) 5,0
(d) 6,0
(e) 7,0

13 **Aman** A velocidade da luz em um certo óleo mede $\frac{2}{3}$ da velocidade no vácuo. O índice de refração abaixo é:
(a) 1,50
(b) 0,67
(c) 1,67
(d) 2,50
(e) 1,75

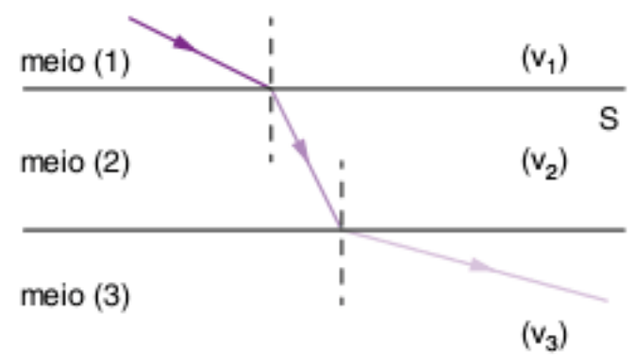
14 **Ufop** A figura mostra um raio luminoso proveniente de uma lâmpada colocada dentro de um líquido cujo índice de refração em relação ao ar é aproximadamente $\sqrt{2}$.



O valor do ângulo de refração é:
(a) 21,2°
(b) 30°
(c) 42,4°
(d) 45°
(e) arc sen $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

15 **PUC** O índice de refração de um certo meio é $\sqrt{2}$ para a luz vermelha e $\sqrt{3}$ para a violeta. Dois raios luminosos monocromáticos, um vermelho e outro violeta, após se propagarem no meio considerado, passam para o ar. O ângulo de incidência de ambos é de 30°.
O ângulo formado pelos raios refratados entre si vale:
(a) 0°
(b) 15°
(c) 30°
(d) 45°
(e) 60°

16 **Cesgranrio** Um raio de luz monocromático passa de um meio (1) para um meio (2) e deste para um meio (3), conforme indicado na figura a seguir.

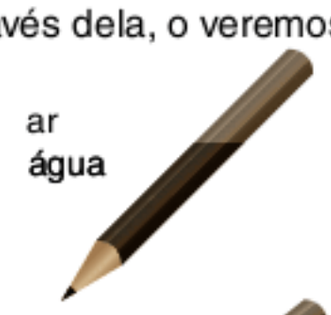


Ordene as velocidades de propagação da luz, nestes três meios: v_1, v_2 e v_3.

17 **Mackenzie** Um raio luminoso que se propaga no vidro (índice de refração = $\sqrt{2}$) atinge a superfície que separa esse meio do ar (índice de refração = 1), segundo um ângulo i com a normal no ponto de incidência. Com relação a esse fato, podemos afirmar que haverá:
(a) refração somente para $i \geq 45°$.
(b) refração somente para $i \leq 45°$.
(c) refração somente para $i = 45°$.
(d) refração para qualquer valor de i.
(e) reflexão total para qualquer valor de i.

18 **Fuvest** Um feixe luminoso propagando-se a 300.000 km/s atinge um bloco de certo material transparente, cujo índice de refração é 2,0.
a) Desenhe o raio incidente, o refratado e o emergente, supondo que o raio incidente faça um ângulo de 60° com a normal a uma das faces do bloco.
b) Qual a velocidade do feixe ao atravessar o interior do bloco?

19 Mergulhando parcialmente um lápis em água e olhando através dela, o veremos como mostra a figura:

(a)


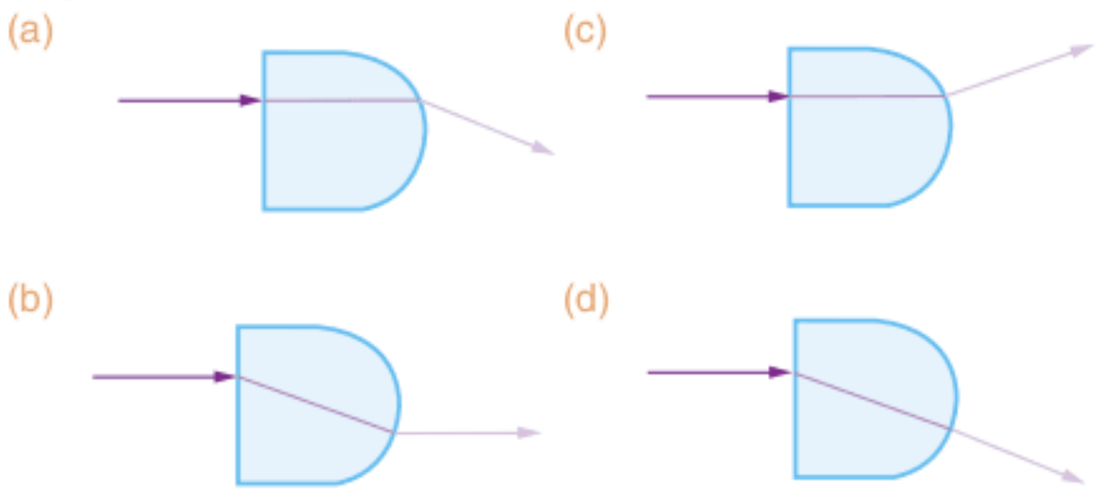
(b)

(c)

(d)

20 **Unesp 2007** Uma estudante, tendo recebido a tarefa de determinar o índice de refração relativo da luz entre um líquido e o ar, teve a ideia de usar uma vareta, colocada em posição vertical, e uma régua, formando um ângulo reto com a vareta. A medição foi feita em duas etapas: primeiro ela mediu o tamanho da sombra da vareta na régua ao ar livre e, em seguida, fez o mesmo com o "aparelho" imerso no líquido. Sabendo que o comprimento da vareta era L = 40 cm e o resultado das medições das sombras foram $S_{ar} = 30\,cm$ e $S_{líquido} = \frac{40}{(3)^{\frac{1}{2}}\,cm}$, determine o índice encontrado pela estudante, utilizando a lei de Snell.

21 **PUC-MG 2008** Em um certo experimento de laboratório, um feixe de laser atinge um objeto de vidro perpendicularmente à sua face plana, como indicado nos diagramas abaixo. A direção do feixe, ao passar pelo vidro, é corretamente indicada no diagrama:



22 **Udesc 2009** Um feixe de luz, cujo comprimento de onda é igual a 600 nm, propagando-se no ar, incide sobre um bloco de material transparente. O feixe de luz incidente forma um ângulo de 30° com relação a uma reta normal à superfície do bloco, e o refratado faz um ângulo de 20° com a normal. Considerando o índice de refração do ar igual a 1,00 e a tabela abaixo, o valor do índice de refração do material é:

Ângulo (θ)	sen (θ)	cos (θ)
20°	0,34	0,94
30°	0,50	0,87
60°	0,87	0,50
70°	0,94	0,34

(a) 1,47
(b) 0,68
(c) 2,56
(d) 0,93
(e) 1,00

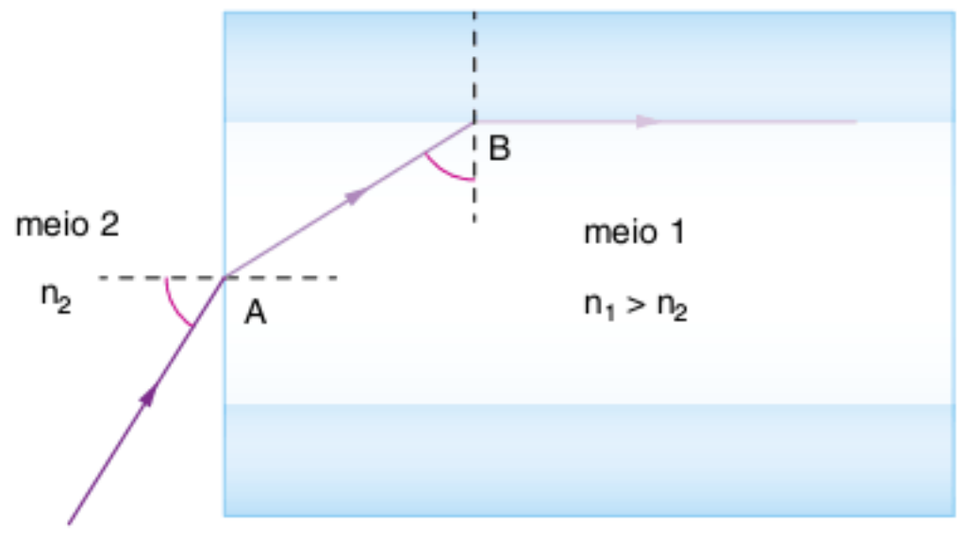
23 **UEPG 2008** A respeito de um raio de luz que se propaga de um meio 1 para um meio 2, assinale o que for correto.

01 Quanto maior a sua velocidade no meio 2, menor será seu índice de refração.
02 Quanto maior o índice de refração, maior será o desvio do raio de luz no meio 2.
04 Na superfície de separação dos meios só ocorre refração.
08 O ângulo de refração é, em toda circunstância, menor que o ângulo incidente.

Soma = ☐

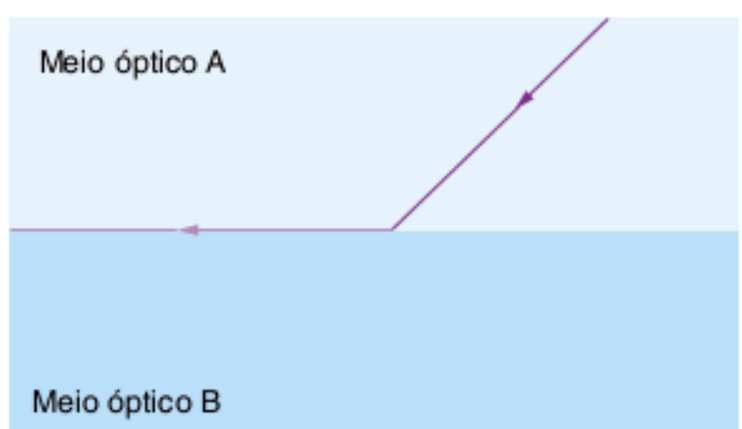
24 **Uerj 2009** Uma camada de óleo recobre a superfície em repouso da água contida em um recipiente. Um feixe de luz paralelo e monocromático incide sobre o recipiente de tal modo que cada raio do feixe forma um ângulo de 4° com a reta perpendicular à superfície da camada de óleo.
Determine o ângulo que cada raio de luz forma com essa perpendicular, ao se propagar na água.

25 **Unesp 2007** As fibras óticas são dispositivos flexíveis projetados para conduzir um feixe de luz por longas distâncias e por caminhos sinuosos, sendo largamente utilizadas nos mais diversos campos da computação, da medicina e da engenharia. Considerando a figura, que representa um raio luminoso incidindo em uma fibra ótica, de índice de refração n_1, diga qual ou quais são os fenômenos físicos que ocorrem nos pontos A e B.



Considere, agora, que um raio luminoso incida, no ponto A, saindo da fibra ótica. Nesse caso, comparando a situação em que o meio 2 é o ar com aquela em que o meio 2 é a água, determine e justifique em qual delas o ângulo limite de incidência desta fibra é maior.

26 **FGV 2008** Um feixe de luz monocromática, proveniente de um meio óptico A, incide sobre a superfície de separação desse meio com um meio óptico B. Após a incidência, o raio segue por entre os dois meios, não refletindo nem penetrando o novo meio.



Com relação a esse acontecimento, analise:

I. O meio óptico A tem um índice de refração maior que o meio óptico B.
II. Em A, a velocidade de propagação do feixe é maior que em B.
III. Se o ângulo de incidência (medido relativamente à normal à superfície de separação) for aumentado, o raio de luz reflete, permanecendo no meio A.
IV. Se o raio de luz penetrasse o meio B, a frequência da luz monocromática diminuiria.

Está correto o contido apenas em:

(a) I e III.
(b) II e III.
(c) II e IV.
(d) I, II e IV.
(e) I, III e IV.

27 **PUC-SP** É dada a tabela:

Material	Índice de refração absoluto
gelo	1,309
quartzo	1,544
diamante	2,417
rutilo	2,903

É possível observar reflexão total com luz incidindo do:

(a) gelo para o quartzo.
(b) gelo para o diamante.
(c) quartzo para o rutilo.
(d) rutilo para o quartzo.
(e) gelo para o rutilo.

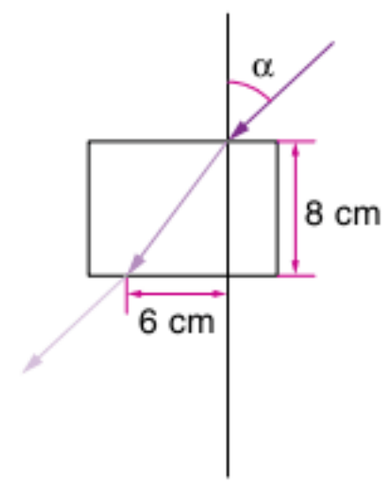
28 **Mackenzie** Para haver reflexão total, é preciso apenas:

(a) uma superfície de separação entre dois meios.
(b) que a luz se propague do meio de menor para o de maior índice de refração.
(c) um espelho plano.
(d) que a luz se propague de um meio menos refringente para um meio mais refringente, com um ângulo de incidência superior a um certo ângulo limite.
(e) que a luz se propague do meio mais refringente para um meio menos refringente, com um ângulo de incidência superior a um certo ângulo limite.

29 **Mackenzie** Um raio de luz, que se propaga num meio A, atinge a superfície que separa este meio de outro B e sofre reflexão total. Podemos afirmar que:

(a) A é mais refringente do que B e o ângulo de incidência é menor que o ângulo limite.
(b) A é mais refringente do que B e o ângulo de incidência é maior que o ângulo limite.
(c) A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é maior que o ângulo limite.
(d) A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é menor que o ângulo limite.
(e) A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é igual ao ângulo limite.

30 **UFU 2007** Um raio de luz propagando-se no ar (índice de refração igual a 1) incide sobre o topo de um cubo de vidro, cujo lado é 8 cm, formando um ângulo α com a normal à superfície. O raio de luz emerge na base do bloco a uma distância de 6 cm à esquerda em relação à vertical do ponto de incidência, conforme figura a seguir.



Sendo senα = 0,9, o índice de refração deste vidro será de:

(a) 1,5
(b) 1,2
(c) 1,125
(d) 0,675

31 Uma pedrinha encontra-se no fundo de uma piscina, a uma profundidade igual a 2,0 m. Considerando igual a $\frac{4}{3}$ o índice de refração da água, qual a profundidade aparente dessa pedra para uma pessoa que se encontra fora da água, olhando para ela, nas vizinhanças da vertical que passa pela pedra?

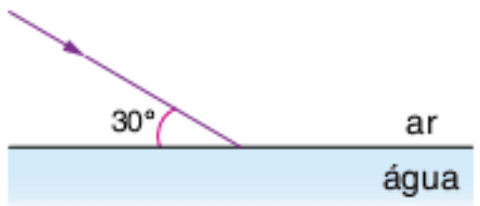
32 **Fuvest** Um pássaro sobrevoa em linha reta e à baixa altitude uma piscina em cujo fundo se encontra uma pedra. Podemos afirmar que:

(a) com a piscina cheia, o pássaro poderá ver a pedra durante um intervalo de tempo maior do que se a piscina estivesse vazia.
(b) com a piscina cheia ou vazia, o pássaro poderá ver a pedra durante o mesmo intervalo de tempo.
(c) o pássaro somente poderá ver a pedra enquanto estiver voando sobre a superfície da água.
(d) o pássaro, ao passar sobre a piscina, verá a pedra numa posição mais profunda do que aquela em que ela realmente se encontra.
(e) o pássaro nunca poderá ver a pedra.

33 Quando observamos uma mosca através de uma vidraça comum (lâmina de faces paralelas), o que vemos, na realidade, é a imagem da mosca, conjugada pela lâmina.

a) Essa imagem é real ou virtual?
b) A distância entre nós e a imagem é maior ou menor que a distância entre nós e a mosca?

34 **Mackenzie** Um raio luminoso se propaga no ar (índice de refração = 1) e atinge a superfície da água como mostra a figura. Um mergulhador no interior da água vê esse raio formando 60° com a superfície livre da água.



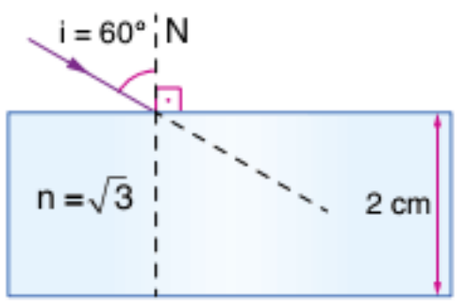
O índice de refração dessa água vale:

(a) $\frac{1}{3}$
(b) $\sqrt{3}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(d) 3
(e) $\frac{2}{3}$

35 **Osec** Um raio luminoso monocromático incide numa lâmina de faces planas e paralelas, imersa no ar, de 4,00 cm de espessura e índice de refração 1,5, sob um ângulo de 45°. Ao sair da lâmina, o raio luminoso faz com a normal um ângulo de:

(a) 30°
(b) 45°
(c) 60°
(d) 75°
(e) n.d.a.

36 **Faap** Um raio luminoso incide sob um ângulo de 60° sobre a superfície de uma placa de vidro com 2 cm de espessura, cujo índice de refração vale $\sqrt{3}$.



Determinar o deslocamento do raio luminoso emergente.

37 O desvio mínimo sofrido por um raio de luz, ao atravessar um prisma de ângulo de abertura 90°, é de 30°. Sabendo-se que ele se encontra imerso no ar, determine o seu índice de refração.

38 **FCC** Qual das seguintes figuras melhor representa a trajetória de um raio de luz através de um prisma de vidro imerso no ar?

(a)

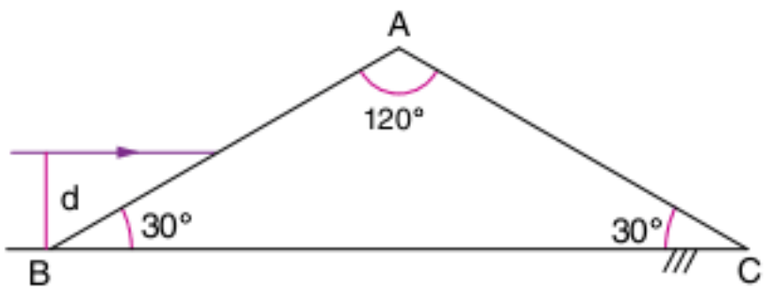
(b)

(c)

(d)

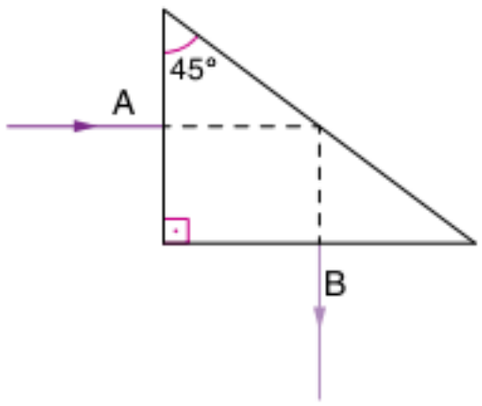
(e)

39 **Fuvest** Um prisma isósceles de ângulo 120° e índice de refração $\sqrt{3}$ tem sua base BC espelhada. Um raio luminoso, contido num plano de seção reta do prisma, paralelo à base e distando desta de d, incide sobre a face AB.



a) Esboce o caminho do raio no interior do prisma e depois de emergir deste.
b) Qual é o ângulo de incidência do raio luminoso sobre a face espelhada?

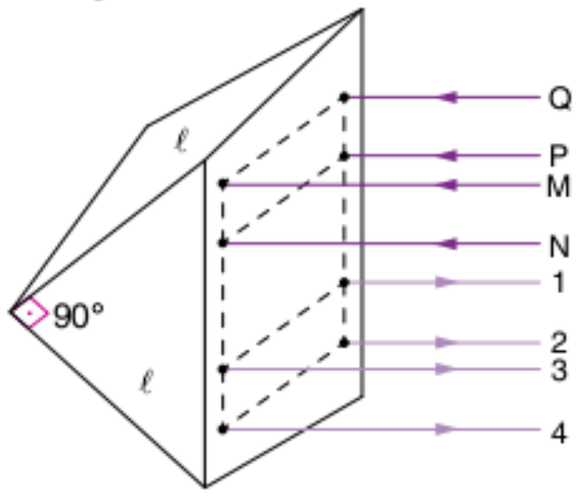
40 **ITA** Um prisma de 45° é usado para desviar de 90° um feixe luminoso.



Qual deverá ser um possível índice de refração do vidro em relação ao ar, para que toda a luz que entra em A saia em B?

(a) 1,3
(b) 1,23
(c) 1,40
(d) 0,71
(e) 1,65

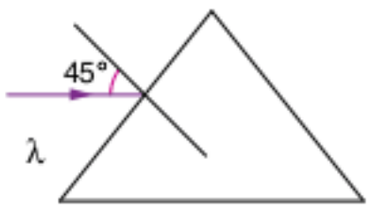
41 **FCC** Quatro raios luminosos paralelos, M, N, P e Q, incidem perpendicularmente numa face de um prisma que dá origem aos raios emergentes 1, 2, 3 e 4, conforme a figura a seguir.



A correspondência entre os raios incidentes e os respectivos emergentes é melhor representada por:

(a) (M; 1), (N; 2), (P; 3) e (Q; 4)
(b) (M; 2), (N; 3), (P; 4) e (Q; 4)
(c) (M; 4), (N; 1), (P; 2) e (Q; 3)
(d) (M; 3), (N; 4), (P; 2) e (Q; 1)
(e) (M; 4), (N; 3), (P; 1) e (Q; 2)

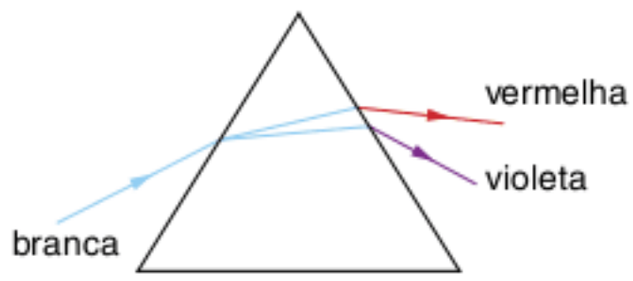
42 **Vunesp** Um prisma de vidro tem os três lados iguais e índice de refração $n = \sqrt{2}$ em relação ao do ar, para um determinado comprimento de onda λ. Um raio luminoso de comprimento de onda incide no prisma formando um ângulo de 45° com a normal e paralelo à base do prisma.



Calcule o ângulo de desvio do raio que emerge do prisma, em relação ao raio incidente.

(a) 60º (c) 0º (e) 15º
(b) 45º (d) 30º

43 **UFV** Ao incidirmos um feixe de luz branca sobre um prisma, observamos a distância da luz no feixe emergente, sendo que a cor violeta sofre o maior desvio e a vermelha, o menor.



Analisar as seguintes afirmativas.

I. O índice de refração do vidro é maior para a luz violeta.
II. O índice de refração do vidro é maior para a luz vermelha.
III. A velocidade da luz violeta dentro do vidro é maior que a da vermelha.
IV. A velocidade da luz vermelha dentro do vidro é maior que a da violeta.
V. As velocidades das luzes vermelha e violeta são iguais dentro do vidro.

São verdadeiras:

(a) II e IV. (d) I e IV.
(b) I e V. (e) II e III.
(c) I e III.

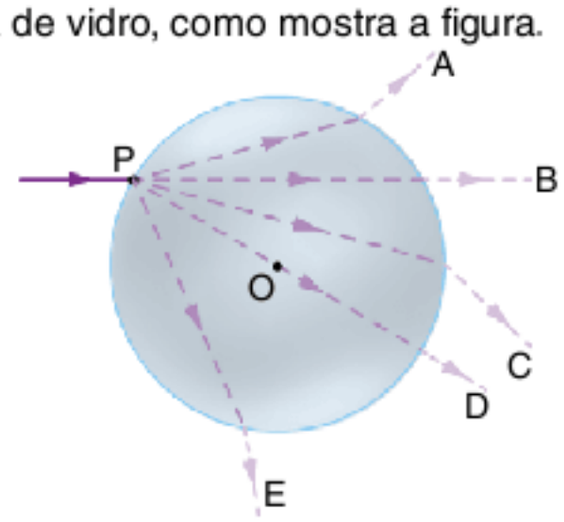
44 **UFPE** É comum encontrarmos desenhos do arco-íris com as cores colocadas em ordem diferente da distribuição real. Considerando que o ordenamento das cores é o mesmo obtido quando a luz branca atravessa um prisma, e levando em conta que o desvio de cada cor é determinado pela sua frequência, indique qual a ordem espacial com que as cores indicadas abaixo aparecem no arco-íris.

(a) vermelho – verde – amarelo – azul
(b) verde – amarelo – azul – vermelho
(c) amarelo – verde – vermelho – azul
(d) azul – verde – amarelo – vermelho
(e) azul – amarelo – verde – vermelho

45 **IME 2007** Quando a luz, que estava se propagando no ar, penetra na água de uma piscina, sua velocidade ___(I)___, sua frequência ___(II)___ e seu comprimento de onda ___(III)___. A opção que corresponde ao preenchimento correto das lacunas (I), (II) e (III) é:

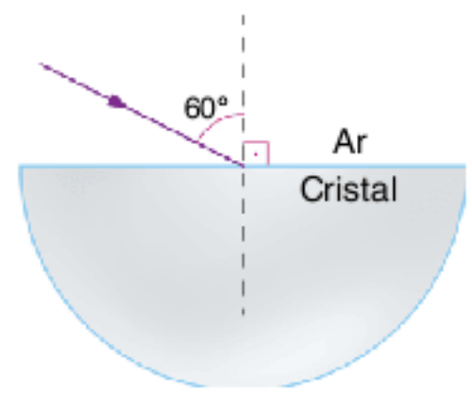
	(I)	(II)	(III)
(a)	diminui	aumenta	permanece constante
(b)	aumenta	permanece constante	diminui
(c)	diminui	permanece constante	diminui
(d)	aumenta	diminui	aumenta
(e)	diminui	diminui	diminui

46 Um raio de luz monocromática proveniente do ar incide em uma esfera de vidro, como mostra a figura.



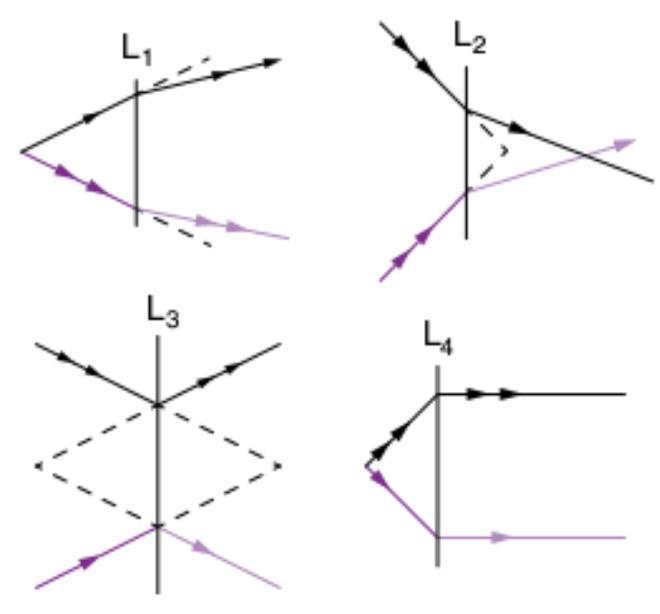
Dos trajetos indicados (A, B, C, D e E), qual é possível?

47 Um raio de luz monocromática incide no centro da face de uma peça hemisférica de cristal transparente. A figura mostra a seção da peça determinada pelo plano de incidência do raio.



Sendo $\sqrt{3}$ o índice de refração do cristal para a referida radiação, determine a trajetória do raio refratado até emergir para o ar, indicando os ângulos envolvidos.

48 Classifique as lentes abaixo representadas como sendo convergentes ou divergentes.

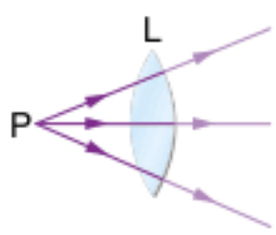


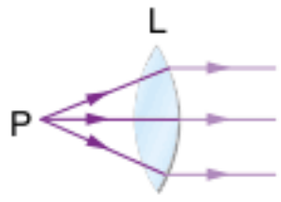
49 Uma lente biconvexa de vidro, cujo índice de refração é 1,5, está envolvida por um meio E. Determine o comportamento óptico da lente (convergente ou divergente) nos casos em que:

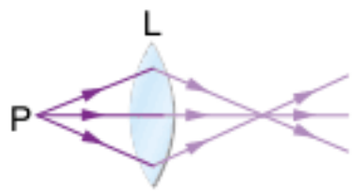
a) E é ar.
b) E é água.
c) E é sulfeto de carbono.

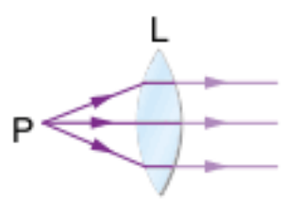
Dados: $n_{ar} = 1$; $n_{água} = 1{,}3$;
$n_{sulfeto\ de\ carbono} = 1{,}7$.

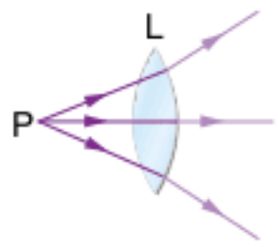
50 **Cesgranrio** Coloca-se uma lâmpada P no foco de uma lente convergente L e em seguida imerge-se o conjunto num líquido, cujo índice de refração é igual ao do vidro de que é feita a lente A figura que melhor representa o percurso dos raios luminosos que incidem na lente é:

(a)


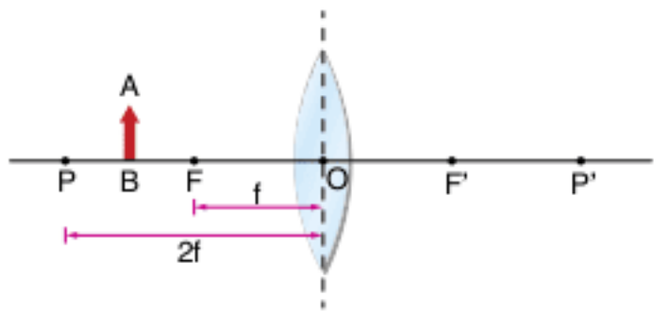
(b)


(c)


(d)


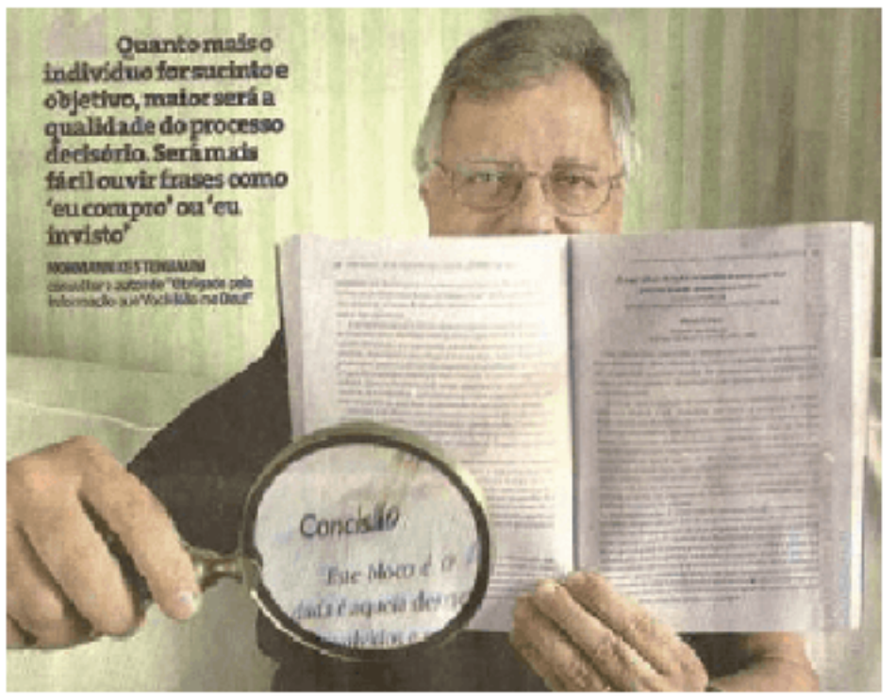
(e)


51 **FCC** Um objeto $\overline{AB}$ é colocado diante de uma lente de distância focal f na posição indicada na figura. A imagem do objeto, fornecida pela lente, forma-se:



(a) à esquerda de P.
(b) entre F e O.
(c) entre O e F'.
(d) entre F' e P'.
(e) à direita de P'.

