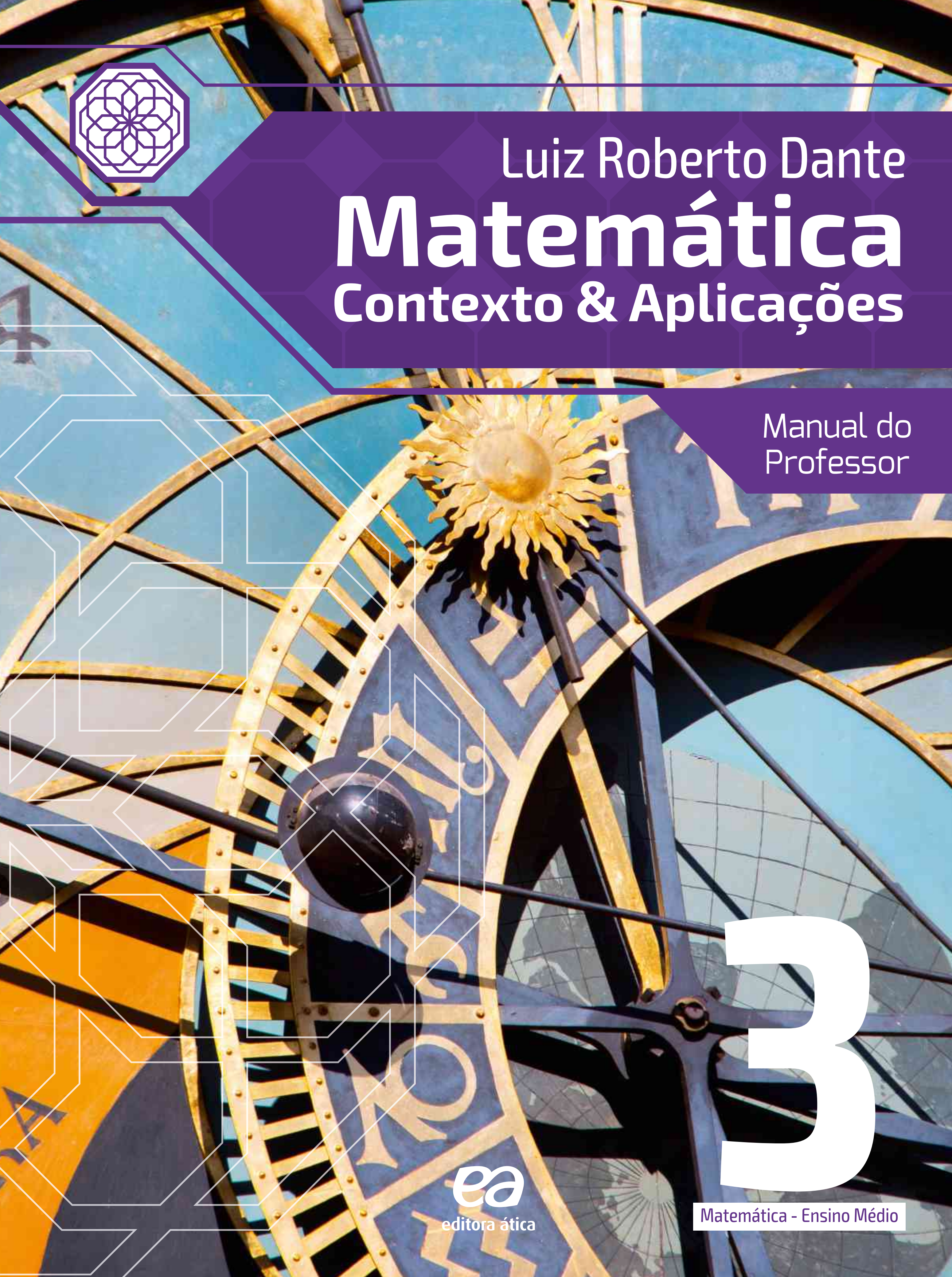


Luiz Roberto Dante

Matemática
Contexto & Aplicações

Manual do Professor

3

Matemática - Ensino Médio

editora ática

Luiz Roberto Dante

Matemática
Contexto & Aplicações

Manual do Professor

Luiz Roberto Dante

Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp-SP, *campus* Rio Claro).

Pesquisador em Ensino e Aprendizagem da Matemática pela Unesp-SP, *campus* Rio Claro.

Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio – São Paulo.

Autor de vários livros, entre os quais:

- *Formulação e resolução de problemas de Matemática: teoria e prática*;
- *Didática da Matemática na pré-escola*;
- *Projeto Ápis: Natureza e Sociedade*, *Linguagens* e *Matemática* (Educação Infantil – 3 volumes);
- *Projeto Ápis Matemática* (1º ao 5º ano);
- *Projeto Teláris Matemática* (6º ao 9º ano);
- *Projeto Voaz Matemática* (Ensino Médio – volume único);
- *Projeto Múltiplo Matemática* (Ensino Médio – 3 volumes).

3

Matemática - Ensino Médio

3ª EDIÇÃO

SÃO PAULO • 2016

editora ática

editora ática

Diretoria editorial
Lidiane Vivaldini Olo

Gerência editorial
Luiz Tonolli

Editoria de Matemática e Física
Ronaldo Rocha

Edição
André Luiz Ramos de Oliveira

Gerência de produção editorial
Ricardo de Gan Braga

Arte
Andréa Dellamagna (coord. de criação),
Erik TS (progr. visual de capa e miolo),
André Gomes Vitale (coord.),
Claudemir Camargo Barbosa (edição)
e DIGKIDS (diagram.)

Revisão
Hélia de Jesus Gonsaga (ger.),
Rosângela Muricy (coord.), Ana Curci,
Célia da Silva Carvalho, Claudia Virgilio
e Vanessa de Paula Santos;
Brenda Morais e Gabriela Miragaia (estagiárias)

Iconografia
Sílvio Kligin (superv.), Denise Durand Kremer (coord.),
Daniel Cymbalista (pesquisa), Cesar Wolf e
Fernanda Crevin (tratamento de imagem)

Ilustrações
Dam d'Souza, Formato Comunicação e Ilustra Cartoon

Cartografia
Alexandre Bueno, Eric Fuzii, Márcio Souza

Foto da capa: Detalhe do relógio astronômico medieval
em Praga, República Tcheca.
lillisphotography/Getty Images

Protótipos
Magali Prado

Avenida das Nações Unidas, 7221, 3º andar, Setor A
Pinheiros – São Paulo – SP – CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.atica.com.br / editora@atica.com.br

2016

ISBN 978 85 08 17941 1 (AL)
ISBN 978 85 08 17942 8 (PR)
Cód. da obra CL 713348
CAE 566 665 (AL) / 566 666 (PR)

3ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dante, Luiz Roberto
Matemática : contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Obra em 3 v.

1. Matemática (Ensino médio) I. Título.

16-02955 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

APRESENTAÇÃO

A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos.

Aristóteles

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

Ao elaborar esta coleção para o Ensino Médio, levamos em conta as ideias que abrem esta apresentação. Isso porque nosso objetivo é criar condições para que você, aluno, possa compreender as ideias básicas da Matemática desse nível de ensino atribuindo significado a elas, além de saber aplicá-las na resolução de problemas do mundo real.

Todos os conceitos básicos próprios do Ensino Médio foram explorados de maneira intuitiva e compreensível. As receitas prontas e o formalismo excessivo foram evitados, porém mantivemos o rigor coerente com o nível para o qual a coleção está sendo proposta.

Na abertura de cada capítulo apresentamos uma imagem que está relacionada com um dos conteúdos que o compõem; ela dará a você uma ideia de um dos temas que será estudado. Durante o capítulo apresentamos textos que abordam fatos históricos e/ou contextualizam a construção de algum assunto que será discutido.

Antes de resolver os exercícios, é absolutamente necessário que você estude a teoria, analise os exemplos e refaça os exercícios resolvidos. Na seção *Resolvido passo a passo*, comentamos e explicitamos as fases da resolução de um problema.

A seção *Outros contextos* foi criada para formular, resolver e interpretar situações-problema que estão relacionadas a situações reais e/ou relacionadas com outras disciplinas.

Cada Unidade contém ainda as seções *Pensando no Enem* e *Vestibulares de Norte a Sul*, com questões que abrangem algumas habilidades exploradas no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) e de vestibulares de todas as regiões do país, destinadas a revisar, fixar e aprofundar os conteúdos estudados. E no fim de cada volume, na seção *Caiu no Enem*, foram incluídas questões do Enem relacionadas a cada Unidade.

A coleção engloba, desse modo, todos os assuntos costumeiramente trabalhados no Ensino Médio, além de auxiliá-lo em sua preparação para os processos seletivos de ingresso nos cursos de Educação Superior.

As sugestões e críticas que visem ao aprimoramento deste trabalho serão sempre bem-vindas.

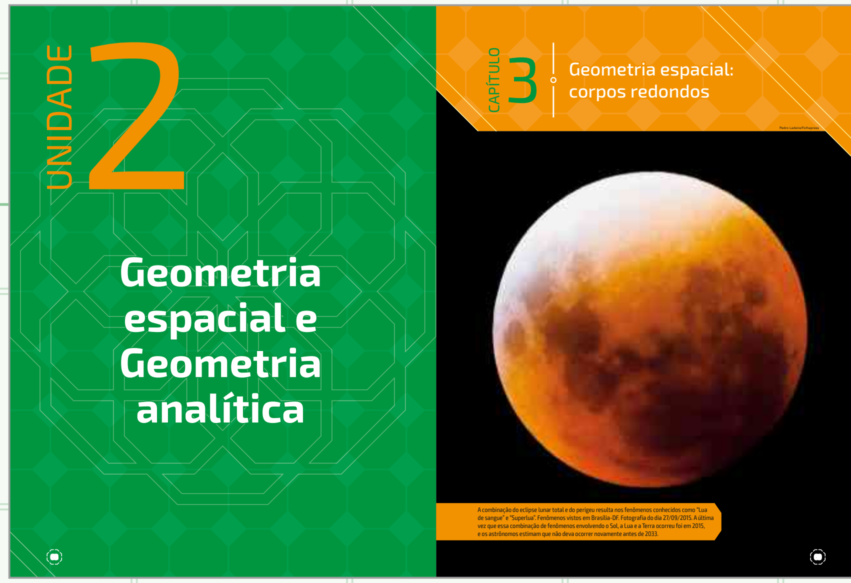
O autor

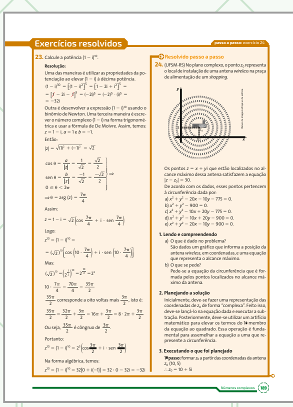
Conheça seu livro

Cada volume da coleção é dividido em quatro Unidades nas quais você encontrará os seguintes boxes e seções:

Abertura de Unidade e abertura de capítulo

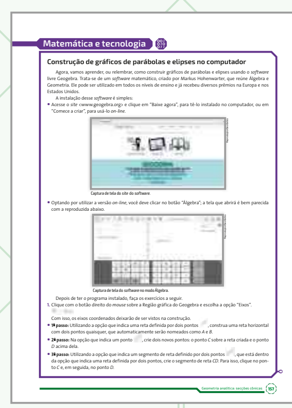
Imagens de impacto abrem o capítulo introduzindo direta ou indiretamente o tema proposto.





Exercícios resolvidos

Apresenta a resolução detalhada de uma questão ou problema. Não são modelos a serem seguidos, mas visam inspirar e indicar estratégias de resolução.

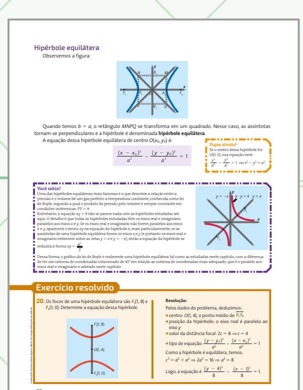


Matemática e tecnologia

Sugestões de atividades em que o computador é utilizado para visualizar e manipular gráficos e tabelas. Uma oportunidade de trabalhar com a Matemática dinâmica.

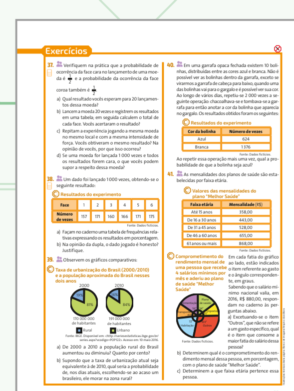
Para refletir, Fique atento! e Você sabia?

Pequenos boxes que trazem questões para reflexão ou dicas importantes para o estudo.



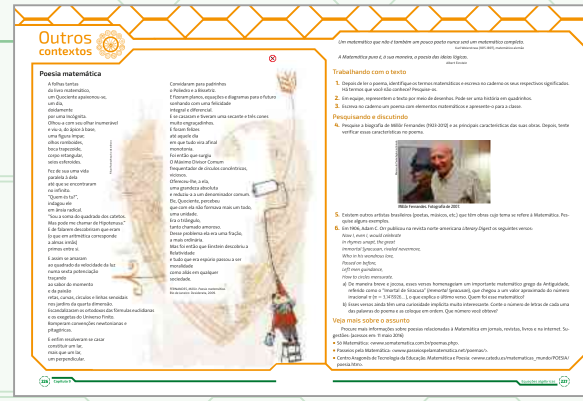
Exercícios

Essenciais para a aprendizagem. Ajudam a fixar e a aprofundar os conteúdos estudados.



Outros contextos

Temas relevantes e atuais que tratam de situações práticas, articulando a Matemática com outras disciplinas e com os temas: sociedade, esporte, Astronomia e poesia.

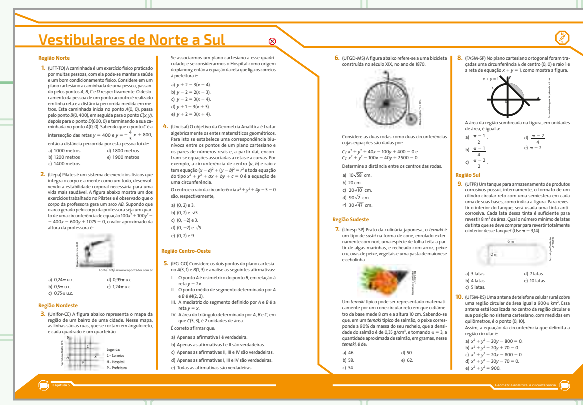


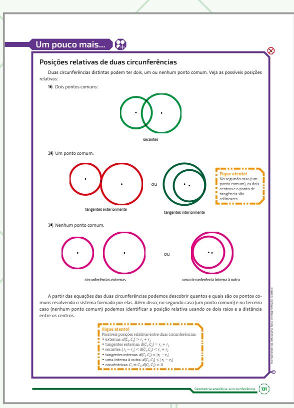
Leitura(s)

Textos que visam ampliar e enriquecer o conteúdo estudado no capítulo.

Vestibulares de Norte a Sul

Questões de vestibulares, de todas as regiões do Brasil, relacionadas aos conteúdos estudados.



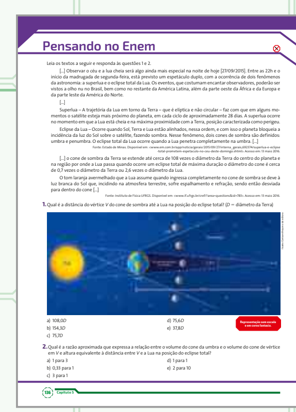


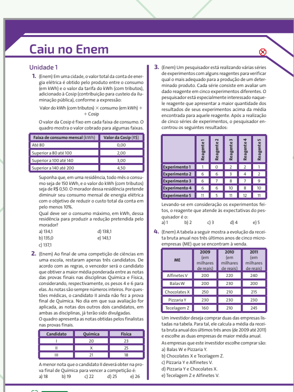
Um pouco mais...

Textos e exercícios que ajudam a aprofundar os conteúdos apresentados.

Pensando no Enem

Questões contextualizadas que visam ao desenvolvimento das competências e habilidades previstas na Matriz de Referência do Enem.





Caiu no Enem

Questões extraídas do Enem classificadas de acordo com as Unidades.

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

Ao ver este selo, lembre-se de registrar todas as respostas no caderno.

Sumário

Unidade 1: Matemática financeira e Estatística

CAPÍTULO 1
Matemática financeira

CAPÍTULO 2
Estatística

Ismar Ingber/Pulsar Imagens

Unidade 2: Geometria espacial e Geometria analítica

CAPÍTULO 3
Geometria espacial: corpos redondos

Haveseen/Shutterstock/Glow Images

CAPÍTULO 4
Geometria analítica: ponto e reta

CAPÍTULO 5
Geometria analítica: a circunferência

Unidade 3: Geometria analítica e números complexos

CAPÍTULO 6
Geometria analítica: secções cônicas

CAPÍTULO 7
Números complexos

Charles Sholl/Futura Press

Unidade 4: Polinômios, equações algébricas e equações trigonométricas

CAPÍTULO 8
Polinômios

CAPÍTULO 9
Equações algébricas

CAPÍTULO 10
Relações e equações trigonométricas

The Oxford Hystory of Islam/Oxford University

UNIDADE 1

Matemática financeira e Estatística

CAPÍTULO 1

Matemática financeira

Matthew Micah Wrigh/Getty Images

Mesa de operações para simulação de negócios na Bovespa – Bolsa de Valores de São Paulo. Espaço Raymundo Magliano Filho aberto à visitação. Os operadores de câmbio e os executores de operações no mercado financeiro são profissionais que compram ou vendem ativos na bolsa. Esses profissionais possuem formações diversas, como: Estatística, Matemática, Administração ou Economia. Todas elas se relacionam de alguma forma com a Matemática financeira.

1 O dinheiro e a Matemática

O dinheiro tem feito parte da história do mundo nos últimos 3 milênios; antes disso, o comércio era realizado por meio de trocas entre produtos e/ou serviços, prática chamada de escambo. Com o aumento do fluxo comercial e também das relações comerciais entre diferentes povos, o escambo tornou-se uma operação cada vez mais inviável, pois ficou difícil decidir quantas unidades de um produto x seriam equivalentes a certo número de unidades de um produto y. O dinheiro nasceu da necessidade de se referir a todos os produtos com uma mesma escala de valores, e provavelmente tenha surgido simultaneamente na Mesopotâmia e na China antes de 1000 a.C. A partir daí, o dinheiro se torna a peça-chave na organização e no estabelecimento de todas as sociedades.

O *shekel* era uma unidade antiga utilizada na Mesopotâmia para definir tanto um peso específico de cevada quanto quantidades equivalentes de materiais como prata, bronze e cobre. O uso de uma única unidade para definir tanto a massa quanto o valor da moeda é um conceito semelhante ao da libra britânica – originalmente definida como massa de uma libra de prata (equivalente a 457 gramas), passou a designar também o nome da moeda.

Na China, as primeiras unidades padrões de trocas adotadas foram as espadas e alguns outros tipos de armas e ferramentas. Dessa forma, era possível que um comerciante chinês perguntasse a outro: "Quantas espadas você me dá por 20 sacos de arroz?". Por volta de 1000 a.C. os chineses, no lugar de utilizar armas e ferramentas reais, passaram a utilizar réplicas delas, em miniatura e fundidas em bronze. Assim, as trocas de produtos por armas ou ferramentas passaram a ser feitas, não com os objetos reais, mas com os modelos deles – mais fáceis de transportar e guardar. A figura ao lado mostra espadas chinesas em miniatura representanto o primeiro dinheiro de que se tem notícia. Os buracos nos cabos serviam para passar uma corda que mantinha as "espadinhas" juntas, facilitando seu transporte e manuseio.

World History Archive/Alamy/Latinstock

"Espadinhas" utilizadas como dinheiro na China entre 475 a.C.-221 a.C. À esquerda, "espadinha" do estado Zhao (403 a.C.) e, à direita, do estado Yan (222 a.C.).

Entretanto, a forma desse dinheiro que imitava objetos reais ainda não era muito prática. Com o passar do tempo, por volta de 600 a.C. surgiu o dinheiro na forma "mais ou menos" redonda, ou seja, as moedas. Elas apareceram no reino da Lídia (que atualmente é o oeste da Turquia).

Antigo reino da Lídia (700 a.C.-546 a.C.)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: Adaptado de DUBY, G. *Atlas historique mondial*. 2. ed. Paris. 2007. p. 12.

Akg-Images/Latinstock

Moeda da Lídia, que mostra um leão (símbolo de Lídia) e um touro (povos rivais) lutando. Do período entre 561 a.C.-546 a.C., fim do reinado de Aliates e início do reinado de Creso (o último rei de Lídia). Medidas da moeda: 1,54 cm × 1,18 cm.

O rei Aliates, que governou a Lídia entre 600 a.C.-560 a.C., cunhou moedas de diversos tamanhos fundidas em um metal que os gregos chamavam de *electrum* – uma mistura de ouro e prata obtidos em uma mina na localidade de Sárdis (veja o mapa da página anterior). O valor de cada moeda era determinado pelo seu peso e pela figura cunhada no metal, a garantia do rei. A figura ao lado mostra uma dessas moedas, que tinha peso de quase 220 g.

As moedas se espalharam pelo mundo e cada governante mandava cunhar as suas com imagens que caracterizavam aspectos do lugar onde foram cunhadas, do próprio governante e de sua cultura.

A figura ao lado mostra uma moeda grega cunhada em Tebas. A moeda desse período, de dominação tebana na Grécia (c. 371 a.C.-323 a.C.), geralmente mostra de um lado um escudo e do outro algum objeto ou símbolo representativo da cultura grega.

Granger/Granger/Fotoarena

Moeda de prata grega que mostra um escudo (simbolizando a força do exército) e uma ânfora (antigo vaso de barro grego, com formas ovais e duas alças/asas simétricas). Cunhada em c. 365 a.C.

Com o dinheiro surgiu a operação de empréstimo. Quem tem dinheiro pode emprestar a quem precisa por um período determinado de tempo. Quem tomou emprestado deverá pagar, no momento da devolução do dinheiro, um valor adicional pelo "aluguel" da quantia que tomou emprestada. Esse valor adicional é o juro. Na verdade, os juros já existiam antes do dinheiro; há registros de que na Babilônia, por volta de 2000 a.C., já havia o empréstimo de sementes para agricultores. Estes, na safra seguinte, deveriam devolver a mesma quantidade acrescida de sementes adicionais.

A primeira operação da Matemática financeira foi o câmbio. Mesmo na Antiguidade cada país cunhava suas moedas e o comércio precisava estabelecer as equivalências entre elas. Nas viagens era sempre necessário trocar moedas de um país por moedas de outro país e isso era feito por pessoas especializadas, chamadas cambistas, que cobravam uma pequena taxa pela transação. Operações envolvendo câmbio existem até hoje. Em pouco tempo os cambistas acumularam enormes quantidades de dinheiro e passaram à atividade seguinte, que foi guardar dinheiro dos outros, devolvendo quando pedissem.

Entretanto, foi natural que ocorresse ao cambista a seguinte ideia: "Por que guardo grandes quantidades de dinheiro sem lucro algum sobre ele? É pouco provável que todos os proprietários do dinheiro que guardo peçam, ao mesmo tempo, sua devolução. Assim, posso emprestar parte desse dinheiro para outras pessoas cobrando uma taxa adicional no vencimento do prazo estipulado". Nascia aí o conceito de banco, palavra que tem origem no fato de que o antigo cambista trabalhava sentado em um banco de madeira em algum lugar do mercado. Quem não tinha dinheiro suficiente para fechar certo negócio recorria então ao banqueiro. Rapidamente os bancos se transformaram em instituições sólidas – inicialmente entre os babilônios e egípcios, depois entre os gregos e romanos –, e acumularam enormes fortunas. As taxas de juros variavam de acordo com o país e a época. Para dar um exemplo, na antiga Roma a taxa básica de juros era de 8,33% no ano 1 d.C., baixando posteriormente para 4% e subindo para 14% no século III.

Se uma dívida não era paga na data determinada, ela continuava e os juros incidiam sobre um valor aumentado, ou seja, o valor inicial mais os juros devidos do período anterior. Estes são os chamados juros compostos, que os antigos chamavam de "juros sobre juros", prática feita até hoje. Um dos mais antigos problemas de Matemática financeira aparece em um tablete da Babilônia antiga, onde, naquela época, os juros anuais eram de 20% ao ano. Nessas condições, em quanto tempo uma dívida não paga dobrava de valor? Em aproximadamente 3,8 anos ou aproximadamente 3 anos e 10 meses.

2 Situação inicial

Entre as inúmeras aplicações da Matemática está a de auxiliar na resolução de problemas de ordem financeira, como cálculo do valor de prestações, pagamento de impostos, rendimento de poupança e outros.

> **Fique atento!**
> Para calcular 1% de uma quantia, basta dividir essa quantia por 100:
> 1% de 5 000 $= \frac{5\,000}{100} = 50$

Por exemplo, uma pessoa vai fazer uma compra no valor de R$ 1 800,00, usando o dinheiro que está aplicado em um fundo de investimento que rende 1% ao mês. Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual destes planos de pagamento é mais vantajoso:

- pagar à vista;

ou

- pagar em duas prestações iguais de R$ 903,00, uma delas como entrada e a segunda depois de um mês.

Permita aos alunos refletir sobre essa situação-problema, que será abordada novamente no exercício resolvido 16.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Reúna-se com um colega e tentem resolver esse problema com os conhecimentos que vocês já têm. Considerem que vocês têm R$ 1 800,00 e que podem tanto optar por pagar à vista quanto aplicar no fundo de investimento, tirando o dinheiro necessário para o pagamento das prestações.

Esse problema e outros, que envolvem assuntos de Matemática financeira, serão estudados e resolvidos neste capítulo.

Provavelmente será necessária alguma explicação inicial sobre o contexto. Ajude-os a entender que o dinheiro pode ser gasto ou aplicado e, se aplicado, pode ser retirado em partes para os pagamentos, mas o restante continua rendendo.

3 Porcentagem

No Ensino Fundamental estudamos que a porcentagem é uma forma usada para indicar uma fração de denominador 100 ou qualquer representação equivalente a ela.

Veja os exemplos:

a) 50% é o mesmo que $\frac{50}{100}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 0,50 ou 0,5 (metade).

b) 75% é o mesmo que $\frac{75}{100}$ ou $\frac{3}{4}$ ou 0,75.

c) 25% é o mesmo que $\frac{25}{100}$ ou $\frac{1}{4}$ ou 0,25 (um quarto).

d) 5% é o mesmo que $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$ ou 0,05.

> **Fique atento!**
> 100% = 1; 200% = 2; 300% = 3; 400% = 4; ...

Exercícios resolvidos

Lembre aos alunos que é importante escolher a forma de resolução mais conveniente para cada problema.

1. O salário de Felipe é de R$ 2 000,00 por mês e o de Renato corresponde a 85% do salário de Felipe. Qual é o salário de Renato?

Resolução:

85% de R$ 2 000,00:

$$\frac{85}{100} \cdot 2\,000 = \frac{17}{20} \cdot 2\,000 = 1\,700 \text{ ou}$$

$$0{,}85 \cdot 2\,000 = 1\,700 \text{ ou}$$

$$\frac{85}{100} = \frac{x}{2000} \Rightarrow 100x = 170\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{170\,000}{100} = 1700$$

O salário de Renato é R$ 1 700,00.

2. Leia esta notícia:

"As vendas de carros, caminhões e ônibus novos caíram 26,55% em 2015 em relação ao ano passado, informou a federação dos concessionários, a Fenabrave, nesta quarta-feira (6). Foram emplacados 2 569 014 veículos 0 km – as motos são contadas à parte. Foi o terceiro ano seguido de baixa, porém mais aguda que nos períodos anteriores. Em 2014, o declínio foi de 7,15% sobre 2013, com 3 497 810 emplacamentos."

Fonte: G1. Disponível em: <http://g1.globo.com/carros/noticia/2016/01/venda-de-veiculos-cai-2655-em-2015-o-3-ano-seguindo-de-baixa.html>. Acesso em: 6 maio 2016.

De acordo com a notícia, quantos veículos foram emplacados em 2013?

Resolução:

Sendo x o número de veículos vendidos em 2013, temos:

$$100\% - 7{,}15\% = 92{,}85\%$$

$$92{,}85\%x = 3\,497\,810 \Rightarrow 0{,}9285x = 3\,497\,810 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\,497\,810}{0{,}9285} \simeq 3\,767\,162$$

Foram emplacados cerca de 3 767 162 veículos.

3. Observe esta outra notícia:

"Mais 2,4 milhões de consumidores tiveram os nomes incluídos em cadastro de devedores, entre janeiro e setembro, deste ano [2015], de acordo com dados da Confederação Nacional dos Dirigentes Lojistas (CNDL) e do Serviço de Proteção ao Crédito (SPC) Brasil, divulgados hoje (9). No final de setembro, havia 57 milhões de consumidores registrados em cadastro de devedores. Esse total equivale a 38,9% da população adulta do país (faixa de 18 a 94 anos). Em setembro, comparado a igual período de 2014, o número de consumidores com contas atrasadas subiu 5,45%. Na comparação com agosto deste ano, houve recuo de 0,59%."

Fonte: Agência Brasil. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2015-10/quase-40-da-populacao-adulta-esta-incluida-em-cadastros-de-inadimplentes>. Acesso em: 6 maio 2016.

De acordo com a notícia, responda:

a) De quanto era a população adulta do Brasil nessa data?

b) Desses 57 milhões de consumidores, que porcentagem representa os 2,4 milhões que tiveram os nomes incluídos em cadastro de devedores, entre janeiro e setembro de 2015?

Resolução:

a) $38{,}9\% \rightarrow 57$ milhões

$100\% \rightarrow x$ milhões

$$\frac{38{,}9}{100} = \frac{57\,000\,000}{x} \Rightarrow 38{,}9x = 5\,700\,000\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 146\,529\,563$$

A população adulta era de aproximadamente 147 milhões.

b) *1ª maneira:*

?% de 57 000 000 = 2 400 000

$$\frac{2\,400\,000}{57\,000\,000} = \frac{24}{570} = \frac{4}{95} \simeq 0{,}04 = \frac{4}{100} = 4\%$$

(aproximadamente)

2ª maneira:

$$\frac{x}{100} = \frac{2\,400\,000}{57\,000\,000} \Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{24}{570} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 570x = 2\,400 \Rightarrow x \simeq 4$$

Logo, 2,4 milhões correspondem a aproximadamente 4% de 57 milhões.

Para refletir

Qual é o valor de 10% de R$ 8,00 e de 1% de R$ 8,00?

R$ 0,80 e R$ 0,08

4. (Uncisal) Ao publicar um artigo científico, um pesquisador recebeu um bônus de 15% sobre o seu salário. Se sobre o seu salário não incide nenhum desconto, não houve nenhuma outra bonificação e o bônus foi de R$ 975,00, qual a remuneração do pesquisador no mês em que recebeu o prêmio?

a) R$ 1 121,25

b) R$ 2 096,25

c) R$ 2 122,05

d) R$ 6 500,00

e) R$ 7 475,00

Resolução:

O salário do pesquisador é uma incógnita. Vamos considerá-lo um "x" qualquer.

Salário sem bonificação = x

$$\overbrace{0{,}15x}^{\text{bonificação}} = 975 \text{ reais} \Rightarrow \underbrace{x}_{\text{salário}} = 6\,500 \text{ reais}$$

Então, o pesquisador receberá o salário normal (6 500) mais a bonificação (975), o que totaliza um valor de R$ 7 475,00. Logo, a alternativa correta é a alternativa **e**.

Atividade em dupla Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Calcule e responda:

a) Qual é o valor de 60% de 95? 57

b) Quanto por cento de 70 é igual a 56? 80%

c) 6 é 15% de que número? 40

d) Quanto vale 3,5% de R$ 650,00? R$ 22,75

e) R$ 75,20 correspondem a 20% de que quantia? R$ 376,00

f) Em relação a um total de R$ 300,00, a quantia de R$ 171,00 corresponde a quanto por cento? 57%

g) 0,5% de R$ 85,00 dá um valor maior ou menor do que 1% de R$ 170,00? Menor.

Para refletir

Se x indica uma quantia, podemos representar 60% de x por $\frac{60x}{100}$ ou $\frac{3x}{5}$ ou $0{,}6x$. Como se representa 75% de $(x + 9)$? $0{,}75x + 6{,}75$

2. O salário de Roberto, em 2016, era de R$ 1 200,00 mensais. Em 2017, ele passou a ganhar R$ 1 400,00 mensais. De quanto por cento foi o seu aumento? Aproximadamente 16,7%.

3. O volume total de água que entra e sai por dia no nosso organismo varia de 1 500 mL a 3 000 mL. Aproximadamente 47% desse volume origina-se das bebidas ingeridas, como água, sucos, refrigerantes, chás, etc. De acordo com esses dados, determine a quantidade mínima e máxima, em mililitros, da água que entra e sai do nosso organismo proveniente de bebidas que ingerimos. De 705 mL a 1 410 mL.

4. *Caderneta de poupança*

A caderneta de poupança é a mais tradicional aplicação financeira do mercado. A partir de 2012 a remuneração da poupança passou a depender da data da aplicação. Para depósitos feitos até 3 de maio de 2012, a remuneração continuou de 6,17% ao ano mais a TR. Entretanto, para depósitos feitos a partir de 4 de maio de 2012, sempre que a taxa Selic ficar igual ou menor do que 8,5% ao ano, o rendimento da poupança passará a ser 70% da taxa Selic mais a TR.

Você sabia?

A Taxa Referencial (TR) é um índice criado pelo governo para complementar os juros pagos na poupança.

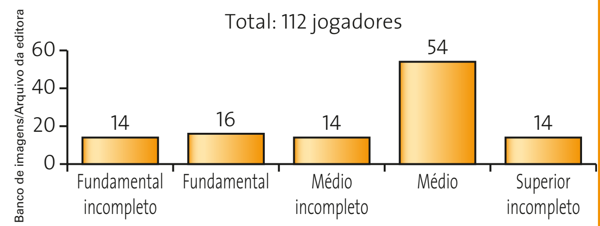
A taxa Selic é a taxa básica de juros utilizada como referência pela política monetária do Brasil.

Com base nesse texto, responda:

a) Se a taxa Selic for de 10% ao ano, qual será a remuneração da poupança a ser somada com a TR para um depósito feito em janeiro de 2016? 6,17% ao ano.

b) Se a taxa for de 8% ao ano, qual será a remuneração da poupança a ser somada com a TR para um depósito feito em janeiro de 2016? 5,6% ao ano.

5. (Enem) A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa abaixo, realizada com os jogadores profissonais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro.



Fonte: *O Globo*, 27 jul. 2005.

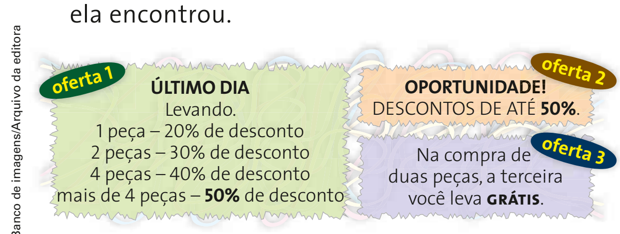
De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de aproximadamente:

a) 14%. b) 48%. c) 54%. x d) 60%. e) 68%.

6. O salário líquido de Antonela é de R$ 1 100,00. Sabe-se que são descontados 17% do seu salário para o pagamento de impostos. Qual é o salário bruto de Antonela? R$ 1 325,30

7. *Tomando decisões nas liquidações*

Ana Maria quer aproveitar as liquidações para fazer compras. Observem algumas ofertas que ela encontrou.



a) Qual dessas ofertas vale a pena aproveitar? Discuta com seus colegas. Respostas pessoais.

b) Comparem a **oferta 1** com a **oferta 3**. Em qual delas é mais vantajoso comprar 2 peças? Na oferta 3.

8. *Biologia*

(Enem) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2 000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1 500 são casos diagnosticados de câncer e 500 são casos diagnosticados de enfisema. Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2 000 pessoas é, aproximadamente:

a) 740.
b) 1100.
c) 1310.
d) 1620.
x e) 1750.

Leitura

Conceito de inflação: o que é e como se forma?

Ismar Ingber/Pulsar Imagens

A inflação é um conceito econômico que representa o aumento persistente e generalizado do preço de uma cesta de produtos em um país ou região durante um período definido de tempo. Se, por exemplo, uma cesta de produtos custa R$ 100,00 em julho e passa a ser vendida por R$ 150,00 em agosto, verifica-se uma inflação de 50% no mês. Ela também representa a queda do poder aquisitivo do dinheiro em relação à elevação dos preços de bens e serviços. Quando a inflação está em um nível muito baixo, ocorre a estabilização dos preços e, assim, o valor dos produtos não aumenta.

A inflação já foi o grande drama da economia brasileira, e sempre merece grande atenção e acompanhamento do governo e da sociedade. A partir dos anos 1980, vários planos fracassaram na tentativa de impedir o seu crescimento. Mas, desde 1994, com a implantação do Plano Real, ela está relativamente sob controle. [...]

Causas

- Inflação monetária: emissão exagerada e descontrolada de dinheiro por parte do governo.
- Inflação de demanda: demanda por produtos (aumento no consumo) maior do que a capacidade de produção do país.
- Inflação de custos: aumento nos custos de produção (máquinas, matéria-prima, mão de obra) dos produtos.

Indicadores

No Brasil, existem vários índices que medem a inflação e são referenciais. Os principais são: IGP ou Índice Geral de Preços (calculado pela Fundação Getúlio Vargas), IPC ou Índice de Preços ao Consumidor (medido pela Fipe – Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas), INPC ou Índice Nacional de Preços ao Consumidor (medido pelo IBGE) e IPCA ou Índice de Preços ao Consumidor Amplo (também calculado pelo IBGE).

O IPC, por exemplo, considera o consumo de famílias com renda até 33 salários mínimos que vivem no Rio de Janeiro e em São Paulo. O IGP-M é calculado a partir de outros índices. O IPCA, de maior abrangência, pesquisa famílias com renda de até 40 salários mínimos em pelo menos 10 grandes capitais brasileiras. Já o ICV, calculado pelo Dieese, considera apenas os preços de alimentação, transporte, saúde e habitação, praticados na cidade de São Paulo.

Fonte: O economista. Disponível em: <www.oeconomista.com.br/inflacao-o-que-e-e-como-se-forma/>. Acesso em: 9 maio 2016.

- A inflação brasileira em 2015 foi de 10,67% (IPCA). Assim, se uma cesta básica custava cerca de R$ 308,00 em dezembro de 2014, quanto ela custava em dezembro de 2015? Custava cerca de R$ 340,86.

4 Fator de atualização

O fator de atualização (f) é a razão entre dois valores de uma grandeza em tempos diferentes (passado, presente ou futuro). Constitui uma ferramenta importante no trabalho com Matemática financeira.

Na divisão entre dois valores quaisquer $\left(\frac{A}{B}, \text{ com } B \neq 0\right)$, só existem três resultados possíveis: ou resulta em 1, ou é maior do que 1, ou é menor do que 1.

Quando o resultado da divisão é 1, os dois valores são iguais; portanto, nenhum é maior nem menor do que o outro. Um valor é 100% do outro. Por isso, diz-se que $f = 1$ é o fator neutro.

No caso de a divisão resultar em números maiores do que 1, como $\frac{A}{B} = 1,05$, podemos entender o resultado de duas formas diferentes:

1ª) A é 5% maior do que B;

ou

2ª) A é 105% de B (portanto, 5% maior).

Ambas as interpretações são corretas e seu uso depende do melhor contexto. No caso de a divisão resultar em número menor do que 1, por exemplo $\frac{A}{B} = 0,90$, também podemos entender o resultado de duas formas diferentes:

1ª) A é 10% menor do que B;

ou

2ª) A é 90% de B (portanto, 10% menor).

Também aqui a escolha da melhor interpretação depende do contexto.

Na prática, se a opção for pela primeira interpretação, então precisamos aprender a obter a taxa percentual i a partir do valor do fator de atualização.

- Se $f > 1$, $f = 1 + i$; portanto, a taxa é $i = f - 1$, em números decimais.
- Se $f < 1$, $f = 1 - i$; portanto, a taxa é $i = 1 - f$, em números decimais.

Assim:

- $f = 1,05$
  $i = f - 1 = 0,05 \Rightarrow \text{taxa} = 0,05 = \frac{5}{100} = 5\%$ (maior do que...)
- $f = 0,90$
  $i = 1 - f = 0,10 \Rightarrow \text{taxa} = 0,10 = \frac{10}{100} = 10\%$ (menor do que...)

Aumentos e descontos

Na comparação de dois valores diferentes de uma mesma grandeza, $\boldsymbol{f > 1}$ significa **aumento** (ou **acréscimo** de valor) e $\boldsymbol{f < 1}$ significa **desconto** (ou perda de valor), pois o valor da grandeza variou no tempo e o valor mais antigo é a base de comparação. O fator $f = 1$, que é o fator neutro, significa que não houve variação:

$$f = \frac{\text{valor novo}}{\text{valor velho}}$$

$f > 1 \rightarrow$ aumento
$f < 1 \rightarrow$ desconto
$f = 1 \rightarrow$ não houve variação

Aumentos e descontos sucessivos

Para compor vários aumentos e/ou descontos, basta multiplicar os vários fatores individuais e assim obter o fator "acumulado", que nada mais é do que o fator de atualização entre o primeiro e o último valor considerado, independentemente dos valores intermediários.

$$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot ...$$

O fator acumulado é também um fator de atualização e deve ser interpretado como tal.

Exercícios resolvidos

5. (Vunesp-SP) Se a taxa de inflação de janeiro é de 6% e a de fevereiro é de 5%, então a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro é de:

a) 11%.
b) 11,1%.
c) 11,2%.
d) 11,3%.
e) 11,4%.

Resolução:

$f_1 = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$

$f_2 = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \Rightarrow f_{\text{acumulado}} = 1{,}06 \cdot 1{,}05 = 1{,}113$

Ou seja, inflação de 11,3%.

Portanto, alternativa **d**.

6. (UEL-PR) Em uma liquidação os preços dos artigos de uma loja são reduzidos em 20% de seu valor. Terminada a liquidação, e pretendendo voltar aos preços originais, de que porcentagem devem ser acrescidos os preços da liquidação?

a) 27,5%
b) 25%
c) 22,5%
d) 21%
e) 20%

Resolução:

$f_1 = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$

$f_2 = ?$

$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 = 1$ ($f = 1$ significa que não houve alteração: voltou ao valor original)

Assim:

$f_{\text{acumulado}} = 0{,}80 f_2 = 1 \Rightarrow f_2 = \dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25$

Como $f_2 > 1$, então:

$f_2 = 1 + i = 1{,}25 \Rightarrow i = 0{,}25 = 25\%$

Assim, alternativa **b**.

7. Um fogão, cujo preço à vista é de R$ 680,00, tem um acréscimo de 5% no seu preço se for pago em 3 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?

Resolução:

1ª maneira:

5% de 680 = 0,05 · 680 = 34 (acréscimo)

680 + 34 = 714 (preço em 3 prestações iguais)

714 : 3 = 238 (valor de cada prestação)

2ª maneira:

$t = 5\% = 0{,}05$

$f = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

$680 \cdot 1{,}05 = 714$

$714 : 3 = 238$

Então, o valor de cada prestação é de R$ 238,00.

8. A tabela a seguir mostra a variação do preço do dólar em uma semana qualquer, em termos percentuais. No valor acumulado desses 5 dias, o que aconteceu com o preço do dólar? (Subiu? Caiu? Quanto por cento?)

Dia	Variação
Segunda-feira	−2,35%
Terça-feira	1,37%
Quarta-feira	1,05%
Quinta-feira	−0,13%
Sexta-feira	0,21%

Resolução:

Temos de compor as cinco variações para poder emitir um julgamento. Para isso, precisamos dos fatores de atualização de cada variação:

$f_1 = 1 - 0{,}0235 = 0{,}9765$

$f_2 = 1 + 0{,}0137 = 1{,}0137$

$f_3 = 1 + 0{,}0105 = 1{,}0105$

$f_4 = 1 - 0{,}0013 = 0{,}9987$

$f_5 = 1 + 0{,}0021 = 1{,}0021$

Assim: $f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5 =$

$= 0{,}9765 \cdot 1{,}0137 \cdot 1{,}0105 \cdot 0{,}9987 \cdot 1{,}0021 \simeq 1{,}00107$

Como $f_{\text{acumulado}} > 1$, então:

$f = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}00107 = 0{,}107\%$

Então, o dólar teve uma pequena alta de cerca de 0,107%.

Exercícios

9. Escreva no caderno o fator de atualização correspondente a cada situação:

a) 3% de aumento $f = 1{,}03$

b) 3% de desconto $f = 0{,}97$

c) 15% de aumento $f = 1{,}15$

d) 15% de desconto $f = 0{,}85$

e) 230% de aumento $f = 3{,}3$

f) 3 000% de aumento $f = 31$

10. Interprete cada fator de atualização, definindo se é aumento ou desconto e qual é o valor da taxa.

a) $f = 1{,}13$ Aumento de 13%.

b) $f = 0{,}70$ Desconto de 30%.

c) $f = 2$ Aumento de 100%.

d) $f = 0{,}95$ Desconto de 5%.

e) $f = 30$ Aumento de 2 900%.

11. Avalie o efeito acumulado de cada situação a seguir, definindo qual é o aumento ou o desconto equivalente.

a) Aumento de 3% e aumento de 5%. Aumento de 8,15%.

b) Aumento de 10% e desconto de 20%. Desconto de 12%.

c) Três aumentos de 10%. Aumento de 33,1%.

d) Dois aumentos de 6% e três descontos de 4%. Desconto de 0,6%.

12. Investi R$ 11 000,00 em um fundo de aplicação de um banco e hoje, após 3 meses, tenho R$ 11 440,00. Qual foi o rendimento percentual obtido nesse período de 3 meses? 4%

13. O preço de uma camisa passou de R$ 50,00 para R$ 59,00. Qual foi o aumento percentual desse preço? 18%

14. Um objeto que custava R$ 70,00 teve seu preço aumentado em R$ 10,50. De quanto por cento foi o aumento? O aumento foi de 15%.

15. Uma mercadoria custava R$ 80,00 e seu preço foi reajustado (aumentado) em 5%. Se sobre o novo preço for dado um desconto de 5%, ela voltará a custar R$ 80,00? Justifique sua resposta. Calcule os preços após o aumento e após o desconto. Após o aumento: R$ 84,00 e após o desconto: R$ 79,80.

16. O mesmo modelo de um fogão está sendo vendido em duas lojas do seguinte modo:

- na 1ª loja, sobre o preço de R$ 800,00 há um desconto de 8%;
- na 2ª loja, sobre o preço de R$ 820,00 há um desconto de 10%.

Qual dessas ofertas é a mais conveniente para o cliente? A da 1ª loja.

17. O Índice Bovespa (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo – Ibovespa) é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Ele indica o retorno financeiro (valorização e lucro) de um valor de 100 pontos teoricamente aplicado em ações em 2/1/1968. O quadro abaixo mostra a variação percentual desse índice em 4 anos. Se o Ibovespa fechou o ano de 2015 com 43 349,96 pontos, com quantos pontos ele estava no fim de 2011 (ou seja, antes de 2012)? Aproximadamente 56 740 pontos.

Ano	Variação
2015	−13,3%
2014	−2,9%
2013	−15,5%
2012	7,4%

Disponível em: <www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoTaxaMediaCrescimento.aspx?Indice=IBOVESPA&idioma=pt-br>. Acesso em: 6 maio 2016.

18. A quantia de R$ 1 890,00 foi repartida entre 3 pessoas da seguinte forma: Marta recebeu 80% da quantia de Luís, e Sérgio recebeu 90% da quantia de Marta. Quanto recebeu cada pessoa? Luís: R$ 750,00, Marta: R$ 600,00 e Sérgio: R$ 540,00.

19. Uma calça teve um aumento de 7% e passou a custar R$ 59,00. Qual era o preço antes do aumento? R$ 55,14

20. Um posto de gasolina aumentou seus preços em 5% em fevereiro e 3% em janeiro. Se o etanol custa agora R$ 2,59, quanto custava antes dos aumentos? R$ 2,39

21. O fluxo de veículos em determinada rua passou de 3 por hora para 3 por minuto depois que ela foi asfaltada. Qual foi o aumento percentual do fluxo de veículos nessa rua? 5 900%

22. O que vocês preferem quando vão comprar algo: receber um único desconto de 55% ou dois descontos sucessivos de 30%? Justifiquem do ponto de vista financeiro. O desconto de 55% é maior.

23. O dólar caiu 3% em janeiro. Em fevereiro caiu mais x%. Se no bimestre a queda acumulada foi de 5%, de quanto por cento foi a queda do dólar em fevereiro? 2,06%

24. Em uma promoção, o preço de um celular passou de R$ 499,00 para R$ 399,00. Qual foi o desconto nessa promoção? Cerca de 20%.

5 Termos importantes de Matemática financeira

Vamos supor que uma pessoa aplique certa quantia (**capital**) em uma caderneta de poupança por determinado período (**tempo**). A aplicação é semelhante a um **empréstimo** feito ao banco. Então, no fim desse período, essa pessoa recebe uma quantia (**juros**) como compensação. O valor dessa quantia é estabelecido por uma porcentagem.

Ao final da aplicação, a pessoa terá em sua conta a quantia correspondente ao **capital** (***C***) mais os **juros** (***j***), que é conhecida como **montante** (***M***), ou seja, $M = C + j$. A razão $i = \frac{j}{C}$ é a taxa de crescimento do capital, também conhecida como **taxa de juros** (***i***), e será sempre associada ao período da operação.

Veja o exemplo a seguir:

Um banco oferece rendimento de 0,8% ao mês. Se uma quantia de R$ 600,00 for aplicada nesse banco, vejamos que quantia o cliente terá em sua conta no fim de 1 mês:

$0{,}8\%$ de $600 = 0{,}008 \cdot 600 = 4{,}8$

$600{,}00 + 4{,}80 = 604{,}80$

No fim de 1 mês de aplicação, a quantia será de R$ 604,80.

Nesse problema, temos:

- 0,8% ao mês: taxa de juros (i)
- R$ 600,00: capital (C) ou principal
- 1 mês: tempo (t)
- $j = C \cdot i$ ou $i = \frac{j}{C}$
- R$ 4,80: juros (j)
- $M = C + j$
- R$ 604,80: montante (M)
- unidade monetária (UM): real

Fique atento!
O valor de uma quantia depende da época à qual ela se refere. Por exemplo, R$ 100,00 hoje provavelmente valem mais do que R$ 100,00 daqui a um ano.

Juros simples

Se um capital C é aplicado durante t unidades de tempo e a taxa i de juros por unidades de tempo incide apenas sobre o capital inicial, os juros j são chamados **juros simples:**

$j = i \cdot C$: juros obtidos no fim de 1 período

$j = (i \cdot C)t$: juros obtidos no fim de t períodos

Assim, as fórmulas são $j = C \cdot i \cdot t$ e $M = C + j$. Mas evite depender delas, o mais importante é compreender os conceitos que envolvem os juros simples.

Você sabia?
Na internet, pode-se acessar uma calculadora financeira *on-line* em <www.webcalc.com.br/financas/calc_fin.html>. Acesso em: 16 maio 2016.

Fique atento!
Nem sempre conhecer uma fórmula significa compreendê-la.

Veja um exemplo:

Pedro emprestou de um banco R$ 10 000,00. Dois meses depois, pagou R$ 10 400,00. Os juros pagos por Pedro foram de R$ 400,00 e a taxa de juros foi de $\frac{400}{10\,000} = \frac{4}{100} = 4\%$ ao bimestre. Nesse caso, o principal (ou capital), que era a dívida inicial de Pedro, é de R$ 10 000,00; o montante, que era a dívida na época do pagamento, é de R$ 10 400,00.

Exercício resolvido

9. *Parcelar ou não?*

Muitas vezes o comprador possui o dinheiro para pagar à vista, mas escolhe a prazo.

Nesses casos, é comum que sejam cobrados juros que encarecem o produto.

Acompanhe a situação:

Cícera decidiu comprar um berço para seu filho João Gabriel.

A loja oferece dois planos de pagamento:

I. À vista por R$ 500,00.

II. Em duas parcelas iguais de R$ 300,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra.

Caso Cícera opte pelo pagamento a prazo, qual a taxa mensal de juros que ela pagará?

a) 20% b) 25% c) 35% d) 40% e) 50%

Resolução:

A 1ª prestação (na compra parcelada) é paga no ato da compra e, dessa forma, não incidem juros sobre ela.

Preço à vista: R$ 500,00 (esse é o valor da mercadoria sem juros)

Preço a prazo: R$ 600,00 = R$ 300,00 + R$ 300,00

Após pagar a 1ª parcela, à vista, o valor que o cliente estará devendo é:

R$ 500,00 − R$ 300,00 = R$ 200,00

Se optar por efetuar o pagamento da 2ª parcela após 1 mês, terá de pagar R$ 300,00 (e não R$ 200,00); logo, os juros cobrados serão $\frac{300 - 200}{200} = 0{,}50 = 50\%$ ao mês.

Ou ainda $j = C \cdot i \cdot t$, em que $j = 100$, $C = 200$ e $t = 1$:

$100 = 200 \cdot i \cdot 1 \Rightarrow i = 0{,}5 = 50\%$ ao mês.

Portanto, alternativa **e**.

Juros compostos

Vejamos o seguinte problema:

Um capital de R$ 40 000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês durante 3 meses. Qual foi o montante no fim dos 3 meses?

No **sistema de juros simples**, calculamos:

- juros produzidos em 1 mês: 2% de 40 000 = $0{,}02 \cdot 40\,000 = 800$
- juros produzidos em 3 meses: $800 \cdot 3 = 2\,400$
- montante ao final de 3 meses: $40\,000 + 2\,400 = 42\,400$

Logo, no fim dos 3 meses o montante será de R$ 42 400,00.

Você sabia?
É costume usar juros compostos nas aplicações financeiras.

No **sistema de juros compostos**, temos:

- juros produzidos no 1º mês: 2% de 40 000 = 800
- montante no fim do 1º mês: 40 000 + 800 = 40 800
- juros produzidos no 2º mês: 2% de 40 800 = 816
- montante no fim do 2º mês: 40 800 + 816 = 41 616
- juros produzidos no 3º mês: 2% de 41 616 = 832,32
- montante no fim do 3º mês: 41 616 + 832,32 = 42 448,32

Logo, no fim dos 3 meses o montante será de R$ 42 448,32.

Fique atento!
No regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados sobre o montante anterior. Assim, juros de 10% ao mês dão, em dois meses, juros de 21% e não juros de 20%.

Observe que no sistema de juros simples os juros foram de R$ 2 400,00 e no de juros compostos foram de R$ 2 448,32. O que gerou essa diferença?

Essa diferença foi gerada pelo fato de que, no sistema de juros compostos, deve-se calcular os juros no fim de cada período, **formando um montante sobre o qual se calculam os juros do período seguinte**, até esgotar o tempo da aplicação (é o que chamamos "juros sobre juros").

Agora, acompanhe como calcular, no sistema de juros compostos, qual será o montante (M), produzido por um capital (C), aplicado à taxa i ao período, no fim de t períodos:

	Início	Juros	Montante no fim do período
1º período	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1 + i)$
2º período	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3º período	M_2	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$
...			

Fique atento!
Observe que a sequência $(C, M_1, M_2, ...)$ é uma PG de razão $1 + i$.

No fim de t períodos, o montante será:

$$M = C(1 + i)^t$$

Fique atento!
No regime de juros compostos de taxa i, um capital C transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante $M_n = C(1 + i)^n$.

Podemos então escrever que, no sistema de juros compostos, o capital C, aplicado à taxa i ao período, produz juros j e gera um montante M no fim de t períodos.

$$M = C(1 + i)^t$$

e

$$j = M - C$$

> **Fique atento!**
> - Usando fator de atualização, podemos escrever o montante $M = C \cdot f^t$, em que $f = 1 + i$.
> - A primeira fórmula ao lado mostra que uma quantia C hoje se transformará, depois de t períodos de tempo, em uma quantia igual a $C(1 + i)^t$, ou seja, para obter o valor futuro basta multiplicar o atual por $(1 + i)^t$.

Veja a situação que foi resolvida mês a mês, usando agora as fórmulas acima:

C: R$ 40 000,00
i: 2% ao mês (0,02)
t: 3 meses

- montante no fim de 3 meses:
  $M = C(1 + i)^t = 40\,000(1{,}02)^3 = 40\,000 \cdot 1{,}061208 =$ R$ 42 448,32
- juros produzidos nos 3 meses:
  $j = 42\,448{,}32 - 40\,000 =$ R$ 2 448,32

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 13

10. Quanto receberá de juros, no fim de um semestre, uma pessoa que investiu, a juros compostos, a quantia de R$ 6 000,00 à taxa de 1% ao mês?

Resolução:

C: 6 000

t: 1 semestre = 6 meses

i: 1% (0,01) ao mês

> **Fique atento!**
> $(1{,}01)^6 = 1{,}0615$ é fator acumulado em 6 meses.

$M = 6\,000(1 + 0{,}01)^6 = 6\,369{,}120904$

Consideramos $M =$ R$ 6 369,12 e
$j = 6\,369{,}12 - 6\,000{,}00 = 369{,}12$.

Logo, a pessoa receberá R$ 369,12 de juros.

11. Paula tomou um empréstimo de R$ 3 000,00 em um banco, a juros de 1% ao mês. Dois meses depois, ela pagou R$ 1 500,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou o débito. Qual é o valor desse último pagamento?

Resolução:

Após 2 meses, o montante da dívida será dado por:

$M = C \cdot (1 + i)^2$

Então, temos que:

$M = 3\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^2 \Rightarrow M = 3\,060{,}30$

Como pagou R$ 1 500,00, resta um saldo de:

$3\,060{,}30 - 1\,500{,}00 = 1\,560{,}30$

Novo montante da dívida:

$M = 1\,560{,}30 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 1\,575{,}90$

O último pagamento foi de R$ 1 575,90.

12. O capital de R$ 2 000,00, aplicado a juros compostos, rendeu, após 4 meses, juros de R$ 165,00. Qual foi a taxa de juros mensal?

Resolução:

C: 2 000

t: 4 meses

j: 165

M: $2\,165 = 2\,000 + 165$

i: ?

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 2\,165 = 2\,000(1 + i)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + i)^4 = \dfrac{2\,165}{2\,000} \Rightarrow (1 + i)^4 = 1{,}0825 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[4]{1{,}0825} \Rightarrow 1 + i = 1{,}020015981 \Rightarrow$

$\Rightarrow i = 0{,}020015981 \Rightarrow 2{,}0015981\%$

Portanto, a taxa de juros foi de aproximadamente 2% ao mês.

Resolvido passo a passo

13. (UFSM-RS) A chegada da televisão no Brasil facilitou o acesso à informação. Com o avanço da tecnologia, os aparelhos estão cada dia mais modernos e consequentemente mais caros. Um consumidor deseja adquirir uma televisão com tecnologia de última geração. Enquanto aguarda o preço da televisão baixar, ele aplica o capital disponível de R$ 3 000,00 a juros simples de 0,8% ao mês em uma instituição financeira, por um período de 18 meses. O montante, ao final desse período, é igual a:

a) R$ 7 320,00.
b) R$ 5 400,00.
c) R$ 4 320,00.
d) R$ 3 432,00.
e) R$ 3 240,00.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
É dado um problema básico de juros simples que traz no enunciado os valores do capital inicial e da taxa de juros mensal e o período de aplicação.

b) O que se pede?
Pede-se o montante ao final dessa aplicação que dura 18 meses.

2. Planejando a solução

Por se tratar de um problema de juros simples, utilizaremos as fórmulas do montante e dos juros/rendimento:

$M = C + J$

$$J = \overbrace{C}^{\text{capital inicial}} \cdot \underbrace{i}_{\text{taxa de juros}} \cdot \overbrace{t}^{\text{tempo de aplicação}}$$

Antes de realizar o cálculo dos juros/rendimento é interessante transformar a taxa de juros em valor decimal para lidar melhor com ela.

3. Executando o que foi planejado

- Transformando a taxa de juros em valor decimal temos: $0{,}8\% = \dfrac{0{,}8}{100} = 0{,}008$
- Calculando os juros/rendimento:
  $J = 3\,000 \cdot 0{,}008 \cdot 18 = 432$ reais
- Calculando o montante ao final de 18 meses:
  $M = 3\,000 + 432 = 3\,432$ reais

4. Verificando

Ao mês o capital disponível de R\$ 3 000,00 rende R\$ 24,00, resultante do cálculo:

$$3000 \cdot \frac{8}{1\,000} = 24$$

Assim, como sabemos que a aplicação foi de 18 meses, ao final desse período o capital disponível terá rendido $24 \cdot 18 = 432$ reais. Logo, fica verificado que o montante resultante da aplicação é R\$ 3 432,00.

5. Emitindo a resposta

Alternativa **d**.

6. Ampliando o problema

a) O mesmo consumidor da questão base decidiu aumentar o montante obtido da aplicação para comprar uma televisão que será lançada daqui a um ano com valor inicial igual a R\$ 4 500,00. A instituição financeira tem rendimento de 2% ao mês. Sendo assim, o consumidor terá ao final da segunda aplicação dinheiro suficiente para adquirir a TV? Se não, quanto faltará para completar o valor da TV?
Não. Faltarão aproximadamente 244,32 reais.

b) Discussão em equipe
Converse com seus colegas sobre a rapidez do avanço tecnológico e os reflexos desse processo para a sociedade, no que diz respeito aos mais variados aspectos sociais e econômicos. Relatem as experiências vivenciadas com o mundo tecnológico e os "frutos" que vocês conseguiram coletar com ela.

14. Em quanto tempo um capital dobrará se for aplicado, a juros compostos, à taxa de 30% ao ano?

Resolução:

$M = C \cdot f^{\,t}$

$M = 2C$

$2C = C \cdot 1{,}3^t \Rightarrow 1{,}3^t = 2 \Rightarrow \log 1{,}3^t = \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}3} = 2{,}64$ anos $\simeq$ 2 anos e 8 meses

Logo, o tempo deve ser de aproximadamente 2 anos e 8 meses.

15. Qual deve ser o tempo para que a quantia de R\$ 30 000,00 gere o montante de R\$ 32 781,81, quando aplicada à taxa de 3% ao mês, no sistema de juros compostos?

Resolução:

C: 30 000; M: 32 781,81; i: 3% ao mês (0,03); t: ?

$M = C(1+i)^t \Rightarrow (1+i)^t = \dfrac{M}{C} \Rightarrow (1{,}03)^t = \dfrac{32\,781{,}81}{30\,000} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}03)^t = 1{,}092727 \Rightarrow \log (1{,}03)^t = \log 1{,}092727 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \cdot \log 1{,}03 = \log 1{,}092727 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 1{,}092727}{\log 1{,}03} = 3$$

O tempo deve ser de 3 meses.

16. *Situação-problema inicial do capítulo*

Uma pessoa vai fazer uma compra no valor de R\$ 1800,00 usando o que tem depositado na caderneta de poupança, que está rendendo 1% ao mês. Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual plano de pagamento é mais vantajoso:

- pagar à vista;

ou

- pagar em duas prestações iguais de R\$ 903,00 cada uma, a primeira como entrada e a segunda depois de um mês.

Resolução:

Pagando à vista: toda a quantia de R\$ 1800,00 será gasta (sobrará 0).

Pagando em duas prestações de R\$ 903,00: como a caderneta de poupança utiliza o sistema de juros compostos, após o pagamento da primeira prestação sobrará a quantia de R\$ 897,00, que renderá juro de 1% até o pagamento da segunda prestação. Veja:

1% de 897 = 8,97

$M = 897 + 8{,}97 = 905{,}97$

$905{,}97 - 903 = 2{,}97$

Logo, o segundo plano de pagamento é o melhor, pois ainda sobrará a quantia de R\$ 2,97.

Exercícios

25. Quanto renderá a quantia de R$ 600,00, aplicada a juros simples, com a taxa de 2,5% ao mês, ao final de 1 ano e 3 meses? R$ 225,00 de juros.

26. Um capital de R$ 800,00, aplicado a juros simples com uma taxa de 2% ao mês, resultou no montante de R$ 880,00 após certo tempo. Qual foi o tempo de aplicação? 5 meses.

27. Uma dívida de R$ 750,00 foi paga 8 meses depois de contraída e os juros foram de R$ 60,00. Sabendo que o cálculo foi feito usando juros simples, qual foi a taxa de juros? 1% ao mês.

28. Um capital aplicado a juros simples rendeu, à taxa de 25% ao ano, juros de R$ 110,00 depois de 24 meses. Qual foi esse capital? R$ 220,00

29. Se uma mercadoria cujo preço é de R$ 200,00 for paga em 6 meses, com taxa de 20% ao ano, quanto será pago de juros no sistema de juros simples? R$ 20,00

30. Calcule o montante produzido por R$ 5 000,00 aplicado à taxa de 6% ao bimestre, após um ano, no sistema de juros compostos. R$ 7 092,59

31. Um capital de R$ 900,00 foi aplicado a juros de 18% ao ano durante 2 anos. Quanto rendeu de juros:

a) em porcentagem? 39,24%

b) em reais? R$ 353,16

32. Uma dívida de R$ 700,00 foi contraída a juros compostos de 2% ao mês para ser quitada em 4 meses.

a) Quanto deverá ser pago para quitar a dívida? R$ 757,70

b) Qual a taxa de juros acumulada nesse período de 4 meses? 8,24%

33. Carlos deixou R$ 800,00 aplicados por 3 anos em um fundo de investimento. Se o rendimento médio desse fundo foi de 1% ao mês, quanto Carlos tinha ao final desse período? R$ 1 144,62

34. Afonso depositará R$ 1 000,00 hoje na poupança, que rende, em média, 0,7% ao mês. Daqui a 6 meses, depositará mais R$ 1 000,00. Daqui a 1 ano, quanto ele terá na poupança? R$ 2 130,05

35. Investindo um capital a juros mensais de 4%, em quanto tempo vocês triplicarão seu capital? 28 meses.

36. Quando Luísa nasceu, seu pai investiu para ela R$ 600,00 em um fundo de investimento que rende, em média, 1,2% ao mês. Em quanto tempo Luísa terá mais de R$ 650,00? Em 7 meses.

37. Após quanto tempo, à taxa de 4% ao mês, a aplicação de R$ 1 000,00 renderá juros de R$ 170,00 no sistema de juros compostos? 4 meses.

38. Uma pessoa deseja aplicar R$ 10 000,00 a juros compostos e, no fim de 3 meses, obter um montante de R$ 11 248,64. Qual deve ser a taxa de juros? 4% ao mês.

39. (FGV-SP) Um capital de R$ 10 000,00, aplicado a juro composto de 1,5% ao mês, é resgatado ao final de 1 ano e 8 meses no montante, em reais, aproximadamente igual a:

a) 11 605,00.

b) 12 986,00.

x c) 13 456,00.

d) 13 895,00.

e) 14 216,00.

Dados:

x	x^{10}
0,8500	0,197
0,9850	0,860
0,9985	0,985
1,0015	1,015
1,0150	1,160
1,1500	4,045

40. (UEMT) Uma financiadora oferece empréstimos, por um período de 4 meses, sob as seguintes condições:

1ª) taxa de 11,4% ao mês, a juros simples;

2ª) taxa de 10% ao mês, a juros compostos.

Marcos tomou um empréstimo de R$ 10 000,00, optando pela primeira condição, e Luís tomou um empréstimo de R$ 10 000,00, optando pela segunda condição. Quanto cada um pagou de juros? Marcos pagou R$ 4 560,00 e Luís, R$ 4 641,00.

Conexão entre juros e funções

Consideremos uma dívida de R$ 10 000,00 paga com juros de 40% ao ano.

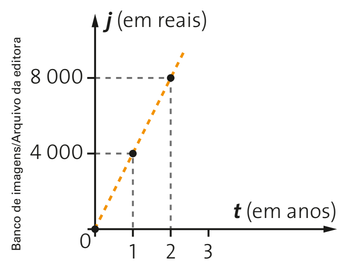
1º) No sistema de **juros simples**, os juros são obtidos em função do tempo de aplicação, por meio da equação $j = 10\,000 \cdot 0{,}4t$ ou $j = 4\,000t$.

Essa função tem uma equação do tipo da função linear ($f(x) = ax$), cujo gráfico é uma "reta" que passa pela origem.

A função linear foi estudada no Capítulo 3 do Volume 1 desta coleção.

Observe a tabela e o gráfico abaixo:

t	0	1	2	...
$j = f(t) = 4\,000t$	0	4 000	8 000	...



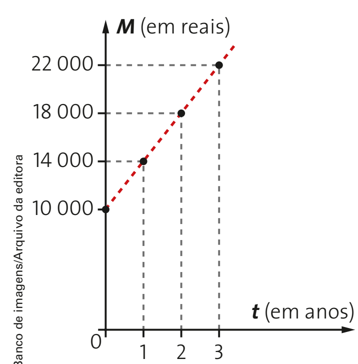
Fique atento!
Em $j = 4\,000t$, os valores de j são diretamente proporcionais aos valores de t e o coeficiente de proporcionalidade é 4 000.

2º) Ainda no sistema de **juros simples**, o montante é obtido em função do tempo, e a equação dessa função é $M = 10\,000 + 4\,000t$ ou $M = 4\,000t + 10\,000$, que é do tipo da função afim ($f(x) = ax + b$), cujo gráfico é uma "reta" que passa pelo ponto (0, 10 000).

Observe a tabela e o gráfico abaixo:

A função afim foi estudada no Capítulo 3 do Volume 1 desta coleção.

t	0	1	2	3	4	...
$M = g(t) = 4\,000t + 10\,000$	10 000	14 000	18 000	22 000	26 000	...



Fique atento!
Para $t = 0$, $M = 10\,000$, que é o capital da dívida.
O acréscimo anual é de 4 000 reais.

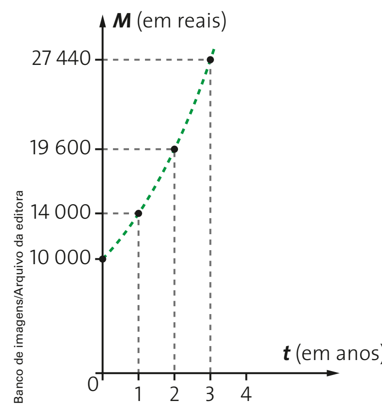
A sequência dos montantes a partir do primeiro ano (14 000, 18 000, 22 000, 26 000, ...) é uma PA de razão 4 000, cujo termo geral é dado por:

$$M_n = M_1 + (n-1)r \Rightarrow M_n = 14\,000 + (n-1)\cdot 4\,000 \Rightarrow M_n = \underbrace{4\,000n}_{\text{aumento anual}} + \underbrace{10\,000}_{\text{capital}}$$

3º) Já no sistema de **juros compostos**, o montante é obtido em função do tempo por meio da equação $M = 10\,000 \cdot 1{,}4^t$, que envolve uma variação do tipo exponencial ($f(x) = a \cdot b^x$). Veja a tabela e o gráfico a seguir:

A função exponencial foi estudada no Capítulo 5 do Volume 1 desta coleção.

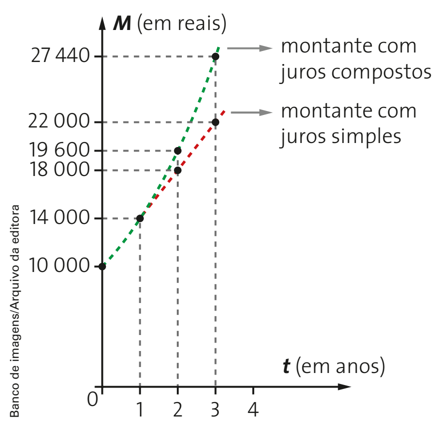
t	0	1	2	3	4	...
$M = h(t) = 10\,000 \cdot 1{,}4^t$	10 000	14 000	19 600	27 440	38 416	...



Como já estudamos, a sequência dos montantes a partir do primeiro ano (14 000, 19 600, 27 440, 38 416, ...) é uma PG de razão 1,4, cujo termo geral é dado por:

$$M_n = M_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow M_n = 14\,000 \cdot 1{,}4^{n-1} \Rightarrow M_n = 14\,000 \cdot \frac{(1{,}4)^n}{1{,}4} = 10\,000 \cdot (1{,}4)^n$$

4º) Vamos agora comparar os gráficos do 2º e do 3º itens, colocando-os em um mesmo sistema de eixos:



Observe que a intersecção dos gráficos ocorre no ponto (1, 14 000). Isso significa que após o período, nesse caso 1 ano, os montantes a juros simples e a juros compostos coincidem. A partir desse ponto, o gráfico do montante a juros compostos está sempre acima do gráfico do montante a juros simples, ou seja, para qualquer valor de t (em anos), $t > 1$, o montante da dívida a juros compostos é maior do que o montante a juros simples.

6 Equivalência de taxas

Considere a seguinte situação-problema:

Se um investimento rende 3% ao ano, quanto renderá em 10 anos?

$i = 3\% = 0{,}03$

Capital inicial: $C \rightarrow$ Montante após 1 ano: $C(1 + 0{,}03) \rightarrow$ Montante após 2 anos: $C(1 + 0{,}03)^2 \rightarrow \ldots$ $\rightarrow$ Montante após 10 anos: $C(1 + 0{,}03)^{10}$

Se I é a taxa de juros acumulada em 10 anos e i é a taxa de juros relativa a 1 ano, temos:

$$1 + I = (1 + i)^{10}$$

pois 10 anos equivalem a 10 períodos iguais a 1 ano.

Fique atento!
Se i é a taxa de juros relativa a 1 ano, a taxa de juros relativa a n anos é I tal que $1 + I = (1 + i)^n$.

No problema, temos:

$1 + I = (1 + 0{,}03)^{10} \Rightarrow 1 + I = (1{,}03)^{10} \Rightarrow 1 + I \simeq 1{,}3439 \Rightarrow I \simeq 0{,}3439 = 34{,}39\%$

Portanto, o investimento renderá aproximadamente 34,39% em 10 anos.

É possível provar que, se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativa ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativa ao período t, e se $T = nt$, então:

$$1 + I = (1 + i)^n$$

Fique atento!
- Taxa de juros é uma taxa de crescimento.
- Quando dizemos "12% ao ano com capitalização mensal" estamos falando em "1% ao mês".

Exercícios resolvidos

17. Qual é a taxa de juros mensal equivalente a uma taxa anual de 50%?

Resolução:

$I = 50\% = 0{,}5$

$1 + 0{,}5 = (1 + i)^{12} \Rightarrow 1{,}5 = (1 + i)^{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{1{,}5} = 1{,}034 \Rightarrow i = 0{,}034 = 3{,}4\%$

Portanto, a taxa mensal é de 3,4%.

Fique atento!
Use uma calculadora científica para extrair a raiz de índice 12.

18. Paula investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual é a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Paula?

Resolução:

Nesse caso, $i = 0{,}5\%$ ao mês.

I = taxa anual equivalente

$1 + I = (1 + 0{,}005)^{12} \Rightarrow I \simeq 0{,}0617 = 6{,}17\%$

A taxa anual de juros é de 6,17%.

Fique atento!
Nesse exemplo, a taxa de 6% ao ano é chamada **taxa nominal**. E a taxa de 6,17 ao ano é chamada **taxa efetiva**.

19. Qual é a taxa de juros anual equivalente a uma taxa mensal de 2%?

Resolução:

$i = 2\% = 0{,}02$

$1 + I = (1 + 0{,}02)^{12} \Rightarrow 1 + I \simeq 1{,}268 \Rightarrow$

$\Rightarrow I \simeq 0{,}268 = 26{,}8\%$

Portanto, a taxa anual é de 26,8%.

20. Para se proteger contra abusos, as pessoas precisam conhecer o Código de Defesa do Consumidor, instituído pela Lei n. 8.078, de 11 de setembro de 1990. Em relação aos financiamentos, por exemplo, a lei diz que os comerciantes devem informar aos consumidores a taxa de juros mensal e anual e outras informações pertinentes (número de parcelas, total a ser pago, etc.) quando estiverem anunciando uma venda a prazo.

Suponha que o gerente de *marketing* de uma loja tenha sugerido que a taxa anual de financiamento exibida nos folhetos publicitários não seja maior do que 70%, pois pesquisas indicam que taxas maiores do que essa assustam o consumidor.

Que taxa mensal máxima essa loja deve cobrar para atender à sugestão do gerente de *marketing*?

Resolução:

Temos $i = 70\% = 0{,}7$.

$1 + 0{,}7 = (1 + i)^{12} \Rightarrow 1{,}7 = (1 + i)^{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{1{,}7} \simeq 1{,}045 \Rightarrow i = 0{,}045 = 4{,}5\%$

A taxa mensal máxima deve ser de 4,5% ao mês.

Exercícios

41. Em uma cultura de bactérias, o número delas aumenta à taxa de 20% por minuto. Quanto crescerá esse número em 8 minutos? 329,98%

42. Uma seringa retira, de cada vez, 2% do remédio de um frasco. Depois de 10 vezes, quanto restará do remédio inicialmente existente no frasco? 81,71%

43. O número de torcedores de um time de futebol diminui 6% ao ano. Depois de 12 anos, quanto restará dos torcedores inicialmente existentes? 47,59%

44. Segundo o IBGE, a população do Brasil cresceu 0,87% em 2014. Se continuar crescendo à taxa de 0,87% ao ano, qual será seu crescimento em 2014? 9,05%

45. Qual é a taxa de juros anual equivalente a uma taxa mensal de 1%? 12,68%

46. Qual é a taxa de juros anual equivalente a uma taxa bimestral de 3%? 19,4%

47. Qual é a taxa de juros mensal equivalente a uma taxa de juros anual de 130%? 7,2%

48. A renda *per capita* é definida como o quociente do produto interno bruto (PIB) pela população economicamente ativa. Se nos próximos dez anos a população crescer 0,87% ao ano, quanto deverá crescer anualmente o PIB para que a renda *per capita* aumente 10% na próxima década? Aproximadamente 1,84%

Leituras

O cartão de crédito: amigo ou vilão?

Kenneth Man/Shutterstock

India Picture/Shutterstock

O cartão de crédito é um dos principais meios de pagamento atualmente. É um cartão de plástico que pode ou não conter um *chip*. Nos cartões com *chip* o pagamento só é efetuado mediante a digitação de uma senha.

Cada cartão de crédito possui um **limite**, ou seja, um valor máximo que se pode gastar e pagar por isso depois.

Todas as compras que o consumidor faz com o cartão de crédito são acumuladas para serem pagas mensalmente, em data previamente acertada com a empresa de crédito. Essas compras vêm discriminadas no que se chama **fatura** e o consumidor deve pagar pelo menos uma parte do valor total (conhecida como pagamento mínimo). O que não for pago é passado para a fatura do mês seguinte, acrescido de juros.

Os juros cobrados pelos cartões de crédito são um dos mais altos do mercado financeiro, por isso, pode não compensar passar a dívida para o mês seguinte. O ideal é sempre controlar os gastos e pagar a totalidade da fatura na data certa, todo mês, assim os juros do cartão são evitados.

Como o consumidor não percebe o dinheiro sendo gasto, é comum consumidores inexperientes gastarem demais e depois não conseguirem pagar a fatura, que vem muito alta. Nesses casos, é aconselhável fazer um empréstimo pessoal no banco, ou retirar dinheiro de alguma aplicação financeira, e pagar toda a fatura, para que a dívida não cresça no mês seguinte.

As operadoras de cartão, geralmente os bancos que emitem o cartão de uma empresa de crédito, costumam cobrar do consumidor uma taxa anual (**anuidade**) para manutenção da conta. Essa taxa varia de operadora para operadora e pode chegar a zero em determinados casos. Sempre vale a pena ligar para a operadora e negociar o valor dessa taxa.

Se o consumidor sempre pagar a fatura total, em dia, os gastos extras que ele poderá ter são a anuidade do cartão e, em alguns casos, o seguro.

O lucro das empresas de crédito vem dos estabelecimentos comerciais e dos altos juros cobrados nas faturas em atraso. No caso dos estabelecimentos comerciais, a empresa de crédito repassa ao lojista os valores das compras feitas com cartão, descontando uma taxa pelo serviço. Por exemplo, se o consumidor usa o cartão para comprar um produto de R$ 100,00, o consumidor pagará R$ 100,00 na fatura do cartão e o lojista receberá R$ 96,00 da empresa de crédito. Nesse caso, a taxa pelo serviço é de 4% sobre o valor da compra. A vantagem para o lojista é que ele sempre receberá da empresa de crédito; assim, se o consumidor não pagar, quem assume o prejuízo é a empresa de crédito, não o lojista. Então, vender no cartão é certeza de recebimento, ainda que recebendo um valor um pouco menor.

Assim, o cartão de crédito geralmente traz facilidades tanto para o consumidor quanto para o vendedor. Esse tipo de pagamento vem se consolidando mundialmente como uma das principais formas de pagamento, principalmente devido ao crescente comércio *on-line*.

Taxa de juro do cartão de crédito vai a 431,4% ao ano

A taxa de juros do rotativo do cartão de crédito subiu 99,8 pontos percentuais ao longo de 2015, alcançando 431,4% ao ano em dezembro de 2015. Em relação a novembro daquele mesmo calendário, a taxa subiu 16,1 pontos percentuais. O rotativo é a linha de crédito pré-aprovada no cartão e inclui saques feitos na função crédito do meio de pagamento. As concessões do rotativo de cartão de crédito somaram R$ 25,916 bilhões em dezembro, com queda de 3,7% perante o mês anterior, mas alta de 1,6% no comparativo com o fim de 2014. A inadimplência na modalidade correspondeu a 40,3%. Em novembro, estava em 37,8%. A inadimplência média do mercado foi de 3,4% no fim de 2015.

Fonte: O valor. Disponível em: <www.valor.com.br/financas/4412306/taxa-de-juro-do-cartao-de-credito-vai-4314-ao-ano-aponta-bc>. Acesso em: 16 maio 2016.

O Sistema Financeiro Nacional

No Brasil, o conjunto de instituições que possibilitam a ligação entre pessoas e empresas que dispõem de dinheiro para emprestar e pessoas e empresas que necessitam de dinheiro e se oferecem para tomá-lo emprestado é denominado **Sistema Financeiro Nacional**. Fazem parte desse sistema os bancos comerciais, a Caixa Econômica Federal, as cooperativas de crédito e as instituições similares. Esse sistema, que movimenta vultosos recursos diariamente, é regulamentado por lei e permeia todo o território nacional, influenciando a vida de todos os brasileiros.

Quem empresta dinheiro no mercado financeiro tem por motivação os juros que pode ganhar durante o tempo em que o seu dinheiro estiver emprestado. Esses juros são calculados por meio de porcentagens e sistemas de juros simples e juros compostos. Para o cálculo das porcentagens e desses juros, é necessário conhecer técnicas de Matemática. Matemática financeira é o ramo da Matemática que trata dos métodos utilizados para efetuar esses cálculos.

A taxa Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) é a média de juros que o governo brasileiro paga por empréstimos tomados dos bancos. Quando a taxa Selic é alta, os bancos preferem emprestar ao governo porque ele paga muito bem e o banco tem todas as garantias de recebimento. Quando a Selic é baixa, os bancos preferem emprestar dinheiro à população.

Quando existe risco de inflação alta, o Comitê de Política Monetária (Copom) do Banco Central aumenta a taxa Selic e a inflação geralmente recua.

VIANA, Josimar. *O Sistema Financeiro Nacional*. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_unioeste_mat_pdp_lucia_catarina_matte.pdf>. Acesso em: 9 maio 2016.

Agora, responda:

1. Após ter lido o texto *O cartão de crédito: amigo ou vilão?*, na sua opinião quais são as vantagens e desvantagens de utilizar um cartão de crédito? Resposta pessoal.
2. Com base no trecho da reportagem *Taxa de juro do cartão de crédito vai a 431,4% ao ano* e desconsiderando a taxa de manutenção do cartão, quanto uma pessoa pagaria às operadoras de cartões de crédito ao contrair uma dívida de 100 reais em dezembro de 2015 e depois atrasar sua fatura por 3 meses? R$ 152,09
3. Quanto o governo gastaria a mais ao final de um ano com o aumento de 0,5% na taxa anual de juros, supondo-se que ele tenha tomado um empréstimo de R$ 1 000 000 000,00 de bancos? R$ 5 000 000,00
4. Sabendo que em janeiro de 2016 a taxa Selic era de 14,25% ao ano, suponha que o Brasil resolva fazer uma sequência de redução da sua taxa básica de juros. A redução proposta consistiria em reduzir 0,05 ponto percentual (ao ano) da taxa Selic a cada mês até atingir a taxa de 0,1% ao ano. Em quanto tempo a taxa básica de juros do Brasil chegará a esse valor? 283 meses.
5. De acordo com o Banco Central do Brasil, em janeiro de 2016 foi cobrada de pessoas físicas uma taxa média de aproximadamente 187% ao ano no cheque especial.
   a) Quanto o governo pagará de juros a cada R$ 1 000,00 que tomou emprestado dos bancos ao final de um ano, tendo como base a taxa Selic de 14,25% ao ano? R$ 142,50
   b) Quanto um cidadão que utiliza R$ 1 000,00 do seu cheque especial pagará após um ano, tendo como base a taxa do cheque especial? R$ 1 870,00

CAPÍTULO 2

Estatística

Ismar Ingber/Pulsar Imagens

Recenseadora do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) utilizando um computador de mão durante uma pesquisa realizada no Rio de Janeiro (RJ) para o Censo Demográfico 2010. Fotografia de 2010. Os recenseadores são responsáveis por coletar informações censitárias (Censo) e preencher questionários de pesquisas para fins estatísticos.

1 Termos de uma pesquisa estatística

O uso da pesquisa é bastante comum nas várias atividades humanas. Veja alguns exemplos:

a) As indústrias costumam realizar pesquisas entre os consumidores antes do lançamento de um novo produto no mercado.

b) As pesquisas eleitorais fornecem elementos para que os candidatos direcionem a campanha.

c) A pesquisa do desempenho dos atletas ou das equipes em uma partida ou em um campeonato ajuda no planejamento dos treinamentos.

d) Emissoras de tevê utilizam pesquisas que mostram a preferência dos espectadores para organizar sua programação.

O filme *O homem que mudou o jogo*, com seis indicações para o Oscar em 2012, pode ser usado na introdução deste capítulo, pois mostra uma das inúmeras aplicações da Estatística: um gerente geral tem a árdua tarefa de escolher jogadores desacreditados com base em suas médias estatísticas. Recomende aos alunos ou reproduza o filme em sala de aula.

A realização de uma pesquisa envolve muitas etapas, como a escolha da amostra, a coleta e a organização dos dados (informações), o resumo desses dados (em tabelas, gráficos, etc.) e a interpretação dos resultados.

A parte da Matemática que trata desses assuntos é a **Estatística**. Neste capítulo, vamos estudar noções de Estatística, como a construção e a interpretação de gráficos.

Vamos iniciar uma pesquisa coletando alguns dados da turma. Para isso, façam o que se pede no caderno.

a) Anotem a quantidade de irmãos de cada aluno da turma.

b) Organizem os dados em uma tabela. Veja um exemplo: Respostas pessoais.

Quantidade de irmãos de cada aluno da turma

Quantidade de irmãos	Quantidade de alunos
0	
1	
⋮	

Fonte: Dados obtidos em sala de aula.

Estes dados serão analisados no próximo tópico.

c) Guardem esses dados, pois eles serão usados posteriormente.

População e amostra

Se quisermos saber, por exemplo, qual a matéria favorita entre os alunos de uma classe, podemos consultar todos os alunos da classe.

No entanto, isso não é possível quando queremos pesquisar sobre a intenção de voto dos eleitores do estado de São Paulo, pois não podemos consultar todos os eleitores que constituem a **população** ou o **universo estatístico**.

Recorremos, então, ao que se chama de **amostra**, ou seja, um grupo de eleitores que, consultados, permitem que se chegue ao resultado mais próximo possível da realidade.

É comum aparecer na publicação das pesquisas quantos eleitores foram consultados, pois a escolha da amostra (quantos e quais eleitores) é fundamental para o resultado.

Chamando de U o universo estatístico e de A uma amostra, temos:

$$A \subset U$$

Para refletir
Em que situação temos $A = U$?

Quando todos os elementos do universo são pesquisados.

Na pesquisa feita com os colegas da turma sobre o número de irmãos, temos uma população ou uma amostra? Se apenas parte da turma respondeu à pergunta, então temos uma amostra da turma. Se todos responderam, então temos, em relação à turma, uma população.

Indivíduo ou objeto

Cada elemento que compõe a amostra é um **indivíduo** ou **objeto**. No exemplo da intenção de voto, os indivíduos da pesquisa são pessoas. Quando se consideram algumas marcas de lâmpada para testar a durabilidade, cada marca é um objeto da pesquisa.

Variável

Uma indústria automotiva que pretende lançar um novo modelo de carro faz uma pesquisa para sondar a preferência dos consumidores sobre tipo de combustível, número de portas, potência do motor, preço, cor, tamanho, etc. Cada uma dessas características é uma **variável** da pesquisa.

Na variável "tipo de combustível", a escolha pode ser, por exemplo, entre etanol e gasolina. Dizemos que esses são **valores** ou **realizações** da variável "tipo de combustível".

> **Para refletir**
> "Esporte favorito" é uma **variável qualitativa nominal**. Justifique.

Variável qualitativa

Em uma pesquisa que envolve pessoas, por exemplo, as variáveis consideradas podem ser sexo, cor de cabelo, esporte favorito e grau de instrução. Nesse caso dizemos que as variáveis são **qualitativas**, pois apresentam como possíveis valores uma qualidade (ou atributo) dos indivíduos pesquisados.

Além disso, dizemos que as variáveis qualitativas podem ser **ordinais**, quando existe uma ordem nos seus valores, ou **nominais**, quando isso não ocorre.

Por exemplo, "grau de instrução" é uma **variável qualitativa ordinal**, já que seus valores podem ser ordenados (Fundamental, Médio, Superior, etc.).

Variável quantitativa

Quando as variáveis de uma pesquisa são, por exemplo, altura, peso, idade em anos e número de irmãos, dizemos que elas são **quantitativas**, pois seus possíveis valores são números.

As variáveis quantitativas podem ser **discretas**, quando se trata de contagem (números inteiros), ou **contínuas**, quando se trata de medida (números reais).

Por exemplo:

a) "Número de irmãos" é uma variável quantitativa discreta, pois podemos contar (0, 1, 2, etc.).

b) "Altura" é uma variável quantitativa contínua, uma vez que pode ser medida (1,55 m, 1,80 m, 1,73 m, etc.).

Veja um quadro-resumo dos tipos de variável de uma pesquisa:

$$\text{Variável}\begin{cases}\text{qualitativa}\begin{cases}\text{nominal}\\ \text{ordinal}\end{cases}\\ \\ \text{quantitativa}\begin{cases}\text{discreta}\\ \text{contínua}\end{cases}\end{cases}$$

> **Fique atento!**
> A idade em anos exatos pode ser considerada variável quantitativa discreta (8, 10, 17, etc.).

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

Veja as respostas dos itens **a** e **b** do exercício 2 na seção Respostas.

1. Classifique as variáveis em qualitativas nominais, qualitativas ordinais, quantitativas discretas ou quantitativas contínuas:

a) número de alunos da sua sala; quantitativa discreta

b) altura dos professores; quantitativa contínua

c) cor do cabelo de determinada pessoa; quantitativa nominal

d) número de defeitos observados em um equipamento eletrônico; quantitativa discreta

e) tipos de defeitos observados em cada unidade de determinado produto; quantitativa nominal

f) série em que um aluno estuda. quantitativa ordinal

2. Uma concessionária de automóveis tem cadastrados 3 500 clientes e fez uma pesquisa sobre a preferência de compra em relação a "cor" (branco, vermelho ou azul), "preço", "número de portas" (duas ou quatro) e "estado de conservação" (novo ou usado). Foram consultados 210 clientes. Diante dessas informações, responda:

a) Qual é o universo estatístico e qual é a amostra dessa pesquisa?

b) Quais são as variáveis e qual é o tipo de cada uma?

c) Quais os possíveis valores da variável "cor" nessa pesquisa? Branca, vermelha e azul.

Frequência absoluta e frequência relativa

Suponha que entre um grupo de turistas, participantes de uma excursão, tenha sido feita uma pesquisa sobre a nacionalidade de cada um e que o resultado dela tenha sido o seguinte: Pedro: brasileiro; Ana: brasileira; Ramón: espanhol; Laura: espanhola; Cláudia: brasileira; Sérgio: brasileiro; Raúl: argentino; Nélson: brasileiro; Sílvia: brasileira; Pablo: espanhol.

O número de vezes que um valor da variável é citado representa a **frequência absoluta** daquele valor.

Nesse exemplo, a variável é "nacionalidade" e a frequência absoluta de cada um de seus valores é: brasileira, 6; espanhola, 3; e argentina, 1.

Existe também a **frequência relativa**, que registra a frequência absoluta em relação ao total de citações.

Nesse exemplo, temos:

- frequência relativa da nacionalidade brasileira: 6 em 10 ou $\frac{6}{10}$ ou $\frac{3}{5}$ ou 0,6 ou 60%;
- frequência relativa da nacionalidade espanhola: 3 em 10 ou $\frac{3}{10}$ ou 0,3 ou 30%;
- frequência relativa da nacionalidade argentina: 1 em 10 ou $\frac{1}{10}$ ou 0,1 ou 10%.

Fique atento!
A frequência relativa pode ser expressa em fração, decimal ou porcentagem.

Podemos associar a frequência relativa de um evento à probabilidade de que ele ocorra. Se o número total de citações for suficientemente grande, a frequência relativa se estabiliza em torno de um número que expressa a probabilidade de ocorrência desse evento.

Tabela de frequências

A tabela que mostra a variável e suas realizações (valores), com as frequências absoluta (FA) e relativa (FR), é chamada **tabela de frequências**.

Assim, usando o mesmo exemplo, temos:

Frequências da nacionalidade de um grupo de turistas

Nacionalidade	FA	FR
Brasileira	6	60%
Espanhola	3	30%
Argentina	1	10%
Total	10	100%

Fonte: Dados fictícios.

Fique atento!
A soma de todas as frequências relativas de uma amostra totaliza 100% ou 1.

Exercício

3. Um grupo de alunos foi consultado sobre o time pernambucano de sua preferência, e os votos foram registrados assim: Central; Náutico; Santa Cruz; Sport. Construa no caderno a tabela de frequências correspondente a essa pesquisa. Veja a tabela no Manual do Professor.

Tabelas de frequências das variáveis quantitativas

Já sabemos que a variável quantitativa tem seus possíveis valores indicados por números. Veremos agora que, na elaboração de suas tabelas de frequências, podemos deparar com duas situações.

Para isso, acompanhe o exemplo de um grupo de alunos dos quais foram registrados a idade (em anos), o "peso" (em quilogramas) e a altura (em metros).

Alberto: 14 a, 49 kg e 1,73 m;
Alexandre: 14 a, 46,5 kg e 1,66 m;
Carlos: 16 a, 53 kg e 1,78 m;
Cláudio: 15 a, 50 kg e 1,75 m;
Eduardo: 14 a, 51 kg e 1,68 m;
Flávio: 15 a, 49 kg e 1,70 m;
Geraldo: 14 a, 44 kg e 1,62 m;
Gilberto: 15 a, 51 kg e 1,76 m;
Hélio: 14 a, 48,3 kg e 1,68 m;
José Carlos: 16 a, 52 kg e 1,79 m;
José Luís: 14 a, 49 kg e 1,74 m;
Lúcio: 14 a, 46,5 kg e 1,65 m;
Marcos: 15 a, 48 kg e 1,63 m;
Mário: 14 a, 48,5 kg e 1,69 m;
Maurício: 16 a, 50 kg e 1,70 m;
Mílton: 14 a, 52 kg e 1,75 m;
Renato: 14 a, 46 kg e 1,72 m;
Roberto: 15 a, 47 kg e 1,69 m;
Saul: 14 a, 51 kg e 1,73 m;
Sérgio: 14 a, 49 kg e 1,66 m.

Primeira situação:

Ao elaborar a tabela de frequências da variável "idade", notamos que aparecem como possíveis valores 14 anos, 15 anos e 16 anos:

Frequências da idade de um grupo de alunos

Idade (anos)	14	15	16	total
Contagem				
FA	12	5	3	20
FR (fração)	$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	1
FR (%)	60	25	15	100

Fonte: Dados fictícios.

Segunda situação:

Para a variável "altura" aparecem muitos valores diferentes, o que torna inviável colocar na tabela uma linha para cada valor. Em casos como esse, agrupamos os valores em intervalos (ou classes), como veremos a seguir:

1º) Calculamos a diferença entre a maior e a menor altura registrada, obtendo a amplitude total ($1{,}79$ m $-$ $1{,}62$ m $=$ $0{,}17$ m).

2º) Escolhemos o número de intervalos (geralmente superior a quatro), consideramos um número conveniente (um pouco acima da amplitude total) e determinamos a amplitude de cada intervalo (classe). No exemplo, para 6 intervalos, fazemos $0{,}18$ m $:$ $6 = 0{,}03$ m.

3º) Elaboramos a tabela de frequências:

Frequências da altura de um grupo de alunos

Altura (em classes)	**Contagem**	**FA**	**FR** (decimal)	**FR** (%)
$1{,}62 \vdash 1{,}65$ m		2	0,10	10
$1{,}65 \vdash 1{,}68$ m		3	0,15	15
$1{,}68 \vdash 1{,}71$ m		6	0,30	30
$1{,}71 \vdash 1{,}74$ m		3	0,15	15
$1{,}74 \vdash 1{,}77$ m		4	0,20	20
$1{,}77 \vdash 1{,}80$ m		2	0,10	10
Total		20	1,00	100

Fonte: Dados fictícios.

Observações:

1ª) As classes (intervalos) foram obtidas, a partir de 1,62 m, fazendo a adição de 0,03 (1,62 + 0,03 = 1,65; 1,65 + 0,03 = 1,68; e assim por diante).

2ª) O símbolo ⊢—— indica intervalo fechado à esquerda e aberto à direita. Assim, a altura 1,68 m não foi registrada em 1,65 ⊢—— 1,68 m. Ela foi registrada no intervalo 1,68 ⊢—— 1,71 m.

Usando os dados da mesma pesquisa (página anterior), elabore no caderno a tabela de frequências da variável "peso" com seus valores agrupados em 5 classes. Veja a tabela no Manual do Professor.

Vamos agora retomar os termos de Estatística vistos até aqui por meio da seguinte situação: em uma escola com 5 classes de 1º ano do Ensino Médio, cada uma com 45 alunos, foi feita uma pesquisa para traçar o perfil do 1º ano. Para tanto, foram selecionados 5 alunos de cada classe, que responderam a um questionário.

Resultado da pesquisa

Nome	Sexo	Idade (anos/meses)	Altura (cm)	Peso (kg)	Número de irmãos	Cor do cabelo	*Hobby*	Número do sapato	Manequim	Desempenho em Matemática
Antônio	M	15 a 4 m	156	49	2	castanho	esporte	36	38	ótimo
Artur	M	14 a 7 m	166	48	0	castanho	esporte	39	38	bom
Áurea	F	15 a 2 m	165	66	1	castanho	música	36	42	insuficiente
Bruno	M	14 a 8 m	175	63	0	castanho	patinação	40	42	regular
Carla	F	14 a 5 m	165	57	2	loiro	música	36	40	regular
Cláudia	F	15 a 3 m	164	50	2	loiro	dança	36	38	bom
Domingos	M	14 a 6 m	163	51	1	castanho	esporte	36	38	bom
Edite	F	14 a 7 m	160	60	3	castanho	música	36	40	ótimo
Flávia	F	14 a 7 m	175	65	1	castanho	esporte	37	42	bom
Fúlvio	M	14 a 5 m	150	38	1	ruivo	esporte	34	36	insuficiente
Geraldo	M	15 a 11 m	146	38	0	castanho	aeromodelismo	34	36	regular
José	M	14 a 10 m	165	52	1	castanho	dança	38	38	regular
Laura	F	14 a 0 m	165	53	2	castanho	dança	36	38	bom
Lúcia	F	14 a 8 m	167	65	2	castanho	música	37	42	bom
Mário	M	15 a 4 m	165	50	3	loiro	patinação	36	38	insuficiente
Mauro	M	14 a 11 m	163	54	4	castanho	esporte	38	40	ótimo
Nívea	F	15 a 2 m	164	63	1	loiro	esporte	38	42	bom
Orlando	M	14 a 8 m	159	64	2	castanho	música	37	42	regular
Patrícia	F	15 a 1 m	158	43	1	loiro	dança	36	36	insuficiente
Paula	F	14 a 11 m	163	53	1	castanho	dança	36	38	bom
Renata	F	14 a 3 m	162	52	1	castanho	dança	36	38	ótimo
Roberto	M	14 a 2 m	167	53	0	castanho	esporte	40	38	ótimo
Sandra	F	14 a 10 m	167	58	1	loiro	dança	40	40	ótimo
Teresa	F	15 a 9 m	155	49	0	castanho	patinação	35	36	ótimo
Vânia	F	15 a 2 m	152	41	3	castanho	música	34	36	bom

Fonte: Dados fictícios.

A partir do enunciado e do quadro da página anterior, podemos afirmar:

1º) O universo estatístico é constituído de 225 alunos.

2º) A amostra dessa pesquisa é constituída de 25 alunos.

3º) “Cor do cabelo” é uma variável qualitativa nominal.

4º) “Número de irmãos” é uma variável quantitativa discreta.

5º) “Desempenho em Matemática” é uma variável qualitativa ordinal.

6º) “Altura” é uma variável quantitativa contínua.

7º) “Dança” é um valor da variável *hobby*, cuja frequência absoluta é 7 e cuja frequência relativa é $\frac{7}{25}$ ou 0,28 ou 28%.

8º) A tabela de frequências da variável “número de irmãos” é a seguinte:

Frequências do número de irmãos de um grupo de alunos

Número de irmãos	Contagem	FA	FR	FR
0		5	$\frac{5}{25} = 0{,}2$	20%
1		10	$\frac{10}{25} = 0{,}4$	40%
2		6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	24%
3		3	$\frac{3}{25} = 0{,}12$	12%
4		1	$\frac{1}{25} = 0{,}04$	4%
Total		25	1	100%

Fonte: Dados fictícios.

9º) A tabela de frequências da variável “peso” (em quilograma), com os valores em classes:

Amplitude total: $66 - 38 = 28$

Número de intervalos: 5

Amplitude relativa: $30 : 5 = 6$

Frequências do peso de um grupo de alunos

Peso (kg)	Contagem	FA	FR
$38 \vdash 44$		4	16%
$44 \vdash 50$		3	12%
$50 \vdash 56$		9	36%
$56 \vdash 62$		3	12%
$62 \vdash 68$		6	24%
Total		25	100%

Fonte: Dados fictícios.

Fique atento!

Os exercícios 4, 5 e 6 da página seguinte devem ser resolvidos com base nas informações desta página e da anterior.

Exercícios

Atividade em dupla   Atividade em equipe

Fique atento!
Não se esqueça de consultar a tabela da página 36.

4. Responda:

a) Das variáveis do quadro, quais são qualitativas nominais? Sexo, cor do cabelo, *hobby*.

b) Quais são os valores da variável "sexo"? **M** (masculino) e **F** (feminino).

c) Qual é a frequência absoluta do valor 38 da variável "manequim"? E a frequência relativa (em fração, decimal e porcentagem)? 10; $\frac{10}{25}$; 0,4 e 40%

d) Qual é o valor da variável "cor do cabelo" cuja frequência relativa é 72%? Castanho.

Veja a resolução dos exercícios 5, 6, 7 e 9 no Manual do Professor.

5. Elabore no caderno a tabela de frequências da variável "desempenho em Matemática".

6. Construa no caderno a tabela de frequências da variável "altura" (em centímetros), com os valores em 6 intervalos (classes).

7. A tabela a seguir é resultante de uma pesquisa. Copiem e completem a tabela no caderno.

Frequências do gênero musical mais procurado em um *site* de músicas

Gênero musical	FA	FR	FR	FR
Sertanejo				30%
MPB		$\frac{6}{25}$		
Rock				
Clássico			0,14	
Total	50			

Fonte: Dados fictícios.

8. Foi feito o levantamento dos salários dos funcionários de uma empresa e, em seguida, foi elaborada a tabela de frequências, com os valores da variável em classes. Copiem e completem a tabela no caderno.

Frequências do salário dos funcionários de uma empresa

Salário (R$)	FA	FR	
⊢		10%	6
⊢	15		25%
⊢	30	50%	
⊢	6		10%
960 ⊢ 1050			3; 5%
Total			60; 100%

Fonte: Dados fictícios.

9. *Fenótipo*

O termo "fenótipo" (do grego *pheno*, evidente, brilhante, e *typos*, característico) significa o conjunto de características de um indivíduo, sejam elas físicas, morfológicas ou fisiológicas.

Como exemplos de características do fenótipo temos a cor dos olhos, dos cabelos, da pele, etc.

O fenótipo de uma pessoa pode ser alterado ao longo de sua vida. Uma pessoa de pele clara, por exemplo, se exposta ao sol todos os dias, terá a sua pele escurecida com o passar dos anos.

Caso queira, uma pessoa pode alterar o seu fenótipo: pessoas magras podem adquirir massa muscular ao se exercitarem, assim como pessoas loiras podem escurecer os cabelos.

Vejamos o resultado de uma pesquisa realizada com 50 dos 200 alunos do Ensino Médio de certa escola:

Resultado da pesquisa

Sexo	Masculino	Feminino
Nº de alunos	20	30

Altura (em metros)	Até 1,50	1,51 a 1,65	1,66 a 1,70	Acima de 1,70
Nº de alunos	8	20	12	10

Cor dos olhos	Azul	Verde	Castanho	Preto
Nº de alunos	4	6	30	10

Cor do cabelo	Castanho	Loiro	Preto	Ruivo
Nº de alunos	20	16	12	2

Tipo sanguíneo	A	B	AB	O
Nº de alunos	10	18	8	14

Fonte: Dados fictícios.

a) Identifiquem as variáveis utilizadas.

b) Classifiquem cada uma das variáveis.

c) Os 50 alunos consultados representam uma população ou uma amostra? Justifiquem.

d) Qual é a frequência absoluta do sexo feminino? E a frequência relativa?

e) Qual é a amplitude relativa referente à tabela de frequências da variável "altura"?

f) Qual é a frequência relativa à cor dos olhos mais comum na amostra? E à cor do cabelo menos frequente?

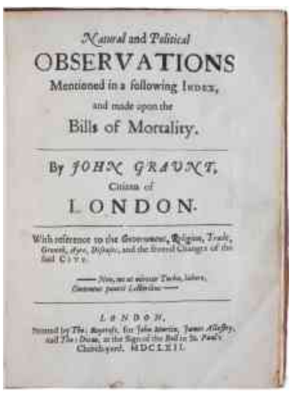
O início da Estatística

Os romanos usaram censos nos territórios conquistados para conhecer o que cada um produzia e, assim, estabelecer o imposto a ser pago. No século XI, Guilherme, o invasor normando da Inglaterra, determinou que fossem anotadas as propriedades dos conquistados (no caso, anglo-saxões). Entretanto, coletas de dados como essas estavam longe do que entendemos hoje por Estatística: um conjunto de métodos para o tratamento dos dados numéricos que podem ser afetados por muitas causas e servir para previsões com base na probabilidade. (Veja na página 57 o tópico Estatística e probabilidade.)

John Graunt nasceu em Londres (Inglaterra). Como oficial da reserva, tinha o título de capitão e foi uma pessoa bastante influente na administração de sua cidade natal. Não era matemático, mas tinha grande curiosidade por dados sobre a população. Com seu amigo William Petty, médico, desenvolveu métodos estatísticos para analisar o censo populacional da Inglaterra.

Wikipédia/Wikimedia Commons.

Gravura do capitão John Graunt (1620–1674).


Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.
By JOHN GRAUNT,
Citizen of
LONDON.
LONDON,
MDCLXII.

Wikipédia/Biblioteca da Fundação Mansutti, Milão, Itália.

Capa do livro *Observações naturais e políticas mencionadas em uma sequência de índices e feitas nas listas de mortalidade* (tradução livre).

Em 1662 Graunt publicou o livro *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality*, em que analisa regularidades estatísticas em grande número de dados sobre a população. Os dados usados por Graunt compreendiam observações anuais de 1604 a 1660, feitas nas igrejas de Londres, e algumas conclusões foram inesperadas, desafiando a imaginação de quem tentasse explicá-las. Duas delas foram:

- havia maior nascimento de crianças do sexo masculino que do feminino, mas a distribuição de ambos os sexos na população geral era praticamente a mesma;
- havia maior mortalidade nas zonas urbanas em relação às zonas rurais.

Na Inglaterra, em meados do século XVII, havia registros de nascimentos e mortes, mas essa informação não era tratada adequadamente. Desse modo, não refletia o que realmente estava acontecendo com a população em relação a sua idade. John Graunt reuniu essas informações em uma tabela chamada "Tabela da vida", que marcou o início da Estatística moderna.

Tabela da vida

Intervalo de idade	Mortes no intervalo	Sobreviventes até o início do intervalo
0-6	36%	100%
7-16	24%	64%
17-26	15%	40%
27-36	9%	25%
37-46	6%	16%
47-56	4%	10%
57-66	3%	6%
67-76	2%	3%
77-86	1%	1%

Fonte dos dados: Escola de engenharia George R. Brown. Disponível em: <www.stat.rice.edu/stat/FACULTY/courses/stat431/Graunt.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2016.

Na primeira coluna da tabela acima aparecem os intervalos de idade; na segunda coluna, cada número é a porcentagem da população que morreu naquela faixa de idade; por exemplo, a tabela indica que 15% da população morreu na faixa de 17 a 26 anos; e a terceira coluna mostra a porcentagem da população que está viva no início do intervalo de idades; por exemplo, somente 10% da população chegou aos 47 anos de idade. A partir dessa época, ficou claro que não bastava ter registros e informações sobre todas as atividades humanas: era preciso tratá-las, compreendê-las e realizar previsões para o futuro. Assim, a Estatística passou a ser desenvolvida como uma área de pesquisa a partir do trabalho de John Graunt.

2 Representação gráfica

A representação gráfica fornece uma visão de conjunto mais rápida que a observação direta dos dados numéricos. Por isso, os meios de comunicação com frequência oferecem a informação estatística por meio de gráficos.

Consideremos uma situação em que, na votação para representante e vice-representante do 1º ano do Ensino Médio, um aluno anota os votos com um "×" ao lado do nome do candidato, enquanto seus colegas votam. Ao terminar a votação, podemos observar o resultado abaixo.

Adriano	× × × × × × × × × × × × ×
Letícia	× × × × × × ×
Luciana	× × × × × × × × × ×
Marino	× × × × × ×
Magda	× × × ×

Fonte: Dados fictícios.

Não precisamos contar os votos para saber quem foi eleito. Pelos "xis", notamos que Adriano foi o escolhido para representante e Luciana para vice.

Com uma simples olhada, obtemos a informação de que necessitamos. Essa é uma característica importante dos gráficos estatísticos.

Gráfico de segmentos

A tabela a seguir mostra a venda de livros em uma livraria no segundo semestre de determinado ano.

Evolução da venda de livros (julho-dezembro)

Meses do segundo semestre	julho	agosto	setembro	outubro	novembro	dezembro
Número de livros vendidos	350	300	400	400	450	500

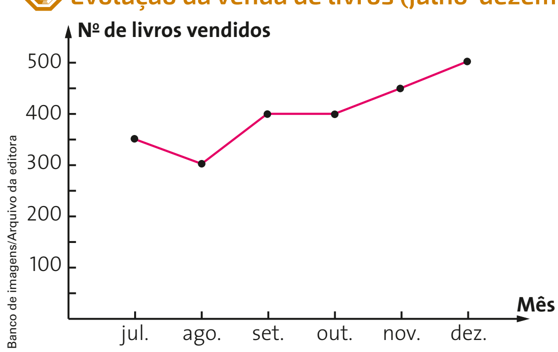
Fonte: Dados fictícios.

Essa situação estabelece uma correspondência que pode ser expressa por pares ordenados (julho, 350), (agosto, 300), etc. Usando eixos cartesianos, localizamos os seis pares ordenados e construímos um gráfico de segmentos.

Os gráficos de segmentos são utilizados principalmente para mostrar a evolução das frequências dos valores de uma variável durante certo período.

A posição de cada segmento indica crescimento, decréscimo ou estabilidade. Já a inclinação do segmento sinaliza a intensidade do crescimento ou do decréscimo.

Evolução da venda de livros (julho-dezembro)



Fonte: Dados fictícios.

Explique aos alunos que as escalas escolhidas para os eixos coordenados variam de acordo com a necessidade de representação.

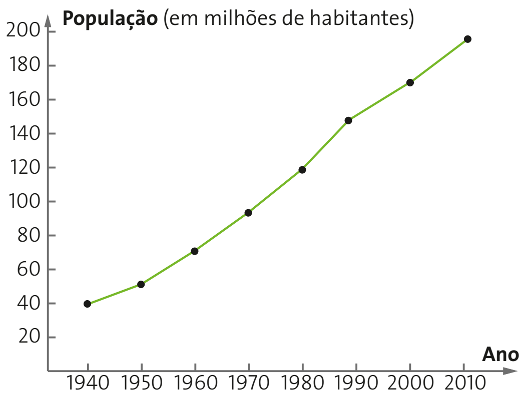
Fique atento!
O gráfico de segmentos é chamado também de gráfico de linhas.

Pelo gráfico acima, podemos observar que:

- de julho para agosto as vendas caíram;
- de setembro para outubro as vendas permaneceram estáveis;
- o crescimento de agosto para setembro foi maior do que o de outubro para novembro;
- o mês com maior número de vendas, desse período, foi dezembro;
- no mês de outubro foram vendidos 400 livros.

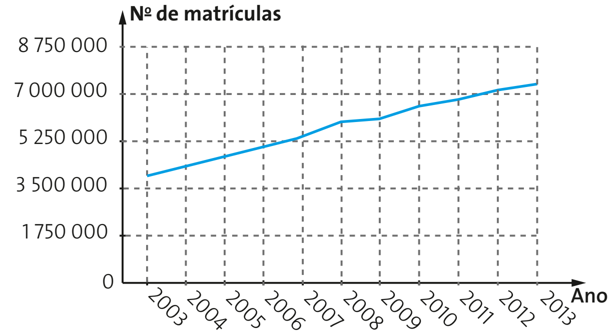
Veja outros exemplos de gráficos de segmentos.

Crescimento da população brasileira (1940-2010)



Fonte: IBGE.

Número de alunos matriculados no Ensino Superior no Brasil



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: <http://painel.mec.gov.br/painel.php?modulo=principal/detalhamentoIndicador&acao=A&detalhes=pais&indid=439>. Acesso em: 11 fev. 2016.

Você sabia?
Os dados do gráfico acima, à esquerda, foram obtidos do Censo Demográfico 2010, que é uma pesquisa realizada a cada 10 anos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). O primeiro Censo brasileiro aconteceu em 1872 e chamava-se Recenseamento da População do Império do Brasil. Os pesquisadores do IBGE visitam todos os domicílios do país para aplicar um questionário e posteriormente os dados são analisados e publicados em estudos sobre diversos temas.

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 11 e 12 no Manual do Professor.

10. Utilize o gráfico de segmentos do exemplo dado (venda de livros) na página anterior e responda:

a) Em que períodos do segundo semestre as vendas subiram? De agosto a setembro e de outubro a dezembro.
b) Em qual destes dois meses as vendas foram maiores: julho ou outubro? Outubro.
c) Em que mês do semestre as vendas foram menores? Agosto.
d) Em que mês foram vendidos 450 livros? Novembro.

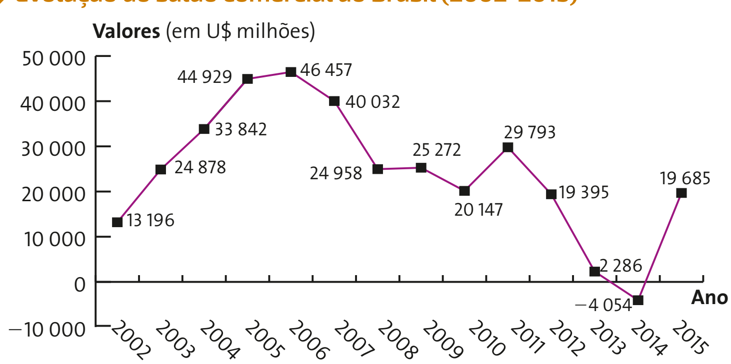
11. Um aluno apresentou durante o ano letivo o seguinte aproveitamento: primeiro bimestre: nota 7,0; segundo bimestre: nota 6,0; terceiro bimestre: nota 8,0; e quarto bimestre: nota 8,0. Construa no caderno um gráfico de segmentos correspondente a essa situação e, a partir dele, tire algumas conclusões.

12. Uma professora anotou o número de faltas dos alunos, durante um semestre, de acordo com os dias da semana. Observe as anotações, construa o gráfico de segmentos no caderno e tire conclusões: segunda-feira, 64 faltas; terça-feira, 32; quarta-feira, 32; quinta-feira, 48; sexta-feira, 60.

13. Analise o gráfico a seguir e responda:

a) Em qual ano o saldo comercial foi o menor? 2014
b) Em qual ano o saldo foi o maior? 2006
c) O que ocorreu com o saldo comercial de 2006 a 2008? Decresceu.
d) Quantos milhões de dólares cresceu o saldo de 2014 para 2015? 23 739 milhões de dólares.

Evolução do saldo comercial do Brasil (2002-2015)



Fonte dos dados: Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior. Disponível em: <www.mdic.gov.br/arquivos/dwnl_1454413504.xls>. Acesso em: 4 fev. 2016.

Você sabia?
O saldo comercial, ou seja, o saldo da balança comercial, é um termo econômico que representa a diferença entre o que é exportado e o que é importado. Quando o saldo é positivo é porque o país exportou mais do que importou. Caso ocorra o inverso, dizemos que o saldo é negativo.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico de barras

A partir das notas dos alunos em Química, um professor elaborou a seguinte tabela de desempenho:

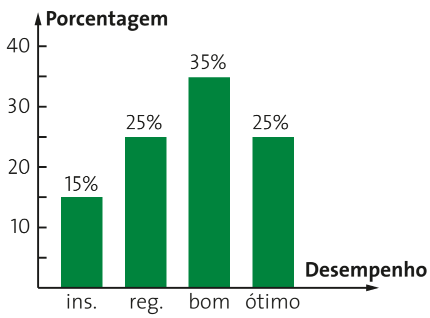
Frequências do desempenho em Química dos alunos de uma classe

Desempenho	insuficiente	regular	bom	ótimo	total
FA	6	10	14	10	40
FR	15%	25%	35%	25%	100%

Fonte: Dados fictícios.

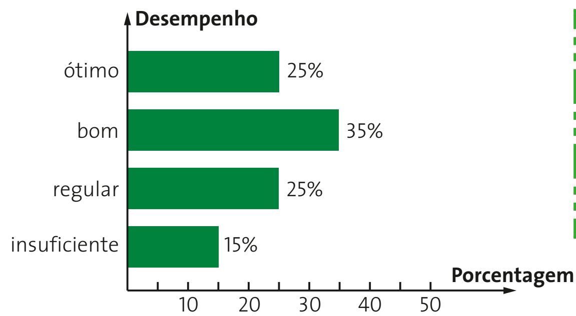
Com os dados da tabela é possível construir o gráfico de barras.

Desempenho em Química dos alunos de uma classe



Fonte: Dados fictícios.

Desempenho em Química dos alunos de uma classe



Fonte: Dados fictícios.

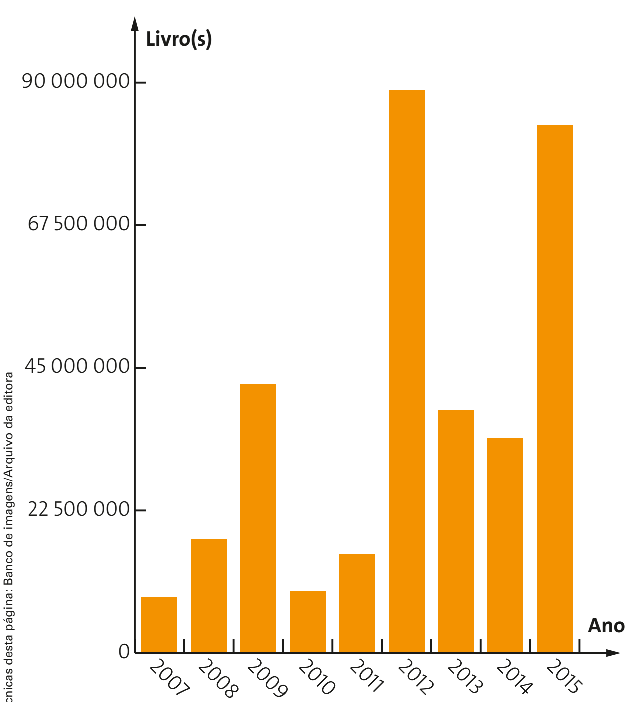
Para refletir

O gráfico de barras poderia ter relacionado desempenho com frequência absoluta. Faça isso.

Veja a resolução no Manual do Professor.

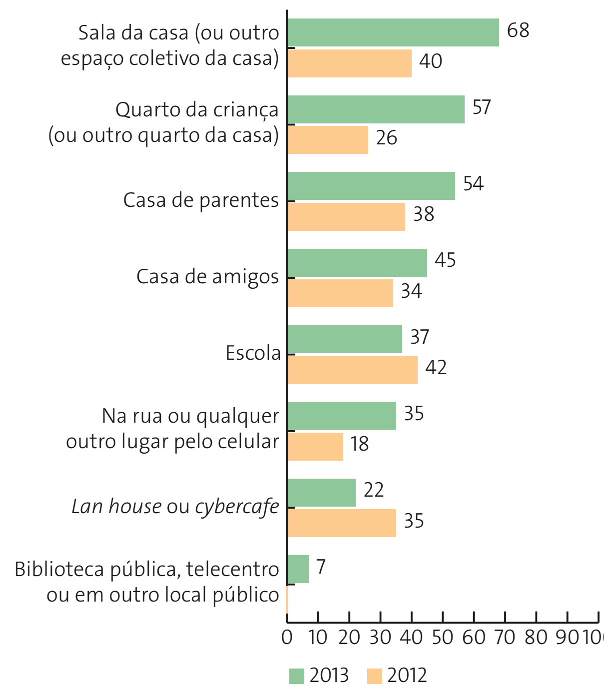
Veja alguns exemplos de gráficos de barras:

Livros distribuídos no Brasil pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio



Fonte: Painel de controle do MEC. Disponível em: <http://painel.mec.gov.br/painel/detalhamentoIndicador/detalhes/pais/acaid/79>. Acesso em: 10 maio 2016.

Proporção de crianças/adolescentes, por local de acesso à internet
(Percentual sobre o total de usuários de internet de 9 a 17 anos)



Fonte: TIC Kids Online Brasil 2013: pesquisa sobre o uso da Internet por crianças e adolescentes no Brasil. p. 116. Disponível em: <http://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic-kids-online-2013.pdf>. Acesso em: 17 maio 2016.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 14, 15 e 16 no Manual do Professor.

14. A partir da variável "número de irmãos" do quadro da página 37, construa no caderno um gráfico de barras.

15. Durante uma hora foram anotados os tipos de veículos que passaram pela rua onde está situada uma escola e foram obtidos os seguintes dados: T, T, T, M, A, T, T, M, T, B, B, T, T, A, T, T, C, T, M, T, T, T, C, B, T, T, T, T, T, A, T, T, T, M, C, T, T, T, T, B, T, T, M, B, A (**M**: motocicleta; **C**: caminhão; **B**: bicicleta; **A**: ambulância; **T**: carro). Construa no caderno um gráfico de barras que corresponda a essa pesquisa.

16. As áreas das superfícies dos estados da região Sudeste do Brasil são, em valores aproximados: São Paulo: 250 000 km^2; Espírito Santo: 46 000 km^2; Rio de Janeiro: 44 000 km^2; Minas Gerais: 590 000 km^2. Construa no caderno um gráfico de barras registrando essa distribuição.

17. Em uma eleição para representante de classe, os candidatos foram Ricardo, Paula e Fausto.
Observe o resultado da votação no gráfico de barras, em que estão especificados os votos das mulheres e dos homens, e, em seguida, responda:

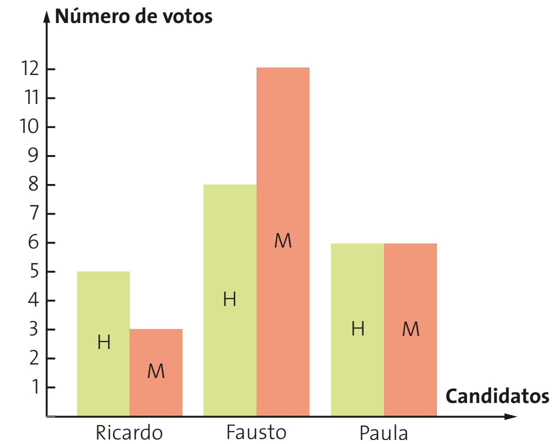
a) Quantos alunos votaram? 40
Desses, quantas mulheres e quantos homens?
21 mulheres e 19 homens.

b) Quantos votos obteve a candidata Paula? 12

c) Quantas mulheres votaram em Ricardo? 3

d) Qual é a porcentagem de votos recebidos por Fausto?
50%

Votos por sexo na eleição para representante de classe



Fonte: Dados fictícios.

Gráfico de setores

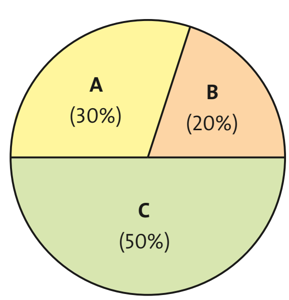
Em um *shopping center* há três salas de cinema, e o número de espectadores em cada uma delas em determinado dia da semana foi de 300 na sala **A**, 200 na **B** e 500 na **C**.

Veja essa situação representada em uma tabela de frequências e depois em gráficos de setores:

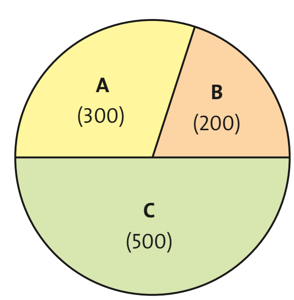
Frequências do número de espectadores nas salas de cinema

Sala	FA	FR	
A	300	$\frac{300}{1\,000} = \frac{3}{10}$	30%
B	200	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	20%
C	500	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	50%

Porcentagem de espectadores nas salas de cinema



Número de espectadores nas salas de cinema



Fonte da tabela de frequências e dos gráficos: Dados fictícios.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Em cada gráfico de setores, o círculo todo indica o total (1 000 espectadores ou 100%) e cada setor indica a ocupação de uma sala. Na construção do gráfico de setores, determina-se o ângulo correspondente a cada setor proporcionalmente à frequência. Veja como exemplo o da sala **A**:

Usando a frequência absoluta, vem:

$$\frac{300}{1\,000} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 1\,000x = 108\,000° \Rightarrow x = 108°$$

Usando a frequência relativa (em %), temos:

$$x \text{ é } 30\% \text{ de } 360° \Rightarrow x = 0{,}30 \cdot 360° = 108°$$

Para refletir

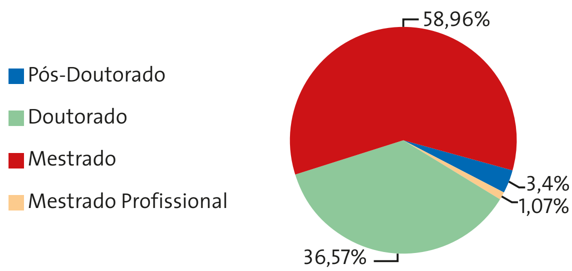
Verifique quais são os ângulos dos setores das salas **B** e **C**. Use um transferidor e constate na figura os ângulos de **A**, **B** e **C**.

Sala **A**: 108°; sala **B**: 72°; sala **C**: 180°.

Veja outros exemplos de gráficos de setores:

a) Foram concedidas 86 756 bolsas de pós-graduação em 2013.

Bolsas de pós-graduação concedidas no país em 2013



Banco de imagens/Arquivo da editora

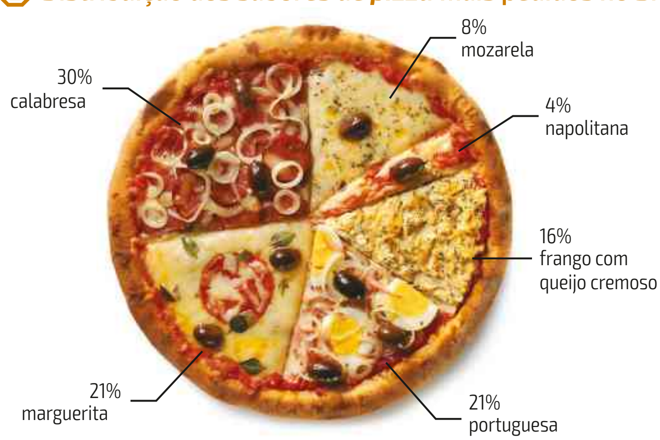
Fonte: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Disponível em: <http://painel.mec.gov.br/painel.php?modulo=principal/detalhamentoIndicador&acao=A&detalhes=pais&in-did=114>. Acesso em: 10 maio 2016.

b) *Pizza* ideal

Há 50 mil pizzarias no Brasil, entre estabelecimentos formais e informais. Metade delas fica em São Paulo, seguida por Rio de Janeiro, Rio Grande do Sul, Minas Gerais e Bahia. Cada cidade tem suas preferências, e uma revista montou a redonda ideal, definida a partir dos sabores mais pedidos nos restaurantes de todo o Brasil, neste gráfico de *pizza* (setores) de *pizzas*.

Distribuição dos sabores de *pizza* mais pedidos no Brasil

Reprodução/Arquivo da editora



Fonte: Revista *Superinteressante*, São Paulo, n. 300, jan. 2012. Disponível em: <http://super.abril.com.br/alimentacao/grafico-pizza-676265.shtml>. Acesso em: 10 maio 2016.

> **Fique atento!**
> Este gráfico também pode ser chamado de **pictórico**.

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 18 e 19 no Manual do Professor.

18. Em uma eleição concorreram os candidatos *A*, *B* e *C* e, apurada a primeira urna, os votos foram os seguintes: *A*: 50 votos; *B*: 80 votos; *C*: 60 votos; brancos e nulos (BN): 10 votos.

A partir desses dados construa no caderno:

a) a tabela de frequências dessa variável;

b) o gráfico de barras, relacionando os valores da variável com as respectivas frequências absolutas;

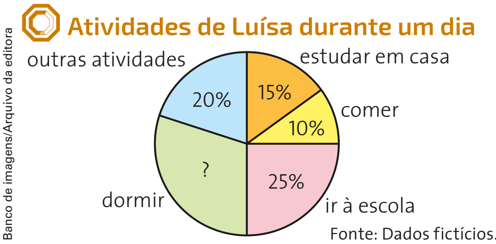
c) o gráfico de setores, relacionando os valores da variável com suas porcentagens.

> **Fique atento!**
> Neste exercício a variável é quantitativa discreta.

19. Para mostrar quanto tempo gasta com suas atividades, Luísa construiu um gráfico de setores.

Atividades de Luísa durante um dia

Banco de imagens/Arquivo da editora



Fonte: Dados fictícios.

a) Quantas horas por dia Luísa estuda em casa? 3,6 h

b) Que porcentagem do dia ela usa para dormir? 30%

c) Construa no caderno o gráfico de barras correspondente.

Histograma

Quando uma variável tem seus valores indicados por classes (intervalos), é comum o uso de um tipo de gráfico conhecido por **histograma**.

Por exemplo, consideremos a altura (em centímetros) de um grupo de alunos, agrupada em intervalos, e a seguir os histogramas correspondentes às frequências absolutas e relativas:

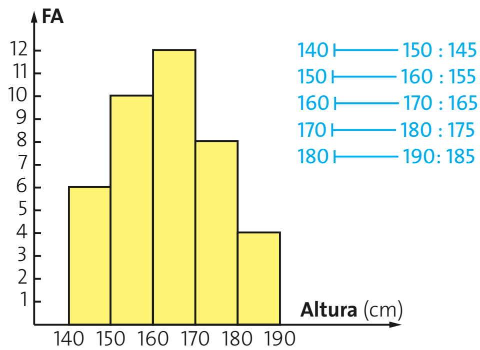
Frequências de intervalos de altura de um grupo de alunos

Altura (cm)	140 ⊢ 150	150 ⊢ 160	160 ⊢ 170	170 ⊢ 180	180 ⊢ 190
FA	6	10	12	8	4
FR	15%	25%	30%	20%	10%

Fonte: Dados fictícios.

- histograma com as classes (intervalos) relacionadas às frequências absolutas:

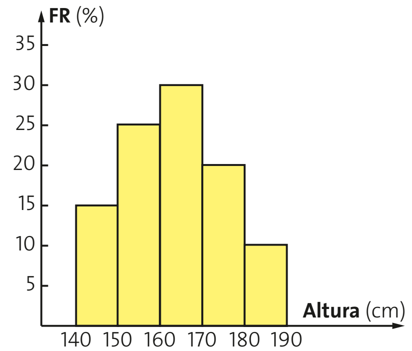
Número de alunos por intervalo de altura



Fonte: Dados fictícios.

- histograma com as classes relacionadas às frequências relativas (em porcentagem):

Porcentagem de alunos por intervalo de altura



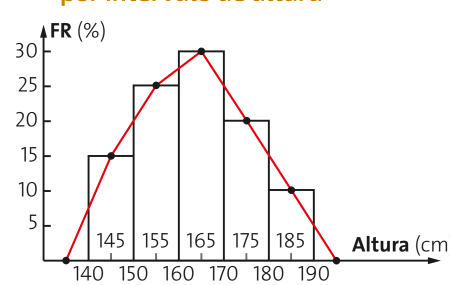
Fonte: Dados fictícios.

Para refletir
Qual é o número correspondente ao valor médio em cada uma das classes?

Às vezes usamos como representante de cada classe o valor médio correspondente (por exemplo, 155 representa a classe 150 ⊢ 160).

Os segmentos que ligam em sequência os pontos médios das bases superiores formam um gráfico de segmentos conhecido como **polígono do histograma**, que será usado em assuntos posteriores.

Porcentagem média de alunos por intervalo de altura



Fonte: Dados fictícios.

Exercício

Veja a resolução no Manual do Professor.

20. Fazendo o levantamento dos salários dos vinte funcionários de um escritório, foram obtidos os seguintes valores em reais: 650, 800, 720, 620, 700, 750, 780, 680, 720, 600, 846, 770, 630, 740, 680, 640, 710, 750, 680 e 690. A partir deles, construam no caderno:

a) a tabela de frequências com 5 classes;

b) o histograma correspondente relacionando faixa salarial e frequência absoluta.

Construção de gráficos

Veja alguns exemplos de construção de gráficos:

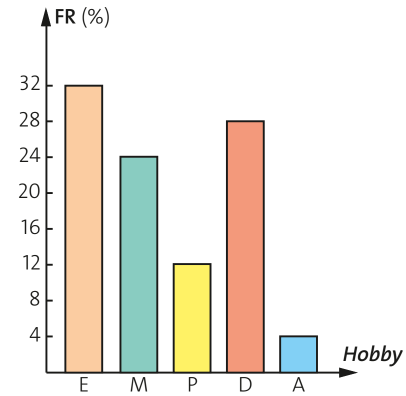
1º) Vamos construir a tabela de frequências e os gráficos de barras e de setores para a variável *hobby* do quadro da página 36.

Frequências do *hobby* de um grupo de alunos

Hobby	**Contagem**	**FA**	**FR**	
Esporte (E)		8	$\frac{8}{25} = 0{,}32$	32%
Música (M)		6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	24%
Patinação (P)		3	$\frac{3}{25} = 0{,}12$	12%
Dança (D)		7	$\frac{7}{25} = 0{,}28$	28%
Aeromodelismo (A)	|	1	$\frac{1}{25} = 0{,}04$	4%
Total		25	1	100%

Fonte: Dados fictícios.

Porcentagem de alunos por *hobby*



Fonte: Dados fictícios.

Nesse caso, todas as porcentagens são múltiplas de 4, então podemos usar 4% na escala. Veja:

$$\frac{4}{100} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 100x = 1\,440° \Rightarrow x = 14{,}4°$$

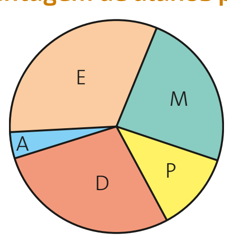
A cada 4% corresponde um setor de 14,4°.

E: 32% $(8 \cdot 4\%) \rightarrow 8 \cdot 14{,}4° = 115{,}2°$
M: 24% $(6 \cdot 4\%) \rightarrow 6 \cdot 14{,}4° = 86{,}4°$
P: 12% $(3 \cdot 4\%) \rightarrow 3 \cdot 14{,}4° = 43{,}2°$
D: 28% $(7 \cdot 4\%) \rightarrow 7 \cdot 14{,}4° = 100{,}8°$
A: 4% $\rightarrow 14{,}4°$

Então:

$115{,}2 + 86{,}4 + 43{,}2 + 100{,}8 + 14{,}4 = 360{,}0°$

Porcentagem de alunos por *hobby*



Fonte: Dados fictícios.

2º) Na realização de uma prova foi anotado o tempo que cada aluno gastou para concluí-la (em minutos): 56; 51; 57; 49; 51; 51; 46; 50; 50; 47; 44; 57; 53; 50; 43; 55; 48; 56; 49; 51; 47; 46; 54; 52; 55; 45; 49; 50; 48; 51.

a) A partir desses dados vamos construir a tabela de frequências com os valores em 5 classes.

Subtraindo o menor valor do maior valor, a amplitude total será: $57 - 43 = 14$.

Sabendo que são 5 classes e escolhendo o número 15, a amplitude de cada classe será: $15 : 5 = 3$.

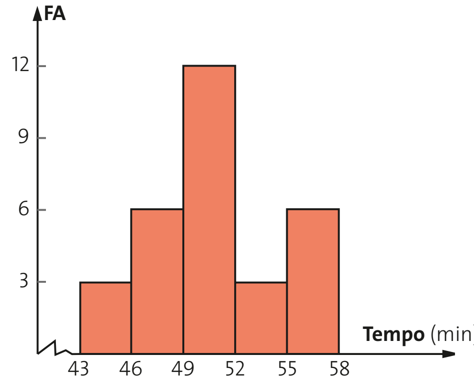
Frequências de intervalos de tempo para concluir uma prova

Tempo (min)	**Contagem**	**FA**	**FR**
$43 \vdash 46$		3	10%
$46 \vdash 49$		6	20%
$49 \vdash 52$		12	40%
$52 \vdash 55$		3	10%
$55 \vdash 58$		6	20%
Total		30	100%

Fonte: Dados fictícios.

b) Vamos construir o histograma relacionando as classes e suas frequências absolutas.

Número de alunos por intervalo de tempo para concluir uma prova

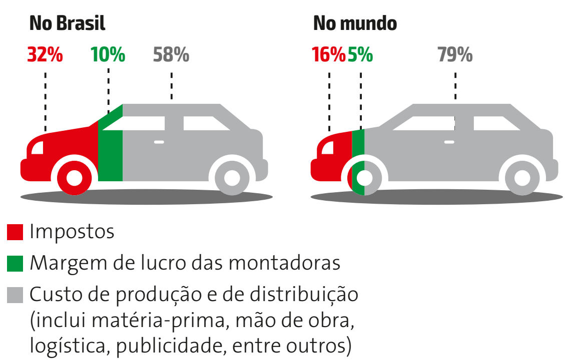


Fonte: Dados fictícios.

Vimos os vários tipos de gráficos utilizados para representar e interpretar dados estatísticos. É importante que se escolha sempre qual deles é o mais adequado à situação analisada.

É comum, em publicações como revistas, jornais e *sites*, ilustrar os vários tipos de gráfico com figuras relacionadas ao assunto, tornando-os mais atraentes. Esses são os **gráficos pictóricos** (ou **pictogramas**). Veja alguns:

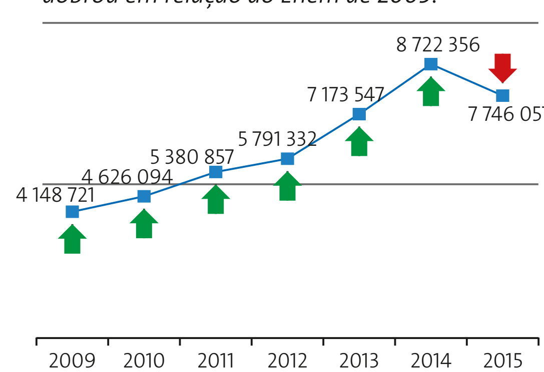
a) **Como se divide o preço de um veículo**



Fonte: *O Globo*. Disponível em: <http://oglobo.globo.com/economia/automovel-no-brasil-custa-ate-106-mais-que-la-fora-5928923>. Acesso em: 10 maio 2016.

b) **Evolução do número de inscritos no Enem de 2009 a 2015**

O número de candidatos inscritos no Enem de 2014 dobrou em relação ao Enem de 2009.



Fonte dos dados: *G1*. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/enem/2015/noticia/2015/07/enem-2015-tera-77-milhoes-de-candidatos-11-menos-que-em-2014.html>. Acesso em: 10 maio 2016.

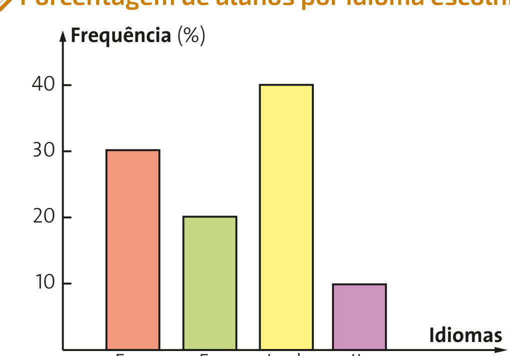
Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 21 e 22 no Manual do Professor.

21. A temperatura máxima do dia em uma cidade foi anotada durante vinte dias e apresentou os seguintes dados:
30 °C; 32 °C; 31 °C; 31 °C; 33 °C; 28,5 °C; 33,5 °C; 27 °C; 30 °C; 34 °C; 30,5 °C; 28 °C; 30,5 °C; 29,5 °C; 26 °C; 31 °C; 31 °C; 29 °C; 32 °C; 31,5 °C.
Construa no caderno o histograma correspondente com os valores da variável em 5 intervalos.

22. Os quarenta alunos de uma classe optaram pelo estudo de uma língua estrangeira, entre espanhol, francês, inglês ou italiano. Analise o gráfico de barras ao lado, que registra as escolhas, e, a partir dele, construa no caderno a tabela de frequências e o gráfico de setores.

Porcentagem de alunos por idioma escolhido



Fonte: Dados fictícios.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Medidas de tendência central

A partir da idade das pessoas de um grupo, podemos estabelecer uma única idade que caracteriza o grupo todo. Considerando a temperatura de vários momentos em um mês qualquer, podemos determinar uma só temperatura que fornece uma ideia aproximada de todo o período. Avaliando as notas dos vários trabalhos de um aluno no bimestre, podemos registrar com apenas uma nota seu aproveitamento no bimestre.

Em situações como essas, o número obtido é a **medida da tendência central** dos vários números usados. A **média aritmética** é a mais conhecida entre as medidas de tendência central. Além dela, vamos estudar também a **mediana** e a **moda**.

Média aritmética (*MA*)

Considerando um grupo de pessoas com 22, 20, 21, 24 e 20 anos, efetuamos:

$$MA = \frac{22 + 20 + 21 + 24 + 20}{5} = \frac{107}{5} = 21{,}4$$

Dizemos, então, que a média aritmética, ou simplesmente a média de idade do grupo, é 21,4 anos.

Se, ao medir de hora em hora a temperatura em determinado local, registraram-se 14 °C às 6h, 15 °C às 7h, 15 °C às 8h, 18 °C às 9h, 20 °C às 10h e 23 °C às 11h, observamos que:

$$MA = \frac{14 + 15 + 15 + 18 + 20 + 23}{6} = \frac{105}{6} = 17{,}5$$

Dizemos, então, que no período das 6h às 11h a temperatura média foi 17,5 °C.

No caso de um aluno que realizou diversos trabalhos durante o bimestre e obteve as notas 7,5; 8,5; 10,0 e 7,0, observamos que:

$$MA = \frac{7{,}5 + 8{,}5 + 10{,}0 + 7{,}0}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}25$$

Dizemos, então, que nesse bimestre o aluno teve média 8,25.

Assim, generalizando, podemos afirmar que, dados os n valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de uma variável, a média aritmética é o número obtido da seguinte forma:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Fique atento!

O símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ significa o somatório dos números x_i, com i variando de 1 a n.

Média aritmética ponderada (*MP*)

Vejamos, agora, o caso de um aluno que realiza vários trabalhos com pesos diferentes, isto é, com graus de importância diferentes. Se no decorrer do bimestre ele obteve 6,5 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 6,0 no debate (peso 1) e 7,0 no trabalho de equipe (peso 2), a sua média, que nesse caso é chamada **média aritmética ponderada**, será:

$$MP = \frac{2 \cdot 6{,}5 + 3 \cdot 7{,}0 + 1 \cdot 6{,}0 + 2 \cdot 7{,}0}{2 + 3 + 1 + 2} = \frac{13 + 21 + 6 + 14}{8} = \frac{54}{8} = 6{,}75$$

Quando calculamos a média aritmética de números que se repetem, podemos simplificar. Dessa maneira, para obter a média aritmética de 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 9, 11 e 11, observamos que:

$$MA = \frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 11}{3 + 5 + 2} = \frac{21 + 45 + 22}{10} = \frac{88}{10} = 8{,}8$$

Dizemos, então, que 8,8 é a média aritmética dos números 7, 9 e 11, com frequências 3, 5 e 2, respectivamente.

Observe que esse também é um exemplo de média ponderada, com os pesos sendo as frequências 3, 5 e 2.

A média aritmética é usada como medida de tendência central, ou seja, como forma de, por meio de um único número, dar uma ideia das características de determinado grupo de números. No entanto, é importante ressaltar que em algumas situações a presença de um valor bem maior ou bem menor do que os demais faz com que a média aritmética não consiga traçar o perfil correto do grupo.

Consideremos, por exemplo, um grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos. A média de idade, que é de 10 anos, não demonstra as características desse grupo em termos de idade. Em casos como esse são usadas outras medidas de tendência central, como a **mediana** e a **moda**, que estudaremos nas páginas seguintes.

Exercício resolvido

passo a passo: exercício 1

Resolvido passo a passo

1. (Uncisal) Em cada bimestre, uma faculdade exige a realização de quatro tipos de avaliação, calculando a nota bimestral pela média ponderada dessas avaliações. Se a tabela apresenta as notas obtidas por uma aluna nos quatro tipos de avaliações realizadas e os pesos dessas avaliações,

Avaliação	Nota	Peso
Prova escrita	6,00	4
Avaliação continuada	7,00	4
Seminário	8,00	2
Trabalho em grupo	9,00	2

sua nota bimestral foi aproximadamente igual a:

a) 8,6. b) 8,0. c) 7,5. d) 7,2. e) 6,8.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada uma tabela que apresenta as notas obtidas por uma aluna e o peso de cada uma dessas avaliações. Tais informações servem para o cálculo da nota bimestral.

b) O que se pede?

Pede-se a nota bimestral da aluna.

2. Planejando a solução

As informações contidas no enunciado nos informam que se trata de um problema básico de média ponderada, a qual será baseada nas informações presentes na tabela.

O cálculo da média ponderada é realizado da seguinte forma:

$$\text{Média ponderada} = \frac{(\text{Peso 1} \times \text{Nota 1}) + (\text{Peso 2} \times \text{Nota 2}) + (\text{Peso 3} \times \text{Nota 3}) + (\text{Peso 4} \times \text{Nota 4})}{(\text{Peso 1} + \text{Peso 2} + \text{Peso 3} + \text{Peso 4})}$$

3. Executando o que foi planejado

$$\text{Média ponderada} = \text{Nota bimestral da aluna} = \frac{(4 \times 6) + (4 \times 7) + (2 \times 8) + (2 \times 9)}{(4 + 4 + 2 + 2)} = \frac{86}{12} \simeq 7{,}2$$

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **d**.

5. Ampliando o problema

a) Devido a algumas mudanças na coordenação pedagógica da faculdade citada na questão-base, os pesos das avaliações foram modificados e passaram a ser termos de uma PA decrescente de $a_1 = 4$, correspondendo ao peso da prova escrita. Sendo assim, qual é o peso das avaliações: avaliação continuada, seminário e trabalho em grupo? 3, 2 e 1, respectivamente.

b) *Discussão em equipe*

O que vocês acham do método de avaliação das escolas? Resposta pessoal.

Pontos a debater:

- É justo avaliar um aluno por sua nota?
- O que esse método tem de positivo e de negativo?
- Levantem hipóteses dos métodos de avaliação que poderiam ser considerados mais eficazes.

Mediana (*Me*)

A presença de valores que destoem dos demais, por serem muito grandes ou muito pequenos, distorcem a média aritmética, fazendo com que ela não caracterize de forma eficiente o conjunto de valores. Por esse motivo é conveniente definirmos outra medida de tendência central, a **mediana**.

Assim, dados *n* números em ordem crescente ou decrescente, a mediana será:

- o número que ocupar a posição central se *n* for ímpar;
- a média aritmética dos dois números que estiverem no centro se *n* for par.

Acompanhe alguns exemplos:

a) Em uma classe, foram anotadas as faltas durante um período de 15 dias: 3, 5, 2, 0, 2, 1, 3, 4, 5, 7, 0, 2, 3, 4 e 7. Em ordem crescente, temos:

$$\underbrace{0, 0, 1, 2, 2, 2, 3,}_{\text{7 valores}}\ \underset{\downarrow \atop Me}{3,}\ \underbrace{3, 4, 4, 5, 5, 7, 7}_{\text{7 valores}}$$

Como 15 é ímpar, o termo médio é o 8º.
Logo, a mediana é 3. Simbolicamente, $Me = 3$.

b) As idades dos alunos de uma equipe são 12, 16, 14, 12, 13, 16, 16 e 17 anos.
Para determinar a mediana desses valores, colocamos inicialmente na ordem crescente (ou decrescente):

$$12, 12, 13, \underbrace{14, 16,}_{\text{as duas posições centrais}} 16, 16, 17$$

Como temos um número par de valores (8), fazemos a média aritmética entre os dois centrais, que são o 4º e o 5º termos. Logo, a mediana é dada por: $Me = \frac{14 + 16}{2} = \frac{30}{2} = 15$

Simbolicamente, $Me = 15$ anos.

Moda (*Mo*)

Em uma pesquisa com um grupo de adolescentes, foi perguntado qual era o esporte preferido de cada um deles, entre futebol, natação, vôlei, basquete ou ciclismo. O resultado foi o seguinte: 14 preferiram futebol, 7 natação, 8 vôlei, 5 basquete e 4 ciclismo. Não seria conveniente querer identificar qual é a média desses resultados ou mesmo qual é a mediana, pois não se trata de resultados numéricos. Para isso, precisamos de uma medida de tendência central conveniente para variáveis qualitativas: a **moda**.

Em Estatística, moda é a medida de tendência central definida como o valor mais frequente de um grupo de valores observados. Dessa forma, a moda da situação anterior é “futebol” (Mo = futebol), com 14 ocorrências.

No exemplo do grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos, a moda é 2 anos ($Mo = 2$) e demonstra mais eficiência para caracterizar o grupo que a média aritmética.

Se a temperatura medida de hora em hora, das 6h às 11h, apresentou os resultados 14 °C, 15 °C, 15 °C, 18 °C, 20 °C e 25 °C, então dizemos que nesse período a moda foi 15 °C, ou seja, $Mo = 15$ °C.

No caso de um aluno que anotou, durante dez dias, o tempo gasto em minutos para ir de sua casa à escola e cujos registros foram 15 min, 14 min, 18 min, 15 min, 14 min, 25 min, 16 min, 15 min, 15 min e 16 min, a moda é 15 min, ou seja, $Mo = 15$ min.

Se as notas obtidas por um aluno foram 6,0; 7,5; 7,5; 5,0; e 6,0, dizemos que a moda é 6,0 e 7,5 e que a distribuição é **bimodal**.

Observação: Quando não há repetição de números, como para os números 7, 9, 4, 5 e 8, não há moda e a distribuição é chamada **amodal**.

Enfatize a importância da moda para variáveis qualitativas.

Para refletir
Como é uma distribuição trimodal de números?

É uma distribuição em que a moda se repete três vezes.

Média aritmética, moda e mediana a partir das tabelas de frequências

Utilizando os valores (números ou intervalos) e as frequências absolutas das tabelas de frequências das variáveis quantitativas, podemos calcular a *MA*, a *Mo* e a *Me* de seus valores.

Acompanhe alguns exemplos:

a) **Frequências do número de irmãos de cada aluno de uma classe**

Número de irmãos	0	1	2	3	Total
FA	8	15	12	5	40

Fonte: Dados fictícios.

Fique atento!
Embora 1,35 irmão aparentemente seja um absurdo, é correto um valor desse tipo, assim como 3,5 gols por partida; 7,2 medalhas por Olimpíada; etc., pois a média aritmética é uma medida de tendência.

Média aritmética:

$$MA = \frac{8 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{40} = \frac{0 + 15 + 24 + 15}{40} = \frac{54}{40} = 1{,}35$$

Moda:
A maior frequência é 15, que corresponde ao valor 1 irmão. Logo, *Mo* = 1 irmão.

Mediana:
Como o total de frequências é 40 (número par), os valores centrais são o 20º e o 21º:

$\left(\frac{40}{2} = 20 \text{ e } 20 + 1 = 21\right)$.

Se colocados na ordem crescente, teremos os 8 valores correspondentes a 0 irmão, seguidos dos 15 valores de 1 irmão, e assim por diante. Então, o 20º e o 21º valores serão, ambos, 1 irmão. Logo, $Me = \frac{1 + 1}{2} = 1$.

b) **Frequências de intervalos de "peso" de um grupo de pessoas**

Peso (kg)	40 ⊢ 44	44 ⊢ 48	48 ⊢ 52	52 ⊢ 56	56 ⊢ 60	Total
FA	1	3	7	6	3	20

Fonte: Dados fictícios.

A partir da tabela em que os pesos estão agrupados em classes, consideramos, em cada classe, o seu valor médio (*VM*) e anexamos uma nova linha à tabela. Assim, temos:

$44 - 40 = 48 - 44 = 52 - 48 = 56 - 52 = 60 - 56 = 4$

$\frac{4}{2} = 2$

Fique atento!
O cálculo da média de números inteiros inclui uma divisão que pode não ser exata.

$40 + 2 = 42$ (frequência 1)

$44 + 2 = 46$ (frequência 3)

$48 + 2 = 50$ (frequência 7)

$52 + 2 = 54$ (frequência 6)

$56 + 2 = 58$ (frequência 3)

Valor médio de intervalos de "peso" de um grupo de pessoas

Peso (kg)	40 ⊢ 44	44 ⊢ 48	48 ⊢ 52	52 ⊢ 56	56 ⊢ 60
VM	42	46	50	54	58

Fonte: Dados fictícios.

Agora, podemos calcular *MA*, *Mo* e *Me* usando valores médios e suas frequências.

Média aritmética:

$$MA = \frac{1 \cdot 42 + 3 \cdot 46 + 7 \cdot 50 + 6 \cdot 54 + 3 \cdot 58}{20} = \frac{42 + 138 + 350 + 324 + 174}{20} = \frac{1\,028}{20} = 51{,}4$$

Assim, *MA* = 51,4 kg.

Moda:
A frequência maior, 7, indica o intervalo 48 ⊢—— 52, representado por 50, que é o ponto médio.
Logo, $Mo = 50$ kg.

Mediana:
Como o total das frequências é 20 (número par), os dois valores centrais são o 10º e o 11º. Colocados os valores médios em ordem crescente e de acordo com suas frequências, o 10º é 50 kg e o 11º também. Logo, $Me = \frac{50 + 50}{2} = 50$. Então, $Me = 50$ kg.

Exercícios

23. Um time de futebol realizou algumas partidas e os resultados foram 3 a 1, 4 a 2, 1 a 1, 0 a 0, 3 a 2, 2 a 1 e 1 a 0. Sabendo que o time não perdeu nenhuma partida, calcule a média aritmética dos gols:
a) marcados; 2
b) sofridos. 1

24. Se um aluno já fez dois trabalhos e obteve notas 8,5 e 5,0, qual deve ser a nota do terceiro trabalho para que a média aritmética dos três seja 7,0? 7,5

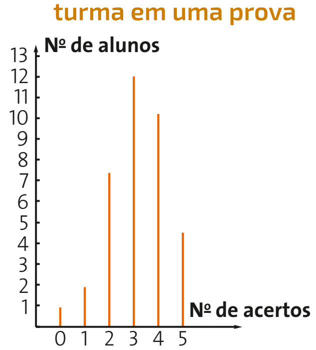
25. Qual é a média de idade de um grupo em que há 6 pessoas de 14 anos, 9 de 20 anos e 5 de 16 anos? 17,2 anos.

26. De segunda-feira a sábado, os gastos com alimentação de uma pessoa foram 15, 13, 12, 10, 14 e 14 reais. Determinem a média diária de gastos (*MA*) e a mediana (*Me*). *MA* = 13 reais e *Me* = 13,5 reais

27. Considerando os números 126, 130, 126 e 102, calculem:
a) a média aritmética (*MA*); 121
b) a média aritmética ponderada (*MP*), com pesos 2, 3, 1 e 2, respectivamente; 121,5
c) a mediana (*Me*); 126
d) a moda (*Mo*). 126

28. Uma prova com 5 questões foi aplicada em uma turma. O levantamento estatístico dos acertos foi registrado no gráfico abaixo:

Desempenho de uma turma em uma prova



Banco de imagens/Arquivo da editora
Fonte: Dados fictícios.

Determinem a partir do gráfico:
a) o número de alunos da turma; 40
b) a porcentagem da turma que acertou as 5 questões; 12,5%
c) a porcentagem da turma que acertou 3 ou mais questões; 72,5%
d) a *MA*, a *Mo* e a *Me* de acertos por pessoa.
MA = 3,15; *Mo* = 3; *Me* = 3

29. Determinem a *MA*, a *Mo* e a *Me* a partir das tabelas de frequências. *MA* = 14,3; *Mo* = 15; *Me* = 14,5

a) **Idade em um grupo de 10 pessoas**

Idade (em anos)	13	14	15	16
FA	3	2	4	1

Fonte: Dados fictícios.

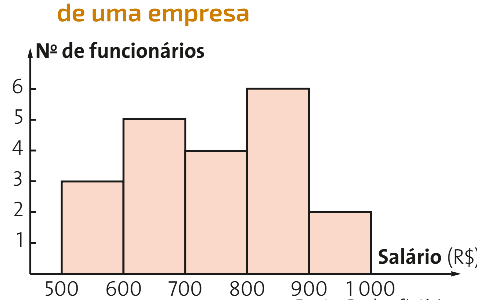
b) *MA* = 1,71; *Mo* = 1,67; *Me* = 1,71
Altura em um grupo de 21 pessoas

Altura (m)	1,61 ⊢ 1,65	1,65 ⊢ 1,69	1,69 ⊢ 1,73	1,73 ⊢ 1,77	1,77 ⊢ 1,81
FA	3	6	5	4	3

Fonte: Dados fictícios.

30. Usando os valores médios dos intervalos, construam o polígono do histograma abaixo e, depois, calculem a *MA*, a *Mo* e a *Me*. *MA* = 745; *Mo* = 850; *Me* = 750

Distribuição salarial dos funcionários de uma empresa



Banco de imagens/Arquivo da editora
Fonte: Dados fictícios.

31. Calcule a média aritmética ponderada de um aluno que obteve no bimestre 8,0 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 9,0 no debate (peso 1) e 5,0 no trabalho de equipe (peso 2). 7,0

32. A média das idades dos 11 funcionários de uma empresa era de 40 anos. Um dos funcionários se aposentou com 60 anos, saindo da empresa. A média de idade dos 10 funcionários restantes passou a ser:
a) 40 anos.
b) 39,8 anos.
c) 38,9 anos.
x d) 38 anos.
e) 37,8 anos.

33. Em sete jogos, um time marcou, respectivamente, 3, 2, 1, 1, 4, 3 e 2 gols. Determine a média de gols por partida (*MA*) e a mediana (*Me*). *MA* = 2,3 e *Me* = 2

4 Medidas de dispersão

Já estudamos as medidas de tendência central mais usadas, como a média aritmética, a moda e a mediana. Elas têm como objetivo concentrar em um único número os diversos valores de uma variável quantitativa.

Neste item estudaremos casos em que as medidas de tendência central são insuficientes.

Vejamos a seguinte situação:

O critério de aprovação em um concurso estabelece que o candidato deve realizar 3 provas e obter, com suas notas, média igual ou maior do que 6,0. Nesse caso, a informação de que o candidato obteve média 7,5 é suficiente para concluir que ele está aprovado.

Consideremos agora outra situação:

Uma pessoa é encarregada de organizar atividades de lazer para um grupo de 6 pessoas e recebe a informação de que a média de idade do grupo é 20 anos. Nesse caso, apenas a informação da média não é suficiente para planejar as atividades, pois podemos ter grupos com média de idade de 20 anos e características totalmente diferentes.

Observemos alguns grupos possíveis:

- Grupo **A**: 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos.

  $$MA = \frac{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

  Logo, $MA = 20$ anos.

- Grupo **B**: 22 anos; 23 anos; 18 anos; 19 anos; 20 anos; 18 anos.

  $$MA = \frac{22 + 23 + 18 + 19 + 20 + 18}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

  Logo, $MA = 20$ anos.

- Grupo **C**: 6 anos; 62 anos; 39 anos; 4 anos; 8 anos; 1 ano.

  $$MA = \frac{6 + 62 + 39 + 4 + 8 + 1}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

  Logo, $MA = 20$ anos.

Como a medida de tendência central não é suficiente para caracterizar o grupo **C**, é conveniente utilizar medidas que expressem o grau de dispersão de um conjunto de dados. As mais usadas são a **variância** e o **desvio padrão**.

Variância (V)

A ideia básica de variância é tomar os desvios dos valores x_i em relação à média aritmética $(x_i - MA)$. Mas a soma desses desvios é igual a 0 (por uma propriedade da média). Uma opção é considerar o total dos quadrados dos desvios $\sum_{i=1}^{n}(x_i - MA)^2$ e expressar a variância (V) como a média dos quadrados dos desvios, ou seja:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - MA)^2}{n}$$

Para refletir

Por que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - MA) = 0$?

Porque essa é a propriedade das médias aritméticas.

Por exemplo, vamos descobrir a variância nos grupos **A**, **B** e **C** citados anteriormente:

- Grupo **A** (20; 20; 20; 20; 20; 20)
  $MA = 20$
  Desvios: $20 - 20 = 0$; todos iguais a 0.
  $V = 0$
  Quando todos os valores são iguais, dizemos que não houve dispersão e, por isso, a variância é 0.

- Grupo **B** (22; 23; 18; 19; 20; 18)
  $MA = 20$
  Desvios: $22 - 20 = 2$; $23 - 20 = 3$; $18 - 20 = -2$; $19 - 20 = -1$; $20 - 20 = 0$; $18 - 20 = -2$

$$V = \frac{2^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-2)^2}{6} =$$

$$= \frac{4 + 9 + 4 + 1 + 0 + 4}{6} = \frac{22}{6} \simeq 3{,}6$$

Fique atento!
- No grupo **A** não ouve dispersão.
- A dispersão no grupo **B** é menor do que no grupo **C**.
- Dizemos que o grupo **B** é mais homogêneo do que o **C** ou que o grupo **C** é mais heterogêneo do que o **B**.

- Grupo **C** (6; 62; 39; 4; 8; 1)
  $MA = 20$
  Desvios: $6 - 20 = -14$; $62 - 20 = 42$; $39 - 20 = 19$; $4 - 20 = -16$; $8 - 20 = -12$; $1 - 20 = -19$

$$V = \frac{(-14)^2 + 42^2 + 19^2 + (-16)^2 + (-12)^2 + (-19)^2}{6} = \frac{196 + 1\,764 + 361 + 256 + 144 + 361}{6} = \frac{3\,082}{6} \simeq 513{,}6$$

A variância é suficiente para diferenciar a dispersão dos grupos: o grupo **A** não tem dispersão ($V = 0$) e o grupo **C** tem uma dispersão maior que a do grupo **B** ($513{,}6 > 3{,}6$).

Porém, não é possível expressar a variância na mesma unidade dos valores da variável, uma vez que os desvios são elevados ao quadrado. Então, definiu-se a medida de dispersão chamada **desvio padrão**.

Desvio padrão (*DP*)

O desvio padrão (*DP*) é a raiz quadrada da variância. Ele facilita a interpretação dos dados, pois é expresso na mesma unidade dos valores observados (do conjunto de dados).

Fique atento!
A variância e o desvio padrão são números positivos ou nulos.

No exemplo que estamos analisando, temos:

- Grupo **A**: $DP = \sqrt{0} = 0$ ano
- Grupo **B**: $DP = \sqrt{3{,}6} \simeq 1{,}9$ ano
- Grupo **C**: $DP = \sqrt{513{,}6} \simeq 22{,}6$ anos

Resumindo, se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são os n valores de uma variável quantitativa x, temos:

- a média aritmética dos valores de x: $MA = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
- a variância de x: $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - MA)^2}{n}$
- o desvio padrão de x: $DP = \sqrt{V}$

Observações:

1ª) Quando todos os valores da variável são iguais, o desvio padrão é 0.
2ª) Quanto mais próximo de 0 é o desvio padrão, mais homogênea é a distribuição dos valores da variável.
3ª) O desvio padrão é expresso na mesma unidade da variável.

Exercícios resolvidos

2. Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Vejamos as marcas obtidas por três atletas:

- atleta **A**: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm;
- atleta **B**: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm;
- atleta **C**: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.

a) Qual deles obteve melhor média?

b) Qual deles foi o mais regular?

Resolução:

a) Calculando a média de cada atleta, obtemos:

Atleta **A**: $MA = \dfrac{148 + 170 + 155 + 131}{4} = \dfrac{604}{4} = 151$

Atleta **B**: $MA = \dfrac{145 + 151 + 150 + 152}{4} = \dfrac{598}{4} = 149{,}5$

Atleta **C**: $MA = \dfrac{146 + 151 + 143 + 160}{4} = \dfrac{600}{4} = 150$

Logo, o atleta **A** obteve a maior média, 151 cm.

Para refletir

O desvio padrão pode ser igual à variância? E maior do que a variância?

Se a variância for 0 ou 1, o desvio padrão também será, respectivamente, 0 ou 1. E, se a variância pertencer ao intervalo (0, 1), então o desvio padrão será maior do que a variância.

b) A maior regularidade será verificada a partir do desvio padrão. Assim, temos:

Atleta **A**:

$$V = \frac{(148 - 151)^2 + (170 - 151)^2 + (155 - 151)^2 + (131 - 151)^2}{4} = \frac{9 + 361 + 16 + 400}{4} = \frac{786}{4} = 196{,}5$$

$DP = \sqrt{196{,}5} \simeq 14$

Atleta **B**:

$$V = \frac{(-4{,}5)^2 + (1{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (2{,}5)^2}{4} = \frac{20{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 + 6{,}25}{4} = \frac{29}{4} = 7{,}25$$

$DP = \sqrt{7{,}25} \simeq 2{,}7$

Atleta **C**:

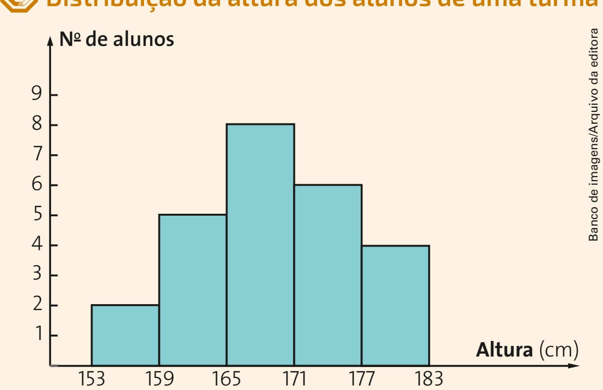
$$V = \frac{(-4)^2 + 1^2 + (-7)^2 + 10^2}{4} = \frac{16 + 1 + 49 + 100}{4} = \frac{166}{4} = 41{,}5$$

$DP = \sqrt{41{,}5} \simeq 6{,}4$

Logo, o atleta **B** foi o mais regular, pois seu desvio padrão é o menor: aproximadamente 2,7 cm.

3. O histograma mostra o resultado de uma pesquisa sobre altura (em centímetros) entre os alunos de uma turma. Calcule o desvio padrão dessa variável.

Distribuição da altura dos alunos de uma turma



Fonte: Dados fictícios.

Resolução:

No histograma, os valores da variável são intervalos e, por isso, vamos usar os seus pontos médios:

$153 \vdash 159$	$159 \vdash 165$	$165 \vdash 171$	$171 \vdash 177$	$177 \vdash 183$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
156 (frequência 2)	162 (frequência 5)	168 (frequência 8)	174 (frequência 6)	180 (frequência 4)

Média aritmética:

$$MA = \frac{2 \cdot 156 + 5 \cdot 162 + 8 \cdot 168 + 6 \cdot 174 + 4 \cdot 180}{2 + 5 + 8 + 6 + 4} =$$

$$= \frac{312 + 810 + 1344 + 1044 + 720}{25} = \frac{4\,230}{25} = 169{,}2$$

Desvios ($x_i - MA$):

$156 - 169{,}2 = -13{,}2$; $162 - 169{,}2 = -7{,}2$; $168 - 169{,}2 = -1{,}2$; $174 - 169{,}2 = 4{,}8$; $180 - 169{,}2 = 10{,}8$

Variância:

$$V = \frac{2(-13{,}2)^2 + 5(-7{,}2)^2 + 8(-1{,}2)^2 + 6(4{,}8)^2 + 4(10{,}8)^2}{25} =$$

$$= \frac{348{,}48 + 259{,}2 + 11{,}52 + 138{,}24 + 466{,}56}{25} = \frac{1224}{25} = 48{,}96$$

Fique atento!
No cálculo da variância foram usadas as frequências.

Desvio padrão: $DP = \sqrt{48{,}96} \simeq 6{,}99$. Assim, o desvio padrão é de 6,99 cm.

Exercícios

34. Um concurso utiliza como nota a média e o desvio padrão de 3 provas. Calculem a média e o desvio padrão de um candidato que nas provas obteve, respectivamente, 63 pontos, 56 pontos e 64 pontos.
Média: 61; desvio padrão: 3,56

35. Em uma classe as notas obtidas pelos alunos foram agrupadas da seguinte maneira:
$0 \vdash 2$ (1 aluno); $2 \vdash 4$ (6 alunos); $4 \vdash 6$ (9 alunos); $6 \vdash 8$ (8 alunos); $8 \vdash 10$ (6 alunos).

A partir desses dados: Veja a resolução dos itens **a** e **b** no Manual do Professor.

a) construam no caderno o histograma;

b) construam no caderno o polígono do histograma;

c) calculem a média, a moda, a mediana e o desvio padrão. $MA = 5{,}8$; $Mo = 5{,}0$; $Me = 5{,}0$; $DP \simeq 2{,}46$

36. Observem a tabela abaixo.

Distribuição dos salários de uma empresa

Salário (R$)	**Número de funcionários**
1 000,00	10
1 500,00	5
2 000,00	1
2 500,00	10
5 500,00	4
11 000,00	1
Total	31

Fonte: Dados fictícios.

a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa? $MA =$ R$ 2 500,00 e $Me =$ R$ 2 000,00

b) Suponham que sejam contratados dois novos funcionários com salários de R$ 2 500,00 cada um. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior? Menor.

5 Estatística e probabilidade

A Estatística também é usada para estimar a probabilidade de ocorrência de um evento, principalmente quando ela não pode ser calculada teoricamente pela razão $P = \dfrac{\text{evento}}{\text{espaço amostral}}$.

Quando se diz que a probabilidade de um avião cair é de uma em um milhão, é porque a frequência relativa de ocorrência de acidentes é de um acidente a cada um milhão de decolagens. Ao longo dos anos, ocorrerão mais decolagens e essa probabilidade pode mudar. Dos anos 1960 para cá, a frequência relativa de acidentes aéreos no mundo diminuiu cerca de 15 vezes. Isso significa que a probabilidade de ocorrer um acidente nos anos 1960 era 15 vezes maior do que agora.

Quanto maior for a quantidade de experimentos, melhor será a estimativa da probabilidade usando-se a frequência relativa. Ao jogar uma moeda duas vezes, é possível que ocorra duas vezes cara. Seria absurdo afirmar que a probabilidade de ocorrer cara é de 100%, pois a quantidade de experimentos é muito pequena e não pode ser utilizada para tal afirmação. Entretanto, ao jogar uma moeda 200 vezes, é possível observar algo como 94 caras e 106 coroas; jogando 2 000 vezes, 1 034 caras e 966 coroas; 20 000 vezes, 10 091 caras e 9 909 coroas.

Frequências de ocorrer cara por lançamentos de uma moeda

Número de jogadas	FA (cara)	FR (cara)
2	2	100%
200	94	47%
2 000	1 034	51,7%
20 000	10 091	50,45%

Fonte: Dados fictícios.

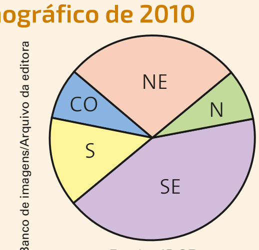
Pela tabela acima, portanto, percebe-se que a frequência relativa tende ao valor teórico de 50% para a probabilidade de ocorrer cara e coroa. Isso é chamado **lei dos grandes números**.

Previsões do tempo, resultados eleitorais, mortalidade causada por doenças, entre outras, são probabilidades calculadas usando-se frequências relativas de pesquisas estatísticas. Nesses casos, quanto maior for o histórico de dados a ser analisado, melhor será a previsão.

Exercícios resolvidos

4. Observe o gráfico abaixo:

Distribuição da população brasileira por regiões de acordo com o Censo demográfico de 2010



Fonte: IBGE.

Considerando que a população total do Brasil registrada foi de aproximadamente 191 milhões de habitantes e que no gráfico o ângulo da região Centro-Oeste é de 28,8°, calcule a população da região Centro-Oeste em porcentagem e em número de habitantes.

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ --- } 100\% \\ 28{,}8° \text{ --- } x \end{array}\right. \Rightarrow x \simeq 8\%$$

8% de 191 000 000 = 15 280 000

Logo, a população da região Centro-Oeste em 2010 correspondia a aproximadamente 8% da população do Brasil, ou seja, 15 280 000 habitantes.

5. Um dado foi lançado 1 200 vezes, obtendo-se o seguinte resultado:

Face	1	2	3	4	5	6
Número de vezes	248	355	175	180	126	116

a) Faça uma tabela de frequências relativas expressando os resultados em porcentagem.

b) Será que o dado jogado é honesto? Justifique.

Resolução:

a) **Frequências das faces obtidas em 1 200 lançamentos de um dado**

Face	Número de vezes	Frequência relativa
1	248	20,7%
2	355	29,6%
3	175	14,6%
4	180	15,0%
5	126	10,5%
6	116	9,7%

Fonte: Dados do enunciado 5.

b) Aparentemente há uma tendência maior em sair as faces "1" e "2" do que as outras faces. Como 1 200 é um número razoavelmente grande, a frequência relativa deveria ser aproximadamente igual ao valor teórico da probabilidade (que é de 16,6%). Com 1 200 jogadas, o resultado teórico esperado seria o de sair cerca de 200 vezes cada face. Assim, podemos afirmar que o dado aparenta não ser honesto.

6. Em uma garrafa opaca fechada existem 20 bolinhas, distribuídas entre três cores: preta, vermelha e amarela. Não é possível ver as bolinhas dentro da garrafa, exceto se virarmos a garrafa de ponta-cabeça, quando uma das bolinhas vai para o gargalo e é possível ver sua cor. Ao longo de vários dias, repetiu-se 2 000 vezes a seguinte operação: chacoalhava-se e tombava-se a garrafa para então anotar a cor da bolinha que aparecia no gargalo. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Cor da bolinha	Número de vezes
Preta	396
Vermelha	910
Amarela	694

Qual deve ser a quantidade de cada bolinha dentro da garrafa?

Resolução:

Como a quantidade de experimentos é grande, podemos esperar que a frequência relativa seja aproximadamente igual à probabilidade teórica. A tabela de frequências relativas é:

Frequências das cores obtidas ao retirar 2 000 vezes uma bolinha de dentro de uma garrafa

Cor da bolinha	Número de vezes	Frequência relativa
Preta	396	0,198
Vermelha	910	0,455
Amarela	694	0,347

Fonte: Dados do enunciado 6.

Assim, se tivermos x bolinhas pretas, y bolinhas vermelhas e z bolinhas amarelas, as probabilidades teóricas serão:

$$\text{P(preta)} = \frac{x}{20}$$

$$\text{P(vermelha)} = \frac{y}{20}$$

$$\text{P(amarela)} = \frac{z}{20}$$

Igualando-se as probabilidades teóricas com as respectivas frequências relativas, temos:

$$\frac{x}{20} = 0{,}198 \Rightarrow x = 3{,}96$$

$$\frac{y}{20} = 0{,}455 \Rightarrow y = 9{,}10$$

$$\frac{z}{20} = 0{,}347 \Rightarrow z = 6{,}94$$

Como as quantidades x, y e z de bolinhas são números inteiros, então $x = 4$, $y = 9$ e $z = 7$.

7. (Fuvest-SP) Numa classe com 20 alunos as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que 8 alunos foram reprovados. A média aritmética das notas desses 8 alunos foi 6,5, enquanto a média dos aprovados foi 77. Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido mal formulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais a todos os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados 68,8.

a) Calcule a média aritmética das notas da classe toda antes da atribuição dos 5 pontos extras.

b) Com a atribuição dos 5 pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram nota para aprovação?

Resolução:

a) $MA = \dfrac{8 \cdot 65 + 12 \cdot 77}{20} = 72{,}2$

$MA = 72{,}2$ pontos

b) Com os cinco pontos extras para todos, a média da classe subiu para 77,2 pontos. Se x alunos continuaram reprovados, então:

$$\frac{x \cdot 68{,}8 + (20 - x) \cdot 80}{20} = 77{,}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 68{,}8x + 1\,600 - 80x = 1\,544 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11{,}2x = -56 \Rightarrow x = 5$$

Como antes eram 8 reprovados, e agora são 5, então 3 alunos conseguiram nota para aprovação.

Exercícios

37. Verifiquem na prática que a probabilidade de ocorrência da face cara no lançamento de uma moeda é $\frac{1}{2}$ e a probabilidade da ocorrência da face coroa também é $\frac{1}{2}$. Respostas pessoais.

a) Qual resultado vocês esperam para 20 lançamentos dessa moeda?

b) Lancem a moeda 20 vezes e registrem os resultados em uma tabela; em seguida calculem o total de cada face. Vocês acertaram o resultado?

c) Repitam a experiência jogando a mesma moeda no mesmo local e com a mesma intensidade de força. Vocês obtiveram o mesmo resultado? Na opinião de vocês, por que isso ocorreu?

d) Se uma moeda for lançada 1 000 vezes e todos os resultados forem cara, o que vocês podem supor a respeito dessa moeda?

Veja a resolução do exercício 38 no Manual do Professor.

