ÁLVARO ANDRINI
MARIA JOSÉ VASCONCELLOS

8

MATEMÁTICA

PRATICANDO Matemática

EDIÇÃO RENOVADA

Coleção **PRATICANDO MATEMÁTICA**

ÁLVARO ANDRINI

- Licenciado em Matemática.
- Pós-graduado em Álgebra Linear e Equações Diferenciais.
- Foi professor efetivo de Matemática da rede estadual durante trinta anos.
- Autor de diversos livros didáticos.

MARIA JOSÉ VASCONCELLOS

- Licenciada em Matemática.
- Coordenadora e professora de Matemática em escola da rede particular.
- Coautora de coleção de Matemática para o Ensino Médio.

MANUAL DO PROFESSOR

3ª edição, São Paulo, 2012

EDITORA do BRASIL

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Andrini, Álvaro
Praticando matemática, 8 / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 3. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012. – (Coleção praticando matemática)

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia
ISBN 978-85-10-05158-3 (aluno)
ISBN 978-85-10-05159-0 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Vasconcellos, Maria José. II. Título. III. Série.

12-02963 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino fundamental 372.7

Direção executiva	Maria Lúcia Kerr Cavalcante Queiroz
Direção editorial	Cibele Mendes Curto Santos
Supervisão editorial	Felipe Ramos Poletti
Supervisão de arte e editoração	Adelaide Carolina Cerutti
Supervisão de direitos autorais	Marilisa Bertolone Mendes
Supervisão de controle de processos editoriais	Marta Dias Portero
Supervisão de revisão	Dora Helena Feres
Consultoria de iconografia	Tempo Composto Col. de Dados Ltda.
Edição	Valéria Elvira Prete e Cibeli Chibante Bueno
Assistência editorial	Andréia Manfrim Alves e Marjorie Mayumi Haneda Hirata
Auxiliar editorial	Rodrigo Pessota e Thalita Picerni
Coordenação de revisão	Otacilio Palareti
Copidesque	Equipe EBSA
Revisão	Ricardo Liberal e Nelson Camargo
Pesquisa iconográfica	Elena Ribeiro de Souza
Coordenação de arte	Maria Aparecida Alves
Assistência de arte	Regiane Santana
Design gráfico	Ricardo Borges
Capa	Hailton Santos
Imagem de capa	Orla/Shutterstock com pesquisa iconográfica de Léo Burgos
Ilustrações	Departamento de Arte e Editoração (DAE), Hélio Senatore, José Luis Juhas e Lápis Mágico
Produção cartográfica	Selma Caparroz
Coordenação de editoração eletrônica	Abdonildo José de Lima Santos
Editoração eletrônica	Equipe EBSA
Licenciamentos de textos	Renata Garbellini e Jennifer Xavier
Controle de processos editoriais	Leila P. Jungstedt, Carlos Nunes e Flávia Iossi

3ª edição / 1ª impressão, 2013
Impresso no parque gráfico da Editora FTD

EDITORA *do* BRASIL
Rua Conselheiro Nébias, 887 – São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: (11) 3226-0211 – Fax: (11) 3222-5583
www.editoradobrasil.com.br

PREZADO ALUNO

Você já deve ter perguntado a si mesmo, ou a seu professor:

“Para que eu devo estudar Matemática?”

Há três respostas possíveis:

1. A Matemática permite que você conheça melhor a realidade.
2. A Matemática pode ajudar você a organizar raciocínios.
3. A Matemática pode ajudar você a fazer descobertas.

Este livro e as orientações de seu professor constituem um ponto de partida. O caminho para o conhecimento é você quem faz.

Os autores

"Não há ramo da Matemática,
por abstrato que seja, que não
possa um dia vir a ser aplicado
aos fenômenos do mundo real."

Lobachevsky

Agradecemos ao professor
Eduardo Wagner pelos comentários
e sugestões que contribuíram
para a melhoria deste trabalho.

SUMÁRIO

Fernando Favoretto

Unidade 1
Conjuntos numéricos

Unidade 2
Potenciação e notação científica

Unidade 3
Radiciação

Unidade 4
Cálculo algébrico

Unidade 5
Produtos notáveis

Unidade 6
Fatoração

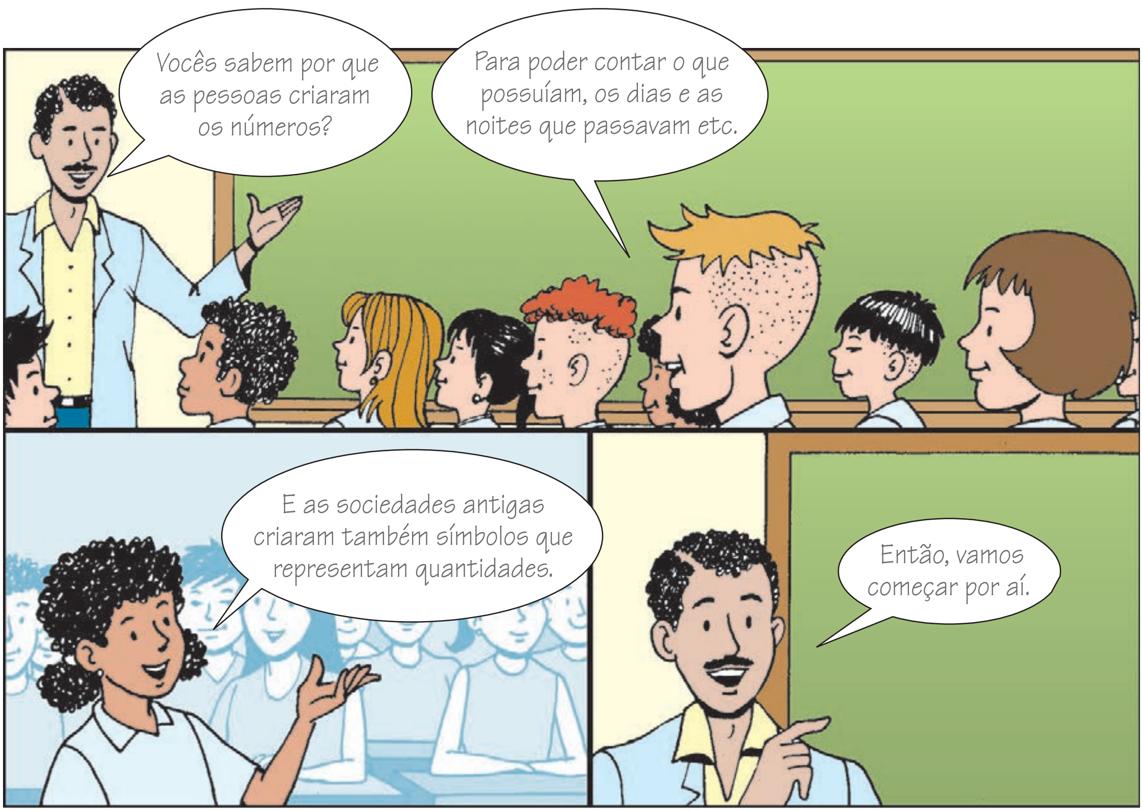
Unidade 7
Frações algébricas

SUMÁRIO

UNIDADE 1

Conjuntos numéricos

1. Números, uma criação humana



Lápis Mágico

Os números foram criados pelo ser humano para serem usados em inúmeras atividades. Para nós, é difícil imaginar o mundo sem eles.

Fotos: Rafael Rolim

Podemos classificar os números em conjuntos de acordo com suas propriedades e aplicações. Nesta unidade, estudaremos os **conjuntos numéricos**.

2. Números naturais

Para contar, usamos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... etc. Junto com o zero, esses números formam o **conjunto dos números naturais**, que é indicado assim:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

Sabemos muitas coisas sobre os números naturais. Veja:

1. Todo número natural tem um sucessor: existem infinitos números naturais.

- O sucessor de 13 é 14.
- O sucessor de 1999 é 2000, e assim por diante.

2. Todo número natural, com exceção do zero, tem um antecessor.

- O antecessor de 25 é 24.
- O antecessor de 4 576 é 4 575.

Pense em dois números naturais quaisquer.

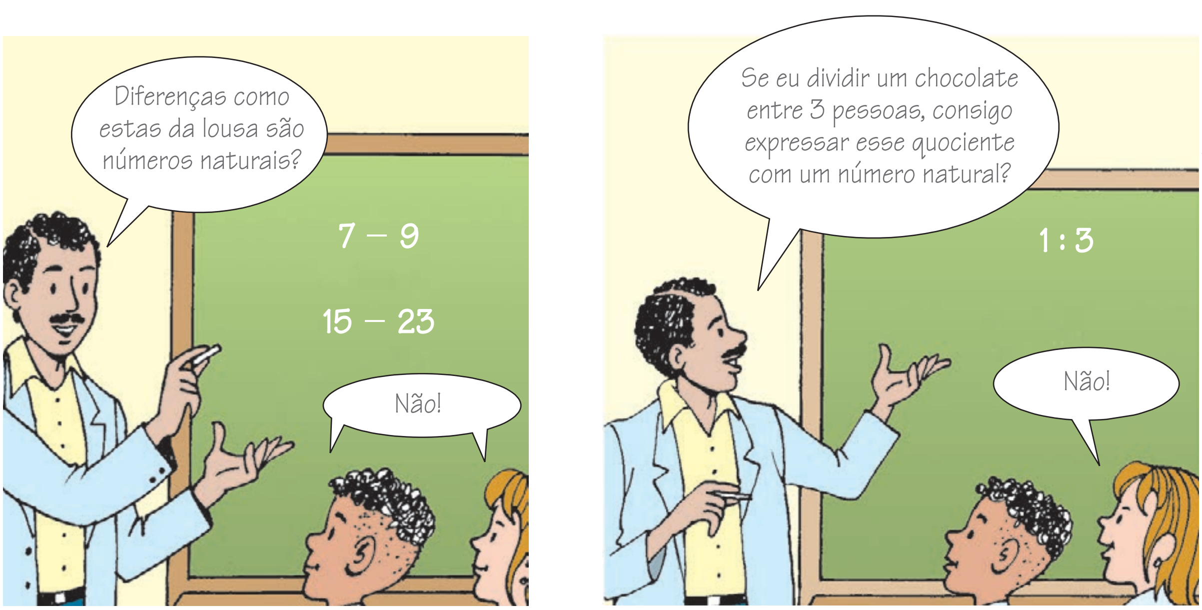
1. Some esses números. Você obteve um número natural? Sim.

2. Multiplique esses números. Você obteve um número natural? Sim.

3. O que observamos nos itens acima depende dos números naturais escolhidos? Não.

A partir dessas constatações, podemos escrever as propriedades 3 e 4 a seguir.

3. A soma de dois números naturais sempre é um número natural.
4. O produto de dois números naturais sempre é um número natural.
No entanto...



Ilustrações: Lápis Mágico

Os números naturais foram os primeiros números criados e são importantíssimos. No decorrer de sua história, a humanidade teve de inventar novos números para representar e resolver problemas do cotidiano, das ciências em geral e da própria Matemática.

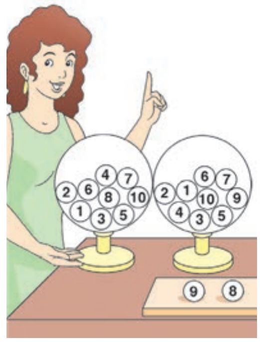
Exercícios

1 Responda no caderno: em quais situações foram usados números naturais? b e d

a)

Hélio Senatore

d)

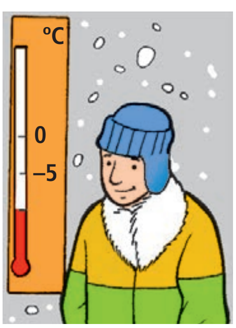


Ilustra Cartoon

b)

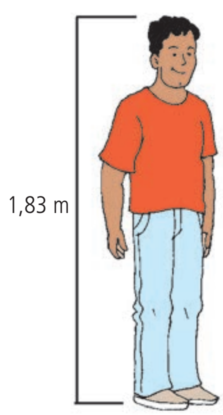
Ilustra Cartoon

c)



Ilustra Cartoon

e)



Ilustra Cartoon

2 Responda:

a) qual é o sucessor de 48 999? 49 000

b) qual é o antecessor de 72 000? 71 999

c) 8 000 é o sucessor de que número? 7 999

d) 3 640 é o antecessor de que número? 3 641

3 Escreva o número 35 como:

a) o produto de dois números naturais ímpares; $5 \cdot 7$ ou $1 \cdot 35$

b) a soma de dois números naturais consecutivos; 17 + 18

c) a soma de cinco números naturais consecutivos. 5 + 6 + 7 + 8 + 9

4 Utilizando uma só vez cada um dos algarismos 2, 4, 6 e 7, escreva:

a) o maior número natural; 7 642

b) o maior número ímpar; 6 427

c) o menor número par. 2 476

5 O filho do senhor Paulo é sócio de um sindicato. O número de sua carteirinha é um milhão, três mil e noventa.

Ilustrações: Ilustra Cartoon

a) Como se chama o filho do senhor Paulo? Dimas Quirino.

b) Escreva como se lê o menor número representado nessas carteirinhas. Cento e três mil e noventa.

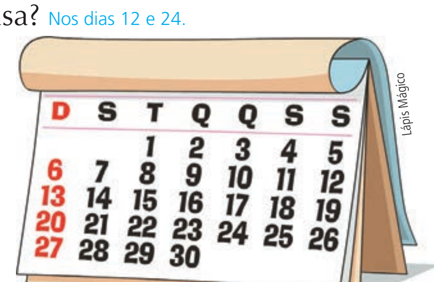
c) Escreva como se lê o maior número representado nessas carteirinhas. Um milhão, trinta mil e noventa.

d) A carteirinha do senhor Mauro, outro sócio desse sindicato, tem o número um milhão, duzentos e vinte. Represente-o usando algarismos. 1 000 220

6 Dois irmãos são viajantes.

- Carlos volta para casa nos dias 3, 6, 9, …
- Luís volta para casa nos dias 4, 8, 12, …

Em quais dias do mês você encontra os dois em casa? Nos dias 12 e 24.



Lápis Mágico

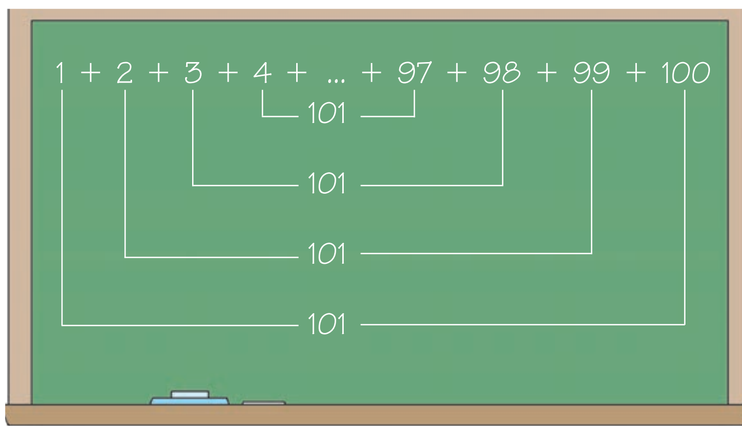
Seção livre

Um pouco de história

Quanto tempo você gastaria para calcular o valor de:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 \ ?$$

Certo dia, um professor pediu a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Gauss, com apenas 9 anos na época, encontrou a resposta em poucos segundos. Veja como ele fez:



Ilustra Cartoon

Album/akg-images/Latinstock

◆ *Carl Friedrich Gauss*. Retrato/Pintura de Christian Albrecht Jensen. c.1850.

Começou somando 1 com 100, depois 2 com 99, a seguir 3 com 98 e assim por diante, obtendo sempre o mesmo número 101. Ora, na soma desejada este número aparece 50 vezes. Então o resultado é:

$$50 \cdot 101 = 5\,050$$

Carl Friedrich Gauss foi um matemático alemão que viveu de 1777 a 1855. Já adulto, divertia-se ao declarar que aprendera a contar antes de saber falar. Por seus muitos trabalhos em vários ramos da Matemática, é considerado hoje um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Utilize a ideia de Gauss para resolver o problema a seguir:

Na pilha ao lado, foram colocadas 20 latas de ervilha na base e uma a menos em cada fileira. Quantas latas foram empilhadas?

210 latas

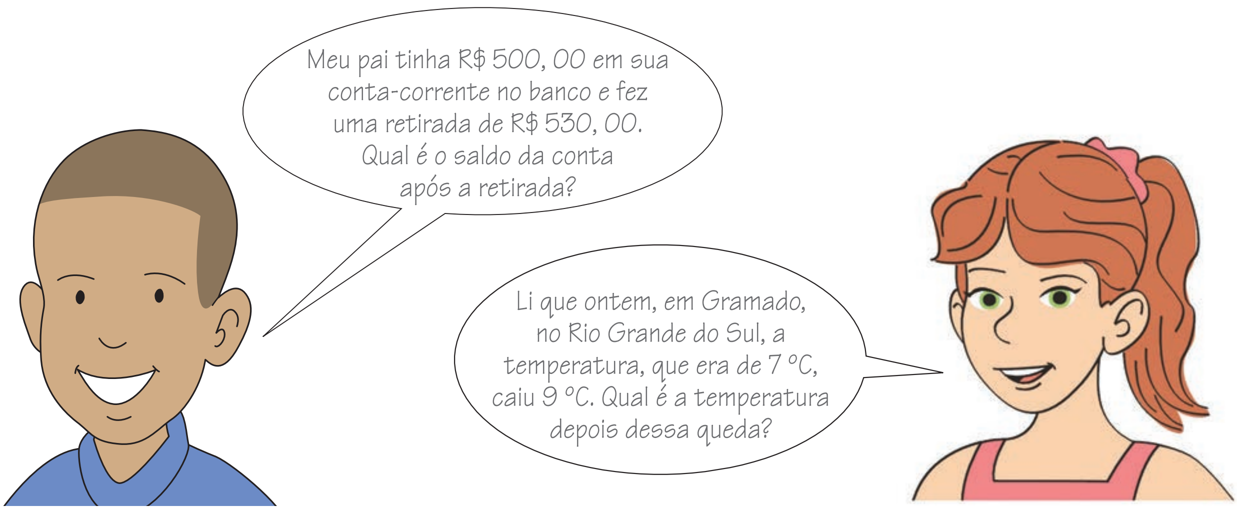
$1 + 2 + 3 + ... + 18 + 19 + 20 =$
$= 21 \cdot 10 = 210$

Hélio Senatore

3. Números inteiros

Os números negativos

Responda às perguntas feitas por Pedro e Marina.



Ilustrações: Hélio Senatore

Para responder às questões, você efetuou subtrações que não têm resultado no conjunto dos números naturais:

$500 - 530 = -30$ $\quad\quad$ $7 - 9 = -2$

Nessas e em muitas outras situações, usamos os **números negativos**.

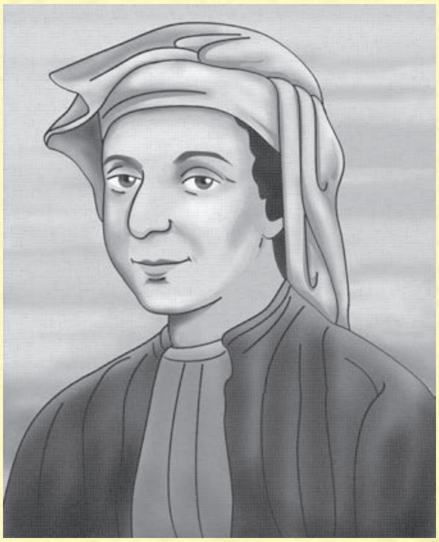
Os números negativos – uma longa história

A ideia de quantidades negativas é antiga, mas passou-se muito tempo até que os números negativos fossem aceitos como números de fato.

Os matemáticos chineses da Antiguidade já trabalhavam com a ideia de número negativo. Eles faziam cálculos com dois tipos de barras: vermelhas para quantidades positivas, que chamavam de excessos, e pretas para quantidades negativas, consideradas faltas.

Na obra de Brahmagupta, matemático hindu nascido em 598, encontra-se o que corresponderia às regras de sinais para a divisão envolvendo números negativos. No entanto, nenhuma dessas civilizações considerava que os números negativos fossem realmente números.

Com os números negativos, a álgebra pôde se desenvolver mais rapidamente.



Hélio Senatore

◆ Leonardo Pisano (1170-1250), chamado de Fibonacci, escreveu em sua obra *Líber Abaci* o seguinte comentário sobre um problema envolvendo dívidas: "Este problema não tem solução, exceto se interpretarmos a dívida como um número negativo".

O conjunto $\mathbb{Z}$

Juntando ao conjunto dos números naturais os números inteiros negativos, obtemos o conjunto de todos os **números inteiros**: $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Pense e responda!

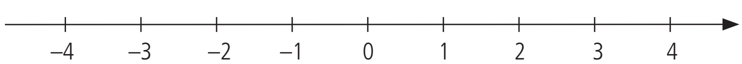
1. Todo número natural é um número inteiro?
Sim.
2. Quantos números inteiros há entre – 4 e 3?
Seis: –3, –2, –1, 0, 1 e 2.
3. E entre –2 e –1?
Nenhum.

Sobre os números inteiros, sabemos entre outras coisas que:

1. Todo número inteiro tem sucessor.
2. Todo número inteiro tem antecessor.

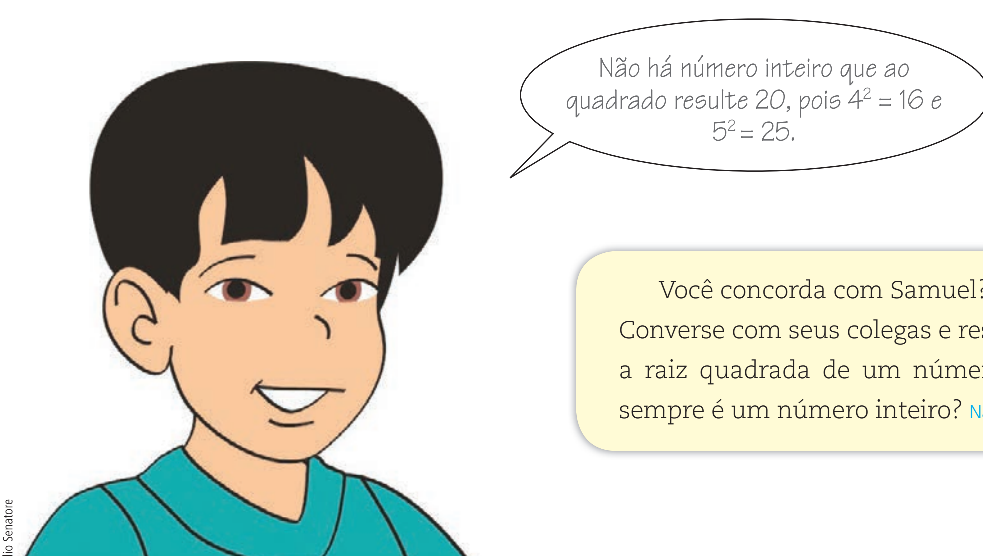
- O sucessor de –4 é –3.
- O antecessor de –99 é –100 e assim por diante.

3. Os números inteiros podem ser representados por pontos na reta numérica:



Na reta numérica a distância entre dois números consecutivos é sempre a mesma.

4. A soma de dois números inteiros é um número inteiro.
5. O produto de dois números inteiros é um número inteiro.
6. A diferença entre dois números inteiros é um número inteiro.
7. O quociente entre dois números inteiros muitas vezes **não é** um número inteiro.
   Veja que 3 : 4 ou –7 : 5, e inúmeras outras divisões entre inteiros, não têm como resultado um número inteiro.
8. Sabemos, por exemplo, que $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$. Mas e $\sqrt{20}$? É um número inteiro?



Hélio Senatore

Você concorda com Samuel?
Converse com seus colegas e responda: a raiz quadrada de um número inteiro sempre é um número inteiro? Não.

Exercícios

7 Responda no caderno.

a) Se −15 significa 15 metros para a esquerda, o que significa +15? 15 metros para a direita

b) Se +70 significa um lucro de R$ 70,00, o que significa −70? Um prejuízo de R$ 70,00.

c) Se −6 significa 6 anos mais novo, o que significa +6? 6 anos mais velho

8 Responda no caderno.

a) Existe o menor número inteiro? Não.

b) Existe o maior número inteiro? Não.

c) Quantos números inteiros existem? Infinitos.

9 Responda no caderno.

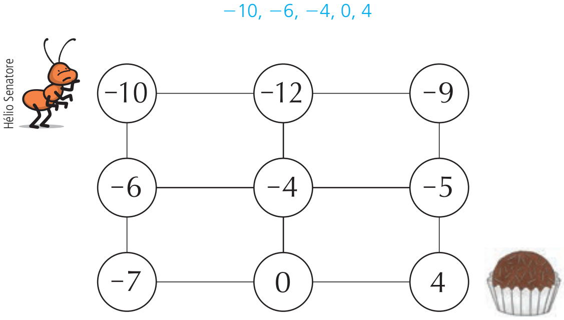
a) Sou um número inteiro e o meu sucessor é −999. Quem sou? −1000

b) Sou um número inteiro. Não sou positivo. Não sou negativo. Quem sou? Zero.

c) Sou um número inteiro maior que −15 e menor que −13. Quem sou? −14

10 A formiga só pode deslocar-se nas linhas indicadas e para um número maior. Que trajeto ela tem de seguir até encontrar o doce?
−10, −6, −4, 0, 4

Hélio Senatore



11 O saldo bancário de Douglas passou de −173 reais para +919 reais. Quanto foi depositado em sua conta? R$ 1.092,00
919 − (−173) = 1 092

12 Rafael jogou quatro vezes um jogo no videogame. Aconteceu o seguinte:

ganhou 7 | perdeu 4 | ganhou 6 | perdeu 8


Fernando Favoretto

Qual foi a pontuação final de Rafael? Ganhou 1.

13 Observe a tabela.

Cidade europeia	A	B	C
Temperatura máxima	+3 °C	+5 °C	−2 °C
Temperatura mínima	−10 °C		−8 °C

a) Qual das temperaturas é a mais baixa? −10 °C

b) Qual das temperaturas é a mais alta? +5 °C

c) Qual foi a variação da temperatura na cidade A? E na cidade C? 13 °C; 6 °C

d) Se na cidade B a variação da temperatura foi de 6 °C, qual é o valor da temperatura que falta na tabela? −1 °C

14 Copie e complete o quadrado mágico.

−2	3	−4	
		1	−3, −1
			2, −5, 0

A soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma.

4. Números racionais

Você já conhece as frações. A origem delas está ligada a certas situações de medida em que era necessário registrar partes da unidade. Mas as frações têm um significado mais amplo.

Vamos relembrar?

Vimos que o quociente entre dois números inteiros nem sempre é um número inteiro.

Por exemplo, quero dividir três barras de chocolate entre quatro pessoas.

Ilustra Cartoon

Cada pessoa deve receber $\frac{3}{4}$ de chocolate.

Portanto, $3 : 4 = \frac{3}{4}$ ou ainda, usando a forma de número decimal: $3 : 4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Os números obtidos pela divisão de dois números inteiros formam o **conjunto dos números racionais** que é representado pela letra $\mathbb{Q}$ (de quociente). Divisões que não têm resultado em $\mathbb{Z}$, têm resultado em $\mathbb{Q}$.

Podemos descrever os números racionais assim:

Os números racionais são os que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros e $b \neq 0$.

Lembre-se: $\frac{a}{b} = a : b$

Hélio Senatore

Quem veio primeiro: frações ou números negativos?

Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas, durante a Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações.

As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para as frações unitárias, isto é, com numerador um. A fração $\frac{1}{8}$ aparecia então como: 

O inverso de um número inteiro era indicado colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado.

Convém ressaltar que as frações (positivas, é claro) surgiram antes dos números negativos, que demoraram a ser aceitos como números.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

Exercícios

15 Veja os números que aparecem nas frases a seguir.

- A jarra tem capacidade para $\frac{3}{4}$ de litro.
- Numa cidade há 8 049 bicicletas.
- O saldo de gols de um time de futebol é -6.
- Leandro tem 17 anos.
- A velocidade de um carro é de 92,75 km/h.
- A temperatura atingiu $-2{,}8$ °C.

Responda no caderno.

a) Quais deles representam números naturais? 8 049 e 17

b) Quais deles representam números inteiros? 8 049, 17 e -6

c) Quais deles representam números racionais? Todos.

16 Observe a pizza cortada em fatias iguais e responda.

Paulo Pepe

a) Duas fatias representam que fração da pizza? E três? $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$

b) Qual é o número de pedaços que representa meia pizza? 4 pedaços

17 O que você pode dizer sobre estes números? São iguais.

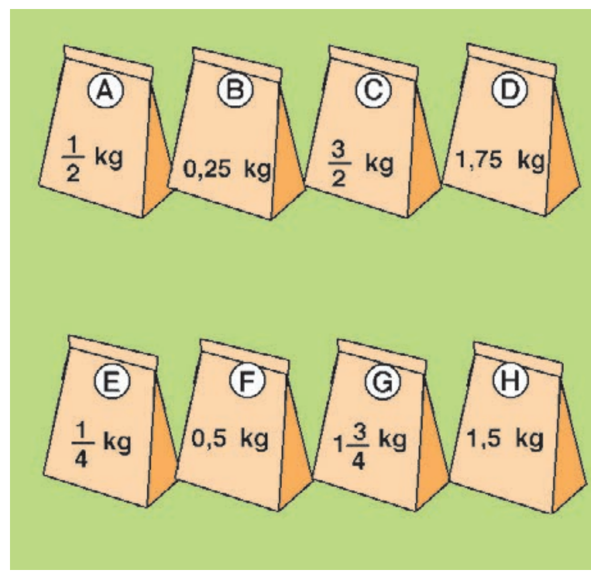
$-\frac{5}{10}$ $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad -0{,}5$ $\quad -\frac{13}{26}$

18 Copie e complete.

a) $\frac{3}{4} = \frac{9}{\square} = \frac{\square}{20} = \frac{30}{\square} = \frac{\square}{80}$ 12, 15, 40, 60

b) $\frac{12}{42} = \frac{\square}{7} = \frac{4}{\square} = \frac{\square}{84} = \frac{30}{\square}$ 2, 14, 24, 105

19 Indique, pelas letras, os pacotes com a mesma quantidade:



Ilustra Cartoon

A e F; B e E; C e H; D e G.

20 Procure entre os cartões aquele que corresponde a cada condição.

(A) $\frac{20}{8}$ $\quad$ (B) $\frac{30}{5}$ $\quad$ (C) $\frac{10}{3}$

a) Representa um número inteiro. B

b) Representa um número entre 3 e 4. C

c) Representa um número fracionário entre 2 e 3. A

21 Se um pacote de café pesar 125 g, quantos pacotes com esse peso poderão ser feitos com 1 kg de café? 8 pacotes

5. Representação dos números racionais

Todo número inteiro é um número racional. Observe:

- 6 pode ser escrito como $\frac{6}{1}$ ou $\frac{24}{4}$ ou $\frac{42}{7}$ por exemplo.

Da mesma forma,

- $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$

- $-20 = \frac{-20}{1} = \frac{-100}{5}$

e assim por diante.

1. Represente o número 10 como quociente de números inteiros. Resposta pessoal, por exemplo, $\frac{20}{2}$.

a) 10 é um número racional? Sim.

b) Existe número inteiro que não seja racional? Não.

2. Os números racionais abaixo, representam que número inteiro?

$\frac{-20}{5}; \frac{20}{-5}; -\frac{20}{5}$. -4 Professor, comente que em um número racional negativo, o sinal de menos pode estar tanto no numerador, quanto no denominador ou mais usualmente antes da fração.

Forma decimal e forma fracionária

Um número racional pode ser escrito na forma de número decimal.

$\frac{7}{10} = 0{,}7$ $\quad \frac{143}{100} = 1{,}43$ $\quad \frac{4}{5} = 4 : 5 = 0{,}8$ $\quad \frac{17}{8} = 17 : 8 = 2{,}125$

Nesses exemplos, a forma decimal é **finita**.

$\frac{5}{9} = 0{,}5555...$ $\quad \frac{14}{3} = 4{,}6666...$ $\quad \frac{12}{33} = 0{,}363636...$

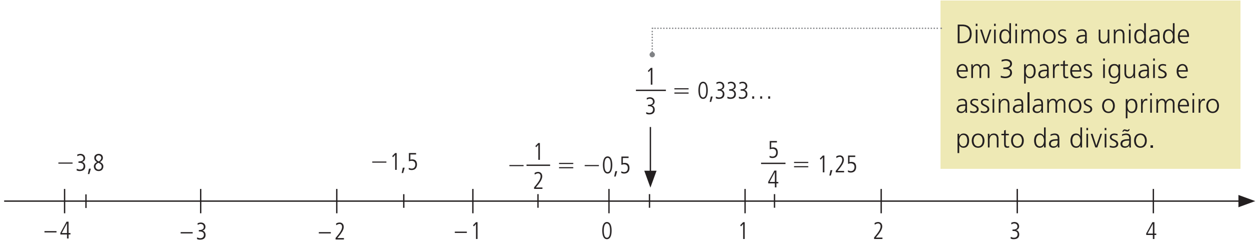
Nesses exemplos, a forma decimal é **infinita** e **periódica**.
Esses números são chamados de **dízimas periódicas**.
Em 4,666... o período é 6. Em 0,363636... o péríodo é 36.

Ana ficou pensando:

A resposta é sim. A forma decimal dos números racionais é sempre um número decimal finito ou uma dízima periódica.

Representação na reta

Os números racionais podem ser representados por pontos na reta numérica. Veja exemplos:



Discuta as questões com seus colegas e o professor.

- 1,3 é um número racional que está entre 1 e 2.

a) Cite outros números racionais que estão entre 1 e 2.
Há infinitas possibilidades de resposta. Por exemplo: 1,4; 1,18; 1,7 etc.

b) Agora cite um número racional que está entre 1,3 e 1,4.
Há infinitas possibilidades de resposta. Por exemplo: 1,32; 1,305

c) Entre dois números racionais sempre há outro número racional? Explique com exemplos.
Sim. Resposta pessoal.

d) Qual é o maior número racional? E o menor?
Não há maior número racional. Não há menor número racional.

e) O conjunto dos números racionais é infinito?
Sim.

Escrevendo dízimas periódicas na forma de fração

As dízimas periódicas são números racionais. Portanto, podemos representá-las na forma de fração. Como?

Você e seus colegas vão descobrir! Observe as dízimas geradas por algumas frações:

$\frac{1}{9} = 0,1111...$

$\frac{5}{9} = 0,5555...$

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = 0,666...$

$\frac{8}{9} = 0,8888...$

Hélio Senatore

Analise outras frações que geram dízimas:

$\frac{13}{99} = 0,131313...$

$\frac{7}{99} = 0,0707070...$

$\frac{137}{999} = 0,137137137...$

E aí? Descobriram como fazer? Converse com seus colegas. Confiram com o professor se as conclusões estão corretas!

Quem vai ao quadro escrever a fração que representa 0,282828...? $\frac{28}{99}$

Você descobriu uma forma prática para escrever uma dízima periódica como fração. Na Unidade 8 você compreenderá porque ela funciona.

Exercícios

22 Dividindo R$ 41,00 igualmente entre 4 pessoas, quanto receberá cada uma? R$ 10,25

23 Qual é o maior:

a) $\frac{5}{4}$ ou 1,2? $\frac{5}{4}$

b) $\frac{7}{9}$ ou 0,777...? São iguais.

c) $\frac{125}{8}$ ou 15,7? 15,7

d) $\frac{220}{9}$ ou 24,4? $\frac{220}{9}$

24 Coloque em ordem crescente os seguintes números:

0	2	-2	4	-4
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	

$-4, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4$

25 Indique os números inteiros consecutivos que são representados pelas letras A e B.

A = −5 e B = −4

26 Encontre um número entre:

a) 1,862 e 1,864 1,863

b) 0,50001 e 0,50002 0,500015

Há outras soluções possíveis.

27 Cem bombons custaram R$ 37,00. Qual é o preço de 150 bombons? E de 210? Quantos bombons se pode comprar com R$ 92,50?

R$ 55,50; R$ 77,70; 250 bombons

28 Use a calculadora para expressar as frações na forma decimal e indique quais são dízimas periódicas.

Ilustrações: Ilustra Cartoon

a) $\frac{27}{2}$ 13,5

b) $\frac{3}{8}$ 0,375

c) $-\frac{41}{6}$ −6,8333...

d) $\frac{1}{20}$ 0,05

e) $\frac{47}{99}$ 0,4747...

f) $\frac{8}{3}$ 2,666...

As frações dos itens **c**, **e** e **f** são dízimas periódicas.

29 Escreva estes números sob a forma de fração irredutível:

a) 0,3 $\frac{3}{10}$

b) 0,03 $\frac{3}{100}$

c) −4,5 $-\frac{9}{2}$

d) 13,7 $\frac{137}{10}$

e) 2,002 $\frac{1001}{500}$

f) 0,0007 $\frac{7}{10000}$

30 Escreva sob a forma de fração as seguintes dízimas periódicas:

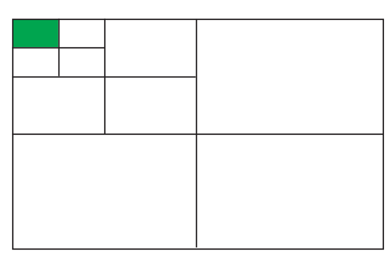
a) −0,888... $-\frac{8}{9}$

b) 0,3737... $\frac{37}{99}$

c) −1,2121... $-1\frac{21}{99}$

d) 0,0505... $\frac{5}{99}$

31 O terreno retangular maior foi dividido inicialmente em quatro partes iguais. Esse processo foi repetido mais duas vezes, conforme mostra a figura.



DAE

O senhor Farias, por enquanto, só cultivou 22,5 m² do seu terreno, a parte colorida da figura. Qual é a área do terreno do Sr. Farias?

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 22,5 = 1440$ 1440 m²

32 Calcule mentalmente e expresse o resultado na forma decimal:

a) $2 + 0,1$ 2,1

b) $10 + 0,333...$ 10,333...

c) $1 - \frac{3}{4}$ 0,25

d) $0,4 + 0,444...$ 0,8444...

e) $1,5 + \frac{6}{10}$ 2,1

f) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ 0,5

6. Números irracionais

Um novo tipo de número

Para determinar $\sqrt{2}$, devemos encontrar o número que elevado ao quadrado resulta em 2. Veja como Carla pensou:

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 2^2 = 4 \end{array}\right\}$$

Ela concluiu $\sqrt{2}$ que é um número decimal entre 1 e 2.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Aí experimentou:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}4^2 = 1{,}96 \\ 1{,}5^2 = 2{,}25 \end{array}\right\}$$

Concluiu que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Experimentou mais uma vez:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}41^2 = 1{,}9881 \\ 1{,}42^2 = 2{,}0164 \end{array}\right\}$$

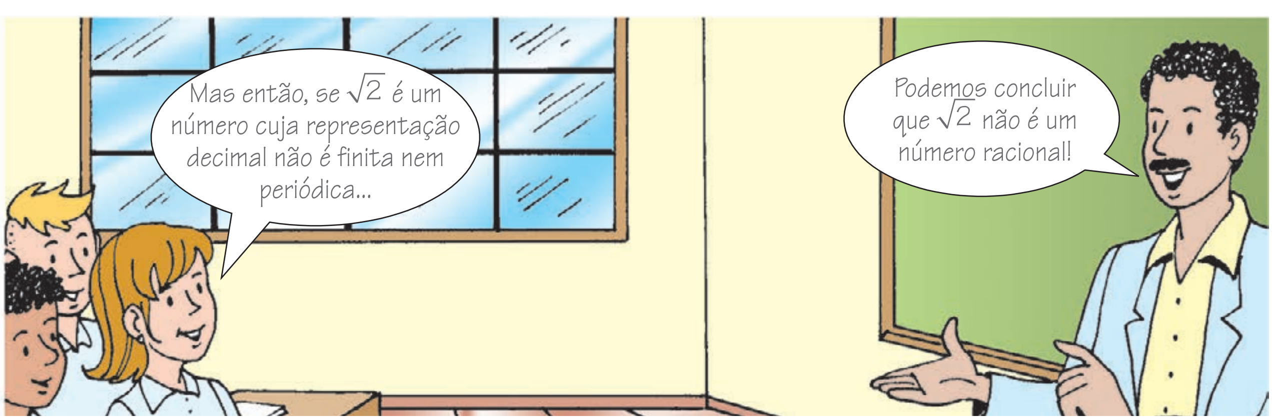
Concluiu que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

Com mais algumas etapas ela poderia encontrar

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}414213562^2 = 1{,}999999999 \\ 1{,}414213563^2 = 2{,}000000002 \end{array}\right\}$$

$$1{,}414213562 < \sqrt{2} < 1{,}414213563$$

Carla poderia prosseguir indefinidamente nesta aproximação, pois a representação decimal de $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais e não é periódica.



Ilustrações: Lápis Mágico

Há números cuja forma decimal é infinita, mas não é periódica. É o caso de $\sqrt{2}$.

No século III a.C., um grande matemático chamado Euclides mostrou que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de fração, ou seja, não é um número racional.

Então, que tipo de número é esse?

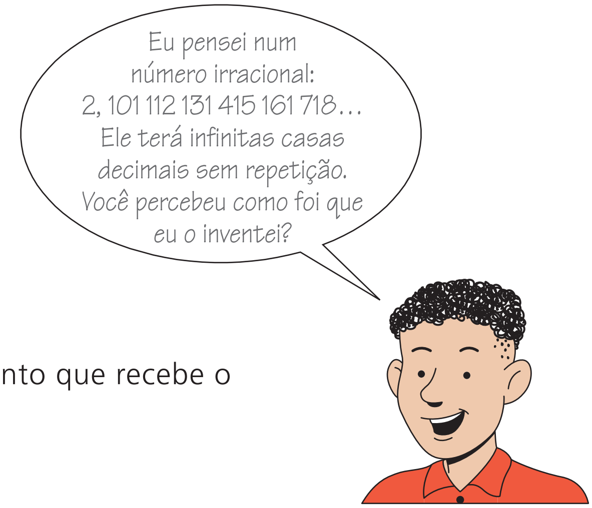
Apresentando o conjunto dos números irracionais

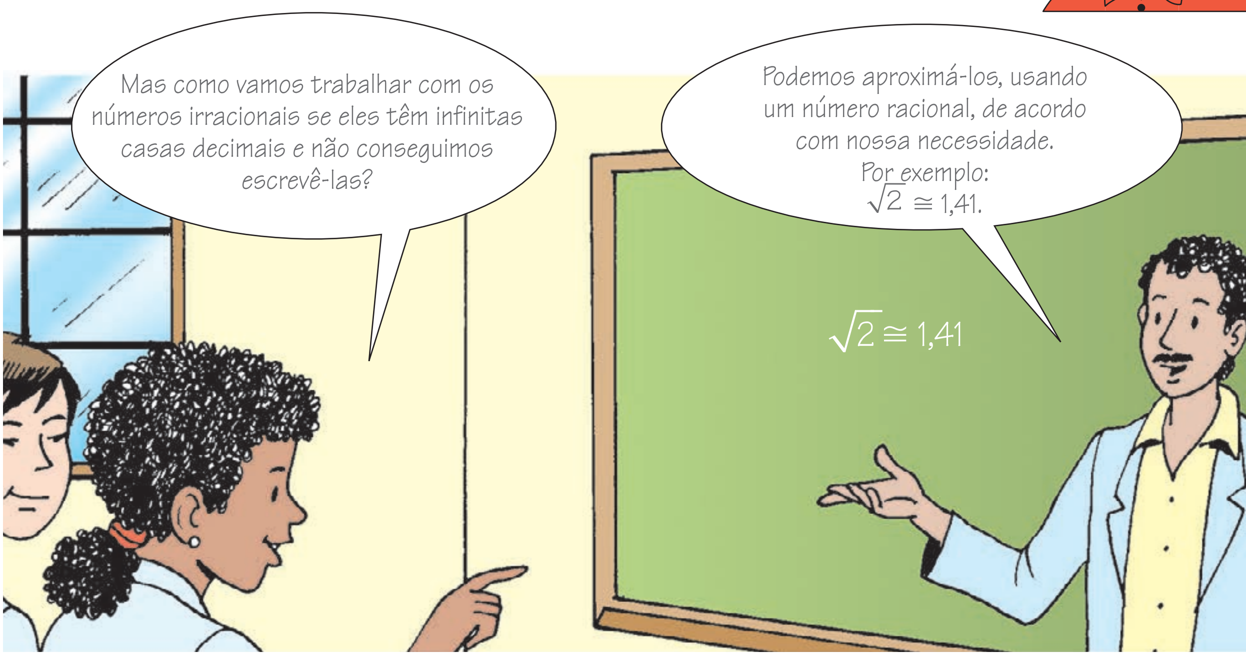
Números como $\sqrt{2}$, cuja representação decimal é infinita e não periódica, são chamados **números irracionais**.

Os matemáticos mostraram que existem infinitos números irracionais.

Por exemplo, as raízes quadradas dos números primos são números irracionais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, ... bem como seus opostos.

Todos os números irracionais formam um conjunto que recebe o nome de $\mathbb{I}$.





Ilustrações: Lápis Mágico

As calculadoras fazem isso.

Digite: 3 √

Aparece no visor 1,732 050 808, que é um número racional.

A calculadora fez uma aproximação com 9 casas decimais para um número que tem infinitas casas decimais.

> Digite na calculadora:
> 1,732 050 808 × = para elevar este número ao quadrado.
> Aparecerá no visor 3,000 000 001.
> De fato, 1,732050808 não é raiz quadrada de 3, mas sim uma aproximação racional para ela.

Se não for necessária uma precisão tão grande, podemos usar:

$$\sqrt{3} \cong 1,73 \text{ ou ainda } \sqrt{3} \cong 1,7.$$

Em muitas situações poderemos fazer os cálculos usando a forma de radical $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$ etc., sem precisar recorrer às aproximações.

Exercícios

33 Qual das afirmações é verdadeira?

a) $\sqrt{10}$ é racional e $\sqrt{100}$ é racional.

x b) $\sqrt{10}$ é irracional e $\sqrt{100}$ é racional.

c) $\sqrt{10}$ é racional e $\sqrt{100}$ é irracional.

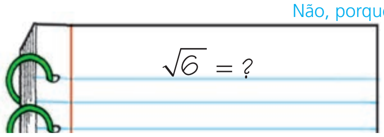
d) $\sqrt{10}$ é irracional e $\sqrt{100}$ é irracional.

34 Em qual dos quadros encontramos somente números irracionais? c

$\sqrt{3}$	$\sqrt{9}$		$\sqrt{6}$	$\sqrt{10}$	
$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	A	$\sqrt{12}$	$\sqrt{8}$	C
$\sqrt{4}$	$\sqrt{8}$		$\sqrt{12}$	$\sqrt{18}$	
$\sqrt{12}$	$\sqrt{16}$	B	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	D

35 Alfredo está querendo obter uma representação decimal finita e exata para o número $\sqrt{6}$. Você acha que ele conseguirá? Por quê?

Não, porque $\sqrt{6}$, é irracional.



36 Faça a atividade em seu caderno. Observe os números do quadro e atribua a cada número o valor 1 se ele for irracional e o valor 2 se racional.

$\frac{1}{4}$	$5 + \sqrt{2}$	$\sqrt{49}$
3,222...	0	0,5
$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{16 + 4}$

Qual é a soma dos valores atribuídos?

$2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 16$

37 Os números seguintes são valores aproximados de $\sqrt{20}$.

4	4,4	4,48	4,472

a) Calcule o quadrado de cada um desses números, indicando se é maior ou menor do que 20. Menor; menor; maior; menor.

b) Qual desses números é a melhor aproximação de $\sqrt{20}$? 4,472

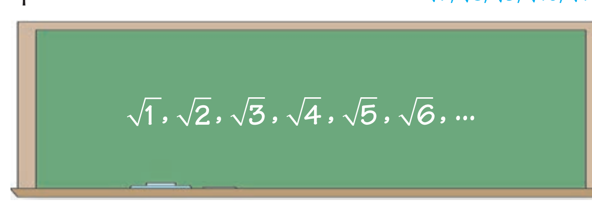
38 É fácil descobrir números irracionais. Basta escrever dízimas que sejam infinitas e não periódicas. Por exemplo:

8,010010001... e 1,232425 26...

Descubra um número irracional desse tipo que esteja entre os números racionais 2 e 3.

Há várias possibilidades de resposta. Resposta possível: 2,123122312223...

39 Escreva os cinco termos seguintes da sequência: $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$



Ilustrações: Ilustra Cartoon

Quais deles são irracionais?

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, e $\sqrt{11}$

40 Identifique como número racional ou como número irracional:

a) 4,25 racional

b) $\sqrt{81}$ racional

c) $\sqrt{50}$ irracional

d) -76 racional

e) $\frac{1}{3}$ racional

f) 0,0061 racional

g) $-\sqrt{18}$ irracional

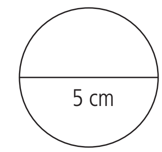
h) 48 799 racional

i) 7,171771777... irracional

j) 8,434343... racional

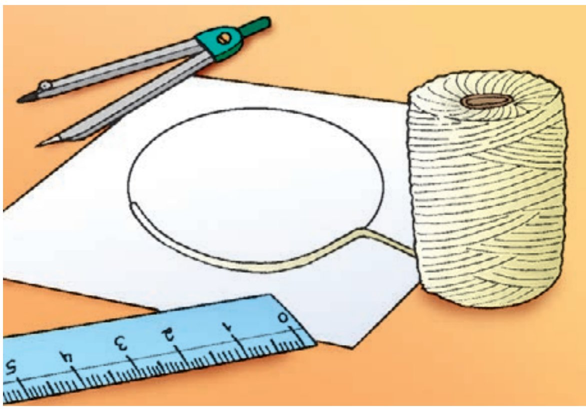
7. Pi – um número irracional

Trace com compasso um círculo de 5 cm de diâmetro em uma cartolina e recorte-o. Contorne-o com linha grossa como mostra a figura abaixo. Meça o comprimento da linha, obtendo o comprimento da circunferência do círculo. Anote-o.



DAE

Ilustra Cartoon



Repita o procedimento para um círculo de 10 cm de diâmetro e um círculo de 15 cm de diâmetro.

Chamando o diâmetro de d e o comprimento da circunferência de C, calcule o quociente $\frac{C}{d}$ para cada círculo, preenchendo em seu caderno uma tabela como esta:

d (cm)	C (cm)	$\frac{C}{d}$
5		
10		
15		

Você deve ter obtido, nos três casos, $\frac{C}{d} \cong 3$

Este símbolo significa aproximadamente igual.

Dizemos *aproximadamente igual* porque no século XVII provou-se que este quociente constante é um número irracional.

Ele é denotado pela letra grega π (lê-se "pi"), que é a inicial da palavra "contorno" em grego.

- π tem infinitas casas decimais e não apresenta período.
  $\pi = 3{,}141\,592\,65...$

$$\text{Se } \frac{C}{d} = \pi, \text{ então } C = \pi \cdot d.$$

Podemos calcular a medida C, do comprimento de uma circunferência de diâmetro d, fazendo $C = \pi \cdot d$ ou, como $d = 2 \cdot r$ (r é o raio da circunferência),

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

De acordo com nossas necessidades, usaremos aproximações racionais para π. Por exemplo:

$$\pi = 3{,}14$$

A relação entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro deu muito trabalho aos matemáticos.

Na Bíblia há referências sobre o uso da relação $C = 3 \cdot d$ para calcular a medida do comprimento de uma circunferência. Muitas civilizações trabalharam com aproximações para π.

Os mesopotâmios utilizavam $\pi = 3\frac{1}{8}$, que corresponde a 3,125. Muito bom para a época!

Exercícios

Para os exercícios a seguir, use $\pi = 3{,}14$.

41 O diâmetro do aro de uma cesta de basquete mede 45 cm. Qual é o comprimento aproximado do aro? 141,3 cm

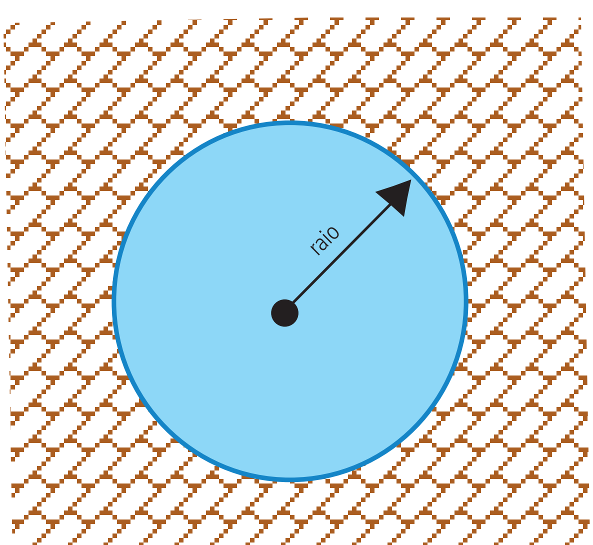

Paulo Pepe

$C = 2r \cdot \pi$
$C = 45 \cdot 3{,}14 = 141{,}3$

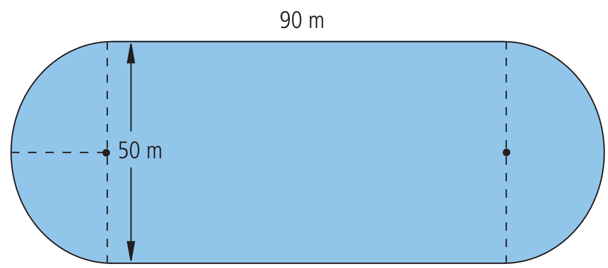
42 Uma pessoa que faz caminhada dá 8 voltas em torno de uma praça circular de 120 m de diâmetro. Qual é, aproximadamente, a distâcia percorrida por essa pessoa? 3 014,4 m

43 A medida do contorno de uma piscina circular é 50,24 m. Quanto mede, aproximadamente, o raio dessa piscina? 8 m

DAE



44 Uma pista de atletismo tem a seguinte forma:



DAE

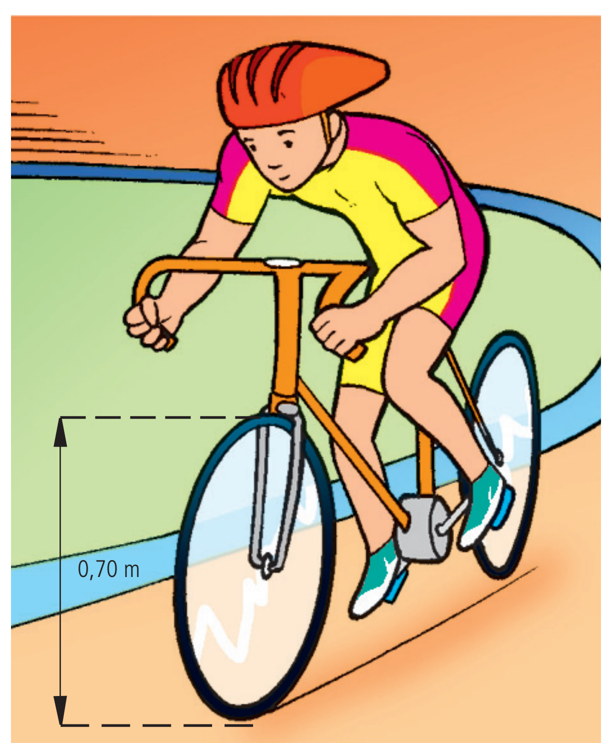
Qual é o comprimento aproximado dessa pista? 337 m

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$
$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \Rightarrow C = 157$
$P = 180 + 157$
$P = 337$

45 Uma praça é circular e seu raio mede 64 m. Paulinho e Silvinho, partindo de um mesmo ponto, correram em torno dela em sentido contrário, e pararam ao se encontrar. Naquele instante, Paulinho havia percorrido 182,92 m. E Silvinho, quanto havia corrido? 219 m, aproximadamente

46 Quantas voltas deverá dar a roda da bicicleta a seguir para percorrer 1099 m? 500 voltas

$C = 0{,}70 \cdot 3{,}14 \Rightarrow C = 2{,}198$
Nº de voltas: $1\,099 : 2{,}198 = 500$



Ilustra Cartoon

8. Números reais

Vimos que todos os números naturais e todos os números inteiros são números racionais.

Juntando os números racionais e os números irracionais num único conjunto, obtemos o **conjunto dos números reais**, que é denotado por $\mathbb{R}$.

- 2
- $-1\,698$
- $\frac{3}{8}$
- $-\frac{1}{15}$
- 0,47
- $-3{,}5555...$
- $\sqrt{17}$
- 0

São exemplos de números reais.

Excluindo o zero

Quando queremos excluir o zero de um conjunto numérico, usamos um asterisco:

$\mathbb{N}^*$ é o conjunto dos números naturais sem o zero: {1, 2, 3, 4, 5, 6,...}

$\mathbb{R}^*$ é o conjunto dos números reais sem o zero, e assim por diante.

Todo número real pode ser representado por um ponto na reta numérica.

Você já sabe como representar números racionais na reta numérica. E os números irracionais?

Vamos localizar, como exemplo, o ponto da reta correspondente a $\sqrt{2}$. Além de poder localizá-lo por uma representação decimal aproximada, podemos obter, por um processo geométrico, a localização exata desse ponto.

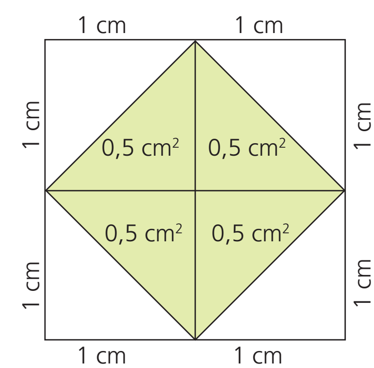
A área de cada quadradinho de lado 1 cm é igual a 1 cm^2.

Dividindo-o ao meio, cada triângulo fica com 0,5 cm^2 de área.

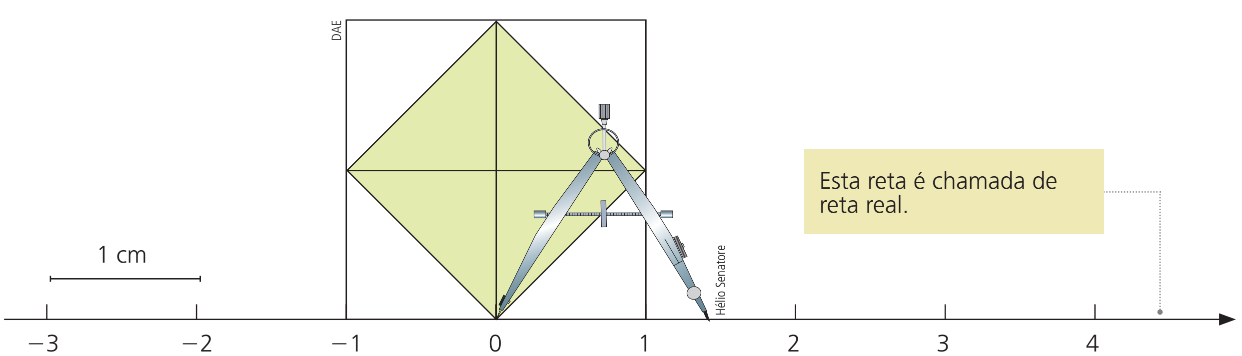
Como $4 \cdot 0{,}5 = 2$, a área do quadrado verde é de 2 cm^2.

Então, a medida do lado do quadrado verde é $\sqrt{2}$ cm.

Transportamos, com auxílio do compasso, a medida deste segmento para a reta numérica, determinando o ponto correspondente a $\sqrt{2}$.



Obs.: O desenho está ampliado.



Se marcássemos sobre a reta real todos os pontos que representam números racionais e todos os pontos que representam números irracionais, preencheríamos a reta toda.

Conclusão:

- A todo número real corresponde um ponto na reta.
- A cada ponto da reta corresponde um número real.

Exercícios

47 Construa a tabela no caderno e assinale a que conjuntos pertencem cada um dos números:

	10	−8	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{6}{2}$	0	$\sqrt{4}$	$\sqrt{7}$	π	1,76
Naturais	X				X	X			
Inteiros	X	X		X	X	X			
Racionais	X	X	X	X	X	X			X
Irracionais							X	X	

- Que nome pode ser dado a todos eles?

Números reais.

48 Qual dos números a seguir não é real?

1,6	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{0}{3}$	$\sqrt{0}$
$\sqrt{49}$	$-\sqrt{49}$	$\sqrt{-49}$	

$\sqrt{-49}$

49 O valor da expressão $\dfrac{\sqrt{81}+\sqrt{49}}{\sqrt{81}-\sqrt{49}}$

x **a)** é um número inteiro.

b) é um número irracional.

c) não é um número real.

d) não é um número racional.

50 Sejam os números:

$\sqrt{37}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{72}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{98}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{121}$

Quais deles estão compreendidos entre 5 e 10?

$\sqrt{37}$, $\sqrt{72}$ e $\sqrt{98}$

51 Qual é o maior:

a) $\sqrt{9}$ ou π? π

b) 10 ou $\sqrt{20}$? 10

c) 7,2 ou $\sqrt{50}$? 7,2

d) $\sqrt{15}$ ou π? $\sqrt{15}$

52 Quais são os números inteiros que estão entre $-\sqrt{10}$ e $\sqrt{10}$? −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3

53 Determine entre quais números inteiros consecutivos fica o valor correspondente a cada item.

a) $\dfrac{\sqrt{108}}{2}$ 5 e 6

b) $\sqrt{\dfrac{2}{72}}$ 0 e 1

54 Faça uma estimativa para cada uma das expressões.

a) $135{,}6 + 63{,}9$ 200

b) $753{,}1 - 52{,}8$ 700

c) $6{,}9 \cdot 5$ 35

d) $4{,}1 \cdot 4{,}01$ 16

e) $12{,}9 \cdot 5{,}1$ 65

f) $99{,}9 \cdot 40{,}02$ 4 000

g) $8\,235 : 1\,001$ 8,2

h) $79{,}8 : 19{,}2$ 4

i) $691{,}7 : 10{,}02$ 69

j) $49{,}3 : 0{,}99$ 50

55 Qual é o valor da expressão a seguir?

$$\frac{0{,}060606\ldots}{0{,}121212\ldots} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{99} : \frac{12}{99} = \frac{1}{2}$$

Ilustra Cartoon

Faça este experimento!

Peça a uma pessoa que diga qualquer número entre 1 e 10. É quase certo que a pessoa dirá um número inteiro. Uma resposta como 8,534 ou $5\sqrt{2}$ é rara, apesar de serem respostas tão boas quanto qualquer número inteiro entre 1 e 10. Por que isso ocorre?

Nós, geralmente nos lembramos dos números inteiros e nos esquecemos da infinidade de números reais que existem entre os inteiros.

9. Os números reais e as operações

A soma de dois números reais é um número real.

Isso também vale para o produto e a diferença de dois números reais.

Excetuando a divisão por zero, que continua a não existir em $\mathbb{R}$, o quociente de dois números reais é um número real.

Em $\mathbb{R}$ também podemos extrair a raiz quadrada de qualquer número positivo.

No entanto, a raiz quadrada de um número negativo não é um número real, pois todo número real elevado ao quadrado é positivo.

Há propriedades das operações que utilizamos com frequência em Matemática.

Essas propriedades são válidas em $\mathbb{R}$ e estão listadas no quadro abaixo. Considere que *a*, *b* e *c* são números reais.

Propriedade	Adição	Multiplicação
Comutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento oposto	$a + (-a) = 0$	
Elemento inverso		$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ com $a \neq 0$
Multiplicação por zero		$a \cdot 0 = 0$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
Anulamento do produto		Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$
Operação inversa	Se $a + b = c$, então $a = c - b$ e $b = c - a$	Se $a \cdot b = c$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a = \frac{c}{b}$ e $b = \frac{c}{a}$

Exercícios

56 Entre as expressões abaixo, a que apresenta resultado igual a 40 é:

a) $5 \cdot 0 \cdot 8$

b) $10 + 10 \cdot 2$

c) $23 - 3 \cdot 2$

x d) $40 + 0 : 40$

57 Copie e relacione cada número ao seu inverso, se existir.

A $\frac{5}{2}$

B 0,5

C 0

D 1

E $\frac{1}{5}$

I 5

II $\frac{10}{5}$

III $\frac{2}{5}$

IV $\frac{5}{5}$

A e III; B e II; D e IV; E e I.

58 Utilizando a propriedade distributiva, calcule:

a) $\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$ $\frac{4}{75}$

b) $4 \cdot (0{,}25 + 0{,}3 - 0{,}1)$ 1,8

c) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8} + \frac{5}{4}\right) \cdot 8$ 21

59 Qual é o oposto do inverso de $-\frac{37}{52}$? $\frac{52}{37}$

60 (Unifor-CE) Se o triplo de um número é $\frac{18}{5}$, então

- $\frac{18}{5} : 3 = \frac{6}{5}$
- $2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$

a) seu quíntuplo é 18.

x b) seu dobro é $\frac{12}{5}$.

c) sua metade é $\frac{2}{5}$.

d) sua terça parte é $\frac{1}{5}$.

61 Copie e complete no caderno:
Se $(x - 2)(x - 3) = 0$ e $x \neq 2$, então $x =$ ▨. 3

62 Explique por que, se $a \cdot b \neq 0$, então $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Porque zero vezes qualquer número é zero.

63 Qual é o número real cujo dobro é $\frac{\sqrt{6}}{3}$? $\frac{\sqrt{6}}{6}$

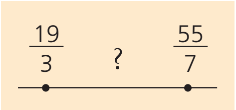
64 (Obmep) Em qual das alternativas aparece um número que fica entre $\frac{19}{3}$ e $\frac{55}{7}$?

a) 4

b) 5

x c) 7

d) 9



65 Verdadeiro ou falso?

a) 0,4333... = 0,1 + 0,333... V

b) 0,8666... = 0,8 + 0,666... F

c) 0,1222... = −0,1 + 0,222... V

66 (Obmep) Qual é o valor de $1 + \dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}}$?

a) 2

b) $\frac{3}{2}$

x c) 4

d) $\frac{4}{3}$

67 (CAP-Unicamp-SP) Quanto ao valor da expressão:

$$E = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{2} + 4 \cdot \frac{0{,}5 + 1}{6},$$

é correto afirmar que:

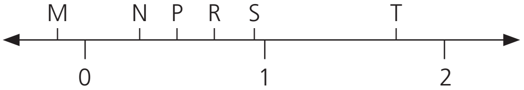
a) $E < 1$

b) $E > 13$

c) $E = 13$

x d) $1 < E < 2$

68 (Cesgranrio-RJ) Se as frações representadas pelos pontos R e P forem multiplicadas, o ponto sobre a reta numérica da figura que representará o produto será:



a) M

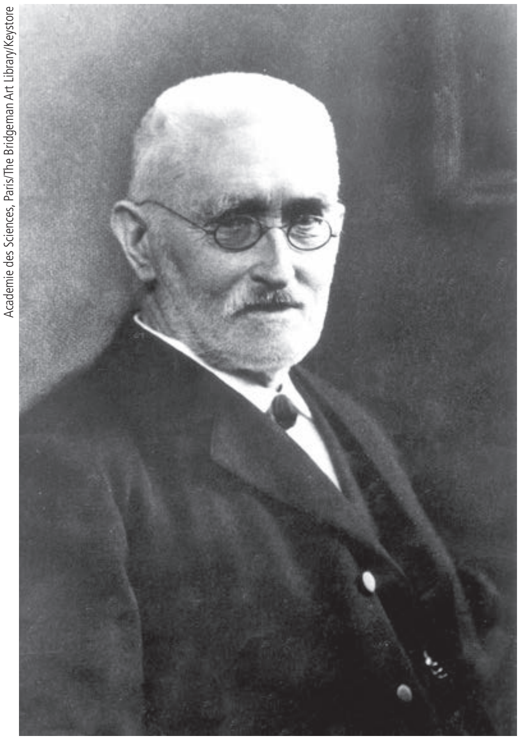
x b) N

c) S

d) T

Vale a pena ler

Os números “inexprimíveis”



Academie des Sciences, Paris/The Bridgeman Art Library/Keystore

◆ Julius Wilhelm Richard Dedekind.

Os matemáticos gregos antigos acreditavam que todos os problemas podiam ser resolvidos pelos números inteiros, pelos números racionais, suas operações e propriedades.

No entanto, por volta de 400 a.C., eles descobriram, em problemas geométricos, números que não eram inteiros e que também não podiam ser escritos como quociente entre números inteiros. Isso os abalou muito – que tipo de números seria aquele?

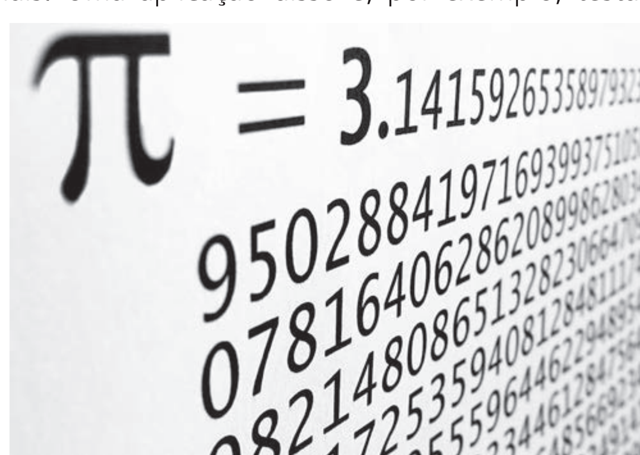
A descoberta desses números, que eles chamaram de “inexprimíveis” e hoje chamamos de irracionais, provocou uma crise nos fundamentos da Matemática. Acredita-se que a descoberta dos irracionais tenha sido mantida em segredo durante certo tempo, enquanto os matemáticos tentavam entendê-los melhor.

Em 1872, o matemático alemão Dedekind (1831-1916) finalmente introduziu formalmente na aritmética os números irracionais, revelados nos problemas de Geometria havia mais de vinte séculos.

Dedekind mostrou-se habilidoso em Matemática desde muito jovem. Ingressou na Universidade aos 19 anos e obteve seu doutorado três anos depois. Um de seus orientadores foi nada mais, nada menos que Carl Friedrich Gauss, de quem já falamos na página 10.

Vimos que há infinitos números irracionais. Alguns deles merecem destaque por terem aplicações importantes. Estudamos nesse momento o número irracional que é representado pela letra grega π. Provavelmente a letra foi adotada para representar este número por ser a inicial da palavra grega para perímetro: περίμετρος.

Apesar de, na prática, usarmos aproximações para π, hoje se calcula o valor de π com um número gigantesco de casas decimais. Uma aplicação disso é, por exemplo, testar processadores e sistemas computacionais. O cálculo de bilhões e bilhões de dígitos de π envolve uma quantidade gigantesca de operações aritméticas e lógicas, de modo que, quando o computador as realiza podem-se detectar possíveis problemas.



Krzysztof Zmij/iStockphoto.com

A primeira demonstração de que π é irracional foi apresentada em 1761 por J. H. Lambert (1728-1770), matemático francês radicado na Alemanha.

Seção livre

A matemática dos códigos

CONECTANDO SABERES

A No dia a dia, muitos números – de carteira de identidade, de CPF, de contas bancárias etc. – são utilizados. Geralmente eles apresentam um dígito de verificação, normalmente após o hífen, como em 32176-9. A finalidade desse dígito adicional é evitar erros na digitação ou no preenchimento de documentos com números.

Um dos métodos empregados para gerar o dígito adicional obedece aos seguintes passos:

- multiplica-se o último algarismo do número por 1, o penúltimo por 2, o antepenúltimo por 1, e assim sucessivamente, ou seja, sempre alternando-se multiplicações por 1 e por 2;
- soma-se 1 a cada um dos resultados de tais multiplicações que for igual a 10 ou que for superior a 10;
- somam-se os resultados obtidos;
- calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, obtendo-se assim o dígito verificador.

Para o número 54 286, o dígito verificador obtido pelo processo acima descrito é:

a) 1

- 6 + 17 + 2 + 8 + 5 = 38
- 38 : 10 dá resto 8

b) 3

c) 6

x **d)** 8

B (CPII-RJ) O conhecido *Código de Barras* é uma representação gráfica de dados numéricos, que permite sua captura automática por meio de leitura óptica. Alguns desses códigos utilizam 13 dígitos que são escritos de duas formas: em barras pretas e brancas e também, logo abaixo delas, com os algarismos de nosso sistema de numeração, para que possam ser lidos por uma pessoa, quando necessário.

Para detectar erros de digitação e verificar se o código é válido, após sua leitura, a máquina processa internamente as seguintes operações:

1ª	Multiplica o primeiro dígito do código por 1; o segundo dígito por 3, o terceiro por 1; o quarto por 3; e assim sucessivamente, até o 13º dígito, que será multiplicado por 1.
2ª	Soma todos os produtos obtidos na 1ª operação.
3ª	Verifica se a soma obtida é um múltiplo de 10.

O código será considerado válido se a soma obtida for um múltiplo de 10.

a) Um caixa de um supermercado digitou o seguinte número do código de barras de um artigo:

- 7 + 18 + 1 + 0 + 5 + 0 + 0 + 27 + 0 + 0 + 4 + 0 + 3 = 65
- 65 não é múltiplo de 10

7610500900403

Houve erro de digitação? Sim.

b) O código de barras de um artigo veio com o 4º dígito manchado, como na figura. Determine esse dígito. 1

- 9 + 21 + 8 + 5 + 15 + 9 + 9 + 9 + 3 + 8 + 27 + 4 = 127
  Os resultados de 150 – 127 e 140 – 127 não são múltiplos de 3.
- (130 – 127) : 3 = 1

9 78 559 391894

Hélio Senatore

Revisando

69 Indique dois números:
Há infinitas possibilidades de resposta. Sugestões:

a) inteiros que sejam naturais; 2 e 3

b) inteiros que não sejam naturais; -3 e -2

c) racionais que sejam inteiros; 4 e 5

d) racionais que não sejam inteiros; $\frac{7}{2}$ e 3,8

e) reais que sejam racionais; 0,555... e $-4,1$

f) reais que sejam irracionais. $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$

Compare suas respostas com as de seus colegas.

70 É correto afirmar que toda dízima periódica é um número racional? Sim.

71 Responda no caderno.

Não sou um número natural,
não sou inteiro, não sou racional,
mas sou real. Quem sou eu?

Um número irracional.

72 Sendo $\frac{1}{3} = 0,333...$, calcule na forma de dízima:

a) $\frac{2}{3}$ sabendo que $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ 0,666...

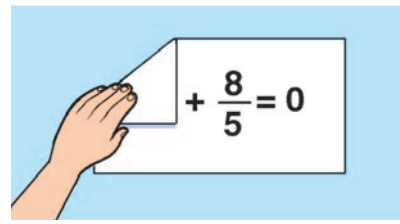
b) $\frac{3}{3}$ sabendo que $\frac{3}{3} = 3 \times \frac{1}{3}$ 0,999...

c) $\frac{5}{3}$ sabendo que $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ 1,666...

Da resolução do item **b** podemos concluir que:

$$0,999... = 1$$

73 Qual é o número racional na forma decimal que está escondido? $-1,6$



Ilustrações: Ilustra Cartoon

74 Sabendo que $41 \cdot 271 = 11\,111$, calcule mentalmente:

a) $123 \cdot 271$ 33 333

b) $22\,222 : 271$ 82

75 Sabendo que $345 : 15 = 23$, escreva o valor dos seguintes quocientes, sem efetuar cálculos:

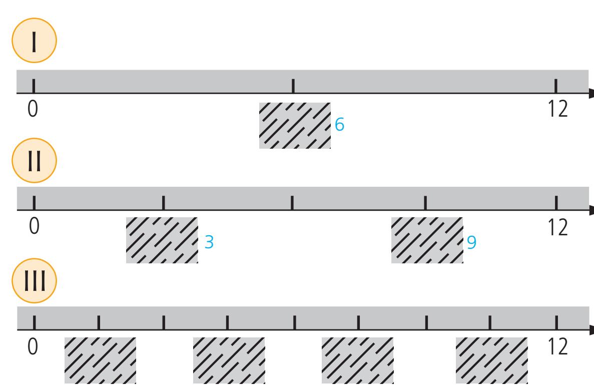
a) $34,5 : 15$ 2,3

b) $34,5 : 1,5$ 23

c) $3,45 : 1,5$ 2,3

d) $345 : 0,15$ 2 300

76 Entre as marcas 0 e 12, que indicam quilômetros numa pista de corrida, foram colocadas outras. Os intervalos indicados por duas marcas consecutivas têm o mesmo comprimento. Descubra os números.



DAE

1,5; 4,5; 7,5; 10,5

a) Dados os números racionais 10,5 e 12, encontre ao menos um número racional entre eles.
Resposta pessoal.

b) Entre dois números racionais existe sempre outro número racional? Sim.

c) O conjunto dos números racionais é infinito?
Sim.

77 Você sabe que $\sqrt{25} = 5$ e que $\sqrt{36} = 6$. Indique cinco números irracionais situados entre 5 e 6. Resposta possível: $\sqrt{26}, \sqrt{28}, \sqrt{30}, \sqrt{32}, \sqrt{35}$.

78 Escreva a dízima correspondente a cada um dos números.

a) $-\dfrac{13}{9}$ $-1{,}444...$ b) $\dfrac{25}{33}$ $0{,}757575...$ c) $\dfrac{114}{45}$ $2{,}5333...$

Se quiser, pode usar a calculadora.

Vicente Costa

79 Escreva em ordem crescente os números reais.

$\dfrac{1}{3}$ $\quad \dfrac{6}{20}$ $\quad 0{,}3222...$ $\quad \dfrac{4}{2}$ $\quad \dfrac{3}{2}$

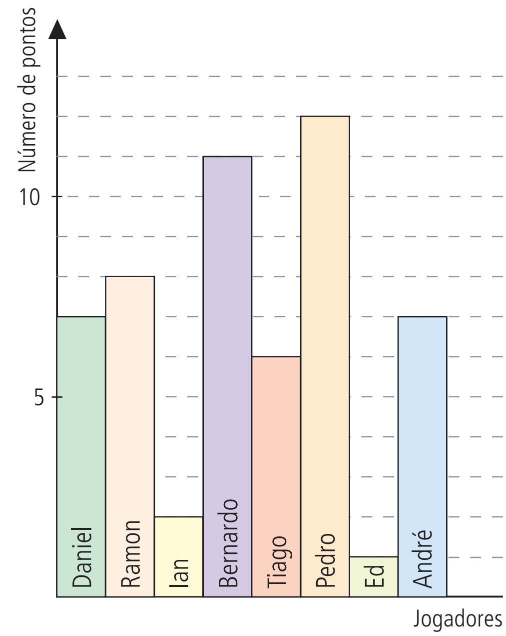
$\dfrac{6}{20}$ $\quad 0{,}3222...$ $\quad \dfrac{1}{3}$ $\quad \dfrac{3}{2}$ $\quad \dfrac{4}{2}$

80 Num supermercado, os DVDs estavam em promoção.

Hélio Senatore

Quanto se pagaria pelos 5 se não estivessem em promoção? R$ 52,50

81 (Obmep) O gráfico mostra o resumo completo do último jogo disputado pelos oito jogadores da seleção de basquete da escola.



DAE

a) Quantos pontos fez Ramon? 8 pontos

b) Qual jogador fez o maior número de pontos? Quantos? Pedro; 12 pontos.

c) Qual foi o número total de pontos marcados pela equipe? 54 pontos

82 O que você pode dizer sobre estes números? São iguais.

$\dfrac{\sqrt{16}}{5}$ $\quad \dfrac{8}{10}$ $\quad \dfrac{4}{5}$ $\quad 0{,}8$

83 Efetue e expresse o resultado na forma de fração irredutível.

a) $\dfrac{1}{4} \cdot 0{,}5 + \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{5}{8}$

b) $\dfrac{9 + 2 \cdot 0{,}5}{3 - (-1)}$ $\dfrac{5}{2}$

c) $\left(2{,}5 + \dfrac{1}{3}\right) : 0{,}75$ $\dfrac{34}{9}$

d) $0{,}111... + \dfrac{4}{3}$ $\dfrac{13}{9}$

84 Dê o valor da expressão:

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{15}\right) + 0{,}999... \quad 2$$

85 Julieta tirou do congelador uma refeição que estava a dois graus negativos. Aqueceu a refeição e a temperatura subiu 27 graus. A que temperatura ficou a refeição? 25 graus

Paulo Pepe

86 Três garotos, Paulo, Rui e Ari, jogam pingue-pongue. Após cada partida, quem perde sai. Sabe-se que Paulo jogou 17 partidas, Rui jogou 13 e Ari jogou 12 partidas. Quantas partidas foram disputadas? 21 partidas $(17 + 13 + 12) : 2 = 21$

Lápis Mágico

87 (Fuvest-SP) Estão construindo um anel rodoviário circular em torno da cidade de São Paulo, distando aproximadamente 20 km da Praça da Sé. Quantos quilômetros deverá ter essa rodovia? 125,6 km aproximadamente

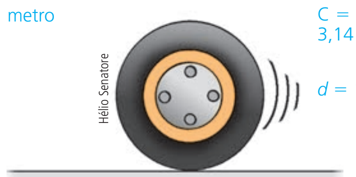
$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 125{,}6$

88 Um pneu anda 21,98 metros para a frente quando dá 7 voltas. Qual é o diâmetro do pneu? 1 metro

$C = 21{,}98 : 7 = 3{,}14$

$3{,}14 = \underbrace{2r}_{d} \cdot 3{,}14$

$d = 1$



Hélio Senatore

Desafios

89 Qual é o maior número inteiro compreendido entre $-\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{3}$? 0

90 Uma piscina está aberta todos os dias da semana. mmc (2, 3, 5) = 30

- Sílvio vai à piscina de 2 em 2 dias.
- Mário vai à piscina de 3 em 3 dias.
- Marcos vai à piscina de 5 em 5 dias.

No domingo, os três se encontram lá.

Ilustra Cartoon

a) Daqui a quantos dias os três voltarão a se encontrar? 30 dias

b) Será em que dia da semana? Terça-feira.

91 (Ufac) Apenas para decolar e pousar, um Boeing 737 consome, em média, 1980 litros de combustível. Para se ter uma ideia, isso representa 90% de todo combustível que ele gasta em uma viagem Rio-São Paulo. Então, qual a quantidade de combustível que o Boeing consome em uma viagem do trecho Rio-São Paulo? 2 200 litros

- 90% ⇒ 1980
- 1% ⇒ 22
- 100% ⇒ 2200

Beisea/Dreamstime.com

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

92 O número 6,54 milhões é igual a:

a) 6 540
b) 65 400
c) 654 000
x d) 6 540 000

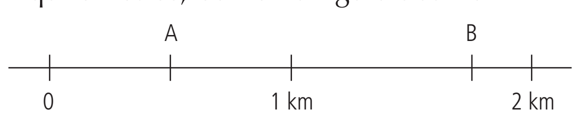
93 O número 8 200 000 000 é igual a:

a) 820 mil
b) 82 bilhões
c) 8,2 milhões
x d) 8,2 bilhões

94 A escrita 8,2 bilhões é lida como:

a) oito bilhões e dois mil.
b) oito bilhões e vinte mil.
c) oito bilhões e duzentos mil.
x d) oito bilhões e duzentos milhões.

95 (Saresp) Joana e seu irmão estão representando uma corrida em uma estrada assinalada em quilômetros, como na figura abaixo:



Joana marcou as posições de dois corredores com os pontos A e B. Esses pontos A e B representam que os corredores já percorreram, respectivamente, em km:

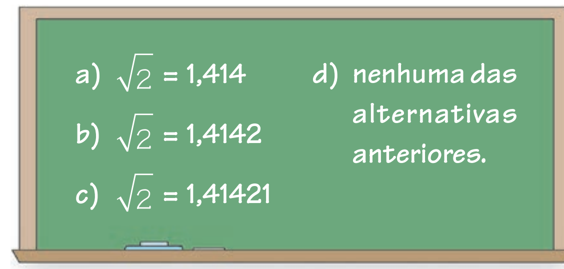
x a) 0,5 e $1\frac{3}{4}$
b) 0,25 e $\frac{10}{4}$
c) $\frac{1}{4}$ e 2,75
d) $\frac{1}{2}$ e 2,38

96 (Saresp) Observe a reta numérica:

Os números A, B e C são, respectivamente:

a) $-\frac{15}{10}$; $-0{,}6$; $\sqrt{2}$
x b) $-1{,}5$; $\frac{6}{10}$; $\sqrt{2}$
c) 1,5; 0,6; 1,5
d) 1,5; $\sqrt{2}$; π

97 (PUC-RJ) Assinale a afirmação verdadeira: d

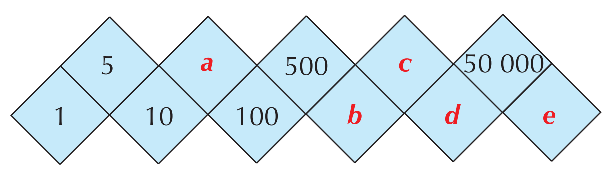


Ilustra Cartoon

98 (PUC-SP) Sabe-se que o produto de dois números irracionais pode ser um número racional. Um exemplo é:

a) $1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$
b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$
c) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36}$
x d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36}$

99 (Uece) As letras *a*, *b*, *c*, *d* e *e*, no quadro, assumem valores que configuram uma situação lógica.



DAE

Assim, $a + c + d$ é igual a:

a) 16 150
b) 15 650
c) 15 500
x d) 15 050

100 O valor de $\frac{0{,}064}{0{,}008}$ é:

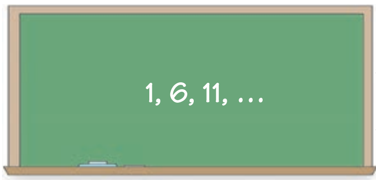
x a) 8
b) 0,8
c) 80
d) 800

101 (UFRN) O valor de $\frac{2}{0{,}666\ldots}$ é:

x a) 3
b) 12
c) 0,333...
d) 1,333...

$\frac{2}{\frac{6}{9}} = 3$

102 (OBM) Joana escreve a sequência de números naturais:



Ilustrações: Ilustra Cartoon

Cada número, com exceção do primeiro, é igual ao anterior mais cinco. Joana para quando encontra o primeiro número de três algarismos. Esse número é:

a) 100
x c) 101
b) 102
d) 103

Os números da sequência, quando divididos por 5, deixam resto 1.

103 728 torcedores do Corinthians pretendem alugar alguns ônibus para ir assistir a um jogo no estádio do Maracanã. Os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

a) 17
c) 19
x b) 18
d) 17,333...

Jayme de Carvalho Jr/Folha Imagem

104 (Cesgranrio-RJ) O valor de:

$$0{,}333\ldots + \frac{7}{2} - \left(\frac{2}{3} + 2\right) \text{ é:}$$

a) $\frac{1}{2}$
x c) $\frac{7}{6}$
b) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{3}{2}$

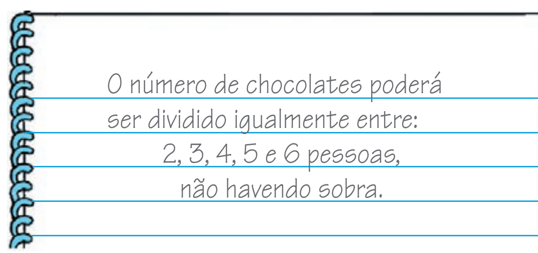
105 (OBM) Qual dos números a seguir está mais próximo de $\frac{60{,}12 \times (0{,}99)^2}{\sqrt{401}}$?

a) 0,3
x c) 3
b) 0,03
d) 30

106 Se $a = 0{,}444\ldots$ e $b = 0{,}333\ldots$, então $b\sqrt{a}$ é igual a:

a) $\frac{1}{9}$
c) $\frac{5}{9}$
x b) $\frac{2}{9}$
d) $\frac{7}{9}$

107 (UFRN) Para os festejos natalinos, uma fábrica de doces lançará uma caixa de chocolates, desse modo:



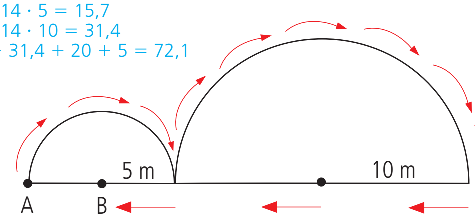
O menor número de chocolates que essa caixa deverá conter será:

a) 30
c) 120
x b) 60
d) 180

mmc (2, 3, 4, 5, 6)

108 A figura abaixo representa o trajeto que uma formiga faz para ir de A até B, utilizando o caminho indicado com setas. Qual distância ela percorre?

$C = 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$
$C = 3{,}14 \cdot 10 = 31{,}4$
$15{,}7 + 31{,}4 + 20 + 5 = 72{,}1$



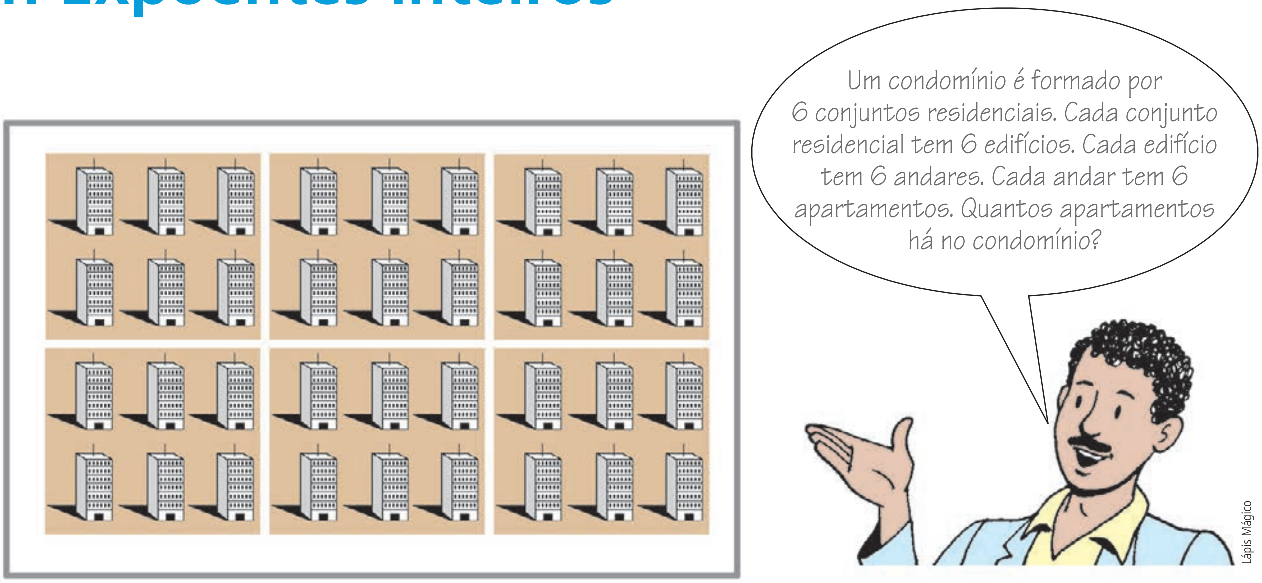
DAE

a) 57,1 m
x c) 72,1 m
b) 62,1 m
d) 77,1 m

UNIDADE 2

Potenciação e notação científica

1. Expoentes inteiros



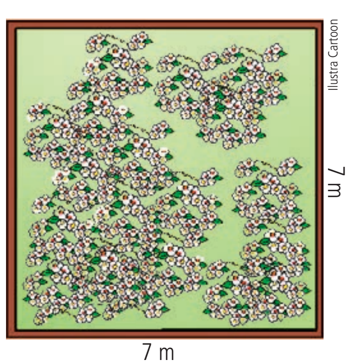
Podemos resolver esse problema calculando $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$. Logo, são 1 296 apartamentos.

Essa multiplicação de fatores iguais pode ser escrita na forma de potência:

6 é a **base** da potência

$$6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$$

4 é o **expoente** da potência



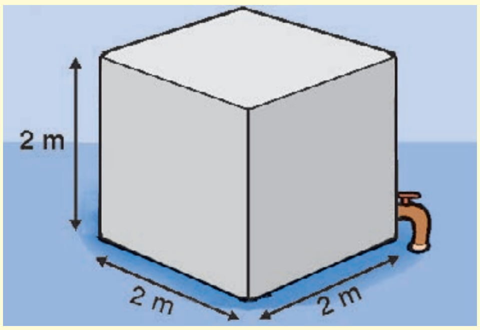
Veja mais situações que envolvem a potenciação.

Para calcular a área desse jardim, elevamos a medida de seu lado ao quadrado. Ou seja, efetuamos uma potenciação.

$$A = 7^2 = 49;\ A = 49\ m^2$$

Quem vai ao quadro para mostrar como calcular o volume desta caixa-d'água cúbica? $V = 2^3 = 8$; 8 m^3

Ilustra Cartoon



Recorde com exemplos o cálculo de algumas potências:

- $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$
- $(-1{,}3)^2 = (-1{,}3) \cdot (-1{,}3) = 1{,}69$
- $7^1 = 7$

Se a é um número diferente de zero, $a^0 = 1$. Então:

- $13^0 = 1$
- $(-4)^0 = 1$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$

Até agora, consideramos o expoente sempre um número natural: 0, 1, 2, 3, 4, ...
Observe as tabelas que construímos:

$3^5 = 243$	
	$: 3$
$3^4 = 81$	
	$: 3$
$3^3 = 27$	
	$: 3$
$3^2 = 9$	
	$: 3$
$3^1 = 3$	
	$: 3$
$3^0 = 1$	

$(-2)^5 = -32$	
	$: (-2)$
$(-2)^4 = 16$	
	$: (-2)$
$(-2)^3 = -8$	
	$: (-2)$
$(-2)^2 = 4$	
	$: (-2)$
$(-2)^1 = -2$	
	$: (-2)$
$(-2)^0 = 1$	

Quem vai ao quadro para montar uma tabela como estas usando a base 5?
Para começar: $5^5 = 3\,125$

$5^5 = 3\,125$	
	$: 5$
$5^4 = 625$	
	$: 5$
$5^3 = 125$	
	$: 5$
$5^2 = 25$	
	$: 5$
$5^1 = 5$	
	$: 5$
$5^0 = 1$	

Podemos construir tabelas semelhantes a essas usando como base outros números diferentes de zero. Se você prestar atenção na construção das tabelas, perceberá que elas obedecem a um padrão. Prosseguindo a construção das tabelas dentro desse padrão, obteremos o valor de potências com expoente negativo.

Copie as tabelas em seu caderno e, com seus colegas, complete-as.

$3^5 = 243$	
$3^4 = 81$	
$3^3 = 27$	
$3^2 = 9$	
$3^1 = 3$	
$3^0 = 1$	
$3^{-1} =$	$\frac{1}{3}$
$3^{-2} =$	$\frac{1}{9}$
$3^{-3} =$	$\frac{1}{27}$

$5^5 = 3\,125$	
$5^4 = 625$	
$5^3 = 125$	
$5^2 = 25$	
$5^1 = 5$	
$5^0 = 1$	
$5^{-1} =$	$\frac{1}{5}$
$5^{-2} =$	$\frac{1}{25}$
$5^{-3} =$	$\frac{1}{125}$

$(-2)^5 = -32$	
$(-2)^4 = 16$	
$(-2)^3 = -8$	
$(-2)^2 = 4$	
$(-2)^1 = -2$	
$(-2)^0 = 1$	
$(-2)^{-1} =$	$-\frac{1}{2}$
$(-2)^{-2} =$	$\frac{1}{4}$
$(-2)^{-3} =$	$-\frac{1}{8}$

Vimos, por exemplo, que:

- $5^{-3} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3}$
- $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8} = -\frac{1}{(-2)^3}$

Se $a \neq 0$ e n é um número inteiro, temos que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ ou}$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Exercícios

1 Considere o produto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Escreva-o como potência de base:

a) 2 2^6

b) 4 4^3

c) 8 8^2

d) 64 64^1

2 Calcule e anote as respostas no caderno.

a) 6^3 216

b) 2^6 64

c) 0^9 0

d) 11^3 1 331

e) 101^2 10 201

f) 400^2 160 000

3 Calcule.

a) $(-1)^4$ 1

b) $(+13)^2$ 169

c) $(-5)^3$ −125

d) $(-10)^5$ −100 000

e) $(-2{,}3)^2$ 5,29

f) $(-0{,}1)^3$ −0,001

4 Calcule.

a) $(-3)^2$ 9

b) -3^2 −9

Por que os resultados são diferentes? No item **a**, o (−3) está elevado a expoente 2, enquanto no **b** o 3 está elevado a expoente 2 e o resultado tem o sinal de menos.

5 Calcule.

a) -7^2 −49

b) $(-7)^2$ 49

c) -2^4 −16

d) $(-2)^4$ 16

e) -4^3 −64

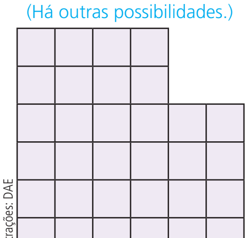
f) $(-4)^3$ −64

g) $-(+2)^5$ −32

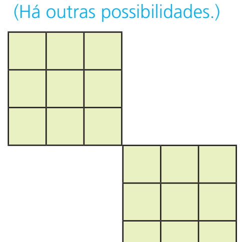
h) $-(-3)^4$ −81

6 Utilizando potências, escreva uma expressão que traduza o número de quadradinhos de cada figura e calcule o valor dessa expressão.

a) $6^2 - 2^2 = 32$ (Há outras possibilidades.)

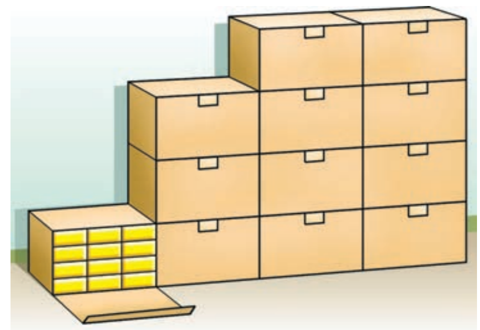


b) $2 \cdot 3^2 = 18$ (Há outras possibilidades.)



Ilustrações: DAE

7 Num depósito há 12 caixas, cada caixa contém 12 estojos e cada estojo contém 12 lápis. Quantos lápis há no total? 1 728 lápis $12^3 = 1\,728$



Ilustra Cartoon

8 Calcule.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ $\frac{9}{25}$

b) $\left(-\frac{4}{7}\right)^2$ $\frac{16}{49}$

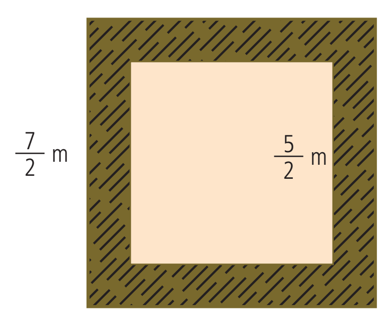
c) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$ $-\frac{1}{125}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ $\frac{1}{16}$

e) $\left(+\frac{1}{3}\right)^5$ $\frac{1}{243}$

f) $\frac{3^2}{2}$ $\frac{9}{2}$

9 No chão de uma sala quadrada há um tapete também quadrado, como mostra a figura abaixo.



DAE

a) Escreva o que se pretende calcular com a expressão: $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$ A área do chão não ocupada pelo tapete.

b) Será que a área do chão sem tapete é 3,5 m²? Não. $\frac{49}{4} - \frac{25}{4} = \frac{24}{4} = 6$

10 Quantos quadrados de 2 cm de lado podem ser obtidos a partir de uma folha de cartolina de 75 cm por 45 cm? 814 quadrados • $37 \cdot 22 = 814$

11 Qual é o expoente?

a) $2^{\square} = 32$ 5

b) $2^{\square} = \frac{1}{32}$ –5

c) $3^{\square} = 81$ 4

d) $3^{\square} = \frac{1}{81}$ –4

e) $10^{\square} = 1000$ 3

f) $10^{\square} = \frac{1}{1000}$ –3

12 Calcule e compare.

a) 5^2 e $(-5)^2$ $25 = 25$

b) 5^{-2} e $(-5)^{-2}$ $\frac{1}{25} = \frac{1}{25}$

c) 5^3 e $(-5)^3$ $125 > -125$

d) 5^{-3} e $(-5)^3$ $\frac{1}{125} > -125$

13 Veja duas maneiras de calcular $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$:

Ilustra Cartoon

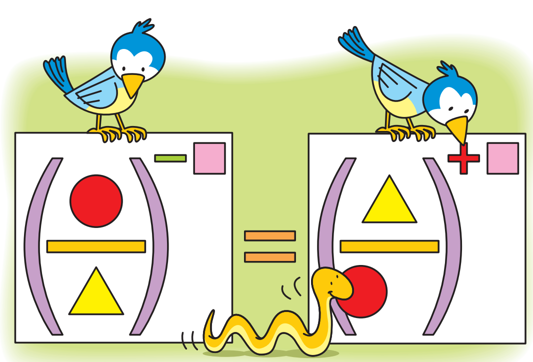
Maneira 1

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16}{25}} = 1 : \frac{16}{25} = \frac{25}{16}$$

Maneira 2

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

inverso da base



Hélio Senatore

Agora calcule mentalmente.

a) Quanto é $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$? $\frac{3}{2}$

b) Quanto é $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$? 8

c) Quanto é $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$? $\frac{4}{25}$

d) Quanto é $\left(-\frac{7}{4}\right)^{-2}$? $\frac{16}{49}$

14 Calcule mentalmente.

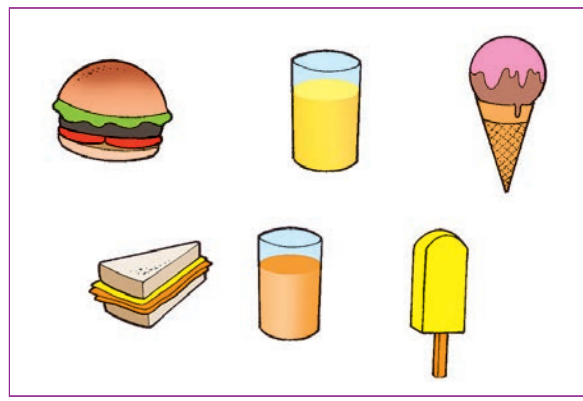
a) $3^{-1} + \frac{2}{3}$ 1

b) $3^{-1} \cdot 9$ 3

c) $7^{-2} \cdot 49$ 1

d) $6^{-2} + \frac{35}{36}$ 1

15 Uma lanchonete oferece dois tipos de sanduíches, dois tipos de sucos e dois tipos de sorvetes. Quantos lanches diferentes podem ser oferecidos, se cada um deve conter um sanduíche, um suco e um sorvete? 8 lanches; $2^3 = 8$



Ilustrações: Ilustra Cartoon

16 Dê o valor de:

a) 87^0 1

b) $(-6)^1$ –6

c) $(0{,}222...)^1$ 0,222...

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^0$ 1

e) $(8{,}333...)^0$ 1

f) $(-7)^0$ 1

g) -7^0 –1

h) $\frac{5^0}{2}$ $\frac{1}{2}$

17 Um garoto colocou na primeira caixa 4 botões e em cada caixa seguinte o quádruplo do número de botões da anterior.

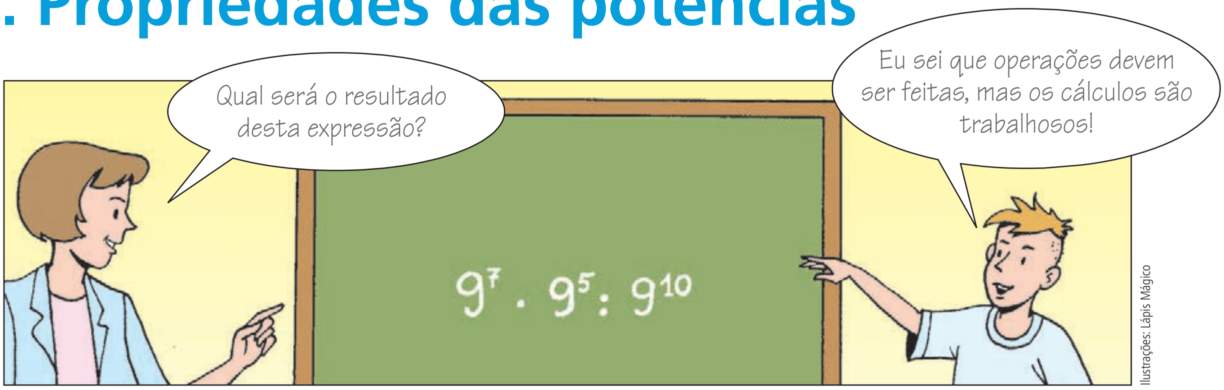
Ilustrações: DAE

a) Quantos botões colocou na 2ª caixa? 16 botões

b) Quantos botões colocou na 3ª caixa? 64 botões

c) Quantos botões guardou ao todo? 84 botões

2. Propriedades das potências



Encontraremos as propriedades a partir de exemplos. No entanto, elas valem para qualquer base.

- O que representa a expressão $7^3 \cdot 7^2$?

$$\begin{aligned} 7^3 \cdot 7^2 &= (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = \\ &= 7^5 \end{aligned}$$

Assim, $7^3 \cdot 7^2 = 7^{3+2} = 7^5$

Para multiplicar potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

Essa propriedade nos leva a outras duas. Acompanhe:

- Qual é o significado da expressão $(5^2)^3$?

$$\begin{aligned} (5^2)^3 &= 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \\ &= 5^6 \end{aligned}$$

Assim $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

Se uma potência está elevada a um expoente, podemos conservar a base e multiplicar os expoentes.

- Qual é o significado da expressão $(2 \cdot 5)^3$?

$$\begin{aligned}(2 \cdot 5)^3 &= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)\\ &= 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5\\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5\\ &= 2^3 \cdot 5^3\end{aligned}$$

Assim: $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$

Não confunda!
- $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$
- $(3 + 5)^2 = 8^2$

Para elevar um produto a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente.

E sobre a divisão de potências de mesma base: o que será que podemos descobrir?

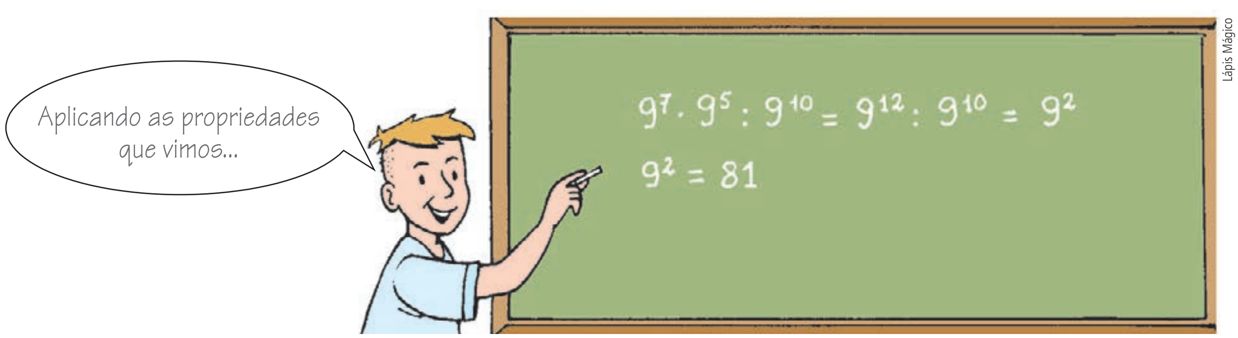
- O que representa a expressão $2^5 : 2^3$?

$$2^5 : 2^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2$$

Assim: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

Para dividir potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

Agora vamos voltar à expressão $9^7 \cdot 9^5 : 9^{10}$ proposta no início desta seção.



Usando as propriedades das potências podemos simplificar expressões e economizar cálculos.

- $6^5 \cdot 6^{-7} \cdot 6^4 = 6^{5+(-7)+4} = 6^2 = 36$

- $\dfrac{11^8 \cdot 11^7}{11^{13}} = \dfrac{11^{15}}{11^{13}} = 11^2 = 121$

Para achar 11^8 na calculadora, devemos digitar 1 1 × e a tecla = por 7 vezes.
Nas calculadoras comuns, esse número não cabe no visor. Por isso é bem mais fácil resolver a expressão aplicando as propriedades das potências.

- $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^6 \cdot \left(-\dfrac{2}{5}\right)^4 : \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{11} = \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{10} : \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{11} = \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-1} = -\dfrac{5}{2}$

- $a^5 \cdot (a^{-4})^2 : a^{-2} = a^5 \cdot a^{-8} : a^{-2} = a^{-3} : a^{-2} = a^{-3-(-2)} = a^{-3+2} = a^{-1} = -\dfrac{1}{a}$

Nesta expressão devemos ter $a \neq 0$.

Exercícios

18 Escreva sob a forma de uma só potência.

a) $a^2 \cdot a \cdot a^4$ a^7

b) $5^8 \cdot 5^{-1} \cdot 5^2$ 5^9

c) $(0,1)^{-2} \cdot (0,1)^{-6}$ $(0,1)^{-8}$

d) $3 \cdot 3^4 \cdot 9$ 3^7

19 Responda.

a) Quanto é o dobro de 2^5? $2^5 \cdot 2 = 2^6$

b) Quanto é o quádruplo de 2^5? $2^5 \cdot 2^2 = 2^7$

20 Aplique as propriedades convenientes.

a) $(3^2)^4$ 3^8

b) $(5^2)^{-1}$ 5^{-2}

c) $(7^{-3})^{-2}$ 7^6

d) $(2 \cdot 3 \cdot 4)^3$ $2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3$

21 Responda.

a) Quanto é o quadrado de 2^5? $(2^5)^2 = 2^{10}$

b) Quanto é o cubo de 2^5? $(2^5)^3 = 2^{15}$

22 Sabendo que $2^{10} = 1\,024$, calcule mentalmente 2^9. 512

23 Certo ou errado?

a) $(5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2$ C

b) $(2 \cdot 5)^3 = 10^3$ C

c) $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$ E

d) $(10 \cdot 10)^2 = 1\,000$ E

24 Calcule mentalmente.

a) $2 \cdot 5$ 10

b) $2^2 \cdot 5^2$ 100

c) $3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$ 300

d) $4^3 \cdot (2,5)^3$ 1 000

e) $2^4 \cdot 5^4$ 10 000

f) $2^5 \cdot 5^4$ 20 000

25 Relacione, em seu caderno, as expressões que têm o mesmo valor.

A $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$	I 49^4
B $(7^2)^4$	II $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
C $(7^2)^2$	III $(7^3)^2$
D $7^4 \cdot 7^2$	IV $7^4 \cdot 7$

A e IV; B e I; C e II; D e III.

26 Qual é o valor de $2^{359} : 2^{356}$? 8

27 Escreva sob a forma de uma só potência.

a) $5^9 : 5^3$? 5^6

b) $6^0 : 6^{-3}$? 6^3

c) $(-0,5)^{10} : (-0,5)^9$? $-0,5$

d) $11^{-5} : 11^3$? 11^{-8}

28 Responda.

a) Qual é a metade de 2^{20}? $2^{20} : 2 = 2^{19}$

b) Qual é a quarta parte de 2^{20}? $2^{20} : 2^2 = 2^{18}$

29 Escreva sob a forma de uma só potência.

a) $(3^8 : 3^7) \cdot 3^4$ 3^5

b) $(10^8 : 10^4) : 10$ 10^3

c) $(10^2)^3 \cdot 10$ 10^7

d) $3^8 : (3 \cdot 3^5)$ 3^2

30 Qual dos números é o maior? 8^{11}

$4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30}$ $16^8 = (2^4)^8 = 2^{32}$
$8^{11} = (2^3)^{11} = 2^{33}$ $32^6 = (2^5)^6 = 2^{30}$

32^6 2^{12} 16^8 4^{15} 8^{11}

Ilustrações: Ilustra Cartoon

Seção livre

O sistema decimal e o sistema binário

CONECTANDO SABERES

O sistema de numeração que usamos é de base dez. Agrupamos de dez em dez.

$8\,367 = 8\,000 + 300 + 60 + 7 =$

$= 8 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7$

$= 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

Grupos de 1 000 (10^3)	Grupos de 100 (10^2)	Grupos de 10 (10^1)	Grupos de 1 (10^0)
8	3	6	7

Os computadores utilizam o sistema binário, ou seja, de base dois. Nesse sistema, os números são escritos somente com os algarismos 0 e 1. Veja como fica o número 7 escrito na base dois:

7 = 4 + 2 + 1 (um grupo de 4, um grupo de 2 e um grupo de 1)

Grupos de 16 (2^4)	Grupos de 8 (2^3)	Grupos de 4 (2^2)	Grupos de 2 (2^1)	Grupos de 1 (2^0)
		1	1	1

→ 7 na base dois fica 111

Como fica no sistema decimal o número que no sistema binário é escrito como 1 101? Veja:

Grupos de 16 (2^4)	Grupos de 8 (2^3)	Grupos de 4 (2^2)	Grupos de 2 (2^1)	Grupos de 1 (2^0)
	1	1	0	1

1 grupo de 8 + 1 grupo de 4 + + 0 grupo de 2 + 1 grupo de 1 = 13

→ $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13$

Vamos usar o sistema binário para criar um código de barras bem simplificado, para, por exemplo, identificar produtos e seus preços.

Combinamos inicialmente que uma barra preta corresponde a 1 e uma barra branca corresponde a 0. Uma leitora ótica registraria o código abaixo, impresso na embalagem de um produto, como 10101, que no sistema decimal corresponde a 21. Esse seria o número de controle desse produto.

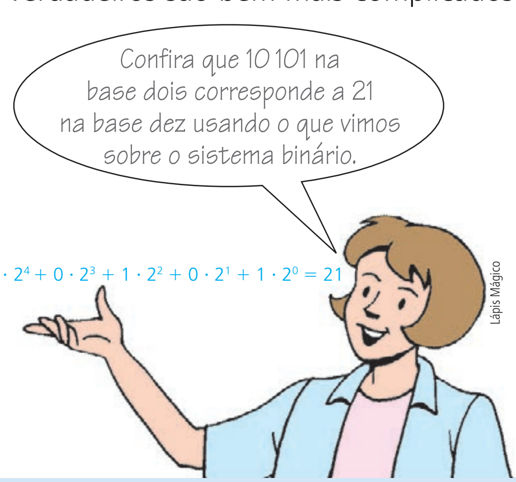
DAE

Consultando a lista de preços, o 21 poderia corresponder ao pirulito de morango que custa R$ 0,30.

É claro que os códigos de barras verdadeiros são bem mais complicados e sofisticados do que esse e fornecem outras informações, como país de origem e fabricante. No entanto, você pode ter uma ideia de como eles funcionam.

Quando você for fazer compras, repare como as máquinas nos caixas leem o código de barras e, numa fração de segundo, aparece na tela o nome e o preço do produto.

Para o dono do estabelecimento esses registros facilitam, por exemplo, o controle de estoques e do movimento do caixa. Tudo isso, graças às contribuições da Matemática!



Lápis Mágico

3. Potências de base 10

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1\,000$
$10^4 = 10\,000$
$10^5 = 100\,000$

O número de zeros é igual ao valor do expoente.

1. Compare o número de zeros do resultado de cada potência com o valor do expoente. O que você observa?
2. Como escrevemos 1 000 000 000 (1 bilhão) usando uma potência de base 10? 10^9
3. O resultado da potência 10^{23} terá quantos zeros? 23 zeros

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

1. Escreva em seu caderno 10^{-4} e 10^{-5} na forma de número decimal. 0,0001 e 0,00001
2. Compare o número de zeros à esquerda do 1 no resultado dessas potências com o valor do expoente. O que você observa? O número de zeros é igual ao valor do expoente.
3. Quem vai ao quadro escrever 0,000 000 001 como uma potência de base dez? 10^{-9}

Exercícios

31 Indique, no caderno, a letra que corresponde à resposta de cada item.

a) Quantos milímetros há em um metro? C

A 10 | B 10^2 | C 10^3 | D 10^4

b) Quantos gramas há em um quilograma? C

A 10 | B 10^2 | C 10^3 | D 10^4

c) Quantos centímetros há em um metro? B

A 10 | B 10^2 | C 10^3 | D 10^4

32 Responda.

a) Quantos zeros devemos colocar após o algarismo 1 ao escrevermos a potência 10^{15}? 15 zeros

b) Quantos algarismos tem o número 10^{15}? 16 algarismos

33 Escreva conforme o exemplo:

$$5\,000 = 5 \cdot 1\,000 = 5 \cdot 10^3$$

a) 700 $7 \cdot 10^2$

b) 34 000 $34 \cdot 10^3$

c) 370 000 $37 \cdot 10^4$

d) 6 000 000 000 $6 \cdot 10^9$

34 Observe e complete no caderno:

- $(0{,}1)^1 = 0{,}1$
- $(0{,}1)^2 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = \underbrace{0{,}01}_{2\text{ zeros}}$
- $(0{,}1)^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = \underbrace{0{,}001}_{3\text{ zeros}}$

a) $(0{,}1)^4 =$ 0,0001

b) $(0{,}1)^5 =$ 0,00001

35 Escreva na forma de uma potência de base 10.

a) 1 000 10^3

b) 0,001 10^{-3}

c) 10 000 10^4

d) 0,0001 10^{-4}

e) 1 000 000 10^6

f) 0,000 001 10^{-6}

36 Qual destes números é o maior? $1\,000^6$

100^8 | 1000^6 | $10\,000^4$

$100^8 = (10^2)^8 = 10^{16}$ | $1\,000^6 = (10^3)^6 = 10^{18}$ | $10\,000^4 = (10^4)^4 = 10^{16}$

4. Multiplicação por potências de base 10

Lembrando...

$0{,}321 \cdot 10 = 3{,}21$ ⟶ multiplicamos por 10: a vírgula se desloca 1 casa para a direita.

$0{,}321 \cdot 10^2 = 32{,}1$ ⟶ multiplicamos por 100: a vírgula se desloca 2 casas para a direita.

$0{,}321 \cdot 10^3 = 321$ ⟶ multiplicamos por 1 000: a vírgula se desloca 3 casas para a direita.

Você percebeu o padrão?

Quando multiplicamos um número decimal por 10, 10^2, 10^3, ..., a vírgula se desloca para a direita o número de casas indicado no expoente.

Veja:

$56{,}4 \cdot 10^{-1} = 56{,}4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{56{,}4}{10} = 5{,}64$ ⟶ a vírgula se desloca uma casa para a esquerda.

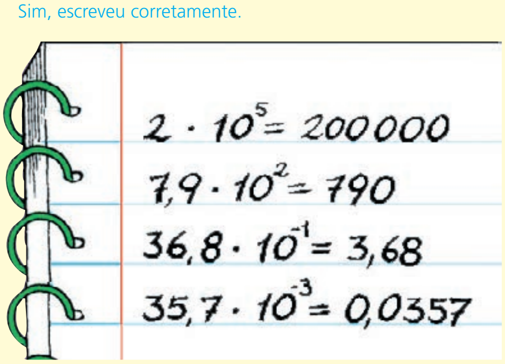
$56{,}4 \cdot 10^{-2} = 56{,}4 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}564$ ⟶ a vírgula se desloca duas casas para a esquerda.

Multiplicar por 10^{-2} é dividir por 100.

