RAZÃO, PROPORÇÃO E REGRA DE TRÊS

O foco desta apostila será o estudo da boa e velha regra de três! Ela é muito utilizada em áreas como a matemática, a física e a química. Costumamos usar a regra de três para relacionar grandezas através de uma certa **proporção.**

Proporção, assim como **razão**, é um conceito muito importante para termos em mente ao falarmos de regra de três. Começaremos os nossos estudos por razão.

RAZÃO

Fazemos comparações entre duas grandezas através da divisão entre as medidas dessas grandezas, sendo assim:

> Dados dois números reais a e b, com $b \neq 0$, definimos a razão como o quociente entre a e b, denotado por $\frac{a}{b}$, $a{:}b$ ou a/b.

Lemos $\frac{a}{b}$ como: a está para b.

- a é chamado de numerador (ou antecedente);
- b é chamado de denominador (ou consequente).

Observação: Poderíamos também nos referir à razão de b para a. Nesse caso, representaríamos essa razão como $\frac{b}{a}$, $b{:}a$ ou b/a.

Independentemente de como for representada a razão entre dois valores a e b, é importante notarmos que isso indica uma **relação entre esses valores**. Confira alguns exemplos de razão:

1. Imagine a seguinte situação: um certo evento de divulgação científica contou com cerca de 1.500 pessoas. Dessas pessoas, 900 eram visitantes de outras cidades. Isso significa que a razão do número de visitantes para o número total de pessoas foi de $\frac{900}{1.500} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$. Isso significa que, para cada 5 pessoas do evento, 3 delas eram visitantes de outras cidades.

2. É comum, em provas de vestibulares, que sejam divulgadas as relações candidatos/vaga para os cursos. Essas relações são uma razão do número de candidatos pelo número de vagas de um determinado curso. No vestibular unificado UFSC/UFFS para 2020, por exemplo, 380 candidatos se inscreveram para o curso de engenharia civil. Para o primeiro semestre letivo de 2020 foram disponibilizadas 38 vagas para o curso. Nesse caso, a relação candidatos/vaga para o curso é a razão de 380 candidatos para

38 vagas, ou seja: $\frac{380}{38}$, ou então 380:38. O valor dessa razão é 10. Isso significa que, para cada vaga do curso de engenharia civil, há 10 candidatos.

3. Quando um mapa é criado, normalmente, utiliza-se uma **escala** para dar uma ideia das dimensões reais do local representado. Essa escala consiste na razão de quanto do tamanho de uma parte do mapa corresponde ao tamanho dessa mesma parte no tamanho real. Na imagem abaixo, temos um mapa da América do Sul:

De acordo com o mapa, a escala é de 1:30.000.000. Ou seja, um centímetro do mapa corresponde a 30.000.000 centímetros no tamanho real. Para representar uma escala é importante que a razão seja entre termos de uma mesma unidade, caso isso não aconteça, deve estar claro na razão quais são as unidades envolvidas.

PROPORÇÃO

Uma igualdade entre duas razões é chamada de **proporção**.

Por exemplo, se considerarmos duas razões, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, a igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

estabelece uma proporção entre as razões. Os valores a e d são chamados de **extremos** e b e c são chamados de **meios**.

Lemos a proporção acima como: a está para b assim como c está para d.

Pela igualdade acima obtemos a propriedade fundamental das proporções:

$$a \cdot d = c \cdot b$$

Essa propriedade nos diz que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Veja a proporção:

$$\frac{10}{2} = \frac{20}{4}$$

Sabemos que tanto a razão $\frac{10}{2}$ quanto a razão $\frac{20}{4}$ são iguais a 5. Também podemos verificar isso através da propriedade:

$$10 \cdot 4 = 20 \cdot 2 = 40$$

Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Dizemos que duas grandezas são proporcionais se, ao alterarmos uma delas, a outra é consequentemente alterada.