38. Um dado foi lançado 1 000 vezes, obtendo-se o seguinte resultado:

Resultados do experimento

Face	1	2	3	4	5	6
Número de vezes	157	171	160	166	171	175

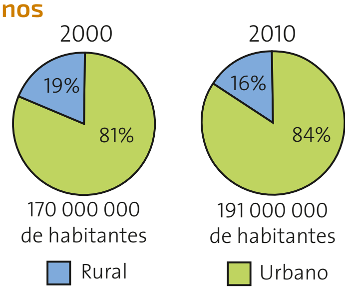
Fonte: Dados fictícios.

a) Façam no caderno uma tabela de frequências relativas expressando os resultados em porcentagem.

b) Na opinião da dupla, o dado jogado é honesto? Justifique.

39. Observem os gráficos comparativos:

Taxa de urbanização do Brasil (2000/2010) e a população aproximada do Brasil nesses dois anos



Fonte: IBGE. Disponível em: <http://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?vcodigo=POP122>. Acesso em: 10 maio 2016.

a) De 2000 a 2010 a população rural do Brasil aumentou ou diminuiu? Quanto por cento? Diminuiu 5,39%.

b) Supondo que a taxa de urbanização atual seja equivalente à de 2010, qual seria a probabilidade de, nos dias atuais, escolhendo-se ao acaso um brasileiro, ele morar na zona rural? 16%

40. Em uma garrafa opaca fechada existem 10 bolinhas, distribuídas entre as cores azul e branca. Não é possível ver as bolinhas dentro da garrafa, exceto se virarmos a garrafa de cabeça para baixo, quando uma das bolinhas vai para o gargalo e é possível ver sua cor. Ao longo de vários dias, repetiu-se 2 000 vezes a seguinte operação: chacoalhava-se e tombava-se a garrafa para então anotar a cor da bolinha que aparecia no gargalo. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Resultados do experimento

Cor da bolinha	**Número de vezes**
Azul	624
Branca	1 376

Fonte: Dados fictícios.

Ao repetir essa operação mais uma vez, qual a probabilidade de que a bolinha seja azul? 31,2%

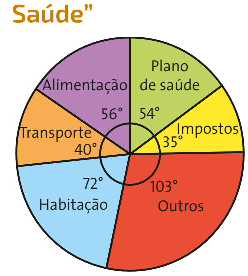
41. As mensalidades dos planos de saúde são estabelecidas por faixa etária.

Valores das mensalidades do plano "Melhor Saúde"

Faixa etária	**Mensalidade** (R$)
Até 15 anos	358,00
De 16 a 30 anos	443,00
De 31 a 45 anos	528,00
De 46 a 60 anos	655,00
61 anos ou mais	868,00

Fonte: Dados fictícios.

Comprometimento do rendimento mensal de uma pessoa que recebe 4 salários mínimos por mês e aderiu ao plano de saúde "Melhor Saúde"



Fonte: Dados fictícios.

Em cada fatia do gráfico ao lado, estão indicados o item referente ao gasto e o ângulo correspondente, em graus.

Sabendo que o salário mínimo nacional valia, em 2016, R$ 880,00, respondam no caderno às perguntas abaixo.

a) Excetuando-se o item "Outros", que não se refere a um gasto específico, qual é o item que consome a maior fatia do salário dessa pessoa? Habitação.

b) Determinem qual é o comprometimento do rendimento mensal dessa pessoa, em porcentagem, com o plano de saúde "Melhor Saúde". 15%

c) Determinem a que faixa etária pertence essa pessoa. De 31 anos a 45 anos.

Matemática e tecnologia

Este *software* é usado como ferramenta para auxiliar na construção de gráficos ao longo desta Coleção.

Estatística no computador

Vamos aprender como manipular dados e construir gráficos utilizando um *software* livre e gratuito.

O LibreOffice (antigo BROffice) é um desses *softwares* e oferece seis aplicativos livres: editor de texto, planilha eletrônica, editor de apresentação de *slides*, editor de desenho, editor de fórmulas e banco de dados.

A instalação desse *software* é simples: acesse o *site* <http://pt-br.libreoffice.org/>, clique em “Baixe já”, escolha a versão de acordo com o seu computador e siga os passos para finalizar a instalação do programa.

Ao abrir o LibreOffice, clique em “Planilha” e observe que a planilha eletrônica é formada por linhas (**1**, **2**, **3**, **4**, ...) e colunas (**A**, **B**, **C**, **D**, ...).

O aplicativo “Planilha” é uma ferramenta poderosa para auxiliar a construir gráficos.

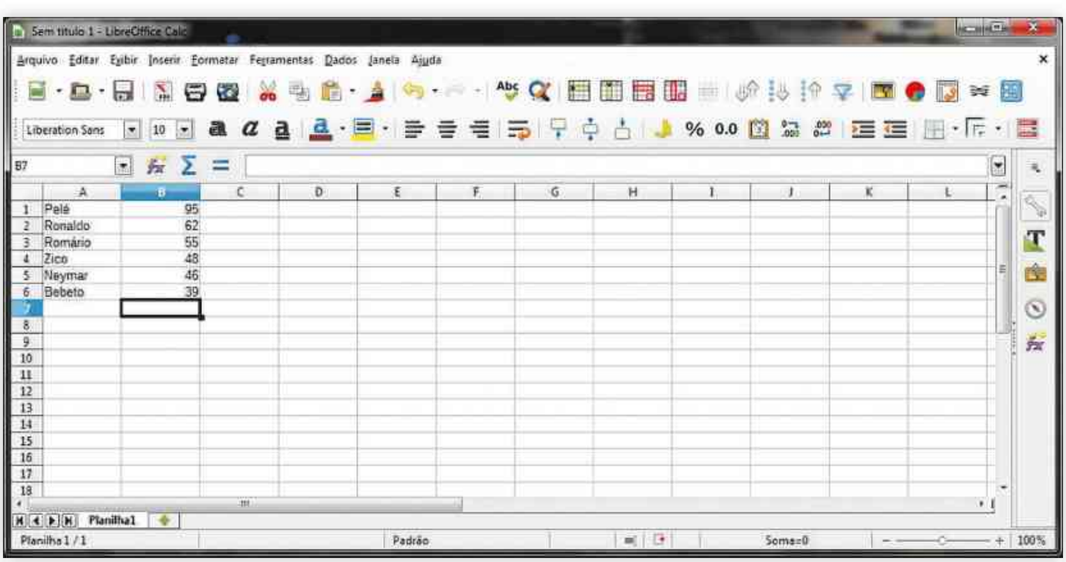
Muitas vezes é bem trabalhoso calcular medidas de tendência central ou de dispersão, pois os dados da amostra podem ser numerosos ou os valores das medidas terem muitas casas decimais. Utilizando os *softwares* de computador conseguimos maior precisão, velocidade e melhor representação dos dados obtidos.

Siga os passos abaixo para obter o desvio padrão e construir um gráfico de barras com o número de gols dos maiores artilheiros da seleção brasileira de futebol (contando apenas jogos oficiais – até maio de 2016).

- **1º passo**: Monte um quadro com o nome do artilheiro e sua quantidade de gols pela seleção. A coluna **A** da planilha será formada pelos nomes dos maiores artilheiros e a coluna **B** será formada pelas quantidades de gols. Os dados são os seguintes:

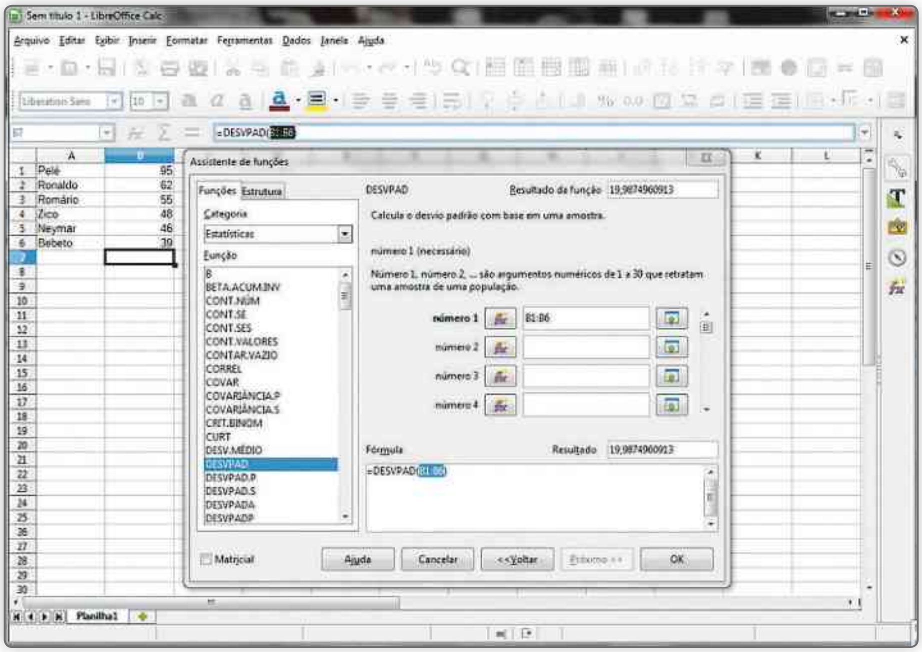
Pelé	95
Ronaldo	62
Romário	55
Zico	48
Neymar	46
Bebeto	39

- **2º passo**: Clique na célula **B7**. Ela ficará destacada.



Captura de tela do 2º passo.

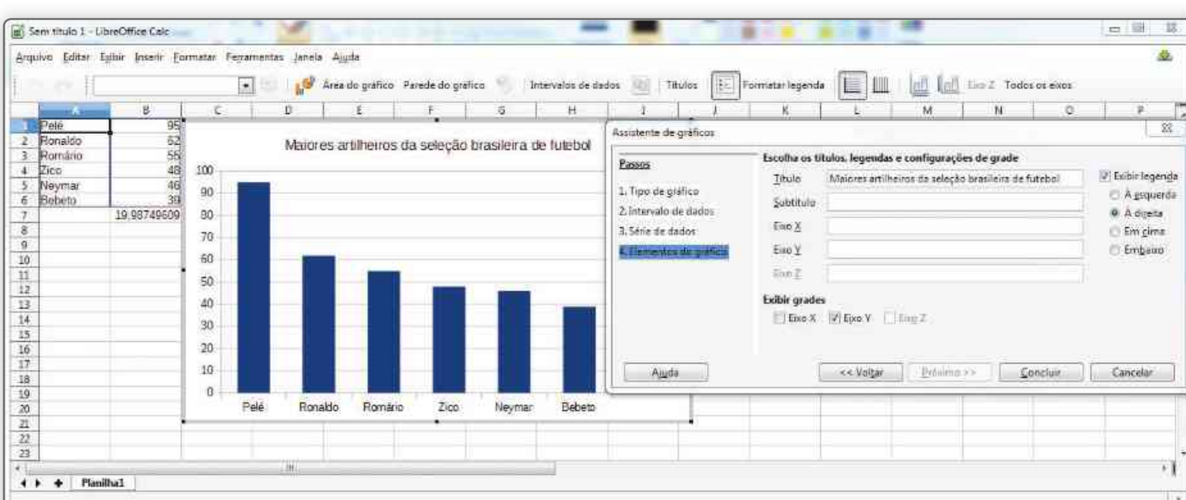
Em seguida, clique na tecla *fx* (logo acima da coluna **B**) e selecione a categoria "Estatísticas" e a função "DESVPAD" (para calcular o desvio padrão da amostra). Clique em "próximo" e digite **B1**:**B6** para calcular o desvio padrão da amostra. Por último, clique em "OK".



Captura de tela do 2º passo.

Com isso, na célula **B7** apareceu o número 19,98749609, que é o desvio padrão.

- **3º passo**: Para construir o gráfico que representa o número de gols dos maiores artilheiros, selecione a tabela construída e clique na opção "Gráfico" (ícone na parte superior); em seguida selecione a opção "4. Elementos do gráfico" e digite no campo "Título": Maiores artilheiros da seleção brasileira de futebol, como apresentado na imagem abaixo. Clique em "Concluir" e o gráfico estará feito.



Captura de tela do 3º passo.

Salve o arquivo no seu computador em um local escolhido.

Elaborando uma pesquisa escolar

Em uma escola será feita uma pesquisa para saber quantos alunos são canhotos, quantos apresentam alguma dificuldade de visão (usam óculos) e qual é o esporte preferido pela maioria dos alunos.

Diante dessas informações serão providenciadas carteiras para canhotos, melhoria na iluminação da sala de aula e material e espaço para atender à prática esportiva.

O roteiro de uma pesquisa é o seguinte:

1. Definir o problema a ser solucionado.
2. Definir a população em estudo.
3. Definir o tamanho e a composição da amostra.
4. Formular o questionário.
5. Abordar os entrevistados.
6. Checar os dados.
7. Blindar as informações.
8. Divulgar o resultado da pesquisa.

Você sabia?
A escolha da amostra é basicamente o que diferencia uma enquete de uma pesquisa estatística. Na enquete, as pessoas são escolhidas aleatoriamente e na pesquisa estatística a amostra é uma parte representativa da população. Por exemplo, se existem mais mulheres na população, a amostra deverá conter um número maior de pessoas do sexo feminino.
A escolha da amostra no lugar da população se dá muitas vezes pela praticidade e rapidez dos resultados.

Algumas dessas fases já estão prontas, pois já sabemos o problema a ser solucionado. A população será formada por todos os alunos do Ensino Médio, e a amostra será formada por todos os alunos que responderem à pesquisa. A tabela ao lado é um exemplo de como a amostra poderá ser indicada.

O questionário deve conter as informações importantes sobre o assunto. Por exemplo:

Quantidade de alunos que responderam à pesquisa

	Moças	Rapazes
3º ano	6	4
2º ano	9	8
1º ano	13	8
Total	30	20

Fonte: Dados fictícios.

Nome: ______________________________ ***Data:*** ____________
1. Sexo: *( ) masculino ( ) feminino*
2. Mão com que escreve: *( ) esquerda (canhoto) ( ) direita (destro)*
3. Usa óculos? *( ) Sim. ( ) Não.*
4. Esporte que gostaria de praticar na escola: ____________
Nome do entrevistador: ______________________________

Algumas regras deverão ser seguidas:

- Os entrevistados deverão ser abordados de forma educada, e o entrevistador deverá ser totalmente imparcial.
- Os dados deverão ser checados para identificar se faltam dados, se há inconsistência ou incoerência nas respostas.
- As informações colhidas deverão ficar restritas à comissão de pesquisadores.
- Os resultados deverão ser divulgados em forma de gráficos, tabelas, etc.

Agora, monte uma equipe e realize uma pesquisa como essa em sua escola.
Depois, faça o que se pede:

a) Faça uma tabela de frequências (absoluta e relativa) da variável “idade”.

b) Determine a média aritmética e a mediana da variável “idade”.

c) Obtenha a moda das variáveis:
- Mão com que escreve
- Se usa óculos
- Esporte que gostaria de praticar na escola

d) Agora, construa os gráficos de barras utilizando a “Planilha” do LibreOffice.

Pensando no Enem

Matriz do Enem: H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

1. Leia o texto a seguir.

Taxa de juros para pessoa física chega a 62,3% em setembro, mostra BC

As taxas de juros continuaram a subir, em setembro, de acordo com dados do Banco Central (BC), divulgados hoje (27). A taxa de juros cobrada das pessoas físicas subiu 1,1 ponto percentual de agosto para setembro, quando ficou em 62,3% ao ano. As empresas pagaram 0,6 ponto percentual a mais, com taxa em 29,3% ao ano.

A inadimplência das famílias, considerados atrasos superiores a 90 dias, subiu 0,1 ponto percentual para 5,7%. Já para as empresas, a inadimplência caiu 0,1 ponto percentual para 4,1%.

As taxas de juros que mais subiram para as famílias foram a do cartão de crédito e do cheque especial, que chegaram a 414,3% ao ano e a 263,7% ao ano. A taxa do cheque especial subiu 10,5 pontos percentuais e a do rotativo do cartão de crédito, 10,8 pontos percentuais, de agosto para setembro.

A taxa para a compra de veículos subiu 0,8 ponto percentual para 25,6% ao ano. Já a taxa do crédito consignado caiu 0,2 ponto percentual para 27,6% ao ano.

Fonte: Agência Brasil. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2015-10/bc-taxa-media-de-juros-cobrada-das-familias-chega-623-em-setembro>. Acesso em: 10 maio 2016.

Os valores que completam corretamente estas sentenças

- A taxa mensal de juros do cartão de crédito, considerando o regime de juros compostos, que projeta a taxa anual mencionada no texto é de ✸.
- A taxa mensal de juros do cheque especial, considerando o regime de juros compostos, que projeta a taxa anual mencionada no texto é de ✸.
- A taxa mensal de juros para a compra de veículos, considerando o regime de juros compostos, que projeta a taxa anual mencionada no texto é de ✸.

conforme as informações do texto são, aproximada e respectivamente:

a) 1,5%; 1,1%; 0,2%

b) 34,5%; 22,0%; 2,1%

c) 10,5%; 10,8%; 0,8%

d) 0,15%; 0,11%; 0,02%

x e) 15%; 11%; 2%

Matriz do Enem: H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

2. Utilizamos métodos de Estatística descritiva para organizar, resumir e descrever os aspectos importantes de um conjunto de características observadas ou então para comparar tais características entre dois ou mais conjuntos.

Considere que uma indústria embale peças em caixas com 100 unidades. O controle de qualidade da indústria selecionou ao acaso 48 caixas na linha de produção e anotou em cada caixa o número de peças defeituosas. Obteve os seguintes dados:

2	0	0	4	3	0	0	1	0	0	1	1
2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	3	0
0	0	2	0	0	1	1	2	0	2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Em geral, usam-se três medidas de tendência central a fim de tentar representar o conjunto por inteiro com um único valor e são elas: média, mediana e moda. A mediana, a média e a moda dessa distribuição são, respectivamente:

a) 0; 0,5 e 1.

b) 1; 0,66 e 0.

c) 0; 1 e 0.

x d) 0; 0,66 e 0.

e) 1; 0,5 e 0.

Projeção da população

Projeção da população do Brasil por sexo e idade: 2000-2060

As projeções populacionais [...] incorporam os parâmetros demográficos calculados com base no Censo Demográfico 2010 e as informações mais recentes dos registros de nascimentos e óbitos. Essas projeções têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sociodemográficos, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais de diversas áreas para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, das projeções populacionais derivam as estimativas municipais de população que, em conjunto, constituem o principal parâmetro para a distribuição, conduzida pelo Tribunal de Contas da União – TCU, das quotas partes relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

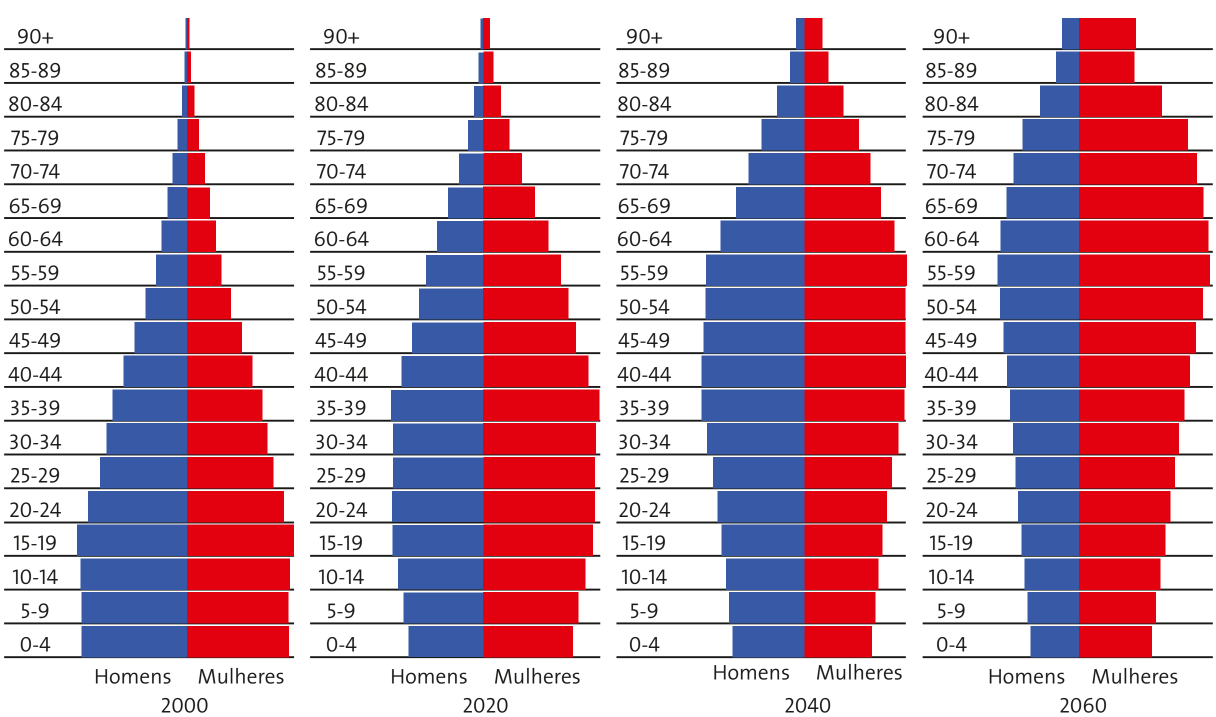
Como inovações do conjunto de projeções destacam-se: a correção da estrutura etária das populações de partida; as projeções populacionais das Unidades da Federação pelo método das componentes demográficas; e a disponibilidade da projeção da população por grupos etários quinquenais, até 90 anos ou mais de idade.

[...]

As Projeções de População são elaboradas com base nas informações sobre as componentes da dinâmica demográfica (mortalidade, fecundidade e migração), investigadas nos Censos Demográficos, Pesquisas Domiciliares por Amostra e oriundas dos registros administrativos de nascimentos e óbitos. Cada revisão da Projeção incorpora, à época de sua realização, informações mais recentes sobre esses componentes, e/ou mudanças metodológicas de cálculo da projeção, devidamente explicitados nas respectivas Metodologias. Desta forma, recomenda-se o uso da revisão de Projeção de População mais recente.

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default.shtm>. Acesso em: 10 maio 2016.

Pirâmides etárias absolutas



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Projeção da população do Brasil por sexo e idade para 2020

Faixa etária	Homens	Mulheres	Ambos os sexos
Total	104 546 709	107 530 666	212 077 375
0-9	14 605 258	13 948 594	28 553 852
10-19	16 628 874	15 973 609	32 602 483
20-29	17 150 828	16 825 254	33 976 082
30-39	17 227 313	17 289 534	34 516 847
40-49	14 473 620	14 899 708	29 373 328
50-59	11 464 141	12 299 980	23 764 121
60-69	7 696 976	8 840 978	16 537 954
70-79	3 751 497	4 869 660	8 621 157
80-89	1 310 770	2 077 572	3 388 342
90+	237 432	505 777	743 209

Fonte dos dados dos gráficos e da tabela: IBGE. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Projecao_da_Populacao/Projecao_da_Populacao_2013/projecoes_2013_populacao_xls.zip>. Acesso em: 10 maio 2016.

Trabalhando com o texto

1. O texto apresentado utiliza uma linguagem culta. Que tipo de texto é esse?
Texto informativo.

2. Procure no dicionário as palavras que, porventura, você não conheça.

3. Com base no desenvolvimento da pirâmide etária no Brasil, entre 2000 e 2060, o que se pode esperar com respeito à taxa de natalidade e à expectativa de vida nas próximas décadas? A taxa de natalidade tende a diminuir e a expectativa de vida tende a aumentar.

4. Considere a seguinte afirmação: “Existem muito mais mulheres do que homens”.

a) Tomando como base a projeção para o ano de 2020, essa proposição é verdadeira? Sim.

b) E se for levada em consideração apenas a faixa etária de 20 a 29 anos, essa proposição é verdadeira? Não.

c) Na faixa de 20 a 29 anos, qual é a diferença entre mulheres e homens?
325 574

5. Sabe-se que moda é a medida de tendência central definida como o valor mais frequente de um grupo de valores observados. Com base na tabela apresentada no texto, qual a faixa etária modal:

a) para o sexo masculino? De 30 a 39 anos.

b) para o sexo feminino? De 30 a 39 anos.

6. Ainda considerando a projeção para o ano de 2020, quais as frequências absolutas e relativas dos sexos masculino e feminino? (Use uma calculadora para determinar as frequências relativas.)

Sexo masculino → frequência absoluta: 104 546 709; frequência relativa: 49,30%; sexo feminino → frequência absoluta: 107 530 666; frequência relativa: 50,70%.

Pesquisando e discutindo

7. Verifique, com as pessoas da sua casa, as médias das idades e das alturas e depois compare esses valores com os resultados obtidos pelos seus colegas.

8. É necessário que o Brasil dê mais atenção à população idosa, priorizando as políticas de assistência social, saúde, previdência e habitação. Essas políticas são essenciais aos cidadãos que tanto fizeram por este país. Tendo em vista que a população brasileira está envelhecendo, pesquise e discuta com seus colegas quais dessas políticas estão de fato sendo aplicadas na sua cidade.

Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações sobre projeções da população do Brasil em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acessos em: 10 fev. 2016)

- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística: <www.ibge.com.br>;
- Portal do envelhecimento: <www.portaldoenvelhecimento.org.br>;
- Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos: <www.dieese.org.br>.

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (Uepa) Um agricultor financiou junto a uma cooperativa os insumos utilizados na lavoura em 2014. Pagou 20% do valor dos insumos no ato da compra, utilizando parte do lucro obtido no ano anterior, e financiou o restante em 10 meses a uma taxa de 2% ao mês a juros simples. Observou que havia gastado o montante de R$ 208 800,00 com a parte financiada. Neste caso, o valor financiado dos insumos pelo agricultor foi de:

a) R$ 217 500,00
x b) R$ 174 000,00
c) R$ 164 000,00
d) R$ 144 500,00
e) R$ 136 000,00

2. (Ufam) Os produtos de uma empresa são embalados em caixa. Dez caixas de um lote tiveram o número de produtos contados. As quantidades obtidas foram 88, 92, 90, 90, 89, 87, 86, 85, 89 e 90. Podemos afirmar que a média e a mediana são respectivamente:

a) 90 e 88,6
b) 89 e 88,6
c) 89 e 90
x d) 88,6 e 89
e) 88,6 e 90

Região Nordeste

3. (UPE) Antônio foi ao banco conversar com seu gerente sobre investimentos. Ele tem um capital inicial de R$ 2 500,00 e deseja saber depois de quanto tempo de investimento esse capital, aplicado a juros compostos, dobrando todo ano, passa a ser maior que R$ 40 000,00. Qual a resposta dada por seu gerente?

a) 1,5 anos
b) 2 anos
c) 3 anos
x d) 4 anos
e) 5 anos

4. (UFC-CE) A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:

a) 6,5.
x b) 7,2.
c) 7,4.
d) 7,8.
e) 8,0.

Região Centro-Oeste

5. (UFG-GO) No quadro a seguir são apresentados os valores, em bilhões de dólares, dos dez países que mais transferiram dinheiro de pessoas físicas para paraísos fiscais, entre 1970 e 2010.

País	Valor transferido
Arábia Saudita	697
Argentina	902
Brasil	1176
China	2 689
Coreia do Sul	1761
Indonésia	749
Kuwait	1122
México	943
Rússia	1 805
Venezuela	918

Superinteressante, São Paulo, ago. 2013, p. 15. (Adaptado.)

Considerando-se somente as informações apresentadas no quadro, o valor transferido pelo Brasil, nesse período, é:

a) aproximadamente, 68% maior do que o valor transferido pelos países que fazem parte da Liga dos Estados Árabes.
b) superior a 30% do valor transferido pelos países que fazem parte da Alca.
x c) mais de 20% do valor transferido pelos países que fazem parte do Brics.
d) aproximadamente, 26% do valor transferido pelos países que fazem parte do G8.
e) mais de 60% do valor transferido pelos países que fazem parte do Mercosul.

6. (UEG-GO) Um fogão custou R$ 600,00 para um comerciante. O comerciante anunciou o preço para venda do fogão de modo que, se sobre esse preço anunciado fossem aplicados 25% de desconto, ao vender o fogão, o comerciante ainda teria um lucro de 25% sobre o preço de custo. O preço anunciado foi de:

a) R$ 1 020,00.
x b) R$ 1 000,00.
c) R$ 960,00.
d) R$ 940,00.
e) R$ 900,00.

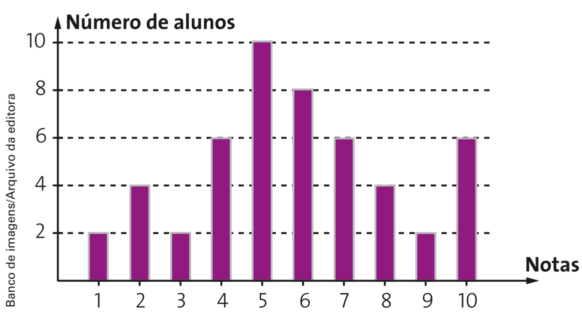
Região Sudeste

7. (Unicamp-SP) Um capital de R$ 12 000,00 é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, encontre:

a) o capital acumulado após 2 anos; R$ 13 996,80

b) o número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial. (Se necessário, use $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$.) 10

8. (Ibmec) Chama-se mediana de um conjunto de 50 dados ordenados em ordem crescente o número *x* dado pela média aritmética entre o 25º e o 26º dados. Observe no gráfico a seguir uma representação para as notas de 50 alunos do primeiro semestre de Ciências Econômicas numa determinada prova.



A mediana das notas dos 50 alunos de Ciências Econômicas nesta prova é igual a:

a) 3.
b) 4.
c) 5.
x d) 6.
e) 7.

Região Sul

9. Responda à questão 9 com base no infográfico e na notícia a seguir.

Adaptado de: Petrobras. Disponível em: <http://www.petrobras.com.br/pt/produtos-e-servicos/composicao-de-precos/gasolina/>. Acesso em: 3 set. 2014.

11 estados terão produtos e serviços sem impostos nesta 6ª

Ação pelo Dia da Liberdade de Impostos promoverá oferta de produtos, refeições e combustíveis sem impostos em várias cidades.

Empreendedores, empresários e diversas instituições oferecem, nesta sexta, produtos e serviços, como refeições e combustíveis de carros, com preços livres de impostos.

A iniciativa faz parte do Dia de Respeito ao Contribuinte e da Liberdade de Impostos (DLI), coordenado pela Confederação Nacional dos Jovens Empresários (Conaje).

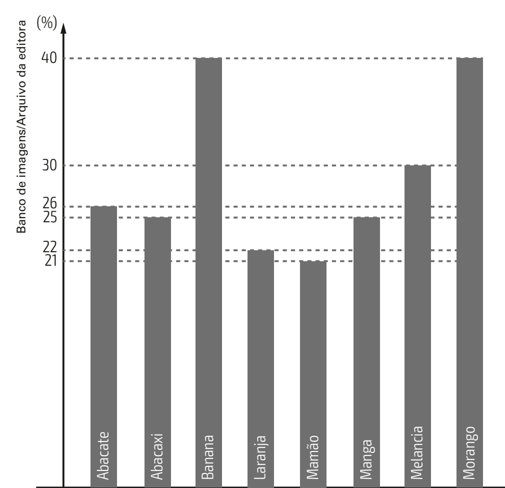
Disponível em: <http://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/noticias/11-estados-terao-produtos-e-servicos-sem-impostos-nesta-6a>. Acesso em: 3 set. 2014.

(IFRS) Um consumidor abasteceu o tanque de seu carro em um posto de gasolina que aderiu à campanha referida na notícia e pagou R$ 78,00. Quanto ele pagaria, em reais, se o mesmo posto não tivesse adotado tal medida?

a) 50,70
b) 105,30
c) 113,00
x d) 120,00
e) 140,00

10. (UFSM-RS) O Brasil é o quarto produtor mundial de alimentos, produzindo mais do que o necessário para alimentar sua população. Entretanto, grande parte da produção é desperdiçada.

O gráfico mostra o percentual do desperdício de frutas nas feiras do estado de São Paulo.



Disponível em: <www.youtube.com/watch/?uwXcErXvp1E>. Acesso em: 10 set. 2014. (Adaptado.)

Considerando os dados do gráfico, a média aritmética, a moda e a mediana são, respectivamente:

x a) 28,625; 25 e 40; 25,5.
b) 28,625; 25 e 40; 26.
c) 28,625; 40; 26.
d) 20,5; 25 e 40; 25,5.
e) 20,5; 40; 25,5.

UNIDADE 2

Geometria espacial e Geometria analítica

CAPÍTULO 3

Geometria espacial: corpos redondos

Veja mais sobre esse assunto no texto base para as questões 1 e 2 da seção Pensando no Enem, na página 136.

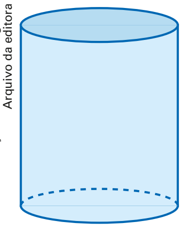
Pedro Ladeira/Folhapress

A combinação do eclipse lunar total e do perigeu resulta nos fenômenos conhecidos como “Lua de sangue” e “Superlua”. Fenômenos vistos em Brasília-DF. Fotografia do dia 27/09/2015. A última vez que essa combinação de fenômenos envolvendo o Sol, a Lua e a Terra ocorreu foi em 2015, e os astrônomos estimam que não deva ocorrer novamente antes de 2033.

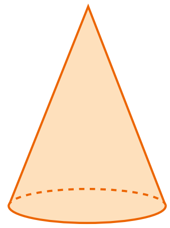
1 Corpos redondos

Provavelmente você já tenha iniciado o estudo dos sólidos geométricos, com os poliedros e, em especial, os prismas e as pirâmides durante o 2º ano do Ensino Médio. Agora, neste capítulo, estudaremos os sólidos que possuem superfícies curvas, os chamados **corpos redondos**. São eles:

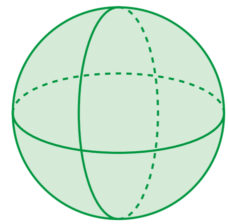
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Cilindro



Cone



Esfera

Para refletir
Por que esses sólidos são chamados corpos redondos?

Porque cada um tem, pelo menos, uma superfície curva.

Estudar os corpos redondos e conhecer suas características e propriedades permite-nos representar teoricamente uma grande quantidade de elementos da vida cotidiana.

Junte-se a um colega e avaliem que tipo de corpo redondo seria mais indicado para representar geometricamente cada um dos elementos abaixo:

Haveseen/Shutterstock/Glow Images

Esfera.

aperturesound/Shutterstock

Cilindro.

Artjazz/Shutterstock/Glow Images

Cone.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Lukethelake/Shutterstock/Glow Images

Cilindro.

Decha Chaiyarat/Shutterstock

Cone.

R. Gino Santa Maria/Shutterstock/Glow Images

Esfera.

Agora, observe este copo:

Alaettin Yildirim/Shutterstock/Glow Images

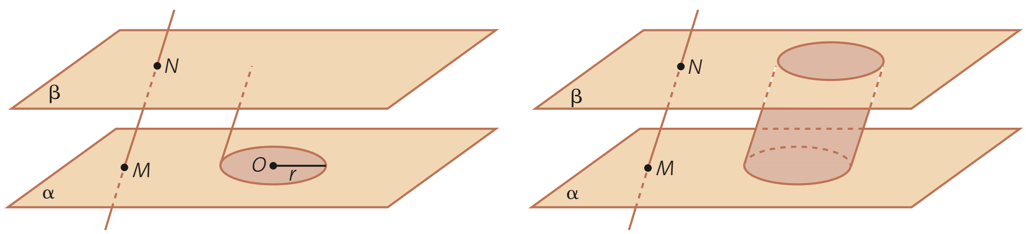
Este copo não se encaixa em nenhum dos três corpos redondos, mas um deles pode ser usado para representá-lo, desde que com a estratégia adequada (juntando-se ou retirando-se partes, por exemplo).

Incentive os alunos a associar os corpos redondos com as figuras. Logo depois, peça às duplas que discutam o caso do copo e, se desejar, permita a discussão entre elas. Talvez um ou outro aluno proponha que o copo é um tronco de cone, mas não é esse o objetivo do desafio. Se isso acontecer, estimule-os a pensar no que é um tronco de cone. O objetivo é levá-los a perceber que o copo equivale a uma "subtração" de dois cones.

Qual seria então o corpo redondo e qual seria a estratégia indicada para usá-lo?

2 O cilindro

Considere dois planos, α e β, distintos e paralelos, e um segmento de reta *MN* com *M* pertencente a α e *N* pertencente a β. Dado um círculo *C* de centro *O* e raio *r*, contido em α, chamamos **cilindro circular** (ou simplesmente **cilindro**) à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos e congruentes ao segmento de reta *MN*, que unem um ponto do círculo *C* a um ponto de β. No caso de $\overline{MN}$ ser perpendicular a α, o cilindro é reto.

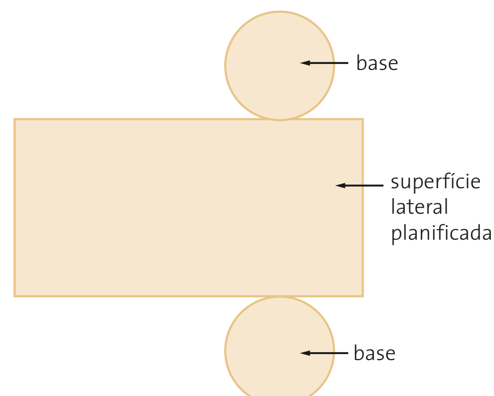


Intuitivamente, podemos imaginar um cilindro como o conjunto de pontos gerado por uma translação de um círculo.

A superfície do cilindro é formada por duas partes planas, que são as bases, e uma parte não plana, "arredondada", que é a superfície lateral.

A altura do cilindro é a distância entre os planos das bases.

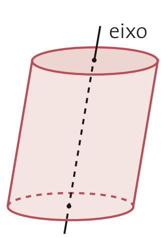
Cilindro reto

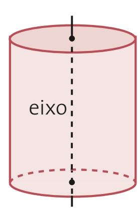


Cilindro reto planificado

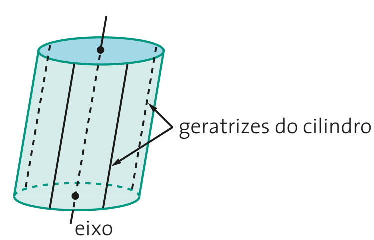
A reta que passa pelos centros das bases de um cilindro é chamada **eixo** do cilindro.

Os segmentos paralelos ao eixo, cujas extremidades são pontos das circunferências das bases, são chamados **geratrizes** do cilindro.

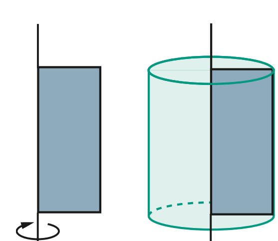




No cilindro reto o eixo é perpendicular aos planos das bases.



Um cilindro reto também pode ser obtido ao girar um retângulo em torno de uma reta que contém um de seus lados. Por isso, o cilindro circular reto pode ser chamado também **cilindro de revolução**, uma vez que é o sólido obtido quando um retângulo faz um giro completo em torno do eixo determinado por um de seus lados.



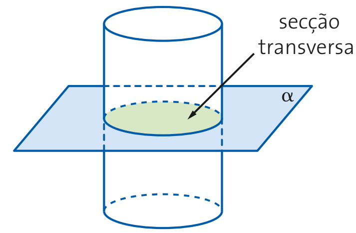
Para refletir
Em que caso a altura e a geratriz do cilindro têm a mesma medida?

Quando o cilindro é reto.

Secções de um cilindro reto

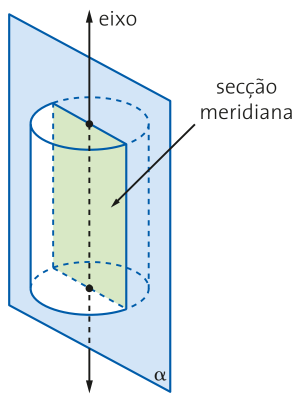
Secção transversal

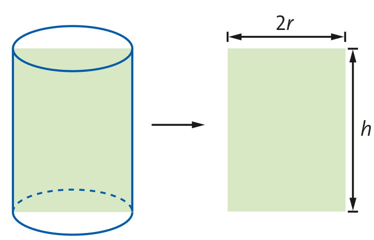
É a intersecção do cilindro com um plano paralelo às suas bases.
A secção transversal é um círculo congruente às bases.



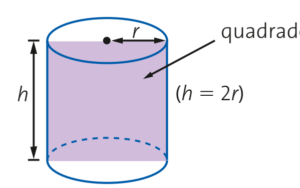
Secção meridiana

É a intersecção do cilindro com um plano que contém o seu eixo.
A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.



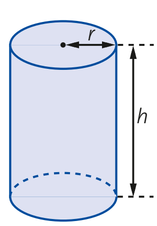


Observação: Se a secção meridiana for um quadrado, dizemos que o cilindro é **equilátero**. Nesse caso, $h = 2r$.

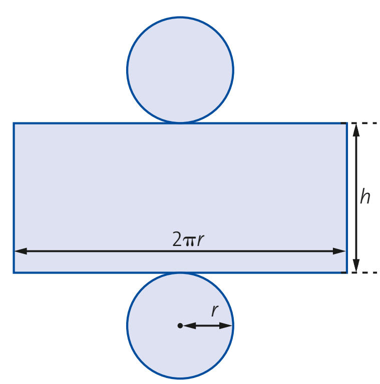


Cilindro equilátero

Área da superfície de um cilindro reto



Montado



Planificado

Fique atento!
A superfície lateral planificada do cilindro reto é um retângulo cujas dimensões são: a altura do cilindro (h) e o comprimento da circunferência da base ($2\pi r$). Cada base do cilindro é um círculo com área πr^2.

A superfície total do cilindro é formada pela superfície lateral mais as superfícies das duas bases. Assim:

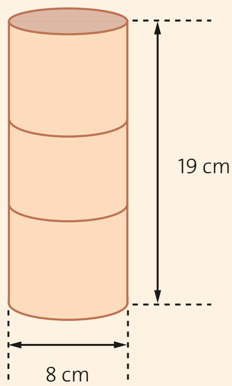
área lateral: $A_\ell = (2\pi r)h = 2\pi rh \Rightarrow \boxed{A_\ell = 2\pi rh}$

área das bases: $\boxed{2A_b = 2\pi r^2}$

área total: $A_T = A_\ell + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) \Rightarrow \boxed{A_T = 2\pi r(h + r)}$

Exercícios resolvidos

1. Quantos centímetros quadrados de material são usados, aproximadamente, para fabricar a embalagem cilíndrica indicada abaixo?



Resolução:

diâmetro = 8 cm

$r = 4$ cm

$h = 19$ cm

Vamos resolver este problema em função de π.

Veja:

$A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 19 = 152\pi$

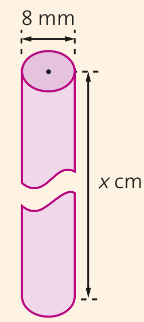
$2A_b = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4^2 = 32\pi$

$A_T = 152\pi + 32\pi = 184\pi$

São necessários 184π cm² de material.

2. Qual deve ser o comprimento de um tubo, de forma cilíndrica, se a sua superfície total pode ser coberta com $8{,}32\pi$ cm² de plástico e o diâmetro de cada base tem 8 mm?

Resolução:



O diâmetro da base é 8 mm = 0,8 cm.

Logo, $r = 0{,}4$ cm.

$2A_b = 2\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4^2 = 0{,}32\pi$

$A_\ell = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4x = 0{,}8\pi x$

$A_T = 2A_b + A_\ell = 8{,}32\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}32\pi + 0{,}8\pi x = 8{,}32\pi \Rightarrow$

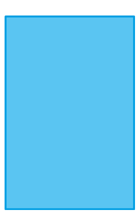
$\Rightarrow 0{,}8\pi x = 8 \Rightarrow x = 10$

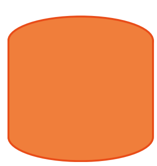
Portanto, o comprimento do tubo deve ser de 10 cm.

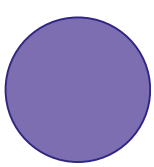
Exercícios

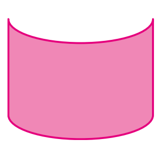
ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

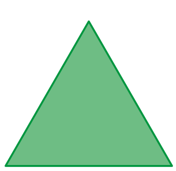
1. Identifique quais das figuras abaixo nunca poderão ser a sombra de um cilindro.

a) 

d) 

b) 

x e) 

x c) 

2. A base de um cilindro reto tem 4 cm de diâmetro. A altura do cilindro mede, também, 4 cm. Determine:

a) a área das bases; 8π cm²

b) a área lateral; 16π cm²

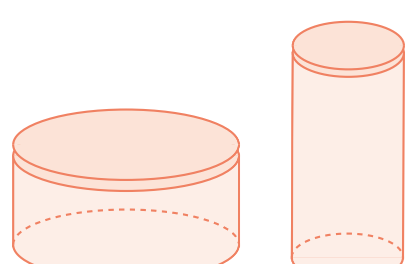
c) a área total. 24π cm²

Fique atento!
O cilindro reto deste exercício é um exemplo de **cilindro equilátero**, pois nele o diâmetro da base tem a mesma medida que a altura.

3. Um estojo tem forma cilíndrica, com 8 cm de diâmetro nas bases e 15 cm de altura. Quantos centímetros quadrados de material são necessários, aproximadamente, para fabricar esse estojo?
152π cm² ou aproximadamente 477 cm².

4. Sabe-se que a área lateral de um cilindro é 20π cm². Se o raio da base é 5 cm, calcule a medida h da altura e a área total do cilindro.
$h = 2$ cm; $A_T = 70\pi$ cm² ou aproximadamente 220 cm².

5. Duas latas têm forma cilíndrica. A lata mais alta tem o dobro da altura da outra, mas seu diâmetro é a metade do diâmetro da lata mais baixa.



Em qual das duas latas se utilizou menos material?
Na lata mais alta.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Volume do cilindro

Vamos usar o princípio de Cavalieri para determinar o volume do cilindro.

Dado um cilindro com a base contida em um plano α, vamos considerar um paralelepípedo retângulo, também com a base contida em α, que tem a área da base igual à área da base do cilindro e a altura igual à do cilindro.

Princípio de Cavalieri: Cada plano β, paralelo a α, que secciona um dos sólidos, também secciona o outro, e as secções determinadas por β em cada um deles têm a mesma área de suas bases.

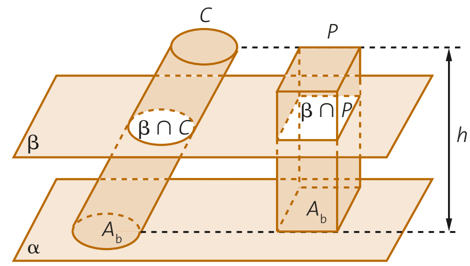
Como área $(\beta \cap C) = A_b$ e área $(\beta \cap P) = A_b$, temos:

$$\text{área } (\beta \cap C) = \text{área } (\beta \cap P)$$

para qualquer plano horizontal β.

Então, temos:

volume do cilindro = volume do paralelepípedo retângulo



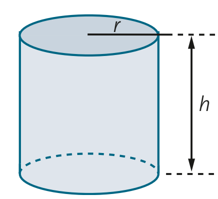
Fique atento!
Observe que o volume do cilindro é calculado da mesma forma que calculamos o volume de um prisma: área da base · altura.

Como o volume do paralelepípedo retângulo é obtido fazendo área da base · altura, segue que:

volume do cilindro = área da base · altura

Sendo a base do cilindro um círculo de raio r e área πr^2, temos:

volume do cilindro: $V = \pi r^2 h$



Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 5

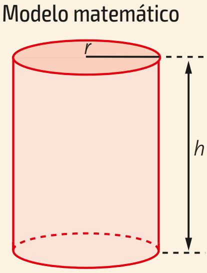
3. Qual é a capacidade de um copo cilíndrico, medindo 8 cm de diâmetro e 11 cm de altura? (Use $\pi = 3$.)

Realidade

ifong/Shutterstock

Copo cilíndrico com suco de laranja.

Modelo matemático



Cilindro

Resolução:

Se o diâmetro é de 8 cm, então $r = 4$ cm.

$h = 11$ cm

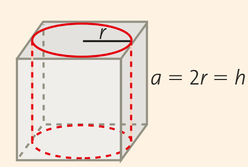
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 11 = 176\pi$

Considerando $\pi = 3$ e sabendo que $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ e $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$, temos:

$176 \cdot 3 \simeq 528$

Logo, a capacidade do copo é de aproximadamente 528 mL.

4. A figura ao lado mostra um cilindro inscrito em um cubo. O volume do cilindro é $64\pi \text{ cm}^3$. Calcule o volume do cubo.



Resolução:

Como a altura do cilindro é igual ao seu diâmetro, temos:

$V = \pi r^2 h \Rightarrow$

$\Rightarrow 64\cancel{\pi} = \cancel{\pi} r^2 \cdot 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^3 = 64 \Rightarrow r^3 = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 2\sqrt[3]{4}$

Fique atento!
Todo cilindro inscrito em um cubo é um cilindro equilátero: o diâmetro da base e a altura têm a mesma medida da aresta do cubo.

Como a aresta do cubo é igual ao diâmetro do cilindro, temos:

$a = 2r = 4\sqrt[3]{4}$

Vamos então calcular o volume do cubo:

$V = a^3 = \left(4\sqrt[3]{4}\right)^3 = 256$

Portanto, o volume do cubo é 256 cm^3.

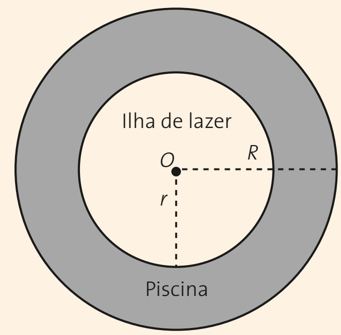
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolvido passo a passo

5. (Enem) Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem um raio *R* e centro *O*. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será *r*. Deseja-se que, após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3.

Considere 3 como o valor aproximado de π.

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer *r*, em metros, estará mais próximo de:



a) 1,6.
b) 1,7.
c) 2,0.
d) 3,0.
e) 3,8.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
São dados no problema o formato da piscina e o da ilha de lazer, bem como os respectivos raios. São informados também o volume antigo da piscina e o novo volume desejado, a partir da construção da ilha de lazer.

b) O que se pede?
Pede-se o raio máximo da ilha de lazer para um volume de 4 m^3 para a água da piscina.

2. Planejando a solução

Sabemos que a antiga piscina possui um volume de 12 m^3, raio *R* e 1 m de profundidade. Logo, sua área circular é de 12 m^2. Sabe-se que o novo volume é de 4 m^3 e área de 4 m^2, ou seja, a área circular da ilha de lazer é de 8 m^2. Assim, basta calcular o volume de *r* (raio da ilha de lazer) a partir da área circular dessa ilha de lazer.

3. Executando o que foi planejado

Área circular da ilha de lazer $= 8\ m^2 = \pi r^2$, em que *r* é o raio máximo da ilha para se ter uma piscina com um volume mínimo de 4 m^3. Considerando que $\pi = 3$, temos:

$$12 - 3r^2 \geqslant 4 \Rightarrow -3r^2 \geqslant 4 - 12 \Rightarrow -3r^2 \geqslant -8 \Rightarrow 3r^2 \leqslant 8 \Rightarrow r^2 \leqslant \frac{8}{3} \Rightarrow r \leqslant \sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow r \leqslant 1{,}63 \Rightarrow r \simeq 1{,}6\ \text{m}$$

Assim, o raio máximo da ilha de lazer *r*, em metros, estará mais próximo de 1,6 m.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) A gerência do parque aquático decide trocar o revestimento da piscina por um novo modelo repleto de figuras infantis, que tem custo de R$ 50,00 por m^2. Além do revestimento da piscina, decide também revestir a ilha de lazer com um piso antiderrapante com custo de R$ 42,50 por m^2.
Sabe-se que o custo de colocação desse revestimento é de R$ 2,50 por m^2. Assim, qual o valor gasto com a reforma da piscina infantil, no que se refere ao seu novo revestimento?
O custo total da reforma com o revestimento foi de R$ 1706,40.

b) *Pesquisa*
Pesquise sobre o desperdício de água nos parques aquáticos, bem como sobre os processos de reutilização da água e sua limpeza, aprofundando-se na eficácia desse processo e nos seus malefícios se realizado de forma incorreta.

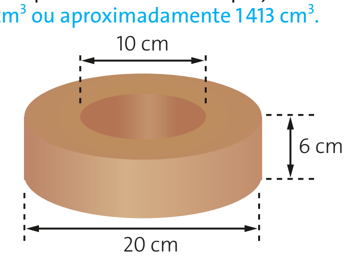
Exercícios

Atividade em dupla Atividade em equipe

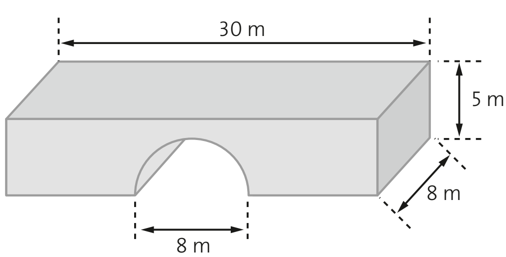
6. O reservatório de tinta de uma caneta esferográfica tem forma cilíndrica. Seu diâmetro é de 2 mm e seu comprimento é de 12 cm. Quantos mL de tinta podem ser acondicionados nesse reservatório? $0{,}12\pi$ cm³ ou aproximadamente $0{,}377$ cm³.

7. Um cano cilíndrico de plástico (figura abaixo) tem 70 cm de comprimento. O raio externo tem 10 cm e o raio interno tem 6 cm. Qual é o volume de plástico usado para fazer esse cano? $4\,480\pi$ cm³ ou aproximadamente 14 070 cm³.

8. Uma peça de madeira tem as dimensões e a forma da figura abaixo. Qual é o volume de madeira empregado para fabricar essa peça? 450π cm³ ou aproximadamente 1 413 cm³.

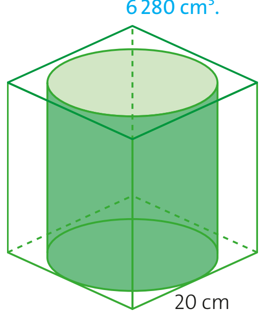


9. Uma ponte de concreto tem a forma da figura a seguir e suas dimensões estão assinaladas nela. Qual é o volume de concreto usado para construir a ponte? Use $\pi = 3$. 1008 m³



10. Um cilindro reto tem raio 4 cm. Determine seu volume. 128π cm³ ou aproximadamente 402 cm³.

11. Determine o volume de um cilindro inscrito em um cubo de aresta 20 cm. $2\,000\pi$ cm³ ou aproximadamente 6 280 cm³.



12. A polpa de açaí é vendida em dois tipos de embalagens cilíndricas. Uma delas (figura I) tem raio da base x e altura y. A outra (figura II) tem raio da base $\frac{x}{2}$ e altura $2y$. A primeira delas é vendida por R$ 16,00 e a segunda por R$ 10,00. Qual das duas embalagens é mais vantajoso comprar? A primeira.

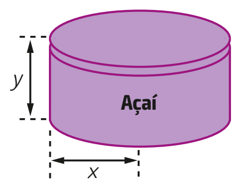


Figura I

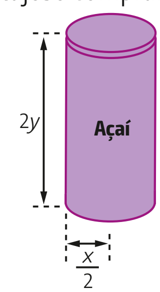


Figura II

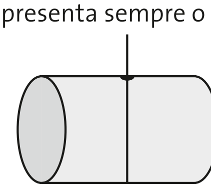
13. Um reservatório cilíndrico de altura 10 m e diâmetro 4 m está inicialmente vazio. No instante $t = 0$, ele passa a receber água a uma taxa constante de $\frac{\pi}{15}$ L/min.

a) Determinem a função que relaciona o volume V de água, em litros, no reservatório com o tempo t em horas. $V(t) = 4\pi$ L/h

b) Determinem a função que relaciona a altura h, em metros, de água no reservatório com o tempo t em horas. $h(t) = 1$ dm/h

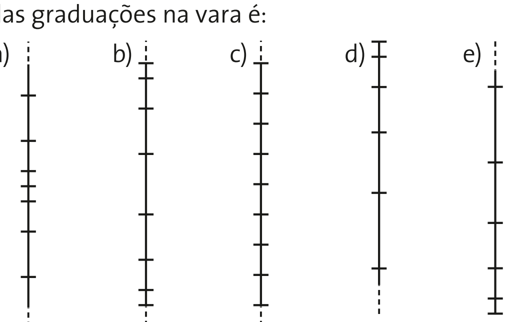
c) Determinem o tempo total, em horas, necessário para encher totalmente o tanque. 10 h

14. (Enem) Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.



A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:

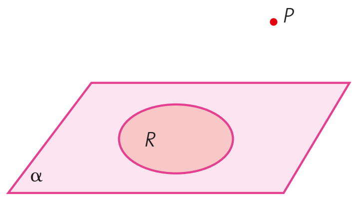
x a) b) c) d) e)

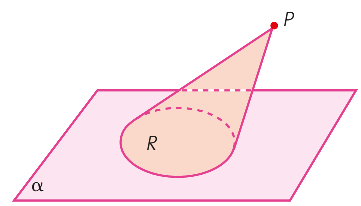


3 O cone

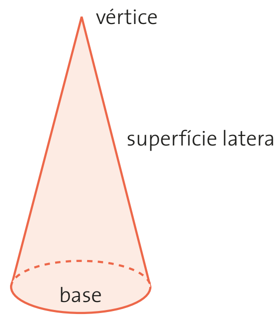
Vamos considerar um plano α, um círculo R nesse plano e um ponto P não pertencente a α.

A reunião de todos os segmentos de reta que ligam cada ponto de R ao ponto P é um sólido chamado **cone circular**.





A superfície do cone é formada por uma parte plana, o círculo, que é a sua base, e uma parte não plana, “curva”, “arredondada”, que é a sua superfície lateral.

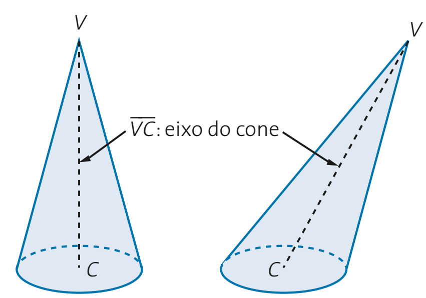


O eixo do cone é o segmento de reta que liga o vértice ao centro da base.

Se o eixo é perpendicular à base, o cone denomina-se **cone reto**.

Se o eixo é oblíquo à base, o cone é chamado **cone oblíquo**.

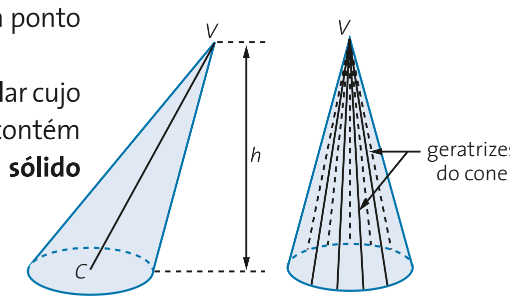
A altura h do cone é o segmento de reta perpendicular traçado do vértice ao plano da base. No caso do cone reto, a medida do eixo coincide com a da altura h.

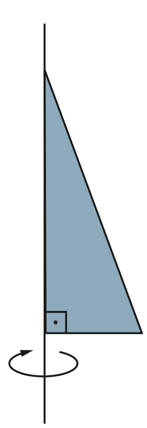


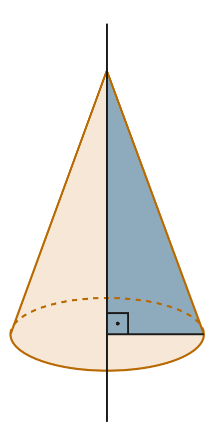
cone reto
cone oblíquo

No cone reto, cada segmento de reta que liga o vértice a um ponto da circunferência da base é chamado **geratriz** do cone.

Um cone reto pode ser obtido girando-se uma região triangular cujo contorno é um triângulo retângulo em torno de uma reta que contém um dos catetos. Por esse motivo, o cone reto é considerado um **sólido** ou **corpo de revolução** e é chamado **cone de revolução**.







Para refletir
O que indicam o outro cateto e a hipotenusa?

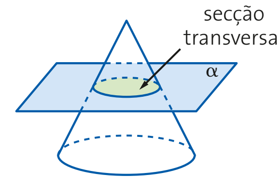
O outro cateto indica o raio da base e a hipotenusa indica a geratriz do cone.

Secções do cone reto

Secção transversal

A secção transversal é a intersecção do cone com um plano paralelo à sua base.

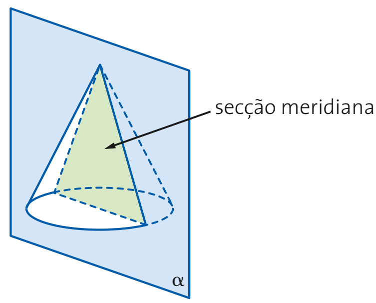
A secção transversal do cone é um círculo.

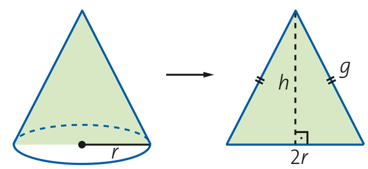


Secção meridiana

A secção meridiana é a intersecção do cone com um plano que contém o seu eixo.

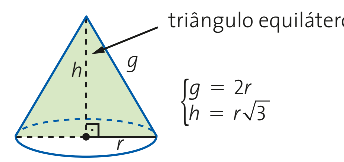
A secção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles.





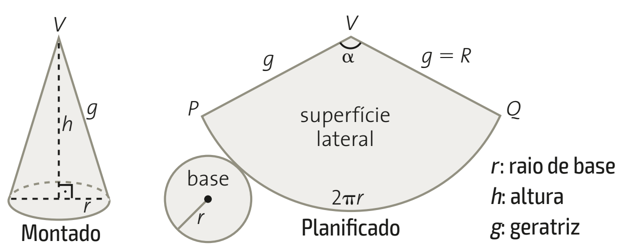
Observação: Se a secção meridiana for um triângulo equilátero, dizemos que o cone é **equilátero**.

Nesse caso, $g = 2r$ e $h = r\sqrt{3}$.



Cone equilátero

Área da superfície de um cone reto



Fique atento!

A geratriz (g) do cone reto é o raio do setor circular ($g = R$).

Não se deve confundir o raio da base (r) com o raio do setor (R).

A superfície total do cone reto é formada pela superfície lateral (um setor circular) mais a superfície da base (um círculo), isto é, $A_T = A_\ell + A_b$. Inicialmente calculamos a área do setor (A_ℓ).

A área de um setor circular é proporcional à área do círculo correspondente, de forma que:

$$\frac{A_{setor}}{\pi R^2} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} = \frac{\ell}{2\pi R}$$

Assim, podemos calcular a área do setor como $A_{setor} = \frac{\ell}{2\pi R} \cdot \pi R^2$.

Nesse caso do cone temos $\ell = 2\pi r$ e $R = g$. Logo:

$$A_\ell = \frac{2\pi r}{2\pi g} \cdot \pi g^2 = \pi r g$$

A área da base é a área do círculo de raio r: $A_b = \pi r^2$.

Logo, a área total do cone reto é $A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$.

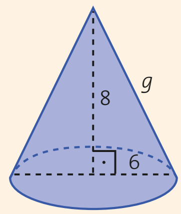
Resumindo, para um cone reto de geratriz g e raio da base r, temos:

$$A_\ell = \pi r g \qquad A_b = \pi r^2 \qquad A_T = \pi r(g + r)$$

Exercícios resolvidos

6. Um cone reto tem 8 cm de altura e raio da base igual a 6 cm.

Calcule a medida da sua geratriz, a área lateral, a área total e a medida do ângulo do setor circular.



Resolução:

- medida da geratriz:

$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{100} \simeq 10$

$g = 10$ cm

- área lateral:

$A_\ell = \pi r g = \pi \cdot 6 \cdot 10 \simeq 60\pi$

$A_\ell = 60\pi \text{ cm}^2$

- área total:

$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\,\pi$

$A_b = 36\pi \text{ cm}^2$

$A_T = A_\ell + A_b = 60\pi + 36\pi = 96\pi$

$A_T = 96\pi \text{ cm}^2$

- medida do ângulo do setor circular:

Nesse caso, $R = g = 10$ cm e $\ell = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{\ell}{2\pi R} \Rightarrow \frac{\alpha}{360°} = \frac{12\pi}{2\pi \cdot 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{12\pi \cdot 360°}{2\pi \cdot 10} = 216°$$

Logo, $\alpha = 216°$.

7. A geratriz de um cone reto mede 5 cm e o ângulo central do setor circular mede 72°.
Calcule a área lateral do cone. Use $\pi = 3{,}14$.

Resolução:

De acordo com os dados do problema, temos $\alpha = 72°$ (ângulo central) e $g = R =$ raio do setor circular $= 5$ cm. Então:

$$\frac{A_\ell}{\pi \cdot 5^2} = \frac{72}{360} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\ell = \pi(5)^2 \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{72}}}{\underset{5}{\cancel{360}}} = \pi \cdot \overset{5}{\cancel{25}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{5}}} =$$

$$= 5\pi = 5 \cdot 3{,}14 = 15{,}70$$

Assim, $A_\ell = 15{,}7 \text{ cm}^2$.

Fique atento!
A superfície lateral neste exemplo é um setor circular cuja área é $\frac{1}{5}$ do círculo de raio 5. Logo, $A_\ell = \frac{25\pi}{5} = 5\pi$.

Exercícios

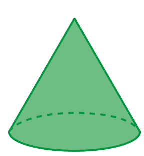
15. Um cone reto tem 24 cm de altura e o raio da base é igual a 18 cm. Calcule:

a) a medida de sua geratriz; 30 cm

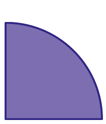
b) a área lateral; $540\pi \text{ cm}^2$

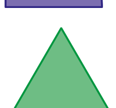
c) a área total. $864\pi \text{ cm}^2$

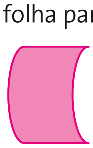
16. Mariana foi convidada para uma festa a fantasia e decidiu ir fantasiada de bruxa. Ela quis confeccionar a própria roupa, e para fazer o chapéu optou pela forma de um cone, como mostra a figura ao lado.



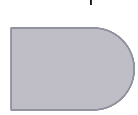
Para fazer o chapéu, ela usou uma folha de cartolina e desenhou a planificação do cone para depois cortar, montar e colar. Qual dos itens abaixo foi o desenho que Mariana fez na folha para montar seu chapéu?

x a) 

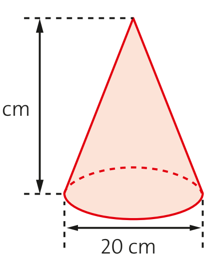
b) 

c) 

d) 

e) 

17. Quantos centímetros quadrados de cartolina serão gastos para fazer o chapéu de palhaço cujas medidas estão na figura abaixo? $260\pi \text{ cm}^2$



18. Desenvolvendo a superfície lateral de um cone reto, obtemos um setor circular de raio 6 cm e ângulo central de 60°. Calculem a área lateral do cone. $6\pi \text{ cm}^2$

19. A geratriz de um cone equilátero mede 4 cm. Determinem:

a) a altura e o raio do cone; $r = 2$ cm e $h = 2\sqrt{3}$ cm

b) a área total. $12\pi \text{ cm}^2$

20. Um cone tem altura 6 cm e diâmetro 10 cm. Considerando $\pi = 3{,}14$, determine a área total da superfície do cone. $201{,}1 \text{ cm}^2$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

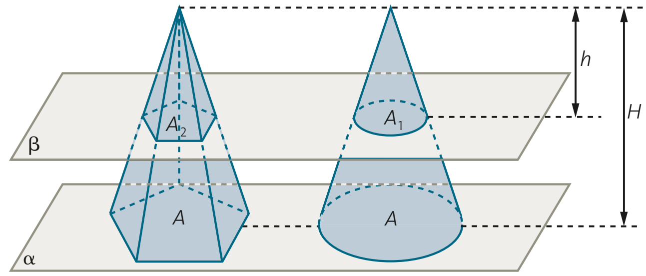
Volume do cone

Mais uma vez usaremos o princípio de Cavalieri.

Consideramos um cone de altura H e base de área A contida em um plano horizontal α.

Também consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida em α.

Se um plano horizontal β com distância h dos vértices secciona os dois sólidos, determinando regiões planas de áreas A_1 e A_2, temos:



$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} \text{ e } \frac{A_2}{A} = \frac{h^2}{H^2} \Rightarrow \frac{A_2}{A} = \frac{A_1}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

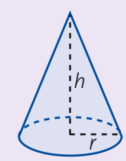
Pelo princípio de Cavalieri podemos afirmar que o cone e a pirâmide iniciais têm o mesmo volume. Como já sabemos o volume da pirâmide $\left(V = \frac{AH}{3}\right)$, o volume do cone também é o mesmo.

$$V_{cone} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

Então, para um cone circular de raio r e altura h, podemos dizer que:

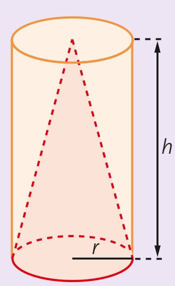
$$V = \frac{1}{3}A_b h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Observação: Lembrando a relação entre os volumes do prisma e da pirâmide de mesma altura e mesma área da base e usando o princípio de Cavalieri, podemos concluir:

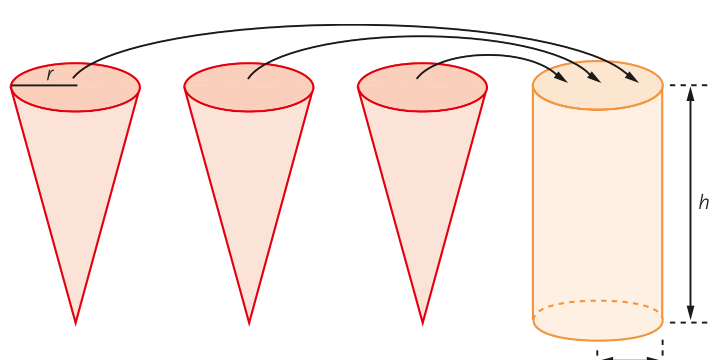
O volume de um cone de mesma área da base e mesma altura de um cilindro é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro.



$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Podemos comprovar isso experimentalmente: para encher de água uma vasilha em forma de cilindro usando como medida um recipiente em forma de cone, de mesma área da base e mesma altura do cilindro, será necessário usar o recipiente três vezes:

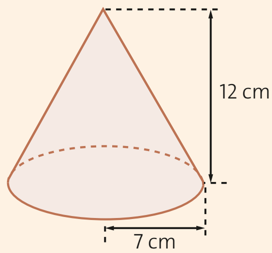


Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios resolvidos

8. Qual é o volume de um cone de raio 7 cm e altura 12 cm?

Resolução:



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 12 = 196\pi$

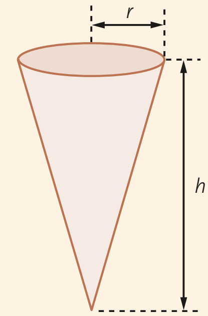
O volume do cone é 196π cm³.

9. Qual é a capacidade de uma taça de forma cônica cujo diâmetro é 6 cm e cuja altura é 10 cm? (Use $\pi = 3{,}14$.)

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Zerbor/Shutterstock

Taça *flûte* cônica.



Cone

Resolução:

diâmetro = 6 cm; raio = 3 cm; $h = 10$ cm

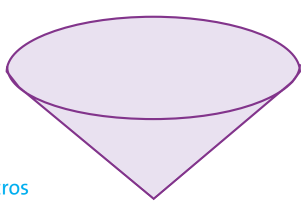
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 30\pi \simeq 94{,}20$

$V = 94{,}20$ cm³

Como 1 cm³ = 1 mL, a capacidade da taça é de 94,20 mL, aproximadamente.

Exercícios

21. Um tanque cônico tem 4 m de profundidade e seu topo circular tem 6 m de diâmetro. Qual é o volume máximo, em litros, que esse tanque pode conter de líquido?



$12\,000\pi$ litros (aproximadamente 36 000 litros)

22. Uma empresa fabrica boias de sinalização cônicas com 0,5 m de altura e 0,3 m de diâmetro. Qual é o volume dessa boia? $0{,}00375\pi$ m³ ou aproximadamente 0,01178 m³.

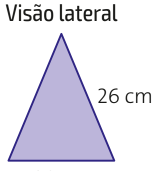
Reprodução/Arquivo da editora

Boia de arinque.

23. Carina observou o projeto de um silo:

Visão superior

Visão lateral



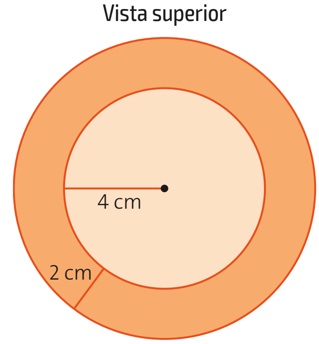
Com essas informações, Carina calculou o volume do silo. Usando $\pi = 3$, qual é esse volume? 2 400 m³

24. Determine o volume de um cone de altura 6 cm e geratriz 7 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.) Aproximadamente 81,64 cm³.

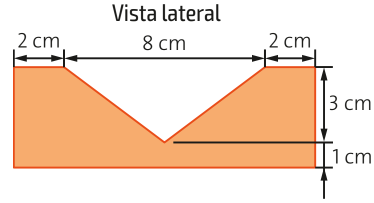
25. O volume de um cone equilátero é igual a $9\pi\sqrt{3}$ cm³. Calcule a altura do cone. $3\sqrt{3}$ cm ou aproximadamente 5,2 cm.

26. Um artista projetou um objeto de decoração maciço de mármore com as seguintes dimensões:

Vista superior



Vista lateral



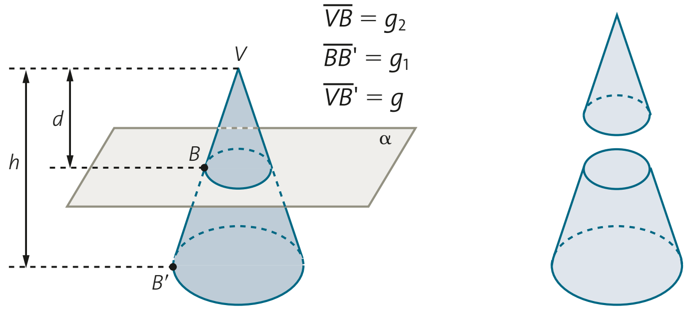
Qual é o volume de mármore que será usado nesse objeto? 128π cm³ ou aproximadamente 402 cm³.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

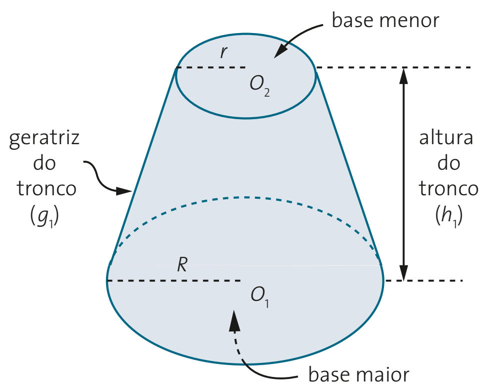
Tronco de cone reto

Vamos considerar um cone circular reto de vértice V e altura h e um plano α paralelo à base que secciona o cone a uma distância d do vértice, conforme a figura abaixo.

Nesse caso, obtemos dois sólidos: um cone de vértice V e altura d e o tronco do cone inicial.



No tronco do cone, destacamos:



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

- duas bases: a base maior (base do cone inicial) e a base menor (secção determinada por α);
- a altura (h_1), que é a distância entre as bases ($h_1 = h - d$);
- a geratriz, cuja medida (g_1) é obtida pela diferença das medidas das geratrizes dos dois cones: $g_1 = g - g_2$, em que g é a geratriz do cone inicial e g_2 é a geratriz do cone determinado por α.

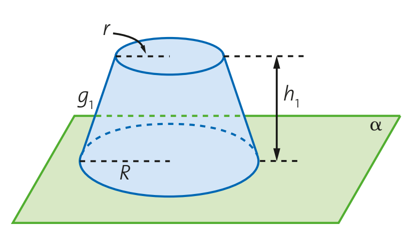
Observação: O tronco de cone pode ser considerado de forma análoga ao tronco de pirâmide. Assim como acontece com as pirâmides, um plano paralelo à base que secciona o cone origina um tronco e um cone miniatura semelhante ao original, de forma que para os dois cones podem ser usadas todas as relações de semelhança: lineares, de área e de volume.

Área e volume do tronco de cone reto

É possível demonstrar que:

área lateral (A_ℓ): $A_\ell = \pi g_1 (R + r)$

volume (V): $V = \dfrac{\pi h_1}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$



Na prática, em vez de usar a fórmula, em geral é mais adequado obter o volume do tronco de cone pela diferença dos volumes dos cones semelhantes (o original e a miniatura), como no caso do tronco de pirâmide. Entretanto, fica a critério de cada um a escolha da estratégia para a resolução dos exercícios.

Exercício resolvido

10. Os raios das bases de um tronco de cone são 3 m e 2 m. A altura do tronco é 6 m. Calcule o seu volume.

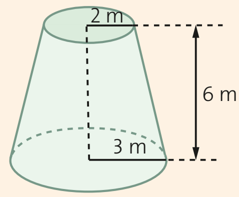
Resolução:

1º método: usando a fórmula

$R = 3$ m

$r = 2$ m

$h_1 = 6$ m



$$V = \frac{\pi h_1}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{6\pi}{3}(3^2 + 3 \cdot 2 + 2^2) =$$

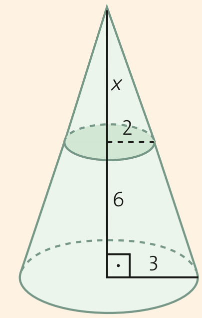
$= 38\pi$

$V = 38\pi$ m^3

2º método: sem o uso da fórmula

Seja $x + 6$ a altura do cone que deu origem ao tronco de cone.

Usando semelhança, podemos escrever:



$$\frac{x}{x+6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x = 2x + 12 \Rightarrow x = 12$

Podemos calcular o volume do tronco assim:

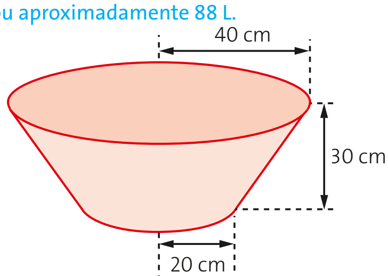
$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} =$

$= \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 12 = 54\pi - 16\pi = 38\pi$

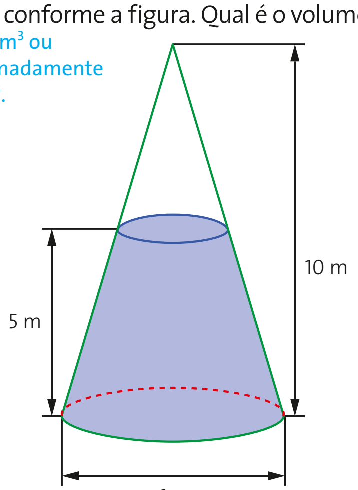
O volume do tronco de cone é 38π m^3 ou aproximadamente 119 m^3.

Exercícios

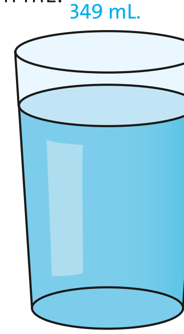
27. Uma vasilha (figura abaixo) tem a forma de um tronco de cone. Suas dimensões estão indicadas na figura. Qual é o volume máximo de água que a vasilha pode conter em litros?
28π L ou aproximadamente 88 L.



28. Um reservatório cônico tem água até a metade de sua altura, conforme a figura. Qual é o volume de água?
$26{,}25\pi$ m^3 ou aproximadamente 82,4 m^3.

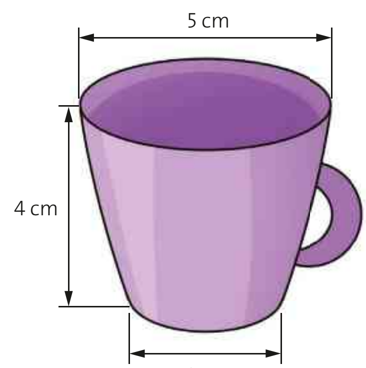


29. O copo da figura tem as seguintes medidas internas: 6 cm e 8 cm de diâmetro nas bases e 9 cm de altura. Qual é o volume máximo de água que esse copo pode conter em mL? 111π mL ou aproximadamente 349 mL.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

30. Uma xícara tem a forma da figura dada, com dimensões em centímetros. Qual é o máximo volume de café que pode ser colocado nessa xícara? (Use $\pi = 3$.)
49 mL



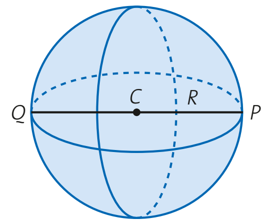
Dam d'Souza/Arquivo da editora

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

4 A esfera

Consideremos um ponto C e um número real positivo R qualquer.

A esfera de centro C e raio de medida R é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R do ponto C.



A "casquinha" ou a fronteira da esfera chama-se **superfície esférica**.

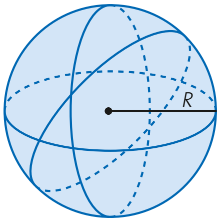
Área da superfície esférica

Na figura abaixo estão desenhados três círculos máximos. A área da superfície esférica é dada pelo quádruplo da área de um dos círculos máximos, ou seja:

$$A = 4\pi R^2$$

Por exemplo, se o raio de uma esfera é 9 cm, a área da superfície esférica será dada por:

$$A = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 144\pi;\ A = 144\pi \text{ cm}^2$$



Observação: Essa fórmula será justificada na seção *Um pouco mais...* (página 89).

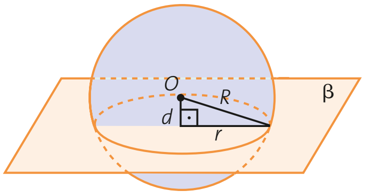
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Volume da esfera

O volume de uma esfera de raio R é igual a:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Observe a figura abaixo, em que aparece a secção determinada em uma esfera de raio R por um plano β.



A intersecção do plano β com a esfera é um círculo de raio r. Se d é a distância de O (centro da esfera) ao plano β, temos:

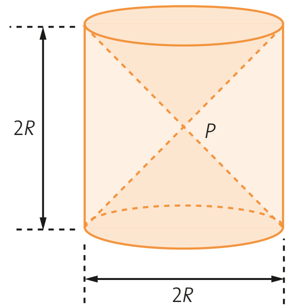
$$R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$$

Portanto, a área da secção é dada por:

$$\pi(R^2 - d^2)$$

Fique atento!
Se um plano secciona uma esfera, a secção é sempre um círculo.

O volume da esfera será determinado utilizando-se o princípio de Cavalieri. Para isso, vamos considerar inicialmente um sólido S que será obtido da seguinte maneira: de um cilindro equilátero de raio R e altura $2R$ retiramos dois cones de raio R, altura R e vértice P.

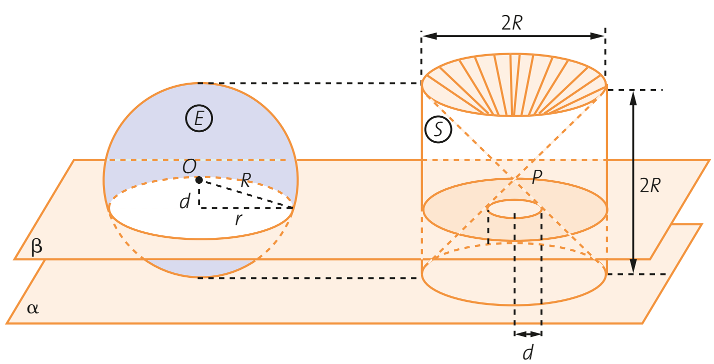


Você sabia?
Esse sólido S é conhecido como anticlepsidra.

O volume do sólido S é tal que:

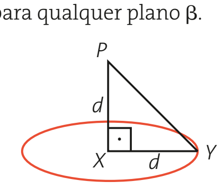
$$\text{volume de } S = \underbrace{\pi R^2 \cdot 2R}_{\text{cilindro}} - \underbrace{2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R}_{2 \text{ cones}} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Agora podemos considerar, apoiados em um plano α, esse sólido S e uma esfera E de raio R, conforme mostra a figura:



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento!
A reta OP é paralela ao plano α.
O raio do círculo menor da coroa é d, pois o $\triangle PXY$ indicado abaixo é retângulo e isósceles para qualquer plano β.



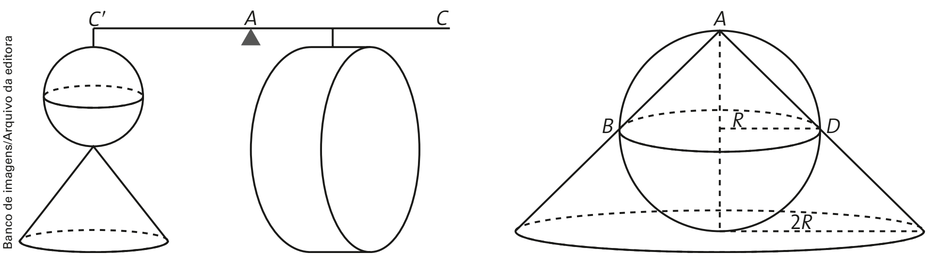
Se um plano β, paralelo a α, seccionar a esfera E, a área da secção será $\pi(R^2 - d^2)$ conforme foi visto. Além disso, β também secciona o sólido S e a secção será uma coroa circular de raios R e d, e também de área igual a $\pi(R^2 - d^2)$.

A igualdade das áreas das secções permite concluir, pelo princípio de Cavalieri, que a esfera E tem o mesmo volume que o sólido S, que, como sabemos, é $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Podemos então concluir que, se uma esfera tem raio R, seu volume é:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

O volume da esfera foi encontrado de forma precisa, pela primeira vez, por Arquimedes de Siracusa (c. 287 a.C.-c. 212 a.C.), um grande matemático do período helênico que, entre outras coisas, descobriu uma série de poliedros. Arquimedes publicou um livro (em duas partes) chamado *A esfera e o cilindro*, no qual apresenta métodos para encontrar a área e o volume de alguns sólidos redondos. Uma das principais características do trabalho de Arquimedes foi o aprimoramento de um método atribuído a Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.), o método da exaustão, considerado uma versão primitiva do cálculo integral (que seria desenvolvido apenas 18 séculos depois). Na obra *A esfera e o cilindro*, Arquimedes concluiu que uma esfera de raio R e um cone de raio $2R$ e altura $2R$ são equilibrados por um cilindro de raio $2R$ e altura $2R$ desde que o braço da balança referente aos primeiros sólidos seja o dobro do braço referente ao segundo. Essa linha de raciocínio ficou conhecida como método de equilíbrio (criado pelo próprio Arquimedes) e foi muito utilizada para determinar áreas e volumes de figuras geométricas. É possível demonstrar o método de equilíbrio utilizando-se o método de exaustão.



Conclusão de Arquimedes pelo método de equilíbrio. Observe que $AC' = 2AC$.

Isso significa que duas vezes o "peso" da esfera com o cone equivale a uma vez o "peso" do cilindro. Usando notação moderna e representando por E o volume da esfera, C_0 o volume do cone e C_i o volume do cilindro, temos:

$$2(E + C_0) = C_i$$

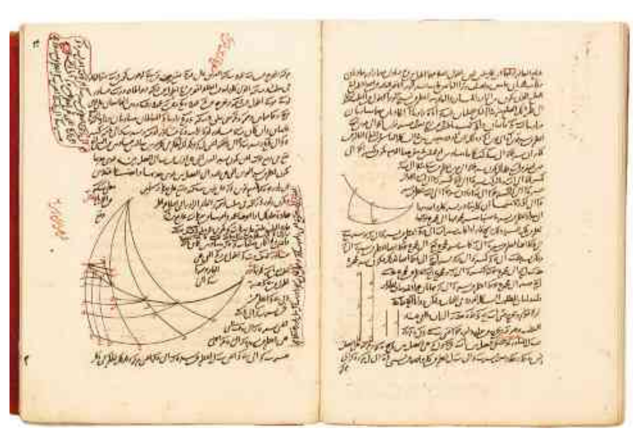
Arquimedes já sabia que o volume do cilindro é o produto da área da base pela altura e que o do cone é a terça parte do produto da área da base pela altura. Assim, a relação acima pode ser desenvolvida da seguinte maneira:

$$E + C_0 = \frac{1}{2}\pi(2R)^2 2R \Rightarrow E + C_0 = 4\pi R^3$$

Substituindo C_0 por $\frac{1}{3}\pi(2R)^2 2R$, temos:

$$E + \frac{1}{3}\pi(2R)^2 2R = 4\pi R^3 \Rightarrow E = 4\pi R^3 - \frac{8\pi R^3}{3} \Rightarrow E = \frac{12\pi R^3}{3} - \frac{8\pi R^3}{3} = \frac{1}{3}4\pi R^3$$

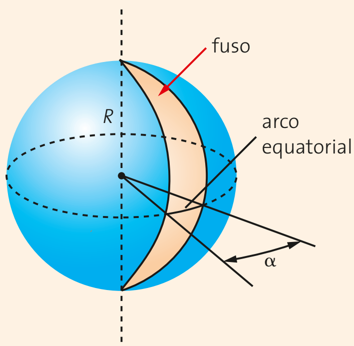
Arquimedes encontrou a fórmula correta, chamou seu método de "método mecânico" e teve a intuição de que algum dia se poderia comprovar esse resultado por meios puramente matemáticos. De fato, o método mecânico de Arquimedes tem grande semelhança com o princípio de Cavalieri, que, por sua vez, traz a ideia que daria origem ao cálculo integral inventado no século XVII. Conhecemos muita coisa sobre os trabalhos de Arquimedes porque grande parte do que ele escreveu foi traduzida para o árabe e para o persa. No século IX os irmãos Banu Musa, que viveram em Bagdá, Pérsia, traduziram para o árabe diversos livros gregos de Matemática e Astronomia, que foram reproduzidos por séculos, chegando até a nossa era. No século XIII o iraniano Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) publicou as revisões que fez dos textos gregos incluindo o livro de Arquimedes *A esfera e o cilindro*, que, em árabe, teve o título *tahrir kitab al-kura wa'l-ustuwana li arshimidis* (Exposição sobre a esfera e o cilindro). A figura ao lado mostra duas páginas desse livro perfeitamente preservado.



Páginas de *Exposição sobre a esfera e o cilindro*, publicado em c. 1298. Medida das páginas: 20,8 cm × 16 cm.

Exercícios resolvidos

11. Um fuso esférico é uma parte da superfície esférica gerada pela rotação (de α graus ou radianos) de uma semicircunferência de raio R com as extremidades em um eixo. A área do fuso é proporcional ao ângulo α, de forma que, quando α for 360° (ou 2π rad), tem-se a área da superfície esférica, ou seja, $4\pi R^2$. Encontre a fórmula que permite obter a área do fuso em função do raio R e do ângulo α para graus e para radianos.



Resolução:

Pelo enunciado, temos:

$$\frac{A_{fuso}}{4\pi R^2} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi}$$

Então:

$$A_{fuso} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} \cdot 4\pi R^2 = \frac{\alpha\pi R^2}{90°} \text{ (}\alpha\text{ em graus)}$$

$$A_{fuso} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} \cdot 4\pi R^2 = 2\alpha R^2 \text{ (}\alpha\text{ em radianos)}$$

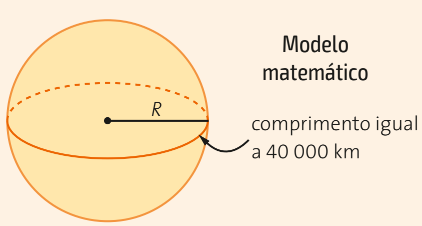
12. Responda às questões relativas ao planeta Terra.

a) Como calcular o seu volume e a área de sua superfície?

b) Como calcular a área coberta de água (em km^2) em sua superfície?

Resolução:

a) Sabe-se que a linha do equador tem 40 000 km aproximadamente.



Considerando a Terra uma figura de forma esférica, temos $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Como $C = 40\,000$ km e $C = 2\pi R$, vamos determinar R, considerando $\pi = 3{,}14$:

$$40\,000 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{40\,000}{2\pi} \simeq 6\,369$$

$R \simeq 6\,369$ km

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6\,369^3 \simeq 1{,}08 \cdot 10^{12}$$

$V = 1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3

A área da superfície da esfera é dada por $A = 4\pi R^2$. No caso do planeta Terra, como $R \simeq 6\,369$ km, temos:

$A \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,369^2 = 509\,485\,862{,}1$

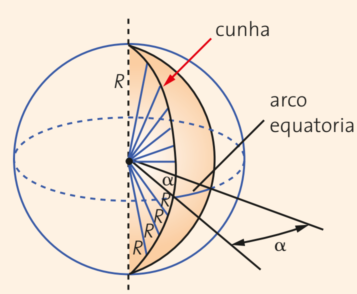
Portanto, o volume aproximado da Terra é $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3 e sua área aproximada é $5{,}09 \cdot 10^8$ km^2.

b) Como três quartos da superfície da Terra são cobertos de água, temos:

$$\frac{3}{4}A \simeq \frac{3}{4} \cdot 5{,}09 \cdot 10^8 \simeq 3{,}82 \cdot 10^8$$

A área coberta de água é de aproximadamente $3{,}82 \cdot 10^8$ km^2.

13. Uma cunha esférica é uma parte da esfera, gerada pela rotação (de α graus ou radianos) de um semicírculo de raio R com as extremidades em um eixo. O volume da cunha é proporcional ao ângulo α, de forma que, quando α for 360° (ou 2π rad), tem-se o volume da esfera, ou seja, $\frac{4}{3}\pi R^3$. Encontre a fórmula que permite obter o volume da cunha em função do raio R e do ângulo α para graus e para radianos.



Resolução:

Pelo enunciado, temos:

$$\frac{V_{cunha}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi}. \text{ Então:}$$

$$V_{cunha} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\alpha\pi R^3}{270°} \text{ (}\alpha\text{ em graus)}$$

$$V_{cunha} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\alpha R^3}{3} \text{ (}\alpha\text{ em radianos)}$$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

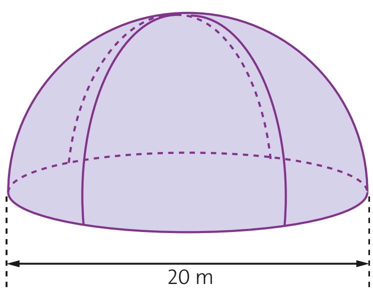
Exercícios

31. Determine a área da superfície esférica cujo raio é 6 cm. 144π cm²

32. Uma laranja tem a forma esférica com a medida indicada abaixo. Qual é a área aproximada da casca dessa laranja? 64π cm² ou aproximadamente 201 cm².

Ilustrações: Dam d'Souza/ Arquivo da editora

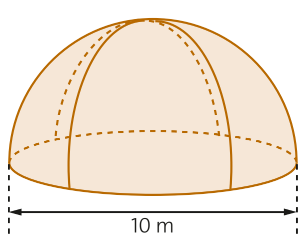
33. A figura abaixo representa um hemisfério. Qual é a área da superfície desse hemisfério? 200π m²



34. Qual é o volume de uma bola de basquete cujo diâmetro mede 26 cm? Use $\pi = 3{,}14$.
Aproximadamente 9 200 cm³.

35. O diâmetro de uma esfera de ferro fundido mede 6 cm. Qual é o volume dessa esfera?
Aproximadamente 113,04 cm³.

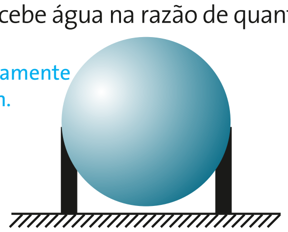
36. Um reservatório tem a forma de um hemisfério (figura a seguir). Qual é o volume máximo de líquido que cabe nesse reservatório em litros? Use $\pi = 3$.
250 000 L



37. Considere uma laranja composta de 12 gomos exatamente iguais. Se a laranja tem 8 cm de diâmetro, qual é o volume aproximado de cada gomo?
$\frac{64\pi}{9}$ cm³ ou aproximadamente 22 cm³.

38. Um reservatório de forma esférica (figura abaixo) tem 9 m de raio. Para encher totalmente esse reservatório são necessárias 20 horas. Nessas condições, o reservatório recebe água na razão de quantos m³/h?

Aproximadamente 152,60 m³/h.



39. Calcule o volume de uma esfera de raio $\sqrt[3]{\pi}$ cm.
Aproximadamente 13,15 m³.

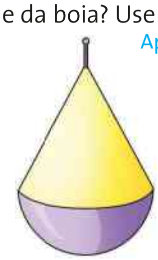
40. O volume de uma esfera é $\frac{512\pi}{3}$ cm³. Calcule o raio e a área da superfície esférica.
$R = 4\sqrt[3]{2}$ cm; $A = 64\pi\sqrt[3]{4}$ cm².

41. Uma cunha tem ângulo de 60° e raio $r = 6$ cm. Determine seu volume. 48π cm³

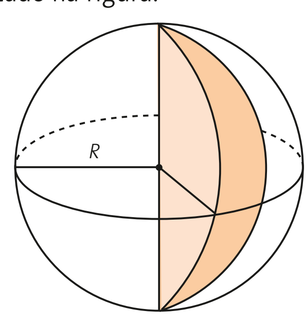
42. Um fuso de 30° tem 3 cm de raio. Qual é sua área?
3π cm²

43. Uma cunha esférica correspondente a um ângulo de 72° tem volume igual a 6,4 m³. Calculem a área do fuso esférico determinado por essa cunha na esfera. Considerem $\pi = 3$. 9,6 m²

44. Sabemos que uma boia (figura a seguir) serve para orientar os navios na entrada de um porto. Essa boia é formada por um hemisfério de 2 m de diâmetro e por um cone que tem 80 cm de altura. Qual é o volume da boia? Use $\pi = 3$.
Aproximadamente 2,8 m³.



45. (Vunesp-SP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm², determine, em função de π e de R:

a) a área da casca de cada fatia de melancia (fuso esférico); $\frac{\pi R^2}{3}$ cm²

b) quantos centímetros quadrados de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

$\frac{4\pi R^2}{3}$ cm²

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Um pouco mais...

Área da superfície esférica

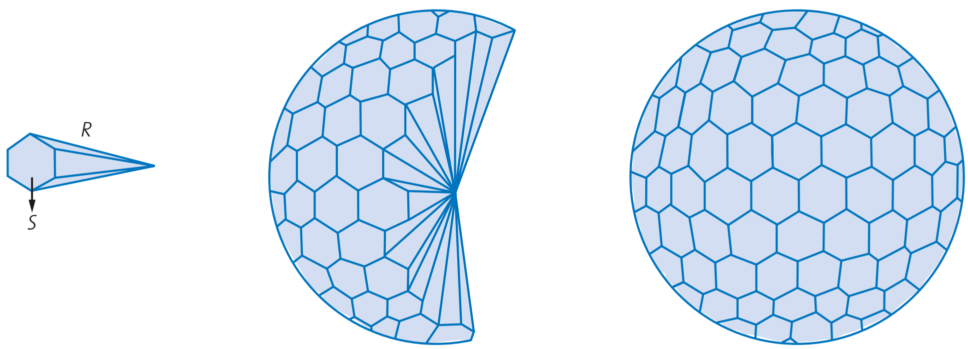
Assunto opcional

Conhecendo o volume da esfera, podemos mostrar intuitivamente por que a área da superfície esférica é:

$$A = 4\pi R^2$$

Vamos imaginar uma esfera de raio R como a reunião de sólidos que "parecem" pirâmides. De fato, esses sólidos **não são pirâmides** perfeitas, pois a base das pirâmides é plana e esses sólidos têm bases com superfície arredondada (as bases pertencem à superfície da esfera).

Contudo, tomando essas bases como sendo as menores possíveis, pode-se tratar essas superfícies arredondadas como superfícies planas, permitindo considerar os sólidos como "pirâmides". Assim, podemos admitir que o volume da esfera é equivalente à soma dos volumes de todas essas "pirâmides" de bases minúsculas.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Repare que a altura da "pirâmide" é o raio da esfera. Pensando desse modo, a superfície esférica fica dividida em um número infinitamente grande de "polígonos" (base das "pirâmides").

Digamos então que a superfície esférica tenha ficado dividida em n polígonos (n suficientemente grande), cujas áreas são $S_1, S_2, ..., S_n$.

Lembrando que o volume de cada "pirâmide" é:

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{SR}{3}$$

e que $S_1 + S_2 + ... + S_n = A$ é a área da superfície esférica, vem:

$$V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + ... + \frac{1}{3}S_nR = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + ... + S_n)R = \frac{1}{3}AR$$

ou seja:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR \Rightarrow A = 4\pi R^2$$

Fique atento!
Essa demonstração é meramente intuitiva. Ela ajuda a entender melhor a conexão entre área e volume de uma esfera.
A rigor, precisaríamos usar a noção de limite para fazer a demonstração matemática.

Logo, a área da superfície esférica de raio R é:

$$A = 4\pi R^2$$

A Geometria e o conhecimento científico

A Geometria, ao longo de toda a sua história, acompanhou o ser humano na busca pelo conhecimento da natureza que o cerca. Quando a civilização grega chegou ao ápice, os gregos assumiram o desenvolvimento da Geometria. Passaram a privilegiar o conhecimento dedutivo e não o empírico, como ocorria até então. E questões que sempre intrigaram a humanidade, como o tamanho do raio da Terra, a distância da Terra à Lua ou da Terra ao Sol, já estimadas em outras épocas por outros sábios, passaram, a partir de então, a ser tratadas com o auxílio dos conhecimentos geométricos.

Com o fim da hegemonia grega, o mundo passou por quase 15 séculos de trevas. Apenas com a queda de Constantinopla e o início do Renascimento, os textos gregos voltaram à Europa, trazidos pelos que fugiam da invasão turca. E, com o seu ressurgimento, também voltaram as contribuições da Geometria aos outros campos do conhecimento científico.

Eis alguns bons exemplos de contribuições da Geometria à ciência ao longo do tempo:

O grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) foi brilhante em perceber como comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol usando triângulos retângulos, semelhanças de triângulos e proporções.*

Eratóstenes (276 a.C.-196 a.C.) não era grego, mas estudou em Atenas e viveu em Alexandria, importante centro cultural da época. Ficou conhecido por sua versatilidade e por uma engenhosa ideia para calcular o raio da Terra, baseado na proporcionalidade entre medida e comprimento de arcos, nos ângulos correspondentes em paralelas cortadas por transversais e na razão entre comprimento da circunferência e seu diâmetro.**

O polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) retomou as hipóteses heliocêntricas de Aristarco (que na época não vingaram) e elaborou toda uma teoria em que os planetas teriam órbitas circulares em torno do Sol, calculando os períodos de revolução dos planetas e suas distâncias até o Sol, com base na proporcionalidade de arcos e semelhança de triângulos (já na forma de Trigonometria).***

O alemão Johannes Kepler (1571-1630) aperfeiçoou as ideias de Copérnico ao afirmar que as órbitas planetárias são na verdade elípticas e apresentou as três leis que hoje conhecemos como “leis de Kepler”, repletas de proporcionalidades, áreas e elipses.

A Geometria que estudamos hoje é essencialmente a mesma que serviu de alicerce para que os estudiosos do passado conseguissem cada vez mais adquirir conhecimento e entender melhor a natureza que nos cerca. Se hoje sabemos muito sobre ela e seus fenômenos, isso é resultado do esforço e da dedicação de muitos sábios, alguns dos quais considerados os maiores astrônomos, geômetras ou matemáticos de suas épocas.

Babak Tafreshi/National Geographic/Getty Images

Monumento em homenagem a Nicolau Copérnico, localizado na cidade de Torun (Polônia). Fotografia de 2013.

Stock Montage/Getty Images

Retrato de Johannes Kepler (1571-1630).

* Para mais detalhes, leia “Aristarco e as dimensões astronômicas”, do Prof. Geraldo Ávila, em *Revista do Professor de Matemática 55*, SBM, 2004, p. 1-10.

** Sobre a ideia de Eratóstenes, leia “Se eu fosse professor de Matemática”, do Prof. Geraldo Ávila, em *Revista do Professor de Matemática 54*, SBM, 2004, p. 2-9.

*** Para saber detalhes sobre os cálculos de Copérnico, leia “Geometria e Astronomia”, do Prof. Geraldo Ávila, em *Revista do Professor de Matemática 13*, SBM, 1988, p. 5-12.

CAPÍTULO 4

Geometria analítica: ponto e reta

Syda Productions/Shutterstock

Um(a) engenheiro(a) civil pode atuar na concepção, no projeto, na construção e na manutenção de todos os tipos de infraestrutura. Na fase de projeto, o desenho de uma construção utiliza elementos da Geometria, como pontos e retas, e é denominado “planta”. Na planta de uma casa, por exemplo, pode-se determinar a distância entre dois pontos de luz e a inclinação de um telhado; o projeto pode conter paredes paralelas ou perpendiculares, etc. Todos os elementos de uma planta se relacionam de forma coordenada em um ou mais planos.

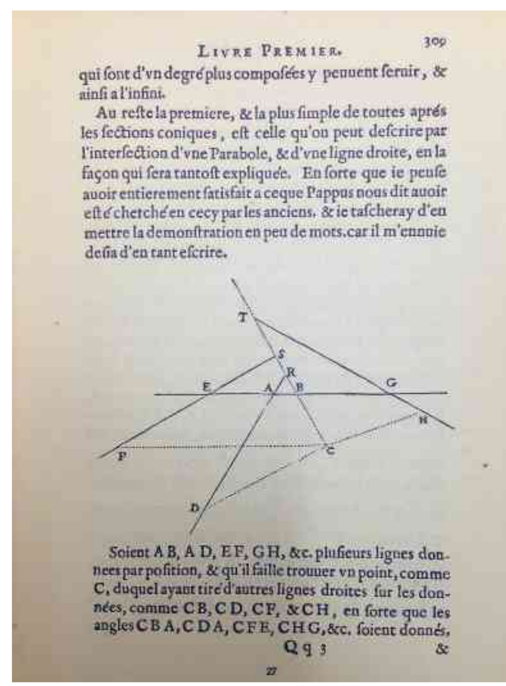
1 Introdução à Geometria analítica

Retrato de René Descartes (1596-1650). Óleo sobre tela, 77,5cm x 68,5 cm. (Detalhe)

René Descartes, filósofo e matemático francês, foi um dos líderes do movimento racionalista; ele acreditava que a busca pela verdade deveria ser feita por meios intelectuais e dedutivos e não por observações ou intuições. Segundo ele, todo o Universo, que é feito de matéria em movimento, deve ser explicado mecanicamente, isto é, em termos de forças exercidas pela matéria.

Sua obra mais importante foi o livro *Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências*, publicado em 1637. No contexto do que viria a ser a Geometria analítica, um dos apêndices (textos complementares) desse livro foi intitulado *A Geometria*. Descartes apresentou então uma nova abordagem que pretendia libertar a geometria da utilização de desenhos e do raciocínio sobre eles, substituindo esse procedimento tradicional por outro que ele mesmo tinha inventado. Nessa nova abordagem cada problema de geometria poderia ter vários segmentos de reta conhecidos e dois desconhecidos, que ele passaria a representar por x e y. Assim, as relações entre os segmentos de reta conhecidos e os desconhecidos podem fornecer equações que, depois de resolvidas, mostrarão a solução do problema. O grande avanço na proposta de Descartes estava na associação de uma situação geométrica com a Álgebra, ou seja, utilizar equações algébricas para descrever situações geométricas. Apesar disso, por mais intrigante que nos possa parecer, Descartes não tinha a ideia do que hoje chamamos de plano cartesiano (assim batizado em sua homenagem).

Ao lado vemos uma página de *A Geometria* de Descartes, no qual, pela primeira vez, segmentos de comprimentos variáveis foram representados por x e y. A figura descreve um difícil problema proposto por Pappus de Alexandria (290-350), no qual as retas são dadas e o objetivo é encontrar (construir) o ponto C que possui certas propriedades dadas.



LIVRE PREMIER. 309

qui font d'vn degré plus composées y peuuent feruir, & ainfi a l'infini.

Au refte la premiere, & la plus fimple de toutes aprés les fections coniques, eft celle qu'on peut defcrire par l'interfection d'vne Parabole, & d'vne ligne droite, en la façon qui fera tantoft expliquée. En forte que ie penfe auoir entierement fatisfait a ceque Pappus nous dit auoir efté cherché en cecy par les anciens. & ie tafcheray d'en mettre la demonftration en peu de mots. car il m'ennuie defia d'en tant efcrire.

Soient A B, A D, E F, G H, &c. plufieurs lignes données par pofition, & qu'il faille trouuer vn point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites fur les données, comme C B, C D, C F, & C H, en forte que les angles C B A, C D A, C F E, C H G, &c. foient donnés,

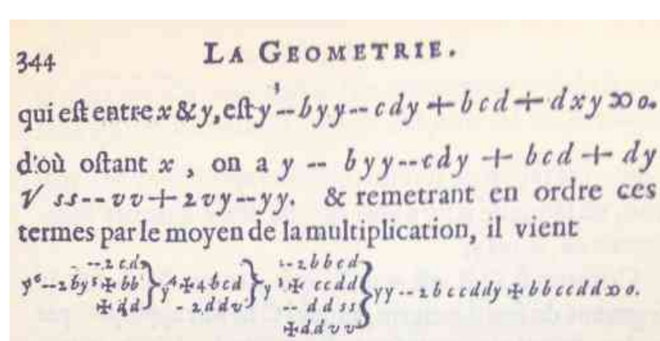
Q q 3 &

27

Página de *A Geometria*. Editado em 1954. Dover Publications.

Descartes começa a explicar seu raciocínio dizendo que vai chamar o segmento de reta AB por x e o segmento de reta BC por y. Este é o momento do nascimento da Geometria analítica, o método que traduz uma situação geométrica por meio de equações algébricas. A obra de Descartes mostra também um avanço das notações algébricas. Em *A Geometria*, as variáveis são representadas pelas últimas letras do alfabeto, enquanto as letras iniciais do alfabeto designam parâmetros fixos. Nesse momento da história, o leitor atual já pode compreender o que está escrito.

Veja, a seguir, o início da página 344 do livro de Descartes e tente identificar a equação da primeira linha e as expressões das duas linhas seguintes.



344 LA GEOMETRIE.

qui eft entre x & y, eft $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \propto 0$.

d'où oftant x, on a $y - byy - cdy + bcd + dy \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. & remetrant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \propto 0.$$

Detalhe de uma página de *A Geometria*.

Observe que já aparece um expoente (y^3) mas o quadrado de um número y é representado por yy.

A primeira pessoa a usar eixos ortogonais e um sistema de coordenadas foi o francês Pierre de Fermat, contemporâneo de Descartes. Você vai ver mais sobre Pierre de Fermat na página 168 deste livro.

Geometria analítica no Ensino Médio

Em resumo, podemos dizer que a Geometria analítica está fundamentada na ideia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais. Assim, as linhas no plano (reta, circunferência, elipse, etc.) são descritas por meio de equações. Com isso, é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas, como também interpretar de forma geométrica algumas situações algébricas.

Como já vimos, essa integração entre Geometria e Álgebra foi responsável por grandes progressos na Matemática, mas também nas outras ciências em geral.

Em Geometria analítica estudaremos várias figuras (incluindo as que não representam funções) e suas propriedades geométricas por meio de processos algébricos (equações, inequações, sistemas, etc.). Para isso, algumas ideias sobre funções serão retomadas e aprofundadas e outras serão introduzidas. Por exemplo:

Fique atento!
Caso tenha alguma dúvida quanto ao estudo de funções, procure revisá-las; caso as dúvidas persistam, peça ajuda ao professor. Você encontrará esse conteúdo no livro de Matemática do 1º ano do Ensino Médio.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$ (ou $y = ax + b$), com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, tem como gráfico uma reta não paralela ao eixo y.

Pela equação é possível estudar propriedades dessa reta, assim como, a partir de uma propriedade da reta, pode-se identificar uma equação. Veja exemplos:

a) A reta de equação $y = 3x + 7$ é paralela à reta de equação $y = 3x - 8$.

b) Se a reta passa pela origem $O(0, 0)$, então sua equação é da forma $y = ax$.

Constate que essas afirmações são verdadeiras.

Correspondência biunívoca: correspondência um a um, ou seja, que associa os elementos de dois conjuntos, tal que cada elemento de um tenha um único correspondente no outro.

2 Sistema cartesiano ortogonal

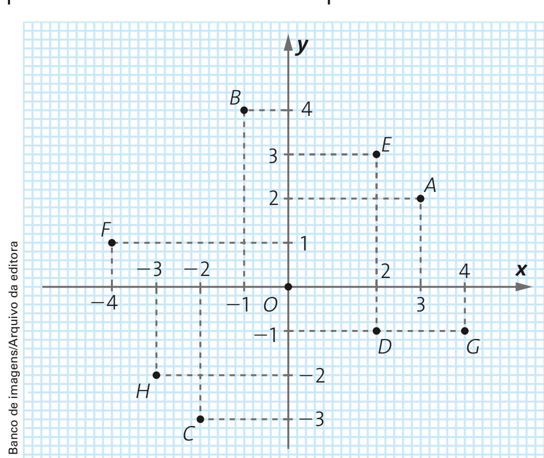
Você se lembra que existe uma **correspondência biunívoca** entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é, que a cada ponto do plano corresponde um único par ordenado (x, y), e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto do plano? Essa relação biunívoca não é única, depende do sistema de **eixos ortogonais** adotado.

Eixos ortogonais: retas orientadas que permitem a localização de pontos no plano ou no espaço.

Para estabelecer uma dessas correspondências biunívocas são usados dois eixos ortogonais (eixo x e eixo y) que formam o **sistema cartesiano ortogonal**. A intersecção dos eixos x e y é o ponto O, chamado **origem** do sistema.

No sistema cartesiano ortogonal abaixo cada par ordenado está associado a um ponto. Reúna-se a um colega e respondam: a qual ponto está associado cada par ordenado?

a) (0, 0) *O* (origem)
b) (3, 2) *A*
c) (−1, 4) *B*
d) (−2, −3) *C*
e) (2, −1) *D*



Depois de verificar oralmente as respostas dos alunos, pergunte as coordenadas de cada ponto que sobrou no gráfico (*E*, *F*, *G* e *H*). Ressalte as diferenças entre os pontos *A* e *E*, por exemplo.

Considerando o ponto $A(3, 2)$, dizemos que o número 3 é a coordenada x ou a **abscissa do ponto *A***, e o número 2 é a coordenada y ou a **ordenada do ponto *A***.

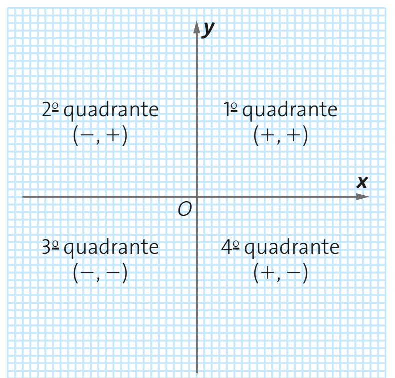
Observações:

1ª) Os eixos x e y chamam-se **eixos coordenados** e dividem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**, cuja identificação é feita conforme a figura abaixo.

O sinal positivo ou negativo da abscissa e da ordenada varia de acordo com o quadrante.

2ª) Se o ponto P pertence ao eixo x, suas coordenadas são $(a, 0)$, com $a \in \mathbb{R}$.

3ª) Se o ponto P pertence ao eixo y, suas coordenadas são $(0, b)$, com $b \in \mathbb{R}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento!
O ponto $O(0, 0)$ pertence aos dois eixos.

Você sabia?
Os nomes "coordenadas *cartesianas*" e "sistema *cartesiano* ortogonal" derivam de Renatus Cartesius, nome de Descartes em latim.
Fora da Matemática, o adjetivo *cartesiano* pode também ser usado para designar uma pessoa metódica e sistemática em excesso, uma vez que as ideias filosóficas de Descartes primavam pela sistematização e pelo rigor racional.

Exercícios

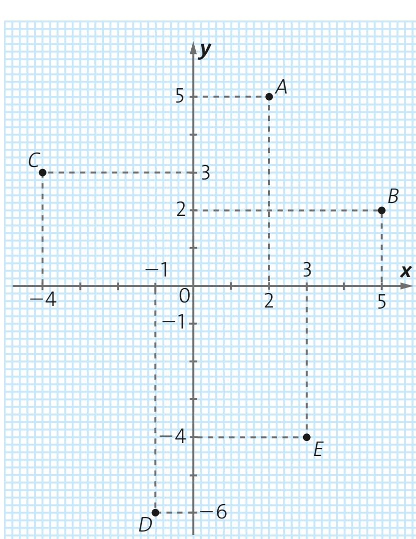
Atividade em dupla Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

Veja a resolução do exercício 2 no Manual do Professor.

1. Observe a figura e determine os pontos, ou seja, dê suas coordenadas:

a) A (2, 5)
b) B (5, 2)
c) C (−4, 3)
d) D (−1, −6)
e) E (3, −4)



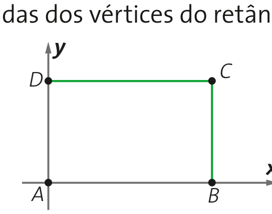
Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Utilizando uma folha de papel quadriculado, desenhe um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e marque os pontos:

a) $A(1, -2)$
b) $D(0, 3)$
c) $Q(3, -2)$
d) $B(-3, 3)$
e) $P(-1, -5)$
f) $N(0, -4)$
g) $C(4, 4)$
h) $M(-4, 0)$
i) $R(3, 0)$

3. No retângulo da figura, $AB = 2a$ e $BC = a$. Dê as coordenadas dos vértices do retângulo.

$A(0, 0)$; $B(2a, 0)$; $C(2a, a)$; $D(0, a)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Determine quais são as coordenadas genéricas (em função de a, por exemplo) dos pontos pertencentes à bissetriz dos quadrantes:

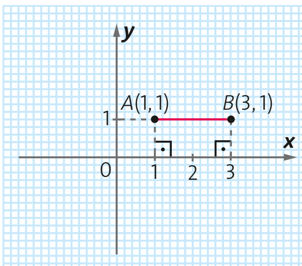
a) ímpares (1º e 3º); $P(a, a)$, $a \in \mathbb{R}$
b) pares (2º e 4º). $P(a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$

5. Sabendo que $P(2m + 1, -3m - 4)$ pertence ao terceiro quadrante, determinem os possíveis valores reais de m. $m \in \mathbb{R} \mid \frac{-4}{3} < m < -\frac{1}{2}$

3 Distância entre dois pontos

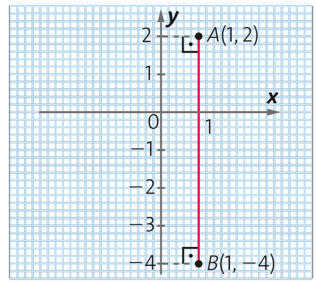
Dados dois pontos, A e B, a distância entre eles, que será indicada por $d(A, B)$, é a medida do segmento de reta de extremidades A e B. Por exemplo:

a)



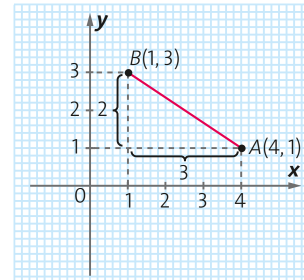
$d(A, B) = 3 - 1 = 2$

c)



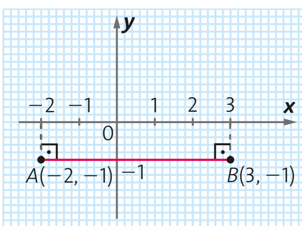
$d(A, B) = 2 - (-4) = 6$

e)



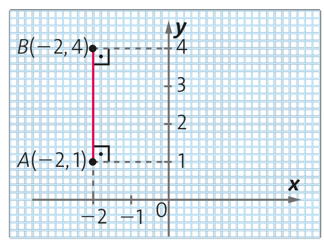
$[d(A, B)]^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{13}$

b)



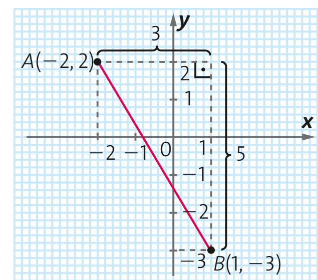
$d(A, B) = 3 - (-2) = 5$

d)



$d(A, B) = 4 - 1 = 3$

f)



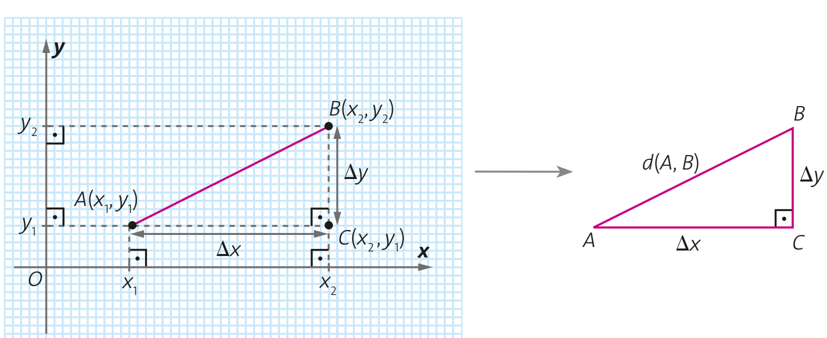
$[d(A, B)]^2 = 3^2 + 5^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{34}$

Fique atento!
Nos exemplos **e** e **f** foi usado o teorema de Pitágoras.

Fórmula da distância entre dois pontos

Podemos determinar uma expressão que indica a distância entre A e B, quaisquer que sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

O triângulo ABC é retângulo em C, logo podemos usar o teorema de Pitágoras:



Fique atento!
$\Delta x = x_2 - x_1$
$\Delta y = y_2 - y_1$

$$[d(A, B)]^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Concluímos, então, que a distância entre dois pontos A e B quaisquer do plano, tal que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fique atento!
A expressão geral obtida independe da localização de A e B.

Exercícios resolvidos

1. Um ponto $P(a, 2)$ é equidistante dos pontos $A(3, 1)$ e $B(2, 4)$. Calcule a abscissa do ponto P.

Resolução:

Como P é equidistante de A e B, devemos ter:

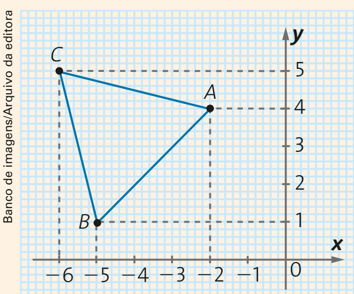
$$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(3 - a)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{(2 - a)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow \sqrt{(3 - a)^2 + 1} = \sqrt{(2 - a)^2 + 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 - a)^2 + 1 = (2 - a)^2 + 4 \Rightarrow 9 - 6a + \cancel{a^2} + 1 = 4 - 4a + \cancel{a^2} + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6a + 4a = 4 + 4 - 9 - 1 \Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

2. Demonstre que o triângulo com vértices $A(-2, 4)$, $B(-5, 1)$ e $C(-6, 5)$ é isósceles.

Resolução:



Banco de imagens/Arquivo da editora

A figura apenas ilustra o exercício. Ela é dispensável na solução.

Um triângulo é isósceles quando tem dois lados congruentes (medidas iguais). Vamos calcular, então, as medidas dos lados do triângulo ABC:

- $d(A, B) = \sqrt{(-5 + 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
- $d(A, C) = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$
- $d(B, C) = \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

Como $d(A, C) = d(B, C)$, o triângulo ABC é isósceles.

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 12 e 14 no Manual do Professor.

6. Calcule a distância entre os pontos dados:

a) $A(3, 7)$ e $B(1, 4)$ $\sqrt{13}$

b) $E(3, -1)$ e $F(3, 5)$ 6

c) $H(-2, -5)$ e $O(0, 0)$ $\sqrt{29}$

d) $M(0, -2)$ e $N(\sqrt{5}, -2)$ $\sqrt{5}$

7. Calcule a distância entre os pontos dados:

a) $P(3, -3)$ e $Q(-3, 3)$ $6\sqrt{2}$

b) $C(-4, 0)$ e $D(0, 3)$ 5

8. A distância do ponto $A(a, 1)$ ao ponto $B(0, 2)$ é igual a 3. Calcule o valor da abscissa a. $\pm 2\sqrt{2}$

9. Um ponto P pertence ao eixo das abscissas e é equidistante dos pontos $A(-1, 2)$ e $B(1, 4)$. Quais são as coordenadas do ponto P? $P(3, 0)$

10. A abscissa de um ponto P é -6 e sua distância ao ponto $Q(1, 3)$ é $\sqrt{74}$. Determine a ordenada do ponto. -2 ou 8

11. Considerem um ponto $P(x, y)$ cuja distância ao ponto $A(5, 3)$ é sempre duas vezes a distância de P ao ponto $B(-4, -2)$. Nessas condições, escrevam no caderno uma equação que deve ser satisfeita com as coordenadas do ponto P.
$3x^2 + 3y^2 + 42x + 22y + 46 = 0$

12. Mostrem que um triângulo com vértices $A(0, 5)$, $B(3, -2)$ e $C(-3, -2)$ é isósceles e calcule o seu perímetro.
Perímetro: $2\sqrt{58} + 6$

13. Encontrem uma equação que seja satisfeita com as coordenadas de qualquer ponto $P(x, y)$ cuja distância ao ponto $A(2, 3)$ é sempre igual a 3.
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

14. Considerem um triângulo com lados que medem a, b e c, sendo a a medida do lado maior. Lembre-se de que:

- $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo retângulo
- $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo acutângulo
- $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo obtusângulo

Dados $A(4, -2)$, $B(2, 3)$ e $C(6, 6)$, verifique o tipo do triângulo ABC quanto aos lados (equilátero, isósceles ou escaleno) e quanto aos ângulos (retângulo, acutângulo ou obtusângulo). Escaleno e obtusângulo.

4 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

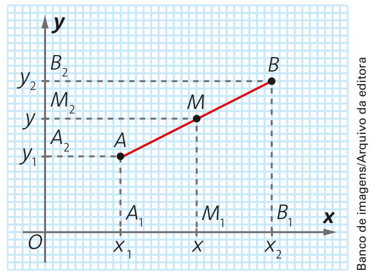
Dado um segmento de reta AB tal que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos distintos, vamos determinar as coordenadas de M, ponto médio de $\overline{AB}$.

Considere:

- um segmento de reta com extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$;
- o ponto $M(x, y)$, ponto médio do segmento de reta AB.

Para refletir
Por que A e B devem ser pontos distintos?

Porque se A coincidir com B não há segmento de reta. Portanto, não há ponto médio.



Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1} \Rightarrow 1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow 2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_2M_2}{M_2B_2} \Rightarrow 1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Rightarrow y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow 2y = y_2 + y_1 \Rightarrow y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Então, podemos concluir que, dado um segmento de reta de extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$:

- a abscissa do ponto médio do segmento de reta é a média aritmética das abscissas das extremidades:

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

- a ordenada do ponto médio do segmento de reta é a média aritmética das ordenadas das extremidades:

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Fique atento!
- A demonstração independe da localização de A e B nos quadrantes.
- Chamando de M o ponto médio de $\overline{AB}$, temos: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Exercícios resolvidos

3. Determine M, ponto médio de $\overline{AB}$, nos seguintes casos:

a) $A(3, -2)$ e $B(-1, -6)$;

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ e $B\left(-1, \frac{2}{3}\right)$.

Resolução:

a) Considerando $M(x_M, y_M)$, temos:

$$x_M = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{-2 + (-6)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Logo, $M(1, -4)$.

b) $x_M = \dfrac{\frac{1}{2} + (-1)}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{1}{4}$

$y_M = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$

Logo, $M\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.

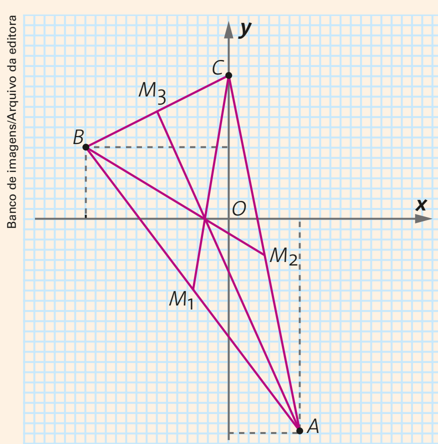
4. Calcule os comprimentos das medianas de um triângulo de vértices $A(2, -6)$, $B(-4, 2)$ e $C(0, 4)$.

Fique atento!

- A **mediana** de um triângulo é o segmento de reta que tem como extremidades um vértice e o ponto médio do lado oposto.
- Todo triângulo possui três medianas que se cruzam em um ponto chamado **baricentro** do triângulo.
  Considere um triângulo de vértice $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$. O baricentro (G) desse triângulo é o ponto $G(x_G, y_G)$, onde: $x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ e $y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Resolução:

Observando a figura:



- M_1 é o ponto médio de $\overline{AB}$; calculando suas coordenadas:

$x = \dfrac{-4 + 2}{2} = -1$

$y = \dfrac{2 - 6}{2} = -2$

Então, $M_1(-1, -2)$.

- M_2 é o ponto médio de $\overline{AC}$; calculando suas coordenadas:

$x = \dfrac{0 + 2}{2} = 1$

$y = \dfrac{4 - 6}{2} = -1$

Então, $M_2(1, -1)$.

- M_3 é o ponto médio de $\overline{BC}$; calculando suas coordenadas:

$x = \dfrac{0 - 4}{2} = -2$

$y = \dfrac{4 + 2}{2} = 3$

Então, $M_3(-2, 3)$.

Vamos calcular, agora, os comprimentos das medianas:

- mediana $\overline{AM_3}$, sendo $A(2, -6)$ e $M_3(-2, 3)$:

$d(A, M_3) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 + 6)^2} =$
$= \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}$

- mediana $\overline{BM_2}$, sendo $B(-4, 2)$ e $M_2(1, -1)$:

$d(B, M_2) = \sqrt{(1 + 4)^2 + (-1 - 2)^2} =$
$= \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

- mediana $\overline{CM_1}$, sendo $C(0, 4)$ e $M_1(-1, -2)$:

$d(C, M_1) = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{1 + 36} =$
$= \sqrt{37}$

Exercícios

15. Determine o ponto médio do segmento de reta de extremidades:

a) $A(1, -7)$ e $B(3, -5)$ $M(2, -6)$

b) $A(-1, 5)$ e $B(5, -2)$ $M\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$

c) $A(-4, -2)$ e $B(-2, -4)$ $M(-3, -3)$

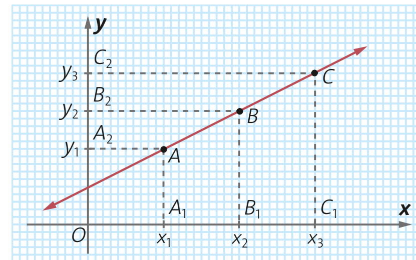
16. Uma das extremidades de um segmento de reta é o ponto $A(-2, -2)$. Sabendo que $M(3, -2)$ é o ponto médio desse segmento de reta, calcule as coordenadas do ponto $B(x, y)$, que é a outra extremidade do segmento de reta. $B(8, -2)$

17. Em um triângulo isósceles, a altura e a mediana relativas à base são segmentos de reta coincidentes. Calculem a medida da altura relativa à base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles de vértices $A(5, 8)$, $B(2, 2)$ e $C(8, 2)$ e as coordenadas do baricentro. 6; $G(5, 4)$.

18. Em um paralelogramo $ABCD$, $M(1, -2)$ é o ponto de encontro das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Sabe-se que $A(2, 3)$ e $B(6, 4)$ são dois vértices consecutivos. Uma vez que as diagonais se cortam mutuamente ao meio, determinem as coordenadas dos vértices C e D.
$C(0, -7)$ e $D(-4, -8)$

5 Condição de alinhamento de três pontos

Consideremos três pontos A, B e C alinhados:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad \text{I}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \quad \text{II}$$

Comparando I e II, temos:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + \cancel{x_1y_1} - x_2y_3 + x_2y_1 + x_1y_3 - \cancel{x_1y_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0$$

O primeiro termo da igualdade corresponde ao determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Para refletir

Verifique que o primeiro termo da igualdade realmente corresponde ao determinante apresentado.

Veja resolução no Manual do Professor.

Daí, podemos dizer que, se três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados, então:

É importante dizer e mostrar aos alunos que várias propriedades geométricas podem ser provadas por meio da Geometria analítica.

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

coluna das ordenadas dos pontos

coluna das abscissas dos pontos

Observação: Fazendo o caminho inverso, podemos verificar também que, se $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, então $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são pontos colineares (recíproca da propriedade anterior).

Exercício resolvido

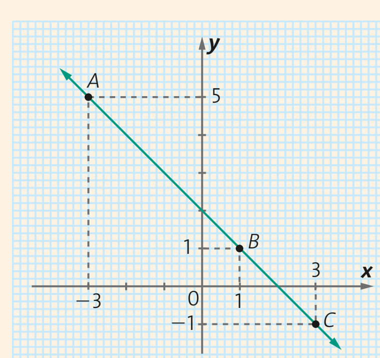
5. Verifique se os pontos $A(-3, 5)$, $B(1, 1)$ e $C(3, -1)$ estão alinhados.

Resolução:

Usando as coordenadas, calculamos o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 15 - 1 - 3 - 5 - 3 = +15 - 15 = 0$$

Como $D = 0$, os pontos dados estão alinhados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação:

A figura ao lado ilustra, geometricamente, que os pontos dados estão em uma mesma reta, ou seja, são pontos colineares, mas é o processo analítico que garante a propriedade.

Exercícios

19. Verifique se os pontos:

a) $A(0, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(4, 5)$ estão alinhados; Não.

b) $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$ e $C(-4, 10)$ podem ser os vértices de um mesmo triângulo. Sim.

20. Determine x de maneira que os pontos $A(3, 5)$, $B(1, 3)$ e $C(x, 1)$ sejam os vértices de um triângulo. $x \neq -1$

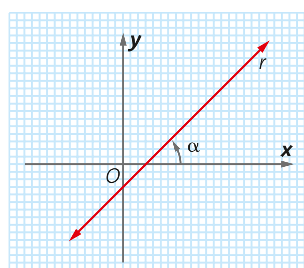
21. Considerando uma reta r que passa pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(4, 2)$ e intersecta o eixo y no ponto P, determine as coordenadas do ponto P. $P\left(0, -\frac{6}{5}\right)$

22. Uma reta r passa pelos pontos $A(2, 0)$ e $B(0, 4)$. Outra reta s passa pelos pontos $C(-4, 0)$ e $D(0, 2)$. O ponto de intersecção das duas retas é $P(a, b)$. Nessas condições, calculem as coordenadas a e b do ponto P. $P\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$

23. Dados $A(1, 5)$ e $B(3, -1)$, determinem o ponto no qual a reta AB intersecta a bissetriz dos quadrantes ímpares. $P(2, 2)$

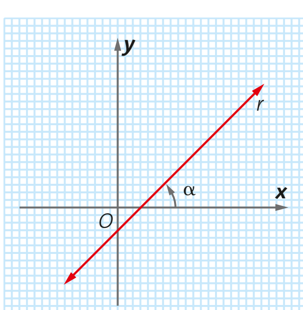
24. Sabendo que $P(a, b)$, $A(0, 3)$ e $B(1, 0)$ são colineares e $P(a, b)$, $C(1, 2)$ e $D(0, 1)$ também são colineares, determinem as coordenadas de P. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

6 Inclinação de uma reta

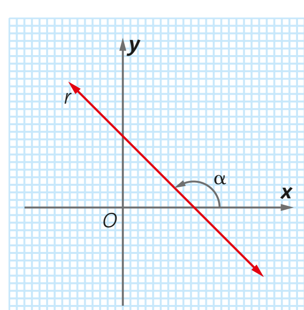


Seja α a medida do ângulo que a reta r forma com o eixo x. A medida α do ângulo é considerada do eixo x para a reta r, no sentido anti-horário, e denomina-se **inclinação** da reta r.

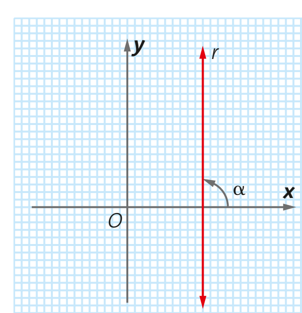
Quanto à inclinação de retas não paralelas ao eixo x, podemos ter:



$0° < \alpha < 90°$

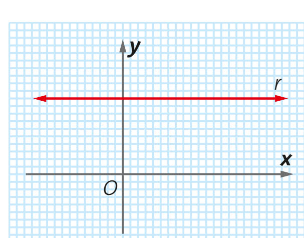


$90° < \alpha < 180°$



$\alpha = 90°$

Se a reta r é paralela ao eixo x, dizemos que sua inclinação é zero, ou seja, $\alpha = 0°$.



Fique atento!
Entre as retas com inclinação de 90°, inclui-se o eixo y.
Entre as retas de inclinação zero, inclui-se o eixo x.

Então, podemos dizer que, para cada reta r, o ângulo α é único e tal que $0° \leq \alpha < 180°$.

7 Coeficiente angular de uma reta

Consideremos uma reta r de inclinação α em relação ao eixo x.

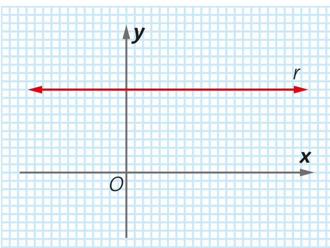
O **coeficiente angular** ou a **declividade** dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja:

$$m = \tan \alpha$$

Usamos nesta coleção a notação tan x no lugar de tg x, cot x no lugar de cotg x e csc x no lugar de cossec x, pois seguimos as normas da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas-ISO 80000-2 válida a partir de 17 de agosto de 2012), que recomenda, por exemplo, não utilizar tg x (em Grandezas e unidades – Parte 2: Sinais matemáticos e símbolos a serem utilizados nas Ciências Naturais e Tecnologia, p. 17).

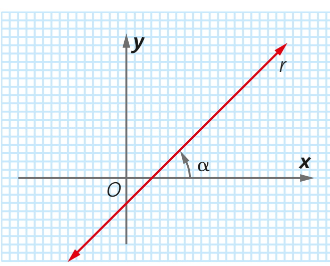
Vamos observar os vários casos, considerando $0° \leqslant \alpha < 180°$:

1º)



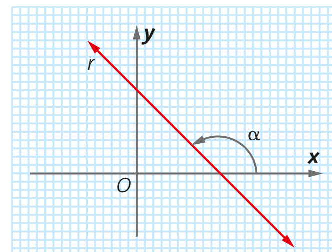
Para $\alpha = 0°$, temos
$m = \tan \alpha = \tan 0° = 0$.

2º)



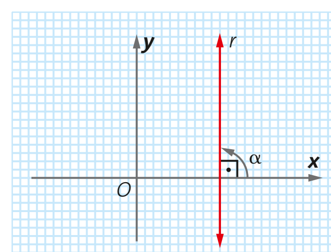
Para $0° < \alpha < 90°$, temos
$\tan \alpha > 0 \Rightarrow m > 0$.

3º)



Para $90° < \alpha < 180°$,
temos $\tan \alpha < 0 \Rightarrow m < 0$.

4º)



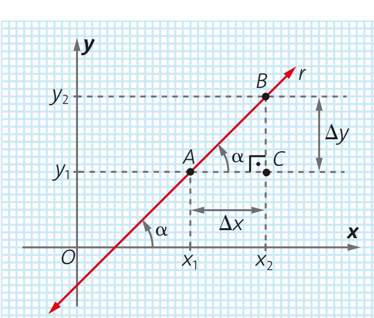
Para $\alpha = 90°$, a $\tan \alpha$ não é definida. Dizemos então que, quando $\alpha = 90°$, isto é, quando a reta é vertical, ela não tem declividade.

Vejamos agora que é possível calcular o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos.

Como para $\alpha = 0°$ (reta horizontal) a declividade é 0 e para $\alpha = 90°$ (reta vertical) não há declividade, vamos analisar os casos de $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$:

Fique atento!
Dois pontos distintos determinam uma única reta.

1º) $0° < \alpha < 90°$

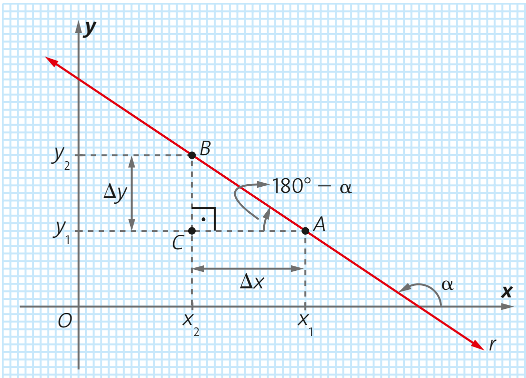


Seja r a reta determinada por $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e seja $C(x_2, y_1)$. No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\tan \alpha = \frac{d(C, B)}{d(A, C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

2º) $90° < \alpha < 180°$



Banco de imagens/Arquivo da editora

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_2, y_1)$

No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{d(C,\ B)}{d(C,\ A)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Como $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$, vem:

$$-\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{-(x_1 - x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Observe que $x_2 \neq x_1$, já que r não é paralela ao eixo y.

Podemos concluir que, se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são dois pontos distintos quaisquer na reta r, que não é paralela ao eixo y ($x_1 \neq x_2$), a declividade ou o coeficiente angular de r, que indicaremos por m, é dada por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Assim, temos duas maneiras de obter o coeficiente angular de uma reta, quando ele existir:

- conhecendo a inclinação α da reta, calculamos $m = \tan\alpha$;
- conhecendo dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ da reta, calculamos $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Na prática, é mais difícil obter a informação sobre a inclinação da reta, por isso é importante enfatizar que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ou $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Fique atento!
Podemos usar $y_1 - y_2$ no numerador desde que, no denominador, usemos $x_1 - x_2$.

Observação: Agora você pode utilizar outro método para verificar o alinhamento de três pontos, comparando os coeficientes angulares das retas que passam pelos pontos dois a dois. Por exemplo, na verificação do alinhamento de três pontos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, podemos verificar se ocorre $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.

Fica a seu critério usar esse método ou continuar utilizando o determinante para verificar o alinhamento ou não de três pontos.

Exercícios

25. Determine o coeficiente angular (ou declividade) da reta que passa pelos pontos:

a) $A(3, 2)$ e $B(-3, -1)$ $\frac{1}{2}$

b) $A(2, -3)$ e $B(-4, 3)$ -1

c) $P_1(3, 2)$ e $P_2(3, -2)$ Não há.

d) $P_1(-1, 4)$ e $P_2(3, 2)$ $-\frac{1}{2}$

e) $P(5, 2)$ e $Q(-2, -3)$ $\frac{5}{7}$

f) $A(200, 100)$ e $B(300, 80)$ $-\frac{1}{5}$

26. Se α é a medida da inclinação de uma reta e m é a sua declividade (ou coeficiente angular), copie e complete a tabela no caderno:

	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Não existe.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
m								

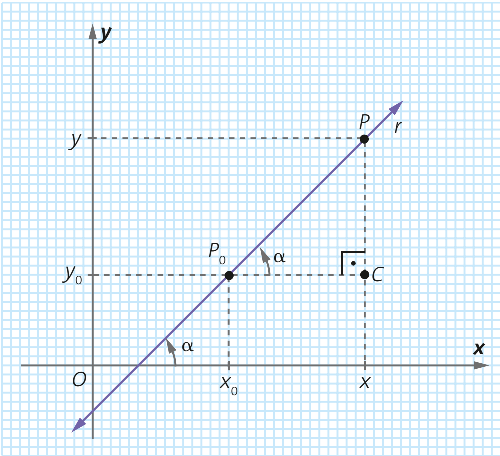
Para refletir
Use régua e transferidor para traçar a reta r que passa por $(0, 5)$ e tem coeficiente angular $-\sqrt{3}$.

Veja o gráfico no Manual do Professor.

8 Equação fundamental da reta

Postulado de determinação da reta: dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles, ou seja, dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa pelos dois pontos.

Da mesma forma, um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a declividade m determinam uma reta r. Considerando $P(x, y)$ um ponto genérico dessa reta, veremos que se pode chegar a uma equação, de incógnitas x e y, a partir dos números x_0, y_0 e m, que será chamada **equação fundamental da reta *r***.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento!
Reta-suporte de um segmento de reta é a reta que contém tal segmento. Por exemplo, no gráfico ao lado, r é a reta-suporte de $\overline{P_0P}$.

Considerando um ponto $P(x, y)$ qualquer sobre a reta e $\tan \alpha = m$, temos:

$$\tan \alpha = \frac{d(C,\ P)}{d(P_0,\ C)} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Ressalte para seus alunos que todas as formas de equações que veremos adiante podem ser obtidas a partir da equação fundamental da reta.

Observações:

1ª) A equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ independe de m ser positivo ou negativo e da localização do ponto P_0.

2ª) Se a reta é paralela ao eixo x, temos $m = 0$ e a equação da reta será dada por $y = y_0$.

3ª) Se a reta é paralela ao eixo y, todos os pontos da reta têm a mesma abscissa e a equação será dada por $x = x_0$.

Exercícios resolvidos

6. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(-1, 4)$ e tem coeficiente angular 2.

Resolução:

Usando a equação fundamental da reta $(y - y_0) = m(x - x_0)$, temos:

$y - 4 = 2(x - (-1)) \Rightarrow y - 4 = 2(x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow y - 4 = 2x + 2 \Rightarrow -2x + y - 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - y + 6 = 0$

A equação procurada é $2x - y + 6 = 0$.

7. Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$.

Resolução:

Já sabemos como calcular o coeficiente angular da reta determinada pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 + 2}{5 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Usando o ponto $A(-1, -2)$, temos:

$y - (-2) = \frac{2}{3}(x - (-1)) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y + 6 = 2x + 2 \Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

Outra resolução:

Chamando de $P(x, y)$ um ponto genérico da reta AB, podemos afirmar que P, A e B estão alinhados. Logo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 5y - 2 + 10 - 2x + y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -4x + 6y + 8 = 0 \Rightarrow 4x - 6y - 8 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

9 Formas da equação da reta

A partir de agora, estudaremos outras quatro formas de representar a equação da reta: a equação reduzida, a equação geral, a equação segmentária e a equação paramétrica.

Já vimos que a equação fundamental da reta que passa por um ponto $P(x_0, y_0)$ com declividade m é dada por: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Se escolhermos o ponto particular $(0, n)$, isto é, o ponto em que a reta intersecta o eixo y, para o ponto (x_1, y_1), temos:

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$$

Na forma reduzida da equação da reta percebe-se a relação da reta com uma função afim.

O número real n, que é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo y, é chamado **coeficiente linear da reta**.

$$\boxed{y = mx + n}$$

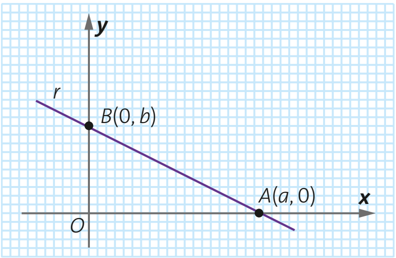
coeficiente linear

coeficiente angular

Essa forma é especialmente importante porque permite obter o coeficiente angular de uma reta a partir de uma equação, além de expressar claramente a coordenada y em função de x. Essa equação é conhecida como **equação reduzida** da reta.

Fique atento!
A equação reduzida de uma reta que passa pela origem é da forma $y = mx$. Note que a forma reduzida é uma função afim.

Agora, consideremos uma reta r que não passa por $(0, 0)$, intersecta o eixo x no ponto $A(a, 0)$ e intersecta o eixo y no ponto $B(0, b)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Calculando o coeficiente angular, temos:

$$m = \frac{0 - b}{a - 0} \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$$

Usando a forma reduzida $y = mx + n$, em que $m = -\frac{b}{a}$ e $n = b$, vem:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow ay = -bx + ab \Rightarrow bx + ay = ab$$

Dividindo os dois membros por ab ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), temos:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Fique atento!
Podemos chegar ao mesmo resultado considerando um ponto genérico $P(x, y)$ e fazendo $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$, que é o alinhamento dos três pontos.

Esta é a **forma segmentária** da equação da reta que não passa por $(0, 0)$ e intersecta os eixos nos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

Observamos também que:

> Toda reta do plano possui uma equação da forma: $ax + by + c = 0$ na qual a, b e c são constantes e a e b não são simultaneamente nulos. Essa equação é denominada **equação geral da reta**.

Por exemplo, a reta:

a) $y = -\frac{3}{4}x + 1$ pode ser escrita na forma geral $3x + 4y - 4 = 0$;

b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ pode ser dada na forma geral $5x + 2y - 10 = 0$;

c) $x = 2$, que é uma reta vertical, pode ser dada por $1x + 0y - 2 = 0$;

d) $y = 5$, que é paralela ao eixo x, pode ser dada por $0x + 1y - 5 = 0$.

Fique atento!

- As retas OX e OY têm equações $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente.
- A mesma reta pode ter diversas representações na forma geral, ou seja, $x + 2y - 1 = 0$, $2x + 4y - 2 = 0$, $-x - 2y + 1 = 0$ e infinitas equações equivalentes a essas. Por essa razão, é preferível escrever "obter *uma* equação geral da reta" a "obter *a* equação geral da reta".

Agora, suponha que um avião da Organização das Nações Unidas (ONU), em uma missão de paz, está com 30 toneladas de suprimentos, como tendas, cobertores, remédios e comida, para dar assistência a um grupo de pessoas que estão em uma região isolada após um desastre natural. Vários pacotes com esses itens são liberados pelo avião. Imagine que um desses pacotes obedeça às seguintes equações horárias do deslocamento (em metros) e da velocidade vertical: $x = 300 + 200t$ e $y = -10t$, respectivamente, em que o tempo t é dado em segundos. Dessa forma, o seguinte sistema de equações pode ser formado:

$$\begin{cases} x = 300 + 200t & \text{(I)} \\ y = -10t & \text{(II)} \end{cases}$$

Com essas equações pode-se obter o deslocamento em função da velocidade vertical do pacote. Isolando t na equação (II), temos:

$$y = -10t \Rightarrow t = -\frac{y}{10}$$

Substituindo $t = -\frac{y}{10}$ na equação (I), vem:

$$x = 300 + 200 \cdot \left(-\frac{y}{10}\right) \Rightarrow x = 300 - \frac{200y}{10} \Rightarrow x = 300 - 20y \Rightarrow x + 20y - 300 = 0$$

As equações $x = 300 + 200t$ e $y = -10t$ são chamadas **equações paramétricas** da equação, em que a variável t é chamada **parâmetro** das equações paramétricas.

As equações paramétricas são formas de representar retas por meio de um parâmetro, ou seja, uma variável vai fazer a ligação entre duas equações que foram obtidas da equação de uma mesma reta.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções afins, então cada uma dessas equações representa uma reta.

Exercícios resolvidos

8. Escreva nas formas reduzida e geral a equação da reta que passa pelo ponto $(1, -6)$ e tem inclinação de 135°.

Resolução:

Pelos dados é mais conveniente escrever inicialmente a equação na forma $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Como $\alpha = 135°$, então:

$m = \tan \alpha = \tan 135° = -1$

E, como a reta passa por $(1, -6)$, temos:

$y + 6 = -1(x - 1)$

Daí vem:

- forma reduzida:

  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 1 - 6 \Rightarrow y = -x - 5$
- forma segmentária:

  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y = -5 \Rightarrow \frac{x}{-5} + \frac{y}{-5} = 1$
- forma geral:

  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y - 1 + 6 = 0 \Rightarrow x + y + 5 = 0$

Para refletir

- Essa reta tem inclinação de 135°, passa pelo ponto $(1, -6)$ e corta os eixos em $(-5, 0)$ e $(0, -5)$. Desenhe-a no caderno.
- O triângulo que ela determina com os eixos é um triângulo retângulo isósceles. Calcule a medida da hipotenusa. $5\sqrt{2}$

Veja o gráfico no Manual do Professor.

9. Sabendo-se que as equações paramétricas de uma reta são $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \end{cases}$, obtenha uma equação geral dessa reta.

Resolução:

Isolando t na equação $x = 3 - t$, temos $t = 3 - x$.

Substituindo $t = 3 - x$ na equação $y = 2 + t$, vem: $y = 2 + 3 - x \Rightarrow x + y - 5 = 0$.

Portanto, a equação geral da reta é $x + y - 5 = 0$.

Exercícios

Veja a resposta do exercício 27 na seção Respostas.

27. Determine a equação da reta que satisfaz às seguintes condições:

a) A declividade é 4 e passa pelo ponto $A(2, -3)$.

b) A inclinação é de 45° e passa pelo ponto $P(4, 1)$.

c) Passa pelo ponto $M(-2, -5)$ e tem coeficiente angular 0.

d) Passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(-5, 4)$.

e) Passa pelo ponto $P(-3, -4)$ e é paralela ao eixo y.

f) Tem coeficiente angular $-\frac{1}{2}$ e passa pelo ponto $A(2, -3)$.

g) Passa pelo ponto $P(1, -7)$ e é paralela ao eixo x.

h) Passa pelos pontos $A(1, 1)$ e $B(-2, -2)$.

i) A inclinação é de 150° e passa pela origem.

28. Verifique se o ponto $P(2, 3)$ pertence à reta r que passa pelos pontos $A(1, 1)$ e $B(0, -3)$. $P \notin \overleftrightarrow{AB}$

29. Em cada caso, escreva no caderno uma equação geral da reta definida pelos pontos A e B:

a) $A(-1, 6)$ e $B(2, -3)$ $3x + y - 3 = 0$

b) $A(-1, 8)$ e $B(-5, -1)$ $9x - 4y + 41 = 0$

c) $A(5, 0)$ e $B(-1, -4)$ $2x - 3y - 10 = 0$

d) $A(3, 3)$ e $B(1, -5)$ $4x - y - 9 = 0$

30. Uma reta passa pelo ponto $P(-1, -5)$ e tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$. Escreva no caderno a equação da reta na forma reduzida. $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

31. Passe a equação da reta para a forma indicada:

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ para a forma reduzida; $y = -\frac{2x}{3} + 2$

b) $y - 6 = \frac{1}{2}(x + 4)$ para a forma geral; $x - 2y + 16 = 0$

c) $3x + 9y - 36 = 0$ para a forma segmentária; $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$

d) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t + 2 \end{cases}$ para a forma geral. $x + y - 5 = 0$

32. As equações paramétricas de uma reta r são: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 7 - t \end{cases}$. Obtenha a equação reduzida dessa reta. $y = \frac{x - 1}{2}$

33. Escreva no caderno a equação:

a) da reta bissetriz dos quadrantes ímpares; $y = x$ ou $x - y = 0$

b) da reta bissetriz dos quadrantes pares; $y = -x$ ou $x + y = 0$

c) do eixo x; $y = 0$

d) do eixo y. $x = 0$

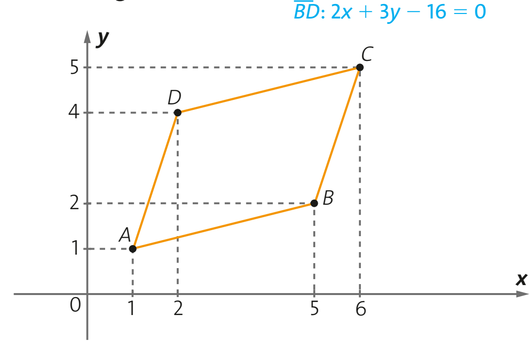
34. Escreva no caderno na forma reduzida a equação da reta que passa pelos pontos $P_1(2, 7)$ e $P_2(-1, -5)$. $y = 4x - 1$

35. Dada a reta que tem a equação $3x + 4y = 7$, determine seu coeficiente angular. $-\frac{3}{4}$

36. Determine a equação da reta de coeficiente angular $m = -2$ e que intersecta o eixo y no ponto $A(0, -3)$. $y = -2x - 3$

37. Se os pontos $A(3, 5)$ e $B(-3, 8)$ determinam uma reta, calculem o valor de a para que o ponto $C(4, a)$ pertença a essa reta. $\frac{9}{2}$

38. Na figura dada, $ABCD$ é um paralelogramo. Determinem uma equação geral da reta-suporte de cada diagonal, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. $\overleftrightarrow{AC}$: $4x - 5y + 1 = 0$ $\overleftrightarrow{BD}$: $2x + 3y - 16 = 0$

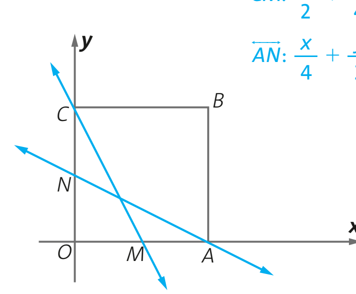


Banco de imagens/Arquivo da editora

39. Sabendo que o ponto $P(2, 1)$ pertence à reta de equação $3kx + (k - 3)y = 4$, determinem o valor de k e escrevam no caderno uma forma geral da equação dessa reta. $k = 1 \rightarrow 3x - 2y - 4 = 0$

40. Se um triângulo tem como vértices os pontos $A(2, 3)$, $B(4, 1)$ e $C(6, 7)$, determinem uma equação geral da reta-suporte da mediana relativa ao lado BC. $x - 3y + 7 = 0$

41. Na figura dada, o ponto O é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e $OABC$ é um quadrado de lado 4. Sabendo que M é o ponto médio de $\overline{OA}$ e N é o ponto médio de $\overline{OC}$, escrevam no caderno a equação da reta que passa por C e M e a equação da reta que passa por A e N. $\overleftrightarrow{CM}$: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ $\overleftrightarrow{AN}$: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$



Banco de imagens/Arquivo da editora

42. (Fuvest-SP) Determinem a equação da reta que passa pelo ponto $P(2, 3)$ e pelo ponto Q, simétrico de P em relação à origem. $3x - 2y = 0$

10 Posições relativas de duas retas no plano

Duas retas distintas, r e s, contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes.

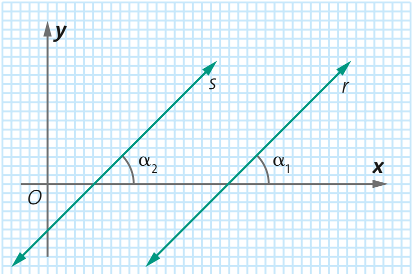
Retas paralelas

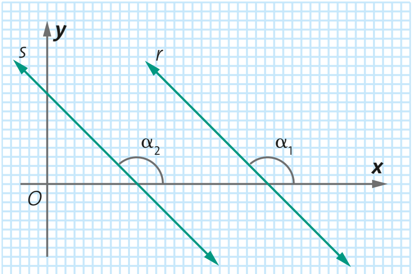
Sendo α_1 a inclinação da reta r e α_2 a inclinação da reta s, temos:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \ (\alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ estão entre } 0° \text{ e } 180°)$$

Se as inclinações são iguais, as retas são paralelas ($r \mathbin{/\!/} s$).

Veja as figuras a seguir, que mostram duas retas distintas e não verticais, que são paralelas:





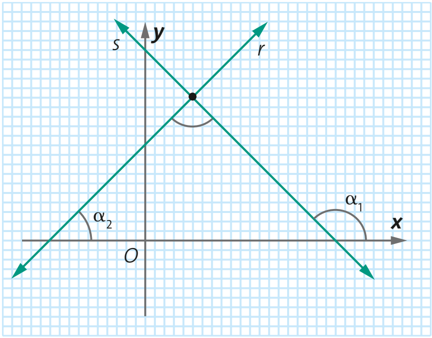
$$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow r \mathbin{/\!/} s$$

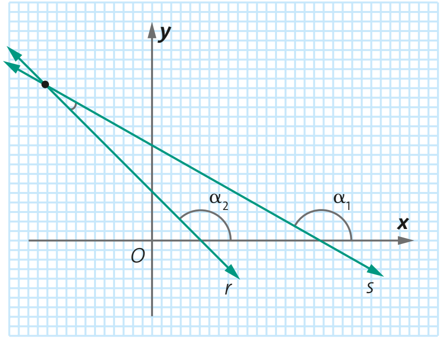
Duas retas distintas e não verticais, r e s, são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais ($m_1 = m_2$).

Fique atento!
Se, além do mesmo coeficiente angular, elas tiverem também o mesmo coeficiente linear, as retas serão coincidentes (paralelas iguais).

Retas concorrentes

Duas retas do mesmo plano com coeficientes angulares diferentes não são paralelas; logo, são concorrentes.





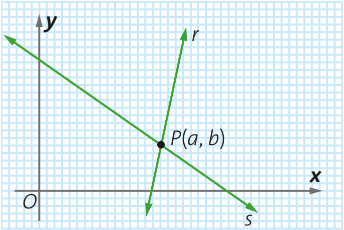
$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \tan \alpha_1 \neq \tan \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow r \text{ e } s\text{: concorrentes}$$

Duas retas distintas e não verticais, r e s, são concorrentes se, e somente se, seus coeficientes angulares são diferentes ($m_1 \neq m_2$).

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Intersecção de duas retas

A figura ao lado mostra duas retas concorrentes, *r* e *s*, do mesmo plano, que se intersectam no ponto $P(a, b)$.



Como *P* pertence às duas retas, suas coordenadas devem satisfazer simultaneamente às equações dessas duas retas.

Logo, para determiná-las, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

Observação: Pela resolução de sistemas podemos verificar a posição relativa de duas retas de um mesmo plano. Assim, temos:

- sistema possível e determinado (um único ponto comum): retas concorrentes;
- sistema possível e indeterminado (infinitos pontos comuns): retas coincidentes;
- sistema impossível (nenhum ponto comum): retas paralelas distintas.

Exercício resolvido

10. Determine as coordenadas do ponto *P* de intersecção das retas *r* e *s*, de equações $3x + 2y - 7 = 0$ e $x - 2y - 9 = 0$, respectivamente.

Resolução:

Nosso problema consiste em resolver o sistema formado pelas equações das duas retas:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$4x - 16 = 0 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

Substituindo na segunda equação, por exemplo, temos:

$$4 - 2y - 9 = 0 \Rightarrow -2y = 5 \Rightarrow 2y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto de intersecção são 4 e $-\frac{5}{2}$. Ou seja, $P\left(4, -\frac{5}{2}\right)$.

Exercícios

43. Qual é a posição da reta *r*, de equação $15x + 10y - 3 = 0$, em relação à reta *s*, de equação $9x + 6y - 1 = 0$? Paralelas.

44. Se as retas de equações $(a + 3)x + 4y - 5 = 0$ e $x + ay + 1 = 0$ são paralelas, calcule o valor de *a*. -4 ou 1

45. Em cada caso, determine a equação da reta que passa pelo ponto *P* e é paralela à reta da equação dada:

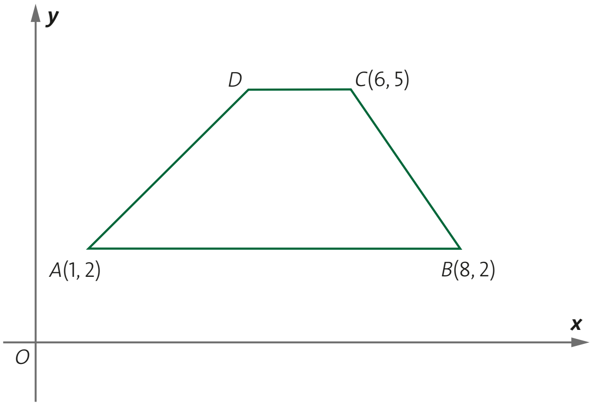
a) $P(1, 2)$ e $8x + 2y - 1 = 0$ $y = -4x + 6$

b) $P(-4, 2)$ e $y - 2 = 0$ $y = 2$

c) $P(-1, 3)$ e $2x - 5y + 7 = 0$ $y = \frac{2x}{5} = \frac{17}{5}$

46. (Vunesp-SP) Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, $x + 3y + 4 = 0$ e $2x - 5y - 2 = 0$ são, respectivamente, as equações das retas *r* e *s*. Determine as coordenadas do ponto de intersecção de *r* com *s*. $\left(-\frac{14}{11}, -\frac{10}{11}\right)$

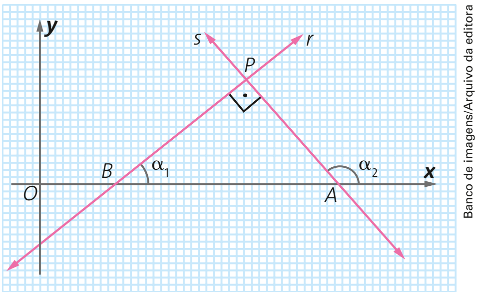
47. A figura mostra um trapézio *ABCD*. Determine a equação da reta-suporte da base menor do trapézio. $y = 5$



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

11 Perpendicularidade de duas retas

A figura mostra a reta *r*, de inclinação α_1, e a reta *s*, de inclinação α_2, tal que *r* e *s* são perpendiculares.



Fique atento!

- Na adição de arcos vale que:
  $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$
  $\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$
  Veja estas e outras fórmulas de adição de arcos no Capítulo 10.
- Uma das relações trigonométricas fundamentais é a cotangente (cot).
  $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}$, para todo $x \neq k\pi$
  Veja esta e outras relações trigonométricas fundamentais no Capítulo 10.

Pela Geometria plana, no triângulo *APB* temos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90° \Rightarrow \tan \alpha_2 = \tan\,(\alpha_1 + 90°) = \frac{\text{sen}\,(\alpha_1 + 90°)}{\cos\,(\alpha_1 + 90°)} = \frac{\text{sen}\,\alpha_1 \cdot \cos 90° + \text{sen}\,90° \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cdot \cos 90° - \text{sen}\,\alpha_1 \cdot \text{sen}\,90°}$$

Como sen 90° = 1 e cos 90° = 0, temos:

$$\tan \alpha_2 = \frac{0 + \cos \alpha_1}{0 - \text{sen}\,\alpha_1} = \frac{\cos \alpha_1}{-\text{sen}\,\alpha_1} = -\cot \alpha_1 = -\frac{1}{\tan \alpha_1}$$

Sabendo que $\tan \alpha_2 = m_2$ e $\tan \alpha_1 = m_1$, temos que, se uma reta *s*, com coeficiente angular m_2, é perpendicular a uma reta *r*, com coeficiente angular m_1, então:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ (com } m_1, m_2 \neq 0)$$

Reciprocamente, pode-se provar que, dadas uma reta *s*, de coeficiente angular m_2, e uma reta *r*, de coeficiente angular m_1, se $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$, então *s* é perpendicular a *r*.

Podemos concluir então que, dadas as retas *r* e *s*, de coeficientes angulares m_1 e m_2, temos:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{ou} \quad r \perp s \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

Recorde os alunos do significado de ⇔ (se, e somente se).

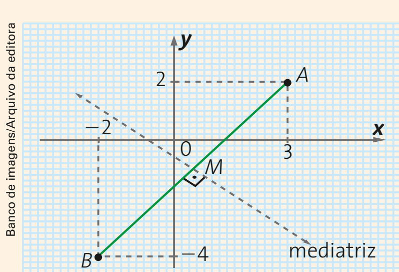
Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 12

11. Determine a equação da mediatriz do segmento de reta cujas extremidades são os pontos *A*(3, 2) e *B*(−2, −4).

Resolução:

Pela Geometria plana, sabemos que a mediatriz de um segmento de reta é uma reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio. Na figura, *M* é o ponto médio de $\overline{AB}$.



- Equação da reta-suporte do segmento de reta *AB*:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2y - 12 + 4 + 4x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 5y - 8 = 0$$

- Cálculo do coeficiente angular m_1 da reta--suporte:

$$6x - 5y - 8 = 0 \Rightarrow -5y = -6x + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 6x - 8 \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5} \Rightarrow m_1 = \frac{6}{5}$$

- Cálculo do coeficiente angular m_2 da mediatriz:

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{6}{5}} = -\frac{5}{6}$$

- Cálculo das coordenadas do ponto M:

$x = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{2 - 4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

O problema, agora, fica reduzido a determinar uma equação da reta que passa pelo ponto $M\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e que tem coeficiente angular $-\frac{5}{6}$:

$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = -\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 1 = -\frac{5x}{6} + \frac{5}{12} \Rightarrow 12y + 12 = -10x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x + 12y + 7 = 0$

Logo, uma equação da mediatriz do segmento de reta é $10x + 12y + 7 = 0$.

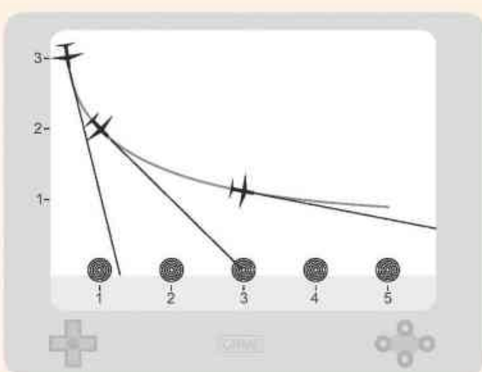
Para refletir

A mediatriz de $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tal que $d(P, A) = d(P, B)$, isto é, dos pontos equidistantes de A e B. Resolva este exercício usando essa informação.

Veja a resolução no Manual do Professor.

Resolvido passo a passo

12. (UFSM-RS) A figura mostra um jogo de *videogame*, em que aviões disparam balas visando a atingir o alvo. Quando o avião está no ponto (1, 2), dispara uma bala e atinge o alvo na posição (3, 0).



Sendo r a reta determinada pela trajetória da bala, observe as seguintes afirmativas:

I. O ponto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ pertence a r.

II. A reta r é perpendicular à reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB onde $A(0, 3)$ e $B(3, 0)$.

III. A reta r é paralela à reta $2x - 2y + 5 = 0$

Está(ão) correta(s):

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É apresentado um jogo de *videogame*, seus objetivos e algumas informações sobre seu funcionamento. Por exemplo, a posição do avião ao disparar uma bala e a posição do alvo atingido por ela.

b) O que se pede?

Pede-se para julgar três afirmativas fornecidas na questão, relacionadas com a posição relativa das retas e a posição relativa entre ponto e reta.

2. Planejando a solução

Inicialmente, devemos montar a equação da reta que representa a trajetória da bala, desde o momento do disparo até atingir o alvo. Em seguida, devemos julgar as afirmativas dadas, da seguinte forma:

I – verificar as coordenadas do ponto dado na equação da reta encontrada;

II e III – verificar as posições relativas entre as retas, julgando para a afirmativa **II** o ponto médio, depois o coeficiente angular e, por fim, verificar a perpendicularidade; para a afirmativa **III**, a verificação do coeficiente angular das retas é suficiente.

3. Executando o que foi planejado

1º passo – Equação da reta que representa a trajetória da bala

Condição de alinhamento dos pontos:

$$T = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(T) = 3y + 2x - y - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y + 2x - 6 = 0 \Rightarrow y + x - 3 = 0$

2º passo – Julgando as afirmativas

I. Verdadeira. De posse do ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, verificando temos: $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$.

II. Verdadeira.

- Ponto médio de AB:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_M = \dfrac{3+0}{2} = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\rangle M\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$$

- Coeficiente angular de AB: $m_{AB} = \dfrac{\dfrac{3}{2} - 0}{\dfrac{3}{2} - 0} = 1$

- Condição de perpendicularidade:
  $m_{AB} = 1$, $m_r = -1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_r = -1$.
  Substituindo, $1 \cdot (-1) = -1$, fica verificado.

III. Falsa. Para que as retas sejam paralelas os coeficientes angulares devem ser iguais, o que não ocorre, pois $m_{AB} \neq m_r$.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **b**.

5. Ampliando o problema

a) Em outra fase deste jogo de videogame, um atirador encontra-se na origem do sistema (0, 0) e deseja atingir o projétil lançado do avião, quando o mesmo estiver num ponto P da reta r: $x + y - 3 = 0$. Sabendo que a reta r é perpendicular à reta que passa pela origem do sistema e pelo ponto P. Quais são as coordenadas de P? $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

b) *Discussão em equipe*

Troque ideias com seus colegas sobre a importância da geometria para o nosso dia a dia, por exemplo, o auxílio para a elaboração de um jogo de *videogame*. Pesquisem sobre o processo de elaboração de um jogo digital e os profissionais envolvidos. Por fim, tentem elaborar um jogo, utilizando como base o exemplificado pelo problema, com o intuito de aprimorar a prática na Geometria analítica.

Exercícios

48. Determine a equação da reta que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r em cada um dos seguintes casos:

a) $P(-3, 2)$ e equação de r: $3x + 4y - 4 = 0$. $4x - 3y + 18 = 0$

b) $P(2, 6)$ e equação de r: $2x - y + 3 = 0$. $x + 2y - 14 = 0$

c) $P(3, 5)$ e equação de r: $y - 4 = 0$. $x = 3$

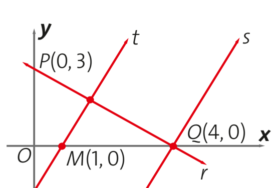
49. (Fuvest-SP) São dados os pontos $A(2, 3)$ e $B(8, 5)$. Determine a equação de mediatriz de $\overline{AB}$. $y + 3x - 19 = 0$

50. Determine as coordenadas do ponto N, simétrico ao ponto $M(2, 4)$ em relação à reta r, de equação $x - y - 6 = 0$. $N(10, -4)$

51. Se um triângulo tem como vértices os pontos $A(2, 1)$, $B(-2, -4)$ e $C(0, 2)$, determine a equação da reta-suporte da altura relativa ao lado AB do triângulo. $4x + 5y - 10 = 0$

52. (Fuvest-SP) Os pontos de intersecção da reta r, de equação $y = \dfrac{x}{2} + 2$, com os eixos de coordenadas, determinam um segmento. Qual é a equação da mediatriz desse segmento? $2x + y + 3 = 0$

53. (FEI-SP) A reta s é perpendicular à reta r, e a reta t é paralela à reta s. Determine a equação da reta s e a equação da reta t.

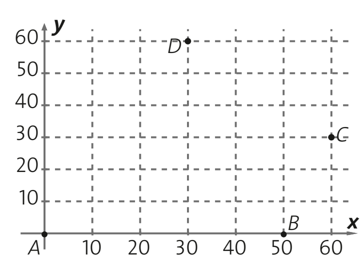


s: $y = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{16}{3}$ t: $y = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{4}{3}$

54. (FEI-SP) Num triângulo retângulo ABC, de hipotenusa BC, tem-se $B(1, 1)$ e $C(3, 2)$. O cateto que passa pelo vértice B é paralelo à reta ℓ, cujo coeficiente angular é $\dfrac{3}{4}$. Determinem as equações das retas-suporte dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

$\overleftrightarrow{AB}$: $y = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{4}$ $\overleftrightarrow{AC}$: $y = -\dfrac{4x}{3} + 6$

55. (Ibmec) Os pontos A, B, C e D do plano abaixo representam 4 cidades.



Uma emissora de televisão quer construir uma estação transmissora numa localização tal que:

- a distância entre a estação e a cidade localizada em A seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em B;
- a distância entre a estação e a cidade localizada em C seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em D.

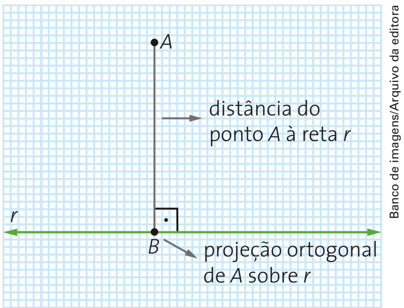
Considerando as coordenadas do plano acima, a localização da estação deverá ser o ponto:

a) (10, 10).
b) (10, 20).
c) (25, 10).
d) (20, 20).
x e) (25, 25).

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

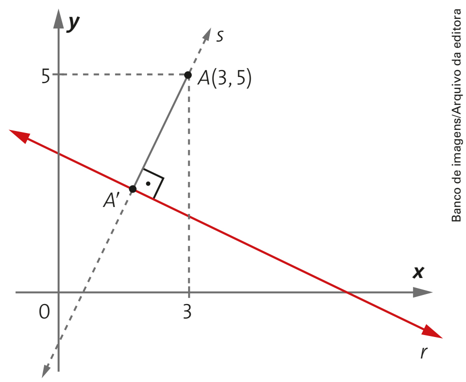
12 Distância de um ponto a uma reta

Da Geometria plana, temos que a distância de um ponto A a uma reta r é a medida do segmento de reta de extremidades em A e B, em que B é a projeção ortogonal de A sobre r.



Vamos, por exemplo, determinar a distância do ponto $A(3, 5)$ à reta r, de equação $x + 2y - 8 = 0$.

A figura a seguir mostra que a distância do ponto A à reta r é a distância entre os pontos A e A', sendo A' a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r.



- Coeficiente angular de r:

$x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y = -x + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 4$

$m = -\dfrac{1}{2}$

- Equação da reta s:

$m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = 2$

$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 3) \Rightarrow y - 5 = 2x - 6 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$ (equação geral da reta)

- Coordenadas de A' são aquelas do ponto de encontro de r e s:

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \quad \cdot (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \cancel{2y} - 8 = 0 \\ 4x - \cancel{2y} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$5x - 10 = 0 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

Substituindo $x = 2$ na segunda equação, por exemplo, temos:

$2(2) - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 3$

Portanto, $A'(2, 3)$.

- Cálculo da distância entre A e A':

$d = \sqrt{(3 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

Logo, a distância do ponto A à reta r é $\sqrt{5}$.

Fórmula da distância de um ponto a uma reta

Com o mesmo procedimento do exemplo anterior, para um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta r de equação $ax + by + c = 0$, chegamos a uma fórmula que facilita o cálculo da distância d de P a r. Veja:

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

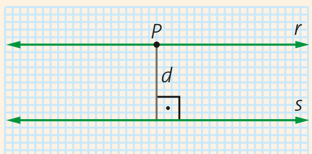
Para refletir

Quando temos $d = 0$?

Veja a resolução no Manual do Professor.

Exercícios resolvidos

13. São dadas as retas r e s, de equações $2x + 3y - 10 = 0$ e $2x + 3y - 6 = 0$, respectivamente. Sabendo que essas retas são paralelas, calcule a distância entre elas.



Resolução:

Da Geometria plana, sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância de um ponto P qualquer de uma delas à outra reta.

- Cálculo das coordenadas de um ponto P qualquer da reta r:
  $2x + 3y - 10 = 0$
  Fazendo, arbitrariamente,
  $x = -1$, temos: $2(-1) + 3y - 10 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow -2 + 3y - 10 = 0 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$
  Portanto, $P(-1, 4)$.
- Cálculo da distância de P à reta s:
  $P(-1, 4)$ e s: $2x + 3y - 6 = 0$

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-1) + 3 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|4|}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

Logo, a distância entre as retas é $\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

Para refletir

É possível demonstrar que, se duas retas r: $ax + by + c_1 = 0$ e s: $ax + by + c_2 = 0$ são paralelas, então a distância entre elas é dada por:

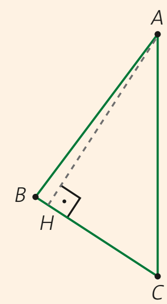
$d(r, s) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Verifique no exercício resolvido 13.

Veja a resolução no Manual do Professor.

14. Um triângulo tem os vértices nos pontos $A(1, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(2, -5)$.

Calcule a medida da altura do triângulo relativa ao lado BC.



Fique atento!

Reta-suporte de um segmento de reta é a reta que contém tal segmento de reta. Por exemplo, no triângulo ABC, $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta-suporte de $\overline{AB}$.

Resolução:

A medida da altura relativa ao lado BC é igual à distância entre o ponto A e a reta-suporte de $\overline{BC}$.