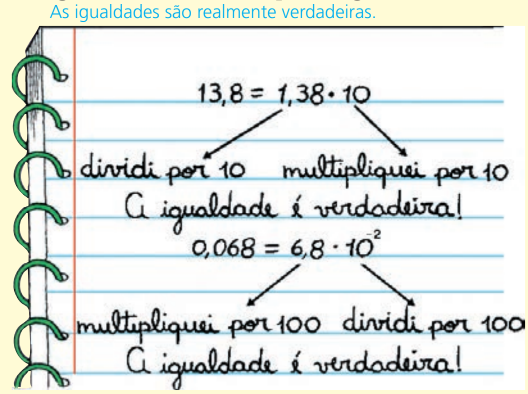
$56{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}0564$, pois multiplicar por 10^{-3} é o mesmo que dividir por 1 000, então a vírgula se desloca três casas para a esquerda.

1. Procure, com ajuda dos colegas, resumir em palavras o que ocorre quando multiplicamos um número decimal por 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ... A vírgula se desloca para a esquerda o número de casas igual ao valor absoluto do expoente.

2. Veja se Ana Lúcia escreveu corretamente as potências em seu caderno:
Sim, escreveu corretamente.



3. Agora confira se são verdadeiras as igualdades escritas por Rogério:
As igualdades são realmente verdadeiras.



Ilustrações: Ilustra Cartoon

Exercícios

37 A banda The Beatles, dos anos 60, já vendeu mais de um bilhão de discos. Escreva esse número na forma de potência de base 10. 10^9

Fonte de pesquisa:<super.abril.com.br/cultura/beatles-forever-463931.shtml> Acesso em: jan. 2011.

Keystone

◆ Ringo Star, George Harrison, Paul McCartney e John Lennon formavam a banda The Beatles.

38 Uma pessoa bebe, em média, 1,75 litro de água por dia. Mantida essa média de consumo de água por pessoa, quantos litros beberão num dia:

a) 10 pessoas? 17,5 litros

b) 100 pessoas? 175 litros

c) 1 000 pessoas? 1 750 litros

d) 10 000 pessoas? 17 500 litros

Donnarae/Dreamstime.com

39 Um comerciante comprou 10 000 latinhas de refrigerante de 0,35 litro cada uma. Quantos litros de refrigerante esse comerciante comprou? 3 500 litros

40 Um carro gasta 9 litros de gasolina ao rodar 100 km. Se mantiver sempre esse consumo, quanto gastará:

a) em 1 000 km? 90 litros

b) em 10 km? 0,9 litros

c) em 1 km? 0,09 litros

d) em 20 km? 1,8 litros

Jan Martin Will/Dreamstime.com

41 Copie e complete.

	8 040 2,5	80 400 25	804 000 250	80,4 0,025	8,04 0,0025	0,804 0,00025
	10^1 ↑	10^2 ↑	10^3 ↑	10^{-1} ↑	10^{-2} ↑	10^{-3} ↑
×	**10**	**100**	**1000**	**0,1**	**0,01**	**0,001**
804						
0,25						
6 000						
18,3						
	60 000 183	600 000 1 830	6 000 000 18 300	600 1,83	60 0,183	6 0,0183

42 Qual é o expoente?

a) $0{,}06 = 6 \cdot 10^{\square}$ -2

b) $240 = 2{,}4 \cdot 10^{\square}$ 2

c) $13{,}05 = 1{,}305 \cdot 10^{\square}$ 1

d) $85\,000 = 8{,}5 \cdot 10^{\square}$ 4

e) $0{,}00439 = 4{,}39 \cdot 10^{\square}$ -3

43 Use uma potência de 10 para escrever em centímetros:

a) 10 m 10^3 cm

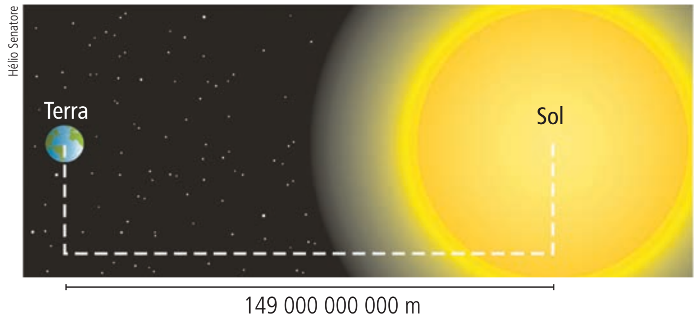
b) 1 km 10^5 cm

c) 1 mm 10^{-1} cm

5. Notação científica

Os cientistas, em suas experiências e estudos, lidam com muitas medidas.

A distância da Terra ao Sol, por exemplo, é de 149 000 000 000 m.



A proporção entre os tamanhos e a distância não está de acordo com os dados reais. Foram usadas cores-fantasia.

A espessura de uma fibra nervosa de nosso corpo, responsável por transmitir sensações como a do tato, é de 0,000 008 m.

Essas medidas apresentam muitos algarismos. Usando as potências de base dez, podemos registrá-las de modo mais simples, evitando erros.

$$149\,000\,000\,000 \text{ m} = 1{,}49 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Como a vírgula foi deslocada 11 casas para a esquerda, multiplicamos por 10^{11} para que a igualdade ficasse verdadeira.

Obtivemos um número entre 1 e 10 multiplicado por uma potência de base 10: esse número está escrito na **notação científica**.

No caso da fibra nervosa, temos:

$$0{,}000\,008 \text{ m} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Como a vírgula se deslocou 6 casas para a direita, multiplicamos por 10^{-6}.

Veja mais exemplos de medidas registradas na notação científica:

1. Velocidade da luz: 300 000 km/s $= 3 \cdot 10^5$ km/s

2. Ano-luz (distância que a luz percorre em um ano) = 9 460 000 000 000 km $= 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

3. Massa do próton (partícula do átomo): 0,000 000 000 000 000 000 000 001 67 g $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g

Seção livre

Você lembra o que é miligrama (mg)? É a milésima parte do grama.

Ilustrações: Ilustra Cartoon

A Marcos trabalha numa indústria farmacêutica. Com uma balança muito precisa ele mediu a massa de certa substância presente na composição de um remédio: 0,5 mg.
Ele precisa converter essa medida para gramas e então escrevê-la na notação científica. Você e seus colegas podem ajudá-lo? $5 \cdot 10^{-4}$ g

B Com os colegas, procurem, em jornais, revistas, livros ou na internet, números com muitos algarismos. Por exemplo: população da Terra, massa de bactérias, de vírus, distância da Terra a outros planetas ou estrelas, número e tamanho aproximado de células do corpo humano etc.
Recortem e montem cartazes com essas informações, escrevendo cada número na notação científica. Exponham os cartazes nos corredores ou no pátio da escola. Um dos cartazes pode explicar para as pessoas o que é notação científica e as vantagens de sua utilização.

CONECTANDO SABERES

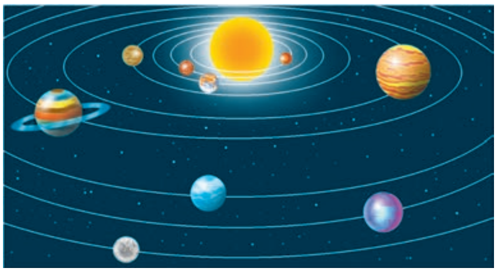
Exercícios

44 No caderno, represente a sequência de números usando a notação científica.

$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^1$	$3 \cdot 10^0$
3 000	300	30	3
$3 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
0,3	0,03	0,003	0,0003

45 Na tabela estão indicadas as distâncias aproximadas de alguns planetas em relação ao Sol. Escreva esses números usando a notação científica.

CONECTANDO SABERES



DAE

Imagem ilustrativa, sem escalas proporcionais.

Mercúrio	57 900 000 km
Vênus	108 900 000 km

Mercúrio: $5,79 \cdot 10^7$ km; Vênus: $1,089 \cdot 10^8$ km.

46 Escreva, em notação científica, os números que aparecem nas frases.

CONECTANDO SABERES

a) A espessura de uma folha de papel é de 0,002 mm. $2 \cdot 10^{-3}$ mm

b) O tamanho do vírus da gripe é de 0,000 000 002 3 m. $2,3 \cdot 10^{-9}$ m

47 O número de glóbulos vermelhos de um adulto é de $2,5 \cdot 10^{10}$. Escreva esse número na notação decimal. 25 000 000 000

CONECTANDO SABERES

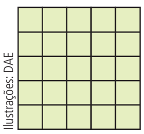
48 Carlos, um jardineiro bastante esperto, está tentando calcular o número de sementes existentes em um pacote que contém 48 gramas. Retirou do pacote 30 sementes, cujo peso é de $6 \cdot 10^{-2}$ gramas.

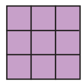
Com essa amostra e com o auxílio de uma calculadora estime o número total de sementes que há no pacote. 24 000 sementes

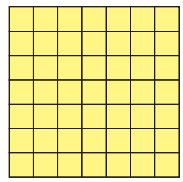
30 sementes $= 6 \cdot 10^{-2}$ gramas $= 6 \cdot 0,01 = 0,06$ g
$48 : 0,06 = 800$ $\quad 800 \cdot 30 = 24\,000$ sementes

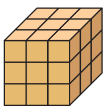
Revisando

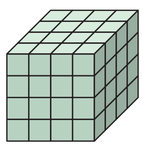
49 Quantos quadradinhos, ou cubinhos, tem cada figura? Represente esse número como potência.

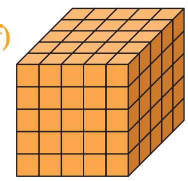
a) 
Ilustrações: DAE
$5^2 = 25$

b) 
$3^2 = 9$

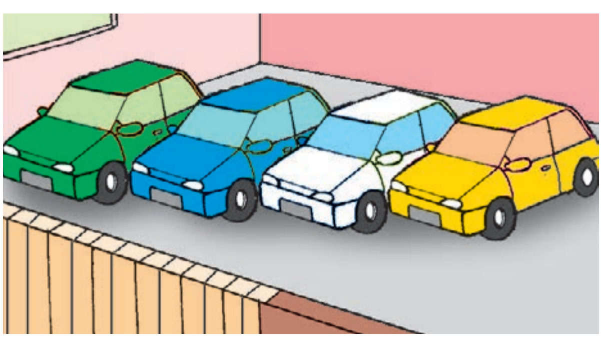
c) 
$7^2 = 49$

d) 
$3^3 = 27$

e) 
$4^3 = 64$

f) 
$5^3 = 125$

50 Numa garagem há 4 automóveis, em cada automóvel há 4 rodas, e em cada roda há 4 parafusos. Qual é o total de parafusos de todas as rodas desses automóveis? 64 parafusos • $4^3 = 64$


Ilustra Cartoon

51 Calcule mentalmente.

a) 17^1 17
b) 0^{25} 0
c) 10^4 10 000
d) 1^{20} 1
e) $(-0{,}1)^3$ −0,001
f) $\left(-\frac{7}{8}\right)^2$ $\frac{49}{64}$

52 Calcule.

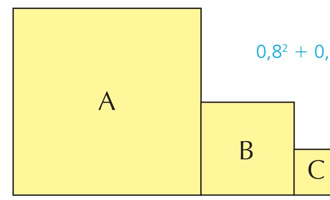
a) 2^4 16
b) 4^2 16
c) $(-4)^2$ 16
d) 4^{-2} $\frac{1}{16}$
e) $(-2)^4$ 16
f) $(-2)^{-4}$ $\frac{1}{16}$

53 Qual é o expoente?

a) $11^{\blacksquare} = 121$ 2
b) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\blacksquare} = \frac{25}{49}$ 2
c) $10^{\blacksquare} = 100\,000$ 5
d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\blacksquare} = -\frac{1}{8}$ 3
e) $100^{\blacksquare} = 10\,000$ 2
f) $(-4)^{\blacksquare} = -64$ 3

54 Na figura:

- o lado do quadrado A é 0,8 m;
- o lado do quadrado B é metade do lado do quadrado A;
- o lado do quadrado C é metade do lado do quadrado B.



$0{,}8^2 + 0{,}4^2 + 0{,}2^2 = 0{,}84$

Qual a área total da figura? 0,84 m²

55 Qual é a soma do quadrado de $\frac{2}{3}$ com o dobro de $\frac{1}{9}$? $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

56 Calcule.

a) $-5^2 + 1 - 74^0$ −25
b) $(-8)^2 - 2 - (-1)$ 63
c) $(1 - 2{,}5)^2$ 2,25
d) $3^2 + 3^{-2}$ $\frac{82}{9}$
e) $5^0 - (-1) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ $\frac{7}{4}$
f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 6

57 Escreva os números dos cartões em ordem crescente. C, D, B, E, F, A

A	B	C	D	E	F
2^5	10	$(-2)^3$	5^{-2}	5^2	3^3

58 Em seu caderno, indique as expressões que têm o mesmo valor.

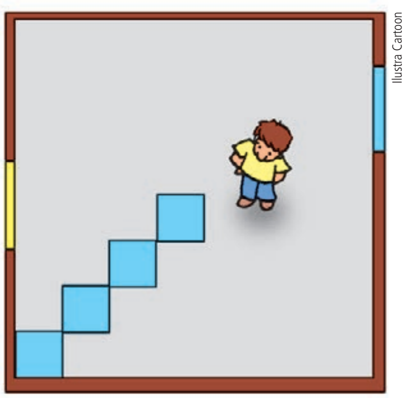
A) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
B) $(5^2)^4$
C) $(5^2)^2$
D) $5^4 \cdot 5^2$
E) 25^4
F) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
G) $(5^3)^2$
H) $5^4 \cdot 5$

A e H
B e E
C e F
D e G

59 Qual cartão representa valor diferente dos demais? C

A	B	C	D
$(5^2)^3$	$(5^3)^2$	5^{3^2}	5^6

60 O piso de uma sala quadrada é revestido de mosaicos quadrados. Quantos mosaicos são necessários se na diagonal estiverem 8 mosaicos? E se na diagonal estiverem 12? E *n*? 64; 144; n^2



Ilustra Cartoon

61 Calcule.

a) $\dfrac{4^5}{4^3}$ 16 b) $\dfrac{-4^5}{4^3}$ −16 c) $\dfrac{-4^5}{-4^3}$ 16 d) $\dfrac{(4^2)^3}{4^5}$ 4

62 Observe os cálculos e responda.

$$(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$$
$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

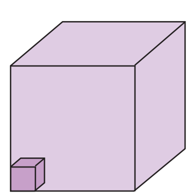
$$(5 - 2)^2 = 3^2 = 9$$
$$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

a) $(a + b)^2$ deve ser igual a $a^2 + b^2$? Não.

b) $(a - b)^2$ deve ser igual a $a^2 - b^2$? Não.

63 Quantos cubos de 2 cm de aresta cabem num cubo de 8 cm de aresta? 64 cubos

$512 : 8 = 64$



DAE

64 Sabendo que $39^2 = 1\,521$, calcule mentalmente.

a) $3{,}9^2$ 15,21 b) $0{,}39^2$ 0,1521 c) 390^2 152 100

65 Calcule.

a) 10^3 1 000 (um mil) b) 10^6 1 000 000 (um milhão) c) 10^9 1 000 000 000 (um bilhão) d) 10^{12} 1 000 000 000 000 (um trilhão)

Em seguida escreva no caderno como se leem os números obtidos.

66 Escreva, em notação científica, os números que aparecem nas frases.

a) Num cérebro há 14 000 000 000 de neurônios. $1{,}4 \cdot 10^{10}$

b) Um vírus tem 0,000 000 000 25 cm de diâmetro. $2{,}5 \cdot 10^{-10}$

67 O percurso do Rali Lisboa-Dacar tem 7 915 km. Escreva esta distância em metros usando a notação científica. $7{,}915 \cdot 10^6$ m

© DAE/Selma Caparroz

Fonte: <www.dakar.com/2007/DAK/presentation/pt/r3_5-le-parcours.html>. Acesso em: jun. 2011.

68 Num domingo, três pessoas ouviram um segredo. Cada uma delas repetiu esse segredo a três pessoas diferentes no dia seguinte. E o segredo continuou a ser divulgado da mesma maneira. Quantas pessoas souberam o segredo na quinta-feira? 243 pessoas • $3^5 = 243$

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta
3 pessoas				

69 Será possível equilibrar numa balança quatro cubos feitos do mesmo material com 6, 8, 10 e 12 cm de aresta? É possível porque $6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$.

70 Qual cartão registra valor diferente dos demais? C

A	B	C	D
$(-3)^2$	$\dfrac{1}{3^{-2}}$	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$	$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1}$

71 Escreva na forma de potência de base 3.

a) O quadrado de 3^5. $(3^5)^2 = 3^{10}$

b) O triplo de 3^6. $3 \cdot 3^6 = 3^7$

c) $\dfrac{1}{3}$ de 3^9 $\dfrac{1}{3} \cdot 3^9 = 3^8$

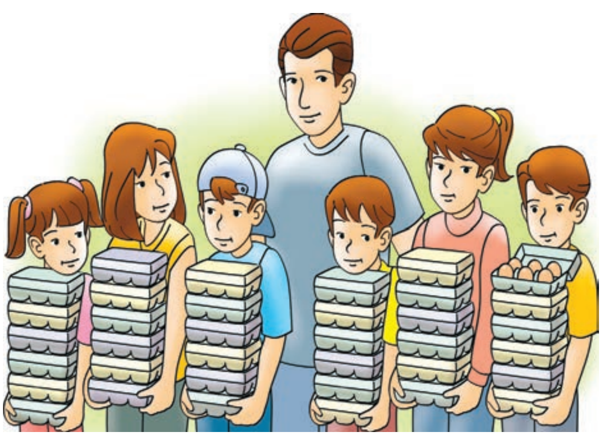
d) $\dfrac{1}{9}$ de 3^{12} $\dfrac{1}{9} \cdot 3^{12} = 3^{10}$

72 Eu ia a caminho do mercado.

Encontrei um homem com seis filhos.

Cada filho levava seis caixinhas.

Cada caixinha continha seis ovos.



Hélio Senatore

a) Quantas caixinhas estavam sendo levadas para o mercado? 36 caixinhas

b) Quantos ovos estavam sendo levados para o mercado? 216 ovos

73 Complete o quadrado mágico em seu caderno.

3^2	3^7	3^6
3^9	3^5	3
3^4	3^3	3^8

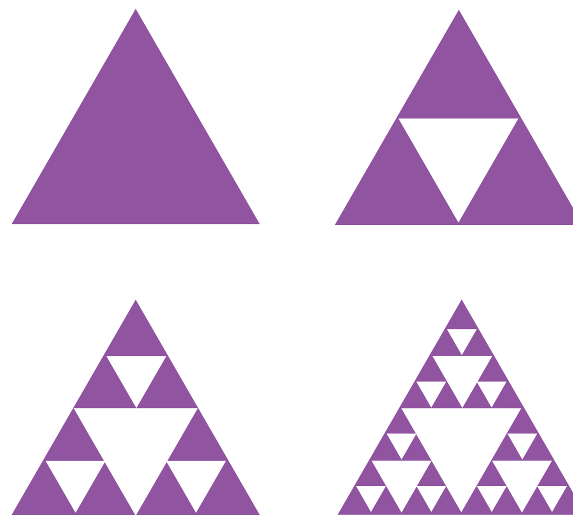
Desafios

74 Qual é o valor das expressões?

a) $\dfrac{93^2}{31^2}$ 9

b) $\dfrac{51^4}{102^4}$ $\dfrac{1}{16}$

75 Veja como a sequência a seguir é formada de uma maneira muito curiosa.



Ilustrações: DAE

a) Qual é o número de triângulos roxos em cada figura? 1, 3, 9, 27 triângulos roxos

b) Qual será o número de triângulos roxos na próxima figura? 81 triângulos roxos

76 Paula, uma cliente muito exigente, sempre aborrecia a sua costureira com insistentes pedidos de descontos. Certa vez, ao confeccionar uma roupa pela qual normalmente cobraria R$ 120,00, a costureira, já cansada, disse a ela:

– Eu faço a roupa de graça e você me paga apenas a colocação dos 7 botões, da seguinte forma: 1 real pelo primeiro botão, 2 reais pelo segundo, 4 reais pelo terceiro, 8 reais pelo quarto e assim por diante...

Paula ficou entusiasmada e aceitou o negócio. Quem saiu ganhando?

A costureira. 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

77 $5^2 - 3^2$ e $(5 - 3)^2$ são, respectivamente, iguais a:

a) 4 e 4 x c) 16 e 4

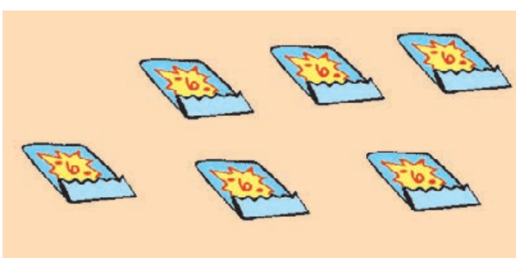
b) 4 e 16 d) 16 e 16

78 $(5^6 \cdot 5^{-2}) : 5^4$ é igual a:

a) 0 c) 5^{-3}

x b) 1 d) 5^{-8}

79 Manuel deu, a cada um dos seus 6 amigos, 6 pacotes com 6 figurinhas cada. Quantas figurinhas ele deu, no total?



Ilustra Cartoon

a) 18 b) 36 c) 42 x d) 216

80 O resultado de
$9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5$ é:
$9 \cdot 9^5 = 9^6$

x a) 9^6 c) 81^{45}

b) 81^6 d) 9^{45}

81 Quantos metros há em 1 000 000 km?

a) 10^3 x c) 10^9

b) 10^6 d) 10^{12}

82 Um número é expresso por $(3^6 : 3^4) + 2 \cdot 3^2$. Outra forma de expressar esse número é:

x a) 3^3 c) $2 \cdot 3^4$

b) 3^4 d) $2 \cdot 6^2$

83 O número $(0{,}666...)^2$ é igual a:

a) 0,366 6... x c) 0,444...

b) 0,363 6... d) 0,133 3...

84 Qual é o valor que mais se aproxima do lado do azulejo quadrado cuja área é 30 cm²?

Sandra Fanzeres

a) 5,3 cm c) 5,6 cm

x b) 5,4 cm d) 5,7 cm

85 (PUC-SP) O valor da expressão $\dfrac{10^{-3} \cdot 10^5}{10 \cdot 10^4}$ é:

a) 10 c) 10^{-2}

b) 10^3 x d) 10^{-3} $\dfrac{10^2}{10^5} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$

86 (UFGO) Para cobrir o piso de um banheiro de 1,00 m de largura por 2,00 m de comprimento, com cerâmicas quadradas medindo 20 cm de lado, o número necessário de cerâmicas é:

a) 30 c) 75

x b) 50 d) 100

Área = 100 · 200 = 20 000 cm²
Cerâmica = 20 · 20 = 400 cm²
Quantidade de cerâmicas = 20 000 : 400 = 50

87 O valor de $\dfrac{3^{-1} + 5^{-1}}{2^{-1}}$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{4}{15}$ $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{16}{15}$

b) $\dfrac{1}{8}$ x d) $\dfrac{16}{15}$

88 Para revestir um quadrado de 2 metros de lado são precisos 120 azulejos. E para revestir um quadrado de 1 metro de lado?

x **a)** 30 azulejos

b) 60 azulejos

c) 90 azulejos

d) 240 azulejos

89 O valor de $\dfrac{4 \cdot (0,3)^2}{2 - 1,4}$ é:

a) 3 **b)** 6 **c)** 0,3 x **d)** 0,6

90 (Vunesp) Ao escalar uma montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora, 128 m na segunda hora, 64 m na terceira hora, e assim sucessivamente. Quando tiver percorrido 496 m, terão passado: 256 + 128 + 64 + 32 + 16

a) 4 horas.

x **b)** 5 horas.

c) 4 horas e 30 minutos.

d) 5 horas e 30 minutos.

Michael Svoboda/Dreamstime.com

91 O número 0,000 007 84 é escrito na forma $7,84 \cdot 10^n$. O valor de n é:

a) 6

b) 8

x **c)** –6

d) –8

92 Se você pudesse enfileirar átomos de hidrogênio, seriam necessários cerca de 20 bilhões de átomos para formar uma fila de 2 metros. O número 20 bilhões expresso em notação científica é igual a:

a) $2 \cdot 10^9$

b) $2 \cdot 10^{12}$

x **c)** $2 \cdot 10^{10}$

d) $2 \cdot 10^{-10}$

93 (Feso-RJ) Um torneio de tênis é disputado por 32 jogadores, que são agrupados em pares. Os jogadores de cada par se enfrentam e os perdedores são eliminados – não há empates. Os vencedores são agrupados em novos pares e assim por diante até que reste apenas o campeão. Quantas partidas são disputadas?

16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31

Photodisc

a) 30 x **b)** 31 **c)** 60 **d)** 61

94 Uma colônia de bactérias isolada para cultura se reproduz tão rapidamente que dobra de volume nas cubas a cada minuto. Sabendo que em 6 minutos uma cuba fica totalmente cheia, determine em quantos minutos as bactérias ocupam a metade da cuba.

a) 3 minutos

b) 4 minutos

x **c)** 5 minutos

d) 2 minutos

95 Um salão de forma quadrada vai ser revestido com mosaicos como mostra a figura. Os mosaicos das diagonais são pretos e os restantes são brancos. Se forem usados 101 mosaicos pretos, qual será o número total de mosaicos brancos?

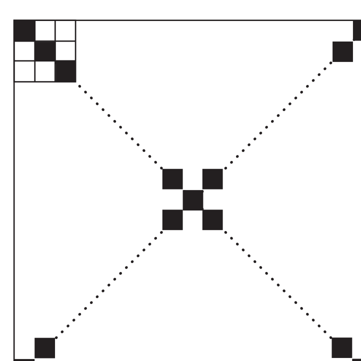
(51 × 51) – 101 = 2 500

a) 2 300

b) 2 399

x **c)** 2 500

d) 2 601



DAE

UNIDADE 3

Radiciação

1. Aprendendo mais sobre raízes

Sabemos que:

- $\sqrt{25} = 5$, porque $5^2 = 25$
- $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, porque $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$
- $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$, porque $0{,}7^2 = 0{,}49$

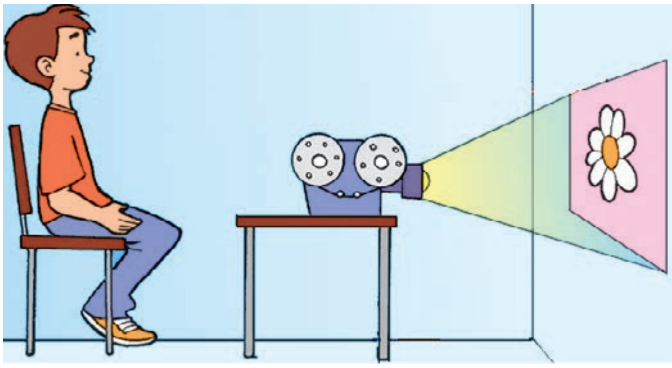
Lembre-se!
Embora tenhamos que $(-5)^2 = 25$, o símbolo $\sqrt{25}$ indica a raiz quadrada positiva de 25.

e assim por diante.

O problema a seguir envolve o cálculo de uma raiz quadrada. Acompanhe.

Em determinado projetor, a área A da imagem projetada depende da distância x do projetor à tela. A fórmula matemática que representa essa relação é:

$$A = \frac{1}{9}x^2$$



Ilustra Cartoon

A área da imagem projetada é igual a $\frac{1}{9}$ do quadrado da distância do projetor à tela.

Um professor quer obter uma imagem com 4 m². A que distância da tela ele deve colocar o projetor?

Para que a área A seja de 4 m², devemos ter $4 = \frac{1}{9}x^2$.

Se a nona parte de x^2 é 4, temos que $x^2 = 4 \cdot 9 = 36$.
Se $x^2 = 36$, então $x = \sqrt{36}$, ou seja, $x = 6$.
Logo, o projetor deve ficar a 6 m da tela.

Agora acompanhe outra situação:

Um reservatório de água terá a forma de um cubo. Nele devem caber 64 000 litros de água. Qual deverá ser a medida de sua aresta?

Lembrando que $1 \text{ m}^3 = 1\,000$ L, o volume do reservatório deve ser igual a 64 m^3.

O volume V de um cubo de aresta *a* é $V = a \cdot a \cdot a = a^3$

Nesta situação, $a^3 = 64$.

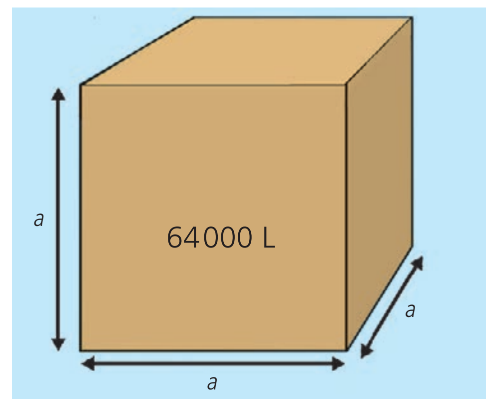
Qual número elevado ao cubo dá 64?

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ É pouco...

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Encontramos a medida procurada: a aresta do cubo deve medir 4 m.

4 é a raiz cúbica de 64, ou seja, $\sqrt[3]{64} = 4$, porque $4^3 = 64$



Daí,

- $\sqrt[3]{1\,000} = 10$, porque $10^3 = 1000$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}} = \dfrac{1}{5}$, porque $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 = \dfrac{1}{125}$

- Qual é a raiz cúbica de 27? 3
- E a raiz cúbica de -27? (-3)

- $\sqrt[4]{81} = 3$, porque $3^4 = 81$
- $\sqrt[5]{-32} = -2$, porque $(-2)^5 = -32$
- $\sqrt[6]{1} = 1$, porque $1^6 = 1$

Conheça algumas denominações:

índice

$\sqrt[4]{81}$ radicando

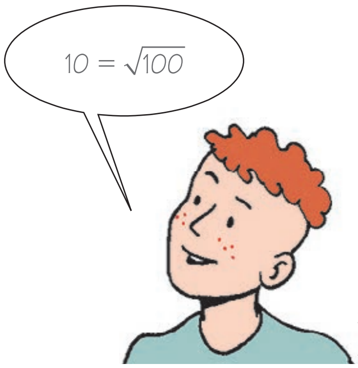
símbolo da raiz

Leitura do radical: raiz quarta de 81.

Nas raízes quadradas não é necessário escrever o índice 2.

Exercícios

1 Expresse cada número como uma raiz quadrada.



Lápis Mágico

a) 5 $\sqrt{25}$

b) 0 $\sqrt{0}$

c) 16 $\sqrt{256}$

d) $7{,}1$ $\sqrt{50{,}41}$

e) $0{,}3$ $\sqrt{0{,}09}$

f) $\frac{2}{5}$ $\sqrt{\frac{4}{25}}$

2 Calcule mentalmente.

a) $\sqrt{36}$ 6

b) $\sqrt{4}$ 2

c) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ $\frac{1}{3}$

d) $\sqrt{0{,}36}$ 0,6

e) $\sqrt{0{,}04}$ 0,2

f) $\sqrt{\frac{81}{25}}$ $\frac{9}{5}$

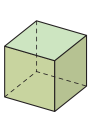
3 Um quadrado tem 49 cm^2 de área. Qual é seu perímetro? 28 cm

4 O piso de uma cozinha quadrada está revestido com 256 mosaicos quadrados. Quantos mosaicos há em cada lado do piso? 16 mosaicos

5 O cubo de -2 é igual a -8. Qual será a raiz cúbica de -8? -2

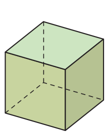
6 Observe os cubos representados na figura:

a)



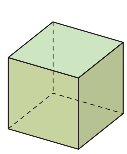
$a = 0{,}2$ m
0,008 m^3

b)



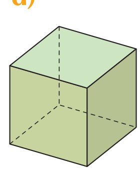
$V = 8$ m^3
2 m

c)



$a = 2{,}1$ m
9,261 m^3

d)



$V = 27$ m^3
3 m

Ilustrações: DAE

Se você conhece a aresta, determine o volume, e, se você conhece o volume, determine a aresta.

7 Calcule mentalmente.

a) $\sqrt[3]{0}$ 0

b) $\sqrt[3]{1}$ 1

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ $\frac{1}{2}$

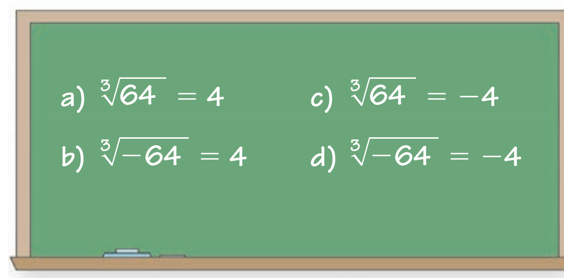
d) $\sqrt[3]{125}$ 5

e) $\sqrt[3]{0{,}001}$ 0,1

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ $\frac{1}{3}$

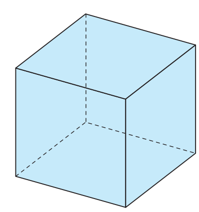
8 Quais igualdades são verdadeiras?

a) V b) F c) F d) V



Ilustra Cartoon

9 Copie e complete a tabela no caderno.



2 cm, 3 cm, 4 cm
9 cm^2, 16 cm^2
8 cm^3

Comprimento da aresta do cubo			
Área da face do cubo	4 cm^2		
Volume do cubo		27 cm^3	64 cm^3

10 Calcule.

a) $3 + \sqrt{64}$ 11

b) $7^2 - \sqrt{25}$ 44

c) $\sqrt{3 \cdot 8 + 1}$ 5

d) $\sqrt{\frac{12}{3}}$ 2

11 Calcule.

a) $\sqrt{100} - \sqrt{36} + \sqrt{0{,}36}$ 4,6

b) $\sqrt{16} + \sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{4}}$ $\frac{23}{6}$

A radiciação no conjunto dos números reais

Para representar a raiz de índice n de um número real a, escrevemos: $\sqrt[n]{a}$

Lemos assim: raiz enésima de a.

Para efetuar a radiciação em IR, devemos observar o sinal do radicando (a) e se o índice (n) é par ou ímpar. Veja as possibilidades:

1. ***a*** é um **número real positivo** e ***n*** é um **número natural par** diferente de zero: a raiz enésima de a é o número positivo b tal que $b^n = a$.

Exemplos:

- $\sqrt{81} = 9$
- $\sqrt[4]{10\,000} = 10$
- $\sqrt{\dfrac{49}{64}} = \dfrac{7}{8}$

2. ***a*** é um **número real negativo** e ***n*** é um **número natural par** diferente de zero. Nessa situação, a raiz enésima de a não existe no conjunto IR pois não há número real que elevado a expoente par resulte em um número negativo.

Exemplos:

- $\sqrt[4]{-16}$ não existe em IR, pois não há número real que elevado à quarta potência dê resultado negativo: $2^4 = 16$ e $(-2)^4 = 16$
- Da mesma forma, $\sqrt{-0{,}25}$, por exemplo, não existe em IR.

3. ***a*** é um **número real** e ***n*** é um **número natural ímpar** maior do que 1. A raiz enésima de a é um número b tal que $b^n = a$.

Nesse caso:

- se a for positivo, teremos b positivo.
- se a for negativo, teremos b negativo.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{-27} = -3$
- $\sqrt[3]{27} = 3$
- $\sqrt[5]{32} = 2$
- $\sqrt[5]{-32} = -2$

4. Se $\boldsymbol{a = 0}$, então a raiz enésima de a é igual a zero para qualquer n *natural* maior do que 1.

Exemplos:

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt[3]{0} = 0$
- $\sqrt[6]{0} = 0$

Daniel disse que $\sqrt[3]{-1\,000}$ não existe em IR, pois nesse conjunto numérico não se definem raízes com radicando negativo. Ele está certo? Justifique.

Não, pois o índice é ímpar. Raízes com índice ímpar e radicando negativo pertencem a IR.

Operações inversas

A adição e a subtração são operações inversas.

$$13 - 8 = 5, \text{ pois } 5 + 8 = 13$$

A multiplicação e a divisão são operações inversas.

$$12 : 4 = 3, \text{ pois } 3 \cdot 4 = 12$$

A potenciação e a radiciação são operações inversas.

- $\sqrt{81} = 9$, pois $9^2 = 81$
- $\sqrt[3]{-125} = -5$, pois $(-5)^3 = -125$

Converse com seus colegas e, juntos, expliquem por que são verdadeiras as igualdades abaixo:
Os alunos devem perceber a potenciação e a radiciação como operações inversas.

- $\sqrt{6^2} = 6$
- $\sqrt[3]{15^3} = 15$
- $\sqrt[4]{7^4} = 7$

Elevamos ao quadrado e extraímos a raiz quadrada...

Exercícios

12 Qual número natural elevado:

a) ao quadrado dá 169? 13
b) ao cubo dá 1 000? 10
c) à quarta potência dá 16? 2
d) à quinta potência dá 32? 2

13 Responda.

a) Quais números elevados ao cubo dão 64 e -64? 4 e -4
b) Quais são as raízes cúbicas de 64 e -64? 4 e -4

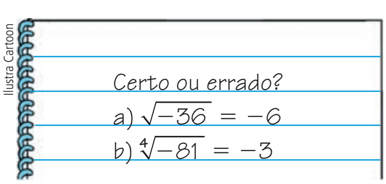
14 Copie e complete de modo a obter afirmações verdadeiras.

a) $\sqrt{\square} = 9$ 81
b) $\sqrt{\square} = 20$ 400
c) $\sqrt{\square} = 0{,}2$ 0,04
d) $\sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{6}{5}$ $\dfrac{36}{25}$
e) $\sqrt[3]{\square} = 9$ 729
f) $\sqrt[3]{\square} = 0$ 0
g) $\sqrt[3]{\square} = 0{,}1$ 0,001
h) $\sqrt[3]{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{8}$

15 Quanto é?

a) $\sqrt[4]{81}$ 3
b) $\sqrt[4]{625}$ 5
c) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$ $\dfrac{1}{3}$
d) $\sqrt[3]{-125}$ -5
e) $\sqrt[5]{1}$ 1
f) $\sqrt[5]{-1}$ -1
g) $\sqrt[6]{64}$ 2
h) $\sqrt[3]{0{,}027}$ 0,3
i) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$ $-\dfrac{1}{2}$

16 Aline precisa responder à questão:



Ilustra Cartoon

Como você responderia? Justifique.

a) Errado, porque $(-6)^2 = 36$. b) Errado, porque $(-3)^4 = 81$.

17 Calcule, caso exista em $\mathbb{R}$.

a) $\sqrt{100}$ 10
b) $-\sqrt{100}$ -10
c) $\sqrt{-100}$ Não existe.
d) $\sqrt[3]{27}$ 3
e) $\sqrt[3]{-27}$ -3
f) $-\sqrt[3]{-27}$ 3

18 O que você pode concluir sobre as raízes de índices pares de um número negativo?
Não é possível determiná-las, pois os números reais elevados a expoente par darão sempre um número real positivo.

2. Raízes exatas

Gilson comprou uma chácara que tem 18 496 m^2 de área. A chácara não tem a forma de um quadrado, mas, para ter uma ideia de quanto representa essa área, ele pensou:

Ilustra Cartoon

Como a área de um quadrado de lado ℓ é $A = \ell^2$, temos que $\ell^2 = 18\,496$, ou seja, $\ell = \sqrt{18\,496}$.

A maioria das calculadoras tem a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ (raiz quadrada).

Maurício Morais

Gilson usou a sua para determinar $\sqrt{18\,496}$:

- digitou 18496;
- apertou a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$;
- apareceu no visor 136;

Portanto, $\sqrt{18\,496} = 136$.

Ele pôde confirmar o resultado dessa forma:

$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ obtendo

DAE

A chácara tem área equivalente à de um quadrado de 136 m de lado.

1. Use a númeração das casas para obter as medidas aproximadas do quarteirão onde você mora. Calcule a área ocupada pelo quarteirão. Ela é maior ou menor do que a área da chácara de Gilson? Resposta pessoal.
2. Use a calculadora para obter $\sqrt{75{,}69}$:
   - digite 75 $\boxed{\cdot}$ 69;
   - aperte a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$.

   Aparece no visor: 8,7.

   Então, $\sqrt{75{,}69} = 8{,}7$
3. Que potenciação devemos fazer para verificar se 8,7 é a raiz quadrada de 75,69? $8{,}7^2$

Se não for possível usar uma calculadora, podemos fazer tentativas para calcular raízes. Veja exemplos:

- $\sqrt{529} =$ ▨ Procuramos o número que elevado ao quadrado resulta 529.

Primeiro localizamos 529 entre os quadrados de dois números naturais, fazendo uma aproximação inicial.

$$\left.\begin{array}{l} 20^2 = 400 \\ 30^2 = 900 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{O número que procuramos está entre 20 e 30.}$$

Para encontrar o algarismo das unidades, procuramos entre aqueles cujo quadrado termina em 9, como acontece com 529. Números terminados em 3 ou em 7 têm quadrado terminado em 9.

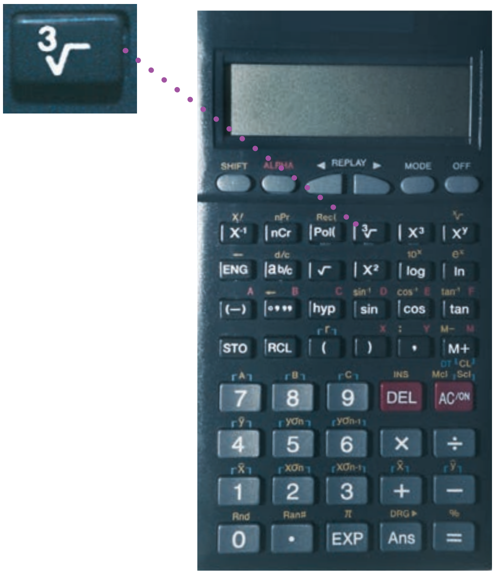
Como 529 está mais próximo de 400 do que de 900, é mais lógico experimentar $23 \cdot 23$.

$23 \cdot 23 = 529$. Portanto, $\sqrt{529} = 23$.

- $\sqrt{33{,}64} =$ ▨ Procuramos o número que elevado ao quadrado resulta 33,64.

$$\left.\begin{array}{l} 5^2 = 25 \\ 6^2 = 36 \end{array}\right\} \longrightarrow \sqrt{33{,}64} \text{ é um número decimal entre 5 e 6}$$

Como 33,64 tem último algarismo igual a 4, podemos experimentar 5,2 ou 5,8.
33,64 está mais próximo de 36 do que de 25.
Fazemos $5{,}8 \cdot 5{,}8 = 33{,}64$.



Maurício Morais

$\sqrt{33{,}64} = 5{,}8$

Há calculadoras com a tecla $\sqrt[3]{\ }$ (raiz cúbica). Há outras, ainda, com a tecla $\sqrt[x]{y}$ (que permite determinar raízes quartas, quintas etc.). Como essas calculadoras não são tão comuns, podemos usar tentativas para calcular raízes que não são quadradas. Isso só vai requerer um pouco mais de cálculos:

- $\sqrt[3]{19{,}683}$

Localizamos 19,683 entre os cubos de dois números naturais:

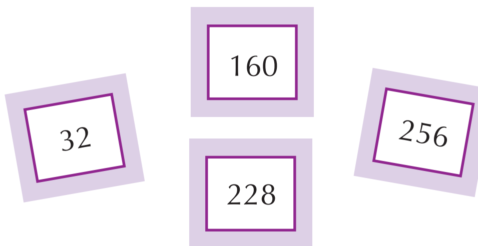
$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = 8 \\ 3^3 = 27 \end{array}\right\} \longrightarrow \sqrt[3]{19{,}683} \text{ é um número decimal entre 2 e 3}$$

Experimentamos:

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}5^3 = 15{,}625 \\ 2{,}6^3 = 17{,}576 \\ 2{,}7^3 = 19{,}683 \end{array}\right\} \longrightarrow \sqrt[3]{19{,}683} = 2{,}7$$

Exercícios

19 Um dos seguintes números representa o valor de 16^2.



Ilustrações: DAE

Responda mentalmente: qual será? Justifique.
256, porque o valor de 16^2 tem de terminar em 6

20 Um dos seguintes números representa o valor de $\sqrt{1\,521}$:

37	38	39	40

Qual deles? Justifique. 39, porque 39^2 termina em 1

21 Certo ou errado?

a) $0,4 = \frac{4}{10}$ C

b) $2,25 = \frac{225}{100}$ C

22 Certo ou errado?

a) $\sqrt{0} = 0$ C

b) $\sqrt{4} = 2$ C

c) $\sqrt{0,4} = 0,2$ E

d) $\sqrt{225} = 15$ C

e) $\sqrt{2,25} = 15$ C

f) $\sqrt{0,25} = 15$ C

23 Usando o processo por tentativas, calcule.

a) $\sqrt{361}$ 19

b) $\sqrt{7\,225}$ 85

c) $\sqrt[3]{-343}$ −7

d) $\sqrt[5]{243}$ 3

e) $\sqrt[7]{128}$ 2

f) $\sqrt{5,29}$ 2,3

g) $\sqrt{26,01}$ 5,1

h) $\sqrt{0,0289}$ 0,17

24 João tem 184 "quadradinhos" de cartolina, todos iguais.

Qual é o maior quadrado que ele pode formar com esses "quadradinhos"? Quantos "quadradinhos" vão sobrar?
Ele pode formar um quadrado de 13 quadradinhos por lado e sobram 15 quadradinhos.

25 Em cada item, indique o maior dos números:

a) 6,3 ou $\sqrt{40}$? $\sqrt{40}$

b) 4,5 ou $\sqrt{20}$? 4,5

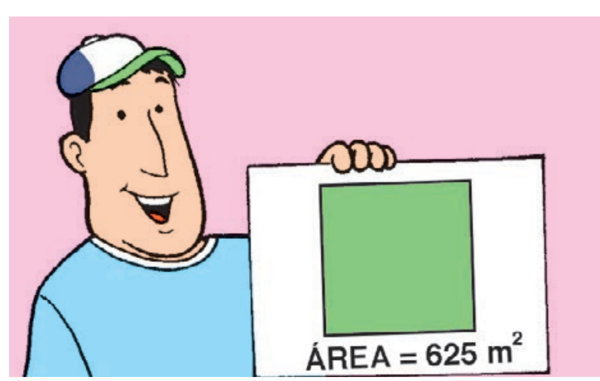
c) π ou $\sqrt{9}$? π

d) $\sqrt{15}$ ou π? $\sqrt{15}$

26 João comprou um terreno quadrado com 625 m^2 de área.

a) Quantos metros mede o seu perímetro? 100 m

b) Qual será a área, em m^2, de um terreno com o dobro da medida do lado deste? 2 500 m^2

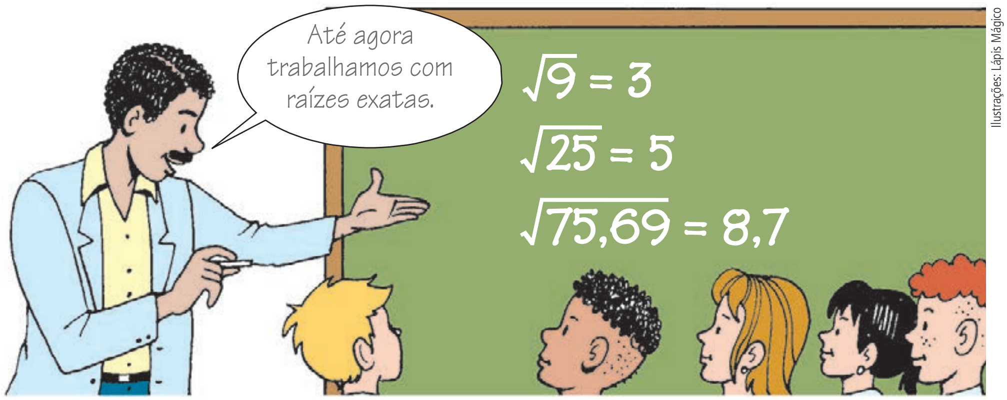


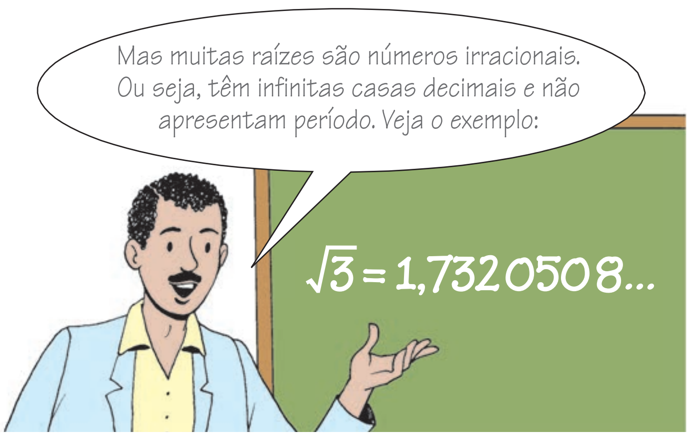
Ilustrações: Ilustra Cartoon

27 Um jardim quadrado tem a mesma área de um terreno retangular de 6 metros por 24 metros. Quanto mede cada lado do jardim? 12 metros

3. Raízes não exatas

Preste atenção no que o professor está dizendo:





Quando as raízes forem números irracionais, trabalharemos com parte das casas decimais. Teremos uma raiz aproximada do número.

Acompanhe o texto a seguir.

Números quadrados perfeitos

Um número recebe o nome de **quadrado perfeito** se é o quadrado de um número natural.

- 49 é um quadrado perfeito, pois é o quadrado de 7
- 100 é um quadrado perfeito, pois é o quadrado de 10
- 28 não é um quadrado perfeito, pois não há número natural que elevado ao quadrado resulte 28, já que $5^2 = 25$ e $6^2 = 36$

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100

Monte, com seus colegas, uma tabela com os quadrados perfeitos de 0 a 100.

A raiz quadrada de um número quadrado perfeito é um número natural. Todos os demais números naturais têm como raiz quadrada um número irracional.

Veja exemplos de números irracionais:

- $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$
- $\sqrt{6} = 2{,}4494897...$
- $\sqrt{5} = 2{,}2360679...$
- $\sqrt{28} = 5{,}2915026...$

A fatoração pode nos ajudar a descobrir se um número é quadrado perfeito, ou seja, se sua raiz quadrada é um número natural.

Como exemplo, vamos verificar se 256, 320 e 1 225 são quadrados perfeitos:

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$256 = 2^8 = (2^4)^2 = 16^2$
256 é o quadrado de 16, portanto 256 é um quadrado perfeito.
$\sqrt{256} = 16$

1 225	5
245	5
49	7
7	7
1	

$1\,225 = 5^2 \cdot 7^2 = (5 \cdot 7)^2 = 35^2$
1 225 é um quadrado perfeito pois é o quadrado de 35.
$\sqrt{1\,225} = 35$

Ilustra Cartoon

Fique esperto!

Entre dois números quadrados perfeitos há números racionais cujas raízes quadradas são exatas, mas não são números naturais.

Por exemplo:

- $\sqrt{1,69} = 1,3$
- $\sqrt{14,44} = 3,8$
- $\sqrt{31,36} = 5,6$

320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$320 = 2^6 \cdot 5$
320 não é um quadrado perfeito
$\sqrt{320}$ é um número irracional

Repare que, nesses exemplos, aplicamos não só os conhecimentos sobre fatoração, como também propriedades da potenciação.
Em Matemática é assim, muitos assuntos se relacionam!

Ilustrações: Lápis Mágico

- Na calculadora:

$\sqrt{320} \cong 17,888\,543$ (A calculadora já faz a aproximação.)
Você pode usar $\sqrt{320} \cong 17,88$, por exemplo.
O número de casas decimais da aproximação depende da precisão necessária aos cálculos.

- Se não for possível usar calculadora, podemos fazer tentativas.
  Sabemos que $20^2 = 400$. Então $\sqrt{320}$ é menor que 20. Podemos experimentar 19, 18, 17, 16...

Veja algumas dessas tentativas:

Lápis Mágico

$$\left.\begin{array}{l} 17^2 = 289 \\ 18^2 = 324 \end{array}\right\} \sqrt{320} \text{ é um número entre 17 e 18}$$

Experimentamos:

$$\left.\begin{array}{l} 17{,}7^2 = 313{,}29 \\ 17{,}8^2 = 316{,}84 \\ 17{,}9^2 = 320{,}41 \end{array}\right\}$$

$\sqrt{320}$ é um número entre 17,8 e 17,9
(Mais perto de 17,9, pois $17{,}9^2 = 320{,}41$, que passa pouco de 320.)

Experimentamos:

$$\left.\begin{array}{l} 17{,}88^2 = 319{,}69 \\ 17{,}89^2 = 320{,}05 \end{array}\right\}$$

Temos aproximações com duas casas decimais:
$\sqrt{320} \cong 17{,}88$ ou $\sqrt{320} \cong 17{,}89$
Usaremos $\sqrt{320} \cong 17{,}88$.

Mostraremos a seguir o processo descrito por Heron de Alexandria (século I d.C.) para calcular a raiz quadrada aproximada de 720. Veja que interessante!

Ele tomou o primeiro número quadrado maior do que 720, que é 729.

$\sqrt{729} = 27$

Dividiu 720 por 27, o que resulta $26\,\frac{2}{3}$, e juntou esse valor ao próprio 27.

$$\begin{array}{l|l} 720 & 27 \\ \hline 180 & 26 \\ 18 & \end{array}$$

Observe que $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.

$27 + 26\,\frac{2}{3} = 53\,\frac{2}{3}$

Então, ele dividiu $53\,\frac{2}{3}$ por 2 e considerou esse resultado como a aproximação da raiz quadrada de 720.

$\sqrt{720} = 26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$

$53 : 2 = 26\,\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$

De fato, $26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ multiplicado por ele mesmo resulta $720\,\frac{1}{36}$, de modo que a diferença entre os quadrados é $\frac{1}{36}$.

Heron de Alexandria prossegue em seu relato mostrando como obter aproximações ainda melhores para $\sqrt{720}$.

Fonte: Jean-Luc Chabert et al. *Historie d'Algorithmes.* Paris: Ed.Belin, 1994.

Exercícios

28 Responda em seu caderno.

a) $\sqrt{18}$ é maior do que 4? Sim.

b) $\sqrt{18}$ é maior do que 5? Não.

c) $\sqrt{18}$ pode ser calculada exatamente? Não.

d) $\sqrt{18}$ é um número compreendido entre 4 e 5? Sim.

29 Copie e complete, substituindo os ▨ por números naturais consecutivos:

a) ▨ $< \sqrt{43} <$ ▨ 6 e 7

b) ▨ $< \sqrt{54} <$ ▨ 7 e 8

c) ▨ $< \sqrt{85} <$ ▨ 9 e 10

d) ▨ $< \sqrt{250} <$ ▨ 15 e 16

30 Em seu caderno, escreva em ordem crescente os seguintes números:

5	$\sqrt{23}$	$\sqrt{40}$
6	$\sqrt{27}$	$\sqrt{20}$

$\sqrt{20}$, $\sqrt{23}$, 5, $\sqrt{27}$, 6, $\sqrt{40}$,

31 Qual é o maior número: $(1{,}5)^2$ ou $\sqrt{4}$? $(1{,}5)^2$

32 Qual das seguintes expressões é a maior?

a) $\sqrt{100}$

c) $\sqrt{1000}$

x b) $\dfrac{1}{0{,}01}$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{0{,}1}}$

33 (Cap-UFRJ) Determine todos os números naturais que são maiores do que $\dfrac{168}{12}$ e menores do que $\sqrt{350}$. 15, 16, 17 e 18

34 Calcule, decompondo os números em fatores primos:

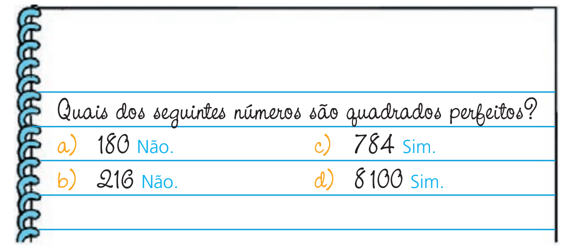
a) $\sqrt{144}$ 12

c) $\sqrt{225}$ 15

b) $\sqrt{196}$ 14

d) $\sqrt{324}$ 18

35 Veja o exercício que Vítor vai resolver:



Ilustra Cartoon

Resolva você também!

36 Escreva no caderno todos os quadrados perfeitos compreendidos entre 60 e 200.

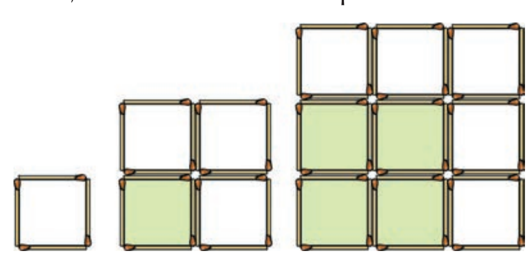
64, 81, 100, 121, 144, 169 e 196

37 Usando o sistema de numeração decimal, pergunta-se:

a) Um quadrado perfeito pode terminar com o algarismo 5? Dê exemplos. Sim. Exemplos: 25, 225

b) Um quadrado perfeito pode terminar com o algarismo 2? Não.

38 Rosângela está construindo quadrados com palitos de fósforo adicionando "quadradinhos" aos quadrados já construídos, formando uma sequência, de acordo com o esquema:



Ilustrações: Hélio Senatore

a) Rosângela terminou de construir o quadrado de número 29. Qual é o número de "quadradinhos" que Rosângela precisa adicionar a esse quadrado para obter o quadrado de número 30? 59 quadradinhos

b) Escreva uma expressão que represente o número de "quadradinhos" de cada figura. n^2

39 Qual é o menor número inteiro positivo pelo qual se deve multiplicar 588 para se obter um quadrado perfeito? 3

$588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$. Para o quadrado ser perfeito, o 3 também deve estar elevado ao quadrado.

40 (Cotuca/Unicamp-SP) Um piso retangular tem lados medindo 8 metros e 9,60 metros.

a) Calcule a área do piso em cm^2.
768 000 cm^2 • $A = 800 \cdot 960 = 768\,000$

b) Quantas lajotas quadradas de 40 cm de lado serão necessárias para revestir esse piso? 480 lajotas
$Q = 768\,000 : 1600 = 480$

c) Se o piso foi revestido por 750 lajotas quadradas, qual é a medida dos lados dessas lajotas?
32 cm
$A = 768\,000 : 750 = 1024$
$\ell = \sqrt{1024} = 32$


Mauricio Morais

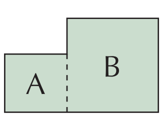
41 Para $\sqrt{17}$ a calculadora mostrou o número:

4,123 105 626

a) Esse número é um valor exato ou aproximado de $\sqrt{17}$? Aproximado.

b) Escreva um valor aproximado de $\sqrt{17}$ com 2 casas decimais. 4,12

42 Com o auxílio da calculadora, determine o perímetro da figura, sabendo que A e B são quadrados.



DAE

Área de A = 34 m^2
Área de B = 50 m^2

Utilize valores aproximados com duas casas decimais. 39,94 m • $3 \cdot 7{,}07 + 3 \cdot 5{,}83 + 1{,}24 = 39{,}94$ m

43 Indique, mentalmente, se os números que iremos obter estão entre: 1 e 10; 10 e 20; 100 e 200; 1000 e 2 000.

a) $2{,}7 \cdot 5{,}8$ 10 e 20

b) $1{,}36 \cdot 1200$ 1000 e 2 000

c) $2 \cdot \sqrt{5}$ 1 e 10

d) $2{,}718 \cdot 53$ 100 e 200

e) $3 \cdot \sqrt{7}$ 1 e 10

f) $2^3 + \sqrt{5}$ 10 e 20

44 Escreva os números $\sqrt{49}$, 15, $\frac{20}{3}$, $10\sqrt{2}$ e 6π em ordem crescente. $\frac{20}{3} < \sqrt{49} < 10\sqrt{2} < 15 < 6\pi$

45 Calcule.

a) $\sqrt{1{,}21} + 0{,}7$ 1,8

b) $\sqrt{169} + \sqrt{1{,}69}$ 14,3

c) $\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{729}$ 1

d) $\sqrt{100} + \sqrt{50 : 2}$ 15

46 Qual é o valor da expressão a seguir?

$$\left[\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{3}\right] : \sqrt{\frac{9}{4}}$$

x a) 0,20

b) 0,45

c) 1,05

d) 1,45

47 (Fesp-RJ) Um jardim tem forma quadrada e área de 34 m^2. Das alternativas apresentadas, a que indica a medida mais provável do lado desse jardim é:

a) 5,74 m

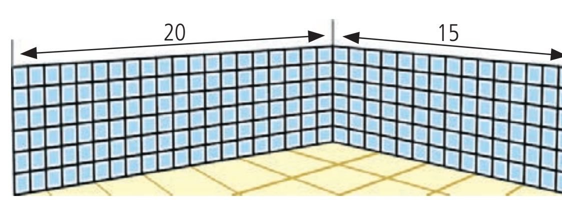
b) 5,79 m

x c) 5,83 m

d) 5,88 m

48 A soma dos quadrados de dois números é 1600. Se o menor desses números é 24, qual é o maior? 32

49 (Vunesp) A ilustração mostra o número de azulejos quadrados alinhados horizontalmente em duas paredes de uma cozinha retangular, sendo que cada azulejo tem área de 625 cm^2.



Hélio Senatore

Desprezando-se os espaços entre cada azulejo, pode-se afirmar que a área dessa cozinha é igual a

a) 8,75 m^2.

b) 12,50 m^2.

c) 16,25 m^2.

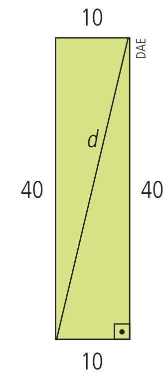
x d) 18,75 m^2.

• $(20 \cdot 25)$ cm = 500 cm = 5 m
• $(15 \cdot 25)$ cm = 375 cm = 3,75 m
• $A = (5 \cdot 3{,}75)\ m^2 = 18{,}75\ m^2$

Vale a pena ler

A sábia civilização mesopotâmica

A região da Mesopotâmia (*Mesopotâmia* significa "terra entre dois rios") ficava na Ásia, entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje se localiza o Iraque. As antigas civilizações que habitaram essa região são chamadas frequentemente de babilônias por causa da cidade de Babilônia. Parte dos conhecimentos matemáticos dos babilônios ficou gravada em tabletas: os babilônios registravam tudo em placas de barro mole com estilete e depois coziam as tabletas ao sol ou em fornos. Há tabletas que datam de 5000 anos atrás.



Os matemáticos babilônios eram hábeis no cálculo e criaram processos para extrair raízes quadradas. Há várias tabletas com tabelas envolvendo o cálculo de raízes quadradas.

Na tableta VAT 6598 (data aproximada: entre 2000 e 1700 a.C.), que está no Museu de Berlim, há um problema que pede para que se determine a diagonal de uma porta retangular de altura 40 e largura 10.

Os babilônios resolviam esse problema usando uma relação entre os lados de um triângulo retângulo que eles já conheciam:

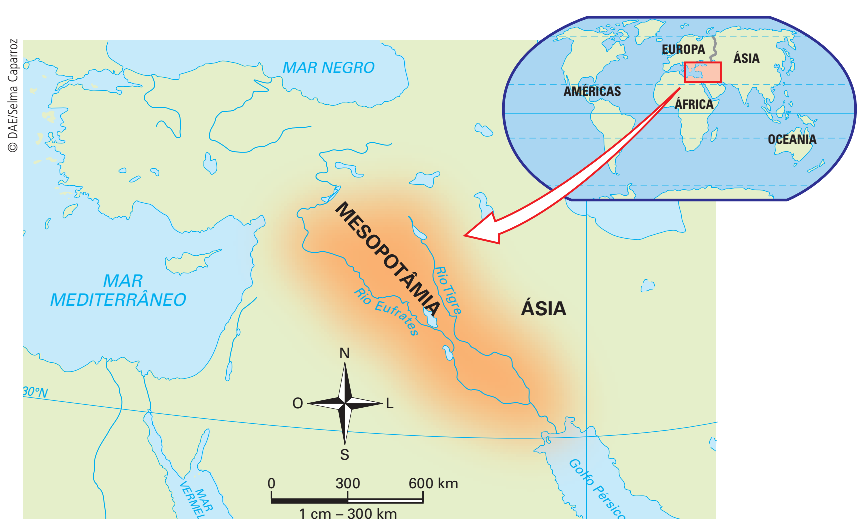
$$d^2 = 40^2 + 10^2$$
$$d^2 = 1600 + 100$$
$$d = \sqrt{1\,700}$$

Essa relação é importantíssima na Matemática e é conhecida por relação de Pitágoras. Você trabalhará com ela no 9º ano.

Eles faziam um cálculo aproximado dessa raiz, usando seu sistema de numeração, que era sexagesimal.

Ainda como curiosidade, no século XX, foram encontradas e traduzidas tabletas mesopotâmicas com data aproximada de 2000 a.C. apresentando vários problemas. Um deles trata do cálculo da área de um campo circular e utiliza uma aproximação para π igual a $3\frac{1}{8}$ ou 3,125.

A civilização babilônica foi muito importante para a história da Matemática.



Fonte: Georges Duby. *Atlas historique: l'histoire du monde en 520 cartes.* Paris: Larousse, 1987. p. 7.

Revisando

50 Copie e complete de modo a obter afirmações verdadeiras.

a) $\sqrt{\square} = 3$ 9

b) $\sqrt{\square} = 30$ 900

c) $\sqrt{90\,000} = \square$ 300

d) $\sqrt{\square} = 0{,}3$ 0,09

e) $\sqrt{\square} = 7$ 49

f) $\sqrt{\square} = 0{,}7$ 0,49

g) $\sqrt{4\,900} = \square$ 70

h) $\sqrt{\square} = 100$ 10 000

51 Coloque os números em ordem crescente.

$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{150}$	6
$\sqrt{1\,001}$	40	$\sqrt{35}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{35}$, 6, $\sqrt{150}$, $\sqrt{1\,001}$, 40

52 Mafalda pensou num número e calculou sua raiz quadrada. O resultado foi 64. Em que número Mafalda pensou? 4 096

53 Metade do comprimento do lado de um terreno de forma quadrada é 35 m. Qual é a área do terreno? 4 900 m²

54 Numa calculadora obtemos o número irracional $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,56...$ Dê o valor aproximado de $\sqrt{2}$:

a) com uma casa decimal; 1,4

b) com três casas decimais. 1,414

55 Calcule usando as aproximações com duas casas decimais.

a) $7 + \sqrt{2}$ 8,41

b) $\sqrt{25} - \sqrt{2}$ 3,59

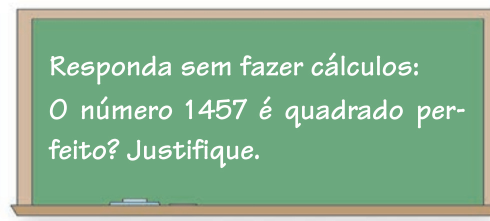
c) $2\sqrt{2}$ 2,82

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 0,70

56 Calcule a diferença entre o quadrado de 5 e a raiz quadrada de 25. $5^2 - \sqrt{25} = 20$

57 Indique quais dos números entre 100 e 300 são quadrados perfeitos.
121, 144, 169, 196, 225, 256 e 289

58



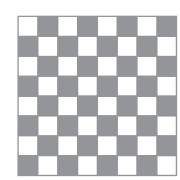
Ilustra Cartoon

Um número terminado em 7 não pode ser quadrado perfeito.

59 Copie e complete.

No sistema de numeração decimal, o algarismo das unidades de um quadrado perfeito não pode ser $\square$, $\square$, $\square$, ou $\square$. 2, 3, 7 ou 8

60 O tabuleiro de xadrez representado na figura tem 576 cm² de área.



DAE

a) Determine a medida do comprimento do lado do tabuleiro. 24 cm

b) Determine a área e o comprimento do lado de cada um dos quadradinhos representados no tabuleiro. 9 cm²; 3 cm

61 Copie e complete de modo a obter afirmações verdadeiras.

a) $\sqrt[3]{8} = \square$ 2

b) $\sqrt[3]{\square} = 20$ 8 000

c) $\sqrt[3]{\square} = 0{,}2$ 0,008

d) $\sqrt[3]{8\,000\,000} = \square$ 200

e) $\sqrt[3]{125} = \square$ 5

f) $\sqrt[3]{\square} = 50$ 125 000

g) $\sqrt[3]{\square} = 1$ 1

h) $\sqrt[3]{0{,}001} = \square$ 0,1

62 Indique os dois números naturais consecutivos entre os quais se situa o número $\sqrt[3]{999}$. 9 e 10

63 Veja a seguir uma cartela de jogo de bingo. 64, 16 e 49

a) Indique, no caderno, os quadrados perfeitos.

b) Indique os cubos perfeitos (são os cubos de números inteiros). 64 e 27

BINGO				
5	18	33	48	64
12	21	31	51	66
14	30		60	71
13	16	44	46	61
11	27	41	49	73

DAE

64 Responda.

a) Se $\sqrt[4]{a} = 5$, qual é o valor de a? 625

b) Se $\sqrt[6]{a} = 2$, qual é o valor de a? 64

c) Se $\sqrt[n]{81} = 3$, qual é o valor de n? 4

d) Se $\sqrt[n]{32} = 2$, qual é o valor de n? 5

65 Calcule.

a) $-8 - \sqrt{16}$ -12

b) $-8 + \sqrt{16}$ -4

c) $-5 + \sqrt[3]{-8}$ -7

d) $3^2 - \sqrt[7]{1}$ 8

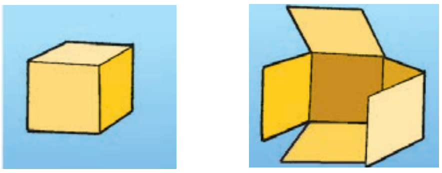
e) $-3\sqrt{100} + 30$ 0

f) $10^3 \cdot \sqrt{50,41}$ 7 100

g) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{0,027}$ 1,7

h) $5 \cdot \sqrt{0,36} + \sqrt{0,04}$ 3,2

66 O volume do cubo abaixo é 512 cm³.



a) Determine o comprimento da aresta do cubo. 8 cm

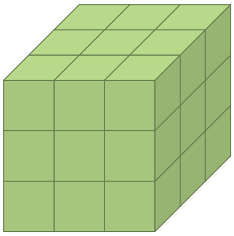
b) Para construir um cubo igual ao da figura, quantos cm² de papel são necessários? 384 cm²

67 O senhor Quintino tem em casa um tapete com a forma de um quadrado, como este representado na figura, que tem 21 m² de área. Com o auxílio da calculadora, determine o valor aproximado, com duas casas decimais, da medida do lado do tapete. 4,58 m

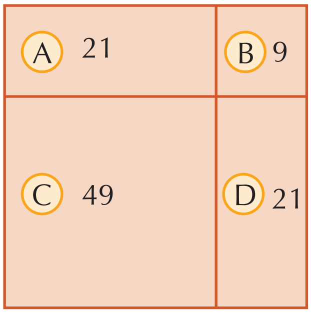
68 Qual é o maior quadrado perfeito de três algarismos? 961

69 Pedro está empilhando cubinhos, todos iguais.

Ele formou um cubo com 27 cubinhos. Quantos cubinhos faltam para ele construir outro cubo imediatamente maior que o inicial? 37 cubinhos



70 Nesta figura há três quadrados. Qual é a medida do lado de cada um deles? 3 m, 7 m, 10 m

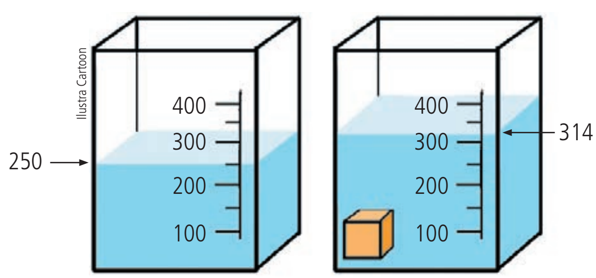


As áreas de A, B, C e D, em m², estão indicadas na figura.

71 (Saeb-MEC) Para ligar a energia elétrica em seu apartamento, Felipe contratou um eletricista para medir a distância do poste da rede elétrica até seu imóvel. Essa distância foi representada, em metros, pela expressão: $(2\sqrt{10} + 6\sqrt{17})$ m. Para fazer a ligação, a quantidade de fio a ser usado é duas vezes a medida fornecida por essa expressão. Nessas condições, Felipe comprará aproximadamente:

a) 43,6 m de fio.
x c) 61,6 m de fio.
b) 58,4 m de fio.
d) 81,6 m de fio.

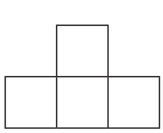
72 Um cubo de alumínio foi introduzido num frasco graduado com 250 cm^3 de água.

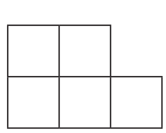


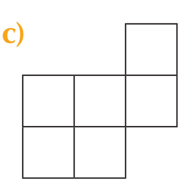
a) Qual é o volume do cubo? 64 cm^3

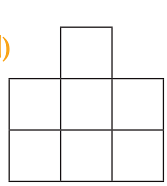
b) Qual é a medida da aresta do cubo? 4 cm

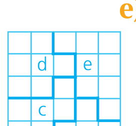
73 Usando quatro das peças desenhadas se pode construir um quadrado. Qual delas não deve ser utilizada?

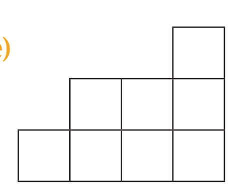
a)


x b)


c)


d)




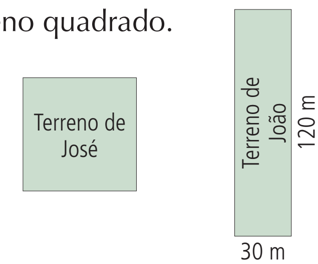
e)


Desafios

74 O pai de Roberto nasceu no século XX, num ano que é um número inteiro quadrado perfeito. Em que ano ele nasceu? 1936

75 O triplo da raiz quadrada de um número natural x é 60. Qual é o número x? 400 • $3\sqrt{x} = 60$

76 Dois irmãos herdaram dois terrenos de áreas iguais. O terreno de João é retangular e mede 30 m de frente por 120 m de fundo. O de José é um terreno quadrado.



$x^2 = 30 \cdot 120$
$x^2 = 3\,600$
$x = 60$

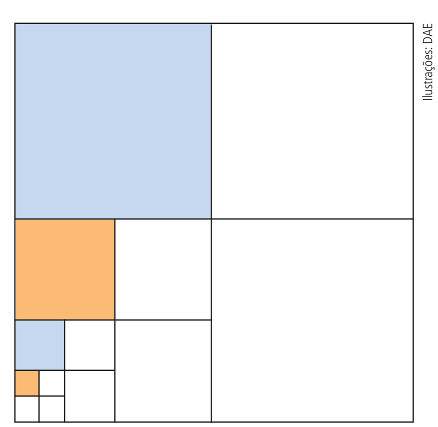
Quantos metros de frente e de fundo tem o terreno de José? O terreno de José tem 60 m de frente por 60 m de fundo.

77 Sabemos que um quadrado tem área de 256 cm^2.

a) Se o dividirmos em quatro quadrados, qual é a medida do lado de cada um dos quadrados obtidos? 8 cm

b) Se dividirmos um destes em quatro quadrados, qual é a medida do lado do novo quadrado obtido? 4 cm

c) Se voltarmos a repetir esse processo mais duas vezes, qual é a medida do lado do menor quadrado obtido? 1 cm



Solução: Quantidade de quadradinhos em cada peça, respectivamente: 4, 5, 6, 7 e 8.
As somas desses números, tirando um deles, são respectivamente: 26, 25, 24, 23 e 22.
A peça **b** não deve ser utilizada. → o único que é quadrado perfeito.

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

78 O valor da expressão $(20 : \sqrt{100})^3$ é:

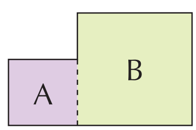
a) 6 x b) 8 c) 60 d) 80

79 O valor de $\sqrt{0,09} + \sqrt{\dfrac{147}{3}}$ é:

x a) 7,3 b) 7,03 c) 49,3 d) 49,03

80 Sabendo que A e B são quadrados, qual é o perímetro da figura abaixo?

x a) 26 m
b) 29 m
c) 32 m
d) 34 m



Área de A = 9 m²
Área de B = 25 m²

81 (Cesgranrio-RJ) Um número x, que satisfaz $\sqrt{35} < x < \sqrt{39}$, é:

a) 5,7 b) 5,8 x c) 6 d) 6,6

82 O valor de $\sqrt{0,444}$ é:

a) 0,222... c) 0,444...
b) 0,333... x d) 0,666...

83 Responda à pergunta de Gabriela.

a) 2010
b) 2016
c) 2020
x d) 2025

Ilustra Cartoon

84 Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 84 para se obter um quadrado perfeito? $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

x a) 21 b) 24 c) 27 d) 42

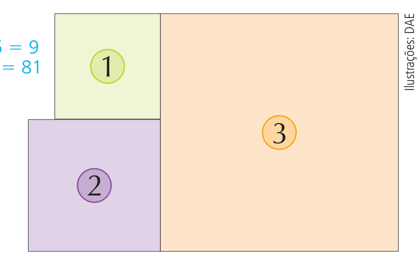
85 A metade da raiz quadrada de um número x é igual a 5. Então, o valor de x é: $\frac{\sqrt{x}}{2} = 5$

a) 10 b) 25 c) 50 x d) 100

86 Na figura há três quadrados. A área do quadrado 1 mede 16 cm² e a área do quadrado 2 mede 25 cm². A área do terceiro quadrado é:

a) 36 cm² b) 40 cm² c) 64 cm² x d) 81 cm²

- $\ell = 4 + 5 = 9$
- $A = 9 \cdot 9 = 81$



Ilustrações: DAE

87 (OBM) Quantos são os números inteiros x que satisfazem a inequação $3 < \sqrt{x} < 7$?

10, 11, ..., 47, 48

a) 26 b) 38 x c) 39 d) 40

88 Qual é o número que completa a sequência a seguir?

3, 5, 7, ▨, 11, 13, 15, 17

a) 8 c) $\sqrt{18}$
b) $\sqrt{9}$ x d) $\sqrt[3]{729}$

89 O valor da expressão $\dfrac{\frac{1}{2} + 5,5}{\sqrt{9}}$ é:

x a) 2 c) 2,5
b) 3 d) 3,5

90 "Sou um número primo maior do que 20 e menor do que 50. O meu algarismo das unidades é também um número primo e o meu antecessor é perfeito como quadrado. Quem sou eu?"

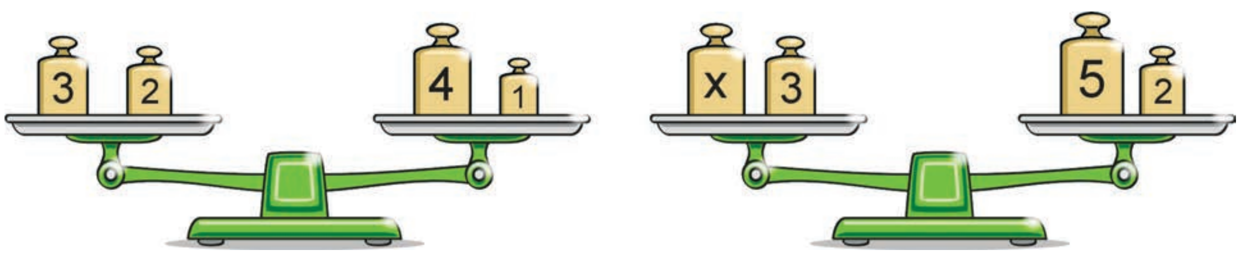
a) 23 x b) 37 c) 26 d) 49

UNIDADE 4

Cálculo algébrico

1. Revendo equações

As balanças ilustradas estão equilibradas.



Hélio Senatore

Podemos utilizar igualdades para representar esse equilíbrio:

$3 + 2 = 4 + 1$

$x + 3 = 5 + 2$

Esta igualdade apresenta uma letra que representa um valor desconhecido.

Equação é uma igualdade em que há pelo menos uma letra para representar um valor desconhecido.

A letra ou as letras que representam valores desconhecidos são as **incógnitas** da equação. Na equação $x + 3 = 5 + 2$, a incógnita é x.

Toda equação tem dois membros:

$$\underbrace{x + 3}_{1^{\circ}\text{ membro}} = \underbrace{5 + 2}_{2^{\circ}\text{ membro}}$$

Observe que o valor de x que torna a igualdade verdadeira é 4, pois, trocando x por 4 na equação, a igualdade fica verdadeira: $4 + 3 = 5 + 2$.

$x = 4$ é a única **solução** dessa equação. Resolver uma equação é encontrar sua solução.

Existem equações com uma única solução, com mais de uma solução e sem solução.
Por exemplo:

- a equação $x = x - 3$ não tem solução, pois não há número que seja igual a ele mesmo menos 3;
- a equação $a + a = 2a$ tem infinitas soluções, pois todo número somado a ele mesmo resulta no seu dobro.

Vamos resolver a equação $5x - 8 = 3x - 12$ para recordar.

$$\begin{array}{lcl}
 & 5x - 8 = 3x - 12 & \\
-\,3x & & -\,3x \\
 & 2x - 8 = -12 & \\
+\,8 & & +\,8 \\
 & 2x = -4 & \\
:\,2 & & :\,2 \\
 & x = -2 &
\end{array}$$

Subtraímos $3x$ de ambos os membros da equação.

Somamos 8 a ambos os membros da equação.

Dividimos ambos os membros da equação por 2.

Encontramos a solução da equação.

Verificamos se a solução está correta substituindo x por -2 na equação:

$5 \cdot (-2) - 8 = 3 \cdot (-2) - 12$
$-10 - 8 = -6 - 12$
$-18 = -18$ (verdadeiro!)
A solução $x = -2$ está correta.

> Fazendo a verificação temos certeza se acertamos a resolução da equação.

Muitas vezes utilizamos equações para representar e resolver um problema. Acompanhe.

Hélio Senatore

Representamos o preço do lápis por x.
O preço de cada caneta será representado por $x + 1$.
Como o gasto foi de R$ 11,60 no total, escrevemos:

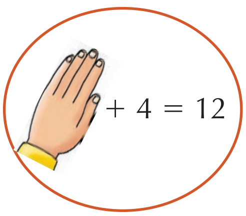
$x + 2(x + 1) = 11{,}6$ Aplicando a propriedade distributiva.
$x + 2x + 2 = 11{,}6$ Fazendo $x + 2x = 3x$.
$3x + 2 = 11{,}6$
$3x = 9{,}6$
$x = \dfrac{9{,}6}{3}$
$x = 3{,}2$
$x + 1 = 3{,}2 + 1 = 4{,}2$
Preço do lápis: R$ 3,20
Preço da caneta: R$ 4,20

> Junte-se a um colega e resolvam, por meio de uma equação, o seguinte problema:
> Mariana tem x reais. Para comprar um vestido que custa R$ 120,00 ela precisa do triplo dessa quantia e ainda ficam faltando R$ 6,00. Quanto tem Mariana? R$ 38,00

Exercícios

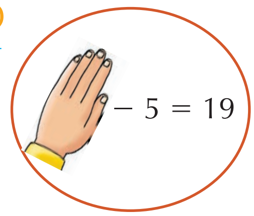
1 Descubra os números “escondidos” pelas mãos.

a) 8



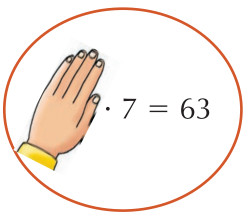
$+ 4 = 12$

c) 24



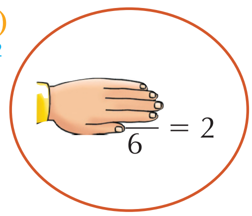
$- 5 = 19$

b) 9



$\cdot 7 = 63$

d) 12



$\frac{\quad}{6} = 2$

2 Resolva as equações.

a) $x + 2 = 10$ 8

b) $x - 6 = -8$ −2

c) $3x - 21 = 0$ 7

d) $6 + x = 6{,}4$ 0,4

e) $0{,}5x - 9 = 1{,}5$ 21

f) $4x + 3 = -19$ −5,5

g) $5x + 2 = 2x - 1$ −1

h) $6 - 3x = -10 - 4x$ −16

i) $2(3x - 5) = 14$ 4

j) $\frac{2x - 1}{5} = 3$ 8

3 (Obmep) Um grupo de amigos acabou de comer uma pizza. Se cada um der R$ 8,00 faltarão R$ 2,50 para pagar a pizza e se cada um der R$ 9,00 sobrarão R$ 3,50. Qual é o preço da pizza? R$ 50,50

• 8x + 2,50 = 9x − 3,50

4 Observe o quadrado mágico.

A		
	15	3
12		24

A soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma.

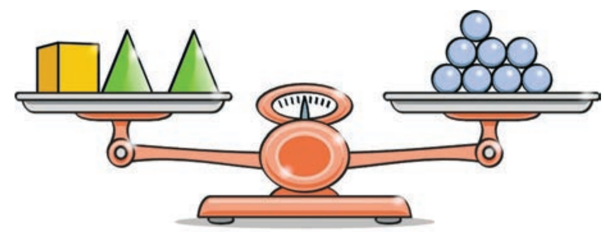
a) Escreva a equação que permite calcular o número A. A + 12 = 15 + 3

b) Calcule o número A. 6

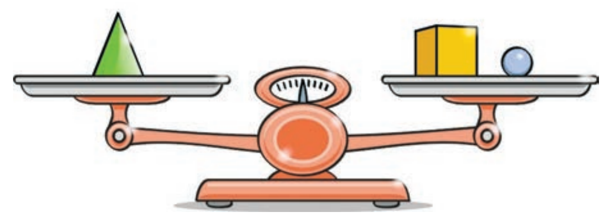
c) Complete o quadrado mágico.

6	21	18
27	15	3
12	9	24

5 (Vunesp) As figuras representam uma balança em duas situações de equilíbrio:



◆ Figura I – oito esferas equilibram dois cones e um cubo.



◆ Figura II – um cubo e uma esfera equilibram um cone.

Ilustrações: Hélio Senatore

O número de esferas que equilibram um cone é:

x**a)** 3
b) 4
c) 5
d) 6

6 (CPII-RJ) Observe as expressões abaixo:

🔔 + 🔔 + 🔔 + ♉ + 💣 = 35

♉ + ♉ + ♉ + ♉ + ♉ = 10

✤ + ♉ + ⌘ + ⌘ + ⌘ = 52

💣 + 💣 + ♉ + ⌘ + ⌘ = 46

♉ + ♉ + 🔔 + ♉ + ♉ = 15

⌘ + ♉ + ♉ + 🔔 + 💣 = 33

Quanto vale cada um dos desenhos dessas somas? 🔔 = 7 💣 = 12 ♉ = 2 ✤ = 20 ⌘ = 10

2. Variáveis

Célia costura camisas para uma confecção.

Seu salário depende do número de camisas que costura no mês.


Delfim Martins/Pulsar Imagens

Vamos explicar melhor:

Célia recebe R$ 200,00 fixos mais R$ 1,50 por camisa costurada.

- Se costurar 100 camisas no mês, recebe R$ 350,00, pois:
  $200 + 100 \cdot 1{,}50 =$
  $= 200 + 150 = 350$

- Se costurar 180 camisas, recebe R$ 470,00, pois:
  $200 + 180 \cdot 1{,}50 =$
  $= 200 + 270 = 470$

- Se Célia costurar n camisas no mês, qual será o valor de seu salário S?

$$S = 200 + n \cdot 1{,}50$$

Observe que usamos letras e operações para mostrar como o salário de Célia depende do número de camisas costuradas no mês. Escrevemos uma **fórmula matemática**.

O número de camisas n pode ser 50, 82, 120 ou 200, por exemplo.

Para cada valor de n, há um valor para o salário S.

Por isso, nessa fórmula, as letras n e S são chamadas de **variáveis**. Vimos que há uma interdependência na variação que apresentam.

- Para receber R$ 680,00, quantas camisas Célia precisa costurar?

Basta substituir, na fórmula, S por 680:

$680 = 200 + n \cdot 1{,}50$

Obtemos uma **equação**, na qual o valor desconhecido é n. Vamos resolvê-la:

$680 - 200 = n \cdot 1{,}50$

$480 = n \cdot 1{,}50$

$\dfrac{480}{1{,}5} = n$

$n = 320$

Para receber R$ 680,00, Célia precisa costurar 320 camisas.

	S = 200 + 1,50 · *n*		
	n	S	
	170		455
400		800	
128		392	

Quem quer ir ao quadro mostrar aos colegas como encontrar os valores que faltam nessa tabela?

As fórmulas matemáticas são usadas nas ciências e em muitas atividades humanas para descrever a relação entre grandezas.

- Um médico, por exemplo, usa fórmulas para calcular a dose certa de remédio para uma criança, de acordo com o peso e a idade dela.
- Um engenheiro também utiliza fórmulas para projetar uma ponte, um prédio ou um avião.
- Os economistas aplicam fórmulas para calcular a inflação do mês ou o rendimento de uma aplicação financeira, e por aí vai.

No exemplo da Célia, vimos que também podemos usar fórmulas para representar e resolver situações de nosso cotidiano.

Vamos examinar **outra situação**.

A área de um quadrado de lado ℓ é calculada pela fórmula $A = \ell^2$.

Você conhece outra fórmula? Cite-a.

Resposta pessoal. Os alunos podem citar outras fórmulas para o cálculo de áreas, como $A = b \cdot h$.

Renata vai fazer uma horta retangular nos fundos de sua casa. A horta terá 6 m de comprimento, mas ela não decidiu ainda qual será a medida da largura.

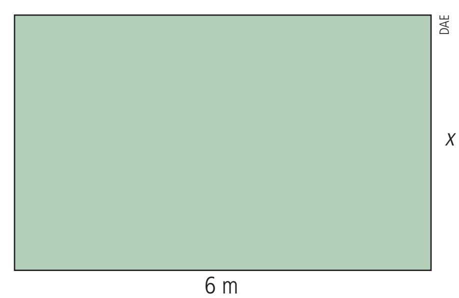
Por isso chamou essa medida de x.

O perímetro P da horta depende da medida x da largura.

Renata escreveu a fórmula:

$P = 6 + x + 6 + x$ ou

$P = 2x + 12$



Para cada medida escolhida para x, teremos uma medida P para o perímetro da horta.

P e x são as variáveis da fórmula $P = 2x + 12$.

A fórmula mostra a interdependência na variação entre elas.

- Renata tem 22 m de tela de arame para cercar a horta. Se a largura da horta for de 5,5 m, a tela será suficiente?

  Se $x = 5{,}5$ m

  $P = 2 \cdot 5{,}5 + 12 = 11 + 12 = 23$

  O perímetro da horta seria de 23 m, então faltaria 1 m de tela para cercar a horta.

- Para usar exatamente os 22 m de tela, qual deverá ser a largura da horta?

  Fazendo P = 22 na fórmula:

  $22 = 2x + 12$

  $22 - 12 = 2x$

  $10 = 2x$

  $x = 5$

  Obtivemos uma equação cuja incógnita é x.

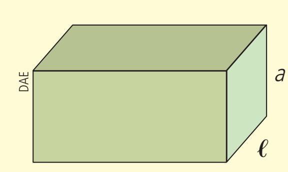
  Se a largura for de 5 m, Renata usará os 22 m de tela para cercar a horta.

Para calcular o volume V de um bloco retangular fazemos:

$$V = c \cdot \ell \cdot a$$

Isso é uma fórmula? Sim.

O que são as letras V, c, ℓ e a? São as variáveis dessa fórmula.



Exercícios

7 Numa doceria está afixada a seguinte tabela:

Número de balas	Preço a pagar (reais)
1	0,16 0,15
2	0,32 0,30
3	0,48 0,45
4	0,64 0,60
5	0,80 0,75
6	0,96 0,90
7	1,12 1,05
8	1,28 1,20
9	1,44 1,35
10	1,60 1,50


Jason Stitt/Dreamstime.com

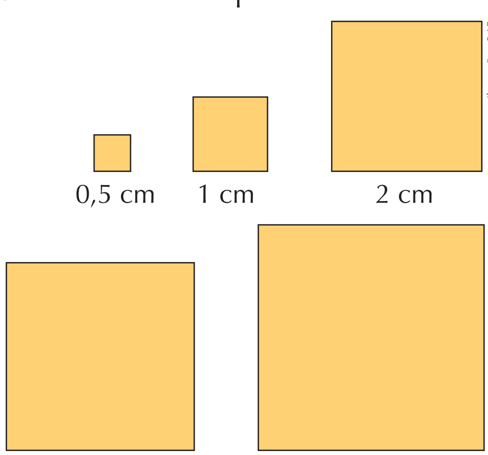
a) Qual é o preço a pagar numa compra de 9 balas? R$ 1,44

b) Quantas balas podem ser compradas com R$ 1,12? 7 balas

c) É possível gastar exatamente R$ 0,75 em balas? Não.

d) Quais seriam os preços da tabela se cada bala custasse 15 centavos? Resposta na tabela.

8 Observe os cinco quadrados:



Ilustrações: DAE

Copie e complete a tabela.

Comprimento do lado (em cm)	ℓ	0,5	1	2	2,5	3
Perímetro (em cm)	P	2	4	8	10	12

Responda no caderno.

a) O perímetro de um quadrado depende do comprimento do seu lado? Sim.

b) Qual fórmula matemática relaciona P e ℓ no quadrado? $P = 4\ell$

c) Como são chamadas as letras P e ℓ? Variáveis.

9 Deseja-se determinar o comprimento e a largura de uma sala de modo que a sua área seja 36 m².

a) Se a largura for 4 m, qual deverá ser o seu comprimento? 9 m

b) Se o comprimento for 12 m, qual deverá ser a sua largura? 3 m

c) Se a largura for chamada de x e o comprimento de y, qual será a fórmula que relaciona y com x? $y = \frac{36}{x}$ ou $x \cdot y = 36$

10 Um motorista, para cobrar um frete, observa no hodômetro do caminhão o número de quilômetros percorridos e utiliza a seguinte tabela:

km rodados	Total a pagar (reais)
0	10,00
1	13,50
2	17,00
3	20,50
4	24,00
...	...
100	360,00

O total a pagar consiste em uma quantia fixa, que é de R$ 10,00, mais uma quantia que depende do número de quilômetros rodados.

a) Qual fórmula permite calcular o total y a pagar num frete de x quilômetros? $y = 10 + 3,5x$

b) Qual é o preço a ser pago num frete de 34 km? R$ 129,00

c) Com R$ 311,00 pode-se pagar um frete de quantos quilômetros? 86 km

Vale a pena ler

Linguagem algébrica: um pouco de História

A Álgebra é o ramo da Matemática que trabalha com incógnitas e variáveis.

Assim como as demais áreas da Matemática, a Álgebra não foi criada por uma única pessoa ou sociedade. Ao longo da história, suas ideias foram sendo experimentadas e aperfeiçoadas.

Atribui-se a Diofante, que viveu em Alexandria, no Egito, por volta do século III d.C., as primeiras tentativas de criar uma notação algébrica. Ele representava os números de 1 a 9 pelas letras gregas α, β, γ, δ etc. e a incógnita pela letra σ. Uma igualdade era indicada pela palavra *isos*.

Podemos citar o francês François Viète (1540-1603) como um dos grandes responsáveis pelo desenvolvimento da linguagem algébrica. Viète era advogado e dedicava seu tempo livre para estudar Matemática. Suas contribuições foram importantes na Aritmética e na Geometria.

Hélio Senatore

François Viète

Conta-se que, durante uma guerra entre França e Espanha, Viète decifrou um complicado código usado pelos inimigos para enviar mensagens, sendo acusado pelo rei da Espanha de ter "parte com o demônio". A verdade é que Viète gostava de Matemática e se dedicava a ela. Interesse e dedicação são fundamentais para alcançar o sucesso em qualquer atividade.

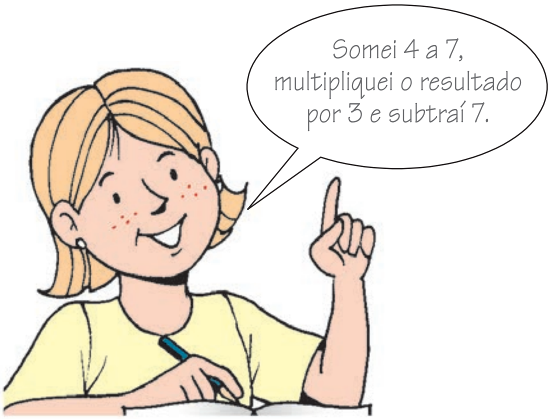
Para simbolizar o que hoje escrevemos como $10x^2 + 6 - 5x = 2$ Johnn Müller (1436-1476) escrevia: *10 census et 6 depentis 5 rebus aequatur 2*. François Viète anotava: *10 in. Aquad + 6 − 5 in a plano aequatur 2*. Foi René Descartes (1596-1650) quem adotou a notação que hoje empregamos.

Palácio de Versalhes, Paris

Pierre Louis Dumesnil. *Rainha Cristina da Suécia e sua corte* (detalhe), c. 1884. Óleo sobre tela, 97 × 126 cm. Cristina, a rainha da Suécia (de preto, à esquerda) recebe a visita de alguns sábios, entre eles René Descartes (de capa preta, com as mãos sobre a mesa).

3. Expressões algébricas

Veja o que Lucinha está dizendo.



A **expressão numérica** correspondente a essa sequência de operações é $(7 + 4) \cdot 3 - 7$.

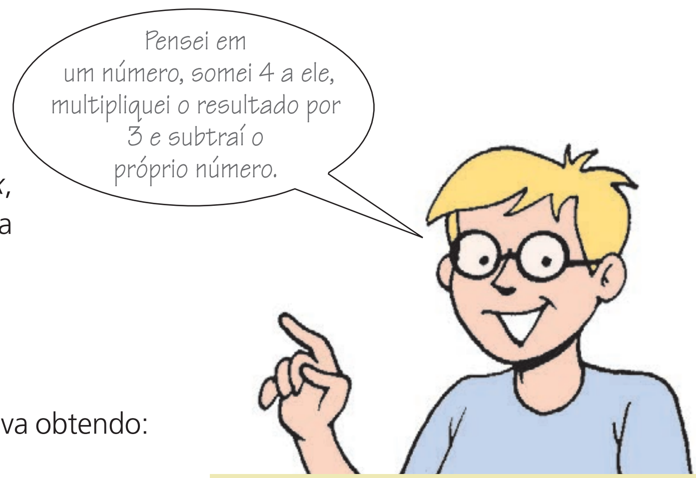
Podemos encontrar o valor dessa expressão fazendo:

$(7 + 4) \cdot 3 - 7 =$

$= 11 \cdot 3 - 7 =$

$= 33 - 7 = 26$

- Felipe pensou em um número.



Ilustrações: Lápis Mágico

Representando o número pensado por x, a expressão que representa essa sequência de operações é

$$(x + 4) \cdot 3 - x$$

Podemos aplicar a propriedade distributiva obtendo:

$3x + 12 - x$

Como $3x - x = 2x$, a expressão fica:

$2x + 12$

Essa é uma **expressão algébrica**.

Uma expressão matemática contendo letras, números e operações é uma expressão algébrica.

- $4a^3$
- $5a + 3b - 2c$
- $\frac{2}{5}xy + 7x^2$
- $3(m - n) + 5m - 2(3m + 1)$

são exemplos de expressões algébricas.

Seu valor numérico depende do valor atribuído a x, que é a variável da expressão.

- Se $x = 7$, então $2x + 12 = 2 \cdot 7 + 12 = 26$.
  O valor numérico da expressão é 26.
- Se $x = -3$, então $2x + 12 = 2 \cdot (-3) + 12 = 6$.
  O valor numérico da expressão é 6.
- Se $x = \frac{1}{2}$, então $2x + 12 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 12 = 1 + 12 = 13$.
  O valor numérico da expressão é 13.

Um CD custa x e um livro custa y. Quanto se paga por dois CDs e três livros? $2x + 3y$

Exercícios

11 Quantas rodas há em:

Sandra Fanzeres

a) 2 carros? 8 rodas

b) 3 carros? 12 rodas

c) 8 carros? 32 rodas

d) x carros? $4x$ rodas

12 O número inicial de carros estacionados é y.

AJB

Quantos serão depois de se colocar outro carro?
$y + 1$

13 Atualmente Paulo tem x anos. Diga o que significam as seguintes expressões:

Ilustra Cartoon

a) $2x$ O dobro da idade de Paulo.

b) $x - 2$ A idade de Paulo há 2 anos.

c) $x + 5$ A idade de Paulo daqui a 5 anos.

d) $2(x + 5)$ O dobro da idade de Paulo daqui a 5 anos.

14 Um restaurante tem x mesas com 4 pernas e y mesas com 3 pernas. Escreva uma expressão algébrica que represente:

a) o número de mesas; $x + y$

b) o número de pés das mesas. $4x + 3y$

15 A variável c representa o preço de uma camiseta e b, o preço de um boné.

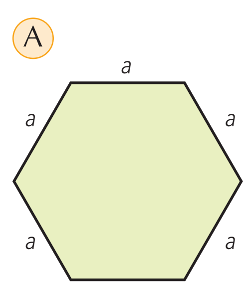
Hélio Senatore

O preço pago por Mauro é representado pela expressão $5c + 2b$.

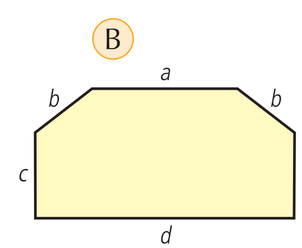
a) O que Mauro comprou? 5 camisetas e 2 bonés

b) Quanto Mauro gastou, se cada camiseta tiver custado R$ 18,00 e cada boné, R$ 7,00?
R$ 104,00

16 Para cada uma das figuras:



$a = 1{,}5$ cm



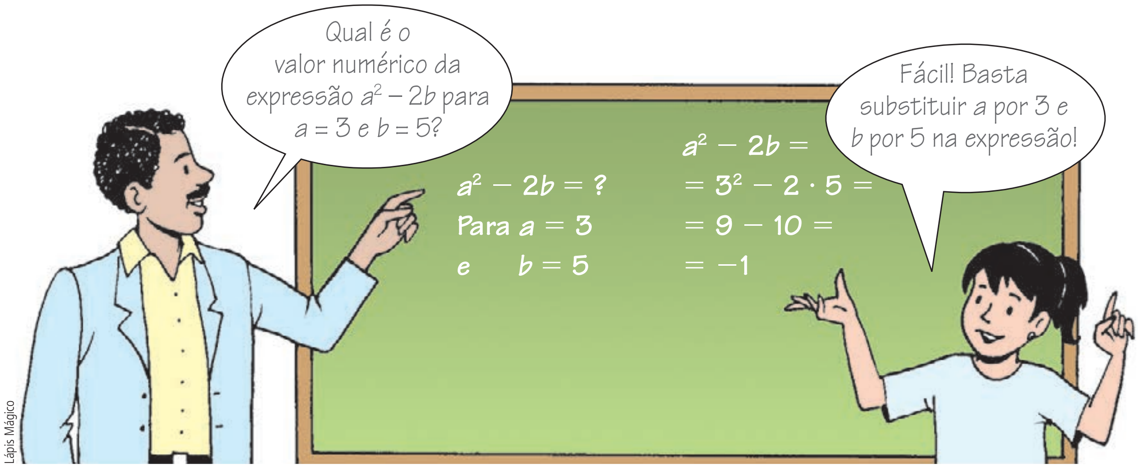
$a = 5$ cm $\quad c = 3$ cm

$b = 2{,}5$ cm $\quad d = 9$ cm

Ilustrações: DAE

a) escreva as fórmulas que permitem calcular seus perímetros;
A $P = 6a$
B $P = a + 2b + 2c + d$

b) utilizando essas fórmulas, calcule esses perímetros. A $P = 9$ cm B $P = 25$ cm



17 Para $x = 5$, calcule o valor de:

a) $2x$ 10
b) $3x + 1$ 16
c) $9 - x$ 4
d) $x - 15$ −10
e) x^2 25
f) $2x^3 - 1$ 249

18 Copie e complete.

x	0	3	0,5	
$8 - x$				0
	8	5	7,5	8

m	0	2	0,6	
$3m$				21
	0	6	1,8	7

19 Calcule o valor numérico das expressões:

a) $x - y$, para $x = -3$ e $y = 7$ −10
b) $x - y$, para $x = -3$ e $y = -7$ 4
c) $5xy - x$, para $x = 2$ e $y = -1$ −12
d) $2x + 3y$, para $x = 0{,}5$ e $y = 0{,}7$ 3,1
e) $4p^2 - pq^2$, para $p = 4$ e $q = 1$ 60

20 Copie e complete.

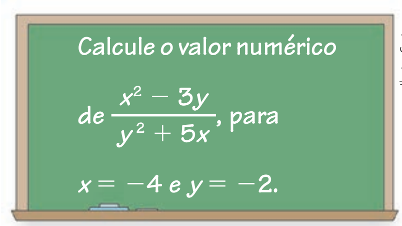
a	9	0	−4	
$2a + 1$				15
	19	1	−7	7

y	8	1	1,5	
$3y - 5$				13
	19	−2	−0,5	6

21 Calcule o valor numérico das expressões:

a) $a + b$, para $a = \frac{1}{3}$ e $b = -\frac{1}{5}$ $\frac{2}{15}$
b) $2x - y$, para $x = 7$ e $y = -\frac{1}{2}$ $\frac{29}{2}$
c) $x^2 - yz$, para $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ e $z = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$

22 Faça o que a professora pediu.



$-\frac{11}{8}$

23 Calcule o valor numérico da expressão $\sqrt{b^2 - 4ac}$, nos seguintes casos:

a) $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$ 1
b) $a = -4$, $b = 20$ e $c = -25$ 0
c) $a = 5$, $b = -8$ e $c = 5$ Não existe.
d) $a = 1$, $b = -5$ e $c = -6$ 7

24 Uma indústria produz apenas dois tipos de camisas. O primeiro com preço de R$ 45,00 por unidade e o segundo com preço de R$ 67,00 por unidade. Se chamarmos de x a quantidade vendida do primeiro tipo e de y a quantidade vendida do segundo tipo, qual será a expressão algébrica da venda desses dois artigos? Qual será o valor se forem vendidas 200 e 300 unidades, respectivamente?

$45x + 67y$; R$ 29.100,00

4. Monômios e polinômios

As expressões algébricas aparecem em fórmulas e equações. Por isso é importante saber fazer cálculos com elas. Alguns você já sabe fazer, outros vai aprender agora. Não será difícil porque as ideias são semelhantes às usadas para operar com números.

Expressões algébricas que têm um único termo são chamadas de **monômios**.

Veja exemplos:

$$\underbrace{2}_{\text{coeficiente}}\ \underbrace{xy}_{\text{parte literal}} \qquad \underbrace{\frac{5}{6}}_{\text{coeficiente}}\ \underbrace{a^3}_{\text{parte literal}}$$

$$\underbrace{-9}_{\text{coeficiente}}\ \underbrace{m^2}_{\text{parte literal}} \qquad \underbrace{a^5b}_{\text{parte literal}}$$

(O coeficiente é 1.)

Monômios que têm a mesma parte literal são **monômios semelhantes** ou **termos semelhantes**.

Nos monômios, entre os números e as letras só aparece a operação de multiplicação.

As expressões abaixo são **polinômios**:

$5x^2y + 4xy^2 + xy - 2$

$9m^3 + 7m^2 + n^3 + 6m^2 - 2mn + 1$

Poli significa "muitos". Observe que os termos de um polinômio são monômios.

Polinômios com dois termos recebem o nome especial de **binômios**.

Veja os exemplos:

$4x - 8y$ $\qquad$ $a^2 - b^3$ $\qquad$ $\frac{3}{5}m + 1$

Polinômios com três termos recebem o nome especial de **trinômios**.

Observe:

$p^2 - 2pq + q^2$

$2m^3 + m^2 + 5m$

$6xyz + 5xz + 9yz$

Expressões algébricas com variáveis no denominador não são polinômios:

$\frac{2x + 1}{x - 3}$ ou $\frac{a}{a^2 + b}$, por exemplo.

Essas expressões são chamadas de **frações algébricas**.

Exercícios

25 Quais são os termos da expressão $a + 7b - 4c$? a; $7b$; $-4c$

26 Escreva um monômio que traduza:

a) o dobro de x; $2x$

b) a metade de x; $\frac{x}{2}$

c) o triplo de x; $3x$

d) a terça parte de x; $\frac{x}{3}$

e) o simétrico de x; $-x$

f) o quadrado de x. x^2

27 Quais das seguintes expressões são monômios? a, c, d, g, i, j

a) $-x$

b) $7a - 4$

c) $-\frac{2}{5}$

d) abc

e) $a + b - c$

f) $\frac{a + m}{7}$

g) $2x^2y$

h) $2x^2 - y$

i) $\frac{am}{7}$

j) $2\sqrt{5}y$

28 Copie e complete o quadro.

Monômio	Coeficiente	Parte literal	
$3x^4$	3	x^4	
$-2a^2$	-2	a^2	
$3a^2$			3; a^2
	1	xy^2	xy^2
	$0{,}8$	m	$0{,}8m$
$-\frac{x}{5}$			$-\frac{1}{5}$; x
-7			-7; não tem

29 Separe em grupos de termos semelhantes.

$5xy$	$9x$	$7x^2$	$-3x$
x^2y^3	$12x^2y$	$2xy$	$-x^2y^3$
$-6x^2$	$-7yx^2$	$\sqrt{3}\,x^2y^3$	$-4yx$

- $5xy$, $2xy$, $-4yx$
- $9x$, $-3x$
- $7x^2$, $-6x^2$
- x^2y^3, $-x^2y^3$, $\sqrt{3}x^2y^3$
- $12x^2y$, $-7yx^2$

Curiosidade

CONECTANDO SABERES

É um engano pensar que uma pessoa que calça sapatos 38 tem um pé com 38 cm de comprimento. Veja a fórmula algébrica usada para determinar o tamanho aproximado dos sapatos.

Número do sapato $= \frac{5p + 28}{4}$, sendo p o comprimento do pé em centímetros.

Responda:
Qual deve ser o número do sapato de uma pessoa cujo comprimento do pé mede 24 cm?
Número 37.

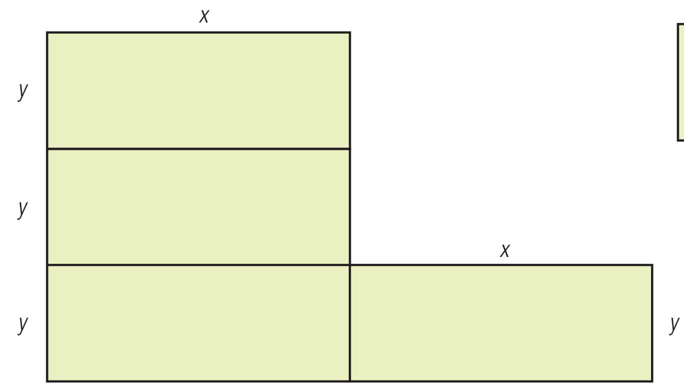
Ilustra Cartoon

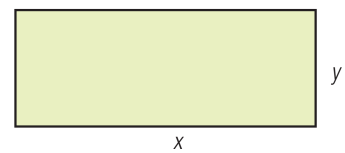
Lápis Mágico

5. Operações e expressões algébricas

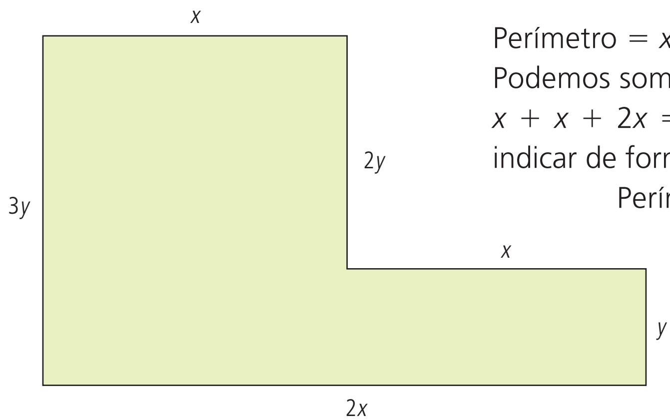
Nos exemplos a seguir, vamos operar com expressões algébricas para simplificar fórmulas.

1. A figura abaixo é composta de retângulos de medidas x e y, como este:





O perímetro da figura formada é obtido somando as medidas de seus lados:

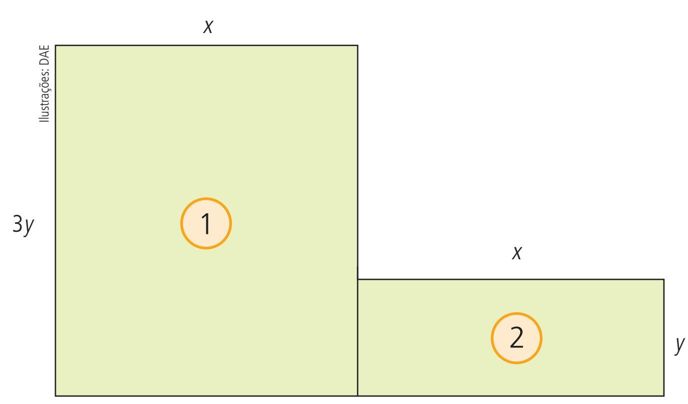


Perímetro $= x + 2y + x + y + 2x + 3y$
Podemos somar os termos semelhantes:
$x + x + 2x = 4x$ e $2y + y + 3y = 6y$ e
indicar de forma mais simples o perímetro:

Perímetro $= 4x + 6y$

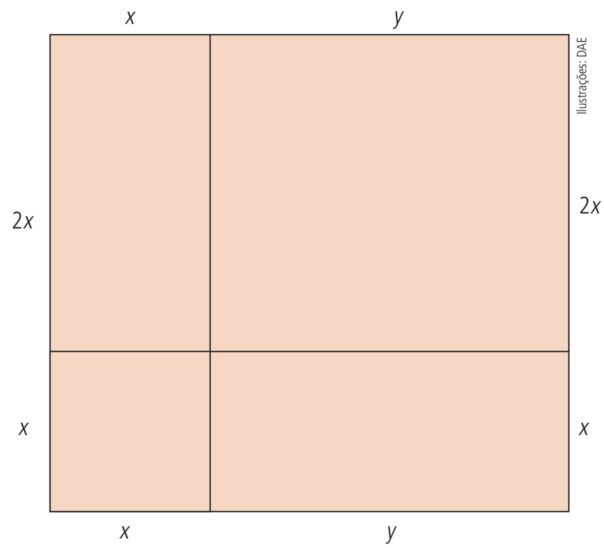
E a área da figura?
Cada retângulo tem área $A = x \cdot y = xy$
Como a figura é composta de 4 desses retângulos, $A_{figura} = 4 \cdot xy = 4xy$.

Outra opção para o cálculo da área seria decompor a figura em dois retângulos:



$A_1 = x \cdot 3y = 3xy$
$A_2 = x \cdot y = xy$
$A_{figura} = 3xy + xy$ (3xy e xy são termos semelhantes: podem ser somados)
$A_{figura} = 4xy$

2. Num loteamento, os quarteirões serão divididos em 4 terrenos. As medidas ainda não foram escolhidas, por isso estão representadas por letras no desenho.



O perímetro desse quarteirão é:

$P = 2x + x + 2x + x + x + y + x + y$

Somando os termos semelhantes, a fórmula fica:

$P = 8x + 2y$

E a área do quarteirão?

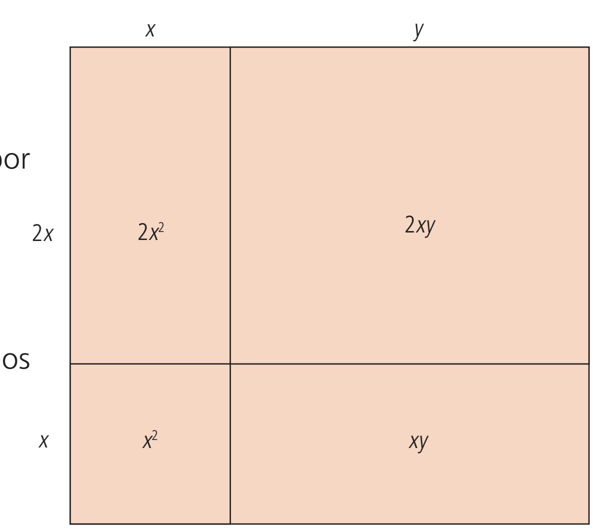
Podemos obter uma fórmula para expressá-la por dois caminhos diferentes.

- Somando as áreas dos 4 terrenos:

  $A = 2x^2 + x^2 + 2xy + xy = 3x^2 + 3xy$

- Multiplicando as medidas $3x$ e $(x + y)$ dos lados do quarteirão:

  $A = 3x(x + y) = 3x^2 + 3xy$



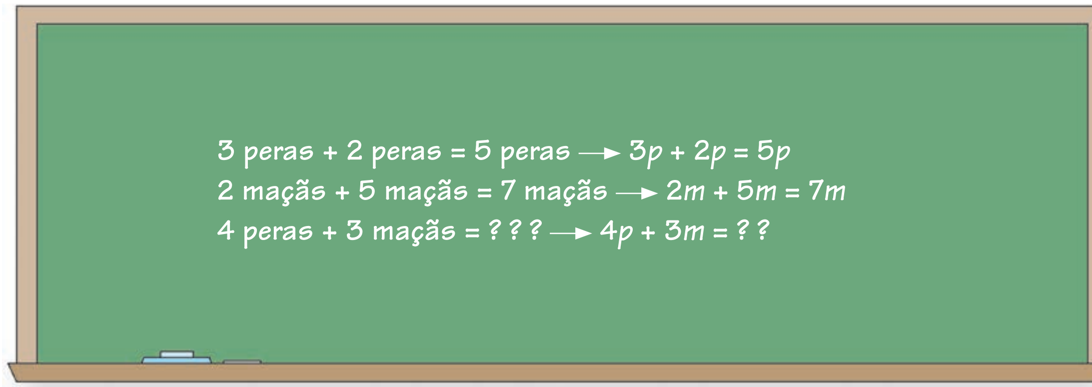
Multiplicamos um monômio por um binômio aplicando a propriedade distributiva.

Em duplas, calculem a medida do perímetro e da área do quarteirão para $x = 15$ m e $y = 20$ m.

$P = 160$ m; $A = 1575$ m^2

Simplificação de expressões com letras

Observe o quadro:



Ilustra Cartoon

Com base nessas ideias, podemos efetuar cálculos envolvendo adições e subtrações em expressões algébricas. Acompanhe os exemplos:

1. $3a + 5b - 2b + 7a =$
$= 3a + 7a + 5b - 2b =$
$= 10a + 3b$

Identificamos os termos semelhantes.

Efetuamos a adição ou subtração entre os termos semelhantes.

Obtemos uma expressão mais simples.

2. $3x^2 + 5y - 7x^2 + 4y =$
$= 3x^2 - 7x^2 + 5y + 4y =$
$= -4x^2 + 9y$

Em Matemática dizemos que **reduzimos os termos semelhantes** da expressão.