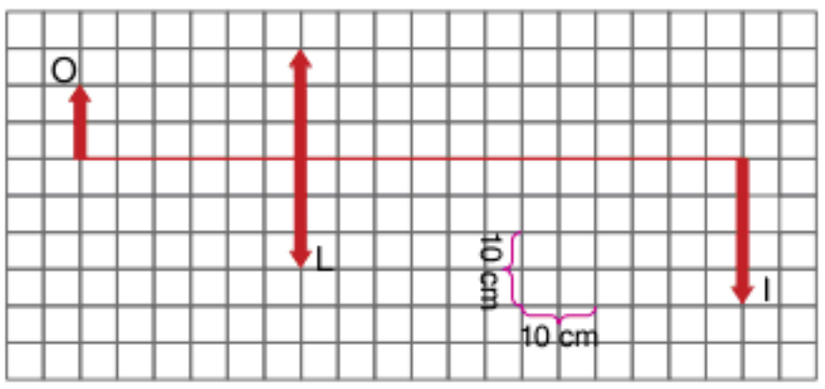
52 **PUC-SP 2008** Na figura a seguir, em relação ao instrumento óptico utilizado e às características da imagem nele formada, é possível afirmar que é uma imagem:



Folha de S.Paulo, 04 nov. 2007.

(a) real, formada por uma lente divergente, com o objeto (livro) colocado entre o foco objeto e a lente.
(b) virtual, formada por uma lente convergente, com o objeto (livro) colocado entre o foco objeto e a lente.
(c) virtual, formada por uma lente divergente, com o objeto (livro) colocado entre o foco objeto e a lente.
(d) real, formada por uma lente convergente, com o objeto (livro) colocado entre o foco objeto e o ponto antiprincipal objeto da lente.
(e) virtual, formada por uma lente convergente, com o objeto (livro) colocado sobre o foco objeto da lente.

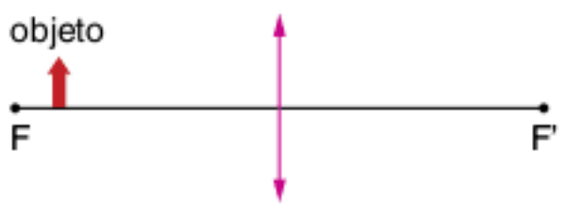
53 **UC-BA** Na figura abaixo está esquematicamente representada uma lente convergente (L), um objeto real (O) e sua imagem (I) conjugada pela lente.



Considerando a escala da figura, qual é a distância focal de L, em cm?

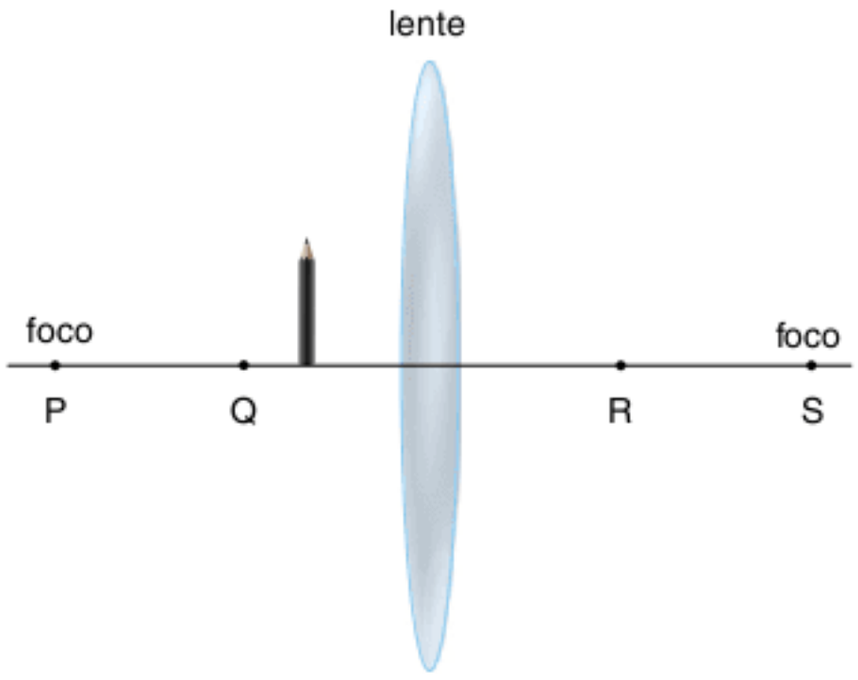
(a) 10
(b) 20
(c) 40
(d) 60
(e) 90

54 **Fuvest** Um objeto luminoso de 1,0 cm de altura está a 5,0 cm de uma lente convergente de 10 cm de distância focal (vide figura).



a) Qual a posição da imagem?
b) Fazer o traçado dos raios.

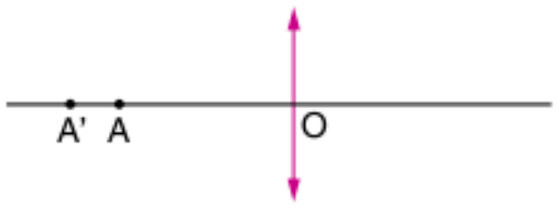
55 **UFMG 2007** Tânia observa um lápis com o auxílio de uma lente, como representado na figura.



Essa lente é mais fina nas bordas que no meio e a posição de cada um de seus focos está indicada na figura.
Considerando-se essas informações, é correto afirmar que o ponto que melhor representa a posição da imagem vista por Tânia é o:

(a) P.
(b) Q.
(c) R.
(d) S.

56 **FMABC-SP** A lente convergente L conjuga ao ponto-objeto real A, distante 10 cm da lente, o ponto-imagem virtual A, distante 12 cm da lente. A distância focal da lente é igual a:



(a) 5,4 cm
(b) 11 cm
(c) 11,5 cm
(d) 10,5 cm
(e) 60 cm

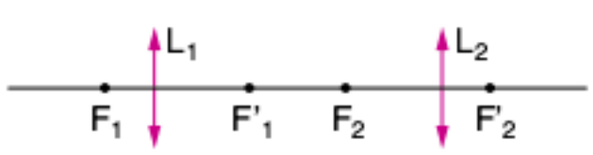
57 **UFPA** Em relação a uma lente delgada convergente de distância focal igual a 2,0 cm, um objeto luminoso frontal de 3,0 cm de altura que se encontra a 6,0 cm de distância da lente tem uma imagem:
(a) inversa, menor que o objeto e a 3,0 cm de distância da lente.
(b) inversa, maior que o objeto e a 3,0 cm de distância da lente.
(c) inversa, menor que o objeto e a 6,0 cm de distância da lente.
(d) inversa, maior que o objeto e a 6,0 cm de distância da lente.
(e) direita, menor que o objeto e a 3,0 cm de distância da lente.

58 **PUC-SP** Na determinação da altura de um objeto incandescente, usa-se uma lente convergente de 12 cm de distância focal, obtendo-se uma imagem de 4 cm de altura, quando o objeto é colocado a uma distância da lente igual a duas vezes a distância focal. A altura do objeto vale:
(a) 4 cm
(b) 8 cm
(c) 2 cm
(d) 1,4 cm
(e) 2,8 cm

59 **Osec-SP** Um objeto linear real está colocado perpendicularmente ao eixo principal de uma lente convergente e a uma distância de 8 cm dela. A imagem virtual formada é três vezes maior que o objeto. Qual é a distância focal da lente?
(a) 6 cm
(b) 12 cm
(c) 18 cm
(d) 24 cm
(e) 3 cm

60 **UFSC** Uma lente convergente projeta uma imagem real a 0,72 m da posição do objeto. Qual é a distância focal da lente, em cm, sabendo-se que a imagem é 5 vezes maior que o objeto?

61 **UnB** No sistema esquematizado, as vergências são 25 di para L_1 e 10 di para L_2. A distância entre L_1 e L_2 mede 25 cm. Coloca-se em objeto real antes de F_1 a 5,0 cm de distância da lente L_1.



A imagem real I, produzida por L_1, a lente L_2 conjuga uma imagem I_2:
(a) real e invertida.
(b) menor do que I e direita.
(c) igual a I e direita.
(d) virtual e maior do que I.

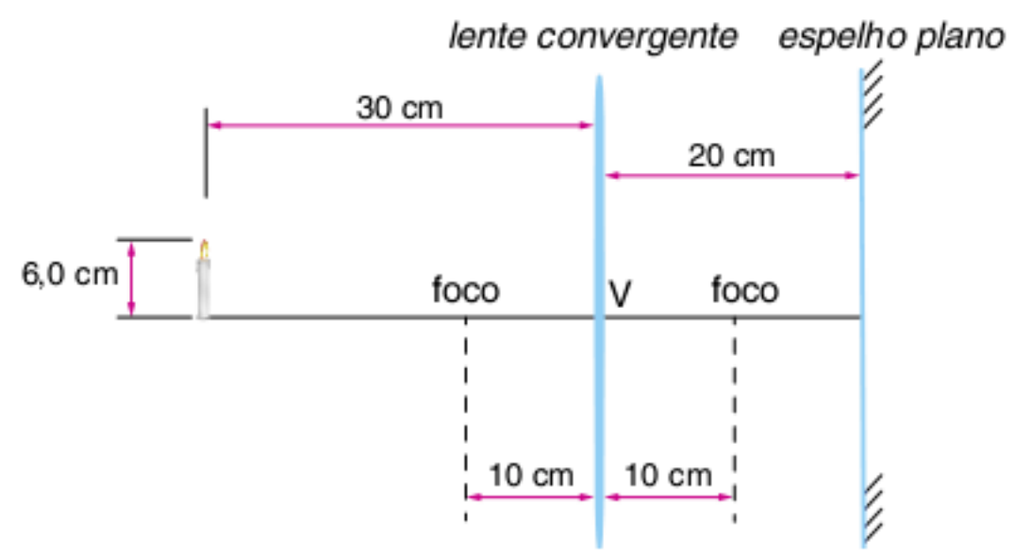
62 **Vunesp** Duas lentes delgadas, uma convergente e outra divergente, com distâncias focais respectivamente iguais a 1 m e – 2 m, encontram-se justapostas. Um objeto é colocado a 3 m das lentes. A distância entre a imagem e o sistema de lentes (considerado de espessura desprezível) vale:
(a) 0,54 m
(b) 0,75 m
(c) 0,65 m
(d) 1,20 m
(e) 6,00 m

63 **Fuvest** No esquema estão representados:

L: lente delgada e convergente de distância focal igual a 40 cm.
E: espelho plano perpendicular ao eixo principal da lente L e distante 80 cm dela.
O: objeto situado a 80 cm da lente L.

O conjunto formado pela lente L e o espelho E conjugam, ao objeto O, uma imagem final I. O módulo da razão entre a altura da imagem I e a altura do objeto O é igual a:
(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{3}{4}$
(c) 1
(d) $\frac{4}{3}$
(e) 2

64 **UFRJ 2010** A figura a seguir mostra uma lente convergente de distância focal 10 cm frente a um espelho plano paralelo à lente. O espelho encontra-se a uma distância de 20 cm do vértice V da lente. Do outro lado da lente, uma vela de 6,0 cm de altura encontra-se a uma distância de 30 cm do vértice da lente.



a) Calcule a distância entre a vela e sua imagem formada pelo espelho plano.
b) Calcule a altura da imagem da vela formada pelo espelho plano.

65 **Fuvest** Um feixe de luz propaga-se no interior de um vidro homogêneo. Quando esse feixe atinge a superfície de separação do vidro com o ar, podemos afirmar que seguramente ocorre:

(a) refração.
(b) difração.
(c) dispersão.
(d) interferência.
(e) reflexão.

66 **PUC-SP** De objeto real:

(a) as lentes convergentes só fornecem imagens virtuais.
(b) as lentes divergentes só fornecem imagens reais.
(c) os espelhos planos só fornecem imagens virtuais.
(d) os espelhos côncavos só fornecem imagens invertidas.
(e) os espelhos convexos só formam imagens reais.

67 **UEL** Um instrumento óptico conjuga, a um objeto real, uma imagem maior que ele. Esse instrumento pode ser:

(a) uma lente divergente.
(b) um espelho plano.
(c) um espelho convexo.
(d) uma lente convergente.
(e) uma lâmina de faces paralelas.

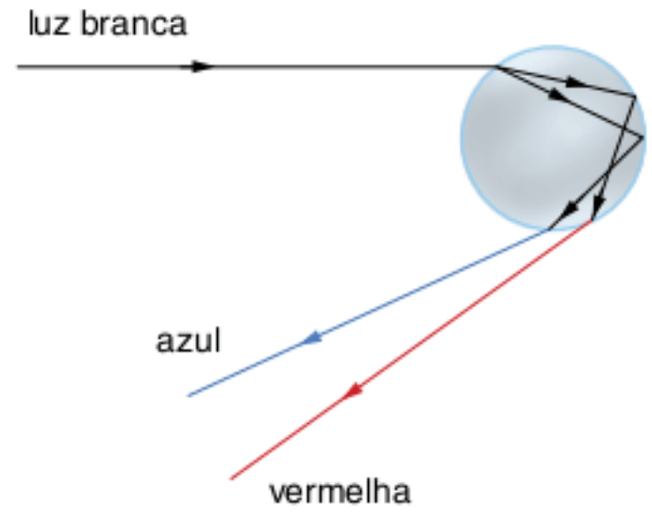
68 **IME 2007** Um espelho e uma lente, ambos esféricos, encontram-se posicionados de maneira que seus eixos ópticos coincidam. Uma vela acesa é posicionada entre o espelho e a lente, perpendicularmente ao eixo óptico, com a base sobre o mesmo. Para que as imagens formadas individualmente pelos dois instrumentos, a partir do objeto, possam ser direitas e coincidentes, os tipos de espelho e de lente devem ser, respectivamente:

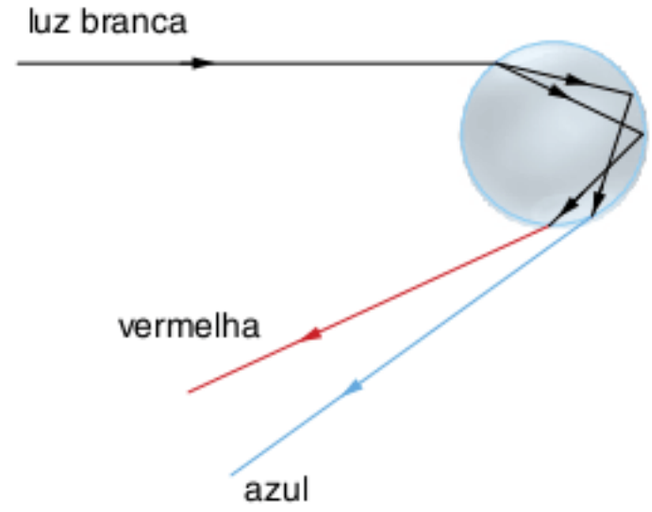
(a) convexo e convergente.
(b) convexo e divergente.
(c) côncavo e convergente.
(d) côncavo e divergente.
(e) não existe combinação que torne as imagens coincidentes.

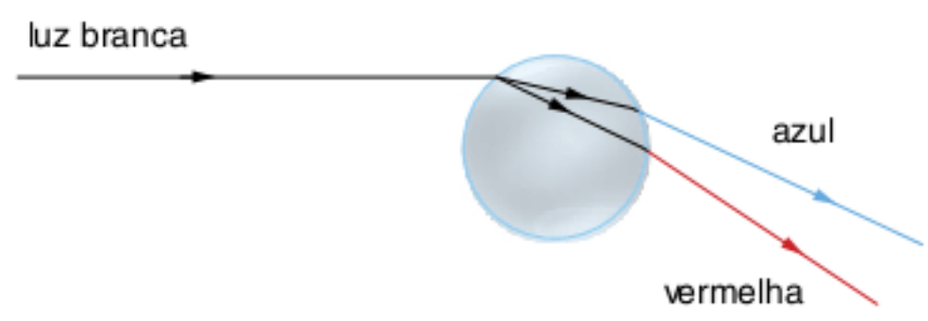
69 **UFPR 2008** Com relação aos conceitos sobre a óptica física, assinale a alternativa correta.

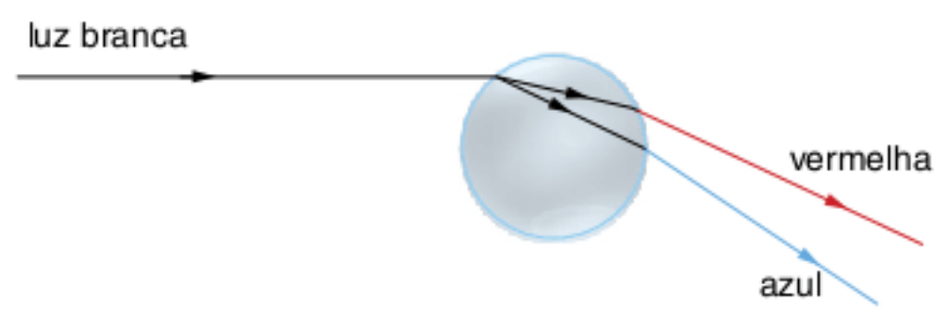
(a) A velocidade da luz no vácuo vale cerca de $300 \cdot 10^9$ m/s.
(b) No espectro visível, a cor de maior comprimento de onda é o violeta, seguido pelo azul, pelo ciano, pelo verde, pelo amarelo, pelo laranja e pelo vermelho, sendo este a de menor comprimento de onda.
(c) A luz, quando passa de um meio para outro com índice de refração diferente, tem a sua frequência alterada, mas seu comprimento de onda permanece o mesmo.
(d) Quando a luz passa de um meio com índice de refração maior para outro com índice de refração menor, a sua frequência permanece a mesma, mas seu comprimento de onda aumenta.
(e) O nome que um observador dá à cor atribuída às regiões do espectro visível não é algo arbritário, pois a convenção de cor é um conceito físico mensurável e absoluto e independente da sensação visual.

70 **UFMG 2010** Um arco-íris forma-se devido à dispersão da luz do Sol em gotas de água na atmosfera.
Após incidir sobre gotas de água na atmosfera, raios de luz são refratados; em seguida, eles são totalmente refletidos e novamente refratados.
Sabe-se que o índice de refração da água para a luz azul é maior que para a luz vermelha.
Considerando essas informações, assinale a alternativa em que estão mais bem representados os fenômenos que ocorrem em uma gota de água e dão origem a um arco-íris.

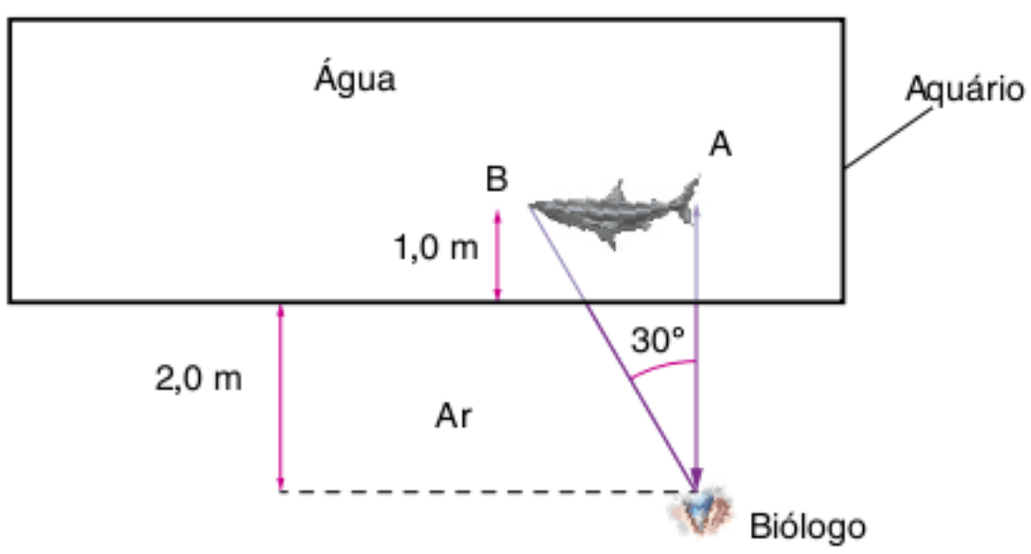
(a)


(b)


(c)


(d)


71 **UFMS 2008** Um biólogo, na tentativa de obter o comprimento de um tubarão que está no interior de um grande aquário de vidro, observa-o atentamente do lado externo. Em um dado instante, o tubarão permanece em repouso na posição horizontal, paralelo e a uma distância de 1 m de uma das paredes de vidro transparente do aquário. Nesse momento, o biólogo está a 2 m de distância dessa parede e em frente do ponto A que está na extremidade da barbatana caudal. O biólogo permanece nessa mesma posição e gira a cabeça de um ângulo de 30° para a esquerda, e a nova linha de visada coincide com o ponto B que está na cabeça do tubarão, veja a figura. Considere o índice de refração do ar e da água iguais a 1,0 e 1,33, respectivamente, e despreze a espessura e os efeitos de refração do vidro. Com fundamentos nos fenômenos da propagação da luz em meios diferentes, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).
Dados: sen 22° = 0,37; cos 22° = 0,93; sen 30° = 0,50; cos 30° = 0,87.

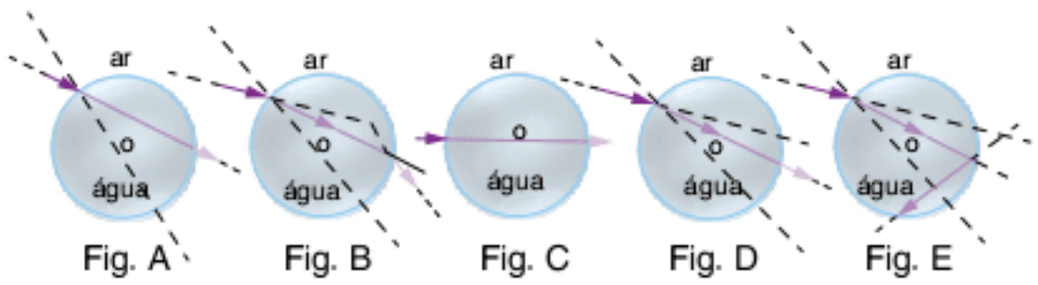


01 A velocidade da luz vermelha é menor que a velocidade da luz violeta na água.
02 Se o tubarão for nadando lentamente para a esquerda e na horizontal, devido ao fenômeno de reflexão total, a imagem da cabeça dele, vista pelo biólogo, desaparecerá primeiro que a imagem da cauda dele vista pelo biólogo.
04 O fenômeno de refração da luz não acontece em meio dispersivo.
08 O índice de refração na água, para a luz violeta, é maior que o índice de refração na água para a luz vermelha.
16 O comprimento real do tubarão é menor que 1,60 m.
Soma = ☐

72 **UFSC 2008** *A aparência do arco-íris é causada pela dispersão da luz do Sol, a qual sofre refração pelas gotas de chuva. A luz sofre uma refração inicial quando penetra na superfície da gota de chuva; dentro da gota ela é refletida e sofre nova refração ao sair da gota.*

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Arco-%C3%Adris>. 25 jul. 2006.

Com o intuito de explicar o fenômeno, um aluno desenhou as possibilidades de caminhos óticos de um feixe de luz monocromática em uma gota d'água, de forma esférica e de centro geométrico O, representados nas figuras A, B, C, D e E.



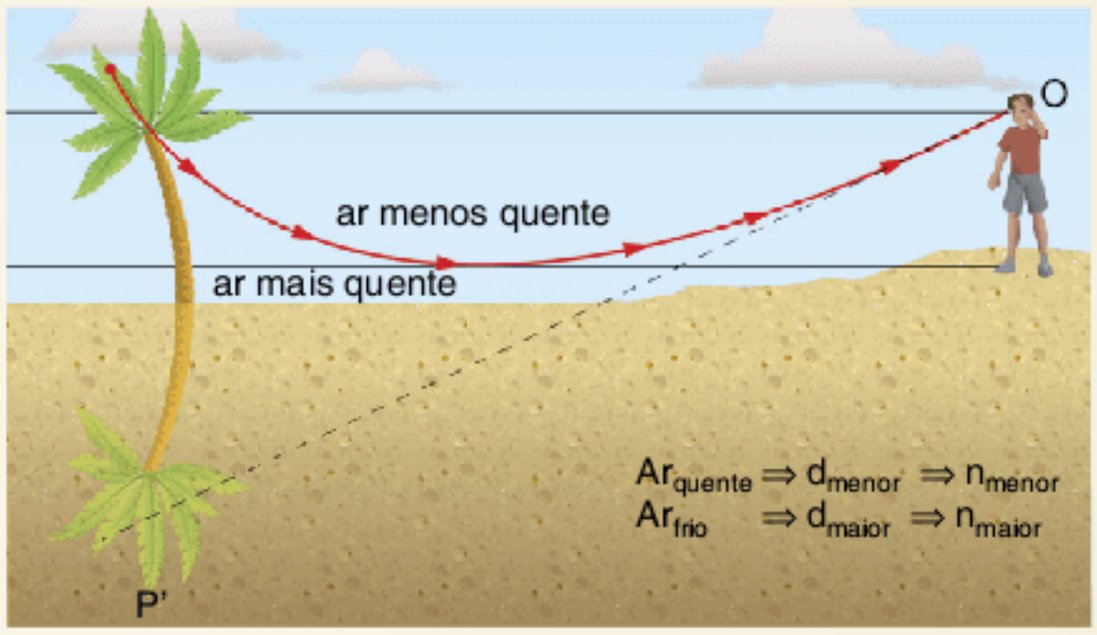
Admitindo-se que o índice de refração do ar (n_{ar}) seja menor que o índice de refração da água ($n_{água}$), assinale a(s) proposição(ões) correta(s).
01 A velocidade da luz no ar é maior do que na água.
02 A e D são caminhos óticos aceitáveis.
04 B e C são caminhos óticos aceitáveis.
08 D e E são caminhos óticos aceitáveis.
16 A e C são caminhos óticos aceitáveis.
32 B e E são caminhos óticos aceitáveis.
Soma = ☐

73 Um feixe cilíndrico de luz incide perpendicularmente na superfície plana de separação de dois meios opticamente diferentes. Pode-se afirmar que:
(a) o feixe refrata-se, desviando fortemente.
(b) o feixe não sofre refração.
(c) o feixe não sofre reflexão.
(d) ocorre reflexão com a consequente alteração do módulo da velocidade de propagação.
(e) ocorre refração com a consequente alteração do módulo da velocidade de propagação.

TEXTOS COMPLEMENTARES

Miragem

O ar atmosférico bem próximo à superfície da Terra pode ser considerado homogêneo. No entanto, em regiões quentes, como nos desertos, a camada de ar diretamente em contato com a superfície terrestre (areia) é muito mais quente que a restante. Na superfície de separação dessas duas camadas de ar, uma mais quente (menor densidade – menor índice de refração – maior desvio) e outra menos quente (maior densidade – maior índice de refração – menor desvio), ocorre refração total da luz proveniente de um ponto P, longe do observador O, que vê a imagem aparente P' invertida, conforme a figura. Por esse motivo, as pessoas têm a impressão de ver poças-d'água no asfalto da estrada, em dias quentes. O evento descrito corresponde à miragem, que também ocorre de maneira análoga em regiões muito frias (polares).



Miragem.

Arco-íris

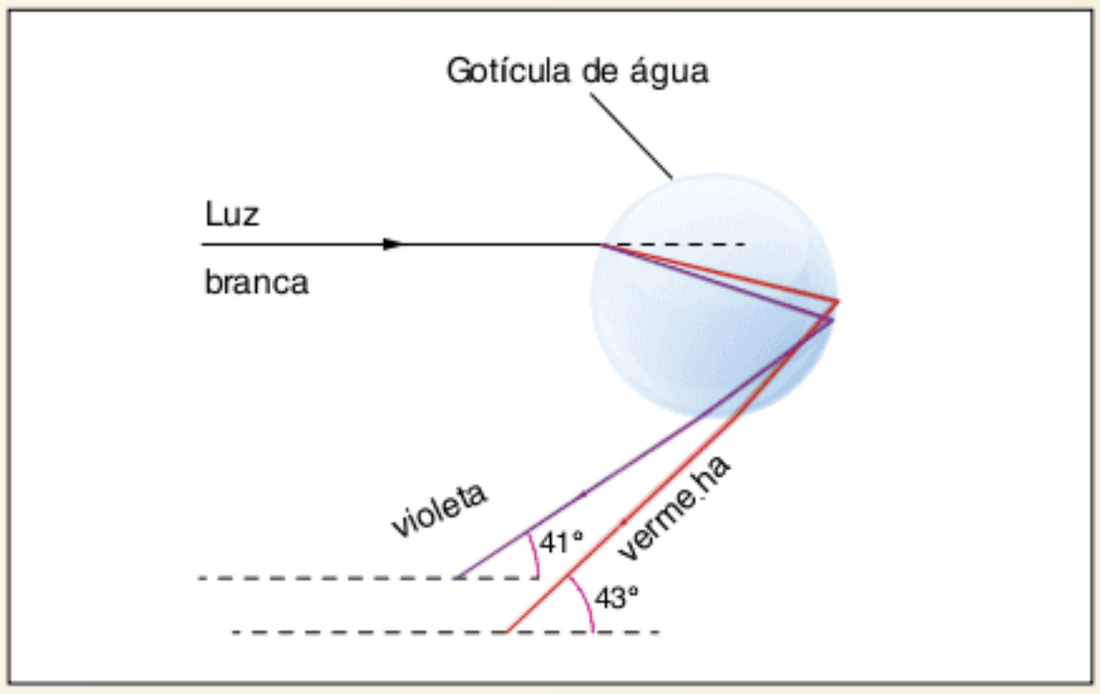
Dois fenômenos ópticos envolvem a formação do arco-íris: a refração, com decomposição da luz branca, seguida de reflexão total no interior de uma gotícula de água em suspensão na atmosfera.

TETYANA KOCHNEVA/123RF.COM

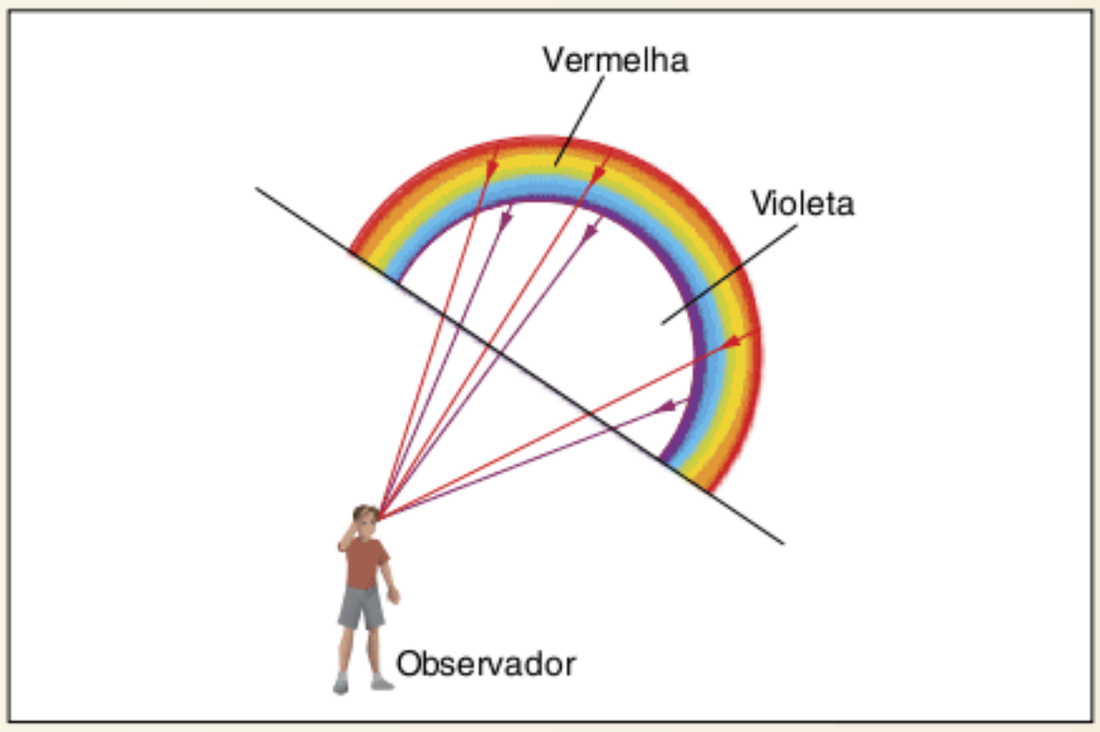
Arco-íris.

O esquema (Fig. 38) mostra a luz branca do Sol incidindo sobre uma face de uma gotícula de água, que tem forma esférica. Ao penetrar na gotícula, a luz se decompõe em um leque multicolor de luzes monocromáticas, sendo a vermelha a que desvia menos e a violeta, mais. Na face interna oposta, as cores sofrem reflexão total e emergem da primeira face, sofrendo nova refração, formando um feixe divergente; a luz vermelha forma um ângulo de 43° e a violeta 41°, em relação à direção da luz branca incidente.

Por motivos geométricos, um observador só vê o arco-íris estando de costas para o Sol. As gotículas de água situadas em um determinado círculo, conforme a figura 39, refletem a luz que chega ao observador. O arco de maior raio corresponde à cor vermelha e o de menor raio à cor violeta.