- Equação da reta-suporte do lado de $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -x + 2y + 15 + 2 + 5x + 3y = 0 \Rightarrow 4x + 5y + 17 = 0$

- Cálculo da medida da altura:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 17|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} =$$

$$= \frac{|31|}{\sqrt{41}} = \frac{31}{\sqrt{41}} = \frac{31\sqrt{41}}{41}$$

Logo, a medida da altura é $\frac{31\sqrt{41}}{41}$.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios

56. Nos seguintes casos, calcule a distância do ponto P à reta r:

a) $P(0, 3)$ e $4x + 3y + 1 = 0$ 2
b) $P(1, -5)$ e $3x - 4y - 2 = 0$ $\frac{21}{5}$
c) $P(3, -2)$ e $2x + y + 6 = 0$ $2\sqrt{5}$
d) $P(6, 4)$ e $y - 2 = 0$ 2

57. Dado o ponto $P(3, 2)$, determine a distância de P até a reta r, nos seguintes casos:

a) r: $3x + 4y + 1 = 0$ $\frac{18}{5}$
b) r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $\frac{7\sqrt{13}}{13}$
c) r: $y = 2x - 4$ 0 ($P \in r$)
d) r: $y = 6$ 4
e) r: $x = -1$ 4
f) r: $y - 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$ f) $\frac{10\sqrt{29}}{29}$

58. Se a distância do ponto $P(0, p)$ à reta r, de equação $4x + 3y - 2 = 0$, é igual a 2 unidades, determine a coordenada p. 4 ou $-\frac{8}{3}$

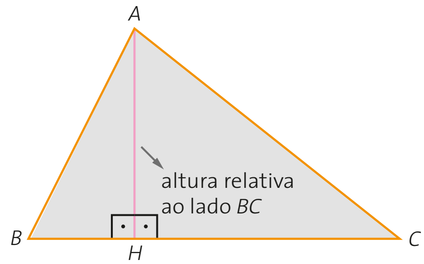
59. (Cesgranrio-RJ) O ponto $A(-1, -2)$ é um vértice de um triângulo equilátero ABC, cujo lado BC está sobre a reta de equação $x + 2y - 5 = 0$. Determinem a medida h da altura desse triângulo. $2\sqrt{5}$

60. (Fuvest-SP) Calculem a distância entre a reta r_1, de equação $3y = 4x - 2$, e a reta r_2, de equação $3y = 4x + 8$, sabendo que $r_1 // r_2$. 2

13 Área de uma região triangular

Assunto opcional

Vejamos como determinar a área de uma região triangular *ABC* a partir dos pontos *A*, *B* e *C*.



Pela Geometria plana, sabemos que a área da região triangular da figura é dada por:

$$S = \frac{1}{2}(BC) \cdot (AH)$$

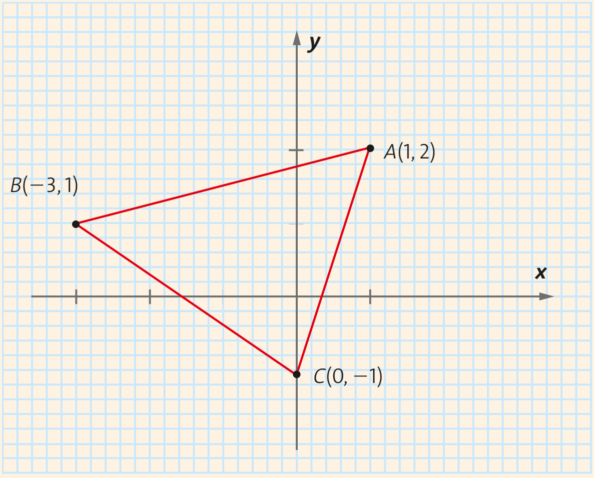
Em Geometria analítica, temos:

- $d(B, C)$ expressa a medida do lado *BC*;
- a distância de *A* à reta-suporte do lado *BC* expressa a medida da altura *AH*.

Exercício resolvido

15. Calcule a área de uma região triangular *ABC* que tem como vértices os pontos $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(0, -1)$.

Resolução:



- Cálculo da medida do lado *BC*: $d(B, C) = \sqrt{(0 + 3)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$
- Cálculo da distância entre o vértice *A* e a reta-suporte do lado *BC*: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Então: $x + 3 + x + 3y = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 3 = 0$

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|11|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

- Cálculo da área da região triangular: $S = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{13}} \cdot \frac{11}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{11}{2}$ ou 5,5

Logo, a área da região triangular é $\frac{11}{2}$ ou 5,5 unidades de área.

Fórmula da área de uma região triangular

Com o mesmo procedimento do exemplo anterior e considerando os pontos não alinhados $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, chegamos a uma fórmula que facilita o cálculo da área de uma região triangular.

Se os vértices de um triângulo são os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, então a área dessa região triangular é dada por:

$$S = \frac{1}{2}|D| \quad \text{em que } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{coluna das abscissas} & \text{coluna das ordenadas} \end{array}$$

Fique atento!
O símbolo $|D|$ indica módulo do determinante D.

Note que esse determinante é o mesmo que foi estudado no item 5 para verificar o alinhamento de três pontos. A conexão entre os dois assuntos está no fato de que, se três pontos que seriam os vértices de um triângulo estiverem alinhados, o triângulo se degenera em um segmento de reta; nesse caso, é natural que sua área seja zero.

Vejamos como fica o cálculo da área da região triangular ABC com $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(0, -1)$, já feito no exercício resolvido 15:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 1 + 6 = 11 \Rightarrow S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|11| = \frac{1}{2} \cdot 11 = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

Logo, a área da região triangular é $\frac{11}{2}$ ou 5,5 unidades de área.

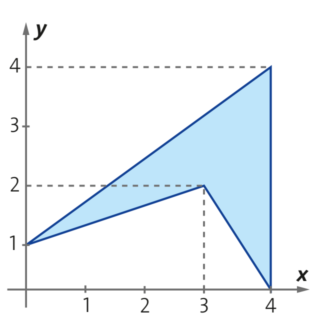
Exercícios

61. Determine a área da região triangular que tem como vértices os pontos $A(4, 0)$, $B(-1, 1)$ e $C(-3, 3)$. 4

62. Um triângulo tem como vértices os pontos $A(5, 3)$, $B(4, 2)$ e $C(2, k)$. A área da região triangular ABC mede 8 unidades. Nessas condições, calcule o valor de k.
$k = 16$ ou $k = -16$

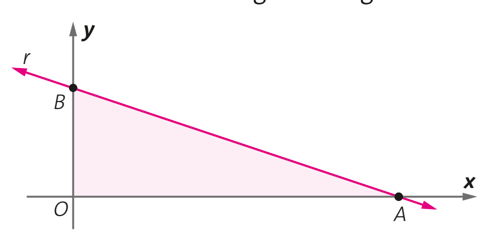
63. As retas-suporte dos lados de um triângulo têm como equações $x + 2y - 1 = 0$, $y - 5 = 0$ e $x - 2y - 7 = 0$. Calculem a área da região triangular. 84,5

64. A área da figura colorida no diagrama abaixo vale:



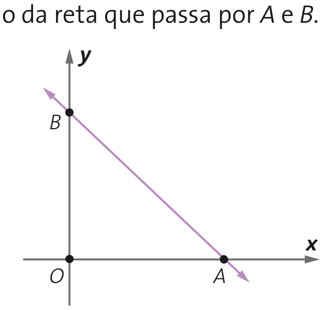
a) 4.
b) 3,5.
c) 3.
d) 5.
x e) 4,5.

65. Na figura, a reta r tem equação $x + 2y - 4 = 0$. Determine a área da região triangular AOB. 4



66. Calcule a área do quadrilátero de vértices $A(4, 0)$, $B(6, 2)$, $C(2, 4)$ e $D(0, 2)$. 12

67. (UFMG) Na figura a seguir, temos que $\overline{AO} = \overline{OB}$ e a área do triângulo OAB é 8 unidades. Determine a equação da reta que passa por A e B. $x + y - 4 = 0$

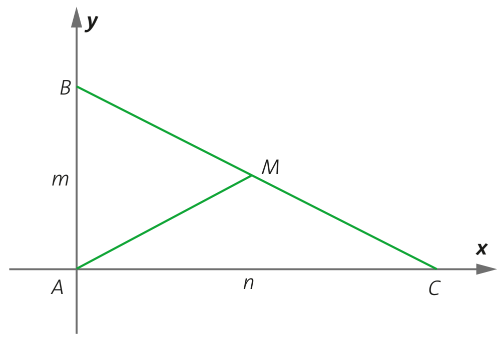


14 Aplicações à Geometria plana

Vamos escolher um sistema de eixos coordenados adequado e resolver, usando Geometria analítica, o seguinte problema de Geometria plana:

Seja ABC um triângulo retângulo de catetos $\overline{AB}$ medindo m, $\overline{AC}$ medindo n e hipotenusa $\overline{BC}$. Mostre que a mediana $\overline{AM}$ mede a metade da hipotenusa.

O mais conveniente é colocar os dois catetos sobre os eixos coordenados; portanto, o vértice A deve coincidir com a origem:



Assim, $A(0, 0)$, $B(0, m)$ e $C(n, 0)$ são as coordenadas dos vértices, e $M\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$. O comprimento da hipotenusa BC é $d(B, C) = \sqrt{m^2 + n^2}$, e o comprimento da mediana $\overline{AM}$ é:

$$d(A, M) = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$$

Assim, $d(A, M) = \frac{1}{2}d(B, C)$, como queríamos mostrar.

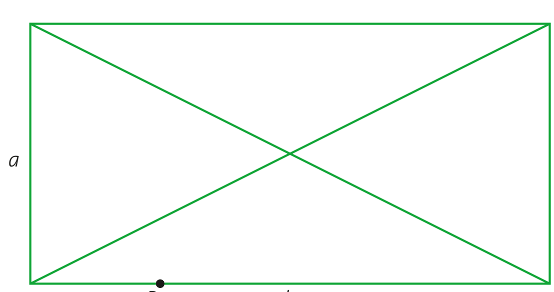
Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 70 e 71 no Manual do Professor.

68. Dada uma reta r: $2x + 3y - 1 = 0$, obtenha uma equação que represente o feixe de retas paralelas a r.
$2x + 3y + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$

69. Dada uma reta r: $2x + 3y - 1 = 0$, obtenha uma equação que represente um feixe de retas perpendiculares a r. $3 - 2y + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$

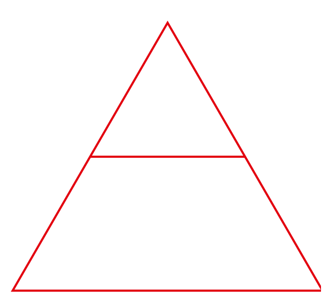
70. Em um retângulo qualquer, considerem um ponto P pertencente a um dos lados do retângulo de lados a e b. Mostrem que a soma das distâncias de P às diagonais desse retângulo é constante.



71. Mostrem que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo:

a) é paralelo ao terceiro lado;

b) tem comprimento igual à metade do comprimento do terceiro lado.



72. Dados o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta r: $ax + by + c = 0$, com $P \notin r$, obtenha a equação da reta s:

a) paralela a r e que passa por P; $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$

b) perpendicular a r e que passa por P. $bx - ay + (ay_0 - by_0) = 0$

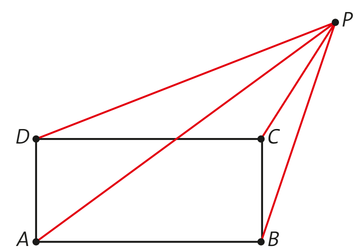
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Geometria sintética × Geometria analítica

Uma expressão equivalente a "Geometria analítica" é "Geometria pelo método das coordenadas". Não se trata de uma geometria diferente, mas sim de um novo método para tratar a mesma e já conhecida geometria. Mesmo hoje, muitos pensam que um problema de Geometria analítica já deve ter seus dados estabelecidos em forma de coordenadas. Como vimos na página anterior, isso é um engano! A Geometria analítica é uma ferramenta que pode ser usada para resolver problemas diversos de Geometria. Vamos dar um exemplo de um problema de Geometria e duas soluções: a sintética e a analítica.

Problema

ABCD é um retângulo. Mostre que, para qualquer ponto *P* contido no mesmo plano do retângulo *ABCD*, $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

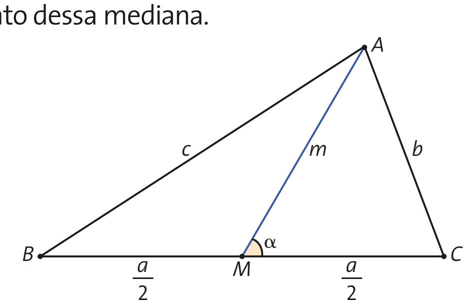


Esse problema surgiu no século XIX. Vamos mostrar duas formas de abordá-lo e resolvê-lo: a primeira usando ferramentas da Geometria sintética e a segunda, pelo método das coordenadas.

Solução sintética

Vamos calcular o comprimento de uma mediana em um triângulo de lados *a*, *b* e *c*. Para isso, precisaremos da lei dos cossenos e também da propriedade que diz que ângulos suplementares possuem cossenos simétricos.

Na figura a seguir, *ABC* é um triângulo com lados *a*, *b* e *c* na notação usual e $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao vértice *A*. Seja *m* o comprimento dessa mediana.



Aplicamos a lei dos cossenos nos triângulos *AMC* e *AMB*:

$$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2m\frac{a}{2}\cos\alpha$$

$$c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2m\frac{a}{2}\cos(180° - \alpha)$$

Simplificando essas relações, ficamos com:

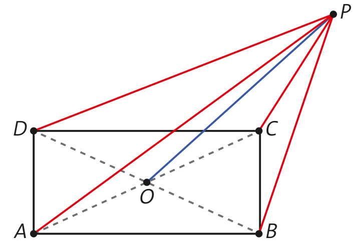
$$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - ma\cos\alpha$$

$$c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + ma\cos\alpha$$

Somando, obtemos $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$ e, consequentemente, a relação $4m^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere agora o retângulo *ABCD* e um ponto *P* qualquer do plano. Seja *O* o centro do retângulo.



Vamos agora aplicar a relação da mediana nos triângulos *PAC* e *PBD*:

$4PO^2 = 2(PA^2 + PC^2) - AC^2$

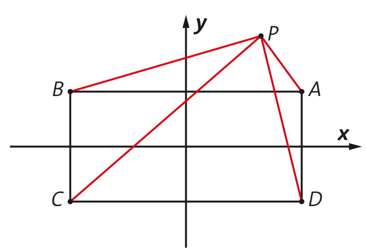
$4PO^2 = 2(PB^2 + PD^2) - BD^2$

Observando essas relações, e como as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do retângulo têm mesmo comprimento, concluímos que $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$, como queríamos demonstrar.

Solução pelo método das coordenadas

Inicialmente devemos acrescentar ao nosso desenho os eixos *x* e *y* para introduzir o plano cartesiano. A posição dos eixos é completamente livre e cada um pode escolher a que acha mais confortável. Nossa opção está na figura abaixo com a origem no centro do retângulo.

Fazendo $A = (a, b)$ temos, de acordo com a figura, $B = (-a, b)$, $C = (-a, -b)$ e $D = (a, -b)$. Seja $P = (x, y)$.



Utilizando a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano, temos:

$PA^2 + PC^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (x + a)^2 + (y + b)^2$

$PB^2 + PD^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 + (y + b)^2$

Repare que os lados direitos das duas relações são exatamente iguais. Assim, concluímos que $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$, como queríamos demonstrar.

Observações:

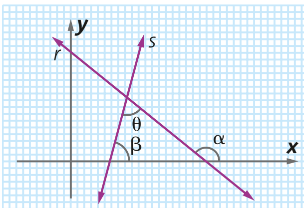
- Neste problema, a solução por coordenadas (ou Geometria analítica) foi muito mais rápida e muito mais clara do que a solução sintética. Apesar disso, não é sempre assim, muitas vezes as equações obtidas pelo método das coordenadas são mais difíceis de serem resolvidas. Para cada novo problema devemos ter as ferramentas em mãos e analisar quais delas serão mais eficientes.
- A solução sintética deste problema foi mais complicada, porém nos permitiu chegar à conclusão de uma propriedade inesperada:

O ponto *P* não precisa estar no plano do retângulo.

Observando a figura novamente, você poderá ter uma visão espacial dela mesma, pensando em uma pirâmide de vértice *P* com base no retângulo *ABCD*.

Ângulo formado por duas retas

Vamos considerar duas retas concorrentes, r e s, oblíquas (que intersectam não perpendicularmente) aos eixos coordenados e não perpendiculares entre si, de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente. Elas formam entre si o ângulo θ.



$$\theta + \beta = \alpha \Rightarrow \theta = \alpha - \beta \Rightarrow$$

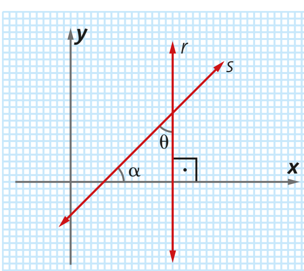
$$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Para θ agudo, temos:

$$\boxed{\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|}$$

Fique atento!
Na subtração det arcos vale que:
$\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
(para os arcos em que a tangente for definida)
Veja esta e outras fórmulas de subtração de arcos, no Capítulo 10.

- Se r e s forem paralelas, $m_1 = m_2$ e $\theta = 0°$.
- Se r e s forem perpendiculares, $m_1 m_2 = -1$ e $\theta = 90°$.
- Se uma das retas for vertical, temos:



$$\theta + \alpha = 90° \Rightarrow \theta = 90° - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{m}$$

Considerando θ agudo, temos:

$$\boxed{\tan\theta = \left|\frac{1}{m}\right|}$$

Por exemplo, vamos determinar o valor do ângulo agudo formado pelas retas r: $y - 4 = 3(x - 5)$ e s: $2x + y - 7 = 0$.

- $y - 4 = 3(x - 5) \Rightarrow m_1 = 3$
- $2x + y - 7 = 0 \Rightarrow y = -2x + 7 \Rightarrow m_2 = -2$

Logo:

$$\tan\theta = \left|\frac{3 - (-2)}{1 + 3(-2)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow \theta = 45°$$

Fique atento!
As retas r e s do exemplo formam dois ângulos de 45° e dois ângulos de 135°.

Exercícios adicionais

1. Qual é o valor do ângulo agudo formado pelas retas $y = 4x - 6$ e $y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 5)$?
90°

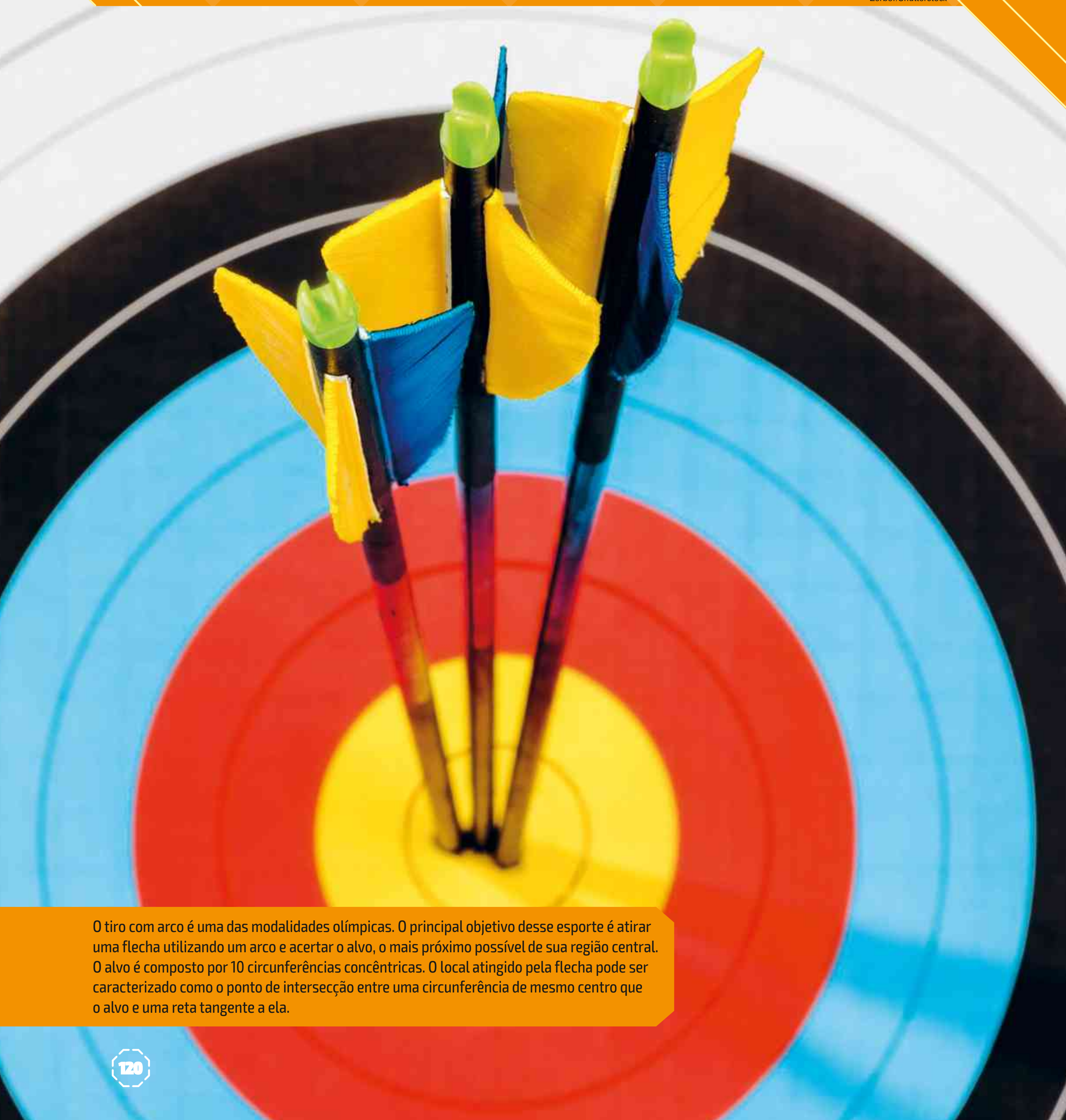
2. Determinem a tangente do ângulo agudo formado pelas retas $y = 7$ e $2x - 3y + 5 = 0$.
$\frac{2}{3}$

3. Determinem a equação da reta que passa pelo ponto $P(2, 1)$ e forma um ângulo de 45° com a reta de equação $y = 5x + 3$.
$y = -\frac{3x}{2} + 4$ e $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$

4. Calculem a cotangente do ângulo agudo formado pelas retas $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ e $15x - 5y + 2 = 0$.
$\frac{4}{3}$

CAPÍTULO 5

Geometria analítica: a circunferência



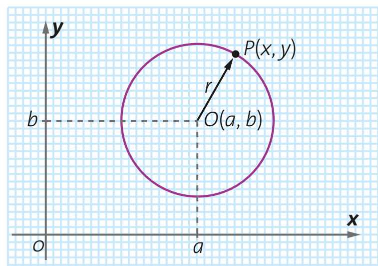
Zerbor/Shutterstock

O tiro com arco é uma das modalidades olímpicas. O principal objetivo desse esporte é atirar uma flecha utilizando um arco e acertar o alvo, o mais próximo possível de sua região central. O alvo é composto por 10 circunferências concêntricas. O local atingido pela flecha pode ser caracterizado como o ponto de intersecção entre uma circunferência de mesmo centro que o alvo e uma reta tangente a ela.

1 Definição e equação

Uma circunferência com centro $O(a, b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano equidistantes de O, ou seja:

$$d(P, O) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento!
Às vezes referimo-nos ao raio como sendo o segmento de reta e às vezes como a sua medida, dependendo do contexto.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$ (equação da circunferência de centro (a, b) e raio r)

Observação: No caso particular de o centro da circunferência estar na origem, ou seja, $a = b = 0$, a equação da circunferência de raio r é $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação geral da circunferência

Ao desenvolver a equação da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ obtemos o que se chama equação **geral** ou **normal** da circunferência:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0\text{, ou seja, } x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

É muito comum na prática que as circunferências sejam representadas por sua equação geral, por exemplo, a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. À primeira vista, essa equação não nos permite identificar nem o centro nem o raio da circunferência em questão. Precisamos, portanto, aprender a obter o raio e o centro de uma circunferência a partir de sua equação geral. Temos dois métodos que podem ser utilizados:

Ressalte para os alunos a importância do método de "completar os quadrados", que será utilizado no estudo da circunferência. Ele evita que o aluno tenha que decorar os detalhes da forma geral da equação da circunferência.

1º) Método de completar os quadrados

Nesse método, o objetivo é obter os quadrados perfeitos $(x - a)^2$ e $(y - b)^2$ a partir das informações apresentadas na equação geral.

Vejamos como ele funciona com a equação geral $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$:

- agrupam-se na equação geral os termos em x e os termos em y, isolando no outro membro o termo independente. É interessante deixar um espaço depois dos termos em x e dos termos em y, e dois espaços no outro termo:

$$x^2 - 2x + \_\_\_ + y^2 + 4y + \_\_\_ = 4 + \_\_\_ + \_\_\_$$

- somam-se a ambos os termos da equação valores convenientes, de modo que os termos em x e os termos em y se transformem, cada qual, em um quadrado perfeito. Na prática, usamos os espaços vagos para escrever esses números. O número que completa o quadrado perfeito em x é o quadrado da metade do coeficiente de x, se o coeficiente de x^2 for 1. Assim, como o coeficiente de x é -2, metade de -2 é -1 e o quadrado de -1 é 1, somamos 1 em ambos os membros:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + \_\_\_ = 4 + 1 + \_\_\_$$

- da mesma forma, o número que completa o quadrado perfeito em y é o quadrado da metade do coeficiente de y, se o coeficiente de y^2 for 1. Assim, como o coeficiente de y é 4, metade de 4 é 2 e o quadrado de 2 é 4, somamos 4 em ambos os membros:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 + 1 + 4$$

Assim, temos os seguintes quadrados perfeitos:

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + \underbrace{y^2 + 4y + 4}_{(y+2)^2} = \underbrace{4 + 1 + 4}_{3^2}$$

- Portanto, a equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ representa uma circunferência de centro $(1, -2)$ e raio 3.

Observação: Se os coeficientes de x^2 e y^2 não forem 1, basta dividir toda a equação geral por um número conveniente de forma a torná-los 1.

2º) Método da comparação

Nesse método, devemos comparar os coeficientes dos termos das duas equações: a equação teórica e a equação dada:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4$$

Dessa forma:

$$-2a = -2 \Rightarrow a = 1$$
$$-2b = 4 \Rightarrow b = -2$$

$a^2 + b^2 - r^2 = -4 \Rightarrow 1^2 + (-2)^2 - r^2 = -4 \Rightarrow 1 + 4 - r^2 = -4 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$ (não existe raio com medida negativa)

Então, o centro da circunferência é $(1, -2)$ e o raio é 3.

O método de completar quadrados é mais conveniente, pois não envolve memorização da forma teórica da equação geral e oferece a possibilidade de trabalhar da mesma forma com outras equações (não só a da circunferência). Mas fica a seu critério a escolha do método para resolver os exercícios.

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 6

1. Determine a equação de uma circunferência com centro no ponto $O(-3, 1)$ e raio 3.

Resolução:

Nesse caso, temos:

$a = -3$

$b = 1$

$r = 3$

Usando a equação, vem:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 3^2 \Rightarrow$

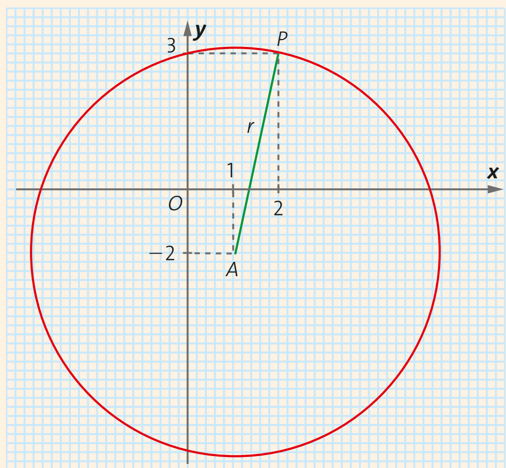
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$

Logo, a equação é $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ ou $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$.

Fique atento!

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ é a equação da circunferência na forma reduzida e $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ é a equação na forma geral.

2. Determine a equação da circunferência com centro no ponto $A(1, -2)$ e que passa pelo ponto $P(2, 3)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução:

Pela figura, $r = d(P, A)$.

Então:

$d(P, A) = \sqrt{(2-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{1 + 25} =$

$= \sqrt{26} \Rightarrow r = \sqrt{26}$

Pela equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, temos:

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 26 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0$

Logo, a equação é $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 26$ ou $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0$.

Generalizando: Em uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r seus pontos satisfazem a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Reciprocamente, uma equação de variáveis x e y escrita nessa forma representa uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio $r > 0$.

3. Verifique se a equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$ representa uma circunferência.

Resolução:

Usando o processo conhecido como "completar os quadrados" e lembrando que

$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$, temos:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + \_\_\_ + y^2 - 8y + \_\_\_ =$

$= -19 + \_\_\_ + \_\_\_ \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + \underbrace{y^2 - 8y + 16}_{(y-4)^2} = \underbrace{-19 + 4 + 16}_{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1^2$

Logo, a equação inicial representa uma circunferência de centro $C(2, 4)$ e raio 1.

4. Verifique se a equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, determine as coordenadas do centro e o raio.

Resolução:

$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -6 + 1 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = -4$

Como $(x+1)^2$ é sempre positivo ou nulo, bem como $(y-1)^2$, a soma $(x+1)^2 + (y-1)^2$ nunca é negativa; então, não há ponto que satisfaça a relação $(x+1)^2 + (y-1)^2 = -4$.

Logo, a equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$ não representa uma circunferência.

Devemos sempre lembrar que:

> Uma equação nas variáveis x e y representa uma circunferência se, e somente se, puder ser escrita na forma:
>
> $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
>
> com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

5. Obtenha o raio e o centro da circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$.

Resolução:

1ª maneira: *Método de completar os quadrados*

$x^2 + 6x + \_\_\_ + y^2 - 4y + \_\_\_ =$

$= 12 + \_\_\_ + \_\_\_$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 12 + 9 + 4$

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

Portanto, a equação $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ representa uma circunferência de centro $(-3, 2)$ e raio 5.

2ª maneira: *Método da comparação*

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) =$

$= x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ (circunferência de centro (a, b) e raio r)

$-2a = 6 \Rightarrow a = -3$

$-2b = -4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 + b^2 - r^2 = -12 \Rightarrow (-3)^2 + 2^2 - r^2 = -12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 + 4 - r^2 = -12 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 5$ (não existe raio negativo)

Então, o centro da circunferência é $(-3, 2)$ e o raio é 5.

Resolvido passo a passo

6. (UPM-SP) Vitória-régia é uma planta aquática típica da região amazônica. Suas folhas são grandes e têm formato circular, com uma capacidade notável de flutuação, graças aos compartimentos de ar em sua face inferior. Em um belo dia, um sapo estava sobre uma folha de vitória-régia, cuja borda obedece à equação $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$, apreciando a paisagem ao seu redor. Percebendo que a folha que flutuava à sua frente era maior e mais bonita, resolveu pular para essa folha, cuja borda é descrita pela equação $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0$. A distância linear mínima que o sapo deve percorrer em um salto para não cair na água é:

a) $2(\sqrt{2} - 1)$

b) 2

c) $2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2} - 2$

e) $\sqrt{5}$

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dadas duas equações que representam as circunferências das bordas das vitórias-régias.

b) O que se pede?

Pede-se a distância linear mínima que o sapo deve percorrer em um salto para ir de uma planta à outra sem cair na água.

2. Planejando a solução

Inicialmente deve-se encontrar as coordenadas dos centros das circunferências e o valor de seus raios. Feito isso, calcula-se a distância entre os dois centros e em seguida subtrai-se do valor encontrado a soma dos dois raios. Assim, encontramos a distância mínima a ser percorrida linearmente pelo sapo.

3. Executando o que foi planejado

1º passo: encontrar as coordenadas dos centros e os raios das circunferências.

Circunferência 1: $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + y = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} = -1 + 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow (x + 1)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \text{centro} = \left(\frac{2}{-2}, \frac{1}{-2}\right) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \\ \text{raio} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{1 + 0{,}25 - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ u.c. (unidade de comprimento)} \end{cases}$$

Circunferência 2: $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = -1 + 1 + \frac{9}{4} \Rightarrow (x - 1)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$$\begin{cases} \text{centro} = \left(\frac{-2}{-2}, \frac{-3}{-2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right) \\ \text{raio} = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{1 + 2{,}25 - 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ u.c.} \end{cases}$$

2º passo: obter a distância entre os centros

$$d_{C1,C2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ u.c.}$$

3º passo: subtrair da distância entre os centros a soma dos raios, encontrando, assim, o resultado que se pede.

Soma dos raios $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Distância mínima entre bordas = Distância entre os centros − Soma dos raios ⇒

⇒ Distância mínima $= 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$ u.c.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) Supondo que o sapo saia da borda de uma vitória-régia e retorne a ela, passando antes por toda a borda da outra circunferência, qual a distância, em unidade de comprimento, percorrida pelo sapo?

Distância percorrida $= \left[4\left(\sqrt{2} - 1\right) + 3\pi\right]$ u.c.

b) *Discussão em equipe*

Sabe-se que a vitória-régia é uma planta típica da região amazônica. Essa região riquíssima em biodiversidade e apresenta uma fauna exuberantes e com muitas espécies. A vitória-régia e uma flora chama a atenção principalmente por sua forma. Com base nessas informações, troquem ideias sobre os fatores que favorecem essa exuberância natural e pesquisem sobre outras plantas típicas dessa região e suas características.

Exercícios

Atividade em dupla Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

Veja a resposta do exercício 2 na seção Respostas.

1. Dê as coordenadas do centro e o raio das circunferências representadas pelas equações:

a) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$ $C(5, 4)$ e $r = 1$

b) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 5$ $C(-2, -6)$ e $r = \sqrt{5}$

c) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ $C(2, 0)$ e $r = 2$

d) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ $C(-3, 1)$ e $r = 4$

e) $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ $C(0, 4)$ e $r = 1$

f) $x^2 + y^2 = 10$ $C(0, 0)$ e $r = \sqrt{10}$

2. Determine uma equação da circunferência que tem:

a) centro em $C(2, 5)$ e raio 3;

b) centro em $M(-1, -4)$ e raio $\sqrt{2}$;

c) centro em $Q(0, -2)$ e raio 4;

d) centro em $D(4, 0)$ e raio 5.

3. Obtenha o raio e o centro das circunferências a seguir.

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0$ $r = 4$ e $C(2, -3)$

b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ $r = 4$ e $C(3, 1)$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$ $C(2, 4)$ e $r = 2$

d) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0$ $C(-6, 2)$ e $r = 7$

e) $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0$ $r = \sqrt{5}$ e $C(-4, 0)$

f) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$ $r = \sqrt{20}$ e $C(3, -4)$

g) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ $C(0, 2)$ e $r = 2$

h) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ $C(1, 1)$ e $r = \sqrt{2}$

4. Verifique quais das equações abaixo representam circunferência:

x a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + xy + 4x + 6y - 3 = 0$

c) $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

x d) $3x^2 + 3y^2 - 12x - 15y - 6 = 0$

e) $4x^2 - 4y^2 = 0$

f) $(x - 5)^2 (y - 3)^2 = -5$

5. Verifique entre os pontos $A(0, 3)$, $B(7, 2)$ e $C(-1, 3)$ quais pertencem à circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$. A e B

6. O centro de uma circunferência é o ponto médio do segmento de reta AB, sendo $A(2, -5)$ e $B(-2, -3)$. Se o raio dessa circunferência é $\sqrt{2}$, determine a sua equação. $x^2 + (y + 4)^2 = 2$

7. Verifique se a equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, dê as coordenadas do centro e o raio da circunferência. $C(-1, -1)$ e raio $= 2$

8. Uma circunferência de centro no ponto $Q(2, 0)$ passa pelo ponto de encontro das retas r e s de equações $x - y - 2 = 0$ e $x + y - 6 = 0$, respectivamente. Qual é a equação dessa circunferência? $(x - 2)^2 + y^2 = 8$

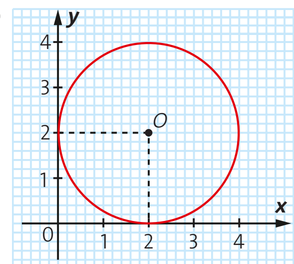
9. (FEI-SP) Quais são o centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2(x - y) + 1$? $C(1, -1)$ e $r = \sqrt{3}$

10. Os pontos $A(4, -2)$ e $B(2, 0)$ são as extremidades do diâmetro de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r. Determine uma equação dessa circunferência. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$

11. Quais são os valores que k pode assumir para que a equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 13k = 0$ represente uma circunferência? $k \in \mathbb{R} \mid k < 2$

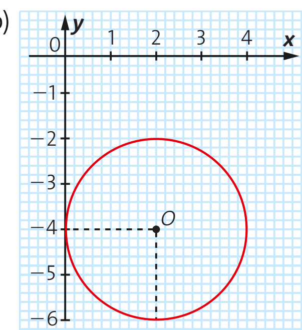
12. Determine a equação de cada circunferência abaixo:

a)



$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

b)



$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$

13. (PUC-SP) O ponto $P(3, b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C(0, 3)$ e raio 5. Calculem o valor da coordenada b. $b = 7$ ou $b = -1$

14. (FGV-SP) Determinem uma equação da reta que passa pelo centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ e é paralela à reta r, de equação $2x + 3y = 0$. $2x + 3y - 10 = 0$

15. (Vunesp-SP) Considerem o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$. Determinem as equações das retas que contêm as diagonais desse quadrado. $x - y - 1 = 0$ e $x + y - 5 = 0$

16. Determinem uma equação da circunferência que passa pelos pontos $A(5, 0)$, $B(4, 3)$ e $C(-4, -3)$. (Sugestão: chamem o centro de $O(a, b)$ e usem o fato de que $d(A, O) = d(B, O) = d(C, O) = r$) $x^2 + y^2 = 25$

Para refletir

Dados três pontos, qual a condição para que exista uma circunferência que passe pelos três?

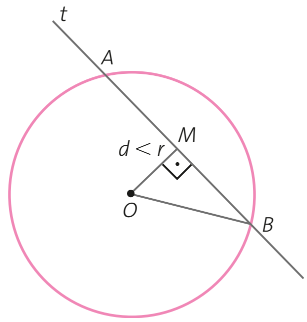
Os três pontos devem ser distintos e não colineares.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Posições relativas entre reta e circunferência

Consideremos as três possíveis posições de uma reta em relação a uma circunferência:

1ª) A reta t é **secante** à circunferência:

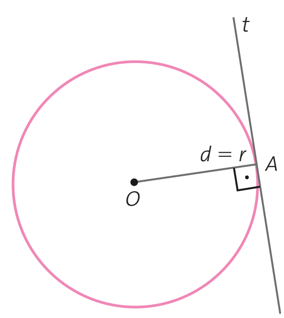


Nesse caso, a distância do centro da circunferência à reta é menor que o raio. A reta e a circunferência têm dois pontos comuns.

Observação: Propriedades de reta e da circunferência secantes:

- $\overline{OM} \perp \overline{AB}$
- M é ponto médio de $\overline{AB}$ ($AB = 2AM$)
- Teorema de Pitágoras: $(OM)^2 + (BM)^2 = (BO)^2$

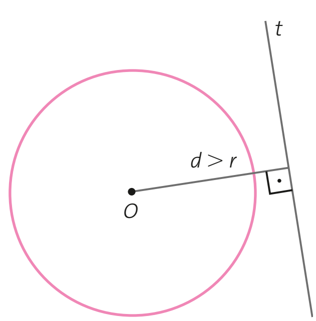
2ª) A reta t é **tangente** à circunferência:



Fique atento!
Note que $t \perp \overline{OA}$.

Nesse caso, a distância do centro da circunferência à reta é igual ao raio. A reta e a circunferência têm um único ponto comum.

3ª) A reta t é **exterior** à circunferência:



Nesse caso, a distância do centro da circunferência à reta é maior que o raio. A reta e a circunferência não têm ponto comum.

Vejamos, a partir das equações, como identificar qual desses casos se verifica.

Exercício resolvido

7. São dadas a reta r, de equação $2x + y - 1 = 0$, e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Qual é a posição da reta r em relação à circunferência?

Resolução:

Vamos calcular, inicialmente, as coordenadas do centro e o raio da circunferência:

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9 + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

Então, $C(-3, 4)$ e $r = 5$.

Agora vamos determinar a distância do centro à reta:

$$d = \frac{|2(-3) + 1(4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \simeq \frac{3}{2,2} \simeq 1,3$$

Comparando d e r, temos $d < r$, pois $1,3 < 5$.

Logo, a reta r é secante à circunferência.

Outra resolução:

Os pontos comuns à reta e à circunferência, se houver, são as soluções do sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 2x \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases}$$

Substituindo y na segunda equação, temos:

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \Rightarrow x^2 + (1 - 2x)^2 + 6x - 8(1 - 2x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 4x + 4x^2 + 6x - 8 + 16x = 0 \Rightarrow 5x^2 + 18x - 7 = 0$

O cálculo de Δ será suficiente para determinar quantos pontos comuns têm a reta e a circunferência e daí a posição relativa. Então:

$\Delta = 18^2 + 140 = 324 + 140 = 464 > 0$

O valor de $\Delta > 0$ indica a existência de dois valores reais e distintos de x e, consequentemente, dois pontos comuns à reta e à circunferência.

Logo, a reta é secante à circunferência.

Observação: A resolução completa do sistema permite descobrir quais são os dois pontos comuns à reta e à circunferência.

Fique atento!
Para $\Delta = 0$, há um só ponto comum (reta tangente à circunferência).
Para $\Delta < 0$, não há ponto comum (reta exterior à circunferência).

Exercícios

17. (UFBA) Determine o comprimento da corda determinada pela intersecção da reta r, de equação $x + y - 1 = 0$, com a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$. $\sqrt{2}$

18. Consideremos a reta r de equação $x + y - 3 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. Qual é a posição da reta r em relação à circunferência? secante

19. A reta r de equação $x + y - 3 = 0$ e a circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ são secantes nos pontos A e B. Determinem a área do triângulo cujos vértices são o centro da circunferência e os pontos A e B. $S = 4$; $A(1, 2)$ e $B(-1, 4)$

20. Dadas uma reta r e uma circunferência λ, verifiquem a posição relativa de r e λ. Se houver pontos comuns (tangente ou secante), determinem esses pontos:

a) r: $2x - y + 1 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ exterior à circunferência

b) r: $y = x$ e λ: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ secante; $(2, 2)$ e $(-1, -1)$

21. A reta $x + y - 1 = 0$ secciona a circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ nos pontos A e B. Calculem a distância do centro C à corda AB. $\sqrt{2}$

22. Determine as coordenadas dos pontos em que a reta r, de equação $y = -x + 5$, intersecta a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$. $(6, -1)$ e $(3, 2)$

3 Problemas de tangência

Para resolver problemas que envolvem retas tangentes à circunferência, devemos lembrar dois detalhes já vistos:

- Quando a reta é tangente à circunferência, a **distância do centro** da circunferência à **reta** tangente **é** o **raio**.
- A reta tangente é sempre **perpendicular** ao raio no ponto de tangência.

Em razão disso, talvez seja uma boa ideia revisitar o Capítulo 4, itens Posições relativas de duas retas no plano e Perpendicularidade de duas retas e Distância de um ponto a uma reta.

Acompanhe nos exercícios resolvidos a seguir as situações mais comuns que envolvem tangência.

Exercícios resolvidos

8. A reta de equação $x - y + k = 0$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$. Calcule o valor de k.

Resolução:

Se a reta é tangente à circunferência, a distância do centro até a reta é igual ao raio.

Centro e raio da circunferência:

$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$

Então, $C(0, 0)$ e $r = 3$.

Distância do centro $(0, 0)$ à reta $1x - 1y + k = 0$:

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

Cálculo de k, sabendo que $d = r$:

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow |k| = 3\sqrt{2} \Rightarrow k = \pm 3\sqrt{2}$$

Fique atento!
Se há dois valores para k, existem duas retas, $x - y + 3\sqrt{2} = 0$ e $x - y - 3\sqrt{2} = 0$, que satisfazem à condição imposta.

Outra resolução:

Se a reta é tangente à circunferência, então o sistema formado pelas duas equações tem uma única solução:

$$\begin{cases} x - y + k = 0 \Rightarrow x = y - k \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Substituindo x na segunda equação, temos:

$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow (y - k)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 2ky + k^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y^2 - 2ky + k^2 - 9 = 0$

Para que a solução seja única devemos ter $\Delta = 0$:

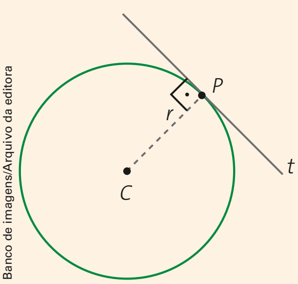
$\Delta = 4k^2 - 8(k^2 - 9) = 0 \Rightarrow 4k^2 - 8k^2 + 72 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4k^2 + 72 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{72}{4} = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

9. O ponto $P(5, 2)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0$. Determine a equação da reta t tangente a essa circunferência em P.

Lembre-se de que, se uma reta t tangencia uma circunferência de centro C e raio r em P, então t é perpendicular à reta-suporte de $\overline{CP}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução:

Calculando as coordenadas do centro C e o raio r, temos:

$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 6y = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 27 + 1 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 37$

Então, $C(-1, 3)$ e $r = \sqrt{37}$.

Vamos determinar o coeficiente angular m_1 da reta que passa pelos pontos $C(-1, 3)$ e $P(5, 2)$:

$$m_1 = \frac{2 - 3}{5 + 1} = -\frac{1}{6}$$

Vamos determinar o coeficiente angular m_2 da reta t perpendicular à reta que passa pelos pontos C e P:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{6}} = 6$$

Calculamos agora a equação da reta t que passa pelo ponto $P(5, 2)$ e tem declividade 6:

$y - 2 = 6(x - 5) \Rightarrow y - 2 = 6x - 30 \Rightarrow$

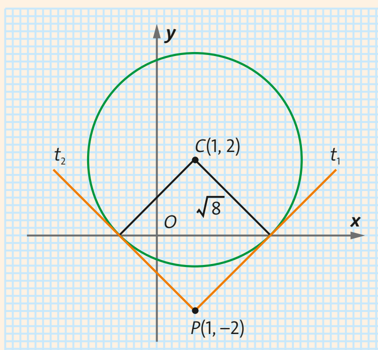
$\Rightarrow 6x - y - 28 = 0$

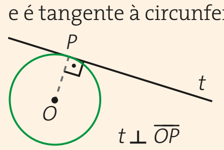
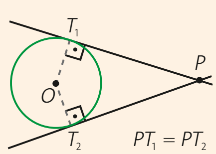
Logo, a equação pedida é $6x - y - 28 = 0$.

10. O ponto $P(1, -2)$ é externo à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Determine as equações das retas tangentes à circunferência e que passam por P.

Resolução:

Pela equação dada, temos $C(1, 2)$ e $r = \sqrt{8}$.



> **Fique atento!**
> Se P pertence à circunferência, existe uma só reta que passa por P e é tangente à circunferência.
>
> 
>
>
> Se P é externo, há duas tangentes.
>
> 
>
>
> Se P é interno, não existe tangente.

Considerando o coeficiente angular m das retas t_1 e t_2, podemos escrever a equação geral dessas retas, lembrando que passam por $P(1, -2)$.

$y + 2 = m(x - 1) \Rightarrow y + 2 = mx - m \Rightarrow$

$\Rightarrow mx - y - 2 - m = 0$

Como a distância entre o centro $C(1, 2)$ e a reta de equação $mx - y - 2 - m = 0$ deve ser igual ao raio r, temos:

$$\frac{|m(1) - 1(2) - 2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|m - 2 - 2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|-4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16}{m^2 + 1} = 8 \Rightarrow 8m^2 + 8 = 16 \Rightarrow 8m^2 - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m' = 1 \text{ e } m'' = -1$$

Vamos calcular, agora, as equações das retas t_1 e t_2, substituindo o valor de m por m' e por m'' na equação geral $mx - y - 2 - m = 0$.

Para $m' = 1$, temos:

$(1)x - y - 2 - 1 = 0 \Rightarrow x - y - 3 = 0$

Para $m'' = -1$, vem:

$(-1)x - y - 2 - (-1) = 0 \Rightarrow -x - y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y + 1 = 0$

Logo, as equações das retas tangentes t_1 e t_2 são $x - y - 3 = 0$ e $x + y + 1 = 0$.

> **Fique atento!**
> Se houver duas retas tangentes, porém um único valor para m, significa que uma das retas é vertical.

Exercícios

23. (UFRGS-RS) A reta r de equação $x = 3$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y + k = 0$. Nessas condições, calculem o valor de k. -20

24. O ponto $A(2, 3)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. Determinem a equação da reta tangente à circunferência no ponto A. $x + 2y - 8 = 0$

25. (UFU-MG) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$ possui duas retas tangentes, t_1 e t_2, que são paralelas à reta s de equação $3x + 4y - 1 = 0$. Determinem as equações das retas t_1 e t_2.
t_1: $4y + 3x + 1 + 5\sqrt{7} = 0$ e t_2: $4y + 3x + 1 - 5\sqrt{7} = 0$

26. (UFSM-RS) As retas r e s tangenciam a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, respectivamente, nos pontos P e Q e passam pelo ponto $O(0, 0)$. A medida do ângulo $P\hat{O}Q$ vale:

a) 15°.
b) 30°.
c) 45°.
x d) 60°.
e) 90°.

27. A circunferência com centro $C(1, 1)$ é tangente à reta t de equação $x + y - 10 = 0$. Determinem a equação da circunferência. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 32$

4 Aplicações à Geometria plana


Rigucci/Shutterstock

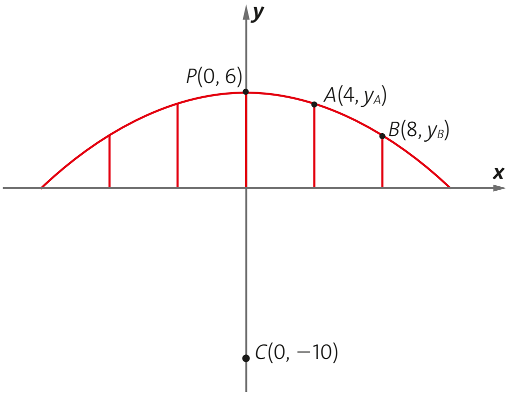
Ponte de Fremont, Portland (Estados Unidos). Fotografia de 2014.

Acompanhe a seguinte situação:

Um engenheiro precisa construir uma ponte em forma de arco de circunferência, semelhante à que aparece na fotografia ao lado. O vão livre sobre o rio a ser vencido pela ponte é de 24 m, e a pilastra central, segundo o arquiteto, deverá ter 6 m de altura. O engenheiro, usando seus conhecimentos de Geometria plana, já calculou que o raio do arco de circunferência projetado pelo arquiteto é de 16 m. Agora ele precisa calcular o tamanho das outras quatro pilastras menores (duas à esquerda e duas à direita da pilastra central). Segundo o projeto, todas as pilastras estão a 4 m uma da outra.

Com base nas informações do problema, vamos escolher um sistema de eixos coordenados conveniente e obter a altura dessas quatro pilastras menores.

Modelo matemático



Banco de imagens/Arquivo da editora

Escolhendo um sistema de eixos cartesianos que coloque a pilastra central no eixo y e o vão da ponte no eixo x, o centro da circunferência será $C(0, -10)$, pois o raio tem 16 m e a pilastra maior tem 6 m. Para obter o tamanho das pilastras pedidas, precisamos apenas das ordenadas dos pontos A e B, cujas abscissas são respectivamente 4 e 8. Nesse exemplo, a escolha do sistema de eixos cartesianos adequado é muito importante para facilitar a resolução.

A equação da circunferência é, então, $x^2 + (y + 10)^2 = 256$. Para obtermos a ordenada y_A do ponto A, basta substituir a abscissa $x_A = 4$ na equação da circunferência:

$$4^2 + (y_A + 10)^2 = 256 \Rightarrow (y_A + 10)^2 = 240 \Rightarrow y_A + 10 = \sqrt{240} \Rightarrow y_A \simeq 15{,}49 - 10 \Rightarrow y_A = 5{,}49$$

Da mesma forma, para obtermos a ordenada y_B do ponto B, basta substituir a abscissa $x_B = 8$ na equação da circunferência:

$$8^2 + (y_B + 10)^2 = 256 \Rightarrow (y_B + 10)^2 = 192 \Rightarrow y_B + 10 = \sqrt{192} \Rightarrow y_B \simeq 13{,}86 - 10 \Rightarrow y_B = 3{,}86$$

Por causa da simetria da ponte, as duas pilastras do lado esquerdo terão o mesmo tamanho de suas correspondentes no lado direito. Assim, as pilastras são tais que duas têm, aproximadamente, 3,86 m, outras duas têm, aproximadamente, 5,49 m, e a central, como já sabíamos, tem 6 m.

Exercícios

Escolha um sistema de eixos coordenados adequado e resolva, usando Geometria analítica, os seguintes problemas:

28. Obtenham o raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo cujos catetos meçam 3 cm e 4 cm.
1 cm

> **Fique atento!**
> Dica: Coloquem o vértice do ângulo reto do triângulo retângulo na origem.

29. Uma circunferência L está inscrita em um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$. Mostrem que, para todo ponto de L, a soma dos quadrados de suas distâncias aos três vértices do triângulo é constante.
Veja a resolução do exercício 29 no Manual do Professor.

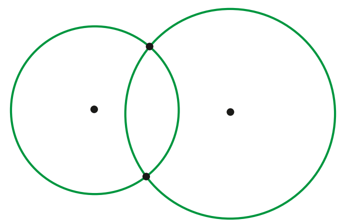
Um pouco mais...

Posições relativas de duas circunferências

Assunto opcional

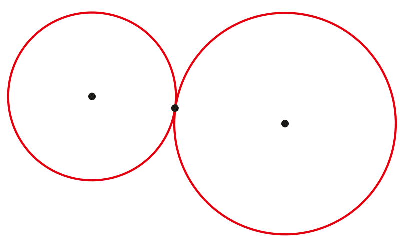
Duas circunferências distintas podem ter dois, um ou nenhum ponto comum. Veja as possíveis posições relativas:

1ª) Dois pontos comuns:



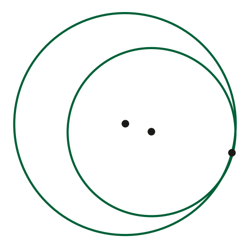
secantes

2ª) Um ponto comum:



tangentes exteriormente

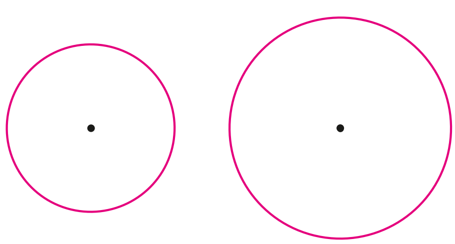
ou



tangentes interiormente

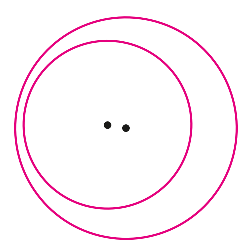
Fique atento!
No segundo caso (um ponto comum), os dois centros e o ponto de tangência são colineares.

3ª) Nenhum ponto comum:



circunferências externas

ou



uma circunferência interna à outra

A partir das equações das duas circunferências podemos descobrir quantos e quais são os pontos comuns resolvendo o sistema formado por elas. Além disso, no segundo caso (um ponto comum) e no terceiro caso (nenhum ponto comum) podemos identificar a posição relativa usando os dois raios e a distância entre os centros.

Fique atento!
Possíveis posições relativas entre duas circunferências:
- externas: $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$
- tangentes externas: $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$
- secantes: $|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$
- tangentes internas: $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$
- uma interna à outra: $d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$
- concêntricas: $C_1 \equiv C_2$, $d(C_1, C_2) = 0$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos verificar a posição relativa das circunferências:

a) $x^2 + y^2 = 30$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 30 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x = 0 \Rightarrow 30 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$$

Substituindo x na primeira equação, vem:

$x^2 + y^2 = 30 \Rightarrow 25 + y^2 = 30 \Rightarrow y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$

Logo, as duas circunferências são secantes e seus pontos comuns são $(5, \sqrt{5})$ e $(5, -\sqrt{5})$.

b) $x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 20x - \cancel{2y} + 100 = 0 \\ -\cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2x + \cancel{2y} + 98 = 0 \end{cases}$$

$$-18x + 198 = 0 \Rightarrow 18x = 198 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{198}{18} \Rightarrow x = 11$$

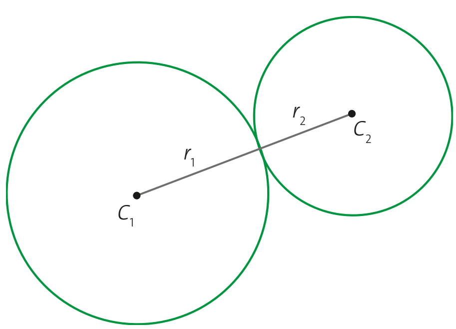
Substituindo x na primeira equação, vem:

$x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0 \Rightarrow 11^2 + y^2 - 20 \cdot 11 - 2y + 100 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 121 - 220 + 100 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1$

(11, 1) é o único ponto comum às duas circunferências, portanto elas são tangentes.

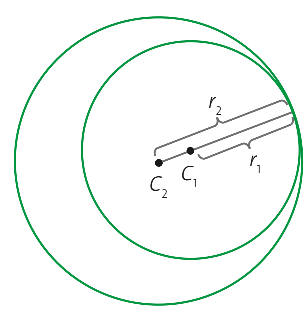
Como já vimos, as circunferências tangentes podem ser externas ou internas. Podemos determinar a sua posição relativa por meio da distância entre os centros das circunferências e por meio de seus raios (lembrando que os centros das circunferências e o ponto de tangência estão sempre alinhados).



$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

circunferências tangentes externamente

ou



$d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$

circunferências tangentes internamente

Considerando a primeira equação, temos:

$x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 - 2y + 1 = -100 + 100 + 1 \Rightarrow (x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$

Então, $C_1(10, 1)$ e $r_1 = 1$.

Agora, pela segunda equação, vem:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 98 + 1 + 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 100 = 10^2$

Então, $C_2(1, 1)$ e $r_2 = 10$.

Calculamos, então, a distância entre os centros C_1 e C_2:

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(10 - 1)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{81} = 9$

Como os raios medem $r_1 = 1$ e $r_2 = 10$ e $9 = |1 - 10|$, temos $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$.

Logo, as circunferências são tangentes internamente e o ponto comum é (11, 1).

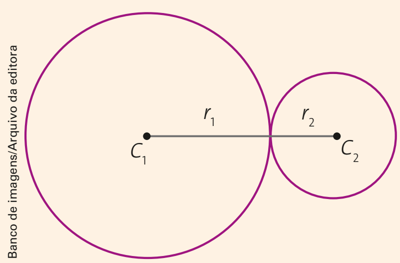
Exercício resolvido

11. Determine a equação da circunferência de centro em (8, 4) e que tangencia exteriormente a circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$.

Resolução:

Nesse caso, a distância entre os centros é igual à soma dos raios.

Inicialmente, calculamos o centro (C_1) e o raio (r_1) da circunferência dada abaixo:



$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 16 + 4 + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$

Então, $C_1(2, -4)$ e $r_1 = 6$.

Agora, calculamos a distância entre os centros $C_1(2, -4)$ e $C_2(8, 4)$:

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

Como $d = r_1 + r_2$, podemos calcular o raio r_2:

$$d = r_1 + r_2 \Rightarrow 10 = 6 + r_2 \Rightarrow r_2 = 4$$

A equação procurada é a da circunferência de raio 4 e centro (8, 4):

$$(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$$

Exercícios adicionais

1. Dadas as circunferências λ_1 e λ_2, descubra suas posições relativas e seus pontos comuns (se houver):

a) λ_1: $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$
λ_2: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$
λ_2 é interior a λ_1; não há ponto comum.

b) λ_1: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$
λ_2: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0$
secantes; (3, 5) e (1, 3)

c) λ_1: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
λ_2: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$
tangentes externas; (2, −1)

d) λ_1: $x^2 + y^2 = 16$
λ_2: $x^2 + y^2 + 4y = 0$
tangentes internas; (0, −4)

2. λ_1 e λ_2 são duas circunferências concêntricas, com λ_1 interna a λ_2. Sabendo que a equação de λ_1 é $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ e que a área do anel circular formado por λ_1 e λ_2 é igual a 24π, determine a equação de λ_2 na forma geral.
$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$

3. Determinando-se o centro e o raio das circunferências $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, pode-se garantir que:

a) elas não têm ponto em comum.
b) elas são secantes.
c) elas são tangentes exteriormente.
x d) elas são tangentes interiormente.

4. As circunferências de equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$ e $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ são:

x a) secantes.
b) tangentes internas.
c) tangentes externas.
d) exteriores, sem ponto comum.
e) interiores, sem ponto comum.

5. Sabendo que o ponto $M(1, -3)$ não pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, determine se o ponto M é interno ou externo à circunferência. interno

Outros contextos

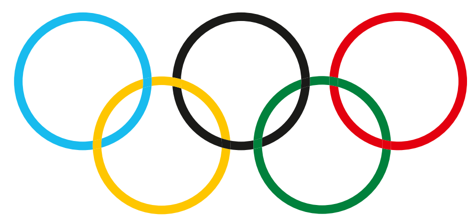
Jogos Olímpicos

Competição entre os melhores atletas do mundo, confraternização entre os povos e, acima de tudo, a grande festa do esporte. Os Jogos Olímpicos são um dos mais importantes eventos do planeta, mobilizando populações de centenas de países e emocionando a todos com vitórias, recordes e histórias de superação. De quatro em quatro anos, uma cidade do mundo tem o privilégio de sediar os jogos, onde competidores e torcedores se misturam e, durante pouco mais de duas semanas, ajudam a preservar e fortalecer o espírito olímpico. Em 2016, a cidade escolhida foi o Rio de Janeiro. Essa foi a primeira vez que uma edição do evento ocorreu na América do Sul. Estima-se que 10 500 atletas de 206 países participaram dos jogos.

A bandeira olímpica

A bandeira olímpica é o mais importante símbolo dos Jogos Olímpicos.

Ela é formada por cinco anéis de cores diferentes (azul, vermelho, preto, amarelo e verde) entrelaçados e localizados no centro da bandeira. Esta bandeira representa a universalidade do olimpismo (espírito olímpico, ética no esporte, união [por meio] do esporte). A bandeira possui fundo branco e os anéis representam os cinco continentes habitados no mundo. As seis cores, contando com o branco, aparecem em todas as bandeiras dos países em 1896 [...].



Reprodução /Arquivo da editora

[...]

A bandeira é hasteada na cerimônia de abertura das Olimpíadas [e] é levada, na posição horizontal, ao estádio olímpico por atletas e hasteada em um mastro. Enquanto a chama olímpica queima no estádio ela permanece hasteada. Na cerimônia de encerramento a bandeira é recolhida e entregue ao prefeito da cidade sede das Olimpíadas para os jogos seguintes.

Fonte: Sua Pesquisa.com. Disponível em: <www.suapesquisa.com/olimpiadas/bandeira_olimpica.htm>. Acesso em: 13 maio 2016.

Alguns esportes olímpicos

Tiro com arco

O tiro com arco é disputado em duas categorias — individual e por equipes —, na distância de 70 m em relação ao alvo, que tem 1,22 m de diâmetro e é formado por dez círculos concêntricos. O círculo mais central — a mosca — vale 10 pontos; cada círculo seguinte perde um ponto em valor. Para vencer, o competidor tem de somar o maior número possível de pontos. A disputa é eliminatória e, a cada etapa, o atleta dispara 36 flechas — seis séries de seis flechas com quatro minutos cada série.

Dean Alberga/World Archery Federation via Getty Images

Marcus Vinicius D'Almeida, jovem atleta da equipe de tiro com arco do Brasil, durante a final da Copa do Mundo de Tiro com Arco de 2014 em Lausanne (Suíça).

Basquete

O basquete é um esporte coletivo disputado em duas categorias: masculino e feminino. Dois times com cinco jogadores cada tentam marcar pontos acertando a bola dentro da cesta do lado adversário o maior número de vezes antes que o tempo acabe. O aro da cesta localiza-se a uma altura de 3,05 m em relação ao chão, com diâmetro mínimo de 45 cm e máximo de 45,9 cm. A quadra onde é disputada a partida possui 28 m × 15 m e a bola de basquete tem cerca de 76 cm de circunferência e pesa entre 600 g e 650 g. As cestas valem um, dois ou três pontos, dependendo da posição do jogador em quadra. Os jogadores podem dar apenas dois passos segurando a bola nas mãos, sem quicá-la na quadra.

javier Soriano/Agência France-Presse

Anderson Varejão, pivô da seleção brasileira de basquete. Jogo entre Brasil e Sérvia pelo Mundial de Basquete de 2014 realizado na Espanha. O Mundial é uma das principais competições da modalidade, além dos Jogos Olímpicos.

Julio Cortez/AP Photo/Glow Images

Jaqueline Ferreira, atleta da seleção brasileira de levantamento de peso, no Panamericano de 2015 em Toronto (Canadá), onde conquistou a medalha de bronze na categoria até 75 kg feminino levantando 105 kg na arrancada e 125 kg no arremesso.

Levantamento de peso

Em um verdadeiro teste de força, o atleta deve levantar uma barra de aço com a maior carga possível, acima de sua própria cabeça; vence o mais forte. Esta modalidade possui 8 categorias de peso no masculino e 7 no feminino. As provas são divididas em duas etapas: arranque e arremesso. No arranque os competidores devem levantar a barra diretamente do chão até acima da cabeça. No arremesso o movimento é executado em duas partes: na primeira, o atleta ergue a barra até a altura dos ombros, por cima do peito; na segunda, alinha-se novamente e completa o movimento utilizando a força dos braços e das pernas para erguer a barra acima da cabeça. Os discos colocados na barra de aço são separados por cores e pesos e podem ter no máximo 450 mm de diâmetro, com tolerância de 1 mm.

Fontes das informações: Rio 2016. Disponível em: <www.rio2016.com/esportes>. Brasil 2016. Disponível em: <http://www.brasil2016.gov.br/pt-br/olimpiadas/modalidades>. Acesso em: 13 maio 2016

Trabalhando com o texto

1. No tiro com arco temos circunferências no alvo; no basquete, no aro da cesta também. Em quais outros esportes podemos identificar circunferências?

Por exemplo, nas marcações dos campos de futebol, nos discos na prova de arremesso de discos, no tatame da luta greco-romana, entre outros.

2. No tiro com arco, o círculo central (mosca) pode ser descrito pela equação $x^2 + y^2 - 37{,}21 \leqslant 0$, em que x e y são dados em centímetros. Qual é a área desse círculo, em centímetros quadrados? Qual o diâmetro desse círculo central em centímetros?

$37{,}21\pi$ cm^2; 12,2 cm.

3. Tomando o centro do alvo como centro do sistema de coordenadas cartesianas, e o raio do alvo dado em centímetros, qual é a equação da maior circunferência do alvo, em metros?

$x^2 + y^2 = (0{,}61)^2$

4. Quais as inequações que expressam respectivamente a circunferência do aro da cesta de basquete e a dos pesos em forma de disco, no levantamento de pesos, considerando seus intervalos de medida? Dê a resposta em milímetros.

$(225)^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (229{,}5)^2$ e $x^2 + y^2 \leqslant (225{,}5)^2$

Pesquisando e discutindo

5. Os Jogos Olímpicos geralmente aumentam a quantidade de turistas nas cidades-sede. Pesquise quais medidas a cidade do Rio de Janeiro tomou para receber o evento em 2016.

6. As mulheres começaram a participar da disputa de tiro com arco na edição de 1904, em Saint Louis, nos Estados Unidos. Pesquise a trajetória das mulheres nos Jogos Olímpicos.

Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações sobre os Jogos Olímpicos em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acessos em 15 fev. 2016)

- Confederação Brasileira de Basketball (CBB) <www.cbb.com.br>.
- Confederação Brasileira de Levantamento de Peso (CBLP) <www.cblp.com.br>.
- Confederação Brasileira de Tiro com Arco (CBTArco) <www.cbtarco.org.br>.

Pensando no Enem

Leia os textos a seguir e responda às questões 1 e 2.

[...] Observar o céu e a lua cheia será algo ainda mais especial na noite de hoje [27/09/2015]. Entre as 22h e o início da madrugada de segunda-feira, está previsto um espetáculo duplo, com a ocorrência de dois fenômenos da astronomia: a superlua e o eclipse total da Lua. Os eventos, que costumam encantar observadores, poderão ser vistos a olho nu no Brasil, bem como no restante da América Latina, além da parte oeste da África e da Europa e da parte leste da América do Norte.

[...]

Superlua – A trajetória da Lua em torno da Terra – que é elíptica e não circular – faz com que em alguns momentos o satélite esteja mais próximo do planeta, em cada ciclo de aproximadamente 28 dias. A superlua ocorre no momento em que a Lua está cheia e na máxima proximidade com a Terra, posição caracterizada como perigeu.

Eclipse da Lua – Ocorre quando Sol, Terra e Lua estão alinhados, nessa ordem, e com isso o planeta bloqueia a incidência da luz do Sol sobre o satélite, fazendo sombra. Nesse fenômeno, dois cones de sombra são definidos: umbra e penumbra. O eclipse total da Lua ocorre quando a Lua penetra completamente na umbra. [...]

Fonte: Estado de Minas. Disponível em: <www.em.com.br/app/noticia/gerais/2015/09/27/interna_gerais,692374/superlua-e-eclipse-total-prometem-espetaculo-no-ceu-deste-domingo.shtml>. Acesso em: 13 maio 2016.

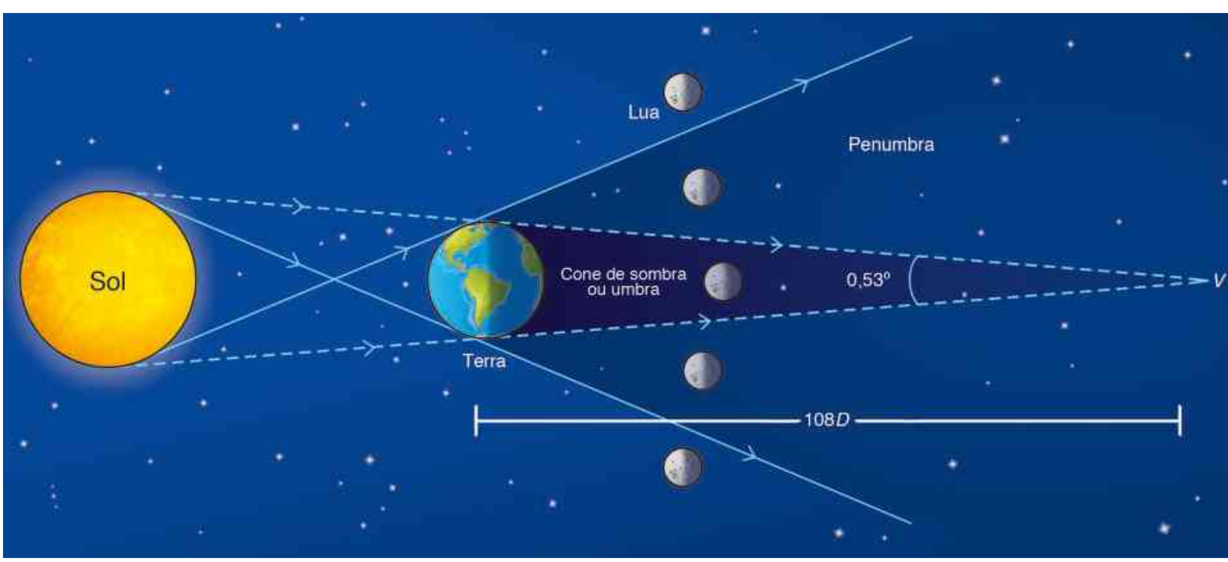
[...] o cone de sombra da Terra se estende até cerca de 108 vezes o diâmetro da Terra do centro do planeta e na região por onde a Lua passa quando ocorre um eclipse total de máxima duração o diâmetro do cone é cerca de 0,7 vezes o diâmetro da Terra ou 2,6 vezes o diâmetro da Lua.

O tom laranja avermelhado que a Lua assume quando ingressa completamente no cone de sombra se deve à luz branca do Sol que, incidindo na atmosfera terrestre, sofre espalhamento e refração, sendo então desviada para dentro do cone [...]

Fonte: Instituto de Física UFRGS. Disponível em: <www.if.ufrgs.br/cref/?area=questions&id=783>. Acesso em: 13 maio 2016.

Matriz do Enem: H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

1. Qual é a distância do vértice V do cone de sombra até a Lua na posição do eclipse total? (D = diâmetro da Terra)



Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Representação sem escala e em cores fantasia.

a) 108,0D
b) 154,3D
c) 75,7D
x d) 75,6D
e) 37,8D

Matriz do Enem: H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

2. Qual é a razão aproximada que expressa a relação entre o volume do cone da umbra e o volume do cone de vértice em V e altura equivalente à distância entre V e a Lua na posição do eclipse total?

a) 1 para 3
b) 0,33 para 1
x c) 3 para 1
d) 1 para 1
e) 2 para 10

Matriz do Enem: H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

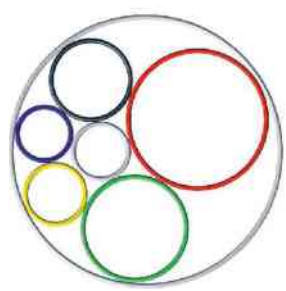
3. Leia os textos a seguir e observe as ilustrações.

O símbolo da OBM

O símbolo adotado para representar a nova Olimpíada Brasileira de Matemática, a partir do ano de 1998, foi concebido em cima de um problema matemático que utiliza sete circunferências. [...]

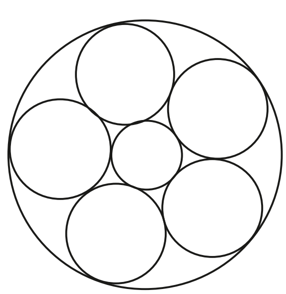
Note que cada anel colorido está tangente aos dois anéis cinza e aos dois anéis coloridos adjacentes, simultaneamente. A propriedade mais curiosa, no entanto, é que os anéis coloridos podem se mover pelo caminho delimitado pelos anéis cinza e desde que obedeçam a uma razão específica de ampliação e redução em suas dimensões, serão mantidos sempre os quatro pontos de tangência. [...]

Fonte: Olímpiada Brasileira de Matemática (OBM). Disponível em: <www.obm.org.br/opencms/quem_somos/logotipo/info_logotipo.html>. Acesso em: 13 maio 2016.



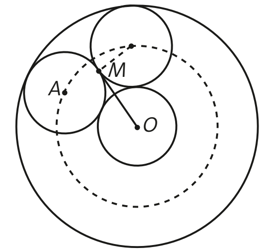
http://www.obm.org.br/opencms/

[...] O ponto de partida é a figura abaixo: dois círculos concêntricos, com cinco círculos de raios iguais encaixados entre eles.



O ponto de partida: cinco círculos iguais entre círculos concêntricos.

Só é possível encaixar estes 5 círculos para um determinado valor da razão $\frac{R}{r}$ entre os raios dos círculos externo e interno. De modo mais geral, vejamos qual deve ser esta razão para que n círculos possam ser encaixados entre os dois círculos concêntricos. O diâmetro de cada um dos círculos iguais é a diferença I entre os raios dos círculos concêntricos. Por outro lado, seus centros formam um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo de raio II concêntrico aos dois círculos iniciais, como mostra a figura a seguir.



Quando é possível encaixar n círculos entre círculos concêntricos?

No triângulo retângulo OAM, a hipotenusa AO mede III e o cateto AM mede IV e é oposto a um ângulo igual a $\frac{180°}{n}$. Assim:

$$\text{V} = \text{VI} \cdot \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Ou, desenvolvendo:

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)}{1 - \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

No nosso caso, em que $n = 5$, devemos ter:

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \text{sen}\,(\text{VII})}{1 - \text{sen}\,(\text{VIII})}$$

Quando os raios estão nessa proporção, é possível encaixar cinco círculos iguais entre os dois círculos concêntricos. Para terminar de formar o logotipo, tomamos o conjunto formado pelos dois círculos concêntricos e pelos cinco círculos de raios iguais encaixados entre eles e aplicamos uma transformação de inversão.

O logotipo da OBM, obtido por inversão

Fonte: CARVALHO, Paulo César Pinto. O Logotipo da Olímpiada Brasileira de Matemática. Artigo da *Revista Eureka* nº 4, p. 42. SBM: Rio de Janeiro, 1999.

As expressões ou valores que completam corretamente o texto anterior na sequência I, II, III, IV, V, VI, VII e VIII são:

a) $R + r, \frac{R+r}{2}, \frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R+r}{2}, 36°, 36°.$

x b) $R - r, \frac{R+r}{2}, \frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R+r}{2}, 36°, 36°.$

c) $R + r, \frac{R+r}{2}, \frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, 36°, 36°.$

d) $R - r, \frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, 36°, 36°.$

e) $R - r, \frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R-r}{2}, \frac{R+r}{2}, \frac{R-r}{2}, 36°, 36°.$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (UFT-TO) A caminhada é um exercício físico praticado por muitas pessoas, com ela pode-se manter a saúde e um bom condicionamento físico. Considere em um plano cartesiano a caminhada de uma pessoa, passando pelos pontos A, B, C e D respectivamente. O deslocamento da pessoa de um ponto ao outro é realizado em linha reta e a distância percorrida medida em metros. Esta caminhada inicia no ponto $A(0, 0)$, passa pelo ponto $B(0, 400)$, em seguida para o ponto $C(x, y)$, depois para o ponto $D(600, 0)$ e terminando a sua caminhada no ponto $A(0, 0)$. Sabendo que o ponto C é a intersecção das retas $y = 400$ e $y = -\frac{4}{3}x + 800$, então a distância percorrida por esta pessoa foi de:

a) 1000 metros
b) 1200 metros
c) 1400 metros
x d) 1800 metros
e) 1900 metros

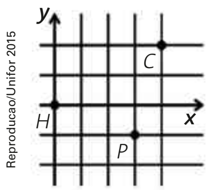
2. (Uepa) Pilates é um sistema de exercícios físicos que integra o corpo e a mente como um todo, desenvolvendo a estabilidade corporal necessária para uma vida mais saudável. A figura abaixo mostra um dos exercícios trabalhado no Pilates e é observado que o corpo da professora gera um arco AB. Supondo que o arco gerado pelo corpo da professora seja um quarto de uma circunferência de equação $100x^2 + 100y^2 - 400x - 600y + 1075 = 0$, o valor aproximado da altura da professora é:

Fonte: http://www.apontador.com.br

a) $0{,}24\pi$ u.c.
b) $0{,}5\pi$ u.c.
x c) $0{,}75\pi$ u.c.
d) $0{,}95\pi$ u.c.
e) $1{,}24\pi$ u.c.

Região Nordeste

3. (Unifor-CE) A figura abaixo representa o mapa da região de um bairro de uma cidade. Nesse mapa, as linhas são as ruas, que se cortam em ângulo reto, e cada quadrado é um quarteirão.



Se associarmos um plano cartesiano a esse quadriculado, e se considerarmos o Hospital como origem do plano xy, então a equação da reta que liga os correios à prefeitura é:

a) $y + 2 = 3(x - 4)$.
b) $y - 2 = 2(x - 3)$.
x c) $y - 2 = 3(x - 4)$.
d) $y + 1 = 3(x + 3)$.
e) $y + 2 = 3(x + 4)$.

4. (Uncisal) O objetivo da Geometria Analítica é tratar algebricamente os entes matemáticos geométricos. Para isto se estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano cartesiano e os pares de números reais e, a partir daí, encontram-se equações associadas a retas e a curvas. Por exemplo, a circunferência de centro (a, b) e raio r tem equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ e toda equação do tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ é a equação de uma circunferência.

O centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ são, respectivamente,

a) $(0, 2)$ e 3.
b) $(0, 2)$ e $\sqrt{5}$.
x c) $(0, -2)$ e 3.
d) $(0, -2)$ e $\sqrt{5}$.
e) $(0, 2)$ e 9.

Região Centro-Oeste

5. (IFG-GO) Considere os dois pontos do plano cartesiano $A(3, 1)$ e $B(1, 3)$ e analise as seguintes afirmativas:

I. O ponto A é o simétrico do ponto B, em relação à reta $y = 2x$.
II. O ponto médio de segmento determinado por A e B é $M(2, 2)$.
III. A mediatriz do segmento definido por A e B é a reta $y = x$.
IV. A área do triângulo determinado por A, B e C, em que $C(3, 3)$, é 2 unidades de área.

É correto afirmar que:

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
x c) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.
d) Apenas as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

6. (UFGD-MS) A figura abaixo refere-se a uma bicicleta construída no século XIX, no ano de 1870.


Reprodução/UFGD 2014

Considere as duas rodas como duas circunferências cujas equações são dadas por:

C_1: $x^2 + y^2 + 40x - 100y + 400 = 0$ e
C_2: $x^2 + y^2 - 100x - 40y + 2\,500 = 0$

Determine a distância entre os centros das rodas.

x a) $10\sqrt{58}$ cm.
b) 20 cm.
c) $20\sqrt{10}$ cm.
d) $90\sqrt{2}$ cm.
e) $30\sqrt{47}$ cm.

Região Sudeste

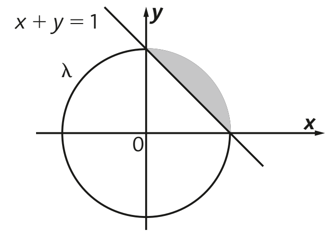
7. (Unesp-SP) Prato da culinária japonesa, o *temaki* é um tipo de *sushi* na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.


Reprodução/Vestibular UNESP 2014

Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35 g/cm^3, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de:

a) 46.
b) 58.
c) 54.
x d) 50.
e) 62.

8. (FASM-SP) No plano cartesiano ortogonal foram traçadas uma circunferência λ de centro (0, 0) e raio 1 e a reta de equação $x + y = 1$, como mostra a figura.



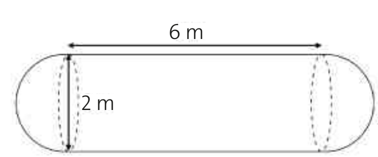
Banco de imagens/Arquivo da editora

A área da região sombreada na figura, em unidades de área, é igual a:

a) $\dfrac{\pi - 1}{2}$.
b) $\dfrac{\pi - 1}{4}$.
c) $\dfrac{\pi - 2}{2}$.
x d) $\dfrac{\pi - 2}{4}$.
e) $\pi - 2$.

Região Sul

9. (UFPR) Um tanque para armazenamento de produtos corrosivos possui, internamente, o formato de um cilindro circular reto com uma semiesfera em cada uma de suas bases, como indica a figura. Para revestir o interior do tanque, será usada uma tinta anticorrosiva. Cada lata dessa tinta é suficiente para revestir 8 m^2 de área. Qual o número mínimo de latas de tinta que se deve comprar para revestir totalmente o interior desse tanque? (Use $\pi = 3{,}14$).



Reprodução/Vestibular UFPR 2015

a) 3 latas.
b) 4 latas.
c) 5 latas.
x d) 7 latas.
e) 10 latas.

10. (UFSM-RS) Uma antena de telefone celular rural cobre uma região circular de área igual a 900π km^2. Essa antena está localizada no centro da região circular e sua posição no sistema cartesiano, com medidas em quilômetros, é o ponto (0, 10).

Assim, a equação da circunferência que delimita a região circular é:

x a) $x^2 + y^2 - 20y - 800 = 0$.
b) $x^2 + y^2 - 20y + 70 = 0$.
c) $x^2 + y^2 - 20x - 800 = 0$.
d) $x^2 + y^2 - 20y - 70 = 0$.
e) $x^2 + y^2 = 900$.

UNIDADE 3

Geometria analítica e números complexos

CAPÍTULO 6

Geometria analítica: secções cônicas

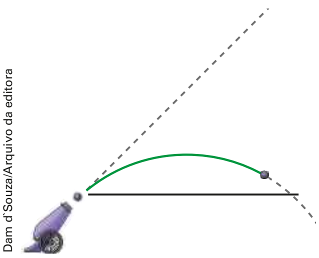
Sergio Lopes Viana/Flickr Vision/Getty Images

Catedral de Brasília, projetada por Oscar Niemeyer (1907-2012). Fotografia de 2012. Um dos mais conhecidos arquitetos brasileiros, Niemeyer foi um dos grandes responsáveis pelo desenvolvimento da arquitetura moderna, destacando-se pelo uso de formas abstratas e pelas curvas que caracterizam a maioria de suas obras. Nelas, podemos observar, por exemplo, parábolas, elipses e hipérboles.

1 Reconhecendo formas

Consideremos as seguintes situações:

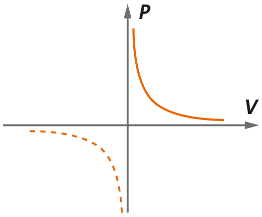
- A trajetória de um projétil, em queda livre, é um arco de **parábola**.



- Os planetas do Sistema Solar giram em torno do Sol em uma trajetória cuja forma é uma **elipse**.

Fique atento!
Esta figura não está representada em proporção, e a excentricidade está exagerada para melhor visualização. Cores fantasia.

- O gráfico que relaciona pressão (P) e volume (V) de um gás a temperatura constante, como o da figura, é um ramo de **hipérbole**.



Vejamos mais algumas situações em que aparecem a parábola, a elipse e a hipérbole. Associe cada figura a seguir a uma das cônicas citadas. Registre as respostas no caderno.


Charles Sholl/Futura Press

Ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília. Fotografia de 2015. (Detalhe)


Vigilante del Maule / Carlos Jarpa. 15 Jun 2012. ArchDaily. http://www.archdaily.com/243254/vigilante-del-maule-carlos-jarpa

Obra arquitetônica *Vigilante do Maule*, no Maule (Chile). Fotografia de 2012.


Christophe Simon/Agência France-Presse

Vista aérea do estádio do Maracanã, no Rio de Janeiro. Fotografia de 2014.

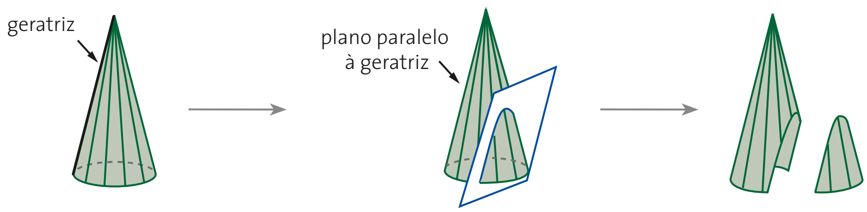
Aproveite e pergunte aos alunos se eles se lembram de mais algum exemplo, como a antena parabólica.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

2 Parábola

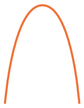
Origem

Vamos considerar um cone circular reto seccionado por um plano paralelo à geratriz, como mostram as ilustrações seguintes:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

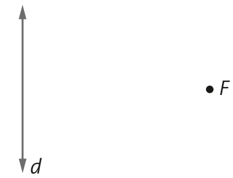
Nesse caso, dizemos que foi obtida uma secção cônica chamada **parábola**:



Vamos retomar e aprofundar o estudo do Capítulo 4 do Volume 1 – Função quadrática.

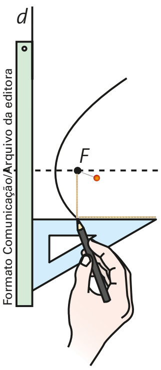
Definição e elementos

Inicialmente consideremos, no plano do papel, uma reta *d* e um ponto *F* que não pertence a ela.



Vamos marcar, agora, uma série de pontos que estão a uma mesma distância do ponto fixado *F* e da reta *d*. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de uma régua, um esquadro, lápis, alfinete e barbante. Veja ao lado.

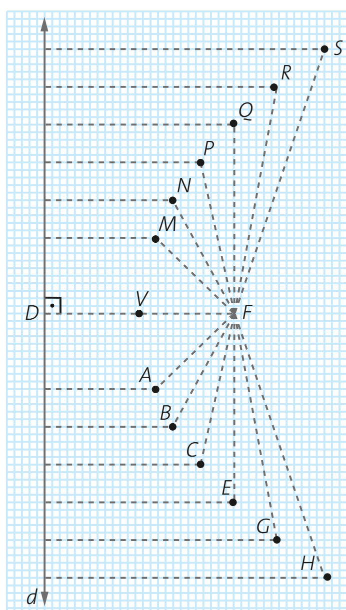
No Manual do Professor este procedimento está detalhado.

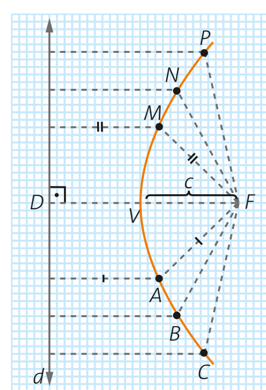


Formato Comunicação/Arquivo da editora

Construindo o gráfico ponto a ponto teremos:

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora





Fique atento!

$VF = \frac{FD}{2} = c$

A parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância de *F* e *d*.

Fique atento!

Todo ponto da parábola tem essa propriedade e todo ponto do plano que possui essa propriedade pertence à parábola.

Na figura devemos destacar:

- o ponto *F*, foco da parábola;
- a reta *d*, diretriz da parábola;
- o ponto *V*, vértice da parábola (ponto médio de $\overline{FD}$, distância de *F* até *d*);
- a reta que passa por *F*, perpendicular à diretriz *d*, que se chama eixo de simetria da parábola;
- a medida de $\overline{FD}$, parâmetro (2*c*) da parábola.

Assim, definimos que parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa *d*, chamada **diretriz**, e de um ponto fixo *F*, não pertencente à diretriz, chamado **foco**.

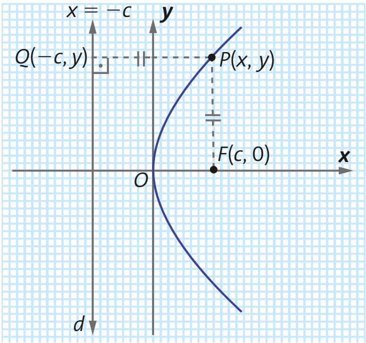
Equação da parábola

Relembre os alunos de que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Equação da parábola com vértice na origem

A partir do foco (F) e da diretriz (d), podemos chegar à equação da parábola formada por todos os pontos $P(x, y)$ do plano tais que $d(P, F) = d(P, d)$.

1º caso: diretriz $x = -c$ e foco $F(c, 0)$



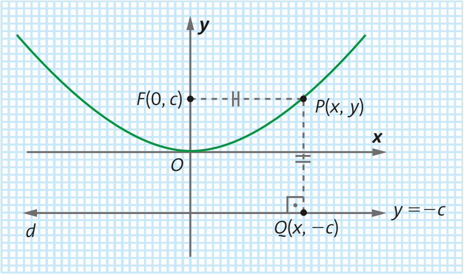
> **Fique atento!**
> c indica a distância do foco ao vértice e é sempre positivo. Logo, $-c$ indica um número negativo.

$$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} \Rightarrow \boxed{y^2 = 4cx}$$

Nesse caso, o vértice está na origem e a parábola é simétrica em relação ao eixo Ox, que é o eixo da parábola. Os demais casos são análogos. Assim, temos:

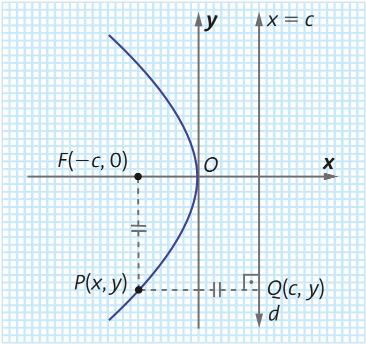
2º caso: diretriz $y = -c$ e foco $F(0, c)$



$$\boxed{x^2 = 4cy}$$

Nesse caso, o vértice está na origem e a parábola é simétrica em relação ao eixo Oy, que é o eixo da parábola.

3º caso: diretriz $x = c$ e $F(-c, 0)$

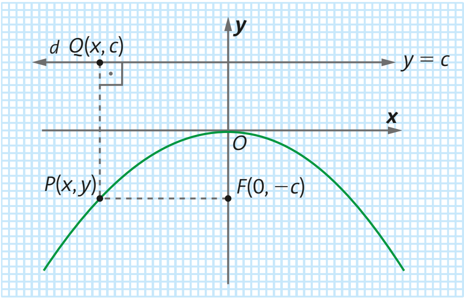


> **Fique atento!**
> Para refletir a parábola original em relação ao eixo y, basta substituir x por $-x$. Para fazer com que a concavidade fique para cima, basta substituir x por y.

$$\boxed{y^2 = -4cx}$$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

4º caso: diretriz $y = c$ e $F(0, -c)$



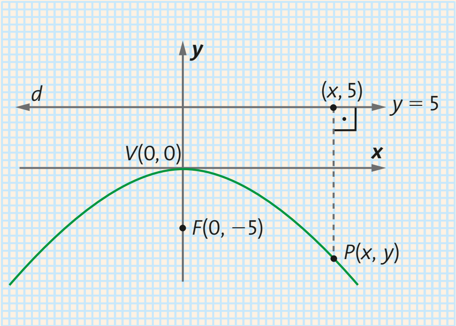
$$x^2 = -4cy$$

Fique atento!
O valor do coeficiente c indica a distância do foco ao vértice e, consequentemente, a concavidade da parábola.

Assim, parábolas com foco em um dos eixos, diretriz paralela ao outro eixo e vértice $V(0, 0)$ têm essas equações. Vale também a recíproca do que foi visto: as equações $y^2 = 4cx$, $x^2 = 4cy$, $y^2 = -4cx$ e $x^2 = -4cy$, com $c > 0$, representam parábolas com foco em um dos eixos, diretriz paralela ao outro eixo e vértice $V(0, 0)$.

Exercícios resolvidos

1. Determine a equação da parábola de foco $F(0, -5)$ e diretriz $y = 5$.



Resolução:

Usando a propriedade de todo ponto $P(x, y)$ da parábola, temos:

$d(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 5)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 5)^2}$

A distância de P à reta $y = 5$ é igual à distância de P até $(x, 5)$, que é igual a $\sqrt{(x - x)^2 + (y - 5)^2}$.

Como as distâncias são iguais, temos:

$x^2 + (y + 5)^2 = 0^2 + (y - 5)^2 \Rightarrow x^2 + \cancel{y^2} + 10y + \cancel{25} = \cancel{y^2} - 10y + \cancel{25} \Rightarrow x^2 = -20y$

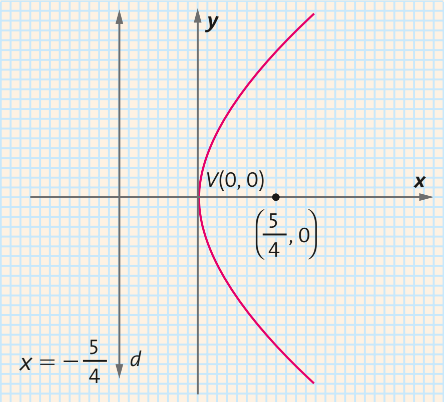
2. Determine o foco e a diretriz da parábola de equação $y^2 = 5x$.

Resolução:

Podemos escrever $y^2 = 5x$ como $y^2 = 4 \cdot \frac{5}{4}x$.

A distância do vértice $(0, 0)$ ao foco é $c = \frac{5}{4}$.

Logo, $F\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ e a diretriz é $x = -\frac{5}{4}$.



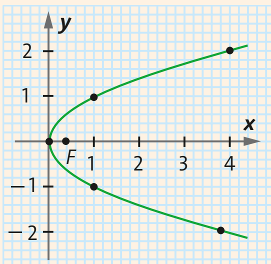
3. Esboce os gráficos das parábolas de equação:

a) $y^2 = x = 4 \cdot \frac{1}{4}x$ b) $y^2 = 4x = 4 \cdot 1x$ c) $y^2 = 8x = 4 \cdot 2x$

Resolução:

a)

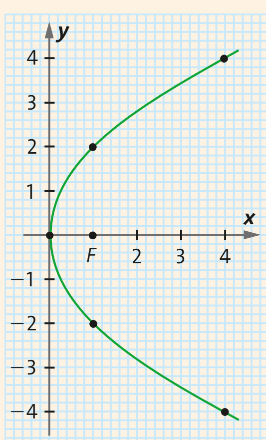
x	0	1	1	4	4
y	0	1	−1	2	−2



$F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

b)

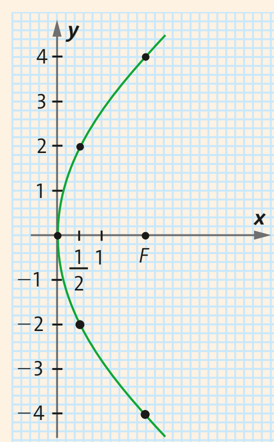
x	0	1	1	4	4
y	0	2	−2	4	−4



$F(1, 0)$

c)

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2
y	0	2	−2	4	−4



$F(2, 0)$

Observação: Como o valor do coeficiente c indica a distância do foco ao vértice e a concavidade da parábola, compare as parábolas do exercício resolvido 3: em $y^2 = 8x$ ($c = 2$), a concavidade é maior que em $y^2 = 4x$ ($c = 1$), pois $2 > 1$.

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Determine a equação da parábola de foco F e diretriz d nos seguintes casos:

a) $F(9, 0)$ e d: $x = -9$ $y^2 = 36x$

b) $F(0, -6)$ e d: $y = 6$ $x^2 = -24y$

c) $F(0, 7)$ e d: $y = -7$ $x^2 = 28y$

d) $F(-5, 0)$ e d: $x = 5$ $y^2 = -20x$

Veja a resposta do exercício 2 na seção Respostas.

2. Determine o foco, o vértice e a diretriz da parábola a partir das equações:

a) $y^2 = 28x$

b) $x^2 = -4y$

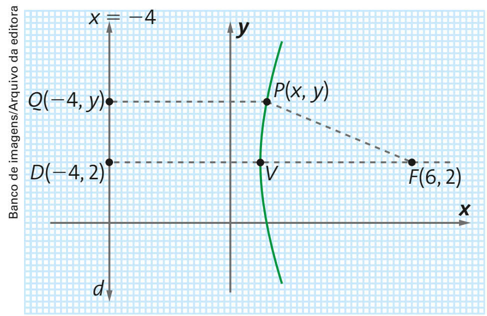
c) $x^2 = 10y$

d) $y^2 = -16x$

Equação da parábola com vértice em um ponto qualquer

Assunto opcional

Vamos determinar a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação $x = -4$ e como foco o ponto $F(6, 2)$:



Nesse caso, o vértice é o ponto médio do segmento de reta FD, no qual $F(6, 2)$ e $D(-4, 2)$:

$$V\left(\frac{6-4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow V(1, 2)$$

Pela distância de V até F encontramos o valor de c:

$$c = \sqrt{(6-1)^2 + (2-2)^2} = 5$$

Os pontos $P(x, y)$ da parábola são tais que $d(P, F) = d(P, Q)$, em que $Q(-4, y)$:

$$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = (x+4)^2 \Rightarrow (y-2)^2 = (x+4)^2 - (x-6)^2 =$$

$$= \cancel{x^2} + 8x + 16 - \cancel{x^2} + 12x - 36 = 20x - 20 \Rightarrow (y-2)^2 = 20(x-1)$$

Observemos que na equação obtida aparecem as coordenadas do vértice $x_V = 1$ e $y_V = 2$ e também o valor $c = 5$:

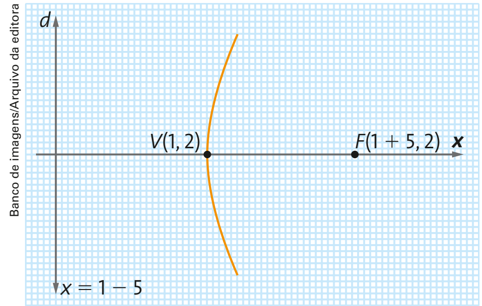
$$(\underbrace{y-2}_{y_v})^2 = \underbrace{\underbrace{20}_{4 \cdot 5}}_{c\ (5)} (\underbrace{x-1}_{x_v})$$

Reciprocamente, a partir da equação da parábola $(y-2)^2 = 20(x-1)$, podemos chegar ao vértice e ao valor de c (distância de V a F ou de V à diretriz d) e, daí, ao foco e à diretriz:

$$(y-2)^2 = 20(x-1) = 4 \cdot 5(x-1)$$

em que $V(1, 2)$ e $c = 5$.

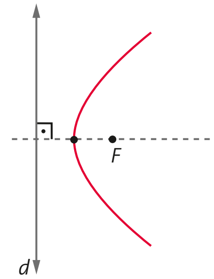
Esboçando o gráfico, vem:



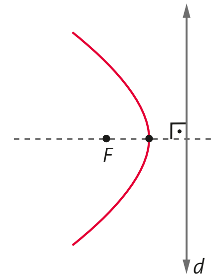
Logo, $F(6, 2)$ e diretriz $x = -4$.

Veja os casos possíveis:

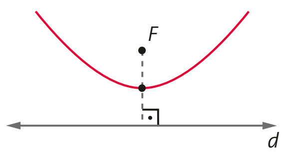
$(y - y_V)^2 = 4c(x - x_V)$



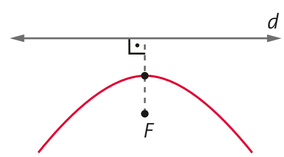
$(y - y_V)^2 = -4c(x - x_V)$



$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V)$



$(x - x_V)^2 = -4c(y - y_V)$



Para refletir
Quando estudamos a parábola como gráfico de uma função quadrática, não havia possibilidade de o eixo de simetria ser horizontal. Por quê?

Porque, se o eixo de simetria fosse horizontal, a parábola representaria uma relação em que teríamos duas imagens para um mesmo elemento do domínio, o que contradiz a definição de função.

Devemos lembrar que vale a recíproca: a partir da equação da parábola podemos chegar ao vértice e ao valor de c e, daí, ao foco e à diretriz.

Observação: No 1º ano do Ensino Médio você deve ter estudado as funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c$, cujos gráficos são parábolas. Aquelas parábolas e as estudadas neste capítulo são as mesmas, pois, quando usamos a técnica de completar quadrados, podemos transformar qualquer equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$ em uma do tipo $(x - x_V)^2 = \pm 4c(y - y_V)$, como temos trabalhado neste volume.

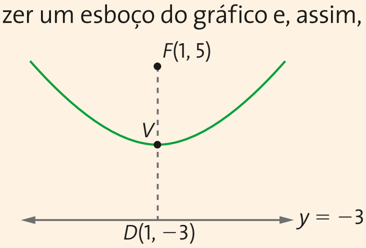
Fique atento!
Cuidado!
O c de $y = ax^2 + bx + c$ não é o mesmo c de $(x - x_V)^2 = \pm 4c(y - y_V)$.

Exercícios resolvidos

4. Determine a equação e as coordenadas do vértice da parábola que tem foco no ponto $F(1, 5)$ e a reta diretriz de equação $y = -3$.

Resolução:

Os dados do problema permitem fazer um esboço do gráfico e, assim, identificar o tipo da equação:



$$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V)$$

O vértice é o ponto médio de $\overline{FD}$. Então:

$$V\left(\frac{1 + 1}{2}, \frac{5 - 3}{2}\right) \Rightarrow V(1, 1)$$

Pela distância de V a F encontramos o valor de c:

$$c = \sqrt{(1 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4$$

Podemos escrever agora a equação procurada:

$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V) \Rightarrow (x - 1)^2 = 4 \cdot 4(y - 1) \Rightarrow (x - 1)^2 = 16(y - 1)$

Logo, a equação é $(x - 1)^2 = 16(y - 1)$ e $V(1, 1)$.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

5. Se uma parábola tem como equação $x^2 - 4x - 12y - 8 = 0$, determine as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco, a equação da reta diretriz da parábola e a equação do eixo de simetria.

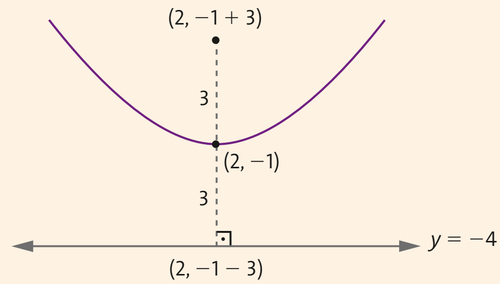
Resolução:

Completando os quadrados perfeitos, temos:

$x^2 - 4x - 12y - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 12y + 8 \Rightarrow x^2 - 4x + \ldots 4 \ldots = 12y + 8 + \ldots 4 \ldots \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} = \underbrace{12y + 12}_{12(y+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)^2 = 4 \cdot 3(y + 1)$, em que $x_V = 2$, $y_V = -1$ e $c = 3$

Fazendo um esboço do gráfico, vem:



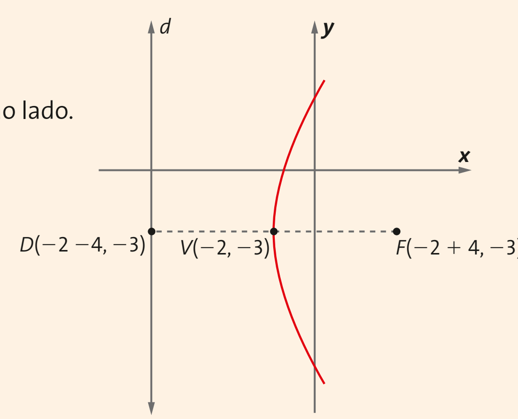
Logo, $V(2, -1)$, $F(2, 2)$, a diretriz é $y = -4$ e o eixo de simetria é $x = 2$.

6. Determine a equação, o foco F e a diretriz d da parábola com vértice $V(-2, -3)$, sabendo que o foco está no quarto quadrante, d é paralela ao eixo y e o parâmetro, p $(2c)$, é 8.

Resolução:

$p = 8$ indica que $c = 4$, pois $c = \dfrac{p}{2}$.

As informações do problema levam a um esboço do gráfico ao lado.



A posição da parábola indica que a equação é da forma $(y - y_V)^2 = 4c(x - x_V)$.

Daí, vem:

$V(-2, -3)$

$c = 4$

$F(-2 + 4, -3) \Rightarrow F(2, -3)$

$D(-2 - 4, -3) \Rightarrow D(-6, -3)$

diretriz $x = -6$

Substituindo as informações na fórmula, temos:

$(y - y_V)^2 = 4c(x - x_V) \Rightarrow (y + 2)^2 = 4 \cdot 4(x + 3) \Rightarrow (y + 2)^2 = 16(x + 3)$

Logo, a parábola tem equação $(y + 2)^2 = 16(x + 3)$, $F(2, -3)$ e diretriz $x = -6$.

Exercícios

3. Determine a equação da parábola que tem:

a) foco no ponto $F(3, 0)$ e diretriz de equação $x = -3$; $y^2 = 12x$

b) diretriz de equação $y = 3$ e vértice $V(0, 0)$; $x^2 = -12y$

c) foco no ponto $F(1, 2)$ e diretriz de equação $x = -2$; $(y - 2)^2 = 6\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

d) diretriz de equação $x = 2$ e vértice $V(-1, -3)$. $(y + 3)^2 = 12(x + 1)$

4. A parábola de equação $x^2 - 6x + y + 8 = 0$ intersecta o eixo x nos pontos A e B. Sendo V o vértice da parábola, determine a área do triângulo VAB. 1

Veja a resposta do exercício 5 na seção Respostas.

5. Encontre as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco, a equação da reta diretriz e a equação do eixo de simetria das parábolas de equações:

a) $y^2 - 6y - 12x + 21 = 0$

b) $x^2 - 2x - y + 4 = 0$

6. Determine a equação das parábolas:

a) de vértice $V(-1, 4)$, eixo paralelo ao eixo y e que passa pelo ponto $A(3, 0)$; $(x + 1)^2 = -4(y - 4)$

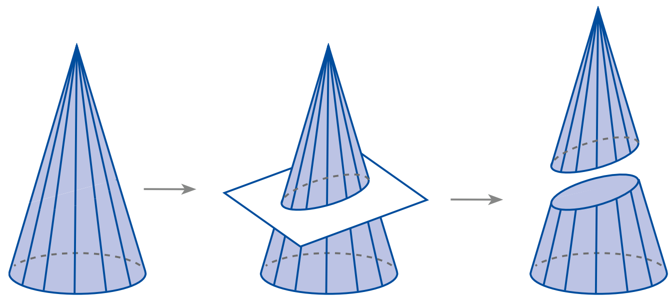
b) de vértice $V(4, 2)$ e foco $F(4, 5)$. $(x - 4)^2 = 12(y - 2)$

3 Elipse

Origem

Vamos considerar um cone circular reto.

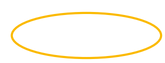
Utilizando um plano inclinado em relação ao eixo e que intersecte todas as geratrizes do cone, faremos um corte como mostram os desenhos seguintes:



Banco de imagens/Arquivo da editora

> **Fique atento!**
> Se o plano for paralelo ao plano da base, obteremos uma circunferência, que também é uma secção cônica.

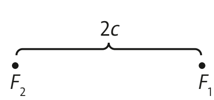
Nesse caso, a secção cônica obtida é chamada **elipse**:



elipse

Definição e elementos

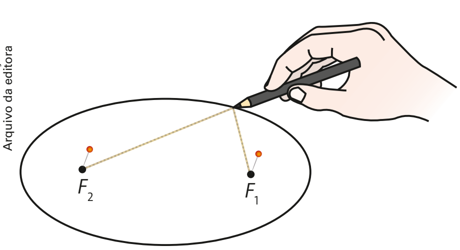
Consideremos, inicialmente, no plano do papel, dois pontos fixos, F_1 e F_2, tais que a distância entre eles seja $2c$.



Imagine que vamos marcar uma série de pontos tais que a soma de suas distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 seja sempre constante e maior do que $2c$. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de um lápis, dois alfinetes e barbante. Veja:

No Manual do Professor este procedimento está detalhado.

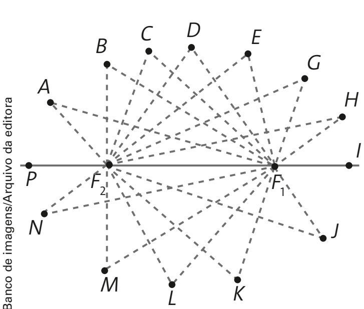
Formato Comunicação/Arquivo da editora



> **Fique atento!**
> No desenho ao lado, o barbante tem comprimento $2a$.

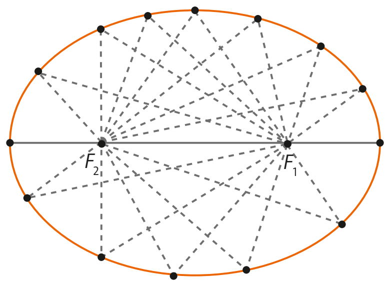
Construindo o gráfico ponto a ponto teremos:

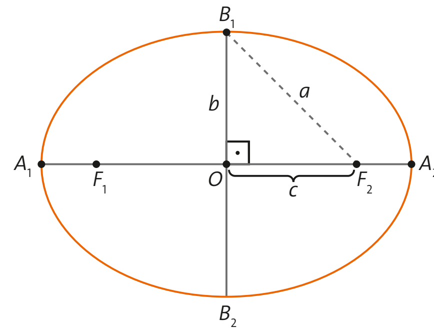
$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = CF_1 + CF_2 = ... = JF_1 + JF_2 = ... = LF_1 + LF_2 = ... = 2a$ (constante), sendo $2a > 2c$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A elipse é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade.





Assim, definimos que elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, denominados focos, seja constante.

Na figura acima, temos:

- F_1 e F_2 são os focos da elipse e a distância entre eles é a distância focal ($2c$);
- $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior da elipse e sua medida é a soma que consta da definição ($2a$);
- $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor da elipse cuja medida é $2b$;
- O é o centro da elipse (intersecção dos eixos da elipse e ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$);
- o número $e = \frac{c}{a}$ chama-se **excentricidade** da elipse ($0 < e < 1$).

Observações:

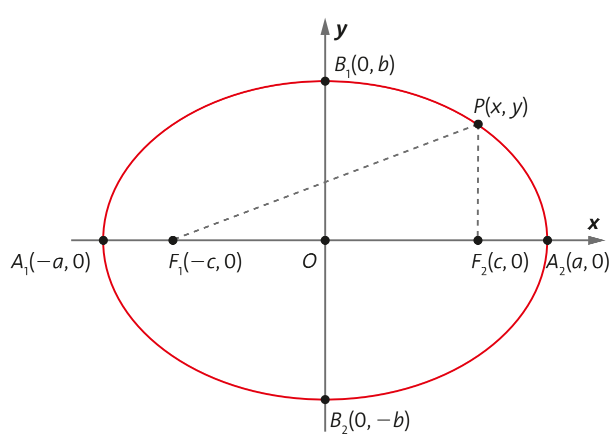
1ª) $\overline{B_1F_2} \cong \overline{OA_2}$, pois ambos têm medida a.

2ª) No $\triangle B_1OF_2$ podemos notar que $b^2 + c^2 = a^2$. Essa relação é fundamental na determinação dos elementos da elipse.

Fique atento!
A excentricidade indica quanto a elipse se aproxima de um segmento de reta ou de uma circunferência, conforme seu valor se aproxima de 1 ou de 0, respectivamente.

Equação da elipse

Vamos inicialmente considerar a elipse com as extremidades do eixo maior nos pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, do eixo menor em $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ e, consequentemente, o centro em $O(0, 0)$.



Consideremos um ponto $P(x, y)$ qualquer da curva.

Pela definição observamos que:

$$PF_1 + PF_2 = A_1F_1 + A_1F_2 = A_1A_2 = 2a$$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Daí, temos:

$$PF_2 + PF_1 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

A partir dessa igualdade, desenvolve-se uma grande quantidade de cálculos que omitiremos neste livro. Efetuados todos os cálculos, chega-se em:

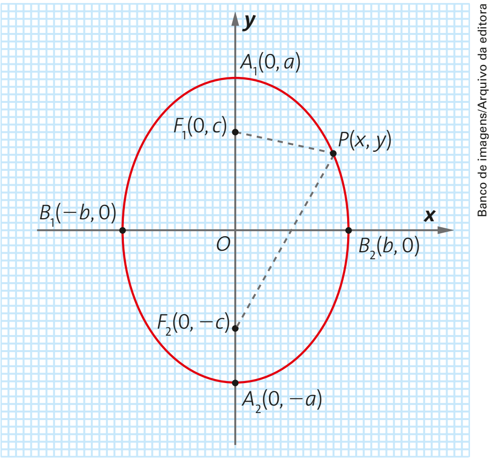
Veja o desenvolvimento da equação reduzida da elipse no Manual do Professor.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fique atento!
A recíproca é verdadeira: equações da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com $a \neq b$, representam elipses, ou seja, apenas os pontos de uma elipse satisfazem essa equação.

em que $a = OA_1 = OA_2$, $c = OF_1 = OF_2$ e b tal que $b^2 = a^2 - c^2$. Essa equação é denominada **equação reduzida da elipse** de focos no eixo Ox e centro na origem.

Vejamos agora:

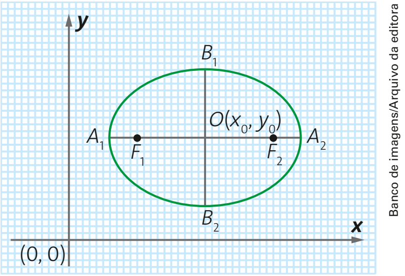


Se os focos da elipse estão sobre o eixo Oy e o centro na origem, conforme a figura, a equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

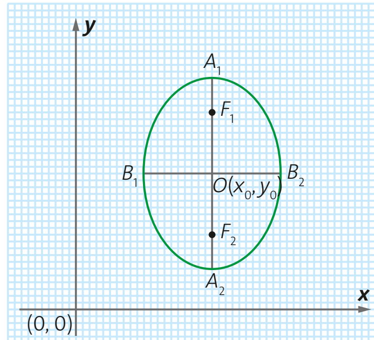
Analogamente, chegamos às equações da elipse com centro qualquer. Assim, temos as seguintes equações, considerando o centro um ponto qualquer, $O(x_0, y_0)$, e os eixos paralelos aos eixos x e y:

1ª) $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo x, $a = OA_1$, $b = OB_1$ e $a > b$.



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

2ª) $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo y, $a = OA_1$, $b = OB_1$ e $a > b$.



$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

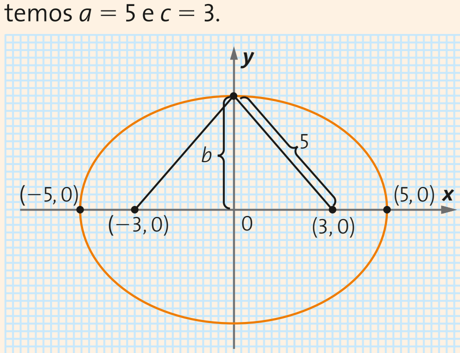
Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 10

7. Determine a equação da elipse de focos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$ e vértices, que são as extremidades do eixo maior, $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$.

Resolução:

Pelos dados do problema, os focos estão no eixo Ox e temos $a = 5$ e $c = 3$.



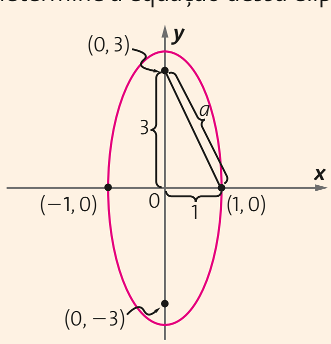
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16$

Nesse caso, a equação reduzida é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Logo, a equação procurada é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

8. Uma elipse tem os focos nos pontos $F_1(0, 3)$ e $F_2(0, -3)$. Se o comprimento do eixo menor da elipse é 2, determine a equação dessa elipse.



Resolução:

Pelos dados do problema, temos:

$C(0, 0)$

$c = 3$

$2b = 2 \Rightarrow b = 1$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 1 + 9 = 10$

Como os focos estão localizados no eixo y e o centro é $C(0, 0)$, temos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1 \Rightarrow 10x^2 + y^2 = 10$$

Logo, a equação procurada é $x^2 + \frac{y^2}{10} = 1$ ou $10x^2 + y^2 = 10$.

9. Determine os focos e as extremidades do eixo maior da elipse de equação $4x^2 + 25y^2 = 100$.

Resolução:

$$4x^2 + 25y^2 = 100 \Rightarrow \frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = \frac{100}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Como $25 > 4$, e $C(0, 0)$, o eixo maior está no eixo Ox. Então:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

Logo, os focos são os pontos $F_1\left(\sqrt{21}, 0\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{21}, 0\right)$ e as extremidades do eixo maior são $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$.

Para refletir

Quais são as extremidades do eixo menor?

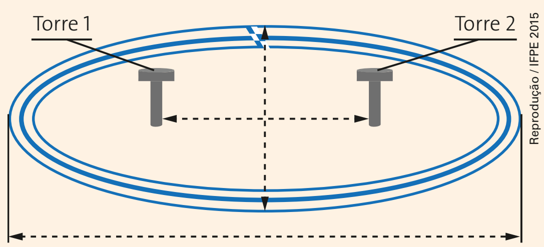
$B_1(0, 2)$ e $B_2 = (0, -2)$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolvido passo a passo

10. (IFPE) Uma pista de corridas da Fórmula *Indy* tem a forma de uma elipse. Nas posições de seus focos ficam duas torres, cada uma com um restaurante com vista panorâmica. Sabe-se que a maior distância entre dois pontos da pista (correspondente ao comprimento do eixo maior) é de 1800 metros. O comprimento do eixo menor é 2/3 do comprimento do eixo maior. Veja a figura. Com base nesses dados, a distância entre as torres é, em metros, igual a:

Obs.: Use $\sqrt{5} = 2{,}24$.



a) 1344
b) 1254,4
c) 1120
d) 1075,2
e) 896

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dadas a informação de que as torres estão localizadas nos focos da elipse, bem como as medidas do eixo maior e do eixo menor da elipse.

b) O que se pede?

Pede-se a distância entre as duas torres, ou seja, a distância entre os dois focos.

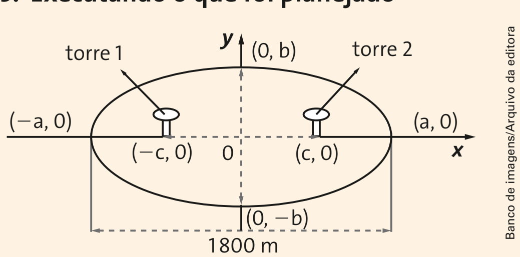
2. Planejando a solução

Devemos considerar:

$$\begin{cases} a = \text{eixo maior} \\ b = \text{eixo menor} \\ 2a = 1\,800 \\ 2b = 1\,200 \\ 2c = \text{distância entre os dois focos} \end{cases}$$

Além do mais, deve-se utilizar a relação fundamental $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, o valor da distância entre as torres será facilmente encontrado.

3. Executando o que foi planejado



De acordo com os dados do enunciado

temos $\begin{cases} a = 900 \\ b = 600 \\ c = \text{posição do foco} \end{cases}$

Logo:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (900)^2 = (600)^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 810\,000 = 360\,000 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \sqrt{810\,000 - 360\,000} \Rightarrow c = \sqrt{450\,000} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \sqrt{100^2 \cdot 3^2 \cdot 5} \Rightarrow c = 100 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 300\sqrt{5} \Rightarrow c = 672 \Rightarrow 2c = 1344$

Assim, a distância entre as duas torres é de 1344 metros.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) Um curioso espectador de Fórmula *Indy* deseja saber: qual é a área total ocupada por uma pista semelhante à da questão-base e pela parte interna à pista? Supondo que o espectador esteja em uma das torres, ao se deslocar em linha reta até uma das extremidades do eixo maior da pista, qual é a distância mínima e máxima que ele percorrerá?

> **Fique atento!**
> Sendo a e b, respectivamente, os eixos maior e menor de uma elipse, temos que a área da elipse é dada por: $A = a \cdot b \cdot \pi$.

Este resultado pode ser obtido por meio de cálculo integral.

b) *Discussão em equipe*

Obrigatoriamente deve haver grade de proteção e muro de contenção nas pistas de automobilismo, indispensáveis à segurança dos pilotos e dos espectadores. Outro item bastante comum nas pistas é o protetor auricular. De acordo com seus conhecimentos, relate a importância do uso desses acessórios para a saúde e o bem-estar de quem participa dessas provas, de forma direta ou indireta.

$\begin{cases} \text{área total da pista} = 540\,000\pi \text{ m}^2 \\ \text{distância mínima} = 228 \text{ m} \\ \text{distância máxima} = 1572 \text{ m} \end{cases}$

11. Calcule a excentricidade $e = \dfrac{c}{a}$ e faça o esboço do gráfico de cada elipse:

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Resolução:

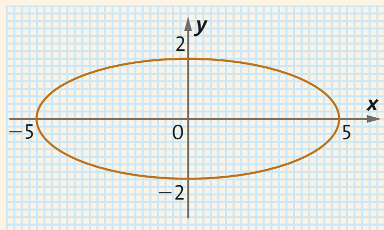
a) $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

$e = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \simeq \dfrac{4{,}58}{5} \simeq 0{,}91$

x	y
0	2
0	-2
5	0
-5	0
2	1,8
2	$-1,8$



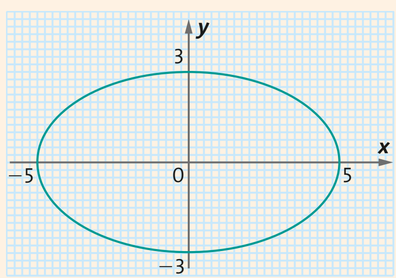
b) $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

$e = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

x	y
0	3
0	-3
5	0
-5	0
2	2,7
2	$-2,7$



Observação: Quanto maior o valor de $e = \dfrac{c}{a}$, mais próxima de um segmento de reta é a elipse correspondente.

Para refletir

O que acontece com a elipse à medida que o valor de e tende a zero?

A elipse tenderá a ser uma circunferência.

12. A equação $5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y - 16 = 0$ representa uma elipse de eixo maior paralelo ao eixo Ox. Determine o centro e os focos dessa elipse.

Resolução:

Como $\overline{A_1A_2}$ é paralelo ao eixo Ox, devemos escrever a equação na forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desenvolvendo a equação dada, temos:

$5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 - 20x + 9y^2 - 18y = 16 \Rightarrow$

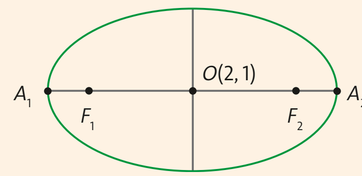
$\Rightarrow 5(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 2y) = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 16 + 20 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y - 1)^2}{5} = 1$

Da equação, concluímos que:



centro: $O(2, 1)$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$

Fazendo $c^2 = a^2 - b^2$, vem:

$c^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow c = 2$

Daí, temos:

$F_1(2 - 2, 1) \Rightarrow F_1(0, 1)$

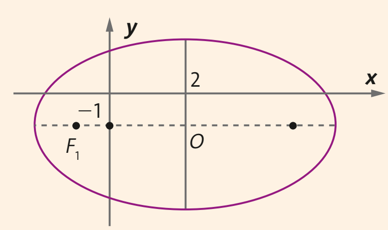
$F_2(2 + 2, 1) \Rightarrow F_2(4, 1)$

Logo, essa elipse tem centro $O(2, 1)$ e focos $F_1(0, 1)$ e $F_2(4, 1)$.

13. Determine a equação da elipse com centro em $(2, -1)$, eixo maior $2a = 6$ e foco $F_1(0, -1)$.

Resolução:

Pelos dados do problema identificamos a posição da elipse:



Daí a equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Sabemos que:

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

Calculando a distância do centro $(2, -1)$ ao foco $F_1(0, -1)$, vem:

$c = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 + 1)^2} = 2$

Como $a = 3$ e $c = 2$, temos:

$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

Substituindo os dados na equação, vem:

$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y + 1)^2}{5} = 1$

Logo, a equação dessa elipse é

$\dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y + 1)^2}{5} = 1.$

Exercícios

Atividade em dupla   Atividade em equipe

Veja as respostas dos exercícios 7, 8 e 11 na seção Respostas.

7. Determine a equação da elipse conhecendo:

a) os focos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$ e o comprimento do eixo maior, 8;

b) os focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e as extremidades do eixo maior $A_1(0, 6)$ e $A_2(0, -6)$;

c) os focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e a excentricidade $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

d) os vértices $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$ e a excentricidade $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. Determine as coordenadas dos focos, as coordenadas das extremidades do eixo maior e a excentricidade das elipses de equação:

a) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $2x^2 + y^2 = 2$

d) $4x^2 + 9y^2 = 36$

9. O eixo maior de uma elipse está contido no eixo Ox. Sabendo que o centro é (0, 0), o comprimento do eixo menor é 6 e a distância focal é 10, determine a equação da elipse. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

10. Dois dos vértices de um quadrilátero são os focos da elipse de equação $x^2 + 5y^2 = 20$. Os outros dois vértices são as extremidades do eixo menor da elipse. Calcule a área do quadrilátero. 16

11. Em uma elipse, o centro é (–2, 4), um dos focos é (–2, 7) e uma das extremidades do eixo menor é (–3, 4). Determine a equação dessa elipse.

12. Quais são as extremidades do eixo menor da elipse de equação $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$?
$B_1(2, 2)$ e $B_2(2, 0)$

13. A equação da elipse que passa pelos pontos (2, 0), (–2, 0) e (0, 1) é:

x a) $x^2 + 4y^2 = 4$.

b) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

c) $2x^2 - 4y^2 = 1$.

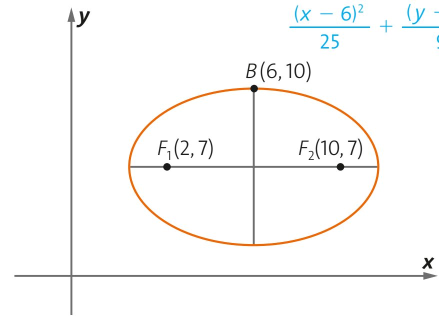
d) $x^2 - 4y^2 = 4$.

e) $x^2 + y^2 = 4$.

14. A reta $y = ax + 1$ intersecta a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ somente em um ponto. Calcule $8a^2$. 6

15. Encontre a equação da elipse abaixo:

$\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{9} = 1$



Banco de imagens/Arquivo da editora

16. (UPM-SP) Se $A(10, 0)$ e $B\left(-5,\ 3\sqrt{3}\right)$ são pontos de uma elipse cujos focos são $F_1(8, 0)$ e $F_2(-8, 0)$, calculem a área do triângulo BF_1F_2. $24\sqrt{3}$

17. (FGV-SP) Dada a elipse de equação $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$, quais são as coordenadas de seus focos? $F_1(\sqrt{7}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{7}, 0)$

18. *Física*
Qual dos planetas tem a órbita mais parecida com uma circunferência? Para esse planeta, calcule a diferença percentual entre o tamanho do semieixo menor e do maior. Vênus; 0,0024%

Excentricidade da órbita elíptica ao redor do Sol dos oito planetas do Sistema Solar

Planeta	Excentricidade da órbita
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Netuno	0,009

Fonte dos dados: Grupo de Ensino de Física da UFSM. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/gef/Dinamica/dinami14.pdf>. Acesso em: 10 maio 2016.

19. *Física*
Sabendo que a órbita de Mercúrio em torno do Sol tem excentricidade 0,206; que o Sol é sempre um dos focos da elipse das órbitas planetárias; que a unidade astronômica (UA) vale 1 para a distância média entre o Sol e a Terra; que o ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol chama-se afélio e, no afélio, Mercúrio está a 0,47 UA do Sol; e que o ponto da órbita em que o planeta está mais próximo do Sol chama-se periélio, obtenha, em unidades astronômicas, a distância de Mercúrio ao Sol no periélio. Use calculadora se desejar.
0,31 UA

Matemática e tecnologia

O uso do computador no ensino da Matemática como ferramenta de investigação cognitiva, ou como maneira de renovar os cursos tradicionais, tem se firmado como uma das áreas mais ativas e relevantes da educação Matemática.

Construção de gráficos de parábolas e elipses no computador

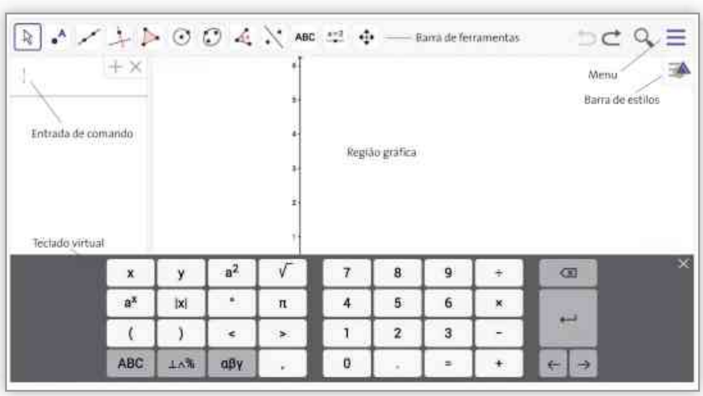
Agora, vamos aprender, ou relembrar, como construir gráficos de parábolas e elipses usando o *software* livre Geogebra. Trata-se de um *software* matemático, criado por Markus Hohenwarter, que reúne Álgebra e Geometria. Ele pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e já recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

A instalação desse *software* é simples:

- Acesse o *site* <www.geogebra.org> e clique em “Baixe agora”, para tê-lo instalado no computador, ou em “Comece a criar”, para usá-lo *on-line*.

Captura de tela do *site* do *software*.

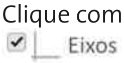
- Optando por utilizar a versão *on-line*, você deve clicar no botão “Álgebra”; a tela que abrirá é bem parecida com a reproduzida abaixo.



Captura de tela do *software* no modo Álgebra.

Depois de ter o programa instalado, faça os exercícios a seguir.

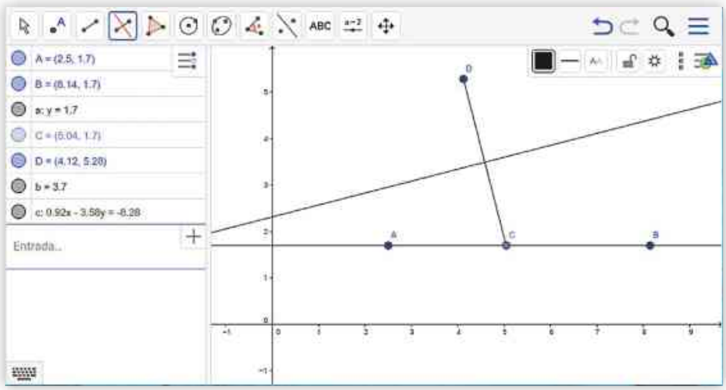
1. Clique com o botão direito do *mouse* sobre a Região gráfica do Geogebra e escolha a opção “Eixos”.



Com isso, os eixos coordenados deixarão de ser vistos na construção.

- **1º passo:** Utilizando a opção que indica uma reta definida por dois pontos , construa uma reta horizontal com dois pontos quaisquer, que automaticamente serão nomeados como *A* e *B*.
- **2º passo:** Na opção que indica um ponto , crie dois novos pontos: o ponto *C* sobre a reta criada e o ponto *D* acima dela.
- **3º passo:** Utilizando a opção que indica um segmento de reta definido por dois pontos , que está dentro da opção que indica uma reta definida por dois pontos, crie o segmento de reta *CD*. Para isso, clique no ponto *C* e, em seguida, no ponto *D*.

- **4º passo:** Utilizando a opção que indica uma mediatriz, que fica dentro da opção que indica uma reta perpendicular, clique sobre o segmento de reta *CD*. Com isso, a reta mediatriz de $\overline{CD}$ será criada. Veja uma construção possível:

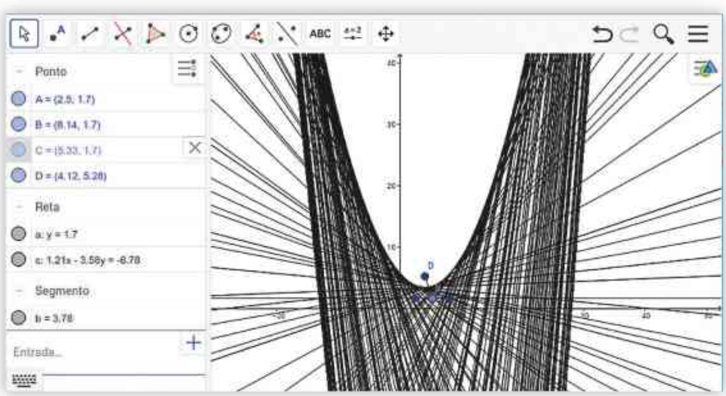


Captura de tela do 4º passo.

- **5º passo:** Clique com o botão direito do *mouse* sobre a mediatriz do segmento de reta *CD* e escolha a opção "Habilitar rastro".

  Habilitar Rastro

- **6º passo:** Clique na opção "Mover" na Barra de ferramentas e, em seguida, movimente o ponto *C* para a direita e para a esquerda, assim você obterá uma parábola. Com a opção "Habilitar rastro", uma parábola foi obtida com os rastros da mediatriz ao movimentar o ponto *C*.



Captura de tela do 6º passo.

Agora, responda:

a) Qual é a relação do ponto *D* e da reta *AB* com a parábola? O ponto *D* é o foco e a reta *AB*, a diretriz da parábola.

b) Qual é a posição relativa das mediatrizes em relação à parábola? Tangentes.

c) O que se pode concluir sobre a concavidade da parábola se o ponto *D* estiver abaixo da reta *AB*? A concavidade fica voltada para baixo.

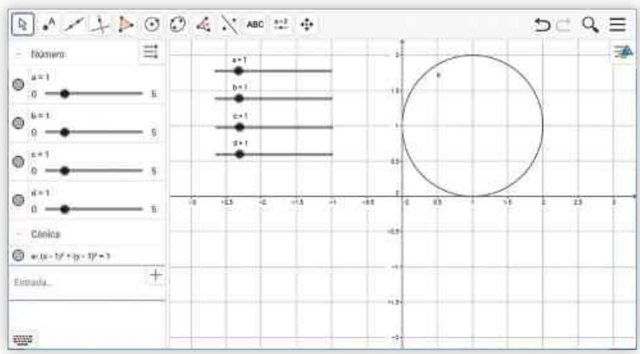
Esta atividade pode ser adaptada para que o aluno observe as propriedades das parábolas e das hipérboles.

2. Clique com o botão direito do *mouse* sobre a Região gráfica do Geogebra e escolha a opção "Malha".

Malha

- **1º passo:** Na Barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do *mouse*, inicialmente na opção "Controle deslizante" e, em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (Região gráfica) e tecle "OK". Nesse instante, aparecerá o parâmetro *a* (com valor inicial igual a 1). Repita a operação e insira novos parâmetros (*b*, *c* e *d*).

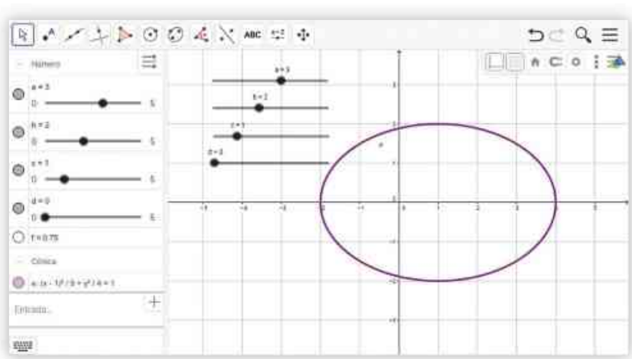
- **2º passo:** Com o botão direito do *mouse*, clique sobre o parâmetro *a* e selecione a opção "Propriedades" e, em seguida, coloque 0 (zero) para a opção "min" (mínimo) e verifique se na opção "max" (máximo) está o número 5. Faça o mesmo procedimento com os parâmetros *b*, *c* e *d*.
- **3º passo:** No campo Entrada de comando (situado na parte superior esquerda da tela) insira: $((x - c)^{\wedge}2) / (a^{\wedge}2) + ((y - d)^{\wedge}2) / (b^{\wedge}2) = 1$ e tecle "Enter". Observe que "^" significa a operação de potenciação.



Reprodução/GeoGebra

Captura de tela do 3º passo.

- **4º passo:** Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do *mouse* na elipse. Na aba que será apresentada, clique em "Propriedades". Clique na aba "Cor" e escolha uma nova cor para o seu gráfico. Em seguida, clique na aba "Estilo" e coloque a espessura da linha em aproximadamente 7. Feche a janela e observe que o gráfico ficou destacado.
- **5º passo:** Observe significados importantes para os parâmetros *a*, *b*, *c* e *d*. Para isso, clique na bolinha do controle deslizante de *a* e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados). Observe o que acontece com o gráfico da elipse. Repita a operação para os controles deslizantes de *b*, *c* e *d* (utilize um controle deslizante por vez).
- **6º passo:** Digite **Excentricidade[e]** no campo Entrada de comando e tecle "Enter". Note que aparecerá a letra *f* na zona algébrica. O número que está à direita do *f* representa a excentricidade da elipse.



Reprodução/GeoGebra

Captura de tela do 6º passo.

Agora, responda às perguntas tendo como base a elipse: $\dfrac{(x-c)^2}{a^2} + \dfrac{(y-d)^2}{b^2} = 1$

a) Qual é o efeito dos parâmetros *a* e *b* no gráfico da elipse? Alteram o formato da elipse.

b) Qual é o efeito dos parâmetros *c* e *d* no gráfico da função? Alteram o centro (a posição) da elipse.

c) Ao movimentar os parâmetros *a* e *b*, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Próximo de zero: a forma da elipse se aproxima de uma circunferência; próximo de 1: a forma de elipse se aproxima de um segmento de reta.

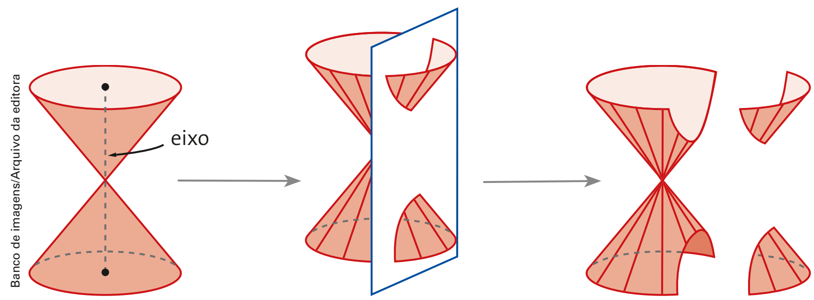
Fique atento!
Salve sua atividade em um local escolhido do seu computador.

4 Hipérbole

Assunto opcional

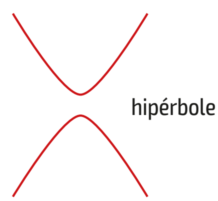
Origem

Vamos considerar um cone duplo e um plano qualquer que seccione as duas folhas (partes de um cone duplo, opostas pelo vértice) do cone conforme mostram as figuras:



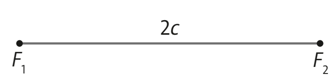
Nesse caso, a secção cônica obtida é denominada **hipérbole**.

Por exemplo, uma hipérbole é a curva que se vê abaixo.



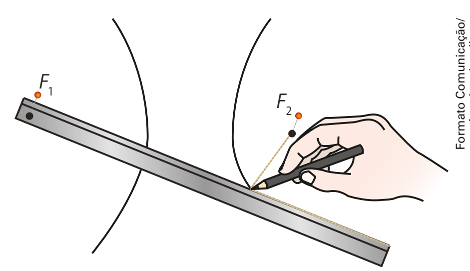
Definição e elementos

Consideremos, inicialmente, dois pontos fixos, F_1 e F_2, de um plano cuja distância $d(F_1, F_2) = 2c$.



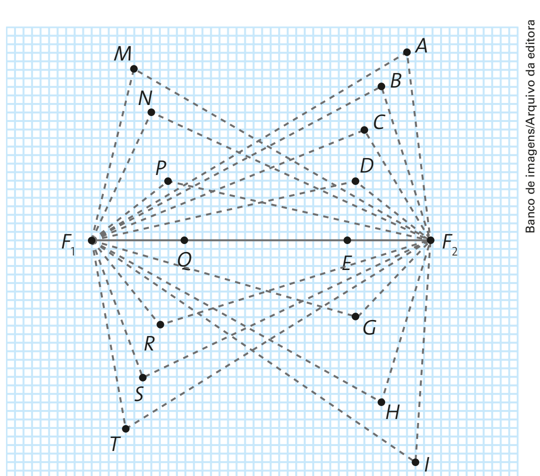
Imagine que vamos marcar no plano uma série de pontos tais que a diferença (em módulo) de suas distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 seja sempre constante e menor que $2c$. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de régua, lápis, alfinetes e barbante.

No Manual do Professor este procedimento está detalhado.

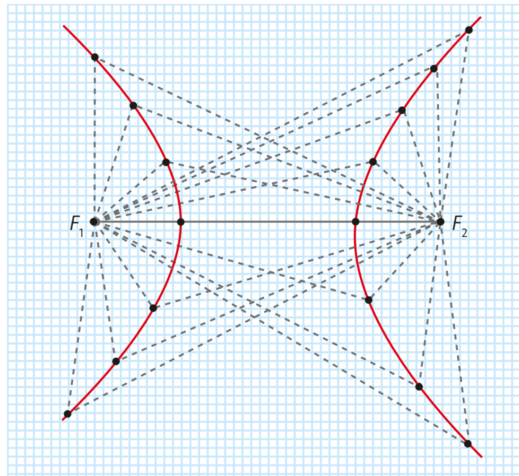


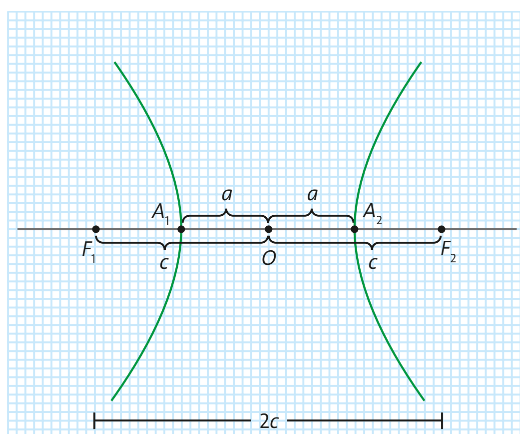
Construindo o gráfico ponto a ponto, teremos:

$$|AF_1 - AF_2| = |BF_1 - BF_2| = |CF_1 - CF_2| = \dots = |TF_1 - TF_2| = 2a \text{ (constante), com } 2a < 2c$$



O conjunto de todos os pontos do plano com essa propriedade chama-se **hipérbole**.





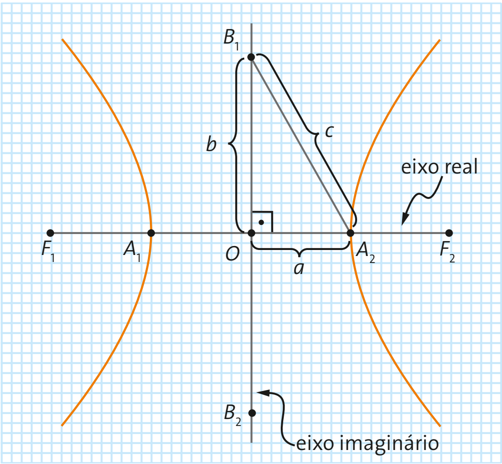
> Assim, definimos que hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ de um plano tais que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, é constante.

Na figura anterior, temos:

- F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, sendo $F_1F_2 = 2c$ a distância focal;
- A_1 e A_2 são os vértices da hipérbole, sendo $A_1A_2 = A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$ (constante da definição);
- O é o centro da hipérbole (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e de $\overline{A_1A_2}$);
- o número $e = \dfrac{c}{a}$ é a excentricidade da hipérbole (note que $e > 1$, pois $c > a$).

Fique atento!
Quanto mais próximo de 1 for a excentricidade, mais a hipérbole se aproxima de duas retas paralelas (perpendiculares ao eixo x real). E, se a excentricidade for cada vez maior, tendendo ao infinito, a hipérbole se aproxima de duas semirretas opostas (com origem em A_1 e A_2).

Observação: Considerando uma hipérbole de focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2, vimos que $F_1F_2 = 2c$ e $A_1A_2 = 2a$. Então, $OF_2 = c$ e $OA_2 = a$.



Fique atento!

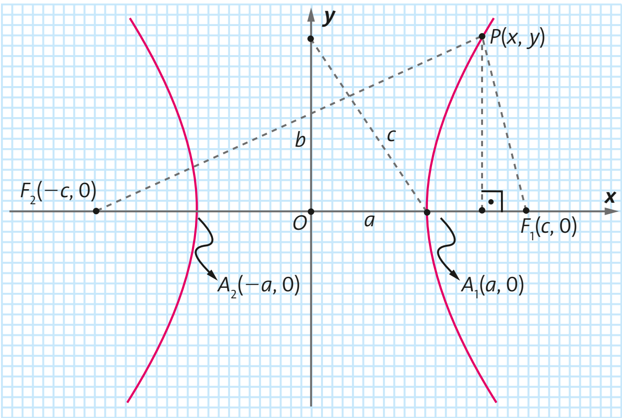
- Nas mesmas condições de B_1 existe B_2, sobre a mediatriz de $\overline{A_1A_2}$, tal que $B_1B_2 = 2b$.
- $\overline{A_1A_2}$ é chamado **eixo real** e $\overline{B_1B_2}$, **eixo imaginário** da hipérbole.

Seja B_1 um ponto da mediatriz de $\overline{A_1A_2}$ tal que o triângulo B_1OA_2 seja retângulo em O, com o cateto $\overline{OA_2}$ medindo a e a hipotenusa $\overline{B_1A_2}$ medindo c. Assim, chamando de b a medida do cateto $\overline{OB_1}$, temos $a^2 + b^2 = c^2$ ou $b^2 = c^2 - a^2$.

Equação da hipérbole

Consideremos inicialmente a hipérbole da figura, na qual os focos pertencem ao eixo Ox e o centro é a origem $O(0, 0)$.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora



Um ponto $P(x, y)$ qualquer da curva deve satisfazer, de acordo com a definição, a seguinte condição:

$$|PF_2 - PF_1| = 2a$$

Como $PF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$ e $PF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$, temos:

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

A partir dessa igualdade, desenvolve-se uma grande quantidade de cálculos que omitiremos aqui. Efetuados todos os cálculos, chega-se em: Veja o desenvolvimento da equação reduzida da hipérbole no Manual do Professor.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fique atento!

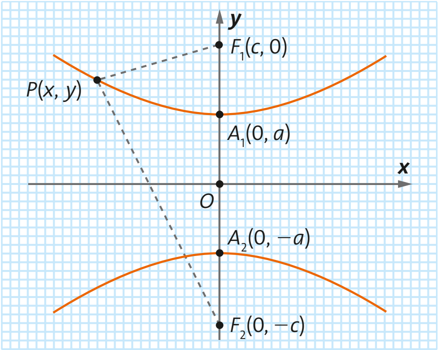
A recíproca é verdadeira: equações dessa forma representam hipérboles, ou seja, apenas pontos de uma hipérbole satisfazem essa equação.

Observando a hipérbole acima, note que: $a = OA_1 = OA_2$, $c = OF_1 = OF_2$ e b é tal que $b^2 = c^2 - a^2$.

Essa fórmula é denominada **equação reduzida da hipérbole**, quando os focos estão sobre o eixo x e são equidistantes da origem.

Veja agora:

Faça uma comparação, com os alunos, das equações da elipse, da hipérbole e da parábola.
É importante que eles saibam, a partir das equações, a cônica representada.



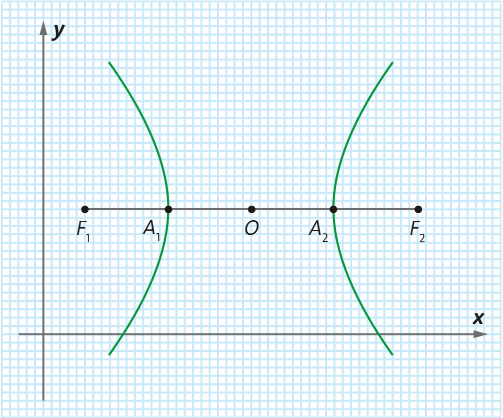
Caso os focos estejam sobre o eixo y e também equidistantes da origem, a equação reduzida da hipérbole será:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, podemos generalizar essa equação para um centro qualquer.

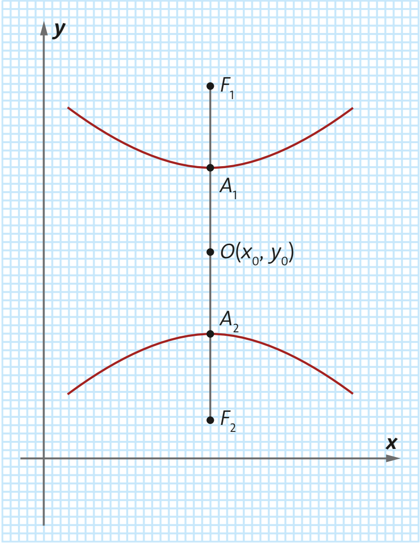
Considerando o centro da hipérbole $O(x_0, y_0)$ e os eixos (real e imaginário) paralelos aos eixos x e y, temos:

1º) Eixo real paralelo ao eixo x:



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

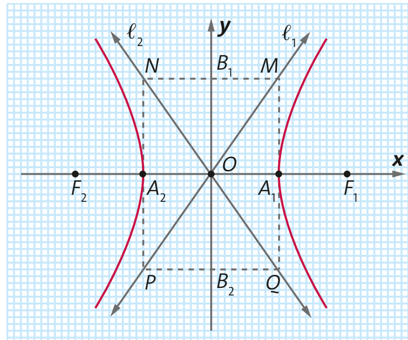
2º) Eixo real paralelo ao eixo y:



$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Assíntotas da hipérbole

Consideremos a figura abaixo.



Podemos construir o retângulo $MNPQ$, de dimensões $2a$ e $2b$. As retas ℓ_1 e ℓ_2, que contêm as diagonais desse retângulo, são denominadas **assíntotas** da hipérbole.

As equações das retas assíntotas são dadas por: $bx - ay = 0$ ou $y = \frac{b}{a}x$ e $bx + ay = 0$ ou $y = -\frac{b}{a}x$.

Exercícios resolvidos

14. Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$ e de vértices $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$.

Resolução:

Pelos dados do problema, temos:

$c = 5$

$a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

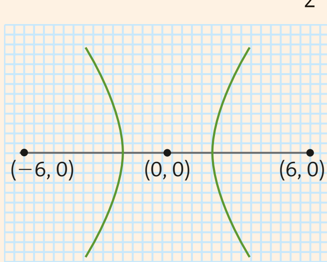
Como os focos estão sobre o eixo x, vem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 9y^2 = 144$$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ou $16x^2 - 9y^2 = 144$.

15. Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(6, 0)$ e $F_2(-6, 0)$ e de excentricidade igual a $\frac{3}{2}$.



Resolução:

Pelos dados do problema, temos:

$c = 6$

$$e = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2c}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 20$

Como os focos estão sobre o eixo Ox e $O(0, 0)$, vem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1 \Rightarrow 5x^2 - 4y^2 = 80$$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ ou $5x^2 - 4y^2 = 80$.

16. Determine o centro, os focos e os vértices da hipérbole de equação $3x^2 - y^2 + 18x + 8y + 38 = 0$.

Resolução:

Transformando inicialmente a equação, temos:

$3x^2 - y^2 + 18x + 8y + 38 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^2 + 6x) - (y^2 - 8y) = -38 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 8y + 16) = -38 + 27 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x + 3)^2 - 1(y - 4)^2 = -27 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1(y - 4)^2 - 3(x + 3)^2 = 27 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(y-4)^2}{27} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

Da equação obtida, vem:

centro: $O(-3, 4)$

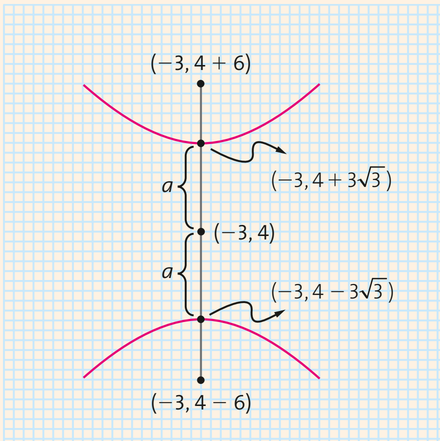
$a^2 = 27 \Rightarrow a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{9} = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 27 + 9 = 36 \Rightarrow c = 6$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Esboçando o gráfico, temos:



Logo, a hipérbole tem centro $O(-3, 4)$, vértices $\left(-3, 4 + 3\sqrt{3}\right)$ e $\left(-3, 4 - 3\sqrt{3}\right)$ e focos $(-3, 10)$ e $(-3, -2)$.

17. Em uma hipérbole de centro $O(5, 5)$, a distância focal é $2c = 6$ e o eixo real $2a = 2$ é paralelo ao eixo Ox. Determine a equação dessa hipérbole.

Resolução:

Do enunciado, vem:

centro: $O(5, 5)$

$2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 1^2 = 8$

Se o eixo real é paralelo ao eixo Ox, a equação é do tipo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Logo, a equação é $\dfrac{(x - 5)^2}{1} - \dfrac{(y - 5)^2}{8} = 1.$

18. Uma hipérbole tem equação $9x^2 - 16y^2 = 144$. Determine as coordenadas dos focos, as coordenadas dos vértices e a excentricidade da hipérbole.

Resolução:

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

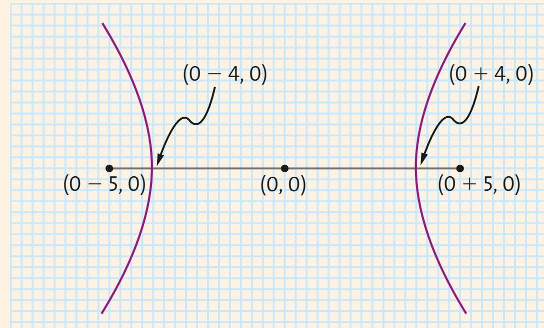
A equação indica que os focos estão sobre o eixo Ox com centro $(0, 0)$, daí:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$



Logo: $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$, $A_1(4, 0)$ e $A_2(-4, 0)$ e a excentricidade $e = \dfrac{5}{4}$.

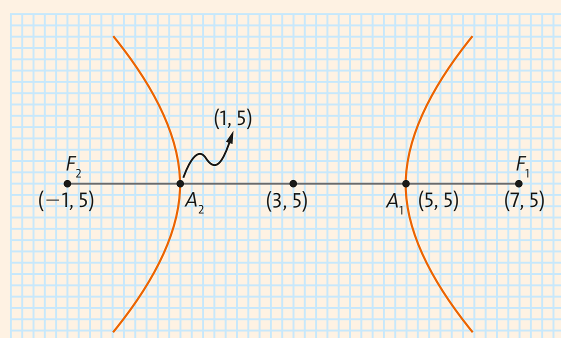
19. Determine a equação da hipérbole de centro $(3, 5)$, com um dos vértices em $(1, 5)$ e um dos focos em $(-1, 5)$.

Resolução:

Pelos dados do problema, o eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo Ox, cuja equação é da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Fazendo um esboço da hipérbole, temos:



$a = 3 - 1 = 2$

$c = 3 - (-1) = 4$

$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$

Substituindo os dados na fórmula, obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

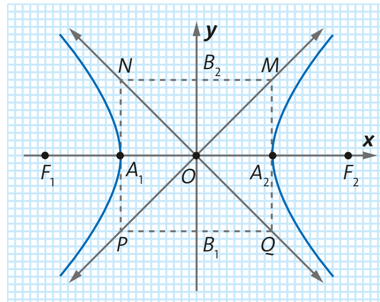
$$\Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y - 5)^2}{12} = 1$$

Logo, a equação procurada é

$$\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y - 5)^2}{12} = 1.$$

Hipérbole equilátera

Observemos a figura:



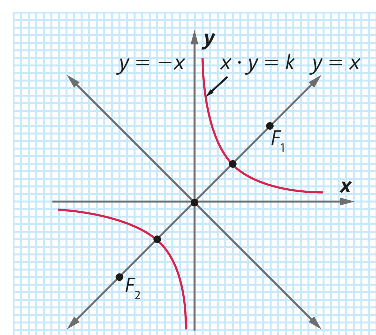
Quando temos $b = a$, o retângulo $MNPQ$ se transforma em um quadrado. Nesse caso, as assíntotas tornam-se perpendiculares e a hipérbole é denominada **hipérbole equilátera**.

A equação dessa hipérbole equilátera de centro $O(x_0, y_0)$ é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Fique atento!
Se o centro dessa hipérbole for $O(0, 0)$, sua equação será: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 - y^2 = a^2$.

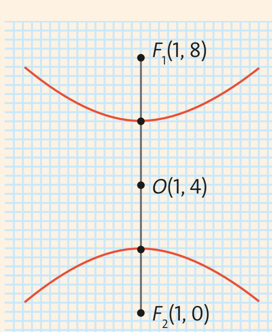
Você sabia?
Uma das hipérboles equiláteras mais famosas é a que descreve a relação entre a pressão e o volume de um gás perfeito a temperatura constante, conhecida como lei de Boyle, segundo a qual o produto da pressão pelo volume é sempre constante em condições isotérmicas: $PV = k$.
Entretanto, a equação $xy = k$ não se parece nada com as hipérboles estudadas até aqui. O detalhe é que todas as hipérboles estudadas têm os eixos real e imaginário paralelos aos eixos x e y. Se os eixos real e imaginário não forem paralelos aos eixos x e y, aparecerá o termo xy na equação da hipérbole e, mais particularmente, se as assíntotas de uma hipérbole equilátera forem os eixos x e y (e portanto os eixos real e imaginário estiverem sobre as retas $y = x$ e $y = -x$), então a equação da hipérbole se reduzirá à forma $xy = \frac{a^2}{2}$.



Dessa forma, o gráfico da lei de Boyle é realmente uma hipérbole equilátera tal como as estudadas neste capítulo, com a diferença de ter um sistema de coordenadas rotacionado de 45° em relação ao sistema de coordenadas mais adequado, que é o paralelo aos eixos real e imaginário e adotado neste capítulo.

Exercício resolvido

20. Os focos de uma hipérbole equilátera são $F_1(1, 8)$ e $F_2(1, 0)$. Determine a equação dessa hipérbole.



Resolução:

Pelos dados do problema, deduzimos:

- centro: $O(1, 4)$, o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$
- posição da hipérbole: o eixo real é paralelo ao eixo y
- valor da distância focal: $2c = 8 \Rightarrow c = 4$
- tipo de equação: $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$

Como a hipérbole é equilátera, temos:

$c^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 2a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 8$

Logo, a equação é $\frac{(y - 4)^2}{8} - \frac{(x - 1)^2}{8} = 1$.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios

Veja as respostas dos exercícios 22, 29 e 31 na seção Respostas.

20. Determine a equação da hipérbole, dados:

a) os focos $F_1(8, 0)$ e $F_2(-8, 0)$ e os vértices $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$

b) os vértices $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e a distância entre os focos igual a 8; $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

c) os vértices $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e a excentricidade igual a 2; $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

d) os focos $F_1(0, 5)$ e $F_2(0, -5)$ e a excentricidade igual a $\frac{5}{3}$. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

21. Determine a equação da hipérbole que passa pelo ponto $P\left(4\sqrt{2}, 3\right)$ e tem os focos nos pontos $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

22. Determine as coordenadas dos focos, as coordenadas dos vértices e a excentricidade das hipérboles de equações:

a) $4x^2 - 25y^2 = 100$

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

c) $3x^2 - 4y^2 = 36$

23. Calcule o comprimento do segmento A_1A_2 (os pontos A_1 e A_2 são os vértices) em uma hipérbole de equação $4x^2 - 2y^2 = 100$. 10

24. Calcule o valor de m para que a hipérbole de equação $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ passe pelo ponto $P\left(\sqrt{15}, 4\right)$. $\sqrt{3}$

25. Em uma hipérbole de excentricidade igual a $\sqrt{5}$, os vértices são os pontos $A_1(2, 0)$ e $A_2(-2, 0)$. Determine as coordenadas de seus focos. $F_1\left(2\sqrt{5}, 0\right)$ e $F_2\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$

26. Consideremos a hipérbole de equação $4y^2 - x^2 = 16$. Qual é a equação de uma circunferência cujo centro coincide com o centro da hipérbole e que passa pelos focos da hipérbole? $x^2 + y^2 = 20$

27. Calcule a excentricidade $e = \frac{c}{a}$, esboce no caderno o gráfico de cada uma das hipérboles e relacione o valor de e com a respectiva figura: Veja os gráficos no Manual do Professor.

a) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$ $e = 3$

b) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{5} = 1$ $e = \sqrt{6}$

c) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$ $e = 2$

28. $\frac{y^2}{27} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$

28. Determine a equação da hipérbole cujos focos são $F_1(3, 6)$ e $F_2(3, -6)$ e o eixo imaginário é $2b = 6$.

29. O centro de uma hipérbole é o ponto $(4, -3)$, seu eixo real é $2a = 6$ e o eixo imaginário é $2b = 4$. Determine a equação dessa hipérbole e seus focos F_1 e F_2, sabendo ainda que $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo x.

30. Qual é a distância focal na hipérbole cuja equação é $4x^2 - 25y^2 - 32x - 100y - 136 = 0$? $2\sqrt{29}$

31. Determine as equações das assíntotas da hipérbole de equação:

32. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

a) $9x^2 - 16y^2 = 144$

b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

33. b) $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

c) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

32. As equações das assíntotas de uma hipérbole são $y = 2x$ e $y = -2x$. Se a hipérbole tem vértices $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$, determine a equação da hipérbole.

33. Determine a equação da hipérbole equilátera:

a) de focos $F_1(6, 0)$ e $F_2(-6, 0)$; $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$

b) de centro $(2, 4)$ e um dos vértices em $(2, 2)$.

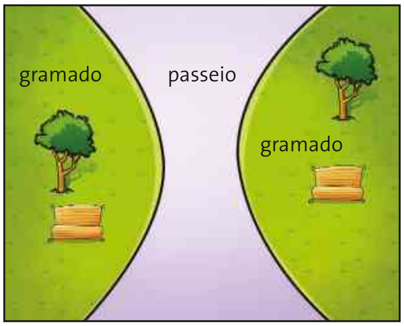
34. Determine as coordenadas dos focos e as coordenadas dos vértices da hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = 25$.

$F_1\left(5\sqrt{2}, 0\right)$; $F_2\left(-5\sqrt{2}, 0\right)$; $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$

35. Em uma hipérbole equilátera com centro em $(0, 0)$, a distância entre os vértices é 8. Sabendo que os focos estão sobre o eixo y, determine a equação dessa hipérbole. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1$

36. Considere uma hipérbole equilátera, com centro em $(0, 0)$, cujos focos F_1 e F_2 estão no eixo x e que passa pelo ponto $P(13, -12)$. Nessas condições, calcule a área do triângulo PF_1F_2. $60\sqrt{2}$

37. Considere que uma praça foi construída de forma que os gramados são separados do caminho de passeio por dois ramos de uma hipérbole, conforme o esquema abaixo:



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Considere ainda que, de acordo com a origem do sistema de coordenadas adotado pelo arquiteto responsável pela obra, a equação dessa hipérbole seja $\frac{(x-50)^2}{400} - \frac{(y-30)^2}{225} = 1$. A menor largura do passeio dessa praça, em metros, é:

a) 20.

b) 25.

c) 30.

d) 35.

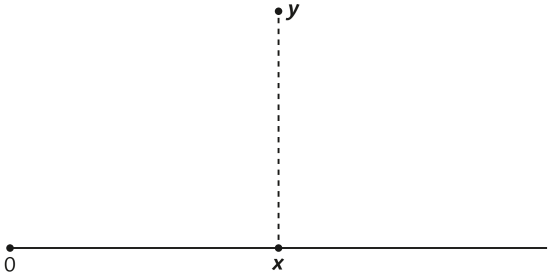
x e) 40.

Fermat e a Geometria analítica

Retrato de Pierre de Fermat (1601-1665). Óleo sobre tela.

Pierre de Fermat nasceu em 1601 em uma pequena cidade do sul da França, em uma família de comerciantes. Ele teve uma boa educação na escola de sua cidade e entrou para a Universidade de Toulouse (no sul da França) para estudar Direito. Após sua graduação mudou-se para Orleans (no centro da França) e obteve, em 1631, o grau de Bacharel em Leis na universidade dessa cidade. Quando voltou para Toulouse, trabalhou como advogado e tornou-se também conselheiro no parlamento local. Apesar de todas essas atividades exigirem bastante tempo e dedicação, Fermat ainda encontrava tempo para estudar idiomas (era fluente em espanhol, italiano, latim e grego), Filosofia e Matemática. Nem mesmo sua atuação no meio jurídico o impediu de "fazer" Matemática. Como nunca foi matemático profissional, quase nada publicou em vida, mas em correspondências aos amigos revelou enorme talento na descoberta de diversos teoremas, alguns deles surpreendentes. Frequentemente declarava suas descobertas, mas não exibia a demonstração, alegando falta de tempo para escrevê-las. O que, provavelmente, era visto apenas como um passatempo e um momento de diversão rendeu-lhe importantes descobertas em diversos ramos da Matemática.

O sistema de coordenadas com eixos ortogonais, por exemplo, surgiu quando Fermat descobriu que uma equação envolvendo duas variáveis descreve uma curva no plano. Entretanto, ele ainda não usava dois eixos ortogonais como fazemos hoje, em vez disso, usava uma reta horizontal como eixo das abscissas e assinalava as distâncias de cada ponto do plano a essa reta.



Plano com eixo coordenado, utilizado por Fermat.

O plano cartesiano seria aperfeiçoado, anos mais tarde, por outros matemáticos, ao serem também adotadas as coordenadas negativas.

Em 1636, Fermat estava reescrevendo a obra de Apolônio – geômetra grego do século II a.C. – sobre as cônicas e descobriu que podia investigar os lugares geométricos com tradução e tratamento algébricos. Sua ideia é o que podemos chamar de Princípio Fundamental da Geometria Analítica, que ele enunciou da seguinte forma:

> "Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva".

Essa frase, algo difícil de entender, significa que uma equação qualquer com duas incógnitas tem como imagem geométrica uma linha no plano, sendo esta reta ou curva. Por causa dessa conclusão, Fermat também é considerado um dos criadores da Geometria analítica.

Correspondência

Em uma de suas correspondências com seu amigo e matemático francês Marin Mersenne (1588-1648), Fermat descreve os lugares geométricos dos pontos que satisfazem à equação completa do segundo grau:

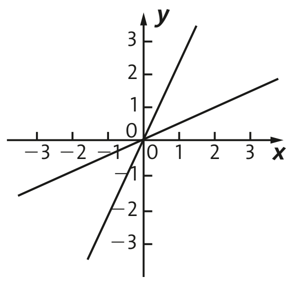
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F$$

Não há um estudo completo, mas diversos casos particulares foram analisados por Fermat. Vamos mostrar em notação moderna os casos que ele estudou, publicados após sua morte com o título *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*.

1. $Dx + Ey = 0$

Exemplo: Retas concorrentes na origem

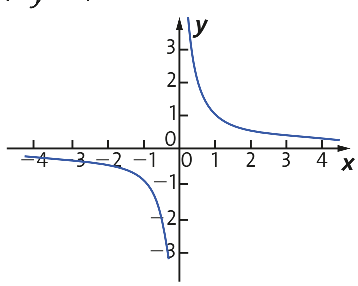
$2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0$



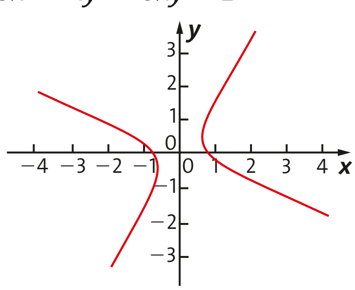
2. $Cxy = F$

Exemplos: Hipérbole equilátera

$x \cdot y = 1$



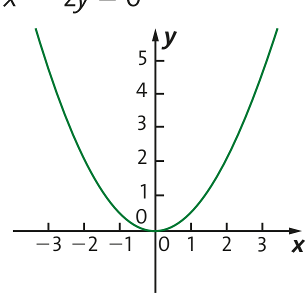
$3x^2 - 4y^2 + 5xy = 2$



3. $Ax^2 + Ey = 0$

Exemplo: Parábola

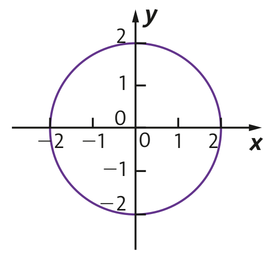
$x^2 - 2y = 0$



4. $Ax^2 + Ay^2 = F$ Neste caso, $A = B$.

Exemplo: Circunferência

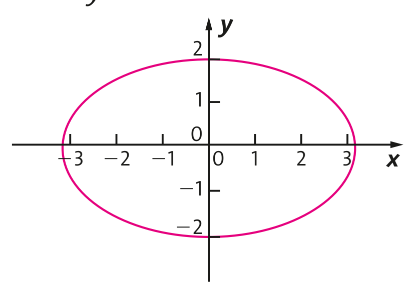
$x^2 - y^2 = 4$



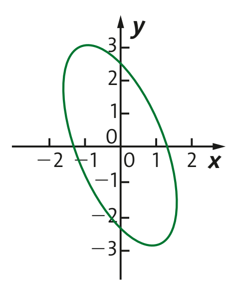
5. $Ax^2 + By^2 = F$

Exemplos: Elipse

$2x^2 - 5y^2 = 20$



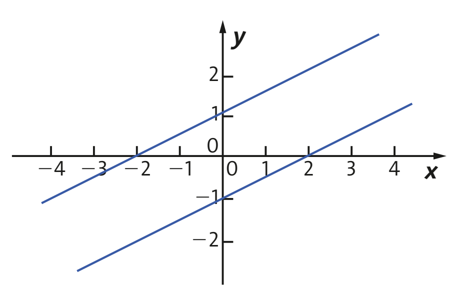
$3x^2 + y^2 + 2xy = 5$



6. $Ax^2 + By^2 + Cxy = F$

Exemplo: Retas paralelas

$x^2 + 4y^2 - 4xy = 4$



Kepler, a elipse e as proporções

"A diversidade do fenômeno da Natureza é tão vasta e os tesouros escondidos nos céus tão ricos, precisamente para que a mente humana nunca tenha falta de alimento."

Johannes Kepler

Matemática e Astronomia sempre andaram juntas. Muitos cálculos e descobertas astronômicas não aconteceriam sem a Matemática, que em diversas ocasiões foi impulsionada pelas necessidades dos astrônomos.

Johannes Kepler (1571-1630), astrônomo alemão, passou 17 anos estudando e pesquisando dados precisos acumulados em 20 anos de observações (pré-telescópicas) pelo então matemático imperial dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), cargo que Kepler assumiu após a morte de Brahe. Desses estudos surgiram as leis de Kepler, que explicam o movimento planetário.


Reprodução/Arquivo da editora

Retrato de Johannes Kepler.

Na 1ª lei, Kepler refuta as ideias de Nicolau Copérnico (1473-1543) e de seus antecessores, de que as órbitas planetárias seriam circulares, ao provar que tais órbitas são na verdade elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse (e não o centro de uma circunferência). Ele percebeu que essas elipses eram quase circunferências, ou seja, suas excentricidades eram próximas de zero.

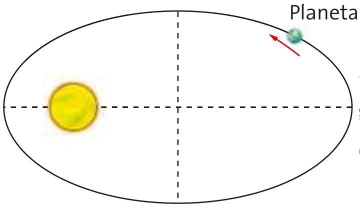
A excentricidade orbital terrestre é $e = 0{,}017$, muito perto de ser uma circunferência. O planeta com maior excentricidade é Mercúrio, com $e = 0{,}206$. Veja a tabela:

Excentricidade da órbita elíptica dos planetas do Sistema Solar

Planeta	Excentricidade
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Netuno	0,009

Fonte dos dados: Grupo de Ensino de Física da UFSM. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/gef/Dinamica/dinami14.pdf>. Acesso em: 10 maio 2016.

Fique atento!
Lembre-se de que a excentricidade varia entre 0 e 1 e que uma circunferência tem excentricidade nula ($e = 0$).

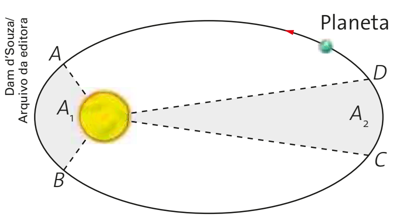


Dam d'Souza/Arquivo da editora

1ª lei de Kepler: todo planeta do Sistema Solar orbita em torno do Sol, descrevendo uma elipse, da qual o Sol ocupa um dos focos.

Fique atento!
Esta figura não está representada em proporção e a excentricidade está exagerada para melhor visualização. Cores fantasia.

A 2ª lei de Kepler diz que a linha imaginária que une o centro do Sol ao do planeta varre áreas iguais no mesmo intervalo de tempo, consequentemente o planeta se move mais rapidamente quando está mais próximo do Sol do que quando está afastado.



2ª lei de Kepler: as áreas A_1 e A_2 são iguais.

Fique atento!
Esta figura não está representada em proporção e a excentricidade está exagerada para melhor visualização. Cores fantasia.

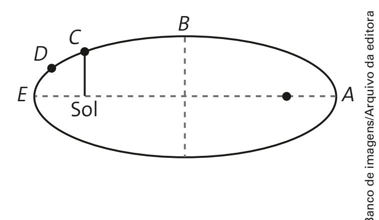
A 3ª lei de Kepler diz que o quadrado do período da órbita de um planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse orbital desse planeta. Em outras palavras, se a é o semieixo maior da elipse orbital e T é o período da órbita planetária, então $\frac{T^2}{a^3}$ é constante para todos os planetas que orbitam a estrela. A Terra leva um ano para dar uma volta ao redor do Sol, e o semieixo maior de sua órbita é igual a 1 UA (unidade astronômica). O semieixo maior da órbita de Netuno é 30 UA (é o planeta mais afastado do Sol) e leva 165 anos para completar uma volta em torno do Sol. Utilizando a 3ª lei de Kepler para os dois planetas obteremos, aproximadamente, o mesmo resultado.

$$\text{Terra: } \frac{T^2}{a^3} = \frac{1^2}{1^3} = 1 \qquad \text{Netuno: } \frac{T^2}{a^3} = \frac{165^2}{30^3} \simeq 1$$

Esse é apenas um exemplo da frutífera parceria da Matemática com a Astronomia ao longo dos séculos.

Trabalhando com o texto

1. De acordo com a 2ª lei de Kepler, a reta que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais, ou seja, os planetas se movem mais rapidamente quando próximos ao Sol. De acordo com a figura ao lado, em qual ponto a velocidade do planeta é menor?



x a) A b) B c) C d) D e) E

2. Sabendo que, no movimento de translação da Terra, as distâncias entre o Sol e o periélio (ponto da órbita mais próximo do Sol) e entre o Sol e o afélio (ponto da órbita mais afastado do Sol) são, respectivamente, $147 \cdot 10^6$ km e $152 \cdot 10^6$ km, calcule a medida da distância focal da trajetória elíptica sabendo que a excentricidade da curva é $\frac{1}{50}$. $6 \cdot 10^6$ km

3. Com as seguintes informações a respeito da trajetória elíptica de dois planetas em determinado Sistema Solar, qual planeta tem a trajetória mais próxima de um movimento circular? Por quê? O planeta **B**, pois, quanto menor a excentricidade, mais próximo estará de um movimento circular.

a) Planeta **A** de excentricidade 0,205.
x b) Planeta **B** de excentricidade 0,018.

Pesquisando e discutindo

4. Compare a excentricidade das órbitas da Lua, do cometa Lexell e da Terra e indique qual delas possui um formato mais próximo de uma circunferência e qual é mais alongada. Lua: $e = 0,055$; Lexell: $e = 0,786$; Terra: $e = 0,017$. A mais próxima de uma circunferência é a da Terra e a mais alongada é a do cometa Lexell.

Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações sobre Astronomia e as leis de Kepler em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acessos em: 10 maio 2016)

- Astronomia e Astrofísica: <http://astro.if.ufrgs.br>.
- Instituto de Astronomia e Pesquisas Espaciais (Inape): <www.inape.org.br/astronomia-astrofisica>.
- Sociedade Astronômica Brasileira: <www.sab-astro.org.br>.

CAPÍTULO 7

Números complexos

João Prudente/Pulsar Imagens

Eletricistas realizando reparo na rede elétrica. A energia que usamos em casa é produzida por uma usina elétrica e é transmitida por corrente alternada. No sistema brasileiro de transmissão de energia elétrica o fluxo de elétrons dentro de um fio muda de direção 120 vezes por segundo. No caso da corrente alternada, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio de números complexos, a fim de facilitar os cálculos.

1 Retomando: conjuntos numéricos

Neste capítulo, estudaremos mais um conjunto numérico: o **conjunto dos números complexos** ($\mathbb{C}$).

Para entender alguns aspectos relevantes da necessidade desse novo conjunto, reúna-se com um colega e resolvam as equações abaixo, respeitando os conjuntos indicados em cada item.