3. $-5a^2 + 6ab - 8a^2 - 2ab + 3a =$
$= -5a^2 - 8a^2 + 6ab - 2ab + 3a =$
$= -13a^2 + 4ab + 3a$

Lápis Mágico

4. $9a^2 + 5b^2 - (3b^2 - 2a^2 + ab) =$
$= 9a^2 + 5b^2 - 3b^2 + 2a^2 - ab =$
$= 11a^2 + 2b^2 - ab$

Atenção, pois essa expressão tem parênteses!

Eliminamos os parênteses.

Reduzimos então os termos semelhantes.

5. $\dfrac{x}{6} - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{y}{4} =$
$= \dfrac{x}{6} - \dfrac{9x}{6} + \dfrac{y}{4} =$
$= -\dfrac{8x}{6} + \dfrac{y}{4} =$
$= -\dfrac{4x}{3} + \dfrac{y}{4}$

Repare que $\dfrac{x}{6}$ e $\dfrac{3x}{2}$ são termos semelhantes.

Para efetuar $\dfrac{x}{6} - \dfrac{3x}{2}$, escrevemos as frações num mesmo denominador.

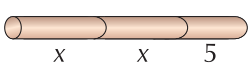
Exercícios

30 Qual é o resultado das expressões algébricas?

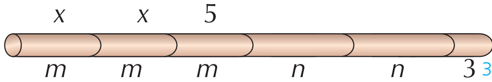
a) $a + a + a$ 3a
$a + a$ 2a
$3a + 2a$ 5a

b) $p + p + p + p + p$ 5p
$p + p + p$ 3p
$5p - 3p$ 2p

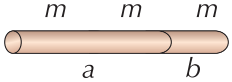
31 Escreva expressões simplificadas que representem os comprimentos dos seguintes tubos.

a) 

$2x + 5$

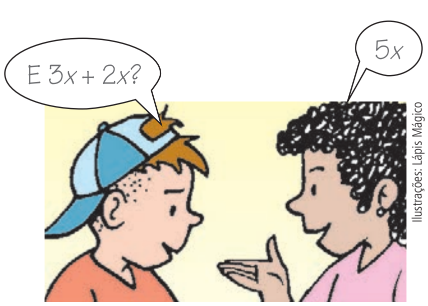
b) 

$3m + 2n + 3$

c) 

$a + b$

32 Simplifique as expressões, reduzindo os termos semelhantes:



Ilustrações: Lápis Mágico

a) $4m + m$ $5m$

b) $-7x - x$ $-8x$

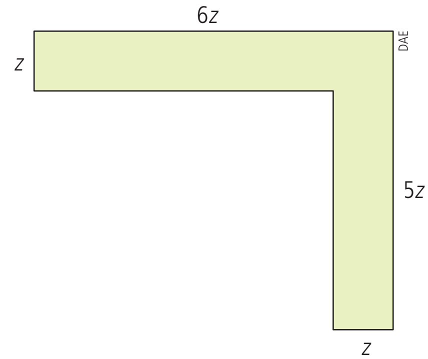
c) $xy - 10xy$ $-9xy$

d) $0{,}5m^2 - m^2$ $-0{,}5m^2$

e) $6t - 4t - 2t$ 0

f) $15a + 10 - 3a$ $12a + 10$

33 A figura representa um hexágono cujos lados são todos horizontais ou verticais.

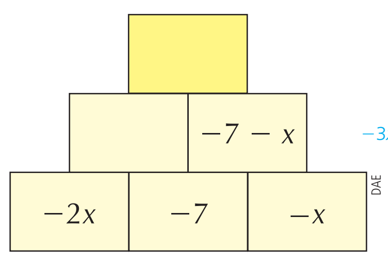


a) O que é um hexágono? É um polígono com 6 lados.

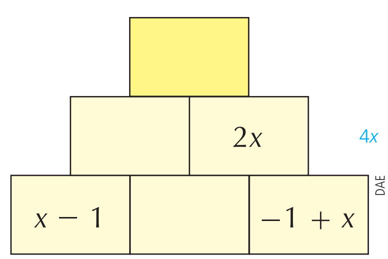
b) Escreva uma expressão simplificada para o perímetro da figura. $22z$

c) Calcule o perímetro do hexágono para $z = 1{,}5$. 33

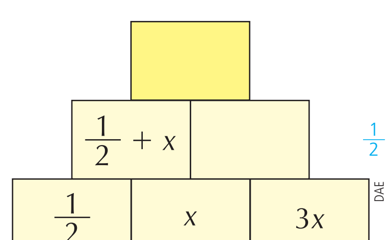
34 O número de cada retângulo é obtido adicionando os números dos dois retângulos situados abaixo. Escreva uma expressão simplificada no retângulo colorido superior.

a) 

$-3x - 14$

b) 

$4x$

c) 

$\frac{1}{2} + 5x$

35 Simplifique as expressões, reduzindo os termos semelhantes.

a) $a + 1 + a - 7$ $2a - 6$

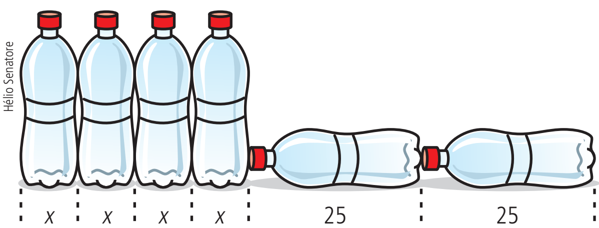
b) $-9x + 5m + 7x - 2m$ $-2x + 3m$

c) $xy^2 + xy^2 + x^2y$ $2xy^2 + x^2y$

d) $3x + 5x + 0{,}2x - x + 2x$ $9{,}2x$

36 Qual polinômio corresponde à situação? $4x + 50$

Hélio Senatore



37 Simplifique estas outras expressões, reduzindo os termos semelhantes.

a) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{2}x$ $\frac{7}{8}x$

b) $\frac{a}{2} - \frac{2a}{3}$ $-\frac{a}{6}$

c) $7p - \frac{3}{5}p$ $\frac{32}{5}p$

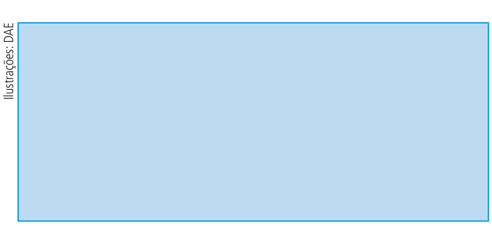
d) $2x^3 + x^3 + x + \frac{1}{2}x$ $3x^3 + \frac{3}{2}x$

e) $3a - 6a - \frac{3}{5} + 1$ $-3a + \frac{2}{5}$

f) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{6} - \frac{a}{2} - \frac{1}{9}$ $\frac{a}{6} + \frac{1}{18}$

38 Escreva uma expressão simplificada que represente o perímetro do retângulo.

Ilustrações: DAE



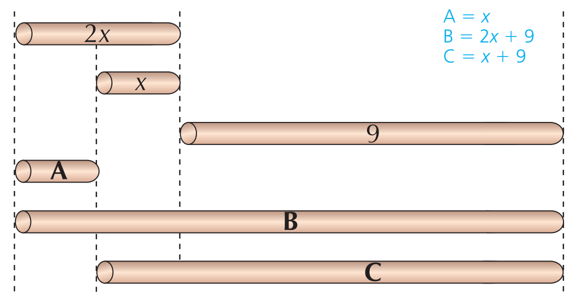
$13x$

$\frac{3}{2}x$

$5x$

39 Supondo que a unidade é o metro, represente as expressões que permitam determinar os comprimentos dos tubos A, B e C.

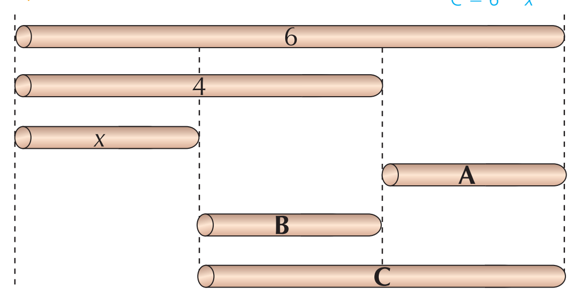
a)



A = x
B = $2x + 9$
C = $x + 9$

b)

A = 2
B = $4 - x$
C = $6 - x$



40 Calcule.

a) $9x - (5 - x)$ $10x - 5$

b) $7x + (2 - 10x) - (x - 4)$ $-4x + 6$

c) $x^2 - 1{,}5x + 2 + (-x^2 + 2{,}3x - 6)$ $0{,}8x - 4$

d) $(x - 2y) + (2x + 2z - y) - (y + x - 3z)$ $2x - 4y + 5z$

e) $\frac{1}{2}a - c - \left(\frac{1}{2}c - \frac{3}{4}a\right)$ $\frac{5}{4}a - \frac{3}{2}c$

41 Um comerciante compra diversos artigos por x reais a dúzia e revende cada artigo por $\frac{x}{9}$ reais. Em cada artigo, seu lucro em reais é de:

a) $\frac{x}{3}$

b) $\frac{x}{4}$

c) $\frac{x}{8}$

x **d)** $\frac{x}{36}$

$\frac{x}{9} - \frac{x}{12} = \frac{x}{36}$

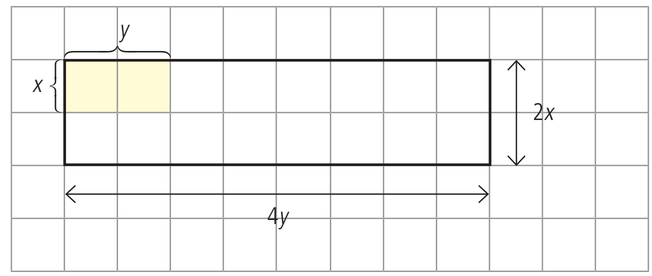
Mais operações...

Veja agora exemplos de cálculos com expressões algébricas envolvendo **multiplicações**, **divisões** e **potenciações**:

- Que expressão representa a área do retângulo?

A área do retângulo maior é dada pela multiplicação dos monômios $2x$ e $4y$. Observando a figura:

$2x \cdot 4y = (2 \cdot 4) \cdot (x \cdot y) = 8xy$



Ilustrações: DAE

É sempre possível representar o produto de dois monômios como um único monômio. Basta multiplicar os coeficientes e as partes literais.

$$4y^2 \cdot (-2)y^3 = 4 \cdot (-2) \cdot y^2 \cdot y^3 = -8y^5$$
$$(-8am) \cdot (+2m) = (-8) \cdot 2 \cdot a \cdot m \cdot m = -16am^2$$

- Como calcular o resultado de $(20x^5) : (4x^2)$?

É mais fácil escrever o quociente em forma de fração. Observe:

$$(20x^5) : (4x^2) = \frac{20x^5}{4x^2} = \frac{20 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{4 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = 5 \cdot x \cdot x \cdot x = 5x^3$$

Vamos mostrar outro exemplo:

$$(25a^6x^5) : (-5a^2x^3) = \frac{25a^6x^5}{-5a^2x^3} = -5a^4x^2$$

detalhando

- $25 : -5 = -5$
- $a^6 : a^2 = a^4$
- $x^5 : x^3 = x^2$

- Que expressão representa a área do quadrado?

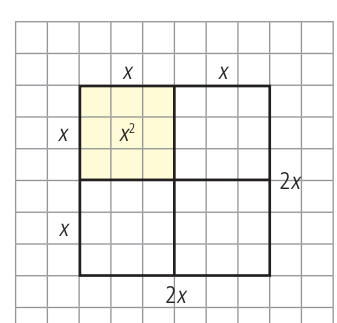
A área do quadrado maior pode ser determinada de dois modos:

- quatro quadrados de área $x^2 = 4x^2$

ou

- um quadrado de lado $2x = (2x)^2$

$(2x)^2 = 4x^2$



Observe outros exemplos:

- $(a^3b^4)^2 = (a^3b^4) \cdot (a^3b^4) = a^3 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot b^4 = a^6 \cdot b^8$
- $(-5a^2c^3)^3 = (-5)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (c^3)^3 = -125a^6c^9$

Exercícios

42 Calcule.

a) $a \cdot a \cdot a$ a^3

$a \cdot a$ a^2

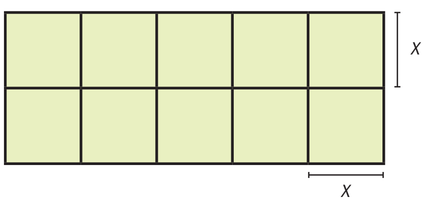
$a^2 \cdot a^3$ a^5

b) $p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p$ p^5

$p \cdot p$ p^2

$p^5 \cdot p^2$ p^7

43 Considere o retângulo formado por quadradinhos de lado x.



a) Quanto mede o comprimento e a largura desse retângulo? $5x$ e $2x$

b) Qual é a área de cada quadrado? x^2

c) Indique o produto que permite calcular a área desse retângulo? $5x \cdot 2x$

d) Contando os quadrados, indique a área do retângulo. $10x^2$

e) Compare os resultados obtidos nos dois últimos itens. São iguais.

44 Calcule.

a) $2x \cdot 5x$ $10x^2$

b) $4y \cdot 3y^2$ $12y^3$

c) $-2x \cdot 7x$ $-14x^2$

d) $y \cdot (-5y)$ $-5y^2$

e) $-3a^2 \cdot 5ab$ $-15a^3b$

f) $-x^2y \cdot y^2$ $-x^2y^3$

g) $4p^2 \cdot (-6q^3)$ $-24p^2q^3$

h) $(-8a^2c) \cdot (-6ac)$ $48a^3c^2$

45 O produto de $(0{,}2a^3) \cdot (0{,}3a^2)$ é igual a:

a) $0{,}6a^5$

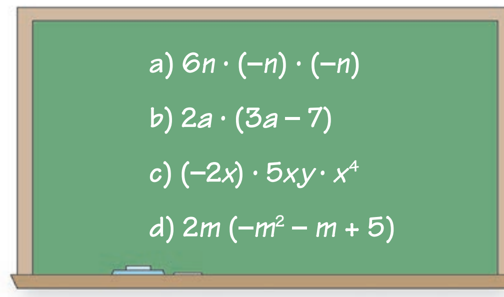
b) $0{,}6a^6$

x **c)** $0{,}06a^5$

d) $0{,}06a^6$

46 Calcule.

a) $6n^3$
b) $6a^2 - 14a$
c) $-10x^6y$
d) $-2m^3 - 2m^2 + 10m$



Ilustra Cartoon

47 Efetue e simplifique.

a) $\frac{1}{4}\,y^2\,(10 - y)$ $\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{4}$

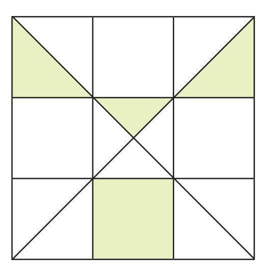
b) $-\frac{1}{2}\,(2a - 8)$ $-a + 4$

c) $-5m\,\left(-1{,}2 - \frac{4}{5}m\right)$ $6m + 4m^2$

d) $\frac{x}{6}\left(\frac{x}{2} - 6x^2 + 12\right)$ $\frac{x^2}{12} - x^3 + 2x$

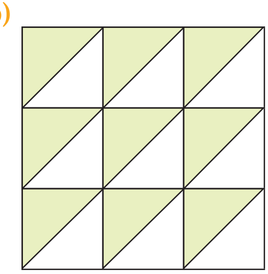
48 Qual monômio representa a área de cada uma das partes coloridas dos quadrados de lado x?

a)



$\frac{x^2}{4}$

b)



$\frac{x^2}{2}$

Ilustrações: DAE

49 Indique no caderno as expressões entre as quais se pode colocar o sinal de $=$.

$3a = a + a + a = a + 2a$

$3a$	$a \cdot a$	$2a \cdot a$
$2a$	$2a^3$	$a^2 \cdot 2$
$a + a + a$	$2a \cdot a \cdot a$	$a + a$
$a + 2a$	$2a^2$	a^2

$a \cdot a = a^2$
$2a \cdot a = a^2 \cdot 2 = 2a^2$

$2a = a + a$
$2a^3 = 2a \cdot a \cdot a$

50 Calcule.

a) $4x^2 \cdot 4x^2$ $16x^4$

b) $2x^3 \cdot 2x^3$ $4x^6$

c) $(-3x) \cdot (-3x)$ $9x^2$

d) $(-2x) \cdot (-2x) \cdot (-2x)$ $-8x^3$

e) $(4x^2)^2$ $16x^4$

f) $(2x^3)^2$ $4x^6$

g) $(-3x)^2$ $9x^2$

h) $(-2x)^3$ $-8x^3$

51 Eleve ao quadrado cada um dos seguintes monômios:

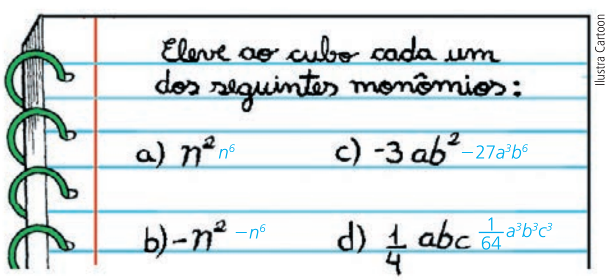
a) $-7m$ $49m^2$

b) $\frac{1}{2}y$ $\frac{1}{4}y^2$

c) $-0{,}3p^3$ $0{,}09p^6$

d) $-\frac{4}{5}pq^2$ $\frac{16}{25}p^2q^4$

52 Vítor vai fazer a lição de casa. Veja qual é:



Resolva o exercício você também.

53 Calcule.

a) $14m^2 : 7m$ $2m$

b) $-2x^3 : x$ $-2x^2$

c) $20x^2 : 4$ $5x^2$

d) $10x^7 : 6x^5$ $\frac{5}{3}x^2$

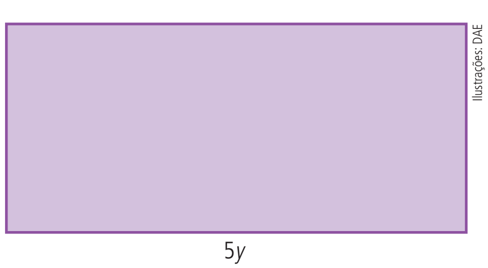
e) $6m^5 : (-2m^2)$ $-3m^3$

f) $12x^3y^2 : 2xy$ $6x^2y$

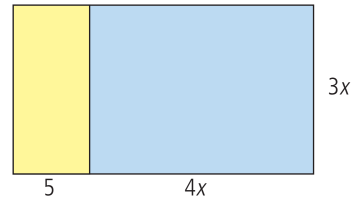
g) $(-3ab^3) : (-ab^2)$ $3b$

h) $(-8ac^5) : (-16c^2)$ $\frac{1}{2}ac^3$

54 A área do retângulo da figura é dada por $10y^2$. Qual é a medida do menor lado desse retângulo? $2y$



55 Veja a figura:



a) Escreva a expressão que representa a área do retângulo amarelo. $15x$

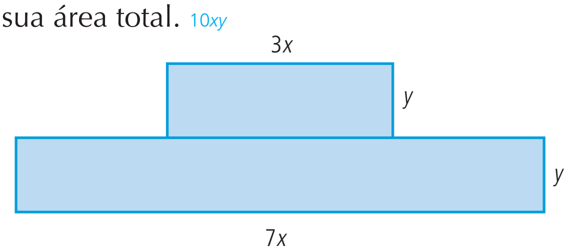
b) Escreva a expressão que representa a área do retângulo azul. $12x^2$

c) Escreva a expressão que representa a soma das áreas amarela e azul. $12x^2 + 15x$

d) Calcule $3x(4x + 5)$. $12x^2 + 15x$

e) Compare os resultados obtidos nos dois últimos itens. São iguais.

56 Observe a figura em que estão representados dois retângulos e calcule mentalmente a sua área total. $10xy$



57 Calcule.

a) $10(4p + 5q)$ $40p + 50q$

b) $7x(x - 5)$ $7x^2 - 35x$

c) $(x^2 - y)x$ $x^3 - xy$

d) $-3t(-2t - 4)$ $6t^2 + 12t$

58 Simplifique as expressões.

a) $7x^2 + 2(x^2 - 1)$ $9x^2 - 2$

b) $10 - 4(x - 3) + 5$ $-4x + 27$

c) $-9(2x - 1) + 15x$ $-3x + 9$

d) $0{,}25(4x - 100) + 7x$ $8x - 25$

e) $3a^2 - a(2a - 7) + 1$ $a^2 + 7a + 1$

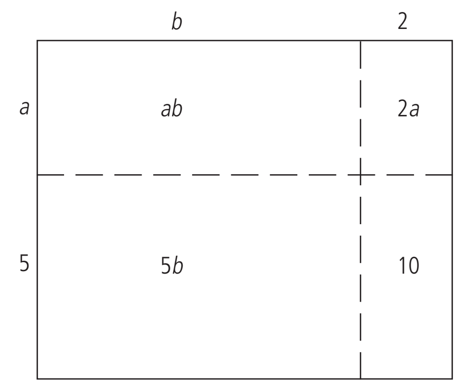
f) $5\left(\frac{1}{5} + x\right) - 3x - 10$ $2x - 9$

6. Multiplicação de polinômios

Um terreno retangular de lados a e b teve suas medidas aumentadas para $a + 5$ e $b + 2$.

A área do terreno é dada pela expressão $(a + 5)(b + 2)$.

Ao mesmo tempo, a área do retângulo pode ser escrita como a soma das áreas das 4 figuras em que ele foi dividido:



Ilustrações: DAE

$ab + 2a + 5b + 10$

Então:

$(a + 5)(b + 2) = ab + 2a + 5b + 10$

De forma prática, distribuímos a multiplicação fazendo:

$(a + 5)(b + 2) = a(b + 2) + 5(b + 2) = ab + 2a + 5b + 10$

Veja outros exemplos:

1. $(2x - 3)(x^2 + 3x + 5) = 2x^3 + 6x^2 + 10x - 3x^2 - 9x - 15 = 2x^3 + 3x^2 + x - 15$

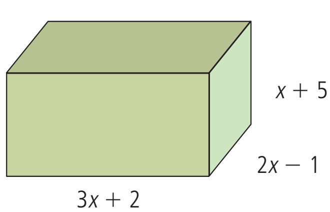
Há outra forma de dispor esses cálculos:

Multiplicamos cada termo de $x^2 + 3x + 5$ por $2x$.

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +\ 3x & +\ 5 \\ & & 2x & -\ 3 \\ \hline 2x^3 & +\ 6x^2 & +\ 10x & \\ & -\ 3x^2 & -\ 9x & -\ 15 \\ \hline 2x^3 & +\ 3x^2 & +\ x & -\ 15 \end{array}$$

Em seguida multiplicamos cada termo de $x^2 + 3x + 5$ por (-3) colocando os termos semelhantes na mesma coluna. Somamos os termos semelhantes obtendo o produto desejado.

2. Uma fábrica produz blocos de cimento com medidas dadas por $3x + 2$, $2x - 1$ e $x + 5$ com $x > 0{,}5$.



Copie no caderno e preencha a tabela para alguns valores de x:

x	$3x + 2$	$2x - 1$	$x + 5$	Volume
1	5	1	6	$5 \cdot 1 \cdot 6 = 30$
2	8	3	7	168

Vamos escrever uma fórmula geral para o volume de qualquer um desses blocos:

$V = \underbrace{(3x + 2)(2x - 1)}_{6x^2 - 3x + 4x - 2}(x + 5) = (6x^2 + x - 2)(x + 5)$

$V = 6x^3 + 30x^2 + x^2 + 5x - 2x - 10$

$V = 6x^3 + 31x^2 + 3x - 10$

O volume de cada bloco é dado por meio da fórmula:

$V = 6x^3 + 31x^2 + 3x - 10$

Substitua x por 1 nessa fórmula, faça os cálculos e confirme se o valor do volume é $V = 30$, como está na tabela.

Faça o mesmo para $x = 2$.

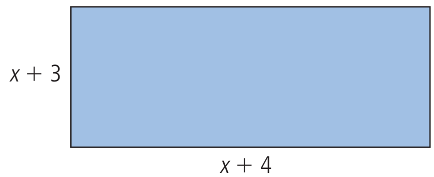
Sim, os valores conferem com os dados da tabela.

Verifique se essa expressão teria sentido para $x = 0$.

Não, pois para $x = 0$ teríamos uma das medidas negativa $(2x - 1)$. O bloco não existiria. Substituindo x por 0 na fórmula isso se comprova, pois teríamos $V = -10$.

Exercícios

59 Observe o retângulo:



a) O que significa para essa figura a expressão $2(x + 3) + 2(x + 4)$? É a expressão do perímetro.

b) E a expressão $(x + 3)(x + 4)$? É a expressão da área.

c) Escreva um polinômio que represente o perímetro e outro que represente a área desse retângulo. $4x + 14$; $x^2 + 7x + 12$

60 Teste suas habilidades na multiplicação de polinômios.

a) $(x + 2)(x + 3)$ $x^2 + 5x + 6$

b) $(a - 2)(a - 7)$ $a^2 - 9a + 14$

c) $(y + 6)(y - 6)$ $y^2 - 36$

d) $(2x - 5)(3x - 2)$ $6x^2 - 19x + 10$

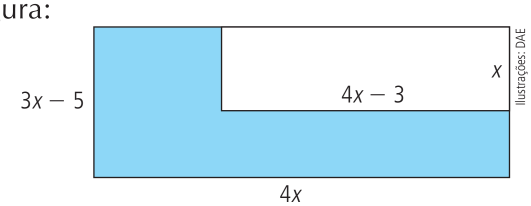
e) $(1 - 2x)(4 + 3x)$ $4 - 5x - 6x^2$

f) $(-x + 4)(x + 5)$ $-x^2 - x + 20$

g) $(2x + y)(x - y)$ $2x^2 - xy - y^2$

h) $(xy - 7)(xy + 6)$ $x^2y^2 - xy - 42$

61 Observe os retângulos representados na figura:



a) Escreva um polinômio que represente a medida da área azul no retângulo. $8x^2 - 17x$

b) Faça $x = 5$ cm e calcule essa área de dois modos diferentes. 115 cm²

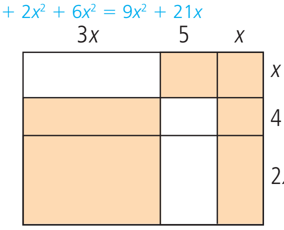
c) Neste exercício, x pode ser 1?
Não, pois $8x^2 - 17x$ representa uma medida e o valor de uma medida, não pode ser negativo.

62 Calcule.

a) $(x^2 + 3x - 4)(x - 2)$ $x^3 + x^2 - 10x + 8$

b) $(c^3 + 4c^2 + c)(c - 1)$ $c^4 + 3c^3 - 3c^2 - c$

63 Escreva o polinômio que permite calcular a área da parte colorida da figura.
$5x + x^2 + 4x + 12x + 2x^2 + 6x^2 = 9x^2 + 21x$



• Todos os quadriláteros são retângulos.

64 Mostre que $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.
Demonstração: $x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3 = x^3 + y^3$

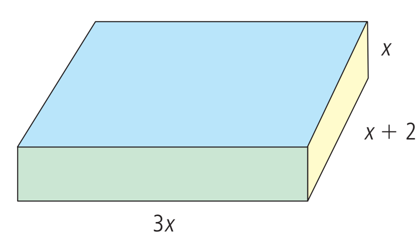
65 Simplifique as expressões.

a) $(x + 4)(x - 3) + 2$ $x^2 + x - 10$

b) $(x + 3)(x + 4) - 2(x + 1)$ $x^2 + 5x + 10$

c) $3x(x - 1) + (x + 2)(x + 5)$ $4x^2 + 4x + 10$

66 Considere o bloco retangular:



Escreva o polinômio que representa:

a) a soma do comprimento de todas as arestas do bloco; $20x + 8$

b) a área da face azul; $3x^2 + 6x$

c) a área da face amarela; $x^2 + 2x$

d) a área da face verde; $3x^2$

e) a soma das áreas de todas as faces; $14x^2 + 16x$

f) o volume do bloco. $3x^3 + 6x^2$

Revisando

67 Escreva um monômio que represente:

a) o dobro de $2x$; $4x$

b) metade de $2x$; x

c) o quadrado de $2x$; $4x^2$

d) o triplo de $2x$; $6x$

e) a terça parte de $2x$; $\frac{2x}{3}$

f) o cubo de $2x$. $8x^3$

68 Dê exemplos de monômios que estejam de acordo com as condições: Respostas pessoais.

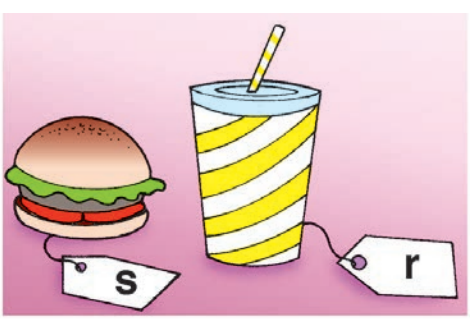
a) ter coeficiente 1;

b) ter coeficiente -1 e ter duas variáveis;

c) ser semelhante ao monômio $\frac{2}{5}x^2$;

d) ser semelhante ao monômio $7x^3$ e de coeficiente simétrico.

69 Se um sanduíche custa s reais e um refrigerante r reais, indique o custo, em reais, de:



a) dois sanduíches; $2s$

b) sete refrigerantes; $7r$

c) um sanduíche e três refrigerantes; $s + 3r$

d) cinco sanduíches e um refrigerante. $5s + r$

70 Utilize o enunciado do último exercício e responda o que representa cada uma das expressões a seguir:

a) $10s$ Custo de 10 sanduíches.

b) $10s + 5s$ Custo de 15 sanduíches.

c) $10r + 30r$ Custo de 40 refrigerantes.

71 Copie e complete mentalmente.

C	1	0,1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
C + 0,5	1,5	0,6	0,5	1	0
2C	2	0,2	0	1	-1
C²	1	0,01	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

72 Calcule o valor numérico de:

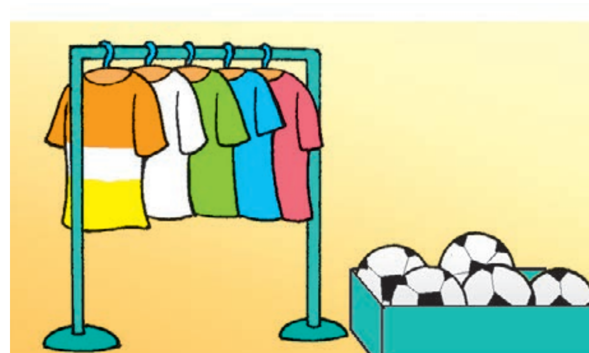
a) $-x - x^2 - x^3 - x^4$ para $x = -2$ -10

b) $(a + b) \cdot (a - b)$ para $a = -4$ e $b = -\frac{1}{2}$ $\frac{63}{4}$

73 (OM-SP) Qual o valor de $a - b$, se $a = \frac{2}{3}$ e $b = -\frac{3}{5}$? $\frac{19}{15}$

74 Existe o valor numérico da expressão $\frac{7x}{x-y}$ para $x = 3$ e $y = 3$? Por quê? Não. Porque o denominador da fração é nulo.

75 Uma fábrica produz apenas camisetas e bolas. A primeira com custo de R$ 20,00 por unidade e a segunda com custo de R$ 15,00 por unidade. Se chamarmos de x a quantidade produzida de camisetas e de y a quantidade produzida de bolas, qual será a expressão algébrica do custo desses dois artigos? Qual será o custo se forem produzidas 300 e 500 unidades, respectivamente? $20x + 15y$; R$ 13.500,00



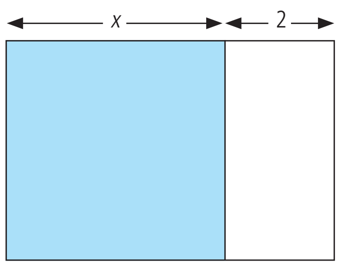
Ilustrações: Ilustra Cartoon

76 Descubra o valor de x a partir da informação dada.

a) O valor numérico da expressão $2x - 1$ é 17. $x = 9$

b) O valor numérico da expressão $-3x + 42$ é 6. $x = 12$

77 A figura representa um quadrado de lado x cm.



Um dos lados do quadrado aumentou 2 cm.

Escreva a expressão simplificada que representa:

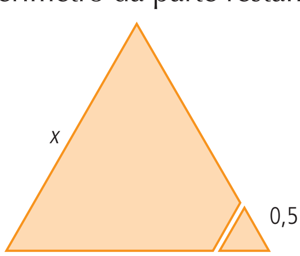
a) o perímetro do quadrado; $4x$

b) a área do quadrado; x^2

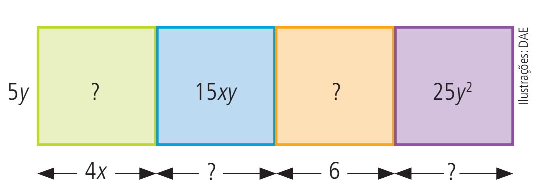
c) o perímetro do retângulo; $4x + 4$

d) a área do retângulo. $x^2 + 2x$

78 De um triângulo equilátero de lado x retirou-se o outro triângulo equilátero de lado 0,5. Qual é o perímetro da parte restante? $P = 3x - 0{,}5$



79 A figura é formada por retângulos de mesma altura. Determine as medidas desconhecidas.



$20xy$; $3x$; $30y$; $5y$

80 Simplifique os polinômios reduzindo seus termos semelhantes.

a) $7x - y + 2x - 2x$ $9x - 3y$

b) $9p + p - 10p$ 0

c) $-6m - m - 4m - 2m$ $-13m$

d) $5x^2 - 3x - 5x^2 - 4x$ $-7x$

e) $0{,}3x - 0{,}01x - 0{,}1x$ $0{,}19x$

f) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^2$ $\frac{9}{4}x^2$

g) $\frac{x}{9} - \frac{y}{2} - \frac{x}{6} + \frac{y}{3}$ $-\frac{x}{18} - \frac{y}{6}$

81 Reduza os termos semelhantes.

a) $20 + (3x - 4)$ $16 + 3x$

b) $8x^2 - 6 - (5 - 7x^2)$ $15x^2 - 11$

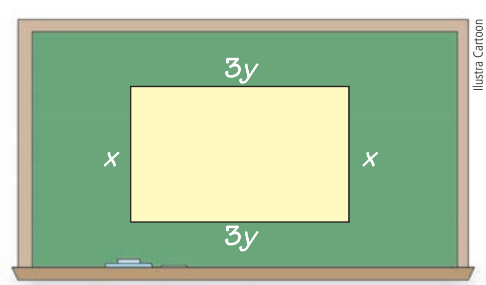
c) $10a^2 - (-a^2 - 4a + 5)$ $11a^2 + 4a - 5$

d) $5x + (7x - 12) - (20 + 4x)$ $8x - 32$

e) $8x + (-0{,}5x) - (-1{,}2x)$ $8{,}7x$

f) $\left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{4}{3}y - \frac{3}{2}x\right)$ $2x - y$

82 A figura desenhada na lousa representa um retângulo:



a) Escreva uma expressão simplificada para o cálculo do perímetro do retângulo. $2x + 6y$

b) Se o perímetro for 60, poderá ser:

- $x = 6$ e $y = 8$? Sim.
- $x = 2$ e $y = 24$? Não.
- $x = 12$ e $y = 6$? Sim.

83 Teste suas habilidades em operações com monômios.

a) $-4 \cdot 5y$ $-20y$

b) $3a \cdot 7a^2$ $21a^3$

c) $2ab \cdot 6ac$ $12a^2bc$

d) $-2m \cdot (-4n)$ $8mn$

e) $\frac{2}{3}c \cdot 3c$ $2c^2$

f) $2x : 2x$ 1

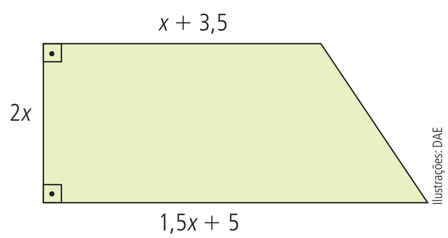
g) $3m : 6m$ $\frac{1}{2}$

h) $-8a^2 : 4a$ $-2a$

i) $9n^2 : 6n$ $\frac{3}{2}n$

j) $5x^2 : 10x^3$ $\frac{1}{2x}$

84 Qual é o polinômio que representa a área do trapézio? $2{,}5x^2 + 8{,}5x$



85 Calcule.

a) $(a - 7)(a - 9)$ $a^2 - 16a + 63$

b) $(6 - 5x)(1 - 2x)$ $6 - 17x + 10x^2$

c) $(-x + 5)(x + 2)$ $-x^2 + 3x + 10$

d) $(x^2 + x - 1)(x - 1)$ $x^3 - 2x + 1$

86 Sendo:

$A = x - 3$	$C = x + 1$
$B = x - 2$	$D = x + 4$

Calcule:

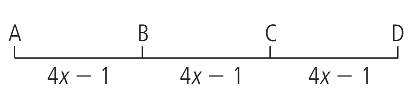
a) $AB + C$ $x^2 - 4x + 7$

b) $A + CD$ $x^2 + 6x + 1$

c) $BD + C$ $x^2 + 3x - 7$

d) ABC $x^3 - 4x^2 + x + 6$

87 Represente por um binômio a medida do segmento $\overline{AD}$. $12x - 3$



88 Paulo tem três irmãs e cinco irmãos. Sua irmã Neuza tem x irmãs e y irmãos. Qual é o produto de x por y? 12 • $x \cdot y = 2 \cdot 6 = 12$

89 (Encceja-MEC) A revista *Época* de 28/2/05 publicou a reportagem "Cerco aos Fumantes", informando que "o Distrito Federal arrecada R$ 3 milhões em impostos com a venda de cigarros, mas gasta R$ 12 milhões para tratar os males do fumo". Se este gasto do governo for x, a arrecadação de impostos será representada pela expressão algébrica:

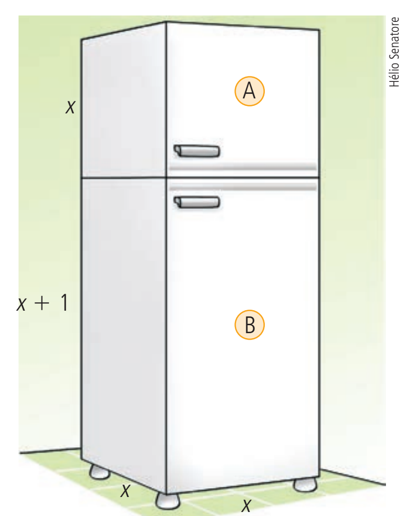
a) $4x$

x b) $\frac{x}{4}$

c) $3x$

d) $\frac{x}{3}$

90 Escreva o polinômio que representa:

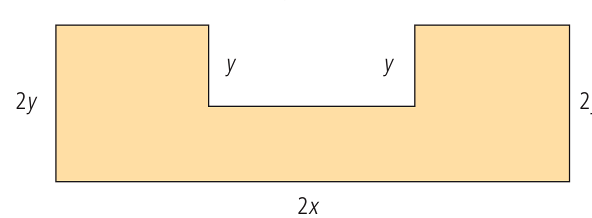


a) o volume do sólido A; x^3

b) o volume do sólido B; $x^3 + x^2$

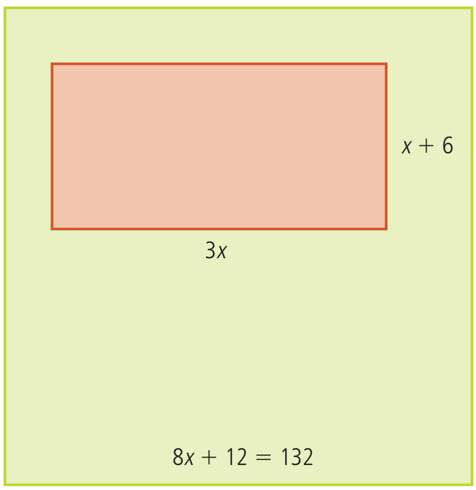
c) a soma dos volumes de A e de B. $2x^3 + x^2$

91 A figura abaixo é um polígono cujos lados são todos horizontais ou verticais. Qual é o perímetro desse polígono?



$2(2x) + 2(2y) + 2y = 4x + 6y$

92 (Encceja-MEC) Felipe encontrou um papel com as informações a seguir. Reconheceu que se tratava do desenho do terreno que havia comprado. Interpretando a equação expressa no papel, em relação aos dados do desenho do terreno, percebeu que:



Ilustrações: DAE

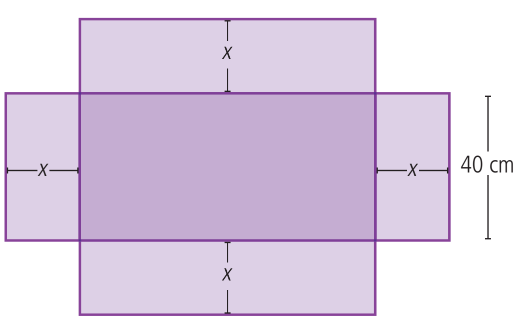
a) a área do terreno é igual a 132.

b) a área do terreno é igual a 120.

c) o perímetro do terreno é igual a 120.

x **d)** o perímetro do terreno é igual a 132.

93 (Vunesp) A figura mostrada é a planificação de uma caixa plástica sem tampa.



Para que a capacidade total dessa caixa seja de 192 litros, qual é o valor de x, em centímetros?
60 cm $\quad 40 \cdot 80 \cdot x = 192\,000$

1 litro = 1 000 cm³

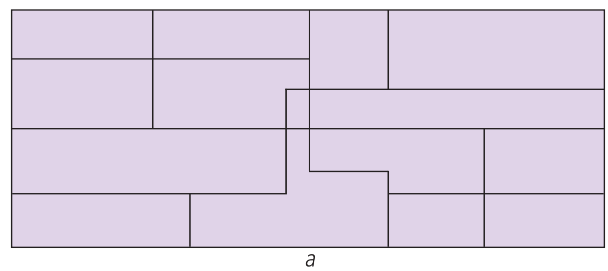
Desafios

94 A soma de três das expressões a seguir é igual a $4x + 2$. Quais são as três expressões?
$2x + 1$; $x + 4$; $x - 3$

$2x + 1$ $\quad$ $2x - 3$ $\quad$ $x + 4$

$x + 2$ $\quad$ $x - 3$

95 As medidas dos lados do retângulo a seguir são a e b. Então a soma das medidas dos segmentos distribuídos dentro do retângulo e que são paralelos aos seus lados é:



a) $2a + 2b$

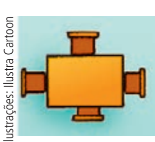
b) $3a + b$

c) $3a + 2b$

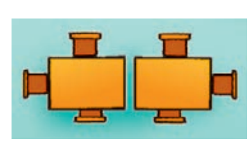
x **d)** $3a + 3b$
$a + a + a + b + b + b = 3a + 3b$

96 Observe os desenhos abaixo:

Ilustrações: Ilustra Cartoon



1 mesa e 4 cadeiras



2 mesas e 6 cadeiras

3 mesas e 8 cadeiras

a) Se juntarmos 10 mesas, quantas cadeiras serão colocadas? 22 cadeiras

b) E com m mesas? $(2m + 2)$ cadeiras

Seção livre

Computador também erra

[...]

Os computadores estão presentes hoje em, praticamente, qualquer uma de nossas atividades. Sabemos que, em questão de segundos, uma dessas máquinas pode efetuar cálculos que um ser humano não conseguiria fazer em dias, talvez meses, ou anos. Mas todas essas montanhas de números geradas pelos computadores devem inspirar sempre confiança? Vejamos...

Experimento computacional

Tente repetir os cálculos que vamos descrever com uma máquina de calcular. [...]

Para um número a diferente de zero, $a \neq 0$, vale: $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot (1 : a) = 1$

Mas se você efetuar esse cálculo na sua máquina para valores diferentes de a irá obter, em alguns casos, resultado igual a 1, enquanto que, em outros, obterá a = "quase 1". Esse "quase" muda conforme o dado com o qual você alimentou a máquina. A diferença entre o valor correto, ou seja, 1, e o valor calculado é o *erro da operação*. Na minha máquina, que trabalha com 8 algarismos, obtive:

Dado	Resposta	Erro
2	1	0
6	0,9999996	0,0000004
7	0,9999997	0,0000003
16	1	0
47	0,9999955	0,0000045
50	1	0

DAE

[...] A origem destes erros observados é a representação que o computador usa para os números. A máquina tem limitações que você também tem, por exemplo, quando precisa calcular $\frac{1}{3}$ e usa 0,333, ou 0,3333333.

Em qualquer dos casos acima, trata-se sempre de uma aproximação para o valor exato de $\frac{1}{3}$. Podemos pensar que estes erros não têm importância, já que são tão pequenos, da ordem da sexta ou sétima casa decimal.

Mas os números pequenos têm seu peso, sim! Você já deve ter notado que, apesar de a moeda real estar dividida em 100 partes (os centavos), nos postos de gasolina, o visor das bombas marca, por exemplo, R$ 0,634 para o litro do álcool. [...]

Os postos tiveram que incluir os milésimos porque foram impedidos de cobrar do consumidor centésimos adicionais em cada litro. Mas, se eles desprezassem esses valores, teriam um prejuízo considerável, provavelmente depois de alguns meses.

Esse fato indica o que pode acontecer com os milhões, ou bilhões, de operações aritméticas efetuadas na execução de um programa. Esses pequenos erros podem ir se somando, se acumulando sem que se tenha ideia do que está ocorrendo no "cérebro" da máquina. No final, o acúmulo pode invalidar completamente os resultados obtidos, que podem não ter nada a ver com o resultado esperado. [...]

Antonio Carlos de Moura. Computador também erra. In: *Ciência hoje na escola* – Matemática por quê e para quê? Rio de Janeiro: SBPC/Global, 1999. n. 8.

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

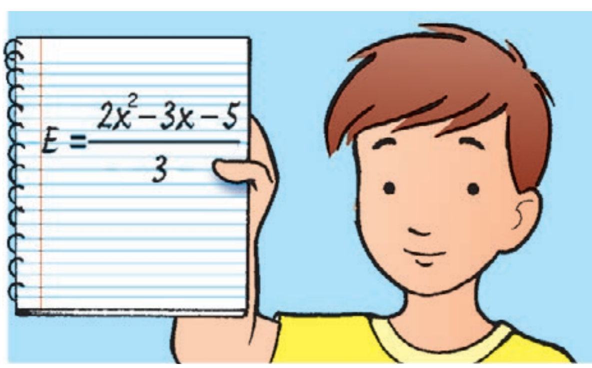
97 Pensei num número x. Adicionei-lhe a sua metade. Obtive:

a) $x + 2x$
x b) $x + \frac{x}{2}$
c) $x + \frac{1}{2}$
d) $\frac{x + 2}{2}$

98 Qual é o valor da expressão $(x - 2)(x + 4)$ quando $x = -1$?

a) 5
b) 9
c) -5
x d) -9

99 Roberto está resolvendo um problema e chegou à expressão



Ilustra Cartoon

Quando $x = -5$, o valor numérico da expressão E será igual a:

x a) 20
b) 25
c) -20
d) -25

100 Os resultados de $3x + 2x$ e de $3x \cdot 2x$ são, respectivamente:

a) $5x^2$ e $6x^2$
x b) $5x$ e $6x^2$
c) $5x$ e $6x$
d) $5x^2$ e $6x$

101 Os resultados de $3a - 2a - a$ e de $3a\,(-2a) \cdot (-a)$ são, respectivamente:

x a) 0 e $6a^3$
b) 0 e $-6a^3$
c) $-2a$ e $-6a^3$
d) $-2a$ e $6a^3$

102 Se $y = 2x$ e $z = 2y$, então $(x + y - z)^5$ é igual a: $(x + 2x - 4x)^5 = -x^5$

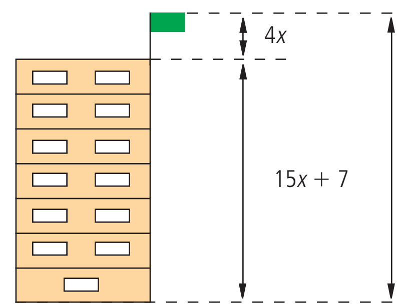
a) x^4
b) x^5
c) $-x^4$
x d) $-x^5$

103 A expressão $12\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\right)$ é igual a:

x a) x
b) $\frac{x^3}{2}$
c) $60x$
d) $\frac{12x}{5}$

104 No topo de um edifício de $15x + 7$ metros de altura se encontra uma bandeira que mede $4x$ metros de altura. A fórmula que determina a distância d que há do solo à extremidade da bandeira é:

a) $11x + 7$
x b) $19x + 7$
c) $19x + 11$
d) $15x + 11$



DAE

105 (Cefet-SC) Seis pessoas vão a um restaurante e pedem seis pratos do dia e cinco sobremesas. Se o prato do dia custa x reais e cada sobremesa custa 3 reais a menos que o prato do dia, qual é o polinômio que representa a quantia que essas pessoas gastam no restaurante?

Hélio Senatore

a) $11x - 3$
b) $15 - 11x$
c) $6x - 5x - 3$
x d) $6x + 5(x - 3)$

106 Numa adição de polinômios encontrou-se o resultado $5x^2 - 4x + 6$, mas verificou-se que a parcela $3x^2 - 2$ havia sido incluída indevidamente. O resultado correto da adição é:

a) $8x^2 - 6x + 6$
c) $8x^2 - 4x + 8$
b) $2x^2 - 4x - 8$
x d) $2x^2 - 4x + 8$

107 (Vunesp) O valor da expressão $\frac{0{,}3 \cdot 1{,}4}{0{,}1} \cdot A$ é 42. Se A é um número racional, então A vale:

x a) 10
c) 0,1
b) 100
d) 0,01

108 A fórmula que converte a temperatura medida em graus Celsius (°C) em temperatura medida em graus Fahrenheit (°F) é:

$$F = \frac{9C}{5} + 32$$

CONECTANDO SABERES

Na fórmula, se C = 20, qual é o valor de F?

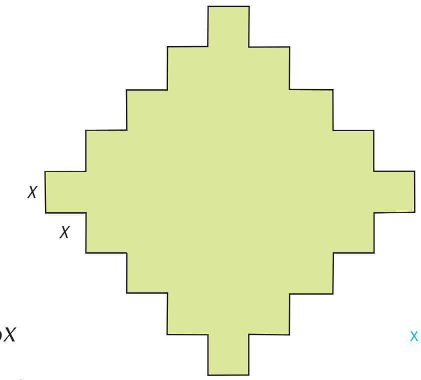
a) 34
x c) 68
b) 64
d) 340

109 (Saresp) Uma locadora de bicicleta cobra R$ 20,00 por dia pelo aluguel de uma bicicleta. Além disso, ela também cobra, apenas no primeiro dia, uma taxa de R$ 30,00. Chamando de x o número de dias que a bicicleta permanece alugada e de y o valor total do aluguel, é correto afirmar que:

Ilustra Cartoon

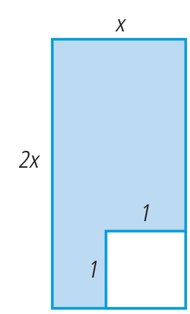
a) $y = 50x$
c) $y = 30x + 20$
b) $y = 600x$
x d) $y = 20x + 30$

110 Na figura, todos os segmentos se interceptam formando ângulo reto e cada segmento tem comprimento x. Qual expressão representa a área da figura?



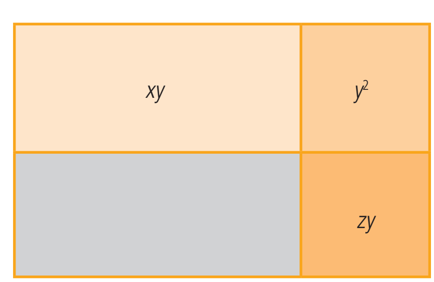
a) $36x$
x c) $41x^2$
b) $36x^2$
d) $41x^3$

111 (Saresp) A expressão que representa a área da parte pintada da figura é:



a) $2x^2$
c) $2x^2 - 2x$
x b) $2x^2 - 1$
d) $4x^2 = 4$

112 Na figura, a área do quadrado é y^2 e as áreas de dois dos retângulos são xy e zy. A área do terceiro retângulo é:



Ilustrações: DAE

a) x^2
x c) xz
b) z^2
d) yz

113 Aline tem 6 reais a mais que Beto, mas 15 reais a menos que Carla. Se Aline tem x reais, então a soma dos reais de Carla e Beto é igual a:

$x - 6 + x + 15 = 2x + 9$

x **a)** $2x + 9$

b) $2x - 9$

c) $2x - 21$

d) $2x + 21$

114 (Uerj) A estatura de um adulto do sexo feminino pode ser estimada, através das alturas de seus pais, pela expressão:

CONECTANDO SABERES

$$\frac{(y - 13) + x}{2}$$

Considere que x é a altura da mãe e y a do pai, em cm.

- Somando-se ou subtraindo-se 8,5 cm da altura estimada, obtêm-se, respectivamente, as alturas máxima ou mínima que a filha adulta pode atingir.

Segundo essa fórmula, se João tem 1,72 m de altura e sua esposa tem 1,64 m, sua filha medirá, no máximo:

Ilustra Cartoon

$\frac{(172 - 13) + 164}{2} = \frac{323}{2} = 161{,}5$

x **a)** 1,70 m $161{,}5 + 8{,}5 = 170$ cm; 170 cm $= 1{,}70$ m

b) 1,71 m

c) 1,72 m

d) 1,73 m

115 Se $x = 1$, $y = 2x$ e $z = 2y$, o valor de $x + y + z$ é: $1 + 2 + 4 = 7$

a) 3

b) 5

x **c)** 7

d) 9

116 Para pintar uma parede quadrada, gastam-se 3 latas de tinta. Quantas latas iguais seriam gastas para pintar outra parede, também quadrada, com o dobro da largura da primeira?


Maurício Morais

$(2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot 3 = 12$

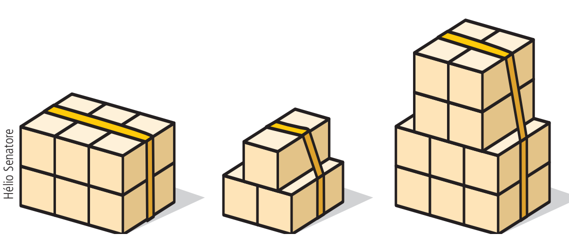
a) 6

b) 8

x **c)** 12

d) 18

117 (FCC-SP) Nas figuras abaixo estão representadas pilhas de caixas iguais, cada uma contendo uma mesma quantidade de envelopes.

Hélio Senatore


As expressões matemáticas $\frac{3x}{2}$ e $\frac{3x}{4}$ indicam os totais de envelopes das duas primeiras pilhas.

A expressão correspondente à terceira pilha é:

a) $3x$

b) $5x$ $\frac{3x}{2} : 6 = \frac{x}{4}$ ou $\frac{3x}{4} : 3 = \frac{x}{4}$

x **c)** $\frac{5x}{2}$

d) $\frac{5x}{4}$

$\frac{3x}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{5x}{2}$

UNIDADE 5

Produtos notáveis

Alguns produtos de binômios são chamados **produtos notáveis** porque:

- aparecem com frequência em problemas;
- apresentam padrões que permitem economizar cálculos.

Nesta Unidade, estudaremos alguns produtos notáveis.

Notável significa importante, merecedor de destaque.

1. Quadrado da soma de dois termos

O nome já diz: vamos elevar ao quadrado a soma de dois termos. Observe os exemplos:

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + \underbrace{ab + ab}_{2ab} + b^2$

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2$

$$\boxed{(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

- $(a + 3)^2 = (a + 3)(a + 3) = a^2 + 3a + 3a + 3^2$

$$\boxed{(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9}$$

Podemos notar um padrão nos produtos acima.

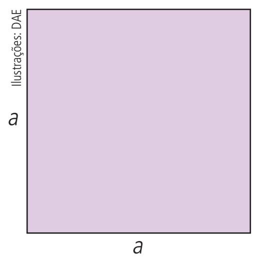
1. Você e seus colegas podem explicar com palavras esse padrão?
2. Apliquem o padrão para obter $(x + 5)^2$ sem usar a propriedade distributiva. $x^2 + 10x + 25$

Lápis Mágico

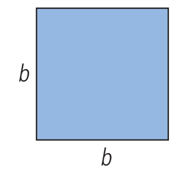
1. Resposta esperada: o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o dobro do produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Na sala de aula...

O professor Jorge trouxe 4 figuras recortadas em cartolina:

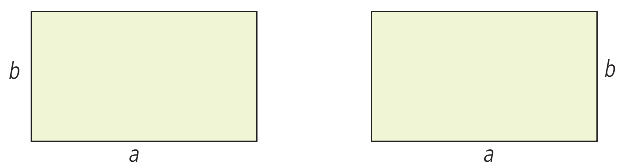


um quadrado de lado *a*

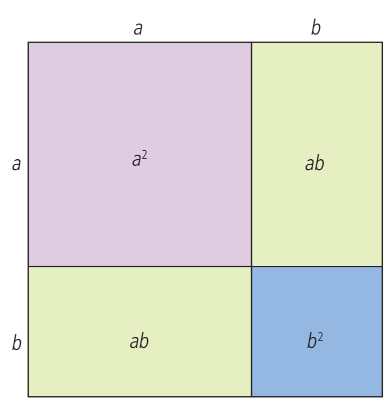


um quadrado de lado *b*

dois retângulos de lados *a* e *b*



Com essas figuras ele montou um quadrado maior:



Forme dupla com um colega para realizar duas atividades:

1. Usando figuras, mostrem que $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$.

2. Um desafio: descubram a medida do lado do quadrado que tem como área a expressão $a^2 + 14a + 49$.

$a + 7$

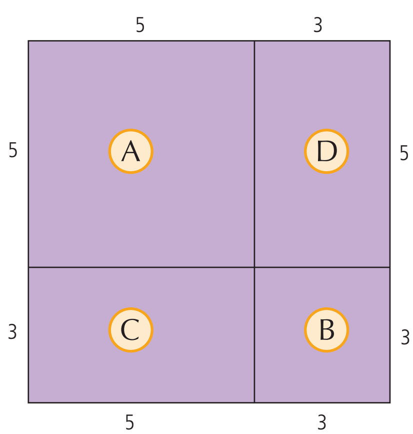
Exercícios

1 Complete a tabela no caderno.

a	b	$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$
5	3	64	34
0	6	36	36
3	-1	4	10
-1	4	9	17

O que você observou? Quase sempre $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

2 Na figura há dois quadrados (A e B) e dois retângulos (C e D).



a) Qual é a área do quadrado A? 25

b) Qual é a área do quadrado B? 9

c) Qual é a área do retângulo C? 15

d) Qual é a área do retângulo D? 15

Os quadrados A e B e os retângulos C e D são partes de um quadrado maior.

e) Quanto medem os lados desse quadrado maior? 8

f) Qual é sua área? 64

g) Escreva a igualdade que mostra que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados A e B e dos retângulos C e D. $64 = 25 + 15 + 15 + 9$

3 Efetue como achar melhor.

a) $(x + 7)^2$ $x^2 + 14x + 49$

b) $(5 + 2m)^2$ $25 + 20m + 4m^2$

c) $(a + 3x)^2$ $a^2 + 6ax + 9x^2$

d) $(10x + y)^2$ $100x^2 + 20xy + y^2$

e) $(5x^2 + 1)^2$ $25x^4 + 10x^2 + 1$

f) $(11 + pq)^2$ $121 + 22pq + p^2q^2$

g) $(x + 0{,}5)^2$ $x^2 + x + 0{,}25$

h) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ $x^2 + x + \frac{1}{4}$

4 Simplifique as expressões.

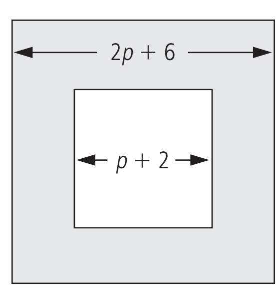
a) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2$ $2x^2 + 6x + 5$

b) $(2x + 1)^2 + (3x + 1)^2$ $13x^2 + 10x + 2$

c) $5x - (2x + 3)^2$ $-4x^2 - 7x - 9$

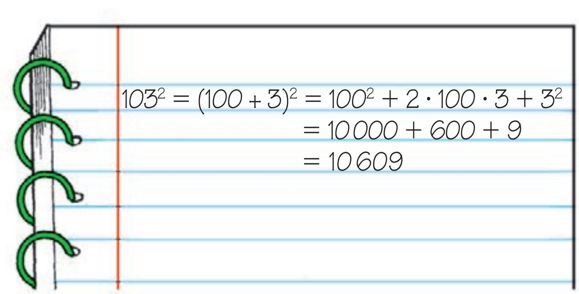
d) $(x + 5)^2 - x(x + 3)$ $7x + 25$

5 Uma lâmina quadrada de alumínio tem no seu interior uma perfuração quadrada, cujas dimensões aparecem na figura. Determine a expressão simplificada que representa a área não perfurada. $3p^2 + 20p + 32$



Ilustrações: DAE

6 Observe como Renata calculou o quadrado de 103:



Ilustra Cartoon

Calcule agora mentalmente.

a) 13^2 169

b) 51^2 2 601

c) 105^2 11 025

2. Quadrado da diferença de dois termos

O quadrado da diferença de dois termos também tem um padrão:

- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 \underbrace{- ab - ab}_{-2ab} + b^2$

  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- $(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - xy - xy + y^2$

  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

- $(7 - y)^2 = (7 - y)(7 - y) = 49 - 7y - 7y + y^2$

  $(7 - y)^2 = 49 - 14y + y^2$

1. Descobriu qual é o padrão? Então descreva-o com palavras.

2. Use-o para obter $(2x - 1)^2$.

$4x^2 - 4x + 1$

1. Resposta esperada: o quadrado da diferença entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o dobro do produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Vamos mostrar geometricamente que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Na seção “Moldes e malhas para as atividades”, você encontra uma folha com um quadrado de lado a, um retângulo de lados a e b e um retângulo de lados $(a - b)$ e b.

Reproduza essas figuras em uma folha avulsa ou em um pedaço de cartolina e recorte-as com cuidado.

$(a - b)^2$ representa a área de um quadrado de lado $(a - b)$

Vamos obter esse quadrado a partir do quadrado de lado a:

Colocando os retângulos sobre o quadrado de lado a, como você vê na figura, obtemos o quadrado branco de lado $a - b$.

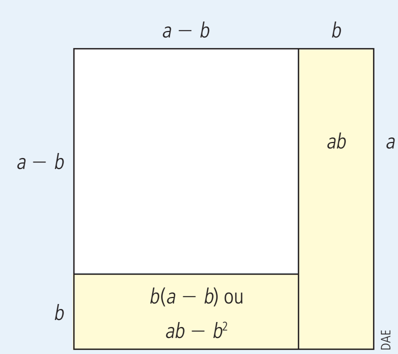
A área deste quadrado é:

$(a - b)^2 = a^2 - ab - (ab - b^2)$

Eliminando os parênteses,

$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



Subtraímos, da área do quadrado de lado a, a área dos dois retângulos.

Exercícios

7 Complete a tabela no caderno.

a	b	$(a - b)^2$	$a^2 - b^2$
5	3	4	16
6	0	36	36
3	−1	16	8
−1	4	25	−15

O que você observou? Quase sempre $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$.

8 Efetue como achar melhor.

a) $(m - 3)^2$ $m^2 - 6m + 9$

b) $(2a - 5)^2$ $4a^2 - 20a + 25$

c) $(7 - 3c)^2$ $49 - 42c + 9c^2$

d) $(5x - 2y)^2$ $25x^2 - 20xy + 4y^2$

e) $(2 - x^3)^2$ $4 - 4x^3 + x^6$

f) $(xy - 10)^2$ $x^2y^2 - 20xy + 100$

g) $(x - 0{,}2)^2$ $x^2 - 0{,}4x + 0{,}04$

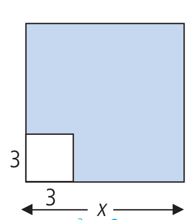
h) $(-4x - 3y)^2$ $16x^2 + 24xy + 9y^2$

9 Calcule.

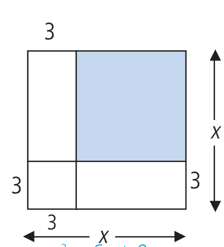
a) $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2$ $m^2 - m + \frac{1}{4}$

b) $\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2$ $\frac{a^2}{4} - a + 1$

10 Determine a área da parte colorida dos quadrados.

a) 

$x^2 - 9$

b) 

$x^2 - 6x + 9$

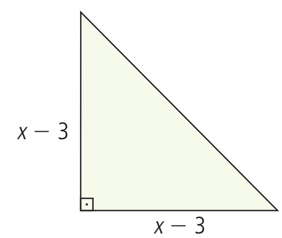
11 Simplifique as expressões.

a) $(x - 4)^2 - (x - 1)^2$ $-6x + 15$

b) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2$ $6x - 3$

c) $(-x + 3)^2 - 2x(4 - x)$ $3x^2 - 14x + 9$

12 Observe a figura (unidade cm).



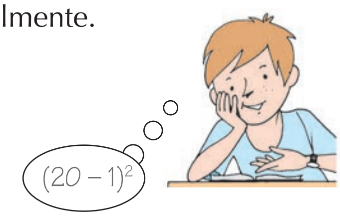
a) Escreva uma expressão que representa a medida da área colorida. $\frac{x^2 - 6x + 9}{2}$ cm²

b) Faça $x = 10$ e calcule a área colorida. 24,5 cm²

13 Calcule mentalmente.

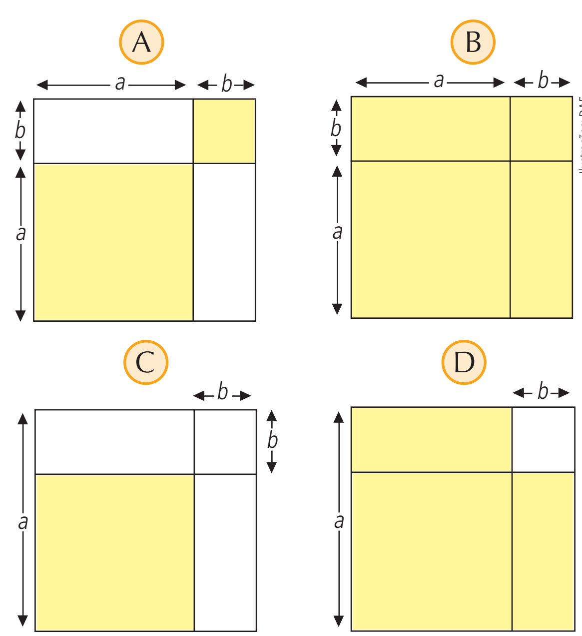
a) 19^2 361

b) 99^2 9 801



Lápis Mágico

14 Relacione, no caderno, a letra de cada figura com a expressão correspondente à área da parte colorida. A - IV B - I C - II D - III



Ilustrações: DAE

I $(a + b)^2$

II $(a - b)^2$

III $a^2 - b^2$

IV $a^2 + b^2$

3. Produto da soma pela diferença de dois termos

Usando mais uma vez a propriedade distributiva, vamos calcular produtos do tipo $(a + b)(a - b)$.

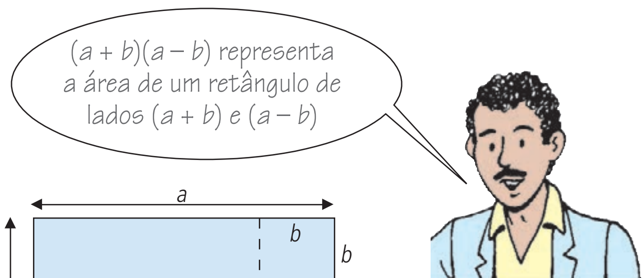
- $(a + b)(a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2$

  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

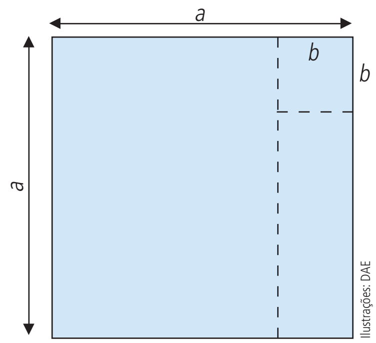
- $(x + y)(x - y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{xy} - y^2$

  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

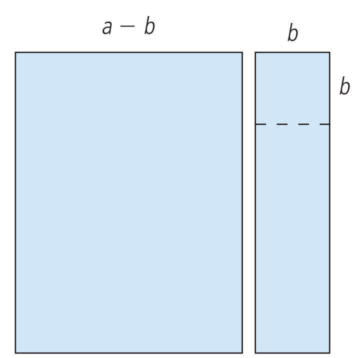
Podemos mostrar geometricamente que:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$



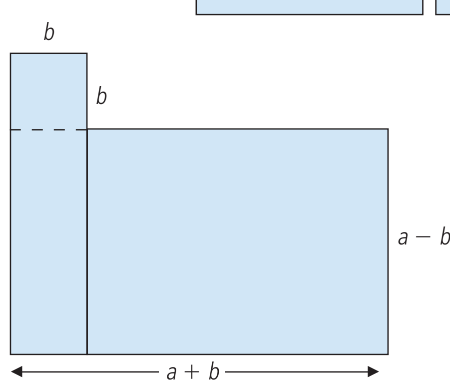
Reproduza em uma folha avulsa ou em cartolina o quadrado de lado a que se encontra na seção "Moldes e malhas para as atividades".



Do quadrado de lado a recorte o retângulo de lados a e b.



Posicione as figuras assim:



A área total continua sendo a^2.

A área do retângulo de lados $(a + b)$ e $(a - b)$ é igual à área do quadrado de lado a menos a área do quadrado de lado b. Ou seja,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exercícios

15 Efetue como achar melhor. Você pode usar a propriedade distributiva ou as fórmulas dos produtos notáveis.

a) $(x + 9)(x - 9)$ $x^2 - 81$

b) $(m - 1)(m + 1)$ $m^2 - 1$

c) $(3x + 5)(3x - 5)$ $9x^2 - 25$

d) $(2 - 7x)(2 + 7x)$ $4 - 49x^2$

e) $(m^2 - 6)(m^2 + 6)$ $m^4 - 36$

f) $(-2a + 5)(-2a - 5)$ $4a^2 - 25$

g) $(0,3 - a)(0,3 + a)$ $0,09 - a^2$

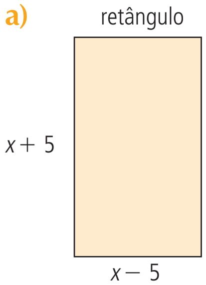
16 Perceba o detalhe e calcule mentalmente.

a) $(1 - x)(x + 1)$ $(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$

b) $(x + 5)(5 - x)$ $(5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$

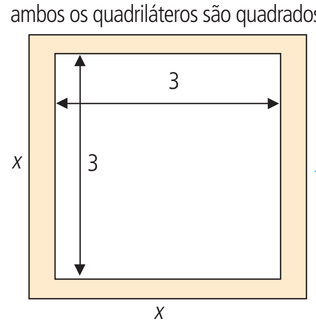
17 Para cada figura, escreva uma expressão que represente a medida da área colorida.

a) retângulo



$x^2 - 25$

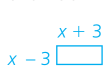
b) ambos os quadriláteros são quadrados



$x^2 - 9$

Faça $x = 7$ e calcule a área colorida. a) 24; b) 40

c) Desenhe um retângulo de área $x^2 - 9$. Indique a medida dos lados.

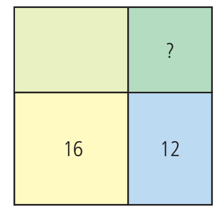


18 Calcule.

a) $\left(3 - \frac{1}{2}x\right)\left(3 + \frac{1}{2}x\right)$ $9 - \frac{1}{4}x^2$

b) $\left(\frac{1}{3}x + 1\right)\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$ $\frac{1}{9}x^2 - 1$

19 Na figura, dois quadrados e dois retângulos formam o quadrado maior. Qual é a área do quadrado menor? $3^2 = 9$

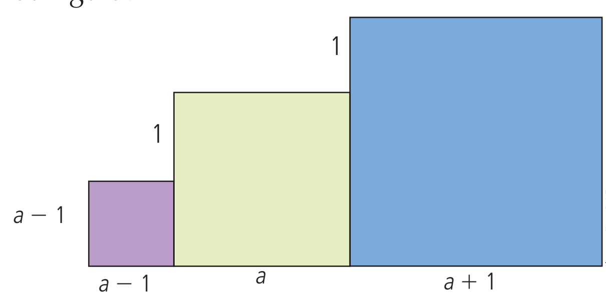


20 Simplifique as expressões.

a) $(m - 1)^2 - (m + 1)(m - 1)$ $-2m + 2$

b) $(x + 4)(x - 4) - (x - 4)^2$ $8x - 32$

21 Qual é a expressão que representa a área da figura? $(a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 = 3a^2 + 2$



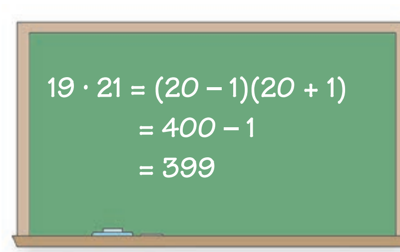
Ilustrações: DAE

Todos os ângulos internos dos quadriláteros são retos.

22 Prove que $\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$.

23 Prove que $(a + b)^2 = (-a - b)^2$.

24 A Matemática pode ajudar a fazer cálculos mais rápidos. Observe:



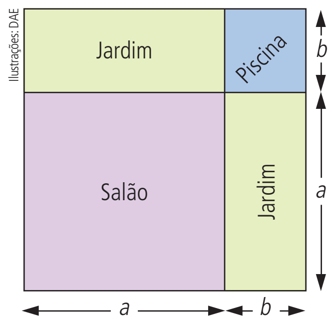
Ilustra Cartoon

Calcule agora mentalmente.

a) $51 \cdot 49$ 2 499 b) $28 \cdot 32$ 896 c) $103 \cdot 97$ 9 991

Revisando

25 O desenho representa a planta de um clube construído sobre um terreno quadrado.



Indique o que representam as expressões:

a) a^2 Área do salão.

b) b^2 Área da piscina.

c) $2ab$ Área dos jardins.

d) $(a + b)^2$ Área do clube.

26

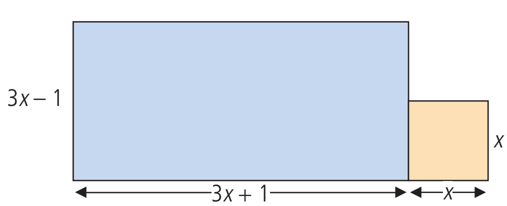
a) $x^2 - (x + 10)^2$ $-20x - 100$

b) $(3x + 5)^2 - 9x^2$ $30x + 25$

c) $(2x - 1)^2 + x(3x - 2)$ $7x^2 - 6x + 1$

d) $(1 + x)(1 - x) - (1 + x)^2$ $-2x^2 - 2x$

27 Na figura estão representados um retângulo e um quadrado. Escreva uma expressão simplificada para a área colorida da figura.



$10x^2 - 1$

28 Desenvolva as expressões.

a) $\left(\frac{1}{2}a + 3\right)^2$ $\frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$

b) $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2$ $9x^2 - x + \frac{1}{36}$

c) $\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ $1 - \frac{x^2}{9}$

d) $\left(\frac{m}{2} + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{m}{2} - \frac{5}{3}\right)$ $\frac{m^2}{4} - \frac{25}{9}$

29 Calcule mentalmente o valor de x.

a) $x + 5 = 7$ 2

b) $x + 12 = 10$ -2

c) $x - 5 = 6$ 11

d) $9x = 27$ 3

e) $\frac{x}{4} = 6$ 24

f) $16x = -32$ -2

g) $0{,}7x = 1{,}4$ 2

h) $-5x = 30$ -6

i) $\frac{x}{-2} = 5$ -10

j) $\frac{x}{-4} = -6$ 24

30 Michele cometeu um erro na resolução da equação

$$4(x + 3) = 3(2x + 6)$$

1. $4x + 12 = 6x + 18$
2. $4x - 6x = 18 - 12$
3. $-2x = 6$
4. $x = \frac{6}{+2}$
5. $x = 3$

Em que fase do raciocínio esse erro foi cometido?

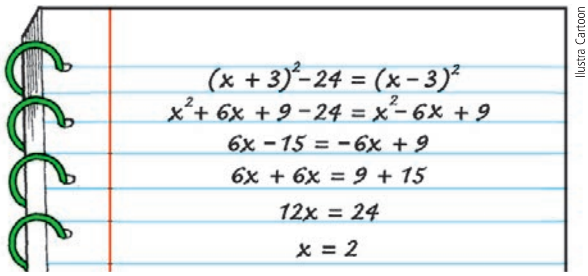
4 $x = \frac{6}{-2}$ (seria o correto)

31 Em uma sala há três lâmpadas iguais, um televisor e um aparelho de ar condicionado. A TV consome o dobro dos quilowatts-hora (kWh) que uma das lâmpadas consome. O aparelho de ar condicionado consome 15 vezes o que consome uma lâmpada. Quando estão todos ligados ao mesmo tempo, o consumo total é de 1 200 kWh. Qual é o consumo do televisor? 120 kWh

CONECTANDO SABERES

$3x + 2x + 15x = 1200$

32 Observe o exemplo:



Resolva agora as equações.

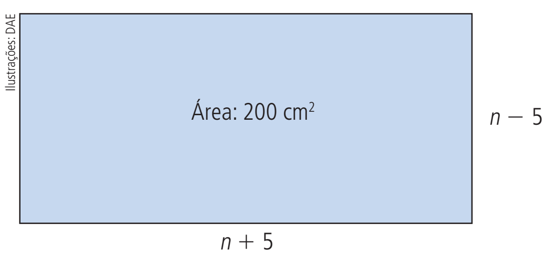
a) $(x+1)^2 - x^2 = 17$ 8

b) $x(x+5) = (x+1)^2 + 26$ 9

c) $(x-4)^2 = x^2 - 40$ 7

d) $4(x+2)^2 = (2x-3)^2$ $-\frac{1}{4}$

33 Observe o retângulo:

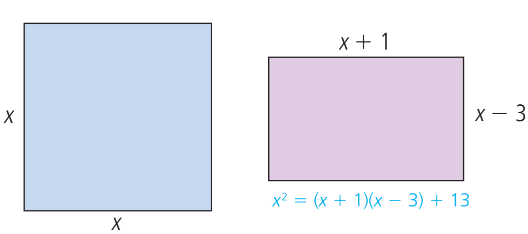


a) Qual é o valor de n? 15 cm

b) Quanto mede o lado menor? 10 cm

c) Quanto mede o lado maior? 20 cm

34 A área do quadrado excede a área do retângulo em 13 cm².



$x^2 = (x+1)(x-3) + 13$

a) Qual é a medida do lado do quadrado? 5 cm

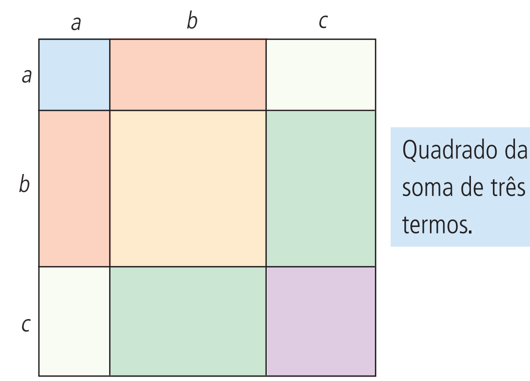
b) Qual é o perímetro do quadrado? 20 cm

c) Qual é o perímetro do retângulo? 16 cm

Desafios

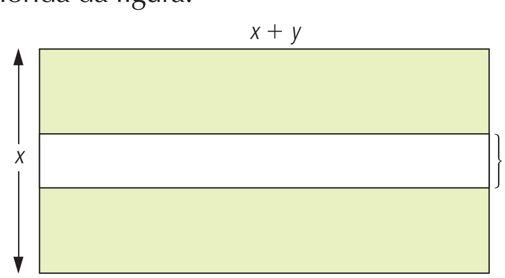
35 Se $x^2 + y^2 = 12$ e $xy = 9$, qual é o valor de $(x+y)^2$? 30

36 Utilize a figura abaixo e seus conhecimentos de geometria para obter o resultado de $(a+b+c)^2$.



$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

37 A figura é formada por retângulos. Escreva uma expressão simplificada para a área da parte colorida da figura.



$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

38 (Cesgranrio-RJ) Mauro fez quatro depósitos mensais em sua caderneta de poupança, sempre dobrando o valor em relação ao mês anterior. Se, ao todo, Mauro depositou R$ 300,00, qual o valor, em reais, depositado no último mês? R$ 160,00

• $x + 2x + 4x + 8x = 300$

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

39 (Saresp) A expressão algébrica que representa a situação: "o quadrado da soma de dois números, mais 5 unidades" é:

a) $x + y + 5^2$

b) $(x + y + 5)^2$

x c) $(x + y)^2 + 5$

d) $x^2 + y + 5^2$

40 (Saresp) Observe as duas listas de expressões:

A	$(x + 3)^2$	I	$x^2 - 9$
B	$(x + 3)(x - 3)$	II	$x^2 + 4x + 3$
C	$(x - 3)^2$	III	$x^2 - 6x + 9$
D	$(x + 3)(x + 1)$	IV	$x^2 + 6x + 9$

As expressões equivalentes são:

a) A-I; B-II; C-IV; D-III;

b) A-II; B-III; C-IV; D-I;

x c) A-IV; B-I; C-III; D-II;

d) A-IV; B-II; C-III; D-I.

41 O desenvolvimento de $(10x + 0{,}1)^2$ é:

a) $20x^2 + 2x + 0{,}1$

x b) $100x^2 + 2x + 0{,}01$

c) $100x^2 + 2x + 0{,}1$

d) $100x^2 + 20x + 0{,}01$

42 O desenvolvimento de $\left(6x^5 - \frac{1}{3}\right)^2$ é:

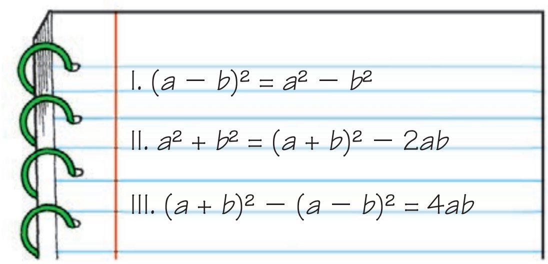
a) $36x^{25} - \frac{1}{9}$

b) $36x^{10} + \frac{1}{9}$

c) $36x^{10} - 2x^5 - \frac{1}{9}$

x d) $36x^{10} - 4x^5 + \frac{1}{9}$

43 (ETF-RJ) Considere as expressões:



Ilustra Cartoon

Então:

a) são todas falsas.

b) são todas verdadeiras.

x c) somente II e III são verdadeiras.

d) somente I e III são verdadeiras.

44 (Mack-SP) Se $(x - y)^2 - (x + y)^2 = -20$, então $x \cdot y$ é igual a:

$-4xy = -20$
$xy = 5$

a) 0

b) -1

x c) 5

d) 10

45 Se $x + y = 11$ e $x - y = 5$, então o valor de $x^2 - y^2$ é:

$(x + y)(x - y) = 11 \cdot 5$
$x^2 - y^2 = 55$

a) 10

x b) 55

c) 96

d) 110

46 Se $x - y = 7$ e $xy = 60$, então o valor da expressão $x^2 + y^2$ é:

$(x - y)^2 = 7^2$
$x^2 - 2xy + y^2 = 49$
$x^2 + y^2 = 49 + 2xy$
$x^2 + y^2 = 49 + 2 \cdot (60) \Rightarrow x^2 + y^2 = 169$

a) 53

b) 109

x c) 169

d) 420

47 (Obmep-MEC) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

- $(x + y)^2 = 8^2$
- $x^2 + 2xy + y^2 = 64$
- $x^2 + 6xy + y^2 = \underbrace{x^2 + 2xy + y^2} + 4xy$
$= 64 + 4 \cdot 15 = 124$

a) 109

b) 120

x c) 124

d) 154

UNIDADE 6

Fatoração

Vimos que os conhecimentos sobre produtos notáveis ajudam a economizar cálculos e muitas vezes permitem escrever expressões algébricas de forma mais simples. A **fatoração**, que é o assunto desta unidade, também será muito útil no trabalho com a Álgebra.

Hélio Senatore

Observe como representamos aqui o número 36:

$$\boxed{36 = 4 \cdot 9}$$

Como $4 = 2^2$ e $9 = 3^2$, podemos escrever:

$$\boxed{36 = 2^2 \cdot 3^2}$$

36 foi escrito como **produto de fatores primos**.
$2^2 \cdot 3^2$ é a **forma fatorada prima** de 36.

Se escolhêssemos outra decomposição para 36:

$$36 = 12 \cdot 3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3}_{12} \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2,$$

a fatoração completa seria a mesma.

Fatorar é escrever na forma de produto.

Observe a expressão numérica $5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$.

Ela não está escrita na forma de produto, pois há uma adição de parcelas.

No entanto, como o número 5 multiplica as duas parcelas, podemos usar a propriedade distributiva obtendo:

$$\boxed{5 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot (3 + 7)}$$

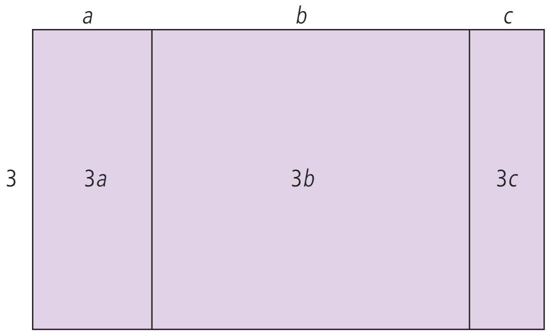
Escrevemos a expressão como produto de dois fatores: 5 e $(3 + 7)$, ou seja, *fatoramos* a expressão.

E o que tudo isso tem a ver com a Álgebra?

Muitos polinômios podem ser fatorados: podemos escrevê-los como produto de outros polinômios, o que frequentemente permite simplificar expressões.

Como? Acompanhe os casos a seguir.

1. Fator comum



A área desse retângulo é:

$3a + 3b + 3c$

(soma das áreas das figuras que o compõem) ou

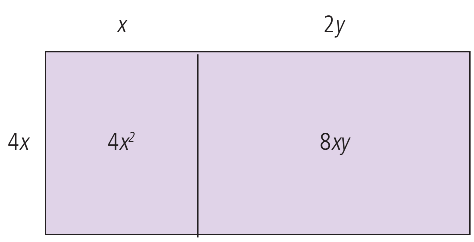
$3(a + b + c)$

(produto do comprimento pela largura)

Então, $\underbrace{3a + 3b + 3c}_{\text{Polinômio}} = \underbrace{3(a + b + c)}_{\text{Forma fatorada do polinômio}}$

Repare que, nesse exemplo, 3 é **fator comum** a todos os termos do polinômio $3a + 3b + 3c$. Na forma fatorada, 3 aparece com destaque. Dizemos que o fator comum 3 foi colocado **em evidência**.

Observe este outro retângulo:



Ilustrações: DAE

O polinômio que representa sua área é:

$4x^2 + 8xy$

$(4 \cdot x) \cdot x \qquad 2 \cdot (4 \cdot x) \cdot y$

Nesse caso, o fator comum a todos os termos do polinômio é $4x$. Colocando $4x$ em evidência, obtemos a forma fatorada do polinômio:

$4x^2 + 8xy = 4x(x + 2y)$

$4x^2 : 4x = x$

$8xy : 4x = 2y$

Vamos fatorar mais polinômios como exemplos:

- $6a^2 + 8a = 2a(3a + 4)$

$2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \qquad 4 \cdot 2 \cdot a$

Colocamos o fator comum $2a$ em evidência.

$6a^2 : 2a = 3a$

$8a : 2a = 4$

Para conferir se a fatoração está correta, use a propriedade distributiva:
$2a(3a + 4) = 6a^2 + 8a$ (Voltamos ao polinômio original!)

- $3x^2y + 6xy^2 - 2xy = xy(3x + 6y - 2)$

O fator comum é xy.

$3x^2y : xy = 3x$

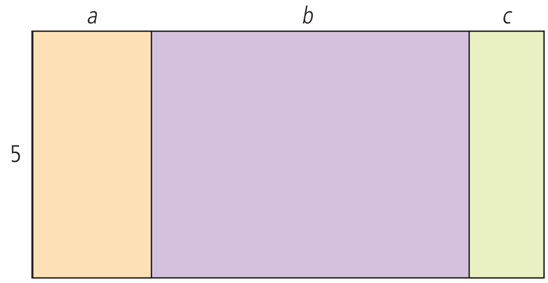
$6xy^2 : xy = 6y$

$(-2xy) : xy = -2$

- $10p^3 + 15p^2 = 5p^2(2p + 3)$

Exercícios

1 Observe a figura:

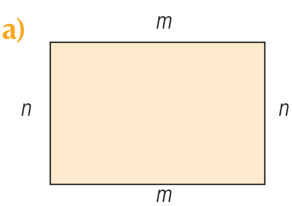


A área total do retângulo é $5a + 5b + 5c$.

Qual é a forma fatorada dessa expressão? $5(a + b + c)$

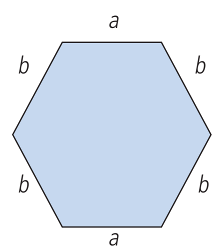
2 Indique duas fórmulas para o perímetro de cada uma das figuras:

a)



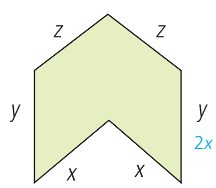
$2m + 2n$ ou $2(m + n)$

b)



$2a + 4b$ ou $2(a + 2b)$

c)



$2x + 2y + 2z$ ou $2(x + y + z)$

3 Se $3m + n = 7$, qual é o valor de $9m + 3n$? 21

4 *Quebrando a cuca*. Relacione no caderno as expressões equivalentes.
A - III, B - IV, C - V, D - I, E - II

(A) $x(x + 5)$	(I) $20x + 4$
(B) $5x + 10$	(II) $5(3x + 4)$
(C) $x + 5x^2$	(III) $x^2 + 5x$
(D) $4(1 + 5x)$	(IV) $5(2 + x)$
(E) $15x + 20$	(V) $x(1 + 5x)$

5 *Sinal vermelho*. Uma destas expressões não pode ser fatorada. Descubra qual é.

a) $19x + 19y$

b) $6x^3 - 5x^2$

x c) $4x - 3y + 6$

d) $6x - 8y - 10z$

Paulo Pepe

6 Fatore as expressões.

a) $7q^2 - 28$ $7(q^2 - 4)$

b) $33x + 22y - 55z$ $11(3x + 2y - 5z)$

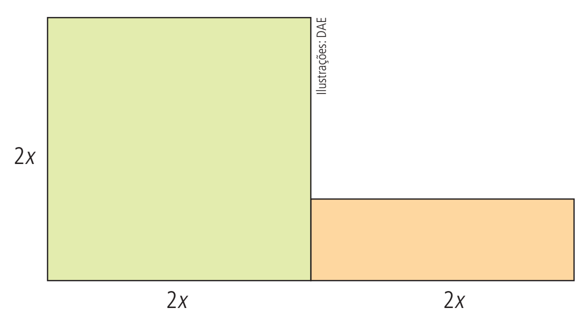
c) $x^6 + x^7 + x^8$ $x^6(1 + x + x^2)$

d) $36cd + 6cd^2$ $6cd(6 - d)$

e) $4\pi g + 12\pi t$ $4\pi(g + 3t)$

f) $\frac{3a}{7} - \frac{3c}{7}$ $\frac{3}{7}(a - c)$

7 A figura é formada por um quadrado e um retângulo. Determine a área da região colorida e dê o resultado na forma fatorada.
$4x^2 + 2x = 2x(2x + 1)$



Ilustrações: DAE

8 Use a fatoração e calcule mentalmente.

a) $58 \cdot 3 + 58 \cdot 7$ $58(3 + 7) = 580$

b) $6 \cdot 195 + 6 \cdot 5$ $6(195 + 5) = 1200$

c) $8 \cdot 111 - 8 \cdot 11$ $8(111 - 11) = 800$

d) $4 \cdot 73 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 7$ $4(73 + 20 + 7) = 400$

9 Uma escola de idiomas tem 5 turmas de inglês com 18 alunos cada e 5 turmas de espanhol com 12 alunos cada. Calcule, mentalmente, o número de alunos dessa escola.
150 alunos

2. Agrupamento

Observe o polinômio $ax + ay + bx + by$.
Não há fator comum a todos os termos. No entanto podemos fazer:

$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$,
pois $(x + y)$ surge como fator comum.

Aplique a propriedade distributiva para voltar ao polinômio original.

Veja outro exemplo:

- $xy^2 + xy^3 + 3 + 3y = xy^2(1 + y) + 3(1 + y) = (1 + y)(xy^2 + 3)$

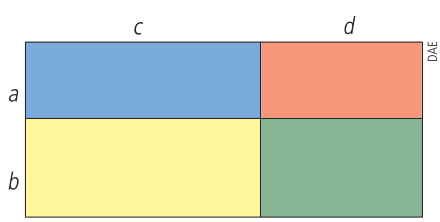
Exercícios

10 Coloque em evidência o fator comum.

a) $x(a + b) + y(a + b)$ $(a + b)(x + y)$

b) $2a(x - 1) - b(x - 1)$ $(x - 1)(2a - b)$

11 A figura representa um retângulo. As partes coloridas também são retângulos.



a) Qual é a área de cada parte colorida? ac; ad; bc; bd

b) Qual é a área total? $ac + ad + bc + bd$

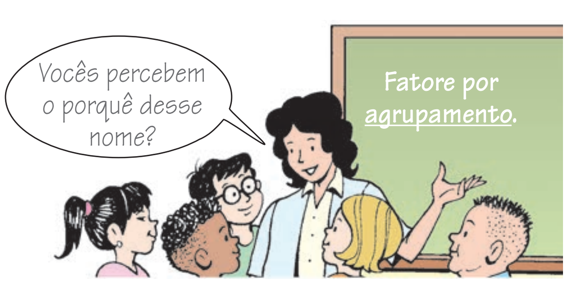
c) Qual é a forma fatorada de $ac + ad + bc + bd$? $(a + b)(c + d)$

12 Fatore os polinômios por agrupamento.

a) $7a - 7c + ma - mc$ a) $7(a - c) + m(a - c) = (a - c)(7 + m)$

b) $a^3 + 3a^2 + 2a + 6$ b) $a^2(a + 3) + 2(a + 3) = (a + 3)(a^2 + 2)$

c) $x^3 - x^2 + 5x - 5$ c) $x^2(x - 1) + 5(x - 1) = (x - 1)(x^2 + 5)$



13 *Enturmando*. Agrupe os termos e fatore.

a) $5x + ax + 5y + ay$ $(5 + a)(x + y)$

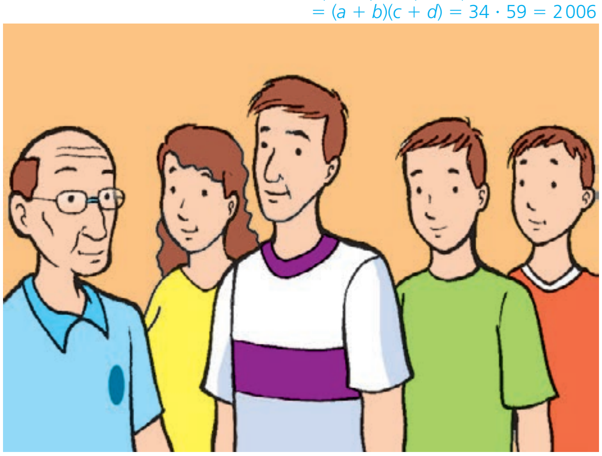
b) $x^3 + 2x^2 + 7x + 14$ $(x + 2)(x^2 + 7)$

c) $c^2 - c + cx - x$ $(c - 1)(c + x)$

d) $ax + bx + ay + by + az + bz$ $(a + b)(x + y + z)$

14 (Furb-SC) Um professor de Matemática tem 4 filhos. Em uma de suas aulas, ele propôs a seus alunos que descobrissem o valor da expressão $ac + ad + bc + bd$, sendo a, b, c e d as idades dos filhos na ordem crescente. Como informação complementar, o professor disse que a soma das idades dos dois mais velhos é 59 anos e a soma das idades dos dois mais novos é 34 anos. Qual o valor numérico da expressão proposta pelo professor?

$a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d) = 34 \cdot 59 = 2\,006$



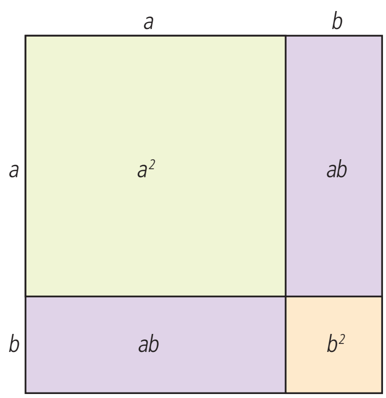
3. Trinômio quadrado perfeito

Sabemos que:

Ilustrações: Lápis Mágico

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

O trinômio obtido nesse produto notável é chamado de **trinômio quadrado perfeito**. Por quê?



DAE

Com os termos desse trinômio formamos o quadrado de lado $(a + b)$, lembra?

De forma semelhante, o produto notável $(a - b)^2$ resulta num trinômio quadrado perfeito:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Agora faremos o inverso: vamos escrever o trinômio quadrado perfeito na sua forma fatorada.

- $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
- $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

Nem sempre o trinômio é quadrado perfeito, por isso precisamos primeiro verificar se ele é um quadrado perfeito para então fatorá-lo da maneira vista.

Exemplos:

- $a^2 + 6a + 9$

Todo trinômio quadrado perfeito tem dois termos quadrados. Esse trinômio os têm?

Sim: a^2 que é o quadrado de a, e 9, que é o quadrado de 3.

O termo do meio deve ser o dobro do produto de a por 3. De fato $6a = 2 \cdot a \cdot 3$

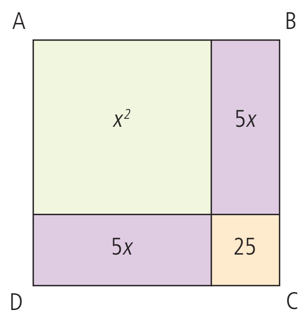
Portanto, o trinômio $a^2 + 6a + 9$ é quadrado perfeito e pode ser fatorado assim:

$a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$

- $4x^2 + xy + y^2$ tem dois termos quadrados: $4x^2$, que é o quadrado de $2x$, e y^2, que é o quadrado de y. No entanto, o termo do meio do trinômio deveria ser $2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$, mas é xy. Esse trinômio não é quadrado perfeito.

Exercícios

15 Observe a figura e responda ao que se pede.



a) Qual é a área do quadrado ABCD?
Some as quatro partes indicadas: $x^2 + 10x + 25$

b) Qual é a medida do lado desse quadrado?
$x + 5$

c) Qual é a forma fatorada de $x^2 + 10x + 25$?
$(x + 5)^2$

16 No caderno, copie e complete com $=$ ou $\neq$.

a) $(a + 7)^2$ ▨ $a^2 + 14a + 49$ $=$

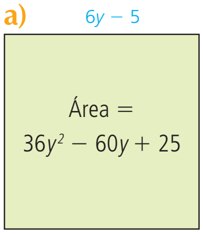
b) $(a - 7)^2$ ▨ $a^2 - 14a + 49$ $=$

c) $(3x - 2)^2$ ▨ $9x^2 - 4 + 12x$ $\neq$

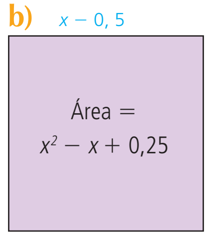
d) $(5x - 3)^2$ ▨ $25x^2 + 9 - 30x$ $=$

17 Em cada caso, determine a expressão para a medida do lado do quadrado.

a) $6y - 5$



b) $x - 0,5$



Ilustrações: DAE

18 Quando o polinômio dado for quadrado perfeito, fatore.

a) $x^2 + 2x + 1$
$(x + 1)^2$

b) $x^2 - 2x + 1$
$(x - 1)^2$

c) $1 - 6m + 9m^2$
$(1 - 3m)^2$

d) $x^2 + 12x + 36$
$(x + 6)^2$

e) $36a^2 - 12ac + c^2$
$(6a - c)^2$

f) $y^4 + 4y^2 + 4$
$(y^2 + 2)^2$

g) $a^2 - 18a + 64$
Não é quadrado perfeito.

h) $x^2 + 9 + 6x$
$(x + 3)^2$

19 $x^2 - 12x + 9$ é trinômio quadrado perfeito?
Não.

20 Fatore.

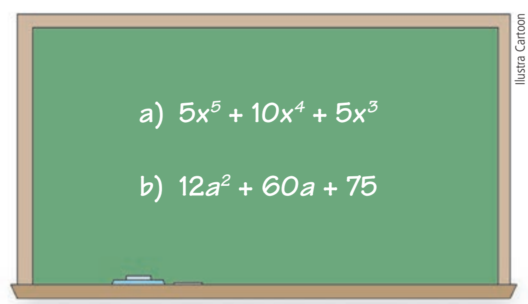
a) $81\,x^2y^2 - 18\,xy + 1$
$(9xy - 1)^2$

b) $a^2 + a + \frac{1}{4}$
$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$

c) $1 - 3x + \frac{9}{4}x^2$
$\left(1 - \frac{3}{2}x\right)^2$

d) $x^2 + 11x + \frac{121}{4}$
$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2$

21 Coloque o fator comum em evidência e, em seguida, fatore, se possível.
a) $5x^3(x + 1)^2$
b) $3(2a + 5)^2$



Ilustra Cartoon

22 Sabendo que $x + y = 10$ e que $x - y = 4$, determine o valor de:

a) $5x + 5y$ 50

b) $3x - 3y$ 12

c) $x^2 + 2xy + y^2$ 100

d) $x^2 - 2xy + y^2$ 16

23 Vamos resolver a equação $x^2 + 6x + 9 = 0$.

> Fatorando o 1º membro, encontramos:
> $$(x + 3)^2 = 0$$
> Se uma expressão elevada ao quadrado é igual a zero, então seu valor é zero:
> $$x + 3 = 0$$
> $$x = -3$$
> A solução da equação é -3.

Resolva estas equações usando o mesmo raciocínio:

a) $x^2 - 20x + 100 = 0$ $(x - 10)^2 = 0$; solução: 10

b) $25x^2 - 10x + 1 = 0$ $(5x - 1)^2 = 0$, solução: $\frac{1}{5}$

c) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ $(2x + 3)^2 = 0$; solução: $-\frac{3}{2}$

4. Diferença de quadrados

Vimos que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ilustrações: Lápis Mágico

Fazendo o caminho inverso, podemos fatorar uma diferença de quadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Da mesma forma,

- $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
- $16x^2 - \frac{9}{25} = \left(4x + \frac{3}{5}\right)\left(4x - \frac{3}{5}\right)$
- $\underset{(3a)^2}{9a^2} - \underset{5^2}{25} = (3a + 5)(3a - 5)$
- $\underset{(p^2)^2}{p^4} - \underset{(7r)^2}{49r^2} = (p^2 + 7r)(p^2 - 7r)$

Para fatorar a expressão $32a^2 - 18$, primeiro colocamos o fator comum 2 em evidência:

$32a^2 - 18 = 2(16a^2 - 9)$

Aparece uma diferença de quadrados e a fatoração completa ficará assim:

$32a^2 - 18 = 2(4a + 3)(4a - 3)$

Quer ver como o Paulinho usou a fatoração da diferença de quadrados para calcular facilmente $2001^2 - 1999^2$?

$2001^2 - 1999^2 = (2001 + 1999)(2001 - 1999) = 4000 \cdot 2 = 8000$

Exercícios

24 Fatore.

a) $x^2 - 36$ $(x + 6)(x - 6)$

b) $25 - a^2$ $(5 + a)(5 - a)$

c) $9x^2 - 16$ $(3x + 4)(3x - 4)$

d) $1 - 81a^2$ $(1 + 9a)(1 - 9a)$

e) $100 - \pi^2$ $(10 + \pi)(10 - \pi)$

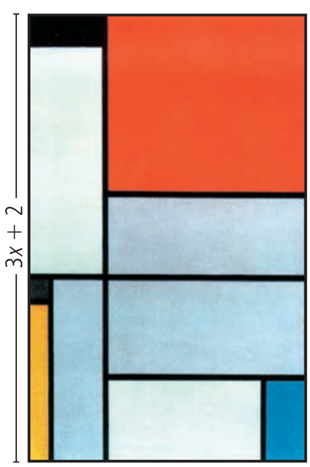
f) $36x^4 - y^6$ $(6x^2 + y^3)(6x^2 - y^3)$

g) $0{,}01x^2 - 49$ $(0{,}1x + 7)(0{,}1x - 7)$

h) $\dfrac{x^4}{4} - y^2$ $\left(\dfrac{x^2}{2} + y\right)\left(\dfrac{x^2}{2} - y\right)$

25 A área do retângulo da figura abaixo é dada por $9x^2 - 4$.

CONECTANDO SABERES



Museu Ludwig, Colônia

◆ Piet Mondrian. *Painel I*, 1921. Óleo sobre tela, 96,5 cm × 60,5 cm.

Qual é a medida do menor lado desse retângulo? $3x - 2$

26 Coloque antes o fator comum em evidência, e em seguida fatore, se possível.

a) $17x^2 - 17y^2$ $17(x + y)(x - y)$

b) $2m^4 - 50$ $2(m^2 + 5)(m^2 - 5)$

c) $x^3 - 25x$ $x(x + 5)(x - 5)$

d) $a^2c - c$ $c(a + 1)(a - 1)$

27 Responda.

a) Se um objeto que custava R$ 50,00 subiu x reais, qual será o novo preço? $(50 + x)$ reais

b) Se outro objeto que também custava R$ 50,00 abaixou x reais, qual será seu novo preço? $(50 - x)$ reais

c) Qual fórmula nos dá o produto dos preços já atualizados? $(2\,500 - x^2)$ reais

28 Se $x^2 - y^2 = 135$ e $x - y = 9$, então qual é o valor de $x + y$? 15

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
$135 = (x + y) \cdot 9 \Rightarrow x + y = 15$

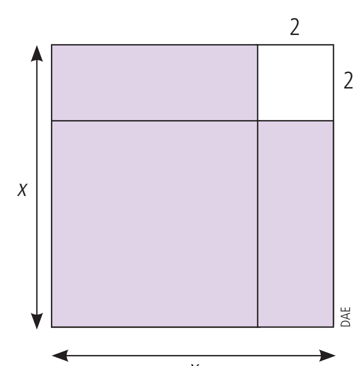
29 Use a fatoração e calcule.

a) $100^2 - 90^2$ $(100 + 90)(100 - 90) = 1\,900$

b) $3\,175^2 - 3\,174^2$ $(3\,175 + 3\,174)(3\,175 - 3\,174) = 6\,349$

Lápis Mágico

30 Indique duas fórmulas para a área colorida do quadrado maior. $x^2 - 4$ ou $(x + 2)(x - 2)$



DAE

31 Resolva, usando a lei do anulamento do produto, cada uma das seguintes equações:

a) $x^2 - 121 = 0$ $11, -11$

b) $49 - x^2 = 0$ $7, -7$

c) $16x^2 - 1 = 0$ $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$

d) $4x^2 - 25 = 0$ $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

e) $\dfrac{1}{9}x^2 - 4 = 0$ $6, -6$

f) $1 = \dfrac{x^2}{4}$ $2, -2$

Se um produto é nulo, pelo menos um dos fatores é nulo.

Revisando

32 Exercite suas habilidades em fatoração.

a) $3a - 3b + 3c$
$3(a - b + c)$

b) $4 - 8x - 16y$
$4(1 - 2x - 4y)$

c) $10x^2y - 15xy + 5y$
$5y(2x^2 - 3x + 1)$

d) $x^{10} + x^{11}$
$x^{10}(1 + x)$

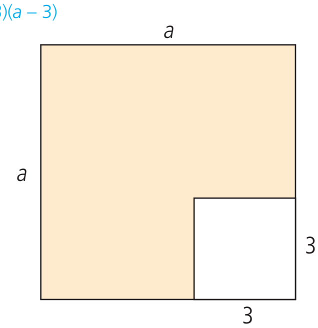
e) $15a^4 - 21a^3$
$3a^3(5a - 7)$

f) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

33 Se $xy = 20$ e $x - y = 8$, qual é o valor de $x^2y - xy^2$? 160

$x^2y - xy^2 = xy\,(x - y) = 20 \cdot 8 = 160$

34 Determine a área da região colorida e dê o resultado na forma fatorada.
$a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$



• Ambos os quadriláteros são quadrados.

35 Sabendo que $a + b = 13$, quanto vale $a^2 + 2ab + b^2$? 169

$(a + b)^2 = 13^2 = 169$

36 Exercite suas habilidades em fatoração.

a) $4m^2 - x^2$
$(2m + x)(2m - x)$

b) $49a^2 - x^2y^2$
$(7a + xy)(7a - xy)$

c) $81 - 121p^2$
$(9 + 11p)(9 - 11p)$

d) $x^2 - \frac{9}{4}$ $\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

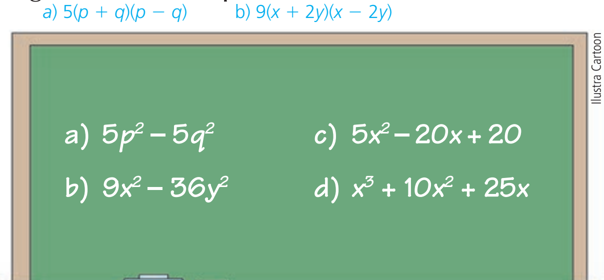
e) $x^2 - 6x + 9$
$(x - 3)^2$

f) $a^2 + 8a + 16$
$(a + 4)^2$

g) $x^2 - 12xy + 36y^2$
$(x - 6y)^2$

h) $\frac{n^2}{4} + n + 1$ $\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2$

37 Coloque o fator comum em evidência, e em seguida fatore, se possível.
a) $5(p + q)(p - q)$ b) $9(x + 2y)(x - 2y)$

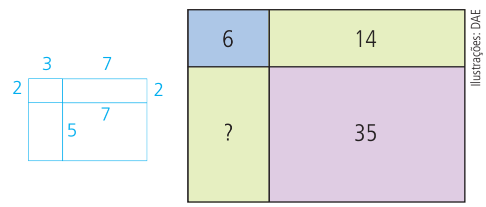


Ilustra Cartoon

c) $5(x - 2)^2$ d) $x\,(x + 5)^2$

Desafios

38 Na figura abaixo, as áreas de três dos retângulos são mostradas.



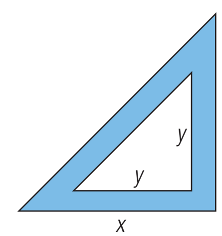
Ilustrações: DAE

Qual é a área do quarto retângulo? 15

39 Sabendo que x vale 3 a mais que y, quanto vale $x^2 - 2xy + y^2$?
$(x - y)^2 = (y + 3 - y)^2 = 3^2 = 9$

40 A figura representa um esquadro. Mostre que a área colorida do esquadro é dada por:

$\frac{1}{2}(x - y)(x + y)$

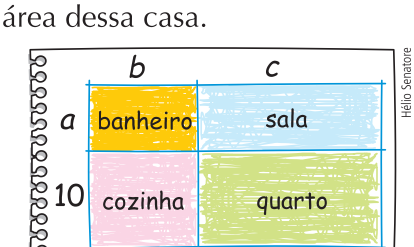


$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}(x - y)(x + y)$

41 (Saresp) Ao calcular a área de uma determinada casa, representada na figura abaixo, uma pessoa calculou a área de cada cômodo da casa encontrando a seguinte expressão:

$ab + ac + 10b + 10c$

Uma outra pessoa calculou a área desta mesma casa de outra maneira, chegando também ao resultado anterior. Indique a forma fatorada com que essa última pessoa pode ter representado a área dessa casa.



Hélio Senatore

$a(b + c) + 10(b + c) = (a + 10)(b + c)$

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

42 Se a é um número inteiro positivo, qual é o maior fator comum da expressão $4ab + 20a$?

a) a
b) a^2
x c) $4a$
d) $4ab$

43 Fatorando $-18a - 27c$, obtemos:

a) $9(3c - 2a)$
b) $9(2a - 3c)$
c) $-9(2a - 3c)$
x d) $-9(2a + 3c)$

44 Fatorando $0{,}1x^2 + 10x$, obtemos:

a) $0{,}1x\,(x + 1)$
b) $0{,}1x\,(x + 10)$
c) $10x\,(0{,}1x + 1)$
x d) $0{,}1x\,(x + 100)$

45 Uma expressão E multiplicada por $2x$ resulta na expressão $6x^2 - 2x$. O valor da expressão E, para $x = -4$, é:

a) 11
b) 13
c) -11
x d) -13

46 $(x - 3)(x + 7)$ é o resultado da fatoração de:

a) $x^2 - 21$
x b) $x^2 + 4x - 21$
c) $x^2 - 4x + 21$
d) $x^2 - 42x + 21$

47 Que valor se deve atribuir a g para que o trinômio $4x^2 - 12x + g$ seja quadrado perfeito?

a) 4
b) 6
x c) 9
d) 36

48 Fatorando $-x^2 + \frac{1}{9}$, obtemos:

a) $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
x b) $\left(-x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$
c) $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(-x - \frac{1}{3}\right)$
d) $\left(-x + \frac{1}{3}\right)\left(-x - \frac{1}{3}\right)$

49 Fatorando $x^4 + 121 + 22x^2$, obtemos:

a) $(x + 11)^2$
x b) $(x^2 + 11)^2$
c) $(x + 12)^2$
d) $(x^2 + 12)^2$

50 (SEE-RJ) O resultado de uma expressão algébrica é $a^2 - b^2$.

- Sílvio encontrou como resposta $(a - b)^2$;
- Cláudio, $(a + b)(a - b)$;
- Célia, $(a + b)^2 - 2b^2$.

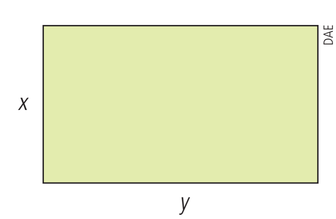
Hélio Senatore

Como o professor aceita desenvolvimento incompleto da resposta, podemos afirmar que:

a) apenas Sílvio acertou.
x b) apenas Cláudio acertou.
c) apenas Célia acertou.
d) apenas os rapazes acertaram.

51 x e y são as medidas dos lados de um retângulo de área 20 e perímetro 18. Qual é o valor numérico da expressão $3x^2y + 3xy^2$?

$3xy(x + y) = 3 \cdot 20 \cdot 9 = 540$



a) 270
b) 360
x c) 540
d) 1080

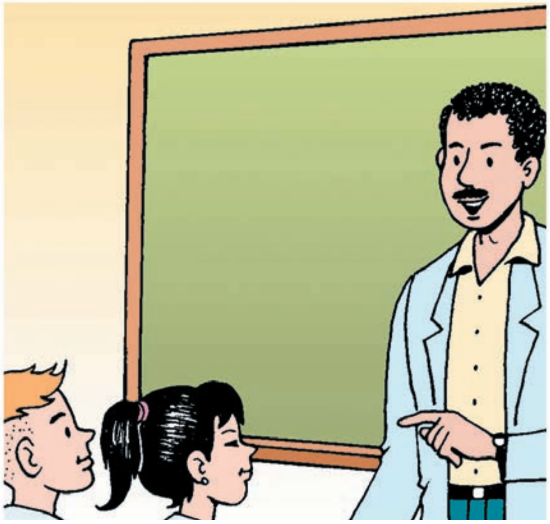
52 O valor de $3123091^2 - 3123090^2$ é:

a) 5426181
b) 7256281
c) 6236191
x d) 6246181

Frações algébricas

1. Letras no denominador

O professor Jorge pretende elaborar uma lista de testes para seus alunos. Essa lista valerá 60 pontos no total. Todos os testes terão o mesmo valor. Qual será o valor de cada teste?


Lápis Mágico

- Se a lista contiver 20 testes, cada teste valerá: $\frac{60}{20} = 3$ pontos

- Se contiver 15 testes, cada teste valerá: $\frac{60}{15} = 4$ pontos

- Se a lista contiver *x* testes, uma expressão algébrica representa o valor de cada teste:

$\frac{60}{x}$ (60 pontos divididos pelo número de testes, que representamos por *x*)

- Retirando 8 testes da lista original, o novo valor de cada teste será representado pela expressão $\frac{60}{x - 8}$.

As expressões $\frac{60}{x}$ e $\frac{60}{x - 8}$ são frações que apresentam variáveis no denominador. Elas são chamadas **frações algébricas**.

Veja mais exemplos de frações algébricas:

- $\frac{a + 2b}{5a - 1}$
- $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$
- $\frac{8}{2a + 4b + 2c}$

O numerador e o denominador são polinômios. No denominador aparecem uma ou mais variáveis.

Agora, no primeiro exemplo de fração algébrica, ou seja, em $\frac{a + 2b}{5a - 1}$, vamos substituir a por 1 e b por (-3).

$$\frac{1 + 2 \cdot (-3)}{5 \cdot 1 - 1} = \frac{1 - 6}{5 - 1} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}, \text{ ou } -1{,}25$$

$-\frac{5}{4}$ é o valor numérico da fração algébrica $\frac{a + 2b}{5a - 1}$ para $a = 1$ e $b = -3$

Flávio tem uma oficina mecânica. Dos x reais que recebeu por um serviço, ficou com R$ 80,00 e o restante dividiu entre seus y empregados. Escreva a fração algébrica que representa a quantia recebida individualmente pelos empregados. Calcule o valor numérico dessa fração para $x = 310$ e $y = 4$. Interprete esse número.

Confira sua resposta com as dos colegas.


Ilustra Cartoon

$\frac{x - 80}{y}$ e 57,50. Se o serviço rendeu R$ 310,00 e Flávio tem 4 empregados, cada empregado recebeu R$ 57,50.

O zero no denominador

O que acontece se na fração algébrica $\frac{y}{x - 5}$ tivermos $x = 5$?

É... teremos zero no denominador, pois $5 - 5 = 0$.

Isso não pode acontecer, porque não existe divisão por zero. Como as frações algébricas têm letras no denominador, é importante observar para quais valores o denominador se anula.

Na fração $\frac{y}{x - 5}$, por exemplo, x pode ser qualquer número real, com exceção do 5. Para que a fração exista, devemos ter $x \neq 5$.

Vamos lembrar por que não se divide por zero?

Usaremos a ideia de operação inversa.

$0 : 3 = 0$, porque $0 \cdot 3 = 0$

Até aí, tudo certo! Zero dividido por qualquer número diferente de zero, dá zero.

Agora veja:

$3 : 0$ deveria ser o número que multiplicado por zero resultasse 3. Ora, não há número que multiplicado por zero dê 3.

Então, não existe $3 : 0$.

Esse raciocínio é válido para a divisão de qualquer outro número não nulo por zero.

Conclusão: Não há divisão por zero!

