GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Números Complexos

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Números Complexos

INTRODUÇÃO

Durante o estudo realizado, Bombelli, um matemático italiano, identificou uma nova classe de números, aqueles que resultam da extração da raiz quadrada de um número negativo, os quais ele chamou de números imaginários. A unidade imaginária é determinada por $i = \sqrt{-1}$. Uma característica bem importante de ser observada na unidade imaginária são suas potências:

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i.$$

Exemplo: Para calcular o resultado da potência imaginária i^{2021}, vamos realizar a divisão de 2021 por 4 : $2021 \div 4 = 4 \times 505 + 1$. Logo, o resto da divisão de 2021 por 4 é 1. Portanto, $i^{2021} = i^1 = i$.

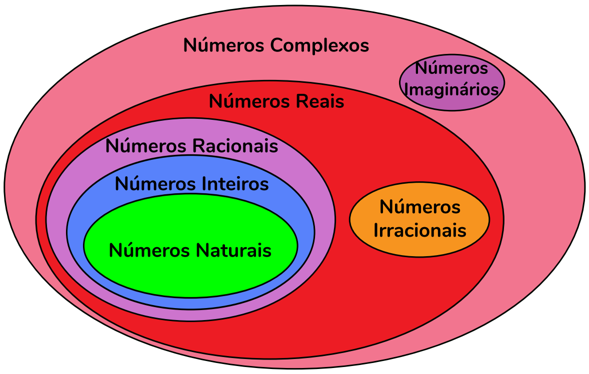
FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O conjunto dos números complexo é o conjunto $\mathbb{C} = \{z \; tal \; que \; z = a + bi, \; a \; e \; b \in \mathbb{R}\}$, ou seja, o número complexo z é da forma $z = a + bi$, com a e b sendo valores reais e i é a unidade imaginária. Um número complexo é composto por duas partes, parte real (a) e a parte imaginária (b).

$$Z = \underbrace{a}_{a \text{ é a parte real}} + \underbrace{b}_{b \text{ é a parte imaginária}} . i$$

O número complexo $z = bi$ é chamado de imaginário puro.

Dessa forma, o diagrama dos conjuntos numéricos passa a ser representado dessa forma.



Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, eles serão iguais se e somente se: $z = w \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

Propriedades:

- Conjugado de z ($\bar{z}$): O conjugado do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$;
- Simétrico de z: O simétrico do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $z = -a + bi$;
- Oposto de z ($-z$): O oposto de do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $-z = -a - bi$;
- Módulo de z ($|z|$): O módulo do número complexo $z = a + bi$ é o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Norma de z ($\|z\|$ ou $|z|^2$): A norma de número complexo $z = a + bi$ é o número real $\|z\| = a^2 + b^2$;

Operações algébricas com números complexos

Adição: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. A soma $z + w$ é dada por: $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Exemplo: $z = 3 + 4i$ e $w = -7 + 5i$. A soma será:

$z + w = (3 + 4i) + (-7 + 5i) = (3 + (-7)) + (4 + 5)i = -4 + 9i$

Subtração: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. A diferença $z - w$ é dada por:
$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Exemplo: $z = 3+4i$ e $w = -7+5i$. A diferença será:
$z - w = (3 + 4i) - (-7 + 5i) = (3 - (-7)) + (4 - 5)i = 10 - i$

Multiplicação: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. O produto é dado pela propriedade distributiva entre $z \cdot w$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&z \cdot w = \\
&=(a + bi) \cdot (c + di) = \\
&=ac + adi + bc\,i + bdi^2 = \\
&=ac + adi + bc\,i + bd\,(-1) = \\
&=ac + adi + bc\,i - bd = \\
&=ac - bd + adi + bc\,i = \\
&=(ac - bd) + (ad + bc)i.
\end{aligned}$$

Exemplo: $z = 3+4i$ e $w = -7+5i$. O produto será:

$$\begin{aligned}
&z \cdot w = \\
&=(3 + 4i) \cdot (-7 + 5i) = \\
&=(3 \cdot (-7) - 4 \cdot 5) + (3 \cdot 5 + 4 \cdot (-7))i = \\
&=[(-21 - 20) + (15 - 28)i] = \\
&=-41 - 13i.
\end{aligned}$$

Divisão: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. O quociente $\frac{z}{w}$, é dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi).(c - di)}{(c + di).(c - di)} =$$

$$= \frac{(a + bi).(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac - bd) + (bc + ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Exemplo: $z = 4 + 5i$ e $w = 2\text{-}3i$. A divisão será:

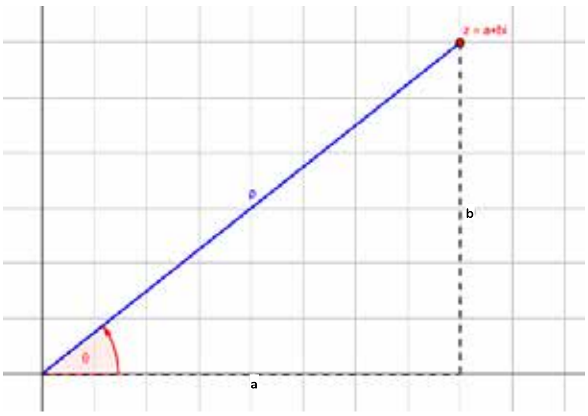
$$\frac{z}{w} = \frac{4 + 5i}{2 - 3i} . \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{(4 + 5i).(2 + 3i)}{2^2 + 3^2} =$$

$$\frac{(4.2 - 5.3) + (5.2 + 4.3)i}{4 + 9} = \frac{-7 + 22i}{13}.$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Um mesmo números complexo, além de sua representação algébrica, existe também sua representação trigonométrica (ou polar). Esse nome se dá pela associação dos números complexos com os conhecidos seno e cosseno. Essa representação é obtida por meio do Plano Complexo, também chamado de Plano de Argand-Gauss. É o mesmo plano cartesiano, com a seguinte adaptação: o eixo das abscissas agora é o eixo da parte real dos números complexos (eixo real) e o eixo das ordenadas é o eixo da parte imaginária (eixo imaginário).

Para cada ponto no plano complexo $z = a + bi$ é possível construir um triângulo retângulo com catetos de tamanho a e b, conforme ilustrado na imagem abaixo, no qual o ponto vermelho representa o número complexo $z = a + bi$, a hipotenusa (segmento azul) sempre terá tamanho igual à $\rho = |z|$ e o ângulo formado entre a hipotenusa e o eixo real é θ.



$$sen\theta = \frac{b}{\rho} \Leftrightarrow sen\theta.\rho = b$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Leftrightarrow cos\theta.\rho = a$$

Se substituirmos esses valores em z, temos: $z = a + bi = cos\theta.\rho + sen\theta.\rho.i = \rho.(cos\theta + sen\theta.i)$. Já ρ nada mais é do que $\sqrt{a^2 + b^2}$, também denotado como $|z|$.

Exemplo: Escrever o número complexo $z=1+i$ na forma trigonométrica.

Para determinarmos sua representação polar, iniciamos por calcular o módulo de cada um deles: $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Na sequência, devemos determinar o valor de θ de modo que $cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \frac{b}{\rho}$, onde temos:

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{\rho} \\ sen\theta = \frac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 45° = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, o valor de θ cujo $cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e o $sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$. Logo,

$$z = \sqrt{2}.(cos45° + isen45°) = \sqrt{2}.(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}).$$

Operações entre Números Complexos na Forma Trigonométrica

Multiplicação: Dado dois números complexos $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, cujas representações polares são $z_1=\rho_1.(cos\theta_1+isen\theta_1)$ e $z_2=\rho_2.(cos\theta_2+isen\theta_2)$. O produto será:

$$z_1.z_2 = \rho_1.(cos\theta_1 + isen\theta_1).\rho_2.(cos\theta_2 + isen\theta_2) = \\ = (\rho_1.\rho_2).(\cos(\theta_1+\theta_2) + isen(\theta_1+\theta_2)).$$

Exemplo: Vamos multiplicar

$$z_1 = \sqrt{2}.(cos45° + isen45°) \text{ e}$$
$$z_2 = 4.(cos90° + isen90°)$$

$$z_1.z_2 = \sqrt{2}.(cos45° + isen45°).4.(cos90° + isen90°) = \\ = (\sqrt{2}.4).(\cos(45°+90°) + isen(45°+90°)) = \\ = 4\sqrt{2}.(cos135° + isen135°).$$

Divisão: Dado dois números complexos $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, cujas representações polares são $z_1=\rho_1.(cos\theta_1+isen\theta_1)$ e $z_2=\rho_2.(cos\theta_2+isen\theta_2)$. O quociente será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1.(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2.(cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + isen(\theta_1-\theta_2)).$$

Exemplo: Vamos dividir $z_1=10.(cos80°+isen80°)$ e $z_2=6.(cos35°+isen35°)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{6}.\frac{(cos80° + isen80°)}{(cos35° + isen35°)} =$$
$$= \frac{5}{3}.(\cos(80°-35°) + isen(80°-35°) =$$
$$= \frac{5}{3}.\cos(45°) + isen(45°).$$

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Potenciação de Números Complexos

A potenciação de números complexos na forma trigonométrica é mais simples do que na forma algébrica e esse será o nosso foco.