Grandezas Diretamente Proporcionais

Se o aumento do valor de uma grandeza acarretar no aumento do valor da outra grandeza, ou então, se diminuirmos o valor de uma grandeza, a outra também diminuir seu valor, estamos tratando de grandezas **diretamente proporcionais** e representamos tal proporção da seguinte forma:

$$\frac{\uparrow a}{\uparrow b} = k$$

Podemos perceber que as grandezas são diretamente proporcionais da seguinte forma: se quisermos que a razão seja constante, ou seja, se quisermos que o valor de k não se altere, ao aumentarmos (ou diminuirmos) o valor de a, devemos também aumentar (ou diminuir) o valor de b.

Observação: k é uma constante, chamada de **constante de proporcionalidade** e é o resultado da divisão de a por b.

Exemplo: Se tivermos a razão $\frac{2}{4}$ e aumentarmos o numerador para 10, o denominador tem que aumentar para 20, para que no final o valor de k se mantenha em k=0,5:

$$\frac{2}{4} = 0{,}5 \quad \text{e} \quad \frac{10}{20} = 0{,}5$$

Vamos a um exemplo mais prático: uma das equações mais famosas da física é a da Segunda Lei de Newton, que, de maneira simplificada, nos diz que a força resultante F sobre um corpo de massa m é diretamente proporcional à aceleração a que esse corpo adquire:

$$F = m \cdot a$$

ou então

$$\frac{F}{a} = m$$

nesse caso, estamos considerando que a massa m do corpo não muda: é a nossa constante. Quanto maior for a força que exercemos sobre o corpo, maior será a aceleração adquirida por ele. Ao dobrar a força, a aceleração dobrará. Ao triplicar a força, a aceleração triplicará. E por aí vai. Em resumo, ao aumentar (ou diminuir) a força, a aceleração aumentará (ou diminuirá) na mesma proporção.

Representamos três razões cujas grandezas são diretamente proporcionais da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

A igualdade anterior possui a seguinte propriedade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} \quad (1)$$

Essa propriedade é útil na resolução de exercícios conforme o exemplo abaixo.

Exemplo: Uma empresa distribuiu um lucro de R$ 3.000,00 a seus três sócios. A quantia que ficará com cada sócio será diretamente proporcional aos números 2, 3 e 5. Quanto de lucro cada um dos sócios recebeu?

Resolução: Chamemos de A, B e C os três sócios. Pelas condições do exercício temos que:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{6}$$

Pela propriedade temos:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{6} = \frac{A+B+C}{2+3+5}$$

Perceba que A + B + C = 3.000, pois o total a ser repartido deve ser igual ao lucro. Logo:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{2+3+5} = \frac{3.000}{10}$$

O que significa que:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = 300$$

Portanto, conseguimos encontrar quanto cada sócio recebe a partir das igualdades:

$$\frac{A}{2} = 300, \frac{B}{3} = 300 \text{ e } \frac{C}{5} = 300$$

Ou seja, A=600, B=900 e C=1500 e descobrimos quanto cada sócio recebeu.

Grandezas Inversamente Proporcionais

Agora, se ao aumentarmos o valor de uma grandeza, a outra diminuir o seu valor, ou então, se diminuirmos o valor de uma grandeza, a outra aumentar seu valor, estamos tratando de grandezas **inversamente proporcionais** e representamos tal proporção da seguinte forma:

$$\uparrow a \cdot b \downarrow = k$$

Podemos perceber que essa relação mostra uma proporcionalidade inversa da seguinte forma: se quisermos que a razão seja constante, ou seja, se quisermos que o valor de k não se altere, ao aumentarmos (ou diminuirmos) o valor de a, precisamos diminuir (ou aumentarmos) o valor de b.

Vejamos um exemplo: imagine que você faz um mesmo trajeto todos os dias. Pela prática, você sabe que, no seu ritmo de caminhada, você leva um tempo para percorrer esse trajeto. Em um certo dia, você acabou se atrasando e precisou mudar o ritmo de caminhada, andando mais rápido para chegar a tempo ao seu compromisso. O trajeto foi o mesmo, mas você precisou reduzir o tempo de caminhada e, para isso, foi necessário aumentar a velocidade. O aumento da velocidade implicou na redução do tempo decorrido.