Por exemplo, ao resolver uma equação em $\mathbb{N}$, não é possível obter resultados negativos nem fracionários, pois esses números não existem no conjunto $\mathbb{N}$.

a) Em $\mathbb{N}$: $x^2 - 25 = 0$; $S = \{5\}$

b) em $\mathbb{Z}$: $x^2 - 25 = 0$; $S = \{-5; 5\}$

c) em $\mathbb{N}$: $4x^2 - 25 = 0$; $S = \varnothing$

d) em $\mathbb{Z}$: $4x^2 - 25 = 0$; $S = \varnothing$

e) em $\mathbb{Q}$: $4x^2 - 25 = 0$; $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

f) em $\mathbb{N}$: $x^2 - 7 = 0$; $S = \varnothing$

g) em $\mathbb{Z}$: $x^2 - 7 = 0$; $S = \{\}$

h) em $\mathbb{Q}$: $x^2 - 7 = 0$; $S = \{\}$

i) em $\mathbb{R}$: $x^2 - 7 = 0$; $S = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

j) em $\mathbb{N}$: $x^2 + 1 = 0$; $S = \varnothing$

k) em $\mathbb{Z}$: $x^2 + 1 = 0$; $S = \varnothing$

l) em $\mathbb{Q}$: $x^2 + 1 = 0$; $S = \varnothing$

m) em $\mathbb{R}$: $x^2 + 1 = 0$. $S = \{\}$

Essa introdução visa mostrar ao aluno que determinadas equações têm solução em um conjunto, mas não em outros. Dê alguns minutos para que as duplas concluam a tarefa e depois discuta oralmente os resultados obtidos por eles. Questione o motivo de algumas equações só terem solução em determinados conjuntos. Se necessário, ajude-os nessa conclusão importante, conduzindo-os a perceber esse fato. Os últimos quatro itens são o ponto de partida para o ensino do conjunto dos números complexos.

Entre os conjuntos numéricos já conhecidos tínhamos inicialmente o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

Para que a subtração fosse sempre possível, ele foi estendido e obtivemos o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

Para que também a divisão fosse possível, estendemos este último e obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, \text{com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

Fique atento!
Em $\mathbb{Q}$, a única divisão impossível é a divisão por 0.

Em $\mathbb{Q}$, a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ não podem ser representadas por uma fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e a e b pertencentes a $\mathbb{Z}$. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são exemplos dos números chamados de irracionais ($\mathbb{I}$).

Da união dos racionais com os irracionais surgem os números reais ($\mathbb{R}$):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Portanto, podemos identificar $\mathbb{N}$ como uma parte de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ como uma parte de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ como uma parte de $\mathbb{R}$ e escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geqslant 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

e não existe um número real x que elevado ao quadrado resulte -1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos números complexos.

2 Os números complexos aparecem

Em 1494, um renomado professor de matemática italiano, Frei Luca Pacioli (1445-1517), escreveu um livro intitulado *Suma de Aritmética e Geometria*, que foi muito difundido, uma vez que, pouco tempo antes, Gutenberg (c. 1397-1468) havia inventado uma prensa com tipos móveis. Nesse livro, que tratava de operações aritméticas, radicais, problemas do primeiro e do segundo graus, geometria e contabilidade, Pacioli faz a seguinte afirmação:

> Não há regra geral para solução de problemas do tipo “cubo e coisas igual a número”.

A expressão “cubo e coisas igual a número” é equivalente, na notação moderna, à equação $x^3 + px = q$. Pacioli dizia que não existia método algébrico para resolver essa equação e muitos matemáticos da época acreditaram nisso. Entretanto, pelo menos um deles não acreditou, pelo contrário, trabalhou na busca de uma solução e conseguiu. Era Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, do qual quase nada se sabe. Porém uma coisa é certa, Del Ferro conseguiu solucionar a equação do terceiro grau $x^3 + px = q$ em 1515. Não publicou nada, mas contou como era a solução para seu aluno Antonio Fiore, que começou a espalhar que ele era o único matemático que sabia resolver essa equação. Nessa época Niccolò Fontana de Brescia (1499-1557), mais conhecido pelo pseudônimo de Niccolò Tartaglia (que significa gago), engenheiro e professor em Veneza (Itália), soube que Fiore tinha a solução, mas tratou ele mesmo de encontrá-la e também conseguiu obtê-la.

Album/akg-images/Latinstock

Gravura de Girolamo Cardano (1501-1576). Colorizada.

Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano publicou seu famoso livro *Ars Magna*, no qual tratava da resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$.

O problema “Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?” corresponderia à equação $x^3 - 15x = 4$, e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam. O mais curioso é que era possível operar com esses números “esquisitos”, mesmo que não tivessem sentido, pois matematicamente os problemas davam certo.

Mais tarde, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) estudou o trabalho de Cardano e verificou que realmente esses números “funcionavam”. Sua representação sofreu variações no decorrer do tempo, até que foram escritos na forma de produto por $\sqrt{-1}$, como $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$.

Saiba mais sobre como Cardano conseguiu obter a resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$ na seção Leitura da página 196. A fórmula “secreta” divulgada por Cardano para resolução desse tipo de equação é expressa da seguinte maneira:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Ocorre que, em alguns casos, essa fórmula dá resultados realmente estranhos. Por exemplo, considere a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$. De início não sabemos quantas raízes reais ela tem, mas certamente $x = -2$ é uma delas pois:

$$(-2)^3 - 6(-2) - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$$

Porém, aplicando a fórmula temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

ou seja:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$$

Isso é muito estranho, pois a fórmula contém a raiz quadrada de números negativos $\left(\sqrt{-4}\right)$ e, apesar disso, sabemos que x é real. Nesse momento, as raízes quadradas de números negativos começaram a ser estudadas e os números complexos apareceram, porém demorou muito tempo para que esses números fossem aceitos. Também era comum alguns matemáticos dizerem que tinham que operar com raízes negativas (pois apareciam naturalmente em suas equações), mas que não sabiam exatamente o que significavam.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o símbolo **i** para representar a raiz quadrada de -1. Assim, $\sqrt{-121}$ passou a ser expresso por $11\,\text{i}$.

Album/akg-images/Latinstock

Retrato de Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Óleo sobre tela.

Finalmente, a representação geométrica dos números complexos foi elaborada em 1806 pelo matemático suíço Jean-Robert Argand (1768-1822). Anos depois, o matemático, astrônomo e físico alemão Carl Friedrich Gauss adotou essa representação e a divulgou em seus trabalhos (alguns pesquisadores defendem que Gauss chegou às mesmas conclusões de Argand de forma independente, veja na página 181). No final do século XVIII, Gauss fez com que a representação do plano complexo ficasse conhecida, tornando mais significativo seu estudo e favorecendo sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento.

Neste capítulo estudaremos a construção do conjunto dos números complexos, definindo suas operações e representações.

3 Conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$)

O conjunto $\mathbb{C}$ é um conjunto cujos elementos – os números complexos – devem ser tais que possam ser somados e multiplicados e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto $\mathbb{C}$, e as operações de adição e multiplicação realizadas com os números reais no conjunto $\mathbb{C}$ devem ser as mesmas já conhecidas. Note que, se isso não fosse observado, o conjunto $\mathbb{R}$ não seria um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Hoje, a notação preferida para definir os elementos do conjunto complexo é a forma algébrica.

Forma algébrica

Número complexo é todo número da forma:

$$\boxed{z = a + bi}$$

$$(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ e } \mathrm{i}^2 = -1)$$

Essa é a **forma algébrica** ou **forma binomial** de escrever um número complexo. Observemos que um número complexo escrito nessa forma tem duas partes:

$$z = \underbrace{a}_{\substack{\text{parte real} \\ \text{de } z}} + \underbrace{b}_{\substack{\text{parte} \\ \text{imaginária} \\ \text{de } z}}\mathrm{i}$$

$$\mathrm{Re}(z) = a \qquad \mathrm{Im}(z) = b$$

i é a unidade imaginária, tal que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Fique atento!
Como $\mathrm{i}^2 = -1$, é comum encontrar quem defina $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Neste livro preferimos usar $\mathrm{i}^2 = -1$.

A existência do **i** é que permite que no conjunto $\mathbb{C}$ exista raiz de índice par de números negativos, não definida no conjunto $\mathbb{R}$.

Por exemplo, se $x \in \mathbb{C}$ e $x^2 = -25$, então $x = \pm 5\mathrm{i}$, pois:

$$-25 = (\mathrm{i}^2) \cdot 25 = \mathrm{i}^2 5^2 = (5\mathrm{i})^2$$

Fique atento!
Estamos usando as propriedades da potenciação, agora para números complexos.

Se o número complexo possui a unidade imaginária (ou seja, se $b \neq 0$), ele é também chamado **imaginário**.

Devemos observar também que, se $b = 0$, temos $z = a$ (número real); e se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $z = bi$, que é um número imaginário puro.

Exemplos:

a) Em $z = 2 + 3\mathrm{i}$, temos $\mathrm{Re}(z) = 2$ e $\mathrm{Im}(z) = 3$.

b) Em $z = 2 - 3\mathrm{i}$, temos $\mathrm{Re}(z) = 2$ e $\mathrm{Im}(z) = -3$.

c) Em $z = 3$, temos $\mathrm{Re}(z) = 3$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$. Portanto, z é real.

d) Em $z = -2\mathrm{i}$, temos $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -2$. Portanto, z é um número imaginário puro.

Usando a forma algébrica, as operações de adição, subtração e multiplicação são intuitivas. Na multiplicação, por exemplo, basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, porém observando que i^2 é um número real e vale -1. Não há necessidade de decorar fórmulas.

Exemplos:

a) $(2 + 3\mathrm{i}) + (-3 + 4\mathrm{i}) = (2 - 3) + (3 + 4)\mathrm{i} = -1 + 7\mathrm{i}$

b) $(1 + \mathrm{i}) - (3 + 2\mathrm{i}) = (1 - 3) + (1 - 2)\mathrm{i} = -2 - 1\mathrm{i} = -2 - \mathrm{i}$

c) $(1 + 2\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i}) = 1 \cdot 2 + 1(-3\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} \cdot 2 + (2\mathrm{i})(-3\mathrm{i}) = 2 - 3\mathrm{i} + 4\mathrm{i} - 6\mathrm{i}^2 = 2 + \mathrm{i} - 6(-1) = 2 + \mathrm{i} + 6 = 8 + \mathrm{i}$

d) $(2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i}) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3\mathrm{i}) + 3\mathrm{i} \cdot 2 + 3\mathrm{i} \cdot (-3\mathrm{i}) = 4 - \cancel{6}\mathrm{i} + \cancel{6}\mathrm{i} - 9(-1) = 4 + 9 = 13$

Exercícios resolvidos

1. Dados os números complexos $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = -2 + i$, calcule as operações indicadas nos itens abaixo:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 z_2$

c) z_1^2

d) $z_1 + z_2^2$

Resolução:

a) $z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (-2 + i) =$
$= (1 - 2) + (3 + 1)i = -1 + 4i$

b) $z_1 z_2 = (1 + 3i)(-2 + i) =$
$= 1(-2) + 1 \cdot i + 3i(-2) + 3i \cdot i =$
$= -2 + i - 6i + 3i^2 = -2 - 5i + 3(-1) =$
$= -5 - 5i$

c) $z_1^2 = (1 + 3i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 =$
$= 1 + 6i + 9i^2 = 1 + 6i + 9(-1) = -8 + 6i$

d) $z_1 + z_2^2 = (1 + 3i) + (-2 + i)^2 =$
$= (1 + 3i) + [4 - 4i + i^2] =$
$= (1 + 3i) + [4 - 4i + (-1)] =$
$= (1 + 3i) + (3 - 4i) = 1 + 3i + 3 - 4i = 4 - i$

2. Determine o valor real de x para que o número complexo:

a) $z = (1 - 2x) + 3i$ seja um número imaginário puro.

b) $z = 6 - (3x - 5)i$ seja um número real.

Resolução:

a) Para que z seja um número imaginário puro é necessário que $\text{Re}(z) = 0$, pois $\text{Im}(z) = 3 \neq 0$.

Então:

$\text{Re}(z) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Verificando, vem:

$z = (1 - 2x) + 3i = \left(1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2}\right) + 3i =$

$= (1 - 1) + 3i = 0 + 3i = 3i$ (número imaginário puro)

Logo, $x = \dfrac{1}{2}$.

b) Para que z seja real é necessário que $\text{Im}(z) = 0$:

$\text{Im}(z) = -(3x - 5) = 0 \Rightarrow -3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

Verificando, para $x = \dfrac{5}{3}$:

$z = 6 - \left(3 \cdot \dfrac{5}{3} - 5\right)i = 6 - (5 - 5)i =$

$= 6 - 0i = 6$ (número real)

Logo, $x = \dfrac{5}{3}$.

3. Efetue as operações indicadas nos itens abaixo:

a) $(1 + i)(1 - i)$

b) $i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$

c) $(2 - 3i)^2 - (3 - i)2i$

Resolução:

a) $(1 + i)(1 - i) = 1 \cdot 1 - \cancel{1i} + \cancel{1i} - i^2 = 1 - i^2 =$
$= 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

b) $i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
$i^5 = i^4 i = 1i = i$
$i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$
$i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$
$i^8 = i^4 i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

Observe que as potências de **i** começam a se repetir depois de i^4. De modo geral, temos:

$i^{4n} = (i^4)^n = 1$
$i^{4n+1} = (i^4)^n i = 1 \cdot i = i$
$i^{4n+2} = (i^4)^n i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^{4n+3} = (i^4)^n i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i$

Ou seja:

$i^{4n+p} = i^p$

c) $(2 - 3i)^2 - (3 - i)2i =$
$= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 - (6i - 2i^2) =$
$= 4 - 12i + 9i^2 - 6i + 2i^2 = 4 - 18i - 11 =$
$= -7 - 18i$

4. Calcule o valor de:

a) i^{49}

b) i^{100}

c) $3i^{15} - i^{16}$

Resolução:

a) $i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^4)^{12} \cdot i = i$

Ou, de outra maneira:

$i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^2)^{24} i = (-1)^{24} i = 1i = i$

Portanto, $i^{49} = i$.

b) $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$

Ou, de outra maneira:

$i^{100} = (i^4)^{25} \cdot i^0 = i^0 = 1$

Portanto, $i^{100} = 1$.

c) $i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7\, i = (-1)^7\, i = -1i = -i$

$i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$

Então, temos:

$3i^{15} - i^{16} = 3(-i) - 1 = -3i - 1$

Portanto, $3i^{15} - i^{16} = -1 - 3i$.

Fique atento!

$i^{49} = i^1 = i$ $\quad 49 \,\underline{|4}$ $\quad 09 \;\; 12$ $\quad 1$

$i^{15} = i^3 = -i$ $\quad 15 \,\underline{|4}$ $\quad 3 \;\; 3$

$i^{100} = i^0 = 1$ $\quad 100 \,\underline{|4}$ $\quad 20 \;\; 25$ $\quad 0$

$i^{74} = i^2 = -1$ $\quad 74 \,\underline{|4}$ $\quad 34 \;\; 18$ $\quad 2$

5. Resolva a equação $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Resolução:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

(impossível em $\mathbb{R}$)

Em $\mathbb{C}$ podemos resolvê-la. Assim, temos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-1)4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \text{ e } x'' = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

Verificando, vem:

$S = x' + x'' = (-2 + i) + (-2 - i) = -4$

$P = x'x'' = (-2 + i)(-2 - i) = 4 + 2i - 2i - i^2 =$

$= 4 - (-1) = 5$

Satisfazendo então $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja,

$x^2 + 4x + 5 = 0$.

6. Encontre em cada item o número complexo z indicado.

a) $4z = z - (-9 + 6i)$

b) $z - i^{36} = i^{43} - z$

c) $iz = z - 1 + 5i$

Resolução:

a) $4z = z - (-9 + 6i) \Rightarrow 4z - z = -(-9 + 6i) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3z = 9 - 6i \Rightarrow z = 3 - 2i$

Logo, $z = 3 - 2i$.

b) $z - i^{36} = i^{43} - z \Rightarrow z + z = i^{43} + i^{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2z = -i + 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

Logo, $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

c) Como $z = a + bi$, temos:

$i(a + bi) = a + bi - 1 + 5i \Rightarrow$

$\Rightarrow -b + ai = (a - 1) + (b + 5)i \Rightarrow \begin{cases} -b = a - 1 \\ a = b + 5 \end{cases}$

Então:

$-b = b + 5 - 1 \Rightarrow -2b = 4 \Rightarrow b = -2$

$a = -2 + 5 = 3$

Logo, $z = 3 - 2i$.

7. Calcule o valor de:

a) $(1 + i)^{20}$;

b) $(1 + i)^{21}$.

Resolução:

a) $(1 + i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} = [2i]^{10} =$

$= 2^{10} \cdot i^{10} = 1024 \cdot i^2 = -1024$

b) $(1 + i)^{21} = (1 + i)^{20} \cdot (1 + i) =$

$= -1024 \cdot (1 + i) = -1024 - 1024i$

Exercícios

Atividade em dupla

Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Resolva no caderno em $\mathbb{C}$ cada equação:

a) $x^2 + 25 = 0$ $\quad x = \pm 5i$

b) $2x^2 + 98 = 0$ $\quad x = \pm 7i$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$ $\quad x' = 1 - i$ e $x'' = 1 + i$

d) $x^2 - 10x + 40 = 0$ $\quad x' = 5 - \sqrt{15}\,i$ e $x'' = 5 + \sqrt{15}\,i$

2. Dados os números complexos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ e $z_3 = 2 - 2i$, calcule:

a) $z_1 + z_2$ $\quad 5i$

b) $z_1 - z_2$ $\quad 2 - i$

c) $z_1 z_2$ $\quad -7 + i$

d) $(z_1 + z_2)z_3$ $\quad 10 + 10i$

e) $(z_1 + z_2) + z_3$ $\quad 2 + 3i$

3. Determine o número z em cada caso:

a) $3z + 4i = z - 6i^{20}$ $\quad z = -3 - 2i$

b) $3zi = z + i$ $\quad z = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

4. Efetue:

a) i^9 $\quad i$

b) i^{14} $\quad -1$

c) i^{60} $\quad 1$

d) i^{99} $\quad -i$

e) i^{1035} $\quad -i$

f) $(-i)^{16}$ $\quad 1$

5. Sendo $z = 2 - 2i$, calculem:

a) z^2 $\quad -8i$

b) z^8 $\quad 4096$

c) z^9 $\quad 8192 - 8192i$

6. Resolvam no caderno o sistema $\begin{cases} 3z_1 - z_2 = 1 - i \\ 5z_1 - 2z_2 = 1 + 3i \end{cases}$ de variáveis z_1 e z_2.

$z_1 = 1 - 5i$ e $z_2 = 2 - 14i$

7. Determinem o valor de x, real, para que o número complexo:

a) $(x^2 - x) + 3i$ seja um número imaginário puro; $\quad x = 0$ ou $x = 1$

b) $x + (x^2 - 4)i$ seja um número real; $\quad x = \pm 2$

c) $x + xi$ seja o número real 0. $\quad x = 0$

8. Mostrem que os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$ são soluções da equação $z_2 - 2z_1 + 2 = 0$.

Veja a resolução deste exercício no Manual do Professor.

4 Conjugado de um número complexo

A propriedade do inverso multiplicativo pode ser escrita da seguinte maneira: se $z \neq 0$, existe um único número complexo $\frac{1}{z}$ tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Como podemos determinar o número $\frac{1}{z}$ na forma algébrica?

Para isso, precisamos definir o que vem a ser o conjugado de um número complexo.

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = a - bi$.

Exemplos:

a) Se $z = 2 + 3i$, então $\overline{z} = 2 - 3i$.

b) Se $z = -3 - 4i$, então $\overline{z} = -3 + 4i$.

c) Se $z = 2$, então $\overline{z} = 2$.

d) Se $z = 5i$, então $\overline{z} = -5i$.

e) Se $z = i$, então $\overline{z} = -i$.

f) Se $z = 0$, então $\overline{z} = 0$.

Para refletir
Em que casos temos $z = \overline{z}$?

Quando z for real.

Exercícios resolvidos

8. Determine o número complexo z tal que $2z - 1 = \overline{z} + i$.

Resolução:

Consideremos $z = a + bi$.

Então:

$2z - 1 = \overline{z} + i \Rightarrow 2(a + bi) - 1 = (a - bi) + i \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + 2bi - 1 = a - bi + i \Rightarrow$

$\Rightarrow (2a - 1) + 2bi = a + (2b + 1)i$

Igualando as partes reais e imaginárias, temos:

$2a - 1 = a \Rightarrow a = 1$

$2b = -b + 1 \Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

Logo, $z = 1 + \frac{1}{3}i$.

9. Dado $z \neq 0$, determine $\frac{1}{z}$ na forma $a + bi$ de tal modo que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (questão proposta anteriormente).

Resolução:

Basta multiplicar numerador e denominador por $\overline{z}$, ou seja, pelo conjugado de z, que é diferente de 0, pois $z \neq 0$. Assim:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \Rightarrow \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} =$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Logo:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$$

Fique atento!
Se $z \neq 0$, $\frac{1}{z}$ é o inverso multiplicativo de z e pode ser indicado também por z^{-1}.

10. Dado $z = 1 + 2i$, encontre o inverso multiplicativo de z $\left(\frac{1}{z} \text{ ou } z^{-1}\right)$.

Resolução:

1ª maneira:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Logo, $\frac{1}{z} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

2ª maneira:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

5 Divisão de números complexos

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ entre dois números complexos, com $z_2 \neq 0$, é dado por $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$.

Exercícios resolvidos

11. Escreva na forma $a + bi$ o número complexo $\frac{1}{3 - i}$.

Resolução:

$$\frac{1}{3 - i} = \frac{1(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i}{9 + 1} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

12. Efetue $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + 5i$.

Resolução:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 + 5i} = \frac{(1 + 2i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \frac{2 - 5i + 4i - 10i^2}{2^2 + 5^2} = \frac{12 - i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$.

13. Efetue $\frac{z}{\overline{z}}$ sabendo que $z = 2 + 3i$.

Resolução:

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{2 + 3i}{2 - 3i} = \frac{(2 + 3i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{4 + 6i + 6i + 9i^2}{4 + 6i - 6i - 9i^2} = \frac{4 + 12i - 9}{4 + 9} = \frac{-5 + 12i}{13} = \frac{-5}{13} + \frac{12}{13}i$$

Logo, $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{-5}{13} + \frac{12}{13}i$.

Exercícios

9. Determine $\overline{z}$ para:

a) $z = 1 + 5i$; $\overline{z} = 1 - 5i$
b) $z = 2i$; $\overline{z} = -2i$
c) $z = 0$; $\overline{z} = 0$
d) $z = -4 + 2i$; $\overline{z} = -4 - 2i$
e) $z = 5$; $\overline{z} = 5$
f) $z = 3 + 3i$; $\overline{z} = 3 - 3i$
g) $z = -1 - i$; $\overline{z} = -1 + i$
h) $z = \sqrt{2} - 2i$. $\overline{z} = \sqrt{2} + 2i$

10. Calcule $z\overline{z}$ nos casos:

a) $z = 3 - 4i$ 25
b) $z = 7i$ 49
c) $z = -1 - i$ 2

11. Encontre z tal que $\overline{z} + 2zi - 1 = 2$. $z = -1 - 2i$

12. Determine o inverso multiplicativo de z, sabendo que:

a) $z = 2 + 4i$ $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$
b) $z = -1 - 2i$ $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
c) $z = i$ $-i$

13. Efetue as divisões indicadas:

a) $\frac{2 + 3i}{1 + 2i}$ $\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$
b) $\frac{1}{3 + 2i}$ $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
c) $\frac{1 + 3i}{1 - i}$ $-1 + 2i$
d) $\frac{1 + i}{i}$ $1 - i$
e) $\frac{1 - i}{1 + i}$ $-i$

14. Escrevam no caderno na forma $z = a + bi$ os números complexos:

a) $z = \frac{1}{1 + i}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
b) $z = \frac{(3 - 4i)(4 - 3i)}{3 - 2i}$ $\frac{50}{13} - \frac{75}{13}i$

15. (Fuvest-SP) Determine os números complexos $z + \overline{z} = 4$ e $z \cdot \overline{z} = 13$, em que $\overline{z}$ é conjugado de $\overline{z}$. $2 + 3i$, $2 - 3i$

16. Determine z tal que:

a) $i \cdot z = 4$ $z = -4i$
b) $(1 + i) \cdot z = 5 - i$ $z = 2 - 3i$
c) $(1 - 2i) \cdot z = 5$ $z = 1 + 2i$

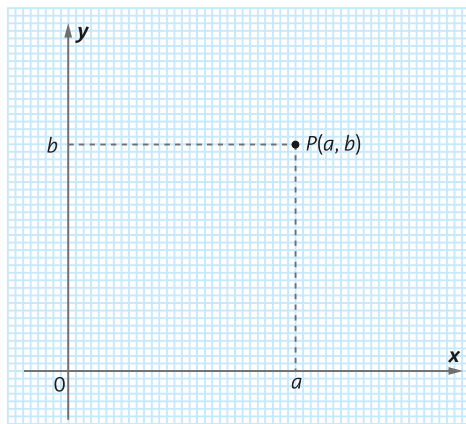
6 Representação geométrica dos números complexos

Conforme foi dito anteriormente, os números complexos podem ser representados de várias formas. Até agora vimos a forma algébrica $a + bi$. Outra maneira de representar um complexo z é por meio de um par ordenado de números reais. Assim, se $z = a + bi$, podemos escrever que $z = (a, b)$. (Gauss só usava essa notação.)

Também sabemos que a cada par de números reais (a, b) está associado um único ponto do plano. Logo, podemos associar a cada número complexo $z = a + bi$ o ponto P do plano de coordenadas a e b, isto é, $P(a, b)$.

O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**. Dizemos que o ponto $P(a, b)$ é a **imagem** (ou **afixo**) do número complexo $a + bi$.

Argand-Gauss: Jean Robert Argand e Johann Karl Friedrich Gauss. Como visto anteriormente, alguns pesquisadores defendem que Argand e Gauss, de forma independente e em épocas diferentes, tiveram a mesma ideia sobre a representação dos números complexos no plano. Porém, Argand não era um matemático suficientemente conhecido para que suas publicações tivessem algum destaque, de forma que somente quando Gauss publicou seu próprio trabalho, cerca de 30 anos depois de Argand, é que essas ideias foram aceitas. O reconhecimento a Argand foi póstumo.



Por exemplo, observe a representação geométrica dos seguintes números complexos: $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 5$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2 + i$ e $z_5 = -2 + i$.

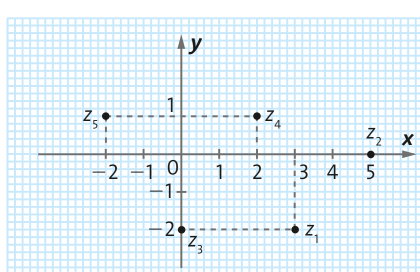
$z_1 = 3 - 2i \rightarrow (3, -2)$

$z_2 = 5 \rightarrow (5, 0)$

$z_3 = -2i \rightarrow (0, -2)$

$z_4 = 2 + i \rightarrow (2, 1)$

$z_5 = -2 + i \rightarrow (-2, 1)$



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observações:

1ª) Os números complexos reais pertencem ao eixo x, mantendo a correspondência segundo a qual para cada número real existe um ponto da reta.

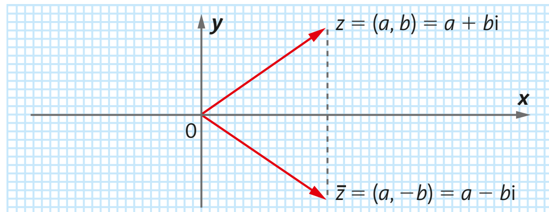
2ª) Os números imaginários puros pertencem ao eixo y.

3ª) Os demais números complexos ($a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$) pertencem aos vários quadrantes, de acordo com os sinais de a e b.

4ª) Para cada número complexo existe um único ponto do plano e vice-versa.

Interpretação geométrica do conjugado

Geometricamente, o conjugado $\overline{z}$ de z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo x.



Exercícios resolvidos

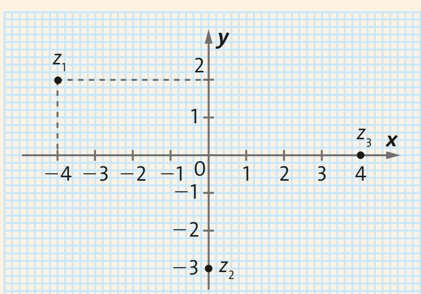
14. Dados os números complexos $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = -3i$ e $z_3 = 4$, localize, no plano complexo, os pontos correspondentes a cada número.

Resolução:

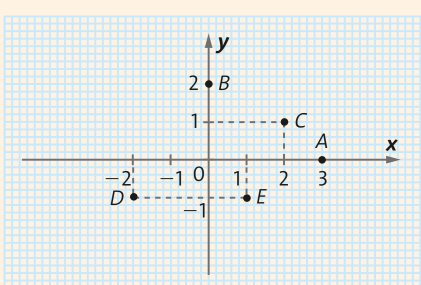
$z_1 = -4 + 2i \Rightarrow (-4, 2)$

$z_2 = -3i \Rightarrow (0, -3)$

$z_3 = 4 \Rightarrow (4, 0)$



15. Determine os números complexos correspondentes aos pontos A, B, C, D e E na figura abaixo.



Resolução:

$A(3, 0) \Rightarrow z = 3$

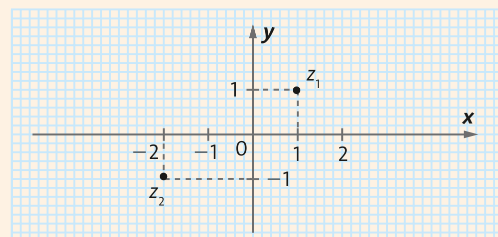
$B(0, 2) \Rightarrow z = 2i$

$C(2, 1) \Rightarrow z = 2 + i$

$D(-2, -1) \Rightarrow z = -2 - i$

$E(1, -1) \Rightarrow z = 1 - i$

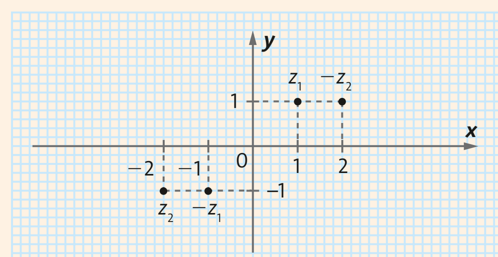
16. Dados os pontos correspondentes aos números complexos z_1 e z_2, descubra os pontos correspondentes aos números $-z_1$ e $-z_2$.



Resolução:

$P(1, 1) \Rightarrow z_1 = 1 + i \Rightarrow -z_1 = -1 - i \Rightarrow P'(-1, -1)$

$Q(-2, -1) \Rightarrow z_2 = -2 - i \Rightarrow -z_2 = 2 + i \Rightarrow Q'(2, 1)$



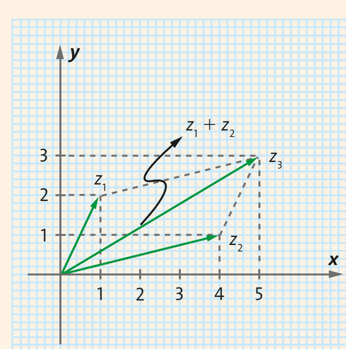
17. Efetue algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

Resolução:

Algebricamente, temos:

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + i) = 5 + 3i = z_3$

Geometricamente, vem:



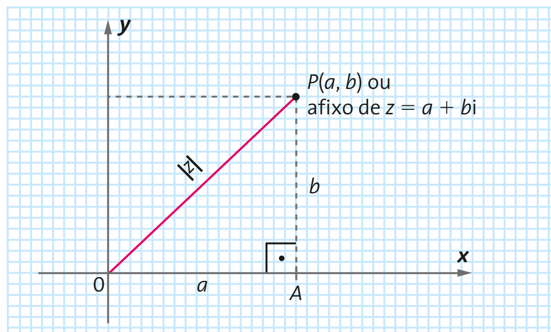
Observe que z_3 corresponde ao ponto (5, 3), ou seja, ao número complexo $z_3 = 5 + 3i$.

7 Módulo de um número complexo

Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas O à imagem (ao afixo) de z.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAP, temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observemos que essa igualdade vale também para os pontos situados nos eixos e nos demais quadrantes.

Então podemos dizer que, dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se **módulo** de z e indica-se por $|z|$ o número real positivo ou nulo dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observação: Uma conexão interessante com a Geometria analítica é que, pensando nos complexos z e w como pontos no plano, o **módulo** da diferença é a distância entre os dois pontos: $|z - w| = d(z, w)$.

Exercícios resolvidos

18. Determine o módulo dos seguintes números complexos:

a) $z = 2 + 3i$

b) $z = 3i$

c) $z = -1 - 2i$

d) $z = \frac{1}{2}$

e) $z = -3$

f) $z = 0$

Resolução:

a) Se $z = 2 + 3i$, então:

$|z| = |2 + 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) Se $z = 3i$, então:

$|z| = |3i| = \sqrt{9} = 3$

c) Se $z = -1 - 2i$, então:

$|z| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

d) Se $z = \frac{1}{2}$, então:

$|z| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

e) Se $z = -3$, então:

$|z| = |-3| = 3$

f) Se $z = 0$, então:

$|z| = |0| = 0$

19. Descubra a distância do ponto $A(1, 2)$ ao ponto $B(5, -1)$.

Resolução:

1º processo:

$d(A, B) = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{25} = 5$

2º processo:

$z = 1 + 2i$ e $w = 5 - i$

$z - w = -4 + 3i$

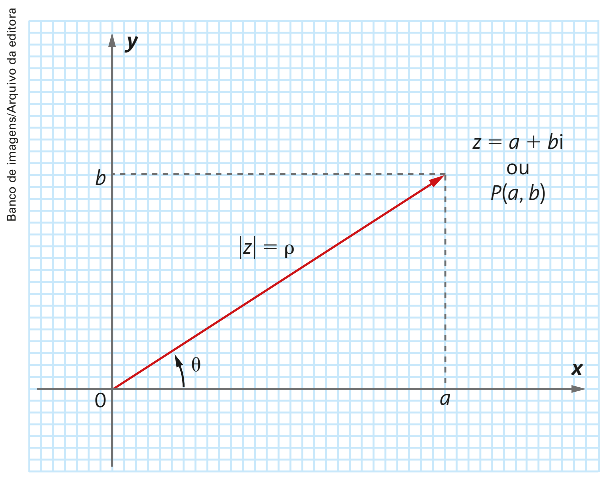
$d(A, B) = |z - w| = |-4 + 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$

8 Forma trigonométrica dos números complexos

Sabemos que um número complexo $z = a + bi$ é representado por um ponto do plano, de coordenadas (a, b). Essas são as coordenadas cartesianas do ponto z. Veremos agora que esse mesmo ponto pode ser representado por suas **coordenadas polares**, que são:

1ª) o módulo do vetor $\overrightarrow{Oz}$, indicado por $|z|$ ou ρ, representando a distância do ponto P à origem do plano (supondo $|z| \neq 0$);

2ª) o ângulo θ, em que $0 \leqslant \theta < 2\pi$, que o vetor $\overrightarrow{Oz}$ forma com o eixo x. Esse ângulo θ é chamado **argumento** de z (ou **argumento principal** de z) e indicado por $\arg(z)$.



Fique atento!
Devemos considerar θ a partir do eixo x, no sentido anti-horário.

$$z = a + bi,\ z \neq 0$$
$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\arg(z) = \theta$$

Já vimos em Trigonometria que:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{|z|} \qquad (\text{com } 0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

Essas igualdades levam a:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \text{sen}\,\theta$$

Substituindo esses valores em $z = a + bi$, temos:

$$z = a + bi = |z| \cdot \cos\theta + |z| \cdot \text{sen}\,\theta\,\text{i} = |z|(\cos\theta + \text{i} \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Portanto:

$$z = |z|(\cos\theta + \text{i} \cdot \text{sen}\,\theta)$$

que é chamada **forma trigonométrica** ou **forma polar** de z.

Exercícios resolvidos

20. Determine a representação geométrica e a forma trigonométrica do número complexo dado em cada item:

a) $z = 1 + i\sqrt{3}$

b) $z = -1 + i$

c) $z = 2i$

d) $z = -3$

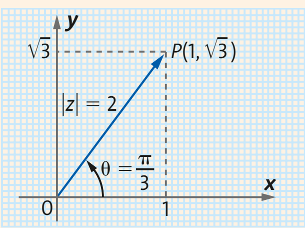
Resolução:

a) $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$

Então:

$|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$$



Portanto, a forma trigonométrica é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

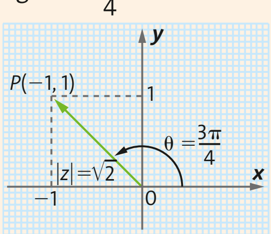
b) $a = -1$ e $b = 1$

Então:

$|z| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) =$

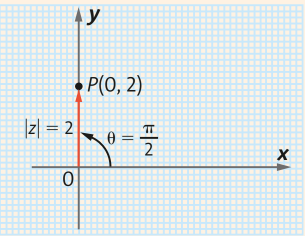
$= \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

c) $a = 0$ e $b = 2$

Então:

$|z| = |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{0}{2} = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

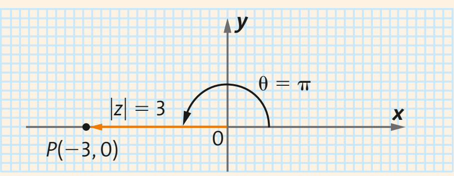
$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

d) $a = -3$ e $b = 0$

Então:

$|z| = |-3| = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-3}{3} = -1 \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{0}{3} = 0 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

$z = 3(\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi)$

21. Escreva na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 8\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$

Resolução:

a) $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} + i \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{2} =$

$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

b) $z = 8\left[-\cos\dfrac{\pi}{6} + i\left(-\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= 8\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] = -4\sqrt{3} - 4i$

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 17, 20, 21, 24, 25 e 26 no Manual do Professor.

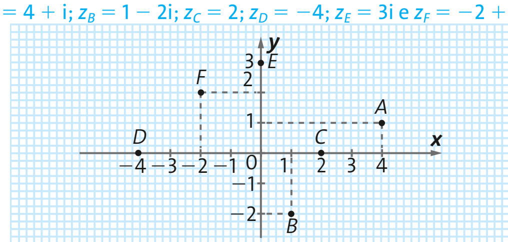
17. No caderno, em um mesmo plano complexo, localize os pontos correspondentes aos seguintes números complexos:

$z_1 = -3 + 3i$; $z_2 = 1 + 4i$; $z_3 = 2i$; $z_4 = -4i$;

$z_5 = 2 - 3i$; $z_6 = 3$; $z_7 = -4$.

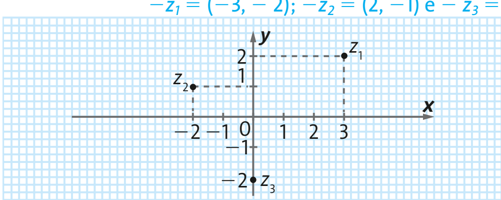
18. Escreva no caderno os números complexos correspondentes aos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* do plano:

$z_A = 4 + i$; $z_B = 1 - 2i$; $z_C = 2$; $z_D = -4$; $z_E = 3i$ e $z_F = -2 + 2i$



19. Dados os pontos correspondentes aos números complexos z_1, z_2 e z_3, descubra os pontos correspondentes aos números complexos $-z_1$, $-z_2$ e $-z_3$.

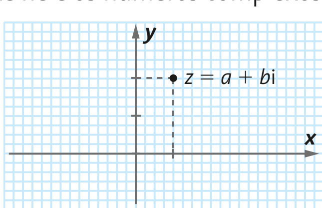
$-z_1 = (-3, -2)$; $-z_2 = (2, -1)$ e $-z_3 = (0, 2)$



20. No caderno, localize no plano complexo os números complexos dados abaixo e seus respectivos conjugados:

a) $z_1 = 1 + 3i$
b) $z_2 = -1 - i$
c) $z_3 = 3i$
d) $z_4 = 3$
e) $z_5 = 3 - 2i$

21. DESAFIO Copie no caderno o plano complexo a seguir e localize nele os números complexos $-z$, $\bar{z}$ e $-\bar{z}$.



22. Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = 1 + i$ $\sqrt{2}$

b) $z = -3 - 2i$ $\sqrt{13}$

c) $z = -7$ 7

d) $z = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$ $\sqrt{5}$

e) $z = 3 + 4i$ 5

f) $z = 3i$ 3

g) $z = 3 + 4\sqrt{2}i$ $\sqrt{41}$

h) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ 2

23. Se $z_1 = 1 - 3i$ e $z_2 = 2 + 5i$, determinem:

a) $|z_1| + |z_2|$ $\sqrt{10} + \sqrt{29}$

b) $|z_1 z_2|$ $\sqrt{290}$

c) $|z_1 + z_2|$ $\sqrt{13}$

d) $|z_1||z_2|$ $\sqrt{290}$

24. No caderno, localizem graficamente o número complexo *z* tal que:

a) $|z| = 4$

b) $|z| > 4$

c) *z* é um imaginário puro e $|z| \geqslant 4$

d) $|z| \leqslant 2$

e) *z* é um imaginário puro e $|z| < 3$

Veja as respostas dos exercícios 25 e 26 na seção Respostas.

25. No caderno, dê a representação geométrica e a forma trigonométrica dos seguintes números complexos:

a) $\sqrt{3} + i$

b) $-\sqrt{3} + i$

c) $\sqrt{3} - i$

d) $-\sqrt{3} - i$

26. Escrevam no caderno a forma trigonométrica dos seguintes números complexos:

a) $6i$

b) $2 + 2i$

c) $-8\sqrt{3} + 8i$

d) 4

e) $2 - 2i$

f) -3

g) i

27. Escrevam no caderno a forma algébrica dos seguintes números complexos:

a) $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6}\right)$ $z = \sqrt{3} + i$

b) $5(\cos 0 + i \cdot \text{sen } 0)$ $z = 5$

c) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2}$ $z = -i$

d) $4(\cos \pi + i \cdot \text{sen } \pi)$ $z = -4$

e) $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$ $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica

Consideremos os números complexos z_1 e z_2, dados na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)$$

$$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)$$

Fique atento!
Na adição de arcos vale que:
$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$
$\operatorname{sen} (a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$
Veja estas e outras relações trigonométricas no Capítulo 10.

O produto z_1z_2 é dado por:

$$z_1z_2 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)|z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2) = |z_1||z_2|(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2) =$$

$$= |z_1||z_2|[(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1)] =$$

$$= |z_1||z_2|[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)]$$

Portanto:

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)]$$

Assim, o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores, reduzida à primeira volta ($0 \leqslant \arg (z_1z_2) < 2\pi$).

Observação: A fórmula da multiplicação de dois números complexos, segundo a qual *basta multiplicar os módulos e somar seus argumentos*, é válida para um número qualquer finito de valores. Isso nos levará à potenciação de números complexos.

Dados os números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica:

$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)$
$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)$

podemos obter o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$, para $z_2 \neq 0$, assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)]$$

A demonstração dessa relação pode ser feita mostrando que o produto de

$\dfrac{|z_1|}{|z_2|}[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)]$ por z_2 é igual a z_1.

Veja a demonstração no Manual do Professor.

Para refletir
Faça a demonstração mencionada.

Assim, o quociente de dois números complexos na forma trigonométrica, com o segundo número diferente de 0, é o número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e cujo argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzida à primeira volta $\left(0 \leqslant \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) < 2\pi\right)$.

Exercício resolvido

22. Sendo $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$, calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

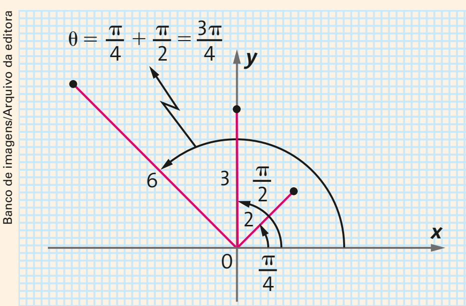
Resolução:

a) Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

$$z_1z_2 = 2 \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

Fazendo a interpretação geométrica desse problema, obtemos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Em z_1z_2 houve uma rotação positiva a z_1 de um ângulo igual ao ângulo de z_2. Ou seja, nesse caso houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a z_1. Como o argumento de z_1 era $\frac{\pi}{4}$ e z_1 recebeu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto z_1 e z_2 passa a ter argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo z_1z_2 é 6, que corresponde a $2 \cdot 3$ ou $|z_1||z_2|$.

b) Substituindo z_1 e z_2 na fórmula dada, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

Você sabia?

$\frac{7\pi}{4}$ é o ângulo côngruo de $-\frac{\pi}{4}$ tal que $0 \leqslant \frac{7\pi}{4} < 2\pi$.

Potenciação de números complexos na forma trigonométrica – a primeira fórmula de De Moivre*

A potência z^n, $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot ... \cdot z}_{n \text{ fatores}}$.

Assim, se um número complexo z está escrito na forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot ... \cdot z}_{\substack{\text{multiplicação de} \\ n \text{ fatores}}} = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot ... \cdot |z|}_{\substack{\text{produto de} \\ n \text{ módulos}}}[\cos\underbrace{(\theta + \theta + ... + \theta)}_{\substack{\text{soma de } n \\ \text{argumentos}}} + i \cdot \text{sen}\,\underbrace{(\theta + \theta + ... + \theta)}_{\substack{\text{soma de } n \\ \text{argumentos}}}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}\,(n\theta)]} \text{ (fórmula de De Moivre)}$$

Para $n = 0$, temos:

$$z^0 = |z|^0[\cos(0 \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}\,(0 \cdot \theta)] = 1(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0) = 1(1 + 0) = 1$$

Assim, podemos dizer que a potência de ordem n de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a n e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por n, reduzido à primeira volta ($0 \leqslant \arg(z^n) < 2\pi$).

* Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francês.

Exercícios resolvidos

23. Calcule a potência $(1 - i)^{10}$.

Resolução:

Uma das maneiras é utilizar as propriedades da potenciação ao elevar $(1 - i)$ à décima potência.

$$(1 - i)^{10} = \left[(1 - i)^2\right]^5 = \left[1 - 2i + i^2\right]^5 =$$
$$= \left[\cancel{1} - 2i - \cancel{1}\right]^5 = (-2i)^5 = (-2)^5 \cdot (i)^5 =$$
$$= -32i$$

Outra é desenvolver a expressão $(1 - i)^{10}$ usando o binômio de Newton. Uma terceira maneira é escrever o número complexo $(1 - i)$ na forma trigonométrica e usar a fórmula de De Moivre. Assim, temos: $z = 1 - i$, $a = 1$ e $b = -1$.

Então:

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{7\pi}{4}$$

Assim:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo:

$$z^{10} = (1 - i)^{10} =$$
$$= (\sqrt{2})^{10}\left[\cos\left(10 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(10 \cdot \frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

Mas:

$$(\sqrt{2})^{10} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5$$

$$10 \cdot \frac{7\pi}{4} = \frac{70\pi}{4} = \frac{35\pi}{2}$$

$\dfrac{35\pi}{2}$ corresponde a oito voltas mais $\dfrac{3\pi}{2}$, isto é:

$$\frac{35\pi}{2} = \frac{32\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 16\pi + \frac{3\pi}{2} = 8 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Ou seja, $\dfrac{35\pi}{2}$ é côngruo de $\dfrac{3\pi}{2}$.

Portanto:

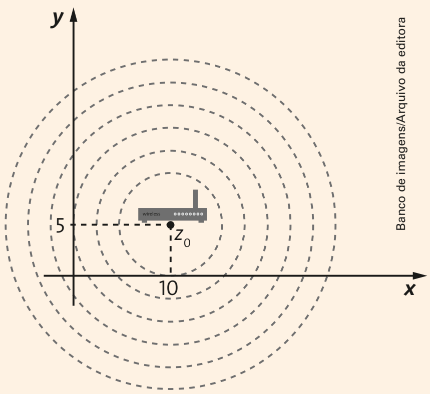
$$z^{10} = (1 - i)^{10} = 2^5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

Na forma algébrica, temos:

$$z^{10} = (1 - i)^{10} = 32[0 + i(-1)] = 32 \cdot 0 - 32i = -32i$$

Resolvido passo a passo

24. (UFSM-RS) No plano complexo, o ponto z_0 representa o local de instalação de uma antena *wireless* na praça de alimentação de um *shopping*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Os pontos $z = x + yi$ que estão localizados no alcance máximo dessa antena satisfazem a equação $|z - z_0| = 30$.

De acordo com os dados, esses pontos pertencem à circunferência dada por:

a) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0$.
b) $x^2 + y^2 - 900 = 0$.
c) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 775 = 0$.
d) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 900 = 0$.
e) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 900 = 0$.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
São dados um gráfico que informa a posição da antena *wireless*, em coordenadas, e uma equação que representa o alcance máximo.

b) O que se pede?
Pede-se a equação da circunferência que é formada pelos pontos localizados no alcance máximo da antena.

2. Planejando a solução

Inicialmente, deve-se fazer uma representação das coordenadas de z_0 de forma "complexa". Feito isso, deve-se lançá-lo na equação dada e executar a subtração. Posteriormente, deve-se utilizar um artifício matemático para elevar os termos do 1º membro da equação ao quadrado. Essa operação é fundamental para assemelhar a equação a uma que represente a circunferência.

3. Executando o que foi planejado

1º passo: formar z_0 a partir das coordenadas da antena

z_0 (10, 5)

$\therefore z_0 = 10 + 5i$

2º passo: executar a equação dada

$|z - z_0| = 30 \Rightarrow |x + yi - 10 - 5i| = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x - 10) + (y - 5)i| = 30$

3º passo: elevar os termos do primeiro membro da equação ao quadrado

$\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 - 10y + 25 - 900 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0 \rightarrow$ equação da circunferência.

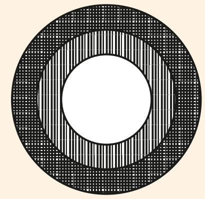
4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) O dono do *shopping* paga à empresa que lhe fornece sinal de internet de acordo com a intensão do sinal. Sabe-se que há três níveis de intensidade:

1º nível (mais intenso – compreende o primeiro terço do raio)
2º nível (sinal intermediário – anel que compreende o segundo terço do raio)
3º nível (sinal fraco – anel que compreende o último terço do raio)



(Taxa cobrada/m³)

→ Sinal fraco → R\$ 1,00

→ Sinal intermediário → R\$ 3,00

→ Sinal intenso → R\$ 5,00

A partir das informações, quanto o *shopping* gasta com o serviço de internet? Considere $\pi = 3$. Gasta R\$ 5 700,00 com o serviço de internet.

b) *Discussão em equipe*

A tecnologia vem avançando cada dia mais, e a cada evolução os aparatos tecnológicos vêm reduzindo de tamanho, e a transmissão de dados vem ocorrendo de forma surpreendente, inimaginável pela maioria da população há algumas décadas. Hoje é possível ter acesso à internet sem necessidade de fios, bem como recarregar um *smartphone* sem tê-lo plugado a uma tomada. Sendo assim, troque ideias com seus colegas sobre esse intenso processo de evolução tecnológica que vem ocorrendo e discutam sobre o seu reflexo para a sociedade como um todo. Tratem sobre a acessibilidade desses aparatos de acordo com as classes sociais. Eles melhoram ou pioram a desigualdade?

Exercícios

Veja a resposta do exercício 28 na seção Respostas.

28. Dados os números complexos $z = 6(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°)$ e $w = 3(\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°)$, calcule zw, w^2, $\frac{z}{w}$ e $\frac{w}{z}$.

29. Determine o número complexo z_1, sabendo que $z_2 = 10(\cos 20° + i \cdot \text{sen } 20°)$ e $z_1 z_2 = 20\sqrt{3}\,(\cos 170° + i \cdot \text{sen } 170°)$.

Fique atento!
Os números obtidos devem ter seus argumentos tal que $0 \leq \theta < 2\pi$ $(0° \leq \theta < 360°)$.

30. Calculem os valores das potências z^2, z^3 e z^9, sabendo que $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z^3 = -8$ e $z^9 = -512$

31. Usando a fórmula de De Moivre, calculem as potências:

29. $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

a) $(1 - i)^3$ $-2 - 2i$

b) $(1 + \sqrt{3}\,i)^4$ $-8 - 8\sqrt{3}\,i$

32. Sabendo que $z_1 = 2(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$ e $z_2 = 3(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°)$, determinem:

a) $z_1 z_2$ -6

b) $\frac{z_1}{z_2}$ $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$

c) z_1^3 $8i$

d) z_2^{99} $3^{99}i$

Radiciação — raízes enésimas de números complexos

Assunto opcional

Dado um número complexo z e um número natural n, $n > 1$, definimos em $\mathbb{C}$:

Raiz enésima de z é um número complexo ω tal que $\omega^n = z$.

Exemplos:

a) 2, -2, 2i e -2i são as raízes quartas do número complexo 16.
   2, pois $2^4 = 16$
   -2, pois $(-2)^4 = 16$
   2i, pois $(2i)^4 = 16$
   -2i, pois $(-2i)^4 = 16$
   Há, portanto, em $\mathbb{C}$, quatro raízes quartas de 16.

b) i e $-$i são as raízes quadradas do número complexo -1.
   i, pois $i^2 = -1$
   $-$i, pois $(-i)^2 = -1$
   Há, portanto, em $\mathbb{C}$, duas raízes quadradas de -1.

c) 3 e -3 são as raízes quadradas do número complexo 9.
   3, pois $3^2 = 9$
   -3, pois $(-3)^2 = 9$
   Há, portanto, em $\mathbb{C}$, duas raízes quadradas de 9.

d) 1, -1, i e $-$i são as raízes quartas do número complexo 1.
   1, pois $1^4 = 1$
   -1, pois $(-1)^4 = 1$
   i, pois $i^4 = 1$
   $-$i, pois $(-i)^4 = 1$
   Há, portanto, em $\mathbb{C}$, quatro raízes quartas de 1.

e) A única raiz quinta de 0 é 0, pois 0 é o único número complexo tal que $0^5 = 0$.
   A pergunta então é: Quantas são as raízes enésimas de um número complexo $z \neq 0$ e como podemos determiná-las? Veremos isso com a **segunda fórmula de De Moivre**.

A segunda fórmula de De Moivre

Consideremos o número complexo $z \neq 0$ tal que $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$. Encontrar as raízes enésimas de z significa determinar todos os números complexos distintos do tipo:

$$\omega = |\omega|(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)$$

de modo que $\omega^n = z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números ω tal que:

$$[|\omega|(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)]^n = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Aplicando a primeira fórmula de De Moivre, temos:

$$|\omega|^n(\cos n\alpha + i \cdot \text{sen}\,n\alpha) = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Da igualdade:

$$\omega^n = |\omega|^n(\cos n\alpha + i \cdot \text{sen}\,n\alpha) = z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

vem $|\omega|^n = |z|$, $\cos n\alpha = \cos\theta$ e $\text{sen}\,n\alpha = \text{sen}\,\theta$.

De $|\omega|^n = |z|$, temos $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$ (sempre real e positivo).

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{(com } k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

Mas, para que $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Assim, concluímos que:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$ (segunda fórmula de De Moivre)

para $k = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$

Após $k = n - 1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n - 1$, temos n raízes distintas.

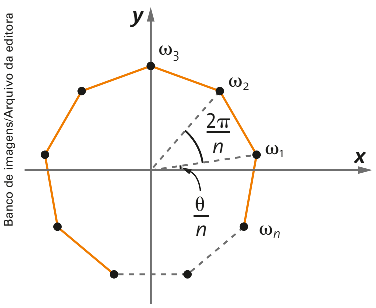
Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Assim, qualquer número complexo z, não nulo, admite n raízes enésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ e seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Geometricamente, as n raízes são vértices de um polígono regular de n lados.

Logo, sabendo uma delas e sabendo quantas são no total, é possível obter as $n - 1$ raízes desconhecidas.



Exercícios resolvidos

25. Determine as raízes cúbicas de $-i$ e interprete-as geometricamente.

Resolução:

Escrevendo z na forma trigonométrica, temos:

$z = -i$

$a = 0$

$b = -1$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \text{sen}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$$

Fique atento!

Números complexos da forma $z = ai$ têm argumento $\frac{\pi}{2}$ para $a > 0$ e $\frac{3\pi}{2}$ para $a < 0$.

Portanto:

$$z = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

Usando a segunda fórmula de De Moivre, vem:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

$\sqrt[3]{1} = 1$ (real positivo)

Como $n = 3$, então k poderá ser 0, 1 ou 2. Assim, temos:

- para $k = 0$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- para $k = 1$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{7\pi}{2}}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- para $k = 2$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{11\pi}{2}}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

Observe que $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ é uma PA de razão $\frac{4\pi}{6}$.

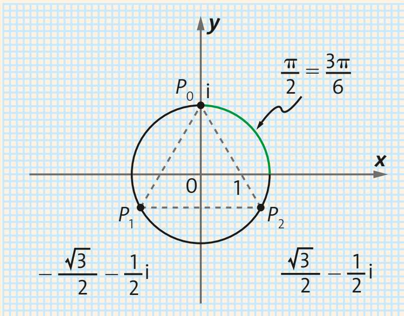
Assim, as raízes cúbicas de $-i$ são:

$$\omega_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$\omega_1 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\omega_2 = 1\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Interpretando geometricamente, as três raízes cúbicas estão sobre uma circunferência de raio $|\omega| = 1$ e dividem a circunferência em três arcos congruentes de $\frac{4\pi}{6}$ rad, formando um triângulo equilátero de vértices P_0, P_1 e P_2. Se calculássemos ω_3, encontraríamos $\omega_3 = \omega_0$ e P_3 coincidiria com P_0. E assim por diante: $P_4 \equiv P_1$, $P_5 \equiv P_2$, etc.



Banco de imagens/Arquivo da editora

26. Encontre as raízes quartas do número complexo $1 + i$.

Resolução:

$z = 1 + i$

$a = 1$

$b = 1$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

Fique atento!

Para $a > 0$, temos:

$a + ai \rightarrow$ argumento $\frac{\pi}{4}$; $-a + ai \rightarrow$ argumento $\frac{3\pi}{4}$;

$-a - ai \rightarrow$ argumento $\frac{5\pi}{4}$; $a - ai \rightarrow$ argumento $\frac{7\pi}{4}$.

Portanto:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Aplicando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \Rightarrow \omega_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$$

Como $n = 4$, então k poderá ser 0, 1, 2 e 3. Assim:

- para $k = 0$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 0}{4} = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$

- para $k = 1$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4} = \frac{\frac{9\pi}{4}}{4} = \frac{9\pi}{16}$$

- para $k = 2$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4} = \frac{\frac{17\pi}{4}}{4} = \frac{17\pi}{16}$$

- para $k = 3$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4} = \frac{\frac{25\pi}{4}}{4} = \frac{25\pi}{16}$$

Observe que os argumentos $\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}$ formam uma PA de razão $\frac{8\pi}{16}$. As raízes quartas de z são dadas por:

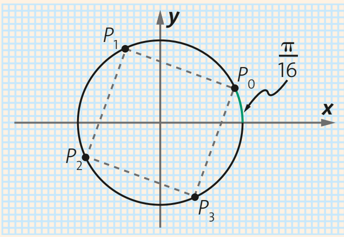
$$\omega_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$\omega_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{25\pi}{16}\right)$$

Geometricamente, as quatro raízes quartas estão sobre uma circunferência de raio $\sqrt[8]{2}$ e dividem a circunferência em quatro arcos congruentes a $\frac{8\pi}{16}$ rad, formando um quadrado de vértices P_0, P_1, P_2 e P_3.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios

Veja as respostas dos exercícios 33 a 35 na seção Respostas.

33. Determinem as raízes quadradas dos seguintes números complexos e deem sua representação geométrica:

a) -4 b) $1 - i$

34. Determinem as raízes quartas dos seguintes números complexos e deem sua representação geométrica:

a) -1 b) $\sqrt{3} + i$

35. Encontrem as raízes cúbicas do número complexo 125 e deem sua representação geométrica.

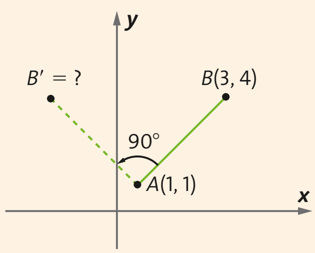
9 Aplicação à Geometria

Uma aplicação importante da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é possibilitar a rotação de coordenadas no plano. Existem algumas aplicações de matrizes à computação gráfica, sendo uma delas a rotação de pontos em relação à origem. Esse mesmo papel exercido por uma matriz de rotação pode ser desempenhado pelos números complexos, pois na multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Portanto, se um ponto (a, b) deve ser rotacionado em relação à origem, em α graus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo $a + bi$ pelo complexo $1(\cos \alpha + i \cdot \text{sen}\, \alpha)$.

Exercícios resolvidos

27. Encontre as novas coordenadas do segmento de reta AB, com $A(1, 1)$ e $B(3, 4)$, após uma rotação de 90° no sentido anti-horário em relação ao ponto A.

Resolução:



O ponto $A(1, 1)$ e o ponto $B(3, 4)$ representam geometricamente os complexos $w = 1 + i$ e $z = 3 + 4i$. Como a rotação é em torno do ponto A, devemos rotacionar apenas o número complexo t que equivale à diferença $z - w$ (no caso, $t = z - w = 2 + 3i$) e depois somá-lo novamente com w. Assim, para haver uma rotação de 90° no sentido anti-horário precisamos multiplicar por i e depois somar $t' + w$, pois a rotação é em torno de w:

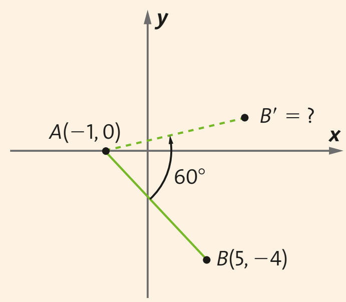
$t' = (2 + 3i) \cdot i = -3 + 2i$

$t' + w = -3 + 2i + 1 + i = -2 + 3i$

Assim, as novas coordenadas do ponto B são -2 e 3, ou seja, o ponto $A(1, 1)$ se mantém após a rotação e $B'(-2, 3)$.

28. Encontre as novas coordenadas do segmento de reta AB, com $A(-1, 0)$ e $B(5, -4)$, após uma rotação de 60° no sentido anti-horário em relação ao ponto A.

Resolução:



O complexo responsável pela rotação pedida é

$1(\cos 60° + i \cdot \text{sen}\, 60°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

$A(-1, 0) = w = -1$

$B(5, -4) = z = 5 - 4i$

O complexo t que representa AB é

$(5 - 4i) - (-1) = 6 - 4i.$

Efetuando a rotação de t, temos:

$$t' = (6 - 4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= 3 + 3\sqrt{3}\,i - 2i + 2\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3} + 3\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)i$$

Então:

$$w + t' = -1 + \left(2\sqrt{3} + 3\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)i =$$

$$= \left(2\sqrt{3} + 2\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right), \text{ ou seja,}$$

$$B'\left(2\sqrt{3} + 2, 3\sqrt{3} - 2\right)$$

O ponto A se mantém $A(-1, 0)$, após a rotação.

Exercício

Veja as respostas deste exercício na seção Respostas.

36. Qual número complexo, na forma algébrica, deve ser usado para se conseguir uma rotação de:

a) 45° anti-horário?

b) 180° anti-horário?

c) 90° horário?

Um pouco mais de História

Apesar de encontrarmos menções a uma raiz quadrada de número negativo em autores da Antiguidade, foi apenas no século XVI, com os matemáticos italianos, que tais raízes começaram a aparecer sistematicamente.

Em 1539, Girolamo Cardano convenceu Niccolò Fontana Tartaglia a revelar seu método de resolver equações cúbicas, sob o juramento de que não o publicaria antes que Tartaglia o fizesse. Ao começar a estudar a fórmula de Tartaglia, Cardano deparou com raízes de números negativos. Escreveu para Tartaglia, relatando suas dificuldades com tais raízes, mas Tartaglia, arrependido de ter revelado sua fórmula, recusou-se a ajudá-lo. Provavelmente Tartaglia não havia entendido que os números complexos estavam surgindo na Matemática.

Em 1543, Cardano descobriu, ao conhecer o trabalho de Scipione del Ferro, que Tartaglia não havia sido o único a descobrir a fórmula para resolver as equações cúbicas. Na óptica de Cardano, isso o desobrigava de seu juramento. Assim, publicou em 1545 sua obra *Ars Magna*, na qual revelava a solução de equações cúbicas e quárticas, além de todo o seu trabalho produzido após seu conhecimento da fórmula de Tartaglia. Cardano e Del Ferro foram creditados pela descoberta, e Tartaglia ficou furioso (hoje em dia a fórmula que resolve as equações cúbicas é chamada, em muitos países, fórmula de Cardano-Tartaglia).

Rafael Bombelli estudou profundamente o trabalho de Cardano, principalmente os casos irredutíveis das equações cúbicas, que levavam a raízes de números negativos. Foi o primeiro matemático a definir as regras de adição e multiplicação para raízes de números negativos. Com suas regras, a fórmula de Cardano-Tartaglia funcionava em qualquer caso, o que o deixava seguro de seus resultados. Foi o primeiro a dar importância aos números complexos.

Cardano não trabalhava com a notação $\sqrt{-15}$, nem Bombelli com $\sqrt{-n}$. Ao longo dos anos, cada matemático que tratava a questão o fazia de um modo diferente. Coube ao suíço Leonhard Euler, em um trabalho de 1777, mas só publicado em 1794, definir $\sqrt{-1}$ como sendo i, de forma que $i^2 = -1$ (como ele mesmo escreveu). Essa mesma notação foi depois usada pelo alemão Johann Carl Friedrich Gauss, em 1801, e essa notação acabou tornando-se padrão.

Em 1749, Euler (que já havia usado i para uma quantidade imaginária, mas sem definir seu significado, e até então só trabalhava com $\sqrt{-1}$) mostrou que, se $a + b\sqrt{-1}$ for raiz de uma equação, $a - b\sqrt{-1}$ também será. Mesmo assim, como a maioria até então, Euler ainda era reticente ao trabalhar com os números complexos.

A grande obra a favor dos números complexos apareceu em 1831, na qual Gauss inventou o termo “números complexos”. Nesse trabalho, ele apresentou uma detalhada explicação de como os números complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano. Gauss já visualizava os números complexos dessa forma desde 1811. Antes dele, matemáticos como o suíço Jean Robert Argand e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) já haviam escrito sobre a representação geométrica dos complexos no plano, porém a pouca representatividade desses matemáticos fez com que seus trabalhos não alcançassem a notoriedade merecida na época.

Finalmente, em 1837, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) galgou o último degrau dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais (a, b) e reescrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

Pensando no Enem

Matriz do Enem: H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

1. Leia o trecho da letra da música a seguir e observe a ilustração.

O Segundo Sol

Cássia Eller

Quando o segundo sol chegar
Para realinhar as órbitas dos planetas
Derrubando com assombro exemplar
O que os astrônomos diriam
Se tratar de um outro cometa

Quando o segundo sol chegar
Para realinhar as órbitas dos planetas
Derrubando com assombro exemplar
O que os astrônomos diriam
Se tratar de um outro cometa

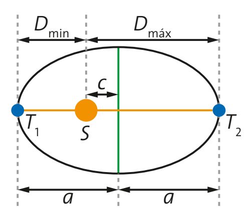
Não digo que não me surpreendi
Antes que eu visse você disse
E eu não pude acreditar
Mas você pode ter certeza

De que seu telefone irá tocar
Em sua nova casa
Que abriga agora a trilha
Incluída nessa minha conversão

Eu só queria te contar
Que eu fui lá fora
E vi dois sóis num dia
E a vida que ardia sem explicação
[...]

Fonte: letras.mus.br. Disponível em: <http://letras.mus.br/cassia-eller/12570/>. Acesso em: 11 maio 2016.

Considerando que o Sol está no ponto *S* indicado na ilustração, sendo a origem do plano cartesiano o centro da elipse, a excentricidade da órbita elíptica do planeta Terra, $e = 0{,}017$, a distância média da Terra até o Sol, 150 (em milhões de quilômetros), e que o segundo sol mencionado na música deverá ficar no outro foco da elipse, então, ele estaria posicionado, aproximadamente, em:



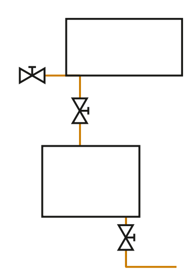
Fique atento!
Esta figura não está representada em proporção e a excentricidade está exagerada para melhor visualização.

a) (–150; 0)
b) (–2,5; 0)
c) (0; 2,5)
d) (150; 0)
x e) (2,5; 0)

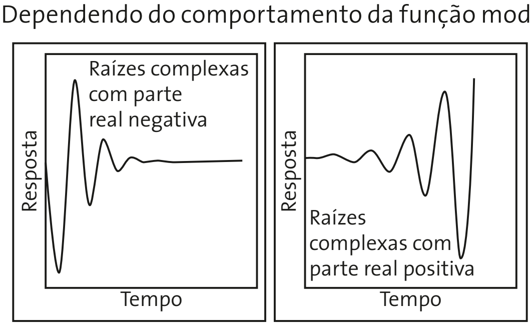
Matriz do Enem: H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

2. Leia o texto a seguir sobre uma das aplicações de números complexos.

Uma das aplicações está na **Engenharia de Controle**. Por exemplo, num sistema de controle da quantidade de água e da taxa de saída. Existe uma válvula que controla a taxa de entrada da água num tanque e existe uma evasão para outro tanque, como mostra o desenho ao lado.



O que os números complexos têm a ver com isso? Para controlar o nível de água de cada tanque existe um modelo matemático que faz esse controle, abrindo e fechando as válvulas através de um sistema elétrico que processa segundo esse modelo matemático. Dependendo do comportamento da função modelo, temos as duas opções graficamente:



Ou seja, se tivermos o número complexo com a parte real negativa, conforme aumenta o tempo, a resposta da função vai se estabilizando, convergindo para um valor. Se a parte real for positiva, conforme aumenta o tempo a resposta da função oscila e diverge. Também podemos aplicar este modelo para controlar temperaturas de tanques, fornos, ou seja, quando envolve dois tanques e tem algo para ser controlado, temos um sistema de 2ª ordem e ele vai ter os números complexos.

Fonte: Matemática Complexa. Disponível em: <https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/aplicacao-dos-numeros-complexos/engenharia-de-controle>. Acesso em: 11 maio 2016.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

A alternativa em que temos dois números complexos e um deles corresponderá a uma função que vai se estabilizando, convergindo para um valor, e o outro, a uma função que vai divergindo, respectivamente, é:

a) $z_1 = -5 + 4i$; $z_2 = -7 + i$
b) $z_1 = 2i$; $z_2 = -8 + 9i$
x c) $z_1 = -6 - 3i$; $z_2 = 7 + 5i$
d) $z_1 = 5 - 4i$; $z_2 = 8 + 6i$
e) $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 5$

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (Ufac) Considere x um número real. Dados os números complexos $w_1 = (x - 7)i$ e $w_2 = -2 + (x + 7)i$, o único caso em que ocorre a igualdade $|w_1| = |w_2|$ é quando:

a) $x = 0$.

b) $x = \frac{1}{7}$.

x c) $x = -\frac{1}{7}$.

d) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. (Uepa) O matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) foi um dos mais profícuos matemáticos de todos os tempos. Dentre suas contribuições tem-se $e^{xi} = \cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x)$, conhecida como relação de Euler. Nessa relação, quando x for igual a π obtém-se $e^{\pi i} + 1 = 0$, identidade que relaciona alguns dos mais importantes números da matemática. O módulo de $e^{(\pi/4)i}$ é:

a) 0

b) 1/2

x c) 1

d) 3/2

e) 2

Região Nordeste

3. (Unifacs-BA) Sobre o número complexo z dado pelo determinante da matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & i^{2\,012} \\ i & 1 \end{pmatrix}$, é correto afirmar-se que:

01. $|z| = 4$.

02. $|z| = 9$.

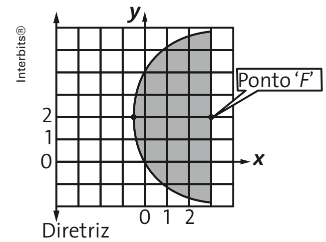
03. é um imaginário puro.

04. tem argumento principal $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

x 05. tem argumento principal $\theta = \frac{11\pi}{3}$.

4. (Uema) Uma família da cidade de Cajapió – MA comprou uma antena parabólica e o técnico a instalou acima do telhado. A antena projetou uma sombra na parede do vizinho, que está reproduzida a seguir, coberta com uma folha quadriculada.

Note que a figura projetada na parede é uma cônica. Considerando as medidas mostradas e o sistema cartesiano contido na folha quadriculada, a equação que representa a cônica será:



x a) $(y - 2)^2 = 7(2x + 1)$.

b) $(y + 2)^2 = 7(2x + 1)$.

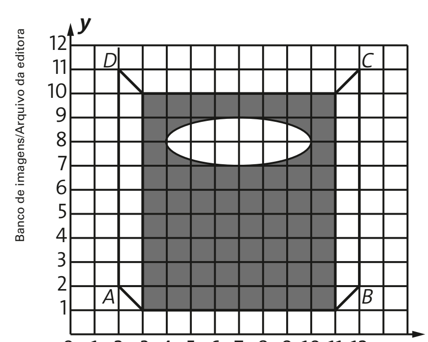
c) $(y - 3)^2 = 12(x + 1)$.

d) $(y - 2)^2 = -7\left(2x - \frac{1}{7}\right)$.

e) $(y + 3)^2 = \frac{12}{7}(x - 1)$.

Região Centro-Oeste

5. (ESCS-DF) A figura a seguir ilustra, no sistema de coordenadas xOy, alguns pontos relativos ao esboço de um biombo de chumbo usado para proteção durante as seções de raio X. O biombo apresenta uma abertura na forma de elipse, onde será colocado um visor de vidro.



Considere que cada ponto (x, y) do sistema de coordenadas apresentado seja identificado por um número complexo $z = x + iy$, em que i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Nessa situação, se os números complexos z_A e z_C correspondem, respectivamente, aos pontos A e C, então a relação $\frac{z_A}{z_C}$ é igual a:

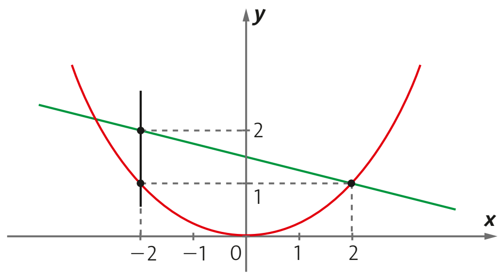
a) $\frac{66 - 2i}{265}$.

b) $\frac{2 - 23i}{23}$.

c) $\frac{33 + 2i}{23}$.

x d) $\frac{46 + 2i}{265}$.

6. (UFG-GO) A região do plano cartesiano, destacada na figura abaixo, é determinada por uma parábola, com vértice na origem, e duas retas.



Esta região pode ser descrita como o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, satisfazendo:

x a) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $\dfrac{x^2}{4} \leqslant y \leqslant -\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$.

b) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $-\dfrac{x^2}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$.

c) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $4x^2 \leqslant y \leqslant -\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$.

d) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $-4x^2 \leqslant y \leqslant -\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$.

e) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ e $\dfrac{x^2}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$.

Região Sudeste

7. (UPM-SP) Dadas as cônicas de equações:

(I) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ e

(II) $4x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$,

indique a alternativa **INCORRETA**.

a) Os gráficos de (I) e (II) são, respectivamente, uma circunferência e uma elipse.

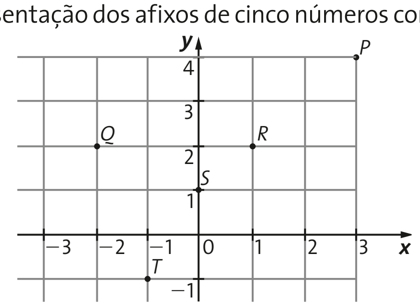
b) As duas cônicas têm centro no mesmo ponto.

x c) As duas cônicas se interceptam em dois pontos distintos.

d) O gráfico da equação (I) é uma circunferência de raio 3.

e) O gráfico da equação (II) é uma elipse com centro $C = (1, -4)$.

8. (Unifev) Considere o plano complexo bem como a representação dos afixos de cinco números complexos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sejam os números complexos $z_1 = 2 - 7i$, $z_2 = 1 + 5i$ e $z_3 = -1 + 3i$. O afixo do número complexo $(z_1 + z_2 + z_3)^2$ é:

a) *R*.

b) *S*.

c) *Q*.

d) *T*.

x e) *P*.

Região Sul

9. (Udesc) A área delimitada por uma elipse cuja equação é $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é dada por $A = ab\pi$. Então, a área da região situada entre as elipses de equações $16x^2 + 25y^2 = 400$ e $16x^2 + 9y^2 = 144$ é:

a) 12π u.a.

b) 20π u.a.

x c) 8π u.a.

d) 256π u.a.

e) π u.a.

10. (UEL-PR) Leia o texto a seguir.

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

(Adaptado de: CARNEIRO, J. P. A Geometria e o Ensino dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática*. 2004. v. 55. p. 18.)

Indique a alternativa que apresenta, corretamente, uma composição de rotação dos pontos $P(-3, 4)$ e $Q(2, -3)$ representados pelos números complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 - 3i$.

a) $-18 + 17i$

b) $-6 - 12i$

c) $-1 + i$

d) $5 + 7i$

x e) $6 + 17i$

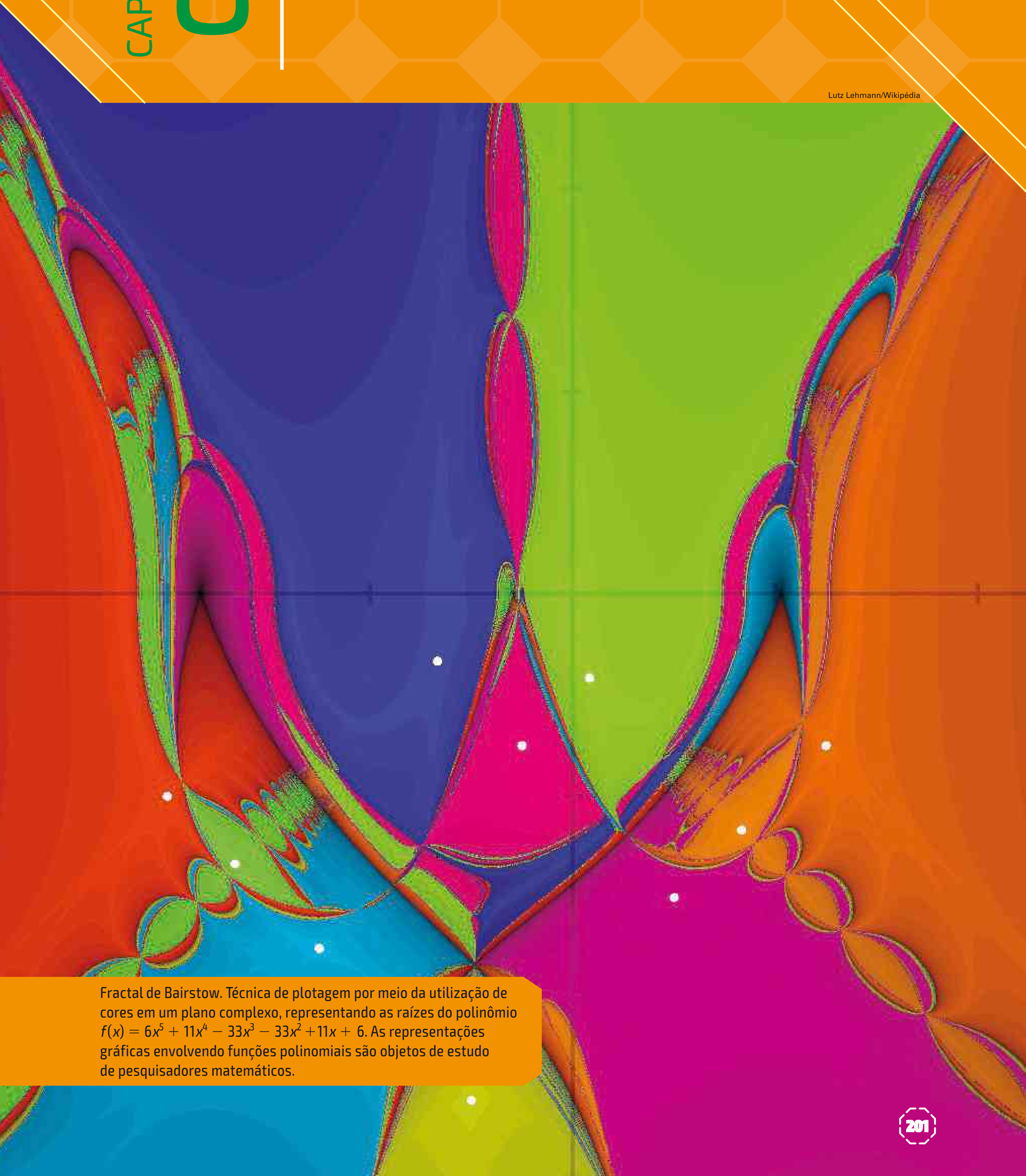
UNIDADE 4

Polinômios, equações algébricas e equações trigonométricas

CAPÍTULO

8 Polinômios

Lutz Lehmann/Wikipédia

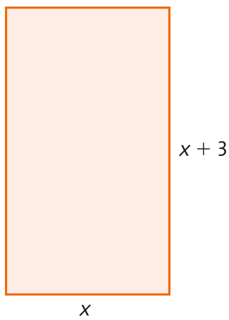


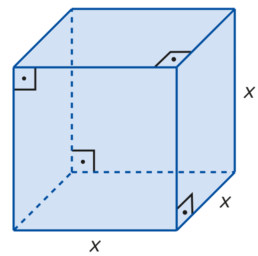
Fractal de Bairstow. Técnica de plotagem por meio da utilização de cores em um plano complexo, representando as raízes do polinômio $f(x) = 6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6$. As representações gráficas envolvendo funções polinomiais são objetos de estudo de pesquisadores matemáticos.

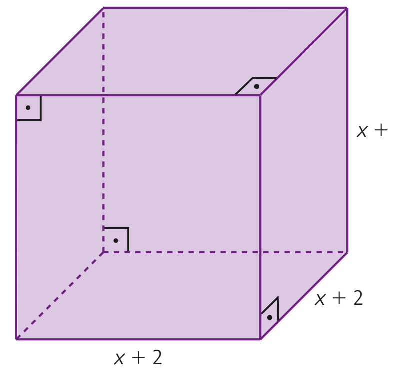
1 Definição

Na resolução de problemas, é comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado nos levam a formular expressões e equações que nos ajudam a resolver o problema. Imagine por exemplo que, em determinados problemas, os enunciados nos levem às seguintes figuras e suas dimensões:

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora







Reúna-se com um colega e façam o que se pede:

a) A primeira figura é uma região retangular de dimensões x e $x + 3$. Determinem as expressões do perímetro e da área dessa figura.
Perímetro: $2x + 2(x + 3)$ ou $4x + 6$ e área: $x(x + 3)$ ou $x^2 + 3x$

b) A segunda figura é um cubo com arestas de medida x. Determinem as expressões da área e do volume dessa figura. Área: $6x^2$ e volume: x^3

c) A terceira figura é outro cubo, com arestas $x + 2$. Determinem as expressões da área e do volume dessa figura.
Área: $6(x + 2)^2$ ou $6(x^2 + 4x + 4)$ ou $6x^2 + 24x + 24$ e volume: $(x + 2)^3$ ou $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Fique atento!
Os polinômios não são novidade, eles devem ter sido estudados no Ensino Fundamental II, quando foi aprendido o conceito de monômio, binômio, polinômio e também algumas operações com eles. No 1º ano do Ensino Médio provavelmente foram estudados os conteúdos de função afim e funções quadráticas.
Agora, retomaremos os conceitos básicos e os aprofundaremos, possibilitando o trabalho com outros graus de funções polinomiais.

Todas essas expressões são chamadas **expressões polinomiais** ou **polinômios**.

Chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa x toda expressão da forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

É possível que os alunos não se lembrem das fórmulas envolvidas na atividade. Se necessário, relembre-os, oralmente, para que possam desenvolver a atividade.

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes;
- n é um número inteiro positivo ou nulo;
- o maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau da expressão.

Veja, por exemplo, as expressões polinomiais:

a) $4x + 6$: expressão polinomial do 1º grau (grau 1).
b) $x^2 + 3x$: expressão polinomial do 2º grau (grau 2).
c) x^3: expressão polinomial do 3º grau (grau 3).
d) $6x^2 + (1 - i)x + 5$: expressão polinomial do 2º grau (grau 2).

Pela definição, **não** são expressões polinomiais:

- $x^{-2} + 3x^{-1} + 1$, pois o expoente da variável x não pode ser negativo.
- $x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$, pois a variável x não pode aparecer em denominador.
- $x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{2}} + 6$, pois o expoente da variável x não pode ser fracionário.
- $\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} + 2$, pois a variável x não pode aparecer sob radical.

Fique atento!
Representamos o grau de um polinômio $p(x)$ por $gr(p)$. Assim, se $p(x)$ é um polinômio de grau n, então $gr(p) = n$.

2 Função polinomial

As funções complexas $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por expressões polinomiais são denominadas **funções polinomiais**.

Assim:

a) $f(x) = 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 1.

b) $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 2.

c) $h(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$ é uma função polinomial de grau 3.

d) $p(x) = x^4 - ix^2$ é uma função polinomial de grau 4.

Fique atento!
Para simplificar, falamos "função polinomial de grau 1", mas, de fato, é o polinômio associado a ela que é de grau 1.

Toda função definida por $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, para todo x complexo, é denominada função polinomial de grau n, em que n é um número inteiro positivo ou nulo e a_n é diferente de 0.

Se o grau de uma função polinomial for 0, então a função é definida por $f(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$.

Exemplos:

a) $f(x) = 5$

b) $p(x) = -2$

Observação: Dois casos importantíssimos de funções polinomiais são: a função afim e a função quadrática. Neste capítulo elas são chamadas, respectivamente, de função polinomial de grau 1 e função polinomial de grau 2. Lembre-se de que tudo que foi aprendido anteriormente para a função afim e para a função quadrática continua valendo e pode ser usado neste capítulo.

Polinômio

A cada função polinomial associa-se um único polinômio (ou expressão polinomial) e vice-versa, de forma que não há confusão em nos referirmos indistintamente às funções polinomiais ou aos polinômios.

Exemplos:

a) $p(x) = 5$ é um polinômio de grau 0 ou polinômio constante.

b) $p(x) = 2x + 1$ é um polinômio do 1º grau.

c) $p(x) = x^2 - 5x + 6$ é um polinômio do 2º grau.

Polinômio identicamente nulo

Define-se o polinômio identicamente nulo como o polinômio cujos coeficientes são todos nulos. Assim, $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ é polinômio nulo se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$.

Observação: Como o polinômio identicamente nulo não tem coeficiente não nulo, não se define grau para ele.

3 Valor numérico de um polinômio

Considere um polinômio $p(x)$ e um número real α.

O valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$ é o número que se obtém substituindo x por α e efetuando os cálculos necessários. Indica-se por $p(\alpha)$.

Então, $p(\alpha)$ é o valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$.

> **Fique atento!**
> O valor numérico de um polinômio equivale à imagem de uma função para um dado valor do domínio.
> O valor numérico do polinômio nulo é 0 para qualquer valor de x.

Exemplos:

a) O valor numérico de $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ para $x = 4$ é:

$p(4) = 2(4)^2 - 3(4) + 5 = 32 - 12 + 5 = 25$

Logo, $p(4) = 25$.

b) Dado $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 10$, o valor de $p(x)$ para $x = 3$ é:

$p(3) = 4(3)^3 - 3(3)^2 + 5(3) - 10 = 108 - 27 + 15 - 10 = 86$

Logo, $p(3) = 86$.

c) Se $p(x) = 3x^2 - 7$, então, para $x = \mathrm{i}$, o valor numérico de $p(x)$ é:

$p(\mathrm{i}) = -3 - 7 = -10$

> **Fique atento!**
> $\mathrm{i}^2 = -1$

Assim, de modo geral, dado o polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$, o valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$ é:

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + a_1\alpha + a_0$$

Observações:

1ª) Se $\alpha = 1$, o valor numérico de $p(x)$ é a soma de seus coeficientes:

$$p(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 \Rightarrow p(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$$

2ª) Se $\alpha = 0$, o valor numérico de $p(x)$ é o termo independente:

$$p(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + a_{n-2} \cdot 0^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 0 + a_0 \Rightarrow p(0) = a_0$$

Exercícios resolvidos

1. Dado o polinômio $p(x) = (m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 - x + 4$, com $m \in \mathbb{R}$, discuta o seu grau.

Resolução:

Fazendo os coeficientes de x^3 e x^2 iguais a 0, temos:

$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

$m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

Analisando, vem:

- Se $m \neq 1$ e $m \neq -1$, o polinômio será do 3º grau.
- Se $m = 1$, o polinômio será do 2º grau.
- Se $m = -1$, o polinômio será do 1º grau.

2. Um polinômio $p(x)$ é do 2º grau. Sabendo que $p(2) = 0$, $p(-1) = 12$ e $p(0) = 6$, escreva o polinômio e determine $p(5)$.

Resolução:

Se $p(x)$ é um polinômio do 2º grau, sua forma é:

$p(x) = ax^2 + bx + c$. Então:

$p(2) = 0 \Rightarrow a(2)^2 + b(2) + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a + 2b + c = 0$ (I)

$p(-1) = 12 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b + c = 12$ (II)

$p(0) = 6 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 6 \Rightarrow c = 6$ (III)

Substituindo (III) em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 1$ e $b = -5$.

Sabendo que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, vamos escrever $p(x)$:

$p(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - 5x + 6$

Agora, vamos calcular $p(5)$:

$p(5) = (5)^2 - 5(5) + 6 = 25 - 25 + 6 = 6$

Logo, $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $p(5) = 6$.

4 Igualdade de polinômios

Dizemos que dois polinômios são iguais ou idênticos se, e somente se, seus valores numéricos são iguais para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = q(\alpha)$$

qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{C}$

Fique atento!
Polinômios de graus diferentes nunca são iguais.

Para que isso aconteça, sua diferença $p(x) - q(x)$ deve ser o polinômio identicamente nulo. Assim, dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são iguais se, e somente se, têm coeficientes respectivamente iguais (os coeficientes dos termos de mesmo grau são todos iguais).

Por exemplo, dados os polinômios $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3$, temos:

$p(x) = q(x) \Leftrightarrow a = 2, b = 5, c = -4$ e $d = 3$

Exercício resolvido

3. Determine os valores de a, b, c, d e e de modo que os polinômios $p(x) = ax^4 + 5x^2 + dx - b$ e $g(x) = 2x^4 + (b - 3)x^3 + (2c - 1)x^2 + x + e$ sejam iguais.

Resolução:
Para que $p(x) = g(x)$, devemos ter:

$a = 2$
$0 = b - 3 \Rightarrow b = 3$
$5 = 2c - 1 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$
$d = 1$
$e = -b = -3$
Logo, $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1$, $e = -3$.

4. Determine α e β de modo que $p(x) = \alpha(x - 1) + \beta(x + 4)$ e $g(x) = 5x + 10$ sejam iguais.

Resolução:
$p(x) = \alpha(x - 1) + \beta(x + 4) = \alpha x - 1\alpha + \beta x + 4\beta =$
$= (\alpha + \beta)x + (-\alpha + 4\beta)$

Se $p(x) = g(x) \Rightarrow (\alpha + \beta)x + (-\alpha + 4\beta) = 5x + 10$

Assim, $\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ -\alpha + 4\beta = 10 \end{cases} \Rightarrow 5\beta = 15 \Rightarrow \beta = 3$

$\alpha + 3 = 5 \Rightarrow \alpha = 2$

Logo, $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

Exercícios

Atividade em dupla
Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

Veja a resposta do exercício 1 na seção Respostas.

1. Discuta, para $m \in \mathbb{R}$, o grau dos polinômios:
a) $p(x) = (m - 4)x^3 + (m + 2)x^2 + x + 1$
b) $p(x) = (m^2 - 4)x^4 + (m - 2)x + m$
c) $p(x) = (m^2 - 1)x^4 + (m + 1)x^3 + x^2 + 3$

2. (Mack-SP) Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2. Não existe m.

3. Dados $p(x) = -3x^3 + x^2 + x - 2$ e $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, calcule $p(-1) + g(1)$. 1

4. Se $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$, para que valores de k temos $p(2) = 4$? $k = 3$

5. Sabendo que $p(2) = 0$ e $p(x) = x^2 - mx + 6$, calcule o valor de m. $m = 5$

6. Consideremos o polinômio $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx + n$. Se $p(2) = 0$ e $p(-1) = -6$, calcule os valores de m e n. $m = 2$ e $n = 4$

7. Determine os valores de a e b para que sejam iguais os polinômios $p(x) = 3x + 2$ e $q(x) = (a + b)x^2 + (a + 3)x + (2 - b)$. $a = 0$ e $b = 0$

8. (UPM-SP) Calcule os valores de m, n e ℓ para os quais o polinômio $p(x) = (2m - 1)x^3 - (5n - 2)x^2 + (3 - 2\ell)$ é nulo. $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{5}$ e $\ell = \frac{3}{2}$

9. (Faap-SP) Calcule os valores de a, b e c para que o polinômio $p_1(x) = a(x + c)^3 + b(x + d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$. $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$

10. (FEI-SP) Determine os valores de a, b e c sabendo que $\dfrac{1}{x^3 - 1} = \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{bx + c}{x^2 + x + 1}$.

$a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ e $c = -\frac{2}{3}$

5 Raiz de um polinômio

Já sabemos que $p(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$.

Se um número complexo α é tal que $p(\alpha) = 0$, então esse número α é chamado **raiz** do polinômio $p(x)$.

Exemplos:

a) Dado o polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 10$, temos:

$p(5) = 0 \Rightarrow 5$ é raiz de $p(x)$

$p(3) = -2 \Rightarrow 3$ não é raiz de $p(x)$

b) Dado o polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, temos:

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz de $p(x)$

$p(3) = 2 \Rightarrow 3$ não é raiz de $p(x)$

c) O número i é raiz do polinômio $p(x) = x^2 + 1$, pois $p(\text{i}) = -1 + 1 = 0$.

d) O número $-$i é raiz do polinômio $p(x) = x^2 + 1$, pois $p(-\text{i}) = (-\text{i})^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Exercícios resolvidos

5. Sabendo que -3 é raiz de $p(x) = x^3 - 4x^2 - ax + 48$, calcule o valor de a.

Resolução:

Se -3 é raiz de $p(x)$, então $p(-3) = 0$.

Daí:

$p(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 - a(-3) + 48 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -27 - 36 + 3a + 48 = 0 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$

Logo, $a = 5$.

6. O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admite as raízes 6 e 1. Calcule os coeficientes a e b.

Resolução:

Se $p(x)$ admite a raiz 6, então $p(6) = 0$.

$p(6) = 6^3 + a(6)^2 + b(6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 216 + 36a + 6b = 0 \Rightarrow 36 + 6a + b = 0$

Se $p(x)$ admite a raiz 1, então $p(1) = 0$.

$p(1) = 1^3 + a(1)^2 + b(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0$

Vamos formar, então, o sistema:

$$\begin{cases} 6a + b = -36 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -7$ e $b = 6$.

Logo, $a = -7$ e $b = 6$.

6 Operações com polinômios

Por meio de exemplos, vamos retomar operações possivelmente já estudadas no Ensino Fundamental II e no 1º ano do Ensino Médio no estudo de expressões algébricas e funções, como adição, subtração e multiplicação de polinômios, além da multiplicação de um número real por um polinômio. Em seguida, estudaremos mais detalhadamente a divisão de polinômios.

a) Se $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 5$, temos:

$p(x) + q(x) = 3x^2 + 2x - 1 - x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = -x^3 + (3 + 4)x^2 + (2 - 2)x + (-1 - 5) = -x^3 + 7x^2 - 6$

b) Se $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $q(x) = 5x^2 - 3x + 4$, temos:

$p(x) - q(x) = 3x^2 - 4x + 1 - 5x^2 + 3x - 4 = -2x^2 - x - 3$

c) Dado $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, temos:

$7 \cdot p(x) = 7(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3) = 14x^3 - 28x^2 + 35x - 21$

d) Dados $p(x) = 3x - 4$ e $q(x) = -2x + 5$, temos:

$p(x) \cdot q(x) = (3x - 4)(-2x + 5) = -6x^2 + 15x + 8x - 20 = -6x^2 + 23x - 20$

Fique atento!

Sejam:

gr(p) o grau de $p(x)$ e gr(q) o grau de $q(x)$.

Então:

- gr($p \pm q$) é o maior valor entre gr(p) e gr(q);
- gr($p \cdot q$) = gr(p) + gr(q).

Exercícios

11. Verifique se o número 3 é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$. Sim.

12. Determine o valor de k nos polinômios:

a) $p(x) = x^3 + 7x^2 - kx + 3$, sabendo que $x = -1$ é raiz do polinômio. $k = -9$

b) $p(x) = 4x^4 - 8x^3 - (k + 5)x^2 + (3k - 2)x + 5 - k$, sabendo que $x = 2$ é raiz do polinômio. $k = 19$

13. Calcule os valores de a e b nos polinômios:

a) $p(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 4)x - 3$, sabendo que 1 e -1 são raízes do polinômio. $a = 5$ e $b = 3$

b) $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$, sabendo que 1 é raiz do polinômio e $p(2) = 25$. $a = 10$ e $b = 6$

14. Determine o valor de a para que o número $1 - i$ seja raiz do polinômio $p(x) = x^2 - 2x + a$. $a = 2$

Veja a resposta do exercício 15 na seção Respostas.

15. Dados os polinômios $p(x) = x^2 - 4x + 3$, $q(x) = -2x + 4$ e $r(x) = 2x^3 - 4x + 5$, calcule:

a) $p(x) + r(x)$

b) $q(x) - p(x)$

c) $-4 \cdot r(x)$

d) $p(x) \cdot q(x)$

e) $[q(x)]^2$

16. Dados os polinômios $p(x) = ax^2 - 8x + b$ e $q(x) = 3x^2 - bx + a - c$, determine a, b e c para os quais $p(x) + q(x)$ é um polinômio nulo.

$a = -3$; $b = -8$ e $c = -11$

Divisão de polinômios

Dados dois polinômios, $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x)$ não nulo, dividir $p(x)$ por $h(x)$ significa encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$ que satisfaçam as seguintes condições:

1ª) $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$;

2ª) o grau de $r(x)$ não pode ser igual nem maior do que o grau de $h(x)$ ou então $r(x) = 0$.

Assim, dizemos que:

- $p(x)$ é o dividendo;
- $h(x)$ é o divisor;
- $q(x)$ é o quociente;
- $r(x)$ é o resto.

Para efetuar a divisão de polinômios usaremos o método da chave, semelhante ao empregado para números inteiros. A divisão de polinômios pelo método da chave é feita de forma semelhante à divisão euclidiana, estudada no Ensino Fundamental II.

Método da chave

Consideremos a seguinte divisão de números inteiros:

1º) $\begin{array}{r\|l} \overset{\frown}{33}7 & 8 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$ $33 : 8 \rightarrow 4$	2º) $\begin{array}{r\|l} \overset{\frown}{33}7 & 8 \\ \cline{2-2} -32 & 4 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$ $4 \cdot 8 = 32$ Subtraindo (ou somando com o sinal trocado): $33 - 32 = 1$	3º) $\begin{array}{r\|l} \overset{\frown}{33}7 & 8 \\ \cline{2-2} -32 & 42 \\ \cline{1-1} 17 & \end{array}$ $17 : 8 \rightarrow 2$	4º) $\begin{array}{r\|l} \overset{\frown}{33}7 & 8 \\ \cline{2-2} -32 & 42 \\ \cline{1-1} 17 & \\ -16 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$ $2 \cdot 8 = 16$ $17 - 16 = 1$

Observemos que:

$$\underbrace{337}_{\text{dividendo}} = \underbrace{8}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{42}_{\text{quociente}} + \underbrace{1}_{\text{resto}}$$

Vamos utilizar a mesma técnica para a divisão de polinômios:

1º) $$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \hline & x \end{array}$$

$x^2 : x = x$

2º) $$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \hline -x^2 + 3x & x \\ \hline -2x + 6 & \end{array}$$

$x(x - 3) = x^2 - 3x$

Trocando o sinal: $-x^2 + 3x$

3º) $$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \hline -x^2 + 3x & x - 2 \\ \hline -2x + 6 & \end{array}$$

$-2x : x = -2$

4º) $$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \hline -x^2 + 3x & x - 2 \\ \hline -2x + 6 & \\ 2x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$-2(x - 3) = -2x + 6$

Trocando o sinal: $2x - 6$

Fique atento!
Quando $r(x) = 0$, dizemos que a divisão é exata e o polinômio $p(x)$ é divisível pelos polinômios $h(x)$ e $q(x)$.

Verificamos que:

$$\begin{array}{ccccccc} p(x) & = & h(x) & \cdot & q(x) & + & r(x) \end{array}$$

$$\underbrace{x^2 - 5x + 6}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x - 3)}_{\text{divisor}}\ \underbrace{(x - 2)}_{\text{quociente}} + \underbrace{0}_{\text{resto}}$$

Fique atento!
O grau de $q(x)$ é a diferença entre os graus de $p(x)$ e $h(x)$.

Vejamos outra divisão de polinômios:

1º) $$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

$x^4 : x^2 = x^2$

2º) $$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 \\ \hline -2x^3 - 5x^2 + 9x - 1 & \end{array}$$

$x^2(x^2 + 3x - 2) = x^4 + 3x^3 - 2x^2$

Trocando o sinal: $-x^4 - 3x^3 + 2x^2$

3º) $$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x \\ \hline -2x^3 - 5x^2 + 9x - 1 & \end{array}$$

$-2x^3 : x^2 = -2x$

4º) $$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x \\ \hline -2x^3 - 5x^2 + 9x - 1 & \\ 2x^3 + 6x^2 - 4x & \\ \hline x^2 + 5x - 1 & \end{array}$$

$-2x(x^2 + 3x - 2) = -2x^3 - 6x^2 + 4x$

Trocando o sinal: $2x^3 + 6x^2 - 4x$

5º) $$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -2x^3 - 5x^2 + 9x - 1 & \\ 2x^3 + 6x^2 - 4x & \\ \hline x^2 + 5x - 1 & \end{array}$$

$x^2 : x^2 = 1$

6º) $$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -2x^3 - 5x^2 + 9x - 1 & \\ 2x^3 + 6x^2 - 4x & \\ \hline x^2 + 5x - 1 & \\ -x^2 - 3x + 2 & \\ \hline 2x + 1 & \end{array}$$

$1(x^2 + 3x - 2) = x^2 + 3x - 2$

Trocando o sinal: $-x^2 - 3x + 2$

Podemos verificar que:

$$\underbrace{x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x^2 + 3x - 2)}_{\text{divisor}}\underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\text{quociente}} + \underbrace{(2x + 1)}_{\text{resto}}$$

Exercícios resolvidos

7. Efetue a divisão de $p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$ por $h(x) = 2x^2 + 4x - 3$ e faça a verificação.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 & 2x^2 + 4x - 3 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 4x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{1-1}
-6x^3 - 10x^2 + 10x - 1 & \\
6x^3 + 12x^2 - 9x \quad & \\ \cline{1-1}
2x^2 + x - 1 & \\
-2x^2 - 4x + 3 & \\ \cline{1-1}
-3x + 2 &
\end{array}$$

Fazendo a verificação, vem:

$q(x) \cdot h(x) + r(x) = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 4x - 3) +$
$+ (-3x + 2) = (2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 13x - 3) +$
$+ (-3x + 2) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 = p(x)$

8. O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ é divisível por $h(x) = x^2 - 3x - 4$. Nessas condições, resolva a equação $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 - x + 4 & x^2 - 3x - 4 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 3x^2 + 4x \quad & x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^2 + 3x + 4 & \\
+x^2 - 3x - 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Então:

$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x^2 - 3x - 4)(x - 1)$

Como $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$, vem:

$(x^2 - 3x - 4)(x - 1) = 0$.

Portanto, a resolução da equação dada recai na resolução de equações de graus menores, que já sabemos fazer:

$$(x^2 - 3x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ou } x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Logo, $S = \{-1, 1, 4\}$.

Resolvido passo a passo

9. (IMT-SP) O resto da divisão do polinômio $x^4 - 3x^3 + 7x^2 - x + 4$ por $x^2 - 2x + 1$ é igual a:

a) $4x^2$
b) $4x$
c) $8x$
d) $8x + 1$
e) $8x - 1$

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dado um polinômio do 4º grau a ser dividido por um polinômio do 2º grau.

b) O que se pede?

Pede-se o resto da divisão entre os dois polinômios.

2. Planejando a solução

Dentre os vários métodos de se fazer uma divisão entre dois polinômios, um dos mais adequados para solucionar a divisão do problema dado é o "método das chaves", explicado anteriormente.

3. Executando o que foi planejado

1ª etapa

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 + 7x^2 - x + 4 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-(x^4 - 2x^3 + x^2) \qquad & x^2 \\ \cline{1-1}
-x^3 + 6x^2 - x + 4 &
\end{array}$$

(o resultado da multiplicação é subtraído do dividendo)

2ª etapa (Prosseguir com a divisão)

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 + 7x^2 - x + 4 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-(x^4 - 2x^3 + x^2) \qquad & x^2 - x \\ \cline{1-1}
-x^3 + 6x^2 - x + 4 & \\
-(-x^3 + 2x^2 - x) \quad & \\ \cline{1-1}
4x^2 \quad + \quad 4 &
\end{array}$$

(o mesmo processo da etapa anterior)

3ª etapa: Encontrar o resto da divisão, pois o resultado da subtração nos dá um resto de grau menor que o grau do polinômio divisor.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 + 7x^2 - x + 4 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-(x^4 - 2x^3 + x^2) \qquad & x^2 - x + 4 \\ \cline{1-1}
-x^3 + 6x^2 - x + 4 & \\
-(-x^3 + 2x^2 - x) \quad & \\ \cline{1-1}
4x^2 \quad + \quad 4 & \\
-(4x^2 - 8x + 4) & \\ \cline{1-1}
8x &
\end{array}$$

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **c**.

5. Ampliando o problema

a) Qual será o resto da divisão do polinômio $x^4 - 3x^3 + 7x^2 - x + 4$ por $x^2 - 2x + 1$ se subtrairmos $8x$ do dividendo? Divisão exata, portanto o resto é zero.

b) Verifique se o novo polinômio obtido com a subtração de $8x$ possui raiz real. Possui raiz real, $x = 1$.

Exercícios

Veja a resposta do exercício 17 na seção Respostas.

17. Efetue a divisão de $p(x)$ por $h(x)$ quando:

a) $p(x) = x^2 + 4x + 3$ e $h(x) = x + 1$.

b) $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ e $h(x) = x + 4$.

c) $p(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24$ e $h(x) = x^2 - 6x + 5$.

18. Sabendo que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ é divisível por $h(x) = x - 2$, resolva no caderno a equação: $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$. $S = \{-1, 2, 5\}$

19. Calculem os valores de m e n para que seja exata a divisão de $p(x) = 2x^3 + mx^2 + nx - 1$ por $h(x) = 2x^2 - x - 1$. $m = 1$ e $n = -2$

20. Dividindo $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por certo polinômio $h(x)$, obtemos o quociente $q(x) = x - 1$ e o resto $r(x) = 2x - 1$.

Determinem o polinômio $h(x)$. $h(x) = x^2 - 3x + 2$

Divisão por $(x - a)$: dispositivo prático de Briot-Ruffini

Há um dispositivo que permite efetuar as divisões por polinômios do tipo $x - a$ de uma maneira muito simples e rápida: é o chamado **dispositivo prático** ou **algoritmo de Briot-Ruffini**.

termo constante do divisor, com sinal trocado	coeficientes de x do dividendo $p(x)$	termo constante do dividendo $p(x)$
	coeficientes do quociente	resto

Vejamos o roteiro desse dispositivo prático, efetuando a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$.

1º) $$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & & & \end{array}$$

2º) $$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

Repetimos (ou "abaixamos") o primeiro coeficiente do dividendo.

3º) $$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & \underbrace{6 + (-5)} & & \\ & 3 & 1 & & \end{array}$$

$3 \cdot 2 = 6$ e $6 + (-5) = 1$

Multiplicamos o termo repetido pelo divisor e somamos o produto com o próximo termo do dividendo.

4º) $$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & \underbrace{6 + (-5)} & \underbrace{2 + 1} & \\ & 3 & 1 & 3 & \end{array}$$

$1 \cdot 2 = 2$ e $2 + 1 = 3$

Repetimos o processo para obter o novo termo do quociente.

5º) $$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & \underbrace{6 + (-5)} & \underbrace{2 + 1} & \underbrace{6 + (-2)} \\ & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$3 \cdot 2 = 6$ e $6 + (-2) = 4$

Pelo quadro, temos:

$$q(x) = 3x^2 + x + 3$$

$$r(x) = 4$$

Logo: $3x^3 - 5x^2 + x - 2 = (x - 2)(3x^2 + x + 3) + 4$

Fique atento!
Na divisão por $x - a$, o resto é sempre uma constante, pois $x - a$ é um polinômio do 1º grau.

Exercícios resolvidos

10. Divida $p(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x + 5$ por $h(x) = x + 3$.

Resolução:

$$\begin{array}{c|cccc:c} -3 & 2 & 7 & 0 & -4 & 5 \\ \hline & \downarrow & \underbrace{-6+7}_{\downarrow} & \underbrace{-3+0}_{\downarrow} & \underbrace{9+(-4)}_{\downarrow} & \underbrace{-15+5}_{\downarrow} \\ & 2 & 1 & -3 & 5 & -10 \end{array}$$

Quociente: $q(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$

Resto: $r(x) = -10$

Logo, $2x^4 + 7x^3 - 4x + 5 =$
$= (x + 3)(2x^3 + x^2 - 3x + 5) - 10$.

11. Determine o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$ por $h(x) = 2x - 1$.

Resolução:

Observe que, nesse caso, o coeficiente de x no binômio não é igual a 1. Para obter o quociente e o resto pedidos, devemos dividir todos os coeficientes de $p(x)$ e de $h(x)$ por 2. Assim, obtemos o quociente procurado $q(x)$, enquanto o resto também ficará dividido por 2 $\left(\text{ou seja, encontramos } \dfrac{r(x)}{2}\right)$.

Então, temos:

$$\frac{p(x)}{2} = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$$

$$\frac{h(x)}{2} = x - \frac{1}{2}$$

Aplicando o dispositivo prático, vem:

$$\begin{array}{c|c:c} \frac{1}{2} & 1 \quad -\frac{5}{2} & 1 \\ \hline & \downarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)}_{\downarrow} & \underbrace{-1+1}_{\downarrow} \\ & 1 \quad -2 & 0 \end{array}$$

Quociente:

$q(x) = x - 2$

Resto:

$$\frac{r(x)}{2} = 0 \Rightarrow r(x) = 0$$

Logo, $2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$.

Fique atento!

$p(x) = \underbrace{h(x)}_{(ax\,-\,b)} \cdot q(x) + r(x)$

dividido por $a \neq 0$:

$$\frac{p(x)}{a} = \frac{(ax - b)q(x)}{a} + \frac{r(x)}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{a} = \overbrace{\left(x - \frac{b}{a}\right)}^{\frac{h(x)}{a}} q(x) + \frac{r(x)}{a}$$

Exercícios

Veja a resposta dos exercícios 21 e 23 na seção Respostas.

21. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $p(x) = 5x^2 - 3x + 2$ por $h(x) = x + 3$.

b) $p(x) = x^4 + 3x^2 + x - 5$ por $h(x) = x + 2$.

c) $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ por $h(x) = x - 4$.

d) $p(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$ por $h(x) = x - 5$.

e) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $h(x) = 2x - 1$.

22. Calcule o valor de a, sabendo que:

a) $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + a$ é divisível por $h(x) = x - 1$. $a = -1$

b) $p(x) = 2x^3 + ax^2 + (2a + 1)x + a + 3$ é divisível por $x + 4$. $a = \dfrac{43}{3}$

23. Nos esquemas seguintes foi aplicado o dispositivo prático de Briot-Ruffini; calcule, então, o dividendo $p(x)$, o divisor $h(x)$, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$.

a) $$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & a & b & c & d \\ \hline & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{c|cccc:c} 3 & m & n & p & q & r \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

24. (PUC-SP) Calculem os valores de a e b para que o polinômio $p(x) = x^3 + ax + b$ seja divisível por $g(x) = (x - 1)^2$. $a = -3$ e $b = 2$

25. Efetuem a divisão do polinômio $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + ix - 3i$ por $(x + i)$.
$q(x) = 3x^2 + (-2 - 3i)x + (-3 + 3i)$; $r(x) = 3$

Teorema de D'Alembert

Este teorema diz que:

> O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é $p(a)$.

Antes de fazer a demonstração, vamos verificar o teorema por meio de um exercício.

Vamos determinar o resto da divisão de $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$ por $x + 2$ e compará-lo com $p(-2)$.

- Usando o método da chave:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\,x^2 & -\,2x & +\,3 & x+2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -\,2x^2 & & & x^2-3x+4 \\
\cline{1-2}
 & -3x^2 & -\,2x & +\,3 & \\
 & 3x^2 & +\,6x & & \\
\cline{2-3}
 & & 4x & +\,3 & \\
 & & -4x & -\,8 & \\
\cline{3-4}
\text{resto} \longrightarrow & & & -5 &
\end{array}
$$

- Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrr:rl}
-2 & 1 & -1 & -2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -3 & 4 & -5 & \longleftarrow \text{resto}
\end{array}
$$

- Verificando o teorema de D'Alembert:

$$p(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 2(-2) + 3 = -8 - \cancel{4} + \cancel{4} + 3 = -5$$

Agora faremos a demonstração.

Considerando que da divisão de $p(x)$ por $x - a$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto r, temos:

$$p(x) = (x - a)\,q(x) + r$$

Fazendo $x = a$, vem:

$$p(a) = (a - a)\,q(a) + r = 0 \cdot q(a) + r = r \Rightarrow r = p(a)$$

> **Fique atento!**
> Na substituição de x por a o resto r não muda, pois é um valor constante.

Exercícios resolvidos

12. Calcule o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ por $h(x) = x - 4$.

Resolução:

De acordo com o teorema de D'Alembert:

$p(4) = 2(4)^3 - (4)^2 + 5(4) - 3 =$

$= 128 - 16 + 20 - 3 = 129$

Logo, o resto dessa divisão é 129.

13. Determine o valor de a de modo que o polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - ax + 2$ seja divisível por $h(x) = x - 2$.

Resolução:

Se $p(x)$ é divisível por $h(x)$, o resto da divisão é 0. Então, pelo teorema de D'Alembert, temos:

$p(2) = 0 \Rightarrow 2(2)^3 + 5(2)^2 - a(2) + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 + 20 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = 38 \Rightarrow a = 19$

Logo, $a = 19$.

Exercícios

26. Calcule o resto da divisão de:

a) $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ por $h(x) = x - 1$. -2

b) $p(x) = x^4 + 2x^2 - x - 5$ por $h(x) = x + 3$. 97

27. Verifique se o polinômio $p(x) = x^2 - 3x + 2$ é divisível por $x + 3$. Não.

28. Determine b e c de modo que o polinômio $p(x) = x^4 + x^2 + bx + c$ seja divisível por $h(x) = x - 2$, mas, quando dividido por $g(x) = x + 2$, deixe resto igual a 4. $b = -1$ e $c = -18$

29. Considerem o polinômio $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + k$ e respondam:

a) Se -2 é raiz de $p(x)$, qual é o valor de k? $k = 8$

b) Se $k = 1$, qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 3$? 28

c) Se $k = 1 - i$, então $2i$ é ou não é raiz de $p(x)$? Não é raiz.

30. Determinem o polinômio $p(x)$ do 3º grau que se anula para $x = 1$ e que, dividido por $x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$, apresenta resto igual a 6. $x^3 + x^2 - 4x + 2$

Teorema do fator

Se c é uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, então $x - c$ é um fator de $p(x)$.

Pelo teorema de D'Alembert, da divisão de $p(x)$ por $x - c$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto $p(c)$ tal que:

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$$

Se c é uma raiz de $p(x)$, então $p(c) = 0$ e temos:

$$p(x) = (x - c)q(x)$$

Portanto, $x - c$ é um fator de $p(x)$.

Como consequência, podemos dizer que $p(x)$ é divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, $p(x)$ for divisível por $(x - a)(x - b)$.

Para refletir
Demonstre a recíproca: se $x - c$ é um fator de $p(x)$, então c é raiz de $p(x)$.

Veja a resolução no Manual do Professor.

Exercícios resolvidos

14. Dado $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$, determine o valor numérico de $p(x)$ para $x = 3$, $x = 2$ e $x = 0$. A seguir, escreva $p(x)$ como produto de dois fatores.

Resolução:

- $p(3) = (3)^3 + (3)^2 - 10(3) + 8 = 27 + 9 - 30 + 8 = 14$
- $p(2) = (2)^3 + (2)^2 - 10(2) + 8 = 8 + 4 - 20 + 8 = 0$
- $p(0) = (0)^3 + (0)^2 - 10(0) + 8 = 8$

Como $p(2) = 0$, então $x - 2$ é um fator de $p(x)$.

Então, vamos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

2	1	1	−10	8
	1	3	−4	0

Logo, $q(x) = x^2 + 3x - 4$.

Então:

$p(x) = (x - 2)(x^2 + 3x - 4)$

15. Determine os valores de a e b para que o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 20$ seja divisível por $(x + 1)(x - 4)$.

Resolução:

Para que $p(x)$ seja divisível por $(x + 1)(x - 4)$, ele deve ser divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 4)$.

Se $p(x)$ é divisível por $x + 1$, temos:

$p(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 20 = 0 \Rightarrow -1 + a - b + 20 = 0 \Rightarrow a - b = -19$

Se $p(x)$ é divisível por $x - 4$, vem:

$p(4) = 0 \Rightarrow (4)^3 + a(4)^2 + b(4) + 20 = 0 \Rightarrow 64 + 16a + 4b + 20 = 0 \Rightarrow 4a + b = -21$

Então, temos:

$$\begin{cases} a - b = -19 \\ 4a + b = -21 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -8$ e $b = 11$.

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 31 e 32 no Manual do Professor.

31. Mostre que $x + 4$ é fator do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 18x + 8$ e calcule o quociente de $p(x)$ por $x + 4$.

32. Dado $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, determine o valor numérico de $p(x)$ para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$. A seguir, escreva no caderno os fatores de $p(x)$.

33. Determine o resto da divisão do polinômio $p(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 1$ por $q(x) = 3x - 6$. 43

34. (Fumec-MG) Determine m e n de modo que $p(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $(x - 2)(x + 1)$. $m = -6$ e $n = 1$

Esta atividade é muito importante para que o aluno observe o comportamento do gráfico de outras funções polinomiais além das de 1º e 2º graus.

Gráfico de funções polinomiais

Para construir gráficos de funções polinomiais vamos novamente utilizar o *software* GeoGebra.

Vamos construir o gráfico de uma função polinomial do 4º grau $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ com coeficientes variáveis. Para isso siga os passos abaixo.

1º passo: Na Barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do *mouse*, inicialmente, na opção "Controle Deslizante": a = 2

Em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (Região gráfica) e clique em "OK". Nesse instante aparecerá o parâmetro *a* (com valor inicial igual a 1): a = 1

Repita a operação e insira novos parâmetros (*b*, *c*, *d* e *e*).

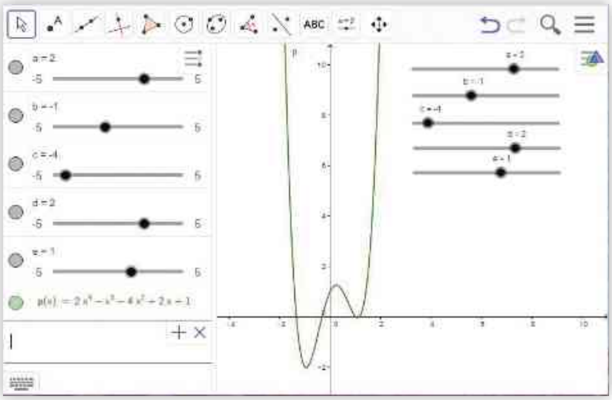
2º passo: No campo Entrada de comando (situado na parte esquerda da tela) digite o polinômio:

$p(x) = a*x^4 + b*x^3 + c*x^2 + d*x + e$, em seguida, tecle "Enter". Observe que * significa a operação de multiplicação e ^ significa a operação de potenciação.

3º passo: Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do *mouse* no gráfico da função polinomial. Na aba que será apresentada clique em "Propriedades". Clique na aba "Cor" e escolha uma nova cor para o seu gráfico. Em seguida, clique na aba "Estilo" e coloque a espessura da linha em aproximadamente 7. Feche a janela e observe que o gráfico ficou destacado.

4º passo: Na Barra de ferramentas (parte superior da tela) clique na "Barra de estilos" e, depois, em "Exibir ou esconder a malha", selecione a malha quadriculada.

5º passo: Para observar significados importantes para os coeficientes *a*, *b* e *c*, clique na bolinha do controle deslizante de *a* e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados). Observe o que acontece com o gráfico da função polinomial. Repita a operação para os controles deslizantes de *b*, *c*, *d* e *e* (utilize um controle deslizante por vez). Por exemplo, se $a = 2$, $b = -1$, $c = -4$, $d = 2$ e $e = 1$, a curva é a seguinte:



Captura da tela do 5º passo.

6º passo: Para determinar os pontos em que a curva intersecta os eixos coordenados, deve-se digitar no campo de entrada **Intersecção [*p*, *x* = 0]** e teclar "Enter" para obter o ponto em que a curva intersecta o eixo das ordenadas (eixo *y*) e **Intersecção [*p*, *y* = 0]** e teclar "Enter" para obter o ponto em que a curva intersecta o eixo das abscissas (eixo *x*).

Observação: Para obter as raízes do polinômio, basta analisar as abscissas dos pontos obtidos ao digitar **Intersecção [*p*, *y* = 0]** ou **Raiz [*p*]**.

Fique atento!
Você pode mover, ampliar ou reduzir sua imagem utilizando o botão da Barra de ferramentas. Outra opção para aumentar ou diminuir o *zoom* é utilizar o *scroll* do *mouse* (aquela "rodinha" que fica na parte superior da maioria dos *mouses*).

Agora, utilizando o controle deslizante, faça o que se pede.

1. Tendo como base a função polinomial $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, qual é o efeito do parâmetro *e* no gráfico da função?
Ao modificar o parâmetro e, o gráfico desloca-se verticalmente.

2. Obtenha os gráficos das funções polinomiais a seguir e, se existirem, suas raízes reais:
a) $p(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$
b) $p(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$
c) $p(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$
Veja os gráficos no Manual do Professor.

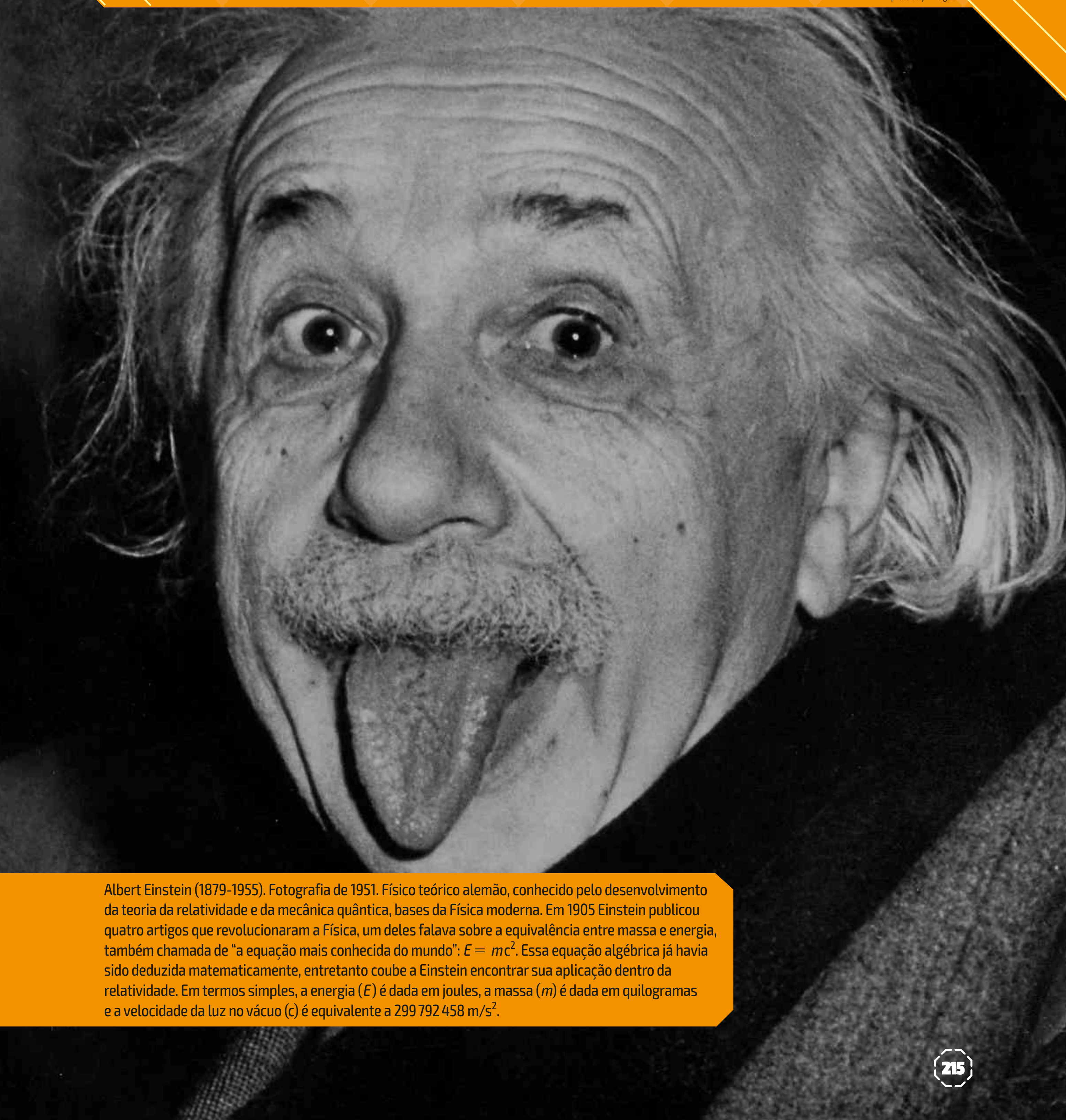
Salve suas atividades em um local escolhido do seu computador.

CAPÍTULO 9

Equações algébricas

O conteúdo de Física moderna geralmente é tratado no 3º ano do Ensino Médio. Em parceria com o professor de Física, verifique a possibilidade de realização de uma aula contextualizada sobre a importância da equação $E = mc^2$ na Física moderna.

Apic/Getty Images



Albert Einstein (1879-1955). Fotografia de 1951. Físico teórico alemão, conhecido pelo desenvolvimento da teoria da relatividade e da mecânica quântica, bases da Física moderna. Em 1905 Einstein publicou quatro artigos que revolucionaram a Física, um deles falava sobre a equivalência entre massa e energia, também chamada de "a equação mais conhecida do mundo": $E = mc^2$. Essa equação algébrica já havia sido deduzida matematicamente, entretanto coube a Einstein encontrar sua aplicação dentro da relatividade. Em termos simples, a energia (E) é dada em joules, a massa (m) é dada em quilogramas e a velocidade da luz no vácuo (c) é equivalente a 299 792 458 m/s^2.

1 Equações algébricas ou polinomiais

A solução de certas equações do 2º grau já era conhecida pelos babilônios desde 2000 a.C. Como não havia símbolos para a representação dos objetos matemáticos além dos números, naquela época tudo era enunciado com palavras. Veja um exemplo.

Babilônia (2000 a.C.)

No tablete YBC 4652, que se encontra no museu da Universidade de Yale (EUA), aparece o seguinte problema:

Eu somei a área de um quadrado com $\frac{2}{3}$ do seu lado e encontrei $\frac{35}{60}$. Quanto mede o lado desse quadrado?

Esse enunciado equivale, em notação moderna, à equação $x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)x = \frac{35}{60}$, em que x é o lado do quadrado. A maneira de resolver aparece em seguida, na forma de instruções sobre os cálculos que devem ser realizados para se encontrar a resposta, neste caso, $x = \frac{1}{2}$. Confira que a resposta está correta, o que é notável, uma vez que para resolver uma equação do tipo $x^2 + ax = b$ as instruções são equivalentes à fórmula $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$, que é correta, como você pode verificar.

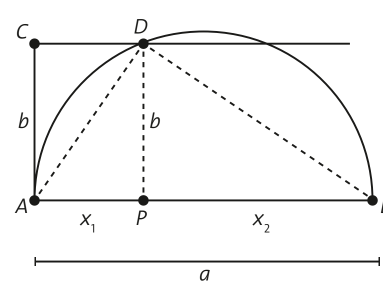
Desde a época dos babilônios, diversos povos sabiam resolver equações do 2º grau, sempre por instruções verbais. Entretanto, os gregos criaram métodos geométricos para resolver certas equações do segundo grau a partir de construções com régua e compasso. As raízes de certas equações podiam ser encontradas representadas por segmentos de reta. Observe o exemplo a seguir.

Grécia (300 a.C.)

Resolver a equação (em notação moderna) $x^2 + b^2 = ax$, em que a e b são medidas de segmentos de reta dadas.

As instruções eram as seguintes:

- Desenhe a circunferência de diâmetro $AB = a$.
- Trace $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ com $AC = b$.
- A paralela a $\overline{AB}$ por C corta a circunferência em D.
- A projeção de D sobre $\overline{AB}$ é P.
- As raízes são $x_1 = AP$ e $x_2 = PB$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Por que esse desenho constrói as raízes da equação $x^2 + b^2 = ax$?

Observando a figura acima, note que a soma das duas raízes é a e que APD, BPD e ADB são triângulos retângulos (os dois primeiros em $\hat{P}$ e o terceiro em $\hat{D}$). Então, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$AB = x_1 + x_2 = a, AD = \sqrt{x_1^2 + b^2} \text{ e } DB = \sqrt{x_2^2 + b^2}.$$

Logo:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 + b^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 = x_1^2 + b^2 + x_2^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x_1^2} + 2x_1x_2 + \cancel{x_2^2} = \cancel{x_1^2} + 2b^2 + \cancel{x_2^2} \Rightarrow 2x_1x_2 = 2b^2 \Rightarrow x_1x_2 = b^2$$

Em resumo, na equação $x^2 - ax + b^2 = 0$, a soma das duas raízes é a e o produto delas é b^2.

Como vimos no Capítulo 7, a equação do 3º grau foi resolvida algebricamente no século XVI. Mas bem antes dessa época apareceu uma construção geométrica de uma equação do 3º grau. Vamos ver a seguir um pedaço dessa história.

Construção geométrica de uma equação do 3º grau

No ano de 762 o califa Al-Mansur iniciou a construção da cidade de Bagdá para ser a nova capital do império islâmico, substituindo Damasco. Mansur era interessado em ciência e fundou uma biblioteca que se dedicou a traduzir para o árabe textos persas, hindus e gregos.

Também em Bagdá, nasceu Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi (780-850). Al-Khowarizmi estudou na biblioteca fundada por Al-Mansur e escreveu dois livros que influenciaram decisivamente a Matemática. O primeiro livro tratava dos números, da notação posicional dos hindus e do cálculo aritmético; o segundo livro, com o título *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr w'al-muqabala* (Tratado sobre o cálculo por restauração e balanceamento), é considerado o percussor da *al-jabr*, expressão que originou o que conhecemos hoje como Álgebra.

The Oxford Hystory of Islam/Oxford University

Página do tratado de Al-Khowarizmi, escrito por volta de 825.

The Bridgeman Art Library/Keystone

Gravura de Omar Khayyam (1048-1131). Colorizada.

O matemático Al-Khowarizmi foi quem propôs a reorganização dos termos que aparecem na equação para se chegar à solução. A Álgebra surgiria com essa finalidade: resolver equações.

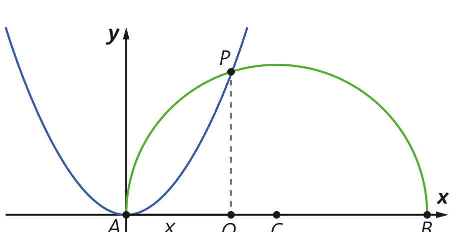
Cerca de 200 anos depois da morte de Al-Khowarizmi nasceu em Nishapur, Irã, Omar ibn Ibrahim al-Khayyam, que viria a ser um dos grandes expoentes persas, atuando como poeta, filósofo, matemático, médico e astrônomo. Ainda jovem, Omar Khayyam mudou-se para Samarkanda, uma das cidades mais antigas da Ásia central, e lá escreveu um grande tratado chamado *Maqalat fi al-jabr w'al-muqabala* (Demonstração de problemas por restauração e balanceamento), no qual classificou as equações cúbicas nos seus diversos tipos e propôs construções geométricas para algumas. As equações, apesar de estudadas com coeficientes quaisquer, eram expressas unicamente com palavras, e as soluções eram encontradas pela interseção de cônicas. Vamos ver um exemplo.

Samarkanda, Usbequistão (1070)

A equação $x^3 + a^2x = b$ era escrita assim: "um cubo e algumas raízes são iguais a um número". A construção geométrica para visualizar a raiz da equação também era descrita com palavras. Em linguagem moderna seria o equivalente à descrição que segue:

Em um sistema de coordenadas, se A é a origem e B está no eixo x com abscissa $\frac{b^2}{a}$, então a raiz da equação $x^3 + a^2x = b$ é a abscissa do ponto de interseção da circunferência de diâmetro AB com a parábola de equação $y = \frac{x^2}{a}$.

Para demonstrar, observe que a ordenada de P é $y = QP = \frac{x^2}{a}$ e que, como o diâmetro da circunferência é $\frac{b^2}{a}$, então $AC = CP = \frac{b}{2a^2}$. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo PQC, retângulo em $\hat{Q}$, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{2a^2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2a^2}\right)^2$$

Desenvolvendo e simplificando, chegamos exatamente à equação $x^3 + a^2x = b$.

2 Definições e elementos

> **Você sabia?**
> As equações do 1º grau e do 2º grau são casos particulares de equações algébricas.

Reúna-se com um colega e resolvam as equações a seguir, ou seja, determinem as raízes de cada uma delas: Esta atividade é importante para detectar o conhecimento prévio dos alunos. Se necessário, forneça mais equações para eles resolverem.

a) $x + 3 = 0$ $S = \{-3\}$
b) $2x - 5 = 0$ $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
c) $x^2 - 9 = 0$ $S = \{3, -3\}$
d) $2x^2 + 8x = 0$ $S = \{0, -4\}$
e) $x^2 - 4x + 3 = 0$ $S = \{1, 3\}$
f) $x^2 + 3x - 10 = 0$ $S = \{-5, 2\}$

Denomina-se **equação algébrica** ou **polinomial** toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

em que os a_i (a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0) são elementos do conjunto dos números complexos, $n \in \mathbb{N}^*$ e n é o grau da equação.

Exemplos:

a) $3x + 1 = 0$ é uma equação algébrica do 1º grau.
b) $x^2 - 3x - 4 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau.
c) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ é uma equação algébrica do 3º grau.
d) $x^4 - 8x = 0$ é uma equação algébrica do 4º grau.
e) $3x^2 - 2ix + 1 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau.

Raiz de uma equação polinomial ou algébrica

Denomina-se **raiz** da equação algébrica

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

o valor α de x que satisfaz a igualdade, ou seja, o valor tal que:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$$

Exemplos:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ admite $x = 5$ como raiz, pois $(5)^2 - 7(5) + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$.
b) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ admite $x = 1$ como raiz, pois $(1)^3 - 3(1)^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.
c) $x^4 + x^3 - x^2 - 4 = 0$ admite $x = -2$ como raiz, pois $(-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 - 4 = 16 - 8 - 4 - 4 = 0$.
d) $x^2 + 1 = 0$ admite $x = i$ como raiz, pois $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

> **Fique atento!**
> Se a soma dos coeficientes do polinômio for nula, então 1 é a raiz do polinômio.

Conjunto solução de uma equação algébrica

Denomina-se **conjunto solução** de uma equação algébrica o conjunto das raízes da equação.

Exemplos:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

$S = \{2, 5\}$

b) $3x - 5 = 0$

$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

c) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

$S = \{-2, -1, 2\}$

d) $x^2 + 1 = 0$

$S = \{-i, i\}$

3 Teorema fundamental da Álgebra

O **teorema fundamental da Álgebra**, que admitiremos sem demonstração, diz que:

> Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau n ($n \geqslant 1$) possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Esse teorema foi demonstrado em 1799 pelo matemático Carl F. Gauss, então com 21 anos, em sua tese de doutorado.

4 Decomposição em fatores de 1º grau

Usando o **teorema fundamental da Álgebra**, é possível demonstrar que:

> Todo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (com $n \geqslant 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto em um produto de n fatores de 1º grau.
> $$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

Naturalmente:

$$p(x) = 0 \Rightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n) = 0$$

ou seja, toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes complexas (reais ou não).

Exercícios resolvidos

1. Uma das raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ é 1. Resolva essa equação.

> **Fique atento!**
> Lembre-se de que resolver a equação significa determinar seu conjunto solução, que neste caso é formado pelo número 1 e pelas demais raízes.

Resolução:

Se 1 é raiz de $p(x) = 0$, temos:

$p(x) = (x - 1)q_1(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ ou $q_1(x) = 0$

Observando que o grau de $q_1(x)$ é 2 e sabendo resolver uma equação do 2º grau, podemos dizer que $q_1(x) = 0$ fornece as outras raízes.

Determinando $q_1(x)$ pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

1	2	−4	−2	4
	2	−2	−4	0

$q_1(x) = 2x^2 - 2x - 4$

Determinando as raízes de $q_1(x) = 0$, vem:

$2x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36$

$x = \dfrac{2 \pm 6}{4} \Rightarrow x' = 2$ e $x'' = -1$

Logo, as outras raízes são 2 e −1 e o conjunto solução da equação é $S = \{-1, 1, 2\}$.

> **Fique atento!**
> O polinômio $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ pode ser decomposto assim: $2(x + 1)(x - 1)(x - 2)$.

2. Resolva a equação $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$, sabendo que −2 e 1 são raízes da equação.

Resolução:

Se −2 e 1 são raízes de $p(x)$, temos:

$p(x) = (x + 2)(x - 1)q_1(x) = 0$

Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, dividindo $p(x)$ por $x + 2$ e, em seguida, dividindo o quociente dessa divisão por $x - 1$, vem:

−2	1	−1	−7	1	6
1	1	−3	−1	3	0
	1	−2	−3	0	

$q_1(x) = x^2 - 2x - 3$

Determinando as raízes de $q_1(x) = 0$, obtemos:

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 16$

$x = \dfrac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = -1$

Logo, $S = \{-2, -1, 1, 3\}$.

3. Escreva um polinômio cujas raízes são apenas 1, -1 e 2 de tal modo que cada uma apareça uma única vez.

Resolução:
Como o polinômio tem três raízes diferentes, e cada uma aparece uma única vez, $p(x)$ é do 3º grau:

$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Fazendo $a_n = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 2$, temos:

$p(x) = 1(x - 1)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Logo, $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

4. Qual é a forma fatorada do polinômio $3x^3 - 15x^2 - 3x + 15$, cujas raízes são 1, -1 e 5?

Resolução:
Pela decomposição, temos:

$p(x) = 3(x - 1)(x + 1)(x - 5)$

Exercícios

Atividade em dupla — Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Sabendo que 2 é raiz da equação $x^3 + 2x^2 - 5x + c = 0$, calcule o valor de c e o conjunto solução da equação. $c = -6$ e $S = \{-3, -1, 2\}$

2. Resolva no caderno as equações abaixo:

a) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são -1 e 1. $S = \{-1, 1, 1 + i, 1 - i\}$

b) $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$, sabendo que -2 é uma de suas raízes. $S = \{-2, 3, 6\}$

3. Determine o conjunto solução das equações:

a) $x^4 - 8x^3 - 25x^2 + 44x + 60 = 0$, sabendo que -1 e 2 são duas de suas raízes. $S = \{-1, 2, 10, -3\}$

b) $x^3 - ix^2 + 4x - 4i = 0$, sabendo que i é uma de suas raízes. $S = \{i, 2i, -2i\}$

4. Dada a equação $2x^3 - mx^2 - 2x + 4 = 0$, calculem o valor de m para que uma das raízes da equação seja 2. A seguir, calculem as outras raízes dessa equação. $m = 4$, raízes: 2, 1 e -1

5. Encontrem os valores de a, b e c sabendo que 2, 4 e -3 são raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. $a = -3$; $b = -10$ e $c = 24$

6. (PUC-SP) Dado o polinômio Se achar necessário, relembre os alunos da regra de Sarrus.

$$f = \begin{vmatrix} x & x & x \\ x+1 & -2 & x-1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ pedem-se:}$$

a) as raízes de f; $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$

b) o quociente e o resto da divisão de f por $x^2 - 1$. $q(x) = x$; $r(x) = -2x$

Multiplicidade da raiz

Na decomposição de um polinômio $p(x)$ de grau $n > 0$ em um produto de n fatores do 1º grau, podemos encontrar dois ou mais fatores idênticos.

Então, em uma equação algébrica de grau n, obtemos n raízes, das quais algumas podem ser iguais, ou seja, toda equação algébrica de grau $n > 0$ tem, no máximo, n raízes distintas.

Fique atento!
De cada fator do 1º grau, obtemos uma raiz.

O número de vezes que uma mesma raiz aparece indica a multiplicidade da raiz.

Exemplos:

a) No polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$ há dois fatores idênticos a $(x - 3)$. Nesse caso, dizemos que 3 é **raiz dupla** ou de **multiplicidade 2**.

b) No polinômio $p(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2) = (x + 1)(x + 1)(x - 2)$ há dois fatores idênticos a $(x + 1)$ e um fator $(x - 2)$. Nesse caso, dizemos que -1 é **raiz dupla** ou de **multiplicidade 2**, e 2 é **raiz simples** ou de **multiplicidade 1**.

c) No polinômio $p(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 18x^2 - 27x - 27 = (x - 3)^3(x + 1)^2 = (x - 3)(x - 3)(x - 3)(x + 1)(x + 1)$ há três fatores idênticos a $(x - 3)$ e dois fatores idênticos a $(x + 1)$. Nesse caso, dizemos que 3 é **raiz tripla** ou de **multiplicidade 3**, e -1 é **raiz dupla** ou de **multiplicidade 2**.

Exercícios resolvidos

5. Qual é a multiplicidade da raiz 2 do polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$?

Resolução:

Vamos eliminar a raiz 2 do polinômio sucessivas vezes, até que isso não seja mais possível.

sim →	2	1	−5	6	4	−8
sim →	2	1	−3	0	4	0
sim →	2	1	−1	−2	0	
não →	2	1	1	0		
		1	$3 \neq 0$			

Então:

$p(x) = (x - 2)^3(x + 1)$

Logo, 2 é raiz tripla ou de multiplicidade 3.

6. Resolva a equação $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$ sabendo que −1 é raiz dupla.

Resolução:

Se −1 é raiz dupla da equação, esta pode ser escrita na forma $(x + 1)^2q(x) = 0$.

Para determinar $q(x)$, devemos eliminar da equação a raiz −1 duas vezes sucessivas:

−1	1	−3	−3	7	6
−1	1	−4	1	6	0
	1	−5	6	0	

$\underbrace{1 \quad -5 \quad 6}_{\text{coeficientes de } q(x)}$

$q(x) = x^2 - 5x + 6$

Caímos na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolvendo-a, temos $x' = 3$ e $x'' = 2$.

Logo, $S = \{-1, 2, 3\}$.

7. Dada a equação $x^3 + ax^2 - 8x + b = 0$, calcule os valores de a e b de forma que 2 seja raiz dupla da equação.

Resolução:

Eliminando a raiz 2 duas vezes sucessivas, temos:

2	1	a	-8	b
2	1	$2 + a$	$2a - 4$	$4a - 8 + b$
	1	$4 + a$	$4a + 4$	

Fazendo os restos iguais a zero, vem:

$$\begin{cases} 4a + 4 = 0 \quad \text{(I)} \\ 4a - 8 + b = 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), vem: $4a + 4 = 0 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$

Substituindo $a = -1$ na equação (II), temos:

$-4 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 12$

Logo, $a = -1$ e $b = 12$.

Exercícios

7. Na equação $(x - 3)^3(x + 4)^2(x - 1)^5 = 0$, quais são as multiplicidades de suas raízes? 3 tem multiplicidade 3, −4 tem multiplicidade 2 e 1 tem multiplicidade 5.

8. Qual é a multiplicidade da raiz −1 na equação $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$? 1

9. Resolva no caderno a equação polinomial $x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3 = 0$, sabendo que −1 é raiz tripla da equação. $S = \{-1, 1, -3\}$

10. O número 3 é raiz dupla da equação $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$. Determine as outras duas raízes da equação. $x' = 2$ e $x'' = -1$

11. Determine uma equação polinomial do 3º grau com $S = \{3, 5\}$, em que 3 é raiz de multiplicidade 2. $x^3 - 11x^2 + 39x - 45 = 0$

12. Considerando a equação $(x - 2)^2(x - 1)^3(x^2 + 3x - 4) = 0$, qual é a multiplicidade da raiz 1? 4

13. Sabendo que 1 é raiz dupla da equação $x^3 + ax^2 - 2x + b = 0$, determinem o valor de $a + b$. 1

14. (Fuvest-SP) O número 2 é raiz dupla da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$. Calculem os valores de a e b. $a = 1$ e $b = -12$

Observação: Quando resolvemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$):

- em $\mathbb{R}$, isto é, com incógnitas e coeficientes reais, podemos ter:
  $\Delta > 0 \Rightarrow$ duas raízes reais distintas;
  $\Delta = 0 \Rightarrow$ duas raízes reais iguais, ou seja, uma raiz real de multiplicidade 2;
  $\Delta < 0 \Rightarrow$ nenhuma raiz real.
- em $\mathbb{C}$, isto é, com incógnita e coeficientes complexos, podemos ter:
  $\Delta = 0 \Rightarrow$ uma raiz complexa de multiplicidade 2;
  $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ duas raízes complexas distintas.

Fique atento!
Quando dizemos raiz complexa significa número real ou não, pois $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

5 Relações de Girard

As relações de Girard* são fórmulas matemáticas que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica. Vejamos algumas situações.

Na equação do 2º grau

Consideremos a equação algébrica do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ e sejam x_1 e x_2 as suas raízes.

A decomposição do primeiro membro em fatores do 1º grau é:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Desenvolvendo o produto, temos:

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

Dividindo todos os termos por a, vem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Fique atento!
x_1 e x_2 podem ser distintas ou não. As relações de Girard nas equações do 2º grau são a soma e o produto, que você provavelmente estudou no 1º ano do Ensino Médio.

Na equação do 3º grau

Consideremos a equação algébrica do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ e sejam x_1, x_2 e x_3 as suas raízes.

A sua decomposição em fatores do 1º grau é:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Desenvolvendo o produto, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3]$$

Dividindo todos os termos por a, vem:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Fique atento!
Partindo de $-\left(\frac{b}{a}\right)$, alternamos os sinais de $-$ e $+$ para $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{e}{a}$, $\frac{f}{a}$, e assim por diante, de acordo com o grau da equação.

* Albert Girard, matemático francês (1595-1632).

Na equação de grau *n*

De forma análoga, considerando a equação algébrica de grau n:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

de raízes $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$, são válidas as seguintes relações entre as raízes e os coeficientes, conhecidas como relações de Girard:

1ª) A soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2ª) O produto das n raízes é:

$$x_1x_2x_3 \cdot ... \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

O sinal do produto das raízes está diretamente ligado ao grau da equação polinomial.

3ª) A soma dos produtos das raízes, quando tomadas:

a) duas a duas, é:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

b) três a três, é:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

c) quatro a quatro, é:

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + ... + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

Exercícios resolvidos

8. Escreva as relações de Girard para a equação algébrica $x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$, considerando x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação.

Resolução:

Pela equação, temos:

$a_n = 1$

$a_{n-1} = 7$

$a_{n-2} = -3$

$a_0 = 5$

Assim, obtemos as seguintes relações:

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{7}{1} = -7$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{-3}{1} = -3$
- $x_1x_2x_3 = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^3 \frac{5}{1} = -5$

Fazendo da forma prática, temos:

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\left(\frac{7}{1}\right) = -7$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +\left(\frac{-3}{1}\right) = -3$
- $x_1x_2x_3 = -\left(\frac{5}{1}\right) = -5$

9. Resolva a equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$, sabendo que uma raiz é dupla.

Resolução:

Como uma raiz é dupla, vamos indicar as raízes por x_1, x_1 e x_2.

Usando as relações de Girard, temos:

- $x_1 + x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 5$ (I)
- $x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = 7 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 = 7$ (II)
- $x_1x_1x_2 = 3 \Rightarrow x_1^2x_2 = 3$ (III)

Da relação (I), temos:

$2x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - 2x_1$

Substituindo em (II), vem:

$x_1^2 + 2x_1x_2 = 7 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1(5 - 2x_1) = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + 10x_1 - 4x_1^2 - 7 = 0 \Rightarrow -3x_1^2 + 10x_1 - 7 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_1^2 - 10x_1 + 7 = 0$

$\Delta = 16$

$x_1 = \dfrac{10 \pm 4}{6} \Rightarrow x_1' = \dfrac{7}{3}$ e $x_1'' = 1$

Vamos verificar qual dos valores de x_1 é raiz da equação inicial:

$p\left(\dfrac{7}{3}\right) = -\dfrac{32}{27} \Rightarrow \dfrac{7}{3}$ não é raiz da equação

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é a raiz dupla da equação

Assim, se $x_1 = 1$, vem $x_2 = 5 - 2(1) = 3$.

Logo, $S = \{1, 3\}$.

10. Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ sabendo que suas raízes estão em PA.

Resolução:

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação, vamos representá-las por:

$x_1 = \alpha - r$; $x_2 = \alpha$; $x_3 = \alpha + r$

Pela relação de Girard, temos:

$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow \alpha - \cancel{r} + \alpha + \alpha + \cancel{r} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3$

Como $x_2 = \alpha = 3$ é uma das raízes, temos:

$$p(x) = (x - 3)q(x) = 0$$

3	1	−9	23	−15
	1	−6	5	0

$$q(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos $x' = 5$ e $x'' = 1$.

Logo, $S = \{1, 3, 5\}$.

Exercícios

Veja a resposta do exercício 15 na seção Respostas.

15. A equação $3x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$ admite raízes x_1, x_2 e x_3. Escreva no caderno as relações de Girard para essa equação.

16. Consideremos a equação polinomial $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$. Sabendo que os números 1 e −3 são raízes da equação, calcule a terceira raiz e escreva a equação. $x_3 = 4$; $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

17. As raízes da equação polinomial $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ estão em PA. Calcule essas raízes. 3, 5 e 7

18. Resolva no caderno a equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 5. $S = \{1, -2, 4\}$

19. Qual é o valor de k na equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ para que as raízes da equação estejam em PA? $k = 8$

20. (EEM-SP) Determine as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$, sabendo que uma delas é dupla. −1 (multiplicidade 2) e 2 (raiz simples)

21. (IMT-SP) Dada a equação algébrica $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ e sabendo que o produto de duas de suas raízes é igual a 1, calcule as raízes da equação. $\frac{1}{3}$, 2 e 3

22. Os números −2 e 3 são duas raízes da equação $2x^3 - x^2 + mx + n = 0$, em que $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$. Determine a terceira raiz da equação e os valores de m e n. $m = -13$ e $n = -6$

23. (ITA-SP) Os números a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Nessas condições, calculem o valor de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. $\frac{3}{4}$

24. (UFMG) Os números a, b e c são as raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$. Nessas condições, calculem o valor de $\log\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$. 0

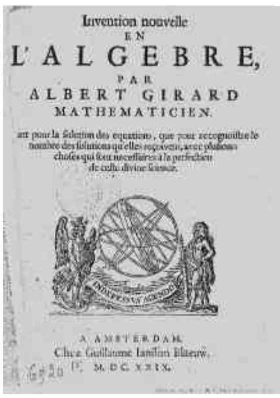
25. (UPM-SP) As raízes da equação $x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$ estão em PG. Nessas condições, calculem o coeficiente k. $k = -24$

6 Equações algébricas de grau maior que 3

Vimos que muitos povos sabiam resolver equações do 2º grau desde a Antiguidade e que a equação do 3º grau começou a ser investigada algebricamente por Scipione del Ferro e Niccoló Tartaglia e sua solução foi publicada por Girolamo Cardano. Entretanto, como foi a história das equações de grau maior que 3?

Depois que Tartaglia resolveu a equação geral do 3º grau, Cardano estimulou seu aluno Lodovico Ferrari (1522-1565) a tentar resolver a equação do 4º grau do tipo $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$. Ele conseguiu uma solução particular para esse tipo de equação e, pouco tempo depois, a solução da equação geral também foi encontrada. O passo seguinte seria a busca por uma solução geral para a equação do 5º grau, porém, esta nunca foi encontrada.

Reprodução/Albert Girard



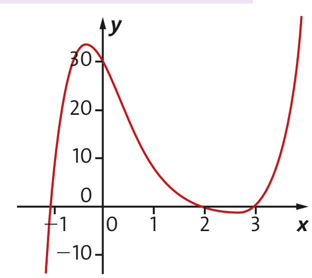
Capa do livro *Nova invenção em Álgebra* (tradução livre).

Sendo assim, quantas raízes poderia ter uma equação polinomial de grau n? Havia na época a ideia de que uma equação polinomial de grau n poderia ter, no máximo, n raízes, o que é verdade. Todavia, esse resultado só foi demonstrado anos mais tarde. Em 1629, o matemático francês Albert Girard (1595-1632) publicou o livro *Invention nouvelle en l'algèbre*, enunciando claramente as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial. Essa publicação marcou um avanço na compreensão da estrutura das equações polinomiais, pois admitia tanto raízes negativas como raízes imaginárias. A teoria contida nesse livro (veja capa ao lado) é essencialmente a mesma que estudamos hoje, geralmente no 3º ano do Ensino Médio.

A história das equações polinomiais avança quando, em 1801, Carl Gauss (reveja página 175) publica o livro *Disquisitiones Arithmetica* (Investigações Aritméticas), no qual, entre outras coisas, foi demonstrado o Teorema fundamental da Álgebra. Esse teorema tem como consequência a afirmação:

> Toda equação polinomial de grau n com coeficientes complexos possui exatamente n raízes reais ou complexas.

Por exemplo, a equação $x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 18x^2 - 19x + 30 = 0$ é do grau 5 e, portanto, possui cinco raízes. Ela possui três raízes reais e duas complexas e o conjunto solução dessa equação é $\{-1, 2, 3, 2 - i, 2 + i\}$. Nessa época, os matemáticos já sabiam que as raízes reais de uma equação polinomial eram os pontos nos quais o gráfico da função correspondente corta o eixo x. Por exemplo, as raízes reais da equação anterior podem ser vistas no gráfico ao lado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

DeAgostini/Getty Images

Gravura de Niels Henrik Abel (1802-1829). Litogravura.

O desfecho dessa história deve-se a um dos matemáticos mais talentosos do século XIX, o norueguês Niels Henrik Abel. Abel viveu apenas 26 anos, mas fez descobertas importantíssimas. Desde o século XVI, eram conhecidos os métodos para a resolução das equações polinomiais de graus 3 e 4, mas por três séculos ninguém tinha conseguido obter um método geral para resolver uma equação do 5º grau ou de grau maior. Em 1824, Abel deu fim a essa procura publicando um artigo com a demonstração de um dos mais famosos teoremas da Matemática:

> Não existe fórmula geral expressa em operações algébricas explícitas para resolver uma equação polinomial se o grau da equação é maior que quatro.

Quando demonstrou esse teorema Abel tinha apenas 19 anos.

Outros contextos

Poesia matemática

A folhas tantas
do livro matemático,
um Quociente apaixonou-se,
um dia,
doidamente
por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
e viu-a, do ápice à base,
uma figura ímpar;
olhos romboides,
boca trapezoide,
corpo retangular,
seios esferoides.

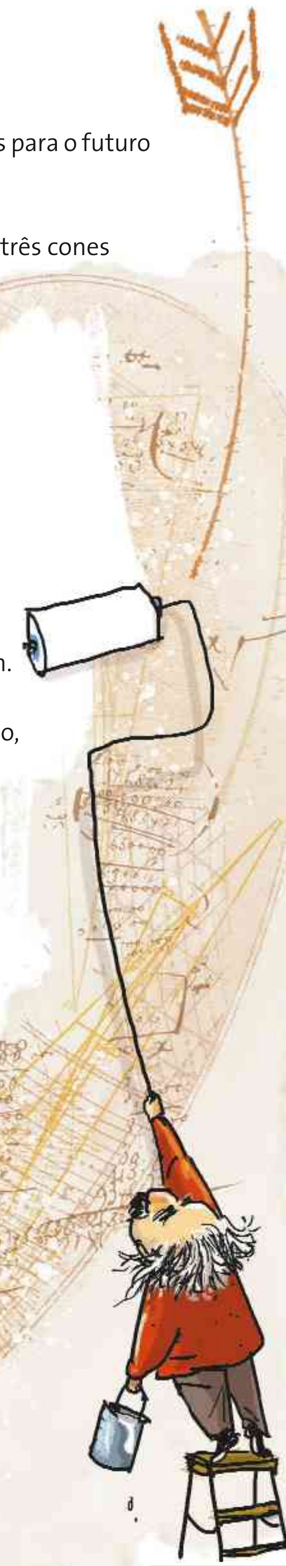
Fez de sua uma vida
paralela à dela
até que se encontraram
no infinito.
“Quem és tu?”,
indagou ele
em ânsia radical.
“Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode me chamar de Hipotenusa.”
E de falarem descobriram que eram
(o que em aritmética corresponde
a almas irmãs)
primos entre si.

E assim se amaram
ao quadrado da velocidade da luz
numa sexta potenciação
traçando
ao sabor do momento
e da paixão
retas, curvas, círculos e linhas senoidais
nos jardins da quarta dimensão.
Escandalizaram os ortodoxos das fórmulas euclidianas
e os exegetas do Universo Finito.
Romperam convenções newtonianas e
pitagóricas.

E enfim resolveram se casar
constituir um lar,
mais que um lar,
um perpendicular.

Convidaram para padrinhos
o Poliedro e a Bissetriz.
E fizeram planos, equações e diagramas para o futuro
sonhando com uma felicidade
integral e diferencial.
E se casaram e tiveram uma secante e três cones
muito engraçadinhos.
E foram felizes
até aquele dia
em que tudo vira afinal
monotonia.
Foi então que surgiu
O Máximo Divisor Comum
frequentador de círculos concêntricos,
viciosos.
Ofereceu-lhe, a ela,
uma grandeza absoluta
e reduziu-a a um denominador comum.
Ele, Quociente, percebeu
que com ela não formava mais um todo,
uma unidade.
Era o triângulo,
tanto chamado amoroso.
Desse problema ela era uma fração,
a mais ordinária.
Mas foi então que Einstein descobriu a
Relatividade
e tudo que era espúrio passou a ser
moralidade
como aliás em qualquer
sociedade.

FERNANDES, Millôr. *Poesia matemática*. Rio de Janeiro: Desiderata, 2009.



Filipe Rocha/Arquivo da editora

Um matemático que não é também um pouco poeta nunca será um matemático completo.

Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão

A Matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas.

Albert Einstein

Trabalhando com o texto

1. Depois de ler o poema, identifique os termos matemáticos e escreva no caderno os seus respectivos significados. Há termos que você não conhece? Pesquise-os. Resposta pessoal.

2. Em equipe, representem o texto por meio de desenhos. Pode ser uma história em quadrinhos. Resposta pessoal.

3. Escreva no caderno um poema com elementos matemáticos e apresente-o para a classe. Resposta pessoal.

Pesquisando e discutindo

4. Pesquise a biografia de Millôr Fernandes (1923-2012) e as principais características das suas obras. Depois, tente verificar essas características no poema.

4. Milton Viola Fernandes, mais conhecido como Millôr Fernandes, nasceu em 1923, no Rio de Janeiro. Intelectual contemporâneo de extensa produção, foi escritor, jornalista, humorista, cartunista, artista plástico, blogueiro, editor, tradutor e dramaturgo. Artista de múltiplas facetas, sua obra é bastante diversificada, caracterizando-se, sobretudo, pelo humor e pela crítica social.

Marcos de Paula/Agência Estado

Millôr Fernandes. Fotografia de 2007.

Na década de 1960, fundou, com Ziraldo, Jaguar e Fortuna, *O Pasquim*, importante jornal político humorístico, com papel importante durante a ditadura militar. Produziu incansavelmente até o final de sua vida. Faleceu em 2012, em sua terra natal. O próprio tema do poema é humorístico, pois personifica conceitos matemáticos e narra uma história de amor, repleta de jogos de palavras. Um exemplo de crítica social pode ser percebido nos cinco últimos versos.

5. Existem outros artistas brasileiros (poetas, músicos, etc.) que têm obras cujo tema se refere à Matemática. Pesquise alguns exemplos. Por exemplo: *Aula de Matemática*, de Tom Jobim e Mariano Pinto, e *Noves fora*, de Fagner e Belchior.

6. Em 1906, Adam C. Orr publicou na revista norte-americana *Literary Digest* os seguintes versos:

Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Syracusan, rivaled nevermore,
Who in his wondrous lore,
Passed on before,
Left men guindance,
How to circles mensurate.

6. b) Obtêm-se os trinta primeiros dígitos do número irracional π.
Em português, os versos podem ser traduzidos livremente:
Agora eu, eu mesmo, homenagearia
Em rimas inadequadas, o grande
Imortal de Siracusa, jamais equiparado,
Que em sua assombrosa sabedoria,
Transmitida para a posteridade,
Deixou aos homens a orientação,
Sobre como os círculos medir.

a) De maneira breve e jocosa, esses versos homenageiam um importante matemático grego da Antiguidade, referido como o “Imortal de Siracusa” (*Immortal Syracusan*), que chegou a um valor aproximado do número irracional π (π = 3,1415926...), o que explica o último verso. Quem foi esse matemático?
Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.).

b) Esses versos ainda têm uma curiosidade implícita muito interessante. Conte o número de letras de cada uma das palavras do poema e as coloque em ordem. Que número você obteve?

Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações sobre poesias relacionadas à Matemática em jornais, revistas, livros e na internet. Sugestões: (acessos em: 11 maio 2016)

- Só Matemática: <www.somatematica.com.br/poemas.php>.
- Passeios pela Matemática: <www.passeiospelamatematica.net/poemas/>.
- Centro Aragonês de Tecnologia da Educação. Matemática e Poesia: <www.catedu.es/matematicas_mundo/POESIA/poesia.htm>.

Sugerimos a leitura do artigo "A leitura e a produção de poemas na aprendizagem da Matemática", disponível em:<http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais15/alfabetica/OliveiraLeniNobrede.htm>. Acesso em: 11 maio 2016.

7 Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

Assunto opcional

As equações polinomiais de grau maior do que 2 não têm um processo determinado de resolução por meio de fórmulas. Devemos procurar, então, uma ou mais raízes para com elas encontrar todas as raízes.

Neste item vamos estudar uma propriedade que nos auxiliará na pesquisa das raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

então p é divisor de a_0, e q é divisor de a_n.

Fique atento!

Dizer que o número racional $\frac{p}{q}$ tem p e q inteiros e primos entre si equivale a dizer que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível.

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 13

11. Pesquise as raízes racionais da equação $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$.

Resolução:

Na equação dada, temos $a_0 = 2$ e $a_n = 3$.

p é divisor de $2 \to p \in \{-1, 1, -2, 2\}$

q é divisor de $3 \to q \in \{-1, 1, -3, 3\}$

Pela propriedade, as prováveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \left\{-1, 1, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Fazendo a verificação, temos:

$p(-1) = 8 \to -1$ não é raiz

$p(1) = 0 \to 1$ é raiz

A partir da raiz descoberta, vem:

1	3	2	−7	2
	3	5	−2	0

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x' = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } x'' = \frac{-12}{6} = -2$$

Logo, $S = \left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

Observação: Como as outras duas raízes, além de 1, também são números racionais, elas seriam descobertas se a pesquisa das raízes racionais prosseguisse:

$p(-2) = 0 \to -2$ é raiz

$p(2) = 20 \to 2$ não é raiz

$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{40}{9} \to -\frac{1}{3}$ não é raiz

$p\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \to \frac{1}{3}$ é raiz

$p\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3} \to -\frac{2}{3}$ não é raiz

$p\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9} \to \frac{2}{3}$ não é raiz

Fique atento!

- Nem todo número $\frac{p}{q}$ obtido é raiz da equação;
- essa pesquisa de raízes racionais só pode ser feita em equações com todos os coeficientes inteiros.

12. Resolva a equação $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

Resolução:

Pela equação dada, temos $a_0 = 6$ e $a_n = 1$.

p é divisor de $6 \to$
$\to p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

q é divisor de $1 \to q \in \{-1, 1\}$

Pela propriedade, as possíveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$$

Fique atento!

- Se a soma dos coeficientes do polinômio for nula, então 1 é raiz do polinômio.
- Se o termo independente for nulo, então 0 é raiz.

Fazendo a pesquisa, temos:

$p(-1) = 0 \to -1$ é raiz

$p(1) = 0 \to 1$ é raiz

Observando que −1 e 1 são raízes da equação, vamos obter as outras duas raízes:

−1	1	1	−7	−1	6
1	1	0	−7	6	0
	1	1	−6	0	

Daí, temos:

$p(x) = (x + 1)(x - 1)q(x) = 0$ e $q(x) = x^2 + x - 6$

Fazendo $x^2 + x - 6 = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x' = 2$ e $x'' = -3$.

Logo, $S = \{-1, -3, 1, 2\}$.

Resolvido passo a passo

13. (UFSM-RS) Para avaliar as vendas em 2013, o setor de planejamento de uma empresa utilizou a função polinomial

$N(t) = t^3 - 21t^2 + 126t + 304$

em que N representa o número de *tablets* vendidos no mês t, com $t = 1$ correspondendo a janeiro, $t = 2$ correspondendo a fevereiro e assim por diante.

De acordo com os dados, o número de *tablets* vendidos foi igual a 480 nos meses de:

a) fevereiro, julho e novembro.

b) fevereiro, agosto e novembro.

c) fevereiro, agosto e dezembro.

d) março, agosto e dezembro.

e) março, setembro e dezembro.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada uma função polinomial, utilizada pelo setor de planejamento de certa empresa, que relaciona o número de *tablets* vendidos em função do mês.

b) O que se pede?

Pede-se os meses em que o número de *tablets* vendidos foi igual a 480 unidades.

2. Planejando a solução

Temos $N(t) = 480$; assim, ao substituirmos $N(t)$ por 480, encontraremos a equação $t^3 - 21t^2 + 126t - 176 = 0$. Pode-se verificar que 2 é uma das raízes. A partir daí, utilizando o método de Briot-Ruffini, encontraremos um polinômio divisor para essa equação e, por conseguinte, conseguiremos fatorar a equação do 3º grau e encontar as outras duas raízes.

3. Executando o que foi planejado

Para $N(t) = 480$, temos $480 = t^3 - 21t^2 + 126t + 304 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^3 - 21t^2 + 126t - 176 = 0$

Utilizando Briot-Ruffini, vem:

2	1	−21	+126	−176
	1	−19	+88	0

1, −19 e 88 são os coeficientes da equação de 2º grau que, multiplicada por $x - 2$, resulta $t^3 - 21t^2 + 126t - 176 = 0$.

Portanto: $t^3 - 21t^2 + 126t - 176 =$

$= (x - 2)(x^2 - 19x + 88) = 0$

Calculando as raízes da equação do 2º grau, temos:

$x^2 - 19x + 88 = 0$

$\Delta = (-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 88$

$\Delta = 361 - 352$

$\Delta = 9$

$$x = \frac{-(-19) \pm \sqrt{9}}{2 - 1} = \frac{19 \pm 3}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{22}{2} \Rightarrow x' = 11 \\ x'' = \dfrac{16}{2} \Rightarrow x'' = 8 \end{cases}$$

Ou seja, os meses serão os de fevereiro, agosto e novembro.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **b**.

5. Ampliando o problema

a) Como é de costume, o mês de dezembro é um excelente mês para vendas devido ao período natalino. Com isso, o dono de uma loja aumentou em 20% o preço dos *tablets* que eram vendidos por R$ 350,00. Quanto essa loja arrecadou com as vendas de *tablets* no mês de dezembro? R$ 218 400,00

b) *Pesquisa*

Pesquise sobre os especialistas que trabalham realizando análise de mercado para as empresas e relate para sua turma a importância do conhecimento matemático para tal processo.

Exercícios

26. Pesquise as raízes racionais das equações algébricas:

a) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ $1, -1, \frac{1}{2}$

b) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ $1, -1, \frac{1}{2}$

c) $4x^3 - 5x + 1 = 0$ 1

d) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ $1, 2, \frac{1}{2}$

27. (PUC-SP) Quais são as raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$? $1, 3, \frac{1}{3}$

28. (FEI-SP) Resolva a equação cúbica $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$. $S = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

29. (ITA-SP) Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$? -2

8 Raízes complexas não reais em uma equação algébrica de coeficientes reais

Consideremos a equação algébrica $x^2 - 2x + 2 = 0$, que tem todos os coeficientes reais e pode ser resolvida pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x' = 1 + i \text{ e } x'' = 1 - i$$

$$S = \{1 + i, 1 - i\}$$

Observemos que a raiz $1 + i$ é um número complexo não real e a outra raiz, $1 - i$, é o seu conjugado. É possível demonstrar que: As raízes complexas não reais são sempre aos pares: $(a + bi)$ e $(a - bi)$. Dessa forma, se a equação for de grau ímpar, obrigatoriamente teremos pelo menos uma raiz real.

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $a + bi$, com $b \neq 0$, então o complexo conjugado $a - bi$ também é raiz da equação.

Exercício resolvido

14. Resolva a equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$, sabendo que $3 + i$ é uma raiz dela.

Resolução:

Se $3 + i$ é raiz da equação dada, então seu conjugado $3 - i$ é também raiz da equação. Logo:

$p(x) = [x - (3 + i)][x - (3 - i)]q(x) = [(x - 3) - i][(x - 3) + i]q(x) = [(x - 3)^2 - i^2]q(x) = (x^2 - 6x + 10)q(x)$

Vamos calcular $q(x)$ dividindo $p(x)$ por $x^2 - 6x + 10$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -9x^3 & +30x^2 & -42x & +20 & x^2 - 6x + 10 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +6x^3 & -10x^2 & & & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{1-3}
 & -3x^3 & +20x^2 & -42x & +20 & \\
 & +3x^3 & -18x^2 & +30x & & \\
\cline{2-4}
 & & 2x^2 & -12x & +20 & \\
 & & -2x^2 & +12x & -20 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Então, $q(x) = x^2 - 3x + 2$.

Fazendo $x^2 - 3x + 2 = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x' = 2$ e $x'' = 1$.

Logo, $S = \{3 + i, 3 - i, 2, 1\}$.

Exercícios

30. Determine as raízes das equações abaixo, sabendo que i é uma das raízes:

a) $x^4 - x^3 - 11x^2 - x - 12 = 0$ i, $-$i, -3 e 4

b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$ i, $-$i, $2 + i$ e $2 - i$

31. Qual deve ser o valor de a para que $2i$ seja uma das raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$? -12

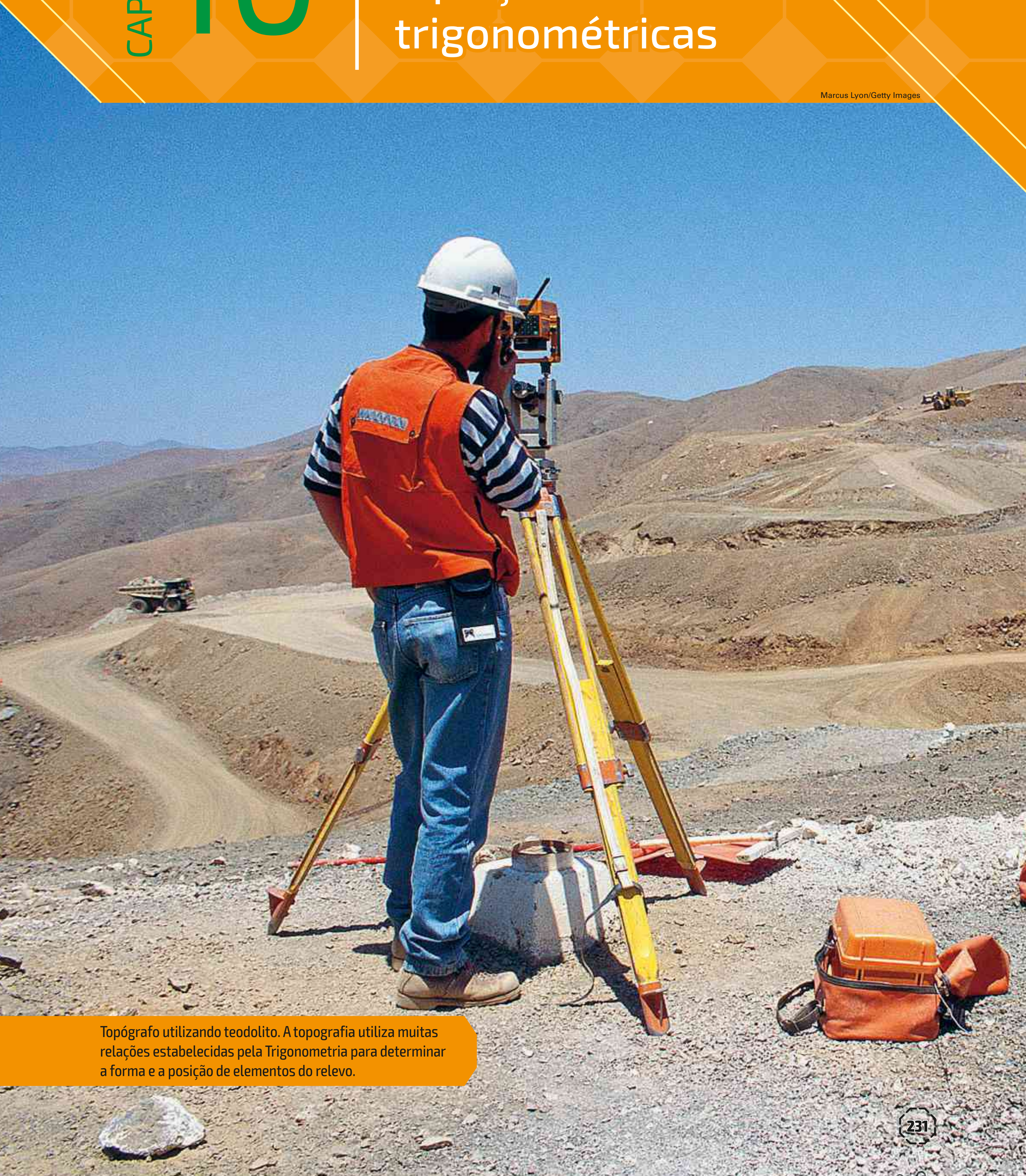
32. Os números 1 e $2 + i$ são raízes da equação algébrica $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$, em que a, b e c são coeficientes reais. Calcule o valor do coeficiente c. 5

33. O número $2 + i$ é uma das raízes da equação $3x^3 - 14x^2 + mx - 10 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de m e a raiz real da equação. $m = 23$; raiz real: $\frac{2}{3}$

CAPÍTULO 10

Relações e equações trigonométricas

Marcus Lyon/Getty Images



Topógrafo utilizando teodolito. A topografia utiliza muitas relações estabelecidas pela Trigonometria para determinar a forma e a posição de elementos do relevo.

1 Relações fundamentais

Além de seno, cosseno e tangente, há outras três funções trigonométricas, importantes mais pelo seu valor histórico do que por qualquer outro motivo. São elas: secante (sec), cossecante (csc) e cotangente (cot).

As relações entre os valores das funções trigonométricas de um mesmo arco são denominadas **relações trigonométricas**. Já conhecemos duas delas, consideradas fundamentais:

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}, \text{ para todo } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Existem outras relações fundamentais:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}, \text{ para todo } x \neq k\pi$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ para todo } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x}, \text{ para todo } x \neq k\pi$$

Fique atento!
Para simplificar as expressões, consideramos o fator $k \in \mathbb{Z}$, sempre que não especificado.

Agora, você vai descobrir algumas relações trigonométricas que podem ser obtidas a partir das relações dadas. Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) A partir de $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$, dividam tudo por $\text{sen}^2\, x$. Que relação vocês encontraram? $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

b) Agora, dividam $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ e escrevam a nova relação encontrada. $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

Comparem os resultados obtidos com as demais duplas da classe.

Exercício resolvido

1. Sendo $\text{sen}\, x = -\frac{1}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine $\tan x$ e $\sec x$.

Resolução:

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como x é do 3º quadrante, $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Então:

$$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow \sec x = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

2 Identidades trigonométricas

Toda igualdade que envolve funções trigonométricas verificada para todos os valores do domínio dessas funções é uma **identidade trigonométrica**.

Por exemplo, considerando o domínio das funções, a igualdade $\operatorname{sen} x \cdot \sec x = \tan x$ é uma identidade trigonométrica, pois, independentemente do valor de x, ela se verifica. Para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos:

$$\operatorname{sen} x \cdot \sec x = \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

Já a igualdade $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$, para $x \in \mathbb{R}$, não é uma identidade, pois ela não é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ é uma **equação trigonométrica**.

Para demonstrar que uma igualdade é uma identidade, há vários caminhos. Vejamos isso nos exercícios resolvidos, em que apresentamos três maneiras diferentes.

Fique atento!
As relações fundamentais são identidades trigonométricas.

Para refletir
Verifique o que acontece com $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$, para $x = \frac{\pi}{2}$ e para $x = \frac{\pi}{4}$.

Verifique a resolução no Manual do Professor.

Exercícios resolvidos

2. Demonstre que $(1 - \cos^2 x)(\cot^2 x + 1) = 1$, para $x \neq k\pi$, é uma identidade.

Resolução:

Consideramos que o primeiro membro da igualdade é $f(x)$ e o segundo membro é $g(x)$ e procuramos simplificar o primeiro membro, expressando-o em função de $\operatorname{sen} x$ e de $\cos x$:

$$(1-\cos^2 x)\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}+1\right) = \underbrace{(1-\cos^2 x)}\underbrace{\left(\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)} = \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}^2 x}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}^2 x}}} = 1$$

Fique atento!
Partindo de $f(x) = (1 - \cos^2 x)(\cot^2 x + 1)$, chegamos a $g(x) = 1$. Logo, $f(x) = g(x)$.

3. Demonstre que $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\sec x}$ é uma identidade para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Resolução:

Vamos simplificar isoladamente cada membro:

- $f(x) = \dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\sec^2 x} = \dfrac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cos^{\cancel{2}} x = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$
- $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sec x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\cos x}} = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

Portanto, $f(x) = g(x)$.

Fique atento!
Partindo separadamente de $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ e $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sec x}$, chegamos ao mesmo valor. Logo, $f(x) = g(x)$.

4. Demonstre a identidade $\sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x + \cos^2 x$.

Resolução:

Considerando $\sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ como $f(x)$ e $\tan^2 x + \cos^2 x$ como $g(x)$, podemos fazer:

$f(x) - g(x) = \sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \tan^2 x - \cos^2 x = (\sec^2 x - \tan^2 x) - (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1 - 1 = 0$

Se $f(x) - g(x) = 0$, então $f(x) = g(x)$ ou seja, $\sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x + \cos^2 x$.

3 Fórmulas de adição

Vamos comparar sen (60° + 30°) e sen 60° + sen 30°:

sen (60° + 30°) = sen 90° = 1

$$\text{sen } 60° + \text{sen } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Logo, sen (60° + 30°) ≠ sen 60° + sen 30°.