Seja $z=\rho.(cos\theta+isen\theta)$, a potência z_n será dada por: $z^n=\rho^n\ (cos(n.\theta)+isen(n.\theta))$, que é conhecida como 1ª Fórmula de Moivre.

Exemplo: Vamos calcular w^3, sendo $w=4i$.

Primeiro temos que transformar o número complexo $w=4i$, que está na forma algébrica, para a forma trigonométrica, onde temos:

$$w = 4.(cos90° + isen90°) = 4.\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right).$$

Agora calculemos a potência w^3, da seguinte forma:

$$w^3 = \left[4.\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)^3\right] =$$
$$= 4^3.\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)^3 =$$
$$= 4^3.\left(\cos\left(3.\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(3.\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$
$$= 64\left(cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right).$$

Radiciação de Números Complexos

A ideia aqui é a mesma que conhecemos para calcular $\sqrt[n]{z}$ e para conseguirmos fazer tal operação recorreremos à 2ª Fórmula de Moivre.

Seja $z=\rho(cos\theta+isen\theta)$, a raiz $\sqrt[n]{z}$ será dada por:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

com $k=\{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Exemplo: Vamos calcular as raízes de $z^4+16=0$, ou seja, $z = \sqrt[4]{-16}$. O primeiro passo é encontrar a forma trigonométrica do número complexo $w=-16$, que é: $w=16.(cos\pi+isen\pi)$.

Agora podemos usar a 2ª Fórmula de Moivre para os valores de $\rho=16$ e $\theta=\pi$, resultando em:

$$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{16}.\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right)$$

Para cada valor de k, obteremos uma raiz $w_{k,}$ assim temos:

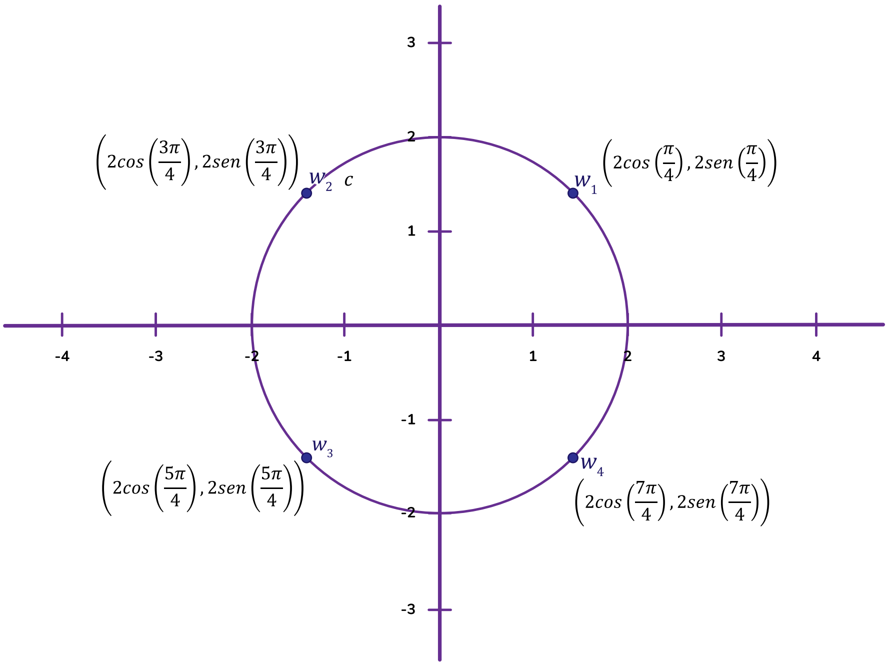
$k = 0$
$w_0 =$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2.0.\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi + 2.0.\pi}{4}\right)\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right).$$

$k = 1$
$w_1 =$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2.1.\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi + 2.1.\pi}{4}\right)\right) = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4}\right).$$

$k = 2$
$w_2 =$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2.2.\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi + 2.2.\pi}{4}\right)\right) = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + isen\frac{5\pi}{4}\right).$$

$k = 3$
$w_3 =$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2.3.\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi + 2.3.\pi}{4}\right)\right) = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + isen\frac{7\pi}{4}\right).$$

Uma característica muito importante das raízes de números complexos é que suas soluções estão sempre sobre uma circunferência no plano Argand-Gauss. No exemplo dado, as raízes estarão sobre uma circunferência de raio 2, pois $\sqrt[n]{\rho} = 2$ sempre determina qual será o raio da circunferência sobre a qual as raízes estão dispostas. A imagem abaixo mostra o resultado:



ANOTAÇÕES