Exercícios

1 Que tipo de fração você escreve quando em $\frac{13}{5+2}$ você substitui 5 por x? Fração algébrica.

2 Sabe-se que x bombons custam 10 reais. Responda com frações algébricas.

Hélio Senatore

a) Qual é o preço de um só bombom? $\frac{10}{x}$

b) Qual é o preço de y bombons? $y \cdot \frac{10}{x} = \frac{10y}{x}$

3 Um camelô comprou x tesouras por 25 reais e quer vendê-las lucrando 1 real em cada uma. Qual é a expressão algébrica que representa o preço de venda de cada tesoura? $\frac{25}{x} + 1$

4 As frações abaixo representadas são iguais? Sim.

A	B	C
$-\frac{3}{2x}$	$\frac{-3}{2x}$	$\frac{3}{-2x}$

5 Calcule o valor numérico de:

$$\frac{x^2 - 3y}{y^2 + 5x}$$

nos seguintes casos:

a) $x = 1$ e $y = 2$ $-\frac{5}{9}$

b) $x = -4$ e $y = -2$ $-\frac{11}{8}$

6 Calcule o valor numérico de $\frac{a^2 - 2b - c}{b + 2}$ para $a = -1$, $b = -3$ e $c = 5$. -2

7 Se $x = -2{,}1$, qual é o valor de $\frac{0{,}25 - x^2}{0{,}5 + x}$? 2,6

Leia e responda as questões 8 e 9.

Ilustrações: Lápis Mágico

Na fração $\frac{a+1}{2a+6}$ devemos ter $a \neq -3$, pois

$$\boxed{2 \cdot (-3) + 6 = -6 + 6 = 0}$$

8 Existe o valor numérico da expressão $\frac{7x}{x-3}$ para $x = 3$? Por quê? Não. Não existe divisão por zero.

9 Para que valor de m não existe valor numérico de $\frac{m-2}{m+5}$? $m = -5$

10 Para $x = 8$, qual das seguintes frações é de menor valor?

a) $\frac{7}{x-1}$ b) $\frac{7}{x}$ x c) $\frac{7}{x+1}$

11 O que acontece com o valor numérico da fração $\frac{1}{x}$ quando x assume valores positivos cada vez maiores? O valor numérico da fração decresce.

2. Resolvendo problemas

Frações algébricas aparecem em problemas da vida real...

- Para percorrer determinada distância, um automóvel consome certa quantidade de litros de gasolina.

Maurício Morais

◆ Av. 23 de Maio, em São Paulo, SP.

A distância percorrida pelo automóvel é **diretamente proporcional** à quantidade de combustível consumida no percurso, ou seja, essas grandezas variam numa mesma razão: se uma dobra, a outra dobra, se uma cai pela metade, a outra cai pela metade também, e assim por diante.

Pense e responda.

1. Dobrando a distância percorrida pelo automóvel, a quantidade de litros de gasolina consumidos também deverá dobrar? Sim.
2. Se percorrer a metade da distância, o automóvel deverá gastar a metade da quantidade de litros de gasolina? Sim.

Agora vamos examinar juntos a seguinte situação:

- Em certa viagem, um automóvel consumiria 47 litros de gasolina. Devido a problemas mecânicos, a viagem terminou 32 quilômetros antes do previsto e o automóvel gastou somente 43 litros de gasolina. Quantos quilômetros teria a viagem toda?

Representando por x a quilometragem da viagem toda, montamos uma tabela:

Distância (km)	Gasolina
x	47
$x - 32$	43

Como há proporcionalidade direta entre as grandezas, as razões são iguais. Temos uma proporção:

$$\frac{x}{x-32} = \frac{47}{43}$$

Lápis Mágico

Igualdades entre razões são proporções. Por exemplo:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ é uma proporção.

Você lembra o que ocorre quando multiplicamos os termos de uma proporção em cruz?

$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

Os produtos são iguais. Isso vale para toda a proporção.

Numa proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos que $a \cdot d = b \cdot c$.

Vamos resolver essa equação?

Multiplicamos os termos da proporção em cruz:

$43x = (x - 32) \cdot 47$

Aplicamos a propriedade distributiva:

$43x = 47x - 47 \cdot 32$

$43x = 47x - 1\,504$

Subtraímos $47x$ de ambos os membros da equação:

$43x - 47x = 47x - 1\,504 - 47x$

$-4x = -1\,504$

Usamos a operação inversa:

$$x = \frac{-1\,504}{-4}$$

$x = 376$

A viagem toda teria 376 km.

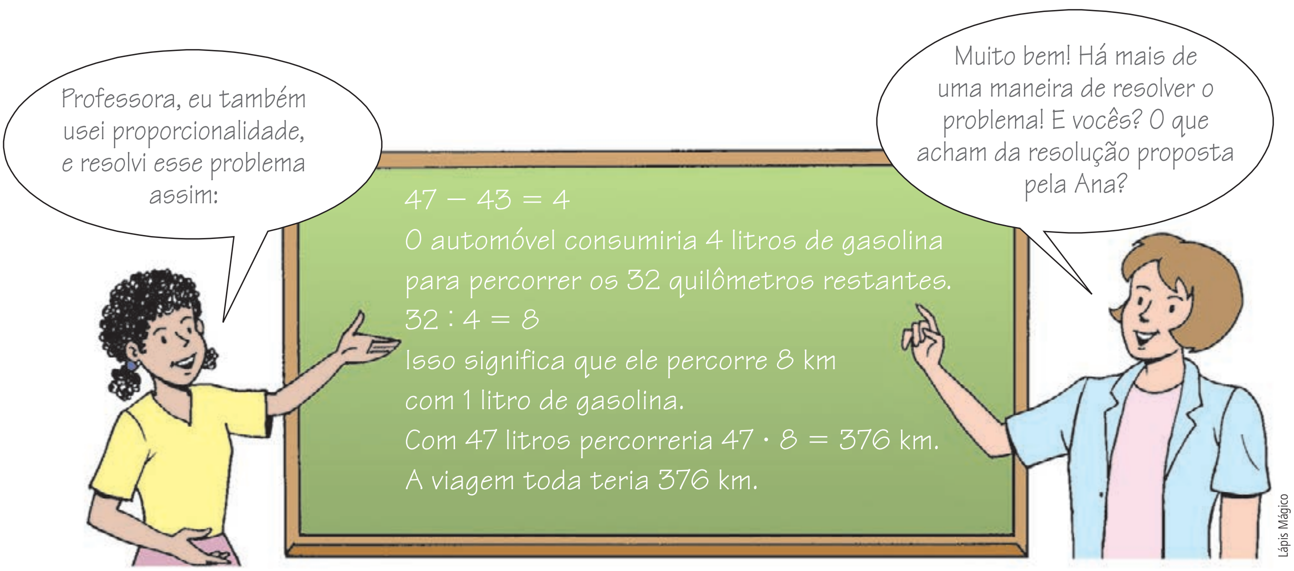
Poderíamos multiplicar ambos os membros da equação por (–1):

$-4x \cdot (-1) = -1\,504 \cdot (-1)$

$4x = 1\,504$

$$x = \frac{1\,504}{4}$$

$x = 376 \rightarrow$ O valor de x seria o mesmo.



Veja outra situação:

- Os alunos do 8º ano vão participar de um campeonato de futebol. Para comprar uniformes para o time, cada aluno contribuiu com uma mesma quantia, arrecadando no total R$ 175,00. No dia da compra dos uniformes, mais 9 alunos decidiram contribuir e o total arrecadado passou a ser de R$ 238,00.
  No final, quantos alunos contribuíram para a compra dos uniformes? Que quantia coube a cada um?

Número inicial de alunos: x Arrecadação inicial: R$ 175,00 Valor pago por aluno: $\frac{175}{x}$	Número final de alunos: $x + 9$ Quantia final arrecadada: R$ 238,00 Valor pago por aluno: $\frac{238}{x + 9}$

Como todos os alunos contribuíram com quantias iguais temos que:

$$\frac{238}{x + 9} = \frac{175}{x}$$

Resolvendo:

$238x = (x + 9) \cdot 175$

$238x = 175x + 1\,575$

Subtraindo $175x$ de ambos os membros da equação, temos:

$238x - 175x = 1\,575$

$63x = 1\,575$

$x = \frac{1\,575}{63}$

$x = 25$

Se $x = 25$, então $x + 9 = 34$.

Podemos calcular a quantia que coube a cada aluno fazendo:

$$\begin{cases} \dfrac{175}{x} = \dfrac{175}{25} = 7 \\ \text{ou} \\ \dfrac{238}{x + 9} = \dfrac{238}{34} = 7 \end{cases}$$

Concluímos que 34 alunos contribuíram com R$ 7,00 cada um para a compra dos uniformes.

Resolva em dupla com um colega.

1. O número de alunos que contribuíram para a compra de uniformes e a quantia arrecadada são grandezas diretamente proporcionais. Montem uma proporção a partir da tabela abaixo e determinem o valor de x.

Números de alunos	Quantia arrecadada (R$)
x	175
$x + 9$	238

$\frac{x}{x + 9} = \frac{175}{238}$

$238x = 175x + 1\,575$

$63x = 1\,575$

$x = 25$

2. Vocês encontraram $x = 25$? Sim.

3. Vocês pensaram em outra forma de resolução para o problema? Se pensaram, mostrem essa forma aos colegas e ao professor.

Exercícios

12 Calcule mentalmente o valor de x.

a) $\frac{3}{9} = \frac{x}{3}$ 1

b) $\frac{2}{x} = \frac{6}{24}$ 8

c) $\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$ 10

d) $\frac{5}{x} = \frac{1}{0,8}$ 4

13 Qual é o valor de x em cada proporção?

a) $\frac{5}{2,5} = \frac{10}{x}$ 5

b) $\frac{4}{6} = \frac{x}{x+1}$ 2

c) $\frac{6}{x+0,5} = \frac{1}{2}$ 11,5

d) $\frac{x-3}{x} = \frac{4}{5}$ 15

e) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{1}{2}$ 3

f) $\frac{4}{3x+2} = \frac{7}{5x}$ -14

14 Uma classe quis dar à professora um presente que custava R$ 96,00. Calculou-se a quantia que cada aluno deveria dar. Porém, quatro alunos de outra classe quiseram participar da compra do presente e, com isso, acabaram comprando um presente de R$ 108,00. Quantos alunos havia na classe? 32 alunos $\frac{x}{x+4} = \frac{96}{108}$

Fernando Favoretto

15 Um professor pretendia dividir igualmente 196 doces entre os alunos de sua classe. Porém, no dia da distribuição, coincidentemente, faltaram 3 alunos e a doceira só entregou 175 doces, que foram distribuídos igualmente entre os presentes. Qual era o número de alunos presentes no dia da distribuição? 28 alunos; $\frac{x}{x-3} = \frac{196}{175}$

Ilustra Cartoon

CONECTANDO SABERES

Cuidando da alimentação

Quando o ser vivo se alimenta, incorpora a energia que possibilita o crescimento, o desenvolvimento e a renovação das células e dos tecidos do organismo.

As substâncias que formam e mantêm vivo e ativo o nosso corpo vêm dos alimentos que comemos — carne, cereais, legumes, verduras, frutas — e são denominadas nutrientes. Por isso, é importante ter uma alimentação com variedade de nutrientes.

Mas, além de serem essenciais para nossa saúde, os alimentos são também saborosos. O brigadeiro, por exemplo, um doce muito apreciado, tem entre seus ingredientes o chocolate e o açúcar. Essas substâncias, quando consumidas moderamente, podem fazer bem ao nosso organismo, pois são fontes de energia. Se consumidas em excesso, porém, podem ser prejudiciais, causando, por exemplo, obesidade.

A.M. Pereira, M.C. Santana e M. Waldhelm. *Ciências*. São Paulo: Ed. do Brasil, 1999.

16 Eram x latas de tinta que seriam adquiridas para pintar 280 m² de parede. No entanto, resolveram, depois, pintar um total de 770 m² e com isso acrescentaram 7 latas de tinta no pedido inicial. Qual é o número x de latas? 4 latas

• $\frac{x}{x+7} = \frac{280}{770}$

Vamos recordar?

No próximo passo dentro do estudo das frações algébricas, trataremos da simplificação e de operações envolvendo essas frações.

Nosso trabalho será mais tranquilo se retomarmos conhecimentos importantes.

Acompanhe os exemplos a seguir e resolva em seguida os exercícios da “Seção livre”.

Exemplos:

1. $\dfrac{18}{24} \overset{:6}{\underset{:6}{=}} \dfrac{3}{4}$

2. $\dfrac{2}{0{,}8} \overset{\times 10}{\underset{\times 10}{=}} \dfrac{20}{8} \overset{:4}{\underset{:4}{=}} \dfrac{5}{2}$

- Quando dividimos (ou multiplicamos) o numerador e o denominador pelo mesmo número natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à dada.

3. $\dfrac{15}{3} = 5$

- Observe que $\dfrac{15}{3} = 15 : 3 = 5$.

4. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

5. $\dfrac{3}{4} + 1 - \dfrac{5}{6} = \dfrac{9}{12} + \dfrac{12}{12} - \dfrac{10}{12} = \dfrac{11}{12}$

- Para somar ou subtrair frações devemos escrevê-las com o mesmo denominador.

6. $\dfrac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{7}_{\,1}} \cdot \dfrac{\cancel{14}^{\,2}}{\cancel{15}_{\,3}} = \dfrac{2}{3}$

7. $\dfrac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{8}_{\,2}} \cdot \cancel{4}^{\,1} \cdot \dfrac{5}{\cancel{9}_{\,3}} = \dfrac{5}{6}$

- Na multiplicação entre frações, multiplicamos numerador por numerador e denominador por denominador, simplificando sempre que possível.

8. $\dfrac{24 - 21}{12 + 18} \cdot \dfrac{18 - 13}{11 - 9} = \dfrac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{30}_{\,\cancel{6}_{\,2}}} \cdot \dfrac{\cancel{5}^{\,1}}{2} = \dfrac{1}{4}$

9. $\dfrac{2}{9} : \dfrac{7}{3} = \dfrac{2}{\cancel{9}_{\,3}} \cdot \dfrac{\cancel{3}^{\,1}}{7} = \dfrac{2}{21}$

10. $\dfrac{5}{8} : \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{\cancel{8}_{\,2}} \cdot \cancel{4}^{\,1} = \dfrac{5}{2}$

- Para dividir frações, multiplicamos a primeira delas pela inversa da segunda.

Monkey Business Images/Dreamstime.com

Seção livre

17 Calcule mentalmente.

a) $\frac{30}{-2}$ -15

b) $\frac{-2}{30}$ $-\frac{1}{15}$

c) $\frac{9}{0,9}$ 10

d) $\frac{0,9}{9}$ $\frac{1}{10}$

e) $\frac{7^8}{7^6}$ 49

f) $\frac{2^{12}}{2^{15}}$ $\frac{1}{8}$

18 Calcule de dois modos.

a) $\frac{25-9}{5-3}$ 8

b) $\frac{7+5}{49-25}$ $\frac{1}{2}$

c) $\frac{100-64}{10-8}$ 18

d) $\frac{100-64}{10+8}$ 2

19 Use a fatoração e calcule.

a) $\frac{1\,000^2}{252^2-248^2}$ 500

b) $\frac{17\cdot 4+17\cdot 9+17\cdot 7}{2\cdot 34+5\cdot 34+3\cdot 34}$ 1

20 Complete o quadro no caderno, escrevendo o inverso de um número racional.

Número	$\frac{3}{7}$	3	1	0,1	2,5
Inverso	$\frac{7}{3}$				

$\frac{1}{3}$ 1 10 $\frac{10}{25}$

21 Rafael comeu $\frac{5}{12}$ de uma torta e Fernanda, $\frac{1}{4}$.

Hélio Senatore

a) Que porção da torta os dois comeram? $\frac{2}{3}$ da torta

b) Que porção da torta restou? $\frac{1}{3}$ da torta

22 Quanto é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de uma folha de cartolina? $\frac{1}{8}$ de uma folha

23 Relacione no caderno as operações que têm o mesmo resultado e a fração que representa esse resultado. A - G - J; B - H - I; C - F - K; D - E - L

A $\frac{7}{8} : \frac{2}{9}$

B $\frac{4}{9} : \frac{6}{5}$

C $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$

D $\frac{6}{7} : 5$

E $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{5}$

F $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}$

G $\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{2}$

H $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{6}$

I $\frac{10}{27}$

J $\frac{63}{16}$

K $\frac{6}{5}$

L $\frac{6}{35}$

24 (Cefet-SP) Veja na tabela os pontos que um lutador de judô pode ganhar ou perder, conforme o golpe dado no adversário ou a punição sofrida.

CONECTANDO SABERES

Golpe	Valor (ganho)	Punição	Valor (perdido)
Ippon	1 ponto	Shidô	$\frac{1}{8}$ de ponto
Waza-ari	$\frac{1}{2}$ ponto	Chui	$\frac{1}{4}$ de ponto
Yuko	$\frac{1}{4}$ ponto	Keikoku	$\frac{1}{2}$ de ponto
Koka	$\frac{1}{8}$ ponto	Hansoku-make	1 ponto

Em relação a um jogador que tenha obtido, ao final de uma luta, um koka, dois keikoku, três waza-ari e quatro shidô, pode-se dizer que:

x a) ganhou $\frac{1}{8}$ de ponto.

b) perdeu $\frac{2}{10}$ de ponto.

c) perdeu 1 ponto.

d) ganhou $\frac{25}{8}$ de ponto.

Milan Kopcok/Dreamstime.com

$\frac{1}{8} - 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

3. Simplificando frações algébricas

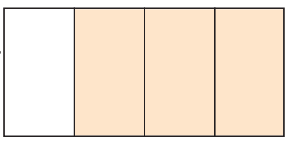
Nos problemas que resolvemos, trabalhamos com frações algébricas.

Essas frações aparecem em outras expressões e equações e pode ser necessário simplificá-las, realizar operações com elas. Veremos como fazer isso a partir dos conhecimentos que temos sobre frações numéricas.

Nesse trabalho, vamos sempre supor que o denominador da fração algébrica tem valor numérico diferente de zero.

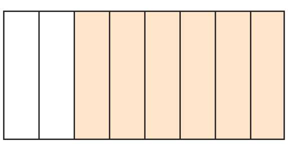
Lembrando...

Ilustrações: DAE



$\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ são frações equivalentes, pois representam a mesma quantidade.

Existem infinitas frações equivalentes a $\frac{3}{4}$.



$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \ldots$$

Para obtê-las basta multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número natural diferente de zero.

Também podemos **simplificar** uma fração, encontrando uma fração equivalente a ela.

$$\frac{12}{32} \underset{:4}{\overset{:4}{=}} \frac{3}{8}$$

Nesse caso, fazemos o inverso: dividimos, quando possível, o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número natural diferente de zero.

Escrevendo de outro modo:

$$\frac{12}{32} = \frac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4} \cdot 8} = \frac{3}{8}$$

Vamos aproveitar essas ideias para simplificar frações algébricas.

Acompanhe os exemplos:

- $\frac{15x^2y}{20xy^2} = \frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y}}{4 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot y} = \frac{3x}{4y}$
- $\frac{4a^2b^5c^3}{7a^6b^2} = \frac{4\cancel{a^2}\cancel{b^2}b^3c^3}{7\cancel{a^2}a^4\cancel{b^2}} = \frac{4b^3c^3}{7a^4}$

Usamos as propriedades das potências para fazer:

$b^5 = b^2 \cdot b^3$

$a^6 = a^2 \cdot a^4$

- $\dfrac{x^2 + x}{3x} = \dfrac{\cancel{x}(x + 1)}{3\cancel{x}} = \dfrac{x + 1}{3}$

Fatoramos a expressão para então simplificar!

Vamos fazer $x = 2$ na fração inicial e na fração já simplificada:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2 + x}{3x} = \dfrac{2^2 + 2}{3 \cdot 2} = \dfrac{6}{6} = 1 \\[2ex] \dfrac{x + 1}{3} = \dfrac{2 + 1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1 \end{array}\right\}$$

Obtivemos valores numéricos iguais.

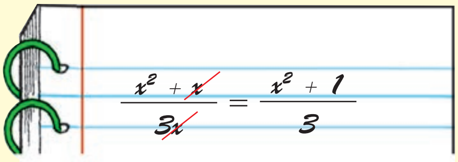
- $\dfrac{6a + 18}{a^2 - 9} = \dfrac{6\cancel{(a + 3)}}{\cancel{(a + 3)}(a - 3)} = \dfrac{6}{(a - 3)}$

Fatoramos o numerador e o denominador e aí simplificamos.

Rodrigo **cometeu um erro** ao simplificar a fração.

$$\frac{x^2 + x}{3x}$$

Veja o que ele fez:



Hélio Senatore

Fazendo $x = 2$ na fração $\dfrac{x^2 + 1}{3}$, obtemos $\dfrac{2^2 + 1}{3} = \dfrac{5}{3}$.

O valor numérico da fração para $x = 2$ é diferente do valor que achamos para a fração inicial. Essas frações não são equivalentes!

- Você descobriu qual foi o erro cometido por Rodrigo?

Ele deveria, primeiro, fatorar a expressão do numerador da fração.

Um número diferente de zero dividido por ele mesmo dá 1.
Por isso, $\dfrac{a + 3}{a + 3} = 1$.

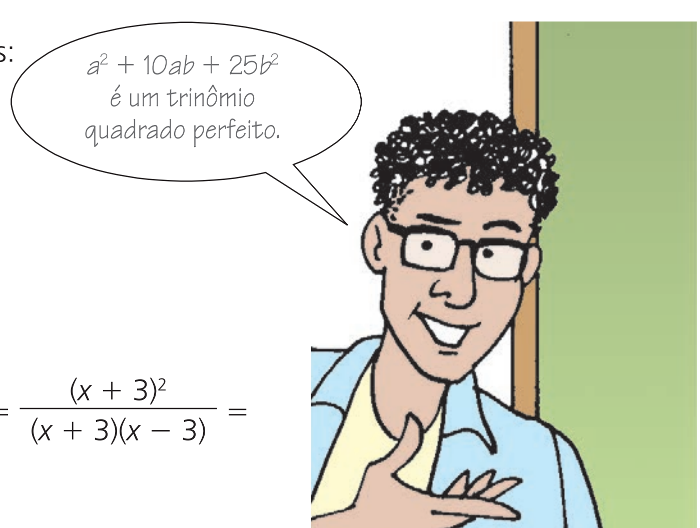
Acompanhe, agora, dois outros exemplos:

- $\dfrac{a^2 + 10ab + 25b^2}{4a + 20b} = \dfrac{(a + 5b)^2}{4(a + 5b)} =$

$= \dfrac{\cancel{(a + 5b)}(a + 5b)}{4\cancel{(a + 5b)}} = \dfrac{a + 5b}{4}$

- $\dfrac{2x^2 + 12x + 18}{2x^2 - 18} = \dfrac{\cancel{2}(x^2 + 6x + 9)}{\cancel{2}(x^2 - 9)} = \dfrac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 3)} =$

$= \dfrac{\cancel{(x + 3)}(x + 3)}{\cancel{(x + 3)}(x - 3)} = \dfrac{x + 3}{x - 3}$



Lápis Mágico

Exercícios

25 Cecília vai simplificar as frações mentalmente. Faça como ela e anote o resultado no caderno.

a) $\frac{4}{8}$ $\frac{1}{2}$ c) $\frac{0,7}{7}$ $\frac{1}{10}$ e) $\frac{7x}{8x}$ $\frac{7}{8}$

b) $\frac{15}{5}$ 3 d) $\frac{2,5}{5}$ $\frac{1}{2}$ f) $\frac{ab}{ad}$ $\frac{b}{d}$

26 Fernando tem uma dúvida:

Responda à dúvida dele e justifique sua resposta no caderno. Sim, porque $6x : 2x = 3$ e $4x : 2x = 2$.

27 Simplifique as frações algébricas:

a) $\frac{8c}{4a}$ $\frac{2c}{a}$ c) $\frac{abc}{cd}$ $\frac{ab}{d}$

b) $\frac{4c^2}{6c^3}$ $\frac{2}{3c}$ d) $\frac{-7a^3c}{-21ac^5}$ $\frac{a^2}{3c^4}$

28 Ajude Rosana a encontrar a resposta.

a) $\frac{x + 5}{y - 5}$ x c) $\frac{5x + 5y}{5y}$

b) $\frac{5 + x}{5 + y}$ d) $\frac{5x - y}{5}$

29 Colocando fatores comuns em evidência, simplifique.

Ilustrações: Ilustra Cartoon

a) $\frac{5x - 15}{10x}$

b) $\frac{7a}{7x - 14}$

c) $\frac{15x - 3y}{3x - 3y}$

d) $\frac{x^2 - xy}{x - y}$

a) $\frac{x - 3}{2x}$

b) $\frac{a}{x - 2}$

c) $\frac{5x - y}{x - y}$

d) x

30 Utilize a fatoração da diferença de dois quadrados ou a fatoração do trinômio quadrado perfeito e simplifique.

a) $\frac{7x - 7y}{5x^2 - 5y^2}$ $\frac{7}{5(x + y)}$

b) $\frac{5x^2 - 5}{4x + 4}$ $\frac{5(x - 1)}{4}$

c) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$ $\frac{x - 3}{x}$

d) $\frac{7c - 21}{c^2 - 6c + 9}$ $\frac{7}{c - 3}$

31 (UFRJ) Considere a brincadeira a seguir.
Pense em um número.

- Some 3.
- Multiplique o resultado por 4.
- Subtraia 6.
- Divida o resultado por 2.
- Subtraia duas vezes o número que você pensou.
- Qual o resultado? 3

31. $x \rightarrow x + 3 \rightarrow 4(x + 3) = 4x + 12 \rightarrow 4x + 12 - 6 = 4x + 6 \rightarrow \frac{4x + 6}{2} = 2x + 3 \rightarrow 2x + 3 - 2x = 3$

4. Adição e subtração com frações algébricas

Você sabe somar e subtrair frações numéricas? Confira:

- $\dfrac{1}{9} + \dfrac{7}{9} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1 + 7 - 2}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$
- $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{12} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{11}{12}$

Para somar ou subtrair frações de denominadores diferentes, encontramos frações equivalentes às dadas que tenham um mesmo denominador.

$$\underset{\times 4}{\overset{\times 4}{\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12}}} \qquad \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{12}}}$$

Com frações algébricas as ideias são as mesmas. Veja exemplos:

- $\dfrac{2x}{x + 1} + \dfrac{4x - 5}{x + 1} = \dfrac{2x + 4x - 5}{x + 1} = \dfrac{6x - 5}{x + 1}$
- $\dfrac{a - 5}{2a} + \dfrac{4}{3a} =$ ▨

Para resolver, vamos escrever frações equivalentes às dadas, de forma que os denominadores fiquem iguais.

- $\dfrac{a - 5}{2a} = \dfrac{3 \cdot (a - 5)}{3 \cdot 2a} = \dfrac{3a - 15}{6a}$

  $\dfrac{4}{3a} = \dfrac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3a} = \dfrac{8}{6a}$

Assim como nas frações numéricas, o novo denominador será um múltiplo comum de $2a$ e $3a$. O produto de ambos ($6a^2$) é um múltiplo comum e você pode usá-lo. Mas $6a$ também é um múltiplo comum e é mais simples.

Agora vamos efetuar a adição:

$$\frac{a - 5}{2a} + \frac{4}{3a} = \frac{3a - 15}{6a} + \frac{8}{6a} = \frac{3a - 15 + 8}{6a} = \frac{3a - 7}{6a}$$

- $\dfrac{x}{2x + 2y} - \dfrac{3x}{x + y} =$ ▨

$$\frac{x}{2x + 2y} = \frac{x}{2(x + y)}$$

$$\frac{3x}{x + y} = \frac{2 \cdot 3x}{2\,(x + y)} = \frac{6x}{2(x + y)}$$

Então,

$$\frac{x}{2x + 2y} - \frac{3x}{x + y} = \frac{x}{2(x + y)} - \frac{6x}{2(x + y)} = -\frac{5x}{2(x + y)}$$

Exercícios

32 Ontem, para o almoço, a mãe do Paulo fez uma torta. Paulo contou aos amigos:

Lápis Mágico

Os amigos comentaram: “Não sobrou nada!” Você é da mesma opinião? Sobrou $\frac{1}{12}$.

33 Calcule.

a) $\frac{x}{a} + \frac{8x}{a} - \frac{3x}{a}$ $\frac{6x}{a}$

b) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x}$ $\frac{5}{6x}$

c) $\frac{3a}{x} - \frac{5a}{4x} + \frac{7a}{2x}$ $\frac{21a}{4x}$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $\frac{x + y}{xy}$

e) $7 + \frac{x + y}{x - y}$ $\frac{8x - 6y}{x - y}$

f) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x + 1}$ $\frac{x + 3}{x(x + 1)}$

34 Adicione as frações abaixo representadas, duas a duas, de modo a obter sempre $\frac{1}{2x}$.

$\frac{1}{3x}$ $\frac{2}{5x}$ $\frac{1}{10x}$

$\frac{2}{8x}$ $\frac{1}{6x}$ $\frac{1}{4x}$

$\frac{2}{8x} + \frac{1}{4x}$; $\frac{2}{5x} + \frac{1}{10x}$; $\frac{1}{3x} + \frac{1}{6x}$

35 A figura mostra uma pizza dividida em partes iguais. Dois terços de uma dessas partes correspondem a:

a) $\frac{1}{8}$ da pizza.

b) $\frac{1}{10}$ da pizza.

x c) $\frac{1}{6}$ da pizza.

d) $\frac{1}{12}$ da pizza.

J.C.Ruzza

36 Recorde duas maneiras de multiplicar frações:

(A) $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{21} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$

(B) $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{21} = \frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} =$

$= \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 5}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 7} = \frac{5}{14}$

Use um desses modos para efetuar e simplificar as expressões a seguir.

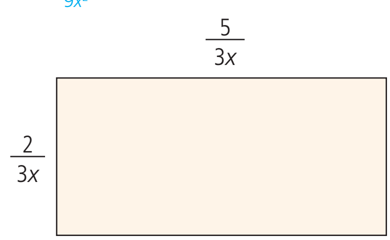
a) $\frac{7x}{2a} \cdot \frac{x}{3c}$ $\frac{7x^2}{6ac}$

b) $5x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{8}$ $\frac{5x^4}{16}$

c) $\frac{x + y}{5} \cdot \frac{x - y}{2}$ $\frac{x^2 - y^2}{10}$

d) $\frac{9}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x + 1}$ $\frac{9}{x + 1}$

37 Que fração algébrica representa a área do retângulo? $\frac{10}{9x^2}$



DAE

38 Relacione no caderno três círculos, um de cada cor. Exemplo: (A) (G) (L) (B) (H) (J); (C) (F) (I); (D) (E) (K)

(A) $\frac{6}{7} : \frac{3}{5}$

(B) $\frac{3a}{5x} : \frac{2}{7a}$

(C) $\frac{a}{x + 1} : \frac{m}{x + 1}$

(D) $\frac{x + 1}{7x} : \frac{a}{x - 1}$

(E) $\frac{x + 1}{7x} \cdot \frac{x - 1}{a}$

(F) $\frac{a}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{m}$

(G) $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{3}$

(H) $\frac{3a}{5x} \cdot \frac{7a}{2}$

(I) $\frac{a}{m}$

(J) $\frac{21a^2}{10x}$

(K) $\frac{x^2 - 1}{7ax}$

(L) $\frac{30}{21}$

5. Novos problemas e equações

1. Um desafio:
Luís gastou R$ 12,00 comprando cadernos e R$ 9,00 comprando canetas. Ele contou que:
- o número de canetas é igual ao dobro do número de cadernos;
- o preço de um caderno mais o preço de uma caneta é R$ 5,50.


Mauricio Morais

Vamos descobrir juntos:
- quantos cadernos e quantas canetas Luís comprou.
- qual é o preço de cada caneta e de cada caderno.

Você e seus colegas podem interromper a leitura e tentar resolver o problema. Depois, acompanhem a nossa resolução.

Número de cadernos: n

Número de canetas: $2n$
(dobro do número de cadernos)

Se n cadernos custaram R$ 12,00, cada caderno custou $\frac{12}{n}$.

Se $2n$ canetas custaram R$ 9,00, cada caneta custou $\frac{9}{2n}$.

Um caderno e uma caneta custam juntos R$ 5,50. Então:

$$\frac{12}{n} + \frac{9}{2n} = 5{,}50$$

Lembre-se: para que essas frações existam, devemos ter $n \neq 0$.

Para resolver a equação, procuramos frações equivalentes que tenham o mesmo denominador:

$$\frac{2 \cdot 12}{2n} + \frac{9}{2n} = \frac{2n \cdot 5{,}50}{2n}$$

$$\frac{24}{2n} + \frac{9}{2n} = \frac{11n}{2n}$$

$$\frac{33}{2n} = \frac{11n}{2n}$$

Multiplicamos ambos os membros da equação por $2n$.

$$\cancel{2n} \cdot \frac{33}{\cancel{2n}} = \cancel{2n} \cdot \frac{11n}{\cancel{2n}}$$

$$33 = 11n$$

$$\frac{33}{11} = n$$

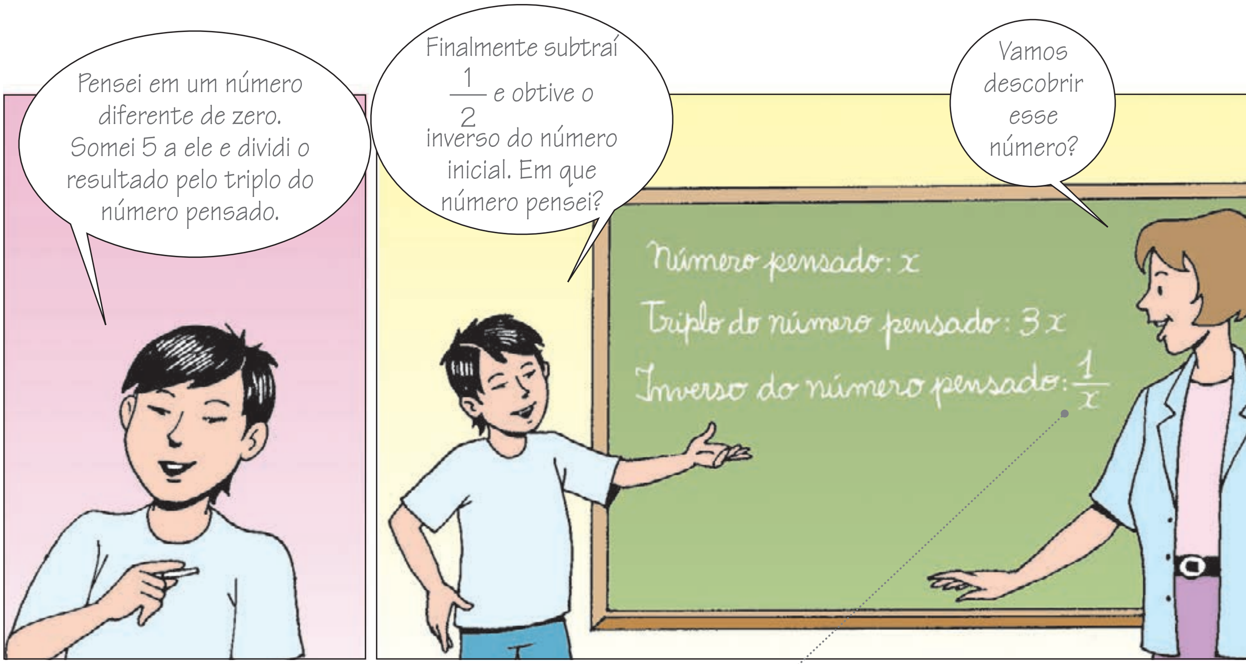
$n = 3$ Como $n \neq 0$, a solução é válida!

Assim, n corresponde ao número de cadernos e $2n$ ao número de canetas.
Descobrimos que Luís comprou 3 cadernos e 6 canetas.

Determine com os colegas o preço de cada caderno e de cada caneta.

Cada caderno custou R$ 4,00 e cada caneta custou R$ 1,50.

2. Tiago propôs um problema:



Ilustrações: Lápis Mágico

Equação que representa o problema:

> $\frac{1}{x}$ existe porque x é diferente de zero.

$$\frac{x+5}{3x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{2 \cdot (x+5)}{2 \cdot 3x} - \frac{3 \cdot x \cdot 1}{3 \cdot x \cdot 2} = \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot x}$$

$$\frac{2x+10}{6x} - \frac{3x}{6x} = \frac{6}{6x}$$

$$\cancel{6x}\left(\frac{-x+10}{\cancel{6x}}\right) = \cancel{6x} \cdot \frac{6}{\cancel{6x}}$$

$$-x + 10 = 6$$

$$-x = 6 - 10$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

O número pensado é 4.

Verificando:
se x é a solução do problema, $4 + 5 = 9$

$$9 : 12 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ é o inverso de 4.

Exercícios

39 Calcule mentalmente o valor de x.

a) $\frac{30}{x} = 6$ 5

b) $-2 = \frac{8}{x}$ -4

c) $\frac{4}{x} + 2 = 3$ 4

d) $1 + \frac{3}{x} = -2$ -1

e) $\frac{13}{x - 2} = 1$ 15

f) $\frac{10}{x + 3} = 1$ 7

40 Resolva as equações fracionárias.

a) $2 + \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$ $\frac{3}{2}$

b) $\frac{3}{x} - \frac{4}{5x} = \frac{1}{10}$ 22

c) $\frac{3}{2} - \frac{x + 2}{3x} = -\frac{11}{6x}$ -1

41 Leia com atenção e complete no caderno:

a)

$\frac{4x^2 - 8x}{4x} = 13$ ou $\frac{\cancel{4x}(x - 2)}{\cancel{4x}} = 13 \rightarrow x = 15$

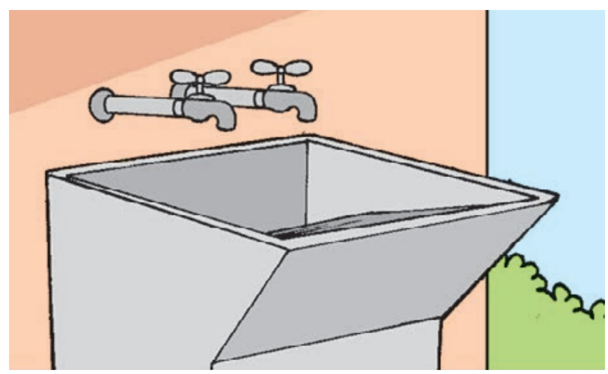
b) Dê as mesmas ordens a um colega. Se ele disser que obteve 7, você dirá que ele pensou em qual número? 9

42 Se $\frac{3}{x} = 6$, qual é o valor de $x - 1$? $-\frac{1}{2}$

43 O inverso de 2 é $\frac{1}{2}$. O inverso de 5 é $\frac{1}{5}$. Qual é o inverso de x? $\frac{1}{x}$

44 Um número é o dobro de outro. A soma de seus inversos é $\frac{9}{2}$. Quais são os dois números?
$\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{9}{2}$

45 Uma torneira leva 20 minutos para encher um tanque e outra torneira consegue enchê-lo em 30 minutos. Quanto tempo será necessário para encher o tanque se ambas as torneiras forem deixadas abertas? 12 minutos



Ilustrações: Ilustra Cartoon

Resolva por partes.

a) A primeira torneira em 1 minuto enche que parte do tanque? $\frac{1}{20}$ do tanque

b) A segunda torneira em 1 minuto enche que parte do tanque? $\frac{1}{30}$ do tanque

c) Em 1 minuto, as duas torneiras juntas enchem $\frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ do tanque. Então, juntas, elas levam x minutos. Isso significa que, em 1 minuto, elas enchem ▨ do tanque. $\frac{1}{x}$

d) Qual é a equação do problema? $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{x}$

46 Roberto quer construir um muro em seu terreno. Ele pode fazer esse serviço em 12 dias, e seu irmão mais velho, Lucas, em 6 dias. Em quanto tempo farão, juntos, o mesmo muro?
4 dias; $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$

Revisando

47 Existe o valor numérico da expressão $\frac{3x}{x^2 - y}$ para $x = 3$ e $y = 9$? Por quê?
Não. Porque o denominador da fração é nulo.

48 Calcule o valor numérico de $\frac{x^2 - y^2}{1 - y^2}$ para:

a) $x = 3$ e $y = 0$ 9

b) $x = 2$ e $y = 2$ 0

c) $x = 5$ e $y = 1$ (cuidado!) Não existe.

d) $x = 3$ e $y = -1$ (cuidado!) Não existe.

49 Calcule o valor de $\frac{2x^2 - 3y + z}{y^2 - 1}$ para $x = -2$, $y = -3$ e $z = -5$. $\frac{3}{2}$

50 Calcule o valor de x nas expressões a seguir.

a) $\frac{x - 2}{x} = \frac{12}{20}$ 5

b) $\frac{0{,}6}{2x} = \frac{0{,}9}{6}$ 2

c) $\frac{x + 1}{x} = \frac{1}{3}$ $-\frac{3}{2}$

d) $\frac{5}{x + 3} = \frac{2}{7{,}3}$ 15,25

51 Numa sexta-feira, o total de R$ 180,00 de gorjeta foi repartido igualmente para certo número de frentistas. No dia seguinte, o valor total das gorjetas alcançou R$ 156,00; no entanto, dois frentistas deixaram de comparecer ao serviço. Considerando a sexta-feira e o sábado, a quantia que coube a cada frentista foi exatamente a mesma. Quantos frentistas tem o posto de gasolina? 15 frentistas

Ilustrações: Ilustra Cartoon

6ª-feira → $\frac{180}{x}$; sábado → $\frac{156}{x - 2}$ • $\frac{180}{x} = \frac{156}{x - 2}$

52 Quatrocentos selos deveriam ser repartidos igualmente entre algumas crianças filatelistas. No entanto, três delas deixaram de comparecer e o total de selos a ser distribuído foi alterado para 352.

Valéria Vaz

◆ Selo nacional de 1970, homenageando o carnaval carioca.

a) $\frac{x}{x - 3} = \frac{400}{352}$

a) Qual era o número inicial de crianças?
25 crianças

b) Você sabe o que significa "filatelista"?
Pessoa que coleciona selos.

53 Simplifique.

a) $\frac{x^2y}{xy}$ x

b) $\frac{\pi r^2}{2\pi r}$ $\frac{r}{2}$

c) $\frac{10m}{-2m^4}$ $-\frac{5}{m^3}$

d) $\frac{4x - 8}{x - 2}$ 4

e) $\frac{x - 9}{7x - 63}$ $\frac{1}{7}$

f) $\frac{3(x - 2)^2}{6(x - 2)^4}$ $\frac{1}{2(x - 2)^2}$

54 Use a fatoração e simplifique.

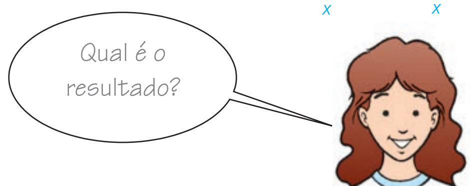
a) $\frac{x^2 - 49}{x - 7}$ $x + 7$

b) $\frac{4 - x^2}{6 + 3x}$ $\frac{2 - x}{3}$

c) $\frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9}$ $\frac{2}{x - 3}$

d) $\frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1}$ $\frac{2x - 1}{2x + 1}$

55 Sorteei um número entre 1 e 10. Somei-o com 5, multipliquei o resultado por 3, subtraí 15 do produto e, finalmente, dividi pelo número que sorteei. $\frac{(x + 5) \cdot 3 - 15}{x} = \frac{3x}{x} = 3$



56 Resolva as equações fracionárias.

a) $\dfrac{12}{2x-3} = 4$ 3

b) $\dfrac{5x+3}{x} = 2$ −1

c) $\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{2}{3x}$ 5

d) $\dfrac{4}{3x} - \dfrac{x+4}{6x} = 2$ $\frac{4}{13}$

e) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4x}{x+1} = 4$ 7

57 A razão entre a idade que Fabiana terá daqui a 5 anos e a idade que ela tinha há 5 anos é $\dfrac{3}{2}$. Qual é a idade atual de Fabiana? 25 anos

$\frac{x+5}{x-5} = \frac{3}{2}$

58 Trezentos e vinte livros deveriam ser repartidos igualmente entre alguns alunos de uma escola. No entanto três deles deixaram de comparecer, e o total de livros a ser distribuído foi alterado para 296. Qual era o número inicial de alunos? 40 alunos; $\frac{320}{x} = \frac{296}{x-3}$

Hélio Senatore

59 Você sabe que a expressão $\dfrac{1}{x-1}$ não tem valor numérico para $x = 1$.

Calcule o valor numérico da expressão acima para:

a) $x = 1{,}1$ 10

b) $x = 1{,}01$ 100

c) $x = 1{,}001$ 1 000

d) $x = 1{,}0001$ 10 000

Que conclusão você pode tirar?
Quanto mais x se aproxima de 1, o valor da expressão cresce/aumenta.

Desafios

60 (Cesgranrio-RJ) Se $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$, com $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{1}{3}$, então quanto vale c? $\frac{1}{5}$

$2 + 3 = \frac{1}{c}$

61 Sabe-se que $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 10$. Qual é o valor de $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$?

• $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 10$

• $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10 - 2$

• $x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$

62 (CPII-RJ) Numa loja de produtos esportivos, há uma promoção para quem comprar acima de oito unidades de um mesmo produto. A fórmula utilizada pelo gerente para obter o preço unitário do produto é:

$$P = \frac{k}{n} + 15$$

$k \rightarrow$ valor constante que depende do tipo do produto (em reais)

$n \rightarrow$ número de unidades adquiridas ($n \geqslant 8$)

$P \rightarrow$ preço unitário do produto (em reais)

a) Encontre o valor da constante k, sabendo-se que determinado cliente comprou 20 camisetas de basquete por R$ 23,00 cada.
$k = 160$ $\quad 23 = \frac{k}{20} + 15$

b) A constante utilizada para compra de bolas de futebol é $k = 240$. Quantas bolas de futebol podem ser adquiridas com R$ 480,00?
$n = 16$; $\quad \frac{480}{n} = \frac{240}{n} + 15$

Valéria Vaz

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

63 Em uma prova em que deviam ser dados os resultados do 1º membro, um aluno desatento apresenta estes cálculos:

I $(a + 2)^2 = a^2 + 4$

II $2 \cdot (5 + a) = 10 + a$

III $\dfrac{a + 2}{a} = 2$

IV $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1 + 1}{2 + a}$

Quantos enganos esse aluno desatento cometeu?

a) 1 b) 2 c) 3 x d) 4

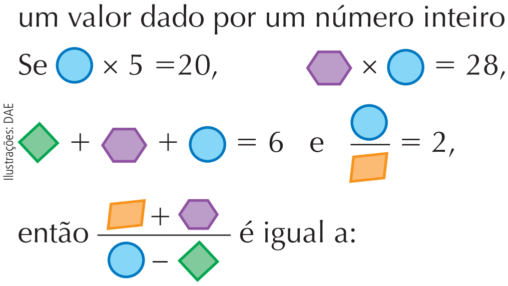
64 Responda à pergunta de Carla.

Ilustrações: Ilustra Cartoon

a) $\dfrac{-3x^3}{(3x)^3}$ c) $\dfrac{x - 1}{x}$

b) $\dfrac{-x + 3}{x + 3}$ x d) $\dfrac{-x^2 - 1}{x^2 + 1}$

65 (Cefet-PR) Cada uma das figuras geométricas, envolvidas nas operações a seguir, possui um valor dado por um número inteiro.



Ilustrações: DAE

x a) 1 c) −1

b) $\dfrac{3}{5}$ d) $-\dfrac{3}{5}$

66 O número $\dfrac{27}{x - 3}$ é natural. A soma dos possíveis valores de x é:

a) 42 x c) 52 $4 + 6 + 12 + 30 = 52$

b) 46 d) 58

67 Se $p - q = q - p$, então: d

a) $p = 2q$ c) $pq = 1$

b) $p + q = 1$ d) $\dfrac{p}{q} = 1$

Ilustra Cartoon

68 (Fuvest-SP) O valor da expressão $\dfrac{a + b}{1 - ab}$, para $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{1}{3}$, é:

a) 0 x c) 1

b) 5 d) 6

69 O valor da expressão $\left(\dfrac{x + y}{xy}\right) \div \left(\dfrac{x^2 - y^2}{xy}\right)$ para $x - y = 4$ é:

x a) 0,25 c) 1,20

b) 0,60 d) 1,60

70 O valor de $\dfrac{x^4 - 1}{(x-1)(x^2+1)}$ para $x = 1999$ é:

x a) 2 000 c) 4 000

b) 3 000 d) 5 000

$\dfrac{\cancel{(x^2+1)} \cdot (x^2 - 1)}{(x - 1) \cdot \cancel{(x^2+1)}} = \dfrac{(x + 1) \cdot \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = x + 1 = 1999 + 1 = 2000$

71 (Acafe-SC) Um estudante comprou n canetas por 300 reais e $(n + 4)$ lapiseiras por 200 reais. Se o preço de uma caneta é o dobro do preço de uma lapiseira, o número de canetas e lapiseiras, respectivamente, que ele comprou, é:

x a) 12 e 16 c) 16 e 20

b) 10 e 14 d) 14 e 18 $\dfrac{300}{n} = 2\left(\dfrac{200}{n + 4}\right)$

UNIDADE 8

Sistemas de equações

1. Descobrindo o método da substituição

Forme dupla com um colega para acompanhar as duas situações propostas:

1. Oito alunos do 8º ano formaram um grupo de estudos. Quantas moças e quantos rapazes há nesse grupo?

Ilustrações: Lápis Mágico

Copie e complete a tabela com as possíveis soluções para o problema.

Moças	Rapazes	Moças + Rapazes = 8
0	8	$0 + 8 = 8$
1	7	$1 + 7 = 8$
2	6	$2 + 6 = 8$
3	5	$3 + 5 = 8$
4	4	$4 + 4 = 8$
5	3	$5 + 3 = 8$
6	2	$6 + 2 = 8$
7	1	$7 + 1 = 8$
8	0	$8 + 0 = 8$

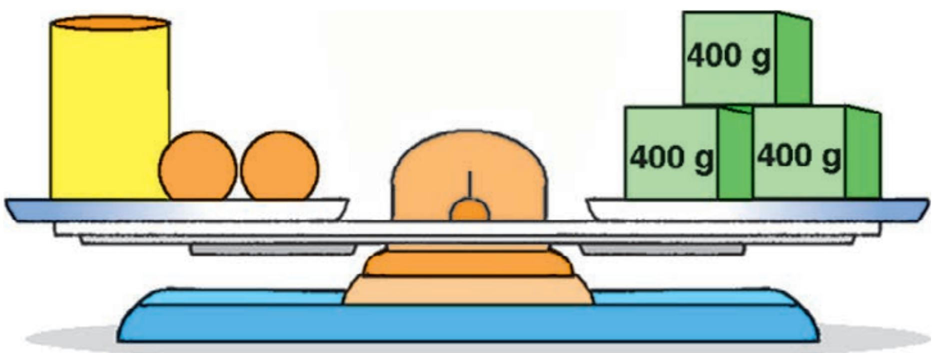
Agora vamos acrescentar mais uma informação:

- o número de moças é igual ao triplo do número de rapazes.

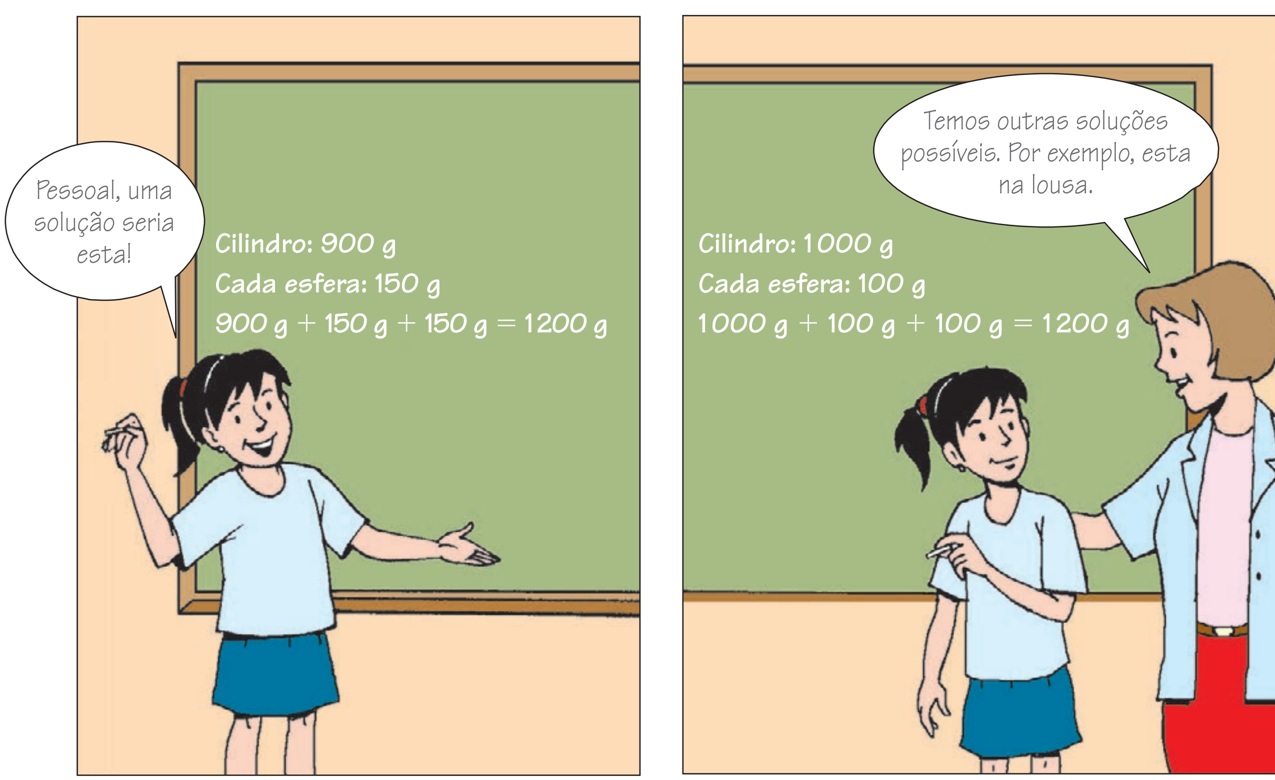
Somente uma das soluções apresentadas na tabela satisfaz também à segunda informação. Vocês conseguiram encontrá-la?

Para atender às duas condições do problema, o grupo de estudos tem 6 moças e 2 rapazes.

2. Observando esta balança em equilíbrio, podemos descobrir a massa do cilindro e a massa de cada esfera? Saiba que as esferas são idênticas.



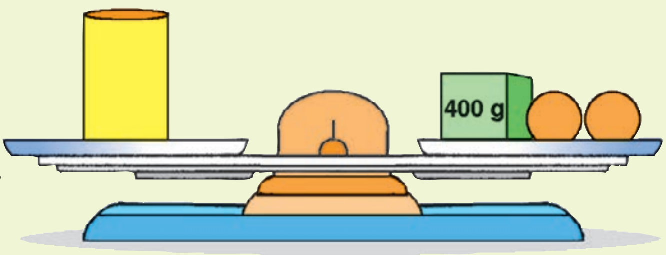
Ilustra Cartoon



Ilustrações: Lápis Mágico

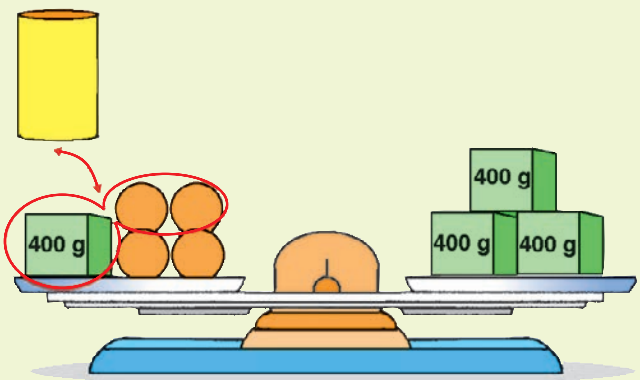
Fazendo somente uma pesagem, temos várias possibilidades para a massa do cilindro e a massa de cada esfera.

E se fizermos outra pesagem?
Veja outra balança em equilíbrio envolvendo os mesmos objetos:

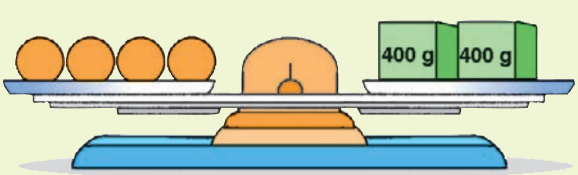


Ilustrações: Ilustra Cartoon

Como as massas são iguais, podemos substituir, na balança da página anterior, o cilindro por duas esferas mais um cubo de 400 g.



Em seguida vamos retirar um cubo de 400 g de cada prato da balança: o equilíbrio se manterá.



Se 4 esferas têm 800 g, cada esfera tem 200 g.

$$800 : 4 = 200$$

Volte agora à primeira balança para descobrir a massa do cilindro. 800 g

Usando equações

Muitas vezes, resolver um problema experimentando todas as soluções possíveis ou fazendo desenhos é trabalhoso. Podemos usar equações para solucionar as situações que examinamos. Quer ver como?

1. Problema do grupo de estudos

Escolhemos letras para representar os valores desconhecidos no problema:

- x: número de moças
- y: número de rapazes

Escrevemos uma equação para cada informação do problema:

$$\begin{cases} x + y = 8 & \text{(número de rapazes + número de moças = 8)} \\ x = 3y & \text{(número de moças = 3 · número de rapazes)} \end{cases}$$

Essas duas equações formam um **sistema de equações** cujas incógnitas são x e y. Observe que as equações são escritas uma embaixo da outra, em uma chave. Resolver o sistema é descobrir os valores de x e y que são soluções de ambas as equações. Um sistema pode ter duas ou mais equações, duas ou mais incógnitas.

No sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3y \end{cases}$ como x é igual a $3y$, podemos substituir x por $3y$ na 1ª equação:

$3y + y = 8$

Repare que obtivemos uma equação só com a incógnita y. A substituição permitiu eliminar uma incógnita.

$4y = 8$

$y = \dfrac{8}{4}$

$y = 2$

Voltamos à equação $x = 3y$ para descobrir o valor de x:

Se $y = 2$, $x = 3 \cdot 2$ ou seja, $x = 6$

Vamos verificar se $x = 6$ e $y = 2$ são soluções das duas equações substituindo x por 6 e y por 2:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 2 = 8 \text{ (verdadeiro)} \\ 6 = 3 \cdot 2 \text{ (verdadeiro)} \end{cases}$$

A solução do sistema é $x = 6$ e $y = 2$.

O grupo de estudos é formado por 6 moças e 2 rapazes.

Resolvemos o sistema substituindo x por $3y$ em uma das equações. Por isso esse método de resolução é chamado de **método da substituição**.

No sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3y \end{cases}$ também poderíamos pensar que, se $x + y = 8$, então $x = 8 - y$. Nesse caso, substituiríamos x por $8 - y$ na 2ª equação ficando só com a incógnita y. Faça a substituição, encontre y e depois x. A solução que você encontrou confere com a que encontramos acima?

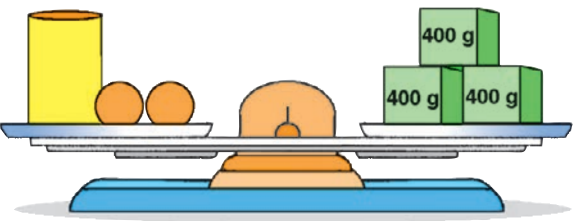
Sim. Professor, comente que é possível isolar qualquer uma das incógnitas, mas ressalte que é melhor escolher a que trará cálculos mais simples.

2. Problema das balanças

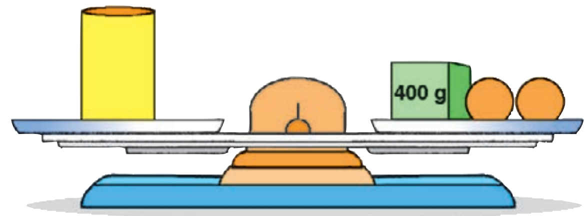
Representamos por a a massa do cilindro e por b a massa de uma esfera.

Escrevemos uma equação para cada situação de equilíbrio:

Ilustrações: Ilustra Cartoon



$a + 2b = 400 + 400 + 400$



$a = 2b + 400$

Obtemos um sistema de equações com incógnitas a e b.

$$\begin{cases} a + 2b = 1\,200 \\ a = 2b + 400 \end{cases}$$

Substituímos a por $2b + 400$ na 1ª equação:

$$2b + 400 + 2b = 1\,200$$
$$4b + 400 = 1\,200$$
$$4b = 1\,200 - 400$$
$$4b = 800$$
$$b = 200$$

Voltamos à equação $a = 2b + 400$ para descobrir o valor de a:

Se $b = 200$,

$$a = 2 \cdot 200 + 400$$
$$a = 800$$

Verificamos se nossa solução está correta substituindo a por 800 e b por 200 nas duas equações do sistema. Veja:

$a + 2b = 1\,200$

$800 + 2 \cdot 200 = 1\,200$

$800 + 400 = 1\,200$ (verdadeiro)

$a = 2b + 400$

$800 = 2 \cdot 200 + 400$

$800 = 400 + 400$ (verdadeiro)

Logo, $a = 800$ e $b = 200$ satisfazem ambas as equações do sistema: a solução está correta.

Cada esfera tem 200 g e o cilindro tem 800 g.

Acompanhe mais exemplos de resolução de sistemas pelo método da substituição.

- $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$ Substituindo y por $x + 1$ na primeira equação:

$$x + 2(x + 1) = 4$$
$$x + 2x + 2 = 4$$
$$3x = 2$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Hélio Senatore

Voltamos à segunda equação para determinar y:

$y = x + 1$

Se $x = \frac{2}{3}$, então $y = \frac{2}{3} + 1$

$y = \frac{2}{3} + \frac{3}{3}$

$y = \frac{5}{3}$

Faça em seu caderno a verificação da solução substituindo x por $\frac{2}{3}$ e y por $\frac{5}{3}$ nas duas equações do sistema e efetuando as operações indicadas.

- $x + 2y = 4$
- $y = x + 1$

$\frac{2}{3} + \frac{10}{3} = 4$

$\frac{12}{3} = 4$

(Igualdade verdadeira)

$\frac{5}{3} = \frac{2}{3} + \frac{3}{3}$

(Igualdade verdadeira)

- $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$

O sistema não está “pronto” para usar a substituição. No entanto, se subtrairmos $2x$ de ambos os membros da 1ª equação teremos:

$2x + y - 2x = 1 - 2x$

$y = 1 - 2x$

Agora substituímos y por $(1 - 2x)$ na 2ª equação:

$4x + 3(1 - 2x) = 7$

$4x + 3 - 6x = 7$

$-2x + 3 = 7$

$-2x = 7 - 3$

$-2x = 4$

$x = \frac{4}{-2}$

$x = -2$

Com colaboração de um colega, complete no caderno o sistema a seguir, usando os sinais + ou −, de modo que sua solução seja $p = -2$ e $q = 3$.

$\begin{cases} p \; \square \; 2q = 4 \\ 4p \; \square \; q = -11 \end{cases}$

$\begin{cases} p + 2q = 4 \\ 4p - q = -11 \end{cases}$

Como $y = 1 - 2x$, se $x = -2$ temos:

$y = 1 - 2 \cdot (-2)$

$y = 1 + 4$

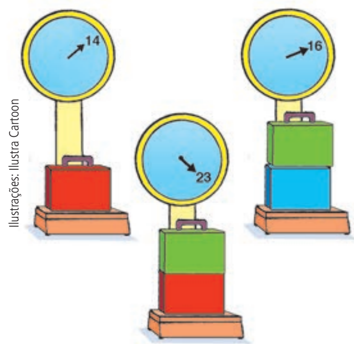
$y = 5$

Em problemas com duas incógnitas, nosso grande interesse é eliminar uma delas para ficarmos com uma equação de uma só incógnita, que sabemos resolver.

Volte ao sistema e verifique mentalmente se a solução satisfaz às duas equações.

Exercícios

1 Descubra o peso, em kg, da maleta azul.
vermelha: 14 kg; verde: 9 kg; azul: 7 kg



2 Mário e Nelson decidiram reunir os seus gibis. Sabendo que ficaram com 10 gibis ao todo, complete a tabela no caderno escrevendo as possíveis quantidades de gibis doadas pelos garotos para formar a coleção.

Mário									
Nelson									

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1

3 Em um estacionamento há carros e motos num total de 12 veículos e 40 rodas.

a) Indique no caderno a quantidade correta de carros e motos.

- 6 carros e 6 motos.
- 5 carros e 7 motos.
- 4 carros e 8 motos.
- x 8 carros e 4 motos.
- 6 carros e 10 motos.
- 10 carros e 2 motos.

b) Imagine agora que nesse estacionamento haja 11 veículos e, no total, 42 rodas. Quantos carros há no estacionamento? 10 carros

4 Dos pares de valores de x e y dados, indique os que satisfazem à equação: $2x + y = 3$.

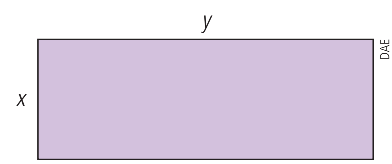
x a) $x = 1$ e $y = 1$

b) $x = 1$ e $y = 4$

x c) $x = 2$ e $y = -1$

d) $x = -2$ e $y = 1$

5 Escreva uma expressão que traduza o perímetro do retângulo. Considerando que o perímetro do retângulo é 30 cm, verifique se os comprimentos dos seus lados podem ser:
$2x + 2y = 30$



x a) $x = 6{,}5$ e $y = 8{,}5$

b) $x = 4$ e $y = 10$

6 Entre os pares de valores dados, existe algum que satisfaz simultaneamente às equações $x - y = 1$ e $2x - 3y = 0$? Qual? Sim.

a) $x = 3$ e $y = -1$

b) $x = 2$ e $y = 1$

c) $x = 0$ e $y = 0$

d) $x = 1$ e $y = -1$

x e) $x = 3$ e $y = 2$

f) $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$

7 Se $x = y + 5$ e $y = 10$, qual é o valor de x? 15

8 Se $x + y = 11$ e $2y = 6$, qual é o valor de x? 8

9 Resolva os sistemas pelo método da substituição.

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $x = 7$, $y = 4$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ $x = -2$, $y = 8$

c) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ $x = 1$, $y = 2$

d) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = -7 \end{cases}$ $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{13}{2}$

e) $\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2x - y = -4 \end{cases}$ $x = -1$, $y = 2$

f) $\begin{cases} x - 3 = -y \\ 3x + 2 = y + 3 \end{cases}$ $x = 1$, $y = 2$

10 Veja a situação:

Ilustrações: Ilustra Cartoon

Quantos livros tem cada aluno? O garoto da esquerda tem 34 livros e o da direita tem 17. $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 51 \end{cases}$

11

Essa sorveteria vendeu 70 picolés e faturou R$ 100,00. Quantos picolés com cobertura foram vendidos? 30 picolés $\begin{cases} x + y = 70 \\ x + 2y = 100 \end{cases}$

12 Tenho R$ 29,00 em 13 notas e moedas. São moedas de R$ 1,00 e cédulas de R$ 5,00. Quantas notas e moedas tenho? 9 moedas de R$ 1,00 e 4 notas de R$ 5,00 $\begin{cases} x + y = 13 \\ x + 5y = 29 \end{cases}$

Fotos: Arquivo particular

13 O cartaz de uma lanchonete anuncia:

DAE

a) Qual é o preço de 1 sanduíche? R$ 3,00

b) Qual é o preço de 1 suco? R$ 1,00 $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

14 A soma de dois números inteiros é 10 e a diferença é 4. Quais são esses números? 7 e 3

Hélio Senatore

15 Neste último exercício, chame os dois números de x e y e escreva no caderno um sistema de duas equações. A seguir, resolva esse sistema. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $\begin{matrix} x = 7 \\ y = 3 \end{matrix}$

16 Um comerciante registrou na tabela seus gastos na compra de latas de palmito e azeitona, durante uma semana. $\begin{cases} x + 7y = 34 \\ 5x + 3y = 42 \end{cases}$

Dia da semana	Latas de palmito	Latas de azeitona	Valor total
Segunda-feira	1	7	R$ 34,00
Quarta-feira	5	3	R$ 42,00
Sexta-feira	2	9	

R$ 48,00

Os preços permaneceram constantes durante essa semana.
Descubra o valor que o comerciante esqueceu de anotar na sexta-feira.

2. O método da adição

1. Veja a situação:

Lia e Mariana foram à papelaria. Lia comprou três canetas e um lápis, gastando R$ 12,20. Mariana comprou duas canetas e um lápis, gastando R$ 8,60. As canetas eram do mesmo tipo e os lápis também. Quanto custou cada caneta? E cada lápis?

Lia: 3 canetas + 1 lápis $\longrightarrow$ 12,20

Mariana: 2 canetas + 1 lápis $\longrightarrow$ 8,60

Ilustrações: Ilustra Cartoon

Lápis Mágico

Realmente,

$12{,}20 - 8{,}60 = 3{,}60$

Então, duas canetas custam $2 \cdot 3{,}60 = 7{,}20$.
Um lápis e duas canetas custam R$ 8,60.

$8{,}60 - 7{,}20 = 1{,}40$

Descobrimos que cada lápis custa R$ 1,40.

Resolvemos o problema sem usar equações. Mas, como já dissemos, nem sempre essa tarefa é fácil. Nesses casos, as equações podem nos ajudar.

A seguir, apresentaremos a resolução desse mesmo problema usando um sistema de equações. Aplicaremos outro método de resolução chamado **método da adição**. Você verá o porquê desse nome. Assim como o método da substituição, ele visa à eliminação de uma incógnita.

Primeiro, veremos uma propriedade. Começamos com um exemplo numérico:

- $3 + 4 = 7$ e $9 - 3 = 6$ são igualdades verdadeiras.

  Vamos somá-las membro a membro:

$$\begin{array}{r} 3 + 4 = 7 \\ 9 - 3 = 6 \\ \hline 12 + 1 = 13 \end{array}$$

Esse exemplo não é um caso particular. Essa propriedade das igualdades vale sempre.

$\longrightarrow$ Obtivemos uma nova igualdade verdadeira.

Sejam a, b, c, d números reais tais que $a = b$ e $c = d$.

$$\begin{array}{c} a = b \\ c = d \\ \hline a + c = b + d \end{array}$$

Dizemos que somamos as igualdades membro a membro.

Voltemos às compras de Lia e Mariana.

O problema apresenta dois valores desconhecidos. Usaremos letras para representá-los:

x: preço de uma caneta

y: preço de um lápis

Escrevemos as equações que representam o problema:

$$\begin{cases} 3x + y = 12{,}20 \\ 2x + y = 8{,}60 \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da segunda equação por (-1), o sistema fica assim:

$$\begin{cases} 3x + y = 12{,}20 \\ -2x - y = -8{,}60 \end{cases}$$

Adicionando as equações membro a membro:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + \cancel{y} = 12{,}20 \\ -2x - \cancel{y} = -8{,}60 \end{cases} \\ \hline \quad x = 3{,}60 \end{array}$$

Ilustrações: Lápis Mágico

$y + (-y) = 0$

Ao somar as equações, uma das incógnitas se anulou. Aí bastou resolver a equação com uma incógnita. Nesse problema, obtivemos diretamente o valor de x.

Voltamos a qualquer uma das equações do sistema para descobrir o valor de y.

$2x + y = 8{,}60$

Se $x = 3{,}60$

$2 \cdot 3{,}60 + y = 8{,}60$

$7{,}20 + y = 8{,}60$

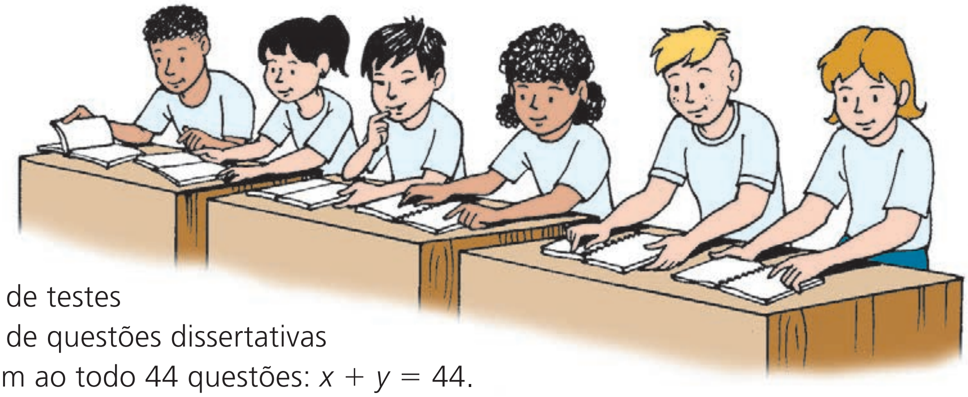
$y = 8{,}60 - 7{,}20$

$y = 1{,}40$

Verifique a solução do sistema substituindo x por R$ 3,60 e y por R$ 1,40 em ambas as equações.

2. Um exame de História que vale 100 pontos tem 44 questões, entre testes e questões dissertativas. Cada teste vale dois pontos e cada questão dissertativa vale três pontos.

Vamos descobrir quantos testes e quantas questões dissertativas tem o exame?



Lápis Mágico

x: número de testes

y: número de questões dissertativas

A prova tem ao todo 44 questões: $x + y = 44$.

Cada teste vale 2 pontos. Como são x testes, o valor dos testes na prova é $2 \cdot x$, ou $2x$.

Cada questão dissertativa vale 3 pontos. Como são y questões dissertativas, o valor dessas questões na prova é $3 \cdot y$, ou $3y$.

O exame vale 100 pontos:

$2x + 3y = 100$ (valor dos testes + valor das questões dissertativas = valor do exame).

Escrevemos o sistema de equações que representa o problema: $\begin{cases} x + y = 44 \\ 2x + 3y = 100 \end{cases}$

Multiplicando ambos os membros da 1ª equação por (-2) e somando as equações membro a membro, temos:

Também poderíamos multiplicar ambos os membros da 1ª equação por (-3). Nesse caso, a soma dos termos em y é que daria zero. Repare que foram somados os termos semelhantes das duas equações.

$$\begin{cases} -\cancel{2x} - 2y = -88 \\ \cancel{2x} + 3y = 100 \end{cases}$$
$$y = 12$$

Ao somar as duas equações, repare que somamos termos semelhantes, o que aprendemos anteriormente. Em Matemática é assim: os conhecimentos se interligam!

Voltando a uma das equações do sistema e substituindo y por 12, achamos o valor de x:

$x + y = 44$

$x + 12 = 44$

$x = 44 - 12$

$x = 32$

Verificando:

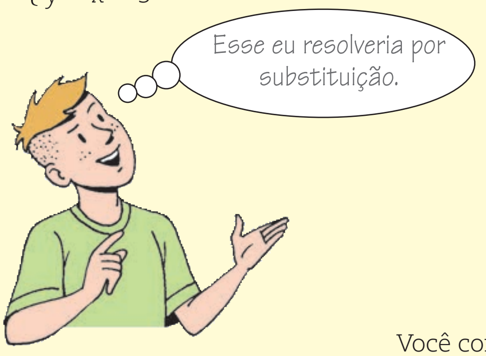
- $32 + 12 = 44$
- $2 \cdot 32 + 3 \cdot 12 = 64 + 36 = 100$

Então, o exame contém 32 testes e 12 questões dissertativas.

Usamos o método da adição, mas o sistema pode ser resolvido pelo método da substituição. Faça isso em seu caderno.

Agora você conhece dois métodos de resolução de sistemas. Observando o sistema, você pode escolher o método que julgar mais adequado.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 26 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$$

Ilustrações: Lápis Mágico

Você concorda com Caio?

Mais exemplos

1. Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 3x + 4y = -9 \end{cases}$ pelo método da adição.

Devemos escolher números convenientes para multiplicar os termos de cada equação, de forma que, ao somar as equações membro a membro, os termos em x ou os termos em y se anulem. Fizemos esta escolha:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -7 \longrightarrow \cdot 3 \\ 3x + 4y = -9 \longrightarrow \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} \cancel{6x} + 9y = -21 \\ -\cancel{6x} - 8y = 18 \end{cases} \\ \hline y = -3 \end{array}$$

Na equação $2x + 3y = -7$ substituímos y por (-3):

$$2x + 3 \cdot (-3) = -7$$
$$2x - 9 = -7$$
$$2x = -7 + 9$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Logo, a solução do sistema é $x = 1$ e $y = -3$.

$\begin{cases} 2x + 3y = -7 \longrightarrow \cdot (-4) \\ 3x + 4y = -9 \longrightarrow \cdot 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \longrightarrow \cdot 4 \\ 3x + 4y = -9 \longrightarrow \cdot (-3) \end{cases}$

(Por exemplo)

Para resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 3x + 4y = -9 \end{cases}$ optamos por multiplicar os termos da 1ª equação por 3 e os termos da 2ª equação por (−2), para que os termos em x se anulassem. Poderíamos ter optado por anular os termos em y. Nesse caso, por quais números poderíamos multiplicar os termos de cada equação?

2. Na resolução do sistema $\begin{cases} 3(x + 5) = 9 - y \\ 4x + y = x - 2(y + 9) \end{cases}$

primeiro aplicaremos a propriedade distributiva, obtendo:

$$\begin{cases} 3x + 15 = 9 - y \\ 4x + y = x - 2y - 18 \end{cases}$$

Em seguida, reorganizaremos as equações do sistema aplicando conhecimentos de Álgebra:

$$\begin{cases} 3x + y = 9 - 15 \\ 4x + y - x + 2y = -18 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x + y = -6 \\ 3x + 3y = -18 \end{cases}$$

Multiplicando os termos da 1ª equação por (−1), usaremos o método da adição para obter os valores de x e de y.

$$\begin{cases} -\cancel{3x} - y = 6 \\ \cancel{3x} + 3y = -18 \end{cases}$$

$$2y = -12$$

$$y = \frac{-12}{2}$$

$$y = -6$$

Fazendo $y = -6$ em $3x + y = -6$ temos:

$$3x - 6 = -6$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

O sistema tem como solução $x = 0$ e $y = -6$.

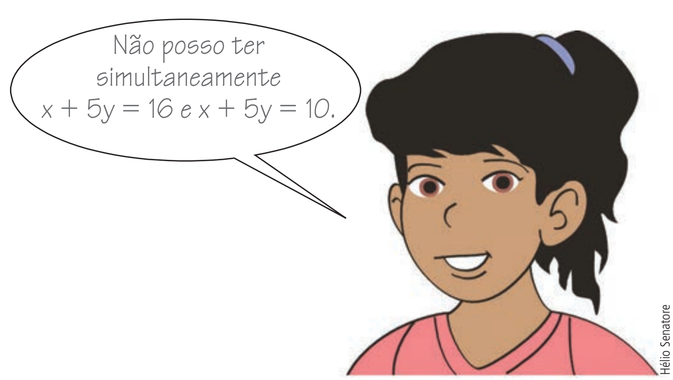
3. Ana inventou o sistema $\begin{cases} 2(x + y) - x + 3y = 16 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$. Mas, quando o resolveu...

$$\begin{cases} 2x + 2y - x + 3y = 16 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y = 16 \\ x + 5y = 10 \longrightarrow \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y = 16 \\ -x - 5y = -10 \end{cases}$$

$0 = 6$?



Ana chegou a uma igualdade falsa. O sistema que ela inventou não tem solução. Dizemos que esse **sistema** é **impossível**.

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 50 \cdot (-2) \end{cases}$$

$$x + y = 70$$

$$-x - y = -100$$

$$0 = -30$$

Junte-se a um colega para descobrir se existem dois números x e y cuja soma é 70 e a soma das suas metades é 50. O sistema é impossível; não existem esses dois números.

Exercícios

17 Complete no caderno.

a) 7 quilogramas = 7 000 gramas

$+$ 2 quilogramas = 2 000 gramas

9 quilogramas = 9 000 gramas

b) 7 quilogramas = 7 000 gramas

$-$ 2 quilogramas = 2 000 gramas

5 quilogramas = 5 000 gramas

18 Some membro a membro e verifique se nos resultados se obtêm igualdades.

a) $6 + 7 = 13$ e $3 + 8 = 11$ Sim. $\begin{array}{r} 6 + 7 = 13 \\ 3 + 8 = 11 \\ \hline 9 + 15 = 24 \end{array}$

b) $5 + 12 = 17$ e $13 - 7 = 6$ Sim. $\begin{array}{r} 5 + 12 = 17 \\ 13 - 7 = 6 \\ \hline 18 + 5 = 23 \end{array}$

19 Resolva os sistemas pelo método da adição.

a) $\begin{cases} x - y = 5 & x = 6 \\ x + y = 7 & y = 1 \end{cases}$

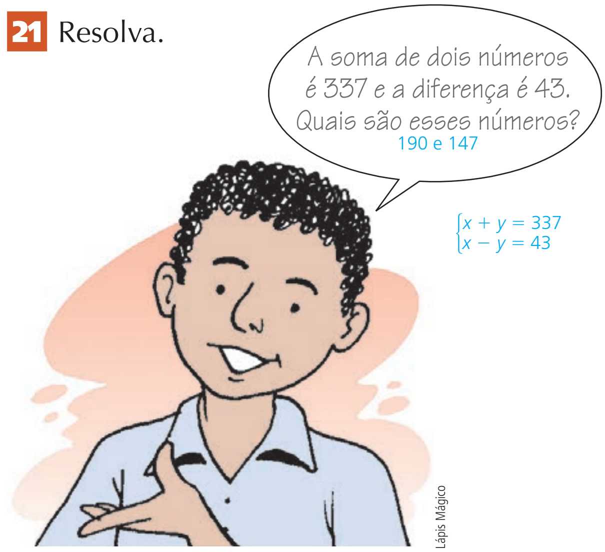
b) $\begin{cases} x + 2y = 7 & x = 1 \\ x - 2y = -5 & y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 0 & x = 5 \\ x + y = 15 & y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 6 & x = -\frac{1}{2} \\ x + y = -7 & y = -\frac{13}{2} \end{cases}$

20 Numa classe há 33 alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é 12. Quantas são as meninas? 15 meninas $\begin{cases} x + y = 33 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$

21 Resolva.



190 e 147

$\begin{cases} x + y = 337 \\ x - y = 43 \end{cases}$

Lápis Mágico

22 Prepare os sistemas e resolva-os pelo método da adição.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 & x = 7 \\ 2x - y = 16 & y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 & x = \frac{3}{2} \\ 4x - 2y = 5 & y = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 & x = 2 \\ 2x + 5y = -1 & y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - y = 4 & x = 3 \\ 2x - y = -5 & y = 11 \end{cases}$

23 Um sitiante comprou galinhas e coelhos num total de 21 cabeças e 54 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos comprou? 15 galinhas e 6 coelhos $\begin{cases} x + y = 21 \\ 2x + 4y = 54 \end{cases}$

Ilustrações: Ilustra Cartoon

24 Juntando 29 pacotes de açúcar, uns com 5 quilos, outros com 1 quilo, podemos obter um total de 73 quilos. Quantos pacotes de cada tipo foram usados? 11 pacotes de 5 quilos e 18 pacotes de 1 quilo $\begin{cases} x + y = 29 \\ 5x + y = 73 \end{cases}$

25 Numa prova de 20 questões, um aluno fez 16 pontos. Sabe-se que ele ganhava 5 pontos para cada resposta certa e perdia 2 pontos para cada resposta errada. Quantas respostas ele acertou? 8 respostas $\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x - 2y = 16 \end{cases}$

26 Prepare os sistemas e resolva-os pelo método da adição.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ $x = 2$, $y = 1$

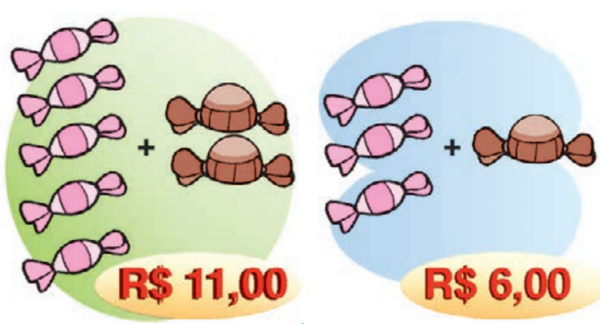
b) $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$ $x = 3$, $y = 2$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$ $x = 0$, $y = 1$

d) $\begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$ $x = 1$, $y = -3$

27 Observe os anúncios e responda:

Ilustra Cartoon



$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

a) Qual é o preço de cada bala? R$ 1,00

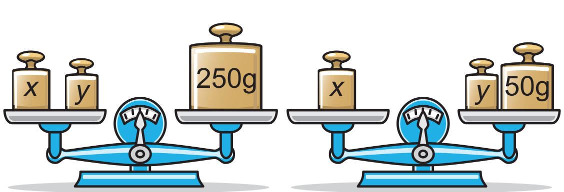
b) Qual é o preço de cada bombom? R$ 3,00

28 Devo entregar 48 maçãs em caixas de dois tamanhos diferentes. Posso entregar 2 caixas grandes e 4 pequenas ou 3 caixas grandes e 2 pequenas. Quantas maçãs vão em cada caixa grande e em cada caixa pequena?

12 maçãs na caixa grande e 6 maçãs na caixa pequena $\begin{cases} 2x + 4y = 48 \\ 3x + 2y = 48 \end{cases}$

29 As balanças estão em equilíbrio.

Hélio Senatore



Qual é o valor de x? 150 g $\begin{cases} x + y = 250 \\ x = y + 50 \end{cases}$

30 A soma das mesadas de Maria e João é R$ 200,00. No mês passado, Maria gastou R$ 70,00, e João gastou R$ 40,00 e, ao final do mês, estavam com as mesmas quantias. Qual é a mesada de Maria? R$ 115,00 $\begin{cases} x + y = 200 \\ x - 70 = y - 40 \end{cases}$

31 (FIR-PE)

Ziraldo

Maluquinho recebeu R$ 50,00 de sua mãe. Foi até o mercado e comprou ração apenas para o cão e o gato, como mostra a tabela abaixo:

	Número de pacotes	Preço unitário do pacote em reais
Cão	x	3
Gato	y	2

Maluquinho comprou 10 pacotes de ração e gastou R$ 27,00 nessa compra. Qual é o valor de x? 7 $\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + 2y = 27 \end{cases}$

32 Somando-se os $\frac{2}{3}$ de um número x com os $\frac{3}{5}$ de um número y, obtém-se 84. Se o número x é metade do número y, quais são esses números? $x = 45$ e $y = 90$ $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = 84 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases}$

3. Dízimas periódicas na forma de fração

As dízimas periódicas são números racionais, então podem ser escritas na forma de fração.

Tomemos como exemplo 0,4444... ou $0,\overline{4}$.
Como escrever essa dízima periódica na forma de fração?
A propriedade das igualdades, que aprendemos nesta unidade, nos ajuda nessa tarefa.
Queremos encontrar a fração x que representa a dízima 0,444...
$x = 0{,}4444...$
Vamos obter outras igualdades a partir dessa:
$-x = -0{,}4444...$ Multiplicamos ambos os membros por -1.
$10x = 4{,}4444...$ Multiplicamos ambos os membros por 10.
Somando as duas igualdades membro a membro, chegamos a
$9x = 4$
$x = \frac{4}{9}$

$-x + 10x = 9x$
$-0{,}4444... + 4{,}4444... = 4$

Portanto, $0{,}4444... = \frac{4}{9}$.
Dizemos que $\frac{4}{9}$ é a geratriz da dízima $0,\overline{4}$.

Na calculadora, efetue 4 : 9 e verifique que o resultado é a dízima periódica 0,444...

Junte-se a um colega. Façam no caderno as atividades propostas abaixo.

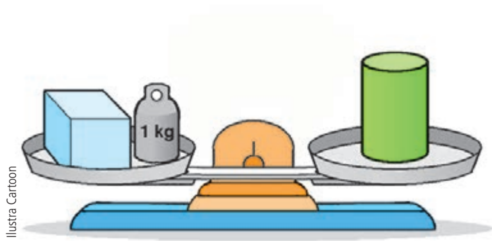
1. Usando as ideias do texto, obtenham a geratriz das dízimas:
a) 0,777... $\frac{7}{9}$
b) 0,353535... $\frac{35}{99}$

2. Para encontrar a geratriz da dízima periódica 1,3333... Ana fez:
$x = 1{,}3333...$
$-x = -1{,}3333...$
$10x = 13{,}3333...$
Finalizem o raciocínio da Ana.
Que fração irredutível ela obteve?

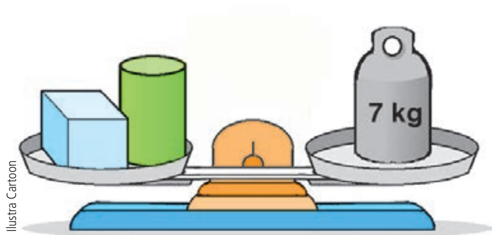
$9x = 12$
$x = \frac{12}{9}$
$x = \frac{4}{3}$

Revisando

33 Observe: as balanças estão em equilíbrio e os sólidos do mesmo tipo são idênticos. Responda mentalmente.



Ilustra Cartoon



Ilustra Cartoon

a) Quanto "pesa" o cubo? 3 kg

b) Quanto "pesa" o cilindro? 4 kg

34 Descubra mentalmente os dois números pela soma e pela diferença.

a)
Soma: 50
Diferença: 10
Números: ▨ e ▨
30 e 20

b)
Soma: 100
Diferença: 16
Números: ▨ e ▨
58 e 42

35 Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{3}{2}$

b) $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$ $x = 3$; $y = 11$

c) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$ $x = 3$; $y = 2$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 3y = -16 \end{cases}$ $x = -1$; $y = -5$

36 Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} x = 9 - 3y \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ $x = 0$; $y = 3$

b) $\begin{cases} 5y - x = 5 \\ 2x - 4 = 3y \end{cases}$ $x = 5$; $y = 2$

37 Complete os espaços de modo que o par $x = 4$ e $y = 2$ seja solução do sistema.

$$\begin{cases} ▨ + 3y = 2 \\ 2x + y = ▨ \end{cases}$$

$-x$; 10

38 Leia com atenção a história que dona Eliana contou e responda.

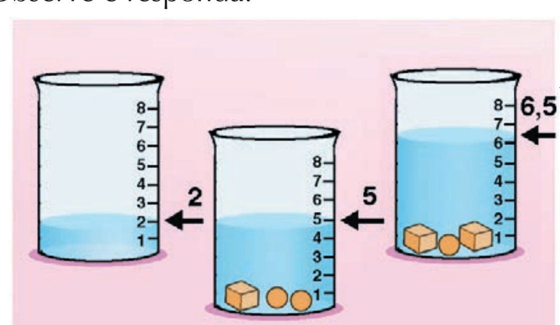
"Na minha chácara há tantos coelhos como galinhas. Todos juntos têm 30 pés."

Quantos coelhos há na chácara da dona Eliana? 5 coelhos

$\begin{cases} x = y \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$

Ilustrações: Hélio Senatore

39 Os sólidos do mesmo tipo são idênticos. Observe e responda:



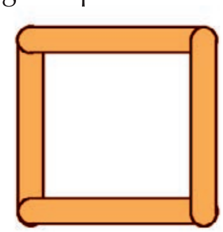
Ilustra Cartoon

a) Qual é o volume do cubo? 2

b) Qual é o volume da esfera? 0,5

$\begin{cases} c + 2e = 3 \\ 2c + e = 4{,}5 \end{cases}$

40 (Saresp) Com 48 palitos de mesmo tamanho eu montei 13 figuras: alguns triângulos e alguns quadrados.



$\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 3y = 48 \end{cases}$

Ilustrações: Ilustra Cartoon

Quantos quadrados eu montei? 9 quadrados

41 (Saresp) Hoje é dia de festa junina na escola.

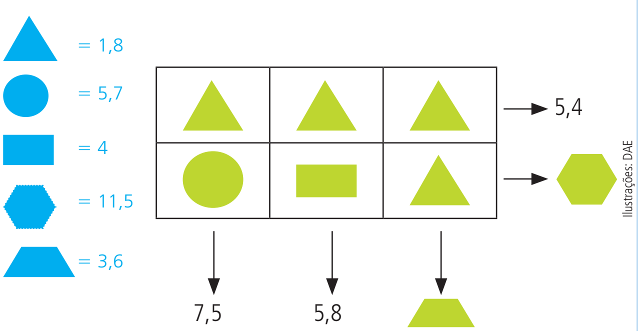
Ilustrações: Ilustra Cartoon

Foi vendido um total de 400 convites e foram arrecadados R$ 900,00.

a) Qual é o número de convites vendidos para alunos? 300 convites

b) Qual é o número de convites vendidos para não alunos? 100 convites $\begin{cases} x + y = 400 \\ 2x + 3y = 900 \end{cases}$

42 No quadro abaixo, as figuras iguais representam o mesmo número. As flechas apontam para a soma de cada linha ou cada coluna.



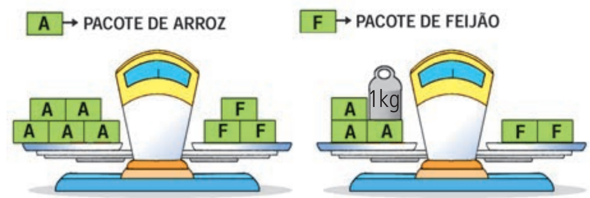
Ilustrações: DAE

Quanto vale  ? 42,4

43 Meu irmão é cinco anos mais velho do que eu. O triplo da minha idade, somado ao dobro da idade do meu irmão, dá 100 anos. Qual é a minha idade? 18 anos $\begin{cases} y = x + 5 \\ 3x + 2y = 100 \end{cases}$

44 (Puccamp-SP) Uma pessoa participa de um jogo em que uma moeda honesta é lançada 100 vezes. Cada vez que ocorre "cara" ela ganha R$ 10,00 e cada vez que ocorre "coroa", perde R$ 5,00. Se após os 100 lançamentos a pessoa teve um ganho líquido de R$ 25,00, quantas vezes deve ter ocorrido "cara" na moeda? Ocorreram 35 caras. $\begin{cases} x + y = 100 \\ 10x - 5y = 25 \end{cases}$

45 As balanças estão em equilíbrio e os pacotes de cada tipo de alimento são idênticos. Observe e responda.



Ilustrações: Ilustra Cartoon

a) Quantos quilos de arroz existem em cada pacote? 3 quilos

b) Quantos quilos de feijão existem em cada pacote? 5 quilos $\begin{cases} 5a = 3f \\ 3a + 1 = 2f \end{cases}$

46 (Puccamp-SP) Numa lanchonete, 2 copos de refrigerante e 3 coxinhas custam R$ 5,70. O preço de 3 copos de refrigerante e 5 coxinhas é R$ 9,30.

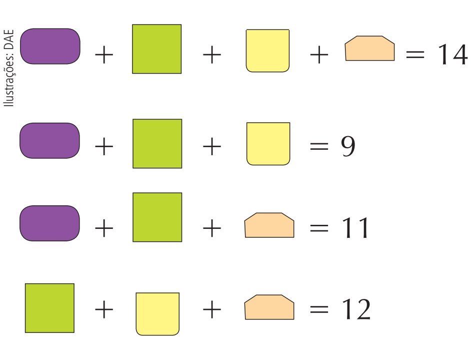
a) Qual é o preço de cada coxinha? R$ 1,50

b) Qual é o preço de cada copo de refrigerante? R$ 0,60 $\begin{cases} 2r + 3c = 5{,}70 \\ 3r + 5c = 9{,}30 \end{cases}$

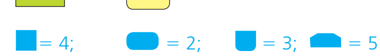
47 (UFR-RJ) Para assistir a um show em um clube, compareceram 4 000 pessoas. Nesse show, o número de sócios presentes foi 1 100 a menos que o dobro do número de não sócios presentes. Qual o número de sócios que compareceram ao show? 2 300 sócios $\begin{cases} x + y = 4000 \\ x = 2y - 1100 \end{cases}$

x = nº de sócios; y = nº de não sócios

48 Cada tipo de figura representa um número com um algarismo. Quais são os valores dessas figuras?



Ilustrações: DAE



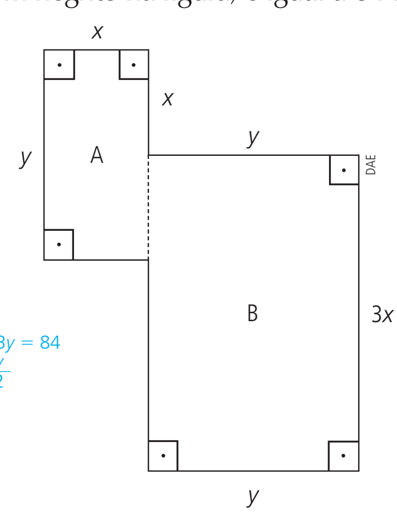
49 Veja um quadrado mágico incompleto. Nele, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é 34. $\begin{cases} x + y + 14 + 15 = 34 \\ 7x + y + 10 + 13 = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 7x + y = 11 \end{cases}$

			13
5	11	10	
	$7x$	6	
y	14	15	x

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Copie e complete corretamente esse quadrado mágico no caderno.

50 (Vunesp) Carlos adquiriu os terrenos retangulares A e B, formando um único terreno, cujo perímetro (em negrito na figura) é igual a 84 metros.



$\begin{cases} 8x + 3y = 84 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases}$

A medida x é igual à metade da medida y (ambas em metros). Qual é a medida do lado y? 12 metros

51 Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + 2(x - y) = -1 \end{cases}$ $x = 1$, $y = 2$

b) $\begin{cases} x - y = 11 \\ 0{,}5x - 0{,}2y = 4 \end{cases}$ $x = 6$, $y = -5$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$ $x = 5$, $y = 3$

d) $\begin{cases} \frac{x - 1}{2} = 1 \\ 2x - \frac{y - 5}{3} = 2 \end{cases}$ $x = 3$, $y = 17$

Desafios

52 Se comprarmos 8 camisetas e 6 bermudas em uma loja teremos um custo total de R$ 174,00. Se comprarmos 2 camisetas e 4 bermudas, nós gastaremos R$ 66,00.

Sem utilizar um sistema de equações, determine o custo de:

a) 4 camisetas e 3 bermudas; R$ 87,00 (174 : 2)

b) 10 camisetas e 10 bermudas; R$ 240,00 (174 + 66)

c) 3 camisetas e 3 bermudas. R$ 72,00 (240 : 10 · 3)

53 (Saresp) Leia com atenção:

$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ y + 2x = 100 \end{cases}$

Melissa tem 30 CDs e Adriano, 40 CDs.

Quantos CDs tem Melissa? E Adriano?

Seção livre

Junte-se a um colega. Vocês vão checar seus conhecimentos sobre resolução de sistemas enquanto se divertem com uma competição entre as duplas.

Os quadros a seguir escondem uma frase. Vence o jogo a primeira dupla que descobrir que frase é essa. Veja a seguir como funciona o jogo.

- Copiem o esquema no caderno, deixando os quadros em branco. Cada quadro contém um sistema cuja solução deve ser substituída pela letra correspondente, de acordo com o código no final da página.
- Recortem 12 pedaços de papel numerando-os de 1 a 12. Cada um de vocês sorteia um número e resolve o sistema que está no quadro com esse número, colocando no esquema do caderno a letra que a solução representa.

Façam isso sucessivamente até descobrirem a frase oculta.

$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2(x - 1) + y = 7 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 3x \\ x + 4y = 26 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 7 \\ 2y - x = 10 \end{cases}$
1	2	3	4	5	6

$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ x - 5y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x + 5y = 16 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 5x - 7y = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3(y + 1) = -5 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} -x + 2y = 15 \\ x + \frac{y}{7} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y = 8x \end{cases}$
7	8	9	10	11	12

A — $x = 4$ e $y = 2$
B — $x = 4$ e $y = 0$
C — $x = 4$ e $y = 1$
D — $x = 0$ e $y = -5$
E — $x = 8$ e $y = 7$
F — $x = \frac{1}{2}$ e $y = -4$
G — $x = -9$ e $y = -3$
H — $x = 5$ e $y = -7$
I — $x = -1$ e $y = 7$
J — $x = 6$ e $y = -9$
K — $x = 7$ e $y = 0$
L — $x = \frac{1}{2}$ e $y = 4$
M — $x = 5$ e $y = -1$
N — $x = -7$ e $y = 7$
O — $x = 2$ e $y = 6$
P — $x = 3$ e $y = -2$
Q — $x = 8$ e $y = 0$
R — $x = 1$ e $y = 3$
S — $x = 1$ e $y = -3$
T — $x = -1$ e $y = -10$
U — $x = -1$ e $y = 3$
V — $x = 1$ e $y = 1$
W — $x = 4$ e $y = -5$
X — $x = -3$ e $y = \frac{1}{4}$
Y — $x = -5$ e $y = 7$
Z — $x = \frac{1}{7}$ e $y = -15$

Eu amo o Brasil.

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

54 Se $x = 4y - 5$, então y é igual a:

a) $x - 5$

b) $\frac{x - 5}{4}$

c) $\frac{x - 5}{2}$

x d) $\frac{x + 5}{4}$

55 Se p e q são tais que:

$\begin{cases} q - p = 4 \\ q + p = 12 \end{cases}$, então $pq - 2$ vale:

x a) 30

b) 32

c) 10

d) 12

56 (Saresp) Pelo regulamento de um torneio de basquete, cada equipe ganha 2 pontos por jogo que vencer e 1 ponto por jogo que perder. Nesse torneio, uma equipe disputou 9 partidas e acumulou 15 pontos ganhos. É correto afirmar que essa equipe venceu: $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$

a) 3 partidas e perdeu 6.

b) 4 partidas e perdeu 5.

c) 5 partidas e perdeu 4.

x d) 6 partidas e perdeu 3.

Fernando Favoretto

57 (UNB-DF) Um aluno ganha 5 pontos por exercício que acerta e perde 3 por exercício que erra. Ao fim de 50 exercícios, tinha 130 pontos. Quantos exercícios acertou? $\begin{cases} 5x - 3y = 130 \\ x + y = 50 \end{cases}$

a) 15

b) 25

c) 30

x d) 35

58 (Saresp) Tenho 100 moedas que dão um total de R$ 60,00. Uma certa quantidade são moedas de R$ 1,00 e as restantes são moedas de R$ 0,50. A quantidade de moedas de R$ 1,00 é:

x a) 20

b) 80

$\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 0{,}5y = 60 \end{cases}$

c) 15

d) 10

Fotos: Arquivo particular

59 (Saresp) Entre bananas e melancias, comprei 5 quilogramas de frutas e gastei R$ 7,00. Quantos quilogramas comprei de cada fruta?

Melancia
R$ 1,50 o quilo

Sandra Fanzeres

Maurício Morais

Bananas
R$ 1,00 o quilo

a) 3 de bananas e 2 de melancias $\begin{cases} x + y = 5 \\ 1{,}5x + y = 7 \end{cases}$

b) 3 de melancias e 2 de bananas

x c) 1 de banana e 4 de melancias

d) 1 de melancia e 4 de bananas

60 A bilheteria de um teatro apurou R$ 1.550,00 vendendo ingressos a 100 pessoas. O ingresso custa R$ 20,00 e estudantes pagam somente metade. O número x de estudantes é dado pelo sistema formado pelas equações:

x a) $\begin{cases} x + y = 100 \\ 10x + 20y = 1\,550 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 100 \\ 20x + 10y = 1\,550 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 2y = 1\,550 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 100 \\ x + y = 1\,550 \end{cases}$

61 (Saresp) Na promoção de uma loja, uma calça e uma camiseta custam juntas R$ 55,00. Comprei 3 calças e 2 camisetas e paguei o total de R$ 140,00. O preço de cada calça e de cada camiseta, respectivamente, é: $\begin{cases} x + y = 55 \\ 3x + 2y = 140 \end{cases}$

a) R$ 35,00 e R$ 20,00

b) R$ 20,00 e R$ 35,00

c) R$ 25,00 e R$ 30,00

x d) R$ 30,00 e R$ 25,00

Ilustrações: Ilustra Cartoon

62 Paguei R$ 75,00 por um par de chuteiras e uma bola. Se eu tivesse pagado R$ 8,00 a menos pelo par de chuteiras e R$ 7,00 a mais pela bola, seus preços teriam sido iguais. Quanto paguei pelo par de chuteiras? $\begin{cases} x + y = 75 \\ x - 8 = y + 7 \end{cases}$ x: chuteiras y: bola

a) R$ 48,00

b) R$ 47,00

x c) R$ 45,00

d) R$ 38,00

63 (FGV-SP) Num pátio existem automóveis e bicicletas. O número total de rodas é 130 e o número de bicicletas é o triplo do número de automóveis. Então, o número total de veículos que se encontram no pátio é: $\begin{cases} y = 3x \\ 4x + 2y = 130 \end{cases}$

a) 42

b) 50

x c) 52

d) 54

64 (Unirio-RJ) Num escritório de advocacia trabalham apenas dois advogados e uma secretária. Como o Dr. André e o Dr. Carlos sempre advogam em causas diferentes, a secretária, Cláudia, coloca 1 clipe em cada processo do Dr. André e 2 clipes em cada processo do Dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que, ao todo, são 78 processos e neles foram usados 110 clipes, podemos concluir que o número de processos do Dr. Carlos é igual a:

$\begin{cases} x + y = 78 \\ x + 2y = 110 \end{cases}$

x: Dr. André

y: Dr. Carlos

a) 46

b) 40

x c) 32

d) 28

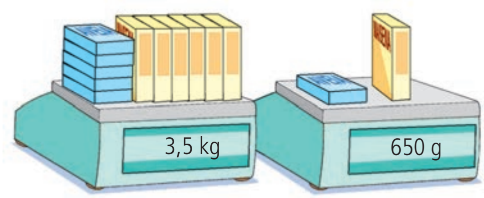
65 (FCC-SP) Coloquei na balança 6 pacotes de maisena e 5 pacotes de aveia. A balança marcou 3 quilos e meio. Depois, coloquei um só pacote de maisena e um só de aveia. A balança marcou 650 gramas. Agora, se eu colocar só um pacote de maisena, quantos gramas a balança vai marcar? $\begin{cases} 6x + 5y = 3500 \\ x + y = 650 \end{cases}$

x a) 250

b) 350

c) 300

d) 400



66 (Fuvest-SP) Um copo cheio de água pesa 325 g. Se jogarmos metade da água fora, seu peso cai para 180 gramas. O peso do copo vazio é:

$c + a = 325$

$c + \frac{a}{2} = 180$

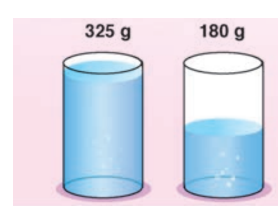
$c = 35$

a) 25 g

b) 40 g

x c) 35 g

d) 45 g



67 Resolvendo o sistema $\begin{cases} x = 2y \\ 2y = 3z \\ x + y + z = 11 \end{cases}$ encontramos:

$2y + y + \frac{2y}{3} = 11$

$6y + 3y + 2y = 33$

$y = 3$

a) $y = 1$

b) $y = 2$

x c) $y = 3$

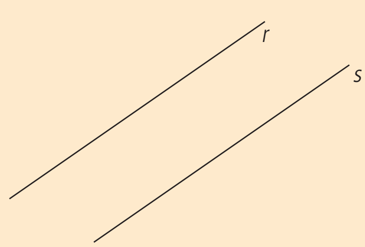
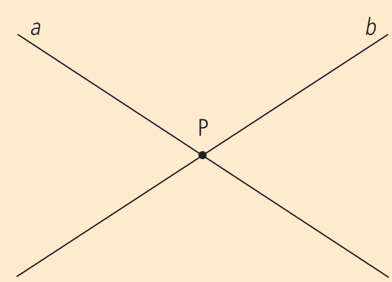
d) $y = 4$

UNIDADE 9

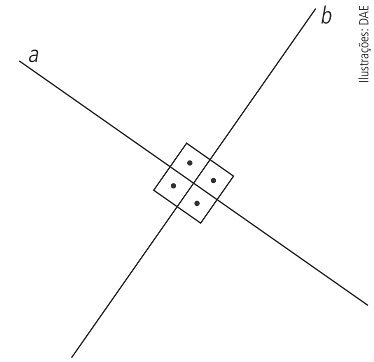
Retas e ângulos

1. Posição relativa entre retas

A reta é ilimitada, podemos sempre prolongá-la, nos dois sentidos.
Duas retas distintas que estão num mesmo plano podem ser:

Paralelas Não têm nenhum ponto em comum.	**Concorrentes** Têm um único ponto em comum.
 Escrevemos: *r* // *s* e lemos *r* é paralela a *s*.	 As retas *a* e *b* são concorrentes no ponto P.

Retas concorrentes que formam entre si 4 ângulos de 90° são chamadas **retas perpendiculares**.



Ilustrações: DAE

Escrevemos $a \perp b$ e lemos: *a* é perpendicular a *b*.

Marcando dois pontos distintos A e B sobre uma reta *r*, determinamos o **segmento de reta** $\overline{AB}$.

Os pontos A e B são as extremidades desse segmento. Um segmento é limitado nos dois sentidos e pode ser medido. Nesse exemplo, $\overline{AB}$ mede 3,5 cm.

Para diferenciar o segmento de sua medida, faremos assim:

$\overline{AB}$ é o segmento e AB (sem traço em cima) é a medida de $\overline{AB}$.

Segmentos que têm mesma medida são chamados de **segmentos congruentes**.

2. Ponto médio de um segmento

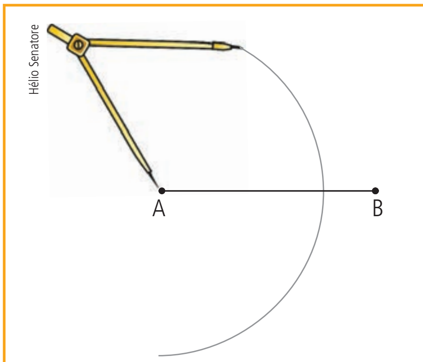
Marcamos um ponto M no segmento $\overline{AB}$, de modo que AM = MB.

$\overline{AM} \equiv \overline{MB}$

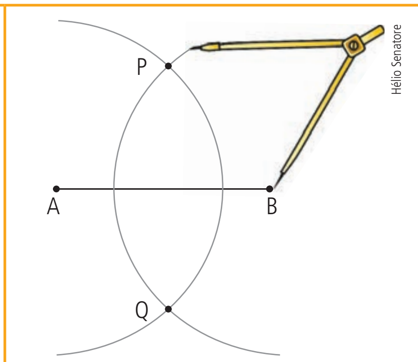
M é o ponto médio de $\overline{AB}$

O ponto médio de um segmento é o ponto pertencente ao segmento que o divide em dois segmentos congruentes.

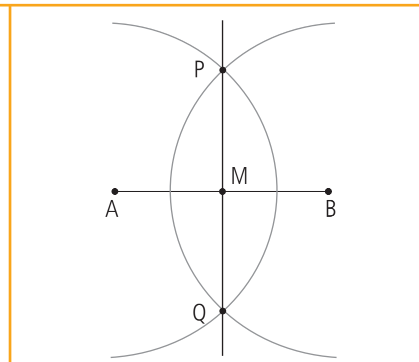
Podemos determinar o ponto médio de um segmento usando régua e compasso. Vamos construir a **mediatriz** de um segmento dado.



1. Fixe a ponta seca do compasso em A e com abertura maior do que a metade do comprimento de $\overline{AB}$, trace um arco.



2. Mantendo a mesma abertura no compasso, com a ponta seca em B, trace o segundo arco, determinando os pontos P e Q.



3. Trace a reta PQ, determinando o ponto M, que é o ponto médio do segmento. A reta que você traçou é a **mediatriz** do segmento.

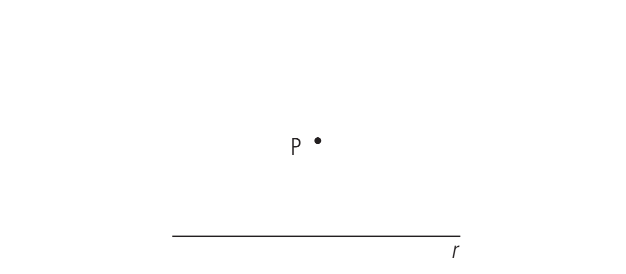
Ilustrações: DAE

Chamamos de **mediatriz** a reta que é perpendicular a um segmento e passa pelo ponto médio desse segmento.

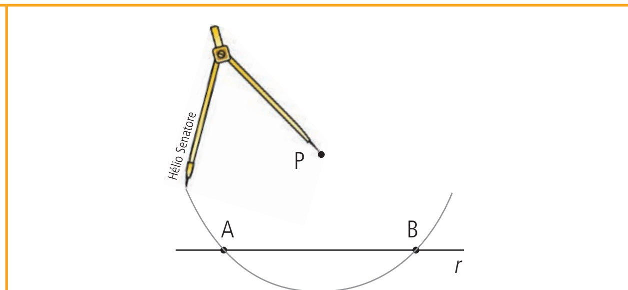
3. Construção de retas perpendiculares e de retas paralelas

Usando régua e compasso, vamos traçar retas perpendiculares e retas paralelas. Use seu material de desenho e faça as construções no caderno seguindo as orientações.

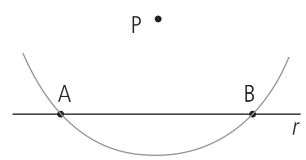
Retas perpendiculares

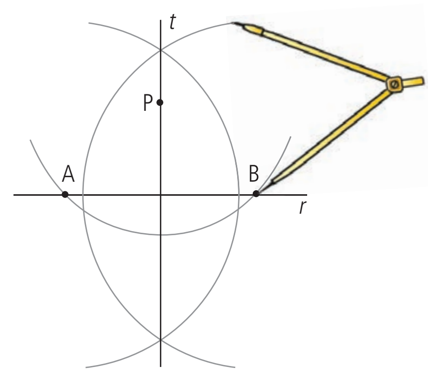


1. Traçamos uma reta *r* e marcamos um ponto P não pertencente a *r*. Construiremos uma reta *t* perpendicular a *r*, passando por P.



2. Com a ponta seca do compasso em P e abertura suficiente para cortar *r* em dois pontos, trace um arco, determinando os pontos A e B.

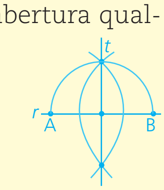


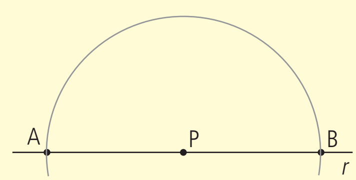


3. Observe que determinamos um segmento $\overline{AB}$ sobre r. Vamos traçar sua mediatriz como já aprendemos a fazer.

4. A mediatriz de $\overline{AB}$ é a reta t perpendicular a r que queríamos determinar.

Junte-se a um colega. Tracem uma reta r qualquer e marquem um ponto P pertencente a r. Vocês devem construir, com auxílio do compasso, uma reta t perpendicular a r passando por P. O primeiro passo nós daremos: com a ponta seca do compasso em P e uma abertura qualquer, faça um arco como mostramos na figura.

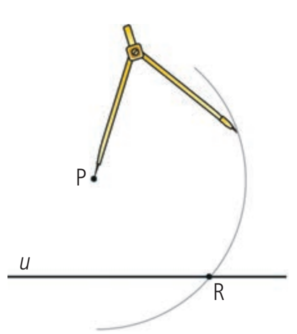


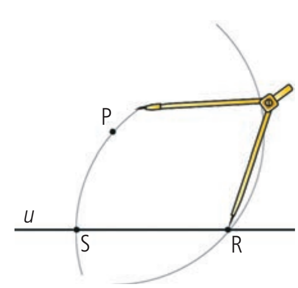


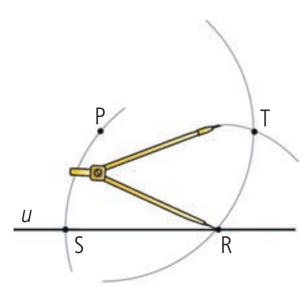
Basta traçar a mediatriz de $\overline{AB}$ determinado pelo 1º arco.

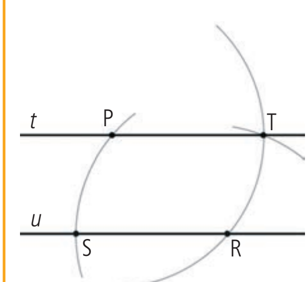
Retas paralelas

Traçaremos uma reta t paralela à reta u dada, passando por um ponto P qualquer não pertencente a u.









Ilustrações: Hélio Senatore

1. Fixamos a ponta seca do compasso em P e, com abertura suficiente para cortar u, fazemos um arco, que determina o ponto R em u.

2. Com a mesma abertura, colocamos a ponta seca do compasso em R, traçamos outro arco e marcamos o ponto S em u.

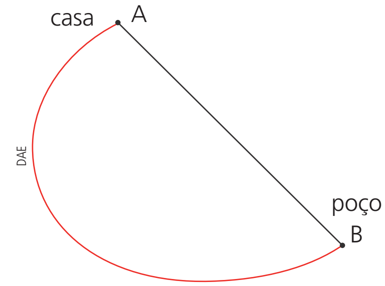
3. Com abertura igual à distância entre S e P e com a ponta seca do compasso em R, fazemos um terceiro arco, que corta o primeiro arco no ponto T.

4. Traçamos a reta t passando por P e por T. t é paralela a u.

4. Distância entre dois pontos

Veja os caminhos que o senhor Gerson pode percorrer para ir de casa até o poço do sítio.

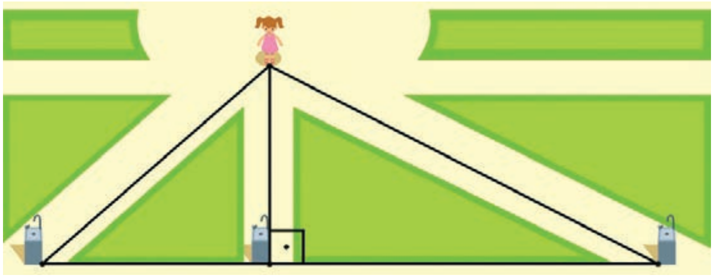
Fazendo a representação geométrica dessa situação, observamos que o caminho de menor comprimento é o segmento de reta $\overline{AB}$.



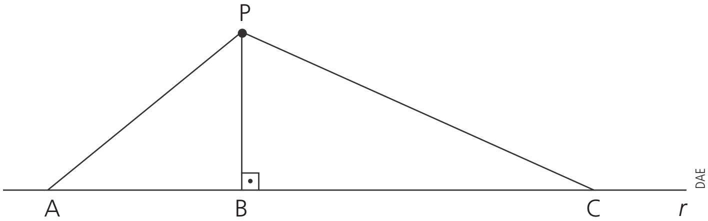
Embora possamos traçar várias curvas para ligar dois pontos A e B, dizemos que a distância entre esses dois pontos é a medida do segmento de reta $\overline{AB}$, que é a menor distância entre eles.

5. Distância de ponto à reta

Qual dos bebedouros do parque está à menor distância de Mariana?



Dada uma reta *r* e um ponto P não pertencente a *r*, podemos traçar vários segmentos ligando um ponto de *r* a P. O de menor comprimento é o segmento $\overline{PB}$ perpendicular a *r*.

