FUNÇÃO: DEFINIÇÃO PROPRIEDADES, DOMÍNIO, IMAGEM E GRÁFICO

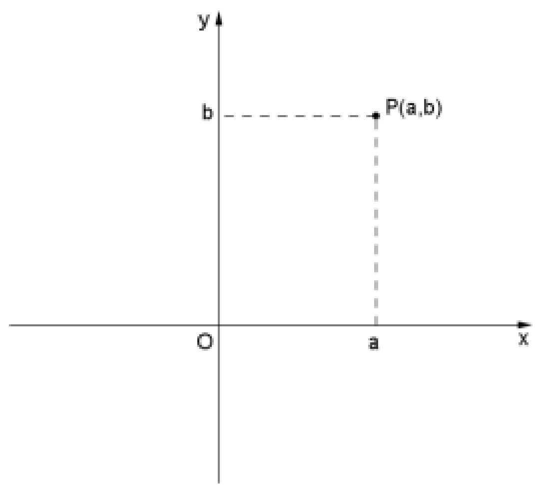
1. PAR ORDENADO E PLANO CARTESIANO

O conceito de par ordenado, denotado por (a,b), é um conceito primitivo sendo um conjunto de dois elementos ordenados.

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, as suas duas coordenadas são iguais.

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$$

Os pares ordenados podem ser representados graficamente em um plano cartesiano ortogonal, onde o primeiro elemento do par ordenado é representado no eixo horizontal Ox (eixo das abscissas) e o segundo elemento do par ordenado é representado no eixo vertical Oy (eixo das ordenadas). Isso pode ser observado na figura a seguir:



Assim, dizemos que o par ordenado (a,b) possui abscissa a e ordenada b.

2. PRODUTO CARTESIANO

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados que têm o primeiro termo em A e o segundo termo em B.

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

Se um dos conjuntos for vazio, o produto cartesiano é vazio, ou seja, $\varnothing \times B = A \times \varnothing = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$.

O produto cartesiano não é comutativo, assim $A \times B \neq B \times A$, quando $A \neq B$.

O produto cartesiano de um conjunto por ele mesmo é denotado por $A^2 = A \times A$.

No caso de dois conjuntos finitos, o número de elementos do produto cartesiano pode ser obtido multiplicando a quantidade de elementos de cada um deles.

$$\mathbf{n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)}$$

Exemplo: $A = \{0,2\}$ e $B = \{1,3,5\}$

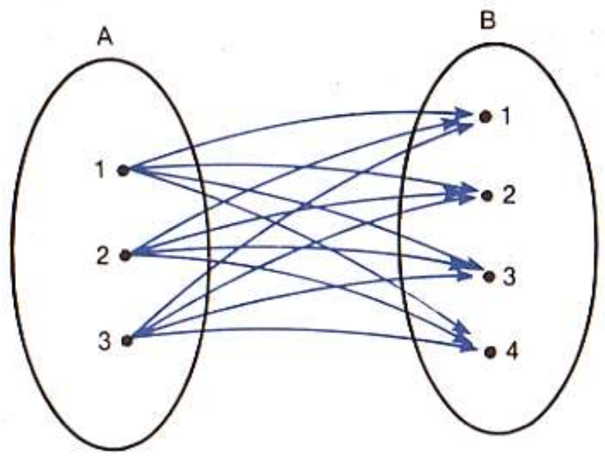
$A \times B = \{(0,1);(0,3);(0,5);(2,1);(2,3);(2,5)\}$

$B \times A = \{(1,0);(1,2);(3,0);(3,2);(5,0);(5,2)\}$

$n(A \times B) = n(B \times A) = 2 \cdot 3 = 6$

É possível representar o produto cartesiano graficamente através de um diagrama de flechas.

Sendo $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, então $A \times B = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4)\}$ terá a representação abaixo.

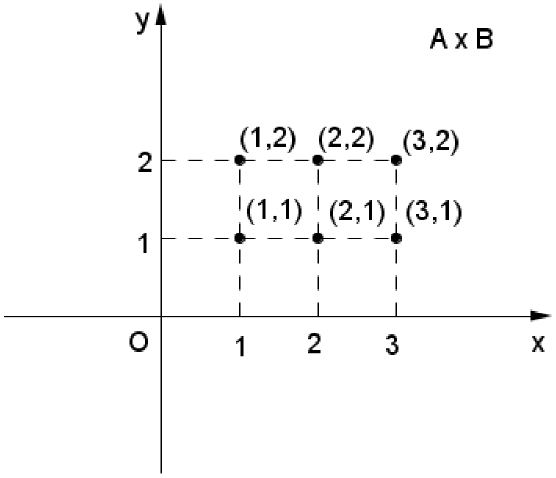


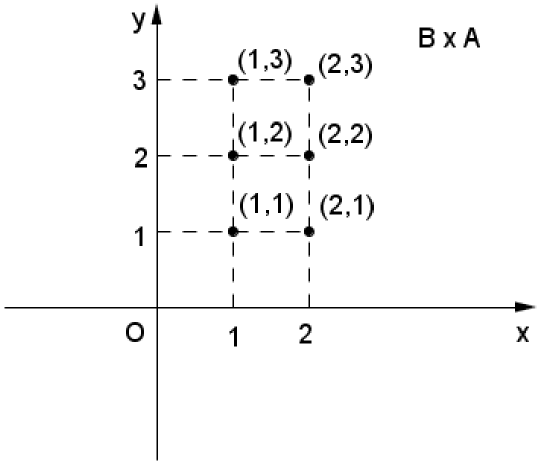
O produto cartesiano pode ser representado graficamente no plano cartesiano ortogonal, através da representação dos pares ordenados que o compõem.

A representação gráfica é útil também para apresentar o resultado do produto cartesiano entre intervalos reais.

EXEMPLO 1:

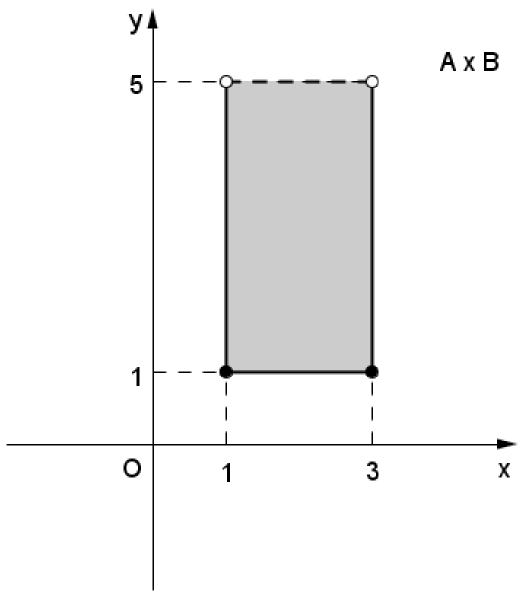
$A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2\}$