Representamos três razões cujas grandezas são inversamente proporcionais da seguinte forma:

$$a \cdot b = c \cdot d = e \cdot f = k$$

A igualdade anterior possui a seguinte propriedade

$$a \cdot b = c \cdot d = e \cdot f = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{c}{\frac{1}{d}} = \frac{e}{\frac{1}{f}} \qquad (2)$$

A propriedade anterior, juntamente com a propriedade (1) são úteis na resolução de exercícios conforme o exemplo a seguir.

Exemplo: Marcos é avô e possui 115 balas. Ele vai distribuir essas balas entre os seus três netos André, Bruno e Luís, cujas idades são 4, 5 e 8 respectivamente. A distribuição vai ocorrer de forma que cada neto receberá uma quantia que seja inversamente proporcional às suas idades. Quantas balas cada neto receberá?

Resolução: chamando cada neto por A, B e L, pela propriedade (2) temos:

$$\frac{A}{\frac{1}{4}} + \frac{B}{\frac{1}{5}} + \frac{L}{\frac{1}{8}} = 4A = 5B = 8L$$

Agora, pela propriedade (1) temos:

$$\frac{A}{\frac{1}{4}} + \frac{B}{\frac{1}{5}} + \frac{L}{\frac{1}{8}} = \frac{A + B + L}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8}}$$

Sabendo que $A+B+L=115$ e $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8} = \frac{23}{40}$ temos:

$$\frac{A}{\frac{1}{4}}+\frac{B}{\frac{1}{5}}+\frac{L}{\frac{1}{8}} = \frac{115}{\frac{23}{40}}$$

$$\frac{A}{\frac{1}{4}}+\frac{B}{\frac{1}{5}}+\frac{L}{\frac{1}{8}} = \frac{4600}{23}$$

Assim,

$$4A=5B=8L = 200$$

Portanto,

$$A = \frac{200}{4} = 50,\ B = \frac{200}{5} = 40 \text{ e } L = \frac{200}{8} = 25$$

Concluímos que André ficará com 50 balas, Bruno ficará com 40 e Luís ficará com 25 balas.

REGRA DE TRÊS

Agora que temos as ideias de razão e proporção, podemos falar de regra de três. Ela pode ser utilizada em inúmeras áreas do conhecimento e até em situações simples do dia a dia e nos permite encontrar um valor desconhecido a partir de uma relação de proporcionalidade de determinadas grandezas.

Regra de Três Simples

O caso em que temos uma regra de três simples é aquele em que existe uma proporcionalidade com quatro valores envolvidos, dos quais conhecemos três.

Dessa forma, só podemos utilizar uma regra de três se de fato houver uma proporção (independentemente de ser direta ou inversa) entre as grandezas envolvidas.

Havendo uma proporção, a **primeira coisa** que devemos fazer é parar e nos perguntar: "a relação entre as grandezas é direta ou inversamente proporcional?". É muito importante, antes de montar uma regra de três, determinar o tipo de proporcionalidade entre as grandezas. Somente após essa análise das grandezas é que resolvemos a conta e descobrimos o valor de interesse. Veja abaixo um exemplo de regra de três com grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo: Para fazer um bolo de chocolate que renda 10 porções, são necessárias 4 colheres de sopa de chocolate em pó. Para fazer um bolo que renda 15 porções, devemos utilizar quantas colheres de sopa de chocolate?

Resolução:

Primeiro identificamos as grandezas envolvidas: porções e colheres

Depois fazemos a análise das grandezas: se aumentarmos as porções do bolo, naturalmente precisamos de uma maior quantidade de chocolate, ou seja, de mais colheres. Então a relação entre o número de porções e quantidade de chocolate é **diretamente proporcional**.