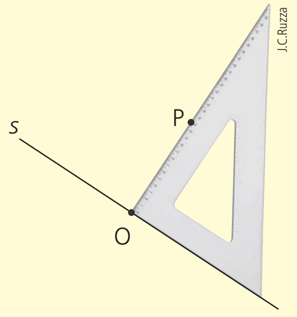


A distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento perpendicular à reta com extremidades nesse ponto e em um ponto da reta.

Trace em seu caderno uma reta s e um ponto P fora dela.

Use seu esquadro para traçar o segmento $\overline{OP}$ perpendicular a s e meça a distância do ponto P à reta s.

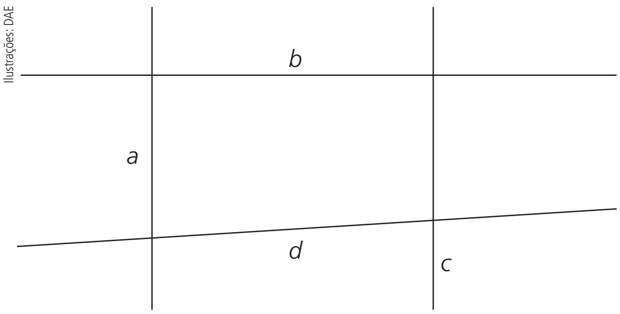
Resposta pessoal.



Exercícios

1 Usando régua e esquadro, verifique a posição relativa das retas e indique:

Ilustrações: DAE

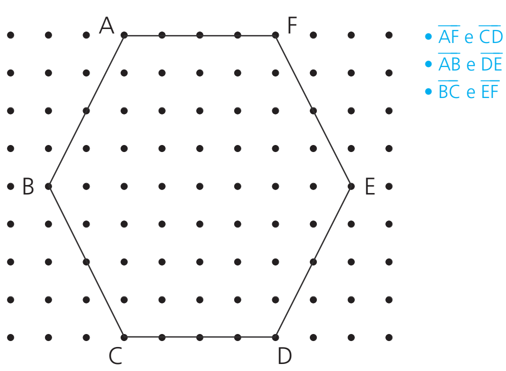


a) duas retas paralelas; a e c

b) duas retas perpendiculares; Por exemplo: *a* e *b*

c) duas retas concorrentes que não sejam perpendiculares. Por exemplo: *c* e *d*

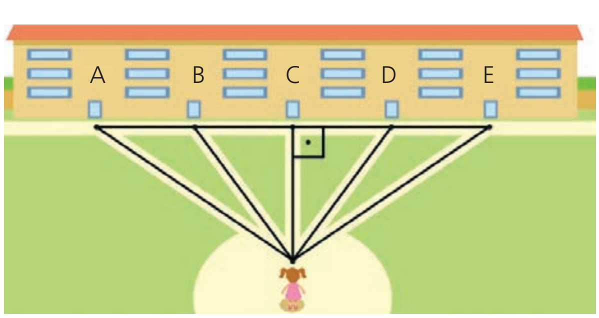
2 Na figura, quais são os segmentos de reta paralelos entre si?



- $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$
- $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$
- $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$

3 Rafaela quer entrar neste edifício pelo caminho mais curto.

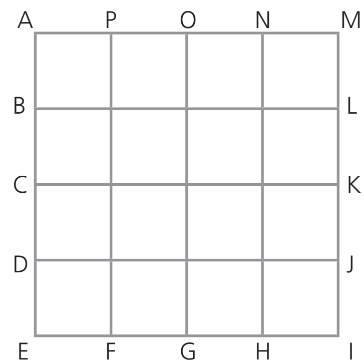
Ilustrações: Hélio Senatore



Que caminho ela deverá escolher? Por quê?

O caminho C, pois é perpendicular ao edifício.

4 Observe a figura:



As mediatrizes dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{OM}$ são, respectivamente, as retas:

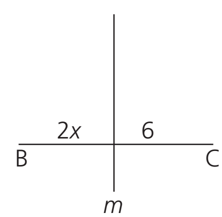
a) $\overleftrightarrow{BL}$ e $\overleftrightarrow{NH}$

b) $\overleftrightarrow{CK}$ e $\overleftrightarrow{PF}$

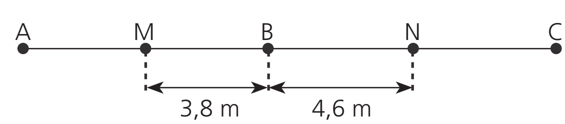
c) $\overleftrightarrow{DJ}$ e $\overleftrightarrow{NH}$

x **d)** $\overleftrightarrow{CK}$ e $\overleftrightarrow{NH}$

5 Na figura, a reta *m* é a mediatriz do segmento $\overline{BC}$. Qual é o valor de *x*? 3



6 Na figura, M é ponto médio de $\overline{AB}$ e N é ponto médio de $\overline{BC}$.



Determine as seguintes medidas:

a) AB 7,6 m

b) MN 8,4 m

c) BC 9,2 m

d) AC 16,8 m

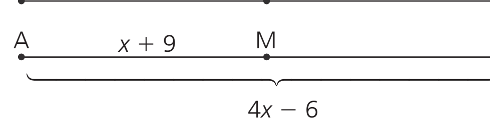
7 Se M é ponto médio de $\overline{AB}$, determine *x* nos casos:

a) 

$x = 10$

b)

$x = 8$

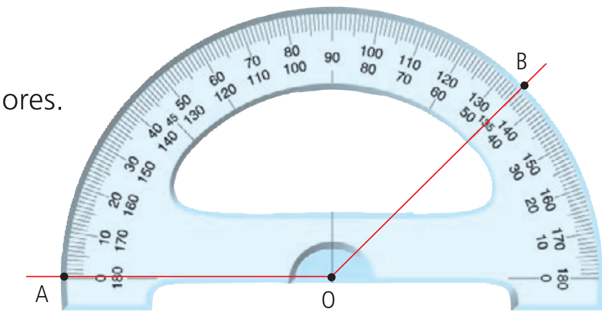
c) 

$x = 12$

6. Ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal

Coisas que já sabemos sobre ângulos

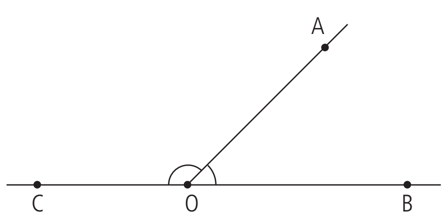
Já aprendemos sobre ângulos nos anos anteriores.

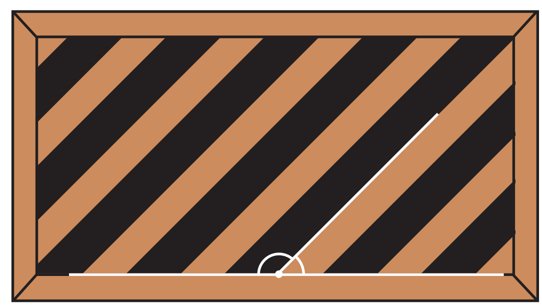


Ilustra Cartoon

Sabemos traçar e medir ângulos.

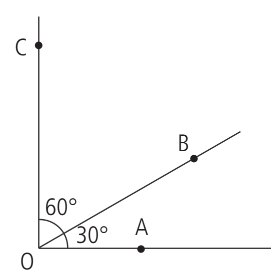
Também sabemos que:





Veja uma situação em que ângulos suplementares podem aparecer: assoalhos de madeira.

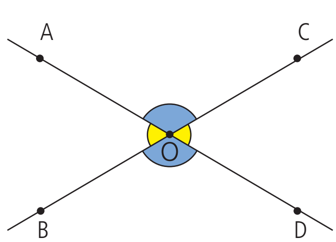
Nesta figura, AÔB e AÔC são ângulos suplementares, pois a soma de suas medidas é 180°.

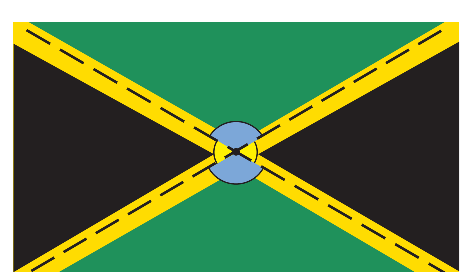


Sabemos ainda que dois ângulos cujas medidas somam 90° são chamados de complementares.

AÔB e BÔC são complementares, pois 30° + 60° = 90°

E dos ângulos opostos pelo vértice, você se lembra?





Ilustrações: DAE

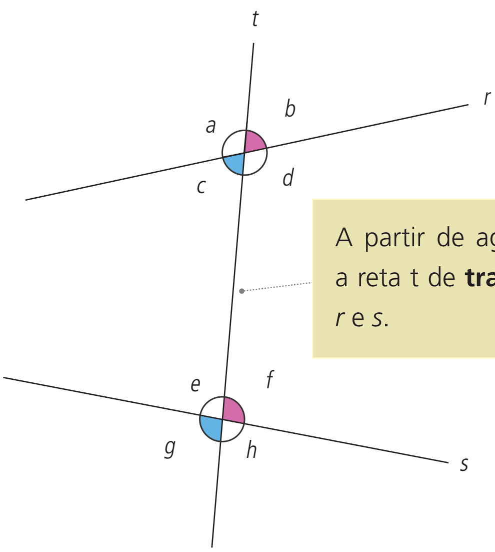
Visualize os ângulos opostos pelo vértice na bandeira da Jamaica.

Nesta figura, AÔB e CÔD são ângulos opostos pelo vértice (opv). O mesmo ocorre com AÔC e BÔD. Ângulos opostos pelo vértice são congruentes: têm mesma medida.

Vamos aprender coisas novas?

Ângulos correspondentes

Traçamos as retas *r* e *s* e uma reta *t* concorrente a *r* e a *s*.



A partir de agora chamaremos a reta t de **transversal** às retas *r* e *s*.

Ilustra Cartoon

Vamos combinar: usaremos $\hat{a}$ para indicar o ângulo e *a* para indicar a medida desse ângulo.

Ficam determinados oito ângulos.

- Quatro ângulos internos: $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$, $\hat{f}$.
- Quatro ângulos externos: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{g}$, $\hat{h}$.

Os ângulos $\hat{b}$ e $\hat{f}$ são chamados **ângulos correspondentes** – estão do mesmo lado da transversal, um externo e o outro interno. Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{g}$ também são correspondentes, pois atendem a essas características.

Há mais dois pares de ângulos correspondentes na figura. Identifique-os! $\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{d}$ e $\hat{h}$

1. Seu caderno tem linhas paralelas. Aproveite-as para traçar duas retas paralelas. Corte-as com uma reta transversal. Você obteve uma figura semelhante à que fizemos ao lado.

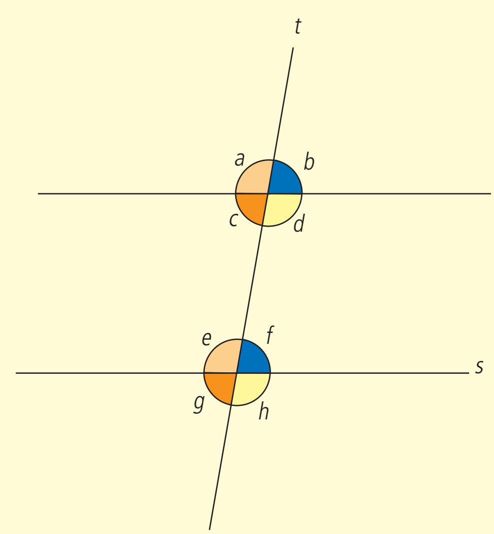
Com auxílio do transferidor, anote no caderno as medidas de cada par de ângulos correspondentes:

Na figura ao lado.

$\begin{cases} a = 100^\circ \\ e = 100^\circ \end{cases}$ $\begin{cases} c = 80^\circ \\ g = 80^\circ \end{cases}$ $\begin{cases} b = 80^\circ \\ f = 80^\circ \end{cases}$ $\begin{cases} d = 100^\circ \\ h = 100^\circ \end{cases}$

2. Os pares de ângulos correspondentes são congruentes? Sim.

3. Experimente traçar outras duas retas paralelas *r* e *s* cortadas por uma transversal. Os pares de ângulos correspondentes são congruentes? Sim.



Ilustrações: DAE

Podemos denotar que *r* é paralela a *s*, assim: $r \,//\, s$

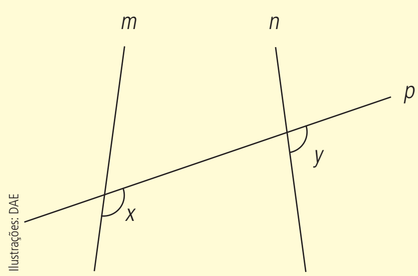
O que você observou na atividade anterior acontece sempre.

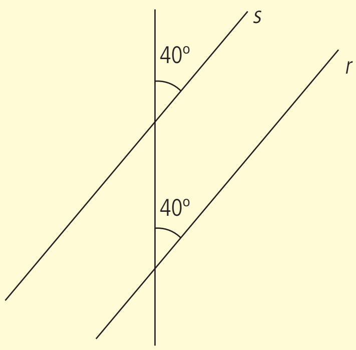
Retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes.

A recíproca também é verdadeira:

Se uma reta transversal a outras retas determina ângulos correspondentes congruentes, então as retas cortadas pela transversal são paralelas.

Pense e responda oralmente:





1. Nessa figura, $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são ângulos correspondentes? Sim.

2. Os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são congruentes? Por quê?
Os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ não são congruentes, porque as retas *m* e *n* não são paralelas.

3. Nessa figura, podemos afirmar que as retas *s* e *r* são paralelas? Por quê?
Sim, as retas são paralelas, porque os ângulos correspondentes são congruentes.

Aplicando o que descobrimos...

Na figura abaixo, *m* e *n* são retas paralelas. Conhecendo a medida de um dos ângulos, $a = 130°$, por exemplo, podemos determinar a medida dos demais. Veja:

Como $m \parallel n$, os ângulos correspondentes são congruentes.

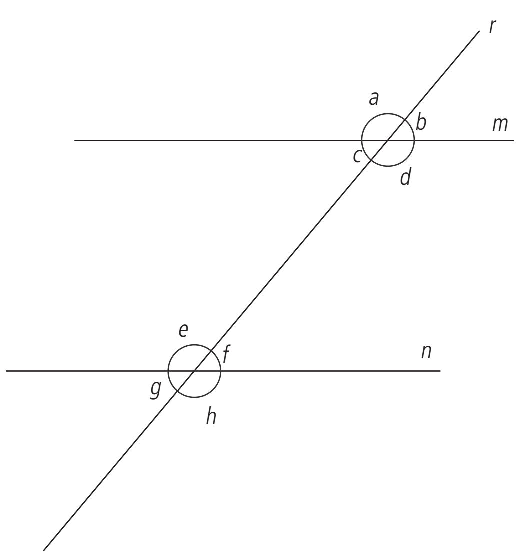
$a = e = 130°$ (ângulos correspondentes)

$a + b = 180°$ (ângulos suplementares)

$130° + b = 180°$

$b = 50°$

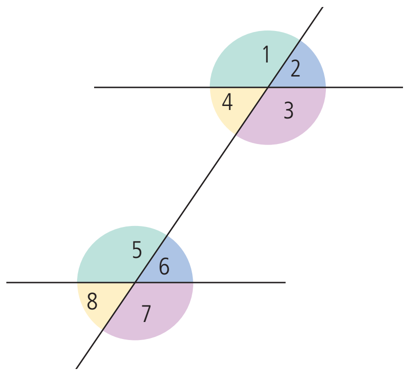
$b = f = 50°$ (ângulos correspondentes)



$$\left.\begin{aligned} d &= a = 130° \\ c &= b = 50° \\ g &= f = 50° \\ h &= e = 130° \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)}$$

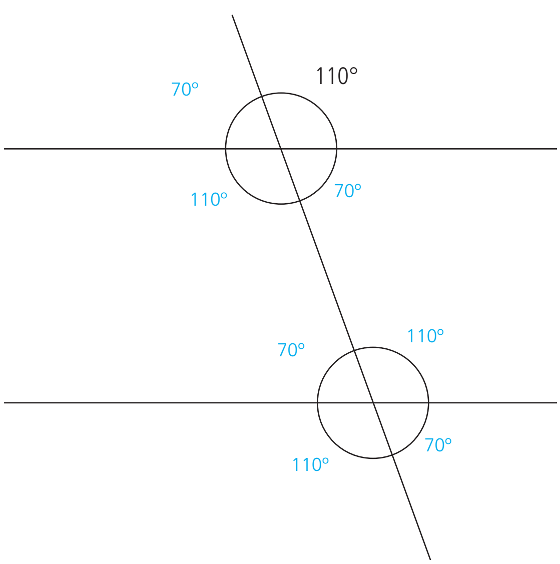
Exercícios

8 Observe a figura e responda em seu caderno.



Quais pares de ângulos são correspondentes?
2 e 6; 3 e 7; 1 e 5; 4 e 8

9 Observe duas retas paralelas cortadas por uma transversal e responda:



a) Quantos ângulos elas formam? 8 ângulos

b) Qual é a medida de cada ângulo indicado?

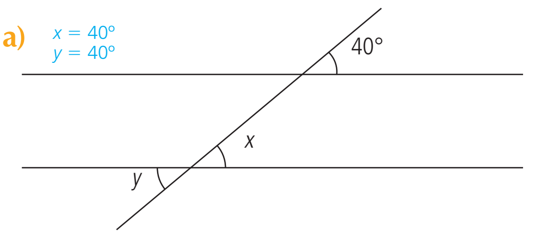
c) Compare as medidas. O que você descobriu? Há quatro ângulos com uma medida e quatro com outra.

d) Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes? Sim.

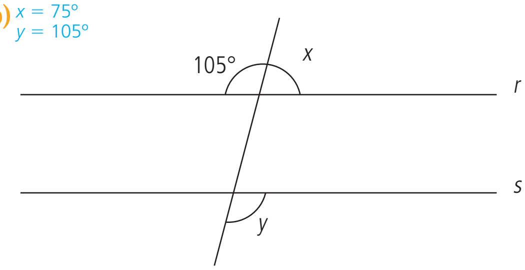
e) Os ângulos correspondentes são congruentes? Sim.

10 Se $r \mathbin{/\!/} s$, determine a medida dos ângulos indicados pelas letras:

a) $x = 40°$
$y = 40°$

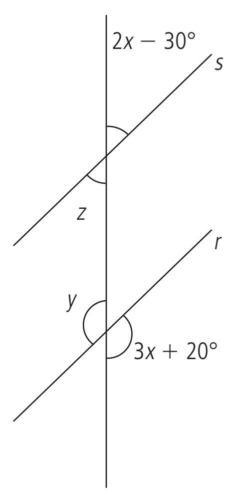


b) $x = 75°$
$y = 105°$

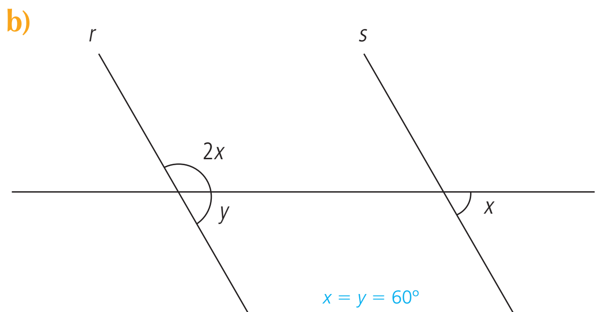


11 Quais devem ser os valores dos ângulos indicados por letras para que as retas *r* e *s* sejam paralelas?
$2x - 30° + 3x + 20° = 180°$
$y = 134°$; $z = 46°$

a)



b)



$x = y = 60°$

Ilustrações: DAE

Vale a pena ler

A Geometria Euclidiana

Photoresearchers/Latinstock

◆ Euclides (de Alexandria) (325 a.C. – 265 a.C.)

Euclides foi um dos maiores matemáticos gregos da antiguidade. Não se sabe com certeza a data do seu nascimento, talvez tenha sido por volta do ano 325 antes de Cristo. Sabe-se que ele viveu na cidade de Alexandria, no atual Egito, quase certamente durante o reinado de Ptolomeu I (323 a.C.–283 a.C.) e morreu, de causas desconhecidas, no ano 265 antes de Cristo. Por essa razão ele é citado como Euclides de Alexandria.

Euclides nos deixou um conjunto de livros de matemática, os *Elementos*, que pode ser considerado um dos mais importantes textos na história da Matemática. Nesse monumental conjunto de 13 volumes Euclides reuniu toda a Geometria conhecida em sua época, ou seja, os vários resultados originalmente obtidos por outros matemáticos anteriores a ele e seus trabalhos originais. O fato importante é que Euclides apresentou esses resultados dentro de uma estrutura logicamente coerente e simples. Ele até mesmo apresentou provas de teoremas matemáticos que haviam sido perdidos.

Euclides deduzia, entre vários outros resultados, as propriedades dos objetos geométricos a partir de um pequeno conjunto de axiomas. Axiomas são afirmações que não possuem prova, mas são aceitas como autoevidentes. Por esses motivos, Euclides é considerado o "Pai da Geometria" e o fundador do chamado "Método Axiomático da Matemática".

O sistema geométrico apresentado por Euclides nos livros que formam os *Elementos* durante muito tempo foi considerado "a" Geometria. Era a única disponível e podia ser usada na vida diária sem contradições aparentes. Os "Elementos" de Euclides foram os fundamentos do ensino de Geometria praticamente até o início do século XX.

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/elementos-euclides

◆ Páginas de um manuscrito grego do século XI com os "Elementos".

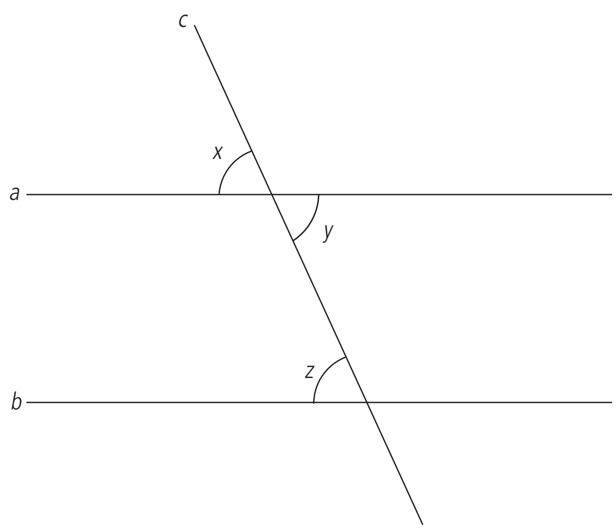
Hoje a Geometria apresentada por Euclides é chamada de "Geometria Euclidiana" para distingui-la das outras formas de geometria, chamadas "Geometrias Não Euclidianas", que foram descobertas ao longo do século XIX. [...]

Disponível em: <www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/conteudo/modulo5/1-geometria-euclidiana/geometria-euclidiana.html>. Acesso em: abr. 2011. Observatório Nacional – Ministério da Ciência e Tecnologia.

Ângulos alternos internos

Vamos investigar um pouco mais?

Na figura abaixo as retas *a* e *b* são paralelas.



$x = z$ (ângulos correspondentes)

$x = y$ (ângulos opostos pelo vértice)

Então, $y = z$

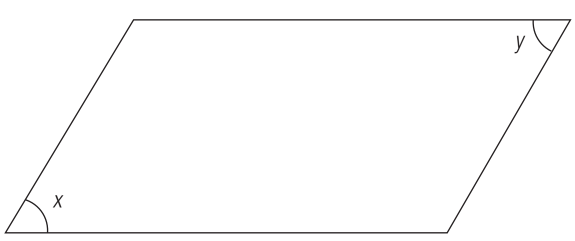
$\hat{y}$ e $\hat{z}$ são chamados **ângulos alternos internos**.

Esses ângulos são chamados **alternos** porque eles estão um de cada lado da transversal.

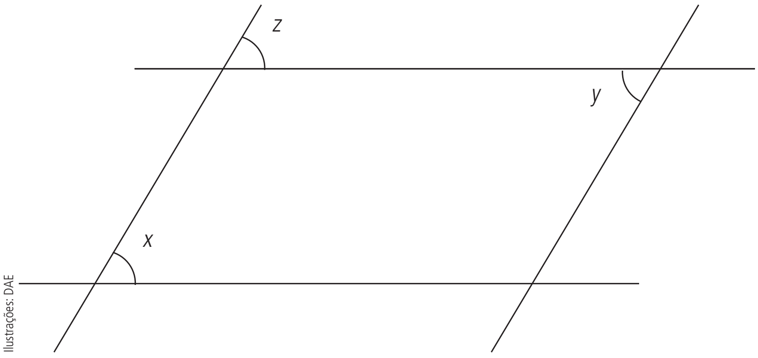
Descobrimos que, se as retas são paralelas, os ângulos alternos internos são congruentes.

Vamos aplicar esse conhecimento?

Paralelogramos são quadriláteros com dois pares de lados opostos paralelos.



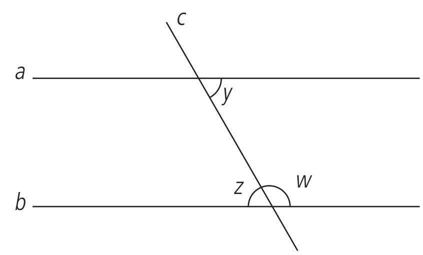
$\hat{x}$ e $\hat{y}$ são ângulos opostos desse paralelogramo. Mostraremos que eles têm mesma medida. Veja:



$z = x$ (ângulos correspondentes)
$z = y$ (ângulos alternos internos)
Então,
$x = y$

Ilustrações: DAE

Outra descoberta…

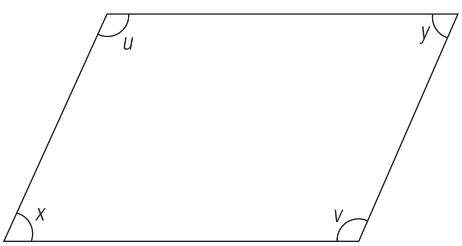


Na figura, $a \parallel b$.

$z + w = 180°$ (ângulos suplementares)
$z = y$ (ângulos alternos internos)
Então,
$y + w = 180°$ .... $\hat{y}$ e $\hat{w}$ são suplementares

… e sua aplicação aos paralelogramos

Como os lados opostos são paralelos, pela propriedade acima,



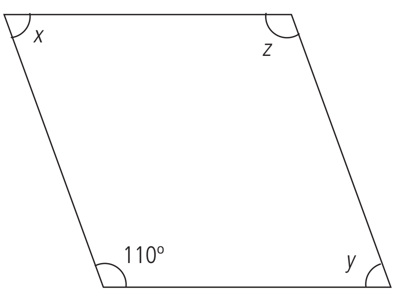
$u + x = 180°$

$y + v = 180°$

$u + y = 180°$

$x + v = 180°$

Lápis Mágico



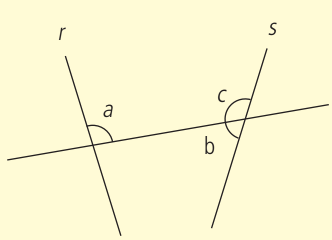
$z = 110°$, pois são ângulos opostos do paralelogramo.

$x = 70°$ (suplemento de 110°)

$y = 70°$ (ângulo oposto a $\hat{x}$)

Nos paralelogramos os ângulos opostos são congruentes e os ângulos de um mesmo lado são suplementares.

Leia as questões, troque ideias e depois responda oralmente.

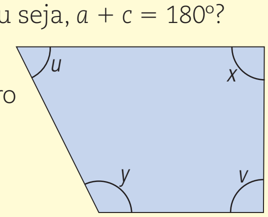


1. Nesse exemplo, $\hat{a}$ e $\hat{b}$:
- são alternos internos? Sim.
- são congruentes? Por quê? Não, pois as retas *r* e *s* não são paralelas.

2. Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são suplementares, ou seja, $a + c = 180°$?

Não, pois as retas *r* e *s* não são paralelas.

3. Forme dupla com um colega, pois agora é com vocês. O quadrilátero ao lado é um trapézio. Apresenta dois lados paralelos. Descubram a relação entre os ângulos $\hat{y}$ e $\hat{u}$, $\hat{x}$ e $\hat{v}$. $y + u = 180°$ e $x + v = 180°$

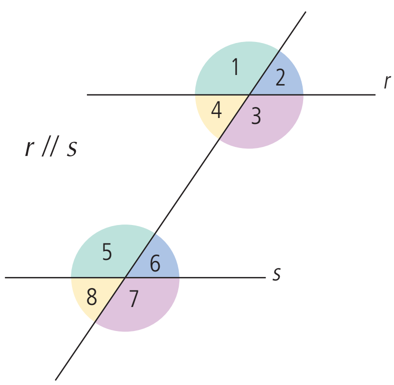


Ilustrações: DAE

Exercícios

12 Quando dois ângulos são suplementares?
Quando a soma das suas medidas é igual a 180°.

13 Observe a figura e conclua se os ângulos são congruentes ou suplementares:



a) os ângulos 4 e 5; Suplementares.

b) os ângulos 4 e 6; Congruentes.

c) os ângulos 4 e 8; Congruentes.

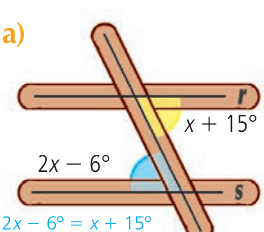
d) os ângulos 2 e 6; Congruentes.

e) os ângulos 2 e 8; Congruentes.

f) os ângulos 2 e 5. Suplementares.

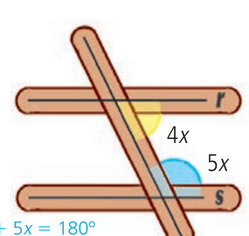
14 Sabendo que $r // s$, determine x.

a)



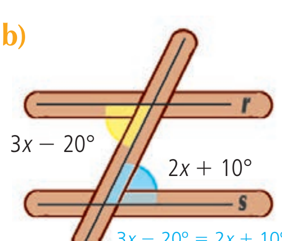
$2x - 6° = x + 15°$
$x = 21°$

c)



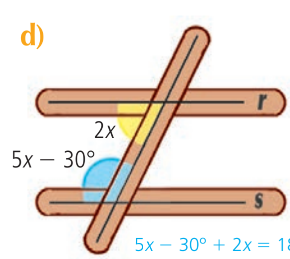
$4x + 5x = 180°$
$x = 20°$

b)



$3x - 20° = 2x + 10°$
$x = 30°$

d)



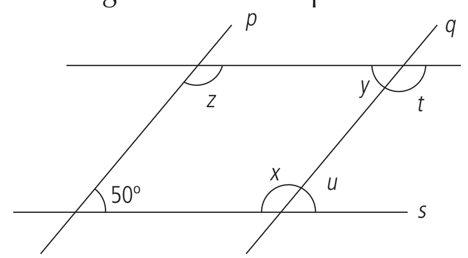
$5x - 30° + 2x = 180°$
$x = 30°$

Ilustrações: Lápis Mágico

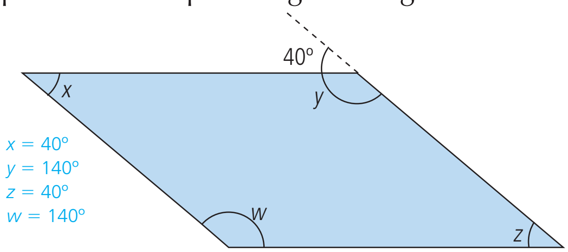
Observação: As figuras são meramente ilustrativas; as medidas dos ângulos não correspondem aos valores reais.

15 Sabendo que $r // s$ e $p // q$, calcule a medida dos ângulos indicados pelas letras.

$z = 130°$
$x = 130°$
$y = 50°$
$u = 50°$
$t = 130°$



16 Calcule a medida dos ângulos indicados pelas letras no paralelogramo seguinte.

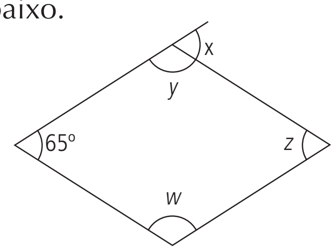


$x = 40°$
$y = 140°$
$z = 40°$
$w = 140°$

Ilustrações: DAE

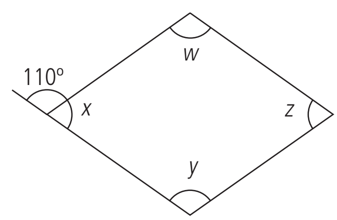
17 Calcule o valor de x, y, z e w nos losangos abaixo.

a)



$x = 65°$
$y = 115°$
$z = 65°$
$w = 115°$

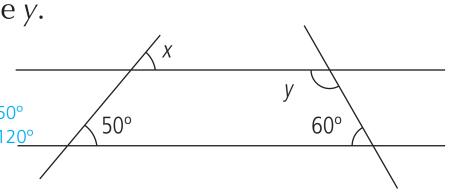
b)



$x = 70°$
$y = 110°$
$z = 70°$
$w = 110°$

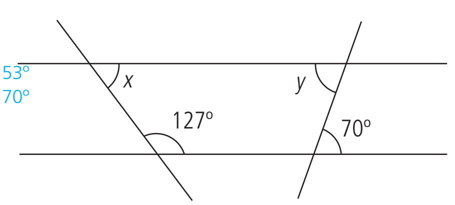
18 Sabendo que $r // s$, determine os valores de x e de y.

a)



$x = 50°$
$y = 120°$

b)



$x = 53°$
$y = 70°$

Vale a pena ler

Neste volume, estamos descobrindo muitas propriedades de figuras geométricas, somando novos conhecimentos a conhecimentos anteriores. Como funciona a construção do conhecimento geométrico? O texto abaixo utiliza uma comparação interessante para ajudá-lo a compreender.

Para se aprender a jogar algum jogo, tal como damas, firo, xadrez etc., temos que, inicialmente, aprender as suas regras.

Um pai tentando ensinar seu filho a jogar damas dirá algo como: "Este é o tabuleiro de damas e estas são as pedras com que se joga", "São 12 para cada jogador", "As pedras são arrumadas no tabuleiro assim.", e arrumará as pedras para o filho. Aí já terá recebido uma enxurrada de perguntas do tipo: "Por que as pedras só ficam nas casas pretas?", "Por que só são doze pedras?", "Eu acho mais bonitas as pedras brancas nas casas pretas e as pretas nas casas brancas, por que não é assim?" etc.

Todas estas perguntas têm uma única resposta: Porque esta é uma das regras do jogo. Se alguma delas for alterada, o jogo resultante, embora possa ser também muito interessante, não será mais um jogo de damas.

Observe que, ao ensinar tal jogo, você dificilmente se deteria em descrever o que são as pedras. O importante são as regras do jogo, isto é, a maneira de arrumar as pedras no tabuleiro, a forma de movê-las, a forma de "comer" uma pedra do adversário, etc. Qualquer criança, após dominar o jogo, improvisará tabuleiros com riscos no chão e utilizará tampinhas de garrafa, botões, cartões etc., como pedras.

Ao criar-se um determinado jogo é importante que suas regras sejam suficientes e consistentes. Por **suficiente** queremos dizer que as regras devem estabelecer o que é permitido fazer em qualquer situação que possa vir a ocorrer no desenrolar de uma partida do jogo. Por **consistente** queremos dizer que as regras não devem contradizer-se, ou sua aplicação levar a situações contraditórias.

Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo: partimos com um certo conjunto de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas sobre as relações que satisfazem estes elementos, as quais são chamadas de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades características das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas Teoremas ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas.

Fonte: João Lucas Marques Barbosa. *Geometria Plana Euclidiana*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. p. 10-11.

Converse com seus colegas e o professor sobre o texto. Para esclarecer um pouco mais, que tal ver um exemplo de axioma e um de teorema ou proposição?

Aí vai:

Axioma: dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém esses pontos.

Teorema ou proposição: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Revisando

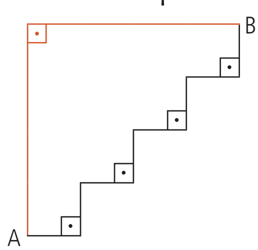
19 Olhe para esta fotografia. O que você pode dizer sobre a direção dos degraus da escada de pedreiros? São paralelos.

John S. Sfondilias/Shutterstock

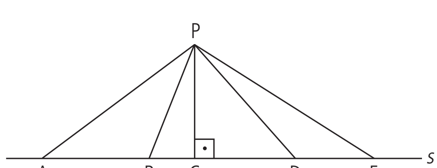
20 Sabe-se que $d_1 // d_2$; $d_1 // d_3$; $d_1 \perp d_4$. Copie e complete o quadro, usando // ou $\perp$.

	d_1	d_2	d_3	d_4	
d_1	//	//	//	$\perp$	
d_2					// // // $\perp$
d_3					// // // $\perp$
d_4					$\perp$ $\perp$ $\perp$ //

21 Qual dos dois caminhos indicados em cores diferentes é o mais curto para ir de A até B?
São iguais.

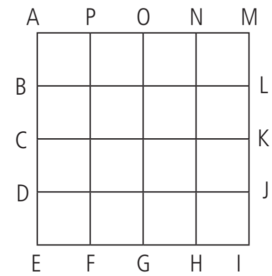


22 Observe a figura, em que PA = 2,5 cm; PB = 1,6 cm; PC = 1,5 cm; PD = 2 cm; PE = 2,8 cm.



Qual é, em milímetros, a distância do ponto P à reta *s*? 15 mm

23 Observe a figura:



A mediatriz do segmento $\overline{CG}$ é:

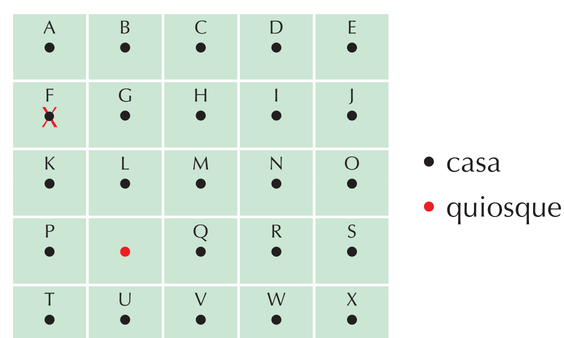
a) $\overleftrightarrow{LF}$

b) $\overleftrightarrow{EM}$ x

c) $\overleftrightarrow{AI}$

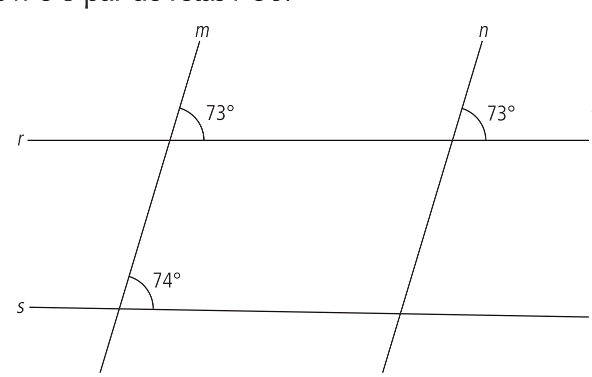
d) $\overleftrightarrow{DN}$

24 A figura mostra a localização de um quiosque e das casas que o rodeiam. Existem quatro casas que estão situadas à mesma distância do quiosque. O ponto F representa o local onde está situada uma dessas casas.



Indique três locais onde podem estar situadas as outras três casas. H, N e W

25 Na figura abaixo, considere o par de retas *m* e *n* e o par de retas *r* e *s*.

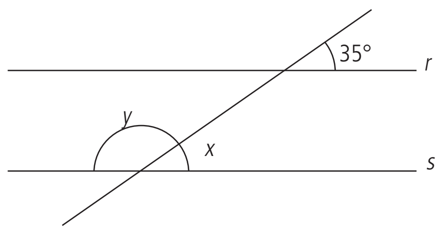


Ilustrações: DAE

Qual é o par de retas paralelas? *m* e *n*

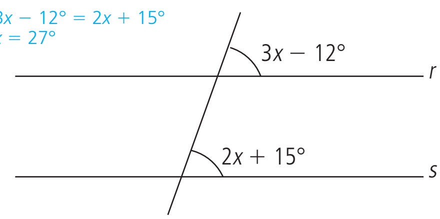
26 Sabendo que $r \parallel s$, determine a medida dos ângulos indicados pelas letras.

$x = 35°$
$y = 145°$

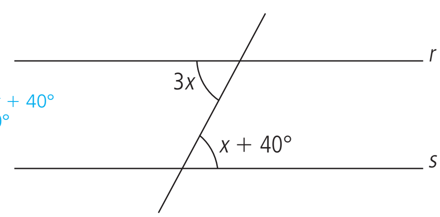


27 Sabendo que $r \parallel s$, determine x.

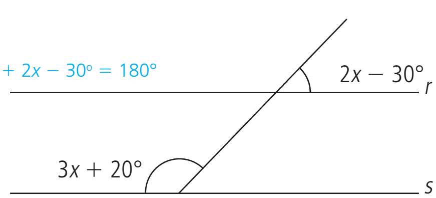
a) $3x - 12° = 2x + 15°$
$x = 27°$



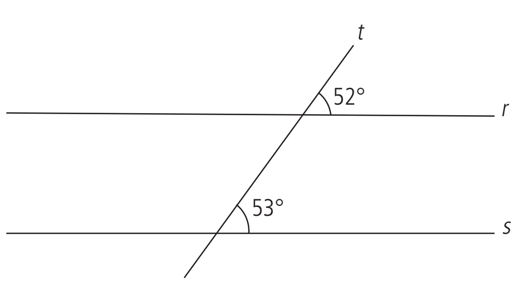
b) $3x = x + 40°$
$x = 20°$



c) $3x + 20° + 2x - 30° = 180°$
$x = 38°$



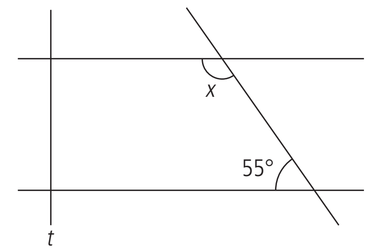
28 Observe a figura e responda ao que se pede.



a) As retas r e s são paralelas? Justifique.
Não, porque os dois ângulos da figura têm medidas diferentes.

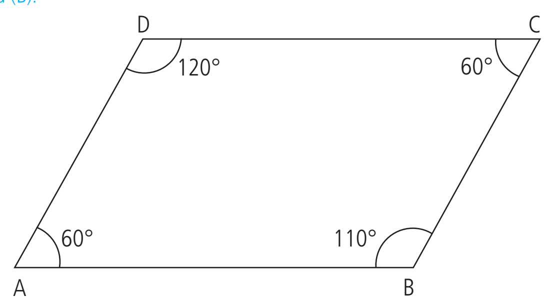
b) Se não forem paralelas, elas vão se encontrar à direita ou à esquerda da reta t?
À esquerda.

29 Na figura, r e s são perpendiculares a t. Então x é igual a:



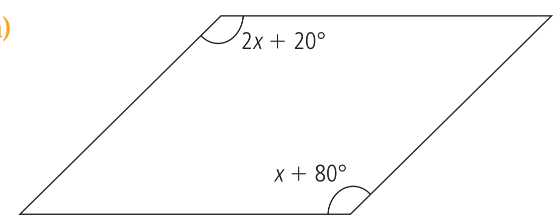
a) 45°
b) 55°
c) 105°
x **d)** 125°

30 Neste paralelogramo há um ângulo que está mal medido. Qual? O ângulo B; med $(\hat{D})$ deve ser igual med $(\hat{B})$.



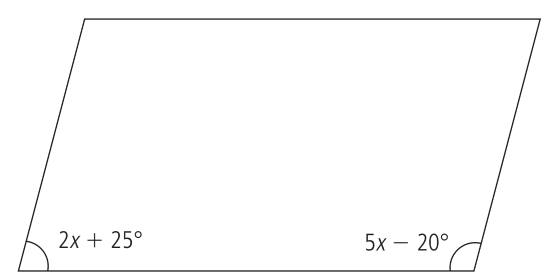
31 Calcule x nos paralelogramos a seguir.

a)



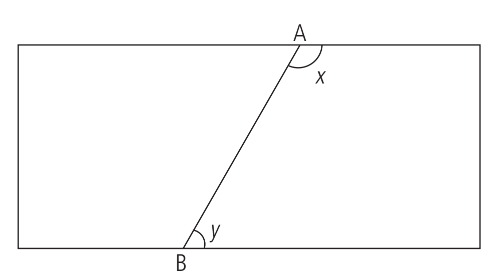
$2x + 20° = x + 80° \Rightarrow x = 60°$

b)



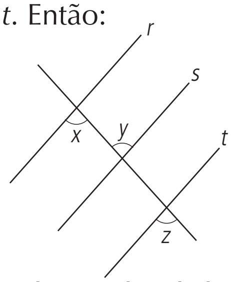
$2x + 25° + 5x - 20° = 180° \Rightarrow x = 25°$

32 Uma placa retangular de gesso deve ser cortada na linha AB. Se o ângulo x é o dobro de y, quanto mede o menor desses ângulos? $y = 60°$



Ilustrações: DAE

33 Na figura, $r \,//\, s$ e $s \,//\, t$. Então:



a) $x > y$ e $y > z$

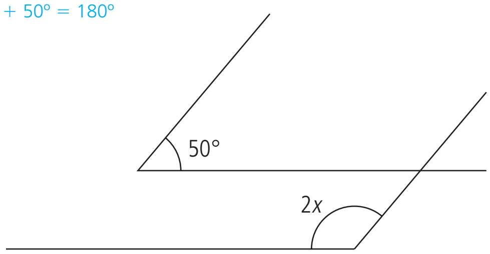
b) $x = y$ e $x < z$

c) $x = y$ e $y < z$

x d) $x = y$ e $y = z$

34 A figura mostra um par de ângulos de lados, respectivamente, paralelos.

$2x + 50° = 180°$



O valor de x é:

a) 55°

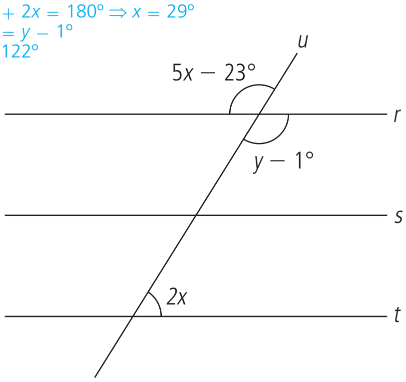
x c) 65°

b) 60°

d) 70°

35 (CAP-UFRJ) Na figura a seguir, as retas r, s e t são paralelas. Então, o valor de y é:

$5x - 23° + 2x = 180° \Rightarrow x = 29°$
$5x - 23° = y - 1°$
$y - 1° = 122°$
$y = 123°$



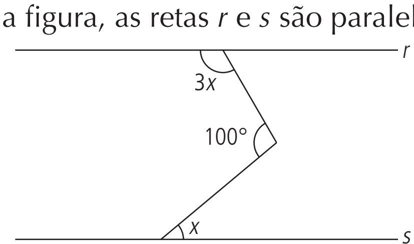
a) 29°

c) 122°

b) 124°

x d) 123°

36 Na figura, as retas r e s são paralelas.



O valor de x é:

a) 25°

Pelo vértice do ângulo de 100°, traçar uma reta paralela a r e s. Vamos ter: $3x + (100° - x) = 180°$.

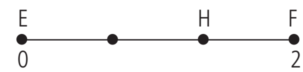
x c) 40°

b) 35°

d) 45°

Desafios

37 O segmento $\overline{EF}$ está dividido em três partes congruentes:



O número correspondente ao ponto H é:

a) $\dfrac{1}{3}$

c) $1\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{2}{3}$

x d) $1\dfrac{1}{3}$ $2\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$

38 (Obmep) Uma cerca de arame reta tem 12 postes igualmente espaçados. A distância entre o terceiro e o sexto poste é de 3,3 metros. Qual o comprimento da cerca?

Luis Francisco Cordero/Dreamstime.com

a) 8,4 m

x c) 12,1m

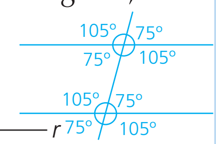
b) 9,9 m

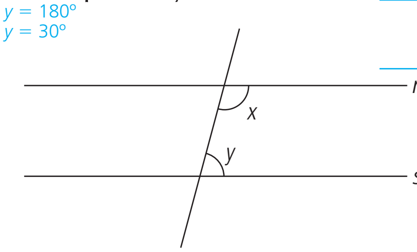
d) 13,2 m

3,3 : 3 = 1,1 11 · 1,1 = 12,1

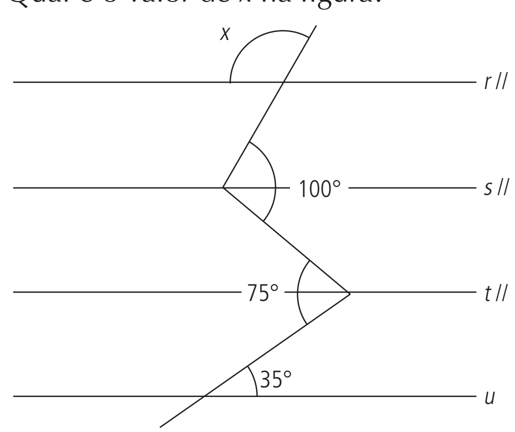
39 Calcule a medida de todos os ângulos, sabendo-se que $x - y = 30°$.

$\begin{cases} x + y = 180° \\ x - y = 30° \end{cases}$





40 Qual é o valor de x na figura?



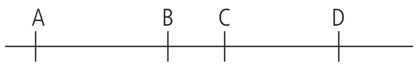
Ilustrações: DAE

• $75° - 35° = 40°$ • $100° - 40° = 60°$ • $x = 180° - 60° = 120°$

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

41 (Obmep) Quatro cidades, A, B, C e D, foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme ilustração abaixo:



A distância entre A e C é de 50 km e a distância entre B e D é de 45 km. Além disso, sabe-se que a distância entre a primeira e a última é de 80 km. Qual é a distância entre as cidades B e C?

- CD = 80 − 50 = 30
- AB = 80 − 45 = 35
- BC = 80 − 35 − 30 = 15

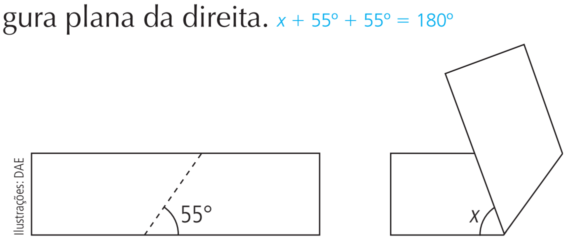
x **a)** 15 km
b) 20 km
c) 25 km
d) 10 km

42 (PUC-MG) No interior do segmento $\overline{AB}$ estão os pontos M, N e P, nessa ordem, de modo que M seja o ponto médio de $\overline{AN}$ e P, o ponto médio de $\overline{NB}$. O segmento $\overline{AB}$ mede 82 cm e o segmento $\overline{AM}$ mede 11 cm. A medida do segmento $\overline{PB}$, em cm, é:

a) 22
x **b)** 30
c) 36
d) 41

(82 − 22) : 2 = 30

43 (Vunesp) Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado na figura da esquerda, formando a figura plana da direita. $x + 55° + 55° = 180°$

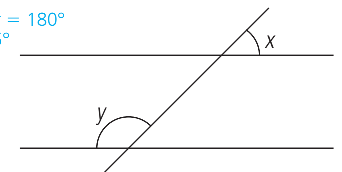


O valor de x é:

a) 60º
x **b)** 70º
c) 80º
d) 90º

44 (Cesgranrio-RJ) As retas r e s da figura são paralelas cortadas pela transversal t. Se y é o triplo de x, então $y - x$ vale:

$3x + x = 180°$
$x = 45°$

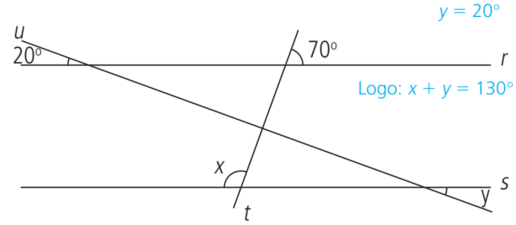


$y = 135°$, $x = 45°$ } $y - x = 90°$

a) 75°
b) 80°
c) 85°
x **d)** 90°

45 (FCC-SP) Na figura abaixo tem-se $r // s$; t e u são transversais. O valor de $x + y$ é:

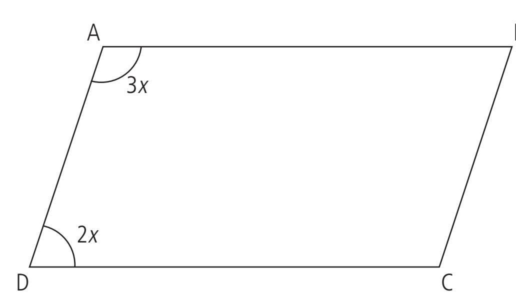
$x + 70° = 180°$
$x = 110°$
$y = 20°$



Logo: $x + y = 130°$

a) 100°
b) 120°
x **c)** 130°
d) 140°

46 (FCC-SP) A relação entre as medidas de dois ângulos do paralelogramo abaixo está indicada na figura. Os ângulos deste paralelogramo medem:



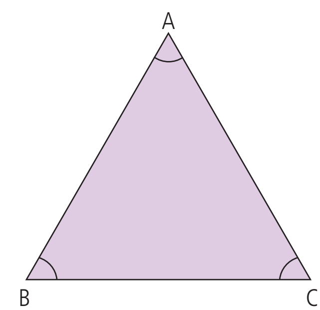
a) 50°, 75°, 50°, 75°
b) 60°, 90°, 60°, 90°
c) 80°, 120°, 80°, 120°
x **d)** 72°, 108°, 72°, 108°

$2x + 3x = 180°$
$x = 36°$
Então: $\begin{cases} 2x = 72° \\ 3x = 108° \end{cases}$

Triângulos

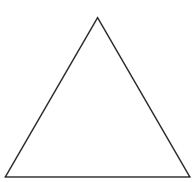
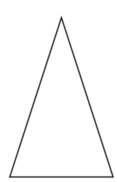
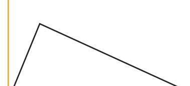
1. Elementos, perímetro e classificação

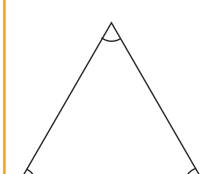
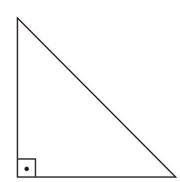
O triângulo é o polígono de três lados.



Os pontos A, B e C são os vértices do triângulo ABC.
Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os lados desse triângulo.
O triângulo tem 3 ângulos internos: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.
O perímetro de um triângulo é a soma das medidas de seus 3 lados.

Classificamos os triângulos:

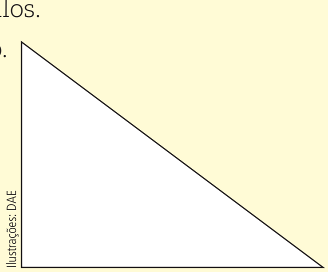
Quanto aos lados		
Triângulo equilátero	Triângulo isósceles	Triângulo escaleno
3 lados congruentes	2 lados congruentes	3 lados com medidas diferentes
		

Quanto aos ângulos		
Triângulo acutângulo	Triângulo retângulo	Triângulo obtusângulo
3 ângulos agudos	1 ângulo reto	1 ângulo obtuso
		

Nesta unidade, você aprenderá muitos fatos novos sobre os triângulos, essas figuras tão importantes para a Matemática.

Usando régua e transferidor, meça os lados e os ângulos internos do triângulo ilustrado e classifique-o quanto aos lados e aos ângulos.

Calcule o perímetro do triângulo.



Ilustrações: DAE

O triângulo é escaleno e retângulo.
Seu perímetro é 12 cm.

Exercícios

1 (UFRJ) Observe as figuras **I** e **II** abaixo:

Ilustrações: DAE

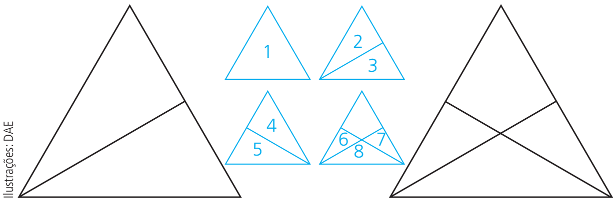


Figura **I** Figura **II**

A figura **I** contém 3 triângulos. O número de triângulos na figura **II** é:

a) 6
x b) 8
c) 10
d) 12

2 Responda.

a) Como é chamado o triângulo que tem os três ângulos agudos? Acutângulo.

b) Como é chamado o triângulo que tem dois lados de medidas iguais? Isósceles.

c) Como é chamado o triângulo que tem os três lados de medidas diferentes? Escaleno.

3 Sou um triângulo acutângulo. Posso ser também um triângulo equilátero? E isósceles?
Sim. Sim.

4 (Saresp) Marcos tem varetas de madeira de vários tamanhos. Com elas pretende construir triângulos para a apresentação de um trabalho na escola.

Ele separou as varetas em 4 grupos de 3, mediu cada uma delas e anotou os resultados nesta tabela:

	Vareta A	Vareta B	Vareta C
Grupo 1	30 cm	12 cm	12 cm
Grupo 2	30 cm	30 cm	30 cm
Grupo 3	25 cm	26 cm	27 cm
Grupo 4	28 cm	15 cm	15 cm

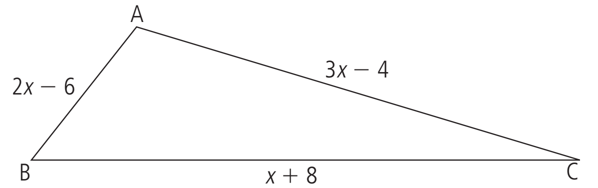
Ao começar a colar as varetas na cartolina para construir os triângulos, descobriu que não seria possível fazê-lo com as varetas do:

x a) Grupo 1
b) Grupo 2
c) Grupo 3
d) Grupo 4

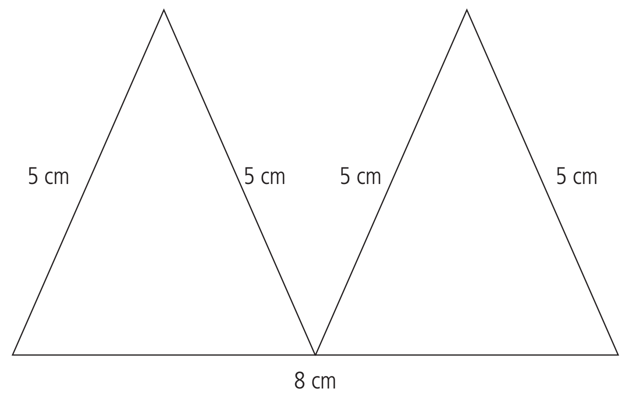
5 Dois lados de um triângulo medem 2,5 cm e 5,6 cm. Entre que valores pode variar o terceiro lado do triângulo? 3,1 cm < terceiro lado < 8,1 cm

• 2,5 + 5,6 = 8,1 • 5,6 − 2,5 = 3,1

6 Qual é o valor de x quando o perímetro é 28 cm? 5 cm • $(2x - 6) + (x + 8) + (3x - 4) = 28$



7 Observe a figura.

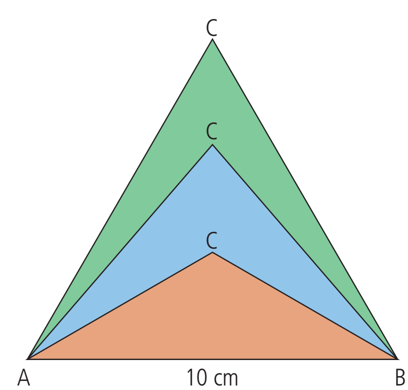


Invente o enunciado de um problema que possa ser resolvido por meio do cálculo da expressão numérica:

$$\boxed{4 \cdot 5 + 8}$$

Qual é o perímetro da figura?

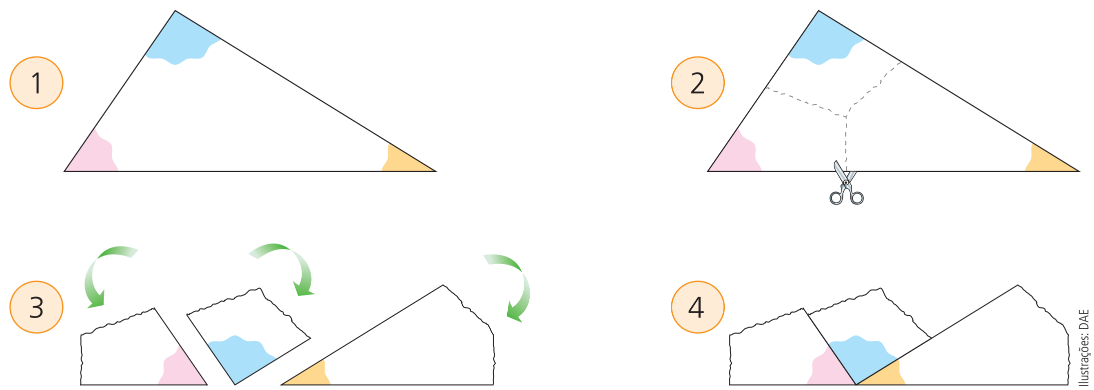
8 O triângulo ABC é isósceles e o lado diferente, $\overline{AB}$, mede 10 cm. O perímetro do triângulo é inferior a 32 cm.



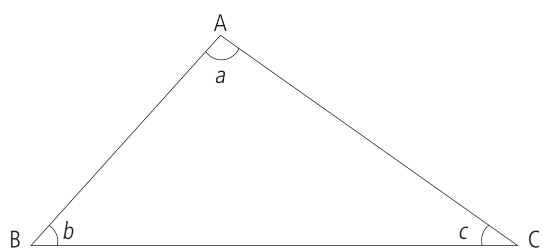
Entre que valores pode variar a medida dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$? Superior a 5 cm e inferior a 11 cm.

2. Soma dos ângulos internos de um triângulo

No 7º ano verificamos experimentalmente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

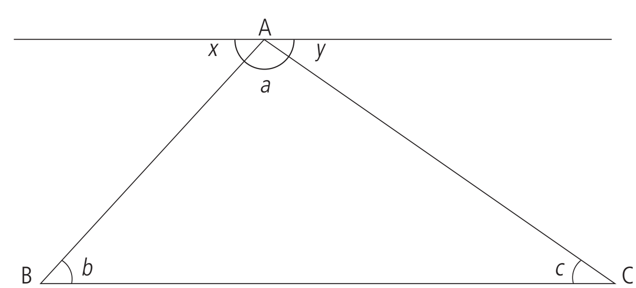


Vamos demonstrar que essa propriedade vale para todo triângulo.



Desenhamos um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos.

Pelo vértice A, traçamos uma reta paralela ao lado, $\overline{BC}$ obtendo $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

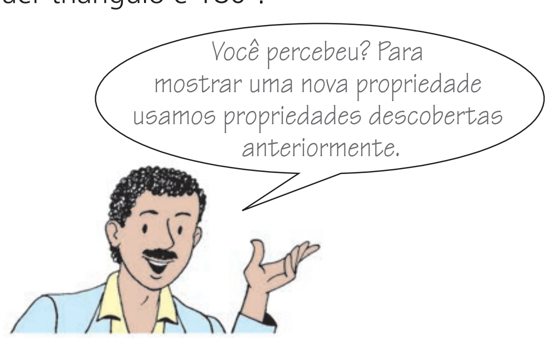


- $x = b$ (ângulos alternos internos)
- $y = c$ (ângulos alternos internos)

$$a + \underbrace{x}_{b} + \underbrace{y}_{c} = 180^\circ \text{ (ângulo raso)}$$

Conclusão: $a + b + c = 180^\circ$

Observe que podemos usar o mesmo procedimento com qualquer outro triângulo e chegar à mesma conclusão. Por isso, a propriedade vale sempre: a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.



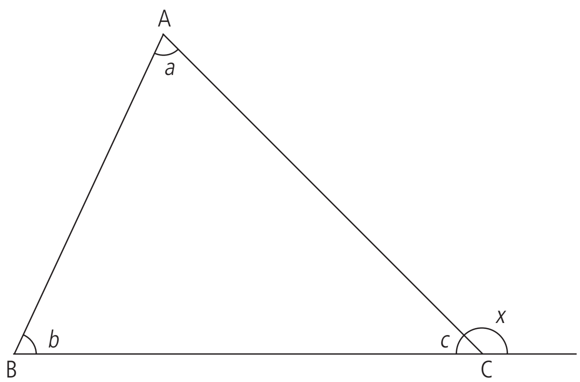
3. Propriedade do ângulo externo

Prolongando o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC ilustrado, determinamos um **ângulo externo** ao triângulo. Marcamos esse ângulo na figura e denotamos sua medida por *x*.

Observe que o ângulo externo é adjacente ao ângulo $\hat{c}$, mas não é adjacente aos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

Vamos descobrir uma propriedade. Acompanhe.

Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{x}$ são suplementares, portanto $x + c = 180°$ ou ainda: $c = 180° - x$.



Também sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°. Daí:

$$a + b + c = 180°$$

Substituindo *c* por $180° - x$ nessa igualdade, temos:

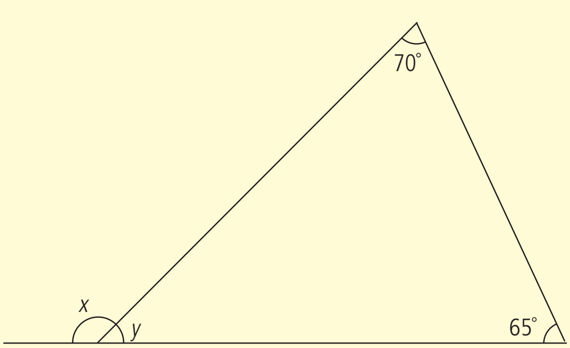
$a + b + 180° - x = 180°$ subtraindo 180° de ambos os membros:

$a + b - x = 0$ ou, finalmente, $\underbrace{a + b}_{\text{medidas dos ângulos internos não adjacentes a } \hat{c}} = \underbrace{x}_{\text{medida do ângulo externo a } \hat{c}}$.

Mostramos que, em todo triângulo, a medida do ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Observe que, para demonstrar essa propriedade, usamos a definição de ângulos suplementares e a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, que demonstramos anteriormente. Assim, vamos construindo o conhecimento em Geometria.

Junte-se a um colega para descobrir as medidas desconhecidas indicadas por x e y no triângulo abaixo. $x = 135°$ e $y = 45°$



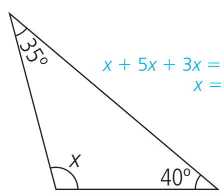
Ilustrações: DAE

Exercícios

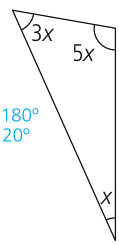
9 Dois ângulos de um triângulo medem, respectivamente, 27° e 41°. Quanto mede o terceiro ângulo? 112°

10 Determine x em cada um dos triângulos:

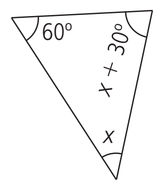
a) $x = 105°$



b) $x + 5x + 3x = 180°$
$x = 20°$

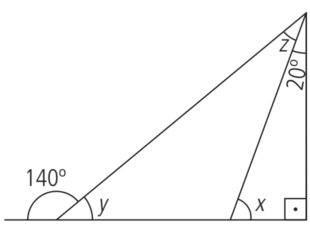


c) $x + 30° + x + 60° = 180°$
$x = 45°$

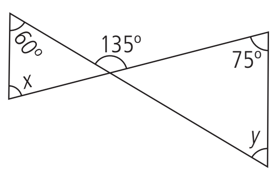


11 Determine x, y e z:

a) $x = 70°$, $y = 40°$, $z = 30°$



b) $x = 75°$, $y = 60°$



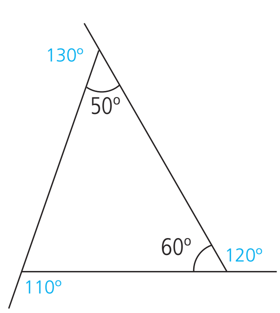
12 Responda.

a) O que é um triângulo equilátero?
É um triângulo que tem todos os lados com medidas iguais.

b) O que é um triângulo isósceles?
É um triângulo que tem dois lados com medidas iguais.

c) Como são os ângulos de um triângulo isósceles? Dois deles são congruentes.

13 Observe a figura abaixo e responda:



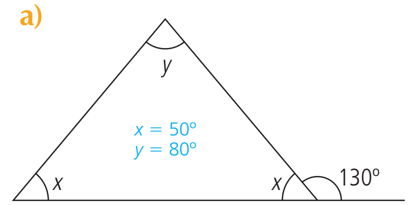
a) Quanto medem os ângulos externos?

b) Qual é a soma dos ângulos externos? 360°

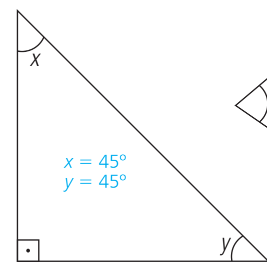
14 Num triângulo com dois ângulos congruentes, o ângulo diferente mede 25°. Quanto mede cada um dos ângulos congruentes? 77°30′

15 Os triângulos seguintes são isósceles. Qual é o valor dos ângulos indicados com letras?

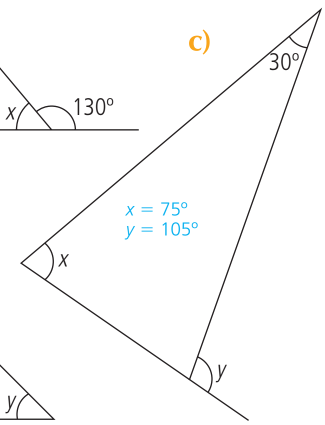
a) $x = 50°$, $y = 80°$



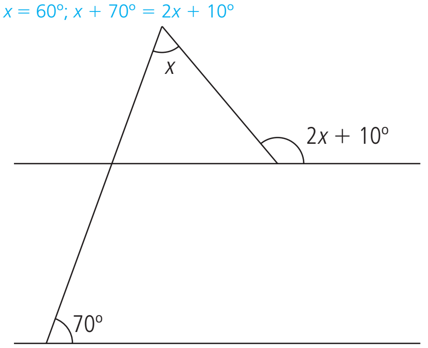
b) $x = 45°$, $y = 45°$



c) $x = 75°$, $y = 105°$



16 Calcule o valor de x, considerando $r // s$.
$x = 60°$; $x + 70° = 2x + 10°$



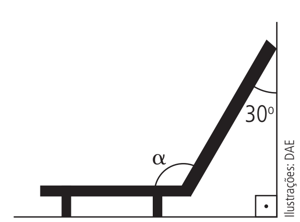
17 (Saresp) O encosto da última poltrona de um ônibus, quando totalmente reclinado, forma um ângulo de 30° com a parede do ônibus (veja a figura abaixo). O ângulo α na figura abaixo mostra o maior valor que o encosto pode reclinar. O valor de α é:

a) 50°

b) 90°

c) 100°

x d) 120°



Vale a pena ler

Triângulo, para que te quero?

Gonçalo Figueiredo/Dreamstime.com

Uma das figuras mais presentes no ambiente que nos cerca e com a qual a humanidade tem lidado até hoje é o triângulo. Embora sua forma seja muito simples, as inúmeras relações que existem entre seus próprios elementos, e entre esses e os de outras figuras igualmente simples, são mais complexas do que poderíamos imaginar.

Que magia os triângulos apresentam, já que desde os mais remotos tempos eles têm exercido um fascínio especial sobre os homens? Por que o homem ergueu templos em homenagem aos seus reis e deuses, nos quais tal figura ressalta à vista do observador?

Em muitos objetos e artefatos construídos pelo homem, lá estão eles: os triângulos. Que utilidade apresentam? Será que servem somente como elemento decorativo?

Parece que, mais uma vez, o homem reúne a beleza e a competência para oferecer a todos os seres uma obra original, em que o triângulo sintetiza o aspecto decorativo e o utilitário.

Por que utilitário?

O triângulo, entre todos os polígonos, apresenta uma rigidez geométrica que os outros não têm. Uma vez construído, é impossível modificar a abertura de seus ângulos e construir outro triângulo.

Ligio/Dreamstime.com

◆ Imagine como ficaria bamba a Torre Eiffel se não existissem os triângulos para torná-la estável.

Suzana Laino Cândido. *Um certo Pitágoras*. São Paulo: Ed. do Brasil, 2003. p.2. (PEC – Projeto Escola e Cidadania para todos.)

Seção livre

18 (Encceja-MEC) Os carpinteiros costumam colocar uma espécie de trava de forma triangular quando fazem portões, telhados etc. Isso se deve ao fato de que o triângulo é, dentre os polígonos:

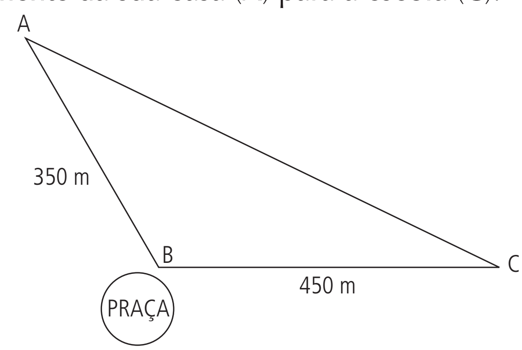
a) o que tem mais ângulos.

b) o que tem mais lados.

c) o que suporta maior peso.

x d) uma figura rígida que não se deforma.

19 Observe o trajeto de Gustavo que vai diretamente da sua casa (A) para a escola (C).



Escolha a afirmação verdadeira, depois justifique.

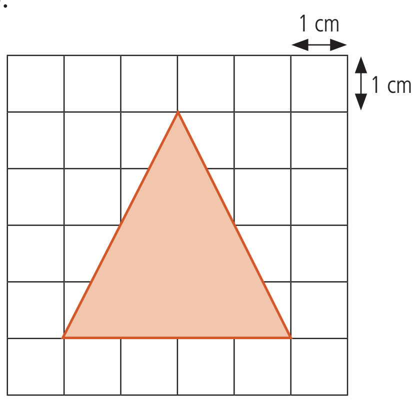
a) A distância entre A e C é de 800 m.

x b) A distância entre A e C é inferior a 800 m.

Afirmação **b**, porque, num triângulo, qualquer lado deve ser menor que a soma dos outros dois.

c) A distância entre A e C é superior a 800 m.

20 Observe o triângulo representado no quadriculado.



a) Classifique o triângulo quanto aos lados.

Isósceles.

b) Desenhe, no caderno, um retângulo com a mesma área do triângulo.

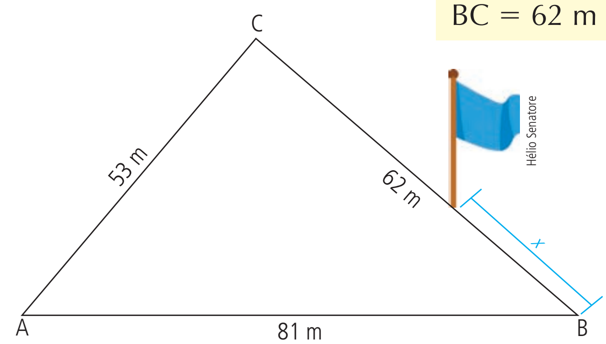
Por exemplo:

21 Desenhe um triângulo cujas medidas dos lados sejam três números naturais consecutivos. Essa construção será sempre possível com quaisquer números naturais consecutivos?

Não será possível para 1, 2 e 3.

22 (Saresp) Duas pessoas disputam uma corrida em volta de um terreno triangular, conforme a figura a seguir.

BC = 62 m



Elas saem juntas do ponto A, mas cada uma vai por um caminho diferente. Quem bater primeiro na bandeira de chegada que se encontra entre C e B ganha a corrida. Para que as duas pessoas percorram a mesma distância, a bandeira deve ser colocada a:

a) 15 m da esquina B.

x b) 17 m da esquina B.

- $81 + x = 53 + (62 - x)$
  $2x = 34$
  $x = 17$

c) 40 m da esquina C.

d) 31 m da esquina B ou C.

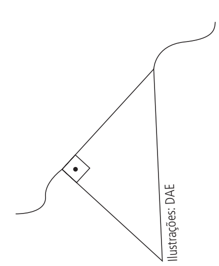
23 (Saresp) Num dos lados de um triângulo retângulo isósceles está colado um barbante com as pontas livres, como mostra a figura. Esticando-se o barbante e girando-o em torno de si mesmo, é visto no espaço um sólido com a forma de:

x a) um cone.

b) um cilindro.

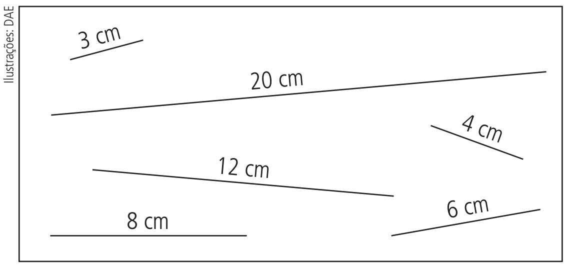
c) uma esfera.

d) uma pirâmide.



Revisando

24 Dispomos de 6 varetas com os seguintes comprimentos: • $6 + 8 + 12 = 26$



Qual é o perímetro do maior triângulo que se pode construir com três dessas varetas? 26 cm

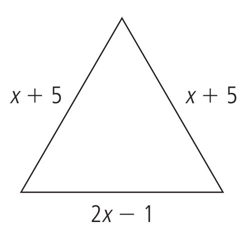
25 O perímetro de um triângulo isósceles é de 50 cm e cada um dos dois lados congruentes tem 18 cm de comprimento. Qual é o comprimento do outro lado? 14 cm

26 A figura representa um triângulo isósceles.

a) Qual expressão traduz o perímetro do triângulo? $4x + 9$

b) Calcule x de modo que o triângulo seja equilátero. $x = 6$

$2x - 1 = x + 5$



27 (UFPE) Considere um triângulo equilátero de lado ℓ como mostra a figura a seguir. Unindo-se os pontos médios dos seus lados obtemos quatro novos triângulos. O perímetro de qualquer um destes quatro triângulos é igual a:

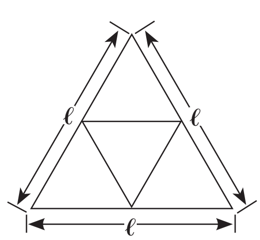
$P = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} = \frac{3\ell}{2}$

a) 3ℓ

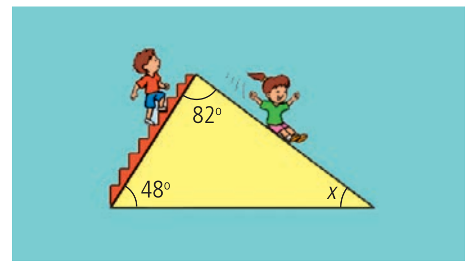
b) $\frac{\ell}{2}$

x c) $\frac{3\ell}{2}$

d) $\frac{5\ell}{2}$



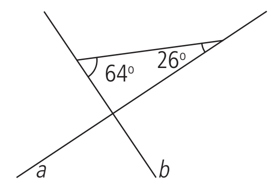
28 Observe a figura e responda:



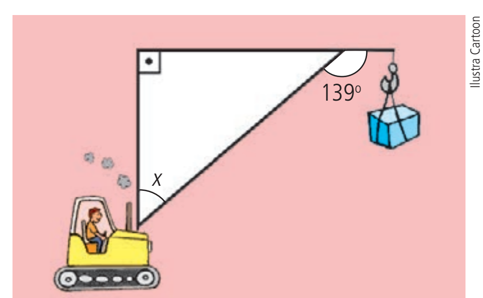
a) Qual é o valor de x? 50°

b) Classifique o triângulo quanto aos ângulos. Acutângulo.

29 As retas a e b são perpendiculares? Sim.

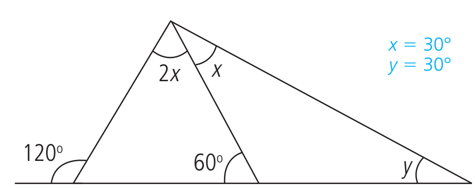


30 Calcule o valor de x. $x = 49°$



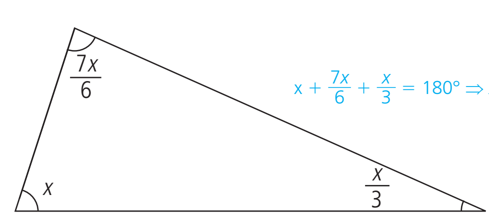
31 Calcule a medida dos ângulos indicados pelas letras.

a)



$x = 30°$
$y = 30°$

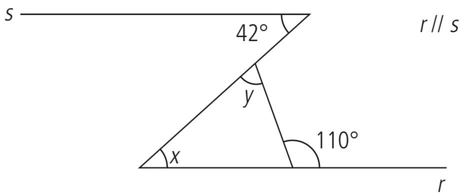
b)



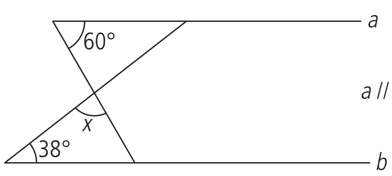
$x + \frac{7x}{6} + \frac{x}{3} = 180° \Rightarrow x = 72°$

32 Calcule a medida dos ângulos indicados por letras. $x = 42°$ e $y = 68°$

a)

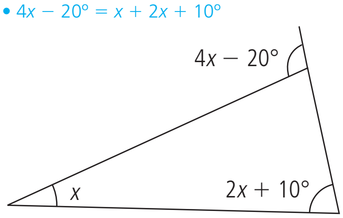


b)

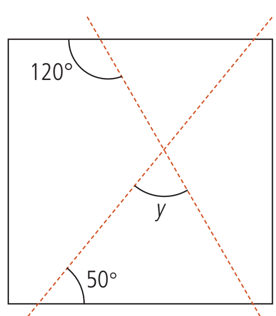


$x = 82°$ • $x + 38° + 60° = 180°$

33 Determine o valor de x.
30° • $4x - 20° = x + 2x + 10°$

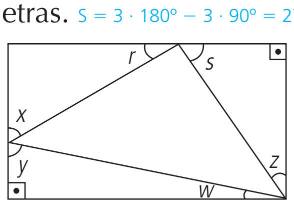


34 (Encceja-MEC) Uma peça de mosaico é confeccionada a partir do corte de um azulejo quadrado. Os lados dos quadrados são paralelos e os ângulos feitos pelos cortes são representados conforme desenho abaixo.



Qual é o valor do ângulo y, em graus, de um dos triângulos encontrados no recorte? 70°

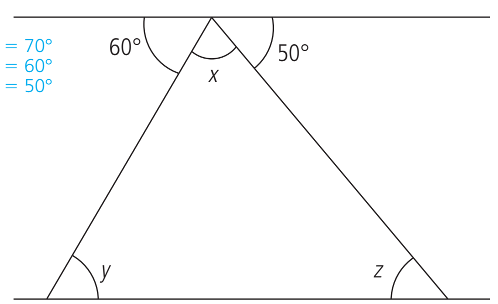
35 Calcule a soma de todas as medidas indicadas por letras. $S = 3 \cdot 180° - 3 \cdot 90° = 270°$



Desafios

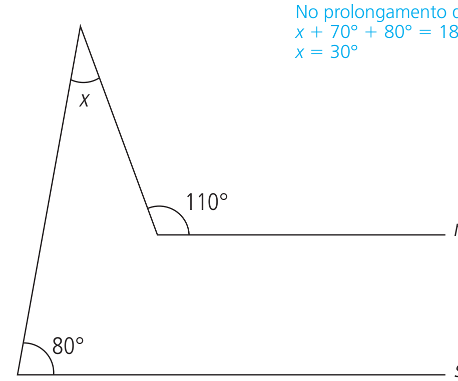
36 Se as retas r e s são paralelas, determine a medida dos ângulos indicados com letras.

a)
$x = 70°$
$y = 60°$
$z = 50°$

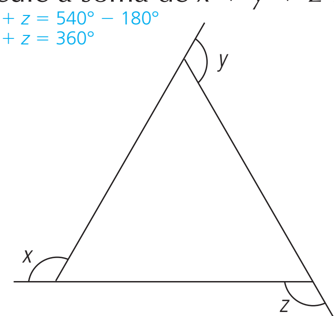


b)

No prolongamento de r, temos:
$x + 70° + 80° = 180°$
$x = 30°$



37 Calcule a soma de $x + y + z$ na figura.
$x + y + z = 540° - 180°$
$x + y + z = 360°$



Ilustrações: DAE

38 As medidas dos ângulos de um triângulo são proporcionais a 2, 3 e 4.

a) Quais são as medidas dos ângulos internos?
40°, 60°, 80° • $2x + 3x + 4x = 180°$

b) Quais são as medidas dos ângulos externos?
140°, 120°, 100°

c) As medidas dos ângulos externos são proporcionais a que números? 7, 6, 5

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

39 As medidas de três segmentos de reta são 4 cm, 5 cm e 10 cm. Com esses três segmentos:

x **a)** não é possível construir um triângulo.

b) é possível construir um triângulo retângulo.

c) é possível construir um triângulo isósceles.

d) é possível construir um triângulo acutângulo.

40 É verdade que um triângulo retângulo pode ser:

x **a)** isósceles.

b) equilátero.

c) equiângulo.

d) obtusângulo.

41 (UFMA) Dois lados de um triângulo isósceles medem, respectivamente, 5 cm e 2 cm. Qual é o seu perímetro?

a) 7 cm

b) 9 cm

x **c)** 12 cm

d) 14 cm

P = 5 + 5 + 2
P = 12
Cada lado deve ser menor que a soma dos outros dois.

42 (UEL-PR) Os ângulos internos de um triângulo medem, em graus, A, B e C. Se A tem 25 graus a mais que B, e C tem 9 graus a menos que o dobro de B, então B é igual a:

x **a)** 41° **b)** 59° **c)** 66° **d)** 73°

$x + 25° + x + 2x - 9° = 180°$

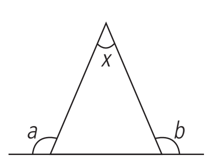
43 (PUC-SP) Na figura $a = 100°$ e $b = 110°$. Quanto mede o ângulo x?

x **a)** 30°

b) 50°

c) 80°

d) 100°



44 (Mack-SP) Na figura, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. O valor de a é:

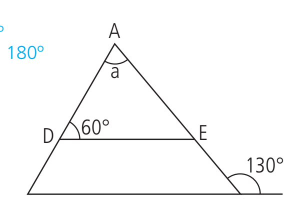
a) 80°

x **b)** 70°

c) 60°

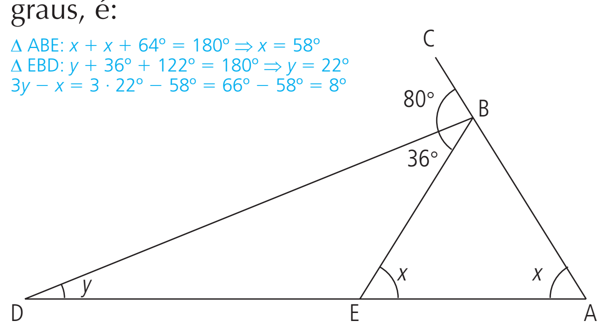
d) 50°

• med (DÊA) = 50°
• $a + 50° + 60° = 180°$
• $a = 70°$



45 (UFMG) Na figura, o valor de $3y - x$, em graus, é:

Δ ABE: $x + x + 64° = 180° \Rightarrow x = 58°$
Δ EBD: $y + 36° + 122° = 180° \Rightarrow y = 22°$
$3y - x = 3 \cdot 22° - 58° = 66° - 58° = 8°$



x **a)** 8° **c)** 12°

b) 10° **d)** 16°

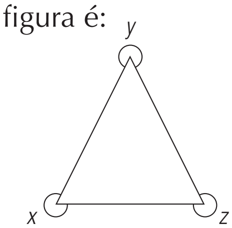
46 A soma de $x + y + z$ na figura é:

a) 360° $x + y + z = 1080° - 180°$
$x + y + z = 900°$

b) 720°

x **c)** 900°

d) 1080°



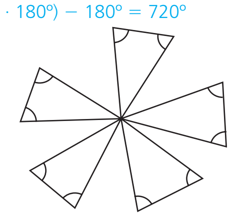
47 Quanto vale a soma das medidas dos 10 ângulos indicados na figura? $(5 \cdot 180°) - 180° = 720°$

a) 360°

b) 600°

x **c)** 720°

d) 900°



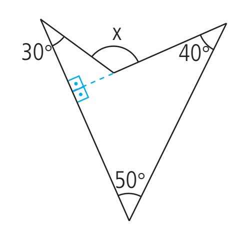
48 (UMC-SP) Na figura abaixo, a medida do ângulo x é:

a) 70º

b) 80º

c) 100º

x **d)** 120º $x = 30° + 90°$
$x = 120°$



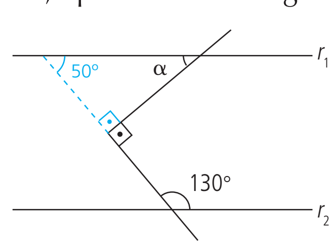
49 (Unirio-RJ) As retas r_1 e r_2 são paralelas. O valor do ângulo α, apresentado na figura abaixo, é:

x **a)** 40°

b) 45°

c) 50°

d) 65°



Ilustrações: DAE

Triângulos: congruência e pontos notáveis

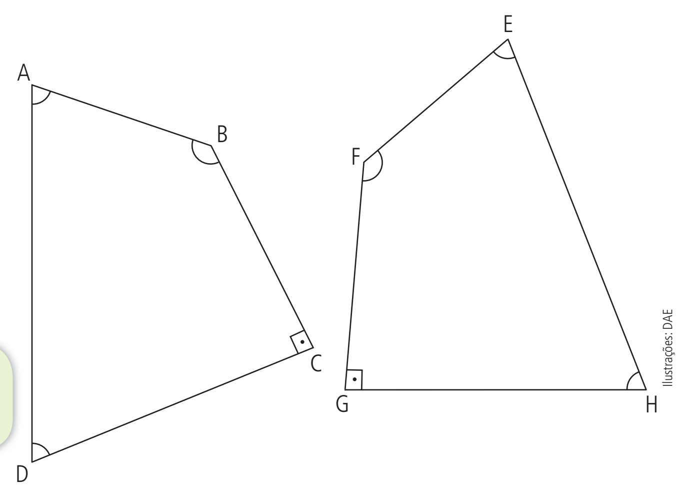
1. Congruência de figuras planas

Já trabalhamos com:

- Segmentos congruentes: têm mesma medida.
- Ângulos congruentes: têm mesma medida.

O que seriam figuras planas congruentes?

Se você copiar e recortar os quadriláteros ao lado, verá que eles se sobrepõem perfeitamente, ou seja, coincidem.



> Duas figuras planas são **congruentes** se quando sobrepostas coincidem ponto a ponto.

Nesta unidade trataremos da congruência de polígonos, em especial de triângulos.

Com auxílio de régua e transferidor, meça os lados e os ângulos internos dos quadriláteros ABCD e EFGH. Anote os valores em seu caderno, em uma tabela como esta ao lado.

Quadrilátero ABCD	**Quadrilátero EFGH**
$\hat{A}$ = 75°	$\hat{E}$ = 75°
$\hat{B}$ = 125°	$\hat{F}$ = 125°
$\hat{C}$ = 90°	$\hat{G}$ = 90°
$\hat{D}$ = 70°	$\hat{H}$ = 70°
$\overline{AB}$ = 2,5 cm	$\overline{EF}$ = 2,5 cm
$\overline{BC}$ = 2 cm	$\overline{FG}$ = 2 cm
$\overline{CD}$ = 3 cm	$\overline{GH}$ = 3 cm
$\overline{DA}$ = 3,5 cm	$\overline{HE}$ = 3,5 cm

Usando o símbolo $\equiv$, que significa congruente, observamos que:

$\hat{A} \equiv \hat{E}$ $\quad \overline{AB} \equiv \overline{EF}$

$\hat{B} \equiv \hat{F}$ $\quad \overline{BC} \equiv \overline{FG}$

$\hat{C} \equiv \hat{G}$ $\quad \overline{CD} \equiv \overline{GH}$

$\hat{D} \equiv \hat{H}$ $\quad \overline{DA} \equiv \overline{HE}$

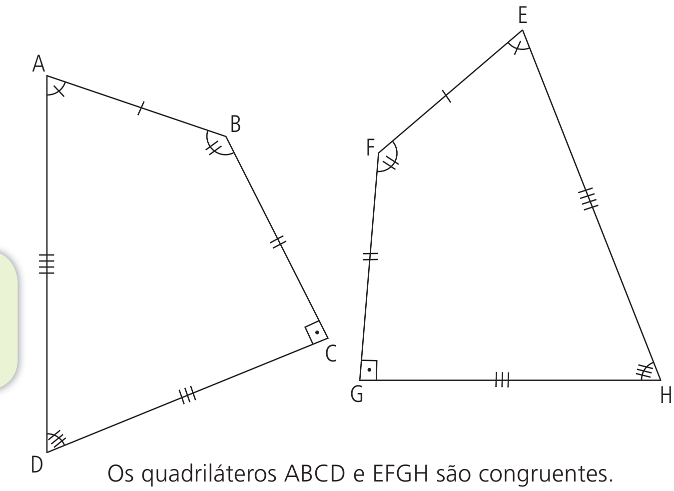
A cada ângulo do quadrilátero ABCD corresponde um ângulo do quadrilátero EFGH, que é congruente a ele.

A cada lado do quadrilátero ABCD corresponde um lado do quadrilátero EFGH, que é congruente a ele.

Por exemplo, ao ângulo A corresponde o ângulo E e vice-versa.

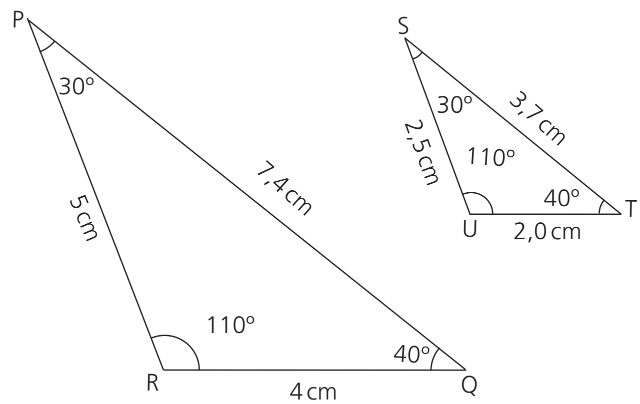
Usaremos "tracinhos" para identificar pares de lados e pares de ângulos correspondentes. Veja na figura ao lado.

Dois polígonos são congruentes quando apresentam lados correspondentes congruentes e ângulos correspondentes congruentes.



Os quadriláteros ABCD e EFGH são congruentes.

Escrevemos: ABCD ≡ EFGH.



Nos triângulos PQR e STU temos ângulos correspondentes congruentes:

$\hat{P} \equiv \hat{S}$

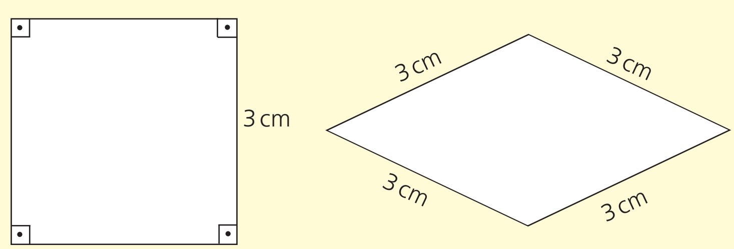
$\hat{Q} \equiv \hat{T}$

$\hat{R} \equiv \hat{U}$

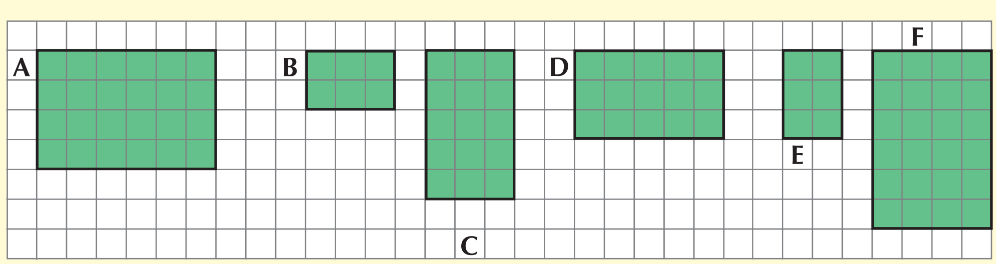
Mas os lados correspondentes não têm a mesma medida. Esses triângulos não são congruentes.

1. Os quadriláteros ilustrados ao lado são congruentes? Justifique sua resposta.

Não, pois os ângulos correspondentes não são congruentes.



2. Separe os retângulos em grupos de retângulos congruentes. A e F; C e D; B e E.



Ilustrações: DAE

3. Qual é a afirmativa correta?

Dois triângulos congruentes têm:

a) mesma área e perímetro diferentes.

x **b)** mesmo perímetro e mesma área.

c) mesmo perímetro e áreas diferentes.

d) áreas diferentes e perímetros diferentes.

2. Casos de congruência de triângulos

Triângulos são polígonos, portanto, para que dois triângulos sejam congruentes precisamos ter lados correspondentes congruentes e ângulos correspondentes congruentes.

Para decidirmos se dois triângulos são ou não congruentes, precisamos verificar 6 condições:

- 3 congruências entre lados correspondentes;
- 3 congruências entre ângulos correspondentes.

No entanto, os triângulos apresentam características que permitirão reduzir esse trabalho.

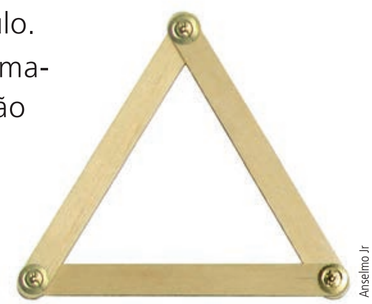
Para lembrar...
Condição de existência de um triângulo

Vimos no 7º ano que só é possível construir um triângulo se a medida do maior lado for menor que a soma das medidas dos outros dois lados. Esse fato será importante, pois vamos construir alguns triângulos.

Caso LLL

Construímos um triângulo com palitos de sorvete.

Faça um igual e verifique que não é possível deformar o triângulo.



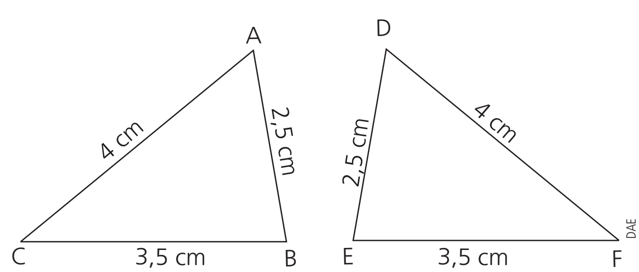
Quando fixamos as medidas dos lados de um triângulo, automaticamente fixamos as medidas de seus ângulos, por isso ele não pode ser deformado.

Isso significa que, para saber se dois triângulos são congruentes, podemos verificar se seus lados são respectivamente congruentes. Se forem, os ângulos também serão, e teremos dois triângulos congruentes.

É isso o que diz o **caso LLL** (lado-lado-lado) de congruência de triângulos:

Dois triângulos que têm os lados correspondentes congruentes são congruentes.

Veja os triângulos ABC e DEF, eles apresentam lados respectivamente congruentes.

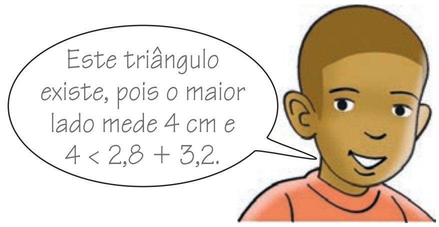


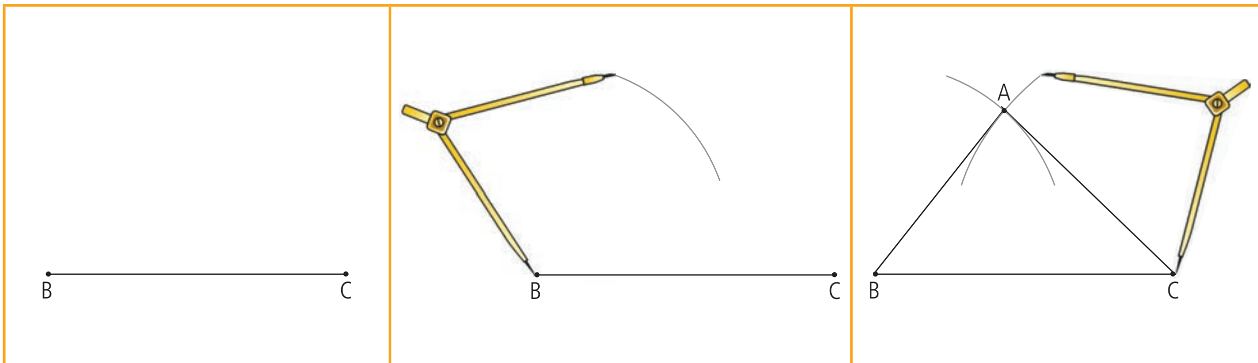
Esse fato garante que os ângulos correspondentes também são congruentes, e podemos concluir que os triângulos são congruentes. Escreveremos assim:

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ pelo caso LLL (Lê-se: caso lado-lado-lado.)

Apanhe seu material de desenho. Vamos construir um triângulo ABC dadas as medidas de seus lados: AB = 2,8 cm, AC = 3,2 cm e BC = 4 cm.

O triângulo ABC que você construiu é congruente ao que construímos aqui e é congruente aos que seus colegas construíram, pelo caso LLL.





Ilustrações: Hélio Senatore

1. Traçamos o lado BC. Dois vértices estão determinados. Só falta determinar o vértice A. Você pode começar traçando qualquer lado.

2. Usando a régua, abra o compasso até a marca de 2,8 cm. Com a ponta seca em B, trace um arco.

3. Agora com abertura igual a 3,2 cm, medida na régua, e ponta seca em C, trace outro arco. Determinamos o ponto A e traçamos o triângulo ABC.

Caso ALA

DAE

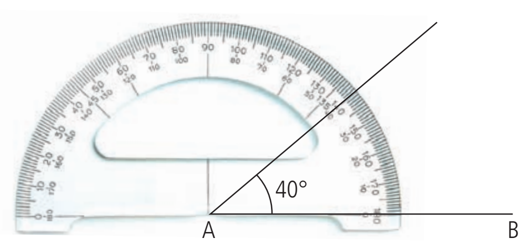
Vamos construir com régua e compasso o triângulo ABC, sendo dadas as medidas:

AB = 4 cm

$\hat{A} = 40°$

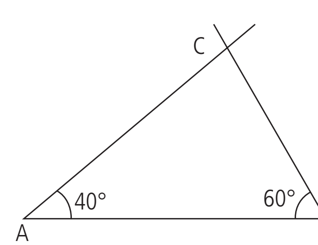
$\hat{B} = 60°$

Faça também a construção em seu caderno.



Traçamos o lado $\overline{AB}$.

Com transferidor traçamos o ângulo de 40° com vértice em A e, em seguida, o ângulo de 60° com vértice em B. Observe que, traçando esses elementos, o vértice C fica determinado, fixando as medidas de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\hat{C}$.



DAE

O triângulo que você construiu em seu caderno é congruente ao triângulo ABC traçado por nós e é congruente aos triângulos traçados pelos seus colegas. Confira!

Verificamos o **caso ALA** (ângulo-lado-ângulo) de congruência de triângulos:

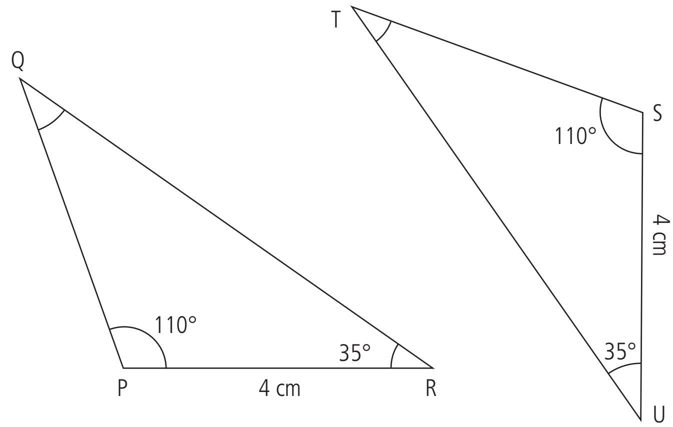
> Dois triângulos que têm dois ângulos e o lado compreendido entre eles respectivamente congruentes são congruentes.

Nos triângulos PQR e STU, temos:

$\hat{P} \equiv \hat{S}$

$\hat{R} \equiv \hat{U}$

$\overline{PR} \equiv \overline{SU}$



A congruência desses pares de elementos garante a congruência dos demais pares.

Podemos concluir que esses triângulos são congruentes. Escrevemos assim:

$\triangle PQR \equiv \triangle STU$ pelo caso ALA (Lê-se: caso ângulo-lado-ângulo.)

Atenção: ao nomear os triângulos, siga a correspondência entre os ângulos:

$\hat{P} \rightarrow \hat{S}$

$\hat{Q} \rightarrow \hat{T}$

$\hat{R} \rightarrow \hat{U}$

Por isso, escrevemos $\triangle PQR \equiv \triangle STU$ com os vértices nessa ordem.

Caso LAL

Vamos a mais uma construção. Faça em seu caderno.

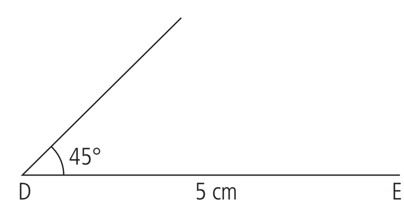
Agora traçaremos o triângulo DEF, dados:

DE $=$ 5 cm

$\hat{D} = 45°$

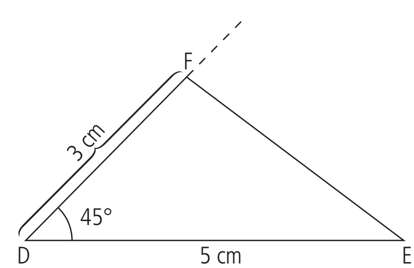
DF $=$ 3 cm

Traçamos o lado $\overline{DE}$ e o ângulo de 45° com vértice em D.



Como DF $=$ 3 cm, determinamos o vértice F e automaticamente ficam determinadas as medidas de $\overline{EF}$, $\hat{F}$ e $\hat{E}$.

O triângulo que você construiu é congruente ao triângulo DEF que nós construímos, e é congruente aos triângulos traçados por seus colegas. É importante conferir essa conclusão.



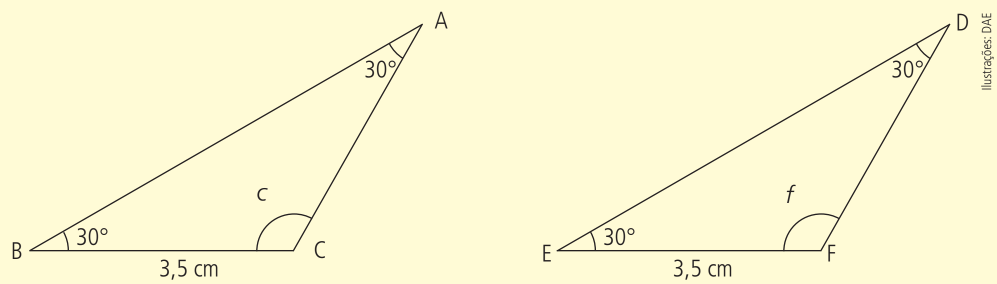
Ilustrações: DAE

Verificamos o **caso LAL** (lado-ângulo-lado) de congruência de triângulos:

Dois triângulos que têm dois lados e o ângulo formado por eles respectivamente congruentes são congruentes.

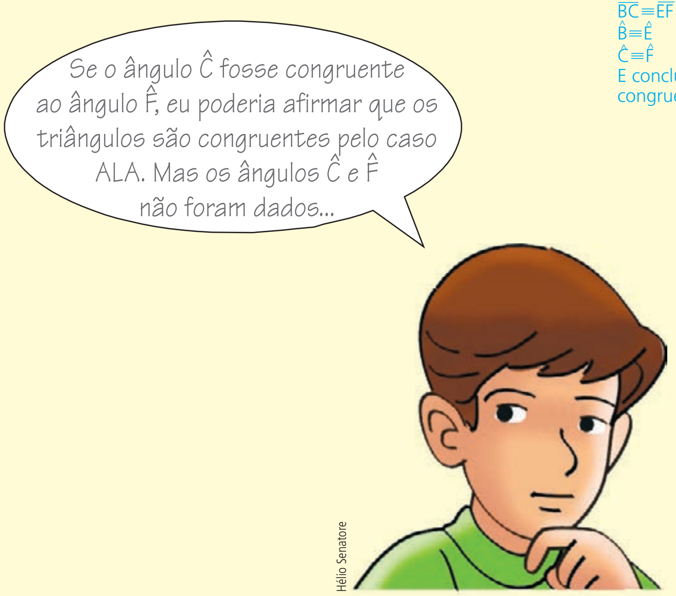
Os casos de congruência permitem verificarmos se dois triângulos são congruentes a partir da congruência de 3 elementos correspondentes.

Daniel precisa descobrir se os triângulos ABC e DEF abaixo são congruentes.

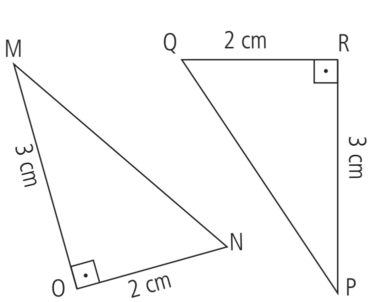


Veja como ele pensou, junte-se a um colega, tentem descobrir que ideia Daniel teve e descubram se os triângulos são congruentes.

Daniel lembrou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e determinou $c = 120°$ e $f = 120°$.
Daí escreveu:
$\overline{BC} \equiv \overline{EF}$
$\hat{B} \equiv \hat{E}$
$\hat{C} \equiv \hat{F}$
E concluiu que os triângulos são congruentes pelo caso ALA.



Veja este exemplo:

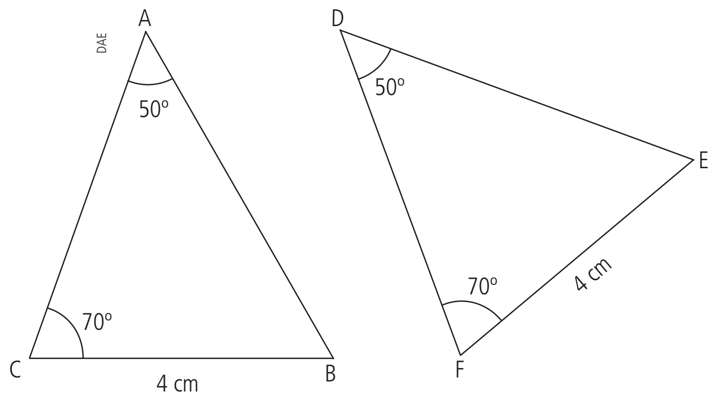


Nesses triângulos, temos:
$\overline{ON} \equiv \overline{RQ}$
$\overline{OM} \equiv \overline{RP}$
$\hat{O} \equiv \hat{R}$

A congruência desses pares de elementos garante a congruência dos demais pares.
Os triângulos ONM e RQP são congruentes.

Escrevemos: $\triangle ONM \equiv \triangle RQP$ pelo caso LAL. (Lê-se: caso lado-ângulo-lado.)

Observe os triângulos abaixo. Sem fazer medições, podemos concluir que os triângulos são congruentes?



Exatamente! Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, descobrimos que $\hat{B} = 60°$ e $\hat{E} = 60°$.

Com essa informação podemos concluir que o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF, pelo caso ALA, pois:

$$\overline{CB} \equiv \overline{FE}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{F}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{E}$$

Assim como escrevemos ABC, devemos escrever DEF respeitando a correspondência entre os ângulos.

Exercícios

1 Responda.

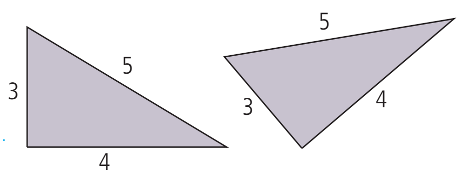
a) Dois triângulos congruentes têm o mesmo perímetro? Sim.

b) Dois triângulos congruentes têm a mesma área? Sim.

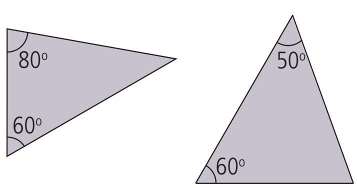
c) Para verificar se dois triângulos são congruentes, é necessário verificar a congruência dos seis elementos (3 lados e 3 ângulos)? Não.

2 Observe os pares de triângulos a seguir e anote no caderno os que são congruentes, considerando apenas as indicações dadas.

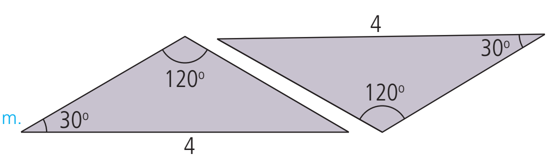
a) Sim.



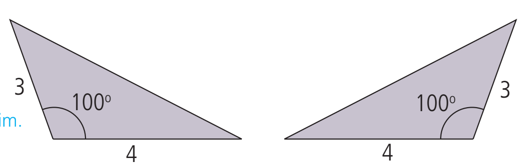
b) Não.



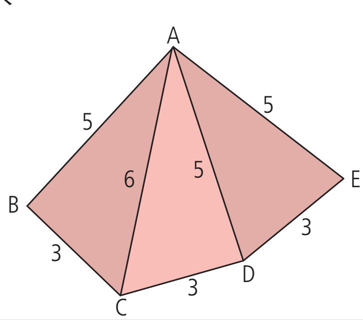
c) Sim.



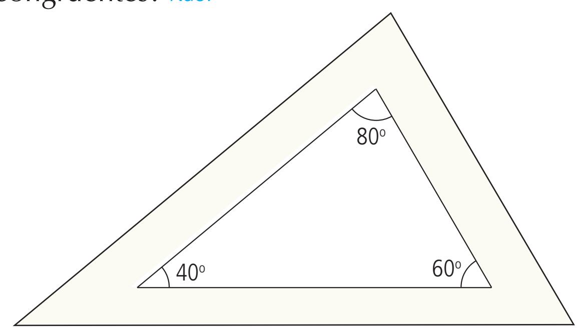
d) Sim.



3 Na figura existem dois triângulos congruentes. Quais são eles? ABC e ADC

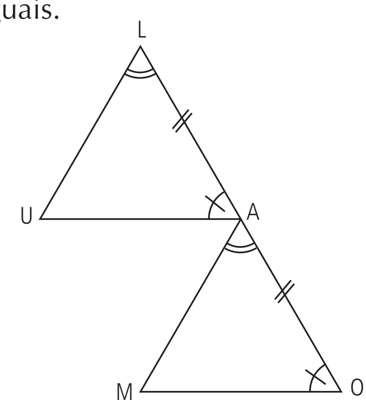


4 Se você sabe que dois triângulos têm os três ângulos medindo respectivamente 40°, 60° e 80°, pode concluir que esses triângulos são congruentes? Não.



Ilustrações: DAE

5 (Saresp) Nos triângulos LUA e AMO os elementos congruentes estão assinalados com marcas iguais.

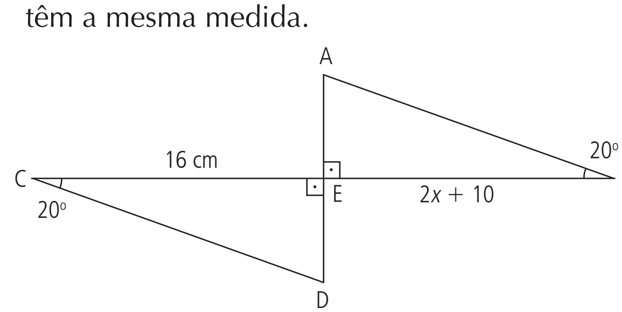


Sabendo-se que UA = 10 cm e LA = 8 cm, responda:

a) Quanto mede $\overline{AO}$? 8 cm

b) Quanto mede $\overline{MO}$? 10 cm

6 (Saresp) Na figura, os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{ED}$ têm a mesma medida.



Qual o valor de x? 3 cm $2x + 10 = 16$

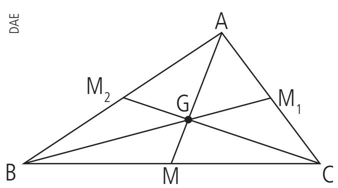
3. Medianas, bissetrizes e alturas num triângulo

Ainda há mais o que aprender sobre os triângulos...

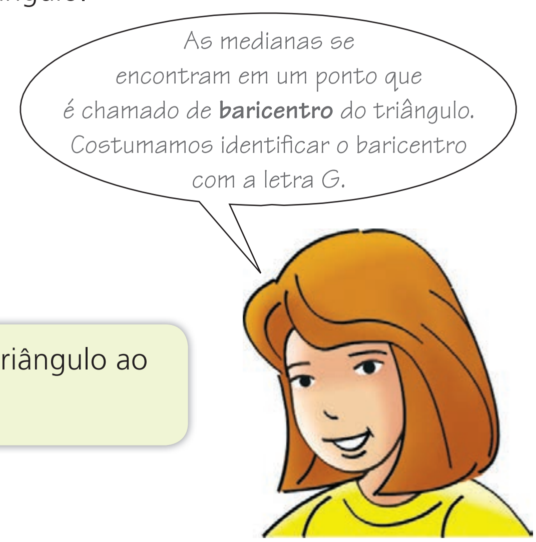
Medianas

Traçamos um triângulo ABC e segmento $\overline{AM}$ que une o vértice A ao ponto médio M do lado oposto a esse vértice. $\overline{AM}$ é uma das medianas desse triângulo.

DAE



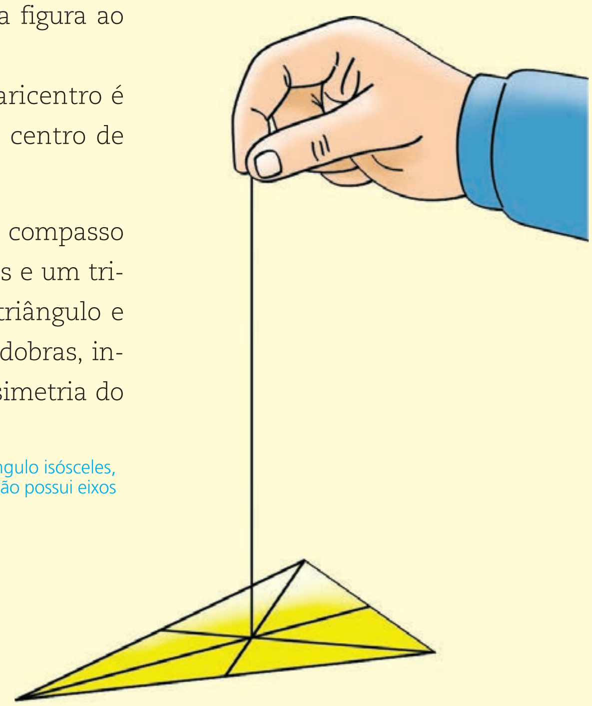
Todo triângulo tem 3 medianas, uma relativa a cada um de seus lados.