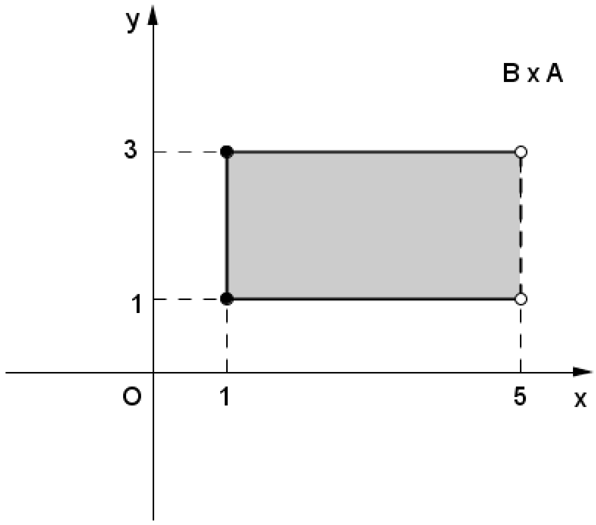




EXEMPLO 2:

$A = [1,3]$ e $B = [1,5[$





Propriedades do produto cartesiano:

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

3. RELAÇÃO

Uma relação R de A em B é qualquer subconjunto de $A \times B$.

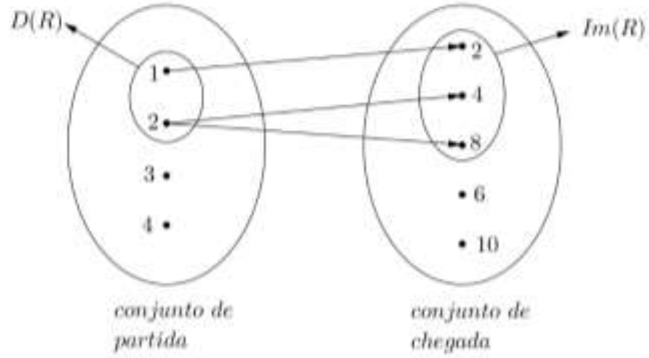
Quando R é uma relação de A em A, diz-se apenas que R é uma relação em A.

Numa relação de A em B, A é chamado **conjunto de partida** e B, **conjunto de chegada**. O conjunto de todas as primeiras coordenadas que pertencem a R é chamado **domínio** e o conjunto de todas as segundas coordenadas que pertencem a R é chamado **imagem**, ou seja, o domínio e a imagem são formados por elementos que efetivamente estão em algum par ordenado da relação.

$$\mathbf{D(R) \subset A \text{ e } Im(R) \subset B}$$

EXEMPLO:

Sejam os conjuntos $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{2,4,6,8,10\}$, então o conjunto $R=\{(1,2);(2,4);(2,8)\}$ é uma relação de A em B, ou seja, $R: A \to B$, cujo domínio é $D(R)=\{1,2\}$ e a imagem $Im(R)=\{2,4,8\}$.



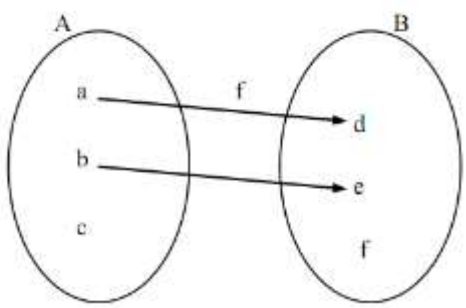
4. FUNÇÃO

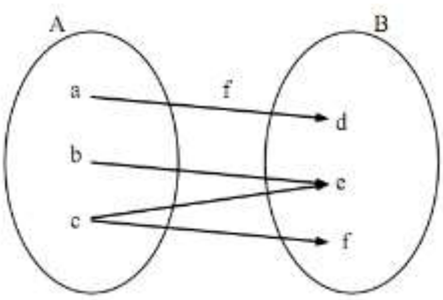
OBSERVAÇÃO

Seja f uma relação de A em B, isto é, $\mathbf{f \subset A \times B}$, dizemos que f é uma função de A em B se, e somente se, para todo elemento $\mathbf{x \in A}$ existe um e apenas um elemento $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$, ou seja, $y = f(x)$.

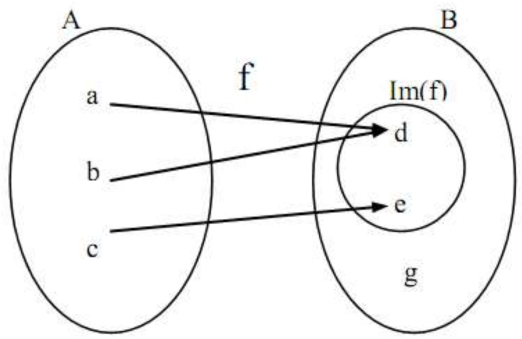
Portanto, para que uma **relação de A em B** seja uma função, exige-se que a cada $x \in A$ esteja associado um único $y \in B$. Entretanto pode existir $y \in B$ que não esteja associado a nenhum elemento pertencente ao conjunto A ou que esteja associado a mais de um elemento de A.

Os dois diagramas seguintes representam relações de A em B, mas não funções de A em B. O primeiro porque existe um elemento de A que não está associado a nenhum elemento de B e o segundo porque existe um elemento de A que está associado a mais de um elemento de B.





O diagrama de flechas a seguir representa uma relação de A em B que também é uma função de A em B.



Domínio de $f: D(f) = A$

Contradomínio de $f: B$

Imagem de $f: \text{Im}(f) \subset B$

A análise do diagrama de flechas permite concluir que: $f(a) = d$, $f(b) = d$ e $f(c) = e$.

O conjunto A é o **domínio** da função f e os seus elementos são os primeiros termos dos pares ordenados que constituem a função e a origem das flechas no diagrama.

O conjunto B é o **contradomínio** de f e os seus elementos são os segundos termos dos pares ordenados do produto cartesiano e os possíveis destinos das flechas.

O conjunto **imagem** é um subconjunto de B formado pelos elementos que são segundos termos dos pares ordenados da função ou o conjunto dos elementos que são efetivamente destino de flechas.

No diagrama anterior se deve observar que deve partir exatamente uma flecha de todo elemento do conjunto A. Já os elementos do conjunto B podem receber uma ou mais flechas ou até não receber nenhuma flecha.

Assim, o fato de $d \in B$ ser imagem de dois elementos a e b de A não é empecilho para que f seja uma função de A em B.

NOTAÇÃO

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

Chamam-se funções reais de variável real, aquelas cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos reais, ou seja, os pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Nesse caso, costuma-se por comodidade definir a função apenas pela “regra de correspondência” e adota-se como domínio o maior subconjunto possível de $\mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO

Em exercícios em que se pede o cálculo do domínio de uma função, em geral, o que se deseja é que seja apresentado o domínio máximo da função, ou seja, o maior conjunto para o qual aquela função está definida.

EXEMPLO:

Qual o domínio das funções a seguir? a) $f(x)=\frac{1}{x+1}$; b) $g(x)=\sqrt{x+1}$.