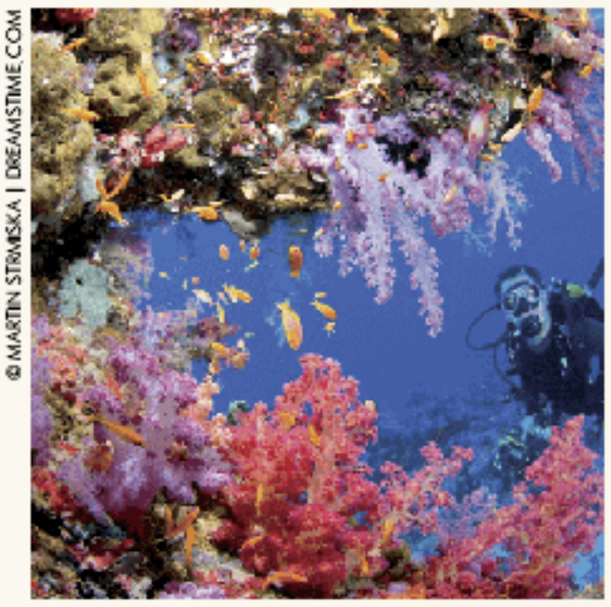


Dispersão da luz.



Observação do arco-íris.

A luz artificial no mundo subaquático



Coral.

Tubarões.

A iluminação artificial no fundo do mar é fundamental para a melhor definição de cores, detalhes e texturas das fotografias. Portanto, sem *flash* você está sujeito a surpresas nada agradáveis.

Para a obtenção de cores vibrantes e detalhes contrastantes nas fotos subaquáticas, o fotógrafo depende, fundamentalmente, de uma boa quantidade de luz presente no momento em que ele dispara o obturador da câmara.

Em águas limpas (com pouca ou nenhuma turbidez ou plancton), já a partir de, aproximadamente, 10 metros de profundidade, a fotografia fica muito difícil sem o auxílio de uma fonte de luz artificial, isto porque, ao contrário da necessidade do fotógrafo, o meio aquático atua como um filtro do espectro luminoso, alterando e atenuando a presença da luz até a sua total extinção.

Em função da composição molecular da água, que pode apresentar uma pequena variação de um oceano para o outro, quando um feixe de luz solar penetra no meio líquido, ele sofre um processo de absorção seletiva de seus diferentes comprimentos de onda. As cores mais quentes são as primeiras a serem absorvidas, por isso o comprimento de onda do vermelho é removido logo nos primeiros 6 metros, seguido do laranja em torno dos 8 metros, o amarelo depois dos 10 metros de profundidade e assim sucessivamente vão desaparecendo os outros comprimentos de onda. Abaixo dos 20 metros começa a predominar o azul, que vai dando lugar à escuridão quando se aumenta gradativamente a profundidade.

Dessa forma, o fenômeno da absorção seletiva provoca uma perda de contraste nas fotografias, enquanto as cores vão se tornando pálidas e com pouca definição à medida que o fotógrafo tenta trabalhar em profundidades maiores. Outro fator que deve ser levado em consideração é o efeito da reflexão da luz. Dependendo do ângulo de incidência com que o raio luminoso atinge a superfície da água, uma parte da luz é refletida e outra penetra no meio líquido. Quanto mais vertical for a incidência do raio luminoso, maior a penetração da luz e, consequentemente, menor a reflexão. Por outro lado, quanto mais inclinado estiver o Sol, maior a reflexão do raio luminoso e menos luz penetrará no ambiente subaquático. Se estabelece, então, que as horas em que o Sol está a pino são as mais indicadas para a prática da fotografia submarina.

Em virtude disso, o *flash* subaquático passa a ser uma das primeiras peças do equipamento compradas pelos fotógrafos submarinos, e o uso correto dele é imprescindível para obtenção de boas fotos. Só com o uso da luz artificial é que se pode restabelecer cores, detalhes e texturas na fotografia subaquática.

Estrela-do-mar.

Saber balancear a luz natural do Sol presente no ambiente com certa quantidade de luz artificial suficiente para uma boa exposição não é tarefa fácil.

Existem alguns sistemas integrados que visam facilitar essa tarefa, como é o caso do TTL, presente em alguns tipos de *flash*, em que um sensor construído internamente mede a quantidade de luz que passa pela lente (daí o nome TTL – *Through the Lens*) até o filme e sinaliza para o *flash* a quantidade de luz suficiente para uma boa exposição.

Existem, porém, situações em que esse sistema não trabalha de uma forma tão eficiente quanto em outras. Por exemplo, em fotos de peixes de coloração branca ou prateada, fundos de areia branca, o sistema TTL acaba sempre ocasionando problemas de superexposição.

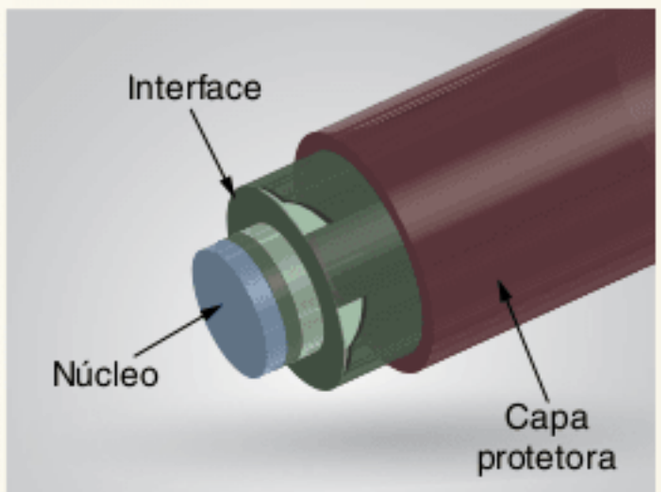
O mercado oferece equipamentos de iluminação para fotografia subaquática de diferentes marcas e em várias potências. A Sea&Sea fabrica os modelos de *flash* YS-50, YS-120 Duo e o YS-300TTL-S de alta tecnologia com controles manual e automático (TTL) compatíveis com câmaras Motor Marine II, caixas estanques para Nikon N50 e N90, Nikonos V e RS. A Nikon fabrica o modelo SB-105, que também opera de forma manual e em TTL. A marca Ikelite fabrica os modelos Substrobe 50, Substrobe 100A, Substrobe 200, Substrobe 400, que também são compatíveis com a maioria das câmaras subaquáticas, operando de forma manual, em TTL ou em conjunto com outros equipamentos de iluminação no modo *slave*. No modo de operação *slave*, o *flash* dispara simultaneamente com outro equipamento de iluminação, mesmo sem estar conectado por cabo a ele.

O conhecimento das propriedades de seu equipamento de iluminação subaquática e de técnicas de exposição e intensidade do *flash*, juntamente com a prática adquirida após o uso de alguns rolos de filmes, certamente vão lhe garantir fotos subaquáticas de boa qualidade.

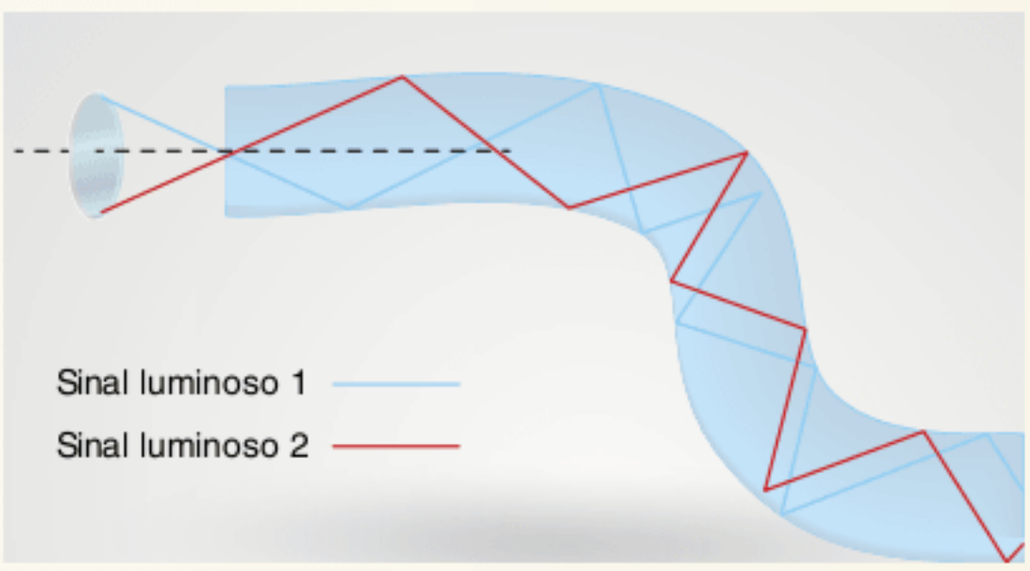
Nildo Teixeira. *A luz artificial no mundo subaquático*. Disponível em: <http://photos.uol.com.br/materias/ver/51492>. (Adapt.).

Fibras ópticas

Fibras ópticas são fios longos e finos de vidro muito puro, com o diâmetro aproximado de um fio de cabelo humano, dispostas em feixes chamados cabos ópticos e usadas para transmitir sinais de luz ao longo de grandes distâncias.



Imagine que você queira enviar o facho de luz de uma lanterna através de um longo corredor reto. Basta apontá-lo diretamente na direção do corredor: a luz viaja em linha reta, então isso não é um problema. Mas e se o corredor virar à esquerda ou à direita? Você poderia colocar um espelho na curva para refletir o facho de luz e dobrar a esquina. Mas e se o corredor for muito sinuoso, com múltiplas mudanças de direção? Poderia revestir as paredes com espelhos e ajustar o ângulo do facho de modo que ele refletisse de um lado para outro ao longo do corredor. Isso é exatamente o que acontece em uma fibra óptica.

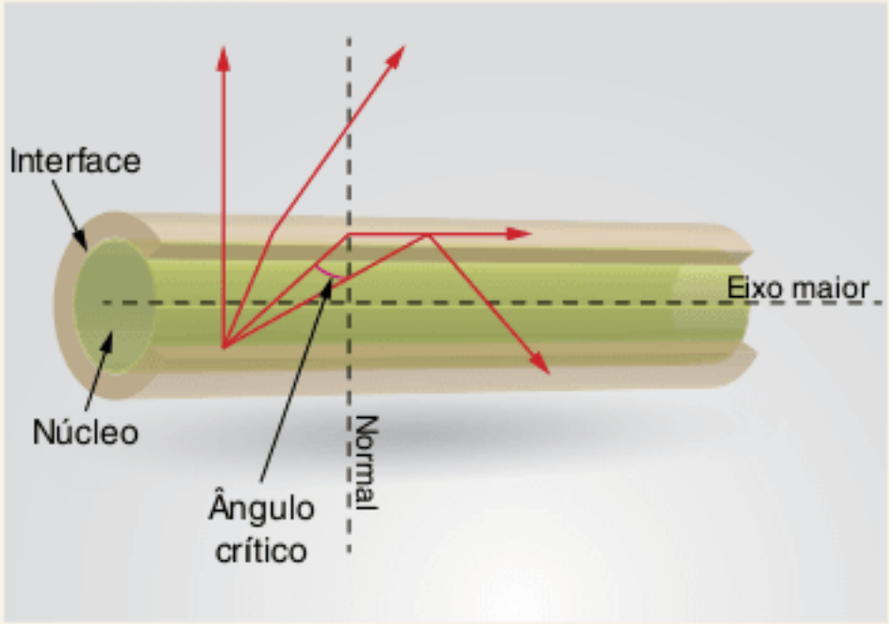


Em um cabo de fibra óptica, a luz viaja através do núcleo (o corredor) refletindo constantemente na interface (as paredes revestidas de espelhos), o que representa um princípio chamado de reflexão interna total.

Quando a luz passa de um meio m_1 com um índice de refração para outro meio m_2 com um índice de refração mais baixo, ela se desvia ou refrata para longe de uma linha imaginária perpendicular à superfície (linha normal). Conforme o ângulo do feixe através de m_1 se torna maior em relação à linha normal, a luz refratada através de m_2 se desvia para longe da linha.

Em um ângulo particular (o ângulo crítico), a luz refratada não penetrará em m_2, viajando ao longo da superfície entre os dois meios: (sen(ângulo crítico) = $\frac{n_2}{n_1}$, onde n_1 e n_2 são os índices de refração dos meios m_1 e m_2, sendo que n_1 é maior do que n_2. Se o ângulo do feixe através de m_1 for maior do que o ângulo crítico, então o feixe refratado será refletido inteiramente de volta para m_1 (reflexão interna total), mesmo que m_2 seja transparente!

Em Física, o ângulo crítico é descrito em relação à linha normal. Para as fibras ópticas, o ângulo crítico é descrito em relação ao eixo paralelo que corre pelo meio da fibra. Assim, o ângulo crítico da fibra óptica é igual a 90 graus menos o ângulo crítico físico.



Em uma fibra óptica, a luz viaja através do núcleo (m_1, de alto índice de refração), refletindo-se constantemente na interface (m_2, de menor índice de refração), porque o ângulo da luz é sempre maior do que o ângulo crítico. A luz se refletirá na interface, não importando o ângulo em que a fibra seja curvada, mesmo que seja um círculo completo.

Como a interface não absorve nenhuma luz do núcleo, a onda de luz pode viajar grandes distâncias. Entretanto, uma parte do sinal luminoso se degrada dentro da fibra, principalmente em razão de impurezas contidas no vidro. O grau dessa degradação do sinal depende da pureza do vidro e do comprimento de onda da luz transmitida (por exemplo, 850 nm = 60 a 75%/km; 1.300 nm = 50 a 60%/km; para 1.550 nm, ela é maior do que 50%/km). Algumas fibras ópticas de qualidade excepcional apresentam uma degradação de sinal muito menor: menos de 10%/km em 1.550 nm.

As fibras ópticas são feitas de vidro óptico extremamente puro. Costumamos achar que uma janela de vidro é transparente. Entretanto, quanto mais espesso for o vidro, menos transparente ele será em razão das impurezas nele contidas. O vidro de uma fibra óptica, porém, possui menos impurezas do que o vidro usado em janelas.

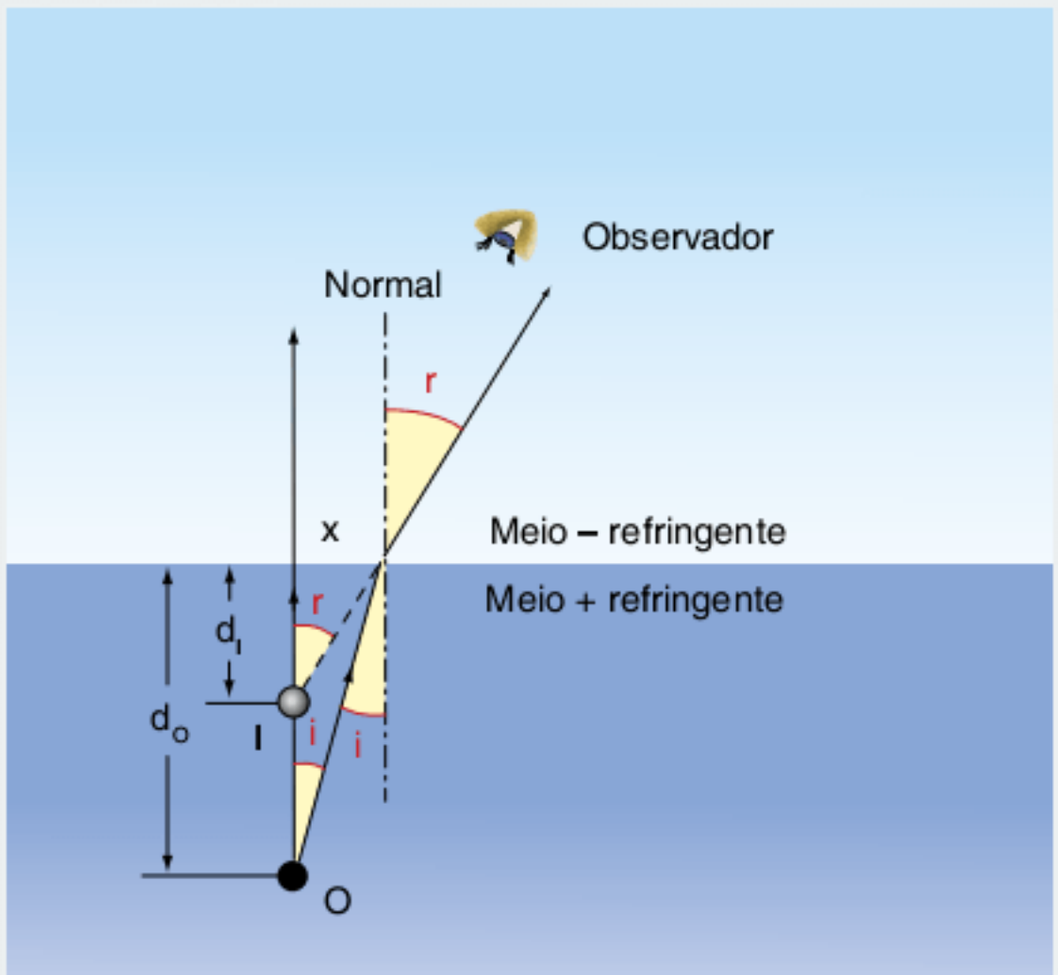
Atualmente, diversas companhias, como provedores de redes, companhias telefônicas e de TV a cabo, estão substituindo seus antigos sistemas baseados em fio de cobre por novos sistemas com base em fibra óptica para melhorar a velocidade, capacidade e clareza das informações transmitidas.

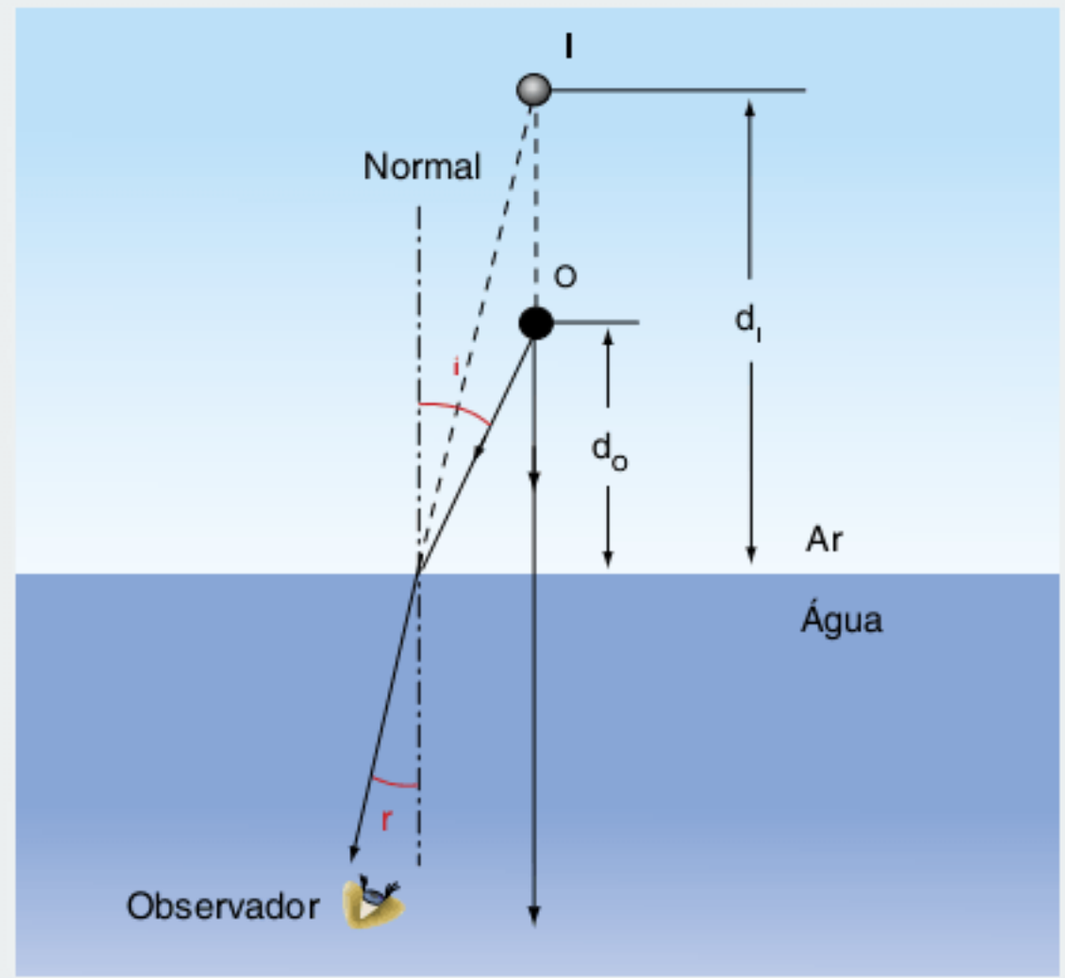
Craig Freudenrich, Ph.D. – traduzido por HowStuffWorks Brasil.
Como funcionam as fibras ópticas. (Adapt.).
howstuffworks
comotudofunciona
Disponível em: <www.hsw.com.br>.

RESUMINDO

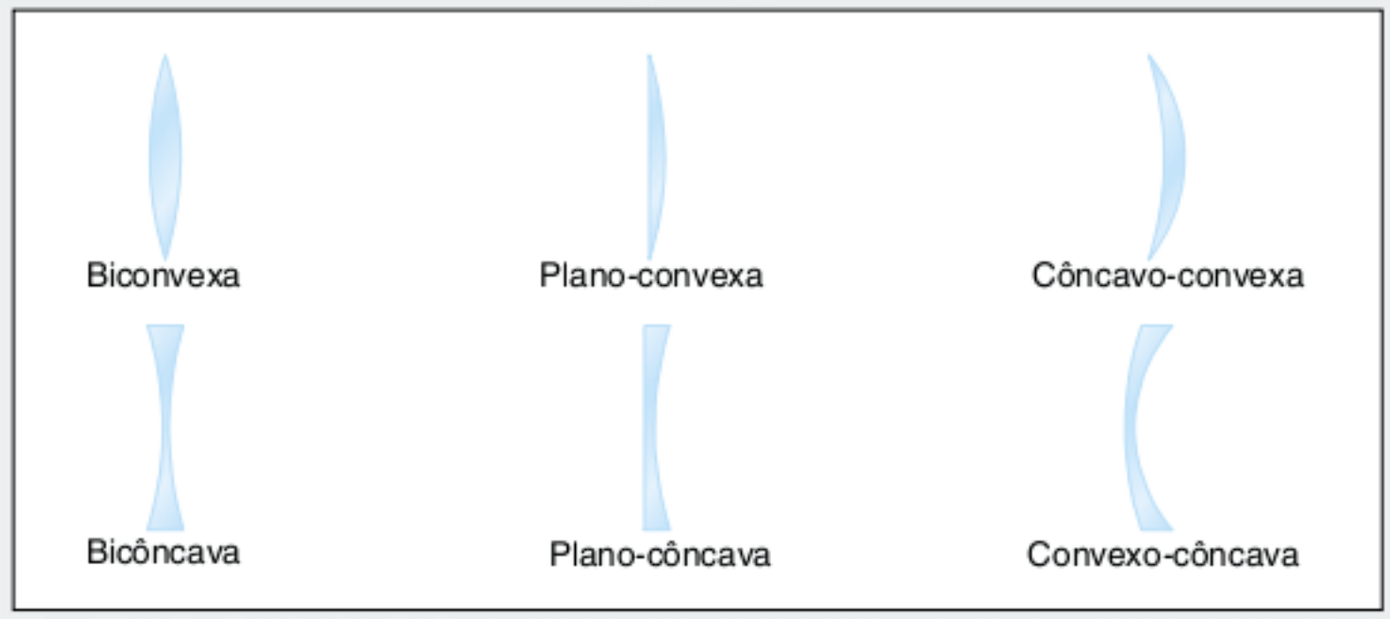
Dioptros planos

Posição aparente

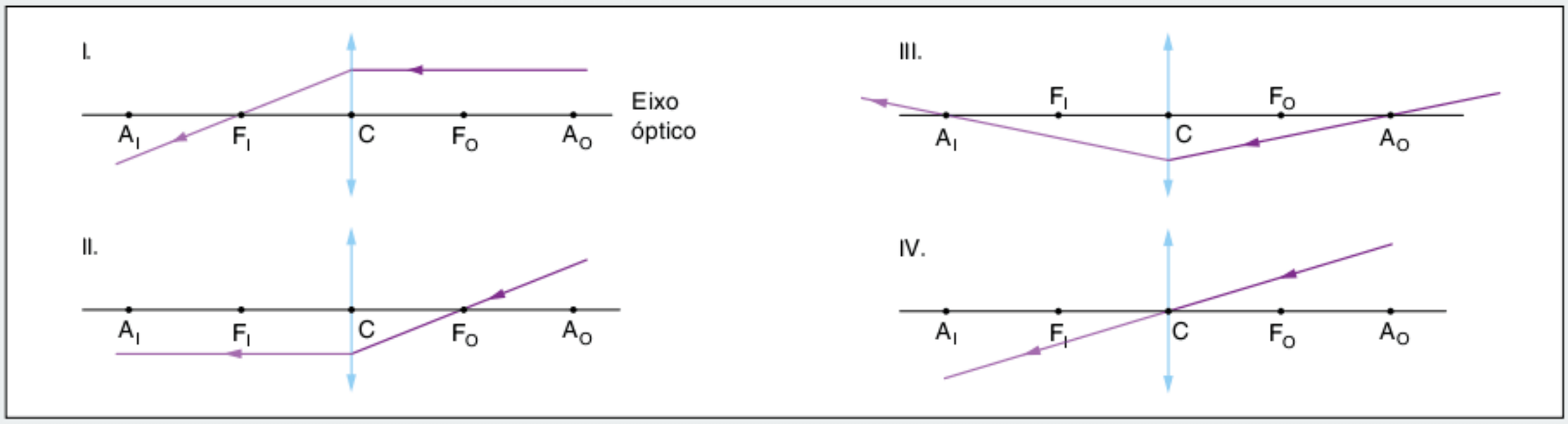




$$\frac{d_i}{d_O} = \frac{n_2}{n_1}$$



Classificação das lentes às faces.

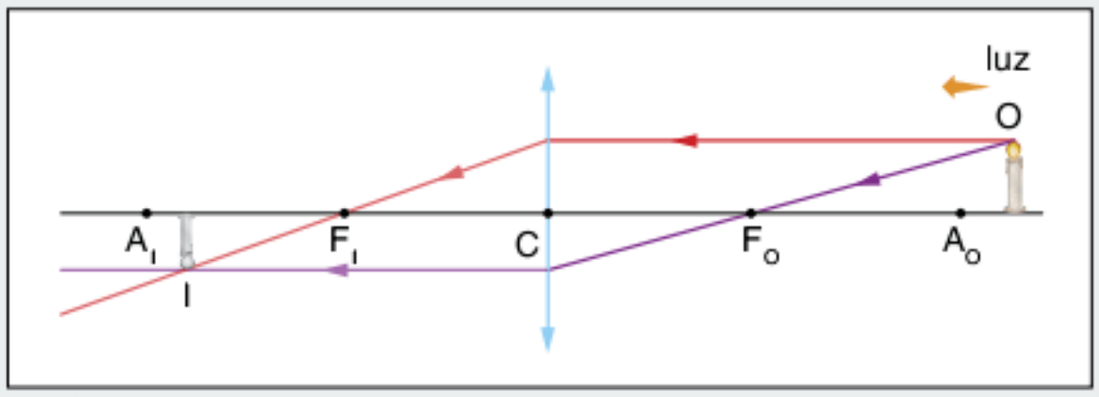


Raios notáveis em lentes delgadas.

Lentes esféricas delgadas

Lentes convergentes

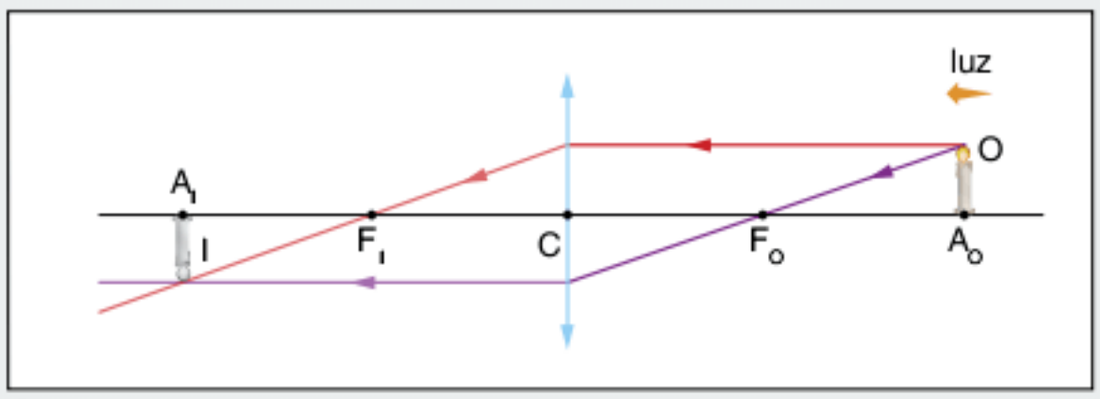
Caso 1: objeto situado antes do ponto antiprincipal A_0. Imagem conjugada:



Objeto além do antifoco.

Imagem: $\begin{cases} \text{Real} \\ \text{Invertida} \\ \text{Menor} \\ \text{Entre } A_I \text{ e } F_I \end{cases}$

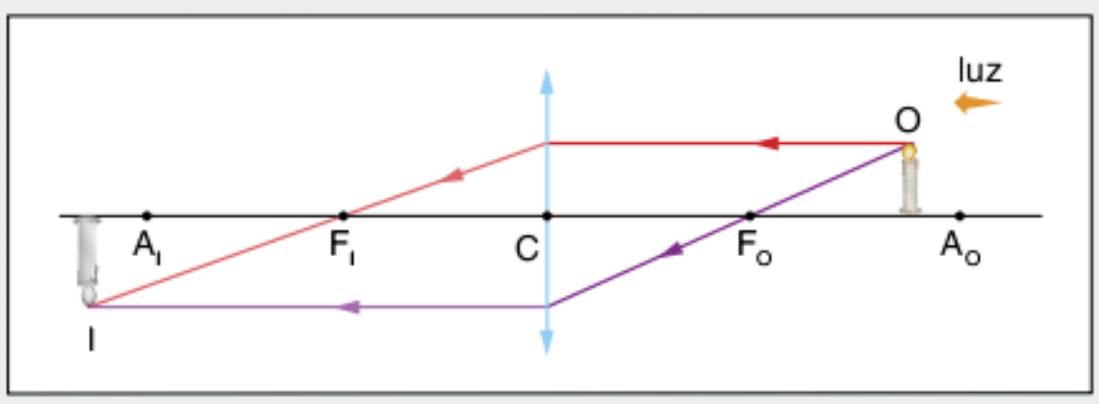
Caso 2: objeto situado em A_0. Imagem conjugada:



Objeto sobre o antifoco.

Imagem: $\begin{cases} \text{Real} \\ \text{Invertida} \\ \text{Igual} \\ \text{No } A_I \end{cases}$

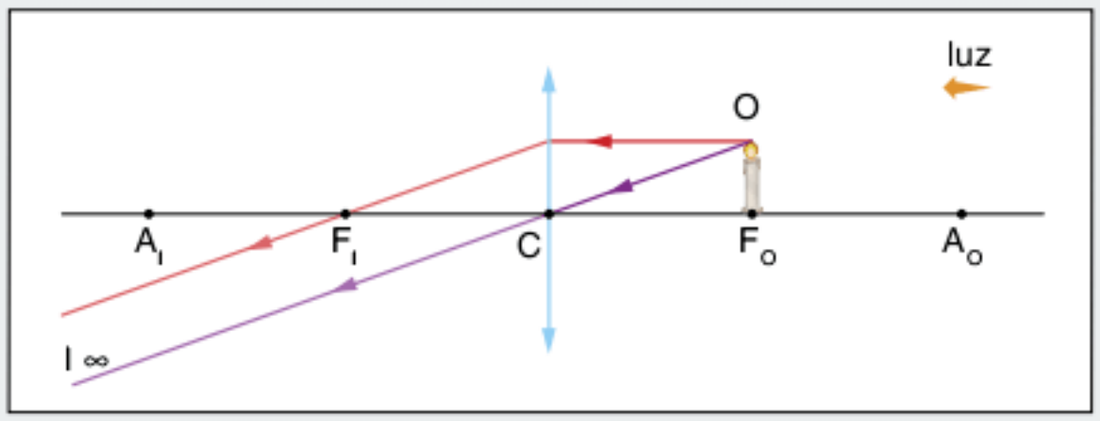
Caso 3: objeto situado entre A_0 e F_0. Imagem conjugada:



Objeto entre o foco e o antifoco.