Ilustrações: Hélio Senatore

Mediana é o segmento que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

1. Usando régua e compasso, construa um triângulo em cartolina e trace suas medianas, determinando G (baricentro). Recorte o triângulo, faça um pequeno furo no ponto G e amarre um fio que permita suspender o triângulo, como vemos na figura ao lado. O triângulo ficou equilibrado?
Esta atividade permite descobrir por que o baricentro é também chamado de ponto de equilíbrio, ou centro de gravidade do triângulo.

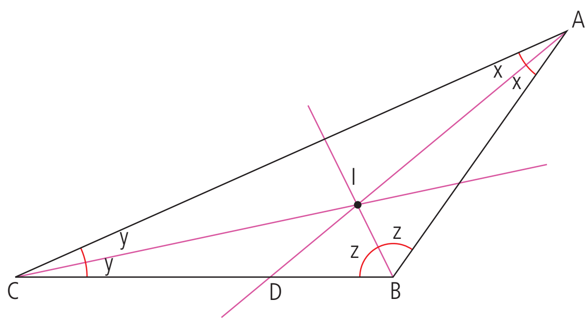


2. Construa no caderno, com auxílio de régua e compasso um triângulo equilátero, um triângulo isósceles e um triângulo escaleno. Trace as medianas de cada triângulo e recorte as três figuras com cuidado. Fazendo dobras, investigue em quais casos a mediana é eixo de simetria do triângulo. Troque informações com os colegas!
As 3 medianas do triângulo equilátero são eixos de simetria. No triângulo isósceles, só a mediana relativa à base é eixo de simetria. O triângulo escaleno não possui eixos de simetria.

Bissetrizes

Na figura abaixo, traçamos as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ do triângulo.

Todo triângulo apresenta três bissetrizes que se encontram em um ponto chamado incentro (I) do triângulo.



Observe que a bissetriz de $\hat{A}$ intersecta o lado $\overline{BC}$ num ponto D.

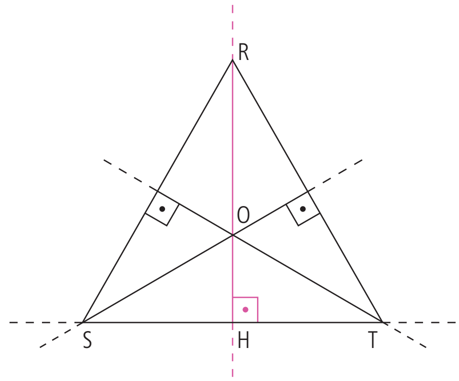
O segmento $\overline{AD}$ está contido na bissetriz de $\hat{A}$.

A medida de $\overline{AD}$ é a medida da bissetriz relativa ao vértice A deste triângulo.

Da mesma forma, podemos obter a medida da bissetriz relativa ao vértice B e a medida da bissetriz relativa ao vértice C.

Alturas

Traçamos pelo vértice R uma reta perpendicular à reta que contém o lado $\overline{ST}$ do triângulo, obtendo o ponto H.



Ilustrações: DAE

O segmento $\overline{RH}$ está contido na reta perpendicular que traçamos.

A medida de $\overline{RH}$ é a medida da altura relativa ao lado $\overline{ST}$ deste triângulo.

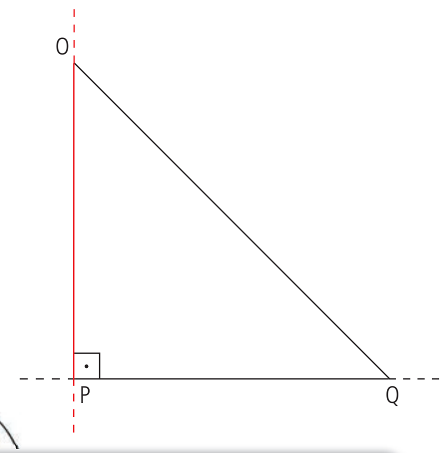
Da mesma forma, podemos obter a medida da altura relativa ao lado $\overline{RT}$ e a medida da altura relativa ao lado $\overline{RS}$.

O ponto de encontro das três alturas de um triângulo é chamado de ortocentro e indicado usualmente pela letra O.

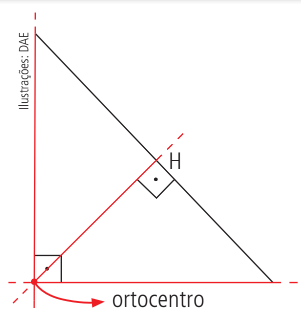
Há exercícios em que se escreve somente "altura" para indicar a medida da altura. Em geral, o contexto e o enunciado da questão deixam claro que se trata de uma medida.

Alturas do triângulo retângulo

O triângulo OPQ é retângulo.
Traçamos a altura relativa ao lado $\overline{PQ}$ deste triângulo.



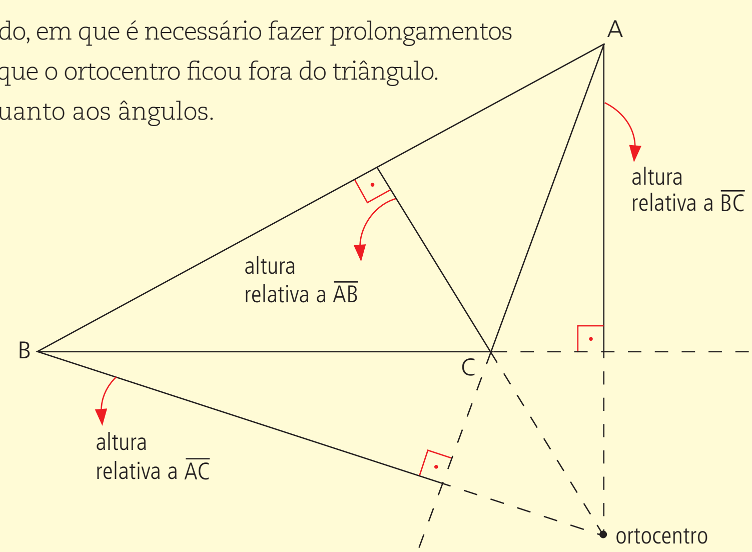
Nos triângulos retângulos, as medidas de duas das alturas coincidem com as medidas dos lados que formam o ângulo reto.



Traçando a terceira altura, percebemos que o ortocentro é o vértice do ângulo reto.

1. Há triângulos, como o ilustrado, em que é necessário fazer prolongamentos para traçar alturas. Observe que o ortocentro ficou fora do triângulo. Classifique esse triângulo quanto aos ângulos.

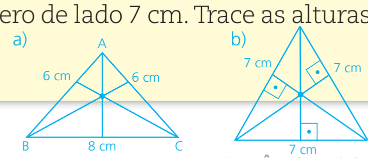
Obtusângulo.



2. Construa no caderno:

a) um triângulo ABC dados: BC = 8 cm, AC = AB = 6 cm. Trace as medianas desse triângulo e marque o baricentro.

b) um triângulo equilátero de lado 7 cm. Trace as alturas desse triângulo e marque o ortocentro. Use o esquadro.



Exercícios

7 Relacione no caderno as letras do primeiro quadro com os números do segundo quadro.
A - III; B - I; C - II

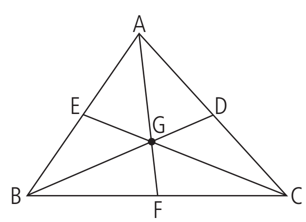
A incentro B ortocentro C baricentro

I ponto de encontro das alturas.

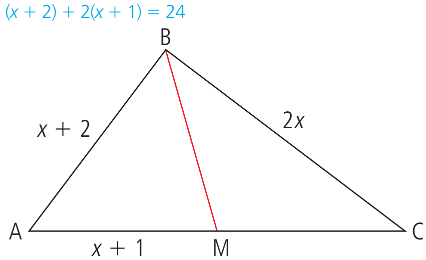
II ponto de encontro das medianas.

III ponto de encontro das bissetrizes.

8 Na figura, onde G é o baricentro, AE = 1,8 cm; DC = 2 cm e FC = 2,4 cm; calcule, em centímetros, o perímetro do triângulo ABC. 12,4 cm



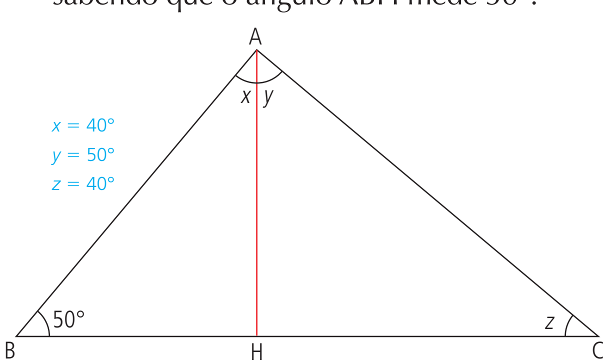
9 Na figura, $\overline{BM}$ é mediana do triângulo ABC.
• $2x + (x + 2) + 2(x + 1) = 24$



Calcule x de modo que o perímetro do triângulo ABC seja 24 cm. 4 cm

10 Na figura, ABC é um triângulo retângulo em A e $\overline{AH}$ é uma das alturas. Calcule x, y e z sabendo que o ângulo $A\hat{B}H$ mede 50°.

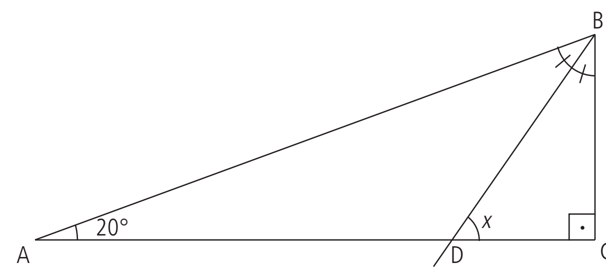
$x = 40°$
$y = 50°$
$z = 40°$



11 Quantas alturas devem ser traçadas para determinar o ortocentro de um triângulo?
2 alturas

12 Em que triângulo o ortocentro coincide com um dos vértices?
No triângulo retângulo.

13 Na figura, o triângulo ABC tem um ângulo reto e o ângulo $\hat{A}$ mede 20°. Se $\overrightarrow{BD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, qual é o valor de x? 55°



Ilustrações: DAE

14 (UFMG) Na figura abaixo:

- $\overrightarrow{BD}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$;
- a medida de $E\hat{C}B$ é o dobro da medida de $E\hat{A}B$;
- a medida do ângulo $E\hat{C}B$ é 80°.

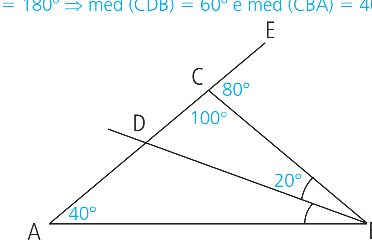
A medida do ângulo $C\hat{D}B$ é:
med($C\hat{D}B$) + 100° + 20° = 180° ⇒ med ($C\hat{D}B$) = 60° e med ($C\hat{B}A$) = 40°

a) 50º

b) 55º

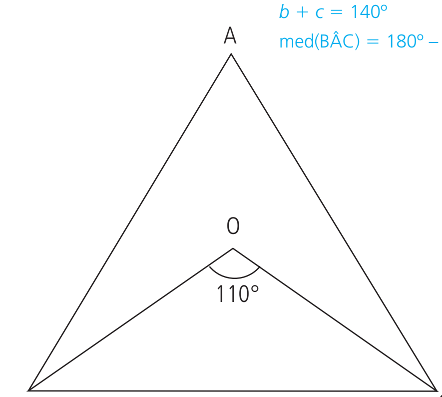
x **c)** 60º

d) 65º



15 Observe a figura, onde O é incentro e a medida de $B\hat{O}C$ é 110°. Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$. 40°

$\frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 180° - 110°$
$b + c = 140°$
med($B\hat{A}C$) = 180° – 140° = 40°

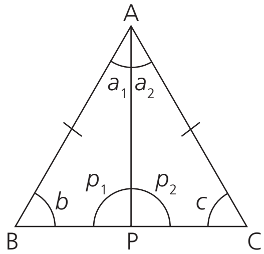


4. Propriedades dos triângulos isósceles

A congruência de triângulos permitirá descobrirmos propriedades importantes.

Num triângulo ABC isósceles, com AC = AB, traçamos a bissetriz de $\hat{A}$, determinando o ponto P.

O ângulo do vértice, que é $\hat{A}$, ficou dividido em dois ângulos congruentes de medidas a_1 e a_2. Também ficam determinados os ângulos de medidas p_1 e p_2 com vértice em P.



Vamos examinar os triângulos ABP e ACP, que se formaram quando traçamos a bissetriz.

$\left.\begin{array}{l} \overline{AP} \text{ é lado comum aos dois triângulos. (L)} \\ a_1 = a_2 \text{ (A)} \\ AC = AB \text{, pois o triângulo é isósceles. (L)} \end{array}\right\}$ Pelo caso LAL os triângulos são congruentes.

Isso significa que:

$b = c$

Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

BP = PC

O ponto P é **ponto médio** de $\overline{BC}$, ou seja, a bissetriz $\overline{AP}$ é também a **mediana** relativa à base.

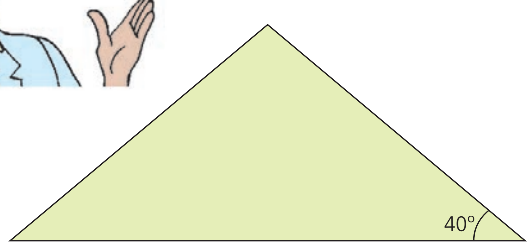
$p_1 = p_2$

Como $p_1 + p_2 = 180°$ (são suplementares), temos que $p_1 = p_2 = 90°$.

$\overline{AP}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, ou seja, $\overline{AP}$ é a **altura** relativa a $\overline{BC}$.

A bissetriz do ângulo do vértice de um triângulo isósceles coincide com a mediana e com a altura relativa à base.

Lápis Mágico



Ilustrações: DAE

O ângulo dado é um dos ângulos da base.

O outro ângulo da base também mede 40°.

$40° + 40° = 80°$

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, o ângulo do vértice mede 100°.

$180° - 80° = 100°$

CONECTANDO SABERES

Coleção particular, Paris./© Kandinsky Wassily/Licenciado por AUTVIS, Brasil, 2011.

◆ Wassily Kandinsky. *Pontas no arco*, 1927. Óleo sobre cartão.

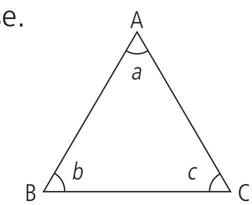
Nessa obra, o artista russo Wassily Kandinsky usou maravilhosamente as formas geométricas e as cores.

Você consegue identificar triângulos isósceles e triângulos equiláteros nessa tela?

Triângulos equiláteros

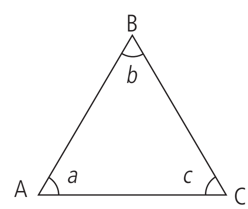
Hélio Senatore

E mais: cada um dos lados pode ser tomado como base. Considerando os elementos que estão na figura ao lado, chegaremos a conclusões importantes.



Ilustrações: DAE

Tomando $\overline{BC}$ como base, temos que $b = c$.



Tomando $\overline{AC}$ como base, temos que $a = c$.

Se $b = c$ e $a = c$, então $a = b$.

Temos que $a = b = c$.

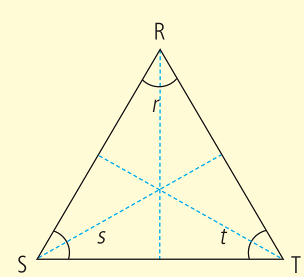
Como $a + b + c = 180°$, cada ângulo do triângulo equilátero mede $180° : 3 = 60°$.

O triângulo equilátero tem os três ângulos internos congruentes, cada um medindo 60°.

Vale a recíproca: se um triângulo tem 3 ângulos internos congruentes, então ele é equilátero.

Agora é com você!

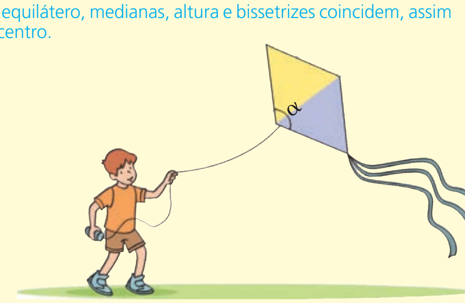
1. Usando régua e compasso, trace e depois recorte um triângulo equilátero RST qualquer. Faça uma dobra, fazendo coincidir os lados RS e RT. Desdobre e faça a segunda dobra fazendo coincidir ST e RT. Na terceira dobra, coincidem os lados RS e ST. Com o triângulo aberto, observe as linhas das dobras e responda se elas determinam as bissetrizes, as medianas ou as alturas desse triângulo. O ponto de encontro dessas linhas é o baricentro, o incentro ou o ortocentro desse triângulo? O aluno deve concluir que, no triângulo equilátero, medianas, altura e bissetrizes coincidem, assim como o incentro, o baricentro e o ortocentro.



2. Rubinho fez uma pipa juntando dois triângulos equiláteros, como mostra a figura.

a) Qual é a medida do ângulo α? 120°

b) A pipa tem a forma de um quadrilátero conhecido. Você lembra o nome que recebe? Losango.



Hélio Senatore

Exercícios

16 Desenhe todos os triângulos que verifiquem as três condições a seguir:

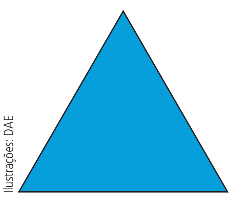
a) ser isósceles; • 6 cm, 7 cm e 7 cm • 6 cm, 6 cm e 8 cm

b) o perímetro medir 20 cm;

c) um dos lados medir 6 cm.

17 Dona Matilde tem um retalho de tecido na forma triangular e com ele quer fazer quatro lenços iguais, para as filhas. Dá 3 cortes de tesoura e, eis que aparecem 4 lenços. Como ela obteve esses lenços?

Ilustrações: DAE

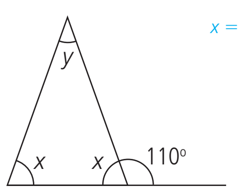


Hélio Senatore

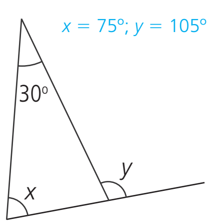
Unindo os pontos médios dos lados obtemos os 4 lenços.

18 Os triângulos abaixo são isósceles. Qual é o valor das letras indicadas?

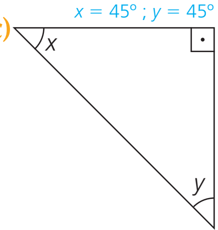
a) $x = 70°$; $y = 40°$



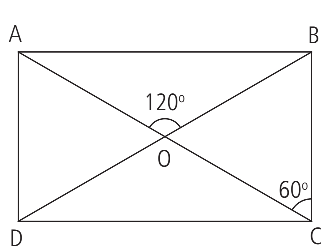
b) $x = 75°$; $y = 105°$



c) $x = 45°$; $y = 45°$

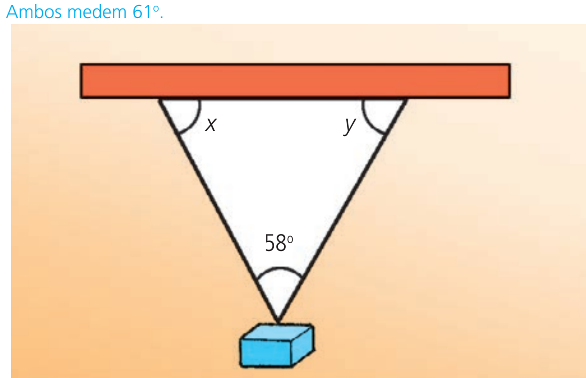


19 Observe o retângulo ABCD.



Quanto aos lados, que nome tem o triângulo BOC? Equilátero.

20 O peso da figura está suspenso por duas cordas de mesma medida e presas no teto. Se o ângulo entre as cordas é de 58º, quanto medem os ângulos formados pela corda e pelo teto?
Ambos medem 61°.



Ilustra Cartoon

Ilustrações: DAE

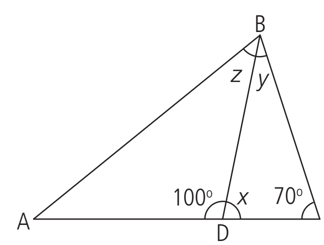
21 (SEE-SP) Na figura, o triângulo ABD é isósceles (AD = BD). As medidas x, y, z dos ângulos indicados são, respectivamente:

x **a)** 80º, 30º, 40º

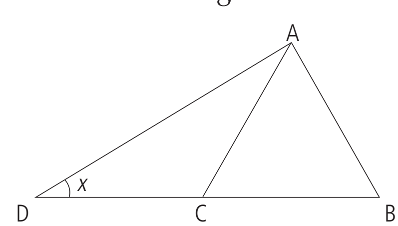
b) 80º, 70º, 10º

c) 100º, 30º, 40º

d) 100º, 70º, 10º



22 Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero e o triângulo ACD é isósceles (AC = CD). Qual é a medida do ângulo x? $x = 30°$



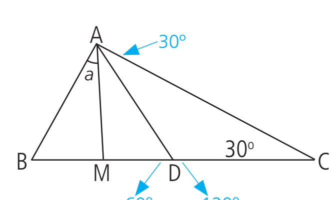
23 (Mack-SP) Na figura, BD = AD = DC e BM = MD. Então a mede:

a) 45º

x **b)** 30º

c) 15º

d) 20º



$a = 60° : 2$
$a = 30°$

5. Maior lado e maior ângulo de um triângulo

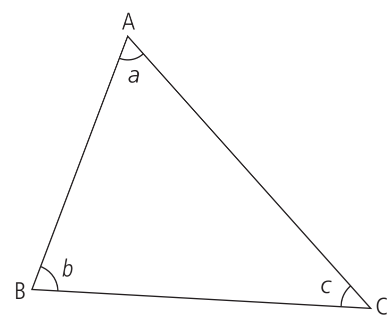
Num triângulo que tem dois lados com medidas diferentes, ao maior lado se opõe o maior ângulo.

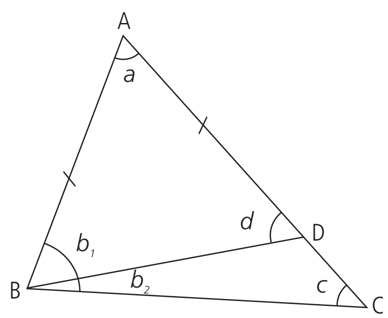
Vamos demonstrar essa propriedade?

Traçamos um triângulo ABC, onde AB ≠ AC e AC > AB.

As medidas dos ângulos internos do triângulo foram nomeadas por *a*, *b* e *c*, sendo *b* a medida do ângulo oposto ao maior lado ($\overline{AC}$).

Queremos mostrar que $b > c$.





Para isso, marcamos o ponto D sobre o lado $\overline{AC}$ tal que AD = AB.

O ângulo de vértice B foi dividido em dois ângulos de medidas b_1 e b_2 como mostra a figura ao lado.

Como o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$, temos que $b_1 = d$.

Também é verdade que $d > c$, pois $d = c + b_2$ (propriedade do ângulo externo).

Substituindo *d* por b_1 na desigualdade $d > c$ temos que $b_1 > c$.

Ora, $b > b_1$, pois o segmento $\overline{BD}$ dividiu o ângulo de medida *b*.

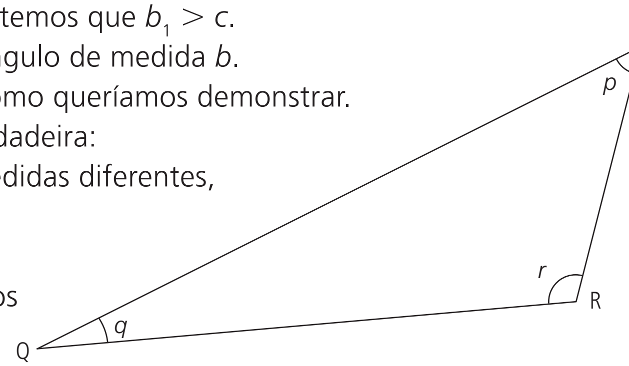
Se $b > b_1$ e $b_1 > c$, concluímos que $b > c$, como queríamos demonstrar.

A recíproca dessa propriedade também é verdadeira:

Num triângulo que tem dois ângulos com medidas diferentes, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

No triângulo ao lado, temos PQ > QR.

Pela propriedade que demonstramos podemos afirmar que $r > q$.



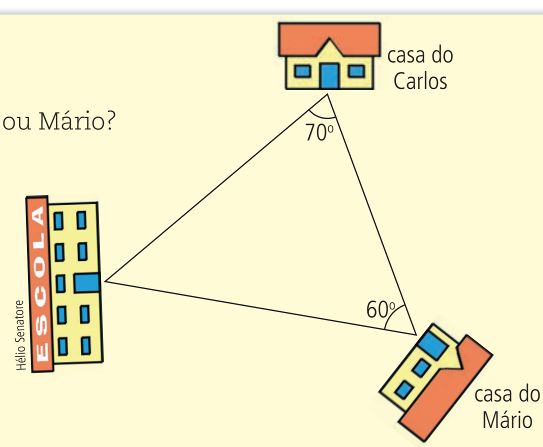
Ilustrações: DAE

Veja o esquema a seguir.

Quem mora mais longe da escola: Carlos ou Mário?

Justifique sua resposta.

Mário, pois o maior ângulo se opõe ao maior lado.

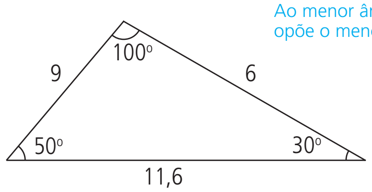


Hélio Senatore

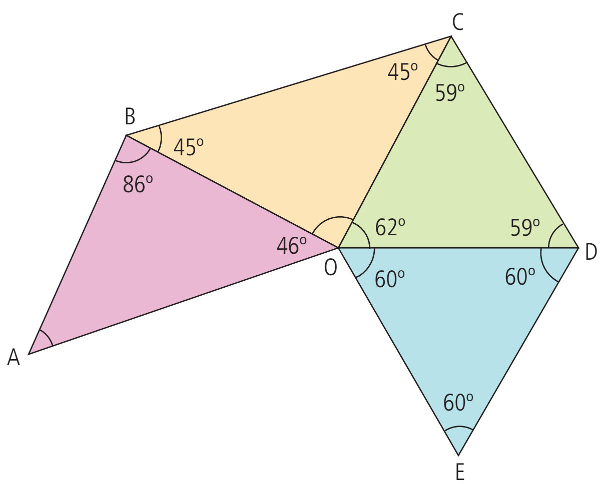
Exercícios

24 O que está errado na figura?

Ao menor ângulo (30º) não se opõe o menor lado.



25 (CAP-UFRJ) Considere a figura a seguir:



a) Calcule a medida do ângulo BÂO.

180º − 86º − 46º = 48º

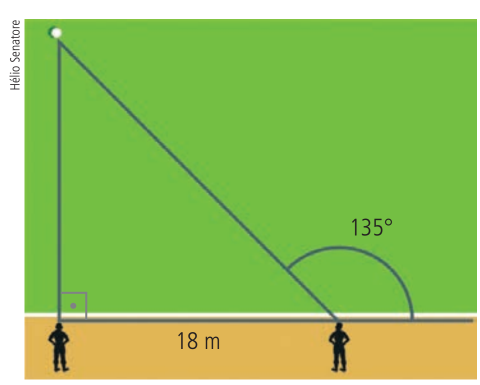
b) Identifique qual dos triângulos é um triângulo retângulo. Triângulo BOC.

c) No triângulo CDO, identifique o lado de maior comprimento.

O lado CD, pois é oposto ao maior ângulo do triângulo.

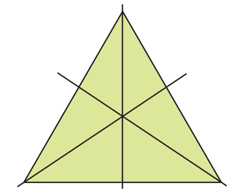
26 Robson e Mateus observam uma bola da linha lateral do campo. A que distância de Robson a bola está? Justifique.

A 18 m, porque num triângulo, a ângulos congruentes opõem-se lados de mesma medida.

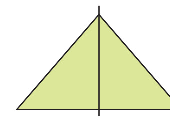


27 Quais triângulos admitem eixos de simetria?

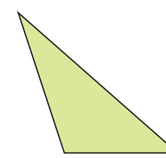
- O triângulo equilátero tem 3 eixos de simetria.



- O triângulo isósceles tem 1 eixo de simetria.



- Há triângulos que não têm eixos de simetria.



Responda:

Como se classifica, quanto aos lados, um triângulo que não tem nenhum eixo de simetria?

Triângulo escaleno.

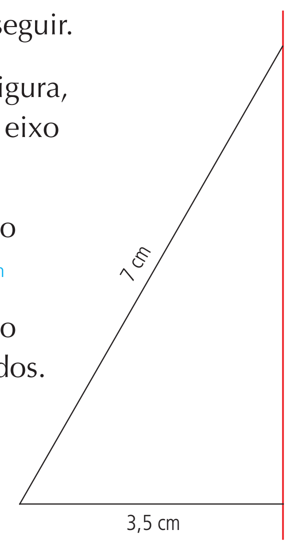
28 Observe a figura a seguir.

a) Copie e complete a figura, sabendo que a reta é eixo de simetria.

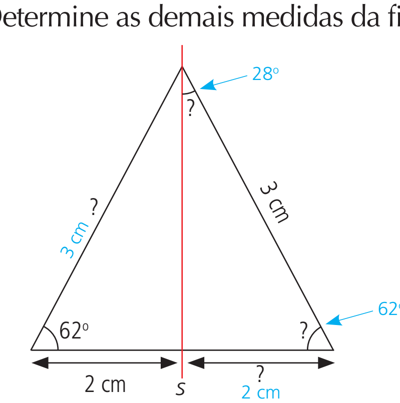
b) Qual é o perímetro do polígono obtido? 21 cm

c) Classifique o polígono obtido quanto aos lados.

Triângulo equilátero.



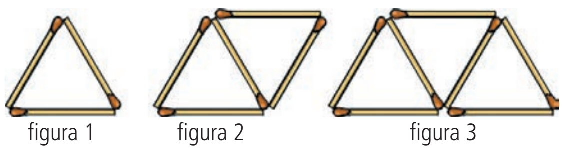
29 Na figura, a reta *s* é um eixo de simetria do triângulo. Determine as demais medidas da figura.



Revisando

30 Com palitos iguais constrói-se uma sucessão de figuras planas, conforme é mostrado na ilustração abaixo:

Hélio Senatore

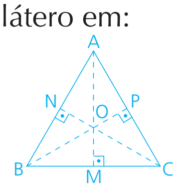


Qual é o número de triângulos congruentes ao da figura 1 existentes em uma figura formada com 15 palitos? 7 triângulos

31 Divida um triângulo equilátero em:

a) duas partes congruentes;
Sugestão de resposta: △ABM, △AMC etc.

b) três partes congruentes.
△AOB, △AOC, △BOC



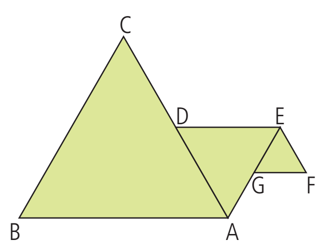
32 Os triângulos ABC, ADE e EFG são equiláteros. Os pontos D e G são os pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$, respectivamente.
Se AB = 8 cm, qual é o perímetro da figura colorida?

a) 24 cm

b) 26 cm

x c) 30 cm

d) 36 cm

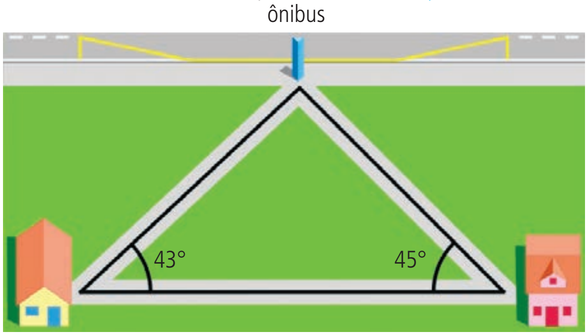


8 + 8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 = 30

33 Entre as casas de Teco e de Leco foi instalado um ponto de ônibus. Qual desses dois garotos terá de andar mais para apanhar o ônibus? Justifique. Teco terá de andar mais, uma vez que a um ângulo de maior medida se opõe um lado de maior comprimento.

Hélio Senatore

ponto de ônibus



casa de Teco

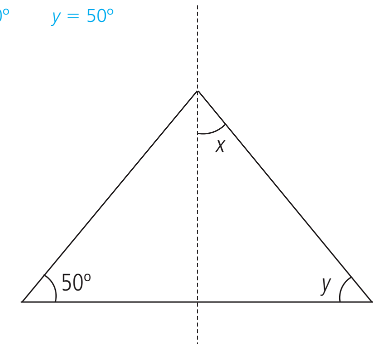
casa de Leco

34 Comente a afirmação:

Um triângulo retângulo nunca tem eixos de simetria.

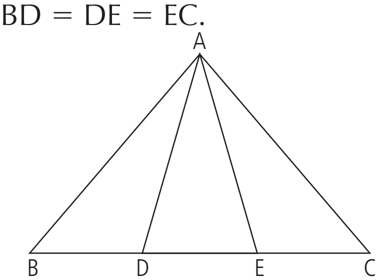
A afirmação é falsa. O triângulo retângulo isósceles tem sempre um eixo de simetria.

35 Na figura, a reta assinalada é um eixo de simetria do triângulo. Obtenha a medida dos ângulos indicados com letras.
$x = 40°$ $y = 50°$



Ilustrações: DAE

36 (Saresp) Na figura, o triângulo ABC é isósceles e BD = DE = EC.



Nestas condições, os triângulos:

a) ABD e ADE são congruentes.

x b) ABD e AEC são congruentes.

c) ADE e AEC são congruentes.

d) ABD e ABC são congruentes.

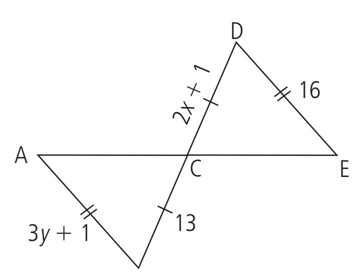
37 Os triângulos ABC e EDC são congruentes. Então a soma $x + y$ é igual a:

a) 10

x b) 11

c) 13

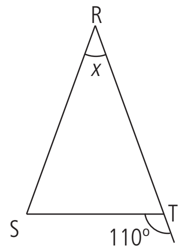
d) 15



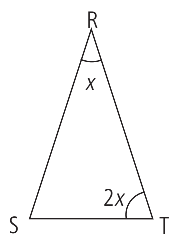
$2x + 1 = 13 \Rightarrow x = 6$
$3y + 1 = 16 \Rightarrow y = 5$
Então:
$x + y = 11$

38 O triângulo RST é isósceles, sendo RS = RT. Calcule o valor de x.

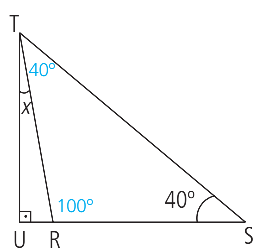
a) $x = 40°$



b) $2x + 2x + x = 180° \Rightarrow x = 36°$

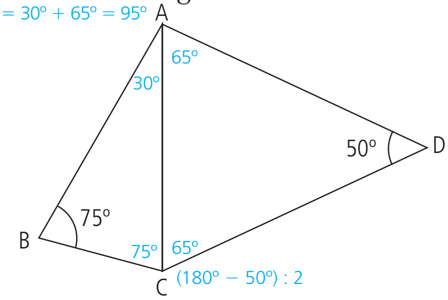


c) $x + 90° = 100° \Rightarrow x = 10°$

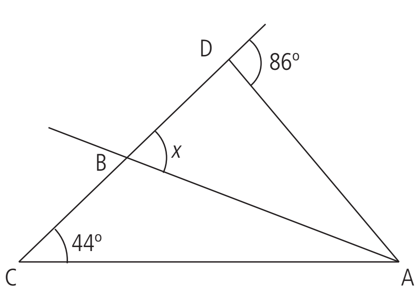


39 Na figura temos AB = AC e AD = DC. Quanto mede o ângulo BÂD?

med(BÂD) = 30° + 65° = 95°



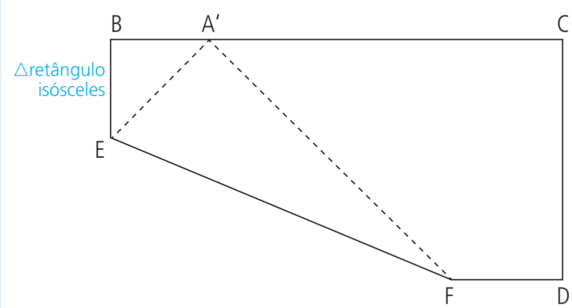
40 Na figura, $\overrightarrow{AB}$ é bissetriz do ângulo do vértice A. Qual é a medida, em graus, de x? 65°



Desafios

41 (Saresp) O vértice A de uma folha de papel retangular será dobrado sobre o lado $\overline{BC}$ de forma que as medidas BE e BA' sejam iguais, como mostra a figura.

Ilustrações: DAE



Nas condições dadas, a medida do ângulo que é um dos ângulos internos do triângulo BA'E é:

x a) 45°

b) 60°

c) 100°

d) 120°

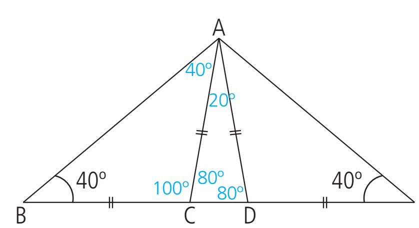
42 (Mack-SP) Na figura: BC = CA = AD = DE; o ângulo CÂD mede:

a) 10°

x b) 20°

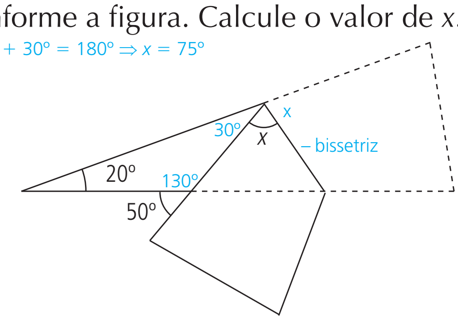
c) 30°

d) 40°



43 Uma folha triangular de papel foi dobrada conforme a figura. Calcule o valor de x. 75°

$x + x + 30° = 180° \Rightarrow x = 75°$

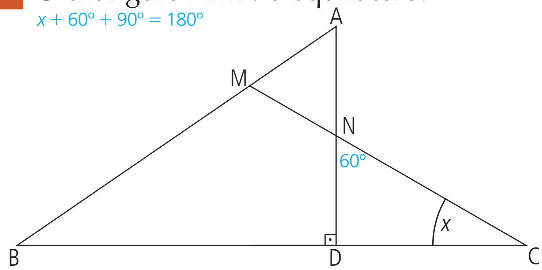


Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

44 O triângulo AMN é equilátero.

$x + 60° + 90° = 180°$



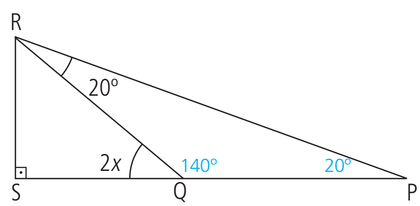
O valor de x é:

x**a)** 30°
b) 45°
c) 60°
d) 70°

45 Na figura, PQ = RQ. O valor de x é:

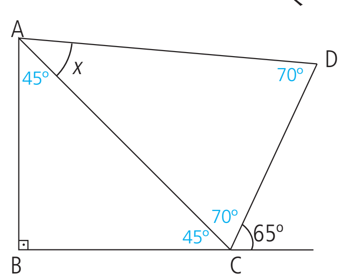
$2x + 140° = 180° \Rightarrow x = 20°$

a) 15°
x**b)** 20°
c) 25°
d) 30°



46 Na figura, AB = BC e AC = AD. Qual é o valor de x?

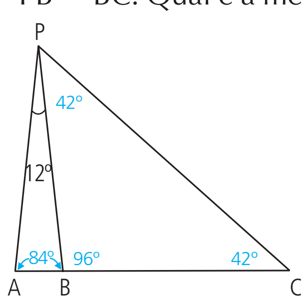
a) 30°
x**b)** 40°
c) 45°
d) 55°



47 Na figura, PA = PB = BC. Qual é a medida do ângulo BP̂C?

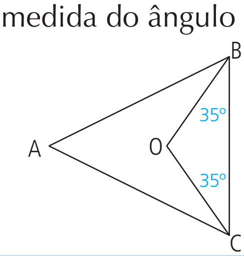
$12° + 42° = 54°$

a) 36°
b) 42°
x**c)** 54°
d) 60°



48 Na figura, AB = AC; O é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC e o ângulo BÂC mede 40°. A medida do ângulo BÔC é:

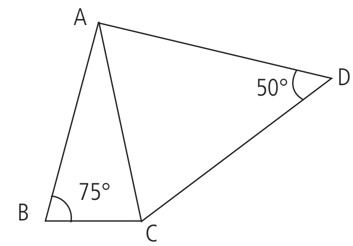
a) 70°
b) 100°
c) 140°
x**d)** 110°



med (AB̂C) = med (AĈB) = (180° − 40°) : 2 = 70°
med (BÔC) + 35° + 35° = 180° ⇒ med (BÔC) = 110°

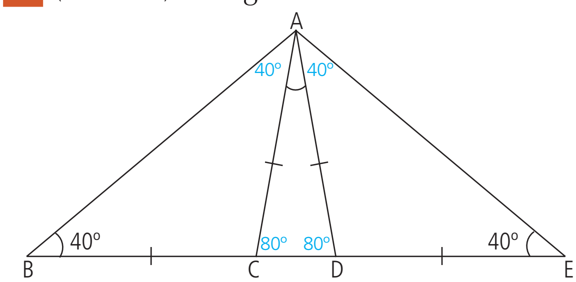
49 Na figura, AD = DC e AB = AC. Quanto mede o ângulo BÂD? $30° + 65° = 95°$

a) 85°
x**b)** 95°
c) 125°
d) 140°



Ilustrações: DAE

50 (PUC-SP) Na figura BC = CA = AD = DE.



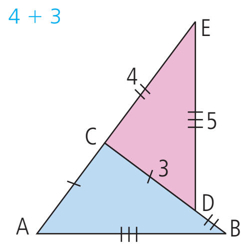
O ângulo CÂD mede:

a) 10°
x**b)** 20°
c) 30°
d) 40°

51 Os triângulos ABC e DEC são congruentes. O perímetro da figura ABDECA mede:

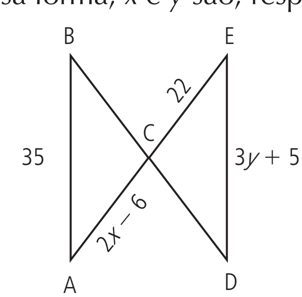
P = 5 + 1 + 5 + 4 + 3
P = 18

a) 17
x**b)** 18
c) 19
d) 21



52 (Saresp) Na figura abaixo, os dois triângulos são congruentes e os ângulos A e E, internos a cada um desses triângulos, têm a mesma medida. Dessa forma, x e y são, respectivamente:

$2x - 6 = 22$
$3y + 5 = 35$



a) 8 e 13
b) 10 e 12
x**c)** 14 e 10
d) 20 e 6

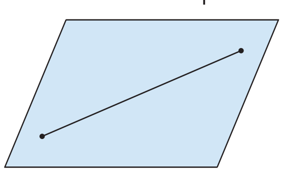
Quadriláteros e outros polígonos

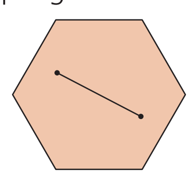
1. Nomenclatura – polígonos convexos

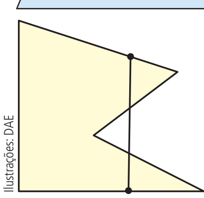
Polígonos são figuras planas com contorno fechado, formado somente por segmentos de retas.

Dizemos que um polígono é convexo quando todo segmento de reta com extremidades em dois de seus pontos fica contido no polígono.

Estes são exemplos de polígonos convexos.





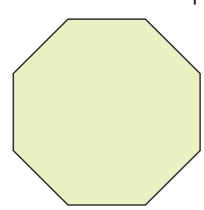


Ilustrações: DAE

Já o polígono ao lado não é convexo. Há segmentos com extremidades em pontos do polígono que não ficam contidos nele.

Nomeamos os polígonos de acordo com o número de lados que apresentam. Relembre alguns nomes:

3 lados: triângulos
4 lados: quadriláteros
5 lados: pentágonos
6 lados: hexágonos
7 lados: heptágonos



8 lados: octógonos

Trabalharemos somente com polígonos convexos, que serão chamados simplesmente de polígonos daqui para a frente.

2. Elementos dos quadriláteros

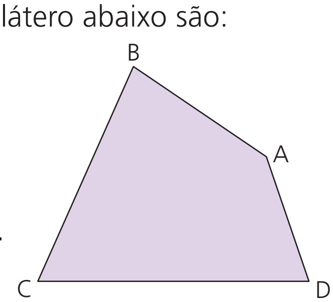
Como todo polígono, um quadrilátero apresenta vértices, lados e ângulos.

O segmento que une dois vértices não consecutivos de um polígono se chama **diagonal do polígono**. Os quadriláteros têm duas diagonais. Os elementos do quadrilátero abaixo são:

- Vértices: A, B, C, D (são pontos)
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ (são segmentos de reta)
- Ângulos: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$

O perímetro de um quadrilátero é a soma das medidas de seus lados.

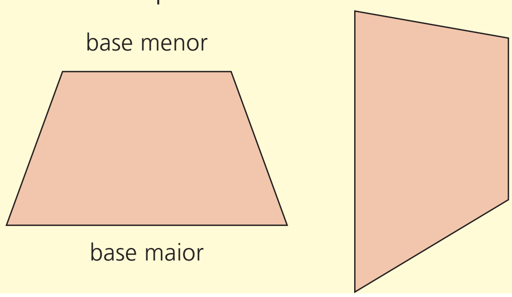
Perímetro = AB + BC + CD + DA



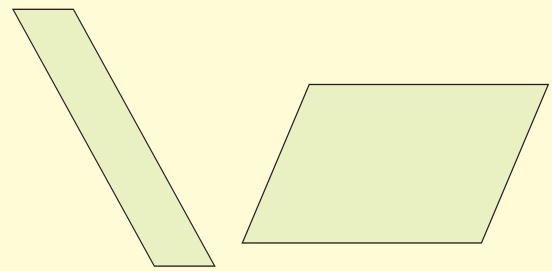
3. Classificação dos quadriláteros

Há quadriláteros que, por terem características especiais, recebem nomes especiais. Relembre:

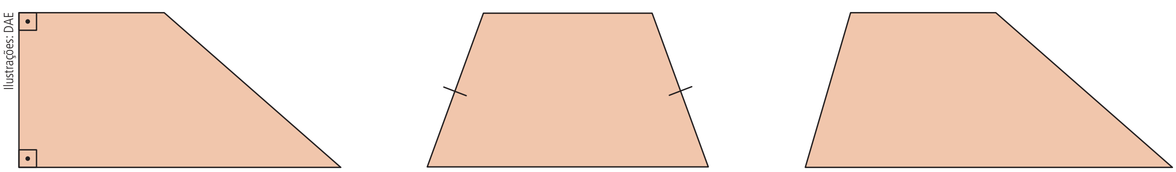
Trapézios: apresentam um par de lados paralelos. Esses lados são chamados de bases do trapézio.



Paralelogramos: apresentam dois pares de lados opostos paralelos.



Classificamos os trapézios em:

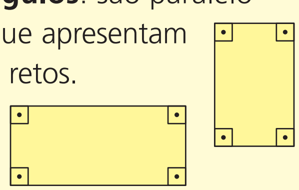


Ilustrações: DAE

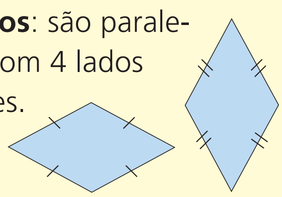
- **Trapézios retângulos**: têm dois ângulos retos.
- **Trapézios isósceles**: têm um único par de lados opostos congruentes.
- Trapézios que não são isósceles e nem retângulos são chamados de **trapézios escalenos**.

Entre os paralelogramos, há alguns que recebem nomes específicos.

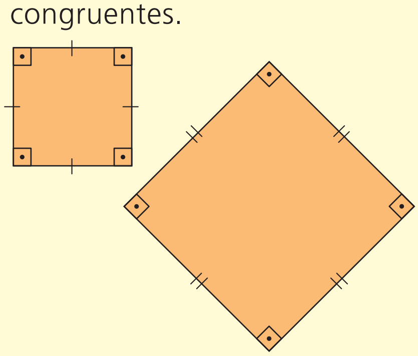
Retângulos: são paralelogramos que apresentam 4 ângulos retos.



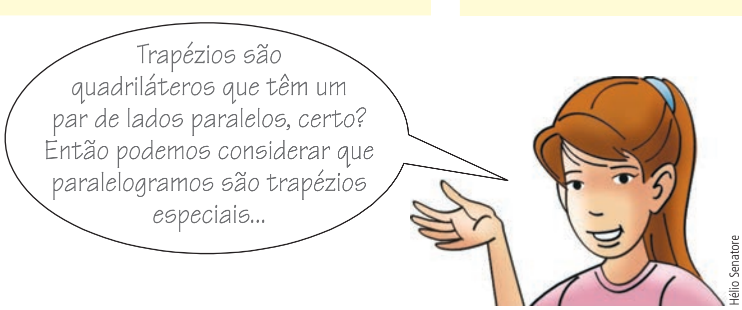
Losangos: são paralelogramos com 4 lados congruentes.



Quadrados: são paralelogramos que apresentam 4 ângulos retos e 4 lados congruentes.



Hélio Senatore



Hélio Senatore

Você concorda com Vanessa? Troque ideias com seus colegas e o professor.

De acordo com a definição de trapézio adotada acima, os paralelogramos são trapézios.

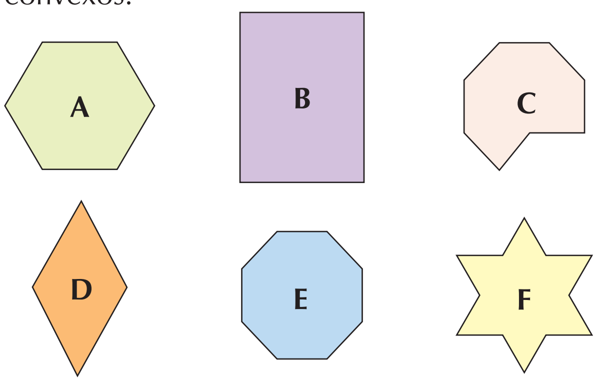
Exercícios

1 Qual das figuras geométricas seguintes não é um polígono?

a) Triângulo.
b) Quadrilátero.
c) Pentágono.
x d) Circunferência.

2 Indique os polígonos convexos e os não convexos.

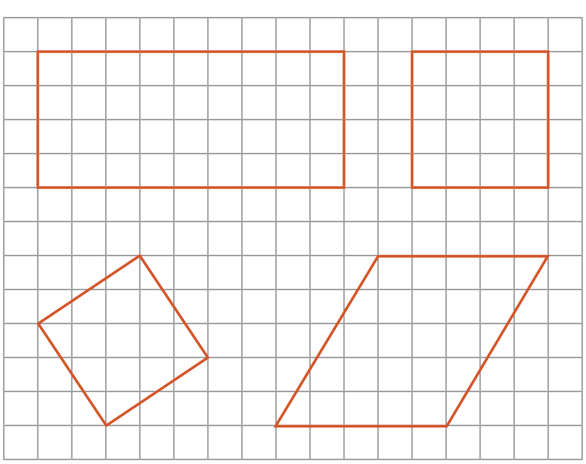
Convexos: A, B, D, E; não convexos: C, F.



3 O número de lados de um quadrado multiplicado pelo número de vértices de outro quadrado é:

a) oito.
b) doze.
x c) dezesseis.
d) trinta e dois.

4 (Saresp) Os desenhos abaixo representam figuras planas que têm em comum a propriedade de terem:

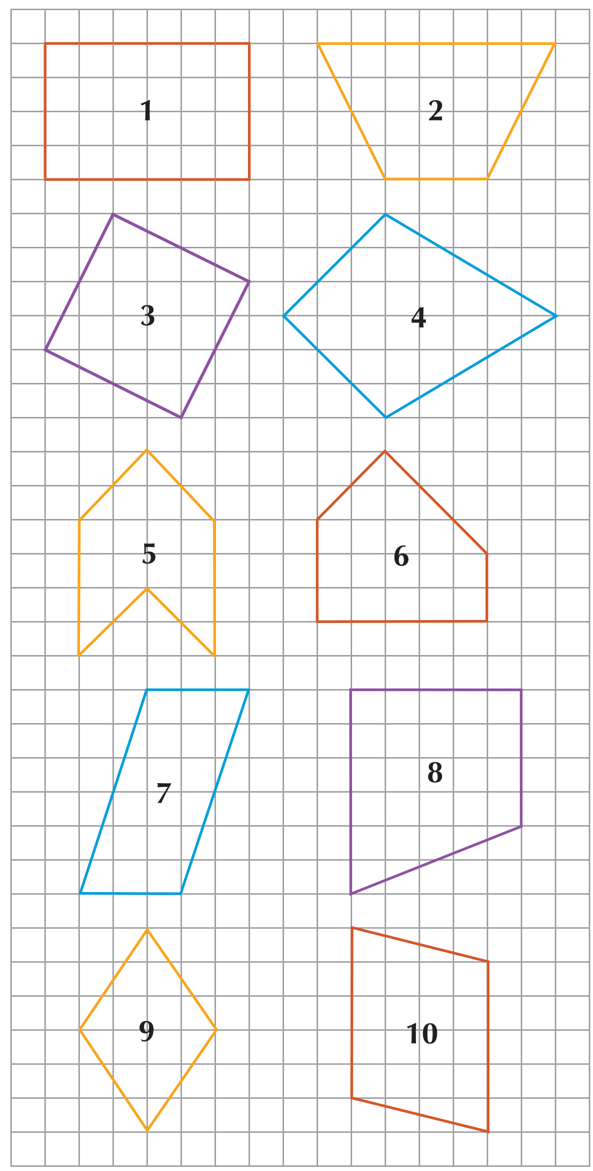


a) pelo menos um ângulo reto.
b) todos os lados de mesma medida.
x c) lados opostos paralelos dois a dois.
d) lados consecutivos de mesma medida.

5 Que triângulos são obtidos quando traçamos uma diagonal de um quadrado?

a) Dois triângulos acutângulos isósceles.
b) Dois triângulos acutângulos equiláteros.
c) Dois triângulos retângulos escalenos.
x d) Dois triângulos retângulos isósceles.

6 Observe as figuras a seguir.



Ilustrações: DAE

Indique todos os:

a) quadriláteros; 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10
b) trapézios; 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10
c) paralelogramos; 1, 3, 7, 9, 10
d) losangos; 3, 9
e) retângulos; 1, 3
f) quadrados. 3

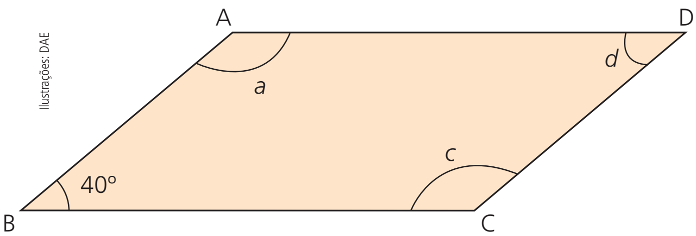
4. Propriedades dos paralelogramos

Duas propriedades dos paralelogramos você já conhece: os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e os ângulos de um mesmo lado são suplementares.

Essas propriedades permitem descobrirmos as medidas dos 4 ângulos de um paralelogramo conhecendo somente um deles.

Dado o ângulo de 40°, temos que:

Ilustrações: DAE



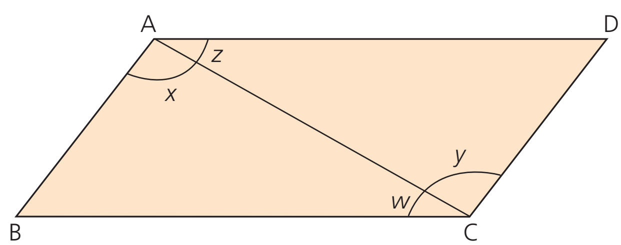
$d = 40°$ (ângulo oposto ao de 40°)

$a = 140°$ (140° é o suplemento de 40°)

$c = 140°$ (ângulo oposto a $\hat{A}$ ou suplemento de 40°)

Vamos descobrir outras propriedades?

Lados opostos congruentes



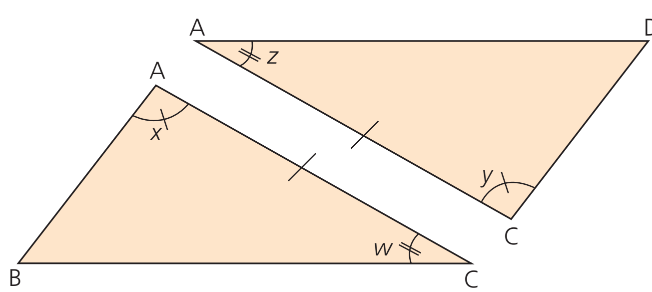
Traçamos a diagonal $\overline{AC}$ do paralelogramo ABCD.

Como $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ e $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$, temos:

$x = y$ (ângulos alternos internos)

$z = w$ (ângulos alternos internos)

Observe o desenho dos triângulos ABC e CDA.



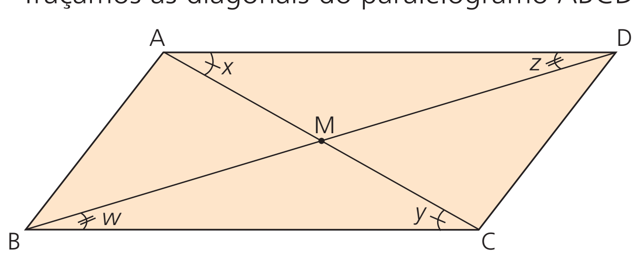
$\left.\begin{array}{l} x = y \text{ (A)} \\ \overline{AC} \text{ é lado comum (L)} \\ z = w \text{ (A)} \end{array}\right\}$ $\boxed{\triangle ABC \equiv \triangle CDA \text{ pelo caso ALA}}$

Os demais pares de elementos correspondentes são congruentes, ou seja:
$AB = CD$ e $BC = DA$

Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

Propriedade das diagonais

Traçamos as diagonais do paralelogramo ABCD, que se cortam em um ponto M.



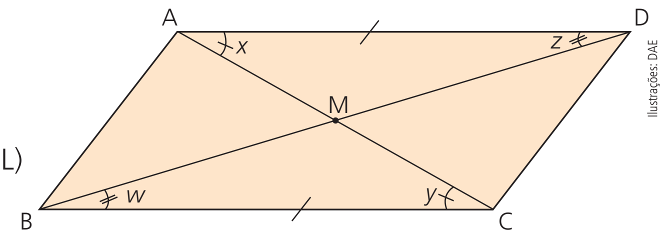
Como os lados opostos são paralelos, temos $x = y$ e $z = w$.

Os triângulos AMD e CMB são congruentes pelo caso ALA:

$x = y$ (A)

BC = DA (lados opostos do paralelogramo) (L)

$z = w$ (A)

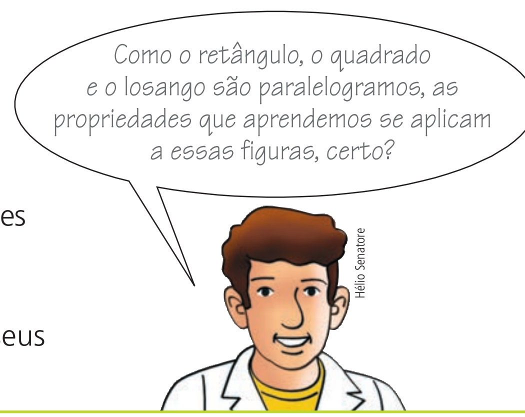


Os demais pares de elementos correspondentes são congruentes:
AM = MC isso significa que M é ponto médio da diagonal AC;
BM = MD isso significa que M é ponto médio da diagonal BD.

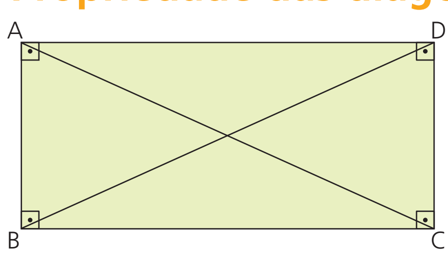
As diagonais de um paralelogramo se cortam em seus pontos médios.

Valem as recíprocas das propriedades que vimos:

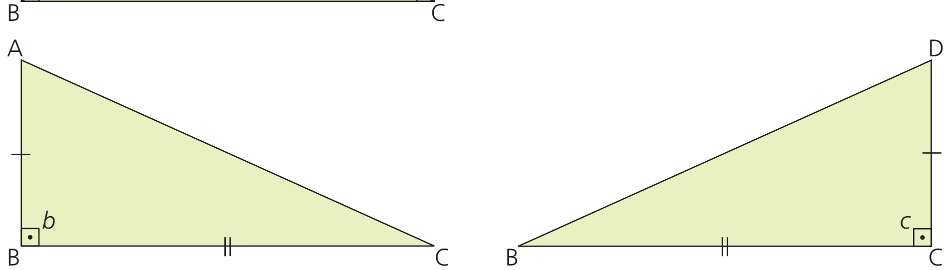
- Todo quadrilátero que tem ângulos opostos congruentes dois a dois é paralelogramo.
- Todo quadrilátero que tem lados opostos congruentes dois a dois é um paralelogramo.
- Todo quadrilátero cujas diagonais se cortam em seus pontos médios é um paralelogramo.

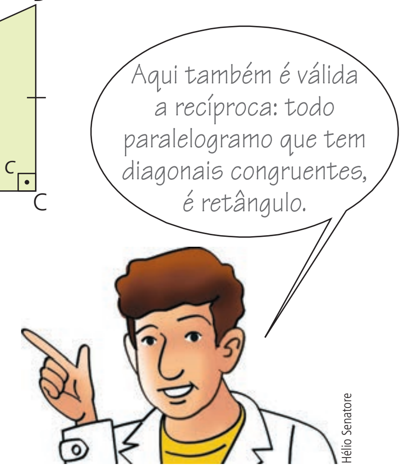


Propriedade das diagonais do retângulo



Traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do retângulo ABCD. Vamos analisar os triângulos ABC e DCB.





Sabemos que os lados opostos do retângulo são congruentes e que ele apresenta 4 ângulos retos.

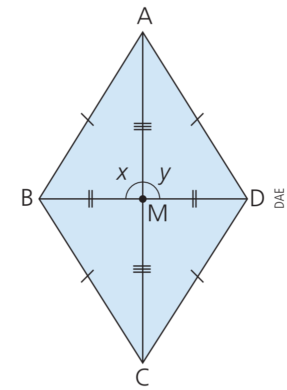
AB = DC (lados opostos do retângulo) (L)
$b = c$ (ângulos retos) (A)
$\overline{BC}$ é lado comum aos dois triângulos (L)

$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$
pelo caso LAL

Dessa congruência, vem que AC = BD.

As diagonais de um retângulo são congruentes.

Propriedade das diagonais do losango



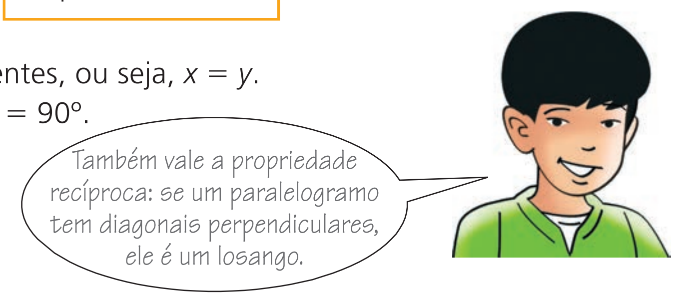
Já sabemos que o losango tem 4 lados congruentes e que suas diagonais se cortam em seus pontos médios.

As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ determinam triângulos.

Veja que:

$$\left.\begin{array}{l} AB = DA \text{ (lados do losango) (L)} \\ BM = MD \text{ (M é ponto médio de } \overline{BD}\text{) (L)} \\ \overline{AM} \text{ é lado comum (L)} \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{c} \triangle ABM \equiv \triangle ADM \\ \text{pelo caso LLL} \end{array}}$$

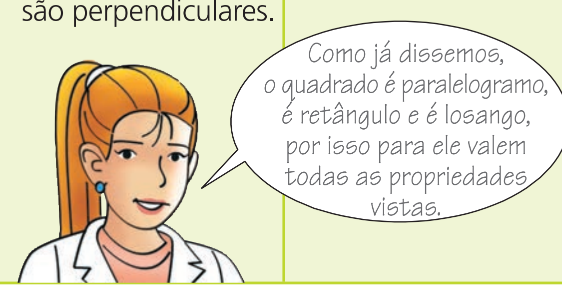
Os demais pares de elementos são congruentes, ou seja, $x = y$.
Como $x + y = 180°$, concluímos que $x = y = 90°$.



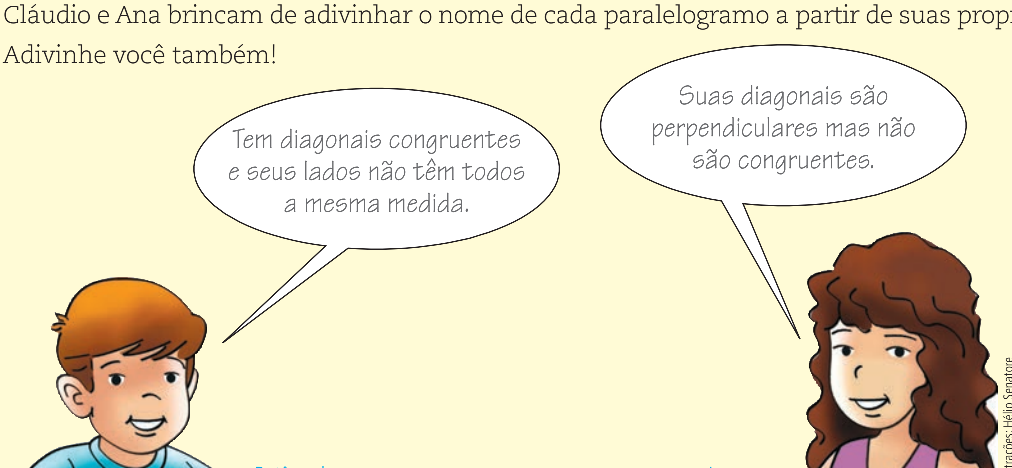
As diagonais de um losango são perpendiculares.

Vamos resumir em um quadro as propriedades vistas?

Paralelogramos	Retângulos	Losangos	Quadrados
• Têm lados opostos e ângulos opostos congruentes. • Ângulos de um mesmo lado são suplementares. • As diagonais se cortam em seus pontos médios.	• Têm as propriedades dos paralelogramos. • Suas diagonais são congruentes.	• Têm as propriedades dos paralelogramos. • Suas diagonais são perpendiculares.	• Têm todas as propriedades dos quadros anteriores.



Cláudio e Ana brincam de adivinhar o nome de cada paralelogramo a partir de suas propriedades. Adivinhe você também!



Retângulo.

Losango.

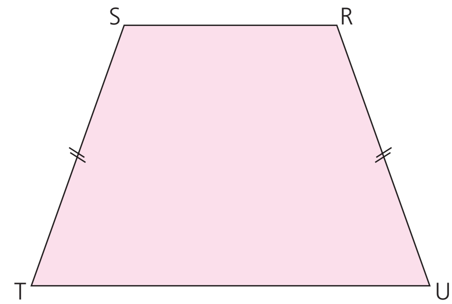
Ilustrações: Hélio Senatore

5. Propriedades dos trapézios isósceles

O trapézio RSTU ilustrado é isósceles, pois ST = UR.

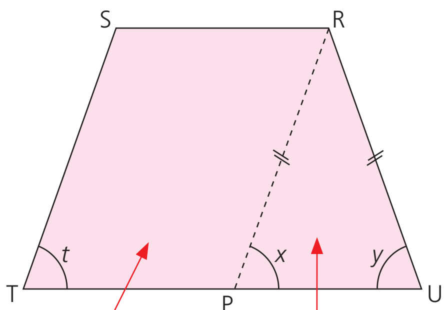
Vamos descobrir uma propriedade que esse tipo de trapézio tem?

Mais uma vez, vamos utilizar conhecimentos anteriores.



Ilustrações: DAE

Traçamos um segmento $\overline{RP}$ paralelo ao lado $\overline{ST}$, determinando o paralelogramo RSTP e o triângulo isósceles RPU.



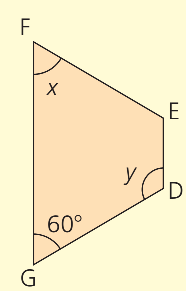
Do paralelismo, vem que $t = x$ ($\hat{t}$ e $\hat{x}$ são ângulos correspondentes).

Também podemos afirmar que $x = y$, pois são as medidas dos ângulos da base de um triângulo isósceles.

Se $t = x$ e $x = y$, então $t = y$. Mostramos que:

> Os ângulos da base de um trapézio isósceles são congruentes.

1. Sabendo que no trapézio DEFG ao lado temos EF = GD, determine as medidas indicadas por x e y. $x = 60°, y = 120°$

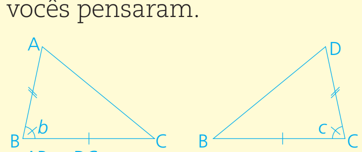


2. Agora, junte-se a um colega. Vocês provarão mais uma propriedade.

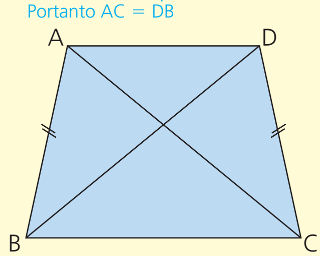
Traçamos as diagonais de um trapézio isósceles ABCD.

Utilizem os triângulos ABC e DCB para mostrar que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Mostrem depois aos outros colegas e ao professor como vocês pensaram.



AB = DC
$b = c$
$\overline{BC}$ → lado comum
△ABC ≡ △DCB pelo caso LAL
Portanto AC = DB



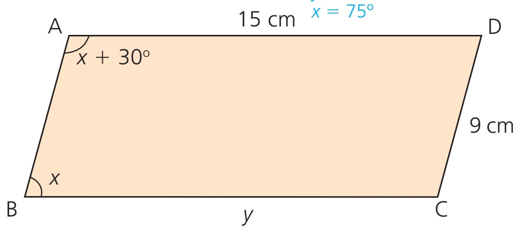
Fernando Favoretto/Criar Imagem

Exercícios

7 O ângulo agudo de um losango mede 46°. Quanto mede o ângulo obtuso? 134°

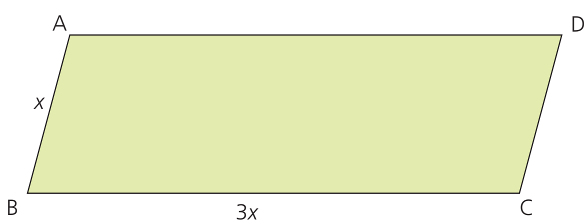
8 Na figura temos um paralelogramo. Calcule o valor de x e de y.

$x + x + 30° = 180°$
$y = 15$ cm
$x = 75°$



9 Se o perímetro de um paralelogramo é 14 cm, quanto é a soma das medidas de dois lados consecutivos? 7 cm

10 Na figura temos um paralelogramo com 20 cm de perímetro. Determine x. 2,5 cm



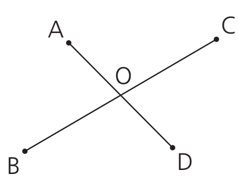
11 (Saresp) Na figura abaixo, AD = 20 cm, AO = 10 cm, BC = 30 cm e BO = 15 cm. Com base nisso, podemos afirmar que:

x **a)** AB = CD

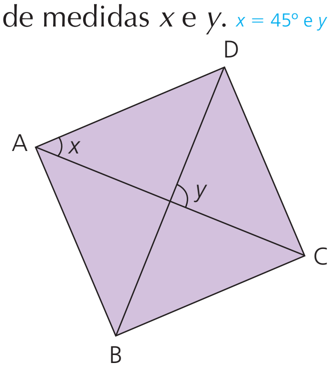
b) AB = 2 · CD

c) CD = 2 · AB

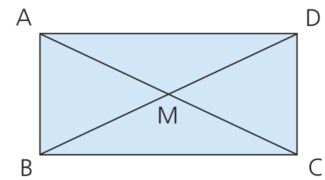
d) 2 · AB = 3 · CD



12 Sendo ABCD um quadrado, calcule os ângulos de medidas x e y. $x = 45°$ e $y = 90°$



13 Observe o retângulo.

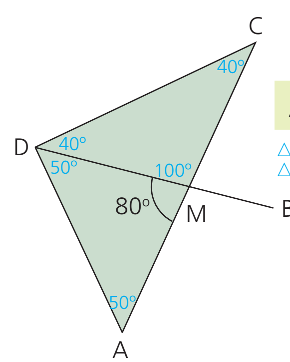


DM = 17,5 cm

a) Quanto mede o segmento $\overline{MA}$? 17,5 cm

b) Quais são as medidas das diagonais do retângulo? 35 cm e 35 cm

14 Na figura, M é o ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$.



AM = MD = 5 cm

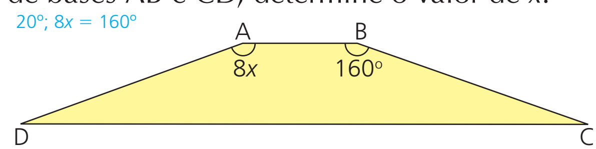
△ DMC: 40°, 40°, 100°
△ AMD: 50°, 50°, 80°

a) Determine as medidas dos ângulos dos triângulos AMD e DMC.

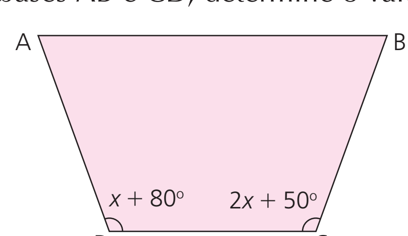
b) Classifique o quadrilátero ABCD. É um retângulo.

15 Sabendo que ABCD é um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine o valor de x.

20°; $8x = 160°$



16 Sabendo que ABCD é um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine o valor de x. 30°



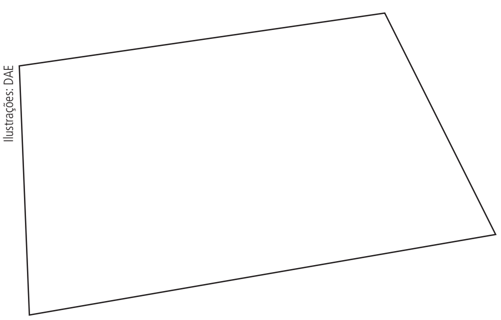
• $2x + 50° = x + 80°$

Ilustrações: DAE

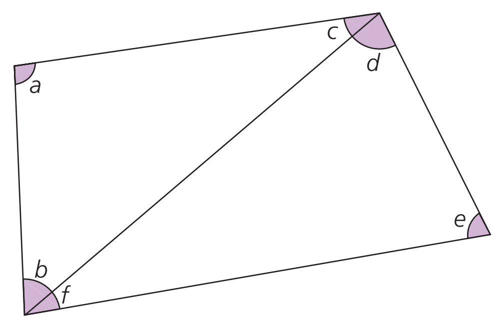
6. Ângulos de um polígono

Utilizando a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, podemos descobrir como calcular a soma das medidas dos ângulos internos de outros polígonos. Acompanhe:

Ilustrações: DAE



Desenhamos um quadrilátero qualquer



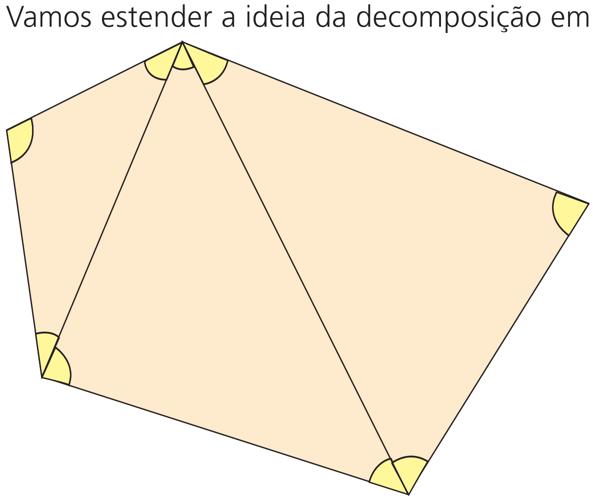
Traçando uma de suas diagonais, o quadrilátero fica decomposto em dois triângulos.

$a + b + c = 180°$ e $d + e + f = 180°$

A soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é dada por

$$\underbrace{a + b + c}_{180°} + \underbrace{f + e + d}_{180°} = 180° + 180° = 360°$$

Vamos estender a ideia da decomposição em triângulos a outros polígonos.



Desenhamos um pentágono qualquer e traçamos diagonais a partir de um dos vértices, decompondo o polígono em três triângulos.

Pentágono é o polígono de 5 lados.

A soma das medidas dos ângulos internos do pentágono será:

$180° + 180° + 180° = 3 \cdot 180° = 540°$

Reúna-se com mais dois colegas para fazer as atividades a seguir.

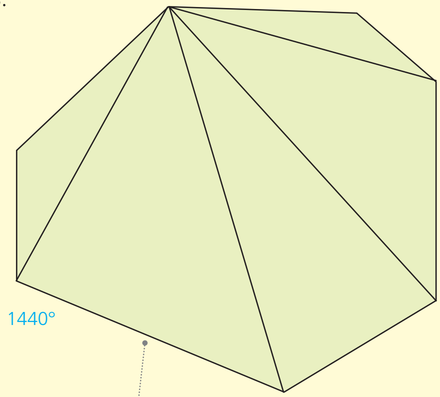
1. No seu caderno, desenhe, usando régua, um hexágono qualquer. Traçando diagonais a partir de um dos vértices, decomponha-o em triângulos como fizemos com o pentágono.

a) Quantos triângulos você obteve? 4 triângulos

b) Qual é a soma dos ângulos internos do hexágono? $4 \cdot 180° = 720°$

c) Suas respostas conferem com as dos colegas? Resposta pessoal.

2. Desenhamos ao lado um heptágono qualquer. Usamos as diagonais que partem do mesmo vértice para decompô-lo em triângulos. Obtivemos 5 triângulos.



DAE

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do heptágono? $5 \cdot 180° = 900°$

b) Sua resposta confere com a dos colegas? Resposta pessoal.

3. Um polígono de dez lados é um decágono. Sem precisar desenhar um decágono, você e seus colegas sabem como calcular a soma das medidas de seus ângulos internos? $8 \cdot 180° = 1440°$

4. Expliquem oralmente qual é a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos.
O número de triângulos é igual ao número de lados do polígono menos dois.

Heptágono é o polígono de 7 lados.

Lápis Mágico

A partir dessas ideias, podemos escrever uma fórmula para determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono.

Representando o número de lados do polígono por n e a soma das medidas dos ângulos internos por S_n, temos:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180°$$

S_n e n são as variáveis dessa fórmula. Elas dependem uma da outra – são **interdependentes**.

Vamos experimentar?

Um octógono tem 8 lados.

Fazendo $n = 8$ na fórmula acima, temos:

$S_8 = (8 - 2) \cdot 180°$

$S_8 = 6 \cdot 180°$

$S_8 = 1080°$

A soma das medidas dos ângulos internos de um octógono é 1080°.

Exercícios

17 Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de:

a) um dodecágono; 1 800°

b) um polígono de 11 lados; 1 620°

c) um polígono de 15 lados; 2 340°

d) um polígono de 20 lados. 3 240°

18 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é 900°. Qual é o polígono?

• Heptágono $900° = (n-2) \cdot 180°$; $n - 2 = 5$; $n = 7$

19 Determine todas as medidas dos ângulos de cada polígono.

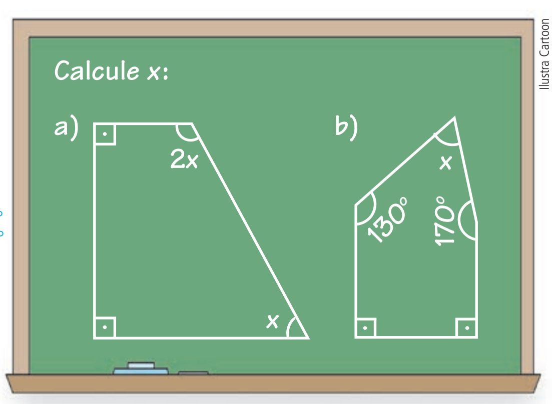
a) Triângulo – um ângulo de 50° e outro de 60°. 70°

b) Quadrilátero – dois ângulos de 80° e outro de 70°. 130°

c) Pentágono – dois ângulos de 105° e os outros três congruentes. 110°

d) Hexágono – seis ângulos congruentes. 120°

20

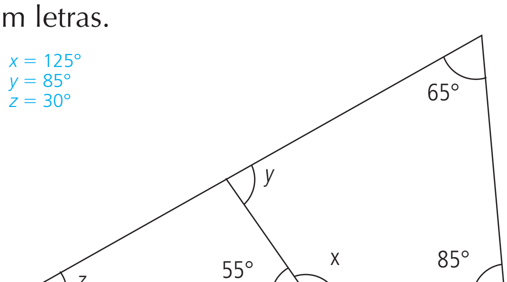


Ilustra Cartoon

a) $x = 60°$
b) $x = 60°$

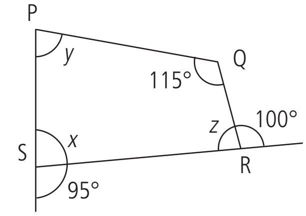
21 Calcule a medida dos ângulos indicados com letras.

$x = 125°$
$y = 85°$
$z = 30°$

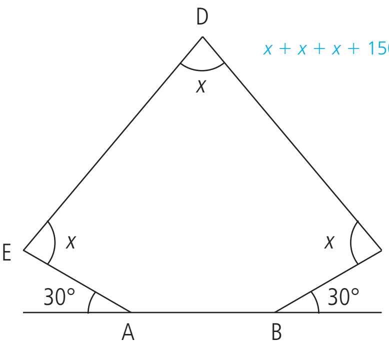


22 Determine a medida dos ângulos indicados pelas letras.

a) $x = 85°$; $z = 80°$; $y = 80°$

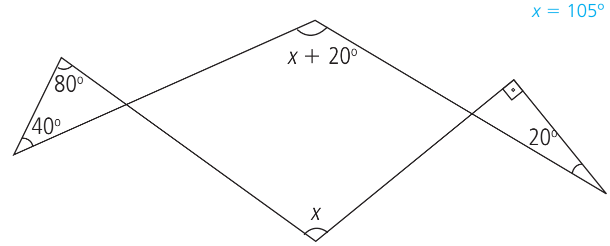


b) $x + x + x + 150° + 150° = 540°$; $x = 80°$



23 Calcule o valor de x na figura.

$x + x + 20° + 60° + 70° = 360°$
$x = 105°$

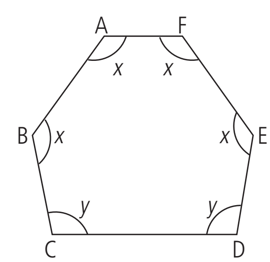


24 Calcular os valores de x e de y na figura, sabendo que $x - y = 30°$.

$\begin{cases} x - y = 30° \\ 4x + 2y = 720° \end{cases}$

Resolvendo, temos:

$\begin{cases} x = 130° \\ y = 100° \end{cases}$



25 (Fuvest-SP) No retângulo a seguir, o valor, em graus, de $\alpha + \beta$ é: $40° + (180° - \alpha) + 90° + (180° - \beta) = 360°$; $\alpha + \beta = 130°$

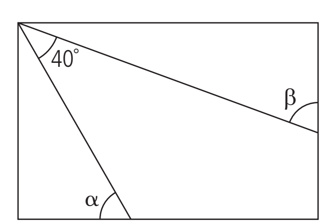
a) 50

b) 90

c) 120

x d) 130

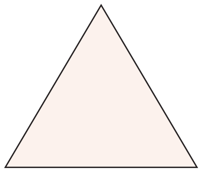
e) 220



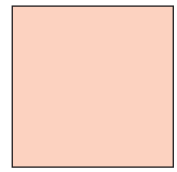
Ilustrações: DAE

Ângulos dos polígonos regulares

Um polígono é regular se todos os seus lados são congruentes e todos os seus ângulos internos são congruentes.

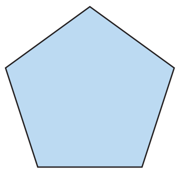


- O triângulo equilátero é regular, pois tem 3 lados congruentes e 3 ângulos internos congruentes.

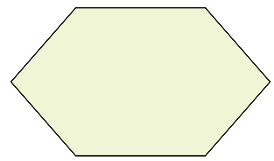


- O quadrado também é um polígono regular. Há pentágonos regulares, hexágonos regulares, e assim por diante.

Ilustrações: DAE



- Este pentágono é regular.



- Este hexágono não é regular.

Sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é

$S_5 = (5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$

Se o pentágono for regular, seus ângulos internos serão congruentes, portanto cada ângulo do pentágono regular mede $540° : 5 = 108°$.

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono

Marcamos, na ilustração de um pentágono, ângulos externos.

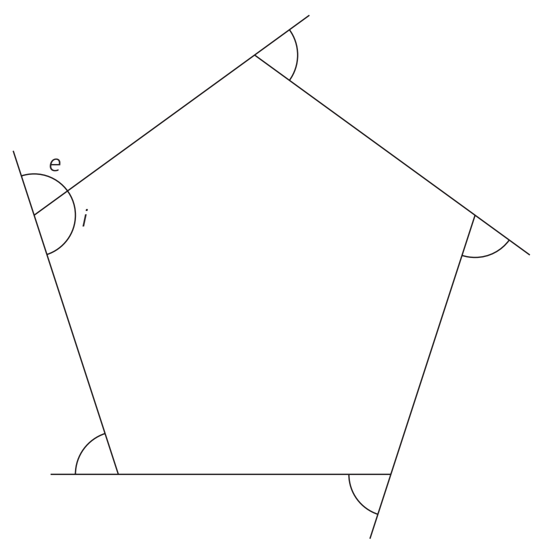
Observe que o vértice do ângulo externo é vértice do polígono. O prolongamento de um lado do polígono gera o outro lado do ângulo externo.

Chamando a medida de um ângulo interno de i, e a do externo de e, podemos ver que $i + e = 180°$

Já descobrimos como calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono.

Como será, então, que se calcula a soma das medidas dos ângulos externos?

Imaginemos um polígono de n lados. A medida de cada ângulo interno será indicada por $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n$ e a medida de cada ângulo externo por $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n$.



$$\underbrace{i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n}_{\text{soma das medidas dos ângulos internos } S_i} + \underbrace{e_1 + e_2 + e_3 + \ldots e_n}_{\text{soma das medidas dos ângulos externos } S_e} = n \cdot 180°$$

$(n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180°$ Aplicando a propriedade distributiva:

$n \cdot 180° - 360° + S_e = n \cdot 180°$ Subtraindo $(n \cdot 180°)$ de ambos os membros:

$-360° + S_e = 0 \rightarrow \mathbf{S_e = 360°}$

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono é sempre igual a 360°.

Exercícios

26 Um polígono é regular se tem todos os lados congruentes entre si e todos os ângulos congruentes entre si. Responda ao que se pede.

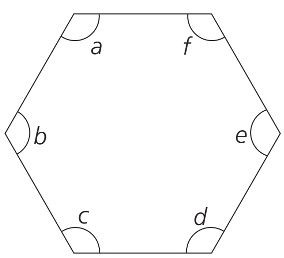
a) Quais são os triângulos regulares? Os equiláteros.

b) Quais são os quadriláteros regulares? Os quadrados.

c) Um polígono pode ter os ângulos congruentes e não ser regular? Caso a resposta seja afirmativa, dê exemplo. Sim. Retângulo.

d) Um polígono pode ter os lados congruentes e não ser regular? Caso a resposta seja afirmativa, dê exemplo Sim. Losango.

27 A figura é um hexágono regular.

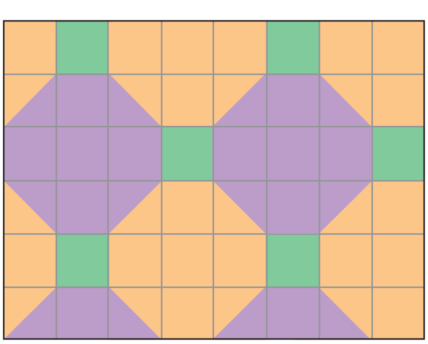


a) Quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do hexágono? 720°

b) Qual é a medida do ângulo *a*? 120°

28 O mosaico a seguir, desenhado em papel quadriculado, é formado por quadrados e octógonos.

Ilustrações: DAE



a) Quanto mede cada ângulo do octógono? 135°

b) Estes octógonos são regulares? Por quê?
Não. Porque os lados não têm a mesma medida.

29 Complete a tabela no caderno.

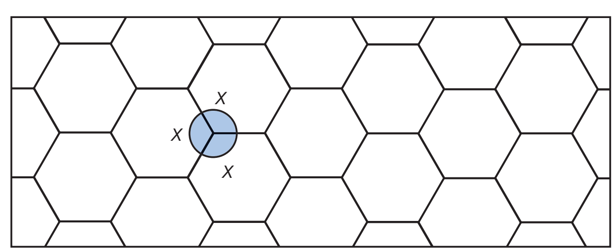
Polígono regular	Nº de ângulos internos	Medida de cada ângulo interno
Triângulo	3	60°
Quadrado	4	90°
Pentágono	5	108°
Octógono	8	135°
Eneágono	9	140°
Decágono	10	144°

30 Responda.

a) Qual polígono tem maior ângulo interno: um hexágono regular ou um octógono regular? Octógono regular.

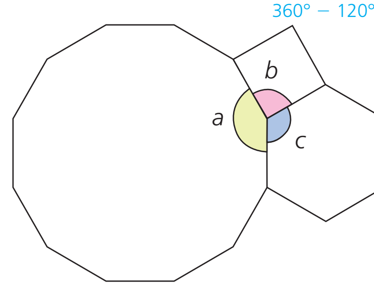
b) Quanto maior o número de lados, o que acontece com o ângulo interno? Maior é o ângulo interno.

31 Na figura, os três ângulos indicados têm a mesma medida. Calcule mentalmente o valor de *x*. $360° : 3 = 120°$



32 Na figura, os três polígonos são regulares. Calcule mentalmente o valor de *a*.

$360° - 120° - 90° = 150°$



Revisando

33 Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

a) Todos os quadriláteros são trapézios. F

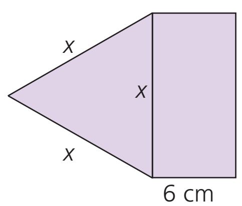
b) Todos os quadrados são losangos. V

c) Todos os retângulos são quadrados. F

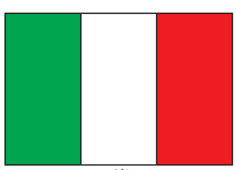
d) Todos os quadrados são retângulos. V

34 O retângulo e o triângulo equilátero da figura têm igual perímetro. Calcule o perímetro da figura colorida. 48 cm

• $3x = 2x + 12$



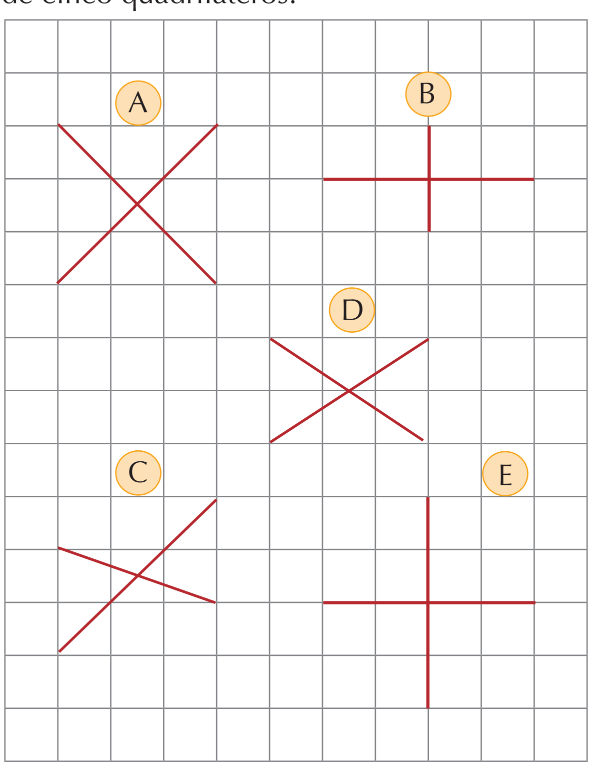
35 Quantos eixos de simetria tem essa bandeira? 2 eixos



Itália

36 Na figura estão representadas as diagonais de cinco quadriláteros.

Ilustrações: DAE



Quais são os quadriláteros?

A – Quadrado; B – Losango; C – Paralelogramo; D – Retângulo; E – Quadrado.

37 (Saresp)

Polígono	Número de lados	Número de diagonais em um vértice
Quadrilátero	4	1
Pentágono	5	2
Hexágono	6	3
Heptágono	7	4
Octógono	8	5

Se um polígono tem 12 lados, então o número de diagonais em um vértice será:

a) 6 diagonais.

x **c)** 9 diagonais.

b) 7 diagonais.

d) 15 diagonais.

38 O número de diagonais de um octógono é:

a) 10

x **c)** 20 • $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$

b) 18

d) 24

39 Observe as imagens e responda.

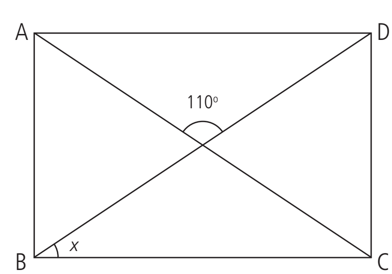
Léo Burgos

a) Qual é o polígono regular presente na antiga moeda de R$ 0,25? O heptágono.

b) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono regular? 900°

• $S_i = (7 - 2) \cdot 180° = 900°$

40 Observe o retângulo e determine a medida x. 35°

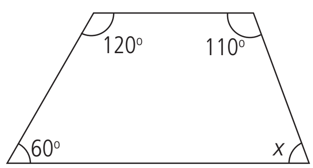


41 Um serralheiro desenhou um quadrilátero com todos os lados do mesmo comprimento, mas os ângulos não eram retos. Que figura esse serralheiro desenhou?

a) Quadrado.
x b) Losango.
c) Trapézio.
d) Retângulo.

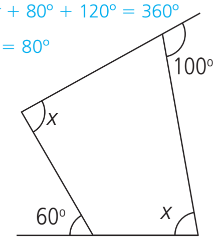
42 Calcule o valor de x nos quadriláteros.

a) $x = 70°$



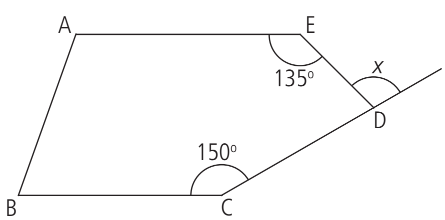
b) $2x + 80° + 120° = 360°$

$x = 80°$

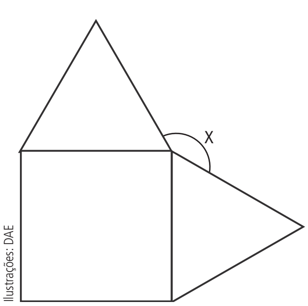


43 Na figura, $\overline{AE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Calcule o valor de x.

• med $(E\hat{D}C) = 540° - (180° + 135° + 150°) = 75°$
• $x = 180° - 75° = 105°$



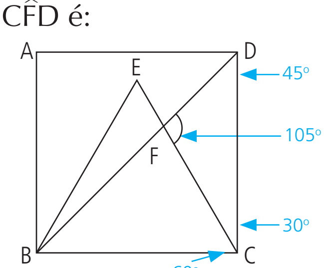
44 A figura seguinte é composta de um quadrado e dois triângulos equiláteros. Qual é, em graus, a medida x? 150°



Ilustrações: DAE

45 No interior de um quadrado ABCD se construiu o triângulo equilátero BCE. A medida do ângulo $C\hat{F}D$ é:

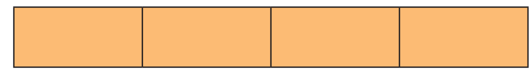
a) 90°
x b) 105°
c) 110°
d) 120°



Desafios

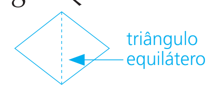
• 4 pequenos
• 3 duplos
• 2 triplos
• 1 grande

46 Quantos retângulos há nesta figura?



a) 6
b) 8
c) 9
x d) 10

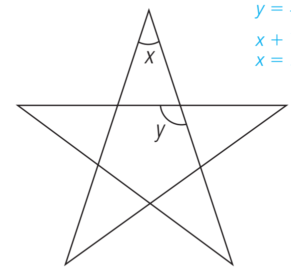
47 A diagonal menor de um losango é congruente aos lados do losango. Quanto medem os ângulos desse losango?



60°, 120°, 60° e 120°

48 Na figura, o pentágono é um polígono regular. Determine a medida dos ângulos indicados na figura.

$y = \frac{540°}{5} = 108°$
$x + 72° + 72° = 180°$
$x = 36°$



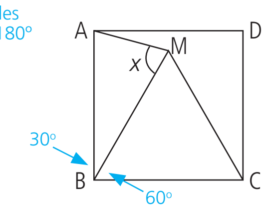
49 Sabendo que um ângulo externo de um polígono regular mede 30°, quantos lados terá esse polígono?

• $\frac{360°}{n} = 30°$
• $n = 12$

a) 6 lados
x b) 12 lados
c) 14 lados
d) 20 lados

50 Na figura temos um quadrado ABCD e um triângulo equilátero BCM. Calcule, em graus, a medida x.

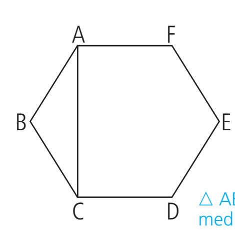
△ ABM é isósceles
$x + x + 30° = 180°$
$x = 75°$



51 Na figura, ABCDEF é um hexágono regular. Então, o ângulo $B\hat{A}C$, em graus, mede:

a) 15
x b) 30
c) 45
d) 60

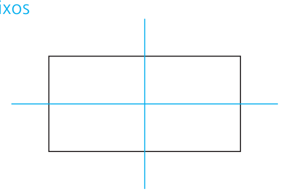
$S_i = (6 - 2) \cdot 180° = 720°$
$a_i = 720° : 6 = 120°$



△ ABC é isósceles
med $(B\hat{A}C) = (180° - 120°) : 2 = 30°$

Seção livre

52 Quantos eixos de simetria tem um retângulo? 2 eixos

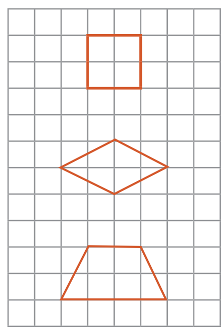


53 Quantos eixos de simetria tem:

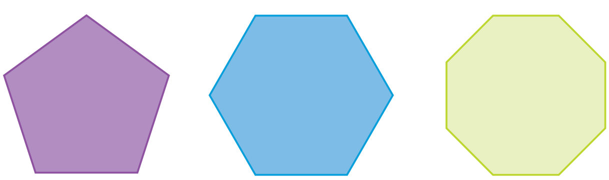
a) um quadrado? 4 eixos

b) um losango? 2 eixos

c) um trapézio isósceles? 1 eixo



54 Observe os seguintes polígonos regulares:



5; 5   6; 6   8; 8

Para cada um deles, indique o número de lados e o número de eixos de simetria. Que conclusão você pode tirar? O número de eixos de simetria é igual ao número de lados.

55 (UFPE) Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. Doze delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são congruentes aos dos hexágonos, de forma que podem ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas são as costuras feitas na fabricação da bola de futebol?

Dole/Dreamstime.com

a) 60   b) 64   x c) 90   d) 120

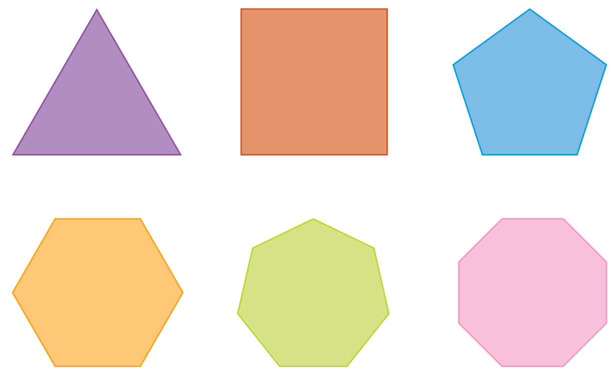
12 pentágonos → $12 \cdot 5 = 60$ lados

20 hexágonos → $20 \cdot 6 = 120$ lados

$60 + 120 = 180$ lados

Cada lado foi contado duas vezes, então $n = \frac{180}{2} = 90$.

56 Os polígonos são bastante aplicados em várias situações práticas, como, por exemplo, no revestimento de pisos ou paredes, em calçamento de ruas etc. Alguns polígonos regulares pavimentam o plano, outros não.

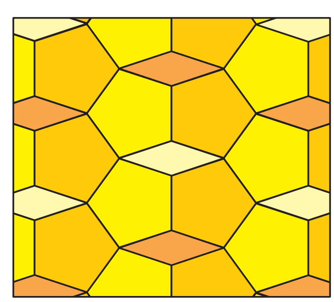


a) Quais destes polígonos pavimentam o plano? Triângulo, quadrado e hexágono.

b) No caso dos polígonos que pavimentam o plano, qual é a medida de seus ângulos internos? Triângulo: 60°; quadrado: 90°; hexágono: 120°.

c) Será que um decágono regular pavimenta o plano? Por quê? Não. A medida do ângulo interno é 144° e este número não é divisor de 360°.

57 (Encceja-MEC) Um artista criou um mosaico utilizando pentágonos regulares e losangos, dispostos como mostra a figura.



Ilustrações: DAE

Para recortar as peças do mosaico, o artista precisa conhecer a medida dos ângulos das figuras. Sabendo que cada ângulo interno de um pentágono regular mede 108°, os ângulos internos dos losangos devem medir:

a) 18° e 162°   x c) 36° e 144°

b) 30° e 150°   d) 54° e 126°

$360° - 3 \cdot 108° = 36°$

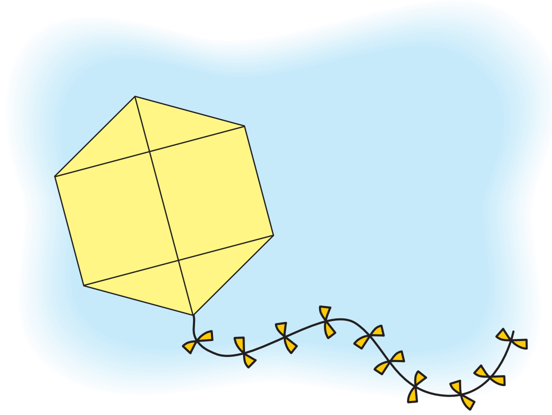
$180° - 36° = 144°$

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

58 (Saresp) Para confeccionar sua pipa, Paulo usou 3 varetas, nas posições indicadas na figura. Como a pipa tem forma hexagonal, se em cada diagonal Paulo colocasse uma vareta, ele teria que dispor de mais:

Hélio Senatore



a) 9 varetas.
x b) 6 varetas.
c) 4 varetas.
d) 3 varetas.

59 (Uerj)

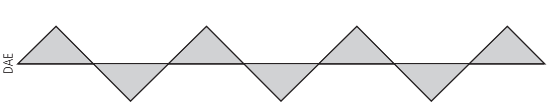
> Se um polígono tem todos os lados congruentes, então todos os seus ângulos internos são congruentes.

Para mostrar que essa proposição é **falsa**, pode-se usar como exemplo a figura denominada:

x a) losango.
b) trapézio.
c) retângulo.
d) quadrado.

60 (Vunesp) A figura é composta de triângulos retângulos isósceles, todos congruentes.

DAE



O menor quadrado que possa ser formado pela união de quatro desses triângulos terá uma área, em centímetros quadrados, de

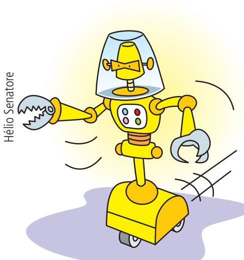
a) 16.
b) 36.
c) 49.
x d) 25.

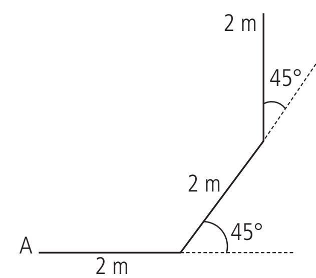
61 (Saresp) Quando o lado de um quadrado é multiplicado por 3, então seu perímetro fica multiplicado por

x a) 3.
b) 6.
c) 9.
d) 12.

62 (PUCC-SP) A figura descreve o movimento de um robô:

Hélio Senatore

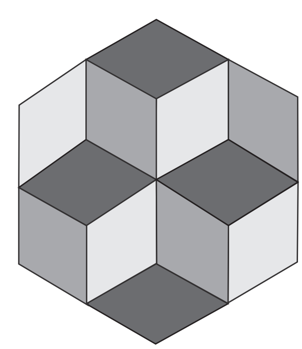




Partindo de A, ele sistematicamente avança 2 m e gira 45° para a esquerda. Quando esse robô retornar ao ponto A, a trajetória percorrida terá sido:

a) um hexágono regular.
x b) um octógono regular.
c) um decágono regular.
d) um polígono não regular.

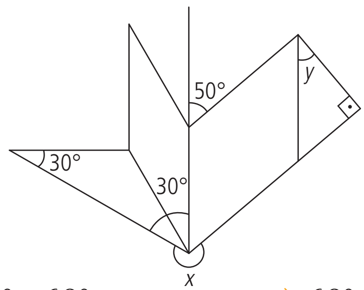
63 (SEE-SP) A figura ao lado parece ter relevo, mas, na verdade, é uma figura plana formada por vários losangos congruentes entre si. Sobre os ângulos internos de cada um desses losangos, é verdade que:



DAE

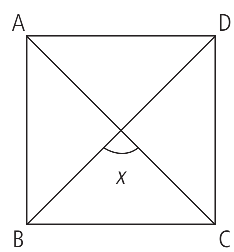
a) os quatro são congruentes. 360 : 3 = 120° 360 : 6 = 60°
b) dois medem 45° e dois medem 135°.
x c) dois medem 60° e dois medem 120°.
d) dois medem 30° e dois medem 150°.

64 (Cefet-PR) Na figura abaixo temos um losango, um paralelogramo, um triângulo isósceles e um triângulo retângulo. Sabendo disso, podemos afirmar que os valores, em graus, de x e y são, respectivamente:



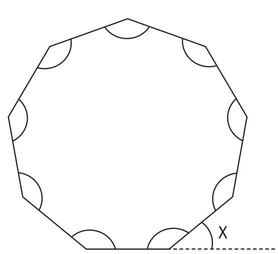
a) 190° e 60°
b) 60° e 190°
c) 60° e 250°
x d) 250° e 40°

65 Quanto vale x no quadrado ABCD?



a) 30°
b) 60°
c) 80°
x d) 90°

66 A medida de cada ângulo externo do eneágono regular é:

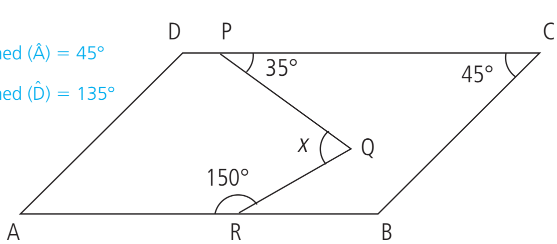


x a) 40°
b) 45°
c) 100°
d) 140°

67 Quanto vale x no paralelogramo ABCD?

med (Â) = 45°

med ($\hat{D}$) = 135°



a) 60°

150° + 45° + 135° + 145° = 475°

x b) 65°

x = 540° − 475° = 65°

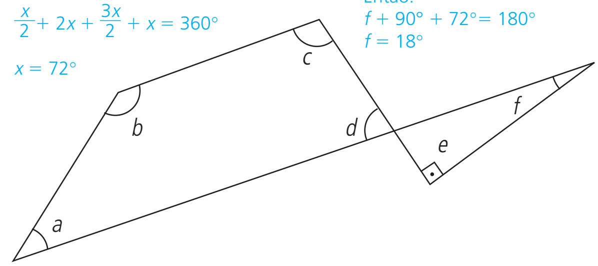
c) 70°
d) 75°

68 (Fuvest-SP) Nesta figura, os ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ medem, respectivamente, $\frac{x}{2}$, $2x$, $\frac{3x}{2}$ e x. O ângulo $\hat{e}$ é reto. Qual a medida do ângulo $\hat{f}$?

$\frac{x}{2} + 2x + \frac{3x}{2} + x = 360°$

$x = 72°$

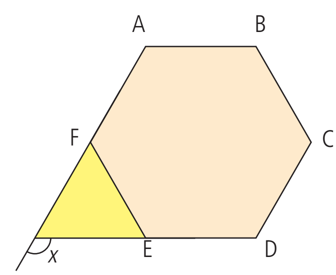
Então:
$f + 90° + 72° = 180°$
$f = 18°$



Ilustrações: DAE

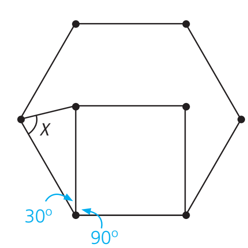
a) 16°
x b) 18°
c) 20°
d) 22°

69 Na figura, ABCDEF é um hexágono regular. O valor de x é:



a) 60°
b) 80°
c) 100°
x d) 120°

70 Na figura, temos um hexágono regular e um quadrado. Então, o valor de x é:

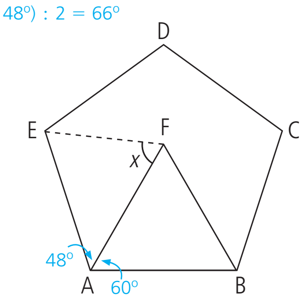


x a) 75°
b) 45°
c) 60°

720° : 6 = 120°
Temos um △ isósceles.
$x + x + 30° = 180°$
$x = 75°$

d) 90°

71 Na figura, ABCDE é um pentágono regular e ABF é um triângulo equilátero. A medida do ângulo A$\hat{F}$E é : med (E$\hat{A}$B) = 108°
x = (180° − 48°) : 2 = 66°



a) 60°
b) 62°
c) 64°
x d) 66°

Circunferência e círculo

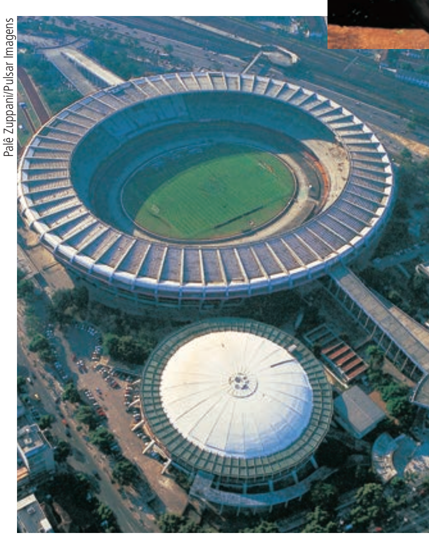
1. Caracterização

Circunferência e **círculo** são a mesma coisa?

Photodisc

Photodisc

Palê Zuppani/Pulsar Imagens

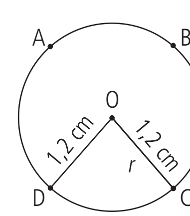


Delfim Martins/Pulsar Imagens

◆ As formas circulares aparecem com frequência nos objetos do cotidiano, na arquitetura, no contexto da tecnologia...

Vamos esclarecer:

Marcamos um ponto O no plano e fixamos uma distância, por exemplo, 1,2 cm.



DAE

> A linha fechada formada por todos os pontos do plano que distam igualmente de O é uma **circunferência**.

Os pontos A, B, C e D são exemplos de pontos pertencentes a essa circunferência. O ponto O é o seu centro.

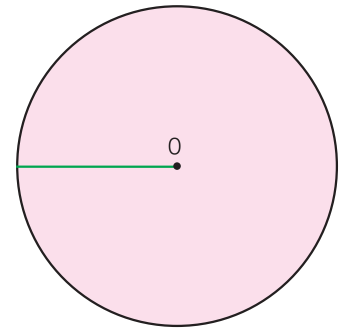
> O segmento que une o centro a qualquer ponto da circunferência é o seu **raio**, que será indicado por *r*.

Nessa circunferência, o raio mede 1,2 cm.

Vimos que a circunferência é uma linha.

E o círculo, você sabe o que é?

> Unindo a circunferência e os pontos do seu interior, obtemos um **círculo**.



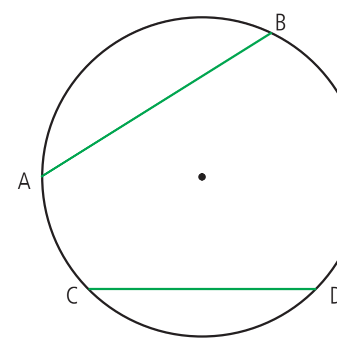
Ilustrações: DAE

O círculo ocupa uma superfície.

O centro e o raio do círculo coincidem com o centro e o raio de sua circunferência.

Cordas

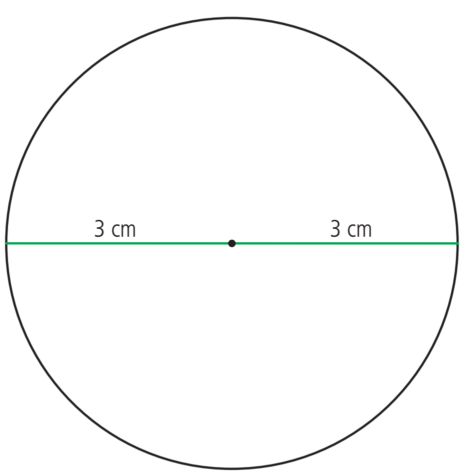
> Um segmento de reta cujas extremidades são dois pontos distintos da circunferência é uma **corda**.



Na figura, $\overline{AB}$ é um exemplo de corda. Suas extremidades são os pontos A e B, que são pontos da circunferência. $\overline{CD}$ também é uma corda.

> Uma corda que passa pelo centro da circunferência é chamada de **diâmetro** da circunferência.

Traçamos um diâmetro da circunferência abaixo, cujo raio mede 3 cm.



Em qualquer circunferência, a medida do diâmetro (*d*) é igual ao dobro da medida de seu raio (*r*).

$$d = 2 \cdot r$$

Fernando Favoretto/Criar Imagem

O compasso é o instrumento ideal para traçar circunferências. Usando a ponta seca, fixamos um ponto do plano, O, que será o centro da circunferência. A abertura do compasso determina a medida do raio *r*.

Quando traçamos a circunferência, todos os pontos da curva traçada estarão a uma mesma distância *r* do centro O.

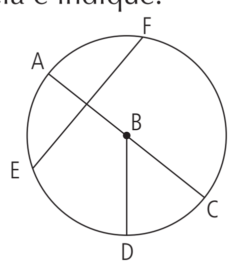
Exercícios

1 Comente a afirmação de Paulo:

Hélio Senatore

Sugestão de resposta: Espera-se que o aluno perceba que a afirmação é falsa porque uma circunferência com 5 cm de diâmetro tem 2,5 cm de raio.

2 Considere a circunferência e indique:



a) o centro; B

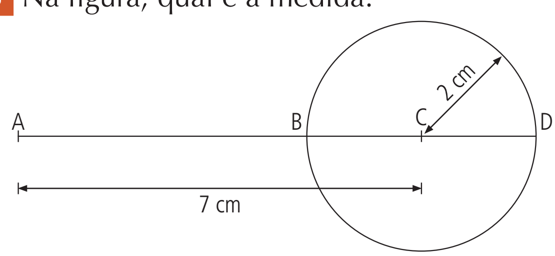
b) três raios; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$

c) um diâmetro; $\overline{AC}$

d) duas cordas. $\overline{AC}$, $\overline{EF}$

e) um ponto que não pertença à circunferência. B

3 Na figura, qual é a medida:

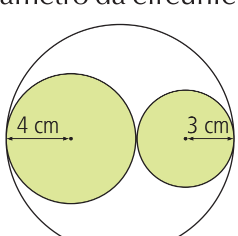


a) do segmento de reta $\overline{BD}$? 4 cm

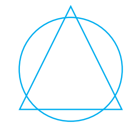
b) do segmento de reta $\overline{AD}$? 9 cm

c) do segmento de reta $\overline{AB}$? 5 cm

4 Qual é o diâmetro da circunferência maior?
14 cm



5 Qual é a maior quantidade de pontos em que se podem intersectar uma circunferência e um triângulo?



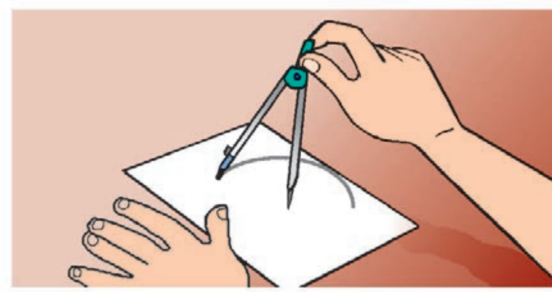
a) 3

b) 4

c) 5

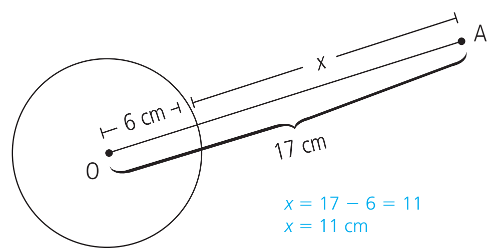
x **d)** 6

6 Qual é o raio, em cm, da maior circunferência que se pode desenhar em uma folha de papel com as dimensões de 11 cm de largura e 19,6 cm de comprimento? 5,5 cm



Ilustra Cartoon

7 Observe a figura e calcule x:



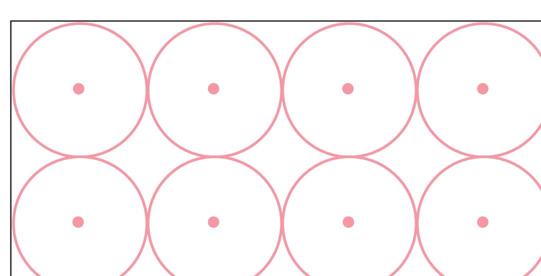
$x = 17 - 6 = 11$
$x = 11$ cm

8 Em uma circunferência de raio $2x - 3$ cm e diâmetro de 30 cm, determine o valor de x.

$2x - 3 = 15$
$x = 9$ cm

9 O perímetro do retângulo a seguir mede 36 cm. Calcule a medida do raio de cada circunferência. 1,5 cm

$4x + 8x + 8x + 4x = 36$
$x = 1,5$



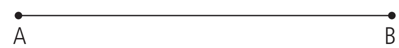
Ilustrações: DAE

Circunferências e a construção de triângulos dados seus lados

Você já sabe construir com régua e compasso um triângulo dadas as medidas de seus lados. Você compreenderá melhor a construção usando a definição de circunferência.