Vamos identificar o domínio de validade dessas funções, ou seja, o maior subconjunto dos reais para os quais as funções estão definidas.

a) $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

b) $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1 \Rightarrow D_g=[-1,+\infty[$

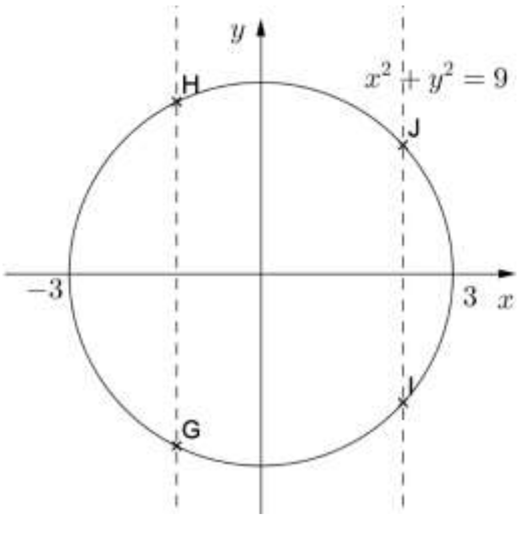
As funções reais de variável real podem ser representadas graficamente no plano cartesiano ortogonal. O **gráfico da função** é composto por todos os pares ordenados que compõem a função.

PROBIZU

Em virtude da definição de função, toda reta vertical, que passa por um ponto do domínio, intersecta o gráfico da função em exatamente um ponto.

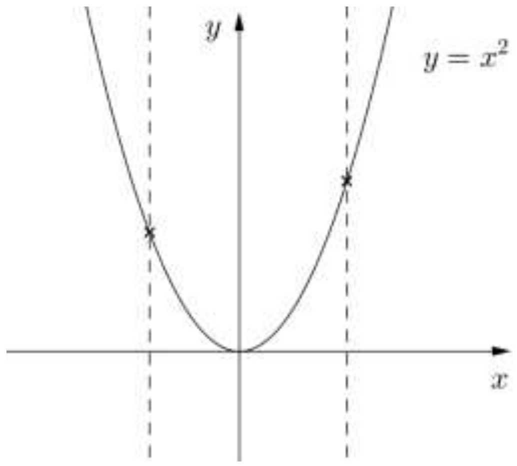
EXEMPLO 1:

A relação dada por $x^2 + y^2 = 9$ não é função, pois há retas verticais que intersectam o seu gráfico em dois pontos.

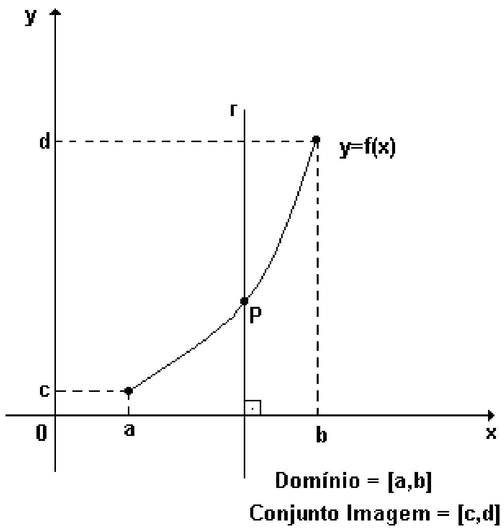


EXEMPLO 2:

A relação $y = x^2$ é uma função, pois as retas verticais traçadas a partir de pontos do domínio intersectam o gráfico em exatamente um ponto, ou seja, cada elemento do domínio possui exatamente uma imagem.

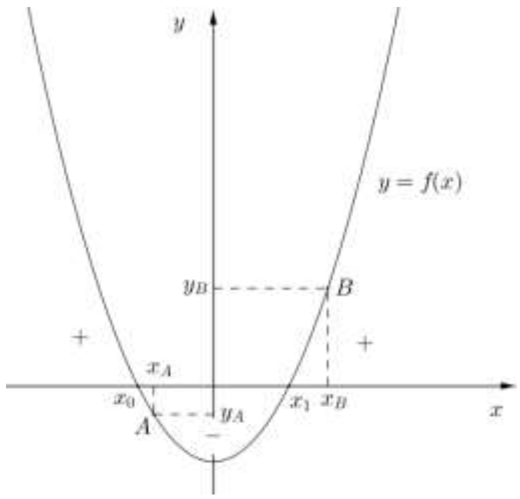


A análise do gráfico da função permite identificar o seu domínio e a sua imagem, como pode ser visto a seguir:



Zero ou **raiz** da função f é o número $x \in D(f)$, cuja imagem é nula, isto é, f (x) = 0. Esses pontos são os pontos onde o gráfico da função f intersecta o eixo das abscissas (Ox).

É possível também identificar o sinal da função em cada trecho do domínio. Os pontos de imagem positiva encontram-se acima do eixo das abscissas (parte positiva do eixo das ordenadas) e os de imagem negativa abaixo (parte negativa do eixo das ordenadas).



No gráfico acima, x_0 e x_1 são raízes. O ponto A tem ordenada $y_A < 0$ e o ponto B ordenada $y_B > 0$. Além disso, $f(x) > 0$ para $x < x_0$ ou $x > x_1$, e $f(x) < 0$ para $x_0 < x < x_1$.

Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas, cada uma das quais associada a um domínio $D_i \subset D_f$.

Exemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{para} \quad x \ge 1 \end{cases}$.

Duas funções f e g são **iguais** se, e somente se, têm o mesmo domínio e $f(x) = g(x)$ para todo x no domínio. Isso é equivalente a dizer que todos os pares ordenados que compõem as funções são iguais.

Assim, $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ são diferentes, pois $D_f = \mathbb{R} \neq \mathbb{R} - \{1\} = D_g$. Por outro lado, $f(x) = x + 1$ e $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 2 \quad , & \text{se } x = 1 \end{cases}$ são iguais, pois possuem o mesmo domínio $\mathbb{R}$ e o mesmo valor em todos os pontos.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (EPCAR 1989) No produto cartesiano $M \times P = \{(2,3);(4,1);(5,3);(4,0);(5,1);(2,1);(4,3);(2,0);(x,y)\}$, conclui-se que:

a) $x = 0$ e $y = 5$

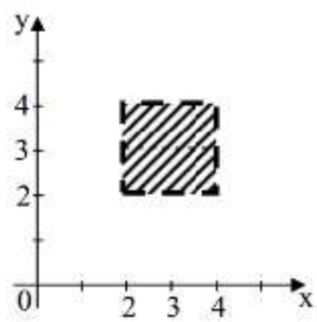
b) $x = 0$ e $y = 4$

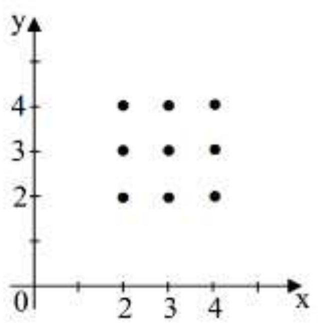
c) $x = 4$ e $y = 2$

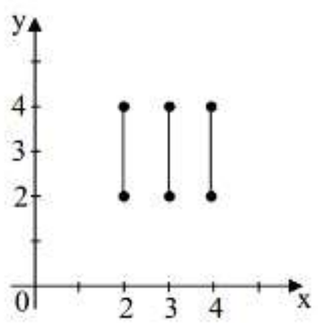
d) $x = 5$ e $y = 0$

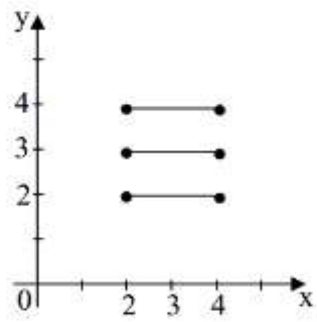
e) $x = 5$ e $y = 2$

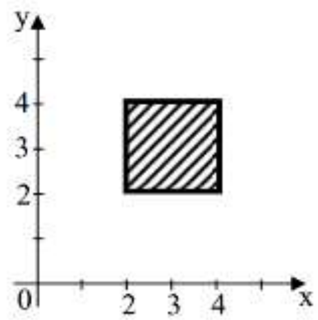
2. (CMRJ 2004) A alternativa que representa o gráfico do conjunto $B \times A$ onde $A = \{2,3,4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 4\}$:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

3. (CMRJ 2011) Nos pulmões, o ar atinge a temperatura do corpo. O ar exalado tem temperatura inferior à do corpo, já que é resfriado nas paredes do nariz. Cientistas realizaram medidas com um pequeno pássaro do deserto e concluíram que a temperatura do ar exalado é uma função da temperatura ambiente. (Baseado em estudos científicos divulgados pelo livro “Introdução à Matemática para Biocientistas”, de E. Batschelet). Para uma temperatura ambiente T_A medida em graus Celsius, tal que $20^\circ\, C < T_A < 40^\circ\, C$, a temperatura do ar exalado T_E é dada por $T_E = 8{,}5 + 0{,}8 \cdot T_A$.

Considerando apenas os valores inteiros para a variável T_A, a razão entre o maior e o menor valores obtidos para T_E será aproximadamente igual a:

a) 1,57

b) 1,65

c) 1,75

d) 1,86

e) 2

4. (EsPCEx 2012) Na Física, as leis de Kepler descrevem o movimento dos planetas ao redor do Sol. Define-se como período de um planeta o intervalo de tempo necessário para que este realize uma volta completa ao redor do Sol. Segundo a terceira lei de Kepler, “Os quadrados dos períodos de revolução (T) são proporcionais aos cubos das distâncias médias (R) do Sol aos planetas”, ou seja, $T^2 = kR^3$, em que k é a constante de proporcionalidade.

Sabe-se que a distância do Sol a Júpiter é 5 vezes a distância Terra-Sol; assim, se denominarmos T ao tempo necessário para que a Terra realize uma volta em torno do Sol, ou seja, ao ano terrestre, a duração do “ano” de Júpiter será:

a) $3\sqrt{5}T$

b) $5\sqrt{3}T$

c) $3\sqrt{15}T$

d) $5\sqrt{5}T$

e) $3\sqrt{3}T$

5. (UNESP 2005) Uma pessoa parte de carro de uma cidade X com destino a uma cidade Y. Em cada instante t (em horas), a distância que falta para percorrer até o destino é dada, em dezenas de quilômetros, pela função D, definida por:

$$D(t) = 4 \cdot \left(\frac{t+7}{t^2+1} - 1 \right)$$

Considerando o percurso da cidade X até a cidade Y, a distância, em média, por hora, que o carro percorreu foi:

a) 40 km

b) 60 km

c) 80 km

d) 100 km

e) 120 km

6. (EsPCEx 2002) Se o domínio da função $f(x) = (x^2 - 9) \cdot (x^2 - 4) \cdot x^2$ e $D(f) = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$, pode-se dizer que seu conjunto imagem possui:

a) exatamente 5 elementos;

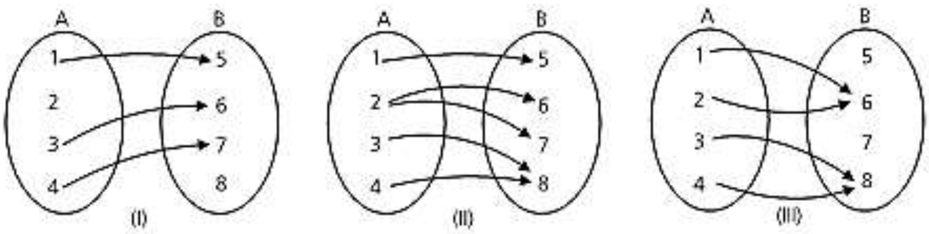
b) exatamente 4 elementos;

c) exatamente 3 elementos;

d) um único elemento;

e) exatamente 2 elementos.

7. (CMRJ 2000) Cada figura abaixo, mostra uma relação binária de $A=\{1,2,3,4\}$ em $B=\{5,6,7,8\}$.



Neste caso, podemos afirmar que:

a) (I), (II) e (III) são funções de A em B.

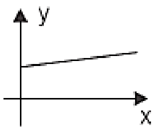
b) (I), (II) e (III) não são funções de A em B.

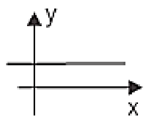
c) Somente (III) é uma função de A em B.

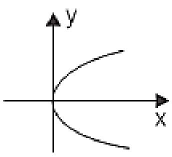
d) Somente (II) não é uma função de A em B.

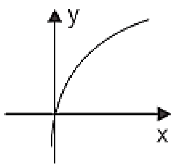
e) Somente (I) não é uma função de A em B.

8. (EPCAR 2000) Qual dos gráficos NÃO representa uma função?

a) 

b) 

c) 

d) 

9. (AFA 2001) O domínio da função real expressa pela lei $f(x)=\sqrt{x\left[(x+1)^{-1}-(x-1)^{-1}\right]}$ é $x\in\mathbb{R}$, tal que:

a) $x<-1$ ou $0\le x<1$

b) $-1<x\le 0$ ou $x>1$

c) $x<-1$ ou $0<x<1$

d) $-1<x<0$ ou $x>1$

10. (AFA 2003) Com relação à função real f definida por $f(x)=\dfrac{-x-5+\dfrac{12}{x+1}}{-\dfrac{x+9}{x+1}+\dfrac{5}{x}}$ é correto afirmar que:

a) o domínio de f é $\mathbb{R}-\{-5,-1,0\}$.

b) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=7$.

c) $f(x)>0 \Leftrightarrow -7<x<-5$ ou $x>0$.

d) $f(x)<0 \Leftrightarrow x<-7$ ou $-5<x<0$ e $x\neq -1$.