Imagem: $\begin{cases} \text{Real} \\ \text{Invertida} \\ \text{Maior} \\ \text{Depois do } A_I \end{cases}$

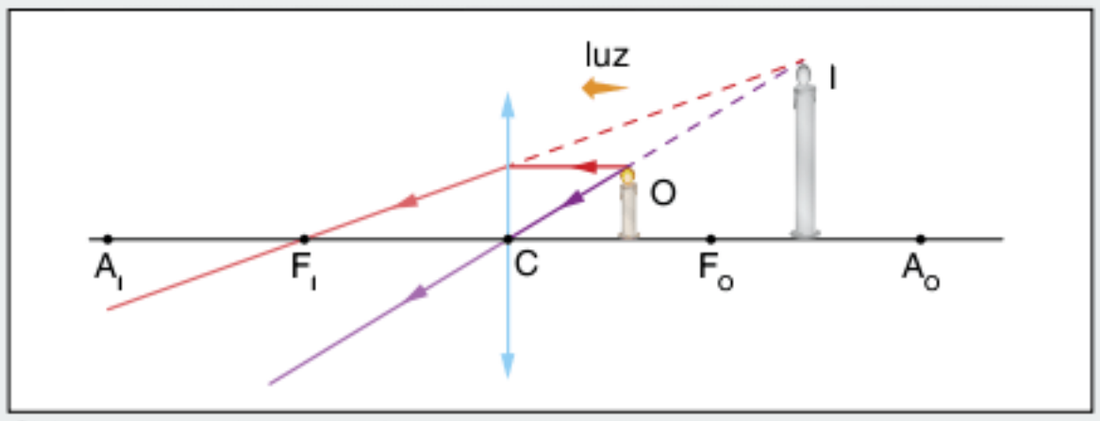
Caso 4: objeto situado em F_0. Imagem conjugada: imprópria (infinito).



Objeto sobre o foco.

Imagem: {Imprópria

Caso 5: objeto situado entre F_O e C. Imagem conjugada:

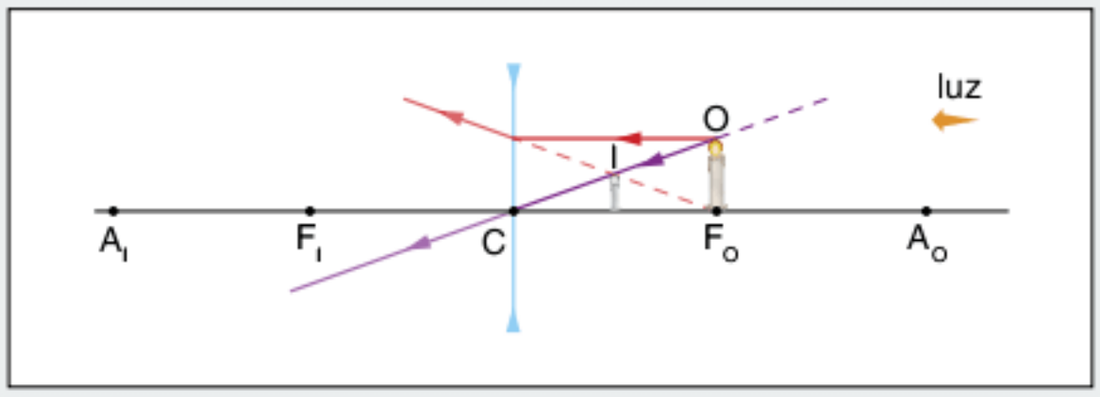


Objeto entre a lente e o foco.

Imagem: $\begin{cases} \text{Virtual} \\ \text{Direita} \\ \text{Maior} \\ \text{Região do objeto} \end{cases}$

Lentes divergentes

Caso único: objeto situado na frente da lente. Imagem conjugada:



Caso único de lente divergente.

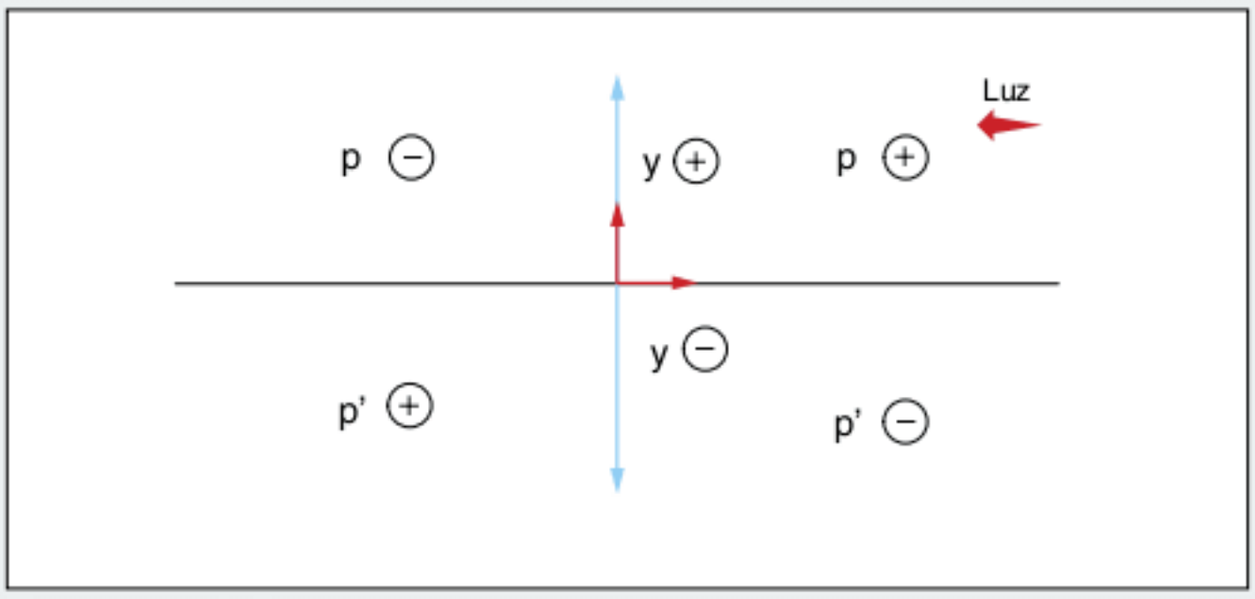
Imagem: $\begin{cases} \text{Virtual} \\ \text{Direita} \\ \text{Maior} \\ \text{Região do objeto} \end{cases}$

Determinação analítica da imagem

Equação de Gauss:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'}$$

em que:
F: distância focal
P: abscissa do objeto
P': abscissa da imagem



Sistema de referência.

Para aplicarmos a equação de Gauss, devemos observar a seguinte convenção de sinais:

$F > 0$: lente convergente
$F < 0$: lente divergente
$P > 0$: objeto real
$P < 0$: objeto virtual
$P' > 0$: imagem real
$P' < 0$: imagem virtual

O aumento linear transversal, analogamente a espelhos esféricos, é dado por:

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{P'}{P}$$

em que:
A: aumento linear transversal
i: altura da imagem
o: altura do objeto

QUER SABER MAIS?

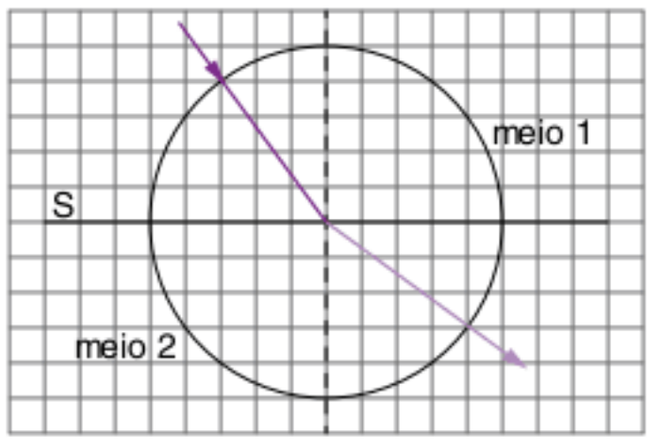
SITES

- Halos
  <http://sro0.wordpress.com/2008/09/07/halos-solares-e-lunares-fenomenos-opticos-na-atmosfera>.
- Trigonometria e Halos
  <http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Softwares/SoftwaresM3Matematica/trigonometria_halos/halos2/>.
- Refração atmosférica
  <http://astrosurf.com/skyscapes/disc/refracao/refracao.htm>.

Exercícios complementares

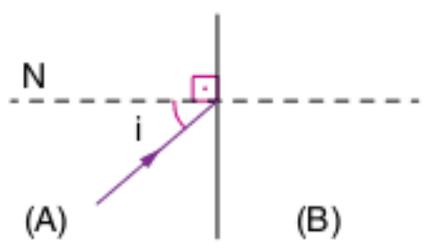
Refração da luz e ângulo limite

1 Na figura, está representado o trajeto de um raio de luz monocromático, que passa do meio 1 para o meio 2.



Determine o índice de refração relativo do meio 1 em relação ao meio 2.

2 Os meios de propagação A e B, representados na figura seguinte, possuem índices de refração iguais a $n_A = 5$ e $n_B = 2$, respectivamente.



Determine:

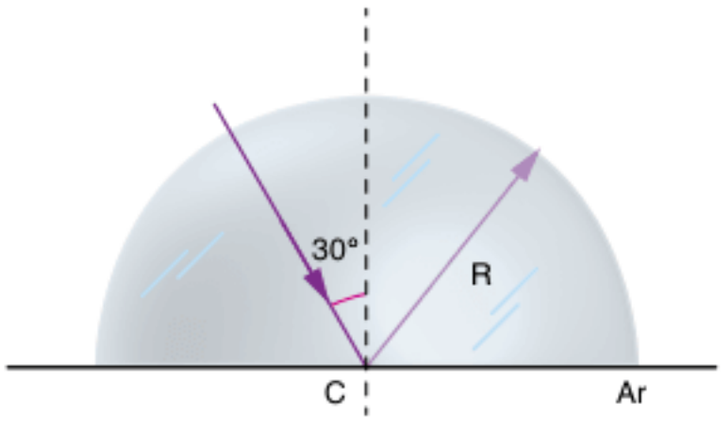
a) o ângulo limite.
b) o comportamento da luz para i = 30º.
c) o comportamento da luz para i = 10º.

Dados: sen 10º = 0,16; sen 26º = 0,4; sen 30º = 0,50; sen 44º = 0,64; sen 60º = 0,85; sen 80º = 0,95.

3 **Esal-MG** Para certa luz monocromática, cuja velocidade no ar vale 300.000 km/s, os índices de refração da água, do vidro e do cristal, todos em relação ao ar, são $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ e $\frac{8}{5}$, respectivamente. Calcule:

a) o índice de refração do vidro em relação à água.
b) a velocidade da luz no vidro.
c) a velocidade da luz no cristal.

4 Um pincel cilíndrico de luz monocromática, propagada em um bloco sólido transparente, incide na fronteira plana entre o bloco e o ar, com ângulo de incidência igual a 30°.



Sabendo que o índice de refração do bloco para a radiação considerada vale $\sqrt{3}$, determine:

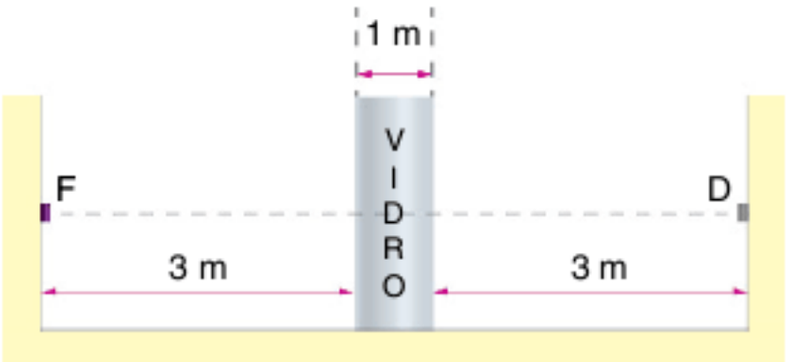
a) o ângulo de refração.
b) o desvio experimentado pela luz, ao se refratar.
c) a representação esquemática dos raios incidente, refletido e refratado.

5 Dois recipientes de vidro contêm, respectivamente, água e tetracloroetileno, ambos completamente transparentes. Duas barras de vidro, transparentes e idênticas, são mergulhadas nos recipientes. A parte imersa na água continua quase tão visível como a que está fora. A parte imersa no tetracloroetileno fica praticamente invisível.

O vidro fica praticamente invisível porque:

(a) o índice de refração do vidro é maior que o do ar.
(b) o índice de refração do vidro é menor que da água.
(c) o índice de refração do tetracloroetileno é muito menor que o do vidro.
(d) o índice de refração do tetracloroetileno é aproximadamente igual ao do vidro.
(e) o índice de refração do tetracloroetileno é muito maior que o do vidro.

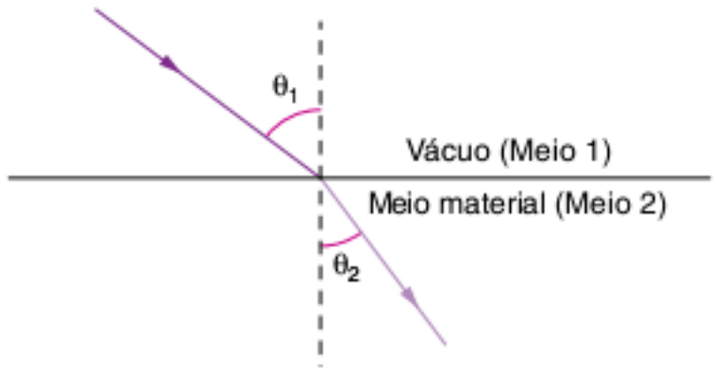
6 **Fuvest** No esquema a seguir, temos uma fonte luminosa F no ar, defronte a um bloco de vidro, após o qual se localiza um detetor D. Observe as distâncias e dimensões indicadas no desenho.



Dados: índice de refração do ar = 1,0; índice de refração do vidro em relação ao ar = 1,5; velocidade da luz no ar = 300.000 km/s.

a) Qual o intervalo de tempo para a luz propagar-se de F a D?
b) Represente graficamente a velocidade da luz, em função da distância, a contar da fonte F.

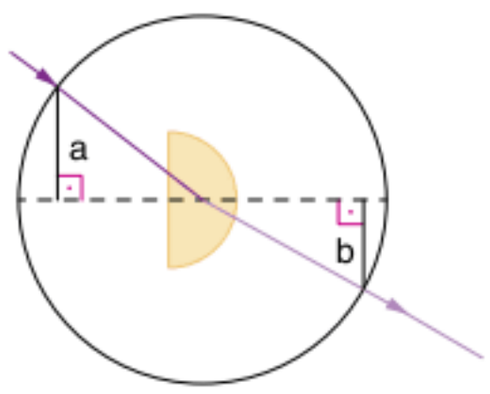
7 Um raio de luz de frequência igual a $6{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz passa do vácuo para um meio material transparente, como ilustra a figura.



Sabendo-se que $\text{sen}\,\theta_1 = 0{,}8$, $\text{sen}\,\theta_2 = 0{,}6$ e que a velocidade da luz no vácuo é $v_1 = 300.000$ km/s, determinar:

a) a velocidade da luz no meio material (v_2).
b) o índice de refração absoluto no meio material.
c) o comprimento de onda dessa luz no vácuo (λ_1) e no meio material (λ_2).

8 **UnB** A figura a seguir mostra esquematicamente uma experiência para determinar o índice de refração de um material. Um semicilindro de uns poucos centímetros de espessura é centrado sobre um disco de raio igual a 20 cm. Medem-se as distâncias a e b em centímetros, como indicado na figura, relativamente ao diâmetro mostrado, cujos valores constam na tabela, para várias posições incidentes do feixe de luz.



a(cm)	1,4	4,2	7,0	9,8
b(cm)	0,5	1,5	2,5	3,5

Determine o índice de refração do material.

9 As estrelas cintilam porque:

(a) acendem e apagam alternadamente.
(b) o índice de refração da atmosfera cresce com a altitude.
(c) o índice de refração da atmosfera diminui com a altitude.
(d) ocorrem reflexões em seu interior, enquanto elas se movem.
(e) os valores dos índices de refração nos diversos pontos da atmosfera não são estáveis e a intensidade da luz que recebemos delas é muito pequena.

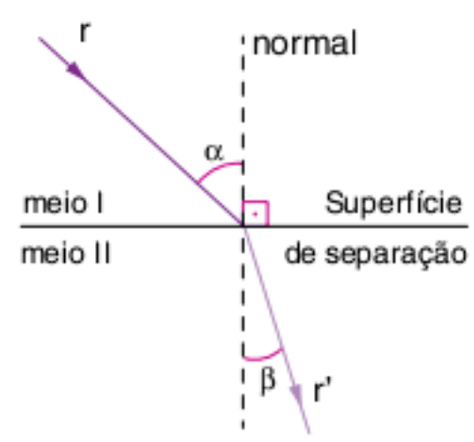
10 **FCC** A velocidade de propagação de uma radiação luminosa num meio I vale v_1 e o índice de refração desse meio para aquela radiação é n_1, enquanto o índice de refração de outro meio II é n_2. A velocidade de propagação da radiação no segundo meio vale:

(a) $v_1(n_1 - n_2)$
(b) $v_1(n_2 - n_1)$
(c) $v_1 \cdot \dfrac{n_2}{n_1}$
(d) $v_1 \cdot \dfrac{n_1}{n_2}$
(e) $v_1\left(1 - \dfrac{n_2}{n_1}\right)$

11 **Aman** Um raio luminoso amarelo incide com um ângulo de incidência de 30º e refrata-se, formando um ângulo de 60º com a normal. O índice de refração do meio que contém o raio refratado em relação ao meio que contém o raio incidente é:

(a) 1
(b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12 **FCC** O raio luminoso r gera o raio r' ao atingir a superfície de separação entre o meio I e o meio II, conforme esquema.



De acordo com o esquema, o índice de refração do meio II em relação ao meio I é igual a:

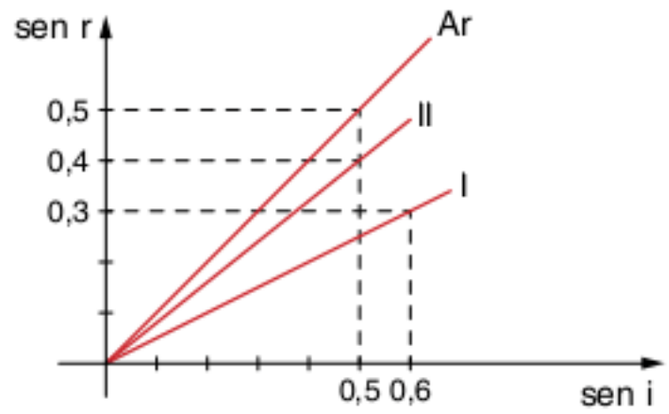
(a) 1
(b) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}$
(c) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}$
(d) $\dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right)}$
(e) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{1 - \cos\beta}$

13 **Osec-SP** Quando um raio de luz passa de um meio menos refringente para outro mais refringente:

(a) afasta-se da normal.
(b) aproxima-se da normal.
(c) sofre reflexão total.
(d) diminui a velocidade.
(e) diminui a frequência.

14 **UFBA** O gráfico a seguir representa a variação do seno do ângulo de refração com uma função do seno do ângulo de

incidência de um raio de luz que incide em três meios diferentes: substância I, substância II e o ar.

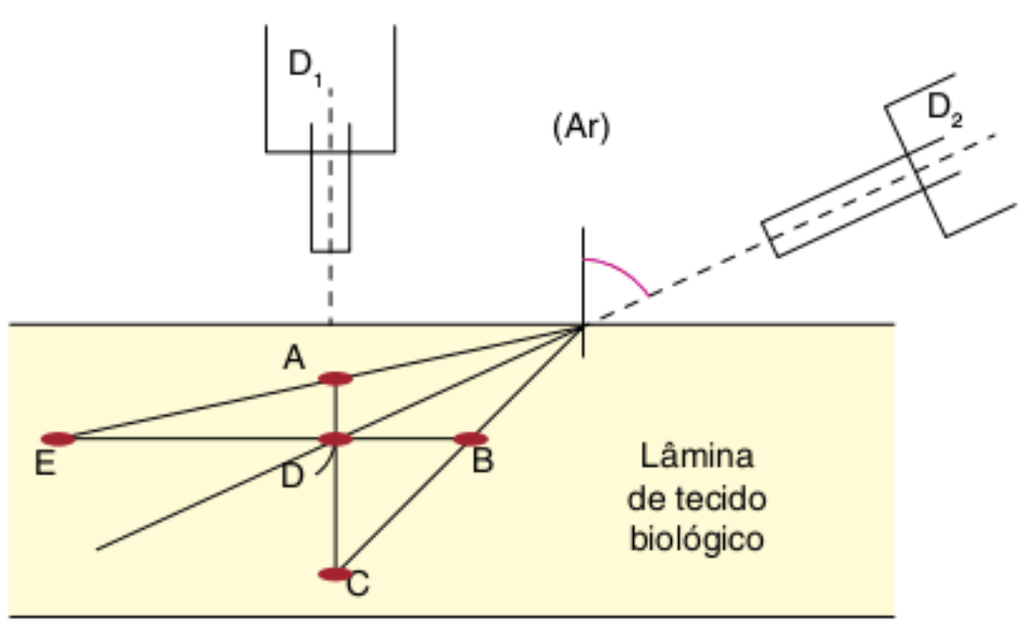


a) O ângulo limite para um raio de luz que incide na substância I e emerge para o ar é:
(a) 15º
(b) 30º
(c) 45º
(d) 60º
(e) 90º

b) O índice de refração da substância II é aproximadamente:
(a) 0,50
(b) 0,67
(c) 1,00
(d) 1,25
(e) 1,50

c) O ângulo limite entre as substâncias I e II é aproximadamente:
(a) zero.
(b) 39º
(c) 45º
(d) 73º
(e) 90º

15 **Fuvest 2009** Dois sistemas óticos, D_1 e D_2, são utilizados para analisar uma lâmina de tecido biológico a partir de direções diferentes. Em uma análise, a luz fluorescente, emitida por um indicador incorporado a uma pequena estrutura, presente no tecido, é captada, simultaneamente, pelos dois sistemas, ao longo das direções tracejadas.



Levando-se em conta o desvio da luz pela refração, dentre as posições indicadas, aquela que poderia corresponder à localização real dessa estrutura no tecido é:
(a) A
(b) B
(c) C
(d) D
(e) E

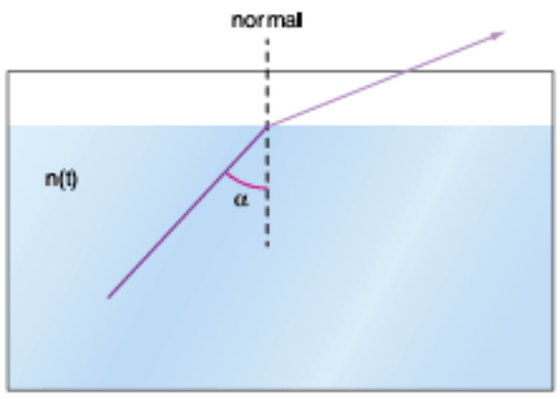
Suponha que o tecido biológico seja transparente à luz e tenha índice de refração uniforme, semelhante ao da água.

16 **PUC-MG 2007** Um raio de luz monocromática, de comprimento de onda igual a $5 \cdot 10^{-7}$m, propaga-se da água para o meio X. O ângulo de incidência na água é 45°, e o ângulo de refração no meio X é 29°. O comprimento de onda dessa luz, dentro-d'água, é, em metros:
Dados: sen 45º = cos 45º = 0,707; sen 29º = 0,485;
cos 29º = 0,875; $n_{água}$ = 1,33.
(a) $2{,}57 \cdot 10^{-7}$
(b) $3{,}76 \cdot 10^{-7}$
(c) $4{,}65 \cdot 10^{-7}$
(d) $9{,}65 \cdot 10^{-7}$

17 **UEM 2007** Ao propagar-se no ar, um feixe de luz monocromático incide obliquamente sobre a superfície plana de um vidro. Sempre que o raio refletido e o raio refratado formarem um ângulo de 90°, o ângulo de refração será:
(a) o suplementar do ângulo de incidência.
(b) o complementar do ângulo de incidência.
(c) o suplementar do ângulo do raio refletido.
(d) o complementar do ângulo formado pelo raio refletido e a superfície.
(e) o suplementar do ângulo formado pelo raio refletido e a superfície.

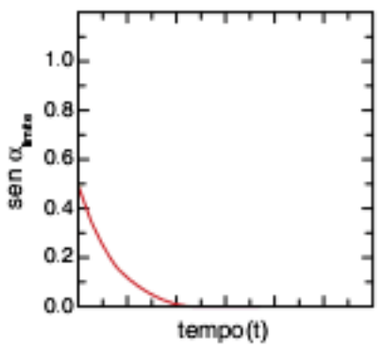
Reflexão total da luz

18 **UFU 2006** Um recipiente aberto, conforme a figura, contém um líquido de índice de refração n(t), que varia com o tempo (t) de acordo com a expressão $n(t) = n_{ar}(1 + e^{-b})$, em que b é uma constante positiva e n_{ar} é o índice de refração do ar.

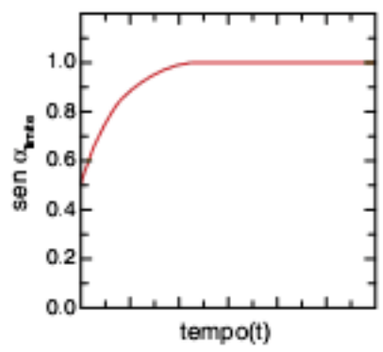


Quando a luz passa do líquido para o ar, é possível ocorrer o fenômeno de reflexão total para um ângulo de incidência maior do que um certo ângulo limite, α limite (que é medido em relação à normal). Assinale a alternativa que melhor descreve a variação do seno do ângulo limite (sen α limite) em função do tempo.

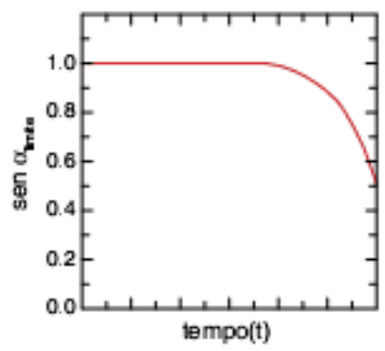
(a)



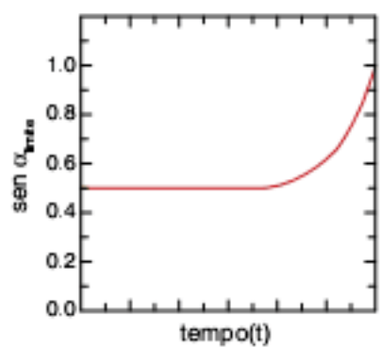
(b)



(c)



(d)



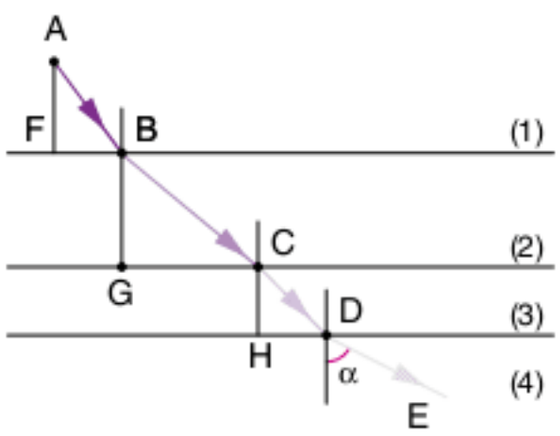
19 **UFU** Um recipiente contém dois líquidos A e B não miscíveis, de densidades diferentes. O líquido B ocupa o fundo do recipiente e tem índice de refração $n_B = 1{,}33$; o líquido A, $n_A = 1{,}4$. Quais as condições para que haja reflexão total?

Dioptros planos e lâminas de faces paralelas

20 **EEM-SP** Um raio de luz percorre a poligonal ABCDE atravessando 4 meios ópticos diferentes, (1), (2), (3) e (4), cujas superfícies de separação são planas e paralelas. São dados os comprimentos: AB = 2,0 cm; BC = 4,0 cm; CD = 2,0 cm; FB = 1,0 cm; GC = 2,8 cm; HD = 0,70 cm. Os meios (2) e (4) são o vácuo. Determine:

a) o índice de refração do meio (1).

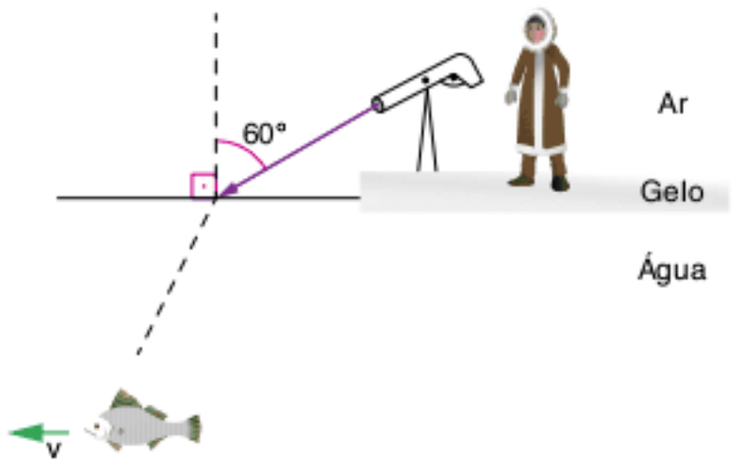
b) o seno do ângulo α.



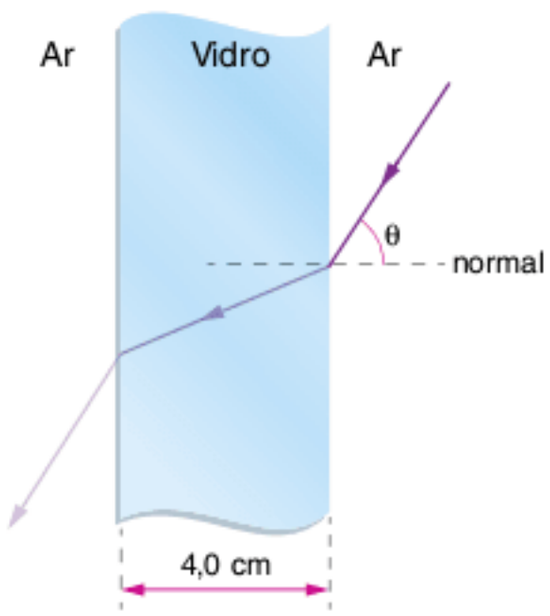
21 **IME** Um esquimó aguarda a passagem de um peixe sob um platô de gelo, como mostra a figura. Ao avistá-lo, ele dispara sua lança, que viaja com uma velocidade constante de 50 m/s, e atinge o peixe. Determine qual era a velocidade v do peixe, considerando que ele estava em movimento retilíneo uniforme na direção indicada na figura.

Obs.: Suponha que a lança não muda de direção ao penetrar na água.

Dados: índice de refração do ar: $n_{ar} = 1$;
índice de refração da água: $n_{água} = 1{,}33$.

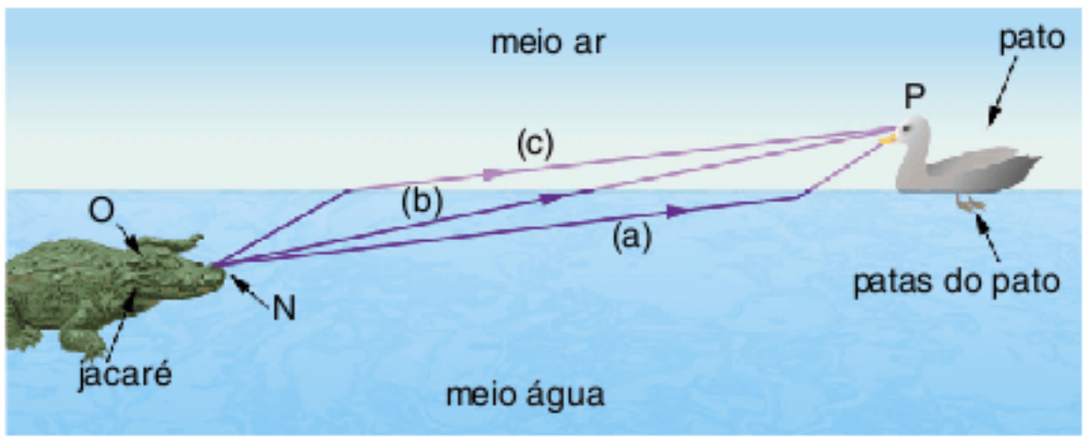


22 **UFRJ 2009** Um raio luminoso proveniente do ar atravessa uma placa de vidro de 4,0 cm de espessura e índice de refração 1,5.



Sabendo que o ângulo de incidência θ do raio luminoso é tal que sen θ = 0,90 e que o índice de refração do ar é 1,0, calcule a distância que a luz percorre ao atravessar a placa.