Para refletir

Compare também:

a) cos (60° + 30°) e cos 60° + cos 30°
b) tan (60° − 30°) e tan 60° − tan 30°
c) sen (90° + 0°) e sen 90° + sen 0°

a e b: diferentes; c: iguais

De modo geral, podemos verificar que:

- $\text{sen } (a + b) \neq \text{sen } a + \text{sen } b$
- $\text{sen } (a - b) \neq \text{sen } a - \text{sen } b$
- $\cos (a + b) \neq \cos a + \cos b$
- $\cos (a - b) \neq \cos a - \cos b$

Veremos agora como é possível expressar sen ($a \pm b$) e cos ($a \pm b$) em função de sen a, sen b, cos a e cos b, sendo a e b dois números reais quaisquer. Veremos também tan ($a \pm b$) em função de tan a e tan b.

Adição e subtração de arcos

Na figura, temos:

$OM = \cos (a + b)$

$ON' = \cos b$

$N'P = \text{sen } b$

$MN = M'N' = \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

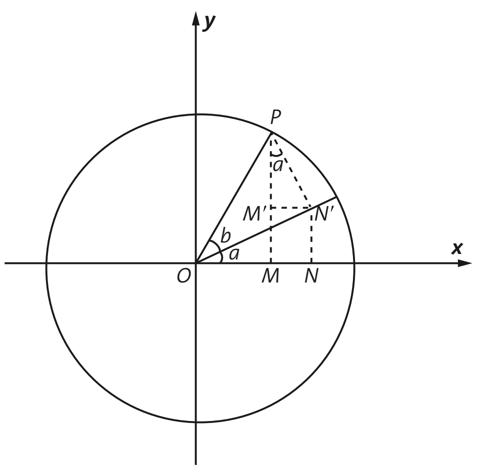
$ON = \cos a \cdot \cos b$

Logo:

$OM = ON - MN = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

ou

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Tomando ($-b$) em lugar de b na fórmula anterior e sabendo que $\cos (-b) = \cos b$ e $\text{sen } (-b) = -\text{sen } b$, obtemos:

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

Sabendo que:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\text{sen } t$$

a fórmula de cos ($a + b$) nos fornece também:

$$\text{sen } (a + b) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a + b\right)$$
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\cos b + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\text{sen } b$$

ou seja: $\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

Dessa fórmula resulta também que: $\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$

Usando essas fórmulas podemos demonstrar também que:

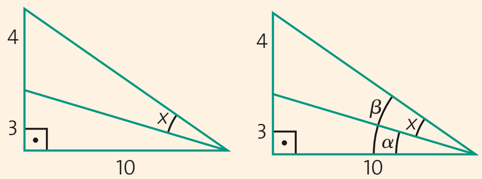
$$\tan (a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$ (para os arcos em que a tangente for definida)

$$\tan (a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$ (para os arcos em que a tangente for definida)

Exercícios resolvidos

5. *Aplicação na Geometria*

Dado o triângulo retângulo abaixo, calcule tan x.



Resolução:

Temos:

$\tan \alpha = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

$\tan \beta = \dfrac{3+4}{10} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$

Mas:

$\beta = \alpha + x \Rightarrow x = \beta - \alpha$

> **Para refletir**
> Use uma tabela trigonométrica ou uma calculadora científica e verifique qual destes é o valor mais próximo de x: 18°, 20° ou 25°? 18°

Logo:

$\tan x = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} =$

$= \dfrac{0{,}7 - 0{,}3}{1 + 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \dfrac{0{,}4}{1 + 0{,}21} = \dfrac{0{,}4}{1{,}21} = \dfrac{40}{121} \simeq 0{,}33$

6. Calcule cos 15° e cos $(\pi - x)$.

Resolução:

- $\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$

  $= \cos 45° \cdot \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{sen} 30° =$

  $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

- $\cos(\pi - x) = \cos \pi \cdot \cos x + \operatorname{sen} \pi \cdot \operatorname{sen} x =$

  $= (-1) \cdot \cos x + 0 \cdot \operatorname{sen} x = -\cos x$

Exercícios

Atividade em dupla — Atividade em equipe

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

Veja a resolução dos exercícios 1 e 5 no Manual do Professor.

1. Determine os valores das demais funções trigonométricas de um arco x quando:

a) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

b) $\cos x = \dfrac{1}{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

c) $\csc x = -\sqrt{2}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

d) $\tan x = \sqrt{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

2. Sendo $\cos x = \dfrac{4}{5}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule o valor de $\operatorname{sen}^2 x - 3 \cdot \operatorname{sen} x$. $-\dfrac{36}{25}$

3. Simplifique as expressões:

a) $y = \dfrac{\sec x - \csc x}{1 - \cot x}$ $y = \sec x$

b) $y = (\sec x - \cos x)(\csc x - \operatorname{sen} x)(\tan x + \cot x)$ $y = 1$

4. Determine o valor de $A = \dfrac{\cot x - 1}{\csc x - \sec x}$, dado $\cos x = \dfrac{1}{2}$. $A = \dfrac{1}{2}$

5. Demonstrem as seguintes identidades trigonométricas:

a) $\cos x \cdot \tan x \cdot \csc x = 1$

b) $\tan^2 x \cdot \csc^2 x = 1 + \tan^2 x$

c) $(\tan x + 1)(1 - \tan x) = 2 - \sec^2 x$

d) $(\tan x - \operatorname{sen} x)^2 + (1 - \cos x)^2 = (\sec x - 1)^2$

> **Fique atento!**
> As demonstrações das identidades podem ser vistas como um exercício de quebra-cabeça trigonométrico.

6. Usando as fórmulas de adição, determinem:

a) tan 15° $\sqrt{3} - 2$

b) sen 15° $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) cos 75° $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

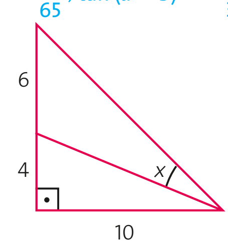
d) tan 75° $2 + \sqrt{3}$

e) sen 105° $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

f) cos 195° $\dfrac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

7. Sabe-se que $\operatorname{sen} a = \dfrac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} b = \dfrac{12}{13}$, com $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ e $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$. Determine, então, $\operatorname{sen}(a+b)$, $\cos(a-b)$ e $\tan(a+b)$. $\operatorname{sen}(a+b) = \dfrac{56}{65}$; $\cos(a-b) = \dfrac{63}{65}$; $\tan(a+b) = -\dfrac{56}{33}$

8. Dado o triângulo retângulo ao lado, calcule tan x. $\dfrac{3}{7}$



9. (Fuvest-SP) Nos triângulos retângulos da figura, $AC = 1$ cm, $BC = 7$ cm, $AD = BD$. Sabendo que $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b$, o valor de sen x é:

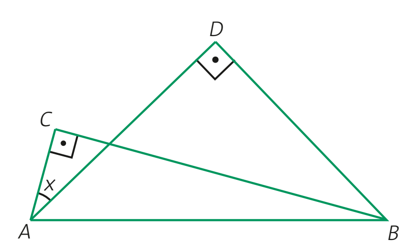
a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\dfrac{7}{\sqrt{50}}$.

x c) $\dfrac{3}{5}$.

d) $\dfrac{4}{5}$.

e) $\dfrac{1}{\sqrt{50}}$.



Ilustrações desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

A fórmula: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

Desde a Antiguidade, vários matemáticos elaboraram tabelas de cordas. Essas tabelas forneciam o comprimento de cada corda de uma circunferência (em geral com raio 60) em função do ângulo central de 0° a 180°.

No século II, Claudio Ptolomeu (90-168), astrônomo grego que viveu em Alexandria (Egito), publicou uma obra chamada *Almagesto* (que significa *O grande tratado*) sobre Astronomia. O primeiro dos 15 livros dessa obra é dedicado à natureza do Universo e à teoria trigonométrica; é por ele que sabemos o que se conhecia de trigonometria naquela época. O *Almagesto* foi escrito em grego, mas foi logo traduzido para várias línguas, sendo um dos textos científicos mais influentes de todos os tempos. Os hindus começaram a calcular as razões entre lados de um triângulo retângulo por volta do século VIII; utilizar essas razões mostrou-se mais eficiente do que consultar as tabelas de cordas.


Trip/Alamy/Latinstock

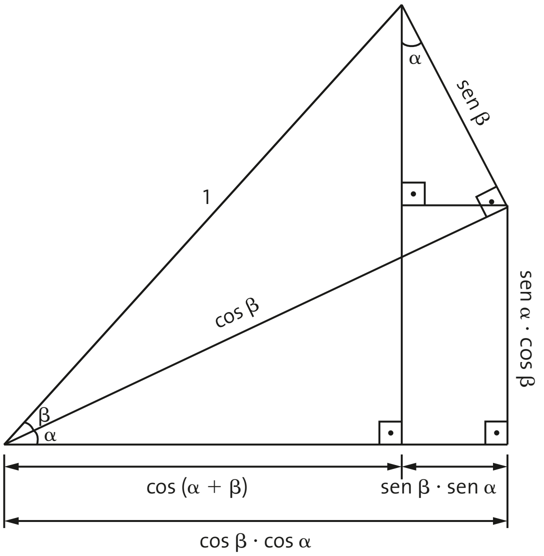
Gravura de Al-Wafa (940-998). Colorizada.

Abul al-Wafa Muhammad ibn Muhammad ibn Yahya ibn Ismail al-Buzjani nasceu em Nishapur (Irã), entretanto, ficou conhecido como um grande matemático e astrônomo em Bagdá (antiga capital do império árabe e atual capital do Iraque) durante o século X. Al-Wafa fez importantes contribuições à geometria e à aritmética e foi o primeiro a estudar as identidades trigonométricas sistematicamente. O estudo das identidades foi importante porque, pelo estabelecimento de relações entre as somas e diferenças de ângulos, cálculos astronômicos mais eficientes puderam ser realizados e tabelas mais precisas puderam ser construídas. Em seu trabalho, Al-Wafa reuniu e estabeleceu pela primeira vez as relações entre as seis funções trigonométricas. Também foi o primeiro a utilizar $R = 1$ para o raio da circunferência básica.

A conhecida fórmula do cosseno da soma de dois arcos, que hoje é escrita como:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

foi também uma criação de Al-Wafa. Naquele tempo não havia o conceito de fórmula, mas a composição de triângulos retângulos deixa evidente essa relação trigonométrica.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A fórmula $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$ também está implícita na figura. Tente encontrá-la!

4 Fórmulas do arco duplo e do arco metade

Veremos agora as expressões das funções trigonométricas dos arcos duplos, ou seja, dos arcos de medida $2a$. Trata-se de um caso particular das fórmulas de adição, sendo suficiente fazer $b = a$.

Retomando e desenvolvendo as fórmulas da adição da página 234, temos:

- $\text{sen } 2a = \text{sen } (a + a) = \text{sen } a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$

Assim: $\boxed{\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a}$

- $\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \text{sen } a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

Assim: $\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a}$

- $\tan 2a = \tan (a + a) = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a} = \dfrac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$, válida para quando existirem as tangentes envolvidas.

Portanto: $\boxed{\tan 2a = \dfrac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}}$

Fique atento!
Numericamente é possível verificar, por exemplo, que dado o arco de 30° os valores de seno, cosseno e tangente de 60° não são o dobro dos valores do arco de 30°.

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 8

7. Dado $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, determine sen $2x$, cos $2x$ e tan $2x$ usando as fórmulas do arco duplo.

Resolução:

Vamos calcular cos x $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$:

Sendo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, temos $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Daí, $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Vamos calcular tan x:

Como $x = \dfrac{\pi}{3}$, então $\tan x = \tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

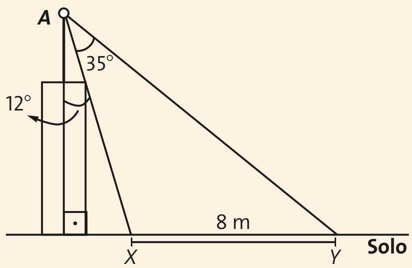
Determinamos, agora, sen $2x$, cos $2x$ e tan $2x$:

- $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \cancel{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$
- $\tan 2x = \dfrac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{-2}} = -\sqrt{3}$

Fique atento!
Como $x = \dfrac{\pi}{3}$, podemos também determinar sen $2x$, cos $2x$ e tan $2x$ calculando $\text{sen } \dfrac{2\pi}{3}$, $\cos \dfrac{2\pi}{3}$ e $\tan \dfrac{2\pi}{3}$ por meio da circunferência trigonométrica.

Resolvido passo a passo

8. (Unifor-CE) O síndico do edifício Castel Gandolfo, pensando em melhorar a segurança dos visitantes do condomínio, colocou uma lâmpada no ponto *A* sobre um muro vertical que ilumina a parte entre *X* e *Y* de 8 metros de largura, segundo um ângulo de 35°, como mostra a figura abaixo.



A que altura aproximada foi colocada a lâmpada? Use tg 12° = 0,2 e tg 35° = 0,7.

a) 7,4 m.
b) 7,5 m.
c) 8,5 m.
d) 8,7 m.
e) 9,4 m.

1. Lendo e compreendendo

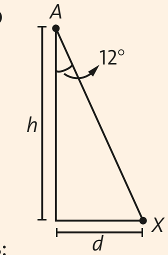
a) O que é dado no problema?
É dada uma projeção da forma como a lâmpada foi instalada sobre o muro, bem como as medidas, ângulos e valores das tangentes dos ângulos.

b) O que se pede?
Pede-se que, a partir do que foi explanado, seja calculada a altura em que foi instalada a lâmpada no ponto *A*, ou seja, a distância de *A* ao solo.

2. Planejando a solução

Para facilitar a resolução desse problema seria fundamental dividir sua resolução em algumas etapas para torná-la mais prática. Desse modo, inicialmente iremos encontrar o valor da distância do ponto *X* à linha vertical que liga o ponto *A* ao solo. Posteriormente, calcularemos a tangente da soma de dois ângulos (12° e 35°). Por fim, utilizando a tangente da soma, calcularemos o valor da distância do ponto *A* ao solo.

3. Executando o que foi planejado



- Valor da distância de *X* à linha vertical que liga *A* ao solo.

$$\text{tg } 12° = \frac{d}{h} \Rightarrow h \cdot 0{,}2 = d$$

- Tangente da soma dos dois ângulos. Pela regra geral, temos:

$$\text{tg }(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Substituindo os valores:

$$\text{tg }(35°+12°) = \frac{\text{tg } 35° + \text{tg } 12°}{1 - \text{tg } 35° \cdot \text{tg } 12°} =$$

$$= \frac{0{,}7 + 0{,}2}{1 - (0{,}7 \cdot 0{,}2)} = \frac{0{,}9}{1 - (0{,}14)} = \frac{0{,}9}{0{,}86}$$

- O valor de *h*, ou seja, da distância de *A* ao solo.

$$\text{tg } 47° = \frac{0{,}9}{0{,}86} = \frac{8 + 0{,}2h}{h}$$

$$\therefore 0{,}9h = 6{,}88 + 0{,}172h \Rightarrow 0{,}72h = 6{,}88 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{6{,}88}{0{,}728} \simeq 9{,}4 \text{ m}$$

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **e**.

5. Ampliando o problema

a) Para aumentar a segurança do condomínio, foi decidida a instalação de uma câmera de segurança no ponto de interseção do foco de luz da lâmpada já instalada com o muro do condomínio. Sabendo que o muro é reforçado e possui uma espessura de 0,5 m, qual a sua altura? Ou seja, a distância da câmera ao solo? O muro tem 8,15 m de altura.

b) *Discussão em equipe*
Troque ideias com seus colegas sobre a questão da segurança no nosso país. Levante fatores, dos mais diversos âmbitos, que contribuem para o agravamento da falta de segurança do Brasil. Por fim, abram um debate sobre o seguinte tema: "quem são os verdadeiros prisioneiros?".

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios

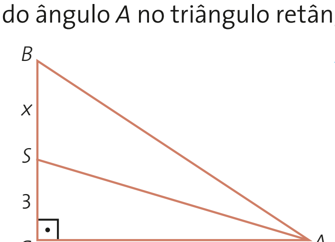
10. Se $\tan x = \frac{1}{4}$, calcule o valor de tan 2*x*. $\frac{8}{15}$

11. Dado $\text{sen } a = \frac{2}{3}$, com $0 < a < \frac{\pi}{2}$, determine sen 2*a*, cos 2*a* e tan 2*a*. $\text{sen}2a = \frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos 2a = \frac{1}{9}$; $\tan 2a = 4\sqrt{5}$

12. Simplifique a expressão $A = \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$. $\sec x$

13. (FEI-SP) Calculem sen 2*x*, sendo dado $\tan x + \cot x = 3$. $\frac{2}{3}$

14. Determinem $BS = x$ sabendo que $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo *A* no triângulo retângulo *ABC*. Aproximadamente 3,6.



5 Equações trigonométricas

Provavelmente, no 2º ano do Ensino Médio você aprendeu a resolver equações trigonométricas simples, da forma sen $x = a$, cos $x = a$ ou tan $x = a$. Agora vamos aprender alguns artifícios que nos permitem resolver outras equações trigonométricas.

Equações resolvidas com alguns artifícios

Quando não for explicitado o conjunto universo, devemos considerar $U = \mathbb{R}$.

> **Fique atento!**
> Para simplificar as expressões, consideramos o fator k pertencente a $\mathbb{Z}$, sempre que não especificado.

Exercício resolvido

9. Resolva as equações:

a) $\text{sen } 2x = 1$

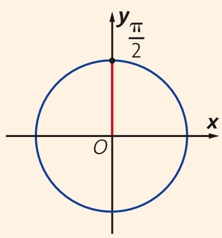
b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

d) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 3 \cdot \text{sen } x - 2 = 0$

Resolução:

a) $\text{sen } 2x = 1$

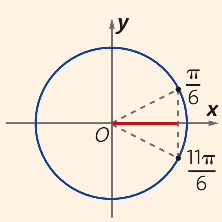


Como $\text{sen } \dfrac{\pi}{2} = 1$, temos:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Como na 1ª determinação $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$ têm cosseno igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

côngruo a $\dfrac{\pi}{6}\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$

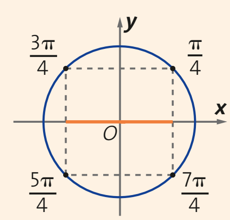
$$\Rightarrow x = \frac{13\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

c) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$$

d) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 3 \cdot \text{sen } x - 2 = 0$

Fazendo $\text{sen } x = t$, ficamos com $2t^2 + 3t - 2 = 0$:

$\Delta = 25$

$t' = \dfrac{1}{2}$ e $t'' = -2$ $\left(t = \dfrac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right)$

Então:

$$\begin{cases} \text{sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \text{sen } x = -2 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução de uma equação em intervalo dado

Para resolver uma equação trigonométrica em um determinado intervalo, fazemos o seguinte:

1º) Resolvemos normalmente a equação.

2º) Determinamos os valores da solução geral que pertencem ao intervalo dado. Esses valores vão constituir o **conjunto solução** da equação.

> **Conjunto solução:** conjunto cujos elementos são as soluções de uma equação. Esse conjunto pode ser *vazio*, se o problema não tiver solução; *finito*, se houver um número finito de soluções; *unitário*, se houver apenas uma solução para o problema; ou *infinito*, se o número de soluções for infinito.

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 10

Resolvido passo a passo

10. (Unicastelo-SP) A temperatura média diária (em °C) de uma determinada região é expressa pela seguinte função: $T = 8 + 10 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{s-13}{52}\right)\right]$, sendo s o número de semanas do ano e T a temperatura média diária. A semana do ano em que ocorreu a 1ª temperatura máxima foi a:

a) 26ª.
b) 27ª.
c) 28ª.
d) 29ª.
e) 30ª.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
É dada uma função que expressa a temperatura média diária de determinada região em função da semana do ano.

b) O que se pede?
Pede-se a semana do ano em que ocorreu a 1ª temperatura máxima.

2. Planejando a solução

Sabe-se que a temperatura máxima é atingida quando o valor de $\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{s-13}{52}\right)\right]$ for igual a +1. No círculo trigonométrico o seno é igual a +1 quando o ângulo é de $\frac{\pi}{2}$ rad. Logo, basta igualarmos as duas relações seno.

3. Executando o que foi planejado

$$\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{s-13}{52}\right)\right] = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cancel{\pi}\left(\frac{s-13}{52}\right) = \frac{\overset{1}{\cancel{\pi}}}{2} \Rightarrow 2(s-13) = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = 13 + 13 \Rightarrow s = 26$$

Logo, a primeira temperatura máxima do ano é obtida na 26ª semana do ano.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) Tomando por base a função enunciada $T = 8 + 10 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{s-13}{52}\right)\right]$, em qual semana ocorre a 1ª temperatura mínima do ano e qual será essa temperatura? Na 52ª semana do ano, e será de −2 °C.

b) Ainda analisando a função enunciada e baseando-se nos conhecimentos trigonométricos, em qual semana ocorre pela 3ª vez a maior temperatura do ano e a menor temperatura? É importante analisar se é possível isso ocorrer em um mesmo ano. Não é possível, pois se trata da 120ª e 156ª semana, ou seja, não ocorrem em um mesmo ano.

c) *Desafio em equipe*
Com os colegas, monte um grupo de análises de temperatura da sua cidade durante um período de 30 dias e forme uma função que expresse a temperatura em função do dia do mês, trabalhando, assim, o assunto na prática.
É importante aproximar as temperaturas para criar uma repetição periódica.

d) *Pesquisa*
Como é feita a análise de temperatura do seu estado? E do Brasil? Como é elaborado o processo de previsão da temperatura de dias subsequentes e em que se baseia?

11. Resolva a equação $\cos x \cdot \tan x - \cos x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Resolução:

$\cos x \cdot \tan x - \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \cdot (\tan x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = 0$ ou $\tan x = 1$

- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

  Mas como a $\tan x$ não é definida para $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, esses valores não servem.

- $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$, pois $x \in [0, 2\pi]$

Exercícios

Veja as respostas dos exercícios 16 e 18 na seção Respostas.

15. Determine o valor de x:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\tan x = -\sqrt{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $2 \cdot \text{sen}\, x = -1$, para $0 < x < 2\pi$ $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

d) $1 + \cos x = 0$, para $-\pi < x < \pi$ $S = \varnothing$

e) $\text{sen}\, x = \sqrt{2}$ $S = \varnothing$

f) $\sec x = \sqrt{2}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

16. Resolva as equações trigonométricas:

a) $\text{sen}\, 3x = 1$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

c) $\tan 5x = 0$, sendo $0 < x < 2\pi$

17. Resolvam as equações para $0 < x < 2\pi$:

a) $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - \cos x = 0$ $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) $\text{sen}^2\, x - \text{sen}\, x = 0$ $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

c) $\tan^2 x = 3$ $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

18. Resolvam as equações:

a) $\sqrt{2} \cdot \text{sen}\, x + 1 = 0$

b) $\text{sen}\, x + \cos x = 0$

c) $\sec x = -2$

d) $\cot x = \sqrt{3}$

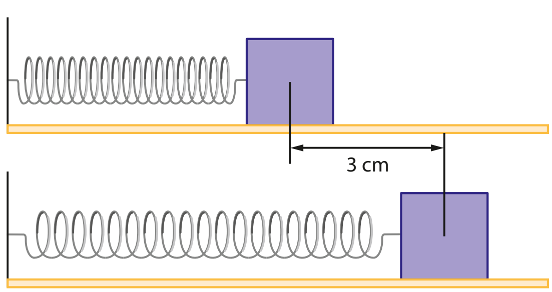
19. Resolvam a equação $\text{sen}\, x = 1 + \text{sen}^2\, x$. $S = \varnothing$

20. Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1}$. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

21. DESAFIO Resolva a inequação trigonométrica $|\text{sen}\, x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

22. *Física*

Um dos principais movimentos periódicos oscilatórios é o movimento harmônico simples (MHS). Um objeto se move sobre uma reta de modo que a intensidade da força exercida sobre ele aumenta e diminui de forma periódica. Esse tipo de movimento está presente em diversas ocasiões na natureza.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O objeto acima se desloca de tal modo que sua posição x (em centímetros) em função do tempo t (em segundos), com $t \leqslant \pi$, é dada pela função $x(t) = 4 + 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$. A soma dos valores de t quando $x(t) = 1$ cm e $x(t) = 7$ cm é numericamente igual a:

a) $\frac{\pi}{2}$.

x b) π.

c) $\frac{3\pi}{2}$.

d) 2π.

e) $\frac{5\pi}{2}$.

Pensando no Enem

1. Com a intenção de interditar certa rua durante os sábados à tarde para a realização de uma feira artesanal, a Prefeitura procurou saber quantos motoristas seriam prejudicados. Para isso, os técnicos monitoraram a quantidade de veículos em determinado sábado, entre 12h e 17h. Verificou-se que a quantidade de veículos poderia ser expressa pela função polinomial: $Q(t) = t^3 + bt^2 + ct + d$, em que $Q(t)$ é a quantidade de veículos que passaram naquela rua durante as t primeiras horas contadas a partir do início do monitoramento, que se deu ao meio-dia. Sabendo que, exatamente no início do monitoramento estavam passando 4 veículos, isto é, $Q(0) = 4$, uma hora depois foi contabilizado um total de 8 veículos e, no final do monitoramento (às 17h), um total de 184 veículos, pode-se inferir que:

a) a função que modela esta situação é dada por $Q(t) = t^3 + t^2 + 2t + 4$.

b) 20 veículos passaram na rua desde o início dos estudos até as 14h.

c) o total de veículos que passou na rua durante a segunda hora da tarde foi igual a 22.

d) 52 veículos passaram na rua durante a terceira hora da tarde.

x e) 132 veículos passaram na rua durante as duas últimas horas dessa tarde.

2. Quando um reservatório está parcialmente cheio, uma torneira é aberta para enchê-lo. Depois de aberta a torneira, o volume de água que ainda falta para encher o reservatório, em metros cúbicos, é dado pela função $V(t) = t^3 - 2t^2 - 4t + 8$, com t dado em horas. Sendo assim, o volume, em m^3, da água contida no reservatório no momento em que a torneira foi aberta e o tempo (em horas) necessário para que o reservatório fique completamente cheio são, respectivamente, iguais a:

x a) 8 e 2.

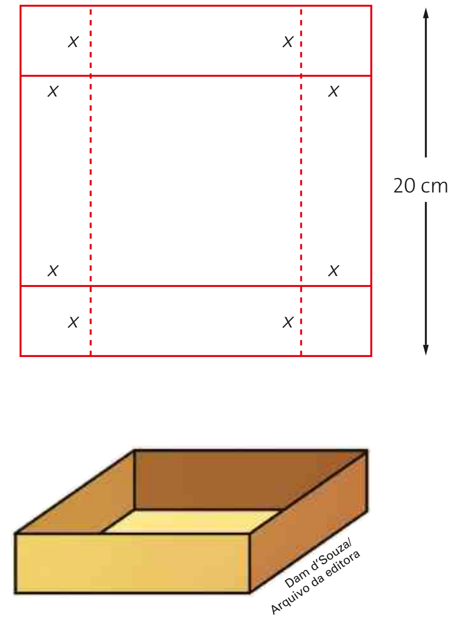
b) 2 e 8.

c) 4 e 6.

d) 3 e 6.

e) 6 e 3.

3. Cortando-se quadrados de lado 3 cm nos cantos de uma folha quadrada de papelão de 20 cm de lado e dobrando conforme a figura, formamos uma caixa sem tampa, cujo volume é igual a 588 cm^3. Existe algum outro valor do lado do quadrado a ser recortado em cada canto para o qual o volume da caixa resultante também seja igual a 588 cm^3? Sim; $\frac{17 - \sqrt{93}}{2}$.



4. Na tentativa de analisar em que situações certa empresa teria lucro, o gerente fez um levantamento da receita e do custo que essa empresa tinha com a produção de x peças (x em milhares). Após calcular a diferença entre a receita e o custo, chegou à função $L(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$, que representa o lucro da empresa em milhares de reais com a produção de x peças. De acordo com essa situação, responda:

a) Se a empresa não produzir qualquer peça, significa dizer que ela não terá lucro nem prejuízo?
Não, pois a empresa terá prejuízo.

b) Determine o valor de $L(x)$ na venda de 3 000 peças. Interprete esse resultado.
A empresa terá um prejuízo de R$ 2 000,00.

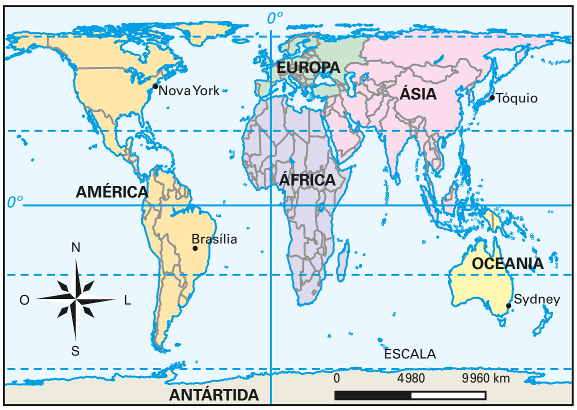
c) Quantas peças devem ser vendidas para que a empresa não tenha lucro nem prejuízo?
1000, 2 000 e 4 000 peças

d) Em quais intervalos de unidades vendidas a empresa passa a ter lucro?
Entre 1000 e 2 000 peças ou acima de 4 000 peças.

Utilize o texto a seguir como base para responder as questões 5 e 6.

O mapa-múndi, também conhecido como planisfério, é um mapa que representa o globo terrestre planificado. A linha equatorial divide o mapa-múndi em dois hemisférios (norte e sul), e o meridiano de Greenwich divide o mapa-múndi em outros dois hemisférios (oriental e ocidental). Juntos, a linha equatorial e o meridiano de Greenwich dividem o mapa-múndi em 4 quadrantes, como mostra a figura da página seguinte.

Allmaps/Arquivo da editora



Fonte: Adaptado de *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. Disponível em: <http://atlasescolar.ibge.gov.br/images/atlas/mapas_mundo/mundo_planisferio_politico_a3.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2016.

Se fizermos uma analogia entre o mapa-múndi e a circunferência trigonométrica, poderemos dizer que a Ásia situa-se no 1º quadrante e a cidade de Moscou é um ponto do 1º quadrante, de modo que o "seno de Moscou" é um número positivo.

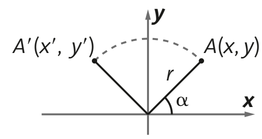
5. As cidades de Brasília, Nova York, Sydney e Tóquio estão respectivamente nos:

a) 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes.
b) 2º, 1º, 4º e 3º quadrantes.
c) 3º, 2º, 1º e 4º quadrantes.
x d) 3º, 2º, 4º e 1º quadrantes.
e) 3º, 4º, 1º e 2º quadrantes.

6. De acordo com a analogia proposta no texto, seria correto dizer que:

a) "seno de Brasília" é um número positivo.
b) "cosseno de Brasília" é um número positivo.
x c) "tangente de Brasília" é um número positivo.
d) "cosseno de Nova York" é um número positivo.
e) "tangente de Nova York" é um número positivo.

7. Em diversas situações, o estudo dos fenômenos físicos requer a presença de um plano inclinado, seja para o cálculo de um coeficiente de atrito, seja por necessidades técnicas de construção, necessidades físicas e biológicas ou mesmo para experimentos laboratoriais. Para esse estudo pode ser adotado como referência um sistema de coordenadas, sendo o mais comum o sistema cartesiano, com os eixos ortogonais na horizontal e vertical. Porém, para facilitar os cálculos, pode-se fazer uma rotação desses eixos de acordo com a inclinação desejada. Veja a rotação do ponto $A(x, y)$ para $A'(x', y')$ em torno da origem do sistema de eixos, no sentido anti-horário:



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \\ y = r \cdot \text{sen } \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ y' = r \cdot \text{sen } (\alpha + \beta) \end{cases}$$

$\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overline{OA}$ formam o ângulo α. Sendo $r = AO = OA'$, temos:

Sabendo que:

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$
- $\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$

então é correto afirmar que:

a) $x' = x \cdot \cos \beta + y \cdot \text{sen } \beta$
x b) $x' = x \cdot \cos \beta - y \cdot \text{sen } \beta$
c) $y' = x \cdot \text{sen } \beta + y \cdot \text{sen } \beta$
d) $y' = x \cdot \text{sen } \beta - y \cdot \cos \beta$
e) $x' = x \cdot \cos \beta + y \cdot \cos \beta$

8. *Física*

O movimento das marés é um movimento periódico motivado pelas forças de atração gravitacional exercidas pelo Sol e pela Lua. Por ser um movimento periódico, pode ser modelado aproximadamente pela função $h(t) = a + b \cdot \text{sen } (c \cdot t)$, em que $h(t)$ representa a altura da maré em metros no tempo t e com valor médio a, amplitude b e período $\frac{2\pi}{|c|}$ (sendo a, b e c constantes reais positivas). Em certa manhã, um estudante abriu o jornal e observou as seguintes informações:

Tábua das marés

Horário	Altura da maré
0h	1,0 m
3h	1,6 m
6h	1,0 m
9h	0,4 m
12h	1,0 m
15h	1,6 m
18h	1,0 m

Fonte: Dados fictícios.

Sabendo que ele irá à praia pela manhã após as 9h e que não entra na água se a maré estiver acima de 0,7 m, responda: A que horas, no máximo, o estudante pode chegar à praia de tal maneira que ele possa entrar na água ainda pela manhã?

a) 9h30min
b) 10h
c) 10h30min
x d) 11h
e) 11h30min

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (Unifap) Agora é a vez de Ezequiel e Marta, que, estudando trigonometria, lançam um desafio a seus colegas.
O desafio é:

Qual o valor do cos 45° − sen 45° + cos 135°.

Então os seus colegas, para responderem ao desafio corretamente, devem indicar qual alternativa:

a) -1

b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

x c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\dfrac{1}{2}$

e) 0

2. (Ufam) O produto das raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ é igual a:

a) 0

b) 6

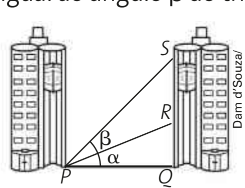
c) 8

x d) -6

e) -8

Região Nordeste

3. (UFRN) Um observador, situado no ponto *P* de um prédio, vê três pontos, *Q*, *R* e *S*, numa mesma vertical, em um prédio vizinho, conforme esquematizado na figura abaixo. *P* e *Q* estão num mesmo plano horizontal, *R* está 6 metros acima de *Q*, e *S* está a 24 metros acima de *Q*. Verifica-se que o ângulo α do triângulo *QPR* é igual ao ângulo β do triângulo *RPS*.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

O valor, em metros, que mais se aproxima da distância entre *P* e *Q* é:

x a) 8,5.

b) 8,8.

c) 9,4.

d) 10,2.

e) 11,5.

4. (Uncisal)

Funções polinomiais: uma visão analítica

Uma das principais razões pelas quais estamos interessados em estudar o gráfico de uma função real é determinar o número e a localização (pelo menos aproximada) de seus zeros. (Recorde que o zero de uma função f é uma raiz da equação $f(x) = 0$.) O problema de calcular as raízes de uma equação sempre foi objeto de estudo da Matemática ao longo dos séculos. Já era conhecida, na antiga Babilônia, a fórmula para o cálculo das raízes exatas de uma equação geral do segundo grau. No século XVI, matemáticos italianos descobriram fórmulas para o cálculo de soluções exatas de equações polinomiais do terceiro e do quarto grau. Essas fórmulas são muito complicadas e por isso são raramente usadas nos dias de hoje. Perguntas do tipo:

- Qual é o maior número de zeros que uma função polinomial pode ter?
- Qual é o menor número de zeros que uma função polinomial pode ter?
- Como podemos encontrar todos os zeros de um polinômio, isto é, como podemos encontrar todas as raízes de uma equação polinomial? Ocuparam as mentes dos matemáticos até o início do século XIX, quando este problema foi completamente resolvido. [...]

Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap111s4.html>. Acesso em: 24 out. 2014 (adaptado).

Levando em conta que $x = 1$ é um dos zeros da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, qual o valor da soma dos outros zeros?

a) -6

b) -5

c) 0

x d) 5

e) 6

5. (Uern) De uma divisão polinominal, são conhecidas as seguintes informações:

- Divisor: $x^2 + x$;
- Resto: $1 - 7x$; e,
- Quociente: $8x^2 - 8x + 12$.

Logo, o dividendo dessa operação é

x a) $8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$.

b) $6x^4 + 4x^2 + 4x + 3$.

c) $8x^4 + 4x^2 + 4x + 1$.

d) $6x^4 + 8x^2 + 5x + 1$.

Região Centro-Oeste

6. (UFGD-MS) Seja f uma função polinomial que tem zeros, unicamente, para $x = -2$, $x = -1$ e $x = 1$. Se $f(0) = -3$, então f é dada por:

a) $f(x) = \frac{9}{2}x^3 + 6x^2 - \frac{15}{2}x - 3$

b) $f(x) = \frac{15}{2}x^3 - 6x^2 - \frac{3}{2}x + 3$

c) $f(x) = -\frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x - 3$

x d) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x - 3$

e) $f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x + 3$

7. (UEG-GO) Dividindo o polinômio $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 12x + 5$ pelo polinômio $D(x) = x^2 + 2x - 5$, obtém-se, respectivamente, o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ iguais a:

a) $Q(x) = 3x + 1$ e $R(x) = 0$

b) $Q(x) = x + 3$ e $R(x) = 4x + 2$

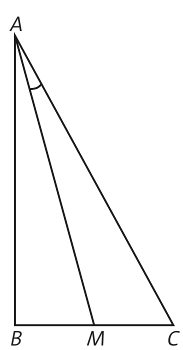
c) $Q(x) = x - 3$ e $R(x) = 4x - 2$

x d) $Q(x) = 3x - 1$ e $R(x) = 5x$

8. (UFMS) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 + 7x^2 - 5x - 35 = 0$. Calcular $|x_1 + x_2 + x_3|$. 7

Região Sudeste

9. (Fuvest-SP) No triângulo retângulo ABC, ilustrado na figura, a hipotenusa $\overline{AC}$ mede 12 cm e o cateto $\overline{BC}$ mede 6 cm. Se M é o ponto médio de $\overline{BC}$, então a tangente do ângulo $M\hat{A}C$ é igual a:



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $\frac{\sqrt{2}}{7}$

x b) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

c) $\frac{2}{7}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{7}$

e) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$

10. (Unesp-SP) Sabe-se que, na equação $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, uma das raízes é igual à soma das outras duas. O conjunto solução (S) desta equação é:

a) $S = \{-3, -2, -1\}$

x b) $S = \{-3, -2, +1\}$

c) $S = \{+1, +2, +3\}$

d) $S = \{-1, +2, +3\}$

e) $S = \{-2, +1, +3\}$

11. (Fatec-SP) Em uma região plana de um parque estadual, um guarda florestal trabalha no alto de uma torre cilíndrica de madeira de 10 m de altura. Em um dado momento, o guarda, em pé no centro de seu posto de observação, vê um foco de incêndio próximo à torre, no plano do chão, sob um ângulo de 15° em relação à horizontal. Se a altura do guarda é 1,70 m, a distância do foco ao centro da base da torre, em metros, é aproximadamente: $\left(\text{Use } \sqrt{3} = 1{,}7.\right)$

a) 31.

b) 33.

c) 35.

d) 37.

x e) 39.

Região Sul

12. (UPF-RS) Considerando que sen $x = \frac{2}{3}$ e x pertence ao segundo quadrante, o valor de $\frac{\tan x + \cot x}{\sec x + \csc x}$ é:

a) $-\text{sen}\, x$.

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\cos^2 x$

x d) $-3\left(2 + \sqrt{5}\right)$

e) $-6 + \sqrt{5}$

13. (UFSM-RS) A função $f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4t^3 + 17t - 20$ representa o lucro de uma empresa de produtos eletrônicos (em milhões de reais), no tempo t (em anos). Se t_1, t_2 e t_3, com $t_1 < t_2 < t_3$, correspondem aos anos em que o lucro da empresa é zero, então $t_3 - t_2 - t_1$ é igual a:

a) 1.

b) 2.

x c) 4.

d) 6.

e) 10.

Caiu no Enem

Unidade 1

1. (Enem) Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) × consumo (em kWh) + + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	**Valor da Cosip** (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

a) 134,1
b) 135,0
x c) 137,1
d) 138,1
e) 143,1

2. (Enem) Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas Química e Física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de Química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de Química para vencer a competição é:

x a) 18 b) 19 c) 22 d) 25 e) 26

3. (Enem) Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o:

a) 1 x b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

4. (Enem) A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	**2009** (em milhares de reais)	**2010** (em milhares de reais)	**2011** (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que este investidor escolhe comprar são:

a) Balas W e Pizzaria Y.
b) Chocolates X e Tecelagem Z.
c) Pizzaria Y e Alfinetes V.
x d) Pizzaria Y e Chocolates X.
e) Tecelagem Z e Alfinetes V.

5. (Enem) Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2.

Distribuição da folha salarial

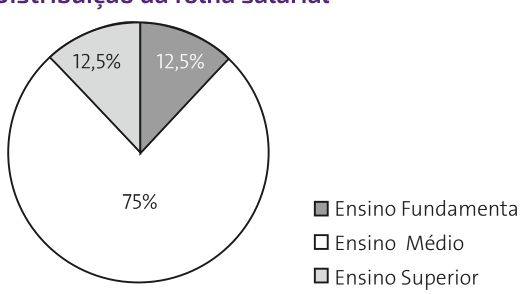


Gráfico 1

Número de funcionários por grau de instrução

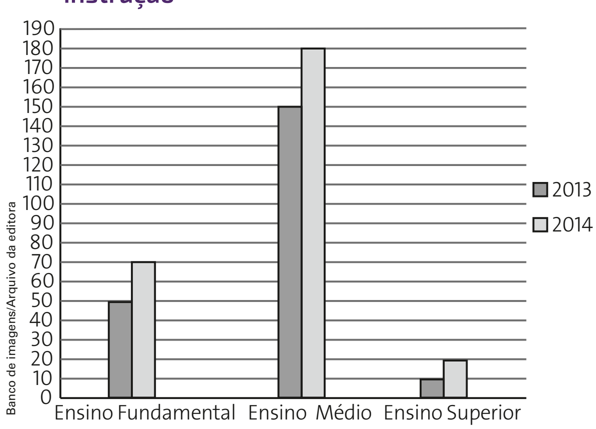


Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

a) R$ 114 285,00
x b) R$ 130 000,00
c) R$ 160 000,00
d) R$ 210 000,00
e) R$ 213 333,00

6. (Enem) A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Disponível em: www.saladeimprensa.ibge.gov.br. Acesso em: 31 jul. 2013.

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de:

a) 1,14 b) 1,42 x c) 1,52 d) 1,70 e) 1,80

7. (Enem) Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de Português, Matemática, Direito e Informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será:

a) K b) L c) M x d) N e) P

8. (Enem) Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito

	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

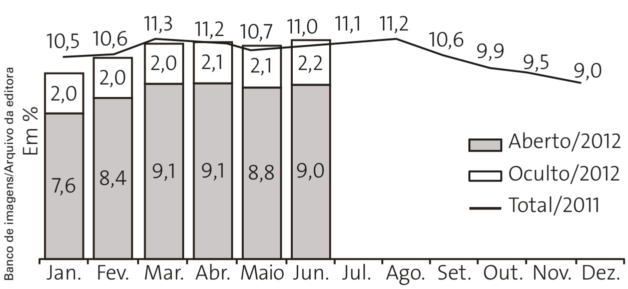
Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor:

x a) branca e os de número 38.
b) branca e os de número 37.
c) branca e os de número 36.
d) preta e os de número 38.
e) preta e os de número 37.

9. (Enem) O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Disponível em: www.dieese.org.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (fragmento).

Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de:

a) 1,1
c) 4,5
x e) 7,9
b) 3,5
d) 6,8

Unidade 2

10. (Enem) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

Figura 1

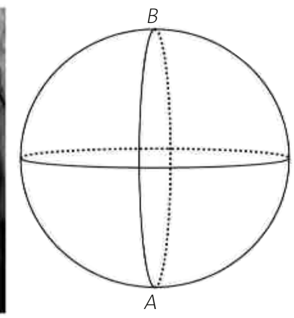
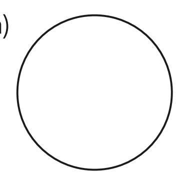


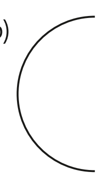
Figura 2

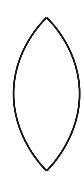
Na Figura 2, o ponto *A* está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento *AB* passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto *B* e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos *A* e *B*.

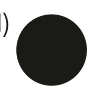
Disponível em: www.baixaki.com.br. Acesso em: 29 fev. 2012.

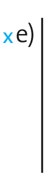
A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:

a)


b)


c)


d)


x e)


11. (Enem) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

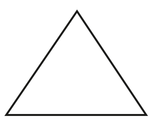
Use 3 como valor aproximado para π.

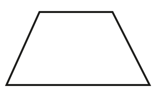
A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:

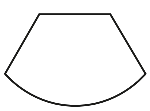
a) 168
b) 304
c) 306
d) 378
x e) 514

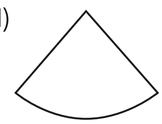
12. (Enem) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

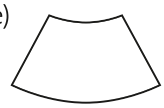
Qual deverá ser a forma do adesivo?

a) 

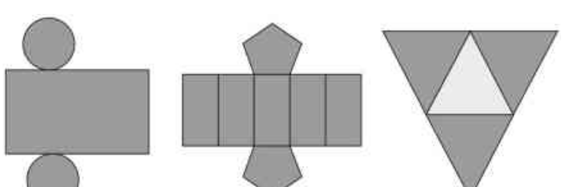
b) 

c) 

d) 

x e) 

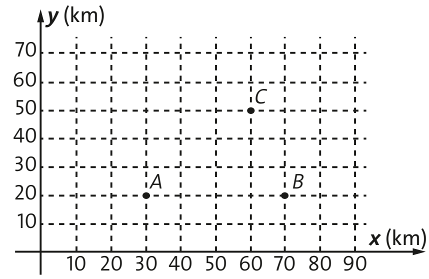
13. (Enem) Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

x a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
c) Cone, tronco de pirâmide e prisma.
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

14. (Enem) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



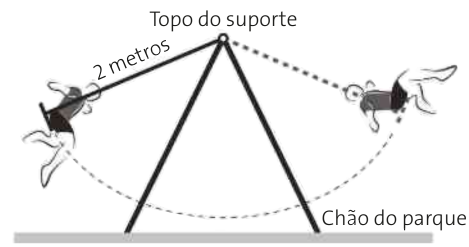
A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

a) (65; 35)
b) (53; 30)
c) (45; 35)
d) (50; 20)
x e) (50; 30)

Unidade 3

15. (Enem) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo x é paralelo ao chão do parque, e o eixo y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função:

a) $f(x) = 2\sqrt{2 - x^2}$.
b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$.
c) $f(x) = x^2 - 2$.
x d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.
e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Ilustrações desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Respostas

UNIDADE 1 • Matemática financeira e Estatística

Capítulo 1 • Matemática financeira

1. a) 57
b) 80%
c) 40
d) R$ 22,75
e) R$ 376,00
f) 57%
g) Menor.

2. Aproximadamente 16,7%.

3. De 705 mL a 1410 mL

4. a) 6,17% ao ano.
b) 5,6% ao ano.

5. **d**

6. R$ 1325,30

7. a) Respostas pessoais.
b) Na oferta 3.

8. **e**

Leitura

Custava cerca de R$ 340,86.

9. a) $f = 1{,}03$
b) $f = 0{,}97$
c) $f = 1{,}15$
d) $f = 0{,}85$
e) $f = 3{,}3$
f) $f = 31$

10. a) Aumento de 13%.
b) Desconto de 30%.
c) Aumento de 100%.
d) Desconto de 5%.
e) Aumento de 2 900%.

11. a) Aumento de 8,15%.
b) Desconto de 12%.
c) Aumento de 33,1%.
d) Desconto de 0,6%.

12. 4%

13. 18%

14. O aumento foi de 15%.

15. Após o aumento: R$ 84,00 e após o desconto: R$ 79,80.

16. A oferta da primeira loja.

17. Aproximadamente 56 740 pontos.

18. Luís: R$ 750,00; Marta: R$ 600,00; e Sérgio: R$ 540,00.

19. R$ 55,14

20. R$ 2,39

21. 5 900%

22. O desconto de 55% é maior.

23. 2,06%

24. Cerca de 20%.

Resolvido passo a passo

6. a) Não. Faltará aproximadamente 244,32 reais.

25. Renderá R$ 225,00 de juros.

26. 5 meses.

27. 1% ao mês.

28. R$ 220,00

29. R$ 20,00

30. R$ 7 092,59

31. a) 39,24%
b) R$ 353,16

32. a) R$ 757,70
b) 8,24%

33. R$ 1144,62

34. R$ 2 130,05

35. 28 meses.

36. Em 7 meses.

37. 4 meses.

38. 4% ao mês.

39. **c**

40. Marcos pagou R$ 4 560,00 e Luís, R$ 4 641,00.

41. 329,98%

42. 81,71%

43. 47,59%

44. 9,05%

45. 12,68%

46. 19,4%

47. 7,2%

48. Aproximadamente 1,84%.

Leituras

2. R$ 152,09

3. R$ 5 000 000,00

4. 283 meses.

5. a) R$ 142,50
b) R$ 1 870,00

Para refletir

Página 15

R$ 0,80 e R$ 0,08

Página 16

$0{,}75x + 6{,}75$

Capítulo 2 • Estatística

1. a) quantitativa discreta
b) quantitativa contínua
c) quantitativa nominal
d) quantitativa discreta
e) quantitativa nominal
f) quantitativa ordinal

2. a) 3 500 clientes; 210 clientes.
b) Cor (qualitativa nominal); preço (quantitativa contínua); número de portas (quantitativa discreta); estado de conversão (qualitativa ordinal).
c) Branca, vermelha e azul.

4. a) Sexo, cor de cabelo, *hobby*.
b) **M** (masculino) e **F** (feminino).
c) 10; $\frac{10}{15}$; 0,4 e 40%.
d) Castanho.

9. a) Sexo, altura, cor dos olhos, cor do cabelo e tipo sanguíneo.
b) Sexo: quantitativa discreta; altura: quantitativa contínua; cor dos olhos e cabelos: qualitativa nominal; tipo sanguíneo: qualitativa nominal.
c) Amostra.
d) FA = 30; FR = 60%
e) 0,20 m
f) 60%; 4%

10. a) De agosto a setembro e de outubro a dezembro.
b) Outubro.
c) Agosto.
d) Novembro.

13. a) 2014
b) 2006
c) Decresceu.
d) 23 739 milhões de dólares.

17. a) 40 alunos votaram; 21 mulheres e 19 homens.
b) 12 votos.
c) 3 mulheres.
d) 50%

19. a) 3,6 h
b) 30%

Resolvido passo a passo

5. a) 3, 2 e 1, respectivamente.

23. a) 2
b) 1

24. 7,5

25. 17,2 anos.

26. MA = R$ 13,00 e Me = R$ 13,50

27. a) 121
b) 121,5
c) 126
d) 126

28. a) 40
b) 12,5%
c) 72,5%
d) $MA = 3{,}15$; $Mo = 3$; $Me = 3$

29. a) $MA = 14{,}3$; $Mo = 15$; $Me = 14{,}5$
b) $MA = 1{,}71$; $Mo = 1{,}67$; $Me = 1{,}71$

30. $MA = 745$; $Mo = 850$; $Me = 750$

31. 7,0.

32. **d**

33. $MA = 2{,}3$ e $Me = 2$

34. $MA = 61$; $DP = 3{,}56$.

35. c) $MA = 5{,}8$; $Mo = 5{,}0$; $Me = 5{,}0$; $DP \simeq 2{,}46$

36. a) MA = R$ 2 500,00; Me = R$ 2 000,00
b) Menor.

39. a) Diminuiu 5,39%.
b) 16%

40. 31,2%

41. a) Habitação.
b) 15% de sua renda.
c) De 31 a 45 anos.

Pensando no Enem

1. **e**

2. **d**

Outros contextos

1. Texto informativo.

3. A taxa de natalidade tende a diminuir e a expectativa de vida tende a aumentar.

4. a) Sim.
b) Não.
c) 325 574

5. a) De 30 a 39 anos.
b) De 30 a 39 anos.

6. Sexo masculino $\rightarrow$ frequência absoluta: 104 546 709; frequência relativa: $\simeq$ 49,30%

Sexo feminino $\rightarrow$ frequência absoluta: 107 530 666; frequência relativa: $\simeq$ 50,70%

Vestibulares de Norte a Sul

1. **b**

2. **d**

3. **d**

4. **b**

5. **c**

6. **b**

7. a) R$ 13 996,80
b) 10

8. **d**

9. **d**

10. **a**

Para refletir

Página 32
Quando todos os elementos do universo são pesquisados.

Página 43
Sala **A**: 108°; Sala **B**: 72°; Sala **C**: 180°

Página 45
140 ⊢ 150: 145;
150 ⊢ 160: 155;
160 ⊢ 170: 165;
170 ⊢ 180: 175;
180 ⊢ 190: 185

Página 50
É uma distribuição em que a moda se repete três vezes.

Página 53
Porque essa é a propriedade das médias aritméticas.

Página 55
Se a variância for 0 ou 1, o desvio padrão será, respectivamente, 0 ou 1. E se a variância pertencer ao intervalo (0, 1), então o desvio padrão será maior do que a variância.

UNIDADE 2 • Geometria espacial e Geometria analítica

Capítulo 3 • Geometria espacial: corpos redondos

1. **c** e **e**.

2. a) 8π cm^2
b) 16π cm^2
c) 24π cm^2

3. 152π cm^2 ou aproximadamente 477 cm^2.

4. $h = 2$ cm; $A_T = 70\pi$ cm^2 ou aproximadamente 220 cm^2.

5. Na lata mais alta.

Resolvido passo a passo

5. a) O custo total da reforma com o revestimento foi de R$ 1706,40

6. $0{,}12\pi$ cm^3 ou aproximadamente 0,377 cm^3.

7. $4\,480\pi$ cm^3 ou aproximadamente 14 070 cm^3.

8. 450π cm^3 ou aproximadamente 1413 cm^3.

9. 1008 m^3

10. 128π cm^3 ou aproximadamente 402 cm^3.

11. $2\,000\pi$ cm^3 ou aproximadamente 6 280 cm^3.

12. A primeira.

13. a) $V(t) = 4\pi$ L/h
b) $h(t) = 1$ dm/h
c) 10 h

14. **a**

15. a) 30 cm
b) 540π cm^2
c) 864π cm^2

16. **a**

17. 260π cm^2

18. 6π cm^2

19. a) $r = 2$ cm; $h = 2\sqrt{3}$ cm
b) 12π cm^2

20. 201,1 cm^2

21. $12\,000\pi$ litros (aproximadamente 36 000 litros)

22. $0{,}00375\pi$ m^3 ou aproximadamente 0,01178 m^3.

23. 2 400 m^3

24. Aproximadamente 81,64 cm^3.

25. $3\sqrt{3}$ cm ou aproximadamente 5,2 cm.

26. 128π cm^3 ou aproximadamente 402 cm^3.

27. 28π ou aproximadamente 88 L.

28. $26{,}25\pi$ m^3 ou aproximadamente 82,4 m^3.

29. 111π mL ou aproximadamente 349 mL.

30. 49 mL

31. 144π cm^2

32. 64π cm^2 ou aproximadamente 201 cm^2.

33. 200π cm^2

34. Aproximadamente 9 200 cm^3.

35. Aproximadamente 113,04 cm^3.

36. 250 000 L

37. $\frac{64\pi}{9}$ cm^3 ou aproximadamente 22 cm^3.

38. Aproximadamente 152,6 m^3/h.

39. Aproximadamente 13,15 m^3.

40. $R = 4\sqrt[3]{2}$ cm; $A = 64\pi\sqrt[3]{4}$ cm^2.

41. 48π cm^3

42. 3π cm^2

43. 9,6 m^2

44. Aproximadamente 2,8 m^3.

45. a) $\frac{\pi R^2}{3}$ cm^2
b) $\frac{4\pi R^2}{3}$ cm^2

Para refletir

Página 70

Porque cada um tem, pelo menos, uma superfície curva.

Página 71

Quando o cilindro é reto.

Página 77

O outro cateto indica o raio da base e a hipotenusa indica a geratriz do cone.

Capítulo 4 • Geometria analítica: ponto e reta

1. a) (2, 5)
b) (5, 2)
c) (−4, 3)
d) (−1, −6)
e) (3, −4)

3. $A(0, 0)$, $B(2a, 0)$, $C(2a, a)$, $D(0, a)$.

4. a) $P(a, a)$, $a \in \mathbb{R}$
b) $P(a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$

5. $m \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < m < -\frac{1}{2}$

6. a) $\sqrt{13}$
b) 6
c) $\sqrt{29}$
d) $\sqrt{5}$

7. a) $6\sqrt{2}$
b) 5

8. $\pm 2\sqrt{2}$

9. $P(3, 0)$

10. −2 ou 8

11. $3x^2 + 3y^2 + 42x + 22y + 46 = 0$

12. Perímetro: $2\sqrt{58} + 6$

13. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

14. O triângulo ABC é escaleno e obtusângulo.

15. a) $M(2, -6)$

b) $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$

c) $M(-3, -3)$

16. $B(8, -2)$

17. 6; $G(5, 4)$

18. $C(0, -7)$ e $D(-4, -8)$

19. a) Não.

b) Sim.

20. $x \neq -1$

21. $P\left(0, \frac{-6}{5}\right)$

22. $P\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$

23. $P(2, 2)$

24. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

25. a) $\frac{1}{2}$

b) -1

c) Não há.

d) $-\frac{1}{2}$

e) $\frac{5}{7}$

f) $-\frac{1}{5}$

27. a) $4x - y - 11 = 0$

b) $x - y - 3 = 0$

c) $y = -5$

d) $3x + 8y - 17 = 0$

e) $x = -3$

f) $x + 2y + 4 = 0$

g) $y = -7$

h) $y = x$

i) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

28. $P \notin \overline{AB}$

29. a) $3x + y - 3 = 0$

b) $9x - 4y + 41 = 0$

c) $2x - 3y - 10 = 0$

d) $4x - y - 9 = 0$

30. $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

31. a) $y = -\frac{2x}{3} + 2$

b) $x - 2y + 16 = 0$

c) $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$

d) $x + y - 5 = 0$

32. $y = \frac{x - 1}{2}$

33. a) $y = x$ ou $x - y = 0$

b) $y = -x$ ou $x + y = 0$

c) $y = 0$

d) $x = 0$

34. $y = 4x - 1$

35. $-\frac{3}{4}$

36. $y = -2x - 3$

37. $\frac{9}{2}$

38. $\overleftrightarrow{AC}$: $4x - 5y + 1 = 0$;

$\overleftrightarrow{BD}$: $2x + 3y - 16 = 0$

39. $k = 1 \rightarrow 3x - 2y - 4 = 0$

40. $x - 3y + 7 = 0$

41. $\overleftrightarrow{CM}$: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$; $\overleftrightarrow{AN}$: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$

42. $3x - 2y = 0$

43. Paralelas.

44. -4 ou 1.

45. a) $y = -4x + 6$

b) $y = 2$

c) $y = \frac{2x}{5} - \frac{17}{5}$

46. $\left(-\frac{14}{11}, -\frac{10}{11}\right)$

47. $y = 5$

Resolvido passo a passo

5. a) $P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

48. a) $4x - 3y + 18 = 0$

b) $x + 2y - 14 = 0$

c) $x = 3$

49. $y + 3x - 19 = 0$

50. $N(10, -4)$

51. $4x + 5y - 10 = 0$

52. $2x + y + 3 = 0$

53. s: $y = \frac{4x}{3} - \frac{16}{3}$ e t: $y = \frac{4x}{3} - \frac{4}{3}$

54. $\overleftrightarrow{AB}$: $y = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$ e $\overleftrightarrow{AC}$: $y = -\frac{4x}{3} + 6$

55. **e**

56. a) 2

b) $\frac{21}{5}$

c) $2\sqrt{5}$

d) 2

57. a) $\frac{18}{5}$

b) $\frac{7\sqrt{13}}{13}$

c) 0 ($P \in r$)

d) 4

e) 4

f) $\frac{10\sqrt{29}}{29}$

58. $p = 4$ ou $p = -\frac{8}{3}$

59. $2\sqrt{5}$

60. 2

61. 4

62. $k = 16$ ou $k = -16$

63. 84,5

64. **e**

65. 4

66. 12

67. $x + y - 4 = 0$

68. $2x + 3y + k = 0$; $k \in \mathbb{R}$

69. $3 - 2y + k = 0$; $k \in \mathbb{R}$

72. a) $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$

b) $bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$

Exercícios adicionais

1. 90°

2. $\tan \theta = \frac{2}{3}$

3. $y = -\frac{3x}{2} + 4$ e $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$

4. $\tan \theta = \frac{4}{3}$

Para refletir

Página 97

Porque se A coincidir com B não há segmento de reta. Portanto, não há ponto médio.

Página 105

- hipotenusa $= 5\sqrt{2}$

Capítulo 5 • Geometria analítica: a circunferência

Resolvido passo a passo

5. a) Distância percorrida $= \left[4\left(\sqrt{2} - 1\right) + 3\pi\right]$ u.c.

1. a) $C(5, 4)$ e $r = 1$
b) $C(-2, -6)$ e $r = \sqrt{5}$
c) $C(2, 0)$ e $r = 2$
d) $C(-3, 1)$ e $r = 4$
e) $C(0, 4)$ e $r = 1$
f) $C(0, 0)$ e $r = \sqrt{10}$

2. a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
b) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 2$
c) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$
d) $(x - 4)^2 + y^2 = 25$

3. a) $r = 4$ e $C(2, -3)$
b) $r = 4$ e $C(3, 1)$
c) $r = 2$ e $C(2, 4)$
d) $r = 7$ e $C(-6, 2)$
e) $r = \sqrt{5}$ e $C(-4, 0)$
f) $r = \sqrt{20}$ e $C(3, -4)$
g) $r = 2$ e $C(0, 2)$
h) $r = \sqrt{2}$ e $C(1, 1)$

4. **a** e **d**

5. A e B

6. $x^2 + (y + 4)^2 = 2$

7. $C(-1, -1)$ e $r = 2$

8. $(x - 2)^2 + y^2 = 8$

9. $C(1, -1)$ e $r = \sqrt{3}$

10. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$

11. $k \in \mathbb{R} \mid k < 2$

12. a) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
b) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$

13. $b = 7$ ou $b = -1$

14. $2x + 3y - 10 = 0$

15. $x - y - 1 = 0$ e $x + y - 5 = 0$

16. $x^2 + y^2 = 25$

17. $\sqrt{2}$

18. Secante.

19. $S = 4$; $A(1, 2)$ e $B(-1, 4)$

20. a) Exterior à circunferência.
b) Secante; $(2, 2)$ e $(-1, -1)$

21. $\sqrt{2}$

22. $(6, -1)$ e $(3, 2)$

23. -20

24. $x + 2y - 8 = 0$

25. t_1: $4y + 3x + 1 + 5\sqrt{7} = 0$ e
t_2: $4y + 3x + 1 - 5\sqrt{7} = 0$

26. **d**

27. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 32$

28. 1 cm

29. A soma dos quadrados é 15.

Exercícios adicionais

1. a) A circunferência λ_2 é interior à λ_1 (Não há ponto comum).
b) Secantes; se cruzam nos pontos $(3, 5)$ e $(1, 3)$.
c) As circunferências são tangentes externas $(2, -1)$.
d) As circunferências são tangentes internas $(0, -4)$.

2. $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$

3. **d**

4. **a**

5. **M** é interno à circunferência.

Outros contextos

2. $37{,}21\pi$ cm^2. 12,2 cm.

3. $x^2 + y^2 = (0{,}61)^2$

5. $(225)^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (229{,}5)^2$ e $x^2 + y^2 \leqslant (225{,}5)^2$.

Pensando no Enem

1. **d**

2. **c**

3. **b**

Vestibulares de Norte a Sul

1. **d**

2. **c**

3. **c**

4. **c**

5. **c**

6. **a**

7. **d**

8. **d**

9. **d**

10. **a**

Para refletir

Página 125

O três pontos devem ser distintos e não colineares.

UNIDADE 3 • Geometria analítica e números complexos

Capítulo 6 • Geometria analítica: secções cônicas

1. a) $y^2 = 36x$
b) $x^2 = -24y$
c) $x^2 = 28y$
d) $y^2 = -20x$

2. a) $F(7, 0)$; $V(0, 0)$ e d: $x = -7$
b) $F(0, -1)$; $V(0, 0)$ e d: $y = 1$
c) $F\left(0, \frac{5}{2}\right)$; $V(0, 0)$ e d: $y = -\frac{5}{2}$
d) $F(-4, 0)$; $V(0, 0)$ e d: $x = 4$

3. a) $y^2 = 12x$
b) $x^2 = -12y$
c) $(y - 2)^2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)$
d) $(y + 3)^2 = 12(x + 1)$

4. 1

5. a) $V(1, 3)$; $F(4, 3)$; $d: x = -2$; $c = 3$
b) $V(1, 3)$; $F\left(1, \frac{13}{4}\right)$; $d: y = \frac{11}{4}$; $c = \frac{1}{4}$

6. a) $(x + 1)^2 = -4(y - 4)$
b) $(x - 4)^2 = 12(y - 2)$

Resolvido passo a passo

5. a) $\begin{cases} \text{área total da pista} = 540\,000\pi \text{ m}^2 \\ \text{distância mínima} = 228 \text{ m} \\ \text{distância máxima} = 1\,572 \text{ m} \end{cases}$

7. a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$
b) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$
c) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{48} = 1$
d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$

8. a) $F_1 = (\sqrt{63}, 0)$; $F_2 = (-\sqrt{63}, 0)$;
$A_1 = (12, 0)$; $A_2 = (-12, 0)$; $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
b) $F_1 = (4, 0)$; $F_2 = (-4, 0)$; $A_1 = (5, 0)$; $A_2 = (-5, 0)$; $e = \frac{4}{5}$
c) $F_1 = (0, 1)$; $F_2 = (0, -1)$; $A_1 = (0, \sqrt{2})$; $A_2 = (0, -\sqrt{2})$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$
d) $F_1 = (\sqrt{5}, 0)$; $F_2 = (-\sqrt{5}, 0)$;
$A_1 = (3, 0)$; $A_2 = (-3,0)$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

9. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

10. 16

11. $\frac{(x - 2)^2}{1} + \frac{(y - 4)^2}{10} = 1$

12. $B_1 = (2, 2)$; $B_2 = (2, 0)$

13. **a**

14. 6

15. $\frac{(x - 6)^2}{25} + \frac{(y - 7)^2}{9} = 1$

16. $24\sqrt{3}$

17. $F_1(\sqrt{7}, 0)$; $F_2(-\sqrt{7}, 0)$

18. Vênus; 0,0024%.

19. 0,31 UA

Matemática e tecnologia

1. a) O ponto D é o foco e a reta AB, a diretriz da parábola.
b) São retas tangentes.
c) A concavidade fica voltada para baixo.

2. a) Alteram o formato da elipse.
b) Alteram o centro (a posição) da elipse.
c) Próximo do zero: a forma da elipse se aproxima de uma circunferência; próximo de 1: a forma da elipse se aproxima de um segmento de reta.

20. a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$
b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$
c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$
d) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

21. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

22. a) $F_1 = (\sqrt{29}, 0)$; $F_2 = (-\sqrt{29}, 0)$;
$A_1 = (5, 0)$; $A_2 = (-5,0)$; $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$
b) $F_1 = (\sqrt{41}, 0)$; $F_2 = (-\sqrt{41}, 0)$;
$A_1 = (4, 0)$; $A_2 = (-4,0)$; $e = \frac{\sqrt{41}}{4}$
c) $F_1 = (\sqrt{21}, 0)$; $F_2 = (-\sqrt{21}, 0)$;
$A_1 = (2\sqrt{3}, 0)$; $A_2 = (-2\sqrt{3},0)$; $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$

23. 10

24. $\sqrt{3}$

25. $F_1 = (2\sqrt{5}, 0)$; $F_2 = (-2\sqrt{5}, 0)$

26. $x^2 + y^2 = 20$

27. a) $e = 3$
b) $e = \sqrt{6}$
c) $e = 2$

28. $\frac{y^2}{27} - \frac{(x - 3)^2}{9} = 1$

29. $\frac{(x - 4)^2}{9} - \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$;
$F_1(4 - \sqrt{13}, -3)$; $F_2(4 + \sqrt{13}, -3)$

30. $2\sqrt{29}$

31. a) $\ell_1: y = \frac{3}{4}x$; $\ell_2: y = -\frac{3}{4}x$
b) $\ell_1: y = \frac{2}{5}x$; $\ell_2: y = -\frac{2}{5}x$
c) $\ell_1: 3x - 4y - 1 = 0$;
$\ell_2: 3x + 4y - 17 = 0$

32. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

33. a) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$
b) $\frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{4} = 1$

34. $F_1 = (5\sqrt{2}, 0)$; $F_2 = (-5\sqrt{2}, 0)$; $A_1 = (5, 0)$; $A_2 = (-5, 0)$

35. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1$

36. $60\sqrt{2}$

37. **e**

Outros contextos

1. **a**

2. $6 \cdot 10^6$ km

3. O planeta **B**.

Para refletir

Página 148

Porque, se o eixo de simetria fosse horizontal, a parábola representaria uma relação em que teriam duas imagens para um mesmo elemento do domínio, o que contradiz a definição de função.

Página 153

$B_1 = (0, 2)$; $B_2 = (0, -2)$

Página 155

A elipse tenderá a ser uma circunferência.

Capítulo 7 • Números complexos

1. a) $x = \pm 5i$
b) $x = \pm 7i$
c) $x' = 1 - i$ e $x'' = 1 + i$
d) $x' = 5 - \sqrt{15}\,i$ e $x'' = 5 + \sqrt{15}\,i$

2. a) $5i$
b) $2 - i$
c) $-7 + i$
d) $10 + 10i$
e) $2 + 3i$

3. a) $z = -3 - 2i$
b) $z = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

4. a) i
b) -1
c) 1
d) $-i$
e) $-i$
f) 1

5. a) $-8i$
b) $4\,096$
c) $8\,192 - 8\,192i$

6. $z_1 = 1 - 5i$ e $z_2 = 2 - 14i$

7. a) $x = 0$ ou $x = 1$
b) $x = \pm 2$
c) $x = 0$

9. a) $\overline{z} = 1 - 5i$
b) $\overline{z} = -2i$
c) $\overline{z} = 0$
d) $\overline{z} = -4 - 2i$
e) $\overline{z} = 5$
f) $\overline{z} = 3 - 3i$
g) $\overline{z} = -1 + i$
h) $\overline{z} = \sqrt{2} + 2i$

10. a) 25
b) 49
c) 2

11. $z = -1 - 2i$

12. a) $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$
b) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
c) $-i$

13. a) $\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$
b) $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
c) $-1 + 2i$
d) $1 - i$
e) $-i$

14. a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
b) $\frac{50}{13} - \frac{75}{13}i$

15. $2 + 3i$ e $2 - 3i$

16. a) $z = -4i$
b) $z = 2 - 3i$
c) $z = 1 + 2i$

18. $z_A = 4 + i$; $z_B = 1 - 2i$; $z_C = 2$; $z_D = -4$; $z_E = 3i$; $z_F = -2 + 2i$

19. $-z_1 = (-3, -2)$; $-z_2 = (2, -1)$; $-z_3 = (0, 2)$

22. a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{13}$
c) 7
d) $\sqrt{5}$
e) 5
f) 3
g) $\sqrt{41}$
h) 2

23. a) $\sqrt{10} + \sqrt{29}$
b) $\sqrt{290}$
c) $\sqrt{13}$
d) $\sqrt{290}$

25. a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$
b) $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$
c) $z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$
d) $z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$

26. a) $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$
b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$
c) $z = 16\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$
d) $z = 4(\cos 0 + i \cdot \text{sen } 0)$
e) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$
f) $z = 3(\cos \pi + i \cdot \text{sen } \pi)$
g) $z = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

27. a) $z = \sqrt{3} + i$
b) $z = 5$
c) $z = -i$
d) $z = -4$
e) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

Resolvido passo a passo

5. a) Gasta R$ 5 700,00 com o serviço de internet.

28. $zw = 18(\cos 195° + i \cdot \text{sen } 195°)$
$w^2 = 36(\cos 300° + i \cdot \text{sen } 300°)$
$\frac{z}{w} = 2(\cos 105° + i \cdot \text{sen } 105°)$
$\frac{w}{z} = \frac{1}{2}(\cos 255° + i \cdot \text{sen } 255°)$

29. $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

30. $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$; $z^3 = -8$ e $z^9 = -512$

31. a) $-2 - 2i$
b) $-8 - 8\sqrt{3}\,i$

32. a) -6
b) $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$
c) $8i$
d) $3^{99}i$

33. a) $w_0 = 2i$; $w_1 = -2i$
b) $w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{8}\right)$;
$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\frac{15\pi}{8}\right)$

34. a) $w_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$;

$w_1 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$;

$w_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$;

$w_3 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

b) $w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{24}\right)$;

$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i \cdot \text{sen}\frac{13\pi}{24}\right)$;

$w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i \cdot \text{sen}\frac{25\pi}{24}\right)$;

$w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i \cdot \text{sen}\frac{37\pi}{24}\right)$

35. $w_0 = 5$; $w_1 = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$;

$w_2 = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

36. a) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) -1

c) $-i$

Pensando no Enem

1. e

2. c

Vestibulares de Norte a Sul

1. c

2. c

3. 05

4. a

5. d

6. a

7. c

8. e

9. c

10. e

Para refletir

Página 179

Quando z for real.

UNIDADE 4 • Polinômios, equações algébricas e equações trigonométricas

Capítulo 8 • Polinômios

1. a) $m = 4$, o polinômio será do 2º grau; $m \neq 4$, o polinômio será do 3º grau.

b) $m \neq \pm 2$, o polinômio será do 4º grau; $m = 2$, o polinômio será 0; $m = -2$, o polinômio será 1.

c) $m \neq \pm 1$, o polinômio será do 4º grau; $m = 1$, o polinômio será do 3º grau; $m = -1$, o polinômio será do 2º grau.

2. Não existe m.

3. 1

4. $k = 3$

5. $m = 5$

6. $m = 2$ e $n = 4$

7. $a = 0$ e $b = 0$

8. $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{2}{5}$ e $\ell = \frac{3}{2}$

9. $a = 1$; $b = 3$ e $c = 2$

10. $a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{1}{3}$ e $c = -\frac{2}{3}$

11. Sim.

12. a) $k = -9$ b) $k = 19$

13. a) $a = 5$ e $b = 3$

b) $a = 10$ e $b = 6$

14. $a = 2$

15. a) $2x^3 + x^2 - 8x + 8$

b) $-x^2 + 2x + 1$

c) $-8x^3 + 16x - 20$

d) $-2x^3 + 12x^2 - 22x + 12$

e) $4x^2 - 16x + 16$

16. $a = -3$; $b = -8$ e $c = -11$

Resolvido passo a passo

5. a) Divisão exata, portanto o resto é zero.

b) Possui raiz real, $x = 1$.

17. a) $q(x) = x + 3$; $r(x) = 0$

b) $q(x) = x^2 - 3x + 11$; $r(x) = -43$

c) $q(x) = x^2 - 4x - 5$; $r(x) = 1$

18. $S = \{-1, 2, 5\}$

19. $m = 1$ e $n = -2$

20. $h(x) = x^2 - 3x + 2$

21. a) $q(x) = 5x - 18$; $r(x) = 56$

b) $q(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 13$; $r(x) = 21$

c) $q(x) = 2x^2 + x + 6$; $r(x) = 25$

d) $q(x) = 2x^2 + 8$; $r(x) = 37$

e) $q(x) = x^2 - x$; $r(x) = 2$

22. a) $a = -1$

b) $a = \frac{43}{3}$

23. a) $p(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5$

b) $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

24. $a = -3$ e $b = 2$

25. $q(x) = 3x^2 + (-2 - 3i)x + (-3 + 3i)$; $r(x) = 3$

26. a) -2

b) 97

27. Não.

28. $b = -1$ e $c = -18$

29. a) $k = 8$

b) $p(3) = 28$

c) Não é raiz.

30. $p(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$

31. $q(x) = x^2 - 5x + 2$

32. $(x + 2)$, $(x - 1)$ e $(2x - 1)$

33. 43

34. $m = -6$ e $n = 1$

Matemática e tecnologia

1. Ao modificar o parâmetro *e*, o gráfico desloca-se verticalmente.

2. a) $S = \{-1, 0, 1, 2\}$
b) $S = \{-1, 1\}$
c) $S = \varnothing$

Capítulo 9 • Equações algébricas

1. $c = -6$; $S = \{-3, -1, 2\}$

2. a) $S = \{-1, 1, 1 + i, 1 - i\}$
b) $S = \{-2, 3, 6\}$

3. a) $S = \{-1, 2, 10, -3\}$
b) $S = \{i, 2i, -2i\}$

4. $m = 4$; raízes: 2, 1, -1

5. $a = -3$, $b = -10$ e $c = 24$

6. a) $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$
b) $q(x) = x$, $r(x) = -2x$

7. 3 tem multiplicidade 3, -4 tem multiplicidade 2 e 1 tem multiplicidade 5.

8. 1

9. $S = \{-1, 1, -3\}$

10. $x' = 2$, $x'' = -1$

11. $x^3 - 11x^2 + 39x - 45 = 0$

12. 4

13. $a + b = 1$

14. $a = 1$ e $b = -12$

15. $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2}{3}$;
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_1x_2x_3 = 1$

16. $x_3 = 4$; $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

17. 3, 5 e 7.

18. $S = \{1, -2, 4\}$

19. $k = 8$

20. -1 (multiplicidade 2) e 2 (raiz simples)

21. $\frac{1}{3}$, 2 e 3

22. $m = -13$ e $n = -6$

23. $\frac{3}{4}$

24. 0

25. $k = -24$

Resolvido passo a passo

5. a) R$ 218 400,00

26. a) $1, -1, \frac{1}{2}$
b) $1, -1, \frac{1}{2}$
c) 1
d) $1, 2, \frac{1}{2}$

27. $1, 3, \frac{1}{3}$

28. $S = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

29. -2

30. a) $S = \{i, -i, -3, 4\}$
b) $S = \{i, -i, 2 + i, 2 - i\}$

31. $a = -12$

32. $c = 5$

33. $m = 23$; raiz real: $\frac{2}{3}$

Capítulo 10 • Relações e equações trigonométricas

1. a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
$\cot x = -\sqrt{3}$; $\sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;
$\csc x = -2$

b) $\text{sen}\, x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan x = 2\sqrt{2}$;
$\cot x = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\sec x = 3$;
$\csc x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\tan x = 1$; $\cot x = 1$; $\sec x = -\sqrt{2}$

d) $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x = \pm\frac{1}{2}$;
$\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sec x = 2$;
$\csc x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $-\frac{36}{25}$

3. a) $y = \sec x$
b) $y = 1$

4. $A = \frac{1}{2}$

6. a) $\sqrt{3} - 2$
b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
d) $2 + \sqrt{3}$
e) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
f) $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

7. $\text{sen}(a + b) = \frac{56}{65}$;
$\cos(a - b) = \frac{63}{65}$;
$\tan(a + b) = -\frac{56}{33}$

8. $\frac{3}{7}$

9. **c**

Resolvido passo a passo

5. a) O muro tem 8,15 m de altura.

10. $\frac{8}{15}$

11. sen $2a = \frac{4\sqrt{5}}{9}$; cos $2a = \frac{1}{9}$; tan $2a = 4\sqrt{5}$

12. sec x

13. $\frac{2}{3}$

14. Aproximadamente 3,6.

Resolvido passo a passo

5. a) Na 52ª semana do ano, e será de −2 °C.
   b) Não é possível, pois se trata da 120ª e da 156ª semana, ou seja, não ocorrem em um mesmo ano.

15. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   c) $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
   d) $S = \varnothing$
   e) $S = \varnothing$
   f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

16. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   c) $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$

17. a) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
   b) $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$
   c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

18. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$

19. $S = \varnothing$

20. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

21. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

22. **b**

Pensando no Enem

1. **e**
2. **a**
3. Sim; $\frac{17 - \sqrt{93}}{2}$
4. a) Não, pois a empresa terá prejuízo.
   b) A empresa terá um prejuízo de R$ 2 000,00.
   c) 1000, 2 000 e 4 000 peças.
   d) Entre 1000 e 2 000 peças ou acima de 4 000 peças.
5. **d**
6. **c**
7. **b**
8. **d**

Vestibulares de Norte a Sul

1. **c**
2. **d**
3. **a**
4. **d**
5. **a**
6. **d**
7. **d**
8. 7
9. **b**
10. **b**
11. **e**
12. **d**
13. **c**

Para refletir

Página 234

a e **b**: diferentes e **c**: iguais.

Página 235

18°

Caiu no Enem

1. **c**
2. **a**
3. **b**
4. **d**
5. **b**
6. **c**
7. **d**
8. **a**
9. **e**
10. **e**
11. **e**
12. **e**
13. **a**
14. **e**
15. **d**

Sugestões de leituras e filmes

Reprodução/Editora Record

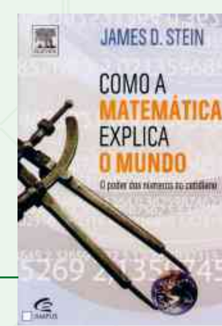
COLE, K. C. *O Universo e a xícara de chá*: *a Matemática da verdade e da beleza*. Rio de Janeiro: Record, 2006.
O livro mostra como enxergar a Matemática do mundo em que vivemos. Não as fórmulas e números abstratos da Matemática ensinada na escola, mas a lógica que existe, muitas vezes insuspeita, na maioria das situações de nossa vida.

Reprodução/Editora Livraria da Física

GARBI, Gilberto C. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
Obra destinada a despertar nos jovens vocação para uma ciência que ainda hoje, injustificadamente, costuma ser tratada com mistério e encarada com infundado temor.

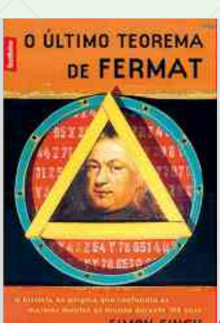
Reproducao/Editora Sextante

DOLABELA, Fernando. *O segredo de Luísa*: *uma ideia, uma paixão e um plano de negócios:* como nasce o empreendedor e se cria uma empresa. São Paulo: Sextante, 2008.
O livro retrata a trajetória de Luísa, uma jovem mineira entusiasmada com a ideia de abrir uma empresa para vender a deliciosa goiabada que sua tia produz. Durante essa jornada, pode-se aprender sobre *marketing*, plano de negócios, finanças, administração e organização empresarial, um grande estímulo a futuros empreendedores.



Reprodução/Editora Campus

STEIN, James D. *Como a Matemática explica o mundo*: *o poder dos números no cotidiano*. Rio de Janeiro: Campus, 2008.
Problemas insolúveis ocorreram com alguma frequência ao longo da História e muitas vezes o resultado não é o fracasso, mas a descoberta de algo quase sempre interessante, e, algumas vezes, com enorme valor prático. As histórias desses "fracassos" e dos surpreendentes avanços que ocorreram por causa deles formam o tema central deste livro.



Reproducao/Edições BestBolso

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: *a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. Rio de Janeiro: Edições BestBolso, 2014.
O último teorema de Fermat foi desvendado em 1993 por Andrew Wiles, professor da Universidade de Princeton (Estados Unidos), quase quatro séculos depois de ser enunciado. O livro é a história da busca épica para resolver um dos maiores enigmas matemáticos de todos os tempos. Um drama humano de grandes sonhos, brilho intelectual e extraordinária determinação.

Reprodução/Editora Novatec

TAKAHASHI, Shin. *Estatística.* São Paulo: Novatec, 2010.
A proposta deste guia é ajudar o leitor a superar o sentimento de "não ser bom em Matemática", colocando-o no caminho certo para aprender Estatística. Inclui exercícios (e respostas) para que ele possa praticar o que aprende.

Reprodução/Editora Zahar

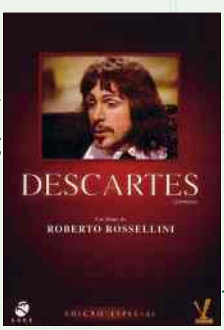
STEWART, Ian. *Incríveis passatempos Matemáticos*. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

O almanaque reúne uma natureza diversa de problemas – dos aparentemente simples aos realmente complicados. Também provoca risos apresentando piadas impagáveis ("Que barulho um matemático faz quando está se afogando?" Resposta: "Log, log, log, log, log..."). Uma excelente opção para reunir os amigos e estudar diversos conteúdos, com muitos desafios, jogos, charadas e histórias.

GUEDJ, Denis. *O Teorema do Papagaio*: *um* thriller *da história da Matemática*. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 1999.

Um livro que captura a atenção de quem gosta de tramas policiais. A maior biblioteca de Matemática do mundo é enviada de Manaus para o Sr. Ruche por um amigo que ele não vê há mais de meio século. O menino Max resgata um papagaio sequestrado por bandidos. Por que o amigo do Sr. Ruche quer se desfazer de uma biblioteca tão preciosa? Por que um papagaio despertaria o interesse de mafiosos? O que ele guarda na memória? Para desvendar esses e outros mistérios Sr. Ruche e Max terão que organizar toda a história da Matemática.

Reprodução/Ed. Companhia das Letras



Divulgação/Arquivo da editora

Descartes (Cartesius), 1974 (Itália). Direção: Roberto Rosselini, 162 min – Drama. Classificação indicativa: 14 anos.

A obra e a vida de René Descartes são apresentadas nesse filme, dirigido por um mestre do cinema italiano. O roteiro é de Renzo Rosselini, irmão do diretor. Trechos importantes das obras de Descartes foram utilizados para compor o filme, como *O discurso sobre o método* e *Meditações metafísicas*. O filme retrata o lado humano do filósofo, físico e matemático Francês, considerado o fundador da Filosofia Moderna, e também o contexto do século XVII.

O preço do desafio (Stand and Deliver), 1988 (Estados Unidos). Direção: Ramón Menéndez, 103 min – Drama. Classificação indicativa: 14 anos.

Esse filme, baseado em fatos reais, conta a história de um dedicado professor que começa a lecionar em uma escola da periferia de Los Angeles. Mesmo enfrentando várias dificuldades, consegue ensinar cálculo aos alunos e desafiá-los a superar o preconceito a que são submetidos diariamente. Seu objetivo é levar a turma a participar de uma difícil prova nacional de Matemática e ocupar vagas de importantes universidades americanas.

Divulgação/Arquivo da editora

Divulgação/Arquivo da editora

O homem que mudou o jogo (Moneyball), 2011 (Estados Unidos). Direção: Bennet Miller, 113 min – Drama/Esportes. Classificação indicativa: 10 anos.

Escrito por quatro roteiristas premiados, o filme, baseado na história verdadeira de Billy Beane, narra como o gerente geral do time de beisebol *Oakland Athletics* realiza a árdua tarefa de escolher jogadores desacreditados com base apenas em suas médias estatísticas. Billy Beane tem como objetivo fazê-los se destacar num importante campeonato, apesar da situação financeira desfavorável da equipe.

Significado das siglas de vestibulares

Cesgranrio-RJ: Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
ESCS-DF: Escola Superior de Ciências da Saúde (Distrito Federal)
Faap-SP: Fundação Armando Álvares Penteado (São Paulo)
FASM-SP: Faculdade Santa Marcelina (São Paulo)
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia (São Paulo)
FEI-SP: Centro Universitário da Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
Fumec-MG: Fundação Mineira de Educação e Cultura (Minas Gerais)
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
Ibmec: Faculdades do Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais
IFG-GO: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
IFPE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco
IFRS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
IMT-SP: Instituto Mauá de Tecnologia (São Paulo)
ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
Uema: Universidade Estadual do Maranhão
UEMT: Universidade do Estado de Mato Grosso
Uepa: Universidade do Estado do Pará
Uern: Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
Ufac: Universidade Federal do Acre
Ufam: Universidade Federal do Amazonas
UFBA: Universidade Federal da Bahia
UFC-CE: Universidade Federal do Ceará
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados (Mato Grosso do Sul)
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFT-TO: Universidade Federal do Tocantins
UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
Uncisal: Universidade Estadual de Ciências da Saúde de Alagoas
Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unicastelo-SP: Universidade Camilo Castelo Branco (São Paulo)
Unifacs-BA: Universidade Salvador (Bahia)
Unifap: Universidade Federal do Amapá
Unifev: Centro Universitário de Votuporanga
Unifor-CE: Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)
UPE: Universidade de Pernambuco
UPF-RS: Universidade de Passo Fundo (Rio Grande do Sul)
UPM-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)
Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Unesp (São Paulo)

Bibliografia

- ÁVILA, G. *Cálculo das funções de uma variável*. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos (LTC), 2003.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 2010.
- COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: SBM, 2003. 26 v.
- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 2002.
- DAVIS, H. T. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual, 1992.
- DAVIS, P. J.; Hersch, R. *A experiência matemática*. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 2012.
- MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. *Estatística básica*. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2011.
- MORGADO, A. C. et al. *Trigonometria e números complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 1992. (Coleção do Professor de Matemática).
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- _______. *Mathematical Discovery on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. New York: John Wiley & Sons, 2009. 2 v.
- REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM, 1982/1998. v. 1 a 36.

Índice remissivo

Manual do Professor

Matemática

VOLUME 3

Sumário

1 Conversa com o professor

Este Manual foi escrito especialmente para você, professor. Sei que nem sempre temos condições e oportunidades de ler revistas, livros e acessar *sites* especializados em Educação Matemática, de participar de encontros e congressos ou de frequentar cursos de especialização ou mestrado. Mas, com base no trabalho que desenvolvo há décadas com professores de Matemática como você, sei da grande vontade que todos têm de estar atualizados e de ter acesso às mais recentes informações sobre aprendizagem e ensino da Matemática.

Estou certo de que este Manual vai ajudá-lo nessa procura. Você será convidado a refletir comigo sobre questões como: a história do ensino da Matemática no Brasil, os pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino da Matemática, o novo Enem, algumas estratégias didáticas, os conteúdos digitais, os temas interdisciplinares e a avaliação em Matemática, além de outras.

Reconhecer o caminho trilhado pelo ensino da Matemática no Brasil e buscar respostas para as questões presentes no dia a dia do professor constituíram os primeiros suportes para a elaboração desta coleção. Outros pressupostos que dão sustentação às propostas apresentadas dizem respeito aos aspectos presentes na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), nº 9.394/96, e na Resolução nº 2, de 30 de janeiro de 2012, que define as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio.

No item *Sugestões complementares: leituras, recursos digitais e passeios*, procuro estimulá-lo a estar sempre atualizado, aperfeiçoando e aprofundando continuamente sua formação em Matemática, em Metodologia do Ensino de Matemática e em Educação. Fazendo parte desse movimento nacional em prol da melhoria da qualidade da aprendizagem e do ensino de Matemática, certamente você se sentirá mais seguro e motivado nessa difícil, mas gratificante, tarefa diária de criar condições para que seus alunos aprendam Matemática com significado e prazer, para poderem usá-la naturalmente em sua vida como cidadãos. Com isso, estará auxiliando seus alunos na concretização dos princípios gerais da educação: aprender a conhecer, a fazer, a conviver e a ser.

Bom trabalho! Compartilhe comigo suas vitórias, seus sucessos, suas dúvidas e suas dificuldades enviando sugestões para melhorar este trabalho.

Um abraço.

O Autor.

2 Apresentação da coleção

A educação brasileira, de maneira geral, passa por uma fase de grandes mudanças, sendo elas de recursos didáticos, de currículo, de expectativas de aprendizagem, de perfil cultural e cognitivo de nossos jovens, entre outras. Essas mudanças geram impactos no trabalho do profissional da educação, podendo até mesmo causar desconforto ou insegurança. Assim, um dos objetivos desta coleção, composta de livro do aluno e Manual do Professor, é fornecer elementos que ajudem a atender às necessidades desse novo cenário educacional.

Esta coleção apresenta uma metodologia que procura atribuir ao aluno o papel central no processo de ensino-aprendizagem, como agente da sua aprendizagem em constante interação com o texto. O aluno é solicitado a responder perguntas, confrontar soluções, verificar regularidades, refletir e tirar conclusões. Para isso, grande parte do conteúdo é introduzida por situações-problema e depois sistematizada.

São abordados os principais conteúdos nos campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, das Grandezas e Medidas, da Estatística, da Combinatória e da Probabilidade – sempre que possível, integrados entre si e com as demais áreas do conhecimento. A maioria desses temas é trabalhada a partir de situações-problema contextualizadas ou interdisciplinares.

Os conteúdos são trabalhados de maneira diferenciada. Por exemplo: tópicos de Grandezas e Medidas aparecem como aplicações dos números reais; aborda taxa de variação da função afim; *não* introduz função como caso particular de relação, como é tradicionalmente feito; trabalha as progressões como caso particular de função; explora a proporcionalidade na função linear; explora a Geometria analítica da parábola na função quadrática; relaciona a função quadrática a uma progressão aritmética; apresenta caracterização da função exponencial por meio da progressão geométrica; abrevia o cálculo com logaritmos e dá lugar ao uso da calculadora; apresenta a interpretação geométrica de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica; apresenta as posições relativas dos três planos no espaço ao estudar os sistemas lineares 3×3; apresenta uma introdução à programação linear; apresenta o método binomial para o cálculo de probabilidade; apresenta as aplicações de Probabilidade à Genética, etc.

A distribuição dos conteúdos, ao longo da coleção, não esgota um assunto em um único capítulo e aborda um mesmo conceito em vários dos campos mencionados anteriormente, bem como sob diferentes pontos de vista dentro de um mesmo campo. É o caso das funções e progressões, da função afim e da Geometria analítica da reta, da função quadrática e da Geometria analítica da parábola, das grandezas e medidas e dos números, etc.

3 Um pouco da história do ensino da Matemática no Brasil

A história da humanidade traz as marcas do desenvolvimento de todas as ciências, e a Matemática, como tal, apresenta grande evolução nos seus métodos, processos e técnicas; na sua organização; na sua relação com outras áreas da atividade humana e no alcance e na importância das suas aplicações.

No campo educacional, o ensino da Matemática também passou por evoluções na organização de sua estrutura como componente curricular e no alcance e na importância de sua função no desenvolvimento do pensamento dos indivíduos.

Essas transformações estão intimamente ligadas às mudanças políticas e sociais ocorridas historicamente. Fiorentini (1995) destaca que não é simples descrever os diferentes modos de ensinar Matemática ao longo do desenvolvimento da educação no Brasil, pois em cada um deles há a influência da concepção de ensino, de aprendizagem, de Matemática e de Educação; dos valores e das finalidades atribuídos ao ensino da Matemática; da relação professor-aluno e da visão que se tem de mundo, de sociedade e de ser humano que se percebe em cada período histórico.

No período colonial, os jesuítas eram responsáveis pela escolarização e tinham o propósito de oferecer uma cultura geral básica, ou seja, relevante para a formação do ser humano. Segundo o educador Valente (1999) "as ciências, e em particular a Matemática, não constituíram, ao longo dos duzentos anos de escolarização jesuítica no Brasil, um elemento integrante da cultura escolar".

A pouca atenção dada à Matemática pelos jesuítas em seus colégios no Brasil foi fruto do pensamento corrente da época. A Companhia de Jesus contava com homens de ciências entre os seus, mas mesmo entre eles a Matemática nunca foi considerada ciência autônoma, abstrata e geral. Para eles o ensino das Letras era mais importante, pois era visto como o verdadeiro formador do ser humano.

Valente (1999) afirma que essa postura perante a Matemática mudou no Brasil com a independência de Portugal da dominação espanhola, a que esteve submetido de 1580 a 1640. Com o restabelecimento de sua soberania, o rei português dom João IV buscou reorganizar seu Exército nacional e trazer para o país os avanços realizados na arte da guerra.

Esse movimento influenciou a educação em Portugal e, consequentemente, no Brasil. O rei precisava de engenheiros aptos aos novos métodos de construção de fortificações e à arte de trabalhar o aço e a pólvora, para a criação e o manuseio de canhões de artilharia. Esses profissionais foram peças fundamentais das novas Forças Armadas, pois eram especialistas nas "artes mecânicas" e matemáticos hábeis, capazes de usar geometria e aritmética em múltiplos campos de trabalho. Para esse fim o rei criou as "aulas de artilharia e fortificação". A primeira dessas aulas no Brasil foi criada em 1699, no Rio de Janeiro, com a intenção de ensinar a desenhar fortificações. Assim, o Brasil começava a formar seus próprios engenheiros com ensino baseado na filosofia racionalista cartesiana, com o intuito de assegurar e registrar as fronteiras da colônia portuguesa.

No século XVIII, com a "febre" do ouro no Brasil, os militares portugueses eram responsáveis pela organização, fundação das vilas e construção da vida civil nas regiões de mineração, o que levou à criação de uma escola militar no ano de 1738.

No final do século XIX e começo do século XX, o Brasil passou por uma transformação em suas estruturas de poder, deixando para trás uma sociedade latifundiária e escravocrata, caminhando para um modelo urbano-industrial. O ensino da Matemática, que ainda mantinha muitas das características do proposto pelos jesuítas, resumia-se a uma apresentação seca, abstrata e lógica, que não atendia a essa nova sociedade emergente.

A instalação do Governo Provisório em 1930, com uma nova proposta política e econômica, colocou em destaque a necessidade de infraestrutura adequada à nova realidade, provocando as reformas de ensino de Francisco Campos, na década de 1930, e a de Gustavo Capanema, na década de 1940.

Esses dois políticos tomaram emprestadas muitas ideias desenvolvidas entre os anos 1929 e 1937 pelo professor de matemática Euclides Roxo. Discípulo do alemão Felix Klein, um matemático que propôs o que se chamava "Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática", Roxo acreditava que o ensino da Matemática de forma fragmentada, como era feito até então, não estava de acordo com o desenvolvimento psicológico do aluno.

A nova proposta curricular de Matemática foi implantada pela primeira vez em 1929 no Colégio Pedro II, onde Roxo era professor catedrático. De acordo com o próprio Roxo (1929), a reforma na cadeira da disciplina foi uma completa renovação e fazia com que os alunos não tivessem provas distintas de Aritmética, Álgebra e Geometria, mas sim um exame único de Matemática. Isso permitia que o conteúdo das três áreas citadas fosse espalhado e dividido ao longo dos quatro anos de educação no colégio. Ele ainda explicou que tal proposta estava resguardada pelas recentes correntes pedagógicas do mundo civilizado.

Roxo (1890-1950) acreditava que a Matemática abstrata ensinada nos colégios já não fazia sentido em uma sociedade de demandas comerciais e industriais como a que existia então no Brasil e queria apresentar conceitos matemáticos de forma viva e concreta, respondendo às mudanças culturais do país, mais uma vez influenciado por Felix Klein.

De acordo com Dassie e Rocha (2003), influenciado por essa nova proposta, Francisco Rocha, o então ministro da Educação e da Saúde do Governo Provisório de Getúlio Vargas, buscou reformar a educação brasileira com ideais escolanovistas. Em um esforço para criar uma educação secundária com finalidade própria, e não mais um simples preparatório para cursos das universidades, ele instituiu o Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931, conhecido como Reforma Francisco Rocha. Nesse documento estava previsto o ensino da Matemática de forma muito similar ao que pensara Euclides Roxo para o Colégio Pedro II, ou seja, prevendo o ensino simultâneo dos diferentes campos da disciplina, porém sem o preciosismo das instruções metodológicas apresentadas no programa de Roxo.

Tais mudanças não foram recebidas com facilidade pelos professores do país, notadamente pelo Exército brasileiro e pela Igreja católica, que apresentaram críticas severas ao plano do ministro e levaram para a mídia um extenso debate sobre as metodologias do ensino matemático; o professor Euclides Roxo participou como defensor da reforma.

Em 1939, o então ministro da Educação e da Saúde, Gustavo Capanema, começou uma série de estudos e consultas para a elaboração de uma nova reforma. Entre os documentos analisados estavam os relatórios do Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos, a proposta do Colégio Pedro II, as legislações educacionais vigentes em diversos países europeus, as cartas enviadas pelo próprio Euclides Roxo e seus opositores às instituições de ensino do Exército e da Igreja.

Assim, a Lei Orgânica do Ensino Secundário foi promulgada em 9 de abril de 1942 e foi fruto de um trabalho de escrita, revisão e crítica do qual participaram todos os principais envolvidos nos recentes debates sobre Educação Matemática. O objetivo da nova reforma era criar um ensino secundário capaz de “formar a personalidade integral dos adolescentes; acentuar e elevar, na formação espiritual dos adolescentes, a consciência patriótica e a consciência humanística; e dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial”. Ela dividia o ensino secundário em dois ciclos: o ginasial, com duração de quatro anos, e os cursos clássico e científico no segundo momento, ambos com duração de três anos.

Esse processo de reestruturação ocorrido no início da década de 1940 ficou conhecido como Reforma Capanema.

Fiorentini (1995) classificou o ensino da Matemática presente até o final da década de 1950 como sendo de tendência *formalista clássica*, na qual o ensino era “acentuadamente livresco e centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo” por meio de explanações orais e apresentação teórica na lousa. Ao aluno cabia apenas o papel de reproduzir exatamente o raciocínio e os procedimentos realizados pelo professor ou presentes no livro didático. Essa tendência recebeu o nome de formalista clássica porque em relação ao seu ensino a Matemática era apresentada como reprodução do modelo euclidiano, isto é, como uma organização lógica a partir de conhecimentos primitivos, axiomas, definições e teoremas para, depois, serem apresentados os exercícios. A concepção de Matemática subjacente era a platônica, na qual se considera que as ideias matemáticas existem independentemente do ser humano e, portanto, não são construídas por ele, o que justifica a postura determinada aos estudantes de apenas reproduzir o que era apresentado.

Do ponto de vista social e político, Fiorentini destaca que nessa época a aprendizagem da Matemática era para poucos “bem dotados” intelectualmente e financeiramente. Garantia-se na escola um ensino mais racional e rigoroso à elite dirigente e aos membros da Igreja e, para as classes menos favorecidas que frequentavam a escola técnica, prevalecia o cálculo e a abordagem mais mecânica com uma coleção de regras e fórmulas.

Outro marco da década de 1950 foi a derrota dos americanos no início da corrida espacial para os soviéticos, o que colocou em destaque a necessidade de se investir em avanço tecnológico. A partir daí, enormes quantias foram dispensadas pelas associações científicas para promover a reunião de especialistas de renome em Educação, Psicologia e diferentes campos das ciências exatas e naturais. Em relação ao ensino da Matemática, ocorreu na França o Seminário de Royaumont, cuja proposta era a de discutir novas perspectivas, tendo em vista uma formação matemática voltada ao pensamento científico e tecnológico. Esse seminário deu origem ao movimento chamado Matemática moderna, consolidado pelo grupo Bourbaki.

No Brasil, de 1955 a 1966, foram realizados cinco Congressos de Professores de Matemática com a preocupação de discutir conteúdos e metodologias de ensino. Esses encontros inspiraram a criação de grupos importantes para o cenário da Educação Matemática no país nas décadas de 1960 e 1970. Dentre eles destacam-se, em São Paulo, o Geem (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática), liderado por Oswaldo Sangiorgi e Renata Watanabe; em Porto Alegre, o Geempa (Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação), com Ester Pilar Grossi como líder desde sua criação; no Rio de Janeiro, o Gemeg, que foi substituído pelo Gepem (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), tendo como presidente Maria Laura Mouzinho Leite Lopes; desse grupo também participou José Carlos de Mello e Souza (Malba Tahan) e, posteriormente, em Rio Claro (SP), o Sapo (Serviço Ativador em Pedagogia e Orientação), que foi o embrião do primeiro Mestrado em Educação Matemática do país.

Segundo Fiorentini (1995), os principais propósitos do Movimento da Matemática Moderna foram:

- integrar os três campos fundamentais da Matemática com a introdução de elementos unificadores, como a teoria dos conjuntos, estruturas algébricas e relações e funções;
- substituir o caráter mecanizado, não justificado e regrado presente na Matemática escolar por outro com mais ênfase nos aspectos estruturais e lógicos da Matemática;

- fazer com que o ensino de 1º e 2º graus refletisse o espírito da Matemática contemporânea, que, graças ao processo de algebrização, tornou-se mais poderosa, precisa e fundamentada logicamente.

Com a aprovação, em 1961, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, esse movimento ganhou força nas décadas de 1960 e 1970. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998 destacam que, com base nesse movimento, a Matemática era concebida como lógica e que deveria ser compreendida a partir de suas estruturas, conferindo um papel fundamental à linguagem matemática. O ensino passou a ter excessiva preocupação com abstrações internas à própria Matemática, em uma tentativa de aproximar a Matemática pura da Matemática escolar.

Para Fiorentini (1995), esse movimento promovia o retorno ao formalismo matemático, só que tendo como fundamento as estruturas algébricas e a linguagem formal da Matemática contemporânea. Enfatizava o uso preciso da linguagem matemática, o rigor e as justificativas das transformações algébricas por meio das propriedades estruturais.

No entanto, destaca esse autor que não ocorreram muitas mudanças em relação ao ensino-aprendizagem, pois o ensino continuou acentuadamente autoritário e centrado no professor, que permaneceu desenvolvendo sua aula na lousa, onde demonstrava tudo rigorosamente. O aluno continuou sendo considerado aquele que deve receber passivamente o apresentado pelo professor, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados por ele.

Nessa linha, as finalidades do ensino da Matemática estariam voltadas mais a formar um especialista em Matemática do que um cidadão, pois a Matemática escolar perdeu tanto seu papel de formadora da disciplina mental quanto seu emprego como ferramenta para a resolução de problemas. A formação matemática assumiu uma perspectiva em que era mais importante a apreensão da estrutura, que capacitaria o aluno a aplicar essas formas de pensamento aos mais variados domínios, do que a aprendizagem de conceitos e aplicações da Matemática.

Fiorentini (1995) sintetiza dizendo que o ensino da Matemática nesse contexto pode ser considerado de tendência *formalista moderna* e, tal como a tendência formalista clássica, "pecou pelo reducionismo à forma de organização/sistematização dos conteúdos matemáticos, uma vez que em ambos se relega a segundo plano sua significação histórico-cultural e a essência das ideias e conceitos matemáticos". Destaca, porém, que uma diferença fundamental entre essas duas tendências está no fato de que, enquanto a clássica enfatiza e valoriza o encadeamento lógico do raciocínio matemático e as formas perfeitas e absolutas das ideias matemáticas, a moderna busca os desdobramentos lógico-estruturais das ideias matemáticas, tendo por base as estruturações algébricas mais atuais, considerando estar aí expressada a qualidade do ensino.

De acordo com os PCN, em 1980, nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) divulgou o documento "Agenda para Ação", no qual apresentou recomendações para o ensino da Matemática, destacando a resolução de problemas como foco. Imprimiu novos rumos às discussões curriculares ao destacar a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos e linguísticos na aprendizagem da Matemática. As reformas educacionais foram fortemente influenciadas por esse documento, de modo que propostas elaboradas em diferentes países, nas décadas de 1980 e 1990, apresentam pontos em comum no que diz respeito a:

- direcionamento do Ensino Fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
- importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no Ensino Fundamental, elementos de Estatística, Probabilidade e Combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordagem desses assuntos;
- necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação (PCN Matemática, 1997, p. 21).

Esses aspectos apontados foram os norteadores das indicações e propostas apresentadas para o ensino da Matemática pelos PCN, válidas até hoje.

Esse documento destaca a Etnomatemática com suas propostas alternativas para a ação pedagógica. Tal programa contrapõe-se às orientações que desconsideram qualquer relacionamento mais íntimo da Matemática com aspectos socioculturais e políticos — o que a mantém intocável por fatores outros a não ser sua própria dinâmica interna. Do ponto de vista educacional, procura compreender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro do contexto cultural do próprio indivíduo. A Etnomatemática procura partir da realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural.

O mesmo documento, ao apresentar "caminhos para se 'fazer Matemática' em sala de aula", dá ênfase à resolução de problemas como um recurso a ser utilizado em seu ensino. Apoia-se na história da Matemática para justificar sua aplicação, considerando que a própria Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. Assim, defende uma proposta com os seguintes princípios:

- o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino-aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; em outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se observa na história da Matemática;
- o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido em um campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (PCN Matemática, 1997, p. 32-33).

A década de 1980 foi decisiva para a Educação Matemática no Brasil, pelo início da expansão, em praticamente todo o país, de programas de pós-graduação em Educação Matemática. Em 1984, inicia-se formalmente o primeiro Mestrado em Educação Matemática do país, na Unesp de Rio Claro (SP). Destacamos também a influência dos trabalhos desenvolvidos na Faculdade de Educação da Unicamp, a linha de pesquisa 'Educação Matemática' existente no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRN, o Programa de Pós-Graduação em Psicologia da UFPE, etc. Acrescenta-se ainda o SPEC (Subprograma Educação para a Ciência), da UFRJ.

Em fevereiro de 1987 aconteceu o I Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), realizado no Centro de Ciências Matemáticas, Físicas e Tecnológicas da PUC-SP. Ao todo já aconteceram onze ENEMs. Nesses encontros têm sido apresentados os últimos trabalhos e pesquisas em Educação Matemática. São oferecidos minicursos, palestras, conferências, mesas redondas, oficinas, com o objetivo de divulgar e socializar os conhecimentos sobre o tema, trocar experiências de ensino de Matemática em todos os níveis e promover o intercâmbio de ideias. Esse evento é realizado a cada três anos.

Todos os esforços dos precursores do movimento da Educação Matemática no Brasil resultaram na criação da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, durante o II ENEM, em janeiro de 1988, na Universidade Estadual de Maringá (PR). A SBEM tem como finalidade congregar profissionais da área de Educação Matemática e de áreas afins e cumpre um importante papel na formação da comunidade de professores de Matemática no Brasil.

O Movimento de Educação Matemática acontece em âmbito internacional, em várias instâncias e em todos os níveis de ensino. O Brasil tem sido até mesmo palco de encontros internacionais de Educação Matemática, a exemplo do Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM). Ao todo já aconteceram seis SIPEM's.

4 Pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino da Matemática

Ensino Médio

Na organização da educação escolar brasileira, determinada pela LDB, o Ensino Médio constitui a última etapa da Educação Básica e é considerado um momento de consolidação e aprofundamento dos conhecimentos básicos do Ensino Fundamental. De acordo com ela, nessa fase promover-se-á uma preparação básica para o trabalho e a cidadania da pessoa, que permita que esta continue aprendendo e se adaptando a uma sociedade em constante mudança, isto é, nesse nível de escolaridade deve-se visar ao aprimoramento da ética, da autonomia intelectual e do pensamento crítico do estudante, promovendo o relacionamento entre teoria e prática, possibilitando a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos que orientam os processos produtivos da sociedade.

Mais detalhadamente, a Resolução nº 2, de 30 de janeiro de 2012, emitida pela Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, ao definir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, agrega a essa etapa do processo educacional maior presença dos desenvolvimentos sociais e tecnológicos e enfoque interdisciplinar, com intuito de garantir uma relação mais ampla entre o aprendido na escola e os acontecimentos cotidianos da sociedade em que estão inseridos. Assim, são essenciais a participação e a iniciativa dos alunos, que devem trazer seu mundo à escola para que possam compreendê-lo e mudá-lo com o exercício de sua cidadania.

Para Angela Maria Martins (2000), estudiosa e pesquisadora de políticas de Educação Básica e Educação Profissional, essas resoluções oficiais estão promovendo um processo de modernização do Ensino Médio, que tem como principal motivo a necessidade de readequação da educação brasileira às mudanças do mercado de trabalho e da nova realidade econômica que começou a se impor a partir da década de 1980, época da revolução tecnológica e início do declínio da concentração de capital nos meios de produção industriais.

Segundo ela, essa modernização torna-se emergencial neste momento histórico de computadores conectados a redes globais, gerando um imenso volume de informação. Momento que mostra ser inegável a importância do conhecimento e raciocínio matemático. O próprio Ministério da Educação, em suas publicações recentes, reconhece que a Matemática deve ser hoje compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, capaz de contribuir para a construção de uma visão de mundo, essencial para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que serão exigidas na vida social e profissional das pessoas.

Nesse contexto, a Matemática supera o caráter instrumental e deve ser apresentada como ciência, com características próprias de investigação e de linguagem, e papel integrador importante ao lado das Ciências da Natureza. Essa nova percepção da Matemática como ciência deve permitir ao aluno perceber sua dimensão histórica e a estreita relação que possui com a sociedade e a cultura em diferentes épocas, ampliando e aprofundando o espaço de conhecimento que existe nessas inter-relações.

Sua inserção no Ensino Médio, no entanto, deve ser adequada ao desenvolvimento e à promoção de seu valor entre os alunos, tendo em mente que existem diferentes motivações, interesses e capacidades.

Levando em conta ainda as resoluções do governo federal, há que se destacar a proposta do Ensino Médio Inovador, motivada, segundo a revista *Educação* (Edição 172. São Paulo: Segmento) de agosto de 2011, pela percepção em todo o mundo de um clima de desinteresse dos adolescentes pela vida escolar. A partir daí, muitas reflexões têm sido feitas sobre os possíveis caminhos para que o Ensino Médio seja vivido e percebido como significativo. Nessa perspectiva, o desafio dos sistemas de ensino nos últimos anos tem sido a busca da organização de um programa curricular que consiga, ao mesmo tempo, formar os jovens para continuar os estudos no Ensino Superior e prepará-los para o mercado de trabalho.

No Brasil, para melhorar o cenário, o governo federal aposta, desde 2004, em propostas que apontem para um programa curricular mais flexível. Uma das principais medidas foi a possibilidade de integrar o ensino regular e a educação profissional, sacramentada pelo Decreto nº 5.154/04. A Portaria nº 971, de outubro de 2009, instituiu o Programa Ensino Médio Inovador (ProEMI) como parte das ações do Plano de Desenvolvimento da Educação, em uma tentativa de induzir, por meio de parcerias com municípios e estados, a reestruturação do currículo do Ensino Médio brasileiro.

Essa iniciativa tem como preocupação os recentes números levantados por pesquisas oficiais que mostram a desaceleração ou a queda no ingresso de alunos no Ensino Médio em todo o território brasileiro. No documento orientador (Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/documento_orientador.pdf>. Acesso em: 13 maio 2016), o Ministério da Educação reconhece que um dos fatores possíveis para essas estatísticas problemáticas, nessa etapa do sistema educacional, seja exatamente a falta de sensibilidade e de objetivos para o currículo do Ensino Médio.

Assim, o Ensino Médio deixa de ser simplesmente preparatório para o Ensino Superior ou estritamente profissionalizante para assumir necessariamente a responsabilidade de completar a educação básica, preparando para a vida, qualificando para a cidadania e capacitando para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho.

Essa implantação implicará um aumento de 600 horas na formação do aluno, passando a carga horária de 2 400 horas anuais para 3 000 horas anuais. Esse aumento será gradativo, à razão de 200 horas por ano. A grade horária sofrerá uma flexibilização e o aluno terá a possibilidade de escolher 20% da sua carga horária, em um conjunto de atividades oferecidas pela escola. Além dessas mudanças, o Ensino Médio Inovador estabelece como referencial as seguintes proposições curriculares e condições básicas para os projetos das escolas:

a) centralidade na leitura, como elemento básico de todas as disciplinas; utilização, elaboração de materiais motivadores e orientação docente voltadas para essa prática;
b) estímulo a atividades teórico-práticas apoiadas em laboratórios de Ciências, Matemática e outros que auxiliem os processos de aprendizagem nas diferentes áreas do conhecimento;
c) fomento de atividades de Arte, com o objetivo de promover a ampliação do universo cultural do aluno;
d) atividade docente com dedicação exclusiva à escola;
e) projeto político-pedagógico implementado com a participação efetiva da comunidade escolar e a organização curricular articulada com os exames do Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Médio.

Em apoio à estratégia do redesenho curricular, encontra-se o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio no Brasil (PNEM), instituído pela Portaria nº 1.140, de 22 de novembro de 2013, visando elevar o padrão de qualidade nesse nível de ensino, em suas diferentes modalidades, orientado pela perspectiva de inclusão de todos que a ele têm direito. (PNEM. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/>. Acesso em: 4 fev. 2016.)

No momento da reformulação deste Manual, encontrava-se em discussão a Base Nacional Comum Curricular (BNC), que, quando aprovada, será o principal documento norteador da educação básica no Brasil. Até março de 2016, cidadãos, organizações e profissionais da educação puderam, por meio do *site* da BNC, conhecer a sua proposta, dar contribuições às discussões e acessá-las, verificar os números da consulta pública realizada, além de acessar relatórios do MEC. (BNC.

Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 14 mar. 2016.)

Tendo esses elementos como pressupostos é que podemos agora considerar os objetivos específicos do ensino de Matemática no Ensino Médio.

Objetivos gerais do ensino da Matemática no Ensino Médio

Vivemos em uma sociedade tecnológica, informatizada, globalizada e é fundamental que se desenvolva nos alunos do Ensino Médio a capacidade de: comunicar-se em várias linguagens; investigar, resolver e elaborar problemas; tomar decisões, fazer conjecturas, hipóteses e inferências; criar estratégias e procedimentos; adquirir e aperfeiçoar conhecimentos e valores; trabalhar solidária e cooperativamente; e estar sempre aprendendo.

No Ensino Fundamental os alunos tiveram um primeiro contato com vários campos da Matemática, como números e operações, formas geométricas planas e espaciais, grandezas e medidas, iniciação à Álgebra, aos gráficos e às noções de probabilidade. Agora, no Ensino Médio, é o momento de ampliar e aprofundar tais conhecimentos, estudar outros temas, desenvolver ainda mais a capacidade de raciocinar, de resolver problemas, generalizar, abstrair e de analisar e interpretar a realidade que nos cerca, usando para isso o instrumental matemático.

Mas a Matemática tem características próprias, tem uma beleza intrínseca que deve ser ressaltada na importância dos conceitos, das propriedades, das demonstrações dos encadeamentos lógicos, do seu aspecto dedutivo, fundamentando seu caráter instrumental e validando ou não intuições e conjecturas. Assim, no Ensino Médio é importante trabalhar gradativamente a Matemática também como um sistema abstrato de ideias.

Objetivos específicos do ensino da Matemática no Ensino Médio

As propostas e atividades matemáticas devem possibilitar aos estudantes:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticos e planejar soluções para problemas novos, que exijam iniciativa e criatividade;
- aplicar conhecimentos matemáticos para compreender, interpretar e resolver situações-problema do cotidiano ou do mundo tecnológico e científico;
- desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas por escrito ou oralmente, promovendo sua capacidade de argumentação;
- estabelecer relações, conexões e integração entre os diferentes campos da Matemática para resolver problemas, interpretando-os de várias maneiras e sob diferentes pontos de vista;
- interpretar e validar os resultados obtidos na solução de situações-problema;
- fazer arredondamentos e estimativas mentais de resultados aproximados;
- desenvolver atitudes positivas em relação à Matemática, como autonomia, confiança em relação às suas capacidades matemáticas, perseverança na resolução de problemas, gosto pela Matemática e pelo trabalho cooperativo;
- analisar e interpretar criticamente dados provenientes de problemas matemáticos, de outras áreas do conhecimento e do cotidiano.

Em relação aos campos da Matemática, os objetivos específicos do ensino devem ser os de capacitar o estudante para:

- saber utilizar o sistema de numeração, as operações, suas propriedades e suas regularidades nos diversos conjuntos numéricos;
- empregar corretamente os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do importante conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas, etc.);
- conhecer as propriedades geométricas das figuras planas e sólidas e suas representações gráfica e algébrica, bem como reconhecer regularidades nelas;
- compreender os conceitos fundamentais de grandezas e medidas e saber usá-los na formulação e resolução de problemas;
- utilizar os conceitos e procedimentos da Estatística e da Probabilidade, valendo-se para isso da Combinatória, entre outros recursos.

Temas transversais e a Matemática

Na escola, professores e alunos muitas vezes são confrontados por questões que envolvem assuntos atuais e urgentes que precisam ser tratados por toda a comunidade escolar, para atender às demandas da sociedade ou da própria escola. Os temas transversais trazem ao currículo escolar a possibilidade de abordar essas questões por todas as áreas e disciplinas.

É importante destacar que os temas transversais não são novas disciplinas ou novos componentes curriculares a serem acrescidos aos já existentes, mas sim objetos de conhecimento cuja complexidade demanda as perspectivas teóricas e práticas de todos os componentes curriculares, além de incluir saberes extraescolares.

É uma proposta que deve buscar construir uma articulação das diversas áreas de conhecimento, o envolvimento de toda a comunidade escolar, desenvolver as relações interpessoais democráticas, o pensamento crítico e a disposição para intervir na realidade e transformá-la.

Os PCN do Ensino Fundamental apresentam quatro critérios a serem adotados para a seleção de temas transversais:

urgência social, abrangência nacional, possibilidade de ensino e aprendizagem e favorecimento da compreensão da realidade e da participação social.

O critério da urgência social aponta para a preocupação de se ter como tema transversal questões que se apresentem como obstáculos ao exercício pleno da cidadania, afrontem a dignidade das pessoas e deteriorem sua qualidade de vida.

O critério da abrangência nacional indica a necessidade de se tratar de questões pertinentes a todo o país.

O critério da possibilidade de ensino e aprendizagem procura nortear a escolha de temas ao alcance da aprendizagem, alicerçada nas experiências pedagógicas, no caso específico da Matemática, nas propostas da Educação Matemática.

O último critério, favorecimento da compreensão da realidade e da participação social, aponta para a importância de os temas transversais possibilitarem aos alunos uma visão ampla e consistente da realidade brasileira de modo que possam assumir atitudes responsáveis, sem excluir a possibilidade de que cada localidade apresente temas relevantes às suas necessidades específicas.

Com base nesses princípios, os PCN sugerem alguns temas amplos a serem considerados geradores de discussões na comunidade escolar. A Matemática tem muitas contribuições a dar nesse trabalho conjunto e muitas delas já permeiam os assuntos desta coleção.

Os temas transversais podem ser apresentados por meio de situações-problema e trabalhos em equipe. Esses temas aparecem ao longo de toda a coleção, tendo um destaque especial na seção *Outros contextos*. O professor poderá enriquecer suas atividades com esses temas seguindo as orientações dos PCN e dos PCN+. (PCN+. Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2016.)

A seguir, discutiremos algumas dessas orientações.

Ética

Com atividades apropriadas, é possível desenvolver no aluno **atitudes** como:

- confiança na própria capacidade de construir e adquirir conhecimentos matemáticos e resolver problemas com eles;
- empenho em participar ativamente das atividades na sala de aula;
- respeito à maneira de pensar dos colegas.

Para isso, é preciso que o professor:

- valorize a troca de experiências entre os alunos;
- promova o intercâmbio de ideias;
- respeite o pensamento, a produção e a maneira de se expressar do aluno;
- deixe claro que a Matemática é para todos e não apenas para alguns mais talentosos;
- estimule a solidariedade entre os alunos, superando o individualismo.

O trabalho em duplas ou em equipes é próprio para o desenvolvimento de tais atitudes.

Orientação Sexual

Não cabe ao professor de Matemática dar orientação sexual aos alunos, mas, de modo transversal, poderá propor situações-problema, principalmente envolvendo tabelas e gráficos, a respeito de temas sobre os quais os alunos possam refletir.

Veja alguns exemplos que podem ser explorados:

- estatísticas sobre a incidência de gravidez prematura entre jovens e adolescentes;
- evolução da Aids em diferentes grupos (jovens, idosos, homens, mulheres, etc.);
- estatísticas sobre doenças sexualmente transmissíveis;
- estatísticas sobre prevenção de doenças sexualmente transmissíveis.

É possível também trabalhar com estatísticas e situações-problema que não reafirmem preconceitos em relação à capacidade de aprendizagem de alunos de sexos diferentes, bem como mostrar a diferença de remuneração e de cargos de chefia entre homens e mulheres.

Meio Ambiente

Esse tema pode e deve ser trabalhado em vários momentos na aula de Matemática. Veja alguns exemplos:

Coleta, organização e interpretação de dados estatísticos, formulação de hipóteses, modelagem, prática da argumentação, etc. são **procedimentos** que auxiliam na tomada de decisões sobre a preservação do meio ambiente.

A **quantificação** permite tomar decisões e fazer investigações necessárias (por exemplo, reciclagem e aproveitamento de materiais).

Áreas, volumes, proporcionalidade e porcentagem são **conceitos** utilizados para abordar questões como poluição, desmatamento, camada de ozônio, etc.

Saúde

Dados estatísticos sobre vários fatores que interferem na saúde do cidadão, quando trabalhados adequadamente na sala de aula, podem conscientizar o aluno e, indiretamente, sua família. Alguns contextos apropriados para a aprendizagem de conteúdos matemáticos são:

- índices da fome, da subnutrição e da mortalidade infantil em várias regiões do país e, em particular, naquela em que vive o aluno;
- médias de desenvolvimento físico no Brasil e em outros países;
- razão médico/população e suas consequências;
- estatísticas sobre várias doenças (dengue, malária, etc.) e como preveni-las;
- levantamento de dados sobre saneamento básico, condições de trabalho, dieta básica, etc.

Pluralidade Cultural

A Matemática foi e é construída por todos os grupos sociais (e não apenas por matemáticos) que desenvolvem habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses. Valorizar esse saber matemático-cultural e aproximá-lo do saber escolar em que o aluno está inserido é de fundamental importância para o processo de ensino-aprendizagem. A Etnomatemática dá grande contribuição a esse tipo de trabalho.

No estudo comparativo dos sistemas de numeração, por exemplo, os alunos poderão constatar a supremacia do sistema indo-arábico e concluir que a demora de sua adoção pelos europeus se deveu também ao preconceito contra os povos de tez mais escura e que não eram cristãos. Outros exemplos poderão ser encontrados ao se pesquisar a produção de conhecimento matemático em culturas como a chinesa, a maia e a romana. Nesse momento entra o recurso da história da Matemática e da Etnomatemática.

Trabalho e Consumo

Situações ligadas ao tema trabalho podem se tornar contextos interessantes a ser explorados na sala de aula: o estudo de causas que determinam aumento/diminuição de empregos; pesquisa sobre oferta/procura de emprego; previsões sobre o futuro mercado de trabalho em função de indicadores atuais; pesquisas dos alunos dentro da escola ou na comunidade a respeito dos valores que os jovens de hoje atribuem ao trabalho.

Às vezes o consumo é apresentado como forma e objetivo de vida, transformando bens supérfluos em vitais e levando ao consumismo. É preciso mostrar que o objeto de consumo – um tênis ou uma roupa "de marca", um produto alimentício ou um aparelho eletrônico, etc. – é fruto de um tempo de trabalho.

Aspectos ligados aos direitos do consumidor também necessitam da Matemática para ser mais bem compreendidos. Por exemplo, para analisar a composição e a qualidade de produtos e avaliar seu impacto sobre a saúde e o meio ambiente, ou para analisar a razão entre menor preço/maior quantidade. Nesse caso, situações de oferta como "compre 3 e pague 2" nem sempre são vantajosas, pois geralmente são feitas para produtos que não estão com muita saída – portanto, não há, muitas vezes, necessidade de comprá-los em grande quantidade – ou que estão com o prazo de validade próximo do vencimento.

Interdisciplinaridade e contextualização

O atual mundo globalizado apresenta muitos desafios ao ser humano, e a educação manifesta a necessidade de romper com modelos tradicionais para o ensino. Essa necessidade foi expressa no relatório da Comissão Internacional sobre a Educação para o Século XXI, no texto "Educação: um tesouro a descobrir", publicado em 1998 por Edições Unesco Brasil. As considerações desse importante documento passaram a integrar os eixos norteadores da política educacional. Os quatro pilares da educação contemporânea citados pela Unesco são: aprender a ser, aprender a fazer, aprender a viver juntos e aprender a conhecer. Esses eixos devem constituir ações permanentes que visem à formação do educando como pessoa e como cidadão. Na relação entre esses quatro pilares é que a interdisciplinaridade e a contextualização se inserem na ousadia de novas abordagens de ensino na Educação Básica.

Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade, como a própria palavra recomenda, não anula as disciplinas, mas sugere que elas dialoguem entre si. O caráter puramente disciplinar do ensino formal tem dificultado a aprendizagem do aluno e não tem estimulado o desenvolvimento de seu pensamento, a habilidade de resolver problemas e de estabelecer conexões entre os fatos e conceitos, isto é, de "pensar" sobre o que está sendo estudado. De acordo com Edgar Morin (2001), "o parcelamento e a compartimentação dos saberes impedem o aluno de apreender o que está tecido junto".

É importante considerar que a interdisciplinaridade supõe um eixo integrador com as disciplinas de um currículo para que os alunos aprendam a olhar o mesmo objeto sob diferentes perspectivas. Os PCN destacam que:

O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com os outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, [...].

PCNEM (2000, p. 75).

Dessa forma, trabalhando de modo interdisciplinar, propõe-se que a organização e o tratamento dos conteúdos do ensino e as situações de aprendizagem sejam feitos destacando-se as múltiplas interações entre as várias disciplinas do currículo, superando sempre que possível a fragmentação entre elas. É sabido que algumas disciplinas se identificam, se aproximam, têm muitas afinidades (como, por exemplo, a Matemática e a Física), enquanto outras se diferenciam em vários aspectos: pelos métodos e procedimentos que envolvem, pelo objeto que pretendem conhecer ou ainda pelo tipo de habilidade que mobilizam naquele que as investiga, conhece, ensina ou aprende.

Os professores de uma mesma classe podem promover um ensino interdisciplinar por meio de um projeto de investigação, um plano de intervenção ou mesmo de uma atividade. Nesse caso, são identificados os conceitos e procedimentos de cada disciplina que podem contribuir nessa tarefa, descrevendo-a, explicando-a, prevendo soluções e executando-a. Os conceitos podem ser formalizados, sistematizados e registrados no âmbito das disciplinas que contribuem para o seu desenvolvimento, ou seja, a interdisciplinaridade não pressupõe a diluição das disciplinas. A tarefa a ser executada é que é interdisciplinar na sua concepção, execução e avaliação.

A linguagem matemática é comum às demais áreas do currículo. Por exemplo, os conceitos das Ciências Naturais (Física, Química e Biologia) e as leis naturais geralmente são expressos pela linguagem matemática.

Esta coleção procura dar relevo a vários modelos matemáticos que favorecem a interdisciplinaridade, tais como: a função linear e as situações de proporcionalidade direta; a função quadrática e o movimento uniformemente variado; a função exponencial e vários fenômenos naturais; a Probabilidade e a Genética; as Grandezas e Medidas e as práticas científicas, tecnológicas e sociais; as funções trigonométricas e os fenômenos periódicos, etc.

Contextualização

Tratar os conteúdos de ensino de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal ou social do aluno, dando significado ao que está sendo aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Assim, a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a articular a Matemática com os temas atuais da ciência e da tecnologia, bem como a fazer conexões dentro da própria Matemática.

A história da Matemática é também uma importante ferramenta de contextualização ao enfocar a evolução e as crises pelas quais determinados conceitos matemáticos passaram ao longo da História. Grande parte das situações-problema desta coleção é contextualizada.

A contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada em uma abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial, forçado e restrito. Não se pode entender a contextualização como banalização do conteúdo, mas como recurso pedagógico para tornar a constituição de conhecimentos um processo permanente de formação de capacidades intelectuais superiores. Capacidades que permitem transitar inteligentemente do mundo da experiência imediata e espontânea para o plano das abstrações. Assim, contextualizar é situar um fato dentro de uma teia de relações possíveis em que se encontram os elementos constituintes da própria relação considerada.

Ao assumir essa concepção de contextualização, toma-se a posição de que um trabalho em Matemática, com esse propósito, não tem sua ênfase apenas voltada a situações aplicadas ao cotidiano ou a outras disciplinas, mas também a situações puramente matemáticas. Nesses casos, são propostas investigações que podem ser efetuadas a partir de conhecimentos mais simples que evoluem para situações e conhecimentos mais complexos. Esse tipo de contextualização atende às perspectivas de formação de alunos mais curiosos, estimulando a criatividade e o espírito inventivo.

Etnomatemática e modelagem

O que é Etnomatemática?

O prefixo *etno* tem significado muito amplo, referente ao contexto cultural e, portanto, inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; *matema* é uma raiz difícil, que vai na direção de explicar, de conhecer, de entender; *tica*, sem dúvida, vem de *techne*, que é a mesma raiz de arte e de técnica. Assim, *Etnomatemática* é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais. Ela procura compreender o saber/fazer matemático ao longo da História da humanidade, contextualizando, em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações.

As práticas matemáticas de feirantes, comerciantes, borracheiros, cirurgiões cardíacos, vendedores de suco de frutas, bicheiros, indígenas e de grupos africanos enquadram-se, por exemplo, nos estudos e nas pesquisas da Etnomatemática.

Para se inteirar sobre Etnomatemática, recomendamos a leitura dos livros *Etnomatemática:* elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrósio, editora Autêntica; e *Etnomatemática*, de Ubiratan D'Ambrósio, editora Ática; e da revista *Educação Matemática em Revista*, da SBEM, ano 1, n. 1, 1993, inteiramente dedicada a esse tema.

O que é modelagem?

Diante de uma realidade complexa, global, podemos reduzir esse grau de complexidade isolando algumas variáveis. Temos, assim, uma representação da realidade sobre a qual refletimos e procuramos construir estratégias de ação. De posse dos resultados obtidos nessa representação, voltamos ao global.

Esse processo de passagem do global para o local e do local para o global, a partir de representações, é geralmente chamado *modelagem*.

Acompanhe esta explicação apresentada por Ubiratan D'Ambrósio:

O esforço de explicar, de entender, de manejar uma porção da realidade, um sistema, normalmente se faz isolando esse sistema e escolhendo alguns parâmetros nos quais concentraremos nossa análise. Com isso, o sistema, com toda a complexidade que ele oferece, fica aproximado por um sistema artificial, no qual se destacam somente alguns parâmetros (algumas qualidades) e se ignoram suas interações com o todo. Dessa maneira considera-se um modelo e passa-se a analisar e refletir sobre o modelo. Este é o processo de modelagem, na sua essência, uma forma de abstração. São exemplos históricos de modelagem em Matemática a Geometria euclidiana, a Mecânica newtoniana, a Óptica geométrica.

A modelagem, visando aplicações, que é mais comum, faz sempre apelo à realidade na qual está inserido o sistema que deu origem ao modelo com o qual trabalhamos, sempre procurando verificar a adequação dos parâmetros selecionados e as implicações dessa seleção no inter-relacionamento desse sistema com a realidade como um todo, isto é, procurando recuperar o sentido holístico que permeia o matema. Não é possível explicar, conhecer, entender, manejar, lidar com a realidade fora do contexto holístico. Têm-se não mais que visões parciais e incompletas da realidade.

A modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da situação real, que, na verdade, estamos elaborando sobre representações. Assim, a modelagem pode ser uma metodologia de ensino muito útil e se enquadra no Programa Etnomatemática, que inclui a crítica, também de natureza histórica, sobre representações, que deve estar subjacente ao processo de modelagem.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática: um programa. *Educação Matemática em Revista*, Blumenau, n. 1, p. 5-11, 1993.

Para saber mais sobre modelagem, recomendamos a leitura de: *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, de Rodney Carlos Bassanezi, editora Contexto; e *Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de Matemática*, de Maria Salett Biembengut, Editora da Universidade Regional de Blumenau (Furb). Veja também um modelo para racionamento de energia elétrica na revista *Educação Matemática em Revista*, da SBM, ano 8, n. 11, p. 41-50, dez. 2001.

5 Características da coleção

Nesta coleção procuraram de forma ativa a recordação, a ampliação, o aprofundamento de conceitos e procedimentos já explorados durante o Ensino Fundamental, apresentando-os sob diversos pontos de vista e linguagens: natural, gráfica, em tabelas e simbólica.

Deu-se preferência ao longo da obra para atividades realizadas em dupla ou em equipe, com o intuito de valorizar a iniciativa e a capacidade de decisão dos estudantes, reforçando a ajuda mútua, a ética e a solidariedade.

As situações e os problemas apresentados ao longo da coleção têm como pressuposto que as discussões a serem realizadas em sala de aula e os recursos de que o professor pode lançar mão, a partir das resoluções propostas pelos alunos, são os geradores de uma visão de Matemática e de ensino e aprendizagem dessa disciplina como as consideradas até aqui, tanto do ponto de vista dos pesquisadores como das leis e propostas governamentais.

As propostas da coleção visam possibilitar aos jovens alunos a compreensão e a interpretação do mundo ao seu redor por meio da ampliação de suas capacidades analíticas e críticas, necessárias para a tomada de decisões em benefício próprio, de sua comunidade e da sociedade, no complexo processo de participação e cidadania.

Como qualquer outro material didático, o livro deve ser visto como mais um (e não o único) importante auxiliar do professor que busca ensinar Matemática de modo mais significativo para o aluno, com assuntos da vivência dele, desenvolvendo conceitos por meio da compreensão de situações-problema interessantes, contextualizadas ou interdisciplinares.

Em geral, os conceitos são desenvolvidos a partir de uma situação-problema, como é recomendado hoje pelos educadores matemáticos que trabalham com resolução de problemas; a modelagem matemática é feita pela procura de modelos matemáticos com base em problemas reais (por exemplo, os números reais como modelo para as medidas; a função linear como modelo dos problemas de proporcionalidade; a função quadrática como modelo do movimento uniformemente variado; a função exponencial como modelo dos juros compostos, da desintegração radioativa, do aumento do número de bactérias em uma cultura, etc.); as abordagens da história da Matemática, ora feitas como introdução de um assunto, ora como leitura para complementação; e o uso da tecnologia de informação, como calculadoras e *softwares*, é realizado em vários momentos da coleção, principalmente nos problemas que envolvem funções, Trigonometria e números reais.

Procurou-se colocar em cada volume conteúdos de diferentes blocos curriculares, permitindo alternância de temas. A organização das atividades foi feita com o objetivo de proporcionar a construção de conceitos, procedimentos e algoritmos, de modo equilibrado e sem descuidar das aplicações.

Sempre que possível, valorizaram-se diferentes enfoques e articulações com diversos campos da Matemática e de outras ciências.

Procurou-se um equilíbrio no emprego da linguagem usual e da linguagem matemática, evitando exacerbar esta última e tornando a comunicação clara e adequada ao nível do aluno a que se destina esta coleção. A coleção introduz o método axiomático dedutivo de forma criativa, utilizando-se de retículas coloridas para identificar as definições (em retículas rosa), axiomas ou postulados (em retículas azuis) e teoremas (em retículas laranja), assim, intuitivamente, o aluno poderá compreender como a Matemática se estrutura. O objetivo é que o aluno perceba por si próprio que, na Matemática, algumas afirmações (proposições) são admitidas como verdadeiras por terem um caráter aparente (definições) ou por serem tomadas inicialmente como verdade, sem que seja necessário demonstrá-las (axiomas ou postulados), e, com base nelas, por meio de um encadeamento lógico (prova/demonstração), pode-se chegar a outras afirmações mais gerais; algumas dessas afirmações têm maior importância para a Matemática (teoremas). Destaques, quadros-resumos, resultados que antecedem diretamente um teorema e/ou consequências diretas de um teorema são expressos em retículas roxas.

A tônica desta coleção é ajudar o aluno a construir e desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que ele está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. E tudo isso valendo-se de situações-problema contextualizadas e, posteriormente, aplicando os conceitos em situações cotidianas, na própria Matemática ou em outras áreas do conhecimento.

As atividades propiciam, em muitos momentos, fazer a articulação entre os grandes campos temáticos, bem como entre o conhecimento novo e o já abordado. Para exemplificar, citamos funções e progressões, funções (afim e quadrática) e Geometria analítica, sistemas lineares e Geometria analítica, etc.

As retomadas frequentes de conceitos e procedimentos, seguidas de aprofundamento, são outra forma de articulação.

Por exemplo, números reais e números complexos, a equação da reta na função afim e na Geometria analítica, a parábola na função quadrática e na Geometria analítica, os sistemas lineares 2×2 estudados no Ensino Fundamental e os sistemas lineares 3×3 com suas interpretações geométricas, etc.

Sempre que possível, o desencadeamento de novos conceitos e a apresentação de exercícios e problemas são feitos por meio de situações-problema contextualizadas.

É grande o número de exercícios e problemas desta coleção em que se procurou aplicar conceitos matemáticos na solução de situações de outros componentes curriculares, como Física, Química, Geografia, Biologia e outras áreas do conhecimento. Em especial na seção *Outros contextos*.

O enfoque metodológico da coleção, em geral, foi feito por meio da formulação e resolução de problemas, quer desencadeando um novo conceito, quer aplicando os conceitos e procedimentos estudados em situações contextualizadas e/ou interdisciplinares ou mesmo em problemas da própria Matemática.

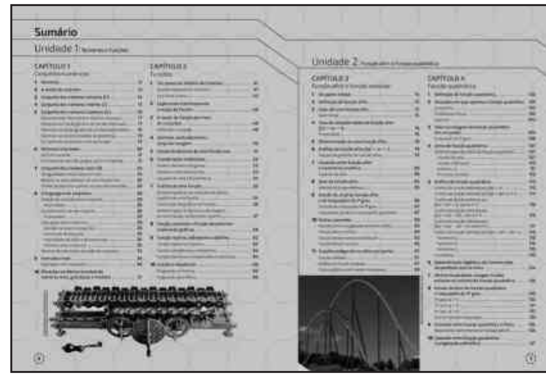
Seções: definições e algumas sugestões de abordagem

Conheça seu livro

Seção destinada ao aluno, estimulando-o a conhecer os recursos disponíveis em seu material.

Sumário

Enumeração dos capítulos e das demais seções do volume. Dá ao aluno uma visão geral da obra.



Abertura de capítulo

Na abertura de cada capítulo, apresenta-se uma imagem de impacto, ligada a algum contexto relacionado aos conteúdos trabalhados no capítulo.

Para refletir, *Fique atento!* e *Você sabia?*

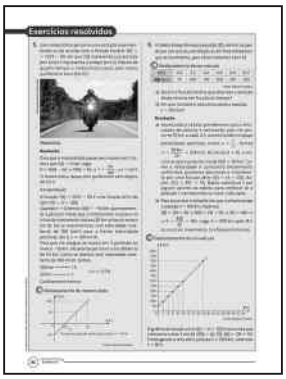
Seções que são dispostas nas laterais das páginas.

Para refletir apresenta questões que visam destacar algo que merece reflexão. São indicadores de investigação a ser realizada de modo que os alunos percebam alguma propriedade ou fato, ou que constatem, descubram, ou provem algo. Pode representar uma complementação do estudo do tópico que está sendo abordado.

Fique atento! apresenta conteúdos que o aluno já estudou e devem ser relembrados ou relacionados com o assunto que está sendo representado ou detalhes importantes que devem ser ressaltados.

Você sabia? apresenta informações interessantes que ampliam o tema em estudo.

Exercícios resolvidos



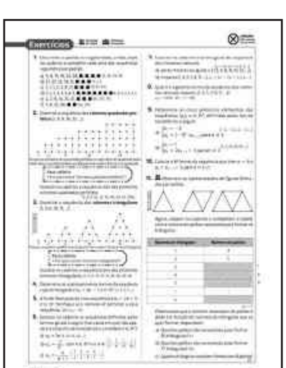
Mostram as várias formas de resolução de uma questão ou problema. **Não** devem ser vistos como modelos que os alunos apenas imitam e dos quais repetem estratégias. Servem para inspirar e indicar possíveis estratégias.

Podem ser resolvidos pelo aluno, como experiência de verificação da compreensão do conteúdo já desenvolvido pelo professor, e comparados com a resolução apresentada no livro. Esse trabalho pode ser realizado em duplas, visando à discussão e ao intercâmbio de experiências.

Também podem ser explorados como um momento de desenvolvimento da leitura e interpretação em Matemática se for pedido ao aluno que explique, com suas próprias palavras, o que está expresso ali, tanto do ponto de vista da solução dada como do ponto de vista da linguagem matemática empregada e do tratamento dado a ela.

Em alguns exercícios resolvidos, explicitamos as fases da resolução de um problema (compreender, planejar, executar, verificar e emitir a resposta); eles são destacados como **passo a passo**. Também mostramos em que direções a questão pode ser ampliada, apresentando em geral uma proposta de discussão em equipe sobre o assunto.

Exercícios



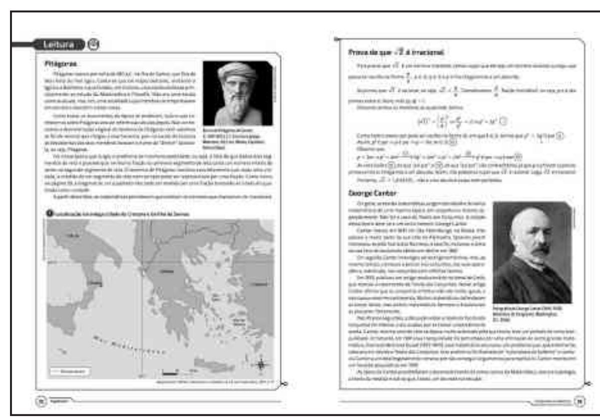
Grande variedade de exercícios e situações-problema para o aluno checar, consolidar e aplicar os conhecimentos recentes. Eles são apresentados com diferentes graus de dificuldade e, sempre que possível, contextualizados com exploração interdisciplinar.

Podem ser trabalhados em sala de aula, dando continuidade ao processo de fixação dos conceitos, ou como tarefa de casa, para sedimentação da aprendizagem.

Alguns exercícios são classificados como desafios. A fim de estimular os alunos durante as tentativas de resolução, quando necessário, promova discussões e sugira algumas pistas para que os alunos se sintam motivados a continuar.

Também temos exercícios com indicação para serem realizados em duplas ou em equipe, por terem um grau de complexidade maior ou cuja discussão ajudará no entendimento do conceito em estudo.

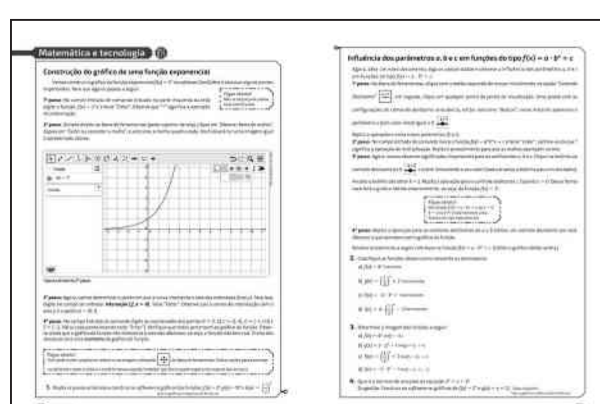
Leitura(s)



Textos que ampliam e enriquecem o conteúdo. Podem ter uma abordagem interdisciplinar.

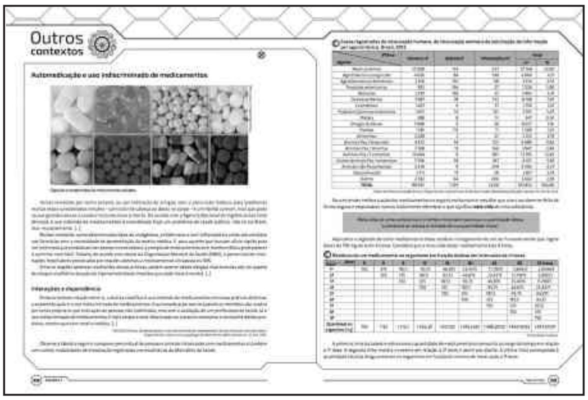
Matemática e tecnologia

Nesta seção apresentamos atividades em que o recurso do computador é utilizado para auxiliar na manipulação e visualização de gráficos e tabelas.



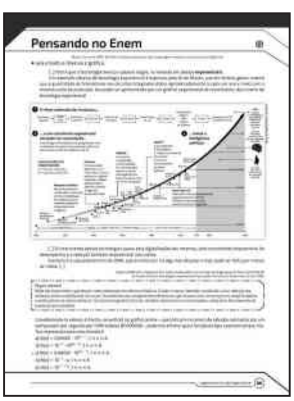
Outros contextos

O foco da seção é colocar o aluno em contato com vários tipos de textos favorecendo a interdisciplinaridade, a experimentação de conteúdos matemáticos e o desenvolvimento da competência leitora. Ela destaca os assuntos ao relacioná-los com situações em que a Matemática estudada tem presença significativa. Embora essas discussões sejam muito mais proveitosas quando feitas em conjunto pela comunidade escolar, o professor poderá promover interessantes investigações matemáticas nos contextos considerados.



Pensando no Enem

Questões direcionadas ao desenvolvimento das habilidades da Matriz de Referência desse exame. As questões propostas são contextualizadas, muitas vezes tratando de fenômenos naturais ou sociais.



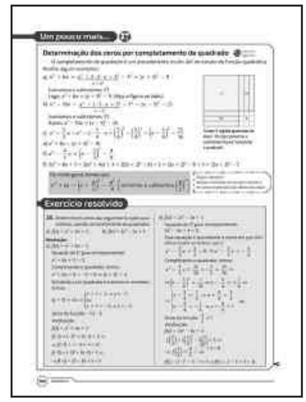
Um pouco mais...

Essa seção aparece no final de alguns capítulos tratando de assuntos adicionais. O objetivo é abordar, de forma breve, alguns conteúdos matemáticos que exigem uma fundamentação mais criteriosa. Apesar do maior rigor matemático, tal fundamentação é apresentada de forma didática. Fica a critério do professor abordá-la ou não.

Ao longo dos capítulos indicaremos ao professor, por meio do ícone, alguns outros assuntos que acreditamos ser opcionais, pois muitos deles não estão relacionados à Matriz do Enem.

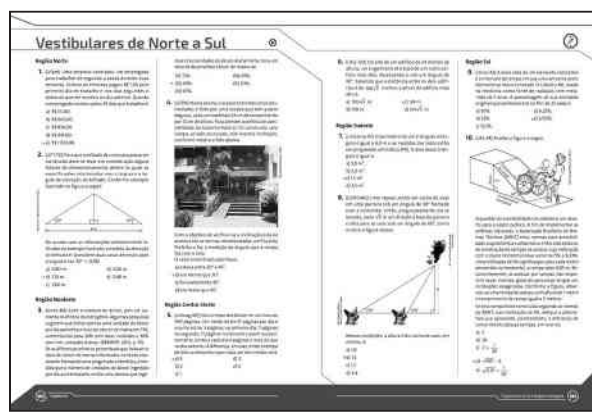
A opção de manter esses assuntos no livro se faz necessária para atender alunos que desejem aprofundar conteúdos matemáticos ou se preparar para algum exame específico de acesso ao Ensino Superior.

Ao professor, cabe a responsabilidade de adequar o conteúdo disponível no livro didático à sua realidade. Algumas vezes, "pular" assuntos que não serão obstáculos na aprendizagem do aluno para dedicar mais tempo ao trabalho com temas que serão fundamentais na formação do estudante pode ser mais proveitoso. Além disso, nem todos os alunos precisam de um alto grau de aprofundamento, visto que não seguirão carreiras associadas à Matemática.



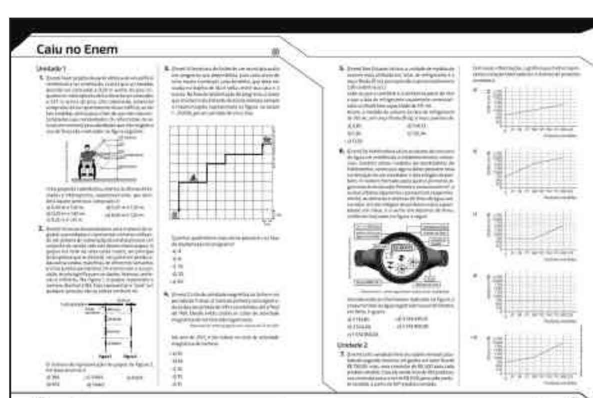
Vestibulares de Norte a Sul

Questões de vestibular, relacionadas ao conteúdo da unidade, separadas por região geográfica.



Caiu no Enem

Questões do Enem classificadas de acordo com as unidades de cada livro.



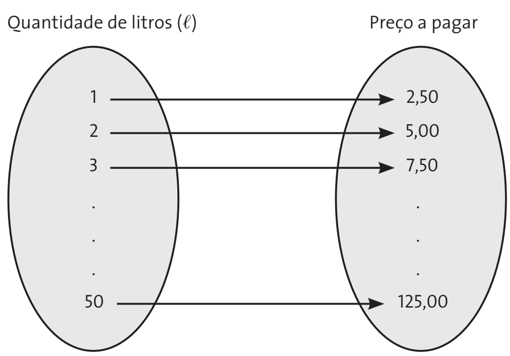
6 Orientações metodológicas e o conteúdo digital na prática pedagógica

Orientações metodológicas

Os avanços conquistados pela Educação Matemática indicam que, para que o aluno aprenda Matemática com significado, é fundamental:

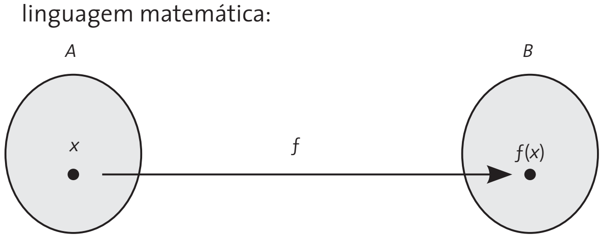
- **trabalhar as ideias, os conceitos matemáticos intuitivamente, antes da simbologia, antes da linguagem matemática**. Por exemplo, antes de ser apresentada em linguagem matemática, a ideia de função deve ser trabalhada de forma intuitiva com o aluno. Uma situação-problema que torna isso possível é: "Considere a quantidade de litros de gasolina e o respectivo preço a pagar:

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora



O preço a pagar é dado em função da quantidade de litros que se coloca no tanque, portanto, depende do número de litros comprados".

Depois desse trabalho intuitivo calcado na elaboração de conceitos é que, pouco a pouco, vamos introduzindo a linguagem matemática:



$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow f(x)$$

"Cada x de A corresponde a um único $f(x)$ de B, levado pela função f."

- **que o aluno aprenda por compreensão**. O aluno deve **atribuir significado àquilo que aprende**. Para isso, deve saber o porquê das coisas, e não simplesmente mecanizar procedimentos e regras. Por exemplo, não basta dizer que o número racional 0,3333... é igual a $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$; é preciso, para a sua compreensão, saber por que isso ocorre, fazendo, por exemplo:

$x = 0{,}3333... \Rightarrow 10x = 3{,}333... = 3 + 0{,}333... \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x = 3 + 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

- **estimulá-lo a pensar, raciocinar, criar, relacionar ideias, descobrir e ter autonomia de pensamento**. Em lugar de simplesmente imitar, repetir e seguir o que o professor fez e ensinou, o próprio aluno **pode e deve fazer Matemática**, descobrindo ou redescobrindo por si só ideias, propriedades, maneiras diferentes de resolver uma questão, etc. Para que isso ocorra, é preciso que o professor crie oportunidades e condições para que o aluno descubra e expresse suas descobertas. Por exemplo, desafios, jogos, quebra-cabeças, problemas curiosos, etc. auxiliam o aluno a pensar logicamente, a relacionar ideias e a realizar descobertas;
- **trabalhar a Matemática por meio de situações-problema que o façam realmente pensar, analisar, julgar e decidir-se pela melhor solução**. Vamos destacar o que consideramos ser um problema matemático. Para alguns autores é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. Outros o definem como uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação. Outros ainda destacam que problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para isso alguma estratégia em particular. De modo geral, podemos afirmar que existe um problema quando há um objetivo a ser alcançado e não sabemos como atingi-lo, isto é, existe um problema quando há um resultado – conhecido ou não – a ser demonstrado utilizando conhecimentos matemáticos.

  No plano didático, há a hipótese de que determinados problemas permitam a aquisição de conceitos novos e se inscrevam em uma organização de ensino-aprendizagem eficaz para a maioria dos alunos. Uma organização assim foi apresentada por Douady (1984) em sua teoria conhecida como *Dialética Ferramenta-Objeto*. Conforme essa teoria, em atividades matemáticas, quando um problema é proposto, podemos considerá-lo resolvido se pudermos fundamentar suas explicações de acordo com um sistema de validação próprio dos matemáticos. Nessa tentativa, criamos conceitos que atuam como ferramentas que possibilitarão a resolução do problema. Ao serem descontextualizados, de modo que possam ser reutilizados, esses conceitos tornam-se objeto do saber.

  Douady chama de dialética ferramenta-objeto o processo de resolução de problemas, no qual temos as seguintes fases:

  Fase 1: Antigo – Mobilização de conhecimentos antigos, que funcionam como ferramentas, para resolver, ao menos em parte, o problema.

Fase 2: Pesquisa – Dificuldade em resolver o problema por completo, e novas questões são colocadas e levam à procura de novos meios para a resolução do problema.

Fase 3: Explicitação – Exposição dos trabalhos realizados, das dificuldades e dos resultados obtidos, sendo as produções discutidas coletivamente com a classe. Essa explicitação possibilita ao professor criar debates sobre os conhecimentos antigos, que estão sendo mobilizados, e sobre os novos, que estão sendo gerados implicitamente, sem que se crie uma situação de bloqueio. Esses debates são úteis na validação de alguns conhecimentos produzidos nessa fase e permitem aos alunos reconhecer procedimentos corretos e diagnosticar procedimentos incorretos.

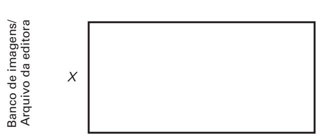
Fase 4: Institucionalização – Institucionalizam-se os novos conhecimentos como objetos de saber matemático. O professor ressalta os conhecimentos que devem ser retidos e explicita as convenções de uso. Trata-se de um meio de constituição de um saber coletivo. Para cada aluno, constitui uma maneira de estabelecer pontos de referência para seu próprio saber e, dessa forma, assegurar o progresso de seus conhecimentos.

Fase 5: Familiarização – É o momento de resolver exercícios utilizando as noções recentemente institucionalizadas como ferramentas explícitas. Esses exercícios, simples ou complexos, tratam apenas do que é conhecido. Os problemas propostos nessa fase destinam-se, segundo Douady, a desenvolver hábitos e práticas, a integrar o saber social com o saber do aluno, que ainda precisa ser testado em novas experiências, eventualmente sozinho, os conhecimentos que julga ter alcançado e esclarecer para si mesmo o que realmente sabe.

Fase 6: Novo problema – Os alunos são instigados a utilizar os novos conhecimentos em situações mais complexas que envolvam outros conceitos, sejam eles conhecidos ou visados pela aprendizagem. Os conhecimentos novos adquirem, agora, o estatuto de antigos, em um novo ciclo da dialética ferramenta-objeto. De acordo com Douady, para a aprendizagem de um conceito ou propriedade, muitos ciclos podem ser necessários.

Por exemplo, o estudo da função quadrática poderá ser desenvolvido a partir da seguinte situação-problema: "Se quisermos cercar um terreno retangular com uma tela de 40 m de comprimento, a fim de cercar a maior área possível, quais devem ser as dimensões do terreno?".

Como o perímetro é de 40 m, as dimensões do terreno são:

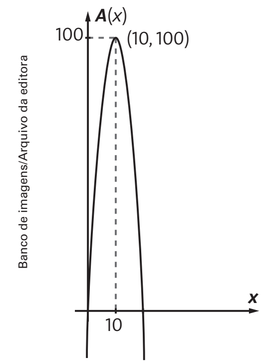


Área:

$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2 = -x^2 + 20x \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x) = -x^2 + 20x$ (modelo matemático para esta situação)

Nesse caso, temos a função quadrática $f(x) = 2x^2 + 20x$, cujo gráfico é dado a seguir.



O ponto de máximo da parábola (10, 100) dará a solução do problema. Assim, o terreno que satisfaz às condições impostas é de forma quadrada (o quadrado é um caso particular de retângulo), de lado igual a 10 m e área igual a 100 m². É consenso entre os educadores matemáticos que a capacidade de pensar, de raciocinar e de **resolver problemas** deve constituir um dos principais objetivos do estudo da Matemática;

- **trabalhar o conteúdo com significado, levando o aluno a compreender que aquele conhecimento é importante para sua vida em sociedade e/ou que o conteúdo trabalhado lhe será útil para entender o mundo em que vive**. Por exemplo, ao trabalhar as diversas funções e seus gráficos relacionando-os com o cotidiano e com os fenômenos das Ciências Naturais, ao resolver problemas de juros compostos usando logaritmos, ao coletar dados, fazer tabelas, gráficos e interpretá-los, ao estudar Probabilidade com a Genética da Biologia, etc., o aluno percebe que tudo isso tem sentido em sua vida presente e futura. Para que o aluno veja a Matemática como um assunto útil e prático e possa apreciar o seu poder, precisa perceber que ela está presente em praticamente tudo e é aplicada para resolver problemas do mundo real e entender uma grande variedade de fenômenos;
- **valorizar a experiência acumulada pelo aluno dentro e fora da escola**. É preciso lembrar que, quando o aluno chega ao Ensino Médio, ele já acumulou experiências pelo menos até seus 14 anos de idade. A partir dessa vivência, o professor deve iniciar o trabalho de construir e aplicar novos conceitos e procedimentos matemáticos, dando continuidade ao que o aluno já aprendeu no Ensino Fundamental e na vida. Detectar os conhecimentos prévios dos alunos para, com base neles, desenvolver novos conhecimentos contribui para uma aprendizagem significativa;
- **estimular o aluno a fazer cálculo mental, estimativas e arredondamentos, obtendo resultados aproximados**. Por exemplo, quando o aluno efetua a divisão $306 \div 3$ e coloca 12 como resultado, ele evidencia que não tem sentido numérico, não sabe arredondar ($300 \div 3 = 100$; $6 \div 3 = 2$ e, portanto, $306 \div 3 = 102$), enfim, falta-lhe a habilidade de cálculo mental. Muitas vezes, em situações cotidianas, mais

vale saber qual é o resultado aproximado do que o resultado correto propriamente dito;

- **considerar mais o processo do que o produto da aprendizagem – "aprender a aprender" mais do que levar em conta resultados prontos e acabados**. É muito mais importante valorizar a maneira como o aluno resolveu um problema, principalmente se ele o fez de maneira autônoma, original, em vez de simplesmente verificar se acertou a resposta. O mesmo se pode dizer sobre o modo de realizar operações, medições, resolver equações e sobre as maneiras de observar e descobrir propriedades e regularidades em algumas formas geométricas. Sempre que possível, devemos analisar diferentes resoluções de um mesmo problema;
- **compreender a aprendizagem da Matemática como um processo ativo**. Os alunos são pessoas ativas que observam, constroem, modificam e relacionam ideias, interagindo com outros alunos e outras pessoas, com materiais diversos e com o mundo físico. O professor precisa criar um ambiente de busca, de construção e de descoberta e encorajar os alunos a explorar, desenvolver, levantar hipóteses, testar, discutir e aplicar ideias matemáticas. As salas de aula deveriam ser verdadeiras salas-ambiente de Matemática, equipadas com grande diversidade de materiais instrucionais que favorecessem a curiosidade, a aprendizagem matemática e o "fazer Matemática". Esse "fazer Matemática" pode ser estimulado apresentando-se atividades investigativas ao aluno. Uma atividade de investigação matemática diferencia-se das demais por ser uma situação-problema desafiadora e aberta, permitindo aos alunos mobilizarem sua intuição e conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade de ensino e aprendizagem:

> [...] *ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor* [...]
>
> PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23.

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, em suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem estar presentes em todos os eixos de conteúdos, contribuindo para um trabalho mais dinâmico e significativo. Levar o aluno a agir como um matemático não implica obrigatoriamente trabalhar com problemas muito difíceis. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que, pelo contrário, investigar significa trabalhar com questões que nos cercam e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes que ela.

Em toda atividade de investigação o professor deve dispor de tempo e oportunidade ao aluno para organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los aos colegas e ao professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Dessa forma, espera-se que o aluno adquira confiança na sua capacidade de "fazer Matemática" e torne-se apto a resolver problemas matemáticos, porque aprendeu a pensar e a se comunicar matematicamente.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas dos alunos se restrinjam apenas às investigativas; as fases da dialética ferramenta-objeto de Douady já indicam que depois dos problemas de investigação o professor deve abordar problemas de familiarização do novo conhecimento, em diferentes domínios matemáticos e contextos. Assim, o tempo didático do professor acaba por se tornar pequeno, exigindo que outras atividades e problemas sejam desenvolvidos como tarefa de casa, a fim de que ocorram a fixação e a manutenção dos conhecimentos construídos;

- **utilizar a história da Matemática como um excelente recurso didático**. Comparar a Matemática de diferentes períodos da história ou de diferentes culturas (Etnomatemática). Por exemplo, pode-se contar a época na qual os pitagóricos só conheciam os números racionais e acreditavam apenas na existência dos segmentos comensuráveis (um pode ser medido pelo outro e a medida é expressa por um número racional). Ao medir a diagonal do quadrado de lado igual a uma unidade, usando esse lado como unidade de medida, surgem os números irracionais $\left(\sqrt{2}\text{, no caso}\right)$ e os segmentos incomensuráveis: $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$
  O lado e a diagonal desse quadrado são segmentos incomensuráveis entre si;
- **trabalhar o desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à Matemática**. Reforçar a autoconfiança do aluno na resolução de problemas e aumentar o interesse por diferentes maneiras de solucionar um problema; conduzir o aluno à observação de características e regularidades de números, funções, figuras geométricas, etc. Sensibilizá-lo para organizar, argumentar logicamente e perceber a beleza intrínseca da Matemática (simetrias, regularidades, logicidade, encadeamentos lógicos, etc.);
- **utilizar jogos**. Os jogos constituem outro excelente recurso didático, pois podem possibilitar a compreensão de regras, promover interesses, satisfação e prazer, formar hábitos e gerar a identificação de regularidades. Além disso, facilitam o trabalho com símbolos e o raciocínio por analogias;
- **enfatizar igualmente os grandes eixos temáticos da Matemática – Números e Funções (Álgebra), Espaço e Forma (Geometria), Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação (Estatística e Probabilidade) – e, de preferência, trabalhá-los de modo integrado**;
- **trabalhar os temas transversais (Ética, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo) de modo integrado com as atividades de Matemática, por meio de situações-problema**.

Recursos digitais na prática pedagógica

Atualmente já não há dúvidas sobre a necessidade do uso das novas tecnologias em sala de aula. Novas que já estão ficando velhas, de acordo com o pesquisador de processos de ensino-aprendizagem por meio do computador, José Armando Valente. Para ele, a possibilidade de junção de diferentes mídias em um só artefato (TV, vídeo, computador, internet) poderá ter um impacto ainda maior no processo de ensino-aprendizagem, causando uma revolução a ser enfrentada pelos educadores.

Nessa revolução, Valente considera que dois aspectos devem ser considerados na implantação desses recursos na educação. O primeiro é que os conhecimentos técnicos e pedagógicos devem crescer simultaneamente, um demandando novas ideias do outro. O outro é que o educador precisa ponderar sobre o que cada uma dessas facilidades tecnológicas tem a oferecer e como pode ser explorada em diferentes situações educacionais. Ora a televisão pode ser mais apropriada, ora o computador pode ser mais interessante, dependendo dos objetivos que se deseja atingir ou do que esteja sendo explorado. Mesmo o uso do computador permite uma grande variação nas atividades que professores e alunos podem realizar. No entanto, ressalta que:

> [...] *essa ampla gama de atividades pode ou não estar contribuindo para o processo de construção de conhecimento. O aluno pode estar fazendo coisas fantásticas, porém o conhecimento usado nessas atividades pode ser o mesmo que o exigido em uma outra atividade menos espetacular. O produto pode ser sofisticado, mas não ser efetivo na construção de novos conhecimentos.*
>
> VALENTE, [s.d.], p. 23.

Esse mesmo autor destaca que situações vividas com o emprego de recursos digitais contribuem para que o cotidiano escolar não seja visto como espaço de rotina e de repetição, mas como espaço de reflexão, crítica e autoexpressão, promovendo assim um novo sentido para a aprendizagem escolar.

Cada vez mais, cientistas e outros profissionais estão implantando sistemas colaborativos baseados em conexões via internet. Esse meio de comunicação vem ganhando força e importância no mundo profissional. O trabalho cooperativo é fundamental para a solução de problemas complexos, por conseguinte a aprendizagem colaborativa é um passo determinante no sentido de preparar o jovem estudante para a futura realidade profissional.

O uso de recursos digitais passa a ser parte integrante do trabalho de investigação, pois muitos dos problemas podem ser abordados com o apoio de *softwares* e objetos educacionais digitais especialmente elaborados para isso. A seguir indicamos um dos *softwares* que estão sendo alvo de pesquisas bem-sucedidas em Educação Matemática com dois *sites* em que há exemplos de utilização em sala de aula.

- **GeoGebra**

  Criado por Markus Hohenwarter, é um *software* de Geometria dinâmica e álgebra gratuito e desenvolvido para o ensino-aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino. Ele reúne recursos de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Probabilidade, Estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, ele permite apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Disponível em português, o GeoGebra é uma multiplataforma e, portanto, pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou MacOS. No livro do aluno apresentamos algumas atividades com esse *software*. Os *sites* <www.pucsp.br/geogebrasp/>, do Instituto GeoGebra de São Paulo, e <www.geogebra.im-uff.mat.br/bib.html>, do Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro, fornecem os *links* para *downloads* tanto do *software* como dos tutoriais de uso, além de exemplos de aplicações para sala de aula. Acesso em: 13 maio 2016.

  Outros exemplos de uso podem ser encontrados em: <http://pt.wikibooks.org/wiki/Aplicações_do_GeoGebra_ao_ensino_de_Matemática/Atividades>. Acesso em: 13 maio 2016.

Linguagem digital

A linguagem digital voltada ao ensino utiliza três termos correntes. Apesar de não haver muito rigor a respeito de seus significados, convém fazer a distinção entre eles: conteúdo digital, ferramenta digital e tecnologia digital. Conteúdo digital é o correspondente ao conteúdo escolar, mas que é disponibilizado na rede, como textos, hipertextos, figuras, gráficos, entre outros. Ferramenta digital é o meio pelo qual o conteúdo digital é disponibilizado na rede, como filmes, áudios, jogos, animações, simuladores, hipertextos, *sites*, redes sociais, fóruns, *blogs*, entre outros. Tecnologia digital é o instrumento que permite a conexão dessas ferramentas e o respectivo acesso ao conteúdo digital, como computadores, *tablets*, telefones, lousas digitais, entre outros.

A utilização de todos esses recursos digitais no ensino é cada vez mais frequente e facilita a comunicação entre os agentes do processo didático, além de ampliar as possibilidades pedagógicas.

Animação, por exemplo, é uma representação dinâmica de um processo qualquer, como um fenômeno natural ou outro evento, mas que não admite a interação com o usuário, pois ela funciona como um filme feito em linguagem computacional. Já os simuladores admitem a interatividade com o usuário, que pode alterar parâmetros e então modificar a dinâmica em curso.

Vídeoaulas não interativas, dirigidas tanto a alunos do ensino básico quanto à formação docente, também ajudam a compor o conteúdo digital voltado ao ensino que pode ser encontrado na rede. Grandes universidades, nacionais e internacionais, disponibilizam gratuitamente, ou não, cursos inteiros pela internet. Alguns deles são oficiais e atribuem titulação de graduação para o aluno, os conhecidos cursos de Ensino a Distância (EAD). Universidades públicas e outras instituições públicas e privadas ainda se valem dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) para divulgar calendários, disponibilizar recursos didáticos digitais, além de organizar debates e discussões via fóruns síncronos ou assíncronos para seus alunos. Além disso, professores e alunos contam com um grande acervo de demonstrações experimentais gravadas em vídeo e disponibilizadas de forma gratuita pelos canais da rede, além de enciclopédias virtuais, dicionários *on-line*, entre tantos outros recursos.

As vantagens e prejuízos dos recursos digitais são causados pelo uso que se faz deles, ou seja, devemos evitar a noção ilusória de que a simples presença do recurso digital garante melhores resultados de aprendizagem. Em contrapartida, o seu uso planejado e apropriado tem se mostrado eficiente em melhorar o ensino em vários cenários educacionais.

O uso da calculadora

A presença de telefones celulares na sala de aula, principalmente no Ensino Médio, tem se tornado um problema para as escolas, mesmo considerando sua proibição por leis estaduais. No entanto, em vez de lutarmos contra eles podemos buscar desenvolver propostas em que eles sejam usados pelos alunos em suas atividades investigativas. É preciso considerar que os celulares estão cada vez mais equipados, contando com recursos como: câmeras, que fotografam e filmam com boa qualidade de som e imagem; gravadores de áudio; calendários; comunicadores instantâneos; calculadoras e tantas outras ferramentas que precisam ser aproveitadas na escola.

Não existem ainda modelos de sua utilização, mas atividades geralmente propostas com calculadoras podem ser realizadas nos celulares. Exemplos de utilização de calculadoras no Ensino Médio:

- *Quando os cálculos numéricos são apenas auxiliares*.
  A calculadora é recomendada quando os cálculos numéricos são apenas auxiliares na questão a ser resolvida, liberando mais tempo para o aluno pensar, criar, investigar, conjecturar, relacionar ideias, descobrir regularidades, etc. O tempo gasto desnecessariamente com cálculos longos e enfadonhos pode ser usado na busca de novas estratégias para a resolução de problemas, na busca de soluções de um desafio, de um jogo, etc.
- *Para melhorar a estimativa dos alunos por meio de jogos*.
  A calculadora é recomendada também para aguçar a capacidade de estimativa do aluno. Há várias possibilidades de jogos do tipo "estime e confira". Por exemplo, de um conjunto de 15 a 20 números de três algarismos, um aluno escolhe três deles e estima sua soma. Outro aluno escolhe mais três e também estima sua soma. Em seguida, conferem seus cálculos com a calculadora. Quem se aproximar mais do resultado correto marca um ponto. Vence quem fizer 5 pontos primeiro. Algo semelhante pode ser feito com as demais operações, usando números naturais inteiros, racionais e irracionais.
- *Para investigar propriedades matemáticas*.
  Analisando padrões ou regularidades que ocorrem em situações ou em tabelas com muitos dados, o aluno pode levantar hipóteses, fazer conjecturas, testá-las e descobrir propriedades. Por exemplo, ao preencher tabelas usando calculadora, os alunos podem descobrir propriedades da multiplicação e da divisão, que, depois, poderão ser provadas pelo professor, generalizando.
  Por exemplo:

Fator	15	15	15
Fator	12	24	48
Produto	?	?	?

Dividendo	13	26	52
Divisor	5	10	20
Quociente	?	?	?

"Quando se dobra um fator, o produto também dobra."
"Quando se dobram o dividendo e o divisor, o quociente permanece o mesmo."
Outro exemplo é quando os alunos trabalham com operações de radicais usando calculadora:

a	b	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{a \cdot b}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
5	3	?	?	?	?
7	10	?	?	?	?
3	1	?	?	?	?

a	b	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a + b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a - b}$
5	3	?	?	?	?
7	10	?	?	?	?
3	1	?	?	?	?

Eles poderão conjecturar que, por exemplo, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ e $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a \cdot b}$. Em seguida, o professor poderá demonstrar que essas conjecturas estão corretas.

- *Para trabalhar com problemas da realidade*.
  Ao trabalhar com problemas que apresentam dados reais, em geral os números são muito "grandes" ou "pequenos" e, às vezes, são muitos itens e muitas operações a serem realizadas. Isso torna a calculadora um instrumento fundamental para diminuir o trabalho manual e mecânico do aluno, e permitir que ele se concentre no essencial, que são o raciocínio, as estratégias e as descobertas.

Por exemplo, o índice de massa corpórea (IMC) de uma pessoa é dado pela fórmula IMC $= \frac{m}{h^2}$, em que m é a massa (em quilogramas) e h é a altura (em metros). Outro exemplo: Gastam-se 11,2 cm de arame de aço galvanizado para fabricar um clipe de papel. Com 100 m desse arame, quantos clipes serão fabricados aproximadamente?

Mais alguns exemplos poderão ser encontrados em: <http://www.univates.br/ppgece/docs/PT_Ieda.pdf> e <http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/medio/matematica-atividades-com-calculadoras.htm>. Acesso em: 29 mar. 2016.

Outras ideias de emprego dos celulares podem ser consideradas, por exemplo, o uso de fotografias para explorar aspectos geométricos de vistas possíveis de sólidos (é possível fotografar um cubo de modo que a vista seja um hexágono?), no uso de torpedos para a troca de informações entre grupos de trabalho para compartilhamento de pesquisas pela internet ou no acesso a vídeos disponíveis na internet.

7 O novo Enem

As exigências presentes no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) se constituem em uma das demandas de nossa sociedade para a continuidade dos estudos.

O Enem foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica, cuja ideia central considera os princípios da LDB (Lei nº 9.394/96), que preconiza, dentre as funções do Ensino Médio, o domínio dos princípios científicos, tecnológicos que orientam a produção moderna, bem como a compreensão do conhecimento das formas contemporâneas de uso e aplicação das linguagens, da utilização dos códigos e o domínio e a aquisição da organização da reflexão filosófica e sociológica para a vida em sociedade.

O pressuposto desse modelo de avaliação representa uma tentativa de análise da qualidade da oferta de Ensino Médio, considerando as expectativas presentes na LDB. Desse modo, a princípio, podiam participar do exame os alunos que estavam cursando ou que tinham concluído o Ensino Médio em anos anteriores, independentemente da idade ou do ano de término do curso. Já nos primeiros anos de aplicação, diversas instituições de Ensino Superior começaram a utilizar o Enem como uma alavanca para a pontuação obtida por aqueles que prestavam vestibular.

Em 2009, o Ministério da Educação (MEC) alterou de forma significativa a proposta do exame: ele passou a ser um instrumento de política pública para conduzir e alinhar o currículo de Ensino Médio em todo o país.

O MEC considera que os vestibulares de ingresso para a maioria das instituições de Ensino Superior, apesar de bem-sucedidos na seleção dos melhores para ingressar em seus quadros discentes, acabam por criar disparidades no sistema de Ensino Médio nacional e na sociedade. As exigências feitas por esses concursos de mérito exercem uma influência indesejada sobre os currículos das instituições de Ensino Médio, que acabam por submeter-se a esses requisitos, sem oferecer sentido ao que se ensina.

Outro fator negativo apontado pelo Ministério foi a falta de mobilidade de estudantes que resulta da descentralização dos vestibulares das diversas instituições públicas de Ensino Superior. A mudança realizada no Enem visa corrigir algumas dessas deficiências, oferecendo um vestibular unificado criado pelo governo federal e obedecendo a suas diretrizes e seus parâmetros curriculares.

O novo Enem tem como fim avaliar o aspecto cognitivo, mas enfatizando a capacidade de autonomia intelectual e o pensamento crítico dos alunos.

As instituições de Ensino Superior podem usar esse novo exame de diferentes modos, seja considerando-o uma fase única de avaliação, como uma primeira fase do processo de ingresso, utilizando sua nota em conjunto com um exame da própria instituição, seja como critério de seleção para vagas remanescentes.

Com a adoção do Sistema de Seleção Unificado (Sisu), o exame posssibilita aos alunos escolher a instituição em que desejam estudar, sem terem de prestar vestibular em vários lugares, favorecendo assim a mobilidade estudantil e o intercâmbio entre jovens de todo o país.

Por fim, o Enem se propõe a melhorar a qualidade do Ensino Médio, uma vez que avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos, não isoladamente, mas de forma conjunta. Assim, o conteúdo ministrado no Ensino Médio passa a ser determinado pelos professores, coordenadores e diretores e não exclusivamente ditado pelas universidades. Desse modo, é importante que os docentes compreendam e discutam a proposta integralmente, pois a execução desses pressupostos em sala de aula poderá contribuir para uma reorientação nas concepções e nas práticas, já que não se trata de mera revisão de conteúdos a ensinar, mas de redimensionar o papel da escola e seus atores.