11. (EsPCEx) A função f, de domínio real mais amplo possível, é tal que $f(x)=\dfrac{ax+b-5}{ax+3b}$. Sabendo que f (3) não existe e $f(-1)=1$, o valor de a^2+b^2 é:

a) $\dfrac{50}{16}$

b) $\dfrac{25}{3}$

c) $\dfrac{25}{2}$

d) $\dfrac{50}{8}$

e) $\dfrac{50}{9}$

12. Sejam o número real a tal que $0<a<1$ e a função $f(x)=(x-a)^{-1}-(x-a^2)^{-1/3}+(x-a^3)^{-1/2}$. O domínio máximo da função f é:

a) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>a^2 \text{ e } x\neq a\}$

b) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq a^2 \text{ e } x\neq a\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq a^3 \text{ e } x\neq a^2 \text{ e } x\neq a\}$

d) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>a^3 \text{ e } x\neq a^2 \text{ e } x\neq a\}$

e) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>a\}$

13. (CMRJ 2003) Seja D o domínio da função: $f(x)=\sqrt{\dfrac{(2x^2-7x+6)\cdot(2x^2-7x+5)}{x^2-5x-6}}$. O complementar de D em relação a $\mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, é:

a) $]-\infty,-1[\cup\left[1,\frac{3}{2}\right]\cup]6,+\infty[$

b) $]-\infty,1[\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

c) $[-1,1[\cup\left]\frac{3}{2},2\right[\cup\left]\frac{5}{2},6\right]$

d) $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup[2,+\infty[$

e) $\left]-1,\frac{3}{2}\right[\cup\left]2,\frac{5}{2}\right]\cup[6,+\infty[$

14. (EsPCEx 2000) Pode-se afirmar que a função real $y=\frac{(2x^2-x-1)\cdot(x+3)}{x^2+2x-3}$, após convenientemente simplificada, é equivalente a:

a) $y=2x+1$ para $\mathbb{R}-\{-3,1\}$

b) $y=x^2+1$ para $\mathbb{R}-\{-3,1\}$

c) $y=2x-1$ para $\mathbb{R}-\{-1,3\}$

d) $y=x+\frac{1}{2}$ para $\mathbb{R}-\{-1,3\}$

e) $y=2x+1$ para $\mathbb{R}$

15. (EsPCEx 2003) Sejam f e g funções de A em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ e $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$. Nessas condições, pode-se afirmar que $f=g$ se:

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-1 \text{ ou } x\geq 1\}$

b) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq -1\}$

c) $A=\mathbb{R}$

d) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 1\}$

e) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-1\}$

16. (AFA 2002) Seja f uma função definida para todo real, satisfazendo as seguintes condições: $\begin{cases} f(3)=2 \\ f(x+3)=f(x)\cdot f(3) \end{cases}$. Então $f(-3)+f(0)$ vale:

a) –6

b) 1

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{2}$

17. (EN 2014) Considere f uma função real de variável real tal que:

(1) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

(2) $f(1)=3$

(3) $f(\sqrt{2})=2$

Então $f(2+3\sqrt{2})$ é igual a:

a) 108

b) 72

c) 54

d) 36

e) 12

18. (IME 2007) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, tal que $\begin{cases} f(4)=5 \\ f(x+4)=f(x)\cdot f(4) \end{cases}$.
O valor de $f(-4)$ é:

a) $-\frac{4}{5}$

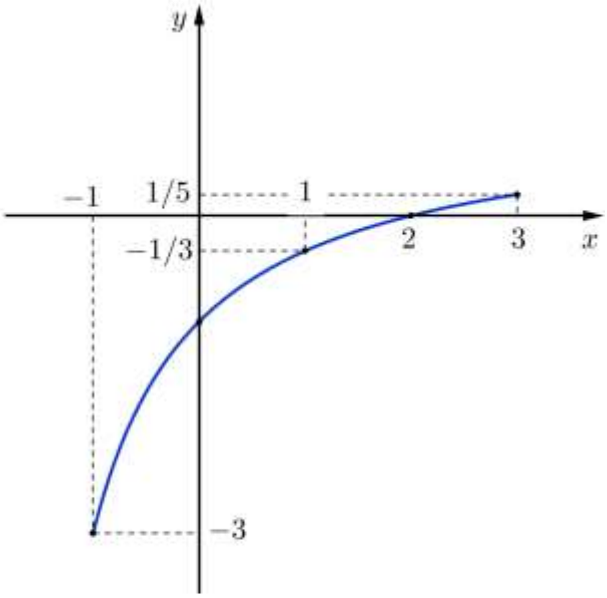
b) $-\frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{4}{5}$

19. (FUVEST 2002) $f(x)=\frac{x+a}{bx+c}$ para $-1\le x\le 3$.



Pode-se concluir que o valor de b é:

a) –2

b) –1

c) 0

d) 1

e) 2

20. (UFRN 2005) Duas partículas se movimentam no plano de acordo com as trajetórias dadas pelas funções $f(t)=t^3$ e $g(t)=2t+1$. Após uma delas cruzar a origem, o instante t em que elas se encontram tem o valor de:

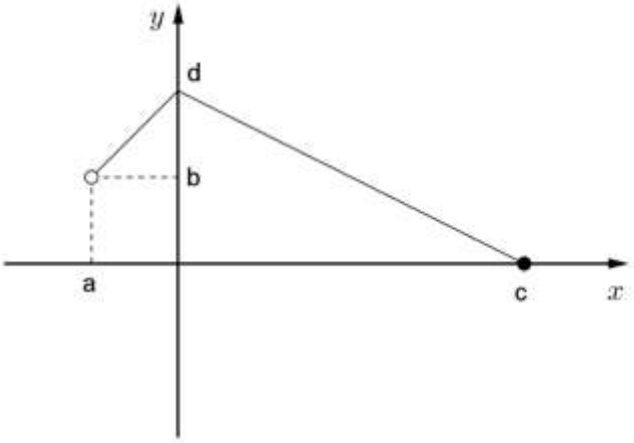
a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{1+\sqrt[3]{5}}{2}$

c) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{1-\sqrt[3]{5}}{2}$

21. (EPCAR 2000) Observe o gráfico da função real g e assinale a alternativa verdadeira.



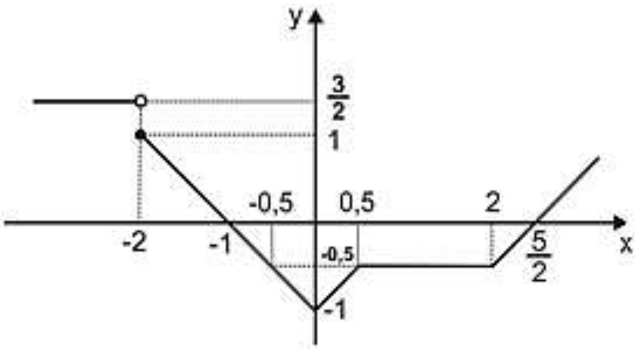
a) $g(a)=d$

b) Suas raízes são os reais b e c.

c) Seu conjunto imagem é $Im=\{y\in\mathbb{R}\,|\,0\le y\le b\}$.

d) Seu domínio é o conjunto $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le c\}$.