23 **UFMS 2007** A figura mostra um jacaré, imerso na água, o qual avança lentamente, com velocidade constante e horizontal, para abocanhar um pato que flutua em repouso na superfície de um lago. Os olhos do jacaré estão no ponto O atrás do ponto N que corresponde ao nariz dele. Enquanto os olhos do pato estão no ponto P. Considere todos esses pontos contidos no plano da página. Os três caminhos a, b, e c, mostrados na figura, representam raios de luz que saem do ponto N (nariz do jacaré) e chegam até o ponto P (olhos do pato). Considere a água transparente, parada e mais refringente que o ar. Com relação à propagação retilínea da luz, é correto afirmar:



01 O caminho (c) pode representar um raio de luz que sai de N e chega até o ponto P.

02 O pato vê a imagem do ponto N, mais próximo que a distância real que esse ponto se encontra do dele.

04 Como as patas do pato estão imersas na água, a posição da imagem das patas, vista pelo jacaré, coincide com a posição real das patas na água.

08 A velocidade da luz na água é maior que a velocidade da luz no ar.

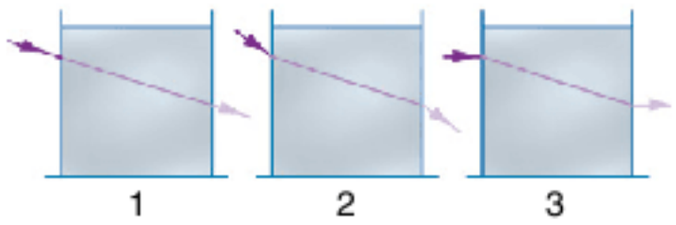
16 Para acontecer a reflexão total de um raio de luz que sai do ponto N, e esse ponto tornar-se invisível para o pato, o jacaré deverá aproximar-se do pato.

Soma = ☐

24 **Unb** Um ladrão escondeu o produto de seu roubo numa caixa pendurada por uma corda de 2,4 m de comprimento e amarrada no centro da base circular de uma boia. A boia estava em água de índice de refração $\frac{5}{4}$. De qualquer ponto da superfície era impossível ver a caixa. Quanto vale, no mínimo, o raio da base da boia?

25 **UFC** Coloca-se água em um aquário de modo que ocupe 60 cm de sua altura. Quando visto verticalmente de cima para baixo, a água parece ocupar uma altura diferente, h. Supondo que a velocidade de propagação da luz no ar seja de 300.000 km/s e na água de 225.000 km/s, determine, em cm, a altura aparente h.

26 **Fuvest** Um menino possui um aquário de forma cúbica. À noite, ele joga pó de giz na água, para observar a trajetória do feixe de luz de uma lanterna. Os três esquemas abaixo representam supostas trajetórias para um estreito feixe de luz que atravessa o aquário.



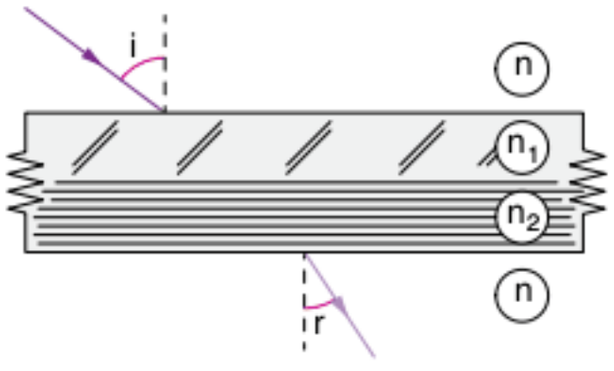
Quais desses esquemas são fisicamente realizáveis?

(a) 1 e 2.
(b) 2 e 3.
(c) Só 1.
(d) Só 2.
(e) Só 3.

27 **PUC** Um ponto luminoso encontra-se no fundo de um tanque de profundidade de 1 m, contendo um líquido de índice de refração $\sqrt{2}$. Na superfície do líquido é formada uma área circular luminosa cujo raio é:

(a) 2 m
(b) 1 m
(c) 0,5 m
(d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
(e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m

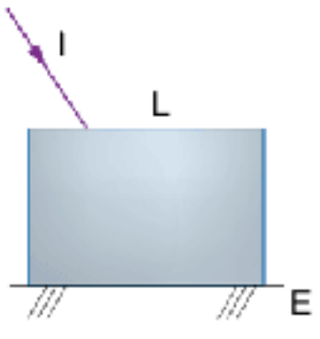
28 **UFC** Na figura, estão representadas duas placas de faces paralelas, de índice de refração n_1 e n_2 ($n_1 < n_2$), imersas em um meio de índice de refração n.



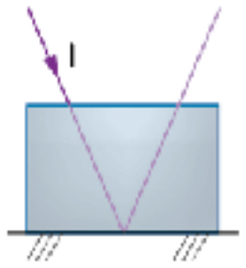
Sendo r_1 e r_2 os ângulos de refração nos meios 1 e 2, respectivamente, podemos afirmar que:

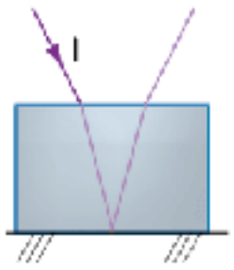
(a) $r_1 < r_2$; $i < r$
(b) $r_1 > r_2$; $i = r$
(c) $r_1 > r_2$; $i > r$
(d) $r_1 < r_2$; $i = r$

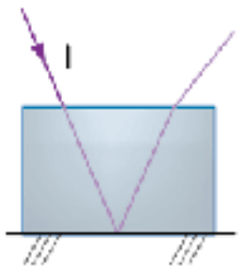
29 Na figura a seguir está representado o perfil de uma lâmina de vidro de faces paralelas (L) sobre a qual incide um raio de luz monocromático (I). A face E da lâmina é espelhada. A lâmina está mergulhada no ar.

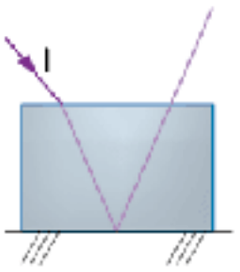


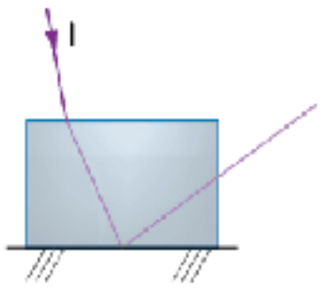
Em qual das alternativas seguintes melhor se representa a configuração de I, depois que ele penetra na lâmina de vidro?

(a)


(b)


(c)


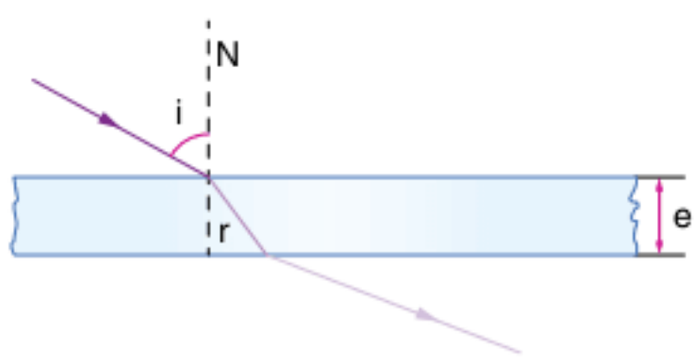
(d)


(e)


30 **UFP** Um raio de luz atinge uma lâmina de faces paralelas de $\sqrt{7}$ m de espessura e de índice de refração $\sqrt{2}$, segundo um ângulo de 90º. Considerando essa lâmina imersa no ar, a distância percorrida pelo raio de luz dentro da lâmina vale, em metros:

(a) $2\sqrt{2}$
(b) $\sqrt{7}$
(c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$
(d) $\sqrt{14}$
(e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

31 **Enaval** Uma lâmina de faces paralelas tem espessura $e = \sqrt{2}$ cm e encontra-se no ar.



Sabendo-se que r = 45º e que ocorre um desvio lateral de 1,0 cm para um raio de luz que incide com um ângulo i, podemos afirmar que o valor do ângulo i é:

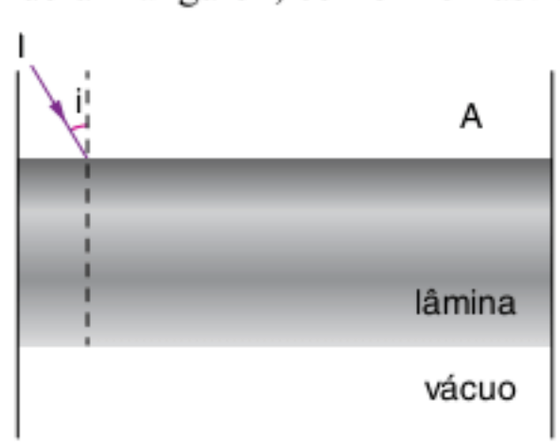
(a) 30º
(b) 60º
(c) 70º
(d) 75º
(e) 80º

32 **Unicamp** Um peixe, nadando de manhã num lago calmo de água transparente, vê o Sol em uma posição angular de 53º em relação à horizontal.

a) Sabendo-se que o índice de refração da água é $\frac{4}{3}$, determine a posição angular verdadeira do Sol em relação ao horizonte.
b) Se naquele local o Sol nasce às 6 horas e põe-se às 18 horas, que horas são, aproximadamente, quando o peixe avista o Sol na situação do item anterior? Admita que a trajetória do Sol em relação à Terra é descrita com velocidade constante.

Dados: sen53º = 0,8 e cos53º = 0,6.

33 **Unirio** Uma lâmina transparente é usada para separar um meio A, também transparente, do vácuo. O índice de refração do meio A vale 2,0 e o da lâmina vale **n**. Um raio luminoso I incide na lâmina segundo um ângulo i, conforme ilustra a figura.



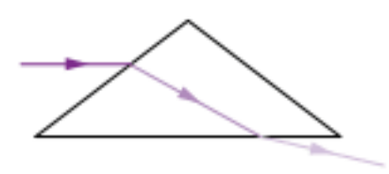
Para que o raio luminoso não atravesse a lâmina para a região de vácuo, o seno do ângulo i:

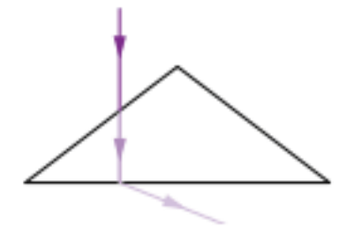
(a) deve ser menor que $\frac{1}{2}$.
(b) deve ser menor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(c) deve ser maior que $\frac{1}{2}$.
(d) deve ser maior que $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(e) depende do valor n.

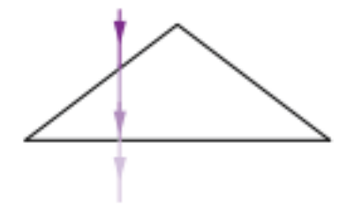
Prismas

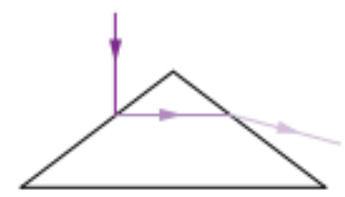
34 **Mackenzie** Um raio luminoso incide num prisma cuja secção transversal é um triângulo e cujo índice de refração, em relação ao ambiente, é maior do que a unidade. A figura que representa uma trajetória possível do raio luminoso é:

(a)

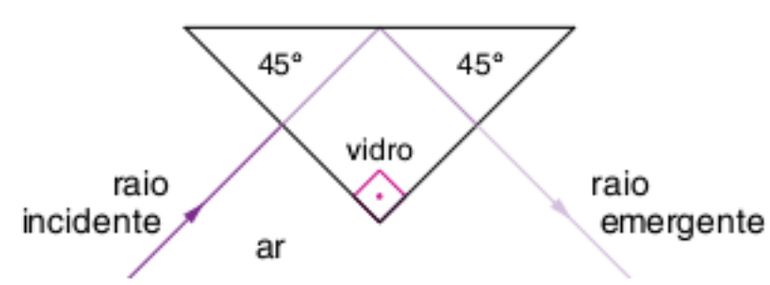
(b)


(c)


(d)


(e)


35 **Fuvest** Alguns instrumentos de óptica utilizam prismas "de reflexão total" como espelhos, como no caso da figura:

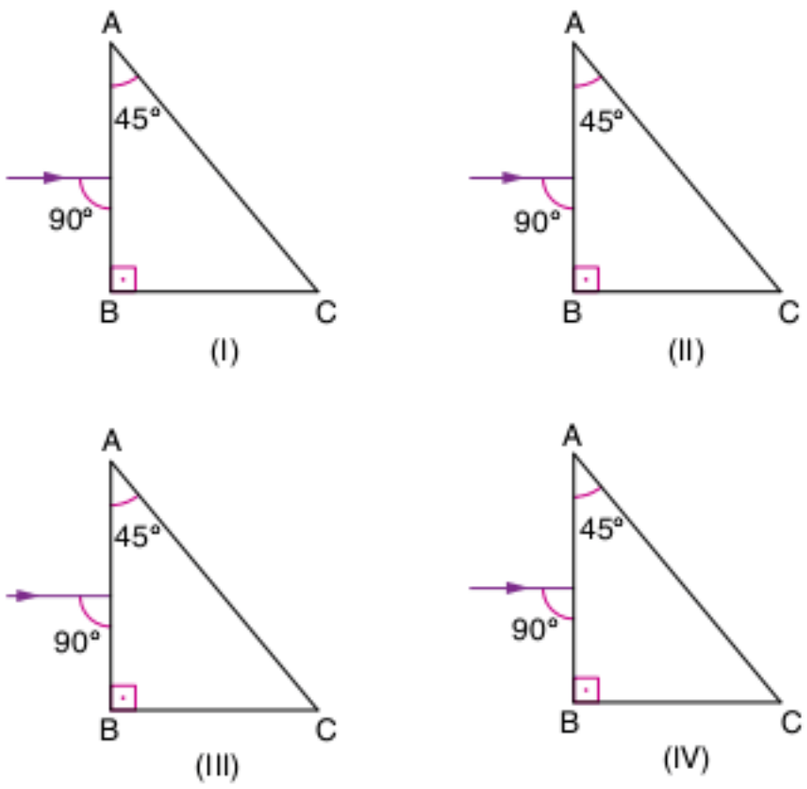


O mínimo valor do índice de refração do vidro desse prisma deve ser, aproximadamente:

(a) 2,00
(b) 1,73
(c) 1,41
(d) 1,00
(e) 0,707

36 **Vunesp** A seguir, estão esquematizados quatro prismas de formas geométricas iguais, sobre os quais incidem raios luminosos normais às faces AB. Os prismas são feitos de material óptico de índices de refração:

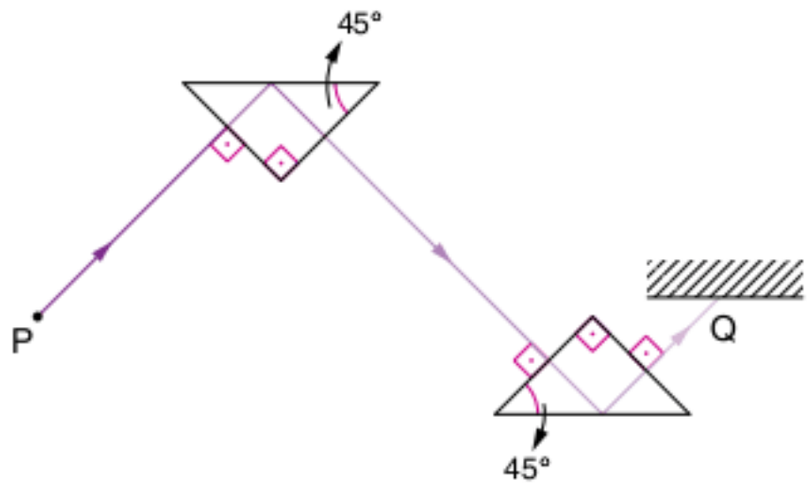
$$n_I = \frac{1}{\sqrt{2}}; n_{II} = \frac{1,5}{\sqrt{2}}; n_{III} = \frac{3}{\sqrt{2}}; n_{IV} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$



Em quais dos prismas o raio emergente sai pela face BC?

(a) Em I e II.
(b) Somente em III.
(c) Somente em IV.
(d) Em III e IV.
(e) Em II, III e IV.

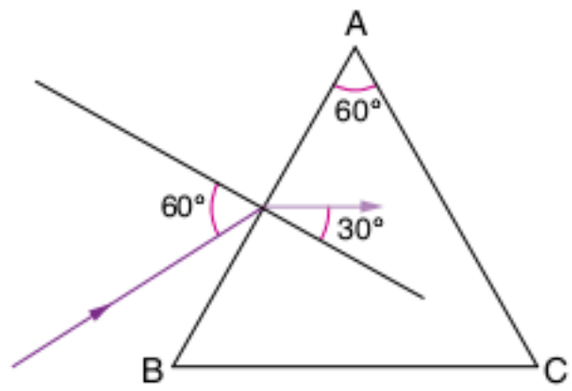
37 **Mackenzie** Dois prismas idênticos encontram-se no ar dispostos conforme a figura abaixo. O raio luminoso proveniente do ponto P segue a trajetória indicada e atinge o ponto Q.



Nesse caso, podemos afirmar que:

(a) o ângulo limite do material desses prismas é 90°.
(b) o ângulo limite do material desses prismas é inferior a 45°.
(c) o ângulo limite do material desses prismas é superior a 45°.
(d) os prismas são constituídos de material de índice de refração igual a 1.
(e) os prismas são constituídos de material de índice de refração menor que 1.

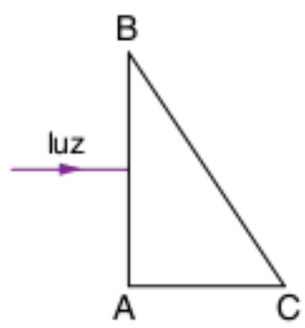
38 Um raio de luz monocromático penetra na face AB de um prisma, imerso no ar, conforme sugere a figura.



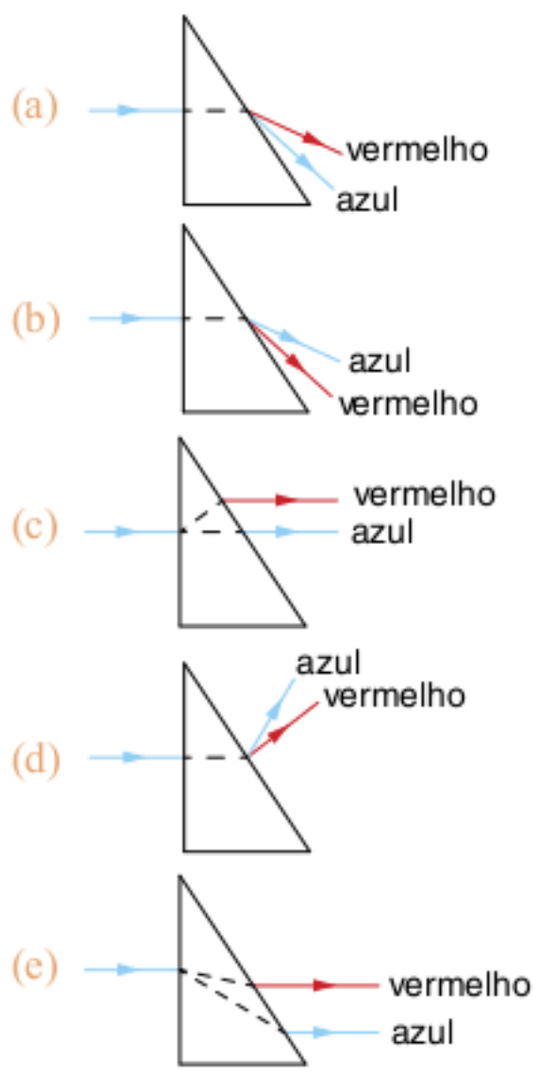
O ângulo que o raio emergente faz com a normal à face AC e o ângulo entre os prolongamentos dos raios emergente e incidente (desvio) valem, respectivamente:

(a) 90° e 120°.
(b) 60° e 120°.
(c) 60° e 60°.
(d) 30° e 60°.
(e) 30° e 90°.

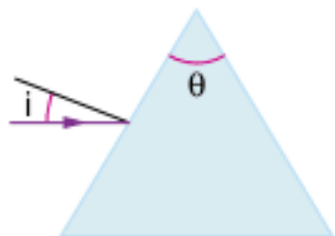
39 **Fuvest** Um feixe de luz, composto das cores azul e vermelho, incide perpendicularmente sobre a face AB de um prisma imerso no ar. Os índices de refração do prisma são $n_V = 1,26$ e $n_a = 1,53$ para o vermelho e o azul, respectivamente. O prisma separa a luz emergente na face BC em dois feixes, um vermelho e outro azul.



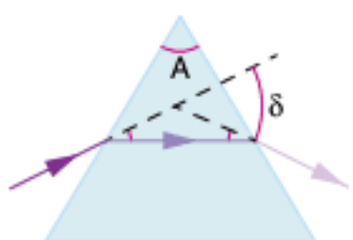
Qual a figura que melhor representa esse fenômeno?



40 **EEM-SP** Um raio de luz monocromática incide com ângulo i na face de um prisma de ângulo θ e índice de refração n em relação ao meio em que está imerso. O raio está contido no plano da seção transversal do prisma. Estabeleça a condição que deve ser obedecida por i, θ e n para que haja reflexão total na face oposta do prisma.



41 **ITA** O Método do Desvio Mínimo, para a medida do índice de refração, n, de um material transparente, em relação ao ar, consiste em se medir o desvio mínimo d de um feixe estreito de luz que atravessa um prisma feito desse material. Para que esse método possa ser aplicado (isto é, para que se tenha um feixe emergente), o ângulo A do prisma deve ser menor que:



(a) arc sen (n).

(b) $2\text{arc sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(c) $0{,}5\,\text{arc sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(d) $\text{arc sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(e) outro valor.

42 Um raio luminoso atravessa um prisma de índice de refração n e imerso no ar (n_{ar} = 1,0). Calcule o desvio angular Δ que o raio sofre, sabendo que o ângulo de incidência i bem como o ângulo de refringência A são pequenos. (Considerar sen i ≅ i.)

(a) $\Delta \approx A\left(n + \frac{1}{2}\right)$

(b) $\Delta \approx A\left(n - \frac{1}{2}\right)$

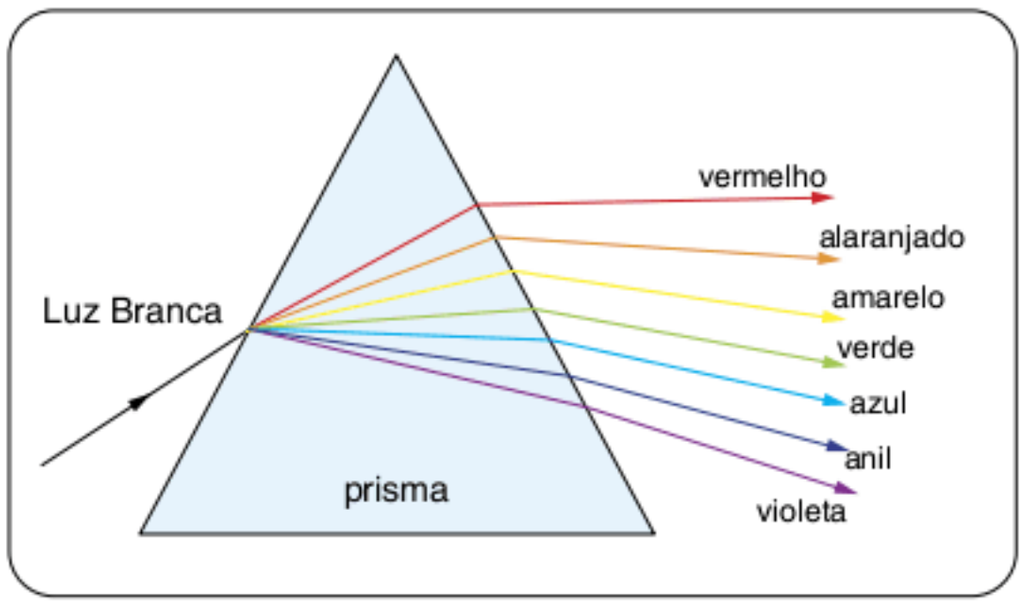
(c) $\Delta \approx A(n - 1)$

(d) $\Delta \approx A(n + 1)$

(e) $\Delta \approx An - 1$

Leia o texto a seguir para responder às questões **43** e **44**.

A dispersão é um fenômeno óptico que consiste na separação da luz branca, ou seja, separação da luz solar em várias cores. Esse fenômeno pode ser observado em um prisma de vidro, figura a seguir, que mostra o trajeto de um raio de luz. O célebre físico e matemático Isaac Newton observou esse fenômeno e, no ano de 1672, publicou um trabalho no qual apresentava suas ideias sobre a natureza das cores. A interpretação sobre a dispersão da luz e a natureza das cores, dada por Isaac Newton, é aceita até hoje [...].



<www.brasilescola.com/fisica/a-dispersao-luz-branca.htm>. (Adapt.).

43 **UEPB 2010** Acerca do assunto tratado no texto, em relação ao fenômeno da dispersão da luz, podemos afirmar que

I. o índice de refração absoluto do prisma é único para todas as cores.

II. a dispersão da luz branca ocorre porque o índice de refração absoluto de qualquer meio depende da frequência da radiação luminosa que o atravessa.

III. a manifestação visível da frequência é a cor da radiação luminosa.

Após a análise feita, pode-se afirmar que é(são) correta(s) apena(s) a(s) proposição(ões):

(a) II.

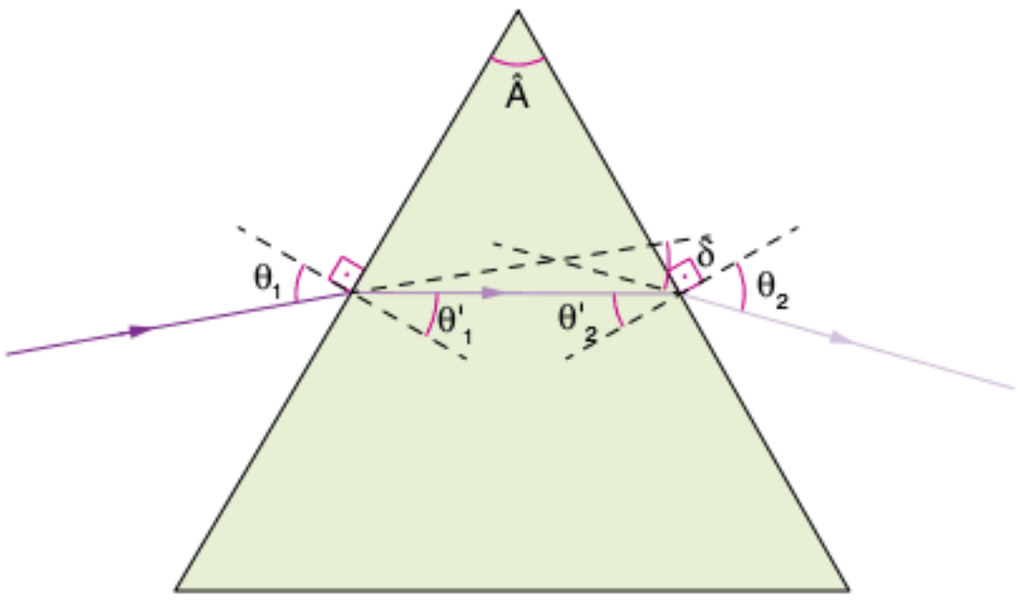
(b) I e II.

(c) I.

(d) II e III.

(e) III.

44 **UEPB 2010** Ainda acerca do assunto tratado no texto, em relação à trajetória de um raio de luz através de um prisma, observe a situação-problema a seguir.



Um raio de luz monocromática, quando atravessa uma prisma triagonal, imerso no ar, sofre um desvio de ângulo δ em sua trajetória, como mostra a figura, sendo Â o ângulo entre as faces atravessadas pelo raio de luz, chamado de ângulo de refringência, e θ_1 e θ_2, respectivamente, os ângulos de incidência e refração do raio de luz no prisma, e θ'_1 e θ'_2, respectivamente, ângulos formados pelo raio de luz com as faces interna do prisma. Considerando as indicações da figura, a relação correta é:

(a) $\delta = \theta_1 + \theta_2 - \hat{A}$

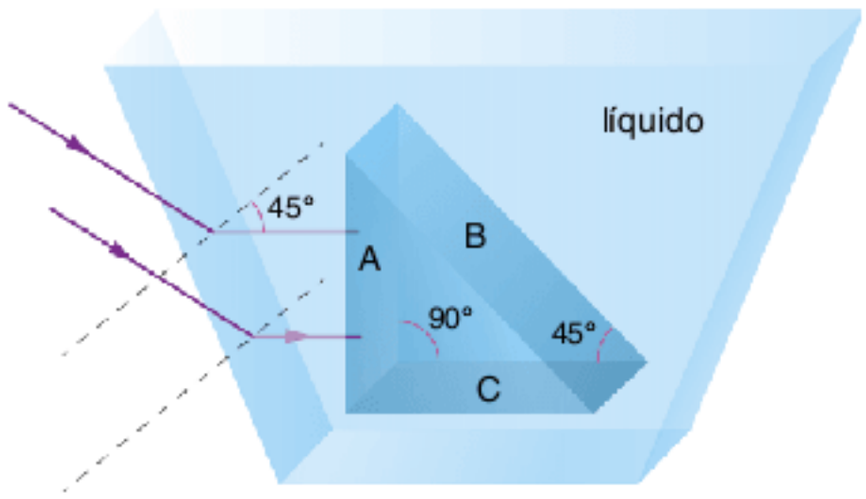
(b) $\hat{A} = \theta'_1 - \theta'_2$

(c) $\hat{A} = \theta_1 + \theta_2 = 90^o$

(d) $\theta_1 - \theta_2 = 90^o - \hat{A}$

(e) $\delta = 2(\theta_1 - \theta_2) - \hat{A}$

45 **UFG 2008** Com a finalidade de obter um efeito visual, através da propagação da luz em meios homogêneos, colocou-se dentro de um aquário um prisma triangular feito de vidro *crown*, conforme mostra a figura abaixo.

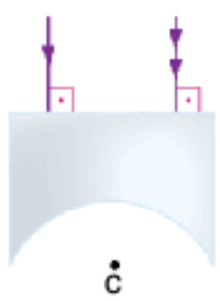


Um feixe de luz violeta, após refratar-se na parede do aquário, incidiu perpendicularmente sobre a face A do prisma, atingindo a face B. Com base nesses dados e conhecidos os índices de refração do prisma e do líquido, respectivamente, 1,52 e 1,33, conclui-se que o efeito obtido foi um feixe de luz emergindo da face:

(a) B, por causa da refração em B.
(b) C, por causa da reflexão total em B.
(c) B, por causa da reflexão total em B e C.
(d) C, por causa da reflexão em B seguida de refração em C.
(e) A, por causa das reflexões em B e C e refração em A.

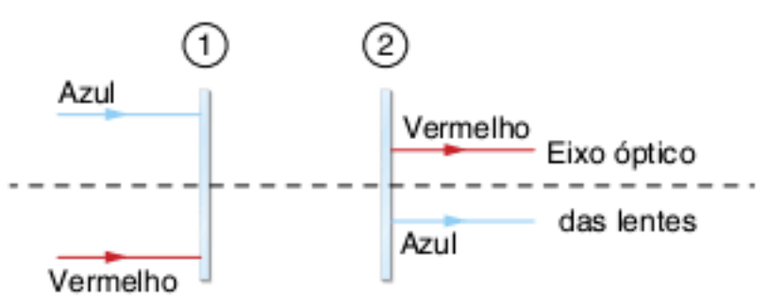
Lentes esféricas

46 Uma lente plano-côncavo com índice de refração n_L está imersa em um meio, cujo índice de refração é n_E. Considere C, como o centro da face esférica da lente e desenhe as trajetórias dos raios de luz através dela, concluindo sobre seu comportamento óptico (convergente ou divergente), nos casos em que:

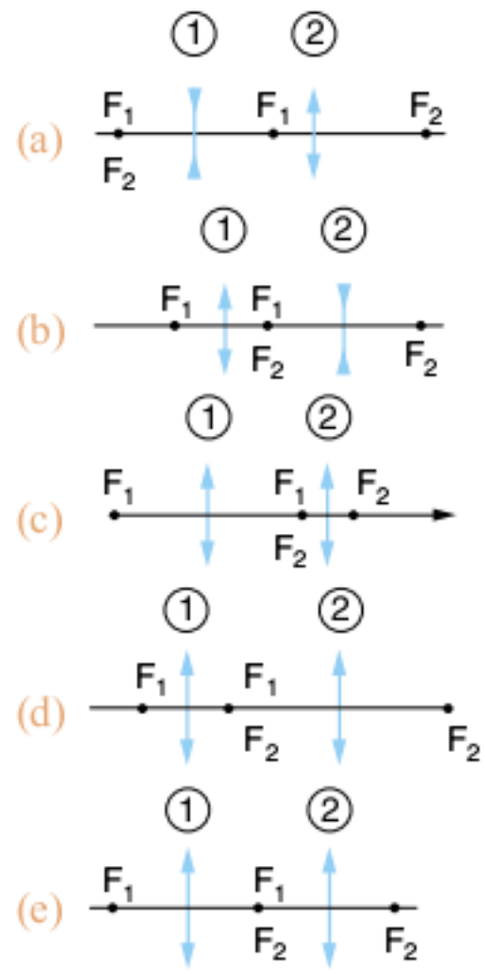


a) $n_L > n_E$.
b) $n_L < n_E$.