Vamos construir um triângulo cujos lados medem 5 cm, 4 cm e 2 cm.

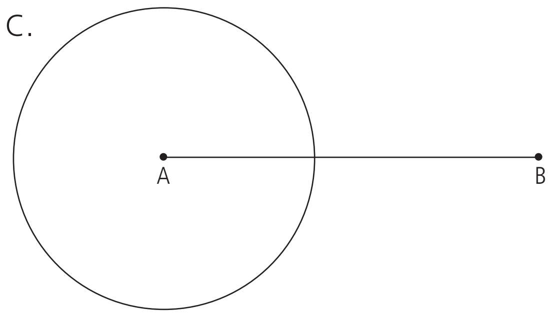
Traçamos o lado de 5 cm, mas você pode começar pelo lado que quiser.

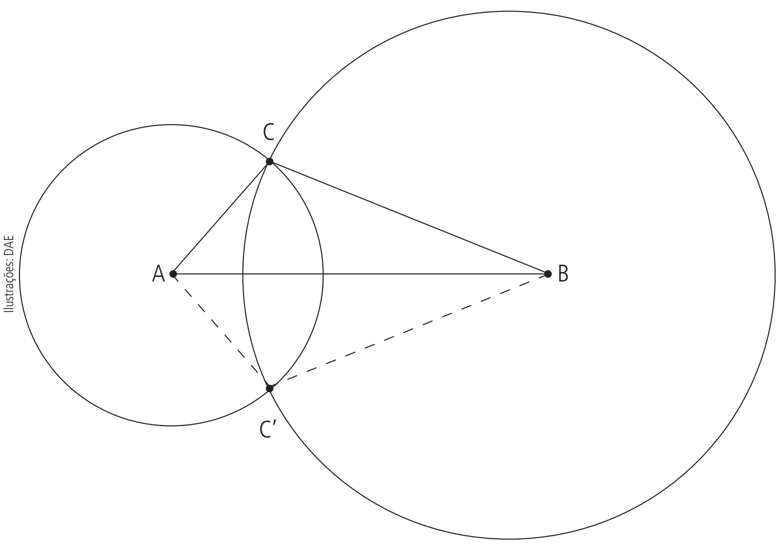


Já temos os vértices A e B, falta determinar o vértice C.

O vértice C está a 2 cm de A, ou seja, o vértice C está na circunferência de centro em A e raio 2 cm.

Ao mesmo tempo, o vértice C está a 4 cm de B: está na circunferência de centro em B e raio 4 cm.





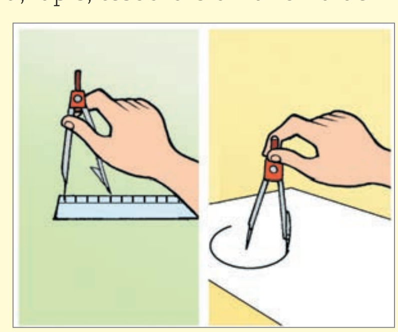
Ilustrações: DAE

Existem dois pontos, C e C', que pertencem às duas circunferências, ou seja, que estão a 2 cm de A e a 4 cm de B.

Obtivemos os triângulos ABC e ABC'. Como eles são **congruentes**, costuma-se desenhar somente um deles.

Professor, aproveite essa atividade para trabalhar a condição de existência de um triângulo.

Para realizar a atividade a seguir você precisará de compasso, régua, lápis, tesoura e uma folha de papel sulfite.



Ilustra Cartoon

1. Marque no papel um ponto P.

2. Com auxílio do compasso, trace no papel a circunferência de centro P, com raio de medida 4 cm.

3. Recorte, obtendo um círculo.

4. Dobre o círculo ao meio.

5. Abra e reforce a lápis a linha de dobra.

Você traçou um diâmetro *d* do círculo.
Um diâmetro divide o círculo em dois semicírculos idênticos.

6. Dobre o círculo em outra direção para obter outro diâmetro.

Responda no caderno à questão a seguir.

- Os diâmetros se intersectam num ponto. Que ponto é esse? O centro do círculo.

7. Um diâmetro é eixo de simetria do círculo? Sim.

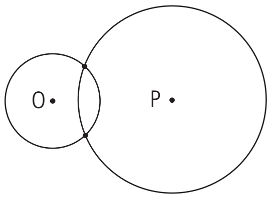
- Quantos eixos de simetria tem um círculo? Infinitos. Todo diâmetro é eixo de simetria do círculo.

2. Posição relativa de duas circunferências

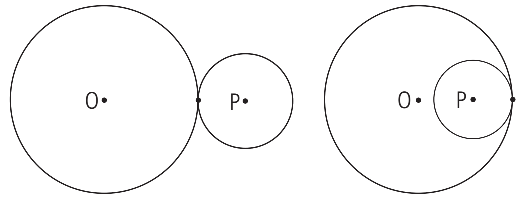
Duas circunferências podem ou não ter pontos em comum. Há nomes para cada caso. Veja:

Ilustrações: DAE

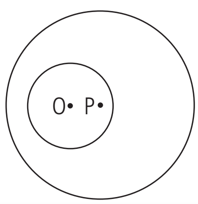
O e P são os centros das circunferências ao lado.



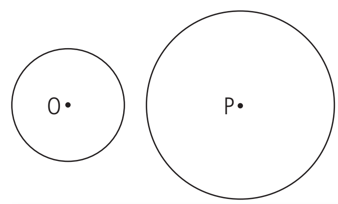
Circunferências secantes: têm dois pontos distintos comuns.



Circunferências tangentes: têm um único ponto em comum.



Uma interna à outra: não têm ponto comum.



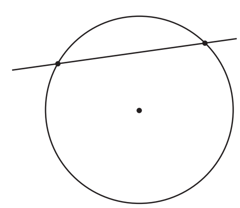
Externas uma à outra: não têm ponto comum.

Hélio Senatore

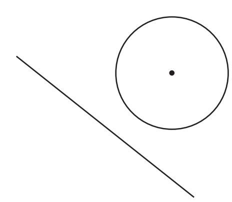
3. Posição relativa entre reta e circunferência

Uma reta e uma circunferência também podem ou não ter pontos em comum.

Reta tangente à circunferência: têm um único ponto em comum, chamado ponto de tangência.



Reta secante à circunferência: têm dois pontos distintos em comum.



Reta externa à circunferência: não têm ponto em comum.

CONECTANDO SABERES

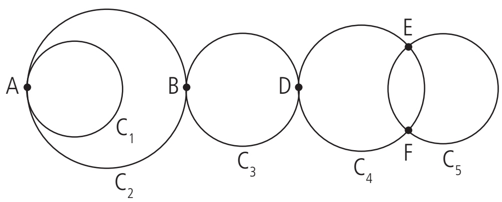
Geometria e Arte têm tudo a ver. Inspire-se nessa obra do artista russo Wassily Kandinsky e crie, com auxílio de compasso e régua, uma composição usando muitos círculos, circunferências e outras figuras geométricas.

Abuse das cores!

◆ Wassily Kandinsky. *Círculos em círculos*, 1923.
Aquarela e tinta sobre papel, 46,5 cm × 42,5 cm.

Exercícios

10 Dê a posição relativa das circunferências:



a) C_1 e C_2 Tangentes interiores.

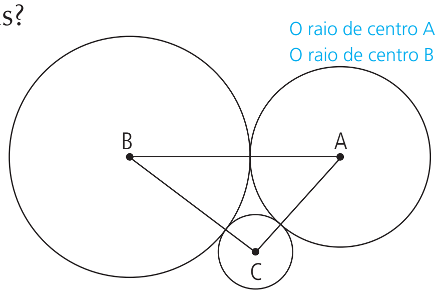
b) C_1 e C_3 Exteriores.

c) C_3 e C_4 Tangentes exteriores.

d) C_4 e C_5 Secantes.

11 As três circunferências são tangentes. O raio da menor é 5 cm, AC = 17 cm e BC = 21 cm. Qual é a medida do raio das outras circunferências?

O raio de centro A = 12 cm.
O raio de centro B = 16 cm.

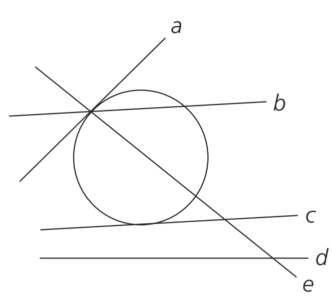


12 Na figura, identifique as retas em relação à circunferência:

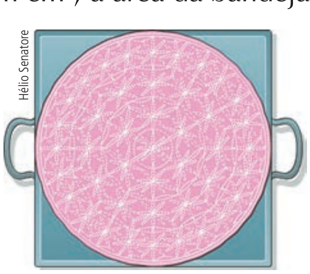
a) secantes; *b*, *e*

b) tangentes; *a*, *c*

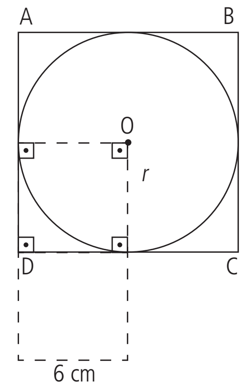
c) externas. *d*



13 O raio da toalha circular de tecido é 150 mm. Qual é, em cm^2, a área da bandeja? 900 cm^2


Hélio Senatore

14 Seja ABCD um quadrado. Nessas condições, determine:



a) a medida do lado do quadrado; 12 cm

b) o perímetro desse quadrado; 48 cm

c) a área do quadrado. 144 cm^2

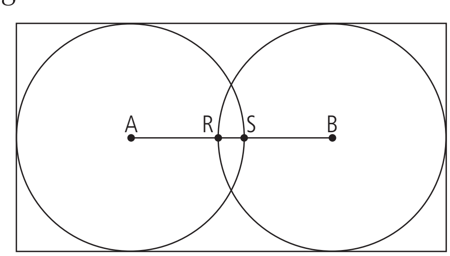
15 (Obmep) Na figura, as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo? $4 + 4 + 7 + 7 = 22$

a) 18 cm

b) 20 cm

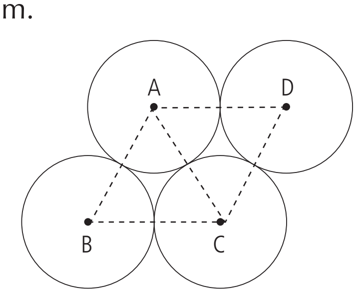
x**c)** 22 cm

d) 24 cm



Ilustrações: DAE

16 A figura é formada por quatro círculos de raio 3 cm.



a) O que se pode dizer acerca dos triângulos ABC e ACD? Por quê? São triângulos equiláteros, pois cada um de seus lados mede 6 cm.

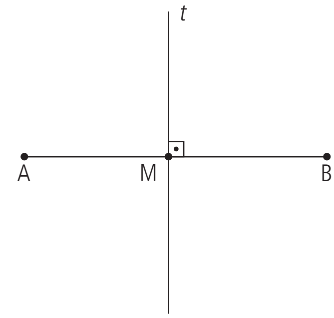
b) Classifique o quadrilátero ABCD. É um losango.

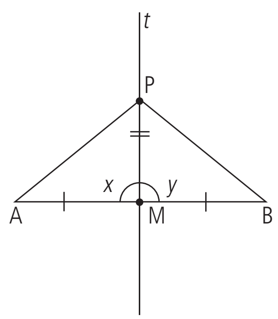
4. Propriedade da mediatriz de uma corda

Para descobrirmos essa propriedade, vamos primeiro falar de uma propriedade importante da mediatriz de um segmento.

Você lembra: **mediatriz de um segmento** é a reta que é perpendicular a esse segmento e que passa pelo ponto médio.

Traçamos um segmento $\overline{AB}$ e sua mediatriz *t*.





Marcamos um ponto qualquer P sobre a mediatriz. Traçamos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$. Vamos mostrar, usando a congruência de triângulos, que PA = PB, ou seja, que todo ponto da mediatriz de um segmento está a uma mesma distância dos extremos desse segmento.

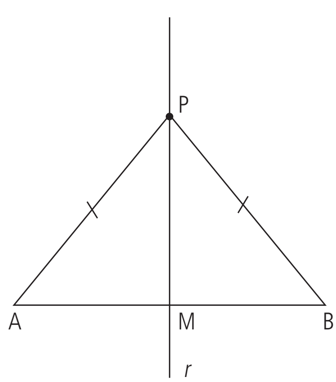
$$\left.\begin{array}{l} AM = MB \text{ (M é ponto médio de } \overline{AB}) \\ x = y = 90° \text{ (a mediatriz } t \text{ é perpendicular a } \overline{AB}) \\ \overline{MP} \text{ é lado comum} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \triangle PAM \equiv \triangle PBM \\ \text{pelo caso LAL} \end{array}$$

Daí concluímos que PA = PB, ou seja, P está à mesma distância de A e de B.

A recíproca é verdadeira: todo ponto que está a uma mesma distância das extremidades de um segmento pertence à mediatriz desse segmento. Vamos mostrar?

Marcamos abaixo um ponto P supondo PA = PB. (P está a uma mesma distância de A e de B.)

Marcamos M, ponto médio de segmento $\overline{AB}$.



O triângulo PAB é isósceles, de base $\overline{AB}$. Ora, no triângulo isósceles, mediana e altura relativas à base coincidem, portanto o segmento $\overline{PM}$ é a mediana e é a altura relativa à base $\overline{AB}$.

A reta *r*, que contém o segmento $\overline{PM}$, é perpendicular a $\overline{AB}$ e passa pelo seu ponto médio, ou seja, P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$, como queríamos mostrar.

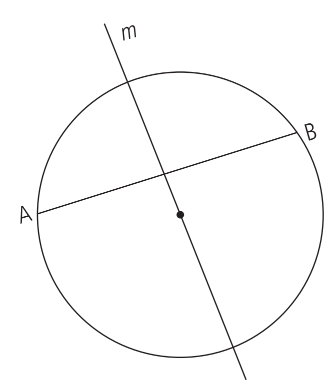
O que isso tem a ver com cordas? Veja:

Traçamos a mediatriz de uma corda $\overline{AB}$ ($\overline{AB}$ não é um diâmetro).

Vimos que todos os pontos que estão à mesma distância de A e de B pertencem à mediatriz de $\overline{AB}$.

O centro da circunferência está a uma mesma distância de A e de B. (Essa distância é o raio da circunferência, certo?)

Então, o centro da circunferência está na mediatriz de $\overline{AB}$.



Ilustrações: DAE

A mediatriz de uma corda passa pelo centro da circunferência onde está a corda.

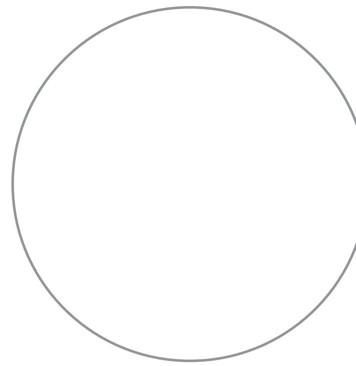
Essa propriedade é útil, por exemplo, quando temos uma circunferência e não sabemos a localização do seu centro.

Se traçarmos duas cordas que não sejam paralelas e a mediatriz de cada uma delas, o ponto de encontro dessas mediatrizes é o centro da circunferência.

Em sua casa você pode experimentar determinar o centro desconhecido de uma circunferência, usando os procedimentos a seguir:

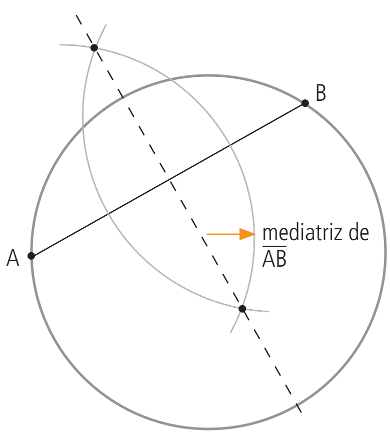
Misto Quente

1. Coloque um prato virado para baixo sobre uma cartolina e desenhe seu contorno.

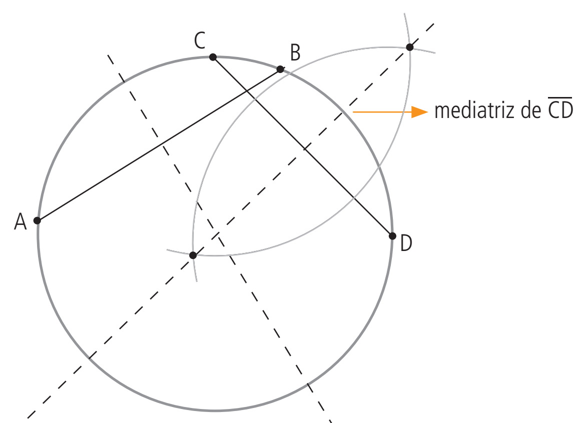


Ilustrações: DAE

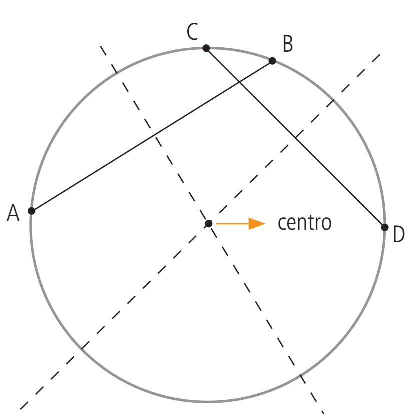
2. Retire o prato. Você traçou uma circunferência e não sabe onde está o centro dela.



3. Usando compasso e régua, trace uma corda e construa sua mediatriz.



4. Trace outra corda não paralela à corda já traçada, e construa a mediatriz dela com régua e compasso.

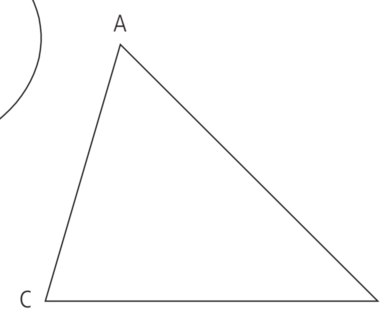


O ponto de encontro das mediatrizes das cordas determina o centro da circunferência.

Construindo um conhecimento novo a partir de um fato conhecido

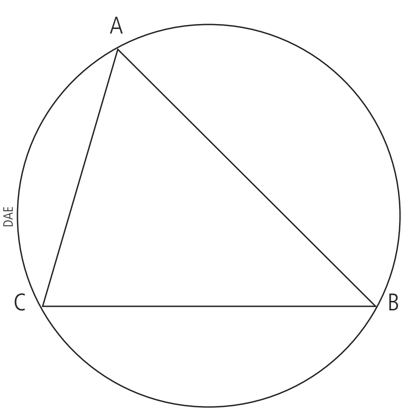
Veja o desafio que o professor apresentou a seus alunos:

Ilustrações: Lápis Mágico



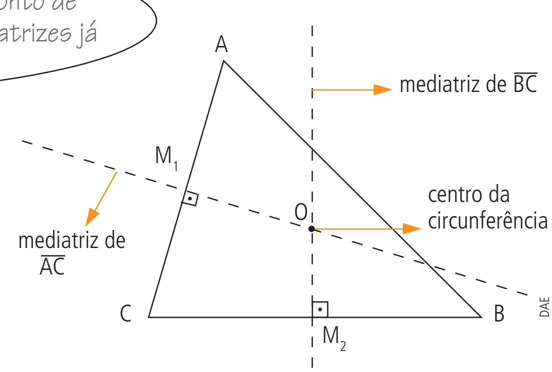
DAE

Márcia usou a imaginação: visualizou o triângulo dentro de uma circunferência e percebeu que se os vértices são pontos da circunferência...



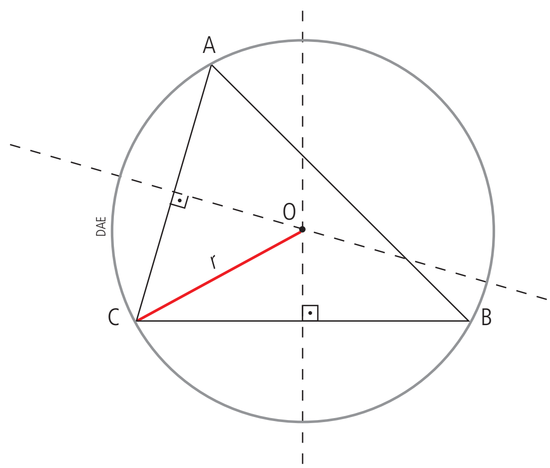
DAE

Aí ela se lembrou da propriedade que acabamos de descobrir: o ponto de encontro das mediatrizes das cordas de uma circunferência coincide com o seu centro.



DAE

Determinado o centro O, Márcia traçou com o compasso a circunferência que passa pelos três vértices do triângulo ABC, usando como raio a distância de O a qualquer um dos vértices.



Dizemos que a circunferência traçada é **circunscrita** ao triângulo ABC.

Desenhe um triângulo em seu caderno e, aproveitando as ideias de Márcia, trace a circunferência circunscrita a ele.

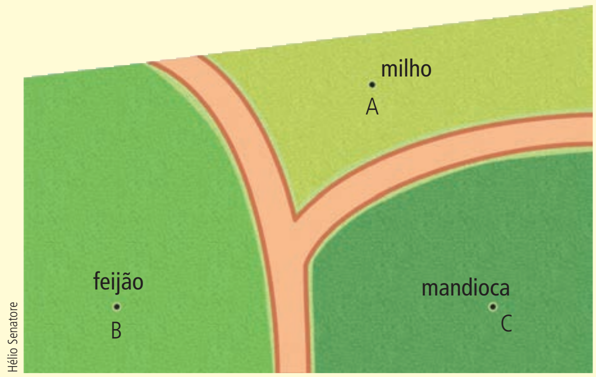
Depois, forme dupla com um colega para resolver o problema a seguir.

Vocês precisarão do material de desenho.

Para levar água às plantações no seu sítio, Marcos precisa cavar um poço que fique à mesma distância dos pontos de irrigação A, B e C.

Usem as informações do esquema feito por Marcos e determinem em seus cadernos o ponto onde ele deve fazer o poço.

Utilizem a escala 1 cm = 100 m.

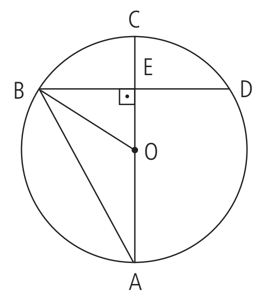


Distâncias:
- de A até B = 450 m
- de A até C = 300 m
- de B até C = 500 m

Os alunos devem determinar o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Exercícios

17 Observe a figura e responda ao que se pede.



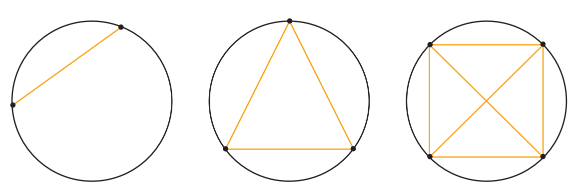
a) Quais segmentos representam os raios?
$\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{AO}$

b) Quais segmentos representam os diâmetros? $\overline{AC}$

c) Quais segmentos representam as cordas?
$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$

d) Qual segmento tem a mesma medida que $\overline{BE}$?
$\overline{ED}$

18 Mara desenhou 3 circunferências. Na primeira marcou 2 pontos, na segunda marcou 3 pontos e na terceira marcou 4 pontos. Em cada circunferência uniu todos os pontos por meio de cordas.



a) Desenhe em seu caderno mais três circunferências e faça o mesmo para o caso de 5, 6 e 7 pontos.

b) Conte o número de cordas traçadas em cada caso e complete a tabela em seu caderno.

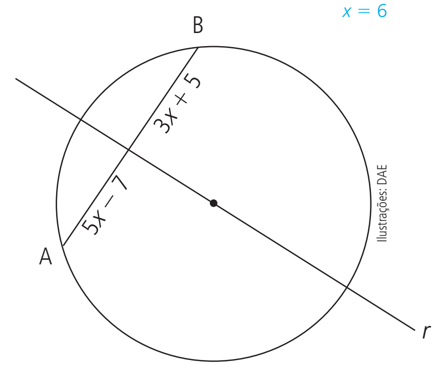
Número de pontos	2	3	4	5	6	7
Número de cordas	1	3	6			

10 15 21

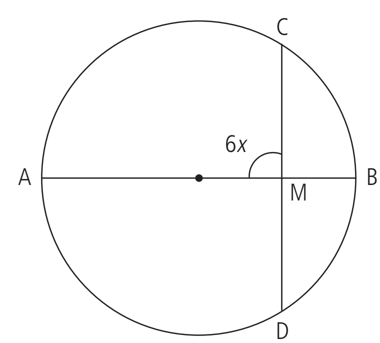
c) Reúna-se com os colegas e descubra a regra de formação dessa sequência. $\frac{n(n-1)}{2}$

19 Sabendo que r é perpendicular a $\overline{AB}$, determine o valor de x.

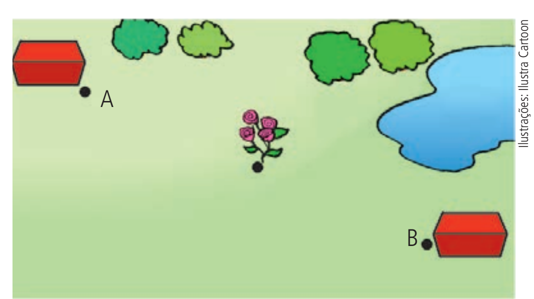
$5x - 7 = 3x + 5$
$x = 6$



20 Sabendo que $\overline{CM} \equiv \overline{MD}$ e $\overline{AB}$ é um diâmetro, determine o valor de x. 15°



21 Dois irmãos moram numa chácara. Começaram plantando uma roseira na metade da distância entre as duas casas.



Depois determinaram outros pontos a iguais distâncias das casas e nesses pontos também plantaram roseiras. Desenhe no caderno com régua e compasso onde se situam todos os pontos que têm esta propriedade. É a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio desse segmento.

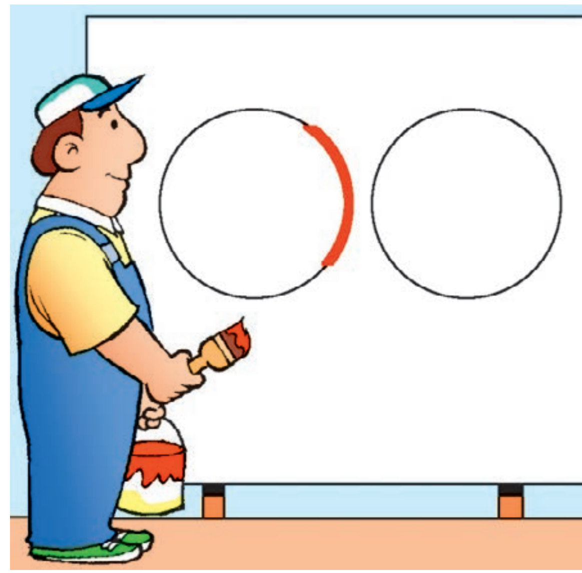
5. Arco e ângulo central

Arco de circunferência

André está pintando circunferências vermelhas num painel publicitário.

Repare que ele pintou somente um trecho da circunferência.

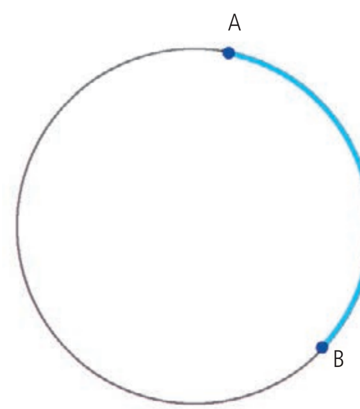
Ele pintou um **arco de circunferência**.



Ilustra Cartoon

O trecho que ainda não foi pintado também é um arco de circunferência.

Quando marcamos dois pontos distintos sobre a circunferência, determinamos dois arcos.



DAE

Os pontos A e B são as extremidades dos arcos.

Notação: $\overset{\frown}{AB}$

Convencionou-se que, ao indicar $\overset{\frown}{AB}$, estamos nos referindo ao arco menor.

Photodisc

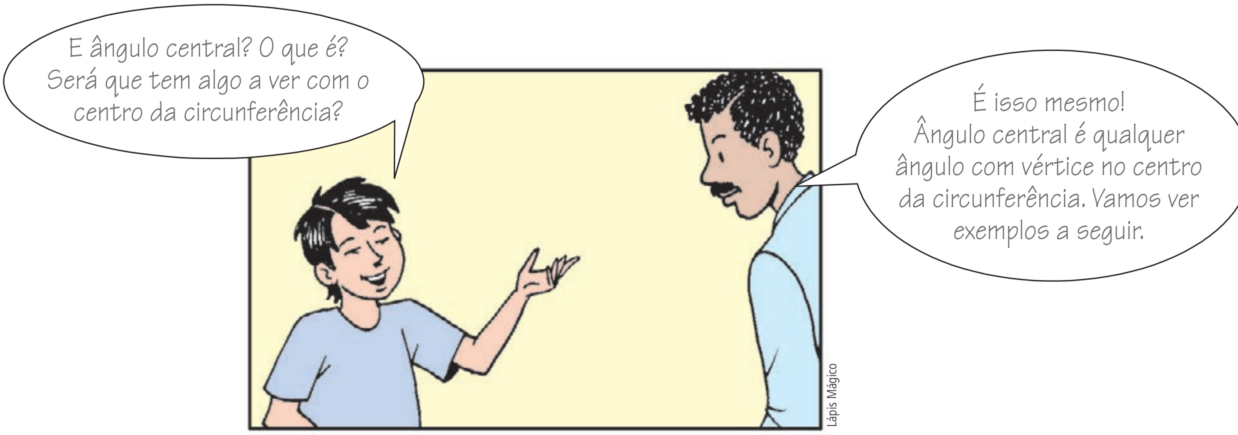
◆ Arco do Triunfo, Paris.

Léo Burgos

◆ Arcos do Túnel Daher Elias Cutait, antigo Túnel Nove de Julho. São Paulo, 2011.

Procure mais exemplos de utilização de arcos de circunferência com seus colegas! Respostas pessoais.

Ângulo central



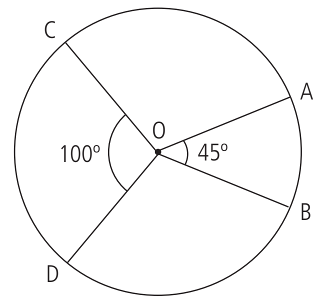
Os lados de um **ângulo central** determinam um arco na circunferência.

Na figura, o ângulo central $A\hat{O}B$ determina o arco $\overset{\frown}{AB}$.

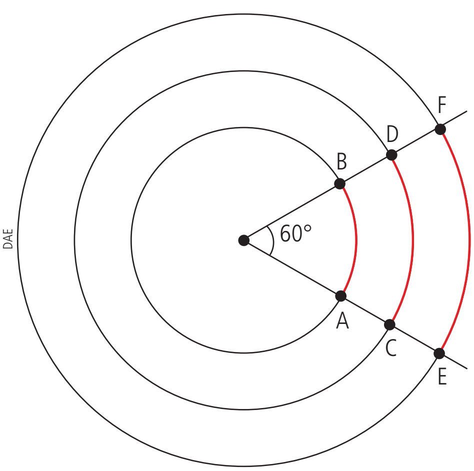
A **medida angular** do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual à medida do ângulo central que o determina.

Ainda na figura, a medida angular de $\overset{\frown}{AB}$ é 45°.

Escrevemos $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 45°$.



$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ângulos centrais.



$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 60°$

$\text{med}(\overset{\frown}{CD}) = 60°$

$\text{med}(\overset{\frown}{EF}) = 60°$

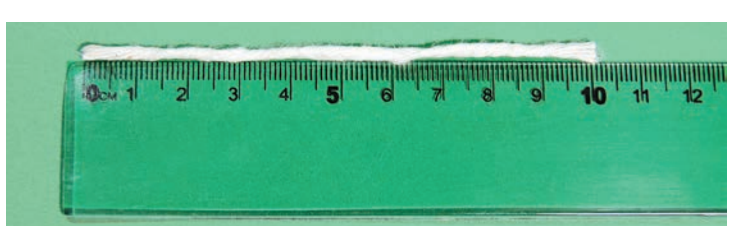
Na figura ao lado, as três circunferências traçadas têm centro no ponto O. Elas são **circunferências concêntricas**.

Observe que os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$, determinados nas circunferências por um mesmo ângulo central, têm mesma medida angular, embora os comprimentos dos arcos sejam diferentes.

> Comprimento de um arco de circunferência é a medida de um segmento de reta de comprimento igual ao do arco.
>
> É a medida do arco **retificado**.

Misto Quente

As fotografias podem ajudá-lo a compreender melhor essa ideia.



Misto Quente

Exercícios

22 Os ponteiros de um relógio formam ângulos centrais. Determine a medida do menor desses ângulos sem usar o transferidor.

a)

60°

c)

150°

Ilustrações: Ilustra Cartoon

b)

90°

x **d)**

30°

Ilustrações: Ilustra Cartoon

23 (Vunesp) Um pizzaiolo consegue fazer uma pizza de 40 cm de diâmetro perfeitamente circular e dividi-la em 8 partes iguais. Pode-se afirmar que, ao comer 3 pedaços, uma pessoa ingere o correspondente a um ângulo central de:

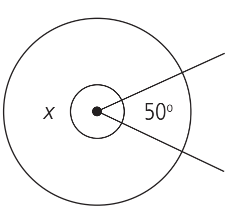
a) 75°

b) 105°

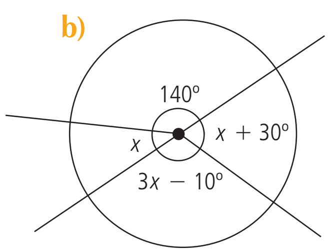
c) 125°

x **d)** 135°

24 Determine o valor de *x*.

a)


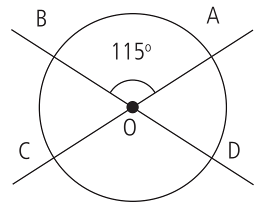
$x = 310°$

b)


$3x - 10° + x + 140° + x + 30° = 360°$
$x = 40°$

25 Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2h30min? E ao meio-dia e meia? 105°; 165°

26 Observe a figura e determine a medida angular do arco solicitado.



a) $\overset{\frown}{AB}$ 115°

b) $\overset{\frown}{BC}$ 65°

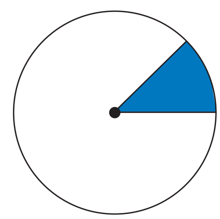
c) $\overset{\frown}{AD}$ 65°

d) $\overset{\frown}{CD}$ 115°

e) $\overset{\frown}{AC}$ 180°

f) $\overset{\frown}{BD}$ 180°

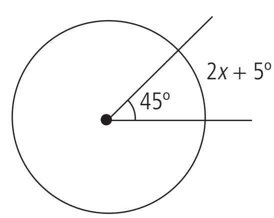
27 A figura representa uma bandeja circular. Na parte correspondente à colorida, o pai de Vivian consegue colocar, ordenadamente, 25 brigadeiros.



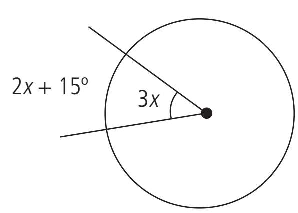
Ilustrações: DAE

Qual é a estimativa para o número de brigadeiros que cabem em toda a bandeja? Entre 180 e 220 brigadeiros.

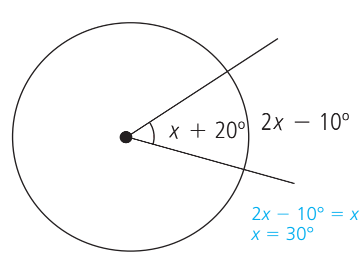
28 Determine o valor de *x*.

a)


$2x + 5° = 45°$
$x = 20°$

b)


$3x = 2x + 15°$
$x = 15°$

c)


$2x - 10° = x + 20°$
$x = 30°$

6. Comprimento de um arco

Quando dividimos o comprimento C de uma circunferência pela medida de seu diâmetro *d*, obtemos um número irracional indicado pela letra π (pi):

$$\frac{C}{d} = \pi, \text{ em que } \pi \cong 3{,}14$$

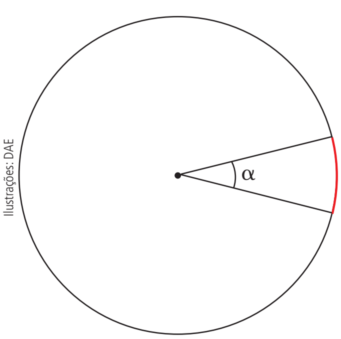
Lápis Mágico

Veja um exemplo: o comprimento de uma circunferência de raio 5 cm é

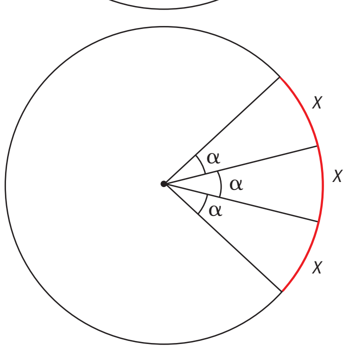
$$C = 2 \cdot 5 \cdot 3{,}14 = 31{,}4 \text{ cm}$$

Como um arco é um trecho da circunferência, é possível determinar a medida do seu comprimento em centímetros, metros etc.

Ilustrações: DAE



Um ângulo central determina um arco na circunferência. Há relação entre a medida do ângulo central e o comprimento do arco.

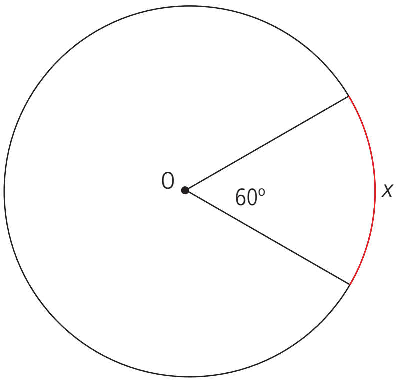


Numa mesma circunferência:

- se dobramos a medida do ângulo central, o comprimento do arco correspondente também dobra;
- se triplicamos a medida do ângulo central, o mesmo acontece com o comprimento do arco correspondente, e assim por diante.

A medida do ângulo central e o comprimento do arco correspondente a ele são **proporcionais**.

Vamos usar a proporcionalidade para determinar comprimentos de arcos. Observe novamente a rede matemática sendo construída!



DAE

O raio da circunferência ao lado mede 2,5 cm.
O comprimento dessa circunferência é de:

$$\boxed{C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 = 15{,}7 \text{ cm}}$$

Qual é o comprimento do arco x correspondente a um ângulo central de medida 60° nessa circunferência?

Ao ângulo central de uma volta (360°), corresponde o comprimento da circunferência inteira: 15,7 cm.

Ao ângulo central de 60°, corresponde o arco de comprimento x.

$$360° \longrightarrow 15{,}7$$
$$60° \longrightarrow x$$

Como há proporcionalidade direta,

$$\frac{{}^{6}\cancel{360}}{\cancel{60}} = \frac{15{,}7}{x}$$

$$6x = 15{,}7$$

$$x = \frac{15{,}7}{6} \cong 2{,}6 \text{ cm}$$

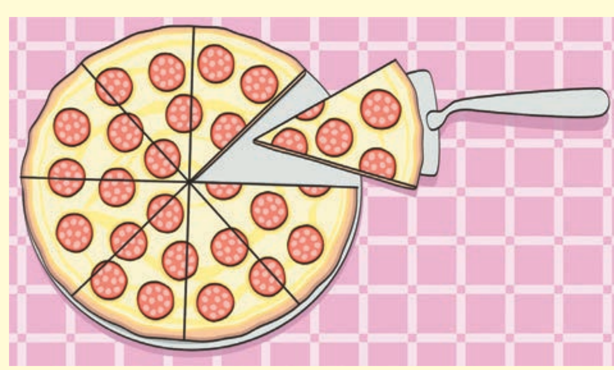
Lápis Mágico

O arco $\overset{\frown}{AB}$ tem aproximadamente 2,6 cm de comprimento.

Pense e responda.

Oito amigos vão dividir, igualmente, entre si uma pizza de calabresa.

a) Qual é o ângulo central correspondente a cada fatia? 45°


Ilustrações: Hélio Senatore

b) Qual é, em graus, a medida do arco correspondente? 45°

c) Qual é o comprimento desse arco, sabendo que a pizza tem 40 cm de diâmetro?
15,7 cm aproximadamente

Exercícios

29 Considere uma circunferência de 3,5 cm de raio e calcule a medida:

a) do seu diâmetro; 7 cm

b) do seu comprimento. 21,98 cm

30 Utilize a régua e determine o comprimento da circunferência das seguintes moedas (em cm):

Fotos: Arquivo particular

7,85 cm — 6,59 cm — 5,34 cm

As moedas estão representadas em tamanho real.

31 Patrícia tem um frasco de forma cilíndrica e quer enfeitá-lo colocando uma fita adesiva em sua volta. O diâmetro do frasco mede 8 cm. Quanto medirá a fita adesiva? 25,12 cm

Ilustra Cartoon

$C = 8 \cdot 3{,}14 = 25{,}12$ cm

32 Em volta de um canteiro circular com 3 m de raio, um jardineiro quer plantar roseiras. As plantas vão ser dispostas todas à mesma distância do centro com espaços de 12 cm entre si. Quantas roseiras ele deve encomendar? 157 roseiras

Maurício Simonetti/Pulsar Imagens

◆ Relógio de flores em Curitiba, PR.

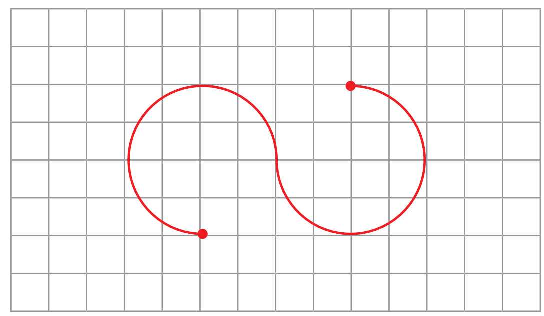
$C = 2 \cdot 3 \cdot 3{,}14 = 18{,}84$

nº roseiras $= 18{,}84 : 0{,}12 = 157$

33 Determine, em cm, o comprimento da linha vermelha, sabendo que cada quadradinho tem 0,5 cm de lado. 9,42 cm

$D = 4 \cdot 0{,}5 = 2$

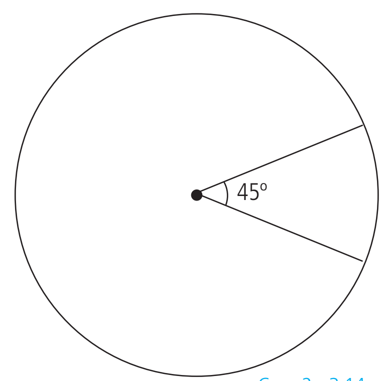
$C = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 3{,}14 = 9{,}42$



Ilustrações: DAE

34 Determine o comprimento de um arco de 45° em uma circunferência de 6 cm de raio.

4,71 cm



$C_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 = 37{,}68$

$C_{45°} = 37{,}68 : 8 = 4{,}71$

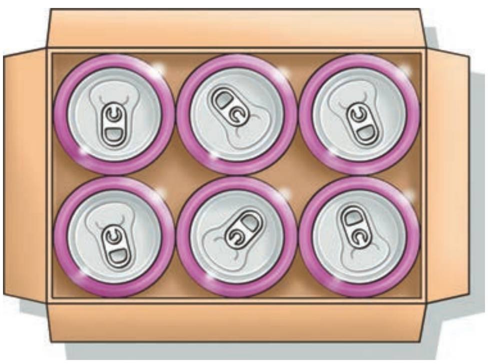
35 O ponteiro dos minutos de um relógio tem comprimento de 15 cm. Qual é a distância que a extremidade do ponteiro percorre num intervalo de 20 minutos? 31,4 cm

Maurício Morais

$C_T = 2 \cdot 15 \cdot 3{,}14 = 94{,}2$

$C_{20} = 94{,}2 : 3 = 31{,}4$

36 A figura mostra a vista superior de uma caixa de refrigerantes.

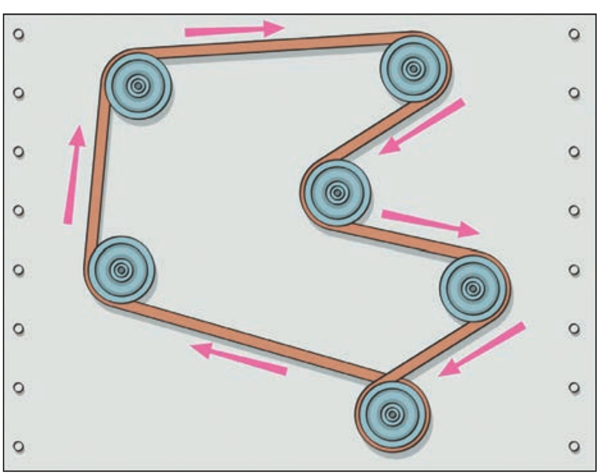


É possível que nessa caixa existam 12 latas de refrigerante?

Sim, basta que na caixa haja duas camadas de 6 refrigerantes.

37 (OM/Rio Preto-SP) Na figura abaixo, a correia move as seis rodas na direção das flechas. Quantas rodas são giradas no sentido horário?

Quatro.

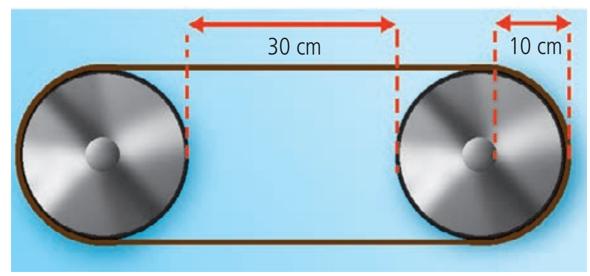


38 Numa caixa foram embaladas 3 bolas esféricas. Supondo-se que as bolas têm raio de 2,8 cm e tangenciam as paredes internas da embalagem, calcule a altura da embalagem.

16,8 cm

Misto Quente

39 Duas polias são presas por uma correia, como mostra a figura abaixo. O raio de cada polia mede 10 cm e a distância entre elas é de 30 cm. O comprimento da correia é de:



Ilustrações: Hélio Senatore

a) 131,4 cm
x b) 162,8 cm
c) 122,8 cm
d) 142,8 cm

$S_C = 3,14 \cdot 10 = 31,4$
$31,4 + 50 + 50 + 31,4 = 162,8$ cm

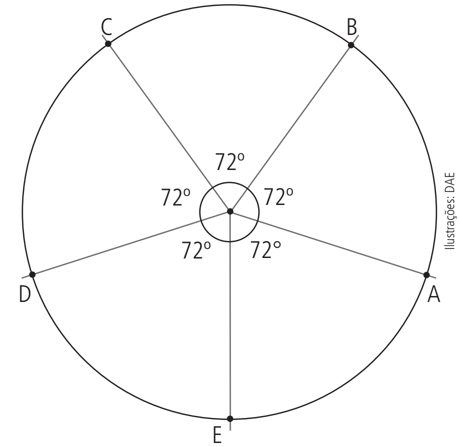
40 Dois corredores estão treinando em duas pistas circulares e concêntricas (mesmo centro) tendo a pista interna um raio de 3 m e a pista externa um raio de 10 m. Se o corredor que está na pista externa der 3 voltas completas, quantas voltas deverá dar o corredor da pista interna para que ambos tenham percorrido o mesmo espaço?

Ilustra Cartoon

a) 8 voltas
b) 9 voltas
x c) 10 voltas
d) 12 voltas

$G = 3(2 \cdot \pi \cdot 10) = 60\pi$
$P = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 6\pi$
$60\pi : 6\pi = 10$

7. Construindo polígonos regulares



José faz caixas de presente artesanais.

Muitas delas têm como base um polígono regular. Ele traça polígonos regulares dividindo a circunferência em partes iguais.

Como exemplo, veja como construir um pentágono regular.

Traçamos uma circunferência.

O ângulo central de uma volta mede 360°.

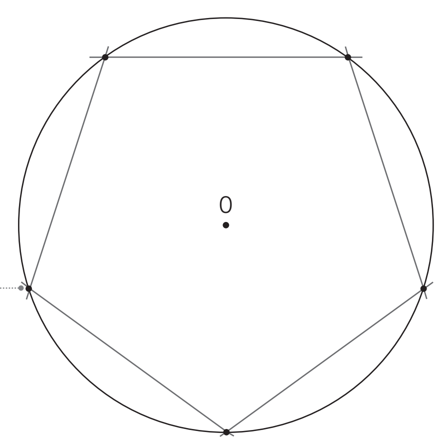
$360° : 5 = 72°$

Usando transferidor, traçamos 5 ângulos centrais de 72° cada um. Os ângulos dividiram a circunferência em 5 partes iguais.

Os pontos que ficam determinados sobre a circunferência são os vértices do pentágono regular.

Traçamos um pentágono regular inscrito na circunferência.

Os vértices do polígono são pontos da circunferência.



Exercícios

41 Calcule a medida do ângulo central correspondente ao lado de um polígono regular com:

a) 10 lados; 36°

b) 12 lados; 30°

c) 20 lados; 18°

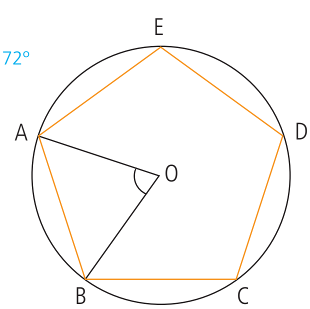
d) 40 lados. 9°

42 Na figura, ABCDE é um pentágono regular. Dê as medidas, em graus, do:

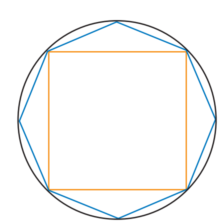
a) ângulo $A\hat{O}B$; 72°

b) arco $\overset{\frown}{AC}$; 144°

c) arco $\overset{\frown}{AD}$. 216°



43 Na figura, um quadrado e um octógono regular estão inscritos numa circunferência.



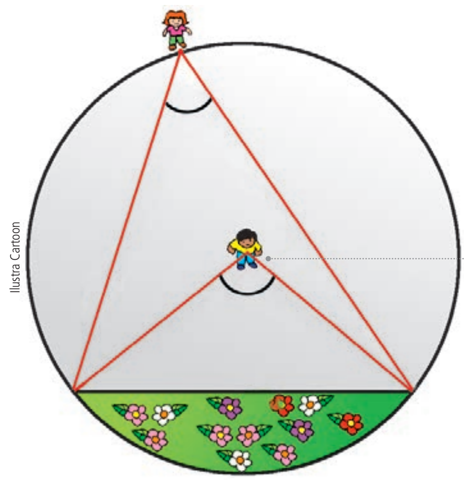
a) Qual dos polígonos tem maior perímetro? Octógono.

b) O perímetro de um polígono regular inscrito de 16 lados é maior ou menor do que o perímetro do octógono? Maior.

c) Quando o número de lados aumenta, o perímetro do polígono regular inscrito aumenta ou diminui? Aumenta.

8. Ângulo inscrito

Paula e Cláudio estão em pontos distintos dessa praça circular, observando o mesmo jardim.

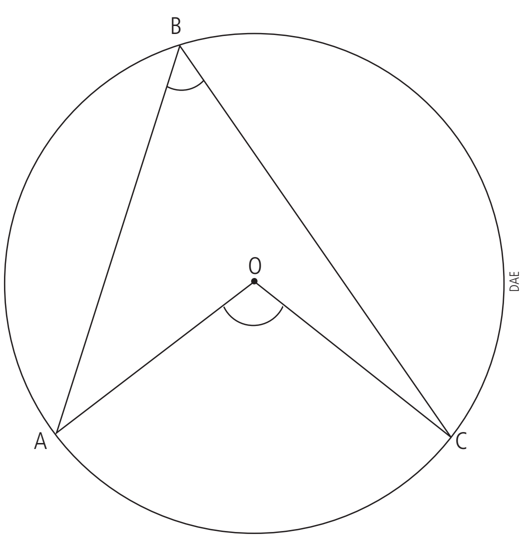


Cláudio está no centro da praça.

Apenas observando o desenho, percebemos que quem tem maior ângulo de visão é Cláudio.

Veja o modelo matemático para essa situação:

- $A\hat{B}C$ é um ângulo inscrito: o vértice é um ponto da circunferência e seus lados são secantes a ela.
- $A\hat{O}C$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $A\hat{B}C$ – ambos determinam o mesmo arco.



Use seu transferidor e registre a medida dos ângulos $A\hat{O}C$ e $A\hat{B}C$. O que você observou? med($A\hat{B}C$) = med($A\hat{O}C$) : 2

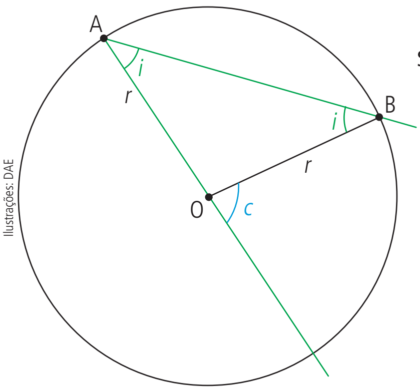
Numa mesma circunferência, a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente a ele.

Na praça, o ângulo de visão de Paula (ângulo inscrito) tem a metade da medida do ângulo de visão de Cláudio (ângulo central).

Mas não podemos usar essa informação antes de mostrar matematicamente que ela é válida. Para isso, mais uma vez vamos precisar de conhecimentos anteriores que já foram provados.

Nosso objetivo é mostrar que a medida do ângulo inscrito (i) é igual à metade da medida do ângulo central (c) correspondente a ele. Precisaremos examinar três casos, pois o centro da circunferência pode ocupar 3 posições diferentes em relação ao ângulo inscrito.

1º caso: o centro da circunferência está **sobre um dos lados** do ângulo inscrito.

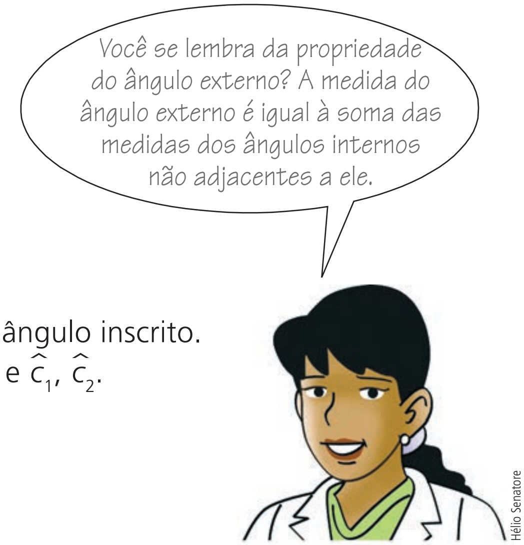


Ilustrações: DAE

O triângulo OAB é isósceles, de base $\overline{AB}$. Os ângulos da base são congruentes. O ângulo $\hat{c}$ é ângulo externo ao triângulo.

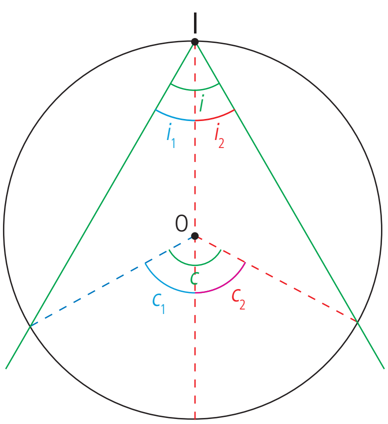
$$c = i + i$$

$$c = 2i \text{ ou } i = \frac{c}{2}$$



Hélio Senatore

2º caso: o centro da circunferência está **no interior** do ângulo inscrito.
Traçamos a semirreta IO, determinando os ângulos $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$ e $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$.



Pelo primeiro caso, temos:

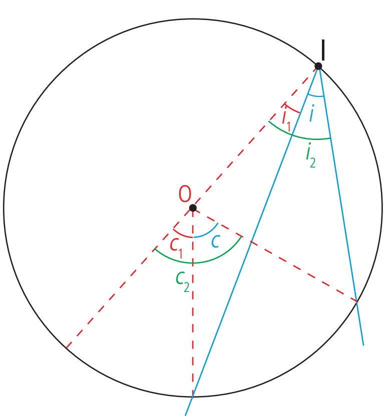
$$i_1 = \frac{c_1}{2} \text{ e } i_2 = \frac{c_2}{2}$$

Como $i = i_1 + i_2$, temos $i = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2} = \dfrac{c_1 + c_2}{2} = \dfrac{c}{2}$

Também nesse caso, chegamos à conclusão de que

$$i = \frac{c}{2}$$

3º caso: o centro da circunferência está **no exterior** do ângulo inscrito.
A ideia é recair no 1º caso.
Traçamos a semirreta IO, determinando os ângulos $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$ e $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$.



Pelo 1º caso, temos:

$$i_1 = \frac{c_1}{2} \text{ e } i_2 = \frac{c_2}{2}$$

Como $i = i_2 - i_1$, vem que

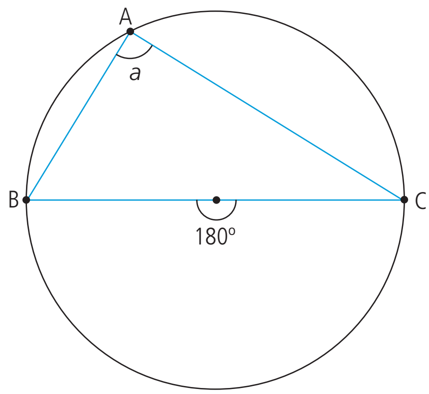
$$i = \frac{c_2 - c_1}{2} = \frac{c}{2}$$

Hélio Senatore

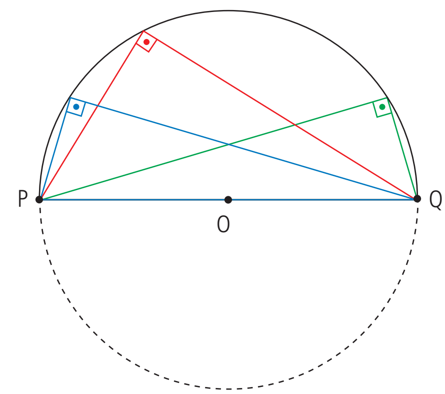
Conclusão: a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente a ele.

Mais uma descoberta importante

Observe a figura:

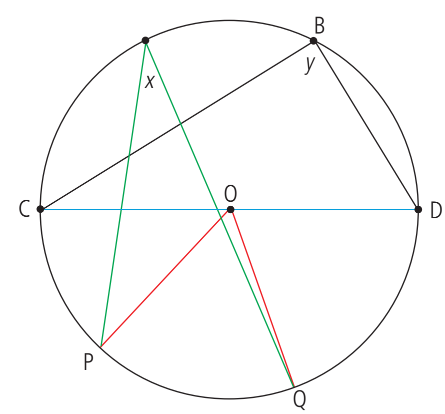


Os vértices do triângulo ABC são pontos da circunferência. O lado $\overline{BC}$ é um diâmetro da circunferência. Dizemos que ABC está inscrito na semicircunferência. Pela propriedade do ângulo inscrito, temos que: $a = 90°$, pois o ângulo central correspondente a esse ângulo inscrito é raso. Isso vale para todos os triângulos inscritos nessa situação:



Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo.

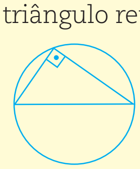
Hélio Senatore



$x = 30°$, pois $60° : 2 = 30°$

$y = 90°$, pois o triângulo BCD está inscrito numa semicircunferência

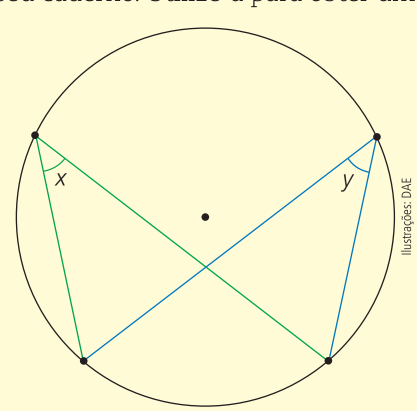
1. Trace uma circunferência de centro O e raio 4 cm em seu caderno. Utilize-a para obter um triângulo retângulo.



Basta traçar um triângulo inscrito na semicircunferência.

2. Daniel disse que, na figura ao lado, temos x = y. Ele está correto?

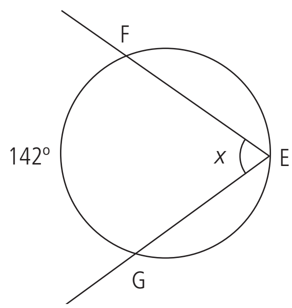
Sim. Os ângulos inscritos têm o mesmo ângulo central correspondente.



Ilustrações: DAE

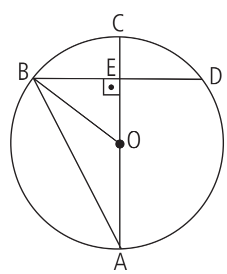
Exercícios

44 Observe a figura e determine x. 71°



med($\overset{\frown}{FG}$) = 142°

45 Observe a figura e responda no caderno.



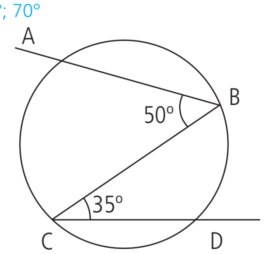
a) Dos ângulos a seguir, qual deles tem a metade da medida do ângulo $B\hat{O}C$?

$E\hat{B}O$	$C\hat{E}D$
x $C\hat{A}B$	$O\hat{B}A$

b) Que arco é congruente ao arco $\overset{\frown}{BC}$?

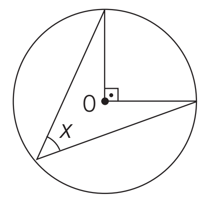
$\overset{\frown}{AB}$	$\overset{\frown}{AD}$
$\overset{\frown}{BD}$	x $\overset{\frown}{CD}$

46 Determine as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BD}$, em graus. 100°; 70°



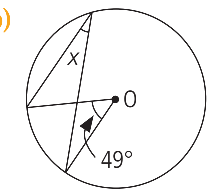
47 Determine x nos dois casos.

a)



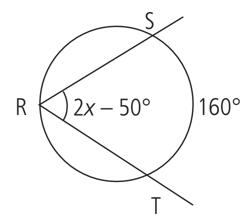
45°

b)



24° 30′

48 Observe a figura e determine x.



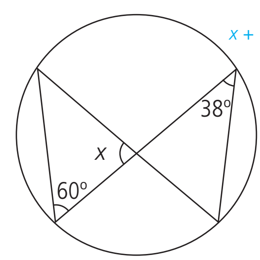
med($\overset{\frown}{ST}$) = 160°

$2x - 50° = \frac{160°}{2}$

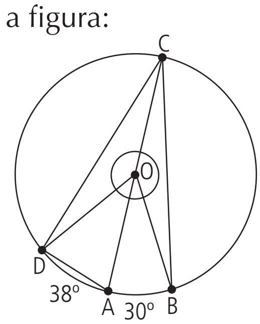
$x = 65°$

49 Qual é o valor de x? 82°

$x + 60° + 38° = 180°$



50 Observe a figura:



Ilustrações: DAE

a) Qual é a medida de $B\hat{C}A$? 15°

b) Qual é a medida de $A\hat{C}D$? 19°

c) Qual é a medida de $A\hat{D}C$? 90°

d) Qual é a medida de $D\hat{A}C$? 71°

e) Qual é a medida do arco $\overset{\frown}{BC}$? 150°

f) O triângulo BOC tem dois ângulos internos de medida 15°? Explique.
Sim. O triângulo é isósceles, logo, tem dois ângulos de medidas iguais.

Vale a pena ler

A matemática e o caipira

Esta história tem dois personagens: o caipira e o advogado, e ela me foi contada por um amigo do advogado. Passa-se há sete ou oito anos, nas proximidades de São Paulo.

Vai lá um dia em que nosso amigo advogado resolve comprar um sítio, de poucos alqueires, com a intenção de construir uma casa e nela passar os seus fins de semana. Como não havia nascente no sítio, resolveu mandar cavar um poço, quando ficou sabendo que seu vizinho, um caipira, que ali morava há muito tempo, tinha em sua propriedade uma nascente com água boa e farta. Procurou o vizinho e fez uma proposta:

– Eu instalo um cano de uma polegada de diâmetro na sua nascente, conduzo a água para o meu sítio e lhe pago *x* reais por mês.

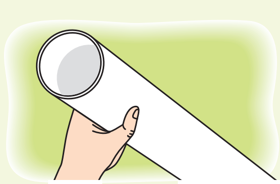
A proposta foi aceita na hora.

Passa-se o tempo e o advogado resolve implantar no sítio uma criação racional de porcos e, para isso, iria precisar de mais água. Voltou a procurar o caipira e lhe propôs trocar o cano de uma polegada por um outro de duas polegadas de diâmetro e pagar 2*x* reais por mês a ele.

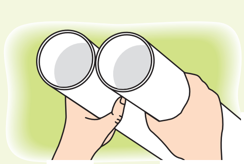
O caipira escutou a proposta, não deu resposta imediata, pensou, e passados alguns minutos respondeu que **não** aceitava a proposta.

– Mas como? – perguntou o advogado. – Tem água sobrando, por que não me vende mais e assim também ganha mais?

– É que num tá certo – retrucou o caipira e explicou com um gesto. – A água que vosmecê me paga passa por aqui:



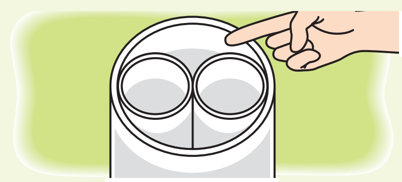
– E vosmecê qué me pagá o dobro.



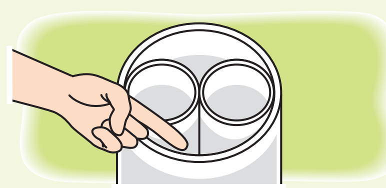
– Acontece que o cano que ocê vai ponhá é assim:

Ilustrações: Hélio Senatore

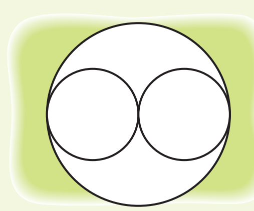
– Pois é, quem me paga a água que passa por aqui?



– E a que passa por aqui?



Com a nossa linguagem, a questão fica assim: um círculo de diâmetro 1 cabe 2 vezes num círculo de diâmetro 2, e ainda fica sobrando espaço:



Ou ainda: se o diâmetro de um círculo dobra, sua área não dobra. Ela "mais que dobra".

O que o caipira não tinha condições de perceber era que pagamento correto seria 4*x* (quando duas figuras são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre seus comprimentos correspondentes).

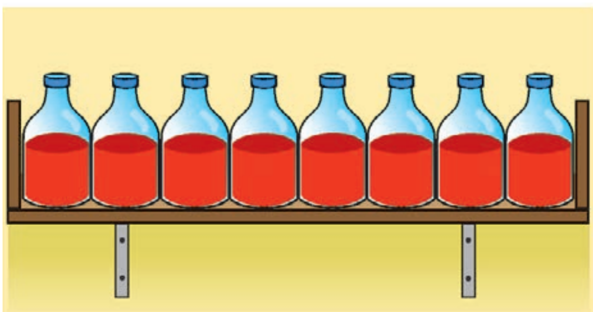
Mas, para perceber que 2*x* é pouco, basta visualizar um cano dentro do outro.

Luís Marcio Pereira Imenes e José Jakubovic. In: *Revista do professor de Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, nº 1, 1982.

Revisando

51 Um professor de Química deseja construir uma estante para que caibam exatamente 8 frascos de reagentes. Cada frasco tem 3,125 cm de raio. Qual deve ser o comprimento da estante?

Ilustra Cartoon



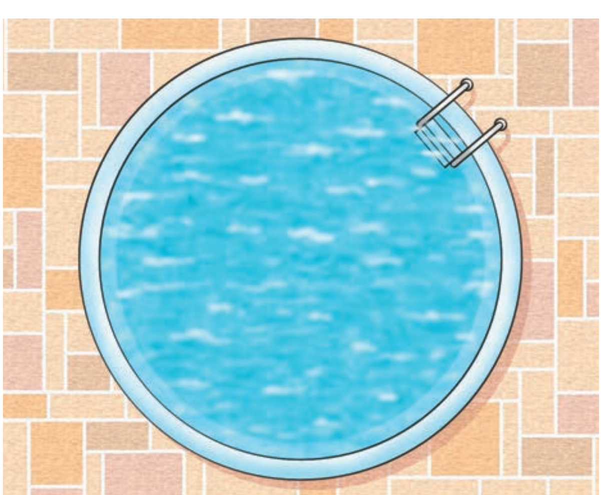
$8 \cdot 6{,}25 = 50$
50 cm

52 (Saeb-MEC) Exatamente no centro de uma mesa redonda com 1 m de raio, foi colocado um prato de 30 cm de diâmetro, com doces e salgados para uma festa de final de ano. A distância entre a borda desse prato e a pessoa que se serve dos doces e salgados é:

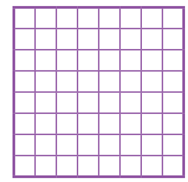
a) 20 cm
x b) 85 cm
c) 70 cm
d) 115 cm

53 A borda de uma piscina circular mede, aproximadamente, 28,5 metros. Qual é o comprimento máximo que um nadador pode percorrer, à superfície da água, em linha reta? Aproximadamente 9,07 m.

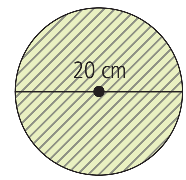
Hélio Senatore



54 Dona Lúcia deseja fazer acabamento ao redor dos guardanapos utilizando uma fita colorida.

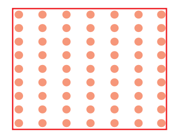


72 cm



Ilustrações: DAE

62,8 cm

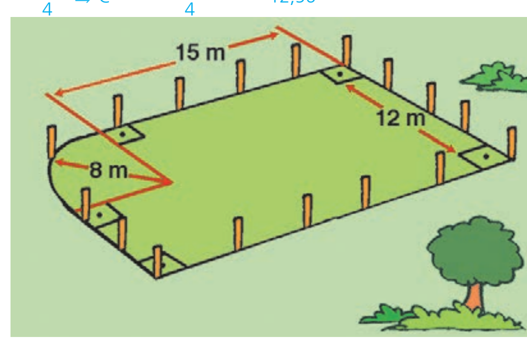


70 cm

Em qual deles ela gastará menos fita? No circular.

55 Quantos metros de arame são necessários para fazer uma cerca de 3 fios em volta do terreno indicado pela figura abaixo? 199,68 m

$C = \frac{2\pi r}{4} \Rightarrow C = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8}{4} = 12{,}56$

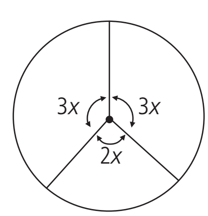


Ilustra Cartoon

$P = 15 + 12 + 23 + 4 + 12{,}56 = 66{,}56$
Nº de metros $= 3 \cdot 66{,}56 = 199{,}68$

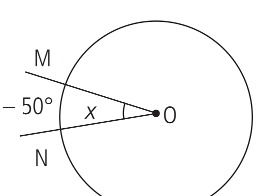
56 Determine x.

a)



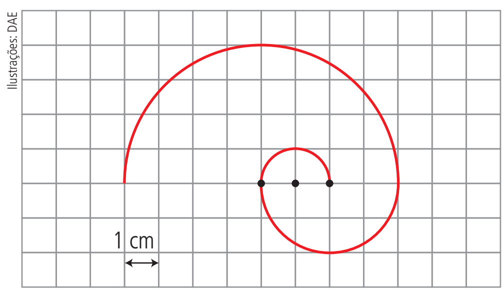
$3x + 3x + 2x = 360°$
$x = 45°$

b)



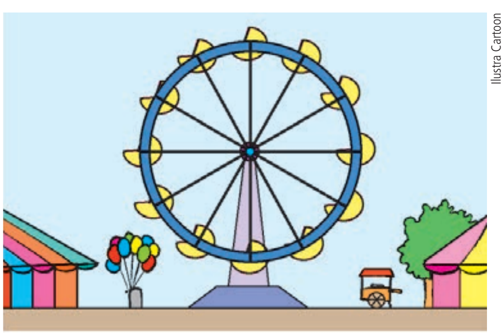
$3x - 50° = x$
$x = 25°$

57 A linha vermelha é formada por semicircunferências cujos centros estão assinalados. Qual é, em centímetros, o seu comprimento? 21,98 cm



$C = 7\pi$

58 Uma roda gigante, representada na figura abaixo, tem 24 metros de diâmetro e sua circunferência está dividida em 12 arcos iguais, em cujas extremidades ficam localizados os bancos. Qual é o comprimento de cada um desses arcos? 6,28 m

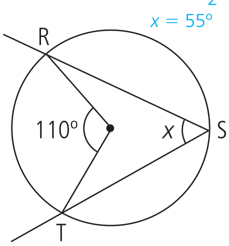


59 Determine a medida dos ângulos indicados pelas letras.

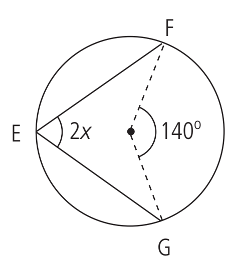
a) $x = \frac{110^\circ}{2}$

$x = 55^\circ$

a)



c)



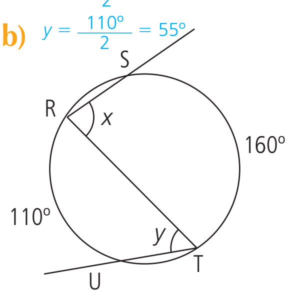
b) $x = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$

$y = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$

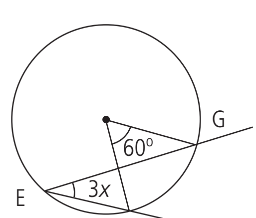
c) $2x = \frac{140^\circ}{2}$

$x = 35^\circ$

b)



d)

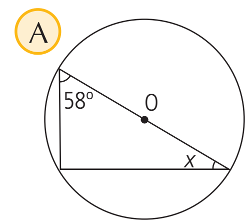


d) $3x = \frac{60^\circ}{2}$

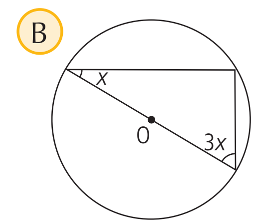
$x = 10^\circ$

Desafios

60 Calcule x.



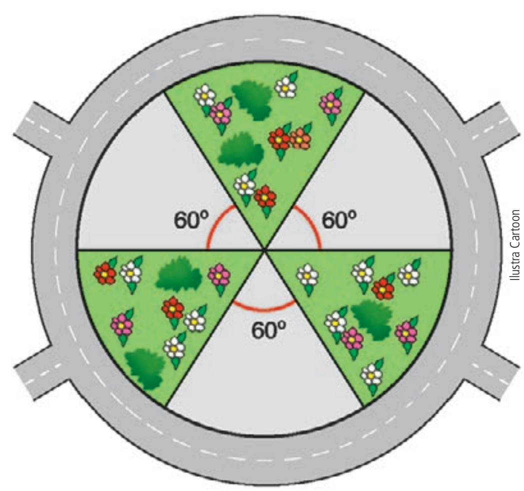
$x = 32^\circ$



$x = 22,5^\circ$

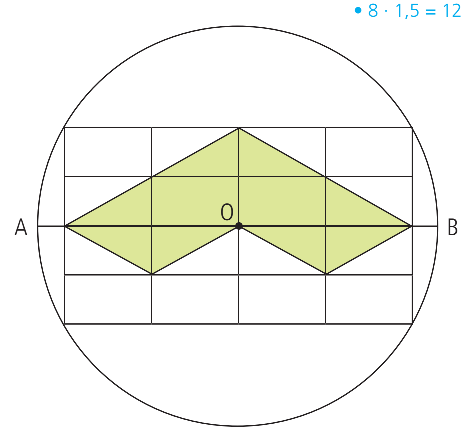
61 Uma praça circular tem raio igual a 20 m. Ela tem 3 jardins, conforme a figura abaixo, e cada jardim tem um ângulo central de 60°. Qual é o comprimento total da cerca que protege os jardins? 182,8 m

$P = 20\pi + 3 \cdot 40 = 20\pi + 120$



62 Qual é o perímetro da figura colorida, sabendo que o diâmetro da circunferência mede 6 cm e que os retângulos pequenos têm as mesmas dimensões? 12 cm

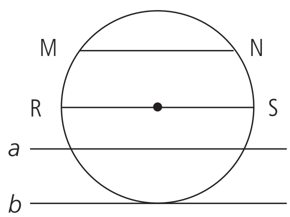
- $6 : 2 = 3$
- $3 : 2 = 1,5$
- $8 \cdot 1,5 = 12$



Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

63 Na figura, os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{RS}$ e as retas *a* e *b* recebem, respectivamente, os seguintes nomes:



a) raio, corda, tangente e secante.

b) raio, diâmetro, secante e tangente.

c) corda, diâmetro, tangente e secante.

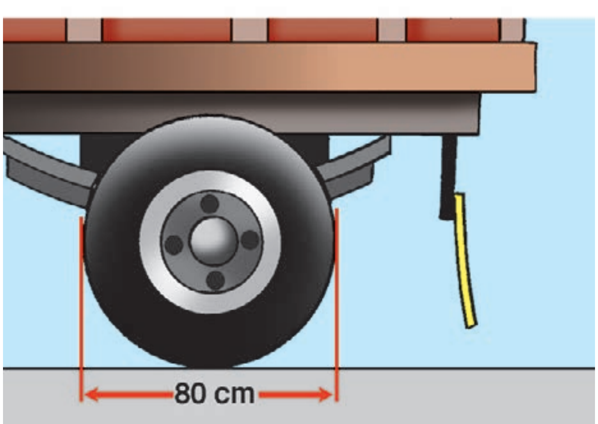
x d) corda, diâmetro, secante e tangente.

64 Traçando duas circunferências de mesmo centro e de raios diferentes, quantos pontos comuns elas terão?

x a) Nenhum.
b) Apenas um.
c) Dois.
d) Mais de dois.

65 (Saresp) O diâmetro das rodas de um caminhão é de 80 cm. Supondo $\pi = 3$, calcule a distância que o caminhão percorre a cada volta da roda, sem derrapar.

Hélio Senatore



x a) 2,4 m
b) 3,0 m
c) 4,0 m
d) 4,8 m

66 (Ceeteps-SP) Imaginemos cinco crianças abraçando o tronco de uma árvore de uma espécie ameaçada de extinção. Sabendo-se que cada criança consegue abraçar 1,25 m da árvore, o diâmetro da árvore, em metros, será aproximadamente de:

Ilustra Cartoon

a) 1
x b) 2
c) 3
d) 4

$5 \cdot 1{,}25 = 2 \cdot \pi \cdot r$
$r = 1$ (aproximadamente)
Então, D = 2.

67 (Ceeteps-SP) Para controlar o tráfego de naves foram instalados 16 postos de fiscalização numa circunferência sobre os anéis de Saturno, separados com distâncias iguais. Sabendo-se que o centro dessa circunferência coincide com o centro de Saturno, o ângulo α da figura mede:

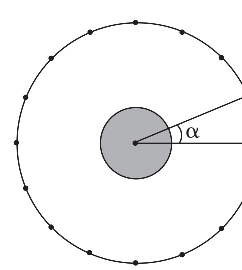
a) 22°10'

b) 22°20'

x c) 22°30'

d) 22°50'

360° : 16 = 22°30'

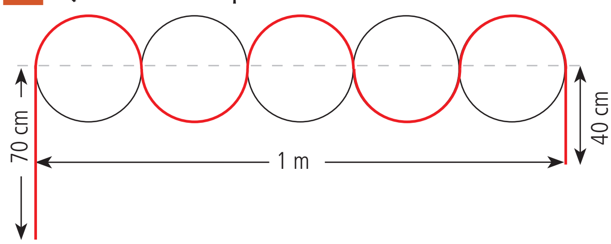


Ilustrações: DAE

Ilustra Cartoon

◆ Representação do planeta Saturno.
As cores e as dimensões não são reais.

68 Qual é o comprimento do fio vermelho?



a) 2,04 m

b) 2,27 m

x c) 2,67 m

d) 5,34 m

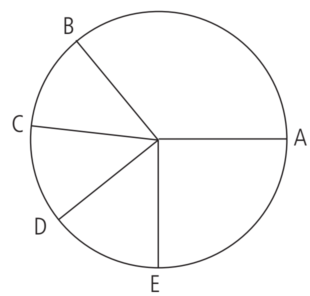
69 (Fesp-RJ) Uma reta é secante à circunferência. Se tal reta passa pelo centro da circunferência e corta a circunferência no menor arco, designado por $\overset{\frown}{BC}$, então a reta também cortará a circunferência no menor arco designado por:

a) $\overset{\frown}{AB}$

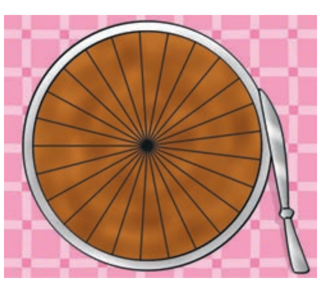
b) $\overset{\frown}{CD}$

c) $\overset{\frown}{DE}$

x d) $\overset{\frown}{EA}$



70 Um bolo circular foi repartido igualmente entre 25 pessoas. Quanto mede o ângulo de cada fatia? 14° 24'



Hélio Senatore

a) 14°

b) 24°

c) 7° 12'

x d) 14° 24'

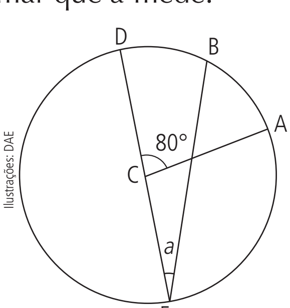
71 (Fesp-RJ) Sabendo-se que o ponto B divide o arco designado por $\overset{\frown}{AD}$ exatamente ao meio e que C se encontra no centro da circunferência, pode-se afirmar que *a* mede:

a) 40°

b) 35°

c) 30°

x d) 20°



Ilustrações: DAE

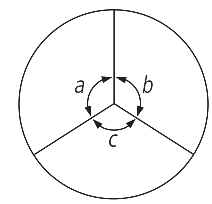
72 As medidas *a*, *b*, *c* dos ângulos centrais indicados são dadas pelas expressões $a = 5x - 10°$, $b = 4x + 30°$ e $c = x + 80°$. As medidas de *a*, *b* e *c* são, respectivamente:

a) 130°, 124° e 106°.

x b) 120°, 134° e 106°.

c) 180°, 134° e 106°.

d) 120°, 180° e 60°.



$5x - 10° + 4x + 30° + x + 80° = 360°$
$x = 26°$

73 (Cesgranrio-RJ) Em um círculo, de centro O, está inscrito o ângulo α. Se o arco $\overset{\frown}{AMB}$ mede 130°, o ângulo α mede:

x a) 25°

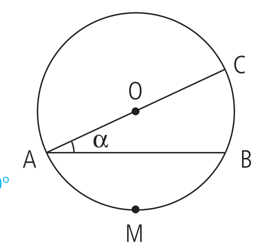
b) 30°

c) 40°

d) 45°

$\overset{\frown}{CB} = 180° - 130° = 50°$

$\alpha = \frac{50°}{2} = 25°$



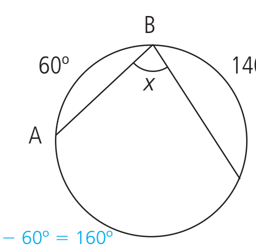
74 O valor de *x* na figura é:

a) 70°

x b) 80°

c) 100°

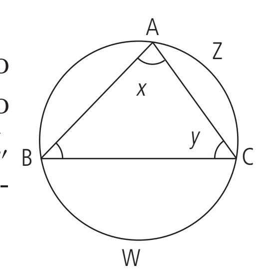
d) 160°



$\overset{\frown}{AC} = 360° - 140° - 60° = 160°$

$x = \frac{160°}{2} = 80°$

75 (NCE-RJ) Na figura ao lado, o ângulo *x* excede o ângulo *y* de 26° e o arco Z, compreendido entre os pontos A e C, mede 92°.



A medida, em graus, do arco W, compreendido entre os pontos B e C, é:

- $y + y + 26° + 46° = 180°$
- $y = 54°$
- $x = 80°$

a) 108

x b) 160

c) 180

d) 200

UNIDADE 14

Possibilidades e estatística

1. Contando possibilidades

Contamos objetos, pessoas... Processos de contagem são necessários em inúmeras atividades humanas. Agora, vamos contar possibilidades.

1. Um colégio oferece a seus alunos cursos complementares no primeiro e no segundo semestres.

No primeiro semestre o aluno pode optar por um dos seguintes cursos:

- Iniciação Musical ou História da Arte.

No segundo semestre as opções são três:

- Teatro, Dança ou Artes Plásticas.

Fernando Favoretto

O aluno pode escolher somente um curso por semestre.

Quantas e quais são as opções de escolha para o aluno no ano?

Ilustrações: Lápis Mágico

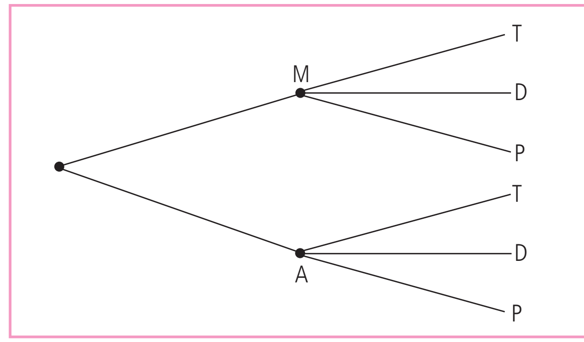
Há formas organizadas de registrar todas as possibilidades de escolha.

Podemos utilizar:

- uma tabela:

	Teatro (T)	Dança (D)	Artes Plásticas (P)
Iniciação Musical (M)	M – T	M – D	M – P
História da Arte (A)	A – T	A – D	A – P

- ou um diagrama:



Este tipo de diagrama é chamado de **diagrama de árvore**.

O aluno tem no total 6 possibilidades de escolha. Observe:

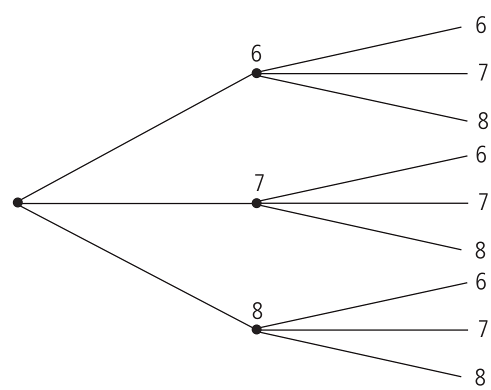
- Número de possibilidades para o 1º semestre: 2
- Número de possibilidades para o 2º semestre: 3

$2 \cdot 3 = 6$

2. Quantos números de dois algarismos podemos escrever utilizando somente os algarismos 6, 7 e 8?

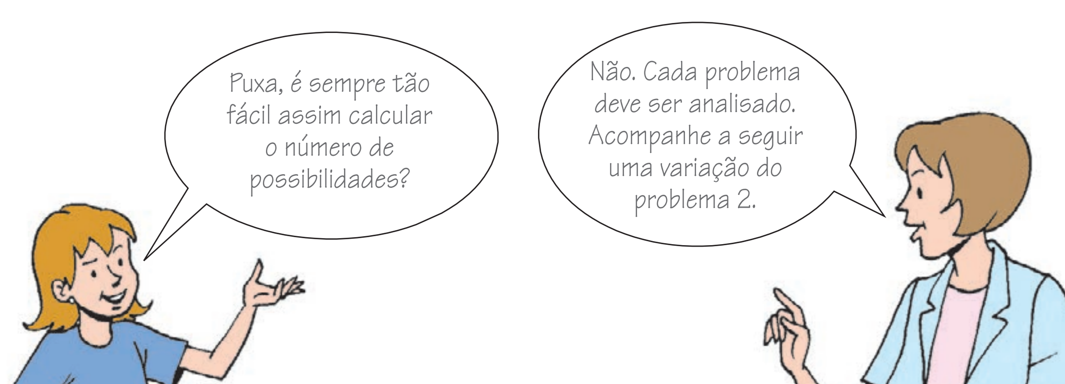
Ilustra Cartoon

Visualize as possibilidades no diagrama:



- Número de possibilidades para o primeiro algarismo: 3
- Número de possibilidades para o segundo algarismo: 3

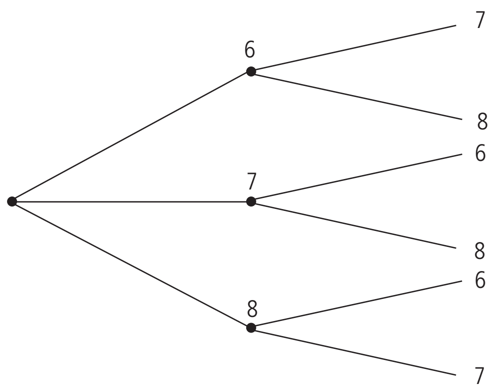
$3 \cdot 3 = 9$



Ilustrações: Lápis Mágico

• Quantos números de dois algarismos *diferentes* podemos formar utilizando somente os algarismos 6, 7 e 8?

Como não podemos repetir algarismos, o diagrama de árvore fica assim:



Podemos pensar assim:

Para o primeiro algarismo temos três possibilidades. Como não há repetição, uma vez escolhido o primeiro algarismo, restam duas possibilidades para o segundo algarismo.

$3 \cdot 2 = 6$

Formamos 6 números:
67, 68, 76, 78, 86 e 87

3. O vôlei de praia é disputado entre duplas. Numa classe do 8º ano há quatro alunas que praticam esse esporte: Rita, Paula, Andréa e Joana. Quantas duplas diferentes o professor de Educação Física pode formar?

Se usássemos o mesmo raciocínio do problema anterior teríamos:

- número de possibilidades de escolha para a primeira jogadora da dupla: 4
- número de possibilidades de escolha para a segunda jogadora da dupla: 3

$4 \cdot 3 = 12$

Uma vez escolhida a primeira jogadora, restam três para a segunda escolha.

No entanto, o professor pode formar somente **6 duplas diferentes**. Observe:

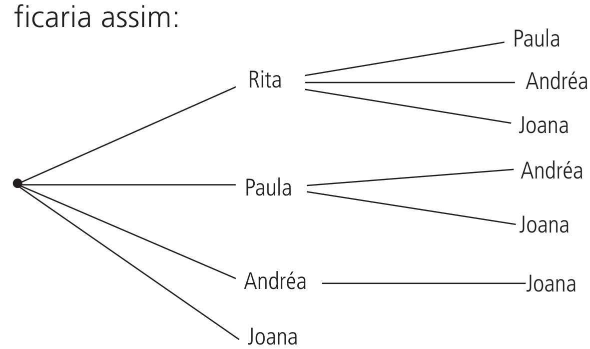
Rita – Paula	Paula – Rita	Andréa – Rita	Joana – Rita
Rita – Andréa	Paula – Andréa	Andréa – Paula	Joana – Paula
Rita – Joana	Paula – Joana	Andréa – Joana	Joana – Andréa

Rita – Paula
Paula – Rita
São a mesma dupla.

O mesmo acontece com outras duplas. Cada dupla aparece duas vezes. Quando fizemos $4 \cdot 3 = 12$, **contamos duas vezes cada dupla**.

Então o professor pode formar, na verdade, $12 : 2 = 6$ duplas diferentes.

O diagrama de árvore, neste problema, ficaria assim:



Exercícios

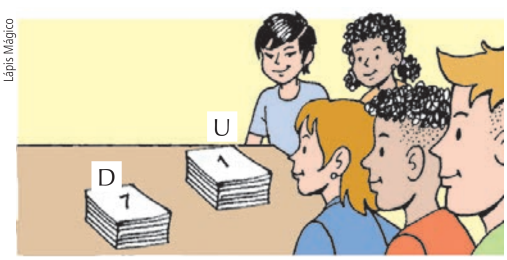
1 Quantos trajes diferentes podemos formar com 2 calças e 3 blusas? 6 trajes $2 \cdot 3 = 6$


Ilustrações: Ilustra Cartoon

2 Um carro é fabricado com quatro tipos de acabamento: padrão, luxo, superluxo e executivo. O motor pode ser a álcool, gasolina ou diesel. Quantas opções desse carro a fábrica oferece ao comprador? 12 opções
$4 \cdot 3 = 12$

3 Em um baile há 15 moças e 8 rapazes. Quantos casais podem ser formados? 120 casais
$15 \cdot 8 = 120$

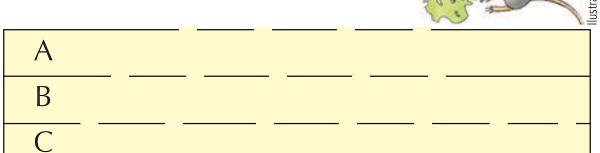
4 Quantos números de dois algarismos podemos formar, sabendo-se que o algarismo das dezenas só pode ser 1 ou 2, e o outro algarismo só pode ser 7, 8 ou 9? 6 números $2 \cdot 3 = 6$



Lápis Mágico

5 (PUC-RS) Um rato deve chegar ao compartimento C, passando antes, uma única vez, pelos compartimentos A e B.


Ilustra Cartoon



Há 4 portas de entrada em A, 5 em B e 7 em C. De quantos modos distintos ele pode chegar a C?
140 modos distintos $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$

6 Quantos trajes diferentes podemos formar com 2 calças, 5 camisas e 3 paletós? 30 trajes
$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$

7 Os times finalistas de um campeonato paulista foram:

Palmeiras	Corinthians
Santos	São Paulo

Combine todas as possibilidades de jogos, sabendo-se que todos os times se enfrentaram uma única vez. Palmeiras e Corinthians, Palmeiras e Santos, Palmeiras e São Paulo, Corinthians e Santos, Corinthians e São Paulo, Santos e São Paulo.

8 Numa reunião há 3 pessoas.


Hélio Senatore

a) Se cada uma trocar um aperto de mão com todas as outras, quantos apertos de mão serão dados? 3 apertos de mão $(3 \cdot 2) : 2 = 3$

b) Se o grupo tivesse 4 pessoas, quantos apertos de mão seriam dados?
6 apertos de mão $(4 \cdot 3) : 2 = 6$

c) Se o grupo tivesse 5 pessoas, quantos apertos de mão seriam dados?
10 apertos de mão $(5 \cdot 4) : 2 = 10$

9 Cláudio foi a um supermercado comprar latas de refrigerantes e observou as seguintes promoções:

Ilustra Cartoon

a) Responda de que maneiras Cláudio pode comprar exatamente 20 latas. 1) 5 pacotes de 4 latas; 2) 4 pacotes de 5 latas; 3) 2 pacotes de 4 latas e 2 pacotes de 6 latas; 4) 2 pacotes de 5 latas, 1 pacote de 4 latas e 1 pacote de 6 latas.

b) Indique a maneira mais barata de comprar as 20 latas e calcule quanto ela custa.
Comprando 4 pacotes de 5 latas; R$ 16,00

2. Os gráficos estatísticos

Os gráficos são muito utilizados na estatística para representar dados, pois permitem uma análise mais rápida e clara de resultados.

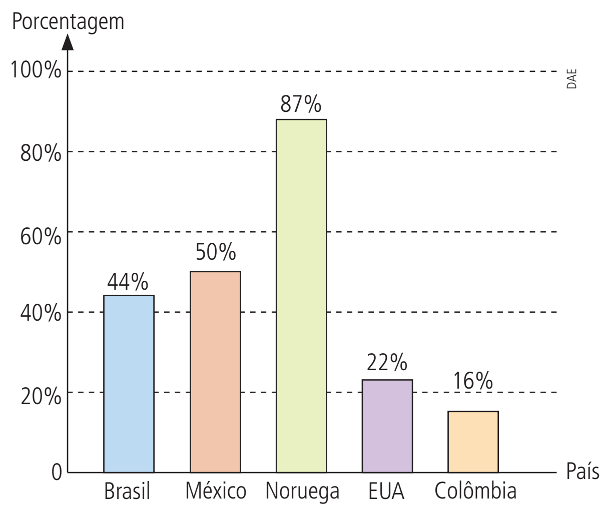
Você já trabalhou com gráficos estatísticos nos anos anteriores. Vamos retomar esses conhecimentos e em seguida apresentar um novo tipo de gráfico. Para isso, usaremos um tema importante no mundo atual: produção, destino e reciclagem do lixo.

Gráficos de barras

Você sabia que com um quilo de vidro se faz outro quilo de vidro, com perda zero e sem poluição para o meio ambiente?

O Brasil tem investido na reciclagem desse material nos últimos anos. Veja os dados no gráfico a seguir:

Reciclagem do vidro — em porcentagem



Fonte: Cempre/Tetra Pak Américas/Pro Europe/EPA (Environmental Protection Agency) EUA (2002/2003).

Esse é um **gráfico de barras**. Ele é bastante eficiente quando se pretende comparar dados entre si.

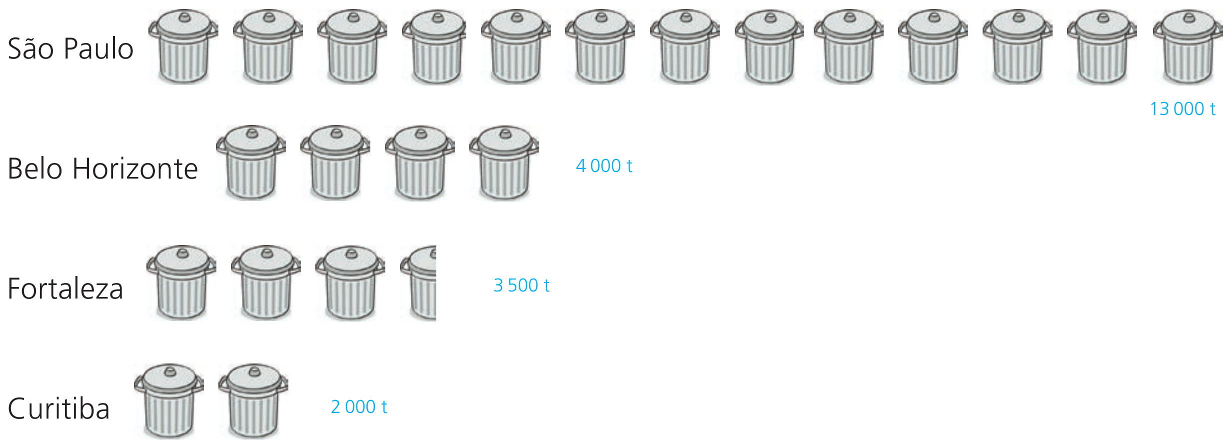
CONECTANDO SABERES

- Compare os dados referentes ao Brasil e aos EUA. O que você observa? A porcentagem de reciclagem do vidro é maior no Brasil.
- No gráfico, qual é o país com o maior e com o menor índice de reciclagem do vidro? Noruega; Colômbia.
- Calcule a quantidade de vidro reciclada no Brasil, sabendo que no ano representado no gráfico aproximadamente 390 mil toneladas de vidro circularam no mercado. 171,600 toneladas

Pictogramas

A representação gráfica por pictogramas utiliza figuras relacionadas à ideia central dos dados que se deseja representar. O objetivo é tornar o gráfico mais sugestivo e atraente. Vamos usar um pictograma para ilustrar a quantidade de lixo produzida por dia em algumas cidades brasileiras.

Lembrando que 1 tonelada = 1 000 kg, faremos  = 1 000 toneladas.

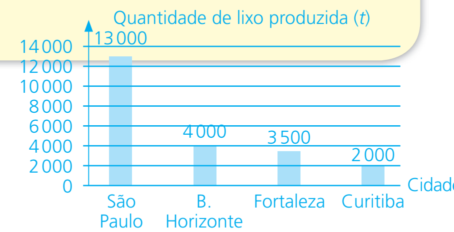


CONECTANDO SABERES

1. Escreva, em seu caderno, quantas toneladas de lixo cada uma das cidades produz por dia.

2. No Brasil, são produzidas diariamente 230 mil toneladas de lixo. Calcule a produção média em kg de lixo por habitante, considerando uma população próxima dos 200 milhões em 2011.
1,15 kg por habitante em 1 dia

3. Faça em seu caderno um gráfico de barras para representar os mesmos dados do pictograma.



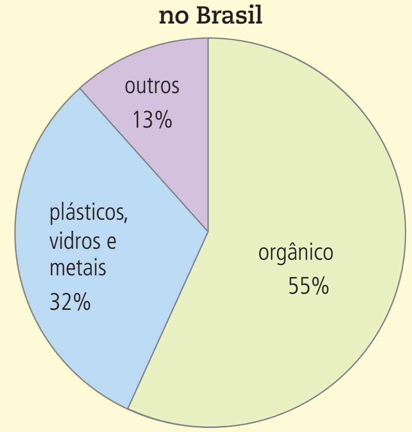
Gráficos de setores

Os gráficos de setores, que usam a forma circular, são os mais indicados para observar a participação das partes no todo. Veja como percebemos com facilidade no gráfico abaixo que mais da metade do lixo produzido no país é orgânico.

- Para construir um gráfico de setores é preciso traçar o ângulo central correspondente a cada porcentagem. Lembrando que 100% corresponde a 360°, calcule o ângulo central que determina cada setor circular do gráfico.
Orgânico: 198°; Plásticos, vidros e metais: 115,2°; Outros: 46,8°
- Dissemos que geramos diariamente no Brasil 230 mil toneladas de lixo.

Calcule quantas toneladas correspondem a plásticos, vidro e metais. 73 600 t

Composição do lixo no Brasil

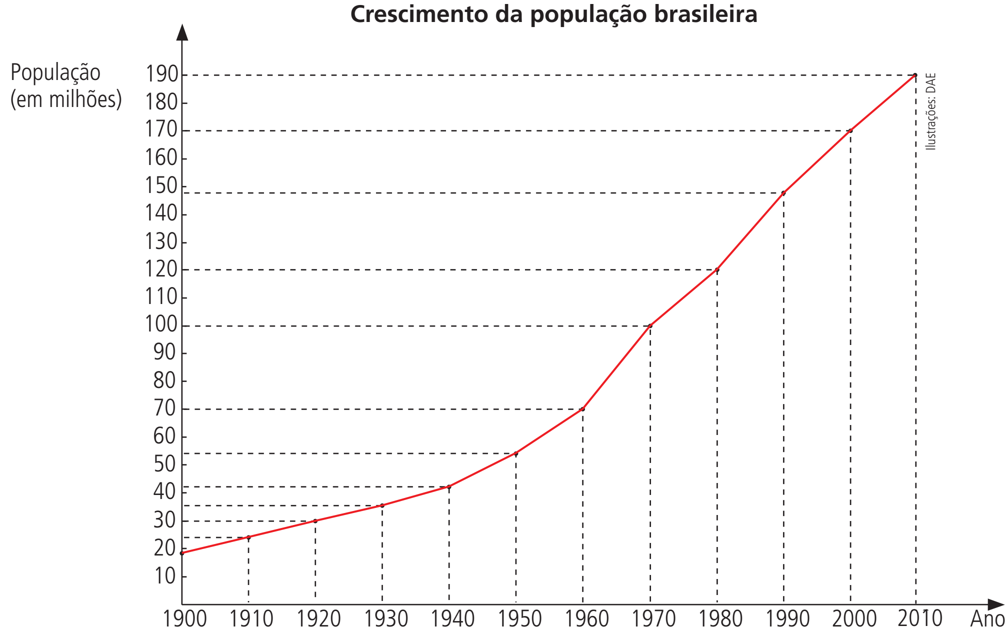


Gráficos de segmentos

Você já deve ter visto gráficos como este que aparece a seguir.

Eles recebem o nome de **gráficos de segmentos** e são eficientes para representar, por exemplo, a variação de uma grandeza no decorrer do tempo.

Crescimento da população brasileira



Fonte: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: jun. 2011. (Tabela elaborada a partir de números aproximados de censos populacionais).

Vamos aprender a construir esse tipo de gráfico por meio de um exemplo.

Os alunos de certa escola estão recolhendo latinhas vazias de refrigerante. Elas serão doadas a um hospital que, com sua venda para reciclagem, poderá melhorar o atendimento à população carente da cidade.

A quantidade de latinhas arrecadadas por mês no primeiro semestre letivo está na tabela ao lado.

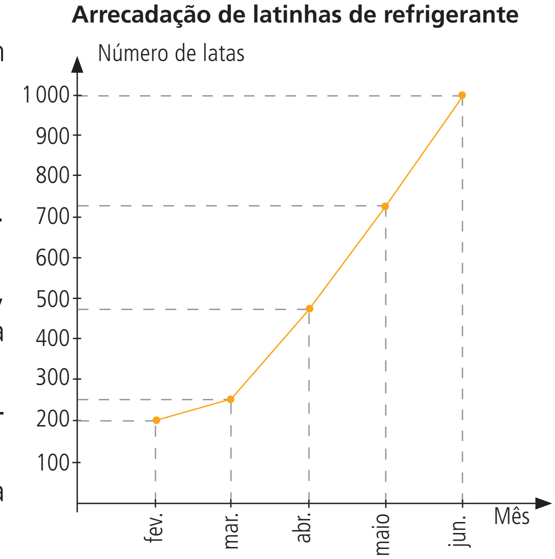
Mês	Número de latas
Fevereiro	200
Março	250
Abril	480
Maio	720
Junho	1 000

Podemos representar esses dados por meio de um gráfico de segmentos. Acompanhe.

- Traçamos dois eixos perpendiculares.
- No eixo horizontal marcamos os meses.
- No eixo vertical, o número de latas arrecadadas. Observe que não marcamos o zero nos eixos.
- Para cada par: mês, número de latas correspondente, marcamos um ponto. A unidade de medida adotada para graduar os eixos não precisa ser a mesma.
- Obtemos o gráfico ligando os pontos com segmentos de reta.

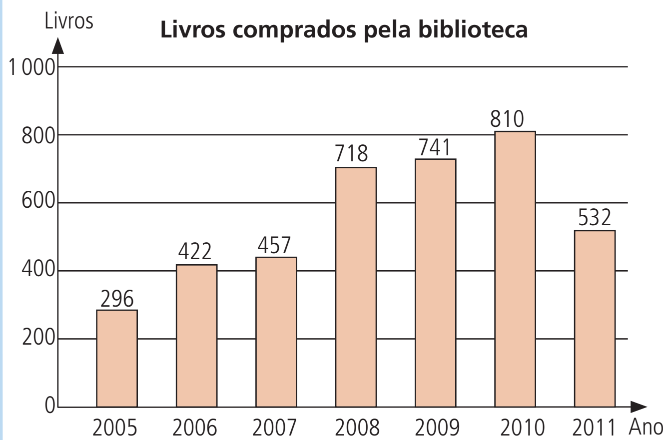
Podemos constatar com facilidade que a campanha vai de vento em popa.

Arrecadação de latinhas de refrigerante



Exercícios

10 O gráfico mostra o número de livros comprados nos últimos anos pela biblioteca de uma cidade.



a) Em que ano houve a maior compra de livros? 2010

b) No ano de 2009 foram adquiridos mais livros do que em 2007? Se sua resposta for afirmativa, quantos? Sim; 284 livros

c) Quantos livros foram adquiridos na totalidade? 3 976 livros

d) Qual é a média de livros comprados anualmente? 568 livros

e) Em que anos a compra de livros esteve acima da média? 2008, 2009 e 2010

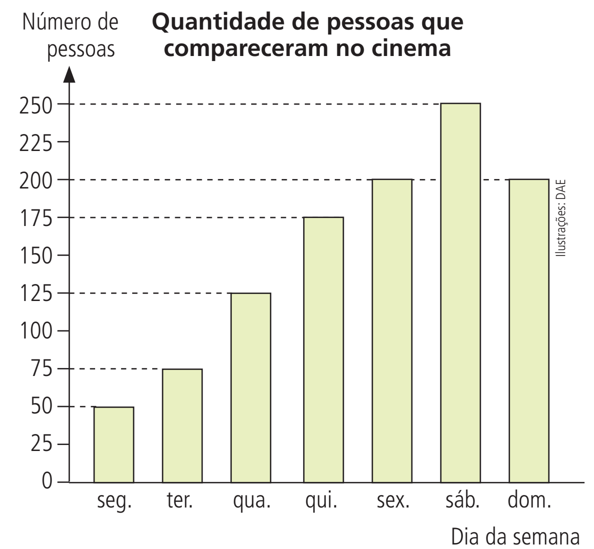
f) A compra de 2011 ficou quantos livros abaixo da média? 36 livros

g) Com os dados mostrados no gráfico de barras, construa um gráfico de segmentos. Coloque os anos no eixo horizontal e o número de livros comprados no eixo vertical.

João Prudente/Pulsar Imagens

Ver solução na seção: "Respostas dos exercícios."

11 Observe o gráfico que indica a quantidade de pessoas que compareceram ao cinema.



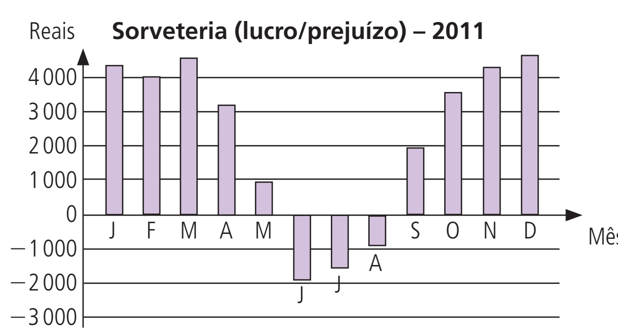
Ilustrações: DAE

a) Quantas pessoas assistiram a um filme no fim de semana (sábado e domingo)? 450 pessoas

b) Sabendo que cada ingresso custou R$ 12,00, qual foi o valor arrecadado pelo cinema nas apresentações de quarta a sexta-feira? R$ 6.000,00 (125 + 175 + 200) · 12 = 6 000

c) Se o gerente decidisse que não apresentaria filme em um dia da semana, qual você acha que deveria ser? Por quê? Resposta pessoal. Resposta possível: Segunda-feira, pois é o dia em que menos pessoas comparecem.

12 Observe o gráfico seguinte.



Com base no gráfico, faça um pequeno comentário acerca do resultado financeiro dessa sorveteria. Resposta possível: nos meses mais frios a venda cai.

13 Os alunos de uma escola andaram recolhendo jornais para reciclar. Observe na tabela onde está registrado o número de jornais recolhidos. Cada  representa duas centenas de jornais.

Março	
Abril	
Maio	
Junho	
Julho	?

a) Em que mês os alunos recolheram menos jornais? Maio.

b) Quantos jornais recolheram em abril? 600 jornais

c) Quantos jornais tiveram de recolher no mês de julho para atingir um total de 4500 jornais? 1 300 jornais

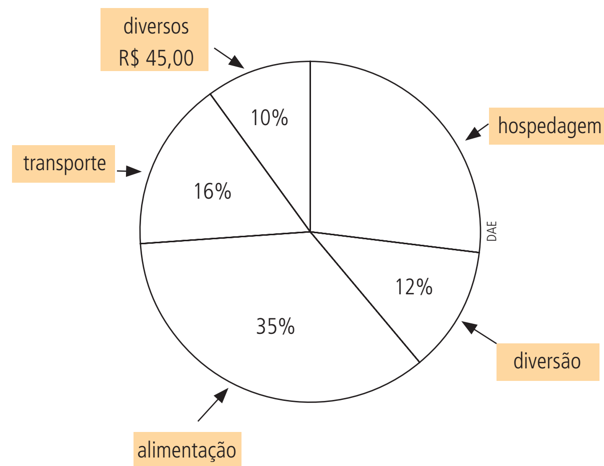
d) Se cada jornal pesa em média 600 g e a meta em julho foi atingida, quantos quilogramas de papel foram conseguidos? 2 700 kg

e) Nicolas, um dos alunos da escola, leu a informação a seguir:

Ilustrações: Hélio Senatore

Quantas árvores foram salvas pela turma do Nicolas? 54 árvores

14 Vitor vai aproveitar as suas férias para viajar. A previsão de suas despesas ele registrou da seguinte forma:

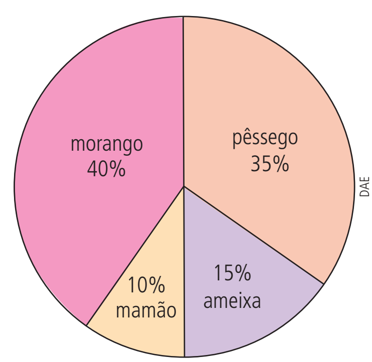


a) Qual é o total das despesas previstas? R$ 450,00

b) Qual é o percentual destinado à hospedagem? 27%

c) Que quantia foi destinada à alimentação? R$ 157,50

15 O gráfico abaixo representa uma pesquisa sobre preferências de sabores de iogurtes.



a) Qual foi o iogurte mais apontado? Morango.

b) Qual foi o iogurte menos apontado? Mamão.

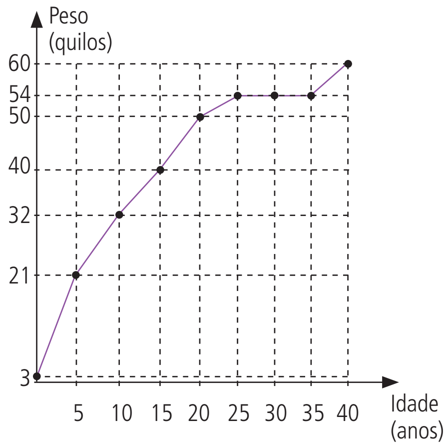
c) Quanto mede o ângulo central do setor que representa o iogurte de morango? 144°

d) Quanto mede o ângulo central do setor que representa o iogurte de pêssego? 126°

e) Se foram consultadas 800 pessoas, quantas escolheram iogurte de ameixa? 120 pessoas

16 O gráfico abaixo representa a evolução do peso de uma pessoa, desde o nascimento até a maturidade.

Evolução do peso de uma pessoa, do nascimento à maturidade



Qual era o peso desse senhor:

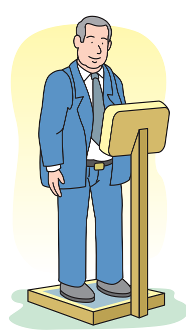
a) quando ele tinha 5 anos?
21 kg

b) quando ele tinha 10 anos?
32 kg

c) quando ele tinha 15 anos?
40 kg

d) dos 25 aos 35 anos?
54 kg

e) quando ele nasceu?
3 kg

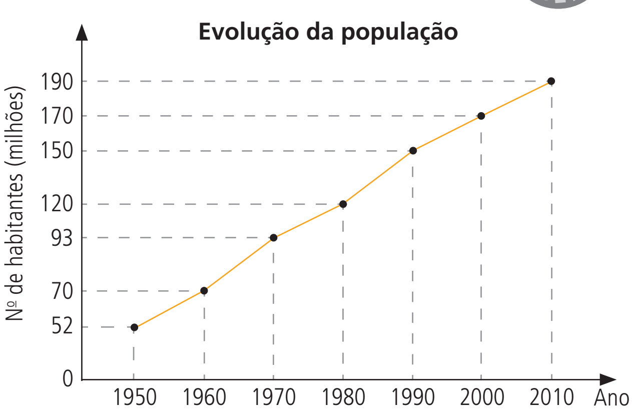


Hélio Senatore

17 O gráfico mostra a população recenseada no Brasil.

CONECTANDO SABERES

Evolução da população



Fonte: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: nov. 2010

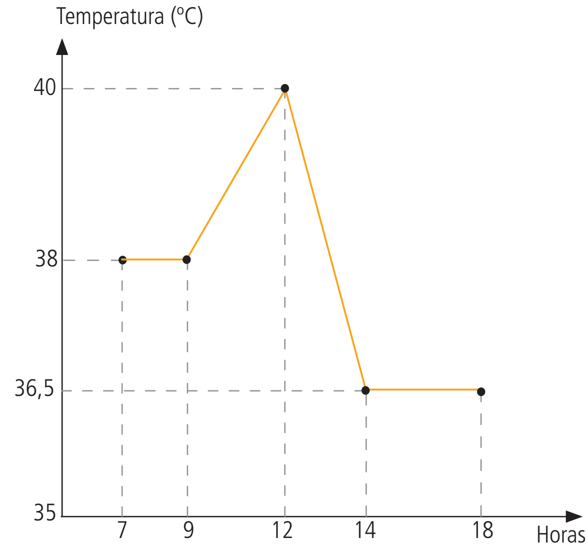
Responda no caderno.

a) Qual era a população brasileira em 1960?
70 milhões de habitantes

b) Qual foi o aumento, em milhões, da população brasileira de 1960 a 1970? 23 milhões

18 O gráfico a seguir fornece, a cada hora, a temperatura de um paciente.

Temperatura de um paciente



a) Qual era a temperatura do paciente às 9h?
38 °C

b) Qual era a temperatura do paciente às 14h?
36,5 °C

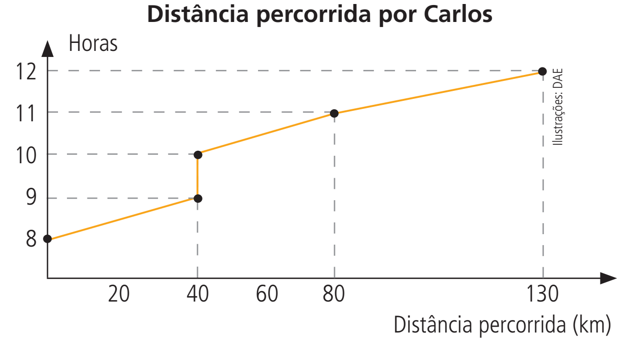
c) A que horas a temperatura atingiu seu ponto mais alto? 12h

d) Entre que horas a temperatura subiu?
Entre 9h e 12h.

e) Entre que horas a temperatura baixou?
Entre 12h e 14h.