22. (AFA 2005) Seja f a função real cujo gráfico se apresenta a seguir:



Analisando o gráfico, é INCORRETO afirmar que:

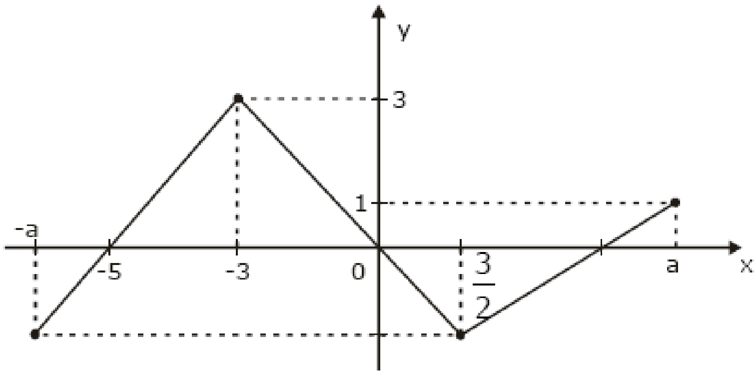
a) $f(f(1))=f(0{,}5)$.

b) $f(x)+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $f(0)\le f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

d) se $g(x)=f(x)-1$, então $g(-2)=f\left(\frac{5}{2}\right)$.

23. (AFA 2008) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função real $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, onde $f(0)=0$.



Analise as alternativas abaixo e marque a INCORRETA.

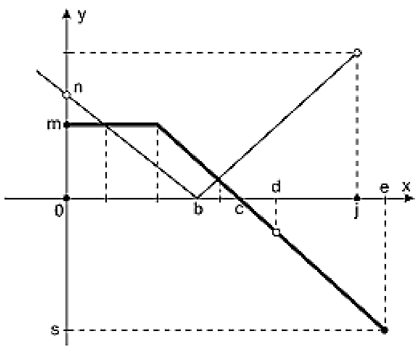
a) O domínio da função $r:E\to\mathbb{R}$ tal que $r(x)=f(x)-3$ é o intervalo $[-6,6]$.

b) A função $r:E\to\mathbb{R}$ tal que $r(x)=f(x)-3$ NÃO possui raízes em $\mathbb{R}$.

c) O conjunto imagem da função $h:A\to B$, definida por $h(x)=f(x)+\frac{3}{2}$ é $\text{Im}=\left[0,\frac{9}{2}\right]$.

d) Se a função $s:D\to\mathbb{R}$ é tal que $s(x)=f\left(x+\frac{3}{2}\right)$, então $s(0)=-\frac{3}{2}$.

24. (AFA2 2012) Considere os gráficos abaixo das funções reais f e g tais que seus domínios são $D(f)=]-\infty,j]$, $D(g)=[0,e]-\{d\}$ e $f(j)=f(0)=0$.



Considere a função h definida por $h(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$. O domínio mais amplo possível para a função h é:

a) $[0,b]$

b) $]0,j[$

c) $[c,j]-\{d\}$

d) $[0,c[\cup\{j\}$

25. (AFA 2012) Considere a função real $g: A \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x}$. Sabendo-se que o conjunto A é o mais amplo possível, é verdade que:

a) $\exists x \in A$ tal que $g(x) = -1$

b) se $h(x) = -1 + |g(x)|$, então h possui raiz real.

c) se $0 < x < 1$, então $-1 < g(x) < 0$

d) $\exists x \in]-\infty, -2[$ tal que $g(x) > 3$

26. (CMRJ 2004) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se x é racional} \\ -1, & \text{se x é irracional} \end{cases}$.

O valor de $f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(\pi) + f(2{,}1313\ldots) - f\left(\sqrt{2}\right) + f(3{,}14)$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

27. (UERJ 2002) Uma panela, contendo um bloco de gelo a –40º C, é colocada sobre a chama de um fogão. A evolução da temperatura T, em graus Celsius, ao longo do tempo x, em minutos, é descrita pela seguinte função real:

$$T(x) = \begin{cases} 20x - 40 & \text{se } 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \le x \le 10 \\ 10x - 100 & \text{se } 10 < x \le 20 \\ 100 & \text{se } 20 < x \le 40 \end{cases}$$

O tempo necessário para que a temperatura da água atinja 50º C, em minutos, equivale a:

a) 4,5

b) 9,0

c) 15,0

d) 30,0

28. (ITA 2010) Considere conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ e $C \subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são domínios das funções reais definidas por $\ln\left(x - \sqrt{\pi}\right)$, $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que:

a) $C = \left]\sqrt{\pi}, 5\right[$

b) $C = [2, \pi]$

c) $C = [2, 5[$.

d) $C = [\pi, 4]$

e) C não é intervalo.

GABARITO

1. Analisando os primeiros e segundos elementos dos pares ordenados de $M \times P$, temos $M = \{2,4,5\}$ e $P = \{0,1,3\}$.

O par ordenado que falta no produto cartesiano é $(x,y) = (5,0) \Leftrightarrow x = 5 \wedge y = 0$.

RESPOSTA: D

2. A representação gráfica de $B \times A$ compreende a região entre as retas x = 2 e x = 4 e de ordenadas 2, 3 e 4. Logo, será o conjunto de três segmentos de reta horizontais representado na alternativa d.

RESPOSTA: D

3. $20^\circ\ C < T_A < 40^\circ\ C$

A função que relaciona T_E e T_A é uma função crescente. Assim, os valores mínimo e máximo de T_E ocorrem para T_A igual a 21°C e 39°C.

$$(T_E)_{MIN} = 8,5 + 0,8 \cdot 21 = 25,3^\circ\ C$$

$$(T_E)_{MAX} = 8,5 + 0,8 \cdot 39 = 39,7^\circ\ C$$

$$\frac{(T_E)_{MAX}}{(T_E)_{MIN}} = \frac{39,7}{25,3} = 1,57$$

RESPOSTA: A

4. Seja R' a distância do Sol-Júpiter e R a distância Terra-Sol, então R' = 5R.

Sabe-se que $T^2 = kR^3$ e sendo T' o "ano" de Júpiter, temos:

$$(T')^2 = k(R')^3 = k(5R)^3 = 125kR^3 = 125T^2 \Leftrightarrow T' = 5\sqrt{5}T$$

RESPOSTA: D

5. Em t = 0, o carro encontra-se na cidade X, então: $D(0) = 4 \cdot \left(\frac{0+7}{0^2+1} - 1 \right) = 24$.

Logo, a distância entre X e Y é $24 \cdot 10 = 240\,\text{km}$.