Características do novo Enem:

- 180 questões divididas em 4 áreas de conhecimento e uma redação;
- a prova é realizada em 2 dias;
- além da contextualização e interdisciplinaridade, é exigido praticamente todo o conteúdo do Ensino Médio;
- serve também como forma de ingresso em diversas instituições de Ensino Superior.

***Site* oficial do Enem:** <http://portal.inep.gov.br/web/enem/>. Acesso em: 13 maio de 2016.

Contém informações sobre o exame, edições anteriores, legislação, documentos, resultados por escola, etc.

Hora do Enem: <http://horadoenem.mec.gov.br/>. Acesso em: 13 maio de 2016.

O *Hora do Enem* é um projeto pensado para quem vai fazer o Exame Nacional do Ensino Médio. Pode-se escolher: acompanhar o programa de TV, fazer simulados *on-line*, criar um plano de estudos adequado às suas próprias necessidades e baixar vídeos. Também é possível acessar notícias, receber orientações de como se preparar para a prova e ver questões que já caíram nos anos anteriores comentadas por professores. O objetivo do projeto é ajudar o aluno a se preparar para o Enem.

As questões do novo Enem são elaboradas com base na Matriz de Referência divulgada pelo MEC.

Nessa matriz estão descritas as competências e habilidades que se esperam do aluno do Ensino Médio e que estão fundamentadas em cinco eixos cognitivos:

I. **Domínio das linguagens** (**DL**): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
II. **Compreensão dos fenômenos** (**CF**): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
III. **Enfrentamento das situações-problema** (**SP**): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
IV. **Construção da argumentação** (**CA**): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
V. **Elaboração de propostas** (**EP**): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

A prova do novo Enem abrange uma redação e 180 questões objetivas, sendo 45 questões para cada uma das áreas de conhecimento em que está dividido o exame:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (Língua Portuguesa, Literatura e Língua Estrangeira).
- Matemática e suas Tecnologias (Álgebra e Geometria).
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Física, Química e Biologia).
- Ciências Humanas e suas Tecnologias (Geografia, História, Filosofia e Sociologia).

As competências e as habilidades (indicadas por **H**) da Matriz de Referência para a prova de Matemática e suas Tecnologias são:

- **Competência de área 1** – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

  H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.
  H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
  H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
  H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
  H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

- **Competência de área 2** – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

  H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
  H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.
  H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
  H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

- **Competência de área 3** – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

  H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
  H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
  H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
  H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
  H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

- **Competência de área 4** – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

  H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.
  H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
  H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
  H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

- **Competência de área 5** – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

  H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
  H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

- **Competência de área 6** – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

  H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

  H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

  H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

- **Competência de área 7** – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

  H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

  H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de Estatística e Probabilidade.

  H29 – Utilizar conhecimentos de Estatística e Probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

  H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de Estatística e Probabilidade.

Além disso, cada área possui objetos de conhecimento que fazem parte do currículo do Ensino Médio atual e que o aluno precisa dominar.

Esta coleção e o Enem

Na seção *11. Observações e sugestões para as Unidades e os capítulos* deste Manual, em que comentamos cada capítulo, apresentamos uma tabela que relaciona os objetos de conhecimento associados à Matriz de Referência para Matemática e suas Tecnologias aos conteúdos abordados no capítulo.

É importante ressaltar que nem todos os assuntos da nossa coleção estão relacionados com a Matriz de Referência do MEC.

8 Avaliação em Matemática

Aspectos legais da avaliação no Ensino Médio

Como destaca o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio[1], a avaliação educacional no contexto do Ensino Médio deve estar integrada ao projeto político-pedagógico da escola, tanto na concepção como na implementação, considerando estudantes e professores como sujeitos históricos e de direitos, participantes ativos e protagonistas na sua diversidade e singularidade. Deve, também, estar articulada com a proposta de ensino médio integral, de qualidade social, e em consonância com as novas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), que reforçam o compromisso da “avaliação da aprendizagem, com diagnóstico preliminar, e entendida como processo de caráter formativo, permanente e cumulativo” (BRASIL, 2012).

As DCNEM (BRASIL, 2012, pág. 7), em consonância com as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica (DCNEB), indicam três dimensões de avaliação: avaliação da aprendizagem, avaliação institucional e avaliação externa, esta, também, apresentada algumas vezes como avaliação de redes de escolas ou avaliação em larga escala.

A avaliação da aprendizagem, conforme a Lei de Diretrizes de Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, pode ser adotada, tendo como objetivo a promoção, aceleração de estudos e classificação, e deve ser desenvolvida pela escola refletindo a proposta expressa em seu projeto político-pedagógico.

A avaliação institucional interna é realizada com base na proposta pedagógica da escola, assim como no seu plano de trabalho, que devem ser avaliados sistematicamente, de maneira que a instituição possa analisar seus avanços e localizar aspectos que merecem reorientação.

A avaliação externa de escolas e redes de ensino é responsabilidade do Estado, seja realizada pela União, seja pelos demais entes federados. No Ensino Médio, em âmbito nacional, ela está contemplada no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb). Os resultados de Matemática têm foco na resolução de problemas e, juntamente com as taxas de aprovação, são utilizados no cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), instituído com o propósito de medir a qualidade de cada escola, no caso do Ensino Fundamental público, e externamente, também é apresentada como avaliação de redes de escolas ou avaliação em larga escala.

O que avaliar? Como avaliar?

A avaliação é um instrumento fundamental para fornecer informações sobre como está se realizando o processo de ensino-aprendizagem como um todo – tanto para o professor e a equipe escolar conhecerem e analisarem

[1] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de Professores do Ensino Médio*, Etapa I – Caderno VI: Avaliação no Ensino Médio.

os resultados de seu trabalho, como para o aluno verificar seu desempenho. Ela não deve simplesmente focalizar o aluno, seu desempenho cognitivo e o acúmulo de conteúdos para classificá-lo em "aprovado" ou "reprovado".

Uma função crucial da avaliação é a de desencadear ações que promovam tanto a evolução do aluno como a do professor para que ambos possam superar os desafios pedagógicos que enfrentam.

Nessa visão, a avaliação é concebida como um processo que implica uma reflexão crítica sobre a prática, no sentido de captar seus avanços, suas resistências, suas dificuldades e possibilitar a tomada de decisão sobre o que fazer para superar os obstáculos.

Esse movimento traz consigo a necessidade de o professor dominar o que ensina para reconhecer qual a relevância social e cognitiva do ensinado e, então, definir o que vai se tornar material a ser avaliado.

A mudança das práticas de avaliação é então acompanhada por uma transformação do ensino, uma vez que essa tomada de posição em relação ao que é realmente importante é que vai orientar a organização do tempo didático em sala de aula e definir o que deve ser avaliado e as formas a serem adotadas para avaliar.

Na busca de exercer a educação de modo justo e eficiente é preciso garantir a coerência entre as metas planejadas, o que se ensina e o que se avalia.

Assim, a definição clara sobre o que ensinar permitirá, em cada etapa ou nível de ensino, delimitar as expectativas de aprendizagem, das quais dependem tanto os critérios de avaliação quanto o nível de exigência.

A clareza sobre o que ensinar e o que avaliar deve estar explicitada em objetivos observáveis que "traduzem" os conteúdos formulados, geralmente de modo muito amplo, nos documentos curriculares ou planos de curso. Tendo isso em mente, a avaliação deve ser considerada em seus três aspectos: diagnóstico, formativo ou processual e acreditativo ou certificativo.

- Em seu aspecto diagnóstico, a avaliação permite detectar os conhecimentos, formais ou informais, que os alunos já possuem, contribuindo para a estruturação do processo de ensino-aprendizagem, pois esses conhecimentos são tomados como base.

  Com a avaliação diagnóstica inicial, o professor pode obter evidências sobre as formas de aprender dos alunos, seus conhecimentos e experiências prévios, seus erros e concepções. A interpretação dessas evidências deve ser feita, se possível, em conjunto com o aluno, buscando perceber seu ponto de vista, o significado de suas respostas, as possibilidades de estabelecimento de relações e os níveis de compreensão que possui dos objetos a serem estudados. Os instrumentos utilizados nesse tipo de avaliação, conjugados entre si ou não, podem ser: perguntas orais, realização de um microprojeto ou tarefa.
- Em seu aspecto formativo, a avaliação permite acompanhar a evolução dos alunos em seu processo de aprendizagem, por isso também é chamada avaliação processual. Os resultados sobre essa evolução implicam, para os professores, em tarefa de ajuste entre o processo de ensino e o de aprendizagem, a fim de se adequar à evolução dos alunos e estabelecer novos esquemas de atuação.
- Para diagnosticar os avanços, assim como as lacunas na aprendizagem, pode-se tomar para análise tanto as produções escritas e orais diárias dos estudantes quanto alguns instrumentos específicos, como tarefas, fichas, portifólios, etc., que forneçam dados mais controlados e sistemáticos sobre o domínio dos saberes a que se referem os objetivos e as metas de ensino. A análise dos trabalhos pode ser feita levando-se em conta a exigência cognitiva das tarefas propostas, a detenção de erros conceituais observados e as relações não previstas. Dessa forma, são levantados subsídios para o professor e para o aluno que podem ajudar no progresso do processo de apreensão dos conhecimentos, desenvolvimento e aprimoramento de destrezas, construção de valores e qualidades pessoais.
- O aspecto acreditativo ou certificativo da avaliação é o de obter dados que permitam determinar se os estudantes desenvolveram as capacidades esperadas ao final de um processo. Esses dados devem possibilitar que se concluam, em conjunto com os resultados das avaliações processuais, as condições de desempenho do aluno segundo as normas especificadas, tanto internamente à escola como as requeridas em avaliações externas.

A elaboração de escalas indicando as capacidades esperadas de desenvolvimento no processo de aprendizagem, graduadas em diferentes níveis, de acordo com aspectos observáveis nas produções orais e escritas dos alunos, são instrumentos essenciais tanto para o aspecto formativo como para o certificativo da avaliação.

Os alunos devem ter conhecimento da escala utilizada pelo professor, por uma questão de transparência na avaliação, e também para apoiar-se nela ao fazerem sua autoavaliação.

O quadro da página seguinte é um exemplo de escala[2] que pode ser empregada para avaliação em Matemática.

---

[2] Fonte dos dados: PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA (2006), p. 121-123.

Nível	Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
V	Mostra compreender os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema. Executa completa e adequadamente os algoritmos.	Usa informação exterior relevante de natureza formal ou informal. Identifica todos os elementos importantes do problema e mostra compreensão da relação entre eles. Indica estratégia apropriada e sistemática para a resolução do problema e mostra adequadamente o processo de solução.	Usa terminologia e notação apropriadas. Apresenta resposta completa e não ambígua. Inclui diagramas ou representações apropriados, exemplos ou contraexemplos. Apresenta como suportes argumentos coerentes e completos.
IV	Mostra compreender, quase completamente, os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema. Executa completamente os algoritmos. Os cálculos em geral estão corretos, contendo eventualmente pequenos erros.	Usa informação exterior relevante de natureza formal ou informal. Identifica todos os elementos importantes do problema e mostra compreensão da relação entre eles. O processo de solução é completo ou quase completo.	Usa terminologia e notação parcialmente corretas. Apresenta resposta completa com explicação razoável. Inclui diagramas ou representações, exemplos ou contraexemplos de modo ainda incompleto. Apresenta como suportes argumentos logicamente corretos, mas insuficientes.
III	Mostra compreender alguns dos conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema. A resposta tem erros de cálculo.	Identifica alguns elementos importantes do problema e mostra compreensão limitada da relação entre eles. Mostra alguma evidência do processo de solução, mas ele está incompleto ou pouco sistematizado.	Mostra progresso significativo na direção de completar o problema, mas a explicação é ambígua. Inclui diagramas ou representações pouco claras e imprecisas. Apresenta como suportes argumentos incompletos ou baseados em premissas pouco importantes.
II	Mostra compreensão muito limitada dos conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema. A resposta tem graves erros de cálculo.	Usa informação exterior irrelevante. Falha na identificação, quase por completo, de aspectos importantes ou coloca muita ênfase em elementos pouco importantes. Reflete uma estratégia inadequada para resolver o problema. O processo de solução não existe, é de difícil identificação ou não está sistematizado.	Falha no uso dos termos matemáticos. Apresenta alguns elementos satisfatórios, mas omite partes significativas do problema. Inclui diagramas ou representações de forma incorreta. Não apresenta argumentos logicamente corretos.
I	Mostra não compreender os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.	Tenta usar informação exterior irrelevante. Falha na identificação de quais elementos do problema são apropriados para a resolução. Copia partes do problema, sem procurar a solução.	Comunica de forma ineficaz. Integra desenhos que não representam a situação. As palavras que emprega não refletem o problema.

Indicadores para a avaliação em Matemática

Como já dissemos, esta coleção contemplou algumas das atuais tendências em Educação Matemática. Elas dizem respeito ao desenvolvimento de um ensino que aumente a capacidade matemática do aluno por intermédio da resolução de problemas, valorizando a comunicação matemática, a construção e a compreensão de conceitos e procedimentos. Passamos, então, a exemplificar como avaliar tais capacidades.

Avaliando a capacidade matemática do aluno

É preciso avaliar a capacidade matemática do aluno, ou seja, a sua capacidade de usar a informação para raciocinar, pensar criativamente e para formular problemas, resolvê-los e refletir criticamente sobre eles.

A avaliação deve analisar até que ponto o aluno integrou e deu sentido à informação, se consegue aplicá-la em situações que requeiram raciocínio e pensamento criativo e se é capaz de utilizar a Matemática para comunicar ideias.

Além disso, a avaliação deve analisar a predisposição do aluno em face dessa ciência, em particular a sua confiança em fazer Matemática e o modo como a valoriza.

Por exemplo, em uma situação-problema aberta como esta: “Elabore a maquete da escola com base na sua planta”, o aluno pode revelar a sua capacidade matemática.

Avaliando a resolução de problemas

Como a resolução de problemas deve constituir o eixo fundamental da Matemática escolar, o mesmo deve ocorrer com a avaliação. A capacidade dos alunos para resolver problemas desenvolve-se ao longo do tempo, como resultado de um ensino prolongado, de várias oportunidades para a resolução de muitos tipos de problemas e do confronto com situações do mundo real.

Ao avaliar essa capacidade do aluno, é importante verificar se ele é capaz de resolver problemas não padronizados, de formular problemas a partir de certos dados, de empregar várias estratégias de resolução e de fazer a verificação dos resultados, bem como a generalização deles. Identificar lacunas é muito importante na elaboração de problemas. Por exemplo, em um problema do tipo: “Você vai comprar 10 itens no supermercado. Na fila do caixa rápido (para 10 itens ou menos) estão 6 pessoas. O caixa 1 tem uma pessoa na fila e o caixa 3 tem 2. Os outros caixas estão fechados. Para qual dos caixas você se dirigirá?”, qual é a informação necessária para responder à pergunta? (É preciso saber o número de mercadorias que cada pessoa está comprando e a velocidade dos caixas.) Generalizar soluções de problemas é outro ponto fundamental. Por exemplo, peça aos alunos que determinem qual é o valor de $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ (é 25); depois, proponha ao aluno que formule uma expressão que forneça a soma dos n primeiros números ímpares. A solução seria:

1 parcela: 1

2 parcelas: $1 + 3 = 4$ (2^2)

3 parcelas: $1 + 3 + 5 = 9$ (3^2)

4 parcelas: $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ (4^2)

5 parcelas: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ (5^2)

⋮

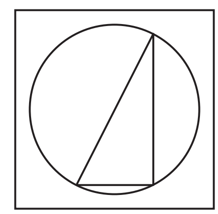
n parcelas: n^2

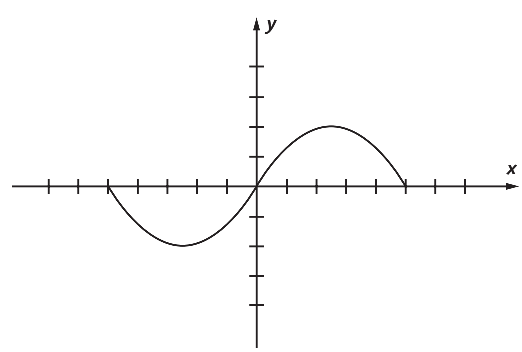
Avaliando a comunicação do aluno

Na sala de aula discutem-se ideias e conceitos matemáticos, partilham-se descobertas, confirmam-se hipóteses e adquire-se conhecimento matemático pela escrita, pela fala e pela leitura. O próprio ato de comunicar clareia e organiza o pensamento e leva o aluno a se envolver na construção da Matemática. Como a Matemática utiliza símbolos e, portanto, tem uma linguagem própria, específica, às vezes a comunicação fica dificultada.

Ao avaliar a comunicação de ideias matemáticas pelos alunos, é preciso verificar se ele é capaz de expressar-se oralmente, por escrito, de forma visual ou por demonstrações com materiais pedagógicos; se compreende e interpreta corretamente ideias matemáticas apresentadas de forma escrita, oral ou visual e se utiliza corretamente o vocabulário matemático e a linguagem matemática para representar ideias, descrever relações e construir modelos da realidade. Veja a seguir um problema que envolve esses aspectos:

“Suponha que você esteja ao telefone falando com um colega de turma e quer que ele desenhe algumas figuras. Escreva instruções que lhe permitam desenhar a figura e o gráfico exatamente como estão desenhados abaixo.”





Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Avaliando o raciocínio do aluno

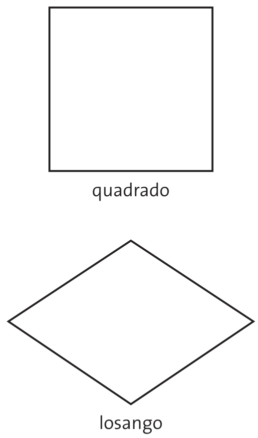
Para avaliar a capacidade de raciocínio matemático do aluno, é preciso verificar se ele identifica **padrões**, formula **hipóteses** e faz **conjecturas**. Por exemplo, peça a ele que descubra como começaram e como continuam as sequências:

0, 3, 8, 15, 24, (35), (48), (63) → ($n^2 - 1$; $n = 1, 2, 3, ...$)

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{16}\right), \left(\frac{1}{32}\right), \left(\frac{1}{64}\right)$$

É preciso verificar ainda se ele **analisa** situações para identificar **propriedades comuns**. Por exemplo, o que há de comum entre o losango e o quadrado? E no que eles diferem?

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora



E se ele utiliza o raciocínio espacial ou **proporcional** para resolver problemas.

Por exemplo, peça ao aluno que desenhe um cubo planificado, ou que desenhe um cone montado a partir de uma planificação. Para verificar o uso do raciocínio proporcional, pergunte: "Quantos alunos da escola usam óculos?". Isso leva o aluno a desenvolver um processo que permite identificar os que usam óculos de uma amostra de alunos e a utilizar raciocínio proporcional para determinar o número de alunos que usam óculos em toda a escola. Para aferir o raciocínio dedutivo, peça ao aluno que justifique por que, se somarmos o mesmo número de pontos à porcentagem de acertos no teste de cada aluno, a média das classificações aumentará na mesma quantidade.

Avaliando a compreensão de conceitos

A essência do conhecimento matemático são os conceitos. O aluno só pode dar significado à Matemática se compreender os seus conceitos e significados.

A avaliação do conhecimento de conceitos e da compreensão deles pelo aluno deve indicar se é capaz de verbalizá-los e defini-los; identificá-los e produzir exemplos e contraexemplos; utilizar modelos, diagramas e símbolos para representar conceitos; passar de uma forma de representação para outra; reconhecer vários significados e interpretações de um conceito; comparar conceitos e integrá-los.

Para identificar exemplos e contraexemplos de conceitos, apresente uma questão como esta:

"Quais das seguintes expressões representam números racionais?"

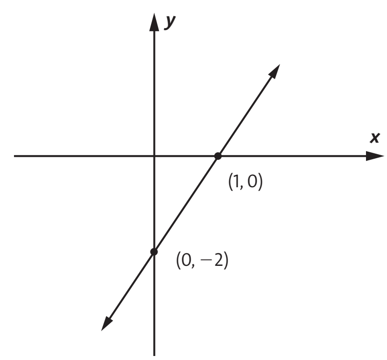
$$\frac{2}{3} \qquad \sqrt{\frac{4}{5}} \qquad 0 \qquad \sqrt{5}$$

$$1{,}3434 \qquad -5{,}6 \qquad 1{,}121121112...$$

$$\sqrt{-16} \qquad \frac{-6}{-6} \qquad 25\%$$

Para reconhecer condições que determinam um conceito, proponha ao aluno que faça uma classificação dos quadriláteros (4 lados). Ao separar os paralelogramos (2 pares de lados paralelos) dos trapézios (apenas 1 par de lados paralelos), o aluno demonstra que sabe identificar essas formas geométricas pelas suas propriedades. Na continuação, pode separar os retângulos (4 ângulos retos) dos losangos (4 lados de mesma medida) e incluir os quadrados (4 ângulos retos e 4 lados de mesma medida) nos losangos, demonstrando compreensão dos conceitos de quadrado, losango, retângulo, paralelogramo e quadrilátero.

Para passar de uma representação de um conceito para outra, peça ao aluno, por exemplo, que escreva a equação da reta:



A integração de conceitos pode ser trabalhada com atividades do tipo: "Una os pontos médios dos lados de um trapézio isósceles. Qual figura se obtém? Justifique sua resposta.".

Avaliando procedimentos matemáticos

Procedimentos matemáticos são, por exemplo, os **algoritmos** ou as **técnicas de cálculo**, são as maneiras de traçar retas paralelas, perpendiculares, ângulos, etc.

A avaliação do conhecimento de procedimentos do aluno deve indicar se é capaz de executar uma atividade matemática com confiança e eficiência; de justificar os passos de um procedimento, reconhecer se ele é adequado ou não a determinada situação e se funciona ou não; e, sobretudo, se é capaz de criar novos procedimentos corretos e simples.

Para verificar se o aluno conhece as razões dos passos de um procedimento, peça-lhe, por exemplo, que justifique cada passagem da multiplicação $(x + 3)(x + 2)$:

$(x + 3)(x + 2) = x(x + 2) + 3(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 =$
$= x^2 + (2 + 3)x + 6 = x^2 + 5x + 6$

Para verificar se o resultado de um procedimento está correto, proponha, por exemplo, que o aluno inverta a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e verifique se o resultado é realmente a inversa dela.

9 Texto complementar: Por que se deve avaliar?

A função social do ensino não consiste apenas em promover e selecionar os "mais aptos" para a universidade. Ela abarca outras dimensões da personalidade.

Habitualmente, quando se fala de avaliação, logo se pensa, de forma prioritária ou mesmo exclusiva, nos resultados obtidos pelos alunos. Hoje em dia, este continua sendo o principal alvo de qualquer aproximação ao fato avaliador. Os professores, as administrações, os pais e os próprios alunos referem-se à avaliação como o instrumento ou processo para avaliar o grau de alcance em relação a determinados objetivos previstos nos diversos níveis escolares. A avaliação é basicamente considerada como um instrumento sancionador e qualificador, em que o sujeito da avaliação é o aluno e somente o aluno, e o objeto da avaliação são as aprendizagens realizadas segundo certos objetivos mínimos para todos.

Mesmo assim, já faz muito tempo que, a partir da literatura pedagógica, as declarações de princípios das reformas educacionais empreendidas em diferentes países e grupos de educadores mais inquietos propõem formas de entender a avaliação que não se limitam à valoração dos resultados obtidos pelos alunos. O processo seguido por eles, o progresso pessoal e o processo coletivo de ensino-aprendizagem aparecem como elementos ou dimensões da avaliação.

Desse modo, é possível encontrar definições de avaliação bastante diferentes e, em muitos casos, bastante ambíguas, cujos sujeitos e objetos de estudo aparecem de maneira confusa e indeterminada. Em alguns casos, o sujeito da avaliação é o aluno; em outros, é o grupo/classe e, inclusive, o professor ou a equipe docente. Quanto ao objeto da avaliação, às vezes é o processo de aprendizagem seguido pelo aluno ou os resultados obtidos, enquanto outras vezes se desloca para a própria intervenção do professor.

As definições mais habituais da avaliação remetem a um todo indiferenciado que inclui processos individuais e grupais, os alunos e os professores. Esse ponto de vista é plenamente justificável, já que os processos que têm lugar na aula são processos globais em que é difícil – e certamente desnecessário – separar os diferentes elementos que os compõem. Nossa tradição avaliadora tem-se centrado exclusivamente nos resultados obtidos pelos alunos. Assim, é conveniente dar-se conta de que, ao falar de avaliação na sala de aula, pode-se aludir em particular a algum dos componentes do processo de ensino-aprendizagem, como também a todo o processo em sua globalidade.

Talvez a pergunta que nos permita esclarecer em cada momento qual deve ser o objeto e o sujeito da avaliação seja aquela que corresponde aos próprios fins do ensino: por que temos que avaliar? Sem dúvida, a partir da resposta a esta pergunta surgirão outras, por exemplo, o que se deve avaliar, a quem se deve avaliar, como se deve avaliar, como devemos comunicar o conhecimento obtido através da avaliação, etc.

Os sujeitos e os objetos da avaliação

Como em outras variáveis do ensino, muitos dos problemas de compreensão do que acontece nas escolas não são devidos tanto às dificuldades reais, mas sim aos hábitos e costumes acumulados de uma tradição escolar cuja função básica sempre foi seletiva e propedêutica. Em uma concepção do ensino centrado na seleção dos alunos mais preparados para continuar a escolarização até os estudos universitários, é lógico que o sujeito da avaliação seja o aluno e que se considerem como objeto da avaliação as aprendizagens alcançadas em relação às necessidades futuras que foram estabelecidas – as universitárias. Dessa forma, dá-se prioridade a uma clara função sancionadora: qualificar e sancionar desde pequenos aqueles que podem triunfar nessa carreira até a universidade.

No entanto, podemos entender que a função social do ensino não consiste apenas em promover e selecionar os "mais aptos" para a universidade, mas que abarca outras dimensões da personalidade. Quando a formação integral é a finalidade principal do ensino e, portanto, seu objetivo é o desenvolvimento de todas as capacidades da pessoa e não apenas as cognitivas, muitos dos pressupostos da avaliação mudam. Em primeiro lugar, e isto é muito importante, os conteúdos de aprendizagem a serem avaliados não serão unicamente conteúdos associados às necessidades do caminho para a universidade. Será necessário também levar em consideração os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais que promovam as capacidades motoras, de equilíbrio e de autonomia pessoal, de relação interpessoal e de inserção social.

Uma opção dessa natureza implica uma mudança radical na maneira de conceber a avaliação, uma vez que o ponto de vista já não é seletivo, já não consiste em ir separando os que não podem superar distintos obstáculos, mas em oferecer a cada um dos alunos a oportunidade de desenvolver, no maior grau possível, todas as suas capacidades. O objetivo do ensino não centra sua atenção em certos parâmetros finalistas para todos, mas nas possibilidades pessoais de cada um.

O problema não está em como conseguir que o máximo de alunos tenham acesso à universidade, mas em como conseguir desenvolver ao máximo todas as suas capacidades e, entre elas, evidentemente aquelas necessárias para que cheguem a ser bons profissionais. Tudo isso envolve mudanças substanciais tanto nos conteúdos da avaliação quanto no caráter e na forma das informações que devem ser proporcionadas sobre o conhecimento que se tem das aprendizagens *realizadas, considerando as capacidades previstas. Por enquanto, digamos apenas que se trata de informações complexas, que não combinam com um tratamento estritamente quantitativo; elas se referem a valorações e indicadores personalizados que raramente podem ser traduzidos em notas e qualificações clássicas.*

Avaliação formativa: inicial, reguladora e final integradora

A tomada de posição em relação às finalidades do ensino, relacionada a um modelo voltado à formação integral da pessoa, implica mudanças fundamentais, especialmente nos conteúdos e no sentido da avaliação. Além disso, quando na análise da avaliação introduzimos a concepção construtivista do ensino e da aprendizagem como referencial psicopedagógico, o objeto da avaliação deixa de se focar exclusivamente nos resultados obtidos para se situar prioritariamente no processo de ensino-aprendizagem, tanto do grupo/classe quanto de cada um dos alunos. Por outro lado, o sujeito da avaliação não apenas se centra no aluno, como também na equipe que intervém no processo.

Como pudemos observar, procedemos de uma tradição educacional prioritariamente uniformizadora, que parte do princípio de que as diferenças entre os alunos da mesma faixa etária não são motivo suficiente para mudar as formas de ensino, mas que constituem uma evidência que valida a função seletiva do sistema e, por conseguinte, sua capacidade para escolher os melhores. A uniformidade é um valor de qualidade do sistema, pois é o que permite reconhecer e validar os que servem. Quer dizer, são bons alunos aqueles que se adaptam a um ensino igual para todos; não é o ensino que deve adaptar-se às diferenças dos alunos.

O conhecimento que temos sobre como as aprendizagens são produzidas revela a extraordinária singularidade desses processos, de tal maneira que cada vez é mais difícil estabelecer propostas universais que vão além da constatação dessas diferenças e singularidades. O fato de que as experiências vividas constituam o valor básico de qualquer aprendizagem obriga a levar em conta a diversidade dos processos de aprendizagem e, portanto, a necessidade de que os processos de ensino – e sobretudo os avaliadores – não apenas os observem, mas também os tomem como eixo vertebrador.

Sob uma perspectiva uniformizadora e seletiva, o que interessa são determinados resultados em conformidade com certos níveis predeterminados. Quando o ponto de partida é a singularidade de cada aluno, é impossível estabelecer níveis universais. Aceitamos que cada aluno chega à escola com uma bagagem determinada e diferente em relação às experiências vividas, conforme o seu ambiente sociocultural e familiar, sendo condicionado por suas características pessoais. Essa diversidade óbvia implica a relativização de duas das invariáveis das propostas uniformizadoras – os objetivos, os conteúdos e a forma de ensinar – e a exigência de serem tratadas em função da diversidade dos alunos.

Então, a primeira necessidade do educador é responder às seguintes perguntas: que sabem os alunos em relação ao que eu quero ensinar? Que experiências tiveram? O que são capazes de aprender? Quais são seus interesses? Quais são seus estilos de aprendizagem? Nesse âmbito, a avaliação já não pode ser estática, baseada na análise de resultado, porque se torna um processo. E uma das primeiras fases do processo consiste em conhecer o que cada um dos alunos sabe, sabe fazer e é, juntamente com o que pode chegar a saber, saber fazer ou ser e como aprendê-lo. A avaliação é um processo cuja primeira fase denomina-se avaliação inicial.

O conhecimento do que cada aluno sabe, sabe fazer e como é, torna-se o ponto de partida que nos permite, em relação aos objetivos e conteúdos de aprendizagem previstos, estabelecer o tipo de atividades e tarefas que devem favorecer a aprendizagem de cada um. Isso nos proporciona referências para definir uma proposta hipotética de intervenção, a organização de uma série de atividades de aprendizagem que, dada nossa experiência e nosso conhecimento pessoais, supomos que possibilitará o progresso dos alunos. Porém, não é mais do que uma hipótese de trabalho, já que dificilmente a resposta a nossas propostas será sempre a mesma, nem a que nós esperamos.

A complexidade do fato educacional impede dar, como respostas definitivas, soluções que tiveram bom resultado anteriormente. Não só os alunos são diferentes em cada ocasião, como as experiências educacionais também são diferentes e não se repetem. Isso supõe que, no processo de aplicação do plano de intervenção previsto em sala de aula, será necessário adequar às necessidades de cada aluno as diferentes variáveis educativas: as tarefas e as atividades, seu conteúdo, as formas de agrupamento, os tempos, etc.

Conforme se desenvolvam o plano previsto e a resposta dos alunos a nossas propostas, haveremos de ir introduzindo atividades novas que comportem desafios mais adequados e ajudas mais contingentes. O conhecimento de como cada aluno aprende ao longo do processo de ensino-aprendizagem, para se adaptar às novas necessidades que se colocam, é o que podemos chamar de avaliação reguladora.

Alguns educadores, e o próprio vocabulário da reforma educacional, utilizam o termo avaliação formativa. Pessoalmente, para designar esse processo, prefiro usar o termo avaliação reguladora, já que explica melhor as características de adaptação e adequação. Ao mesmo tempo, essa opção permite reservar o termo formativo para uma determinada concepção da avaliação em geral, entendida como aquela que tem como propósito a modificação e a melhora contínua do aluno que se avalia, ou seja, que entende que a finalidade da avaliação é ser um instrumento educativo que informa e faz uma valoração do processo de aprendizagem seguido pelo *aluno, com o objetivo de lhe oportunizar, em todo momento, as propostas educacionais mais adequadas.*

O conjunto de atividades de ensino-aprendizagem realizadas permitiu que cada aluno atingisse os objetivos previstos em determinado grau. A fim de validar as atividades realizadas, conhecer a situação de cada aluno e poder tomar as medidas educativas pertinentes ajudará a sistematizar o conhecimento do progresso seguido. Isso requer, por um lado, apurar os resultados obtidos (as competências alcançadas em relação aos objetivos previstos); por outro, implica analisar o processo e a progressão que cada aluno seguiu, com vistas a continuar sua formação levando em conta suas características específicas.

Muitas vezes, o conhecimento dos resultados obtidos é designado com o termo avaliação final ou avaliação somativa. Pessoalmente, penso que a utilização conjunta dos dois termos é ambígua e não ajuda a identificar ou diferenciar essas duas necessidades: o conhecimento do resultado obtido e a análise do processo que o aluno seguiu. Prefiro utilizar o termo avaliação final para me referir aos resultados obtidos e aos conhecimentos adquiridos e reservar o termo avaliação somativa ou integradora para o conhecimento e a avaliação de todo o percurso do aluno. Assim, a avaliação somativa ou integradora é entendida como um informe global do processo que, a partir do conhecimento inicial (avaliação inicial), manifesta a trajetória seguida pelo aluno, as medidas específicas que foram tomadas, o resultado final de todo o processo e, em especial, a partir desse conhecimento, as previsões sobre o que é necessário continuar fazendo ou o que é necessário fazer de novo.

Por que avaliar? O aperfeiçoamento da prática educativa é o objetivo básico de todo educador. E entende-se esse aperfeiçoamento como meio para que todos os alunos atinjam o maior grau de competências, conforme suas possibilidades reais. O alcance dos objetivos por parte de cada aluno é um alvo que exige conhecer os resultados e os processos de aprendizagem que os alunos seguem. E, para melhorar a qualidade do ensino, é preciso conhecer e poder avaliar a intervenção pedagógica dos professores, de modo que a ação avaliadora observe simultaneamente os processos individuais e grupais. Refiro-me tanto aos processos de aprendizagem quanto aos de ensino, já que, de uma perspectiva profissional, o conhecimento relativo a como os alunos aprendem é, em primeiro lugar, um meio para ajudá-los em seu crescimento e, em segundo lugar, o instrumento que nos permite melhorar nossa atuação em aula.

Esse texto foi publicado originalmente no livro A prática educativa: *como ensinar, de Antoni Zabala. Porto Alegre: Artmed,* 1998.

Antoni Zabala é licenciado em Pedagogia.

Fonte: Grupo A. Disponível em: <www.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/5937/por-que-se-deve-avaliar.aspx>. Acesso em: 29 mar. 2016.

10 Sugestões complementares: leituras, recursos digitais e passeios

A importância da atualização

Já falamos anteriormente sobre as mudanças que estão revolucionando a economia e a sociedade, e como a Matemática tem um importante papel na formação e preparação dos alunos para as novas demandas. É importante que o professor esteja devidamente informado e seja capaz de lidar com essas expectativas e novos anseios dos alunos.

Além das novas exigências que são trazidas para a sala de aula pela sociedade, teorias e práticas de Educação Matemática passam por debates, discussões, atualizações e alterações que são fruto do trabalho de grupos de estudo e de aplicação. O professor é parte desse processo de renovação, sendo ele o responsável por apresentar situações aos alunos, debater alternativas e soluções para os problemas que surgirem e, finalmente, aplicar o que foi proposto em seu espaço de trabalho, chegando a novos resultados.

Atualmente temos a facilidade da internet, que é capaz de reunir em portais, fóruns de discussão, *blogs*, artigos e listas de *e-mails*, uma comunidade de profissionais competentes e dispostos a manter ativo o debate entre professores e pesquisadores.

Também não faltam oportunidades de cursos oferecidos por instituições de ensino, centros de pesquisa, e até mesmo pelo poder público, que podem aprofundar certos aspectos da atividade de docência e oferecer a chance de trocar conhecimentos e experiências com outros professores e pesquisadores.

Tudo isso é o que podemos chamar de **formação continuada** do professor, esse aperfeiçoamento constante que coloca o docente no tempo presente, pronto para atender às demandas sociais que são impostas a ele e a seus alunos.

Em seguida oferecemos informações de locais onde os professores poderão encontrar recursos para dar continuidade à sua formação e orientações para o dia a dia do seu trabalho.

Sites

- <http://m3.ime.unicamp.br/>. Acesso em: 13 maio 2016.
  Coleção M³ Matemática Multimídia: portal que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp para o Ensino Médio de Matemática no Brasil.

- <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>. Acesso em: 13 maio 2016.
  Portal do Professor: espaço para acessar sugestões de planos de aula, mídias de apoio, notícias sobre educação e iniciativas do MEC, e também para compartilhar um plano de aula, participar de uma discussão ou fazer um curso.
- <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12583%3Aensino-medio&Itemid=859>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Coleção Explorando o Ensino – Matemática – Ensino Médio: coletânea de artigos extraídos da *Revista do Professor de Matemática* (RPM) – uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio da Universidade de São Paulo.
- <http://matematica.com.br/site/index.php>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Portal Matemática: provas de vestibulares e concursos, simulados *on-line*, curiosidades matemáticas, dicas, biografia de matemáticos, dicionário da Matemática, vídeos e desafios, *link* para universidades e faculdades do Brasil.
- <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/medio.htm>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Matemática essencial: conteúdos de Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior.
- <www.aprendiz.com.br>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Projeto Aprendiz: *site* destinado a professores e alunos.
- <www.inep.gov.br/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira): *site* do órgão que responde pelas avaliações do Sistema Educacional Brasileiro (todos os níveis e modalidades), com todas as informações relativas ao Enem (Exame Nacional de Ensino Médio).
- <www.fc.up.pt/cmup/polya/polya_home.html>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Projeto Polya: *site* especializado na resolução de problemas matemáticos.
- <www.obm.org.br/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM): informações, provas e gabaritos.
- <http://cmais.com.br/educacao>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Cmais: *site* da TV Cultura com informações e notícias sobre educação.
- <www.uol.com.br/cienciahoje>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Publicações como: revista *Ciência Hoje das Crianças, Alô, Professor*, etc.
- <http://revistaescola.abril.com.br/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Revista Escola: apresenta diversos materiais sobre educação e mantém *blogs* e fóruns de discussão.
- <www.planetaeducacao.com.br>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Planeta Educação: portal educacional que tem como objetivo disseminar o uso pedagógico e administrativo das novas tecnologias da informação e da comunicação nas escolas públicas brasileiras de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio.
- <http://educador.brasilescola.com/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Orientações para pais e educadores sobre vários aspectos do Ensino.
- <www.somatematica.com.br/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Portal Só Matemática: apresenta conteúdos matemáticos e sugestões de uso de tecnologias e jogos em sala de aula.

Alguns desses *sites* podem ser trabalhados com os alunos; fica a seu critério selecioná-los.

Vídeos

- As séries do **TV Escola** disponíveis no *site* <http://tvescola.mec.gov.br/tve/home> possuem diversos vídeos que apresentam variadas aplicações dos conteúdos em situações simples do dia a dia. Acesso em: 14 maio 2016.
- O *site* <https://pt.wikiversity.org/wiki/Portal:Matem%C3%A1tica_e_Estat%C3%ADstica/Videoteca> apresenta uma lista de vídeos de matemática da **Videoteca do Instituto de Matemática e Estatística**. Entre os vídeos existem documentários, séries educativas e teleaulas. Acesso em: 14 maio 2016.
- No *site* **Domínio Público** <www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp> são disponibilizados vários vídeos que auxiliam o professor no seu trabalho em sala de aula, principalmente no que diz respeito ao Programa de Formação de Professores em Exercício. Acesso em: 14 maio 2016.

Jogos

Os jogos são ótimos recursos para o ensino de Matemática. Tanto os conhecidos jogos de tabuleiro ou cartas como os eletrônicos, que podem ser propostos no laboratório de Informática ou para serem explorados em casa com roteiros de observação e discutidos depois, em sala de aula.

Existem poucos jogos eletrônicos voltados para os temas de Matemática do Ensino Médio. Abaixo e na próxima página seguem *links* para jogos que podem estimular a familiaridade dos alunos com a disciplina, mas também encorajamos os professores a desvendar os processos matemáticos que estão contidos nos diversos contatos que os estudantes têm com os jogos. Entre os jogos eletrônicos adequados para o Ensino Médio sugerimos os que se encontram em:

- **Jogos de Matemática no *site* da Unesp** <www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/ensino-medio/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Nesse *site* serão encontrados diversos jogos matemáticos para o Ensino Médio, com objetivos, regras e até tabuleiros e peças para impressão.
- **MathPlayground** <www.mathplayground.com/game_directory.html>. Acesso em: 14 maio 2016.
  O *site* em inglês contém uma série de jogos matemáticos que abarcam diferentes disciplinas. Os jogos são simples e trabalham com conhecimentos específicos. Para o professor

de Ensino Médio recomendamos explorar as seções de Geometria (Geometry), jogos lógicos (Logic Games) e de contextualização do uso da Matemática no mundo real (Real World Math Connections).

- **Power My Learning** <http://powermylearning.com/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Site em inglês criado pela organização americana CFY. Dedicada à modernização do ensino, oferece jogos e atividades em diversas áreas, como Tecnologia, Matemática, Ciências e Arte, disponibilizando conteúdo específico para Ensino Médio.

Softwares

Existem *softwares* que podem ser usados especificamente para explorar determinados conceitos matemáticos. Abaixo listamos algumas sugestões de aplicativos e repositórios que podem ser explorados.

- Wolfram Alpha <www.wolframalpha.com/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Similar a uma ferramenta de busca, o *site* oferece um campo de entrada simples que deve ser preenchido com o “nome” do que se pretende encontrar. O que embasa esse sistema é o Matemathica, de Stephen Wolfram. O *site* oferece soluções para problemas matemáticos complexos, porém toda a linguagem é em inglês.
- Lista de *softwares* do *site* da UFF <www.uff.br/cdme/>. Acesso em: 14 maio 2016.
  A seção de conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística ligada ao Instituto de Matemática da UFF disponibiliza *softwares* educacionais, experimentos educacionais e atividades em áudio relacionadas à Matemática do Ensino Médio.
- Lista de *softwares* do portal Só Matemática <www.somatematica.com.br/softwares.php>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Esse portal de ensino de Matemática oferece para professores e alunos uma seleção de aplicativos que podem ser úteis em atividades diárias de sala de aula. A lista é grande e o professor deve pesquisar quais *softwares* são adequados para as suas necessidades.

Passeios para aprender Matemática

- Planetários
  Visitas a planetários são ótimas como geradoras de investigações sobre o uso da Trigonometria e dos logaritmos para diversos cálculos envolvendo grandes distâncias e números muito longos, além de aspectos de interdisciplinaridade com a Física e a Biologia. Há planetários importantes em todo o território nacional e seus endereços e contatos podem ser encontrados em: <www.uranometrianova.pro.br/planetarios/planbrasil.htm>. Acesso em: 14 maio 2016.
- Museus e programas de visitas científicas podem ser encontrados no catálogo *Centros e Museus de Ciência do Brasil 2015* elaborado pela Associação Brasileira de Centros e Museus de Ciência (ABCMC), pelo Centro Cultural de Ciência e Tecnologia da UFRJ (Casa da Ciência) e pela Casa de Oswaldo Cruz/Fiocruz (Museu da Vida). Além dos centros e museus de ciência, podem ser consultados zoológicos, jardins botânicos, parques, jardins zoobotânicos, aquários, planetários e observatórios presentes em todas as regiões do Brasil. Disponível em: <www.mcti.gov.br/documents/10179/472850/Centros+e+Museus+de+Ci%C3%AAncia+do+Brasil+2015+-+pdf/667a12b2-b8c0-4a37-98f5-1cbf51575e63>. Acesso em: 14 maio de 2016.

Revistas e boletins de Educação Matemática

- Bolema – Boletim de Educação Matemática publicado pelo Departamento de Matemática, IGCE – Unesp – Rio Claro (SP).
  site: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso em: 14 maio 2016.
- Boletim Gepem – Série Reflexão em Educação Matemática. Publicações do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e do Mestrado em Educação Matemática da Universidade de Santa Úrsula (RJ). Para ter acesso, é necessário cadastro no *site*.
  site: <www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem>. Acesso em: 14 maio 2016.
- Educação Matemática em Revista – Temas e Debates publicações da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).
  site: <www.sbem.com.br/revista/index.php/emr>. Acesso em: 14 maio 2016.
- Educação Matemática Pesquisa, revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC (SP).
  site: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp>. Acesso em: 14 maio 2016.
- Revista Brasileira de História da Matemática (SBHMat).
  site: <www.sbhmat.org>. Acesso em: 14 maio 2016.
- Revista do Professor de Matemática, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).
  site: <www.rpm.org.br>. Acesso em: 14 maio 2016.
- Zetetiké – Publicações do Cempem – Unicamp.
  site: <www.cempem.fae.unicamp.br/zetetike.htm>. Acesso em: 14 maio 2016.

Alguns órgãos governamentais

- Fundação Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)
  Tel.: 0800-616161
  site: <www.fnde.gov.br>. Acesso em: 14 maio 2016.
  O FNDE mantém o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).
- Secretaria de Educação Básica (SEB)
  Tel.: 0800-616161
  site: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=293&Itemid=809>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Informações sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, sobre o Guia do Livro Didático e todas as questões relacionadas ao Ensino Médio.

- Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão (Secadi)
  Tel.: 0800-616161
  site: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=290&Itemid=816>. Acesso em: 14 maio 2016.
  Implementa políticas educacionais nas áreas de alfabetização e educação de jovens e adultos, educação ambiental, educação em direitos humanos, educação especial, do campo, escolar indígena, quilombola e educação para as relações étnico-raciais.
- Secretarias de Educação estaduais e municipais
  Provavelmente a Secretaria de Educação do estado em que você mora e também a do seu município mantenham equipes pedagógicas, publicações e ofereçam cursos de Matemática a professores. Procure se informar e participar.

Programas de acesso ao Ensino Superior

Com o intuito de auxiliar o ingresso de jovens ao Ensino Superior, o Ministério da Educação (MEC) oferece programas como o Fies, o Prouni e o Sisu.

O Fundo de Financiamento Estudantil (Fies) é um programa que financia a graduação de estudantes em instituições privadas de Ensino Superior. Os estudantes que pretendem ingressar em cursos superiores particulares cadastrados no programa e os que tenham avaliação positiva nos processos conduzidos pelo MEC podem recorrer ao financiamento. É obrigatória a participação no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e os candidatos precisam, após se inscreverem, ser aprovados por uma Comissão Permanente de Seleção, conforme cronograma definido pelo MEC. O pagamento do financiamento deve ser iniciado um ano e meio depois da graduação do estudante, e o prazo final dependerá do curso escolhido.

O Programa Universidade para Todos (Prouni) tem como finalidade a concessão de bolsas de estudos integrais e parciais (50%) a estudantes de cursos de graduação e de cursos sequenciais de formação específica em instituições privadas.

Essas bolsas são destinadas a alunos selecionados com base nas notas do Enem e também em critérios e condições estabelecidos em regulamentação específica. Para os estudantes que receberem bolsas parciais, há a possibilidade de acesso ao Fies para financiar o restante do estudo.

O Sistema de Seleção Unificada (Sisu) é gerenciado pelo MEC. Nesse sistema são oferecidas vagas em instituições públicas de Ensino Superior para candidatos participantes do Enem. A seleção dos candidatos é realizada de acordo com a nota obtida no exame, dentro do número de vagas em cada curso, por modalidade de concorrência.

Para maiores informações sobre esses programas, acesse o portal do Ministério da Educação: <http://portal.mec.gov.br/index.php> (acesso em: 2 maio 2016).

Curso para a formação do professor

- <www.profmat-sbm.org.br/>. Acesso em: 2 maio 2016.
  Pós-graduação *stricto sensu* para aprimoramento da formação profissional de professores da Educação Básica, da Sociedade Brasileira de Matemática.
  Programa semipresencial, com bolsas Capes para professores em exercício na rede pública.

Referências bibliográficas para o professor

Aprofundando os conhecimentos matemáticos

A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.

George Polya.

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a Geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1989.
- COLEÇÃO do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Vários autores. 12 volumes, 2006.
- LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. 3 v.
- ROXO, E. *Curso de Matemática Elementar*, vol. 1. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1929.
- TINOCO, Lúcia A. A. *A Geometria euclidiana por meio de resolução de problemas*. Rio de Janeiro: UFRJ (Instituto de Matemática), 1999. (Projeto Fundão).

História da Matemática

- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.
- CARVALHO, Dione Lucchesi de; MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu; BRITO, Arlete de Jesus. *História da Matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- CARVALHO, Luiz Mariano et al (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.
- COLEÇÃO *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*. Vários autores. São Paulo: Atual, 1993.
- DASSIE, Bruno Alves; ROCHA, José Lourenço da. *O ensino de Matemática no Brasil nas primeiras décadas do século XX*. Caderno Dá-Licença, n. 4, ano 5, p. 65-73, dez. 2003. Disponível em: <www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume4/da_Licena_Bruno.pdf>. Acesso em: 13 maio 2016.
- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.
- FIORENTINI, Dario. "Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil". *Zetetiké*, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-16, 1995.
- GARBI, Gilberto Geraldo. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 2007.

- GUELLI, Oscar. Coleção *Contando a história da Matemática*. Vários volumes. São Paulo: Ática, 1998.
- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na educação matemática*: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SINGH, Simon. *O enigma de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.
- TENÓRIO, R. M. (Org.). *Aprendendo pelas raízes. Alguns caminhos da Matemática na História*. Salvador: Centro Editorial e Didático da Universidade Federal da Bahia, 1995.
- VALENTE, Wagner Rodrigues. *Uma história da Matemática escolar do Brasil*, 1730-1930. São Paulo: Annablume, 1999. Abordagem sobre a importância e a rapidez da circulação das ideias, dos métodos e das publicações em Matemática no decorrer dos séculos XVIII a XX.

Educação Matemática

- BORBA, Marcelo de Carvalho. *Tendências internacionais em formação de professores de Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo/Campinas: Summus/Unicamp, 1986.
- ______. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2002.
- ______. *Etnomatemática*. São Paulo: Ática, 1998.
- ______. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- DANTE, Luiz Roberto. *Criatividade e resolução de problemas*. São Paulo: Unesp (mimeog.). Tese de Livre-Docência, 1998.
- ______. *Incentivando a criatividade através da educação matemática*. São Paulo: PUC-SP (mimeog.). Tese de Doutorado, 1980.
- ______. *Formulação e resolução de problemas de Matemática*: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2011.
- Douady, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* (Jogos executivos e dialética ferramenta-objeto na educação Matemática). Paris: Universidade Paris VII. Tese de doutorado, 1984.
- LINS, Romulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.
- NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). *A formação do professor que ensina Matemática:* perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- PONTE, J. P; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- _________. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.
- POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.
- POZO, Juan Ignácio. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Metodologia do ensino de Matemática

- BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2006.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; SILVA, Viviane Clotilde da; HEIN, Nelson. *Ornamentos × criatividade*: uma alternativa para ensinar Geometria plana. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 1996.
- BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos:* guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.
- DANTE, Luiz Roberto. Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática*, n. 6. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1985.
- HUETE, J. C. Sánchez; BRAVO, J. A. Fernández. *O ensino da Matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.
- LIMA, Elon Lages. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2001. Capítulos 1, 15, 16, 17 e 18. (Coleção do Professor de Matemática).
- MONTEIRO, Alexandria; POMPEU JUNIOR, Geraldo. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001.
- PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- ______. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Educação

- MARTINS, Angela Maria. Diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio: avaliação de documento. Cadernos de Pesquisa, n. 109, p. 67-87, 2000. Disponível em: <www.scielo.br/pdf/%0D/cp/n109/n109a04.pdf>. Acesso em: 13 maio 2016.
- MORIN, Edgar. *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. Brasília/São Paulo: Unesco/Cortez, 2001.
- PERRENOUD, Philippe. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- ______. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- ______. *Ensinar*: agir com urgência, decidir na incerteza. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- ZABALA, Antoni. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Informática e Educação Matemática

- BONGIOVANNI, Vincenzo et al. *Descobrindo o Cabri-Géomètre*. Caderno de Atividades. São Paulo: FTD, 1997.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.
- PONTE, João Pedro da; OLIVEIRA, Hélia; VARANDAS, José Manuel. *O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional*. Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2003.
- RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho do. *Matematicativa*. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 1997.
- VALENTE, José Armando. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: *Tecnologia, currículo e projetos*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/1sf.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.

Documentos oficiais

- BRASIL. Ministério da Educação. *Melhores práticas em escolas de Ensino Médio no Brasil*. Brasília, 2010. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/melhores_praticas_ensino_medio.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio, Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Secretaria de Educação Básica. *Ensino Médio Noturno*: Democratização e Diversidade. Coordenação nacional Sandra Zákia Lian Sousa, Romualdo Luiz Portela de Oliveira, Valéria Virgínia Lopes. Brasília: MEC, SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7609-emnot-relatorio-nacional-completo-final-pdf&category_slug=fevereiro-2011-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: DICEI, 2013. Disponível em: <http://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2014/07/diretrizes_curiculares_nacionais_2013.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Resolução CMN/CEB nº 2, de 30 de janeiro de 2012* (define as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio – DCNEM). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=9864-rceb002-12&category_slug=janeiro-2012-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Gabinete do Ministro. *Portaria nº 1.140, de 22 de novembro de 2013* (institui o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio e define suas diretrizes gerais). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15069-pacto-dou-1-2&category_slug=janeiro-2014-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio*, Etapa II – Caderno I: Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Médio. Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio [autores: Erisevelton Silva Lima et al.]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2014. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web_caderno_2_1.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio*, Etapa II – Caderno V: Matemática. Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio [autores: Ana Paula Jahn et al.] Curitiba UFPR/ Setor de Educação, 2014. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web_caderno_2_5.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Coordenação Geral do Ensino Médio. *Programa Ensino Médio Inovador*. Documento Orientador Brasília, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13249-doc-orientador-proemi2013-novo-pdf&category_slug=junho-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 14 maio 2016.
- ______. Undime. Consed. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2015. Documento em discussão durante a reformulação deste Manual para o Professor. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documents/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 14 maio 2016.

11 Observações e sugestões para as Unidades e capítulos

Nesta seção do Manual do Professor apresentamos comentários sobre a abertura de cada unidade e sugestões didáticas para cada capítulo que compõe o volume 3 desta coleção.

Também fornecemos a resolução dos exercícios e atividades propostos no livro do aluno, com exceção das resoluções já contempladas nas páginas do próprio livro e de exercícios e atividades cujas respostas são diretas.

Ressaltamos que fica a critério do professor a escolha da ordem de abordagem dos conteúdos, que pode ser diferente da apresentada nesta obra. Cabe ao professor considerar o projeto político-pedagógico da escola para planejar suas aulas.

Unidade 1 – Matemática financeira e Estatística

Capítulo 1 – Matemática financeira

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
O dinheiro e a Matemática Situação inicial Porcentagem Fator de atualização	Conhecimentos numéricos: Razões e proporções, Porcentagem	C1	H3/H4/H5
Termos importantes de Matemática financeira Equivalência de taxas	Conhecimentos numéricos: Razões e proporções, Porcentagem e juros/ Conhecimentos algébricos: Funções	C1/C5	H3/H4/H5/H19/H21/ H23

O estudo da **Matemática financeira** básica é de fundamental importância para a formação do aluno, tanto no âmbito acadêmico quanto na percepção de situações cotidianas. Vivemos permeados por juros, descontos, financiamentos, empréstimos e negociações; e com muita frequência percebemos a dificuldade dos alunos em avaliar vantagens e desvantagens nessas situações. Algumas dessas situações são apresentadas no texto **O dinheiro e a Matemática**, que aborda historicamente as práticas que antecederam e que culminaram na adoção de um sistema monetário, o qual se disseminou, se propagou e se desenvolveu por praticamente todas as sociedades até os dias de hoje. Utilizando-se das informações apresentadas nesse texto e também de outras fontes de consulta, discuta com os alunos temas como: taxa Selic, inflação, compras à vista *versus* compras a prazo, aplicações financeiras, montante de dívida, Sistema Financeiro Nacional. Não deixe de discutir com seus alunos essas situações, certamente serão conversas muito proveitosas. A imagem de abertura pode ser um dos pontos de partida para as discussões, para a apresentação de profissões relativamente novas e áreas do conhecimento relacionadas à Matemática financeira.

A **Situação inicial** envolve pagamento à vista ou parcelado. Discuta com os alunos sobre qual das duas opções é mais vantajosa, sem abordar conteúdos específicos do capítulo.

O primeiro passo é trabalhar o tema **Porcentagem**. Aproveite para fazer uma revisão sobre regra de três e cálculo com decimais, abordando os exercícios resolvidos 1 e 3, e os exercícios propostos de 1 a 3.

Sugestão de exercícios complementares:

1. Um eletrodoméstico custava R$ 100,00. A loja decidiu oferecer um desconto de 40% em uma promoção-relâmpago. Por qual valor o eletrodoméstico foi vendido?

   Resolução:

   Desconto de 40% sobre R$ 100,00:

   $0{,}4 \cdot 100 = 40$

   Valor final do eletrodoméstico:

   R$ 100,00 − R$ 40,00 = R$ 60,00

2. Um eletrodoméstico foi vendido em uma promoção com 40% de desconto, equivalente a R$ 60,00. Qual era o preço desse eletrodoméstico, sem o referido desconto? Por qual valor o eletrodoméstico foi vendido?

   Desconto de 40% equivale a R$ 60,00.

   $$\frac{40}{100} = \frac{60}{x} \Rightarrow 40x = 6\,000 \Rightarrow x = \frac{6\,000}{40} = 150$$

   Valor final do eletrodoméstico:

   R$ 150,00 − R$ 60,00 = R$ 90,00

O objetivo desses exercícios é discutir com os alunos o cálculo das porcentagens e interpretação de texto. Certamente eles dirão inicialmente que os dois exercícios são equivalentes. Note que, no exercício 2, a taxa de 40% equivale ao valor de R$ 60,00, assim, o valor inicial do eletrodoméstico seria R$ 150,00. Repare que 40% de 150 equivale a 60, como proposto no enunciado. Os alunos podem ter dificuldade de entender o fato de o resultado de uma porcentagem poder variar dependendo do valor total.

Uma abordagem mais aprofundada do tema pode ser feita a partir dos exercícios resolvidos 2 e 4 e o restante dos exercícios propostos. Não deixe de analisar com seus alunos as situações do cotidiano apresentadas. Alguns exercícios propostos, tais como o 7 e o 8, podem ser usados para atividades em dupla e avaliação. Para incrementar uma eventual atividade em grupo, sugira uma pesquisa sobre grau de escolaridade em países desenvolvidos (com a ajuda do professor de Geografia), uma vez que o tema é abordado no exercício 5; e outra pesquisa sobre tabagismo e câncer (com o auxílio do professor de Biologia) para o exercício 8.

A **Leitura** complementar sobre inflação pode ser usada para introduzir o tema seguinte, **Fator de atualização**. Após fazer a leitura do texto sobre inflação, proponha a seguinte situação-problema:

> Considere que a inflação em um determinado país seja de 10% ao ano, sem variações. Se a cesta básica nesse país custava em janeiro de 2013 o equivalente a R$ 100,00, qual será o seu valor ao final de 3 anos (janeiro de 2016)?
>
> **Resolução:**

	Início do ano	Inflação (10%)	Final do período de 12 meses
Jan. 2013	100	$10\% \cdot 100{,}00 = 10{,}00$	110,00
Jan. 2014	110	$10\% \cdot 110{,}00 = 11{,}00$	121,00
Jan. 2015	121	$10\% \cdot 121{,}00 = 12{,}10$	133,10
Jan. 2016	133,10		

Após a construção da tabela, determine a inflação acumulada no período (33,10%), e discuta sobre a diferença entre o valor obtido e o valor de 30% que seria determinado pelo "senso comum".

Aproveite a discussão para introduzir os conceitos de fator de atualização, aumento e desconto, analisando os exercícios resolvidos 5 a 8. O exercício 8 pode ser usado como referência para uma pesquisa sobre moedas estrangeiras e cotações (Geografia e História) e outra sobre índices (muito usados em Geografia, tais como índice de crescimento populacional, entre outros).

Os exercícios propostos de 9 a 11 e 13 a 15 têm o objetivo de fixar os conceitos discutidos, já o exercício 12 e de 16 a 24 podem ser usados como aprofundamento e avaliação.

No tópico **Termos importantes de Matemática financeira** apresentamos os termos: juros, taxa de juros, capital e montante, além de analisar as duas formas de cálculo de juros: o simples e o composto.

Na abordagem dos juros simples, inicialmente é importante salientar a diferença entre juros e taxa de juros. Retome a aula inicial sobre porcentagem, com alguns exemplos, fixando uma taxa de juros e calculando os juros sobre capitais diferentes. Veja uma sugestão de atividade:

> Dois irmãos, Paulo e Patrícia, resolveram investir o 13º salário em um mesmo banco que oferecia uma taxa de 2% ao mês para determinada aplicação financeira. Paulo aplicou R$ 1000,00 por um mês e Patrícia, R$ 2000,00. Responda:
>
> a) Os juros recebidos pelos dois irmãos serão iguais?
>
> b) Qual será o montante acumulado pelos irmãos após 1 mês de aplicação?
>
> c) Considerando o regime de juros simples, se Paulo e Patrícia decidirem aplicar o dinheiro por 3 meses, qual será o montante e os juros que cada um acumulará?
>
> **Resolução:**
>
> a) Paulo:
> $C = 1000$
> $i = 2\% = 0{,}02$
> $t = 1$
> $j = C \cdot i \cdot t = 1000 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 20$
> Patrícia:
> $C = 2000$
> $i = 2\% = 0{,}02$
> $t = 1$
> $j = C \cdot i \cdot t = 2000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 = 40$
> Assim, os juros recebidos pelos dois irmãos não serão iguais. Apesar de a taxa de juros e do tempo serem iguais, o capital investido não é.
>
> b) Paulo:
> $M = C + j = 1000 + 20 = 1020{,}00$
> R$ 1020,00
> Patrícia:
> $M = C + j = 2000 + 40 = 2040{,}00$
> R$ 2040,00
>
> c) Paulo:
> $C = 1000$
> $i = 2\% = 0{,}02$
> $t = 3$
> $j = C \cdot i \cdot t = 1000 \cdot 0{,}2 \cdot 3 = 60$
> $M = C + j = 1000 + 60 = 1060{,}00$
> Patrícia:
> $C = 2000$
> $i = 2\% = 0{,}02$
> $t = 3$
> $j = C \cdot i \cdot t = 2000 \cdot 0{,}02 \cdot 3 = 120$
> $M = C + j = 2000 + 120 = 2120{,}00$

Esse é um exercício simples, mas que pode ser usado para ilustrar a diferença entre taxa de juros, juros, capital e montante.

O exercício resolvido 9 explicita a importância de se desconsiderar o valor pago à vista para o cálculo de juros.

Os exercícios propostos de 25 a 29 têm por objetivo utilizar a fórmula em suas diversas aplicações (cálculo de juros, taxa de juros, capital e tempo).

No regime de juros compostos é preciso enfatizar para o aluno que o cálculo é feito sobre o montante do período anterior e não sobre o capital inicialmente aplicado/emprestado.

Seria interessante retomar o exercício apresentado neste manual, do cálculo de juros simples, e propor que os alunos refaçam o item **c**, utilizando agora o regime de juros compostos. Para destacar a importância de se trabalhar o cálculo de juros sobre o montante, sugerimos o uso da tabela a seguir no caso do valor aplicado por Paulo:

	Capital investido no início do mês (em reais)	**Juros (2%)**	**Montante após o período** (em reais)
mês 1	1000,00	$0{,}02 \cdot 1000{,}00 = 20{,}00$	1020,00
mês 2	1020,00	$0{,}02 \cdot 1020{,}00 = 20{,}40$	1040,40
mês 3	1040,40	$0{,}02 \cdot 1040{,}40 = 20{,}81$	1061,21

Após a confecção da tabela, discuta com os alunos a diferença entre os resultados obtidos no cálculo de juros simples e compostos, aproveitando para salientar que a diferença pode parecer pequena, mas em casos de empréstimos com altas taxas de juros e longos prazos, esse valor pode se tornar expressivo. Apresente a fórmula para o cálculo de juros compostos, trabalhando os exercícios resolvidos 10 a 16, com destaque para o exercício resolvido 13, da UFSM, que visa saber o montante de uma aplicação realizada por um consumidor que deseja comprar um aparelho de TV de última geração.

Nos exercícios propostos de 30 a 34 o objetivo principal é a aplicação da fórmula, em suas diversas vertentes (cálculo de montante, taxas anual e mensal, tempo de aplicação). Os exercícios 35 a 40 apresentam um grau de complexidade um pouco maior, podendo ser utilizados em atividades em grupo ou avaliação.

No subtópico Conexão entre juros e funções são apresentadas as correlações entre juros e funções, em que se pode observar graficamente a diferença de comportamento entre os dois regimes. Algumas questões pertinentes a este tópico são:

1. Qual é a relação entre juros simples, função afim e progressão aritmética?

   Resposta:

   Os juros simples são progressões aritméticas de razão igual aos juros cobrados em determinado período (dia, mês, ano, etc.) e correspondem a uma função afim.

2. Qual é a relação entre juros compostos, função exponencial e progressão geométrica?

   Resposta:

   Os juros compostos são progressões geométricas de razão igual ao fator de atualização de determinado período (dia, mês, ano, etc.) e correspondem a uma função exponencial.

No tópico **Equivalência de taxas** discute-se a equivalência de taxas para juros simples e compostos, taxas anuais, mensais, nominal e efetiva. Os exercícios resolvidos apresentam as diversas situações envolvidas no tema, assim como os exercícios propostos, que são de um grau de dificuldade mediano, podendo ser utilizados em atividades em grupo, por exemplo. O exercício 41 aborda uma cultura de bactérias, tema estudado em Biologia. Já os exercícios 44 e 48 fazem menção a taxas e índices usados em Geografia.

Sugestão de atividade: apresentar o vídeo: "E agora José?", disponível no *site* <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1092> (acesso em: 23 maio 2016), no qual se discute a composição de juros compostos, taxas de juros anuais e trimestrais e aplicações financeiras a longo prazo (manual do vídeo disponível no *link*).

Na seção **Leituras** apresentamos os textos: O cartão de crédito: amigo ou vilão?, Taxa de juro do cartão de crédito vai a 431,4% ao ano, e O Sistema Financeiro Nacional, que podem ser usados como referência para uma atividade em que os alunos deverão pesquisar as taxas de juros cobradas pelas diversas operadoras de cartão de crédito e fazer simulações de gastos, pagamentos e dívidas, com o objetivo de orientar e educar consumidores conscientes.

Caso deseje se aprofundar, utilize os temas abordados nos exercícios deste capítulo para propor um trabalho em grupo no qual cada grupo pesquisará e explicará aos colegas temas como: índices de escolaridade no mundo (Geografia); moedas atuais e cotações (História); tabagismo e câncer (Biologia e Educação Física); história do dinheiro e das instituições bancárias (História e Geografia).

Capítulo 2 – Estatística

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	**Competência**	**Habilidade**
Termos de uma pesquisa estatística	Conhecimentos de estatística: Representação e análise de dados	C6	H24/H25/H26
Representação gráfica			
Medidas de tendência central	Conhecimentos de estatística: Medidas de tendência central (médias, moda e mediana)	C6/C7	H24/H25/H26/H27
Medidas de dispersão	Conhecimentos de estatística: Desvios e variância		
Estatística e probabilidade	Conhecimentos de estatística e probabilidade: Noções de probabilidade	C7	H28/H29/H30

O tema **Estatística** pode ser considerado um dos mais importantes da Matemática no Ensino Médio, uma vez que a análise de dados estatísticos permeia diversas situações de nosso cotidiano, como o censo realizado pelo IBGE (Geografia), pesquisas de mercado (*Marketing*), pesquisas de intenção de voto, perfis psicológicos (Psicologia), estudos farmacológicos (Farmácia), análise de substâncias contaminantes (Biologia e Química), e uma série de aplicações nas mais diversas áreas de conhecimento. É um assunto de grande interesse para professores e alunos.

O censo realizado pelo IBGE será citado como ponto de partida de muitas atividades e exercícios durante o capítulo. Até por isso, a imagem de abertura do capítulo traz uma recenseadora do IBGE realizando uma coleta de dados. Comente com os alunos o papel importante desses profissionais e também o que a pesquisa censitária representa para um país. No Brasil o próximo censo provavelmente será realizado em 2020.

Ao longo do capítulo serão apresentados e discutidos os termos usados em pesquisa estatística, suas diversas representações gráficas, medidas de tendência central, medidas de dispersão e a relação entre Estatística e Probabilidade, com diversos exemplos e atividades contextualizadas. Aproveite o tema para realizar pesquisas de preferências e características de seus alunos, certamente eles se sentirão valorizados e estimulados.

Nas duas primeiras páginas do capítulo são apresentados alguns exemplos de situações cotidianas para as quais se faz uso de dados estatísticos. Questione os alunos sobre a importância desse tema e em quais outras áreas eles percebem a presença da Estatística. Aproveite o início da discussão para começar a definir os **Termos de uma pesquisa estatística**, diferenciando população de amostra.

O conceito de variável pode ser abordado por meio de duas pesquisas simples com alguns alunos da sala. Separe dois grupos e pergunte a um qual é seu esporte favorito (variável qualitativa nominal) e ao outro pergunte a idade de cada um (variável quantitativa discreta). Peça aos alunos dos grupos pesquisados que ordenem na lousa os resultados obtidos na pesquisa e aproveite esses resultados para definir o conceito de variável quantitativa e variável qualitativa, destacando que variáveis que podem ser ordenadas (idade) são quantitativas. Os exercícios propostos 1 e 2 ajudam a fixar esses conceitos.

Continue a abordagem do capítulo, pedindo aos alunos que montem dois novos grupos. Pergunte ao primeiro sobre suas preferências em esporte e ao segundo peça informações sobre idade e altura. Discuta com eles as possibilidades de se organizar os resultados da pesquisa sobre esporte e idade em uma tabela (reserve os resultados da pesquisa sobre altura), fazendo a contagem de cada item pesquisado, e aproveitando os resultados para definir os conceitos de frequência absoluta (FA) e frequência relativa (FR). Destaque que a frequência relativa pode ser expressa em porcentagem ou número decimal. Para organizar os dados sobre a pesquisa de altura, destaque a dificuldade para analisar informações detalhadas e sugira que seria mais interessante organizar essas informações em intervalos (ou classes). Avalie o intervalo mais adequado (determinando a amplitude e escolhendo o número de intervalos desejados), e elabore, por fim, a tabela com os resultados da pesquisa. Use o exercício proposto 4 como atividade de fixação. Já os exercícios propostos de 5 a 7 podem ser utilizados como atividade em grupo, o exercício 8, como atividade de aprofundamento, e o exercício 9, sugerido como atividade em dupla e que aborda um tema de Biologia (fenótipos), pode ser usado como avaliação.

No subtópico O início da Estatística é apresentada uma importante contribuição histórica. O texto remete os leitores à época de John Graunt, para a compreensão da “Tabela da vida”, um marco para a Estatística moderna.

O próximo passo é estudar as diferentes representações gráficas presentes no estudo de Estatística. Para introduzir o tema, pode-se pedir uma tarefa em que os alunos deverão pesquisar, em jornais e revistas, e apresentar artigos nos quais apareçam representações gráficas de dados estatísticos, como gráficos de segmentos, barras, setores e histogramas. Aproveite os resultados das pesquisas para enfatizar a importância do estudo da Estatística em nosso cotidiano. Destaque as diversas temáticas que serão apresentadas por eles (Economia, *Marketing*, Biologia, Geografia, Nutrição, etc.). Os artigos mais interessantes podem ser divulgados no mural da escola ou da sala, por exemplo. Defina os diversos tipos de representação gráfica e, utilizando os resultados das pesquisas, peça a seus alunos que diferenciem cada uma das opções apresentadas.

Nos exercícios propostos de 10 a 12 são apresentadas algumas situações de fixação que envolvem gráficos de segmentos, e o exercício 13 envolve análise gráfica, sendo muito interessante para aprofundamento. Por sua vez, nos exercícios 14 a 16 pede-se a construção de gráficos de barras, já o 17, sua análise. Os exercícios 18 e 19 abordam gráficos de setores e o histograma é apresentado no exercício 20 (sugerido como atividade em dupla). Os exercícios 21 e 22 podem ser usados como revisão ou avaliação.

Mantenha sempre seus alunos motivados apresentando temas diversos, para que eles percebam a relevância do tema estudado. Assim, para iniciar o estudo das **Medidas de tendência central**, sugerimos a seguinte atividade: pergunte a um número ímpar de alunos (9, por exemplo) se têm algum animal de estimação. Em caso afirmativo, quantos? Em caso negativo, represente a resposta com o número zero. Liste as respostas na ordem como foram obtidas. Primeiramente organize as respostas obtidas em ordem crescente, definindo o rol de seus dados. Em seguida, defina e calcule a média aritmética dos dados, verifique se há algum valor que aparece com maior frequência (moda) e identifique o elemento na posição central, definindo, assim, a mediana. Questione seus alunos sobre como seria definida a mediana caso a quantidade de elementos da pesquisa (n) fosse um número par. Para isso, escolha um novo aluno, refaça a pergunta da pesquisa, inclua o resultado no rol (tomando o cuidado de manter os resultados em ordem crescente) e refaça o cálculo da mediana. Aproveite para refazer os cálculos da moda e média aritmética e compare os resultados.

Aproveite para avaliar com os alunos a importância dessas análises. Destaque que a mediana representa um valor central, que nem sempre é compatível com a média aritmética. Se preferir, troque o maior valor de seus dados por um valor muito acima do esperado (no nosso exemplo, imagine que um aluno possui 20 animais domésticos), refaça os cálculos da média aritmética e avalie, com os alunos, as distorções causadas por esse dado.

Para apresentar o cálculo da média aritmética ponderada use o problema sugerido no livro, destacando a importância de não se desprezar o peso de cada variável. Faça isso usando como contraexemplo um colega que tenha tirado as mesmas notas, mas cuja média foi calculada a partir da média aritmética. O exercício resolvido 1 também é uma boa sugestão de exercício de fixação. Os exercícios propostos 23 a 26, 31 e 33 podem ser usados como exercícios de fixação, já o exercício 32 pode ser utilizado como avaliação.

Agora vamos unir os conceitos já estudados, determinando a média aritmética, moda e mediana a partir de tabelas e gráficos. A partir dos exemplos propostos, usando pesquisas sobre quantidade de irmãos e peso de um determinado grupo de pessoas, são construídas tabelas de frequência absoluta que serão usadas como base para o cálculo da média, moda e mediana dos resultados. Comente que, mesmo que os dados sejam valores inteiros (como no caso da idade), nem sempre a média o é, o que não representa, necessariamente, uma distorção. Cite como exemplo o caso da média de gols em um determinado campeonato.

O exercício proposto 29 pode ser usado como exercício de fixação, e os exercícios 28 e 30 como aprofundamento e avaliação.

Com o estudo das **Medidas de dispersão** podemos começar a nos aprofundar no estudo da Estatística, uma vez que, em diversas situações, apenas o cálculo da média não é suficiente para comparar grupos de dados. Usando o exemplo proposto no livro, ao tomarmos 3 grupos distintos que possuem a mesma média aritmética de idade, precisamos de novas ferramentas para avaliar mais detalhadamente esses dados, que não são idênticos. As ferramentas mais utilizadas são a variância e o desvio padrão. O cálculo da variância e do desvio padrão não é muito simples, e a notação pode assustar alguns alunos, mas o uso de exemplos simples, como o proposto no livro, facilita a compreensão por parte dos alunos. Analise os exercícios resolvidos 2 e 3 e proponha a resolução dos exercícios 34 a 36 como atividade em dupla.

Apesar de o tema apresentar um grau de complexidade um pouco maior, é importante que os alunos tenham um vislumbre do tipo de análise que pode ser feita. Lembrar que nas coletas de dados por amostra (pesquisas de mercado, pesquisas de intenção de voto, análises bioquímicas) e resultados obtidos a partir de dados experimentais, o desvio padrão é base para cálculos mais complexos (Teoria de Erros), necessários na divulgação e apresentação dos resultados.

Finalizando o capítulo, temos que destacar a relação entre **Estatística e probabilidade**, uma vez que a frequência relativa pode ser usada para estimar a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. Os exercícios resolvidos de 4 a 7 são exemplos de algumas situações nas quais é possível verificar essa relação. Os exercícios propostos podem ser usados como atividade em grupo, para fixação de conceitos e avaliação.

Como proposta de trabalho, aborde a seção **Matemática e tecnologia** e estimule os alunos a preparar uma pesquisa sobre temas de relevância na escola. Sugestão: divida a sala em grupos, cada um responsável por um tema diferente de pesquisa com seus colegas de escola. Os temas podem ser os mais diversos, como: esporte preferido (se é praticado na escola ou não), pontos fortes do colégio, coleta seletiva (Biologia), interesse em aulas de reforço, entre outros. Os resultados podem ser apresentados para os colegas de sala e, dependendo do tema pesquisado (se for relevante), até mesmo para a direção da escola.

As questões da seção **Pensando no Enem** abordam temas como taxas de juros e medidas de tendência central envolvendo Estatística descritiva. A questão 1 cita taxas de juros bancários para empréstimos, cartão de crédito, cheque especial e para compra de veículos; o controle de qualidade em indústrias é apresentado na questão 2. Essas questões podem ser usadas como material de revisão.

A seção **Outros contextos** apresenta uma importante aplicação da Estatística na Geografia: a análise de dados estatísticos em populações e previsões de crescimento populacional, representados na forma de tabelas e pirâmides etárias. O órgão responsável por essas análises no país é o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística); pelo nome pode-se perceber a importante correlação entre as duas disciplinas. A seção pode ser usada como revisão geral da unidade, incluindo discussões relacionadas a interpretação de texto (Língua Portuguesa) nas questões 1 e 2 e interpretação e análise de texto matemático nas questões 3 e 4. Temas de Estatística aparecem nas questões 5 (moda), 6 (frequência absoluta e relativa) e 7 (pesquisa e determinação de médias). Já a questão 8 envolve uma análise e discussão de políticas públicas para idosos, cuja pesquisa deve ser feita com a ajuda dos professores de História, Geografia e Biologia, podendo ser trabalhada na forma de debate entre grupos, por exemplo.

Na seção **Vestibulares de Norte a Sul** são apresentadas diversas questões com abordagens sobre os temas discutidos na unidade. Como são de um grau de dificuldade mais acentuado, pois apresentam cálculos ou interpretação de texto mais complexos, podem ser utilizadas em atividades em grupo ou avaliações.

Atividades complementares à Unidade 1

A atividade a seguir envolve Matemática financeira e as Ciências econômicas; ela deve ser feita em grupos.

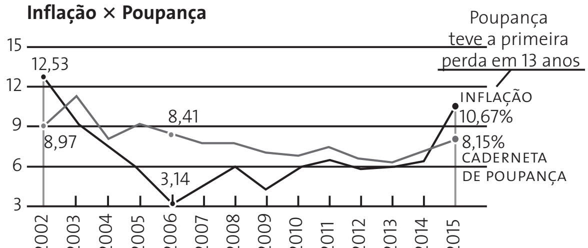
1. *Como cuidar do seu dinheiro?*
Quem deseja investir ou até mesmo guardar seu dinheiro precisa ter cuidado. Quantas pessoas que você

conhece possuem o famoso “cofrinho” de moedas? Muitos são os casos em que as pessoas juntam suas moedinhas ao longo de todo o ano. Será que esse é o melhor método para guardar pequenas quantidades de dinheiro? Se o cofrinho for alimentado durante um longo prazo, como o ano inteiro, o proprietário das moedas e do cofrinho pode estar perdendo dinheiro. Por que isso acontece? Vejamos dois elementos importantes que tornarão claras essas afirmações.

Uma taxa percentual importante calculada mensalmente é a **inflação**. Entende-se por inflação a taxa que exibe o aumento percentual de bens e serviços, como alimentação (cesta básica), transporte, saúde, habitação (e todos os seus tributos), etc. Por exemplo, segundo o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), a inflação registrada no ano de 2015 foi de 10,67%, ou seja, uma pessoa que conseguiu juntar, digamos, R$ 500,00 com suas moedas ao longo de 2015 chegou ao final do ano com o dinheiro valendo 10,67% menos, ou seja, o que se compraria com R$ 500,00 no início de 2015 não poderia ser adquirido em janeiro de 2016 – seriam necessários R$ 553,35 para comprar o(s) mesmo(s) produto(s). O IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo) é considerado a “inflação oficial” do país e tem o grupo de alimentação e bebidas como integrantes de maior importância, seguido pelos gastos com transportes (combustíveis, passagens, seguros, etc.) e, depois, pelos serviços prestados (excursões, salão de beleza, roupas, etc.). Com isso tudo, uma pergunta pertinente seria: **como fugir da inflação?**.

Um dos mais atrativos investimentos de renda fixa é a **caderneta de poupança**. Porém, nos últimos anos seu rendimento real vem caindo e, em 2015, o seu ganho real tornou-se negativo. Apesar disso, na caderneta de poupança não há cobrança de imposto de renda, nem taxas de administração. O ganho real significa o ganho da poupança descontado da inflação. Acompanhe o gráfico abaixo, que exibe a taxa de rendimento da poupança e a taxa de depreciação da inflação ao longo dos últimos anos.

Inflação × Poupança



Fonte: Banco Central, IBGE e Anepac.

Como falado, para se calcular o ganho real da poupança (rendimento) precisamos subtrair a inflação. Em 2002 o rendimento da poupança foi de 2,52 %. De forma análoga, pode-se verificar o rendimento da poupança nos outros anos. Assim, em tempo de estabilidade econômica é recomendado que, mês a mês, o dinheiro poupado seja colocado em uma poupança, na intenção de “fugir” da inflação, que desvaloriza o dinheiro.

a) Pesquisem como a inflação é gerada e por que a inflação, no Brasil, tem aumentado nos últimos anos.
b) Se o rendimento real da caderneta de poupança vem diminuindo a cada ano, qual a atratividade para uma pessoa que deseja guardar as moedas que colocaria em um “cofrinho” mês a mês?
c) Se um trabalhador recebe um aumento salarial de 8% e nesse mesmo ano registrou-se uma inflação de 10%, determine o aumento real do salário do trabalhador.
d) Em quase todas as transações financeiras usam-se os juros compostos, inclusive no rendimento da caderneta de poupança. Suponha que em certo ano o rendimento mensal da caderneta de poupança foi fixo e de 0,65%. Desconsiderando a inflação, calcule o montante colhido no final do ano, gerado por um investimento de R$ 4 500,00 no início do ano. Use uma calculadora.

Resolução:

a) A inflação é gerada devido a uma relação direta entre oferta e procura. Como a tendência de todo sistema financeiro é o equilíbrio entre oferta e procura, se a procura é maior que a oferta, o que ocorre é um aumento de preço no produto. Assim, as principais causas da formação da inflação são quando se tem mais dinheiro no mercado ou quando há um excesso de gasto, sem que haja aumento na renda. Este último ocorre em geral pela oferta exagerada de crédito.

   A inflação no Brasil, nos últimos anos, tem aumentado em razão do aumento de crédito, aumento dos preços dos bens e dos serviços, sem que haja um aumento proporcional da renda.
b) As taxas atuais e a nova forma de calcular o rendimento da caderneta de poupança tendem a simplesmente proteger o dinheiro da inflação; além de não haver burocracia para abrir uma caderneta de poupança ou para retirar dinheiro dela. Ou seja, em 2015, por exemplo, a poupança deixou de ser um investimento para ser simplesmente um local para guardar dinheiro, “protegendo-o” da depreciação causada pela inflação. A perda de valor do dinheiro é um pouco menor para quem guardar o dinheiro na poupança e inevitável para quem guardar o dinheiro no “cofrinho”.
c) Chamando o aumento real de $x\%$, este deve ser um valor percentual tal que, aumentado sucessivamente em 10%, resulte em 8%. Assim, supondo novamente o valor inicial de 100, teremos:

   $$100 \cdot \frac{100 + x}{100} \cdot \frac{110}{100} = 108 \Rightarrow 110(100 + x) = 10\,800 \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow 11\,000 + 110x = 10\,800 \Rightarrow 110x = -200 \Rightarrow x \simeq -1{,}82\%$$

   Não houve aumento real; pelo contrário, houve uma retração de 1,82%. O valor real do salário passa a ser de 98,18% · salário.
d) Para resolver este item, basta usar a expressão de montante a juros compostos.

   $M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 4\,500(1 + 0{,}0065)^{12} \Rightarrow$

   $\Rightarrow M = 4\,500(1{,}0065)^{12} \Rightarrow M = 4\,863{,}82$

A atividade a seguir também pode ser feita em grupos; ela envolve Matemática e Geografia.

2. Em 2010, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) realizou o XII Censo Demográfico, que se constituiu no grande retrato em extensão e profundidade da população brasileira e das suas características socioeconômicas e, ao mesmo tempo, na base sobre a qual deverá se assentar todo o planejamento público e privado da próxima década.

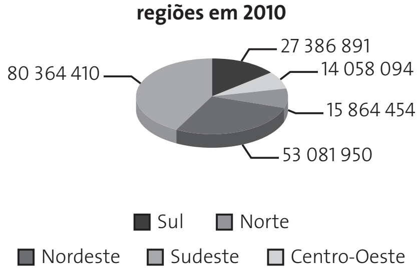
O Censo 2010 compreendeu um levantamento minucioso de todos os domicílios do país. Nos meses de coleta de dados e supervisão, 191 mil recenseadores visitaram 67,6 milhões de domicílios nos 5 565 municípios brasileiros para colher informações sobre quem somos, quanto somos, onde estamos e como vivemos. Os primeiros resultados definitivos, divulgados em novembro de 2010, apontaram uma população formada por 190 732 694 pessoas.

Em abril de 2011, foi divulgada a Sinopse do Censo Demográfico, com informações sobre domicílios recenseados, segundo a espécie, e população residente, segundo as Unidades da Federação e municípios.

Adaptado de: //censo2010.ibge.gov.br/sobre-censo>. Acesso em: 24 maio 2016.

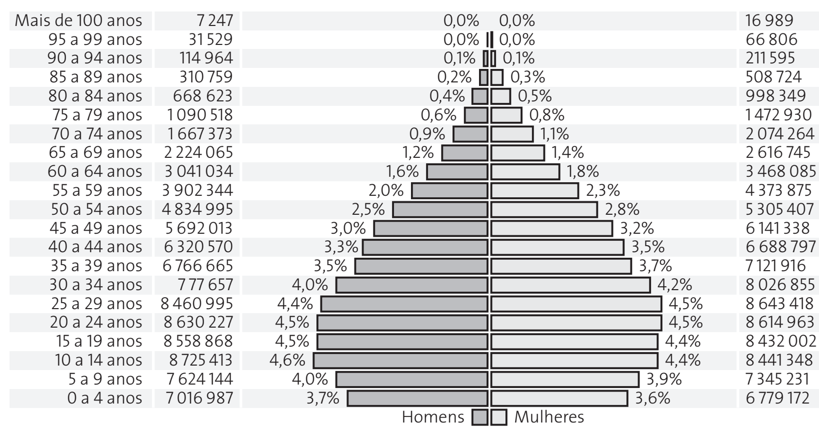
Observe os gráficos e a tabela e responda às questões a seguir.

Distribuição da população nas grandes regiões em 2010



Fonte: IBGE.
Disponível em: <www.ibge.gov.br>.
Acesso em: 24 maio 2016.

Distribuição da população por sexo, segundo os grupos de idade



Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=12&uf=00>.
Acesso em: 24 maio 2016.

Distribuição percentual da população nos Censos Demográficos, segundo as Grandes Regiões e as Unidades da Federação - 1872/2010

Região	Grandes Regiões e Unidades da Federação	1872	1890	1900	1920	1940	1950	1960	1970	1980	1991	2000	2010
	BRASIL	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
N	Região Norte	3,4%	3,3%	4,0%	4,7%	3,9%	3,9%	4,1%	4,4%	5,6%	7,0%	7,6%	8,3%
NE	Região Nordeste	46,7%	41,9%	38,7%	36,7%	35,0%	34,6%	31,6%	30,3%	29,2%	28,9%	28,1%	27,8%
SE	Região Sudeste	40,5%	42,6%	44,9%	44,6%	44,5%	43,4%	43,8%	42,7%	43,4%	42,7%	42,6%	42,1%
S	Região Sul	7,3%	10,0%	10,3%	11,5%	13,9%	15,1%	16,8%	17,7%	16,0%	15,1%	14,8%	14,4%
CO	Região Centro-Oeste	2,2%	2,2%	2,1%	2,5%	2,7%	3,0%	3,8%	4,9%	5,8%	6,4%	6,8%	7,4%

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 24 maio 2016.

a) Com base no primeiro gráfico, qual é a região mais populosa? Qual é a região menos populosa?

b) Roraima é o estado com menor densidade demográfica, 2 hab./km^2, e o Rio de Janeiro, segundo o último censo, possui 365 hab./km^2. Sabendo que a área do estado do Rio de Janeiro é cerca de 43 800 km^2, qual é, aproximadamente, a população desse estado? (Use uma calculadora.)

c) De acordo com o segundo gráfico: qual é a faixa etária modal da população masculina? E da população feminina? (Tome como base o número de habitantes.)

d) Andrea, Beatriz e Carla, jovens na faixa etária de 20 a 24 anos, estavam conversando. Beatriz, que estava solteira, fez a seguinte afirmação: No Brasil, na nossa faixa de idade, existem bem mais mulheres que homens. A afirmação de Beatriz está correta? Qual é a diferença entre o número de homens e o de mulheres nessa faixa etária?

e) Comparando os censos de 2000 e de 2010, quais regiões do Brasil tiveram aumento da população, em pontos percentuais, em relação ao país? E quais tiveram redução?

f) A média do número de filhos por casal (taxa de fecundidade) atingiu em 2010 o número mais baixo, 1,9. Mantendo-se essa taxa, o que se pode esperar com o número de habitantes do país a médio e longo prazo?

g) Segundo dados do IBGE, no estado do Rio de Janeiro há, proporcionalmente, mais mulheres que homens e, em Mato Grosso do Sul, ocorre justamente o inverso. Use uma calculadora e complete a tabela a seguir determinando os valores de X e Y.

Estado	Nº de homens	Nº de mulheres	Razão (H/M)
Rio de Janeiro	7 625 679	8 364 250	X
Mato Grosso do Sul	1 549 536	Y	1,043

h) Faça uma pesquisa com 10 colegas da sua sala, com as seguintes variáveis: idade, altura e número de irmãos. Em seguida, determine a média, a moda e a mediana dessa amostra. (Use uma calculadora.)

Resolução:

a) A região mais populosa é a região Sudeste, com 80 364 410 habitantes, e a região menos populosa é a região Norte, com 14 058 094 habitantes.

b) população = densidade · área
população $\simeq$ 365 · 43 800
população $\simeq$ 15 987 000 habitantes

c) Faixa modal da população masculina: 10 a 14 anos.
Faixa modal da população feminina: 25 a 29 anos.

d) A afirmação é falsa. Nessa faixa etária existem 15 264 homens a mais que mulheres.

e) Aumento: Norte e Centro-Oeste; redução: Nordeste, Sudeste e Sul.

f) A médio prazo a população brasileira parará de crescer, e a longo prazo ocorrerá uma redução da população.

g) $X = \dfrac{7\,625\,679}{8\,364\,250} \Rightarrow X \simeq 0{,}912$

$Y = \dfrac{1\,549\,536}{1{,}043} \Rightarrow Y \simeq 1\,485\,653$

h) Resposta pessoal.

A distribuição dos conteúdos do Ensino Médio no Brasil deveria atender a uma formação básica geral e, ao mesmo tempo, à formação tanto profissional quanto pessoal do cidadão, ou seja, ajudar a resolver suas necessidades cotidianas. Porém, o conteúdo de Matemática Financeira, infelizmente, às vezes é trabalhado de forma superficial e rápida de tal forma que o aluno é capaz de traçar gráficos de funções trigonométricas, resolver equações logarítmicas, interpretar raízes complexas de um polinômio, mas nem sempre é capaz de decidir entre uma compra à vista ou a prazo, que de fato terá muita utilidade em sua vida cotidiana. Por esse motivo, por meio de uma atividade prática podemos deixar a matemática financeira mais atrativa e interessante.

O objetivo desta atividade é tornar real o poder de decisão de compra e venda e, também, desmistificar uma transação financeira. Isso se dará por meio de pesquisas de preços e taxas de juros em diferentes lojas do mesmo ramo, recortes comparativos de jornais, revistas, etc. Veja os passos a seguir.

1º passo:

Os alunos devem ser distribuídos em grupos, e cada grupo deverá apresentar recortes de jornais, revistas ou encartes promocionais (e não retirados da internet) que apresentem formas diferentes de pagamento e que indiquem a taxa de juros utilizada na compra a prazo. Os grupos também devem trazer recortes que exibam propagandas de vendas com parcelas em que o anúncio indique que nelas não estão embutidos juros (do tipo “em 10x sem juros”).

2º passo:

Os grupos também devem pesquisar e copiar os anúncios de um mesmo produto em, pelo menos, três estabelecimentos diferentes.

Depois disso, cada grupo se dividirá, de forma conveniente, para escolher um produto (eletrônico, por exemplo, como *tablet*, celular, etc.) e pesquisar o seu preço em três estabelecimentos diferentes, só que agora as condições de pagamento devem ser as mesmas.

E em cada loja, o grupo deverá perguntar:

a) o preço à vista, com dinheiro em espécie com o intuito de o vendedor, ou o gerente, baixar ao máximo o preço, que em geral é tabelado;
b) a taxa de juros com que a loja trabalha, caso a compra seja feita a prazo;
c) o preço a prazo com e sem entrada mais uma parcela.

A partir das respostas dos vendedores, cada grupo deverá preencher a seguinte tabela:

Loja	Taxa mensal de juros	À vista	Com entrada e mais uma parcela para 30 dias	Sem entrada e mais duas parcelas iguais para 30 e 60 dias
A				
B				
C				

3º passo:

Após apresentar todos os dados colhidos, o grupo deverá discutir e decidir a melhor forma de pagamento, supondo que o comprador dispõe do valor à vista em mãos.

4º passo:

Depois de finalizada a discussão, cada grupo deve analisar o problema a seguir e decidir entre efetuar uma compra à vista e a prazo. Depois disso, resolver a seguinte situação:

Suponha que o comerciante Danilo consegue, por meio de revenda de mercadorias diversas, um rendimento mensal do seu dinheiro em 15%. Danilo pretende adquirir uma TV cujo preço tabelado pela loja é de R$ 2 000,00 e o vendedor anuncia que o pagamento pode ser em 1 + 1 iguais, ou seja, uma entrada de R$ 1 000,00 e uma parcela também de R$ 1 000,00, para ser paga em 30 dias. Além disso, o vendedor informa a Danilo que, se o pagamento for à vista, o aparelho terá um desconto. Se Danilo dispõe de posses para comprar a TV à vista, diante do oferecido pelo vendedor, discuta a partir de qual desconto compensaria para Danilo a compra à vista ou a prazo.

A solução deverá ser descrita e entregue ao professor, que avaliará as conclusões dos grupos.

Resolução:

Danilo deveria ter o valor da entrada de R$ 1 000,00 independentemente de a compra ser à vista ou a prazo. Se ele pagar à vista, receberá um desconto de x% sobre os R$ 1 000,00 que pagaria pela segunda parcela:

$$1000 \cdot \left(\frac{100 - x}{100}\right) = 1000 - 10x$$

Esse valor, se aplicado a 15% ao mês, em 1 mês se tornaria 115% do que era, ou seja, em 1 mês ficaria:

$$\frac{115}{100}(1000 - 10x) = 1\,150 - 11{,}5x$$

Se esse valor for menor que R$ 1 000,00 (que é o valor da 2ª parcela), então a compra à vista seria mais vantajosa. Assim:

$$1150 - 11{,}5x < 1000$$
$$-11{,}5x < -150$$
$$11{,}5x > 150$$
$$x > 13{,}04$$

Ou seja, a partir de um desconto de 13,04%, a compra à vista é mais vantajosa para Danilo.

Unidade 2 – Geometria espacial e Geometria analítica

Capítulo 3 – Geometria espacial: corpos redondos

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Corpos redondos	Conhecimentos geométricos: Características das figuras geométricas espaciais, Grandezas, Unidades de medida, Áreas e volumes	C2/C3	H7/H8/H9/H10/H12/H13/H14
O cilindro			
O cone			
A esfera			

O capítulo que inicia esta unidade aborda os corpos redondos, classe de sólidos caracterizados por possuírem superfícies curvas, tais como os cilindros, cones, troncos de cones e esferas. As características desses sólidos estão presentes em nosso cotidiano, desde o formato de objetos comuns (copos, latas, embalagens, brinquedos) até estruturas arquitetônicas e de engenharia (coberturas em formato cônico, dutos, encanamentos, fiações elétricas, túneis, nanotecnologia, etc.).

A imagem de abertura do capítulo é muito interessante, pois corresponde a uma fotografia do acontecimento simultâneo dos fenômenos "Lua de sangue" e "Superlua". Os planetas, as estrelas e os satélites naturais possuem forma similar à de uma esfera.

Estimule seus alunos a avaliar, dentre a série de figuras apresentadas no tópico **Corpos redondos**, qual tipo de corpo redondo pode ser mais adequado a cada uma delas, destacando as superfícies redondas presentes. Em seguida, apresente aos alunos **O cilindro**, identificando elementos importantes como bases, superfície lateral, eixos, geratrizes, secções, e destaque a definição de cilindro equilátero, muito presente em diversas aplicações e exercícios. A construção do cilindro a partir de um molde planificado auxilia tanto na visualização da superfície lateral e da base quanto na determinação das áreas lateral, total e das bases. Os exercícios resolvidos 1 e 2 servem como base para os exercícios 1 a 5, que podem ser usados como atividade de fixação.

Agora, você pode definir o volume do cilindro recordando a definição de volume do prisma e considerando a área da superfície circular como base. Analise, com os alunos, os exercícios resolvidos 3 a 5, com destaque para o exercício resolvido 5, que trata de problema envolvendo uma piscina infantil na forma de uma coroa circular reta. Os exercícios 6 e 8 a 11 podem ser usados como atividade de fixação e os exercícios 7 e 12 a 14 como atividade de aprofundamento e avaliação, que podem ser feitos em duplas.

O mesmo procedimento adotado para o cilindro pode ser usado em **O cone**, tomando o cuidado de destacar a geratriz, a seção meridiana do cone e a definição de cone equilátero. As fórmulas para determinar a área da superfície lateral costumam causar estranheza, e nesse caso a determinação da área usando a figura planificada pode ajudar. Os exercícios resolvidos 6 e 7 ajudam na resolução dos exercícios 15 a 20, que podem ser usados como atividade de fixação e avaliação.

O cálculo do volume do cone é similar ao cálculo do volume da pirâmide, e os exercícios resolvidos 8 e 9 auxiliam na resolução dos exercícios 21 a 26, com destaque para os exercícios 22, 23 e 26, que apresentam formas com aplicações reais, como nas boias cônicas de sinalização, na construção de silos e em objetos de decoração. Os troncos de cone podem ser abordados apresentando algumas figuras e usando as fórmulas para o cálculo de suas áreas e volumes. Os exercícios 27 a 30 apresentam interessantes aplicações dos troncos de cones, tais como no formato de xícaras, copos, vasilhas e reservatórios de água, podendo ser usados como atividade de fixação em duplas.

O último dos corpos redondos a ser estudado – e não menos importante – é **A esfera**, cuja estrutura nos remete às mais diversas formas presentes na natureza e no Universo, como frutas, corpos celestes, entre outros. Apresente os elementos principais da esfera (centro, raio, diâmetro) e defina a área da superfície esférica resolvendo os exercícios 31 a 33. Apresente a fórmula usada na determinação do volume da esfera por meio dos exercícios resolvidos 11 a 13. Os exercícios 43 a 45 são atividade de fixação em duplas. Note que os exercícios resolvidos 12 e 13 discutem a determinação da área de um fuso e o volume de uma cunha, e servem de referência para os exercícios 38 a 45.

Na seção **Um pouco mais...**, sugerimos, como assunto opcional, a apresentação da determinação da área da superfície esférica pela aproximação por polígonos, sendo interessante para discutir aproximações e, de acordo com a turma, explorar um pouco a ideia intuitiva de limite.

Na seção **Leitura** apresentamos um texto histórico sobre o desenvolvimento da Geometria.

Capítulo 4 – Geometria analítica: ponto e reta

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Introdução à Geometria analítica	Conhecimentos algébricos/geométricos: Plano cartesiano, Retas	C2/C5	H7/H8/H19/H20/H21
Sistema cartesiano ortogonal			
Distância entre dois pontos			
Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta			
Condição de alinhamento de três pontos			
Inclinação de uma reta			
Coeficiente angular de uma reta			
Equação fundamental da reta			
Formas da equação da reta			
Posições relativas de duas retas no plano	Conhecimentos algébricos/geométricos: Paralelismo e perpendicularidade		
Perpendicularidade de duas retas			
Distância de um ponto a uma reta			
Área de uma região triangular	—	—	—
Aplicações à Geometria plana	Conhecimentos algébricos/geométricos: Paralelismo e perpendicularidade	C2/C5	H7/H22

O estudo da **Geometria analítica: ponto e reta** tem implicações que extrapolam a simples análise de retas, circunferências e relações no plano cartesiano. Historicamente, o tema é relevante, pois integra os estudos de Álgebra e Geometria, facilitou o estudo das funções e possibilitou um grande desenvolvimento na Matemática. Atualmente, o tema pode ser considerado de extrema importância, pois foi a partir de conceitos da Geometria analítica que se desenvolveram dispositivos de localização global (GPS), muito usados em logística, engenharia de produção e na criação de novas rotas na aviação civil, somente para citar alguns exemplos. Neste capítulo serão estudados temas introdutórios, como o conceito de sistema cartesiano ortogonal, sistema de coordenadas, distância entre dois pontos e ponto médio. Em seguida, faremos o estudo da reta, desde suas diversas formas de apresentação até a análise de posições relativas, condições de paralelismo e perpendicularidade e distância entre ponto e reta. Como temas opcionais apresentamos o estudo do ângulo formado por duas retas e áreas de triângulos. Aproveite o tema para explorar as habilidades visuais de seus alunos, use e abuse dos gráficos e, se possível, de programas de computador, tais como GeoGebra e Graph.

O objetivo da imagem de abertura do capítulo é dar um exemplo de aplicação profissional da Geometria analítica. Neste caso, pode-se aplicar a Geometria analítica na Engenharia Civil e em outras Engenharias. Como uma forma de incentivo à busca vocacional, peça aos alunos que pesquisem a Engenharia Civil e/ou outras Engenharias e, ao final do estudo do capítulo, apresentem outras aplicações da Geometria analítica nessas áreas.

Ao iniciar o estudo do tema, solicite aos alunos que leiam o texto inicial, **Introdução à Geometria analítica**, que apresenta o contexto histórico no qual o tema foi desenvolvido, e seus nomes de destaque (Descartes e Fermat). Após essa leitura, seria o momento ideal para a exibição do filme *Cartesius* (1974), do cineasta italiano Roberto Rossellini, uma das sugestões apresentadas no final do Volume 3. Peça auxílio aos professores de História e Filosofia para destacar a importância do tema e dos personagens envolvidos. Aproveite a discussão para apresentar o **Sistema cartesiano ortogonal**, com o qual a maioria dos alunos já deve ter alguma familiaridade. Aproveite para fazer uma revisão e apresentar o conceito de coordenadas usando exemplos simples de pontos localizados em diferentes quadrantes. Resolva os exercícios propostos 1 a 5 como fixação.

Para apresentar o conceito de **Distância entre dois pontos**, podemos fazer uma atividade lúdica usando a quadra de esportes (ou a própria sala de aula), um aparelho de medição (trena, por exemplo) e dois objetos (ou alunos). Posicione os dois objetos ou alunos em posições distintas no espaço escolhido para a atividade, e determine rotas diferentes para se deslocar de um extremo a outro. Peça aos alunos (em duplas ou grupos) que determinem a distância percorrida em cada rota. Ao final das medições, discuta qual trajeto foi mais eficaz (aproveite para discutir situações de logística) e qual apresentou o menor percurso.

Em seguida, solicite que eles representem a situação discutida no papel, colocando referências de localização, sistema cartesiano e coordenadas dos pontos escolhidos, bem como de suas rotas. Aproveite para revisar o Teorema de Pitágoras e apresentar o cálculo da distância entre dois pontos, usando os exemplos apresentados no livro. Após a revisão, introduza a fórmula, usando o exercício proposto 6 como fixação. Os exercícios propostos 7 a 10 podem ser aplicados como aprofundamento, e os exercícios 11 a 14 como atividade em dupla.

O passo seguinte é determinar as **Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta**, usando como exemplos iniciais dois pontos no primeiro quadrante e determinando o ponto médio. Use o resultado para apresentar a fórmula e complemente com exemplos de pontos em quadrantes diferentes, como os do exercício resolvido 3. Os exercícios propostos 15 e 16 podem ser usados como fixação. Aproveite para discutir aplicações do ponto médio, como por exemplo a determinação das coordenadas e comprimentos das medianas de um triângulo, conforme o exercício resolvido 4. Aproveite para revisar os pontos notáveis do triângulo (altura, mediana, baricentro) e simetrias (triângulos escaleno, isósceles e equilátero), usando o exercício proposto 17 e características de paralelogramos no exercício 18, ambos podem ser feitos em duplas.

Para finalizar o tema peça aos alunos que complementem a atividade feita na quadra, determinando o ponto médio de uma das rotas calculadas.

O tema seguinte é **Condição de alinhamento de três pontos**, em que é necessário revisar o cálculo de determinante de uma matriz. Use alguns exemplos simples de determinantes de ordem 3 e finalize a revisão com um exemplo algébrico, substituindo alguns valores em uma das matrizes anteriores por incógnitas.

O assunto pode ser abordado com o seguinte exemplo: desenhe na lousa 3 pontos alinhados, discriminando suas coordenadas, ou seja, com o sistema cartesiano (veja o exemplo do livro). Use as coordenadas dos 3 pontos para montar o discriminante da matriz de alinhamento, de acordo com as orientações do livro-texto. Verifique que o determinante será igual a zero. Agora, aproveitando seu desenho, substitua um dos pontos do exemplo inicial por um ponto fora do alinhamento e refaça o cálculo do determinante, verificando que o resultado será diferente de zero.

Discuta com os alunos a condição de alinhamento, e aproveite para observar que, no caso dos pontos fora do alinhamento, a figura formada será um triângulo e o determinante está relacionado com sua área (assunto opcional no final do capítulo). Resolva os exercícios propostos 19 a 21 para fixação, e os exercícios 22 a 24 como questões de aprofundamento e avaliação em dupla.

Para introduzir o assunto reta, a sugestão é solicitar que pesquisem em jornais e revistas e tragam artigos com gráficos que tenham retas. Peça que comentem os artigos e escolha alguns gráficos para analisar, comente a respeito da **Inclinação de uma reta** e peça que observem as diferentes apresentações, aproveitando para relacionar a inclinação com o crescimento, decrescimento ou constância do gráfico. Converse com seus alunos sobre os temas das reportagens apresentadas, que podem ser os mais variados, desde Economia, Nutrição, Biologia, Geografia, etc. Introduza então o conceito de **Coeficiente angular de uma reta**, apresentando alguns exemplos de retas com diferentes coeficientes angulares. Resolva o exercício 25 e aproveite o exercício 26 para uma breve revisão, lembrando como é feito o cálculo da tangente de um ângulo e seus valores para os ângulos notáveis.

Para apresentar a **Equação fundamental da reta** quando são conhecidos um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a declividade m da reta, podemos fazer dois exemplos nos quais se conhecem as coordenadas de dois pontos, explicitando o cálculo do coeficiente angular. Em seguida, generalize o cálculo, apresentando um ponto genérico $P(x, y)$ e outro $P_0(x_0, y_0)$, encontrando assim a equação fundamental da reta ($y - y_0 = m(x - x_0)$). Apresente também a opção de determinação da equação da reta a partir do determinante, fazendo os exercícios resolvidos 6 e 7. Em seguida, resolva os exercícios propostos 27 (fixação), 28 e 42 (como aprofundamento e avaliação).

Uma vez apresentada aos alunos a equação da reta, recorde-os de que esse assunto já foi estudado anteriormente em funções e que é possível escrever diversas **Formas da equação da reta**. Podemos começar usando algum exercício da aula anterior para descrever a forma reduzida da equação da reta, com destaque para os coeficientes linear e angular, e fazendo a correlação com as funções lineares mencionadas no início da discussão sobre o assunto. Continue no mesmo exemplo para exemplificar a equação geral da reta; destaque para seus alunos que, apesar de aparentemente não ser muito usada, a equação geral da reta tem sua importância por estar diretamente relacionada ao determinante descrito na condição de alinhamento entre três pontos. É importante destacar que a mesma reta pode ser representada de várias formas, principalmente ao usarmos a equação geral. Os exercícios 29 a 34 podem ser usados como atividades de fixação, já os exercícios 35 a 41 apresentam um maior nível de dificuldade e podem ser usados para atividades em dupla ou grupos.

Para determinar e avaliar as **Posições relativas de duas retas no plano** discuta com seus alunos o fato de que duas retas no mesmo plano podem ser apenas paralelas ou concorrentes. Como sugestão, represente graficamente duas retas paralelas no sistema cartesiano, mostre que os coeficientes angulares das duas são iguais e repita o procedimento com duas retas concorrentes. Avalie que o ângulo formado pelas retas paralelas com o eixo das abscissas será sempre o mesmo, portanto seus coeficientes angulares também o serão. Verifique que o mesmo não ocorre com as retas concorrentes. Em seguida, resolva os exercícios 43 e 44 para fixar o conceito. Use o exercício 45 para explicar como se determina a equação de uma reta sabendo que essa reta é paralela à outra. Proponha os exercícios 46 e 47 como atividade de aprofundamento.

Uma situação particular de retas concorrentes é quando ocorre a **Perpendicularidade de duas retas**. Para analisar essa situação, apresente para seus alunos o gráfico de duas retas perpendiculares, por exemplo, as retas que passam pelos pontos (0, 0) e (4, 2), cuja equação pode ser representada por $y = \frac{x}{2}$ e a reta que passa pelos pontos (2, 0) e (0, 4), cuja equação pode ser representada por $y \cdot b = -2x + 4$. Determine o coeficiente angular das duas e mostre que um é o oposto do inverso do outro.

Discuta também o resultado avaliando os ângulos e suas respectivas tangentes. Faça os exercícios resolvidos 11 e 12. Não deixe de discutir com seus alunos a contextualização proposta no exercício 12, pois representa uma aplicação provavelmente próxima à realidade dos alunos, apresentando a tela de um jogo de *videogame* portátil. Resolva o exercício proposto 48 como fixação, os exercícios 49 e 52 como aprofundamento e os exercícios 50, 51 e 53 a 55 como atividade em dupla, pois apresentam um grau mais alto de dificuldade.

Para introduzir o conceito de **Distância de um ponto a uma reta**, sugerimos a seguinte atividade: leve seus alunos à quadra poliesportiva divididos em 4 grupos, munidos de uma corda (ou fita) e de um aparelho de medição (trena ou fita métrica) para cada grupo. Use as marcações de limitação da quadra como referência para os eixos do sistema de coordenadas e a corda para representar uma reta, e cada grupo deverá usar um vértice da quadra para sua atividade. Com o auxílio da trena, peça que anotem as coordenadas de dois pontos na reta, para que seja possível determinar a equação da reta formada pela corda. Em seguida, um dos alunos do grupo deverá se posicionar a uma distância (não muito grande) da reta, e os colegas determinarão suas coordenadas. Finalmente, cada grupo deverá usar os equipamentos de medição para determinar a menor distância entre o colega e a corda. Destaque que a menor distância será formada pela reta perpendicular à corda, que passa pelo ponto (colega). Para finalizar a atividade, os alunos deverão registrar as medidas e determinar a equação da reta formada pela corda.

Apresente então a fórmula para o cálculo da distância de um ponto a uma reta, fazendo os exercícios resolvidos 13 e 14. Peça aos alunos que verifiquem os cálculos do experimento com a fórmula. Solicite que resolvam os exercícios 56 e 57 como fixação e discuta os exercícios 58 a 60 como aprofundamento e revisão.

Colocamos o estudo do ângulo formado por duas retas na seção **Um pouco mais...** (ao final do capítulo), como assunto opcional. Caso deseje trabalhá-lo, reveja com seus alunos que no caso de retas concorrentes o ângulo agudo pode ser determinado por meio da fórmula apresentada e resolva os exercícios adicionais de 1 a 4.

A discussão sobre **Área de uma região triangular** também pode representar um assunto opcional. Revise com seus alunos a condição de alinhamento de 3 pontos, lembrando que no caso de pontos alinhados o determinante vale zero. Questione-os sobre o que acontece quando os três pontos não estão alinhados. Use um exemplo de simples visualização, como o triângulo de vértices $A(3, 3)$, $B(1, 1)$ e $C(1, 5)$, que terá base valendo 4 e altura 2 e, consequentemente, área 4. Faça o determinante, verificando que a fórmula da área de uma região triangular apresenta resultados equivalentes e resolva o exercício proposto 61. Peça aos alunos que resolvam os exercícios 62 a 67.

Como atividade extra sugerimos o objeto educacional "Determinantes e Áreas", disponível na página Matemática Multimídia da Unicamp (<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1226>. Acesso em: 30 maio 2016.), que apresenta uma atividade direcionada com o objetivo de verificar a relação entre áreas e determinantes.

Finalizando o estudo da reta, selecionamos algumas **Aplicações à Geometria plana**. Os exercícios podem ser resolvidos em grupo, como aprofundamento e revisão.

Capítulo 5 – Geometria analítica: a circunferência

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Definição e equação	Conhecimentos algébricos/geométricos: Circunferências	C5	H21
Posições relativas entre reta e circunferência	Conhecimentos algébricos/geométricos: Circunferências, Perpendicularidade	C2/C5	H7/H21/H22
Problemas de tangência			
Aplicações à Geometria plana	Conhecimentos algébricos/geométricos: Circunferências	C5	H21/H23

Em continuidade ao capítulo anterior, abordaremos agora o tema **Geometria analítica: a circunferência**. Lembramos que a circunferência está presente em nosso cotidiano e nas mais diversas profissões, desde o formato da base dos copos e latas de refrigerante, passando por desenvolvimento de projetos de iluminação até construção de poços de extração de petróleo (Engenharia), ou seringas e cânulas usadas em Medicina. Em diversos esportes, as circunferências também estão presentes, como em marcações de quadras, tatames, aros, etc. O tiro com arco é outro exemplo; seu alvo é a imagem de abertura do capítulo. Essas e outras relações com esportes olímpicos podem ser realizadas na seção **Outros contextos**, que tem como tema as Olimpíadas, aproveitando o fato de terem sido realizadas pela primeira vez na América do Sul em 2016. No entanto, devemos nos concentrar no estudo analítico da circunferência e suas representações algébricas no plano cartesiano.

Para que isso seja feito com maior tranquilidade, sugerimos uma breve revisão sobre produtos notáveis, em especial os produtos conhecidos como quadrado da soma e quadrado da diferença, com o objetivo de completar quadrados. Segue uma sugestão de atividade:

Apresente o tema da aula como revisão de produtos notáveis e proponha a seus alunos que resolvam os seguintes produtos notáveis: $(x + 1)^2$ e $(x - 1)^2$. Discuta a opção de resolver a partir da propriedade distributiva, mas lembre-os de que existe uma generalização, dada por: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$. Em seguida, peça que efetuem os seguintes produtos notáveis usando a fórmula.

a) $(x + 2)^2$ c) $(x + 5)^2$ e) $(x - 2)^2$ g) $(x - 7)^2$

b) $(x + 3)^2$ d) $(x + 6)^2$ f) $(x - 4)^2$ h) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

Após a resolução do exercício, peça aos alunos que simplifiquem a escrita das seguintes sentenças:

a) $x^2 - 6x + 9$ c) $x^2 - 10x + 25$

b) $x^2 + 8x + 16$

Respostas:

a) $(x - 3)^2$ b) $(x + 4)^2$ c) $(x - 5)^2$

Complemente com a sentença: d) $x^2 + 4x + 7$, questionando seus alunos sobre uma eventual simplificação. A maioria dirá que não é possível, pois 7 não é um número quadrado perfeito. Decomponha então o 7 na forma $7 = 4 + 3$ e finalize o exercício mostrando que a sentença pode ser escrita como: $x^2 + 4x + 7 = x^2 + 4x + 4 + 3 = (x + 2)^2 + 3$.

Observe que a decomposição do número 7 pode ser feita de várias formas, dependendo do objetivo. Se a sentença for, por exemplo, $x^2 + 6x + 7$, o mais interessante é escrever $7 = 9 - 2$, assim teremos $x^2 + 6x + 7 = x^2 + 6x + 9 - 2 = (x + 3)^2 - 2$.

Peça então que escrevam as sentenças a seguir, com o mesmo método (conhecido como método de completar quadrados):

a) $x^2 + 4x + 5$ c) $x^2 - 4x + 1$

b) $x^2 + 6x + 8$ d) $x^2 + 8x - 2$

Respostas:

a) $(x + 2)^2 + 1$ c) $(x - 2)^2 - 3$

b) $(x + 3)^2 - 1$ d) $(x + 4)^2 - 18$

Para iniciarmos os trabalhos com a circunferência, solicite que seus alunos tragam um compasso ou um pedaço de barbante e régua. Inicie conversando com eles a respeito da figura que começaremos a estudar. Peça que citem objetos ou situações que envolvam o uso da circunferência e que descrevam suas principais características. Pergunte a seus alunos o que é o raio da circunferência e reforce que a figura é gerada a partir de pontos que possuem a mesma distância em relação ao centro. Em seguida, peça que desenhem circunferências em seus cadernos, com o auxílio de um barbante ou de um compasso, verificando o conceito definido acima e medindo seu raio.

Propomos uma atividade que pode ser feita em dupla ou individualmente: solicite que os alunos desenhem os eixos do sistema cartesiano e, usando a régua como escala, usem o espaço para delimitar uma circunferência qualquer, determinando seu centro e raio com o auxílio da régua. Apresente então a seus alunos a **Definição e equação** da circunferência, solicitando que escolham dois pontos pertencentes à circunferência desenhada para verificar sua veracidade. Faça os exercícios resolvidos 1 e 2 como exemplos.

Em seguida, apresente o problema sugerido no exercício resolvido 3 para explicar o método de completar quadrados (discutido na aula de revisão sobre produtos notáveis) e complemente com os exercícios resolvidos 4 e 5.

Apresente a equação geral da circunferência, oferecendo uma solução alternativa para o exercício resolvido 5 usando o método da comparação. Não deixe de comentar que o método de completar quadrados é mais simples, pois evita a necessidade de decorar a fórmula completa e detalhada apresentada na equação geral. Finalize com o exercício resolvido 6, que apresenta uma situação contextualizada que envolve o deslocamento de um sapo por duas folhas circulares da planta aquática vitória-régia.

Os exercícios 1 a 4 podem ser usados como exercícios de fixação e avaliação, e os exercícios 5 a 7 como aprofundamento. Resolva com seus alunos os exercícios 8 a 12, pois apresentam maior grau de dificuldade. Já os exercícios 13 a 16 podem ser utilizados em atividades em dupla.

O passo seguinte é discutir as **Posições relativas entre reta e circunferência**, apresentando as três possibilidades (reta secante à circunferência, reta tangente à circunferência e reta exterior à circunferência) destacando as características principais de cada situação e analisando o exercício resolvido 7. Comente sobre a relação entre o discriminante e a quantidade de raízes na equação de segundo grau, que neste caso está diretamente relacionada com a quantidade de pontos de intersecção, ou seja, com a posição relativa entre a reta e a circunferência. O exercício proposto 20 pode ser usado como fixação, os exercícios 17, 18 e 22 podem ser discutidos juntamente com a sala, e os exercícios 19 a 21 podem ser solicitados como aprofundamento e avaliação em dupla.

Trabalhe especificamente alguns **Problemas de tangência**, destacando que, na situação referida, a distância entre o ponto de tangência e o centro equivale ao raio, e que a reta tangente é sempre perpendicular ao raio no ponto de tangência. Faça com os alunos os exercícios resolvidos 8 a 10, e os exercícios propostos podem ser resolvidos em grupo, como atividade de avaliação ou trabalho.

Sugerimos, na seção **Um pouco mais...**, uma discussão opcional sobre posições relativas de duas circunferências. Apresente as três possibilidades, quando as duas circunferências se interceptam em dois pontos, quando são tangentes entre si (um único ponto de intersecção) e quando não há intersecção. Faça diversos desenhos representando as situações descritas e discuta com seus alunos a respeito das características de cada situação apresentada. Em seguida, faça o exercício resolvido dessa seção e proponha para seus alunos a resolução dos exercícios adicionais de 1 a 5.

É importante sempre apresentar situações cotidianas nas quais seja possível aplicar os conhecimentos aprendidos. Com esse fim, sugerimos a discussão de algumas **Aplicações à Geometria plana**, em que apresentamos um texto sobre construção de pontes e alguns exercícios relacionados ao texto, que podem ser usados como atividade de avaliação individual.

Os conceitos estudados nesta unidade, bem como a discussão sobre aplicações da Geometria analítica à Geometria plana, podem ser complementados com a leitura da seção **Outros contextos**, com a temática dos Jogos Olímpicos, que aborda temas de História e Geografia, além de uma descrição de alguns esportes olímpicos nos quais se podem aplicar os conceitos estudados. A questão 1 é introdutória, para discussão e ilustração de outras situações não mencionadas no texto inicial. Na questão 2 usa-se a equação da circunferência para determinar a área do círculo no alvo de tiro; já a questão 3 aproveita conhecimentos de sistema de coordenadas para determinar a equação da circunferência no alvo de tiro. A questão 4 dá como referência o aro de uma cesta de basquete e pesos em forma de disco, utilizados no levantamento de peso, para determinar as inequações que representam as respectivas circunferências.

Interessantes discussões a respeito de políticas públicas, obras, desenvolvimento econômico e participação das mulheres na sociedade são apresentadas nas questões 5 e 6. Peça a ajuda dos professores de História e Geografia para enriquecer a discussão.

As questões da seção **Pensando no Enem** apresentam aplicações muito interessantes dos conceitos estudados. As questões 1 e 2 envolvem conhecimentos geométricos de espaço e forma, além de abordarem conceitos relacionados à Física. Os textos que servem de base para a resolução das duas questões explicam os fenômenos vistos na imagem de abertura do capítulo 3. A questão 3 desenvolve cálculos trigonométricos com base nas circunferências que compõem o símbolo da OBM. Não deixe de discutir as situações propostas com seus alunos.

Na seção **Vestibulares de Norte a Sul** apresentamos algumas questões de vestibulares sobre os temas da unidade que podem ser usadas pelos alunos como uma autoavaliação.

Atividades complementares à Unidade 2

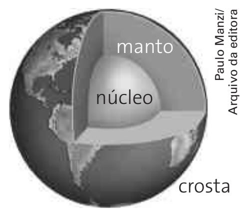
As atividades a seguir complementam os assuntos estudados na unidade e representam um momento de aprofundamento, de interdisciplinaridade e de contextualização.

1. *Um pouco da Geografia do nosso planeta*

O planeta Terra é o terceiro planeta do nosso Sistema Solar. A distância entre ele e o Sol é de aproximadamente 150 000 000 km.

A atmosfera do planeta Terra é formada por uma camada varia de 500 a 700 quilômetros de espessura, e a distribuição de gases é 78% de nitrogênio, 21% de oxigênio, cerca de 0,9% de argônio, 0,03% de dióxido de carbono e água.

A formação do planeta tem a data aproximada de 4,5 bilhões de anos, quando a sua massa incandescente começou a resfriar-se, criando as primeiras rochas. Primeiramente, o núcleo do planeta é formado por minerais pesados, como o níquel e o ferro, em estado de fusão, a temperaturas altíssimas: entre 2 500 e 5 000 °C. Envolvendo este núcleo, encontra-se o manto, que se constitui de uma massa pastosa, o magma, que está em constante movimentação, e, às vezes, é lançado à superfície através de vulcões ou de fenômenos tectônicos. Finalmente, vem a crosta terrestre, ou litosfera, a camada superficial da parte sólida do globo, formada por três tipos de rocha, como as metamórficas, as sedimentares e as ígneas ou magmáticas.



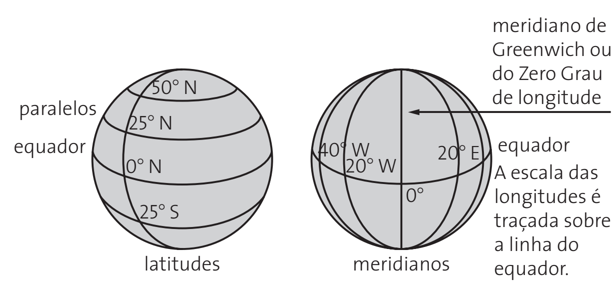
A Lua é um satélite natural da Terra, que está há uma distância de 382 166 km, em média. Em razão dos efeitos gravitacionais entre a Terra e a Lua, as marés possuem ciclos de movimentação, que podem ser previstos e utilizados para atividades como pesca e navegação. A Terra é o único planeta do Sistema Solar em que existem vida e água em estado líquido. É ainda o quinto maior em tamanho, com um diâmetro equatorial de 12 756 km.

Ela realiza diversos movimentos, porém os principais são os de rotação e de translação. O primeiro corresponde a um movimento que a Terra realiza em torno de si mesma e que requer 23 h 56 min 4 s, de oeste para leste, em uma velocidade de 1 670 km/h no equador ou 0,47 km/s; esse é movimento responsável pelo surgimento dos dias e das noites.

O segundo corresponde ao movimento que a Terra realiza em torno do Sol e, para completá-lo, são necessários 365 d 5 h 48 min 45,97 s (365 d 6 h), em uma velocidade de 107 000 km/h ou 29,79 km/s. As seis horas são adicionadas ao longo de quatro anos, totalizando 24 horas, ou seja, um dia, caracterizando o ano bissexto.

Outras características do nosso planeta:

Diâmetro polar: 12 713,5 km
Densidade: 5,52
Área total do planeta: 510,3 milhões km^2
Área das terras emersas: 149,67 milhões km^2 (29,31%)
Área dos mares e oceanos: 360,63 milhões km^2 (70,69%)
Área do oceano Pacífico: 179,25 milhões km^2, incluindo mar da China Meridional, mar de Okhotsk, mar de Bering, mar do Japão, mar da China Oriental e mar Amarelo (49,7% das águas)
Área do oceano Atlântico: 106,46 milhões km^2, incluindo oceano Ártico, mar do Caribe, mar do norte, mar Mediterrâneo, mar da Noruega, golfo do México, baía de Hudson, mar da Groenlândia, mar Negro e mar Báltico (29,5% das águas)
Área do oceano Índico: 74,92 milhões km^2, incluindo mar da Arábia, golfo de Bengala e mar Vermelho (20,8% das águas)
Profundidade média dos oceanos: 3 795 m
Volume total das águas do planeta: 1,59 bilhões km^3
Circunferência da Terra no equador: 40 075 km
Circunferência da Terra nos trópicos: 36 784 km
Circunferência da Terra nos círculos polares: 15 992 km
Circunferência da Terra nos meridianos: 40 003 km
Diferença entre as circunferências equatorial e meridional: 72 km
Velocidade orbital média: 29,79 km/s
Placas tectônicas: são os vários blocos em que a crosta está dividida. São separadas por grandes fendas vulcânicas em permanente atividade no fundo do mar.
Pontos mais altos do planeta:
Na Ásia: Everest, no Nepal/China (8 848 m); K2, no Paquistão/China (8 611 m); Kanchenjunga, no Nepal/Índia (8 597 m). Na América do Sul: Aconcágua, Argentina/Chile (6 959 m); Ojos del Salado, Argentina/Chile (6 880 m).
Na América do Norte: McKinley, Alasca, EUA (6 194 m); Logan, Canadá (5 959 m).
Na África: Kilimanjaro, Tanzânia (5 895 m).
Na Europa: monte Elbrus, Rússia (5 642 m); Mont Blanc, França/Itália (4 807 m);
A latitude é a distância ao equador medida ao longo do meridiano de Greenwich (essa distância é medida em graus) podendo variar entre 0° e 90° para norte ou para sul. E a longitude é medida em graus, de zero a 180 para leste ou para oeste, a partir do meridiano de Greenwich.



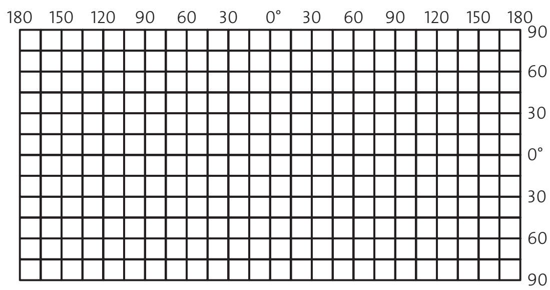
Agora em grupos de três ou quatro alunos, façam o que se pede:

a) Tomando como base o diâmetro equatorial, calculem o volume da Terra.
b) Um meridiano é um semicírculo imaginário que vai de um polo a outro. A Terra leva 24 horas para dar uma volta completa em torno de si; então, se separarmos os meridianos de 15 em 15 graus de um para o seguinte, quantos eles seriam? Qual é o tempo de duração para que a partir de um meridiano se chegue ao próximo?
c) Qual é o volume correspondente da porção da terra entre um meridiano e outro (o que chamamos de cunha esférica)?
d) Qual é a área da superfície compreendida entre um meridiano e o seguinte?
e) Se o nosso planeta tivesse o formato cilíndrico com raio da base igual ao raio equatorial, qual deveria ser a altura desse cilindro para que o volume permanecesse o mesmo? E se o formato fosse de um cone equilátero com mesmo raio da base do equatorial?
f) Pesquise com os colegas de sua turma se caso eles fossem alpinistas, quais cinco pontos mais altos da terra eles gostariam de escalar. Faça uma relação dos cinco mais votados e no caso de empate, por exemplo,

se dois deles tiveram um único voto cada, então considere o mais alto dos dois.

g) Agora, faça um gráfico de barras representado a altura dos cinco mais votados.

h) Como já vimos no texto, o planeta Terra foi dividido em meridianos e paralelos, os quais nos fornecem latitude e longitude de todas as localidades da superfície. Na planificação abaixo, localize, indicando por pontos *A*, *B*, *C*, etc., as seguintes posições:
• Lat 15° N Long 150° O
• Lat 75° S Long 120° L
• Lat 45° S Long 45° L



i) Diga três elementos encontrados na natureza e três construídos pelo ser humano que tenham a forma cilíndrica. Faça a mesma coisa para a forma cônica. As formas naturais não precisam ser perfeitas.

Resolução:

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, então, $V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 6378^3}{3} =$
$= 11\ 76\ 172\ 980\ 422\ km^3$

b) A volta completa é de 360°, assim, $\frac{360°}{15°} = 24$. Dessa forma, de um meridiano para outro, a Terra leva 1 hora para girar esse arco (tomando a linha do equador como referência).

c) $V = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$, assim, temos: $\frac{3{,}14 \cdot 6378^3 \cdot 15}{270} =$
$= 45\ 259\ 597\ 531\ km^3$

d) $A = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$, então, $A = \frac{3{,}14 \cdot 6378^2 \cdot 15}{90} =$
$= 21\ 288\ 616\ km^2$

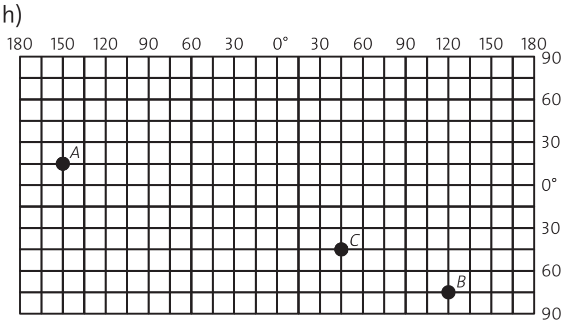
e) Altura do cilindro: $\pi r^2 h = 1\ 176\ 172\ 980\ 422$, ou seja,
$h = \frac{1\,176\,172\,980\,422}{3{,}14 \cdot 6378^2} = 92\,081$ km

Altura do cone: $\frac{92\,081}{3} = 30\ 693{,}7$

f) Resposta pessoal.

g) Resposta pessoal.

h)



i) Respostas possíveis:

Cilíndricas naturais – tronco de uma árvore, corpo de uma cobra, parte de uma macaxeira ou mandioca, espiga de milho, etc.

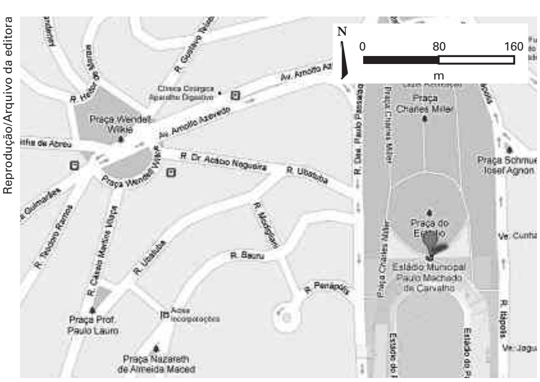
Cilíndricas criadas pelo ser humano – várias latas de alimentos, edifícios, parafusos, colunas de sustentação de muitas construções, etc.

Cônicas naturais – uma pinha, um pinheiro (árvore de Natal), algumas montanhas, furacões a atingirem a terra, cenoura, etc. Cônicas criadas pelo ser humano – a cobertura de um abajur, pião de brinquedo, pontas de canetas esferográficas, funil, casquinha de sorvete, etc.

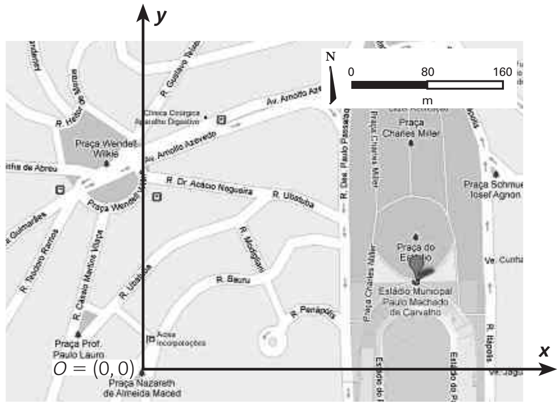
A atividade a seguir envolve a Geometria analítica e as ruas de uma cidade e pode ser realizada em grupos.

2. A Geometria analítica nada mais é que uma maneira de algebrizar a Geometria. Em geral, quando estudamos a Geometria analítica pela primeira vez ficamos com a impressão de que ela é um assunto fechado em si, ou seja, é apenas uma técnica para dar coordenadas a pontos, achar distância entre pontos, determinar equações para retas e curvas em geral. Mas não é bem assim; a Geometria analítica deve ser encarada como uma ferramenta para resolver problemas de Geometria em geral, assim como servir de ferramenta para mapear os pontos e os lugares geométricos do plano ou mesmo do espaço tridimensional. Nesta atividade utilizaremos a Geometria analítica para mapear diversas localizações em determinada cidade.

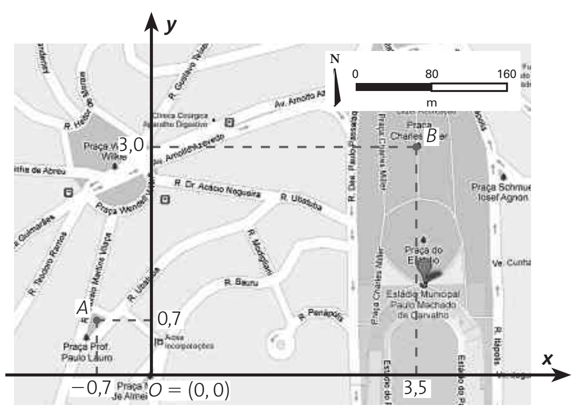
Para ilustrar esse processo consideremos, por exemplo, o mapa de uma pequena parte da cidade de São Paulo, nas proximidades do estádio do Pacaembu, conforme ilustra a figura abaixo:



Veja no canto direito superior a escala do mapa, em que o segmento indicado corresponde na cidade real a 80 m. Agora, escolhemos, arbitrariamente, um ponto para ser a origem do nosso sistema de coordenadas cartesianas. Por exemplo, a Praça Nazareth de Almeida Maced. Depois, traçamos um eixo *x* horizontal e um eixo *y* vertical que se cruzam exatamente no ponto que escolhemos como origem, conforme ilustra a figura a seguir:



A partir desse sistema de coordenadas e da escala presente no mapa podemos usar uma régua, graduada em centímetros, para determinarmos as coordenadas, por exemplo, do centro da praça Charles Miller e também do centro da praça Prof. Paulo Lauro, conforme indicamos a seguir:



Assim, nesse sistema de coordenadas, as coordenadas dos pontos A (centro da praça prof. Paulo Lauro) e B (centro da praça Charles Miller) são $A = (-0,7; 0,7)$ e $B = (3,5; 3,0)$. Com essas coordenadas podemos, por exemplo, encontrar a distância aproximada, em linha reta, entre esses dois pontos. Lembrando que a distância entre dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Dessa forma, a distância entre os pontos A e B dados é:

$$d(A, B) = \sqrt{(3,5-(-0,7))^2 + (0,7-3,0)^2} = \sqrt{22,93} \simeq 4,79 \text{ cm}$$

Como a escala do mapa indica que cada 1 cm do mapa corresponde a 80 m reais, então a distância real entre os centros das duas praças é cerca de: $4,79 \cdot 80 = 383,2$ m.

Com as coordenadas de A e de B também conseguimos determinar a equação da reta que passa por esses pontos. Lembrando que o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e B é dado por:

$m_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, segue que:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3,0-0,7}{3,5-(-0,7)} = \frac{2,3}{3,7} = \frac{23}{37}$$

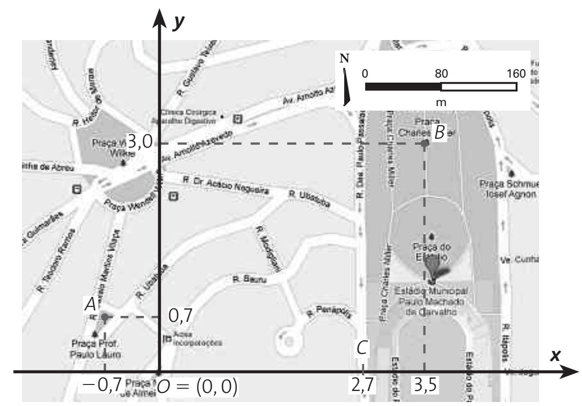
Lembrando que a equação de uma reta que passa pelo ponto $Q = (x_0, y_0)$ tem o coeficiente angular m dado por $y - y_0 = m(x - x_0)$, então a equação da reta que é definida pelos pontos A e B é:

$$y - 0,7 = \frac{23}{37}(x - (-0,7)) \Rightarrow y - 0,7 = 0,62(x + 0,7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,62x + 1,134 = y \Rightarrow 62x - 100y + 113,4 = 0$$

No sistema de coordenadas que adotamos, pode-se perceber que a Rua Des. Paulo Passaláqua pode ser considerada paralela ao eixo y. Acompanhe como obter a equação cartesiana dessa reta.

Observe que a Rua Des. Paulo Passaláqua "passa" pelo ponto $C = (2,7; 0)$, conforme ilustra a figura abaixo:



Lembrando que a equação de uma reta paralela ao eixo y passando por um ponto $C = (x_o, y_o)$ é $x - x_o = 0$, a equação da reta que é definida pela Rua Des. Paulo Passaláqua é $x - 2,7 = 0$.

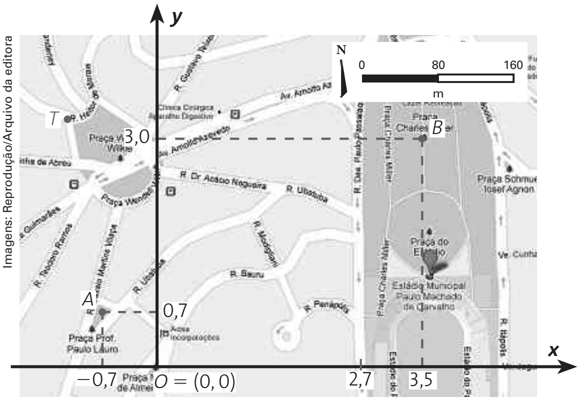
Agora, vamos determinar o ponto de intersecção da reta determinada pela Rua Des. Paulo Passaláqua e a reta que passa pelos pontos A (centro da praça prof. Paulo Lauro) e B (centro da praça Charles Miller). Como já conhecemos, no nosso sistema de coordenadas, as equações das duas retas, para determinarmos o seu ponto de intersecção basta resolvermos o sistema formado pelas suas respectivas equações, ou seja:

$$\begin{cases} 62x - 100y + 113,4 = 0 \\ x - 2,7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2,7 \text{ e } y \simeq 2,808$$

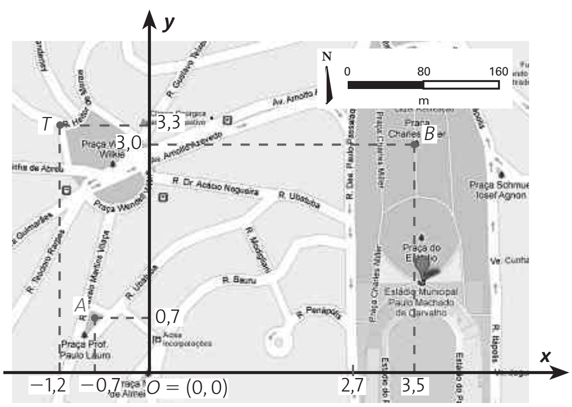
Assim, o ponto de intersecção é o ponto $Q = (2,7; 2,808)$.

Agora, tomaremos como referência o estádio do Pacaembu, pois ele gera uma grande influência nos comércios e nas infraestruturas da vizinhança devido ao enorme número de pessoas que recebe frequentemente nos jogos de futebol e eventos que ali ocorrem. Suponhamos que essa região de influência seja um círculo de raio 1 km e cujo centro coincida com o centro da praça Charles Miller. Será que o ponto T (indicado na figura abaixo) da praça Wendell Wikie pertence a essa região de influência?

Imagens: Reprodução/Arquivo da editora



Utilizando a nossa régua, graduada em centímetros, podemos ver no mapa que no nosso sistema de coordenadas, as coordenadas do ponto T são $(-1{,}2;\ 3{,}3)$, conforme ilustra a figura a seguir:



As coordenadas cartesianas dos pontos $Q = (x, y)$ de um círculo de centro $C = (x_0, y_0)$ e $\leqslant$ raio R devem satisfazer $(x - x_0)^2 + (y - y_0)_2 \leqslant R^2$. Como estamos supondo que o centro do círculo é o centro da praça Charles Miller, que é o ponto B de coordenadas $B = (3{,}5;\ 3{,}0)$, e que o raio é de 1 km = 1 000 m (que na escala do mapa corresponde a 12,5 visto que cada 1 cm no mapa corresponde a 80 m na prática), segue que os pontos $Q = (x, y)$ que pertencem à zona de influência do Pacaembu devem satisfazer a condição:

$$(x-3{,}5)^2+(y-3{,}0)^2 \leqslant (12{,}5)^2$$

Como o ponto T da praça Wendell Wikie tem coordenadas $(-1{,}2;\ 3{,}3)$, temos:

$$(-1{,}2 - 3{,}5)^2 + (3{,}3 - 3)^2 = 22{,}18 \leqslant (12{,}5)^2$$

Dessa forma, esse ponto está na zona de influência do Pacaembu.

Agora, faça o que se pede.

a) Consulte um guia de ruas, que pode ser virtual, e localize a sua escola e as proximidades dela. Adote um sistema de coordenadas cartesianas a seu gosto e localize nas proximidades da sua escola três pontos de referência (bancos, padarias, hospitais, etc.). Use uma régua, graduada em centímetros, marque as coordenadas cartesianas dos pontos de referência que você encontrou nas proximidades da sua escola e registre essas coordenadas.

b) No sistema de coordenadas cartesianas que você sugeriu, encontre a equação da reta (t) que "passa" pelo ponto que corresponde a sua escola e por um dos pontos de referência que você encontrou. Encontre também a equação da reta (s), que é definida pelos outros dois pontos de referência que você sugeriu.

c) As retas (t) e (s) definidas no item anterior se intersectam? Em que ponto?

d) Imaginando que grande parte dos alunos da sua escola morem a um raio de 10 km a partir do centro da sua escola, determine a equação cartesiana que contempla todos os pontos $Q = (x, y)$ que se encontram nessa zona de alcance da escola. Que bairros essa zona de alcance contempla?

Resolução:

Nesta atividade, cada aluno deve tomar como base o texto que foi exposto inicialmente e, a partir da consulta ao guia de ruas, introduzir o seu próprio sistema de coordenadas cartesianas e identificar 3 pontos de referência. Não há uma única resposta para esta atividade e elas dependerão do local da escola e dos pontos de referência escolhidos pelos alunos.

Unidade 3 – Geometria analítica e números complexos

Capítulo 6 – Geometria analítica: secções cônicas

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Reconhecendo formas	—	—	—
Parábola	—	—	—
Elipse	—	—	—
Hipérbole	—	—	—

O assunto que abordaremos agora, **Geometria analítica: secções cônicas** é pouco exigido na maioria dos vestibulares e também não é contemplado na Matriz do Enem. No entanto, é um tema de relevância histórica que pode auxiliar os alunos no desenvolvimento de habilidades algébricas e visuais. A imagem de abertura do capítulo pode ser explorada, propondo-se aos alunos uma pesquisa e um seminário: "A presença das secções cônicas na arquitetura". Essas formas geométricas são muito utilizadas em obras arquitetônicas, por transmitirem movimento, flexibilidade e liberdade. Como ícone da arquitetura brasileira e internacional, Oscar Niemeyer (1907-2012) tem como marca registrada o uso de secções cônicas em suas obras.

Também pode-se iniciar o estudo dividindo a sala em grupos e solicitando a cada grupo que realize uma pesquisa sobre estudiosos cujos trabalhos estão relacionados ao tema, tais como Apolônio de Pérgamo, Copérnico, Kepler, Halley e Newton. Em seguida, cada grupo deve apresentar a pesquisa à classe. Peça aos grupos que, se necessário, solicitem a ajuda dos professores de História, Filosofia e Física.

Após as apresentações dos trabalhos, aborde o tópico **Reconhecendo formas** e explique aos alunos que as cônicas são curvas obtidas a partir de secções de cones, tais como a parábola, a hipérbole e a elipse. Aproveite o momento para introduzir representações gráficas, cortes em figuras de isopor ou de massa de modelar, copo com líquido, ou imagens, e cite exemplos de situações em que cada uma das cônicas aparece.

A primeira cônica a ser estudada é a **Parábola**, e devemos lembrar os alunos de que essa secção cônica já foi estudada anteriormente no tema Funções quadráticas. Solicite que tragam papel milimetrado, régua e compasso (ou barbante) para a aula.

No papel milimetrado, defina os eixos e a escala e peça aos alunos que tracem retas de apoio (paralelas ao eixo das abscissas) em diversas alturas. Em seguida, marque um ponto qualquer no papel (ponto F), não pertencente aos eixos, e preferencialmente não muito distante do eixo x. Os alunos devem usar o compasso para localizar as intersecções entre as retas de apoio e circunferências de raio igual à altura de cada reta, com centro em F. Considerando, por exemplo, a reta de altura 3, os alunos devem fazer com que a abertura do compasso seja igual à altura da reta (no caso, 3), devem centralizar o compasso no ponto F e marcar as intersecções do compasso com a reta. Essa operação deve ser repetida nas outras retas suporte desenhadas e, para finalizar, deve-se unir os pontos de intersecção identificados. O resultado será uma parábola, com foco em F e reta diretriz equivalente ao eixo das abscissas. Destaque no desenho que as distâncias entre a reta diretriz e o ponto de intersecção e a distância entre o foco e o ponto de intersecção são sempre iguais e que a parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância de F e d. Mostre outras características importantes da parábola, identificando o vértice e o eixo de simetria.

Para apresentar a equação da parábola inicie demonstrando a equação da parábola com vértice na origem, em suas variações para os casos em que a diretriz $x = -c$ e foco $F(c, 0)$; diretriz $y = -c$ e foco $F(0, c)$; diretriz $x = c$ e foco $F(-c, 0)$ e diretriz $y = c$ e foco $F(0, -c)$, lembrando que o valor do coeficiente c representa a distância do foco ao vértice.

As demonstrações para os três últimos casos foram omitidas no livro do aluno; como auxílio ao professor, apresentamos a seguir a demonstração da equação da parábola com vértice na origem para o caso em que a diretriz $y = -c$ e foco $F(0, c)$:

$$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+c)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + \cancel{y^2} - 2cy + \cancel{c^2} = \cancel{y^2} + 2cy + \cancel{c^2} \Rightarrow \boxed{x^2 = 4cy}$$

Faça representações gráficas de cada uma das situações, com suas respectivas fórmulas e faça os exercícios resolvidos 1, 2 e 3, destacando que o coeficiente c também representa a concavidade da parábola. Os exercícios propostos 1 e 2 podem ser resolvidos em dupla, como atividade de fixação e avaliação.

Aproveite para mencionar que as equações apresentadas representam situações particulares de parábolas. Sugerimos como discussão opcional a equação da parábola com vértice em um ponto qualquer, apresentando aos seus alunos uma representação gráfica genérica, com diretriz e foco quaisquer. Use o exemplo proposto, com diretriz $x = -4$ e foco em $F(6,2)$, para mostrar que é possível determinar o vértice da cônica a partir da equação da parábola, e apresente as equações generalizadas. Faça os exercícios resolvidos 4, 5 e 6 e solicite que seus alunos resolvam os exercícios de 3 a 6 individualmente ou em duplas.

Dando prosseguimento ao estudo das cônicas, passaremos para a **Elipse**. Novamente solicite aos alunos que tragam papel milimetrado, régua, compasso ou barbante para a aula. Inicie mostrando que a elipse tem sua origem na secção obtida a partir de um plano inclinado em relação ao eixo de um cone circular reto. Aproveite para destacar que, se o plano for paralelo ao plano da base do cone, a secção obtida será uma circunferência.

Para a construção da elipse, solicite que seus alunos representem no papel milimetrado dois pontos (F_1 e F_2), determinando a distância entre eles ($2c$). Em seguida, peça que representem um segmento de reta com tamanho maior que $2c$ (chamaremos o comprimento desse segmento de $2a$), dividindo-o em 2 partes, escolhendo uma das partes para definir o raio de uma circunferência com centro em F_1(use o compasso para isso). Os alunos devem repetir a operação, usando a outra parte do segmento de reta e traçando a circunferência com centro em F_2. Em seguida, destacar os pontos de intersecção entre as circunferências e repetir todo o processo com novas divisões do segmento $2a$, obtendo assim novos pontos de intersecção. A união dos pontos obtidos resultará na elipse desejada. O processo é trabalhoso, mas ao mesmo tempo importante para desenvolver habilidades visuais e geométricas.

Observe que a elipse será então composta pelos pontos do plano cuja soma de suas distâncias aos focos será constante. Usando uma representação gráfica destaque os elementos importantes da elipse, sendo eles: $2c$ (distância focal, representada pela distância entre F_1 e F_2), $2a$ (eixo maior), $2b$ (eixo menor), O (centro da elipse). Mostre que teremos um triângulo retângulo com catetos b e c e hipotenusa a, e que o Teorema de Pitágoras será usado. Defina a excentricidade $e = \frac{c}{a}$.

Apresente então a equação da elipse, para os casos em que o eixo maior coincide com o eixo das abscissas, quando o eixo maior coincide com o eixo das ordenadas e para os casos em que o eixo maior é paralelo a um deles. Podemos desenvolver a demonstração da equação da elipse para o caso em que o eixo maior coincide com o eixo das abscissas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&PF_2 + PF_1 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \\
&= \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = \\
&= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \\
&= 4a^2 + (x-c)^2 + \cancel{y^2} - (x+c)^2 - \cancel{y^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \\
&= 4a^2 + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} - \cancel{x^2} - 2cx - \cancel{c^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}cx \Rightarrow \\
&\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Rightarrow \\
&\Rightarrow a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow a^2\left[x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}$$

Na elipse, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$

Subtituindo na equação, obtemos:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Uma vez que $ab \neq 0$, vem:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Faça os exercícios resolvidos 7, 8 e 9 como exemplos de fixação. Proponha o exercício resolvido 10, discutindo com seus alunos o contexto apresentado, no qual se pede para determinar a distância entre duas torres de uma pista de Fórmula Indy, com formato de elipse. Finalize com os exercícios resolvidos 11, 12 e 13, definindo a excentricidade da elipse e determinando os focos a partir das equações reduzidas. Os exercícios propostos 7 a 12 podem ser usados como fixação e aprofundamento, e os exercícios 13 a 19 podem ser resolvidos como atividade de revisão ou avaliação. Destaque os exercícios 18 e 19, que apresentam uma relevante aplicação das elipses na Astronomia (Física), usando a seção **Outros contextos**: Kepler, a elipse e as proporções, do final do capítulo.

A seção **Matemática e tecnologia** propõe uma interessante atividade de construção de gráficos de parábolas e elipses no computador com o programa livre GeoGebra. Não deixe de aproveitar essa oportunidade para discutir com seus alunos e usar ferramentas diferenciadas. Siga os passos propostos na atividade, resolvendo as questões ao final do texto. Caso você não esteja familiarizado com o programa, aproveite para explorá-lo, pois ele pode ser muito útil em diversos momentos.

A última das cônicas a ser estudada é a **Hipérbole**. Sugerimos que seu estudo seja feito de forma opcional. Inicie mostrando a secção que dá origem à hipérbole e defina seus elementos e principais características, não se esquecendo de representar as assíntotas. Em seguida, apresente as equações reduzidas da hipérbole, nos casos em que os focos estão sobre o eixo das abscissas, focos sobre o eixo das ordenadas e eixos paralelos.

Podemos desenvolver a demonstração da equação reduzida da hipérbole para o caso em que os focos estão sobre o eixo das abscissas da seguinte forma:

Como $PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$ e $PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$, temos:

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a
\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem:

$$\begin{aligned}
&(x+c)^2 + y^2 = \\
&= (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 - 4a^2 = \\
&= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + 2cx - \\
&- \cancel{c^2} - \cancel{y^2} - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Elevando novamente os dois membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}
&c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left[x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned}$$

Mas:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2$

Substituindo $(c^2 - a^2)$ na equação anterior, temos $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Como $ab \neq 0$, vem:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Faça os exercícios resolvidos 14 a 19, abordando os diversos aspectos da determinação das equações reduzidas e excentricidade. Solicite que seus alunos resolvam os exercícios propostos 20 a 22 como atividade de fixação e os exercícios 23 a 32 como atividade de aprofundamento e revisão. Apresente, então, a hipérbole equilátera, juntamente com o exercício resolvido 20, e resolva os exercícios propostos 33 a 36. O exercício 37 representa uma aplicação do conteúdo.

No texto Fermat e a Geometria analítica é retratada brevemente a vida desse importante matemático, um dos criadores da Geometria analítica. Merecem destaque a apresentação do plano com eixo coordenado utilizado por Fermat e os casos particulares de retas, circunferência e cônicas estudados por ele.

Ao abordar a seção **Outros contextos**, para maior compreensão das implicações das Leis de Kepler apresentadas no texto, sugerimos a composição de uma aula conjunta entre os professores de Física e Matemática para a discussão do texto. Em complemento à abordagem dada, pode-se fazer uma divisão da sala em dois grupos, cada um orientado pelo professor de uma das matérias para a execução dos exercícios propostos e enriquecimento da atividade. Na questão 1 é necessário interpretar a Lei de Kepler, avaliando em qual posição apresentada o planeta teria menor velocidade; na questão 2 usaremos a equação da elipse para determinar seu foco, nas questões 3 e 4 avaliamos a excentricidade das elipses para determinar qual se aproxima mais de uma circunferência.

Capítulo 7 – Números complexos

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Retomando: conjuntos numéricos	—	—	—
Os números complexos aparecem	—	—	—
Conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$)	—	—	—
Conjugado de um número complexo	—	—	—
Divisão de números complexos	—	—	—
Representação geométrica dos números complexos	—	—	—
Módulo de um número complexo	—	—	—
Forma trigonométrica dos números complexos	—	—	—
Aplicação à Geometria	—	—	—

Para a maioria dos alunos do Ensino Médio, o estudo dos **Números complexos** muitas vezes parece desnecessário e absurdo. As perguntas mais comuns são: para que serve isso? Onde usarei esse conhecimento? Obviamente não usaremos um número complexo em situações cotidianas, mas é muito importante que os alunos saibam que o mundo dos números se expande além dos números reais, que existem problemas para os quais não temos a solução, a não ser que pensemos em uma nova espécie de número.

Ao longo da história, algumas pessoas se preocuparam com esse tipo de problema e, se isso não tivesse ocorrido, teríamos dificuldades com algumas tecnologias, por exemplo. Sem os números complexos não seriam possíveis grandes avanços nas áreas de Engenharia Elétrica, Mecânica Quântica, Aerodinâmica, Mecânica de Fluidos, etc. Quem foram essas pessoas e quais eram os problemas em questão? Peça aos alunos que leiam o tópico **Os números complexos aparecem**, bem como a seção **Leitura** no final do capítulo e pesquisem as biografias de Girolamo Cardano, Niccolò Fontana Tartaglia, Rafael Bombelli, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss e Sir William Rowan Hamilton. Converse com os alunos sobre os resultados das pesquisas feitas, pontuando em uma linha do tempo. Se necessário, peça ajuda ao professor de História, ele certamente enriquecerá a discussão.

Em seguida, discuta os problemas que geraram as teorias que estudaremos, tais como o problema da raiz quadrada negativa (já observada por Diofanto no século III) e as soluções das equações cúbicas propostas por Cardano. Uma das áreas que teve grandes avanços relacionados aos números complexos foi a Engenharia Elétrica, principalmente relacionados a corrente alternada e distribuição de energia elétrica. A imagem de abertura do capítulo traz a imagem de eletricistas: o objetivo é apresentar uma situação próxima da realidade dos alunos, cujo embasamento teórico (físico/matemático) se relaciona à utilização dos números complexos. Os alunos também podem ser incentivados a pesquisarem profissões de nível técnico/superior de tecnologia/superior (bacharel) que também possuam alguma relação teórica com o conjunto $\mathbb{C}$. Sugerimos como fonte de consulta opcional (acessos em: 24 maio 2016): OCHI, Masashi. Guia Mangá Números Complexos. Toi Ishino. Trend Pro. São Paulo: Novatec, 2015; <www.gilmaths.mat.br/Jogos%20 Flash/complexos.swf>; <www.nilsonjosemachado.net/sema20091027.pdf>; <http://ifgjatai.webcindario.com/circuitos.pdf>.

Apresente o tópico **Retomando: conjuntos numéricos** e mostre aos alunos que determinadas equações têm solução em um conjunto numérico, mas não em outro. Aumente o grau de dificuldade das equações apresentadas, proponha a solução da equação $x^2 + 1 = 0$, destaque que ela não apresenta soluções em nenhum conjunto numérico estudado até então, mas a solução poderá ser determinada no conjunto dos números complexos. Apresente então a relação $i^2 = -1$ e a solução da equação $x^2 + 1 = 0$ nessa nova proposta.

Inicie o estudo de **Conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$)** e destaque que um número complexo não é exclusivamente composto por sua parte imaginária, e que ele pode ser representado na forma algébrica $z = a + bi$, definindo as componentes reais e imaginárias do número. Faça os exemplos sugeridos, resolvendo a seguir os exercícios resolvidos 1 a 3 como fixação. Use o exercício resolvido 4 para mostrar o cálculo das diversas potências de i e o 5 para resolver equações impossíveis em $\mathbb{R}$. Solicite que os alunos resolvam os exercícios 1 a 4 como fixação. Use os exercícios resolvidos 6 e 7 para exemplificar a resolução de equações em $\mathbb{C}$ e potências de números complexos.

Após a resolução dos demais exercícios, aborde o **Conjugado de um número complexo**, fazendo um paralelo com a definição de inverso de um número, sabendo que o produto de um número pelo seu inverso é igual a 1. A relação proposta é válida também no conjunto dos números complexos, no entanto, devemos tomar o cuidado de lembrar que um número sempre deve ser escrito com denominadores reais, ou seja, a unidade imaginária não deve ficar no denominador. Lembre os alunos do processo de racionalização de raízes, pois teremos um procedimento similar no caso dos números complexos.

Use como exemplo o número complexo $z = 2 + i$. Qual será a forma algébrica do número complexo $\frac{1}{z}$?

O número procurado será, inicialmente, definido por $\frac{1}{(2+i)}$. No entanto, conforme discussão anterior, não devemos deixar a unidade imaginária no denominador. Usaremos então o procedimento a seguir (se necessário, relembre com sua turma o produto notável $(a + b)(a - b) = (a^2 + b^2)$):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+i} = \frac{1}{(2+i)} \cdot \frac{(2-i)}{(2-i)} = \frac{(2-i)}{2^2-i^2} = \frac{2-i}{4-(-1)} =$$

$$= \frac{2-i}{4+1} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

Podemos dizer, então, que $\frac{1}{z} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

Para termos certeza de que o cálculo está correto, podemos fazer a verificação, sabendo que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$, temos:

$$z \cdot \frac{1}{z} = (2+i) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right) = 2 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{i}{5}\right) + i \cdot \left(\frac{2}{5}\right) + i \cdot \left(-\frac{i}{5}\right) =$$

$$= \frac{4}{5} - \cancel{\frac{2i}{5}} + \cancel{\frac{2i}{5}} - \frac{i^2}{5} = \frac{4}{5} - \frac{-1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Finalize definindo o conjugado de um número complexo $z = a + bi$ como o número complexo $\overline{z} = a - bi$ e faça os exercícios resolvidos 8 a 10 como exemplo e solicite que os alunos resolvam os exercícios 9 a 12 como fixação.

Usaremos o mesmo raciocínio para efetuar a **Divisão de números complexos**, usando como exemplos os exercícios resolvidos 11 a 13. Os exercícios propostos 13 a 16 podem ser resolvidos em dupla, como aprofundamento e avaliação.

Uma vez compreendida e explorada a forma algébrica, passaremos para a **Representação geométrica dos números complexos**, pois nela residem as maiores aplicações tecnológicas e científicas relacionadas ao conjunto dos números complexos. Retome a pesquisa feita no início do capítulo, lembrando que Gauss costumava representar o número complexo $z = a + bi$ por um ponto $P(a, b)$ no sistema de coordenadas, denominado plano complexo, ou plano de Argand-Gauss.

Represente geometricamente os números complexos propostos no livro. Ressalte que os números reais serão representados no eixo x, os números imaginários puros pertencerão ao eixo y e os demais complexos ($a + bi$, com a e b diferentes de zero) serão localizados nos vários quadrantes, dependendo dos sinais de a e b. Use os exercícios resolvidos 14 a 17 para fixar o conceito e discutir situações relacionadas, tais como soma de números complexos. Os exercícios propostos 17 a 20 podem ser usados como atividade de fixação. O exercício 21 exemplifica a interpretação geométrica do conjugado.

Podemos introduzir o conceito de **Módulo de um número complexo** solicitando aos alunos que determinem a distância entre o número complexo $z = 4 + 3i$ (em sua representação geométrica) e a origem do plano complexo. Use o Teorema de Pitágoras para determinar a distância solicitada e em seguida faça a generalização para um número complexo $z = a + bi$ qualquer, representado pelo ponto (a, b), definindo assim seu módulo. Use os exercícios resolvidos 18 e 19 para exemplificar a situação proposta, destacando que a distância entre dois pontos (z e w) quaisquer no plano complexo pode ser calculada aritmeticamente pelo módulo da diferença entre eles. O exercício 22 pode ser usado como atividade de fixação, e os exercícios 23 e 24 em dupla, como atividade de aprofundamento e avaliação.

O estudo da **Forma trigonométrica dos números complexos** pode ser iniciado com uma revisão sobre trigonometria e uma atividade prática.

Para a revisão, solicite uma pesquisa sobre trigonometria no triângulo retângulo, arcos e razões trigonométricas no ciclo trigonométrico. Faça uma revisão geral sobre o tema, lembrando as definições de seno e cosseno no triângulo retângulo, localização de ângulos no ciclo trigonométrico, seno e cosseno no ciclo. Peça que localizem e determinem os valores de seno e cosseno dos seguintes ângulos:

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 150°
e) 210°
f) 330°
g) 135°
h) $\frac{\pi}{3}$ rad
i) $\frac{\pi}{4}$ rad
j) $\frac{\pi}{6}$ rad
k) $\frac{3\pi}{4}$ rad
l) $\frac{5\pi}{4}$ rad
m) $\frac{7\pi}{4}$ rad

Para a atividade prática, solicite aos alunos que tragam para a aula régua, transferidor, trena ou fita métrica e bolas de gude. Leve-os para a quadra poliesportiva e divida a turma em 4 grupos, cada um ocupando o espaço próximo a um dos vértices da quadra. Oriente-os a usar as linhas externas da quadra como referência para o plano complexo, definindo os eixos. Em seguida, solicite que escolham duas bolinhas para permanecer no chão (as restantes devem ser recolhidas). A tarefa consiste em determinar a posição das bolinhas, usando o sistema de coordenadas cartesiano e medindo a distância entre as bolinhas e a origem do sistema de coordenadas (módulo) e também o ângulo formado entre o vetor da distância e o eixo x. Todas as informações devem ser registradas. Ao voltar para a sala de aula, proponha, por exemplo, a seguinte situação: suponha que uma bolinha tenha parado no ponto (6, 8) do plano. Isso significa que a distância entre a bolinha e a origem do sistema de coordenadas (módulo) vale 10 e que o ângulo formado pelo vetor da distância e o eixo x vale aproximadamente 53°. Complemente a atividade solicitando que cada grupo compare os valores tabelados de senos e cossenos para os ângulos encontrados com os valores de senos e cossenos obtidos por meio do cálculo direto (efetuando as divisões). Finalize com a definição da forma trigonométrica do número complexo, associando a representação da posição no plano com seu módulo e argumento (ângulo formado entre o vetor da distância e o eixo x).

Complemente com o exercício resolvido 20 e solicite aos alunos que resolvam o exercício proposto 25. Comente que também é possível determinar a forma algébrica de um número complexo a partir de sua forma trigonométrica, usando o exercício resolvido 21 como exemplo. Os exercícios 26 e 27 podem ser resolvidos em dupla ou pelo grupo, em complemento à atividade proposta anteriormente.

As operações de multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica podem ser abordadas por meio do exercício resolvido 22. Destaque as operações de adição e subtração de ângulos e sua representação no círculo trigonométrico. Os exercícios 28 e 29 podem ser resolvidos como atividade de fixação.

Questione seus alunos sobre o que aconteceria no caso do produto $z_1 \cdot z_1$, usado no exemplo anterior, para exemplificar o caso da potenciação de números complexos na forma trigonométrica – a primeira fórmula de Moivre, determinando em seguida o valor de z_1^{10}, conforme sugerido no exercício resolvido 23. Destaque que essa operação seria muito mais trabalhosa caso optássemos por efetuá-la usando o número complexo na forma algébrica. Finalize discutindo o exercício resolvido 24, que apresenta uma situação-problema sobre o alcance máximo de uma antena *wireless* utilizando um plano complexo. Os exercícios propostos 30 a 32 podem ser realizados em dupla ou grupo, para aprofundamento e avaliação.

Como assunto opcional podemos apresentar a operação de Radiciação – raízes enésimas de números complexos. Apresente a segunda fórmula de Moivre, discuta os exercícios resolvidos 25 e 26 e proponha a resolução dos exercícios propostos 33 a 35 como atividade em dupla ou grupo.

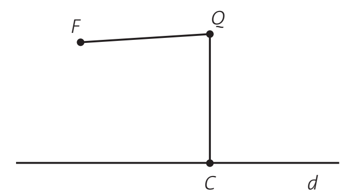
Outra interessante discussão se faz na **Aplicação à Geometria**, quando podemos usar os números complexos na forma trigonométrica para operar rotações em segmentos ou figuras geométricas localizadas no plano complexo. Os exercícios resolvidos 27 e 28 apresentam algumas dessas situações, e o exercício proposto 36 pode ser usado como atividade complementar.

As questões da seção **Vestibulares de Norte a Sul** podem ser usadas como revisão ou avaliação, por apresentarem uma boa diversidade de questões sobre os temas estudados na unidade, assim como as questões apresentadas na seção **Pensando no Enem**, na qual temos algumas situações contextualizadas que envolvem temas como: Física e Engenharia de Controle.

Atividades complementares à Unidade 3

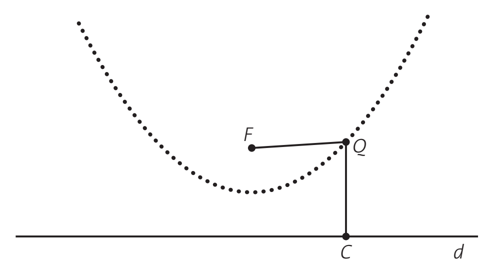
No primeiro estudo das chamadas secções cônicas, essas curvas são, geralmente, apresentadas como intersecções de um plano com a superfície de um cone e, em seguida, são dadas as suas definições formais, que postas em prática em um sistema de coordenadas cartesianas geram de maneira relativamente rápida as equações cartesianas dessas curvas. Neste primeiro contato, uma maneira bastante interessante de desenhar a parábola, a elipse e a hipérbole é por meio de dobraduras feitas em uma folha de papel. Essa técnica é conhecida como Método de Van Schooten. Veja como construir, por exemplo, uma parábola.

Inicialmente, devemos lembrar que em um plano α, dada uma reta d e um ponto F, não pertencente a d, chamamos de parábola de foco F e diretriz d o lugar geométrico dos pontos do plano α que são equidistantes de F e de d.



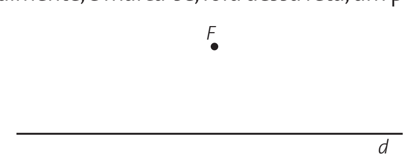
O ponto Q pertence à parábola de foco F e diretriz d se, e somente se, $d(Q, F) = d(Q, C)$, o que equivale a dizer que o ponto Q pertence à mediatriz do segmento CF.

À medida que o ponto C se desloca sobre a reta d, o ponto Q descreve uma curva que é justamente a parábola de foco F e diretriz d, conforme ilustra a figura a seguir:

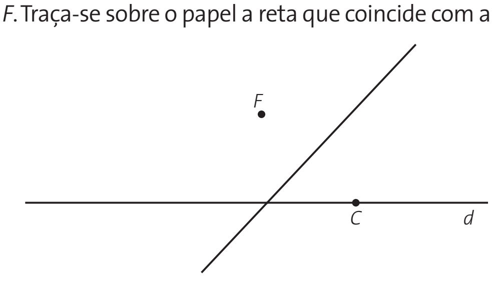


Para obtermos o traço da parábola de foco F e diretriz d, em uma folha de papel podemos efetuar os seguintes passos:

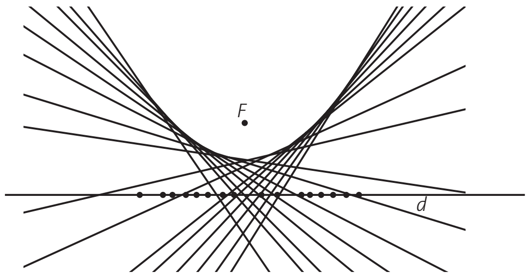
1º passo: Em uma folha de papel desenha-se uma reta, horizontalmente, e marca-se, fora dessa reta, um ponto fixo F.



2º passo: Determina-se um ponto C qualquer sobre a reta d e dobra-se o papel de forma a fazer coincidir os pontos C e F. Traça-se sobre o papel a reta que coincide com a dobra.



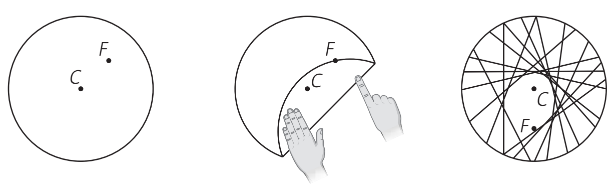
3º passo: Repete-se essa operação várias vezes, escolhendo-se vários pontos distintos sobre a reta d e encontra-se um conjunto de retas que tangenciam uma curva, que é justamente uma parábola, conforme ilustra a figura a seguir:



Com base nessa atividade prática, as seguintes questões podem ser propostas para os alunos:

a) Explique por que o processo descrito nos leva ao traço de uma parábola.

b) Uma elipse é definida como lugar geométrico dos pontos de um plano α cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (chamados focos) é constante. De modo análogo ao que fizemos com a parábola, podemos construir uma elipse por meio das dobraduras de uma folha de papel, conforme ilustramos a seguir:



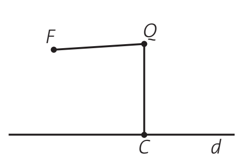
Para essa construção recomendamos o uso de papel-manteiga, tesoura e compasso para criar um papel circular que será usado como base para a construção. Descreva, por escrito, o procedimento sugerido pela figura; a partir daí exiba em um pedaço de papel o traço de uma elipse obtida pelo procedimento sugerido.

c) Explique por que o processo descrito no item anterior nos leva a uma elipse.

d) Descreva a definição formal de uma hipérbole e, em seguida, sugira um processo semelhante aos processos que descrevemos anteriormente para desenharmos uma hipérbole. Justifique por que o procedimento que você sugeriu realmente gera uma hipérbole.

Resolução:

a) Na figura abaixo, à medida que o ponto C se desloca sobre a reta d, o ponto Q, localizado sobre a mediatriz do segmento FC, sempre é equidistante dos pontos F e da reta d.



Como $d(Q, F) = d(Q, C)$ para toda posição do ponto C sobre a reta d, segue pela própria definição de parábola de foco F e de diretriz d que o ponto Q está a cada momento sobre a parábola de foco F e de diretriz d.

b) O procedimento pode ser resumido aos seguintes passos:

1º passo: Assinale um ponto C mais ou menos no centro da folha de papel e com um compasso, desenhe uma circunferência, com centro em C e, a seguir, recorte a circunferência que você desenhou.

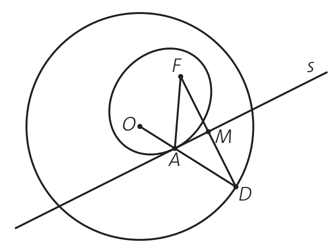
2º passo: Marque outro ponto qualquer dentro do círculo, chamado de F.

3º passo: Escolha um ponto D sobre a circunferência e dobre o círculo de tal maneira que o ponto D coincida como ponto F, como mostra a figura do enunciado. Agora, desdobre o papel.

4º passo: Repita essa operação para diferentes pontos sobre a circunferência.

Quando tiver realizado esta operação um grande número de vezes, poderá observar que as dobras parecem tangenciar uma curva. Esta curva é uma elipse.

c) Observe a figura:



Note que a reta s (a dobra no papel) é a mediatriz do segmento DF. O ponto A (definido pela intersecção da reta s com o segmento OD) é um ponto da elipse de focos F e O. Pelo critério de congruência LAL, podemos afirmar que os triângulos FMA e DMA são congruentes e que, portanto, $FA = DA$. Pela definição da elipse podemos afirmar que $OA + FA =$ $= AO + AD =$ medida do raio da circunferência, portanto constante. Como $AO + AF =$ constante, segue que o ponto A é um dos pontos sobre a elipse de focos O e F.

d) Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano α cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (chamados focos) se mantém constante. A sua construção é semelhante à da elipse e necessita também de um pedaço papel-manteiga e compasso. Desenha-se um círculo em um pedaço de papel-manteiga. Marca-se um ponto F no seu exterior e dobra-se o papel diversas vezes de tal modo que o ponto F coincida com pontos sobre a borda do círculo. Após dobrar o papel um grande número de vezes, as dobras devem ter definido no papel a figura de uma hipérbole.

A seguir apresentamos outra sugestão de atividade prática que pode ser abordada como um miniprojeto, pois é uma proposta de construção, por parte do aluno, de material concreto. Esperamos fazer dessa aula uma atividade não rotineira. Uma atividade prática ajuda a tornar a aula mais atraente, diversificada, ilustrada e, consequentemente, mais produtiva.

O objetivo é construir cônicas por meio de ferramentas desenvolvidas pelos próprios alunos, visando cristalizar o conteúdo aprendido em sala de aula. Outro ponto importante é tornar a Matemática mais significativa para o aluno, contextualizando e relacionando a teoria com a prática. Dessa forma, o aluno poderá entender melhor as definições e utilizar as principais relações das cônicas.

Elipse

a) Material necessário:
- Cartolina branca
- Isopor grosso ou base de madeira (aproximadamente 50 cm × 50 cm)
- Pedaço de barbante (aproximadamente 60 cm)
- 2 pregos pequenos
- Martelo
- Lápis comum
- Cola

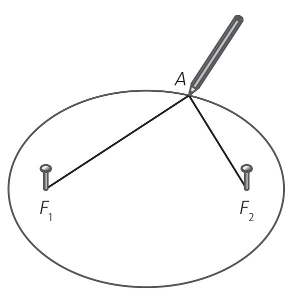
b) Procedimento para a montagem:

Cole a cartolina no isopor ou na madeira.

Pregue os pregos onde deseja que sejam os focos da elipse. (Não pregue até o final, deixe uma parte do prego para amarrar o barbante.)

Amarre as extremidades do barbante nos pregos (deixe uma pequena folga).

Utilizando o lápis e mantendo o barbante sempre esticado, desenhe a elipse.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Hipérbole

a) Material necessário:
- Cartolina branca
- Isopor grosso ou base de madeira (aproximadamente 50 cm × 50 cm)
- 2 pedaços de barbante
- 1 régua (preferencialmente aquelas que possuem furos nas extremidades)
- 2 pregos pequenos
- Martelo
- Lápis comum
- Cola

b) Procedimento para a montagem:

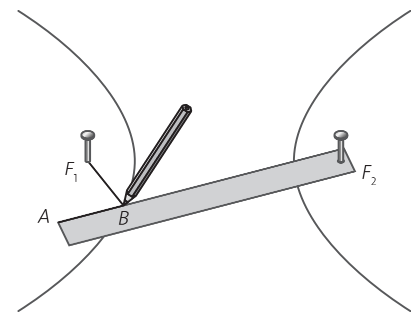
Cole a cartolina no isopor ou na madeira.

Pregue os pregos onde deseja que sejam os focos da hipérbole. (Não pregue até o final, deixe uma parte do prego para amarrar o barbante.)

Amarre as extremidades de um dos barbantes em um dos pregos e em uma das extremidades da régua. Coloque a outra extremidade da régua no outro prego.

Utilizando o lápis e a régua e mantendo o barbante esticado, conforme a figura, desenhe um dos ramos da hipérbole.