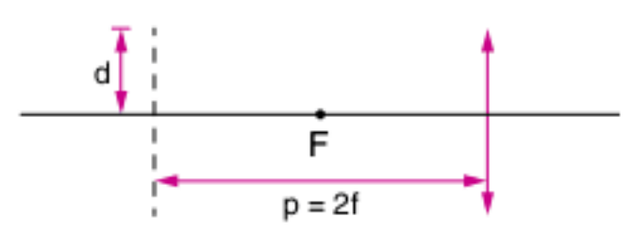
47 **Cesgranrio** Um raio luminoso azul e outro vermelho, paralelos entre si, incidem sobre um sistema formado por duas lentes delgadas (1) e (2), cujo eixo comum é paralelo aos raios e equidistante destes, como mostra a figura. A figura mostra, também, os raios emergentes do sistema, que continuaram paralelos ao eixo óptico e equidistante deste.



Entretanto, a separação entre os raios emergentes é menor que aquela entre os raios incidentes. Nas opções a seguir, F_1 e F_2 representam os focos das lentes (1) e (2), respectivamente, e estas podem ser convergentes ( ) ou divergentes ( ). Escolha a opção que representa o sistema proposto.



48 **Vunesp** Um objeto puntiforme encontra-se a uma distância P de uma lente convergente ideal de distância focal $F = \frac{P}{2}$. A imagem desse objeto é projetada nitidamente sobre uma tela disposta perpendicularmente ao eixo principal da lente. Faz-se o objeto executar um movimento circular uniforme de raio d, com centro no eixo principal e perpendicular a ele. Dados a velocidade escalar v_1, do objeto, a velocidade escalar v_2, da imagem, será:



(a) $v_2 = \frac{v_1}{3}$
(b) $v_2 = \frac{v_1}{2}$
(c) $v_2 = v_1$
(d) $v_2 = 2v_1$
(e) $v_2 = 3v_1$

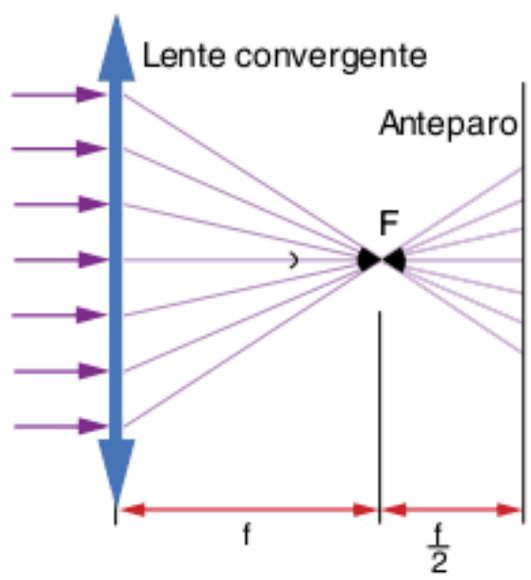
49 Uma lente esférica de vidro, cujo índice de refração é 1,5, tem uma face plana e outra côncava, com raio de curvatura 50 cm. Sabendo-se que a lente está imersa no ar (n_{ar} = 1,0), pode-se afirmar que sua vergência vale:

(a) 1,0 di
(b) –1,0 di
(c) 2,0 di
(d) –2,0 di
(e) 2,5 di

50 **Osec-SP** Duas lentes convergentes de raios de curvatura iguais têm índices de refração 1,5 e 1,7, respectivamente. A relação entre suas respectivas distâncias focais é:

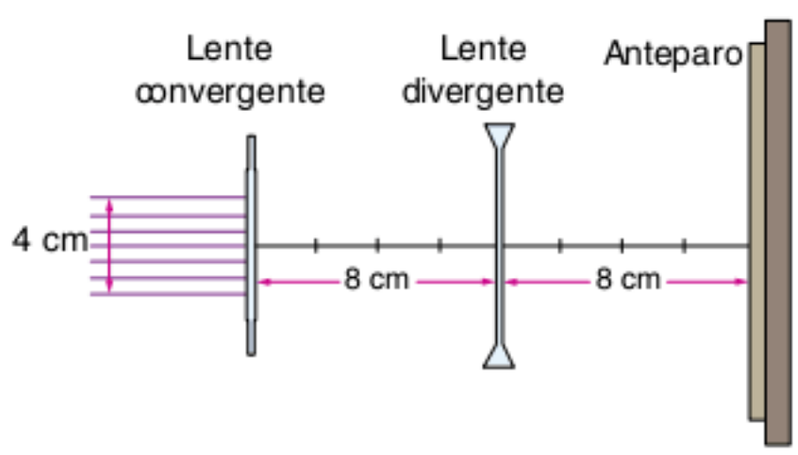
(a) $\frac{15}{17}$
(b) $\frac{17}{15}$
(c) $\frac{7}{5}$
(d) $\frac{5}{7}$
(e) não pode ser calculada.

51 **Unir 2007** Um pincel de raios luminosos paralelos, após atravessar uma lente convergente de distância focal igual a f, incide sobre um anteparo plano distante $\frac{3f}{2}$ da lente. Sabendo-se que a intensidade luminosa incidente sobre a lente é igual a 12 $W \cdot m^{-2}$, qual a intensidade luminosa do feixe incidente sobre o anteparo:



(a) 6 $W \cdot m^{-2}$
(b) 48 $W \cdot m^{-2}$
(c) 3 $W \cdot m^{-2}$
(d) 24 $W \cdot m^{-2}$
(e) 12 $W \cdot m^{-2}$

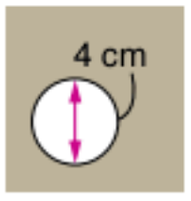
52 **Fuvest 2008** Um sistema de duas lentes, sendo uma convergente e outra divergente, ambas com distâncias focais iguais a 8 cm, é montado para projetar círculos luminosos sobre um anteparo. O diâmetro desses círculos pode ser alterado, variando-se a posição das lentes.

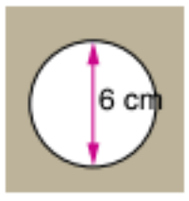


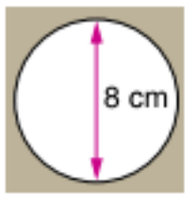
Em uma dessas montagens, um feixe de luz, inicialmente de raios paralelos e 4 cm de diâmetro, incide sobre a lente convergente, separada da divergente por 8 cm, atingindo finalmente o anteparo 8 cm adiante da divergente. Nessa montagem específica, o círculo luminoso formado no anteparo é melhor representado por:

(a)

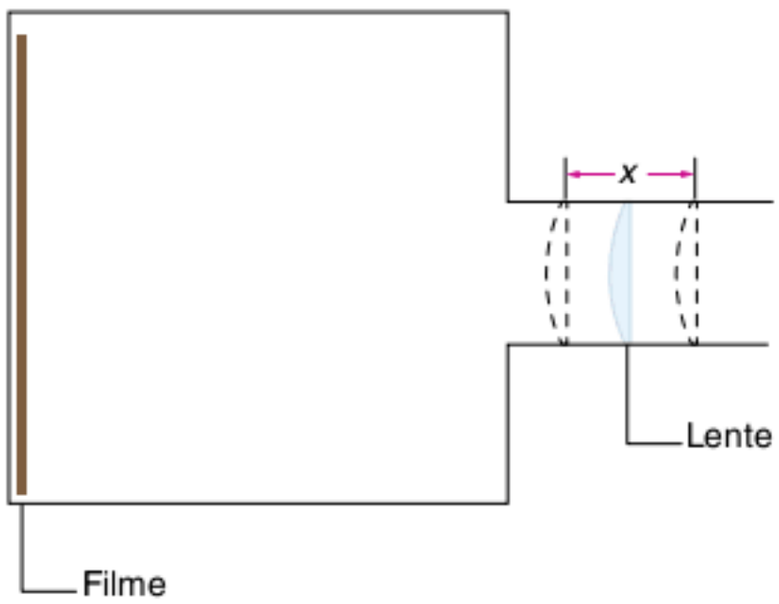
(b)

(c)


(d)


(e)


53 **UFMG 2008** Usando uma lente convergente, José Geraldo construiu uma câmera fotográfica simplificada, cuja parte óptica está esboçada nesta figura:



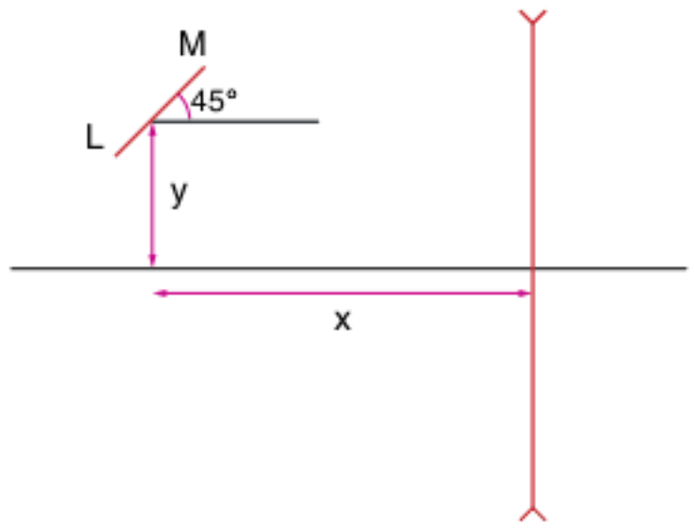
Ele deseja instalar um mecanismo para mover a lente ao longo de um intervalo de comprimento x, de modo que possa aproximá-la ou afastá-la do filme e, assim, conseguir formar, sobre este, imagens nítidas.

a) Sabe-se que a distância focal da lente usada é de 4,0 cm e que essa câmera é capaz de fotografar objetos à frente dela, situados a qualquer distância igual ou superior a 20 cm da lente.
Considerando essas informações, determine o valor de x.

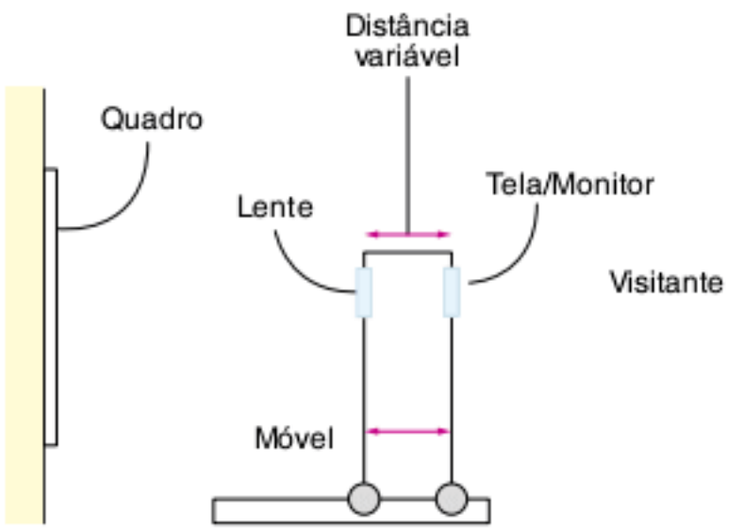
b) Pretendendo fotografar a Lua, José Geraldo posiciona a lente dessa câmera a uma distância D do filme. Em seguida, ele substitui a lente da câmera por outra, de mesmo formato e tamanho, porém feita com outro material, cujo índice de refração é maior.
Considerando essas informações, responda:
Para José Geraldo fotografar a Lua com essa nova montagem, a distância da lente ao filme deve ser menor, igual ou maior que D? Justifique sua resposta.

Determinação gráfica da imagem

54 **ITA 2010** A figura mostra uma barra LM de $10\sqrt{2}$ cm de comprimento, formando um ângulo de 45° com a horizontal, tendo o seu centro situado a x = 30,0 cm de uma lente divergente, com distância focal igual a 20,0 cm, e a y = 10,0 cm acima do eixo ótico da mesma. Determine o comprimento da imagem da barra e faça um desenho esquemático para mostrar a orientação da imagem.



55 **Fuvest** Em um museu, um sistema ótico permite que o visitante observe detalhes de um quadro sem se aproximar dele. Nesse sistema, uma lente convergente, de distância focal fixa, projeta a imagem do quadro (ou parte dela) sobre uma tela de receptores, que reproduzem essa imagem em um monitor (do mesmo tamanho da tela). O sistema pode ser aproximado ou afastado do quadro, pelo visitante, que deve ainda ajustar a distância entre a lente e a tela, para focalizar a imagem na tela. A Figura 1 esquematiza a situação em que um quadro é projetado na tela/monitor. A Figura 2 esquematiza a situação em que o visitante aproxima a lente do quadro e ajusta a distância lente-tela, obtendo uma imagem nítida na tela/monitor. Para verificar o que é observado, nesse caso, pelo visitante,



a) assinale, na Figura 1, traçando as linhas de construção necessárias, a posição do foco da lente, indicando-a pela letra F.
b) assinale, na Figura 2, traçando as linhas de construção necessárias, a nova posição da tela para que a imagem seja projetada com nitidez, indicando-a pela letra T.
c) desenhe, na Figura 2, a imagem formada sobre a tela, tal como vista no monitor.

FIGURA 1

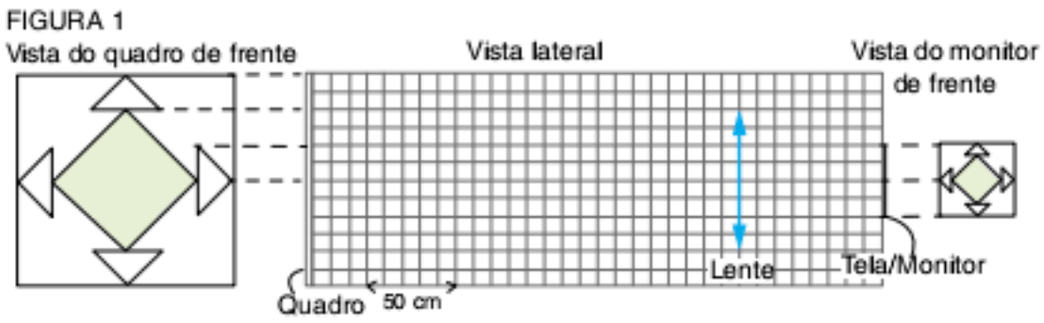
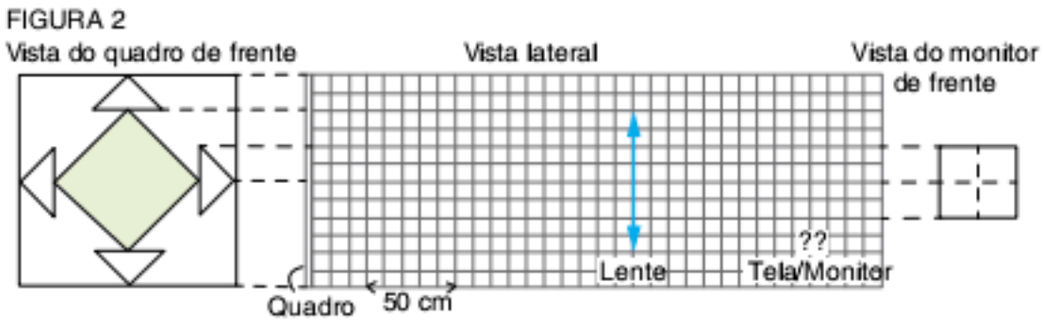
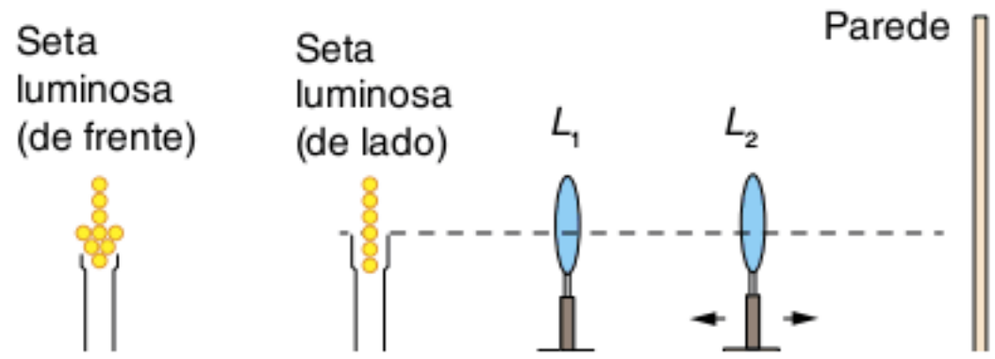


FIGURA 2

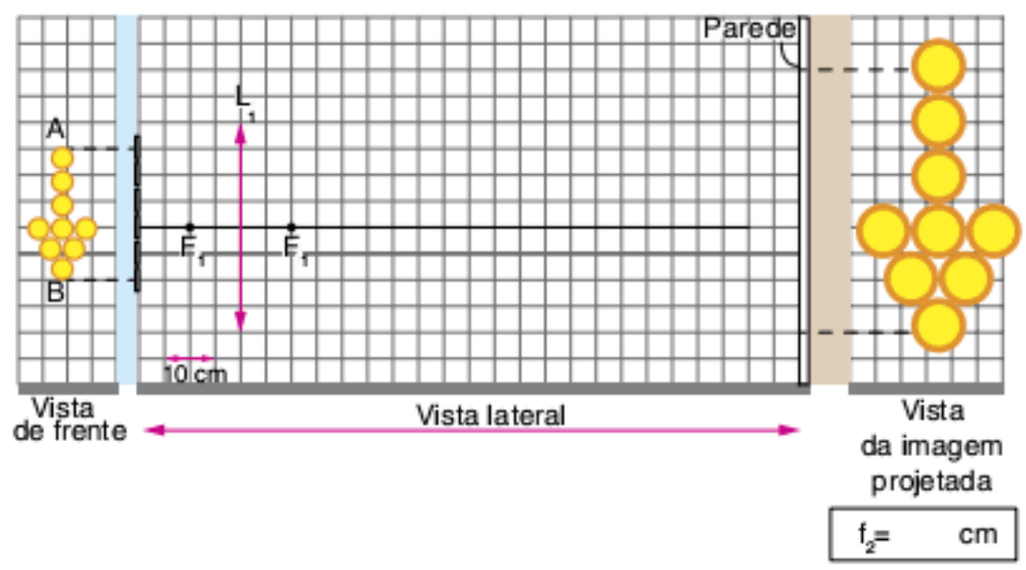


56 **Fuvest 2007** Uma seta luminosa é formada por pequenas lâmpadas. Deseja-se projetar a imagem dessa seta, ampliada, sobre uma parede, de tal forma que seja mantido o sentido por ela indicado. Para isso, duas lentes convergentes, L_1 e L_2, são colocadas próximas uma da outra, entre a seta e a parede, como indicado no esquema abaixo.



Para definir a posição e a caracte-rística da lente L_2:

a) determine, no esquema a seguir, traçando as linhas de construção apropriadas, as imagens dos pontos A e B da seta, produzidas pela lente L_1, cujos focos F_1 estão sinalizados, indicando essas imagens por A_1 e B_1 respectivamente.
b) determine, no esquema a seguir, traçando as linhas de construção apropriadas, a posição onde deve ser colocada a lente L_2, indicando tal posição por uma linha vertical, com símbolo L_2.
c) determine a distância focal f_2 da lente L_2, em cm, traçando os raios convenientes ou calculando-a. Escreva o resultado, no espaço destacado.



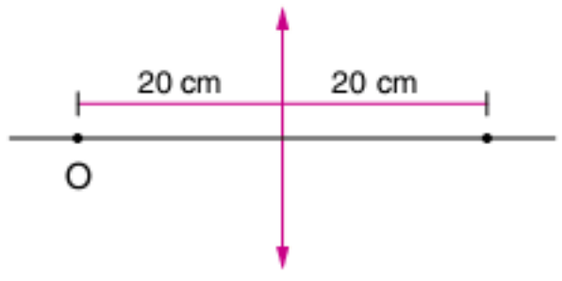
Determinação analítica da imagem

57 **Cesgranrio** Ao iniciar a projeção de um filme, um estudante observou que, quando em foco, a imagem projetada estava bem maior do que a tela. Para corrigir esse problema, o estudante deve:

(a) aproximar o projetor da tela e aproximar a lente do filme.
(b) aproximar o projetor da tela, sem variar a distância da lente ao filme.
(c) aproximar o projetor da tela e afastar a lente do filme.
(d) afastar o projetor da tela e afastar a lente do filme.
(e) afastar o projetor da tela e aproximar a lente do filme.

58 **Cesgranrio (Adapt.)** Quando um objeto pontual se encontra em O a 20 cm de uma lente convergente, a imagem se forma em I, simétrico de O em relação à lente.

Se quisermos queimar uma folha de papel com essa lente, em dia ensolarado, a folha deverá ser colocada a que distância da lente?



(a) 5,0 cm
(b) 20 cm
(c) 10 cm
(d) 30 cm
(e) 40 cm

59 **Mackenzie** Um ponto luminoso é colocado a uma distância 2F de uma lente de distância focal +F. Quando o ponto luminoso se move ao longo do eixo principal da lente, afastando-se dela, a distância da imagem à lente varia de:

(a) de F para infinito.
(b) F para 2F.
(c) 2F para infinito.
(d) 2F para F.
(e) 2F para zero.

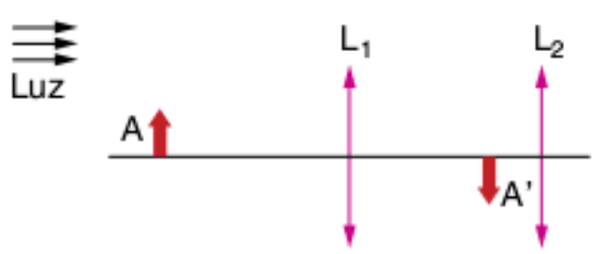
60 **UFMT** Uma lente delgada e convergente conjuga, a um objeto de 10,0 cm de altura, uma imagem de 2,5 cm de altura. O objeto e a imagem são perpendiculares ao eixo principal da lente. A distância entre o objeto e a lente é X e a distância entre sua imagem e a lente é Y. A relação $\frac{X}{Y}$ é, em módulo, igual a:

(a) 1,0
(b) 2,0
(c) 3,0
(d) 4,0
(e) 5,0

61 **FEI** Uma lente produz sobre um anteparo fixo uma imagem, de tamanho 9 cm, de um objeto. A mesma lente, em outra posição, produz, sobre o mesmo anteparo, outra imagem, de tamanho 4 cm, do mesmo objeto. Determinar o tamanho do objeto.

62 **UFG** Um objeto fixo está a uma distância D = 2,0 m de um anteparo, também fixo. Há duas posições, entre o objeto e o anteparo, em que se pode colocar uma lente convergente, de modo a projetar sobre o anteparo a imagem do objeto. A distância entre estas duas posições é d = 1,0 m. Qual a distância focal da lente?

63 **Fuvest** Um objeto A está situado a 5 cm de uma lente convergente L_1, cuja distância focal é 4 cm. Uma segunda lente convergente, idêntica à anterior, é colocada a 2 cm de distância da imagem A'. A figura ilustra o esquema.



a) A que distância de L_1 encontra-se L_2?
b) Qual a amplificação do sistema L_1L_2?

64 **ITA** Uma lente A, convergente (F_A = 10 cm), é justaposta a outra lente B convergente (F_B = 5 cm). A lente equivalente é:

(a) divergente e F = 3,33 cm.
(b) divergente e F = 5,2 cm.
(c) convergente e F = 5,2 cm.
(d) convergente e F = 15 cm.
(e) convergente e F = 3,33 cm.

65 **USP** Um objeto está situado 9,0 cm à frente de um sistema de duas lentes coladas, cujas potências são 5,00 e 10,00 dioptras, respectivamente. Determine a natureza e a posição da imagem:

(a) real, direita; 25,7 cm atrás do sistema.
(b) real, invertida; 25,7 cm atrás do sistema.
(c) virtual, invertida; 25,7 cm atrás do sistema.
(d) virtual, direita; 25,7 cm atrás do sistema.
(e) real, direita; 25,7 cm atrás do sistema.

Questões gerais

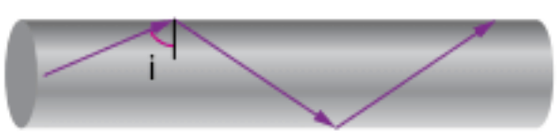
66 **Vunesp** Viajando de automóvel em dias quentes, sobre estradas asfaltadas, frequentemente tem-se a impressão de asfalto molhado, longe na estrada. Isto é devido à:

(a) existência de água nas proximidades.
(b) insolação que amortece o sentido de visão do viajante.
(c) percepção simultânea de raios luminosos diretos e refratados, nas camadas de ar diferentemente aquecidas, imediatamente sobre o leito da estrada.
(d) difração sofrida pelos raios luminosos ao penetrar a superfície da Terra.
(e) presença de um corpo perfeitamente refletor às costas do viajante.

67 **Unimep** Uma pessoa sobre a Terra pode ver o Sol, mesmo quando ele se encontra abaixo do horizonte, principalmente porque a atmosfera:

(a) refrata a luz.
(b) difunde a luz.
(c) reflete a luz.
(d) polariza a luz.
(e) nenhuma das anteriores.

68 O esquema a seguir mostra, de modo simplificado, a transmissão de luz através de uma fibra óptica:



fibra óptica

Para que as fibras possam funcionar como meio de transmissão, é necessário que sejam bem-definidos dois parâmetros:

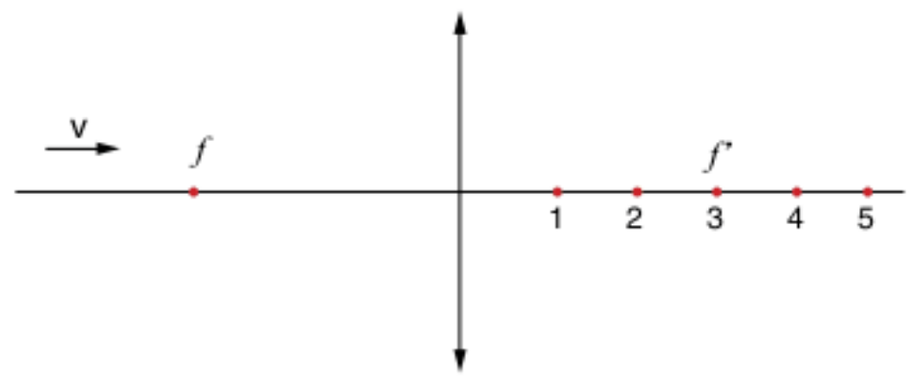
- o ângulo limite entre a fibra e o exterior;
- o módulo da velocidade da luz no seu interior.

Para que uma fibra óptica de índice de refração absoluto igual a $\sqrt{2}$, imersa no ar (n_{ar} = 1), possa transmitir luz exclusivamente

por reflexão, o ângulo de incidência (i) deve superar o valor mínimo de:

(a) 0º
(b) 30º
(c) 45º
(d) 60º
(e) 90º

69 **IME 2008**

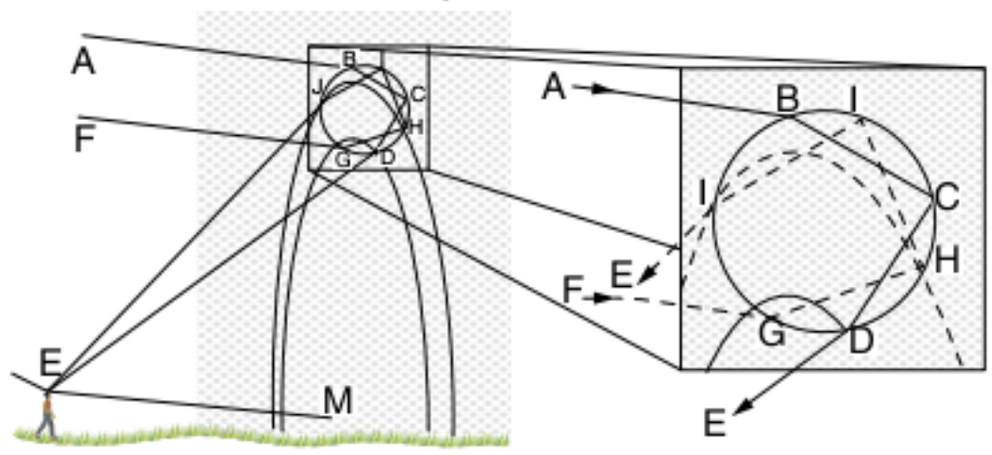


Um objeto se desloca com velocidade constante v em direção a uma lente convergente, como mostra a figura anterior. Sabendo que o ponto 3 é o foco da lente, a velocidade de sua imagem é maior no ponto:

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

70 **ITA 2008** Foi René Descartes, em 1637, o primeiro a discutir claramente a formação do arco-íris. Ele escreveu: *Considerando que esse arco-íris aparece não apenas no céu, mas também no ar perto de nós, sempre que haja gotas de água iluminadas pelo sol, como podemos ver em certas fontes, eu imediatamente entendi que isso acontece devido apenas ao caminho que os raios de luz traçam nessas gotas e atingem nossos olhos. Ainda mais, sabendo que as gotas são redondas, como fora anteriormente provado e, mesmo que sejam grandes ou pequenas, a aparência do arco-íris não muda de forma nenhuma, tive a ideia de considerar uma bem grande, para que pudesse examinar melhor [...].*

Ele então apresentou a figura onde estão representadas as trajetórias para os arco-íris primário e secundário. Determinar o ângulo entre o raio incidente na gota, AB, e o incidente no olho do observador, DE, no caso do arco-íris primário, em termos do ângulo de incidência, e do índice de refração da água n_a. Considere o índice de refração do ar n = 1.



Arco-íris primário e secundário

Vista expandida de uma gota de água

71 **UFPI 2008** Analise as afirmativas e assinale V (verdadeira) ou F (falsa).

( ) Um mergulhador numa piscina, à noite, observa a imagem da Lua numa direção que forma um ângulo de 30º com a vertical. Sendo o índice de refração da água igual a $\frac{4}{3}$, o desvio experimentado pelo raio incidente, ao se refratar, é de 30º.

( ) A dispersão de uma luz policromática, através de um prisma em suas diversas componentes monocromáticas, somente é possível porque as diferentes frequências percebem na matéria diferentes índices de refração.

( ) Na dispersão da luz branca, a componente que sofre menor desvio é a mesma que tem maior perda de velocidade

( ) As fibras ópticas foram desenvolvidas no início da década de 1950. Utilizadas primeiramente em medicina, a partir da década de 1980, passaram a ser usadas nas telecomunicações. O princípio físico utilizado nessas aplicações, baseia-se na dispersão da radiação eletromagnética ao longo da fibra óptica.

72 **UEPB 2009** Num dia de sol intenso, com o intuito de diminuir a intensidade da radiação solar que penetra em sua cozinha, através de uma porta de vidro transparente, a dona de casa decidiu abri-la. Com base nesta atitude, analise as seguintes proposições.

I. Ela foi feliz com tal procedimento, porque a intensidade da radiação solar na cozinha diminuiu, já que os raios solares são concentrados na cozinha pela porta de vidro.
II. Ela foi feliz com tal procedimento, porque a intensidade da radiação solar diminuiu devido à convecção solar provocada pela radiação.
III. Ela não teve sucesso com este procedimento, pois ao abrir a porta de vidro, parte da luz solar que antes era refletida, agora não é mais, assim a intensidade da radiação solar no interior da cozinha aumentou.
IV. Ela não teve sucesso, uma vez que a intensidade da radiação solar no interior de sua cozinha permanece constante.

Das proposições acima apresentadas, está(ão) correta(s):

(a) Somente I.
(b) Somente III.
(c) Somente II.
(d) Somente IV.
(e) Somente I e II.

73 **UEPB 2008** Um estudante curioso, a fim de testar a inversão de imagens, encheu um tubo de ensaio com água, vedou-o com uma rolha e, utilizando-se da expressão CHICO RALA COCO, impressa num cartão, percebeu que, ao afastar o instrumento do cartão, obteve uma nova expressão, conforme apresentado na figura a seguir.

CHICO RALA COCO

(Instrumento)

Com base em sua análise e conhecimentos em fenômenos ópticos, esta observação do estudante acontece porque:

(a) a luz proveniente do cartão, ao incidir sobre o instrumento que funciona como uma lente, refrata-se, e apenas a palavra RALA da imagem da expressão impressa no cartão é invertida.

(b) a luz proveniente do cartão, ao incidir sobre o instrumento que funciona como uma lente, refrata-se, porém não há inversão alguma da imagem da expressão impressa no cartão.

(c) a luz proveniente do cartão, ao incidir sobre o instrumento que funciona como uma lente, refrata-se, e assim a imagem da expressão impressa no cartão é invertida.

(d) a luz proveniente do cartão, ao incidir sobre o instrumento que funciona como um espelho, inverte a imagem da expressão impressa no cartão.

(e) a luz proveniente do cartão, ao incidir sobre o instrumento que funciona como um espelho, inverte apenas a palavra RALA da imagem da expressão impressa no cartão.