Quando D (t) = 0, o carro está em Y. Assim,

$$D(t) = 4 \cdot \left(\frac{t+7}{t^2+1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = -2$$

Como $t \geq 0$, então t = 3 h.

Portanto, o carro percorre, em média, por hora $\frac{240\text{ km}}{3} = 80\text{ km}$.

RESPOSTA: C

6.

$f(-3) = (9-9)\cdot(9-4)\cdot 9 = 0$

$f(-2) = (4-9)\cdot(4-4)\cdot 4 = 0$

$f(0) = (0-9)\cdot(0-4)\cdot 0 = 0$

$f(2) = (4-9)\cdot(4-4)\cdot 4 = 0$

$f(3) = (9-9)\cdot(9-4)\cdot 9 = 0$

$\text{Im}(f) = \{0\}$

RESPOSTA: D

7.

(I) Não é função de A em B, pois o elemento 2 do domínio não possui imagem.

(II) Não é função de A em B, pois o elemento 2 do domínio possui duas imagens.

(III) É função de A em B, pois cada elemento do domínio possui exatamente uma imagem.

RESPOSTA: C

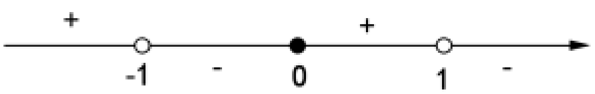
8. O gráfico da alternativa (c) não é uma função, pois há retas verticais que cortam o gráfico em dois pontos, ou seja, há pontos no domínio que têm duas imagens, o que é incompatível com a definição de função.

RESPOSTA: C

9.

$$f(x) = \sqrt{x\left[(x+1)^{-1} - (x-1)^{-1}\right]} = \sqrt{x\cdot\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)}$$

$$x\cdot\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x\cdot\frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$



$\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee 0 \leq x < 1\}$

RESPOSTA: A

10.

$$f(x)=\frac{-x-5+\frac{12}{x+1}}{-\frac{x+9}{x+1}+\frac{5}{x}}=\frac{\frac{-x^2-6x-5+12}{x+1}}{\frac{-x^2-9x+5x+5}{x(x+1)}}=\frac{-(x+7)(x-1)}{x+1}\cdot\frac{x(x+1)}{-(x+5)(x-1)}=\frac{x(x+7)}{x+5}$$

Restrições do domínio:

$x\neq 0$

$x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

$-\frac{x+9}{x+1}+\frac{5}{x}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+5)(x-1)}{x(x+1)}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -5$ ou $x\neq 1$

a) F: $D_f=\mathbb{R}-\{-5,-1,0,1\}$

b) F: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-7$

c) F: $f(x)>0 \Leftrightarrow -7<x<-5 \vee (x>0 \wedge x\neq 1)$

d) V: $f(x)<0 \Leftrightarrow x<-7 \vee (-5<x<0 \wedge x\neq -1)$

RESPOSTA: D

11. Se f (3) não existe, então $a\cdot 3+3b=0 \Leftrightarrow b=-a$.

$$f(-1)=1 \Leftrightarrow f(-1)=\frac{a\cdot(-1)+(-a)-5}{a\cdot(-1)+3\cdot(-a)}=\frac{-2a-5}{-4a}=1 \Leftrightarrow a=\frac{5}{2}$$

$$a^2+b^2=a^2+(-a)^2=2a^2=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

RESPOSTA: C

12.

$$f(x)=(x-a)^{-1}-\left(x-a^2\right)^{-1/3}+\left(x-a^3\right)^{-1/2}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{\sqrt[3]{x-a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x-a^3}}$$

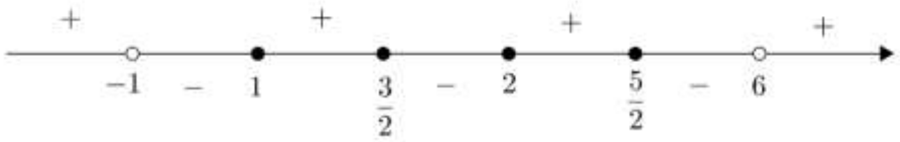
$$\begin{cases} x-a\neq 0 \Leftrightarrow x\neq a \\ x-a^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq a^2 \\ x-a^3>0 \Leftrightarrow x>a^3 \end{cases}$$

$$0<a<1 \Rightarrow 0<a^3<a^2<a \Rightarrow D(f)=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x>a^3 \text{ e } x\neq a^2 \text{ e } x\neq a\right\}$$

RESPOSTA: D

13. Para que f (x) esteja definida, devemos ter $\frac{\left(2x^2-7x+6\right)\cdot\left(2x^2-7x+5\right)}{x^2-5x-6} \geq 0$.

Vamos dispor as raízes do numerador (bolas fechadas) e do denominador (bolas abertas) sobre a reta real.



Assim, temos $D = \left]-\infty,-1\right[\cup \left[1,\frac{3}{2}\right] \cup \left[2,\frac{5}{2}\right] \cup \left]6,+\infty\right[$ e $C_{\mathbb{R}}{}^{D} = \mathbb{R} - D = \left[-1,1\right[\cup \left]\frac{3}{2},2\right[\cup \left]\frac{5}{2},6\right]$.

RESPOSTA: C

14.

$$y = \frac{(2x^2-x-1)\cdot(x+3)}{x^2+2x-3} = \frac{(2x+1)(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-1)} = 2x+1, \text{ se } x \neq -3 \text{ e } x \neq 1$$

$$D = \mathbb{R} - \{-3,1\}$$

RESPOSTA: A

15.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x \geq 1$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

As funções f e g, quando definidas, possuem o mesmo valor. Para que sejam iguais devem possuir o mesmo domínio. Isso é possível para $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.

RESPOSTA: D

16.

$$x = 0 \Rightarrow f(0+3) = f(0)\cdot f(3) \Leftrightarrow 2 = f(0)\cdot 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3+3) = f(-3)\cdot f(3) \Leftrightarrow 1 = f(-3)\cdot 2 \Leftrightarrow f(-3) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(-3) + f(0) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

RESPOSTA: D

17.

$f(2+3\sqrt{2})=f(2)\cdot f(3\sqrt{2})$

$f(2)=f(1+1)=f(1)\cdot f(1)=3\cdot 3=9$

$f(3)=f(2+1)=f(2)\cdot f(1)=9\cdot 3=27$

$f(2\sqrt{2})=f(\sqrt{2}+\sqrt{2})=f(\sqrt{2})\cdot f(\sqrt{2})=2\cdot 2=4$

$f(3\sqrt{2})=f(2\sqrt{2}+\sqrt{2})=f(2\sqrt{2})\cdot f(\sqrt{2})=4\cdot 2=8$

$f(2+3\sqrt{2})=f(2)\cdot f(3\sqrt{2})=9\cdot 8=72$

RESPOSTA: B

18.