Repita o procedimento para o outro ramo da hipérbole.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Parábola

a) Material necessário:
- Cartolina branca
- Isopor grosso ou base de madeira (aproximadamente 50 cm × 50 cm)
- Pedaço de barbante
- 1 prego pequeno
- Martelo
- Lápis comum
- Cola
- Régua
- Esquadro retângulo

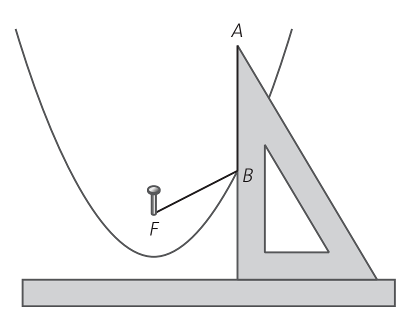
b) Procedimento para a montagem:

Cole a cartolina no isopor ou na madeira.

Pregue o prego onde deseja que seja o foco da parábola. (Não pregue até o final, deixe uma parte do prego para amarrar o barbante.)

Amarre uma das extremidades do barbante no prego e a outra extremidade em um dos vértices (que possui ângulo agudo) do esquadro.

Utilizando o lápis, mantendo o barbante esticado e fazendo o esquadro deslizar na régua, desenhe a parábola.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Peça aos alunos que formem grupos e providenciem em casa o material necessário e escolham uma das cônicas (elipse, hipérbole ou parábola) com os materiais. Eles vão desenhar a cônica e apresentar para os demais colegas. Dê liberdade para que usem a imaginação no trabalho.

Aproveite a oportunidade para relembrar e mostrar na prática a definição e os principais elementos das cônicas.

Unidade 4 – Polinômios, equações algébricas e equações trigonométricas

Capítulo 8 – Polinômios

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Definição Função polinomial	Conhecimentos algébricos: Funções polinomiais	C5	H21/H22
Valor numérico de um polinômio	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais)	C1	H3/H4
Igualdade de polinômios Raiz de um polinômio	Conhecimentos algébricos: Equações	C5	H19/H21
Operações com polinômios	Conhecimentos numéricos: Operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais)/Conhecimentos algébricos: Funções polinomiais, Equações	C1/C5	H3/H4/H21

Ao nos depararmos com o termo **Polinômios** automaticamente pensamos em cálculos complicados e nenhuma aplicação. No entanto, o tema é de extrema relevância em diversas áreas do conhecimento, tais como Física, Economia, Medicina e Biologia. Em todas elas, usam-se funções polinomiais para determinar correlações, efetuar modelagens numéricas e previsões.

A imagem de abertura do capítulo faz menção a um interessante ramo de pesquisa da Matemática, voltado ao estudo de representações gráficas de funções polinomiais. No caso da imagem em questão, o algoritmo utilizado na técnica de plotagem visa encontrar raízes em pares de conjugados complexos usando apenas aritmética real. Os pontos brancos se relacionam com o lugar do plano onde se encontram as raízes e os pontos coloridos se relacionam com os valores obtidos no final de cada passo executado pelo algoritmo. Esta explicação não precisa ser transmitida aos alunos, pois o objetivo da imagem é dar um exemplo de pesquisa sobre polinômios. Se considerar interessante, aproveite a oportunidade para organizar uma pesquisa e um seminário com o tema: "O que fazem os matemáticos?". Outra possibilidade de introdução ao conteúdo de polinômios é abordar o assunto explorando o cálculo de áreas de figuras planas e áreas totais de sólidos geométricos, com o intuito de mostrar que algo muitas vezes reconhecido como fórmula pode ser entendido como um polinômio. Aproveite o exemplo sugerido para explorar a **Definição** de uma expressão polinomial, ou polinômio, fazendo a generalização, sem esquecer que os coeficientes agora são tratados como números complexos, não necessariamente reais, e que expressões nas quais o expoente é fracionário ou negativo não são consideradas expressões polinomiais. Em seguida, apresente a **Função polinomial** (e, consequentemente, o polinômio) e defina os conceitos de grau do polinômio e polinômio identicamente nulo.

Uma vez apresentados os conceitos iniciais, partiremos para a determinação do **Valor numérico de um polinômio**, usando o polinômio $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ como sugestão de exemplo. Atribua valores para a variável x, usando a maior diversidade possível de opções, tais como $x = 4$, $x = 3$, $x = -2$, $x = \mathrm{i}$, finalize com $x = 1$ e demonstre que, nesse caso, o resultado equivale à soma dos coeficientes do polinômio. Use o exercício resolvido 1 para discutir problemas que envolvem grau de um polinômio e o exercício resolvido 2 para determinar um polinômio e calcular valor numérico. Os exercícios propostos 1 a 6 podem ser resolvidos como atividade de fixação, devendo-se orientar os alunos no exercício 5, pois envolve o conceito de raiz, ainda não discutido.

Peça então a seus alunos que respondam à seguinte pergunta: Dois polinômios podem ser iguais? Quais são as condições para que isso aconteça? Apresente os polinômios $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$, $q(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 5$ e $t(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que eles avaliem as condições necessárias para a **Igualdade de polinômios** $p(x) = t(x)$, $q(x) = t(x)$ e $p(x) = q(x)$. Observe que $p(x)$ será sempre diferente de $q(x)$. Faça os exercícios propostos 7 a 10 como atividade de fixação.

Discuta, então, o conceito de **Raiz de um polinômio**, use o polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 10$ como exemplo, determine os valores numéricos de $p(5)$ e $p(3)$, mostrando que 5 é raiz de $p(x)$, pois $p(5) = 0$ e que 3 não é raiz de $p(x)$, pois $p(3) = -2$. Destaque que a condição para a determinação da raiz é $p(x) = 0$, e que não é o valor de x que vale necessariamente zero. Apresente exemplos diversos, destacando que as raízes não necessariamente serão números inteiros, mas podem ser frações – como no caso de $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$, que possui raízes $x = 1$ e $x = \frac{1}{2}$, ou até mesmo números complexos – como no caso de $q(x) = x^2 + 1$, que possui raízes $x = \mathrm{i}$ e $x = -\mathrm{i}$. Use como exemplo os exercícios resolvidos 5 e 6, e solicite que resolvam os exercícios propostos 11 a 14, como atividade de fixação e avaliação.

As **Operações com polinômios** também devem ser explicadas a partir de exemplos, retomando as operações com expressões algébricas, como adição, subtração e multiplicação (tanto de dois polinômios quanto de um polinômio por um número real). Observe que a divisão será estudada separadamente. Os exercícios 15 e 16 podem ser resolvidos individualmente, para fixação das operações.

A operação de divisão de polinômios deve ser abordada a partir da divisão de números naturais. Use como exemplo as operações $6 : 3 = 2$ (observe que esta é uma divisão exata, com resto zero, portanto podemos escrever a relação $6 = 2 \cdot 3$) e a operação $7 : 3$ cujo resultado pode ser avaliado a partir da relação $7 = 2 \cdot 3 + 1$, pois o resto dessa divisão vale 1. Extrapole o procedimento escrevendo a condição: $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$, em que $p(x)$ é o divisor, $h(x)$ é o dividendo, $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto, respeitando a condição de que o grau de $r(x)$ não pode ser nem igual nem maior que o grau de $h(x)$. Revise o método da chave para a divisão de números naturais, use os exemplos propostos no texto, extrapole em seguida para a divisão utilizando o mesmo método nos exemplos propostos no texto. Não deixe de reforçar que, para o caso de divisões exatas, o resto será zero, e que nesse caso o polinômio $p(x) = h(x) \cdot q(x)$ será divisível tanto por $q(x)$ quanto por $h(x)$. Resolva, com os alunos, os exercícios resolvidos 7 a 9, destaque a aplicação do uso de polinômios proposta no 9 para explorar a operação da divisão. Solicite que os alunos resolvam os exercícios propostos 17 a 20 como atividade de fixação.

Para facilitar a compreensão das operações, uma vez que muitos alunos podem sentir dificuldade na divisão com o método da chave, apresente para o caso da Divisão por $(x - a)$: dispositivo prático de Briot-Ruffini, que possibilita o cálculo específico dessas divisões com mais rapidez. Para tanto, apresente o algoritmo de Briot-Ruffini, exemplificando com a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$, cujo resultado será $q(x) = 3x^2 + x + 3$ e $r(x) = 4$. Não deixe de fazer a verificação. Complemente a explicação com os exercícios resolvidos 10 e 11 e solicite que os alunos resolvam os exercícios 21 a 25 como atividade de fixação e aprofundamento.

É importante também discutir o teorema de D'Alembert, uma vez que com ele podemos calcular o resto de uma divisão sem a necessidade de efetuá-la. Usando o exercício resolvido 12 como exemplo, efetue a divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ por $h(x) = x - 4$ usando o dispositivo de Briot-Ruffini, cujo resultado será $q(x) = 2x^2 + 7x + 33$ e $r(x) = 129$. Faça a verificação para se certificar de que o processo foi feito corretamente. Observe que o cálculo não é simples, uma vez que os coeficientes assumiram valores altos, e que, nesse caso, o uso do teorema de D'Alembert torna o processo bem mais rápido. Apresente então o exercício resolvido 13, no qual se pede para determinar o valor de um dos coeficientes do polinômio $p(x)$ sabendo que ele é divisível pelo polinômio $h(x)$. Nesse caso, o uso do teorema de D'Alembert reduz significativamente o tempo de resolução e a probabilidade de erros de cálculo. Não deixe de destacar as vantagens e possibilidades de uso para seus alunos. Solicite que resolvam os exercícios 26 a 28 como atividade de fixação, e os exercícios 29 e 30 como atividade em dupla, para aprofundamento e avaliação.

Outra discussão importante envolve o teorema do fator, muito usado na resolução de equações de segundo grau. Proponha a seus alunos que descubram quais são as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 6$ (as raízes são 2 e 3). Em seguida solicite que usem o dispositivo prático de Briot-Ruffini para verificar que a divisão de $p(x)$ pelos polinômios $(x - 2)$ e $(x - 3)$ gera resto zero, o que é esperado, uma vez que o polinômio é divisível por $(x - 2)$ e $(x - 3)$. Essas conclusões são triviais para o professor, mas provavelmente muitos alunos não fizeram essas conexões. Peça então que verifiquem que o produto dos fatores $(x - 2)$ e $(x - 3)$ resulta em $p(x)$, e faça a generalização com o teorema do fator. Use os exercícios resolvidos 14 e 15 para exemplificar situações em que o teorema do fator seja útil, destacando que os fatores podem ser dois polinômios quaisquer, e não serão obrigatoriamente do tipo $(x - a)$. Solicite que resolvam os exercícios 31 a 34 como atividade de fixação e aprofundamento.

Na seção **Matemática e tecnologia** apresentamos uma sugestão de atividade que envolve *Gráfico de funções polinomiais* com o GeoGebra. Essa atividade pode ser feita individualmente ou em grupo, como avaliação complementar, e pode ser muito estimulante.

Capítulo 9 – Equações algébricas

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Equações algébricas ou polinomiais	Conhecimentos algébricos: Equações	C5	H21/H22
Definições e elementos			
Teorema fundamental da Álgebra			
Decomposição em fatores de 1º grau			
Relações de Girard			
Equações algébricas de grau maior que 3			
Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros	—	—	—
Raízes complexas não reais em uma equação algébrica de coeficientes reais	—	—	—

O estudo das **Equações algébricas** representa uma finalização importante de todo um ciclo de aprendizagem matemática, iniciado no Ensino Fundamental com expressões algébricas, resolução de equações de 1º e 2º graus e produtos notáveis, cujo grau de complexidade foi gradativamente aumentando no Ensino Médio, com os estudos das funções e polinômios, entre tantos temas em que a resolução de equações se faz necessária, até chegarmos ao ápice, que extrapola o universo do conjunto dos números reais e possibilita a solução de equações que anteriormente não teriam solução. Converse com seus alunos a esse respeito, ajudando-os a perceber a evolução do processo de aprendizagem.

Na abertura do capítulo encontra-se uma descontraída e marcante fotografia de Albert Einstein, um dos físicos mais importantes de toda a história e também aquele que enunciou a famosa fórmula $E = mc^2$, a "equação mais famosa do mundo", que também é uma equação algébrica! Se possível, em conjunto com o professor de Física, organizem uma palestra sobre Física moderna, abordando seu desenvolvimento, os principais pesquisadores da área e principalmente a equivalência entre massa e energia.

No tópico **Equações algébricas ou polinomiais** são apresentadas três interessantes contribuições matemáticas referentes a equações algébricas. Faça uma sistematização de cada uma delas na lousa de forma bem pausada e didática, para ajudar os alunos a compreenderem esses resultados matemáticos obtidos há séculos. Converse com eles sobre o que cada um desses resultados representa do ponto de vista matemático. Após a conversa com os alunos, dê exemplos de algumas equações em diversos graus, com o objetivo de apresentar as **Definições e elementos**.

Em seguida, defina o conceito de raiz de uma equação polinomial ou algébrica, recordando que a definição já foi estudada no capítulo anterior.

Prossiga apresentando a definição de conjunto solução de uma equação algébrica e proponha a resolução das equações apresentadas no livro. Destaque que a solução da equação proposta no exemplo **d** será discutida posteriormente.

Use as soluções obtidas nos exemplos **a**, **b** e **c** para apresentar o **Teorema fundamental da Álgebra** e sua principal aplicação, a **Decomposição em fatores de 1º grau**; destaque que a quantidade de raízes – e consequentemente a quantidade de fatores de primeiro grau – equivale ao grau da equação. Volte aos exemplos anteriores e faça as verificações.

Ressalte que o processo de decomposição em fatores de 1º grau é muito importante para a resolução de equações. Por exemplo, sabendo que $x = 2$ é raiz de $x^2 - 7x + 10 = 0$, para determinarmos a outra raiz pela decomposição de fatores de 1º grau, é necessário efetuar a divisão de $x^2 - 7x + 10$ por $x - 2$. Recorde os alunos de que um polinômio $p(x)$, com raiz $x = a$, pode ser escrito na forma $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$, em que $q(x)$ representa o quociente da divisão (vide capítulo anterior, Divisão de polinômios). Assim, podemos usar o dispositivo de Briot-Ruffini para realizar a operação de divisão, obtendo $q(x) = x - 5$.

No caso das equações algébricas de 2º grau, é possível determinar o conjunto solução a partir de fórmulas muito conhecidas, mas é importante usar como exemplo inicial uma equação que o aluno possa comparar.

Use o exercício resolvido 2 para exemplificar a resolução de uma equação algébrica de 4º grau, na qual é necessário o conhecimento prévio de duas raízes, e os exercícios resolvidos 3 e 4 para exemplificar o procedimento de determinação de equações algébricas a partir de suas raízes. Os exercícios 1 a 3 podem ser usados como atividade de fixação, e os exercícios 4 a 6 como atividade em dupla, para aprofundamento e avaliação. Se necessário, no exercício 6, relembre a regra de Sarrus para o cálculo do determinante.

A cada fator de primeiro grau associamos uma raiz, logo, nos casos em que ocorrem fatores idênticos, acontecerá a multiplicidade da raiz. Use os exemplos sugeridos no texto para apresentar situações nas quais ocorrem raízes de multiplicidade 2 ou 3, use os exercícios resolvidos 5 a 7 para ilustrar problemas que envolvem raízes múltiplas. Destaque que a multiplicidade da raiz está associada ao número de vezes que poderemos efetuar a divisão do polinômio usando, por exemplo, o dispositivo prático de Briot-Ruffini. Os exercícios 7 a 9 podem ser usados como atividade de fixação, e os exercícios 10 a 14 como aprofundamento e revisão.

É importante destacar que, em muitos casos, podemos determinar a solução de uma equação algébrica sem obrigatoriamente usar a decomposição em fatores de 1º grau e a fórmula para a resolução da equação de 2º grau. Para isso usamos as **Relações de Girard**, que nos oferecem relações matemáticas entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica.

Ao apresentar as relações de Girard na equação de 2º grau, faça a verificação usando, por exemplo, a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujo conjunto solução é $S = \{2, 3\}$. Para estimular seus alunos, mostre que também podemos usar as relações de Girard para criar equações, sabendo de antemão seu conjunto solução. Use, por exemplo, as raízes 1 e 2. Pelas relações de Girard teremos: $x_1 + x_2 = 3$ e $x_1 \cdot x_2 = 2$. Se tomarmos $a = 1$ teremos $-\frac{b}{1} = 3$, logo $b = -3$ e $\frac{c}{1} = 2$, logo $c = 2$, que gera a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$. Verifique que o conjunto solução dessa equação é $S = \{1, 2\}$.

Estimule seus alunos a pensar na equação a partir da resposta com um desafio. Divida a sala em dois grupos e solicite a cada um que invente equações de segundo grau com o roteiro acima, de vários níveis de dificuldade:

- nível 1: duas equações com duas raízes naturais distintas;
- nível 2: duas equações com duas raízes inteiras distintas;
- nível 3: duas equações com raízes racionais;

- nível 4: duas equações com raízes complexas não reais (observe que o tema será estudado a seguir, indique apenas que as raízes devem ser do tipo z e seu complexo conjugado).

As equipes deverão resolver as equações da outra equipe, também pelas relações de Girard e registrar as resoluções em papel. A equipe que obtiver maior número de acertos será a vencedora.

Converse com seus alunos sobre a atividade, registrando suas reações e percepções. Aproveite para destacar que as relações de Girard representam uma ferramenta importante na resolução de equações algébricas, especialmente as de 3º grau. Apresente as Relações de Girard na equação de 3º grau e na equação de grau *n*, complemente com os exercícios resolvidos 8 a 10 e proponha a resolução em dupla dos exercícios 15 a 25 como atividade de fixação e aprofundamento.

Em **Equações algébricas de grau maior que 3** é apresentado com uma abordagem histórica um dos mais famosos teoremas da Matemática e o percurso de aproximadamente 200 anos para se chegar até ele.

A seção **Outros contextos** nos lembra que fazer Matemática também é fazer poesia. Com base na célebre *Poesia matemática* de Millôr Fernandes e nos depoimentos de um matemático e um físico, ao longo de seis atividades os alunos poderão trabalhar com um lado da Matemática relativamente desconhecido para a maioria das pessoas. Destine um bom tempo a esta atividade, a fim de aguçar os sentidos dos alunos no que diz respeito à beleza que há na Matemática.

Como uma discussão opcional, sugerimos abordar **Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros**, com a qual é possível determinar o conjunto de possíveis raízes de uma equação, usando os divisores dos coeficientes a_0 e a_n, em que a_0 é o coeficiente independente, e a_n é o coeficiente de maior grau na equação. Analise o exercício resolvido 11, no qual determinamos as possíveis raízes da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$. O procedimento é simples, porém engloba o conceito de divisores, que eventualmente deverá ser relembrado.

O exercício resolvido 12 apresenta a solução de uma equação algébrica de 4º grau, e o exercício resolvido 13 apresenta uma equação algébrica de 3º grau que representa o número de *tablets* vendidos por uma empresa em cada mês do ano de 2013. Os exercícios 26 a 29 podem ser resolvidos como atividade de fixação e aprofundamento.

Não deixe de trabalhar as **Raízes complexas não reais numa equação algébrica de coeficientes reais**; explicite que no caso de uma equação algébrica admitir como raiz o número complexo $a + bi$, com $b \neq 0$, então o complexo conjugado $a - bi$ também será raiz dessa equação. Resolva o exemplo proposto no texto e solicite aos alunos a resolução dos exercícios 30 a 33.

Capítulo 10 – Relações e equações trigonométricas

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2012)	Competência	Habilidade
Relações fundamentais	Conhecimentos numéricos: Relações de dependência entre grandezas	C1	H1/H2
Identidades trigonométricas	Conhecimentos algébricos: Relações no círculo trigonométrico	C5	H19/H21/H22
Fórmulas de adição	Conhecimentos numéricos: Relações de dependência entre grandezas Conhecimentos algébricos: Relações no círculo trigonométrico	C1/C5	H1/H2/H19/H21/H22
Fórmulas do arco duplo e do arco metade			
Equações trigonométricas	Conhecimentos algébricos: Equações	C5	H19/H21/H22/H23

Trataremos neste capítulo das **Relações e equações trigonométricas**, sendo esse um assunto mais analítico e dedutivo do que prático, mas igualmente importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

A imagem de abertura traz um topógrafo, profissional que utiliza conceitos de trigonometria em suas medições, principalmente por meio da utilização do instrumento de medida teodolito. Por mais que as relações trigonométricas aplicadas no desenvolvimento do trabalho de um topógrafo não sejam tão complexas quanto as abordadas neste capítulo, ainda assim é válido apresentar aos alunos mais uma profissão que utiliza conceitos de trigonometria no seu dia a dia. Peça aos alunos que pesquisem outras profissões que também utilizam conceitos, relações e/ou equações trigonométricas em suas atividades.

Iniciamos apresentando as **Relações fundamentais**, cuja principal aplicação ocorre em exercícios nos quais se deve determinar os valores de relações trigonométricas a partir de uma outra dada inicialmente, como no primeiro exercício resolvido. É importante que o aluno entenda o raciocínio usado na resolução desse exercício, então, sugerimos que proponha o seguinte passo a passo para os alunos:

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

$\text{sen}\, x = -\dfrac{1}{4}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

b) O que se pede?

$\tan x$ e $\sec x$

2. Planejando a solução

Sabemos, a partir das relações fundamentais, que $\tan x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ e $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. No entanto, nos foi fornecido apenas o valor de sen x. Para determinar o que é solicitado, precisamos do valor de cos x. Assim, podemos usar a relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para determinar o valor de cos x, já sabendo que cos x será negativo. Depois, devemos calcular o valor de tan x e sec x de acordo com as relações fundamentais.

3. Executando o que foi planejado

Substituindo o valor de $\text{sen}\, x = -\dfrac{1}{4}$ na expressão, temos: $\dfrac{1}{16} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Agora, vamos determinar o valor de tan x e sec x:

$$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{-4}{\sqrt{15}} = \frac{-4\sqrt{15}}{15}$$

4. Emitindo a resposta

$\tan x = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$ e $\sec x = \dfrac{-4\sqrt{15}}{15}$

A explicação do passo a passo é importante, pois os alunos podem não conseguir resolver um exercício por não estabelecerem relações entre as informações fornecidas no enunciado.

Aproveite para propor o exercício 1, que deve ser feito individualmente em sala de aula, para fixação do procedimento. O exercício 3 pode ser usado como exemplo para simplificação de expressões, e os exercícios 2 e 4 aplicados como atividade de aprofundamento.

Outro ponto importante a ser discutido são as **Identidades trigonométricas**. Os alunos costumam apresentar certa dificuldade nesse tópico, geralmente relacionada a não entenderem o que se deve calcular. Acreditamos que isso ocorre porque os alunos não estão habituados a fazer demonstrações, mas sim a resolver problemas. Para iniciar, pode-se fazer uma atividade simples envolvendo igualdades e identidades. Veja:

Verifiquem as igualdades, classificando-as em verdadeiras ou falsas:

a) $2 = 2$ **(V)**

b) $2 = 0$ **(F)**

c) $2 + 1 = 3$ **(V)**

d) $2 + 1 = 4 - 1$ **(V)**

e) $10 : 2 + 3 = 2$ **(F)**

f) $10 : (2 + 3) = 2$ **(V)**

g) $10 : (2 + 3) = 5 - 12 : 4$ **(V)**

O objetivo desse exercício é estimular os alunos a verificar se as informações contidas nas duas sentenças separadas pelo sinal de igual são equivalentes ou não, trabalhando um processo diferente do qual eles estão acostumados. Em seguida, continuamos com o mesmo tipo de proposição, mas envolvendo as identidades, destacando que a sentença será verdadeira somente quando for válida para qualquer elemento do domínio das funções envolvidas. Assim, os próximos itens seriam:

h) $x = x$ **(V)**

i) $x = 2x - 1$ **(F)**, será verdadeira quando $x = 1$

j) $\tan x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ **(V)**

k) $\tan x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$ **(F)**

l) $\text{sen}\, x \cdot \sec x = \tan x$ **(V)**, pois

$\text{sen}\, x \cdot \sec x = \text{sen}\, x \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \tan x$

No trabalho com identidades trigonométricas temos, basicamente, dois procedimentos a partir da relação $f(x) = g(x)$:

- partimos de $f(x)$ e a desenvolvemos até chegar a $g(x)$;
- partimos separadamente de $f(x)$ e $g(x)$ até chegar a um mesmo valor, concluindo assim que $f(x) = g(x)$.

O exercício 5, que pode ser resolvido em dupla, ajudará na fixação desses procedimentos.

Em algumas situações não temos tabelas ou calculadora científica para determinar os valores de senos, cossenos e tangentes de ângulos não notáveis. Nesses casos, conhecer algumas fórmulas ajuda na resolução de exercícios. Assim, abordamos as **Fórmulas de adição**, que relacionam senos, cossenos e tangentes de ângulos obtidos a partir de somas e subtrações de ângulos notáveis.

Apresente as fórmulas da adição e subtração de arcos, usando como exemplo o cálculo de:

$\cos 15° = \cos (45° - 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen}\, 45° \cdot \text{sen}\, 30° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Usando o exemplo acima como referência, peça aos alunos que pensem em outras opções de operações com ângulos notáveis que possam gerar o cos 15°, cos (60° − 45°), por exemplo, e solicite que façam o cálculo para verificar a igualdade: cos (45° − 30°) = cos (60° − 45°).

Aproveite e peça que verifiquem a igualdade:

cos 45° − cos 30° = cos 60° − cos 45°. Veja essa verificação:

$\cos 45° - \cos 30° = \cos 60° - \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} \neq 1 - \sqrt{2}$

Para alguns alunos ainda pode não fazer sentido (por causa das raízes), então podemos usar as aproximações $\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$, obtendo:

$\sqrt{2} - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow 1{,}41 - 1{,}73, = 1 - 1{,}41 \Rightarrow$

$\Rightarrow -0{,}32 = -0{,}41$

Observamos aqui dois absurdos:

1) os valores não são iguais.
2) não há como o cosseno de um ângulo no primeiro quadrante (15°) ser negativo.

Discuta os resultados com seus alunos, para que eles percebam um dos principais erros cometidos no tema, que é confundir soma e subtração de ângulos com soma e subtração de senos e cossenos.

Proponha, então, que os exercícios 6 e 7 sejam resolvidos, e use o exemplo de *Aplicação na Geometria* (exercício resolvido 5) para auxiliá-los na resolução dos exercícios 8 e 9.

O texto A fórmula: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$ apresenta em uma abordagem histórica como o matemático árabe Al-Wafa chegou a esse resultado sem utilizar o conceito de fórmula.

Em outros casos é mais útil usarmos as **Fórmulas do arco duplo e do arco metade**, que são obtidas para o caso particular da soma de dois ângulos iguais. Apresente as fórmulas e o exercício resolvido 7 em que dado $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, pretende-se calcular os valores de sen $2x$, cos $2x$ e tan $2x$, usando as fórmulas de arco duplo.

Verifique os cálculos usando o círculo trigonométrico, uma vez que $x = \frac{\pi}{3}$, ou 60°, e $2x = \frac{2\pi}{3}$ ou 120°.

Em seguida, solicite aos alunos que repitam o procedimento para o caso em que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ou seja, para o ângulo $x = 30°$ e $2x = 60°$. Nesse caso, a comparação dos resultados é mais simples, pois o ângulo $2x$ também é notável. Finalize com os exercícios 10 a 12, como aprofundamento, e com os exercícios 13 e 14, que devem ser resolvidos em dupla.

Finalizamos o capítulo trabalhando as **Equações trigonométricas**, tomando, no entanto, alguns cuidados para a obtenção das soluções. Por exemplo, considerando a equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, sabemos que, para o primeiro quadrante, a solução será $x = \frac{\pi}{6}$ ou 30°. No entanto, se levarmos em conta outros conjuntos universos, essa resposta não será única. No caso de $U = [0, 2\pi]$, teremos também o ângulo $x = \frac{5\pi}{6}$ ou 150°. Mostre isso para os alunos no círculo trigonométrico, e para $U = \mathbb{R}$ teremos infinitas soluções, que podemos representar por meio das soluções gerais: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, com k inteiro.

No caso da equação $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$, temos $U = \mathbb{R}$ e seguimos o mesmo procedimento descrito acima, chegando às soluções: $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Dividindo ambos os termos por 2, temos: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$. No caso de $U = [0, 2\pi]$ devemos tomar a solução geral acima e substituir vários valores de k até completar o conjunto universo solicitado, assim temos:

para $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$

para $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$

para $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2\pi$ ou $\frac{5\pi}{12} + 2\pi$ (não servem, pois extrapolam o intervalo $[0, 2\pi]$)

Assim, a solução será dada por:

$S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$. A verificação pode ser feita usando uma calculadora científica, transformando os ângulos em radianos para graus.

Complemente resolvendo as equações apresentadas nos exercícios resolvidos. O resolvido passo a passo discute a temperatura média de uma determinada região em função do número de semanas do ano. Os exercícios 15 a 22 podem ser resolvidos como atividade de fixação e aprofundamento, em dupla ou grupo.

As questões apresentadas na seção **Pensando no Enem** representam algumas aplicações de conceitos de álgebra e trigonometria, tais como a interpretação de informações a partir de funções polinomiais e de uma situação-problema envolvendo área e volume, a planificação do mapa-múndi, a relação entre ângulos e plano inclinado usada na Física e o movimento das marés.

Na seção **Vestibulares de Norte a Sul** também encontramos algumas questões contextualizadas que podem ser abordadas como atividades de aprofundamento e revisão. Destaque para a questão 3, que traz uma situação-problema envolvendo ângulos e as alturas relativas à distância entre 2 prédios em 2 pontos diferentes; a questão 4, que apresenta um interessante texto sobre funções polinomiais; e para a questão 11, que aborda uma situação-problema sobre um foco de incêndio em um parque estadual.

Atividades complementares à Unidade 4

As atividades a seguir envolvem equações algébricas e podem ser realizadas em grupos.

1. Epitáfio do geômetra grego Diofante, extraído da obra *O homem que calculava*, de Malba Tahan:

"Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; um duodécimo, na adolescência; um sétimo, em seguida, foi escoado num casamento estéril. Decorreram mais cinco anos, depois que lhe nasceu um filho. Mas este filho – desgraçado e, no entanto, bem amado! – apenas tinha atingido a metade da idade que viveu o pai, morreu. Quatro anos ainda, mitigando a própria dor com o estudo da ciência dos números, passou-os Diofante, antes de chegar ao termo de sua existência". Pergunta-se: com quantos anos morreu Diofante?

Resolução:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \Rightarrow x = 84$$

2. Uma forma de encontrar a raiz de uma equação ou de chegar em um valor tão próximo dela quanto se queira, é ir valorizando a incógnita e ver o quanto o resultado se aproxima de zero. Na equação $5x^3 - 75x^2 - 9x + 27 = 0$, temos três raízes reais. Uma delas está compreendida **entre zero e 1**. Construa uma tabela de valores atribuídos a x e o valor encontrado depois de efetuadas as contas. Veja se consegue achar essa raiz. Compare com o resultado encontrado pelos outros grupos.

Resolução:

Sugestão de resposta:

x	$p(x)$
0,2	22,24
0,4	11,72
0,5	4,3
0,6	$-4{,}32$
0,55	0,19
0,56	$-0{,}68$

Observe que de 0,5 para 0,6 o sinal mudou de positivo para negativo. Isso significa que a raiz está entre esses dois valores, por exemplo, a raiz está bem próxima de $x = 0{,}55$.

3. Sabendo que os polinômios $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ é igual ao polinômio $Q(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$, encontre o valor de $m + n + p$.

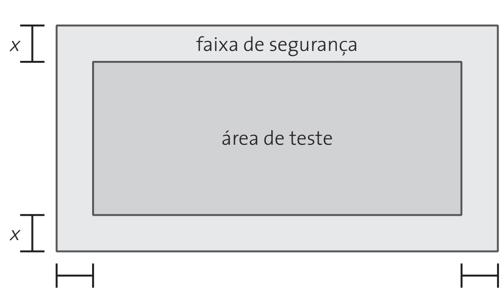
Resolução:

Fazendo o produto dos três fatores do polinômio Q e igualando com o polinômio P, temos:

$x^3 + mx^2 + nx + p = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$, assim: $m = -9$, $n = 26$ e $p = -24$

Portanto, $m + n + p = -7$.

4. Uma indústria química deseja construir um laboratório para testar alguns produtos. Esse laboratório deverá ter uma faixa de segurança para os funcionários de outros setores transitarem, conforme figura abaixo. A área de teste deverá ter dimensões de 17 m por 26 m. Á área retangular disponível é de 682 m². Encontre qual deverá ser a medida x da faixa.



Resolução:

Devemos ter:

$(17 + 2x)(26 + 2x) = 682$

Fazendo $2x = a$, temos:

$(17 + a)(26 + a) = 682$

Resolvendo essa equação do 2º grau, encontramos $a = 5$ m; portanto, $x = 2{,}5$ m.

5. Usando pesquisa de raízes encontre as três raízes da equação $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Sugestão: Depois de encontrar uma raiz, use Briot-Ruffini para encontrar um polinômio do 2º grau.

Resolução:

Por pesquisa temos que 1 é raiz dessa equação. Usando Briot-Ruffini, encontramos o polinômio: $x^2 + x - 1$ cujas raízes são $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

6. Uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo tem dimensões dadas por $\dfrac{x}{3}$, x e $3x$. Encontre o polinômio que fornece seu volume. Depois atribua para x os valores 0, 1, 2, 3 e 4. Faça um esboço de um gráfico com os volumes encontrados.

Resolução:

$P(x) = 3x \cdot x \cdot \dfrac{x}{3} \Rightarrow P(x) = x^3$

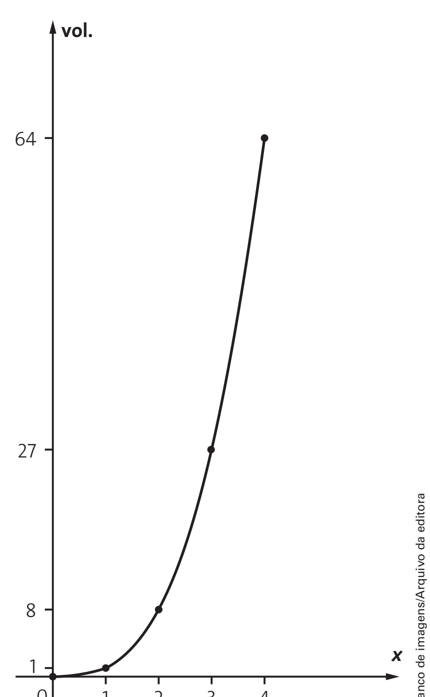
$P(0) = 0$

$P(1) = 1$

$P(2) = 8$

$P(3) = 27$

$P(4) = 64$



12 Resolução dos exercícios

Observação: As resoluções que não estiverem nesta seção aparecem ao lado do respectivo exercício no livro do professor ou possuem resolução direta.

Unidade 1

CAPÍTULO 1

1. a) $\frac{60}{100} \cdot 95 = \frac{5\,700}{100} = 57$

b) $\frac{x}{10\cancel{0}} \cdot 7\cancel{0} = 56 \Rightarrow \frac{7x}{10} = 56 \Rightarrow 7x = 560 \Rightarrow x = 80$

Logo, 80%.

c) $\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{20}{\cancel{100}}} \cdot x = 6 \Rightarrow \frac{3x}{20} = 6 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$

d) $\frac{3{,}5}{100} \cdot 650 = \frac{2\,275}{100} = \text{R\$ } 22{,}75$

e) $\frac{\overset{1}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} \cdot x = 75{,}20 \Rightarrow x = \text{R\$ } 376{,}00$

f) $\frac{x}{\cancel{100}} \cdot \cancel{300} = 171 \Rightarrow x = \frac{171}{3} = 57$

Logo, 57%.

g) $\frac{0{,}5}{100} \cdot 85 = \frac{42{,}5}{100} = \text{R\$ } 0{,}425$

$\frac{1}{10\cancel{0}} \cdot 17\cancel{0} = \text{R\$ } 1{,}70$

0,5% de R\$ 85,00 é menor que 1% de R\$ 170,00

2. $\frac{1400 - 1200}{1200} \simeq 0{,}1666 \simeq 16{,}7\%$

3. Mínima $= \frac{47}{100} \cdot 1\,500 = 705$ mL

Máxima $= \frac{47}{100} \cdot 3\,000 = 1\,410$ mL

De 705 mL a 1 410 mL

4. a) 6,17% a.a.

b) $\frac{7\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot \frac{8}{100} = 5{,}6\%$ a.a.

5. $\frac{54 + 14}{112} \simeq 60{,}71\%$

Resposta: alternativa **d**.

6. x: salário bruto.

$\frac{17}{100} \cdot x = 0{,}17x$

$x - 0{,}17x = 1\,100 \Rightarrow x \simeq 1\,325{,}30$

7. a) Respostas pessoais. A oferta mais vantajosa dependerá diretamente do número de peças desejado.

b) Na oferta 3.

8. $\frac{90}{100} \cdot 1500 = 1350$

$\frac{80}{100} \cdot 500 = 400$

Total: 1 350 + 400 = 1 750.

Resposta: alternativa **e**.

9. a) $f = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$

b) $f = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

c) $f = 1 + 0{,}15 = 1{,}15$

d) $f = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

e) $f = 1 + 2{,}3 = 3{,}3$

f) $f = 1 + 30 = 31$

10. a) Aumento; $i = 1{,}13 - 1 = 0{,}13 = 13\%$.

b) Desconto; $i = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 = 30\%$.

c) Aumento; $i = 2 - 1 = 1 = 100\%$.

d) Desconto; $i = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 = 5\%$.

e) Aumento; $i = 30 - 1 = 29 = 2\,900\%$.

11. a) $f_{acumulado} = 1{,}03 \cdot 1{,}05 = 1{,}0815$

Aumento de 8,15%.

b) $f_{acumulado} = 1{,}10 \cdot 0{,}8 = 0{,}88$

Desconto de 12%.

c) $f_{acumulado} = 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}331$

Aumento de 33,1%.

d) $f_{acumulado} = 1{,}06 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}96 = 0{,}994$

Desconto de 0,6%.

12. $f = \frac{11\,440}{11\,000} = 1{,}04$

$i = 1{,}04 - 1 = 0{,}04 = 4\%$

13. Preço velho: 50,00

Preço novo: 59,00

$f = \frac{\text{preço novo}}{\text{preço velho}} = \frac{59{,}00}{50{,}00} = 1{,}18$

Como $f > 1$, então:

$f = 1 + i = 1{,}18 \Rightarrow i = 0{,}18 = 18\%$

Logo, o aumento percentual foi de 18%.

14. $\frac{x}{10\cancel{0}} \cdot 7\cancel{0} = 10{,}50 \Rightarrow \frac{7x}{10} = 10{,}50 \Rightarrow 7x = 105 \Rightarrow x = 15$

Logo, o aumento foi de 15%.

15. $\frac{5}{10\cancel{0}} \cdot 8\cancel{0} = 4$

O preço após o aumento será de R\$ 84,00.

$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{\underset{10}{\cancel{20}}}{\cancel{100}}} \cdot \overset{42}{\cancel{84}} = 4{,}2$ (desconto)

$84 - 4{,}2 = 79{,}80$

O preço após o desconto será de R\$ 79,80.

16. • 1ª loja: $\frac{8}{\cancel{100}} \cdot \cancel{800} = 64$

$800 - 64 = \text{R\$ } 736{,}00$

• 2ª loja: $\frac{1\cancel{0}}{\cancel{100}} \cdot 82\cancel{0} = 82$

$820 - 82 = \text{R\$ } 738{,}00$

Portanto, a oferta da 1ª loja é melhor.

17. Precisamos compor as quatro variações para poder emitir um julgamento. Para isso precisamos dos fatores de avaliação de cada variação:

$F_1 = 1 + 0{,}074 = 1{,}074$

$F_2 = 1 - 0{,}155 = 0{,}845$

$F_3 = 1 - 0{,}029 = 0{,}971$

$F_4 = 1 - 0{,}133 = 0{,}867$

O fator acumulado é:

$F_{acum} = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 = 1{,}074 \cdot 0{,}845 \cdot 0{,}971 \cdot 0{,}867 \simeq 0{,}764 =$
$= 76{,}40\%$

Então:

$VF = VP \cdot F \Rightarrow 43\,349{,}96 = x \cdot 0{,}764 \Rightarrow x \simeq 56\,741$

Portanto, o Ibovespa estava no fim de 2011 com aproximadamente 56 740 pontos.

18. $\begin{cases} \text{Luís}: x \\ \text{Marta}: \dfrac{80x}{100} \\ \text{Sérgio}: \dfrac{\cancel{90}}{100} \cdot \dfrac{\cancel{80}x}{\cancel{100}} \end{cases}$

$x + \dfrac{80x}{100} + \dfrac{72x}{100} = 1890 \Rightarrow \dfrac{252x}{100} = 1890 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 750$ (Luís)

$\dfrac{80x}{100} = \dfrac{8\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 75\cancel{0} = 600$ (Marta)

Sérgio recebeu $1890 - 750 - 600 = 540$.

Portanto, Luís recebeu R\$ 750,00, Marta recebeu R\$ 600,00 e Sérgio, R\$ 540,00.

19. $\dfrac{7}{100} \cdot x = 0{,}07x$

$x + 0{,}07x = 59 \Rightarrow 1{,}07x = 59 \Rightarrow x = 55{,}14$

Antes do aumento o preço era de R\$ 55,14.

20. $f_{\text{acumulado}} = 1{,}05 \cdot 1{,}03 = 1{,}0815$.

Aumento de 8,15%.

$\dfrac{8{,}15}{100}x = 0{,}0815x \Rightarrow x + 0{,}0815x = 2{,}59 \Rightarrow 1{,}0815x = 2{,}59 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2{,}39$

Antes dos aumentos a gasolina custava R\$ 2,39.

21. 3 veículos por minuto $= 3 \cdot 60 = 180$ veículos por hora

$\dfrac{3}{100} = \dfrac{180 - 3}{x} \Rightarrow 3x = 17\,700 \Rightarrow x = 5\,900$

O aumento foi de 5 900%.

22. $f_{\text{acumulado}} = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$

Desconto de 51%.

Logo, um desconto de 55% é maior.

23. $F_{\text{acumulado}} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$0{,}97 \cdot x = 0{,}95 \Rightarrow x = 0{,}9794$

Queda de 2,06%.

24. $f = \dfrac{\text{preço novo}}{\text{preço velho}} = \dfrac{399}{499} \simeq 80\%$

Logo, o desconto foi de aproximadamente 20%.

Resolvido passo a passo

5. a) Após a aplicação em 18 meses, o novo capital passou a ser R\$ 3 432,00. Vamos então calcular o juro obtido em 12 meses, com taxa 2%.

$j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow j = 3\,432 \cdot 0{,}02 \cdot 12 \Rightarrow j = 823{,}68$

Logo o $M = C + j \Rightarrow M = 3\,432 + 823{,}68 \Rightarrow M = 4\,255{,}68$

Como o preço da TV é R\$ 4 500,00, então:

$4\,500{,}00 - 4\,255{,}68 = 244{,}32$

Resposta: Não. Faltarão R\$ 244,32.

25. $C = 600$; $i = 2{,}5\%$ ao mês; $t = 1$ ano e 3 meses $= 15$ meses

$j = \cancel{600} \cdot \dfrac{2{,}5}{\cancel{100}} \cdot 15 = 225$

Logo, rendeu R\$ 225,00 de juros.

26. $C = 800$; $j = 80$; $i = 2\%$ ao mês

$80 = \cancel{800} \cdot \dfrac{2}{\cancel{100}} \cdot t \Rightarrow 16t = 80 \Rightarrow t = 5$

Portanto, o tempo de aplicação foi de 5 meses.

27. $C = 750$; $t = 8$ meses; $j = 60$

$60 = 750i \cdot 8 \Rightarrow i = \dfrac{\overset{1}{\cancel{2}}\,\cancel{60}}{\underset{25}{\cancel{750}} \cdot \underset{4}{\cancel{8}}} = \dfrac{1}{100} = 1\%$

Assim, a taxa de juros foi de 1% ao mês.

28. $i = 25\%$ ao ano; $j = 110$; $t = 24$ meses $= 2$ anos

$110 = C \cdot \dfrac{\overset{1}{\cancel{25}}}{\underset{\underset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{100}}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \Rightarrow \dfrac{C}{2} = 110 \Rightarrow C = 220$

Logo, esse capital foi de R\$ 220,00.

29. $C = 200$; $t = 6$ meses $= 0{,}5$ ano; $i = 20\%$ ao ano

$j = \cancel{200} \cdot \dfrac{20}{\cancel{100}} \cdot 0{,}5 = 20$

Portanto, serão pagos R\$ 20,00 de juros.

30. $C = 5\,000$; $i = 6\%$ ao bimestre (0,06); $t = 6$ bimestres (1 ano)

$M = 5\,000(1{,}06)^6 = 7\,092{,}59$

Portanto, o montante produzido é de R\$ 7 092,59.

31. a) $f_{\text{acumulado}} = 1{,}18 \cdot 1{,}18 = 1{,}3924$

39,24%

b) $900 \cdot 0{,}3924 = 353{,}16$

R\$ 353,16

32. a) $C = 700{,}00$; $i = 2\%$ ao mês (0,02); $t = 4$ meses

$M = C(1 + i)^t = 700(1 + 0{,}02)^4 = 757{,}70$

Para quitar a dívida deverão ser pagos R\$ 757,70.

b) $f_{\text{acumulado}} = (1{,}02)^4 = 1{,}0824$

A taxa de juro acumulado foi de 8,24%.

33. $C = 800$; $t = 3$ anos $= 36$ meses; $i = 1\%$ ao mês (0,01)

$M = C(1 + i)^t = 800(1{,}01)^{36} = 1\,144{,}62$

Ao final do período Carlos tinha R\$1 144,62.

34. $C = 1\,000$; $i = 0{,}007$; $t = 6$ meses

$M = 1\,000(1{,}007)^6 = 1\,042{,}74$

$C = 1\,042{,}74 + 1\,000 = 2\,042{,}74$; $i = 0{,}007$; $t = 6$ meses

$M = 2\,042{,}74(1{,}007)^6 = 2\,130{,}05$

Afonso terá R\$ 2 130,05.

35. Sendo C_0 o capital inicial e n o tempo, temos:

$C_0(1 + 0{,}04)^n = 3C_0 \Rightarrow 1{,}04^n = 3 \Rightarrow n \cdot \log 1{,}04 = \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}04} \simeq 28$ meses

36. $M = 600(1{,}012)^t$

$600(1{,}012)^t > 650 \Rightarrow 1{,}012^t > \dfrac{650}{600} \Rightarrow \log 1{,}012^t > \log \dfrac{650}{600} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}0052t > 0{,}0348 \Rightarrow t > 6{,}69$

Em 7 meses Luiza terá mais de R\$ 650,00.

37. $i = 4\%$ ao mês; $C = 1\,000$; $j = 170$; $M = 1\,170$

$1\,170 = 1\,000(1 + 0{,}04)^t \Rightarrow (1{,}04)^t = 1{,}17 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \log_{1{,}04} 1{,}17 = \dfrac{\log 1{,}17}{\log 1{,}04} = \dfrac{0{,}06818586}{0{,}01703334} = 4$

Portanto, a aplicação renderá R\$ 170,00 após 4 meses.

38. $C = 10\,000$; $t = 3$ meses; $M = 11\,248{,}64$

$11\,248{,}64 = 10\,000(1 + i)^3 \Rightarrow (1 + i)^3 = 1{,}124864 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[3]{1{,}124864} = 1{,}04 \Rightarrow i = 0{,}04 = 4\%$

A taxa de juros deve ser de 4% ao mês.

39. 1 ano e 8 meses $= 20$ meses

$M = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}015)^{20} = 10\,000\,[(1{,}015)^{10}]^2 =$

$= 10\,000 \cdot [1{,}160]^2 = 13\,456$

Resposta: alternativa **c**.

40. Marcos: $J = Cit \Rightarrow 5 = 10\,000 \cdot \dfrac{11{,}4}{100} \cdot 4 = 4\,560$

Luis: $M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 10\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{10}{100}\right)^4 = 14\,641$

Marcos pagou R\$ 4 560,00 e Luís R\$ 4 641,00 ($14\,641 - 10\,000 = 4\,641$).

41. $1 + I = (1 + 0,2)^8 \Rightarrow 1 + I \simeq 4,2998 \Rightarrow I \simeq 3,2998$
329,98% em 8 minutos.

42. $i = -2\% = -0,02$
$1 + I = (1 - 0,02)^{10} \Rightarrow 1 + I = (0,98)^{10} \Rightarrow 1 + I \simeq 0,8171 \Rightarrow$
$\Rightarrow I \simeq -0,1829 = -18,29\%$
$100 - 18,29 = 81,71\%$

43. $i = -6\% = -0,06$
$1 + I = (1 - 0,06)^{12} \Rightarrow 1 + I = (0,94)^{12} \Rightarrow 1 + I \simeq 0,4759 \Rightarrow$
$\Rightarrow I \simeq -0,5241 = -52,41\%$
$100 - 52,41 = 47,59\%$

44. $1 + I = (1 + 0,0087)^{10} \Rightarrow 1 + I = 1,09048 \Rightarrow$
$\Rightarrow I = 0,09048 \Rightarrow I = 9,05\%$

45. $1 + I = (1 + 0,01)^{12} \Rightarrow 1 + I \simeq 1,1268 \Rightarrow I \simeq 0,1268 = 12,68\%$

46. $1 + I = (1 + 0,03)^6 \Rightarrow 1 + I \simeq 1,194 \Rightarrow I \simeq 0,194 = 19,4\%$

47. $1 + 1,3 = (1 + i)^{12} \Rightarrow 2,3 = (1 + i)^{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{2,3} \simeq 1,072 \Rightarrow i \simeq 0,072 = 7,2\%$

48. Renda $= \dfrac{PIB}{POP} \Rightarrow PIB = renda \cdot POP \Rightarrow$
$\Rightarrow PIB = \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) renda \cdot (1 + 0,0087)^{10} \cdot POP \Rightarrow$
$\Rightarrow PIB = 1,1 \cdot 1,0905 \cdot renda \cdot POP \Rightarrow PIB = 1,1995 \cdot renda \cdot POP$
Assim, em uma década o aumento do *PIB* será de aproximadamente 19,95% ou equivalentemente a:
$1,1995 = (1 + i)^{10} \Rightarrow i = 0,0184 = 1,84\%$ a.a.

Leituras

2. Determinando a taxa mensal.
$(i + 4,314) = (1 + i)^{12} \Rightarrow 5,314 = (1 + i)^{12} \Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{5,314} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i \simeq 1,15 \Rightarrow i = 0,15 = 15\%$ ao mês
Determinando o montante a ser pago
$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow M = 100(1 + 0,15)^3 \Rightarrow M = 100 \cdot (1,15)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow M \simeq 152,09$

3. Vamos calcular 0,5% de 1 000 000 000
$\dfrac{0,5}{100} \cdot 1\,000\,000\,000 = 5\,000\,000$
O governo economizaria R$ 5 000 000,00

4. $0,1 = 14,25 - n(0,05)$
$n(0,05) = 14,25 - 0,1 = 14,15$
$n = \dfrac{14,15}{100} \Rightarrow n = 283$
Resposta: 283 meses.

5. a) Vamos calcular 14,25% de 1 000
$\dfrac{14,25}{100} \cdot 1\,000 = 142,50$
Resposta: R$ 142,50
b) Vamos calcular 187% de 1 000
$\dfrac{187}{100} \cdot 1\,000 = 1\,870$
Resposta: R$ 1 870,00

CAPÍTULO 2

3.

Time	FA	FR (%)
Central	2	10
Náutico	4	20
Santa Cruz	8	40
Sport	6	30
Total	20	100

5.

Desempenho em Matemática	Contagem	FA	FR (%)
Ótimo		7	28
Bom		9	36
Regular		5	20
Insuficiente		4	16
Total		25	100

6. Cálculo da amplitude total: $175 - 146 = 29$
Cada classe tem amplitude $\dfrac{30}{6} = 5$.

Altura (cm)	Contagem	FA	FR (%)
146 ⊢ 151		2	8
151 ⊢ 156		2	8
156 ⊢ 161		4	16
161 ⊢ 166		11	44
166 ⊢ 171		4	16
171 ⊢ 176		2	8
Total		25	100

7.

Gênero musical	FA	FR	FR	FR (%)
Sertanejo	15	$\frac{3}{10}$	0,30	30
MPB	12	$\frac{6}{25}$	0,24	24
Rock	16	$\frac{8}{25}$	0,32	32
Clássico	7	$\frac{7}{50}$	0,14	14
Total	50	$\frac{50}{50}$	1,00	100

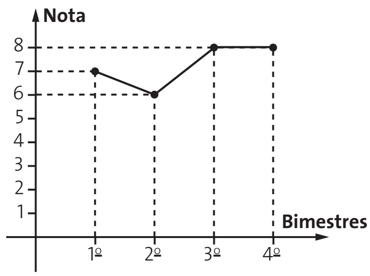
8.

Salário (R$)	FA	FR (%)
600 ⊢ 690	6	10
690 ⊢ 780	15	25
780 ⊢ 870	30	50
870 ⊢ 960	6	10
960 ⊢ 1 050	3	5
Total	60	100

A amplitude de cada classe é:
$1\,050 - 960 = 90$
Assim obtemos os intervalos de cada classe.
Se 50% equivalem a 30, então 10% equivalem a 6 e, assim, obtemos os dados que faltam.

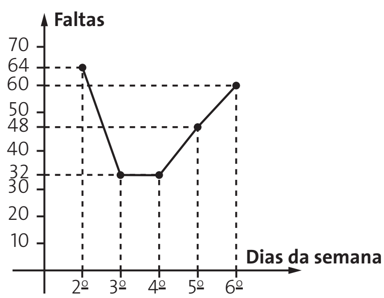
9. a) Sexo, altura, cor dos olhos, cor dos cabelos e tipo sanguíneo.
b) Sexo: quantitativa discreta
Altura: quantitativa contínua
Cor dos olhos e cabelos: qualitativa nominal
Tipo sanguíneo: qualitativa nominal
c) Amostra. A população é de 200 alunos.
d) FA = 30; FR = $\dfrac{30}{50} = 60\%$
e) $1,70 - 1,50 = 0,20$ m.
f) $\dfrac{30}{50} = 60\%$; $\dfrac{2}{50} = 4\%$

11.



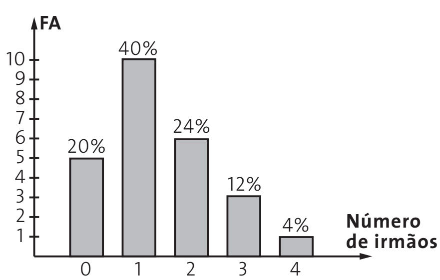
Podemos concluir que:
Houve uma piora de rendimento do 1º para o 2º bimestre;
Houve uma melhora de rendimento do 2º para o 3º bimestre;
Houve uma conservação no rendimento do 3º para o 4º bimestre.

12.



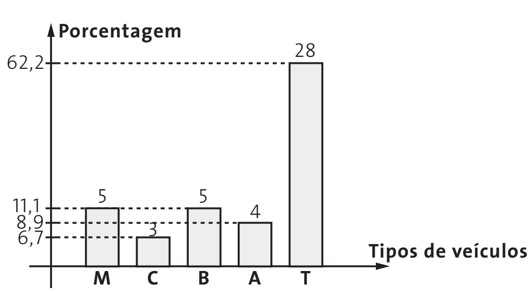
Conclusões:
- Na segunda-feira o maior índice de faltas está registrado.
- Na terça-feira e na quarta o menor índice de faltas está registrado.
- Na quinta e na sexta, o índice de faltas volta a subir.

14.



15. Vamos obter uma tabela de frequências:

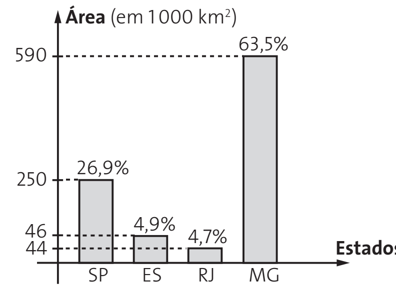
Tipo de veículo	FA	FR(%)
Motocicleta	5	11,1
Caminhão	3	6,7
Bicicleta	5	11,1
Ambulância	4	8,9
Carro	28	62,2
Total	45	100



M: motocicleta
C: caminhão
B: bicicleta
A: ambulância
T: carro

16.

Estados	FA (área da superfície: km²)	FR (%)
SP	250 000	26,9
ES	46 000	4,9
RJ	44 000	4,7
MG	590 000	63,5
Total	930 000	100



17. a) Vamos, inicialmente, construir uma tabela de frequências:

Ricardo		Fausto		Paula	
H	M	H	M	H	M
5	3	8	12	6	6

O número de alunos que votaram é:
$5 + 3 + 8 + 12 + 6 + 6 = 40$
São homens: $5 + 8 + 6 = 19$.
São mulheres: $3 + 12 + 6 = 21$.

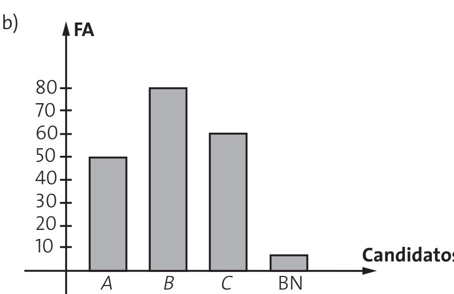
b) Paula teve $6 + 6 = 12$ votos.
c) Ricardo teve 3 votos femininos.
d) Fausto teve $(8 + 12) = 20$ votos. Logo, recebeu $\frac{20}{40} = 50\%$ dos votos.

18. a) Tabela de frequências:

Candidato	FA	FR (%)
A	50	25
B	80	40
C	60	30
BN	10	5
Total	200	100

As porcentagens foram obtidas dividindo-se a frequência absoluta (FA) pelo número total de votos (200).

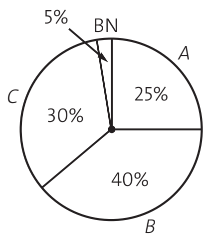
b)



c) Para calcular os ângulos centrais relativos a cada setor, basta aplicar a FR porcentual respectiva a 360°.
Assim:
- candidato *A*: 25% de 360° = 90°
- candidato *B*: 40% de 360° = 144°

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

- candidato C: 30% de 360° = 108°
- BN: 5% de 360° = 18°



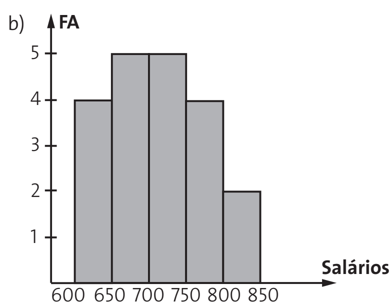
19. a) 15% de 24 h = 3,6 h
b) 100% − (20% + 15% + 10% + 25%) = 30%

20. a) Amplitude total: 846 − 600 = 246

Amplitude de cada classe: $\frac{250}{5} = 50$

Salário (R$)	**FA**	**FR** (%)
600 ⊢ 650	4	20
650 ⊢ 700	5	25
700 ⊢ 750	5	25
750 ⊢ 800	4	20
800 ⊢ 850	2	10
Total	20	100

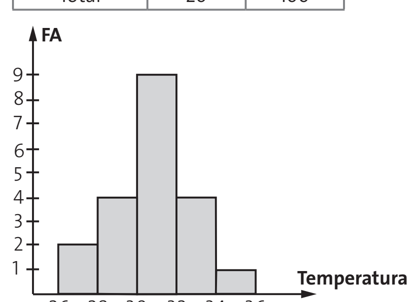
b)



21. Vamos obter a tabela de frequências.
Cálculo da amplitude total:
34 °C − 26 °C = 8 °C
Amplitude de cada uma das 5 classes:

$\frac{10\ °C}{5} = 2\ °C$

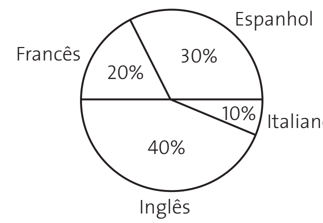
Temperatura máxima (°C)	**FA**	**FR** (%)
26 ⊢ 28	2	10
28 ⊢ 30	4	20
30 ⊢ 32	9	45
32 ⊢ 34	4	20
34 ⊢ 36	1	5
Total	20	100



22.

Língua estrangeira	**FA**	**FR** (%)
Espanhol	12	30
Francês	8	20
Inglês	16	40
Italiano	4	10

Espanhol: 30% de 360° = 108°
Francês: 20% de 360° = 72°
Inglês: 40% de 360° = 144°
Italiano: 10% de 360° = 36°



Resolvido passo a passo

5. a) Se a PA tem 4 termos, é decrescente, a razão só poderá ser −1.
Portanto $a_1 = 4$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$ e $a_4 = 1$
Resposta: 3, 2 e 1, respectivamente.

23. a) $MA = \frac{3+4+1+0+3+2+1}{7} = \frac{14}{7} = 2$

Logo, a média de gols marcados é 2 por partida.

b) $MA = \frac{1+2+1+0+2+1+0}{7} = \frac{7}{7} = 1$

Logo, a média de gols sofridos é 1 por partida.

24. Seja x a nota do terceiro trabalho. Então:

$MA = \frac{8{,}5+5{,}0+x}{3} = 7{,}0 \Rightarrow \frac{13{,}5+x}{3} = 7 \Rightarrow 13{,}5+x = 21 \Rightarrow x = 7{,}5$

Assim, a terceira nota deve ser 7,5.

25. Vamos calcular a média aritmética ponderada:

$MP = \frac{6 \cdot 14 + 9 \cdot 20 + 5 \cdot 16}{6+9+5} = \frac{84+180+80}{20} = \frac{344}{20} = 17{,}2$

Logo, a média das idades é 17,2 anos.

26. $MA = \frac{15+13+12+10+14+14}{6} = \frac{78}{6} = 13$

Logo, a média aritmética dos gastos é 13 reais por dia.

Para obter a mediana, ordenamos a distribuição:
10, 12, 13, 14, 14, 15.
Como há 6 elementos, fazemos a média aritmética entre os dois termos centrais, que são o 3º e o 4º termos.
Logo:

$Me = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$

27. a) $MA = \frac{126+130+126+102}{4} = \frac{484}{4} = 121$

Logo, a média aritmética é 121.

b) $MP = \frac{2 \cdot 126 + 3 \cdot 130 + 1 \cdot 126 + 2 \cdot 102}{2+3+1+2} = \frac{252+390+126+204}{8} =$

$= \frac{972}{8} = 121{,}5$

Logo, a média aritmética ponderada é 121,5.

c) 102; 126; 126; 130

$Me = \frac{126 + 126}{2} = 126$

d) O valor que mais se repete é 126. Logo, $Mo = 126$

28. a) Podemos montar a tabela de frequências:

Acertos	FA
0	1
1	2
2	8
3	13
4	11
5	5
Total	40

O total de alunos da classe é 40.

b) Como 5 alunos acertaram 5 questões, então:

$$FR = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$$

c) Alunos que acertaram 3 ou mais questões, são:
$13 + 11 + 5 = 29$ alunos.

$$FR = \frac{29}{40} = 72{,}5\%$$

d) $$MA = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{1 + 2 + 8 + 13 + 11 + 5} =$$

$$= \frac{0 + 2 + 16 + 39 + 44 + 25}{40} = \frac{126}{40} = 3{,}15$$

Logo, a *MA* é 3,15 questões por aluno.

Moda

O valor que tem maior frequência é 3 (cuja frequência é 13). Logo, $Mo = 3$.

Mediana

A mediana é a média dos termos de posição 20 e 21, pois $\frac{40}{2} = 20$.

Apresentando os dados em ordem crescente e de acordo com suas frequências, temos:

$$Me = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

Logo, a mediana *Me* é 3.

29. a) $$MA = \frac{3 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 4 \cdot 15 + 1 \cdot 6}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{39 + 28 + 60 + 16}{10} =$$

$$= \frac{143}{10} = 14{,}3$$

$Mo = 15$ (sua frequência, 4, é a maior da tabela)

Como a distribuição é 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, então consideramos a média aritmética entre o 5º e o 6º termos:

$$Me = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$$

b) A partir da tabela dada, acrescentamos o *VM* (valor médio) de cada classe:

Altura (m)	FA	*VM*
1,61 ⊢ 1,65	3	1,63
1,65 ⊢ 1,69	6	1,67
1,69 ⊢ 1,73	5	1,71
1,73 ⊢ 1,77	4	1,75
1,77 ⊢ 1,81	3	1,79

Média aritmética (*MA*)

$$MA = \frac{3 \cdot 1{,}63 + 6 \cdot 1{,}67 + 5 \cdot 1{,}71 + 4 \cdot 1{,}75 + 3 \cdot 1{,}79}{3 + 6 + 5 + 4 + 3} =$$

$$= \frac{4{,}89 + 10{,}02 + 8{,}55 + 7{,}00 + 5{,}37}{21} = \frac{35{,}83}{21} \simeq 1{,}71$$

Moda (*Mo*)

Observando a tabela de frequências, vemos que a maior frequência é 6.

Logo, $Mo = 1{,}67$.

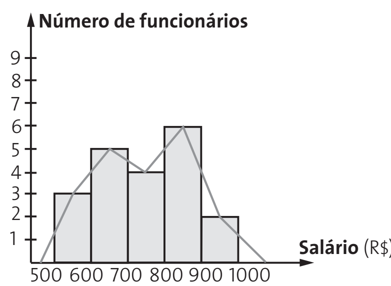
Mediana (*Me*)

Como o total das frequências é 21 (número ímpar), o valor central é o da 11ª posição.

Colocando os valores médios em ordem crescente e de acordo com suas frequências, temos $Me = 1{,}71$.

30. Vamos obter a tabela de frequências:

Salários	FA	*VM*
500 ⊢ 600	3	550
600 ⊢ 700	5	650
700 ⊢ 800	4	750
800 ⊢ 900	6	850
900 ⊢ 1000	2	950
Total	20	



Banco de imagens/Arquivo da editora

Média aritmética (*MA*):

$$MA = \frac{3 \cdot 550 + 5 \cdot 650 + 4 \cdot 750 + 6 \cdot 850 + 2 \cdot 950}{3 + 5 + 4 + 6 + 2} = \frac{14\,900}{20} = 745$$

Moda (*Mo*):

O intervalo 800 ⊢ 900 é o que tem maior FA. Logo, seu valor médio é $Mo = 850$.

Mediana (*Me*):

Como há 20 termos na distribuição, a mediana será a média aritmética entre o 10º e o 11º termos $\left(\frac{20}{2} = 10 \text{ e } 10 + 1 = 11\right)$.

Os termos de posição 10 e 11 estão na classe cujo ponto médio é 750, então:

$$Me = \frac{750 + 750}{2} = 750$$

31. Vamos calcular a média aritmética ponderada das notas do aluno:

$$MP = \frac{2 \cdot 8{,}0 + 3 \cdot 7{,}0 + 1 \cdot 9{,}0 + 2 \cdot 5{,}0}{2 + 3 + 1 + 2} = \frac{16 + 21 + 9 + 10}{8} = \frac{56}{8} = 7$$

Logo, a média é 7,0.

32. De acordo com o problema, temos:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} + x_{11}}{11} = 40 \Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} + x_{11} = 440$$

Trocando x_1 (funcionário aposentado com 60 anos) por 60, temos:

$$60 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11} = 440 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11} = 440 - 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11} = 380 \quad \text{I}$$

Logo, a média das idades dos 10 funcionários será:

$$MA = \frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11}}{10} \quad \text{II}$$

Substituindo I em II, temos:

$$MA = \frac{380}{10} = 38 \text{ anos.}$$

Resposta: alternativa **d**.

33. $MA = \dfrac{3+2+1+1+4+3+2}{7} = \dfrac{16}{7} \simeq 2{,}3$

A média aritmética é de aproximadamente 2,3 gols por partida.
Para obter a mediana, ordenamos a distribuição: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4.
Como há sete elementos na distribuição, o termo médio é a *Me*.
Logo, $Me = 2$.

34. $MA = \dfrac{63+56+64}{3} = \dfrac{183}{3} = 61$

Desvios $x_i - MA$: $63-61=2$; $56-61=-5$; $64-61=3$

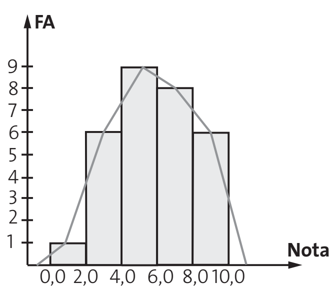
$V = \dfrac{2^2+(-5)^2+3^2}{3} = \dfrac{4+25+9}{3} \simeq 12{,}67$

$DP = \sqrt{V} = \sqrt{12{,}67} \simeq 3{,}56$

Então, sua média é 61 e seu desvio padrão é 3,56.

35. a) e b) Podemos obter a tabela de frequências:

Nota	FA	*VM*
0,0 ⊢ 2,0	1	1,0
2,0 ⊢ 4,0	6	3,0
4,0 ⊢ 6,0	9	5,0
6,0 ⊢ 8,0	8	7,0
8,0 ⊢ 10,0	6	9,0



Banco de imagens/Arquivo da editora

c) $MA = \dfrac{1 \cdot 1{,}0 + 6 \cdot 3{,}0 + 9 \cdot 5{,}0 + 8 \cdot 7{,}0 + 6 \cdot 9{,}0}{1+6+9+8+6} = \dfrac{174}{30} = 5{,}8$

Moda
A classe cuja frequência é maior é a 4,0 ⊢ 6,0.
Logo, seu valor médio (a moda) é $Mo = 5{,}0$.
Mediana
Como o número de termos da distribuição é 30, então a mediana será a média aritmética dos termos 15 e 16 $\left(\dfrac{30}{2} = 15 \text{ e } 15+1=16\right)$.

Ambos estão na terceira classe, logo:

$Me = \dfrac{5{,}0+5{,}0}{2} = 5{,}0$

Desvios $x_i - MA$ (em que x_i são os valores médios das classes):
$1 - 5{,}8 = -4{,}8$; $3 - 5{,}8 = -2{,}8$; $5 - 5{,}8 = -0{,}8$; $7 - 5{,}8 = 1{,}2$; $9 - 5{,}8 = 3{,}2$.

$V = \dfrac{1 \cdot (24{,}8) + 6 \cdot (22{,}8) + 9 \cdot (2{,}08) + 8 \cdot (1{,}2) + 6 \cdot (3{,}2)}{6+1+9+8+6} =$

$= \dfrac{23{,}04 + 47{,}04 + 5{,}76 + 11{,}52 + 61{,}44}{30} = \dfrac{181{,}80}{30} = 6{,}06$

Desvio padrão: $DP = \sqrt{6{,}06} \simeq 2{,}46$

36. a) $MA = \dfrac{10 \cdot 1000 + 5 \cdot 1500 + 1 \cdot 2\,000 + 10 \cdot 2\,500 + 4 \cdot 5\,500 + 1 \cdot 11\,000}{10+5+1+10+4+1} =$

$= \dfrac{77\,500}{31} = 2\,500$; $MA =$ R\$ 2500,00

Como o número de termos da distribuição é 31, então a mediana será o 16º termo da distribuição, que é 2000. Assim, $Me =$ R\$ 2000,00.

b) Menor, uma vez que os novos salários não elevam a soma do total dos quadrados dos desvios.

38. a)

Face	Número de vezes	Frequência relativa (%)
1	157	15,7
2	171	17,1
3	160	16,0
4	166	16,6
5	171	17,1
6	175	17,5

b) As frequências relativas são parecidas e com valores em torno do resultado teórico (16,6%). Com 1 000 jogadas o resultado teórico esperado seria que saíssem cerca de 166 vezes cada face. Assim, podemos afirmar que o dado aparenta ser honesto.

39. a) População rural em 2000 $= 0{,}19 \cdot 170 \cdot 10^6 = 32{,}3 \cdot 10^6$
População rural em 2010 $= 0{,}16 \cdot 191 \cdot 10^6 = 30{,}56 \cdot 10^6$
Logo, diminui em 5,39% $\left(\dfrac{32{,}3 - 30{,}56}{32{,}3} = 5{,}39\right)$.

b) 16%

40. Como a quantidade de experimentos é grande, podemos esperar que a frequência relativa seja aproximadamente igual à probabilidade.

Cor da bolinha	Número de vezes	Frequência relativa
Azul	614	0,307
Branca	1386	0,693

Assim, ao repetir essa operação mais uma vez, a probabilidade de que a bolinha seja azul é:

$P(\text{azul}) = \dfrac{624}{624 + 1\,376} = \dfrac{624}{2\,000} = 0{,}312$; $P(\text{azul}) = 31{,}2\%$.

Obs.: considerando que as bolinhas tenham o mesmo tamanho e a mesma massa, então, temos que a probabilidade teórica de, ao repetir essa operação mais uma vez, a bolinha seja azul, é de 30%. A resolução é similar ao exercício resolvido 6 do Capítulo 2.

41. a) O item *Habitação*, pois corresponde à fatia que possui o maior ângulo.

b) Comparando 54° com 360°, temos: $\dfrac{54}{360} = 0{,}15 = 15\%$
Então, essa pessoa compromete 15% de sua renda mensal com o plano de saúde.

c) Para saber a faixa etária, vamos descobrir qual é o gasto dessa pessoa com o plano de saúde.
Renda total (4 salários mínimos): $r = 4 \cdot 880 = 3\,520$ reais
Gasto com plano de saúde:
$p = 15\%$ de $3\,520 = 0{,}15 \cdot 3\,520 = 528$ reais
De acordo com a tabela, quem gasta R\$ 528,00 no plano de saúde tem de 31 a 45 anos.

Pensando no Enem

1. A taxa mensal de juros do cartão de crédito, considerando o regime de juros compostos, que projeta a taxa anual mencionada no texto é de:

$1 + n = (1+i)^{12} \Rightarrow 1 + 4{,}143 = (1+i)^{12} \Rightarrow (1+i)^{12} = 5{,}143 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{5{,}143} \Rightarrow 1 + i \simeq 1{,}15 \Rightarrow i = 0{,}15 = 15\%$

A taxa mensal do cheque especial, considerando o regime de juros compostos, que projeta a taxa anual mencionada no texto é de:

$1 + n = (1+i)^{12} \Rightarrow 1 + 2{,}637 = (1+i)^{12} \Rightarrow (1+i)^{12} = 3{,}637 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{3{,}637} \Rightarrow 1 + i \simeq 1{,}11 \Rightarrow i = 0{,}11 = 11\%$

A taxa mensal para a compra de veículos, considerando o regime de juros compostos, que projeta a taxa anual mencionada no texto é de:

$1 + n = (1+i)^{12} \Rightarrow 1 + 0{,}256 = (1+i)^{12} \Rightarrow (1+i)^{12} = 1{,}256 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{1{,}256} \Rightarrow 1 + i \simeq 1{,}02 \Rightarrow i = 0{,}02 = 2\%$

15%; 11% e 2%.

Resposta: alternativa **e**.

Por que as outras alternativas são incorretas:

Assinalar a letra **a** corresponde a erros na posição da vírgula nas porcentagens.

Assinalar a letra **b** corresponde a considerar juros simples, calculando, respectivamente:

$$\frac{414,3\%}{12} \simeq 34,5\%;\ \frac{263,7\%}{12} \simeq 22,0\% \text{ e } \frac{25,6\%}{12} \simeq 2,1\%$$

Assinalar a letra **c** corresponde a considerar, em porcentagem, os acréscimos dessas taxas conforme o texto:

"A taxa do cheque especial subiu 10,5 pontos percentuais e a do rotativo do cartão de crédito, 10,8 pontos percentuais, de agosto para setembro."

"A taxa para a compra de veículos subiu 0,8 ponto percentual [...]"

Assinalar a letra **d** corresponde a não escrever os valores encontrados em porcentagem, apenas acrescentando a eles o símbolo %: 0,15%; 0,11% e 0,02%.

2. Temos a seguinte tabela de frequências absolutas:

Número de peças defeituosas por caixa	FA
0	28
1	12
2	5
3	2
4	1
Total	48

$$MA = \frac{28 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{48} = \frac{32}{48} = 0,666...$$

A moda é 0, pois tem a maior frequência, e a mediana é a média aritmética entre o 24º e o 25º termos, ou seja, $\frac{0+0}{2} = 0$.

Resposta: alternativa **d**.

Outros contextos

4. a) Sim. Em 2020 espera-se que no Brasil haja 2 983 957 mulheres a mais do que homens.

b) Não. Na faixa etária de 20 a 29 anos a expectativa é que haja mais homens do que mulheres.

c) 325 574 homens a mais.

6. Sexo masculino → frequência absoluta: 104 546 709; frequência relativa: $\frac{104\ 546\ 709}{212\ 077\ 375} \simeq 49,30\%$

Sexo feminino → frequência absoluta: 107 530 666; frequência relativa: $\frac{107\ 530\ 666}{212\ 077\ 375} \simeq 50,70\%$

Vestibulares de Norte a Sul

1. A questão é um problema básico que trabalha com juros simples. A partir das informações do enunciado, temos:

$$\begin{cases} i = \frac{2\%}{\text{mês}} = \frac{0,02}{\text{mês}} \\ t = 10 \text{ meses} \\ M = 208\ 800 \text{ reais} \end{cases}$$

A partir da fórmula que calcula o monte, segue-se

$$M = \overbrace{C}^{\text{capital inicial}} + \underbrace{Cit}_{\text{juros obtidos no final de } t \text{ períodos}}$$

$$\therefore 208\ 800 = C + C \cdot 0,02 \cdot 10 \Rightarrow 208\ 800 = C(1 + 0,2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{208\ 800}{1,2} \Rightarrow C = 174\ 000$$

Resposta: alternativa **b**.

2. A primeira coisa a ser feita é pôr os termos em ordem: 85, 86, 87, 88, 89, 90, 90, 90, 92.

Logo, temos que

$$MA = \frac{\text{soma dos termos}}{\text{número de termos}} = \frac{886}{10} = 88,6$$

$$Me = \underbrace{MA \text{ entre os termos 58 e 68}}_{\text{pois possui um número par de termos}} = \frac{89 + 89}{2} = 89$$

Resposta: alternativa **d**.

3. Tal problema é característico de juros compostos, envolvendo também conhecimentos básicos em exponencial.

$$\text{A partir do enunciado, temos: } \begin{cases} C = 2\ 500 \\ M = 40\ 000 \\ i = 100\% = 1 \\ t = (\text{desejado}) \end{cases}$$

Substituindo os valores na fórmula geral, temos:

$$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 40\ 000 = 2\ 500(1 + 1)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{40\ 000}{2\ 500} = 2^t \Rightarrow 16 = 2^t \Rightarrow 2^4 = 2^t \Rightarrow t = 4$$

∴ Como são necessários 4 anos para alcançar o montante de R$ 40 000,00, para superá-lo é preciso um tempo superior a 4 anos.

Resposta: alternativa **d**.

4. De acordo com o enunciado, temos:

- Média aritmética das notas dos meninos:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \quad \text{I}$$

- Média aritmética das notas das meninas:

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{25}}{25} = MA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + ... + y_{25} = 25MA \quad \text{II}$$

- Média aritmética das notas dos alunos:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_1 + y_2 + ... + y_{25}}{30} = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_5 + y_1 + y_2 + ... + y_{25} = 210 \quad \text{III}$$

Substituindo I e II em III, temos:

$$30 + 25MA = 210 \Rightarrow 25MA = 210 - 30 \Rightarrow 25MA = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA = \frac{180}{25} = 7,2$$

Resposta: alternativa **b**.

5. Analisando-se as alternativas, temos:

(a) Falso. Os países da liga dos estados árabes são Arábia Saudita e Kuwait, os quais somam 1 819, em bilhões, enquanto o do Brasil é 1 176 e, assim, não é 68% maior que os países da liga árabe.

(b) Falso. Os países da Alca que estão presentes no quadro são Argentina, Brasil, México, Venezuela, que somam 3 939 bilhões. Logo, 1 176 não representa um percentual maior que 30% de 3 939.

(c) Verdadeiro. Os países do Brics presentes na tabela são Brasil, China e Rússia, que somam 5 670 bilhões de dólares. Assim, o 1 176 bilhões do Brasil representam mais de 20% desse valor.

(d) Falso. O único país do G8 que faz parte do quadro é a Rússia com 1 805 bilhões. Então os 1 176 bilhões do Brasil representam mais que 26%.

(e) Falso. Os países do Mercosul presentes no quadro somam 2 996 bilhões. Logo, 1 176 bilhões do Brasil não representa 60% de 2 996 bilhões, e sim, aproximadamente 40%.

Resposta: alternativa **c**.

6. Sendo:

ℓ: lucro

p_c: preço de custo

p_v: preço de venda

Temos:

$\frac{\ell}{p_c} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\ell}{p_v - \ell} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\ell}{600} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ell = \text{R\$ } 150{,}00$

Mas:

$(1 - 0{,}25)p_v = 150 + 600 \Rightarrow p_v = \frac{750}{0{,}75} \Rightarrow p_v = \text{R\$ } 1\,000{,}00$

Resposta: alternativa **b**.

7. a) O capital acumulado foi de:

$12\,000(1 + 0{,}08)^2 = \text{R\$ } 13\,996{,}80$

b) Seja M o capital acumulado. Então:

$M > 12\,000 \cdot 2 \Rightarrow 12\cancel{000}\,(1 + 0{,}08)^t > 12\cancel{000} \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(1{,}08)^t > \log 2 \Rightarrow t > \frac{\log 2}{\log 1{,}08} \Rightarrow t > 9{,}12$

Logo, $t = 10$ anos.

8. Total de notas 1: 2

Total de notas de 1 a 2: $2 + 4 = 6$

Total de notas de 1 a 3: $2 + 4 + 2 = 8$

Total de notas de 1 a 4: $2 + 4 + 2 + 6 = 14$

Total de notas de 1 a 5: $2 + 4 + 2 + 6 + 10 = 24$

Total de notas de 1 a 6: $2 + 4 + 2 + 6 + 10 + 8 = 32$

Portanto, o 25º e o 26º termos valem 6. Logo:

$Me = \frac{6 + 6}{2} = 6$

Resposta: alternativa **d**.

9. Inicialmente, verificamos o percentual de imposto no valor da gasolina, representado pelo ICMS, CIDE, PIS/PASEP e CONFINS, os quais juntos somam 35% (28% + 7%) do valor.

A partir do informado, sabe-se que:

78 reais $\rightarrow$ 0,65 (65%)

x reais $\rightarrow$ 1 (100%)

$x = \frac{78}{0{,}65} = 120$

Logo , se o posto não tivesse adotado a medida o cliente pagaria R$ 120,00.

Resposta: alternativa **d**.

10. A questão é um problema básico que trabalha com juros simples.

A partir das informações do enunciado, temos:

De acordo com o gráfico, temos os seguintes percentuais das frutas:

- Abacate = 26%
- Abacaxi = 25%
- Banana = 40%
- Laranja = 22%
- Mamão = 21%
- Manga = 25%
- Melancia = 30%
- Morango = 40%

A partir disso, temos:

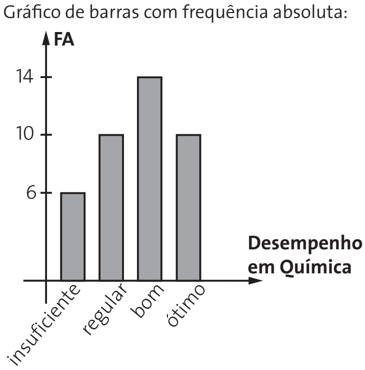
- $MA = \frac{229}{8} = 28{,}625$
- $Mo = 25$ e 40
- $Me = \frac{25 + 26}{2} = 25{,}5$

Resposta: alternativa **a**.

Para refletir

Página 42

Gráfico de barras com frequência absoluta:



Página 43

Sala **B**: Usando a frequência relativa em porcentagem, temos:

$\frac{20}{100} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 100x = 7\,200° \Rightarrow x = 72°$

Sala **C**: Usando a frequência relativa em porcentagem, temos:

$\frac{50}{100} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 100x = 18\,000° \Rightarrow x = 180°$

Sala **A**: Sabendo que o círculo possui 360° e que os ângulos centrais relativos às salas **B** e **C** são respectivamente, 72° e 180°, então:

$x + 72° + 180° = 360° \Rightarrow x = 360° - 252° \Rightarrow x = 108°$

Página 45

Altura	$\bar{x}$
140 ⊢ 150	145
150 ⊢ 160	155
160 ⊢ 170	165
170 ⊢180	175
180 ⊢190	185

O cálculo é feito usando os limites de cada classe.

Sua média aritmética, por exemplo, na primeira classe:

$\bar{x} = \frac{140 + 150}{2} = 145$

Página 53

Essa é uma propriedade das médias aritméticas.

Por exemplo, se considerarmos três valores a, b e c com média $\bar{x}$, teremos:

$(a - \bar{x}) + (b - \bar{x}) + (c - \bar{x}) = (a + b + c) - 3\bar{x} =$

$= (a + b + c) - 3\left(\frac{a + b + c}{3}\right) = 0$

Unidade 2

CAPÍTULO 3

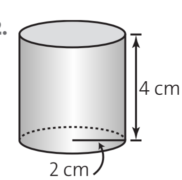
1. **a** completamente na horizontal (em relação ao solo)

b completamente na vertical (em relação ao solo)

d inclinado

Nunca poderão: **c** e **e**.

2.

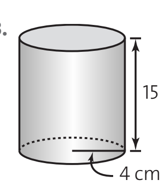


a) $2A_b = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ cm}^2$

b) $A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^2$

c) $A_T = 8\pi + 16\pi = 24\pi \text{ cm}^2$

3.



$A_T = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 4(15 + 4) = 152\pi \text{ cm}^2$ ou aproximadamente 477 cm².

4. $A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5h = 20\pi \Rightarrow h = \frac{20\pi}{10\pi} = 2 \text{ cm}$

$A_T = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 5(2 + 5) = 10\pi \cdot 7 = 70\pi \text{ cm}^2$ ou aproximadamente 220 cm².

5. • Lata mais baixa:

$A_T = 2\pi(2r)(h + 2r) = 4\pi r(h + 2r) = 4\pi rh + 8\pi r^2$

• Lata mais alta:

$A_T = 2\pi r(2h + r) = 4\pi rh + 2\pi r^2$

Logo, utilizou-se menos material na lata mais alta.

Resolvido passo a passo

5. a) Vamos calcular o raio da piscina circular onde $V = 12$ m³ e $h = 1$ m

$V = \pi R^2 h \Rightarrow 3 \cdot R^2 \cdot 1 = 12$, considerando $\pi = 3 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 2$ m

Área lateral da piscina cilíndrica

$A_\ell = 2\pi Rh \Rightarrow A_\ell = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow A_\ell = 12$ m²

Custo da área lateral da piscina com modelos infantis

$C_1 = (50 + 2{,}50) \cdot 12 = 630{,}00$

$C_1 =$ R\$ 630,00

Área da base da piscina (coroa circular)

$A_b = \pi \cdot (R - r) = 3[(2)^2 - (1{,}6)^2] = 4{,}32$ m²

Custo da base com modelos infantis

$C_2 = (50 + 2{,}50) \cdot 4{,}32 = 226{,}80$

$C_2 =$ R\$ 226,80

Área lateral da ilha de lazer

$A_\ell = 2\pi rh \Rightarrow A_\ell = 2 \cdot 3 \cdot (1{,}6) \cdot 1 \Rightarrow A_\ell = 9{,}6$ m²

Custo da área lateral da ilha de lazer com modelos infantis

$C_3 = (50 + 2{,}50) \cdot 9{,}6 = 504{,}00$

$C_3 =$ R\$ 504,00

Área da base da ilha de lazer com piso antiderrapante

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot (1{,}6)^2 \Rightarrow A_b = 7{,}68$ m²

Custo da base com piso antiderrapante

$C_4 = (42{,}50 + 2{,}50) \cdot 7{,}68 = 345{,}60$

$C_4 =$ R\$ 345,60

Custo Total

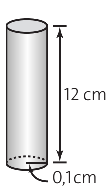
$C_T = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

$C_T = 630{,}00 + 226{,}80 + 504{,}00 + 345{,}60$

$C_T =$ R\$ 1706,40

O custo total para revestimento do projeto será R\$ 1706,40.

6.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$V = \pi(0{,}1)^2 \cdot 12 = 0{,}12\pi$ cm³ ou aproximadamente 0,377 cm³.

7. $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 70 - \pi \cdot 6^2 \cdot 70 = 4480\pi$ cm³ ou aproximadamente 14 070 cm³.

8. $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 6 - \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 600\pi - 150\pi = 450\pi$ cm³ ou aproximadamente 1413 cm³.

9. $V = 8 \cdot 5 \cdot 30 - \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} =$

$= 1200 - 64\pi \simeq 1200 - 192 \simeq 1008$ m³

10. $V = \pi r^2 \cdot h = p \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$ cm³ ou aproximadamente 402 cm³.

11. $\left.\begin{array}{l}\text{aresta: } 20 \text{ cm} \Rightarrow r = 10 \text{ cm} \\ h = 20 \text{ cm}\end{array}\right\} V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 2000\pi \text{ cm}^3$

ou aproximadamente 6 280 cm³.

12. $V_I = \pi x^2 y = x^2 y \pi$

$V_{II} = \pi \cdot \frac{x^2}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} y = \frac{x^2 y \pi}{2}$

Notamos, então, que o volume da primeira embalagem é o dobro do volume da segunda, enquanto que seu preço é menor do que o dobro do preço da segunda. Logo, é mais vantajoso comprar a primeira embalagem.

13. a) $\left.\begin{array}{lcl}\frac{\pi}{15}\text{L} & \text{———} & 1 \text{ min} \\ x & \text{———} & 60 \text{ min (1 h)}\end{array}\right. \Rightarrow x = 4\pi\text{L}$

$V(t) = 4\pi$ L/h

b) 4π L/h $\Rightarrow 4\pi$L $= 4\pi$ dm³

$4\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow h = 1$

$h(t) = 1$ dm/h

c) $V_{total} = \pi r^2 \cdot h = 40\pi$

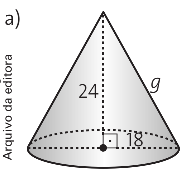
$V_{total} = V \cdot t$

$40\pi = 4\pi \cdot t \Rightarrow t = 10$ horas

14. As distâncias entre as graduações aumentam a partir do centro do círculo. Essas graduações são simétricas em relação ao diâmetro horizontal desse círculo.

Resposta: alternativa **a**.

15. a)



Banco de imagens/Arquivo da editora

$g^2 = 24^2 + 18^2 = 900 \Rightarrow g = 30$ cm

b) $A_\ell = \pi rg = \pi \cdot 18 \cdot 30 = 540\pi$ cm²

c) $A_T = \pi r(g + r) = \pi \cdot 18(30 + 18) = 18\pi \cdot 48 = 864\pi$ cm²

16. Desconsiderando a base, a planificação de um cone é sempre um setor circular.

Resposta: alternativa **a**.

17. $g^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676 \Rightarrow g = 26$ cm

$A_\ell = \pi rg = p \cdot 10 \cdot 26 = 260\pi$ cm²

18. $\begin{array}{lcl}360° & \text{———} & \pi \cdot 6^2 \\ 60° & \text{———} & A_\ell\end{array} \Rightarrow \frac{360°}{60°} = \frac{36\pi}{A_\ell} \Rightarrow A_\ell = 6\pi$ cm²

19. a) $r = 2$ cm

$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm

b) $A_{Total} = \pi rg + \pi r^2 = 8\pi + 4\pi = 12\pi$ cm²

20. $g^2 = 36 + 25 = 61$

$g = \sqrt{61}$

$A_{Total} = \pi rg + \pi r^2 = 5\sqrt{61}\pi + 25\pi \simeq 122{,}6 + 78{,}5 \simeq 201{,}1$ cm²

21. $\begin{cases} h = 4 \text{ } m \\ r = 3 \text{ } m \end{cases}$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ m³ $= 12\,000\pi$ ℓ

22. $\begin{cases} h = 0{,}5 \text{ m} \\ r = 0{,}15 \text{ m} \end{cases}$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}15^2 \cdot 7 = \frac{0{,}01125\pi}{3}$ m³ $= 0{,}00375\pi$ m³

$(\simeq 0{,}01178$ m³$) = 3{,}75\pi$ L

23. $r = 10$

$h = 24$ m

$g^2 = r^2 + h^2$

$26^2 = 10^2 + h^2$

$h = 24$ m

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \pi \cdot 24 = 2400$ m³

24. $g^2 = r^2 + h^2$
$7^2 = r^2 + 6^2$
$r = \sqrt{13}$
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 13 \cdot 6$
$V = 26\pi \simeq 81{,}64\ \text{cm}^3$

25. $9\cancel{\pi}\cancel{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\cancel{\pi}\frac{g^2}{4} \cdot \frac{g\cancel{\sqrt{3}}}{2}$
$g^3 = 27 \cdot 8$
$g = 6$
$g^2 = \frac{(g)^2}{2} + h^2$
$h^2 = \frac{3}{4}g^2$
$h = \frac{\sqrt{3}\,g}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$ cm ou aproximadamente 5,2 m.

26. $V = \pi \cdot 6^2 \cdot 4 - \frac{1}{\cancel{3}}\pi \cdot 4^2 \cdot \cancel{3}$
$V = 144\pi - 16\pi = 128\pi\ \text{cm}^3$ ou aproximadamente $402\ \text{cm}^3$.

27. $R = 40$ cm; $r = 20$ cm; $h_1 = 30$ cm
$V = \frac{h_1\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{30\pi}{3}(40^2 + 40 \cdot 20 + 20^2) =$
$= 10\pi(2\,800) = 28\,000\pi$
28π L ou aproximadamente 84 L.

28. $r = 1{,}5$ m
$V = \frac{5\pi}{3}(3^2 + 3 \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2)$
$V = 26{,}25\pi\ \text{m}^3$ ou aproximadamente $82{,}4\ \text{m}^3$.

29. $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm e $h = 9$ cm
$V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right) = \frac{\pi \cdot 9}{3}(9 + 3 \cdot 4 + 16) = 3\pi \cdot 37 =$
$= 111\pi\ \text{cm}^3 = 111\pi$ mL ou aproximadamente 349 mL.

30. $V = \frac{4\pi}{3}(2{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2)$
$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 12{,}25 \simeq 49\ \text{cm}^3 \simeq 49$ mL

31. $A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$

32. $A = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi\ \text{cm}^2$ ou aproximadamente $201\ \text{cm}^2$.

33. $A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^2 = 200\pi\ \text{m}^2$

34. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 13^3 = \frac{8\,788\pi}{3}\ \text{cm}^3 \simeq 9\,200\ \text{cm}^3$

35. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi\ \text{cm}^3 \simeq 113{,}04\ \text{cm}^3$

36. $V = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{250\pi}{3}\ \text{m}^3 \simeq 250\ \text{m}^3 = 250\,000$ L

37. • Volume da laranja:
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3}\ \text{cm}^3$
• Volume de cada gomo:
$V = \frac{1}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{256}^{64}\pi}{3} = \frac{64\pi}{9}\ \text{cm}^3$ ou aproximadamente $22\ \text{cm}^3$.

38. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 972\pi\ \text{m}^3$
$\frac{972\pi\ \text{m}^3}{20h} = 48{,}6\pi\ \text{m}^3/\text{h} \simeq 152{,}60\ \text{m}^3/\text{h}$

39. $V = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi^2\ \text{cm}^3 \simeq 13{,}15\ \text{cm}^3$

40. $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{512\pi}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{512\cancel{\pi}^1 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{3}_1 \cdot 4\cancel{\pi}_1} = 128 \Rightarrow R = 4\sqrt[3]{2}$ cm
$A = 4\pi R^2 = 4\pi\left(4\sqrt[3]{2}\right)^2 = 4\pi \cdot 16 \cdot \sqrt[3]{4} = 64\pi\sqrt[3]{4}\ \text{cm}^2$

41. $V = \frac{1}{6}\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{\cancel{6}}\frac{4}{3}\pi \cdot 6^{\cancel{3}\,2} = 48\pi\ \text{cm}^3$

42. $A = \frac{1}{12}4\pi R^2 = \frac{1}{\cancel{3}}3^{\cancel{2}} = 3\pi\ \text{cm}^2$

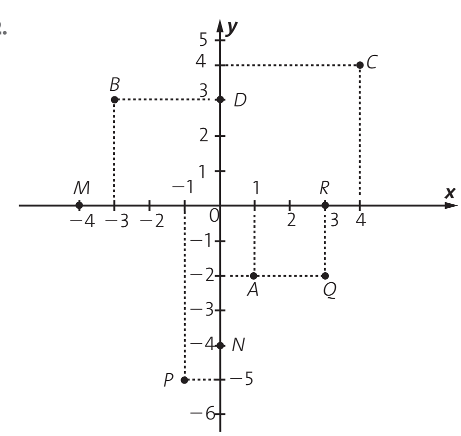
43. $V_{\text{cunha}} = \frac{\alpha\pi R^3}{270°} \Rightarrow 6{,}4 = \frac{72° \cdot 3 \cdot R^3}{270°} \Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2$
$A_{\text{fuso}} = \frac{\alpha\pi R^2}{90°} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = \frac{72° \cdot 3 \cdot 2^2}{90°} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = 9{,}6\ \text{m}^2$

44. • Volume do hemisfério:
$V = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{2\pi}{3}\ \text{m}^3$
• Volume do cone:
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 0{,}80 = \frac{0{,}8\pi}{3}\ \text{m}^3$
Volume da boia:
$V = \frac{2\pi}{3} + \frac{0{,}8\pi}{3} = \frac{2{,}8\pi}{3}\ \text{m}^3 \simeq 2{,}8\ \text{m}^3$

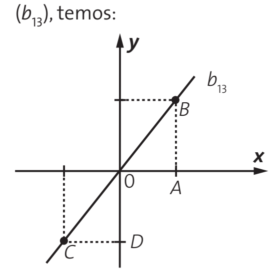
45. a) A área da casca de cada fatia será $\frac{1}{12}$ da área da superfície esférica. Portanto:
$A = \frac{4\pi R^2}{12} = \frac{\pi R^2}{3}\ \text{cm}^2$
b) Além da área da casca, gastam-se mais dois semicírculos para cobrir as laterais da melancia. Assim:
$A = \frac{\pi R^2}{3} + 2 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4\pi R^2}{3}\ \text{cm}^2$

CAPÍTULO 4

2.

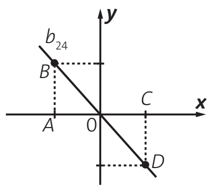


4. a) Se o ponto $P(x_P, y_P)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (b_{13}), temos:



As coordenadas de P são iguais, ou seja, $x_P = y_P$.
Assim, P tem coordenadas tais que $P(a, a)$, com $a \in \mathbb{R}$.

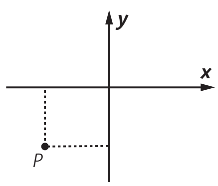
b) Se o ponto $P(x, y)$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (b_{24}), temos:



As coordenadas de P são simétricas, ou seja, $x_P = -y_P$. Assim, P tem coordenadas tais que $P(a, -a)$, com $a \in \mathbb{R}$.

5. Se $P \in 3^{\underline{o}}$ quadrante, então
$2m + 1 < 0$ e $-3m - 4 < 0$

$m > -\dfrac{4}{3}$ e $m < -\dfrac{1}{2}$



Logo, $-\dfrac{4}{3} < m < -\dfrac{1}{2}$.

Assim, $\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{4}{3} < m < -\dfrac{1}{2}\right\}$.

6. a) $d(A, B) = \sqrt{(1-3)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) $d(E, F) = \sqrt{(3-3)^2 + (5 + 1)^2} = \sqrt{0 + 36} = \sqrt{36} = 6$

c) $d(H, O) = \sqrt{(0 + 2)^2 + (0 + 5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

d) $d(M, N) = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 0\right)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{5 + 0} = \sqrt{5}$

7. a) $d(P, Q) = \sqrt{(-3-3)^2 + (3 + 3)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

b) $d(C, D) = \sqrt{(0 + 4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

8. Se $d(A, B) = 3$, então:

$\sqrt{(0-a)^2 + (2-1)^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 3 \Rightarrow a^2 + 1 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$

9. Se P pertence ao eixo das abscissas, então suas coordenadas são a e 0.
Como $P(a, 0)$ é equidistante de A e B, devemos ter
$d(P, A) = d(P, B)$. Assim:

$\sqrt{(a + 1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (0-4)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 + 4 = a^2 - 2a + 1 + 16 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$

Logo, o ponto $P(3, 0)$ têm coordenadas 3 e 0.

10. O ponto $P(-6, a)$ dista $\sqrt{74}$ de $Q(1, 3)$. Logo:

$d(P, Q) = \sqrt{74} \Rightarrow \sqrt{(1 + 6)^2 + (3-a)^2} = \sqrt{74} \Rightarrow$
$\Rightarrow 49 + 9 - 6a + a^2 = 74 \Rightarrow a^2 - 6a - 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} \Rightarrow a' = 8$ e $a'' = -2$

Portanto, a ordenada do ponto P é -2 ou 8.

11. De acordo com o problema, devemos ter $d(P, A) = 2d(P, B)$.
Logo:

$\sqrt{(5-x)^2 + (3-y)^2} = 2\sqrt{(-4-x)^2 + (-2-y)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow (5-x)^2 + (3-y)^2 = 4\left[(-4-x)^2 + (-2-y)^2\right] \Rightarrow$
$\Rightarrow 25 - 10x + x^2 + 9 - 6y + y^2 =$
$= 4(16 + 8x + x^2 + 4 + 4y + y^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 25 - 10x + x^2 + 9 - 6y + y^2 =$
$= 64 + 32x + 4x^2 + 16 + 16y + 4y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x^2 - 3y^2 - 42x - 22y - 46 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 42x + 22y + 46 = 0$

12. Um triângulo é isósceles se dois de seus lados são congruentes.
Vamos calcular as medidas de seus lados:

$d(A, B) = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$

$d(A, C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$

$d(B, C) = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{36 + 0} = \sqrt{36} = 6$

Como os lados AB e AC são congruentes, o triângulo ABC é isósceles.
O perímetro P do triângulo ABC é a soma das medidas de seus lados. Assim:

$P = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{58} + \sqrt{58} + 6 = 2\sqrt{58} + 6$

13. De acordo com o problema, temos $d(P, A) = 3$.
Então:

$\sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} = 3 \Rightarrow (2-x)^2 + (3-y)^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 9 - 6y + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

14. Para classificar o triângulo quanto aos lados vamos calcular suas medidas. Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$d(A, B) = \sqrt{(2-4)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$d(A, C) = \sqrt{(6-4)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$

$d(B, C) = \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$

Como os lados têm medidas distintas, então o triângulo é escaleno.
Vamos classificá-lo quanto aos ângulos:

$$\begin{cases} AB^2 = 29 \\ AC^2 = 68 \\ BC^2 = 25 \end{cases}$$

$AC^2 > AB^2 + BC^2$

Logo, o triângulo é obtusângulo.

15. Considerando o ponto médio $M(x_M, y_M)$, temos:

a) $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1 + 3}{2} = 2$

$y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{-7-5}{2} = -6$

Então, $M(2, -6)$.

b) $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-1 + 5}{2} = 2$

$y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{5-2}{2} = \dfrac{3}{2}$

Então, $M\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

c) $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-4-2}{2} = -3$

$y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{-2-4}{2} = -3$

Então, $M(-3, -3)$.

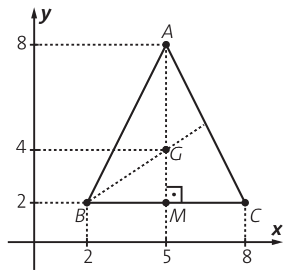
16. Como $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$, então:

$3 = \dfrac{-2 + x}{2} \Rightarrow -2 + x = 6 \Rightarrow x = 8$

$-2 = \dfrac{-2 + y}{2} \Rightarrow -2 + y = -4 \Rightarrow y = -2$

Logo, $B(8, -2)$.

17.



Pelo esboço do gráfico já se pode ver que $d(A, M) = 6$.
Vamos resolver algebricamente:
$M(x_M, y_M)$ é o ponto médio de $\overline{BC}$. Então:

$x_M = \dfrac{2+8}{2} = 5 \qquad y_M = \dfrac{2+2}{2} = 2$

Logo, $M(5, 2)$.

A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é o segmento de reta AM.
Aplicando a fórmula, temos:

$d(A, M) = \sqrt{(5-5)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{0+36} = \sqrt{36} = 6$

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$

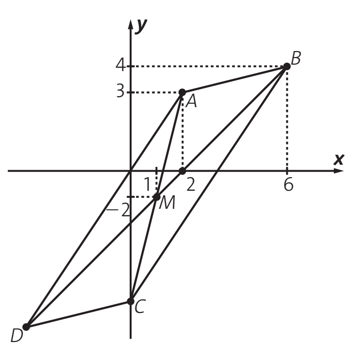
$x_G = \dfrac{2+5+8}{3} = 5$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

$y_G = \dfrac{8+2+2}{3} = 4$

$G(5, 4)$

18.



Observando a figura, $M(1, -2)$ é ponto médio de $\overline{AC}$, sendo $A(2, 3)$ e $C(x_C, y_C)$.
Logo:

$\dfrac{2 + x_C}{2} = 1 \Rightarrow 2 + x_C = 2 \Rightarrow x_C = 0$

$\dfrac{3 + y_C}{2} = -2 \Rightarrow 3 + y_C = -4 \Rightarrow y_C = -7$

Assim, $C(0, -7)$.
$M(1, -2)$ é também ponto médio de $\overline{BD}$, sendo $B(6, 4)$ e $D(x_D, y_D)$.
Logo:

$\dfrac{6 + x_D}{2} = 1 \Rightarrow 6 + x_D = 2 \Rightarrow x_D = -4$

$\dfrac{4 + y_D}{2} = -2 \Rightarrow 4 + y_D = -4 \Rightarrow y_D = -8$

Portanto, $D(-4, -8)$.
Os pontos C e D são $C(0, -7)$ e $D(-4, -8)$.

19. a) Se os pontos estão alinhados, devemos ter:

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 8 - 15 - 4 - 0 + 6 = -5 \neq 0$

Logo, os pontos não estão alinhados.

b) Se $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$ e $C(-4, 10)$ forem vértices de um mesmo triângulo, eles não são alinhados.
Calculando o determinante:

$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 12 + 20 + 16 + 10 - 6 = 24 \neq 0$

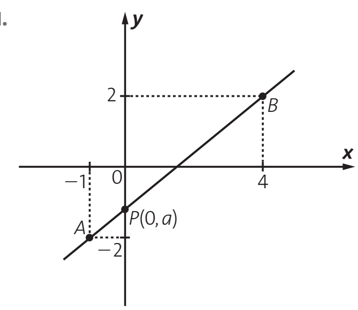
Logo, A, B e C são vértices de um mesmo triângulo.

20. Para que $A(3, 5)$, $B(1, 3)$ e $C(x, 1)$ sejam vértices de um triângulo, eles não podem ser alinhados. Logo:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 9 + 5x + 1 - 3x - 3 - 5 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \neq -1$

21.



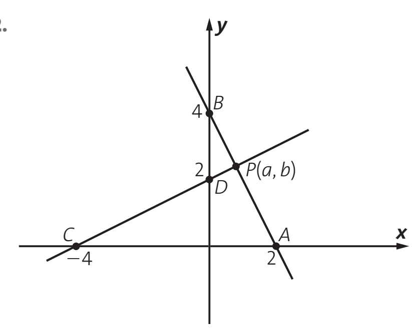
Se P pertence ao eixo y, então as suas coordenadas são $P(0, a)$.
Como A, B e P estão alinhados, então:

$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2 - 0 + 4a - 0 + a + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a = -6 \Rightarrow a = -\dfrac{6}{5}$

Devemos ter $P\left(0, -\dfrac{6}{5}\right)$.

22.



O ponto $P(a, b)$ é alinhado com A e B. Logo:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8 + 0 + 0 - 4a - 2b - 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a - 2b = -8 \Rightarrow 2a + b = 4$

O ponto $P(a, b)$ é alinhado com os pontos C e D. Assim:

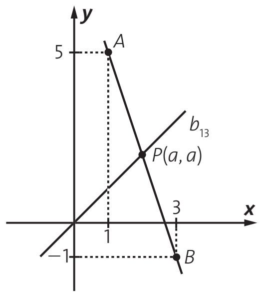
$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8 + 0 + 0 - 2a + 4b + 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2a + 4b = 8 \Rightarrow a - 2b = -4$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - 2b = -4 \end{cases}$, encontramos $a = \dfrac{4}{5}$ e $b = \dfrac{12}{5}$.

Logo, $P\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$.

23.



Se P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então as suas coordenadas são $P(a, a)$. Como $P(a, a)$ está alinhado com $A(1, 5)$ e $B(3, -1)$, vem:

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5a + 3a - 1 - 15 + a - a = 0 \Rightarrow 8a = 16 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 2$

Logo, o ponto é $P(2, 2)$.

24. Se $P(a, b)$ é colinear com $A(0, 3)$ e $B(1, 0)$, então:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3a + b - 3 = 0 \Rightarrow 3a + b = 3$$

Se $P(a, b)$ é colinear com $C(1, 2)$ e $D(0, 1)$, então:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + 1 - a - b = 0 \Rightarrow a - b = -1$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 3a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases}$ encontramos $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$.

Logo, o ponto é $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

25. O coeficiente angular da reta que passa por $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

a) $m = \frac{-1-2}{-3-3} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$

b) $m = \frac{3+3}{-4-2} = \frac{6}{-6} = -1$

c) $m = \frac{-2-2}{3-3} = \frac{-4}{0}$

Não há coeficiente angular. A reta é paralela ao eixo y.

d) $m = \frac{2-4}{3+1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

e) $m = \frac{-3-2}{-2-5} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$

f) $m = \frac{80-100}{300-200} = \frac{-20}{100} = -\frac{1}{5}$

27. a) Usando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$ para $m = 4$, vem:

$y + 3 = 4(x - 2) \Rightarrow y + 3 = 4x - 8 \Rightarrow y - 4x + 11 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x - y - 11 = 0$

b) Usando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$ para $m = \tan 45° = 1$, vem:

$y - 1 = 1(x - 4) \Rightarrow y - 1 = x - 4 \Rightarrow x - y - 3 = 0$

c) Se $m = 0$, então a reta é paralela ao eixo x.
Logo, a equação é $y = -5$.

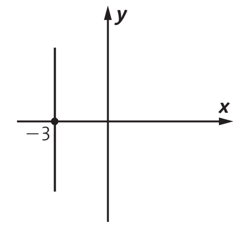
d) Usando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$ e considerando que:

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{-5-3} = \frac{3}{-8} = -\frac{3}{8}$

temos:

$y - 1 = -\frac{3}{8}(x - 3) \Rightarrow 8y - 8 = -3(x - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow 8y - 8 = -3x + 9 \Rightarrow 3x + 8y - 17 = 0$

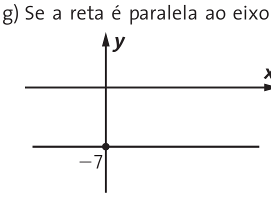
e) Se a reta é paralela ao eixo y, então sua equação é $x = -3$.



f) Usando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$ para $m = -\frac{1}{2}$ e sabendo que $A(2, -3)$ é ponto da reta, vem:

$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y + 6 = -x + 2 \Rightarrow x + 2y + 4 = 0$

g) Se a reta é paralela ao eixo x, então sua equação é $y = -7$.



h) Usando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$ e considerando que:

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{-2-1} = \frac{-3}{-3} = 1$

temos:

$y - 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$

i) Na equação $y - y_1 = m(x - x_1)$ temos $m = \tan 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $(0, 0)$ pertence à reta. Logo:

$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

28. Vamos obter a equação da reta que passa por $A(1, 1)$ e $B(0, -3)$:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-1}{0-1} = \frac{-4}{-1} = 4$

Então:

$y - 1 = 4(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 4x - 4 \Rightarrow y - 4x + 3 = 0$

Para o ponto $P(2, 3)$ pertencer à reta AB, devemos ter:

$y_P - 4x_P + 3 = 0 \Rightarrow 3 - 4 \cdot 2 + 3 = 3 - 8 + 3 = -2 \neq 0$

Logo, $P \notin \overleftrightarrow{AB}$.

29. a) A equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x + 2y + 3 - 12 + 3x + y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 3x + y - 3 = 0$

b) A equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x - 5y + 1 + 40 + x + y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9x - 4y + 41 = 0$

c) A equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y - 20 + 4x - 5y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -6y + 4x - 20 = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 10 = 0$

d) A equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - 15 - 3 + 5x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 8x - 2y - 18 = 0 \Rightarrow 4x - y - 9 = 0$

30. A equação reduzida é:

$y = mx + n \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + n$

Como $P(-1, -5)$ pertence à reta, então:

$-5 = \frac{1}{2}(-1) + n \Rightarrow -10 = -1 + 2n \Rightarrow 2n = -9 \Rightarrow n = -\frac{9}{2}$

A equação procurada é $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$.

31. a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 6 \Rightarrow 3y = -2x + 6 \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + 2$

b) $y - 6 = \frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow 2y - 12 = x + 4 \Rightarrow 2y - x - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2y + 16 = 0$

c) $3x + 9y - 36 = 0 \Rightarrow 3x + 9y = 36 \Rightarrow \frac{3x}{36} + \frac{9y}{36} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$

d) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 - x \\ t = y - 2 \end{cases} \Rightarrow y - 2 = 3 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y - 5 = 0$

32. $\begin{cases} x = 5 + 2t \Rightarrow t = \frac{x - 5}{2} \\ y = 2 + t \Rightarrow t = y - 2 \end{cases}$

$\frac{x - 5}{2} = y - 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} + 2 \Rightarrow y = \frac{x - 1}{2}$

33. a) A equação da bissetriz b_{13} é $y = x$ ou $x - y = 0$.

b) A equação da bissetriz b_{24} é $y = -x$ ou $x + y = 0$.

c) O eixo x tem equação $y = 0$, pois, para qualquer valor de x, o valor de y é sempre 0.

d) O eixo y tem equação $x = 0$.

34. A equação reduzida é $y = mx + n$. Então:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 7}{-1 - 2} = \frac{-12}{-3} = 4$

Logo, $y = 4x + n$.

Como, por exemplo, $P_1(2, 7)$ pertence à reta, então:

$7 = 4 \cdot 2 + n \Rightarrow n + 8 = 7 \Rightarrow n = -1$

Assim, a equação procurada é $y = 4x - 1$.

35. $3x + 4y = 7 \Rightarrow 4y = -3x + 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

O coeficiente angular é $m = -\frac{3}{4}$ (m também expressa a declividade da reta).

36. A equação da reta que passa por $A(0, -3)$ e tem coeficiente angular $m = -2$ é:

$y + 3 = -2(x - 0) \Rightarrow y + 3 = -2x \Rightarrow y = -2x - 3$

(equação reduzida)

37. Se o ponto $C(4, a)$ pertence à reta determinada por $A(3, 5)$ e $B(-3, 8)$, então os pontos são colineares. Assim:

$\begin{vmatrix} 4 & a & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 20 - 3a + 24 + 15 - 32 - 3a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6a = -27 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$

38. Reta-suporte da diagonal $\overline{AC}$, com $A(1, 1)$ e $C(6, 5)$:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 6y + 5 - 6 - 5x - y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y - 4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x - 5y + 1 = 0$

Reta-suporte da diagonal $\overline{BD}$, com $B(5, 2)$ e $D(2, 4)$:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 20 - 4 - 4x - 5y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3y - 2x + 16 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 16 = 0$

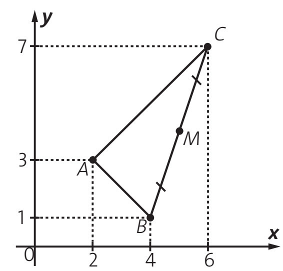
39. Se o ponto $P(2, 1)$ pertence à reta $3kx + (k - 3)y = 4$, então:

$3k \cdot 2 + (k - 3)1 = 4 \Rightarrow 6k + k - 3 = 4 \Rightarrow 7k = 7 \Rightarrow k = 1$

A equação é, para $k = 1$:

$3x - 2y = 4 \Rightarrow 3x - 2y - 4 = 0$

40. A mediana relativa ao lado BC é o segmento com extremidades no ponto A e no ponto $M(x_M, y_M)$, que é o ponto médio de $\overline{BC}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As coordenadas do ponto M são:

$x_M = \frac{4 + 6}{2} = 5 \qquad y_M = \frac{1 + 7}{2} = 4$

Logo, $M(5, 4)$.

A equação de $\overleftrightarrow{AM}$ é:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 5y + 8 - 15 - 4x - 2y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y - x - 7 = 0 \Rightarrow x - 3y + 7 = 0$

41. • Equação da reta CM:

O ponto C tem coordenadas $C(0, 4)$ e o ponto M, ponto médio de $\overline{OA}$, tem coordenadas $M(2, 0)$. Então:

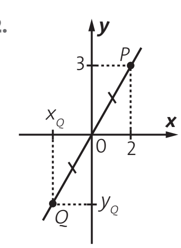
$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ (equação segmentária)

• Equação da reta AN:

O ponto A tem coordenadas $A(4, 0)$ e o ponto N, ponto médio de $\overline{OC}$, tem coordenadas $N(0, 2)$. Então:

$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ (equação segmentária)

42.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como o ponto $Q(x_Q, y_Q)$ é simétrico de P com relação à origem, então $Q(-2, -3)$.

Usando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$, temos:

$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-3 - 3}{-2 - 2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

Logo:

$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 6 = 3x - 6 \Rightarrow 2y - 3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 2y = 0$

43. Cálculo do coeficiente angular (m_1) da reta r:

$15x + 10y - 3 = 0 \Rightarrow 10y = -15x + 3 \Rightarrow y = -\frac{15x}{10} + \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + \frac{3}{10}$

Então, $m_1 = -\frac{3}{2}$.

Cálculo do coeficiente angular (m_2) da reta s:

$9x + 6y - 1 = 0 \Rightarrow 6y = -9x + 1 \Rightarrow y = -\frac{9x}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{6}$

Logo, $m_2 = -\frac{3}{2}$.

Como $m_1 = m_2$, então r e s são paralelas.

44. Cálculo do coeficiente angular das retas:

$(a + 3)x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow 4y = -(a + 3)x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{(a + 3)x}{4} + \frac{5}{4}$

Então, $m_1 = -\frac{a + 3}{4}$.

$x + ay + 1 = 0 \Rightarrow ay = -x - 1 \Rightarrow y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a}$

Logo, $m_2 = -\frac{1}{a}, a \neq 0$.

Como $m_1 = m_2$, temos:

$-\frac{a + 3}{4} = -\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{a + 3}{4}\ \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 + 3a = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Rightarrow a' = -4 \text{ e } a'' = 1$

Portanto, o valor de a é -4 ou 1.

45. a) Vamos calcular o coeficiente angular m da reta dada:

$8x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = -8x + 1 \Rightarrow y = -4x + \frac{1}{2}$

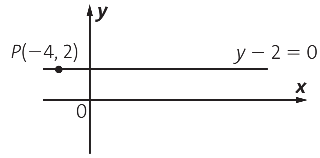
Então, $m = -4$.

Como a reta procurada é paralela à reta dada e passa pelo ponto $P(1, 2)$, sua equação é:

$y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -4x + 4 \Rightarrow y = -4x + 6$

b) A reta $y - 2 = 0$ é paralela ao eixo x, conforme a figura:

Banco de imagens/Arquivo da editora



A reta procurada passa por $P(-4, 2)$ e é paralela à reta dada. Logo, são coincidentes. Portanto, a equação procurada é $y = 2$.

c) Vamos calcular o coeficiente angular da reta dada:

$2x - 5y + 7 = 0 \Rightarrow -5y = -2x - 7 \Rightarrow 5y = 2x + 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{2x}{5} + \frac{7}{5}$

Então, $m = \frac{2}{5}$.

De acordo com o problema, a reta procurada passa pelo ponto $P(-1, 3)$ e é paralela à reta dada. Portanto, seu coeficiente angular é $m = \frac{2}{5}$. Logo:

$y - 3 = \frac{2}{5}(x + 1) \Rightarrow 5y - 15 = 2(x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y - 15 = 2x + 2 \Rightarrow 5y = 2x + 17 \Rightarrow y = \frac{2x}{5} + \frac{17}{5}$

46. Nosso problema consiste em resolver o sistema formado pelas equações das duas retas, r e s:

$\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ 2x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{10}{11} \text{ e } x = -\frac{14}{11}$

Logo, o ponto procurado é $\left(-\frac{14}{11}, -\frac{10}{11}\right)$.

47. Vamos recordar que trapézio é um quadrilátero convexo com dois lados paralelos, chamados de bases.

Pelos dados do problema, as bases são $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Como A e B têm a mesma ordenada ($y_B = y_A = 2$), então $\overline{AB}$ é paralela ao eixo x, o que também ocorre com $\overline{CD}$.

Assim, a equação da reta-suporte de $\overline{CD}$ é $y = 5$.

Resolvido passo a passo

5. a) A reta $r: x + y - 3 = 0$, possui declividade $m = -1$ o que significa que a perpendicular terá $m = 1$.

Equação da perpendicular: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Substituindo $m = 1$, temos: $y - y_0 = 1(x - x_0)$

Como $x_0 = y_0 = 0$ temos que $y = x$

Substituindo em r, temos que:

$x + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{3}{2}$

Resposta: $P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

48. a) Cálculo do coeficiente angular m_1 da reta r:

$3x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow 4y = -3x + 4 \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} + 1$

Então, $m_1 = -\frac{3}{4}$.

Cálculo do coeficiente angular m_2 da reta s ($s \perp r$):

$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

Equação de s, que passa pelo ponto $P(-3, 2)$:

$y - 2 = \frac{4}{3}(x + 3) \Rightarrow 3y - 6 = 4x + 12 \Rightarrow 4x - 3y + 18 = 0$

b) Cálculo do coeficiente angular m_1 de r:

$2x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 2x + 3$

Então, $m_1 = 2$.

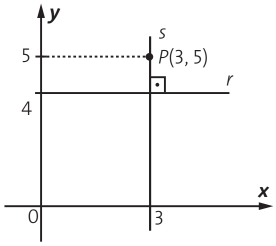
Cálculo do coeficiente angular m_2 da reta s ($s \perp r$):

$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$

Equação da reta s que passa pelo ponto $P(2, 6)$:

$y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 12 = -x + 2 \Rightarrow x + 2y - 14 = 0$

c) A reta $r: y - 4 = 0$ é paralela ao eixo x conforme a figura. Logo, a reta s é paralela ao eixo y e tem equação $x = 3$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

49. Calculando a equação da mediatriz de $\overline{AB}$:

$m: \frac{5 - 3}{8 - 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$m_2 = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$

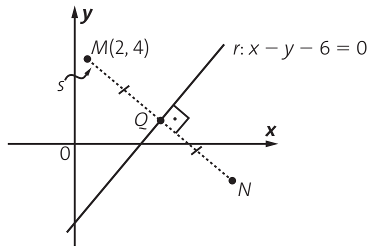
Ponto médio de $\overline{AB}$:

$x_m = \frac{8 + 2}{2} = 5$

$y_m = \frac{5 + 3}{2} = 4$

$y - 4 = -3(x - 5) \Rightarrow y + 3x - 19 = 0$

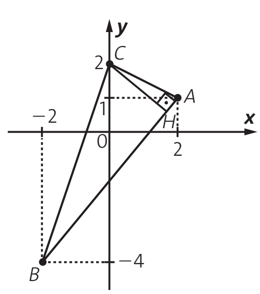
50.



$Q \in r$ é ponto médio do segmento MN. Considerando o exercício anterior, o ponto Q é a projeção de M sobre r.
A reta s passa por $M(2, 4)$ e é perpendicular a r: $x - y - 6 = 0$.

- Cálculo do coeficiente angular m_1 de r:
  $x - y - 6 = 0 \Rightarrow y = x - 6$
  Então, $m_1 = 1$.
- Cálculo do coeficiente angular m_2 de s, com $s \perp r$:
  $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{1}{1} = -1$
- Equação de s que passa por $M(2, 4)$:
  $y - 4 = -1(x - 2) \Rightarrow x + y - 6 = 0$
- Cálculo das coordenadas de Q (intersecção de r e s):
  $\begin{cases} x - \cancel{y} - 6 = 0 \\ x + \cancel{y} - 6 = 0 \end{cases} +$
  $2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$
  Substituindo $x = 6$ na primeira equação, por exemplo, vem:
  $6 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = 0$
  Logo, $Q(6, 0)$.
- Q é o ponto médio de $\overline{MN}$, então:
  $x_Q = \dfrac{x_M + x_N}{2} \Rightarrow 6 = \dfrac{2 + x_N}{2} \Rightarrow 2 + x_N = 12 \Rightarrow x_N = 10$
  $y_Q = \dfrac{y_M + y_N}{2} \Rightarrow 0 = \dfrac{4 + y_N}{2} \Rightarrow 4 + y_N = 0 \Rightarrow y_N = -4$
  Logo, o simétrico de M com relação à reta r é $N(10, -4)$.

51.



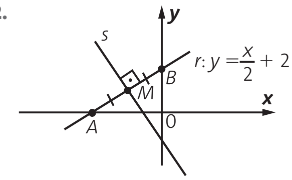
Os vértices do triângulo ABC são $A(2, 1)$, $B(-2, -4)$ e $C(0, 2)$.
A reta-suporte da altura CH passa por C e é perpendicular à reta-suporte de $\overline{AB}$.

- Cálculo do coeficiente angular m_1 da reta-suporte de $\overline{AB}$:
  $m_1 = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-4 - 1}{-2 - 2} = \dfrac{-5}{-4} = \dfrac{5}{4}$
- Cálculo do coeficiente angular m_2 da reta-suporte de $\overline{CH}$:
  $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{1}{\frac{5}{4}} = -\dfrac{4}{5}$
- A reta procurada passa pelo ponto $C(0, 2)$.

Logo, sua equação é:

$y - 2 = -\dfrac{4}{5}(x - 0) \Rightarrow 5y - 10 = -4x \Rightarrow 4x + 5y - 10 = 0$

52.

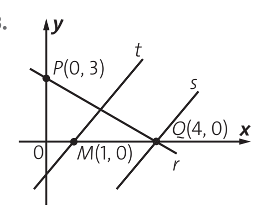


A reta s é perpendicular à reta r e passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$.

- Coordenadas de A:
  O ponto $A \in r$ tem ordenada nula. Então:
  $y = \dfrac{x}{2} + 2 \Rightarrow 0 = \dfrac{x}{2} + 2 \Rightarrow x = -4$
  Logo, $A(-4, 0)$.
- Coordenadas de B:
  O ponto $B \in r$ tem abscissa nula. Então:
  $y = \dfrac{x}{2} + 2 \Rightarrow y = \dfrac{0}{2} + 2 \Rightarrow y = 2$
  Assim, $B(0, 2)$.
- Cálculo das coordenadas de M, ponto médio de $\overline{AB}$:
  $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-4 + 0}{2} = -2$
  $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0 + 2}{2} = 1$
  Portanto, $M(-2, 1)$.
- Cálculo do coeficiente angular m_2 de s:
  Como $s \perp r$, então $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$, em que m_1 é o coeficiente angular de r. Logo, para $m_1 = \dfrac{1}{2}$, vem:
  $m_2 = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = -2$
- Equação de s:
  $y - 1 = -2(x + 2) \Rightarrow y - 1 = -2x - 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2x + y + 3 = 0$

Logo, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é $2x + y + 3 = 0$.

53.



Cálculo do coeficiente angular m_1 da reta r:
$m_1 = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{0 - 3}{4 - 0} = -\dfrac{3}{4}$

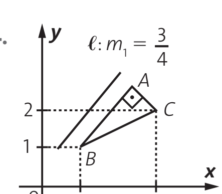
Cálculo do coeficiente angular m_2 de s $(s \perp r)$:
$m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{1}{-\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$

Como a reta s passa por Q, então sua equação é:
$y - 0 = \dfrac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow y = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{16}{3}$

Se t é paralela a s, então seu coeficiente angular m_3 é tal que $m_3 = m_2$. Logo, $m_3 = \dfrac{4}{3}$.

Como $M(1, 0) \in t$, então sua equação é:
$y - 0 = \dfrac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{4}{3}$

54.



$AB \parallel \ell$: a reta ℓ tem coeficiente angular $m_1 = \dfrac{3}{4}$.

A reta-suporte de $\overline{AB}$ é paralela a ℓ e passa pelo ponto $B(1, 1)$. Logo, sua equação é:

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - 4 = 3x - 3 \Rightarrow 4y = 3x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$$

A reta-suporte do cateto AC passa por $C(3, 2)$ e é perpendicular à reta-suporte de $\overline{AB}$. Logo:

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

em que m_2 é seu coeficiente angular.

Então, a equação da reta-suporte de $\overline{AC}$ é:

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 6 = -4x + 12 \Rightarrow 3y = -4x + 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4x}{3} + 6$$

As retas-suporte dos catetos do triângulo ABC têm equações:

$$y = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4} \text{ e } y = -\frac{4x}{3} + 6.$$

55. Mediatriz do segmento de reta AB passa pelo ponto M, médio de $\overline{AB}$.
Sabemos que $A(0, 0)$ e $B(50, 0)$. Assim:

$$M\left(\frac{0 + 50}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) \Rightarrow M(25, 0)$$

Mediatriz do segmento de reta CD passa pelo ponto N, médio de $\overline{CD}$.
Sabemos que $C(60, 30)$ e $D(30, 60)$. Assim:

$$N\left(\frac{60 + 30}{2}, \frac{30 + 60}{2}\right) \Rightarrow N(45, 45)$$

A declividade do segmento de reta CD é dada por:

$$m_1 = \frac{60 - 30}{30 - 60} = \frac{30}{-30} = -1$$

A declividade de m_2 da mediatriz do segmento de reta CD é dada por:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{(-1)} = 1$$

Equação da mediatriz do segmento de reta CD

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 45 = 1(x - 45) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - 45 = x - 45 \Rightarrow y = x$$

Ponto de intersecção das duas mediatrizes

$$\begin{cases} x = 25 \text{ (mediatriz } \overline{AB}) \\ y = x \text{ (mediatriz } \overline{CD}) \end{cases} \Rightarrow x = 25 \text{ e } y = 25$$

$P(25, 25)$

Resposta: alternativa **e**.

56. a) $P(0, 3)$; r: $4x + 3y + 1 = 0$

Aplicando a fórmula, temos:

$$d = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

b) $P(1, -5)$; r: $3x - 4y - 2 = 0$

Aplicando a fórmula, temos:

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 4(-5) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 + 20 - 2|}{\sqrt{25}} = \frac{21}{5}$$

c) $P(3, -2)$; r: $2x + y + 6 = 0$

Aplicando a fórmula, temos:

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + (-2) + 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|6 - 2 + 6|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

d) $P(6, 4)$; r: $y - 2 = 0 \Rightarrow 0x + y - 2 = 0$

Aplicando a fórmula, temos:

$$d = \frac{|0 \cdot 6 + 4 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$$

57. Usaremos a fórmula $d = \dfrac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

a) $P(3,2)$; r: $3x + 4y + 1 = 0$

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{5}$$

b) $P(3,2)$; r: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

A equação da reta deve ser colocada na forma geral:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 6 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

Logo:

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

c) $P(3,2)$; r: $y = 2x - 4 \Rightarrow y - 2x + 4 = 0$ ou $-2x + y + 4 = 0$

Então:

$$d = \frac{|-2 \cdot 3 + 2 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$

Assim, $P \in r$.

d) $P(3,2)$; r: $y = 6 \Rightarrow y - 6 = 0$ ou $0x + y - 6 = 0$

Aplicando a fórmula, temos:

$$d = \frac{|0 \cdot 3 + 2 - 6|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{1}} = 4$$

e) $P(3,2)$; r: $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$ ou $x + 0y + 1 = 0$

Aplicando a fórmula, temos:

$$d = \frac{|3 + 0 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{4}{1} = 4$$

f) $P(3,2)$; r: $y - 4 = \dfrac{2}{5}(x - 3)$

Devemos utilizar a forma geral da equação da reta r:

$$y - 4 = \frac{2}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y - 20 = 2x - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y - 2x - 14 = 0 \text{ ou } -2x + 5y - 14 = 0$$

Aplicando a fórmula, temos:

$$d = \frac{|-2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 14|}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2}} = \frac{|-6 + 10 - 14|}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}} =$$

$$= \frac{10\sqrt{29}}{29}$$

58. O ponto $P(0, p)$ dista duas unidades de r: $4x + 3y - 2 = 0$.
Então:

$$\frac{|4 \cdot 0 + 3p - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|3p - 2|}{5} = 2 \Rightarrow |3p - 2| = 10$$

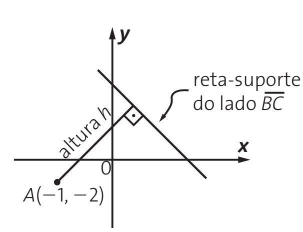
A equação $|x| = a$, com $a \geqslant 0$, tem duas soluções: $\pm a$, ou seja, $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$, $a \geqslant 0$.

Logo:

$$|3p - 2| = 10 \Rightarrow 3p - 2 = 10 \text{ ou } 3p - 2 = -10 \Rightarrow p = 4 \text{ ou}$$

$$p = -\frac{8}{3}$$

59.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A altura do triângulo ABC tem medida h igual à distância do ponto $A(-1, -2)$ à reta $x + 2y - 5 = 0$. Logo:

$$h = \frac{|-1 + 2(-2) - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

60. $d = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|2 - (-8)|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$

61. Aplicando a fórmula, temos:

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=4-3+3-12=-8$$

$$S=\frac{1}{2}|D|=\frac{1}{2}|-8|=\frac{1}{2}\cdot 8=4$$

62. $$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix}=10+6+4k-4-5k-12=-k$$

Como a área S é igual a 8, então:

$$S=\frac{1}{2}|D|=\frac{1}{2}|-k|=8\Rightarrow|-k|=16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k=16 \text{ ou } -k=-16\Rightarrow k=-16 \text{ ou } k=16$$

63. Os vértices do triângulo são obtidos pela intersecção das retas dadas, consideradas duas a duas.

- Cálculo das coordenadas do primeiro vértice:

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ y-5=0\Rightarrow y=5 \end{cases}$$

Logo:

$x+2\cdot 5-1=0\Rightarrow x=-9$

O primeiro vértice é $(-9, 5)$.

- Cálculo das coordenadas do segundo vértice:

$$\begin{cases} x-2y-7=0 \\ y-5=0\Rightarrow y=5 \end{cases}$$

Logo:

$x-2\cdot 5-7=0\Rightarrow x=17$

O segundo vértice é $(17, 5)$.

- Cálculo das coordenadas do terceiro vértice:

$$\begin{cases} x+\cancel{2y}-1=0 \\ x-\cancel{2y}-7=0 \end{cases}+$$

$$2x-8=0\Rightarrow x=4$$

Substituindo $x=4$ na primeira equação, por exemplo, temos:

$$4+2y-1=0\Rightarrow y=-\frac{3}{2}$$

O terceiro vértice tem coordenadas $\left(4, -\frac{3}{2}\right)$.

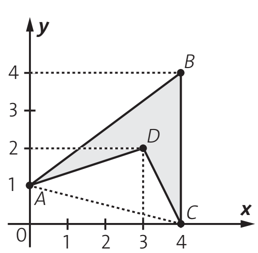
Então:

$$D=\begin{vmatrix} -9 & 5 & 1 \\ 17 & 5 & 1 \\ 4 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}=-169$$

Logo:

$$S=\frac{1}{2}|D|=\frac{1}{2}|-169|=\frac{169}{2}=84{,}5$$

64.



Podemos dividir o quadrilátero em dois triângulos, por exemplo, ABC e ACD, cuja diferença das áreas é igual à área do quadrilátero.

- Área do triângulo ABC, em que $A(0, 1)$, $B(4, 4)$ e $C(4, 0)$:

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=+4-16-4=-16$$

$$S_1=\frac{1}{2}|D_1|=\frac{1}{2}|-16|=8$$

- Área do triângulo ACD, em que $A(0, 1)$, $C(4, 0)$ e $D(3, 2)$:

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=8+3-4=7$$

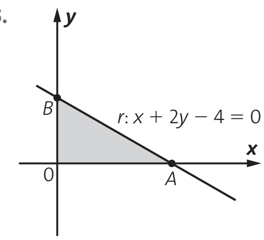
$$S_2=\frac{1}{2}|D_2|=\frac{1}{2}|7|=\frac{7}{2}=3{,}5$$

A área procurada é igual a:

$S_1-S_2=8-3{,}5=4{,}5$

Resposta: alternativa **e**.

65.



O ponto A tem ordenada nula. Então:

$x+2\cdot 0-4=0\Rightarrow x=4$

Logo, $A(4, 0)$.

O ponto B tem abscissa nula. Assim:

$0+2y-4=0\Rightarrow y=2$

Portanto, $B(0, 2)$.

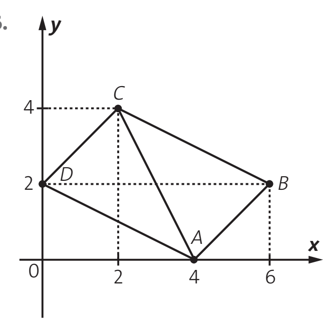
Logo:

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=8$$

Assim:

$$S=\frac{1}{2}|D|=\frac{1}{2}\cdot 8=4$$

66.



Podemos dividir o quadrilátero em dois triângulos, por exemplo, ABC e CDA, cuja soma das áreas é igual à área do quadrilátero.

- Cálculo da área do triângulo ABC, em que $A(4, 0)$, $B(6, 2)$ e $C(2, 4)$:

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=8+24-4-16=12$$

$$S_1=\frac{1}{2}|D_1|=\frac{1}{2}|12|=\frac{1}{2}\cdot 12=6$$

- Cálculo da área do triângulo CDA, em que $C(2, 4)$, $D(0, 2)$ e $A(4, 0)$:

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4+16-8=12$$

$$S_2=\frac{1}{2}|D_2|=\frac{1}{2}|12|=6$$

A área procurada é igual a:

$S_1+S_2=6+6=12$

Logo, a área do quadrilátero $ABCD$ é igual a 12.

67. A região triangular AOB é retangular e isósceles ($AO = OB$). Como sua área é 8, então:

$$\frac{OA \cdot OB}{2} = 8 \Rightarrow OA \cdot OA = 16 \Rightarrow OA = 4$$

Assim, as coordenadas dos pontos A e B são $A(4, 0)$ e $B(0, 4)$.

Equação da reta que passa por A e B:

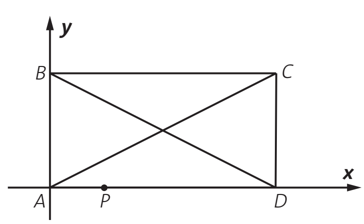
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 - 4x - 4y = 0 \Rightarrow 4x + 4y - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y - 4 = 0$$

68. As retas paralelas pedidas devem ser do tipo $s{:}\,\alpha x + \beta y + k = 0$, com $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3}$ e k qualquer. O mais simples é adotar $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, de forma que o feixe de paralelas pedido seja: $s{:}\; 2x + 3y + k = 0,\ k \in \mathbb{R}$

69. As retas perpendiculares pedidas devem ser do tipo $s{:}\; \alpha x + \beta y + k = 0$, com $2\alpha + 3\beta = 0$ e k qualquer. Então, $\alpha = \frac{-3\beta}{2}$ e k qualquer. Têm-se como solução $\beta = -2$ e $\alpha = 3$, de forma que o feixe de perpendiculares à reta r é do tipo $s{:}\, 3 - 2y + k = 0, k \in \mathbb{R}$.

70. O mais conveniente é colocar dois lados do retângulo sobre os eixos coordenados, com um dos vértices coincidindo com a origem, e o ponto P em um dos lados que estão sobre os eixos. Esses procedimentos, que não são obrigatórios, apenas visam usar a Geometria analítica para simplificar a resolução de um problema de Geometria plana, dada a liberdade que temos de escolher onde colocar os sistemas de eixos coordenados quando eles não forem definidos previamente.



Supondo que os lados do retângulo tenham medidas a e b, então os vértices do retângulo são $A(0, 0)$, $B(0, b)$, $C(a, b)$ e $D(a, 0)$ e o ponto $P(p, 0)$. Assim, vamos obter as equações das duas diagonais:

Diagonal $\overline{AC}$:

$$m_1 = \frac{b - 0}{a - 0} = \frac{b}{a}$$

$$y - 0 = \frac{b}{a}(x - 0) \Rightarrow ay = bx \Rightarrow \overline{AC}{:}\, bx - ay = 0$$

Diagonal $\overline{BD}$:

$$m_1 = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - 0) \Rightarrow ay - ab = -bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{BD}{:}\, bx + ay - ab = 0$$

A distância do ponto $P(p, 0)$ à diagonal $\overline{AC}$ é dada por:

$$d_1 = \frac{|bp - a \cdot 0 + 0|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = \frac{|bp|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

A distância do ponto $P(p, 0)$ à diagonal $\overline{BD}$ é dada por:

$$d_2 = \frac{|bp + a \cdot 0 - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|bp - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

Como, de acordo com os dados iniciais, temos $0 \leqslant p \leqslant a$, então $bp < ab$ e assim:

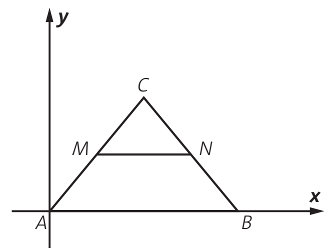
$|bp - ab| = ab - bp$, portanto a soma $d_1 + d_2$ é:

$$d_1 + d_2 = \frac{|bp|}{\sqrt{b^2 + a^2}} + \frac{|bp - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} =$$

$$= \frac{bp + ab - bp}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2}},\ \text{que é constante,}$$

como queríamos mostrar.

71. Vamos adotar um sistema de eixos coordenados no qual um dos vértices do triângulo coincide com a origem, e um dos lados está sobre um dos eixos. Esse procedimento, que não é obrigatório, visa apenas usar a Geometria analítica para simplificar a resolução de um problema de Geometria plana, dada a liberdade que temos de escolher onde colocar o sistema de eixos coordenados quando ele não for definido previamente:



Os vértices do triângulo são $A(0, 0)$, $B(b, 0)$ e $C(x, y)$.

O ponto M, médio de $\overline{AC}$, é $M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ e o ponto N, médio de $\overline{BC}$, é $N\left(\frac{b + x}{2}, \frac{y}{2}\right)$.

a) A reta-suporte do segmento MN tem coeficiente angular $m = 0$, pois as ordenadas de M e N são as mesmas. Portanto, a reta-suporte de $\overline{MN}$ é horizontal e, então, paralela à reta-suporte do segmento AB, como queríamos mostrar.

b) O comprimento de $\overline{AB}$ é igual a b.
O comprimento de $\overline{MN}$ é igual a:

$$\sqrt{\left(\frac{b + x}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{b}{2}$$

Portanto, metade do comprimento de $\overline{AB}$, como queríamos mostrar.

72. a) $m_r = \frac{-a}{b} \Rightarrow s \mathbin{//} r \rightarrow m_s = m_r = \frac{-a}{b}$

$$y - y_0 = \frac{-a}{b}(x - x_0) \Rightarrow by - by_0 = -ax + ax_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s{:}\; ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$$

b) $m_r = \frac{-a}{b} \rightarrow s \perp r \rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{b}{a}$

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow ay - ay_0 = bx - bx_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s{:}\; bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$$

Exercícios adicionais

1. $r{:}\, y = 4x - 6$

Então, $m_1 = 4$.

$$s{:}\; y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 5) \Rightarrow y - 3 = -\frac{x}{4} - \frac{5}{4} \Rightarrow y = -\frac{x}{4} - \frac{5}{4} + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

Logo, $m_2 = -\frac{1}{4}$.

Como $m_1 m_2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$, então r e s são perpendiculares.

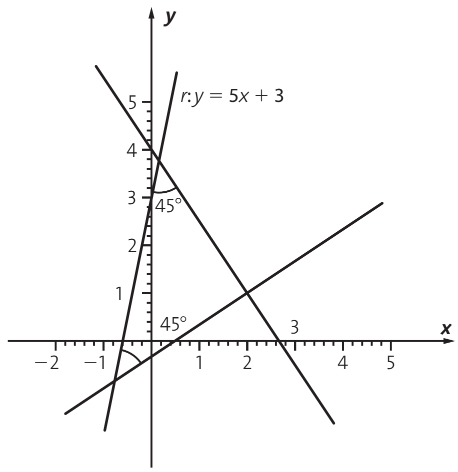
Logo, $\theta = 90°$.

2. Como a reta r é paralela ao eixo x, o ângulo θ é tal que $\tan\theta = m$, em que m é o coeficiente angular de s:

$$2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$$

Então, $\tan\theta = \frac{2}{3}$.

3.



O coeficiente angular de r é 5.

Equação da reta $s: y = mx + n$.

Como r e s formam angulo de 45°, então:

$$\tan 45° = \left|\frac{m - 5}{1 + m \cdot 5}\right| \Rightarrow \left|\frac{m - 5}{1 + 5m}\right| = 1 \Rightarrow \frac{m - 5}{1 + 5m} = 1 \text{ ou}$$

$$\frac{m - 5}{1 + 5m} = -1 \Rightarrow m - 5 = 1 + 5m \text{ ou } m - 5 = -1 - 5m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4m = 6 \text{ ou } 6m = 4 \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \text{ ou } m = \frac{2}{3}$$

Portanto, encontramos duas soluções:

- $m = -\frac{3}{2}$ e $P(2, 1) \in s$

  $1 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + n \Rightarrow n = 4$

  Assim, sua equação é s: $y = -\frac{3x}{2} + 4$.

- $m = \frac{2}{3}$ e $P(2, 1) \in s$

  $1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + n \Rightarrow n = -\frac{1}{3}$

  Logo, sua equação é s: $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$.

Portanto, as retas procuradas são $y = -\frac{3x}{2} + 4$ e $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$.

4. r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 3x + y = 6 \Rightarrow y = -3x + 6$

Então, o coeficiente angular m_1 de r é -3.

s: $15x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow -5y = -15x - 2 \Rightarrow 5y = 15x + 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = 3x + \frac{2}{5}$$

Logo, o coeficiente angular de m_2 de s é 3.

$$\tan\theta = \left|\frac{-3 - 3}{1 + (-3)3}\right| = \left|\frac{-6}{-8}\right| = \frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{3}$$

Para refletir

Página 99

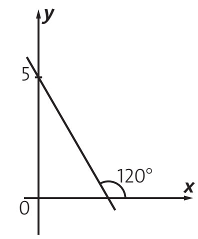
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 =$$

$$= x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_2 + x_3y_1 - x_3y_2$$

Página 102

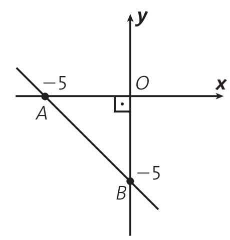
- Se o coeficiente angular é $-\sqrt{3}$, então:

$\tan\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 120°$



Página 105

- Como a equação segmentária é $\frac{x}{-5} + \frac{y}{-5} = 1$, então seu gráfico é:



Como $OA = OB$, então o triângulo OAB é isósceles e também é retângulo, pois o ângulo $\hat{O}$ é reto. A medida da hipotenusa $\overline{AB}$ pode ser calculada aplicando-se o teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$$

Página 110

$P(x, y)$ pertence à mediatriz de $\overline{AB}$, com $A(3, 2)$ e $B(-2, -4)$.

Então:

$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -10x - 12y - 7 = 0 \Rightarrow 10x + 12y + 7 = 0$ (equação da mediatriz de $\overline{AB}$)

Página 112

Se $d = 0$, vem:

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \Rightarrow |ax_p + by_p + c| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax_p + by_p + c = 0$$

Então, $P \in r$.

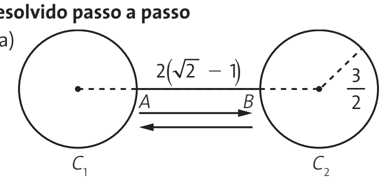
Página 113

$$d(r, s) = \frac{|(-10) - (-6)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

CAPÍTULO 5

Resolvido passo a passo

5. a)



Pelo esquema o trajeto é de A para B e de B para A, adicionando o comprimento da circunferência C_2.

$$C_2 = 2\pi r \Rightarrow C_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = 2\pi$$

Logo: Distância percorrida $= \left[2 \cdot 2(\sqrt{2} - 1) + 3\pi\right] =$

$= \left[4(\sqrt{2} - 1) + 3\pi\right]$ u.c.

1. Como $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $r>0$, representa a equação geral de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r, vem:

a) $(x-5)^2+(y-4)^2=1 \to C(5, 4)$ e $r=1$

b) $(x+2)^2+(y+6)^2=5 \to C(-2, -6)$ e $r=\sqrt{5}$

c) $(x-2)^2+y^2=4 \to C(2, 0)$ e $r=2$

d) $(x+3)^2+(y-1)^2=16 \to C(-3, 1)$ e $r=4$

e) $x^2+(y-4)^2=1 \to C(0, 4)$ e $r=1$

f) $x^2+y^2=10 \to C(0, 0)$ e $r=\sqrt{10}$

2. A equação da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r, $r>0$, é $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

a) Centro $C(2, 5)$ e raio 3: $(x-2)^2+(y-5)^2=9$

b) Centro $M(-1, -4)$ e raio $\sqrt{2}$: $(x+1)^2+(y+4)^2=2$

c) Centro $Q(0, -2)$ e raio 4:
$(x-0)^2+(y+2)^2=16 \Rightarrow x^2+(y+2)^2=16$

d) Centro $D(4, 0)$ e raio 5:
$(x-4)^2+(y-0)^2=25 \Rightarrow (x-4)^2+y^2=25$

3. a) Como na equação $2x^2+2y^2-8x+12y-6=0$ os coeficientes de x^2 e y^2 não são 1, vamos dividir toda a equação por 2:

$2x^2+2y^2-8x+12y-6=0 \Rightarrow x^2+y^2-4x+6y-3=0$

Pelo método de completar quadrados:

$x^2-4x+\_\_\_\_+y^2+6y+\_\_\_\_=3+\_\_\_\_+\_\_\_\_$

$$\underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}+\underbrace{y^2+6y+9}_{(y+3)^2}=\underbrace{3+4+9}_{4^2}$$

Portanto, a equação $2x^2+2y^2-8x+12-6=0$ representa uma circunferência de centro $(2, -3)$ e raio 4.

Método da comparação:

$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=x^2+y^2-4x+6y-3$

$-2a=-4 \Rightarrow a=2$

$-2b=6 \Rightarrow b=-3$

$a^2+b^2-r^2=-3 \Rightarrow 2^2+(-3)^2-r^2=-3 \Rightarrow r^2=16 \Rightarrow$

$\Rightarrow r=4$ (não existe raio negativo)

Então, o centro da circunferência é $(2,-3)$ e o raio é 4.

b) Pelo método de completar quadrados:

$x^2-6x+\_\_\_\_+y^2-2y+\_\_\_\_=6+\_\_\_\_+\_\_\_\_$

$$\underbrace{x^2-6x+9}_{(x-3)^2}+\underbrace{y^2-2y+1}_{(y-1)^2}=\underbrace{6+9+1}_{4^2}$$

Portanto, a equação $x^2-6x+y^2-2y-6=0$ representa uma circunferência de centro $(3, 1)$ e raio 4.

Método da comparação:

$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=x^2+y^2-6x-2y-6$

$-2a=-6 \Rightarrow a=3$

$-2b=-2 \Rightarrow b=1$

$a^2+b^2-r^2=-6 \Rightarrow 3^2+1^2-r^2=-6 \Rightarrow r^2=16 \Rightarrow$

$\Rightarrow r=4$ (não existe raio negativo)

Então o centro da circunferência é $(3, 1)$ e o raio é 4.

c) $x^2+y^2-4x-8y+16=0 \Rightarrow x^2-4x+y^2-8y=-16 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16=-16+4+16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=4$

Logo, o centro é $C(2, 4)$ e o raio é $r=2$.

d) $x^2+y^2+12x-4y-9=0 \Rightarrow x^2+12x+y^2-4y=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+12x+36+y^2-4y+4=9+36+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+6)^2+(y-2)^2=49$

Logo, o centro é $C(-6, 2)$ e o raio é $r=7$.

e) $x^2+y^2+8x+11=0 \Rightarrow x^2+8x+y^2=-11 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+8x+16+y^2=-11+16 \Rightarrow (x+4)^2+(y-0)^2=5$

Logo, o centro é $C(-4, 0)$ e o raio é $r=\sqrt{5}$.

f) $x^2+y^2-6x+8y+5=0 \Rightarrow x^2-6x+y^2+8y=-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2+8y+16=-5+9+16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=20$

Logo, o centro é $C(3, -4)$ e o raio é $r=\sqrt{20}$.

g) $x^2+y^2-4y=0 \Rightarrow x^2+y^2-4y+4=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-0)^2+(y-2)^2=4$

Logo, o centro é $C(0, 2)$ e o raio é $r=2$.

h) $x^2+y^2-2x-2y=0 \Rightarrow x^2-2x+y^2-2y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=1+1 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2$

Logo, o centro é $C(1, 1)$ e o raio é $r=\sqrt{2}$.

4. a) $x^2+y^2-8x+6y+1=0 \Rightarrow x^2-8x+y^2+6y=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2+6y+9=-1+16+9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=24$

Como $24>0$, então a equação representa uma circunferência de centro $(4, -3)$ e raio $2\sqrt{6}$.

b) $x^2+y^2+xy+4x+6y-3=0$

No desenvolvimento de $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, que é a equação reduzida de uma circunferência, encontramos:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by=r^2-a^2-b^2$

Note que não há termo em xy. Logo, a equação acima não representa uma circunferência. Note também que os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais (não necessariamente iguais a 1, como veremos no item **d** deste exercício). Da mesma forma para $(x-a)^2$ e $(y-b)^2$.

c) $2x^2+y^2+4x-2y+1=0 \Rightarrow 2x^2+4x+y^2-2y=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2+2x)+y^2-2y=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2+2x+1)+y^2-2y+1=-1+2+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x+1)^2+(y-1)^2=2$

Como o coeficiente de $(x+1)^2$ é 2, o coeficiente de $(y-1)^2$ é 1 e $1 \neq 2$, então a equação não representa uma circunferência.

d) $3x^2+3y^2-12x-15y-6=0$

Dividindo toda a equação por 3, temos:

$x^2+y^2-4x-5y-2=0 \Rightarrow x^2-4x+y^2-5y=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-5y+\frac{25}{4}=2+4+\frac{25}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$

Logo, é equação de circunferência de centro $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ e raio $\frac{7}{2}$.

e) $4x^2-4y^2=0 \Rightarrow x^2-y^2=0$

Logo, não é equação de circunferência porque, por exemplo, os coeficientes de x^2 e y^2 não são iguais.

Note que:

$x^2-y^2=0 \Rightarrow (x+y)(x-y)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{x+y=0}_{\substack{\text{equação da reta}\\\text{bissetriz dos}\\\text{quadrantes pares}}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x-y=0}_{\substack{\text{equação da}\\\text{reta bissetriz}\\\text{dos quadrantes}\\\text{ímpares}}}$$

f) $(x-5)^2+(y-3)^2=-5$

Como o segundo membro da equação é negativo, a equação não representa uma circunferência, na verdade, não há ponto (x, y) tal que $(x-5)^2+(y-3)^2=-5$.

5. $(x-3)^2+(y+1)^2=25$ é a equação da circunferência.

$A(0,\ 3)$: $(0-3)^2+(3+1)^2=9+16=25 \Rightarrow$
$\Rightarrow A \in$ circunferência

$B(7,\ 2)$: $(7-3)^2+(2+1)^2=16+9=25 \Rightarrow$
$\Rightarrow B \in$ circunferência

$C(-1,\ 3)$: $(-1-3)^2+(3+1)^2=16+16=32 \neq 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow C \notin$ circunferência

6. Cálculo do centro C da circunferência:

$$C\left(\frac{x_A+x_B}{2},\ \frac{y_A+y_B}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{-5-3}{2}\right) \Rightarrow C(0,\ -4)$$

Então, $a=0$ e $b=-4$.

Equação da circunferência de raio $r=\sqrt{2}$ e centro $C(0, -4)$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y+4)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+(y+4)^2=2$$

7. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2 + 1 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
É uma circunferência de centro $C(-1, -1)$ e raio $r = 2$.

8. Seja P a intersecção das retas r: $x-y-2=0$ e s: $x+y-6=0$.

Cálculo das coordenadas de P:

$$\begin{cases} x-\cancel{y}-2=0 \\ x+\cancel{y}-6=0 \end{cases} +$$
$$2x-8=0 \Rightarrow x=4$$

Assim, $y=2$. Logo, $P(4,\ 2)$.

Cálculo do raio da circunferência:

Como $Q(2,\ 0)$ é seu centro, então o raio é igual a $\overline{PQ}$.

$$d(P,\ Q)=\sqrt{(2-4)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}$$

Equação da circunferência de centro $Q(2,\ 0)$ e raio $r=\sqrt{8}$:

$$(x-2)^2+(y-0)^2=8 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=8$$

9. $x^2 + y^2 = 2(x - y) + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x - 2y + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 3$
O centro da circunferência é o ponto $C(1, -1)$ e seu raio é $r = \sqrt{3}$.

10. O centro $C(a, b)$ de uma circunferência é o ponto médio de seu diâmetro, então C é o ponto médio de $\overline{AB}$:

$$C\left(\frac{x_A+x_B}{2},\ \frac{y_A+y_B}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) \Rightarrow C(3,\ -1)$$

O raio r tem medida igual à metade da medida do diâmetro. Cálculo da medida do diâmetro $\overline{AB}$:

$$d(A,\ B)=\sqrt{(4-2)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Então, $r=\dfrac{d(A,\ B)}{2}=\sqrt{2}$.

Equação da circunferência de centro $C(3,\ -1)$ e raio $r=\sqrt{2}$:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=2.$$

11. Cálculo do centro C e do raio r da circunferência:

$$x^2+y^2-2x+10y+13k=0 \Rightarrow x^2-2x+y^2+10y=-13k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2+10y+25=-13k+1+25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+5)^2=-13k+26$$

Logo, o centro é $C(1,\ -5)$ e o raio é $r=\sqrt{-13k+26}$.

Como $r>0$, vem:

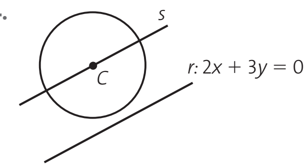
$$\sqrt{-13k+26}>0 \Rightarrow -13k+26>0 \Rightarrow -13k>-26 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 13k<26 \Rightarrow k<2$$

Assim, a solução é $\{k \in \mathbb{R} \mid k<2\}$.

13. Equação da circunferência de centro $C(0, 3)$ e raio $r = 5$:
$x^2 + (y - 3)^2 = 25$

Se $P(3, b)$ pertence à circunferência, então:
$3^2 + (b - 3)^2 = 25 \Rightarrow 9 + (b - 3)^2 = 25 \Rightarrow (b - 3)^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow b - 3 = 4$ ou $b - 3 = -4 \Rightarrow b = 7$ ou $b = -1$

14.



- Cálculo das coordenadas do ponto C:
  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y = -4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = -4 + 4 + 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
  Logo, o ponto C tem coordenadas $(2, 2)$.

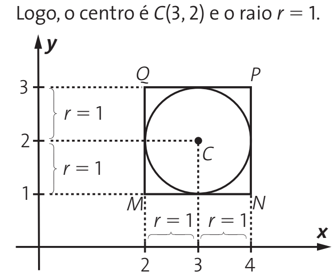
A reta s é paralela à reta r, então ambas têm o mesmo coeficiente angular.

- Cálculo do coeficiente angular m de r:
  $2x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{2x}{3}$
  Assim, $m = -\dfrac{2}{3}$.
- A reta s tem coeficiente angular igual a $-\dfrac{2}{3}$ e passa por $(2, 2)$.

Logo, sua equação é:

$y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 6 = -2x + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 3y - 10 = 0$

15.
- Cálculo da equação reduzida de $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$:
  $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -12 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = -12 + 9 + 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
  Logo, o centro é $C(3, 2)$ e o raio $r = 1$.



- Cálculo das coordenadas dos vértices do quadrado:
  Analisando a figura, temos $M(2, 1)$, $N(4, 1)$, $P(4, 3)$, $Q(2, 3)$.
- Cálculo da equação de $\overleftrightarrow{MP}$:

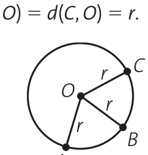
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 6 + 4y - 4 - 3x - 2y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

- Cálculo da equação de $\overleftrightarrow{NQ}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 12 + 2y - 2 - 3x - 4y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2x - 2y + 10 = 0 \Rightarrow x + y - 5 = 0$$

As equações das retas que contêm as diagonais do quadrado são $x - y - 1 = 0$ e $x + y - 5 = 0$.

16. O centro da circunferência é $O(a, b)$ e o raio é r.
Então, $d(A, O) = d(B, O) = d(C, O) = r$.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

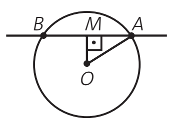
$d(A, O) = \sqrt{(5 - a)^2 + (0 - b)^2}$
$d(B, O) = \sqrt{(4 - a)^2 + (3 - b)^2}$
$d(C, O) = \sqrt{(-4 - a)^2 + (-3 - b)^2}$

- $d(A, O) = d(B, O) \Rightarrow \sqrt{(5 - a)^2 + b^2} =$
  $= \sqrt{(4 - a)^2 + (3 - b)^2} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 25 - 10a + a^2 + b^2 = 16 - 8a + a^2 + 9 - 6b + b^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow -2a + 6b = 0$ (I)
- $d(B, O) = d(C, O) \Rightarrow \sqrt{(4 - a)^2 + (3 - b)^2} =$
  $= \sqrt{(-4 - a)^2 + (-3 - b)^2} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 16 - 8a + a^2 + 9 - 6b + b^2 =$
  $= 16 + 8a + a^2 + 9 + 6b + b^2 \Rightarrow -16a - 12b = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 16a + 12b = 0 \Rightarrow 4a + 3b = 0$ (II)
- Cálculo das coordenadas do centro $C(a, b)$:

$$\begin{cases} -2a + 6b = 0 \quad \cdot (2) \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{4a} + 12b = 0 \\ \cancel{4a} + 3b = 0 \end{cases} +$$
$$15b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Se $b = 0$, então, substituindo na 2ª equação, temos:
$4a + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = 0$
Logo, o centro é $C(0, 0)$.

Para calcular o raio basta considerar:
$d(A, O) = r \Rightarrow r = \sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 5$
Portanto, a equação é $x^2 + y^2 = 25$.

17. 

Considere o triângulo OMA. Então:
$\overline{OM}$: distância de O até r
$\overline{OA}$: raio da circunferência
$\overline{MA}$: metade da corda AB ($\triangle OAM \equiv \triangle OBM$)
Podemos resolver o problema aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAM ($OA^2 = AM^2 + OM^2$).
Vamos obter o centro e o raio da circunferência:
$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$
Logo, $C(-1, -1)$ e $r = \sqrt{5}$.
Cálculo da distância do centro C à reta r:

$$d = \frac{|-1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Então, $OM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

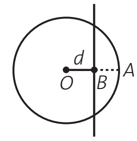
$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = AM^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow AM^2 + \frac{9 \cdot 2}{4} = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AM^2 = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $AB = 2AM$, então $AB = \sqrt{2}$.
Logo, a corda mede $\sqrt{2}$.

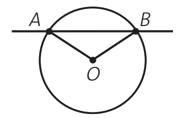
18. Vamos obter o centro C e o raio da circunferência:
$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Então, o centro tem coordenadas (1, 1) e o raio é $\sqrt{5} \simeq 2{,}23$.
Vamos calcular a distância d do centro da circunferência à reta $r: x + y - 3 = 0$:

$$d = \frac{|1 + 1 - 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}71$$

Como $d <$ raio, então a reta e a circunferência são secantes:



OA: raio
$OB = d$

19. 

Vamos obter as coordenadas de A e B:

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Substituindo y na primeira equação, temos:
$(x + 2)^2 + (-x + 3 - 1)^2 = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 2)^2 + (-x + 2)^2 = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4 = 10 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = 1$ e $x'' = -1$
Substituindo os valores encontrados na segunda equação, temos:
$x' = 1 \Rightarrow y' = -1 + 3 = 2 \Rightarrow A(1, 2)$
$x'' = -1 \Rightarrow y'' = -(-1) + 3 = 4 \Rightarrow B(-1, 4)$
Cálculo das coordenadas do centro O da circunferência:
$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \Rightarrow O(-2, 1)$
Cálculo da área do triângulo ABO, em que $A(1, 2)$, $B(-1, 4)$ e $O(-2, 1)$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 4 + 8 - 1 + 2 = 8$$

$$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|8| = 4$$

20. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, podemos saber quantos e quais são os pontos comuns (se houver) e daí a posição relativa de λ e r.

a) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$

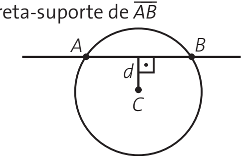
$x^2 + (2x + 1)^2 - 2x = 0 \Rightarrow 5x^2 + 2x + 1 = 0$
$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$
Logo, não há ponto comum e a reta é exterior à circunferência.

b) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$

Substituindo y na primeira equação, temos:
$(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x' = 2$ e $x'' = -1$
Assim, $y' = 2$ e $y'' = -1$.

Logo, os pontos (2, 2) e (−1, −1) são comuns à reta e à circunferência, ou seja, a reta é secante à circunferência.

21. $x + y - 1 = 0$: reta-suporte de $\overline{AB}$



Cálculo do centro da circunferência:
$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 = 3 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 4$
Então, o centro C é $C(-1, 0)$.
Cálculo da distância d do ponto C à reta $x + y - 1 = 0$:

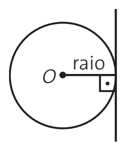
$$d = \frac{|-1 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

22. Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0 \end{cases}$$

Substituindo y na segunda equação, temos:
$x^2 + (-x + 5)^2 - 10x - 2(-x + 5) + 21 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + x^2 - 10x + 25 - 10x + 2x - 10 + 21 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 18x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = 6$ e $x'' = 3$
Substituindo os valores encontrados na primeira equação, temos:
$x' = 6 \Rightarrow y' = -6 + 5 = -1$
$x'' = 3 \Rightarrow y'' = -3 + 5 = 2$
Logo, os pontos de intersecção são $(6, -1)$ e $(3, 2)$.

23. Se a circunferência é tangente à reta $x = 3$, então a distância de seu centro à reta é igual ao seu raio:

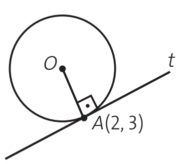


Cálculo do centro C e do raio da circunferência:
$x^2 + y^2 + 4x - 2y + k = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y = -k \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = -k + 4 + 1$
Então, $C(-2, 1)$ e $r = \sqrt{-k + 5}$.
A reta $x = 3$ tem equação geral $0y + x - 3 = 0$, então:

$$\frac{|0 \cdot 1 - 2 - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 5 = \sqrt{-k + 5} \Rightarrow k = -20$$

O valor $k = -20$ deve ser verificado, pois o raio de uma circunferência, no caso $\sqrt{-k + 5}$, é positivo.
Para $k = -20$, temos:
$-k + 5 = +20 + 5 = 25 > 0$
Então, o valor de k é -20.

24.



A reta t passa pelo ponto A e é perpendicular a $\overline{OA}$.
Cálculo das coordenadas do centro O e do raio r da circunferência:
$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Então, $O(1, 1)$ e $r = \sqrt{5}$.
Cálculo do coeficiente angular m_1 de $\overline{OA}$:

$$m_1 = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2$$

Cálculo do coeficiente angular m_2 de t ($t \perp \overline{OA}$):

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

Equação da reta t:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 6 = -x + 2 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

25. Se as retas t_1 e t_2 são paralelas à reta s: $3x + 4y - 1 = 0$, então os coeficientes angulares de t_1 e t_2 são iguais ao coeficiente angular m de s.
Cálculo do coeficiente angular m de s:

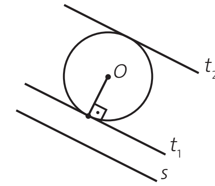
$$3x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$$

Então, $m = -\frac{3}{4}$.

Equação de t_1 e t_2: $y - y_0 = -\frac{3}{4}(x - x_0)$

O ponto (x_0, y_0) é qualquer ponto das retas t_1 e t_2. Assim, vamos considerar, por exemplo, o ponto em que as retas cruzam o eixo y.

Neste caso, $x_0 = 0$. Logo, a equação passa a ser:
$y - y_0 = -\frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow 4y - 4y_0 + 3x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4y + 3x - 4y_0 = 0$ (equação ①)

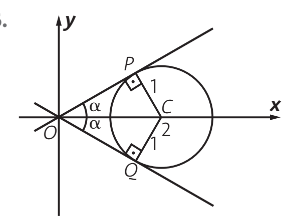


Cálculo das coordenadas do centro C e o raio r da circunferência:
$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 5 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 7$
Logo, $C(1, -1)$ e $r = \sqrt{7}$.
Como as retas t são tangentes à circunferência, então a distância d do centro C à reta t é igual ao raio r:

$$d = \frac{|4(-1) - 4y_0 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-1 - 4y_0|}{5} = \sqrt{7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |-1 - 4y_0| = 5\sqrt{7} \Rightarrow -1 - 4y_0 = 5\sqrt{7}$ ou
$-1 - 4y_0 = -5\sqrt{7} \Rightarrow -4y_0 = 1 + 5\sqrt{7}$ ou
$-4y_0 = 1 - 5\sqrt{7} \Rightarrow y_0 = \frac{-1 - 5\sqrt{7}}{4}$ ou $y_0 = \frac{-1 + 5\sqrt{7}}{4}$
Substituindo y_0 em ①, temos t_1: $4y + 3x + 1 + 5\sqrt{7} = 0$ e t_2: $4y + 3x + 1 - 5\sqrt{7} = 0$.

26.



Cálculo do centro e do raio da circunferência:
$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = -3 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1$
Logo, $C(2, 0)$ e $r = 1$.
Se α é a medida do ângulo $P\hat{O}C$, então a medida do ângulo $P\hat{O}Q$ é igual a 2α, pois os triângulos CPO e CQO são congruentes.
Da figura, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

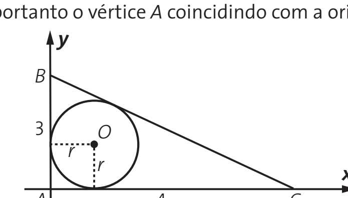
Como $P\hat{O}Q = 2\alpha$, então $P\hat{O}Q = 60°$.
Resposta: alternativa **d**.

27. A distância d do centro C da circunferência à reta t é igual ao raio r da circunferência:

$$d = \frac{|1 + 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow r = 4\sqrt{2}$$

Equação da circunferência de centro $C(1, 1)$ e raio $r = 4\sqrt{2}$:
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 32$

28. O mais conveniente é colocar os dois catetos sobre os eixos coordenados, portanto o vértice A coincidindo com a origem:



Assim, $A(0, 0)$, $B(0, 3)$ e $C(4, 0)$ são as coordenadas dos vértices, e $O(r, r)$ é o centro da circunferência. A equação da reta BC é dada por:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$$

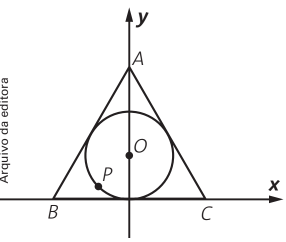
Como a circunferência inscrita é tangente à reta BC, a distância do centro O à reta BC também é r:

$$d_1 = \frac{|3r + 4r - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = r \Rightarrow |7r - 12| = 5r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7r - 12 > 0 \Rightarrow 7r - 12 = 5r \Rightarrow 2r = 12 \Rightarrow r = 6 \text{ (impossível,} \\ \quad \text{pois o raio deve ser menor que os catetos)} \\ 7r - 12 < 0 \Rightarrow -7r + 12 = 5r \Rightarrow 12r = 12 \Rightarrow r = 1 \end{cases}$$

Então, o raio pedido é $r = 1$ cm.

29. O mais conveniente é colocar cada um dos três vértices do triângulo sobre algum eixo coordenado.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Como o lado do triângulo vale $2\sqrt{3}$, sua altura vale 3 $\left(h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)$.

Assim, os vértices do triângulo são $A(0, 3)$, $B\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ e $C\left(\sqrt{3}, 0\right)$.

O centro da circunferência é o baricentro do triângulo, portanto está a $\frac{1}{3}$ da altura: $O(0, 1)$ e o seu raio é 1.

Assim, a equação da circunferência é $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Para todo ponto $P(x, y)$ pertencente à circunferência, temos:

$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0$

As três distâncias de P aos vértices são:

$$d(P, A) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9}$$

$$d(P, B) = \sqrt{\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x + 3}$$

$$d(P, C) = \sqrt{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 3}$$

Somando o quadrado das três distâncias, temos:

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 + x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 3 =$$
$$= 3x^2 + 3y^2 - 6y + 15 = 3(x^2 + y^2 - 2y) + 15$$

Como $x^2 + y^2 - 2y = 0$, então a soma dos quadrados é $3 \cdot 0 + 15 = 15$, portanto, constante como queríamos mostrar.

Exercícios adicionais

1. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4x - 8y - 5 = 0 \\ \cancel{-x^2} - \cancel{y^2} + 2x + 6y - 1 = 0 \end{cases} +$$
$$-2x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow x + y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -x - 3$

Substituindo y na primeira equação, temos:

$x^2 + (-x - 3)^2 - 4x - 8(-x - 3) - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 6x + 9 - 4x + 8x + 24 - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 10x + 28 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 14 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 14 = 25 - 56 = -31 < 0$

Logo λ_1 e λ_2 não têm ponto comum.

Para descobrir sua posição relativa vamos descobrir seus centros e seus raios:

- λ_1: $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$
  $x^2 - 4x + y^2 - 8y = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 =$
  $= 5 + 4 + 16 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$
  Então, $C_1(2, 4)$ e $r_1 = 5$.
- λ_2: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$
  $x^2 - 2x + y^2 - 6y = -1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = -1 + 1 + 9 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$
  Então, $C_2(1, 3)$ e $r_2 = 3$.

Cálculo da distância entre seus centros:

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(3 - 4)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{2} \simeq 1{,}41$

$r_1 = 5, r_2 = 3 \Rightarrow r_1 > r_2$ e $|r_1 - r_2| = 2$

Como $d(C_1, C_2) < |r_2 - r_1|$, então a circunferência λ_2 é interior a λ_1.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 8x - 4y + 10 = 0 \\ \cancel{-x^2} - \cancel{y^2} + 2x + 10y - 22 = 0 \end{cases} +$$
$$-6x + 6y - 12 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = x + 2$

Substituindo y na primeira equação, temos:

$x^2 + (x + 2)^2 - 8x - 4(x + 2) + 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 - 8x - 4x - 8 + 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = 1$

Vamos encontrar os valores de y:

$x' = 3 \Rightarrow y' = x + 2 = 5$

$x'' = 1 \Rightarrow y'' = x + 2 = 3$

Logo, as circunferências são secantes e se cruzam nos pontos $(3, 5)$ e $(1, 3)$.

c) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1 \end{cases} -$

$(y - 1)^2 - (y + 2)^2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 - y^2 - 4y - 4 = 3 \Rightarrow -6y - 3 = 3 \Rightarrow y = -1$

Substituindo y na primeira equação, temos:

$(x - 2)^2 + (-1 - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Assim, as circunferências são tangentes no ponto $(2, -1)$.

Vamos verificar se são tangentes internas ou externas.

Cálculo da distância d entre os centros $(2, 1)$ e $(2, -2)$ das circunferências:

$d = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = 3$

Os raios das circunferências são 2 e 1. Então, $r_1 + r_2 = d$.

Logo, as circunferências são tangentes externas.

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \end{cases}$

Então:

$16 + 4y = 0 \Rightarrow y = -4$

Se $y = -4$, então:

$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow x^2 + (-4)^2 = 16 \Rightarrow x = 0$

As circunferências se tocam em um único ponto $(0, -4)$.

Para verificar se são tangentes internas ou externas vamos encontrar os centros C_1 e C_2 e os raios r_1 e r_2 das circunferências.

$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} C_1(0, 0) \\ r_1 = 4 \end{cases}$

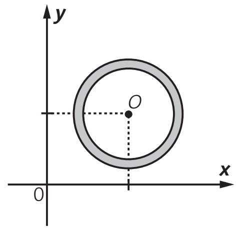
$x^2 + y^2 + 4y = 0 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} C_2(0, -2) \\ r_2 = 2 \end{cases}$

A distância d entre C_1 e C_2 é calculada usando a fórmula:

$d = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 2$

Como $d = |r_1 - r_2|$, então as circunferências são tangentes internas.

2.



Cálculo das coordenadas do centro e do raio de λ_1:

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

Então, $O(3, 4)$ e raio 5.

A área do anel circular é 24π. Logo, $\pi r^2 - \pi \cdot 5^2 = 24\pi$, em que r é o raio de λ_2. Assim:

$\pi r^2 = 49\pi \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$

Equação de λ_2: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$

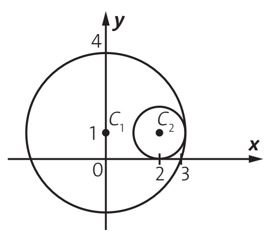
Equação na forma geral: $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$C_1(0, 1)$ e $r_1 = 3$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$C_2(2, 1)$ e $r_2 = 1$



tangentes interiormente

Resposta: alternativa **d**.

4. Centro e raio de $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$:

$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 10 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 12$

Então, o centro $C_1(1, -1)$ e raio $r_1 = 2\sqrt{3}$.

Centro e raio de $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$: $C_2(1, 1)$ e raio $r_2 = 2$.

Note que:

$r_1 - r_2 = 2\sqrt{3} - 2 \simeq 1{,}46$

$r_1 + r_2 = 2\sqrt{3} + 2 \simeq 5{,}46$

Vamos calcular a distância entre C_1 e C_2:

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = 2$

Como $|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$, as circunferências são secantes.

Resposta: alternativa **a**.

5. Cálculo do centro C e do raio r da circunferência:

$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 3 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$

Cálculo da distância entre C e $M(1, -3)$:

$d(C, M) = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-2 + 3)^2} = 1$

Como $d < r$, então M é interno à circunferência.

Outros contextos

2. $x^2 + y^2 - 37{,}21 \leqslant 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leqslant 37{,}21$

$r^2 = 37{,}21 \Rightarrow r = 6{,}1$

$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 6{,}1^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 37{,}21\pi$ u.a.

O diâmetro da mosca é $2r = 2 \cdot 6{,}1 = 12{,}2$; 12,2 cm.

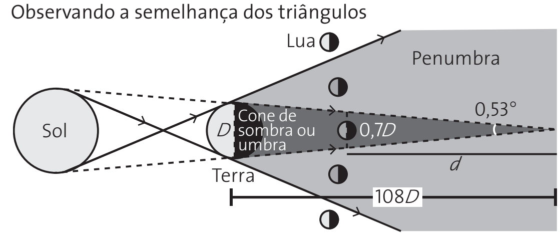
3. Como o diâmetro do alvo é 1,22 m, o raio é 0,61 m, logo, a equação é $x^2 + y^2 = (0{,}61)^2$.

4. Segundo o texto o diâmetro do aro da cesta de basquete deve medir entre 45 cm e 45,9 cm, isto é, entre 450 mm e 459 mm. Consequentemente, o raio do aro da cesta de basquete deve medir entre 225 mm e 229,5. Logo, a inequação que expressa a circunferência do aro da cesta de basquete $(225)^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (225{,}9)^2$.