19 Carlos saiu de sua casa às 8h e percorreu em uma estrada, até as 12h, um total de 130 km, conforme o gráfico.

Distância percorrida por Carlos



Ilustrações: DAE

Responda no caderno.

a) Quantos quilômetros ele percorreu entre 8h e 9h? 40 km

b) Quantos quilômetros percorreu das 10h até as 12h? 90 km

Revisando

20 Uma moça tem 4 blusas e 7 saias.

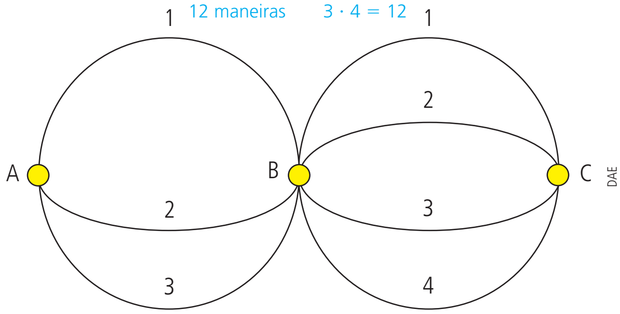
a) De quantos modos diferentes ela pode se vestir usando blusa verde? 7 modos

b) De quantos modos diferentes ela pode se vestir usando blusa azul? 7 modos

c) Quantos trajes diferentes ela pode formar com 4 blusas e 7 saias? 28 trajes $4 \cdot 7 = 28$

21 Uma fábrica tem 5 modelos de telefone e fabrica-os em 9 cores. Quantas variedades de telefones podem ser oferecidas?
45 variedades $5 \cdot 9 = 45$

22 Na figura abaixo A, B e C representam 3 cidades. Entre as cidades A e B há 3 estradas, e entre B e C, há 4. Não há estrada ligando diretamente A e C. De quantas maneiras podemos ir da cidade A até a cidade C, passando por B?
12 maneiras $3 \cdot 4 = 12$



Construa no caderno uma tabela com todos os trajetos possíveis.

	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

11			

23 Marcado o jantar, um grupo de pessoas encontrou, à entrada do restaurante, o seguinte cardápio.

Saladas	**Grelhados**	**Sobremesas**
Tomate	Contrafilé	Sorvete
Palmito	Peito de frango	Salada de frutas
	Filé de peixe	

Quantas combinações diferentes as pessoas podem fazer escolhendo uma salada, um grelhado e uma sobremesa? 12 combinações $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

24 Uma escola ofereceu para os alunos cursos dos seguintes idiomas, dos quais cada aluno deve escolher dois:

Francês | Alemão | Japonês | Espanhol

Responda ao que se pede.

a) Quantas são as escolhas possíveis? 6 escolhas

b) Quais são as escolhas possíveis?
FA, FJ, FE, AJ, AE, JE

c) De todas as escolhas, quais incluem o japonês?
FJ, AJ, JE

d) De todas as escolhas, quantas não incluem o alemão? 3 escolhas

e) Que escolhas incluem o francês, mas não incluem o espanhol? FA, FJ

25 Na figura estão representados:

- o rio que atravessa certa localidade;
- uma ilha situada no leito desse rio;
- as oito pontes que ligam a ilha às margens.

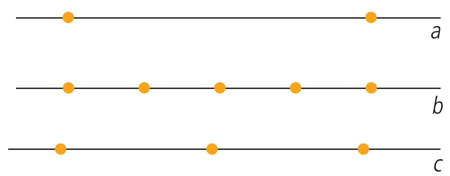
Ilustrações: Ilustra Cartoon

Responda.

a) Quantos caminhos diferentes pode o estudante seguir para fazer o percurso de ida (casa-ilha-escola)? 15 caminhos

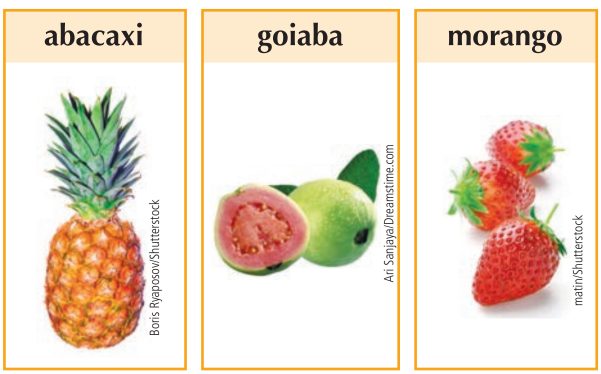
b) Quantos caminhos diferentes pode o estudante seguir para fazer o percurso de volta (escola-ilha-casa)? 15 caminhos

26 Quantos conjuntos de três pontos podemos formar tomando um ponto de cada uma das retas *a*, *b* e *c*? 30 conjuntos $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$



27 Carolina foi à sorveteria e pediu um sorvete com três sabores.

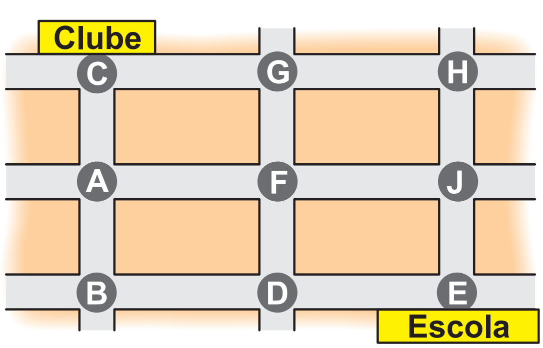
Sabores disponíveis



Faça uma tabela que mostre de quantas maneiras diferentes o sorvete pode ser colocado na casquinha. 1) Abacaxi, goiaba, morango. 2) Abacaxi, morango, goiaba. 3) Goiaba, abacaxi, morango. 4) Goiaba, morango, abacaxi. 5) Morango, abacaxi, goiaba. 6) Morango, goiaba, abacaxi.

28 Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados no sistema de numeração decimal? 45 números $9 \cdot 5 = 45$

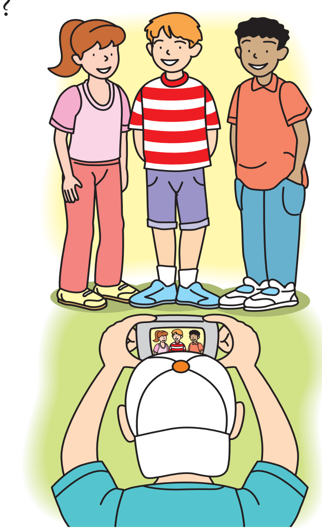
29 Observe a planta e responda.



CABDE; CAFDE; CAFJE; CGHJE; CGFJE; CGFDE

Quantos percursos distintos com quatro quarteirões existem entre o clube e a escola? 6 percursos

30 Três pessoas vão posar para uma fotografia. De quantas maneiras diferentes elas podem ser dispostas? 6 maneiras



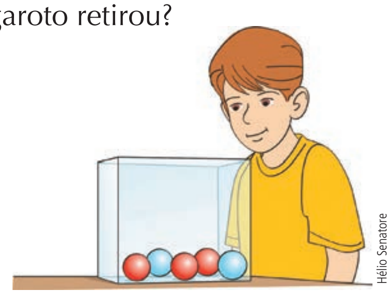
31 Lançam-se 3 moedas simultaneamente, podendo sair cara ou coroa. Quantos e quais são os resultados possíveis? 8 resultados

CA-CA-CA CA-CO-CA CO-CA-CA CO-CO-CA
CA-CA-CO CA-CO-CO CO-CA-CO CO-CO-CO

32 (Encceja-MEC) Um grupo de garotos criou um jogo com a seguinte regra: ao jogar o dado, se aparecesse um número maior que 2, ganhava-se um ponto. Sabe-se que a probabilidade de acontecer qualquer um dos seis valores é $\frac{1}{6}$. Então, qual a chance de, em uma jogada, sair um número maior que 2? $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$

33 Para vencer um jogo de dados, Fernanda deveria, ao lançar um dado, obter um número ímpar. Qual a chance de Fernanda vencer esse jogo? $\frac{1}{2}$

34 Um garoto tem numa caixa 3 bolas vermelhas e 2 bolas azuis. Retirou 3 bolas da caixa. O que se pode afirmar relativamente às bolas que o garoto retirou?



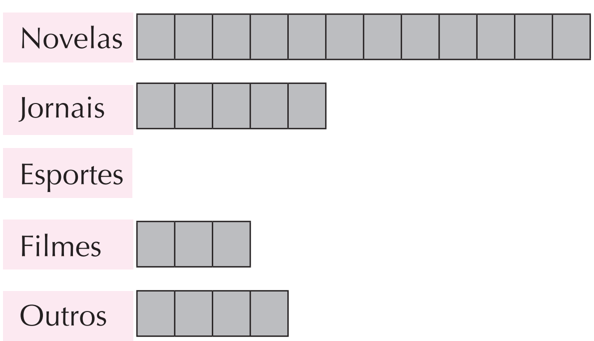
a) Pelo menos uma bola é azul.

b) Uma bola é vermelha e duas são azuis.

c) Uma bola é azul e duas são vermelhas.

x d) Pelo menos uma bola é vermelha.

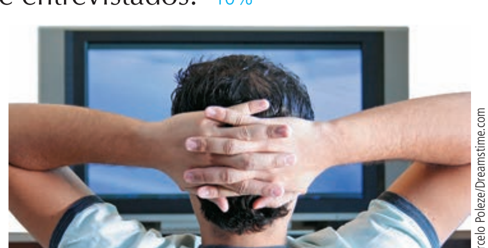
35 O gráfico abaixo, que está *incompleto*, mostra os resultados de uma pesquisa que foi realizada com 150 pessoas sobre programas de televisão com maior audiência.



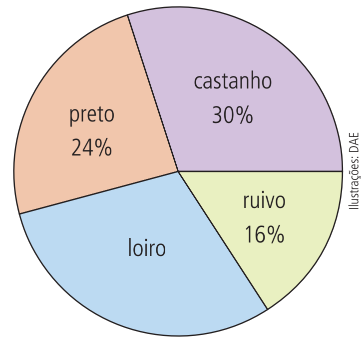
a) Sabendo que 60 pessoas responderam "novelas", quantas responderam jornais? 25 pessoas

b) Complete o gráfico no caderno desenhando a barra correspondente aos programas esportivos.

c) Calcule a porcentagem de pessoas que responderam "filmes", em relação ao número de entrevistados. 10%



36 (Obmep-MEC) Os resultados de uma pesquisa das cores de cabelo de 1200 pessoas são mostrados no gráfico abaixo.



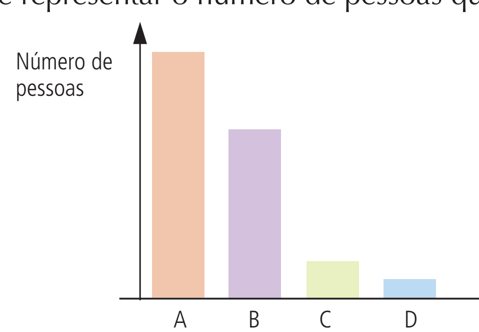
100% – (30% + 24% + 16%) = 30%
1 200 · 30% = 1 200 · 0,3 = 360

Quantas dessas pessoas possuem o cabelo loiro?
360 pessoas

37 (Saresp) Foi perguntado a um total de 100 pessoas em uma cidade se frequentavam cinema e se frequentavam teatro. A tabela abaixo resume o resultado desta pesquisa.

		Cinema	
		sim	não
Teatro	sim	52	8
	não	36	4

Se os dados dessa pesquisa forem transportados para o gráfico abaixo, qual é a coluna que deve representar o número de pessoas que:



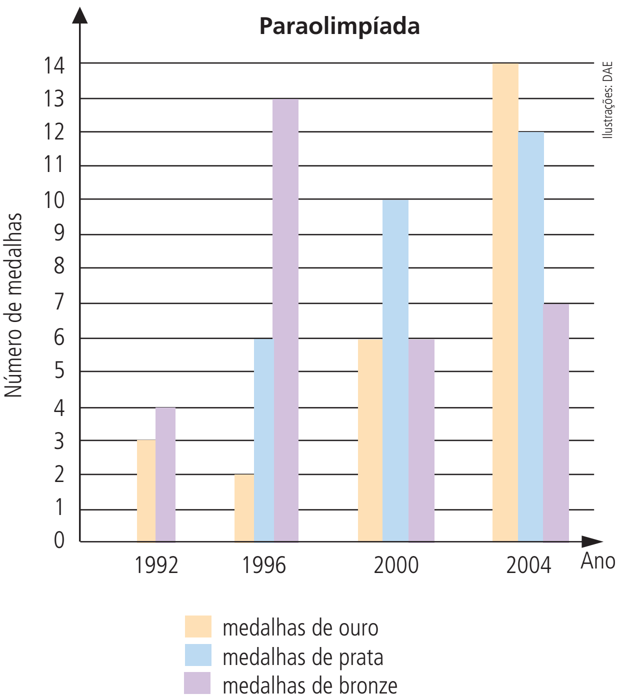
a) frequentam teatro e não frequentam cinema? C

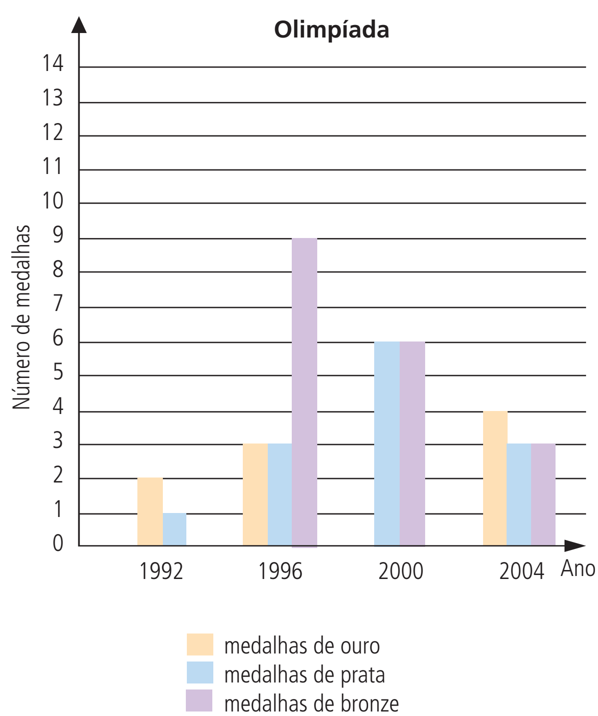
b) frequentam cinema e não frequentam teatro? B

c) frequentam cinema e teatro? A

d) não frequentam nem cinema nem teatro? D

38 (CPII-RJ) Os atletas paraolímpicos do Brasil escreveram seus nomes na história do esporte em Atenas! Alcançaram o 14º lugar, 4 posições à frente dos atletas olímpicos, que ficaram em 18º. Observe nos gráficos abaixo o desempenho dos atletas brasileiros nas quatro últimas competições.





a) Nessas quatro olimpíadas, quantas medalhas de ouro os atletas paraolímpicos tiveram a mais que os olímpicos? 16 medalhas

• P = 3 + 2 + 6 + 14 = 25 • O = 2 + 3 + 0 + 4 = 9

b) Tendo como referência o total de medalhas dos atletas olímpicos em 1996, qual foi o percentual que os paraolímpicos tiveram a mais que os olímpicos nesse ano? 40%

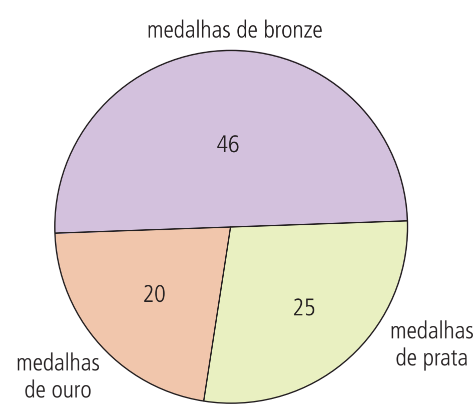
• P = 2 + 6 + 13 = 21 • O = 3 + 3 + 9 = 15 • $\frac{21}{15} = 1,4$

39

O Brasil não participou das cinco primeiras Olimpíadas. Só passamos a disputar os Jogos em 1920, em Antuérpia (Bélgica). O Brasil foi representado por 29 atletas. Em 1928, o Brasil voltou a não mandar nenhum representante. A partir de 1932, nunca mais deixamos de ir.

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 2 ago. 2008.

Veja no gráfico abaixo o desempenho do Brasil em todas as Olimpíadas de 1920 a 2008.



• 46 + 20 + 25 = 91 • $\frac{25}{91} = 0,2747$ aproximadamente

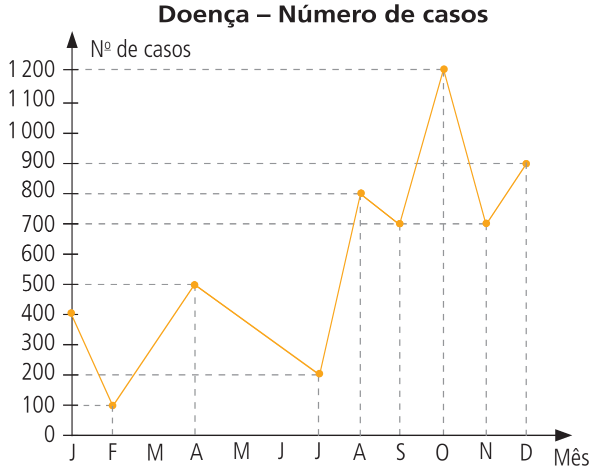
a) A quantidade de medalhas de prata corresponde a que percentual do total de medalhas ganhas pelo Brasil nesse período? Aproximadamente 27,47%.

b) A quantidade de medalhas de ouro corresponde a que percentual do total de medalhas ganhas pelo Brasil nesse período? Aproximadamente 21,97%.

• $\frac{20}{91} = 0,2197$

40 Num município foi pesquisado, durante um ano, o número de casos de certa doença, encontrando-se os dados representados no gráfico abaixo:

Doença – Número de casos

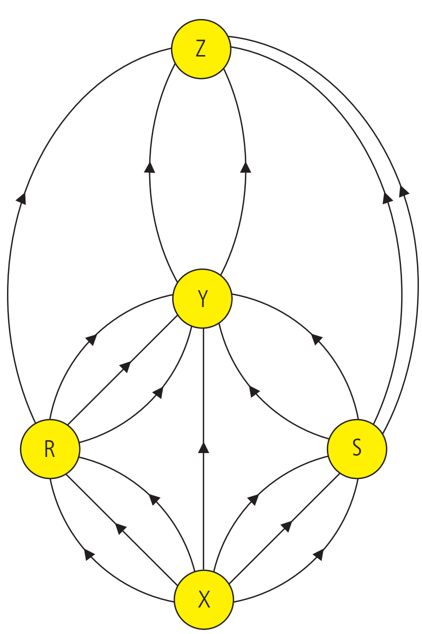


a) Em que mês foi registrado o maior número de casos? E o menor? Outubro; fevereiro.

b) Qual foi o número total de casos registrados no 3º trimestre? 1 700 casos

c) Entre que meses houve o maior aumento do número de casos? Julho e agosto.

41 (UFMG) Observe o diagrama:



Qual é o número de ligações distintas entre X e Z?

41 ligações; $(3 \cdot 1) + (3 \cdot 3 \cdot 2) + (1 \cdot 2) + (3 \cdot 2 \cdot 2) + (3 \cdot 2) = 41$

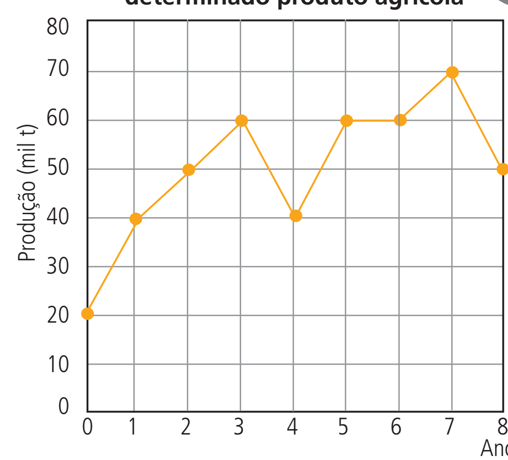
Desafios

42 Um hotel tem cinco portas. De quantas maneiras distintas um hóspede pode entrar no hotel e sair dele por uma porta distinta da que usou para entrar? 20 maneiras; $5 \cdot 4 = 20$

Ilustra Cartoon

43 O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção no estado de São Paulo de determinado produto agrícola entre os anos 2000 e 2008.

Produção no estado de SP de determinado produto agrícola



Ilustrações: DAE

Responda.

a) Anualmente, a produção foi crescente entre 2000 e 2003? Sim.

b) Anualmente, a produção foi crescente entre 2002 e 2005? Não. Em 2004 foi menor do que em 2003.

c) Anualmente, a produção a partir de 2005 foi decrescente? Não. Em 2007 foi maior do que em 2006.

d) Qual foi a média da produção ao ano?

50 mil t; $\dfrac{20 + 40 + 50 + 60 + 40 + 60 + 60 + 70 + 50}{9} = 50$

e) Qual foi o porcentual de acréscimo da produção em 2003 em relação ao ano anterior?

20%; $\dfrac{60 - 50}{50} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$

Seção livre

Marquinhos montou algumas tabelas com dados sobre o desempenho escolar dele e de seus colegas de classe e uma previsão de horas de estudo para suas avaliações.

CONECTANDO SABERES

Ele pretende utilizar gráficos para representar os dados.

Vamos participar da atividade de Marquinhos?

Reúna-se com um colega. A partir das informações de cada tabela vocês devem:

- escolher o tipo de gráfico que consideram mais adequado para representar os dados, justificando a escolha. Troquem ideias, conversem com as outras duplas;
- construir e comentar o gráfico no caderno;
- resolver as questões 1 e 2.

Minhas notas nas avaliações mensais de Matemática	
Março	6,0
Abril	5,0
Maio	6,0
Junho	7,0
Agosto	8,5
Setembro	6,5

Média dos alunos da classe no 3º bimestre	
Abaixo de 5,0	10%
De 5,0 a 7,0	60%
Acima de 7,0	30%

Preparação para as avaliações bimestrais		
Dia da semana	**Tempo de estudo**	**Componente**
Segunda-feira	4 horas	Português/Inglês
Terça-feira	2 horas	História
Quarta-feira	5 horas	Matemática
Quinta-feira	2 horas	Geografia
Sexta-feira	3 horas	Ciências
Sábado	2 horas	Espanhol

Agora respondam:

1. Calculem a média aritmética das notas de Marquinhos nas avaliações mensais. 6,5

A média do 3º bimestre será calculada pela fórmula: $M = \frac{A + S + 3 \cdot AB}{5}$, em que A é a nota da avaliação mensal de agosto, S é a de setembro e AB é a nota da avaliação bimestral.

2. Qual será a média bimestral de Marquinhos em Matemática se ele conseguir nota 7,0 na avaliação bimestral? 7,2

Autoavaliação

Anote, em seu caderno, o número do exercício e a letra correspondente à resposta correta.

44 Em uma festa existem 6 homens e 5 mulheres. O número de casais diferentes que podem ser formados é: $6 \cdot 5 = 30$

a) 6 c) 15

b) 11 x d) 30

45 Michele organizou um desfile. Para isso, juntou algumas peças de roupas, como mostra a tabela a seguir:

Vestido	Jaqueta
Branco	Jeans
Preto	Couro
Cinza	

De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir utilizando um vestido e uma jaqueta?

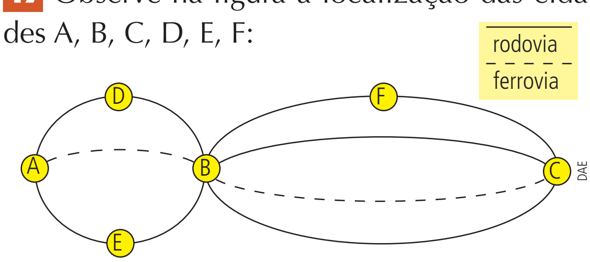
a) 2 b) 3 c) 5 x d) 6

46 Ao lançar dois dados de cores diferentes, o número total de resultados possíveis é:

Duncan De young/Dreamstime.com

a) 6 b) 12 c) 18 x d) 36

47 Observe na figura a localização das cidades A, B, C, D, E, F:



De quantas maneiras se pode ir de A até C passando por B? $3 \cdot 4 = 12$

a) 10 c) 7

x b) 12 d) 8

48 Usando os algarismos 7, 8 e 9, sem repetir nenhum, é possível formar:

a) dois números de três algarismos.

b) três números de três algarismos.

c) quatro números de três algarismos.

x d) seis números de três algarismos.

49 (Saresp) Os 30 alunos de uma turma vão eleger um representante e um vice (ambos pertencentes à turma). O número de escolhas distintas possível é: $30 \cdot 29 = 870$

a) 59 x c) 870

b) 435 d) 900

50 No campeonato brasileiro de futebol de 2008, participaram 20 equipes. O sistema de disputa, conhecido como pontos corridos, prevê que cada dois times disputem duas partidas entre si. O número de partidas disputadas por cada equipe foi de: $19 + 19 = 38$

a) 19 x c) 38

b) 20 d) 40

CONECTANDO SABERES

Rogério Reis/Olhar Imagem

51 Uma sorveteria produz 5 tipos de sorvete, 4 tipos de cobertura e 3 tipos de farofa doce. De quantas maneiras você pode compor a sua sobremesa escolhendo um sorvete com um único sabor, um tipo de cobertura e um tipo de farofa doce? $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

a) 12 b) 30 x c) 60 d) 120

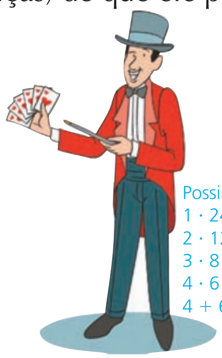
52 (Cesgranrio-RJ) Um mágico se apresenta em público vestindo calça e paletó de cores diferentes. Para que ele possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes, o número mínimo de peças (número de paletós mais número de calças) de que ele precisa é:

x **a)** 10

b) 11

c) 12

d) 24



Possibilidades:
$1 \cdot 24 = 24 \cdot 1 = 24$
$2 \cdot 12 = 12 \cdot 2 = 24$
$3 \cdot 8 = 8 \cdot 3 = 24$
$4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = 24$
$4 + 6 = 10 \rightarrow$ número mínimo

53 (Vunesp-SP) Uma feira de mecânica foi instalada em 2 pavilhões, divididos em 8 setores cada. Compondo cada setor havia 3 estandes e, em cada um deles, trabalharam 5 pessoas, que foram identificadas com um crachá. Assim, foram confeccionados, no mínimo:

$2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

a) 120 crachás.

x **b)** 240 crachás.

c) 880 crachás.

d) 1 268 crachás.

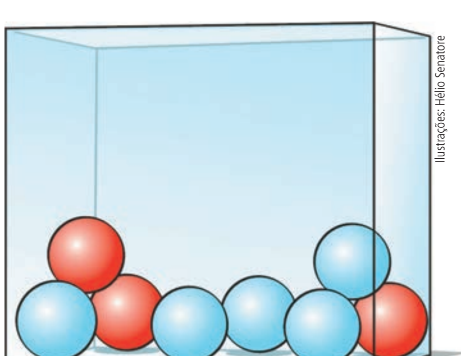
54 Numa urna, há 5 bolas azuis e 3 bolas vermelhas, todas iguais. A probabilidade de uma pessoa tirar uma bola vermelha da urna, de olhos fechados, é de:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{8}$

x **c)** $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{5}$



Ilustrações: Hélio Senatore

55 (Saresp) Foi feita uma pesquisa numa escola sobre a preferência dos alunos entre estudar pela manhã ou tarde. A tabela abaixo mostra o resultado desta pesquisa de acordo com o sexo do entrevistado.

Horário de estudo	Manhã	Tarde
Homens	70	80
Mulheres	70	50

Baseado nessa pesquisa, podemos afirmar que:

a) a maioria prefere estudar à tarde.

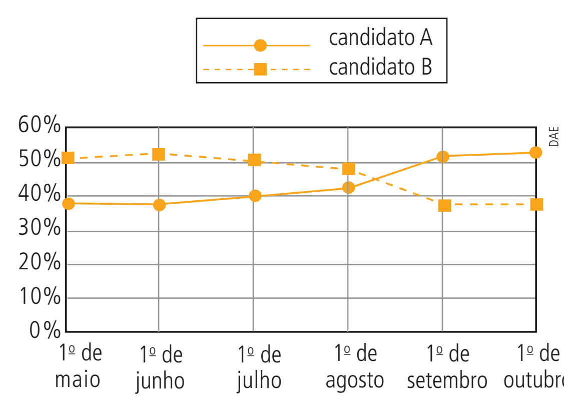
b) o total de entrevistados é de 150 alunos.

c) as mulheres e os homens preferem estudar pela manhã.

x **d)** o total de mulheres entrevistadas é de 120.

Fernando Favoretto/Criar Imagem

56 (Saeb-MEC) O gráfico abaixo mostra a evolução da preferência dos eleitores pelos candidatos A e B.



Em que mês o candidato A alcançou, na preferência dos eleitores, o candidato B?

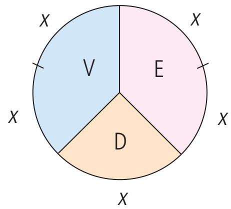
a) Julho.

x **b)** Agosto.

c) Setembro.

d) Outubro.

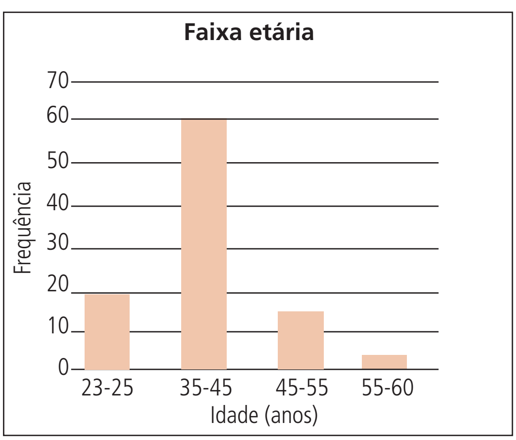
57 (UEPB) O gráfico de setor abaixo representa o número de vitórias (V), empates (E) e derrotas (D) de um time de futebol em 40 partidas disputadas.



Com base no gráfico, qual foi o número de vitórias, empates e derrotas desse time nos 40 jogos?

x **a)** 16 V, 16 E e 8 D
b) 18 V, 18 E e 4 D
c) 14 V, 14 E e 12 D
d) 16 V, 14 E e 10 D

58 (Saresp) Em uma festa foi feito o levantamento da idade das pessoas, representado no gráfico abaixo.

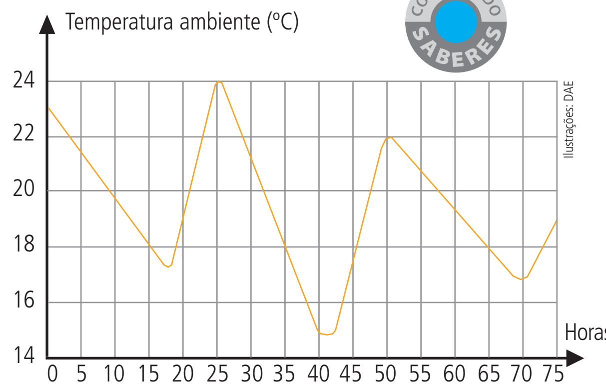


Pode-se afirmar, de forma correta, que o número de pessoas com idade abaixo de 45 anos, é:

a) 20 **b)** 60 x **c)** 80 **d)** 95

Ilustrações: Hélio Senatore

59 (SEE-RJ) O gráfico abaixo mostra como a temperatura média no estado do Rio de Janeiro variou durante 50 horas seguidas. Registros desse tipo são continuamente obtidos pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. (Adaptação)



Ilustrações: DAE

Segundo o gráfico acima, a temperatura mínima registrada nesse período foi de:

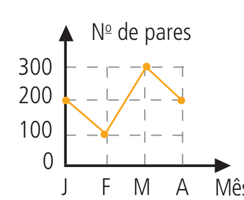
a) 14 °C
x **b)** 15 °C
c) 16 °C
d) 17 °C

60 (Saresp) A tabela seguinte mostra os números de pares de calçados vendidos pela loja "Pise Bem", durante os meses de janeiro a abril de 2008.

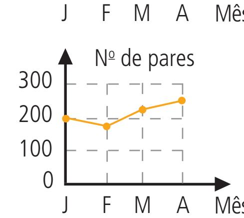
Mês	Número de pares
Janeiro	200
Fevereiro	185
Março	225
Abril	250

O gráfico que melhor representa os números de pares de sapatos vendidos na loja "Pise Bem", nos quatro primeiros meses de 2008, é:

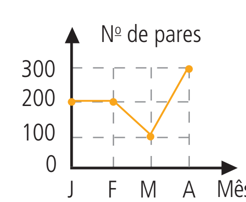
a)



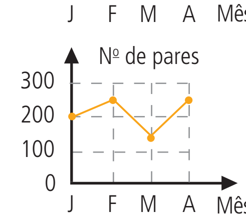
x **b)**



c)



d)



61 Em determinada cidade europeia, às 6 horas da manhã, as temperaturas registradas ao longo de uma semana foram:

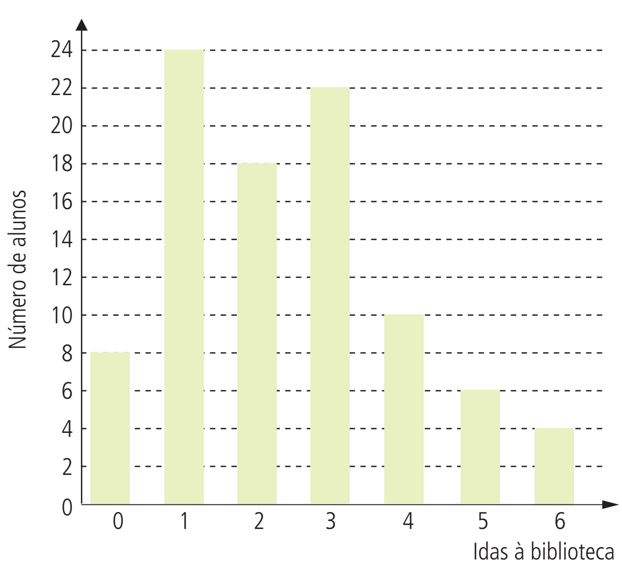
S	T	Q	Q	S	S	D
1 °C	0 °C	–4 °C	0 °C	–5 °C	–1 °C	2 °C

A temperatura média nessa semana, às 6 horas da manhã, foi de:

a) 0 °C **b)** 1 °C **c)** –2 °C x **d)** –1 °C

O gráfico a seguir refere-se às questões 62 e 63.

Veja os resultados de uma pesquisa feita com um grupo de alunos sobre o número de idas à biblioteca durante um mês.



62 A pesquisa foi feita com:

8 + 24 + 18 + 22 + 10 + 6 + 4 = 92

a) 48 alunos. **c)** 86 alunos.

x **b)** 92 alunos. **d)** 220 alunos.

63 A porcentagem de alunos que não foi à biblioteca é:

a) 8% x **c)** 8,7%

• $\frac{8}{92}$ = 0,0869 (aproximadamente)

b) 7% **d)** 16%

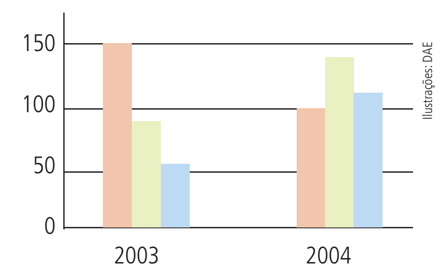
• 0,087 = 8,7%

64 (Saresp) Uma fazenda dedica-se à produção de trigo, soja e milho. A tabela abaixo mostra a produção em toneladas nos anos de 2003 e 2004.

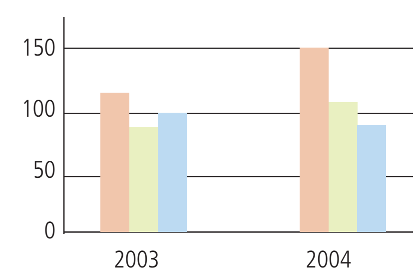
	trigo	soja	milho
2003	150	80	60
2004	120	140	90

O gráfico que melhor representa esta situação é:

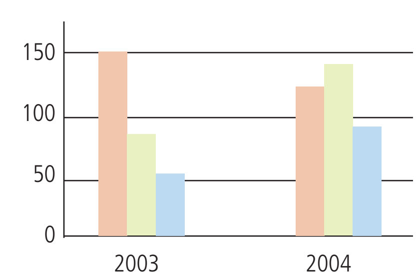
a)



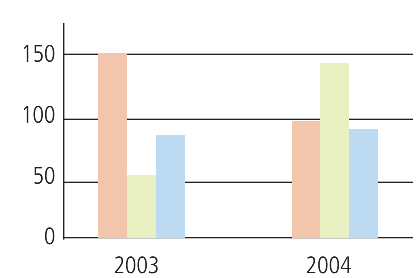
b)



x **c)**



d)



Sugestões de leitura e de sites para o aluno

Para ler...

Coleção Investigação Matemática. Marion Smoothey. São Paulo, Scipione.

Em livros de leitura fácil e rápida, temas da Matemática são apresentados de forma descontraída. Todos os livros têm atividades como jogos e quebra-cabeças. Para você, aluno do 8º ano, sugerimos os títulos:

- Estatística;
- Círculos;
- Gráficos;
- Triângulos.

Equação: o idioma da álgebra. Oscar Guelli. São Paulo, Ática, 1999.

Com texto interessante e bem ilustrado, o livro aborda aspectos históricos do desenvolvimento da Álgebra e de sua linguagem, mostrando a importância das equações. Você gostará de fazer as atividades propostas!

Geometria das dobraduras. Luís Márcio Imenes. São Paulo, Scipione, 1996.

Descubra que dobraduras têm tudo a ver com a geometria!

Geometria dos mosaicos. Luís Márcio Imenes. São Paulo, Scipione, 1995.

Integrando Geometria, natureza e arte, você vai observar e compor belos mosaicos, compreendendo melhor algumas propriedades das figuras geométricas.

História de potências e raízes. Oscar Guelli. São Paulo, Ática, 2004.

Trata de conteúdos importantes para o 8º ano, como as propriedades das pontências e a radiciação.Interessante, bem ilustrado, gostoso de ler.

O homem que calculava. Malba Tahan. Rio de Janeiro, Record, 2001.

Conta as histórias de Beremiz Samir e outros personagens “das arábias”. Beremiz, brilhante nos cálculos e nos raciocínios, resolve problemas envolventes e desafiadores. É um clássico da literatura lúdica da Matemática.

Problemas curiosos. Luís Márcio Imenes. São Paulo, Scipione, 1995.

Explora o prazer de resolver problemas e desafios usando conhecimentos matemáticos e criatividade. Você vai gostar!

Para navegar...

<http://www.ibge.gov.br>

Selecione canais e clique em IBGE *teen*.

- **Mão na roda**: para encontrar informações gerais sobre o Brasil, em números, gráficos e mapas.
- **Calendário**: relaciona e comenta datas comemorativas do Brasil e do mundo.
- **Censo 2007 e Censo 2010**: como o nome já diz, contém dados dos censos, como população, escolaridade, condições de vida do povo brasileiro, produção agrícola e pecuária.
- **Mapas**: para uso escolar, disponíveis para visualização e *download*.
- **Biblioteca**: conteúdo para pesquisa, principalmente em História e Geografia.
- **Notícias**: para ler o que há de novo em dados sobre o Brasil e outros temas.

<http://www.cienciahoje.uol.com.br>

Clicando em "CH das crianças", você encontra um menu que permite acessar não só as páginas sobre Matemática, mas também sobre outros ramos da Ciência.

<http://somatematica.com.br>

Cadastrando-se gratuitamente é possível acessar listas de exercícios, artigos, biografias de grandes matemáticos, jogos e também fóruns de discussão.

<http://www.obm.org.br>

Site das Olimpíadas Brasileiras de Matemática, contendo provas e gabaritos, com *download* disponível. Bom para testar seus conhecimentos. Há *links* para sites sobre a História da Matemática e sobre constantes famosas como o número π (pi).

<http://www.obmep.org.br>

Site das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas. Traz provas de anos anteriores e um grande banco de questões.

<http://www.escolakids.com/matematica>

Site interessante com temas da Matemática e de outras ciências.

<http://www2.tvcultura.com.br/aloescola>

Além de assuntos ligados à Matemática, o site aborda temas importantes, como a água, de forma leve e atraente.

<http://www.numaboa.com/escolinha/matematica>

Site para consulta sobre vários temas.

<http://www.klickeducacao.com.br>

O site permite acesso gratuito a algumas páginas. Clique em "Matemática" no menu "Biblioteca Viva" para pesquisar temas em vários campos da Matemática.

<http://www.sercomtel.com.br/matematica>

Traz exercícios resolvidos e propostos, além de informações básicas sobre diversos conteúdos. Procurar assuntos destinados a alunos do Ensino Fundamental.

<http://www.cabri.com.br/index.php>

O *software* Cabri-géomètre é uma ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem da Geometria.

<http://escolovar.org/mat.htm>

Este site é muito interessante para professores e alunos. Há uma variedade enorme de atividades disponíveis: jogos, animações, simuladores, brincadeiras envolvendo números e formas.

<http://www.wisc-online.com/ListObjects.aspx>

Clicando em Learning Objects, General Education, General Math ou Technical Math, há um grande número de objetos educacionais disponíveis, incluindo apresentações em Power Point sobre vários conteúdos como equações, frações algébricas e áreas de polígonos. Não é preciso cadastro. Os textos estão em inglês, mas são simples.

<http://www.matinterativa.com.br/layout.swf>

Contém aulas digitais, *games*, laboratório de matemática, projetos, artigos e variedades.

<http://www.mais.mat.br/wiki/P%C3%A1gina_principal>

Repositório que reúne mais de 150 recursos educacionais em diversas mídias (áudios, vídeos, *softwares*, textos e experimentos práticos), voltados para os Ensinos Fundamental e Médio.

<http://www.ime.usp.br/~matemateca/>

Mostra objetos matemáticos expostos anualmente na Matemateca, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME – USP). Eles são confeccionados com o intuito de despertar curiosidade, servir de incentivo ao aprendizado e divulgar de maneira interessante e divertida temas da Matemática.

<http://matematica.com.br/site/>

O *site* reúne as questões de Matemática de grandes vestibulares. Também apresenta um material didático (artigos, vídeos, provas, desafios, curiosidades etc.) sobre a disciplina para os Ensinos Fundamental e Médio, bem como conteúdo sobre a aplicação da Matemática no dia a dia.

<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/>

Contém objetos de aprendizagem do Laboratório Virtual de Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) e da Rede Internacional Virtual de Educação (RIVED).

<http://www.peda.com/poly>

Em inglês, programa para exploração e construção de poliedros.

<http://www.planetaeducacao.com.br>

Portal educacional que tem como objetivo disseminar as novas tecnologias da informação e da comunicação. Apresenta artigos sobre números inteiros e números decimais para o 6º ano.

<http://alea-estp.ine.pt> e **<http://alea.ine.pt/html/probabil/html/probabilidades.html>**

Ação Local de Estatística Aplicada é um *site* de Portugal que traz textos com noções de Estatística e Probabilidades, textos históricos, problemas, desafios, jogos, curiosidades etc.

<http://www.fc.up.pt/atractor/mat/Polied/poliedros.html>

Página do *site* da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, apresenta animações de poliedros em 3D.

<http://nautilus.fis.uc.pt/mn/pitagoras/pitflash1.html>

Contém diversos jogos abordando temas da Matemática, dentre eles sobre o teorema de Pitágoras.

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm29/Global%2003.htm>

Apresenta conteúdos e atividades sobre sistemas de equações.

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm208/9ano.html>

Apresenta atividades para testar conhecimentos de trigonometria, circunferência e polígonos.

<http://www.youtube.com/watch?v=7S3iw_sbqsA

Vídeo sobre Arte e Matemática.

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm#Outras%20curiosidades%20MatemÃiticas%20na%20Natureza>

Apresenta curiosidades sobre os números na natureza.

<http://matematica.no.sapo.pt/nconcreto.htm>

Apresenta texto sobre o surgimento do número.

(Estes sites foram indicados com base em conteúdos acessados em março de 2012).

Referências bibliográficas

BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas*: uma estratégia para as aulas de Matemática. São Paulo: IME; USP, 1995.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*. Brasília: SEF; MEC, 1998.

CARDOSO, Virgínia Cardia. *Materiais didáticos para as quatro operações*. São Paulo: IME; USP, 1992.

CENTURION, Marília. *Conteúdo e metodologia da Matemática, números e operações*. São Paulo: Scipione, 1994.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação* – reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo: Summus, 1995.

__________________. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; SMOLE, Kátia Cristina Stocco. *O conceito de ângulo e o ensino de geometria*. São Paulo: IME; USP, 1992.

GUELLI, Oscar. *A invenção dos números*. São Paulo: Ática, 1998. v. 1. (Coleção Contando a História da Matemática).

IFRAH, Georges. *Números:* a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1992.

KAMII, Constance. *Aritmética*: novas perspectivas. Implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1992.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (Org.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.

LIMA, Elon Lages. *Áreas e volumes*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1975. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

MACHADO, Nilson José. *Coleção Matemática por Assunto*. São Paulo: Scipione, 1988. v. 1.

MOISE, E; DOWNS, F. L. *Geometria moderna*. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

NETO, Ernesto Rosa. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1987.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RUBINSTEIN, Cléa *et al*. *Matemática para o curso de formação de professores*. São Paulo: Moderna, 1977.

SANTOS, Vânia Maria Pereira (Coord.). *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática*: métodos alternativos. Rio de Janeiro: IM-UFRJ; Projeto Fundão; Spec/PADCT/Capes, 1997.

STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1997.

TROTA, Fernando; IMENES, Luiz Márcio; JAKUBOVIC, José. *Matemática aplicada*. São Paulo: Moderna, 1980.

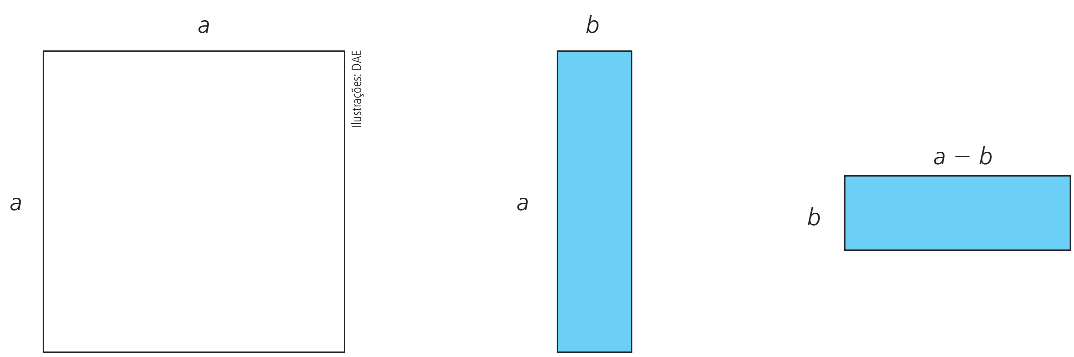
WALLE, John A. van de. *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZABALLA, Antoni (Org.). *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

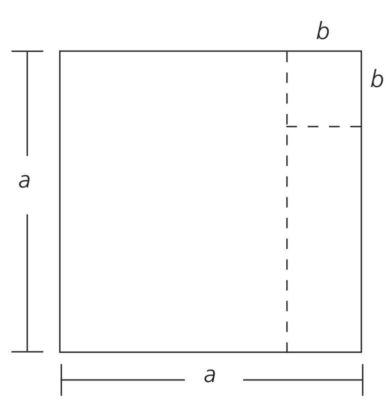
Moldes e malhas para as atividades

CONSERVE SEU LIVRO.
Tire cópias dos moldes e das malhas.

1. Quadrado da diferença de dois termos



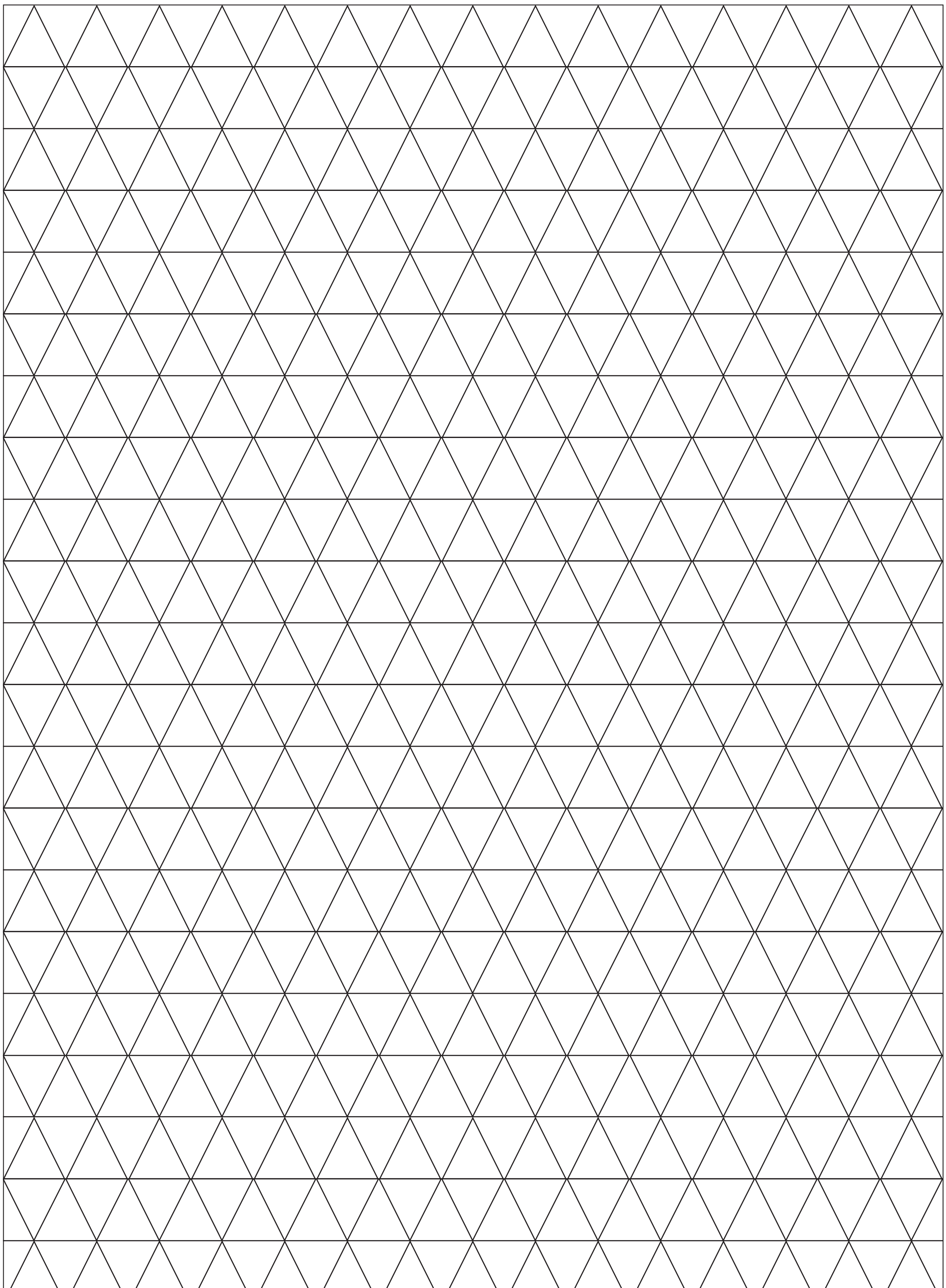
2. Produto da soma pela diferença de dois termos



3. Malhas

CONSERVE SEU LIVRO.
Tire cópias dos moldes e das malhas.

Malha triangular

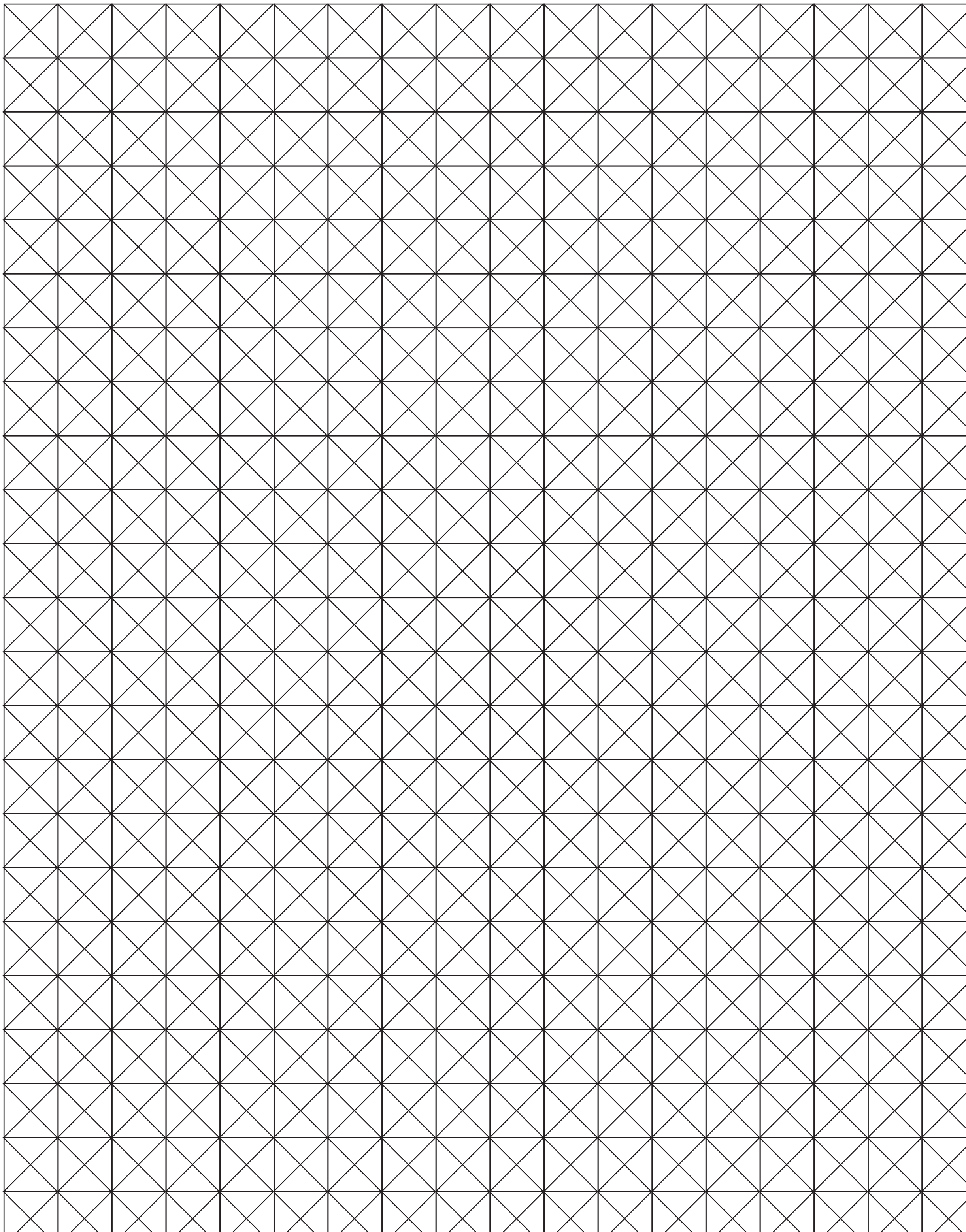


DAE

Malha triangular

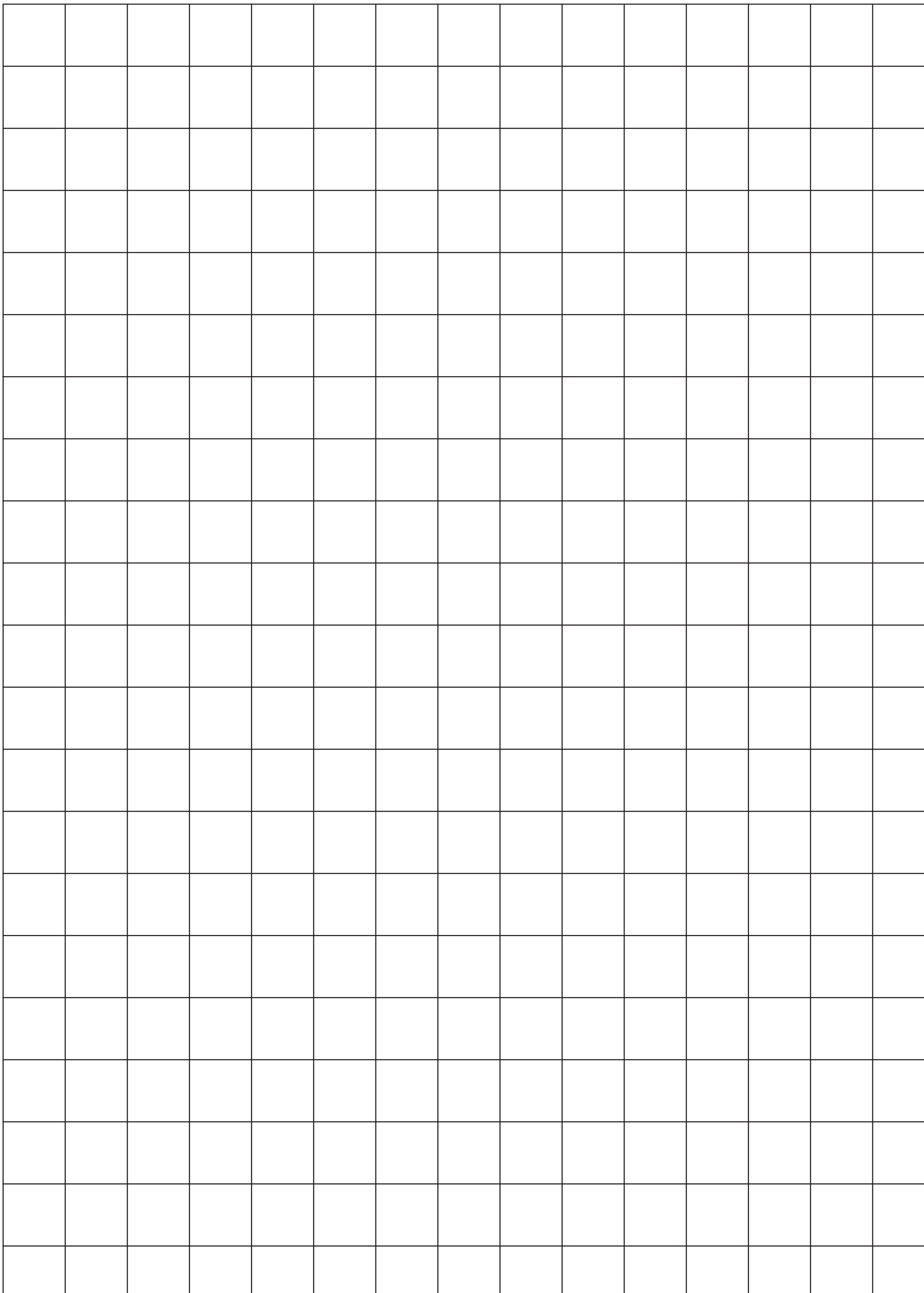
CONSERVE SEU LIVRO.
Tire cópias dos moldes e das malhas.

DAE



Malha quadriculada

CONSERVE SEU LIVRO.
Tire cópias dos moldes e das malhas.



DAE

Respostas dos exercícios

UNIDADE 1

Exercícios

Página 9

1. **b** e **d**

2. a) 49 000
b) 71 999
c) 7 999
d) 3 641

3. a) 5 · 7 ou 1 · 35
b) 17 + 18
c) 5 + 6 + 7 + 8 + 9

4. a) 7 642
b) 6 427
c) 2 476

5. a) Dimas Quirino.
b) Cento e três mil e noventa.
c) Um milhão, trinta mil e noventa.
d) 1 000 220

6. Nos dias 12 e 24.

Seção livre

Página 10

210 latas

Exercícios

Página 13

7. a) 15 metros para a direita
b) Um prejuízo de R$ 70,00.
c) 6 anos mais velho

8. a) Não.
b) Não.
c) Infinitos.

9. a) –1 000 c) –14
b) Zero.

10. –10, –6, –4, 0, 4

11. R$ 1.092,00

12. Ganhou 1.

13. a) –10 °C
b) +5 °C
c) 13 °C; 6 °C
d) –1 °C

14.

–2	3	–4
–3	–1	1
2	–5	0

Exercícios

Página 15

15. a) 8 049; 17
b) 8 049; 17; –6
c) Todos.

16. a) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$
b) 4 pedaços

17. São iguais.

18. a) 12, 15, 40, 60
b) 2, 14, 24, 105

19. A e F; B e E; C e H; D e G.

20. a) B b) C c) A

21. 8 pacotes

Exercícios

Página 18

22. R$ 10,25

23. a) $\frac{5}{4}$
b) São iguais.
c) 15,7
d) $\frac{220}{9}$

24. $-4, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4$

25. A = –5 e B = –4

26. a) 1,863
b) 0,500 015
Há outras soluções possíveis.

27. R$ 55,50; R$ 77,70; 250 bombons.

28. a) 13,5
b) 0,375
c) –6,8333...
d) 0,05
e) 0,4747...
f) 2,666...
As frações dos itens **c**, **e** e **f** são dízimas periódicas.

29. a) $\frac{3}{10}$
b) $\frac{3}{100}$
c) $-\frac{9}{2}$
d) $\frac{137}{10}$
e) $\frac{1\,001}{500}$
f) $\frac{7}{10\,000}$

30. a) $-\frac{8}{9}$
b) $\frac{37}{99}$
c) $-1\frac{21}{99}$
d) $\frac{5}{99}$

31. 1440 m^2

32. a) 2,1
b) 10, 333...
c) 0,25
d) 0, 8444...
e) 2,1
f) 0,5

Exercícios

Página 21

33. b

34. C

35. Não, porque $\sqrt{6}$ é irracional.

36. 16

37. a) Menor; menor; maior; menor.
b) 4,472

38. Há várias possibilidades de resposta. Resposta possível: 2,123 122 312 223...

39. $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$
Irracionais: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$

40. a) Racional.
b) Racional.
c) Irracional.
d) Racional.
e) Racional.
f) Racional.
g) Irracional.
h) Racional.
i) Irracional.
j) Racional.

Exercícios

Página 23

41. 141,3 cm

42. 3 014,4 m

43. 8 m

44. 337 m

45. 219 m, aproximadamente

46. 500 voltas

Exercícios

Página 25

47.

	10	-8	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{6}{2}$	0	$\sqrt{4}$	$\sqrt{7}$	π	1,76
$\mathbb{N}$	x				x	x			
$\mathbb{Z}$	x	x		x	x	x			
$\mathbb{Q}$	x	x	x	x	x	x			x
$\mathbb{I}$							x	x	

- Números reais.

48. $\sqrt{-49}$

49. a

50. $\sqrt{37}$, $\sqrt{72}$ e $\sqrt{98}$

51. **a)** π
b) 10
c) 7,2
d) $\sqrt{15}$

52. –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3

53. **a)** 5 e 6
b) 0 e 1

54. **a)** 200
b) 700
c) 35
d) 16
e) 65
f) 4 000
g) 8,2
h) 4
i) 69
j) 50

55. $\frac{1}{2}$

Experimento:

Nós, geralmente nos lembramos dos números inteiros e nos esquecemos da infinidade de números reais que existem entre os inteiros.

Exercícios

Página 27

56. d

57. A e III; B e II; D e IV; E e I.

58. **a)** $\frac{4}{75}$
b) 1,8
c) 21

59. $\frac{52}{37}$

60. b

61. 3

62. Porque zero vezes qualquer número é zero.

63. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

64. c

65. **a)** V
b) F
c) V

66. c

67. d

68. b

Seção livre

Página 29

A) d

B) **a)** Sim.
b) 1

Revisando

Página 30

69. Há infinitas possibilidades de resposta. Sugestões:
a) 2 e 3
b) –3 e –2
c) 4 e 5
d) $\frac{7}{2}$ e 3,8
e) 0,555... e –4,1
f) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$

70. Sim.

71. Um número irracional.

72. **a)** 0,666...
b) 0,999...
c) 1,666...

73. –1,6

74. **a)** 33 333
b) 82

75. **a)** 2,3
b) 23
c) 2,3
d) 2 300

76. I – 6; II – 3, 9; III – 1,5; 4,5; 7,5; 10,5
a) Há várias possibilidades de resposta.
b) Sim.
c) Sim.

Página 31

77. Resposta possível: $\sqrt{26}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{35}$.

78. **a)** –1,444...
b) 0,757 575...
c) 2,5333...

79. $\frac{6}{20}$; 0,3222...; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{2}$

80. R$ 52,50

81. **a)** 8 pontos
b) Pedro; 12 pontos.
c) 54 pontos

82. São iguais.

83. **a)** $\frac{5}{8}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{34}{9}$
d) $\frac{13}{9}$

84. 2

Página 32

85. 25 graus

86. 21 partidas

87. 125,6 km

88. 1 metro

Desafios

Página 32

89. 0

90. **a)** 30 dias
b) Terça-feira.

91. 2 200 litros

Autoavaliação

Página 33

92. d

93. d

94. d

95. a

96. b

97. d

98. d

99. d

100. a

101. a

Página 34

102. c

103. b

104. c

105. c

106. b

107. b

108. c

UNIDADE 2

Exercícios

Página 37

1. a) 2^6
b) 4^3
c) 8^2
d) 64^1

2. a) 216
b) 64
c) 0
d) 1331
e) 10 201
f) 160 000

3. a) 1
b) 169
c) –125
d) –100 000
e) 5,29
f) –0,001

4. a) 9
b) –9
No item **a**, o (–3) está elevado a expoente 2, enquanto no **b** o 3 está elevado a expoente 2 e o resultado tem o sinal de menos.

5. a) –49
b) 49
c) –16
d) 16
e) –64
f) –64
g) –32
h) –81

6. a) $6^2 - 2^2 = 32$
(Há outras possibilidades.)
b) $2 \cdot 3^2 = 18$
(Há outras possibilidades.)

7. 1 728 lápis

8. a) $\frac{9}{25}$
b) $\frac{16}{49}$
c) $-\frac{1}{125}$
d) $\frac{1}{16}$
e) $\frac{1}{243}$
f) $\frac{9}{2}$

9. a) A área do chão não ocupada pelo tapete.
b) Não.

10. 814 quadrados

Página 38

11. a) 5
b) –5
c) 4
d) –4
e) 3
f) –3

12. a) 25 = 25
b) $\frac{1}{25} = \frac{1}{25}$
c) $125 > -125$
d) $\frac{1}{125} > -125$

13. a) $\frac{3}{2}$
b) 8
c) $\frac{4}{25}$
d) $\frac{16}{49}$

14. a) 1
b) 3
c) 1
d) 1

15. 8 lanches

16. a) 1
b) –6
c) 0,222...
d) 1
e) 1
f) 1
g) –1
h) $\frac{1}{2}$

17. a) 16 botões
b) 64 botões
c) 84 botões

Exercícios

Página 41

18. a) a^7
b) 5^9
c) $(0,1)^{-8}$
d) 3^7

19. a) 2^6
b) 2^7

20. a) 3^8
b) 5^{-2}
c) 7^6
d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3$

21. a) 2^{10}
b) 2^{15}

22. 512

23. a) C
b) C
c) E
d) E

24. a) 10; b) 100; c) 300;
d) 1 000; e) 10 000; f) 20 000

25. A e IV; B e I; C e II; D e III.

26. 8

27. a) 5^6
b) 6^3
c) –0,5
d) 11^{-8}

28. a) 2^{19}
b) 2^{18}

29. a) 3^5
b) 10^3
c) 10^7
d) 3^2

30. 8^{11}

Seção livre

Página 42

$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 21$

Exercícios

Página 43

31. a) C
b) C
c) B

32. a) 15 zeros

b) 16 algarismos

33. a) $7 \cdot 10^2$

b) $34 \cdot 10^3$

c) $37 \cdot 10^4$

d) $6 \cdot 10^9$

34. a) 0, 0001

b) 0, 00001

35. a) 10^3

b) 10^{-3}

c) 10^4

d) 10^{-4}

e) 10^6

f) 10^{-6}

36. $1\,000^6$

Exercícios

Página 45

37. 10^9

38. a) 17,5 litros

b) 175 litros

c) 1 750 litros

d) 17 500 litros

39. 3 500 litros

40. a) 90 litros

b) 0,9 litros

c) 0,09 litros

d) 1,8 litros

41.

8040	80400	804000	80,4	8,04	0,804
2,5	25	250	0,025	0,0025	0,00025
60000	600000	6000000	600	60	6
183	1830	18300	1,83	0,183	0,0183

42. a) –2

b) 2

c) 1

d) 4

e) –3

43. a) 10^3 cm

b) 10^5 cm

c) 10^{-1} cm

Seção livre

Página 47

A) $5 \cdot 10^{-4}$g

Exercícios

Página 47

44. $3 \cdot 10^3$; $3 \cdot 10^2$; $3 \cdot 10^1$; $3 \cdot 10^0$;
$3 \cdot 10^{-1}$; $3 \cdot 10^{-2}$; $3 \cdot 10^{-3}$; $3 \cdot 10^{-4}$

45. Mercúrio: $5,79 \cdot 10^7$ km;
Vênus: $1,089 \cdot 10^8$ km.

46. a) $2 \cdot 10^{-3}$ mm

b) $2,3 \cdot 10^{-9}$ m

47. 25 000 000 000

48. 24 000 sementes

Revisando

Página 48

49. a) $5^2 = 25$

b) $3^2 = 9$

c) $7^2 = 49$

d) $3^3 = 27$

e) $4^3 = 64$

f) $5^3 = 125$

50. 64 parafusos

51. a) 17

b) 0

c) 10 000

d) 1

e) –0, 001

f) $\frac{49}{64}$

52. a) 16

b) 16

c) 16

d) $\frac{1}{16}$

e) 16

f) $\frac{1}{16}$

53. a) 2

b) 2

c) 5

d) 3

e) 2

f) 3

54. 0,84 m^2

55. $\frac{2}{3}$

56. a) –25

b) 63

c) 2,25

d) $\frac{82}{9}$

e) $\frac{7}{4}$

f) 6

57. C, D, B, E, F, A

58. A e H; B e E; C e F; D e G.

Página 49

59. C

60. 64; 144; n^2

61. a) 16

b) –16

c) 16

d) 4

62. a) Não.

b) Não.

63. 64 cubos

64. a) 15,21

b) 0,1521

c) 152 100

65. a) 1 000 (um mil)

b) 1 000 000 (um milhão)

c) 1 000 000 000 (um bilhão)

d) 1 000 000 000 000 (um trilhão)

66. a) $1,4 \cdot 10^{10}$

b) $2,5 \cdot 10^{-10}$

67. $7,915 \cdot 10^6$ m

68. 243 pessoas

69. É possível porque $6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$.

Página 50

70. C

71. a) 3^{10}

b) 3^7

c) 3^8

d) 3^{10}

72. a) 36 caixinhas

b) 216 ovos

73.

3^2	3^7	3^6
3^9	3^5	3
3^4	3^3	3^8

Desafios

Página 50

74. a) 9

b) $\frac{1}{16}$

75. a) 1, 3, 9, 27 triângulos roxos

b) 81 triângulos roxos

76. A costureira.

Autoavaliação

Página 51

77. c

78. b

79. d

80. a

81. c

82. a

83. c

84. b

85. d

86. b

87. d

Página 52

88. a

89. d

90. b

91. c

92. c

93. b

94. c

95. c

UNIDADE 3

Exercícios

Página 55

1. a) $\sqrt{25}$
b) $\sqrt{0}$
c) $\sqrt{256}$
d) $\sqrt{50,41}$
e) $\sqrt{0,09}$
f) $\sqrt{\frac{4}{25}}$

2. a) 6
b) 2
c) $\frac{1}{3}$
d) 0,6
e) 0,2
f) $\frac{9}{5}$

3. 28 cm

4. 16 mosaicos

5. –2

6. a) 0,008 m^3
b) 2 m
c) 9,261 m^3
d) 3 m

7. a) 0
b) 1
c) $\frac{1}{2}$
d) 5
e) 0,1
f) $\frac{1}{3}$

8. a) V
b) F
c) F
d) V

9.

Comprimento da aresta do cubo	2 cm	3 cm	4 cm
Área da face do cubo	4 cm^2	9 cm^2	16 cm^2
Volume do cubo	8 cm^3	27 cm^3	64 cm^3

10. a) 11
b) 44
c) 5
d) 2

11. a) 4,6
b) $\frac{23}{6}$

Exercícios

Página 57

12. a) 13
b) 10
c) 2
d) 2

13. a) 4 e –4
b) 4 e –4

14. a) 81
b) 400
c) 0,04
d) $\frac{36}{25}$
e) 729
f) 0
g) 0,001
h) $\frac{1}{8}$

15. a) 3
b) 5
c) $\frac{1}{3}$
d) –5
e) 1
f) –1
g) 2
h) 0,3
i) $-\frac{1}{2}$

16. a) Errado, porque $(-6)^2 = 36$.
b) Errado, porque $(-3)^4 = 81$.

17. a) 10
b) –10
c) Não existe.
d) 3
e) –3
f) 3

18. Não é possível determiná-las, pois os números reais elevados a expoente par darão sempre um número real positivo.

Exercícios

Página 60

19. O número 256, porque o valor de 16^2 tem de terminar em 6.

20. O número 39, porque 39^2 termina em 1.

21. a) C
b) C

22. a) C
b) C
c) E
d) C
e) C
f) C

23. a) 19
b) 85
c) –7
d) 3
e) 2
f) 2,3
g) 5,1
h) 0,17

24. Ele pode formar um quadrado de 13 quadradinhos por lado e sobram 15 quadradinhos.

25. a) $\sqrt{40}$
b) 4,5
c) π

d) $\sqrt{15}$

26. a) 100 m

b) 2 500 m^2

27. 12 metros

Exercícios

Página 64

28. a) Sim.

b) Não.

c) Não.

d) Sim.

29. a) 6 e 7

b) 7 e 8

c) 9 e 10

d) 15 e 16

30. $\sqrt{20}$, $\sqrt{23}$, 5, $\sqrt{27}$, 6, $\sqrt{40}$

31. $(1{,}5)^2$

32. b

33. 15, 16, 17 e 18

34. a) 12

b) 14

c) 15

d) 18

35. a) Não.

b) Não.

c) Sim.

d) Sim.

36. 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196

37. a) Sim.

b) Não.

38. a) 59 quadradinhos

b) n^2

39. 3

Página 65

40. a) 768 000 cm^2

b) 480 lajotas

c) 32 cm

41. a) Aproximado.

b) 4,12

42. 39,94 m

43. a) 10 e 20

b) 1 000 e 2 000

c) 1 e 10

d) 100 e 200

e) 1 e 10

f) 10 e 20

44. $\frac{20}{3} < \sqrt{49} < 10\sqrt{2} < 15 < 6\pi$

45. a) 1,8

b) 14,3

c) 1

d) 15

46. a

47. c

48. 32

49. d

Revisando

Página 67

50. a) 9

b) 900

c) 300

d) 0,09

e) 49

f) 0,49

g) 70

h) 10 000

51. $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{35}$, 6, $\sqrt{150}$, $\sqrt{1\,001}$, 40

52. 4 096

53. 4 900 m^2

54. a) 1,4

b) 1,414

55. a) 8,41

b) 3,59

c) 2,82

d) 0,70

56. 20

57. 121, 144, 169, 196, 225, 256 e 289

58. Um número terminado em 7 não pode ser quadrado perfeito.

59. 2, 3, 7 ou 8

60. a) 24 cm

b) 9 cm^2; 3 cm

61. a) 2

b) 8 000

c) 0,008

d) 200

e) 5

f) 125 000

g) 1

h) 0,1

Página 68

62. 9 e 10

63. a) 64,16 e 49

b) 64 e 27

64. a) 625

b) 64

c) 4

d) 5

65. a) –12

b) –4

c) –7

d) 8

e) 0

f) 7 100

g) 1,7

h) 3,2

66. a) 8 cm

b) 384 cm^2

67. 4,58 m

68. 961

69. 37 cubinhos

70. 3 m, 7 m, 10 m

Página 69

71. Alternativa c.

72. a) 64 cm^3

b) 4 cm

73. 25 é o único que é quadrado perfeito. O cartão **b** não deve ser utilizado.

Desafios

74. 1936

75. 400

76. O terreno de José tem 60 m de frente por 60 m de fundo.

77. a) 8 cm

b) 4 cm

c) 1 cm

Autoavaliação

Página 70

78. b

79. a

80. a

81. c

82. d

83. d

84. a

85. d

86. d

87. c

88. d

89. a

90. b

UNIDADE 4

Exercícios

Página 73

1. a) 8 c) 24
 b) 9 d) 12

2. a) 8 f) −5,5
 b) −2 g) −1
 c) 7 h) −16
 d) 0,4 i) 4
 e) 21 j) 8

3. R$ 50,50

4. a) A + 12 = 15 + 3
 b) 6
 c)

6	21	18
27	15	3
12	9	24

5. a

6. 🔔 = 7 💣 = 12 ⌘ = 10
 ♉ = 2 ❖ = 20

Exercícios

Página 76

7. a) R$ 1,44
 b) 7 balas
 c) Não.
 d)

Número de balas	Preço a pagar (reais)
1	0,15
2	0,30
3	0,45
4	0,60
5	0,75
6	0,90
7	1,05
8	1,20
9	1,35
10	1,50

8.

Comprimento do lado (em cm)	ℓ	0,5	1	2	2,5	3
Perímetro (em cm)	P	2	4	8	10	12

 a) Sim.
 b) $P = 4\ell$
 c) Variáveis.

9. a) 9 m
 b) 3 m
 c) $y = \dfrac{36}{x}$ ou $x \cdot y = 36$

10. a) $y = 10 + 3{,}5x$
 b) R$ 129,00
 c) 86 km

Exercícios

Página 79

11. a) 8 rodas
 b) 12 rodas
 c) 32 rodas
 d) $4x$ *rodas*

12. $y + 1$

13. a) O dobro da idade de Paulo.
 b) A idade de Paulo há 2 anos.
 c) A idade de Paulo daqui a 5 anos.
 d) O dobro da idade de Paulo daqui a 5 anos.

14. a) $x + y$
 b) $4x + 3y$

15. a) 5 camisetas e 2 bonés
 b) R$ 104,00

16. a) Figura A: $P = 6a$
 Figura B: $P = a + 2b + 2c + d$
 b) Figura A: P = 9 cm
 Figura B: P = 25 cm

Página 80

17. a) 10
 b) 16
 c) 4
 d) –10
 e) 25
 f) 249

18.

x	0	3	0,5	8
$8 - x$	8	5	7,5	0

m	0	2	0,6	7
$3m$	0	6	1,8	21

19. a) –10
 b) 4
 c) –12
 d) 3,1
 e) 60

20.

a	9	0	–4	7
$2a + 1$	19	1	–7	15

y	8	1	1,5	6
$3y - 5$	19	–2	–0,5	13

21. a) $\dfrac{2}{15}$
 b) $\dfrac{29}{2}$
 c) $\dfrac{1}{6}$

22. $-\dfrac{11}{8}$

23. a) 1
 b) 0
 c) Não existe.
 d) 7

24. $45x + 67y$; R$ 29.100,00

Exercícios

Página 82

25. a; $7b$; $-4c$

26. a) $2x$
 b) $\dfrac{x}{2}$
 c) $3x$
 d) $\dfrac{x}{3}$
 e) $-x$
 f) x^2

27. a, c, d, g, i, j

28.

Monômio	Coeficiente	Parte literal
$3x^4$	3	x^4
$-2a^2$	–2	a^2
$3a^2$	3	a^2
xy^2	1	xy^2
$0{,}8m$	0,8	m
$-\dfrac{x}{5}$	$-\dfrac{1}{5}$	x
–7	–7	não tem

29. • $5xy$, $2xy$, $-4yx$
• $9x$, $-3x$
• $7x^2$, $-6x^2$
• x^2y^3, $-x^2y^3$, $\sqrt{3}x^2y^3$
• $12\,x^2y$, $-7yx^2$

Exercícios

Página 86

30. a) $3a$; $2a$; $5a$
b) $5p$; $3p$; $2p$

31. a) $2x + 5$
b) $3m + 2n + 3$
c) $a + b$

32. a) $5m$
b) $-8x$
c) $-9xy$
d) $-0{,}5m^2$
e) 0
f) $12a + 10$

33. a) É um polígono com 6 lados.
b) $22z$
c) 33

34. a) $-3x - 14$
b) $4x$
c) $\frac{1}{2} + 5x$

Página 87

35. a) $2a - 6$
b) $-2x + 3m$
c) $2xy^2 + x^2y$
d) $9{,}2x$

36. $4x + 50$

37. a) $\frac{7}{8}x$
b) $-\frac{a}{6}$
c) $\frac{32}{5}p$
d) $3x^3 + \frac{3}{2}x$
e) $-3a + \frac{2}{5}$
f) $\frac{a}{6} + \frac{1}{18}$

38. $13x$

39. a) $A = x$
$B = 2x + 9$
$C = x + 9$
b) $A = 2$
$B = 4 - x$
$C = 6 - x$

40. a) $10x - 5$
b) $-4x + 6$
c) $0{,}8x - 4$
d) $2x - 4y + 5z$
e) $\frac{5}{4}a - \frac{3}{2}c$

41. d

Exercícios

Página 89

42. a) a^3; a^2; a^5
b) p^5; p^2; p^7

43. a) $5x$ e $2x$
b) x^2
c) $5x \cdot 2x$
d) $10x^2$
e) São iguais.

44. a) $10x^2$
b) $12y^3$
c) $-14x^2$
d) $-5y^2$
e) $-15a^3b$
f) $-x^2y^3$
g) $-24p^2q^3$
h) $48a^3c^2$

45. c

46. a) $6n^3$
b) $6a^2 - 14a$
c) $-10x^6y$
d) $-2m^3 - 2m^2 + 10m$

47. a) $\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{4}$
b) $-a + 4$
c) $6m + 4m^2$
d) $\frac{x^2}{12} - x^3 + 2x$

48. a) $\frac{x^2}{4}$
b) $\frac{x^2}{2}$

49. $3a = a + a + a = a + 2a$
$a \cdot a = a^2$
$2a \cdot a = a^2 \cdot 2 = 2a^2$
$2a = a + a$
$2a^3 = 2a \cdot a \cdot a$

Página 90

50. a) $16x^4$
b) $4x^6$
c) $9x^2$
d) $-8x^3$
e) $16x^4$
f) $4x^6$
g) $9x^2$
h) $-8x^3$

51. a) $49m^2$
b) $\frac{1}{4}y^2$
c) $0{,}09p^6$
d) $\frac{16}{25}p^2q^4$

52. a) n^6
b) $-n^6$
c) $-27a^3b^6$
d) $\frac{1}{64}a^3b^3c^3$

53. a) $2m$
b) $-2x^2$
c) $5x^2$
d) $\frac{5}{3}x^2$
e) $-3m^3$
f) $6x^2y$
g) $3b$
h) $\frac{1}{2}ac^3$

54. $2y$

55. a) $15x$
b) $12x^2$
c) $12x^2 + 15x$
d) $12x^2 + 15x$
e) São iguais.

56. $10xy$

57. a) $40p + 50q$
b) $7x^2 - 35x$
c) $x^3 - xy$
d) $6t^2 + 12t$

58. a) $9x^2 - 2$
b) $-4x + 27$
c) $-3x + 9$
d) $8x - 25$
e) $a^2 + 7a + 1$
f) $2x - 9$

Exercícios

Página 92

59. a) É a expressão do perímetro.
b) É a expressão da área.
c) $4x + 14$; $x^2 + 7x + 12$

60. a) $x^2 + 5x + 6$

b) $a^2 - 9a + 14$

c) $y^2 - 36$

d) $6x^2 - 19x + 10$

e) $4 - 5x - 6x^2$

f) $-x^2 - x + 20$

g) $2x^2 - xy - y^2$

h) $x^2y^2 - xy - 42$

61. a) $8x^2 - 17x$

b) 115 cm^2

c) Não.

62. a) $x^3 + x^2 - 10x + 8$

b) $c^4 + 3c^3 - 3c^2 - c$

63. $9x^2 + 21x$

64. Demonstração:

$x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3 = x^3 + y^3$

65. a) $x^2 + x - 10$

b) $x^2 + 5x + 10$

c) $4x^2 + 4x + 10$

66. a) $20x + 8$

b) $3x^2 + 6x$

c) $x^2 + 2x$

d) $3x^2$

e) $14x^2 + 16x$

f) $3x^3 + 6x^2$

Revisando

Página 93

67. a) $4x$

b) x

c) $4x^2$

d) $6x$

e) $\frac{2x}{3}$

f) $8x^3$

68. Respostas pessoais.

69. a) $2s$

b) $7r$

c) $s + 3r$

d) $5s + r$

70. a) Custo de 10 sanduíches.

b) Custo de 15 sanduíches.

c) Custo de 40 refrigerantes.

71.

C	1	0,1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
C + 0,5	1,5	0,6	0,5	1	0
2C	2	0,2	0	1	–1
C^2	1	0,01	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

72. a) –10

b) $\frac{63}{4}$

73. $\frac{19}{15}$

74. Não. Porque o denominador da fração é nulo.

75. $20x + 15y$; R$ 13.500,00

Página 94

76. a) $x = 9$

b) $x = 12$

77. a) $4x$

b) x^2

c) $4x + 4$

d) $x^2 + 2x$

78. $P = 3x - 0,5$

79. $20xy$; $3x$; $30y$; $5y$

80. a) $9x - 3y$

b) 0

c) –13m

d) $-7x$

e) $0,19x$

f) $\frac{9}{4}x^2$

g) $-\frac{x}{18} - \frac{y}{6}$

81. a) $16 + 3x$

b) $15x^2 - 11$

c) $11a^2 + 4a - 5$

d) $8x - 32$

e) $8,7x$

f) $2x - y$

82. a) $2x + 6y$

b) sim; não; sim.

Página 95

83. a) $-20y$

b) $21a^3$

c) $12a^2bc$

d) $8mn$

e) $2c^2$

f) 1

g) $\frac{1}{2}$

h) $-2a$

i) $\frac{3}{2}n$

j) $\frac{1}{2x}$

84. $2,5x^2 + 8,5x$

85. a) $a^2 - 16a + 63$

b) $6 - 17x + 10x^2$

c) $-x^2 + 3x + 10$

d) $x^3 - 2x + 1$

86. a) $x^2 - 4x + 7$

b) $x^2 + 6x + 1$

c) $x^2 + 3x - 7$

d) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

87. $12x - 3$

88. 12

89. b

90. a) x^3

b) $x^3 + x^2$

c) $2x^3 + x^2$

91. $4x + 6y$

Página 96

92. d

93. 60 cm

Desafios

94. $2x + 1$; $x + 4$; $x - 3$

95. d

96. a) 22 cadeiras

b) $(2m + 2)$ cadeiras

Autoavaliação

Página 98

97. b

98. d

99. a

100. b

101. a

102. d

103. a

104. b

105. d

Página 99

106. d

107. a

108. c

109. d

110. c

111. b

112. c

Página 100

113. a

114. a

115. c

116. c

117. c

UNIDADE 5

Exercícios

Página 103

1.

$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$
64	34
36	36
4	10
9	17

Quase sempre $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

2. a) 25
b) 9
c) 15
d) 15
e) 8
f) 64
g) 64 = 25 + 15 + 15 + 9

3. a) $x^2 + 14x + 49$
b) $25 + 20m + 4m^2$
c) $a^2 + 6ax + 9x^2$
d) $100x^2 + 20xy + y^2$
e) $25x^4 + 10x^2 + 1$
f) $121 + 22pq + p^2q^2$
g) $x^2 + x + 0{,}25$
h) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

4. a) $2x^2 + 6x + 5$
b) $13x^2 + 10x + 2$
c) $-4x^2 - 7x - 9$
d) $7x + 25$

5. $3p^2 + 20p + 32$

6. a) 169
b) 2 601
c) 11 025

Exercícios

Página 105

7.

$(a - b)^2$	$a^2 - b^2$
4	16
36	36
16	8
25	–15

Quase sempre $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$.

8. a) $m^2 - 6m + 9$
b) $4a^2 - 20a + 25$
c) $49 - 42c + 9c^2$
d) $25x^2 - 20xy + 4y^2$
e) $4 - 4x^3 + x^6$
f) $x^2y^2 - 20xy + 100$
g) $x^2 - 0{,}4x + 0{,}04$
h) $16x^2 + 24xy + 9y^2$

9. a) $m^2 - m + \frac{1}{4}$
b) $\frac{a^2}{4} - a + 1$

10. a) $x^2 - 9$
b) $x^2 - 6x + 9$

11. a) $-6x + 15$
b) $6x - 3$
c) $3x^2 - 14x + 9$

12. a) $\frac{x^2 - 6x + 9}{2}$ cm²
b) 24,5 cm²

13. a) 361
b) 9 801

14. A – IV
B – I
C – II
D – III

Exercícios

Página 107

15. a) $x^2 - 81$
b) $m^2 - 1$
c) $9x^2 - 25$
d) $4 - 49x^2$
e) $m^4 - 36$
f) $4a^2 - 25$
g) $0{,}09 - a^2$

16. a) $1 - x^2$
b) $25 - x^2$

17. a) $x^2 - 25$; 24
b) $x^2 - 9$; 40
c) $x + 3$ e $x - 3$

18. a) $9 - \frac{1}{4}x^2$
b) $\frac{1}{9}x^2 - 1$

19. 9

20. a) $-2m + 2$
b) $8x - 32$

21. $3a^2 + 2$

24. a) 2 499
b) 896
c) 9991

Revisando

Página 108

25. a) Área do salão.
b) Área da piscina.
c) Área dos jardins.
d) Área do clube.

26. a) $-20x - 100$
b) $30x + 25$
c) $7x^2 - 6x + 1$
d) $-2x^2 - 2x$

27. $10x^2 - 1$

28. a) $\frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$
b) $9x^2 - x + \frac{1}{36}$
c) $1 - \frac{x^2}{9}$
d) $\frac{m^2}{4} - \frac{25}{9}$

29. a) 2
b) –2
c) 11
d) 3
e) 24
f) –2
g) 2
h) –6
i) –10
j) 24

30. Fase 4.

31. 120 kWh

Página 109

32. a) 8
b) 9
c) 7
d) $-\frac{1}{4}$

33. a) 15 cm
b) 10 cm
c) 20 cm

34. a) 5 cm
b) 20 cm
c) 16 cm

Desafios

35. 30

36. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

37. $x^2 - y^2$

38. R$ 160,00

Autoavaliação

Página 110

39. c

40. c

41. b

42. d

43. c

44. c

45. b

46. c

47. c

UNIDADE 6

Exercícios

Página 113

1. $5(a + b + c)$

2. a) $2m + 2n$ ou $2(m + n)$
b) $2a + 4b$ ou $2(a + 2b)$
c) $2x + 2y + 2z$ ou $2(x + y + z)$

3. 21

4. A – III
B – IV
C – V
D – I
E – II

5. c

6. a) $7(q^2 - 4)$
b) $11(3x + 2y - 5z)$
c) $x^6 (1 + x + x^2)$
d) $6cd (6 - d)$
e) $4\pi (g + 3t)$
f) $\frac{3}{7} (a - c)$

7. $4x^2 + 2x = 2x(2x + 1)$

8. a) 580
b) 1200
c) 800
d) 400

9. 150 alunos

Exercícios

Página 114

10. a) $(a + b) (x + y)$
b) $(x - 1) (2a - b)$

11. a) ac; ad; bc; bd
b) $ac + ad + bc + bd$
c) $(a + b) (c + d)$

12. a) $(a - c) (7 + m)$
b) $(a + 3) (a^2 + 2)$
c) $(x - 1) (x^2 + 5)$

13. a) $(5 + a) (x + y)$
b) $(x + 2) (x^2 + 7)$
c) $(c - 1) (c + x)$
d) $(a + b) (x + y + z)$

14. 2006

Exercícios

Página 116

15. a) $x^2 + 10x + 25$
b) $x + 5$
c) $(x + 5)^2$

16. a) $=$
b) $=$
c) $\neq$
d) $=$

17. a) $6y - 5$
b) $x - 0{,}5$

18. a) $(x + 1)^2$
b) $(x - 1)^2$
c) $(1 - 3m)^2$
d) $(x + 6)^2$
e) $(6a - c)^2$
f) $(y^2 + 2)^2$
g) Não é quadrado perfeito.
h) $(x + 3)^2$

19. Não.

20. a) $(9xy - 1)^2$
b) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$
c) $\left(1 - \frac{3}{2}x\right)^2$
d) $\left(x + \frac{11}{2}\right)^2$

21. a) $5x^3(x + 1)^2$
b) $3(2a + 5)^2$

22. a) 50
b) 12
c) 100
d) 16

23. a) 10
b) $\frac{1}{5}$
c) $-\frac{3}{2}$

Exercícios

Página 118

24. a) $(x + 6) (x - 6)$
b) $(5 + a) (5 - a)$
c) $(3x + 4) (3x - 4)$
d) $(1 + 9a) (1 - 9a)$
e) $(10 + \pi) (10 - \pi)$
f) $(6x^2 + y^3) (6x^2 - y^3)$
g) $(0{,}1x + 7) (0{,}1x - 7)$
h) $\left(\frac{x^2}{2} + y\right)\left(\frac{x^2}{2} - y\right)$

25. $3x - 2$

26. a) $17(x + y) (x - y)$
b) $2(m^2 + 5) (m^2 - 5)$
c) $x(x + 5) (x - 5)$
d) $c(a + 1) (a - 1)$

27. a) $(50 + x)$ reais
b) $(50 - x)$ reais
c) $(2\,500 - x^2)$ reais

28. 15

29. a) 1 900
b) 6 349

30. $x^2 - 4$ ou $(x + 2) (x - 2)$

31. a) 11, – 11
b) 7, – 7
c) $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$
d) $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2}$
e) 6; – 6
f) 2; – 2

Revisando

Página 119

32. a) $3(a - b + c)$
b) $4(1 - 2x - 4y)$
c) $5y(2x^2 - 3x + 1)$
d) $x^{10}(1 + x)$
e) $3a^3(5a - 7)$

f) $\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

33. 160

34. $a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$

35. 169

36. a) $(2m + x)(2m - x)$

b) $(7a + xy)(7a - xy)$

c) $(9 + 11p)(9 - 11p)$

d) $\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

e) $(x - 3)^2$

f) $(a + 4)^2$

g) $(x - 6y)^2$

h) $\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2$

37. a) $5(p + q)(p - q)$

b) $9(x + 2y)(x - 2y)$

c) $5(x - 2)^2$

d) $x(x + 5)^2$

Desafios

38. 15

39. 9

40. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}(x - y)(x + y)$

41. $a(b + c) + 10(b + c) = (a + 10)(b + c)$

Autoavaliação

Página 120

42. c

43. d

44. d

45. d

46. b

47. c

48. b

49. b

50. b

51. c

52. d

UNIDADE 7

Exercícios

Página 123

1. Fração Algébrica.

2. a) $\frac{10}{x}$

b) $y \cdot \frac{10}{x} = \frac{10y}{x}$

3. $\frac{25}{x} + 1$

4. Sim.

5. a) $-\frac{5}{9}$

b) $-\frac{11}{8}$

6. -2

7. 2,6

8. Não. Não existe divisão por zero.

9. $m = -5$

10. c

11. O valor numérico da fração decresce.

Exercícios

Página 127

12. a) 1

b) 8

c) 10

d) 4

13. a) 5

b) 2

c) 11,5

d) 15

e) 3

f) -14

14. 32 alunos

15. 28 alunos

16. 4 latas

Seção livre

Página 129

17. a) -15

b) $-\frac{1}{15}$

c) 10

d) $\frac{1}{10}$

e) 49

f) $\frac{1}{8}$

18. a) 8

b) $\frac{1}{2}$

c) 18

d) 2

19. a) 500

b) 1

20. $\frac{1}{3}$; 1; 10; $\frac{10}{25}$

21. a) $\frac{2}{3}$ da torta

b) $\frac{1}{3}$ da torta

22. $\frac{1}{8}$ de uma folha

23. A - G - J; B - H - I; C - F - K; D - E - L

24. a

Exercícios

Página 132

25. a) $\frac{1}{2}$

b) 3

c) $\frac{1}{10}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{7}{8}$

f) $\frac{b}{d}$

26. Sim, porque $6x : 2x = 3$ e $4x : 2x = 2$.

27. a) $\frac{2c}{a}$

b) $\frac{2}{3c}$

c) $\frac{ab}{d}$

d) $\frac{a^2}{3c^4}$

28. c

29. a) $\frac{x - 3}{2x}$

b) $\frac{a}{x - 2}$

c) $\frac{5x - y}{x - y}$

d) x

30. a) $\frac{7}{5(x + y)}$

b) $\frac{5(x - 1)}{4}$

c) $\frac{x - 3}{x}$

d) $\frac{7}{c - 3}$

31. 3

Página 134

32. Sobrou $\frac{1}{12}$.

33. a) $\frac{6x}{a}$

b) $\frac{5}{6x}$

c) $\frac{21a}{4x}$

d) $\frac{x+y}{xy}$

e) $\frac{8x-6y}{x-y}$

f) $\frac{x+3}{x(x+1)}$

34. $\frac{2}{8x}+\frac{1}{4x}$; $\frac{2}{5x}+\frac{1}{10x}$; $\frac{1}{3x}+\frac{1}{6x}$

35. c

36. a) $\frac{7x^2}{6ac}$

b) $\frac{5x^4}{16}$

c) $\frac{x^2-y^2}{10}$

d) $\frac{9}{x+1}$

37. $\frac{10}{9x^2}$

38. B - H - J; C - F - I; D - E - K

Exercícios

Página 137

39. a) 5

b) –4

c) 4

d) –1

e) 15

f) 7

40. a) $\frac{3}{2}$

b) 22

c) –1

41. a) 15

b) 9

42. $-\frac{1}{2}$

43. $\frac{1}{x}$

44. $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$

45. 12 minutos

a) $\frac{1}{20}$ do tanque

b) $\frac{1}{30}$ do tanque

c) $\frac{1}{x}$

d) $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{x}$

46. 4 dias

Revisando

Página 138

47. Não. Porque o denominador da fração é nulo.

48. a) 9

b) 0

c) Não existe.

d) Não existe.

49. $\frac{3}{2}$

50. a) 5

b) 2

c) $-\frac{3}{2}$

d) 15,25

51. 15 frentistas

52. a) 25 crianças

b) Pessoa que coleciona selos.

53. a) x

b) $\frac{r}{2}$

c) $-\frac{5}{m^3}$

d) 4

e) $\frac{1}{7}$

f) $\frac{1}{2(x-2)^2}$

54. a) $x+7$

b) $\frac{2-x}{3}$

c) $\frac{2}{x-3}$

d) $\frac{2x-1}{2x+1}$

55. 3

Página 139

56. a) 3

b) –1

c) 5

d) $\frac{4}{13}$

e) 7

57. 25 anos

58. 40 alunos

59. a) 10

b) 100

c) 1 000

d) 10 000

Desafios

60. $\frac{1}{5}$

61. 8

62. a) $k = 160$

b) $n = 16$

Autoavaliação

Página 140

63. d

64. d

65. a

66. c

67. d

68. c

69. a

70. a

71. a

UNIDADE 8

Exercícios

Página 147

1. 7 kg

2.

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	9	8	7	6	5	4	3	2	1

3. a) 8 carros e 4 motos

b) 10 carros

4. a; c

5. a

6. e

7. 15

8. 8

9. a) $x = 7$ e $y = 4$
b) $x = -2$ e $y = 8$
c) $x = 1$ e $y = 2$
d) $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{13}{2}$
e) $x = -1$ e $y = 2$
f) $x = 1$ e $y = 2$

Página 148

10. O garoto da esquerda tem 34 livros e o da direita tem 17.
11. 30 picolés
12. 9 moedas de R$ 1,00 e 4 notas de R$ 5,00
13. a) R$ 3,00
b) R$ 1,00
14. 7 e 3
15. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 7$ e $y = 3$
16. $\begin{cases} x + 7y = 34 \\ 5x + 3y = 42 \end{cases}$
R$ 48,00

Página 154

17. a) 9 quilogramas = 9 000 gramas
b) 5 quilogramas = 5 000 gramas
18. a) Sim. b) Sim.
19. a) $x = 6$ e $y = 1$
b) $x = 1$ e $y = 3$
c) $x = 5$ e $y = 10$
d) $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{13}{2}$
20. 15 meninas
21. 190 e 147
22. a) $x = 7$ e $y = -2$
b) $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$
c) $x = 2$ e $y = -1$
d) $x = 3$ e $y = 11$
23. 15 galinhas e 6 coelhos
24. 11 pacotes de 5 quilos e 18 pacotes de 1 quilo

Página 155

25. 8 respostas
26. a) $x = 2$ e $y = 1$
b) $x = 3$ e $y = 2$
c) $x = 0$ e $y = 1$
d) $x = 1$ e $y = -3$
27. a) R$ 1,00 b) R$ 3,00
28. 12 maçãs na caixa grande e 6 maçãs na caixa pequena
29. 150 g
30. R$ 115,00
31. 7
32. $x = 45$ e $y = 90$

Revisando

Página 157

33. a) 3 kg
b) 4 kg
34. a) 30 e 20
b) 58 e 42
35. a) $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{3}{2}$
b) $x = 3$ e $y = 11$
c) $x = 3$ e $y = 2$
d) $x = -1$ e $y = -5$
36. a) $x = 0$ e $y = 3$
b) $x = 5$ e $y = 2$
37. $-x$ e 10
38. 5 coelhos
39. a) 2
b) 0,5
40. 9 quadrados

Página 158

41. a) 300 convites
b) 100 convites
42. 42,4
43. 18 anos
44. Ocorreram 35 caras.
45. a) 3 quilos
b) 5 quilos
46. a) R$ 1,50
b) R$ 0,60
47. 2 300 sócios
48.  = 4;  = 2;  = 3; = 5

Página 159

49.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

50. 12 metros
51. a) $x = 1$ e $y = 2$
b) $x = 6$ e $y = -5$
c) $x = 5$ e $y = 3$
d) $x = 3$ e $y = 17$

Desafios

52. a) R$ 87,00
b) R$ 240,00
c) R$ 72,00
53. Melissa tem 30 CDs e Adriano, 40 CDs.

Seção livre

Página 160

Eu amo o Brasil.

Autoavaliação

Página 161

54. d
55. a
56. d
57. d
58. a
59. c
60. a

Página 162

61. d
62. c
63. c
64. c
65. a
66. c
67. c

UNIDADE 9

Exercícios

Página 167

1. a) *a* e *c*
b) Por exemplo: *a* e *b*
c) Por exemplo: *c* e *d*
2. $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$
3. O caminho C, pois é perpendicular ao edifício.
4. d
5. 3
6. a) 7,6 m
b) 8,4 m
c) 9,2 m
d) 16,8 m
7. a) $x = 10$
b) $x = 8$
c) $x = 12$

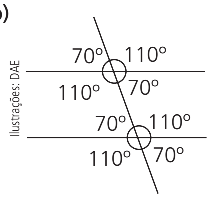
Exercícios

Página 171

8. 2 e 6; 3 e 7; 1 e 5; 4 e 8

9. a) 8 ângulos

b)



c) Há quatro ângulos com uma medida e quatro com outra.

d) Sim.

e) Sim.

10. a) $x = 40°$ e $y = 40°$

b) $x = 75°$ e $y = 105°$

11. a) $y = 134°$ e $z = 46°$

b) $x = y = 60°$

Página 175

12. Quando a soma das suas medidas é igual a 180°.

13. a) Suplementares.

b) Congruentes.

c) Congruentes.

d) Congruentes.

e) Congruentes.

f) Suplementares.

14. a) $x = 21°$

b) $x = 30°$

c) $x = 20°$

d) $x = 30°$

15. $z = 130°$; $x = 130°$; $y = 50°$; $u = 50°$ e $t = 130°$

16. $x = 40°$; $y = 140°$; $z = 40°$ e $w = 140°$

17. a) $x = 65°$; $y = 115°$; $z = 65°$; $w = 115°$

b) $x = 70°$; $y = 110°$; $z = 70°$; $w = 110°$

18. a) $x = 50°$ e $y = 120°$

b) $x = 53°$ e $y = 70°$

Revisando

Página 177

19. São paralelos.

20.

	d_1	d_2	d_3	d_4
d_1	//	//	//	$\perp$
d_2	//	//	//	$\perp$
d_3	//	//	//	$\perp$
d_4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	//

21. São iguais.

22. 15 mm

23. b

24. H, N e W

25. *m* e *n*

Página 178

26. $x = 35°$ e $y = 145°$

27. a) $x = 27°$

b) $x = 20°$

c) $x = 38°$

28. a) Não.

b) À esquerda.

29. d

30. O ângulo B.

31. a) $x = 60°$

b) $x = 25°$

32. $y = 60°$

Página 179

33. d

34. c

35. d

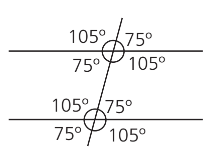
36. c

Desafios

37. d

38. c

39.



40. $x = 120°$

Autoavaliação

Página 180

41. a

42. b

43. b

44. d

45. c

46. d

UNIDADE 10

Exercícios

Página 182

1. b

2. a) Acutângulo.

b) Isósceles.

c) Escaleno.

3. Sim. Sim.

4. a

5. 3,1 cm < terceiro lado < 8,1 cm

6. 5 cm

7. Resposta pessoal.

8. Superior a 5 cm e inferior a 11 cm.

Página 185

9. 112°

10. a) 105°

b) 20°

c) 45°

11. a) $x = 70°$, $y = 40°$, $z = 30°$

b) $x = 75°$, $y = 60°$

12. a) É um triângulo que tem todos os lados com medidas iguais.

b) É um triângulo que tem dois lados com medidas iguais.

c) Dois deles são congruentes.

13. a) 130°; 110°; 120°

b) 360°

14. 77°30′

15. a) $x = 50°$ e $y = 80°$

b) $x = 45°$ e $y = 45°$

c) $x = 75°$ e $y = 105°$

16. $x = 60°$

17. d

Seção livre

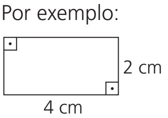
Página 187

18. d

19. b

20. a) Isósceles.

b) Por exemplo:



21. Não será possível para 1, 2 e 3.

22. b

23. a

Revisando

Página 188

24. 26 cm

25. 14 cm

26. a) $4x + 9$

b) $x = 6$

27. c

28. a) 50°

b) Acutângulo.

29. Sim.

30. $x = 49^\circ$

31. a) $x = 30^\circ$ e $y = 30^\circ$

b) $x = 72^\circ$

Página 189

32. a) $x = 42^\circ$ e $y = 68^\circ$

b) $x = 82^\circ$

33. 30°

34. 70°

35. 270°

Desafios

36. a) $x = 70^\circ$; $y = 60^\circ$ e $z = 50^\circ$

b) $x = 30^\circ$

37. 360°

38. a) 40°, 60°, 80°

b) 140°, 120°, 100°

c) 7, 6, 5

Autoavaliação

Página 190

39. a

40. a

41. c

42. a

43. a

44. b

45. a

46. c

47. c

48. d

49. a

UNIDADE 11

Exercícios

Página 198

1. a) Sim.

b) Sim.

c) Não.

2. a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

d) Sim.

3. ABC e ADC.

4. Não.

5. a) 8 cm

b) 10 cm

6. 3 cm

Exercícios

Página 202

7. A – III; B – I; C – II

8. 12,4 cm

9. 4 cm

10. $x = 40^\circ$; $y = 50^\circ$; $z = 40^\circ$

11. 2 alturas

12. No triângulo retângulo.

13. 55°

14. c

15. 40°

Exercícios

Página 205

16. 6 cm, 7 cm e 7 cm

6 cm, 6 cm e 8 cm

17. Unindo os pontos médios dos lados obtemos os 4 lenços.

18. a) $x = 70^\circ$; $y = 40^\circ$

b) $x = 75^\circ$; $y = 105^\circ$

c) $x = 45^\circ$; $y = 45^\circ$

19. Equilátero.

20. Ambos medem 61°.

21. a

22. $x = 30^\circ$

23. b

Exercícios

Página 207

24. Ao menor ângulo (30°) não se opõe o menor lado.

25. a) 48°

b) Triângulo BOC.

c) O lado CD, pois é oposto ao maior ângulo do triângulo.

26. 18 m

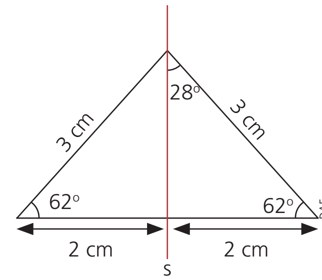
27. Triângulo escaleno.

28. a) Triângulo equilátero com lado de 7 cm.

b) 21 cm

c) Triângulo equilátero.

29.



Revisando

Página 208

30. 7 triângulos

31. a) Sugestão de resposta: $\triangle$ABM, $\triangle$AMC etc.

b) $\triangle$AOB, $\triangle$AOC, $\triangle$BOC

32. c

33. Teco.

34. Falsa.

35. $x = 40^\circ$; $y = 50^\circ$

36. b

37. b

Página 209

38. a) $x = 40^\circ$

b) $x = 36^\circ$

c) $x = 10^\circ$

39. 95°

40. 65°

Desafios

41. a

42. b

43. 75°

Autoavaliação

Página 210

44. a

45. b

46. b

47. c

48. d

49. b

50. b

51. b

52. c

UNIDADE 12

Exercícios

Página 213

1. d
2. Convexos: A, B, D e E.
   Não convexos: C e F
3. c
4. c
5. d
6. a) 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 e 10
   b) 1, 2, 3, 7, 8, 9 e 10
   c) 1, 3, 7, 9 e 10
   d) 3 e 9
   e) 1 e 3
   f) 3

Exercícios

Página 218

7. 134°
8. $x = 75°$; $y = 15$ cm
9. 7 cm
10. 2,5 cm
11. a
12. $x = 45°$; $y = 90°$
13. a) 17,5 cm
    b) 35 cm e 35 cm
14. a) ΔDMC: 40°, 40°, 100°
    ΔAMD: 50°, 50°, 80°
    b) É um retângulo.
15. $x = 20°$
16. 30°

Página 221

17. a) 1 800°
    b) 1 620°
    c) 2 340°
    d) 3 240°
18. Heptágono.
19. a) 70°
    b) 130°
    c) 110°
    d) 120°
20. a) 60°
    b) 60°
21. $x = 125°$; $y = 85°$; $z = 30°$
22. a) $x = 85°$; $z = 80°$; $y = 80°$
    b) $x = 80°$
23. $x = 105°$
24. $x = 130°$ e $y = 100°$
25. d

Exercícios

Página 223

26. a) Os equiláteros.
    b) Os quadrados.
    c) Sim. Retângulo.
    d) Sim. Losango.
27. a) 720°
    b) 120°
28. a) 135°
    b) Não. Porque os lados não têm a mesma medida.
29.

Polígono regular	Nº de ângulos internos	Medida de cada ângulo interno
Triângulo	3	60°
Quadrado	4	90°
Pentágono	5	108°
Octógono	8	135°
Eneágono	9	140°
Decágono	10	144°

30. a) Octógono regular.
    b) Maior é o ângulo interno.
31. 120°
32. 150°

Revisando

Página 224

33. a) F
    b) V
    c) F
    b) V
34. 48 cm
35. 2 eixos
36. A – Quadrado;
    B – Losango;
    C – Paralelogramo;
    D – Retângulo;
    E – Quadrado.
37. c
38. c
39. a) O heptágono.
    b) 900°
40. 35°

Página 225

41. b
42. a) $x = 70°$
    b) $x = 80°$
43. $x = 105°$
44. $x = 150°$
45. b

Desafios

46. d
47. 60°, 120°, 60° e 120°
48. $x = 36°$
49. b
50. $x = 75°$
51. b

Seção livre

Página 226

52. 2 eixos
53. a) 4 eixos
    b) 2 eixos
    c) 1 eixo
54. 5; 5 – 6; 6 – 8; 8
    O número de eixos de simetria é igual ao número de lados.
55. c
56. a) Triângulo, quadrado e hexágono.
    b) Triângulo: 60°; Quadrado: 90°; Hexágono: 120°.
    c) Não. A medida do ângulo interno é 144° e este número não é divisor de 360°.
57. c

Autoavaliação

Página 227

58. b
59. a
60. d
61. a
62. b
63. c

Página 228

64. d
65. d
66. a
67. b
68. b
69. d

70. a

71. d

UNIDADE 13

Exercícios

Página 231

1. Afirmação falsa.

2. a) B

b) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$

c) $\overline{AC}$

d) $\overline{AC}$, $\overline{EF}$

e) B

3. a) 4 cm

b) 9 cm

c) 5 cm

4. 14 cm

5. d

6. 5,5 cm

7. 11 cm

8. 9 cm

9. 1, 5 cm

Exercícios

Página 234

10. a) Tangentes interiores.
b) Exteriores.
c) Tangentes exteriores.
d) Secantes.

11. raio de centro A = 12 cm
raio de centro B = 16 cm

12. a) *b*, *e*

b) *a*, *c*

c) *d*

13. 900 cm^2

14. a) 12 cm

b) 48 cm

c) 144 cm^2

15. c

16. a) São triângulos equiláteros.
b) É um losango.

Exercícios

Página 239

17. a) $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{AO}$

b) $\overline{AC}$

c) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$

d) $\overline{ED}$

18. b) 10, 15, 21

c) $\frac{n\,(n-1)}{2}$

19. $x = 6$

20. 15°

21. É a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio desse segmento.

Exercícios

Página 242

22. d

23. d

24. a) $x = 310°$

b) $x = 40°$

25. 105°; 165°

26. a) 115°

b) 65°

c) 65°

d) 115°

e) 180°

f) 180°

27. Entre 180 e 220 brigadeiros.

28. a) $x = 20°$

b) $x = 15°$

c) $x = 30°$

Exercícios

Página 245

29. a) 7 cm

b) 21,98 cm

30. 7,85 cm; 6,59 cm; 5,34 cm
(resultados aproximados)

31. 25,12 cm

32. 157 roseiras

33. 9,42 cm

34. 4,71 cm

35. 31,4 cm

Seção livre

Página 246

36. Sim, basta que na caixa haja duas camadas de 6 refrigerantes.

37. Quatro.

38. 16,8 cm

39. b

40. c

Exercícios

Página 247

41. a) 36°

b) 30°

c) 18°

d) 9°

42. a) 72°

b) 144°

c) 216°

43. a) Octógono.

b) Maior.

c) Aumenta.

Exercícios

Página 251

44. 71°

45. a) $C\hat{A}B$

b) $\overset{\frown}{CD}$

46. 100°; 70°

47. a) 45°

b) 24°30´

48. $x = 65°$

49. 82°

50. a) 15°

b) 19°

c) 90°

d) 71°

e) 150°

f) Sim. O triângulo é isósceles. Logo, tem dois ângulos de medidas iguais.

Revisando

Página 253

51. 50 cm

52. b

53. Aproximadamente 9,07 m.

54. No circular.

55. 199,68 m

56. a) $x = 45°$

b) $x = 25°$

Página 254

57. 21,98 cm

58. 6,28 m

59. a) $x = 55°$

b) $y = 55°$ e $x = 80°$

c) $x = 35°$

d) $x = 10°$

Desafios

60. a) $x = 32°$;

b) $x = 22,5°$

61. 182,8 m

62. 12 cm

Autoavaliação

Página 255

63. d

64. a

65. a

66. b

67. c

Página 256

68. c

69. d

70. d

71. d

72. b

73. a

74. b

75. b

UNIDADE 14

Exercícios

Página 260

1. 6 trajes

2. 12 opções

3. 120 casais

4. 6 números

5. 140 modos distintos

6. 30 trajes

7. Palmeiras e Corinthians, Palmeiras e Santos, Palmeiras e São Paulo, Corinthians e Santos, Corinthians e São Paulo, Santos e São Paulo.

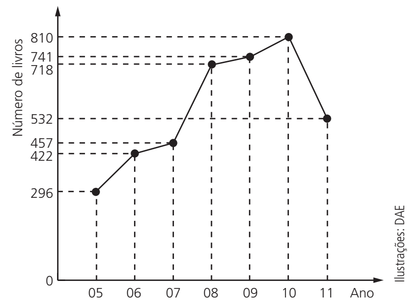
8. **a)** 3 apertos de mão
b) 6 apertos de mão
c) 10 apertos de mão

9. **a)** 1) 5 pacotes de 4 latas; 2) 4 pacotes de 5 latas; 3) 2 pacotes de 4 latas e 2 pacotes de 6 latas; 4) 2 pacotes de 5 latas; 1 pacote de 4 latas e 1 pacote de 6 latas.
b) Comprando 4 pacotes de 5 latas; R$ 16,00.

Exercícios

Página 264

10. **a)** 2010
b) Sim; 284 livros.
c) 3 976 livros
d) 568 livros
e) 2008, 2009 e 2010
f) 36 livros
g)



11. **a)** 450 pessoas
b) R$ 6.000,00
c) Resposta pessoal.

12. Resposta possível: nos meses mais frios a venda cai.

Página 265

13. **a)** Maio.
b) 600 jornais
c) 1 300 jornais
d) 2 700 kg
e) 54 árvores

14. **a)** R$ 450,00
b) 27%
c) R$ 157,50

15. **a)** Morango.
b) Mamão.
c) 144°
d) 126°
e) 120 pessoas

Página 266

16. **a)** 21 kg
b) 32 kg
c) 40 kg
d) 54 kg
e) 3 kg

17. **a)** 70 milhões de habitantes
b) 23 milhões

18. **a)** 38 °C
b) 36,5 °C
c) 12h
d) Entre 9h e 12h.
e) Entre 12h e 14h.

19. **a)** 40 km
b) 90 km

Revisando

Página 267

20. **a)** 7 modos
b) 7 modos
c) 28 trajes

21. 45 variedades

22. 12 maneiras

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

23. 12 combinações

24. **a)** 6 escolhas
b) FA, FJ, FE, AJ, AE, JE
c) FJ, AJ, JE
d) 3 escolhas
e) FA, FJ

25. **a)** 15 caminhos
b) 15 caminhos

Página 268

26. 30 conjuntos

27. 1) Abacaxi, goiaba, morango.
2) Abacaxi, morango, goiaba.
3) Goiaba, abacaxi, morango.
4) Goiaba, morango, abacaxi.
5) Morango, abacaxi, goiaba.
6) Morango, goiaba, abacaxi.

28. 45 números

29. 6 percurssos

30. 6 maneiras

31. 8 resultados: CA-CA-CA; CA-CA-CO; CA-CO-CA; CA-CO-CO; CO-CA-CA; CO-CA-CO; CO-CO-CA; CO-CO-CO

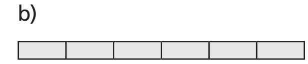
32. $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$

33. $\frac{1}{2}$

Página 269

34. d

35. **a)** 25 pessoas
b)



c) 10%

36. 360 pessoas

37. a) C

b) B

c) A

d) D

Página 270

38. a) 16 medalhas

b) 40%

39. a) Aproximadamente 27,47%.

b) Aproximadamente 21,97%.

Página 271

40. a) Outubro; fevereiro.

b) 1 700 casos

c) Julho e agosto.

41. 41 ligações

Desafios

42. 20 maneiras

43. a) Sim.

b) Não. Em 2004 foi menor do que em 2003.

c) Não. Em 2007 foi maior do que em 2006.

d) 50 mil t

e) 20%

Seção livre

Página 272

1. 6,5

2. 7,2

Autoavaliação

Página 273

44. d

45. d

46. d

47. b

48. d

49. c

50. c

51. c

Página 274

52. a

53. b

54. c

55. d

56. b

Página 275

57. a

58. c

59. b

60. b

Página 276

61. d

62. b

63. c

64. c