$x=0: f(0+4)=f(0)\cdot f(4)\Leftrightarrow 5=f(0)\cdot 5\Leftrightarrow f(0)=1$

$x=-4: f(-4+4)=f(-4)\cdot f(4)\Leftrightarrow f(0)=f(-4)\cdot f(4)\Leftrightarrow 1=f(-4)\cdot 5\Leftrightarrow f(-4)=\frac{1}{5}$

RESPOSTA: D

19. A análise do gráfico mostra que os pontos $(-1,-3)$; $(0,-1)$ e $(2,0)$ pertencem à função. Assim,

$(2,0)\in f\Rightarrow f(2)=0\Rightarrow \frac{2+a}{b\cdot 2+c}=0\Leftrightarrow a=-2$

$(0,-1)\in f\Rightarrow f(0)=-1\Rightarrow \frac{0+a}{b\cdot 0+c}=-1\Rightarrow \frac{-2}{c}=-1\Leftrightarrow c=2$

$(-1,-3)\in f\Rightarrow f(-1)=-3\Rightarrow \frac{-1-2}{b\cdot(-1)+2}=-3\Leftrightarrow b=1$

RESPOSTA: D

20.

$f(t)=g(t)\Leftrightarrow t^3=2t+1\Leftrightarrow t^3-2t-1=0\Leftrightarrow (t+1)(t^2-t-1)=0\Leftrightarrow t=-1 \ \vee \ t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Como é citado o primeiro cruzamento após a origem, deve ser tomada a menor raiz positiva. Nesse caso, a única raiz positiva é $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

RESPOSTA: A

21.

a) FALSA: g (a) não está definido.

b) FALSA: a única raiz é c.

c) VERDADEIRA

d) FALSA: $D=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le c\}$

RESPOSTA: C

22.

a) CORRETA

$f(1)=-0,5\Rightarrow f(f(1))=f(-0,5)=-0,5=f(0,5)$

b) INCORRETA

$f(x)\ge -1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)+1\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

c) CORRETA

$f(x)\ge f(0)=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

d) CORRETA

$g(-2)=f(-2)-1=1-1=0=f\left(\frac{5}{2}\right)$

RESPOSTA: B

23. No intervalo $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$, f é uma função afim tal que $f(0)=0$ e $f(-3)=3$. Portanto, a função é dada por $f(x)=-x$ e $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$.

No intervalo $[-a,-3]$, f é uma função afim tal que $f(-5)=0$ e $f(-3)=3$. Podemos escrever f na forma $f(x)=k(x+5)\Rightarrow f(-3)=k\cdot(-3+5)=3\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$.

Portanto, $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$. Sabemos ainda que $f(-a)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\cdot(-a)+\frac{15}{3}=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=6$.

No intervalo $\left[\frac{3}{2},6\right]$, f é uma função afim tal que $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$ e $f(6)=1$.

Assim, podemos escrever f na forma $f(x)=m(x-6)+1 \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=m\left(\frac{3}{2}-6\right)+1=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{9}{2}m=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow m=\frac{5}{9}$.

Portanto, $f(x)=\frac{5}{9}x-\frac{7}{3}$.

RESPOSTA: B

24. Assim, $f:[-6,6]\to\mathbb{R}$ é dada por $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}, & \text{se } x\in[-6,-3[\\ -x, & \text{se } x\in\left[-3,\frac{3}{2}\right[\\ \frac{5}{9}x-\frac{7}{3}, & \text{se } x\in\left[\frac{3}{2},6\right]\end{cases}$

a) CORRETA

O domínio de $r(x)=f(x)-3$ é o mesmo de f, ou seja, $D_r=D_f=[-6,6]$.

b) INCORRETA

x = -3 é raiz de r, pois $r(-3)=f(-3)-3=3-3=0$.

c) CORRETA

A função $h(x)=f(x)+\frac{3}{2}$ é obtida deslocando-se o gráfico de f $\frac{3}{2}$ unidades para cima. Como $Im_f=\left[-\frac{3}{2},3\right]$, então $Im_h=\left[0,\frac{9}{2}\right]$.

d) CORRETA

$s(0)=f\left(0+\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

RESPOSTA: D

25. Inicialmente, observemos que a linha menos espessa representa a função f e a mais espessa a função g, e que $D(h)\subset D(f)\cap D(g)$.

Devemos ter $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$ o que implica $x\in[0,c]\cup\{j\}$ e $g(x)\neq 0$ o que implica $x\neq c$. Portanto, $D(h)=[0,c[\cup\{j\}$.

RESPOSTA: C

26. $x^2+x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \wedge x\neq -1 \Rightarrow A=\mathbb{R}-\{0,-1\}$

a) **FALSA**

$g(x)=\frac{x^2-x}{x^2+x}=-1 \Leftrightarrow x^2-x=-x^2-x \Leftrightarrow x=0\notin A$

Logo, $\nexists x \in A$ tal que $g(x) = -1$.

b) **FALSA**

$$h(x) = -1 + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 1 \Leftrightarrow g(x) = \pm 1$$

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 + x \Leftrightarrow x = 0 \notin A$$

Logo, a equação $h(x) = -1 + |g(x)|$ não possui raiz real.

c) **VERDADEIRA**

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{x^2 + x - 2x}{x(x+1)} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 < x + 1 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow -2 < \frac{-2}{x+1} < -1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < g(x) < 0$$

d) **FALSA**

$$x < -2 \Leftrightarrow x + 1 < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > -1 \Leftrightarrow \frac{-2}{x+1} < 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x+1} < 3 \Leftrightarrow g(x) < 3$$

RESPOSTA: D

27.

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\pi \in I \Rightarrow f(\pi) = -1$$

$$2{,}1313\ldots = \frac{211}{99} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(2{,}1313\ldots) = 1$$

$$\sqrt{2} \in I \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right) = -1$$

$$3{,}14 \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(3{,}14) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + f(\pi) + f(2{,}1313\ldots) - f\left(\sqrt{2}\right) + f(3{,}14) = 1 + (-1) + 1 - (-1) + 1 = 3$$

O processo se inicia no tempo $x = 0$, pois $T(0) = 2 \cdot 0 - 40 = -40$, e termina no tempo $x = 15$, pois $T(15) = 10 \cdot 15 - 100 = 50$.

Assim, o tempo decorrido é 15 min.

RESPOSTA: C

28. Domínio de $\ln\left(x - \sqrt{\pi}\right)$: $x - \sqrt{\pi} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{\pi} \Rightarrow A \cup B = \left]\sqrt{\pi}, +\infty\right[$

Domínio de $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$: $-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow A \cap C = [2,4]$

Domínio de $\sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}$: $\frac{x-\pi}{5-x} \geq 0$ e $5-x \neq 0 \Leftrightarrow \pi \leq x < 5 \Rightarrow B \cap C = [\pi,5[$

$C = C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = [2,4] \cup [\pi,5[= [2,5[$

Note que $C = [2,5[\subset A \cup B =]\sqrt{\pi},+\infty[$.

RESPOSTA: C