Agora montamos a regra de três para encontrarmos a quantidade de colheres necessárias para as 15 porções:

$$\begin{array}{ccc} \text{Porções} & & \text{Colheres} \\ 10 & \text{———} & 4 \\ 15 & \text{———} & x \end{array}$$

Antes de fazermos as contas, colocamos uma flecha (para cima ou para baixo) na coluna da incógnita, no nosso exemplo, na coluna das colheres.

$$\begin{array}{ccc} \text{Porções} & & \text{Colheres} \\ 10 & \text{———} & \uparrow 4 \\ 15 & \text{———} & \uparrow x \end{array}$$

Como as grandezas são diretamente proporcionais, colocamos uma flecha na coluna das porções no mesmo sentido que na coluna das colheres.

$$\begin{array}{ccc} \text{Porções} & & \text{Colheres} \\ \uparrow 10 & \text{———} & \uparrow 4 \\ \uparrow 15 & \text{———} & \uparrow x \end{array}$$

Agora, para resolvermos a regra de três fazemos:

$$\frac{10}{15} = \frac{4}{x}$$
$$10 \cdot x = 4 \cdot 15$$
$$10 \cdot x = 60$$
$$x = 6$$

Ou seja, para fazer um bolo de chocolate que renda 15 porções, precisamos utilizar 6 colheres de sopa de chocolate em pó.

A situação muda um pouco se tivermos uma proporcionalidade inversa entre as grandezas. Por exemplo: uma empreiteira afirma que consegue edificar uma construção em 20 dias utilizando 6 pedreiros. Caso a construção precise ficar pronta em 10 dias, de quantos pedreiros ela precisaria?

Resolução:

Primeiro identificamos as grandezas envolvidas: pedreiros e dias.

Depois, fazemos a análise das grandezas: se diminuirmos a quantidade de dias, naturalmente precisaremos de uma maior quantidade de pedreiros para compensar. Então a relação entre o número de dias e quantidade de pedreiros é **inversamente proporcional**.

Agora montamos a regra de três para encontrarmos a quantidade de pedreiros necessários para a obra ficar pronta em 10 dias:

$$\begin{array}{ccc} \text{Dias} & & \text{Pedreiros} \\ 20 & \text{———} & 6 \\ 10 & \text{———} & x \end{array}$$

Antes de fazermos as contas, colocamos primeiro uma flecha (para cima ou para baixo) na coluna da incógnita, no nosso exemplo, na coluna dos pedreiros.

$$\begin{array}{ccc} \text{Dias} & & \text{Pedreiros} \\ 20 & \text{———} & \uparrow 6 \\ 10 & \text{———} & \uparrow x \end{array}$$

Como as grandezas são inversamente proporcionais, colocamos uma flecha na coluna dos dias no sentido contrário que na coluna dos dias.

$$\begin{array}{ccc} \text{Dias} & & \text{Pedreiros} \\ \downarrow 20 & \text{———} & \uparrow 6 \\ \downarrow 10 & \text{———} & \uparrow x \end{array}$$

Fazendo as contas da mesma forma que no exemplo anterior, chegaríamos em $x=3$. Ou seja, se quiséssemos reduzir o tempo de obra, precisaríamos de 3 pedreiros?! Claramente, há alguma coisa errada nisso. A proporcionalidade é inversa, então o número de pedreiros deveria aumentar para que o tempo diminuísse!

No caso da regra de três simples com grandezas inversamente proporcionais, uma das colunas precisa ser invertida na hora de montar a conta.

Invertendo a coluna dos dias temos:

$$\frac{10}{20} = \frac{6}{x}$$

$$2\cancel{0} \cdot 6 = 1\cancel{0} \cdot x$$
$$x = 12$$

Ou seja, para realizar a obra em 10 dias, seriam necessários 12 pedreiros, ao invés de 6. O que faz todo o sentido! O resultado seria o mesmo se invertêssemos a outra coluna.