74 **UEL 2005** As fibras óticas são largamente utilizadas nas telecomunicações para a transmissão de dados. Nesses materiais, os sinais são transmitidos de um ponto ao outro por meio de feixes de luz que se propagam no interior da fibra, acompanhando sua curvatura. A razão pela qual a luz pode seguir uma trajetória não retilínea na fibra ótica é consequência do fenômeno que ocorre quando da passagem de um raio de luz de um meio, de índice de refração maior, para outro meio, de índice de refração menor. Com base no texto e nos conhecimento sobre o tema, assinale a alternativa que apresenta os conceitos ópticos necessários para o entendimento da propagação "não retilínea" da luz em fibras ópticas.

(a) Difração e foco.

(b) Reflexão total e ângulo limite.

(c) Interferência e difração.

(d) Polarização e plano focal.

(e) Imagem virtual e foco.

75 **Ufsc 2009** A mãe zelosa de um candidato, preocupada com o nervosismo do filho antes do vestibular, prepara uma receita caseira de "água com açúcar" para acalmá-lo. Sem querer, a mãe faz o filho relembrar alguns conceitos relacionados à luz, quando o mesmo observa a colher no copo com água, como mostrado na figura a seguir.

Sobre o fenômeno apresentado na figura acima, é correto afirmar que:

01 a luz tem um comportamento somente de partícula.

02 a velocidade da luz independe do meio em que se propaga.

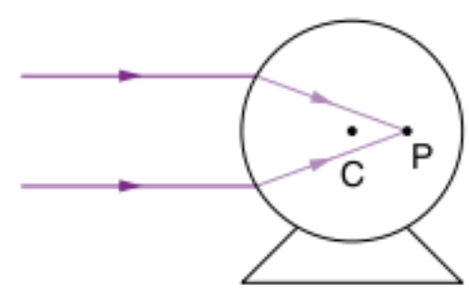
04 a colher parece quebrada, pois a direção da propagação da luz muda ao se propagar do ar para a água.

08 a velocidade da luz na água e no ar é a mesma.

16 a luz é refratada ao se propagar do ar para a água.

Soma = ☐

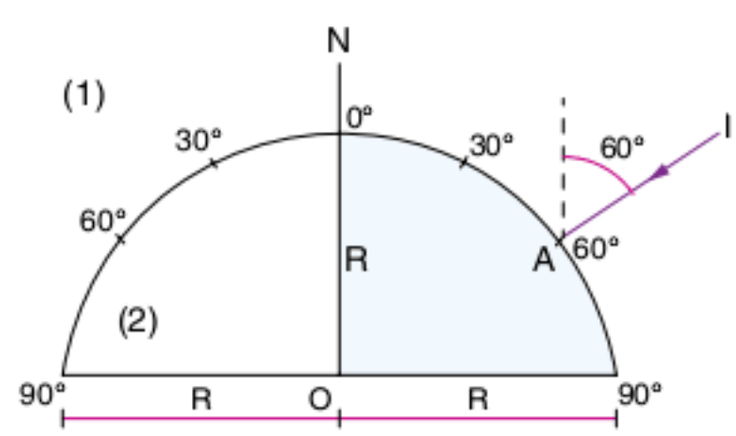
76 **UFRJ** Sobre um recipiente transparente de forma esférica e paredes delgadas, de centro em C, completamente cheio de álcool etílico, incide um feixe estreito de raios paralelos de luz monocromática, que convergem para o ponto P, como mostra a figura:



Para que o ponto P se aproxime do centro C do recipiente, devemos substituir o álcool etílico por outro líquido de maior ou menor índice de refração? Justifique sua resposta.

77 Quais os fenômenos ópticos que determinam a ocorrência do arco-íris?

78 **PUC** O meio 2, indicado na figura, é transparente, homogêneo, de índice de refração $\frac{2}{\sqrt{2}}$, tem seção semicircular e está imerso no ar (meio 1).



Mostre, por meio de cálculos, o caminho seguido pelo raio de luz I, que incide no ponto A, normalmente à superfície lateral do meio 2, com inclinação de 60º em relação ao eixo ON.

Gabarito

Frente 1

6 Cinemática vetorial

Revisando

1. a) 10 N
   b) 2 N
   c) 14 N
2. Módulo: 13; ângulo: arc cos$\frac{11}{13}$
3. Módulo: 10; ângulo: –60°
4. Módulo: 10; ângulo: arc cos0,6
5. a) π s
   b) $\frac{\pi}{4}$ s
   c) π m
   d) $2\sqrt{2}$ m
   e) $\frac{8\sqrt{2}}{\pi}$ m/s
   f) 8 m/s²
   g) $\frac{16\sqrt{2}}{\pi}$ m/s²
6. a) 8 m/s
   b) 6 m/s²
   c) 8 m/s²
   d) 10 m/s²
   e) arc cos0,6
7. a) 10 km/h
   b) 5 km/h
   c) 6 h
8. a) 35 km/h
   b) 5 km/h
   c) 12 min
   d) A 3 km do ponto oposto ao de partida, na outra margem, rio abaixo.
   e) 25 km/h
   f) arc cos(–0,75)
   g) $5\sqrt{7}$ km/h
   h) $\frac{4\sqrt{7}}{35}$ h
9. a) 2 cm/s
   b) 4 cm/s
   c) 1 rad/s

Exercícios propostos

1. E **3.** A **5.** C **7.** B
2. B **4.** A **6.** E **8.** A
9. 2 e 4
10. $\vec{x} = -2\vec{i} - \vec{j}$
11. $|\vec{a}| = 12$; $|\vec{b}| = 5$
12. a) $|\vec{S}| = 7U$; $\theta = \text{arc cos}\frac{5,5}{7}$
b) $|\vec{S}| = 13U$; $\theta = \text{arc cos}\frac{5}{13}$
13. E **15.** B **17.** C **19.** C
14. A **16.** B **18.** A **20.** E
21. I – D; II – C; III – A; IV – B; V – E
22. C **24.** D **26.** D
23. C **25.** C
27. a) 5,0 m
b) 2,5 m/s
28. a) 0,40 m/s
b) 12 m
29. D
30. a) B
b) D
31. D **32.** D **33.** B
34. 2
35. a) 8,0 s
b) x = 96 m e y = 128 m
36. a) E
b) D
37. a) 4 m/s²
b) 12 m/s
38. C
39. a) 5 m/s
b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; $x \geq 2$
c) retilínea
40. E
41. A
42. 250π km/h para oeste
43. B
44. a) 1,0 m/s
b) 1,5 m/s
45. 21 s
46. B
47. D
48. a) 6 m/s
b) 5 m/s
c) 13 m/s
49. E
50. 4,0 m/s
51. A
52. a) 2,0 h
b) 1 km
53. O barco deverá se posicionar entre NE e L.
54. D **55.** E **56.** E
57. $5\sqrt{2}$ m/s
58. a) 20 rad/s
b) $\frac{10}{\pi}$

Exercícios complementares

1. E
2. F; V; V; F; F; V
3. V; F; F; F; V; F; F; V
4. D **6.** C **8.** A
5. 6k **7.** B
9. a) $|\vec{D}| = 7U$; $\theta = \text{arc cos}\frac{1}{7}$
b) $|\vec{D}| = 32N$; $\theta = 90°$
10. B **13.** C **16.** 06 **19.** E
11. 11 **14.** C **17.** E **20.** C
12. B **15.** B **18.** B **21.** C
22. E
23. a) $\vec{r}_0 = 8\vec{i}$
b) $\vec{r} = 32\vec{i}$
c) 24 m
d) 40 m
24. C
25. C
26. a) 3 min
b) 10,0 km/h
27. a) 2,8 m/s
b) 2,0 m/s
28. a) módulo: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m/s;
direção: reta que faz ângulo de 135° com o eixo x positivo (SE-NO);
sentido: noroeste.
b) 1,5 m/s
29. 1 s
30. 5,0 m/s²
31. E
32. C
33. a) 12 m/s²
b) acelerado
34. a) 10 m/s²
b) 24 m/s²
c) 24 m/s
d) 24 m
35. 52
36. a) $\sqrt{2}$ m/s
b) 1 s
37. a) $y = 2x^2$ (parábola)
b) $y = \frac{2x}{3}$ (reta)
c) $y = \frac{5x^2}{16} - \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$ (parábola)
d) $x^2 + y^2 = 9$ (circunferência)
e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (elipse)
38. $v_{min} = 4$ m/s, $v_{máx} = 16$ m/s
39. A **41.** 28 **43.** B **45.** C
40. E **42.** B **44.** C **46.** B
47. a) 0,5 m/s
b) $\frac{5}{6}$ m/s
c) $\frac{2}{3}$ m/s
48. 10 s
49. C
50. C
51. 59 km/h
52. C
53. E
54. 60 cm/s para a esquerda.

7 Lançamento oblíquo no vácuo

Revisando

1. a) 0,6 s
   b) 1,8 m
   c) 1,2 s
   d) 9,6 m
   e) 8 m/s
   f) 45°
   g) 10 m
2. a) 0,4 s
   b) 1,2 m
   c) 5 m/s
   d) arc cos0,8
3. a) 4 s
   b) $30\sqrt{2}$ m/s
4. 14 m
5. a) $2\sqrt{2}$ s
   b) 360 m
6. $1,6\sqrt{5}$ m/s < v < 4 m/s

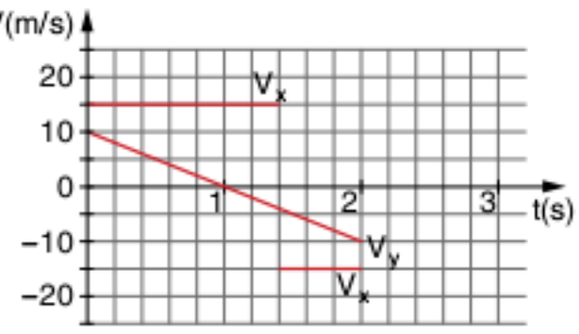
Exercícios propostos

1. B **2.** B **3.** B **4.** E
5. A
6. a) E
b) C
7. 13
8. a) Arco de parábola
b) Reta
c) 0,80 m
d) 2,0 m
e) 2,5 m/s
9. 60 m/s
10. D
11. C
12. a) 20 m/s
b) 60°
c) $2\sqrt{3}$ s
d) $20\sqrt{3}$ m
13. B
14. 440 m
15. A **16.** E **17.** C
18. a) 10 m/s
b) 1,5 s
19. a) 0,1 s
b) 1,25 m
20. D
21. a) 20 s
b) 2.000 m
c) $100\sqrt{5}$ m/s
22. a) Arco de parábola
b) 4 m/s²
c) 4 m/s
d) 1,2 m
23. D

24. a) 2,0 s
b) 2,5 m/s
c) $\sqrt{406,25}$ m/s
d) $y = 0,8 . x^2$ (SI), tomando o eixo y com origem no lançamento e orientado para baixo.
25. a) 1 s
b) 1 m/s
c) 0,2 rad/s
26. B
27. x = 720 m, y = 240 m
28. C
29. B
30. 50
31. 320 m
32. $\sqrt{\frac{2}{3}}$
33. B
34. A
35. D
36. a) 2.200 m
b) $tg^{-1}\frac{10}{11}$
37. 16 m
38. a) 40 m
b) 5,6 m/s
39. a) 0,4 s
b) 1,6 m
40. C
41. a) 20 m/s
b) arc sen 0,8
42. A **43.** E

Exercícios complementares

1. A **2.** C **3.** C **4.** D
5. a) C
b) D
6. A **7.** D
8. Todas as sentenças são verdadeiras.
9. 20 m/s
10. a) 5,0 m/s
b) 1,5 m/s
11. 14,4 km/h
12. E **13.** D **14.** A
15. a) $500\sqrt{3}$ m
b) 125 m
c) 500 m
16. $50\sqrt{10}$ m
17. $tg\theta = v\sqrt{\frac{2}{gh}}$
18. D
19. 178 m/s
20. a) 1,5 m/s
b) zero
c) 2 m/s²
21. b = 3 m e d = 4 m
22. 2,0 km
23. I, II e IV
24. a) D
b) E
25. a) 0,4 s
b) 2 s
c) V(m/s)



26. a) 0,8 s
b) 2,4 m
c) 6 m/s
27. a) C
b) D
c) D
28. C **29.** 9 s **30.** B **31.** B
32. a) 0,75 s
b) 32 m/s
c) $V'_{0x} = 64$ m/s, $V'_{0y} = 5$ m/s
33. a) 0,5 s
b) 6 m/s
c) 0,67 s
34. a) 3,8 m
b) 1 s
35. A **36.** C **37.** B **38.** 0,6 s
39. $5\sqrt{2}$ m/s, aproximando-se do ponto de lançamento.
40. a) 400 m/s
b) 4,6 s
41. a) 6,0 s
b) 120 m
c) 20 m/s
42. $tg\theta = \frac{h}{L}$
43. a) 20 s
b) $3\sqrt{3}$ m/s
44. a) 45 m
b) 75 m
45. 5º degrau
46. a) $x = [v\cos(\alpha+\theta)]t$

$y = [v\,sen(\alpha+\theta)]t - \frac{1}{2}gt^2$

b) $y = x . tg(\alpha+\theta) - \frac{1}{2}\frac{g . x^2}{v^2\cos^2(\alpha+\theta)}$

c) $d = \frac{\sqrt{2}v^2}{2g}(\sqrt{3}-1)$

8 Dinâmica

Revisando

1. 40 N
2. a) 12 N, para a direita.
b) 12 N, para a esquerda.
c) Zero.
d) 4 m/s², para a esquerda.
3. a) 30 m/s
b) 5 s
4. a) 2 m/s²
b) 4 N
c) 16 N
d) 10 N
5. a) $T_A = 100$ N e $T_B = 60$ N
b) $T_A = 120$ N e $T_B = 72$ N
c) $T_A = 70$ N e $T_B = 42$ N
6. a) 600 N
b) 1 m/s², para baixo.
7. a) $15\sqrt{3}$ N
b) 5 m/s²
c) 40 m
8. a) 2 m/s²
b) 48 N
c) 96 N
9. a) $\frac{10}{3}$ m/s²
b) 10 N
c) 20 N
10. a) 2 m/s², descendo o plano.
b) 12 N
11. a) 40 N
b) 2 m/s², para baixo.
c) 10 m/s², para cima.
12. $L_1 = 70$ cm e $L_2 = 45$ cm
13. $x_A = 20$ cm; $x_B = 40$ cm; $x_C = 10$ cm
14. 2 m
15. a) Contrário ao sentido em que o fio se move em relação ao trem na partida.
b) 7,5 m/s²
c) 50 N
d) 62,5 N
16. a) 2
b) $a_A = 4$ m/s² e $a_B = 2$ m/s²
c) 16 N

Exercícios propostos

1. D
2. F; F; V; V; V; F
3. Sim. Se Garfield fosse para um planeta com menor aceleração da gravidade, sua massa não mudaria, pois é a mesma em qualquer lugar, mas seu peso, de fato, diminuiria.
4. D
5. a) C
b) E
6. 1ª situação: v → B; a → Q
2ª situação: v → A; a → P
3ª situação: v → C; a → R
7. B
8. 20
9. D
10. I, II, III e IV
11. D
12. D
13. C
14. A
15. a) 30 N, para cima.
b) 650 N, para cima.
16. A
17. a) 12
b) No fio preso ao suporte.
18. C
19. a) 8 N, para a esquerda.
b) 1 m/s², para a direita.
20. E
21. 4 m/s²
22. a) 1.000 N, para cima.
b) 0,05 m/s²
23. a) 8 N
b) 1 N, horizontal, para a esquerda.
c) Diminuindo
24. a) 2.500 N
b) 400 m
25. D
26. a) Depois: Δs = 125 m
b) 2.000 N
27. 75 m/s
28. C
29. a) 5 m/s²
b) 15 N
c) 5 N
30. E
31. 3,0 N
32. 40 N
33. A
34. $\frac{1}{2}$
35. a) 60º
b) 102,6 N
36. 1,0 m/s²
37. $\frac{g+a}{g-a}$
38. B
39. D
40. a) $T_A = 60$ N; $T_B = 40$ N
b) $T_A = 72$ N; $T_B = 48$ N
c) $T_A = T_B = 0$
41. D
42. A
43. a) $a_{gravidade} = 9,8$ m/s² e $a_{elevador} = 2,2$ m/s²
b) 588 N
c) Elevador em queda livre.
44. D
45. $\frac{1}{2}$
46. a) 80 N
b) 60 N
c) 6 m/s²
d) 1 s
47. a) 300 N
b) 400 N
c) 375 N
d) 250 N

48. D
49. a) B
b) D
50. 2,5 kg
51. B
52. a) $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} . g$ e $T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} . g$
c) Situação 2
53. E
54. C
55. $\frac{3}{2}$
56. E
57. E
58. D
59. a) $\frac{1}{19}$ kg
b) 0,5 N
60. a) D
b) 8,0 N
c) 6,0 N
d) 2,4 kg
61. D
62. arcsen $\frac{1}{3}$
63. B
64. 1 kg
65. D
66. D
67. a) $\alpha = \beta = 0$
b) $\alpha = 0$ e $\beta = 5{,}0$ m/s²
c) $\alpha = 5{,}0$ m/s² e $\beta = 15$ m/s²
68. a) Horizontal e para a esquerda.
b) Uniformemente retardado.
69. C
70. A
71. a) 1,6 m
b) 1,5 kg
72. 10 cm
73. C
74. a) 0,33 N/cm
b) 1,5 N/cm
75. A
76. a) 5 N
b) 0,5 kg
c) 0,45 m
77. 16,5 cm
78. A
79. E
80. 24 m/s²
81. A
82. D
83. a) 2
b) $a_A = \frac{10}{3}$ m/s² e $a_B = \frac{5}{3}$ m/s²
84. a = 7,0 m/s² e F = 120 N

Exercícios complementares

1. A
2. a) Nula.
b) mg
3. E
4. B
5. C
6. E
7. Lei da Inércia. Na colisão traseira, o corpo do motorista é acelerado para frente e a sua cabeça tende a manter a velocidade antes da colisão, forçando-a para trás em relação ao corpo.
8. 22
9. 13
10. D
11. C
12. a) 600 N
b) 400 kg
13. a)

b) $P_3 = 2$ N; $F_{43} = 4$ N; $F_{23} = 6$ N
14. a) 40 kgf
b) 110 kgf
15. a) 0,30 N, para cima
b) 180 g
16. A
17. 10^{-21} m/s²
18. a) Porque não há necessidade de alterar seu estado inercial.
$m_{Lua} = m_{Terra} = 90$ kg
b) $g_{Lua} \approx 1{,}6$ m/s²
19. I e III
20. 10 m/s²
21. a) $\frac{\sqrt{3}}{100}$ m/s², de A para B.
b) $10.000\sqrt{3}$ N, de B para A.
22. B
23. a) $1{,}0 . 10^6$ N
b) $2{,}5 . 10^5$ N
24. C
25. A
26. a) $40{,}5 . 10^3$ N
b) 10 vezes maior.
27. Pelo bloco de massa maior, pois o módulo da tração no fio é diretamente proporcional à massa solicitada por esse fio.
28. B
29. $\frac{2F}{3}$
30. A
31. A
32. 46
33. D
34. a) 7,5 m/s²
b) 60 N
c) 12,5 m/s²
35. a) 1,0 m/s²
b) 220 N
36. D
37. 120 m
38. a) B
b) C
39. a) m_1g
b) $\frac{m_1 + m_2}{m_2} . g$, para baixo
40. C
41. a) 800 N
b) 400 N
42. 300 m
43. a) 5.250 N
b) 15.250 N
44. E
45. A
46. 40 m
47. 26
48. a) $2{,}0 . 10^{-4}$ N
b) 100
49. D **50.** D **51.** A
52. $\sqrt{\frac{gh}{3}}$
53. a) $\frac{(m + M).(g + a)}{2}$
b) $\frac{(m - M).(g + a)}{2}$
54. a) 2.880 N
b) Sim, pois a tração do cabo é de 880 N.
55. $a_1 = \frac{P}{m + m'}$ e $a_2 = \frac{P}{m'} \Rightarrow a_2 > a_1$
56. 1,2 cm³
57. A
58. 1,4 s
59. a) 100 N
b) 50 m/s²
c) 500 N
d) 5.000 N
60. a) $\frac{g(1 + \text{sen}\alpha)}{2}$
b) $\frac{mg(1 - \text{sen}\alpha)}{2}$
61. a) 3,0 m/s²
b) 45 N
62. a) 0,40 m/s²
b) $T_{AB} = 1{,}60$ N e $T_{BC} = 1{,}84$ N
c) 2,0 N
63. C
64. a) $\frac{P}{8}; \frac{P}{4}; \frac{P}{2}$
b) P; P; P
65. a) 600 N
b) Não com a pessoa mantendo contato com o solo; seria possível se a pessoa subisse pelo fio em movimento acelerado com aceleração maior que 2,0 m/s².
66. a) 1.375 N
b) 1.125 N
c) 80 cm
67. D **68.** E **69.** A **70.** A
71. a) 5,0 m/s²
b) 30 N
72. 10 cm
73. a) $\frac{Mg}{k}$
b) $\frac{kd}{M}$
74. A
75. a) Dimensão: $\frac{\text{massa}}{\text{tempo}}$; unidade: $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$
b) $1{,}0 . 10^{-12}$ N
c) $1{,}0 . 10^{-6}$ N/m
76. C
77. a) $\frac{m_1 + m_2}{m_1} . g$
b) Zero.
78. B
79. a) A
b) C
c) E
80. a) $(M_A + M_B) . a$
b) $\sqrt{M_B^2 . a^2 + M_A^2 . g^2}$
c) $\frac{M_B . a}{M_A . g}$
81. 2 N
82. 1.200 N
83. E
84. a) $a_c = \frac{a_A + a_B}{2}$
b) $a_A = 4{,}0$ m/s²; $a_B = 6{,}0$ m/s²; $a_C = 5{,}0$ m/s²
c) 60 N
85. a) 720 N/m
b) $a_A = 0$; $a_B = 5{,}0$ m/s²; $a_{polia} = 2{,}5$ m/s²
c) 40 N
86. 0,80 s

Frente 2

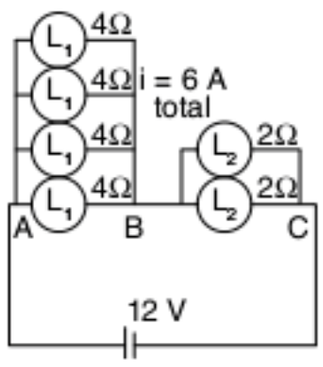
5 Resistores

Revisando

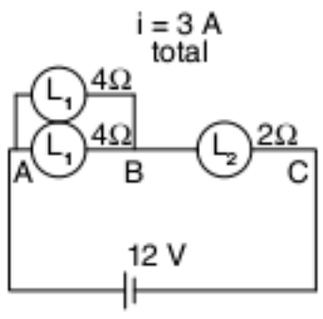
1. a) 14 Ω
b) 144 Ω
2. 0,18 W **3.** 3; 7; 5; 15; 2 **4.** Zero.

Exercícios propostos

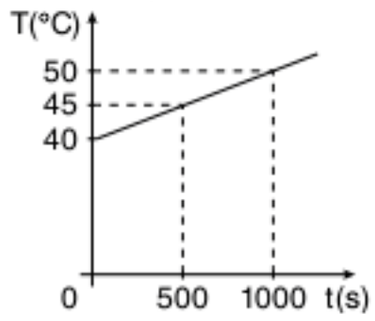
1. R$ 25,00
2. 1.500 W
3. 240 Ω
4. 0,5 A
5. a) $1,8.10^6$ J = 0,50 kWh
b) R$ 3,00
c) 10,1 Ω
6. a) Ferro e lâmpada.
b) 16 lâmpadas.
7. 8 Ω **9.** D **11.** E
8. E **10.** B **12.** A
13. a) 0,20 A
b) 15
14.
a)



b)



15. D
16. a) $5,0.10^3$ J/kg°C
b)



17. 40
18. A
19. Se o comprimento, e apenas ele, for reduzido à metade, a resistência irá à metade.
20. 56 Ω
21. a) 5,0 Ω
b) $1,0.10^3$ A
c) 5.10^6 W
22. E **24.** C **26.** E **28.** C
23. D **25.** C **27.** E **29.** C
30. F; V; V; V; F
31. B **32.** D **33.** E
34. 150 °C
35. C
36. a) $i_1 = i_3 = \frac{\varepsilon}{3.R}$; $i_2 = i_4 = \frac{\varepsilon}{7.R}$
b) $P = \frac{10.\varepsilon^2}{21.R}$
c) $i = \frac{12.\varepsilon}{25.R}$
37. E **39.** B **41.** C **43.** B
38. C **40.** E **42.** C
44. a) 12 V
b) 10 Ω, 30 Ω
c) 40 Ω
45. A **48.** 51 Ω **51.** C **54.** A
46. B **49.** A **52.** B **55.** B
47. A **50.** A **53.** A **56.** D
57. a) 245 Ω
b) 726 W.h
58. a) 2,0 A
b) $2,4.10^4$ J
c) 33 s
59. 45 Ω
60. C **62.** D **64.** B
61. C **63.** 1,5

Exercícios complementares

1. E **3.** A **5.** E **7.** A
2. A **4.** B **6.** D **8.** B
9. D
10. a) 40 °C
b) 20,2 A
11. D
12. $V_A \approx 111$ V, X ≈ 222 Ω e $P_x \approx 55,5$ W
13. B

6 Circuitos elétricos

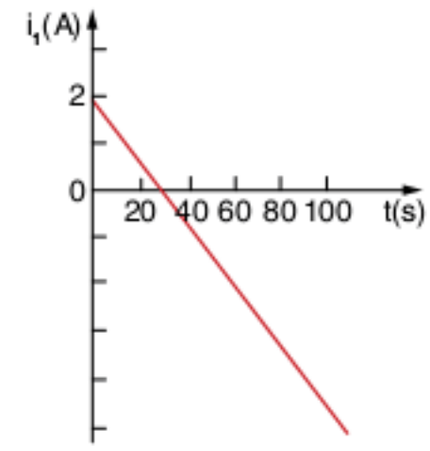
Revisando

1. 100 W
2. E = 20 V, i = 5 A
r = 2 Ω e R = 2 Ω
3. Zero.
4. a) 5,0 V
b) 12 W

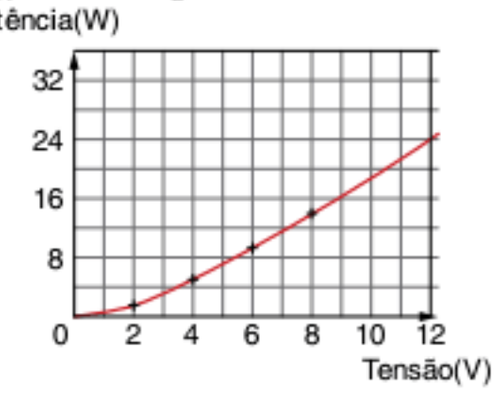
Exercícios propostos

1. a) r = 8 Ω
b) i_{cc} = 10 A
2. ε = 18 V e r = 1,8 Ω
3. A **4.** D **5.** E
6. V; V; F; F
7. A
8. D
9. a) 0,25 A
b) 9,75 V
10. 7,5 V
11. a) $\frac{6}{11}$A
b) $\frac{600}{11}$C
c) $\frac{150}{11}$s
12. B **15.** A **18.** B **21.** C
13. B **16.** C **19.** D **22.** C
14. A **17.** 5,0 A **20.** E **23.** E
24. 2 A; R_{BC} = 20 Ω
25. C **26.** B **27.** A
28. a) 30 V; 2 Ω
b) 0,216 kWh
29. A
30. 80 s
31. a) 400 W
b) 205 W
c) 5 W
32. A
33. A
34. 10 A; o gerador fornece energia e o receptor consome energia.
35. D **37.** A **39.** A **41.** D
36. A **38.** D **40.** D **42.** D
43. 0,8 μC
44. B **45.** B
46. $2,0.10^4$ W
47. 45 μF
48. B **49.** B
50. a) $1,1.10^{-14}$ F
b) Q ≅ 1,1 pC
c) 1,1 μA
51. B
52. D
53. E
54. C
55. A
56. A
57. B
58. a) i_i = 2 A
b) t = 30 s

c) Marcando os pontos de (a) e (b) no gráfico, temos:

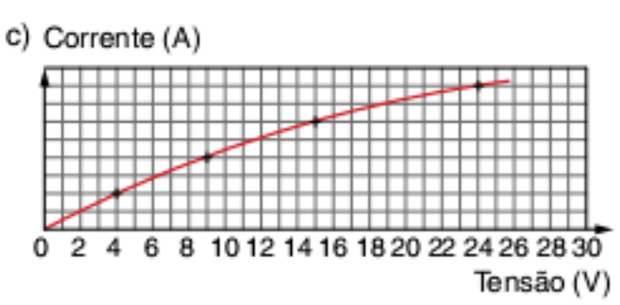


d) P = 48 W
59. a) 6,0 Ω
b) 4,5 A
60. 36 V
61. B **63.** D **65.** A
62. A **64.** B **66.** C
67. a) 12 V
b) 24 mA
68. D
69. a) Com a chave C aberta, a indicação no amperímetro é zero e a indicação no voltímetro é 12 V.
b) Com a chave C fechada, a indicação no amperímetro é 2 A e no voltímetro é 10 V
70. a) 1 V
b) 1.005 Ω
c) 19.800 Ω
71. C **72.** E **73.** C
74. a) 24 V
b) 1,0 A
c) R_A = 12 W e R_B = 18 W
75. a)

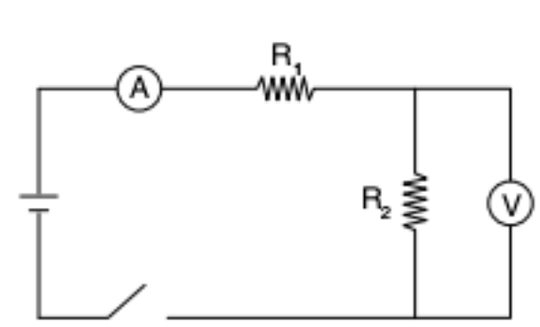


b)

c)



76. a)



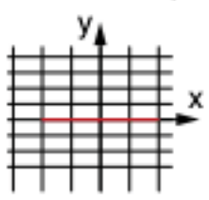
b) i = 0,01 A
v = 2 V
77. a) R = 5 kΩ
b) $P = 2.10^{-2}$ W

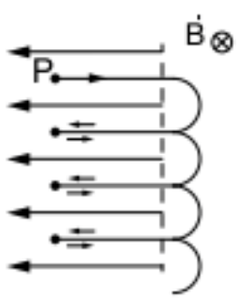
Exercícios complementares

1. a) 2 A
   b) 0,8 W
   c) 8 V
2. a) $\frac{R}{4}$
   b) 4
3. C
4. 37
5. 4,5 Ω
6. B
7. 28 V; 7 Ω
8. B
9. A
10. C
11. A
12. a) 9.10^{-6} C
    b) 3.10^{4} V
13. A
14. a) Zero.
    b) 1,5 A
15. 11
16. a) $R_{(eq)} = 4\ \Omega$
    b) $i_{(AK)} = 2$ A; $i_{(JB)} = 2$ A
17. a) 0,50 V
    b) 0,010 A ou 10 mA
18. C 20. A 22. A
19. E 21. D 23. A
24. a) 4 Ω
    b) 2400 J
25. a) i = 4 A
    b) $i_0 = 8$ A
    c) $R = \frac{1}{3}\Omega$
26. a) 1 A
    b) 40 V
    c) 52 V
27. a) 20 A
    b) 8 baterias
    c) 32 V
28. i = 0,75 A
29. 21

7 Interação entre cargas elétricas e campo magnético

Revisando

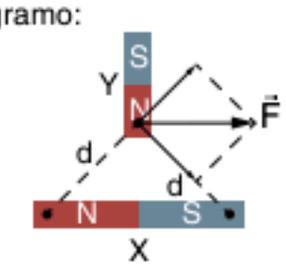
1. 2 voltas completas.
2. 

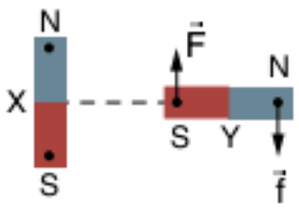
3. a) 

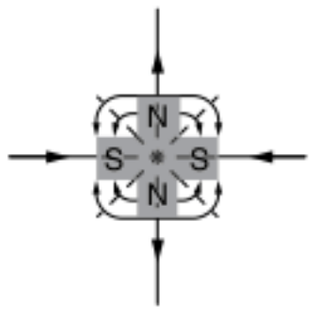
   b) $1{,}2.10^{7}$ m/s

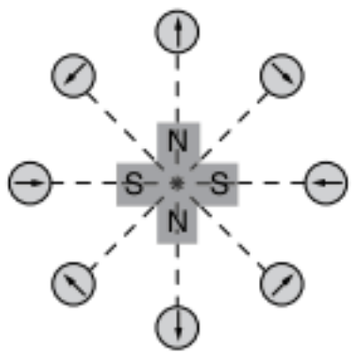
Exercícios propostos

1. C 3. C 5. B
2. B 4. C 6. E
7. O polo N do ímã X repele o polo N do ímã Y e o polo S atrai. Estas forças têm mesma intensidade, pois o polo N do ímã Y equidista dos polos do ímã X. A força resultante é obtida pela regra do paralelogramo:



8. 