Segundo o texto os diâmetros dos discos utilizados no levantamento de peso devem estar abaixo de 450 mm + 1 mm. Consequentemente, o raio do aro da cesta de basquete deve medir entre 225 mm + 0,5 mm. Logo, a inequação que expressa a circunferência do aro da cesta de basquete $x^2 + y^2 \leqslant (225{,}5)^2$.

Pensando no Enem

1. Observando a semelhança dos triângulos



e calculando a distância d solicitada:

$$\frac{D}{0{,}7D} = \frac{108D}{d} \Rightarrow Dd = 75{,}6D^2 \Rightarrow d = \frac{75{,}6D^2}{D} = 75{,}6D$$

Resposta: alternativa **d**.

As outras alternativas estão incorretas, pois representam respectivamente:

a) $108D$

Distância do vértice V do cone de sombra até a Terra.

b) $154{,}3D$

Erro na escrita da proporção:

$$\frac{0{,}7D}{D} = \frac{108D}{d} \Rightarrow 0{,}7Dd = 108D^2 \Rightarrow d = \frac{108D^2}{0{,}7D} = 154{,}3D$$

c) Calculando a geratriz do cone que vai do vértice V até a Lua (g) em vez da altura desse cone (d):

$$\text{sen}\,\frac{0{,}53°}{2} = \frac{0{,}35D}{g} \Rightarrow \text{sen}\,0{,}265°g = 0{,}35D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \frac{0{,}35D}{\text{sen}\,0{,}265°} \simeq 75{,}7D$$

e) Calculando a geratriz do cone que vai do vértice V até a Lua (g) em vez da altura desse cone (d), sem dividir o ângulo ao meio:

$$\text{sen}\,0{,}53° = \frac{0{,}35D}{g} \Rightarrow \text{sen}\,0{,}53°g = 0{,}35D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \frac{0{,}35D}{\text{sen}\,0{,}53°} \simeq 37{,}8D$$

2. $$V_{\text{cone de sombra ou umbra}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot 108D$$

$$V_{\text{cone de vértice } V \text{ e altura } d} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi(0{,}7D)^2}{4} \cdot 75{,}6D$$

$$\frac{V_{\text{cone de sombra ou umbra}}}{V_{\text{cone de vértice } V \text{ e altura } d}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot 108D}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi(0{,}7D)^2}{4} \cdot 75{,}6D} \simeq 3$$

Resposta: alternativa **c**.

As outras alternativas estão incorretas, pois representam respectivamente:

a) Inversão da razão: 1 para 3

b) Inversão da razão: 1 para 3 e considerando $\frac{1}{3} \simeq \frac{0{,}33}{1}$

d) Escolhendo a alternativa **a** no exercício anterior com a distância do vértice V do cone de sombra até a Terra: 1 para 1.

e) Utilizando a informação do diâmetro da Lua em vez do da Terra na segunda fórmula:

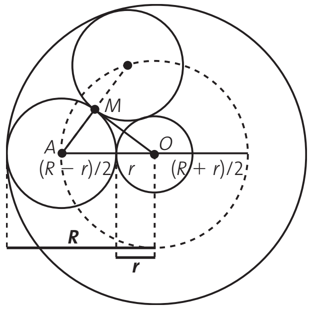
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$V_{\text{cone de sombra ou umbra}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot 108D$$

$$V_{\text{cone de vértice } V \text{ e altura } d} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi(2{,}6D)^2}{4} \cdot 75{,}6D$$

$$\frac{V_{\text{cone de sombra ou umbra}}}{V_{\text{cone de vértice } V \text{ e altura } d}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot 108D}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi(2{,}6D)^2}{4} \cdot 75{,}6D} \simeq 0{,}2 = \frac{2}{10}$$

3. O diâmetro de cada um dos círculos iguais é a diferença $R - r$ (I) entre os raios dos círculos concêntricos. Por outro lado, seus centros formam um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo de raio $\frac{R + r}{2}$ (II) concêntrico aos dois círculos iniciais, como mostra a figura abaixo.



No triângulo retângulo OAM, a hipotenusa $\overline{AO}$ mede $\frac{R - r}{2} + r = \frac{R + r}{2}$ (III) e o cateto $\overline{AM}$ mede $\frac{R - r}{2}$ (IV) e é oposto a um ângulo igual a $\frac{180°}{n}$. Assim: $\underbrace{\frac{R - r}{2}}_{\text{V}} = \underbrace{\frac{R + r}{2}}_{\text{VI}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$

ou, desenvolvendo:

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)}{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

No nosso caso, em que $n = 5$, devemos ter:

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \operatorname{sen} \underbrace{(36°)}_{\text{VII}}}{1 - \operatorname{sen} \underbrace{(36°)}_{\text{VIII}}}$$

Resposta: alternativa **b**.

Vestibulares de Norte a Sul

1. 1º passo: encontrar as coordenadas do ponto $C(x, y)$.

Sabemos que $y = 400$ e $y = -\frac{4}{3}x + 400$ se intersectam em um ponto de coordenadas x (encontrado pela igualdade entre as retas) e y, o qual já nos é informado por uma das retas, de valor 400.

$$\therefore\ 400 = -\frac{4}{3}x + 800 \Rightarrow -400 = -\frac{4}{3}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot 400}{4} \Rightarrow x = 300$$

Ou seja, $C(300, 400)$.

2º passo: calcular as distâncias entre os pontos

$$d(A, B) = \sqrt{(0-0)^2 + (400-0)^2} = 400$$

$$d(B, C) = \sqrt{(300-0)^2 + (400-400)^2} = 300$$

$$d(C, D) = \sqrt{(300-600)^2 + (0-400)^2} = \sqrt{(-300)^2 + (-400)^2} = 500$$

$$d(D, A) = \sqrt{(600-0)^2 + (0-0)^2} = 600$$

3º passo: somar as distâncias encontradas e encontrar a distância percorrida (d_T)

$d_T = d(A,B) + d(B,C) + d(C,D) + d(D,A) = 400 + 300 + 500 + 600 =$
$= 1800$ m

Resposta: alternativa **d**.

2. Temos que o corpo da professora tem altura equivalente a $\frac{1}{4}$ da circunferência dada. Inicialmente, simplifique a equação que representa a circunferência dividindo-a por 100:

Sabe-se que a equação de uma circunferência pode ser escrita por:

$$\frac{100x^2 + 100y^2 - 400x - 600y + 1075}{100} = \frac{0}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10{,}75 = 0$$

Sabe-se que a equação de uma circunferência pode ser escrita por $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, tendo $C = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - R^2$.

Logo, $10{,}75 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 - R^2$.

$\therefore 10{,}75 = 4 + 9 - R^2 = 2{,}25 \Rightarrow R = 1{,}5$

Assim, o comprimento da circunferência é de $2\pi R = 3\pi$ e a altura da professora é de $\frac{3\pi}{4} = 0{,}75\pi$ u.c.

Resposta: alternativa **c**.

3. A partir da figura que representa o mapa da região de um bairro de uma cidade, temos $C(4, 2)$ e $P(3, -1)$. A partir desses dados podemos montar uma matriz com as coordenadas e que apresentará determinante igual a zero.

$$H = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \therefore \det(H) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 4 + 3y - 6 + x - 4y + 3x - 10 - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = 3(x - 4)$$

Resposta: alternativa **c**.

4. Toda equação do tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, tem $A = -2a$, $B = -2b$ e $C = a^2 + b^2 - r^2$.

Sendo assim, de acordo com a equação da circunferência dada, temos:

$A = -2a \Rightarrow 0 = -2a \Rightarrow a = 0$

$B = -2b \Rightarrow 4 = -2b \Rightarrow b = -2$

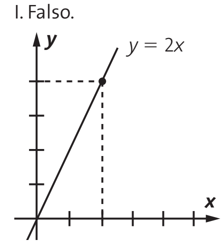
$C = 0^2 + (-2)^2 - r^2 \Rightarrow -5 = 4 - r^2 \Rightarrow -r^2 = -9 \Rightarrow r = 3$

Logo, centro $(0, -2)$ e raio 3.

Resposta: alternativa **c**.

5. Analisando as afirmativas, temos:

I. Falso.

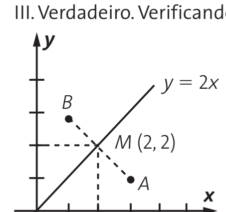


Visivelmente verificamos que A e B não são simétricos em relação à reta $y = 2x$.

II. Verdadeiro.

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \end{aligned}\right\rangle M(2, 2)$$

III. Verdadeiro. Verificando.



IV. Verdadeiro. Montando uma matriz com as coordenadas, temos:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, o $\left[\frac{\det(M)}{2}\right]$ = área do triângulo

$\therefore$ área do triângulo $= \left[\frac{\det(M)}{2}\right] = \left[\frac{4}{2}\right] = 2$ u.a.

Resposta: alternativa **c**.

6. A partir da Circunferência 1, temos que o seu centro é (a_1, b_1)

$\therefore\ a_1 = \frac{40}{-2} = -20;\ b_1 = \frac{-100}{-2} = 50$; Centro 1(−20, 50)

Circunferência 2: Centro 2(a_2, b_2)

$a_2 = \frac{-100}{-2} = 50;\ b_2 = \frac{-40}{-2} = 20$; Centro 2(50, 20)

Logo,

$d(C_1, C_2) = \sqrt{[50 - (-20)]^2 + (20 - 50)^2} =$
$= \sqrt{(70)^2 + (-30)^2} = \sqrt{4\,900 + 900} = \sqrt{5800} =$
$= 10\sqrt{58}$; $d(C_1, C_2) = 10\sqrt{58}$ cm

Resposta: alternativa **a**.

7. Volume do temaki (cone): $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h =$
$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\ \text{cm}^3$

Sabemos que 90% do temaki é composto de salmão, ou seja, $0{,}9 \cdot 160 = 144\ \text{cm}^3$ é o volume de salmão. Além do mais, temos a seguinte relação:

$0{,}35\ \text{g} \longrightarrow 1\ \text{cm}^3$
$x\ \text{g} \longrightarrow 144\ \text{cm}^3$

$x = 144 \cdot 0{,}35 = 50{,}4 \simeq 50$ g de salmão

Resposta: alternativa **d**.

8. A partir dos dados informados no enunciado, temos:

área sombreada $= \frac{\text{área da circunferência}}{4}$ − área do triângulo*

*Coordenadas dos três vértices do triângulo: (0, 0); (1, 0); (0, 1).

área sombreada: $\frac{\pi \cdot r^2}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{\pi \cdot (1)^2}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2} =$
$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{4} = \frac{\pi - 2}{4}$

Resposta: alternativa **d**.

9. A área total interna do tanque de armazenamento é a soma da área de uma esfera com a área circular de um cilindro. Assim, temos o seguinte panorama:

área total interna: $4 \cdot \pi \cdot R^2 + (2 \cdot \pi \cdot R)C$
área total: $4 \cdot \pi \cdot 1^2 + (2 \cdot \pi \cdot 1) \cdot 6$
área total: $4\pi + 12\pi = 16\pi = 116 \cdot 3{,}14 = 50{,}24\ \text{m}^2$
Logo, por meio de uma simples regra de três, temos:
1 lata = 8 m² revestidos
x latas = 50,24 m² (a serem revestidos)

$x = \frac{50{,}2}{8} \simeq 6{,}275$ latas

Sendo assim, o número mínimo de latas suficiente para revestir totalmente o interior do tanque de armazenamento é de 7 latas.
Resposta: alternativa **d**.

10. 1º passo: Obter o valor do raio.
Área circular $= \pi R^2 \Rightarrow \pi R^2 = 900\pi \Rightarrow R^2 = 900 \Rightarrow R = 30$ km
2º passo: Montar a equação da circunferência.

Sabe-se que: $\begin{cases} \text{Centro } (\overset{a}{0}, \overset{b}{10}) \\ \text{Raio } = 30 \end{cases}$

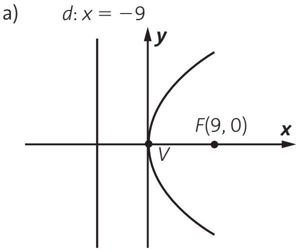
Equação da circunferência: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 10)^2 = 30^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 20y + 100 = 900 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 20y - 800 = 0$

Resposta: alternativa **a**.

Unidade 3

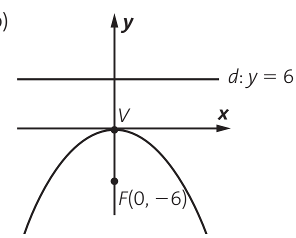
CAPÍTULO 6

1. a) $d: x = -9$



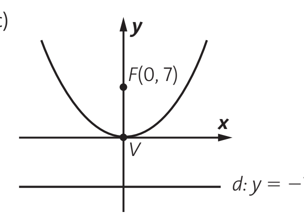
O foco é $F(9, 0)$ e o vértice é $V(0, 0)$.
Cálculo de c:
$c = d(F, V) = \sqrt{9^2 + 0^2} = 9$
Usando a equação $y^2 = 4cx$, temos $y^2 = 36x$.

b)



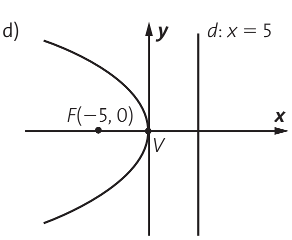
O foco é $F(0, -6)$ e o vértice é $V(0, 0)$.
Cálculo de c:
$c = d(F, V) = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$
Usando a equação $x^2 = -4cy$, temos $x^2 = -24y$.

c)



O foco é $F(0, 7)$ e o vértice é $V(0, 0)$.
Cálculo de c:
$c = d(F, V) = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7$
Usando a equação $x^2 = 4cy$, temos $x^2 = 28y$.

d)

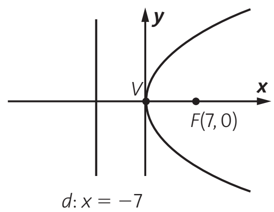


O foco é $F(-5, 0)$ e o vértice é $V(0, 0)$.
Cálculo de c:
$c = d(F, V) = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$
A equação é:
$y^2 = -4cx \Rightarrow y^2 = -20x$

2. a) $y^2 = 28x$

Como $y^2 = 4 \cdot 7x$ ou $(y - 0)^2 = 4 \cdot 7(x - 0)$, então a distância do vértice $V(0, 0)$ ao foco é $c = 7$.

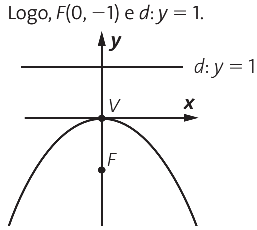
Logo, $F(7, 0)$ e $d: x = -7$



b) $x^2 = -4y$

Como $x^2 = -4 \cdot 1y$ ou $(x - 0)^2 = -4 \cdot 1(y - 0)$, então a distância do vértice $V(0, 0)$ ao foco é $c = 1$.

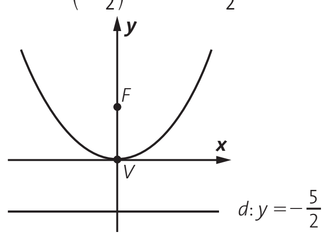
Logo, $F(0, -1)$ e $d: y = 1$.



c) $x^2 = 10y$

Como $x^2 = 4 \cdot \frac{5}{2} y$ ou $(x - 0)^2 = 4 \cdot \frac{5}{2}(y - 0)$, então a distância do vértice $V(0, 0)$ ao foco é $c = \frac{5}{2}$.

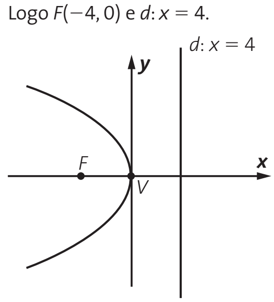
Logo $F\left(0, \frac{5}{2}\right)$ e $d: y = -\frac{5}{2}$.



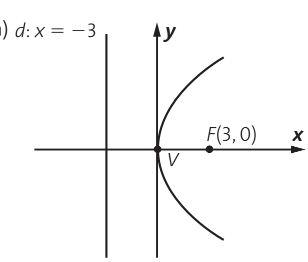
d) $y^2 = -16x$

Como $y^2 = -4 \cdot 4x$ ou $(y - 0)^2 = -4 \cdot 4(x - 0)$, então a distância do vértice $V(0, 0)$ ao foco é $c = 4$.

Logo $F(-4, 0)$ e $d: x = 4$.



3. a)



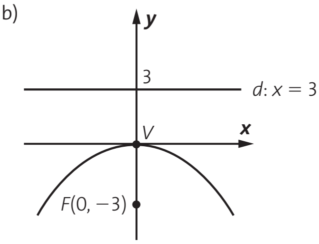
Sendo $F(3, 0)$ e $V(0, 0)$, temos:

$c = d(F, V) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = 3$

A equação é:

$y^2 = 4cx \Rightarrow y^2 = 12x$

b)



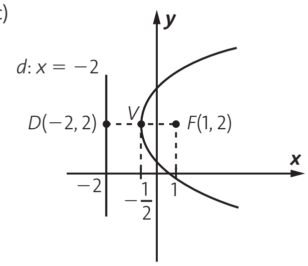
Sendo o vértice $V(0, 0)$ e $d: y = 3$, então o foco tem coordenadas $F(0, -3)$. Logo:

$c = d(V, F) = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$

A equação é:

$x^2 = -4cy \Rightarrow x^2 = -12y$

c)



Sendo $F(1, 2)$ e $d: x = -2$, então o vértice é ponto médio de $\overline{FD}$, em que $D(-2, 2)$:

$V\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

Mas:

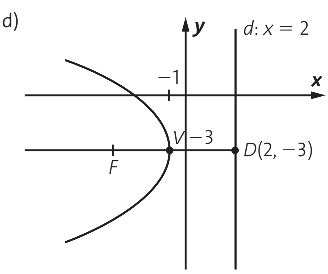
$c = d(F, V) = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

A equação é:

$(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0) \Rightarrow (y-2)^2 = 4 \cdot \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-2)^2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d)



O ponto $V(-1, -3)$ é ponto médio de $\overline{FD}$.

Então:

$-1 = \frac{x_F + 2}{2} \Rightarrow x_F = -4$

$-3 = \frac{y_F - 3}{2} \Rightarrow y_F = -3$

Logo, $F(-4, -3)$.

Mas:

$c = d(F, V) = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$

A equação é:

$(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0) \Rightarrow (y+3)^2 = 12(x+1)$

4. Vamos obter o vértice da parábola complementando o quadrado perfeito:

$x^2 - 6x + y + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = -y - 8 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)^2 = -y + 1 \Rightarrow (x-3)^2 = -1(y-1)$

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Então, $V(3, 1)$.

A parábola intersecta o eixo x nos pontos de ordenada nula, ou seja, $y = 0$:

$x^2 - 6x + 0 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x' = 4$ e $x'' = 2$

Logo, $A(4, 0)$ e $B(2, 0)$.

Cálculo da área do triângulo VAB:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$$

$$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|-2| = 1$$

5. Precisamos, em todos os casos, encontrar a equação reduzida.

a) $y^2 - 6y - 12x + 21 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 12x - 21 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-3)^2 = 12x - 12 \Rightarrow (y-3)^2 = 12(x-1)$

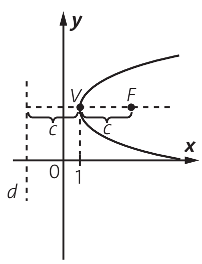
Logo, o vértice é $V(1, 3)$.

Mas:

$(y-3)^2 = 12(x-1) \Rightarrow (y-3)^2 = 4 \cdot 3(x-1)$

Assim, $c = 3$.

O esboço do gráfico é:



Então:

$F(x_V + c,\ y_V) \Rightarrow F(1+3,\ 3) \Rightarrow F(4, 3)$

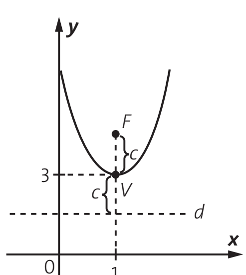
$d\colon x = x_V - c \Rightarrow x = 1 - 3 = -2 \Rightarrow x = -2$

b) $x^2 - 2x - y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = y - 4 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2 = (y-3) \Rightarrow (x-1)^2 = 4\left[\frac{1}{4}(y-3)\right]$

Logo, $c = \frac{1}{4}$ e $V(1, 3)$.

Vamos fazer um esboço do gráfico:



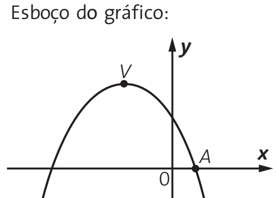
Então:

$F(x_V,\ y_V + c) \Rightarrow F\left(1,\ 3 + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow F\left(1,\ \frac{13}{4}\right)$

$d\colon y = y_V - c \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{11}{4}$

6. a) $V(-1, 4)$ e $A(3, 0)$ é ponto da parábola.

Esboço do gráfico:



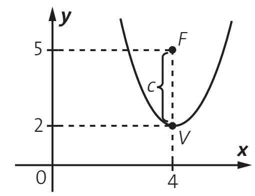
Observando o gráfico, vemos que a equação é do tipo $(x - x_V)^2 = -4c(y - y_V)$, em que $x_V = -1$, $y_V = 4$ e $A(3, 0)$ pertence à parábola.

Assim: $(3 + 1)^2 = -4c(0 - 4) \Rightarrow 16 = 16c \Rightarrow c = 1$

Logo, a equação é $(x + 1)^2 = -4(y - 4)$.

b) $V(4, 2)$ e $F(4, 5)$

Esboço do gráfico:



$c = d(F, V) = 5 - 2 = 3$

Logo:

$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V) \Rightarrow (x-4)^2 = 12(y-2)$

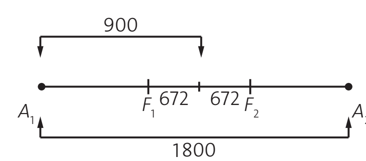
Resolvido passo a passo

5.a) A área da elipse é dada por $\boldsymbol{A = r_1 \cdot r_2 \cdot \pi}$ onde $r_1 = a \Rightarrow$
$\Rightarrow r_1 = 900;\ r_2 = b \Rightarrow r_2 = 600$

A fórmula da área da elipse obtida por cálculo integral.

Logo, $A = 900 \cdot 600 \cdot \pi \Rightarrow A = 540\,000\ \pi\ \text{m}^2$

Cálculo das distâncias à pista.



Distância máxima, supondo $d(F_1, A_2) = 900 + 672 = 1572$ m

Distância mínima, supondo $d(F_2, A_2) = 900 - 672 = 228$ m

7. a) $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$ e $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Pelos dados do problema, F_1 e F_2 pertencem ao eixo x e $c = 3$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, então:

$16 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 7$

Logo, a equação é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

b) $F_1(0, 4)$, $F_2(0, -4)$, $A_1(0, 6)$ e $A_2(0, -6)$

Pelos dados do problema, F_1 e F_2 pertencem ao eixo y.

Assim, a equação é $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Temos $c = 4$, $a = 6$. Logo:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 20$

Portanto, a equação é $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$.

c) $F_1(0, 4)$, $F_2(0, -4)$, e $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Pelos dados do problema, F_1 e F_2 pertencem ao eixo y.

Assim, a equação é $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Como $c = 4$, vem:

$\frac{4}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 12 \Rightarrow a = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

Vamos calcular o valor de b:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(4\sqrt{3}\right)^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b^2 + 16 = 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 32$

Logo, a equação é $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{48} = 1$.

d) $A_1(5,\ 0)$, $A_2(-5,\ 0)$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como A_1 e A_2 pertencem ao eixo x, a equação é $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Sendo $a=5$ e $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, vem:

$\dfrac{c}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}$

Vamos calcular o valor de b:

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 5^2=b^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow b^2+5=25\Rightarrow b^2=20$

Logo, a equação é $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

8. a) $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{81}=1$

F_1 e F_2 pertencem ao eixo x, porque $144>81$ e $O(0,\ 0)$.

Considerando a equação, temos:

$\begin{cases} a^2=144\Rightarrow a=12 \\ b^2=81\Rightarrow b=9 \end{cases}$

Então:

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 144=81+c^2\Rightarrow c^2=144-81=63\Rightarrow$

$\Rightarrow c=\sqrt{63}$

Assim:

$\begin{cases} F_1(c,\ 0) \text{ e } F_2(-c,\ 0)\Rightarrow F_1\left(\sqrt{63},\ 0\right) \text{ e } F_2\left(-\sqrt{63},\ 0\right) \\ A_1(a,\ 0) \text{ e } A_2(-a,\ 0)\Rightarrow A_1(12,\ 0) \text{ e } A_2(-12,\ 0) \end{cases}$

Logo, a excentricidade é:

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{63}}{12}=\dfrac{3\sqrt{7}}{12}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

b) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Como $25>9$ e $O(0,\ 0)$, o eixo maior está contido no eixo x.

Então, $a^2=25$ e $b^2=9$.

Cálculo de c:

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 25=9+c^2\Rightarrow c^2=16\Rightarrow c=4$

Assim:

$\begin{cases} F_1(c,\ 0) \text{ e } F_2(-c,\ 0)\Rightarrow F_1(4,\ 0) \text{ e } F_2(-4,\ 0) \\ A_1(a,\ 0) \text{ e } A_2(-a,\ 0)\Rightarrow A_1(5,\ 0) \text{ e } A_2(-5,\ 0) \end{cases}$

Logo, a excentricidade é:

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$

c) $2x^2+y^2=2\Rightarrow \dfrac{2x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{2}{2}\Rightarrow \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{2}=1$

Como $2>1$ e $O(0,0)$, então o eixo maior está contido no eixo y.

Assim:

$\begin{cases} a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2} \\ b^2=1\Rightarrow b=1 \end{cases}$

Cálculo de c:

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 2=1+c^2\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=1$

Então:

$\begin{cases} F_1(0,\ c) \text{ e } F_2(0,\ -c)\Rightarrow F_1(0,\ 1) \text{ e } F_2(0,\ -1) \\ A_1(0,\ a) \text{ e } A_2(0,\ -a)\Rightarrow A_1\left(0,\ \sqrt{2}\right) \text{ e } A_2\left(0,\ -\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Logo, a excentricidade é:

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $4x^2+9y^2=36\Rightarrow \dfrac{4x^2}{36}+\dfrac{9y^2}{36}=\dfrac{36}{36}\Rightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Como $9>4$ e $O(0,0)$ então o eixo maior está contido no eixo x.

Assim:

$\begin{cases} a^2=9\Rightarrow a=3 \\ b^2=4\Rightarrow b=2 \end{cases}$

Cálculo de c:

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 9=4+c^2\Rightarrow c^2=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$

Logo:

$\begin{cases} F_1(c,\ 0) \text{ e } F_2(-c,\ 0)\Rightarrow F_1\left(\sqrt{5},\ 0\right) \text{ e } F_2\left(-\sqrt{5},\ 0\right) \\ A_1(a,\ 0) \text{ e } A_2(-a,\ 0)\Rightarrow A_1(3,\ 0) \text{ e } A_2(-3,\ 0) \end{cases}$

Portanto, a excentricidade é:

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

9. Pelos dados do problema, temos $2b=6$ e $2c=10$. Logo, $b=3$ e $c=5$.

Cálculo de a:

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2=3^2+5^2\Rightarrow a^2=34$

Como o eixo maior está contido no eixo x, então a equação da elipse é:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow \dfrac{x^2}{34}+\dfrac{y^2}{9}=1$

10. $x^2+5y^2=20\Rightarrow \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{5y^2}{20}=\dfrac{20}{20}\Rightarrow \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Como $20>4$, então o eixo maior está contido no eixo x e $a^2=20$, $b^2=4$. Assim, $a=\sqrt{20}$ e $b=2$.

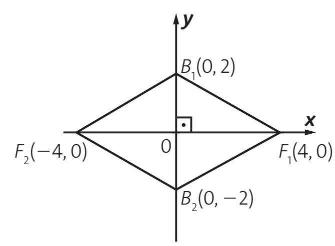
Cálculo de c:

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 20=4+c^2\Rightarrow c^2=16\Rightarrow c=4$

Como $F_1(c,\ 0)$ e $F_2(-c,\ 0)$, então $F_1(4,\ 0)$ e $F_2(-4,\ 0)$.

O eixo menor tem extremidades $B_1(0,\ b)$ e $B_2(0,\ -b)$. Logo, $B_1(0,\ 2)$ e $B_2(0,\ -2)$.

Vamos representar o quadrilátero $F_1B_1F_2B_2$:



A área S do triângulo B_1OF_2 é calculada por:

$\dfrac{\text{medida da base}\cdot\text{medida da altura relativa}}{2}$

Logo:

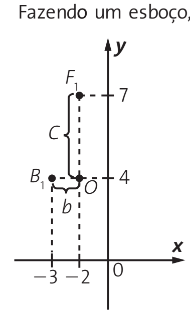
$S=\dfrac{4\cdot 2}{2}=4$

Portanto, a área do quadrilátero $F_1B_1F_2B_2$ é:

$4S=4\cdot 4=16$

11. São dados $O(-2,\ 4)$, $F_1(-2,\ 7)$, $B_1(-3,\ 4)$.

Fazendo um esboço, temos:



Logo, o eixo maior é paralelo ao eixo y.

Portanto, a equação é:

$\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$

Cálculo de c e b:

$c=d(F_1, O)=|7-4|=3\Rightarrow c^2=9$

$b=d(B_1, O)=|(-2)-(-3)|=1\Rightarrow b^2=1$

Mas:

$a^2=b^2+c^2=1+9=10$

Portanto, a equação da elipse é $\dfrac{(x-2)^2}{1}+\dfrac{(y-4)^2}{10}=1$.

12. $x^2+4y^2-4x-8y+4=0 \Rightarrow x^2-4x+4y^2-8y=-4 \Rightarrow$

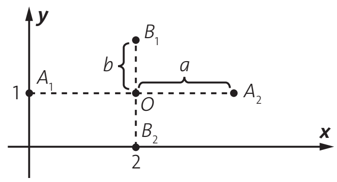
$\Rightarrow (x^2-4x+4)+4(y^2-2y+1)=-4+4+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2+4(y-1)^2=4 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{1}=1$

Como $4>1$, então o eixo maior é paralelo ao eixo x.

Logo, $O(2, 1)$, $a^2=4$ e $b^2=1$. Portanto, $a=2$ e $b=1$.

Esboço do gráfico:



$B_1(x_0,\ y_0+b) \Rightarrow B_1(2,\ 1+1) \Rightarrow B_1(2,\ 2)$

$B_2(x_0,\ y_0-b) \Rightarrow B_2(2,\ 1-1) \Rightarrow B_2(2,\ 0)$

13. De acordo com o enunciado $a=2$ e $b=1$. Assim:

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1 \Rightarrow x^2+4y^2=4$

Resposta: alternativa **a**.

14. De acordo com o enunciado, $\begin{cases} y=ax+1 \\ x^2+4y^2=1 \end{cases}$, então:

$x^2+4(ax+1)^2=1 \Rightarrow x^2+4(a^2x^2+2ax+1)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+4a^2x^2+8ax+4-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(1+4a^2)+8ax+3=0$

Como $\Delta=0$, então:

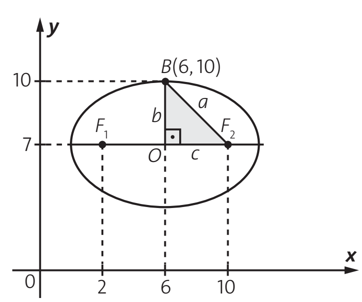
$(8a)^2-4(1+4a^2)\cdot 3=0 \Rightarrow 64a^2-12-48a^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16a^2=12 \Rightarrow a^2=\dfrac{12}{16}$

Logo:

$8a^2=8\cdot\dfrac{12}{16}=\dfrac{12}{2}=6$

15.



No triângulo OBF_2 temos:

$a^2=c^2+b^2 \Rightarrow a^2=3^2+4^2 \Rightarrow a^2=25$

Logo, $\dfrac{(x-6)^2}{25}+\dfrac{(y-7)^2}{9}=1.$

16. Sendo $B(-5,\ 3\sqrt{3})$, $F_1(8, 0)$ e $F_2(-8, 0)$, a área do triângulo BF_1F_2 é dada por:

$$D=\begin{vmatrix} -5 & 3\sqrt{3} & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-24\sqrt{3}-24\sqrt{3}=-48\sqrt{3}$$

$S=\dfrac{1}{2}|D|=\dfrac{1}{2}\left|-48\sqrt{3}\right|=24\sqrt{3}$

17. $9x^2+16y^2-144=0 \Rightarrow 9x^2+16y^2=144 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{9x^2}{144}+\dfrac{16y^2}{144}=\dfrac{144}{144} \Rightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Como $16>9$ e $O(0, 0)$, então o eixo maior está contido no eixo x e $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$.

Cálculo de c:

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 16=9+c^2 \Rightarrow c^2=7 \Rightarrow c=\sqrt{7}$

Assim, $F_1(\sqrt{7},\ 0)$ e $F_2(-\sqrt{7},\ 0)$.

18. É Vênus, pois sua excentricidade é de apenas 0,007 (a mesma da tabela).

$e=\dfrac{c}{a}=0{,}007 \Rightarrow c=0{,}007a \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=b^2+c^2=b^2+(0{,}007)^2 \Rightarrow a^2-0{,}000049a^2=b^2 \Rightarrow$

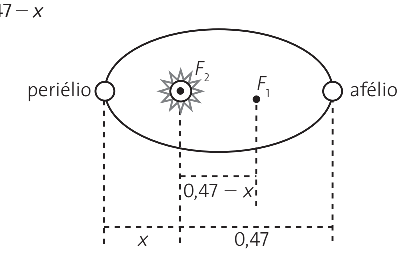
$\Rightarrow b^2=0{,}999951a^2 \Rightarrow b=0{,}999976a \Rightarrow \dfrac{b}{a}=0{,}999976$

Logo, b é 99,9976% de a, ou seja, a diferença percentual entre os semieixos é de apenas 0,0024%. Portanto, quase não há diferença entre os semieixos (a trajetória de Vênus ao redor do Sol é praticamente uma circunferência).

19. Chamando a distância menor de x, temos:

$2a=x+0{,}47$

$2c=0{,}47-x$



Como a excentricidade da órbita de Mercúrio é 0,206, então:

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{0{,}47-x}{0{,}47+x}=0{,}206 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}47-x=0{,}206(x+0{,}47) \Rightarrow 0{,}3732=1{,}206x \Rightarrow x=0{,}31$

Então, no periélio, Mercúrio está a cerca de 0,31 UA do Sol.

20. a) $F_1(8, 0)$, $F_2(-8, 0)$, $A_1(5, 0)$, $A_2(-5, 0)$, $O(0, 0)$

Pelos dados do problema, os focos estão no eixo x, $c=8$ e $a=5$.

Cálculo de b:

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 64=25+b^2 \Rightarrow b^2=39$

Logo, a equação da hipérbole é $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{39}=1.$

b) $A_1(3, 0)$, $A_2(-3, 0)$, $2c=8$, $O(0, 0)$

Pelos dados do problema, o eixo real está contido no eixo x, $a=3$ e $c=4$.

Cálculo de b:

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 4^2=3^2+b^2 \Rightarrow b^2=16-9 \Rightarrow b^2=7$

Logo, a equação da hipérbole é $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1.$

c) $A_1(3, 0)$, $A_2(-3, 0)$, $e=\dfrac{c}{a}=2$, $O(0, 0)$

Pelos dados do problema, o eixo real está contido no eixo x e $a=3$. Então:

$\dfrac{c}{a}=2 \Rightarrow \dfrac{c}{3}=2 \Rightarrow c=6$

Cálculo de b:

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 6^2=3^2+b^2 \Rightarrow 36=9+b^2 \Rightarrow b^2=27$

Logo, a equação é $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1.$

d) $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$, $O(0, 0)$

Pelos dados do problema, os focos estão no eixo y e $c=5$. Então:

$\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{5}{a}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow a=3$

Cálculo de b:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

Logo, a equação da hipérbole é $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$.

21. $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$ pelos dados do problema.

Então, os focos pertencem ao eixo x com $O(0, 0)$ e $c = 5$.

Assim:

$a^2 + b^2 = c^2 = 25$ (I)

Como $P\left(4\sqrt{2}, 3\right)$ pertence à hipérbole cuja equação é

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, então:

$\dfrac{32}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow 32b^2 - 9a^2 = a^2b^2$ (II)

Vamos resolver o sistema formado pelas equações (I) e (II)

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 25 - b^2 \\ -9a^2 + 32b^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

Substituindo a^2 na segunda equação, temos:

$-9\left(25 - b^2\right) + 32b^2 = \left(25 - b^2\right)b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -225 + 9b^2 + 32b^2 = 25b^2 - b^4 \Rightarrow b^4 + 16b^2 - 225 = 0$

Substituindo b^2 por x, vem:

$x^2 + 16x - 225 = 0 \Rightarrow x' = -25$ (não convém) e $x'' = 9$

Mas:

$x = b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

Substituindo $b^2 = 9$ em $a^2 + b^2 = 25$, temos:

$a^2 + 9 = 25 \Rightarrow a^2 = 16$

Assim, a equação da hipérbole é $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

22. a) $4x^2 - 25y^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{4x^2}{100} - \dfrac{25y^2}{100} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Como os focos estão sobre o eixo x com $O(0, 0)$, temos:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 4 = 29 \Rightarrow c = \sqrt{29}$

Então:

$F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0) \Rightarrow F_1\left(\sqrt{29}, 0\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{29}, 0\right)$

$A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0) \Rightarrow A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$

b) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

Como os focos estão sobre o eixo x com $O(0, 0)$, temos:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 25 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}$

Então:

$F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0) \Rightarrow F_1\left(\sqrt{41}, 0\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{41}, 0\right)$

$A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0) \Rightarrow A_1(4, 0)$ e $A_2(-4, 0)$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{41}}{4}$

c) $3x^2 - 4y^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{3x^2}{36} - \dfrac{4y^2}{36} = \dfrac{36}{36} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Como os focos estão no eixo x com $O(0, 0)$, temos:

$a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 9 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

Então:

$F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0) \Rightarrow F_1\left(\sqrt{21}, 0\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{21}, 0\right)$

$A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0) \Rightarrow A_1\left(2\sqrt{3}, 0\right)$ e $A_2\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

23. $4x^2 - 25y^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{4x^2}{100} - \dfrac{25y^2}{100} = \dfrac{100}{100} \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Pela análise da equação, temos:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

Logo:

$A_1A_2 = 2a = 10$

24. Se $P\left(\sqrt{15}, 4\right)$ pertence à hipérbole, então suas coordenadas satisfazem à equação $\dfrac{x^2}{m^2} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Logo:

$\dfrac{\left(\sqrt{15}\right)^2}{m^2} - \dfrac{4^2}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{15}{m^2} - \dfrac{16}{4} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 60 - 16\,m^2 = 4\,m^2 \Rightarrow m^2 = 3$

Como m é metade do eixo real, então $m' = \sqrt{3}$ e $m'' = -\sqrt{3}$ (não convém). Logo, o valor de m é $\sqrt{3}$.

$\dfrac{15}{m^2} = 5 \Rightarrow m^2 = 3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$

25. Se a excentricidade é $\sqrt{5}$, então:

$e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{5}$

Como $A_1(2, 0)$ e $A_2(-2, 0)$são vértices, então $a = 2$. Logo:

$\dfrac{c}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

Pelos dados do problema, o centro é $(0, 0)$ e os focos pertencem ao eixo x. Então, $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Assim, $F_1\left(2\sqrt{5}, 0\right)$ e $F_2\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$.

26. $4y^2 - x^2 = 16 \Rightarrow \dfrac{4y^2}{16} - \dfrac{x^2}{16} = \dfrac{16}{16} \Rightarrow \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

O centro da hipérbole é $O(0, 0)$. Como podemos perceber, $a^2 = 4$ e $b^2 = 16$ e a hipérbole tem seus focos no eixo y.

Cálculo de c:

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

Se a circunferência passa pelos focos da hipérbole, então seu diâmetro é $2c = 4\sqrt{5}$ e seu centro é $(0, 0)$.

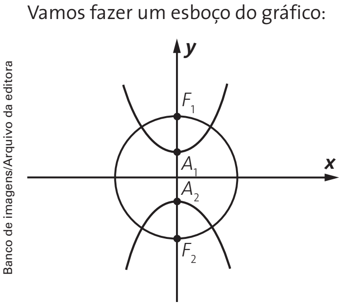
Logo, seu raio r é tal que:

$2r = 4\sqrt{5} \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$

Então, a equação da circunferência é:

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20$

Vamos fazer um esboço do gráfico:



Banco de imagens/Arquivo da editora

27. a) $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

Como $a^2 = 1$, $b^2 = 8$, então:

$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 8 = 9 \Rightarrow c = 3$

Cálculo da excentricidade:

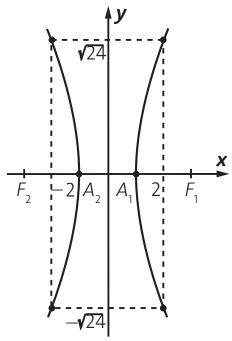
$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{1} = 3$

Como $O(0, 0)$:

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A_1(1, 0)$ e $A_2(-1, 0)$

Esboço do gráfico:

Fazendo $x = \pm 2$, obtemos mais quatro pontos da hipérbole: $\left(2, \sqrt{24}\right)$, $\left(2, -\sqrt{24}\right)$, $\left(-2, \sqrt{24}\right)$ e $\left(-2, -\sqrt{24}\right)$.



b) $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

Pelos dados do problema, temos $a^2 = 1$, $b^2 = 5$; A_1 e A_2 estão no eixo x com $O(0, 0)$.

Mas:

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A_1(1, 0)$ e $A_2(-1, 0)$

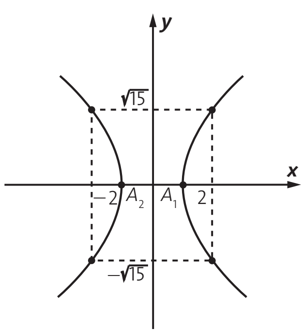
$c^2 = a^2 + b^2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6} \Rightarrow F_1\left(\sqrt{6}, 0\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{6}, 0\right)$

A excentricidade é:

$e = \dfrac{c}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{1} = \sqrt{6}$

Esboço do gráfico:

Outros pontos da hipérbole: $\left(2, \sqrt{15}\right)$, $\left(2, -\sqrt{15}\right)$, $\left(-2, \sqrt{15}\right)$ e $\left(-2, -\sqrt{15}\right)$:



c) $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$

Pelos dados do problema, o eixo real está contido no eixo x com $O(0, 0)$. Mas:

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A_1(1, 0)$ e $A_2(-1, 0)$

$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

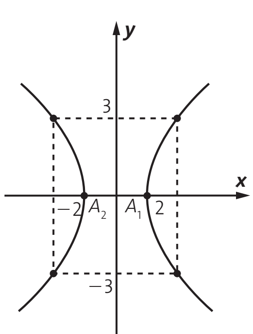
$c^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow F_1(2, 0)$ e $F_2(-2, 0)$

A excentricidade é:

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{1} = 2$

Esboço do gráfico:

Outros pontos da hipérbole: (2, 3), (2, −3), (−2, 3) e (−2, −3):

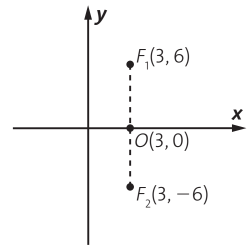


Note que, quanto menor for a excentricidade $e = \dfrac{c}{a}$, mais "fechada" será a curva.

28. São dados do problema:

$$\begin{cases} F_1(3, 6) \text{ e } F_2(3, -6) \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b^2 = 9 \end{cases}$$

Graficamente, temos:



Observe que $2c = 12$ (distância entre F_1 e F_2).

Como $c = 6$, vem:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 6^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 + 9 = 36 \Rightarrow a^2 = 27$

O centro O da hipérbole é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$. Logo, $O(3, 0)$.

Assim, a equação é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{27} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$$

29. $Q(4, -3)$ é o centro da hipérbole, $2a = 6$ e $2b = 4$. Então:

$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

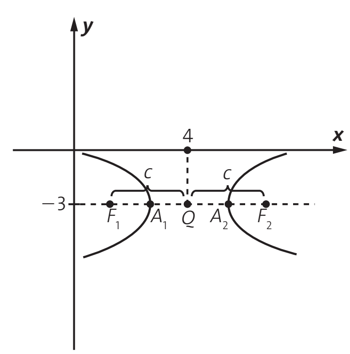
Como $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo x, então sua equação é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

Logo:

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

Esboço do gráfico:



Coordenadas dos focos:

$F_1(x_0 - c,\ y_0) \Rightarrow F_1\left(4 - \sqrt{13}, -3\right)$

$F_2(x_0 + c,\ y_0) \Rightarrow F_2\left(4 + \sqrt{13}, -3\right)$

30. $4x^2 - 25y^2 - 32x - 100y - 136 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 32x - 25y^2 - 100y = 136 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\left(x^2 - 8x\right) - 25\left(y^2 + 4y\right) = 136 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\left(x^2 - 8x + 16\right) - 25\left(y^2 + 4y + 4\right) = 136 + 64 - 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x-4)^2 - 25(y+2)^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{(x-4)^2}{25} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

Como $a^2 = 25$ e $b^2 = 4$, vem:

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 4 = 29 \Rightarrow c = \sqrt{29}$

Logo, a distância focal é $2c = 2\sqrt{29}$.

31. a) $9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Então:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Como o centro é (0, 0), vem:

$\ell_1: y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{4}x$

$\ell_2: y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{4}x$

b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

Então:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Como o centro é (0, 0), temos:

$\ell_1: y = \frac{b}{a}x = \frac{2}{5}x$

$\ell_2: y = -\frac{b}{a}x = -\frac{2}{5}x$

c) A hipérbole tem centro $O(3, 2)$, eixo $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ paralelo ao eixo x, $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$. Então, $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$.

Assíntota ℓ_1 passa por (3, 2) e (3 + 4, 2 + 3).

Assíntota ℓ_2 passa por (3, 2) e (3 − 4, 2 + 3).

Equação de ℓ_1:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$

Equação de ℓ_2:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 17 = 0$$

32. Pelos dados do problema, temos:

$\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2a$

Como $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ são os vértices da hipérbole, então $a = 3$.

Substituindo $a = 3$ em $b = 2a$, vem:

$b = 2 \cdot 3 = 6$

Como $\overline{A_1A_2}$ está contido no eixo x, então a equação é:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

33. a) $F_1(6, 0)$ e $F_2(-6, 0)$

Os pontos F_1 e F_2 estão no eixo x, o centro é (0, 0) e $c = 6$.

Como a hipérbole é equilátera, então $a = b$.

Assim:

$c^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 2a^2 = c^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 18$

Logo, a equação é $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$.

b) $O(2, 4)$, $A_1(2, 2)$ e $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo y.

Então:

$a = d(A_1, O) = \sqrt{(2-2)^2 + (2-4)^2} = 2$

A hipérbole é equilátera. Logo:

$b = a \Rightarrow b = 2$

Portanto, a equação é:

$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

34. $x^2 - y^2 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$

Como a hipérbole é equilátera, temos:

$a^2 = b^2 = 25 \Rightarrow a = b = 5$

Assim:

$c^2 = a^2 + a^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow c = 5\sqrt{2}$

O centro é (0, 0) e $\overline{F_1F_2}$ está contido no eixo x. Logo:

$$\begin{cases} F_1(c, 0) \text{ e } F_2(-c, 0) \Rightarrow F_1(5\sqrt{2}, 0) \text{ e } F_2(-5\sqrt{2}, 0) \\ A_1(a, 0) \text{ e } A_2(-a, 0) \Rightarrow A_1(5, 0) \text{ e } A_2(-5, 0) \end{cases}$$

35. Pelos dados do problema, temos:

$$\begin{cases} 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \\ b = a \Rightarrow b = 4 \\ F_1 \text{ e } F_2 \text{ estão no eixo } y \text{ com centro em } (0, 0) \end{cases}$$

Logo, a equação é:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1$

36. Se F_1 e F_2 estão no eixo x e o centro é (0, 0), então suas coordenadas são $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ e sua equação é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (a hipérbole é equilátera).

O ponto $P(13, -12)$ pertence à hipérbole, então:

$\frac{13^2}{a^2} - \frac{(-12)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{169}{a^2} - \frac{144}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 25$

Cálculo de c:

$a^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 2a^2 = 2 \cdot 25 = 50 \Rightarrow c = 5\sqrt{2}$

Então, $F_1(5\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(-5\sqrt{2}, 0)$.

Cálculo da área:

$$D = \begin{vmatrix} 13 & -12 & 1 \\ 5\sqrt{2} & 0 & 1 \\ -5\sqrt{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 60\sqrt{2} + 60\sqrt{2} = 120\sqrt{2}$$

$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}\left|120\sqrt{2}\right| = 60\sqrt{2}$

37. A menor largura do passeio é a distância entre os vértices da hipérbole, ou seja, é $2a$.

Comparando $\frac{(x-50)^2}{400} - \frac{(y-30)^2}{225}$ com $\frac{(x-x_0)}{a^2} - \frac{(y-y_0)}{b^2} = 1$, temos:

$a^2 = 400 \Rightarrow a = 20$ m

Então, a menor largura é $2a = 40$m.

Resposta: alternativa **e**.

Outros contextos

1. Em A, pois este ponto está mais afastado do Sol.

2. $2a = 147 \cdot 10^6 + 153 \cdot 10^6 \Rightarrow 2a = 300 \cdot 10^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 150 \cdot 10^6$ km

$e = \frac{1}{50}$

$\frac{c}{a} = \frac{1}{50} \Rightarrow \frac{c}{150 \cdot 10^6} = \frac{1}{50} \Rightarrow c = 3 \cdot 10^6$ km

Distância focal:

$F_1F_2 = 2c = 2\,(3 \cdot 10^6) = 6 \cdot 10^6; 6 \cdot 10^6$ km

Para refletir

Página 154

Com $c = \sqrt{21}$ e $a = 5$, então $c^2 = 21$ e $a^2 = 25$.

Assim:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 21 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

As extremidades do eixo menor são:

$B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b) \Rightarrow B_1(0, 2)$ e $B_2(0, -2)$

CAPÍTULO 7

1. a) $x^2 = -25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-25} \Rightarrow x = \pm\sqrt{25i^2} \Rightarrow x = \pm 5i$

b) $2x^2 = -98 \Rightarrow x^2 = -\dfrac{98}{2} \Rightarrow x^2 = -49 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-49} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{49i^2} \Rightarrow x = \pm 7i$

c) $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 = 4i^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2i}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x' = 1 - i$ e $x'' = 1 + i$

d) $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 100 - 160 =$

$= -60 = 60i^2 = 4 \cdot 15 \cdot i^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4 \cdot 15 \cdot i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 2i\sqrt{15}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x' = 5 - \sqrt{15}\,i$ e $x'' = 5 + \sqrt{15}\,i$

2. a) $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (-1 + 3i) = 0 + 5i = 5i$

b) $z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (-1 + 3i) = 1 + 2i + 1 - 3i = 2 - i$

c) $z_1z_2 = (1 + 2i)(-1 + 3i) = -1 + 3i - 2i + 6i^2 =$

$= -1 + 3i - 2i - 6 = -7 + i$

d) $(z_1 + z_2)z_3 = 5i(2 - 2i) = 10i - 10i^2 = 10i + 10 = 10 + 10i$

e) $(z_1 + z_2) + z_3 = 5i + 2 - 2i = 2 + 3i$

3. a) Cálculo de i^{20}: $\begin{array}{r|l} 20 & 4 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$

Logo: $i^{20} = 1^0 = 1$

Então:

$3z + 4i = z - 6i^{20} \Rightarrow 3z + 4i = z - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2z = -6 - 4i \Rightarrow z = -3 - 2i$

b) $3zi = z + i$

Como $z = a + bi$, vem:

$3(a + bi)i = z + i \Rightarrow 3ai + 3bi^2 = a + bi + i \Rightarrow$

$\Rightarrow 3ai - 3b = a + (b + 1)i \Rightarrow$

$\Rightarrow -3b + 3ai = a + (b + 1)i \Rightarrow \begin{cases} -3b = a \\ 3a = b + 1 \end{cases}$

Então:

$b + 1 = 3(-3b) \Rightarrow b + 1 = -9b \Rightarrow 10b = -1 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{10}$

Mas: $a = -3b = -3\left(-\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{3}{10}$

Logo, $z = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}i$.

4. a) i^9

$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

$i^9 = i^1 = i$

b) i^{14}

$\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$

$i^{14} = 1^2 = -1$

c) i^{60}

$\begin{array}{r|l} 60 & 4 \\ \hline 0 & 15 \end{array}$

$i^9 = i^0 = 1$

d) i^{99}

$\begin{array}{r|l} 99 & 4 \\ \hline 3 & 24 \end{array}$

$i^{99} = i^3 = -i$

e) i^{1035}

$\begin{array}{r|l} 1035 & 4 \\ \hline 23 & 258 \\ 35 & \\ 3 & \end{array}$

$i^{1\,035} = i^3 = -i$

f) $(-i)^{16} = (-1i)^{16} = (-1)^{16}\, i^{16} = i^{16}$

$\begin{array}{r|l} 16 & 4 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$

$i^{16} = i^0 = 1$

5. a) $z^2 = (2 - 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 \Rightarrow z^2 = 4 - 8i - 4 \Rightarrow z^2 = -8i$

b) $z^8 = (z^2)^4 \Rightarrow z^8 = (-8i)^4 \Rightarrow z^8 = 4\,096i^4 \Rightarrow z^8 = 4\,096$

c) $z^9 = z^8 \cdot z \Rightarrow z^9 = 4\,096 \cdot (2 - 2i) \Rightarrow z^9 = 8\,192 - 8\,192i$

6. $\begin{cases} 3z_1 - z_2 = 1 - i & \cdot(-2) \\ 5z_1 - 2z_2 = 1 + 3i \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -6z_1 + \cancel{2z_2} = -2 + 2i \\ 5z_1 - \cancel{2z_2} = 1 + 3i \end{cases} +$

$-z_1 = -1 + 5i \Rightarrow z_1 = 1 - 5i$

Mas:

$3z_1 - z_2 = 1 - i \Rightarrow 3(1 - 5i) - z_2 = 1 - i \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 - 15i - z_2 = 1 - i \Rightarrow -z_2 = -2 + 14i \Rightarrow z_2 = 2 - 14i$

7. a) $(x^2 - x) + 3i$ é imaginário puro. Então, $\mathrm{Re}(z) = 0$.

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

b) $x + (x^2 - 4)i$ é real. Então, $\mathrm{Im}(z) = 0$.

$(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

c) $x + xi$ seja o número real 0.

Para que o complexo $a + bi$ seja o número 0, é necessário que $a = b = 0$. Então, $x = 0$.

8. $z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} =$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \Rightarrow z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$

Assim, z_1 e z_2 são raízes da equação dada.

Vamos verificar se $z_1 = 1 + i$ é raiz de $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Substituindo z_1 na equação, temos:

$(1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2 = 1 + \cancel{2i} + i^2 - \cancel{2} - \cancel{2i} + \cancel{2} = 1 - 1 = 0$

Logo, z_1 é raiz da equação.

O mesmo faremos para z_2:

$(1 - i)^2 - 2(1 - i) + 2 = 1 - \cancel{2i} + i^2 - \cancel{2} + \cancel{2i} + \cancel{2} = 1 - 1 = 0$

Logo, z_2 é raiz da equação.

9. a) $z = 1 + 5i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 5i$

b) $z = 2i = 0 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 0 - 2i = -2i$

c) $z = 0 = 0 + 0i \Rightarrow \bar{z} = 0 - 0i = 0$

d) $z = -4 + 2i \Rightarrow \bar{z} = -4 - 2i$

e) $z = 5 = 5 + 0i \Rightarrow \bar{z} = 5 - 0i = 5$

f) $z = 3 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 3i$

g) $z = -1 - i \Rightarrow \bar{z} = -1 + i$

h) $z = \sqrt{2} - 2i \Rightarrow \bar{z} = \sqrt{2} + 2i$

10. a) $z = 3 - 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 4i$

$z\bar{z} = (3 - 4i)(3 + 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 + 16 = 25$

b) $z = 7i \Rightarrow \bar{z} = -7i$

$z\bar{z} = (7i)(-7i) = -49i^2 = 49$

c) $z = -1 - i \Rightarrow \bar{z} = -1 + i$

$z\bar{z} = (-1 - i)(-1 + i) = (-1)^2 - (i)^2 = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

11. $\bar{z} + 2zi - 1 = 2$

Sendo $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, vem:

$(a - bi) + 2(a + bi)i = 3 \Rightarrow a - bi + 2ai + 2bi^2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - bi + 2ai - 2b = 3 \Rightarrow (a - 2b) + (-b + 2a)i = 3 + 0i \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 3 \\ -b + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 3 & \cdot(-2) \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2a} + 4b = -6 \\ \cancel{2a} - b = 0 \end{cases} +$

$3b = -6 \Rightarrow b = -2$

Então:

$a - 2(-2) = 3 \Rightarrow a = -1$

Logo, $z = -1 - 2i$.

12. a) $z = 2 + 4i \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2 + 4i} = \dfrac{1}{2 + 4i} \cdot \dfrac{2 - 4i}{2 - 4i} =$

$= \dfrac{2 - 4i}{2^2 - (4i)^2} = \dfrac{2 - 4i}{4 + 16} = \dfrac{2 - 4i}{20} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{5}i$

b) $z = -1 - 2i \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{-1 - 2i} = \dfrac{1}{-1 - 2i} \cdot \dfrac{-1 + 2i}{-1 + 2i} =$

$= \dfrac{-1 + 2i}{(-1)^2 - (2i)^2} = \dfrac{-1 + 2i}{1 + 4} = \dfrac{-1 + 2i}{5} = \dfrac{-1}{5} + \dfrac{2}{5}i$

c) $z = \dfrac{-i}{0 + 1^2} = -i$

13. a) $\frac{2+3i}{1+2i} = \frac{2+3i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{2-4i+3i-6i^2}{1-(2i)^2} =$

$= \frac{2-i+6}{1+4} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$

b) $\frac{1}{3+2i} = \frac{1}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

c) $\frac{1+3i}{1-i} = \frac{1+3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+3i+3i^2}{1^2-i^2} =$

$= \frac{1+4i-3}{1+1} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$

d) $\frac{1+i}{i} = \frac{1+i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-i-i^2}{-i^2} = \frac{-i+1}{-(-1)} = \frac{1-i}{1} = 1-i$

Este exercício pode ser resolvido de outra forma:

$\frac{1+i}{i} = \frac{1+i}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i+i^2}{i^2} = \frac{i-1}{-1} = -i+1 = 1-i$

e) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i-i+i^2}{1-i^2} = \frac{\cancel{1}-2i-\cancel{1}}{1+1} =$

$= \frac{-2i}{2} = -i$

14. a) $z = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b) $z = \frac{(3-4i)(4-3i)}{3-2i} = \frac{12-9i-16i+12i^2}{3-2i} =$

$= \frac{\cancel{12}-25i-\cancel{12}}{3-2i} = \frac{-25i}{3-2i} = \frac{-25i}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i} =$

$= \frac{-75i-50i^2}{9+4} = \frac{50-75i}{13} = \frac{50}{13} - \frac{75i}{13}$

15. $z+\bar{z}=4;\ z\bar{z}=13$

Sendo $z=a+bi$ e $\bar{z}=a-bi$, temos:

$$\begin{cases} z+\bar{z}=4 \Rightarrow (a+bi)+(a-bi)=2a=4 \Rightarrow a=2 \\ z\bar{z}=13 \Rightarrow (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=13 \end{cases}$$

Então:

$2^2+b^2=13 \Rightarrow b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3$

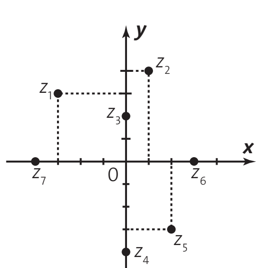
Os números complexos são $2+3i$ e $2-3i$.

16. a) $z = \frac{4}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-4i}{-i^2} = -4i$

b) $z = \frac{5-i}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{5-5i-i+i^2}{1-i+i-i^2} = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$

c) $z = \frac{5}{1-2i}\cdot\frac{(1+2i)}{(1+2i)} = \frac{5+10i}{1+2i-2i-4i^2} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i$

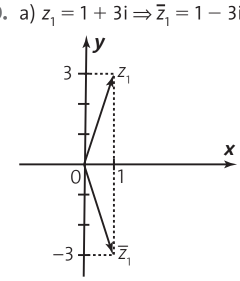
17. $z_1 = -3+3i \rightarrow P_1(-3, 3)$
$z_2 = 1+4i \rightarrow P_2(1, 4)$
$z_3 = 2i = 0+2i \rightarrow P_3(0, 2)$
$z_4 = -4i = 0-4i \rightarrow P_4(0, -4)$
$z_5 = 2-3i \rightarrow P_5(2, -3)$
$z_6 = 3 = 3+0i \rightarrow P_6(3, 0)$
$z_7 = -4 = -4+0i \rightarrow P_7(-4, 0)$



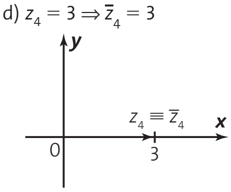
18. $A(4, 1)$; logo $z_A = 4 + i$
$B(1, -2)$; logo $z_B = 1 + 2i$
$C(2, 0)$; logo $z_C = 2$
$D(-4, 0)$; logo $z_D = -4$
$E(0, 3)$; logo $z_E = 3i$
$F(-2, 2)$; logo $z_F = -2 + 2i$

19. $z_1 = (3, 2) \rightarrow -z_1 = (-3, -2)$
$z_2 = (-2, 1) \rightarrow -z_2 = (2, -1)$
$z_3 = (0, -2) \rightarrow -z_3 = (0, 2)$

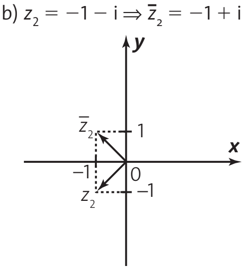
20. a) $z_1 = 1 + 3i \Rightarrow \bar{z}_1 = 1 - 3i$



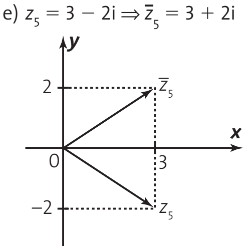
d) $z_4 = 3 \Rightarrow \bar{z}_4 = 3$



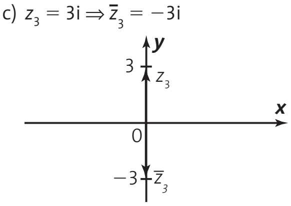
b) $z_2 = -1 - i \Rightarrow \bar{z}_2 = -1 + i$



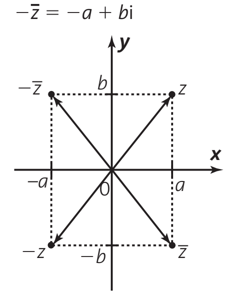
e) $z_5 = 3 - 2i \Rightarrow \bar{z}_5 = 3 + 2i$



c) $z_3 = 3i \Rightarrow \bar{z}_3 = -3i$



21. Se $z = a + bi$, então:
$-z = -a - bi$
$\bar{z} = a - bi$
$-\bar{z} = -a + bi$



22. a) $|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

b) $|z| = |-3-2i| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

c) $|z| = |-7| = \sqrt{(-7)^2+0^2} = 7$

d) $|z| = \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\,i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{5}$

e) $|z| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

f) $|z| = |3i| = \sqrt{0^2+3^2} = 3$

g) $|z| = \left|3+4\sqrt{2}\,i\right| = \sqrt{3^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{41}$

h) $|z| = \left|-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2$

23. $z_1 = 1 - 3i;\ z_2 = 2 + 5i$

$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

$|z_2| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

a) $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10} + \sqrt{29}$

b) $|z_1 z_2| = |(1-3i)(2+5i)| = |1-3i| \cdot |2+5i| =$

$= \sqrt{10} \cdot \sqrt{29} = \sqrt{290}$

c) $|z_1 + z_2| = |1-3i+2+5i| = |3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

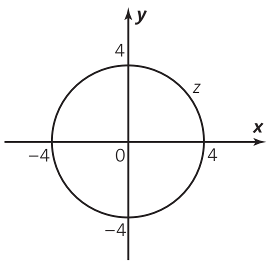
(Note que $|z_1| + |z_2| \neq |z_1 + z_2|$.)

d) $|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{29} = \sqrt{290}$

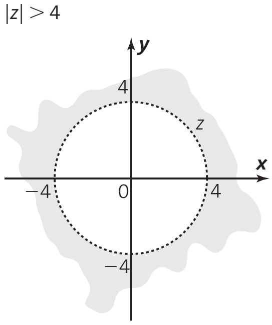
24. a) $|z| = 4$

Se $z = x + yi$, vem:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$ (equação de uma circunferência de centro (0, 0) e raio 4)



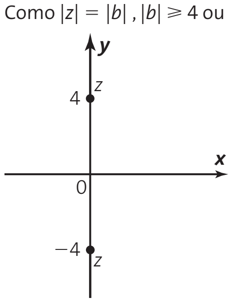
b) $|z| > 4$



c) z é imaginário puro e $|z| \geqslant 4$

Se z é imaginário puro, então $z = bi$, com $b \neq 0$.

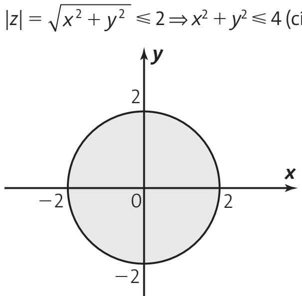
Como $|z| = |b|$, $|b| \geqslant 4$ ou $|b| \leqslant -4$.



d) $|z| \leqslant 2$

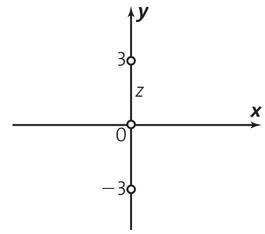
Se $z = x + yi$, vem:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leqslant 4$ (círculo de centro (0, 0) e raio 2)

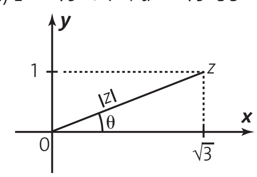


e) z é imaginário puro e $|z| < 3$. Então, $z = bi$, com $b \neq 0$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + b^2} = |b| < 3 \Rightarrow -3 < b < 3\ (b \neq 0)$



25. a) $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow a = \sqrt{3}$ e $b = 1$



$|z| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{2}$

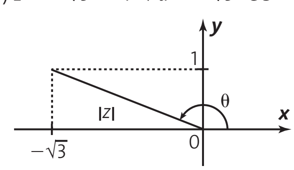
$0 \leqslant \theta < 2\pi$

Então, $\theta = \arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$.

Assim:

$z = |z|\,(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $z = -\sqrt{3} + i \Rightarrow a = -\sqrt{3}$ e $b = 1$



$|z| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{2}$

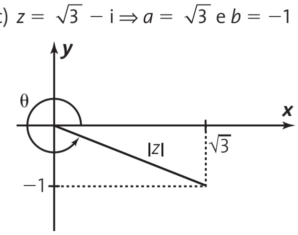
$0 \leqslant \theta < 2\pi$

Então, $\theta = \arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Assim:

$z = |z|\,(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$

c) $z = \sqrt{3} - i \Rightarrow a = \sqrt{3}$ e $b = -1$



$|z| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{a}{|z|} = -\dfrac{1}{2}$

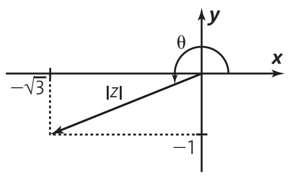
$0 \leqslant \theta < 2\pi$

Então, $\theta = \arg(z) = \dfrac{11\pi}{6}$.

Assim:

$z = |z|\,(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$

d) $z = -\sqrt{3} - i \Rightarrow a = -\sqrt{3}$ e $b = -1$



$|z| = \left|-\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqslant \theta < 2\pi$

Então, $\theta = \arg(z) = \dfrac{7\pi}{6}$.

Assim:

$z = |z|\,(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$

26. a) $z = 6i \Rightarrow a = 0, b = 6$

$|z| = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{0}{6} = 0$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{6}{6} = 1$

$0 \leqslant \theta < 2\pi$

Então, $\theta = \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$.

Assim, $z = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) $z = 2 + 2i \Rightarrow a = 2, b = 2$

$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leqslant \theta < 2\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

Assim, $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$.

c) $z = -8\sqrt{3} + 8i \Rightarrow a = -8\sqrt{3}, b = 8$

$|z| = \sqrt{\left(-8\sqrt{3}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{192 + 64} = \sqrt{256} = 16$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-8\sqrt{3}}{16} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$

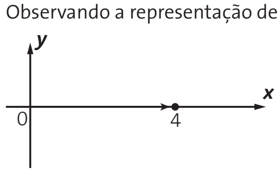
$0 \leqslant \theta < 2\pi$

Então, $\theta = \arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Assim, $z = 16\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

d) $z = 4 = 4 + 0i$

Observando a representação de z_1, temos:



Então:

$|z| = 4$

$\theta = 0$

Logo, $z = 4(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0)$.

e) $z = 2 - 2i \Rightarrow a = 2, b = -2$

$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

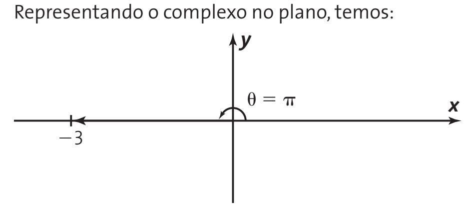
$\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$0 \leqslant \theta < 2\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{7\pi}{4}$.

Logo, $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

f) $z = -3 + 0i$

Representando o complexo no plano, temos:



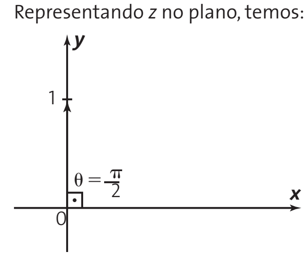
$|z| = 3$

$\theta = \pi$

Logo, $z = 3(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$.

g) $z = i = 0 + 1i$

Representando z no plano, temos:



$|z| = 1$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Logo, $z = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

27. a) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

b) $z = 5(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0) = 5(1 + i \cdot 0) = 5$

c) $z = 1\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1(0 - 1i) = -i$

d) $z = 4(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi) = 4(-1 + i \cdot 0) = -4$

e) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

Resolvido passo a passo

5. a) Dada a equação da circunferência $(x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 900$, o raio é $\sqrt{900} \Rightarrow r = 30$.

1ª parte: $r_1 = \dfrac{1}{3}(30) \Rightarrow r_1 = 10$

Área $= \pi r_1^2 = 3 \cdot (10)^2 = 300$

Custo $= 300 \cdot (5) = 1500$ (sinal intenso)

2ª parte: $r_2 = \dfrac{2}{3}(30) \Rightarrow r_2 = 20$

Área $= \pi r_2^2 = 3 \cdot (20)^2 = 1200$

Área da coroa $= 1200 - 300 = 900$

Custo $= 900 \cdot (3) = 2700$ (sinal intermediário)

3ª parte: $r_3 = \dfrac{3}{3}(30) \Rightarrow r_3 = 30$

Área $= \pi r_3^2 = 3 \cdot (30)^2 = 2700$

Área da coroa $= 2700 - 1200 = 1500$

Custo $= 1500 \cdot (1) = 1500$ (sinal fraco)

Custo total $= 1500 + 2700 + 1500 = 5700$

Resposta: R$ 5700,00.

28. $z = 6(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°)$
$w = 3(\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°)$

- $zw = 6 \cdot 3[\cos(150° + 45°) + i \cdot \text{sen } (150° + 45°)] =$
$= 18(\cos 195° + i \cdot \text{sen } 195°)$
- $w^2 = ww = 6 \cdot 6[\cos (150° + 150°) + i \cdot \text{sen } (150° + 150°)] =$
$= 36(\cos 300° + i \cdot \text{sen } 300°)$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{6}{3}[\cos (150° - 45°) + i \cdot \text{sen } (150° - 45°)] =$
$= 2(\cos 105° + i \cdot \text{sen } 105°)$
- $\dfrac{w}{z} = \dfrac{3}{6}[\cos (45° - 150°) + i \cdot \text{sen } (45° - 150°)] =$
$= \dfrac{1}{2}(\cos(-105°) + i \cdot \text{sen } (-105°)) =$
$= \dfrac{1}{2}(\cos 255° + i \cdot \text{sen } 255°)$

29. Pelo enunciado, temos:
$|z_1z_2| = 20\sqrt{3} \Rightarrow |z_1||z_2| = 20\sqrt{3} \Rightarrow |z_1| \cdot 10 = 20\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{3}$
$\arg (z_1z_2) = \arg (z_1) + \arg (z_2) \Rightarrow 170° = \arg (z_1) + 20° \Rightarrow$
$\Rightarrow \arg (z_1) = 150°$
Então, $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

30. $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$
$z^2 = 2^2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right) =$
$= -2 + 2\sqrt{3}\,i$
$z^3 = 2^3\left(\cos\dfrac{3\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{3}\right) = 8(\cos \pi + i \cdot \text{sen } \pi) = -8$
$z^9 = 2^9\left(\cos\dfrac{9\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\dfrac{9\pi}{3}\right) = 512(\cos 3\pi + i \cdot \text{sen } 3\pi) =$
$= 512(\cos \pi + i \cdot \text{sen } \pi) = -512$

31. a) $z = 1 - i \Rightarrow a = 1$ e $b = -1$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{sen }\theta = \dfrac{b}{|z|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$0 \leqslant \theta < 2\pi$
Então, $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$.
Logo, $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$.
Assim:
$z^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\dfrac{3 \cdot 7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{3 \cdot 7\pi}{4}\right) =$
$= 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{21\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{21\pi}{4}\right) =$
$= 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right) =$
$= 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2 - 2i$

b) $z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow a = 1$ e $b = \sqrt{3}$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$
$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\text{sen }\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$0 \leqslant \theta < 2\pi$
Então, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
Logo, $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$.
Assim:
$z^4 = 2^4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right) = 16\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$
$= -8 - 8\sqrt{3}\,i$

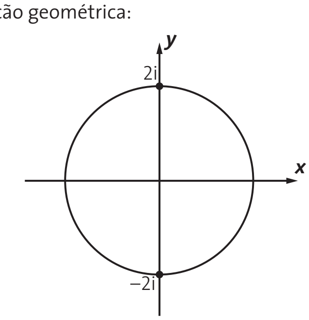
32. a) $z_1z_2 = 2 \cdot 3[\cos (30° + 150°) + i \cdot \text{sen } (30° + 150°)] =$
$= 6(\cos 180° + i \cdot \text{sen } 180°) = -6$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{3}[\cos(30° - 150°) + i \cdot \text{sen } (30° - 150°)] =$
$= \dfrac{2}{3}\left[\cos(-120°) + i \cdot \text{sen } (-120°)\right] =$
$= \dfrac{2}{3}(\cos 240° + i \cdot \text{sen } 240°) = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

c) $z_1^3 = 2^3[\cos (3 \cdot 30°) + i \cdot \text{sen } (3 \cdot 30°)] =$
$= 8(\cos 90° + i \cdot \text{sen } 90°) = 8i$

d) $z_2^{99} = 3^{99}[\cos (99 \cdot 150°) + i \cdot \text{sen } (99 \cdot 150°)] =$
$= 3^{99}(\cos 14\,850° + i \cdot \text{sen } 14\,850°) =$
$= 3^{99}(\cos 90° + i \cdot \text{sen } 90°) = 3^{99}i$

33. a) $z = -4$
O número complexo $z = -4$ na forma polar é
$z = 4(\cos \pi + i \cdot \text{sen } \pi)$.
Aplicando a segunda fórmula de De Moivre, temos:
$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$
Então:
$\sqrt[2]{4}\left(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi + 2k\pi}{2}\right)$
$k = 0$: $\dfrac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} = \dfrac{\pi + 0}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow w_0 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i) = 2i$
$k = 1$: $\dfrac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow w_1 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right) =$
$= 2(0 - i) = -2i$
Representação geométrica:



Banco de imagens/Arquivo da editora

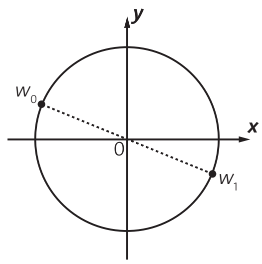
As duas raízes dividem a circunferência de raio 2 em dois arcos congruentes a π radianos.

b) $z = 1 - i \Rightarrow a = 1$ e $b = -1$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{sen }\theta = \dfrac{b}{|z|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$0 \leqslant \theta < 2\pi$
Então, $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$.
Assim, $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$.
Usando a segunda fórmula de De Moivre, temos:
$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) =$
$= \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right) =$
$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right)$

$$k = 0{:}\ \frac{\frac{7\pi}{4}+0}{2} = \frac{7\pi}{8} \Rightarrow w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$k = 1{:}\ \frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{2} = \frac{15\pi}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{15\pi}{8}\right)$$



As duas raízes dividem a circunferência de raio $\sqrt[4]{2}$ em dois arcos congruentes a π radianos.

34. a) $z = -1 = -1 + 0\mathrm{i} = 1(\cos\pi + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\pi)$

Usando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$

$$k = 0{:}\ \frac{\pi+0}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow w_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

$$k = 1{:}\ \frac{\pi+2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow w_1 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) =$$

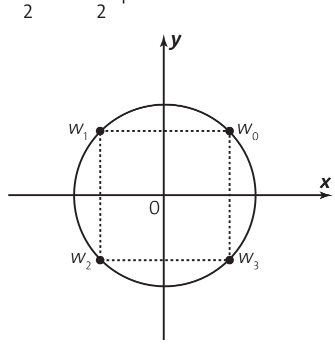
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

$$k = 2{:}\ \frac{\pi+4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow w_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

$$k = 3{:}\ \frac{\pi+6\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow w_3 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$



b) $z = \sqrt{3} + \mathrm{i} \Rightarrow a = \sqrt{3}$ e $b = 1$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2}$$

$0 \leqslant \theta < 2\pi$

Então, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Assim, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$.

Usando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) =$$

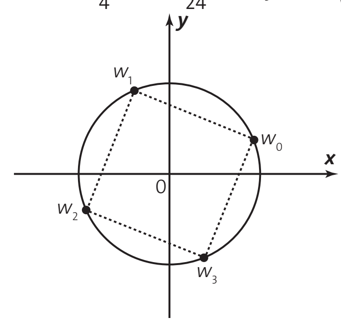
$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)$$

$$k = 0{:}\ \frac{\frac{\pi}{6}+0}{4} = \frac{\pi}{24} \Rightarrow w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\right)$$

$$k = 1{:}\ \frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{4} = \frac{13\pi}{24} \Rightarrow w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{13\pi}{24}\right)$$

$$k = 2{:}\ \frac{\frac{\pi}{6}+4\pi}{4} = \frac{25\pi}{24} \Rightarrow w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{25\pi}{24}\right)$$

$$k = 3{:}\ \frac{\frac{\pi}{6}+6\pi}{4} = \frac{37\pi}{24} \Rightarrow w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{37\pi}{24}\right)$$



As quatro raízes dividem a circunferência de raio $\sqrt[4]{2}$ em quatro partes congruentes a $\frac{\pi}{2}$ radianos.

35. $z = 125 = 125 + 0\mathrm{i} = 125(\cos 0 + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen} 0)$

Usando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{125}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{3}\right) =$$

$$= 5\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$k = 0{:}\ \frac{0+0}{3} = 0 \Rightarrow w_0 = 5\,(\cos 0 + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen} 0) =$$

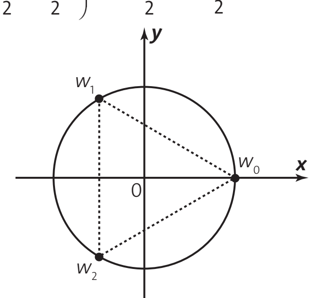
$$= 5(1 + \mathrm{i}\cdot 0) = 5$$

$$k = 1{:}\ \frac{0+2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow w_1 = 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 5\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

$$k = 2{:}\ \frac{0+4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow w_2 = 5\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$



As três raízes dividem a circunferência de raio 5 em três arcos congruentes a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

36. a) O complexo responsável pela rotação pedida é

$$1(\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

b) O complexo responsável pela rotação pedida é

$$1(\cos 180° + i \cdot \text{sen } 180°) = -1.$$

c) Uma rotação de α no sentido horário equivale a uma de $(360° - \alpha)$ no sentido anti-horário, portanto o complexo responsável pela rotação pedida é $1(\cos 270° + i \cdot \text{sen } 270°) = 0 - i = -i.$

Pensando no Enem

1. Considerando $e = 0{,}017$ e $a = 150$ e sendo $e = \frac{c}{a}$, temos:

$$0{,}017 = \frac{c}{150} \Rightarrow c \simeq 2{,}5$$

O segundo sol ficaria no outro foco da elipse, em (2,5; 0).
Resposta: alternativa **e**.

2. Considerando:

"Ou seja, se tivermos o número complexo com a parte real negativa, conforme aumenta o tempo, a resposta da função vai se estabilizando, convergindo para um valor. Se a parte real for positiva, conforme aumenta o tempo a resposta da função oscila e diverge."

Para $z_1 = -6 - 3i$ e $z_2 = 7 + 5i$, temos:
$\text{Re}(z_1) = -6 < 0$ e $\text{Re}(z_2) = 7 > 0$
Em **a**: $z_1 = -5 + 4i$ e $z_2 = -7 + i$, temos:
$\text{Re}(z_1) = -5 < 0$ e $\text{Re}(z_2) = -7 < 0$
Em **b**: $z_1 = 2i$; $z_2 = -8 + 9i$, temos:
$\text{Re}(z_1) = 0$ e $\text{Re}(z_2) = -8 < 0$
Em **d**: $z_1 = 5 - 4i$; $z_2 = 8 + 6i$, temos:
$\text{Re}(z_1) = 5 > 0$ e $\text{Re}(z_2) = 8 > 0$, mas
$\text{Im}(z_1) = -4 < 0$ e $\text{Im}(z_2) = 6 > 0$
e pode ter havido confusão entre parte real e parte imaginária.
Em **e**: $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 5$, temos:
$\text{Re}(z_1) = 4 > 0$ e $\text{Re}(z_2) = 5 > 0$
Resposta: alternativa **c**.

Vestibulares de Norte a Sul

1. $w_1 = (x - 7)i \Rightarrow |w_1| = \sqrt{(x-7)^2}$

$w_2 = -2 + (x + 7)i \Rightarrow |w_2| = \sqrt{(-2)^2 + (x+7)^2}$

$|w_1| = |w_2| \Rightarrow \sqrt{(x-7)^2} = \sqrt{4 + (x+7)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-7)^2 = 4 + (x+7)^2 \Rightarrow (x-7)^2 - (x+7)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - \cancel{7} + x + \cancel{7})(\cancel{x} - 7 - \cancel{x} - 7) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x) \cdot (-14) = 4 \Rightarrow -28x = 4 \Rightarrow x = -\frac{1}{7}$

Resposta: alternativa **c**.

2. De acordo com o enunciado, temos:

$$e^{\frac{\pi}{4} \cdot i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Logo, o módulo ($|z|$) pode ser calculado por

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Resposta: alternativa **c**.

3. matriz $= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & i^{2012} \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$\det = (\sqrt{3} \cdot 1) - (i \cdot i^{2012}) = \sqrt{3} - i^{2013}$$

Assim: $z = \sqrt{3} - i^{2013} = \sqrt{3} - i$
Feito isso, vamos analisar as afirmativas:
01. Falso. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 \cdot (21)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$
02. Falso. Como verificado acima.
03. Falso. Pois $a \neq 0$.
04. Falso. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ ou múltiplos inteiros.
05. Verdadeiro. Como verificado acima $\frac{11\pi}{6}$ tem como cosseno $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Resposta: 05.

4. A partir das informações contidas no enunciado, podemos extrair os seguintes dados:

$$\begin{cases} F = (3, 2) \\ \text{diretriz} \Rightarrow \text{reta: } x = 24 \\ P = 7 \\ V = \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \end{cases}$$

Sendo assim, a equação que representa a cônica é descrita por:

$$\Big(y - \underbrace{2}_{y_V}\Big)^2 = 2 \cdot \underbrace{7}_{P}\left[x - \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{x_V}\right] \Rightarrow (y - 2)^2 = 7(2x + 1)$$

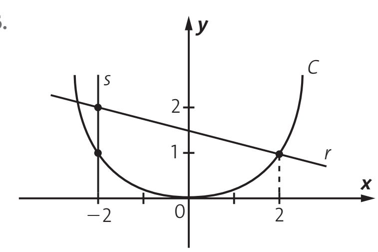
Resposta: alternativa **a**.

5. De acordo com o plano cartesiano, temos $A(2, 2)$ e $C(12, 11)$. Sendo assim:
$z_A = 2 + 2i$
$z_C = 12 + 11i$
Então, a relação $\frac{z_A}{z_C}$ é:

$$\frac{2 + 2i}{12 + 11i} = \frac{2 + 2i}{12 + 11i} \cdot \left(\frac{12 - 11i}{12 - 11i}\right) = \frac{24 - 22i + 24i + 22}{144 + 121} = \frac{2i + 46}{265}$$

Resposta: alternativa **d**.

6.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Do plano cartesiano, temos:
$s: x = -2$
$r: ax + b = y$
Para $x = 2$, $y = 1$. Então, $2a + b = 1$.
Para $x = -2$, $y = 2$. Então, $-2a + b = 2$.
Logo:

$$\begin{cases} \cancel{2a} + b = 1 \\ -\cancel{2a} + b = 2 \end{cases} +$$
$$2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

Mas:

$$2a + b = 1 \Rightarrow 2a + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow 2a = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow 2a = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

Portanto, $r: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.
Para C temos $y = ax^2 + bx + c$, sendo $c = 0$, pois a parábola corta o eixo das ordenadas (y) em $y = 0$. Portanto, $y = ax^2 + bx$. Para $y = 0$, temos:
$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow (ax + b)x = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$
Portanto, $b = 0$. Logo $C: y = ax^2$.
Para $x = 2$, temos $y = 1$. Então:

$$1 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Portanto, $C: y = \frac{1}{4}x^2$.

No eixo x, temos a área limitada entre $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

No eixo y, temos a área limitada entre a parábola e a reta r, ou seja, $\frac{1}{4}x^2 \leqslant y \leqslant -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

Resposta: alternativa **a**.

7. A partir do enunciado, temos:

- Para a equação I (referente a uma circunferência):

$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$

$\text{Centro}\left(\frac{-2}{-2}, \frac{8}{-2}\right) = (1, -4)$

$(\text{raio})^2 = (1)^2 + (-4)^2 - 8x + 8y + 16 = 9 \Rightarrow \text{raio} = 3$

- Para a equação II (referente a uma elipse):

$$4x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$$

- Centro $(1, -4)$

Sendo assim, ao analisarmos as alternativas, só nos resta a alternativa **c** para ser julgada como incorreta.

8. De acordo com o enunciado, temos que:

$z_1 + z_2 + z_3 = (2 - 7i) + (1 - 5i) + (-1 + 3i) = 2 + i$

Logo, $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 4 - 1 + 4i = 3 + 4i$

Sendo assim, o ponto de coordenadas (3, 4) é o ponto P.

Resposta: alternativa **e**.

9. De acordo com o enunciado, temos:

- Elipse 1:

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{400}{16}} + \frac{y^2}{\frac{400}{25}} = 1$$

Logo, $a = \sqrt{\frac{400}{16}} = \frac{20}{4} = 5$ e $b = \sqrt{\frac{400}{25}} = \frac{20}{5} = 4$.

Por conseguinte, a área delimitada por essa elipse é:

$A = a \cdot b \cdot \pi = 5 \cdot 4 \cdot \pi = 20\pi$

- Elipse 2:

$$16x^2 + 9y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{16}} + \frac{y^2}{\frac{144}{9}} = 1$$

Logo, $a = \sqrt{\frac{144}{16}} = \frac{12}{4} = 3$ e $b = \sqrt{\frac{144}{9}} = \frac{12}{3} = 4$.

Por conseguinte, a área delimitada por essa elipse é

$A = a \cdot b \cdot \pi = 3 \cdot 4 \cdot \pi = 12\pi$

Sendo assim, a área entre as duas elipses é de 8π u.a.

Resposta: alternativa **c**.

10. De acordo com o texto do enunciado, uma composição de rotação é oriunda da multiplicação dos números complexos. Sendo assim, a composição de rotação de z e w é $z \cdot w$.

$\therefore (-3 + 4i) \cdot (2 - 3i) = -6 + 9i + 8i - 12i^2 = -6 + 17i + 12 = 6 + 17i$

Resposta: alternativa **e**.

Para refletir

Página 179

$z = \bar{z} \Rightarrow a + bi = a - bi \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z}) \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(\bar{z}) \end{cases}$

Então, $a = a$ e $b = -b, \forall a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$.

Assim, $z = \bar{z}$ se z for real.

Página 187

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)$ $\qquad$ $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)$

Então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\,(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)}{|z_2|\,(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|\,(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)}{|z_2|\,(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i \cdot \text{sen}\,\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i \cdot \text{sen}\,\theta_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i \cdot \cos\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i^2 \cdot \text{sen}\,\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2)}{|z_2|\,(\cos^2\theta_2 - i^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|\,\overbrace{(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2)}^{\cos(\theta_1 - \theta_2)} + i\overbrace{(\text{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_2 \cdot \text{sen}\,\theta_1)}^{\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)}}{|z_2|\,(\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\,\theta_2)}$$

Como $\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\,\theta_2 = 1$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)]$$

Unidade 4

CAPÍTULO 8

1. a) $p(x) = (m-4)x^3 + (m+2)x^2 + x + 1$

Fazendo os coeficientes de x^3 e x^2 iguais a 0, temos:

$\begin{cases} m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \\ m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \end{cases}$

Analisando os resultados, temos:

- $m = 4$: $p(x) = 6x^2 + x + 1$
- $m = -2$: $p(x) = -6x^3 + x + 1$

Então:

- $m = 4$, o polinômio será do 2º grau;
- $m \neq 4$, o polinômio será do 3º grau.

b) $p(x) = (m^2 - 4)x^4 + (m-2)x + m$

Fazendo os coeficientes de x^4 e de x iguais a 0, temos:

$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2 \\ m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$

Analisando os resultados, vem:

$m = 2$: $p(x) = 2$, grau 0

$m = -2$: $p(x) = -4x - 2$, grau 1

Assim:

- $m \neq \pm 2$, o grau do polinômio será 4;
- $m = 2$, o grau do polinômio será 0;
- $m = -2$, o grau do polinômio será 1.

c) $p(x) = (m^2 - 1)x^4 + (m+1)x^3 + x^2 + 3$

Fazendo os coeficientes de x^4 e de x^3 iguais a 0, temos:

$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \\ m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$

Analisando os resultados, temos:

- $m \neq \pm 1$, o grau do polinômio será 4;
- $m = 1$, $p(x) = 2x^3 + x^2 + 3$, com grau 3;
- $m = -1$, $p(x) = x^2 + 3$, com grau 2.

2. Para que $p(x)$ tenha grau 2, devemos ter:

$\begin{cases} m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \\ m^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 4 \end{cases}$

Se:

- $m = 4$, então $p(x) = 8x + 4$. O grau de $p(x)$ é 1.
- $m = -4$, então $p(x) = -8x^3 + 4$. O grau de $p(x)$ é 3.

Logo, não há valor de m de forma que $p(x)$ tenha grau 2.

3. $p(x) = -3x^3 + x^2 + x - 2$, $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$p(-1) = -3(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) - 2 = 1$

$g(1) = 1^3 - 1^2 + \cancel{1} - \cancel{1} = 1 - 1 = 0$

Assim:

$p(-1) + g(1) = 1 + 0 = 1$

4. $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$

$p(2) = 4 \Rightarrow 2 \cdot 2^3 - k \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2k = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 - 4k + 6 - 2k = 4 \Rightarrow -6k = -18 \Rightarrow k = 3$

5. $p(x) = x^2 - mx + 6$
$p(2) = 0 \Rightarrow 4 - 2m + 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$

6. $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx + n$
$p(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + m \cdot 2 + n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 - 24 + 2m + n = 0 \Rightarrow 2m + n = 8$
$p(-1) = -6 \Rightarrow 2(-1)^3 - 6(-1)^2 + m(-1) + n = -6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 - 6 - m + n = -6 \Rightarrow -m + n = 2$
Resolvendo o sistema, encontramos:
$$\begin{cases} 2m + n = 8 \\ -m + n = 2 \end{cases} \; -$$
$$3m = 6 \Rightarrow m = 2$$
Então:
$2m + n = 8 \Rightarrow 2 \cdot 2 + n = 8 \Rightarrow n = 4$
Logo, $m = 2$ e $n = 4$.

7. $p(x) = 3x + 2,\ q(x) = (a + b)x^2 + (a + 3)x + (2 - b)$
$p(x) = q(x) \Rightarrow 3x + 2 = (a + b)x^2 + (a + 3)x + (2 - b) \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 3 = 3 \Rightarrow a = 0 \\ 2 - b = 2 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$
Verificando na primeira equação, temos:
$a + b = 0 + 0 = 0$
Logo, os valores são $a = 0$ e $b = 0$.

8. $p(x) = (2m - 1)x^3 - (5n - 2)x^2 + (3 - 2\ell)$ é nulo.
Logo, seus coeficientes devem ser nulos:
$2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$
$5n - 2 = 0 \Rightarrow n = \frac{2}{5}$
$3 - 2\ell = 0 \Rightarrow \ell = \frac{3}{2}$

9. $a(x + c)^3 + b(x + d) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow a(x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3) + bx + bd =$
$= x^3 + 6x^2 + 15x + 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow ax^3 + 3x^2ac + 3axc^2 + ac^3 + bx + bd =$
$= x^3 + 6x^2 + 15x + 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow ax^3 + 3x^2ac + x(3ac^2 + b) + (ac^3 + bd) =$
$$= x^3 + 6x^2 + 15x + 14 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3ac = 6 \\ 3ac^2 + b = 15 \\ ac^3 + bd = 14 \end{cases}$$
Então:
$3ac = 6 \Rightarrow 3 \cdot 1c = 6 \Rightarrow c = 2$
$3ac^2 + b = 15 \Rightarrow 3 \cdot 1 \cdot 4 + b = 15 \Rightarrow b = 3$
$ac^3 + bd = 14 \Rightarrow 1 \cdot 2^3 + 3d = 14 \Rightarrow 3d = 6 \Rightarrow d = 2$

10. $\dfrac{1}{x^3 - 1} = \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{bx + c}{x^2 + x + 1}$
$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$
$$\frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1} =$$
$$= \frac{a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \Rightarrow$$
$\Rightarrow a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2(a + b) + x(a - b + c) + (a - c) = 0x^2 + 0x + 1 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \Rightarrow a = -b \\ a - b + c = 0 \\ a - c = 1 \end{cases}$$
Então:
$$\begin{cases} -b - b + c = 0 \\ -b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b + \cancel{c} = 0 \\ -b - \cancel{c} = 1 \end{cases} \; +$$
$$-3b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$
Assim:
$a = \frac{1}{3}$
$-b - c = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} - c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

11. Se 3 é raiz de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$, então $p(3) = 0$.
Vamos verificar:
$p(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 = 27 - 27 + 6 - 6 = 0$
Logo, 3 é raiz de $p(x)$.

12. a) Se $x = -1$ é raiz de $p(x) = x^3 + 7x^2 - kx + 3$, então:
$p(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + 7(-1)^2 - k(-1) + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 + 7 + k + 3 = 0 \Rightarrow 9 + k = 0 \Rightarrow k = -9$

b) $x = 2$ é raiz de
$p(x) = 4x^4 - 8x^3 - (k + 5)x^2 + (3k - 2)x + 5 - k$, então:
$p(2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 - (k + 5)2^2 + (3k - 2)2 + 5 - k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 \cdot 16 - 8 \cdot 8 - (k + 5)4 + 6k - 4 + 5 - k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{64} - \cancel{64} - 4k - 20 + 6k + 1 - k = 0 \Rightarrow k - 19 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 19$

13. a) $p(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 4)x - 3$
Como -1 e 1 são raízes, então $p(-1) = 0$ e $p(1) = 0$.
$p(-1) = (-1)^3 + (a - 2)(-1)^2 + (b - 4)(-1) - 3 =$
$= -1 + a - 2 - b + 4 - 3 = 0 \Rightarrow a - b = 2$
$p(1) = 1^3 + (a - 2)1^2 + (b - 4)1 - 3 =$
$= 1 + a - 2 + b - 4 - 3 = 0 \Rightarrow a + b = 8$
Resolvendo o sistema:
$$\begin{cases} a - \cancel{b} = 2 \\ a + \cancel{b} = 8 \end{cases} \; +$$
$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$
Então:
$a + b = 8 \Rightarrow 5 + b = 8 \Rightarrow b = 3$

b) $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$
1 é raiz de $p(x)$. Então:
$p(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b - 18 + 1 = 0 \Rightarrow a + b = 16$
$p(2) = 25 \Rightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + (b - 18)2 + 1 = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 + 4a + 2b - 36 + 1 = 25 \Rightarrow 4a + 2b = 52 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a + b = 26$
Resolvendo o sistema:
$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 2a + b = 26 \end{cases} \; -$$
$$a = 10$$
Mas:
$a + b = 16 \Rightarrow 10 + b = 16 \Rightarrow b = 6$

14. Se $1 - i$ é raiz de $p(x) = x^2 - 2x + a$, então:
$p(1 - i) = 0 \Rightarrow (1 - i)^2 - 2(1 - i) + a = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - \cancel{2i} + i^2 - 2 + \cancel{2i} + a = 0 \Rightarrow \cancel{1} - \cancel{1} - 2 + a = 0 \Rightarrow a = 2$

15. $p(x) = x^2 - 4x + 3;\ q(x) = -2x + 4;\ r(x) = 2x^3 - 4x + 5$
a) $p(x) + r(x) = x^2 - 4x + 3 + 2x^3 - 4x + 5 =$
$= 2x^3 + x^2 - 8x + 8$

b) $q(x)-p(x)=-2x+4-(x^2-4x+3)=$
$=-2x+4-x^2+4x-3=-x^2+2x+1$

c) $-4\cdot r(x)=-4(2x^3-4x+5)=-8x^3+16x-20$

d) $p(x)q(x)=(x^2-4x+3)(-2x+4)=$
$=-2x^3+4x^2+8x^2-16x-6x+12=$
$=-2x^3+12x^2-22x+12$

e) $[q(x)]^2=(-2x+4)^2=4x^2-16x+16$

16. Dados $p(x)=ax^2-8x+b$ e $q(x)=3x^2-bx+a-c$.
Se $p(x)+q(x)$ é um polinômio nulo, então:

$ax^2-8x+b+3x^2-bx+a-c=$
$=x^2(a+3)+x(-8-b)+(b+a-c)=0x^2+0x+0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+3=0\Rightarrow a=-3\\-8-b=0\Rightarrow b=-8\\b+a-c=0\Rightarrow -8-3-c=0\Rightarrow c=-11\end{cases}$$

Resolvido passo a passo

5. a) Pelo exercício anterior temos que:
$x^4-3x^3+7x^2-x+4=(x^2-2x+1)(x^2-x+4)+\underbrace{8x}_{\text{resto}}$
Note que a divisão não é exata e $8x$ é o resto da divisão.
Subtraindo $8x$ em ambos os membros, temos:
$x^4-3x^3+7x^2-9x+4=(x^2-2x+1)(x^2-x+4)$
Essa é uma divisão exata, portanto o resto é zero.

b) O novo polinômio é $(x^2-2x+1)(x^2-x+4)$. Calculando as raízes do polinômio temos:

$x^2-2x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{0}}{2}=1$

$x^2-x+4=0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{-15}}{2}\rightarrow$ (raízes complexas)

Resposta: a raiz real é $x=1$.

17. a)
$$\begin{array}{rl|l}x^2+4x+3 & & x+1\\ \hline -x^2-x & & x+3\\ 3x+3 & & \\ -3x-3 & & \\ 0 & & \end{array}$$

$q(x)=x+3$; $r(x)=0$

b)
$$\begin{array}{r|l}x^3+x^2-x+1 & x+4\\ \hline -x^3-4x^2 & x^2-3x+11\\ -3x^2-x+1 & \\ 3x^2+12x & \\ 11x+1 & \\ -11x-44 & \\ -43 & \end{array}$$

$q(x)=x^2-3x+11$; $r(x)=-43$

c)
$$\begin{array}{r|l}x^4-10x^3+24x^2+10x-24 & x^2-6x+5\\ \hline -x^4+6x^3-5x^2 & x^2-4x-5\\ -4x^3+19x^2+10x-24 & \\ 4x^3-24x^2+20x & \\ -5x^2+30x-24 & \\ 5x^2-30x+25 & \\ 1 & \end{array}$$

$q(x)=x^2-4x-5$; $r(x)=1$

18.
$$\begin{array}{r|l}x^3-6x^2+3x+10 & x-2\\ \hline -x^3+2x^2 & x^2-4x-5\\ -4x^2+3x+10 & \\ +4x^2-8x & \\ -5x+10 & \\ +5x-10 & \\ 0 & \end{array}$$

Então:
$x^3-6x^2+3x+10=(x^2-4x-5)(x-2)=0\Rightarrow$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-4x-5=0\Rightarrow x=5 \text{ ou } x=-1\\ \text{ou}\\ x-2=0\Rightarrow x=2\end{cases}$$
$S=\{-1,2,5\}$

19. Como a divisão é exata, seu resto é nulo. Indicando o quociente por $q(x)$, temos $p(x)=h(x)\cdot q(x)+r(x)$. Como o grau de $p(x)$ é 3 e o grau de $h(x)$ é 2, então o grau de $q(x)$ é 1 $(q(x)=ax+b)$.

Assim:
$2x^3+mx^2+nx-1=(2x^2-x-1)(ax+b)\Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^3+mx^2+nx-1=2ax^3+2bx^2-ax^2-bx-ax-b\Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^3+mx^2+nx-1=2ax^3+x^2(2b-a)+x(-b-a)-b$
Pela igualdade de polinômios, temos:
$$\begin{cases}2a=2\Rightarrow a=1\\2b-a=m\\-b-a=n\\-b=-1\Rightarrow b=1\end{cases}$$
Substituindo a e b, temos:
$$\begin{cases}2\cdot1-1=m\Rightarrow m=1\\-1-1=n\Rightarrow n=-2\end{cases}$$

20. $\underbrace{x^3-4x^2+7x-3}_{p(x)}=h(x)\cdot\underbrace{(x-1)}_{q(x)}+(2x-1)$

Como o grau de $p(x)$ é 3 e o grau de $q(x)$ é 1, então o grau de $h(x)$ é $2\,(h(x)=ax^2+bx+c)$.
Assim:
$x^3-4x^2+7x-3=(ax^2+bx+c)(x-1)+2x-1\Rightarrow$
$\Rightarrow x^3-4x^2+7x-3=$
$=ax^3-ax^2+bx^2-bx+cx-c+2x-1\Rightarrow$
$\Rightarrow x^3-4x^2+7x-3=$
$=ax^3+x^2(-a+b)+x(-b+c+2)+(-c-1)$

Pela igualdade de polinômios, temos:
$$\begin{cases}a=1\\-a+b=-4\Rightarrow -1+b=-4\Rightarrow b=-3\\-b+c+2=7\Rightarrow 3+c=5\Rightarrow c=2\\-c-1=-3\Rightarrow c=2\end{cases}$$
Logo, $h(x)=ax^2+bx+c=x^2-3x+2$.

21. a)
$$\begin{array}{r|rr|r}-3 & 5 & -3 & 2\\ \hline & 5 & -18 & 56\end{array}$$

$q(x)=5x-18$; $r(x)=56$

b) Devemos, inicialmente, completar o polinômio $p(x)$:
$p(x)=x^4+0x^3+3x^2+x-5$ e $h(x)=x+2$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}-2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -5\\ \hline & 1 & -2 & 7 & -13 & 21\end{array}$$

$q(x)=x^3-2x^2+7x-13$; $r(x)=21$

c)

4	2	−7	2	1
	2	1	6	25

$q(x) = 2x^2 + x + 6; r(x) = 25$

d)

5	2	−10	8	−3
	2	0	8	37

$q(x) = 2x^2 + 8;\ r(x) = 37$

e) Como o divisor $h(x) = 2x - 1$ não tem coeficiente de x igual a 1, devemos dividir todos os coeficientes de $p(x)$ e $h(x)$ por 2.

Então, $\frac{p(x)}{2} = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$ e $\frac{h(x)}{2} = x - \frac{1}{2}$.

Assim:

$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	1	−1	0	$1 \rightarrow \frac{r(x)}{2}$

$\underbrace{1 \quad -1 \quad 0}_{q(x)}$

$q(x) = x^2 - x;\ \frac{r(x)}{2} = 1 \Rightarrow r(x) = 2$

22. a) Como $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + a$ é divisível por $x - 1$, então o quociente de $p(x)$ por $x - 1$ é exato.

Vamos aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini para encontrar o resto da divisão:

1	2	4	−5	a
	2	6	1	$\underbrace{1 + a}_{r(x)}$

$r(x) = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

b) Como $p(x) = 2x^3 + ax^2 + (2a + 1)x + (a + 3)$ é divisível por $x + 4$, então o resto desta divisão é 0.

Vamos obter este resto pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

−4	2	a	$2a + 1$	$a + 3$
	2	$-8 + a$	$32 - 4a + 2a + 1 =$	$8a - 132 + a + 3 =$
			$= -2a + 33$	$= \underbrace{9a - 129}_{r(x)}$

$r(x) = 0 \Rightarrow 9a - 129 = 0 \Rightarrow 9a = 129 \Rightarrow a = \frac{129}{9} = \frac{43}{3}$

23. a)

2	a	b	c	d
	1	3	−2	1

$\underbrace{1 \quad 3 \quad -2}_{\text{coeficientes do quociente } q(x)}$ $\quad \underbrace{1}_{\text{resto } r(x)}$

Logo, $h(x) = x - 2$, $q(x) = x^2 + 3x - 2$ e $r(x) = 1$.

Observando o dispositivo, temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2 \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow b = 1 \\ 2 \cdot 3 + c = -2 \Rightarrow c = -8 \\ 2(-2) + d = 1 \Rightarrow d = 5 \end{cases}$$

Portanto:

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + x^2 - 8x + 5$

b)

3	m	n	p	q	r
	2	−1	1	−2	1

$\underbrace{2 \quad -1 \quad 1 \quad -2}_{\text{coeficientes do quociente } q(x)}$ $\quad \underbrace{1}_{\text{resto } r(x)}$

Logo, $h(x) = x - 3$, $q(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$ e $r(x) = 1$.

Observando o dispositivo, temos:

$$\begin{cases} m = 2 \\ 3 \cdot 2 + n = -1 \Rightarrow n = -7 \\ 3(-1) + p = 1 \Rightarrow p = 4 \\ 3 \cdot 1 + q = -2 \Rightarrow q = -5 \\ 3(-2) + r = 1 \Rightarrow r = 7 \end{cases}$$

Portanto:

$p(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r =$
$= 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

24. $p(x) = x^3 + ax + b$ é divisível por $(x - 1)^2$.

Se $x^3 + ax + b = x^3 + 0x^2 + ax + b$ é divisível por $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, então o resto da divisão de $p(x)$ por $g(x)$ é 0. Logo, vamos obter este resto:

$$\begin{array}{llll|l} x^3 & + 0x^2 & + ax & + b & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{5-5} -x & + 2x^2 & - x & & x + 2 \\ \cline{1-3} & 2x^2 & + x(a - 1) & + b & \\ & -2x^2 & + 4x & - 2 & \\ \cline{2-4} & & \underbrace{x(a - 1 + 4) + (b - 2)}_{\text{resto } r(x)} & & \end{array}$$

$r(x) = 0 \Rightarrow (a + 3)x + (b - 2) = 0x + 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \\ b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$

25. Podemos efetuar a divisão de $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + ix - 3i$ por $x + i$ usando o algoritmo de Briot-Ruffini:

−i	3	−2	i	−3i
	3	−3i − 2	−3 + 3i	3

$\underbrace{3 \quad -3i - 2 \quad -3 + 3i}_{q(x)}$ $\quad \underbrace{3}_{r(x)}$

Logo, o quociente é $q(x) = 3x^2 + (-2 - 3i)x + (-3 + 3i)$ e o resto é $r(x) = 3$.

26. a) O resto da divisão de $p(x)$ por $h(x) = x - 1$ é $p(1)$. Logo:

$r(x) = p(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 - 1 = -2$

b) O resto $r(x)$ é $p(-3)$. Então:

$r(x) = p(-3) = (-3)^4 + 2(-3)^2 - (-3) - 5 =$
$= 81 + 2 \cdot 9 + 3 - 5 = 81 + 18 + 3 - 5 = 97$

27. Se $p(x)$ é divisível por $x + 3$, então $p(-3) = 0$.

Vamos verificar:

$p(-3) = (-3)^2 - 3(-3) + 2 = 9 + 9 + 2 = 20 \neq 0$

Então $p(x) = x^2 - 3x + 2$ não é divisível por $x + 3$.

28. $p(2) = 0 \Rightarrow 2^4 + 2^2 + 2b + c = 0 \Rightarrow 2b + c = -20$

$p(-2) = 4 \Rightarrow (-2)^4 + (-2)^2 + (-2)b + c = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 + \cancel{4} - 2b + c = \cancel{4} \Rightarrow -2b + c = -16$

Então:

$$\begin{cases} \cancel{2b} + c = -20 \\ -\cancel{2b} + c = -16 \end{cases} +$$
$$2c = -36 \Rightarrow c = -18$$

Assim:

$2b + c = -20 \Rightarrow 2b - 18 = -20 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$

29. a) Se -2 é raiz de $p(x)$, temos:

$p(-2) = 0 \Rightarrow 3(-2)^3 - 2(-2)^2 - 12(-2) + k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\cancel{24} - 8 + \cancel{24} + k = 0 \Rightarrow k = 8$

b) Se $k = 1$, então $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + 1$

O resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 3)$ é $p(3)$.

Logo:

$p(3) = 3 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 1 = 81 - 18 - 36 + 1 = 28$

Portanto, o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 3)$ é 28.

c) Se $k = 1 - i$, então $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + (1 - i)$.
Vamos verificar se $x = 2i$ é raiz de $p(x)$:
$p(2i) = 3(2i)^3 - 2(2i)^2 - 12(2i) + 1 - i =$
$= 3(-8i) - 2(-4) - 24i + 1 - i = -24i + 8 - 24i + 1 - i =$
$= 9 - 49i \neq 0$
Logo, 2i não é raiz.

30. Se $p(x)$ é do 3º grau, então $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Mas:
$p(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b + c + d = 0$
$p(-1) = 6 \Rightarrow a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -a + b - c + d = 6$
$p(2) = 6 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 6$
$p(-2) = 6 \Rightarrow a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 6$

Então:
$$\begin{cases} \cancel{a} + b + \cancel{c} + d = 0 \\ -\cancel{a} + b - \cancel{c} + d = 6 \end{cases} +$$
$$2b + 2d = 6 \Rightarrow b + d = 3$$

$$\begin{cases} \cancel{8a} + 4b + \cancel{2c} + d = 6 \\ -\cancel{8a} + 4b - \cancel{2c} + d = 6 \end{cases} +$$
$$8b + 2d = 12 \Rightarrow 4b + d = 6$$

Assim:
$$\begin{cases} b + d = 3 \cdot (-1) \\ 4b + d = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b - \cancel{d} = -3 \\ 4b + \cancel{d} = 6 \end{cases} +$$
$$3b = 3 \Rightarrow b = 1$$
$b + d = 3 \Rightarrow 1 + d = 3 \Rightarrow d = 2$

Mas:
- $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + 1 + c + 2 = 0 \Rightarrow a + c = -3$
- $8a + 4b + 2c + d = 6 \Rightarrow 8a + 4 \cdot 1 + 2c + 2 = 6 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 8a + 2c = 0 \Rightarrow 4a + c = 0$

Portanto:
$$\begin{cases} a + c = -3 \cdot (-1) \\ 4a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - \cancel{c} = 3 + \\ 4a + \cancel{c} = 0 \end{cases}$$
$$3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$a + c = -3 \Rightarrow 1 + c = -3 \Rightarrow c = -4$
Logo, $p(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$.

31. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

−4	1	−1	−18	8
	1	−5	2	0
	$q(x)$			

Logo, $p(-4) = 0$ e $p(x) = (x + 4)(x^2 - 5x + 2)$. Portanto, o quociente de $p(x)$ por $x + 4$ é $q(x) = x^2 - 5x + 2$.

32. $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$
$p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2 = -16 + 4 + 10 + 2 = 0$
$p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 5(-1) + 2 = -2 + 1 + 5 + 2 = 6$
$p(0) = 2 \cdot 0^3 + 0^2 - 5 \cdot 0 + 2 = 0 + 0 - 0 + 2 = 2$
$p(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 2 + 1 - 5 + 2 = 0$
$p(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 16 + 4 - 10 + 2 = 12$
Como $p(-2) = 0$ e $p(1) = 0$, então $p(x)$ é divisível por $(x + 2)$ e por $(x - 1)$. Vamos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir por $x + 2$ e, depois, por $x - 1$:

−2	2	1	−5	2
	2	−3	1	0
	$q(x)$			

1	2	−3	1
	2	−1	0
	$q'(x)$		

Então, $q'(x) = 2x - 1$.
Assim os fatores de $p(x)$ são $(x + 2)$, $(x - 1)$ e $(2x - 1)$.
(Existem mais fatores.)

33. Devemos dividir todos os coeficientes de $p(x)$ e $q(x)$ por 3 e aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini:
$$\frac{p(x)}{3} = 2x^3 - \frac{2x^2}{3} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \text{ e } \frac{q(x)}{3} = x - 2$$

2	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	2	$\frac{10}{3}$	7	$\frac{43}{3}$
	$q'(x)$			$\frac{r(x)}{3}$

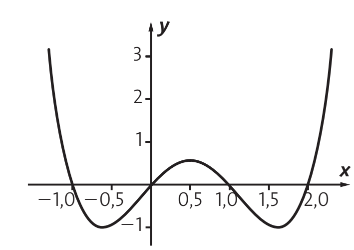
Logo, o quociente é $q'(x) = 2x^2 + \dfrac{10x}{3} + 7$ e o resto $r(x)$ é tal que $\dfrac{r(x)}{3} = \dfrac{43}{3} \Rightarrow r(x) = 43$.

34. Se $p(x)$ é divisível por $(x - 2)(x + 1)$, então $p(x)$ é divisível por $(x - 2)$ e por $(x + 1)$.
Se $p(x)$ é divisível por $(x - 2)$, então:
$p(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^4 - 2^3 + m \cdot 2^2 - n \cdot 2 + 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 32 - 8 + 4m - 2n + 2 = 0 \Rightarrow 4m - 2n = -26$
Se $p(x)$ é divisível por $(x + 1)$, então:
$p(-1) = 0 \Rightarrow 2(-1)^4 - (-1)^3 + m(-1)^2 - n(-1) + 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 + 1 + m + n + 2 = 0 \Rightarrow m + n = -5$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 4m - 2n = -26 \\ m + n = -5 \end{cases}$, encontramos $m = -6$ e $n = 1$.

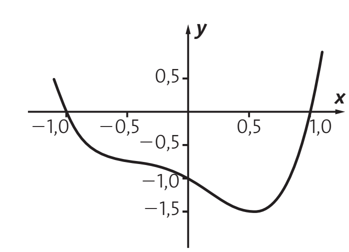
Matemática e tecnologia

2. a) $S = \{-1, 0, 1, 2\}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

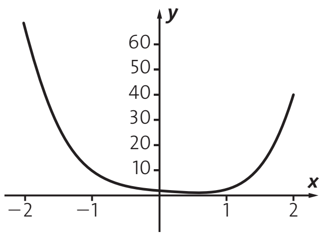
b) $S = \{-1, 1\}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

c) $S = \{\varnothing\}$

Banco de imagens/Arquivo da editora



Para refletir

Página 213

Se $(x - c)$ é fator de $p(x)$, então $p(x) = (x - c)q(x)$, com $r(x) = 0$. Sendo $x = c$, vem:

$p(c) = (c - c)q(c) = 0$

Logo, c é raiz de $p(x) = 0$.

CAPÍTULO 9

1. Se 2 é raiz de $x^3 + 2x^2 - 5x + c = 0$, então:

$2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = -6$

Podemos escrever:

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)q(x) = 0 \Rightarrow q(x) = 0$

Determinando $q(x)$:

2	1	2	−5	−6
	1	4	3	0

$q(x) = x^2 + 4x + 3$

Determinando as raízes de $x^2 + 4x + 3 = 0$:

$x = \dfrac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = -3 \text{ e } x'' = -1$

Logo, o conjunto solução da equação é $\{-3, -1, 2\}$.

2. a) Se −1 e 1 são raízes de $p(x) = 0$, então:

$p(x) = (x + 1)(x - 1)q(x) = 0$

Dividindo $p(x)$ por $(x + 1)$ e, em seguida, dividindo o quociente dessa divisão por $(x - 1)$, vem:

−1	1	−2	1	2	−2
1	1	−3	4	−2	0
	1	−2	2	0	

$q(x) = x^2 - 2x + 2$

Determinando as raízes de $q(x) = 0$:

$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x' = 1 + i \text{ e } x'' = 1 - i$

Logo, $S = \{-1, 1, 1 + i, 1 - i\}$.

b) Se −2 é raiz de $p(x)$, então:

$p(x) = (x + 2)q(x) = 0$

Dividindo $p(x)$ por $(x + 2)$, encontramos $q(x)$:

−2	1	−7	0	36
	1	−9	18	0

$q(x) = x^2 - 9x + 18$

Determinando as raízes de $q(x) = 0$:

$x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{9 \pm 3}{2} \Rightarrow x' = 6 \text{ e } x'' = 3$

Logo, $S = \{-2, 3, 6\}$.

3. a) Se −1 e 2 são raízes de $p(x) = x^4 - 8x^3 - 25x^2 + 44x + 60$, então $p(x) = (x + 1)(x - 2)q(x)$. Dividindo $p(x)$ por $(x + 1)$ e, em seguida, dividindo o quociente dessa divisão por $(x - 2)$, vem:

−1	1	−8	−25	44	60
2	1	−9	−16	60	0
	1	−7	−30	0	

$q(x) = x^2 - 7x - 30$

Determinando as raízes de $q(x) = 0$:

$x^2 - 7x - 30 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm 13}{2} \Rightarrow x' = 10 \text{ e } x'' = -3$

Logo, $S = \{-1, 2, 10, -3\}$.

b) Se i é uma raiz de $p(x) = x^3 - ix^2 + 4x - 4i$, então $p(x) = (x - i)q(x)$.

Dividindo $p(x)$ por $x - i$, encontramos $q(x)$:

i	1	−i	4	−4i
	1	0	4	0

$q(x) = x^2 + 4$

Resolvendo a equação $q(x) = 0$:

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$

Logo, $S = \{i, 2i, -2i\}$.

4. Se 2 é raiz de $p(x) = 2x^3 - mx^2 - 2x + 4$, então:

$p(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^3 - m \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 - 4m - \cancel{4} + \cancel{4} = 0 \Rightarrow 4m = 16 \Rightarrow m = 4$

Assim, $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.

Podemos escrever que $p(x) = (x - 2)q(x)$. Então, dividindo $p(x)$ por $(x - 2)$ encontramos $q(x)$:

2	2	−4	−2	4
	2	0	−2	0

$q(x) = 2x^2 - 2$

Determinando as raízes de $q(x) = 0$:

$2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Logo, $m = 4$ e $S = \{2, 1, -1\}$.

5. $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Se 2, 4 e −3 são raízes de $p(x)$, então:

$p(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow$

$4a + 2b + c = -8$

$p(4) = 0 \Rightarrow 4^3 + a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow$

$16a + 4b + c = -64$

$p(-3) = 0 \Rightarrow (-3)^3 + a(-3)^2 + b(-3) + c = 0 \Rightarrow$

$9a - 3b + c = 27$

Resolvemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -8 & \text{(I)} \\ 16a + 4b + c = -64 & \text{(II)} \\ 9a - 3b + c = 27 & \text{(III)} \end{cases}$$

Subtraindo (I) de (II), temos:

$12a + 2b = -56 \Rightarrow 6a + b = -28$

Subtraindo (I) de (III), temos:

$5a - 5b = 35 \Rightarrow a - b = 7$

Portanto:

$$\begin{cases} 6a + b = -28 \\ a - b = 7 \end{cases}$$

$7a = -21 \Rightarrow a = -3$

Mas:

$b = -3 - 7 \Rightarrow b = -10$

Então:

$4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-10) + c = -8 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 24$

Logo, $a = -3$, $b = -10$ e $c = 24$.

6. Desenvolvendo o determinante f, temos:

$$f=\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+1 & -2 & x-1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & -2 & x-1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=x(-2+x^2-x+2x-x-1)=x(x^2-3)$$

a) As raízes de f são tais que:
$x(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=\pm\sqrt{3}$

b) Temos $f=x^3-3x$. Dividindo f por x^2-1, encontramos:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^3+\ \ x & x \\ \cline{1-1} -2x & \end{array}$$

Logo, o quociente é $q(x)=x$ e o resto é $r(x)=-2x$.

7. Se $(x-3)^3(x+4)^2(x-1)^5=0$, então:

- 3 tem multiplicidade 3;
- -4 tem multiplicidade 2;
- 1 tem multiplicidade 5.

8. Vamos eliminar a raiz -1 na equação $x^3+x^2-3x-3=0$ sucessivas vezes até que isto não seja mais possível:

-1	1	1	-3	-3
-1	1	0	-3	0
	1	-1	$-2\neq 0$	

Logo, -1 é raiz simples de $x^3+x^2-3x-3=0$, ou seja, de multiplicidade 1.

9. Sendo -1 raiz tripla da equação $x^5+5x^4+6x^3-2x^2-7x-3=0$, então $p(x)=(x+1)^3q(x)$.

Vamos dividir $p(x)$ por $(x+1)$ três vezes sucessivas e encontrar $q(x)$:

-1	1	5	6	-2	-7	-3
-1	1	4	2	-4	-3	0
-1	1	3	-1	-3	0	
	1	2	-3	0		

$q(x)=x^2+2x-3$

Resolvendo a equação $q(x)=0$, temos:

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow x'=-3$ e $x''=1$

Logo, $S=\{-1, 1, -3\}$.

10. Se 3 é raiz dupla de $p(x)=x^4-7x^3+13x^2+3x-18$, então $p(x)=(x-3)^2q(x)$.
Vamos dividir $p(x)$ por $(x-3)$ duas vezes seguidas e obter $q(x)$:

3	1	-7	13	3	-18
3	1	-4	1	6	0
	1	-1	-2	0	

$q(x)=x^2-x-2$
Resolvendo $q(x)=0$, temos:

$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm 3}{2} \Rightarrow x'=2$ e $x''=-1$

11. $(x-3)^2(x-5)=(x^2-6x+9)(x-5)=$
$=x^3-5x^2-6x^2+30x+9x-45=x^3-11x^2+39x-45$
Logo, temos a equação $x^3-11x^2+39x-45=0$.

12. $p(x)=(x-2)^2(x-1)^3(x^2+3x-4)$
Mas x^2+3x-4 pode ser fatorado. Então:
$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x'=1$ e $x''=-4$
Assim, $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.

Logo:
$p(x)=(x-2)^3(x-1)^3(x-1)(x+4)=(x-2)^3(x-1)^4(x+4)$
Portanto, a multiplicidade da raiz 1 é 4.

13. Se 1 é raiz dupla de $p(x)=x^3+ax^2-2x+b$, então $p(x)=(x-1)^2q(x)$.
Vamos dividir $p(x)$ por $(x-1)$ duas vezes e obter seus restos, que serão nulos:

1	1	a	-2	b
1	1	$1+a$	$-1+a$	$-1+a+b$
	1	$2+a$	$1+2a$	

$$\begin{cases} -1+a+b=0 \\ 1+2a=0 \end{cases}$$

Assim, $a=-\dfrac{1}{2}$ e $b=\dfrac{3}{2}$. Logo:

$a+b=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=1$

14. Se 2 é raiz dupla de $p(x)=ax^3+0x^2+bx+16$, então $p(x)=(x-2)^2q(x)$.

Vamos dividir $p(x)$ por $(x-2)$ duas vezes e obter os restos destas divisões, que serão nulos:

2	a	0	b	16
2	a	$2a$	$4a+b$	$\underbrace{8a+2b+16}_{1º\ resto}$
	a	$4a$	$\underbrace{12a+b}_{2º\ resto}$	

$$\begin{cases} 8a+2b+16=0 \\ 12a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+b=-8 \\ 12a+b=0 \end{cases}$$

Logo, $a=1$ e $b=-12$.

15. $3x^3+2x^2-x-3=0$, com raízes x_1, x_2 e x_3. Pela equação, temos $a_n=3$, $a_{n-1}=2$, $a_{n-2}=-1$ e $a_0=-3$.
Assim:

- $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=-\dfrac{2}{3}$
- $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}=-\dfrac{1}{3}$
- $x_1x_2x_3=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}=(-1)^3\cdot\dfrac{-3}{3}=1$

16. $p(x)=x^3-2x^2+ax+b$ com raízes $x_1=1$ e $x_2=-3$
Aplicando as relações de Girard, vem:

$x_1+x_2+x_3=1-3+x_3=-\dfrac{-2}{1} \Rightarrow -2+x_3=2 \Rightarrow x_3=4$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3+4-12=\dfrac{a}{1} \Rightarrow a=-1$

$x_1x_2x_3=1(-3)4=-\dfrac{b}{1} \Rightarrow -b=-12 \Rightarrow b=12$

Então, a terceira raiz é 4 e a equação é
$x^3-2x^2-11x+12=0$.

17. $p(x)=x^3-15x^2+71x-105=0$, com raízes em $PA(x_1=a-r, x_2=a, x_3=a+r)$.

Usando as relações de Girard, temos:
$x_1+x_2+x_3=a-r+a+a+r=3a=15 \Rightarrow a=5$
Como $x_2=5$ é uma das raízes, então $p(x)=(x-5)q(x)=0$:

5	1	-15	71	-105
	1	-10	21	0

$q(x)=x^2-10x+21$
Resolvendo a equação $q(x)=0$, encontramos $x_1=3$ e $x_2=7$.
Logo, as raízes são 3, 5 e 7.

18. Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes de $x^3-3x^2-6x+8=0$ e $x_1+x_2=5$.
Considerando as relações de Girard, temos:
$x_1+x_2+x_3=3\Rightarrow 5+x_3=3\Rightarrow x_3=-2$
Assim, $x^3-3x^2-6x+8=(x+2)q(x)$.

-2	1	-3	-6	8
	1	-5	4	0

$q(x)=x^2-5x+4$
Resolvendo a equação $q(x)=0$, encontramos $x_1=1$ e $x_2=4$.
Logo, $S=\{1,-2,4\}$.

19. Se as raízes x_1, x_2 e x_3 da equação $x^3-3x^2-6x+k=0$ estão em *PA*, então $x_1=a-r$, $x_2=a$ e $x_3=a+r$.
Aplicando as relações de Girard, temos:
$x_1+x_2+x_3=a-\cancel{r}+a+a+\cancel{r}=-\frac{-3}{1}=3\Rightarrow$
$\Rightarrow 3a=3\Rightarrow a=1$
Se $x_2=a=1$ é uma raiz, então substituímos $x=1$ na equação e temos:
$1^3-3\cdot1^2-6\cdot1+k=0\Rightarrow 1-3-6+k=0\Rightarrow k=8$

20. $x^3+0x^2-3x-2=0$, com x_1 raiz dupla
Aplicando as relações de Girard, temos:
$x_1+x_2+x_3=x_1+x_1+x_3=2x_1+x_3=0$
$x_1x_2x_3=x_1x_1x_3=x_1^2x_3=2$
Então:
$\begin{cases}2x_1+x_3=0\Rightarrow x_3=-2x_1\\ x_1^2x_3=2\end{cases}$
$x_1^2(-2x_1)=2\Rightarrow -2x_1^3=2\Rightarrow x_1=-1\Rightarrow x_2=-1$
$x_3=-2x_1=2$
Logo, as raízes são -1 (multiplicidade 2) e 2 (raiz simples).

21. As raízes x_1, x_2 e x_3 da equação $3x^3-16x^2+23x-6=0$ são tais que $x_1x_2=1$.
Usando uma das fórmulas de Girard, temos:
$\underbrace{x_1x_2}_{1}x_3=-\frac{-6}{3}=2\Rightarrow 1x_3=2\Rightarrow x_3=2$
Como $x_3=2$ é raiz da equação, então
$3x^3-16x^2+23x-6=(x-2)q(x)$. Assim:

2	3	-16	23	-6
	3	-10	3	0

$q(x)=3x^2-10x+3$
Resolvendo a equação $q(x)=0$, obtemos $x_1=3$ e $x_2=\frac{1}{3}$.
Logo, as raízes são $\frac{1}{3}$, 2 e 3.

22. $p(x)=2x^3-x^2+mx+n$ com raízes $x_1=-2$ e $x_2=3$
Pelas relações de Girard, temos:
$x_1+x_2+x_3=-2+3+x_3=-\frac{-1}{2}\Rightarrow 1+x_3=\frac{1}{2}\Rightarrow x_3=-\frac{1}{2}$
$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2\cdot3+(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{m}{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{m}{2}=-6+1-\frac{3}{2}\Rightarrow m=-13$
$x_1x_2x_3=-2\cdot3\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n}{2}\Rightarrow-\frac{n}{2}=3\Rightarrow n=-6$

23. $p(x)=x^3-2x^2+3x-4$, com raízes a, b, c
$a+b+c=2$
$ab+ac+bc=3$
$abc=4$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{3}{4}$

24. a, b, c são raízes de $x^3+x-1=x^3+0x^2+x-1=0$
Vamos calcular $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}$:
$ab+ac+bc=\frac{1}{1}=1$
$abc=-\frac{-1}{1}=1$
Então:
$\log\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\log\left(\frac{ab+ac+bc}{abc}\right)=\log\left(\frac{1}{1}\right)=\log 1=0$

25. Se as raízes x_1, x_2 e x_3 da equação $p(x)=x^3-6x^2+kx+64=0$ estão em *PG*, então $x_1=\frac{r}{q}$, $x_2=r$ e $x_3=rq$.
Considerando uma das relações de Girard, temos:
$x_1x_2x_3=-\frac{64}{1}\Rightarrow\frac{r}{q}\cdot r\cdot rq=-64\Rightarrow r^3=-64\Rightarrow r=-4$
Se $x_2=-4$ é raiz da equação, então:
$p(-4)=0\Rightarrow(-4)^3-6(-4)^2+k(-4)+64=0\Rightarrow$
$\Rightarrow-64-96-4k+64=0\Rightarrow k=-24$

Resolvido passo a passo

5. a) O total de vendas é dado pela função
$N(t)=t^3-21t^2+126t+304$.
Para $t=12\Rightarrow N(12)=(12)^3-21(12)^2+126(12)+304\Rightarrow$
$\Rightarrow N(12)=182\,000$.
Logo, foram vendidas 182 000 unidades a R$ 350,00, com 20% de aumento.
Valor arrecadado $=182\,000\cdot350\cdot1{,}2=218\,400$

Resposta: R$ 218 400,00.

26. a) $2x^3-x^2-2x+1=0$; $a_n=2$ e $a_0=1$
p é divisor de 1: $p\in\{1,-1\}$
q é divisor de 2: $q\in\{1,-1,2,-2\}$
Então, $\frac{p}{q}\in\left\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$.
Fazendo a verificação, temos:
$p(1)=0\Rightarrow 1$ é raiz
A partir da raiz descoberta, temos:

1	2	-1	-2	1
	2	1	-1	0

$2x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm3}{4}\Rightarrow x'=-1$ e $x''=\frac{1}{2}$
Logo, as raízes racionais são 1, -1 e $\frac{1}{2}$.

b) $4x^4-4x^3-3x^2+4x-1=0$; $a_0=-1$ e $a_n=4$
p é divisor de -1: $p\in\{1,-1\}$
q é divisor de 4: $q\in\{1,-1,2,-2,4,-4\}$
Então, $\frac{p}{q}\in\left\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right\}$.
Fazendo a verificação, temos:
$p(1)=0\Rightarrow 1$ é raiz
$p(-1)=0\Rightarrow -1$ é raiz
A partir das raízes descobertas, temos:

1	4	-4	-3	4	-1
-1	4	0	-3	1	0
	4	-4	1	0	

$4x^2-4x+1=0\Rightarrow x=\frac{4\pm0}{8}\Rightarrow x'=x''=\frac{1}{2}$
Logo, as raízes racionais são 1, -1 e $\frac{1}{2}$.

c) $4x^3 - 5x + 1 = 0$; $a_0 = 1$ e $a_n = 4$

p é divisor de 1: $p \in \{1, -1\}$

q é divisor de 4: $q \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$

Então, $\frac{p}{q} \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$.

Fazendo a verificação, temos:

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

A partir da raiz descoberta, temos:

1	4	0	−5	1
	4	4	−1	0

$4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$ e $x'' = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$

Logo, a única raiz racional é 1.

d) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$; $a_0 = -2$ e $a_n = 2$

p é divisor de -2: $p \in \{1, -1, 2, -2\}$

q é divisor de 2: $q \in \{1, -1, 2, -2\}$

Então, $\frac{p}{q} \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2\right\}$.

Fazendo a verificação, temos: $p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

A partir da raiz descoberta, temos:

1	2	−7	7	−2
	2	−5	2	0

$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow x' = 2$ e $x'' = \frac{1}{2}$

Logo, todas as raízes são racionais: 1, 2 e $\frac{1}{2}$.

27. $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$

Vamos fazer a pesquisa das raízes racionais.

Como $a_0 = -3$ e $a_n = 3$, temos:

p é divisor de -3: $p \in \{1, -1, 3, -3\}$

q é divisor de 3: $q \in \{1, -1, 3, -3\}$

Então, $\frac{p}{q} \in \left\{1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3\right\}$.

Fazendo a verificação, vem:

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

Usando a raiz encontrada:

1	3	−13	13	−3
	3	−10	3	0

$3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = \frac{1}{3}$

Logo, as raízes da equação são 1, 3 e $\frac{1}{3}$.

28. $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$

Vamos fazer a pesquisa das raízes racionais. Como $a_0 = 6$ e $a_n = 1$, temos:

p é divisor de 6: $p \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$

q é divisor de 1: $q \in \{1, -1\}$

Então, $\frac{p}{q} \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.

Fazendo a verificação, temos:

$p(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow 1$ não é raiz

$p(-1) = 6 \neq 0 \Rightarrow -1$ não é raiz

$p(2) = 8 - 8 - 6 + 6 = 0 \Rightarrow 2$ é raiz

Usando a raiz encontrada:

2	1	−2	−3	6
	1	0	−3	0

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x' = \sqrt{3}$ e $x'' = -\sqrt{3}$

Logo, $S = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

29. $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$

Vamos pesquisar as raízes racionais.

Como $a_0 = -4$ e $a_n = 1$, então:

p é divisor de -4: $p \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$

q é divisor de 1: $q \in \{1, -1\}$

$x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$

Vamos pesquisar as raízes racionais.

Como $a_0 = -4$ e $a_n = 1$, então:

p é divisor de -4: $p \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$

q é divisor de 1: $q \in \{1, -1\}$

Assim, $\frac{p}{q} \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$.

Verificando as possíveis raízes, temos:

$p(1) = 3 \neq 0 \Rightarrow 1$ não é raiz

$p(-1) = -3 \neq 0 \Rightarrow -1$ não é raiz

$p(2) = 24 \neq 0 \Rightarrow 2$ não é raiz

$p(-2) = 0 \Rightarrow -2$ é raiz

Usando a raiz encontrada:

−2	1	4	2	−4
	1	2	−2	0

$x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$ (não são raízes inteiras)

Logo, a única raiz inteira é -2.

30. a) $x^4 - x^3 - 11x^2 - x - 12 = 0$, sendo i uma raiz

Se i é raiz, então seu conjugado $-$i também é raiz. Assim:

$p(x) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})q(x) = (x^2 + 1)q(x)$

Vamos calcular $q(x)$ dividindo $p(x)$ por $(x^2 + 1)$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,x^3 & -\,11x^2 & -\,x & -\,12 & x^2 + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & & -\,x^2 & & & x^2 - x - 12 \\
\cline{1-3}
& -x^3 & -\,12x^2 & -\,x & -\,12 & \\
& x^3 & & +\,x & & \\
\cline{2-4}
& & -12x^2 & & -\,12 & \\
& & 12x^2 & & +\,12 & \\
\cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}
$$

$q(x) = x^2 - x - 12$

Fazendo $x^2 - x - 12 = 0$, encontramos $x' = 4$ e $x'' = -3$.

Logo, $S = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}, -3, 4\}$.

b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$, sendo i uma raiz

Se i é uma raiz, então seu conjugado $-$i também é raiz.

Assim:

$p(x) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})q(x) = (x^2 + 1)q(x)$

Dividindo $p(x)$ por $(x^2 + 1)$, encontramos $q(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,4x^3 & +\,6x^2 & -\,4x & +\,5 & x^2 + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & & -\,x^2 & & & x^2 - 4x + 5 \\
\cline{1-3}
& -4x^3 & +\,5x^2 & -\,4x & +\,5 & \\
& 4x^3 & & +\,4x & & \\
\cline{2-4}
& & 5x^2 & & +\,5 & \\
& & -5x^2 & & -\,5 & \\
\cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}
$$

$q(x) = x^2 - 4x + 5$

Fazendo $x^2 - 4x + 5 = 0$, encontramos $x = 2 + i$ ou $x = 2 - i$.

Logo, $S = \{i, -i, 2+i, 2-i\}$.

31. $p(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$, sendo 2i uma raiz

Se 2i é uma raiz, então:

$p(2i) = 0 \Rightarrow (2i)^4 - 3(2i)^3 + 6(2i)^2 + a(2i) + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16i^4 - 24i^3 + 24i^2 + 2ai + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{16} + 24i - \cancel{24} + 2ai + \cancel{8} = 0 \Rightarrow (24 + 2a)i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -24 \Rightarrow a = -12$

32. $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - c = 0$, sendo 1 e $2 + i$ raízes

Como a, b e c são reais, então $2 - i$ também é raiz.

Usando uma das relações de Girard, temos:

$1(2+i)(2-i) = -\dfrac{-c}{1} \Rightarrow 4 + 1 = c \Rightarrow c = 5$

33. $3x^3 - 14x^2 + mx - 10 = 0$, sendo $2 + i$ uma das raízes

Se $2 + i$ é uma das raízes, então:

$p(2+i) = 0 \Rightarrow 3(2+i)^3 - 14(2+i)^2 + m(2+i) - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(8 + 12i + 6i^2 + i^3) - 14(4 + 4i + i^2) + m(2+i) - 10 =$

$= 0 \Rightarrow 3(2 + 11i) - 14(3 + 4i) + m(2+i) - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-36 + 2m) + (-23 + m)i = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -36 + 2m = 10 \Rightarrow 2m = 46 \Rightarrow m = 23 \\ -23 + m = 0 \Rightarrow m = 23 \end{cases}$

Assim, $m = 23$.

Como $m \in \mathbb{R}$, então $2 - i$ também é raiz.

Usando uma das relações de Girard, temos:

$x_1 + (2+i) + (2-i) = -\dfrac{-14}{3} \Rightarrow x_1 + 4 = \dfrac{14}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_1 + 12 = 14 \Rightarrow 3x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{2}{3} \quad (x_1 \in \mathbb{R})$

Logo, $m = 23$ e a raiz real é $\dfrac{2}{3}$.

CAPÍTULO 10

1. a) • $\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\cos x > 0$, então $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

• $\tan x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = -\dfrac{1}{2} \div \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \dfrac{\cancel{2}^1}{\sqrt{3}} =$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

• $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

• $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

• $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = -2$

b) • $\text{sen}^2\,x + \dfrac{1}{9} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,x = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\text{sen}\,x > 0$, então $\text{sen}\,x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

• $\tan x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \div \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}_1} \cdot \dfrac{\cancel{3}^1}{1} = 2\sqrt{2}$

• $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

• $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = 3$

• $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

c) • $\csc x = -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = -\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{4} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, $\cos x < 0$, então $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• $\tan x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \div \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$

• $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = 1$

• $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

d) • $\tan x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen}\,x = \sqrt{3} \cdot \cos x$

$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = (\sqrt{3} \cdot \cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 4 \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{1}{2}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos x > 0$, então $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

• $\text{sen}\,x = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

• $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = 2$

• $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2. $\text{sen}^2\,x + \dfrac{16}{25} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,x = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\dfrac{3}{5}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\text{sen}\,x > 0$, então $\text{sen}\,x = \dfrac{3}{5}$.

$\text{sen}^2\,x - 3 \cdot \text{sen}\,x = \dfrac{9}{25} - 3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25} - \dfrac{9}{5} = \dfrac{9 - 45}{25} = -\dfrac{36}{25}$

3. a) $y = \dfrac{\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\text{sen}\,x}}{1 - \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}} = \dfrac{\dfrac{\text{sen}\,x - \cos x}{\cos x \cdot \text{sen}\,x}}{\dfrac{\text{sen}\,x - \cos x}{\text{sen}\,x}} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

b) $y = \left(\dfrac{1}{\cos x} - \cos x\right)\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,x} - \text{sen}\,x\right) \cdot \left(\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right) =$

$= \left(\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right) \cdot \left(\dfrac{1 - \text{sen}^2\,x}{\text{sen}\,x}\right) \cdot \left(\dfrac{\text{sen}^2\,x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen}\,x}\right) =$

$= \dfrac{\text{sen}^2\,x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\,x} \cdot \dfrac{1}{\cos x \cdot \text{sen}\,x} = \dfrac{\text{sen}^2\,x \cdot \cos^2 x}{\text{sen}^2\,x \cdot \cos^2 x} = 1$

4. $A = \dfrac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} - 1}{\dfrac{1}{\text{sen}\,x} - \dfrac{1}{\cos x}} = \dfrac{\dfrac{\cos x - \text{sen}\,x}{\text{sen}\,x}}{\dfrac{\cos x - \text{sen}\,x}{\text{sen}\,x \cdot \cos x}} =$

$= \dfrac{\cancel{\cos x - \text{sen}\,x}}{\cancel{\text{sen}\,x}} \cdot \dfrac{\cancel{\text{sen}\,x} \cdot \cos x}{\cancel{\cos x - \text{sen}\,x}} = \cos x = \dfrac{1}{2}$

5. a) $\cos x \cdot \tan x \cdot \csc x = \cancel{\cos x} \cdot \dfrac{\cancel{\text{sen}\,x}}{\cancel{\cos x}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\text{sen}\,x}} = 1$

b) $\bullet\ f(x) = \dfrac{\cancel{\text{sen}^2\ x}}{\cos^2\ x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\text{sen}^2\ x}} = \dfrac{1}{\cos^2\ x} = \sec^2\ x$

$\bullet\ g(x) = 1 + \dfrac{\text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x} = \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x} = \dfrac{1}{\cos^2\ x} = \sec^2\ x$

Como $f(x) = g(x)$, está demonstrada a identidade.

c) $\bullet\ f(x) = (1 + \tan\ x)(1 - \tan\ x) = 1 - \tan^2\ x = 1 - \dfrac{\text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x} =$

$= \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x} = \dfrac{1 - \text{sen}^2\ x - \text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x} = \dfrac{1 - 2 \cdot \text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x}$

$\bullet\ g(x) = 2 - \sec^2\ x = 2 - \dfrac{1}{\cos^2\ x} = \dfrac{2 \cdot \cos^2\ x - 1}{\cos^2\ x} =$

$= \dfrac{2(1 - \text{sen}^2\ x) - 1}{\cos^2\ x} = \dfrac{2 - 2 \cdot \text{sen}^2\ x - 1}{\cos^2\ x} = \dfrac{1 - 2 \cdot \text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x}$

Como $f(x) = g(x)$, está demonstrada a identidade.

d) $(\tan\ x - \text{sen}\ x)^2 + (1 - \cos\ x)^2 =$

$= \tan^2\ x - 2 \cdot \tan x \cdot \text{sen}\ x + \text{sen}^2\ x + 1 - 2 \cdot \cos x + \cos^2\ x =$

$= \dfrac{\text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x} - \dfrac{2 \cdot \text{sen}^2\ x}{\cos\ x} + 2 - 2 \cdot \cos\ x =$

$= \dfrac{1 - \cos^2\ x}{\cos^2\ x} - \dfrac{2(1 - \cos^2\ x)}{\cos\ x} + 2 - 2 \cdot \cos\ x =$

$= \dfrac{1}{\cos^2\ x} - \dfrac{\cancel{\cos^2\ x}}{\cancel{\cos^2\ x}} - \dfrac{2}{\cos\ x} + \dfrac{2 \cdot \cos^{\cancel{2}}\ x}{\cancel{\cos\ x}} + 2 - 2 \cdot \cos x =$

$= \sec^2\ x - 1 - 2 \cdot \sec\ x + \cancel{2 \cdot \cos\ x} + 2 - \cancel{2 \cdot \cos\ x} =$

$= \sec^2\ x - 2 \cdot \sec\ x + 1 = (\sec\ x - 1)^2$

6. a) $\tan 15° = \tan (60° - 45°) = \dfrac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 45°} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$

b) $\text{sen}\ 15° = \text{sen}\ (60° - 45°) =$

$= \text{sen}\ 60° \cdot \cos 45° - \text{sen}\ 45° \cdot \cos 60° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) $\cos 75° = \cos (30° + 45°) =$

$= \cos 30° \cdot \cos 45° - \text{sen}\ 30° \cdot \text{sen}\ 45° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

d) $\tan 75° = \tan (30° + 45°) = \dfrac{\tan 30° + \tan 45°}{1 - \tan 30° \cdot \tan 45°} =$

$= \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

e) $\text{sen}\ 105° = \text{sen}\ (60° + 45°) =$

$= \text{sen}\ 60° \cdot \cos 45° + \text{sen}\ 45° \cdot \cos 60° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

f) $\cos 195° = \cos (105° + 90°) =$

$= \cos 105° \cdot \cos 90° - \text{sen}\ 105° \cdot \text{sen}\ 90° =$

$= \cos 105° \cdot 0 - \left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)1 = -\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

7. $\bullet\ \dfrac{16}{25} + \cos^2\ a = 1 \Rightarrow \cos^2\ a = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \cos\ a = \dfrac{3}{5}$

$\bullet\ \dfrac{144}{169} + \cos^2\ b = 1 \Rightarrow \cos^2\ b = 1 - \dfrac{144}{169} = \dfrac{25}{169} \Rightarrow \cos\ b = \dfrac{5}{13}$

$\bullet\ \text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos\ b + \text{sen}\ b \cdot \cos\ a =$

$= \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{20}{65} + \dfrac{36}{65} = \dfrac{56}{65}$

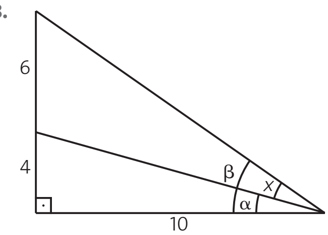
$\bullet\ \cos\ (a - b) = \cos\ a \cdot \cos\ b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b =$

$= \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{13} + \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{12}{13} = \dfrac{15}{65} + \dfrac{48}{65} = \dfrac{63}{65}$

$\bullet\ \tan\ (a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \dfrac{\dfrac{4}{5} : \dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{13} : \dfrac{5}{13}}{1 - \left(\dfrac{4}{5} : \dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{12}{13} : \dfrac{5}{13}\right)} =$

$= \dfrac{\dfrac{4}{3} + \dfrac{12}{5}}{1 - \dfrac{16}{5}} = \dfrac{\dfrac{20 + 36}{15}}{-\dfrac{11}{5}} = \dfrac{56}{\cancel{15}_{3}}\left(-\dfrac{\cancel{5}^{1}}{11}\right) = -\dfrac{56}{33}$

8.



$\tan \alpha = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

$\tan \beta = \dfrac{6 + 4}{10} = 1$

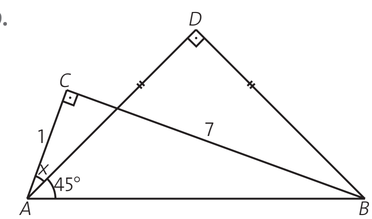
Mas: $\beta = \alpha + x \Rightarrow x = \beta - \alpha$

Portanto:

$\tan x = \tan\ (\beta - \alpha) = \dfrac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \dfrac{1 - 0{,}4}{1 + 1 \cdot 0{,}4} = \dfrac{0{,}6}{1{,}4} =$

$= \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$

9.



O $\triangle ADB$ é isósceles e retângulo, então $D\hat{A}B = 45°$.

$C\hat{A}B = x + 45° \Rightarrow \tan\ (x + 45°) = \dfrac{7}{1} = 7$

Usando a fórmula da soma dos ângulos da tangente, temos:

$\tan\ (x + 45°) = \dfrac{\tan\ x + \tan\ 45°}{1 - \tan\ x \cdot \tan\ 45°} = \dfrac{\tan\ x + 1}{1 - \tan\ x \cdot 1} = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan x + 1 = 7(1 - \tan x) \Rightarrow \tan x + 1 = 7 - 7 \tan x \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \tan x = 6 \Rightarrow \tan x = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$\tan x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos\ x} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x} = \dfrac{9}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16\ \text{sen}^2 x = 9 \cos^2 x$

Lembrando que $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$:

$16\ \text{sen}^2 x = 9(1 - \text{sen}^2 x) \Rightarrow 16\ \text{sen}^2 x = 9 - 9\ \text{sen}^2 x \Rightarrow$

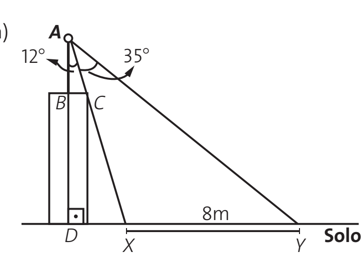
$\Rightarrow 25\ \text{sen}^2 x = 9 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}\ x = \pm\dfrac{3}{5}$

Como x é ângulo agudo, $\text{sen}\ x = \dfrac{3}{5}$.

Resposta: alternativa **c**.

Resolvido passo a passo

5.a)



$BC = \dfrac{1}{2} \cdot$ espessura do muro

$BC = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

$\text{tg } 12° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{0{,}25}{AB} = 0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \dfrac{0{,}25}{0{,}2} = 1{,}25$

Logo, a altura do muro $\overline{AD}$ será:

$AD = h - 1{,}25 = 9{,}4 - 1{,}25 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = 8{,}15$

O muro tem 8,15 m de altura.

10. $\tan 2x = \dfrac{\cancel{2}^{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{4}_{2}}}{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{\cancel{2}_{1}} \cdot \dfrac{\cancel{16}^{8}}{15} = \dfrac{8}{15}$

11. • $\dfrac{4}{9} + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} \Rightarrow \cos a = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

• $\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a = 2 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

• $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \dfrac{5}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{9}$

• $\tan a = \dfrac{2}{3} : \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

• $\tan 2a = \dfrac{\dfrac{2 \cdot 2\sqrt{5}}{5}}{1 - \dfrac{20}{25}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} : \dfrac{1}{5} = 4\sqrt{5}$

12. $A = \dfrac{2 \cdot \cancel{\text{sen } x} \cdot \cos x}{\cancel{\text{sen } x}} - \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x} =$

$= 2 \cdot \cos x - \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{2 \cdot \cos^2 x - \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos x} =$

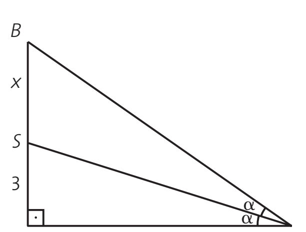
$= \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

13. $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 3 \Rightarrow \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \text{sen } x \cdot \cos x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \text{sen } 2x = \dfrac{2}{3}$

14.



$\tan \alpha = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

$\tan 2\alpha = \dfrac{3 + x}{10}$

Mas:

$\tan 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \dfrac{2 \cdot 0{,}3}{1 - (0{,}3)^2} = \dfrac{0{,}6}{0{,}91}$

Então:

$\dfrac{3 + x}{10} = \dfrac{0{,}6}{0{,}91} = \dfrac{60}{91} \Rightarrow 600 = 273 + 91x \Rightarrow x = \dfrac{327}{91} \simeq 3{,}6$

Resolvido passo a passo

5. a) Para temperatura mínima deveremos ter

$\text{sen}\left[2\pi\left(\dfrac{S-13}{52}\right)\right] = -1$ portanto:

$2\pi\left(\dfrac{S-13}{52}\right) = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow 2\left(\dfrac{S-13}{52}\right) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S-13}{26} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow S - 13 = \dfrac{3}{2} \cdot 26 \Rightarrow S - 13 = \dfrac{78}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 39 + 13 = 52$

A 1ª temperatura mínima do ano ocorre na 52ª semana do ano.

Logo, essa temperatura será: $T = 8 + 10 \cdot (-1) \Rightarrow T = -2\ °C$

b) Pela 3ª vez a maior temperatura representa $\dfrac{\pi}{2} + 4\pi = \dfrac{9\pi}{2}$.

Logo,

$\text{sen}\left[2\pi\left(\dfrac{S-13}{52}\right)\right] = \text{sen } \dfrac{9\pi}{2} \Rightarrow 2\pi\left(\dfrac{S-13}{52}\right) = \dfrac{9\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S-13}{52} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow S - 13 = 117 \Rightarrow S = 120$

Pela 3ª vez a menor temperatura representa $\dfrac{3\pi}{2} + 4\pi = \dfrac{11\pi}{2}$.

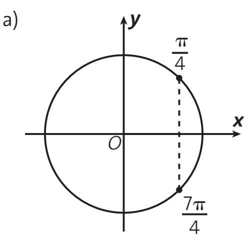
Logo,

$\text{sen}\left[2\pi\left(\dfrac{S-13}{52}\right)\right] = \text{sen } \dfrac{11\pi}{2} \Rightarrow 2\pi\left(\dfrac{S-13}{52}\right) = \dfrac{11\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S-13}{52} = \dfrac{11}{4} \Rightarrow S - 13 = 143 \Rightarrow S = 156$

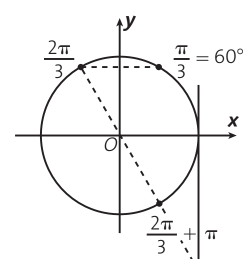
Não é possível, pois se trata da 120ª e 156ª semana, ou seja, não ocorre em um mesmo ano.

15. a)



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

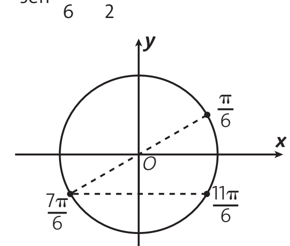
b) $\tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $2 \cdot \text{sen } x = -1 \Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$

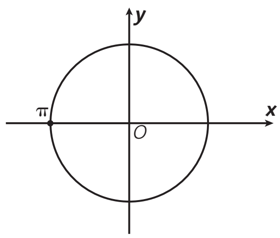
$\text{sen } \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

$S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

d) $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1$

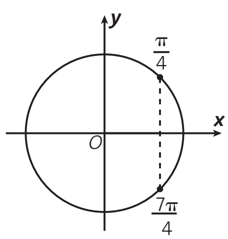


$S = \varnothing$

e) Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, sen $x \in [-1, 1]$.

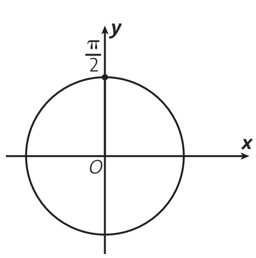
Logo, $S = \varnothing$, pois $\sqrt{2} > 1$.

f) $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

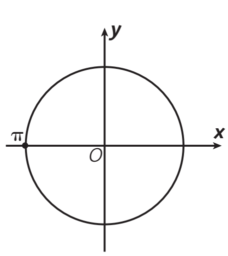
16. a)



$\text{sen } 3x = 1 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b)

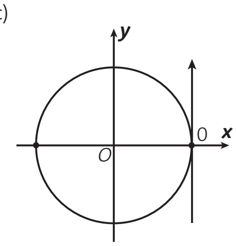


$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c)



$\tan 5x = 0 \Rightarrow 5x = k\pi \Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{5}$

$S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$

17. a) $\cos x \cdot (2 \cdot \text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{sen } x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) $\text{sen } x \cdot (\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \text{sen } x = 1 \end{cases}$

$S = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

c) $\tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$ ou $\tan x = -\sqrt{3}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

18. a) $\sqrt{2} \cdot \text{sen } x + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \text{sen } x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou

$x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\text{sen } x + \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = -\cos x$

$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{-\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\sec x = \frac{1}{\cos x} = -2 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\cot x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

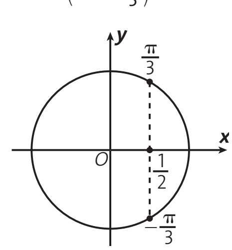
19. Fazendo sen $x = t$, vem: $t = 1 + t^2 \Rightarrow t^2 - t + 1 = 0$

$\Delta = -3\ (\Delta < 0)$

Logo, a equação não tem solução nos números reais,

$S = \varnothing$.

20. $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \geqslant 0 \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}$



Então:

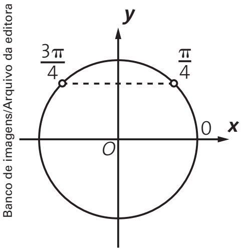
$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant 2k\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi$$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

21. $|\text{sen } x| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen } x \leqslant 1$

Banco de imagens/Arquivo da editora



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$$

22. • $x = 1$

$$1 = 4 + 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$2t + \frac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

• $x = 7$

$$7 = 4 + 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{3} \Rightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$2t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \Rightarrow 2t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$$

Resposta: alternativa **b**.

Pensando no Enem

1. $Q(0) = 4 \Rightarrow 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 4 \Rightarrow d = 4$

$Q(1) = 8 \Rightarrow 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 4 = 8 \Rightarrow b + c = 3$ I

$Q(5) = 184 \Rightarrow 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + 4 = 184 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25b + 5c = 55 \Rightarrow 5b + c = 11$ II

Fazendo II − I, vem:

$4b = 8 \Rightarrow b = 2$

$b + c = 3 \Rightarrow 2 + c = 3 \Rightarrow c = 1$

Logo, $Q(t) = t^3 + 2t^2 + t + 4$.

Nas duas últimas horas, temos:

$Q(5) - Q(3) = 184 - (3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3 + 4) = 184 - 52 = 132$

Resposta: alternativa **e**.

2. Quando a torneira foi aberta:

$V(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 8 = 8\ m^3$

O reservatório estará cheio quando $V(t) = 0\ m^3$. Então:

$t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = 0 \Rightarrow t^2(t - 2) - 4(t - 2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (t-2)(t^2-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \end{cases}$$

Como $t = -2$ h não serve, temos $t = 2$ h.

Resposta: alternativa **a**.

3. A caixa tem uma base quadrada de aresta $(20 - 2x)$ cm e a altura é x cm, em que: $0 < x < 10$. Então:

$V = (20 - x)^2 \cdot x = (400 - 80x + 4x^2)x = 4x^3 - 80x^2 + 400x$

Queremos x para que $V = 588\ cm^3$, então:

$4x^3 - 80x^2 + 400x = 588 \Rightarrow 4x^3 - 80x^2 + 400x - 588 = 0$

Sabemos que $x = 3$ é uma de suas raízes, então, dividindo por $x - 3$, encontramos:

3	4	−80	400	−588
	4	−68	196	0

Portanto, as outras raízes são da equação:

$4x^2 - 68x + 196 = 0 \Rightarrow x^2 - 17x + 49 = 0$

$\Delta = 289 - 196 = 93$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{93}}{2} \Rightarrow x' = \frac{17 + \sqrt{93}}{2} \simeq 13{,}3 \text{ (não serve)}$$

$$x'' = \frac{17 - \sqrt{93}}{2} \simeq 3{,}67$$

Resposta: Existe outro valor possível, que é $\frac{17 - \sqrt{93}}{2}$.

4. a) A empresa terá prejuízo, pois

$L(0) = 0^3 - 7 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 - 8 = -8$.

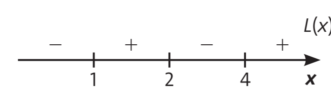
Significa dizer que a empresa terá um lucro negativo, ou seja, um prejuízo de R$ 8 000,00. Esse prejuízo é justificável, pois ainda assim a empresa terá que pagar funcionários, fornecedores, impostos, etc.

b) $L(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 8 = -2$.

A empresa terá um prejuízo de R$ 2 000,00.

c) São as raízes da função lucro. As raízes são 1, 2 e 4. A empresa não terá lucro nem prejuízo na venda de 1 000 peças, 2 000 peças e de 4 000 peças.

d) Como $L(0) = -8$ (negativo), e todas as raízes têm multiplicidade 1, o sinal de $L(x)$ em cada trecho pode ser representado por:



Portanto, a empresa tem lucro para o intervalo entre 1 000 e 2 000 peças ou acima de 4 000 peças.

5. Brasília: 3º quadrante.

Nova Iorque: 2º quadrante.

Sydney: 4º quadrante.

Tóquio: 1º quadrante.

Resposta: alternativa **d**.

6. O correto seria "tangente de Brasília" é um número positivo.

Resposta: alternativa **c**.

7. $x' = r(\cos(\alpha + \beta)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = r(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen }\alpha \cdot \text{sen }\beta) \Rightarrow$

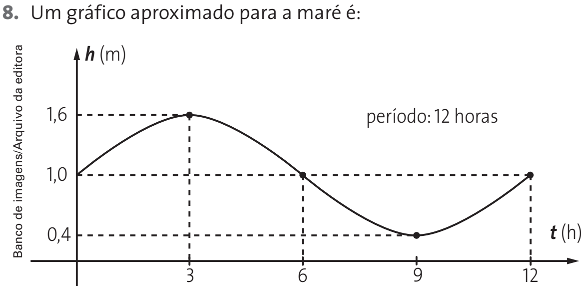
$\Rightarrow x' = r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - r \cdot \text{sen }\alpha \cdot \text{sen }\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = x \cdot \cos\beta - y \cdot \text{sen }\beta$

Resposta: alternativa **b**.

8. Um gráfico aproximado para a maré é:

Banco de imagens/Arquivo da editora



Uma função para o gráfico é $h(t) = a + b \cdot \text{sen}\ (ct)$, com $a = 1{,}0$ (valor médio), $b = 0{,}6$ (amplitude) e $\frac{2\pi}{|c|} = 12 \Rightarrow |c| = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Como $b > 0$, devemos ter $c > 0$ para que a função comece crescente, então $c = \frac{\pi}{6}$.

Assim, $h(t) = 1 + 0{,}6\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right)$.

Às 9h, a altura da maré é de 0,4 m e, após esse horário, ela aumentará. Procuramos, então, a primeira raiz da equação

$1 + 0{,}6\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0{,}7$ após às 9h:

$0{,}6\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = -0{,}3 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{\pi t}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi t}{6} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

Da segunda expressão, multiplicando os dois membros por $\frac{6}{\pi}$, vem $t = 11 + 12k$. Com $k = 0$, temos $t = 11$ horas.

Resposta: alternativa **d**.

Vestibulares de Norte a Sul

1. Sabendo que:

$$\begin{cases} \cos 45° = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\ 45° = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 90° = 0 \\ \text{sen}\ 90° = +1 \end{cases}$$

A partir disso, temos a expressão:

$\cos 45° - \text{sen}\ 45° + \cos 135° = \cos 45° - \text{sen}\ 45° + \cos(90° + 45°) =$

$= \cos 45° - \text{sen}\ 45° + \cos 90° \cdot \cos 45° - \text{sen}\ 90° \cdot \text{sen}\ 45° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Outra resolução, por redução ao 1º quadrante:

Note que: $\cos 135° = -\cos 45° \Rightarrow \cos 45° - \text{sen}\ 45° - \cos 45° =$ $= -\text{sen}\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta: alternativa **c**.

2. O produto das raízes de um polinômio com n raízes, a_0 (termo independente) e a_n (coeficiente da incógnita elevada a n) é definido por:

$$x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{a_0}{a_n}\right)$$

Logo, o produto das raízes de $p(x)$ é:

$$(-1)^n \cdot \left(\frac{a_0}{a_n}\right) = +1 \cdot (-6) = -6$$

Resposta: alternativa **d**.

3. $\tan \alpha = \frac{6}{PQ}$

$\tan 2\alpha = \frac{24}{PQ}$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$$\frac{24}{PQ} = \frac{2 \cdot \frac{6}{PQ}}{1 - \frac{36}{PQ^2}} \Rightarrow \frac{24}{PQ} = \frac{\frac{12}{PQ}}{\frac{PQ^2 - 36}{PQ^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{24}{PQ} = \frac{12PQ}{PQ^2 - 36} \Rightarrow 12PQ^2 - 24PQ^2 + 24 \cdot 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12PQ^2 + 24 \cdot 36 = 0 \Rightarrow PQ^2 - 72 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PQ = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \simeq 8{,}5$$

Resposta: alternativa **a**.

4. A soma geral das raízes de uma função polinomial é definida por:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

No enunciado a função dada é $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, a qual possui

$$\begin{cases} a_0 = -6 \\ a_{n-1} = -6 \\ a_n = +1 \end{cases}$$

Assim, temos que a soma das raízes dessa função é igual a:

$$-\left(\frac{-6}{+1}\right) = -(-6) = 6$$

Como o enunciado informa que um dos zeros é $x = 1$, então, a soma dos outros zeros é igual a $+5$.

Resposta: alternativa **d**.

5. Podemos estruturar uma divisão polinomial da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \cline{2-2} \text{(resto)} & \text{quociente} \end{array}$$

Sendo assim, podemos encontrar o valor do dividendo:

dividendo = (divisor × quociente) + resto

Substituindo os valores informados no enunciado na expressão acima, temos:

dividendo $= [(x^2 + x) \cdot (8x^2 - 8x + 12) + (1 - 7x)]$

dividendo $= 8x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 8x^3 - 8x^2 + 12x + 1 - 7x$

dividendo $= 8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$

Resposta: alternativa **a**.

6. Inicialmente, temos que a soma das raízes de uma função polinomial é representada por $-\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$, e o produto de n raízes é dado por $(-1)^n \cdot \left(\frac{a_0}{a_n}\right)$.

De acordo com o enunciado, temos:

Soma das raízes

$$-\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = -2 \Rightarrow a_{n-1} = 2a_n$$

Produto das raízes

$$(-1)^n \cdot \left(\frac{a_0}{a_n}\right) = +2 \Rightarrow (-1)^n \cdot a_0 = +2a_n$$

Obs.: $n = 3$, pois a função só apresenta três zeros.

$\therefore -a_0 = +2a_n$

Analisando as alternativas a única que obedecerá às "exigências" encontradas acima é a alternativa **d**.

7. Utilizando o "método de chave" da divisão entre dois polinômios, temos:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 5x^2 - 12x + 5 & x^2 + 2x - 5 \\ \cline{2-2} \underline{-(3x^3 + 6x^2 - 15x)} & 3x - 1 \text{ (quociente)} \\ -x^2 + 3x + 5 & \\ \underline{-(-x^2 - 2x + 5)} & \\ 5x \text{ (resto)} & \end{array}$$

Sendo assim, a alternativa correta é **d**.

8. $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{1} = -7 \Rightarrow |x_1 + x_2 + x_3| = |-7| = 7$

9. Cálculo de $AB \Rightarrow (AB)^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow AB = 6\sqrt{3}$

Seja $B\hat{A}C = \alpha$; $B\hat{A}M = \alpha_1$ e $M\hat{A}C = \alpha_2$.

$$\tan \alpha = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{3}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Temos que: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, portanto $\tan \alpha = \tan(\alpha_1 + \alpha_2)$

$\tan\alpha = \dfrac{\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2}{1 - \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}$, substituindo $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \tan\alpha_2}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot \tan\alpha_2}$

, resolvendo, encontraremos $\tan\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Logo, $\tan M\hat{A}C = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Resposta: alternativa **b**.

10. Utilizando a relação de soma de Girard em uma equação de 3º grau, temos que suas raízes *x*, *y* e *z* somadas são representadas por $-\left(\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right)$.

De posse da equação fornecida no enunciado temos que $a_n = 1$ e $a_{n-1} = 4$, substituindo-os, temos:

$x + y + z = -\left(\dfrac{4}{1}\right) = -4$

$\therefore 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

Sabemos ainda que $x = z + y$

Ao encontrar uma raíz igual a -2, as outras duas somadas devem ter valor igual a -2. Assim, ao analisarmos as alternativas, a única que condiz com essas necessidades é a alternativa **b**.

11. $\tan 15° = \tan(60° - 45°) = \dfrac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 45°} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

$\dfrac{11{,}7}{x} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}3 \Rightarrow x = \dfrac{11{,}7}{0{,}3} = 39$

Resposta: alternativa **e**.

12. $\dfrac{\tan x + \cot x}{\sec x + \csc x} = \dfrac{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}}{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\text{sen } x}} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} \div \dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x \cdot \cos x} =$

$= \dfrac{1}{\cancel{\text{sen } x \cdot \cos x}} \cdot \dfrac{\cancel{\text{sen } x \cdot \cos x}}{\text{sen } x + \cos x} = \dfrac{1}{\text{sen } x + \cos x}$

Temos que:

$\text{sen } x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \cos x = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (2º quadrante)

Logo,

$\dfrac{1}{\text{sen } x + \cos x} = \dfrac{1}{\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{1}{\dfrac{2 - \sqrt{5}}{3}} = \dfrac{3}{2 - \sqrt{5}} =$

$= \dfrac{3(2 + \sqrt{5})}{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})} = \dfrac{3(2 + \sqrt{5})}{-1} = -3(2 + \sqrt{5})$

Resposta: alternativa **d**.

13. Tomando, inicialmente, $f(t) = 0$, temos $\dfrac{1}{4}t^3 - 4t^2 + 17t - 20 = 0$.

Simplificando a fração, a equação torna-se igual a

$t^3 - 16t^2 + 68t - 80 = 0$.

Através do teorema das raízes racionais, percebemos que 2 é raiz da equação acima. Ou seja

2	1	−16	68	−80
	1	−14	40	0

Assim, temos a seguinte expressão $t^2 - 14t + 40 = 0$, a qual tem como raízes 4 e 10.

Logo,

$t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 10$

$\therefore t_3 - t_2 - t_1 = 10 - 4 - 2 = 4$

Resposta: alternativa **c**.

Caiu no Enem

1. O valor total da conta de energia elétrica para o consumo de 150 kWh é igual a $0{,}5 \cdot 150 + 4{,}5 =$ R\$ 79,50. No entanto, o morador dessa residência pretende diminuir em pelo menos 10% o valor da conta de energia, ou seja, reduzi-la a 90% do valor atual, passando a pagar $0{,}9 \cdot 79{,}5 =$ R\$ 71,55.

Seja *x* o número máximo de kWh que deverão ser consumidos para que o objetivo do morador seja alcançado. Observando que $100 < x < 140$, temos $0{,}5 \cdot x + 3 = 71{,}55 \Leftrightarrow x = 137{,}1$ kWh.

Resposta: alternativa **c**.

2. Tem-se que $x_{pI} = \dfrac{4 \cdot 20 + 6 \cdot 23}{4 + 6} = 21{,}8$ e $x_{pIII} = \dfrac{4 \cdot 21 + 6 \cdot 18}{4 + 6} = 19{,}2$.

Logo, deve-se ter

$x_{pII} > 21{,}8 \Leftrightarrow \dfrac{4 \cdot x + 6 \cdot 25}{4 + 6} > 21{,}8 \Leftrightarrow 4x > 218 - 150 \Leftrightarrow x > 17$

Portanto, a menor nota que o candidato II deverá obter na prova de química é 18.

Resposta: alternativa **a**.

3. A média do reagente 1 é igual a $\bar{x}_1 = \dfrac{1 + 6 + 6 + 6 + 11}{5} = 6$.

A média do reagente 2 é igual a $\bar{x}_2 = \dfrac{0 + 6 + 7 + 6 + 5}{5} = 4{,}8$.

A média do reagente 3 é igual a $\bar{x}_3 = \dfrac{2 + 3 + 8 + 10 + 11}{5} = 6{,}8$.

A média do reagente 4 é igual a $\bar{x}_4 = \dfrac{2 + 4 + 7 + 8 + 12}{5} = 6{,}6$.

A média do reagente 5 é igual a $\bar{x}_5 = \dfrac{1 + 2 + 9 + 10 + 11}{5} = 6{,}6$.

Então, o reagente 2, como apresentou quatro resultados acima de sua média, é o reagente que melhor atende às expectativas do pesquisador.

Resposta: alternativa **b**.

4. Médias das receitas das empresas, em milhares de reais:

Alfinetes V $\rightarrow (200 + 220 + 240) \div 3 = 220$

Balas W $\rightarrow (200 + 230 + 200) \div 3 = 210$

Chocolates X $\rightarrow (250 + 210 + 215) \div 3 = 225$

Pizzaria Y $\rightarrow (230 + 230 + 230) \div 3 = 230$

Tecelagem Z $\rightarrow (160 + 210 + 245) \div 3 = 205$

Sendo assim, as empresas com as maiores médias anuais são Pizzaria Y e Chocolates X.

Obs.: Não é preciso determinar a média aritmética de cada uma das empresas, bastaria encontrar apenas a soma das três receitas de cada empresa e consequentemente teríamos a mesma conclusão obtida a partir das médias.

Resposta: alternativa **d**.

5. De acordo com o gráfico 1, temos que em 2013 a empresa gastou $0{,}125 \cdot 400\,000 =$ R\$ 50 000,00 com os funcionários que possuíam Ensino Fundamental, e o mesmo valor com os que tinham nível superior. Já com os funcionários que tinham Ensino Médio, a despesa foi de $0{,}75 \cdot 400\,000 =$ R\$ 300 000,00.

Porém, em 2014, a empresa pretende contratar novos funcionários, pagando-lhes o mesmo salário do ano 2013. O novo número de funcionários é demonstrado no gráfico 2. Portanto, a fim de manter o lucro, a empresa deve aumentar a receita1 em:

$\dfrac{70 - 50}{50} \cdot 50\,000 + \dfrac{180 - 150}{150} \cdot 60\,000 + 50\,000 =$

$= 20\,000 + 60\,000 + 50\,000 =$ R\$ 130 000,00

Resposta: alternativa **b**.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

6. De acordo com o enunciado, a variação percentual no período de 2000 a 2010 é dada por:

$$\frac{1{,}9 - 2{,}38}{2{,}38} \cdot 100\% \simeq -20\%$$

Por conseguinte, a taxa de fecundidade do ano de 2020 estará mais próxima de $0{,}8 \cdot 1{,}9 = 1{,}52$.

Resposta: alternativa **c**.

7. Nesse tipo de problema o primeiro a se fazer é ordenar as notas dos candidatos em ordem crescente, e em seguida obtemos as medianas alcançadas por cada um, como segue:

$$Me_k = \frac{33 + 33}{2} = 33$$

$$Me_L = \frac{33 + 34}{2} = 33{,}5$$

$$Me_M = \frac{35 + 35}{2} = 35$$

$$Me_N = \frac{35 + 37}{2} = 36$$

$$Me_P = \frac{26 + 36}{2} = 31$$

Portanto, é fácil ver que N será o candidato aprovado, posto que a mediana de suas notas é a maior entre os demais candidatos.

Resposta: alternativa **d**.

8. Sabendo que média da distribuição de zeros e uns é igual a 0,45 e como $0{,}45 < 0{,}50$, podemos concluir que existem mais sapatos na cor branca do que na cor preta. Além disso, como a **Moda** da numeração dos sapatos com defeito é 38, segue que os sapatos na cor branca de número 38 não serão mais encomendados.

Resposta: alternativa **a**.

9. De acordo com as informações do enunciado temos:

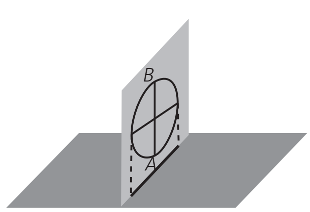
- Taxa de desemprego oculto em dezembro de 2012 = 1,1%
- Taxa de desemprego total em dezembro de 2012 = 9,0%

Sendo assim, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 é de 7,9%. Já que $9 - 1{,}1 = 7{,}9$.

Resposta: alternativa **e**.

10. O plano que contém o trajeto do motociclista é perpendicular ao plano do chão, portanto a projeção ortogonal do trajeto do motociclista no plano do chão é um segmento de reta. Isso pode ser provado por uma experiência cotidiana, ao girar uma corda com um peso na extremidade sob uma luz, incidindo perpendicularmente ao chão, veremos sua sombra conforme a figura abaixo.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Resposta: alternativa **e**.

11. O volume de uma pílula é dado pela soma da parte cilíndrica e dos dois hemisférios presentes nas extremidades. A pílula possui um raio r, e tem o volume calculado por:

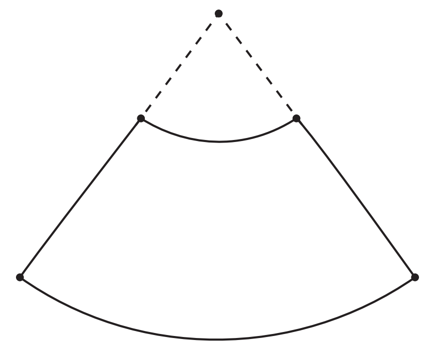
$$\pi \cdot r^2 \cdot 10 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \simeq 2r^2(15 + 2r).$$

Portanto, o resultado pedido, em mm³, é igual a:

$$2 \cdot 5^2 \cdot (15 + 2 \cdot 5) - 2 \cdot 4^2 \cdot (15 + 2 \cdot 4) = 1250 - 736 = 514.$$

Resposta: alternativa **e**.

12. A superfície lateral de um cone é obtida a partir de um setor circular, segue-se que o objetivo do responsável pelo adesivo será alcançado se ele fizer o corte indicado na figura abaixo. A alternativa **d** é a planificação da superfície lateral de um cone.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resposta: alternativa **e**.

13. De acordo com as planificações, Maria poderá obter, da esquerda para a direita, um cilindro, um prisma de base pentagonal e uma pirâmide triangular. Assim, toda planificação de um cilindro será um retângulo e dois círculos simétricos ao retângulo; de um prisma de base pentagonal será dois pentágonos simétricos a um dos cinco retângulos idênticos; de uma pirâmide triangular será um triângulo equilátero maior contendo 4 triângulos equiláteros menores.

Resposta: alternativa **a**.

14. O local de construção da torre é representado pelo ponto considerado o circuncentro do triângulo formado pelos pontos A, B e C. Então, temos:

- os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente, $M_C = (50, 20)$ e $M_A = (65, 35)$.
- o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{BC}$ é dado por:

$$m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{20 - 50}{70 - 60} = -3$$

A equação da mediatriz do lado $\overline{BC}$ é tal que:

$$y - y_{M_C} = -\frac{1}{m_{\overleftrightarrow{BC}}}(x - x_{M_C}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - 35 = -\frac{1}{-3}(x - 65) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{65}{3} + 35$$

Agora, como $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das abscissas, segue-se que a equação da mediatriz do lado $\overline{AB}$ é $x = x_{M_C} = 50$.

Desse modo, a ordenada do circuncentro de ABC é dada por:

$$y = \frac{1}{3}50 - \frac{65}{3} + 35 = 30$$

Portanto, as coordenadas do local adequado para a construção da torre é (50, 30).

Resposta: alternativa **e**.

15. Como uma circunferência é representada por $x^2 + y^2 = R^2$ a trajetória descrita pelo assento do balanço é parte da circunferência $x^2 + y^2 = 4^2$. Logo, sabendo que $y < 0$, temos $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, com $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Resposta: alternativa **d**.

ISBN 978-850817942-8