Mas, e se quisermos analisar mais do que duas grandezas? Neste caso devemos usar a Regra de Três Composta.

Regra de Três Composta

Até agora, vimos situações em que somente duas grandezas variavam. Isso caracteriza uma regra de três simples. No entanto, podemos incluir mais grandezas em nossas análises. Poderíamos ter, por exemplo, três grandezas e analisar duas situações onde há proporções entre essas grandezas. Para resolver problemas envolvendo mais do que duas grandezas utilizamos a **regra de três composta**.

Para resolver uma regra de três composta, devemos, primeiramente, **analisar todas as grandezas em relação àquela grandeza onde há a incógnita.**

Essa análise consiste em verificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais em relação à grandeza que possui o valor desconhecido. Identificando as proporções e colocando as flechas nas colunas e montamos uma equação da seguinte forma: mantemos a coluna da incógnita de um lado da igualdade e do outro lado multiplicamos as demais colunas. Deixamos as colunas que possuem a flecha na mesma direção que a coluna que possui a incógnita e invertemos as colunas cujas flechas estão no sentido contrário. Veja um exemplo:

Suponha que a empreiteira disponibilizou 20 pedreiros para realizar uma certa obra. Eles trabalharam durante 15 dias, com um expediente de 6 horas por dia. A fim de agilizar o processo, a empreiteira encaminhou mais 5 pedreiros para ajudarem na obra. Supondo que os pedreiros aumentassem o expediente para 8 horas por dia, em quantos dias eles finalizariam a obra?

Resolução: Primeiramente, perceba que a grandeza que possui o valor que queremos descobrir é o número de dias. Montando as colunas temos:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pedreiros} & & \text{Dias} & & \text{Horas} \\ 20 & — & \uparrow 15 & — & 6 \\ 25 & — & \uparrow x & — & 8 \end{array}$$

Colocamos uma flecha com sentido para cima na coluna do x e faremos duas análises: pedreiros x dias e horas x dias.

Análise 1: Pedreiros x Dias

Supondo que as horas do dia são constantes, se aumentarmos o número de pedreiros, diminuímos a quantidade de dias necessárias. Sendo assim, como as grandezas são inversamente proporcionais, colocamos uma flecha com sentido para baixo na coluna dos pedreiros.

$$\begin{array}{ccc} \text{Pedreiros} & \text{Dias} & \text{Horas} \\ \downarrow 20 & — \uparrow 15 — & 6 \\ \downarrow 25 & — \uparrow x — & 8 \end{array}$$

Análise 2: Horas x Dias

Supondo que o número de pedreiros é constante, se eles trabalharem mais horas por dia, eles precisarão de menos dias para concluir a obra. Sendo assim, como as grandezas são inversamente proporcionais, colocamos uma flecha com sentido para baixo na coluna das horas.

$$\begin{array}{ccc} \text{Pedreiros} & \text{Dias} & \text{Horas} \\ \downarrow 20 & — \uparrow 15 — & \downarrow 6 \\ \downarrow 25 & — \uparrow x — & \downarrow 8 \end{array}$$

Mantendo a coluna da incógnita temos: $\frac{15}{x}$

Como as outras colunas possuem flecha no sentido contrário, invertendo-as temos: $\frac{25}{20}$ e $\frac{8}{6}$

Igualando a razão $\frac{15}{x}$ ao produto $\frac{25}{20} \cdot \frac{8}{6}$ montamos a equação:

$$\frac{15}{x} = \frac{25}{20} \cdot \frac{8}{6}$$

Realizando as operações, temos:

$$\frac{15}{x} = \frac{200}{120}$$
$$200 \cdot x = 120 \cdot 15$$
$$200 \cdot x = 1.800$$
$$x = \frac{1800}{200}$$
$$x = 9$$

Ou seja, na segunda etapa, os pedreiros finalizaram a obra em 9 dias.

Observação:

- Não montamos a regra de três baseados nos números, montamos a regra de três baseados nos **sentidos das flechas**.

ANOTAÇÕES