9. B
10. Y 12. I, III e IV
11. Todas 13. D
14. $0{,}20\sqrt{2}$ T
15. C 16. E
17. a) 

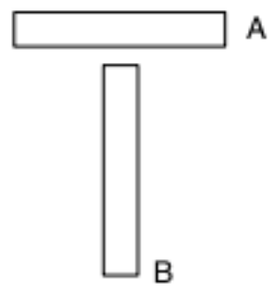
    b) 

18. E	26. D	34. D	42. D
19. A	27. A	35. B	43. A
20. A	28. A	36. D	44. B
21. D	29. C	37. C	45. C
22. A	30. B	38. A	46. A
23. C	31. E	39. E	47. C
24. E	32. D	40. B	48. C
25. A	33. C	41. E	

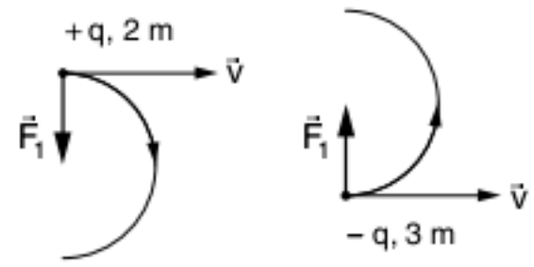
49. a) nulo
    b) $v = \frac{R.B.|q|}{m}$
50. C
51. E 52. B 53. B
54. $6{,}4.10^{-16}$ N e $9{,}1.10^{-30}$ N, respectivamente. A força magnética é $7{,}0.10^{13}$ vezes mais intensa que a força gravitacional.
55. a) $4{,}7.10^{7}$ m/s
    b) $3{,}3.10^{-8}$ s
56. A
57. A força magnética é a resultante centrípeta, então, $F_{mag} = F_{centr}\sqrt{|q|vB} = \frac{mv^2}{R}$, de onde vem que $m = \frac{RqB}{v}$. Para os dois tipos de partícula tanto q, B e v são constantes, de modo que, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2}$.
58. 25

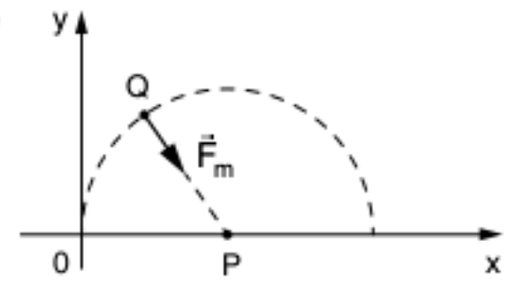
Exercícios complementares

1. E
2. a) Se forem notadas forças de campo entre as barras, pelo menos uma estará imantada.
   b) Se as forças de campo entre uma extremidade de uma barra e uma extremidade da outra forem sempre de atração, apenas uma barra estará imantada. Se as forças forem de atração ou repulsão, as duas estarão imantadas.
   c) As barras deverão ser dispostas como na figura a seguir:



Se houver atração, a barra B estará imantada.
Se não houver atração, a barra A estará imantada.

3. C
4. a) 

   b) $\frac{3}{2}$
5. a) 3.10^{5} m/s
   b) 

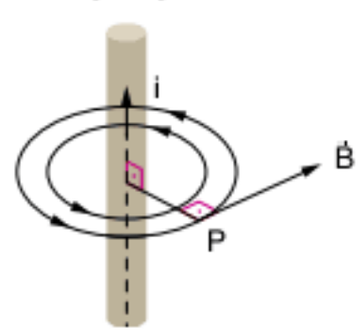
6. a) ⊖ em F e ⊕ em A
   b) $\otimes\vec{B}$
   c) $m = \frac{B^2.e.d^2}{8E}$
7. A
8. Positivo, negativo, positivo.
9. m.g.h
10. 2.10^{12}
11. $\frac{2.10^{6}}{\text{sen}\,\theta}$ m/s
12. a) Região I:
    Região II:
    b) 2.10^{5} m/s
    c) 2 cm
13. $p = \frac{2\pi.m.v.\cos\theta}{q.B}$
14. a) $E = 5{,}0.10^{3}$ V/m
    b) $B_{máx} \approx 2{,}8.10^{-5}$ T
15. B = 2,0 T
    Perpendicular ao plano da página, no sentido ⊗.

8 Fontes de campo magnético

Revisando

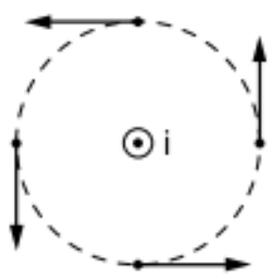
1. $3{,}0.10^{-5}$ T
2. Para dentro, com intensidade $8{,}0.10^{-5}$ T
3. π

Exercícios propostos

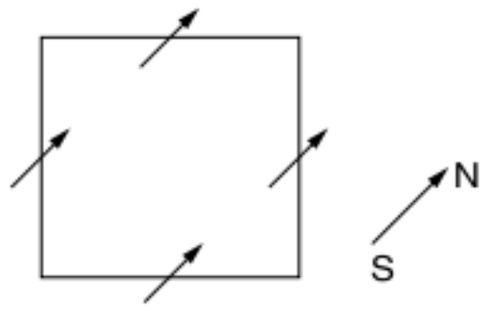
1. a) 

   b) O sentido do vetor indução $\vec{B}$ em um ponto P pode ser determinado pela regra da mão direita: aponte o polegar no sentido da corrente e os demais dedos no sentido do condutor para o ponto P. O sentido de $\vec{B}$ será aquele no qual a mão daria um empurrão.

2. a)



b)



3. D **9.** A **15.** D **21.** E
4. E **10.** D **16.** 3 **22.** A
5. B **11.** D **17.** B **23.** E
6. D **12.** B **18.** E **24.** C
7. A **13.** B **19.** C **25.** D
8. A **14.** A **20.** D **26.** B
27. $1{,}6.10^{-9}$ N
28. 4 **29.** A
30. $8{,}0.10^{-5}$ T
31. A **33.** B **35.** B
32. C **34.** A
36. a) $2\pi.10^{-3}$ T
b) Polo sul magnético.
37. D
38. Anti-horário $\frac{i}{2}$.
39. B **40.** A
41. 2,5 A e sentido horário.
42. B **44.** A **46.** D **48.** C
43. A **45.** C **47.** A **49.** C
50. a) $2{,}0.10^{-5}$ T
b) Repulsiva.
51. $3{,}5\,\pi.10^{-5}$ T
52. 1,9 A
53. a) $\frac{M_0 i_1}{2R_1}$, entrando no plano do papel.
b) $\dot{F} = 0$

Exercícios complementares

1. A **2.** D **3.** B **4.** C
5. Abaixo, já que a corrente passa de sul para norte.
6. B **7.** A
8. 10^{-5} T, perpendicular ao plano, saindo.
9. $B = 2{,}0.10^{-4}$ T, horizontal para a direita.
10. A **11.** Zero.
12. a) Anti-horário.
b) $\frac{i}{i'} = 2\pi$
13. 0,5 A
14. a) 3 A (arco menor); 1 A (arco maior).
b) Zero.
15. B **16.** E **17.** A
18. $\frac{\mu_0 i}{2}\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\pi^2 r^2}}$
19. 13,4 T
20. $\pi.10^{-5}$ T **21.** Nula. **22.** 3.10^{-5} T
23. $\frac{2}{3}$
24. C **25.** $\pi.10^{-4}$ T

Frente 3

7 Introdução à óptica geométrica

Revisando

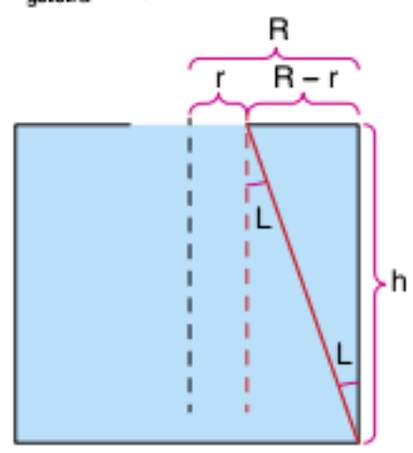
1. 10 m **2.** 8 cm **3.** $9{,}5.10^{15}$ m

Exercícios propostos

1. B **2.** C **3.** 8min20s
4. A velocidade da luz não é infinita.
5. C
6. A distância entre a Terra e a Lua, d, pode ser determinada pela equação 2d = vt, em que v é a velocidade da luz no vácuo e t o intervalo de tempo de ida e volta do raio de luz.
Assim, tem-se:
$$d = \frac{3.10^8.2{,}5}{2} = 3{,}75.10^8 \text{ m} = 375.000 \text{ km}$$
7. E **8.** C
9. Reversibilidade da luz.
10. A **12.** 2 cm **14.** 400 m
11. C **13.** B

Exercícios complementares

1. D **2.** C
3. $3{,}81.10^5$ km
4. C **7.** 48 m **10.** 3
5. C **8.** E **11.** A
6. 35 cm **9.** E **12.** D
13. $h_{geleira} = 0{,}3.10^4 = 3.000$ m
14.



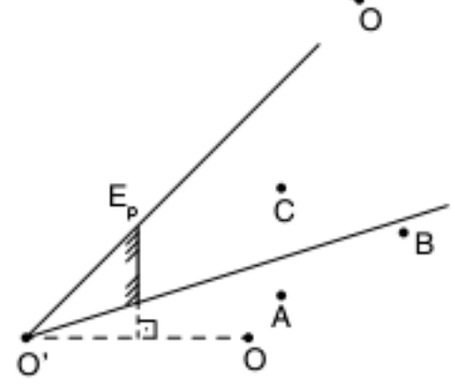
$$tg\,L = \frac{R-r}{h} \rightarrow r = R - tg\,L$$
$$sen\,L = \frac{1}{n_a} \rightarrow tg\,L = \frac{sen\,L}{cos\,L} = \frac{sen\,L}{\sqrt{1-sen^2 L}}$$
$$tg\,L = \frac{\frac{1}{n_a}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n_a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n_a^2-1}}$$
$$r = R - \frac{h}{\sqrt{n_a^2-1}} = 43 - \frac{36}{\sqrt{(1{,}345)^2-1}} \approx 3$$
$$d = 2r \Rightarrow d = 6 \text{ cm}$$
15. D

8 Reflexão da luz

Revisando

1.

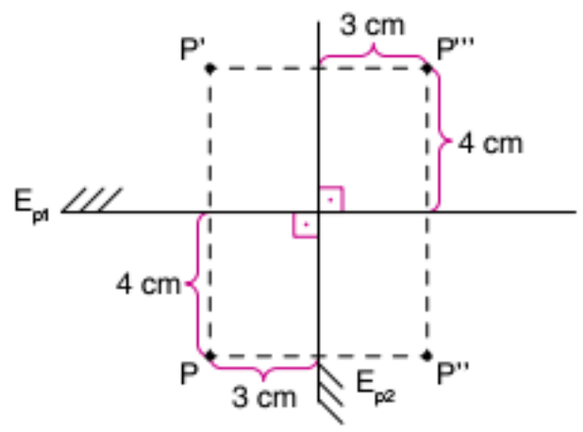
2. a)



b) C (sim); A e B (não)
c) Não, pois encontra-se fora do campo de visão (observe letra a).
3. A imagem desloca-se do centro de curvatura para o infinito.
4. a) $-\frac{120}{7}$ cm
b) $\frac{6}{7}$ cm

Exercícios propostos

1. a) 30°
b) 60°
2. C
3. d + 2D
4. 120°
5. a) $\frac{H}{2}$
b) $\frac{h}{2}$
6. POLIEDROVESTIBULARES
7. B
8. E
9. $\overline{A'B} = 5\sqrt{2}$ m
10. a) 80 km/h
b) 40 km/h
11. 1,5 s
12. 3 m/s
13. O espelho plano fornece imagem com lateralidade trocada. Devido à multiplicidade de reflexões, a imagem de um espelho é objeto para outro. Consequentemente, as posições de números pares, que correspondem a imagens formadas por um número ímpar de reflexões, fornecem imagens com lateralidade trocada, e as posições de números ímpares, as imagens com lateralidade correta. Portanto, a criança pode ver os dizeres ORDEM E PROGRESSO nas imagens 3 e 5.
14.



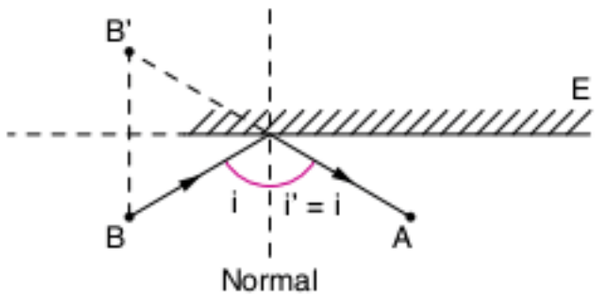
15. a) 11 imagens
b) aumenta
16. E **17.** A
18. a) Espelho I
Côncavo, +20, –20, +10, +2, virtual, direita.
b) Espelho II
Plano, infinito, –10, +10, +1, virtual, direita.
c) Espelho III
Convexo, –20, –4, +5, +0,8, virtual, direita.
19. a) Objeto além do centro de curvatura e imagem entre o centro de curvatura e o foco.
b) Real, invertida, menor.
$P' = 1{,}5$ m, $A = -\frac{1}{2}$, i = –2,5 cm
20. a) –30 cm
b) –60 cm
21. a) 3 m
b) côncavo (F > 0)
22. a) 0,5 m
b) P = 0,3 m e P' = 1,5 m
23. 2 m
24. $A = \frac{F}{F-P}$
25. Imagem virtual, direita e maior.
(P' = –60 cm, A = 3, i = 22,5 cm)
26. 80 cm
27. B **28.** D
29. a) P = 8 cm, P' = 32 cm
b) F = 6,4 cm
30. E **31.** B
32. a) 6 cm
b) real
33. –2 cm, virtual
34. D
35. F, V, V, F, V
36. C
37. 35
38. B

Exercícios complementares

1. a) 90 cm
b) 85 cm

2. 0,8

3.



4. B

5. B

6. Velocidade relativa entre M' e N' é zero.

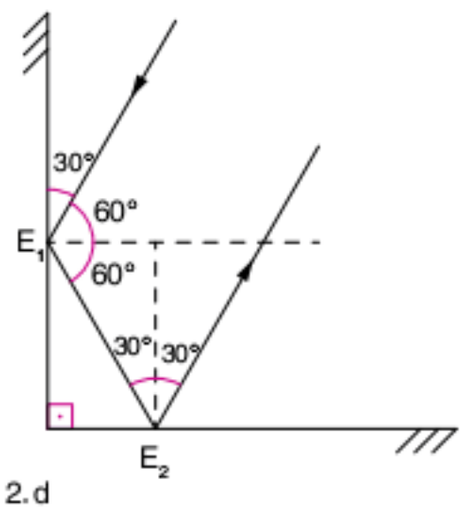
7. 0,4 s

8. D

9. a) 10 m/s
b) 20 m/s
c) 50 m/s

10. C

11.



12. 2.d

13. a) 40 cm
b) Não, d = 40 cm para qualquer posição de F.

14. B

15. A

16. –10 cm

17. 50 cm

18. a) Real e invertida.
b) 60 cm
c) 12 cm

19. a) Côncavo
b) –9 cm (invertida).
c) Objeto além do centro de curvatura e imagem entre o centro de curvatura e o foco.

20. a) 20 cm
b) A'B' = 10 cm

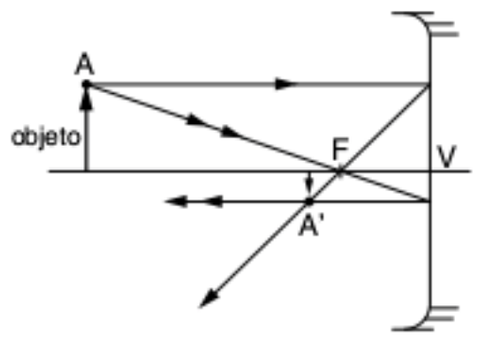
21. 2,0 cm/s

22. 12 cm

23. D

24. 15 cm

25. a) 120 cm
b) 9 cm
c)



26. a) 112,5 mm, invertida.
b) 750 mm
c) 500 mm

27. C

28. a) F = +2 cm, R = +4 cm
b) P_1 = 6 cm, P'_1 = 3 cm
c) P_2 = 4 cm, P'_2 = 4 cm
d) $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = -1$

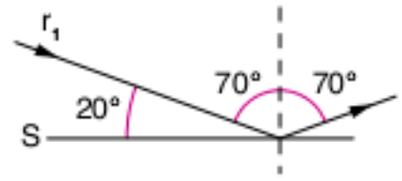
29. 6,0 cm^2

30. E **31.** A **32.** A **33.** A

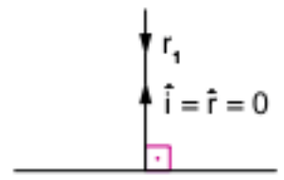
34. Os raios solares incidentes no espelho convexo são paralelos e se refletem ao longo de retas que passam pelo foco desse espelho. Esse ponto é objeto para o espelho côncavo, distanciado de um valor $p = \frac{R2 - R1}{2} = 30\text{ cm} - 6\text{ cm} = 24\text{ cm}$. Utilizando a equação de Gauss para o espelho côncavo temos $\frac{2}{30} = \frac{1}{24} + \frac{1}{p'}$. Assim, a distância p' da imagem ao espelho côncavo vale 40 cm. Como a imagem nítida deve se formar sobre a tela, temos d = p' – R2, ou seja, d = 40 cm – 30 cm = 10 cm.

35. E **36.** A **37.** D

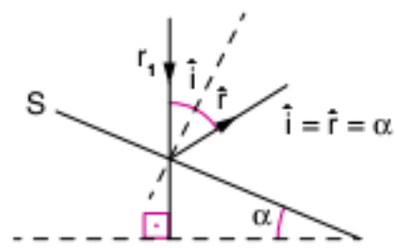
38. a)



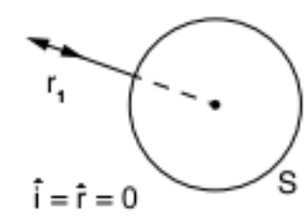
b)



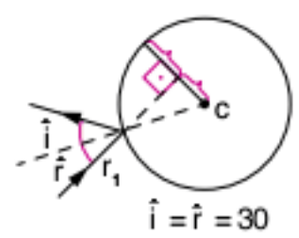
c)



d)



e)



39. B **40.** D

41. A distância de ida e volta do prisma até o espelho é de 72 km, sendo a velocidade da luz igual a 300.000 km/s. O tempo para o feixe ir e voltar é igual a:

$t = \frac{d}{v} = \frac{72}{300.000} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ s

Nesse intervalo de tempo o prisma deverá girar $\frac{1}{8}$ de volta para que o feixe encontre a face B em condições de refleti-lo para a luneta.

Sabe-se que $\frac{1}{8}$ de volta corresponde a um deslocamento angular $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ rad; logo, a velocidade angular do prisma deve ser igual a:

$\omega = \frac{\pi}{4t} = \frac{\pi}{9{,}6 \cdot 10^{-4}} = 3272{,}5$ rad/s

$\omega = 2\pi f$, então $f \approx 521$ Hz

42. E

9 Refração da luz

Revisando

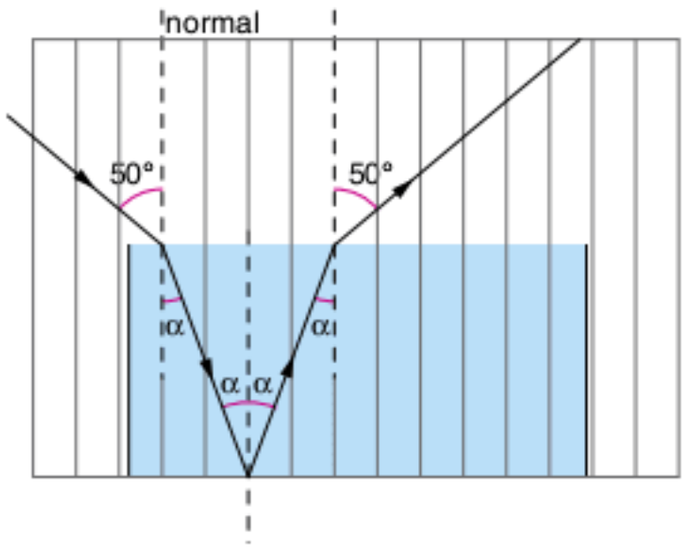
1. a) meio A
b) meio B

2. a) 60°
b) 30°

3. a) Reflexão total.
b) Refração, $\hat{r} = \text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

4. No vidro, a velocidade é maior (afasta da normal).

5. 1.



2. n = 1,3

3. Sendo $f_{verde} > f_{vermelho}$, logo $n_{verde} > n_{vermelho}$, então o raio refratado aproxima-se mais da normal que no primeiro caso e a distância percorrida dentro da água será menor, ou seja, a distância entre o feixe incidente na superfície e o seu feixe emergente é menor.

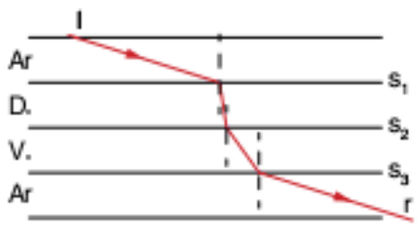
6. 1,25

7. a) $n_2 > n_1$ e $n_1 > n_3$, logo $n_2 > n_3$ (afasta da normal)

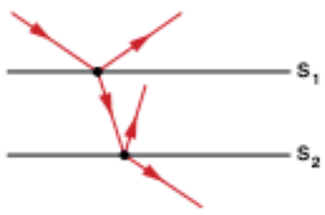
b) O meio 3, pois tem o menor índice de refração.

8. a) 60°
b) Meio B ($n_A < n_B$)

9.



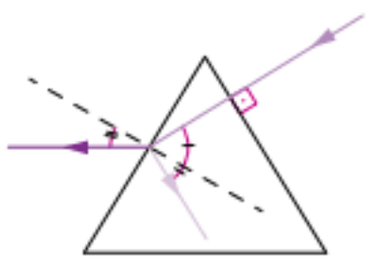
10. a)



b) 5.10^{-10}s

11. Do centro de curvatura para o infinito.

12. a)



b) $n_v = \sqrt{3}$

13. P = 5 cm, P' = 3 cm, F = 1,875 cm

Exercícios propostos

1. a) 3 e 2
b) 1,5

2. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

3. E

4. D **6.** 5.10^{-7} m **8.** 2

5. D **7.** E

9. a) 60° e 30°
b) $\sqrt{3}$

10. A **12.** A **14.** D

11. E **13.** A **15.** B

16. $v_3 > v_1 > v_2$

17. B

18. a) incidente = 60°
refletido = 60°
refratado = 26°; $\left(\text{sen} = \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
b) v = 150.000 km/s

19. D

20. $\frac{n_{líquido}}{n_{ar}} = \frac{6}{5}$

21. A **22.** A **23.** 03

24. $\theta_1 = 4°$ e $\theta_3 \approx 3°$

25. 1) No ponto A, temos o fenômeno da refração. No ponto B, temos o caso limite da refração, a partir do qual ocorre a reflexão total.
2) $\text{sen } L = \frac{n_2}{n_1}$
Para a situação em que o meio é o ar, temos:
$\text{sen } L_{ar} = \frac{n_{ar}}{n_1}$
Para a situação em que o meio é a água, temos: $L_{água} = \frac{n_{água}}{n_1}$
Como $n_{água} > n_{ar}$, $\text{sen } L_{água} > \text{sen } L_{ar} \Rightarrow L_{água} > L_{ar}$

26. A **28.** E **30.** A **32.** A
27. D **29.** B **31.** 1,5 m

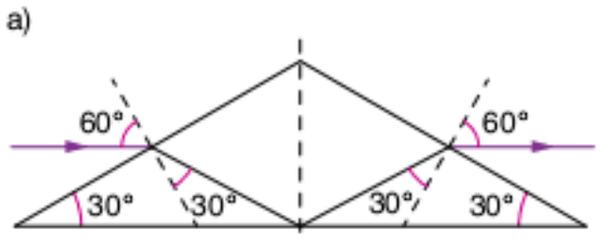
33. a) virtual
b) menor (deslocamento lateral)

34. B **35.** B

36. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **37.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

38. A

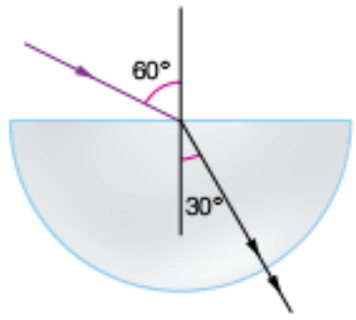
39. a)



b) $\hat{i} = \hat{r} = 60°$

40. E **42.** D **44.** D **46.** Raio C
41. E **43.** D **45.** C

47.



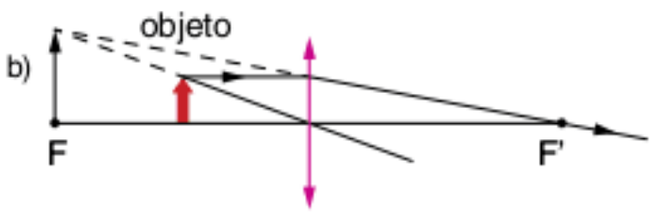
48. L_1 e $L_4 \Rightarrow$ convergente
L_2 e $L_3 \Rightarrow$ divergente

49. a) convergente
b) convergente
c) divergente

50. A **51.** E **52.** B **53.** B

54. a) A 10 cm da lente, é virtual e coincide com F.

b)



55. B **58.** A **61.** D
56. E **59.** B **62.** E
57. A **60.** 10 cm **63.** C

64. a) 55 cm
b) 3,0 cm

65. E **68.** C **71.** 26
66. C **69.** D **72.** 37
67. D **70.** A **73.** E

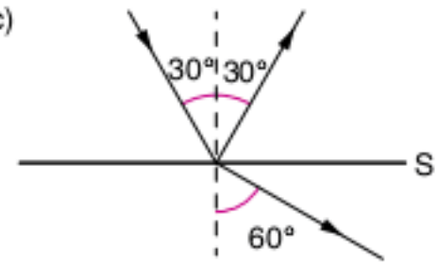
Exercícios complementares

1. $\frac{4}{3}$

2. a) $\hat{L} = 26°$
b) reflexão total
c) $\hat{r} = 26°$ = reflexão parcial

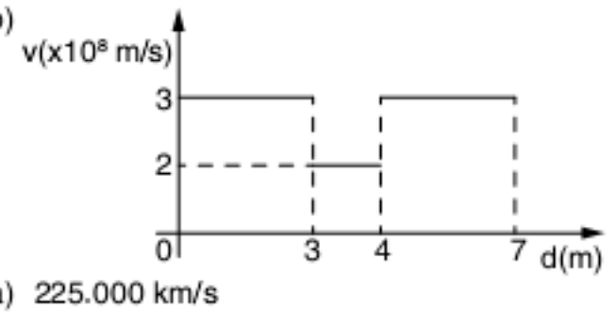
3. a) 1,125
b) 200.000 km/s
c) 187.500 km/s

4. a) 60°
b) 30°
c)



5. D

6. a) $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s
b)



7. a) 225.000 km/s
b) $\frac{4}{3}$
c) $5 \cdot 10^{-7}$ m e $3{,}75 \cdot 10^{-7}$ m

8. 2,8 **10.** D **12.** C
9. E **11.** E **13.** D

14. a) B
b) D
c) B

15. C **17.** B
16. B **18.** B

19. Luz de A para B com $\hat{i} > 72°$.
Luz de B para A com $\hat{i} > 49°$.

20. a) 1,4
b) 0,70

21. $25\sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{37}}\right)$ m/s

22. D = 5,0 cm **26.** D **30.** D
23. 07 **27.** B **31.** D
24. 3,2 m **28.** B
25. 45 cm **29.** B

32. a) 37°
b) 8h 28 min

33. C **36.** D **39.** A
34. B **37.** B
35. C **38.** C

40. $\text{sen}\,\theta\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i} - \text{sen}\,i\cos\theta > 1$

41. B **43.** D **45.** A
42. C **44.** A

46. a) divergente
b) convergente

47. C **49.** B **51.** B
48. C **50.** C **52.** C

53. a) Para o objeto no infinito, o filme deverá estar a uma distância igual à distância focal, ou seja, 4,0 cm.
No ponto próximo, ou seja, p = 20 cm, a distância da imagem deverá ser igual a 4 + x. Então:

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{20}\right) + \left[\frac{1}{(4+x)}\right]$$

$$\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{(4+x)}$$

$$\left(\frac{5}{20}\right) - \left(\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{(4+x)}$$

$$\left(\frac{4}{20}\right) = \frac{1}{(4+x)}$$

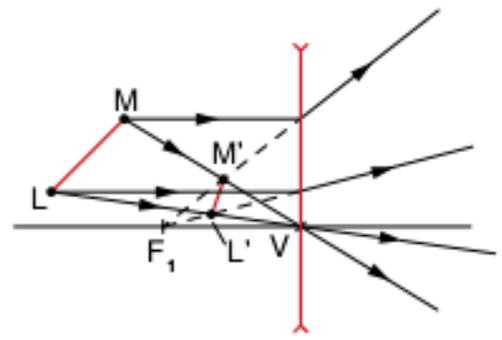
$$\frac{1}{5} = \frac{1}{(4+x)}$$

$$4 + x = 5$$

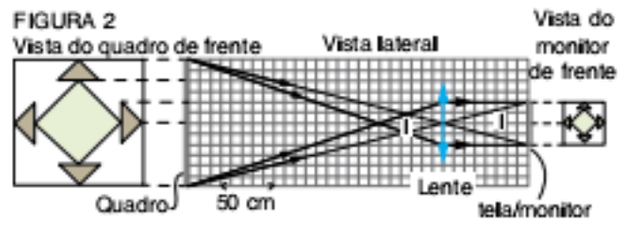
$$x = 1 \text{ cm}$$

b) Deve ser menor.

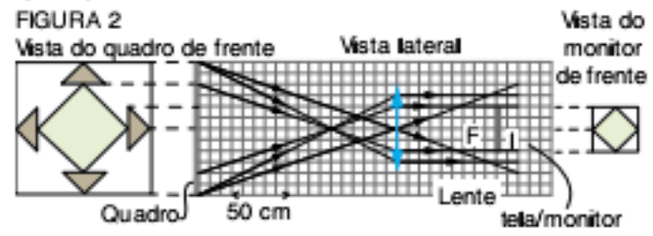
54. O comprimento da imagem da barra é d = 5,1 cm.



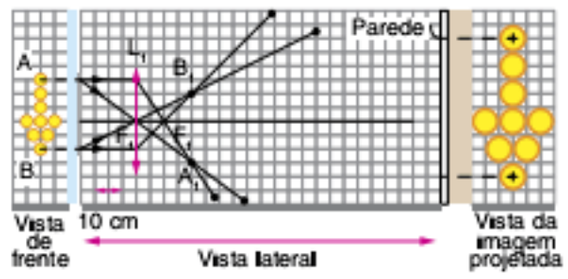
55. a)



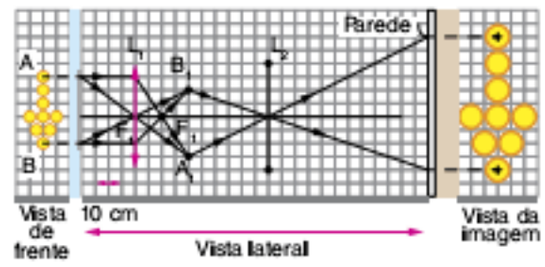
b) e c)



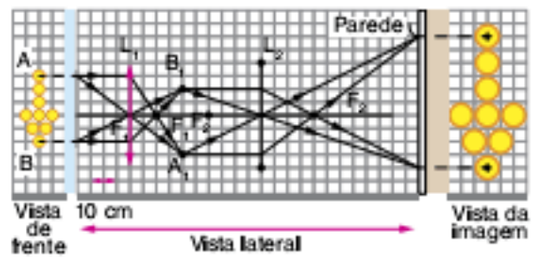
56. a)



b)



c)



$f_2 = 20$ cm

57. C **59.** D
58. C **60.** D

61. 6 cm

62. 37,5 cm

63. a) 22 cm
b) – 8

64. E **66.** C **68.** C
65. B **67.** A **69.** E

70. $\alpha = 4 \text{ arc sen}\left(\frac{\text{sen } i}{n_a}\right) - 2i$

71. F; V; F; F

72. B **73.** C **74.** B

75. 20

76. Maior, para que o raio refratado se aproxime mais do normal.

77. Refração, dispersão e reflexão.

78. Reflexão total em O, $\hat{L} = 45°$.